universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Die Wichtigkeit des Grenzwert- und Stetigkeit-Begriffes in der neuen Reifeprüfung“

Verfasserin

Lisa Groschner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat)

Wien, am 19.8.2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 353
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtstudium UF Mathematik & UF Spanisch
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 19.8. 2014

Unterschrift

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Diplomarbeit im Jahr 2014 im Rahmen meines Lehramtstudiums in den Fächern Mathematik und Spanisch an der Universität Wien. Von Beginn an stand für mich fest, dass ich meinen Abschuss im Erstfach Mathematik machen wollte, da ich schon sein der Schulzeit eine stillschweigende Passion für diese Richtung entwickelte. Allerdings konnte ich mich nicht entscheiden, auf welches Gebiet ich mich spezialisieren sollte. Mir war klar, dass es zumindest einen fachdidaktischen Aspekt miteinfassen musste, von dem ich früher oder später profitieren könnte. Dank der Ideen meines Betreuers Peter Raith viel die Themensetzung auf das Gebiet der Analysis, wobei mir freistand zu entscheiden, in welche spezielle Richtung die Arbeit verlaufen sollte.

Bei der Realisierung und Umsetzung dieses Projekts, wie ich es gerne nenne, stand ich sehr unter Zeitdruck, da ich zu diesem Zeitpunkt bereits die Zusage einer Festanstellung hatte und die Arbeit, vielleicht deshalb, eine große organisatorische Herausforderung für mich war.

Nicht nur deshalb möchte ich mich an dieser Stelle bei folgenden Personen bedanken, die mir in dieser Zeit eine große Hilfe waren.

Ich möchte mich bedanken bei …

… bei meinem Betreuer Peter Raith, für seinen inhaltliche Unterstützung, seine Gelassenheit und seine motivierenden Worte. Auch schon während meines Studiums unterstützte er meine Kollegen/Kolleginnen und mich und half uns sehr bei der Realisierung und Beendigung unseres Studiums.

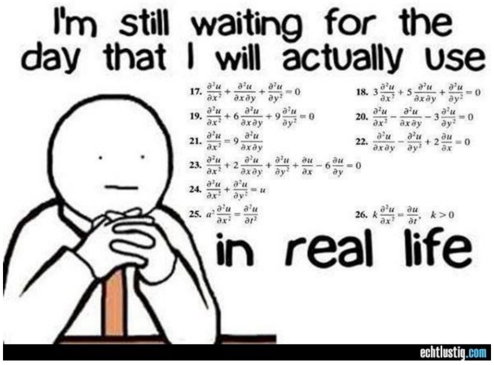
… bei meinem Vater Alexander Groschner, dem diese Arbeit gewidmet ist. Er unterstützte mich in meiner Schreibphase und fand immer wieder aufmunternde Worte, die mir halfen und mich wieder aufbauten, wenn ich in einer emotionalen Tiefphase steckte.

…bei meiner Mutter Petra Groschner, die gemeinsam mit meinem Vater immer für mich da war. Gemeinsam, unterstützten sie mich, nicht nur finanziell, sondern auch emotional.

… bei meinem Bruder Stefan und meinen zwei besten Freunden Caroline Eggerer und Alice Welzl, die während der Schreibphase oft auf mich verzichten mussten. Ich entschuldige mich hiermit, dass ich nicht so oft für euch da sein konnte, wenn ihr meine Hilfe brauchtet.

Inhalt

EINLEITUNG



Quelle 1: http://echtlustig.com/21983/mathematik-im-echten-leben am 22.7.2014 um 18:00 Uhr

„Ich warte noch immer auf den Tag, an dem ich das im echten Leben gebrauchen kann.“ Dieser Tatsache sind viele Schülerinnen und Schüler jeden Tag aufs Neue ausgesetzt.

Gerade im Mathematikunterricht kommt es oft zur Diskussion, was wird benötigt, was ist sinnlos und in welchem Maße muss Mathematik in der Schule betrieben werden?

„Muss alles, was gelernt wird, testbar sein?“[1]

Diesen Fragen sollen in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden. Insbesondere werden folgende Ziele verfolgt:

- Wieso brauchen wir eine neue Reifeprüfung?
- Wie werden die Schülerinnen und Schüler darauf vorbereitet?
- Ist die Umsetzung sinnvoll?
- Wie wird das gelernte überprüft?

[1] Zitat von Helmut Heugl aus: BIFIE (2011), S. 5

Die Standardwerke zu diesem Thema werden vom Bundesinstitut für Bildungsforschung Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens, im Folgenden mit BIFIE bezeichnet, zur Verfügung gestellt und bilden die Basisliteratur hinter dieser Arbeit. Diese liefert sowohl das Hintergrundwissen, als auch Anregungen zum schlussendlichen Fazit, welches am Ende dieser Arbeit zu finden ist.

Die Antwort auf die Frage nach der Art und Intensität der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler basiert auf einer Lehrbuchanalyse. Diese bildet das Fundament dieser Arbeit. Dabei wird insbesondere das Kapitel der Differentialrechnung in Augenschein genommen, da hier die Begriffe der Stetigkeit und des Grenzwertes große Bedeutung besitzen. Es soll untersucht werden, wie intensiv mit diesen Begriffen gearbeitet wird und welche Ergebnisse in der neuen Reifeprüfung schlussendlich gefordert werden und wie diese dann abgeprüft werden bzw. getestet werden könnten.

ERSTER TEIL

Warum brauchen wir eine neue standardisierte Reifeprüfung?

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung, eine neue Idee der österreichischen Regierung, um unser Bildungssystem auf den Kopf zu stellen. Es stellt sich allerdings die große Frage nach dem „Warum“.

Die drei großen Kritikpunkte, die ein Erstellen dieses neuen Systems bewirkte, richten sich vor allem gegen die fehlende Objektivität, die rezeptartige Reproduktion und das kurzweilige Überprüfen mathematischer Kompetenzen.[2] Die Schülerinnen und Schüler können durch mehrmaliges wiederholen „typischer“ Maturaaufgaben in der Klausur besser abschneiden, ohne dabei zu wissen, was sie tun. Im Prinzip erhält der Maturant/ die Maturantin eine bessere Beurteilung, ohne auch nur die geringste Ahnung von den mathematischen Zusammenhängen zu haben. Durch die neue österreichweit einheitliche Matura sollen diese Kritikpunkte umgangen und behoben werden.

Das neue Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung basiert nun auf den bildungstheoretischen, im Lehrplan enthaltenen, mathematischen Grundkompetenzen, welche für alle zukünftigen Maturanten und Maturantinnen landesweit geltend überprüft werden sollen.[3] Hintergrund spielt im Wesentlichen der Gedanke, dass das mathematische Grundwissen die Fähigkeit ist, „die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht“.[4] Nach Überlegungen des Ministeriums soll die neue Reifeprüfung genau diese erworbene Fähigkeit testen und österreichweit vergleichbar machen. Bis zum Antritt sollen Schülerinnen und Schüler somit jene Kompetenzen erwerben, die für die „Mathematik grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant sind.“[5] In anderen Worten müssen sie nach Beendigung ihrer schulischen Laufbahn

[2] Vgl. Koschka (2011), S.14
[3] Vgl. BIFIE (2013b), S. 1
[4] OECD/PISA (2003), S. 24
[5] Vgl. BIFIE (2013b), S. 3

in der Lage sein, ihr erworbenes mathematisches Grundwissen in verschiedenen Situationen des Alltags flexibel anwenden zu können. Es muss ihnen möglich sein, auf die vorhandenen angeeigneten Kompetenzen zurückgreifen zu können, um für Probleme jeder Art eine Lösung zu finden. Diese Fähigkeit sollen Schülerinnen und Schüler im *neuen* Mathematikunterricht erwerben, um diese am Ende in der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung unter Beweis stellen zu können.

Laut Verordnung des Ministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur vom 8.7.2014 besteht diese neue Reifeprüfung in ihrer Gesamtheit aus folgenden Punkten:

- aus dem Schreiben einer vorwissenschaftlichen Arbeit inklusive deren Präsentation und Diskussion,
- positives absolvieren einer Klausurprüfung bestehend aus einzelnen Klausurarbeiten und
- aus dem Ablegen einer mündlichen Prüfung bestehend aus Teilprüfungen[6]

Der Maturant/ Die Maturantin kann wählen aus der Kombination von drei schriftlichen und drei mündlichen Prüfungen oder er/ sie besteht vier schriftliche und zwei mündliche Klausuren.

Nehmen wir nun Bezug auf die Teilklausur im Fach Mathematik, so sieht das Gesetz folgendes vor:

> Im Rahmen der Klausurarbeit im Prüfungsgebiet „Mathematik" ist den Prüfungskandidatinnen und Prüfungskandidaten eine Aufgabenstellung mit zwei voneinander unabhängigen Aufgabenbereichen schriftlich vorzulegen. Ein Aufgabenbereich hat mehrere voneinander unabhängige Aufgaben in grundlegenden Kompetenzbereichen zu betreffen (Grundkompetenzen). Der zweite Aufgabenbereich hat voneinander unabhängige Aufgaben, die in Teilaufgaben gegliedert sein können, in vertieften Kompetenzbereichen mit kontextbezogenen oder innermathematischen Problemstellungen zur Vernetzung und eigenständigen Anwendung von Grundkompetenzen sowie deren weitergehenden Reflexionen zu beinhalten (Vernetzung von Grundkompetenzen). Die beiden Aufgabenbereiche sind in zeitlicher Abfolge voneinander getrennt vorzulegen und zu bearbeiten.[7]

[6] Vgl. § 2 Abs. 3 VO zu § 34 Abs. 3 SchUG
[7] § 18 Abs. 1 VO zu § 37 Abs. 2 Z 3 SchUG

So werden die Maturanten/ Maturantinnen, nach derzeitigem Stand, eine Klausur vorgelegt bekommen, die aus 18 bis 25 sogenannten Typ-1-Aufgaben, also Grundkompetenzen, und dementsprechend vier bis sechs Vernetzungsaufgaben beinhaltet.
Typ-1-Aufgaben schränken sich somit auf nur eine Kompetenz, die mit *gelöst* und *nicht gelöst* korrigiert werden. Die vorgesehenen Aufgabenformate dienen einer exakten und eindeutigen Punktevergabe durch einen eindeutig festgelegten Lösungsschlüssel. Diese Formate können sein:

- Multiple – Choice – Fragen
    - 2 aus 5
    - 1 aus 6
    - X aus 5
- Lückentexte
- Zuordnungsformte
- Konstrutionsformate
- Offene oder/und halboffene Antworten

Typ-2-Aufgaben sind, wie oben bereits erwähnt, Verknüpfungen verschiedener Kompetenzen, die bildungstheoretische organisiert sind. Das heißt, sie folgen einer strikten Charakterisierung die im Folgenden aufgelistet wird:[8]

- Die Präsentation der Aufgabe erfolgt durch einen einleitenden Text, der das Thema der Aufgabe darlegt. Der Text hat informativen (erklärenden) Charakter. Er kann auch Informationen und Aussagen enthalten, die für die Lösung der Fragen nicht unmittelbar von Bedeutung sind.
- Die Aufgaben sind umfangreicher und komplexer, d. h. es werden (…) verschiedene inhaltlich zusammenhängende Fragen gestellt.
- Die Teilaufgaben sind voneinander unabhängig, sodass eine Fehlleistung die weitere Bearbeitung nicht beeinträchtigt.
- Es kann sich um anwendungsorientierte, kontextorientierte oder innermathematische Problemstellungen handeln.

[8] Nachstehende Punkte sind aus BIFIE (2013b), S. 23f

- Liegen Anwendungsbezüge außerhalb des Kontextkatalogs, werden notwendige Sachzusammenhänge, Begriffe und Größen im Rahmen des einleitenden Textes erläutert.
- Anwendungs- oder Realitätsbezüge werden so gewählt, dass sie zu einer inhaltlich sinnvollen und verständnisorientierten Anwendung der Mathematik im Sinne der bildungstheoretischen Konzeption der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung führen.

Im ersten Teil des Praxishandbuches Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung“ findet man ein Zitat von Helmut Heugl, einer der Autoren, der die Frage in den Raum stellt, ob alles was gelernt wird auch testbar sein müsse. Weiters behauptet er, dass das alleinige Fokussieren auf messbare Inhalte die Qualität des Unterrichts beeinflussen würde.[9]

Einerseits ist also das Trennen in zwei verschieden Teilbereiche vielleicht ein Garant darauf, dass der Unterricht unter diesen neuen Bedingungen an Qualität verliert, weil man sich als Lehrperson darauf spezialisiert nur mehr ein *teaching to the test* zu betreiben und andererseits wird der Mathematikunterricht auf die wesentlichen *basics* reduziert, die eventuell im rezeptartigen Bearbeiten einiger weniger Beispiele untergegangen wären. Die Schülerinnen und Schüler erlernen Grundwissen, mit dem es ihnen möglich sein könnte, weit aus komplexere Sachverhalte auf ein mathematisches Modell zu reduzieren und sind anschließend in der Lage, dieses, mit Hilfe von den gelernten Grundkompetenzen, zu lösen.

Ein letzter Kritikpunkt an der neuen schriftlichen Reifeprüfung ist die Tatsache, dass österreichweit dieselben Themengebiete abgeprüft werden. Das neue System soll laut Vorstellungen des Ministeriums die bis jetzt fehlende Objektivität verbessern. Allerdings kann diese landesweite Gleichstellung einerseits eine Verbesserung des mathematischen Niveaus zur Folge haben, oder eine Verschlechterung mit sich ziehen. Schulen, an denen ein qualitativ hochwertiger Mathematikunterricht stattfand, könnten an dieser Nivellierung leiden, da man nach der Klausur nicht mehr davon ausgehen kann, dass die Absolventen nach wie vor ein hohes Niveau

[9] Vgl. BIFIE (2011), S. 5

mit sich bringen, da ein niedrigeres Niveau abgeprüft wurde. Andererseits würden in diesem Fall jene Schulen profitieren, die bis dato weniger Wert auf einen hochwertigen Mathematikunterricht gelegt haben. Wäre das geprüfte Niveau allerdings zu hoch, wäre in letztgenannten Bildungsstätten eine hohe Durchfallquote zu erwarten. Somit könnte es sein, dass an erstgenannten Schulen eine Verschlechterung eintreten könnte.

Dies sind allerdings lediglich Vermutungen, die sich frühestens mit Ende des nächsten Schuljahres (2014/2015) zeigen werden, wenn die ersten landesweiten Klausurarbeiten ausgegeben werden. Erst dann kann man zum ersten Mal sagen, ob das neue System sinnvoll ist oder nicht, ob es eine Verschlechterung oder Verbesserung für alle ist.

Die Grundkompetenzen

Liest man Texte, Artikel und Verordnungen jeglicher Art über dieses aktuelle Thema, findet man oft den Begriff der Grundkompetenzen. Doch es stellen sich die Fragen:

- Was sind diese besagten Kompetenzen eigentlich?
- Nach welchen Richtlinien wurden sie definiert?
- Wenn man diese Grundkompetenzen beherrscht, ist man dann in der Lage komplexere Sachverhalte zu lösen?

Dank des Ministeriums für Bildung, Kunst und Kultur findet man im Internet eine Menge Materialien, die nicht nur Lehrerinnen und Lehrern, sondern auch Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt werden. So findet man auf der Homepage des BIFIE[10] zahlreiche Artikel, Handbücher und Hilfestellungen, die die Angst vor dem Unbekannten nehmen sollen.

So definiert man hier den Begriff der Kompetenz folgendermaßen:

[10] Bundesinstitut für Bildungsforschung Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens

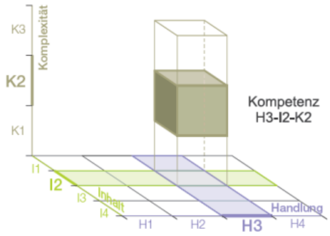
> Kompetenzen sind das Ergebnis von Lernprozessen. Sie sind kontextunabhängig ausgeprägt, da sie in der Auseinandersetzung mit der Umwelt erworben werden, und ermöglichen damit die Bewältigung unterschiedlicher Aufgaben und Lebenssituationen. Kompetenzen umfassen Wissen und kognitive Fähigkeiten, das Vermögen der Selbstregulation sowie sozial-kommunikative und motivationale Elemente.[11]

Betrachtet man diese Definition im mathematischen Kontext, so lassen sich diese Kompetenzen in folgende Unterpunkte gliedern:

- Handlungsbereich
- Inhaltbereich
- Komplexität

Es entsteht dadurch ein dreidimensionales Modell, welches sich auf alle Schuljahre umwandeln lässt. In der untenstehenden Abbildung 1 kann man die Idee dieses Modells gut erkennen:

Abbildung 1: dreidimensionales Kompetenzmodell



Quelle: BIFIE (2011), S. 17

Die Handlungsbereiche, wie der Name vermuten lässt, beziehen sich auf die mathematischen Tätigkeiten Darstellen und Modellbilden (H1), Rechnen und Operieren (H2), Interpretieren (H3), Argumentieren und Begründen (H4).

[11] Vgl. https://www.bifie.at/node/49 am 8.7.2014 um 12:05

Der Schüler/ Die Schülerin wird also, ausgehend von einem Sachverhalt, erlernen, wie man das vorgelegte Problem in ein mathematisches Modell umwandelt und in passender Weise zur Geltung bringt (Darstellen & Modelbilden). Anschließend soll der/ die Lernende in der Lage seinen Sachverhalt in symbolischer Schreibweise darzustellen und etwaige Rechenoperationen effizient durchführen zu können. Dieses Rechnen und Operieren bindet somit auch diverse Konstruktionsabläufe, das Arbeiten mit Tabellen und Grafiken mit ein. Anschließend an die korrekte Durchführung verschiedener Operationen muss man natürlich in der Lage sein, die vorliegenden Ergebnisse kontextbezogen deuten zu können, um weitere Fragen beantworten zu können. (Interpretieren) Letztendlich muss der Schüler/ die Schülerin sein Ergebnis vertreten können, muss also Argumentationen und Begründungen anstellen, die die Richtigkeit seines Ergebnisses untermauern – oder im Zweifelsfall widerlegen.

Die Inhaltsbereiche richten sich weitgehend nach den Lehrplänen und sind in Unter- und Oberstufe unterteilt.

Betrachtet man die Bereiche der Oberstufe, so findet man vier große Teilbereiche vor, die wiederum in einzelne Unterpunkte gegliedert sind:[12]

- Algebra und Geometrie
- Funktionale Abhängigkeiten
- Analysis
- Wahrscheinlichkeit und Statistik

Verknüpft man nun diese Inhaltsbereiche mit den Handlungsbereichen, so lassen sich verschieden Schwerpunkte feststellen.

So gewinnt der Handlungsbereich des Interpretierens, Argumentierens und des Modellbildens im Zusammenhang mit den Funktionalen Abhängigkeiten und der Analysis an Bedeutung. So ist es, gerade in der zwei oben genannten Inhaltbereichen, von Vorteil, wenn man die dafür benötigten Fachbegriffe

[12] Diese Unterpunkte sind in diversen Broschüren des BIFIE nachzulesen. Für diese Arbeit sind lediglich die Bereiche der Funktionalen Abhängigkeiten und der Analysis.

verinnerlicht hat und diese dann in seinen Argumentationen und Begründungen verwenden kann.

Bezüglich der Komplexitätsebene findet man drei unterschiedliche Niveaus, die dadurch zustande kommen, weil man für der Bearbeitung eines Problems nur wenige Kompetenzen benötigt, einige wenige miteinander verknüpfen muss, um an die Lösung zu gelangen oder erfordert eine Vernetzung bestimmter Begriffe, Eigenschaften, etc., da der Lösungsweg nicht sofort erkennbar ist. Man unterscheidet daher folgende Stufen:

- Stufe 1: Einsetzen von Grundkenntnissen
- Stufe 2: Herstellen von Verbindungen
- Stufe 3: Einsetzen von Reflexionswissen

Neue, approbierte Schulbücher sind mittlerweile so konzipiert, dass sie alle diese Handlungsbereiche abdecken. So findet man zum Beispiel im Lehrbuch „Thema Mathematik" Band 7 folgende Aufgabe:

Aufgabe 1: Beispiel aus dem Schulbuch Thema Mathematik

Beispiel:

Galileo steht auf dem schiefen Turm zu Pisa und hält eine Kugel. Zur Zeit t = 0 lässt er los. Für die Fallstrecke s der Kugel gilt:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 5t^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

a) Berechne die Funktion für die Fallgeschwindigkeit v der Kugel.
b) Zeichne die Funktionen für die Fallstrecke und für die Fallgeschwindigkeit. Gib an, wo sie stetig und wo sie differenzierbar sind. Erkläre in welchem Zusammenhang die beiden Funktionen stehen!

Quelle: Brand (2013), S. 73

Man kann erkennen, dass hier mehr als eine Grundkompetenz abgefragt und geübt werden soll. In Beispiel a) werden somit folgende Grundkompetenzen überprüft:

- Inhaltsbereich Analysis – 1.3 Änderungsmaße: „Den Differenzen- und Differentialquotient in verschiedenen Kontexten deuten (…)“[13]
- Inhaltsbereich Analysis – 2.1 Regeln für das Differenzieren: „Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können; (…)“[14]

In Beispiel b) wiederum werden diese Kompetenzen getestet:

- Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten – 4.1 Polynomfunktionen: „Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen“[15]
- Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten – 2.1 Lineare Funktionen: „(…) zwischen den Darstellungsformen wechseln können“[16]
- Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten – 2.2 Lineare Funktionen: Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln (…) “[17]
- Inhaltsbereich Analysis – 1.2 Änderungsmaße: „Den Zusammenhang Differenzenquotient (…) – Differentialquotient (…) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (…) beschreiben können“[18]
- Inhaltsbereich Analysis – 1.3 Änderungsmaße: „Den Differenzen- und Differentialquotient in verschiedenen Kontexten deuten (…)“[19]

Wie man unschwer erkennen kann, werden also hier lediglich einzelne Grundkompetenzen abgefragt und das Beispiel erhält somit Komplexitätsstufe 1.

[13] BIFIE (2011), S. 13
[14] Ebd., S. 13
[15] Ebd. S. 11
[16] Ebd. S. 11
[17] Ebd. S. 11
[18] BIFIE (2011), S. 13
[19] BIFIE (2011), S. 13

Man kann also zu einem Beispiel mehr als eine Grundkompetenz zuordnen – solange es zu Übungszwecke verwendet wird, da in den Klausuraufgaben darauf geachtet werden muss, dass die einzelnen Unterpunkte nie mehr wie eine Kompetenz ansprechen und dass die Unabhängigkeit zwischen diesen gegeben ist. Daher dient dieses Schulbuchbeispiel nur der Übung, da die Unterpunkte a) und b) abhängig voneinander sind.

Die Handlungsbereiche sind eindeutig sichtbar. So muss der Schüler/ die Schülerin sowohl operieren also auch darstellen und argumentieren. Daher sind die Handlungsbereiche H1, H2 und H4 mit dieser Aufgabe abgedeckt.

Wie man vielleicht bemerkt hat, kann man einige Fragen nicht durch Grundkompetenzen abdecken. Diese sollte man aber keinesfalls als *unnötig* oder *sinnlos* betrachten. Die Aufforderung „Gib an, wo sie stetig und wo sie differenzierbar sind." bezieht sich auf den Lehrplan der siebten Klasse, in welchem die Präzisierung einiger Grundbegriffe (…) der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung der Stetigkeit[20] geschrieben steht.

Die Schulbuchautoren achten also auf die Einbettung und Zusammenführung von maturarelevanten Grundkompetenzen mit lehrplanbezogenen Themengebieten.

Zusammenfassend lässt sich somit festhalten, dass Grundkompetenzen lehrplanbezogene Kernbereiche der Mathematik sind, die, in Verbindung, dazu dienen sollen, Aufgaben unterschiedlicher Komplexität zu lösen. Die aktuellen Lehrwerke richten sich nach diesen Anforderungen und versuchen abwechslungsreiche Beispiele zu stellen, die in verschiede Kontexte umgeschrieben werden können. Die Schüler und Schülerinnen müssen dann mit Hilfe von Reflexionen, ähnliche Sachverhalte erkennen können und sollten dann dadurch in der Lage, ihnen nicht bekannte, Probleme zu lösen.

[20] https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 am 8.7.2014 um 18:12

Was sieht der Lehrplan vor?

Wie man aus dem obigen Diskurs entnehmen kann, ist der Lehrplan ausschlaggebend für den Bildungsauftrag und die Erstellung der Grundkompetenzen der schriftlichen Reifeprüfung. In nachstehender Tabelle, soll illustriert werden, wie ein Teil des Lehrplans der siebten Klasse mit den Grundkompetenzen einhergeht:[21]

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
Differentialrechnung	**Analysis – Änderungsmaße**
Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate) ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekanten- bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen	**1.1** Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
Herleiten von Differentialregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentialregeln (…)	**2.1** Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)
	Funktionale Abhängigkeiten – Polynomfunktionen $\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i}$ mit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$
Lösen von Extremwertaufgaben Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung	**4.1** Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

[21] Es wird wieder nur jener Ausschnitt wiedergegeben, der sich auf die Thematik dieser Arbeit bezieht. Vgl. dazu BIFIE (2013a), S. 16f

Betrachtet man den gesamten Lehrplan der Oberstufe in seiner Gesamtheit und vergleicht ihn mit den ehemaligen Rahmenlehrplänen, so lässt sich ein wesentlicher Unterschied erkennen: im Gegensatz zu früheren Lehrplänen muss der Aktuelle zur Gänze im Unterricht umgesetzt werden, da er ohnehin nur mehr einen Kernbereich der mathematischen Allgemeinbildung enthält.

Gründe für diesen Wandel sieht Mag. Alfred Nussbaumer, Fachinspektor für Informatik und Begabtenförderung des Landesschulrates Niederösterreich, in der rasanten Weiterentwicklung der Technologie und deren Einsetzung im Unterricht.[22] Basierend auf diesem Umdenken wurde der *neue* Lehrplan nun so konzipiert, dass nicht mehr die rein objektive Seite der Mathematik im Vordergrund steht, sondern der Schüler/ die Schülerin selbst und seine Rolle in einer funktionierenden Gesellschaft. Der junge Bürger/ Die junge Bürgerin wird zukünftig mit Meinungen konfrontiert werden, „die verstanden, bewertet und zur eigenen Erfahrungswelt in Beziehung gesetzt werden müssen, um letztlich Entscheidungen treffen zu können“[23], die ihnen bei der Lösung ihres Problems hilfreich sein werden.

Als ein positiver Nebeneffekt dieser Reduzierung auf einen Kernbereich ist die Schaffung einer gleichen Ausgangsbasis für den tertiären Bildungssektor und der Wirtschaft. Es wird zukünftig möglich sein, einen geebneten Studieneinstieg zu ermöglichen, in welchem kein Student/ keine Studentin einen Vorteil aus seiner vorherigen Schulkarriere ziehen kann, da alle dasselbe Basiswissen vorzuweisen haben.

Da es unerlässlich für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist, wird im Anschluss der Lehrplan – in Bezug auf das später behandelte Thema der Schulbuchanalyse – abgebildet:

Lehrplan 7. Klasse

Differentialrechnung

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als

[22] Nussbaumer (2010), S. 17
[23] BIFIE (2013b), S. 4

Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen

- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

Lehrplan 8. Klasse

Integralrechnung

- Ermitteln von Stammfunktionen
- Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten" der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
- Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
- Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
- Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)

Dynamische Prozesse

- Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen
- Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen
- Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit, soll nun die tatsächliche Umsetzung dieser neuen Kompetenzen untersucht und analysiert werden. Dabei sollen die Sinnhaftigkeit der Stoffumsetzung, die Methodenvielfalt und die mathematische Exaktheit geprüft werden.

ZWEITER TEIL

Wie werden Schülerinnen und Schüler auf die Reifeprüfung vorbereitet?

Zur gleichen Zeit, als der Wandel im österreichischen Schulwesen seinen Anfang nahm, begann auch das Umdenken der Schulbuchautoren. Man konnte die veralteten Unterrichtsmittel nur noch schlecht verwerten, da sie wenig bis gar keine Ähnlichkeit mit den neuen Prüfungsformaten hatten. Den Autoren blieb nichts anderes übrig, als ihre Werke zu überarbeiten und neu approbieren zu lassen.

So entstand im Laufe der letzten zwei Jahre eine Reihe an neuwertigen Schulbüchern, die auf die neuen Herausforderungen so gut wie möglich vorbereiten sollen.

Bezogen auf die AHS – Oberstufe[24] soll hier im folgenden Bezug auf vier Schulbuchreihen genommen werden:

- Götz, Reichel (Hrsg.), Müller, Hanisch: Mathematik
- Malle et al.: Mathematik verstehen
- Bleier et al.: Dimensionen Mathematik
- Brand et al.: Thema Mathematik

In der weiterführenden Untersuchung sollen folgende Punkte in Augenschein genommen werden:

- In wie fern decken die Schulbücher den Lehrplans ab?
- Wie gut bereiten sie die Schülerinnen und Schüler auf die Anforderungen der neuen Reifeprüfung vor?
- Welche Methoden werden verwendet?

[24]teilweise eingeschränkt auf die siebte Klasse

Untersucht werden jeweils die Bände der siebten Klasse, da diese im Anschluss auf die Genauigkeit der Einführung und den Aufbau des Themas der Stetigkeit analysiert werden soll. Das heißt es wird insbesondere darauf geachtet, dass die relevanten Themen der Funktionen und der Differentialrechnung betrachtet werden, da diese im engen Zusammenhang mit den Begriffen des Grenzwertes und der Stetigkeit stehen.

Analyse: „Mathematik verstehen“

Das Schulbuch ist derart aufgebaut, dass zu Beginn eine Zusammenfassung der Grundkompetenzen zu finden ist, die gegliedert ist in jede, die relevant für die Matura sind und jene die für die Erfüllung des Lehrplans erforderlich sind.

Abgeschlossen wird jedes Thema mit einer Überprüfung des Grundwissens und der Grundkompetenzen, die ebenfalls in Lehrplanbezogen und Maturarelevant unterschieden werden.

Am Ende des Schulbuches findet man weitere Beispiele, die den Schülerinnen und Schülern das eigenständige Überprüfen des Gelernten möglich machen sollen. Darüber hinaus findet man deren Lösungen im Anhang des Lehrwerks. Diese Kontrollseite besteht aus zwei Teilen, der Überprüfung des Grundwissens und der Kontrolle der Grundkompetenzen. Ersteres bezieht sich ausschließlich auf den Handlungsbereich des Argumentierens und Begründens. Es werden die bekannten *Wie – Fragen* gestellt, die den Lernenden/ die Lernende in den Modus des Erklärens zwingen. Der zweite Teil der Kontrolle beinhaltet andererseits die restlichen Handlungsbereiche – Darstellen/ Modellbilden und Rechnen/Operieren. Man versucht ausgewogen, beide Bereiche abzudecken und hält sich dabei – so gut wie möglich – an die vorgegeben Aufgabenformate der schriftlichen Reifeprüfung.

Die ersten Kapitel beziehen sich ausschließlich auf das Untersuchen von Funktionen. Man beginnt mit Lösen von Gleichungen und Polynomfunktionen höheren Grades und steigt dann in das Thema der Differentialrechnung ein. Diese ersten zwei Kapitel beinhalten – laut Autoren – Grundkompetenzen, die für die Matura unerlässlich sind, nämlich:

- Wissen, dass eine Gleichung vom Grad n höchstens n Lösungen haben kann.
- Polynomfunktionen vom Grad n kennen und wissen, dass solche Funktionen höchstens n Nullstellen besitzen können.
- Einfache Lösungsmethoden für Gleichungen vom Grad 3 bzw. 4 kennen.

Vergleicht man die obenerwähnten Kompetenzen mit den allgemein formulierten Grundkompetenzen des Ministeriums, so könnte man behaupten, dass es sich bei den obigen Punkten um sogenannte Lehrziele handelt, da man diese benötigt, um den Anforderungen der Reifeprüfung zu genügen. Die Begründung für diese Vermutung ist naheliegend, denn man benötigt das Wissen über diverse Lösungsverfahren und der Anzahl der möglichen Lösungen bzw. Nullstellen für das Erfüllen und Beherrschen der maturabezogenen Kompetenz, die da lautet:

- Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen. (…) konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.

Die Autoren vermischen daher Lehrziele mit dem geforderten Basiswissen und erzeugen im Schüler/ in der Schülerin Verwirrung – und vielleicht auch eine Art der Verzweiflung.

Bezüglich des Lehrplans jedoch erfüllt das erste Kapitel seine Pflicht, denn es erklärt mittels Einführungsbeispiel und mathematischem Hintergrund in Form eines Satzes inklusive Beweis das *Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen*. Anschließend bietet das Lehrwerk genug Beispiele an, um das Gelernte anschließend in Übungsphasen festigen zu können.

Die Kontrollseite bietet im Anschluss die bereits erwähnte Aufteilung in Überprüfen des Grundwissens und Testen der Grundkompetenzen, welche die Handlungsbereiche Rechnen/Operieren und Begründen/Argumentieren abdecken.

Kapitel zwei beschäftigt sich in die Einführung der Differentialrechnung, welches folgende Kompetenzen der Reifeprüfung behandelt:

- Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) kennen und interpretieren können.
- Den Differentialquotienten (die Änderungsrate) kennen und interpretieren können.
- Die Leibniz´sche Schreibweise für den Differenzen- und Differentialquotienten kennen.
- Wissen, dass bei einer linearen Funktion der Differenzen- und der Differentialquotient stets gleich der Steigung der Funktion ist.
- Den Begriff der Tangente als Grenzlage von Sekanten kennen und erläutern können.
- Steigungen von Funktionsgraphen interpretieren können.
- Ableitungsregeln für Polynomfunktionen kennen und anwenden können.
- Höhere Ableitungen kenne und für Polynomfunktionen berechnen können.

Auch hier kann man wieder erkennen, dass es sich hierbei wieder um Lehrziele, als um konkrete maturarelevante Grundkompetenzen, handelt. Kurz gesagt könnte man meinen, es handle sich dabei eher um eine Art Inhaltsverzeichnis, welches im Großen und Ganzen mit den Kompetenzen des Lehrplans und denen der Reifeprüfung übereinstimmt.

Der Aufbau und die Zusammenstellung dieses Kapitels stützt sich sehr auf die zukünftigen Aufgabenformate und mischt abwechslungsreich verschiedene Typen, um die, zu Beginn stehende, Theorie zu überprüfen.

Erwähnenswert sind die Einführungs- und Erläuterungsbeispiele. Sie sind sehr übersichtlich gestaltet und versuchen, in einfacher Wortwahl, den neuen Stoff den Lernenden näher zu bringen.

Einziges Manko an der Art der Einführung in die Differentialrechnung ist die Verwendung des Begriffes Grenzwert – in Bezug auf den Differentialquotienten – ohne diesen zu definieren oder zu erklären bzw. zu wiederholen.[25]

Auch im folgenden Kapitel *Untersuchen von Polynomfunktionen* wird auf die Erklärung verzichtet. Hier wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie und unter welchen Aspekten man eine Polynomfunktion untersuchen kann[26]. Man verwendet neue Begriffe, die ebenfalls erst später definiert und genauer erklärt werden, wie zum Beispiel jenen der *Umgebung*. Insbesonders verzichtet man hier auf die Erklärung des Zusammenhanges zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Funktion, obwohl es von wesentlicher Bedeutung und Wichtigkeit wäre.

Andererseits bearbeitet man in diesem Kapitel ausschließlich Polynomfunktionen, die ohnehin stetig sind und daher die Einführung zusätzlicher Begriffe eventuell bei Schülerinnen und Schülern zu Verwirrung führen könnte.

Wiederum legt man viel Wert auf die Mischung und Verwendung verschiedenster Aufgabentypen und die Abdeckung aller Handlungsbereiche, sowohl im Übungsteil, als auch auf der Kontrollseite.

Fortgesetzt wird das Thema der Differentialrechnung mit der Einführung, Erklärung und Überprüfung weiterer Ableitungsregeln, die man nach den Kompetenzen-Katalog lediglich kennen und nicht mehr können muss[27], und jeder, die man benötigt, um Exponentialfunktionen und bestimmte Winkelfunktionen ableiten zu können.

Im Anschluss wird dann die Differentialrechnung exaktifiziert, welches im Kapitel im Anschluss an die allgemeine Lehrbuchanalyse betrachtet und untersucht wird.

[25] Hier sei zu erwähnen, dass die Grenzwertregeln erst später erklärt werden.
[26] Es werden nicht nur Kurvendiskussionen durchgeführt, sondern auch einfache Extremwertaufgaben gelöst.
[27] Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Analyse: „Dimensionen Mathematik“

Im Gegensatz zu *Mathematik verstehen* gliedert das Schulbuch *Dimensionen Mathematik* die Kapitel in größere Hauptteile. So findet man unter *Differentialrechnung* alles, was zu diesem Thema gehört, beginnend mit den Definitionen des Grenzwertes und der Stetigkeit.[28] Alle folgenden Definitionen bauen auf dieser Basis auf. Der Schüler/ Die Schülerin kann somit von Anfang an mit diesen Begriffen arbeiten und den zukünftigen Lehrstoff damit verknüpfen.

Das Lehrwerk teilt seine Kapitel in drei Hauptteile:

- Vorwissen
- Neues Wissen
- Aufgaben & Anwendungsaufgaben

So hat ein Schüler/ eine Schülerin die perfekte Übersicht, über den behandelten Stoff und weiß zu Beginn, was er/ sie bereits können sollte und was nicht. In den anschließenden Aufgabenteilen kann man dann das Neugelernte und Wiederholte festigen.

Der weitere Aufbau der Differentialrechnung ist gleich zu jenem des Lehrbuches *Mathematik verstehen*. Erwähnenswert ist allerdings, dass *Dimensionen Mathematik* weniger Wert auf die Differenzierung und Gewöhnung an die Aufgabenformate legt, da weit weniger typische Aufgaben gestellt werden, die den Beispieltypen der Matura entsprechen. Allerdings werden zu Beginn jedes Kapitels die Grundkompetenzen, die behandelt werden, aufgelistet, wobei eine verkürzte Form der Beschreibung gewählt wird, die schlussendlich sowohl auf die maturarelevanten Fertigkeiten als auch auf den Lehrplan anzuwenden sind.

So lauten diese Grundkompetenzen zum Thema *Differentialquotient* folgendermaßen:[29]

[28] Die genaue Analyse dieses Themas folgt im nächsten Großkapitel.
[29] BLEIER (2013), S. 53

- Den Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient kennen
- Die Begriffe *mittlere* bzw. *momentane Änderungsrate* entsprechend zuordnen
- Differenzenquotient und Differentialquotient verbal und formal beschreiben
- Differenzenquotient und Differentialquotient in verschiedenen Kontexten deuten
- Sachverhalte mit Differenzenquotient und Differentialquotient beschreiben

Man erkennt also, dass die oben genannten Punkte sowohl die maturabezogenen Fertigkeiten als auch den Lehrplan der siebten Klasse abdecken. Sie werden nicht wortwörtlich daraus entnommen, sondern fassen die neuen Inhalte zusammen und ordnen sie den zu wissenden Bereichen zu.

Auffällig ist die Verwendung diverser Methoden zur Bearbeitung der einzelnen Unterthemen. So werden einige Beispiele als Partner- oder Gruppenarbeit gekennzeichnet, welche die Schülerinnen und Schüler zu zwei oder in Kleingruppen bearbeiten sollen. Hier tritt also die soziale Komponente in Kraft, welche ein wesentlicher Punkt im Lehrplan ist.

Auch der Verweis auf die maturarelevanten Grundkompetenzen taucht in diesem Lehrwerk auf. So werden spezielle Beispiele mit dem Kürzel *GK* markiert. Darüber hinaus gibt es zu jedem Band ein Zusatzheft, den sogenannten Kontextkatalog, welcher alle Beispiele den einzelnen Themen der Reifeprüfung zuordnet und zusätzliche Übungsbeispiele anführt. So hat der Lernende die Möglichkeit, selbstständig einzelne Themenbereiche zu trainieren und sich mit Hilfe der hinten stehenden Lösungen der Zusatzaufgaben selbst zu kontrollieren. Am Ende des Katalogs findet man verschiedene mathematische Begriffe und wichtige Formeln, die die Lernenden zu Übungszwecken verwenden können.

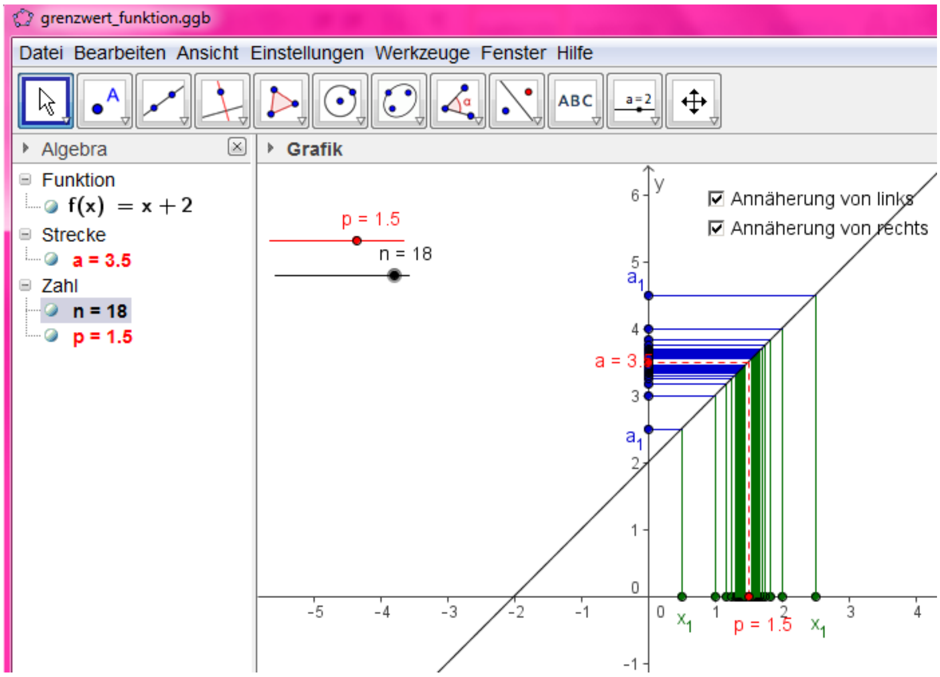
Es gibt auch eine CD, die zusätzliches Lernmaterial zu Verfügung stellt, wie dynamische Arbeitsblätter, Tests, Übungen und vieles mehr.

In den unten abgebildeten Screenshots kann man eines der vielen interaktiven Beispiele sehen, um sich einen kleinen Eindruck dessen zu holen, was die CD im Angebot hat:

Abbildung 2 zeigt eine der angebotenen Übungsaufgaben der Zusatz – CD zu „Dimensionen Mathematik“ mit anschließendem Screenshot

Grenzwert einer Funktion

Beobachte anhand dreier Funktionen, wie mithilfe einer Folge von Funktionswerten $<a_n>$ der Grenzwert der Funktion an einer Stelle p erzeugt werden kann.
Führe für jede Funktion die folgenden Schritte aus und halte deine Beobachtungen fest.
(1) Gib den Funktionsterm für f(x) ein (zum Bearbeiten Doppelklick auf den Funktionsterm).
(2) Wähle mit dem Schieberegler die Stelle p aus.
(3) Wähle die Annäherung von links aus.
(4) Erhöhe schrittweise die Anzahl n der Folgenglieder.
(5) Setze n wieder auf 1 und wähle die Annäherung von rechts aus.
(6) Notiere die Stelle p und den zugehörigen Grenzwert a.



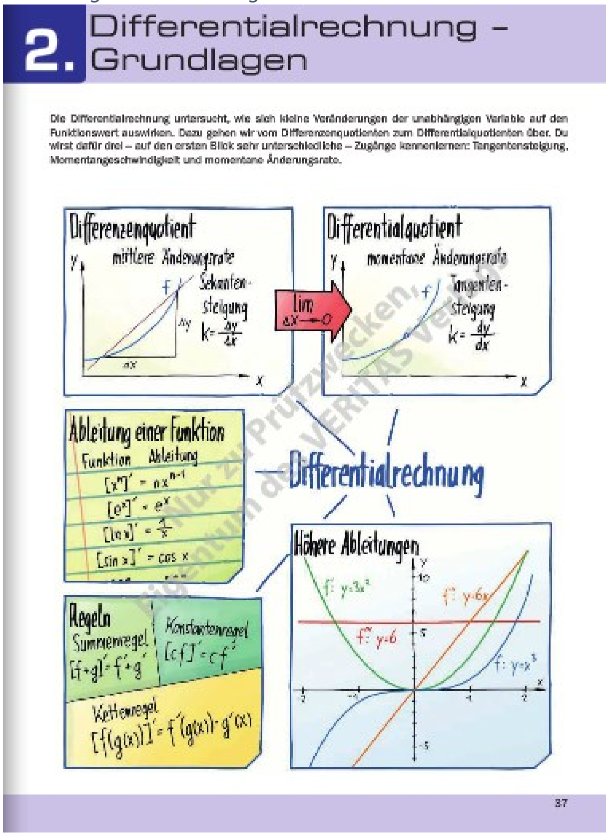
Analyse: „Thema Mathematik“

Die Themenanordnung von „Thema Mathematik“ weicht im Vergleich mit den anderen ab. So teilt es das Thema der Differentialrechnung in drei Teile auf, allerdings sind sie nicht aufeinanderfolgend, sondern es werden immer wieder andere Themen dazwischen eingefügt. So findet man zwischen dem Kapitel *Differentialrechnung – Grundlagen* und *Differentialrechnung – Eigenschaften von Funktionen* jenes der komplexen Zahlen.

Betrachtet man das Einführungskapitel, so findet man auf dem Deckblatt eine illustrierte Zusammenfassung des Themas in einer Art Mind-Map, welche die Zusammenhänge einzelner Begriffe grafisch und, für die Schülerinnen und Schüler, ansprechend darstellen will.

Abbildung 3 gewährt einen Eindruck der Buchgestaltung:

Abbildung 3 zeigt das Titelbild des Kapitels Differentialrechnung – Grundlagen


2. Differentialrechnung – Grundlagen

Die Differentialrechnung untersucht, wie sich kleine Veränderungen der unabhängigen Variable auf den Funktionswert auswirken. Dazu gehen wir vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten über. Du wirst dafür drei – auf den ersten Blick sehr unterschiedliche – Zugänge kennenlernen: Tangentensteigung, Momentangeschwindigkeit und momentane Änderungsrate.

Quelle: Brand (2013), S. 37

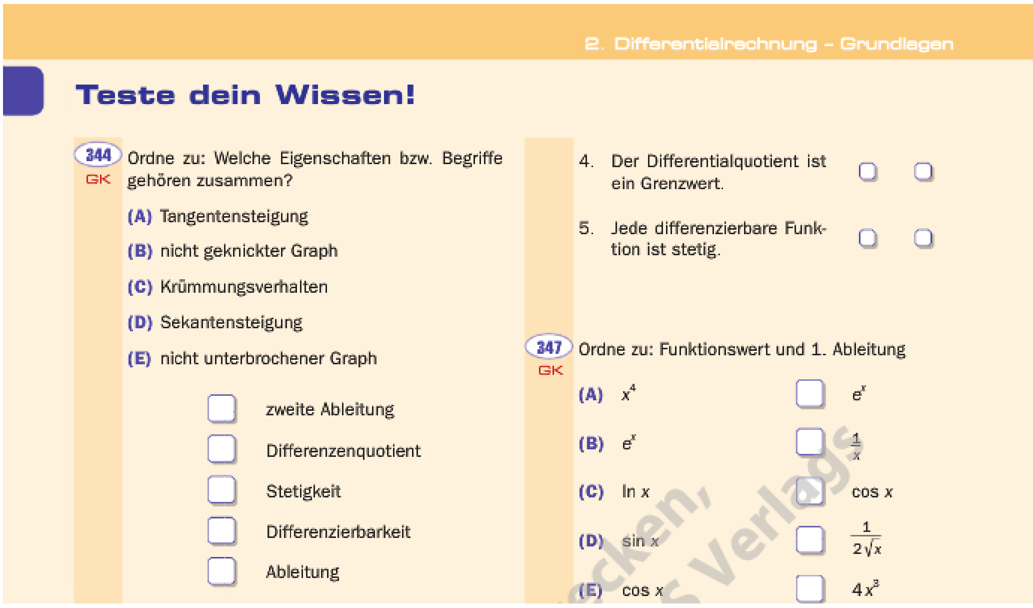
Zu Beginn wird der Differenzenquotient definiert, um anschließend den Differentialquotient mit Hilfe drei verschiedener Zugänge zu definieren. Man verwendet unter anderem die Definition mittels Grenzwert, ohne diesen zu erklären oder zu wiederholen. Dies wird erst anschließend in Verbindung mit den Ableitungsfunktionen nachgeholt. Somit ist es wie im Lehrbuch „Mathematik verstehen“ eher von Nachteil, weil der Schüler/ die Schülerin die Grundessenz mitten im Lernprozess erfährt.

Anders als das Schulbuch „Dimensionen Mathematik“ wirkt jenes sehr kompakt durch die massive Anzahl an Übungsbeispielen auf einer Seite. Es wird versucht, diese Menge an Aufgaben übersichtlich, mittels unterschiedlicher Farbgestaltung, zu gestalten. So werden die Übungen in drei Schwierigkeitsstufen unterteil. Des Weiteren gibt es eine Kennzeichnung, welche Grundkompetenzaufgaben markieren soll. Dabei wird auch darauf geachtet, dass so viele Aufgabenformen verwendet werden.

Im Anhang an jedes Kapitel findet man eine *Kapitelcheckliste*, die eine Übersicht über den gelernten Inhalt auf einen Blick bieten sollen und der Lernende/ die Lernende angeben kann, ob sie einzelne Themen kennt und erklären kann. Anschließend gibt es einen Steckbrief, der die einzelnen Grundkompetenzen für die Matura, welche auf dieses Thema Bezug nehmen, auflistet und im Anschluss darauf bietet das Schulbuch spezielle Übungsbeispiele, die auf diese Kompetenzen abzielen. Einziger Nachteil an diesem sonst sehr gut gelungenen Übungsbereich, sind die fehlenden Lösungen. Diese befinden sich im Lösungsheft, welches extra angeschafft werden müsste. So hat der Schüler/ die Schülerin zwar die Möglichkeit den Stoff zu festigen, allerdings keine Chance auf Selbstkontrolle.

Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt des soeben beschriebenen Übungsteils:

Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt der Kompetenzüberprüfung



2. Differentialrechnung – Grundlagen

Teste dein Wissen!

344 GK Ordne zu: Welche Eigenschaften bzw. Begriffe gehören zusammen?

(A) Tangentensteigung
(B) nicht geknickter Graph
(C) Krümmungsverhalten
(D) Sekantensteigung
(E) nicht unterbrochener Graph

zweite Ableitung
Differenzenquotient
Stetigkeit
Differenzierbarkeit
Ableitung

4. Der Differentialquotient ist ein Grenzwert.
5. Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

347 GK Ordne zu: Funktionswert und 1. Ableitung

(A) x^4 — e^x
(B) e^x — $\frac{1}{x}$
(C) ln x — cos x
(D) sin x — $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(E) cos x — $4x^3$

Quelle: Brand (20139; S. 82

Man sieht sehr gut, die Idee hinter dem Aufbau des gesamten Lehrwerkes, aber auch die vorteilhafte Verwendung der diversen Aufgabenformate. Trotzdem man hier vorwiegend Zuordnungs- oder Ankreuzübungen findet, deckt man dennoch verschiedene Handlungsbereiche ab.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass „Thema Mathematik" viel gemeinsam hat mit den bereits analysierten Lehrwerken. Es beinhaltet die geforderten Grundkompetenzen, deckt den Lehrplan ab[30] und bietet den Lernenden genug Übungsmaterial zum Selbstständigen Festigen des Lernstoffes.

[30] Es wird allerdings nicht direkt auf die im Lehrplan geforderten Kompetenzen hingewiesen.

Analyse: „Mathematik“

Betrachtet man das letzte Lehrwerk in dieser Analyse, so fällt auf, dass dieses im Vergleich zu den anderen sehr textlastig ist. Man legt viel Wert auf den geschichtlichen und mathematischen Hintergrund und bemüht sich, so viele Hintergrundinformationen wie möglich an den Schüler/ die Schülerin zu bringen.

Beginnend mit jedem neuen Kapitel erfährt der Lernende/ die Lernende, was sie im folgenden Kapitel erwartet. Dabei wird allerdings von der allgemeinen Formulierung der Grundkompetenzen abgesehen.

Auffällig ist auch die bunte Farbgestaltung, die sich einheitlich über das gesamte Lehrwerk zieht. Man versucht, wichtige Definitionen und Sätze, sowie Erklärungsbeispiele gut hervorzuheben und den Blick auf sie zu lenken. Insbesondere arbeitet dieses Schulbuch mit vielen Skizzen und Abbildungen, die das Neu-zu-erlernende unterstreichen und besser verständlich machen sollen.

Das Inhaltsverzeichnis gibt einen Überblick über die Einteilung des Lehrstoffes, welcher sich gliedert in:

- Lehrinhalte für drei Wochenstunden
- Lehrinhalte für mehr als drei Wochenstunden
- Vertiefende Lehrinhalte für drei Wochenstunden

Auch bei der Einteilung der Übungsaufgaben wird darauf geachtet, dass sie die unterschiedlichen Kompetenz-Niveaus erfüllen. So werden Beispiele angeboten, die sich:

- nur auf die einzelnen Grundfertigkeiten beziehen, oder
- in vermehrtem Zusammenwirken einzelner Kompetenzen lösen lassen, oder
- durch eigenständiges reflektierendes Wissen, verknüpfen diverser Fertigkeiten, kreativem Denken und eigenständigem entwickeln von Modellen lösbar sind.

Insbesondere findet man auch sogenannte Mischaufgaben, die dazu dienen sollen, eine bereits vorhandene Fertigkeit auf die nächsthöhere Stufe zu heben.

Das Lehrbuch weißt eine dreistufige Kapitelstruktur auf, die sich gliedern lässt in Großkapitel, Kapitel und Unterkapitel, wobei jedes der Großkapitel in fünf Bereiche zerfällt.

Laut Erklärung des Herausgebers, besteht der erste Bereich, gekennzeichnet mit Kapitel *null* aus der Schaffung eines bestimmten Rahmens, der dazu dient die benötigten Voraussetzungen für das folgende Kernkapitel zu schaffen. Es werden so zum Beispiel alte Lehrinhalte aus vorherigen Klassen wiederholt oder stellt Vorübungen in Form von Aufgaben oder Kleinprojekten.

Der zweite Bereich gliedert sich in einzelne Unterkapitel, die je einem mathematischen Thema zugeordnet sind und sich in den Grundkompetenzen wiederfinden.

Im folgenden dritten Bereich *Rückblick und Ausblick* werden gelernte Inhalte miteinander verbunden und es wird versucht auf eine anderes Thema überzuleiten. Die oftmals vorkommenden historischen Bezüge dienen hier als Anstoß für eine vorwissenschaftliche Arbeit.

Den vierten Bereich bildet der *Kompetenzcheck*, den Schülerinnen und Schüler nutzen sollen, um in Eigenverantwortung und Eigenarbeit zu überprüfen, ob die gelernten Inhalte verstanden wurden. Am Ende des Lehrwerkes findet man die Lösungen, um eine Selbstkontrolle zu gewährleisten. Die einzelnen Aufgaben werden gemäß den Grundkompetenzen zugeordnet und helfen somit dem genauen punktuellen Überprüfen der einzelnen geforderten Fertigkeiten.

Der fünfte Bereich liefert einen weiteren alltagsbezogenen Zusammenhang, der Interesse seitens der Schülerinnen und Schüler wecken soll. Er soll aufzeigen, dass Mathematik aus unserem Leben „nicht mehr wegzudenken ist“.[31]

[31] GÖTZ (2010), S. 6

Vergleich der Schulbücher

Zusammenfassend lässt sich beobachten, dass alle neu approbierten Schulbücher die neuen Auflagen der Grundfertigkeiten für die neue Reifeprüfung und den dazu passenden Lehrplan einhalten und versuchen den Stoff für Schülerinnen und Schüler ansprechend zu gestalten. Man verwendet eine auffällige Farbgestaltung, um System und Ordnung in die Inhalte übersichtlich zu gliedern, die einen mehr, die anderen weniger. Einheitlich verwenden alle eine farbliche Hervorhebung von Definitionen und Sätzen und eine zusätzliche Farbgestaltung für Einführungsbeispiele und Erklärungen.

Insbesondere bieten alle Lehrwerke eigene Kompetenzüberprüfungsseiten an, wo Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, eigenständig und leistungsdifferenziert zu üben und ihre Fähigkeiten zu verbessern und zu festigen. Alle Bücher bis auf „Thema Mathematik" stellen auch die Lösungen zu Verfügung, die die Lernenden als Selbstkontrolle nutzen können. Als einziges Schulbuch erhält man bei „Dimensionen Mathematik" ein Extraheft, welches die Aufgaben kompensiert anbietet und dadurch den Lehrfluss nicht stört und den Lehrenden/ die Lehrende nicht dazu verleitet ein *teaching to the test* zu betreiben. Insbesondere erhält man eine CD mit Zusatzmaterial, welches sich auch für den Einsatz im Unterricht anbietet und technologiebasierte Aufgaben beinhaltet. Ein zusätzliches, ähnliches Angebot bietet das Lehrwerk „Mathematik verstehen". Lernende und Interessierte können zusätzlich zu den Schulbüchern zwei Zusatzhefte käuflich erwerben. Das erste bietet kompetenzorientierte Aufgaben an, die sich auf die geforderten Typ-1 und einige Typ-2 Beispiele beziehen. Das zweite Angebot spezialisiert sich auf den Technologieeinsatz im Unterricht und zeigt Möglichkeiten, wie man verschiedene computerbasierte Programme im Schulunterricht einbauen kann.

Um nochmals auf die oben angeführten Fragen zurückzukommen, das heißt wie weit die Lehrwerke auf die geforderten Fertigkeiten bearbeiten, kann man sagen, dass alle oben analysierten Bücher ein ausgewogenes System gefunden haben, welche es den Schülerinnen und Schülern möglich macht, diese auch für die abschließende Reifeprüfung zu beherrschen. Man formuliert die geforderten

Fertigkeiten, entweder im sinngemäßen oder im wortwörtlichen, damit die Schülerinnen und Schüler einen Rückhalt und die Möglichkeit zum Nachvollziehen haben, um im anschließenden Selbststudium ihre persönlichen Schwächen beseitigen oder minimieren zu können. Man versucht diverse Aufgabenformate einzubinden, an die sich die Lernenden gewöhnen können und deckt gleichzeitig die unterschiedlichen Handlungsbereiche ab. Die verwendeten Methoden sind bei allen vier Werken vorhanden, wobei mit weitem Abstand das Buch „Dimensionen Mathematik“ den meisten Wert darauf legt.

Anschließend an diese grobe Analyse soll nun eine genauere Untersuchung folgen, welche sich darauf spezialisiert, die Unterschiede in der Einführung und der Verarbeitung des Stetigkeit- und Grenzwertbegriffes zu finden.

Dabei soll darauf geachtet werden, in wie weit diese Begriffe zweckdienlich sind, um sie anschließend im einschlägigen, tertiären Bildungssektor weiterverwenden zu können. Das heißt es wird darauf geachtet, ob man diverse Kenntnisse auch im Mathematikstudium genauso weiterverwenden kann, oder ob die „Definitionen“ lediglich eine intuitive Vorstellung der Begriffe liefert.

DRITTER TEIL

Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit

Die geschichtliche Entwicklung

Die ersten Überlegungen zum Stetigkeitsbegriff wurden erstmals im fünften Jahrhundert v. Chr. durch den Sophisten Antiphon ausgelöst. Er beschäftigte sich sehr intensiv mit der Quadratur des Kreises – eigentlich ein Problem der Algebra – indem er regelmäßige n-Ecke mit einer hinreichend großen Zahl von Ecken in einen Kreis einschrieb, um dessen Umfang näherungsweise bestimmen zu können. Damit löste er eine rege Diskussion unter seinen Mitstreitern aus, die seinen Ansatz nahmen und weiterführten. Bryson weitete die Überlegung dahingehend aus, dass er den Kreis nicht nur von innen mit n-Ecken füllte, sondern diesen auch mit diesen umschloss. Er schloss daraus, dass es somit ein *Zwischenpolygon* geben müsse, welches gleich dem Kreisumfang sei. So gelang die Diskussion schlussendlich zu einem der Nachfolger Platons, Proklos, ein wichtiger Vertreter des sogenannten Neuplatonismus. Diese Neuplatonisten sahen ihr bestreben darin, die Lehre Platons als metaphysisches System zu interpretieren. Proklos vertrat zu seiner Zeit die Meinung, dass alles Menschliche mathematisch begründbar sei. So beschäftigte er sich auch unter anderem mit dem Problem der Kreisquadratur und die daraus entstandenen Probleme der Übergänge und erkannte, dass die dabei gleichbleibenden Größen unumgänglich waren. Man vermutet, dass er unbewusst erkannte, dass dem Prinzip der Stetigkeit das archimedische Axiom des Messens vorauszusetzen sei.[32]

Die allerersten grundlegenden Überlegungen zu den Begriffen der Stetigkeit und des Grenzwertes wurden allerdings erst im 19. Jahrhundert angestellt, im sogenannten Zeitalter der Strenge, ein schöpferischer Prozess, der unteranderem neue Teilgebiete der Mathematik schuf. Vor allem die mengentheoretischen Topologie hatte hier ihre Anfänge und mit ihr auch die Einführung neuer Begriffe, wie jede der punktweisen und gleichmäßigen Stetigkeit. Diese neue Ära wurde

[32] Vgl. Thiele (1999), S.22

unter anderem durch Cauchy und seinem Werk *Cours d´Analyse* eingeleitet, in welchem man folgende Definitionen des Grenzwertes und der Stetigkeit fand:

> *Grenzwert:*
>
> Wenn die einer Veränderlichen nach und nach beigelegten Werten sich einem gegebenen Werte immer mehr und mehr nähern, so daß jener Reihe schließlich Werte existiren, die von jedem gegebenen Werte so wenig wie man will verschieden sind, so nennt man den gegebenen Wert die Grenze jener übrigen Werte …
>
> *Stetigkeit:*
>
> Wir wollen voraussetzen, daß *f(x)* eine Funktion einer Veränderlichen x sei, und daß jedem zwischen zwei gegebenen Grenzen eingeschlossenen Wert der Veränderlichen x stets ein einziger endlicher Wert der Funktion entspricht.
>
> Wenn wir, von einem zwischen diesen Grenzen liegenden Wert der Veränderlichen ausgehend, die Veränderliche x um eine unendlich kleine Zahlgröße α vermehren, so wird die Funktion selbst einen Zuwachs erhalten, nämlich die Differenz $f(x+\alpha)-f(x)$, welche Differenz sowohl von der neuen Veränderlichen α, als von dem Werte der von x abhängig ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion *f(x)* zwischen den festgesetzten beiden Grenzen der Veränderlichen x eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert von x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha)-f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, daß er kleiner wird als jede endliche Zahl.
>
> Mit anderen Worten:
>
> *Die Funktion f(x) wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Beziehung auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt.*
>
> Man sagt auch noch: Die Funktion ist in der Umgebung eines besonderen, der Veränderlichen x beigelegten Wertes eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn sie zwischen zwei noch so nahe bei einander liegenden, den in Rede stehenden Wert in sich begreifenden Grenzen von x stetig ist. [33]

Der Begriff der Stetigkeit nach Cauchy ist laut Lützen, einer der wichtigsten und neuesten Begriffe in dieser Zeitepoche. Er erkannte damals, dass die Bedingung für stetig im engen Zusammenspiel mit diversen Sprungstellen stand. Aus seinen Niederschriften geht hervor, dass er auch mit dem Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Stetigkeit spielte, definierte dies allerdings nie in expliziter Form.

[33] Lützen (1999), S. 196

Sein Nachfolger Bolzano hingegen definierte die punktweise Stetigkeit und erkannte, dass diese Form von Stetigkeit die gleichmäßige nicht impliziert.

Erst mit Weierstraß und seiner Definition der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz und dem sogenannten ε-δ-Kriterium, begann man auch die Stetigkeit hinsichtlich dieser Unterscheidung zu differenzieren.

Die Definition von Grenzwert und Stetigkeit im geschichtlichen Vergleich

Um einen Vergleich zwischen „historischer" und „aktueller" Definition anstellen zu können, sollen im Folgenden die Definitionen zitiert, wie sie heutzutage gelehrt werden:

Grenzwert:

> Die Funktion f sei auf X definiert und ξ sei ein Häufungspunkt von X. Genau dann strebt $f(x) \to \eta$ $für$ $x \to \xi$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - \xi| < \delta$ $immer$ $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ ist.[34]

Stetigkeit:

> Die Funktion f ist an einer Stelle ξ ihres Definitionsbereiches X genau dann stetig, wenn ξ ein isolierter Punkt von X oder $\lim_{x \to \xi} f(x)$ vorhanden und = $f(\xi)$ ist.[35]

Man erkennt, dass die Definitionen nach Cauchy wesentlich länger sind, als die endgültigen ε-δ-Definitionen nach Weierstraß.

Hinsichtlich des Grenzwertes unterscheidet sich Cauchys Definition von dem oben genannten lediglich durch die Tatsache, dass Cauchys Variablen mehr als einen Grenzwert haben durften, was man in der Definition seines Wurzelkriteriums erkennen kann: „Man suche die Grenze oder die Grenzen …"[36]. Laut Judith Grabiner, US-amerikanische Mathematikhistorikerin, kann man also davon

[34] Heuser (2000), S. 235f
[35] Ebd., S. 236
[36] Lützen (1999), S. 203

ausgehen, dass es sich bei dieser Definition eher um die des Häufungspunktes handelt.[37]

Bezüglich der Stetigkeitsdefinition bestätigt Grabiner in ihrem Werk *The origins of Cauchy´s rigorous calculus*, dass trotz fehlen bestimmter – und heute gewohnter – Schreibweisen, diese in Cauchys Definitionen vorhanden waren. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass Cauchy auf eine explizite Unterscheidung zwischen punktweiser und gleichmäßiger Stetigkeit verzichtete. Für seine Beweisführungen setzte er die gleichmäßige Stetigkeit voraus. Der Mathematiker Enrico Giusti behauptet in seinem Werk *Minimal surfaces and functions of bounded variations*, dass Cauchy die gleichmäßige Stetigkeit definiert.[38]

Stetigkeit und Grenzwert in der Schule

Was wird gefordert?

Wir haben nun im letzten Kapitel gesehen, wie die Begriffe des Grenzwertes und der Stetigkeit aus der Geschichte heraus bis hin zu ihrer heutigen Form gefunden haben und aktuell so an Universitäten gelehrt werden. Im Folgenden sollen nun diese Definitionen auf ihre Verwendung im schulischen Alltag analysiert werden. Dabei sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Werden die Begriffe *exakt* definiert oder wird es nur sinngemäß wiedergegeben?
- Werden sie ausreichend gut erklärt, so dass Schülerinnen und Schüler damit adäquat umgehen können?
- Wie wird darauf aufgebaut?
- Wie sehen die Aufgaben für die Überprüfung aus?

[37] Vgl. Lützen (1999), S.203
[38] Vgl. Lützen (1999), S. 208

Vorweg sollte man noch einmal erwähnen, wie die dazugehörigen Grundkompetenzen diese Begriffe beinhalten:

> AN 1.2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können[39]

Der Begriff der Stetigkeit kommt in den Grundfertigkeiten der Matura nicht dezidiert vor, wird allerdings für die Untersuchung von verschiedenen Funktionstypen vorausgesetzt.

Hinsichtlich des Lehrplanes allerdings werden diese Begriffe sehr wohl gefordert. So findet man im Lehrplan der sechsten Klasse folgenden Punkt: „intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert“ bezüglich Folgen und in der siebten Klasse: „Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit“.

Die Begriffe spielen somit eine kleine, aber wesentliche Rolle im schulischen Alltag.

Beachtet man allerdings die Tatsache, dass im universitären Bereich ganze Vorlesungen zu diesen Themen abgehalten werden, so könnte man behaupten, dass die Behandlung in der Schule viel zu kurz kommt, da Schülerinnen und Schülern die Zeit fehlt, sich wirklich mit diesen Begriffen auseinander setzen zu können und sie in ihrer wichtigen Bedeutung zu schätzen wissen.

Der neue Lehrplan und die neue Reifeprüfung sehen vor, dass Lernende in der Lage sein sollen, mit Experten über wesentliche essentielle Materie sprechen zu können, dies aber oft in Anbetracht der fehlenden Intensität des behandelten Stoffes oft nicht möglich ist.

Die nachstehende Analyse der vorhandenen, oft gebrauchten Lehrwerke, soll diesen Mangel aufzeigen. Anschließend sollen eventuelle

[39] BIFIE (2013a), S. 10

Verbesserungsvorschläge gegeben werden, um diese Thematiken besser in den mathematischen Schulalltag integrieren zu können.

Schulbuchanalyse hinsichtlich der Stetigkeit und des Grenzwertes in der 7. Klasse

Im Folgenden werden – wie bereits zuvor folgende Lehrwerke analysiert:

- Götz, Reichel (Hrsg.), Müller, Hanisch: Mathematik
- Malle et al.: Mathematik verstehen
- Bleier et al.: Dimensionen Mathematik
- Brand et al.: Thema Mathematik

Das Lehrwerk „Mathematik 7" wiederholt, als Einführung in die Thematik der Differentialrechnung, den Begriff *Stetigkeit*, bekannt aus der sechsten Klasse, folgendermaßen:

> Eine Funktion f heißt **stetig bei x_0**, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. [...]
>
> Für das Folgende ist es sinnvoll, diese Limesgleichung so auszudrücken: Falls Δx gegen 0 strebt, dann strebt auch Δy gegen 0:
>
> f stetig bei $x_0 \leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$[40]

Vergleicht man die obige Definition mit der *aktuellen* Variante der Universitäten, so sieht man die mathematische Exaktheit, die hinter dieser Begriffsklärung steckt. Man entfernt sich von der rein intuitiven Vorstellung und führ den Schüler/ die Schülerin zur Mathematik und ihrer Genauigkeit mit all ihren Unbekannten, Formeln und Bedingungen.

Auf diese Definition aufbauend werden nun weitere Begriffe wie etwa die Approximation einer Funktion beschrieben und erklärt, um danach auf das Tangentenproblem überzuleiten. Fortlaufend wird nun auf diese Problematik aufgebaut, in dem diverse Ableitungsregeln erläutert und passende Übungsbeispiele dazu gegeben werden. Der Begriff der Stetigkeit wird allerdings in

[40] Götz (2011), S. 45

keinen dieser Beispiele verwendet und explizit vorausgesetzt. Erst am Ende des Kapitels wird erstmal erwähnt, dass es einen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit gibt. Als Einleitung wird davon ausgegangen, dass vom Lernenden bereits ein Zusammenhang erkannt wurde und baut nun darauf auf:

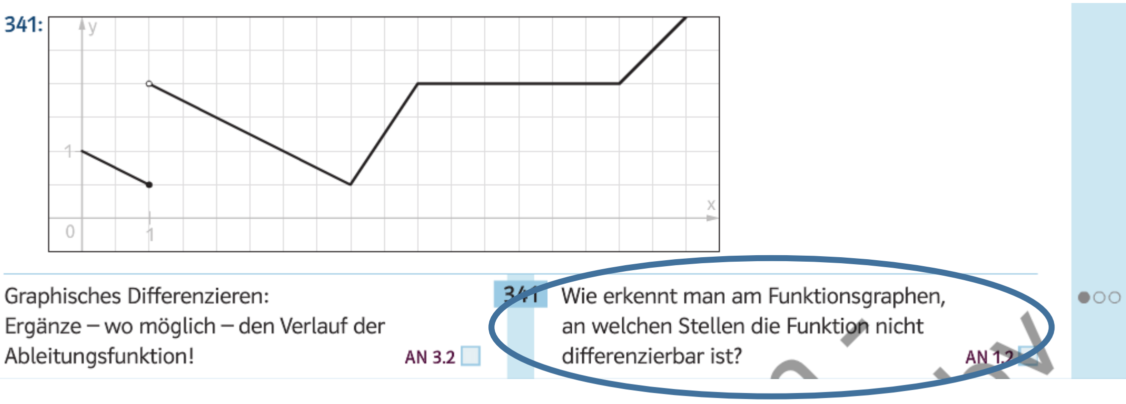
> **Die Stetigkeit von f bei x_0 ist *notwendig*, aber *nicht hinreichend* für die Differenzierbarkeit von f bei x_0.**
>
> Umgekehrt folgt aus der Existenz des Differentialquotienten $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ dass $\lim_{\Delta x \to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$
>
> Da die rechte Seite den Wert 0 hat, ist auch die linke Seite 0. Also ist $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Dies ist aber genau die Definition der Stetigkeit von f bei x_0. Somit gilt:
>
> **Die Differenzierbarkeit von f bei x_0 ist hinreichend für die Stetigkeit von f bei x_0.** Mit anderen Worten zusammengefasst:
>
> **Satz über den Zusammenhang von Differenzierbarkeit und Stetigkeit:**
>
> Ist eine Funktion f (bei x_0) differenzierbar, so ist sie (bei x_0) stetig. Umgekehrt muss eine bei x_0 stetige Funktion f dort nicht differenzierbar sein. Dh.: Die Menge der differenzierbaren Funktionen ist eine echte Teilmenge der Menge der stetigen Funktionen. [41]

Das vorliegende Lehrwerk versucht also hier kurz und knapp den wichtigen Zusammenhang dieser drei Begriffe Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit zu erläutern. Allerdings in hier fraglich, ob der Schüler/die Schülerin den hier essentiellen Unterschied zwischen einer hinreichenden und notwenigen Bedingung versteht und gedanklich speichern kann. Die Erläuterungen dieser Begriffe erfolgt erst im Zusammenhang mit lokalen Extrema. Allerdings wäre es zum besseren Verständnis wichtig, dies auch hier kurz zu erwähnen oder zumindest einen Verweis anzuführen.

Im anschließenden einseitigen *Kompetenzcheck* zu diesem Thema soll dieser Zusammenhang in nur einer Aufgabe abgeprüft werden, in dem erklärt werden soll, warum an manchen Stellen eine Funktion nicht differenzierbar ist. Diese Aufgabe wird in Abbildung 5 gezeigt:

[41] ebd., S. 84

Abbildung 5: Beispiel 341 zweigt die einzige Aufgabe zum Thema



Quelle: Götz (2011), S. 91

Die geforderte Antwort bezüglich der Stetigkeit bezieht sich auf die Sprungstellen in der abgebildeten Funktion und den Zusammenhang, wann an diesen Stellen die Funktion nicht stetig ist und daher nicht differenzierbar. [42]

Diese Aufgabe bezieht sich laut Lehrwerk auf die geforderte Grundkompetenz AN 1.2, die lautet:

> Den Zusammenhang Differenzenquotient (…) – Differentialquotient (…) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und damit (…) auch kontextbezogen anwenden können.[43]

Vorausgesetzt wird also das Wissen, dass die Differenzierbarkeit mit der Stetigkeit zusammenhängt und diese wiederum mit der Existenz des Grenzwertes einhergeht. Der Lehrplanbezug ist somit offensichtlich, denn es wird erwartet, dass der Schüler/die Schülerin den Grenzwertbegriff verinnerlicht hat und ihn auf die Stetigkeit anwenden kann und diesen wiederum auf die Differenzierbarkeit von Funktionen. Er/Sie muss erkennen, dass an Sprungstellen die Grenzwerte zwar existieren, allerdings ungleich sind und somit die Stetigkeit nicht gegeben sein kann. Dies setzt wiederum voraus, dass die Begriffe des linksseitigen und

[42] Vgl. Götz (2011), S. 274
[43] Malle (2014), S. 56

rechtseitigen Limes bekannt sind, welche in dem Buch nie erwähnt wird, oder auch nur angedeutet.

Betrachtet man den *Vergleich der Anforderungen des Lehrplans mit den Grundkompetenzen* wird diese „Präzisierung des Begriffes Grenzwert unter Einbeziehung des Begriffes der Stetigkeit"[44] seitens des BIFIE allerdings dem Gebiet der funktionalen Abhängigkeiten zugeordnet, die sich auf das Kennen und Erkennen typischer Funktionsgraphen bezieht.[45]

Es lässt sich also diskutieren, welcher Kompetenz dieses Beispiel nun zuzuordnen ist. Es ist ohne Zweifel klar, dass es sich hierbei nicht um eine Polynomfunktion handelt oder eine andere der geforderten Typen, sondern um eine zusammengesetzte Funktion, bestehend aus linearen Teilfunktionen. Stückweise definierte Funktionen werden allerdings nicht in den Kompetenzen der standardisierten Reifeprüfung erwähnt und somit auch nicht abgeprüft. Sehr wohl aber taucht er im Lehrplan der fünften Klasse auf. Hier sollen Schülerinnen und Schüler verschiedene Arten von linearen und einfachen nicht linearen Funktionen untersuchen und beschreiben können. Zusätzlich werden auch abschnittsweise definierte Funktionen angeführt. Somit lässt sich darüber streiten, ob solch eine Aufgabe in dieser Rubrik sinnvoll ist. Besser wäre es, wenn man die gefragten Begriffe an Funktionstypen überprüft, die relevant für die Reifeprüfung sind. Dies soll allerdings nicht heißen, dass man ausschließlich maturarelevante Beispiele stellt, doch sollten diese Aufgaben ohne Maturarelevanz nicht im Überprüfungsteil eines Lehrwerkes stehen, sondern als Zusatzbeispiel angeführt werden, denn so lässt sich das Problem der nicht – eindeutigen Zuordnung umgehen und kann trotzdem als Übungsbeispiel für nicht – bekannte Sachverhalte herangezogen werden.

Allerding sollte man hier erwähnen, dass es nicht zweckdienlich ist lediglich ein *teaching to the test* zu betreiben und somit die Aufgaben durchaus ihren Zweck erfüllen, nämlich geforderte Inhalte des Lehrplanes festigen.

Betrachten wir im Vergleich dazu das Lehrwerk „Mathematik verstehen – Band 7" so bemerken wir einen großen Unterschied zu „Mathematik 7". Im Gegensatz zum

[44] BIFIE (2013a), S. 17
[45] Vlg. BIFIE (2013a), S. 17

ersten Lehrwerk wird im Zweiten sehr großen Wert auf die Bedeutung, den Zusammenhang und die Erklärung der Begriffe Stetigkeit – Grenzwert – Differenzierbarkeit gelegt. Unter dem Kapitel „Exaktifizierung der Differentialrechnung“ wird ausgehend von den Grenzwertregeln übergeleitet auf die Definition stetiger Funktionen in Bezug auf die Existenz und Gleichheit des Grenzwertes, um anschließend auf den Zusammenhang Stetigkeit – Differenzierbarkeit näher eingehen zu können:

Stetigkeit:

(1) Eine reelle Funktion f: A → ℝ heißt **an der Stelle p ∈ A stetig**, wenn $\mathbf{lim}_{x \to p} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$ ist.
(2) Die Funktion f: A → ℝ heißt (schlechthin) **stetig**, wenn sie an jeder Stelle p ∈ A stetig ist. [46]

Es wird bewiesen, dass aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt und in einem Merksatz festgehalten:

Satz:

Ist eine reelle Funktion f: A → ℝ an einer Stelle p ∈ A differenzierbar, dann ist f an der Stelle p stetig.

(…)

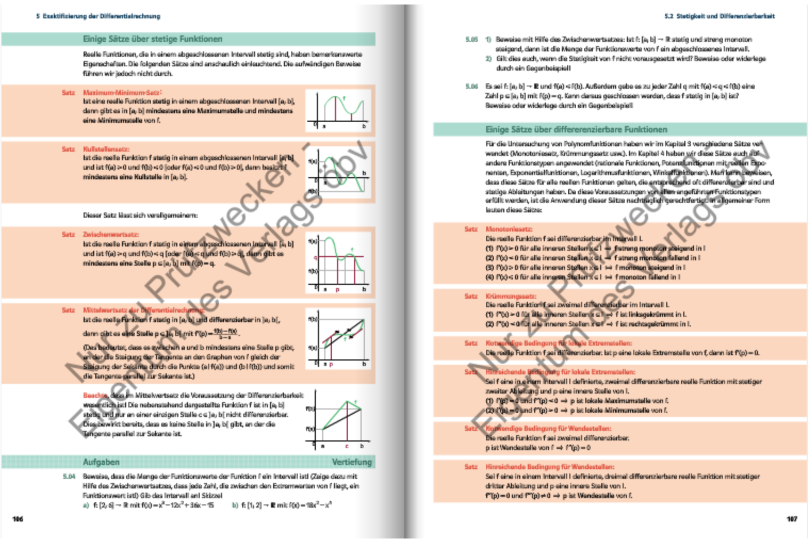
Merke

Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.[47]

Anschließend folgen zwei Seiten mit diversen Sätzen über stetige und differenzierbare Funktionen, von denen – vor allem für Wissende - der Zwischenwertsatz und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ins Auge springt. Man könnte nun kritisieren, dass diese Menge an vorgegebenen Eigenschaften und Folgerungen, die Aufnahmefähigkeit der Schüler und Schülerinnen hemmt und dadurch die eigentliche Bedeutung und Wichtigkeit dieser Thematik verloren geht. Die untenstehende Abbildung 6 zeigt den beschriebenen Sachverhalt:

[46] Malle (2011), S.103ff
[47] Ebd., S. 105

Abbildung 6: Übersicht der Seiten 106/107



5 Exaktifizierung der Differentialrechnung

Einige Sätze über stetige Funktionen

Reelle Funktionen, die in einem abgeschlossenen Intervall stetig sind, haben bemerkenswerte Eigenschaften. Die folgenden Sätze sind anschaulich einleuchtend. Die aufwändigen Beweise führen wir jedoch nicht durch.

Satz **Maximum-Minimum-Satz:**
Ist eine reelle Funktion stetig in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, dann gibt es in $[a, b]$ **mindestens eine Maximumstelle und mindestens eine Minimumstelle** von f.

Satz **Nullstellensatz:**
Ist die reelle Funktion f stetig in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und ist $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ [oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$], dann besitzt f **mindestens eine Nullstelle** in $[a, b]$.

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern:

Satz **Zwischenwertsatz:**
Ist die reelle Funktion f stetig in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und ist $f(a) > q$ und $f(b) < q$ [oder $f(a) < q$ und $f(b) > q$], dann gibt es **mindestens eine Stelle** $p \in [a, b]$ mit $f(p) = q$.

Satz **Mittelwertsatz der Differentialrechnung:**
Ist die reelle Funktion f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$, dann gibt es eine Stelle $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
(Das bedeutet, dass es zwischen a und b mindestens eine Stelle p gibt, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a \mid f(a))$ und $(b \mid f(b))$ und somit die Tangente parallel zur Sekante ist.)

Beachte, dass im Mittelwertsatz die Voraussetzung der Differenzierbarkeit wesentlich ist! Die nebenstehend dargestellte Funktion f ist in $[a, b]$ stetig und nur an einer einzigen Stelle $c \in]a, b[$ nicht differenzierbar. Dies bewirkt bereits, dass es keine Stelle in $]a, b[$ gibt, an der die Tangente parallel zur Sekante ist.

Aufgaben **Vertiefung**

5.04 Beweise, dass die Menge der Funktionswerte der Funktion f ein Intervall ist! (Zeige dazu mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jede Zahl, die zwischen den Extremwerten von f liegt, ein Funktionswert ist!) Gib das Intervall an! Skizze!
a) $f: [2; 6] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ b) $f: [1; 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 18x^2 - x^4$

106

5.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.05 1) Beweise mit Hilfe des Zwischenwertsatzes: Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend, dann ist die Menge der Funktionswerte von f ein abgeschlossenes Intervall.
2) Gilt dies auch, wenn die Stetigkeit von f nicht vorausgesetzt wird? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

5.06 Es sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f(a) < f(b)$. Außerdem gebe es zu jeder Zahl q mit $f(a) < q < f(b)$ eine Zahl $p \in [a, b]$ mit $f(p) = q$. Kann daraus geschlossen werden, dass f stetig in $[a, b]$ ist? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

Einige Sätze über differerenzierbare Funktionen

Für die Untersuchung von Polynomfunktionen haben wir im Kapitel 3 verschiedene Sätze verwendet (Monotoniesatz, Krümmungssatz usw.). Im Kapitel 4 haben wir diese Sätze auch auf andere Funktionstypen angewendet (rationale Funktionen, Potenzfunktionen mit reellen Exponenten, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen). Man kann beweisen, dass diese Sätze für alle reellen Funktionen gelten, die entsprechend oft differenzierbar sind und stetige Ableitungen haben. Da diese Voraussetzungen von allen angeführten Funktionstypen erfüllt werden, ist die Anwendung dieser Sätze nachträglich gerechtfertigt. In allgemeiner Form lauten diese Sätze:

Satz **Monotoniesatz:**
Die reelle Funktion f sei differenzierbar im Intervall I.
(1) $f'(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Rightarrow$ f streng monoton steigend in I
(2) $f'(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Rightarrow$ f streng monoton fallend in I
(3) $f'(x) \geq 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Leftrightarrow$ f monoton steigend in I
(4) $f'(x) \leq 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Leftrightarrow$ f monoton fallend in I

Satz **Krümmungssatz:**
Die reelle Funktion f sei zweimal differenzierbar im Intervall I.
(1) $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Rightarrow$ f ist linksgekrümmt in I.
(2) $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$ $\Rightarrow$ f ist rechtsgekrümmt in I.

Satz **Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen:**
Die reelle Funktion f sei differenzierbar. Ist p eine lokale Extremstelle von f, dann ist $f'(p) = 0$.

Satz **Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:**
Sei f eine in einem Intervall I definierte, zweimal differenzierbare reelle Funktion mit stetiger zweiter Ableitung und p eine innere Stelle von I.
(1) $f'(p) = 0$ und $f''(p) < 0$ $\Rightarrow$ p ist lokale Maximumstelle von f.
(2) $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0$ $\Rightarrow$ p ist lokale Minimumstelle von f.

Satz **Notwendige Bedingung für Wendestellen:**
Die reelle Funktion f sei zweimal differenzierbar.
p ist Wendestelle von f $\Rightarrow$ $f''(p) = 0$

Satz **Hinreichende Bedingung für Wendestellen:**
Sei f eine in einem Intervall I definierte, dreimal differenzierbare reelle Funktion mit stetiger dritter Ableitung und p eine innere Stelle von I.
$f''(p) = 0$ und $f'''(p) \neq 0$ $\Rightarrow$ p ist Wendestelle von f.

107

Quelle: Malle (2011), S. 106f

Die Abbildung dieser zwei Schulbuchseiten verdeutlicht sehr gut, die Menge an gefordertem Wissen. Selbst wenn Schülerinnen und Schüler diesen Ausschnitt überfliegen, verstärkt sich in ihnen der Gedanke, dass Mathematik ein vorgefertigtes, komplexes Fachgebiet ist, welches man durch auswendig lernen bewältigen kann. Sollte man als Lehrperson die Erarbeitung dieser Sätze in der Jahresplanung vorgesehen haben, so sollte man die eher die Zusammenhänge und Aussagen, die hinter ihnen stecken, besprechen und sie nicht als vorgegeben unterrichten. Ansonsten werden die Lernenden mit zusätzlichen Informationen und eventuell erkannten Zusammenhängen *gefüttert* und es wird in somit in Kauf genommen, die Schülerinnen und Schüler damit zu überfordern.

Aufbauend auf diese Folgerungen wird auf den Grenzwertbegriff selbst näher eingegangen. Man definiert und erklärt den Begriff des Häufungspunktes und versucht durch Grafiken, das Verständnis für die Begriffe der Umgebung und der Häufungsstelle den Schülerinnen und Schülern deutlich zu machen. Ausgehend vom mathematischen Aspekt wird dieses Kapitel anschließend mit der exakten Definition des Grenzwertbegriffes und einer Art „Kochrezept“ für dessen Nachweis abgerundet:

Grenzwert einer Funktion:

Sei f: A → ℝ eine Funktion und p eine Häufungsstelle von A. Die Zahl **q** heißt **Grenzwert von f an der Stelle p**, geschrieben $\lim_{x \to p} f(x) = q$ wenn gilt:

Zu jeder Umgebung $U_\varepsilon(q)$ gibt es eine Umgebung $U_\delta(p)$, sodass für alle $x \neq p$ (mit $x \in A$) gilt: $x \in U_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(q)$[48]

Auch bei dieser Definition wird auch die mathematische Exaktheit großen Wert gelegt. Man findet eine fast wörtlich identische Definition bezüglich den Grenzwert von Folgen im *Lehrbuch der Analysis Teil 1* von Harro Heuser.

Vergleicht man die universitäre Version nach Heuser mit dieser, so sind sie ident in ihrer Aussage, allerdings wird versucht die Menge an Quantoren und Symbolen so gering wie möglich zu halten.

Das Ende des Kapitels bildet ein historischer Rückblick, der Anregungen für eine vorwissenschaftliche Arbeit liefern soll.

Vergleicht man also „Mathematik 7“ mit „Mathematik verstehen“, so kann man bereits jetzt einen großen Unterschied in der Wertschätzung der Begriffe Grenzwert – Stetigkeit erkennen. Während „Mathematik 7“ den Grenzwert bereits als bekannt und verinnerlicht voraussetzt, behandelt man ihn in „Mathematik verstehen“ mit präziser Genauigkeit und beleuchtet ihn von allen Seiten und zeigt seine Zusammenhänge und verdeutlicht somit seine Wichtigkeit.

Zu Beginn sollen die Schülerinnen und Schüler die wichtigsten Definitionen und Sätze, die im vorliegenden Kapitel behandelt wurden, wiedergeben und niederschreiben. Anschließens wird im Teil der Grundkompetenzen und dem Test zur Selbstkontrolle überprüft, ob die Lernenden die gelernten Begriffe verinnerlicht haben. Auffallend ist, dass hier ein Fokus auf dem Zusammenhang Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit besteht. Die Fragen richten sich vor allem nach dem Lehrplan und der in ihm geforderten Präzisierung und zielen weniger auf die verlangten Grundkompetenzen zur standardisierten Reifeprüfung ab. Darüber hinaus ist festzuhalten, dass es sich, wie auch schon im ersten Lehrwerk, in konkreten Beispielen wieder um stückweise definierte Funktionen handelt. Allerdings stellt sich hier, im Vergleich zu „Mathematik 7“, nicht die Frage nach der

[48] Malle (2011), S. 110

Sinnhaftigkeit, denn es ist offensichtlich, dass die Selbstkontrollen und Kontrollseiten dazu dienen sollen, einen – wie schon zuvor erwähnten - Lehrplanbezug herzustellen und nicht konkret auf mögliche Maturafragen abzielen soll.

Betrachten wir nun im Vergleich dazu die Behandlung des Themas im Lehrwerk „Thema Mathematik“, ebenfalls der siebten Klasse:

Bevor der Begriff Grenzwert in diesem Exemplar definiert wird, ist den Schülerinnen und Schülern der Begriff des Differenzen- und Differentialquotienten bekannt, genauso wie der Zusammenhang der Tangenten- und Sekantensteigung.

In einem eigenen Kapitel, soll die Grundvorstellung des Grenzwertes in Zusammenhang mit der Ableitungsfunktion näher beleuchtet werden. Dazu formuliert man folgende Definition:

> Wir sagen, die Funktion $y = f(x)$ strebt zum Grenzwert g, wenn x nach a strebt, oder schreiben $\lim_{x \to a} f(x) = g$ falls gilt:
>
> Für jede vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ lässt sich ein Bereich $a \pm \delta$ angeben (a selbst ausgenommen), für den alle Funktionswerde im Bereich $g \pm \varepsilon$ liegen.[49]

Des Weiteren wird hinzugefügt, dass die Existenz dieses Grenzwertes nicht immer gegeben sein muss und diese *strenge* Definition oft nur für komplexere Fälle benötigt wird, wie es im universitären Alltag der Fall ist. Man kann also davon ausgehen, dass diese genaue Definition lediglich der Vollständigkeit halber niedergeschrieben wurde, da in den folgenden Übungsbeispielen lediglich die einfache Grundvorstellung zur Grenzwertbildung benötigt wird.

Weiterführend wird anschließend der Zusammenhang Stetigkeit – Differenzierbarkeit behandelt. Die zu vermittelnden Grundvorstellungen beschränken sich im Wesentlichen auf das erkennen, wann eine Funktion stetig und wann sie differenzierbar ist.

[49] Brand (2013), S. 48

Es wird als Einleitung bzw. Überleitung das ε-δ-Argument des Grenzwertes wiederholt und in Zusammenhang mit der anschaulichen Vorstellung von Stetigkeit gesetzt, um anschließend die Stetigkeit folgendermaßen zu definieren:

> Die Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x = x_0 \in D_f$ stetig, falls gilt:
>
> Für jede vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ lässt sich ein Bereich $x_0 \pm \delta$ angeben, für den alle Funktionswerte im Bereich $f(x_0) \pm \varepsilon$ liegen. Das heißt: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ [50]

Als zusätzliche Information gibt man den Schülerinnen und Schülern den geschichtlichen Verlauf dieser Definition und will zeigen, dass sowohl die damalige, wie auch die heutige Begriffsklärung, fast unvorstellbar ist. Man verwendet daher eine leicht abgewandelte Form der Erklärung, um den Schülern und Schülerinnen den Zugang zu diesem Verständnis zu erleichtern.

Ein weiterer Unterschied zu den vorherigen Lehrwerken besteht auch in folgendem: die Lernenden sollen in einem Beispiel, in Gruppenarbeit, den Zusammenhang der Stetigkeit und des Grenzwertes erkennen, in dem sie die Definitionen vergleichen und gegenüberstellen. Was zuvor als gegeben präsentiert wurde, soll hier von den Lerngruppen selbstständig erarbeitet werden.

Positiv zu erwähnen ist somit die präzise Knappheit der Begriffsklärung, da sie sich auf das wesentliche beschränkt und trotzdem mathematisch exakt ist, obwohl es in einfacheren Worten wiedergegeben wird.

Auffällig ist allerdings, dass das Kapitel *Stetigkeit – Differenzierbarkeit* zwar den Begriff der stetigen Funktion behandelt, allerdings die Definition der differenzierbaren Funktion vollkommen fehlt. Eine differenzierbare Funktion wird als Funktion „ohne Knick und Sprung" eingeführt, ohne dabei auch nur einmal eine exakte mathematische Definition anzugeben. Insbesondere wird der Zusammenhang stetig – differenzierbar unter den Tisch gekehrt.

In den dazugehörigen Übungsaufgaben wird, wie zuvor erwähnt, die Grenzwertberechnung basierend auf einem einfachen Rechenvorgang, verlangt

[50] Brand (2013), S. 52

und darüber hinaus lediglich die geometrischen Begründungen für differenzierbare bzw. stetige Funktionen. Blättert man einige Seiten weiter und betrachtet den Kompetenzcheck, dann findet man allerdings eine Aufgabe die auf den Zusammenhang stetig – differenzierbar abzielt. Den Schülerinne und Schülern werden fünf Behauptungen gegeben, die entweder richtig oder falsch sind. Darunter findet man auch die Behauptung, dass jede stetige Funktion auch differenzierbar ist und die Umkehrung. Die Frage, die sich automatisch stellt ist: Wie können die Schülerinnen und Schüler diese Behauptungen zuordnen, wenn mit keinem einzigen Wort, dieser Zusammenhang geschildert wird? Da es zu diesem Lehrwerk die Lösungen nur separat zu erwerben gibt, sind die Lernenden auf die Lehrerinnen und Lehrer angewiesen, oder in der Lage sich durch zahlreiche mathematische Definitionen zu kämpfen, die sie eventuell im Internet finden werden.

Vergleichen wir nun dazu das letzte der angegebenen Lehrwerke, „Dimensionen Mathematik".

Begonnen wird in diesem Schulbuch mit dem Zusammenhang *Grenzwert – Stetigkeit einer Funktion*. Die Schülerinnen und Schüler werden anfänglich schrittweise zu der Definition des Funktionengrenzwertes geführt. Dabei wird erstmalig – im Vergleich zu den anderen Lehrwerken – mit den Begriffen der Folge und des links- und rechtsseitigen Limes gearbeitet:

> Wenn für *jede* Folge $\langle x_n \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ (und $x_n < p$ bzw. $x_n > p$) die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ gilt, dann nennt man a den **Grenzwert der Funktion f an der Stelle p.**[51]

In einer folgenden Definition wird dann der Funktionsgrenzwert exakt definiert, in dem man die Gleichheit von linksseitigem und rechtseitigem Limes voraussetzt. Anschließend folgen Definitionen zur Stetigkeit:

[51] Bleier (2013), S. 41

Definitionen zur Stetigkeit

(1) Eine Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] definiert ist, heißt **stetig an einer Stelle x_0** ∈]a; b[, wenn der Funktionsgrenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt. Das heißt: Für jede gegen x_0 konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ geht die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen $f(x_0)$.
Für die **Ränder** des Definitionsbereiches genügt einen einseitige Annäherung:
f ist stetig an der Stelle $x_0 = a$ bzw. $x_0 = b$, falls $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ bzw. $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) = f(x_0)$ mit $\Delta x > 0$ gilt.

(2) Eine Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] definiert ist, heißt un**stetig an einer Stelle x_0** ∈]a; b[, wenn:
   - der Funktionsgrenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, aber nicht mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt oder
   - die Grenzwerte bei Annäherung von links bzw. bei Annäherung von rechts nicht übereinstimmen oder
   - mindestens einer der Grenzwerte bei Annäherung von einer Seite nicht existiert.

(3) Eine Funktion f heißt **stetig in einem Intervall [a; b]**, wenn sie an allen Stellen x_0 ∈ [a; b] stetig ist.

(4) Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn sie an allen Stellen x_0 des Definitionsbereiches stetig ist.[52]

Als einziges Lehrbuch erwähnt „Dimensionen Mathematik“ die Unterschiede in der Bedeutung der Stetigkeit. Die Frage nach der Sinnhaftigkeit wird erst später zum Thema dieser Werksanalyse.

Was nun folgt, sind Rechengesetzte zur Berechnung des Limes, gefolgt von den Definitionen des Differential- und Differenzenquotienten. Da das Grundwissen über Grenzwerte und Stetigkeit bereits bekannt ist, kann man ohne Probleme weitere Themen, wie Ableitungsregeln und Funktionsdiskussionen erläutern. Es werden Extremwertaufgaben und Diskussionen spezieller Funktionstypen behandelt um abschließend einen Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zu geben. Die Autoren beschränken sich hier auf die Wiedergabe eines wichtigen Satzes, nämlich jenen, der den Zusammenhang dieser beiden Begriffe wiedergibt. Anschließend soll in zwei *Kreuzerl-Übungen* das Verständnis überprüft werden.

Die nachstehende Tabellen 1 und 2 zeigen die oben erwähnten Übungen:

[52] Bleier (2013), S. 44

Tabelle 1: Beispiel aus einem Schulbuch zum Thema

	Wahr	Falsch
Jede auf einem Intervall stetige Funktion ist auch differenzierbar.		
Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist, ist sie an dieser Stelle auch nicht stetig.		
Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht stetig ist, ist sie an dieser Stelle auch nicht differenzierbar.		
Jede auf einem Intervall differenzierbare Funktion ist auch stetig.		

Quelle:Bleier (2013), S. 145

Tabelle 2: Ein weiteres Beispiel

	Wahr	Falsch
Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.		
Jede Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.		
Die Tangensfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.		
Die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.		
Die Cosinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.		
Jede auf einem Intervall stetige Funktion ist auch differenzierbar.		
Jede auf einem Intervall differenzierbare Funktion ist auch stetig.		

Quelle:Bleier (2013), S. 145

Die Schülerinnen und Schüler müssen sich bei dieser Aufgabe daran erinnern, wie die Definitionsbereiche der einzelnen Funktionstypen aussehen, um und durch logisches Denken und Folgern auf die korrekten Antworten zu kommen.

Nun haben wir recht detailliert, die einzelnen Aufbaumethoden der vier Lehrwerke gesehen und können nun auf die Sinnfrage überleiten.

Was ist sinnvoll?

Man kann erkennen, dass es den Autoren von „Mathematik verstehen – Band 7“ ein großes Anliegen war, den Begriff des Grenzwertes mit all seinen Eigenschaften zu erklären. Nun stellt sich allerdings die Frage nach dem Sinn und der Notwendigkeit. Der Lehrplan der siebten Klasse sieht zwar eine „Präzisierung“ des Grenzwertbegriffes vor, allerdings nicht in so großem Ausmaß.

Ist es somit notwendig, die exakte Definition zu kennen, um ihn auf die geforderte Stetigkeit und Differenzierbarkeit anwenden zu können oder reicht die intuitive Vorstellung?

Es ist mit Sicherheit kein Nachteil, etwas mehr über die Thematik zu wissen, allerdings sollte man bedenken, dass es durchaus möglich sein kann, die Lernenden damit zu überfordern. Vergleicht man „Mathematik 7“ mit „Mathematik verstehen – Band 7“ so kann man festhalten, dass im ersten Lehrwerk zu wenig Kontext behandelt und - im Gegensatz dazu - im Zweiten zu viel Bezug auf den Grenzwertbegriff genommen wird.

Im Gegensatz dazu steht „Thema Mathematik“. Die Autoren fügen den Grenzwertbegriff kurz und knapp in den Verlauf des Kapitels „Differentialrechnung – Grundlagen“ ein, nehmen aber wenig Bezug darauf, so dass die Wichtigkeit verloren geht. Insbesondere vergessen sie auf die Erwähnung des Zusammenhangs Stetigkeit – Differenzierbarkeit. Man streift die Thematik dieser drei Begriffe lediglich, was mit großer Wahrscheinlichkeit dazu führen könnte, dass den Schülerinnen und Schülern dieses Zusammenwirken Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit vorenthalten bleibt. Auch die vorgesehenen Übungsaufgaben zu diesem Thema beschränken sich somit auf ein Minimum.

Vergleicht man nun „Dimensionen Mathematik“ mit den bisher analysierten, so lässt sich dieses vom Stoffumfang am ehesten mit „Mathematik verstehen2 vergleichen. Die Autoren legen großen Wert auf die mathematische Korrektheit und die Behandlung der Thematik. Allerdings versuchen sie auch dieses Stoffgebiet schüler/schülerinnenfreundlich zu gestalten. Man arbeitet viel mit Erklärungsbeispielen, Skizzen und Abbildungen, die die Komplexität des Themas reduzieren sollen. Es wird viel mit diversen Lernmethoden gearbeitet und damit auch auf die soziale Komponente im Unterricht geachtet.

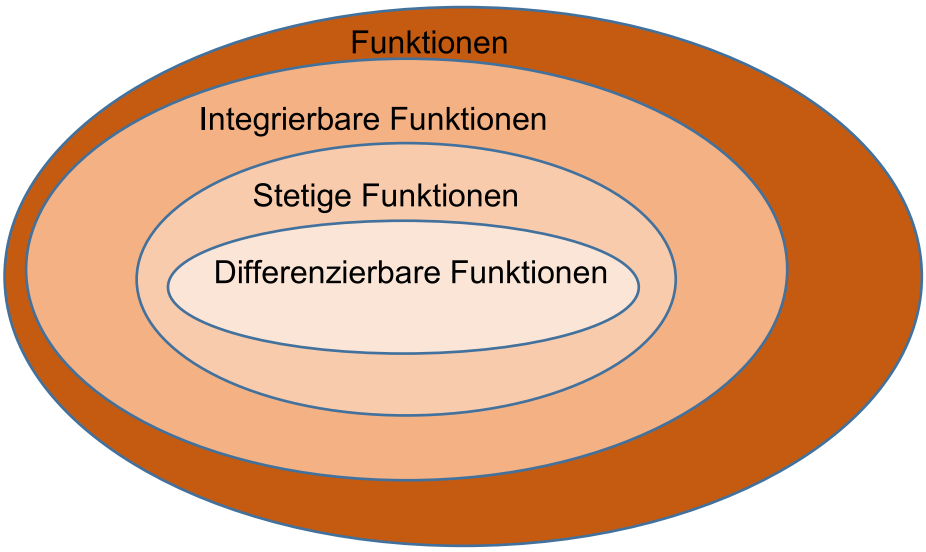
Wie wird in der achten Klasse auf diese Begriffe aufgebaut?

Die Begriffe Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit nehmen, wie man sieht, einen großen Teil des Siebte-Klassen-Stoffes ein. Daher könnte man vermuten, dass in der achten Klasse darauf aufgebaut wird.

Betrachtet man allerdings die Folgeexemplare der oben genannten Lehrwerke, so stellt man fest, dass die Schulbuchautoren bereits davon ausgehen, dass die Begriffe verinnerlicht wurden und bereit zur Anwendung sind.

In allen Exemplaren findet man zwar die Begriffe wieder, allerdings wird kein Wert auf Wiederholung dieser Begriffe gelegt. Man verwendet die Begriffe in Sätzen und Definitionen und nützt die Bedingung der Stetigkeit in Beweisen. Mit Ausnahme eines Lehrwerkes wird davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler die Definitionen von Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit ohne Probleme der Deutung verwenden können und ihre Bedeutung in den folgenden Begriffsklärungen verstehen. Diese Ausnahme bildet das Schulbuch „Mathematik 8“. Als einziges Lehrwerk behandelt es den Zusammenhang mit der neuen Thematik des Integrierens in einem kurzen Absatz und führt darüber hinaus auch noch den Zusammenhang zwischen stetig und integrierbar an. Weiters wird erwähnt, dass man Funktionen trotz Unstetigkeitsstellen integrieren kann, was in den anderen Büchern als gegeben voraussetzt. Es bildet auch ein Diagramm zur Klassifizierung der Menge der Funktionen ab, welches hier sinngemäß wiedergegeben werden soll:

Abbildung 7: Klassifizierung der Funktionen.



Vgl. Götz (2013); S.90

In einer kurzen Beschreibung wird der Zusammenhang, der im Diagramm abgebildet wird, erklärt und mit dem Stoff der siebten Klasse in Verbindung gebracht.

Anschließend wird im Kompetenzcheck dieses Wissen überprüft, in dem die Schülerinnen und Schüler die gegebenen Behauptungen als richtig oder falsch einstufen sollen:

- Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- Beim bestimmten Integral handelt es sich um einen positive Zahl.
- Es gibt unstetige Funktionen, die integrierbar sind.
- Es gibt unstetige Funktionen, die differenzierbar sind.
- Beim bestimmten Integral handelt es sich um eine kontinuierliche Summe.
- Hat eine Funktion eine Stammfunktion, dann hat sie unendlich viele.[53]

Eingestuft wird diese Aufgabe als *höherwertige Grundkompetenz*, die dem Inhaltsbereich der Analysis zugeschrieben wird und den gegebenen Fertigkeiten:

- AN 3.1.: Den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN 4.1.: Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

Wie man also erkennen kann gibt es genügend Kompetenzen, in denen man diese Begriffe abprüfen könnte. Leider sieht es in der Realität anders aus, denn man findet kaum Übungsmaterial zu Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit – Integrierbarkeit.

Darüber hinaus ist der Zusammenhang dieser Begriffe oft mit Fehlvorstellungen verbunden, die sich aus der Anzahl angeführter formaler Definitionen ergeben. Diese sollen im folgenden Kapitel angeführt werden.

[53] Götz (2013), S.117

Wieso haben die Lehrwerke diesen Aufbau?

Nach eingängiger Analyse der oben genannten Lehrwerke fragt man sich, wieso die Schulbuchautoren diesen Aufbau gewählt haben. Wieso legt man so viel Wert auf eine exakte mathematische Abhandlung der Stoffgebiete und warum werden diese dann in so geringem Ausmaß abgeprüft?

Aus einem Artikel von Manfred Kronfellner geht hervor, dass dieses Bestreben nach mehr Exaktheit im Unterricht aus der Umgestaltung der Lehrpläne der 60er Jahre erhalten blieb, welche sich die Universitätsmathematik als Vorbild nahm.[54]

In der Analyse der Schulbücher konnte man erkennen, dass oft am Beginn eines neuen Kapitels mit intuitiven Vorstellungen gearbeitet wurde und diese dann erst weit aus später mathematisch exakt definiert wurden. Aber weshalb?

„The derivative was first *used*; it then was *discovered*; it was then *explored* and *developed*; and it was finally *defined*“[55]

Man könnte fast meinen, die Autoren unserer Schulbücher richten sich nach der Geschichte unserer Mathematik. Es ist bekannt, dass die Mathematiker des 19. Jahrhunderts oft nur mit intuitiven Begriffvorstellungen gearbeitet haben, bis jemand nach ihnen diese definiert und festgelegt hat. So wie Cauchy nie einen expliziten Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Stetigkeit machte, diese aber für viele Beweise explizit voraus setzte, arbeiten auch unsere Schülerinnen und Schüler oft nur mit intuitiven Vorstellungen.

Gerade bezüglich der behandelten Thematik fehlt es oft an Verständnis. Wieso sollte man einen intuitiven Grenzwertbegriff durch eine genaue, oft viel zu unverständliche Definition verwerfen, wenn man doch auch so damit arbeiten kann?

Universitätsprofessor Hans Humenberger begründet diesen Sachverhalt, in seiner Vorlesung *Schulmathematik der Differential- und Integralrechnung*, mit der Würdigung der Leitungen in diesem Fachgebiet:

---

[54] Vgl. Kronfellner (1982), S. 118
[55] Grabiner (1983), S.195

> Der Grenzwertbegriff (…) und seine Auswirkungen waren der Knackpunkt in der Exaktifizierung der Analysis, der lange auf sich warten ließ, um den die mathematische Community Jahrhunderte „gekämpft“ hatte; deswegen sollte eine Präzisierung im Mathematikunterricht nicht fehlen![56]

Eine Exaktifizierung der Begriffe hat somit nicht nur ein wertschätzerischen Aspekt, sondern schafft auch ein formales Fundament, auf dem man anschließend aufbauen kann. Weitere Vorteile dieser Präzisierung liegen nach Humenberger in der „besseren Absicherung und der Überprüfbarkeit theoretischer Resultate“ und in der „Vertiefung des Verständnisses für Zusammenhänge logischer Strukturen“.[57]

Doch sollte man auch die Nachteile dieses Vorganges nicht unerwähnt lassen. Wie schon im Kapitel über die Sinnhaftigkeit erwähnt, geht man mit der Fülle an zusätzlichen Informationen das Risiko der Überforderung seitens der Schülerinnen und Schüler ein. Will man mit der Exaktheit ein besseres Verständnis erzielen, so erreicht man vielleicht genau das Gegenteil. Die Gefahr besteht darin, dass bis dahin verstandene intuitive Begriffe verworfen werden und anschließend nicht mehr zur Anwendung taugen.

Um dieser Verwirrung zu entgehen, sollte man in den Lehrbüchern, aber auch im Unterricht selbst, darauf hinweisen, dass diesen strikten mathematischen Konstrukte eher dazu dienen höhere Mathematik zu betreiben und weniger dazu dienen konkrete Probleme zu lösen, der Vollständigkeit halber aber präsentiert werden müssen.

Darüber hinaus sollte man den Lernenden bewusst machen, dass mit mancher formalen Schreibweise, die Überleitung und das Verständnis eines neuen Themas dadurch oft einfacher wird. Das perfekte Beispiel bildet hier der Zusammenhang Grenzwert – Stetigkeit. Mit Hilfe des Grenzwertbegriffes kann man ganz einfach die Stetigkeit definieren und den Begriff damit *wertvoller* machen, da er oft nur eine untergeordnete Rolle im Mathematikunterricht der Oberstufe spielt.

Diese Art der Einführung in das Thema der Differentialrechnung kann auch in Kronfellners Artikel *Verschiedene Zugänge zur Differentialrechnung*

---

[56] http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/SM-DIFF-INT/06-Exaktifizierung-des-Grenzwertbegriffes.pdf am 16.07.2014 um 17:30 Uhr
[57] Ebd.

wiedererkennen. Er fasst die verschiedenen Varianten in sechs Gruppenzusammen: [58]

- Grenzwert von Sekantensteigungen
- Änderungsraten
- Stetige Fortsetzung
- Lineare Approximation
- Lipschitz – Analysis (…)
- Grenzwertfreie Zugänge

Er bezeichnet den Zugang über den Grenzwert von Sekantensteigungen als den „klassischen", der über die Einführung der Grundbegriffe führt. So ist es nicht verwunderlich, dass dieser Zugang auch in unseren Schulbüchern wiederzufinden ist.

Der Weg zur Differentialrechnung über die Einführung des Grenzwert- und Stetigkeitbegriffes ist aber oft mit vielen Problemen verbunden, die Humenberger wiederum in seiner Vorlesung thematisiert. Er geht davon aus, dass man ursprünglich den Begriff der stetigen Funktion nur einführte, um Funktionen zu beschreiben, die man *in einem durch* zeichnen kann. Im Laufe der Zeit entwickelte die exakte Definition der Stetigkeit jedoch ihr Eigenleben und führte damit zur Schaffung einiger Fehlvorstellungen des Begriffes.[59]

Die wichtigsten und häufig vorkommenden Fehlvorstellungen sollen hier kurz zusammengefasst werden:[60]

1. stetig an einer Stelle bedeutet durchzeichenbar
2. stetig in x_0 aber nicht differenzierbar bedeutet, dass hier ein „Knick" sein muss
3. Ableitungen müssen stetig sein

[58] Kronfellner (1982), S. 119
[59] http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/SM-DIFF-INT/06-Exaktifizierung-des-Grenzwertbegriffes.pdf am 16.07.2014 um 18:08 Uhr
[60] Ebd.

Sollte man als Lehrkraft bemerken, dass sich diese falschen Verbindungen in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler bildet, so sollte man mit folgenden Gegenbeispielen argumentieren, die die Fehlvorstellungen beseitigen sollten:

(ad 1)

Betrachten wir die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

.Die Funktion ist stetig bei 0, denn es gilt:

$$\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}) = 0$$

$$\text{da } x\to 0 \text{ und } \sin\frac{1}{x} \text{ beschränkt ist.}$$

Um das ganze auch graphisch zu untermauern, sollte man den Schülerinnen und Schülern auch das Bild des dazugehörigen Graphen zeigen, oder sie selbst mit einem Computerprogramm zeichnen lassen.

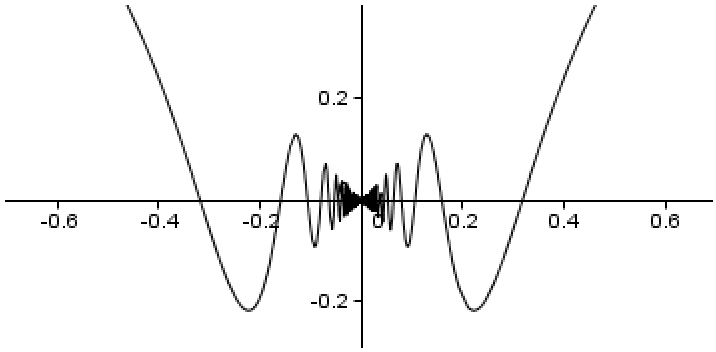


Abbildung 8 zeigt den Graphen der Funktion f

Lässt man die Lernenden am Computer arbeiten, wird der Lerneffekt höher sein, als wenn man ihnen den Graphen lediglich präsentiert. Ihnen wird bewusst werden, dass man die Funktion, obwohl sie stetig ist, nie exakt nachzeichnen können wird.

(ad 2)

Obiges Beispiel kann man weiterführend auch für die Wiederlegung der zweiten Fehlvorstellung verwenden. Um den Effekt des Selbsterfahrens zu integrieren, könnte man die Schülerinnen und Schüler überprüfen lassen, ob die gegebene Funktion an der Stelle 0 differenzierbar ist.

Wie sie sehen werden ist sie nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})$$

und $\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})$ existiert nicht.

Somit werden sie erkennen, dass eine nicht differenzierbare Funktion nicht unbedingt einen Knick an der Stelle aufweisen müssen.

(ad 3)

Die Beweisführung zu dieser Vorstellung ist ähnlich zu den obigen zwei.

Man gibt den Schülerinnen und Schülern die Funktion f vor mit:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

und lässt sie die Graphen mit Hilfe eines Computerprogrammes zeichnen:

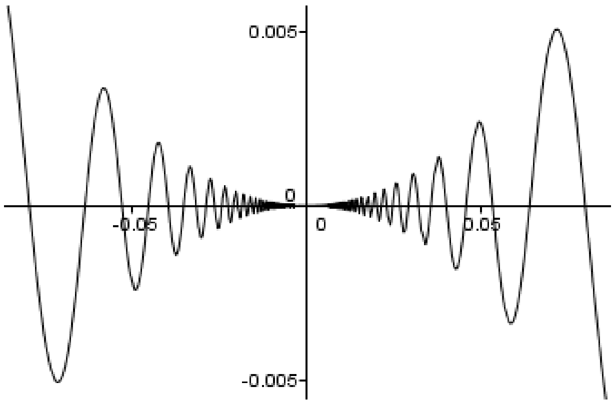


Abbildung 9 zeigt den Funktionsgraphen von f

Man lässt sie die Funktion ableiten und erhält für x ≠ 0: $f'(x) = 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$ und für x = 0:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0,\ \text{da } \sin\frac{1}{x} \text{ beschränkt ist.}$$

und kann somit schreiben:

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Nun lässt man die Schülerinnen und Schüler die Stetigkeit von f´(x) bezüglich 0 testen und sie werden sehen, dass $cos\frac{1}{x}$ oszilliert und daher $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ nicht existiert und f´(x) an der Stelle 0 nicht stetig ist:

$$\lim_{x\to 0} 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 2xsin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x} = 0 - \lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$$

Mit diesen Beispielen, kann man somit die Schülerinnen und Schüler durch eigenständiges Berechnen auf diese falschen Vorstellungen hinweisen und gleichzeitig die geforderte Computertechnologie in den Unterricht miteinbauen.

Anhand dieser vorgeführten Beispiele ergibt sich auch die Motivation, mehr Aufgaben dieser Art anzugeben, da sie erstens die geforderten Grundkompetenzen abdecken – sowohl die der Matura also auch des Lehrplans – und zweitens den Zugang zur Technologie im Unterricht möglich machen, denn betrachtet man die bereits vorhandenen Beispiele zu diesem Thema, wird man feststellen, dass diese sehr eintönig und oft nichts-aussagend sind.

VIERTER TEIL

Wie werden Grenzwert – Stetigkeit - Differenzierbarkeit überprüft?

Neben den verfügbaren Übungsbeispielen aus diversen Lehrbüchern stellt das BIFIE auf ihrer Homepage einen Aufgabenpool zur Verfügung, zu dem Schülerinnen und Schüler öffentlich, und jeder Zeit Zugang haben, um die von ihnen geforderten Fertigkeiten selbstständig üben zu können.

Auf der Startseite des Pools kann man vorweg angeben, welchen Inhaltsbereich und welche Schulstufe geübt werden will. Wir beschränken bei der Suche nach geeigneten Beispielen auf den Inhaltbereich der Analysis und der Funktionalen Abhängigkeiten für die Schulstufen sieben und acht.

Positiv ist vorweg zu erwähnen, dass die Startplattform sehr übersichtlich gestaltet ist und somit die Suche nach geeignetem Übungsmaterial wesentlich vereinfacht.

Allerdings ergab die Suche im Aufgabenpool keinerlei Ergebnisse. Es ist kein einziges Beispiel für die Überprüfung der hier behandelten Begriffe vorhanden. Auch auf der Homepage des bmukk findet man keinerlei brauchbares Material, die man zur Überprüfung dieses Grundwissens verwenden könnte.

Man kann also festhalten, dass es weder im Bereich der maturarelevanten Grundkompetenzüberprüfung, noch in den vom Ministerium zur Verfügung gestellten Modellschularbeitensammlung Beispiele gibt, die man als Lehrkraft im Unterricht verwenden könnte. Die Lehrpersonen sind hier auf sich selbst gestellt und müssen selbst kreativ tätig werden. Dabei können sie selbst entscheiden, wie vertiefend die Übungsmaterialen werden sollen.

Im Anschluss an dieses Kapitel werden nun einige Beispiele inklusive Lösungen und didaktischem Kommentar gezeigt, die dazu dienen sollen die Begriffe Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit

Selbsterstellte Musteraufgaben

Im Folgenden werden nun also Beispiele gezeigt, die sowohl in ihren Niveaustufen, also auch in den Inhaltbereichen variieren.

Die Autorin dieser Arbeit hat versucht, die gestellten Aufgaben den Grundkompetenzen zuzuordnen und einen möglichst einfachen Lösungsweg anzugeben. Die Beispiele werden in diversen Aufgabenformaten gestellt, die man allerding beliebig umändern und vertauschen kann.

Die Form der Aufgaben entspricht der vorgegebenen des BIFIE, welche folgende Informationen enthalten:

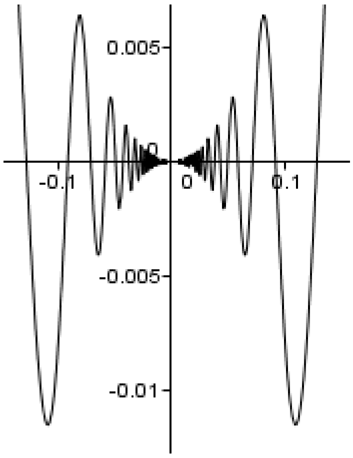
- Titel des Themas
- Handelt es sich um Typ-1 oder Typ-2 Aufgaben?
- Welche Hilfsmittel dürfen verwendet werden?
- Welche Kompetenz wird angesprochen?
- Welcher Aufgabentyp liegt vor?

Im anschließenden didaktischen Kommentar soll versucht werden, die möglichen Einsatzbereiche zu definieren. Informationen über den vorausgesetzten Leistungsstand der Schülerinnen und Schülern soll den Lehrpersonen helfen, das Material adäquat im Unterricht einsetzen zu können.

Stetigkeit - Differenzierbarkeit

Typ-1-Aufgabe		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1	

$$\textit{Gegeben ist die reelle Funktion } f \textit{ mit } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Funktion f ist stetig bei x = 0.	
f´ ist stetig bei x = 0.	
Die Funktion ist in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.	
f´ ist differenzierbar.	
Die Funktion f ist stetig differenzierbar.	

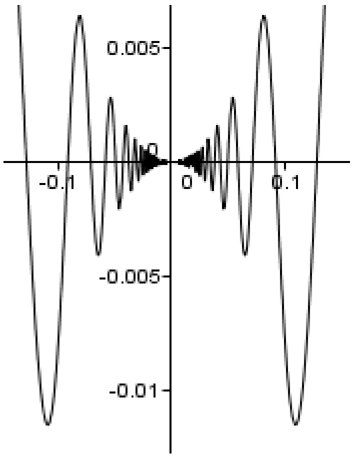
Stetigkeit – Differenzierbarkeit
Lösung

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Funktion f ist stetig bei x = 0.	☒
f´ ist stetig bei x = 0.	
Die Funktion ist in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.	☒
f´ ist differenzierbar.	
Die Funktion f ist stetig differenzierbar.	

Didaktischer Kommentar

Dieses Beispiel dient zur Überprüfung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
Es wird vorausgesetzt, dass den Schülerinnen und Schülern diese Begriffe sowie deren Zusammenhang bekannt sind. Sie müssen in der Lage sein, Grenzwerte zu berechnen. Dazu sind gewöhnliche Hilfsmittel erlaubt, wobei man diese Aufgabe ohne Probleme auch händisch berechnen lassen kann.

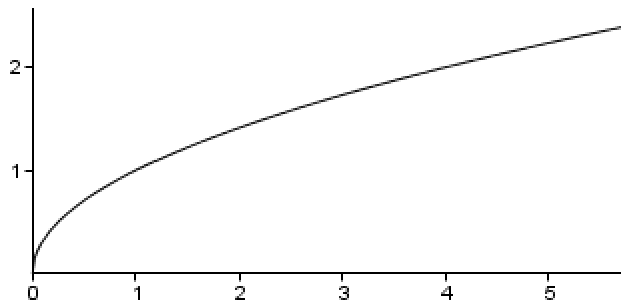
Diese Aufgabe eignet sich zur Übung, wenn man einen leistungsdifferenzierten Unterricht führen will und Schüler oder/ und Schülerinnen hat, die gefordert werden wollen, da es ein höheres Kompetenzniveau anspricht.
Daher eignet es sich nicht zur Anwendung in Schularbeiten.

Ohne weiteres eignet sich dieses Beispiel als Material für Wahlfächer, wobei man anschließend an diese Aufgabe den Begriff stetig differenzierbar genauer betrachten kann. Wird das Beispiel nur im Unterricht zu Übungszwecken genutzt, sollte man den Schülerinnen und Schülern den Begriff der stetig differenzierbaren Funktion kurz erläutern.

Stetigkeit - Differenzierbarkeit

Typ-1-Aufgabe		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.1	

Gegeben ist die Funktion f mit $f: [0; \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte mathematische Aussage entsteht!

Die Funktion f ist ______①______ bei x = 0, weil ______②______.

①	
stetig	
differenzierbar	
unstetig	

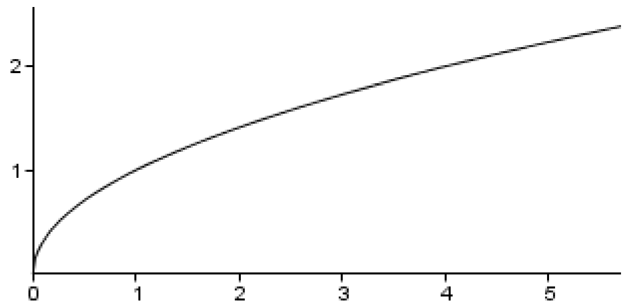
②	
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \infty$	
sie nur auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist.	
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$	

Stetigkeit – Differenzierbarkeit
Lösung

Typ-1-Aufgabe		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.1

Gegeben ist die Funktion f *mit* $f\colon [0;\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte mathematische Aussage entsteht!

Die Funktion f ist _______ ① _______ bei x = 0, weil ________ ② _______.

①	
stetig	☒
differenzierbar	
unstetig	

②	
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\infty$	
sie nur auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist.	
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	☒

Didaktischer Kommentar

Dieses Beispiel eignet sich sowohl als Übungsaufgabe im Unterricht, als auch als Schularbeitsbeispiel, da es nur die wesentlichen Begriffe wie stetig, differenzierbar und unstetig abverlangt, sowie deren Definitionen. Es spricht somit nur eine einfach gestaltete Grundkompetenz an.

Um auf die korrekte Lösung zu kommen werden keinerlei Hilfsmittel benötigt und daher auch nicht gestattet.
Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, den Grenzwert der Wurzelfunktion zu berechnen und sich darüber hinaus auch an deren Eigenschaften erinnern, um die falschen Antworten herausfiltern zu können.

Man könnte dieses Beispiel abwandeln, indem man den Graphen der Wurzelfunktion entfernt und die Schülerinnen und Schüler selbst skizzieren lässt. Die würde einen vertieften Reflexionsvorgang bewirken, da sie sich auch an den richtigen Definitionsbereich erinnern müssten, oder die Zeichensetzung $f: [0; \infty) \to \mathbb{R}$ richtig deuten können.

Durch diese variable Gestaltungsmöglichkeit ist die Lehrkraft im Stande, dieses Beispiel komplexer zu gestalten und andere Kompetenzen anzusprechen.

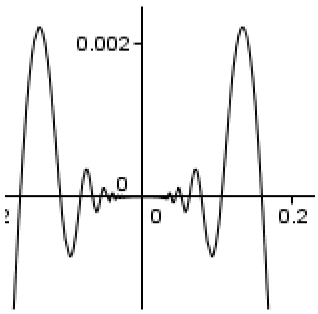
Differenzierbarkeit

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.2 & AN 2.1

$$\textit{Gegeben ist die Funktion } f \textit{ mit } f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Aufgabenstellung:

Überprüfen Sie, ob die Funktion f differenzierbar ist!

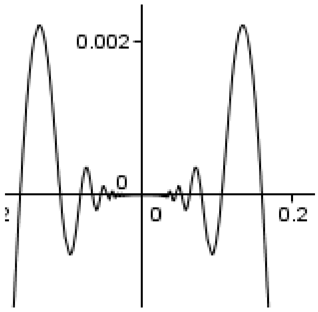
Differenzierbarkeit
Lösung

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.2 & AN 2.1

$$Gegeben\ ist\ die\ Funktion\ f\ mit\ f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Betrachtet man den Fall $x \neq 0$, so ist f(x) differenzierbar, da die Verknüpfung differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar ist und es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Bezüglich x = 0:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Somit existiert der Differentialquotient an der Stelle x = 0 und damit ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe eignet sich vor allem für Wahlfächer oder einen naturwissenschaftlichen Zweig, da sie nur zum Teil den Ansprüchen einer Typ-1-Aufgabe erfüllt, da mehr als eine Grundkompetenz angesprochen wird.

Der Schüler/ Die Schülerin muss sowohl den Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Differenzialquotient auf der Grundlage des Grenzwertbegriffes beherrschen, als auch die Ableitungsregeln verinnerlicht haben. Daher ist diese Aufgabe als komplex einzustufen.

Lehrerinnen und Lehrer, die dieses Beispiel dennoch im Unterricht einbauen wollen, sollten es daher zusammen ihren Lernenden Schritt für Schritt durchgehen, um Unklarheiten rechtzeitig beseitigen zu können.

Stetigkeit

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: Zuordnung	Grundkompetenz: FA 1.9

$$\textit{Gegeben ist die reelle Funktion } f \textit{ mit } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Aussagen die richtigen Begründungen zu!

Die Stelle x = -1 ist nicht relevant.	**A**
Der Graph ist im Intervall streng monoton fallend.	**B**
Die Funktion ist unstetig bei x = 1.	**C**
Die Funktion besitzt eine Nullstelle bei x = 0.	**D**

	Hier hat die Funktion eine Polstelle.
	Der Zähler ist x.
	0 liegt im Definitionsbereich.
	Es gilt f´(x) > 0 für 0 ≤ x ≤ 5
	Sie liegt nicht im Definitionsbereich.
	Es gilt f´(x) < 0 für 0 ≤ x ≤ 5

Stetigkeit
Lösung

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: Zuordnung	Grundkompetenz: FA 1.9

$$\textit{Gegeben ist die reelle Funktion } f \textit{ mit } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1}, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Aussagen die richtigen Begründungen zu!

Die Stelle x = -1 ist nicht relevant.	**A**
Der Graph ist im Intervall streng monoton fallend.	**B**
Die Funktion ist unstetig bei x = 1.	**C**
Die Funktion besitzt eine Nullstelle bei x = 0.	**D**

C	Hier hat die Funktion eine Polstelle.
D	Der Zähler ist x.
	0 liegt im Definitionsbereich.
	Es gilt f´(x) > 0 für 0 ≤ x ≤ 5
A	Sie liegt nicht im Definitionsbereich.
B	Es gilt f´(x) < 0 für 0 ≤ x ≤ 5

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe eignet sich als sowohl als Übungsaufgabe im Unterricht, als auch als Schularbeitsangabe. Es erfüllt die Anforderungen einer Typ-1-Aufgabe, da sie nur die folgende Grundkompetenz überprüft:

- ✓ Einen Überblick über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen geben, (…) und den Verlauf mathematisch beschreiben können.

Die Schülerinnen und Schüler müssen für diese Aufgabe bereits mit gebrochen rationalen Funktionen gearbeitet haben, und deren Eigenschaften kennen. Für die Berechnung der Nullstelle und der Polstelle benötigt man keinerlei Hilfsmittel, kann sie aber im Zweifelsfall zulassen.
Insbesondere müssen sie den Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitungsfunktion verinnerlicht haben und ihr Wissen über bestimmte Unstetigkeitsstellen trainiert haben.

Stetigkeit		
Typ-1-Aufgabe		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.9	

Gegeben ist ein Teil einer stückweise definierten Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ f_{2(x)} = ?, & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabenstellung:

Welche Funktionen $f_2(x)$ ergänzen f zu einer stetigen Funktion? Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$f_2(x) = x$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}(x+1)$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 0{,}5$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}x - 0{,}5$	✓

Stetigkeit
Lösung

Typ-1-Aufgabe

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.9

$$Gegeben\ ist\ ein\ Teil\ einer\ stückweise\ definierten\ Funktion\ f\ mit$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ f_{2(x)} = ?, & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabenstellung:

Welche Funktionen $f_2(x)$ ergänzen f zu einer stetigen Funktion? Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$f_2(x) = x$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}(x+1)$	☒
$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$	✓
$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 0{,}5$	☒
$f_2(x) = \frac{1}{2}x - 0{,}5$	✓

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe eignet sich für den Einsatz im Unterricht und als Schularbeitsaufgabe, da es ein sehr einfaches Komplexitätsniveau aufweist.

Die Schülerinnen und Schüler müssen, um auf die korrekte Lösung zu kommen folgende Punkte beherrschen:

- ✓ Wissen, was Stetigkeit bedeutet.
- ✓ Schnittpunkte zweier Funktionen berechnen können bzw.
- ✓ Überprüfen können, ob zwei Funktionen einen gemeinsamen Punkt aufweisen.
- ✓ Termumformungen

Dazu sind einfache, gewöhnliche Hilfsmittel erlaubt. Dieses Kriterium kann man allerdings abändern und diverse Hilfsmittel verbieten.

Diese Aufgabe lässt sich leicht abändern, indem man statt der Funktionsgleichung den Graphen in ein Koordinatensystem einzeichnen lässt.

FAZIT

Ziel dieser Diplomarbeit war es, die Wichtigkeit der Begriffe Grenzwert - Stetigkeit in der neuen Reifeprüfung zu untersuchen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass man in den neunen Kompetenzen der Matura diesen Begriffen – vom mathematischen Standpunkt aus – wenig Bedeutung schenkt, da sie entweder gar nicht, oder nur intuitiv und sinngemäß verlangt werden. So wird auf eine genaue, exakte Definition im Wesentlichen verzichtet.

Diese Arbeit zeigt durch die Schulbuchanalyse auch, dass im Gegensatz zum schlussendlich geforderten, viel mehr Wert auf diese Begriffe gelegt wird. So werden Definitionen und Folgerungen sehr breit getreten und in mühsamer Aufbauarbeit erklärt.

Es stellt sich die Frage, wozu diese Exaktheit, wenn man schlussendlich nichts davon im Alltag verwenden kann? Wozu benötigt man im realen Leben eine genaue Definition des Grenzwertbegriffes, die nur wenige im Stande sind zu verstehen?

Als äußerst sinnlos ergibt sich die Aufarbeitung des Themas, wenn man schlussendlich nicht einmal in den Schulbüchern selbst dazu abgeprüft wird, oder das Wissen in nur wenigen Beispielen konkret verlangt wird. Warum also verwendet man ganze Kapitel, um ein Thema, welches in Endeffekt keine Wichtigkeit trägt, so genau zu erklären? Und vor allem ist es auffällig dass diese Großzügigkeit in allen untersuchten Lehrbüchern vorkommt.

Gründe finden wir in den Lehrplänen und Hintergedanken der vorgegeben Grundfertigkeiten Den Schülern und Schülerinnen soll das Wesentliche abverlangt werden und sie sollen im Stande sein, nach ihrer schulischen Laufbahn, gewisse Begriffe mit der Mathematik in Verbindung zu bringen. Wenn man allerdings nur das notwenigste erklärt, so bleibt mit Sicherheit nicht alles hängen. Erklärt man mehr als gefordert, so bleibt zumindest am Ende das Wesentliche über.

Daher lässt es sich einfach begründen, warum man in den heutigen Lehrwerken wesentlich mehr findet als gefordert.

> Wenn wir davon ausgehen, dass 20% von dem, was gelernt wird, längerfristig verfügbar bzw. abrufbar behalten werden kann, wäre es fatal, sich im Unterricht auf diese 20% zu beschränken – dann würden ja wieder nur 20% davon übrig bleiben …[61]

Abschließend kann man also sagen, dass eine eindeutige Diskrepanz zwischen den geforderten Fertigkeiten und der Umsetzung in den Schulbüchern zu erkennen ist, die allerdings nicht zum Nachteil für Schülerinnen und Schüler wird, da es immer besser ist mehr zu wissen, als unbedingt nötig ist.

[61] Zitat: Roland Fischer übernommen aus: BIFIE (2011), S. 5

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit widmete sich der Frage, wie die Begriffe der Stetigkeit und des Grenzwertes im Zusammenhang mit der neuen Reifeprüfung im Unterricht eingeführt werden und wie auf diese anschließend aufgebaut wird. Dabei stand der Bezug auf die Differentialrechnung im Vordergrund.

Die vorliegende Arbeit ist in vier Teile gegliedert, die sich mit folgenden Punkten beschäftigen:

- Der Frage nach der Notwendigkeit einer neuen Reifeprüfung.
- Die Umsetzung der neuen Kompetenzen im Unterricht anhand einer Lehrbuchanalyse.
- Die genauere Betrachtung des oben genannten Punktes im Bezug auf die Begriffe Stetigkeit und Grenzwert.
- Die Analyse der bereits vorhandenen Überprüfungsaufgaben und eventuelle weitere Aufgaben.

In einem ersten Schritt wird von der Fragestellung ausgegangen, warum Österreich eine neue Form der Reifeprüfung benötigt und wie diese zukünftig aufgebaut werden soll. Dabei wird vor allem auf die Einführung der neuen Grundkompetenzen ausgegangen und weiterführend werden diese mit dem vorhandenen Lehrplan verglichen und gegenübergestellt.

Anschließend wurde eine Lehrbuchanalyse durchgeführt, um festzustellen, ob mit der neuen Form der Schulbücher auch die geforderten Fertigkeiten erreicht werden können. Dabei wurden jene Exemplare gewählt, die führend im Schulalltag zum Einsatz kommen.

In diesem Sinne wurde im dritten Schritt Bezug auf das spezielle Thema der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit genommen. Hierbei wurden die einzelnen Lehrwerke auf die Umsetzung und Einführung dieser Begriffe untersucht. Unter

Berücksichtigung der Frage nach der Sinnhaftigkeit der einzelnen Methoden wurde versucht, eine genaue Analyse abzuliefern.

Anhand der gesammelten Informationen wurde im vierten und letzten Teil untersucht, ob die gestellten Aufgaben, welche man in den Lehrwerken und darüber hinaus auf einigen Internetseiten finden kann, auch die gewünschten Inhaltbereiche adäquat überprüfen. Ausgehend von diesen bereits vorhandenen Beispielen wurden abschließend eigene Beispiele erstellt, die sowohl Lösungen als auch didaktischen Kommentar beinhalten.

ABSTRACT

This work deals with the question how the notions of continuity and limits are introduced in school classes in connection with the new school leaving examination in Austria. Moreover, it is studied how further contents of the curriculum are based in these notions where special attention is paid to the topic of differential calculus.

This thesis divides into four parts which deal with the following:

- The question of necessity of a new form of the school leaving examination.
- The implementation of the new competences in class by means of an analysis of school books.
- A closer look at the latter concerning the notions continuity and limits.
- The analysis of currently available exercises and possible further exercises

In a first step, the question why there is a need for a new form of the school leaving examination in Austria and how it should be implemented is addressed. The emphasis lies on the introduction of the new basic competences which will further be compared with the current curriculum.

Following this, an evaluation of school books will be performed in order to determine whether the demanded level of competence can be reached by their use. Here, widely used books have been considered.

In this sense, in the third step special attention has been payed to the notions of limits and continuity. Here, the class books have been investigated with respect to the introduction and the treatment of these notions. Under consideration of the sense of purpose of all the methods, a precise evaluation is provided.

With the aid of the collected information, in the fourth and last part of this work it has been investigated whether the exercises which can be found in the school books and on some webpages provide adequate ways to check the desired contents. Finally, based on these available exercises, new problem sets containing solutions as well as didactic comments have been created.

QUELLENVERZEICHNIS

Literaturverzeichnis

BIFIE (2011) Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. Leykam: Graz

BIFIE (2013a) Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 2. Leykam: Graz

BIFIE (2013b) Die standardisiere schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Leykam: Graz

Bleier, G. u.a. (2012) Dimensionen Mathematik. Teil 8. 1. Auflage. Dorner: Wien

Bleier, G. u.a. (2013) Dimensionen Mathematik. Teil 7. 2. Auflage. Dorner: Wien

Brand, C. u. a. (2013) Thema Mathematik. Teil 7.3. Auflage. Veritas: Linz

Brand, C. u. a. (2013) Thema Mathematik. Teil 8.1. Auflage. Veritas: Linz

Götz, S. u.a. (2010) Mathematik. Teil 5. 1. Auflage. öbv: Wien

Götz, S. u.a. (2011) Mathematik. Teil 7. 1. Auflage. öbv: Wien

Götz, S. u.a. (2013) Mathematik. Teil 8. 1. Auflage. öbv: Wien

Heuser, H. (2000) Lehrbuch der Analysis. Teil 1. 13. Auflage. Teubner GmbH: Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden

Koschka, D. (2011) Die zentrale schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik – Einstellung und derzeitiger Wissensstand des Lehrpersonals. Diplomarbeit. Universität Wien

. Lützen, J. (1999) Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Jahnke, H. N. (Hg.): Geschichte der Analysis, Spektrum: Heidelberg/ Berlin, S. 191 – 242

Malle, G. u.a. (2012) Mathematik verstehen. Teil 8. 1. Auflage. öbv: Wien

Malle, G. u.a. (2013) Mathematik verstehen. Teil 7. 1. Auflage. öbv: Wien

Malle, G. u.a. (2014) Mathematik verstehen - Maturatraining. 1. Auflage. öbv: Wien

OECD/PISA (2003). The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD: Paris

Thiele, R. (1999) Antike, In: Jahnke, H. N. (Hg.): Geschichte der Analysis, Spektrum: Heidelberg/ Berlin, S.5 – 36

Zeitschriften

Grabiner, J. (1983) The Derivative from Fermat to Weierstrass. In: Math. Magazine, Nr. 56 von 1983, S.195 - 206

Nussbaumer, A (2010) Mathematikunterricht im Spannungsfeld zwischen Lehrplan. Standards, Grundkompetenzen und Technologien. In: *ÖPU Nachrichten, Nr. 4 vom Dezember 2010, S. 18*

Internetquellen

Humenberger, H.(o.D) Exaktifizierung des Grenzwertbegriffes – Stetigkeit – Fehlvorstellungen. http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/SM-DIFF-INT/06-Exaktifizierung-des-Grenzwertbegriffes.pdf [Zugriff am 16.07.2014]

Kronfellner, M. (1982) Verschiedene Zugänge zur Differentialrechnung. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1982%20Band%209/Kronfellner1982.pdf [Zugriff am 23.7.2014]

ABBILDUNGS- & TABELLENVERZEICHNIS

Lebenslauf

Name: Lisa Groschner

Adresse: Hauptplatz 31/4 in 2534 Alland

E-Mail-Adresse: lisa.groschner@gmx.net

Geburtsdatum und -ort: 2.5.1989 in Wien

Familienstand: ledig

Schulbildung

seit Oktober 2007: Studium an der Universität Wien (Mathematik und Spanisch Lehramt)

Juni 2007: Matura am BG/BRG Baden Frauengasse

Fachbezogene Berufserfahrung:

seit September 2013: Lehrerin mit Sondervertrag am BG/BRG Mödling Keimgasse

Februar 2008 bis August 2011: freier Dienstnehmer am Institut für Lernhilfe Baden