

Dissertation

Titel der Dissertation

„Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht

—

Chancen aus der Sicht der Mathematikdidaktik“

Verfasser

Christoph Ableitinger

angestrebter akademischer Grad

Dr. rer. nat.

Wien, im Jahr 2008

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 091 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Dr.-Studium der Naturwissenschaften, Mathematik

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	6
1 Biomathematik	10
1.1 Geschichte der Biomathematik	10
1.1.1 Die Anfänge	10
1.1.2 Die Mathematisierung beginnt	12
1.1.3 Das logistische Modell	13
1.1.4 Interaktionsmodelle	14
1.1.5 Kritik wird laut	16
1.1.6 Das Exklusionsprinzip	17
1.1.7 Populationsgenetik	19
1.2 Teilgebiete der Biomathematik	19
1.2.1 Demographie	19
1.2.2 Populationsgenetik	20
1.2.3 Mathematische Ökologie	21
1.2.4 Epidemiologie	21
2 Mathematische Konzepte	22
2.1 Iteration	23
2.1.1 Rekursives Bildungsgesetz	25
2.1.2 Explizites Bildungsgesetz	27
2.1.3 Spinnweb-, Zeit- und Phasendiagramme	29
2.2 Differenzen- und Differentialgleichungen	35
2.2.1 Differenzengleichungen	35
2.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen	37
2.2.3 Vom kontinuierlichen zum diskreten Modell - heuristisch	38
3 Biomathematische Modelle	41
3.1 Modelle mit einer Zustandsgröße	41
3.1.1 Lineares Wachstum	41
3.1.2 Exponentielles Wachstum	43

3.1.3	Begrenztes Wachstum	46
3.1.4	Logistisches Wachstum	47
3.1.5	Schaeffer'sches Modell	54
3.1.6	Gompertz-Modell	55
3.1.7	Allee-Effekt 1	56
3.1.8	Allee Effekt 2	57
3.1.9	Ein einfaches Mutationsmodell	63
3.1.10	Fisher-Wright-Modell	64
3.2	Modelle mit zwei Zustandsgrößen	66
3.2.1	Mutualismus	66
3.2.2	Konkurrenz	69
3.2.3	Räuber-Beute-Modell	74
3.2.4	Natürliche Insektenvernichtung	75
3.2.5	Tourismus vs. Umweltattraktivität	77
3.2.6	SI-Modell 1	79
3.2.7	SI-Modell 2	80
3.2.8	Lesliemodell 1	81
3.3	Modelle mit drei Zustandsgrößen	83
3.3.1	Zwei Beutespezies und ein Räuber	83
3.3.2	SIR-Modell	85
3.3.3	Bevölkerungsdynamik	87
3.3.4	Stein-Schere-Papier-Spiel	88
3.3.5	SI-Modell mit zwei unterschiedlichen Erregern	90
3.4	Modelle mit mehr als drei Zustandsgrößen	92
3.4.1	Lesliemodell 2	92
3.4.2	Lineare Nahrungskette	94
4	Fachdidaktische Analyse	98
4.1	Biomathematik in österreichischen Schulen und Lehrplänen . .	98
4.2	Biomathematik in Schulbüchern	100
4.2.1	Unterstufe	101
4.2.2	Oberstufe	102
4.3	Didaktisches Potenzial der Biomathematik	105
4.3.1	Tabellenkalkulationen	106
4.3.2	Roter Faden Iteration	115
4.3.3	Systemdenken	117
4.3.4	Darstellungsformen	121
4.3.5	Beweisbedürftigkeit	123
4.3.6	Alltagsnähe Tätigkeiten	125
4.3.7	Mathematisches Modellieren	127
4.3.8	Fächerübergreifend und anwendungsorientiert	131

5	Allgemeine Wachstumsmodelle (Unterrichtsmaterialien)	135
5.1	Bemerkungen zu den Unterrichtsmaterialien	135
5.2	Allgemeine Wachstumsmodelle	138
5.3	Was wächst wie schnell?	140
5.4	Wie wachsen Menschen und ihre Bevölkerungen?	154
6	Räuber-Beute-Modelle (Unterrichtsmaterialien)	166
6.1	Wenn Luchse Hasen jagen	167
6.2	Auf den Spuren von Vito Volterra	181
6.3	Der Kampf ums Überleben	199
7	Symbiotische Systeme (Unterrichtsmaterialien)	210
7.1	Die Entstehung einer Siedlung	211
7.2	Wie du mir, so ich dir	221
8	Weitere Unterrichtsvorschläge	231
8.1	Ausbreitung von Epidemien	231
8.2	Modellierungsaufgaben aus der Biomathematik	240
9	Erfahrungen und Erkenntnisse aus dem Unterricht	245
9.1	Erfahrungen mit den Unterrichtsmaterialien	245
9.2	Beschreibung der Fallstudie	248
9.3	Design der Studie	248
9.4	Ergebnisse der Studie	254
	Literaturverzeichnis	270
	Abstract	271
	Lebenslauf	273

Vorwort

Überblick

Räuber-Beute-Modelle, Wachstumsprozesse und das SIR-Modell sind Themen, die in der Rubrik „Biomathematik“ in der mathematikdidaktischen Literatur an der einen oder anderen Stelle zu finden sind. Die Biomathematik bietet allerdings noch viele andere Einsatzmöglichkeiten für den Schulunterricht, und das nicht nur für die Oberstufe oder das Wahlpflichtfach. Wenn man nämlich diskrete Modelle anstatt der in der Fachliteratur gebräuchlichen kontinuierlichen Modelle betrachtet, so genügen die mathematischen Kenntnisse aus der Unterstufe. Es soll Ziel dieser Arbeit sein, entsprechende Möglichkeiten aufzuzeigen und Chancen aus didaktischer Sicht daraus abzuleiten.

Die vorliegende Dissertation gliedert sich dazu in folgende Bereiche: Im ersten Kapitel wird ein geschichtlicher Überblick zum Thema gegeben, nicht zuletzt um die Bedeutung der Biomathematik als wichtiges Teilgebiet der Mathematik hervorzuheben. Außerdem wird eine Zusammenschau der wichtigsten Bereiche der Biomathematik vorgestellt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den mathematischen Konzepten, die für den Einsatz im Unterricht essentiell sind. Für diskrete Modelle sind dabei natürlich Iterationen und Differenzgleichungen die zentralen Themen. Das dritte Kapitel stellt anschließend eine Fülle von biomathematischen Modellen vor, die in der Schule auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden können. Die meisten davon haben bisher weder in didaktischen Arbeiten, noch in gängigen Schulbüchern Platz gefunden. Damit beschäftigt sich das vierte Kapitel, das weiters aufzeigen soll, dass durch die Bearbeitung des Themas zum einen viele Aspekte und Forderungen des österreichischen Lehrplans erfüllt werden können und zum anderen großes didaktisches Potenzial in der durch Tabellenkalkulationen unterstützten Bearbeitung diskreter Modelle schlummert. In den Kapiteln 5-7 werden Vorschläge zur konkreten Umsetzung im Unterricht für unterschiedliche Schulstufen gemacht. Diese Unterrichtsmaterialien sind prinzipiell direkt im Unterricht einsetzbar und so ausgelegt, dass die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund steht. Dem mathematischen Modellieren wird dann im achten Kapitel Rechnung getragen. Hier finden sich Vorschläge für Modellierungsaufgaben aus dem Bereich der Biomathematik. Schließlich wird im Schlusskapitel über Erfahrungen im Unterricht und in der Lehreraus- und -fortbildung berichtet. Eine Fallstudie, die in Form von Videoanalysen von 30 Schülerinnen und Schülern der 3. Klasse durchgeführt wurde, beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern die Bearbeitung diskreter

Modelle mit Hilfe von Tabellenkalkulationen Einfluss auf das iterative Denken der Lernenden hat.

Motivationen

Parallel zu meinem Lehramtsstudium hatte ich die Möglichkeit, Mathematik Diplom mit dem Schwerpunkt *Biomathematik* zu studieren. Die Verbindung der beiden Gebiete *Didaktik der Mathematik* und *Biomathematik* lag also nahe. Und so nahe dann doch wieder nicht. Es bedurfte der Ratschläge meiner Kollegin Anita Dorfmayr und meines Betreuers Hans Humenberger, denen ich herzlich danke, mich auf diese Schiene gebracht zu haben. Wie schon eingangs erwähnt, versucht diese Arbeit die Lücke in der diaktischen Literatur dieses Thema betreffend zu schließen. Auch das war natürlich Motivation, gerade auf diesem Gebiet zu arbeiten. Weiters ist die Forderung nach stärkerer Einbindung mathematischer Modellierung in den letzten Jahren ein zentrales Anliegen meiner Arbeit an der Universität Wien geworden. Diese Tatsache schlug sich im Laufe der Zeit auch in der vorliegenden Dissertation nieder.

Danke

Es gibt eine Reihe von Menschen, denen ich an dieser Stelle meinen ausdrücklichen Dank sagen möchte.

An meine Eltern: Danke, dass ihr es mir ermöglicht habt, diesen langen, kostspieligen Ausbildungsweg überhaupt anzutreten. Danke für eure Ratschläge, eure Unterstützung in schweren Zeiten, für euer Lob, euer Interesse an meiner Arbeit, eure Zeit, euer Vertrauen in meine Stärken und für eure Akzeptanz meiner Schwächen.

An meine Geschwister: Liebe Veronika, liebe Brigitte, lieber Gerhard und liebe Maria! Danke für die Wertschätzung meiner Arbeit, die mir von euch immer entgegengebracht wurde und wird. Danke auch für euer Verständnis, wenn ich oft zu wenig Zeit habe und von einer Verpflichtung zur nächsten hetze. Danke für unser gutes Verhältnis zueinander und dafür, dass ihr meine Geschwister seid.

An meinen Betreuer: Danke für alles, lieber Hans. Für die Anstellung an der Universität Wien, für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit, für das offene Ohr, das du mir zu jeder Zeit schenkst, für die guten Ratschläge und Hilfestellungen, für alles, was ich von dir lernen darf und vor allem für unser freundschaftliches Verhältnis zueinander.

An meinen Kollegen Stefan: Danke, dass du immer nur das Beste für mich im Auge hast, danke für die Förderung meines wissenschaftlichen Werdegangs, für alles, was ich von dir lernen darf und für die fruchtbare gemeinsame Arbeit. Ganz herzlich aber auch danke für die vielen amüsanten Erlebnisse und Gespräche, die meine Arbeitstage so oft erheitern.

An meine Kollegin Petra: Danke für die gute und ausgeglichene Zusammenarbeit an unserem Arbeitsgebiet „Spieltheorie“, für die durch dich erreichte Abwechslung zum gewöhnlichen Mensa-Essen und für die interessanten und gleichzeitig humorvollen Gespräche während unserer langen Zugfahrten.

An meine Kollegin Anita: Danke für die gewinnbringende Zusammenarbeit bei Modellierungsveranstaltungen, Schulmathematiktagung und Begabtenförderungsseminaren. Danke auch für die schöne Woche in Finnland, die mir immer in Erinnerung bleiben wird.

An meine Studienkollegen, Freunde und Wegbegleiter: Liebe Carmen, Judith, Viki, Martina, Caro, Stefanie, Susanne, Andrea, Daniela, Lena, Ines, Katl, lieber Ani, Kurtl, Pauli, Thomi, Mitch, Flo, Peter, Stoni, Robsch, Knight, Marko, Werner, Clemens und alle anderen Freunde! Danke, dass ihr in den letzten Jahren für mich da wart, mich begleitet habt und mich in meinen Entscheidungen und meinem Tun unterstützt habt, wann immer ich euch gebraucht habe.

Kapitel 1

Biomathematik

1.1 Geschichte der Biomathematik

1.1.1 Die Anfänge

Obwohl schon *Pythagoras von Samos* (etwa 570 – 510 v.Chr.) mit seinem Ausspruch „Alles ist Zahl“ die Idee hatte, jeden Prozess mathematisch zu erfassen, ist die Betrachtung biologischer Systeme bis ins 19. Jh. weitestgehend ohne Mathematik ausgekommen. Erst die Entstehung von Versicherungsgesellschaften hat es notwendig gemacht, sich über *demographische Probleme* Gedanken zu machen. Schließlich wollten diese Unternehmen auf lange Sicht Gewinne erzielen, und dazu war es eben notwendig, Lebenserwartungen, Altersstrukturen und Risikofaktoren so genau wie möglich zu kennen.

Aber dessen nicht genug. Mathematiker erkannten bald das schier unermessliche Potential biologischer Phänomene und Zusammenhänge und versuchten, Modelle zu entwickeln, die einerseits Situationen beschreiben und erklären konnten, andererseits aber auch vernünftige Prognosen erlaubten. Dabei ging es nicht nur um Prozesse, die das menschliche Leben betrafen, sondern es wurden auch Modelle für Tierpopulationen oder das Pflanzenwachstum entwickelt.

Die Anfänge der mathematischen Populationsgenetik sowie jene der mathematischen Ökologie finden sich in den 20-iger Jahren des vorigen Jahrhunderts wieder. Die beiden Gebiete standen zuerst weitestgehend getrennt voneinander da, eine Überschneidung bzw. erste Verknüpfungsversuche gab es erst etwa 40 Jahre später.

Der britische Naturforscher *Charles Robert Darwin* war es, der erkannte,

dass sich Tierarten ihren Umweltgegebenheiten anpassen konnten. Das war vor allem dann nötig, wenn viele, ähnliche Spezies von denselben Ressourcen lebten. Die Tierpopulationen waren also nicht nur von den äußeren, physikalischen Einflüssen abhängig, sondern wurden auch von der Wechselwirkung mit anderen Spezies beeinflusst. Details dieser Beziehungen waren Darwin aber unbekannt. Sein Buch *On the Origin of Species*¹, das 1859 erschienen ist, war bahnbrechend und wurde zum Ausgangspunkt jahrzehntelanger Diskussionen um den Begriff der *natürlichen Selektion*.

Die Evolutionstheorie fand allerdings nicht nur bei der Entstehung der Arten Anwendung. Der Soziologe *Herbert Spencer* erklärte die gesellschaftliche Entwicklung der Menschheit ebenfalls aus der evolutionären Sichtweise. Gesellschaftsgruppen bildeten sich seiner Ansicht nach durch Anpassung an äußere Umstände, sowie durch Reaktion auf andere Gesellschaftsgruppen.

Der Biologe *Stephen Alfred Forbes* ging gegen Ende des 19. Jh. der Frage nach, warum es trotz des oft hart geführten Kampfes ums Überleben zu mehr oder weniger stabilen Populationsgrößen der Tierarten kommt. Er beschäftigte sich auch mit Konkurrenz und Koexistenz zweier Spezies und erkannte, dass Anpassung der Schlüssel zum Erfolg für dauerhaftes Überleben ist. Tierarten können z. B. ihre Reproduktionsrate so steuern, dass einerseits ihr Fortbestand gesichert ist, dass andererseits aber auch dafür gesorgt ist, dass die Nachkommen ausreichend Nahrung bekommen. Auch wurden erstmals (regelmäßige) Schwankungen, so genannte Oszillationen, in der Bevölkerungsgröße von Tierpopulationen beobachtet², die man kurz darauf vor allem bei Fischpopulationen, aber auch bei Krebsen, Vögeln und Säugetieren wahrgenommen hat. *Ernest Thompson Seton* etwa führte die berühmte Untersuchung über Hasen und kanadische Luchse der Hudson's Bay Company durch, bei der er ebenfalls regelmäßige Fluktuationen nachweisen konnte³. Der Amerikaner *L.O. Thompson* und der Franzose *Paul Marchal* arbeiteten weiters an Versuchen mit Insekten und Parasiten und konnten auf diese Weise periodische Schwankungen sogar im Labor nachweisen.

¹siehe DARWIN 1859

²Siehe dazu D'ANCONA 1939, S. 13 und folgende.

³Die Echtheit bzw. der Ursprung der entsprechenden Daten wird allerdings bis heute angezweifelt. Siehe dazu SONAR 2001

1.1.2 Die Mathematisierung beginnt

Aus mathematischer Sicht war wohl *Alfred James Lotka* die erste große Persönlichkeit in der mathematischen Ökologie. Der in Österreich-Ungarn geborene Amerikaner arbeitete etwa 2 Jahrzehnte an seinem 1925 publizierten Buch *Elements of Physical Biology*, in dem er vorwiegend physikalische und chemische Prinzipien auf biologische Sachverhalte umwälzte. Damit schuf er ein erstes Fundament für die theoretische Betrachtung von biologischen Systemen. Er sah dabei die Welt zuerst als Ganzes, betrachtete globale Themen wie den Wasserkreislauf, Nahrungsketten oder die Energieumwandlungen in biologischen Systemen. Ein kleines Kapitel war aber auch einem Zweipopulationsmodell, nämlich der Beziehung zwischen Räubern und Beutetieren⁴, gewidmet. Dieses Kapitel sollte, obwohl das Buch selbst nur 2500 Mal verkauft wurde, in der Geschichte der mathematischen Ökologie noch häufig zitiert werden. Ein Kuriosum ist, dass zeitgleich, aber unabhängig von Lotka, auch der Italiener Vito Volterra dieses Räuber-Beute-Modell veröffentlichte.

Ab 1920 gab es in der mathematischen Ökologie zwei Strömungen. Die einen orientierten sich eher am einzelnen Individuum, die anderen an der Gesamtpopulation einer Art in einem bestimmten Gebiet. Das Hauptziel war, Muster bzw. allgemein gültige Prinzipien zu finden, die Veränderungen und Prozesse in der Natur verstehen ließen. Infolge der Technisierung gegen Ende des 19. Jh. wurde es möglich, Konsumgüter kühl zu halten und über weite Strecken zu transportieren. Mit diesem Fortschritt gab es aber auch neue Probleme. Es wurden zu dieser Zeit zusammen mit den Waren auch viele Tiere aus fremden Ökosystemen eingeschleppt, die nach einiger Zeit wahre Plagen darstellen sollten. Dazu gehörten unter anderem die *Argentinische Ameise*, die *Fruchtfliege* aus dem Mittelmeerraum, sowie der *Japanische Käfer*. Damals erkannte man die Vorteile der biologischen Bekämpfung durch den Einsatz natürlicher Räuber gegenüber den bis dahin üblichen chemischen Methoden. Zuerst war diese Methode nämlich sehr effektiv⁵, allerdings wurden oftmals auch die als Räuber eingesetzten Insekten selbst zur Plage. Das führte zu steigendem Interesse an der Fortpflanzung von Insekten und damit zu vermehrter Forschung in der Entomologie. Man wollte verstehen, wie es zu solch dramatischen Zunahmen in den Insektenpopulationen kommen konnte und wie die einzelnen Spezies untereinander wechselwirkten.

⁴Lotka behandelt dabei das interspezifische Verhältnis zwischen einem Wirtsorganismus und seinem Parasiten.

⁵Siehe die vielfältigen Aufträge und ihre Erfolge in D'ANCONA 1939, S. 18.

1.1.3 Das logistische Modell

Neben der Veröffentlichung des Räuber-Beute-Modells gab es im Jahr 1925 noch eine weitere wichtige Publikation. Der amerikanische Biologe *Raymond Pearl* griff eine fast 90 Jahre alte Idee des Belgiers *Pierre François Verhulst* auf, indem er das Modell des exponentiellen Wachstums durch einen wachstumshemmenden Term ergänzte (siehe Abschnitt 3.1.4).

Schon Verhulst fand experimentelle Bestätigung für sein *logistisches Modell*, allerdings blieb seine Theorie in der mathematischen Öffentlichkeit unbeachtet. Auch konnte er noch keine zufriedenstellende Erklärung für den neuen Term geben. Das erledigte Pearl, indem er den ergänzten Term als *noch vorhandenen Freiraum* der Population interpretierte. Er meinte damit z. B. das noch vorhandene Platz- oder Nahrungsangebot, das von der Spezies in Anspruch genommen werden kann. D'ANCONA⁶ formuliert etwa: „Die Fortpflanzungsfähigkeit jeder pflanzlichen oder tierischen Art ist normalerweise viel zu groß, um mit den Lebensmöglichkeiten, die ihr die Umwelt bietet, vereinbar zu sein“. Und weiter: „Somit trachtet jede Bevölkerung den Raum, in dem sie leben kann, voll auszufüllen, indem sie die Individuenzahl bis zu dem Maximum vermehrt, das mit den Nahrungsquellen des Wohngebietes vereinbar ist“. Er spricht auch davon, dass die Konkurrenz mit anderen Tierformen Einfluss darauf habe, wie weit sich eine Art ausbreiten kann.

Ein wesentlicher Vorteil Pearls gegenüber Verhulst war, dass er das wiederentdeckte Modell besser zu verkaufen wusste. Sein selbstbewusstes Auftreten und seine guten Kontakte machten es möglich, dass die logistische Kurve immer mehr zum Zentrum der Diskussionen von Mathematikern und Ökologen wurde. Obwohl es nicht immer exakt an Bevölkerungsdaten passte und oftmals Erklärungsbedarf bestand, machte Pearl das logistische Modell zum allgemeingültigen Wachstumsgesetz. Die Abweichungen von den Daten erklärte er durch die ständige Anhebung der Kapazitätsgrenze durch den medizinischen Fortschritt bzw. die andauernde Industrialisierung.

Es gab natürlich auch kritische Stimmen zum logistischen Wachstumsmodell. Der Physiker *Edwin Bidwell Wilson* ließ – nicht zuletzt aufgrund seiner persönlichen Abneigung gegenüber Pearl – keine Chance ungenutzt, die Nichtadditivität des logistischen Modells zu bemängeln. Wenn das logistische Gesetz Allgemeingültigkeit besäße, dann müsste es nicht nur für eine Population gelten, sondern auch für ihre Teile. Diese Eigenschaft erfüllt allerdings das Modell nicht, da die Summe zweier logistischer Kurven keine solche mehr ergibt.

⁶D'ANCONA 1939, S. 5

Obwohl Pearl in seiner wissenschaftlichen Laufbahn viele Tiefschläge einstecken musste, war *er* es, der die mathematische Ökologie zu großer Popularität führte. Er war ein Mann, der polarisierte und dadurch viele Mathematiker zur Teilnahme an einer inhaltlichen Diskussion und zur Entwicklung anderer Wachstumsmodelle anregte. Bis heute ist das logistische Modell in der Literatur fest verankert.

1.1.4 Interaktionsmodelle

Beinahe sein ganzes Leben hat *Sir Ronald Ross* für die Bekämpfung der Malaria gearbeitet. Er bereiste zahlreiche Länder und Kriegsschauplätze, um mehr über diese Krankheit zu erfahren. Er wollte die Ursache für die Malariaepidemie und ihre rasche Ausbreitung entdecken. Letztlich fand er heraus, dass die Ansteckung mit Malaria immer über *Malariamücken*⁷ ablief. Dafür erhielt er 1902 den Medizinnobelpreis. Er entwickelte sogar ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Verbreitung der Krankheit, das bis heute Grundlage für das Verständnis von Epidemien ist⁸.

1920 war es der kanadische Entomologe *William Robin Thompson*, der erstmals eine mathematische Beschreibung der schon 30 Jahre zuvor im Labor bestätigten Oszillationen in Räuber-Beute-Beziehungen versuchte. Er wollte damit die Möglichkeit einer langfristigen biologischen Kontrolle der Insektenvermehrung erreichen. Er verstand aber sofort, dass mathematische Modelle zwar das Grundverständnis für biologische Zusammenhänge verbessern konnten, dass jedoch natürliche Systeme viel zu komplex sind, um sie vollständig durch eine mathematische Beschreibung erfassen zu können.

Lotka fand durch die Arbeiten von Ross und Thompson genügend Beispiele für die Motivation seiner *Interaktionsmodelle*, die er in ganz allgemeiner Form durch Systeme von Differentialgleichungen ansetzte.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; P, Q)$$

x_i bezeichnet dabei die Bevölkerungsgröße der i -ten Spezies, P und Q sind Parameter, die den Umwelt- bzw. den genetischen Zustand beschreiben. Über die Funktion F weiß man zunächst nichts, ihre Form hängt von der gegebenen Situation ab. Um das Modell zu vereinfachen und so besser analysieren

⁷Diese erhielten ihren Namen natürlich erst nachträglich gerade aus diesem Grund.

⁸Das Modell entspricht mathematisch gesehen genau dem Schaefferschen Modell in Abschnitt 3.1.5.

zu können, wurde die Funktion F häufig durch ihre Taylorentwicklung approximiert bzw. P und Q vernachlässigt. Das Ziel Lotkas war es, fundamentale Gleichungen zu finden, die auf viele Situationen angepasst werden konnten. Er musste dafür aber auch viel Kritik einstecken, da diese allgemeine Form der Beschreibung für konkrete Umweltsituationen zu wenig aussagekräftig war.

Gleichzeitig wurde der Italiener Vito Volterra, der zu dieser Zeit schon ein angesehener Mathematiker und Spezialist für Differentialgleichungen war, durch seine Tochter Luisa und ihren Verlobten Umberto d'Ancona auf ein ökologisches Problem aufmerksam gemacht. D'Ancona war Marinebiologe und hatte Einsicht in die Marktstatistik der Fischhändler an der Adria. Ihm fiel auf, dass während der Kriegsjahre, in denen der Fischfang fast gänzlich eingestellt wurde, die Bevölkerungszahlen einiger Raubfischarten sehr stark anstiegen, während ein solches Ansteigen bei den Beutefischen nicht zu sehen war. Volterra griff dieses Problem 1925 auf, schon ein Jahr später publizierte er in *Nature* eine mathematische Beschreibung der Wechselwirkungen von Spezies.

Lotkas und Volterras Arbeiten überlappten bei der Behandlung von Räuber-Beute-Beziehungen. Lotka reklamierte bei *Nature*, dass Volterras Arbeit in diesem Bereich viele Ähnlichkeiten mit seinem Buch aufwies. Er befürchtete, dass Volterra, der ja viel populärer war als er selbst, das Räuber-Beute-Modell als seine alleinige Erfindung ausgeben würde. Und tatsächlich wurde Volterra in den folgenden Jahren viel häufiger zitiert als Lotka. In der heutigen Literatur hat sich allerdings fairerweise die Bezeichnung *Lotka-Volterra-Differentialgleichungen* durchgesetzt.

An der Art und Weise, wie Volterra an seine Arbeit heranging, kann man auch einiges über das Modellieren an sich und über den Einstieg in ein komplexes Problem lernen. D'ANCONA⁹, der ja Gelegenheit hatte, Volterras Arbeiten zu verfolgen, schreibt rückblickend: „Bei dieser Arbeit hat er von Anfang an ideale sehr einfache Lebensgemeinschaften erdacht, indem er von allen hinzutretenden Faktoren absah. In der Folge ging er dann so vor, daß er nach und nach die einfachen Voraussetzungen komplizierte, indem er andere Faktoren und Umstände in Betracht zog, und sich so immer mehr den in den natürlichen Lebensgemeinschaften verwirklichten Bedingungen annäherte“.

Man unterschied zur Zeit Volterras auch schon zwischen *konservativen* und

⁹D'ANCONA 1939, S. 39

dissipativen Modellen. Während konservative Modelle, die den Einfluss von innerspezifischer Konkurrenz nicht berücksichtigen, auf exakt periodische Oszillationen führten, ging man bei den dissipativen Modellen von logistischem Wachstum der einzelnen Spezies aufgrund von innerspezifischer Konkurrenz aus. Dies lieferte für viele Situationen eine etwas realistischere Beschreibung, da hier die Lösungskurven der Differentialgleichungen zu einem inneren Gleichgewicht, also zu stabiler Koexistenz der Raub- und Beutetiere führten. Lotka, der ein allgemeines Naturgesetz zur Beschreibung von Wechselwirkungen zwischen Spezies finden wollte, entfernte sich dabei immer mehr von der Biologie. Seine weiteren Arbeiten auf diesem Gebiet blieben weitestgehend unbeachtet, ganz im Gegensatz zu seinen Beiträgen zur Demographie, die er in den 30er Jahren verfasste.

Auch zwei Australier beteiligten sich erfolgreich an der Entwicklung von Räuber-Beute-Modellen, *Alexander John Nicholson* und *Victor Albert Bailey*. Sie erkannten ebenfalls, dass Regulierung durch innerspezifischen Konkurrenzkampf erreicht wurde, und dass Selektion, also das Etablieren neuer Typen, diese Regulierung eher stört. In ihrem bekanntesten Artikel *The Balance of Animal Population*¹⁰ bauten sie Verzögerungen in ihre Modelle ein, die auf Altersstrukturen innerhalb der Spezies Rücksicht nahmen.

1.1.5 Kritik wird laut

Mit Hilfe des Lotka-Volterra-Modells ließ sich jedenfalls eine Erklärung für d’Anconas Problem geben, allerdings gab es auch hier wieder kritische Stimmen. Es wurde behauptet, dass neue Fangmethoden, Migration der Fische, Temperaturveränderungen oder eine Änderung des Salzgehaltes im Meer genauso gut die Auslöser für eine Veränderung der Anteile der verschiedenen Fischpopulationen gewesen sein konnten.

Durch den Mathematiker *Patrick H. Leslie* wurde die Forschung in der Demographie in den späten 30-iger Jahren wesentlich vorangetrieben. Leslie befasste sich mit Sterbetafeln und Alterstrukturen in Bevölkerungen. Seine Arbeit verwendete Methoden der Matrixalgebra und bedeutete damit eine Fortsetzung der Arbeit von Lotka.

Indes wurden die besorgten Stimmen jener Ökologen immer lauter, die befürchteten, dass ihre Wissenschaft zu sehr mathematisiert wurde. Selbst Thompson, der ja an der Entwicklung der Räuber-Beute-Modelle beteiligt war, gab

¹⁰siehe BAILEY und NICHOLSON 1935

nun zu, dass es ein Fehler war, bei biologischen Fragen zu stark auf die Mathematik zu vertrauen. Theoretische Modelle könnten nur Idealfälle beschreiben, dadurch würde allerdings die Realsituation vernachlässigt. Der erst kürzlich verstorbene, hoch geachtete Biologe *Ernst Mayr*¹¹ drückte es so aus: „The more I study evolution the more I am impressed by the uniqueness, by the unpredictability, and by the unrepeatability of evolutionary events.“

Obwohl Nicholson bereits natürliche Selektion in seine Arbeiten einbaute, gelang ihm die Verbindung von mathematischer Ökologie zur mathematischen Populationsgenetik nicht. Er wusste zu wenig über die betrachteten Populationen, um realistische Modelle erstellen zu können. Es gab immer das Problem, dass Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Arten eher kurzfristig passierten, Evolution aber nur über sehr lange Zeiträume ablief. Erst in den 60-iger Jahren des vorigen Jahrhunderts gab es Verschmelzungsbereiche der beiden Disziplinen, vom Ziel einer einheitlichen Theorie ist man aber nach wie vor weit entfernt.

1.1.6 Das Exklusionsprinzip

Wichtige Beiträge zur mathematischen Ökologie bzw. ein wichtiges Grundprinzip hat die Biomathematik dem russischen Ökologen *Georgii Gause* zu verdanken. Er gab eine mathematische Erklärung dafür, dass zwei Spezies nicht exakt dieselbe ökologische Nische besetzen können. Dieses *Exklusionsprinzip* wurde 1934 publiziert und sollte in der nahen Zukunft noch für rege Diskussionen sorgen. Nach seiner Dissertation über das Lotka-Volterra-Modell befasste sich Gause gemeinsam mit seinem Lehrer *Vladimir V. Alpatov* mit der logistischen Kurve, um sie auch in Russland populärer zu machen. Alpatov wollte nach einem Gastaufenthalt bei Pearl in den USA auch seinen Schützling Gause bei Pearl unterbringen. Das Ansuchen um finanzielle Unterstützung beim *Rockefeller Foundation's Paris Office* wurde trotz der großartigen wissenschaftlichen Leistungen Gauses abgelehnt. Als Begründung wurde sein Alter angegeben, er war damals erst 22 Jahre alt.

Gause wurde trotzdem durch Pearl beeinflusst. Er versuchte, dessen experimentelle Methoden mit Volterras Ideen zu vereinigen und so ökologische Fragen mit Hilfe der Mathematik zu beantworten. 1934 verfasste er das Buch *The Struggle for Existence*¹², das bis heute als ein Standardwerk für experimentelle Populationsökologie gilt. Die Oszillationen, die von Seton in den Hasen-

¹¹siehe KINGSLAND 1985, S. 141

¹²siehe GAUSE 1931

und Luchspopulationen Neufundlands beobachtet wurden, konnte Gause allerdings im Labor vorerst nicht nachweisen. Er erkannte, dass diese regelmäßigen Schwankungen nur dann auftraten, wenn entweder die Jagd sehr schwach war bzw. die Beute Möglichkeiten zum Unterschlupf hatte. Er führte auch noch Räuber-Beute-Experimente mit drei Populationen durch, beschäftigte sich in der Folge aber nur noch mit Konkurrenzmodellen. Gause war sich immer bewusst, dass seine mathematischen Modelle keine quantitativen Ergebnisse liefern, sein Exklusionsprinzip wurde allerdings zum Schlüssel für die Analyse der Struktur von Gemeinschaften.

Zu internationaler Prominenz gelangte das Exklusionsprinzip dann durch *David Lambert Lack*, der eine Studie über die schon von Charles Darwin beobachteten *Galapagos-Finken* durchführte. Die Finken sahen nämlich auf den Galapagos-Inseln anders aus als auf dem Festland. Das bestätigte das Exklusionsprinzip insofern, als dass es ihnen auf den Inseln möglich war, jene Nischen zu besetzen, die am Festland schon von anderen Tierarten eingenommen wurden. Eine Nische kann ja dieser Theorie nach auf Dauer nur von einer Art besetzt werden, Nischenüberlappungen werden evolutionär reduziert. Durch die Ausbildung vieler verschiedener Schnabelarten und die damit verbundene Spezialisierung auf gewisse Nahrungsquellen gingen die Finken auch dem innerspezifischen Konkurrenzkampf aus dem Weg. Damit fand also das Exklusionsprinzip erstmals direkt Anwendung in freier Natur.

Robert MacArthur untersuchte dann gemeinsam mit dem Genetiker *Richard Levins*, wie ähnlich sich zwei Spezies sein durften, um noch koexistieren zu können. Sie griffen damit ein Gebiet auf, das sowohl Ökologie als auch Genetik beinhaltete. Auch das Lotka-Volterra-Modell änderten sie so ab, dass die Modellannahmen etwas realistischer als beim Originalmodell waren. Allerdings konnten die Ergebnisse ihres Modells experimentell nicht so gut bestätigt werden wie jene des Lotka-Volterra-Modells.

Levins beschäftigte sich danach auch mit der Frage, wann Modellergebnisse als *robust* bezeichnet werden können. Für ihn war das dann der Fall, wenn eine biologische Situation durch verschiedene Modelle beschrieben werden konnte, die alle ähnliche Resultate brachten. Nur wenn Modellergebnisse unter unterschiedlichen Annahmen oder über große Parameterbereiche erhalten blieben, darf man seiner Auffassung nach Prognosen aus den Modellen ziehen.

1.1.7 Populationsgenetik

In der Populationsgenetik waren vor allem *Sir Ronald Aylmer Fisher* und *Sewall Wright* in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts tonangebend. Sie beschäftigten sich unter anderem mit Selektionsmodellen und brachten den Begriff der *Fitness* (z. B. durch Modellierung typabhängiger Wachstumsraten) ins Spiel. MacArthur kritisierte bei der Interpretation der Fitness durch Wachstumsraten die Vernachlässigung von Umwelteinflüssen. Er hingegen berücksichtigte bei der Modellierung der Fitness auch den noch vorhandenen Freiraum, indem er Gauses Konkurrenzmodell auf die „Konkurrenz“ zwischen zwei Allelen transferierte.

MacArthurs Ideen und allgemeine Modelle sind bis heute umstritten, haben aber aufgrund ihrer Kreativität auch unzählige Bewunderer und Nachahmer gefunden.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die mathematische Ökologie im Zeitraum von 1920 bis 1970 vom Rand der Ökologie direkt in ihr Zentrum vorgerückt ist. Allerdings werden bis heute die häufig unrealistischen Annahmen in den unterschiedlichsten Modellen vehement kritisiert. Die Geschichte der Biomathematik ist eine Geschichte mit einigen wichtigen Treffern, aber leider auch mit vielen Misserfolgen. Sie ist sozusagen ein fortschreitender Dialog zwischen Mathematikern, die möglichst allgemeingültige Modelle entwerfen wollen und Biologen, die häufig die in der Natur beobachtbare Individualität in den mathematischen Modellen vermissen. Standardwerke für die Geschichte der Biomathematik, vor allem der mathematischen Ökologie, stellen sowohl das englischsprachige Werk von KINGSLAND¹³ als auch der schon oben erwähnte Klassiker *Der Kampf ums Dasein* von D'ANCONA dar. Viele Detailinformationen des obigen Textes stammen aus diesen Büchern.

1.2 Teilgebiete der Biomathematik

1.2.1 Demographie

Die Demographie befasst sich ganz allgemein mit der menschlichen Bevölkerung, ihrer Struktur und ihren Bewegungen. Kenngrößen, die in der Demographie häufig verwendet werden, sind z. B. die Geburten- und die Sterberate. Dabei ist natürlich darauf zu achten, dass diese Größen in unterschiedlichen Altersgruppen auch unterschiedliche Werte annehmen. Ebenso wie die Fertilität, also die Anzahl an Nachkommen pro Zeiteinheit und Frau. Und nicht nur

¹³KINGSLAND 1985

vom Alter, auch von der geographischen Lage hängen diese Größen und damit auch die durchschnittliche Lebenserwartung oder die Gesamtzahl der Nachkommen pro Jahrgang ab. So genannte Alterspyramiden, also Darstellungen der Bevölkerungsstruktur nach Altersklassen sehen demnach in unterschiedlichen Teilen der Welt auch qualitativ sehr verschieden aus.

Eines der wichtigsten Werkzeuge in dieser Disziplin ist zweifellos die Volkszählung bzw. andere statistische Erhebungen. Ab etwa 1850 wurden in Mitteleuropa erstmals detaillierte Aufzeichnungen über Einwohner von Gemeinden durchgeführt, die es erlaubten, sinnvolle Aussagen über die oben genannten Größen zu machen.

Fragestellungen, die in der Demographie nach wie vor sehr viel Aktualität besitzen, sind etwa jene nach dem Generationenvertrag, nach der langfristigen Entwicklung von Bevölkerungsstrukturen, nach der Geburtenkontrolle in manchen Teilen der Erde wie auch nach der zunehmenden Migration. Wie wichtig diese Fragestellungen sind bzw. welches intensive Interesse die Politik, die Gesellschaft und die Wirtschaft an deren Beantwortung haben, zeigt die Fülle an statistischen Erhebungen¹⁴, die jedes Jahr dazu in Auftrag gegeben werden.

1.2.2 Populationsgenetik

Die Populationsgenetik beschäftigt sich unter anderem mit der Evolution von Erbanlagen. Zentrale Fragestellungen sind jene nach der Vererbung von Merkmalen oder der Veränderung des Erbgutes. Mechanismen, die dabei untersucht werden, sind etwa Selektion, Mutation, Rekombination, Drift oder Migration. Dieses Thema wurde und wird in der Gesellschaft, den Religionen, der Medizin und der Ethik sehr stark wahrgenommen und oftmals kontroversiell diskutiert. Wie passen darwinistischer Zufall und gottgelenkte Evolution zusammen? Wie weit darf man bei der Genmanipulation gehen? In welchen Fällen sollen DNA-Analysen durchgeführt werden dürfen? All das sind Fragen, die vermutlich noch lange Zeit nicht restlos geklärt werden können. Fakt ist allerdings, dass die Mathematik dieses Gebiet in unvergleichbarer Weise mitgeprägt und in den letzten Jahren verstärkt unter Beschlag genommen hat. Die Entschlüsselung des menschlichen Genoms etwa wäre ohne die Methode der DNA-Sequenzierung völlig unmöglich gewesen. Und auch der medizinische Fortschritt hat durch das Verstehen der oben genannten Mechanismen sehr wesentlich unterstützt werden können.

¹⁴Siehe etwa im Internet: <http://www.statistik.at>, link vom 22.10.2007.

1.2.3 Mathematische Ökologie

Wissenschaftler auf diesem Gebiet haben sich zur Aufgabe gemacht, das Zusammenspiel und die Wechselwirkungen von zwei oder mehr Populationen aufeinander sowie den Einfluss äußerer Kräfte auf diese Populationen zu beschreiben. Wichtige elementare Beispiele sind dabei etwa Räuber-Beute-Beziehungen, Symbiosen und Konkurrenzverhältnisse.

Die mathematische Ökologie war aufgrund ihrer makroskopisch leicht wahrnehmbaren Größen jenes Teilgebiet der Biomathematik, das sich zeitlich gesehen am frühesten schon recht weit entwickeln konnte. Trotzdem sind die Resultate, vor allem was Interaktionen zwischen Spezies und das Denken in komplexen Systemen betrifft, auch noch heute von großer Wichtigkeit und Interesse in der Forschung.

1.2.4 Epidemiologie

Die Epidemiologie setzt sich mit den Ursachen und der Ausbreitung von übertragbaren Krankheiten auseinander. Erste Maßnahmen, Epidemien erfolgreich entgegenzutreten, gab es schon 1850. Mathematische Modelle wurden allerdings erst etwa 50 Jahre später entwickelt. Dabei hat man versucht, Fragestellungen zu beantworten, die für die betroffenen Bevölkerungen der damaligen Zeit immens wichtig waren. Wann können sich Epidemien in Bevölkerungen dauerhaft durchsetzen? Wie kann das verhindert werden? Wie verlaufen Krankheiten und durch die Steuerung welcher Parameter lassen sich diese Entwicklungen verändern? Was bewirken dabei Impfungen? Auf viele dieser Fragen können heute mit Hilfe der Mathematik Antworten gegeben werden. Leider tauchen jedoch immer wieder neue Krankheitserreger auf, müssen neue Modelle für bisher unbekannte Seuchen gefunden werden. Man braucht nur das Interesse der Medien an diesem Thema zu verfolgen, um festzustellen, dass die Epidemiologie nichts an ihrer Wichtigkeit eingebüßt hat. Mathematik kann außerdem gerade bei so emotional diskutierten Themen wie Vogelgrippe, SARS oder BSE¹⁵ zur notwendigen Versachlichung beitragen.

Es gibt noch viele weitere Teilgebiete der Biomathematik. Sie behandeln Themen wie z. B. die Musterbildung bei Tierfellen, die Klassifikation von Skeletten und Schädeln zur Bestimmung des Alters archäologischer Funde, räumliches Sehen oder die Entwicklung und Veränderung von Sprachen im Laufe der Jahrhunderte.

¹⁵Ein Beispiel für ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Ausbreitung von BSE findet man z. B. in KÜHLEITNER und NOWAK 2003, S. 143-146.

Kapitel 2

Mathematische Konzepte

Ziel dieses Kapitels ist es unter anderem, mathematische Begriffe zu beleuchten, die im Bereich der Biomathematik eine zentrale Rolle einnehmen. Das Hauptaugenmerk soll dabei natürlich auf schulrelevanten Begriffen liegen. Liest man in der Fachliteratur zum Thema *dynamische Prozesse* nach, so fällt einem zuallererst die Einteilung in zwei grundlegende Klassen von Prozessen auf, nämlich in kontinuierliche und diskrete Modelle.

Während in der Fachwissenschaft und Forschung der Schwerpunkt ganz klar auf kontinuierliche, also durch Differentialgleichungen beschreibbare Modelle gelegt wird, bietet sich für den Unterricht eher eine Bearbeitung von diskreten Prozessen mittels Differenzengleichungen an. Dieser Teil der Arbeit versucht unter anderem die Frage nach dem *warum* zu beantworten und gibt auch eine Idee, wie kontinuierliche in diskrete Modelle transformiert werden können. Es soll hier keineswegs eine Abschaffung von kontinuierlichen Modellen im Schulunterricht oder in der Lehreraus- oder -fortbildung propagiert werden. GÖTZ¹ meint dazu: „[...] sind natürlich kontinuierliche Modelle unverzichtbar (auch für den Unterricht) und wenn sie auch „nur“ das Hintergrundwissen der Lehrenden zu dieser Thematik ausmachen.“ Er sieht weiters bei der Bearbeitung diskreter Werte, wie sie bei dynamischen Prozessen häufig vorliegen, den Computer als „unverzichtbares Mittel“. Durch ihn ist also erst eine Bearbeitung komplexer diskreter Modelle im Schulunterricht möglich geworden.

Man kann Modelle natürlich auch in *deterministische* (d. h. durch Gesetze vollständig festgelegte) und *stochastische* (bei denen Teilereignisse mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintreten) einteilen. Auf diesen Unterschied wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen, da eine Bearbeitung stochastischer Modelle aufgrund der höheren Komplexität in der Schule ohnehin nur

¹GÖTZ 1998, S. 429

im Wahlpflichtfach oder mit ausgewählten Schülern sinnvoll erscheint.

Es werden nun aber zuerst die mathematischen Begriffe *Iteration*, *rekursives* und *explizites Bildungsgesetz* und *Differenzengleichungen* sowie die Darstellung dynamischer Prozesse in *Zeit- und Phasendiagrammen* behandelt.

2.1 Iteration

Iterationen spielen in der Schulmathematik an sehr vielen Stellen eine zentrale Rolle. WEIGAND² formuliert: „Iterationen kommen als iterative Denkstrukturen bereits in der Grundschule vor, werden in der Mittelstufe zum näherungsweisen Lösen von Gleichungen oder bei geometrischen Konstruktionen verwendet, und sie bilden in der Oberstufe den Ausgangspunkt bei der Mathematisierung diskreter Problemstellungen in Form von rekursiv definierten Folgen oder Differenzengleichungen.“ In diesem Sinne erfüllen Iterationen die von BRUNER³ an *Fundamentale Ideen* gestellte Forderung des *Spiralprinzips*. Ein Begriff oder mathematisches Konzept soll dabei auf verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus immer wiederholt werden können, sodass dieser Begriff bzw. dieses Konzept wie ein roter Faden im gesamten Prozess des Wissenserwerbs zu finden ist. Auch bei HUMENBERGER und REICHEL⁴ tritt das Konzept der Iteration als *Fundamentale Idee* der Angewandten Mathematik auf. Sie meinen sogar: „Der Beiname „Fundamental“ zur Idee der Iteration ist also sicher nicht nur auf die Angewandte Mathematik zu beschränken, sondern ist eher als „universell“ anzusehen!“, da auch „Sonnenauf- und Untergänge, Feiertage im Jahr, regelmäßiges Besuchen bzw. Abhalten von Lehrveranstaltungen, immer wiederkehrende „Muster“ usw.“ regelmäßig auftauchen und damit iterative Prozesse darstellen.

Auch wenn das Wort *Iteration* (von lateinisch *iterare*, „wiederholen“) im AHS-Lehrplan nicht zu finden ist, kann schon allein das schlichte *Zählen* als intuitiv-iterativer Prozess aufgefasst werden. Iteratives Denken, sukzessives Wiederholen, spielt somit eine ganz zentrale Rolle für das Verständnis vieler mathematischer Konzepte, unter anderem auch für das *Begründen* und *Beweisen* (geometrische Beweise, Induktionsbeweise, ...).

WEIGAND beschäftigt sich mit der Frage, welche Rolle der Iterationsbegriff

²WEIGAND 1989, S. 5

³BRUNER 1970, S. 27

⁴HUMENBERGER und REICHEL 1995, S. 200

im Hinblick auf das Verstehen der Begriffe *Folge*, *Funktion*, *Algorithmus*, *Grenzwert* und *Konvergenz* spielt. Für WEIGAND⁵ lässt sich der Begriff *Iteration* nicht mathematisch definieren, vielmehr „charakterisiert der Iterationsbegriff *Arbeits- und Denkweisen*, die sich in wiederholenden Handlungen, Aktionen und Prozessen ausdrücken ...“.

In der vorliegenden Arbeit soll nun auch die Bedeutung von Iterationen als Hilfsmittel zur Betonung des dynamischen Aspekts biomathematischer Modelle herausgestrichen werden.

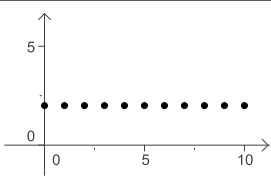
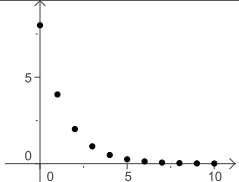
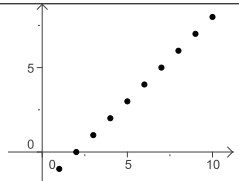
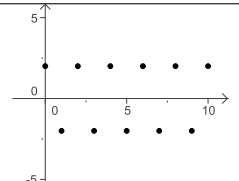
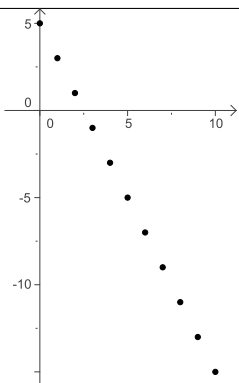
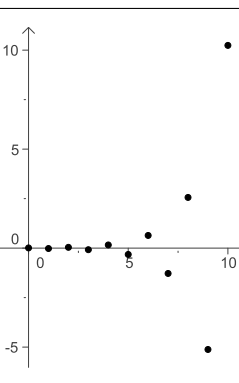
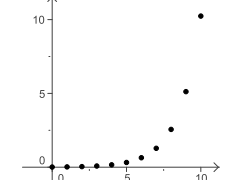
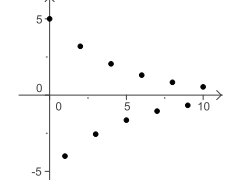
Wachstumsprozesse etwa wurden erstmals durch *Leonardo von Pisa* (genannt *Fibonacci*) in seinem Werk *liber abaci* durch iterative Berechnung formuliert. Sein berühmtes Beispiel der Kaninchenvermehrung stellt noch heute den Beginn mancher Biomathematikvorlesungen dar.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist allerdings vor allem der Begriff der *Iterationsfunktion* von Bedeutung. Diese wird auf ein Folgenglied x_n angewendet, um das nächste Folgenglied x_{n+1} zu berechnen. Es gilt also $x_{n+1} = f(x_n)$. Dabei spielt für die Schule die affin lineare Funktion der Form $f(x) = ax + b$ die zentrale Rolle.

Beispiel

In Abhängigkeit von a, b und x_0 ergeben sich bei Iteration der affin linearen Funktion $f(x) = ax + b$ qualitativ unterschiedliche Verläufe der Iterationsfolge. Die für uns relevanten sind in der nachstehenden Tabelle aufgelistet:

⁵WEIGAND 1989, S.8

$f(x) = x$		$f(x) = 0,5x$	
$f(x) = x + 1$		$f(x) = -x$	
$f(x) = x - 2$		$f(x) = -2x$	
$f(x) = 2x$		$f(x) = -0,08x$	

Allein mit Hilfe dieses einen Typs von Iterationsfunktionen lassen sich also schon sehr viele unterschiedliche dynamische Prozesse beschreiben.

2.1.1 Rekursives Bildungsgesetz

Rekursion (von lateinisch *recurrere* „zurücklaufen“) bedeutet in der Informatik das „Sich-Selbst-Aufrufen“ einer Funktion, es kommt also zu einer „Wiederholung durch Ineinanderschachtelung“. Im Bereich der Schulmathematik wird das Wort „Rekursion“ meist im Zusammenhang mit dem Begriff *Rekursionsformel* verwendet. Eigentlich wäre der Name *Iterationsformel* treffender, da hier der Vorwärtsscharakter im Mittelpunkt steht, also das Berechnen des nächsten Wertes aus den schon bekannten. Eine Folge von Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots$ wird dabei nämlich durch eine Gleichung der Form $x_{n+1} = f(x_{n-k}, \dots, x_n)$ festgelegt, wobei die Werte der Folgenglieder $x_{n-k}, \dots, x_n$ bekannt sein müssen, um das nächste Folgenglied x_{n+1} berech-

nen zu können. Wir werden allerdings aus Gewohnheitsgründen den in der Schulliteratur gängigen Begriff der *Rekursionsformel* verwenden.

Beispiel

Das *lineare Wachstum* (festgelegt durch die Rekursionsformel $x_{n+1} = x_n + d$) und das *exponentielle Wachstum* ($x_{n+1} = x_n \cdot q$) verwenden nur das vorherige Folgenglied, wohingegen die Rekursionsformel $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ der Fibonaccizahlen auf die letzten *beiden* Folgenglieder zurückgreift, um ein weiteres zu berechnen.

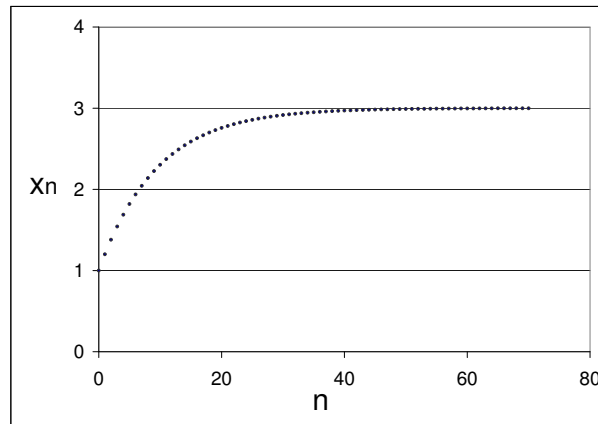
Die Frage nach der Existenz von *Fixpunkten* ist im Zusammenhang mit dynamischen Prozessen eine sehr interessante und wichtige. Es lohnt sich bei vielerlei Anwendungen zu analysieren, ob ein Fixpunkt *anziehend* oder *abstoßend* ist. Dadurch werden Aussagen über das Langzeitverhalten des betrachteten dynamischen Prozesses möglich. Beispielsweise interessiert man sich dafür, ob Populationsgrößen gegen eine fixe Kapazitätsgrenze streben und ob sich der Medikamentenanteil im Blut bei einem gewünschten Wert einpendelt. Einen Fixpunkt erhält man genau dann, wenn für einen Wert x_n gilt: $f(x_n) = x_n$ oder anders geschrieben $x_{n+1} = x_n$. Inhaltlich bedeutet das nichts anderes, als dass sich die Werte aufeinanderfolgender Folgenglieder nicht (mehr) ändern. Den Wert von x_n nennt man dann Fixpunkt. Erreicht ein dynamischer Prozess also einmal einen Fixpunkt, so verharrt er dort von diesem Zeitpunkt an.

Beispiel

Die Rekursion $x_{n+1} = 0,9 \cdot x_n + 0,3$ hat den Fixpunkt 3. Er lässt sich mittels der Beziehung $x_{n+1} = x_n$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \\ 0,9 \cdot x_n + 0,3 &= x_n \\ 0,3 &= 0,1 \cdot x_n \\ x_n &= 3 \end{aligned}$$

Für den Startwert $x_0 = 1$ ergibt sich beispielsweise folgende grafische Darstellung:



Man erkennt, dass der Fixpunkt in diesem Fall anziehend ist. Wie man das auch rechnerisch nachweisen kann, wird auf der nächsten Seite gezeigt.

2.1.2 Explizites Bildungsgesetz

Dynamische Systeme können nicht nur, wie oben gezeigt, durch Rekursionsformeln festgelegt werden, sondern auch durch *explizite Bildungsgesetze*. Dabei muss man für die Berechnung von neuen Folgengliedern den Wert der vorhergehenden Folgenglieder nicht kennen, sondern es kann jedes Folgenglied x_n direkt aus dem Bildungsgesetz gewonnen werden, sofern der Startwert x_0 bekannt ist.

Beispiel

Das explizite Bildungsgesetz des *linearen Wachstumsprozesses*

$$x_0 = 2, x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 11, \dots$$

wird durch den Term

$$x_n = 2 + 3n$$

beschrieben, während das *exponentielle Wachstum*

$$x_0 = 2, x_1 = 6, x_2 = 18, x_3 = 54, \dots$$

durch das explizite Bildungsgesetz

$$x_n = 2 \cdot 3^n$$

bestimmt ist.

Beispiel

Auch zu der oben schon besprochenen Iterationsfunktion $f(x) = 0,9 \cdot x + 0,3$ lässt sich ein explizites Bildungsgesetz angeben. Dazu kann man sich zuerst durch schrittweises Anwenden der Iterationsfunktion Klarheit über die Struktur des allgemeinen Folgenglieds verschaffen:

$$\begin{aligned}x_0 & \\x_1 &= 0,9 \cdot x_0 + 0,3 \\x_2 &= 0,9 \cdot x_1 + 0,3 = 0,9 \cdot (0,9 \cdot x_0 + 0,3) + 0,3 = \\&= 0,9^2 \cdot x_0 + 0,3 \cdot (0,9 + 1) \\x_3 &= 0,9 \cdot x_2 + 0,3 = 0,9 \cdot (0,9^2 \cdot x_0 + 0,3 \cdot (0,9 + 1)) + 0,3 = \\&= 0,9^3 \cdot x_0 + 0,3 \cdot (0,9^2 + 0,9 + 1) \\&\vdots \\x_n &= 0,9^n \cdot x_0 + 0,3 \cdot (0,9^{n-1} + 0,9^{n-2} + \dots + 0,9 + 1)\end{aligned}$$

Durch Anwenden der Summenformel für endliche geometrische Reihen erhält man daraus:

$$x_n = 0,9^n \cdot x_0 + 0,3 \cdot \frac{1 - 0,9^n}{1 - 0,9} = 0,9^n \cdot x_0 + 3 \cdot (1 - 0,9^n)$$

Mit dem Wissen, dass der Fixpunkt 3 ein möglicher Grenzwert dieses Prozesses ist (siehe dazu das Beispiel auf der vorigen Seite), lässt sich das explizite Bildungsgesetz auch ohne Kenntnis der Summenformel gewinnen:

Betrachte dazu die Differenzen zu 3:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - 3 &= 0,9 \cdot x_n + 0,3 - 3 \\x_{n+1} - 3 &= 0,9 \cdot (x_n - 3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Setzen wir nun kurzfristig $y_n := x_n - 3$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= 0,9 \cdot y_n \\y_n &= 0,9^n \cdot y_0 \\x_n &= 0,9^n \cdot (x_0 - 3) + 3.\end{aligned}$$

Aus dieser expliziten Darstellung erkennt man nun sofort, dass sich die Folgenglieder für größer werdendes n dem Fixpunkt 3 beliebig nähern.

Der Vorteil des expliziten Bildungsgesetzes gegenüber der Rekursionsformel ist offensichtlich. Es kann beispielsweise das tausendste Folgenglied in nur

einem Schritt berechnet werden, während die rekursive Berechnung einen immensen Aufwand fordern würde. Allerdings gibt das explizite Bildungsgesetz weniger Auskunft über die Struktur des zugrundeliegenden dynamischen Systems. Die Rekursionsformel hingegen lässt viel eher erkennen, wie sich das System *Schritt für Schritt* entwickelt. Hier steckt gerade für den Schulunterricht großes Potenzial. Das *Dahinterblicken* und *Verstehen des Prozesses* kann viel eher durch die Beschreibung mittels Rekursionsformeln geschehen als durch die bloße Berechnung der Folgenglieder mit Hilfe des Bildungsgesetzes. Dieses birgt im Schulunterricht nämlich die Gefahr, als *Black Box* verwendet zu werden. Den Nachteil umgekehrt, den man sich bei der rekursiven Berechnung einhandelt – nämlich den immensen Rechenaufwand bei der Analyse des Langzeitverhaltens eines Systems – kann man allerdings leicht durch den sinnvollen Einsatz des Computers kompensieren.

Das Erkennen der Struktur eines dynamischen Prozesses gewinnt vor allem dann weiter an Bedeutung, wenn zur Beschreibung nicht nur eine, sondern zwei oder mehrere Rekursionsformeln nötig sind.

Beispiel

Das diskrete *Räuber-Beute-Modell* lässt sich durch die beiden Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= (1 + a) \cdot H_t - c \cdot H_t \cdot F_t \\ F_{t+1} &= (1 - b) \cdot F_t + d \cdot H_t \cdot F_t \end{aligned}$$

beschreiben. Diese lassen erkennen, wie die Anzahl der Hasen H_{t+1} und die Anzahl der Füchse F_{t+1} zur Zeit $t + 1$ aus H_t und F_t zur Zeit t berechnet werden⁶.

In vielen Fällen kann ein dynamischer Prozess sowohl durch ein rekursives als auch durch ein explizites Bildungsgesetz beschrieben werden. In den beiden Darstellungen steckt dann mathematisch gesehen die gleiche Information. Andererseits gibt es aber auch Folgen, die zwar rekursiv, aber nicht explizit dargestellt werden können. Das werden wir im Abschnitt 3.1.4 beim diskreten *logistischen* Wachstum sehen.

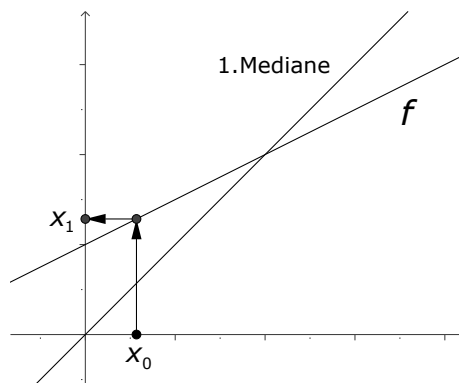
2.1.3 Spinnweb-, Zeit- und Phasendiagramme

„Eine Iteration ist ein spezieller Algorithmus, bei dem wiederholt „dassel-

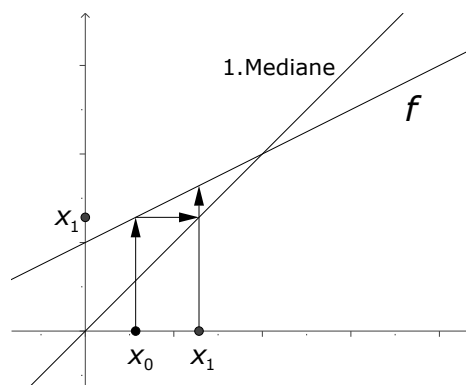
⁶Für eine Interpretation der vorkommenden Terme siehe Abschnitt 3.2.3.

be getan“ wird.“ betonen HUMENBERGER und REICHEL⁷. Diese für die Mathematik typische Aktivität des Nacheinanderausführens derselben Tätigkeit kann auch grafisch sehr einprägsam dargestellt werden. In so genannten *Spinnwebdiagrammen* steckt großes didaktisches Potenzial, das auch schon in der Schule genutzt werden kann.

Spinnwebdiagramme eignen sich zur grafischen Darstellung von Rekursionen 1. Ordnung, also solchen, die zur Berechnung eines Folgengliedes ausschließlich dessen Vorgänger benötigen. Man zeichnet dabei zu Beginn die Iterationsfunktion $f(x_n)$ und die 1. Mediane in ein (x_n, x_{n+1}) -Koordinatensystem ein. Danach startet man mit x_0 auf der Abszisse und bestimmt x_1 auf dem Grafen der Iterationsfunktion.



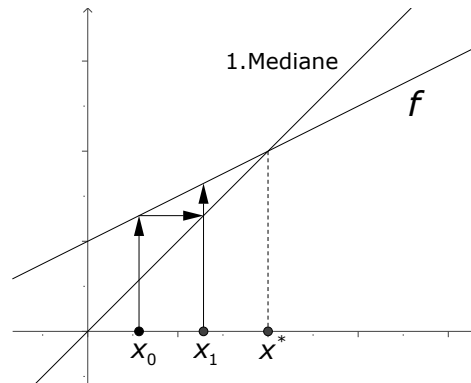
Den Wert von x_1 überträgt man nun wieder auf die Abszisse, indem man ihn zuerst waagrecht auf die 1. Mediane projiziert. Der Wert von x_2 lässt sich nun wieder am Grafen der Iterationsfunktion bestimmen, usw.



Relevant ist also eigentlich immer nur der Streckenzug, der vertikal bis zum Funktionsgraphen läuft, danach horizontal bis zur 1. Mediane, danach wieder

⁷HUMENBERGER und REICHEL 1995, S. 200

vertikal zum Funktionsgraphen und so fort. Im betrachteten Beispiel erkennt man, dass sich die Rekursion von unten monoton dem Fixpunkt $x^* = 2$ nähert.



Konvergenz erhält man ganz allgemein dann, wenn die Ableitung der Iterationsfunktion stetig und am Fixpunkt betragsmäßig kleiner als 1 ist und man nur nahe genug bei x^* startet. Eine Begründung dafür lässt sich schon auf Schulniveau geben. Es gilt

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*).$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

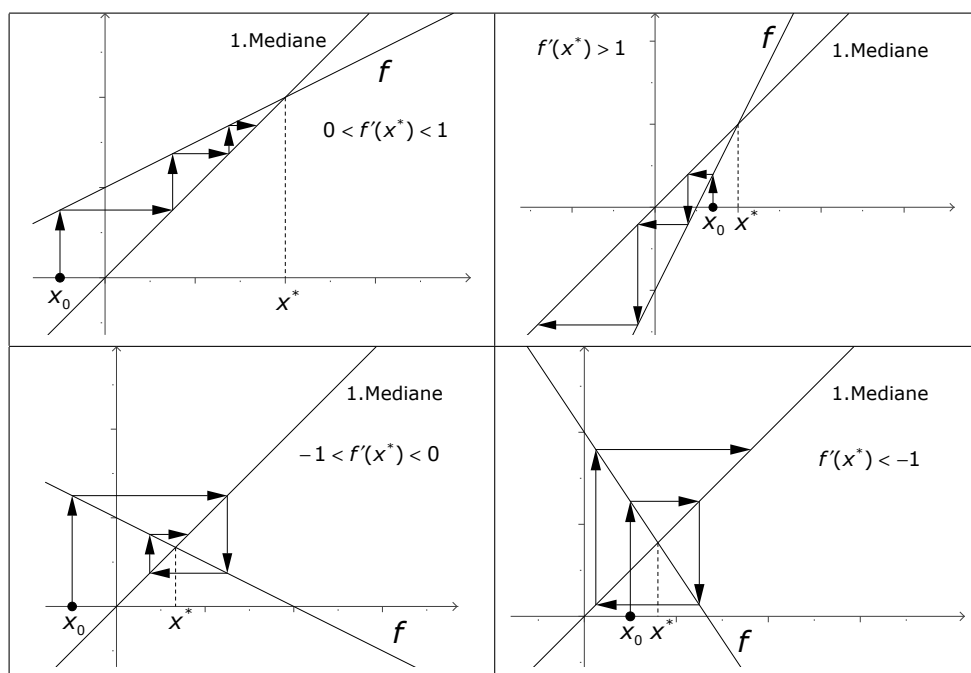
$$f(x_n) - f(x^*) = (x_n - x^*) \cdot f'(c)$$

für ein $c \in (x_n, x^*)$. Setzt man nun noch Beträge, so sieht man, dass

$$|x_{n+1} - x^*| = |x_n - x^*| \cdot |f'(c)|$$

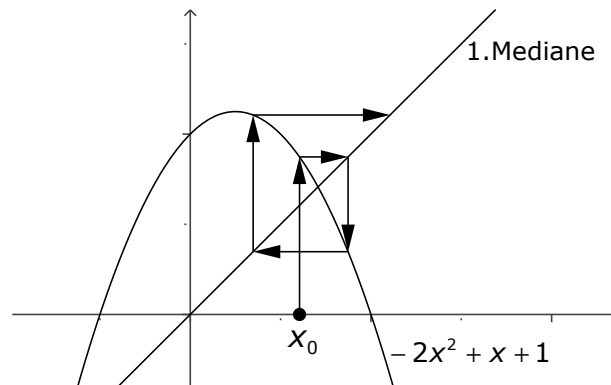
ist. Laut Voraussetzung ist nun $|f'(x^*)| < 1$ und weil man nahe genug bei x^* startet somit aus Stetigkeitsgründen auch $|f'(c)| < 1$. Damit erhält man also das gewünschte Resultat, dass nämlich x_{n+1} näher bei x^* liegt als x_n . Einen exakten Beweis, der zusätzlich zeigt, dass die Abstände nicht nur kleiner werden, sondern sich sogar Null beliebig nähern (also für *lokale Konvergenz*) findet man in KELLEY und PETERSON⁸ oder mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes. Bei der Konvergenz bzw. Divergenz von Rekursionsfolgen gibt es qualitativ gesehen die folgenden vier Typen:

⁸KELLEY und PETERSON 1991, S. 175



Dabei muss f nicht notwendigerweise linear sein wie in obiger Abbildung. Man kann ja eine differenzierbare Funktion in jedem Punkt durch ihre Tangente näherungsweise gut approximieren und erhält daher zumindest in der Nähe des Fixpunktes analoge Situationen. Einen experimentellen Zugang für Schüler bietet Dynamische Geometrie Software⁹. Damit lässt sich auf einfachem Wege jede beliebige Rekursionsfunktion analysieren. Beispielsweise kann der Startwert x_0 durch den in solchen Programmen implementierten *Zugmodus* verändert werden, während sich der Streckenzug sofort mitverändert. Auch kann auf diese Weise untersucht werden, welches Verhalten sich im Fall von zwei oder mehreren Fixpunkten zeigt.

⁹Ein kostenloses und sehr empfehlenswertes Produkt stellt das in Österreich für den Schulgebrauch entwickelte Programm *GeoGebra* dar. Download unter www.geogebra.at, link vom 10.07.2007.

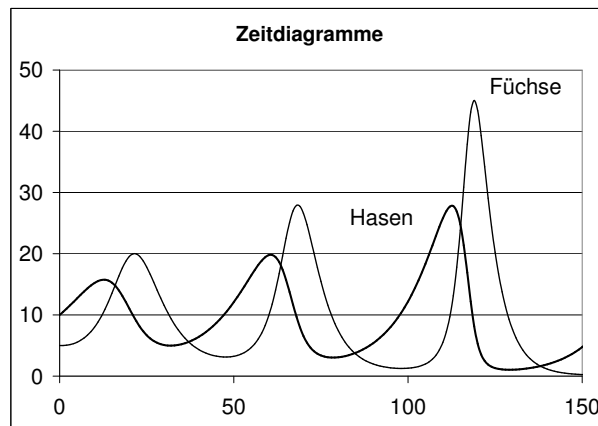


Auch für die Untersuchung der Stabilität von *Systemen von Rekursionen* gibt es eine mathematische Theorie. Für eine Vertiefung in dieses Thema empfehlen sich KELLEY und PETERSON¹⁰ sowie ELAYDI¹¹. Das würde für den Schulunterricht aber viel zu weit führen. Leider gibt es keine elementare Möglichkeit, das Langzeitverhalten von solchen Systemen von Rekursionen mathematisch exakt zu untersuchen¹². Allerdings liefern oftmals schon *Zeitdiagramme* qualitative Erkenntnisse. Trägt man beispielsweise die schrittweise berechneten Hasen- und Fuchsbestände aus dem oben beschriebenen Räuber-Beute-Modell über der Zeitachse auf, so erkennt man schon daraus das bekannte oszillierende Verhalten. Durch das Verändern der Parameter a , b , c und d lässt sich nun analysieren, ob und wann *dieses* qualitative Verhalten in ein anderes umschlägt. Diese *Zeitdiagramme* liefern oftmals ein sehr übersichtliches Bild über den Verlauf des Prozesses. Sie eignen sich auch für die gleichzeitige Darstellung von mehreren unterschiedlichen Größen und haben den Vorteil, dass man die Werte für die betrachteten Größen zu jedem beliebigen Zeitpunkt ablesen kann. Außerdem sind Zeitdiagramme wohl die am intuitiv nächstliegende Darstellungsform für zeitlich veränderbare Prozesse.

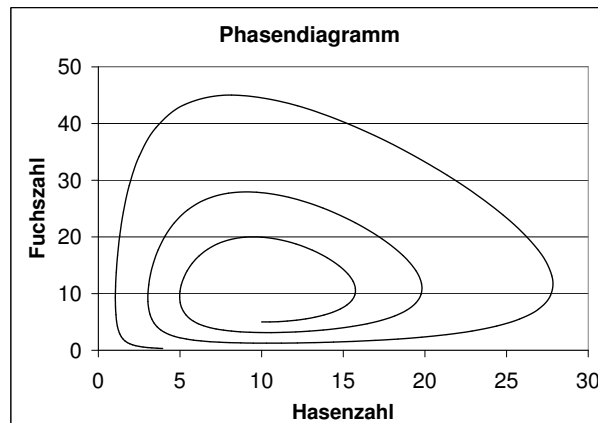
¹⁰KELLEY und PETERSON 1991, Kapitel 5

¹¹ELAYDI 1996, Kapitel 4

¹²Als Beispiel sei hier das Leslie-Modell erwähnt. Siehe dazu die Abschnitte 3.2.8 und 3.4.1.



Im Fall von 2 oder 3 gekoppelten Rekursionen bietet sich auch noch eine andere Darstellungsmöglichkeit an. Etwa könnte man im Räuber-Beute-Modell die Hasenzahl auf der Abszisse und die Fuchszahl auf der Ordinate auftragen. Ein Punkt in diesem Koordinatensystem entspricht dann einem Wertepaar, das die Anzahl der Hasen bzw. die Anzahl der Füchse zu einem bestimmten Zeitpunkt¹³ angibt. Der Vorteil dieser Darstellungsform – des so genannten *Phasendiagramms* – liegt einerseits darin, dass ein eventueller Fixpunkt jetzt tatsächlich einem Punkt im Koordinatensystem entspricht (wie etwa der abstoßende Fixpunkt (10, 10) in der nachfolgenden Grafik) und dass der Einfluss einer Größe auf die andere bzw. die gemeinsame Entwicklung über die Zeit in einer Kurve sichtbar werden.



¹³Diesen kann man allerdings im Phasendiagramm nicht ablesen.

2.2 Differenzen- und Differentialgleichungen

2.2.1 Differenzengleichungen

Oft werden Rekursionsformeln auch als Differenzengleichungen bezeichnet. Der Name kommt daher, dass man Rekursionen meist in die Form

$$x_{n+1} - x_n = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

bringen kann. Die linke Seite ist also die *Differenz* aus „neuem“ und „altem Zustand“ des Systems, während rechts der *Zuwachs* (bzw. die *Abnahme*) in diesem Schritt direkt abzulesen ist. Gibt es eine explizite Darstellung des n -ten Folgenglieds x_n , so bezeichnet man diese als *Lösung* der Differenzengleichung. REICHEL et. al.¹⁴ wünschen sich eine Verstärkung des mathematischen Konzepts der Differenzengleichungen im Schulunterricht. Man sehe an ihm deutlich, wie ein mathematisches Schema in den verschiedensten Bereichen vielfältige Realisierungen hat. Das könne sich motivierend auf die Lernenden auswirken, die Brauchbarkeit der Mathematik werde erkennbar. Es soll nun eine Klassifikation der für die Schulmathematik relevanten Differenzengleichungen gegeben werden:

Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

sind von der Form

$$x_{n+1} = a \cdot x_n + b.$$

Man kann, wie wir schon vorher gesehen haben, einfach eine explizite Darstellung des n -ten Folgenglieds x_n herleiten. Der Fixpunkt dieser Differenzengleichung liegt bei $x^* = \frac{b}{1-a}$. Beginnen wir wieder mit den Differenzen zu diesem Fixpunkt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \frac{b}{1-a} &= a \cdot x_n + b - \frac{b}{1-a} \\ x_{n+1} - \frac{b}{1-a} &= a \cdot \left(x_n - \frac{b}{1-a} \right) \end{aligned}$$

Wir setzen nun $y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$ und erhalten

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= a \cdot y_n \\ y_n &= a^n \cdot y_0 \\ x_n &= a^n \cdot \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

¹⁴REICHEL 1991, S. 100

Diese Lösung gilt natürlich nur für $a \neq 1$. Setzt man in der Differenzengleichung $b = 0$, so hat man die Rekursionsformel einer geometrischen Folge vor sich, als Lösung erhält man

$$x_n = a^n \cdot x_0.$$

Für $a = 1$ ergibt sich

$$x_n = x_0 + n \cdot b,$$

was der Definition einer arithmetischen Folge entspricht.

Nicht-lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

werden allgemein durch

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n)$$

beschrieben, wobei f eine beliebige reelle Funktion ist. Ein bekanntes Beispiel stellt das diskrete logistische Wachstum dar, das die Form

$$x_{n+1} - x_n = a \cdot x_n \cdot (K - x_n)$$

hat, wobei K oftmals als *Kapazitätsgrenze* oder *Sättigungswert* des Wachstumsprozesses bezeichnet wird. Für diese Differenzengleichung lässt sich mit

$$x_n \approx \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right) (1 - aK)^n}$$

nur eine Näherungslösung angeben. In Abhängigkeit von den Konstanten a und K treten dabei qualitativ unterschiedliche Lösungsverläufe auf, die in manchen Fällen chaotisches Verhalten zeigen. Darauf wird im Abschnitt 3.1.4 genauer eingegangen.

Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

haben die Form

$$x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n.$$

Das wohl berühmteste und einfachste Beispiel einer solchen Differenzengleichung ist das *Fibonacci-Modell*:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n, \end{aligned}$$

das durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

gelöst wird. Erstaunlich ist dabei die Tatsache, dass obwohl die Fibonacci-zahlen natürliche Zahlen sind, die Lösung dieser Differenzengleichung derart kompliziert aussieht und sogar irrationale Zahlen in ihrer Darstellung enthält.

Systeme von k Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

werden allgemein beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &= f_1(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \\ x_{2,n+1} &= f_2(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \\ &\vdots \\ x_{k,n+1} &= f_k(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \end{aligned}$$

Als Beispiel für ein System von zwei Differenzengleichungen sei an dieser Stelle das schon oben beschriebene Räuber-Beute-Modell erwähnt.

2.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen sowohl eine Funktion $x(t)$ als auch ihre Ableitungen $x'(t), x''(t), \dots$ vorkommen. In der Biomathematik stellen sie die beliebtesten Werkzeuge zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse dar. Als *Lösung* einer Differentialgleichung bezeichnet man jene Funktion $x(t)$, die die Differentialgleichung und gegebenenfalls eine Anfangsbedingung $x(0) = c$ erfüllt. Nicht alle Differentialgleichungen sind lösbar, es gibt allerdings Kriterien, die es erlauben, ihre Lösbarkeit zu entscheiden. Die für die Schulmathematik relevanten Differentialgleichungen lassen sich meist mit der Methode der *Trennung der Variablen* lösen. Dabei handelt es sich um Differentialgleichungen der Form

$$g(x) \cdot x' = f(t).$$

Sind G und F Stammfunktionen von g und f , so kann man schreiben:

$$G(x) = F(t) + C$$

Drückt man nun x explizit aus, so erhält man die Lösung

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + C).$$

Beispiel

Es soll jene Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \cdot x' = 2t + 3$$

gefunden werden, die die Anfangsbedingung $x(0) = 2$ erfüllt! Nach Suchen der Stammfunktionen erhalten wir

$$\frac{x^3}{3} = t^2 + 3t + C$$

und nach Umformung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t^2 + 9t + C_1}.$$

Wertet man nun an der Stelle $t = 0$ aus und setzt die Anfangsbedingung ein, so erhält man für C_1 den Wert 8 und als Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t^2 + 9t + 8}.$$

Leider kommt man in der Biomathematik mit solch einfachen Differentialgleichungen meist nicht aus, was eine Bearbeitung in der Schule nur schwer möglich macht. Es soll daher im Folgenden anhand eines Beispiels gezeigt werden, wie eine Differentialgleichung in eine Differenzengleichung umgewandelt werden kann, so dass sich am *qualitativen* Verlauf der Lösung nichts ändert. Man gewinnt dadurch eine Möglichkeit, ein kontinuierliches Modell so zu diskretisieren, dass es in der Schule sinnvoll bearbeitet werden kann.

2.2.3 Vom kontinuierlichen zum diskreten Modell - heuristisch

Als Beispiel soll abermals das exponentielle Wachstum dienen, das in der Schule sowohl als kontinuierliches als auch als diskretes Modell behandelt wird. Meistens taucht das *schrittweise* exponentielle Wachstum in der Unterstufe beim Thema *Zinseszinsrechnung* zum ersten Mal auf, während das *stetige* exponentielle Wachstum im AHS-Lehrplan erst in der 8. Klasse Oberstufe vorkommt. An dieser Stelle wollen wir dennoch den umgekehrten Weg gehen und mit der Differentialgleichung

$$x'(t) = \bar{a} \cdot x(t)$$

beginnen. Man kann diese Differentialgleichung auch mit Hilfe des Differentialquotienten anschreiben:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \bar{a} \cdot x(t)$$

Als nächstes führen wir den Diskretisierungsschritt durch, indem wir auf der linken Seite den Grenzübergang *nicht* vornehmen, sondern ein fixes, wenn auch klein gewähltes Δt betrachten. Dies stellt natürlich nur eine Approximation dar, die aber für kleines Δt und nach Wahl einer „neuen“ Konstanten a immer noch „gut“ an das kontinuierliche Modell passt:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = a \cdot x(t)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht zu

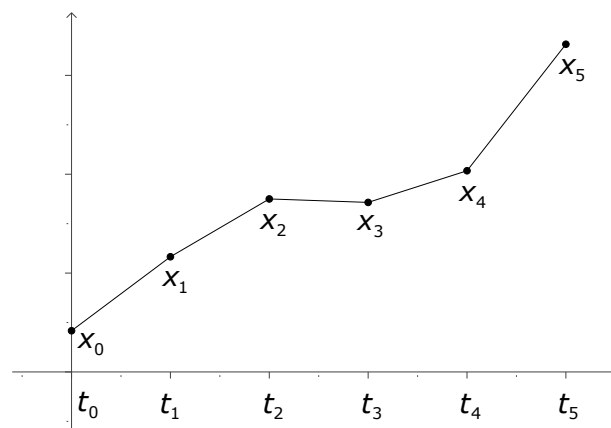
$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot a \cdot x(t)$$

umformen. Definiert man nun $x_n := x(t)$, $x_{n+1} := x(t + \Delta t)$ und $q := \Delta t \cdot a$, so ergibt sich

$$x_{n+1} = x_n + q \cdot x_n = x_n \cdot (1 + q),$$

also genau die Rekursionsformel des diskreten exponentiellen Wachstums.

Ganz allgemein nennt man diese Methode der Diskretisierung *Euler'sches Polygonzugverfahren*. Es dient in der Numerischen Mathematik dazu, gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $x'(t) = f(x(t))$ näherungsweise zu lösen. Dazu wählt man eine möglichst kleine Schrittweite Δt und berechnet rekursiv, ausgehend von einem Startwert $x(t_0) = x_0$, mit Hilfe der Vorschrift $x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot f(x_n)$ die Werte x_1, x_2, x_3 , usw. Grafisch gesehen entspricht das einem Polygonzug:



Die Strecke zwischen x_i und x_{i+1} hat dabei jeweils die Steigung $k = f(x_i)$. Selbstverständlich macht man dabei in jedem Schritt einen Fehler gegenüber der kontinuierlichen Lösungskurve. Durch Verkleinerung der Schrittweite kann

man diesen Fehler allerdings beliebig reduzieren. Das wiederum geht natürlich auf Kosten der Rechenzeit.

Als weitere Verbesserung des Verfahrens könnte man zwei oder mehrere der schon vorher berechneten Werte heranziehen, um einen neuen Wert zu berechnen, anstatt nur auf den letzten Wert zurückgreifen. Zur vertieften Auseinandersetzung mit diesen so genannten *Mehrschrittverfahren* bzw. weiteren Verbesserungsmöglichkeiten des Euler'schen Polygonzugverfahrens wie etwa die *Runge-Kutta-Verfahren* sei auf STREHMEL¹⁵ verwiesen.

¹⁵Siehe STREHMEL 1995, vor allem Kapitel 2 und 4.

Kapitel 3

Biomathematische Modelle

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten biomathematischen Modelle in diskreter Form vorgestellt, die auch für den Einsatz im Schulunterricht denkbar sind. Dabei verstehen sich diese Ausarbeitungen nicht als direkt einsetzbares Unterrichtsmaterial, sondern vielmehr als Ausgangspunkt für Lehrer, die selbst Unterrichtseinheiten zu diesem Thema gestalten wollen. Es sind allerdings an geeigneten Stellen Bemerkungen aus fachdidaktischer Sicht angeführt. Konkrete Ideen, wie solche Unterrichtseinheiten aussehen können, finden Sie dann in den Kapiteln 5-8.

3.1 Modelle mit einer Zustandsgröße

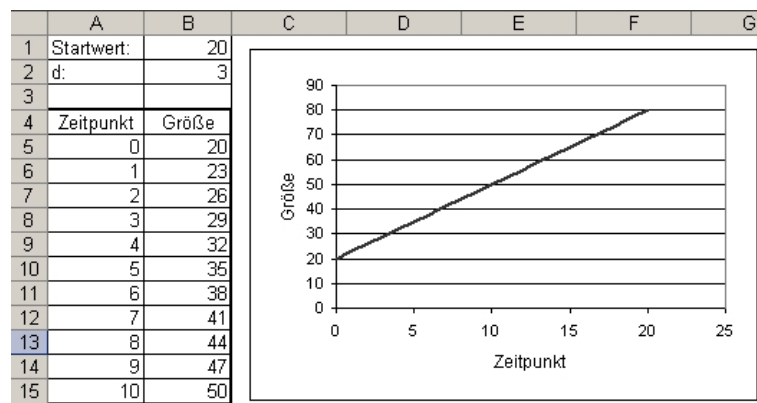
3.1.1 Lineares Wachstum

Das Charakteristikum des linearen Wachstums ist die konstante absolute Zunahme d einer Größe N_t in einem Zeitschritt. Die Differenzengleichung lautet in diesem Fall also

$$N_{t+1} = N_t + d.$$

Sie wird, wie man leicht nachrechnet, durch $N_t = N_0 + t \cdot d$ gelöst. Die Folgenglieder liegen dabei entlang einer Geraden. Beispiele für lineares Wachstum in der Biologie sind etwa das Wachstum von Fingernägeln und Haaren, aber auch das Größenwachstum von Menschen, Tieren und Pflanzen kann in bestimmten zeitlichen Phasen gut dadurch angenähert werden.

Mit einer Tabellenkalkulation kann man den Verlauf über mehrere Zeitschritte grafisch darstellen. Als Startwert wählen wir $N_0 = 20$ und als Zuwachs pro Zeitschritt $d = 3$. Nachstehend findet man einen entsprechenden *Screenshot* aus Excel, bei späteren Modellen sind aus Gründen besserer Druckqualität lediglich die Grafiken der Kurvenverläufe abgebildet.



Lineares Wachstum mit: $N_0 = 20$; $d = 3$

In dieser Grafik wurde bewusst die Gerade durch die einzelnen Datenpunkte gezeichnet, da bei den oben angegebenen Beispielen die Größe auch zwischen den betrachteten Zeitpunkten wächst. Die Steigung ist dabei gerade d (für $d < 0$ ergibt sich eine fallende Gerade und man spricht auch von *linearer Abnahme*). Man erkennt, dass es sich beim linearen Wachstum für $d \neq 0$ selbstverständlich um unbegrenztes Wachstum handelt. Lineares Wachstum kann also nicht zuletzt deswegen nur ein *Modell* für reale Prozesse sein. Das entsprechende kontinuierliche Modell wird durch die Differentialgleichung $N'(t) = \bar{d}$ beschrieben. Lineare Zusammenhänge sind in der Biologie zwar selten, liefern aber in manchen Bereichen gute erste Approximationen für nichtlineare Zusammenhänge.

Aufgabe

Das Wachstum einer Sonnenblume¹ verläuft in den ersten 50 Tagen annähernd linear. Die folgende Tabelle gibt einige Messwerte aus diesem Zeitraum wieder:

Zeit (in Tagen)	Höhe (in cm)
14	36
21	68
28	98
35	131
42	170
49	206

Zeichnen Sie diese Werte in ein geeignetes Koordinatensystem! Nähern Sie die Daten durch ein passendes lineares Wachstumsmodell an! Wie groß ist der durchschnittliche tägliche Zuwachs?

¹vgl. OLINICK 1978, gerundet

Aufgabe

Bei Seefischen wurden von 1956 bis 1970 weltweit folgende Jahresfänge (in Millionen Tonnen) verzeichnet²: 22,7; 22,8; 24,1; 26,8; 29,2; 32,2; 35,6; 36,4; 40,9; 39,6; 43,0; 45,9; 48,7; 47,2; 52,7.

Stellen Sie die Messwerte in einem geeigneten Koordinatensystem dar! Nähern Sie die Daten durch ein passendes lineares Wachstumsmodell³ an!

Aufgabe

Die Lebenserwartung der österreichischen Frauen ist in den letzten 35 Jahren um etwa 10 Lebensjahre angestiegen. Die folgende Tabelle⁴ gibt die Lebenserwartung bei der Geburt von 1970 bis 2005 wieder:

Geburtsjahr	Lebenserwartung (in Jahren)
1970	66,5
1975	67,7
1980	69,0
1985	70,4
1990	72,2
1995	73,3
2000	75,1
2005	76,7

Zeichnen Sie die Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem! Kann man die Daten durch ein lineares Wachstumsmodell vernünftig annähern? Um wie viel steigt die Lebenserwartung durchschnittlich in einem Jahr? Wenn das Wachstum weiterhin so verlaufen würde, wie hoch wäre dann die Lebenserwartung der österreichischen Frauen im Jahr 2050?

3.1.2 Exponentielles Wachstum

Die Zunahme einer Größe ist zu Beginn eines biologischen Wachstumsprozesses oft proportional zum derzeitigen Bestand (Bakterienwachstum, Wachstum durch Zellteilung, Bevölkerungswachstum, ...). Dieser Zusammenhang wird mathematisch durch das exponentielle Wachstum beschrieben. Die zugehörige Rekursionsformel lautet

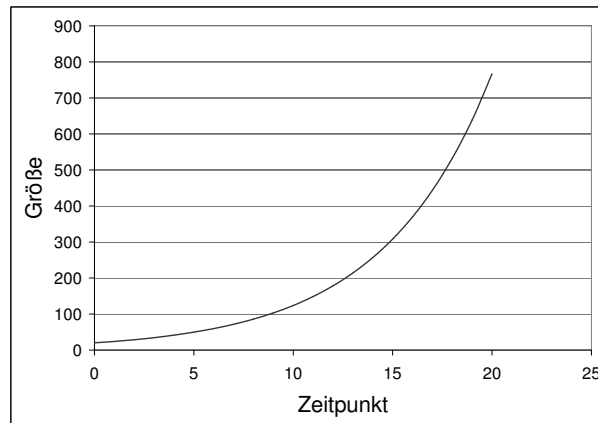
$$N_{t+1} = N_t \cdot (1 + r),$$

²vgl. TIMISCHL 1995

³Je nach Möglichkeit kann das durch eine Regressionsgerade oder einfach mittels *Augenmaß* unter Zuhilfenahme eines Tabellenkalkulationsprogramms erfolgen.

⁴Daten aus dem Internet, Link vom 23.05.07: <http://www.statsitik.at>, gerundet

wobei r in der Literatur häufig als *Wachstumsrate* und $q = (1+r)$ als *Wachstumsfaktor* bezeichnet wird. $N_t = N_0 \cdot q^t$ löst diese Differenzengleichung, wie man leicht einsieht.



Exponentielles Wachstum mit: $N_0 = 20$; $q = 1, 2$

Neuerlich haben wir es mit unbegrenztem Wachstum zu tun. Bakterienkulturen etwa wachsen im Anfangsstadium tatsächlich annähernd exponentiell. Wird allerdings der Nährboden, auf dem sie gezüchtet werden, nicht ständig erneuert bzw. wird nicht genügend Platz für die Bakterien bereitgestellt, ist mit dem Wachstum aber irgendwann Schluss. Auch kommt hier noch der Effekt der *Intoxikation* dazu, also der selbständigen Vergiftung der Bakterien durch ihre eigenen Ausscheidungsprodukte. Der Verlauf eines realistisch ablaufenden Bakterienwachstums und eine Beschreibung der dabei auftretenden Phasen ist bei D'ANCONA⁵ zu sehen. Die Differentialgleichung $N'(t) = \bar{q}N(t)$ liefert das kontinuierliche Analogon zum oben betrachteten diskreten Modell.

Die Zusatzfragen in diesem und in den folgenden Abschnitten sollen weitere Anreize für die Bearbeitung der biomathematischen Modelle geben. Sie sind demnach nicht in dieser Form für den Schulunterricht gedacht, sondern sollen lediglich dem Leser dieser Arbeit Ausgangspunkte zur Vertiefung in die Thematik aufzeigen. Sie sind inhaltlich auch für den Unterricht interessant, müssen dann allerdings für die jeweilige Altersstufe adaptiert werden.

Zusatzfragen

- *In welchem Zeitraum verdoppelt sich jeweils der Wert der Größe?*
- *Wie sieht der Verlauf für $r < 0$ aus?*

⁵D'ANCONA 1939, S. 49

- Wie groß muss q gewählt werden, damit sich die betrachtete Größe innerhalb von 20 Zeitschritten verdoppelt? Ist dieser Wert abhängig vom Startwert N_0 ?
- Wie verändert sich N_{20} , wenn N_0 verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht wird?

Aufgabe

Die Bevölkerung der USA ist in den Jahren von 1790 bis 1890 annähernd exponentiell angewachsen, wie die folgenden Daten⁶ bestätigen:

Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)
1790	3,9
1800	5,3
1810	7,2
1820	9,6
1830	12,9
1840	17,1
1850	23,2
1860	31,4
1870	38,6
1880	50,2
1890	62,9

Wie müssten die Parameter im Modell des exponentiellen Wachstums gewählt werden, um die gegebenen Daten *gut* anzunähern? Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationsprogramm, um experimentell passende Werte für die Parameter zu finden! Erlaubt dieses Modell Prognosen über das 1890 hinaus? Wie groß wäre die Bevölkerung der USA heute, wenn das Wachstum weiterhin so rasch verlaufen wäre?

Aufgabe

Der jährliche Holzeinschlag, das ist das Volumen des in einem Jahr geschlägerten Waldes, ist im Burgenland in den letzten 45 Jahren annähernd exponentiell angestiegen. Stellen Sie die folgenden Daten⁷ in einer Grafik dar!

⁶aus TIMISCHL 1995, gerundet

⁷aus dem Internet: Link vom 23.05.07: <http://www.statistik.at>, gerundet

Jahr	Holzeinschlag (in Tausend Festmeter)
1960	279
1970	316
1980	298
1990	393
2000	560
2005	704

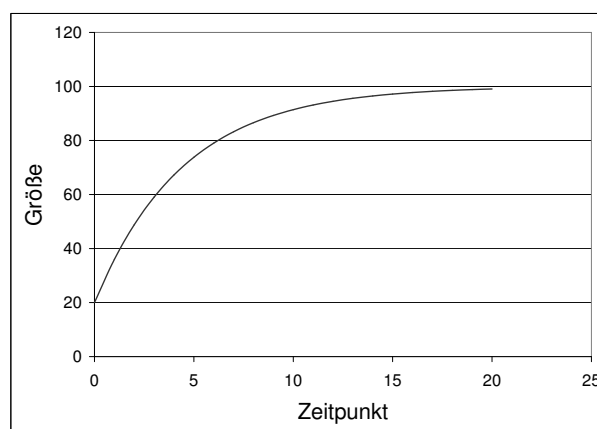
Wie groß ist der jährliche Wachstumsfaktor ungefähr zu wählen, wenn man diese Datenpunkte durch exponentielles Wachstum beschreiben will? In welchem Zeitraum verdoppelt sich jeweils der Holzeinschlag nach diesem Modell? Wie lange wird es voraussichtlich noch dauern, bis der jährliche Holzeinschlag 2 Millionen Festmeter übersteigt?

3.1.3 Begrenztes Wachstum

In der Natur gibt es aufgrund beschränkten Platz-, Nahrungs- oder Ressourcenangebots niemals unbegrenzte Wachstumsvorgänge. Mathematisch kann das etwa so modelliert werden, dass man eine gewisse konstante *Kapazität* K des Lebensraums annimmt und dass der Zuwachs pro Zeitschritt proportional zur derzeit noch verfügbaren Kapazität, also zu $(K - N_t)$ ist. Daraus ergibt sich die Differenzengleichung

$$N_{t+1} = N_t + r \cdot (K - N_t).$$

Der einzige Fixpunkt errechnet sich aus $N_{t+1} = N_t$ zu $N_t = K$. Die Lösung $N_t = K - (K - N_0) \cdot (1 - r)^t$, die man leicht durch Einsetzen bestätigen kann, zeigt folgenden qualitativen Verlauf:



Begrenztes Wachstum mit: $N_0 = 20$; $r = 0,2$; $K = 100$

Zusatzfragen

- Was passiert, wenn man $N_0 \geq K$ wählt?
- Wie müsste die Differentialgleichung zu diesem Modell lauten?

Aufgabe

Die Säuglingssterblichkeit ist in Österreich aufgrund des medizinischen Fortschrittes seit 1970 rasant zurückgegangen⁸:

Jahr	Verstorbene im ersten Lebensjahr (auf 1000 Lebendgeborene)
1970	26,0
1975	20,2
1980	14,2
1985	11,1
1990	7,8
1995	5,4
2000	4,8
2005	4,2

Stellen Sie die Daten grafisch dar! Finden Sie auf experimentellem Weg geeignete Parameter, um diesen Prozess durch ein begrenztes Wachstumsmodell darzustellen! Geben Sie anschließend auch ein exponentielles Modell an und vergleichen Sie die beiden Modelle! Welches beschreibt den Verlauf besser? In welcher Hinsicht?

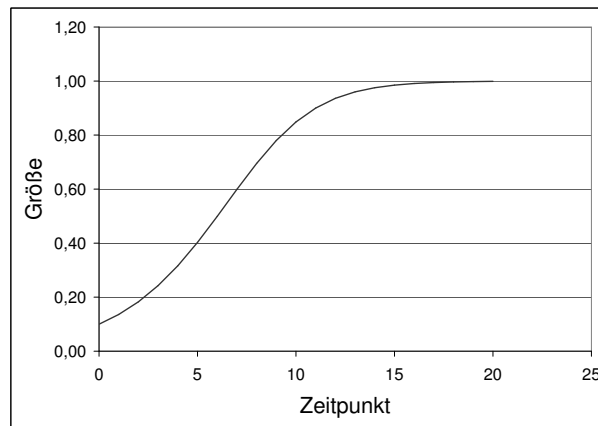
3.1.4 Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum ist ein sehr vielseitig einsetzbares Modell, das beispielsweise sowohl zur Beschreibung einer Bakterienkultur als auch einer menschlichen Bevölkerung herangezogen werden kann. Auch Pflanzenwachstum und Sättigungsvorgänge in der Wirtschaft (z. B. der Absatz eines neuen Produkts) und Gesellschaft (z. B. die Verbreitung eines Gerüchts) können damit modelliert werden. Das logistische Wachstum ist eine Verknüpfung des exponentiellen mit dem begrenzten Wachstum. Die schrittweise Zunahme ist nämlich das Produkt aus einem Faktor, der zum derzeitigen Bestand N_t proportional ist und einem Faktor, der zum noch vorhandenen Freiraum $(K - N_t)$ proportional ist. Die daraus resultierende Differenzengleichung lautet demnach:

⁸Daten aus dem Internet, Link vom 23.05.07: <http://www.statistik.at>, gerundet

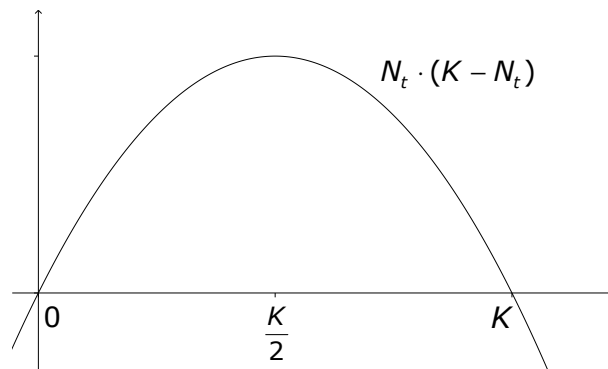
$$N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot (K - N_t)$$

Wie schon oben erwähnt, kann hier keine exakte Lösung gefunden werden. Und auch die schrittweise berechnete Lösungsfolge verhält sich in Abhängigkeit vom Parameter r nicht immer „brav“. Um das zu untersuchen, setzen wir der Einfachheit halber $K = 1$ und $N_0 = 0,1$ und betrachten den Verlauf für unterschiedliche Werte von r .

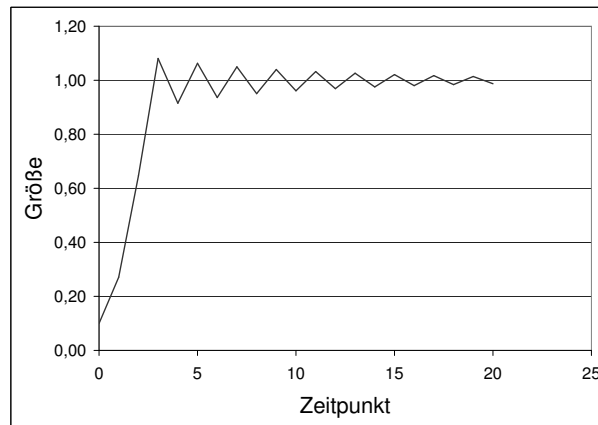


Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,1$; $r = 0,4$; $K = 1$

Für $r < 1$ ergibt sich das für viele Wachstumsprozesse gewünschte Verhalten, nämlich eine schrittweise Annäherung an die Kapazitätsgrenze $K = 1$. Man nennt den Verlauf dieser Kurve *sigmoid*. Im Anfangsstadium, also bei $N_t \ll K$ ähnelt das Wachstum dem exponentiellen, da dann $K - N_t \approx K$ und damit $N_{t+1} \approx N_t \cdot (1 + r \cdot K)$ gilt. Bei Annäherung an die Kapazitätsgrenze, also bei $N_t \approx K$ wird das Wachstum wegen $K - N_t \approx 0$ gebremst und verläuft qualitativ wie beim begrenzten Wachstum. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist dann am größten, wenn das Produkt $N_t \cdot (K - N_t)$ maximal wird, was bei $N_t = \frac{K}{2}$ der Fall ist:

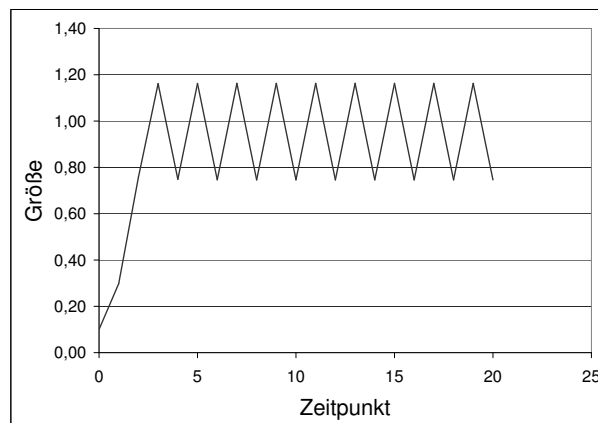


Vergrößert man r , so kommt es zu Oszillationen, die sich aber relativ rasch wieder beim Fixpunkt $K = 1$ einpendeln.



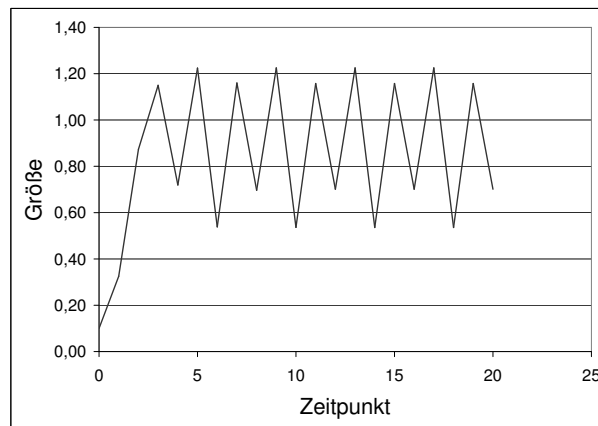
Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,1$; $r = 1,9$; $K = 1$

Wählt man etwa für $r = 2,2$, so nähert sich der Verlauf periodischem Verhalten:



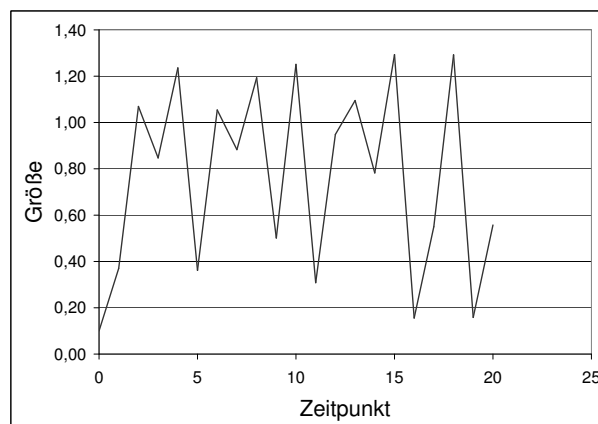
Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,1$; $r = 2,2$; $K = 1$

Für noch größere Werte von r (etwa $r = 2,5$) zeigt sich doppelt-periodisches Verhalten:



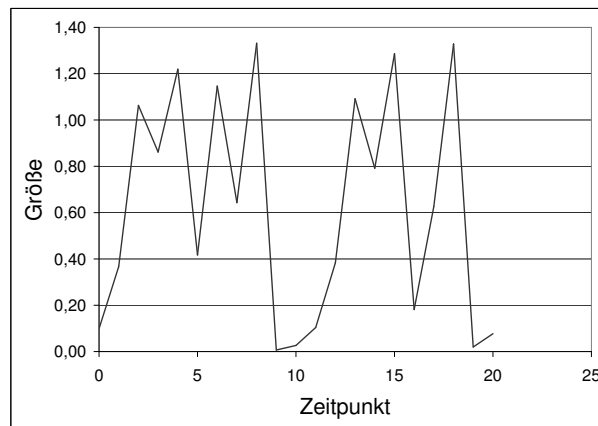
Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,1$; $r = 2,5$; $K = 1$

Zu solchen *Periodenverdoppelungen* kommt es bei Vergrößerung von r noch einige Male (Viererperiode, Achterperiode, ...), bis es schließlich für Werte um $r = 3$ keine unterscheidbaren Perioden mehr gibt und es zu völlig unvorhersehbaren Schwankungen kommt:



Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,1$; $r = 3,0$; $K = 1$

Man nennt dieses Verhalten *deterministisches Chaos*. Dieser Begriff klingt bei erster Betrachtung paradox, lässt sich aber folgendermaßen erklären: Zwar ist durch die Festlegung des Startwertes N_0 der spätere Verlauf der Lösungsfolge mathematisch eindeutig bestimmt (*determiniert*), allerdings hängt dieser Verlauf aber empfindlich von der Wahl des Anfangswertes (und daher natürlich auch von den Rundungen, die man nach jedem Schritt durchführt) ab und kann somit als chaotisch bezeichnet werden. Ändert man beispielsweise den Startwert von 0,100 auf 0,099 ab, so zeigt sich nach einigen Zeitschritten ein völlig anderes Bild als zuvor:



Logistisches Wachstum mit: $N_0 = 0,099$; $r = 3,0$; $K = 1$

Interessant ist auch, dass man beim Vergrößern des Parameters r Intervalle findet, in denen plötzlich wieder geordnetes, periodisches Verhalten auftritt. Beispielsweise gibt es sogar ein relativ großes Intervall für r , das Perioden der Länge 3 liefert. Ein guter Literaturverweis, der sich fast ausschließlich mit dem chaotischen Verhalten des logistischen Wachstums befasst, ist der Artikel von REINARTZ⁹. Im Alltag kommt man vor allem bei einem Thema mit chaotischem Verhalten in Kontakt, nämlich bei der Wettervorhersage. Das Wetter ist ein hochkomplexes System, das von unzähligen Parametern und Größen beeinflusst wird. Ändert sich eine dieser Ursachen, so kann das schon über kurze Zeitdauern zu völlig unprognostizierbaren Ergebnissen führen. Längerfristige Vorhersagen sind daher grundsätzlich nicht möglich. Und auch die Diskussion über den Klimawandel kann man in diesem Zusammenhang besser verstehen. Eingriffe des Menschen in den CO_2 -Kreislauf der Erde können völlig unverhersehbare Auswirkungen haben, leichte Änderungen der derzeitigen Bedingungen können zu unkontrollierbaren Folgen führen. REINARTZ¹⁰ etwa beklagt: „Tatsächlich aber wird auf der politischen, ökonomischen und sozialen Ebene häufig wegen kurzfristiger wirtschaftlicher Erwägungen linear entschieden“. Schnell gelangt man also von einem recht einfach anmutenden Bevölkerungsmodell zu einer tiefliegenden und in der Öffentlichkeit teils sehr kontrovers geführten Diskussion über komplexe Systeme. Ein sehr fruchtbares Thema für fächerübergreifenden Unterricht also.

Die logistische Gleichung wurde erstmals 1837 von *Pierre François Verhulst* formuliert und stellt historisch gesehen den Beginn eines neuen Forschungsgebietes dar, nämlich der mathematischen *Chaostheorie*. Eine gute Einführung in dieses Teilgebiet der Mathematik bietet das Werk von ARGYRIS, FAUST

⁹siehe REINARTZ 2003

¹⁰REINARTZ 2003, S. 57

und HAASE¹¹.

Im Gegensatz zum diskreten Modell lässt sich die logistische Differentialgleichung

$$N'(t) = \bar{r} \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$$

durch *Trennen der Variablen* exakt lösen:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \cdot e^{-\bar{r}Kt}}$$

Zusatzfragen

- Was passiert in den einzelnen Fällen, wenn man $N_0 = K$ oder $N_0 > K$ wählt?
- Was geschieht bei $r > 3$?
- Wie sieht der Verlauf der Lösung im kontinuierlichen Fall aus? Verwenden Sie ein CAS!
- Zeigen Sie durch Einsetzen die Richtigkeit der kontinuierlichen Lösung!

Beispiel

Beschreiben Sie das Wachstum der österreichischen Bevölkerung im Zeitraum von 1600 bis 2000 durch ein logistisches Modell mit $N_{1600} = 1,8$ (in Millionen) und $r = 0,0035$! Welcher Wert für K erscheint Ihnen sinnvoll? Vergleichen Sie die gewonnenen Werte mit den realen Daten¹²:

Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)	Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)
1600	1,80	1857	4,08
1700	2,10	1880	4,96
1754	2,73	1910	6,65
1780	2,97	1939	6,65
1790	3,05	1971	7,49
1800	3,06	1990	7,68
1830	3,48	2000	8,01

In welchem Bereich passt Ihr Modell gut/schlecht an die realen Daten?

¹¹ARGYRIS, FAUST und HAASE 1994, logistisches Wachstum s. S. 365

¹²aus dem Internet, Link vom 23.05.07: <http://www.statistik.at>, gerundet

Aufgabe

Das Beispiel des Sonnenblumenwachstums im Abschnitt 3.1.1 beschäftigt sich lediglich mit dem Anfangsstadium dieses Prozesses. Selbstverständlich könnte die betrachtete Sonnenblume nicht für alle Zeiten auf diese Art weiterwachsen. Misst man die Höhe der Sonnenblume über den 50. Tag hinaus, so erhält man beispielsweise folgende Werte¹³:

Zeit (in Tagen)	Höhe (in cm)
14	36
21	68
28	98
35	131
42	170
49	206
56	228
63	247
70	251
77	254
84	255

Zeichnen Sie die Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem! Nähern Sie die Daten durch ein logistisches Wachstumsmodell an! Wie könnte man „messen“, ob das Modell die realen Daten gut annähert?

Aufgabe

Eine unter Laborbedingungen gezüchtete Fliegenpopulation (*Drosophila*) ist in den ersten Tagen wie folgt angewachsen¹⁴:

Zeit (in Tagen)	Bevölkerungsgröße
1	6
3	21
5	67
7	163
9	256
11	319

Vergleichen Sie das logistische Modell ($N_1 = 6$, $r = 0,00255$ und $K = 317$) mit den realen Daten! Wo liegen die Schwächen des logistischen Modells in diesem Beispiel? Könnte man diese Schwächen durch Verändern der drei Parameter beseitigen?

¹³vgl. OLINICK 1978, gerundet

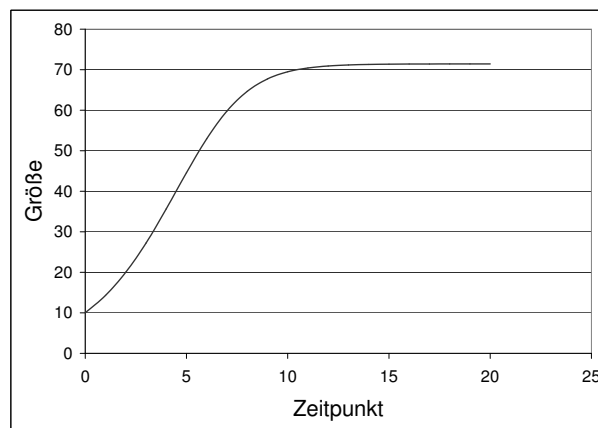
¹⁴vgl. TIMISCHL 1995, S. 94

3.1.5 Schaeffer'sches Modell

Das Schaeffer'sche Modell beschreibt das Wachstum einer logistisch wachsenden Bevölkerung, die unter Bejagung steht. Dabei wird davon ausgegangen, dass in jedem Zeitschritt ein fester relativer Anteil a der Bevölkerung durch Jagd getötet wird. Die Rekursion lautet dann also:

$$N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot (K - N_t) - a \cdot N_t$$

Fixpunkte findet man bei $N_t^* = 0$ und $N_t^* = K - \frac{a}{r}$, wobei letzterer nur für $a < Kr$ einen biologisch relevanten, positiven Wert annimmt, d. h. wenn die Bejagung nicht zu groß ist.



Schaeffer'sches Modell mit: $N_0 = 10$; $r = 0,007$; $a = 0,2$; $K = 100$

Die Jäger könnten sich nun die Frage stellen, für welches a der dauerhafte Ertrag im Fixpunkt am größten ist. Das bedeutet, dass man die Größe $a \cdot N_t^*$ maximieren will. $a \cdot N_t^* = aK - \frac{a^2}{r}$ stellt in Abhängigkeit von a eine Parabel mit den Nullstellen $a = 0$ und $a = Kr$ dar, die ihren Scheitel und damit ihr Maximum bei $a_{\max} = \frac{Kr}{2}$ annimmt. Man sollte also den *Bejagungsparameter* a den natürlichen Parametern K und r dementsprechend anpassen, um möglichst großen dauerhaften Ertrag zu erzielen.

Aufgabe

Es wird geschätzt, dass in einem gewissen Gebiet die Kapazität für Rehe mit $K = 200$ beschränkt ist und dass $r = 0,001$ ist.

- Was passiert mit der Rehpopulation auf lange Sicht, wenn in jedem Zeitschritt 15% der Rehe erlegt werden?
- Bestätigen Sie das Ergebnis durch die Anfertigung eines Spinnwebdiagramms!

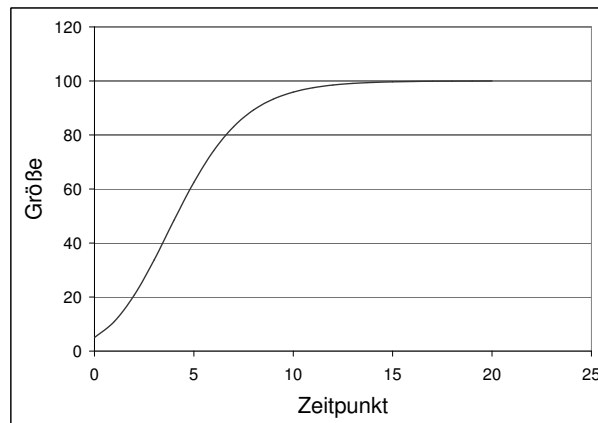
- Wie hoch dürfte a maximal gewählt werden, um der Population ein dauerhaftes Überleben zu ermöglichen?
- Wie müssten die Jäger den Parameter a *optimal* wählen?
- Bei welcher Bevölkerungsgröße N_t ist für dieses optimale a die Wachstumsgeschwindigkeit der Rehpopulation maximal?

3.1.6 Gompertz-Modell

Das nach dem Engländer *Benjamin Gompertz* benannte Modell, das schon 1825 erstmals publiziert wurde, zeigt ganz ähnliches Verhalten wie das erst später populär gewordene, aber weitaus bekanntere logistische Modell. Im diskreten Fall treten bei Vergrößerung des Parameters r qualitativ gesehen dieselben Verläufe wie beim logistischen Wachstum auf.

Das Modell wurde ursprünglich ebenfalls aus dem Modell des exponentiellen Wachstums entwickelt, indem es um eine Kapazitätsgrenze K erweitert wurde.

$$N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot \ln \left(\frac{K}{N_t} \right)$$



Gompertz-Modell mit: $N_0 = 5$; $r = 0,04$; $K = 100$

Das Modell dient etwa dazu, das Wachstum von Bäumen in Forstbetrieben zu beschreiben¹⁵.

¹⁵Siehe dazu etwa NOWAK 2002, S. 27-32.

Zusatzfragen

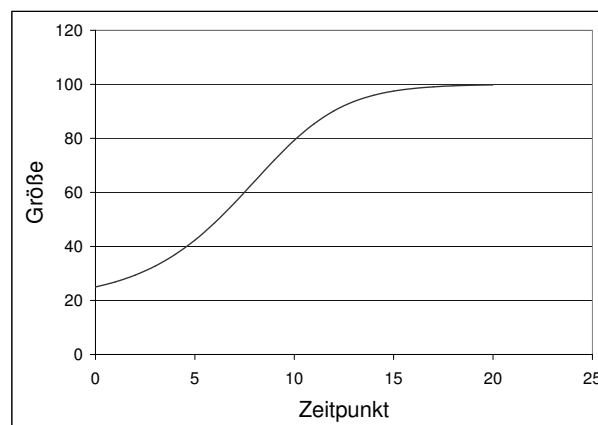
- Wann ist in diesem Modell für $r < 1$ die Wachstumsgeschwindigkeit maximal?
- Finden Sie Werte für r , bei denen sich periodisches, doppelt-periodisches oder chaotisches Verhalten zeigt?
- Wie muss die Differentialgleichung zu diesem Modell lauten?

3.1.7 Allee-Effekt 1

In der Natur kommt es häufig vor, dass eine gewisse Population nur dann überleben kann, wenn zumindest eine bestimmte *Grenzzahl* T an Individuen vorhanden ist¹⁶. Dieses Phänomen ist nach dem amerikanischen Ökologen *Warder Clyde Allee* benannt worden und lässt sich dadurch erklären, dass Paarungen nur dann stattfinden können, wenn sich verschiedengeschlechtliche Tiere genügend oft „über den Weg laufen“ und in Folge paaren können. Ein anderer Grund kann etwa auch ein Inzuchteffekt aufgrund der kleinen Bevölkerungszahl sein, bei dem es zu einer Anhäufung schädlicher Allele im Genmaterial der Spezies kommt. Ist also $N_0 < T$, so soll auch im Modell die Bevölkerung aussterben, d. h. der für das Wachstum zuständige Term soll kleiner als Null sein. Dies lässt sich durch Ersetzen des Terms N_t durch den Term $N_t - T$ im logistischen Modell erreichen:

$$N_{t+1} = N_t + r \cdot (N_t - T) \cdot (K - N_t)$$

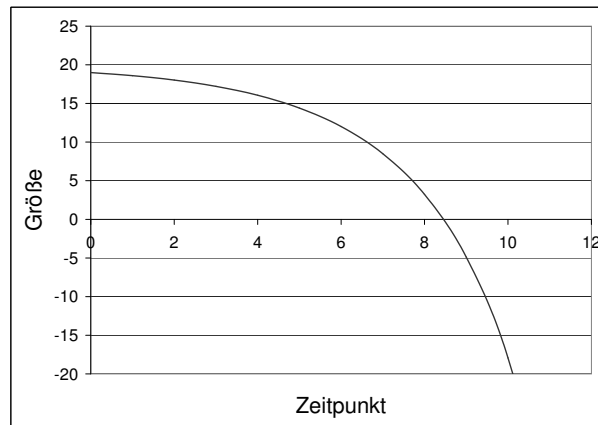
Wählt man etwa $T = 20$ und $N_0 = 25$, so kommt es zu einem sigmoiden Verlauf der Lösungsfolge:



Allee-Effekt 1 mit: $N_0 = 25$; $r = 0,005$; $K = 100$; $T = 20$

¹⁶Siehe dazu etwa MURRAY 2002, S. 71.

Startet man allerdings mit einem Wert kleiner als T , also z. B. mit $N_0 = 19$, so stirbt die Bevölkerung bereits nach einigen Zeitschritten aus:



Allee-Effekt 1 mit: $N_0 = 19$; $r = 0,005$; $K = 100$; $T = 20$

Leider ergibt sich hier wieder eine recht unrealistische Situation, nämlich das Zustandekommen „negativer Bevölkerungszahlen“. Das lässt sich allerdings mit ein wenig Geschick beheben, wie man im Abschnitt 3.1.8 sehen kann.

Zusatzfragen

- Was passiert, wenn man $N_0 = T$ wählt?
- Kommt es auch hier bei Vergrößerung von r zu chaotischem Verhalten?
- Zeigen Sie, dass der Wachstumsterm für $N_t = \frac{K+T}{2}$ sein Maximum annimmt!

3.1.8 Allee Effekt 2

Ein anderer Zugang, dieses Phänomen zu modellieren besteht darin, von exponentieller Abnahme der Bevölkerung auszugehen. Das ist ja gerade jenes Verhalten, das man sich von dem Modell für kleine Bevölkerungszahlen erwartet – negative Populationszahlen sind dabei ausgeschlossen. Wir starten also mit:

$$N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t$$

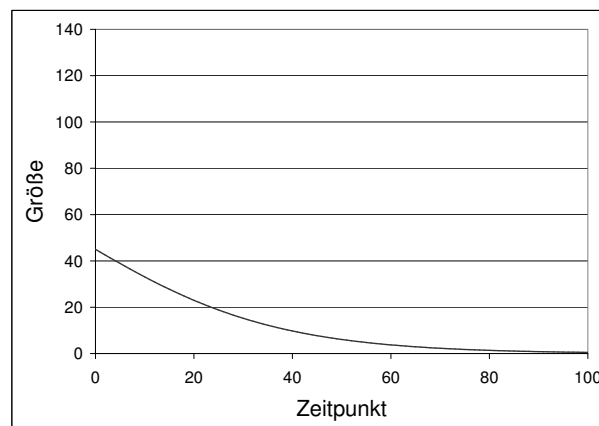
Natürlich soll aber nun die Bevölkerung wachsen, wenn genügend geschlechtsreife Tiere vorhanden sind. Gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass es in der Bevölkerung ein konstantes Verhältnis zwischen männlichen und weiblichen Tieren gibt. Von N_t Tieren sollen also $m \cdot N_t$ männliche und $w \cdot N_t$ weibliche Exemplare vorhanden sein, wobei natürlich $m + w = 1$ gelten muss.

Die Zahl der Geburten pro Zeiteinheit soll nun proportional zur Zahl der möglichen Paarungen in der Bevölkerung sein. Davon gibt es, wie man sich leicht überlegt, $mN_t \cdot wN_t$ viele. Jedes Männchen kann ja prinzipiell jedem einzelnen Weibchen über den Weg laufen, hätte also wN_t Paarungsmöglichkeiten. Bei insgesamt mN_t Männchen ergibt das die oben genannte Zahl. Natürlich führen nicht alle diese Paarungsmöglichkeiten tatsächlich zu Nachwuchs, sondern nur ein gewisser relativer Anteil r . Fasst man nun die Größe $m \cdot w \cdot r$ zum Parameter b zusammen, so beschreibt der Term $b \cdot N_t^2$ gerade die Anzahl der Geburten im nächsten Zeitschritt.

$$N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t + b \cdot N_t^2$$

Nebenbei erwähnt: Dieses Modell erinnert bis jetzt sehr an das logistische Wachstumsmodell, das schon oben behandelt wurde. Der Unterschied liegt einzig in den vertauschten Vorzeichen der Terme. Während hier der lineare Teil des Wachstumsterms negativ ist und der quadratische Term positiv, war die Sachlage beim logistischen Modell gerade umgekehrt. Das äußert sich natürlich auch im Verlauf der Lösungskurve. Der Wachstumsterm $-a \cdot N_t + b \cdot N_t^2$ beschreibt eine Parabel, die ihre Nullstellen bei $N_t = 0$ und $N_t = \frac{a}{b}$ hat. Dort liegen also die Fixpunkte des Wachstumsprozesses. Der Scheitel der Parabel ist folglich bei $N_t = \frac{a}{2b}$ zu finden. Insgesamt gibt es damit drei qualitativ unterschiedliche Fälle.

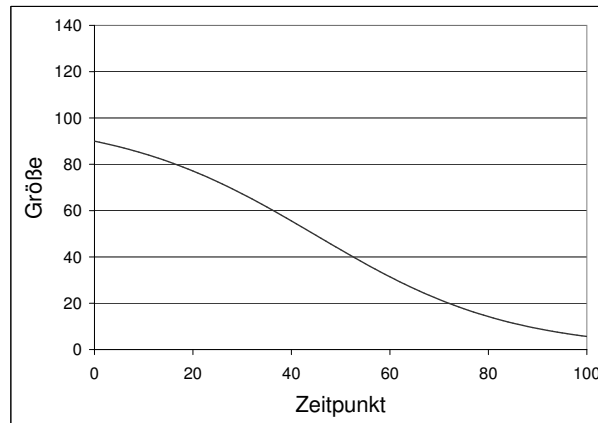
Betrachten wir zunächst den kritischen Fall von vorhin, also kleine Bevölkerungszahlen. Für $N_0 < \frac{a}{2b}$, im gezeigten Beispiel also $N_0 < 50$, erhalten wir wie gewünscht folgenden Verlauf:



Allee-Effekt 2 mit: $N_0 = 45$; $a = 0,05$; $b = 0,0005$

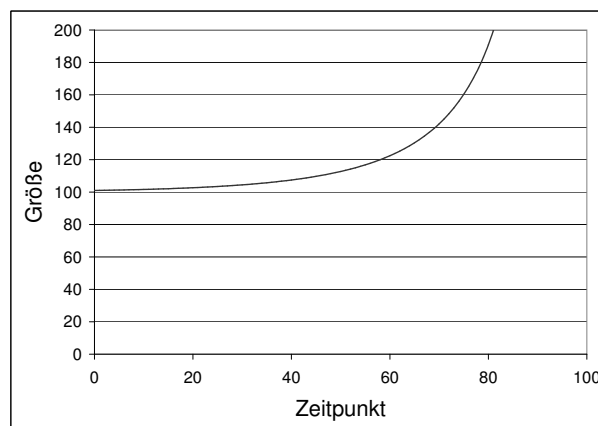
Auch für $\frac{a}{2b} < N_0 < \frac{a}{b}$, also hier $50 < N_0 < 100$, liefert das Modell brauchbare Ergebnisse. Sobald N_t beim Wert $\frac{a}{2b}$ angelangt ist, ändert sich der qualitati-

ve Verlauf der Lösungskurve. Ein „Wendepunkt“¹⁷, analog zum logistischen Wachstumsmodell zeigt sich. Er kennzeichnet jenen Zeitpunkt, bei dem die Abnahme der Bevölkerungszahlen pro Zeitschritt am größten ist.



Allee-Effekt 2 mit: $N_0 = 90$; $a = 0,05$; $b = 0,0005$

Allein für $N_0 > \frac{a}{b}$ tritt ein Problem auf, das wir schon vom linearen oder exponentiellen Wachstum kennen – nämlich unbegrenztes Wachstum.



Allee-Effekt 2 mit: $N_0 = 101$; $a = 0,05$; $b = 0,0005$

Offenbar lassen sich also die drei Eigenschaften *Allee-Effekt*, *begrenzt*es Wachstum und *Fixpunkt* bei $N_t = 0$ in einer Rekursion der Form

$$N_{t+1} = N_t + a \cdot N_t + b \cdot N_t^2,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, nicht vereinbaren.

Starten wir also noch einen letzten Versuch, die Rekursion zu verbessern,

¹⁷Von einem Wendepunkt kann man genau genommen nur im kontinuierlichen Differentialgleichungsmodell sprechen.

um alle diese Eigenschaften „unter einen Hut“ zu bringen. Diesmal, wie sich gleich herausstellen wird, mit Erfolg.

Bis jetzt war die Anzahl der Geburten pro Zeitschritt direkt proportional zu N_t^2 . Wir ersetzen nun die Proportionalitätskonstante b durch eine affin lineare Funktion in N_t , nämlich durch $b - c \cdot N_t$, um das Wachstum bei großen Bevölkerungszahlen abzuschwächen. Diesen Trick haben wir auch schon beim Übergang vom exponentiellen zum logistischen Wachstum angewendet. Die Rekursion lautet damit

$$N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t + (b - c \cdot N_t) \cdot N_t^2$$

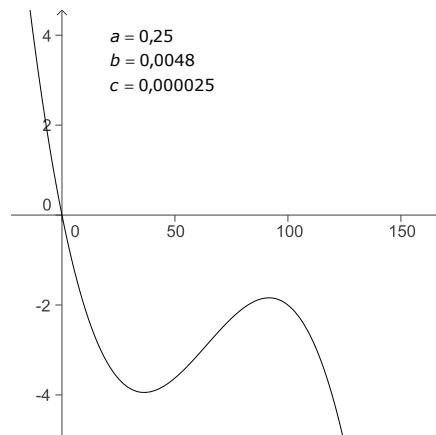
oder vereinfacht

$$N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t + b \cdot N_t^2 - c \cdot N_t^3.$$

Die Nullstellen des Wachstumsterms $-a \cdot N_t + b \cdot N_t^2 - c \cdot N_t^3$ liegen bei $n_1 = 0$ und $n_{2,3} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$. Die Nullstelle n_1 sichert uns schon vorab eine der gewünschten Eigenschaften. Wir müssen uns also nicht mehr mit negativen Werten für die Bevölkerungszahl herumschlagen. Es ergeben sich drei unterschiedliche Fälle:

1. Fall: $b^2 - 4ac < 0$

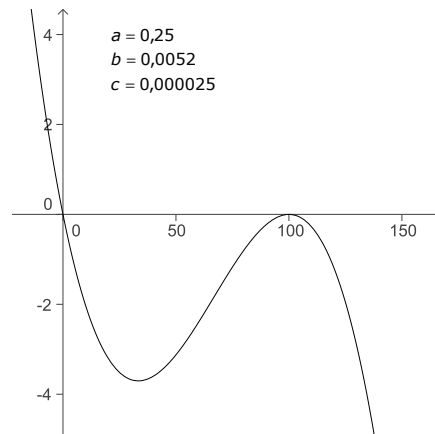
Hier sind die Nullstellen $n_{2,3}$ nicht reell. Der Wachstumsterm ist für $N_t > 0$ immer negativ:



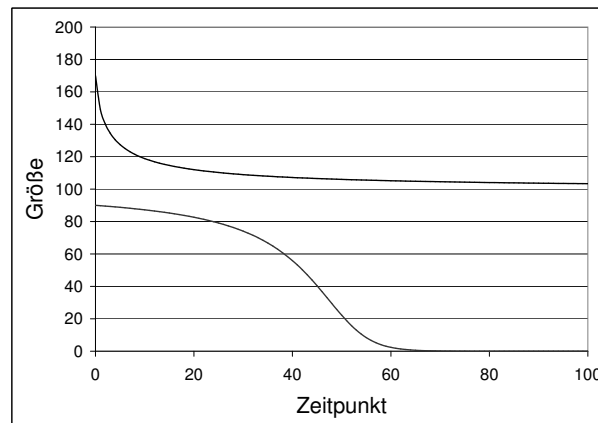
D. h. egal wie groß N_0 ist, die Bevölkerung wird sich auf lange Sicht dem einzigen Fixpunkt $N_t = 0$ nähern und daher aussterben.

2. Fall: $b^2 - 4ac = 0$

Es ergibt sich eine reelle Doppellösung $n_{2,3} = \frac{b}{2c}$, in unserem Beispiel $n_{2,3} = 100$:



Startet man also bei $N_0 > \frac{b}{2c}$, so nähert man sich von oben dem Fixpunkt $N_t = \frac{b}{2c}$ an, ist hingegen $N_0 < \frac{b}{2c}$, so stirbt die Bevölkerung wie oben asymptotisch aus. Diese beiden Szenarien sind in nachstehender Grafik zu sehen. Einen Wendepunkt der Lösungskurve findet man, indem man die Nullstelle der zweiten Ableitung des Wachstumsterms berechnet. Diese liegt allgemein bei $N_t = \frac{b}{6c}$, in unserem Beispiel also bei $N_t = \frac{100}{3}$.

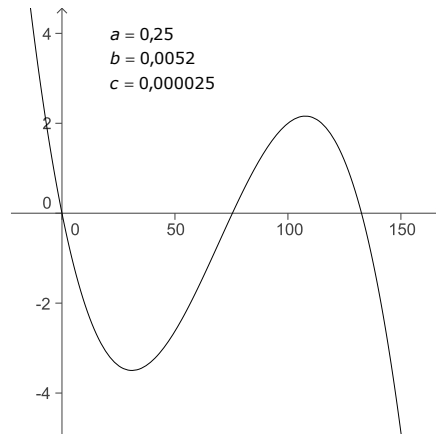


Allee-Effekt 2 mit: $a = 0,25$; $b = 0,005$; $c = 0,000025$

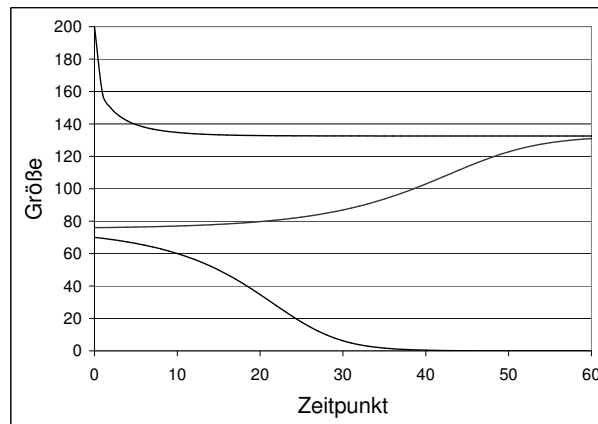
Es gibt für die Bevölkerung also hier keine Möglichkeit, sich zu vergrößern. Sie schrumpft, falls sie zu Beginn groß genug ist, auf $N_t = \frac{b}{2c}$ und bleibt dann stabil auf diesem Wert oder sie stirbt sogar ganz aus, wenn N_0 zu klein ist. Das ist selbstverständlich wieder unbrauchbar für unsere Betrachtungen. Deswegen nun zum interessanten Fall.

3. Fall: $b^2 - 4ac > 0$

Die Nullstellen $n_{2,3}$ sind nun reell und positiv. Der Wachstumsterm ist daher zwischen diesen beiden Nullstellen positiv, ansonsten negativ:



Damit ergeben sich je nach Startwert N_0 drei unterschiedliche Szenarien:



Allee-Effekt 2 mit: $a = 0,25$; $b = 0,0052$; $c = 0,000025$

Wie man sieht, ist es uns also gelungen, alle drei gewünschten Eigenschaften, nämlich *Allee-Effekt*, *begrenztes Wachstum* und *Fixpunkt bei $N_t = 0$* zu erreichen. In den Intervallen $[0, n_2]$ und $[n_2, n_3]$ gibt es außerdem jeweils einen Wendepunkt, was leicht an den lokalen Extremstellen des Wachstumsterms zu sehen ist. Auch hier findet man also den „schönen“ sigmoiden Verlauf, der uns schon beim logistischen Wachstum begegnet ist.

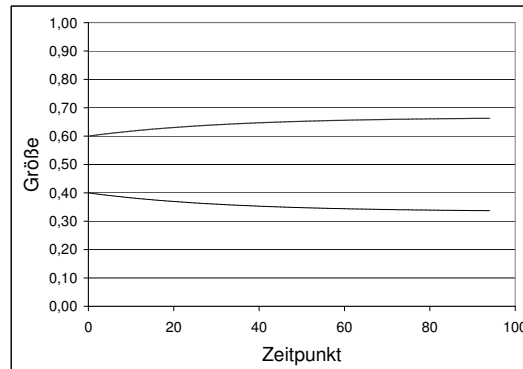
Wir haben bei unserer Vorgangsweise eigentlich zuerst die Forderungen formuliert, die wir an den Wachstumsprozess stellen, und erst im Nachhinein Schritt für Schritt daran gearbeitet, all das zu erfüllen. Das erinnert natürlich an die Umkehraufgaben der so genannten Kurvendiskussionen. Dieses Thema des Schulunterrichts könnte so durch einen sinnvollen Kontext motiviert und behandelt werden. Man könnte also etwa für eine bestimmte Population die Kapazitäts- und die minimale Überlebensgrenze und noch eine weitere Information etwa über die Lage eines Extremums im Vorhinein angeben. Ziel ist es dann, nach einem geeigneten Wachstumsterm der Form $aN_t + bN_t^2 + cN_t^3$ zu suchen. Was dabei aber nicht verloren gehen darf, ist die gründliche Interpretation der Terme in der fertigen Rekursionsformel. Erst im Nachhinein die Terme zu begründen spiegelt wohl nicht das gewünschte mathematische Modellieren wider, das eigentlich gefördert werden soll! Hat man allerdings wie wir die geeignete Form des Wachstumsterms einmal gefunden und aus realen oder fiktiven Daten die Kapazitäts- bzw. die minimale Überlebensgrenze ermittelt, spricht nichts dagegen, mit Hilfe einer Umkehraufgabe geeignete Konstanten a, b, c zu bestimmen.

3.1.9 Ein einfaches Mutationsmodell

Mutation ist ein zentraler Mechanismus in der Evolution, sie bezeichnet die Veränderung des Erbgutes und die damit verbundene Änderung der in der DNA gespeicherten Information. In unserem Modell wollen wir der Einfachheit halber nur zwei unterschiedliche Ausprägungsformen, sogenannte *Allele* eines Gens betrachten. Pro Generation mutiere ein bestimmter relativer Anteil a des Allels A_1 in das Allel A_2 und umgekehrt ein relativer Anteil b von A_2 zu A_1 . Wir bezeichnen a und b als Mutationsparameter. Die Entwicklung des relativen Anteils p des Allels A_1 kann man also durch folgende Rekursion beschreiben:

$$p_{t+1} = p_t - ap_t + b(1 - p_t)$$

Dieses Modell hat genau einen Fixpunkt, nämlich bei $p = \frac{b}{a+b}$, wie man leicht nachrechnen kann.



Mutationsmodell mit: $p_0 = 0,6$; $a = 0,01$; $b = 0,02$

Für $a = 0$ oder $b = 0$ ergibt sich Mutation nur in eine Richtung, eine Allelhäufigkeit wächst dann begrenzt, während die andere exponentiell sinkt.

Aufgabe

Wie lange dauert es, bis das Allel A_1 mit dem Mutationsparameter $a = 2\%$ eine relative Häufigkeit größer als 90% hat, wenn das Allel A_2 den Mutationsparameter $b = 20\%$ hat und die Anfangshäufigkeit von Allel A_1 lediglich $p = 1\%$ beträgt? Fertigen sie eine Grafik mit einem Tabellenkalkulationsprogramm an! Wie müsste ein Modell mit drei Allelen aussehen, bei dem paarweise Mutationen stattfinden? Zeigen Sie, dass auch hier immer ein eindeutiger Fixpunkt existiert!

3.1.10 Fisher-Wright-Modell

Das folgende Modell beschreibt die Selektion an einem Genort in einer diploiden Bevölkerung mit getrennten Generationen. Der Einfachheit halber kann ein Gen nur zwei unterschiedliche Ausprägungsformen A_1 und A_2 annehmen. Es gibt daher insgesamt 3 verschiedene Genotypen in dieser Bevölkerung, nämlich A_1A_1 , A_1A_2 und A_2A_2 . Diese drei Typen sollen sich durch ihren Reproduktionserfolg, d. h. durch ihre mittlere Anzahl an Nachkommen unterscheiden:

Genotyp	mittlere Anzahl an Nachkommen
A_1A_1	f_{11}
A_1A_2	f_{12}
A_2A_2	f_{22}

Man nennt f_{ij} auch *Selektionsparameter* oder *Fitness* des Genotyps A_iA_j . Wofür man sich nun interessiert ist etwa die Änderung der relativen Häufigkeit des Allels A_1 in der Bevölkerung. Wir werden diese relative Häufigkeit

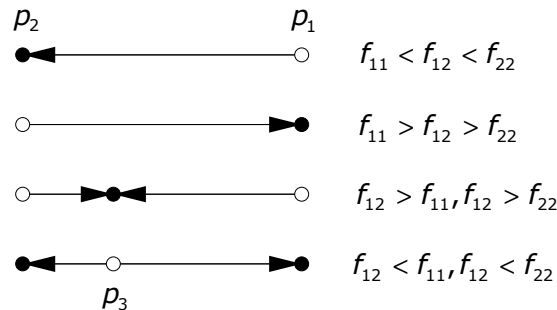
von A_1 mit p bezeichnen. Dann ergibt sich bei zufälliger Paarung für die relativen Häufigkeiten der Genotypen in der nächsten Generation:

Genotyp	relative Häufigkeit
A_1A_1	p^2
A_1A_2	$2p(1-p)$
A_2A_2	$(1-p)^2$

Ein zufällig gezogenes Individuum gibt also durchschnittlich $p^2 f_{11} + p(1-p)f_{12}$ Mal ein Gen mit der Ausprägung A_1 an seine Nachfahren weiter. Damit ergibt sich schließlich für die relative Häufigkeit von A_1 in der nächsten Generation:

$$p_{t+1} = \frac{p_t^2 f_{11} + p_t(1-p_t)f_{12}}{p_t^2 f_{11} + 2p_t(1-p_t)f_{12} + (1-p_t)^2 f_{22}}$$

Die Fixpunkte $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ und $p_3 = \frac{f_{22}-f_{12}}{f_{11}+f_{22}-2f_{12}}$ errechnen sich wiederum aus der Gleichung $p_{t+1} = p_t$. Der letztgenannte Fixpunkt p_3 liegt allerdings nur dann im relevanten Intervall $[0, 1]$, wenn entweder $f_{12} > f_{11}$ und $f_{12} > f_{22}$ oder $f_{12} < f_{11}$ und $f_{12} < f_{22}$ ist. Insgesamt ergeben sich also vier qualitativ unterschiedliche Verläufe, die intuitiv völlig klar sind:



In den Fällen, wo die Fitness des gemischten Genotyps zwischen den Fitnesswerten der reinen Genotypen liegt, setzt sich der stärkere reine Genotyp durch. Ist die Fitness des gemischten Genotyps größer als die Fitness der beiden reinen Typen, so strebt p gegen p_3 , es bleiben also beide Ausprägungen A_1 und A_2 dauerhaft in der Bevölkerung erhalten. Hat jedoch der gemischte Genotyp den geringsten Reproduktionserfolg, so hängt es vom Startwert von p ab, welches Allel sich auf Dauer durchsetzen wird. Einen Beweis für dieses Resultat findet man in HOFBAUER und SIGMUND¹⁸.

¹⁸HOFBAUER und SIGMUND 1998, S. 240

Aufgabe

Wie viele Generationen dauert es, bis ein Defektgen (Allel A_1) eine relative Häufigkeit kleiner als 1% hat, wenn der Genotyp A_1A_1 Fitness $f_{11} = 0$, A_1A_2 Fitness $f_{12} = 4$ und A_2A_2 Fitness $f_{22} = 5$ hat und die relative Häufigkeit zu Beginn $p = 0,2$ ist? Fertigen Sie eine grafische Darstellung in einem Tabellenkalkulationsprogramm an und verändern Sie anschließend die Fitnesswerte so, dass sich das schadhafte Allel A_1 mit einer relativen Häufigkeit von etwa 15% in der Bevölkerung halten kann!

Aufgabe

Die Sichelzellanämie ist eine Erkrankung der roten Blutkörperchen, die sogar zum frühzeitigen Tod führen kann. Schuld ist ein krankhaftes Allel A_1 , die Krankheit tritt allerdings nur bei A_1A_1 Genotypen auf. Es zeigt sich, dass die relative Häufigkeit des Sichelzellallels in Bevölkerungen in Malariagebieten höher ist, als in anderen Gegenden. Versuchen Sie eine Begründung dafür zu finden! In manchen Gegenden Afrikas hat fast ein Drittel der Bevölkerung den gemischten Genotyp A_1A_2 . Wie hoch ist in diesem Fall die relative Häufigkeit p des Allels A_1 ? Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür und welche davon ist die beste für die Bevölkerung?

Aufgabe

Bei der *schwachen Selektion* gegen ein bestimmtes rezessives Allel A_1 sind folgende Fitnesswerte bekannt: $f_{11} = 0,95$, $f_{12} = f_{22} = 1$. Wie viele Generationen dauert es, bis die relative Häufigkeit des rezessiven Allels von $p = 0,4$ auf $p = 0,3$ gesunken ist? Wie lange würde dieselbe Forderung dauern, wenn man den Reproduktionserfolg des Genotyps A_1A_1 komplett verhindern könnte?

3.2 Modelle mit zwei Zustandsgrößen

3.2.1 Mutualismus

Mutualismus bezeichnet vereinfacht gesagt das Zusammenleben verschiedener Arten, die alle einen Nutzen aus dieser Partnerschaft ziehen. Er stellt somit einen Spezialfall der Symbiose dar. Wir wollen uns hier auf Mutualismus zwischen zwei Arten beschränken. Jede Art profitiert also dann jeweils vom Vorhandensein der anderen Art. Mutualismus ist ein in der Natur sehr häufig auftretendes Phänomen, Beispiele sind etwa das Zusammenleben von Seeanemonen und Einsiedlerkrebsen, von Ameisen und Blattläusen,

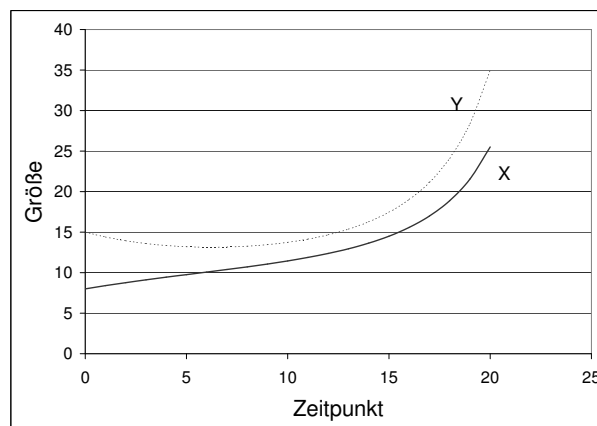
die Kooperation von Krokodilen und Krokodilwächtern und viele mehr. Ein einfaches mathematisches Modell zur Beschreibung von Mutualismus ist das folgende:

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t - a \cdot X_t + b \cdot X_t \cdot Y_t \\Y_{t+1} &= Y_t - c \cdot Y_t + d \cdot X_t \cdot Y_t\end{aligned}$$

Dabei sind $a, b, c, d > 0$ Konstanten. An dieser Stelle sei ausdrücklich erwähnt, dass es für den Schulunterricht keinesfalls das Ziel sein soll, eine geschlossene Lösung für diese Gleichungen zu finden. Vielmehr soll es darum gehen, die vorkommenden Terme *interpretieren* und den Einfluss der Parameter *verstehen* zu können. Das kann konkret mit Hilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen umgesetzt werden. Diese erlauben, die Parameter zu variieren und somit Veränderungen und Abhängigkeiten sofort beobachtbar zu machen. Man erkennt im obigen Modell, dass beispielsweise die Folge X_t exponentiell fallen würde, wenn die andere Art nicht vorhanden wäre. Die Population würde also aussterben. Der Parameter a stellt dabei die Differenz aus Sterbe- und Geburtenrate der X -Population dar. Dasselbe gilt natürlich auch umgekehrt für Y_t .

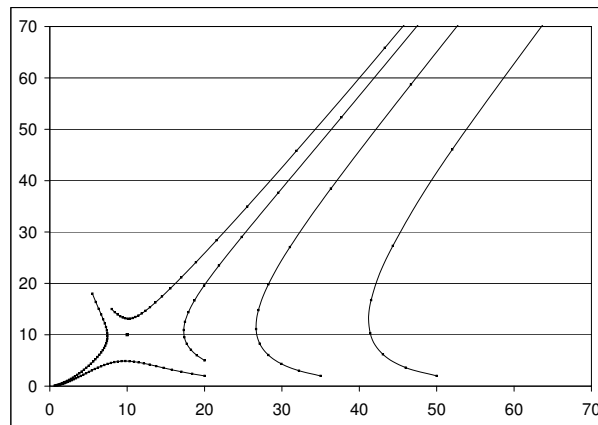
Ist jedoch $Y_t > 0$, so profitiert X im nächsten Zeitschritt davon und wächst um den Wert $b \cdot X_t \cdot Y_t$. Bei jedem Zusammentreffen der beiden Spezies profitieren die beiden voneinander. Die Größe $X_t \cdot Y_t$ ist ein Maß dafür, wie häufig das passieren kann. Jedes Tier der Art X kann prinzipiell Y_t verschiedenen Tieren der anderen Art begegnen, für alle X_t Tiere der einen Art sind das dann insgesamt $X_t \cdot Y_t$ mögliche Begegnungen.

Die folgende Abbildung zeigt die typische Entwicklung eines mutualistischen Systems, die durchgezogene Linie gibt dabei den Verlauf von X_t , die strichlierte Linie jenen von Y_t wieder.



Mutualismus mit: $X_0 = 8$; $Y_0 = 15$
 $a = 0,1$; $b = 0,01$; $c = 0,2$; $d = 0,02$

In diesem Beispiel wachsen die Populationen auf lange Zeit gesehen wieder unbegrenzt, das Modell kann also realistisch gesehen wieder nur den Beginn eines natürlichen Prozesses gut beschreiben. Außerdem zeigt sich, dass es bei diesem Modell auch auf die Wahl der Startwerte ankommt, welchen Verlauf die Populationszahlen nehmen. Das nachstehende Phasendiagramm zeigt den Verlauf der Lösungskurven für verschiedene Startpunkte (X_0, Y_0) . Es lässt erkennen, dass in dem betrachteten Beispiel der Punkt $(X_t, Y_t) = (10, 10)$ ein Fixpunkt des Systems ist und dass es auch Startwerte (X_0, Y_0) gibt, bei denen die Populationen nach einiger Zeit aussterben. Das passiert nämlich dann, wenn schon zu Beginn zu wenige Exemplare einer Art vorhanden waren.



Mutualismus mit: $X_0 = 8; Y_0 = 15$
 $a = 0,1; b = 0,01; c = 0,2; d = 0,02$

Das zugehörige kontinuierliche Modell wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\bar{a} \cdot X(t) + \bar{b} \cdot X(t) \cdot Y(t) \\ Y'(t) &= -\bar{c} \cdot Y(t) + \bar{d} \cdot X(t) \cdot Y(t) \end{aligned}$$

beschrieben.

Zusatzfragen

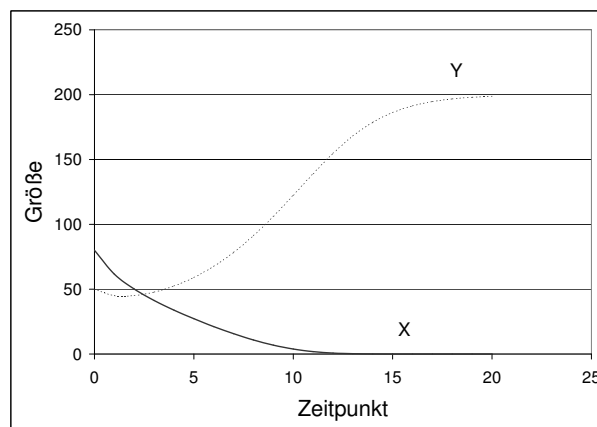
- Was verändert sich am Lösungsverlauf, wenn man statt exponentieller Abnahme (bei Abwesenheit der jeweils anderen Art) logistisches Wachstum für das Modell verwendet?
- Lässt sich auch in diesem Fall ein Fixpunkt finden?

3.2.2 Konkurrenz

Auch konkurrierende Systeme findet man in der Natur häufig vor. Ein Beispiel ist die Konkurrenz von Tierarten um das vorhandene Nahrungs- oder Platzangebot, wie etwa auf Küstenfelsen sesshafte Organismen, die einander überlagern, sich ersticken oder wechselseitig im Wachstum hindern¹⁹. Das wohl einfachste und gleichzeitig interessanteste Modell zur Beschreibung eines solchen Sachverhaltes ist das *Konkurrenzmodell von Lotka-Volterra*²⁰. Das Modell lässt sich durch ein System von zwei Differenzgleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t + a \cdot X_t \cdot (K_1 - X_t) - b \cdot X_t \cdot Y_t \\Y_{t+1} &= Y_t + c \cdot Y_t \cdot (K_2 - Y_t) - d \cdot X_t \cdot Y_t\end{aligned}$$

Es geht also von logistischem Wachstum der beiden Spezies bei Abwesenheit der jeweils anderen Art aus. Die zusätzlichen Terme $-b \cdot X_t \cdot Y_t$ bzw. $-d \cdot X_t \cdot Y_t$ beschreiben die Dezimierung der Bevölkerungszahlen durch das Vorhandensein der jeweils anderen Spezies. Dass diese „Abnahmeterme“ proportional zum Produkt aus den beiden Bestandszahlen sind, kann folgendermaßen plausibel gemacht werden: Je öfter Repräsentanten der beiden Spezies aufeinandertreffen, desto häufiger kommt es auch zu Auseinandersetzungen zwischen ihnen. $X_t \cdot Y_t$ beschreibt aber gerade die Anzahl aller möglichen Begegnungen zwischen Tieren der beiden Arten. Es kann in diesem Modell etwa zu folgendem Verlauf der Lösungsfolgen kommen:



Konkurrenz mit: $X_0 = 80$; $Y_0 = 50$; $K_1 = 100$; $K_2 = 200$
 $a = 0,001$; $b = 0,005$; $c = 0,002$; $d = 0,005$

¹⁹Vgl. D'ANCONA 1939, S. 10.

²⁰Siehe z. B. MURRAY 2002, S. 94.

In diesem Fall stirbt die X -Bevölkerung nach einiger Zeit komplett aus, während sich die Y -Bevölkerung ihrer Kapazitätsgrenze K_2 nähert. Allerdings hängt das langfristige Verhalten dieses Systems stark von der Wahl der Parameter a, b, c, d, K_1 und K_2 ab. Im Wesentlichen unterscheidet man 3 qualitativ unterschiedliche Fälle:

- Dominanz
- Bistabilität
- Stabile Koexistenz

Um das zu sehen, interessiert man sich zuerst für jene Punkte (X_t, Y_t) im Phasendiagramm, für die entweder $X_{t+1} = X_t$, $Y_{t+1} = Y_t$ oder beides gilt. Suchen wir zunächst jene Punkte, die die erstgenannte Bedingung erfüllen. Klarerweise muss für diese gelten:

$$a \cdot K_1 \cdot X_t - a \cdot X_t^2 - b \cdot X_t \cdot Y_t = 0$$

Drückt man Y_t explizit aus, so ergibt sich für $X_t \neq 0$ die Geradengleichung

$$Y_t = -\frac{a}{b} \cdot X_t + \frac{a \cdot K_1}{b}.$$

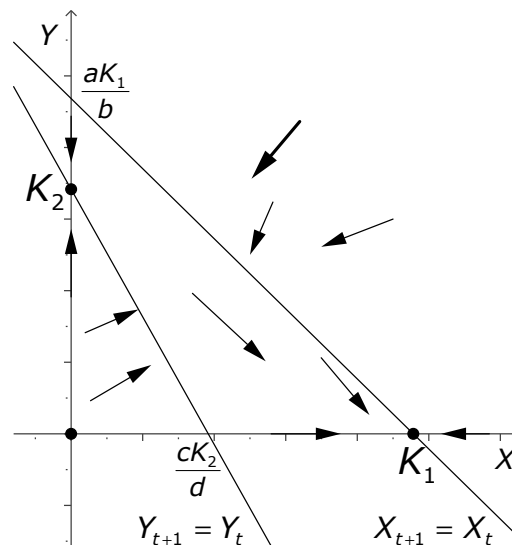
Führt man nun dasselbe für die Bedingung $Y_{t+1} = Y_t$ durch, so erkennt man, dass diese Punkte auf der Geraden

$$X_t = -\frac{c}{d} \cdot Y_t + \frac{c \cdot K_2}{d}.$$

liegen. Die 3 unterschiedlichen Fälle ergeben sich nun aus der Lage der beiden Geraden zueinander.

1. Fall: Dominanz

Haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt im 1. Quadranten (der uns aus biologischen Gründen ja ausschließlich interessiert), so liegt in diesem Bereich *eine* Gerade immer oberhalb der anderen. Das sieht z. B. wie folgt aus:



Die Pfeile deuten dabei an, in welche „Richtung“ sich die Lösungskurven bewegen. Betrachten wir etwa den Startpunkt des fett markierten Pfeils und bezeichnen ihn mit (X_t, Y_t) , so gilt klarerweise

$$Y_t > -\frac{a}{b} \cdot X_t + \frac{a \cdot K_1}{b}$$

und

$$X_t > -\frac{c}{d} \cdot Y_t + \frac{c \cdot K_2}{d},$$

da dieser Punkt ja rechts oberhalb der beiden Geraden liegt. Es folgt dann

$$X_{t+1} < X_t + a \cdot X_t \cdot (K_1 - X_t) - b \cdot X_t \cdot \left(-\frac{a}{b} \cdot X_t + \frac{a \cdot K_1}{b}\right) = X_t$$

sowie

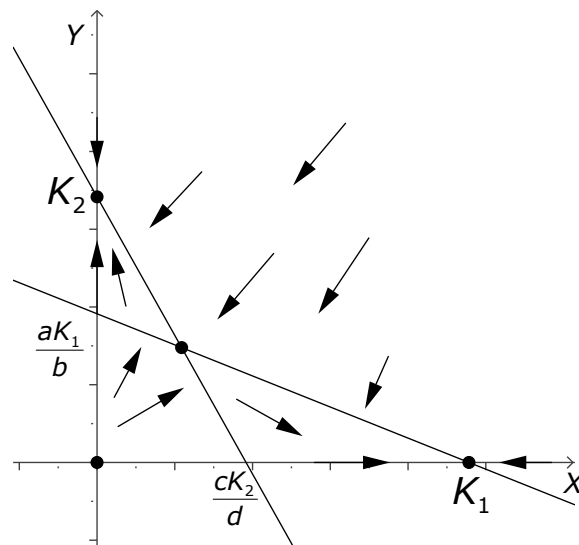
$$Y_{t+1} < Y_t + c \cdot Y_t \cdot (K_2 - Y_t) - d \cdot \left(-\frac{c}{d} \cdot Y_t + \frac{c \cdot K_2}{d}\right) \cdot Y_t = Y_t,$$

also $X_{t+1} < X_t$ und $Y_{t+1} < Y_t$. Die Richtungen der anderen Pfeile lassen sich ganz analog erklären.

Im gezeigten Fall ist also die X -Spezies *dominant*. Egal wo man startet, alle inneren Bahnen führen zum Fixpunkt $(K_1, 0)$. Selbstverständlich gilt Analoges für den Fall, bei dem die andere Gerade oberhalb liegt.

2. Fall: Bistabilität

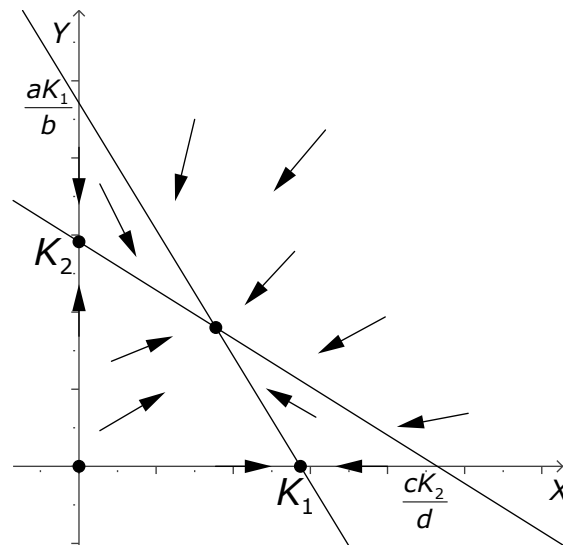
Dieser Fall tritt auf, wenn es einen Schnittpunkt der beiden Geraden im 1. Quadranten gibt und dieser Schnittpunkt *links unterhalb* der gedachten Verbindungsstrecke von $(K_1, 0)$ und $(0, K_2)$ liegt.



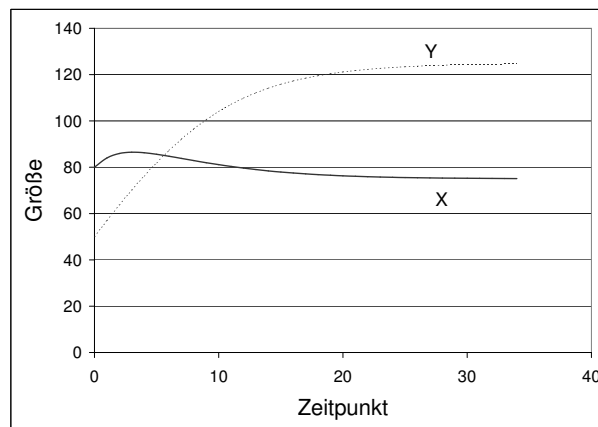
Hier hängt der langfristige Verlauf der Lösungskurve vom Startpunkt (X_0, Y_0) des Prozesses ab. Je nachdem, wie diese Startwerte gewählt werden, konvergiert die Lösungsfolge entweder zu $(K_1, 0)$ oder zu $(0, K_2)$. Man nennt eine solche Situation *bistabil*.

3. Fall: Stabile Koexistenz

In den beiden oben genannten Fällen stirbt jeweils eine Spezies mit Sicherheit aus. Das ist in der Natur aber zum Glück nur selten der Fall. Viel eher gibt es ein (mehr oder weniger) stabiles Gleichgewicht, das sich im Laufe der Zeit einstellt. Diesen Fall kann man durch das *Lotka-Volterra-Konkurrenzmodell* gut beschreiben, wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben und dieser *rechts oberhalb* der gedachten Verbindungsstrecke von $(K_1, 0)$ und $(0, K_2)$ liegt.



Alle inneren Bahnen streben zum Fixpunkt im Inneren, d. h. sobald es von jeder Spezies zumindest einige Tiere gibt (im Modell reicht sogar eines), konvergieren die Bevölkerungszahlen immer zu diesem Fixpunkt. Insbesondere auch dann, wenn das System durch Umwelteinflüsse kurzzeitig aus diesem Gleichgewicht gebracht wird. Man sagt, dass die Populationen *stabil koexistieren*. Die folgenden Zeitdiagramme geben ein Beispiel für diesen Fall:



Konkurrenz mit: $X_0 = 80$; $Y_0 = 50$; $K_1 = 100$; $K_2 = 200$
 $a = 0,005$; $b = 0,0001$; $c = 0,002$; $d = 0,002$

Zusatzfragen

- Wie sehen die Zeitdiagramme im Fall der Bistabilität qualitativ aus?
- Durch welche Differentialgleichungen wird das kontinuierliche Lotka-Volterra-Konkurrenzmodell beschrieben?

3.2.3 Räuber-Beute-Modell

Einen Eckpunkt in der Geschichte der Biomathematik bzw. das wohl berühmteste biomathematische Modell überhaupt stellt das Räuber-Beute-System von Lotka-Volterra dar²¹. Es beschreibt die Wechselwirkung zwischen einer Raub- und einer Beutetierart. In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass sich die Raubtiere ausschließlich von dieser einen Beutetierart ernähren und dass auch die Beutetiere nur von dieser einen Raubtierspezies gefressen werden. Wären also keine Raubtiere vorhanden, so könnten sich die Beutetiere ohne Hindernis vermehren, was im Modell durch das exponentielle Wachstum beschrieben wird. Bei Abwesenheit der Beutetiere würde wiederum die Anzahl der Raubtiere exponentiell zurückgehen.

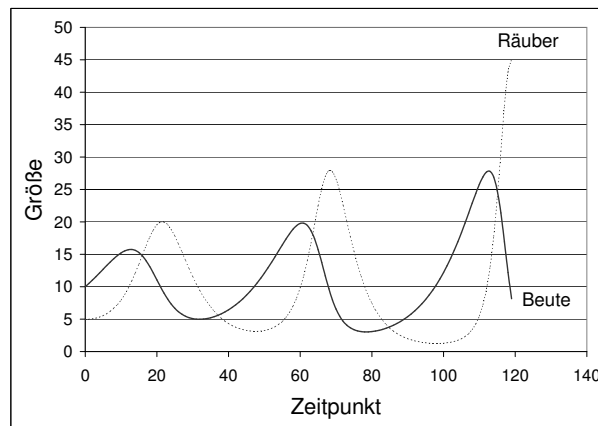
$$\begin{aligned}B_{t+1} &= B_t + a \cdot B_t - b \cdot B_t \cdot R_t \\R_{t+1} &= R_t - c \cdot R_t + d \cdot B_t \cdot R_t\end{aligned}$$

Diesmal kann das Produkt aus Raubtierzahl R_t und Beutetierzahl B_t sogar auf zwei Arten interpretiert werden: Zum einen beschreibt es wieder die Anzahl der möglichen Begegnungen zwischen Raub- und Beutetieren. Plausiblerweise ist die Abnahme der Beutetiere bzw. die Zunahme der Raubtiere im nächsten Zeitschritt von dieser Anzahl abhängig, im Modell sogar direkt proportional. Zum anderen könnte man den Ausdruck $-b \cdot B_t \cdot R_t$ auch so interpretieren, dass jedes Raubtier in einem Zeitschritt einen gewissen Teil der Beutetiere erlegt, sagen wir $b \cdot B_t$. Insgesamt werden dann natürlich in diesem Zeitschritt $b \cdot B_t \cdot R_t$ Beutetiere erlegt und das ist genau der Abnahmeterm der Beutetiere im Modell. Umgekehrt erhöht sich natürlich die *Fitness* der Raubtiere durch jedes erlegte Beutetier und fördert somit die Reproduktion neuer Raubtiere.

Trotz der Einfachheit des Modells ergeben sich hier auf den ersten Blick recht eigenartige Schwankungen. Diese Schwankungen wurden experimentell etwa zwischen Hasen und Luchsen, Raub- und Beutefischen und mit Bakterien im Labor schon vor der Entwicklung dieses Modells beobachtet. Man sah allerdings zuerst die Verbindung der beiden Spezies nicht und dachte, dass äußere Umstände, wie etwa klimatische Veränderungen, der Sommerregen oder der Einfluss des Menschen schuld an den Oszillationen seien. Wie sehr dieses Phänomen interessierte und wie viel daran geforscht wurde, lässt sich bei D'ANCONA²² nachlesen.

²¹Siehe z. B. SCHUSTER 1995, Kapitel 4.1.

²²D'ANCONA 1939, S. 13



Räuber-Beute-Modell mit: $B_0 = 10$; $R_0 = 5$
 $a = 0,1$; $b = 0,01$; $c = 0,2$; $d = 0,02$

Erst das Lotka-Volterra-Modell gab Grund zur Annahme, dass die Interaktion der beiden Spezies die Erklärung liefert. Nachvollziehen lässt sich dieses Phänomen wie folgt: Gibt es zu einem Zeitpunkt gerade viele Beutetiere, so haben die Raubtiere genug zu fressen und können sich vermehren. Steigt dann aber die Anzahl der Raubtiere, werden sehr viele Beutetiere erlegt, was zu einem Rückgang der Beutetieranzahl führt. Die Raubtiere haben in der Folge nicht mehr genug Nahrung, was eine Dezimierung ihrer Anzahl zur Folge hat. Gibt es nur noch wenige Raubtiere, kann sich die Beutetierpopulation erholen und das Spiel beginnt von vorne.

Zusatzfragen

- Kann man das Ansteigen der Amplituden unterbinden, indem man logistisches statt exponentielles Wachstum der Beutetiere verwendet? Experimentieren Sie!
- Wie sieht das kontinuierliche Räuber-Beute-Modell aus?
- Unter welchen Bedingungen stirbt eine der beiden Spezies aus?
- Wie kann man erreichen, dass das System weniger schnell oszilliert, bzw. die Amplituden geringer werden? Welche Parameter muss man wie verändern?

3.2.4 Natürliche Insektenvernichtung

Angenommen eine Insektenpopulation²³ mit getrennten Generationen vermehre sich in jeder Generation auf das a -fache der vorherigen Generati-

²³vgl. TIMISCHL (1995), S. 19

on. Wir wissen schon vom exponentiellen Wachstumsmodell, dass dann die Bevölkerung ausstirbt, wenn $a < 1$ gilt bzw. die Bevölkerung über alle Grenzen wächst, wenn $a > 1$ gilt. Der letzte Fall ist der nun interessante. Mit der Methode der *Sterilen Insektentechnik* gelingt es nämlich, ohne den Einsatz von Insektenvernichtungsmitteln das Wachstum der Insektenpopulation zu stoppen bzw. die Insektenpopulation in einem Gebiet sogar vollständig auszurotten. Diese Methode wird etwa dazu verwendet, um Fruchtfliegen in Obstanbaugebieten zu vernichten und könnte als mögliche Waffe gegen malariaübertragende Stechmücken eingesetzt werden²⁴. Wenn die Anzahl der Weibchen in der Generation t mit W_t bezeichnet wird, dann gilt für die Anzahl der Weibchen eine Generation später $W_{t+1} = a \cdot W_t$. Die Anzahl der Männchen in dieser neuen Generation M_{t+1} ist genauso groß, weil bei den Nachkommen Männchen und Weibchen gleich wahrscheinlich sind.

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= a \cdot W_t \\ M_{t+1} &= a \cdot W_t \end{aligned}$$

Dies würde wie gesagt zu exponentiellem Anwachsen der Bevölkerungszahlen führen. Im Folgenden wird ausgenutzt, dass sich die Weibchen der betrachteten Insektenpopulation nur einmal paaren. Führt man nun nämlich der Insektenpopulation eine sehr große Anzahl S an sterilen Männchen zu, so sinkt der Anteil der fertilen Paarungen auf $\frac{M_t}{M_t+S}$, was genau dem Anteil der fertilen Männchen in der männlichen Population entspricht. Dadurch wird erreicht, dass die Anzahl der Weibchen bzw. die Anzahl der fertilen Männchen in der nächsten Generation gleich $\frac{M_t}{M_t+S} \cdot a \cdot W_t$ ist, ehe abermals sterile Männchen zu dieser neuen Generation hinzugefügt werden. Es ergeben sich also folgende Rekursionen:

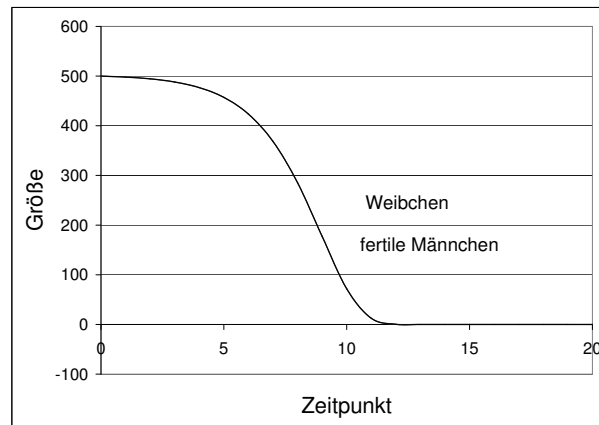
$$\begin{aligned} W_{t+1} &= \frac{M_t}{M_t+S} \cdot a \cdot W_t \\ M_{t+1} &= \frac{M_t}{M_t+S} \cdot a \cdot W_t \end{aligned}$$

Da spätestens ab der 2. Generation die Anzahl der fertilen Männchen immer gleich der Anzahl der Weibchen ist, könnte man zur einfacheren mathematischen Beschreibung auch ein Modell mit nur *einer* Zustandsgröße verwenden. Sei also nun $X_t = M_t = W_t$, dann gilt:

$$X_{t+1} = \frac{X_t}{X_t+S} \cdot a \cdot X_t = a \cdot \frac{X_t^2}{X_t+S}$$

²⁴s. im Internet, Link vom 04.06.2007: www.dradio.de/dlf/sendungen/forschak/533850/

Um die Fixpunkte dieser Rekursion zu berechnen setzen wir abermals $X_{t+1} = X_t$. Wir erhalten als Lösungen $X_t = 0$ und $X_t = \frac{S}{a-1}$. Wird S groß genug gewählt, d. h. werden genügend sterile Männchen pro Generation freigesetzt, dann hat auch dieser zweite Fixpunkt einen sehr großen Wert. Ist nun der Startwert W_0 kleiner als jener Wert, so führt die beschriebene Methode zum Aussterben der Insektenpopulation:



Insektenvernichtung mit: $M_0 = W_0 = 500$; $a = 5$; $S = 2010$

Aufgabe

- Untersuchen Sie experimentell die Stabilität der beiden Fixpunkte!
- Was passiert, wenn man $S < (a - 1) \cdot X_t$ wählt?
- Fertigen Sie ein Spinnwebdiagramm zum obigen Beispiel ($a = 5$, $S = 2010$) an!

3.2.5 Tourismus vs. Umweltattraktivität

Entfernt man sich etwas von rein biologischen Situationen hin zu gesellschaftlichen Themen, öffnet sich erneut eine sehr große Bandbreite an möglichen Modellen. Man stelle sich z. B. folgende Situation vor²⁵: Ein idyllisches Dorf – sehr ruhig an einem See gelegen, die Umgebung bewaldet – plant aus finanziellen Gründen den Einstieg in den Tourismus. Sofort wird Kritik laut. Es wird befürchtet, dass der Tourismus die Gegend zerstören wird und dass dann ohnehin keine Touristen mehr kommen würden. Was bliebe sei also zerstörte Natur und nur geringer finanzieller Profit. Die Bewohner des Dorfes interessieren sich also für folgende Fragen:

²⁵vgl. ABLEITINGER 2007, S. 9-10

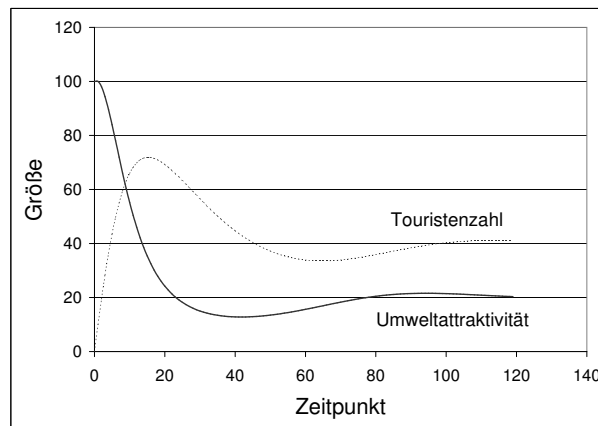
- Wie stark wird sich die Attraktivität des Gebietes ändern?
- Wie viele Urlauber „verträgt“ das neue Urlaubsziel?
- Kommt es auf Dauer zu stabilen Besucherzahlen?

Die Umweltattraktivität wird nun mit U_t bezeichnet. Sie soll ein Maß dafür sein, wie ruhig und sauber das Gebiet ist, wie schön das Dorf- und Landschaftsbild erscheint und wie gut die Luftqualität ist. Sie wird in Prozent angegeben, wobei ein Wert von 100% optimaler Umweltattraktivität entspricht, während 0% bedeutet, dass das Gebiet überhaupt nicht attraktiv ist. Die Touristenzahl zum Zeitpunkt t wird mit T_t bezeichnet.

Wir gehen davon aus, dass sich die Umweltattraktivität beim Ausbleiben von Touristen logistisch verbessert, sich dem Wert 100% also von unten nähert. Die Touristenzahl andererseits wird exponentiell zurückgehen, wenn die Umweltattraktivität gleich Null ist. Natürlich wird die Umweltattraktivität abnehmen, wenn viele Touristen kommen. Das kann durch den Term $-c \cdot U_t \cdot T_t$ modelliert werden. Dabei wird berücksichtigt, dass diese Abnahme auch davon abhängt, wie hoch die Umweltattraktivität im Moment ist. Kleine Veränderungen in einer schönen, sauberen Umgebung werden viel eher als störend wahrgenommen, als dieselben Veränderungen in einer ohnehin unattraktiven Umgebung. Umgekehrt werden aber Touristen umso stärker angelockt, je höher die Umweltattraktivität gerade ist. Das entspricht im folgenden Modell dem Term $+d \cdot U_t$.

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= U_t + a \cdot U_t \cdot (100 - U_t) - c \cdot U_t \cdot T_t \\ T_{t+1} &= T_t - b \cdot T_t + d \cdot U_t \end{aligned}$$

Hier lassen sich auf recht einfache Weise die Fixpunkte bestimmen. Aus der zweiten Differenzengleichung erhält man die Bedingung $T_t = \frac{d}{b} U_t$. Setzt man das in $a \cdot U_t \cdot (100 - U_t) - c \cdot U_t \cdot T_t = 0$ ein, so erhält man die beiden Lösungen $U_t = 0$ und $U_t = \frac{100a}{a + \frac{cd}{b}}$. Der zweite Fixpunkt liegt dabei immer im Intervall $[0, 100]$. Die zugehörigen Touristenzahlen ergeben sich zu $T_t = 0$ und $T_t = \frac{100ad}{ab + cd}$.



Tourismus vs. Umwelt mit: $U_0 = 100$; $T_0 = 0$
 $a = 0,001$; $b = 0,05$; $c = 0,002$; $d = 0,1$

Während also die Touristenzahl aufgrund des schönen Gebietes zu Beginn rasch wächst, nimmt die Umweltattraktivität rasant ab. Das hat zur Folge, dass auch die Touristen wieder weniger gern in das Gebiet kommen, usw. Schließlich stellt sich ein Gleichgewicht ein, das der Umwelt im betrachteten Gebiet eine nicht gerade rosige Zukunft voraussagt.

Zusatzfrage

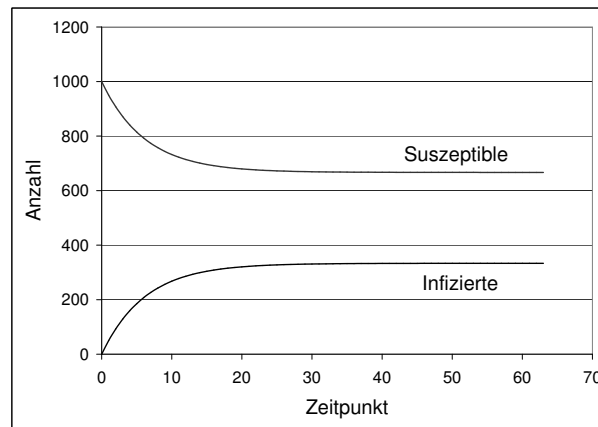
- Untersuchen Sie experimentell die Stabilität der beiden Fixpunkte!

3.2.6 SI-Modell 1

Die Epidemiologie ist ein großes Teilgebiet der Biomathematik. Sie beschäftigt sich unter anderem mit der Ausbreitung von Krankheiten in der menschlichen Bevölkerung. Viele der Modelle sind recht komplex und erfordern hohes mathematisches Verständnis. Es gibt allerdings auch hier Möglichkeiten für den Schulunterricht. Das wohl einfachste Modell geht dabei von einer fixen Populationsgröße N aus. Diese teilt sich in 2 Bevölkerungsgruppen, die sogenannten *Suszeptiblen* S_t , die zwar noch gesund aber prinzipiell für die Krankheit anfällig sind, und die *Infizierten* I_t , die bereits an der Krankheit leiden. Der Name des Modells ergibt sich also aus den Anfangsbuchstaben der beiden Populationen und ist auch in der Fachliteratur gebräuchlich. In jedem Zeitschritt steckt sich nun ein gewisser Prozentsatz a der Suszeptiblen mit der Krankheit an, während ein gewisser Anteil b von Infizierten wieder suszeptibel wird.

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - a \cdot S_t + b \cdot I_t \\ I_{t+1} &= I_t + a \cdot S_t - b \cdot I_t = N - S_{t+1} \end{aligned}$$

Es stellt sich bei diesem Modell immer ein Gleichgewicht ein, das sich aus der Bedingung $S_{t+1} = S_t$ zu $S_t = \frac{b}{a+b} \cdot N$ berechnet.



SI-Modell 1 mit: $S_0 = 1000$; $I_0 = 0$
 $a = 0,05$; $b = 0,1$

Zusatzfragen

- Was passiert, wenn $a > b$ ist?
- Wie sieht das analoge kontinuierliche Modell aus?

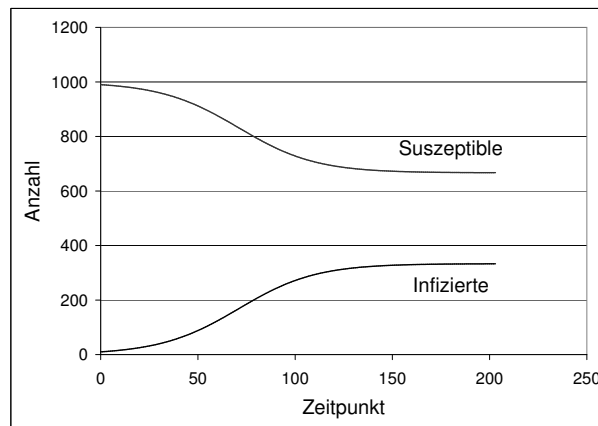
3.2.7 SI-Modell 2

Wir wollen das obige Modell noch etwas verbessern, indem wir nicht einfach annehmen, dass in jedem Zeitschritt ein gewisser Prozentsatz an gesunden Menschen erkrankt, sondern dass eine Ansteckung davon abhängig ist, ob ein Suszeptibler Kontakt mit einem Infizierten hat. Der Einfachheit halber soll ein gesunder Mensch in einem Zeitschritt mit durchschnittlich einem anderen Menschen Kontakt haben. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{I_t}{N}$ ist das ein Infizierter. So ein Kontakt führe nun mit Wahrscheinlichkeit a zu einer tatsächlichen Ansteckung. Wie im obigen Modell soll pro Zeitschritt ein Anteil b der Infizierten wieder gesund werden.

$$S_{t+1} = S_t - a \cdot S_t \cdot \frac{I_t}{N} + b \cdot I_t$$

$$I_{t+1} = I_t + a \cdot S_t \cdot \frac{I_t}{N} - b \cdot I_t = N - S_{t+1}$$

Es zeigt sich hier ein etwas realistischeres, sigmoides Ansteigen der Anzahl an Infizierten. Das Gleichgewicht, das sich in diesem Fall einstellt, berechnet sich zu $S_t = \frac{b}{a} \cdot N$, solange $a \geq b$ gilt.



SI-Modell 2 mit: $S_0 = 990$; $I_0 = 10$
 $a = 0,15$; $b = 0,1$

Zusatzfragen

- Angenommen man stellt alle Infizierten unter Quarantäne, nachdem sich das Gleichgewicht eingestellt hat. Wie viele Zeitschritte dauert es dann, bis die Krankheit als „ausgestorben“ bezeichnet werden kann?
- Was passiert in diesem Modell, wenn $b > a$ gilt?

3.2.8 Lesliemodell 1

Lesliemodelle stellen eine eigene Klasse von Prozessen in der Demographie dar. Die Bevölkerung wird dabei in zwei oder mehrere gleich breite Altersklassen unterteilt. Jede Altersklasse hat für sie typische Geburtenraten f_i und Überlebensraten s_i . Betrachtet man etwa ein 2-Klassen-Modell, so gibt die Überlebensrate s_1 die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Individuum aus der ersten Klasse überlebt und somit in die zweite Klasse übertreten wird. Der Zeitschritt von t auf $t+1$ entspricht dabei genau der Altersklassenbreite.

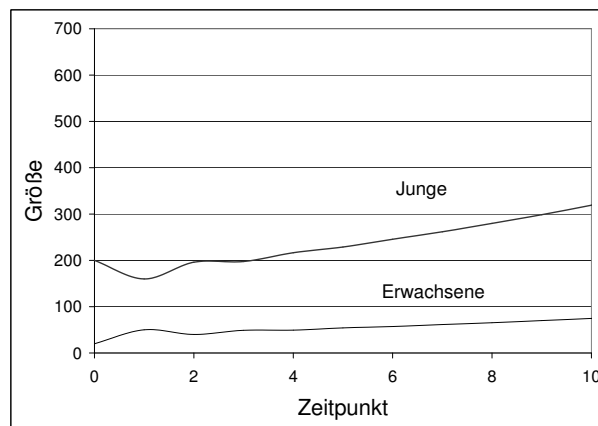
$$\begin{aligned} A_{t+1} &= f_1 \cdot A_t + f_2 \cdot B_t \\ B_{t+1} &= s_1 \cdot A_t \end{aligned}$$

Dieses System kann man auch übersichtlich mit Hilfe einer Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix}$$

In der Leslietheorie ist dabei der Spektralradius der Lesliematrix $\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}$, also ihr betragsmäßig größter Eigenwert, von zentraler Bedeutung. Bei diesem

2-Klassen-Modell lässt sich der Spektralradius leicht zu $\lambda = \frac{\sqrt{f_1^2 + 4f_2s_1} + f_1}{2}$ berechnen. Man kann zeigen, dass dieser Eigenwert genau den asymptotischen Wachstumsfaktoren der einzelnen Bevölkerungsklassen entspricht. Das soll bedeuten, dass sich die Bevölkerungszahlen in den Altersklassen der exponentiellen Kurve mit Wachstumsfaktor λ asymptotisch nähern. Im Wesentlichen bestimmt also schon die Fertilitätsrate f_1 den Verlauf der Bevölkerungszahlen maßgeblich. Ist $f_1 > 1$, dann wächst die Bevölkerung exponentiell. Bei $f_1 = 1$ und $f_2 > 0$ und $s_1 > 0$ ebenfalls. Nur wenn $f_1 < 1$ ist, dann hängt der qualitative Verlauf auch wesentlich von den anderen beiden Parametern ab. Eine unmittelbare Folgerung aus dem obigen Resultat ist, dass die Größe $\frac{A_t}{B_t}$ mit größer werdendem t gegen einen konstanten Wert strebt, d. h. dass die Proportionen der Alterklassen auf Dauer stabil bleiben.



Lesliemodell 1 mit: $A_0 = 200$; $B_0 = 20$
 $f_1 = 0,6$; $f_2 = 2$; $s_1 = 0,25$

Aufgabe

Wir teilen eine Insektenpopulation in 2 gleich breite Altersklassen ein. Diese sollen die Fertilitätsraten $f_1 = 1,2$ und $f_2 = 0,4$ haben. Finden Sie jene Wachstumsrate λ , die sich nach einiger Zeit asymptotisch einstellt, wenn die Überlebenswahrscheinlichkeit in der ersten Altersklasse $s_1 = 0,1$ ist! Welches Verhältnis stellt sich zwischen den Bevölkerungszahlen der ersten und zweiten Altersklasse auf Dauer ein? Versuchen Sie experimentell mit Hilfe des Computers herauszufinden, auf welchen Wert man f_1 senken müsste, um stabile Bevölkerungszahlen zu erhalten!

3.3 Modelle mit drei Zustandsgrößen

3.3.1 Zwei Beutespezies und ein Räuber

Betrachten wir zunächst nur zwei Beutetierarten und vorerst noch keinen Räuber²⁶. Es wird dabei angenommen, dass eine Beutetierart logistisch wachsen würde, wenn es die jeweils andere Beutetierspezies nicht gäbe. Leben beide Spezies nebeneinander, dann konkurrieren sie z. B. um eine gemeinsame Nahrungsquelle. Das entsprechende Differenzengleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}A_{t+1} &= A_t + a \cdot A_t \cdot (K_1 - A_t) - c \cdot A_t \cdot B_t \\B_{t+1} &= B_t + b \cdot B_t \cdot (K_2 - B_t) - d \cdot A_t \cdot B_t\end{aligned}$$

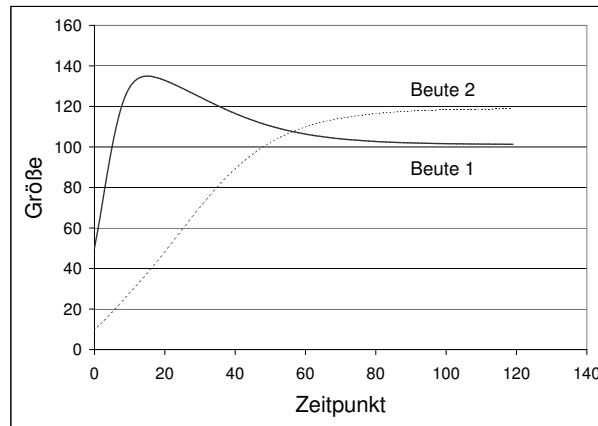
Die Anzahl der Beute-1-Tiere zum Zeitpunkt t wird dabei durch A_t beschrieben, während B_t die Anzahl der Beute-2-Tiere angibt. K_1 und K_2 sind die Kapazitätsgrenzen für die beiden Spezies. Durch die Terme $-c \cdot A_t \cdot B_t$ und $-d \cdot A_t \cdot B_t$ wird ausgedrückt, dass eine Spezies geschwächt bzw. dezimiert wird, wenn sie Nahrungsmittel gegen die andere Spezies verteidigen muss. Das ist aber immer genau dann nötig, wenn es zu Begegnungen zwischen Tieren der unterschiedlichen Arten kommt. Dadurch wird plausibel, dass die Abnahme durch Konkurrenz um eine gemeinsame Nahrungsquelle proportional zu $A_t \cdot B_t$ ist. Die zweite Spezies soll außerdem einen leichten Vorteil im Kampf um die Ressourcen haben, was im Modell gerade dann der Fall ist, wenn $c > d$ gilt.

Interessant ist dabei, dass sich ganz unabhängig von den Startwerten A_0 und B_0 nach einiger Zeit immer dasselbe Gleichgewicht in den Bestandszahlen einstellt, das sich mit Hilfe der Fixpunktgleichungen $A_{t+1} = A_t$ und $B_{t+1} = B_t$ zu

$$\begin{aligned}A^* &= \frac{b(aK_1 - cK_2)}{ab - cd} \\B^* &= \frac{a(bK_2 - dK_1)}{ab - cd}\end{aligned}$$

berechnet.

²⁶vgl. ABLEITINGER 2007, S. 7-9

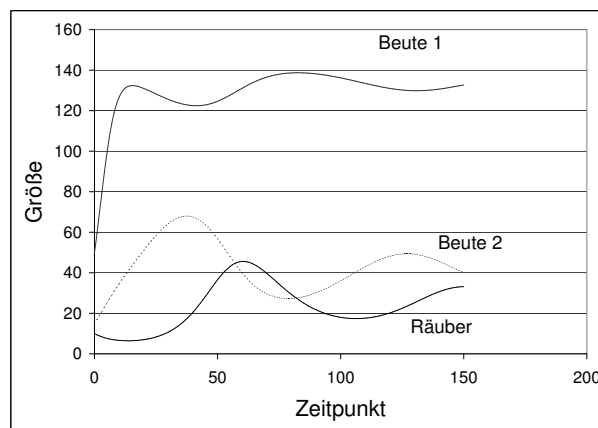


2 Beutespezies mit: $A_0 = 50$; $B_0 = 10$; $K_1 = 150$; $K_2 = 200$
 $a = 0,002$; $b = 0,001$; $c = 0,00082$; $d = 0,00080$

Das Modell wird allerdings jetzt durch eine Raubtierart erweitert, die sich ausschließlich von der Jagd auf die Beute-2-Tiere ernährt. In Abwesenheit von Beute-2 würde die Zahl der Räuber exponentiell abnehmen. C_t steht hier für die Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + a \cdot A_t \cdot (K_1 - A_t) - c \cdot A_t \cdot B_t \\ B_{t+1} &= B_t + b \cdot B_t \cdot (K_2 - B_t) - d \cdot A_t \cdot B_t - f \cdot B_t \cdot C_t \\ C_{t+1} &= C_t - e \cdot C_t + g \cdot B_t \cdot C_t \end{aligned}$$

Der Verlauf sieht dann so aus:



2 Beutespezies, 1 Räuber mit: $A_0 = 50$; $B_0 = 15$; $C_0 = 10$
 $K_1 = 150$; $K_2 = 200$; $a = 0,002$; $b = 0,001$; $c = 0,00082$
 $d = 0,00080$; $e = 0,1$; $f = 0,002$; $g = 0,0025$

Man erkennt, dass sich zwischen Räuber und Beute-2 wieder qualitativ dieselben Schwankungen ergeben wie im einfachen Räuber-Beute-Modell. Beute-1

profitiert immer dann von der Situation, wenn die Anzahl der Beute-2-Tiere gerade sehr niedrig ist. Das ursprüngliche biologische Gleichgewicht zwischen den Beutearten (ohne Räuber) wird also durch die Raubtiere zerstört. Es dauert in diesem Modell zeitlich gesehen schon wesentlich länger, bis sich ein neues Gleichgewicht einstellen kann.

Zusatzfragen

- *Was ändert sich an der Situation, wenn nun der Räuber auch Beute-1-Tiere frisst?*
- *Wie müsste ein Modell mit 2 Räubern und 1 Beuteart aussehen? Welchen Verlauf würden die Lösungskurven in diesem Modell nehmen?*

Aufgabe

Ein recht unerwartetes Ergebnis bringt folgende Situation: Herrscht zwischen zwei Spezies eine Räuber-Beute-Beziehung und fügt man diesem System noch eine weitere Beutespezies zu²⁷, so entlastet das nicht – wie zu vermuten wäre – die erste Beutespezies, sondern es kann sogar das Aussterben einer der beiden Beutearten zur Folge haben. Versuchen Sie, diese Situation durch ein mathematisches Modell zu bestätigen und eine inhaltliche Begründung für dieses vorerst paradox erscheinende Ergebnis zu finden!

3.3.2 SIR-Modell

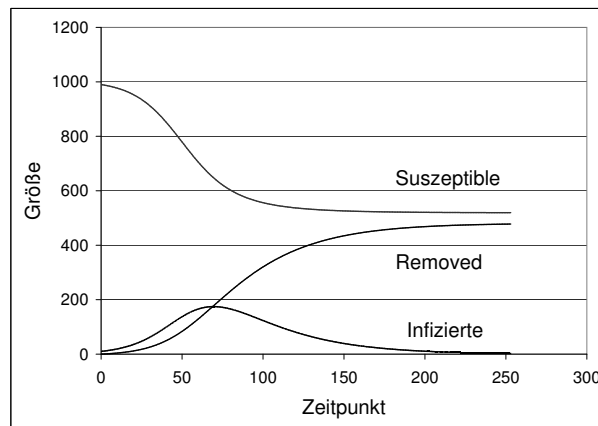
Wir betrachten nun die Ausbreitung einer tödlichen Krankheit in einer Bevölkerung mit anfänglicher Populationsgröße N . Dazu erweitern wir das *SI-Modell 2* um eine weitere Zustandsgröße R_t , die die Anzahl der an der Krankheit Verstorbenen zum Zeitpunkt t beschreibt²⁸. Im betrachteten Fall erliegt dabei in jedem Zeitschritt ein gewisser Prozentsatz c der Infizierten den Folgen der Krankheit.

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - a \cdot S_t \cdot \frac{I_t}{N} + b \cdot I_t \\ I_{t+1} &= I_t + a \cdot S_t \cdot \frac{I_t}{N} - b \cdot I_t - c \cdot I_t \\ R_{t+1} &= R_t + c \cdot I_t \end{aligned}$$

Auch hier stellt sich in Abhängigkeit von den Konstanten a , b und c ein stabiler Endzustand ein:

²⁷Diese dient dem Räuber ebenfalls als Nahrung, steht jedoch in keiner direkten Wechselwirkung zur ursprünglichen Beutespezies.

²⁸Die Bezeichnung R_t ergibt sich aus dem englischen Wort *removed* und kann allgemein auch die Zahl der immunen oder unter Quarantäne gestellten Menschen einschließen.



SIR-Modell mit: $S_0 = 990$; $I_0 = 10$; $R_0 = 0$
 $a = 0,2$; $b = 0,1$; $c = 0,03$

Man erkennt, dass die Kurve der Infizierten ein lokales Maximum besitzt. Dieses kann man berechnen, indem man nach jenem Zeitpunkt sucht, bei dem $I_{t+1} = I_t$ ist. Das ist dann der Fall, wenn $\frac{a}{N} \cdot S_t = b + c$ und damit $S_t = \frac{b+c}{a} \cdot N$ gilt. Im Allgemeinen wird man nun versuchen, dieses Maximum relativ früh zu erreichen. Also dann, wenn S_t noch sehr groß ist. Durch Steuerung der Parameter a , b und c kann das beeinflusst werden. Für den Schulunterricht bieten sich an dieser Stelle Schieberegler an, mit denen man sofort beobachten kann, welchen Einfluss die Veränderung der Parameter auf den Endzustand des Systems hat, auf den es letztlich ankommt.

Dieses einfache Epidemiemodell hat auch Ähnlichkeiten zu einigen soziologischen Phänomenen. Beispielsweise könnte man damit auch das Ausbreiten einer neuen Idee (beispielsweise die Methode der Psychoanalyse ausgehend vom einzigen „Infizierten“ *Sigmund Freud*, die Evolutionstheorie ausgehend von *Charles Darwin* oder das Christentum ausgehend von *Jesus* und seiner Gefolgschaft), von Gerüchten oder von neuen technologischen Erfindungen (z. B. die Verbreitung von Fernsehgeräten) modellieren. Die Genesung entspricht dann am ehesten dem Vergessen der neuen Idee, das Sterben entspricht dem *Nicht-mehr-Weitererzählen* und das Geimpft-sein ist gleichzusetzen dem *Nicht-empfindlich-sein* für die neue Idee.

Eine Variante des SIR-Modells zur Beschreibung von Tollwut beim Rotfuchs und zugehörige reale Daten findet man bei NOWAK²⁹.

Zusatzfragen

- Was passiert im obigen Beispiel, wenn durch die Verwendung eines

²⁹NOWAK 2001, S. 61-78

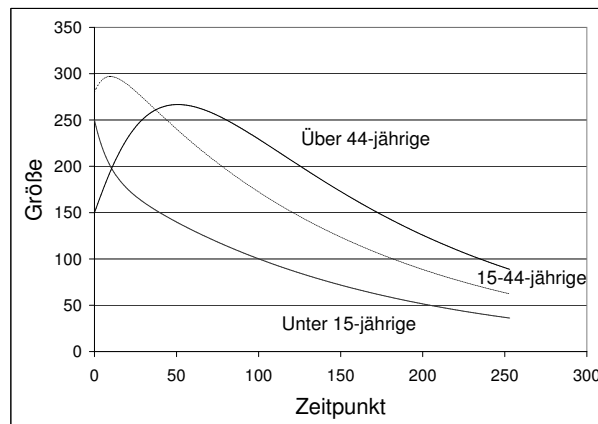
neuen Medikaments die Genesungsrate b von 0,10 auf 0,11 angehoben werden kann?

- Was geschieht langfristig gesehen, wenn die Sterblichkeitsrate c der Infizierten statt 0,03 den Wert 0,04 annimmt? Versuchen Sie, dieses Phänomen zu erklären!
- In welcher Beziehung müssten die Parameter a , b und c zueinander stehen, damit das lokale Maximum von I_t nicht in den beobachteten Zeitraum $t > 0$ fällt?
- Verändern Sie das Modell so, dass auch Impfungen von Suszeptiblen berücksichtigt werden! Was verändert das am globalen Verhalten des Systems?

3.3.3 Bevölkerungsdynamik

Die Beobachtung der Bevölkerungsentwicklung ist seit jeher ein zentrales Anliegen der Biomathematik. Dementsprechend viele Modelle gibt es für ihre Beschreibung. In diesem Abschnitt wollen wir die Bevölkerung ganz grob in 3 Gruppen einteilen: A_t steht für die Anzahl der Unter-15-jährigen, B_t für die Anzahl der (reproduktiven) 15- bis 44-jährigen und C_t für die Anzahl der Über-44-jährigen, jeweils zum Zeitpunkt t (in Jahren). a , b und c bezeichnen die Sterberaten der einzelnen Gruppen in einem Jahr und f die Fertilität (= durchschnittliche Anzahl der Kinder pro Frau) der Bevölkerung. Um das Modell zu vereinfachen, tritt jedes Jahr $\frac{1}{15}$ der Personen der 1. Altersklasse in die 2. Klasse und $\frac{1}{30}$ der Personen der 2. Klasse in die 3. Klasse über. Das entspricht natürlich genau dem Kehrwert der Verweildauern in diesen Altersklassen. Weiters werden in einem Jahr $\frac{f}{30} \cdot \frac{B_t}{2}$ Kinder geboren, da es durchschnittlich $\frac{B_t}{2}$ gebärfähige Frauen gibt, die jährlich durchschnittlich $\frac{f}{30}$ Kinder bekommen.

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t - a \cdot A_t + \frac{f}{30} \cdot \frac{B_t}{2} - \frac{1}{15} \cdot A_t \\ B_{t+1} &= B_t - b \cdot B_t + \frac{1}{15} \cdot A_t - \frac{1}{30} \cdot B_t \\ C_{t+1} &= C_t - c \cdot C_t + \frac{1}{30} \cdot B_t \end{aligned}$$



Bevölkerungsdynamik mit: $A_0 = 250$; $B_0 = 280$; $C_0 = 150$
 $a = 0,006$; $b = 0,012$; $c = 0,03$; $f = 2,3$

Zusatzfragen

- Auf welchen Wert müsste die Fertilität f im obigen Beispiel angehoben werden, um dauerhaft stabile Bevölkerungszahlen zu garantieren?
- Was passiert, wenn durch den medizinischen Fortschritt bzw. Unfallvermeidung die Sterberaten in den ersten beiden Klassen auf $a = 0,3\%$ bzw. $b = 0,6\%$ gesenkt werden könnten?
- Wo liegen die Grenzen dieses Modells? Inwiefern ist es für die Beschreibung einer realen Bevölkerung geeignet?

3.3.4 Stein-Schere-Papier-Spiel

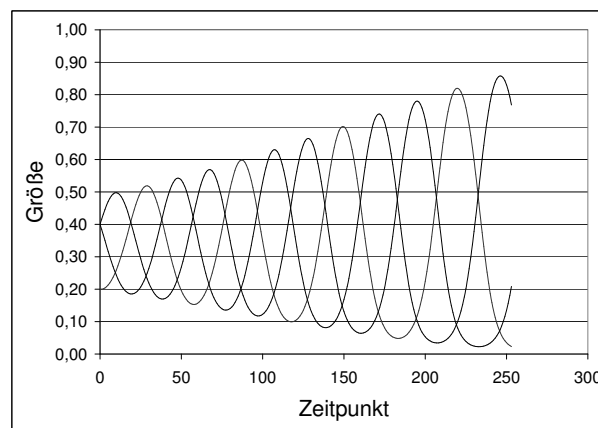
Auf den ersten Blick wird man sich wohl fragen, was denn dieses Kinderspiel mit Biomathematik zu tun habe. Tatsächlich scheint das Spiel, bei dem die *Schere* immer am *Stein* zerbricht, die *Schere* immer das *Papier* schneidet und das *Papier* immer den *Stein* umhüllt, durch seine Spielregeln schon völlig erklärt zu sein. Allerdings findet man solche zyklisch-dominanten Beziehungen auch in der Natur vor, beispielsweise bei bestimmten Bakterienkulturen. Manche der Bakterien produzieren Gift, um ihre Artgenossen zu schädigen, und das zugehörige Gegengift, um nicht selbst von den Artgenossen vergiftet zu werden. Den relativen Anteil dieser Bakterien zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit A_t . Ist A_t sehr hoch, wird es sich nicht mehr rechnen, das Gift zu produzieren. Es reicht dann also, nur das Gegengift zu besitzen. Es kann also die gesparte Energie für „Sinnvolleres“, wie etwa die eigene Reproduktion verwendet werden. Bedienen sich sehr viele Bakterien dieser neuen Strategie, die

wir mit B_t bezeichnen, wird aber auch das Produzieren des Gegengifts sinnlos, da ja quasi fast kein Gift mehr im Umlauf ist, vor dem man sich schützen müsste. Steigt allerdings dann der Anteil der „unproduktiven“ Bakterien C_t , die also weder Gift noch Gegengift produzieren, zahlt es sich wieder aus, Gift und somit auch Gegengift zu produzieren, um sich einen Vorteil zu verschaffen. Und der Kreislauf beginnt von vorne.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Anpassung an eine andere Strategie zu modellieren. Wir wollen hier eine recht einfache Methode behandeln. Dabei soll der Reproduktionserfolg einer Bakterienart abhängig von der Zahl der erfolgreichen Begegnungen, also jener mit Überlegenheit über den Gegner sein. Beispielsweise soll der Zuwachs von A_t in einem Zeitschritt proportional zu $A_t \cdot C_t$ sein, während C_t in gleichem Maße abnimmt.

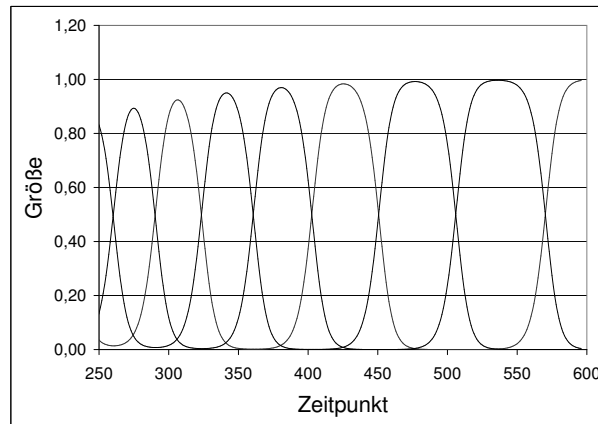
$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + a \cdot A_t \cdot C_t - a \cdot A_t \cdot B_t \\ B_{t+1} &= B_t + a \cdot B_t \cdot A_t - a \cdot B_t \cdot C_t \\ C_{t+1} &= A_t + a \cdot C_t \cdot B_t - a \cdot C_t \cdot A_t \end{aligned}$$

Es ergeben sich in diesem Modell wirklich die oben beschriebenen zyklischen Schwankungen. Je größer dabei der Wert von a ist, desto schneller gehen die Wechsel vor sich. Dabei fällt auf, dass sich die einzelnen Strategien mit der Zeit immer deutlicher und über längere Zeiträume durchsetzen, bevor sie durch die nächste abgelöst werden.



Stein-Schere-Papier mit: $A_0 = 0,2$; $B_0 = 0,4$; $C_0 = 0,4$; $a = 0,2$

Das geht sogar so weit, dass eine Strategie einen Anteil sehr nahe an 100% erreicht, diesen Zustand dann für einige Zeit aufrecht erhalten kann, bis die nächste Strategie in diese Einheitsbevölkerung „eindringen“ kann und sich die Situation schlagartig ändert:



Stein-Schere-Papier mit: $A_0 = 0,2$; $B_0 = 0,4$; $C_0 = 0,4$; $a = 0,2$

Dieses zyklische Verhalten hat man auch in der unbelebten Natur bei chemischen Prozessen experimentell nachweisen können³⁰.

Zusatzfragen

- Wie sind die Grenzfälle $a = 0$ und $a = 1$ zu interpretieren und welche Auswirkungen auf die Zeitdiagramme ergeben sich?

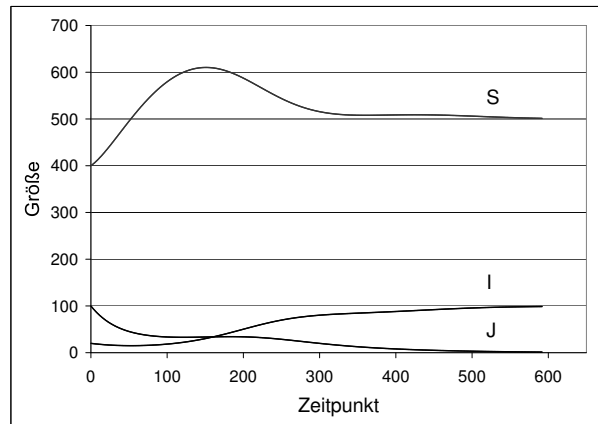
3.3.5 SI-Modell mit zwei unterschiedlichen Erregern

Das folgende Modell beschreibt den Verlauf einer tödlichen Krankheit, die von zwei unterschiedlichen Virentypen ausgelöst werden kann. Dabei unterscheiden sich die beiden Typen durch ihre „Aggressivität“. Die an Virus 1 erkrankten Personen werden mit I_t bezeichnet und haben eine Sterberate v (pro Zeitschritt), während die an Virus 2 Erkrankten mit J_t bezeichnet werden und eine Sterberate w haben. Das Wachstum der suszeptiblen Bevölkerung beschreiben wir mit dem begrenzten Wachstumsmodell und die Übertragung der Krankheit wie im *SI-Modell 2*:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + a \cdot (K - S_t) - b \cdot S_t \cdot (I_t + J_t) \\ I_{t+1} &= I_t + b \cdot I_t \cdot S_t - v \cdot I_t \\ J_{t+1} &= J_t + b \cdot J_t \cdot S_t - w \cdot J_t \end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass das Virus 2 etwas aggressiver als das Virus 1 ist, d. h. dass die Sterberate w größer als die Sterberate v ist.

³⁰Siehe dazu SCHUSTER 1995, S. 131.



SI-Modell mit zwei Erregern mit: $S_0 = 400$; $I_0 = 20$; $J_0 = 100$
 $a = 0,01$; $b = 0,0001$; $K = 1000$; $v = 0,05$; $w = 0,06$

Trotz der zu Beginn höheren Zahl an Virus-2 -Erkrankten hat das „schwächere“ Virus 1 auf Dauer die „besseren Karten“, wenn es ums Überleben in der Bevölkerung geht. Betrachtet man die schrittweise Entwicklung des Quotienten $\frac{J_t}{I_t}$, so erhält man:

$$\frac{J_{t+1}}{I_{t+1}} = \frac{J_t}{I_t} \cdot \left(\frac{1 + b \cdot S_t - w}{1 + b \cdot S_t - v} \right)$$

Da der obige Klammerausdruck wegen $w > v$ und wegen $S_t \leq K$ (sofern $S_0 \leq K$) kleiner oder gleich $\frac{1+bK-w}{1+bK-v} < 1$ ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_t}{I_t} = 0$$

Dieses vorerst paradox erscheinende Ergebnis lässt sich inhaltlich so erklären, dass die vom stärkeren Virus befallenen Menschen schneller sterben und daher das Virus nicht so lange an andere, gesunde Personen weitergeben können. Das führt auf Dauer zum Aussterben des Virus 2 in der Bevölkerung. Im verbleibenden SI-Modell stellt sich dann ein stationärer Zustand ein.

Zusatzfragen

- Was geschieht, wenn $v = w$ gilt?
- Was passiert, wenn entweder $v = 0$ oder $w = 0$ ist? Was, wenn $v = w = 0$?
- Stellt sich für alle Startwerte S_0 derselbe stationäre Endzustand ein?

3.4 Modelle mit mehr als drei Zustandsgrößen

3.4.1 Lesliemodell 2

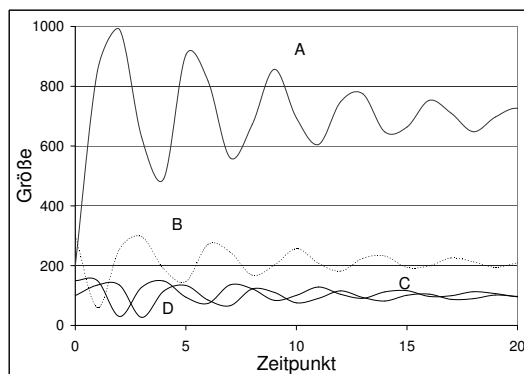
Auch für mehr als 2 Altersklassen gibt es beim Lesliemodell ganz analoge Erkenntnisse. Teilt man beispielsweise die betrachtete Bevölkerung in vier Altersklassen, so stellen sich auch hier auf Dauer konstante Verhältnisse der einzelnen Bevölkerungszahlen in den Altersklassen ein. Der Spektralradius der Lesliematrix gibt wieder den asymptotischen Wachstumsfaktor an, welcher allerdings nicht mehr so leicht zu bestimmen ist wie jener im 2-Klassen-Modell. Mit Hilfe des Computers kann man ihn allerdings sehr leicht näherungsweise experimentell bestimmen. Die f_i sind nun wieder die Geburtenraten und die s_i die jeweiligen Überlebenswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Altersklassen.

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= f_1 \cdot A_t + f_2 \cdot B_t + f_3 \cdot C_t + f_4 \cdot D_t \\ B_{t+1} &= s_1 \cdot A_t \\ C_{t+1} &= s_2 \cdot B_t \\ D_{t+1} &= s_3 \cdot C_t \end{aligned}$$

Dieses System kann man erneut übersichtlich mit Hilfe der Lesliematrix darstellen:

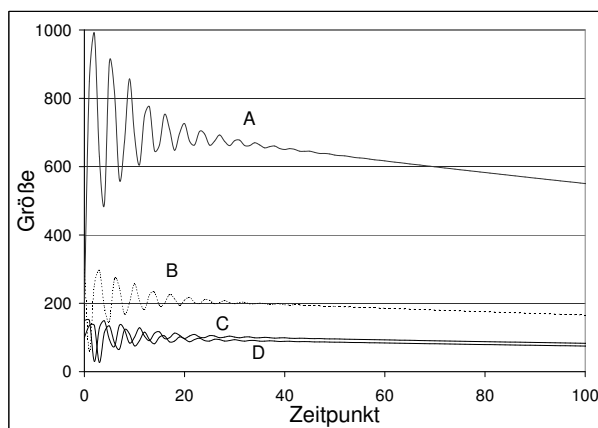
$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \\ C_{t+1} \\ D_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \\ D_t \end{pmatrix}$$

Wenn man nur die ersten Zeitschritte in diesem System betrachtet, lässt sich noch nicht prognostizieren, wie die weitere Entwicklung verlaufen wird:



Lesliemodell 2 mit: $A_0 = 200$; $B_0 = 300$; $C_0 = 150$; $D_0 = 100$
 $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 3$; $f_4 = 4$; $s_1 = 0,3$; $s_2 = 0,5$; $s_3 = 0,9$

Erst nach einiger Zeit stellen sich in der Gesamtbevölkerung die „richtigen Verhältnisse“ ein. Man erkennt dann, dass etwa im betrachteten Beispiel der Spektralradius der Lesliematrix, der das Langzeitverhalten der Population festlegt, kleiner als 1 ist:



Lesliemodell 2 mit: $A_0 = 200$; $B_0 = 300$; $C_0 = 150$; $D_0 = 100$
 $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 3$; $f_4 = 4$; $s_1 = 0,3$; $s_2 = 0,5$; $s_3 = 0,9$

Mit einem Computeralgebrasystem lässt sich der Spektralradius zu dieser Matrix auch näherungsweise berechnen. Im vorliegenden Fall ergibt sich $\lambda \approx 0,997$, was die relativ langsame Abnahme der Bevölkerungszahlen erklärt.

Aufgabe

Implementieren Sie das Lesliemodell 2 in einem Tabellenkalkulationsprogramm entsprechend folgender Daten³¹ für eine mehrjährige Pflanze:

Altersklasse	A	B	C	D
Geburtenrate f_i	0	0	200	50
Überlebenswahrscheinlichkeit s_i	0,05	0,1	1,0	0,0
Startpopulation	60000	400	150	200

Untersuchen Sie das Langzeitverhalten dieser Bevölkerung! In welchem Verhältnis stehen die Bevölkerungszahlen der einzelnen Altersklassen zueinander? Berechnen Sie näherungsweise den Langzeitwachstumsfaktor, indem Sie die Bevölkerungszahlen zweier aufeinanderfolgender (später) Zeitpunkte dividieren! Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Spektralradius der zugehörigen Lesliematrix (Computeralgebrasystem)!

³¹aus dem Internet: <http://www-ui.informatik.uni-oldenburg.de/lehre/veranstaltungen>, link vom 17.07.2007

Aufgabe³²

Bei der Erstellung von Dämmen am unteren Snake River, im Columbia River Basin wurde die folgende Untersuchung der Auswirkung auf die Chinook Lachs-Population eingebracht. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten und Geburtenraten vor der Störung durch den Staudamm können geschätzt werden durch:

Altersklasse	<i>A</i> Eier	<i>B</i> 1-jährig	<i>C</i> 2-jährig	<i>D</i> 3-jährig
Geburtenrate f_i	0	0	20	58
Überlebenswahrscheinlichkeit s_i	0,05	0,3	0,6	0
Startpopulation	500	50	6	3

Berechnen Sie den Langzeitwachstumsfaktor dieser Lachspopulation mit einem Computeralgebrasystem! Was passiert auf Dauer? Aufgrund verschiedener Untersuchungen kann die Auswirkung des Staudammprojektes wie folgt abgeschätzt werden:

Altersklasse	<i>A</i> Eier	<i>B</i> 1-jährig	<i>C</i> 2-jährig	<i>D</i> 3-jährig
Geburtenrate f_i	0	0	5	40
Überlebenswahrscheinlichkeit s_i	0,012	0,87	0,79	0
Startpopulation	500	50	6	3

Wie sehr wird das Staudammprojekt das Wachstum der Lachspopulation beeinflussen? Welche der folgenden Managementmaßnahmen könnte das Problem am besten lösen?

- die Überlebenswahrscheinlichkeit s_1 der Eier wird auf 0,02 erhöht
- die Überlebenswahrscheinlichkeiten s_2 und s_3 können auf jeweils 0,9 angehoben werden
- beide Maßnahmen in schwächerer Form: $s_1 = 0,016$, $s_2 = 0,88$, $s_3 = 0,85$

3.4.2 Lineare Nahrungskette

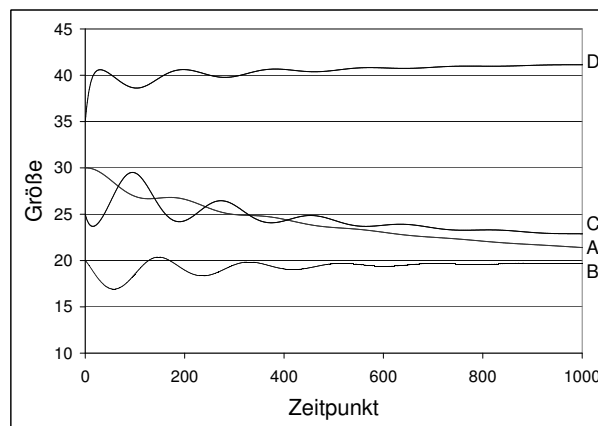
Wir betrachten jetzt vier verschiedene Tierarten, die gemeinsam eine Nahrungskette bilden. Die „oberste“ Tierart *A* stellt den Räuber dar. Sie ernährt

³²vgl. im Internet: <http://www-ui.informatik.uni-oldenburg.de/lehre/veranstaltungen>, link vom 17.07.2007

sich ausschließlich von der zweiten Tierart B , die ihrerseits wieder ausschließlich Jagd auf die Spezies C macht, welche sich schließlich nur von der untersten Beuteart D ernährt. Zusätzlich nehmen wir an, dass D logistisch wächst, während die Populationsgrößen der anderen Tierarten exponentiell fallen (jeweils bei Nichtvorhandensein aller anderen Arten). Übersetzt man diese Modellannahmen in Differenzengleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t - a_1 \cdot A_t + a_2 \cdot A_t \cdot B_t \\ B_{t+1} &= B_t - b_1 \cdot B_t + b_2 \cdot B_t \cdot C_t - b_3 \cdot B_t \cdot A_t \\ C_{t+1} &= C_t - c_1 \cdot C_t + c_2 \cdot C_t \cdot D_t - c_3 \cdot C_t \cdot B_t \\ D_{t+1} &= D_t + d_1 \cdot D_t \cdot (K - D_t) - d_2 \cdot D_t \cdot C_t \end{aligned}$$

Dieses recht einfache Modell kann schon erste Erklärungsversuche geben, wie es in der Natur, in der selbstverständlich Beziehungen zwischen Tierarten wesentlich komplexer und vielschichtiger sind, zu stabilen Populationsgrößen kommen kann. Schon D'ANCONA³³ formuliert: „Im allgemeinen werden die Beziehungen zwischen Pflanzen, herbivoren und carnivoren Tieren immer von ähnlicher Art sein, unbeschadet der Größe und Lebensweise der zusammenlebenden Organismen. In allen diesen Fällen wird sich schließlich ein gewisser Gleichgewichtszustand einstellen, der die Individuenzahl jeder Einzelart in gewissen Grenzen hält“.

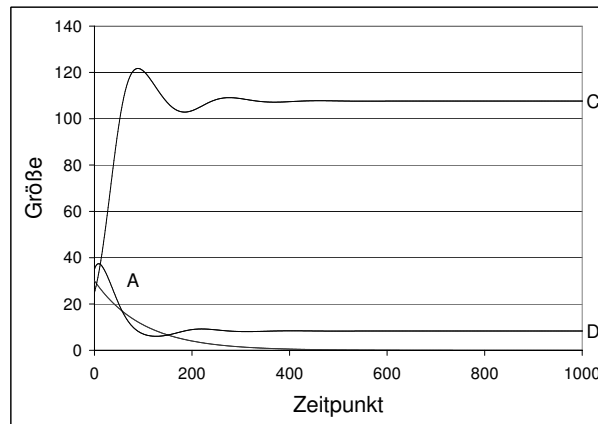


Lineare Nahrungskette mit: $A_0 = 30$; $B_0 = 20$; $C_0 = 25$; $D_0 = 35$; $K = 50$
 $a_1 = 0,01$; $a_2 = 0,0005$; $b_1 = 0,01$; $b_2 = 0,001$; $b_3 = 0,0006$; $c_1 = 0,01$
 $c_2 = 0,0012$; $c_3 = 0,002$; $d_1 = 0,0031$; $d_2 = 0,0012$

Auch kann man damit veranschaulichen, dass nach der Ausrottung einer Tierart (z. B. B) das ganze System aus dem Gleichgewicht gebracht werden kann. Selbstverständlich stirbt dann nämlich auch die Raubtierart A nach

³³D'ANCONA 1939, S. 9

einiger Zeit aus, aber auch die unterste Tierart D wird durch diese Veränderung drastisch dezimiert, da die Tierart C keinen natürlichen Feind mehr hat und sich so ungehindert auf die Jagd nach Beute machen kann.



Lineare Nahrungskette mit: $A_0 = 30$; $B_0 = 0$; $C_0 = 25$; $D_0 = 35$; $K = 50$
 $a_1 = 0,01$; $a_2 = 0,0005$; $b_1 = 0,01$; $b_2 = 0,001$; $b_3 = 0,0006$; $c_1 = 0,01$
 $c_2 = 0,0012$; $c_3 = 0,002$; $d_1 = 0,0031$; $d_2 = 0,0012$

Zusatzfragen

- Gibt es für jede (vernünftige) Wahl der Konstanten einen stabilen Endzustand wie oben?
- Was passiert, wenn anstatt B die Tierart C ausgerottet wird?
- Erweitern Sie das Modell um eine weitere Tierart! Gibt es auch dann noch stabile Verhältnisse?

Aufgabe

Beim Lehrpfad in der Waldviertler Blockheide findet man zahlreiche Tafeln, die auf dort funktionierende lineare Nahrungsketten hinweisen:



Modellieren Sie die Nahrungskette, die auf dem Bild angeführt ist. Schaffen Sie es in Ihrem Modell, dauerhaft stabile Bestandszahlen zu erreichen?

Kapitel 4

Fachdidaktische Analyse

4.1 Biomathematik in österreichischen Schulen und Lehrplänen

Biomathematische Themen werden im Mathematikunterricht an österreichischen Schulen nur selten bearbeitet. Die Folge der Fibonaccizahlen wird oftmals durch das offensichtlich unrealistische, wegen der netten Geschichte aber fest in der Literatur verankerte Modell der Kaninchenvermehrung eingeführt. Selbst dabei wird aber nicht auf den biologischen Kontext geachtet, sondern so schnell wie möglich zur Rekursionsformel der Folge übergegangen.

Falls das Thema *Dynamische Prozesse* in der 8. Klasse Gymnasium überhaupt behandelt wird¹, so treten biologische Sachverhalte oft nur als Motivation für die Behandlung von *Differenzen- oder Differentialgleichungen* auf und nicht als eigenständiger Inhalt. Wichtige Fähigkeiten wie das Denken in Systemen, das Erkennen von Zusammenhängen oder das Verstehen der Struktur von natürlichen Prozessen sollten m. E. dabei viel stärker in den Vordergrund treten.

Im Unterstufenlehrplan sind biomathematische Themen nicht explizit angeführt, Wachstums- und Abnahmeprozesse werden allerdings häufig anhand von einfachen Bevölkerungsmodellen bearbeitet.

Anders als im Physikunterricht hat die Mathematik im Biologieunterricht an unseren Schulen nur wenig Platz gefunden. Ausnahmen stellen lediglich Einzelfälle, wie z. B. die *Mendel'schen Regeln*, dar.

Es liegt also an der Lehrperson selbst, zu entscheiden, ob und in welchem Ausmaß Biomathematik in ihrem Unterricht vorkommt. Es soll unter anderem in dieser Arbeit dargelegt werden, welche Chancen der Einsatz bioma-

¹Das wird im Lehrplan allerdings gefordert.

matischer Modelle bietet, wie ein sinnvoller Umgang stattfinden könnte, bei welchen im Lehrplan festgelegten Inhalten sich ein Einsatz lohnen würde, welche Unterrichtsformen sich anbieten und worin die Ziele eines solchen Unterrichts liegen.

Liest man etwa den allgemeinen Teil des Mathematik-Lehrplans der AHS-Oberstufe², so kann man feststellen, dass eine adäquate Behandlung von Biomathematik beinahe alle geforderten *mathematischen Kompetenzen*, *Beiträge zu den Bildungsbereichen*, *Aspekte der Mathematik* und *didaktischen Grundsätzen* fördern kann. Das mag natürlich auch für andere Teilbereiche der Mathematik zutreffen, die folgenden Forderungen werden aber naheliegenderweise besonders durch das Bearbeiten biomathematischer Themen umgesetzt.

Mathematische Kompetenzen: „Mathematik soll als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern [...] sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen erkannt werden.“ Hier werden also explizit Naturvorgänge angesprochen. Weiters sollen „Situationen, Zustände und Prozesse aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik“ übersetzt werden. Der Modellbildungsprozess und das Hin- und Herschalten zwischen Modell und Realität soll also einen Platz im Unterricht finden. Das Experimentieren mit Modellen ermöglicht schließlich auch das „zielgerichtete Suchen nach Gesetzmäßigkeiten“, das „Variieren von Parametern“, das „Ausführen von Simulationen“ sowie das „Ausloten von Grenzen und Spezialfällen“.

Aspekte der Mathematik: Es ist im Lehrplan festgehalten, dass Mathematik „eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen“ sei. „Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“ Es wird außerdem angeführt, dass Mathematik „ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen“ sei, und dass der Unterricht aufzeigen solle, „dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens eine wichtige Rolle“ spiele. „Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen.“

Didaktische Grundsätze: Vor allem *ein* didaktischer Grundsatz, nämlich *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten* wird speziell durch die

²vgl. im Internet: <http://www.bmukk.gv.at>, link vom 22.10.2007

Biomathematik angesprochen. „Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben.“

Ein neues Thema im Schulunterricht muss also nicht zwangsläufig zusätzliche Zeit in Anspruch nehmen. Es können beispielsweise durch die Biomathematik, wie eben aufgezeigt, viele Kompetenzen angeeignet und trainiert werden, die alle im Lehrplan ohnehin vorgesehen sind. Zusätzlich bietet sich die Möglichkeit, viele weitere, didaktisch wertvolle Kompetenzen zu schulen (siehe dazu Abschnitt 4.3).

Die Erziehung der Schüler zu rational denkenden Menschen sollte eines der Hauptanliegen des Mathematikunterrichts sein. Das heißt aber nicht, dass dabei nicht auch Themen angesprochen werden sollen, die in den Medien oder in der Tagespolitik oft sehr emotional diskutiert werden. Viele dieser Themen sind biomathematischer Natur. Man denke zum Beispiel an den CO_2 -Haushalt der Erde, verkehrspolitische Themen, das Bevölkerungswachstum und den Generationenvertrag, an Gesundheitsthemen wie SARS, BSE oder die Vogelgrippe, an die Rodung des Regenwaldes oder den ewigen Streit über den Einsatz von Gentechnik in Medizin und Landwirtschaft.

Für den Mathematikunterricht tut sich hier ein breites Spektrum an Anwendungen auf. Es kann durch die Bearbeitung elementarer Modelle zumindest ein Grundstein zum Verständnis der oben genannten Themen gelegt werden.

4.2 Biomathematik in Schulbüchern

Es werden nun die gängigsten österreichischen Schulbücher auf ihre biomathematischen Inhalte hin untersucht. Das Schulbuch mit dem weitaus größten Marktanteil in der Unterstufe ist die Reihe *Das ist Mathematik*³, gefolgt von *Blickpunkt Mathematik*⁴.

In der Oberstufe hat nach dem *Mathematik-Lehrbuch*⁵ die Reihe *Mathematik verstehen*⁶ den größten Absatz an Österreichs Schulen. Selbstverständlich gibt es noch viele weitere, insbesondere in der Unterstufe auch viele neue bzw. im Entstehen begriffene Schulbuchreihen⁷. Wir beschränken uns den-

³REICHEL et. al. 2003-2005

⁴KELLER-RESSEL et. al. 2002-2005

⁵GÖTZ und REICHEL 2004-2007

⁶MALLE et. al. 2004-2007

⁷DORFMAYR et. al. 2006-2007, HANISCH et. al. 2007

noch auf die vier oben genannten, bereits in der Schullandschaft etablierten Werke.

4.2.1 Unterstufe

Das ist Mathematik

1. **Klasse:** Es finden sich keine biomathematischen Inhalte.
2. **Klasse:** Das menschliche Bevölkerungswachstum in Entwicklungsländern wird ausführlich im Unterrichtsprojekt *Kinder in Entwicklungsländern* im Anhang thematisiert (S. 252 - 259). Es werden Größen wie die Lebenserwartung, Geburten- und Sterberaten, mittlere Anzahl der Geburten pro Frau usw. behandelt. Zwar geht es noch nicht konkret um Wachstumsmodelle, allerdings eignet sich das Unterrichtsprojekt durchaus als Vorbereitung für dieses Thema. Es sollen etwa Bevölkerungszunahmen in Prozent berechnet und Daten aus Bevölkerungsentwicklungsgrafiken abgelesen werden.
Zum Waldwachstum findet sich eine Aufgabe im Kapitel *Prozentrechnungen* (Aufgabe 496), ansonsten gibt es keine Aufgaben in biomathematischem Kontext.
3. **Klasse:** Im Abschnitt *Eine Formel für die Zinseszinsrechnung* finden sich vier Aufgaben aus dem Bereich *Mensch und Natur*. Dabei geht es konkret zweimal um Bevölkerungswachstum und zweimal um das Wachstum eines Waldes. Es wird nach der Größe der Bevölkerung bzw. des Waldes nach einer gewissen Zeit gefragt, wenn diese Größen exponentiell wachsen. Das exponentielle Wachstumsmodell und seine Grenzen werden dabei nicht explizit thematisiert (Aufgaben 558 - 561).
4. **Klasse:** Zur Wiederholung und Vertiefung gibt es auch in der 4. Klasse nochmal einige Aufgaben zur Bevölkerungsentwicklung mit exponentiellem Wachstum. Abermals wird dabei beim Thema *Zinsen- und Zinseszinsrechnung* die Biomathematik als „alternativer“ Kontext für das Gelernte herangezogen (Aufgaben 27 - 30).
Das Unterrichtsprojekt im Anhang beschäftigt sich in diesem Band mit dem Thema *Der Wald*. Es finden sich darin Aufgaben zur Prozentrechnung und zum exponentiellen Wachstum. Es wird auch wirklich im biologischen Bereich gearbeitet und beispielsweise über die Gefährdung und die Nutzung des Waldes diskutiert.

Blickpunkt Mathematik (Schwerpunkt AHS)

- 1., 2. und 3. Klasse:** Es gibt keine biomathematischen Inhalte. In der 3. Klasse findet sich zwar je ein Kapitel zur Zinsenrechnung und zu linearen Wachstums- und Abnahmeprozessen, die Aufgabenkontexte entstammen aber alle nicht der Biomathematik.
- 4. Klasse:** Im Kapitel *Funktionen* entdeckt man dann schließlich drei Aufgaben mit biologischem Kontext: Seerosenwachstum, Bakterienvermehrung und Bevölkerungswachstum (Aufgaben 486, 487 und 489). Eine weitere Aufgabe zum Bakterienwachstum findet man in „Mein persönlicher Wissensanzeiger“ am Ende des Kapitels. Die Einleitung zum Kapitel *Statistik* bildet ein Text, der das Thema aus historischer Sicht beleuchtet. Dabei wird auf eineinhalb Seiten über die ersten Volkszählungen bis hin zur aktuellen Erhebung der Bevölkerungsstatistik eingegangen. Die darauffolgende Aufgabe 735 fordert die Schülerinnen und Schüler dazu auf, bestimmte statistische Daten für die Bevölkerung Österreichs zu recherchieren. Im Abschnitt *Manipulation mit Statistik* schließlich liefert in der Aufgabe 735 das Bevölkerungswachstum Chinas einen biomathematischen Kontext.

4.2.2 Oberstufe

Mathematik-Lehrbuch

- 5. Klasse:** Es finden sich keine biomathematischen Inhalte.
- 6. Klasse:** Das erste biomathematische Modell in dieser Schulbuchreihe ist das von Fibonacci entwickelte Modell zur Kaninchenvermehrung (Aufgabe 471). Es geht weniger um den Kontext, als um das Kennenlernen der rekursiv definierten Folge und ihrer Eigenschaften. Das Kapitel *Geometrische Folgen* wird auf der Seite 134 mit einem Beispiel zum Wachstum einer Bakterienkultur eingeleitet. Auch der Begriff *Vermehrungsfaktor* wird dabei verwendet. Allerdings findet man in diesem Kapitel keine weiteren Aufgaben mit biomathematischem Hintergrund. Auch beim Kapitel *Exponential- und Logarithmusfunktion* bedient man sich zum Einstieg auf der Seite 196 eines biomathematischen Kontextes. Es geht dabei um das Wachstum der Erdbevölkerung. Im Anschluss gibt es auch eine Aufgabe zum Holzwachstum, eine Aufgabe zum Bakterienwachstum, zwei Aufgaben aus der Demographie sowie eine Aufgabe aus der Medizin (Aufgaben 732-735, 809). Bei einer kurzen Vorstellung

des *logistischen Wachstums* auf der Seite 223 wird allerdings kein Beispiel aus der Biomathematik verwendet.

- 7. Klasse:** Relativ viele Aufgaben aus der Biologie findet man in diesem Band im Kapitel *Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme und Prozesse*. Schon die Einleitung nimmt Bezug auf die in der Fachliteratur sehr prominent vertretene Räuber-Beute-Beziehung zwischen Luchsen und Hasen. Es wird kurz darauf eingegangen, was ein mathematisches Modell ausmacht und was es in der Regel zu leisten fähig ist. Ein Fokus liegt auch auf der Darstellung dynamischer Prozesse mittels Ursache-Wirkungs-Diagrammen, ein Beispiel beschäftigt sich in diesem Zusammenhang mit dem Bevölkerungswachstum. Im Abschnitt *Differenzengleichungen 1. Ordnung mit einer Variablen* wird ein Beispiel zum Nikotinabbau im Blut durchgearbeitet, Zeit- und Phasendiagramme werden zur Darstellung verwendet und das Langzeitverhalten des Systems wird analysiert. Im Aufgabenteil finden sich zuerst einige Aufgaben, die völlig auf einen außermathematischen Kontext verzichten (Aufgaben 793-808), während es im nachfolgenden Teil sehr viele biomathematische Aufgaben gibt (ein Großteil der Aufgaben 809-829). Dabei geht es etwa um die Gewichtsabnahme bei Tieren, das Keimwachstum in Milch, die Ausbreitung von Krankheiten, das Holzwachstum sowie um das Wachstum von Tierpopulationen (Vogel, Wal, Fisch). Im nächsten Abschnitt *Komplexere Prozesse, Systeme von Differenzengleichungen* gibt es zwei Aufgaben zum Populationswachstum unter Berücksichtigung der Altersstruktur (Aufgaben 839, 840). Im Ausblick auf der Seite 235 wird das Verhulst-Modell anhand eines Populationswachstums beschrieben.
- 8. Klasse:** Das Kapitel *Einfache Differentialgleichungen* ist mit zwei Seiten knapp gehalten, die Aufgabenkontexte stammen ausschließlich aus der Physik (S. 39, 40).

Mathematik verstehen

- 5. Klasse:** Es finden sich keine biomathematischen Inhalte.
- 6. Klasse:** Einen wahren Fundus an biomathematischen Aufgaben entdeckt man hingegen in diesem Band. Im Kapitel *Reelle Funktionen* gibt es eine Aufgabe, in der die Änderungsrate bzw. der Änderungsfaktor einer Bevölkerung aus gegebenen Daten zu berechnen sind. Das Kapitel *Exponential- und Logarithmusfunktion* wird mit zwei Beispielen zum

Bakterienwachstum eingeleitet. Alleine in den Abschnitten *Exponentialfunktion* und *Anwendungen von Exponentialfunktionen* gibt es 20 Aufgaben mit biomathematischem Hintergrund (Bevölkerungswachstum, Ausbreitung von Krankheiten und Gerüchten, Wachstum von Seerosen, Bäumen, Bakterien, Abbau von Umweltgiften usw.). Die Einleitung des Kapitels *Rekursive Darstellung von Exponentialfunktionen* beschäftigt sich mit der Vergrößerung des Algenbelags auf einem See, es folgen aber keine weiteren Aufgaben aus der Biomathematik. Um die Ausbreitung einer Grippe und das Wachstum einer Bevölkerung geht es dann in Aufgaben zum Abschnitt *Exponentialgleichungen*. Es folgt außerdem ein Abschnitt zum logistischen Wachstum (diskret und kontinuierlich), der sich in drei Beispielen (4.99, 4.100, 4.105) und sechs Aufgaben (4.101 - 4.104, 4.106, 4.107) mit beschränktem Bevölkerungswachstum und Bakterienwachstum sowie mit der Ausbreitung einer Grippeinfektion auseinandersetzt. Im Kapitel *Folgen* wird auch in dieser Schulbuchreihe die rekursive Darstellung von Folgen anhand der Kaninchenvermehrung nach Fibonacci eingeleitet. Es gibt allerdings keine weiteren biomathematischen Aufgaben dazu.

- 7. Klasse:** Es finden sich keine biomathematischen Inhalte.
- 8. Klasse:** Das Kapitel *Differenzen- und Differentialgleichungen* wird mit einem Beispiel zum exponentiellen Bevölkerungswachstum eingeleitet. Zusätzlich gibt es eine Aufgabe zum Bakterienwachstum (7.04) und eine Aufgabe zum kontinuierlichen logistischen Wachstum einer Population (7.08). Es folgt ein eigenes Kapitel *Vernetzte Systeme und deren Entwicklung*, in dem ausführlich auf Ursache-Wirkung-Diagramme und Flussdiagramme eingegangen wird. Eine Aufgabe befasst sich dabei mit dem Wasserkreislauf in der Erdatmosphäre (8.07). Die Flussdiagramme finden dann auch noch in den Abschnitten *Modelle der Populationsentwicklung* und *Räuber-Beute-Modelle* Anwendung. Es werden unterschiedliche Beispiele zum Bevölkerungswachstum, etwa zum unbeschränkten exponentiellen und zum beschränkten Wachstum sowie zum Wachstum bei Selbstvergiftung präsentiert und teilweise vorgerechnet. Leider gibt es zwar zum Abschnitt *Modelle der Populationsentwicklung* nur zwei Aufgaben (8.15, 8.16), darin wird aber dezidiert der Einsatz des Computers zur Simulation einer Bevölkerungsentwicklung gefordert. Ebenso im Abschnitt *Räuber-Beute-Modelle*, zu dem es insgesamt fünf Aufgaben gibt (8.17 - 8.21), die sich mit der Langzeitentwicklung von diskreten Räuber-Beute-Systemen beschäftigen.

4.3 Didaktisches Potenzial der Biomathematik

Was ist guter Unterricht? Diese Frage beschäftigt nun schon viele Generationen von Menschen. In der Fülle der Vorschläge, die im Laufe der Zeit gemacht wurden, gilt es nun, sich zurechtzufinden und seinen eigenen Weg als Lehrer zu gehen. Lehrpläne und die Bildungspolitik unterliegen oftmals so genannten *Wellen*, die vielfach den derzeitigen Bedürfnissen und Zielen der zugrundeliegenden Gesellschaft entwachsen. Hier können in den letzten 50 Jahren etwa die *Gesamtschulidee*, die *Lernzielidee*, die *Neue Mathematik* der 1960er Jahre, der Einsatz des *Computers* im Unterricht, oder die *Bildungsstandards* genannt werden⁸. Keine dieser Wellen kann für sich beanspruchen, das alleinige Fundament für guten Unterricht zu bieten⁹. Sie alle können daher nicht als alleinige Lösung aller Bildungsfragen und schon gar nicht als Antwort auf die oben gestellte Frage herangezogen werden.

BLUM und LEIB¹⁰ indes geben m. E. einen umfassenden und vor allem zeitlosen Katalog von *Qualitätskriterien für den Mathematikunterricht* an:

1. Fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung
 - Vielfältige Gelegenheiten zum Kompetenzerwerb
 - Vielfältige Vernetzungen
2. Kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler
 - Stimulation günstiger Eigenaktivitäten
 - Stimulationen von Reflexionen
3. Effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung
 - Förderung der Selbstständigkeit wie auch der Kommunikation
 - Individuell angepasste Interventionen
 - Fehleroffenes Lernklima mit Trennung Lernen/Beurteilen
 - Klare Strukturierung und effektive Zeitnutzung durch Störungsprävention

⁸Vgl. dazu GÖTZ und REICHEL 2005, S. 282.

⁹Das Scheitern der *neuen Mathematik* mit ihrem strengen Formalismus musste bereits eingestanden werden.

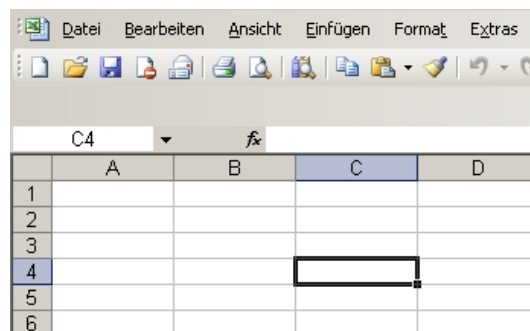
¹⁰BLUM und LEIB 2005, S. 21

Es bleibt bei dieser Aufzählung genügend Freiraum für Interpretationen, subjektive Auslegungen und für individuelles Lehrverhalten. Und doch birgt sie eine gewisse Dringlichkeit und Verbindlichkeit.

Dieses Kapitel beschäftigt sich nun mit der Frage, welche methodischen und didaktischen Möglichkeiten dem Gebiet der Biomathematik im Hinblick auf den Schulunterricht im Lichte des obigen Kataloges innewohnen. Es wird dabei auf verschiedene Aspekte eingegangen, nicht zuletzt, um der Forderung FISCHERs¹¹: „Es wird Aufgabe jeder Fachdidaktik sein, für die jeweilige Wissenschaft ein einheitliches Bild zu entwerfen, das möglichst allen Facetten Rechnung trägt [...]“ gerecht zu werden.

4.3.1 Tabellenkalkulationen

Das wohl naheliegendste und wichtigste Werkzeug zur Darstellung und Implementierung diskreter dynamischer Prozesse ist die Tabellenkalkulation (TK). Ein Datenblatt (spreadsheet) einer TK besteht dabei aus einer Matrix von Zellen, deren jeweilige Position in der Matrix durch eine Buchstaben-Ziffern-Kombination angegeben werden kann. So bedeutet in Excel¹² die Bezeichnung *A1* die Zelle links oben, während beispielsweise *C4* die Zelle in der dritten Spalte und vierten Zeile meint.



Der Inhalt einer Zelle kann entweder ein Text, eine Zahl in unterschiedlichen Formatierungen oder eine Formel sein. Es gibt meist auch die Möglichkeit, schon im Programm implementierte Funktionen¹³ zu verwenden. Zahlen können in den Zellen auf beliebig viele Stellen gerundet angegeben werden, was natürlich bei der ganzzahligen Ausgabe etwa von Populationszahlen sehr praktisch ist.

„Die wichtigste Programmeigenschaft von Tabellenkalkulationen ist aber,

¹¹FISCHER 1976, S. 185

¹²Das ist die TK der Firma Microsoft.

¹³Dabei gibt es eine reichhaltige Auswahl an mathematischen, statistischen und logischen Funktionen.

dass die einzelnen Felder des Datenblattes miteinander „kommunizieren“ können, d. h. man kann in einem Feld auf die Inhalte von anderen Feldern zugreifen.“¹⁴ Das ermöglicht natürlich auch Rechenoperationen mit den Inhalten der einzelnen Zellen, deren Ergebnis in einer weiteren Zelle verwendet wird. Bei jeder Veränderung der Inhalte der verwendeten Zellen ändert sich automatisch das Ergebnis in der betrachteten Zelle mit.

Gerade der iterative Charakter diskreter dynamischer Prozesse lässt sich auf recht einfache Weise in TK *anschaulich* und *begreifbar* machen. Umgekehrt ist das Thema *Wachstumsprozesse* oft (wenn überhaupt) das einzige, bei dem Schüler im Mathematikunterricht mit TK arbeiten. Es gibt deshalb auch nur wenig didaktische Literatur zum Einsatz von TK im Mathematikunterricht¹⁵. Als gute Grundlage kann allerdings auf einen Aufsatz von WEIGAND¹⁶ sowie die anderen Artikel im selben Heft verwiesen werden.

Bei der Bearbeitung diskreter dynamischer Prozesse treten in ganz natürlicher Weise Schwierigkeiten mit dem händischen Rechenaufwand auf, die sich mit Hilfe von TK ganz einfach bewältigen lassen. Es können dabei Stärken dieser in der Regel sehr leicht bedienbaren Programme ausgenutzt werden. Das Eingeben von Daten in Zellen, das Verknüpfen von Zellen durch Formeln und das Übertragen dieser Formeln auf andere Zellen spielen dabei eine zentrale Rolle. Auch die grafische Darstellung von Daten einer Tabelle lässt sich mit einigen wenigen Schritten ausführen.

Meist bringen Schüler schon genug Erfahrung mit TK in den Unterricht mit, und auch Lehrer sind mit dem Umgang ohnehin vertraut. Das stellt natürlich einen weiteren Vorteil dieses Werkzeuges dar.

Ein Beispiel

Die einfache Handhabung von TK soll am Beispiel von Excel demonstriert werden, da dies wohl die gängigste Software seiner Art an österreichischen Schulen ist. Es gibt allerdings eine Fülle von weiteren TK, die für diesen Zweck im selben Maße nützlich wären.

Wir betrachten das diskrete Lotka-Volterra-Modell:

$$H_{t+1} = 1,05 \cdot H_t - 0,002 \cdot H_t \cdot L_t$$

$$L_{t+1} = 0,94 \cdot L_t + 0,001 \cdot H_t \cdot L_t$$

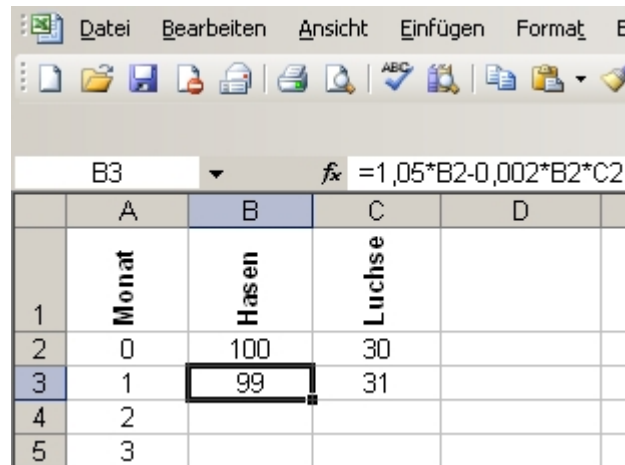
H_t bezeichnet die Größe der Hasenpopulation und L_t die Größe der Luchspopulation. Die Startwerte legen wir mit $H_0 = 100$ und $L_0 = 30$ fest. Nach

¹⁴REICHEL 1993, S. 86

¹⁵vgl. LECHNER 2002, S. 96

¹⁶WEIGAND 2001, S. 16-27

dem Eintragen dieser Startwerte H_0 und L_0 in die Zellen $B2$ und $C2$ sowie der Rekursionen in die Zellen $B3$ bzw. $C3$ sieht das Datenblatt so aus:



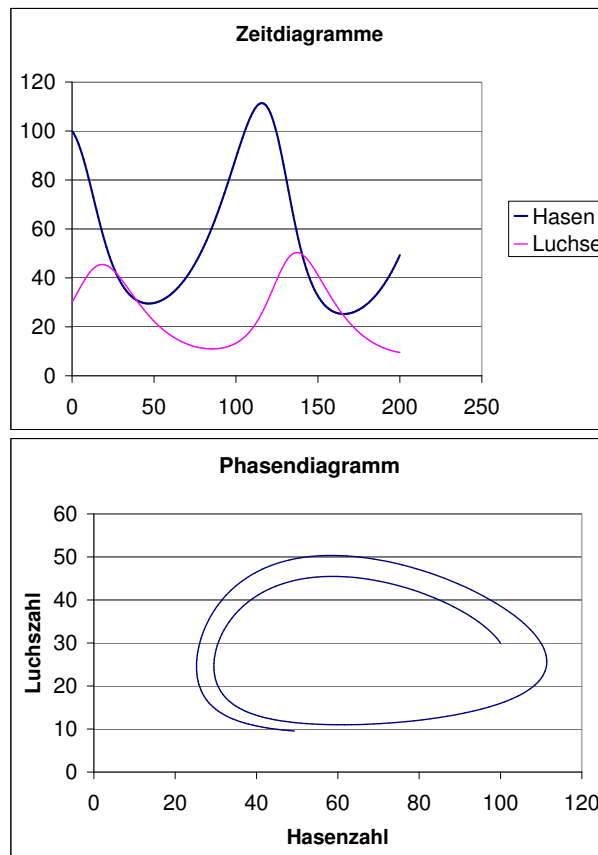
	A	B	C	D
1	Monat	Hasen	Luchse	
2	0	100	30	
3	1	99	31	
4	2			
5	3			

Selbstverständlich ist dabei zuerst ein wenig Syntax zu erlernen, etwa wie Formeln korrekt in die Zellen einzugeben sind. Allerdings bereitet das selbst Schülern der Sekundarstufe I aus eigener Erfahrung kaum Schwierigkeiten. Die Formeln lassen sich nun durch „Hinunterziehen“ in die darunterliegenden Zellen übertragen. Dadurch werden die iterativen Berechnungen der Hasen- und Luchszahlen automatisch ausgeführt, man erspart sich also das händische Eingeben.

	A	B	C
1	Monat	Hasen	Luchse
2	0	100	30
3	1	99	31
4	2	98	32
5	3	96	34
6	4	95	35
7	5	93	36

TK eröffnen außerdem eine neue, sehr wesentliche und wertvolle Möglichkeit. WITTMANN¹⁷ spricht von einer „nahezu grenzenlosen Verfügbarkeit von Diagrammen und Graphen“, welche dadurch natürlich vehement an Bedeutung im Mathematikunterricht gewinnen können. Alle verfügbaren TK können nämlich die eingegebenen Daten auf vielfältige Weise grafisch darstellen. In Excel hilft der Diagrammassistent dabei, etwa die Zeitdiagramme oder das Phasendiagramm des obigen Modells zu plotten:

¹⁷WITTMANN 2001, S.40



Selbstverständlich können TK in der Schulmathematik nicht nur zur Bearbeitung diskreter dynamischer Prozesse eingesetzt werden, sondern auch in sehr vielen anderen Bereichen, wie etwa in der Statistik, bei Funktionen oder in der Geometrie.

NEUWIRTH und ARGANBRIGHT¹⁸ räumen der TK sogar eine Sonderstellung unter allen Computerprogrammen ein, indem sie formulieren: „Spreadsheets are similar to bicycles, while most other numerical programs are like cars. With spreadsheets, you can solve problems of reasonable complexity and size. You have to set up the model yourself, and while you are creating it you come to understand all the details of the modelling process.“

WEIGAND¹⁹ sieht vor allem drei wesentliche Eigenschaften von TK, die es im Schulunterricht zu nutzen gilt: die *interaktive Zellverknüpfung*, das *Kopieren von Formeln* sowie das Verwenden von *logischen Verknüpfungen*. Er

¹⁸NEUWIRTH und ARGANBRIGHT 2004, Prologue

¹⁹siehe WEIGAND 2001

erkennt im Einsatz des Computers im Unterricht neben dem praktischen Nutzen ein großes didaktisches Potenzial: „Medien und Werkzeuge werden im Mathematikunterricht zum einen eingesetzt, um Berechnungen effizienter durchzuführen und Problemlösungen einfacher zu erhalten, zum anderen und vor allem aber um das Verständnis mathematischer Begriffe und Regeln zu fördern und den Lernprozess typischer Arbeitsweisen wie Problemlösen, Beweisen und Argumentieren zu unterstützen“.

Dazu bieten sich TK im Besonderen an, wie die folgende Zusammenschau der wichtigsten und didaktisch wertvollsten Möglichkeiten von TK zeigt:

Rekursionen verstehen

Bei Rekursionsformeln geht es darum, Schritt für Schritt weiterzugehen, aus bekannten Werten neue zu berechnen. Oft interessiert man sich dabei für viele tausende Folgenglieder, um das Langzeitverhalten des Systems beobachten zu können. Doch wann nimmt man sich schon die Zeit, wirklich schrittweise alle diese Folgenglieder zu berechnen – vor allem dann, wenn man ersatzweise auch ein explizites Bildungsgesetz zur Hand hat? Nun hat man aber mit TK die Gelegenheit, in das Wesen einer Rekursion förmlich *einzutauchen*, sie wirklich durchzuführen und dabei das Wesentliche nicht aus den Augen zu verlieren. Das haptisch geprägte Hinunterziehen der Rekursionsformel verdeutlicht außerdem, dass man beliebig viele Folgenglieder berechnen kann, ohne weitere kognitive Fähigkeiten einsetzen zu müssen. NEUWIRTH²⁰ formuliert in sehr einfachen aber treffenden Worten: „In einer Tabellenkalkulation wird [...] klar, dass Rekursion eine Berechnungsmethode ist, die auf „die Zelle darüber“ [...] Bezug nimmt. Durch diese graphische Repräsentation der Abhängigkeitsstruktur kann Rekursion wesentlich leichter zugänglich gemacht werden.“

Variablenbelegung

TK bieten eine gute Visualisierungsmöglichkeit des Unterschiedes zwischen Variablennamen und Variablenwert. Jede Zelle am Datenblatt ist eindeutig mit einem Namen identifizierbar (z. B. C1), der Wert in der entsprechenden Zelle gibt den derzeitigen Wert der Variable an. Auch das Operieren mit Variablen kann veranschaulicht werden. Dazu dienen die Zuordnungspfeile²¹, durch die das funktionale Denken unterstützt wird.

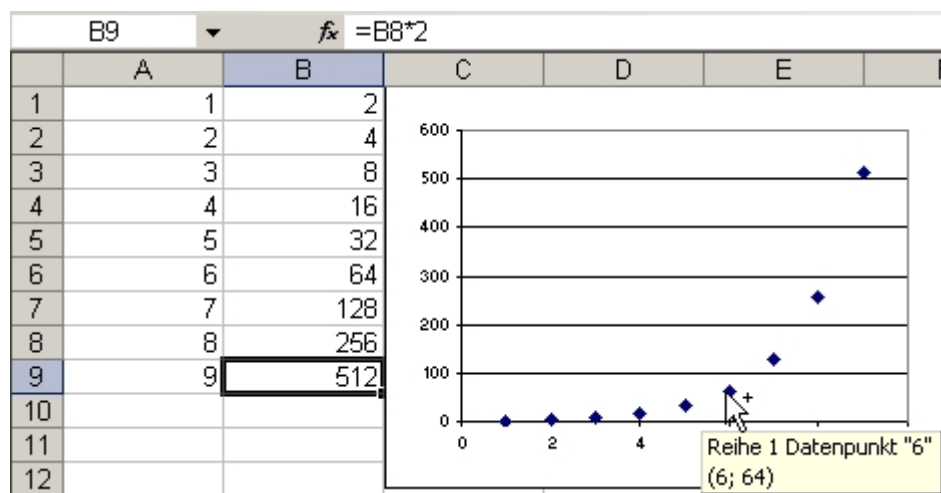
²⁰NEUWIRTH 2001, S. 52

²¹Diese sind in Excel unter *Extras > Formelüberwachung* aufrufbar.

	C1		$f_x = A1*A2$
	A	B	C
1	50		100
2	2		
3			

Darstellungsebenen

Das direkte Nebeneinander dreier Darstellungsebenen ermöglicht *paralleles Sehen*, der Transfer von einer auf die anderen beiden Ebenen wird erleichtert. Formeln können in die Zellen eingegeben und auch in der Bearbeitungsleiste oberhalb des Datenblatts angezeigt werden, wenn die Zelle aktiv ist (*symbolische Ebene*). Das Ergebnis einer Formel wird in der entsprechenden Zelle angezeigt (*numerische Ebene*). Zu dieser Ebene gehört natürlich auch selbst eingegebenes, also nicht berechnetes Datenmaterial. Daten können wie schon erwähnt auf vielfältige Weise in TK dargestellt werden (*grafische Ebene*), dazu gehören Punktdiagramme, Histogramme, Oberflächendiagramme und viele mehr. Wird an den Daten oder Formeln etwas verändert, so ändern sich automatisch die anderen Darstellungen mit.



Bewegt man den Cursor auf einen Datenpunkt im Diagramm, so erscheint der zugehörige Wert – eine weitere Vernetzung zwischen den Ebenen.

Diagramme

Das Arbeiten mit Diagrammen in TK fördert auch den im täglichen Leben so wertvollen und unabdingbaren kritischen Umgang mit Diagrammen

im Allgemeinen. Innerhalb kürzester Zeit können Daten grafisch veranschaulicht, übliche bewusste Irreführungen (z. B. Strecken oder Stauchen von Achsen, Abschneiden von Achsen, Skalierungen) besprochen und unterschiedliche Darstellungen derselben Daten verglichen werden. Das wäre natürlich mit Papier, Lineal und Bleistift ein sehr mühseliges Unterfangen. Außerdem hat man durch die Fülle an unterschiedlichen Diagrammtypen auch die Chance zu entscheiden, mit welcher dieser Möglichkeiten der vorliegende Sachverhalt besonders gut darstellbar ist und ob es beispielsweise sinnvoll ist, die Datenpunkte zu verbinden oder sie vielleicht doch in diskreter Form nebeneinander zu plotten. Und das alles lässt sich mit ein paar wenigen Mausklicks erledigen und – was manchmal noch wichtiger ist – auch wieder entfernen oder korrigieren.

Dynamischer Aspekt

Was passiert, wenn ... ? Diese Frage lässt sich mit Hilfe von TK sehr schön anschaulich beantworten. Mit wenig Aufwand lässt sich ein Schieberegler²² in das Datenblatt einbauen, mit dem man den Wert einer Zelle variieren und die damit verbundenen Veränderungen sofort mitverfolgen kann. Dazu sind natürlich noch weitere Kompetenzen notwendig: Man muss etwa bei der Erstellung eines Schiebereglers das Intervall und die Schrittweite angeben. D. h. man sollte sich vorher Gedanken darüber machen, in welchem Bereich der betreffende Parameter sinnvollerweise liegen soll und wie fein die Veränderungen möglich sein sollen. Auch hier rückt wieder der funktionale Aspekt, die funktionale Abhängigkeit eines Wertes oder sogar mehrerer Werte von einem veränderbaren Parameter ins Zentrum.

Einblick in die Struktur

Ein häufiger Nachteil von Computer-Lernprogrammen ist, dass sie quasi als *Black Box* verwendet werden. Man drückt ein Knöpfchen und irgendeine Reaktion wird dadurch hervorgerufen. *Was* aber passiert, *was* eigentlich dahinter steckt, geht dabei meist unter. Programmiersprachen auf der anderen Seite erfordern die Kenntnis der Syntax, welche aber nicht von heute auf morgen erlernt werden kann. TK bieten hier einen wertvollen Mittelweg. Die Struktur ist sehr klar, die zu erlernende Syntax hält sich in Grenzen, Berechnungen und Abhängigkeiten können mit Hilfe von Zuordnungspfeilen verfolgt werden und Fehler können sehr rasch entdeckt und korrigiert werden.

²²in Excel: Bildlaufleiste

Erweiterungsmöglichkeiten

TK ermöglichen aufgrund ihres Wesens, ihrer Transparenz eine ganz natürliche Art der Differenzierung. WITTMANN²³ unterscheidet dazu fünf Stufen möglicher Schüleraktivitäten:

1. Nutzung vom Lehrer vorgegebener Tabellen und Diagramme
2. Nachvollziehen der Funktionsweise vom Lehrer vorgegebener Tabellen und Diagramme
3. Verändern vorgegebener und Erstellen analoger Tabellen und Diagramme
4. Erstellen eigener Tabellen und Diagramme zur Lösung aufbereiteter Probleme
5. Erstellen eigener Tabellen und Diagramme als selbständiges Problemlösen

Die Möglichkeiten reichen also z. B. vom einfachen Bedienen und Betrachten eines vorgefertigten Applets (Black Box), über das Erkunden und Verstehen der Struktur und das eventuelle „Nachbauen“ des Applets bis hin zur Entwicklung eigener Ideen und Möglichkeiten für die adäquate Darstellung eines Sachverhaltes. Diese unterschiedlichen Kompetenzen können sowohl aufbauend von der 1. bis zur 8. Klasse geschult, als auch innerhalb einer Klasse zur Differenzierung verwendet werden. Jeder hat die Chance, seine eigene Stufe in dieser Taxonomie zu finden und entsprechend seiner Möglichkeiten auf unterschiedlichen Niveaus zu arbeiten.

Fülle von Modelltypen

TK eignen sich laut HENNING und KEUNE²⁴ für die folgenden Typen von Aufgaben. Man kann mit ihnen Modelle bearbeiten und darstellen,

- bei denen große Datenmengen zum Tragen kommen
- bei denen systematisches Probieren hilfreich ist
- die auf Iteration aufbauen
- die zur Auswertung von Daten dienen, die funktionalen Zusammenhängen genügen

²³WITTMANN 2001, S. 49

²⁴vgl. HENNING und KEUNE 2001, S. 28-37

Biomathematische Modelle erfüllen sehr oft gleich alle vier dieser Voraussetzungen. Betrachten wir etwa das Beispiel der *Bevölkerungsdynamik mit mehreren Altersklassen* aus Abschnitt 3.3.3. Interessant ist jedenfalls das Langzeitverhalten eines solchen Systems. Daten über viele Jahre müssen gesammelt werden, um daraus ableiten zu können, ob ein entwickeltes Modell brauchbar ist (große Datenmenge). Um für dauerhaft stabile Bevölkerungszahlen in den einzelnen Altersklassen sorgen zu können, ist es sehr hilfreich, die steuerbaren Parameter, wie etwa die Geburtenrate oder eventuelle Migration, systematisch verändern zu können (systematisches Probieren). Auf den Aspekt der Iteration muss wohl nicht mehr genauer eingegangen werden, das ist ja gerade das Wesen der betrachteten diskreten Modelle. Funktionale Abhängigkeiten der einzelnen Alterklassen über die Geburten- bzw. Übergangsraten können direkt beobachtet und gesteuert werden. Schieberegler vereinfachen diese Aktivitäten (funktionale Zusammenhänge).

Methode der kleinsten Quadrate

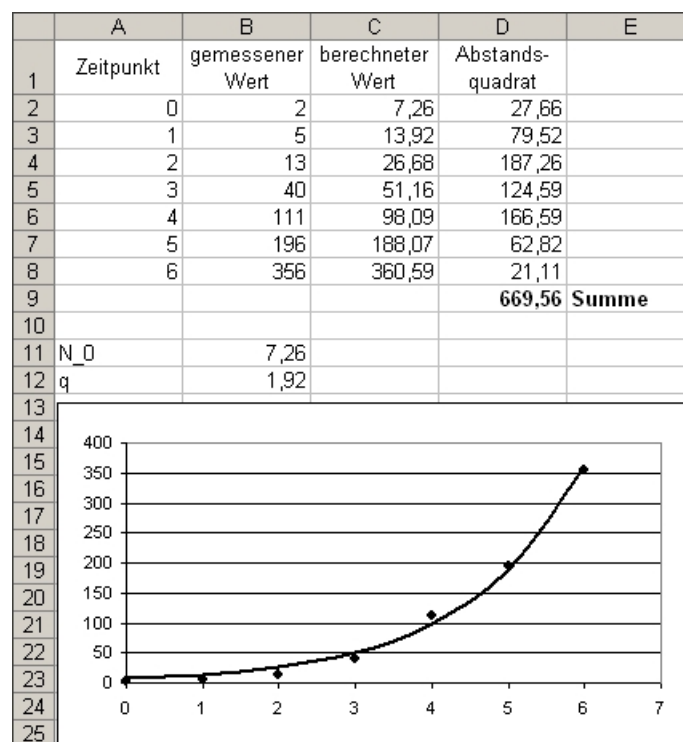
TK haben meist auch einen sogenannten *Solver* eingebaut. Das ist ein Werkzeug, das zur Lösung von Optimierungsaufgaben eingesetzt werden kann. Will man den Wert einer Zelle minimieren oder maximieren, so ruft man einfach den Solver²⁵ auf, gibt die Zielzelle und die veränderbaren Zellen an und lässt die TK unter eventuellen Nebenbedingungen optimieren.

Im Kontext von Biomathematik bietet sich dieses Werkzeug natürlich zur Anpassung von mathematischen Modellen an reale Daten an. Die optimalen Parameter N_0 und q für ein exponentielles Wachstumsmodell $N_{t+1} = N_t \cdot q$ findet man so quasi per Mausklick. Die kognitive Leistung der Schüler besteht nun darin, ein geeignetes Verfahren²⁶ bzw. ein geeignetes Modell²⁷ zu wählen. Ein gemeinsamer Plot der Daten mit der berechneten Kurve zeigt das Ergebnis:

²⁵in Excel unter dem Menüpunkt *Extras*; muss zusätzlich zur Standardinstallation installiert werden

²⁶etwa die Methode der kleinsten Quadrate

²⁷hier: exponentielles Wachstum



4.3.2 Roter Faden Iteration

Das Umgehen mit iterativen Prozessen beginnt im österreichischen Mathematikunterricht schon in der 3. Klasse und findet in allen folgenden Schulstufen auf unterschiedlichen Niveaus statt. Oftmals ist aber dieser *rote Faden Iteration* nicht klar herausgearbeitet, den Schülern und manchmal auch den Lehrern nicht bewusst. Man beginnt mit der Zinseszinsrechnung, mit exponentiellen Wachstumsprozessen, behandelt später etwa die rekursive Darstellung von linearen Funktionen, bearbeitet das Thema Folgen und Grenzwerte, iterative Näherungsverfahren und beackert schließlich, wenn noch Zeit bleibt, auch das Feld der Differenzgleichungen. Diese behandelten Themen stehen häufig getrennt nebeneinander da, ein gemeinsamer Kontext fehlt. Das Gebiet der Biomathematik könnte als *ständiger Begleiter* dieses roten Fadens fungieren, die erlernten Methoden fänden in ihm sinnvolle Anwendung. Damit könnte auf eine schon 1913 in einer Ansprache geäußerten Kritik WHITEHEADS²⁸, wonach Schüler ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten stünden, die weder zu großen Ideen noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen ließen, reagiert werden. Diese Kritik hat nicht an Aktualität verloren.

²⁸vgl. WHITEHEAD 1962, S. 257-266

Der Erziehungswissenschaftler BRUNER griff nicht zuletzt deshalb diesen Grundgedanken nach den großen Ideen eines Faches auf und gilt als Begründer eines „auf fundamentale Ideen gegründeten wissenschaftsorientierten Unterrichts“²⁹. Er fordert, den Schülern „ein Verständnis der Grundstruktur jeglichen Lehrgegenstandes zu vermitteln“. Bei SCHREIBER³⁰ findet man statt des Begriffs *fundamentale Ideen* den Ausdruck *universelle Leitideen*, zu denen er in der Mathematik *Algorithmus*, *Approximation*, *Funktion*, *Optimalität* und *Charakterisierung* zählt. Er unterscheidet sie dabei von den *universellen Begriffsbildungsverfahren*, bei denen er die *Rekursion*, die *Abstraktion* und die *Idealisierung* nennt. Daraus lässt sich schon erahnen, welchen Beitrag diskrete biomathematische Modelle und die mathematische Modellierung auf unterschiedlichen Niveaus für das Kennenlernen und das Erlernen neuer Begriffe leisten können. Das *Idealisieren* realer Sachverhalte aus der Biologie und das Übersetzen in die Welt der Mathematik (in unserem Fall in rekursive Prozesse) sind ja gerade die zentralen Anliegen dieser Arbeit und meines Erachtens ein probates Mittel, die im Lehrplan geforderten Modellierungskompetenzen zu schulen.

Auch wenn vielfach Kritik an der so genannten *Verfrühung* geübt wird (siehe etwa WAGENSCHN³¹), scheint mir die Forderung BRUNERs³² im vorliegenden Fall berechtigt. Er spricht sich für frühes Kennenlernen von wichtigen Strukturen aus, welche die Mathematik charakterisieren. Konkret meint er, dass dazu eine Erweiterung von Gewohnheiten gehört (*spezifischer Übergangstransfer*) und nennt als Beispiel: „Haben wir erst einmal gelernt, Nägel einzuschlagen, können wir später leichter lernen, kleine Stifte einzuhämmern oder Holz abzuspannen“. Außerdem sollen ganz allgemeine Begriffe und Ideen erlernt werden, die für spätere Probleme als Basis verwendet werden können (*nichtspezifischer Transfer*). Er beruft sich dabei auf die Hypothese: „Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden“³³.

Ein weiterer Grund für die Sinnhaftigkeit eines roten Fadens ist für BRUNER, dass Einzelheiten, die in strukturierte Form gebracht worden sind, nicht so leicht vergessen werden. Die in dieser Arbeit vorgestellten Unterrichtsmaterialien sind nicht zuletzt deswegen für Schüler von der 2. bis hinauf zur 8. Klasse ausgelegt, um der Forderung BRUNERs nach einer *Curriculumsspi-*

²⁹CLAUS 1995, S. 155

³⁰SCHREIBER 1979, S. 165-171

³¹siehe WAGENSCHN 1965, S. 135

³²BRUNER 1970, S. 30

³³BRUNER 1970, S. 44

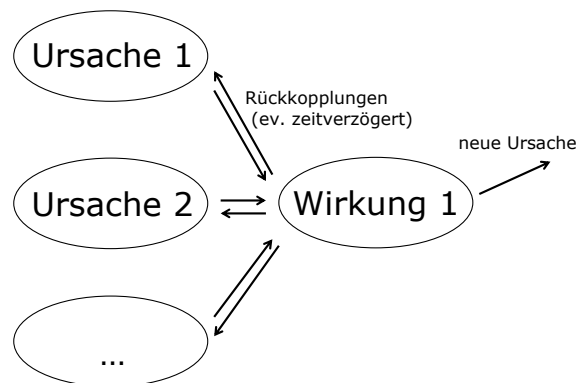
rale, also dem Immer-wieder-aufgreifen eines mathematischen Begriffes oder Prinzips auf unterschiedlichen Niveaus gerecht zu werden.

4.3.3 Systemdenken

Kausalität ist für den Menschen lebensnotwendig. Wir denken von Natur aus in Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen. KANT meint in seiner *Kritik der reinen Vernunft*, dass dieser Grundgedanke zur inneren Struktur der Erkenntnis gehöre. Ohne ihn gäbe es keine Erkenntnis, man könne die Welt nicht verstehen. Der Mensch hat sich daran gewöhnt, die Ursache der für ihn interessanten Wirkungen zu suchen, um die Welt besser in den Griff zu bekommen. Beispielsweise ist das Treffen eines Tieres mit einem Pfeil die Ursache für dessen Tod, was wiederum dem Menschen Nahrung sichert.

Nun laufen Vorgänge in der Welt aber nicht so elementar ab, wie im gerade beschriebenen Beispiel. Oftmals gibt es für eine Wirkung nicht nur eine, sondern eine ganze Reihe von Ursachen. Und auch laufen solche Prozesse nicht immer linear ab. Die Wirkung kann nämlich selbst wieder Einfluss auf ihre eigene Ursache haben, so genannte *Rückkopplungen* finden statt. Ein Impuls, der in das System eingeführt wird, durchläuft das System also nicht einmal linear, sondern induziert eine gewisse Eigendynamik. WINKELMANN³⁴ formuliert: „Um in vernetzten Systemen sinnvoll operieren zu können, ist ein Denken notwendig, das über lineares Ursache-Wirkungs-Denken hinaus den System- und Netzcharakter ausdrücklich einbezieht.“ Oft wird in Politik, Wirtschaft und Gesellschaft dieser Systemcharakter nicht erkannt oder zu wenig beachtet. Themen wie Drogenhandel, Terrorismus, Flüchtlingsproblematik, Klimawandel, Globalisierung, Aufrüstung uvm. spielen sich in sehr komplexen Systemen ab. Eine Maßnahme von außen *be-wirkt* oftmals nicht nur eine einzige Konsequenz, sondern zieht eine ganze Reihe von Wirkungen nach sich, die wiederum Einfluss auf andere Teile des Systems oder ihre Ursache selbst nehmen. Die Maßnahme ihrerseits wird Teil des Systems, auf das sie wirkt.

³⁴WINKELMANN 1992, S. 47



Die Waffenaufrüstung eines Landes etwa zieht nach spieltheoretisch rational getroffenen Entscheidungen³⁵ das Aufrüsten des befeindeten Landes nach sich, was wiederum das Aufrüstungsverhalten des ersten Landes beeinflusst, usw. Die Umweltwissenschaftlerin HERGET³⁶ fordert, zumindest ein Bewusstsein für komplexe Zusammenhänge in der Welt zu schaffen und kritisiert: „Menschen [...] sind gewohnt, in einfachen, kausalen Zusammenhängen zu denken: Wir konzentrieren uns auf einzelne, für uns überschaubare Maßnahmen – die komplexen Wirkungen und Spätfolgen können wir meist nicht überblicken.“ Dabei sieht sie in der Komplexität mathematischer Modelle nicht unbedingt die Gefahr der Überforderung der Lernenden, sondern vielmehr eine Herausforderung, solange die Handlungsfähigkeit im Modell erhalten bleibt. So solle z. B. zumindest die numerische Lösbarkeit möglich bleiben. Es sei Aufgabe des Lehrers, während des Modellierungsprozesses *darauf* zu achten. Auch KLAFFKI³⁷ fordert, dass im Unterricht das Erwerben von Schlüsselqualifikationen im Zentrum stehen soll und dass Schlüsselprobleme, wie die Umweltfrage, die Friedensproblematik und das Verhältnis der Kulturen, Geschlechter und Generationen zueinander in realistischer Weise thematisiert werden. „Wenn die Schule sich an der Wirklichkeit orientieren soll, wenn sie eine lebenswerte und lebbare Zukunft mit ermöglichen soll, so muss sie sich auch mit der Komplexität der Wirklichkeit auseinandersetzen.“

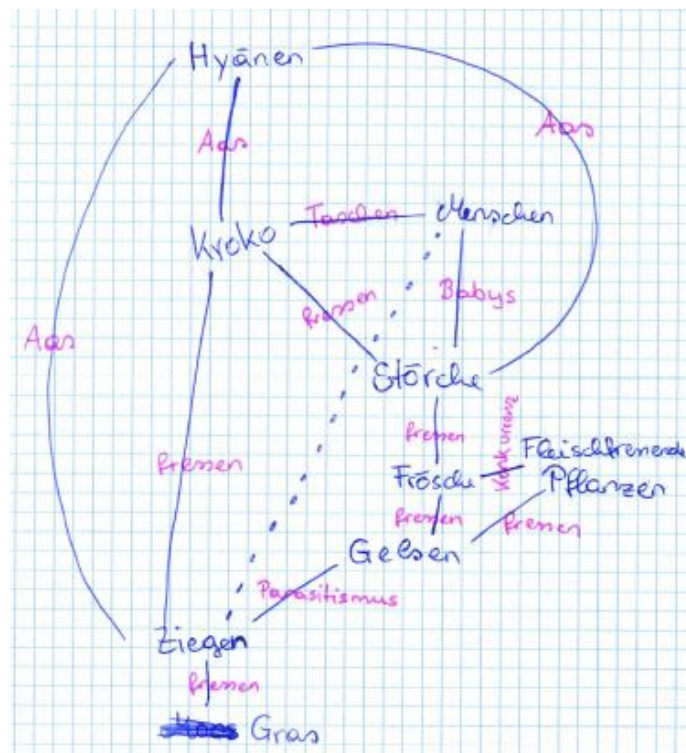
Ein wundervolles Beispiel aus der Biomathematik, bei dem Systemdenken notwendig ist, sind Räuber-Beute-Beziehungen. Die Jagd der Räuber dezimiert die Zahl der Beutetiere. Nun hat aber auch das allmähliche Aussterben der Beutetiere Einfluss auf die Jagd der Räuber – sie wird viel schwieriger sein und manchmal auch erfolglos enden. Was wiederum die Anzahl der

³⁵vgl. ABLEITINGER und HAUER-TYPPELT 2008

³⁶HERGET 2003, S. 4

³⁷KLAFFKI 1996, S. 8

Und das ist erst der Anfang. Natürliche Systeme bestehen nämlich nicht nur aus zwei Spezies, die konkurrieren, symbiotisch leben oder in einem Räuber-Beute-Verhältnis zueinander stehen. Viele andere Einflüsse wirken auf das System ein oder besser gesagt: sind Teil des Systems. Das erste Strukturieren einer *Nahrungskette* hat bei einer Schülergruppe von 16-18-jährigen folgendes Bild ergeben, das schon einen kleinen Einblick in die Komplexität natürlicher Systeme gibt:



³⁸siehe WINKELMANN 1992

ausweiten. Das Aufstellen der Rekursionen eines Differenzengleichungssystems erfordert im Grunde genommen dieselbe Denkleistung wie das Aufstellen von Differentialgleichungssystemen. Nachdem analytische Lösungen nur höchst selten gefunden werden können, bieten Differenzengleichungen ohnehin den einzigen gangbaren Weg, nämlich numerische Berechnungen anzustellen. Selbstverständlich kann es passieren, dass die Diskretisierung qualitativ andere Lösungskurven liefert als das kontinuierliche Differentialgleichungsmodell. Beispielsweise wächst die Amplitude der Schwingungen im diskreten Räuber-Beute-Modell, während sie im kontinuierlichen Fall konstant bleibt. Andererseits bietet sich hier ein Anlass, die Exaktheit numerischer Methoden zum Thema im Schulunterricht der Sekundarstufe II zu machen. Zur qualitativen Analyse gehört natürlich auch, dass man beispielsweise beim logistischen Wachstum nicht nur darauf vertraut, dass die numerischen Lösungen immer zur Kapazitätsgrenze K streben – egal wo man startet – sondern dass man diesen Sachverhalt auch durch die Terme der Rekursion erklären kann.

Der Begriff *Systemdenken* ist ein sehr unterschiedlich verwendeter und meist nur vage formulierter. Auch der *Wikipedia*-Artikel³⁹ zu diesem Begriff listet eine Vielzahl an typischen Eigenschaften des Systemdenkens auf. Prägnant definiert VESTER⁴⁰ den Begriff. Systematisch denke, wer natürliche, soziale, psychische und technische Strukturen und Prozesse nicht in verschiedene, voneinander getrennte Kausalketten zergliedert, sondern als Gefüge einer Vielzahl miteinander verknüpfter, in Wechselwirkung stehender Komponenten begreift.

Der Mathematikunterricht kann nun dabei helfen, aus dem von KANT beschriebenen Dilemma, nämlich dem evolutionär bedingten Ursache-Wirkungs-Denken, herauszukommen und das vernetzte Denken zu schulen. Klarerweise ist das seit der Erfindung des Computers viel einfacher geworden. Szenarien der Bevölkerungsentwicklung oder der Epidemiologie können simuliert werden, man muss nicht viele Jahre auf die Auswirkungen eines Fehlers warten, um ihn korrigieren zu können. Mathematische Modelle und die zugehörigen Computersimulationen sind zwar immer nur Abbild der Wirklichkeit, können aber durchaus Irrwege von vornherein aufzeigen, die man ohne sie erst viel später an ihren Folgen erkannt hätte.⁴¹ DÖRNER⁴² zieht daraus sinngemäß die pädagogischen Konsequenzen, dass man im Unterricht möglichst viele vernetzte Systeme vorstellen, erkunden und diskutieren solle, Verhaltensmus-

³⁹siehe Internet: <http://de.wikipedia.org/wiki/Systemdenken>, link vom 05.09.2007

⁴⁰vgl. VESTER 1983

⁴¹Das war übrigens auch die Absicht des 1960 entwickelten *MIT Beer Distribution Game*, das mittlerweile zu einem Klassiker in der Managementausbildung geworden ist.

⁴²DÖRNER 1989

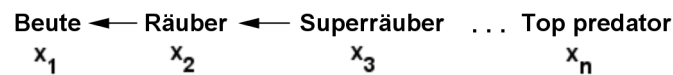
ter komplexer Systeme benennen und beschreiben und die Kooperation mit anderen Fächern anstreben solle.

4.3.4 Darstellungsformen

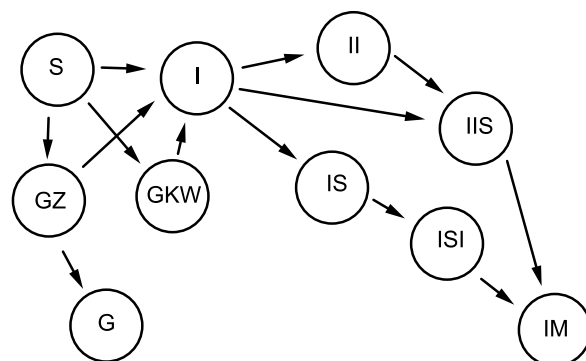
Diskrete dynamische Systeme zeichnen sich unter anderem auch durch die Möglichkeit aus, sie auf viele verschiedene Arten darstellen zu können. Dazu gehören *schematische Darstellungen*, die algebraische Darstellung mittels *Rekursionsformel*, *Vektoren* und *Tabellen* sowie *Zeit-* und *Phasendiagramme*. Dieser Abschnitt wird sich mit dem didaktischen Potenzial dieser Darstellungsformen beschäftigen.

Schematische Darstellungen

Steht man vor dem Problem, einen komplexen Sachverhalt strukturieren zu wollen, so beginnt man ganz automatisch damit, die Situation grafisch zu veranschaulichen. Vor allem dann, wenn die Zusammenhänge nicht linear, also in einer Ursache-Wirkungs-Kette dargestellt werden können, wie das etwa bei einer linearen Nahrungskette der Fall wäre. Aber selbst hier hilft ein Diagramm dabei, den Überblick zu bewahren:



Lässt man auch Verzweigungen zu, wie das Schüler der 10.-12. Schulstufe auf der *Summer School 2007* unseres Institutes gemacht haben, dann entstehen ohne Aufforderung solche schematischen Darstellungen wie im Abschnitt 4.3.3 zu sehen. Und auch einem selbst liegt nichts näher, als eine schematische Darstellung als ersten Schritt zu skizzieren. Das folgende Diagramm ist etwa bei der Bearbeitung eines Modells für die Ausbreitung einer Grippe in einer Bevölkerung entstanden:



Die Kreise stellen dabei disjunkte Teilmengen der Gesamtbevölkerung dar, Pfeile bezeichnen mögliche Übergänge zwischen den Personengruppen. In der didaktischen Literatur und in Schulbüchern findet man zu diesem Thema die Begriffe *Flussdiagramm*⁴³ und *Ursache-Wirkungsdiagramm*⁴⁴. Selbst wenn in solchen Darstellungen großes didaktisches Potenzial steckt, wie OSSIMITZ zeigt, und auch der mathematische Gehalt teilweise sehr hoch ist⁴⁵, soll in dieser Arbeit darauf nicht allzu großer Wert gelegt werden. Es wird vielmehr dafür eine Lanze gebrochen, dass Lehrer ihre Schüler dazu anhalten sollen, Sachverhalte in geeigneter Form übersichtlich darzustellen, bevor sie sich daran machen, Rekursionen aufzustellen oder gar den Computer zu Hilfe nehmen, wenn dieser noch gar nicht wirklich helfen kann. Was also bei älteren, begabten Schülern oder bei uns selbst ganz automatisch passiert, soll auch schon bei Schülern der Unterstufe forciert werden und auf diese Weise fixer Bestandteil im Methodenrepertoire jedes Schülers werden.

Rekursionsformel

Die in der schematischen Darstellung gewonnenen Einsichten in die Zusammenhänge der betrachteten Größen müssen als nächstes in mathematische Form gegossen werden. Die Darstellung mittels einer oder mehrerer Rekursionsformeln bietet sich an. Schrittweise kann jedes Detail, jede einzelne Abhängigkeit, jeder Pfeil und jede Größe nacheinander dem Modell hinzugefügt werden. Der Überblick, den man sich vorher verschafft hat, garantiert nun, dass auch im mathematischen Modell, in der formalen Beschreibung nichts vergessen wird.

⁴³siehe etwa OSSIMITZ 2003

⁴⁴z. B. GÖTZ und REICHEL 2004, S. 215

⁴⁵Es werden beispielsweise Fluss- und Bestandsgrößen unterschieden, positive und negative Rückkopplungen thematisiert, usw.

Dieser Übersetzungsprozess setzt natürlich bei komplexen Zusammenhängen Vorwissen etwa über elementare Wachstumsprozesse oder über einfache Interaktionsmodelle voraus.

Vektoren und Tabellen

Definiert man Vektoren ganz algebraisch als mehrdimensionale Rechenzahlen, genauer gesagt als geordnete Zahlentupel⁴⁶, so bietet sich für das Thema Vektoren im Schulunterricht ein breites Anwendungsfeld, das bei der Definition als Äquivalenzklasse von Pfeilen verschlossen bleibt. Eine dieser Anwendungen sind die Zahlenpaare, -tripel bzw. -tupel $(t, A_t, B_t, \dots)$ bei diskreten dynamischen Prozessen. Mit diesen Vektoren kann man natürlich auch rechnen: Führt man etwa die Subtraktion $(t_2, A_{t_2}, B_{t_2}, \dots) - (t_1, A_{t_1}, B_{t_1}, \dots)$ aus, so erhält man neuerlich einen Vektor, der angibt, wie sich die Größen $A, B, \dots$ im Zeitraum von t_1 bis t_2 verändert haben.

Schreibt man alle diese Vektoren $(t, A_t, B_t, \dots)$ untereinander, so gelangt man zur Darstellung in einer Tabelle. Sie ermöglicht, die Daten übersichtlich zu strukturieren und erleichtert auf diese Weise, Vergleiche unterschiedlicher Zeitpunkte bzw. auch unterschiedlicher Größen zum selben Zeitpunkt anzustellen.

Zeit- und Phasendiagramme

Die Schritt für Schritt berechneten und in einer Tabelle festgehaltenen Daten vermitteln für den ungeschulten Blick noch recht wenig Einsicht in das Langzeitverhalten des Systems. Auch die in der schematischen Darstellung aufgezeichneten Abhängigkeiten sind nun durch eine Unmenge an Zahlenwerten versteckt und nicht mehr auf einen Blick ersichtlich. Dem kann man durch die Darstellung in einem Zeit- oder Phasendiagramm Abhilfe verschaffen. Zusätzlich gewinnt man damit Einsichten, wie sich die oben genannten Abhängigkeiten auf Dauer auf die betrachteten Größen auswirken, welche der Spezies sich vielleicht durchsetzen und welche aussterben werden.

4.3.5 Beweisbedürftigkeit

Beweisen, Begründen, Argumentieren und *Erklären* sind typisch mathematische Tätigkeiten. Man sollte meinen, dass diese Tätigkeiten im Schulunterricht eine zentrale Rolle einnehmen. Leider sieht die Realität vielfach anders aus. GÖTZ und SATTLBERGER⁴⁷ meinen dazu: „In Lernsituationen werden

⁴⁶Das machen z. B. MALLE et. al. 2004 in ihrer Schulbuchreihe *Mathematik verstehen*.

⁴⁷GÖTZ und SATTLBERGER 2007, S. 103

[...] von den Schüler/innen meist nicht eigenständige Erklärungen gefordert, in Prüfungssituationen sehr wohl.“ und sprechen damit ein sehr tief liegendes Problem des Mathematikunterrichtes an. MALLE⁴⁸ nennt einen Grund für das spärliche Vorkommen von Beweisen im Unterricht: „Eine wesentliche Ursache ist darin zu suchen, dass falsche und zu grobe Vorstellungen über das Beweisen und damit zusammenhängende Begriffe (z. B. Exaktheit) bestehen.“ Er spricht dabei sinngemäß an, dass Lehrende von der Exaktheit der Beweise an der Universität so verblendet seien, dass sie meinten, Beweise wären für die Schule zu schwierig und hätten daher dort nichts zu suchen. MALLE plädiert hingegen gegen eine *Schwarz-Weiß-Malerei*, stattdessen solle auf eine breite Palette von unterschiedlichen Exaktheitsniveaus beim Begründen zurückgegriffen werden. BLUM und KIRSCH⁴⁹ unterstützen diesen Gedanken, indem sie auch für verstärktes *präformales Beweisen* im Schulunterricht eintreten. Dadurch kann ihrer Ansicht nach die inhaltliche Bedeutung mathematischer Sachverhalte aufgedeckt werden. MALLE⁵⁰ sieht in diesem Zusammenhang bis zur 8. Schulstufe die *Überzeugungsfunktion* (im Gegensatz zur *Zusammenhang stiftenden Funktion*) des Begründens im Vordergrund, erst ab der 9. Schulstufe sollen die Schüler verstärkt anhand von klar vorgegebenen Argumentationsbasen argumentieren. Er meint weiter⁵¹: „Begründen sollte für die Schülerinnen und Schüler ein Alltagsgeschäft werden, so wie etwa das übliche Aufgabenlösen im Unterricht.“ Dazu müssen Schüler in Gesprächssituationen verwickelt werden, müssen wechselseitig argumentieren, nachfragen und antworten lernen. Das kann durch Partner- und Gruppenarbeit meiner Meinung nach sehr gefördert werden, was das Erstellen der Unterrichtsmaterialien⁵² natürlich beeinflusst hat.

Eigenständige Erklärungen zu finden bedarf Zeit, es muss eine *Kultur des Beweisens* im Unterricht entstehen, die sehr viel Engagement erfordert. Das alleinige Abprüfen der im Unterricht vorgestellten Begründungen ist für das tiefe Verständnis des Lerninhaltes wohl nicht ausreichend.

Erklären und Begründen sind andererseits aber auch alltägliche Tätigkeiten. Wird man beispielsweise von einem Schüler gefragt, warum man seine Leistung mit *Nicht Genügend* beurteilt habe, so muss man das natürlich argumentieren können. Die Erklärung oder Begründung wird hier also von außen gefordert. Fragt man sich selbst, wie denn wohl die Welt entstanden ist oder warum eine Frau mehr als zehn Paare Schuhe braucht, dann herrscht in

⁴⁸MALLE 2002, S. 4

⁴⁹vgl. BLUM und KIRSCH 1991

⁵⁰vgl. MALLE 2002

⁵¹MALLE 2002, S. 7

⁵²Siehe in den Kapiteln 5-8.

einem selbst Erklärungsnotstand, den man gerne beheben möchte. Die Motivation ist hier also eine andere, eine von innen her kommende. Legen wir nun diese Aussagen auf den Mathematikunterricht um. Die erstgenannte Motivation der Erklärungsfindung ist vergleichbar mit typischen Prüfungssituationen. Schüler kommen oftmals scheinbar gut vorbereitet mit Faktenwissen zur Prüfung. Fragt man dann nach Erklärungen für bestimmte Sachverhalte, Zusammenhänge oder Ergebnisse, sieht die Sache oft nicht mehr so erfreulich aus. Während des Lernens hat offenbar kein innerer Erklärungsbedarf für den Schüler selbst bestanden.

Wie kann nun aber die Biomathematik zu dieser *Beweisbedürftigkeit* beitragen? Die Biomathematik wirft fast automatisch Fragen wie „Ist das wirklich so?“, „Ist das immer so?“, „Was steckt denn da dahinter?“ oder „Worauf kommt es an?“ auf. Liefert etwa ein Räuber-Beute-Modell das Ergebnis von periodisch schwankenden Bevölkerungszahlen, so fragt man sich natürlich, ob das denn in Wirklichkeit auch vorkommt und was denn da dahinter steckt. Auch die Fragen, welche Maßnahme man ergreifen muss, um das Ausbrechen einer Epidemie zu verhindern und warum gerade diese Maßnahme greift, liegen bei einer authentischen Bearbeitung des Themas nahe. Natürlich ist es dabei notwendig, bei der mathematischen Bearbeitung so nahe an der realen Situation zu bleiben wie möglich. Das gelingt allerdings nur dann, wenn die im Modell vorkommenden Terme immer und immer wieder interpretiert werden: „Warum steht an dieser Stelle ein Minus? Warum ist die eine Größe proportional zu der anderen?, etc.“. Im Sinne der BLOOMschen⁵³ Kategorisierung der *kognitiven Lernziele* entspricht das der zweiten der insgesamt sechs Stufen *Verstehen*. Das geht also über das bloße *Wissen* (1. Stufe) hinaus. Nur wenn die Schüler dabei den Überblick bewahren, können sie auch Aussagen über die Struktur der Systeme und über mögliche Begründungen für gewisse Ergebnisse machen. Das fällt in die Stufen 3 und 4 *Anwenden* und *Analyse*.

4.3.6 Alltagsnähe Tätigkeiten

Diskrete Prozesse kommen im Leben sehr häufig vor. Alleine bedingt durch das bloße Abzählen werden viele Tätigkeiten schon zu diskreten Tätigkeiten. In vielen Fällen ist es auch notwendig und hilfreich, Prozesse, die von Natur aus eigentlich kontinuierlich sind, zu diskretisieren. Beispielsweise wird die Zeit in Stunden, Minuten, Sekunden gegliedert und die Erde in Längen- und Breitengrade unterteilt. Diskretisieren ist also ein fest verankerter Mechanis-

⁵³vgl. CLAUS 1995, S. 25

mus im Denken des Menschen. Es liegt also nahe, so zu denken. Damit in Zusammenhang steht natürlich das iterative Denken, das Weiterzählen, das andauernde Wiederholen von Tätigkeiten. HUMENBERGER und REICHEL⁵⁴ beschreiben das treffend mit den Worten: „Eine *Iteration* ist ein spezieller Algorithmus, bei dem wiederholt „dasselbe getan“ wird.“ Auch solche Prozesse gibt es im Leben unzählig viele. Zeitlich etwa beim Feiern des alljährlichen Geburtstages oder beim täglichen Zähneputzen am Morgen und Abend, räumlich beim Wiederkehren eines Musters auf einer Tapete oder der Mittelstreifen auf einer Fahrbahn. Eines nach dem anderen, Schritt für Schritt – auch das sind also vertraute Bilder für die Schüler. Und gerade rekursiven Prozessen wohnt dieses Schema inne. Sie starten bei einem Wert und geben dann nacheinander Werte zu diskreten Zeitpunkten aus. Auch bei der Erhebung realer Daten muss man klarerweise auf diskrete Zeitschritte zurückgreifen. Bevölkerungszahlen werden etwa Jahr für Jahr erhoben und auch die Größe einer Bakterienpopulation wird in regelmäßigen Abständen geschätzt. Bei Insektenpopulationen mit getrennten Generationen ist es ohnehin nicht sinnvoll, ein kontinuierliches Modell zu verwenden. Die Chance, dieses intuitiv gefestigte Iterieren auch im Mathematikunterricht in den Mittelpunkt zu rücken, blieb in der Vergangenheit oft ungenutzt. Und nicht zu unrecht – der Rechenaufwand bei iterativen Prozessen wächst sehr schnell ins Unermessliche. Unter Zuhilfenahme des Computers muss man allerdings diese Gelegenheit nicht mehr verstreichen lassen. Es muss also nicht dabei bleiben, lediglich lineares oder exponentielles Wachstum zu bearbeiten, darüber hinaus können jetzt ohne großen Zeitaufwand viele weitere interessante Modelle unter die Lupe genommen werden. Der Mehraufwand besteht nur darin, geeignete Rekursionsformeln für bestimmte Zusammenhänge und Situationen zu finden – also gerade das *Modellieren*, das ja der interessanteste Part dieses Themas ist. Das Methodenrepertoire bleibt dabei ein übersichtliches.

Und selbst das angesprochene Modellieren ist eine sehr vertraute Tätigkeit im alltäglichen Leben eines Menschen. Das *Strukturieren* eines Sachverhaltes wie etwa das Entwerfen eines Zugfahrplanes, das *Kategorisieren* wie etwa das Einteilen von unterschiedlichen Tierarten in Gattungen, das *Finden von kausalen Zusammenhängen* und das *Planen* von Projekten wie etwa beim Bauen eines Baumhauses sind Kompetenzen, die auch bei der mathematischen Modellierung zum Tragen kommen.

Das *Problemlösen* ist eine weitere alltagsnahe Tätigkeit, die auch beim bioma-

⁵⁴HUMENBERGER und REICHEL 1995, S. 200

thematischen Modellieren eine wesentliche Rolle spielt. POLYA⁵⁵ beschreibt den Problemlöseprozess in vier Schritten:

- das Verstehen des Problems
- das Aufstellen eines Plans
- das Ausführen des Plans
- der Rückblick

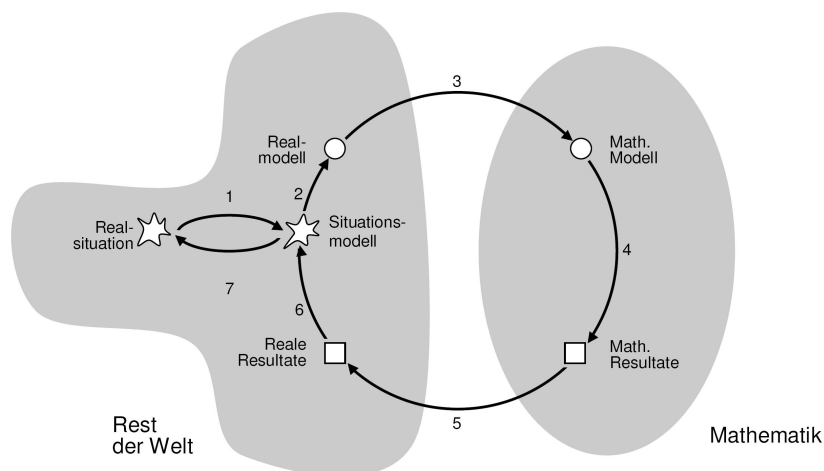
Betrachten wir diese vier Schritte anhand eines Beispiels aus der Demographie. Will man ein Modell für das Bevölkerungswachstum eines bestimmten Landes aufstellen, so muss man sich zuerst einen Überblick über vorhandene Daten machen, eventuell selbst recherchieren, das Ziel genau formulieren: „Was soll das Modell leisten?“ (Schritt 1). Als nächstes macht man sich Gedanken darüber, ob man sich bisherige Erfahrungen zu Nutze machen kann: „Habe ich ein ähnliches Problem schon einmal bearbeitet? Haben die vorliegenden Bevölkerungsdaten Ähnlichkeit mit einem mir bekannten Modell? Gibt es strukturelle Ähnlichkeiten zu einem anderen Problem? Wenn nicht, kann ich eine neue Art finden, das Problem zu modellieren?“ (Schritt 2). Die gewonnene Strategie wird nun Schritt für Schritt umgesetzt, konkret wird die Rekursion zur Beschreibung des Bevölkerungswachstums aufgestellt, in den Computer eingegeben, es wird operiert und dargestellt (Schritt 3). Am Ende wird versucht, rückblickend zu validieren, ob das Modell tatsächlich der realen Situation entspricht, ob es diese hinreichend gut beschreibt bzw. erklärt. Gegebenenfalls können die Ergebnisse auch mittels einer anderen Methode, eines weiteren Modells bestätigt werden (Schritt 4).

4.3.7 Mathematisches Modellieren

Die Unterrichtsmaterialien in den Kapiteln 5-7 beschäftigen sich zwar mit biomathematischen Modellen, modelliert im klassischen Sinn wird aber nicht. Man könnte die Vorgangsweise dort eher als „geleitetes Modellieren“ bezeichnen. Im Abschnitt 8.2 gibt es jedoch einige Unterrichtsvorschläge zum mathematischen Modellieren *in Reinkultur*. Modellieren ist in der aktuellen fachdidaktischen Literatur und auch auf den bedeutenden fachdidaktischen Tagungen stets prominent vertreten und soll auch im Unterricht ein zentrales Anliegen sein. Den Ablauf des Modellierungsprozesses kann man dabei durch einen so genannten Modellierungskreislauf darstellen. BLUM⁵⁶ schlägt vor:

⁵⁵POLYA 1949, S. 18-37

⁵⁶Grafik aus BLUM und LEIB 2005, S. 19



Die Pfeile stehen dabei für die Tätigkeiten *Konstruieren/Verstehen* (1), *Vereinfachen/Strukturieren* (2), *Mathematisieren* (3), *Mathematisch arbeiten* (4), *Interpretieren* (5), *Validieren* (6) und *Darlegen/Erklären* (7). Oft steht im Mathematikunterricht die vierte Tätigkeit im Vordergrund, allerdings sollten auch alle anderen geschult werden, um der Forderung von MALLE und REICHEL⁵⁷: „Mathematikunterricht zielt unter anderem darauf ab, den Schülern ein ausgewogenes und angemessenes Bild von Mathematik und deren Verhältnis zur Realität zu vermitteln“ zu genügen. Mathematisches Modellieren kann dazu einen wesentlichen Beitrag liefern. Und dazu gehören natürlich auch Überlegungen darüber, zu welchem Zweck ein Modell überhaupt erstellt wird. Es gibt beschreibende Modelle, erklärende Modelle, vorschreibende Modelle und Modelle, die prognostizieren⁵⁸.

Selbstverständlich läuft in der Schule viel über die Leistungsbeurteilung. Sie ist also mit ein Grund, warum eben gerade die leicht zu beurteilenden Tätigkeiten im Unterricht oft zu sehr in den Vordergrund rücken. Und dazu gehört zweifellos das Operieren. MAAß⁵⁹ schlägt daher einen Katalog vor, wie man auch bei der Beurteilung von mathematischer Modellierung ausgewogen vorgehen kann. Die Auflistung

- Bildung des Realmodells
- mathematische Bearbeitung
- Interpretation der Lösung

⁵⁷MALLE und REICHEL 1996, S. 74

⁵⁸Siehe dazu HENN 2002, S. 6.

⁵⁹MAAß 2005, S. 21

- kritische Reflexion
- Dokumentation des Vorgehens
- zielgerichtetes Vorgehen

solle den Schülern mit einer vorher festgelegten Gewichtung (Punktesystem) vorgelegt werden. So könne man also auch individuell Schwerpunkte für den Unterricht setzen, die die Schüler dann viel eher zur Kenntnis nehmen. LEUDERS⁶⁰ spricht sich ebenfalls dafür aus, den Schülern die Vorgänge des Modellierungsprozesses bewusst zu machen.

Eine Möglichkeit, Gruppenarbeit „fairer“ zu beurteilen, ist, der Schülergruppe eine Gesamtpunktzahl für ihre gemeinsame Arbeit zu geben und die Schüler selbst eine Aufteilung dieser Punktzahl unter den Gruppenmitgliedern vornehmen zu lassen.⁶¹ Sie haben selbst viel eher den Einblick, welcher Schüler wie viel zur gemeinsamen Arbeit beigetragen hat. Außerdem motiviert dieses System auch schon während der Arbeit mehr, als wenn man ohnehin von Anfang an weiß, dass jeder in der Gruppe die gleiche Anzahl an Punkten oder die gleiche Note erhält. Allerdings setzt diese Methode natürlich eine gewisse Reife der Beurteilten voraus.

MAAß sieht einen ganz besonderen Vorteil im Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht. Sie beklagt die hohen Schülerzahlen in deutschen Schulen⁶², was eine Differenzierung innerhalb der Klasse im herkömmlichen Unterricht sehr schwer macht. Schließlich könne ein Lehrer ja nicht speziell maßgeschneiderte Aufgaben für jeden Schüler entwickeln, die seinem derzeitigen Niveau gerade angepasst sind. Bei Modellierungsaufgaben sei dagegen eine Binnendifferenzierung quasi schon „eingebaut“. Jeder Schüler bzw. jede Schülergruppe arbeitet auf ihrem Niveau, entscheidet selbst, wie komplex ihr Modell sein soll, welche Vereinfachungen gemacht werden und mit welchem mathematischen Werkzeug vorgegangen wird. Sie spricht sich durchaus auch für leistungsheterogene Schülergruppen aus. Das fördere sowohl leistungsschwächere Schüler, die von den guten Mathematikern lernen können und umgekehrt werden auch Kompetenzen leistungstärkerer Schüler beim Erklären und Betreuen der Schwächeren geschult. Zur Motivation der Schüler trägt aber natürlich auch bei, wenn man sie hin und wieder selbst die Gruppen einteilen lässt und – falls es mehrere Aufgaben gibt – die Schüler selbst die Probleme wählen lässt, die sie gerne bearbeiten wollen. Als dritte Möglichkeit bietet sich noch der Losentscheid an, der in der Regel von den Schülern

⁶⁰siehe etwa LEUDERS 2003

⁶¹Danke an Martin Bracke von der TU Kaiserslautern für diese Idee.

⁶²In Österreich gibt es ja bereits erste Maßnahmen zur Senkung der Klassenszenhöchstzahlen.

akzeptiert wird. Wichtig bei Gruppenarbeiten ist klarerweise eine abschließende Präsentation vor der ganzen Klasse mit anschließender Diskussion. Nachdem möglicherweise jede Modellierungsgruppe ein anderes Problem bearbeitet, ist also bei der Präsentation darauf zu achten, dass die Mitschüler sich eben noch nicht einen halben Tag oder sogar länger mit dem vorgestellten Problem beschäftigt haben. Es sollte also auch die Möglichkeit geben, Fragen an die „Experten“ der jeweiligen Probleme zu stellen.

Die Modellierungsidee ist nun schon keine absolute Neuheit mehr, trotzdem findet sie in den Schulunterricht nur langsam Einzug. Vielfach herrscht noch immer das Abarbeiten von klassischen „Schulbuchaufgaben“ vor. Auch BÜCHTER und LEUDERS⁶³ beklagen: „Schüler gewinnen den Eindruck, die Mathematik selbst bestehe nur aus bestimmten Typen von Aufgaben, die ihnen nur in der Schule begegnen. Ein Einblick in einen authentischen Umgang mit Mathematik bleibt ihnen verwehrt.“ Selbstverständlich ist es ein zeitaufwändiger Prozess, bis Schüler tatsächlich in der Lage sind, selbstständig Probleme zu bearbeiten und zu lösen. Gerade deswegen ist es notwendig, früh damit zu beginnen. Ein erster Schritt auf diesem Weg kann etwa die *didaktische Frage* sein, wie sie AEBLI⁶⁴ analysiert. Die Kritik am fragend-entwickelnden Unterrichtsverfahren, dass dabei nämlich paradoxerweise der Lehrer die Fragen stellt, obwohl er ja die Antwort selbst am besten kennt, kann er entschärfen. AEBLI vergleicht dazu die Situation im Unterricht mit einer Ausstellung oder Besichtigung. Auch dort fragen gerade die Sachkundigen und nicht etwa die Laien, die eben gar nicht wissen, was zu fragen angemessen wäre. Ähnlich ist es im Schulunterricht bei der Bearbeitung eines neuen Themas. Schüler müssen erst lernen, die richtigen Fragen zu finden und zu stellen. Der Lehrer soll an dieser Stelle als Initiator und Richtungsweiser fungieren. Auch BLUM und LEIB⁶⁵ sehen die Aufgabe des Lehrers zwischen den beiden Extrempositionen des *Durch-die-Wüste-laufen-lassens* der Schüler und des *Über-die-Hürde-tragens* derselben. Fragen des Lehrers stellen eine subtile Art der Unterstützung dar. Die Fähigkeit, interessante Problemstellungen zu sehen und zu entscheiden, welche davon sich mit den zur Verfügung stehenden Mitteln lösen lassen, muss sich erst langsam und schrittweise herausbilden. Die Unterrichtsmaterialien in den Kapiteln 5-8 spannen deshalb auch den Bogen von relativ strikt geleiteten Lernhilfen bis zu sehr offen formulierten Modellierungsaufgaben.

⁶³BÜCHTER und LEUDERS 2005, S. 89

⁶⁴siehe AEBLI 1961, S. 142

⁶⁵BLUM und LEIB 2005, S. 21

Modellieren erfordert ein gewisses Maß an Kreativität. Um ein reiches Potenzial an Ideen ausschöpfen zu können, bietet es sich an, die Schüler in kleinen Gruppen oder zumindest in Paaren arbeiten zu lassen. Diese Unterrichtsformen sollen auch laut Lehrplan⁶⁶ die bestimmenden Unterrichtsformen neben der Einzelarbeit und dem projektorientierten Unterricht sein. Außerdem kann auf diese Weise viel besser der folgenden Forderung HENNs⁶⁷ genüge getan werden: „Schüler sollen angeregt werden, selbst Fragen zu stellen, und sollen die eher induktiven Aspekte wie Probieren und Experimentieren, Verallgemeinern und Spezialisieren selbst erfahren. Und wie könnte das besser realisiert werden, als wenn man die Schüler selbst arbeiten lässt, sie gegenseitig Fragen stellen und Antworten finden lässt, am Computer experimentieren und Ergebnisse in abschließenden Präsentationen diskutieren lässt?“

4.3.8 Fächerübergreifend und anwendungsorientiert

Hat man die Gelegenheit, mit Nichtmathematikern darüber zu sprechen, dass man im Teilgebiet der *Biomathematik* arbeitet, zeigt sich meist auch Interesse an Inhaltlichem. Ob das daran liegt, dass das Präfix *Bio* gerade zum Modewort avanciert ist oder ob sofort der Konnex zum meist beliebten Fach Biologie gezogen wird sei dahingestellt. Jedenfalls besteht sehr oft reges Interesse, wenn man in kurzen Worten erklärt, worum es in der Biomathematik geht – Entwicklung von Populationsgrößen, Ausbreitung von Epidemien, Vererbung von Merkmalen, usw. Es ist m. E. unbestritten, dass gerade das Interesse am Lerninhalt und die eigene fachliche Kompetenz die größte Motivation für das Lernen selbst darstellt. Diese so genannte *primäre Motivation* ist natürlich auch viel nachhaltiger als die *sekundäre Motivation*, die aus Streben nach Anerkennung, Erfolg, Verwertbarkeit des Wissens usw. entsteht⁶⁸.

Das Grundinteresse an der Entwicklung der menschlichen Bevölkerung und ihrer Umwelt kann man natürlich auch im Schulunterricht ausnutzen. ENGEL⁶⁹ schreibt treffenderweise: „Denkt man an das universelle Schauspiel von Geburt, Tod, Wachstum, Zerfall, Veränderung und Evolution, so ist es naheliegend, ein Modell für diesen faszinierenden Vorgang zu suchen.“ Fächerübergreifender Unterricht mit Biologie bietet sich an. Auch dem großen Interesse Jugendlicher an medizinischen Fragestellungen kann dabei teilweise Rechnung getragen werden. CLAUS⁷⁰ formuliert sehr klar: „Die Orientierung „am Leben“ oder an der Umwelt des Schülers lässt sich nicht in enger

⁶⁶Im Internet unter: <http://www.bmukk.gv.at>, link vom 20.08.2007

⁶⁷HENN 1997, S. 7

⁶⁸vgl. CLAUS 1995, S. 17

⁶⁹ENGEL 1971, S. 8

⁷⁰CLAUS 1995, S. 207

Beschränkung auf ein einzelnes Fach verwirklichen, sie erfordert *fächerübergreifenden Unterricht*.“, und weiter: „Nicht die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten ist das eigentliche Ziel, sondern die Einsicht in Probleme der sozialen Umwelt des Schülers.“ Gerade dabei entwickeln sich aber natürlich auch mathematische Fähigkeiten.

Biomathematik ist selbstverständlich aus Anwendungen heraus entstanden und daher auch fest dort verankert. Die Frage „Wozu braucht man das?“ erübrigt sich also in den meisten Fällen. Gerade offene Fragen in den Naturwissenschaften haben dazu geführt, dass sich die Mathematik stets weiterentwickelt hat. Und auch umgekehrt hat die Mathematik dazu beigetragen, dass andere Disziplinen besser wissenschaftlich erforschbar wurden. Es hat also immer ein fruchtbarer Austausch zwischen der Mathematik und anderen Gebieten der Forschung stattgefunden. HENN⁷¹ meint dazu: „Mathematik lebt und entwickelt sich gerade durch ihre Verbindungen mit der Wirklichkeit. Begriffe und Gegenstände der Mathematik sind stets aufgrund von inner- oder außermathematischen Fragestellungen, oft ausgehend vom Wunsch, die Natur besser zu verstehen, entstanden.“ BLUM⁷² vermisst diese Verbindung allerdings in Lernsituationen: „Die ständig steigende Bedeutung von Mathematik in der Praxis hat sich nicht in entsprechender Weise beim Lehren und Lernen von Mathematik in Schule und Hochschule widerspiegelt“. Schon FREUDENTHAL⁷³ sah das ähnlich, indem er schrieb: „[...] wenn auch die Herkunft aus der Realität in unseren Vorlesungen meistens verschleiert wird und die Mathematik dann als in sich geschlossenes System erscheint, dessen Beziehungen zur Realität nur als zufällige a-posteriori-Anwendungen auftauchen.“. ENGEL⁷⁴ plädiert für anwendungsorientierten Mathematikunterricht, wenn er sagt: „Der Schüler braucht eine Motivierung, „Mathematik zur Ehre des menschlichen Geistes“ können nur ganz Wenige treiben.“.

Beiträge, die dabei vom Biologieunterricht geleistet werden könnten, sind etwa Begriffsbildungen im Bereich der *Populationsgenetik*. Vererbungsmechanismen müssen erklärt und Termini wie *Allel* oder *Fitness* müssen verstanden und ins Vokabular aufgenommen werden. In der Demographie gibt es Fachbegriffe wie *Überlebenswahrscheinlichkeit*, *Geburtenrate* oder *Wachstumsrate*, die auch im Fach *Geographie und Wirtschaftskunde* behandelt werden. Hier können also Synergien genutzt werden, indem man das Thema gemeinsam

⁷¹HENN 1997, S. 6

⁷²BLUM 1988, S. 3

⁷³FREUDENTHAL 1963, S. 302

⁷⁴ENGEL 1971, S. 5

fächerübergreifend behandelt. CLAUS⁷⁵ gibt jedoch zu bedenken, dass sehr oft organisatorische Schwierigkeiten fächerübergreifenden Unterricht blockieren können und meint, man könne ihn sinnvoll einschränken, „indem man die Kollegen anderer Fächer nur zu Rate zieht oder sie nur gelegentlich zum Unterricht einlädt.“ Auch können sich die Schüler Wissen selbstständig aus Büchern oder durch Internetrecherche aneignen.

Selbst zur Erreichung von allgemeinen Erziehungszielen kann Biomathematik wertvoll beitragen. BIGALKE⁷⁶ fordert etwa in seinem Katalog die „Erziehung zum Verständnis des Gleichgewichts zwischen ökologischen Systemen und der Technik.“. Gerade dieser Punkt soll ein Anliegen dieses neuen Themas im Schulunterricht sein. Es bieten sich Anknüpfungspunkte zu Themen wie Gentechnik, Eingriffe in natürliche Ökosysteme oder Beeinflussung der Altersstruktur einer Bevölkerung durch Regulationsmaßnahmen an, die im Unterricht diskutiert und mathematisch analysiert werden können. Es wäre schade, würde man diese Gelegenheit zum kritischen Diskutieren im Mathematikunterricht verstreichen lassen und lediglich das vorliegende Zahlenmaterial analysieren.

Um Kritik vorwegzunehmen, ist natürlich einzugestehen, dass die Modelle, die in der Praxis für solche Fragestellungen verwendet werden, viel komplexer sein müssen, als jene im Schulunterricht sein dürfen. Außerdem werden Entscheidungen oft nicht nur aus mathematisch-rationalen Gründen getroffen. Es spielen in diesen Gebieten natürlich auch oft politische, soziale und ethische Gründe eine wesentliche Rolle. Auch ist darauf hinzuweisen, dass Datenmaterial oft durch einander widersprechende Modelle gestützt werden kann. Die Bevölkerungsentwicklung der USA lässt sich beispielsweise mit dem logistischen Modell recht gut beschreiben - wenn man lediglich die in der Vergangenheit gesammelten Daten berücksichtigt. Will man jedoch Prognosen aus dem Modell ziehen, so bekommt man sehr unbefriedigende Lösungen. In diesem Fall liefert das Gompertz-Modell bessere Voraussagen und passt ebenso gut an die historischen Daten.⁷⁷ Aber auch für Diskussionen in all diese Richtungen kann und soll im fächerübergreifenden Unterricht Platz sein. Vorschläge, im anwendungsorientierten Mathematikunterricht Themen aus Physik, Chemie, den Wirtschaftswissenschaften und Biologie fächerübergreifend zu behandeln, gibt es schon seit den 1970er Jahren. Beispielsweise schlägt ENGEL⁷⁸ vor, Wachstums- und Zerfallsprozesse, Räuber-Beute - Sys-

⁷⁵CLAUS 1995, S. 207

⁷⁶vgl. BIGALKE 1976, S. 31

⁷⁷vgl. dazu ENGEL 1971, S. 25

⁷⁸ENGEL 1971

teme, Populationsentwicklung, usw. mit Differentialgleichungen in der Sekundarstufe II zu behandeln. Ein Zitat von CLAUS⁷⁹ umgelegt auf biomathematische Modelle würde lauten: „Man lockt den Schüler nicht mit einer interessanten Anwendung an ein mathematisches Problem heran, zerzt ihn nicht von der Anwendung weg zur Mathematik, nein: man befasst sich wirklich mit *der biologischen Situation* und verwendet so viel an Mathematik, wie man zum Verständnis braucht.“

Aus diesem Grund kann man also sogar noch weiter gehen, als ENGEL es getan hat und Biomathematik schon in der Sekundarstufe I zum Thema machen. Die Mathematik, die zum Verständnis reicht, lässt sich von 10-14-Jährigen bewältigen, wenn es sich nicht um Differentialgleichungen, sondern um diskrete Modelle handelt, für die diese Arbeit plädiert.

Um Missverständnisse zu vermeiden sei an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, dass es nicht Ziel sein soll, anwendungsorientierten oder projektorientierten fächerübergreifenden Unterricht als das *alleinige* Unterrichtskonzept darzustellen. Vielmehr soll herausgestrichen werden, dass neben anderen ebenso berechtigten Unterrichtskonzepten, wie dem wissenschaftlich- oder dem problemorientierten Unterricht der Vernachlässigung der beiden oben genannten Orientierungen im Schulunterricht entgegenzuwirken ist.

Gründe für dieses Vernachlässigen suchen unter anderem HUMENBERGER⁸⁰ und FÖRSTER⁸¹ in entsprechenden Studien. Obwohl *Anwendungsaufgaben* für Schüler in der Beliebtheit auf Platz 1 rangieren, finden sie einige Ursachen, warum Anwendungen trotzdem nur wenig Raum im Schulunterricht haben. Zum einen seien die Lehrer vielfach *nicht darin ausgebildet, geeignete Materialien* seien zwar in der didaktischen Fachliteratur zu finden, erreichen aber nur selten die Lehrer. Der *Vorbereitungsaufwand* sei viel höher als bei herkömmlichem Unterricht, auch koste diese Art von Unterricht mehr *Zeit*, die ohnehin rar sei. Der Unterrichtsverlauf sei *nicht so leicht planbar* wie sonst. Konsequenzen daraus müssen wohl sein, anwendungsorientierte Themen verstärkt in die Lehreraus- und -fortbildung zu nehmen, höhere Verbindlichkeit in den Lehrplänen zu erreichen⁸² und eine Verbesserung des Informationsflusses für neue Materialien⁸³ zu erwirken.

⁷⁹Vgl. CLAUS 1995, S. 167. Der kursiv geschriebene Teil ersetzt dabei das von CLAUS angesprochene Thema *Brücken*.

⁸⁰HUMENBERGER 1997

⁸¹FÖRSTER 2002

⁸²Das ist in Österreich teilweise schon passiert.

⁸³Vielleicht über das Internet?

Kapitel 5

Allgemeine Wachstumsmodelle (Unterrichtsmaterialien)

5.1 Bemerkungen zu den Unterrichtsmaterialien

Methodisch gibt es bei der Umsetzung des Themas *Biomathematische Modelle* viele Möglichkeiten. Es ist wohl richtig, dass es so viele Unterrichtsstile wie Lehrer selbst gibt. Zumindest eine Idee für die Unterrichtsgestaltung kann aber das Unterrichtsmaterial, das in dieser Arbeit vorgestellt wird, geben. Dabei sollen vor allem zwei didaktische Grundsätze in den Vordergrund treten. Das ist zum einen die Förderung der Selbsttätigkeit der Schüler, die durch einen projektartigen Unterrichtsaufbau mit Pflicht- und Wahlaufgaben zur Differenzierung erreicht werden soll. BÜCHTER und LEUDERS¹ meinen dazu: „Wenn man das Wesen der Mathematik eben nicht allein durch ihre Produkte repräsentiert sieht, sondern die Mathematik ganz wesentlich als Prozess auffasst, so ist es unabdingbar, dass Schülerinnen und Schüler ebendiese Prozesse im Unterricht aktiv erleben, d. h. dass sie selbst Modellieren und Problemlösen und nicht nur Modelle und Problemlösungen anwenden, dass sie selbst Begründungen suchen und nicht nur im fragend-entwickelnden Unterricht Begründungen nachvollziehen“. FREUDENTHAL² drückt es prägnant wie folgt aus: „The best way to learn an activity is to perform it.“. Zum anderen bietet sich natürlich fächerübergreifender oder sogar fächerverbindender Unterricht mit Biologie an.

Entschließt man sich, biomathematische Modelle im Unterricht zu behandeln, so erkennt man rasch, dass sich hierbei eine sehr große Bandbreite an

¹BÜCHTER und LEUDERS 2005, S. 115

²FREUDENTHAL 1968, S. 110

Möglichkeiten ergibt, sei es einerseits bei der Wahl des konkreten biomathematischen Umfeldes³, bei der Auswahl der Modelle⁴ oder, wenn man sich schließlich für ein Problem oder schon ein konkretes Modell entschieden hat, bei den vielfältigen Bearbeitungsmöglichkeiten.

In diesem und in den folgenden Kapiteln sollen nun konkrete Unterrichtsmaterialien präsentiert werden, die ohne viel Mühe für den Lehrer direkt im Unterricht verwendet werden können. Die unten aufgelisteten Themen wurden dabei einerseits aufgrund ihrer historischen Bedeutung und andererseits aufgrund ihrer guten Umsetzbarkeit in den Mathematikunterricht ausgewählt. Diese Arbeit versteht sich aber auch als Anregung für Lehrer, selbst Materialien zu Anwendungen in der Biomathematik anzufertigen. Im Folgenden wird deutlich, dass es dabei natürlich auch wünschenswert und sinnvoll ist, Materialien für die Unterstufe zu entwickeln. Viele Modelle lassen sich mit recht elementarer Mathematik behandeln und können dann später verfeinert oder tiefer behandelt werden, wenn das nötige „mathematische Werkzeug“ vorhanden ist.

Zu den in diesem Kapitel vorgestellten Unterrichtsmaterialien gibt es auch Arbeitsblätter, die als Kopiervorlagen auf der beigelegten CD-Rom zu finden sind. Lösungen beziehungsweise Erläuterungen zur Umsetzung im Mathematikunterricht sind an geeigneter Stelle angegeben.

Den Ausarbeitungen liegen folgende biomathematische Themen zugrunde:

- Allgemeine Wachstumsmodelle
- Räuber-Beute-Modelle
- Symbiotische Systeme
- Epidemiologie
- Demographie

Die Materialien sind so angelegt, dass folgende Aspekte des Mathematikunterrichts stärker in den Vordergrund treten:

Mathematik als Prozess: Es soll vor allem das *Experimentieren* mit Modellen, das *Explorieren* von Sachverhalten, Wirkungszusammenhängen,

³Z. B. Mathematische Ökologie, Epidemiologie, Populationsgenetik, Mustererkennung, Demographie, u.v.m.

⁴Für jedes der genannten Gebiete gibt es eine Fülle an Modellen, die allerdings aufgrund ihrer teilweise hohen Komplexität erst für den Unterricht angepasst werden müssten. Siehe dazu das Kapitel 3.

mathematischen Strukturen, Diagrammen usw. und das *Formulieren* von Beobachtungen, Gesetzmäßigkeiten, mathematischen Termen und Gleichungen, usw. gefördert werden. Bei allen diesen Tätigkeiten kann und soll der Computer als Hilfsmittel und Werkzeug eingesetzt werden! Eigene Fragestellungen der Schüler und deren Beantwortung (sofern möglich) sowie Argumentieren und kritisches Betrachten der Materialien, der Probleme, der Ergebnisse, usw. sollen erlaubt und sogar gefördert werden.

Unterrichtsorganisation/Allgemeine Lernziele: Die Materialien sind so ausgerichtet, dass Partner- bzw. Teamarbeit im Vordergrund stehen. Die Schüler sollten bei vielen Arbeitsaufträgen Zugang zu einem Computer haben. Zur Sicherstellung des neu erworbenen Wissens werden die Schüler aufgefordert, Zusammenfassungen zu schreiben oder Präsentationen vor der Klasse durchzuführen. Das soll einerseits zur Wiederholung und zur Gewinnung eines Überblicks dienen und andererseits zu erhöhter Selbstständigkeit und zu selbst- und verantwortungsbewusstem Auftreten der Schüler beitragen. Die Unterrichtsmaterialien beinhalten aktuelle Entwicklungen und zeitgemäße Fragestellungen zu den Bereichen Umwelt und Gesellschaft und tragen dadurch auch zur Förderung der Allgemeinbildung außerhalb der Mathematik bei.

Die Unterrichtsvorschläge sind projektartig aufgebaut und sollen so die längere und intensivere Beschäftigung mit einem Thema fördern, das sich jeweils über einige Unterrichtseinheiten erstrecken soll. Sie sind nach folgenden Kategorien strukturiert:

Wissenswertes: Diese Texte sollen motivierend und erklärend wirken. Sie liefern zudem Informationen, die die Schüler zum Weiterarbeiten benötigen.

Arbeitsaufträge: Es handelt sich dabei um meist recht offen gestellte Fragen und Aufforderungen an die Schüler. Dabei geht es neben der Förderung mathematischer Fähigkeiten wie Mathematisieren von Texten, Bilden von Modellen und Experimentieren mit Parametern vor allem auch um das kritische Betrachten, das Beschreiben und Begründen von Sachverhalten, das Ausloten von Modellgrenzen und das Beschäftigen mit aktuellen gesellschaftlichen, politischen und ökologischen Problemen. Die jeweilige Bearbeitungsdauer eines Arbeitsauftrages kann dabei stark variieren und hängt vom Interesse und kognitiven Niveau der Schüler und der damit verbundenen „Bearbeitungstiefe“ ab.

Aufgaben: Sie sind meist klarer formuliert als die Arbeitsaufträge und sprechen weniger die Kreativität der Schüler als deren Rechenfertigkeiten an. Die Ergebnisse bei solchen Aufgaben sind voraussagbar und daher unter den Schülern gut zu vergleichen. Obwohl man ob ihrer leichteren Überprüfbarkeit verleitet ist, ausschließlich solche Aufgaben bei Leistungsfeststellungen zu verwenden, sollen sie auch hier keine übergeordnete Rolle spielen. Es soll also neben der Überprüfung der Rechenfertigkeiten, die natürlich auch weiterhin ihren Platz haben soll, nicht auf die Feststellung anderer, eher prozessorientierter Leistungen, wie sie etwa in den Arbeitsaufträgen gefordert werden, verzichtet oder vergessen werden. Es wird im folgenden Unterrichtsmaterial an geeigneten Stellen darauf hingewiesen, wo Anknüpfungspunkte für mögliche Leistungsfeststellungen gegeben sind.

Lösungen: Diese werden bei Aufgaben bzw. Arbeitsaufträgen geliefert, die *eine* Lösung besitzen. Sie finden sich in den nachfolgenden Unterlagen, nicht jedoch auf den Kopiervorlagen für den Unterricht.

Erläuterungen: Hier finden Sie Lösungsvorschläge und Erklärungen. Der Lehrende soll aber auch auf mögliche Probleme bei der Bearbeitung eines Arbeitsauftrages hingewiesen werden. Es werden Lösungswege aufgezeigt und Tipps aus fachdidaktischer Sicht gegeben. Auch die Erläuterungen sind nicht auf den Kopiervorlagen abgedruckt.

Wie die einzelnen Aufgaben und Arbeitsaufträge durchgeführt werden sollen, ob sie erforderlich für das Verständnis der darauffolgenden Arbeitsaufträge sind, ist im Einzelnen angeführt.

5.2 Allgemeine Wachstumsmodelle

Die Abschnitte 5.3 und 5.4 verstehen sich als Grundlage für alle anderen Unterrichtsmaterialien, die in dieser Arbeit vorgestellt werden. Sie beschäftigen sich vorwiegend mit drei elementaren Wachstumsmodellen, nämlich mit dem *linearen*, dem *exponentiellen* und dem *logistischen Wachstum*. Zusätzlich werden schrittweise sowohl für die Unter- als auch für die Oberstufe zentrale Begriffe herausgearbeitet, die in den anderen Kapiteln meist ohne weitere Erklärung verwendet werden. Dazu gehören Ausdrücke wie *Wachstumsfaktor*, *Zuwachs*, *beschränktes* und *unbeschränktes Wachstum*, *Freiraum* usw.

Es wird einerseits auf innermathematische Probleme hingewiesen, wie z. B.

auf die Übersetzung (oder besser das Hin- und Herschalten) zwischen diskreten und kontinuierlichen Modellen. Andererseits wird auch thematisiert, wie Modellergebnisse interpretiert werden müssen (z. B. bei nichtganzzahligen Populationsgrößen) und wie weit sie in der Wirklichkeit Anwendung finden. Die Implementierung von einfachen Modellen in eine Tabellenkalkulation wird exemplarisch anhand von Excel erklärt.

Es wird versucht, durch möglichst viele Beispiele die Unterschiede der drei Wachstumsmodelle, allerdings auch deren Gemeinsamkeiten in manchen Bereichen aufzuzeigen.

5.3 Was wächst wie schnell?

Schulstufe: 2. bis 4. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: Dezimalzahlen, Runden, grafisches Darstellen von Daten

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 6 bis 8 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

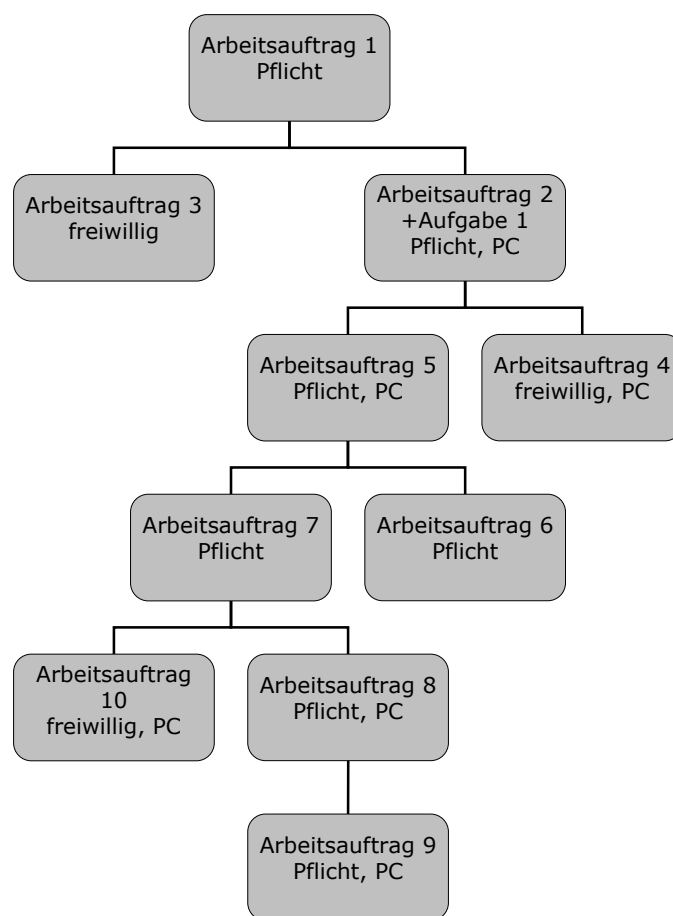
- Lesen, Anfertigen und Interpretieren von Diagrammen
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über elementare Wachstumsmodelle
- Umgang mit dem PC
- Teamfähigkeit
- Bewusstsein, dass Modelle kein vollständiges Abbild sondern bestenfalls eine vereinfachende Beschreibung der Natur sind

Lehrplanbezug: Neben vielfältigen Inhalten, die im Unterstufenlehrplan⁵ in den Teilen *Bildungs- und Lehraufgabe* sowie *Didaktische Grundsätze* angeführt sind, beruht das nachfolgende Unterrichtsmaterial vor allem auf den folgenden Bereichen des Lehrstoffes:

- Arbeiten mit Modellen
- Grafische Darstellungen
- Prozentrechnung
- Direkte Proportionalität
- Variablen
- Potenzschreibweise

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 6 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 1, 2 und 5. Es ist außerdem angeführt, ob Computerunterstützung nötig ist.



Ein wirklich verrückter Rekord

Im „Guinness Buch der Rekorde“ finden sich häufig recht seltsame Einträge. Oftmals versuchen Menschen durch große Anstrengungen oder durch kostspielige Erfindungen in dieses Buch aufgenommen zu werden. Andere hingegen lassen einfach die Natur arbeiten, nehmen allerdings dafür einige Unbequemlichkeiten in Kauf. Wie zum Beispiel der Inder *Shridhar Chillal* auf dem Bild unten. Misst man die Längen der fünf Fingernägel seiner linken Hand und addiert diese, so ergibt sich eine Gesamtlänge von 6,15 Metern!



Quelle: tvvn.org, link vom 19.05.2008

Wissenswertes

Natürlich ist es gar nicht so einfach, sich die Nägel so lang wachsen zu lassen. Normalerweise brechen Fingernägel sehr leicht ab, wenn sie erst einmal eine Länge von ein paar Zentimetern erreicht haben. Es bedarf also spezieller Pflegeprodukte und großer Sorgsamkeit, wenn man einen solchen Rekord aufstellen will. Und das über einen sehr langen Zeitraum. Wir wollen uns überlegen, wie lang wohl *Shridhar Chillal* dafür gebraucht hat, um dieses Ziel zu erreichen. Durchschnittlich wächst ein menschlicher Fingernagel einen Zehntel Millimeter am Tag.

Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Berechnet, wie lang die Fingernägel der linken Hand *Shridhar Chillals* im Mittel sind!

Wie viele Millimeter wachsen Fingernägel in einem Monat? Macht dabei die Vereinfachung „1 Monat = 30 Tage“ !

Stellt euch vor, jemand, der gerade 1,5 cm lange Fingernägel hat, will sie sich jetzt wachsen lassen! Wie lang sind die Fingernägel nach a) einem b) zwei c) drei Monat(en)?

Wie seid ihr bei der Berechnung vorgegangen?

Ergäbe sich durch die Berechnung in Tagesschritten ein Unterschied im Ergebnis? Begründet eure Antwort! Warum ist es günstiger, in Monats-schritten zu rechnen?

Erläuterung: Seine Fingernägel sind durchschnittlich 1,23 m lang. Die Schüler sollen bei der Berechnung den rekursiven Charakter⁶ dieses Wachstumsprozesses realisieren. Um die Länge der Nägel zu Beginn des *Folgemo-nats* zu berechnen, muss man 3mm zu der Länge am Beginn *dieses* Monats addieren! Es soll erkannt werden, dass die Länge in gleichen Zeitabschnitten immer um den gleichen Betrag zunimmt. Große Schritte ändern daher nichts am Ergebnis, verringern aber den Rechenaufwand.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Partnerarbeit, Kontrolle durch den Lehrer

Pflicht

Ihr sollt nun eine Tabellenkalkulation (z. B. Excel) verwenden, um die Fingernagellänge nach 100 oder gar 200 Monaten berechnen zu können! Macht dazu eine Spalte, in der ihr die Zeit in Monaten angebt und eine Spalte für die Werte der Fingernagellänge! In die Zelle B3 sollt ihr nun eine Formel eingeben, die aus dem Wert der Zelle B2 (also der Länge der Nägel zu Beginn) die Länge der Nägel nach einem Monat berechnet!

⁶Der Übergang von Tages- auf Monatsschritte setzt allerdings schon die intuitiv offensichtliche Eigenschaft linearer Prozesse voraus, dass man die Zunahme eines Tages nur mit 30 multiplizieren muss, um auf die Zunahme in einem Monat zu kommen. Für diesen Übergang verlässt man also eigentlich kurz die rekursive Darstellung.

	A	B	C	D	E
1	Zeit in Monaten	Länge der Fingernägel in cm			
2	0	1,5			
3	1				
4	2				
5	3				
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				
13	11				

Gebt jetzt eine Formel in B4 ein, die die Länge mit Hilfe des Wertes aus B3 berechnet, danach eine Formel in B5, die auf den Wert aus B4 zurückgreift!

Um nicht jedesmal die Formel neu eingeben zu müssen, gibt es in Excel eine einfache Möglichkeit, die Formel einer Zelle in einem Schritt gleich auf sehr viele Zellen zu übertragen. Markiert dazu die Zelle B3 und bewegt anschließend die Maus ans rechte untere Eck dieser Zelle, bis ein kleines schwarzes Kreuz erscheint! Mit gedrückter linker Maustaste könnt ihr dann nach unten ziehen und so die Formel aus B3 in die darunter liegenden Zellen übertragen.

Vergewissert euch, dass das Programm richtig gearbeitet hat, indem ihr euch die entstandenen Formeln in den Zellen B4, B5 usw. ansieht!

Erläuterung: Das Datenblatt sollte dann etwa so aussehen:

	A	B	C	D
1	Zeit in Monaten	Länge der Fingernägel in cm		
2	0	1,5		
3	1	1,8		
4	2	2,1		
5	3	2,4		
6	4	2,7		
7	5	3		
8	6	3,3		
9	7	3,6		

Aufgabe 1

Mit Hilfe der in Arbeitsauftrag 2 erzeugten Tabelle könnt ihr nun schon einige Fragen beantworten!

- (a) Wie lang sind die Fingernägel nach 5 Monaten?
- (b) Wie lang sind sie nach 2 Jahren?
- (c) Wie lange dauert es, bis man *Shridhar Chillals* Rekord überbieten kann? Verlängert dazu (falls nötig) die beiden Spalten noch weiter nach unten!

Lösung:

- (a) 3 cm
- (b) 8,7 cm
- (c) 405 Monate, das sind knapp 34 Jahre!

Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Kleingruppe, kurze Präsentation in der Klasse
freiwillig

Welche Probleme hat *Shridhar Chillal* wohl in seinem Leben aufgrund seiner langen Fingernägel? Erstellt eine Liste und schreibt dazu, wie schwerwiegend diese Probleme eurer Einschätzung nach sind!

Was könnte ihn eurer Meinung nach dennoch dazu veranlasst haben, diesen Rekord aufzustellen?

Erläuterung: Die Schüler sollen Probleme bei der Arbeitssuche, Partnersuche, sowie bei alltäglichen Tätigkeiten diskutieren! Motivation für einen solchen Rekord könnte der finanzielle Anreiz, Berühmtheit oder der Wille sein, etwas Einzigartiges zu leisten.

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Partnerarbeit, Kontrolle durch den Lehrer
freiwillig

Forscht nach! Gibt es auch einen Rekord bezüglich der längsten Haare?

Wie schnell wachsen Haare?

Erstellt dazu wieder eine Tabelle wie oben!

Welche Fragen könnte man dazu stellen? Versucht, sie zu beantworten!

Erläuterung: Der Rekord der längsten je gemessenen Haare wurde von *Xie Qiuping* aus China aufgestellt. Ihre Haare waren nach über 30-jährigem Wachstum etwa 5,6 m lang.

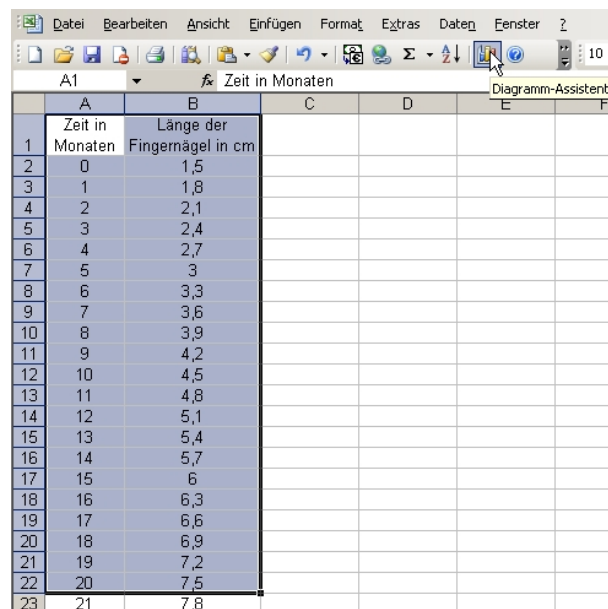
Haare wachsen normalerweise etwa 1 Millimeter in 3 Tagen, haben aber meist eine maximale Lebensdauer von 3 bis 6 Jahren, bevor sie ausfallen. Auch Geschlecht und Jahreszeit spielen dabei eine Rolle.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Partnerarbeit, Diskussion in der Klasse

Pflicht

Fertigt zu der Tabelle aus Arbeitsauftrag 2 ein Diagramm an! Falls ihr Excel verwendet, markiert dazu die Daten der ersten 20 Monate und ruft den Diagrammassistenten auf! Wählt dann den Diagrammtyp *Punkt(XY)* und drückt auf *Fertigstellen*!



	A	B	C	D	E	F
	Zeit in Monaten	Länge der Fingernägel in cm				
1	0	1,5				
2	1	1,8				
3	2	2,1				
4	3	2,4				
5	4	2,7				
6	5	3				
7	6	3,3				
8	7	3,6				
9	8	3,9				
10	9	4,2				
11	10	4,5				
12	11	4,8				
13	12	5,1				
14	13	5,4				
15	14	5,7				
16	15	6				
17	16	6,3				
18	17	6,6				
19	18	6,9				
20	19	7,2				
21	20	7,5				
22	21	7,8				

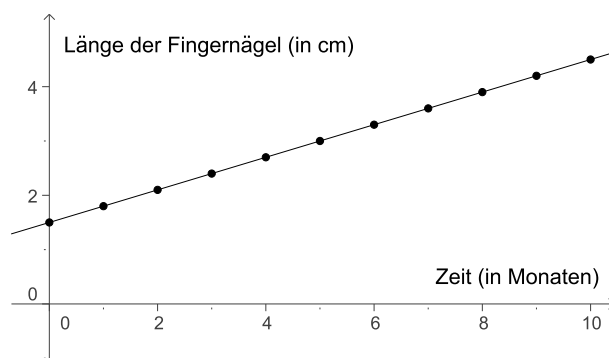
Wie sind die Achsen zu beschriften?

Was fällt euch am Verlauf der Punkte im Diagramm auf?

Erläuterung: Die Punkte liegen auf einer Geraden.

Wissenswertes

Liegen die Datenpunkte bei einem Wachstumsprozess auf einer Geraden, so nennt man dieses Wachstum *linear*. In manchen Fällen ist es sinnvoll diese Gerade tatsächlich einzuzichnen, um so Werte zu jedem beliebigen Zeitpunkt dazwischen ablesen zu können (wie z. B. die Fingernagellänge nach einem halben oder zweieinhalb Monaten). Man spricht in diesem Fall von *kontinuierlichen Wachstumsprozessen*.

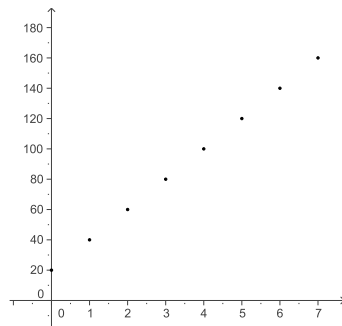


Ein wichtiges Merkmal von *linearem Wachstum* ist die Eigenschaft, dass die betrachtete Größe (also z. B. die Fingernagellänge) in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen Betrag zunimmt (z. B. jedes Monat um 3 mm).

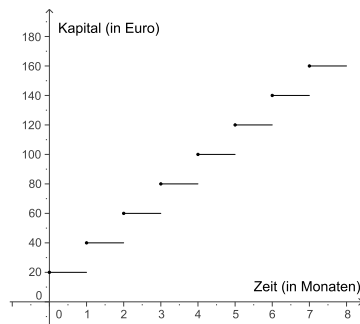
Das Durchlegen einer Gerade ist im Fall der Fingernagellänge recht praktisch, in anderen Situationen kann es jedoch ratsam sein, sich ein anderes Bild vorzustellen.

Betrachten wir folgendes Beispiel:

Katrin bekommt von ihrer Großmutter am Beginn jeden Monats 20 Euro geschenkt, die sie in einem Sparschwein sammelt. Veranschaulicht man diesen Sachverhalt grafisch, so entsteht folgendes Bild:



Wieder liegen also die Punkte offensichtlich auf einer Geraden, es handelt sich also um lineares Wachstum. Es wäre aber nicht sehr günstig, hier die Gerade tatsächlich einzuzichnen, da man sonst glauben könnte, dass sich das Geld auch *innerhalb* eines Monats vermehrt. Eine in diesem Fall bessere Version der grafischen Darstellung ist die folgende, die wir im Gegensatz zur kontinuierlichen Darstellung jetzt *diskrete Darstellung* nennen:



Hier bleibt offensichtlich das Kapital innerhalb der einzelnen Monate gleich und ändert sich nur jeweils am Beginn eines neuen Monats (diskret bedeutet ja *voneinander getrennt* oder *einzel*n).

Diese Vorstellung eignet sich manchmal auch für das Wachstum einer Bevölkerung. Sagt man zum Beispiel: „Im Jahr 2005 lebten ca. 8,2 Millionen Menschen in Österreich.“, so sieht man das als Durchschnittswert für das Jahr 2005 an und macht keine Aussage über die Veränderung innerhalb dieses Jahres. Gleiches gilt natürlich auch für Monate, Tage, Stunden, Minuten, usw. Streng genommen ist Bevölkerungswachstum ja immer diskret, da Bevölkerungsgrößen natürlich nur ganzzahlige Werte annehmen können.

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Welche Vorstellung, kontinuierlich oder diskret, ist für die folgenden Situationen besser geeignet? In welchen Fällen könnte man sowohl die eine, als auch die andere verwenden?

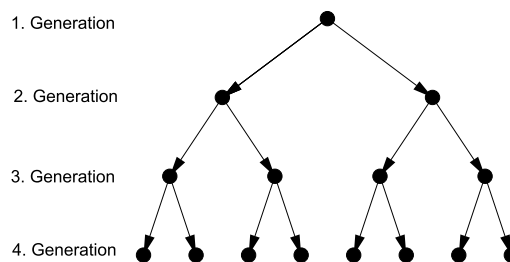
- Eine Klasse wird immer größer, jedes Jahr kommen zu Schulbeginn 2 neue Schüler dazu.
- Eine Pflanze wächst jedes Monat um etwa 2 Zentimeter.
- Ein Dorf stirbt langsam aus, jedes Jahr hat die Ortschaft um durchschnittlich 30 Einwohner weniger.
- Ein Tankwart erhält von jedem Kunden durchschnittlich 40 Cent Trinkgeld, die er in einem Glas sammelt.
- Im Alter von 11 bis 15 Jahren wachsen die meisten Menschen mehrere Zentimeter pro Jahr.

Gebt jeweils eine Begründung für eure Entscheidung an!

Erläuterung: Es soll herausgearbeitet werden, dass eine diskrete Darstellung quasi immer möglich ist. Man kann ja aus einem stetigen, also kontinuierlichen Grafen eine endliche Menge an „Messpunkten“ herausnehmen und diese dann für ein diskretes Modell verwenden (z. B. die Pflanzengröße jeweils zu Beginn eines Monats). Kontinuierliche Beschreibungen sind jedoch umgekehrt für die erste und die vierte Situation nicht geeignet.

Stammbäume

Natürlich laufen nicht alle Wachstumsprozesse linear ab. Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, die Zu- oder Abnahme einer Größe mathematisch zu beschreiben. Bakterien etwa vermehren sich durch Zellteilung. Hier wäre ein lineares Modell zur Beschreibung des Wachstums völlig unbrauchbar. Wie der Name schon verrät, „teilt“ sich bei diesem Vorgang eine Zelle und es entstehen 2 identische neue Zellen. Dieser Prozess gliedert sich in mehrere Phasen, die von Mikrobiologen schon gut erforscht sind. Für unsere Betrachtungen genügt es allerdings vorerst zu wissen, dass sich eine Bakterie (1. Generation) nach einer gewissen Zeit in zwei neue (2. Generation) teilt, die sich dann ihrerseits wieder in je zwei neue (3. Generation) teilen usw.



Wir wollen für unsere Überlegungen annehmen, dass sich die Bakterien einer Generation immer gleichzeitig teilen, da die Beschreibung sonst zu kompliziert wird.

Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse

Pflicht

Wenn man von einer Bakterie in der ersten Generation ausgeht, wie viele leben dann in der a) zweiten, b) dritten, c) vierten und d) fünften Generation?

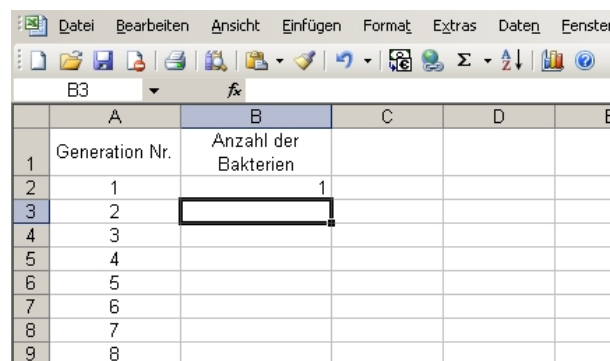
Wie seid ihr bei der Berechnung vorgegangen?

Erläuterung: Wieder soll durch diesen Arbeitsauftrag der Einsatz einer Tabellenkalkulation vorbereitet werden, deren Stärke ja die rekursive Berechnung ist.

Arbeitsauftrag 8

Bearbeitung: Partnerarbeit, Kontrolle durch den Lehrer
Pflicht

Verwendet eine Tabellenkalkulation (z. B. Excel), um die Anzahl der Bakterien in der 20. oder gar in der 30. Generation berechnen zu können! Macht dazu eine Spalte, in der ihr die Generationen (1 bis 30) angebt und eine Spalte für die Anzahl der Bakterien in dieser Generation! In die Zelle B3 sollt ihr nun eine Formel eingeben, die aus dem Wert der Zelle B2 (also der Anzahl der Bakterien in der 1. Generation) die Anzahl der Bakterien in der 2. Generation **berechnet!**



	A	B	C	D	E
1	Generation Nr.	Anzahl der Bakterien			
2	1	1			
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				

Gebt jetzt eine Formel in B4 ein, die die Bakterienzahl der 3. Generation mit Hilfe des Wertes aus B3 berechnet, danach eine Formel in B5, die auf den Wert aus B4 zurückgreift!

Verwendet jetzt wieder die einfache Methode des *Formelübertragens* und füllt so die Zellen B6 bis B31!

Vergewissert euch, dass das Programm richtig gearbeitet hat, indem ihr die entstandenen Formeln in den Zellen B6, B7 usw. kontrolliert!

Erläuterung: Das Datenblatt sollte etwa so aussehen:

	A	B	C
1	Generation Nr.	Anzahl der Bakterien	
2	1	1	
3	2	2	
4	3	4	
5	4	8	
6	5	16	
7	6	32	
8	7	64	
9	8	128	
10	9	256	
11	10	512	

Arbeitsauftrag 9

Bearbeitung: Partnerarbeit, Besprechung in der Klasse
Pflicht

Fertigt zu der Tabelle aus Arbeitsauftrag 8 ein Diagramm an! Falls ihr Excel verwendet, markiert dazu die Daten der ersten 10 Generationen und ruft den Diagrammassistenten auf! Wählt dann den Diagrammtyp *Punkt(XY)* und drückt auf *Fertigstellen!*

Wie sind die Achsen zu beschriften?

Was fällt euch am Verlauf der Punkte auf?

Ist es sinnvoll, die Punkte im Diagramm zu verbinden? Begründet!

Was passiert auf lange Sicht gesehen? Erscheint euch dieses Wachstum realistisch?

Erläuterung: Der Zuwachs pro Zeitschritt ist nun abhängig vom derzeitigen Bestand an Bakterien.

Das Verbinden der Datenpunkte ist hier nicht sinnvoll, da wir vorausgesetzt haben, dass es sich um getrennte Generationen handelt, deren Angehörige sich alle zum gleichen Zeitpunkt teilen.

Exponentielles Wachstum ist unbegrenzt und daher nur über gewisse Zeiträume realistisch. Das begrenzte oder logistische Wachstum wären Möglichkeiten, dieses ungewünschte Resultat zu verhindern.

Wissenswertes

Wachstumsprozesse, bei denen die betrachtete Größe (z. B. die Anzahl der Bakterien) in gleichen Zeitabständen immer mit dem gleichen Faktor, dem sogenannten *Wachstumsfaktor*, zunimmt, nennen wir *exponentielle Wachstumsprozesse*. In unserem Beispiel verdoppelt sich die Bakterienzahl in jeder Generation, der Wachstumsfaktor ist hier also 2. Die Zellteilung ist daher ein Beispiel für exponentielles Wachstum.

Sie ist deshalb so interessant, weil sie praktisch bei allen Lebewesen vorkommt, wie etwa auch beim Menschen. Verletzt du dich z. B. an der Hand, so wird durch Zellteilung neues Gewebe gebildet. Und zwar im Normalfall so lange, bis die Wunde wieder geschlossen ist. Es wird hier also die Vermehrung der Zellen rechtzeitig wieder gebremst.

Es kann jedoch durch einen Defekt in den Erbanlagen leider auch passieren, dass dieser Bremseffekt nicht einsetzt und sich Zellen ungehindert weiter teilen können. Das führt dazu, dass sich Wucherungen bilden, die angrenzendes, gesundes Gewebe verdrängen oder zerstören können. Man spricht in diesem Fall von der Erkrankung *Krebs*, die leider eine der häufigsten Todesursachen des Menschen ist.

Arbeitsauftrag 10

Bearbeitung: Kleingruppe, Präsentation in der Klasse
freiwillig

Informiert euch darüber, welche Organe des Menschen von Krebs befallen werden können, wie viele Menschen in Österreich (oder weltweit) an dieser Erkrankung leiden und wie viel Prozent von ihnen geheilt werden können! Wie? Gibt es Maßnahmen, wie Krebs verhindert werden kann? Stellt selbst Fragen, die euch interessieren und versucht, sie zu beantworten!

Erstellt eine (kurze) Zusammenfassung und referiert sie vor eurer Klasse!

Erläuterung: Falls es mehrere Gruppen gibt, die sich mit diesem Arbeitsauftrag befassen wollen, kann man das zweifellos sehr breite Referatsthema je nach Interesse auch in kleinere Gebiete unterteilen. Fächerübergreifender Unterricht mit Biologie bietet sich an.

5.4 Wie wachsen Menschen und ihre Bevölkerungen?

Schulstufe: Oberstufe AHS

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 3 bis 4 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

- Lesen, Anfertigen und Interpretieren von Diagrammen
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über elementare Wachstumsmodelle
- Umgang mit dem PC
- Teamfähigkeit

Lehrplanbezug: Neben vielfältigen Beiträgen zu den Bildungsbereichen *Mensch und Gesellschaft*, *Gesundheit*, *Natur* und *Kreativität* bietet das vorliegende Material einen Rahmen für folgende mathematische Themengebiete, die in der Oberstufe bearbeitet werden sollen:

- bewusstes und sinnvolles Umgehen mit exakten Werten und Näherungswerten
- Proportionale Abhängigkeiten
- Prozentrechnung
- Rekursives Darstellen
- Variablen
- Dynamische Prozesse

Reihenfolge

Die folgenden Arbeitsaufträge sollen nach Möglichkeit in der dargebotenen Reihenfolge bearbeitet werden. Computereinsatz ist für die Arbeitsaufträge 4 und 5 nötig, für Arbeitsauftrag 6 lediglich hilfreich.

Nichts kann unendlich groß werden

In der Natur, aber auch in der Wirtschaft, den Naturwissenschaften oder der Soziologie gibt es verschiedene Arten von Wachstum. Es ist zum Beispiel von Interesse, ob das Wachstum einer Größe gleichmäßig verläuft, ob die Größe scheinbar bis ins Unendliche wächst (unbegrenztes Wachstum) oder ob ein Sättigungseffekt eintritt, der das Wachstum bremst (begrenztes Wachstum).

Es gibt im Wesentlichen drei grundlegende mathematische Modelle, mit denen sich schon sehr viele Wachstumsprozesse relativ gut beschreiben lassen.

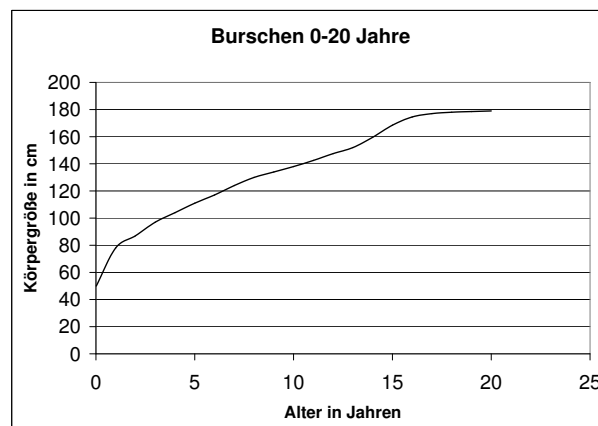
Modell des lineares Wachstums: Die betrachtete Größe nimmt in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen absoluten Betrag zu/ab, unabhängig vom derzeitigen Wert der Größe. Beispiele wären das Befüllen einer Badewanne, das Wachstum von Haaren oder Fingernägeln, das Abbrennen einer Kerze oder die Telefonkosten in Abhängigkeit der Gesprächsdauer.

Modell des exponentiellen Wachstums: Die Größe nimmt in gleichen Zeitabständen immer um denselben relativen Anteil des derzeitigen Bestandes zu/ab. Der absolute Zuwachs ist also bestandsabhängig: Derselbe Prozentsatz macht bei einem großen Grundwert eben mehr aus, als bei einem kleinen. Das Wachstum einer Bakterienkultur, das Anwachsen eines verzinsten Kapitals oder das Wachstum von Pflanzen kann zumindest in der Anfangsphase durch dieses Modell beschrieben werden.

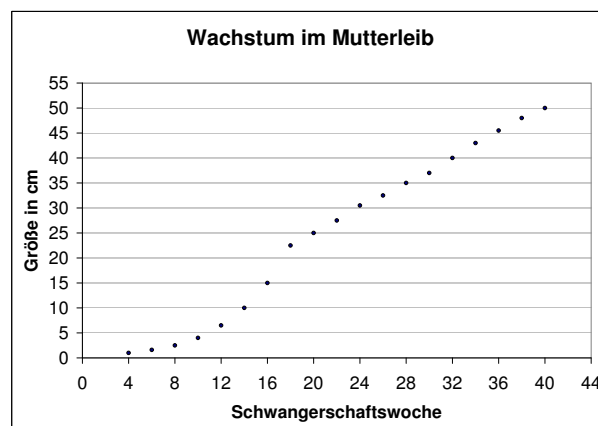
Modell des logistischen Wachstums: Hier ist die Zunahme einer Größe sowohl vom derzeitigen Bestand, als auch vom noch vorhandenen „Freiraum“ (Nahrungs-, Platz- oder Ressourcenangebot, usw.) abhängig.

Wissenswertes

Schon allein das Körperwachstum des Menschen ist nicht besonders regelmäßig und verläuft in mehreren unterschiedlichen Phasen. Ein typisches Diagramm, das die Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter zeigt, könnte etwa so aussehen:



Selbst das Größenwachstum eines Kindes im Mutterleib ist zu komplex, um es nur durch eines der drei oben angeführten Modelle sinnvoll beschreiben zu können. Die folgende Abbildung zeigt das Größenwachstum des Menschen in den 9 Schwangerschaftsmonaten, wobei alle 2 Wochen gemessen wurde (zum ersten Mal nach der 4. Woche):



Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Das Wachstum des Kindes im Mutterleib lässt sich grob in zwei unterschiedliche Phasen teilen. Zu welchem Zeitpunkt würdet ihr die Trennlinie ziehen?

Beschreibt den Verlauf der beiden Phasen! Worin liegt der Unterschied? Macht dabei Aussagen über das Ausmaß der Zunahme in jedem Zeitschritt!

Vergleicht eure Formulierungen mit den Beschreibungen der oben genannten Modelle! Welches Modell scheint zu welcher Phase zu passen?

Erläuterung: Etwa bis zur 18. Woche nehmen die Zuwächse von Schritt zu Schritt immer mehr zu: „Je größer das Kind, desto schneller wächst es.“ Ab der 18. Woche nimmt der Zuwachs pro „Doppelwoche“ wieder ab und bleibt danach konstant. Das Kind wächst in dieser Phase ziemlich gleichmäßig, unabhängig von der derzeitigen Größe.

Die erste Phase kann also durch das exponentielle, die zweite Phase durch das lineare Modell gut angenähert werden.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Ihr sollt nun zunächst die zweite Phase betrachten! Was fällt euch an den Datenpunkten auf?

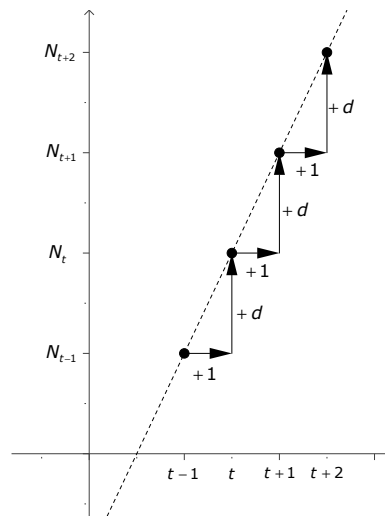
Gibt es eine mathematische Regelmäßigkeit bei der Zunahme der Körpergröße? Welche?

Gebt eine Formel an, wie man aus der Körpergröße G_t am Ende der Woche t die Körpergröße G_{t+1} am Ende der folgenden Woche berechnen kann! Wie gut passt diese Formel zu den gemessenen Datenpunkten?

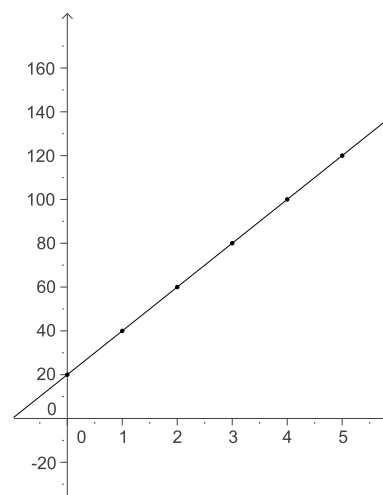
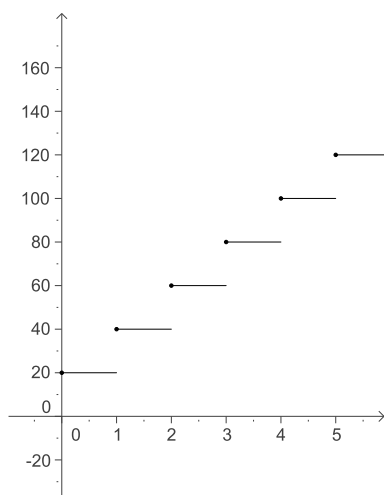
Erläuterung: Es fällt auf, dass die Datenpunkte annähernd auf einer Geraden liegen. Dabei nimmt die Körpergröße alle 2 Wochen um etwa den selben Betrag zu, nämlich um 2,5 cm. Das liefert die Formel $G_{t+2} = G_t + 2,5$ oder $G_{t+1} = G_t + 1,25$.

Wissenswertes

Nimmt eine beobachtete Größe N_t in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen festen Betrag d zu (bzw. ab), so nennt man das zugrunde liegende Wachstum (bzw. die Abnahme) *linear*. Es gilt dann also $N_{t+1} = N_t + d$. Die Datenpunkte (t, N_t) liegen in diesem Fall entlang einer Geraden:



Ob und wenn ja *wie* es sinnvoll ist, die Punkte zu verbinden, hängt von der Situation ab, die durch das lineare Modell beschrieben werden soll. Überlegt euch selbst Vorgänge oder Situationen, die zu folgenden Darstellungen passen:



Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Wir wenden uns jetzt den Datenpunkten der ersten Phase zu. Gibt es auch hier eine mathematische Regelmäßigkeit der Werte? Welche? Bis zu welchem Zeitpunkt „passt“ sie?

Was passiert, wenn man nur die Körpergrößen nach der 4., 8., 12. und 16. Woche betrachtet? Ergibt sich hier eine ähnliche Regelmäßigkeit?

Angenommen man interessiert sich nun auch für die Körpergröße am Ende einer *ungeraden* Woche (also der 5., 7., ..., 17. Woche). Wie könnte man „brauchbare“ Werte zumindest ungefähr ermitteln? Geht bei der Berechnung so vor, dass wieder die obige Regelmäßigkeit auftritt, diesmal eben für 1-Wochen-Schritte!

Erläuterung: Die Körpergröße wird alle 2 Wochen um etwa den Faktor 1,6 größer. Das stimmt bis zum Ende des 14. Monats ganz gut (weniger als 5% Fehler).

Betrachtet man nur jede vierte Woche, so wachsen die Körpergrößen mit dem Faktor $1,6^2 \approx 2,5$.

Um auf die Werte am Ende der ungeraden Wochen zu kommen, muss man einen geeigneten Faktor a finden, sodass gilt: $G_{t+1} = a \cdot G_t$. Man sucht also einen Faktor, der *zweimal* angewendet ca. 1,6 ergibt, also $a \approx \sqrt{1,6} \approx 1,26$. Dieser Zusammenhang zwischen den drei gesuchten Faktoren soll natürlich auch im Klassengespräch thematisiert werden.

Wissenswertes

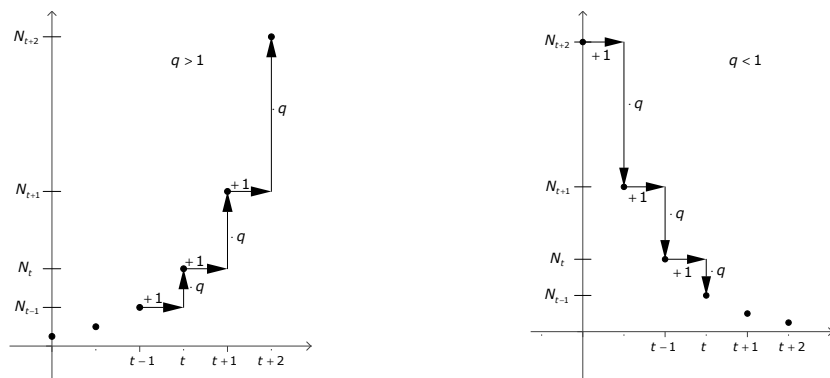
Nimmt eine beobachtete Größe N_t in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen relativen Anteil p zu (bzw. ab), so nennt man das zugrunde liegende Wachstum (bzw. die Abnahme) *exponentiell*. Es gilt dann also

$$N_{t+1} = n_t + p \cdot N_t = N_t \cdot (1 + p).$$

Setzen wir $q = 1 + p$, so folgt

$$N_{t+1} = N_t \cdot q.$$

Wir nennen im Folgenden den Faktor q den *Wachstumsfaktor*. Insbesondere auch dann, falls $q < 1$ und damit $p < 0$ gilt, obwohl in diesem Fall die Größe abnimmt. Die Datenpunkte (t, N_t) verlaufen dann folgendermaßen:



Diese beiden Vorstellungen solltet ihr also immer im Hinterkopf haben, wenn ihr an exponentielles Wachstum denkt. Zu beachten ist natürlich, dass sowohl das lineare als auch das exponentielle Wachstum (wenn $q > 1$) *unbegrenzt* sind. Das bedeutet, dass die betrachtete Größe in diesen Modellen über jede noch so große vorgegebene Zahl wächst, wenn man nur lange genug wartet. Das ist natürlich für biologische Situationen ziemlich unbefriedigend. Weder irgendwelche Körpergrößen, noch die Anzahl von Tieren irgendeiner Art können ungehindert bis ins *Unendliche* wachsen. Immer gibt es durch Ressourcenmangel, Platzmangel, Sättigungswerte oder das vorzeitige Abbrechen eines Wachstumsprozesses (z. B. durch Tod) natürliche Barrieren.

Selbstverständlich fragt man sich nun, welchen Sinn denn die bisher betrachteten Modelle überhaupt für das Verstehen des Wachstumsprozesses gehabt haben.

Man hätte auch ohne diese Modellüberlegungen die Größe des Kindes im Mutterleib zu jedem beliebigen Zeitpunkt genau genug *schätzen* können. Andererseits hat man durch die Behandlung der bisherigen Arbeitsaufträge aber schon einiges über mathematische Modelle und über ihr „Innenleben“, ihre Struktur, ihre „Muster“, ihre Darstellungen und Zusammenhänge gelernt. Ein typisches Anliegen und Ziel von Mathematik ist ja gerade, nicht nur oberflächlich zu beschreiben, sondern Sachverhalte und Phänomene zu *analysieren* und zu *verstehen*.

Modelle sind zwar immer nur Vereinfachungen realer Sachverhalte, man kann aber mit ihnen Situationen erklären, sehr prägnant beschreiben und manchmal auch unbekannte Entwicklungen voraussagen. Außerdem bilden das lineare und das exponentielle Modell die Grundlage vieler anderer Modelle, die für die Biologie und andere Wissenschaften wichtige Erklärungen liefern und interessante Prognosen erlauben.

Beispielsweise lässt sich durch eine kleine Abänderung des exponentiellen Wachstums schon ein viel realistischeres Modell für viele Wachstumsvorgänge finden, wie etwa für die Bevölkerungsentwicklung der Erde.

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Die Bevölkerung der Erde nimmt derzeit (Stand 2005) durch Geburten jährlich um etwa 2,0% zu (*Geburtenrate*), während sie durch Todesfälle um 0,9% abnimmt (*Sterberate*).

Gib eine Formel zur Berechnung von N_{t+1} (Bevölkerungsgröße nach $t + 1$ Jahren) aus N_t (Bevölkerungsgröße nach t Jahren) an!

Forme das Ergebnis so um, dass man erkennt, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt! Wie groß ist der Wachstumsfaktor?

Stelle den Verlauf der Bevölkerungsgröße über einen Zeitraum von 50 Jahren mit einer Tabellenkalkulation dar (zuerst mittels Tabelle, dann grafisch)! Beginne dabei mit 6,5 Milliarden Menschen im Jahr 2005!

Wie sind die nichtganzzahligen Werte für die Bevölkerungsgröße zu interpretieren?

Wie sieht die langfristige Entwicklung der Bevölkerungsgröße in diesem Modell aus? Kann es zu so einer „Bevölkerungsexplosion“ tatsächlich kommen? Begründet!

Erläuterung: Die Formel muss

$$N_{t+1} = N_t + 0,02 \cdot N_t - 0,009 \cdot N_t$$

lauten und kann in die Form

$$N_{t+1} = N_t \cdot q$$

gebracht werden, wenn man

$$q = 1 + \text{Geburtenrate} - \text{Sterberate} = 1 + 0,02 - 0,009 = 1,011$$

setzt. Es ergibt sich also exponentielles, unbegrenztes Wachstum, das aufgrund der begrenzten Kapazität der Erde unrealistisch ist.

Die nichtganzzahligen Werte ergeben auf den ersten Blick keinen Sinn, da es ja immer nur ganzzahlige Bevölkerungsgrößen geben kann. Nachdem das Modell aber ohnehin nur näherungsweise Beschreibungen bzw. Prognosen zulässt, müssen die berechneten Werte in jedem Fall noch sinnvoll gerundet werden.

Wissenswertes

Es gibt verschiedene Prognosen, wie sich die Bevölkerungsgröße der Erde weiter entwickeln wird. Es kann dabei aber nicht einmal genau angegeben werden, wie viele Menschen die Erde überhaupt „vertragen“ kann. Zu halbwegs brauchbaren Abschätzungen kommt man am ehesten, wenn man betrachtet, wie viele Nahrungsmittel maximal produziert werden können (derzeit wird beispielsweise Getreide für etwa 12 Milliarden Menschen angebaut) und wie viele Menschen höchstens auf einem Quadratkilometer Land leben können.

Experten gehen von einer maximalen Bevölkerungsgröße von 10 bis 20 Milliarden Menschen aus. Wir werden im Folgenden die maximale Anzahl an Menschen, also die *Kapazitätsgrenze* K der Erde, recht willkürlich auf 15 Milliarden festsetzen. Die Differenz aus Kapazitätsgrenze undzeitigem Bestand nennen wir dabei *Freiraum*.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Verändert das Modell, das ihr in Arbeitsauftrag 4 mittels Tabellenkalkulation erstellt habt so, dass der jährliche Zuwachs jetzt nicht nur zum derzeitigen Bestand, sondern auch zum derzeitigen Freiraum proportional ist! Wählt dabei selbst eine Proportionalitätskonstante, die eurer Meinung nach eine „gute Prognose“ liefert!

Was meint ihr? Warum ist es plausibel, den Zuwachs proportional zum noch vorhandenen Freiraum zu setzen?

Vergleicht den Verlauf des entstehenden Graphen mit dem Graph des exponentiellen Wachstums! Welchen Unterschied erkennt ihr?

Erscheint euch das neue Modell realistischer? Warum?

Findet weitere Vorgänge in der Natur, in der Physik oder in der Wirtschaft, wo das Wachstum immer schwächer wird, je näher man zu einem bestimmten Sättigungswert kommt!

Erläuterung: Die Rekursion lautet in diesem Fall

$$N_{t+1} = N_t + a \cdot N_t \cdot (15 - N_t).$$

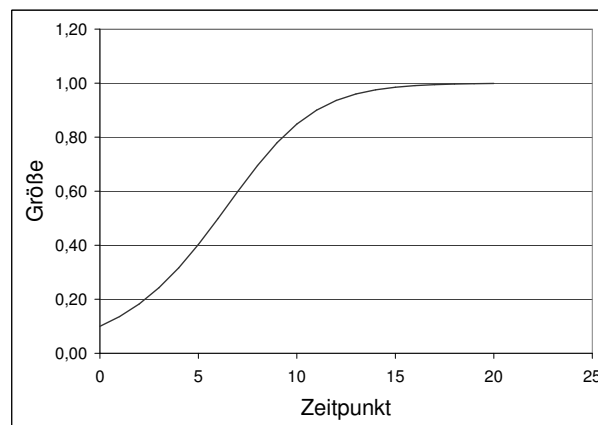
N_t ist dabei in Milliarden angegeben.

Diese Gleichung war historisch gesehen der Ausgangspunkt für die Chaostheorie in der Mathematik. Solange der Parameter a klein genug bleibt, ist der Fixpunkt $N_t = K$ stabil, also insbesondere lokal anziehend. Wächst jedoch a , so zeigt sich zuerst zu periodischem Verhalten, bei $a \approx 3$ kommt es schließlich zu einer empfindlichen Abhängigkeit vom Startwert, also zu Chaos⁷. Und das, obwohl das Wachstum deterministisch festgelegt ist! Das Gebiet der *Chaostheorie* kann an dieser Stelle natürlich auch in der Klasse thematisiert werden.

⁷Siehe dazu den Abschnitt 3.1.4.

Wissenswertes

Das Modell, das ihr gerade bearbeitet habt, nennt man *logistisches Wachstumsmodell*. Es basiert also auf dem Zusammenhang $N_{t+1} = N_t + a \cdot N_t \cdot (K - N_t)$ und zeigt einen typischen s-förmigen (*sigmoiden*) Verlauf, wenn man den Startwert N_0 und die Proportionalitätskonstante a genügend klein wählt.



Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Skizziert in geeigneten Koordinatensystemen den möglichen Verlauf der folgenden Prozesse! Wie sind die Achsen zu beschriften? Versucht anschließend einzuordnen, welche der Vorgänge durch welches der drei Modelle (linear, exponentiell oder logistisch) am besten beschrieben werden könnte!

- Veränderung eines Kapitals über mehrere Jahre, das mit Zinssatz 3% p.a. verzinst wird
- Ansteigen der Lebenserwartung im Laufe des vorigen Jahrhunderts in Österreich
- Körperwachstum in der Pubertät
- Bevölkerungszunahme in Afrika in den letzten 20 Jahren
- Höhenwachstum eines Baumes
- Anzahl der weltweit mit HIV infizierten Menschen

Holt gegebenenfalls Informationen dazu ein!

Findet selbst noch einige Situationen, die durch eines der drei Modelle angenähert werden könnten!

Erläuterung: Es soll mit diesem Arbeitsauftrag die grafische Veranschaulichung verschiedener Prozesse in den Vordergrund gestellt werden. Die Schüler sollen begründen lernen, warum sie ein bestimmtes Modell für eine bestimmte Situation auswählen würden.

Kapitel 6

Räuber-Beute-Modelle (Unterrichtsmaterialien)

Zwei vorerst voneinander unabhängige Phänomene waren ausschlaggebend für die Entwicklung von Modellen für Räuber-Beute-Systeme. Zum einen war das die Beobachtung, dass nach dem Ersten Weltkrieg der Raubfischbestand in der Adria wesentlich höher war als in den Jahren davor. Natürlich kann das teilweise durch den Krieg erklärt werden, wo die Fischerei verständlicherweise weitestgehend eingestellt war. Aber es blieb trotz dieser Erklärung nach wie vor offen, warum dieser Umstand die Raubfische viel stärker begünstigt hatte als die Beutefische¹.

Das veranlasste unabhängig voneinander die beiden Mathematiker Alfred James Lotka und Vito Volterra zu einer mathematischen Beschreibung der Beziehung zwischen Räubern und Beutetieren. Das Ergebnis waren die so genannten *Lotka-Volterra-Differentialgleichungen*, die in der Folge sehr berühmt werden sollten. Mit diesem Modell konnte auch das zweite beobachtete Phänomen erklärt werden, nämlich die periodischen Schwankungen in den Luchs- bzw. Schneehasenpopulationen, die von der Hudson's Bay Company im Zeitraum von 1843 bis 1935 aufgezeichnet wurden.

Es werden nun drei Zugänge zum Thema *Räuber-Beute-Modelle* vorgestellt, die für jeweils unterschiedliche Schulstufen, mathematische Vorkenntnisse und zu erlernende Fähigkeiten konzipiert sind.

¹vgl. HOFBAUER und SIGMUND 1998, S.11

6.1 Wenn Luchse Hasen jagen

Schulstufe: 2. bis 3. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: Prozentrechnung

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen, Recherchen im Internet

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 4 bis 8 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

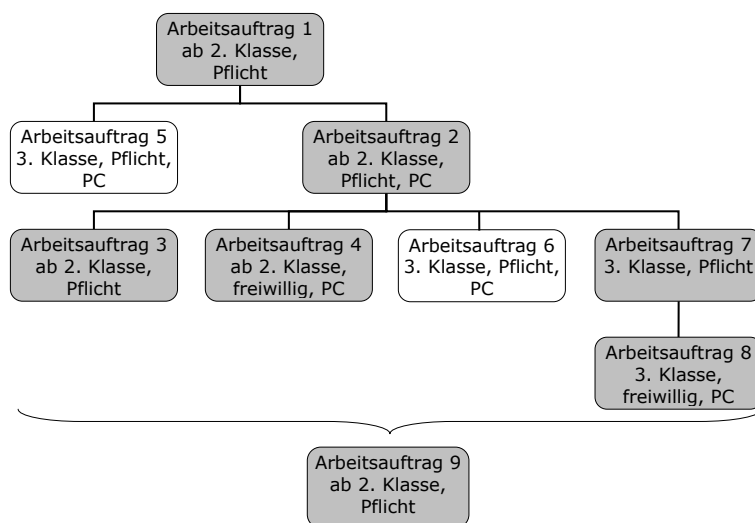
- Lesen und Interpretieren von Diagrammen
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über Wirkungszusammenhänge in der Natur
- Umgang mit dem PC
- Fächerübergreifender Unterricht
- Selbstorganisation
- Teamfähigkeit
- Bewusstsein, dass Modelle kein vollständiges Abbild sondern bestenfalls eine vereinfachende Beschreibung der Natur sind
- Trainieren von Rechenfertigkeiten (Prozentrechnung)

Lehrplanbezug: Neben vielfältigen Fertigkeiten, die im Unterstufenlehrplan aus dem Jahr 2000 in den Teilen *Bildungs- und Lehraufgabe* sowie *Didaktische Grundsätze* angeführt sind, beruht das nachfolgende Unterrichtsmaterial vor allem auf den folgenden Bereichen des Lehrstoffes, die in allen 4 Klassen der Unterstufe angeführt sind:

- Arbeiten mit Modellen
- Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 8 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 1, 2 und 7. Es ist außerdem angeführt, ab welcher Klasse ein Arbeitsauftrag durchgeführt werden kann und ob Computerunterstützung nötig ist.



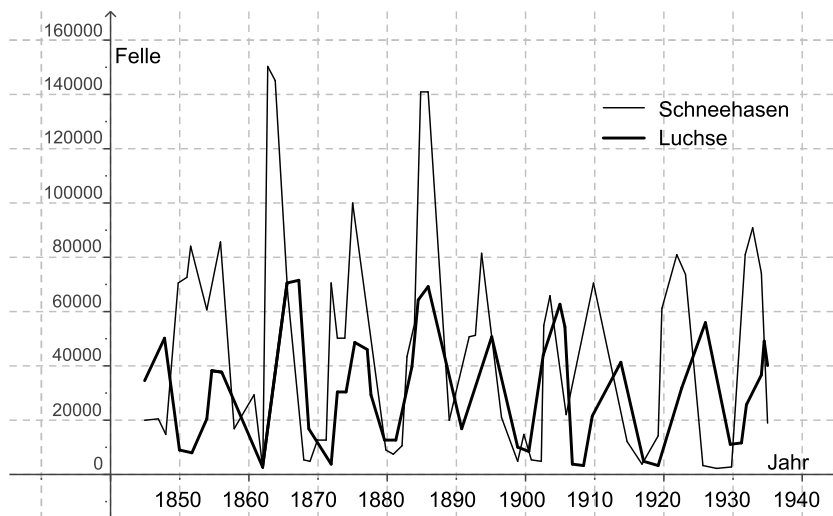
Das Inselleben auf Neufundland

Heute einmal ein Kaninchen, übermorgen vielleicht Fisch und nächste Woche dann ein kleiner Hirsch. So oder so ähnlich sieht normalerweise der „Speiseplan“ eines erfolgreich jagenden Luchses aus. Sofern es ein solch vielfältiges Beuteangebot in seiner Umgebung überhaupt gibt. Die *kanadischen Luchse* auf der Insel Neufundland beispielsweise ernähren sich hauptsächlich von Schneehasen, andere Beutetiere bekommen sie nur selten zu Gesicht.

Es zahlt sich aus, einen tieferen Blick darauf zu werfen, wie sich diese beiden Tierarten gegenseitig beeinflussen. Ihr werdet sehen, man wird dabei einige interessante Entdeckungen machen.

Wissenswertes

Die Hudson's Bay Company - eine kanadische Firma, die mit Fellen handelte - hat über einige Jahrzehnte Aufzeichnungen über die von der Insel Neufundland gelieferten Schneehasen- und Luchsfelle geführt. Diese Aufzeichnungen findest du in folgender Abbildung:



Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse

Pflicht

Was wird in dieser Abbildung dargestellt? Erklärt die Bezeichnungen auf den Achsen! Warum wurden die beiden Diagramme wohl in *einer gemeinsamen* Abbildung dargestellt und nicht getrennt?

Wie viele Schneehasenfelle wurden in den Jahren 1860, 1885 und 1920 ungefähr geliefert? Was macht das Ablesen aus dem Diagramm hier so schwierig?

Wie viele Luchsfelle gab es in diesen Jahren?

In welchen Jahren gab es besonders viele Hasen, wann besonders viele Luchse? Notiert je mindestens fünf Zeiträume! Was fällt euch dabei auf?

Erläuterung: In der Abbildung sieht man einerseits die Anzahl der Luchsfelle und andererseits die Anzahl der Schneehasenfelle, die im Zeitraum von 1843 bis 1935 an die Hudson's Bay Company geliefert wurden. Dabei ist die erste Achse die Zeitskala, die zweite Achse gibt die Anzahl der Felle an. Eine gemeinsame Darstellung ist sinnvoll, da so besser Vergleiche angestellt werden können. 1860 wurden etwa 25000 Hasen- und 10000 Luchsfelle, 1885 ungefähr 140000 Hasen- und 70000 Luchsfelle und 1920 etwa 55000 Hasen- und 10000 Luchsfelle an die Hudson's Bay Company geliefert. Das Ablesen wird dabei durch die sehr grobe Einteilung der Achsen erschwert. Besonders viele Hasen gab es in den Jahren um 1855, 1865, 1875, 1885, 1895, 1905, 1910, 1925 und 1935. Es fällt dabei eine gewisse Regelmäßigkeit auf. Außerdem folgen kurz nach den Jahren hoher Hasenbestände immer Zeiten, in denen es viele Luchse gab.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Versucht zu beschreiben, wie es zu solchen regelmäßigen Schwankungen kommen konnte! Warum vermehren sich die Luchse immer dann, wenn es gerade viele Hasen gibt? Warum geht die Anzahl dann aber wieder zurück?

Gibt es auch in unseren Wäldern solche Schwankungen in den Tierzahlen? Forste nach!

Erläuterung: Offenbar sind die Bestandszahlen der beiden Tierarten stark aneinander gekoppelt. Die Anzahl der Luchse ist also abhängig von der Anzahl der Hasen und umgekehrt. Steigt beispielsweise die Zahl der Hasen, so haben die Luchse in den darauf folgenden Jahren viel zu fressen und können sich vermehren. Durch die steigende Anzahl der Luchse sinkt jedoch die Zahl der Hasen wieder und es kommt zur Konkurrenz der Luchse, die um die verbleibenden Hasen kämpfen müssen. Dabei bleibt eine gewisse Zahl von Räubern auf der Strecke, was ein Zurückgehen der Bevölkerungszahl der Luchse bewirkt. Dadurch wiederum können sich die Hasen erholen und das Spiel beginnt von vorne.

Wissenswertes

Hier findet ihr drei erfundene Zeitungsberichte, die auf die Fellstatistik der Hudson's Bay Company Bezug nehmen. Dabei haben sich allerdings einige Fehler eingeschlichen.

Hasenzahl wächst rasant

Erfreuliches gibt es aus Sicht der Jäger zu berichten. Es gibt heuer etwa achtmal so viele Schneehasen wie noch vor 15 Jahren auf der Insel Neufundland. Außerdem scheint es, als ob die Anzahl der Hasen auch in den nächsten Jahren noch weiter steigen würde. (28. Juli 1895)

In ein paar Jahren gibt es keine Hasen mehr

Dramatische Entwicklungen gibt es im Bereich der Hasenbestände in den letzten Jahren, berichtet die Umweltorganisation „Ein Herz für Tiere“. Ein Sprecher der Organisation befürchtet, dass aufgrund der starken Rückgänge schon in 2 Jahren keine Hasen mehr vorhanden sein werden. So wenige Hasen wie heuer habe es überhaupt noch nie gegeben, allein im letzten Jahr habe es einen Rückgang von über 100% gegeben. Er fordert das Umweltministerium auf, ein Jagdverbot für Hasen zu erlassen. (13. März 1935)

Immer mehr Luchse

Die Anzahl der Luchsfelle, die der kanadischen Pelzhandelsfirma Hudson's Bay Company heuer geliefert wurden, sei im Vergleich zum Jahr 1880, so der kanadische Jagdverband, auf das Vierzehnfache gestiegen. Es wurden allerdings nur halb so viele Hasenfelle geliefert, nämlich etwa 70 Stück. (2. Dezember 1885)

Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Einzelarbeit

Pflicht: zumindest einen Zeitungsartikel bearbeiten, die beiden anderen sind freiwillig

Verfasse einen Leserbrief an die Zeitung, in dem du auf die Zeitungsartikel kritisch eingehst!

Wie ist es zu den Fehlern gekommen? Was wollten die drei Autoren mit den Artikeln erreichen?

Schreibe die Zeitungsmeldungen so um, dass die Informationen richtig sind!

Erläuterung: Dieser Arbeitsauftrag eignet sich gut zur Leistungsfeststellung der Schüler. Es wird einerseits gefordert, dass sie aus dem Diagramm ablesen können, dass sie emotional geprägte Artikel in sachliche umformen, und dass sie andererseits analysieren, wie es zu Fehlern beim Ablesen von Diagrammen kommen kann. Sie sollen so darauf aufmerksam werden, wie eventuell eigene Fehler vermieden werden können.

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Kleingruppe
freiwillig

Was meint ihr: Wie würde sich der weitere Verlauf der Grafik ändern, wenn der Luchsbestand mit einem Schlag auf Null zurückgehen würde (zum Beispiel durch Ausrottung durch den Menschen)?

Informiert euch über die Hudson's Bay Company! Ist diese Firma eurer Meinung nach als Quelle für derartige Daten zuverlässig?

Erläuterung: Die erste Frage lässt sich natürlich nicht genau beantworten, es lässt sich aber immerhin vermuten, dass das Wachstum der Hasen zumindest für eine Weile anhält. Es kann darüber spekuliert werden, wie der weitere Verlauf der „Hasenkurve“ aussehen wird und wodurch die Anzahl der Hasen begrenzt wird.

Durch Recherchen im Internet findet man heraus, dass die Hudson's Bay Company eine sehr alte (1670 gegründete), renommierte Firma ist, die übrigens auch heute noch existiert, wenn sie auch mittlerweile nicht mehr mit Fellen handelt.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse

Pflicht: die erste und die dritte Arbeitsanweisung, die zweite ist freiwillig

Die Diagramme der Hudson's Bay Company zeigen eigentlich nur die Anzahl der gelieferten Felle, also der getöteten Tiere, pro Jahr. Wir würden aber viel lieber etwas über die Anzahl der *derzeit lebenden* Luchse und Hasen erfahren. Versucht dazu die folgende Aussage zu begründen: „Je mehr Luchsfelle in einem Jahr von Neufundland an die Hudson's Bay

Company geliefert werden, desto mehr Luchse leben auch dort in diesem Jahr.“ Dasselbe kann man natürlich auch für die Hasen behaupten.

Das bedeutet, dass die Schwankungen, die wir in der Abbildung gesehen haben auch bei den lebenden Tieren auftreten. Begründet diese Aussage möglichst genau mit Hilfe der Abbildung. Denkt euch zum Beispiel, dass jährlich 10% der lebenden Luchse und 10% der lebenden Hasen den Pelzjägern zum Opfer fallen)! Wie würde dann eine entsprechende Abbildung für die lebenden Tiere aussehen?

Wie könnten näherungsweise direkte „Messungen“ der derzeitigen Tierbestände z. B. durch Zählen von Tierbauten in einem bestimmten Gebiet durchgeführt werden? Holt dazu (falls nötig) Informationen aus dem Internet ein! Formuliert eine sehr gründliche Anleitung für einen Jäger, der diese Messung vornehmen soll! Versetzt euch in seine Lage und überlegt, welche Fragen er zur Durchführung haben könnte! Versucht, diese in eurer Anleitung zu beantworten!

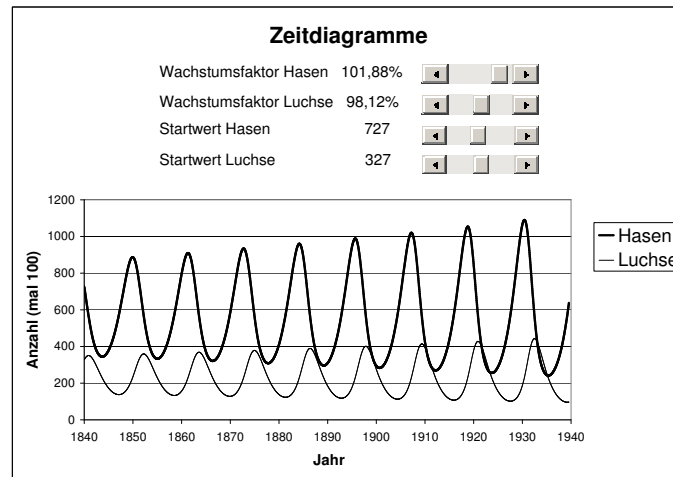
Erläuterung: Es erscheint zumindest plausibel, dass die Pelzjäger in den Jahren großer Bestände erfolgreicher waren, als in Jahren mit sehr niedrigen Tierpopulationen und sich daraus ein (wenn auch nicht unbedingt wie in der zweiten Fragestellung erwähnter direkt proportionaler) Zusammenhang ableiten lässt.

Die Abbildung für die lebenden Tiere würde in diesem Fall genauso aussehen wie die der Tierfelle, allerdings wären die Zahlen auf der y-Achse mit dem Faktor 10 multipliziert.

Die Anweisung an den Jäger könnte z. B. beinhalten, dass er nur ein kleines Gebiet nach Bauten durchsucht, von deren Anzahl er dann auf das gesamte Gebiet hochrechnen kann. Weiters müsste er einige Bauten genauer beobachten, um feststellen zu können, wie viele Tiere durchschnittlich in einem Bau leben. Andere Möglichkeiten zur direkten „Messung“ wären zum Beispiel die Beobachtung mittels nächtlicher *Scheinwerfertaaxationen* oder die sogenannte *Fang- und Wiederfangmethode*.

Wissenswertes

Im folgenden Applet *Wenn Luchse Hasen jagen* (siehe CD-Rom) kann man selbst Einfluss auf die Entwicklung der beiden Tierpopulationen nehmen.



Dieses Applet versucht, den Sachverhalt, den ihr gerade kennen gelernt habt, durch ein recht einfaches mathematisches Modell nachzubilden.

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Partnerarbeit am PC, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Was ist der Unterschied zwischen den Zeitdiagrammen im Applet und den Aufzeichnungen der Hudson's Bay Company?

Experimentiert mit den beiden Parametern *Wachstumsfaktor Hasen* und *Wachstumsfaktor Luchse*! Wie ändern sich die beiden „Kurven“? Macht dabei Aussagen über die Anzahl der Schwankungen im Zeitraum von 1840 bis 1940, über die Höhe der Schwankungen und über Veränderungen des Verhältnisses aus Hasenzahl zu Luchszahl!

Betrachtet den Fall, bei dem der Startwert der Luchse gleich Null und der Wachstumsfaktor der Hasen sehr klein (etwa 100,1%) ist! Sind die entstehenden „Kurven“ für diesen Spezialfall realistisch? Begründet eure Antwort!

Erläuterung: Der Verlauf der Graphen wirkt kontinuierlicher und regelmäßiger, was auf Vereinfachungen bei der Erstellung des Modells hindeutet. Die Zeitdiagramme können die Wirklichkeit nur annähernd beschreiben und sind keineswegs ein genaues Abbild derselben. Bei den Aufzeichnungen der Hudson's Bay Company wirkt es manchmal so, als ob die Hasen die Luchse jagen, da die Maxima der Hasen stellenweise (vor allem in der Zeit um das Jahr 1880) jenen der Luchse hinterherhinken. Man könnte zwar ein Modell bilden, das exakter an die Daten passt, dieses ließe sich dann aber nicht ordentlich biologisch interpretieren.

Je größer der Parameter *Wachstumsfaktor Hasen* wird, desto

- mehr Schwankungen pro festgelegtem Zeitraum gibt es
- kleiner ist die Amplitude (Maximum minus Minimum einer „Schwankung“) sowohl bei den Hasen als auch bei den Luchsen
- kleiner wird das Verhältnis aus durchschnittlicher Hasenzahl zu durchschnittlicher Luchszahl

Je größer der Parameter *Wachstumsfaktor Luchse* wird, desto

- weniger Schwankungen pro festgelegtem Zeitraum gibt es
- größer wird die Amplitude bei den Luchsen und desto kleiner wird die Amplitude bei den Hasen
- größer wird das Verhältnis aus durchschnittlicher Hasenzahl zu durchschnittlicher Luchszahl

Für den Fall fehlender Luchse ergibt sich exponentielles Wachstum der Hasen. Da es durch den Lebensraum oder die Verfügbarkeit von Nahrung natürliche Wachstumsbeschränkungen gibt, ist dieses Modell zumindest für lange Zeiträume nicht realistisch.

Ein kleines Räuber-Beute-Spiel

Spieleranzahl: 4

Material: Zettel, Stift, Aktionskarten, Hasen- und Fuchse-Aufzeichnungsblatt (siehe CD-Rom)

Vorbereitungen: Es werden zwei 2er-Teams gebildet: ein Hasenteam, das mit 15 Hasen beginnt, und ein Fuchseteam, das mit 5 Füchsen startet. Jedes Team legt sich einen Zettel für Nebenrechnungen und das jeweilige Aufzeichnungsblatt bereit.

Beschreibung: Wir werden in diesem Spiel selbst die „Hudson’s Bay Company“ nachahmen und Aufzeichnungen über die Anzahl von Hasen und Füchsen machen. Dabei soll auch der Zufall ein wenig mitspielen, die Aktionskarten entscheiden nämlich mit, wie viele Hasen pro Runde durch die Füchse gefressen werden.

Spielrunde: Zu Beginn jeder Spielrunde ziehen die „Hasen“ eine Aktionskarte vom Hasen-Stapel und die „Füchse“ eine vom Fuchs-Stapel. Danach werden die Anweisungen befolgt und die Ergebnisse in die Aufzeichnungsblätter eingetragen!

Beispiel: Zu Beginn der ersten Runde sehen die Aufzeichnungsblätter so aus:

Aufzeichnungsblatt Hasen				Aufzeichnungsblatt Füchse			
Monat	Anzahl	Zuwachs	Tote	Monat	Anzahl	Zuwachs	Tote
1	15			1	5		
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
6				6			
7				7			
8				8			
9				9			
10				10			
11				11			
12				12			
13				13			
14				14			
15				15			

Wenn das Hasenteam jetzt die Anweisungen

„Wachstum: 40% des derzeitigen Hasenbestandes und
Getötete Hasen: 2% vom derzeitigen Produkt aus Hasen und
Füchsen“

bekommt, so ist zu berechnen:

$$40\% \text{ von } 15 = 0,4 \cdot 15 = 6$$

$$2\% \text{ von } 15 \cdot 5 = 0,02 \cdot 15 \cdot 5 = 1,5 \approx 2$$

Nach Rundung auf natürliche Zahlen kann man dann die Anzahl der
Hasen in der nächsten Runde wie folgt berechnen:

$$15 + 6 - 2 = 19$$

Das Fuchseteam geht analog vor, etwa:

„Wachstum: 3% vom derzeitigen Produkt aus Hasen und Füchsen
und

Tote: 20% vom derzeitigen Fuchsbestand“

$$3\% \text{ von } 15 \cdot 5 = 0,03 \cdot 15 \cdot 5 = 2,25 \approx 2$$

$$20\% \text{ von } 5 = 0,2 \cdot 5 = 1$$

Die Anzahl der Füchse in der nächsten Runde berechnet sich zu
 $5 + 2 - 1 = 6$. Die Ergebnisse werden nun eingetragen:

Aufzeichnungsblatt Hasen

Monat	Anzahl	Zuwachs	Tote
1	15	6	2
2	19		
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Aufzeichnungsblatt Füchse

Monat	Anzahl	Zuwachs	Tote
1	5	2	1
2	6		
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

In der nächsten Runde wird also mit 19 Hasen und 6 Füchsen weitergespielt.

Ende: Das Spiel endet, wenn eine der beiden Tierarten ausgestorben ist (das heißt, wenn einer der Bestände Null oder sogar negativ wird), oder wenn mindestens 15 Runden gespielt sind.

Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Gruppe zu 4 Schülern, Diskussion in der Klasse

Pflicht

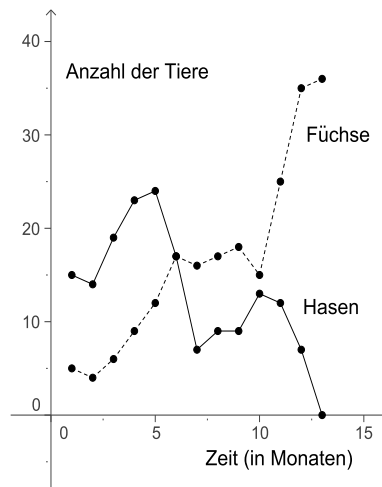
Spielt das Räuber-Beute-Spiel!

Fertigt ein Diagramm an, das sowohl den Verlauf der Hasenanzahl als auch jenen der Fuchsanzahl im Laufe der Zeit zeigt! Auf der x-Achse soll 1 cm einem Monat entsprechen während auf der y-Achse die Anzahl der Tiere angegeben werden soll. Wählt eine geeignete Einteilung der y-Achse!

Präsentiert euer Diagramm der Klasse!

Sind die einzelnen Spiele ähnlich verlaufen? Was fällt euch auf und wie erklärt ihr es?

Erläuterung: Die Hasen sterben bei diesem Spiel fast immer zuerst aus, vor allem dann, wenn sie anfänglich stark wachsen. Dazu kommt es, da die Bestandszahlen der Tiere zu Beginn eher gering sind. Das Produkt der beiden ist also auch eher klein, was zur Folge hat, dass die Hasen nur geringfügig dezimiert werden und dadurch ungehindert wachsen können, während die Füchse, deren Wachstum ja von diesem Produkt abhängt, weniger werden, da vorerst der negative Term dominiert. Durch den rasanten Anstieg der Hasenzahl ändert sich aber die Situation und das Produkt aus Hasen- und Fuchsanzahl wird rasch sehr groß. Die anfänglich gut gedeihende Hasenbevölkerung nimmt jetzt sehr rasch ab, während sich die Füchse in gleichem Maße erholen. Ein typischer Verlauf ist der folgende, bei dem die Hasen nach 13 Monaten aussterben:

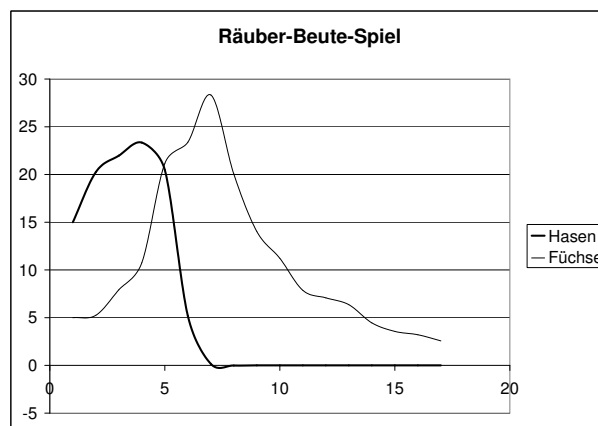


Arbeitsauftrag 8

Bearbeitung: Partnerarbeit am PC
freiwillig

Im Applet *Räuber-Beute-Spiel* (siehe CD-Rom) kann man das oben erklärte Spiel mit nur einem Tastendruck durchspielen lassen und sich den Verlauf ansehen. Wiederholt das Spiel dabei einige Male! Werden eure Vermutungen aus Arbeitsauftrag 7 bestätigt?

Spielt das Spiel nun genau 30 Mal durch und notiert jedesmal, ob die Hasen innerhalb der ersten 15 Monate aussterben! Berechnet nun, in wie viel Prozent der Fälle das passiert ist!



Erläuterung: Der „Zufall“, der vorher durch die Aktionskarten mitgespielt hat, wird hier durch die Excel-Funktion „Zufallszahl“ simuliert. In etwa 80% der Spiele sterben die Hasen schon innerhalb der ersten 15 Monate aus.

Arbeitsauftrag 9

Bearbeitung: Einzelarbeit

Pflicht: Wähle eine der folgenden Aufgaben!

Schreibe ein Kapitel eines Schulbuches zum Thema *Räuber-Beute-Modelle*!

Versuche dabei, die wichtigsten Erkenntnisse der letzten Unterrichtsstunden übersichtlich darzustellen! Du kannst auch eigene Aufgaben erfinden und Grafiken anfertigen. Achte auf ein ansprechendes Layout deines Schulbuches! (ca. zwei A4-Seiten)

Stell dir vor, deine Eltern fragen dich, was du in den letzten Mathematikstunden gelernt hast! Verfasse eine Antwort (ca. ein bis zwei A4-Seiten), in der du vom *Räuber-Beute-Modell*, der *Hudson's Bay Company*, dem Begriff des *Wachstumsfaktors* und den *Schwankungen* in den Bestandszahlen der Tiere berichtest!

Erläuterung: Dieser Arbeitsauftrag dient dazu, dass sich die Schüler selbst einen Überblick über das Erlernte verschaffen. Sie sollen dabei üben, das Wesentliche zu erkennen, auszuwählen und in präzisen Formulierungen niederzuschreiben. Das fällt beim ersten Mal bestimmt noch vielen Schülern sehr schwer, da hier die eigene Aktivität sehr stark in den Vordergrund tritt. Auch hier besteht eine gute Möglichkeit zur Leistungsfeststellung, da sich der Lehrer relativ einfach einen Überblick darüber verschaffen kann, was die einzelnen Schüler verstanden und was sie davon auch in ihre Arbeit integriert haben.

Sollte der Arbeitsauftrag (das gilt vor allem für die erste Anweisung) für Einzelarbeit zu schwierig sein, könnte folgender Vorschlag umgesetzt werden: Als Hausübung sollen die Schüler erste Entwürfe anfertigen, die Schulbuchseiten werden aber erst danach im Team im Rahmen des Unterrichts erstellt.

6.2 Auf den Spuren von Vito Volterra

Schulstufe: 5. bis 6. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: exponentielles Wachstum, Funktionen

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 5-8 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

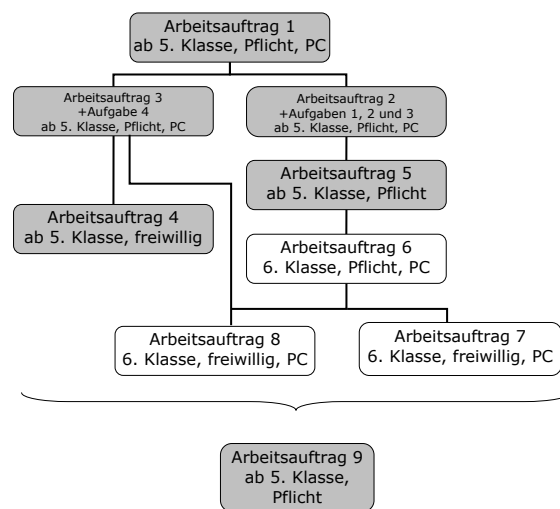
- Lesen und Interpretieren von Diagrammen
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Bewerten und Verbessern von Modellen
- Umgang mit dem PC
- Selbstorganisation
- Teamfähigkeit
- Bewusstsein, dass Modelle kein vollständiges Abbild sondern bestenfalls eine vereinfachende Beschreibung der Natur sind
- Umgang mit Funktionen und rekursiven Darstellungen von Folgen

Lehrplanbezug: Es wird vor allem Lehrstoff aus den folgenden Bereichen abgedeckt:

- Proportionale Abhängigkeiten
- Prozentrechnung
- Rekursives Darstellen
- Dynamische Prozesse

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 8 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 1, 2, 3, 5 und 6. Es ist außerdem angeführt, ab welcher Klasse ein Arbeitsauftrag durchgeführt werden kann und ob Computereinsatz notwendig ist.

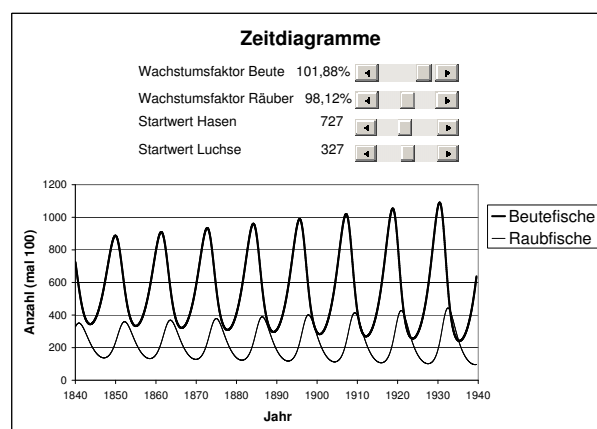


Eine seltsame Entdeckung

Die Fischer in der italienischen Hafenstadt Ancona haben am Ende des ersten Weltkrieges eine ganz verblüffende Entdeckung gemacht. Nachdem sie während der Kriegsjahre das Fischen fast vollkommen eingestellt hatten, war jetzt der Anteil der Raubfische an der Gesamtfischzahl wesentlich höher als vor dem Krieg. Sie konnten sich dieses Phänomen nicht erklären. Wieso sollte sich das Verhältnis aus Raubfischen und Beutefischen ändern? Hatte der Krieg etwas damit zu tun? Würden die Beutefische in Zukunft noch weniger werden? Einer der Fischer hatte schließlich die Idee, seinen Schwiegervater mit diesem Problem zu konfrontieren. Dieser war nämlich ein angesehener Mathematiker. Sein Name war Vito Volterra.

Wissenswertes

Vito Volterra hat sich also an die Arbeit gemacht, um zu einer mathematischen Beschreibung der Situation zu kommen. Das Excel-Applet *Auf den Spuren von Vito Volterra 1* (siehe CD-Rom) beinhaltet jenes Modell, das er zu diesem Zweck entwickelt hat. Es stellt das Zusammenspiel von Beutefischen und Raubfischen über einen Zeitraum von etwa 3000 Monaten dar.



Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Betrachtet zuerst die Zeitdiagramme! Was beschreiben die beiden „Kurven“? Welche Auffälligkeiten sind zu erkennen? Wie würde der weitere Verlauf der Diagramme aussehen?

Wie könnt ihr euch die Schwankungen erklären? Tipp: Um einen besseren Einblick in das Modell zu bekommen, könnt ihr auch die Schieberegler betätigen und dabei die entstehenden Veränderungen im Zeitdiagramm beobachten. Vervollständigt dabei auch folgende Sätze:

Wenn die Anzahl der Beutefische gerade sehr hoch ist, so die Anzahl der Raubfische in den darauffolgenden Monaten. Wenn es gerade sehr viele Räuber gibt, dann die Anzahl der Beutefische. Eine Schwankung dauert immer etwa ... Monate.

Kommt euch dieses Modell realistisch vor? Unter welchen Voraussetzungen? Begründet eure Antworten!

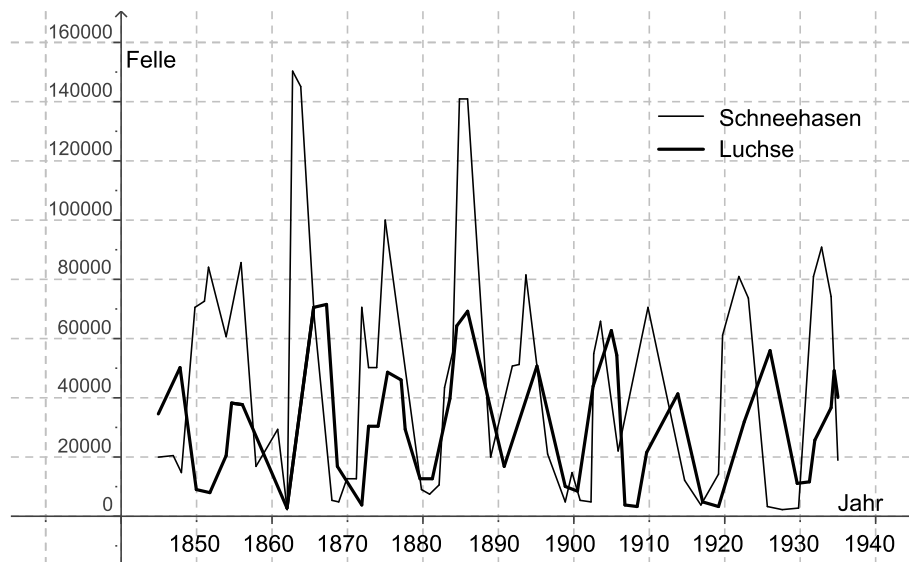
Erläuterung: Es sind starke Schwankungen der beiden Tierpopulationen zu sehen, die in regelmäßigen Abständen passieren. Die Maxima der Raubfischpopulation „hinken“ jenen der Beutefischpopulation zeitlich ein wenig hinterher.

Das kann man folgendermaßen erklären: Die Räuber sind auf das Vorhandensein von Beute angewiesen. Gibt es viele Beutefische, so haben die Raubfische viel zu fressen und können sich dadurch stark vermehren. Das hat aber zur Folge, dass immer mehr Beutefische gefressen werden und dass dadurch deren Anzahl sinkt. Wenn es allerdings nur noch wenige Beutefische gibt, so verenden auch wieder die Raubfische, da sie nun nicht mehr genug Nahrung haben. Bei einer geringen Anzahl an Räubern haben dann die Beutefische wieder die Möglichkeit sich zu erholen und das Spiel beginnt von vorne.

Realistisch kann es nur dann sein, wenn eine Raubtierart sehr stark vom Vorhandensein einer bestimmten Beutetierart abhängt. Allerdings ist zu betonen, dass dies ein sehr vereinfachtes und daher nur beschränkt für die Realität gültiges Modell sein kann.

Und noch eine Entdeckung

Solche Schwankungen von Tierpopulationen kommen tatsächlich in der Natur vor. Und zwar nicht nur bei Raub- und Beutefischen in der Adria, sondern beispielsweise auch auf der Insel Neufundland. Hier ernähren sich Luchse nur von einigen wenigen Beutetierarten, unter anderem von Schneehasen. Die Hudson's Bay Company, eine renommierte Handelsfirma für Tierfelle, hat diesbezüglich Aufzeichnungen über die aus Neufundland gelieferten Pelze im Zeitraum von 1845 bis 1935 geführt. Dabei ist ein sehr ähnlicher Diagrammverlauf zu erkennen, wie ihr ihn gerade gesehen habt.



Wissenswertes

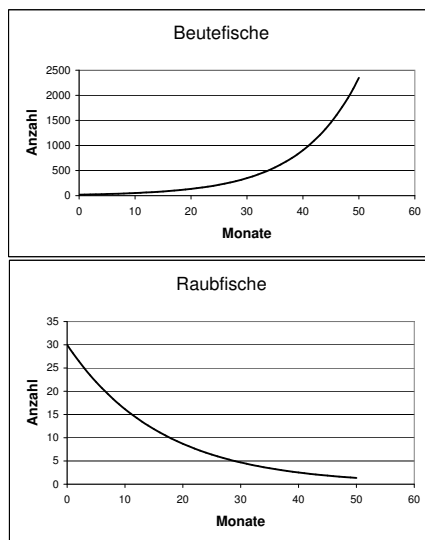
Wir wollen das oben betrachtete Modell jetzt ein wenig genauer durchleuchten. Dazu habt ihr in der Bearbeitung des Excel-files *Auf den Spuren von Vito Volterra 2* Gelegenheit. Es befinden sich darin vier Datenblätter (Exponentielles Wachstum, Räuber-Beute 1, Logistisches Wachstum und Räuber-Beute 2).

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Einzel- oder Partnerarbeit
Pflicht

Exponentielles Wachstum kennt ihr schon vom Thema *Zinseszinsrechnung*. Das erste Datenblatt *Exponentielles Wachstum* befasst sich – wie der Name schon verrät – mit exponentiellem Wachstum von Beutefischen und exponentiellem Rückgang von Raubfischen. Versucht herauszufinden, wie dabei gerechnet wurde! Tipp: Klickt auf die Zellen B3 und C3 und betrachtet die Formeln, die ihnen zugrunde liegen!

Monat	Beutefische	Raubfische
0	20	30
1	22	28
2	24	27
3	27	25
4	29	23
5	32	22
6	35	21
7	39	19
8	43	18
9	47	17
10	52	16
11	57	15
12	63	14
13	69	13



Erläuterung: Ziel ist es, die rekursiven Darstellungen

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n + 0,1 \cdot B_n \\ C_{n+1} &= C_n - 0,06 \cdot C_n \end{aligned}$$

zu erkennen.

Aufgabe 1

Wie groß ist der relative monatliche Zuwachs/Rückgang

- (a) der Beutefische
- (b) der Raubfische?

Lösung:

- (a) 10%
- (b) -6%

Aufgabe 2

- (a) In welchem Monat überschreitet die Beutetieranzahl das Zehnfache bzw. das Hundertfache ihres Ausgangswertes?

- (b) Vergrößere den relativen monatlichen Zuwachs der Beutefische auf das Doppelte! Tipp: Man kann hier eine große Stärke von Excel ausnutzen. Verändere dazu die Formel in der Zelle B3, bewege die Maus zur rechten unteren Ecke dieser Zelle (bis ein kleines Kreuz erscheint) und ziehe dann mit gedrückter Maustaste nach unten bis zur Zelle B52! Dadurch wird die in Zelle B3 eingegebene Formel in die unteren Zellen übertragen. Wann wird *diesmal* das Zehnfache bzw. das Hundertfache des Startwerts erreicht?
- (c) Ist diese Art von Wachstum realistisch?

Lösung:

- (a) Im 25. bzw. im 49. Monat
- (b) Schon im 13. bzw. im 26. Monat
- (c) In der Natur ist exponentielles Wachstum unrealistisch, da Wachstum immer durch äußere Einflüsse, wie das Fehlen von Ressourcen, Platz oder Nahrung begrenzt wird.

Aufgabe 3

- (a) Gib für das Beutewachstum eine Formel an, mit der man die Anzahl der Beutetiere B_t am Ende eines beliebigen Monats t berechnen kann! Tipp: Überlege zuerst, wie man B_1 aus B_0 berechnen kann, danach wie man B_2 aus B_0 berechnen kann, usw. Bist du bei B_4 angelangt, sollte es dir möglich sein, eine Formel zu finden, wie man B_t aus B_0 berechnen kann.
- (b) Wie in (a), jetzt aber für die Raubfische.
- (c) Berechne mit den in (a) und (b) erhaltenen Formeln die Anzahl der Beutefische bzw. Raubfische nach 30 Monaten und vergleiche deine Ergebnisse mit der Tabelle am Excel-Datenblatt! Was fällt dir dabei auf?

Lösung:

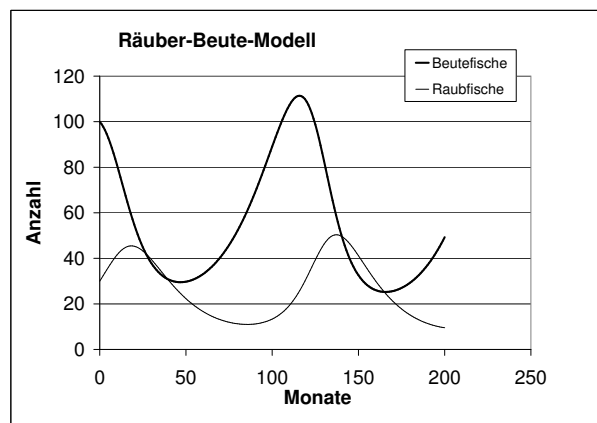
- (a) $B_t = 20 \cdot 1,1^t$, $t \dots$ Zeit in Monaten
- (b) $C_t = 30 \cdot 0,94^t$, $t \dots$ Zeit in Monaten
- (c) $B_{30} = 348,99$, $C_{30} = 4,69$; Die Werte in der Excel-Tabelle sind (sinnvollerweise) auf ganze Zahlen gerundet.

Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Partnerarbeit, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Die Anzahl der Raubtiere hat im ersten Datenblatt noch keinen Einfluss auf das Wachstum der Beutetiere ausgeübt. Genauso wenig wurde der Rückgang der Räuber in irgendeiner Weise vom Vorhandensein von Beutetieren gebremst. Das wollen wir im nächsten Schritt ändern. Betrachtet das Räuber-Beute-Modell am Datenblatt *Räuber-Beute-1*! Hier findet sich eine vereinfachte Version des Modells, das ihr schon vorher bearbeitet habt. Ihr sollt nun herausfinden, inwiefern sich die beiden Tierarten in diesem Modell beeinflussen. Betrachtet dazu wieder zuerst die Zellen B3 und C3!

Welche Fragen drängen sich sonst noch auf? Vergleicht zum Beispiel dieses Modell mit jenem am Datenblatt *Exponentielles Wachstum*! Versucht Antworten auf eure Fragen zu finden!



Erläuterung: Durch die zusätzlichen Terme $-0,002 \cdot B_2 \cdot C_2$ und $+0,001 \cdot B_2 \cdot C_2$ ist die Anzahl der Beutefische natürlich nicht mehr nur davon abhängig, wie viele *Beutefische* es im vorigen Monat gab, sondern auch davon, wie viele *Raubfische* vorhanden waren. Analoges gilt für die Anzahl der Raubfische. Dadurch wirkt nun die eine Population auf die andere und umgekehrt. Weitere Fragen könnten sein: Warum kommt es durch den gegenseitigen Einfluss zu Schwankungen? Was passiert auf lange Sicht? Warum sterben die Räuber in diesem Modell nicht aus? Usw.

Wissenswertes

Wir wollen das eben betrachtete Modell noch einmal genauer unter die Lupe nehmen. Die Beutetieranzahl im Folgemonat hängt also von der Beutetieranzahl und der Raubtieranzahl im Moment ab, das lässt sich mathematisch wie folgt darstellen:

$$B_{t+1} = B_t + 0,05 \cdot B_t - 0,002 \cdot B_t \cdot C_t,$$

oder ganz allgemein:

$$B_{t+1} = B_t + a \cdot B_t - b \cdot B_t \cdot C_t,$$

wobei B_t die Anzahl der Beutetiere und C_t die Anzahl der Raubtiere am Ende des Monats t beschreibt und $0 < a, b < 1$ gelten soll.

Wir werden jetzt genauer darauf eingehen, was den Verfasser dieses Modells dazu veranlasst hat, den Term $-b \cdot B_t \cdot C_t$ in das Modell einzubauen. Das werden wir auf 2 Arten machen.

1. Interpretation: Wir fragen uns also, welche biologische Bedeutung der Ausdruck $b \cdot B_t \cdot C_t$ hat, denn schließlich wurde das Modell ja erstellt, um einen Prozess in der Natur wenigstens näherungsweise zu beschreiben. Denke dazu über Folgendes nach! Es ist dir vielleicht schon passiert, dass du eine ganze Tafel Schokolade innerhalb kürzester Zeit gegessen hast, obwohl du gar nicht wirklich hungrig warst. Wäre beispielsweise nur eine halbe Tafel vorhanden gewesen, so wärest du wahrscheinlich auch damit zufrieden gewesen. Dir fallen bestimmt auch noch andere Beispiele ein, wo Menschen oder Tiere nur dann mehr konsumieren, wenn es einfach ist, an das jeweilige Konsumgut zu kommen.

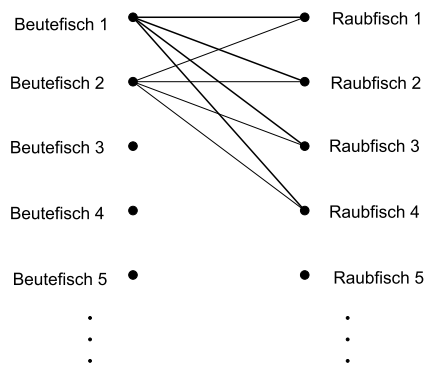
In dem betrachteten Modell verwendet man nun ebenfalls eine solche Annahme: Je mehr Beutetiere vorhanden sind, desto mehr frisst jedes einzelne Raubtier. Man könnte also sagen, dass jeder Raubfisch einen gewissen (wenn auch in der Realität nur sehr geringen) relativen Anteil aller vorhandenen Beutefische vertilgt. Wir nennen diesen relativen Anteil jetzt b . Ein Raubfisch verzehrt also im nächsten Monat genau $b \cdot B_t$ Beutefische. Will man wissen, wie viele Beutefische insgesamt von allen C_t vorhandenen Raubfischen erlegt werden, so muss man $b \cdot B_t$ natürlich noch mit C_t multiplizieren und erhält damit, dass sich der Bestand der Beutetiere im folgenden Monat um $b \cdot B_t \cdot C_t$ verringert.

2. Interpretation: Man kann diesen Term aber noch von einer anderen Seite her beleuchten. Es klingt plausibel zu sagen, dass es öfter zu Begegnungen zwischen Raub- und Beutetieren auf freier Wildbahn kommt, wenn es insgesamt mehr Tiere gibt.

Beispiel: Nehmen wir an, es gibt im Monat t genau 100 Beutefische und 20 Raubfische in einem bestimmten Gebiet. Beutefisch Nr.1 könnte also prinzipiell 20 verschiedenen Raubfischen begegnen. Beutefisch Nr.2 genauso.

...

Das geht weiter bis zum Beutefisch Nr.100, der also auch 20 verschiedenen Raubtieren über den Weg „schwimmen“ könnte. Insgesamt wären daher $100 \cdot 20$ verschiedene Begegnungen möglich. Wir haben also die Anzahl der Beutetiere mit jener der Raubtiere multipliziert, um auf dieses Resultat zu kommen.



Erstens kommt es aber im Normalfall innerhalb eines Monats sicher nicht zu allen diesen Begegnungen, sondern nur zu einigen wenigen. Die Beutefische wollen ja solche Kontakte eher meiden, um nicht gefressen zu werden. Zweitens kommt es bei tatsächlichen Begegnungen nicht immer sofort zum Tod des Beutefisches. Aus diesen beiden Gründen muss man diese Anzahl mit einem bestimmten Faktor $b < 1$ multiplizieren, um die Anzahl der getöteten Beutetiere zu erhalten.

Wieder kommen unsere Überlegungen zu dem Schluss: Die Beutetierpopulation sinkt durch die Jagd der Raubtiere im folgenden Monat um $b \cdot B_t \cdot C_t$.

Aufgabe 4

Wir wollen in dieser Aufgabe zwei Extremsituationen miteinander vergleichen, um Aufschluss über die Gültigkeit des Modells und über seine Grenzen zu bekommen.

- (a) Angenommen die Anzahl der Beutefische sei zu Beginn des Monats gleich 2000, jene der Raubfische nur 20. Der oben beschriebene Prozentsatz b sei im folgenden 2%. Wie viele Beutetiere werden in diesem Monat laut unserem Modell erlegt?
- (b) Rechne jetzt mit 20 Beutefischen und 2000 Raubfischen!
- (c) Wie viele Beutefische erlegt jedes einzelne Raubtier in (a) und (b)? Vergleiche und interpretiere die Ergebnisse kritisch!

Lösung:

- (a) 800
- (b) 800
- (c) in (a) durchschnittlich 40 Beutefische, in (b) durchschnittlich nur 0,4 Beutefische
Hier wird sicher eine Modellgrenze erreicht, da es in der Natur nicht vorkommen wird, dass ein Raubtier in der einen Situation hundertmal so viele Beutefische pro Monat erlegt, wie ein Raubtier in einer anderen.

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
freiwillig

Das Produkt aus B_t und C_t kommt allerdings nicht nur bei der Berechnung der Beutetieranzahl im nächsten Monat vor, sondern auch bei der Raubtieranzahl. Gebt daher eine Formel zur Berechnung von C_{t+1} unter der Verwendung von B_t und C_t für das betrachtete Modell an!

Welche biologische Bedeutung könnte man hier dem Produkt aus B_t und C_t zu Grunde legen? Wie könnte man diese Modellannahme begründen?

Erläuterung: Die Rekursion muss

$$C_{t+1} = C_t - c \cdot C_t + d \cdot B_t \cdot C_t$$

lauten, wobei $c, d > 0$ gelten soll. Der Ausdruck $+d \cdot B_t \cdot C_t$ steht ja offensichtlich für den Zuwachs der Raubfische im nächsten Monat. Wir haben uns schon vorher überlegt, dass $b \cdot B_t \cdot C_t$ gerade die Anzahl der getöteten Beutetiere im nächsten Monat ist. Wenn man davon ausgeht, dass jedes vertilgte Beutetier in gewisser Weise zur Fitness der Räuber und damit zu deren Reproduktionsfähigkeit beiträgt, erscheint es sinnvoll, dass der Zuwachs der Räuber proportional zur Anzahl der erlegten Beutefische ist.

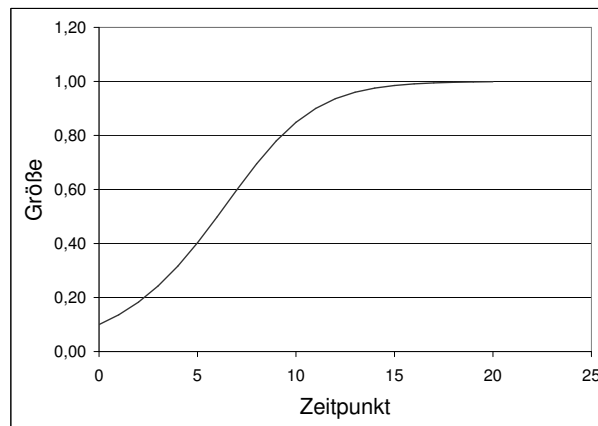
Grenzen von Modellen

Wir sind bei unseren bisherigen Betrachtungen schon mindestens zweimal auf die Gültigkeitsgrenzen von mathematischen Modellen gestoßen. Während die betrachteten Modelle in gewissen Situationen bzw. unter bestimmten Voraussetzungen ganz gute, biologisch brauchbare Ergebnisse lieferten, so muss auch gesagt werden, dass sie in anderen Situationen leider versagen mussten. Zum einen war eine solche Gültigkeitsgrenze in der Aufgabe 4 zu erkennen, zum anderen beim exponentiellen Wachstum, bei dem der Bestand an Beutetieren unbegrenzt wachsen konnte. Wir wollen hier auf das letzt genannte Problem eingehen.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Bei Prozessen in der Natur (Körperwachstum, Pflanzenwachstum, Veränderung der Bestandszahlen von Tierarten, ...), in der Wirtschaft (Produktabsatz, Abbau von Rohstoffen...) oder in der Soziologie (Besiedelung eines Gebiets, Verbreitung eines Gerüchts, ...) zeigen sich nie unbegrenzte Wachstumsvorgänge, sondern eher Verläufe wie in der nachstehenden Grafik:



Beschreibt den Verlauf dieses Graphen (etwa anhand eines der soeben genannten Beispiele)!

In welchem Bereich des Diagramms (Beginn/Mitte/Ende) treten Ähnlichkeiten zum exponentiellen Wachstum auf? Was ist der wesentliche Unterschied dazu?

Warum laufen eurer Meinung nach Prozesse in der Natur, Wirtschaft und Soziologie gerade so wie in obiger Grafik ab?

Erläuterung: Ähnlichkeiten zum exponentiellen Wachstum treten im Anfangsstadium auf, der Unterschied ist jedoch, dass hier das Wachstum begrenzt ist.

Wachstumsvorgänge sind oft durch Ressourcenmangel, Platzmangel, Sättigung des Marktes usw. beschränkt. Je näher man dieser Sättigungs- oder Kapazitätsgrenze kommt, desto langsamer verläuft das Wachstum.

Wissenswertes

Wir wollen jetzt zu einer mathematischen Beschreibung einer solchen Situation kommen und betrachten dazu einen Lebensraum, der maximal 500 Tiere einer gewissen Spezies beherbergen kann, da beispielsweise nicht mehr Platz, Nahrungsmittel oder Material zum Bau von Behausungen vorhanden sind. Beim exponentiellen Modell war das Wachstum nur zum derzeitigen Bestand proportional. Wir wollen nun aber auch den „vorhandenen Freiraum“, d. h. in unserem Fall die Differenz $500 - B_t$, berücksichtigen. Wir multiplizieren daher den Wachstumsterm mit $(500 - B_t)$ (oder ganz allgemein mit $(K - B_t)$) und stellen somit sicher, dass das Wachstum sehr klein wird, wenn sich B_t dem Wert K nähert. Die Rekursionsgleichung sieht dann wie folgt aus:

$$B_{t+1} = B_t + c \cdot B_t \cdot (K - B_t)$$

wobei $c > 0$ nahe bei 0 sein soll und $K > 0$ gilt. Dieses Modell nennt man *Logistisches Wachstumsmodell*.

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Partnerarbeit Pflicht

Natürlich interessiert uns nun, ob das hergeleitete Modell tatsächlich einen Verlauf wie in der Abbildung in *Arbeitsauftrag 5* liefert. Erstellt daher mit Hilfe einer Tabellenkalkulation das logistische Wachstumsmodell (ihr könnt dabei c und K frei wählen)! Tipp: Als Grundlage könnt ihr das Excel-Datenblatt *logistisches Wachstum* verwenden, das vorerst noch einmal das vorher betrachtete exponentielle Wachstum zeigt. Versucht durch Abänderung der Formel in der Beute-Spalte zum logistischen Modell zu kommen!

Beschreibt und vergleicht den Grafenverlauf mit dem im *Arbeitsauftrag 5*! Verändert dazu (bei fest gewähltem K) die Anzahl B_0 der Beutetiere zu Beginn, sodass einmal $B_0 < \frac{K}{2}$ und einmal $B_0 > \frac{K}{2}$ gilt! Welcher wesentliche Unterschied ergibt sich dadurch im Verlauf des Grafen?

Erläuterung: Es ergibt sich tatsächlich der gewünschte Kurvenverlauf solange $B_0 < \frac{K}{2}$ gilt. Für $B_0 > \frac{K}{2}$ hat der Graf keinen Wendepunkt und zeigt damit nur das Endstadium des Wachstumsprozesses.

Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
freiwillig

Erhitzt man Mais auf über 250°C , so entsteht ein Produkt, das bei keinem Kinobesuch fehlen darf, nämlich Popcorn. Auch wenn die Herstellung von Mikrowellenpopcorn nicht unbedingt einen Wachstumsprozess (außer natürlich des Volumens der Packung) darstellt, so hat sie trotzdem etwas mit dem Verlauf des logistischen Graphen zu tun.

Wenn man eine Packung Popcorn in die Mikrowelle legt und der Gebrauchsanweisung folgt, so hört man jedes Mal, wenn ein Maiskorn aufplatzt einen kleinen Knall. Ihr sollt dieses *Experiment* nun selbst durchführen und Aufzeichnungen darüber machen, wann wie viele Maiskörner aufplatzen. Das könnte ungefähr so aussehen:

Zeitraum	aufgeplatzte Körner in diesem Zeitraum
0. - 60. s	-
60. - 65. s	II
65. - 70. s	III
70. - 75. s	IIII II
75. - 80. s	IIII
80. - 85. s	IIII III
...	...

Zählt anschließend die Striche in eurer Liste und fertigt eine Tabelle wie die folgende an:

Zeitraum	aufgeplatzte Körner bis zu diesem Zeitpunkt
60 s	0
65 s	2
70 s	5
75 s	12
80 s	17
85 s	25
...	...

Ihr sollt nun die erhaltenen Daten mittels Tabellenkalkulation darstellen und das logistische Modell an diese Daten anpassen. Das heißt ihr sollt geeignete Konstanten c und K finden, sodass das Modell gut an die Datenpunkte passt!

Diskutiert eure Ergebnisse und macht Notizen dazu! Wie gut passt das Modell? Was sind Schwächen des Modells? Wo sind seine Grenzen?

Wie die Umsetzung dieses Arbeitsauftrags in Excel funktioniert erklärt der nachfolgende Abschnitt.

Erläuterung: Durch diesen Arbeitsauftrag soll ein Einblick in Regressionsverfahren gegeben werden. Der Optimierungsprozess kann auch mittels Excel (Menüpunkt *Extras - Solver*) durchgeführt werden, das auf die *Methode der kleinsten Quadrate* zurückgreift. Auch auf dieses Verfahren kann hier eingegangen werden.

Wissenswertes

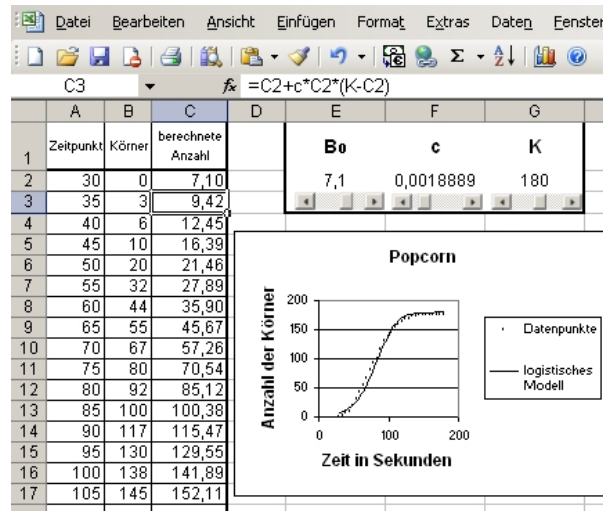
Die Darstellung der gemessenen Daten stellt keine besondere Herausforderung dar. Fertigt dazu einfach eine Spalte für die Zeit an und eine Spalte für die zu diesem Zeitpunkt aufgeplatzten Maiskörner. Durch Markieren der Daten und Verwenden des Diagramm-Assistenten können die Datenpunkte grafisch dargestellt werden.

Für die Anpassung durch das logistische Modell erstellt eine dritte Spalte, die zu den in Spalte 1 eingetragenen Zeitpunkten die Anzahl der aufgeplatzten Körner nach dem logistischen Modell berechnen soll! Definiert dafür zuerst nacheinander die Variablen B_0 , c und K über den Menüpunkt *Einfügen - Namen - Definieren* und belegt sie mit „sinnvollen“ Werten! Die Werte in der 3. Spalte werden dann mittels der Formel

$$B_{t+1} = B_t + c \cdot B_t \cdot (K - B_t)$$

berechnet, wobei natürlich der erste Eintrag in dieser Spalte B_0 sein soll.

Die berechneten Daten sollen nun in dasselbe Diagramm, in dem auch schon die gemessenen Datenpunkte eingetragen sind, eingefügt werden (durch Markieren der Spalte und „Hineinziehen“ ins Diagramm). Insgesamt könnte das dann etwa wie folgt aussehen:



Hier ist es sogar möglich, die Variablen B_0 , c und K mittels Schieberegler zu verändern, die man relativ einfach über die *Steuerelement-Toolbox* einbauen kann. Dadurch kann man per Augenmaß die Kurve des logistischen Modells so anpassen, dass sie nahe an den Datenpunkten verläuft.

Arbeitsauftrag 8

Bearbeitung: Kleingruppe
freiwillig

Wir kehren noch einmal zum Räuber-Beute-Modell im Excel-Datenblatt *Räuber-Beute 1* zurück. Ihr sollt nun dieses Modell so verändern, dass die Berechnung der Beutetieranzahl auch hier nicht mehr den exponentiellen, sondern den entsprechenden logistischen Term (mit $K = 1000$) verwendet. Beobachtet und diskutiert die entstehenden Veränderungen im Zeitdiagramm! Tipp: Als Grundlage könnt ihr das Excel-Datenblatt *Räuber-Beute 2* verwenden, das noch einmal das vorher vorgestellte Räuber-Beute-Modell zeigt. Versucht durch Abänderung der Formel in der Beute-Spalte zum gewünschten Modell zu kommen!

Erläuterung: An der Dauer der Schwankungsperioden ändert sich offenbar nichts, jedoch sind jetzt die Amplituden der Schwankungen etwas geringer als vorher.

Arbeitsauftrag 9

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Versetzt euch in die Lage von Vito Volterra, nachdem er „sein“ Modell entwickelt hat. Er musste es nämlich nun noch seinem Schwiegersohn und den anderen Fischern in Ancona vorstellen und erklären. Verfasst dazu einen Bericht, der alle wesentlichen Erklärungen des Modells beinhaltet, der auf Grenzen des Modells hinweist, z. B. welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit das Modell gut passt oder welche Vereinfachungen gemacht wurden, usw. Beantwortet abschließend die Fragen der Fischer, die im Text zu Beginn angeführt sind! Der Bericht soll etwa ein bis zwei A4-Seiten lang werden.

Lest den Bericht eurer Klasse vor und geht auf mögliche Einwände ein!

6.3 Der Kampf ums Überleben

Schulstufe: 6. bis 8. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: Rekursionen

Technische Vorkenntnisse: Kenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen, Recherchen im Internet

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 4 bis 8 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

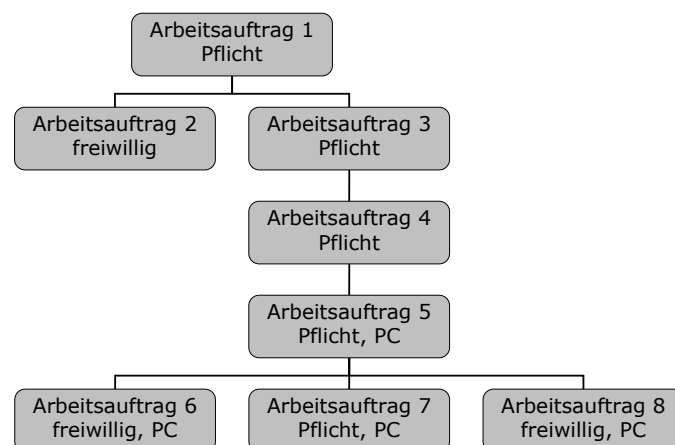
- Interpretieren von Sachverhalten
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über Wirkungszusammenhänge in der Natur
- Umgang mit dem PC
- Selbstorganisation
- Teamfähigkeit
- Übersetzen von Texten in mathematische Modelle
- Beurteilen von Vereinfachungen und Modellannahmen
- Kreativität
- Vernetzung verschiedener mathematischer Inhalte
- Bewusstes und sinnvolles Umgehen mit exakten Werten und Näherungswerten

Lehrplanbezug: Die Materialien liefern Beiträge zu den Bildungsbereichen *Sprache und Kommunikation*, *Mensch und Gesellschaft*, *Natur und Technik* und *Kreativität und Gestaltung* sowie vor allem zu den didaktischen Grundsätzen *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten*, *Lernen in Phasen* und *Lernen mit technologischer Unterstützung*. Alle diese Bereiche und Grundsätze sind im Oberstufenlehrplan angeführt. Außerdem eignen sich diese Unterrichtsmaterialien insbesondere im Zusammenhang mit folgendem Lehrstoff:

- Reelle Funktionen (6. Klasse)
- Folgen (6. Klasse)
- Dynamische Prozesse (8. Klasse)

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 7 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 1, 3, 4 und 5. Es können alle Arbeitsaufträge ab der 6. Klasse durchgeführt werden. Es ist außerdem gekennzeichnet, wo der Einsatz eines Computers notwendig ist.



Wissenswertes

Wir werden im Folgenden zwei Tierarten betrachten, nämlich Füchse und Hasen. Da Hasen normalerweise beliebte Opfer von Füchsen sind, wird durch die Jagd der Füchse die Anzahl der Hasen vermindert. Genauso hat natürlich das Vorhandensein von Hasen Einfluss auf den Bestand der Füchse. Diesmal aber im positiven Sinne. Gibt es viele Hasen, so wird die Jagd für die Füchse einfacher. Diese sind dann also leichter und öfter satt, was sich auf die Gesundheit und damit auch auf die Vermehrung der Füchse gut auswirkt.

Wie geht dieses Spiel aber auf lange Sicht aus? Werden die Hasen aussterben? Wenn ja, wovon ernähren sich die Füchse dann? Wie beeinflusst die Jagd durch den Menschen dieses Zusammenspiel?

Um zu Antworten auf solche Fragen zu kommen, ist es notwendig, die Situation und den Einfluss der einzelnen Spezies aufeinander genauer zu betrachten. Oft ist es dabei notwendig, Vereinfachungen zu machen. Die erste solche Vereinfachung soll sein, dass Füchse nur vom Verzehr von Hasen leben und sich auch nur vermehren können, wenn sie genug zu fressen haben. Umgekehrt soll die einzige Todesursache von Hasen das „Gefressenwerden“ durch Füchse sein.

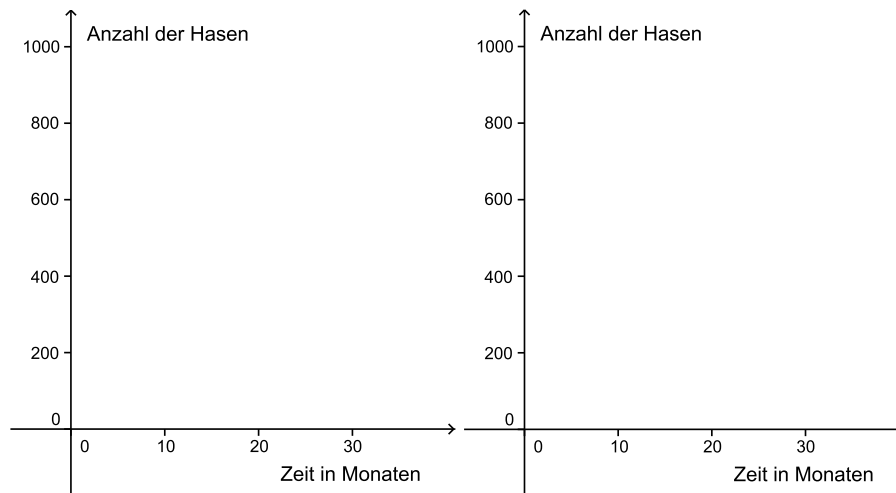
Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Angenommen es gäbe keine Füchse. Wie würde sich dadurch der Bestand der Hasen unter der obigen Vereinfachung im Laufe der Zeit verändern? Zeichnet zwei qualitativ unterschiedliche Graphen in die untenstehenden Koordinatensysteme ein, die diese Veränderung beschreiben könnten! Der Bestand der Hasen zum Zeitpunkt $t = 0$ soll dabei $H_0 = 100$ Hasen sein.

Begründet eure Wahl! Was sind Vor- bzw. Nachteile eurer Grafen? Wie gut können sie die Wirklichkeit beschreiben?

Gebt für beide Grafen eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen H_t und H_{t+1} , also dem Hasenbestand am Ende des Monats t und jenem am Ende des Monats $t + 1$, allgemein beschreiben soll! Wie entsteht H_{t+1} aus H_t ?



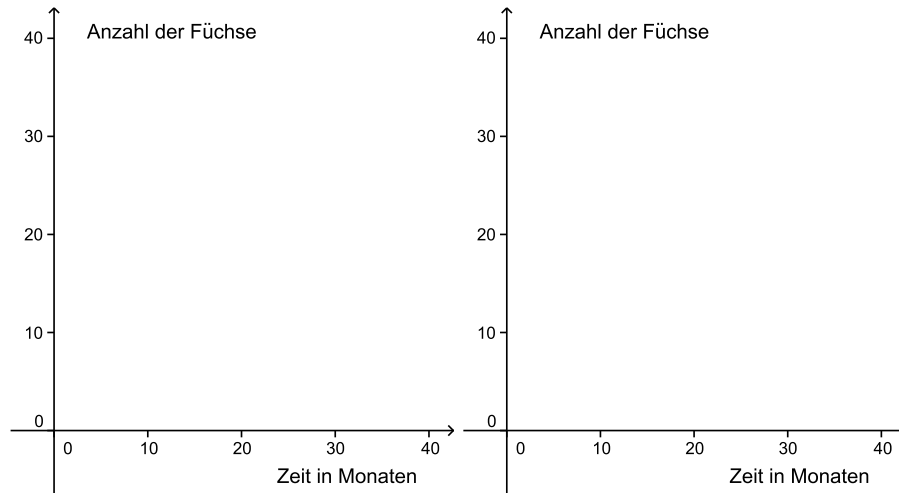
Erläuterung: Lineares oder exponentielles Wachstum bieten sich natürlich vor allem wegen ihrer jeweils recht einfachen rekursiven Darstellung an, es soll jedoch der Kreativität der Schüler kein Riegel vorgeschoben werden.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Einzel- oder Partnerarbeit
freiwillig

Angenommen es gäbe jetzt keine Hasen. Was würde mit der Anzahl der Füchse passieren? Versucht wieder, zwei grafische Darstellungen (mit $F_0 = 30$) und die zugehörigen Rekursionsformeln für F_{t+1} und F_t anzugeben!

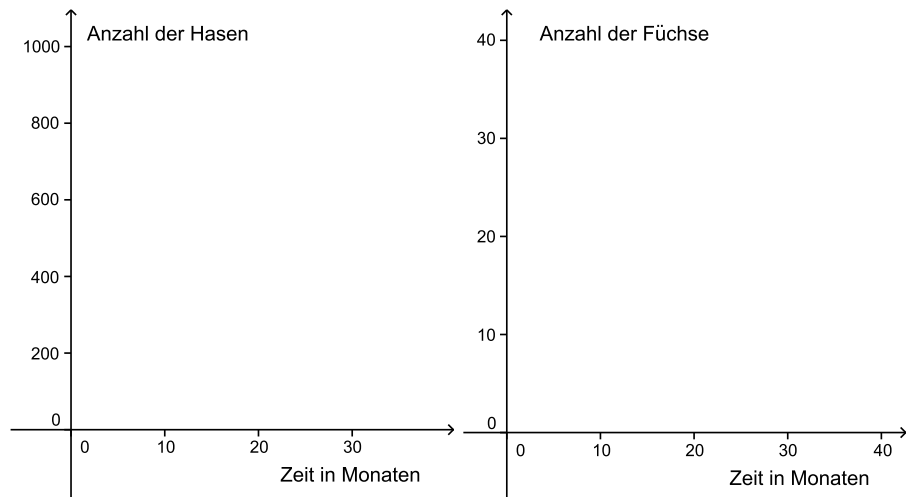
Erläuterung: Wieder kann hier linear oder exponentiell modelliert werden. Falls die Schüler Schwierigkeiten haben, von der grafischen Darstellung auf die Rekursionsformel zu schließen, kann auch die Reihenfolge der Bearbeitung umgekehrt werden.



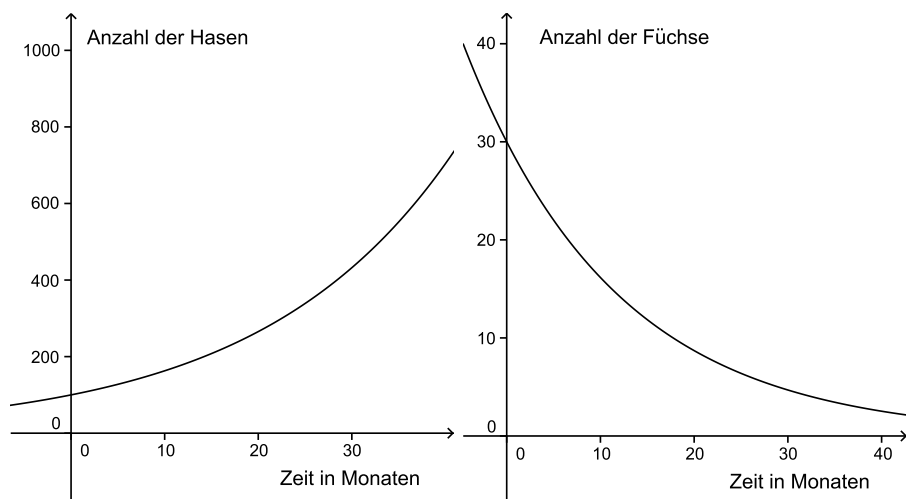
Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Obwohl es natürlich viele Möglichkeiten gibt, die Arbeitsaufträge 1 und 2 zu erfüllen, wollen wir uns jetzt einer speziellen Betrachtung zuwenden, mit der wir dann recht praktisch weiter arbeiten können. Wir wollen also die nächste Vereinfachung machen und davon ausgehen, dass die Anzahl der Hasen exponentiell mit monatlichem Wachstumsfaktor 105% wachsen würde, wenn es keine Füchse gäbe, und dass die Anzahl der Füchse exponentiell mit monatlichem „Wachstumsfaktor“ 94% fallen würde, wenn es keine Hasen gäbe. Gebt wieder die zugehörigen Rekursionsformeln an und zeichnet den ungefähren Verlauf in die Koordinatensysteme! Warum wurde bei den Füchsen das Wort *Wachstumsfaktor* wohl unter Anführungszeichen gesetzt?



Lösung:



$$H_{t+1} = 1,05 \cdot H_t$$

$$F_{t+1} = 0,94 \cdot F_t$$

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Partnerarbeit, Besprechung in der Klasse
Pflicht

Ab jetzt soll es sowohl Hasen als auch Füchse geben. Zusätzlich zum „natürlichen“ Wachstum der Hasen bzw. dem Rückgang der Füchse (siehe Arbeitsauftrag 3) sollen sich die beiden Tierarten jetzt wie folgt gegenseitig beeinflussen:

Die Füchse jagen die Hasen, was zur Folge hat, dass die Anzahl der Hasen zum Zeitpunkt $t + 1$ (also H_{t+1}) gegenüber H_t um einen Betrag vermindert wird, der direkt proportional (mit Proportionalitätskonstante a) zu der Anzahl aller möglichen Begegnungen zwischen Hasen und Füchsen zum Zeitpunkt t sein soll.

Gebt eine Rekursionsformel zur Berechnung von H_{t+1} aus H_t und F_t an!
Tipp: Geht anhand eines Beispiels vor! Überlegt euch etwa, wie viele verschiedene Begegnungen es zwischen 50 Hasen und 15 Füchsen geben kann und verallgemeinert anschließend diese Berechnung!

Schätzt, wie viel Prozent dieser „Begegnungen“ im Durchschnitt tödlich für die Hasen ausgehen werden!

Die Jagd soll sich jetzt natürlich für die Füchse und deren Vermehrung lohnen. Die Anzahl der Füchse zum Zeitpunkt $t + 1$ soll gegenüber dem Zeitpunkt t um einen Betrag zunehmen, der wieder proportional (diesmal mit Proportionalitätskonstante b) zu der schon oben berechneten Anzahl der möglichen Begegnungen ist.

Ist diese Erweiterung des Modells realistisch? Gebt eine mögliche Begründung für die Proportionalität zur Anzahl der möglichen Begegnungen!

Erläuterung: Die Rekursionsformeln lauten:

$$\begin{aligned}H_{t+1} &= 1,05 \cdot H_t - a \cdot H_t \cdot F_t \\F_{t+1} &= 0,94 \cdot F_t + b \cdot H_t \cdot F_t\end{aligned}$$

Je öfter Füchse und Hasen einander begegnen, desto eher wird es den Füchsen gelingen, Kapital daraus zu schlagen. Die Proportionalität zu $H_t \cdot F_t$ scheint daher als Modellannahme vernünftig zu sein.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Partnerarbeit, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Implementiert dieses Modell in eine Tabellenkalkulation (zum Beispiel in Excel)! Verwendet dazu folgende Annahmen:

- $H_0 = 100$
- $F_0 = 30$
- Wachstumsfaktor Hasen: 105%
- Wachstumsfaktor Füchse: 94%
- Proportionalitätskonstante $a = 0,2\%$
- Proportionalitätskonstante $b = 0,1\%$

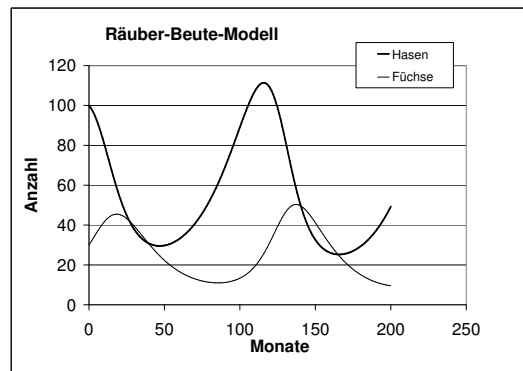
Stellt den Verlauf der Bestandszahlen der Hasen und Füchse über einen Zeitraum von 300 Monaten in einem gemeinsamen Zeitdiagramm dar!

Beschreibt das „Ergebnis“! Welche Auffälligkeiten gibt es? Gebt eine Erklärung ab, wie sich die Fuchszahl in Abhängigkeit von der Hasenzahl ändert!

Erscheint euch der Verlauf der Diagramme realistisch? Unter welchen Voraussetzungen?

Verändert nacheinander die oben angeführten Parameter *Wachstumsfaktor Hasen* und *Wachstumsfaktor Füchse*! Wie ändert sich der Verlauf der Diagramme dadurch jeweils? Formuliert zu beiden Parametern je mindestens eine „je-desto-Beziehung“ (z. B.: je größer der Wachstumsfaktor der Hasen ist, desto ...)!

Erläuterung: Es zeigen sich periodische Schwankungen in den Hasen- und Fuchspopulationen, wobei die Maxima der Fuchsanzahlen jenen der Hasenpopulation hinterherhinken (siehe CD-Rom Excel-file *Lösungen*). Es ergibt sich also genau der Sachverhalt, der im einleitenden Text beschrieben wurde.



Je größer der Parameter *Wachstumsfaktor Hasen* wird, desto

- mehr Schwankungen pro festgelegtem Zeitraum gibt es
- kleiner ist die Amplitude (Maximum minus Minimum einer „Schwankung“) sowohl bei den Hasen als auch bei den Füchsen
- kleiner wird das Verhältnis aus durchschnittlicher Hasenzahl zu durchschnittlicher Fuchszahl

Je größer der Parameter *Wachstumsfaktor Luchse* wird, desto

- weniger Schwankungen pro festgelegtem Zeitraum gibt es
- größer wird die Amplitude bei den Füchsen und desto kleiner wird die Amplitude bei den Hasen
- größer wird das Verhältnis aus durchschnittlicher Hasenzahl zu durchschnittlicher Fuchszahl

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
freiwillig

Ihr sollt nun herausfinden, ob es Startwerte H_0 und F_0 gibt, für die diese Schwankungen *nicht* auftreten! Dazu müsste also $H_{t+1} = H_t$ sowie $F_{t+1} = F_t$ für alle t gelten. Wieso? Ersetzt in diesen Gleichungen H_{t+1} und F_{t+1} durch die entsprechenden Rekursionsformeln

$$H_{t+1} = 1,05 \cdot H_t - 0,002 \cdot H_t \cdot F_t$$

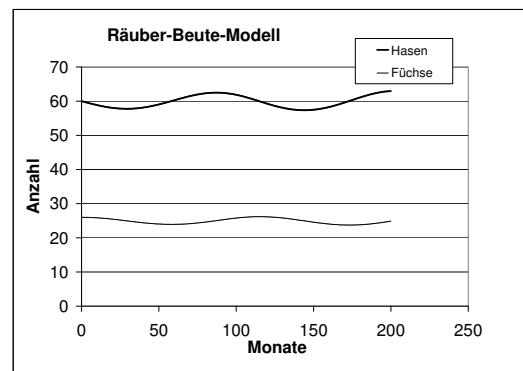
und

$$F_{t+1} = 0,94 \cdot F_t + 0,001 \cdot H_t \cdot F_t$$

und berechnet daraus H_t und F_t ! Falls es solche Werte H_t und F_t gibt, für die $H_{t+1} = H_t$ sowie $F_{t+1} = F_t$ gilt, nennt man (H_t, F_t) einen *Fixpunkt*.

Verändert nun in eurem Tabellenkalkulationsdatenblatt die Startwerte auf die Werte des Fixpunktes! Wie sehen die Diagramme nun aus? Betrachtet auch die Diagramme für Startwerte, die nahe am Fixpunkt liegen!

Erläuterung: Das Modell hat bei $H_0 = 60$ und $F_0 = 25$ einen Fixpunkt, das heißt die Hasen- und Fuchszahl ändert sich nicht, wenn man mit diesen Werten startet. Für Startwerte nahe des Fixpunktes haben die Schwankungen nur sehr geringe Amplituden.



Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Partnerarbeit, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Informiert euch im Internet über die berühmten Aufzeichnungen, die die kanadische Pelzhandelsfirma Hudson's Bay Company im Zeitraum von 1845 – 1935 geführt hat und vergleicht sie mit „unserem“ Modell!

Informiert euch über Alfred James Lotka und Vito Volterra, die als erste dieses Modell formuliert haben, das ihr gerade implementiert habt. Was war der Anlass zur Erstellung eines solchen Modells? Was wollte man damit zeigen? Wobei gab es Schwierigkeiten?

Erläuterung: Die Aufzeichnungen der Hudson's Bay Company verdeutlichen, dass die Modellannahmen brauchbar waren, man erkennt dort nämlich,

dass es tatsächlich in der Natur solche periodischen Schwankungen gibt. Ein anderes Beispiel ist die Raubfischzunahme in der Adria im Zuge des ersten Weltkrieges, während eine solche Zunahme bei der Beutefischanzahl nicht zu sehen war. Dieses Phänomen veranlasste schließlich die beiden Mathematiker Lotka und Volterra zur Erforschung von Räuber-Beute-Beziehungen und zur Konstruktion dieses Modells.

Arbeitsauftrag 8

Bearbeitung: Kleingruppe
freiwillig

Ihr sollt nun untersuchen, welchen Einfluss „äußere Kräfte“ auf das Modell haben können! Wir wollen etwa annehmen, dass jedes Monat *ein* Hase durch Jäger erlegt wird. Verändert dazu das in Arbeitsauftrag 5 entwickelte Modell!

Was ändert sich am Verlauf der Grafen? Bis zu welchem Monat liefert das Modell vernünftige Ergebnisse?

Ist diese Annahme realistisch? Wenn nein, wie könnte man sie verbessern?

Erläuterung: Die Hasen sterben aus, ab einem gewissen Monat treten negative Bestandszahlen auf! Es lässt sich dabei allerdings bezweifeln, ob die Jäger tatsächlich noch erfolgreich sein werden, wenn nur noch sehr wenige Hasen vorhanden sind. Auch hier wäre ein prozentueller Ansatz wahrscheinlich vernünftiger.

Kapitel 7

Symbiotische Systeme (Unterrichtsmaterialien)

Symbiotische Systeme sind aus zweierlei Hinsicht sehr für den Einsatz im Schulunterricht geeignet. Einerseits lassen sich durch symbiotische Modelle sehr viele Szenarien und Beziehungen modellieren, zu denen sich sehr einfach Bezug finden lässt. Dazu gehört z. B. das Bestäuben von Blüten durch Insekten, die als Belohnung Nektar erhalten, das Entfernen von Hautparasiten von Elefanten durch so genannte Putzervögel oder auch Lebensgemeinschaften von Tieren der gleichen Spezies. Andererseits haben diese Systeme oft einfache mathematische Gestalt und sind leicht zu analysieren und zu interpretieren. Dadurch ergeben sich auch zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten in der Unterstufe.

Im Folgenden werden wieder unterschiedliche Zugänge zum Thema *Symbiotische Systeme* vorgestellt.

7.1 Die Entstehung einer Siedlung

Schulstufe: 3. bis 4. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: Prozentrechnung

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen, Recherchen im Internet

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 3 bis 6 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

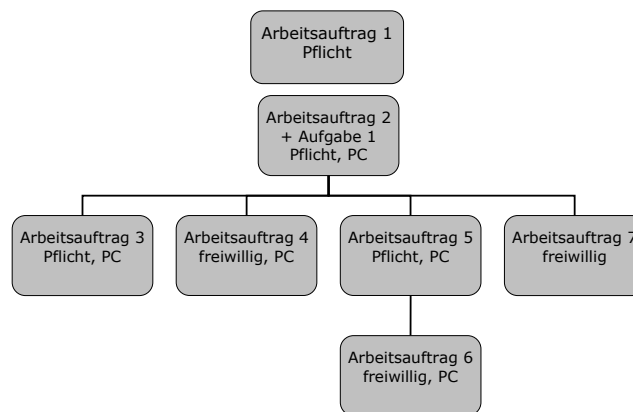
- Lesen und Interpretieren von Diagrammen
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über Wirkungszusammenhänge in der Natur
- Umgang mit dem PC
- Selbstorganisation
- Teamfähigkeit
- Bewusstsein, dass Modelle kein präzises Abbild sondern bestenfalls eine vereinfachende Beschreibung der Natur sind
- Trainieren von Rechenfertigkeiten (Prozentrechnung)

Lehrplanbezug: Neben vielfältigen Fertigkeiten, die im Unterstufenlehrplan aus dem Jahr 2000 in den Teilen *Bildungs- und Lehraufgabe* sowie *Didaktische Grundsätze* angeführt sind, beruht das nachfolgende Unterrichtsmaterial vor allem auf den folgenden Bereichen des Lehrstoffes, die in allen 4 Klassen der Unterstufe angeführt sind:

- Arbeiten mit Modellen
- Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 6 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 2 und 5. Es ist außerdem angeführt, ob die Arbeitsaufträge mit Computerunterstützung bearbeitet werden sollen. Alle Aufgabenstellungen sind ab der 3. Klasse zu bewältigen.



Der Mensch wird sesshaft

Als Jäger und Sammler waren Menschen vor mehr als 13000 Jahren ständig darauf angewiesen, dass sie Nahrung fanden. Man kann sich vorstellen, dass das in Zeiten großer Kälte oder extremer Dürre sehr schwer gewesen sein muss. Kinder konnten nicht ernährt werden und selbst Erwachsene mussten sehr „zäh“ sein, um solche schwierigen Zeiten überleben zu können.

Deshalb begann der Mensch am Beginn der Jungsteinzeit Vorräte anzulegen, selbst Pflanzen anzubauen und wilde Tiere zu zähmen und als Haustiere zu halten. Das sicherte in gewisser Weise die Existenz ein wenig ab, was zur Folge hatte, dass die Kindersterblichkeit sank und die Bevölkerungszahlen rasant anstiegen. Dadurch wiederum war es möglich, mehr Felder zu bearbeiten und mehr Tiere zu halten. Es kam zu einem *sich selbst verstärkenden Kreislauf*.

Eine humorvolle Geschichte

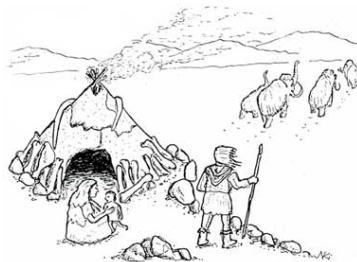
Wir schreiben das Jahr 10750 v.Chr., der Jäger *Stone-Age-Joe* hat das Jagen langsam satt und schlägt seiner dreißigköpfigen Sippe vor, vier Hektar Land zu bewirtschaften und von dessen Ertrag zu leben. Da *Stone-Age-Joe* schon genug *Grips* hat, auch an die Zukunft zu denken, hat er für die folgenden Jahre schon einen Plan in seinem Kopf:

Aus seiner schon langjährigen Erfahrung weiß er, dass jedes Jahr durchschnittlich eine von zwanzig Personen in der Sippe stirbt und etwa ein Zehntel der bearbeiteten Landfläche unbrauchbar wird. Da bei zu wenigen Geburten die Sippe aussterben würde und bei zu vielen Geburten die Sippe nicht mehr genug zu essen hätte, befiehlt er:

„Die Anzahl der jährlich Neugeborenen in unserer Sippe soll genau unserer derzeitigen Landfläche geteilt durch 5 entsprechen. Außerdem müssen wir jedes Jahr neue Felder bewirtschaften! Die Größe der zusätzlich bearbeiteten Landfläche (in Hektar) soll genau die Zahl der derzeitigen Sippenangehörigen geteilt durch 10 sein!“

Diese Regelungen sehen auf den ersten Blick vielleicht seltsam aus: Bevölkerungszuwächse über Hektarzahlen zu definieren und Flächenzuwächse über Bevölkerungszahlen. Aber ganz abwegig ist diese Idee nicht.

Wie wirkt sich so eine Vorschrift auf lange Zeit gesehen aus? *Stone-Age-Joe* hatte noch kein Tabellenkalkulationsprogramm zur schrittweisen Berechnung, ihr aber könnt diese Frage mit recht einfachen Mitteln beantworten.



Quelle: www.sulaweb.de, link vom 25.05.2008

Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Diskussion in der Klasse
Pflicht

Die obige Geschichte ist natürlich nur erfunden. Es kommen dabei einige Dinge vor, die zur damaligen Zeit noch gar nicht möglich waren. Welche? Was ist sonst noch unrealistisch an der Durchführung von *Stone-Age-Joes* Befehl?

Warum hat diese Regelung aber dennoch Sinn? Wie hängen Bevölkerungsgröße und bewirtschaftete Fläche zusammen?

Wie ihr sehen werdet, lohnt es sich, diese Geschichte mathematisch zu betrachten. Man wird feststellen, dass sie einige brauchbare „Ergebnisse“ liefert.

Erläuterung: Man hatte zur damaligen Zeit noch keine Schrift entwickelt, auch den Begriff *Bruchzahlen* gab es noch nicht, die Landvermessung war noch nicht genau genug möglich, die dazu notwendige Mathematik noch nicht bekannt, usw. Die Umsetzung der Anweisung scheint sehr schwierig, da man die Anzahl der Nachkommen nicht beliebig genau planen kann und oft gar nicht genügend brauchbares Land zur Verfügung steht.

Die Vorschrift ist aber insofern sinnvoll, dass sie darauf eingeht, dass eine wachsende Zahl von Menschen auch mehr Land zum Bewirtschaften braucht und dass umgekehrt mehr Menschen überleben können, wenn mehr Ackerland bearbeitet wird.

Im Unterricht könnte zu diesem Arbeitsauftrag eine Diskussion geführt werden.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Partnerarbeit
Pflicht

Erstellt mit Hilfe einer Tabellenkalkulation eine Tabelle, wobei in der ersten Spalte die Zeit in Jahren eingetragen werden soll (von 0 bis 30), in der zweiten Spalte die Anzahl der Sippenangehörigen (beginnend mit 30 zum Zeitpunkt 0) und in der dritten Spalte die Landfläche in Hektar (beginnend mit 4)!

Lasst nun das Tabellenkalkulationsprogramm mittels Zellbezügen die Anzahl der Menschen und die Gesamtfläche des bewirtschafteten Landes nach einem Jahr berechnen!

Die eingegebenen Formeln sollt ihr jetzt bis zum 30. Jahr nach unten übertragen. Das geschieht z. B. in Excel, indem ihr die beiden Zellen, in denen die Formeln stehen, markiert! Geht dann mit der Maus auf das rechte untere Eck der Zellen, bis aus dem weißen ein schwarzes Kreuz wird. Zieht nun mit gedrückter linker Maustaste nach unten!

Erstellt ein Diagramm, das den Zusammenhang der Anzahl der Sippenangehörigen (x-Achse) und der Größe der Landfläche (y-Achse) darstellt!

Erläuterung: Es läuft darauf hinaus, dass die Anzahl der Menschen der Rekursion

$$M_{t+1} = M_t \cdot 0,95 + \frac{F_t}{5}$$

und die Größe der Landwirtschaftsfläche der Rekursion

$$F_{t+1} = F_t \cdot 0,9 + \frac{M_t}{10}$$

folgen, wobei natürlich $M_0 = 30$ und $F_0 = 4$ gelten muss.

Aufgabe 1

- (a) Wieviele Menschen leben nach 20 Jahren in *Stone-Age-Joes* Sippe? Wie groß ist die bewirtschaftete Fläche zu diesem Zeitpunkt?
- (b) In welchem Jahr wird die Bevölkerungszahl von 500 überschritten?
- (c) Wann ist die von *Stone-Age-Joe* gegründete Siedlung bevölkerungsmäßig etwa so groß wie dein Heimatort? Tipp: Gegebenenfalls musst du dazu die Tabelle noch weiter nach unten verlängern!

Lösung:

- (a) 67 Menschen, 40 Hektar Landfläche
- (b) Nach 49 Jahren gibt es erstmals mehr als 500 Personen in der Sippe.

Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Partnerarbeit
Pflicht

Erkundigt euch, wie viele Menschen derzeit auf der Erde leben! Wann wird dieser Wert von *Stone-Age-Joes* Bevölkerung erreicht? Wie lange hat es tatsächlich gedauert, bis diese Bevölkerungsgröße auf der Erde erreicht wurde?

Wie groß ist die Landfläche, die zu diesem Zeitpunkt durch die Nachfahren von *Stone-Age-Joe* bewirtschaftet wird? Vergleicht diesen Wert mit der Landfläche der Erde! Ist das entwickelte Modell diesbezüglich glaubhaft?

Erläuterung: Informationen dazu können von den Schülern im Internet, aber auch im Geografie- oder Geschichteunterricht eingeholt werden. Insbesondere eignet sich dieses Unterrichtsmaterial sehr gut, um fächerübergreifenden bzw. auch fächerverbindenden Unterricht durchzuführen.

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Partnerarbeit
freiwillig

Wie ändert sich das Verhältnis Bevölkerungszahl zu bewirtschafteter Flächengröße in *Stone-Age-Joes* Modell? Tipp: Verwendet dazu die vierte Spalte in eurem Datenblatt! Lasst die Tabellenkalkulation jeweils den Quotienten $\frac{\text{Bevölkerungszahl}}{\text{Flächengröße}}$ (dh. jeweils die Werte aus der zweiten Spalte dividiert durch die Werte aus der dritten Spalte) für jedes Jahr berechnen! Was passiert dabei auf lange Zeit gesehen? Wie macht sich das im Bevölkerungszahl-Flächengröße-Diagramm bemerkbar?

Informiert euch darüber, wie groß dieses Verhältnis tatsächlich in Österreich ist!

Erläuterung: Das Verhältnis nimmt monoton ab, es konvergiert gegen einen fixen Wert ($\approx 1,69$). Das kann man beweisen, indem man die expliziten Lösungen M_t und F_t des Differenzengleichungssystems berechnet. Der konstante Wert ergibt sich dann aus $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{F_t}$. Im Diagramm nähert sich die Bahn unabhängig von der Wahl der Startwerte asymptotisch einer

Ursprungsgerade. Entlang dieser Gerade ist natürlich das Verhältnis aus Bevölkerungszahl und Größe der bewirtschafteten Landfläche konstant.

Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Partnerarbeit, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Was wäre passiert, wenn *Stone-Age-Joe* die folgende Anweisung für die Weiterentwicklung seiner Sippe gegeben hätte: „Die Anzahl der jährlich Neugeborenen in unserer Sippe soll genau unserer derzeitigen Landfläche geteilt durch 20 entsprechen. Außerdem müssen wir jedes Jahr neue Felder bewirtschaften! Die Größe der zusätzlich bearbeiteten Landfläche (in Hektar) soll genau die Zahl der derzeitigen Sippenangehörigen geteilt durch 20 sein!“? Tipp: Verändert dazu entsprechend die Formeln in eurem Tabellenkalkulations-Datenblatt!

Wie müsste die Anweisung *Stone-Age-Joes* für die Formeln

$$M_{t+1} = M_t \cdot 0,95 + \frac{F_t}{10}$$
$$F_{t+1} = F_t \cdot 0,9 + \frac{M_t}{20}$$

lauten? Schreibt sie auf! Hinweis: Hier steht M_t für die Anzahl der Menschen und F_t für die Größe der bewirtschafteten Fläche nach t Jahren.

Erläuterung: Im ersten Fall stirbt die Bevölkerung aus und die Landfläche schrumpft ebenfalls zum Grenzwert Null.

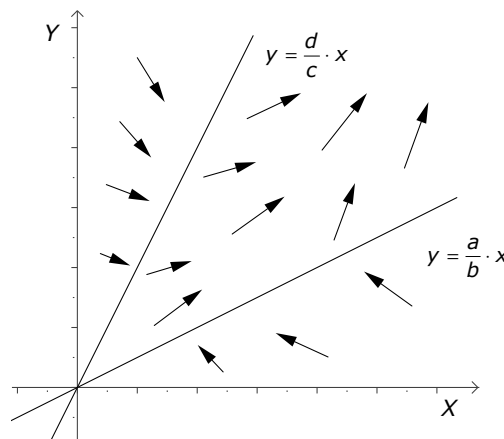
Im zweiten Fall würde die Anweisung etwa so lauten: „Die Anzahl der jährlich Neugeborenen in unserer Sippe soll genau unserer derzeitigen Landfläche geteilt durch 10 entsprechen. Außerdem müssen wir jedes Jahr neue Felder bewirtschaften! Die Größe der zusätzlich bearbeiteten Landfläche (in Hektar) soll genau die Zahl der derzeitigen Sippenangehörigen geteilt durch 20 sein!“ In diesem Fall strebt die Bahn zu einem Punkt auf der schon oben beschriebenen, anziehenden Geraden, das heißt sowohl Bevölkerungsgröße als auch Landfläche ändern sich ab einem gewissen Zeitpunkt nicht mehr. Dahinter steckt Folgendes:

Betrachtet man zunächst das System

$$X_{t+1} = X_t - aX_t + bY_t$$
$$Y_{t+1} = Y_t - cY_t + dX_t,$$

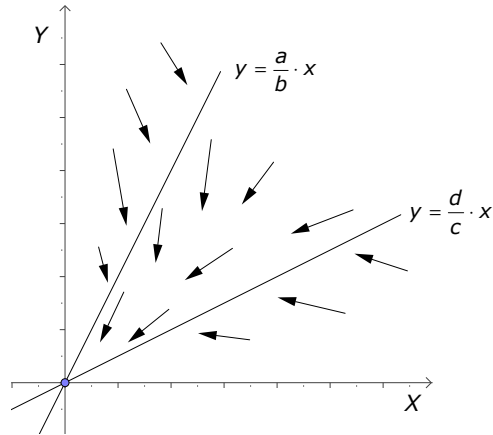
so kann man sich fragen, wann zumindest eine der Größen X_t bzw. Y_t zeitlich konstant bleibt. Untersuchen wir das zuerst für X_t . Offensichtlich gilt $X_{t+1} = X_t$ genau dann, wenn $-aX_t + bY_t = 0$ gilt. Das liefert geometrisch eine Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{a}{b}$ im (X, Y) -Diagramm. Ist (x, y) ein Punkt auf dieser Geraden, so ist $-aX_t + bY_t < 0$ genau dann, wenn $X_t \leq x$ und $Y_t \geq y$ gilt. Salopp formuliert könnte man also sagen: „Links oberhalb der Gerade wächst X , rechts unterhalb sinkt X .“ Ebenso gehen wir für Y vor und stellen fest, dass $Y_{t+1} = Y_t$ genau dann gilt, wenn $-cY_t + dX_t = 0$. Wieder liefert das eine Gerade, diesmal mit Steigung $\frac{d}{c}$. „Links oberhalb“ sinkt Y , „rechts unterhalb“ steigt Y . Wie die Bahn im Phasendiagramm nun tatsächlich verläuft, hängt von dem Verhältnis der Steigungen ab, wobei folgende 3 Fälle auftreten können:

1. Fall: $\frac{a}{b} < \frac{d}{c}$



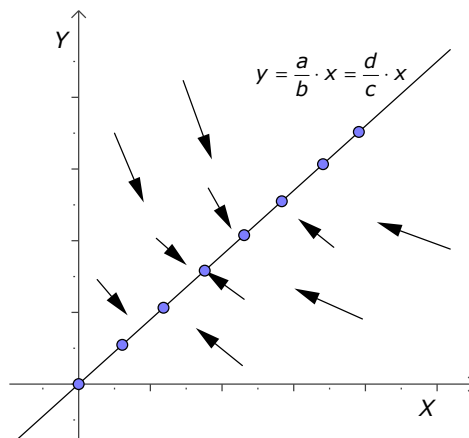
Die beiden Geraden teilen den ersten Quadranten in drei Bereiche, die Pfeilen deuten an, in welche Richtung die Lösungskurven (qualitativ) laufen. In diesem ersten Fall gelangen also alle Bahnen in den mittleren Bereich, in dem sie dann unbeschränkt wachsen. Sowohl Bevölkerungsanzahl als auch bewirtschaftete Landfläche werden also immer größer, was natürlich biologisch gesehen ab einem gewissen Zeitpunkt keinen Sinn mehr ergibt.

2. Fall: $\frac{a}{b} > \frac{d}{c}$



Hier „tauschen“ die beiden Geraden quasi ihren Platz, was zur Folge hat, dass im mittleren Bereich, in den zuerst wieder alle Bahnen laufen, nun jeder Orbit zum Koordinatenursprung konvergiert.

3. Fall: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$



Die beiden Geraden „verschmelzen“ zu einem Kontinuum aus unendlich vielen Fixpunkten, da sich ja auf dieser Geraden jetzt weder X noch Y ändert. Alle Bahnen streben je nach Anfangsbedingung zu einem dieser Fixpunkte.

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Partnerarbeit
freiwillig

Verändert nun selbst noch die Angaben in *Stone-Age-Joes* Aussage und findet heraus, ob diesmal die Bevölkerung unbegrenzt wächst, ausstirbt oder auf einen festen Wert zusteuert!

Schreibt diese neue Anweisung auf und gebt sie eurem Lehrer ab!

Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
freiwillig

Informiert euch über den Begriff *Symbiose*! Wo findet er Anwendung?

Was hat das Modell im Arbeitsauftrag 1 mit Symbiose zu tun?

Erläuterung: Der Begriff *Symbiose* stammt vom griechischen Wort *sym-bioun* (= *zusammenleben*), er bezeichnet die Interaktion zweier Arten (meist Pflanzen, Tiere, Mensch) zu deren gegenseitigem Vorteil. Beispiele für Symbiosen in der Natur sind Blütenpflanzen und Insekten, Menschen und Bakterien im Darm des Menschen oder Elefanten und Vögel.

Symbiotisches Verhalten, also Systeme bei der eine Größe vom Vorhandensein einer anderen profitiert und umgekehrt, zeigt sich allerdings auch bei vielen anderen Dingen wie zum Beispiel im oben behandelten Thema. Hier nimmt die Landfläche umso stärker zu, je mehr Menschen es gibt und umgekehrt. „Negative“ Anwendungen sind zum Beispiel die Waffenausrüstung zweier Länder oder die Eskalation eines Streites, bei denen die Aktion der einen Seite noch vehementere Reaktionen der anderen Seite hervorruft usw. *Diskussion in der Klasse* ist hier so gemeint, dass die Schüler, die sich mit diesem Arbeitsauftrag befasst haben, kurz über ihre Erkenntnisse berichten und so den anderen Schülern zumindest einen kleinen Einblick in die vielfältigen Anwendungen symbiotischer Systeme bieten.

7.2 Wie du mir, so ich dir

Schulstufe: 6. bis 7. Klasse AHS

Mathematische Vorkenntnisse: Rekursive Darstellung

Technische Vorkenntnisse: Grundkenntnisse im Umgang mit Derive (Iterates-Befehl) oder mit einem anderem CAS, Recherchen im Internet

Zeitbedarf: je nach Bearbeitungstiefe 4 bis 6 Unterrichtseinheiten

Das soll gefördert werden:

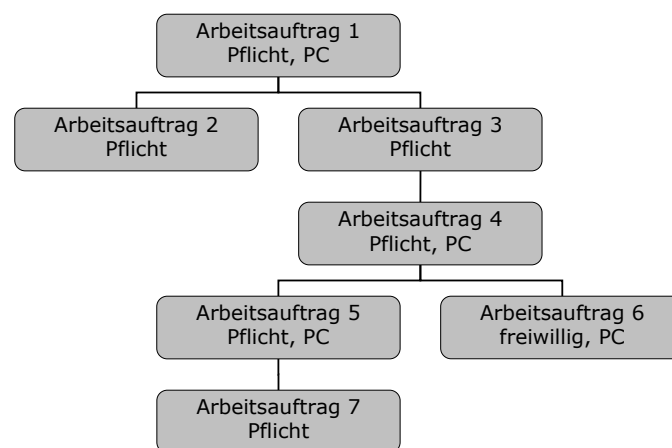
- Suchen und Auswählen von Verfahren
- Kommunikations- und Sprachkompetenzen
- Kenntnisse über Wirkungszusammenhänge in der Natur
- Umgang mit dem PC
- Hin -und Herschalten zwischen Realität und mathematischer Beschreibung
- Teamfähigkeit
- Erlangen eines realistischen Bildes mathematischer Modelle
- Beschreiben und Interpretieren von Modellergebnissen

Lehrplanbezug: Folgende stoffinhaltliche Schwerpunkte finden sich im vorliegenden Unterrichtsmaterial:

- Folgen
- Differenzengleichungen
- Dynamische Prozesse

Reihenfolge

Die folgende Grafik veranschaulicht die Abhängigkeiten der Arbeitsaufträge. Es soll von oben nach unten gearbeitet werden. Man benötigt beispielsweise für den Arbeitsauftrag 6 Informationen und Vorwissen aus den Arbeitsaufträgen 1, 3 und 4. Es ist außerdem angeführt, ob die Arbeitsaufträge mit Computerunterstützung bearbeitet werden sollen. Alle Aufgabenstellungen sind ab der 6. Klasse zu bewältigen.



Ein kurzes Gedicht zum Thema

Ein Blumenglöckchen vom Boden hervor
War früh gesprosset in lieblichem Flor;
Da kam ein Bienchen und naschte fein:
Die müssen wohl füreinander sein.

Wissenswertes

In diesem Gedicht von Johann Wolfgang von Goethe wird schon deutlich, worum es im Folgenden gehen soll. Pflanzen sind oftmals auf die Übertragung ihrer Samen durch Bienen oder Vögel angewiesen, um sich vermehren und ausbreiten zu können. Als Gegenleistung erhalten die Tiere Früchte oder Nektar als Nahrung, was wiederum zum Fortbestand ihrer Arten führt. Die Natur achtet dabei aber meist darauf, dass die Abhängigkeit zwischen bestimmten Pflanzen- und Tierarten nicht zu groß wird. Könnte zum Beispiel eine gewisse Pflanzenart nur von *einer* Tierart bestäubt werden, so wäre bei Rückzug oder Aussterben dieser Tierart auch die Pflanze dem Tod geweiht.

Es gibt allerdings Ausnahmen. Die meisten Feigenarten haben nämlich tatsächlich „exklusive Bestäuber“, die Feigenwespen, die wiederum ihre Eier nur in den Blüten der Feigen ablegen und befruchten lassen können.

Arbeitsauftrag 1

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Informiert euch über die Symbiose zwischen Feige und Feigenwespe! Welches tragische Leben und Ende haben die Männchen der Feigenwespe zu erwarten?

Welche verschiedenen Arten der Symbiose unterscheidet man in der Biologie? Zu welcher gehört wohl das Verhältnis zwischen Feige und Feigenwespe?

Wo in der Natur treten noch symbiotische Systeme auf?

Erläuterung: Informationen dazu lassen sich im Internet leicht finden. Wichtig ist, dass die Schüler erkennen, dass der Feigenbaum ohne die Wespe auf Dauer aussterben würde und auch umgekehrt. Man nennt ein solches Verhältnis *Eusymbiose*.

Arbeitsauftrag 2

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Feige und Feigenwespe profitieren also voneinander. Anhand welcher Größen könnte man diesen Profit messen?

Überlegt euch eine Methode, wie man diese Messungen in der Praxis (zum Beispiel auf einer kleinen Mittelmeerinsel) durchführen könnte! Beschreibt diese Methode möglichst genau!

Einigt euch in der Klassendiskussion auf den praktischsten Vorschlag!

Erläuterung: Der Erfolg der Wespe könnte am besten anhand ihrer Bestandszahlen gemessen werden, jener der Feigenbäume anhand der Anzahl der Früchte pro Baum, anhand der Anzahl der Feigenbäume oder anhand der räumlichen Ausbreitung.

Arbeitsauftrag 3

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Es sollen im Folgenden die beiden Größen, die ihr in Arbeitsauftrag 2 gewählt habt, zum Zeitpunkt t mit X_t und Y_t bezeichnet werden. Welche der folgenden vier Gleichungssysteme können die symbiotische Beziehung zwischen den Feigenbäumen und -wespen am besten beschreiben? Warum?

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t + aX_t + bY_t \\Y_{t+1} &= Y_t + cX_t + dY_t\end{aligned}\tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t - aX_t + bY_t \\Y_{t+1} &= Y_t + cX_t - dY_t\end{aligned}\tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t + aX_t - bY_t \\Y_{t+1} &= Y_t - cX_t + dY_t\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= X_t - aX_t + bX_tY_t \\Y_{t+1} &= Y_t + cX_tY_t - dY_t\end{aligned}\tag{7.4}$$

Für welche Situationen könnten die anderen Gleichungssysteme als Modell herangezogen werden?

Erläuterung: Das Übersetzen von der Sprache der Mathematik in einen biologischen Zusammenhang steht in diesem Arbeitsauftrag im Vordergrund. Man muss erkennen, dass eine der beiden Größen abnehmen würde, wenn es die jeweils andere nicht gäbe. Damit kann man das erste und das dritte Gleichungssystem schon ausschließen, da hier jede der beiden Größen unbegrenzt wachsen würde, wenn es die jeweils andere nicht gäbe.

Es bleiben also die zweite und die vierte Gleichung, die tatsächlich beide Modelle für symbiotisches Verhalten sind. Sie unterscheiden sich dadurch, dass im einen Fall (Gleichung 2) der Fremdwachstumsterm von X *nur* von Y abhängt, im anderen Fall (Gleichung 4) aber vom Produkt aus X und Y . Analoges gilt natürlich für den Fremdwachstumsterm von Y .

Welches der beiden Modelle man nun bevorzugt, hängt von der Situation und den gewählten Größen ab. Hat man eine Situation vor sich, wo das Wachstum einer Art nur vom Vorhandensein der anderen Art abhängt und nicht vom eigenen Bestand, so wird man eher das zweite Gleichungssystem als Modell verwenden. Ist es allerdings so, dass der Reproduktionserfolg sowohl vom eigenen als auch vom Bestand der anderen Art abhängt (also beispielsweise von der Anzahl der „Begegnungen“), so ist das vierte System zu bevorzugen. Eine reale Situation, die durch das erste Gleichungssystem beschrieben werden könnte, wird sich wohl nicht finden lassen. Das ohnehin schon exponentielle Wachstum wird hier noch durch das Vorhandensein der jeweils anderen Art verstärkt.

Gleichungssystem 3 beschreibt hingegen ein Konkurrenzverhältnis zwischen X und Y . Beide würden für sich genommen unbegrenzt wachsen, wenn sie nicht durch den jeweils anderen durch Kampf um Ressourcen oder Platz daran gehindert würden.

Dieser verständnisorientierte Arbeitsauftrag eignet sich gut zur Leistungsfeststellung. Es werden komplexe Tätigkeiten, wie das Erkennen von Strukturen, das Interpretieren von Gleichungen und das Formulieren von Zusammenhängen gefordert und gefördert.

Aufgabe 1

Betrachten wir der Einfachheit halber das Gleichungssystem 2 aus dem Arbeitsauftrag 3. Wir stellen uns jetzt vor, dass mit X_t die Anzahl der Feigenwespen und mit Y_t die durchschnittliche Anzahl der Früchte eines Feigenbaums jeweils zum Zeitpunkt t gemeint ist.

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t - 0,1X_t + 0,2Y_t \\ Y_{t+1} &= Y_t + 0,1X_t - 0,05Y_t \end{aligned} \tag{7.5}$$

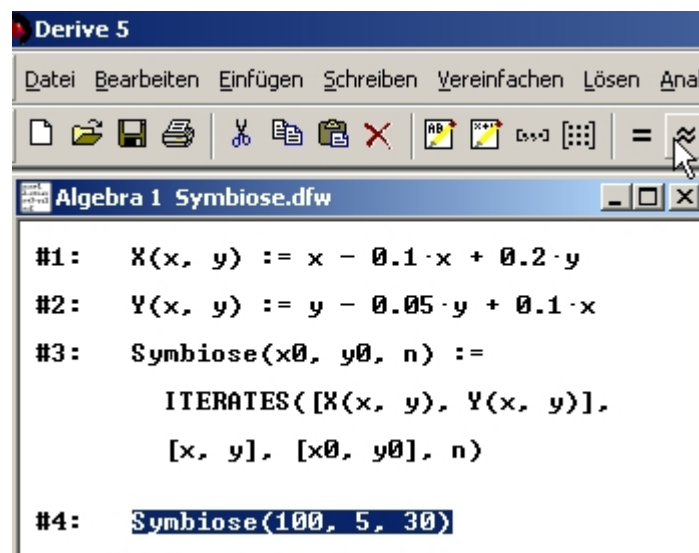
- (a) Berechnet nacheinander die Anzahl der Wespen und der Früchte pro Baum zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$, wenn $X_0 = 100$ und $Y_0 = 5$ gilt!
- (b) Was wird auf Dauer mit der Anzahl der Wespen bzw. der Früchte pro Baum passieren?
- (c) Passt eure Vermutung aus (b) mit dem Grundgedanken der Symbiose zusammen, dass nämlich beide Arten voneinander profitieren?

Lösung:

- (a) $X_1 = 91, Y_1 \approx 15, X_2 \approx 85, Y_2 \approx 23, X_3 \approx 81, Y_3 \approx 30$
- (b) Man ist versucht zu glauben, dass die Zahl der Wespen monoton fällt, die Zahl der Früchte pro Baum hingegen aber monoton wächst. Die Widerlegung dieser möglichen Vermutung und eine Erklärung dazu liefert der folgende Arbeitsauftrag.

Wissenswertes

Das Berechnen der Zahlenwerte in Aufgabe 1 (a) war schon für nur drei Zeitpunkte recht aufwändig. Will man sich den Verlauf über einen viel längeren Zeitraum ansehen, so eignet sich an dieser Stelle der Einsatz eines Computers. Man kann beispielsweise mit dem Programm *Derive* den Verlauf der *Bahnen* des Systems für beliebige Startwerte X_0 und Y_0 darstellen lassen.



```

#1:  X(x, y) := x - 0.1 · x + 0.2 · y
#2:  Y(x, y) := y - 0.05 · y + 0.1 · x
#3:  Symbiose(x0, y0, n) :=
      ITERATES([X(x, y), Y(x, y)],
      [x, y], [x0, y0], n)
#4:  Symbiose(100, 5, 30)

```

Arbeitsauftrag 4

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Betrachtet den obigen Derive-Screenshot und versucht zu verstehen, wie bei der Eingabe des Gleichungssystems vorgegangen wurde! Was bewirkt die definierte Funktion $Symbiose(x_0, y_0, n)$?

Ladet die Datei *Symbiose.dfw*, markiert die vierte Zeile im Algebra-Fenster und drückt anschließend auf das Symbol *Approximieren* (siehe obige Abbildung). Stellt die Tabelle, die Derive berechnet, grafisch dar!

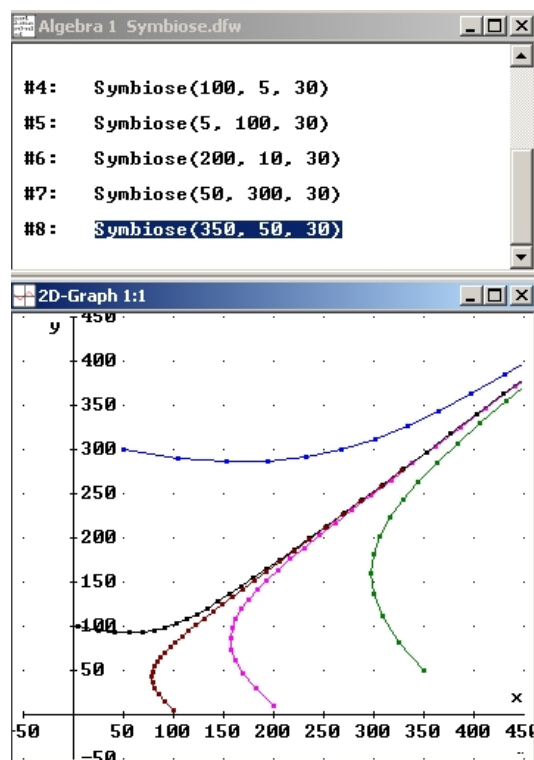
Vergleicht die ersten vier Zeilen der Tabelle mit euren Ergebnissen aus Aufgabe 1!

Was passiert auf lange Zeit gesehen mit der Anzahl der Wespen und der Anzahl der Feigen pro Baum in diesem Modell tatsächlich? Inwieweit ist dieses Ergebnis realistisch?

Zeichnet nun noch einige weitere Bahnen mit anderen Startwerten in dasselbe Diagramm! Erkennt ihr eine Gemeinsamkeit der einzelnen Bahnen?

Erläuterung: Auf lange Zeit gesehen nähern sich alle Bahnen unabhängig von den Startwerten asymptotisch einer bestimmten Gerade. Sowohl die Anzahl der Wespen als auch die der Feigen pro Baum wächst in diesem Modell unbegrenzt, was zumindest ab einem gewissen Zeitpunkt unrealistisch sein muss.

Die Schüler sollen durch diesen Arbeitsauftrag erkennen, dass Messungen in der Natur, die nur über sehr kurze Zeiträume reichen, oft keine Prognosen für die weitere Entwicklung des biologischen Systems erlauben.



Arbeitsauftrag 5

Bearbeitung: Kleingruppe, Diskussion in der Klasse
Pflicht

Wir bleiben noch einmal beim Gleichungssystem 2 aus Arbeitsauftrag 3. Wählt nun selbst beliebige Werte für die Konstanten a, b, c, d aus dem Intervall $[0; 0, 3]$!

Gebt das System analog zur Datei *Symbiose.dfw* in Derive ein! Nähern sich die Bahnen wieder einer gemeinsamen Gerade? Gibt es Unterschiede zu vorher?

Skizziert die entstandene Grafik an der Tafel und vergleicht die Ergebnisse der einzelnen Gruppen! Gibt es qualitative Unterschiede?

Erläuterung: Die Bahnen nähern sich immer einer Gerade, deren Lage allerdings von den gewählten Konstanten a, b, c, d abhängt. Ein qualitativ anderes Verhalten zeigt sich, wenn $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ gilt, da dann die Bahnen nicht ins Unendliche, sondern zum Koordinatenursprung streben. Eine Erklärung

dazu findet sich in der Unterrichtssequenz *Die Entstehung einer Siedlung* im Arbeitsauftrag 5.

Arbeitsauftrag 6

Bearbeitung: Partnerarbeit
freiwillig

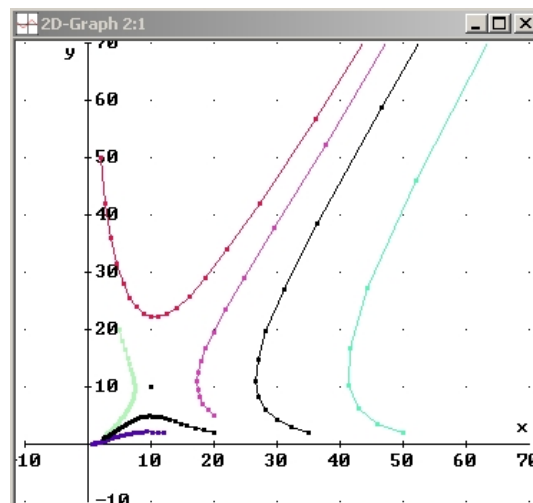
Analysiert das Gleichungssystem 4 aus Arbeitsauftrag 3 wieder mit Hilfe von Derive! Tipp: Als Zahlenwerte für die Konstanten eignen sich z. B. $a = 0,1$, $b = 0,01$, $c = 0,02$ und $d = 0,2$.

Streben auch hier die Bahnen unabhängig von den Startwerten in die gleiche Richtung?

Berechnet, für welchen Wert von X_t die Beziehung $X_{t+1} = X_t$ gilt! Analog für $Y_{t+1} = Y_t$!

Gebt die eben berechneten Werte für X_t und Y_t als Startwert in das Modell in Derive ein! Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

Erläuterung: Für die hier angegebenen Konstanten erhält man folgendes Phasenportrait:



Es hängt also vom Startwert ab, ob die Bahn ins Unendliche oder zum Koordinatenursprung konvergiert. Als Fixpunkt ergibt sich in diesem Beispiel der Punkt $(10; 10)$.

Arbeitsauftrag 7

Bearbeitung: Partnerarbeit
Pflicht

Verfasst einen Artikel (etwa zwei A4-Seiten) für eine naturwissenschaftliche Zeitschrift, der unter anderem folgende Fragen beantwortet:

- Was versteht man unter einem symbiotischen System?
- Wie kann man solche Systeme mathematisch beschreiben?
- Welche Aussagekraft haben mathematische Modelle? Wie geht man mit ihren Ergebnissen um?
- Was sind Vor- bzw. Nachteile symbiotischer Systeme? Warum würde die Welt ohne Symbiosen nicht funktionieren?

Achtet auf ein ansprechendes Layout und gebt an, für welches Zielpublikum der Artikel verfasst wurde!

Kapitel 8

Weitere Unterrichtsvorschläge

8.1 Ausbreitung von Epidemien

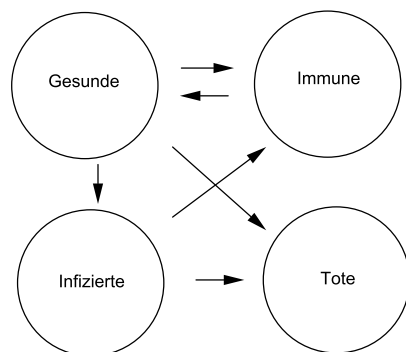
Dieser Abschnitt entspricht einem Artikel, der im Dezember 2008 in den Internationalen Mathematischen Nachrichten (Heft 209) erscheinen wird. Die dabei vorgestellte Unterrichtssequenz konnte in einer 6. Klasse AHS Oberstufe erprobt werden, die Erfahrungen und Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler dazu findet man im Abschnitt 9.1.

Ein Thema, das die Welt bewegt

Die Epidemiologie setzt sich mit den Ursachen und der Ausbreitung von übertragbaren Krankheiten auseinander. Erste Maßnahmen, Epidemien erfolgreich entgegenzutreten, gab es schon 1850. Mathematische Modelle wurden allerdings erst etwa 50 Jahre später entwickelt. Eine entscheidende Rolle spielte dabei der britische Mediziner Sir Ronald Ross, der beinahe sein gesamtes Leben für die Bekämpfung der Malaria gearbeitet hat. Er bereiste zahlreiche Länder und Kriegsschauplätze, um mehr über diese Krankheit zu erfahren. Er wollte die Ursache für die Malariaepidemie und ihre rasche Ausbreitung entdecken. Letztlich fand er heraus, dass die Ansteckung mit Malaria immer über Malariamücken ablief. Dafür erhielt er 1902 den Medizinnobelpreis, 1911 wurde er geadelt. Er entwickelte sogar ein erstes mathematisches Modell zur Beschreibung der Verbreitung der Krankheit. Gegen Ende des 20. Jahrhunderts stieg auch medial das Interesse an der Epidemiologie. Krankheiten wie SARS oder die Vogelgrippe waren wochenlang Thema in Zeitungen und im Fernsehen rund um den Erdball. Viele düstere Prognosen und Szenarien wurden vorgestellt und emotional geprägte Diskussionen wurden geführt - nicht zum Schaden der Pharmaindustrie, wie man sich vorstellen kann.

Gerade auch diese Diskussionen und Entwicklungen haben gezeigt, dass realistische Prognosen über den Verlauf einer Epidemie nur sehr schwer zu treffen sind. Die dafür notwendigen mathematischen Modelle sind sehr vielschichtig. Im Folgenden wird ein Unterrichtskonzept zum Thema vorgestellt, das den Bogen von Modellen mit zuerst sehr einfachen Annahmen bis hin zu etwas komplexeren Modellen, wie dem SIR-Modell, spannt.

Der Einstieg in das Thema

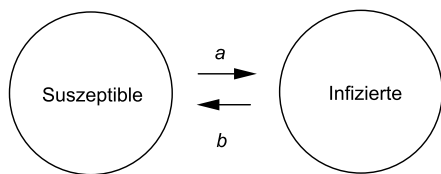


Wir betrachten hier eine Krankheit, die direkt durch die Luft von Mensch zu Mensch übertragen werden kann. Im Schulunterricht kann zu diesem Zweck diskutiert werden, welche unterschiedlichen Bevölkerungsgruppen es in Zusammenhang mit einer bestimmten Krankheit (z. B. Grippe) geben kann. Dabei könnten etwa Gesunde, Infizierte, Infektiöse, Geimpfte, Immune, Tote, in Quarantäne befindliche Menschen usw. genannt werden.

In einem nächsten Schritt kann nun überlegt werden, zwischen welchen dieser Gruppen Übergänge stattfinden und in welche Richtung diese gehen können. Es ist klar, dass ein entsprechendes mathematisches Modell zu diesem *Realm-Modell* für den Schulunterricht zu kompliziert wäre. Alle möglichen Übergänge sofort in Betracht zu ziehen, würde dazu führen, dass die Suche nach geeigneten Übergangsparametern zu komplex und das Aufstellen der (vielen) Gleichungen zu unübersichtlich wäre. Wir starten daher bei einem zunächst recht einfachen Modell mit lediglich zwei unterschiedlichen Bevölkerungsgruppen.

Ein einfaches Modell

Betrachten wir etwa die Ausbreitung einer Grippe. Dabei gibt es die Bevölkerungsgruppe, die zwar noch gesund, aber prinzipiell empfänglich für die Krankheit ist. Wir nennen diese Menschen *Suszeptible*. Auf der anderen Seite gibt es die bereits mit der Krankheit *Infizierten*. Wie finden nun Übergänge zwischen den beiden Bevölkerungsgruppen statt?

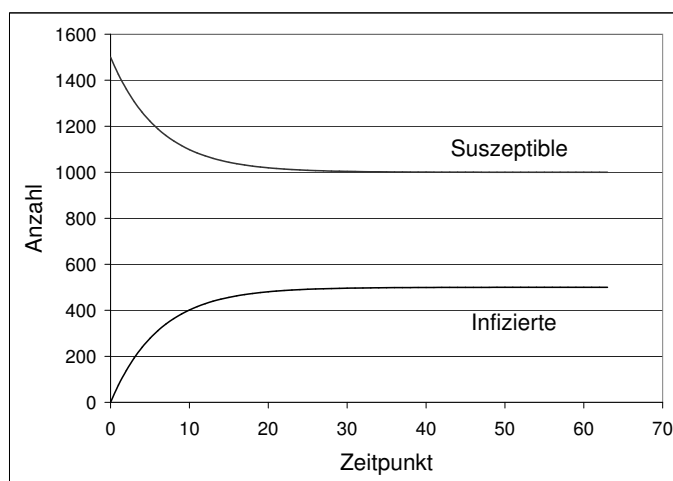


Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich in jedem Zeitschritt (das kann eine Stunde, ein Tag, eine Woche sein) ein fixer Prozentsatz a an Suszeptiblen infiziert und dass umgekehrt in jedem Zeitschritt ein fixer Prozentsatz b von Infizierten gesundet und dann wieder suszeptibel ist: siehe nebenstehende Abbildung.

Bezeichnen wir die Anzahl der Suszeptiblen zum Zeitpunkt t mit S_t und jene der Infizierten mit I_t und setzen wir weiters voraus, dass die Gesamtpopulationsgröße konstant gleich N ist, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - aS_t + bI_t \\ I_{t+1} &= I_t + aS_t - bI_t = N - S_{t+1} \end{aligned}$$

Wir haben also ein System von Rekursionen gewonnen. Es bleibt nur noch, die Konstanten a und b geeignet zu wählen. Gehen wir von einer Populationsgröße $N = 1500$ aus und wählen wir etwa $a = 0,05$ und $b = 0,1$. Wir können nun z. B. durch eine Simulation in einer Tabellenkalkulation feststellen, ob diese Wahl „brauchbar“ war. Dabei wird natürlich das große Potential von solchen Programmen, nämlich das Übertragen von Formeln auf andere Zellen und die damit verbundene rasche Berechnung rekursiv definierter Folgenglieder, ausgenutzt. Auch die grafische Darstellung mit Hilfe des eingebauten Diagrammassistenten stellt für Schülerinnen und Schüler kein Problem dar.



$$\begin{aligned} a &= 0,05; \quad b = 0,1; \quad N = 1500 \\ S_0 &= 1500; \quad I_0 = 0 \end{aligned}$$

Es zeigt sich ein Verlauf der Zeitdiagramme, der auf lange Sicht zu stabilen Verhältnissen führt. Die Schülerinnen und Schüler können nun selbst

herausfinden, dass bei dieser Wahl der Parameter auf Dauer ein Drittel der Bevölkerung krank sein wird. Die konkreten Personen wechseln dabei allerdings. Sie können weiters mit den Parametern a , b und S_0 experimentieren und die Veränderungen an den Zeitdiagrammen beobachten. S_0 gibt dabei natürlich die Anzahl der Suszeptiblen zu Beginn des Prozesses an. Man erkennt, dass die Anzahl der Infizierten, die sich nach langer Zeit einstellt, zwar von der Wahl der Parameter a und b , nicht aber von der Wahl von S_0 abhängt.

Bei der Beschreibung realer Krankheiten geht man oft genau umgekehrt vor. Man beobachtet zunächst die Größen der Bevölkerungsgruppen und deren Veränderungen im Laufe der Zeit und versucht danach, die im Modell vorkommenden Parameter geeignet anzupassen. Man kann dann aus so einem Modell lernen, welche durch den Menschen steuerbaren Parameter man verändern muss, um auf Dauer bessere Ergebnisse (z. B. geringere Infiziertenzahlen) zu erlangen. Kehren wir aber zurück zu unserem Beispiel: Das Langzeitverhalten des Systems lässt sich auch aus den Rekursionsgleichungen erkennen und berechnen. Uns interessiert dabei ja folgende Frage: *Wie viele Menschen werden gesund sein, wenn sich die Anzahl der Infizierten und damit auch die der Gesunden nicht mehr ändert, wo liegt also ein möglicher Fixpunkt des Prozesses?* Wir wollen demnach wissen, wie groß S ist, wenn $S_{t+1} = S_t$ gilt und ob der Prozess zu diesem Fixpunkt konvergiert. Setzen wir also diese Bedingung in die Rekursion für die Suszeptiblen ein:

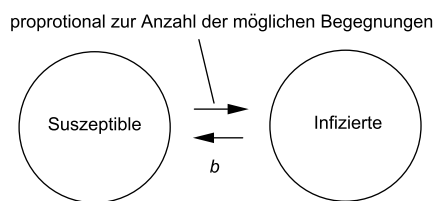
$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - aS_t + bI_t \\ S_t &= S_t - aS_t + bI_t \\ aS_t &= bI_t \\ aS_t &= b(N - S_t) \\ S_t &= \frac{b}{a+b}N \end{aligned}$$

Es bliebe jetzt noch, die Konvergenz der Rekursionsfolge S_t mit Methoden der Theorie der Differenzengleichungen zu zeigen. Darum soll es aber in diesem Artikel und auch im Schulunterricht nicht primär gehen. Vielmehr reicht an dieser Stelle der intuitive und experimentelle Zugang mit Hilfe der Tabellenkalkulation. Man *sieht* die „Konvergenz“. Den stabilen Endzustand der Anzahl der Suszeptiblen bezeichnen wir nun mit $S^* = \frac{b}{a+b}N$. In unserem Fall ergibt sich $S^* = \frac{0,1}{0,15} \cdot 1500 = 1000$. Wie kann man ganz allgemein dafür sorgen, dass S^* einen möglichst großen Wert annimmt? Man sollte klarerweise versuchen, b möglichst groß und a möglichst klein zu machen. Doch hat man auf diese Parameter überhaupt Einfluss? Es ist notwendig, sich Gedanken darüber zu machen, wie man diese Parameter zu interpretieren hat.

b ist die *Genesungsrate*, kann also etwa durch Medikamente, Pflege, Schonung usw. angehoben werden. a ist die *Infizierungsrate*, die durch Stärkung der Abwehrkräfte im Vorhinein bzw. durch Verhinderung von Kontakten zu Kranken gesenkt werden kann. Diese Parameter sind natürlich von Krankheit zu Krankheit unterschiedlich zu interpretieren. Sie hängen davon ab, auf welche Arten die Krankheit übertragen werden kann bzw. wie sich der Genesungsprozess im Einzelfall gestaltet. Beobachtet man nun in unserem Beispiel, dass sich die Ansteckungsrate a auf 10 Prozent erhöht, auf welchen Wert müsste man dann den Genesungsparameter b anheben können, damit auf Dauer trotzdem nicht mehr als 500 Personen krank sind? Welche Möglichkeiten gibt es, die Parameter a und b so zu wählen, dass die Anzahl der kranken Personen nicht größer als 300 ist? Wie groß ist die Ansteckungsrate ungefähr, wenn bei einer Genesungsrate von 15 Prozent auf Dauer 1400 Personen gesund sind? Diesen Fragen können die Schüler einerseits experimentell mit Hilfe der Tabellenkalkulation auf den Grund gehen, andererseits können sie die gesuchten Werte auch einfach algebraisch aus $S^* = \frac{b}{a+b}N$ berechnen.

Wir haben bei unseren bisherigen Betrachtungen völlig außer Acht gelassen, dass die Anzahl der Neuinfektionen davon abhängen muss, wie häufig es zu Kontakten von Suszeptiblen mit Infizierten kommt. Das ist aber gerade die relevante Frage. Bisher wurde ja in jedem Zeitschritt einfach ein fixer Prozentsatz an Gesunden krank, alleine davon abhängig, wie viele Gesunde es im Moment gibt.

Relevanz von Kontakten



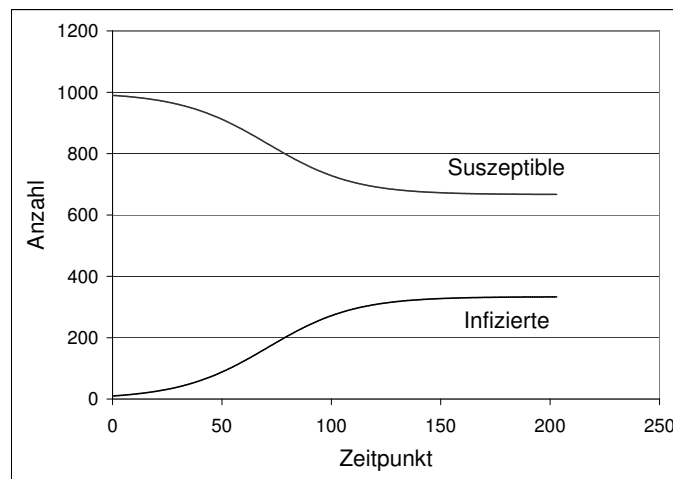
Je mehr mögliche Begegnungen es zwischen Suszeptiblen und Infizierten gibt, desto mehr Neuinfektionen soll es in unserem Modell pro Zeitschritt geben. Die Anzahl der Neuinfektionen könnte etwa als direkt proportional zu dieser Anzahl der *möglichen Begegnungen* modelliert werden.

Falls die Schüler die Berechnung der Anzahl der möglichen Begegnungen schon von Räuber-Beute-Modellen kennen, dann können sie selbst versuchen, die zu diesem Modell passenden Rekursionsgleichungen zu finden. Falls nicht, kann an dieser Stelle erarbeitet werden, dass jeder Suszeptible prinzipiell jedem Infizierten begegnen kann, was insgesamt also genau $S_t \cdot I_t$ mögliche

Begegnungen liefert. Ein gewisser Prozentsatz a dieser Begegnungen wird tatsächlich stattfinden und auch zu einer Infektion des Suszeptiblen führen.

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - aS_tI_t + bI_t \\ I_{t+1} &= I_t + aS_tI_t - bI_t \end{aligned}$$

Die Schüler können jedenfalls versuchen, den Gleichgewichtszustand algebraisch aus diesen Rekursionen zu berechnen. Dazu verwenden sie wieder die Bedingung $S_{t+1} = S_t$. Das Ergebnis ist dabei $S^* = \frac{b}{a}$. Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht eigenartig, dass dieser Gleichgewichtszustand S^* scheinbar unabhängig von der Populationsgröße N ist. Tatsächlich ist allerdings schon die Wahl des Parameters a abhängig davon, wie groß die Population ist. Die Anzahl der möglichen Begegnungen zwischen Suszeptiblen und Infizierten wächst ja in Abhängigkeit von N sehr rasch, was bei der Berechnung der tatsächlichen Neuinfektionen durch den Parameter a kompensiert werden kann. Für das Implementieren am PC benötigen wir nun wieder vernünftige Parameterwerte für a und b . Dazu kann man den Schülern etwa folgende Aufgabe stellen: Angenommen, pro Zeitschritt werden 10% der Infizierten wieder gesund. Wie groß muss a gewählt werden, damit $S^* = 800$ ist? Implementiert nun das Modell mit diesen Werten in einer Tabellenkalkulation! Die Populationsgröße soll $N = 1000$ betragen.



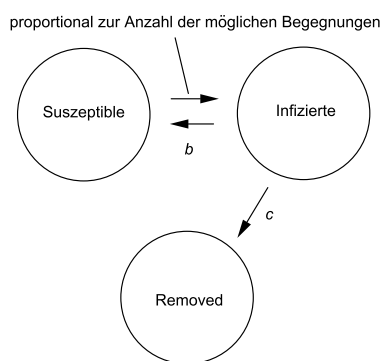
$$\begin{aligned} a &= 0,000125; b = 0,1; N = 1000 \\ S_0 &= 990; I_0 = 10 \end{aligned}$$

Die Zeitdiagramme sehen ganz ähnlich aus wie bei unserem ersten Versuch. Bei genauer Betrachtung fällt allerdings auf, dass der Verlauf *sigmoid*, d. h. *s-förmig* ist. Bei wenigen Infizierten zu Beginn gibt es auch wenige Neuinfektionen. Erst wenn I wächst, steigt auch die Anzahl der möglichen Begegnungen. Insgesamt also doch ein etwas realistischeres Modell als das

erste. Dennoch wollen wir es noch weiter verbessern, indem wir eine dritte Bevölkerungsgruppe hinzunehmen.

Das SIR-Modell

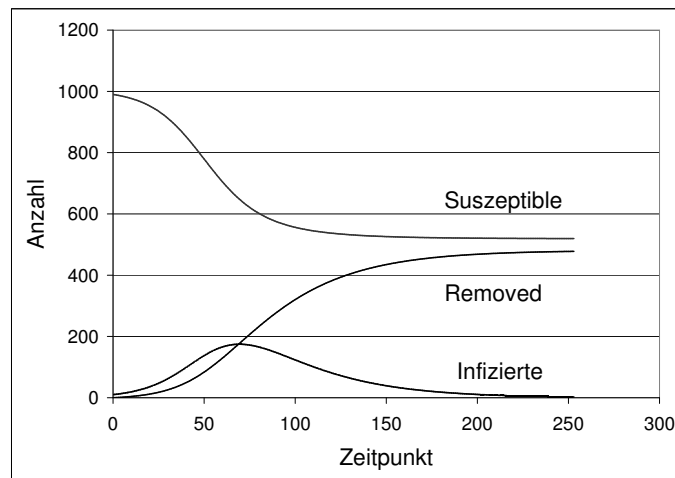
Wir betrachten nun zusätzlich die Eventualitäten, einerseits an der Krankheit zu sterben und andererseits infizierte Personen unter Quarantäne stellen zu können, um so die Ansteckungsmöglichkeiten Suszeptibler zu verringern. Diese beiden Personengruppen fassen wir zu einer zusammen und nennen sie - wie in der Literatur üblich - *Removed*, was wir mit R abkürzen. Dieses Zusammenfassen ist deshalb vernünftig, weil beide Bevölkerungsgruppen keinen Einfluss mehr auf die Entwicklung der Suszeptiblen bzw. Infizierten haben.



Der einzig neue Übergang soll nun jener von den Infizierten zu den Removed sein. In jedem Zeitschritt soll ein fixer Prozentsatz c von Infizierten in die neue Gruppe wechseln. Die Schüler sollen nun versuchen, die Rekursionsgleichungen von vorhin dementsprechend zu erweitern.

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - aS_tI_t + bI_t \\ I_{t+1} &= I_t + aS_tI_t - bI_t - cI_t \\ R_{t+1} &= R_t + cI_t \end{aligned}$$

Zur leichteren Einprägsamkeit der Abkürzungen S , I und R nennt man Modelle dieser Gestalt *SIR – Modelle*. Nachdem die Schüler diese Rekursionsgleichungen in einer Tabellenkalkulation implementiert haben, stellt sich ihnen die Frage, welche Unterschiede sie zu den bisher betrachteten Modellen erkennen. Die Wahl der Parameter kann dabei, nachdem sich bei den Schülern durch die Bearbeitung der oben besprochenen Modelle wohl schon ein *Gespür* für deren Größenordnung entwickelt hat, durch Probieren erfolgen. Bei „schlechter“ Wahl der Parameter kann es zu ungewünschten Ergebnissen des Modells kommen. Ist beispielsweise a in Relation zu b zu groß, d. h. dominiert der Term $-aS_tI_t$ den Term bI_t in zu großem Ausmaß, kann es zu negativen und daher unbrauchbaren Werten für S_{t+1} kommen.



$$a = 0,0002; b = 0,1; c = 0,03; N = 1000$$

$$S_0 = 990; I_0 = 10; R_0 = 0$$

Es zeigt sich wie bei den ersten beiden Modellen, dass sich auf Dauer - hier nach einer sprichwörtlichen *Grippewelle* - stabile Verhältnisse einstellen. Allerdings gibt es bei diesem Modell am Ende keine Infizierten mehr, die Krankheit kann also in der betrachteten Population als ausgestorben bezeichnet werden. Selbstverständlich können allerdings in der Gruppe der Removed noch kranke Menschen sein, es besteht aber keine Ansteckungsmöglichkeit mehr für Suszeptible. Die algebraische Ermittlung dieses Gleichgewichtszustandes ist nun leider nicht mehr so einfach möglich wie vorher. Setzt man wieder die Bedingung $S_{t+1} = S_t$ in die Rekursionsgleichung für die Suszeptiblen ein und betrachtet den Fall $I_t \neq 0$, so erhält man zwar einen Fixpunkt bei $S_1^* = \frac{b}{a}$, in unserem Beispiel also bei $S^* = 500$. Ganz offensichtlich liegt aber der Wert, den uns die Tabellenkalkulation liefert über 500, nämlich bei etwa 519 Suszeptiblen. Wie kann das sein? Die Antwort liegt darin begründet, dass die Anzahl der Infizierten bereits Null ist, bevor sich dieser Wert für S überhaupt einstellen kann. Auch in diesem Fall gilt ja $S_{t+1} = S_t$. Es gibt dann nämlich keine Neuinfektionen mehr, die Anzahl der Suszeptiblen bleibt konstant. Was kann man nun tun, um den tatsächlichen Wert für S^* möglichst groß zu halten? Diese Frage können die Schüler wieder experimentell mit der Tabellenkalkulation erforschen. Dazu dienen die folgenden Anstöße: Was passiert, wenn durch die Verwendung eines neuen Medikaments die Genesungsrate b von 0,10 auf 0,11 angehoben werden kann? Was geschieht langfristig gesehen, wenn die Übergangsrate c statt 0,3 den Wert 0,4 annimmt? Wie ist das dabei auftretende Phänomen zu erklären? Sowohl die Erhöhung von b als auch von c führen nämlich dazu, dass die Anzahl der Suszeptiblen auf lange Zeit gesehen steigt. Inhaltlich ist dabei bemerkenswert, dass wenn eine Krankheit sehr gefährlich und im hohen Maße tödlich

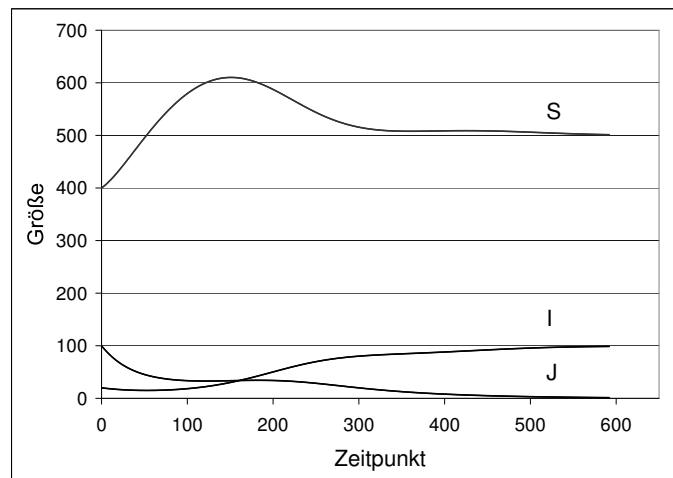
ist - was ja gerade durch einen großen Wert für c ausgedrückt werden kann - am Ende weniger Leute mit der Krankheit infiziert sind. Das liegt eben genau daran, dass die Anzahl der im Moment Infizierten relevant für die Anzahl der Neuinfektionen ist. Ein „großes“ c dezimiert diese Anzahl. Schließlich können sich die Schüler Gedanken darüber machen, wie das Modell erweitert werden müsste, wenn man auch Impfungen von Suszeptiblen oder *Immunität* nach überstandener Krankheit berücksichtigen würde und welchen Einfluss das auf das Langzeitverhalten des Systems hätte. Auch könnte man Übergänge von den unter Quarantäne stehenden Menschen zu den Suszeptiblen in das Modell aufnehmen.

Ein viertes und letztes Modell

Den Effekt, dass durch gefährlichere Viren insgesamt weniger Menschen erkranken, kann man auch im direkten Vergleich zweier Krankheitserreger demonstrieren. Betrachten wir dabei zwei Virentypen, die sich in ihrer „Aggressivität“, genauer gesagt in ihrer Tödlichkeit, unterscheiden. Die an Virus 1 erkrankten Personen werden mit I_t bezeichnet und haben eine Sterberate v pro Zeitschritt, während die an Virus 2 Erkrankten mit J_t bezeichnet werden und eine Sterberate w haben. Wir nehmen diesmal auch einen Geburtsprozess dazu. Die Anzahl der Suszeptiblen soll wie im Modell des begrenzten Wachstums mit Kapazitätsgrenze K zunehmen. Die Anzahl der Neuerkrankungen pro Zeitschritt soll wieder proportional zur Anzahl der jeweils möglichen Begegnungen sein:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + a \cdot (K - S_t) - b \cdot S_t \cdot (I_t + J_t) \\ I_{t+1} &= I_t + b \cdot I_t \cdot S_t - v \cdot I_t \\ J_{t+1} &= J_t + b \cdot J_t \cdot S_t - w \cdot J_t \end{aligned}$$

Was bedeutet es nun, dass ein Virus aggressiver ist als das andere? In unserem Modell soll es keinen Unterschied bei der Übertragung der Krankheit geben. In beiden Fällen verwenden wir den Parameter b als Infektionsrate. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Sterberaten unterschiedlich anzusetzen. Wir wollen im Folgenden annehmen, dass das Virus 2 etwas aggressiver als das Virus 1 ist, d. h. dass die Sterberate w größer als die Sterberate v ist. Die Wahl geeigneter Parameter ist in diesem Beispiel gar nicht so einfach, es kann den Schülern dabei mit Hinweisen weitergeholfen werden. Generell ist es günstig, die Parameter „eher klein“ zu wählen, um die Veränderungen der betrachteten Populationsgrößen S , I und J pro Zeitschritt klein zu halten und dadurch negative Werte bzw. Oszillationen wie beim diskreten logistischen Wachstum mit zu großem Wachstumsparameter (siehe REINARTZ 2003, S. 53-57) zu vermeiden.



$$a = 0,01; b = 0,0001; v = 0,05; w = 0,06$$

$$S_0 = 400; I_0 = 20; J_0 = 100$$

Trotz der zu Beginn höheren Zahl an Virus-2-Erkrankten hat das „schwächere“ Virus 1 auf Dauer die „besseren Karten“, wenn es ums Überleben in der betrachteten Bevölkerung geht. Das Virus 2 stirbt sogar komplett aus, während sich zwischen den verbleibenden Bevölkerungsgruppen stabile Verhältnisse einstellen. Die Anzahl der verstorbenen Menschen wächst natürlich weiter, im stationären Zustand werden in diesem Modell in jedem Zeitschritt so viele Menschen geboren, wie an der Krankheit versterben. S^* lässt sich leider nicht sehr einfach berechnen. Aus der Bedingung $S_{t+1} = S_t$ gewinnt man aber immerhin die Beziehung $S^* = K - \frac{v}{a}I^*$ zwischen den Suszeptiblen und den Infizierten im Gleichgewichtszustand.

Schlussendlich kann man sich noch fragen, was passiert, wenn man anstatt unterschiedlicher Sterberaten unterschiedliche Übertragungsraten b_1 und b_2 einführt. Die Schüler können experimentell leicht feststellen, dass in diesem Fall das aggressivere Virus sehr wohl die Oberhand behält, was ja bei gleichen Sterberaten wenig verwunderlich ist.

8.2 Modellierungsaufgaben aus der Biomathe- matik

Wenn man biomathematische Modelle bearbeitet, muss das nicht per se bedeuten, dass man dabei auch wirklich *modelliert*. So finden sich in den vorher vorgestellten Unterrichtsmaterialien nur an ausgewählten Stellen tatsächlich „Modellierungspassagen“ oder „Phasen angeleiteter Modellierung“.

In diesem Abschnitt hingegen soll nun wirklich die Modellbildung im Vordergrund stehen. Wie man schon im Abschnitt 3.3.7 sehen konnte, gehören zum

mathematischen Modellieren viele unterschiedliche Tätigkeiten: *Konstruieren/Verstehen*, *Vereinfachen/Strukturieren*, *Mathematisieren*, *Mathematisch arbeiten*, *Interpretieren*, *Validieren* und *Darlegen/Erklären*. Die folgenden Unterrichtsmaterialien sind also naturgemäß von ihrem kognitiven, aber auch von ihrem kreativen Anspruch her sehr hoch einzustufen.

Mathematisches Modellieren muss – genau wie alles andere – auch erst einmal geübt werden. Kleinere Einstiegsaufgaben, wie etwa *Fermi-Aufgaben*¹ bieten jedoch schon in der Unterstufe die Möglichkeit, Modellieren zu lernen. Als Basis für die folgenden Modellierungsaufgaben wäre es von Vorteil, wenn die Schüler schon Vorerfahrungen mit biomathematischen Modellen oder zumindest mit elementaren, diskreten Wachstumsprozessen gemacht hätten.

Eine Gefahr bei der Arbeit mit Schülern ist aus eigener Erfahrung, dass sie meist sehr schnell am Computer arbeiten möchten. Viel sinnvoller ist es jedoch, zuerst lediglich mit Papier und Bleistift zu arbeiten, Notizen zu machen, Skizzen und Diagramme anzufertigen, die die vorliegende Situation verständlich darstellen und die Struktur erkennen lassen. Erst wenn man die Rekursionsformeln herausgearbeitet hat, ist es sinnvoll, eine Tabellenkalkulation die lästigen Berechnungen übernehmen zu lassen und durch Experimentieren brauchbare Zahlenwerte für eventuelle Parameter zu finden.

Meist ist es sinnvoll, die Schüler in kleinen Gruppen zu je vier oder fünf Personen arbeiten zu lassen und ihnen dafür ausreichend Zeit zur Verfügung zu stellen. Am Ende dieser Arbeitsphasen wäre eine Präsentation der Gruppenergebnisse vor der ganzen Klasse wünschenswert.

¹siehe z. B. HERGET (2005)

Bevölkerungsdynamik mit mehreren Altersklassen

In den Medien gibt es häufig die Diskussion um den „Generationenvertrag“. Das Problem der Überalterung unserer Bevölkerung aufgrund des medizinischen Fortschritts und der vielfältigen sozialen und gesellschaftlichen Veränderungen wird uns in Mitteleuropa in den kommenden Jahrzehnten begleiten. In anderen Teilen der Erde ist man hingegen bestrebt, die Geburtenraten möglichst niedrig zu halten, um eine Bevölkerungsexplosion zu verhindern.

Wählt eine bestimmte Bevölkerung (z. B. die österreichische, die chinesische, die eurer Heimatstadt, ...), für die ihr gerne ein Modell erstellen wollt und unterteilt sie in Altersklassen!

Trefft Modellannahmen (Anzahl der Altersklassen, Geburtenraten, Sterberaten, Übergangsraten, ...)!

Simuliert danach eventuell auch Geburtenkontrolle, Krieg, Babyboom, ...

Wie sieht die langfristige Entwicklung der Bevölkerung aus?

Welche gesellschaftspolitischen Probleme könnten sich ergeben und wie könnte man diese vermeiden oder verringern? Versucht, eure Vermutungen durch euer Modell zu bestätigen!

Nahrungsketten

Nahrungsketten – von der niedrigsten Pflanze zum „Top predator“, dem obersten Raubtier – sind in der Natur gang und gäbe. Faszinierenderweise führt das nur selten zum Aussterben einer Art, es herrscht oftmals ökologisches Gleichgewicht. Wenn da nicht der Einfluss des Menschen wäre ...

Modelliert eine beliebig lange (lineare) Nahrungskette!

Trefft Modellannahmen (Länge der Nahrungskette, Abhängigkeit einer Spezies von seiner Nahrungsquelle, Geburtenrate, Sterberate, usw.)!

Was kann die Ausrottung einer Tierart bewirken? Was die Einbringung einer neuen Räuber- oder Beutespezies?

Ausbreitung einer Krankheit

Das Problem bei Krankheiten ist oftmals nicht nur das Kranksein selbst, sondern vielmehr die Ansteckung von anderen Menschen. Die Krankheit wird immer wieder neu verbreitet, kann immer größere Personengruppen befallen und möglicherweise dauerhaft in einer Bevölkerung Fuß fassen. Um eine Epidemie vermeiden zu können, muss man allerdings wissen, *wie* eine bestimmte Krankheit überhaupt übertragen wird und welchen Einfluss man darauf hat.

Modelliert zum Beispiel die Ausbreitung einer Grippe!

Trefft Modellannahmen: Welche Bevölkerungsgruppen gibt es (Suszeptible, Infizierte, Tote, Immune, usw.)? Wie wird die Krankheit übertragen und wie kann das modelliert werden?

Wie hoch ist der Anteil der an der Epidemie Erkrankten oder Verstorbenen nach einer gewissen Zeit? Welche Maßnahmen müssten getroffen werden, um eine Epidemie zu verhindern? Versucht, eure Vermutung durch euer Modell zu stützen!

Rodung und Nachwachsen eines Waldes

Der Wald wird oft als *grüne Lunge* der Erde bezeichnet. Er hat Funktionen verschiedenster Art, was oft zu Konflikten zwischen Personengruppen mit unterschiedlichen Interessen wie etwa Umweltorganisationen, Touristenverbänden, Landwirten, Industrie, Wirtschaft usw. führt.

Modelliert den Baumbestand eines beliebigen (fiktiven) Waldes!

Trefft Modellannahmen (Einteilung in Baumhöhenklassen, Wachstumsrate, *Lebenserwartung* von Bäumen, Einteilung in verschiedene Baumarten, usw.)!

Simuliert Rodung, natürliche Neubildung, künstliche Aufforstung, usw.!

Konkurrenz

Der Kampf ums Überleben ist ein ganz natürliches und oft beobachtetes Schauspiel. Jede Art versucht, möglichst großen Reproduktionserfolg zu haben, und das gelingt natürlich nur dann besonders gut, wenn genügend Territorien und Ressourcen zur Verfügung stehen – die man sich notfalls mit Gewalt holt.

Modelliert die Situation zwischen zwei Tierarten, die um die gleiche Ressource konkurrieren!

Trefft Modellannahmen (Wachstumsraten, Sterberaten, Geburtenraten, in welchen Situationen kommt es überhaupt zu Konkurrenz? usw.)! Wie würde sich die Anzahl der Tiere einer Spezies bei Abwesenheit der jeweils anderen Art entwickeln?

Hängt der Verlauf der Lösungskurven von der Wahl der Startwerte ab? Gibt es eine Möglichkeit, bei der beide Arten dauerhaft überleben? Versucht, dies durch euer Modell zu bestätigen!

Kapitel 9

Erfahrungen und Erkenntnisse aus dem Unterricht

9.1 Erfahrungen mit den Unterrichtsmaterialien

Lehreraus- und fortbildung

Im Rahmen der Lehrveranstaltung *Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht* an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien war es möglich, zwei Einheiten zum Thema *Biomathematik im Schulunterricht* abzuhalten, in denen unter anderem auch Unterrichtsvorschläge für die Sekundarstufe vorgestellt werden konnten. Inhaltlich wurden Themen wie *Mathematische Ökologie* und *Wachstumsvorgänge* behandelt. Weiters gab es einige Initiativen in der Lehrerfortbildung, wie etwa einen Vortrag beim LehrerInnenfortbildungstag der ÖMG 2006, sowie einen Seminartag am Gymnasium Oberpullendorf. Dabei konnten diskrete biomathematische Modelle einer großen Zahl von Lehrkräften als möglicher neuer Unterrichtsinhalt vorgestellt werden. Das Thema war dabei vielen Lehrerinnen und Lehrern ganz neu. Weitere Fortbildungsveranstaltungen sind in Planung, etwa für die Arbeitsgemeinschaft Mathematik in Niederösterreich im Herbst 2008.

Arbeit mit Schülerinnen und Schülern

Ein erster Versuch, das Thema *Biomathematik* mit Schülern zu bearbeiten, wurde bei der Summer School der Fakultät für Mathematik im Sommer 2007 unternommen. 18 interessierte Schülerinnen und Schüler nahmen an dieser Veranstaltung teil, bei der ein ganzer Tag diesem Thema gewidmet war. Nach einem Input-Teil über biomathematische Modelle und deren

historische Hintergründe sollten die Schüler in Kleingruppen an den Modellierungsaufgaben¹ arbeiten und ihre Ergebnisse anschließend präsentieren. Obwohl die tatsächliche Arbeitszeit mit zwei Stunden relativ knapp bemessen war, konnten die Schüler brauchbare Modelle erstellen und sie mit Hilfe von Tabellenkalkulationen simulieren. Zugegeben, die Teilnehmer der Summer School sind wegen ihrer Interessen und ihrer Begabungen in Mathematik sicher nicht mit einer gewöhnlichen Schulklasse zu vergleichen. Aber auch innerhalb der Themen, die in der Summer School vorgestellt wurden, war die *Biomathematik* unter den beliebtesten. Und das hat wohl weniger damit zu tun, dass die Schüler besonders interessierte Mathematiker sind, als vielmehr mit dem generellen Interesse an diesem anwendungsorientierten Thema. Das lässt sich etwa auch daran ablesen, dass sich die Schüler selbst in den Pausen und während des Mittagessens über inhaltliche Details ihrer Arbeit ausgetauscht haben. Dieses Interesse ließe sich m. E. auch im Schulunterricht nutzen.

Schülerlösungen werden an dieser Stelle bewusst nicht präsentiert, um nicht den Anschein zu erwecken, dass diese Lösungen die einzig möglichen seien. Es ist ja gerade ein Spezifikum von Modellierungsaufgaben, dass sie möglichst offen formuliert sind, bzw. dass in ihnen selbst eine gewisse Offenheit steckt, die jeder Lernende auf seine Weise nützt und auch nutzen soll.

Die *Epidemiologie* war dann einen Halbttag lang Thema in einer 6. Klasse Oberstufe im Gymnasium Laa/Thaya. Im Gegensatz zu den Schülerinnen und Schülern der Summer School hatte diese Klasse noch kaum Erfahrung mit Tabellenkalkulationen und natürlich auch kein überdurchschnittliches Interesse an Mathematik, wie man sofort an einigen Schülerrückmeldungen weiter unten bemerkt. Die Unterrichtssequenz war deshalb so aufgebaut, dass zu Beginn ein kurzer Einführungsteil über rekursive Wachstumsprozesse und das Lotka-Volterra-Modell stand, danach eine Arbeitsphase zum Kennenlernen wichtiger Funktionen und Möglichkeiten von Tabellenkalkulationen und schließlich der Hauptteil zum Thema *Ausbreitung einer Grippeepidemie*², der von den Schülerinnen und Schüler paarweise mit gelegentlicher Hilfe einer Tabellenkalkulation bearbeitet wurde. Die subjektive Meinung der Lernenden diesen Projekttag betreffend wurde am Ende durch einen entsprechenden Fragebogen erhoben. Dabei gab es von den insgesamt 22 Schülerinnen und Schülern folgende Antworten (unverändert und vollständig):

Was hat dir am heutigen Projekttag am besten gefallen?

¹Siehe Abschnitt 8.2.

²Die Grundlage dafür waren die Unterrichtsmaterialien im Abschnitt 8.1.

das Excel-Tabellen machen, Alles, Die Zeichnung mit den Hasen (1. Modell), Das 1. Modell: Zeichnung mit Hasen, Die Gruppenarbeit mit den Hasen und Luchsen, Epidemiologie, Räuber-Beute-Modell → interessant, Epidemie → wie man berechnet wer krank wird und wer gesund wird! Das Mathematik so vielfältig sein kann, Arbeiten mit Excel, logische und gute Erklärungen, Bsp im Excel machen, logisch Denken, Guter Vortragender, übersichtlich und verständlich gestaltet, Die Beispiele mit den Tieren, kein regulärer Unterricht, gutes Thema, sehr verständlich, logische Erklärungen!, EXCEL Übungen, Keinen Stress, Diagramme, Freundlichkeit, Geduldigkeit, kein Stress + Druck, immer freundlich, neues in Excel gelernt (eine Antwort war unlesbar, einmal wurde keine Antwort gegeben).

Was hat dir überhaupt nicht gefallen? Wie hätte man das verbessern können?
 Ich mag Mathe prinzipiell nicht, sorry, Excel, nicht so viel mit Excel arbeiten bzw. nicht so schnell, Die vielen Formeln und komplizierte Rechnungen, Diagramme bei Excel hatten trotz richtiger Eingabe nicht das gewünschte Aussehen, aber keine Zeit zum Richtigstellen, hat gepasst ..., nichts, hat alles gepasst, Die Beispiele waren etwas langweilig aber OK. Vielleicht mit Spielen oder so Rechnen, Bsp vom letzten Arbeitsplatz zum selbst Lösen ⇒ bisschen schwierig, einfacher gestalten, ?, kleine Schrift bei Präsentation, größere Schrift verwenden, Schrift war zu klein → größere Schrift (eine Antwort war unlesbar, siebenmal wurde keine Antwort gegeben).

Was hältst du davon, biologische Themen auch im Mathematikunterricht zu behandeln?

wäre interessant, ja sehr gut, Biowaffen wären interessant, Würde mich freuen, Recht gute Idee, wäre auch im täglichen Leben zu gebrauchen, Es ist interessant, dass man auch sieht was man mit Mathematik noch alles machen kann, Ich finde das ganz gut, SEHR wichtig, Bam Oida, ist interessant, zur schwer; kenne mich überhaupt nicht aus, ja, sicher interessant; kurz besprechen wäre gut, Sehr gute Idee, find ich eine super idee → weil da viel zu wenig behandelt wird, gute Idee man sieht, was man mit Mathe alles machen kann, gute Idee → Abwechslung, nicht viel → sehr kompliziert, Es gibt einen eigenen Biologieunterricht, also ist das nicht nötig, So das wäre schon interessant Viel besser als anderes was wir machen (zweimal wurde keine Antwort gegeben).

Hat das Projekt dein „Bild der Mathematik“ verändert?

ja, etwas. ich weiß jetzt, dass ich niemals Mathematik studieren werde, Nein, Ne, Nein, nicht wirklich, Nein, eigentlich nicht, ja, ja sehr, ich hab erfahren wie vielfältig Mathe sein kann, Ein bisschen, so verändert, dass man sieht,

dass Mathe im Leben brauchbar ist, ja zum Negativen $\Rightarrow$:(Horror - Mathematik Studium, NEIN, Ist nicht mehr ganz so fad, ist wichtiger, Mathematik erscheint jetzt wichtiger, nicht mehr ganz so uninteressant, Ich weiß jetzt was Biomathematik heißt, Mit Mathematik kann man mehr als nur Kreis und Funktionen berechnet, Ja, Ja, etwas, no, ja, habe nicht gewusst, dass Mathematik so viel mit Medizin zu tun hat.

9.2 Beschreibung der Fallstudie

In diesem empirischen Teil der Arbeit soll der Frage nachgegangen werden, inwieweit der Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen zur Berechnung rekursiv definierter Folgenglieder Einfluss auf das Denken der Schülerinnen und Schüler nimmt.

Das ist im Kontext dieser Arbeit natürlich aus zweierlei Hinsicht von Interesse. Zum einen wird das Thema Biomathematik im Schulunterricht, sofern man sich auf diskrete Modelle beschränkt, nur dann sinnvoll möglich, wenn man Tabellenkalkulationen zur Verfügung hat. Zum anderen interessiert umgekehrt die Frage, ob gerade durch die Arbeit mit Tabellenkalkulationen das iterative Denken der Schüler geschult werden kann.

Zur Beantwortung dieser Frage wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Fallstudie in Form von Unterrichtsbeobachtungen und Schülerinterviews³ durchgeführt, deren Design und Ergebnisse im Folgenden dargestellt werden.

9.3 Design der Studie

Hintergrund und Ziel

Hintergrund der Untersuchung ist, wie schon oben erwähnt, die Möglichkeit, durch den Einsatz von Tabellenkalkulationen das iterative Denken der Schüler fördern zu können. Welche Relevanz iteratives Denken für das Begreifen mathematischer Prozesse hat, kann im Abschnitt 4.3.2 nachgelesen werden. Gerade für das dort beschriebene *Systemdenken* ist es von immenser Bedeutung, Prozesse strukturell zu verstehen. Einen wesentlichen Beitrag liefert dazu m. E. das geschulte *Schritt-für-Schritt-Denken* im Sinne iterativer Berechnungen.

Das begründet also die Suche nach einer Antwort auf die oben gestellte Frage, inwieweit der Einsatz von Tabellenkalkulationen im Mathematikunterricht dieses Ziel unterstützen kann.

³Diese wird künftig kurz mit *Studie* bezeichnet.

Forschungsfrage

Denkstrukturen greifbar zu machen ist ein recht heikles Unterfangen. Schließlich hat man darauf ja keinen direkten Zugang. Es wurden deshalb Kurzinterviews mit Schülergruppen zu je drei Personen durchgeführt. Diese sollten Aufschluss darüber geben, ob die Schüler zur Lösung ganz gezielt ausgewählter Aufgaben eher *iterativ*, also mit Hilfe von Rekursionsformeln *Schritt für Schritt*, oder *nicht iterativ*, also unter Verwendung eines Bildungsgesetzes, einer Formel zur direkten Berechnung der jeweiligen Lösung, vorgehen. Diese Interviews wurden sowohl mit Schülergruppen durchgeführt, die in den Unterrichtsstunden davor mit Tabellenkalkulationen gearbeitet haben (*Testgruppe*) als auch mit solchen, die ohne den Computer auskommen mussten (*Kontrollgruppe*).

Die Forschungsfrage kann wie folgt formuliert werden:

Gehen die Schülerinnen und Schüler der Testgruppe bei der Lösung der gestellten Aufgaben häufiger iterativ vor, als jene der Kontrollgruppe?

Auswahl der Schülergruppen

Es wurden für die Studie Schüler der 3. Klasse (AHS Unterstufe) ausgewählt, da hier erstmals iterative Prozesse im Unterricht auftauchen. Meist passiert das im Zusammenhang mit dem Thema *Zinseszinsrechnung*. Das Thema sollte bis dahin noch nicht im Unterricht vorgekommen sein, um gleiche Voraussetzungen unter allen teilnehmenden Klassen zu schaffen. Auch das Übertragen von Formeln durch „Hinunterziehen“ in Tabellenkalkulationen sollte den Schülern noch nicht bekannt sein.

Das Einteilen der Schüler in Test- und Kontrollgruppe wurde mittels Losentscheid durchgeführt.

Die Auswahl der teilnehmenden Schulen war natürlich abhängig von der Bereitschaft der Lehrpersonen und Direktoren, an der Studie teilzunehmen. Es konnten folgende Schulen gewonnen werden:

- BG/BRG Tulln als Testschule für das Verbessern des Designs der Studie
- GRG21/Ödenburgerstraße in Wien
- BG/BRG Stockerau

Beschreibung des Ablaufs

Titel	Dauer	Methode	Dokumentation für die Studie
Inputphase	2 Std	Lehrer unterrichtet ganze Klasse	Videoaufzeichnung
Hausübung		Einzelarbeit der Schüler	keine
Trennung in Test- und Kontrollgruppe	2 Std	Gruppenarbeit	Videoaufzeichnung
Beobachtungsphase	ca. 20 min pro Gruppe	Interviews	Videoaufzeichnung

Inputphase

Der Mathematiklehrer der Klasse sollte ohne den Einsatz einer Tabellenkalkulation zum Thema *diskretes exponentielles Wachstum* unterrichten. Dabei sollten die Begriffe Rekursionsformel und Bildungsgesetz, das Darstellen der Folgenglieder in einer Tabelle und die grafische Darstellung in einem Koordinatensystem behandelt werden. Die Vorgaben an den Lehrer waren dabei lediglich folgende zwei Aufgaben:

Aufgabe 1

Deine Eltern sind deine Vorfahren 1. Generation, deine Großeltern Vorfahren 2. Generation usw.

- Wie viele Eltern, Großeltern, Urgroßeltern und Urgroßeltern hast du?
- Wie kommt man von der Anzahl der Vorfahren 2. Generation auf jene 3. Generation? Wie von der 3. Generation auf die 4. Generation? ... Wie von der $(n - 1)$ -ten Generation auf die n -te Generation?
- Wie viele Vorfahren 6. Generation hast du?

- Wie viele Vorfahren 10. Generation hast du? Wie viele Vorfahren n -ter Generation hast du?
- Fertige eine grafische Darstellung über die ersten 6 Generationen an!

Aufgabe 2

Der Holzbestand eines „jungen“ Waldes wächst erfahrungsgemäß um 20% jährlich. Derzeit beträgt der Holzbestand 2000 Festmeter.

- Wie groß ist der Holzbestand nach 1, 2, 3 und 10 Jahren?
- Bestimme den Wachstumsfaktor!
- Fertige eine grafische Darstellung über den Verlauf von 10 Jahren an!

Hausübung

Zur Hausübung sollten die Schüler folgende zwei Aufgaben abermals ohne den Einsatz des Computers machen:

Aufgabe 1

In der Schule gibt es ein neues Gerücht. Zu Beginn des Tages kennen es nur 5 Schüler. In jeder Pause verdreifacht sich die Anzahl der „wissenden“ Schüler durch Weitersagen.

- Bestimme den „Ausbreitungsfaktor“!
- Wie viele Schüler wissen nach der ersten und zweiten Pause von dem Gerücht?
- Wie viele Schüler kennen das Gerücht nach der fünften Pause? Gibt es so viele Schüler überhaupt an deiner Schule?
- Fertige eine grafische Darstellung über die Entwicklung in den ersten fünf Pausen an!

Aufgabe 2

In Indien leben derzeit etwa 1,1 Milliarden Menschen. Das Bevölkerungswachstum beträgt 2% jährlich.

- Bestimme den Wachstumsfaktor!

- Wie groß ist die Bevölkerung voraussichtlich in 1, 2, bzw. 3 Jahren?
- Gib die Rekursionsformel und das Bildungsgesetz für dieses Bevölkerungswachstum an!
- Wie viele Menschen leben in 15 Jahren in Indien, wenn das Wachstum weiterhin so rasch verläuft?

Trennung in Test- und Kontrollgruppe

Zuerst wurden die Schüler durch Losentscheid in zwei Gruppen geteilt – auch räumlich. Innerhalb der beiden Gruppen wurden noch einmal kleinere Gruppen zu je drei oder vier Schülern gebildet. Alle Kleingruppen sollten nun dieselben drei Aufgaben bearbeiten. Der Unterschied lag nur darin, dass die Kleingruppen der Testgruppe eine Tabellenkalkulation (TK) verwenden durften⁴, während die Kleingruppen der Kontrollgruppe lediglich mit Papier, Bleistift und Taschenrechner, jedoch ohne TK auskommen mussten. Die Testgruppenschüler sollten ihre Ergebnisse am Datenblatt dokumentieren, die Kontrollgruppenschüler im Mathematikheft. Die Aufgaben müssen dabei natürlich so gestellt werden, dass man sie auch ohne TK lösen kann:

Aufgabe 1

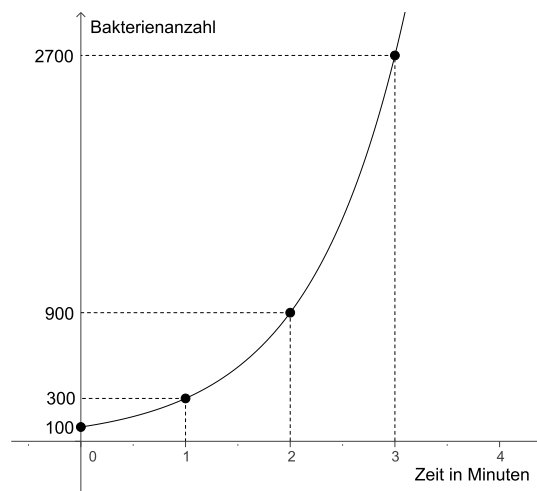
Eva legt 80 Euro auf ein Sparbuch. Sie bekommt dafür 3% p.a. Zinsen, d. h. das Kapital auf dem Sparbuch nimmt jährlich um 3% zu.

- Wie viel Geld befindet sich dann nach 1, 2 bzw. 3 Jahren auf dem Sparbuch?
- Wie viel nach 10 Jahren? Wie viel nach 20 Jahren?
- Wie lange müsste sie warten, um sich mit dem Sparbuch-Geld ein neues Fahrrad um 200 Euro leisten zu können? Löse durch Probieren!
- Fertige eine grafische Darstellung über den Verlauf des Kapitals am Sparbuch über die Dauer von 20 Jahren an!

Aufgabe 2

Die folgende Grafik beschreibt das Wachstum einer Bakterienkultur:

⁴Für diese haben sie eine kurze Einschulung bekommen, vor allem um das Hinunterziehen von Formeln bzw. das Erstellen von Diagrammen in TK kennenzulernen.



- Wie viele Bakterien gibt es zu Beginn?
- Wie viele nach 1, 2 bzw. 3 Minuten?
- Was passiert mit der Bakterienanzahl in jedem Zeitschritt?
- Wie viele Bakterien gibt es dann nach 4 bzw. 5 Minuten?
- Wie viele Bakterien gibt es bereits nach einer Viertelstunde?

Aufgabe 3

Ein Blatt Papier ist ungefähr 0,1 mm dick.

- Wie dick ist es, wenn man das Blatt Papier einmal faltet?
- Wie dick, wenn man es zweimal bzw. dreimal faltet?
- Wie oft müsste man ein Blatt Papier falten, damit es höher als der Milleniumstower ist (200 Meter)? Schätze zuerst!
- Wie dick ist es, wenn man es 30 Mal faltet?
- Nimm ein Blatt Papier und probiere, wie oft du es falten kannst!

Beobachtungsphase

Für die Interviews der Beobachtungsphase sollten die Schüler in neue Gruppen geteilt werden. Die bisherigen Test- bzw. Kontrollkleingruppen wurden für die Beobachtungsphase (Interviews) „aufgelöst“ und neu zusammengestellt. Eine Kleingruppe in der Beobachtungsphase bestand immer aus drei Schülern, jeder von ihnen aus einer anderen vorherigen Kleingruppe. Es waren alle Schülerinnen und Schüler dazu eingeladen, freiwillig mitzumachen. Insgesamt waren schlussendlich fünf neue Testkleingruppen und fünf neue Kontrollkleingruppen in die Interviews involviert. Die Idee dahinter ist, dass die Gruppen nochmal durchmischt werden sollten, um Rollenaufteilungen, die in Kleingruppen ja häufig nach einiger Zeit auftreten, wieder aufzulösen und Diskussionen innerhalb der neuen Gruppe zu fördern. Es soll hier ausdrücklich betont werden, dass während der Beobachtungsphase *keine* der Gruppen eine TK zur Verfügung hatte. Sowohl Test- als auch Kontrollgruppen durften jetzt nur noch Zettel, Bleistift und einen herkömmlichen Taschenrechner verwenden.

Die Aufgaben sind so konzipiert, dass sie gleichermaßen mittels Rekursionsformel wie mittels Bildungsgesetz gelöst werden können. Es sollte herausgefunden werden, ob Schüler, die vorher mit Tabellenkalkulationen gearbeitet haben, eher dazu tendieren, iterativ zu denken. Das soll durch Beobachtung bzw. Befragung der Schüler geschehen, während sie die vorgelegten Aufgaben lösen. Zur Unterstützung für die Auswertung wird diese Beobachtungsphase auf Video aufgezeichnet.

9.4 Ergebnisse der Studie

Für die Ergebnisse wurden die Videos aus den Beobachtungsphasen der insgesamt zehn Gruppen analysiert. Der Fokus der Analyse lag natürlich gerade darauf, Unterschiede in den Arbeits- bzw. Denkweisen von Schülern der Test- bzw. Kontrollgruppe herauszufinden. Die detaillierte Analysetabelle finden Sie auf der beigelegten CD-Rom. An dieser Stelle soll lediglich eine Zusammenfassung der Beobachtungen gegeben werden.

Die Testaufgaben

Bei der Analyse der Beobachtungsphase sollen nun die Test- und Kontrollgruppen verglichen werden. Es wird beobachtet, zu welchem Lösungsweg, zu welcher Methode die Schüler eher greifen. Was liegt ihnen in der jeweiligen Situation näher? Rekursionsformel oder Bildungsgesetz? Für einen

besseren Überblick findet man zusätzlich zur verbalen Beschreibung auch Visualisierungen wie ●●●●●○. Die schwarzen Punkte geben an, wie viele Schülergruppen die Aufgabe mit Hilfe der Rekursionsformel gelöst haben, die weißen Punkte zeigen, wie häufig das Bildungsgesetz verwendet wurde und die grauen Punkte stehen für die Gruppen, in denen keine Präferenz zu erkennen war.

Außerdem werden ausgewählte Originalzitate aus der Beobachtungsphase wiedergegeben, die deutlich machen sollen, wie die Schüler ihre Entscheidung begründen bzw. wie bestimmte Schüler ihre Kollegen davon überzeugen, dass *ihre* in diesem Fall bevorzugte Methode die bessere ist.

Testaufgabe 1

Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} b_0 &= 5 && \downarrow \cdot 2 \\ b_1 &= 10 \\ &\vdots \\ b_{10} &= 5120 \\ &\vdots \\ b_{16} &=? \end{aligned}$$

Testgruppen: ●●○○○ Zwei der fünf Testgruppen berechnen tatsächlich die ersten Folgenglieder rekursiv. Erst als sie merken, dass das ohne TK sehr mühsam ist, wechseln sie zum Bildungsgesetz. Jene Gruppen, die sofort das Bildungsgesetz angewendet haben, erkennen, dass es auch eine zweite Möglichkeit gäbe. Sie verweisen aber beispielsweise darauf, dass die Berechnung mittels Rekursionsformel länger dauern würde.

Kontrollgruppen: ○○○○○ Alle fünf Kontrollgruppen verwenden das Bildungsgesetz zur Berechnung von b_{16} . Auf Nachfrage fallen Begründungen wie „rekursiv wäre zu mühsam“ oder „das würde zu viel Platz brauchen“.

Testaufgabe 2a

Aufgabenstellung

Welches Ergebnis stimmt hier nicht?

$$b_0 = 7, q = 6$$

$$b_4 = 9072$$

$$b_5 = 54432$$

$$b_6 = 326582$$

$$b_7 = 1959552$$

Testgruppen: ●●●○○ Zwei Gruppen rechnen rekursiv, zwei mit Hilfe des Bildungsgesetzes. In der fünften Gruppe will eine Schülerin spontan die Rekursionsformel verwenden, kann sich aber gegen die anderen Schüler der Gruppe nicht durchsetzen. Die rekursive Vorgangsweise wird mit „man muss weniger eintippen“ und „weil man immer gleich weiterrechnen kann“ begründet.

Kontrollgruppen: ●○○○○ Vier Kontrollgruppen verwenden das Bildungsgesetz, in einer Gruppe herrscht Uneinigkeit. Zwei Schüler rechnen sofort rekursiv, während die dritte Schülerin das Bildungsgesetz verwendet.

Testaufgabe 2b

Aufgabenstellung

Welches Ergebnis stimmt hier nicht?

$$b_0 = 2, q = 3$$

$$b_3 = 52$$

$$b_4 = 162$$

$$b_5 = 324$$

$$b_6 = 648$$

Testgruppen: ●●●●○ Nur drei Gruppen einigen sich auf eine Methode, zwei davon auf die rekursive Berechnung. In den beiden restlichen Gruppen wird sowohl die eine wie auch die andere Methode verwendet.

Kontrollgruppen: ●○○○○ Vier Gruppen entschieden sich ohne Diskussionen für das Bildungsgesetz, es wird etwa behauptet, dass es „mit der

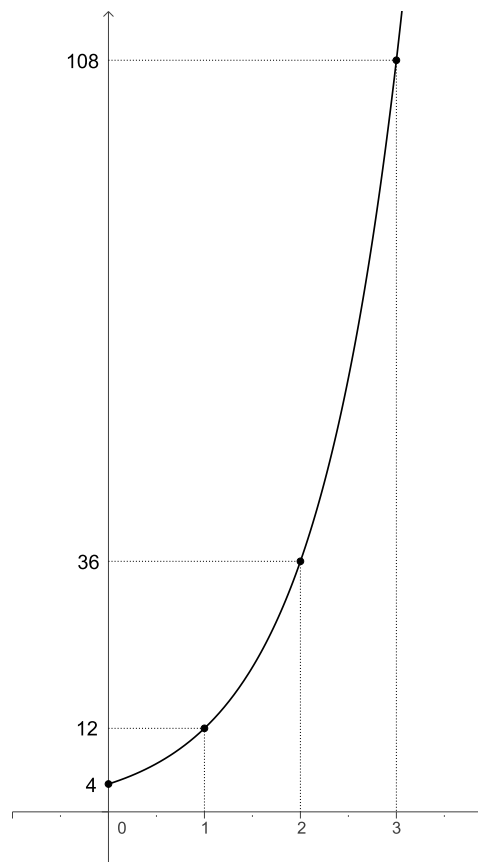
Rekursionsformel schwieriger“ gewesen wäre. Eine Gruppe entscheidet sich (zumindest nach der Berechnung von b_3 durch das Bildungsgesetz) für die rekursive Berechnung.

Testaufgabe 3

Aufgabenstellung

Welche Formel beschreibt den Verlauf des Grafen richtig?

$b_n = b_{n-1} \cdot 3$ oder $b_n = b_0 \cdot 3^n$?



Testgruppen: ●●●○○ Alle Gruppen haben entweder generell Schwierigkeiten dabei, die Formeln auf ihre Richtigkeit hin zu prüfen oder erkennen umgekehrt sofort, dass beide Formeln richtig sind. Jeweils zwei Gruppen finden dabei die Rekursionsformel bzw. das Bildungsgesetz „sympathischer“.

Kontrollgruppen: ●●●●○ Teilweise gibt es ähnliche Probleme wie bei den Testgruppen. Nur eine Gruppe behauptet sofort instinktiv, dass das Bildungsgesetz richtig sein müsse.

Testaufgabe 4

Aufgabenstellung

$$b_0 = 5 \quad \downarrow \cdot 1, 1, \text{ d. h. } q = 1, 1$$

$$b_1 = 5, 5$$

$$\vdots$$

$$b_{100} \approx 68903, 1$$

$$\vdots$$

$$b_{102} \approx ?$$

Testgruppen: ●○○○○ Nur in einer Gruppe kommt sofort die Idee, von b_{100} aus zwei rekursive Schritte zu machen. Alle anderen Gruppen verwenden das Bildungsgesetz, z. B. weil man bei der rekursiven Berechnung „so eine große Zahl in den Taschenrechner tippen müsste“.

Kontrollgruppen: ○○○○○ Alle fünf Gruppen rechnen mit dem Bildungsgesetz. Es wird zwar generell erkannt, dass es auch rekursiv möglich gewesen wäre, aber „leichter als mit dem Bildungsgesetz geht es nicht“ und „das Bildungsgesetz ist praktischer“ werden als Argumente gebracht.

Testaufgabe 5

Aufgabenstellung

$$b_0 = 0,01 \quad \downarrow \cdot 2$$

$$b_1 = 0,02$$

$$\vdots$$

$$b_9 = ?$$

$$b_{10} = 10,24$$

Testgruppen: ●●●○○ Jeweils zwei Gruppen entschließen sich sofort für eine der beiden Methoden. Die Schüler in der fünften Gruppe rechnen parallel auf beide Arten.

Kontrollgruppen: ○○○○○ Auch bei dieser Aufgabe rechnen alle fünf Gruppen mit dem Bildungsgesetz. Die Rekursion von b_9 auf b_{10} wird erst im Anschluss zur Überprüfung verwendet. Teilweise wird auch erkannt, dass man diesen rekursiven Schritt umgekehrt dazu verwenden könnte, das gesuchte b_9 aus b_{10} zu berechnen.

Testaufgabe 6

Aufgabenstellung

Gib eine Formel an, mit der weitere Zahlen berechnet werden können!

b_0	1
b_1	4
b_2	16
b_3	64
$\vdots$	$\vdots$

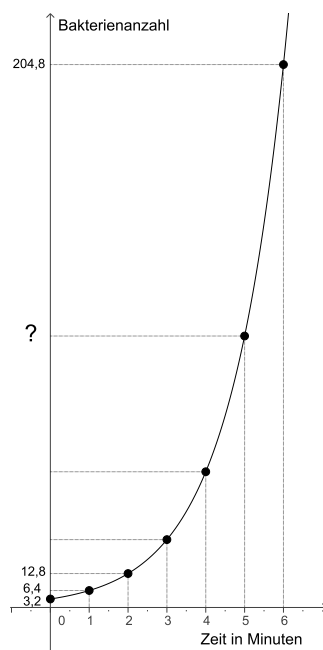
Testgruppen: ●●●●○ Vier Testgruppen können die Rekursionsformel angeben, die ihnen in diesem Fall näher liegt. In zwei dieser Gruppen wird auch der direkte Zusammenhang mit der Tabellenkalkulation angegeben: „das ist so wie in Excel eingeben“. Eine Gruppe gibt trotz rekursiver Überprüfung der schon angegebenen Werte b_0 bis b_3 dann doch das Bildungsgesetz zuerst an.

Kontrollgruppen: ●●●○○ Es gibt generell Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe, zwei Gruppen können dann aber mit etwas Hilfe das Bildungsgesetz, zwei Gruppen die Rekursionsformel aufschreiben. In einer Gruppe werden sowohl mit Bildungsgesetz als auch mit der Rekursionsformel die nächsten Folgenglieder berechnet. Die allgemeinen Terme können die Schüler jedoch nicht formulieren.

Testaufgabe 7

Aufgabenstellung

In dieser Grafik siehst du das Wachstum einer Bakterienkultur in den ersten 6 Minuten. Wie viele Bakterien gibt es nach 5 Minuten?



Testgruppen: ●●●●○ Drei Gruppen berechnen b_5 sofort rekursiv, indem sie einen Schritt von b_6 zurückgehen. Auch der einzigen Gruppe, die mit dem Bildungsgesetz gearbeitet hat, ist klar, dass man auch rekursiv rechnen könnte. In der fünften Gruppe wurde parallel auf beide Arten gearbeitet.

Kontrollgruppen: ○○○○○ Alle fünf Gruppen berechnen b_5 mit Hilfe des Bildungsgesetzes. Erst danach kommen einige Schüler auf die Idee, das gesuchte Folgenglied auch mittels Rekursionsformel aus b_6 zu berechnen.

Zusammenfassung

Insgesamt lässt sich erkennen, dass bei fast allen Aufgaben eine Tendenz festzustellen ist, dass die Schüler der Testgruppe bei der Lösung der gestellten Aufgaben häufiger iterativ vorgehen, als jene der Kontrollgruppe. Lediglich die Testaufgaben 3 und 4 liefern diesbezüglich keine merkbaren Unterschiede. Interessant scheint, dass die beobachteten Unterschiede trotz der zeitlich relativ kurzen Trennung der Test- bzw. Kontrollgruppe auftreten. Rückschlüsse

auf eine Beeinflussung des Denkens der Schüler hin zu iterativem Schritt-für-Schritt-Denken scheinen plausibel. Das zeigen auch die Begründungen, die die Schülerinnen und Schüler für ihre jeweiligen Entscheidungen gegeben haben.

Es muss aber zugegeben werden, dass für eine Bestätigung dieses Ergebnisses eine größere Stichprobe untersucht werden müsste, was den Rahmen dieser Arbeit allerdings gesprengt hätte. Auch wäre interessant, die Trennung über einen größeren Zeitraum zu beobachten. Weitere empirische Untersuchungen und didaktische Überlegungen zum iterativen Denken von Lernenden findet man in WEIGAND 1989 und in WEIGAND 1993.

Literaturverzeichnis

- [1] Ableitinger, Ch. (2007): Biomathematische Modelle im Unterricht. In: Didaktik-Reihe der ÖMG im Jänner 2007 (Heft 39), S. 1-11.
- [2] Ableitinger, Ch., P. Hauer-Typelt (2008): Spieltheorie im Unterricht - kann es das spielen? In: Didaktik-Reihe der ÖMG im Jänner 2008 (Heft 40), S. 1-12.
- [3] Aebli, H. (1961): Grundformen des Lehrens. Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode. Klett Verlag, Stuttgart.
- [4] Argyris, J., G. Faust, M. Haase (1994): Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung für Wissenschaftler und Ingenieure. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [5] Bailey, V.A., A.J. Nicholson (1935): The Balance of Animal Populations, Part I. In: Proceedings of the Zoological Society, London 3, S. 551-598.
- [6] Baireuther, P. (1990): Konkreter Mathematikunterricht. Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
- [7] Berger, M. (1999): Untersuchung der Schülerauffassungen vom Mathematikunterricht in Schulen in Wien und im westlichen Niederösterreich. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [8] Biermann, M., W. Blum (2002): Realitätsbezogenes Beweisen. Der „Schorle-Beweis“ und andere Beispiele. In: Mathematik Lehren 110, S. 20-22.
- [9] Bigalke, H. (1976): Zur gesellschaftlichen Relevanz der Mathematik im Schulunterricht. ZDM 8, Heft 1, S. 25-34.
- [10] Blum, W. (1988): Zur Einführung. In: Der Mathematikunterricht 34, Heft 6, S. 3-4.

- [11] Blum, W., A. Kirsch (1991): Preformal Proving - Examples and Reflections. In: Educational Studies in Mathematics 22 (2), S. 60-65.
- [12] Blum, W., G. König, S. Schwehr (Hrsg. 1997): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 4. Verlag Franzbecker, Hildesheim.
- [13] Blum, W., D. Leiß (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: Mathematik Lehren 128, S. 18-21.
- [14] Bossel, H. (1985): Umweltdynamik. Te-wi Verlag, München.
- [15] Bossel, H. (1994): Modellbildung und Simulation. Konzepte, Verfahren und Modelle zum Verhalten dynamischer Systeme. 2. veränderte Auflage. Vieweg, Wiesbaden.
- [16] Brantner, M. (1994): Transferprobleme zwischen Mathematik und Physik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [17] Bruner, J. S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Berlin-Verlag und Schwann, Berlin-Düsseldorf (englisch bereits 1960 erschienen).
- [18] Büchter, A., T. Leuders (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Lernen fördern Leistung überprüfen. Cornelsen Verlag, Berlin.
- [19] Claus, H. J. (1995): Einführung in die Didaktik der Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- [20] D'Ancona, U. (1939): Der Kampf ums Dasein. Hrsg. von Bertalanffy, L., übersetzt von Holzer, L. Verlag Borntraeger, Berlin.
- [21] Darwin, Ch. (1859): On the origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life. John Murray, London.
- [22] Dorfmayr, A., A. Mistlbacher, A. Nussbaumer (2006-2007): Mathe Buch 1-3, Lehrbuch und Übungsbuch für HS und AHS. VNS, Wien.
- [23] Dörner, D. (1989): Die Logik des Mißlingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg.
- [24] Dürr, R., J. Ziegenbalg (1989): Mathematik für Computeranwendungen. Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen. Ferdinand Schöningh, Paderborn.

- [25] Ecker, A. (2005): Fachdidaktik im Aufbruch. Zur Situation der Lehramtsstudien an der Universität Wien. Peter Lang, Frankfurt am Main.
- [26] Elaydi, S. (1996): An Introduction to Difference Equations. Springer, New York.
- [27] Engel, A. (1971): Anwendung der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle. In: Der Mathematikunterricht 17, Heft 3, S. 5-56.
- [28] Fischer, R. (1976): Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: ZDM 8, Heft 4, S. 185-192.
- [29] Förster, F., H.-W. Henn, J. Meyer (Hrsg. 1997): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 6. Verlag Franzbecker, Hildesheim.
- [30] Förster, F. (2002): Vorstellungen von Lehrerinnen und Lehrern zu Anwendungen im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 4/5, S. 45-72.
- [31] Freudenthal, H. (1963): Tendenzen in der modernen Mathematik. In: MNU 16, Heft 7, S. 301-306.
- [32] Freudenthal, H. (1968): Mathematik in Wissenschaft und Alltag. Kindler, München.
- [33] Gause, G. (1934): The struggle for existence. Williams and Wilkins, Baltimore.
- [34] Götz, S. (1998): Zur rekursiven „Darstellung“ der Exponentialfunktion. In: MNU 51/7, S. 427-430.
- [35] Götz, S., H.-Ch. Reichel (Hrsg. 2004-2007): Mathematik-Lehrbuch 5-8 von R. Müller und G. Hanisch. öbvht, Wien.
- [36] Götz, S., H.-Ch. Reichel (2005): Fachdidaktik und Fachwissenschaft Mathematik – zwei Seiten einer Medaille? In: Ecker, A. (Hrsg.): Fachdidaktik im Aufbruch. Peter Lang, Frankfurt am Main.
- [37] Götz, S., E. Sattlberger (2007): ERBEG - Erklären und Begründen im Mathematikunterricht. In: ÖMG Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Heft 39, S.102-132.
- [38] Hanisch, G., I. Benischek, P. Hauer-Typpelt, E. Sattlberger (2007): MatheFit 1. Veritas, Linz.

- [39] Henn, H.-W. (1997): Mathematik als Orientierung in einer komplexen Welt. In: Der Mathematikunterricht 43, Heft 5, S. 6-13.
- [40] Henn, H.-W. (2002): Mathematik und der Rest der Welt. In: Mathematik Lehren 113, S. 4-7.
- [41] Henn, H.-W., K. Maaß (Hrsg. 2003): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8. Verlag Franzbecker, Hildesheim.
- [42] Henning, H., M. Keune (2001): Diskrete Modellierung und Tabellenkalkulation. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 28-37.
- [43] Herget, M. (2003): Komplexität als Herausforderung. Zukunftsfähiger Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren 120, S. 4-8.
- [44] Herget, W. (2005): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Cornelsen, Berlin.
- [45] Hofbauer, J., K. Sigmund (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge University Press.
- [46] Humenberger, J., H.-Ch. Reichel (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.
- [47] Humenberger, J. (1997): Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht. In: Journal für Didaktik der Mathematik 18, Heft 1, S. 3-50.
- [48] Jautz, Y. (2002): Heuristik im Mathematikunterricht. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [49] Kant, I. (1968): Kants gesammelte Schriften. Hrsg. von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. de Gruyter, Berlin.
- [50] Kelley, W., A. Peterson (1991): Difference Equations. An Introduction with Applications. Academic Press Inc., San Diego.
- [51] Keller-Ressel, M., E.-M. Sidlo, H. Wintner (2002-2005): Blickpunkt Mathematik 1-4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. bis 4. Klasse der AHS und der HS. öbvht, Wien.
- [52] Kingsland, S. (1985): Modeling Nature. Episodes in the History of Population Ecology. The University of Chicago Press, Chicago and London.

- [53] Klafki, W. (1996): Thesen zur Wissenschaftsorientierung. In: Klafki, W.: Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. 5. unveränderte Auflage. Beltz, Weinheim, Basel. S.162-172.
- [54] Kühleitner, M., W.G. Nowak (2003): Ein einfaches mathematisches Modell für die Epidemie-Dynamik bei BSE. In: MNU 56, S. 143-146.
- [55] Lauber, E. (1996): Projektartiger Mathematikunterricht in der Unterstufe. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [56] Lechner, J. (2002): Neue Perspektiven im Mathematikunterricht durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen. Dissertation, Universität Wien.
- [57] Lehrplan für AHS-Unter und -Oberstufe. Im Internet: <http://www.bmukk.gv.at>
- [58] Leuders, T. (Hrsg. 2003): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen, Berlin.
- [59] Lotka, A. J. (1956): Elements of mathematical biology. Dover Publ., New York.
- [60] Lutz-Westphal, B. (2006): Kombinatorische Optimierung - Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation, TU Berlin.
- [61] Maaß, K. (2005): Modellierungen – Aufgaben für alle Lernenden? In: Mathematik Lehren, Heft 131, S. 19-22.
- [62] Malle, G., H.-Ch. Reichel (1996): Fragen zum Mathematikunterricht. Festschrift zum 70ten Geburtstag von Heinrich Bürger. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien.
- [63] Malle, G. (2002): Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. In: Mathematik Lehren 110, S. 4-8.
- [64] Malle, G., E. Ramharter, A. Ulovec, S. Kandl (2004-2007): Mathematik verstehen 5-8. öbvht, Wien.
- [65] Murray, J.D. (2002): Mathematical Biology. An Introduction. Third Edition. Springer, New York.
- [66] Neuwirth, E. (2001): Kombinatorik, Rekursion und Tabellenkalkulation. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 52-64.

- [67] Neuwirth, E., D. Arganbright (2004): The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft®Excel. Brooks/Cole, Canada.
- [68] Nowak, W.G. (2001): Tierseuchen mit veränderlicher Häufigkeit – Mathematische Modellierung mit Mathematica. In: Mathematica Didactica 22, 2, S. 61-78.
- [69] Nowak, W.G. (2002): Wie wachsen Bäume? Mathematische Modelle für das Waldwachstum. In: Wissenschaftliche Nachrichten des BMBWK 120, S. 27-32.
- [70] Olinick, M. (1978): An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences. Reading: Addison Wesley.
- [71] Ossimitz, G. (2003): Zeitliche Dynamiken verstehen. In: Mathematik lehren 120, S. 60-63.
- [72] Polya, G. (1949): Die Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Francke, Bern.
- [73] Ratzinger, W., O. Haring, W. Jansche (1993): Entdecken und experimentieren mit der Tabellenkalkulation. Veritas, Linz.
- [74] Reichel, H.-Ch. (Hrsg. 1991): Mathematik in Schule und Praxis. Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht. hpt, Wien.
- [75] Reichel, H.-Ch. (Hrsg. 1993): Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht, Band 3 von Mathematik für Schule und Praxis. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
- [76] Reichel, H.-Ch., D. Litschauer, H. Groß (2003-2005): Das ist Mathematik 1-4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. bis 4. Klasse der AHS und der HS. öbvht, Wien.
- [77] Reinartz, E. (2003): Chaos im Unterricht. Denken in nichtlinearen Zusammenhängen! In: Mathematik lehren 120, S. 53-57.
- [78] Schreiber, A. (1979): Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: mathematica didactica 2, S. 165-171
- [79] Schuster, R. (1995): Grundkurs Biomathematik. Mathematische Modelle in Biologie, Biochemie, Medizin und Pharmazie mit Computerlösungen in Mathematica. B.G. Teubner, Stuttgart.

- [80] Sonar, T. (2001): Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik. Vieweg, Wiesbaden.
- [81] Sonnenschein, M., U. Vogel (2002): Übungsblatt 5 zu Modellbildung und Simulation ökologischer Systeme. Im Internet: <http://www-ui.informatik.uni-oldenburg.de>
- [82] Statistik Austria (2007): Statistisches Jahrbuch 2007. Im Internet: <http://www.statistik.at>
- [83] Strehmel, K. (1995): Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart.
- [84] Timischl, W. (1995): Biomathematik. Eine Einführung für Biologen und Mediziner. Springer, Wien.
- [85] U.S. Census Bureau (2007): International Data Base. Im Internet: <http://www.census.gov/ipc/www/idb/>
- [86] Vester, F. (1983): Unsere Welt - ein vernetztes System. DTV, München.
- [87] Votava, I. (1993): Dynamische Systeme und ihre mathematische Beschreibung durch lineare Differenzengleichungen erster und zweiter Ordnung. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [88] Wagenschein, M. (1965): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band I, Stuttgart.
- [89] Weigand, H.-G. (1989): Zum Verständnis von Iterationen im Mathematikunterricht. Verlag Franzbecker, Hildesheim.
- [90] Weigand, H.-G. (1993): Zur Didaktik des Folgenbegriffs. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- [91] Weigand, H.-G. (1999): Wachstumsfolgen. In: Mathematik lehren 96, S. 51-54.
- [92] Weigand, H.-G. (2001): Tabellenkalkulation - ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 16-27.
- [93] Winkelmann, B. (1992): Dynamische Systeme und rationales Verhalten. In: Der Mathematikunterricht 38, Heft 4, S. 46-61.

- [94] Wittmann, G. (2001): Tabellenkalkulationen und diskrete Mathematik in der Sekundarstufe I - Darstellen und Interpretieren als zentrale Aktivitäten. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 38-51.
- [95] Whitehead, A. N. (1962): Die Gegenstände des Mathematikunterrichts, Neue Sammlung 2, S. 257-266 (übersetzt von A. I. Wittenberg)

Abstract

Räuber-Beute-Modelle, Wachstumsprozesse und das SIR-Modell sind Themen, die in der Rubrik „Biomathematik“ in der mathematikdidaktischen Literatur an der einen oder anderen Stelle zu finden sind. Die Biomathematik bietet allerdings noch viele andere Einsatzmöglichkeiten für den Schulunterricht, und das nicht nur für die Oberstufe oder das Wahlpflichtfach. Wenn man nämlich diskrete Modelle anstatt der in der Fachliteratur gebräuchlichen kontinuierlichen Modelle betrachtet, so genügen die mathematischen Kenntnisse aus der Unterstufe. Es soll Ziel dieser Arbeit sein, entsprechende Möglichkeiten aufzuzeigen und Chancen aus didaktischer Sicht daraus abzuleiten.

Im ersten Kapitel wird ein geschichtlicher Überblick zum Thema gegeben, nicht zuletzt um die Bedeutung der Biomathematik als wichtiges Teilgebiet der Mathematik hervorzuheben. Außerdem wird eine Zusammenschau der wichtigsten Bereiche der Biomathematik vorgestellt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den mathematischen Konzepten, die für den Einsatz im Unterricht essentiell sind. Für diskrete Modelle sind dabei natürlich Iterationen und Differenzengleichungen die zentralen Themen. Das dritte Kapitel stellt anschließend eine Fülle von biomathematischen Modellen vor, die in der Schule auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden können. Die meisten davon haben bisher weder in didaktischen Arbeiten, noch in gängigen Schulbüchern Platz gefunden. Damit beschäftigt sich das vierte Kapitel, das weiters aufzeigen soll, dass durch die Bearbeitung des Themas zum einen viele Aspekte und Forderungen des österreichischen Lehrplans erfüllt werden können und zum anderen großes didaktisches Potenzial in der durch Tabellenkalkulationen unterstützten Bearbeitung diskreter Modelle schlummert. In den Kapiteln 5-7 werden Vorschläge zur konkreten Umsetzung im Unterricht für unterschiedliche Schulstufen gemacht. Diese Unterrichtsmaterialien sind prinzipiell direkt im Unterricht einsetzbar und so ausgelegt, dass die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund steht. Dem mathematischen Modellieren wird dann im achten Kapitel Rechnung getragen. Hier finden sich Vorschläge für Modellierungsaufgaben aus dem Bereich der Biomathematik. Schließlich wird im Schlusskapitel über Erfahrungen im Unterricht und in der Lehreraus- und -fortbildung berichtet. Eine Fallstudie, die in Form von Videoanalysen von 30 Schülerinnen und Schülern der 3. Klasse durchgeführt wurde, beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern die Bearbeitung diskreter Modelle mit Hilfe von Tabellenkalkulationen Einfluss auf das iterative Denken der Lernenden hat.

Haydnstraße 7, 2170 Poysdorf * Sobieskigasse 12/9, 1090 Wien
+43 650/7703530 * christoph.ableitinger@univie.ac.at * homepage.univie.ac.at/christoph.ableitinger

CHRISTOPH ABLEITINGER

LEBENS LAUF

PERSÖNLICHE DATEN

Eltern: Johann und Rosalia Ableitinger
Geschwister: Veronika, Brigitte, Gerhard und Maria
Geburtsdatum: 28.07.1980
Geburtsort: Mistelbach
Staatsbürgerschaft: Österreich
Familienstand: ledig
Religiöses Bekenntnis: römisch-katholisch

SCHULBILDUNG UND BERUFLICHER WERDEGANG

1986 – 1990	Volksschule Poysdorf
1990 – 1994	Hauptschule II Poysdorf
1994 – 1998	BORG Mistelbach, musischer Zweig
1998 – 1999	Präsenzdienst in Wien und Mistelbach
1999 – 2004	Studium an der Universität Wien Mathematik/Physik Lehramt, Mathematik Diplom
2004 – 2005	Unterrichtspraktikum Gymn. Feldgasse 6-8, 1080 Wien Zusatzstunden am Gymn. Billrothstraße 26-30, 1190 Wien
2004 – 2008	Doktoratsstudium Mathematik an der Universität Wien
2005 – 2009	Assistent Säule 1 an der Universität Wien, Fakultät für Mathematik
2006 – 2008	Mitarbeit bei math.space