DIPLOMARBEIT

Zur Geschichte der Kegelschnitte
als Thema im Mathematikunterricht

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien

Verfasser:	Dean Tomasitz
Matrikel-Nummer:	8404128
Studienrichtung:	UF Mathematik
Betreuer:	Univ.- Prof. Mag. Dr. Humenberger

Wien, im November 2008

INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung……..……3

1. Über den Ursprung der Kegelschitte……...……..5

1.1 Geschichtlicher Hintergrund und gesellschaftliche Strukturen……..……5

1.2 Griechische Geometrie der Kegelschnitte…….9

1.3 Die klassischen Probleme der Antike……..……12

1.4 Die Periode des Hellenismus……..…..17

1.4.1 Euklid…….....18

1.4.2 Archimedes von Syrakus……19

1.4.3 Apollonius von Perge……..23

1.5 Die „Geometrie“ von Descartes und ihr Einfluss
auf die weitere Entwicklung der Analytischen Geometrie……31

2. Zur Geschichte des Gymnasialwesens in Österreich……...…34

2.1 Das österreichische Bildungswesen bis zum 18. Jhdt……..…...34

2.2 Die österreichische Schulreform im 18. Jhdt……..…...38

2.3. Weiterführende bildungspolitische Reformversuche im 19. Jhdt……..…...43

2.4 Der Organisationsentwurf 1849……..…..52

2.5 Ein Vergleich Realschule – Gymnasium……..……...53

2.6 Das österreichische Bildungswesen nach dem 2. Weltkrieg……..……55

3. Die Entwicklung der Kegelschnittsgeometrie in den Lehrplänen und Lehrbüchern der Gymnasien……61

3.1 Vorbemerkung……..……...61

3.2 Zur Geschichte der Kegelschnitte in den Lehrplänen und Büchern….…..63

3.2.1 Anfangsgründe der Kegelschnittsgeometrie……..63

3.2.2 Lehrplanänderungen in den folgenden Jahrzehnten…..……..76

3.2.3 Einige Anmerkungen zu den Lehrbüchern……..……80

3.2.4 Beginnende Einschränkung der Kegelschnittsgeometrie……....92

3.2.5 Sind die Kegelschnitte noch zu retten?.....102

3.2.6 Die letzten 15 Jahre……..106

3.3 Einige Gedanken zur Didaktik des Mathematikunterrichts……112

4. Kegelschnitte – Ein wichtiger Beitrag zum Unterricht……..116

4.1 Einleitung……116

4.2 Kegelschnitte als Schnitte eines Drehkegels……117

4.3 Kegelschnitte als Ortslinien……....121

4.4 Kegelschnitte als allgemeine Gleichung 2. Grades……....125

4.5 Kegelschnitte in unserer Umwelt……...129

4.6 Resumée……145

5. Anhang……..146

Zusammenfassung……...149

Literaturverzeichnis……151

0. Einleitung

„Zur Geschichte der Kegelschnitte als Thema im Mathematikunterricht.“
Auf den ersten Blick lässt dieser Titel nicht unbedingt den „tieferen Sinn“ oder die wesentlichen Hintergründe für einen didaktisch ergiebigen Mathematikunterricht erkennen.
Ich möchte dennoch kurz versuchen, mein Anliegen in Bezug auf die Wichtigkeit und Sinnhaftigkeit dieses Themas – und was damit in Zusammenhang steht – zu erläutern.

Mir ist in erster Linie daran gelegen zu zeigen, welche Bedeutung Kegelschnitte bereits seit der Antike bis vor „kurzem“ hatten, und wie sie im Laufe der (vorwiegend letzten) Jahrzehnte an Umfang und Bedeutung im Mathematik-unterricht verloren haben.

Es ist leider Tatsache, dass sie im Zuge der Lehrplanreform für den Mathematikunterricht in einen immer kleiner werdenden, eher isolierten Teil gedrängt wurden. Dieser scheint zur übrigen Mathematik keine Verbindung mehr aufzuweisen.

Angesichts dieser Entwicklung besteht die Gefahr, dass dem Schüler[1] mehr und mehr die Möglichkeit genommen wird, sowohl einen geschichtlichen als auch einen praktischen Zusammenhang zur übrigen Mathematik zu finden.

Sieht man sich die Entwicklung der Lehrpläne und Stundentafeln der letzten Jahr(zehnt)e an, so wird man wohl eine kontinuierliche Entgeometrisierung feststellen müssen. Die Schulmathematik tendiert zu übertriebenem Strukturdenken, zu übertriebenem Formalismus im Sinne einer konsequenten Verwendung von Schreibweisen und Prinzipien der Logik. Offenbar ist Geometrie weit unwichtiger als das Lösen komplizierter Bruchgleichungen und das Differenzieren komplexer Ausdrücke!

[1] Aufgrund sprachökonomischer Gründe wird auf die explizite Nennung beider Geschlechter verzichtet und stattdessen das genetische Maskulinum verwendet.

Die Eliminierung anschaulicher, intuitiver Geometrie aus dem Unterricht ist leider die Folge.
In diesem Zusammenhang ist ebenso die „Darstellende Geometrie“ als eigenständiges Unterrichtsfach zu erwähnen.
Durch größere Auswahlmöglichkeiten der Schüler in der 7. Klasse AHS als auch durch die Tatsache, dass immer weniger Schulen Darstellende Geometrie überhaupt anbieten, werden logischerweise immer weniger Schüler mit dem Unterrichtsfach konfrontiert.
Die Trennung der Darstellenden Geometrie von der Mathematik ist an der Universität ebenfalls ersichtlich. Im Gegensatz zu den Jahren davor, wartete ich während meiner Studienzeit (von einer Ausnahme zu Beginn abgesehen) vergeblich auf irgendein Vorlesungs- oder Übungsangebot im Rahmen der Darstellenden Geometrie.

Tatsache ist und bleibt, dass die Geometrie, im Besonderen die Kegelschnittsgeometrie, mit der Zeit bewusst aus dem Lehrplan stückweise herausgeschnitten wurde. Das Ziel meiner Arbeit ist es nun, diese Entwicklung dokumentarisch nachzuvollziehen.

Beginnend mit einem Überblick über den Ursprung der Kegelschnitte, möchte ich in weiterer Folge zur geschichtlichen Betrachtung des Gymnasialwesens übergehen.
Nach diesem historischen Rückblick versuche ich, den „Werdegang“ der Kegelschnitte in den Lehrbüchern und Lehrplänen der ***Allgemeinbildenden Höheren Schulen*** zu dokumentieren.
Den Abschluss der Arbeit bildet ein kleiner Überblick über die zahlreichen Möglichkeiten, Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln. Dabei richtet sich mein Hauptaugenmerk auf die Wichtigkeit der Kegelschnitte in bestimmten Bereichen des täglichen Lebens.

1. Über den Ursprung der Kegelschnitte

1.1 Geschichtlicher Hintergrund und gesellschaftliche Veränderungen

Mathematik ohne ihren dazugehörigen geschichtlichen Hintergrund zu betrachten ist nicht sinnvoll. Es gibt nicht sehr viele Bereiche, die so viel Kulturgeschichtliches zu bieten haben wie die Mathematik. Zwar wird ihre Bedeutung für die Naturwissenschaften allgemein anerkannt, doch als ein Teilgebiet der „Allgemeinbildung“ wird die Mathematik aber kaum angesehen.

Unser Mathematikunterricht lässt uns nicht ahnen, welch wichtige Rolle die Mathematik bei der Entstehung der heutigen Zivilisation und Kultur spielt. Ein etwas näheres Eingehen auf die Geschichte würde dem Schüler sehr wohl helfen, gewisse Vorurteile bezüglich der Abstraktheit dieses Unterrichtsfaches abzubauen. Auch könnte es dem Schüler vor Augen führen, welche Querverbindungen zwischen Mathematik und Geschichte bestehen.

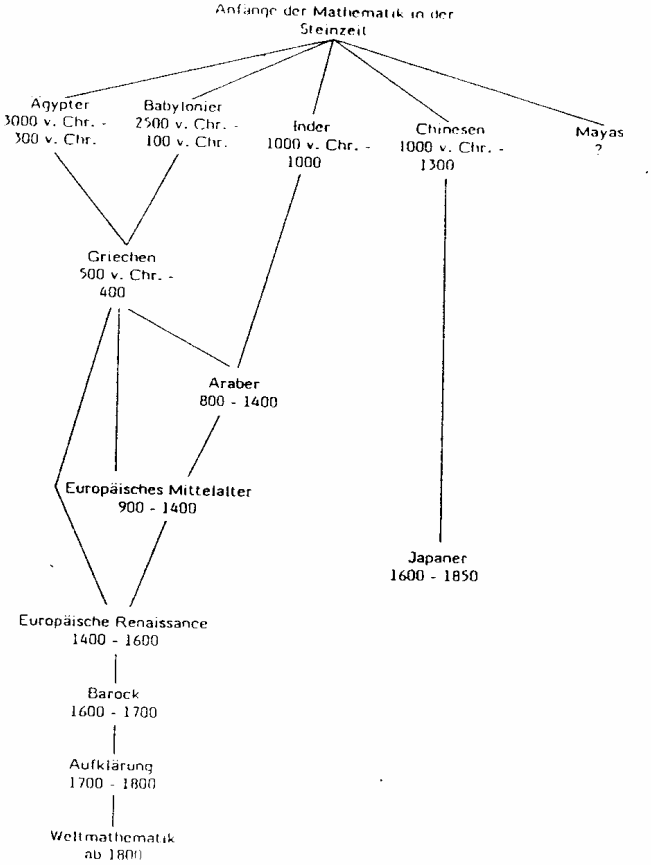
Die Entwicklung der Mathematik allgemein, und vor allem die der Kegelschnitte speziell, vollzieht sich nicht nach einer geradlinig fortlaufenden Linie, sondern sie hat ihre Ursprünge in verschiedenen Kulturkreisen, die miteinander absolut nicht in Verbindung standen und eine mehr oder weniger lange Blütezeit erlebten – je nach den praktischen Erfordernissen des jeweiligen Kulturkreises.

Beeinflusst wird dies vor allem durch die Entwicklung von Schriftzeichen, die innerhalb des betreffenden Kulturkreises weitergegeben werden konnten. Sie gelangten nicht selten auch von einem Kulturkreis zu einem anderen, wodurch die Mathematik eines Kulturkreises die Entwicklung der Mathematik eines anderen Kulturkreises wesentlich beeinflusst hat.

Mathematische Methoden waren in Ägypten und in Mesopotamien hoch entwickelt. Sie dienten der Feldmessung, der Steuer- und der Kalenderberechnungen. Auf der griechischen Inselwelt allerdings entwickelten sich jene Methoden, unter den Zahlen und geometrischen Figuren und Körpern allgemeine Strukturen zu erforschen und die Zusammenhänge deduktiv darzustellen.

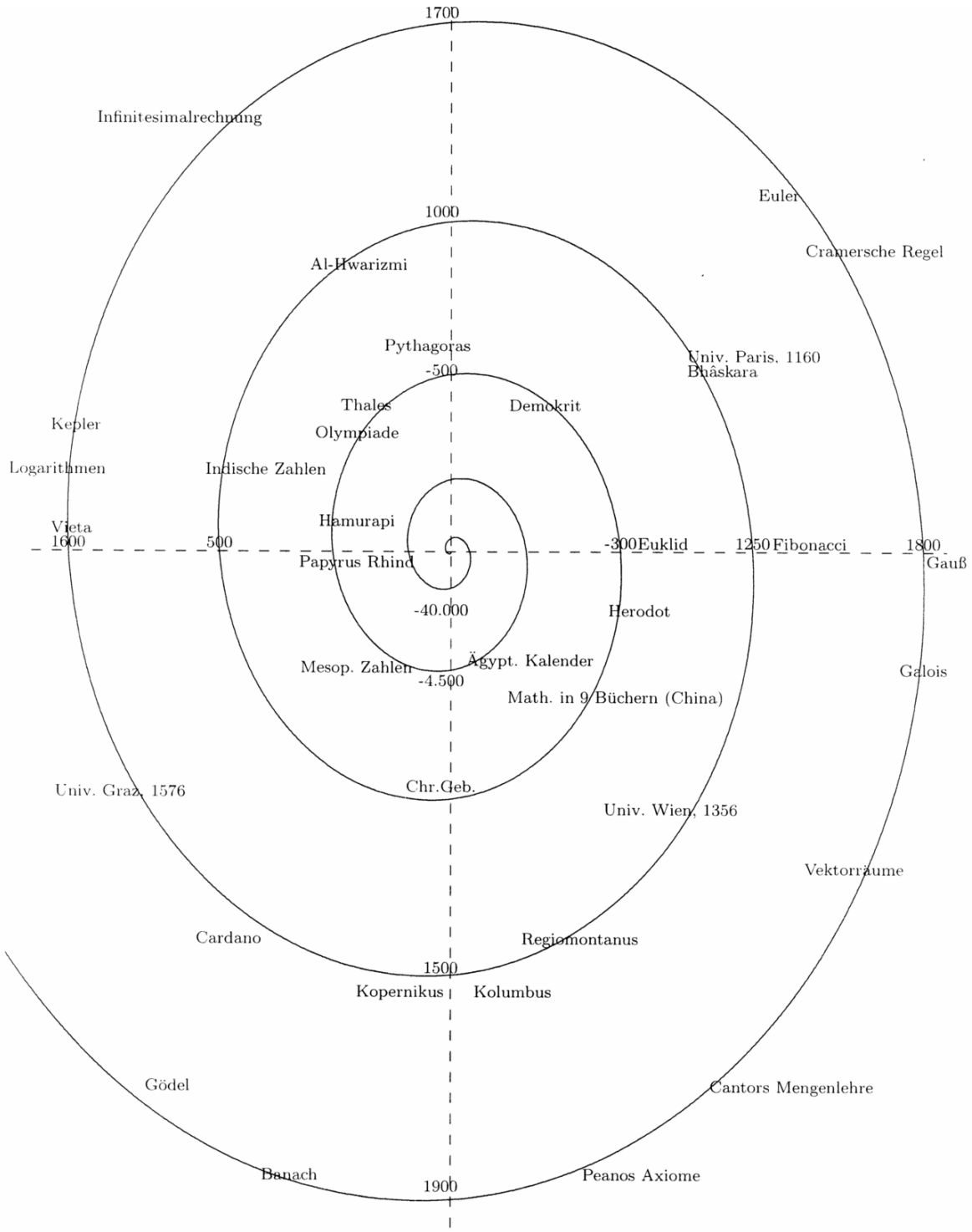
Ab dem 19. Jahrhundert bildete sich auch durch das Verschmelzen aller Kulturkreise eine einheitliche Mathematik, die, ausgehend von Europa, sich über die ganze Welt ausbreitete.

Die nun folgende Graphik [2] gibt einen Überblick über die wesentlichen Entwicklungslinien und Zusammenhänge der Mathematik:



[2] Kaiser-Nöbauer, S.9

Eine weitere Möglichkeit, die Mathematik im Laufe der Geschichte zu sehen, gibt Gronau in seiner „geschichtlichen Spirale“: [3]



[3] Detlef Gronau, S.101

Die Mathematik hat sich im Laufe der Jahrhunderte logischerweise nicht nur selbst weiterentwickelt, sondern es wurden ebenso die „Grenzen“ der einzelnen mathematischen Gebiete überschritten. Hat man früher zwischen reiner und angewandter Mathematik unterscheiden können, so kann heutzutage keiner mit Sicherheit sagen, wo die eine beginnt und die andere endet. Man löst geometrische Probleme algebraisch und algebraische geometrisch.

Ich möchte, um meinem Thema wieder ein wenig näher zu rücken, mich der griechischen Mathematik widmen, die eigentlich die Hauptverantwortung für die Hochblüte der Geometrie und speziell der Kegelschnitte trägt.

Die Mathematik der griechischen Frühzeit entsprang unter anderem auch dem Bemühen, aus dem damaligen Griechenland ein eigenständiges Handelszentrum zu machen. Die Einführung der Bronze (1. Hälfte des 3. Jahrtausend v. Chr.)[4] bedeutet für Griechenland den Beginn einer neuen Ära. Auch die Landwirtschaft entwickelte sich durch den Gebrauch neuer Technologien (insbesondere den Pflug); durch den zunehmenden Handel mit den Küsten des gesamten Mittelmeeres gewann Griechenland rasch an Reichtum und Einfluss[5]. Daraus entstand ein neuer Menschentyp: der Handelskaufmann.

Leider kann man bezüglich der Entstehungsjahre nur auf kleine Fragmente (Sekundärliteratur) und Bemerkungen von Philosophen zurückgreifen, und man ist in vielerlei Hinsicht auf ein hypothetisches Bild der damaligen Zeit angewiesen. Abschriften von mathematischen Schriften gibt es erst ab der Zeit Euklids (300 v. Chr.)[6]

Dem, was die Griechen von den Babyloniern gelernt hatten, vor allem im Bereich der Astronomie, fügten sie noch etliches hinzu. Sie machten aus der Mathematik ein deduktiv aufgebautes System, in dem man von Grundaussagen durch logische Schlüsse zu Folgerungen fortschreiten konnte. In dieser Zeit (ca. 5. Jhdt. v. Chr.) erfolgte die Herausbildung der selbständigen Wissenschaft Mathematik.

---

[4] Der große Ploetz, Auszug aus der Geschichte, Verlag Ploetz, Freiburg – Würzburg, 1980, S.96
[5] Detlef Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Graz 2008, S.17
[6] Gronau, S.18

Ihr wesentlichstes Ziel ist die Beantwortung jener Kernfrage aller modernen wissenschaftlichen Mathematik, die nicht nur nach dem „Wie“ eines mathematischen Zusammenhanges fragt, sondern ebenso nach dem inneren Grund, dem „Warum“.

Dabei werden die mathematischen Kenntnisse noch ganz in die Philosophie eingebettet. Es wird das Wesen der Definition erkannt, Beweise für Behauptungen (Theoreme) wurden erstmals geführt.[7] Das mathematische Wissen, das zum großen Teil von den Ägyptern und den Mesopotamiern übernommen wurde, hatte nun eine logische Struktur:[8]

VORAUSSETZUNG – SATZ – BEWEIS

Die Mathematik als Wissenschaft wurde geboren. Hierzu meint etwa Struik,[9] ein amerikanischer Mathematikprofessor:

> *„Die Mathematik diente dazu, Ordnung im Chaos zu schaffen, Ideen in logischen Ketten anzuordnen und fundamentale Prinzipien zu entdecken. (…), und obwohl kaum ein Zweifel darüber bestehen kann, dass die griechischen Kaufleute auf ihren Handelsreisen die orientalische Mathematik kennen lernten, so fanden sie doch heraus, dass die Völker des Orients die meiste Arbeit zur verstandesmäßigen Durchdringung ungetan gelassen hatten.“*

1.2 Griechische Geometrie der Kegelschnitte

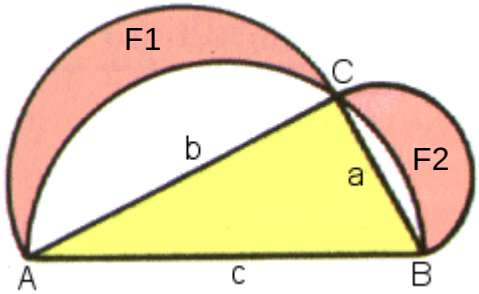
Einer dieser griechischer Kaufleute, **Thales von Milet** (ca. 624 – 546 v. Chr.) stand wohl am Beginn dieser Entwicklung. Es soll ihm gelungen sein, das Jahr der Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 v. Chr. vorauszusagen, und während einer Handelsreise nach Ägypten soll er die Höhe einer Pyramide aus ihrer Schattenlänge mittels ähnlicher Dreiecke bestimmt haben.

---

[7] Gronau, S.19
[8] Gronau, S.19
[9] Dirk J. Struik, S.48f

Die Überlieferung schreibt Thales u.a. den bekannten Satz zu, nach dem der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter ist; dieser wurde zwar bereits vorher verwendet, nun aber explizit als mathematischer Satz ausgesprochen und auch bewiesen.

Ein weiterer bedeutender Mathematiker dieser Zeit war **Hippokrates von Chios** (ca. 440 v. Chr.). Er war der berühmteste Geometer dieser Periode und sein Name ist eng mit einem der klassischen Probleme der Mathematik verknüpft. Es handelt sich dabei um das „**Problem der Würfelverdopplung“**, auf welches später noch genauer eingegangen wird.
Seine wohl bekannteste Leistung ist wohl die Entdeckung der Möndchen, die so genannten **„Möndchen des Hippokrates“** :



F(ABC) = F1 + F2

Die Summe der Flächeninhalte der beiden Möndchen ist gleich dem Flächeninhalt des Dreieckes ABC.

Diese Möndchen sind Beispiele einer Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Immerhin ist es Hippokrates gelungen, damit erstmals die Quadratur von krummlinig begrenzten Flächen mit Zirkel und Lineal in jeweils ein flächengleiches rechtwinkeliges Dreieck bzw. in ein flächengleiches Quadrat durchzuführen.
Die Entdeckung war so populär, dass von Hippokrates selbst eine entsprechende Schrift teilweise überliefert wurde, die als ältestes authentisches Stück griechischer Mathematik gilt.

In weiterer Folge wird die Mathematik im 4. Jhdt. v. Chr. stark geprägt von den großen Philosophen **Platon** und **Aristoteles**, deren Gedanken für die weitere Antike bestimmend bleiben.
Sokrates, sein Schüler Platon und dessen Schüler Aristoteles gründeten Philosophenschulen. Der philosophische Idealismus, insbesondere jener Platons, überflügelte die bis dahin dominierenden materialistischen Traditionen der ionischen Naturphilosophie.
Platon betrachtete die Mathematik als das Beispiel einer Wissenschaft, die ihre Ergebnisse durch bloßes Denken finden könne. Diese philosophische Grundhaltung bedeutet nicht nur eine Verstärkung der methodischen Grundlage der Mathematik, die auf Definitionen und Voraussetzungen aufbauend deduktiv ihre Beweise führt, sondern auch ganz besonders eine Verstärkung des philosophischen objektiven Idealismus.

Charakteristisch dafür ist folgendes Beispiel:
Jeder konkrete Gegenstand – ein Stuhl, die Schrift, ein gezeichnetes Dreieck – ist nur das schlechte Abbild einer objektiven Idee wie etwa „Stuhl“, „Schrift“, „Dreieck“. Beispielsweise gilt bei der Idee „Dreieck“ der Satz über die Winkelsumme wirklich, aber bei jedem aufgezeichneten Dreieck, dem „schlechten“ Abbild der Idee, wird das Nachprüfen Abweichungen ergeben.
In Wahrheit ist es natürlich so, dass das Denken die bei der Zeichnung bewirkten Ungenauigkeiten als unwesentlich weglässt, um zum Begriff „Dreieck“ zu gelangen. Dem menschlichen Denken kommt in Platons System dann nur die Aufgabe zu, den Grad der Übereinstimmung zwischen der Erhabenen, vollkommenen Idee und ihrem realen Abbild festzustellen.
Platon selbst war kein eigentlicher Mathematiker, aber er hat durch sein außerordentliches Interesse (er sah in der Mathematik die Pforte zur Philosophie) einen ungeheuren Einfluss auf die Weiterentwicklung und Wertschätzung dieser Wissenschaft ausgeübt.
In etwa diesem Zeitraum, zwischen dem 4. und 3. Jahrhundert v. Chr., unterschied die spätere Antike drei Gruppen von klassischen Problemen:
ebene, körperliche und linienhafte (Kurven) Problemstellungen.

1.3 Die klassischen Probleme der Antike

Die höhere Geometrie wurde immer wieder durch die Beschäftigung mit drei bestimmten Problemen weiterentwickelt. Diese so genannten **„drei klassischen Problem der Antike“** sind folgende:

1. Die Dreiteilung des Winkels
2. Die Verdopplung des Würfels
3. Die Quadratur des Kreises

Für jede dieser drei Problemstellungen gab es bei den Griechen eine Reihe von bemerkenswerten Lösungsvorschlägen, wobei sie bei deren Behandlung die Tür zur höheren Geometrie aufstießen. Den endgültigen Beweis, dass diese Probleme mit Hilfe von euklidischen Hilfsmitteln nicht lösbar sind, erbrachte bei der Würfelverdopplung und der Dreiteilung des Winkels **E. Galois**[10], und bei der Quadratur des Kreises war es **F. Lindemann**[11], der ihre Unmöglichkeit bewies.

Es stellt sich die Frage, warum diese drei Probleme für die Kegelschnitts-geometrie so überaus wichtig waren?

Ich möchte hierbei, der Verständlichkeit und Kürze halber, das Problem der Würfelverdopplung herausgreifen, da es hinsichtlich des Themas sehr relevant ist. Außerdem hat der Leser bei Bedarf die Möglichkeit, in jedem Geschichtsbuch der Mathematik „die klassischen Probleme der Antike“ nachzulesen.

Das Problem der Würfelverdopplung, auch bekannt unter dem **„Delischen Problem“**, reicht offenbar bis in die mythische Zeit zurück, wo angeblich ein kretischer König ein würfelförmiges Grabmal unter Beibehaltung seiner Gestalt zu einem doppelt so großen ausbauen lassen wollte.

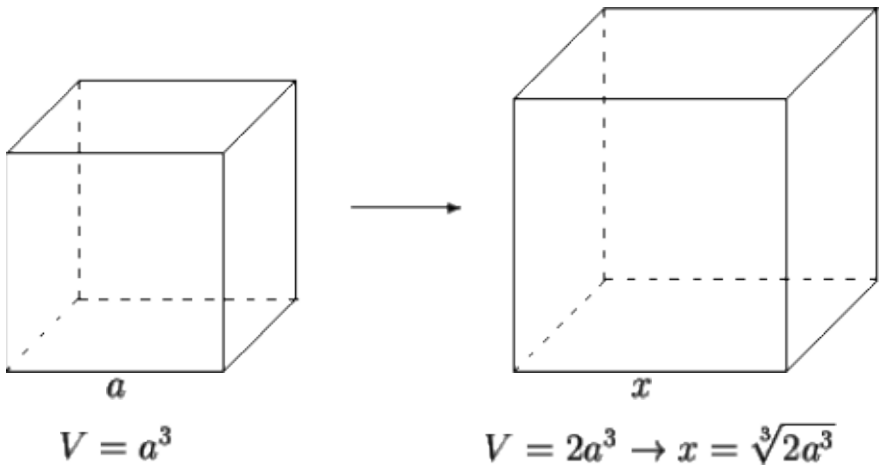
---

[10] Evariste Galois, (1811-1832), frz. Mathematiker, erlangte durch seine Arbeiten zur Lösung algebraischer Gleichungen, der so genannten Galoistheorie, posthum Anerkennung.
[11] Ferdinand von Lindemann (1852-1939), dt. Mathematiker, hat auch bewiesen, dass die Kreiszahl pi eine transzendente Zahl ist (Satz von Lindemann-Weierstraß), aus dem heraus er die Unmöglichkeit der Quadratur beweisen konnte.

Lange Zeit hindurch waren alle ratlos. Lösungen durften nur in endlich vielen Schritten mit den so genannten „Euklidischen Werkzeugen“, d.h. mit Zirkel und Lineal ohne Maßeinteilungen herbeigeführt werden.

> *„Erst im 19. Jahrhundert konnte für alle drei Probleme bewiesen werden, dass sie im Allgemeinen mit diesen einfachen Hilfsmitteln nicht lösbar sind. Carl Friedrich Gauß und Évariste Galois leisteten wichtige Vorarbeiten. Die endgültigen Beweise zur Winkeldrittelung und Würfelverdopplung fand Pierre Laurent Wantzel im Jahr 1837, der Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises wurde im Jahr 1882 von Ferdinand von Lindemann durch den Beweis der Transzendenz der Kreiszahl π erbracht.“* [12]

Ich möchte aufgrund der umfangreichen Bearbeitung zum Delischen Problem im Laufe der Jahrhunderte nicht zu sehr ins Detail gehen, sondern lediglich einen wichtigen Ansatz von „Hippokrates von Chios“ (um 440. v. Chr.) herausgreifen:



Zu einem gegebenen Würfel der Kantenlänge *a* soll, allein unter Nutzung von Zirkel und Lineal, ein weiterer Würfel konstruiert werden, der das Volumen $2a^3$ besitzt.

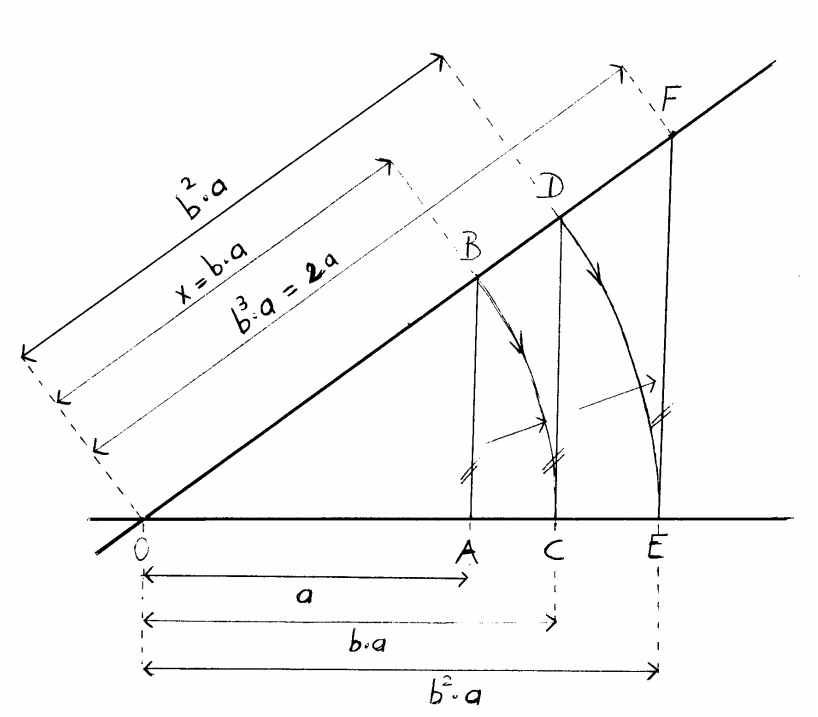
[12] Wikipedia Klassische Probleme der Antike 31.8.2008

Zur Lösung dieses Problems geht es also darum, die Länge b = $\sqrt[3]{2}$ (in Bezug auf eine Einheitsgröße) konstruktiv (Zirkel und Lineal) zu bestimmen.
(Die Lösung dieses Problems ist unmöglich, und dies wird z.B. im Rahmen einer Algebravorlesung an der Universität gezeigt.)

Historisch wurde jedoch folgendes versucht:

Es gilt: $$a : ab = ab : ab^2 = ab^2 : ab^3$$

Die Aufgabe ist also: zwischen a und 2a zwei mittlere Proportionale ab und ab² einzuschalten (Zeichnung!)



$$b = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599 \approx 1{,}26$$

Man sieht, dass die Strecken AB, CD und EF genau dann parallel sind (und daher nach dem Strahlensatz die obigen Proportionen erfüllt sind), wenn man bei der Konstruktion beispielsweise mit der Wahl des Punktes B beginnt und diesen schon zu Beginn „richtig“ (also $\overline{0B} = a \cdot \sqrt[3]{2}$) wählt.

Die Zeichnung erweckt den Eindruck, dass es vielleicht möglich wäre, einen der Punkte B, C, D, E (einer würde genügen) mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Erst die moderne Mathematik (Algebra, siehe oben) konnte zeigen, dass dies nicht möglich ist.

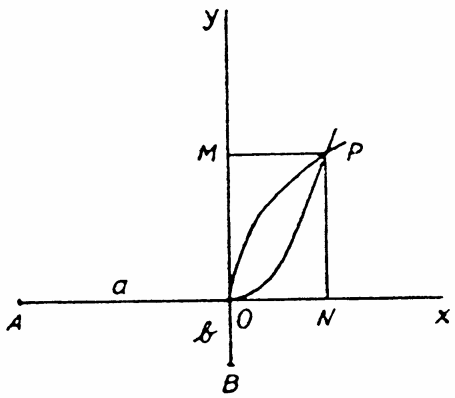
Die Aufgabe der Würfelverdoppelung führte mithin auf das Lösen einer kubischen Gleichung – auf die Beschäftigung mit Kurven, die ihr entsprechen.

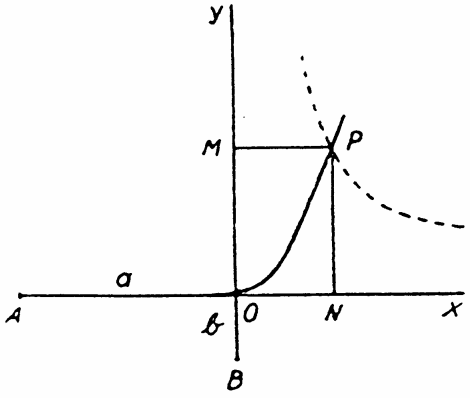
Menaichmos[13] erkannte als erster, dass sich aus der fortleufenden Proportion Gleichungen ergeben, die als ebene Kegelschnitte auftraten:

setzt man aus obiger Proportion z.B. für $ab = x$, $ab^2 = y$, und $ab^3 = b$,

folgt: $a : x = x : y = y : 2a$, und man erhält $ay = x^2$, also liegt P auf einer „Parabel“ mit dem Scheitel O.

Ebenso erhält man aus der Proportion die Gleichung $xy = 2a^2$, also liegt P auch auf einer „Hyperbel“ mit den Asymptoten ON und OM : (Abb.!)





[13] Menaichmos (um 400 v.Chr.) entdeckte auf der Suche nach der Würfelverdopplung Kegelschnitte.

P wird so als Schnitt zweier „Kurven“ gefunden, wonach umgekehrt auch die Proportion aus den Gleichungen der beiden „Kurven“ folgt.

Erwähnenswert ist ebenso die Lösung des „Delischen Problems“ von **Archytas**[14], einem Freund Platons, der dies durch eine genaue räumliche Konstruktion bewältigt, bei der ein Kreiswulst, ein Zylinder und ein Kegel zum Schnitt gelangen. Hierbei gab es die erste exakte Definition einer doppelt gekrümmten Raumkurve. Archytas verblüffte durch seine dabei verwendete Auffassung von geometrischen Kurven und Flächen:
Der Punkt erzeugt die Kurve, und diese durch Bewegung die Fläche. Somit führt Archytas bereits zwei Jahrhunderte vor Archimedes mechanische Methoden in die Geometrie ein.

[14] Archytas (um 400 v. Chr.), griechischer Philosoph, Mathematiker, Musiktheoretiker, Physiker, Staatsmann und Feldherr.

1.4 Die Periode des Hellenismus

Die Zeit vom Regierungsantritt Alexander des Großen (336 v. Chr.) bis zur Eroberung Ägyptens durch die Römer (30 v. Chr.) war durch weitreichende Änderungen des gesellschaftlichen und politischen Lebens gekennzeichnet.
Diese umfassten neue Errungenschaften der Produktionstechnik, des Militärwesens und des Bauwesens sowie eine Ausweitung der Handelstätigkeit auf einem, für die damaligen Verhältnisse riesigen Territorium. (Mazedonien, Griechenland, Klein- und Mittelasien, Süd- und Westeuropa, Nordafrika und teile Indiens).

Es entstand eine Verschmelzung und Durchdringung der kulturell-wissenschaftlichen Ergebnisse der Griechen (Hellenen) mit den verschiedenen Kulturen der Völker jenes großen Territoriums. Man sprach von einer Kultur und Wissenschaft des Hellenismus.

Sie blieb bestimmend in den aus Alexanders Großreich hervorgegangenen Nachfolgestaaten und wirkte bis weit in die Zeit des römischen Imperiums hinein. Alexandria wurde das wissenschaftlich kulturelle Zentrum der Welt.
In Athen gab es zwar die platonische Akademie, aber Alexandria besaß das Museion. Dabei handelte es sich um das erste staatlich gegründete und unterhaltene Forschungs- und Lehrzentrum überhaupt. Es umfasste neben Hörsälen, Arbeits- und Speiseräumen eine außerordentliche Bibliothek von ca. 400.000 Papyrosrollen, eine Sternwarte und einige zoologische Gärten.
Viele der damaligen bedeutendsten Wissenschaftler hatten dort gewirkt oder studiert. Dies trifft unter anderen auch auf die Mathematiker **Euklid**, **Archimedes** und **Ptolemaios** zu.

In diese Phase fiel auch das Ende der philosophischen Beeinflussung der Mathematik. Es entwickelte sich der „berufsmäßige Mathematiker“, der sich ausschließlich der Mathematik widmet, und dafür auch Geld erhält.

1.4.1 Euklid

Der bekannteste Vertreter dieses Periodenwechsels war **Euklid** (350 v. Chr.), dessen wissenschaftlich bedeutendsten Werke die 13 Bücher seiner **„Elemente“ („Stoicheia“)** sind. Mehr als zwei Jahrtausende hat man nach den „Elementen“ Geometrie unterrichtet.

Hierzu meinte Struik:

> *„Die `Elemente` bilden wohl nächst der Bibel das am meisten gedruckte und studierte Buch in der Geschichte der westlichen Welt. Über tausend Ausgaben sind seit Erfindung der Buchdruckerkunst erschienen, und vor dieser Zeit wurde der Unterricht in Geometrie von handschriftlichen Kopien beherrscht. Der größte Teil unserer Schulgeometrie wurde, häufig sogar wörtlich, aus neun von den dreizehn Büchern entnommen.“*[15]

Die Elemente waren nicht, wie der Titel vermuten lassen könnte, für Anfänger bestimmt, sondern für Lernende auf fortgeschrittenem Niveau. Fast die gesamte damalige Mathematik wurde dort zusammengefasst. Die Elemente bestehen aus 13 Büchern. Der Inhalt reicht von der Elementargeometrie, deren Hauptstück die quadratische geometrische Algebra und die Lehre vom Kreis und den regelmäßigen Vielecken ist, über die allgemeine Proportionenlehre, bis hin zur Zahlentheorie.
Die letzten drei Bücher behandeln die räumliche Geometrie; ausgehend von den eudoxischen Exhaustionsbeweisen für die Inhaltsbestimmung von Pyramide, Zylinder und Kegel, über die Konstruktion der regulären Körper und ihre Einschreibung in die Kugel, bis hin zum Beweis, dass es nur fünf solche Körper gibt.
Euklid schrieb bereits um 325 v. Chr. ein ganzes Buch über Kegelschnitte, das allerdings leider verloren gegangen ist.

[15] Struik, S.59

Er definiert darin:

> *„Ein Kegel ist ein Körper, der umschlossen wird, wenn ein rechtwinkeliges Dreieck, während eine der Seiten um den rechten Winkel fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurückgebracht wird, von der es ausging.“*[16]

Man hat also zunächst nur gerade Kreiskegel betrachtet und sie mit Ebenen geschnitten, die senkrecht zu einer Mantellinie standen. Deshalb brauchte man für die drei Arten von Kegelschnitten drei verschiedene Kegel.
Euklids exakte Vorgangsweise, wonach er für seine Untersuchungen von logischen Grundsätzen, so genannten Axiomen, die unmittelbar einsichtig sind, ausging, blieb noch für Jahrhunderte später das Vorbild einer genauen mathematischen Untersuchung. Lineal und Zirkel waren die einzigen Hilfsmittel, die zur Bewältigung geometrischer Probleme erlaubt waren. Eine Lösung, die mit einer anderen Methode gefunden wurde, lehnten die Griechen damals als Beweisführung ab.

1.4.2 Archimedes von Syrakus

Einer, der sich vielfach mit Kegelschnitten beschäftigte, ohne noch ihre heutig gültigen Namen zu verwenden, war **Archimedes von Syrakus** (287-212 v. Chr.), oftmals auch als der unbestritten größte Mathematiker des gesamten Altertums bezeichnet.
Die bedeutendsten Beiträge, die er der Mathematik geliefert hat, liegen auf dem Gebiet der „Integralrechnung“, nicht nur rationaler, sondern auch irrationaler Funktionen.

Sehr wichtig für unser Thema war in seinem Buch „Quadratur der Parabel“ der Beweis für die Flächenberechnung des Parabelsegments.

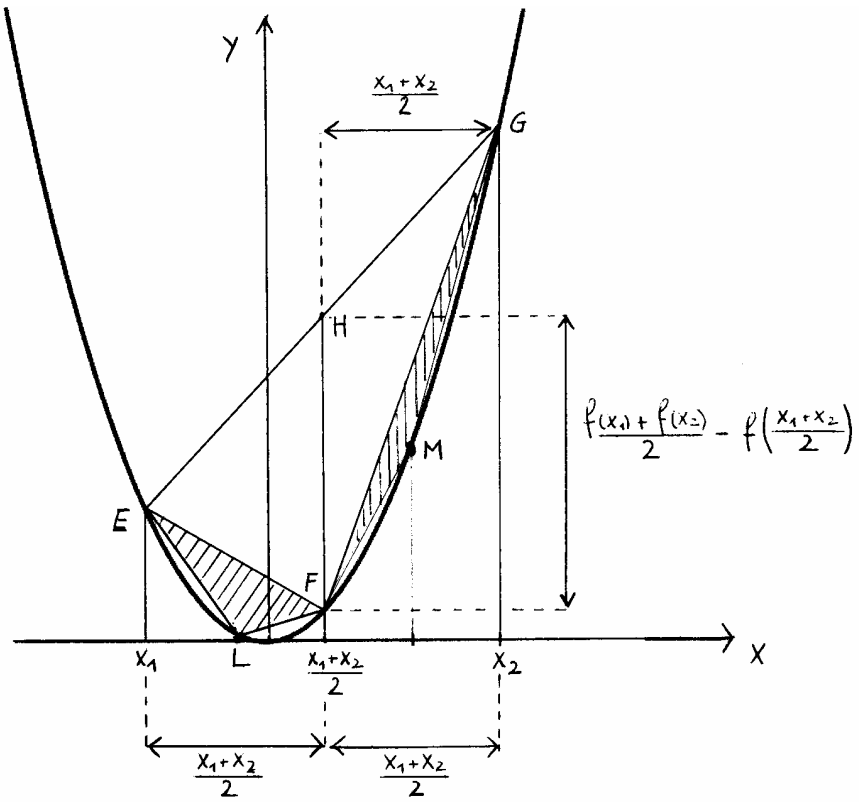
---

[16] Gericke, S.131

Archimedes schaffte es, die Fläche eines Parabelsegments zu bestimmen. Auf diese Leistung war er zu Recht sehr stolz und sie soll hier nur kurz umrissen werden.

Archimedes gibt an, dass er die Lösung zuerst durch mechanische Überlegungen gefunden hat: Er zerlegt das Parabelsegment und ein Dreieck im Geist in schmale Streifen und untersucht, wie er diese an einem Waagebalken aufhängen muss, damit sie im Gleichgewicht sind. Da dieser Beweis aber Überlegungen verwendet, die nicht rein mathematisch sind, bestätigt er sein Ergebnis noch durch einen geometrischen Beweis:

Die Idee ist, mit Dreiecksflächen, beginnend mit einem Dreieck, gebildet aus der Sehne und einem 3. Punkt, der sich auf der Parabel genau über der Mitte des Intervalls $\frac{x_1 + x_2}{2}$ befindet, das Parabelsegment sukzessive auszufüllen (Exhaustionsmethode).



Durch Halbierung der Intervalle entstehen in weiterer Folge kleinere Dreiecke. Archimedes gelangte zu der Erkenntnis, dass dabei die Summe der beiden kleinen (hier schraffierten) Dreiecke ELF und FMG ein Viertel des großen Dreiecks EFG beträgt.

Die Fläche des Dreiecks EFG erhält man einfach durch

$$2\cdot|FH|\cdot\frac{\frac{x_2-x_1}{2}}{2}=|FH|\cdot\frac{x_2-x_1}{2}$$

Der Punkt F des großen Dreiecks liegt in Achsenrichtung genau unter dem Mittelpunkt H der Sehne.

Der Flächeninhalt über dem Intervall $[x_1,x_2]$ eines solchen Dreiecks beträgt:

$$A_D=\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}$$

Speziell für die „Parabel“: $f(x)=x^2$ gilt nun:

$$A_D=\left(\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{(x_2-x_1)^3}{8}$$

Wird nun das Intervall $[x_1,x_2]$ halbiert, so ergeben sich zwei Dreiecke, die jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{8}\cdot A_D$ haben, zusammen also $\frac{1}{4}\cdot A_D$.

Ergänzt man das ursprüngliche Dreieck in dieser Weise (durch fortgesetzte Intervallhalbierung) weiter (Exhaustion des Parabelsegments), dann erhält man für den Flächeninhalt des Parabelsegments:

$$A_P=\lim_{n\to\infty}A_D\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\right)=A_D\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i}=A_D\cdot\frac{4}{3}$$

Archimedes war in der Lage, eine Fülle komplizierter Probleme zu lösen, weil er durch mechanisch physikalische Überlegungen und Analogien den Inhalt der Sätze gefunden und dann erst den exakten mathematischen Beweis ausgearbeitet hat. So findet er auch aufgrund mechanischer Erwägungen den Flächeninhalt des Parabelsegmentes, indem er es mit Masse behaftet gedanklich am Waagbalken aufhängt und auswiegt.

In seiner dem **Eratosthenes**[17] gewidmeten Schrift „Methode die mechanischen Theoreme betreffend“ wird dieses Verfahren, welches auf Integration hinausläuft, genau beschrieben. Die zu vergleichenden Körper werden in unbegrenzt dünne Schnitte zerlegt, deren Gleichgewichtsverhältnisse bestimmt werden, wodurch dann auch die Körper selbst gegeneinander ausgewogen werden können. Bewiesen wird alles durch rein geometrische Betrachtungen nach der Exhaustionsmethode.

So bestimmt Archimedes neben dem bereits vorgestelltem Inhalt des Parabelsegmentes auch den Inhalt der Kugel, der Rotationsflächen 2. Grades, des Zylinderhufs (1/6 des umschriebenen Prismas), des Durchdringungskörpers zweier Zylinder in einem Würfel („Kreuzgewölbe“, 2/3 des Würfels).

Ferner sind auch seine *arithmetischen Untersuchungen* zu erwähnen:
Die Bezeichnung sehr großer Zahlen in seiner „Sandrechnung“ (wo die Anzahl der Sandkörper im Weltall nicht größer als 10^{63} angegeben wird und das so genannte „Rinderproblem“, welches auf eine FERMAT´sche Gleichung mit außerordentlich großen Zahlen führt.

[17] Eratosthenes (276-194 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Geograph; prägte den Begriff der „Geographie“

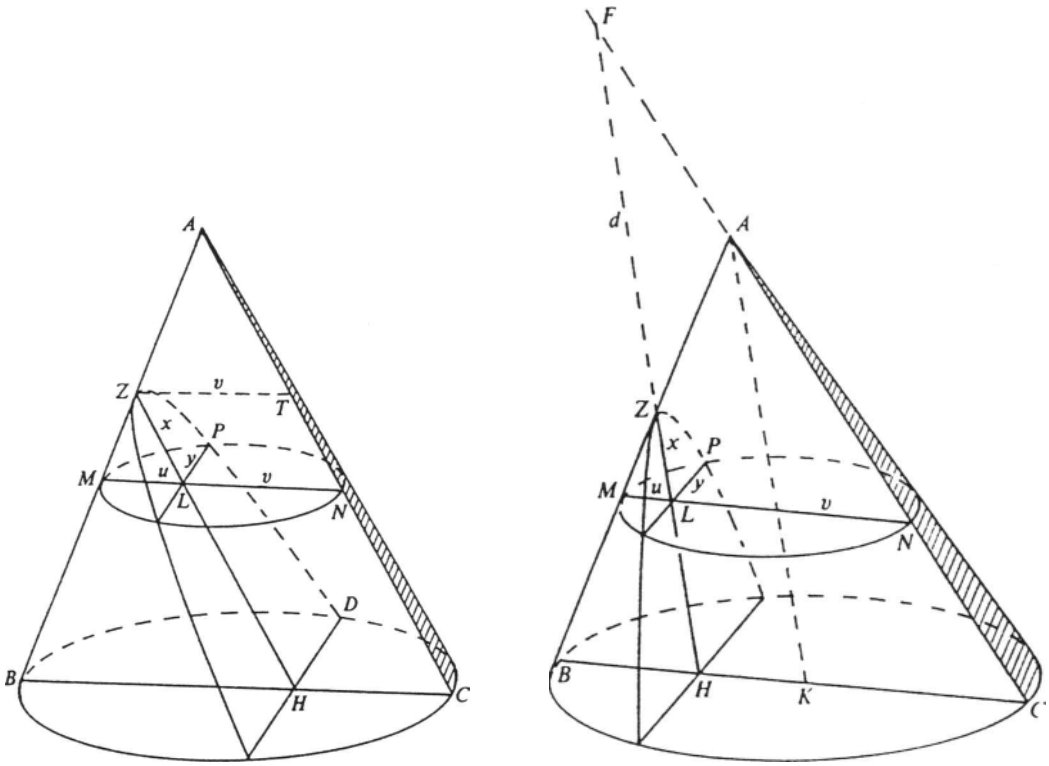
1.4.3 Apollonius von Perge

Der Dritte, und für die Kegelschnittslehre vielleicht wichtigste große Geometer dieser Epoche war **Apollonius von Perge** (260-180 v. Chr.). Seine Stärke lag in der Weiterführung und Beendigung schon zuvor begonnener Forschungen.
Sein Hauptwerk, das wichtigste erhaltene antike Werk über Kegelschnitte, ist eine Abfassung, bestehend aus acht Büchern, die ***„Konika stoichea“***, von denen noch sieben erhalten sind. Die „Konika“ enthalten zunächst eine umfassende Systematisierung der Theorie der Kegelschnitte mit zahlreichen räumlichen und planimetrischen Eigenschaften. Es ist eine Abhandlung von **Ellipse, Parabel** und **Hyperbel**, die als Schnitte eines geraden oder schiefen Doppelkegels eingeführt werden.
Während Euklid den Kegel als Körper definierte, war er für Apollonius eine Fläche, die durch Bewegung einer Linie entsteht.
Man kennt die Kegelschnitte auch heute noch unter den Namen, die Apollonius damals selbst geprägt hatte.
Wurden früher (Menaichmos) die „Kurven“ als rechtwinkelige Schnitte an geraden Kreiskegeln behandelt, das heißt, man benötigte drei Kegel für den „Schnitt am spitzwinkeligen Kegel“, den „Schnitt am rechtwinkeligen Kegel“ und den „Schnitt am stumpfwinkeligen Kegel“, so wählte Apollonius systematisch beliebige ebene Schnitte an einem Kreiskegel und nicht mehr nur Schnitte im rechten Winkel zur Erzeugenden.

Um ein wenig in die Gedankenwelt des Apollonius zu gelangen, möchte ich an dieser Stelle wieder Gericke zitieren, der die Kennzeichnung der Parabel mit Apollonius´ Worten wiedergibt:

> *„Es werde ein Kegel durch die axiale Ebene (ABC) geschnitten (Abb.), außerdem durch eine zweite (ZED), die die Grundfläche des Kegels in einer Geraden schneidet, die senkrecht stehe auf der Grundlinie des durch die erste Ebene erzeugten axialen Dreiecks. Es sei ferner der Durchmesser des Kegelschnitts (ZH) der einen Seite (AC) des axialen Dreiecks parallel.*

Dann wird das Quadrat jeder von einem Punkt des Kegelschnittes bis zum Durchmesser gezogenen Parallelen zu der Geraden, in welcher die schneidende Ebene die Grundebene schneidet (y^2), gleich sein einem Rechteck, dessen eine Seite gleich der durch diese Parallele vom Durchmesser abgeschnittenen Strecke (x) ist, und dessen andere Seite eine konstante Strecke q ist ($y^2 = qx$), wobei q dadurch bestimmt ist, dass es sich zu der Entfernung zwischen der Spitze des Kegels und dem Scheitel des Kegelschnittes (AZ) verhält wie das Quadrat über der Basis des Grundkreises zum Rechteck, das aus den beiden anderen Seiten des Achsendreiecks gebildet ist. Ein solcher Kegelschnitt werde Parabel genannt.“[18]



Den Bezeichnungen „Ellipse“, „Parabel“, und „Hyperbel“ von Apollonius liegt eine planimetrische Systematik zugrunde, wonach bei Problemen, die auf algebraische Gleichungen zweiten Grades führen, die Sprechweise der **„Flächenanlegung“** benutzt wird.

[18] Gericke, S.132f

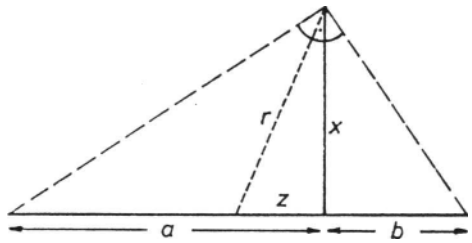
Flächenanlegung bedeutet hauptsächlich die Verwandlung von Rechtecken in flächengleiche Quadrate. (Euklid löste damit bereits quadratische Gleichungen).

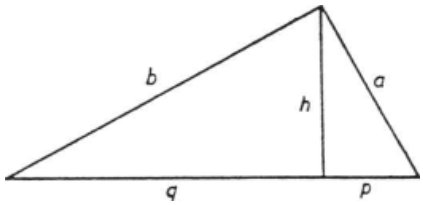
Allgemein brachten ja die Griechen quadratische Gleichungen in die Form:

$$x \cdot (x + a) = F$$

die sie dann geometrisch dadurch lösen konnten, dass sie geeignete Rechtecke in flächengleiche Quadrate umwandelten und umgekehrt. Dem zugrunde liegen der bekannt Höhensatz, der Satz des Pythagoras, und der bereits erwähnte Satz von Thales.

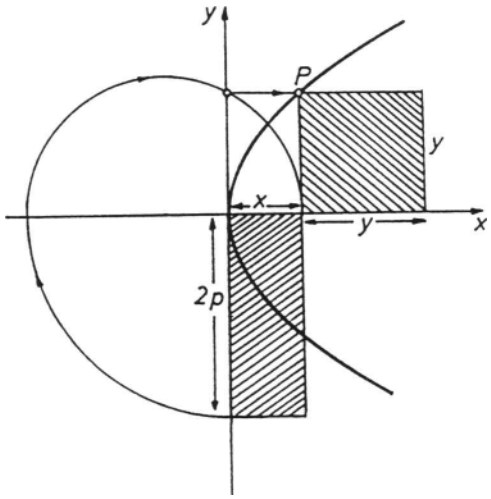
Der Höhensatz folgt ja direkt aus dem Satz des Pythagoras:





Aus **$a^2 + b^2 = (p+q)^2$** und **$h^2 + p^2 = a^2$** und **$q^2 + h^2 = b^2$** folgt
$2pq = 2h^2$ und somit **<u>$h^2 = pq$</u>**

Eben dies liegt nun auch der Konstruktion der Kegelschnitte zugrunde:



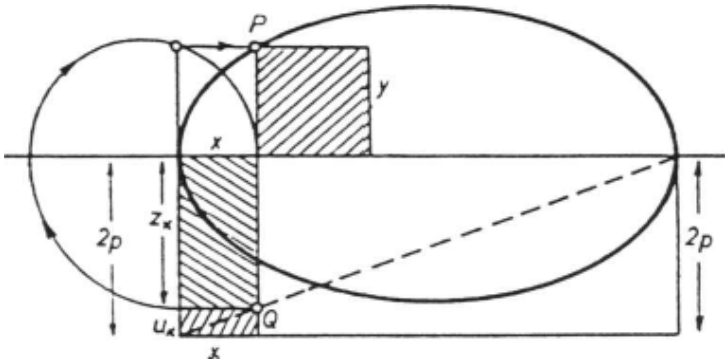
Wenn man die eine Seite des Rechtecks (2p) als fest betrachtet, die andere (x) aber als veränderlich, so liegt der Punkt P, als ein Eckpunkt des flächengleichen Quadrates, konstruktiv mit Hilfe des Thaleskreises und des Höhensatzes, genau auf der Parabel

$$y^2 = 2px$$

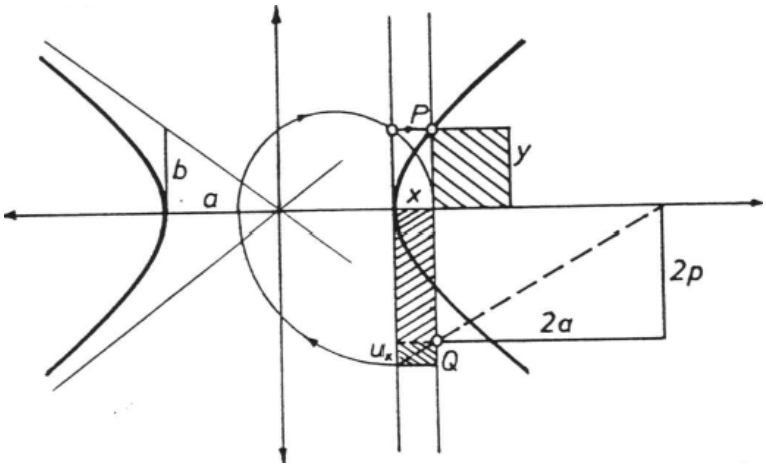
So kam Apollonius durch diese Flächenanlegung (Parabel bedeutet „Anlegung“) zu dem Namen und konnte sie durch deren Eigenschaft definieren und konstruieren.

Ein ähnliches Konstruktionsverfahren wird auch bei der Ellipse angewendet. Die Kurvenpunkte entstehen wiederum durch Umwandlung von Rechtecken (x,z_x) in flächengleiche Quadrate (y,y). (Abb. nächste Seite!).

Durch Wanderung von Q auf der Diagonalen des Rechtecks (2p,2a) wird das Rechteck (x,u_x) um das Rechteck (x,u_x) vermindert. Die Bezeichnung „Ellipse“ stammt nun aus dem griechischen Wort für „Wegnahme“ oder „Auslassung“:[19]



Bei der Hyperbel hingegen entsteht das Quadrat (y,y) durch Umwandlung des um das Rechteck (x,u_x) vermehrten Rechteckes (x,2p). Die Konstruktion der Hyperbelpunkte erfolgt nun wieder mittels „Thaleskreis“.
Aus dem griechischen Wort für „Überschuss“ leitete Apollonius die Bezeichnung „Hyperbel“ ab.

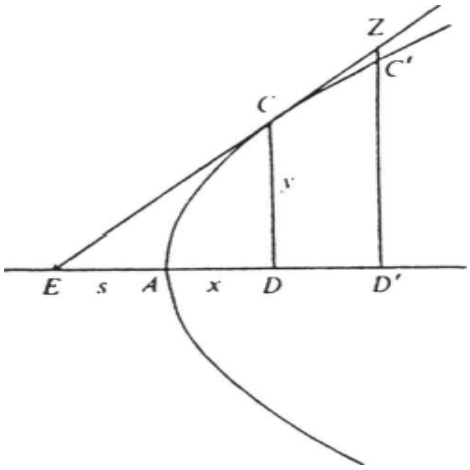


[19] Reichel, Ellipse, Hyperbel, Parabel, S.120ff

Apollonius war aber nicht nur für die noch heute üblichen Namen der Kegelschnitte verantwortlich, sondern befasste sich unter anderem auch mit Tangenten, Asymptoten, Pol und Polare, die noch bis heute (mit bereits gewissen Einschränkungen im neuen Lehrplan, auf die ich erst später näher eingehen möchte) in der Schulmathematik ein fester Bestandteil geblieben sind.

Die Tangente wird von Apollonius folgendermaßen definiert:

> *„Wenn von einem Parabelpunkt eine Sehne zum Durchmesser geordnet gezogen wird und der auf dem Durchmesser gebildete Abschnitt über die Parabel hinaus um sich selbst verlängert wird, so wird die Verbindungslinie des so gewonnenen Punktes mit dem auf der Parabel gewählten Punkt die Parabel berühren.“*[20]



EA = s, AD = x, DC = y, AD´ = x´, D´C´ = y´, D´Z = z

Apollonius beweist dies so:

Wenn EA = AD = x gewählt wird, enthält die Gerade EC keinen Innenpunkt der Parabel, d.h. die Annahme z < y´ führt zu einem Widerspruch.

[20] Gericke, S.135

Es ist:

$$\frac{z}{y} = \frac{x + x'}{2x} \quad \left(= \frac{ED'}{ED} \right)$$

Wäre z < y´ , so wäre $\left(\frac{x + x'}{2x} \right) < \frac{y'^2}{y^2} = \frac{x'}{x}$

Daraus würde folgen $\left(\frac{x + x'}{2x} \right) < x \cdot x'$ → Widerspruch!

(Diesen Beweis findet man noch bei Galilei)

Pol und Polare bezeichnete Apollonius folgendermaßen:

> *„Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts, eines Kreises oder zweier zugehöriger Hyperbeln eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, so wird diejenige Strecke auf ihr, die zwischen diesen Punkten liegt, durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten und den Tangentenschnittpunkt im gleichen Verhältnis geteilt.“*[21]

Hierzu sei noch einmal bemerkt, dass die Kegelschnitte und ihre dazugehörige Behandlung über fast 2000 JAHRE ihren Platz in der Mathematik behaupten konnten, und das sicherlich nicht ohne Grund, zumal sie mit Einschränkung in vielerlei Hinsicht zu den interessantesten Objekten der klassischen Mathematik gehören.

Ich möchte an dieser Stelle noch daran erinnern, dass Apollonius zur Beschreibung von Kegelschnitten Hilfsmittel besaß, die, obwohl sie keine numerischen Werte besaßen, doch eine Beziehung zwischen den Größen (Länge der Sehne, des Durchmessers, usw.) des einzelnen Kegelschnitts angaben.

[21] Gericke, S.137

Als „Koordinaten“ wurden dabei die Streckenlängen behandelt. Von einem Koordinatensystem im heutigen Sinne war also demnach nicht die Rede.
Die Voraussetzung dafür, dass sich die griechische Mathematik so gut entwickeln konnte, war die Tatsache, dass die Sklaven die Grundlage wesentlicher Teile der landwirtschaftlichen Produktion bildeten und sich so eine besondere Schicht von Müßiggängern herausbilden und vom Produktionsprozess lösen konnte.
Am Ausgang der Antike wurde auch die Mathematik vom allgemeinen Niedergang der Wissenschaften durch die Auflösung und den Zusammenbruch der Sklavereigesellschaft betroffen. Die Produktion erlosch, das Wissen ging verloren.
Für lange Zeit erlahmte nun die Schöpfungskraft der reinen Mathematik. Es fiel den Wissenschaftlern sichtlich immer schwerer, den Spitzenleistungen früherer Perioden inhaltlich zu folgen. Darum wurde es üblich, ausführliche Kommentare (zu Euklid, Archimedes, usw.) zu verfassen. Diese hatten die Aufgabe, Definitionen zu erläutern, knappe Beweise ausführlicher darzustellen oder den gegenseitigen Zusammenhang der Sätze zu verdeutlichen.

Die reine Mathematik wurde daher nur mehr als Gegenstand rückschauender Betrachtung angesehen. (PAPPOS: „Mathematische Sammlungen“).

Denn nur mit Hilfe elementar-geometrischer Mittel war es sehr schwer, die Geometrie über das Gebiet der Kurven und Flächen zweiten Grades hinaus weiter zu entwickeln.

1.5 Die „Geometrie“ von Descartes und ihr Einfluss auf die weitere Entwicklung der Analytischen Geometrie

Erst zu Beginn des 17. Jahrhunderts (!) gelang es Renée Descartes (1596-1650) mittels einer genauen Koordinatisierung von Punkten ein Koordinatensystem[22] zu entwickeln, dessen Vorteil es ist, eine bis zum 17. Jahrhundert weiter entwickelte Algebra auf die Geometrie anzuwenden, im Gegensatz zur alten Geometrie der Griechen, die sich auf einzelne Sätze aufbaut und selbst rein arithmetische Zusammenhänge meist „geometrisch“ darbietet. Descartes erkannte, dass man geometrische Gebilde mit Hilfe von Gleichungen untersuchen konnte: eine „Übersetzung“ der Eigenschaften geometrischer Figuren in die Sprache der Algebra. Diese neue Methode legte er in der Schrift **„Geometrie“** dar, die im Jahre 1637 erschien:

> *„Die Punkte jeder Kurve hätten eine gewisse Beziehung zu allen Punkten einer Geraden und diese Beziehung könne mittels zweier ´unbestimmter Größen´ x und y durch eine Gleichung ausgedrückt werden, die für jeden Punkt die nämliche sei.“*[23]

Diese Gerade kennen wir als x-Achse und die „Beziehung“ erhält man, wenn man durch die Kurvenpunkte parallel zu einer gegebenen Richtung die Strecken y bis zur x-Achse zieht. Descartes kannte noch keine besondere y-Achse.
Erst bei **Leonard Euler** (1707-1783) findet sich in seiner ***Introductio in analysis infinitorum*** von 1745 die analytische Geometrie in seiner heutigen Form.
Die Erfindung Descartes ist vor allem deshalb von so großer Bedeutung, weil durch sie ein Weg gezeigt wurde, auf dem beliebige Linien „analytisch“ untersucht werden, und ohne weiteres auf den Raum ausgedehnt werden konnten.

Die bisherige mathematische Betrachtungsweise war noch ganz von der griechischen Geometrisierung der Algebra beeinflusst.

---

[22] Das heute im Unterricht verwendete kartesische Koordinatensystem geht auf R.Descartes zurück, der auch als der Begründer der „analytischen Geometrie“ gilt.
[23] Fladt, Kraft, Dreetz, S.203f

Die abendländische Kultur tritt zum ersten Mal richtungsweisend in das bis dahin noch immer vom griechischen Geist erfüllte Gebiet der Mathematik ein, indem er in der analytischen Geometrie ein Mittel zur Abbildung und Erforschung von Naturerscheinungen schafft. Seitdem hat sich die analytische Geometrie zu einer der erfolgreichsten Teilwissenschaften der gesamten Mathematik entwickelt.

Die Einführung der analytischen Geometrie und die rasche Entwicklung auf dem Gebiet der Infitesimalrechnung führte Ende des 17. Jahrhunderts zu einer weitgehenden Zurückdrängung der ‚reinen' Geometrie. Dennoch wirkten auf diesem Gebiet noch einige bedeutende Geometer.

Zu ihnen zählte **Girard Desargues** [24] (1591-1661). Seine Auffassung, dass Kegelschnitte wirklich als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene zu betrachten sind, führte ihn zum Beispiel dazu, Strahlen- und Ebenenbüschel zu betrachten, die Kegelschnittslehre auf die Kreislehre zurückzuführen und so zur Polarentheorie der Kegelschnitte zu gelangen.
Später war es **Gaspard Monge** (1746-1818), der zur Zeit der französischen Revolution bedeutende Beiträge zur Entwicklung der dreidimensionalen ‚synthetischen' und ‚analytischen' Geometrie leistete.
Monge gilt als der Entdecker der **Darstellenden Geometrie.**

Durch die Wiederbelebung der reinen Geometrie kam es zur Entwicklung der projektiven Geometrie.
Victor Poncelet war der eigentliche Begründer dieser Form der Geometrie. Typisch für seine Denkweise war das Prinzip der Stetigkeit, durch das es ihm möglich wurde, die Eigenschaften einer Figur aus denen einer anderen herzuleiten.
So in seinem 1822 erschienenen Buch ***„Traité des proprietés projectives des figures"***, wo er beispielsweise die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises herleitete. Er führte alle wesentlichen Grundbegriffe (Doppelverhältnis, Perspektivität, usw.) der projektiven Geometrie ein.

---

[24] Als Mathematiker ist Desargues der Urheber des Gedankens, dass parallele Geraden sich im Unendlichen schneiden, womit der Vorstellungsbereich der Euklidischen Geometrie überschritten wurde. Er entdeckte auch den für die Begründung der projektiven Geometrie maßgeblichen Satz von Desargues.

In den darauf folgenden Jahrzehnten entwickelten sich (zum Teil auch parallel zur projektiven Geometrie) die algebraische und die nichteuklidische Geometrie.

Wie man aus diesen Zeilen unschwer entnehmen kann, war im Grunde die Geometrie der Kegelschnitte hauptverantwortlich für die weitere Entwicklung der Mathematik, die daraufhin in die verschiedensten Bereiche der Wissenschaften hineingelangte.

Johannes Kepler beispielsweise entdeckte die Bedeutung der Kegelschnitte für die Astronomie. In einem seiner Werke zur Optik[25] (Frankfurt 1604) geht er auch auf die Kegelschnitte ein. Neu dabei sind drei Dinge:

1. Die klare Erkenntnis der inneren Verwandtschaft der drei Kegelschnitte (Kepler sagt *„analogia“*). Von der Geraden geht er über die Hyperbel zur Parabel, von da zur Ellipse und zum Kreis.

2. Die Wichtigkeit der Brennpunkte und die Schaffung ihres Namens. Auch die Parabel besitzt deren zwei, einen endlichen und einen „den man sich in unendlichem Abstand vom ersten, als blinden Brennpunkt vorzustellen hat.“

3. Die Fadenkonstruktionen der Kegelschnitte, wobei diejenige bei der Parabel aus derjenigen bei der Ellipse durch einen Grenzübergang gewonnen wird. In seiner *„Astronomia nova“* (1609) stellt Kepler 15 Sätze der Ellipse zusammen. Sie handeln unter anderem von der Affinität zwischen Ellipse und Hauptkreis und der Ellipsenfläche.

Es gab auch schon seit jeher eine enge Beziehung zwischen der Mathematik und der Philosophie, wonach, um nur ein Beispiel zu nennen, sich aus der Geometrie die Philosophie Renée Descartes entwickelte, die letztlich im Begriff des Rationalismus mündete.
Sein analytisch-rechnerisches Argumentieren bei Zurückdrängung geometrischer Anschaulichkeit ist zum Teil noch heute eines der Kennzeichen des Rationalismus.

Die mathematische Entwicklung war immer eine Folgeerscheinung des geistigen Lebens in den einzelnen Epochen (Platon, Descartes!), aus denen heraus die großen Erfindungen und Entdeckungen gemacht worden sind.

[25] Es hat den lateinischen Titel: „Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica raditur“.

2. Zur Geschichte des Gymnasialwesens in Österreich

2.1 Das österreichische Bildungswesen bis zum 18. Jahrhundert

Die Geschichte der Pädagogik allgemein, und die des Gymnasialwesens speziell, ist reich an Beispielen für nicht immer problemlose Entwicklungen. Das Ringen um pädagogische Neuerungen ist besonders stark in Zeiten struktureller Veränderungen, sei es in politischer oder kultureller Hinsicht. Ein Höhepunkt schulpolitischer Auseinandersetzung um die Grundlage eines modernen Schulwesens fand besonders in der Aufklärung statt, in der das Streben des Bürgertums nach Freiheit und Gleichheit zum Streitgespräch über die Nützlichkeit weltlich-orientierter Reformpläne führte.

Das Schulwesen Europas, und damit auch Österreichs, ist nicht von heute auf morgen entstanden. Es zeigt eine rund zwölfhundertjährige Entwicklung; es reicht zurück über die Völkerwanderungszeit bis in die Antike.

Es ist sicherlich notwendig, die historischen Entwicklungen zu berücksichtigen, um die gegenwärtige Situation des österreichischen Schulwesens in seiner Gesamtheit richtig interpretieren zu können.

Da dieser Überblick hauptsächlich die Gymnasien behandelt, werden andere Institutionen, die sich erst im Laufe der Entwicklung von dieser Form abgehoben haben, nur am Rande erwähnt.

Die Entstehung des Frankenreiches gab den Anstoß zur Neubelebung des europäischen Bildungswesens.

Der Staat Karls des Großen brauchte für die neue kulturelle Aufgabe eine große Zahl gebildeter Priester und Beamter. Das Bildungswesen war eher praktischer Natur, was sich auch auf die Auswahl der Fächer auswirkte: neben Religion, Latein und Musik stand auch Rechnen auf dem Programm, das sich großteils nur auf die Berechnung des Festkalenders beschränkte.

Die Schüler kamen meist aus den Kreisen des begüterten Adels. Die Schulen waren einerseits **Klosterschulen**: Mondsee (gegr.: 748), Ossiach (gegr.: 750), Mattsee (gegr. 760), Innichen (gegr.: 769), und Kremsmünster (gegr.: 777); andererseits waren es **Domschulen**, in der jeweils ein Bruder (Kanoniker) mit der Fürsorge um die Ausbildung der Jugend betraut wurde.
Karls Schulreform im Jahre 789 hatte auch für österreichische Gebiete Bedeutung. Es sollen „*in jedem Domstifte und Kloster Schulen sein, in welchen die Knaben die Psalmen, die Schriftzeichen, den Gesang und die Grammatik erlernen können.*“[26]
Auf österreichischem Boden scheint als erste um 800 eine Domschule in Salzburg eingerichtet worden zu sein. Nachweisbar ist auch eine Domschule auf Säben (gegr. um 1000).

Diese Domschulen bestanden aus einer ‚scola intraria' für den Ordensnachwuchs, und einer ‚scola exterior' für Weltgeistliche und Laien. In der Unterklasse lernte man Psalmen, Noten, Gesang, Kalenderberechnung und Grammatik, in der Oberklasse patristische Theologie und Geschichte.
Durch den Magyareneinfall im 10.Jahrhundert, dem zahlreiche Klöster zum Opfer fielen, dauerte die Blüte des Bildungswesens aber nur kurz. Das 11.Jahrhundert ist demnach durch einen starken Verfall des Schulwesens gekennzeichnet.

Das Ende des 11. und das 12.Jahrhundert ist die Zeit zahlreicher Neugründungen von Klöstern und somit auch für die Geschichte des österreichischen Gymnasiums bedeutsam.
Die Orden dieser Zeit waren Benediktiner, Augustiner, Zisterzienser und Prämonstratenser.

Unter anderen errichtete 1195 das Kloster St.Georgen ein eigenes Schulhaus. Erst am 5.Februar 1310 wurde die Schule der Schotten zu Wien erstmals schriftlich erwähnt und am 7.Juni 1330 ist in Erfahrung gebracht worden, dass hier ein besoldeter Schulmeister tätig war, was den Schluss zulässt, dass auch diese Schule in eine ‚äußere' und eine ‚innere' Abteilung gegliedert war.

[26] Zingerle, S.38

Durch Lehrermangel und durch die außen- und innenpolitischen Wirren des 13. und 14. Jahrhunderts dauerte auch diese zweite Blüte der Klosterschulen nicht allzu Lange. In der Zwischenzeit aber wuchsen die Bildungseinrichtungen über die Klöster hinaus und es kam zu der Einstellung eines ‚magister' oder ‚lector' an jedem Stift, was zur Folge hatte, dass neue bedeutende Bildungszentren emporblühten: (Paderborn, Hildesheim, Magdeburg, Lüttich, Utrecht).

In Graz wurde durch eine Ermächtigung **Rudolfs von Habsburg** 1278 eine „freie Schulanstalt" errichtet. Hauptzweck des Unterrichtes, der ja zum höheren Studium vorbereitete, war die Erlernung der lateinischen Sprache. Schüler, die sich nicht im täglichen Umgang des Lateinischen bedienten, wurden von dafür eigenen Aufsehern ‚aufgeschrieben' und bestraft.

Mit der Ausbreitung der Stadtschulen drang das weltliche Element auch in den Lehrkörper ein. Es finden sich immer häufiger weltliche Personen, wie Stadtschreiber, Notare und Baccalare. Zur Sicherung ihrer Existenz mussten die Lehrer noch einen weiteren Beruf ergreifen, was sich auf deren Leistungsfähigkeit auswirkte. Somit begann gleichzeitig auch der gesellschaftliche Abstieg des Lehrerstandes. Diesem Schicksal entgingen nur jene Lehrer, die an Anstalten unterrichteten, die sich der Pflege eines Hauptfaches widmeten. (z.B.: Paris für Theologie, Bologna für Rechtswissen, Salerno für Medizin).

Für das Studium an diesen „hohen Schulen" war ein Vorstudium an einer „niederen Schule" unumgänglich. Der enge Zusammenhang von *Lateinschulen* und *Universität* ist somit historisch begründet.

Durch diesen engen Kontakt erhielt die Lateinschule einige Impulse. Erstmals seit der Antike befasste man sich mit dem Versuch einer pädagogischen Theorie. Man behandelte Fragen über die Gestaltung des Lehrplans, die Behandlung der Schüler, den Zweck des Unterrichts und der Erziehung. In diesem Zusammenhang wurde auch zum ersten Mal die Gleichberechtigung von Sprach- und Sachbildung gefordert. Dazu gehörte auch der Wunsch nach Physik und den Experimentalwissenschaften.

Der von Italien einströmende Humanismus war es auch, der verschiedene Neugründungen von Gymnasien in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts auslöste. So wurden beispielsweise 1514 das Gymnasium in Mondsee, und 1549 jenes in Kremsmünster eröffnet.

Das letztere bestand aus zwei Teilen: die *Konvent*- und die *Lateinschule*. Als Ziel der Erziehung galt *pietas* (Frömmigkeit), *sapientia* (Sachwissen), und *eloquenila* (Beherrschung der lateinischen Sprache).
Auch das Schottengymnasium trennte Oblaten und Scolare (weltlich). Seit 1452 wurden sie streng getrennt unterrichtet und hatten sogar je ihren eigenen Gottesdienst.

Die Gymnasien, die älteste Art der Mittelschulen in Österreich, gehen somit auf die Lateinschulen des Mittelalters zurück.

Das gesamte österreichische Schulwesen ging im Verlauf der Gegenreformation auf die seit Mitte des 16. Jahrhunderts in Österreich tätigen Jesuiten über, die in allen großen Städten Lateinschulen unterhielten. Trotz geraumer Schwierigkeiten durch die Leiter der bestehenden Wiener Schulen und der geistlichen Mitbrüder der Dominikaner begannen die Jesuiten aufgrund behördlicher Genehmigung am 1. Mai 1553 den öffentlichen Unterricht mit drei Klassen.

1570 erhielten sie die kaiserliche Erlaubnis zur uneingeschränkten Erteilung öffentlichen Unterrichts in den *artes* und der *Theologie*. Ihre Ausbreitung war geradezu sensationell, und bereits 1660 verfügten die Jesuiten in der österreichischen Provinz über 29 humanistische Lehranstalten, drei philosophische Fakultäten und vier Universitäten.
Der Grund dafür liegt einerseits am kostenlosen Schulbesuch und andererseits an der strengen Systematik des Unterrichts. Dadurch wurden alle anderen Bildungsinstitute mitgerissen oder sie waren zur Auflösung verurteilt.

In der Zwischenzeit setzte in weiten Teilen Österreichs (vor allem in Oberösterreich und in der Steiermark) eine zweite mächtige Strömung seitens der Protestanten ein. Trotz großer Probleme (1578 verbot Rudolf II. den protestantischen Unterricht und Gottesdienst wegen dauernder Angriffe der Prediger gegen die katholische Kirche) bemerkte man in den Schulordnungen, dass sich die Ideen und Methoden der Jesuiten mit denen der Protestanten vermischten und man eine gemeinsame Grundlinie finden konnte.

Ich möchte in diesem Zusammenhang darauf hinweisen, dass der rasche Verfall des öffentlichen Schulwesens gleichzeitig mit dem Aufblühen der geistlichen Schulen, besonders der Jesuitengymnasien, erfolgte. Krieg und Pest, Geld- und Lehrermangel und wie schon erwähnt, der kostenlose Schulbesuch bei den Jesuiten, taten ihr übriges.

2.2 Die österreichische Schulreform im 18. Jahrhundert

Am Beginn des 18. Jahrhunderts wurde erstmals Kritik am Bildungswesen der Jesuiten geübt. Die Allgegenwart in fast jeder Form des Schulbereichs und die Autonomie der Jesuiten führten zwangsläufig zu einem Konflikt mit dem Staatsabsolutismus.

Der Orden der Piaristen begann während dieser Periode mehr und mehr Einfluss zu gewinnen. Nur vier Jahre nachdem sie in Wien 1697 eingezogen waren, wurde ihre erste Schule in der Josefstadt gegründet. 1734 unterrichteten die Piaristen in Wien bereits 500 Volksschüler und 227 Gymnasiasten.

Mit dem Aufkommen der Piaristen, deren Schulen mehr und mehr Einfluss zu gewinnen begannen, vollzog sich ein Wandel, eine Art Akzentverschiebung im Fächerkanon des damaligen Schulwesens. Immer öfter wurde das Unterrichtssystem der Jesuitenschulen kritisiert, da sie sich nicht von den alten Lehrmethoden und dem philologisch beherrschten Unterricht lossagen konnten. Unter anderem wurde das gedankenlose Auswendiglernen, die Vernachlässigung des Deutschunterrichtes und, was für den absolutistischen Staat im Mittelpunkt stand, die Ablehnung jeder staatlichen Kontrolle, als besonders negativ angesehen.

Somit war es nicht verwunderlich, dass die Schulen der Piaristen immer einflussreicher wurden, nicht zuletzt dadurch, dass sie neben den von den Jesuiten übernommenen Lehrinhalten auch noch *Deutsch, Geschichte, Physik* und zum ersten Mal *Arithmetik* als Unterrichtsgegenstände aufnahmen (1753), wobei letzterer alle sechs Klassen hindurch unterrichtet wurde.

Die bisher in den Curricula dominierenden „humanistischen“ Lehrinhalte wurden zugunsten nützlicherer und brauchbarerer Kenntnisse in den Hintergrund gedrängt.

Darüber hinaus wurden von der Hofkanzlei **Karls VI.** im Jahre 1735 folgende Klagen gegen die Jesuiten zusammengetragen:[27]

- Übermäßiges, gedankenloses Memorieren
- Gänzliche Vernachlässigung des deutschen Unterrichts und dennoch mangelhafte Erfolge im Lateinischen
- Anstellung ganz unerfahrener junger Lehrer und häufiger Lehrerwechsel
- Methode des bloßen Diktierens
- Beharrliche Ablehnung jeder staatlichen Kontrolle

Durch ein daraufhin erfolgtes Hofdekret Karls VI. wurde zum ersten Mal in die Gestaltung der Gymnasialstudien eingegriffen. Es kam zu einem *staatlichen Aufsichtsrecht*, das über Lehrbücher und Schulmeister (Pädagogen) entscheiden konnte.

Trotz Fügung der Jesuiten ist in der Folgezeit zu beobachten, dass ihre Einstellung gegenüber der staatlichen Ordnung zusehends reservierter wurde.

Kaiserin **Maria Theresia**, die Nachfolgerin Karls VI., hielt seiner Schulpolitik die Treue. Sie trat sogar für noch strengere Maßstäbe ein, wonach die Aufnahme an die Gymnasien nur bei *‚Nachweis gediegener lateinischer und deutscher Grundkenntnisse und guter Handschrift'* erfolgen dürfe.

Das öffentliche Schulwesen entwickelte durch diese Änderung einen neuen Schultypus: **die Realschule**.

Der Staat stellte jedoch diese neuen Schulen, die ursprünglich als Alternative zu den Lateinschulen und Gymnasien sein sollten, bald in seine Interessenspolitik und funktionierte sie zu berufsbildenden Anstalten für die neue bürgerliche Mittelschicht um. Die Lehrpläne solcher Realschulen waren dementsprechend auch vollständig auf die spätere berufliche Tätigkeit der Schüler ausgerichtet. Das alles muss natürlich auf Kosten allgemeinbildender Lehrinhalte gehen.

Dazu möchte ich **Walter Schöller** zitieren:[28]

> *„Das ökonomische Treiben nimmt Überhand und geht auf Kosten gründlicher Geistesschulung und grundlegender Bildung."*

---

[27] Vicenci, S.45f
[28] Schöller, (zit. In Grimm, S.113)

Die Neuverordnungen Maria Theresias in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gingen nicht ohne Probleme vonstatten. Es mangelte an geistlichen und vor allem weltlichen Lehrkräften, die durch Exjesuiten ersetzt werden mussten. Auch fehlte es noch an einer entsprechenden Entlohnung und an einer geeigneten Ausbildung der Gymnasiallehrer.
1760 wird die *„Studien-Hofkommission“*, ein Vorläufer des späteren Unterrichtsministeriums, ins Leben gerufen, um eine straffere staatliche Durchführung der Schulreformen zu garantieren.

Dazu sei **Prof. Johann von Gaspari** zu erwähnen, dessen Reformentwurf am 4. Februar 1764 von Maria Theresia genehmigt wurde. Gemäß dieser *„neuen Instruktion für die Humanitätsschulen“* traten zu den Fächern Griechisch, Geschichte, Geographie und Arithmetik neu die Physik und Naturgeschichte hinzu. Die neue Unterrichtssprache hieß Deutsch und die Lehrbücher mussten deutsch geschrieben sein.
Die gänzliche Auflösung des Jesuitenordens gab dem Staat größere Handlungsfreiheit in Bezug auf neue Lehrplanentwürfe. Es wurden in weiterer Folge einige Reformpläne vorgelegt, die jedoch allesamt von der Studien-Hofkommission abgelehnt wurden.
So legten gleichzeitig der *„Director Scholarum humaniorum“* **Franz Kollar**, und einer seiner Mitarbeiter **Ignaz Mathes von Heß** einen Lehrplanentwurf vor.
Während Kollar, ein ehemaliger Jesuit, im Gymnasialwesen eine Vorbereitung auf die Gelehrtenlaufbahn sieht und infolgedessen Latein und Griechisch bei ihm als dominante Hauptfächer zu sehen sind, entwickelte Heß einen umfassenden, pädagogisch einen sehr aktuellen Lehrplan, der alle wesentlichen Fragen und Probleme der Reorganisation des höheren Schulwesens behandelt. Er war der erste, der eine Grunddefinition gab:[29]

> *„Die Gymnasien sind Vorbereitungsanstalten für höhere wissenschaftliche Studien auf Grund einer allgemeinen Bildung.“*

[29] Vicenci, S.65

Auch ein Studienlehrplan von **Hofrat von Martini** wurde der Studienhofkommission vorgelegt. In dessen *„Entwurf zur Einrichtung der Gymnasien in k.k. Erblanden“* [30] forderte er Fachlehrer für jedes Fach. Laut Anweisung Maria Theresias sollte der damalige Präfekt der savoyischen Ritterakademie, **Gratian Marx**. Ein Referat über die neuen Lehrplanentwürfe vorlegen. Darin bezieht er auch zur Mathematik Stellung:

> *„(…), werde ich in dem ersten Jahre der Humanität erstens das Rechnen im ganzen Umfange wiederholen oder wiederlernen, und zweytens die Buchstabenrechnung gänzlich, jedoch beyde Teile ohne allen Beweisen vornehmen. Dem andertem Jahre der Humanität halte ich die practische Geometrie auf, das ist: Die Anfangserlernung aller jener Aufgaben (essplanes), welche mit dem Zirkel oder mit dem Lineale zu Stande gebracht werden; sodann die leichteren und allbekannteren Lehrsätze (Theoremata) aus der Geometrie, aber ebenfalls ohne allen dazugehörigen Beweisen; als welche erst in dem studio mathematico vorkommen sollen. (…). Wundern wir uns nicht, warum wir nun aus der philosophischen Abteilung so wenige Mathematiker herausbekommen, da wir sie ohne aller Vorbereitung gleich in das Kettenreich der Beweise jagen, worinn sie sich meistenteils verwickeln. Mit kleineren Knaben aber die mathematische Schule durchwandern, hierinn schlüßen einzelne Beyspiele auf eine ganze Schule der Kinder gewiß sehr übel. Alle Köpfe sind nicht mathematisch eingerichte vielleicht werden wir in Zukunft viele aus der philosophischen Schule wohlgerichtete bekommen können, wenn wir sie stufenweise vorbereiten.“*[31]

Marx übernahm schlussendlich den Auftrag Maria Theresias. Dennoch blieb eine gewisse Unsicherheit in seiner Einstellung zu den „Realien“ und in der Bewertung des Lateinunterrichts bestehen. Mathematik blieb noch immer auf das Maß der Normalschule beschränkt.

---

[30] Timp, S.47
[31] Timp, Quellenteil, S.35

Trotz der Zustimmung Maria Theresias zum Lehrplan Marx' und des Scheiterns des Heßplanes muss hervorgehoben werden, welch gespanntes Verhältnis zwischen den Intentionen des theresianischen Reformabsolutismus und der Aufklärungspädagogik in Österreich bestand. Einerseits tendierte die Kaiserin dazu, auf eine grundlegende Neugestaltung des höheren Schulwesens wegen politischer und religiöser Motive zu verzichten, aber andererseits lehnte sie neue Ideen nicht kategorisch ab, wie das letzte Beispiel eben gezeigt hat. Das österreichische Gymnasium blieb in der Tradition der früheren lateinischen Standesschulen.

Dennoch sind in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Reformbestrebungen ein zaghafter Beginn einer Ablösung der von Klerus und Adel beherrschten Bildungsorganisation durch eine eher bürgerlich orientierte Bildungspolitik, die aber sehr wohl noch hundert Jahre benötigte, um sich voll durchzusetzen.
Was es über Josef II., den Nachfolger Maria Theresias, bezüglich seiner Bildungspolitik zu berichten gibt, ist nicht sehr viel.
Trotz größeren Interesses an einer *´zweckmäßigen´* als an einer *´allgemeinen Bildung´* gibt es dennoch einen erwähnenswerten Beitrag Josefs II: nämlich die *„Einführung des obligaten Griechischunterrichts“* [32] und der deutschen Unterrichtssprache in den philosophischen Studien.

[32] Hofdekret vom 7. Jänner 1784

2.3 Weiterführende bildungspolitische Reformversuche bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts

Die Bemühungen Maria Theresias und Josefs II. trugen in der Praxis kaum etwas zur Niveauhebung des Gymnasialunterrichtes bei. Es mangelte wieder immer mehr an geeigneten Lehrkräften. Trotz drastischer Verminderung der Zahl der Gymnasien mussten vorwiegen Exjesuiten und Ordensgeistliche als Lehrer eingesetzt werden. Ihnen fehlte es vor allem an einer existenzsichernden Entlohnung und an jeder öffentlichen Ausbildung als Gymnasiallehrer.

Seitens der Regierung wurde 1790 der Versammlung der Wiener Gymnasiallehrer ein *Gymnasialschulplan* und ein geordnetes Verzeichnis der Gymnasialfächer vorgelegt:[33]

Klassen-Stuffen	Was in jeder Klasse gelehret wird	Aus was für einem Buche	Wie viele Stunden	Summe der Lehrstunden in der Woche	Von was für einen Lehrer
I. Klasse	a) Wiederholung der schon in der Normalschule erlernten Katechismuslehren; Ergänzungen und Zusätze der biblischen Geschichte in Normalschulen; Ergänzungen zur praktischen Sittenlehre in Normalschulen;	a) der große Katechismus zu dem öffentlichen und Privatunterricht in den k. k. Staaten; Biblische Geschichte zum Gebrauche auf Gymnasien; Praktische Sittenlehre zum Gebrauche auf Gymnasien;	a) wöchentlich 2	a) zwey	a) vom Lehrer A
	b) Ergänzungen und Zusätze der deutschen Sprachlehre in Normalschulen; Fortsetzung der deutschen Sprachübung im mündlichen und schriftlichen Vortrag;	b) deutsche Sprachlehre zum Gebrauche auf Gymnasien; deutsche Sprachmuster zur Übung im mündlichen und schriftlichen Vortrage;	b) täglich 1	b) fünf	b) vom Lehrer B
	c) Ergänzungen und Zusätze der lateinischen Sprachlehre in Normalschulen;	c) Grammatica latina in usum Studiosae Juventutis;	c) täglich 2	c) zehn	c) vom Lehrer A

[33] Wotke, Gymnasiallehrplan der Wiener…, S.229ff

Klassen-Stufen	Was in jeder Klasse gelehret wird	Aus was für einem Buche	Wie viele Stunden	Summe der Lehrstunden in der Woche	Von was für einen Lehrer
Klasse	Übersetzungen des ersten Theils der lateinischen Chrestomathie als einer Fortsetzung des lateinischen Vorbereitungsbuches in Normalschulen — Übung im Lateinreden;	Chrestomatia latina in usum scholarum humaniorum Pars I;			
	d) Ergänzungen und Zusätze der schon in der Normalschule erlernten Geographie;	d) Erdbeschreibung für Schüler der Gymnasien;	d) wöchentlich 3	d) drey	d) vom Lehrer B
	e) Ergänzungen und Zusätze der schon in den Normalschulen erlernten Rechenkunst; ist mit Beweisen und auf Latein vorzutragen;	e) Elementa arithmeticae in usum scholarum humaniorum Pars I;	e) wöchentlich 3	e) drey	e) vom Lehrer D
Klasse	f) Katechismuslehre, biblische Geschichte und Sittenlehre wie oben sub Litt. a);	f) der große Katechismus, biblische Geschichte, wie Sittenlehre wie oben sub Litt. a);	f) wöchentlich 2	f) zwey	f) vom Lehrer A
	g) deutscher Sprachunterricht wie oben sub Litt. b); deutsche Sprachübung im mündlichen und schriftlichen Vortrag;	g) deutsche Sprachlehre wie oben sub Litt. b); deutsche Sprachmuster II. Theil wie oben sub Litt. b);	g) täglich 1	g) fünf	g) vom Lehrer B
	h) lateinischer Sprachunterricht wie sub Litt. c); Übersetzung des zweyten Theils der lateinisch. Chrestomathie — Übungen im Lateinreden;	h) Grammatica latina wie oben Litt. c); Chrestomathia latina Pars II;	h) täglich 2	h) zehn	h) vom Lehrer C
Klasse	i) Ergänzungen und Zusätze der in der Normalschule erlernten Weltgeschichte;	i) allgem. Weltgeschichte samt einem Anhang der österreich. Vaterlandsgeschichte zum Gebrauche auf Gymnasien I. Theil;	i) wöchentlich 3	i) drey	i) vom Lehrer B
	k) Fortsetzung der Rechenkunst mit Beweisen und auf Latein wie sub Litt. e);	k) Elementa arithmeticae Pars II wie sub e);	k) wöchentlich 3	k) drey	k) vom Lehrer D
Klasse	l) Katechismuslehren, biblische Geschichte, Sittenlehre wie oben sub Litt. a);	l) Lehrbücher wie sub Litt. a);	l) wöchentlich 2	l) zwei	l) vom Lehrer A
	m) Ergänzungen und Zusätze der in der Normalschule erhaltenen Vorschriften zur Verfassung verschiedener schriftlicher Aufsätze, vorzüglich der Briefe;	m) Anweisung zum Briefschreiben und anderen schriftlich. Aufsätzen; deutsche Sprachmuster wie sub Litt. b);	m) täglich 1	m) fünf	m) vom Lehrer F (sic) (wohl E?)
	n) lateinischer Sprachunterricht besonders der Prosodie;	n) Grammatica latina, die dahin gehörigen Abschnitte; Chrestomathia latina Pars III;	n) täglich 1	n) fünf	n) vom Lehrer C
	o) Primitive oder Anfang in der griechischen Sprache; Übersetzung der wichtigsten Stellen aus griechischen Schriftstellern, als des ersten Theils der griechischen Chrestomathie;	o) Compendium grammaticae graecae; Chrestomathia graeca Pars I;	o) täglich 1	o) fünf	o) vom Lehrer C
	p) Ergänzungen und Zusätze der Weltgeschichte;	p) allgem. Weltgeschichte II. Theil;	p) wöchentlich 3	p) drey	p) vom Lehrer B
	q) Anfang der Geometrie und mit Beweisen auf Latein;	q) Elementa geometriae in usum scholarum humaniorum Pars I;	q) wöchentlich 3	q) drey	q) vom Lehrer D

Classen-Stuffen	Was in jeder Klasse gelehret wird	Aus was für einem Buche	Wie viele Stunden	Summe der Lehrstunden in der Woche	Von was für einen Lehrer
Klasse	r) Katechismuslehren, biblische Geschichte, Sittenlehre wie sub Litt. a)	r) Lehrbücher wie oben sub Litt. a);	r) wöchentlich 2	r) zwey	r) vom Lehrer A
	s) praktische Anführung zur deutschen Dicht- und Redekunst mehr durch Vorhaltung musterhafter Beyspiele als durch theoretische Vorlesungen; deutsche Sprachübung in hieher gehörigen Aufsätzen;	s) Grundriß der deutschen Dicht- und Redekunst mit Beyspielen; deutsche Sprachmuster IV. Theil;	s) täglich 1	s) fünf	s) vom Lehrer E
	t) nöthige Kenntnisse von der lateinischen Dicht- und Redekunst; Übersetzung des vierten Theils der lateinischen Chrestomathie, worinn größere Fragmente und Auszüge lateinischer Prosaisten und Dichter;	t) die letztern hieher gehörigen Abschnitte der Grammatica latina; Chrestomathia latina Pars IV;	t) täglich 1	t) fünf	t) vom Lehrer E
	u) Fortsetzung des grammatikalischen Unterrichts in der griechischen Sprache; Übersetzung des zweyten Theils der griechischen Chrestomathie;	u) Compendium grammaticae graecae; Chrestomathia graeca Pars II;	u) täglich 1	u) fünf	u) vom Lehrer E
	w) Fortsetzung des Unterrichts in der Staaten-Geschichte, besonders in der österreichischen Vaterlandsgeschichte;	w) allgem. Weltgeschichte III. Theil enthält die österreichische Vaterlandsgeschichte;	w) wöchentlich 3	w) drey	w) vom Lehrer B
	x) Fortsetzung der Geometrie mit Beweisen und auf Latein;	x) Elementa geometriae Pars II;	x) wöchentlich 3	x) drey	x) vom Lehrer D
Klasse	y) Katechismuslehren, biblische Geschichte und Sittenlehre wie sub Litt. a);	y) Lehrbücher wie sub Litt. a);	y) wöchentlich 2	y) zwo	y) vom Lehrer A
	z) praktische Anführung zur deutschen Dicht- und Redekunst wie sub Litt. s); deutsche Sprachübung im hieher gehörigen Aufsätzen;	z) Grundriß der deutschen Dicht- und Redekunst wie sub Litt. s); deutsche Sprachmuster V. Theil;	z) täglich 1	z) fünf	z) vom Lehrer E
	aa) Fortsetzung der nötigen Kenntnisse von der lateinischen Dicht- und Redekunst; Übersetzung des fünften Theils der lateinischen Chrestomathie;	aa) die letztern hieher gehörigen Abschnitte der Grammatica latina;	aa) täglich 1	aa) fünf	aa) vom Lehrer E
	bb) Fortsetzung des griechischen Sprachunterrichts; Übersetzung der gesammelten Stellen und Auszüge aus griechischen Schriftstellern;	bb) Compendium grammatica graecae; Chrestomathia Graeca Pars III;	bb) täglich 1	bb) fünf	bb) vom Lehrer E
	cc) Ergänzungen und Zusätze der in der Normalschule abgehandelten Naturgeschichte und Naturlehre;	cc) Naturgeschichte und Naturlehre zum Gebrauche auf Gymnasien;	cc) wöchentlich 3	cc) drey	cc) vom Lehrer D
	dd) Fortsetzung der Geometrie mit Beweisen auf Latein.	dd) Elementa geometriae Pars III.	dd) wöchentlich 3	dd) drey	dd) vom Lehrer D

Angefügt wurde eine Übersicht der in jedem Semester abzuhandelnden Lehrgegenstände. Für den Mathematikunterricht sieht diese folgendermaßen aus:[34]

I. Schuljahr — I. Semester:
Addition und Subtraction, Multiplication in homogenen ganzen Zahlen.
Die Mathematik wird durchaus deutsch vorgetragen mit beygefügten lateinischen Benennungen.
II. Semester:
Division in homogenen ganzen Zahlen und die Regel De tri (sic) in ganzen Zahlen.
II. Schuljahr — I. Semester:
Addition und Subtraction in heterogenen Zahlen.
II. Semester:
Multiplikation und Division in heterogenen Zahlen.
III. Schuljahr — I. Semester:
Verschiedene Eigenschaften der Brüche und ihre Veränderung.
II. Semester:
Die vier Rechnungsarten in Brüchen.
IV. Schuljahr — I. Semester:
Die Proportionsregel in Zahlen von verschiedener Benennung und Größe.
II. Semester:
a) Fortsetzung der Proportionsregel;
b) aus der Meßkunst: das Längenmaß, die Flächenlehre.
V. Schuljahr — I. Semester:
Fortsetzung der Proportionsregel und aus der Meßkunst die Körperlehre.
II. Semester:
Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel; aus der Meßkunst: Fortsetzung der Körperlehre.
VI. Schuljahr — I. Semester:
Algebra mit kurzer Wiederholung der Lehre vom Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel.
II. Semester:
Mechanik.

[34] Wotke, Gymnasiallehrplan der Wiener…, S.242f

Leopold II., Nachfolger Josefs II., setzte 1792 zur Planung und Beratung neuer Reformpläne und zur Ausarbeitung eines umfassenden Schulreformkonzeptes die *´Studien-Revisionskommission´* ein, die eine gründliche Neugestaltung des gesamten Schulwesens zum Ziele hatte.

Franz Inonzenz Lang[35], Präfekt des Josefstädter Piaristengymnasiums, legte der Kommission einen Entwurf vor, worauf Lang und der Schuldirektor **Franz Bauer** den Auftrag erhielten, einen ausführlichen Lehrplan *´in Absicht auf die Zuteilung und Verhältnis der Materie untereinander in dem Raum von sechs Jahren´* zu verfassen.

Lang bearbeitete alle Gymnasiallehrgegenstände und Bauer die Arithmetik und die übrigen mathematischen Elementarkenntnisse.
Die Reformpläne bezüglich Mathematik wurden von der Kommission folgendermaßen zusammengefasst:[36]

> *„In den zwei ersten Gymnasialjahren müssen die Schüler in allen Arten des gemeinen Rechnens geübt werden; in den vier höheren Klassen sind sie stufenweise vom Rechnen in benannten Zahlen zur Buchstabenrechnung, von dieser zur Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen und mit Beschränkung auf die vier ersten Bücher des Euklid und endlich von der Algebra zur Geometrie zu führen.“*

Das Ergebnis fünfjähriger Beratungen der Kommission:

- Reduzierung des Lateinunterrichts zugunsten der Nebengegenstände: Die Realien Geschichte, Geographie, Naturgeschichte und Naturlehre, sowie Mathematik[37] werden in einem weiteren Umfang als bisher in den Lehrplan aufgenommen
- Ablösung des Klassenlehrersystems durch ein Fachlehrersystem

[35] Lang wurde 1797 als ständiges Mitglied in die Kommission berufen. Die Gymnasialreform war in den ersten Jahrzehnten wesentlich von ihm beeinflusst.
[36] Wotke, Die von der…, S.98f
[37] Algebra, Gleichungen 2. Grades, die ersten vier Bücher des Euklid

- Erweiterung der gymnasialen Studienzeit um ein Jahr auf sechs Jahrgangsklassen
- Neuregelung der Schulorganisation und der Eintrittsbedingungen in das Gymnasium unter dem Gesichtspunkt der Durchlässigkeit
- Maßnahmen zur Behebung des Lehrermangels, zu einer planmäßigen Gymnasiallehrerausbildung und zur Überprüfung der Fortschritte in der Schulreform.

Zwar wurde durch eher schleppende Kommissionsarbeit diese 1802 vom Nachfolger Leopolds, **Franz II.** wiederum aufgelöst, doch noch im selben Jahr wurde die Reform endlich eingeleitet.
Beginnend in Wien und in Niederösterreich ist der Gymnasiallehrplan Langs 1808 schrittweise in allen Provinzen des Reiches eingeführt worden:[38]

	Wöchentliche Lehrstunden						
	Grammatikalklassen				Humanitäts-Klassen		Summe
1. Lehrer: Elementar-unterricht (Grammatik, Syntax)	9	9	–	–	–	–	18
2. Lehrer: Grammatica, parte altera	–	–	9	9	–	–	18
3. Lehrer: Griechisch	–	–	–	2	2	2	6
4. Lehrer: Poetik und Rhetorik	–	–	–	–	9	9	18
5. Lehrer: Geographie und Geschichte	3	3	3	3	3	3	18
6. Lehrer: Mathematik	2	2	2	2	2	2	12
Naturlehre und Naturgeschichte	2	2	2	–	–	–	6
Der Katechet: Religion und Sittenlehre	2	2	2	2	2	2	12
Summe der wöchentlichen Lehrstunden	18	18	18	18	18	18	108

[38] Schermaier, S.111

Große Schwierigkeiten waren mit der Einführung des Fachlehrersystems verbunden. Fachlehrermangel, mangelnde Fachkenntnisse, fehlende Fachlehrbücher und Strenge[39] führten 1818 zu einem Rückschlag dieser Reform. Es kam zu einer Reduzierung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Geometrie, Naturlehre und Naturgeschichte wurden ganz abgeschafft, der Unterricht in Geographie und Geschichte auf ein Minimum herabgesetzt.

Der neue Lehrplan (Florenzer Entschließung vom Juli 1819) setzte den Unterricht in sechs Klassen mit je 18 Wochenstunden fest:[40]

	Grammatikal-klassen				Humanitäts-klassen		Summe
	1	2	3	4	1	2	
Religion	2	2	2	2	2	2	12
Latein	11	11	9	9	10	10	60
Griechisch	—	—	2	2	2	2	8
Geographie und Geschichte	3	3	3	3	2	2	16
Mathematik	2	2	2	2	2	2	12
	18	18	18	18	18	18	108

Die Entscheidung des Kaisers gegen die Lang´sche Reform warf das österreichische Gymnasialwesen um 50 Jahre zurück. Man kann von einer Rückkehr zum Lehrplan von *Marx* sprechen.

Die folgende Tabelle beweist die Verschiebung zugunsten der humanistischen Fächer:[41]

[39] Mathematik ist wegen der rücksichtslosen Strenge ein „Gegenstand des Schreckens“ geworden und dies hat dazu geführt, dass wegen des Mathematikstudiums andere Gegenstände vernachlässigt wurden (Schermaier, S.113)

[40] Timp, S.78

[41] Timp, S.79

	Marx	P. I. Fr. Lang		1818
	5-klg.	5-klg.	6-klg.	6-klg.
Religion	} 62,97 %	11,11 %	11,11 %	11,11 %
Latein		52,23 %	50,00 %	55,56 %
Griechisch	11,11 %	4,44 %	5,56 %	7,41 %
Geographie u. Geschichte	11,11 %	16,67 %	16,67 %	14,81 %
Naturgeschichte u. Naturlehre	3,70 %	4,44 %	5,55 %	—,—
Mathematik	11,11 %	11,11 %	11,11 %	11,11 %

Das nächste große Problem der Gymnasien schien sich abzuzeichnen: Ein schnelles Anwachsen der Schülerzahlen in den Gymnasien. Waren es im Jahre 1814 ca. 11000 Schüler in 63 Gymnasien, so sind 1820 bereits 30000 Schüler gemeldet.

Als Folge dieser wachsenden Schülerzahlen ist die Kommission zu Maßnahmen gezwungen, die tatsächlich Wirkung zeigten. So wurde beispielsweise die Maximalzahl in einer Klasse mit 80 Schülern festgesetzt, die Aufnahme in die erste Grammatikalklasse wird nur nach Erreichen des 10. Lebensjahres gestattet, und die monatlichen *´Semestralprüfungen´* sowie Aufstiegsbedingungen in die nächst höheren Klassen verschärft.

In den folgenden Jahren hat sich hinsichtlich der humanistischen Schwerpunkte in den Gymnasien keine große Veränderung ergeben. Bis zur Neuorganisation des Allgemeinbildenden Schulwesens 1849 blieben die Lehrpläne trotz verschiedener Erneuerungsversuche unverändert gültig.

Die Veränderung in den Stundentafeln der Gymnasiallehrpläne vom Jesuitengymnasium bis zur Neuorganisation 1849 zeigt folgende Übersichtstafel:[42]

UNTERRICHTSGEGENSTÄNDE	Prozentuelle Verteilung der Unterrichtsgegenstände in den Lehrplänen							
	JESUITENGYM.	1775	1808	1818	1844[2)]	1845[2)]	1847[3)]	Normallehrplan
RELIGION	LATEIN ist Hauptgegenstand - Keine stundenmäßige Ausgliederung der "eruditiones", die an Hand lateinischer Texte behandelt wurden.	62,97	11,11	11,11	10,00	10,52	10,00	11,11
LATEIN			50,00	55,56	43,33	43,86	42,50	55,56
GRIECHISCH		11,11	5,56	7,41	9,17	8,77	7,50	7,41
DEUTSCH		---	---	---	10,83	8,77	10,00	---
ALTERTÜMER		---	---	---	1,67	1,67	---	---
GEOGRAPHIE und GESCHICHTE		11,11	16,67	14,81	10,00	10,52	15,00	14,81
MATHEMATIK		11,11	11,11	11,11	10,00	10,52	15,00	11,11
NATURGESCHICHTE		3,70	5,55	---	3,33	3,52		
NATURLEHRE					1,67	1,67		
JAHRESWOCHENSTUNDEN (insgesamt)		90	108[4)]	105	120	114	120	105

Interessant ist dennoch anzumerken, dass die Studien-Hofkommission 1841 die Lehrplanfrage kritisierte. So wurde das Fehlen der Gegenstände Deutsch, Naturgeschichte, Naturlehre und Geometrie bemängelt; „die Mathematik sei in Lehrgang und Stoffverteilung ‚ganz vergriffen'; der Unterricht bestehe aus ‚lauter abstrakten, trockenen Theorien', er belaste nur das Gedächtnis und vermittle keine echte Bildung."[43]

Das Mathematikbuch, das in diesen Jahren vorwiegend Verwendung fand, war das in lateinischer Sprache abgefasste Lehrbuch: „***Elementa arithmeticae singularis et universalls ad usum studosae juventutis in classsibus humanitatis",*** Wien 1822. (Anfangsgründe der besonderen und allgemeinen Arithmetik zum Gebrauch der studierenden Jugend in den Humanitätsklassen).

Erwähnenswert ist auch ein Lehrbuch für den Gebrauch der Schüler der Baukunst: *„Vollständige Anfangsgründe der Kegelschnitte zu allgemeinem Gebrauche…",* (Wien 1814), auf das ich im nächsten Kapitel noch genauer eingehen werde.

[42] Schermaier, S.115
[43] Vicenci, S.76

Zu Beginn der 40-er Jahre des 19. Jahrhunderts spitzte sich die Situation drastisch zu. Die Studien-Hofkommission legte einen provisorischen Reformplan vor, wonach „die Zahl der Wochenstunden auf 20 zu erhöhen, das Griechische obligat zu führen, ebenso Geographie und Universalhistorie, und Mathematik und die Naturwissenschaften von einem Fachlehrer unterrichtet werden solle.“[44]
Im Jahre 1847 wurde dieser Plan mit Ausnahme des Fachlehrersystems vom Kaiser probehalber genehmigt.

2.4 Der Organisationsentwurf 1849

Das Jahr 1849 war das Geburtsjahr des *Gymnasiums*, dessen Charakter mit einigen kleinen Ausnahmen bis heute noch Gültigkeit hat. Die bürgerliche Revolution vermochte die Bürokratie zu sprengen. Statt der Studien-Hofkommission wurde das ***„Ministerium für Unterricht und Kunst“*** eingerichtet.
Das Gymnasium besteht nunmehr aus einem Untergymnasium (vier Jahre) und einem Obergymnasium (vier Jahre). Eine Aufnahmeprüfung und eine Reifeprüfung stehen am Beginn und am Ende und sollen den Zugang zu den Hochschulstudien ermöglichen.

Die Schwerpunkte des Gymnasiallehrplanes von 1849 sehen wie folgt aus:[45]

1) Vorrang der Erziehung vor bloßem Lernen
2) Bildung der Gesamtpersönlichkeit nach einem Langzeitplan
3) Sprache und Literatur im Mittelpunkt der Bildung
4) Grundlegende Bedeutung der griechisch-römischen Antike
5) Wichtigkeit der Mathematik und der naturwissenschaftlichen Fächer im Hinblick auf Menschenbildung

Dem Übergang vom Klassenlehrer- zum Fachlehrersystem stand ebenfalls nichts mehr im Wege.

[44] Vicenci, S.79
[45] Vicenci, S.81f

2.5 Ein Vergleich Realschule – Gymnasium

„Realschulen“ waren zunächst Schulen, die als Alternativen zu den „Latein-Gymnasien“ eingerichtet wurden und deren Unterricht sich auf das spätere Berufs- und Wirtschaftsleben bezog.

In der Mitte des 19. Jahrhunderts versuchte man die Durchlässigkeit zwischen den Allgemeinbildenden Mittelschulen zu erhöhen. Es gab die Möglichkeit, vom Untergymnasium auf eine Ober-Realschule zu wechseln. Ebenso konnte die vollständige Unter-Realschule mit einem Gymnasium kombiniert werden, wonach es möglich wurde, „Unter-Realgymnasien“ als „Gesamtmittelschulen“ mit innerer Fächerdifferenzierung einzurichten.

Dazu eine diesbezügliche Stundentafel, die nach den Bestimmungen 1849 im Organisationsentwurf zusammengestellt wurde:[46]

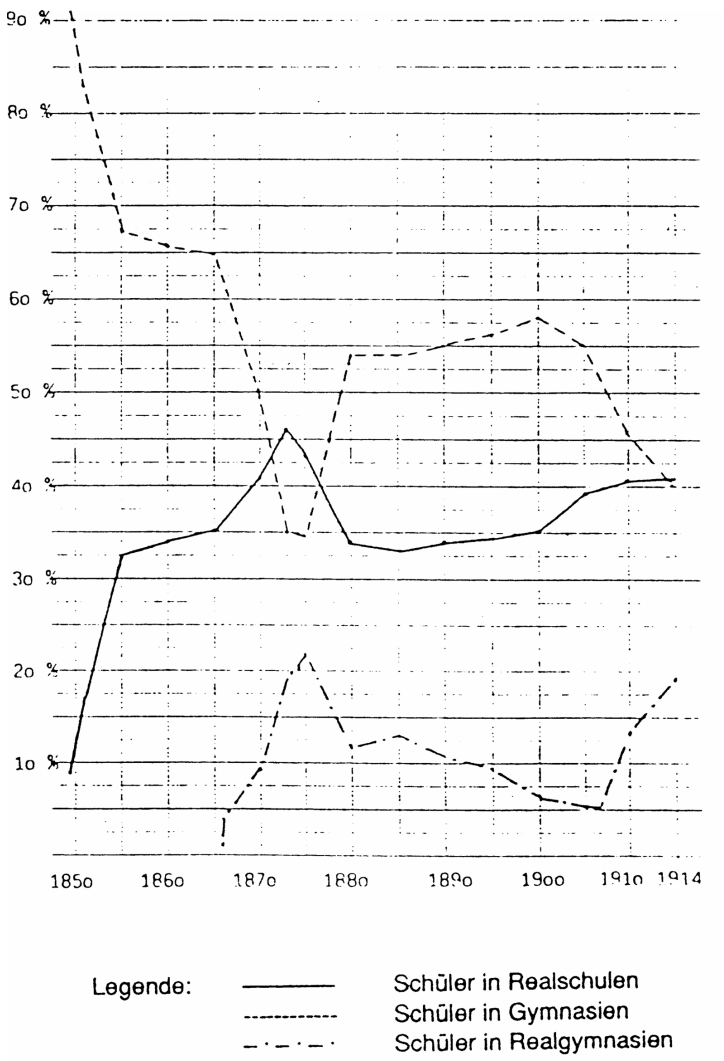
	Jahreswochenstundenzahl				
Lehrgegenstände	1.Jg.	2.Jg.	3.Jg.	4.Jg.	insges.
Gemeinsame Gegenstände					
Religionslehre	2	2	2	2	8
Muttersprache	4	4	4	5	17
Zweite lebende Sprache	4	4	3	3	14
Geographie und Geschichte	3	3	4	–	10
Mathematik	4	4	4	–	12
Naturgeschichte und Naturlehre	3	3	3	–	9
Kalligraphie	–	2	–	–	2
Gegenstände f. Realschüler:					
Vaterlandskunde	–	–	–	2	2
Angewandte Mathematik	–	–	–	3	3
Technologie (Baukunde, Maschinenlehre ...)	–	–	–	5	5
Warenkunde	–	–	–	2/0	1
Zeichnen	6	6	6	6/8	25
Kalligraphie	2	–	2	–	4
Gegenstände für Gymnasiasten					
Latein	8	6	4	6	24
Griechisch	–	–	4	6	10
Mathematik	–	–	–	2	2

[46] Schermaier, S.149

Die ersten beiden Realgymnasien der deutsch-österreichischen Monarchie wurden 1864 und 1865 in Wien gegründet. Bereits 1875 gab es schon 16 Realgymnasien, die von 2817 Schülern besucht wurden.

Die Realgymnasien spielten damals noch eine untergeordnete Rolle, da sie ja eher auf das Obergymnasium als auf die Ober-Realschule vorbereiteten.
Erst als 1909 das Realgymnasium zum achtklassigen Vollgymnasium mit vermehrter Berücksichtigung neusprachlicher und mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung ausgebaut wurde, gewann es zunehmend an Bedeutung.

Eine prozentuelle Verteilung der Mittelschüler in Allgemeinbildenden Mittelschulen soll der folgende Graph zeigen:[47]



[47] Schermaier, S.153

Trotz der Umwandlung der Realschule zur Allgemeinbildenden Mittelschule mit Reifeprüfung waren diese Absolventen gegenüber jenen der Gymnasien, bezüglich Aufnahmebedingungen an der Universität, immer noch stark benachteiligt. Auch hatten sie mehr Jahrespflichtstunden zu absolvieren als ihre Kollegen an den Gymnasien.

Die Schulgesetzgebung in Österreich wurde 1905 mit der definitiven *Schul- und Unterrichtsordnung* zu einem vorläufigen Abschluss gebracht. Mit ihr wurde die Organisation des Schulwesens festgelegt.
Zu den Mittelschulen zählten demzufolge die *Gymnasien*, die *Realschulen* (seit 1908 achtstufig) und die neu hinzugekommenen *Reformrealgymnasien* (hauptsächlich für Absolventen der Unterrealschule gedacht, die nicht die technische Hochschule, sondern die Universität besuchen möchten).
Für Mädchen gab es spezielle Mädchenlyzeen (sechsstufig), die eigentlich nur eine "Bildung für höhere Töchter“ vermittelten.

Erst mit dem Mittelschulgesetz 1927 erfolgte eine Angleichung der Realschule an die anderen Mittelschulen und eine weitgehende Annäherung der Unterstufenlehrpläne von Gymnasium, Realgymnasium und Realschule. Auch wurde eine Annäherung der Haupt- und Mittelschullehrpläne erreicht.

2.6 Das österreichische Bildungswesen nach dem 2. Weltkrieg

Nach dem Anschluss Österreichs an das Deutsche Reich war die Bildungsarbeit darauf ausgerichtet, den „nationalsozialistischen Menschen“ zu formen.
Lehrbücher, die dieses Ziel nicht "erreichen konnten", wurden durch neue ersetzt, Leibeserziehung nahm in der Fächerhierarchie die erste Stelle ein, und der "altsprachliche Unterricht" wurde stark gekürzt.
Die Realschule wurde aufgelassen. Es gab nur mehr je eine Oberschule für Jungen und für Mädchen und das Gymnasium als Sonderform. Bis zum Jahre 1945 hatte das österreichische Bildungswesen folgenden Charakter:[48]

[48] Schermaier, S.291

1938 – 1945

	GYMNASIUM	OBERSCHULE f. JUNGEN	OBERSCHULE f. MÄDCHEN	
			Sprachliche Form	Hauswirtsch. Form
8		Naturwissensch. u. sprachliche Arbeitsgemein-schaften	LATEIN oder 2.Leb.Fremdsprache	Gesundheitslehre Beschäftigungs-lehre, DIENST (1)
7				
6				
5	ENGLISCH			
4				
3	GRIECHISCH	LATEIN		
2			Handarbeit ENGLISCH	Handarbeit ENGLISCH
1	LATEIN	ENGLISCH		

(1) Dienst in Säuglingsheimen, im Kindergarten oder in der Familie

Nach dem Krieg wurden 1945 sämtliche Lehrpläne der nationalsozialistischen Zeit außer Kraft gesetzt. Man griff auf die Lehrplantradition vor 1935 zurück.

Die Mittelschulorganisation knüpfte wieder an die traditionelle Gliederung in *Gymnasien, Realgymnasien* und *Realschulen* an (S.51, S.52).

Realschulen waren zunächst ja nur 7-klassig. 1927 erhielten sie eine zusätzliche 8. Klasse und somit wurde die Realschule ein dem Gymnasium gleichwertiger Schultyp.

Die Realschule wird schließlich 1962 abgeschafft, bzw. dem Realgymnasium „eingegliedert“, allerdings gibt es wieder seit ca. fünf Jahren in einigen Bundesländern (z.B.: Steiermark) den Schulversuch Realschule als integrierter Teil einer Hauptschule. Diese Schulform dauert 6 Jahre und legt auf das Lernen von Fremdsprachen, Projektunterricht, Vermittlung von EDV-Kenntnissen und intensive Berufsvorbereitung einen großen Wert.[49]

[49] Aus http://de.wikipedia.org/wiki/realschule

Nach Ende des 2. Weltkrieges hatte das Gymnasialwesen folgendes Aussehen:[50]

	GYMNASIUM	REALGYMNASIUM	REALSCHULE	FRAUEN - OBERSCHULE
8				
7		DARSTELLENDE GEOMETRIE		Erziehungslehre, Hauswirtschaft, Nähen, Kinder- und Säuglingspflege
6				
5	GRIECHISCH		LATEIN oder 2.Leb.Fremdspr.	ZWEITE LEBENDE FREMDSPRACHE
4				
3	LATEIN	LATEIN		
2				
1	E R S T E	L E B E N D E	F R E M D -	S P R A C H E

Auf die speziellen Lehrpläne der Jahre 1928, 1935 und 1945 für den Mathematikunterricht wird im nächsten Kapitel genauer eingegangen.

Staatsrechtliche Änderungen und nicht gelöste Kompetenzfragen führten auf dem Schulsektor zu neuen Reformbemühungen.
Durch das dann darauf folgende neue Schulgesetz 1962 kam es wiederum zu einer Vereinheitlichung der gymnasialen bzw. realgymnasialen Unterstufe. Auch das Musischpädagogische Realgymnasium, bis dahin eher als Verlegenheitslösung gedacht, wurde zum Oberstufenrealgymnasium ausgebaut.
In Folge wurden mit der 11. Schulorganisationsnovelle (SCHOG) 1988 weitere Maßnahmen gesetzt, die *Allgemeinbildende Höhere Schule* weiter zu vereinheitlichen und die AHS-Oberstufen innerhalb des Gymnasiums und Realgymnasiums durch Alternativpflichtfächer verstärkt zu differenzieren.

[50] Schermaier, S.292

Ab diesem Jahr wird zwischen folgenden Hauptformen der AHS unterschieden:[51]

1) Mit Unter- und Oberstufe (Langform):

a) das Gymnasium
b) das Realgymnasium
c) das Wirtschaftskundliche Realgymnasium

2) nur mit Oberstufe: das Oberstufenrealgymnasium

Folgende **Sonderformen** sind ebenso vorgesehen:

1) das Aufbaugymnasium und das Aufbaurealgymnasium
2) das Gymnasium, das Realgymnasium und das Wirtschaftskundliche Realgymnasium für Berufstätige
3) Allgemeinbildende höhere Schulen unter besonderer Berücksichtigung der musischen und sportlichen Ausbildung
4) Allgemeinbildende höhere Schulen für Körperbehinderte.

Neu ist auch, dass es nunmehr **vier Arten von Gegenständen** gibt:

1) Pflichtgegenstände in allen Formen
2) Typenbildende Pflichtgegenstände in den einzelnen Formen
3) Wahlpflichtgegenstände in der Oberstufe in der 6. bis 8. Klasse (z.B. weitere Fremdsprachen)
4) Freigegenstände und unverbindliche Übungen

Ich möchte dieses Kapitel mit einem graphischen Überblick der Gesamtentwicklung des österreichischen Schulwesens beschließen:[52]

---

[51] aus: Heinrich Gotsmy, die neue Oberstufe der ALLGEMEINBILDENDEN HÖHEREN SCHULEN, Wien 1988
[52] Schermaier, S.308f

Pflichtgegenstände im (humanistischen) Gymnasium in der Zeit von 1805 – 1976 (lt. Stundentafeln)

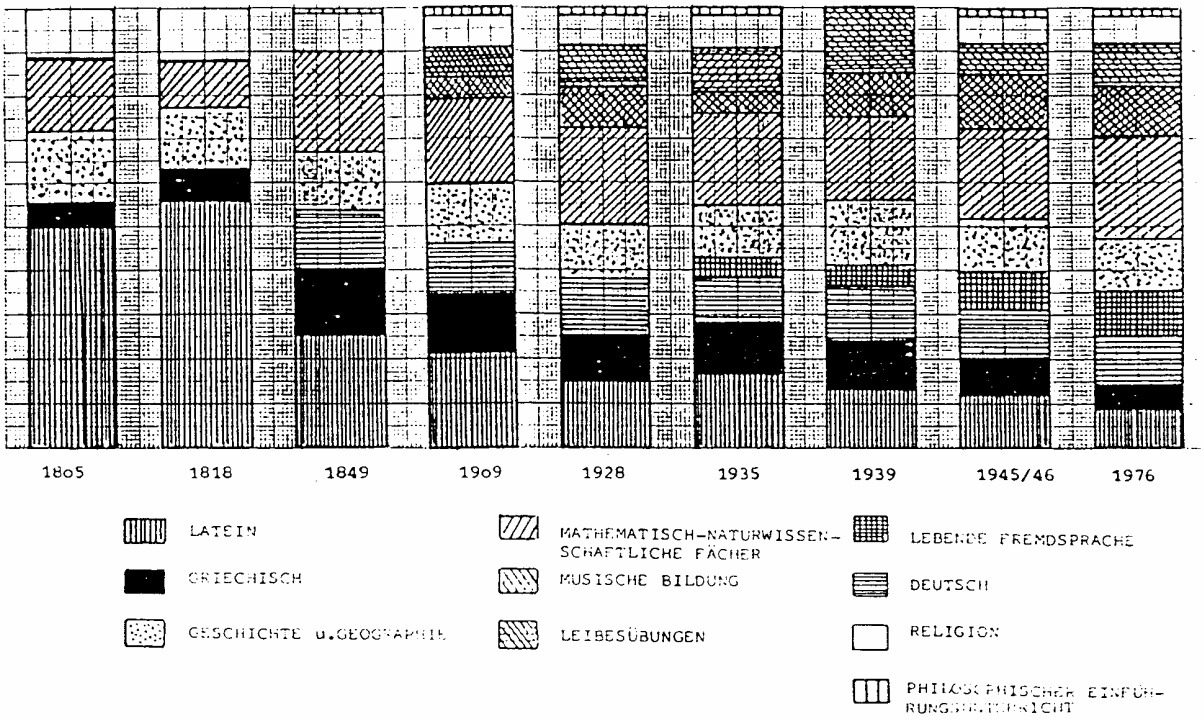
PFLICHTGEGENSTÄNDE	1805 1)	1818 1)	1849	1856	1872	1909	1928	1935	1938	1945/46	1976
RELIGION	12	12	16	17	16	16	16	16	---	16	16
DEUTSCH	--	--	25	25	25	26	32	26	33	27	29
LEBENDE FREMDSPRACHE	--	--	--	--	--	--	--	10	12	21	27
LATEIN	54	60	47	50	50	49	37	41	35	30	24
GRIECHISCH	6	8	28	28	28	28	25	27	30	22	14
GESCHICHTE 2)	18	16	25	24	27	20	18	17	24	15	15 } +2 3)
GEOGRAPHIE 2)						10	13	12	16	16	15
MATHEMATIK	12	12	22	23	24	23	26	24	25	26	27
NATURGESCHICHTE 2)	6	--	21	19	19	9	14	11	16	12	14
PHYSIK (Naturlehre)						12	12	12	10	8 } +3	14
CHEMIE	--	--	--	--	--	--	2	4		3	6
PHILOSOPHISCHER EIN-FÜHRUNGSUNTERRICHT	--	--	2	4	4	4	4	4	--	4	5
BILDNERISCHE ERZIEH. (Zeichnen,Schriftpflege)	--	--	--	--	--	11	12	8	12	17 } +6	12 } +[illegible] 3)
MUSIKERZIEHUNG (Gesang,Musik)	--	--	--	--	--	--	4	4	14	8	11
LEIBESÜBUNGEN (Leibeserz., Turnen)	--	--	--	--	--	16	24	24	40	18	26
KURZSCHRIFT	--	--	--	--	--	--	1	2	--	2	--
WERKERZIEHUNG	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	[illegible]
GESAMTWOCHENSTUNDEN	108	108	186	190	193	224	240	242	267	25	265

1) Sechsklassiges Gymnasium, ab 1849 umfaßt das Gymnasium 8 Klassen

2) Geschichte und Sozialkunde, Geographie und Wirtschaftskunde, Biologie und Umweltkunde

3) Wahlpflichtfächer

Prozentuelle Verteilung der Pflichtfächer im Fächerkanon des (humanistischen) Gymnasiums (1849 – 1976)



Prozentuelle Verteilung der Pflichtgegenstände (bzw. Gegenstandsgruppen) im (humanistischen) Gymnasium in der Zeit von 1805 – 1976

PFLICHTGEGENSTÄNDE	1805[1)]	1818[1)]	1849	1856	1872	1909	1928	1935	1938	1945/46	1976
RELIGION	11,1	11,1	8,6	8,9	8,3	7,1	6,7	6,6	--	6,3	6,0
DEUTSCH	--	--	13,4	13,2	13,0	11,6	13,3	10,7	12,4	10,6	10,9
LEBENDE FREMDSPRACHE	--	--	--	--	--	--	--	4,1	4,5	6,3	10,2
LATEIN	50,0	55,6	25,3	26,3	25,9	21,9	15,4	16,9	13,1	11,8	9,1
GRIECHISCH	5,6	7,4	15,0	14,7	14,5	12,5	10,4	11,2	11,2	8,7	5,3
GESCHICHTE und GEOGRAPHIE	16,6	14,8	13,4	12,6	14,0	13,4	12,9	12,0	15,0	12,2	12,1
MATHEMATIK	11,1	11,1	11,8	12,1	12,4	10,3	10,8	9,9	9,4	10,2	10,2
NATURGESCHICHTE u. NATURLEHRE	5,6	--	11,3	10,0	9,8	9,4	11,7	11,2	9,7	10,2	12,8
Mathematisch-naturwissenschaftl.Fächer insgesamt	16,7	11,1	23,1	22,1	22,2	19,7	22,5	21,1	19,1	20,4	23,0
PHILOSOPHISCHER EINFÜHRUNGSUNTERRICHT	--	--	1,1	2,1	2,1	1,8	1,7	1,7	--	1,6	1,9
BILDNERISCHE ERZIEH. (Zeichnen,Schriftpfl.	--	--	--	--	--	4,9	5,0	3,3	4,5	12,2	10,2
MUSIKERZIEHUNG	--	--	--	--	--	--	1,7	1,7	5,2		
LEIBESÜBUNGEN	--	--	--	--	--	7,1	10,0	9,9	15,0	7,1	9,8
KURZSCHRIFT	--	--	--	--	--	--	0,4	0,8	--	0,8	--
WERKERZIEHUNG	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	1,5
INSGESAMT	100	100	99,9	99,9	100	100	100	100	100	100	100
GESAMTWOCHENSTD(abs.)	108	105	185	190	193	224	240	242		252	255

3. Die Entwicklung der Kegelschnittsgeometrie in den Lehrplänen und Lehrbüchern der Gymnasien

3.1 Vorbemerkung

Der von mir gewählte, für die Kegelschnitte in den Lehrplänen und Lehrbüchern relevante Zeitraum, erstreckt sich vom Ende des 18. Jahrhunderts bis zur Gegenwart. Bei der Dokumentierung dieses „Prozesses“ beschränke ich mich im Folgenden auf die Gymnasien in Österreich.

Die ersten paar Jahrzehnte dieses Zeitraumes werden dennoch nur in eingeschränkter Form Beachtung finden, da durch die Bildungspolitik damaliger Zeit Kegelschnitte oft gar nicht im Lehrplan vorzufinden waren.
In den Gymnasien Deutschlands konnten sich beispielsweise in der analytischen Geometrie die Kegelschnitte erst im preußischen Lehrplan von 1901 durchsetzen, nachdem sie jahrzehntelang aus dem Mathematikunterricht des preußischen Gymnasiums ausgeschlossen waren. Lediglich die Lehrpläne für die Realschulen 1859 erlaubten die *"Methoden der Analytischen Geometrie sowie die Behandlung der Kegelschnitte".*

Die Kegelschnittsgeometrie erfreute sich aber schon damals einer solchen Beliebtheit, dass sie bereits Jahrzehnte vor der Wiederaufnahme in den Lehrplan von den Mathematiklehrern gefordert wurde. Dazu zitiere ich eine wirklich interessante Stellungnahme des Oberlehrers **Karl Koppe** in einem Jahresbericht von 1866 über das Archigymnasium zu Soest:[53]

> *„(…). Seit einer Reihe von Jahren ist eine andere Disciplin, von welcher dieses letztere ebenfalls gilt (Anwendung sowohl in den Lehren der Geometrie als auch in denen der Arithmetik), und welche ebenfalls eine ganz elementare Behandlung gestattet, wir meinen die* ***Lehre von den Kegelschnitten,*** *von dem mathematischen Unterrichte auf den preußischen Gymnasien ausgeschlossen worden.*

[53] Koppe, S.9f

Wir bedauern dies um so mehr, da diese Lehre unter allen Zweigen der Elementarmathematik am meisten geeignet ist, Interesse für das mathematische Studium bei den Schülern anzuregen, eine Schwierigkeit, mit welcher, wie wir gesehen haben, kein anderer Unterrichtsgegenstand in gleichen Maße, wie die Mathematik, zu kämpfen hat. Wir finden den unbedingten Ausschluss dieser anziehenden Lehre um so weniger gerechtfertigt, da für den Vortrag derselben, wenn sich der Unterricht auf die Entwicklung der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte beschränkt, deren Kenntnis für Physik und mathematische Geographie unentbehrlich ist, wenige Wochen ausreichen. (...) Auch nach dem pädagogischen Grundsatze: 'Multum, non multa' stellt sich die Lehre von den Kegelschnitten als für den Unterricht besonders geeignet heraus, da der Vortrag derselben in einer fortlaufenden Anwendung der Lehren der niedern Algebra und Geometrie besteht, wobei jedoch nicht bloß das früher Erlernte eingeübt, sondern eine Mannigfaltigkeit neuer, eben so leicht zu erfassender, als überraschender Anschauungen vorgeführt wird.

Es ist daher, wie schon angeführt, auch die Lehre von den Kegelschnitten, wie kein anderer Zweig der Elementarmathematik geeignet, das noch schlummernde Interesse für das mathematische Studium zu wecken und also diejenige Schwierigkeit zu besiegen, welche dem günstigen Erfolge des mathematischen Unterrichtes am hinderlichsten und eigentlich allein im Wege steht."

Dieses Zitat soll verdeutlichen, welche Bedeutung die Kegelschnitte schon zur damaligen Zeit für den Mathematikunterricht hatten. Jene Vorzüge, die hier angesprochen wurden, (Anwendung in Geometrie und Arithmetik, Kenntnis für die Physik, Bedeutung für das Interesse des Schülers) wären auch heute noch wichtige Fürsprecher für eine umfassende Kegelschnittsgeometrie im Mathematikunterricht. Dazu verweise ich auf das nächste Kapitel, in welchem auf diese Problematik näher eingegangen wird.

Es ist, um es noch einmal zu betonen, sehr traurig, dass Kegelschnitte durch Lehrplanänderungen immer mehr aus dem Mathematikunterricht verdrängt werden, zumal sie ja in vielerei Hinsicht zu den interessantesten Objekten der klassischen Mathematik zu zählen sind.
Im Folgenden werde ich versuchen, diese Entwicklung anhand von Lehrplänen und Lehrbüchern der Gymnasien nachzuvollziehen.

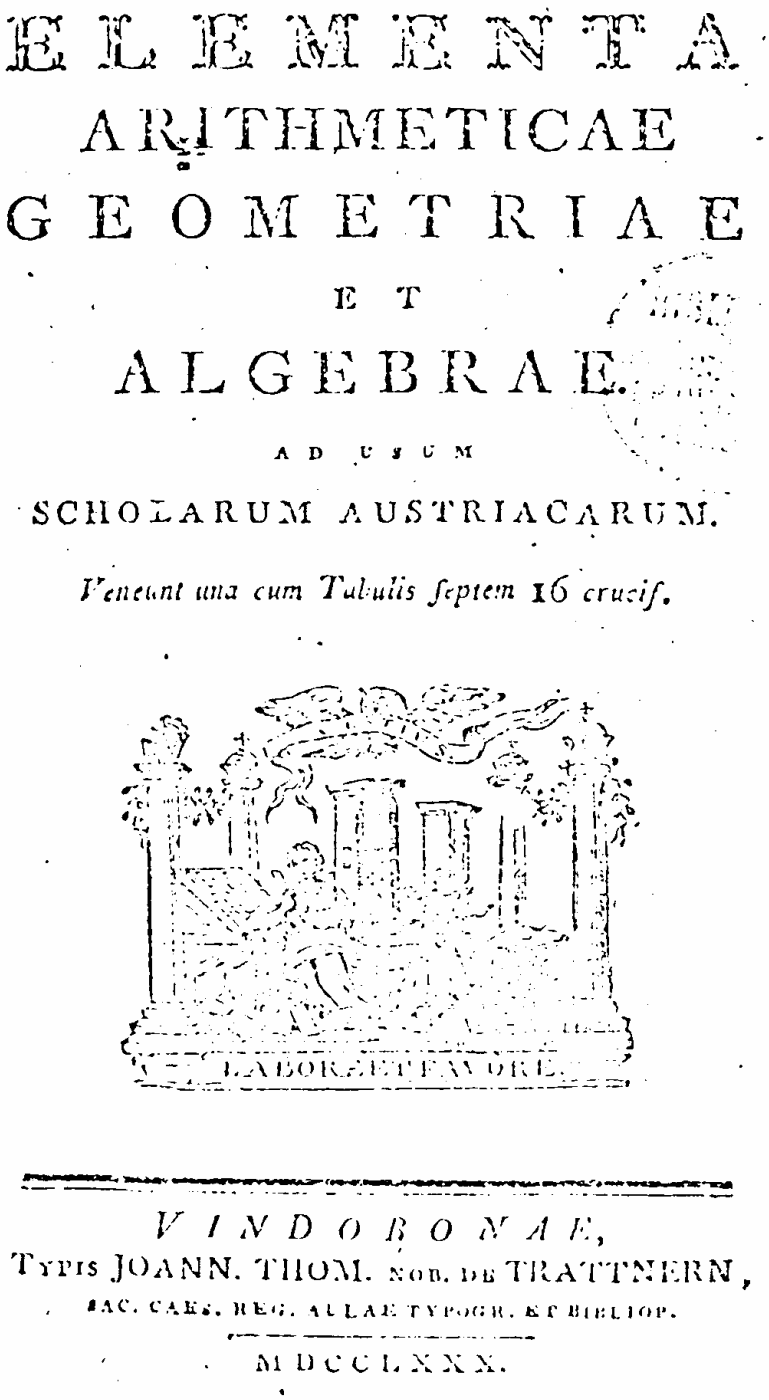
3.2 Zur Geschichte der Kegelschnitte in den Lehrplänen und Lehrbüchern

3.2.1 Anfangsgründe der Kegelschnittsgeometrie

Wie bereits anfänglich erwähnt, fanden Kegelschnitte erst recht spät Eingang in die Lehrpläne und Lehrbücher der Gymnasien. Der Schwerpunkt lag bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts eindeutig bei den humanistischen Fächern. Mathematik wurde, wie im vorigen Kapitel bereits gezeigt, sehr wohl gelehrt, aber die Kegelschnittsgeometrie fehlte dennoch im Lehrplan.

Ein von **Gratian Marx** gefordertes Mathematikbuch wurde 1780 von Joseph II. genehmigt und für die Gymnasien zugelassen. Es handelte sich dabei um das 180 Seiten umfassende Lehrbuch ***„Elementa arithmeticae, geometriae et algebrae ad usum scholarum austriacarum“*** (Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Algebra zum Gebrauch an österreichischen Schulen):[54]

[54] Hochleitner, Anhang


ELEMENTA
ARITHMETICAE
GEOMETRIAE
ET
ALGEBRAE.
AD USUM
SCHOLARUM AUSTRIACARUM.
Venenant una cum Tabulis septem 16 crucif.
LABORAET FAVORE.
VINDOBONAE,
TYPIS JOANN. THOM. NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CAES. REG. AULAE TYPOGR. ET BIBLIOP.
MDCCLXXX.

In „Elementa geometriae“ finden sich Kapitel über Dreiecke, allgemeine Vierecke und Polygone sowie unter anderem die Behandlung von Pyramiden, Zylinder, Kugel und Kegel – keine Erwähnung von Kegelschnitten!

Das Lehrbuch ***„Elementa arithmeticae singularis et universalis ad usum studiosae juventutis in clasibus humanitatis“*** (Wien 1822; vgl. Kap. 2) beruht auf einer genauen Übersetzung des vorhin besprochenen Werkes:[55]

ELEMENTA

ARITHMETICAE SINGULARIS

ET

UNIVERSALIS

AD USUM

STUDIOSAE JUVENTUTIS

IN

CLASSIBUS HUMANITATIS

Novitiatus Scotensis.

Constant in albis (38 Cr. Conv. M. / 1 Fl. 35 Cr. V. V.)

in charta densata cum dorso corio vestito (44 Cr. Conv. M. / 1 Fl. 50 Cr. V. V.)

VINDOBONAE,

IN LIBRARIA CAES. REG. AD ST. ANNAE

IN PLATEA JOANNIS.

1 8 2 2.

[55] Hochleitner, Anhang

Diesbezügliche deutsche Nachdrucke gab es 1831 und 1841: ***„Anfangsgründe der besonderen und allgemeinen Arithmetik zum Gebrauch der studierenden Jugend in den Humanitätsklassen“.***

Obwohl zu Beginn des 19. Jahrhunderts in den Gymnasien in keiner Weise auf Kegelschnitte eingegangen wurde, gab es dennoch für die Schüler der Baukunst ein Lehrbuch von **Johann K. Blank** aus dem Jahre 1814, das sich ausnahmslos mit Kegelschnitten befasste:
„Vollständige Anfangsgründe der Kegelschnitte zu allgemeinem Gebrauche der Schüler der Baukunst“.

Nachfolgend sei das Inhaltsverzeichnis dieses Buches wiedergegeben, um sich vom Lehrstoff eine Vorstellung machen zu können:[56]

Inhalt.

Von dem geometrischen Orte unbestimmter Aufgaben und Gleichungen des ersten und zweyten Grades..... §. 1

Von der allgemeinen Gleichung aller Kegelschnitte und ihren verschiedenen Nahmen..... §. 4

Von den verschiedenen Gattungen der Schnitte eines rechten Kegels durch ebene Flächen und von den krummen Linien, welche dadurch in seiner krummen Fläche entstehen..... §. 6

Von der Abscissenlinie, von den Abscissen und Ordinaten, von dem Scheitel und Mittelpunkte, von den Achsen und ihren Parametern..... §. 11

Von der Parabel als Ellipse oder Hyperbel und von dem Kreise als Ellipse betrachtet..... §. 16

Von der Ausdehnung eines jeden Kegelschnittes und von dem Abstande seiner Ordinaten von dem Mittelpunkte oder von den Enden seiner Achse..... §. 18

Von der Zeichnung der Kegelschnitte vermittelst bestimmter Punkte..... §. 28

Von der Verwandlung der Parametergleichungen in die Achsengleichungen..... §. 30

Von der Bestimmung der Größe der zweyten Achse einer Hyperbel..... §. 32

Von der Ausdehnung der Kegelschnitte nach den Achsengleichungen und von dem Abstande ihrer Ordinaten von dem Mittelpunkte oder von den Enden ihrer Achse..... §. 33

Von den Brennpunkten der Kegelschnitte..... §. 40

Von den Fahrstrahlen der Kegelschnitte und von der Zeichnung der Kegelschnitte vermittelst ihrer Fahrstrahlen..... §. 46

Von den Quadraten der Ordinaten und ihren zugehörigen Rechtecken..... §. 59

Von der Verwandlung der Gleichungen für die Ordinaten zu der ersten Achse in die Gleichungen für die Ordinaten zu der zweyten Achse..... §. 62

[56] Hochleitner, S.46f

Von den Eigenschaften der Hyperbel nach der Gleichung für die Ordinaten zu der zweyten Achse ..... §. 63
Von dem Verhältnisse der Ordinaten eines Kreises und einer Ellipse für dieselbe Abscisse auf einer gemeinen Achse .. §. 75
Von den Tangenten und Subtangenten, von den Normalen und Subnormalen ..... §. 76
Von der Zeichnung der Tangenten ..... §. 90
Von den Assymptoten ..... §. 92
Von den Durchmessern der Parabel und ihrer Gleichung .. §. 110
Von den Durchmessern der Ellipse und Hyperbel und ihren Gleichungen ..... §. 116
Von der Bestimmung des Scheitels, des Mittelpunktes und der Brennpunkte eines Kegelschnittes, von der Bestimmung der Lage und Größe eines jeden Durchmessers und seines Parameters, und von der Zeichnung zweyer Tangenten, welche durch einen bestimmten Punkt außerhalb des Kegelschnittes gehen ..... §. 128
Von der Größe beyder Achsen einer Hyperbel und des Winkels ihrer Assymptoten ..... §. 144
Von der gleichseitigen Hyperbel ..... §. 147
Von dem Verhältnisse der Ordinaten einer gleichseitigen und ungleichseitigen Hyperbel für dieselbe Abscisse auf einer gemeinen Achse ..... §. 151
Von den verwandten Hyperbeln ..... §. 152
Von dem Flächeninhalte des Abschnittes einer Parabel .. .. §. 155
Von dem Flächeninhalte einer Ellipse ..... §. 160
Von dem Flächeninhalte des Abschnittes einer Hyperbel .. §. 163
Von dem Körperinhalte einer Paraboloide, Ellipsoide und Hyperboloide ..... §. 164
Von dem antiparallelen Schnitte eines schiefen Kegels .. .. §. 169
Von dem auf die Achse eines Cylinders schiefen Schnitte .. §. 170

Bis zum Organisationsentwurf des Jahres 1849 gab es bezüglich der Lehrplangestaltung sowie der Vormachtstellung der humanistischen Fächer keine bedeutende Änderung.

Erst dieser Entwurf hatte für den mathematischen Unterricht am Gymnasium die Grundlagen geschaffen, an welchen in der Folge bis zum Jahre 1909 nur wenige tiefer greifende Änderungen vorgenommen wurden.

Eine der Schwerpunkte dieses Entwurfes war die „Wichtigkeit der Mathematik und der naturwissenschaftlichen Fächer im Hinblick auf Menschenbildung“.

(Vgl. Kap. 2!)

Infolgedessen wurde auch der Mathematik eine größere Bedeutung beigemessen als bisher.
Man muss hierbei natürlich verstehen, dass diese Wandlung nicht von heute auf morgen vonstatten gehen konnte.

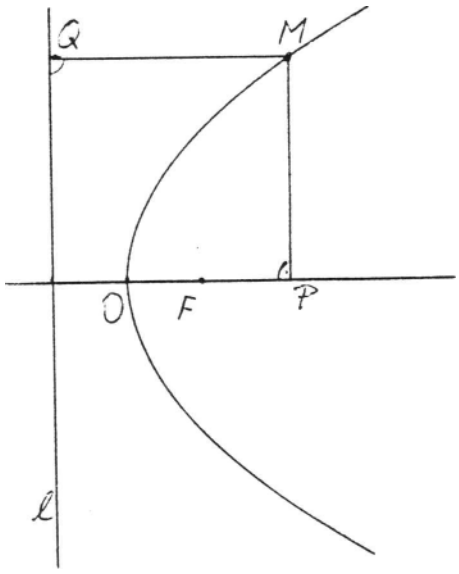
Die Kegelschnittsgeometrie jedoch begann langsam ihren Platz in den Lehrbüchern der Gymnasien zu finden.

Ein Beispiel dafür liefert das Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Ober=Realschulen, Wien 1868:
Darin wird, ausgehend von *Gleichungen des ersten und des zweiten Grades* über die *Transformation der Koordinaten* bis zur *analytischen Bestimmung der Linie und des Kreises* systematisch der Weg zu den Kegelschnitten beschritten.

Die Ellipse wird beispielsweise in diesem Lehrbuch folgendermaßen behandelt:
Begonnen wird, wie in den aktuellen heutigen Lehrbüchern, mit den planimetrischen Eigenschaften.
Nachdem die Ellipsengleichung $\mathbf{a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2}$ mehr oder weniger genau ´diskutiert´ wird, versucht man, *´Relationen aufzusuchen, in welchen die Gerade L oder* $\boldsymbol{y = Ax + B}$ *mit der gegebenen Ellipse* $\boldsymbol{y^2 = b^2/a^2\,(a^2 - x^2)}$ *steht´.*
Das heißt, man untersucht die drei Lagen, die eine Gerade zu einer Ellipse einnehmen kann (Sekante, Tangente, Passante).
So gelangt man, wie auch im aktuellen Lehrbuch, zur bekannten **Tangentengleichung.**

Nach obiger Herleitung wird der Beweis erbracht, dass eine "Tangente mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel bildet".
Danach wird in gleichem Maße 1.) die *'Tangente untersucht, welche von einem außerhalb liegenden Punkt zur Kurve gezogen wird'* (Berührbedingung!), 2.) *'der Flächeninhalt einer gegebenen Ellipse berechnet'* und 3.) zum Abschluss *'die Polargleichung der Ellipse abgeleitet'*.
Um den Flächeninhalt einer gegebenen Ellipse zu berechnen, hat man die Ellipse als Projektion eines Kreises aufgefasst, dessen Durchmesser gleich der großen Ellipsenachse ist.

Bei der Berechnung der Fläche eines Parabelstückes (welches von dem Parabelbogen OM und den Strecken MP und OP des Punktes M begrenzt ist) ging man so vor, dass man von M die Normalen MP und MQ auf die Koordinatenachsen fällte und das Verhältnis der durch den Parabelbogen gebildeten Teile des Rechteckes OPMQ als Grenzwert bestimmte:



Zur Festigung des Gelernten gibt es zur Vertiefung der Materie am Ende dieses Kapitels Übungsbeispiele. Dazu einige Auszüge aus diesen *"Aufgaben zur Uebung":*

"1) Die Gleichung der Ellipse für schiefwinkelige Koordinaten abzuleiten, wenn die Abszissenlinie dieselbe bleibt, und mit der neuen Ordinatenachse den Winkel w> 90° einschließt, und dann die gefundene Gleichung zu diskutieren.

2) Die durch die Gleichung $9y^2 + 4x^2 = 4$ gegebene Ellipse zu konstruieren, dann die beiden Achsen, die Exzentrizität, den Parameter und den Flächeninhalt der Kurve zu berechnen.

3) Über der großen Achse sowohl, als auch Tiber der kleinen Achse einer gegebenen Ellipse beschreibe man einen Kreis und berechne die mondförmigen Flächen, welche die Ellipse mit den Peripherien beider Kreise einschließt."

Das gleiche Behandlungsschema vollzieht sich ebenso bei der Hyperbel und der Parabel, wobei in diesen Fällen lediglich auf Tangentengleichung und Berührbedingung verzichtet wurde, welche man jedoch als Übungsbeispiele im Anschluss in den *´Aufgaben zur Selbstübung´* wieder findet.
Der Lehrplan in den 70-er Jahren des 19. Jahrhunderts blieb weitgehend gleich. Das Lehrziel der Mathematik in den Realschulen war klar umrissen: ***„Gründliche Kenntnis und sichere Durchübung der elementaren Mathematik“***.

Der Lehrplan der Geometrie in der 7. Klasse besagt: [57]

> *"Als Einleitung einiges über Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Erläuterung der gebräuchlichsten Coordinatensysteme. Transformation der Coordinaten. Analytische Behandlung der geraden Linie, des Kreises, der Parabel, Ellipse und Hyperbel: Jede dieser Curven insbesondere, ausgehend von ihrer speciellen Grundeigenschaft und mit Einschränkung auf jene wichtigsten Eigenschaften dieser Linien, welche auf Brennpunkte, Tangenten und Normalen sich beziehen, stets mit Zugrundelegung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes. Quadratur der Parabel und der Ellipse. - Polargleichung des Kreises und jeder der Kegelschnittslinien unter Annahme des Brennpunktes als Pol, und der Hauptachse als Polarachse."*

Im Anhang des Lehrplanes wird noch einmal genau dargelegt, wie die Schwerpunkte in der Geometrie zu verteilen sind:

> *"Ein flüchtiges Hinwegeilen über die ersten Principien der analytischen Geometrie, die dem mit der Sache Vertrauten allerdings sehr einfach und klar erscheinen, zieht für den Anfänger im weiteren Verlaufe des Gegenstandes alle kaum mehr zu beseitigenden Folgen unklarer Begriffe nach sich."*

[57] Instructionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich, Wien 1879

(...). "Bei der analytischen Behandlung der Geraden und des Kreises ergibt sich bereits Gelegenheit, die Schüler auf jene Hauptprincipien aufmerksam zu machen, welche bei analytischen Untersuchungen über die gegenseitigen Beziehungen zweier Linien überhaupt, sodann bezüglich der Aufstellung der Secanten- und der Tangentengleichung bei einer Curve im Allgemeinen zur Anwendung kommen. In der nun folgenden speciellen Behandlung der drei Kegelschnittslinien wird man, stets mit Zugrundelegung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, die Gleichungen dieser Curven aus deren besonderen Grundeigenschaften ableiten; es wird genügen, außer der Mittelpunktsgleichung bei der Ellipse und Hyperbel, für jede der drei Curven die Scheitel- und allenfalls noch die Brennpunktsgleichung aufzustellen; (...).
Einen geeigneten Abschluß kann dieser Gegenstand finden in dem Nachweise, wie die erwähnten drei Curven durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene erhalten werden können."

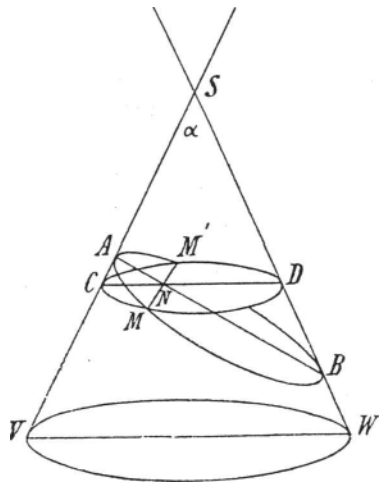
In diesem Fall wird im Lehrplan zum ersten Mal der Kegelschnitt als Schnitt eines Kegels mit einer beliebigen Ebene definiert. Bisher wurde er ja nur als Ortslinie sowohl zur Definition als auch zur punktweisen Konstruktion herangezogen.

Den Beweis hierfür entnahm ich einem Mathematiklehrbuch aus dem Jahre 1887:[58]

"Die Ortslinie aller Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältnis ε *haben, ist somit eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem dieses Verhältnis* ε *ebenso groß, kleiner oder größer als 1 ist.*
Die Scheitelgleichung dieser Ortslinie hat die Form: $y^2 = Px + Qx^2$ *, wenn P den Parameter bedeutet.*
Je nachdem Q positiv, gleich 0 oder negativ ist, entspricht der Gleichung eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Letztere geht in die Kreislinie über, wenn $Q = -1$ *wird."*

[58] Wapienik, S.346ff

Sodann erfolgt der eigentliche Beweis:



"Es sei SVW der Achsenschnitt eines geraden Kegels, welcher zu der Schnittebene AMB normal ist. Legt man durch einen beliebigen Punkt M der Schnittlinie eine Ebene parallel zur Leitlinie VW, so ist die neue Schnittlinie eine Kreislinie, deren Ebene zum Achsenschnitte SVW normal steht. Beide Schnittebenen schneiden sich in der MM', welche auf dem Achsenschnitte und auf den Kanten AB und AC normal steht und letztere im Punkte N trifft.

Da MN zum Durchmesser CD normal ist, so hat man

$$\overline{MN}^2 = \overline{CN} \cdot \overline{ND} \qquad a \quad)$$

Nimmt man A als Anfangspunkt der Coordinaten und AB als Abscissenachse an, so ist die Abscisse des Punktes M x = AN und die Ordinate y = MN.
Setzt man ferner den Winkel CSD = α, SCD = β, und VAB = φ*, so ist*

Im Dreiecke ACN

$$\frac{CN}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$$

Im Dreiecke NDB

$$\frac{ND}{AB - x} = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\beta}$$

Im Dreiecke ABS

$$\frac{AB}{AS} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

Es ergibt sich demnach aus a):

$$y^2 = \frac{x\cdot\sin\varphi}{\sin\beta}\cdot\frac{(AB-x)\cdot\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\beta}$$

und, wenn man AS = a , also $AB = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ *setzt,*

$$y^2 = \frac{x\cdot\sin\varphi}{\sin\beta}\cdot\left(\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\beta} - \frac{x\cdot\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\beta}\right)$$ *oder*

$$y^2 = \frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\beta}\cdot x - \frac{\sin\varphi\cdot\sin(\varphi-\alpha)}{\sin^2\beta}\cdot x^2 \qquad (1.)$$

Dies ist aber die Scheitelgleichung einer ELLIPSE.
Ist $\varphi-\alpha$*, also die Schnittebene einer Seite SW parallel, so lautet die Gleichung der Schnittlinie*

$$y^2 = \frac{a\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\cdot x$$

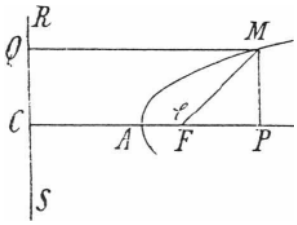
die Schnittlinie ist also in diesem Fall eine Parabel.
Ist φ *kleiner als α, so ist* $\sin(\varphi-\alpha)$ *negativ, mithin der Factor von x² positiv. In diesem Falle geht die Gleichung (1.) in die Scheitelgleichung der Hyperbel über. Die Schnittlinie ist also eine HYPERBEL, wenn die Schnittebene nicht den Halbstrahl SW, sondern seine Ergänzung schneidet, d.h. wenn die Schnittebene zwei Seiten parallel ist.*

Daraus folgt:
Die Schnittlinie der Kegelfläche mit der Ebene ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Schnittebene keiner, einer oder zwei Seiten der Kegelfläche parallel ist.“

Ein anderes Beweisverfahren, welches bis heute nichts an seiner ´Popularität´ verloren hat und immer noch seinen Platz in der Darstellenden Geometrie inne hat, ist jenes des Belgiers **Pierre Dandelin** (1794-1847).

Man schreibt jedem Teil des geschnittenen Kegels die größtmögliche Kugel ein, welche die Schnittebene berührt. Anhand der Eindeutigkeit der Berührpunkte F_1 und F_2 und eines beliebigen Ellipsenpunktes P zeigte Dandelin, dass hier für jeden Punkt der Ellipse die Summe seiner Entfernungen von den beiden Berührpunkten gleich ist.
Diese Eigenschaft der Ellipse, wonach 'der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F' gleiche Summen (2a) haben' (Wapienik, 1887), wurde ja bis dahin lediglich planimetrisch mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes bewiesen. Wie man jedoch später sehen wird, lässt der Beweis von Dandelin in den Mathematiklehrbüchern nicht mehr lange auf sich warten.
Ebenfalls sehr Interessant ist die vom Lehrplan des Jahres 1879 geforderte Polargleichung der Kegelschnitte, welche in den heutigen Lehrbüchern kaum mehr Erwähnung findet.

Wapienik bewies diese Polargleichung anhand nur eines Kegelschnittes, nämlich der Parabel, ganz am Ende im Anschluss an den vorhin zitierten Beweis:



„Die in §.525 (s.o.) entwickelte allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte führt auf eine einfache Weise zu den Polargleichungen dieser Curven. Nimmt man den Brennpunkt F als Pol der Polarcoordinaten und die zu dem zunächst liegenden Scheitel A führende Gerade als Achse an, so ist FM = r der Radiusvector eines Punktes M und der Winkel AFM = φ *die Anomalie.*

Nun war $FM = \varepsilon \cdot CP$, $CF = d$, $p = \varepsilon \cdot d$

Man hat also

$$r = \varepsilon(d - r \cdot \cos\varphi), \qquad r + \varepsilon \cdot r \cdot \cos\varphi = p$$

daher $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

Je nachdem ε größer, gleich oder kleiner 1 ist, entspricht der Gleichung die Hyperbel, Parabel oder Ellipse.“

Das Jahr 1884 brachte ausführliche Lehrpläne und Instruktionen mit genauen, ins Detail gehenden methodischen und stofflichen Bemerkungen. Zur Kegelschnitts-geometrie gibt es beispielsweise folgende Anmerkung: [59]

> *(...). Dabei ist wieder das Aufsteigen vom Besonderen zum Allgemeinen einzuhalten und mit der analytischen Betrachtung der einfachsten geometrischen Erscheinungen, die dem Schüler schon bekannt sind, zu beginnen. Auf diese Weise wird der Schüler die Fähigkeit erlangen, der analytischen Entwicklung der ihm noch fremden Eigenschaften der Kegelschnitte mit Verständnis zu folgen.*
> *Bei allen Untersuchungen soll die unmittelbare Anschaulichkeit angestrebt und zu diesem Zwecke sowie auch zur Vereinfachung des Calcüls die analytische Behandlung durch synthetische Betrachtungen unterstützt werden. Bei der Auswahl der Eigenschaften der Kegelschnitte werden diejenigen besonders zu berücksichtigen sein, welche eine constructive Anwendung gestatten. Die Erfahrung zeigt, dass durch einen richtigen Lehrvorgang das lebhafte Interesse der Schüler für diesen Theil der Elementarmathematik gewonnen werden kann."*

[59] Instructionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich, Wien 1884, S.235

Wie man diesen Zeilen entnehmen kann, wird die Wichtigkeit des räumlichen Anschauungsvermögens in Bezug auf das Interesse des Schülers besonders unterstrichen.
Ebenso wird eine gleichzeitige analytische und geometrische Betrachtungsweise der Geometrie verlangt: „..., *so nehme der Unterricht die inverse Operation auf, für geometrische Gebilde die analytische Repräsentation aufzufinden."*

3.2.2 Lehrplanänderungen in den folgenden Jahrzehnten

In den 'Lehrplaninstruktionen' der folgenden Jahre gibt es hinsichtlich der Kegelschnittsgeometrie keine besonderen Veränderungen. Einzig einige Verschiebungen einzelner Lehrstoffpartien (z.B. Beseitigung der Kettenbrüche) wurden im mathematischen Lehrplan 1899 vorgeschrieben.

Jedoch erfuhr der mathematische Unterricht durch die Reformen der letzten Jahrzehnte wesentliche Umwandlungen, weniger vielleicht hinsichtlich des Lehrstoffes und deren Verteilung auf die einzelnen Klassen als insbesondere in der Lehrmethode. Im Lehrplan von 1909 gibt es einige grundlegende Neuerungen:

War bisher die Zweistufigkeit im Lehrplan vorherrschend (d.h. propädeutischer Unterricht auf der vierjährigen Unterstufe und ein 'wissenschaftlicher' Betrieb auf der vierjährigen Oberstufe), so spricht man nun von einer Dreistufigkeit. Das bedeutet einen propädeutischen Unterricht auf der dreijährigen Unterstufe, einen Übergang zu einem mehr systematischen Unterricht auf der zweijährigen Mittelstufe, und einen systematischen Unterricht auf der dreijährigen Oberstufe.
Auch war bisher im Mathematikunterricht die Einführung des Funktionsbegriffes lediglich in der siebenten Klasse als Vorbereitung für die analytische Geometrie vorgesehen.

Nunmehr dringt der Funktionsbegriff im gesamten Lehrstoff durch. Dies führte dazu, die Schulung im funktionalen Denken so früh wie möglich eintreten zu lassen. Ohne auf spezielle Funktionen näher einzugehen, wurde, entsprechend dem neuen Lehrplan, das funktionale Denken in ganz primitiver Form geübt. Auf der Mittelstufe erfolgte die Untersuchung der linearen Funktion, woran sich auf der Oberstufe eine graphische Behandlung der einfachsten algebraischen und transzendenten Funktionen anschloss.
Der Lehrplan im Jahre 1909 strebte ferner auf allen drei Stufen eine noch nähere Verbindung zwischen Arithmetik und Geometrie an. In den oberen Klassen sollten Arithmetik und Geometrie im Funktionsbegriff als zentrale Idee zusammenfließen.

Hinsichtlich des Lehrzieles gab es mehrere Forderungen. So wurde unter anderem der Entwicklung des Raumsinnes besondere Bedeutung beigemessen. Die intensive Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens sollte vor allem in der zeichnerischen Darstellung bestehen:

> *"Der Schüler soll in den Stand gesetzt werden, Geschautes richtig aufzufassen, einfache Körperformen zeichnerisch wiederzugeben, beziehungsweise aus der Zeichnung die derselben zugrunde liegende Raumform wiederzugeben."* [60]

Diese Lehrplanreformierung hat natürlich Kritik hervorgerufen. So liest man zum Beispiel in den *"Berichten über den mathematischen Unterricht in Österreich":* [61]

> *„…Dagegen sind die Gründe didaktischer Natur, welche für die Einführung der Zweistufigkeit bestimmend waren, noch immer in voller Geltung.*
> *Es ist eben psychologisch tief begründet, die 'Bildungsstufen des eigentlichen Knaben und des heranreifenden Jünglings zu unterscheiden'. Innerhalb der mathematischen Disziplin kam die Zweistufigkeit besonders in der Geometrie zum Ausdrucke. (...)*

[60] Berichte über.., Heft 3, S.17
[61] Berichte über.., Heft 3, S.9f

Nicht unerwähnt möge bleiben, dass gerade ob dieses Prinzipes der Zweistufigkeit der österreichische Lehrplan bis in die jüngste Zeit auch außerhalb Österreichs vielfach Anerkennung gefunden hat."

Der Gymnasiallehrplan des Jahres 1909 sieht für die Geometrie der 7. Klasse Folgendes vor: [62]

"Analytische Geometrie (Linien ersten und zweiten Grades). Begriff des Differentialquotienten in geometrischer Form. Angenäherte Lösung von Gleichungen mittels graphischer Methoden."

In der Praxis sieht dies folgendermaßen aus: [63]

Man beginnt mit dem Koordinatenbegriff, wobei man sich zunächst auf rechtwinkelige Koordinaten beschränkt.
Danach folgen einige einfache Aufgaben, wie z.B. Bestimmung der Entfernung zweier Punkte, Teilung einer gegebenen Strecke im gegebenen Verhältnis, usw.
Nach dem alten Lehrplan musste man nun den Begriff der Funktion einführen, bevor man auf die analytische Behandlung der Geraden sowie der Kegelschnittsgeometrie eingegangen ist.

Gemäß dem neuen Lehrplan wurde bereits in den vorangegangenen Klassen der Funktionsbegriff eingeführt.

Ebenso auf der Mittelstufe der Begriff der rechtwinkeligen Koordinaten, wonach man nunmehr die betrachteten Funktionen zur graphischen Darstellung verwendete.
Der Unterricht nach dem neuen Lehrplan erspart sich folge dessen diesen Exkurs und geht sogleich auf die Behandlung der Kegelschnittslinien ein, indem er mit dem Kreis beginnt.

---

[62] Instructionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich, Wien 1910
[63] Berichte über.., Heft 3, S. 53ff

Die Gleichungen der Kegelschnitte werden für jede einzelne Kurve aus der bereits bekannten Ortsliniendefinition abgeleitet. Daran schließt sich in der Regel eine 'Diskussion' der Kurvengleichung an.

Das Tangentenproblem wird zweifach gelöst. Das eine Mal definiert man die Tangente als Gerade, welche mit der Kurve nur einen Punkt gemein hat. Dieser Vorgang führt zur Eigenschaft ("Berührbedingung"):

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C = 0$$

Daraus ergibt sich als unmittelbare Folge die Tangentengleichung:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

(x´, y´, … Koordinaten des Berührungspunktes)

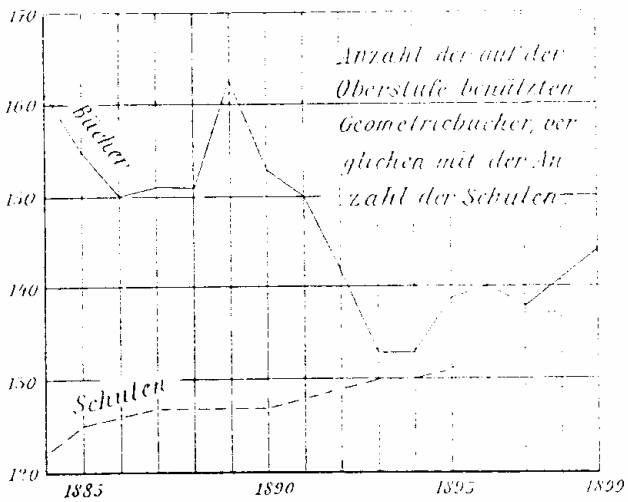
Im Anschluss an die bereits besprochene Quadratur der Ellipse sowie des Parabelsegmentes werden wiederum die Polarkoordinaten besprochen und dazu verwendet, für alle Kegelschnittslinien eine zusammenfassende Gleichungsform zu gewinnen.

Auffallend an diesem Lehrplan ist nur, dass der Kegelschnitt als tatsächlicher Schnitt eines Kegels mit einer Ebene nicht erwähnt wird, zumal ja doch sehr viel vom räumlichen Anschauungsvermögen gesprochen wird.

3.2.3 Einige Anmerkungen zu den Lehrbüchern

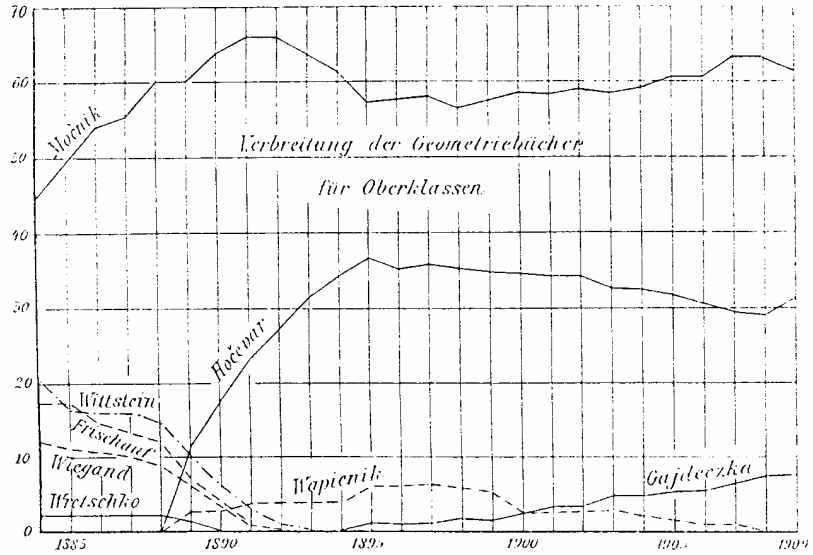
Im Folgenden sei ein kurzer Überblick über Verbreitung und Inhalt der bis dahin verwendeten mathematischen Schulbücher gegeben.

Ein Erlass des Ministeriums setzt 1880 folgende Bedingungen für die Zulassung eines Lehrbuches zum Unterrichtsgebrauch fest: Das Buch muss im Druck vorliegen, die Ausstattung und der Preis müssen zweckentsprechend sein und ein Lehrkörper muss durch die Landesschulbehörde den Antrag auf Einführung stellen. Somit kann eine Approbation gewährt werden, die aber für jede nicht wörtlich abgedruckte Neuauflage abermals einzuholen ist.
Da Lehrbücher, wie auch bereits oben bemerkt wurde, eher geringe inhaltliche und methodische Unterschiede zeigten, wurde deren Verbreitung nur durch äußere Faktoren bestimmt.
Oftmals hat ein Gymnasium gleichzeitig mehrere Bücher über denselben Gegenstand angemeldet. Dennoch begann man mit der Zeit an einem bestimmten Buch festzuhalten. Das folgende Diagramm zeigt diese Entwicklung:[64]



[64] Berichte über.., Heft 6, S.6

Die ´relative´ Häufigkeit der einzelnen Geometriebücher an den Schulen zeigt nun folgendes Diagramm: [65]



Die vertikalen Abschnitte zeigen den prozentuellen Anteil, den das Buch in einem bestimmten Jahr innehatte.

Das starke Überwiegen des Buches von **Mocnik**[66] ist auffällig. Der Grund dafür liegt in dem Umstand, dass es nach der Reorganisation der österreichischen Mittelschulen das erste Buch war, welches dem damals neuen Lehrplan genau entsprach.

Der folgende kurze inhaltliche Vergleich stützt sich vor allem auf die Lehrbücher von **Hocevar** [67] , **Gajdeczka-Kaller** [68] und **Wapienik** (siehe oben), die ich einzusehen vermochte.

---

[65] Berichte über.., Heft 6, S.4
[66] Mocnik-Holzmeister. Geometrie für die 5. – 8. Klasse, Wien 1934
[67] Hocevar. Lehrbuch über die Geometrie für die Oberstufe. (Ausgabe für die Gymnasien). 2. Aufl., Wien 1905
[68] Gajdeczka-Kaller. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen. 4. Aufl., Wien 1910

In der analytischen Geometrie wird in den Geometrielehrbüchern der Oberstufe hauptsächlich das rechtwinkelige Koordinatensystem behandelt. Zwar werden sehr wohl Polarkoordinaten eingeführt und die Gleichungen der Kegelschnitte in diesem System aufgestellt, aber in dieser Form fanden sie nie Anwendung.

Der erste Abschnitt der analytischen Geometrie enthält immer den Ausdruck einiger Größen durch die Koordinaten (Abstand zweier Punkte, Winkel zweier Geraden u.ä.). Bei Gajdeczka zum Beispiel wird aus diesen Ausdrücken bereits die erste Ortsgleichung abgeleitet (Kreis).

Im zweiten Abschnitt wird der Begriff der Funktion und der Gleichungen zwischen zwei Variablen sowie ihre graphische Darstellung besprochen.

In den folgenden Kapiteln wird jede Linie (Gerade, Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel) durch ihre geometrischen Eigenschaften definiert, daraus die Gleichung hergeleitet und aus dieser werden die weiteren Eigenschaften der Kurve geschlossen.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades wird in keinem Buch diskutiert.

Die Kegelschnittsgeometrie ist auf Grund der Lehrpläne der analytischen Geometrie zugewiesen. Demnach bringen die Lehrbücher selten eine zusammenhängende Darstellung dieser Linien.

Um die Kegelschnitte unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, stellt Wapienik ihre Gleichung auf Grund des konstanten Verhältnisses der Abstände ihrer Punkte von Brennpunkt und Leitlinie auf:

> *"Um den Zusammenhang zwischen den krummen Linien Ellipse, Hyperbel und Parabel, den schon die Scheitelgleichungen dieser Linien vermuthen lassen, zu erforschen, suche man den geometrischen Ort aller Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden (Directrix)ein gegebenes Verhältnis s haben.“* [69]

In den beiden anderen Büchern bildet die Polarengleichung oder die Scheitelgleichung die alle Spezialfälle umfassende Gleichungsform. Dass es sich bei diesen Linien um richtige Schnitte eines Kegels handelt, wird, wie schon bei Wapienik gezeigt, dadurch nachgewiesen, dass aus der stereometrischen Figur die Scheitelgleichung abstrahiert wird.

---

[69] Wapienik, S.134

Die Kegelschnittsgeometrie wird im Allgemeinen nicht über das hinaus geführt, was sich aus der Definition und der Tangentengleichung fast unmittelbar ergibt. Es wird in allen Büchern die Fläche des Ellipsen- und Parabelsegmentes, nie aber die des Hyperbelsegmentes berechnet.

Die konstruktiven Anwendungen nehmen in der analytischen Geometrie einen sehr großen Raum ein. Es werden verschiedene Punkt- und Tangentenkonstruktionen der Kegelschnitte aus ihren Gleichungen gefunden.
Anwendungen auf andere Gebiete gibt es kaum. Erwähnenswert sind lediglich bei Hocevar die numerischen Berechnungen auf Grund der Keplerschen Gesetze und die Reflexion des Lichtes an kegelschnittförmig gekrümmten Spiegeln.

Bis zum Jahre 1927 gab es keine grundlegenden Veränderungen in den Lehrplänen und Lehrbüchern. Wie bereits im vorigen Kapitel bemerkt, erfolgte erst mit dem Mittelschulgesetz 1927 eine weitgehende Annäherung der Unterstufenlehrpläne von Gymnasium, Realgymnasium und Realschule.

Das Lehrziel im neuen Lehrplan für die Oberstufengeometrie hatte folgendes Aussehen: [70]

> *„Kenntnis der elementaren Mathematik samt Erfassen und Anwenden des Funktionsbegriffes; Kenntnis der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung. Gewandtheit im selbständigen Lösen auch etwas schwierigerer Aufgaben der behandelten Kapitel, namentlich der analytischen Geometrie, doch unter Ausschaltung alles Gekünstelten und Fernliegenden.*

[70] Lehrplan der österreichischen Gymnasien, aufgrund des Mittelschulgesetzes vom 2. August 1927, Wien 1928

Fähigkeit, das Mathematische in Form und Gesetzmäßigkeit an den Erscheinungen der Umwelt zu erfassen und die Bedeutung der Mathematik und ihrer Verfahren für Naturwissenschaften, Technik und öffentliches Leben zu erkennen. Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens.“

Bei Betrachtung dieses Lehrzieles ist zu bemerken, dass der Geometrie, insbesondere der Kegelschnittsgeometrie, eine große Bedeutung beigemessen wird. Wie auch im Lehrplan von 1909 festzustellen war, ist auch hier die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens ein wichtiger Aspekt.

Im Vergleich zum Lehrplan 1909 ist das Lehrziel im Jahre 1928 stofflich detaillierter und in den methodischen Anweisungen weiter gehend. Darüber hinaus sollen Kenntnisse erworben werden, welche mathematische Fragestellungen des täglichen Lebens erkennen lassen.
Anhand der Stundentafel[71] ist zu sehen, dass der Lehrplan 1928 eine weitgehende Annäherung zwischen Gymnasium, Realgymnasium und Realschule sucht. Demnach sind in der Realschule während der gesamten Oberstufe lediglich drei Mathematikstunden mehr vorgeschrieben. Und zwar je eine Stunde in der fünften, sechsten und achten Klasse. Ein Faktum, das sich, wie man noch sieht, in der Zukunft noch ändern wird.
Obwohl der Lehrplan der siebten Klasse sehr wohl einen Unterschied im Stoffumfang der einzelnen Schultypen vorsieht, ist die Stundenanzahl ident.

Im Geometriebuch von **Mocnik** kommt der Unterschied zwischen Gymnasium und Realschule schon im Inhaltsverzeichnis deutlich zum Ausdruck: [72]

[71] Schwabel, S.70
[72] Mocnik, S.2f

Seite

III. Teil: Berechnung der Oberfläche und des Rauminhalts geometrischer Körper.

§ 28. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf 117
§ 29. Der Kegel und der Kegelstumpf 120
§ 30. Die Kugel und ihre Teile 123
§ 31. Die regelmäßigen Polyeder 131

IV. Teil: Sphärische Trigonometrie.

(Nur für Realschulen.)

I. Abschnitt: Trigonometrie des sphärischen Dreiecks.

§ 32. Das sphärische Zweieck 135
§ 33. Das sphärische Dreieck 136
§ 34. Grundformeln für das rechtwinkelige sphärische Dreieck 138
§ 35. Auflösung des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks 140
§ 36. Das allgemeine sphärische Dreieck 145
§ 37. Die Grundaufgaben des allgemeinen sphärischen Dreiecks 146

II. Abschnitt: Aufgaben aus der mathematischen Geographie.

§ 38. Berechnung von Entfernungen 150

III. Abschnitt: Aufgaben aus der Astronomie.

§ 39. Die astronomischen Koordinaten 152
§ 40. Zeit und Zeitbestimmung 155
§ 41. Das rechtwinkelige sphärische Dreieck 158
§ 42. Das allgemeine sphärische Dreieck 159

V. Teil: Analytische Geometrie.

I. Abschnitt: Punkt und Gerade.

§ 43. Strecken 163
§ 44. Das Teilungsverhältnis; die harmonische Teilung 164
§ 45. Das rechtwinkelige Koordinatensystem 168
§ 46. Die Länge und der Neigungswinkel der Strecke 170
§ 47. Der Inhalt des Dreiecks 171
§ 48. Gleichungen der Geraden:
A. Die Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt 173
B. Die Gerade ist durch ihre Achsenabschnitte bestimmt 174
C. Die Gerade ist durch einen ihrer Punkte und durch den Neigungswinkel gegen die positive Richtung der Abszissenachse gegeben 176
D. Allgemeine Form der Gleichung einer Geraden 178
§ 49. Die Normalform der Gleichung einer Geraden 179
§ 50. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden 181
§ 51. Zwei Gerade 182
§ 52. Drei Gerade 187

Seite

II. Abschnitt: Der Kreis.

§ 53. Die Gleichung des Kreises 191
§ 54. Die Tangente in einem Punkte des Kreises 193
§ 55. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis 194
§ 56. Allgemeine Gleichung des Kreises; Parallelverschiebung des Achsenkreuzes 196
§ 57. Potenzlinie; Potenzzentrum 200

III. Abschnitt: Kegelschnitte.

§ 58. Ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels 202
§ 59. Die Gleichung der Ellipse 204
§ 60. Die Gleichung der Hyperbel 210
§ 61. Die Gleichung der Parabel 211
§ 62. Gerade und Kegelschnittslinie 216
§ 63. Konjugierte Durchmesser 223
§ 64. Tangenten in einem Punkt eines Kegelschnitts 227
§ 65. Pol und Polare 232
§ 66. Die Ellipse als perspektiv affine Figur des Kreises 237
§ 67. Maxima und Minima 241

IV. Abschnitt: Gleichungen der Kegelschnitte in anderen Lagen.

(Nur für Realschulen.)

§ 68. Parallelverschiebung des Koordinatensystems; die Gleichung der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel 243
§ 69. Geometrische Örter 246
§ 70. Polarkoordinaten 248

V. Abschnitt: Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades.

(Nur für Realschulen.)

§ 71. Drehung des Koordinatensystems 249
§ 72. Bestimmung des Kegelschnitts, der durch eine allgemeine Gleichung des zweiten Grades dargestellt ist 251
§ 73. Die Ellipse und die Hyperbel 253
§ 74. Die Parabel 256
§ 75. Besondere Fälle 257

Anhang.

1. Historischer Rückblick 259
2. Lehrsätze aus der Planimetrie 260
3. Die wichtigsten Formeln:
I. Planimetrie 262
II. Stereometrie 263
III. Ebene Trigonometrie und Goniometrie 264
IV. Sphärische Trigonometrie 265
V. Analytische Geometrie 266

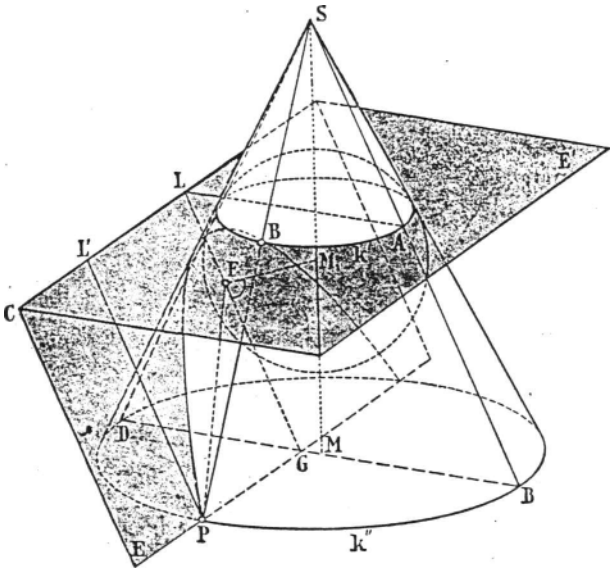
Wie schon aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlich, beginnt die analytische Geometrie mit Punkt und Gerade, wobei sich deren Behandlung im Allgemeinen nicht sonderlich von den Geometriebüchern der vorigen Jahre unterscheidet.

Ebenso ist fast kein Unterschied in der Behandlung des Kreises zu bemerken. Neu hinzugekommen ist lediglich die Definition der Potenz eines Punktes, der Potenzlinie und des Potenzzentrums

Sehr wohl geändert hat sich die Einführung der Kegelschnitte. Wurden wie bisher zu Beginn die Gleichungen der Kegelschnittslinien als Ortslinien definiert und dieselben danach bewiesen, so widmet Mocnik nun am Beginn ein ganzes Kapitel dem Beweis, dass Kegelschnitte durch den Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene entstehen:

"Man nennt die Ellipse, Hyperbel und Parabel, weil sie als Schnittlinien eines Kegels mit einer Ebene erzeugt werden können, Kegelschnittslinien oder kurz Kegelschnitte. "[73]

Dieser Beweis wird nun mit Hilfe der Dandelinschen Berührungskugeln synthetisch nachgewiesen.[74] Der Wichtigkeit halber sei nun der Beweis für die Parabel aus diesem Lehrbuch entnommen:[75]



"Die Schnittebene E (Fig.164) sei der Seitenlinie SB' parallel und senkrecht zum Achsenschnitt B'DS. In den Raum zwischen der Ebene E und der Mantelfläche des Kegels bringen wir eine Kugel, welche den Mantel in dem Kreise k' und die Ebene E In dem Punkte F berührt. Die Ebene E' des Berührungskreises k' schneidet die Ebene E in der Geraden CL, die auf dem Achsenschnitt B´DS und auf LF senkrecht steht.

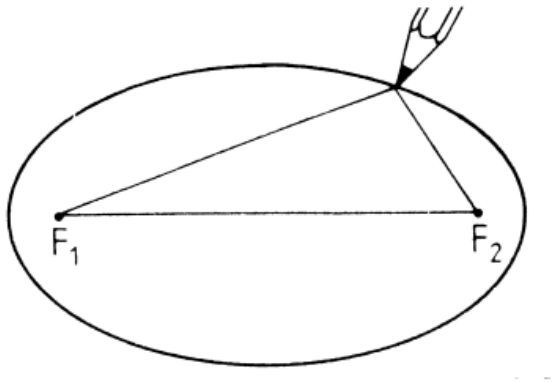
Legt man durch einen beliebigen Punkt P der Schnittlinie eines Kreises k´´ parallel zu k´ und verlängert LF in der Schnittebene bis G, d.i. bis zum Durchmesser mit der Ebene von k´´, so ergibt sich

$$PF = PB = B'A = GL = PL'....(PL' // GL)$$

[73] Mocnik, S.204
[74] Bereits 1910 wird diese Methode in einer Neuausgabe Mocnik´s angewendet.
[75] Mocnik, S.204

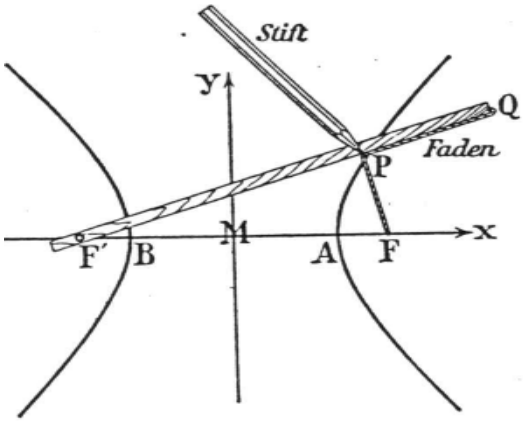
Der Punkt P hat somit von dem festen Punkte F und von der festen Geraden CL gleiche Abstände. Die Schnittlinie ist also eine Parabel.“

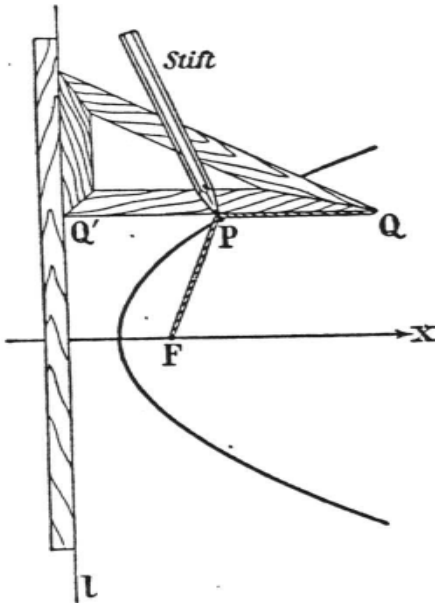
Nach dieser räumlichen Einführung der Kegelschnitte wird die Ortsliniendefinition für jede der drei Kurven bewiesen. Für die geometrische Konstruktion dieser Ortslinien sind der Anschaulichkeit halber nachstehend die mechanischen Konstruktionsmethoden abgebildet. Auch heute bekannt unter **„Faden- oder Gärtnerkonstruktion“.** Sie ist eine Methode, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ohne zu Hilfenahme eines Zirkels und eines Lineals genau zu zeichnen: Für die Ellipsenkonstruktion wird jeweils ein Faden der Länge 2a mit den Enden an je einen Nagel gebunden (F_1, F_2) und somit kann man, ohne mit dem Stift abzusetzen, die Ellipse zeichnen. (Mit Zirkel und Lineal ist nur eine Punktweise Konstruktion der Ellipse möglich).



Analog dazu gibt es auch die Konstruktionsmethoden für Hyperbel und Parabel, die ich aus dem Lehrbuch von **Mocnik** entnehme: [76]

[76] Mocnik, S.210, 214





Bei der Hyperbel (li. Abb.) wird ein Lineal der Länge *l* mit einem Ende drehbar im Brennpunkt F´ befestigt. Am anderen Ende wird ein Faden der Länge $f = l - 2a$ angebracht; das andere Fadenende wird im Brennpunkt F befestigt. Wird nun das Lineal um F´ so gedreht, dass der Faden durch die an das Lineal gedrückte Bleistiftspitze stets gespannt bleibt, so beschreibt diese einen Hyperbelast, da die Differenz der Abstände des Punktes P von den beiden Brennpunkten F´ und F immer den konstanten Abstand $\overline{BA}$ beträgt: $\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{BA}$

Bei der Fadenkonstruktion der Parabel (re. Abb.) gleitet ein Geodreieck mit einer Kathete entlang der Leitgeraden *l*. Der Faden mit der Länge der anderen Kathete wird einerseits im Brennpunkt F und andererseits im Linealeckpunkt Q befestigt. Wird nun ein Bleistift längs der horizontalen Kathete $\overline{Q'Q}$ bewegt, sodass der Faden immer straff gespannt bleibt, beschreibt die Bleistiftspitze eine Parabel, da der Abstand des Parabelpunktes P zur Leitlinie ($\overline{PQ'}$) genauso groß ist wie der Abstand eben dieses Parabelpunktes P zum Brennpunkt F: $\overline{PQ'} = \overline{PF}$

Den Abschluss dieser Kapitel bilden bei allen drei Kurven einige Übungsbeispiele. Somit wurden nacheinander die Kegelschnitte nach beinahe gleichem Muster vorgestellt. (Ausnahme Ellipse: Hier wird noch die *perspektiv affine* Verwandtschaft mit dem Kreis untersucht).

Nach dieser aufeinander folgenden Behandlung der Kurven folgt das Kapitel *"Gerade und Kegelschnittslinie"*, bei dem für alle Kurven sowohl die Berührbedingung hergeleitet wird als auch die bekannten **Tangenten-konstruktionen** behandelt werden wie beispielsweise:

1) *Die Tangente in einem Punkt der Hyperbel halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen des Punktes.*
2) *Jede Parabeltangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem Leitstrahl des Punktes.*
3) *Die Normale in einem Punkt der Ellipse halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen des Punktes.*

Das sind sehr schöne Schüleraufgaben, die dem Schüler (und dem Lehrer) helfen können, das Interesse an der Geometrie zu wecken. Der Schüler hat hier die Möglichkeit, die Aufgabe sowohl analytisch als auch konstruktiv zu lösen. Ein typisches Beispiel für das „Anschauliche“ an der Geometrie.

Es ist leider zu bedauern, dass bis zum Erscheinen des aktuellsten Lehrbuches diese wirklich interessanten "Tangentenbeweise" nicht jenen Stellenwert eingenommen haben, den sie hinsichtlich der Didaktik der Mathematik beanspruchten. Dazu Reichel: [77]

> *In diesem Zusammenhang sollten die bekannten Tangentenkonstruktionen für den Unterricht nicht vergessen werden, zumal ihre Begründungen direkt aus den planimetrischen (Elementar-)definitionen abgeleitet werden können und sie sicher besonders schöne Schüleraufgabe bzw. –beispiele für „Argumentieren im Unterricht“ liefern. Überdies können sie auch im Rahmen der „Analytischen Geometrie“ interessante Rechenbeispiele bzw. Beweise ergeben.“*

Nach diesem Kapitel wird die Tangentengleichung für die Kegelschnitte nacheinander hergeleitet und daraufhin in einem eigenen Kapitel Pol und Polare behandelt.

[77] Reichel: Ellipse, Hyperbel, Parabel, S.113

Es ist noch interessant anzumerken, dass schon vor der Kegelschnittsgeometrie die Differential- bzw. Integralrechnung im Unterricht besprochen wurde, denn bei den Übungsbeispielen der nächsten Kapitel "Die Ellipse als perspektiv affine Figur des Kreises" und "Maxima und Minima" werden sie einfach vorausgesetzt.

So beispielsweise bei folgenden Übungen: [78]

a) *„Berechne den Inhalt der Fläche, welche die gerade $x + 3y = 3$ von der Ellipse $x^2 + 3y^2 = 3$ abschneidet.“*
b) *„Eine Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ bildet mit der x-Achse und der Geraden $x = a$ ein Dreieck mit kleinstem Inhalt. Wie heißen die Koordinaten des Berührungspunktes?“*

Wie bereits im Inhaltsverzeichnis zu sehen war, sind die nächsten beiden Kapiteln "Gleichungen der Kegelschnitte in anderen Lagen" bzw. "Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades" ausschließlich für Realschulen konzipiert.
Sie beinhalten vorwiegend die Koordinatentransformation (Drehung, Parallelverschiebung) der drei Kurven. Ebenso werden hierbei Polarkoordinaten, Krümmungskreise sowie die Bestimmung des Kegelschnitts, der durch eine allgemeine Gleichung des zweiten Grades dargestellt ist, behandelt.

Dazu möchte ich einige typische Beispiele herausgreifen:

1) Transformiere durch geeignete Substitution die Gleichung $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$*, sodass sie a) die Form der Mittelpunktsgleichung b) die Form der Scheitelgleichung annimmt.*
2) Wie heißt die Polargleichung der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, wenn man den Mittelpunkt als Pol und die positive Seite der x-Achse als Polarachse wählt?
3) Wie lautet die folgende Gleichung in Bezug auf ein System, das um α° gedreht ist: $7x^2 - 2xy\sqrt{3} + 5y^2 = 8$
4) Gib an, welcher Kegelschnitt durch folgende Gleichung dargestellt ist: $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$

[78] Mocnik, S.240, 242

Zu der Zeit, als dieses Geometrielehrbuch für die Oberstufe (5. bis 8. Klasse) erschienen ist (1934), wurde für jene Klassen gleichzeitig noch ein Arithmetikbuch verwendet. Also zwei Mathematikbücher für die vier Oberstufenklassen.
Für die Unterstufe gab es jedes Jahr ein neues Arithmetikbuch (!) und jedes zweite Jahr ein Geometriebuch. Somit waren insgesamt 6 Bücher für die Unterstufe und 2 Bücher für die Oberstufe bestimmt.
Der heutige Mathematikunterricht benötigt ebenso 8 Lehrbücher, nur ist die Stoffzuteilung im Lehrplan so ausgerichtet, dass für jede Klasse jeweils ein Lehrbuch bestimmt ist.

Bis zum Jahre 1946 sind im Wesentlichen die Lehrpläne die gleichen wie jene von 1928. Der Lehrplan von 1935 weist zwar einige Stunden- und Stoffverschiebungen auf, dennoch blieb der Lehrstoff bei teilweiser geänderter Verteilung beinahe der gleiche.
Er erfuhr sogar durch Miteinbeziehung der irrationalen Funktionen in der 7. Klasse und durch Hinzunahme des binomischen Lehrsatzes sowie des Newton'schen Näherungsverfahrens zur Lösung von Gleichungen in der 8. Klasse eine Erweiterung.
Der Lehrplan von 1935 ist aber stofflich noch detaillierter und in den methodischen Anweisungen weitergehend als jener von 1927.

3.2.4 Beginnende Einschränkung der Kegelschnittsgeometrie

1946 sieht der Lehrplan für die Oberstufe der Gymnasien und Realgymnasien eine weitere Stundenreduzierung vor. Zwar wird den Realschulen in der 6. Klasse ebenfalls eine Stunde weggenommen, trotzdem erhalten sie zusätzlich in der 7. und 8. Klasse jeweils eine Stunde. Ebenso sieht der Lehrplan der Realschule in der 3. und 4. Klasse alle 14 Tage eine Doppelstunde *Geometrisches Zeichnen* vor.

Gesamt gesehen hat die Stundentafel für alle acht Klassen folgendes Aussehen:[79]

Gymnasium:	4	4	4	4	3	3	2	2	=	26 Stunden
Realgymnasium:	4	4	4	4	3	3	2	2	=	26 Stunden
Realschule:	4	4	5	5	4	3	4	4	=	33 Stunden

Das bedeutet, dass sich trotz praktisch identer Stoffzuteilung in der Oberstufe seit 1935 eine nicht unbedingt glückliche Wandlung in der Stundentafel vollzogen hat. Daraus resultiert natürlich zwangsläufig eine Problemsituation bei der Bewältigung des gleich gebliebenen Lehrstoffes in den Gymnasien und Realgymnasien. Der Lehrplan sieht dafür folgendes vor:[80]

> *„Wegen der geringen Zahl der Wochenstunden wird oft ein Teil des Lehrstoffes der 7. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Frauenoberschulen in der 8. Klasse nachzutragen sein.“*

Ebenso wird im Lehrplan auf die zu große Stoffdichte in den Lehrbüchern eingegangen:[81]

> *"In allen Abschnitten ist eine sorgfältige, sparsame Stoffauswahl erforderlich als Voraussetzung für eine gründliche, eindringliche Behandlung des Lehrgutes, die allein die Bildungswerte der Mathematik voll zur Auswirkung gelangen lässt.*

[79] Provisorische Lehrpläne für die Mittelschulen; Veröffentlicht auf Grund der Verordnung des Bundesministeriums für Unterricht vom 18. Oktober 1946.
[80] Provisorische Lehrpläne… (1946), S.119
[81] Provisorische Lehrpläne… (1946), S.119

Vor allem müssen alle Einzelheiten ausgeschieden werden, die weder Wert für den Aufbau der Mathematik in der Schule, noch für die praktische Anwendung haben, und die vielfach nur gelehrt werden, weil sie bisher gelehrt wurden und weil sie noch in Lehrbüchern enthalten sind“

In dieser Hinsicht ist der Lehrplan für die Realschulen ziemlich allgemein gehalten. Während beim Gymnasium und Realgymnasium eher detailliert auf die Kegelschnitte eingegangen wird ("Die Linien des ersten und zweiten Grades unter gelegentlichen Hinweisen auf die planimetrische Behandlung dieser Gebilde und Ihrer Beziehungen. Bei der Ellipse und Hyperbel Beschränkung auf die Mittelpunktsgleichungen, bei der Parabel auf die Scheitelgleichung."), schreibt der Lehrplan den Realschulen lediglich „die Linien des ersten und zweiten Grades unter Vermeidung von schwierigen Aufgaben“ vor.

Der Lehrplan 1955 gleicht dem des Jahres 1946. Hinzugekommen ist lediglich eine weitere Stundendifferenzierung zwischen Gymnasium, Realgymnasium und Realschule. Insgesamt gibt es in den 8 Klassen im Gymnasium 25 Mathematikstunden, im Realgymnasium 27 und in der Realschule 32.
Das Realgymnasium hat im Vergleich zum Gymnasium je 1 Stunde in der 7. bzw. in der 8. Klasse dazu erhalten. Diese erhöhten Stundenzahlen bei gleichem Stoff bezwecken, dass zum gleichen Stoffumfang ein größeres Maß an Können hinzutreten soll. Schwierigkeitsgrad und Umfang der Aufgaben lassen weite Möglichkeiten der Einengung bzw. Ausweitung des Lehrstoffes zu.

Da in den letzten Jahrzehnten durch Hinzunahme der sphärischen Trigonometrie[82], der Infinitesimalrechnung sowie der rationalen Funktionen und der Winkelfunktionen die Stoffdichte in der 7. Klasse Realschule sehr groß geworden ist, musste zwangsläufig irgendein Lehrinhalt darunter leiden. In diesem Fall waren es die Kegelschnitte.

[82] **Die sphärische Trigonometrie** war bereits Ende des 19. Jahrhunderts Bestandteil des Lehrplanes (Siehe: Fürst: „Der Mathematikunterricht im Wandel der Zeiten“, Wien, 2004); sie verschwindet aus dem Lehrplan wieder Anfang der 70-er Jahre – war allerdings noch bei Rosenbergs 12. Auflage 1974 als großer Geometrieteil vertreten: **„Sphärische Geometrie und ihre Anwendungen auf mathematische Geographie und Himmelskunde“.** (Allerdings bei Laub nicht mehr im Lehrbuch zu finden!)

Der Kegelschnittsgeometrie wird offenbar nicht mehr so viel Bedeutung beigemessen, was sich vor allem in einer präziseren Formulierung der anderen Lehrinhalte im Lehrplan zeigt. (Siehe oben!)
Nur am Rande erscheint im Lehrplan 1955 eine Bemerkung, die ich bei Durchsicht aller bis jetzt besprochenen Lehrpläne erstmals im Lehrplan 1935 entdeckte. Es handelt sich hierbei um die Miteinbeziehung der mathematischen Geschichte in den Lehrbüchern. Dazu heißt es 1955:

> *"Auch die Geschichte der Mathematik soll im Unterricht in bescheidenem Maße Berücksichtigung finden, und zwar durch gelegentlich eingestreute Bemerkungen und Aufgaben, in der obersten Klasse unbedingt auch durch Behandlung des einen oder anderen historisch bedeutsamen Problems."*

Die Miteinbeziehung von Problemstellungen der klassischen Mathematik kann für die Schüler von didaktischer Seite her nur von Vorteil sein. Außerdem wird dadurch der oft triste Mathematikalltag etwas aufgelockert und für die Schüler interessanter gestaltet. Inwieweit damals dieser Forderung nachgekommen worden ist, konnte ich nicht ergründen. Leider wurde dieses in meinem Mathematikunterricht verabsäumt.
Der Mathematikunterricht soll doch Bildung bewirken. Hingegen ist ein Frontalunterricht, der den Schüler mit vorgefertigten Theorien konfrontiert, ohne seine Stellungnahme, seine Fragen und Überlegungen zu berücksichtigen, bildungsfeindlich, da der Nachvollzug zu mechanischer und nicht zu argumentativer Problemlösung "anleitet". Und gerade eine Miteinbeziehung der mathematischen Geschichte könnte einem solchen Frontalunterricht entgegenwirken. Von den alten Problemen der Antike (Quadratur, Verdopplung,...) sollte der Schüler doch etwas mehr als nur den Namen kennen. Aber all diese Dinge sind im Mathematikunterricht recht schwierig abzuprüfen. Vielleicht ein Grund dafür, dass sie unterbleiben.
Hand in Hand mit der teilweisen "Reduzierung" der Kegelschnittsgeometrie (zumindest in den Lehrplänen) geht die Bemühung um den Einbau der Vektormethode in den Geometrieunterricht. Dazu heißt es bei Prowaznik:[83]

[83] Prowyznik, S.51

„Die analytische Geometrie könnte auf die Kegelschnittsgleichung eingeschränkt werden, jedenfalls aber die Geometrie der geraden Linien nicht um ihrer selbst willen, sondern nur, soweit sie für die Kegelschittslehre notwendig ist, Raum erhalten, es sei denn, sie wird vektoriell betrieben. Dann könnten z.B. Differential- und Integralrechnung gründlicher und ausführlicher durchgenommen werden.“

Dieser Vorschlag Provazniks am Ende des Zitates zeigt die typische Tendenz zu Beginn der 60-er Jahre, die Schulmathematik näher an die wissenschaftlich-moderne Mathematik zu führen. Axiomatische Fundierung, begriffliche Präzisierung und inhaltliche Strukturierung sind typische Merkmale dieser "neuen Mathematik" (New Math). Logischerweise müssen bei dieser Entwicklung gewisse Inhalte (in diesem Fall waren es jene der Euklidischen Geometrie) durch neue ersetzt werden. (Neues rein, Altes raus!)

In den nächsten 15 Jahren wurde in keinem anderen Unterrichtsgegenstand eine derartige grundsätzliche Neugestaltung verzeichnet wie in der Mathematik. So wurde zum Beispiel die gesamte Analytische Geometrie von den Vektoren "unterwandert".
Als Beispiel und zum Vergleich nehme ich die Geradengleichung ohne und mit Hilfe des Vektorbegriffes der Jahre 1961[84] bzw. 1978[85]:

1961: Zweipunktform:
Geht die Gerade durch 2 Punkte $P(x_1,y_1)$ und $Q(x_2,y_2)$, so ist k durch

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bestimmt und wir erhalten die Form einer 2 Punkte enthaltenden Geraden

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

[84] Rosenberg, S.197
[85] Laub, S.238

1978: Vektorform:

Eine Gerade g kann durch einen Punkt und durch einen Richtungsvektor festgelegt werden:

$$g : x = (x, y) + t \cdot (a, b)$$

Die Variable t heißt Parameter; die Gleichung heißt die Vektorform der Geradengleichung in Parameterdarstellung.

Die generelle Einführung der Vektorrechnung, der Körper der komplexen Zahlen, Boole'sche Algebra usw. führten in der 7. Klasse zu einer grundlegenden Umverteilung der Lehrinhalte. Die Differentialrechnung ist nun in der 7. Klasse hinter der analytischen Geometrie und den Kegelschnitten zu finden. Die neu hinzugekommene Vektorrechnung und die traditionelle analytische Geometrie wurden auf die Klassen 5, 6, und 7 aufgeteilt. So wurde die Einführung der Vektorrechnung (u.a. Rechnen mit Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem), ein Teil der Analytischen Geometrie (Teilung einer Strecke, Gleichung der Geraden, Lagebeziehungen zweier Geraden, Gleichung der Ebene, Lagebeziehungen von Gerade und Ebene) in die 5. Klasse vorverlegt.
Der Rest der Vektorrechnung (skalares und vektorielles Produkt zweier Vektoren), die Fortführung der Analytischen Geometrie sowie die analytische Behandlung des Kreises und der Kugel war nunmehr Teil der 6. Klasse.

Allein und verlassen blieben nun die Kegelschnitte, getrennt von der übrigen Geometrie, im Lehrplan der 7. Klasse.

Nicht nur, dass man sie in den letzten Jahren in einen selbständigen Teil gedrängt hat, der zur übrigen Geometrie keinerlei Verbindung und Zusammenhang mehr aufzuweisen scheint, es wurde sogar der Umfang dieses wirklich interessanten Teilbereiches der Geometrie erheblich vermindert.

Ein kurzer Vergleich zweier, in jenen Jahren repräsentativer Lehrbücher von Rosenberg[86] und Laub[87], zeigt nun den deutlichen „Verfall“ der Kegelschnitts-geometrie:

Allein an der Seitenzahl im Inhaltsverzeichnis wird deutlich, welchen Stellenwert die Kegelschnitte im Mathematikunterricht jeweils eingenommen haben. Obwohl bei Rosenberg neuer Lehrstoff sehr kurz und wenig umfangreich präsentiert wurde (das Hauptgewicht lag bei den Übungsaufgaben), umfasste bei ihm die Kegelschnittsgeometrie noch 41 Seiten, während Laub bei genauer und umfangreicher Präsentierung des Lehrstoffes und ebenso zahlreicher Übungsbeispiele mit 31 Seiten das Auslangen findet.
Welche Teilbereiche der Kegelschnittslehre sind nun seit 1961 in den Lehrbüchern erhalten geblieben?
Alle Inhalte, die sich bei Laub finden, sind auch im Lehrbuch von Rosenberg vertreten: Herleitung der Ortsliniendefinition, Herleitung der Tangentengleichung bzw. der Berührbedingung, Kegelschnitt und Gerade, Winkel zweier Kegelschnitte. Damit ist die Kegelschnittsgleichung bei Laub erschöpft.

Bei Rosenberg findet man etwa noch Konjugierte Durchmesser, Kegelschnittslinien in allgemeiner Lage zum Koordinatensystem (Drehung, Schiebung), Scheitelgleichungen aller Kegelschnitte, Scheitelwertaufgaben (als Ergänzung), und was für die allgemeine Kegelschnittsgeometrie besonders wichtig ist, die gemeinsame Definition der drei Kegelschnittslinien anhand der Leitliniendefinition, der Polargleichung und der Scheitelkrümmungskreise.
Leider vermisse ich schon bei Rosenberg die räumliche Deutung der Kegelschnitte. (Dandelin!).
Dennoch wurde zum Unterschied von Laub bei Rosenberg versucht, die drei Kegelschnittslinien oft unter einem gemeinsamen Aspekt zu betrachten. Ebenso wurde hier die Kegelschnittsgeometrie nahtlos an die übrige Analytische Geometrie gegliedert.

---

[86] Rosenberg, Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit Lösungen und einem Leitfaden für die 7. und 8. Klasse der Mittelschulen und gleichgestellten Anstalten, Wien 1961
[87] Laub, Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der Allgemeinbildenden höheren Schulen. 3.Bd. Wien 1980

Vor allem wird die Ellipse nicht nur als "Konstante Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten" eingeführt, sondern auch als "senkrecht affines Bild eines Kreises" angesehen. Gesamt gesehen ein wichtiger Faktor, der bei Laub mit keinem Wort angedeutet wurde.

Bei Rosenberg sind die einzelnen Kapitel der Analytischen Geometrie logisch-zusammenhängend aneinandergereiht. Vom Punkt zur Geraden, weiter zum Kreis, und vom Kreis zu den Kegelschnitten.

Anders im Lehrbuch von Laub. Erstens ist das oben angesprochene 'Zusammengehörigkeitsgefühl' nicht gegeben, bedingt durch das 'Ausdehnen' der Analytischen Geometrie auf drei Schuljahre. Man hat nicht das Gefühl, dass Kegelschnitte zu irgendeinem anderen Teil der Mathematik dazugehören. Genauso wenig wie zur Analytischen Geometrie. Sie sind ein selbständiger Teil geworden, der zur übrigen Mathematik keinerlei Beziehung mehr aufweist. Übrig ist ein "Teil" geblieben, dessen 'Umfangsarmut' nicht unbedingt zur Wichtigkeit und Beachtung beiträgt.

Der zweite gravierende Unterschied zu Rosenberg ist die bereits erwähnte Behandlung der Kegelschnitte untereinander. Laub bevorzugt folgendes Prinzip: "Ein Kegelschnitt nach dem anderen". Zuerst wird die Ellipse mit all ihren Eigenschaften und Definitionen besprochen. Danach die Hyperbel und zum Schluss die Parabel. Wie bereits erwähnt, werden die Kegelschnitte nirgends unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt behandelt. Es fehlte ebenso der geschichtliche Bezug. Konnte denn so das Interesse an der Sache wirklich gefördert werden?

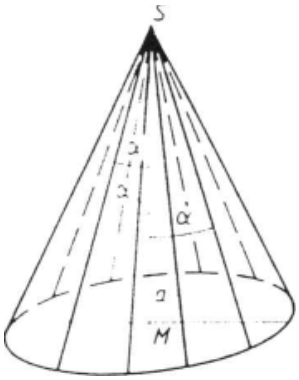
Man braucht sich ja dann wirklich nicht zu wundern, wenn von der Schülerseite die Frage auftaucht: "Wozu brauch' ich denn das?". Wenn man keinen Zusammenhang zur übrigen Mathematik oder überhaupt zu irgendetwas anderem sieht, ist das kein Wunder.

Um sich ein möglichst gutes Gesamtbild machen zu können, möchte ich in diesem Zusammenhang noch zwei andere Mathematiklehrbücher der 7. Klasse erwähnen, die ebenfalls am Ende der 70-er Jahre und am Beginn der 80-er Jahre in den Gymnasien verwendet wurden.

Das erste ist ein Lehrbuch von Szirucsek[88]. Man kann es fast nicht glauben, aber Kegelschnitte finden in diesem Buch nicht einmal eine Erwähnung.
Obwohl dieses Mathematikbuch "für die 7. Klasse der Naturwissenschaftlichen und Mathematischen Realgymnasien" mit Erlass des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst 1974 zugelassen wurde, und der Lehrplan zu dieser Zeit sehr wohl Kegelschnittslinien im Unterricht vorschrieb, wird bei Szirucsek lediglich die Analytische Geometrie des Kreises ausführlich behandelt.

Das zweite Lehrbuch, das ich an dieser Stelle erwähnen möchte, ist jenes von Bürger-Fischer-Malle.[89] Die Behandlung der drei Kegelschnittslinien vollzieht sich in diesem Buch genauso wie im Lehrbuch von Laub. Nacheinander werden Ellipse, Hyperbel und Parabel mit allen Herleitungen im Anschluss an die Differentialrechnung besprochen.[90] Dennoch ist am Ende nach der Parabel ein Kapitel der „räumlichen Deutung der Kegelschnitte“ gewidmet.

Dazu heißt es in der Einleitung:[91]



„Ellipsen und Hyperbeln (wo bleiben die Parabeln?) *treten auch als Schnittlinien eines Kegels mit einer Ebene auf. Üblicherweise wird unter dem Begriff "Kegel" ein Körper verstanden, der begrenzt wird von einem Kreis als Grundfläche und einer Mantelfläche, die aus Strecken gleicher Länge besteht, die alle die Spitze S des Kegels als gemeinsamen Endpunkt haben.*

[88] Szirucsek-Unfried, Arbeitslehrbuch Mathematik 7. Wien 1975
[89] Bürger-Fischer-Malle, Mathematik Oberstufe 3, Wien 1980
[90] Bei Laub kommen nach den Kegelschnitten die Komplexen Zahlen und erst dann die Differentialrechnung.
[91] Bürger-Fischer-Malle, S.159

Jede dieser "Mantellinien" bildet mit der Achse a des Kegels, das ist die Gerade durch die Spitze S des Kegels und durch den Mittelpunkt M der Grundfläche, gleich große Winkel. (…)“

Schritt für Schritt (eher langwierig) werden nun die Kegelschnitte mittels vieler Zeichnungen und vieler Begleitkommentare als wirkliche Schnitte eines Kegels mit einer Ebene definiert. Immerhin ein positiver Aspekt!

Man sieht bei Betrachtung der drei Lehrbücher von Laub, Szirucsek und Bürger recht deutlich, inwieweit sich eine unpräzise Formulierung im Lehrplan auf die Lehrbücher und somit auf den Unterricht auswirken kann. Ebenso ist die Intention des Lehrers in dieser Beziehung mitentscheidend.

Ein Mathematiklehrer, der mit Kegelschnitten eher wenig anzufangen weiß, wird sich entweder an die im Lehrbuch dürftig besprochenen Kapiteln halten oder sie überhaupt nur am Rande erwähnen, soweit er es mit dem Lehrplan vereinbaren kann.

Mit 1.September 1985 sind neue Lehrpläne der Allgemeinbildenden höheren Schulen, beginnend mit der 1.Klasse, in Kraft getreten. *"Damit werden, mehr als zwei Jahrzehnte nach dem Wirksamwerden des Schulorganisationsgesetzes 1962 und nach mehreren Abschnitten von Änderungen, Ergänzungen und Erneuerungen in Teilen des seit damals bestehenden Lehrplanwerkes, Reformschritte eingeleitet, die eine Neuordnung und Neuorientierung der Lehrpläne auf der Grundlage und in Erfüllung der gesetzlichen Bestimmungen zum Ziel haben.“*[92]

Nun, der „Zerfall“ der Kegelschnittsgeometrie in den Lehrplänen geht indessen unaufhaltsam weiter.

[92] Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen, Vorwort zur ersten Auflage, 3., ergänzte Auflage, Stand: 1. Juli 1988

Ich zitiere aus dem Lehrplan der 7. Klasse:[93]
(G, WkRG: 3 Wochenstunden; RG: 4 Wochenstunden)

„Nichtlineare analytische Geometrie:
Das analytische Beschreiben von geometrischen Objekten durch nicht lineare Gleichungen (Herleiten von Gleichungen), das analytische Untersuchen von geometrischen Beziehungen und das rechnerische Lösen von geometrischen Problemen sollen die Hauptaktivitäten der Schüler sein. Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich."

Anhand eines Vergleiches zwischen Kreis und Kegelschnitt wird diese Forderung erst deutlich sichtbar:[94]

"Kreis:
Herleiten einer Gleichung des Kreises. Untersuchen von Lagebeziehungen zwischen Kreisen und Geraden bzw. zwischen Kreisen und Kreisen. Rechnerisches Lösen von Kreisaufgaben nach Möglichkeit in Verbindung mit konstruktiven Lösungswegen. Beschreiben von Lösungswegen, gegebenenfalls Begründen des Vorgehens."

Kegelschnittslinien:
Exemplarisches Herleiten von Gleichungen von Kegelschnittslinien. Untersuchen der gegenseitigen Lage von Kegelschnittslinien und Geraden."

[93] Lehrplan der…, S.392
[94] Lehrplan der…, S.393

3.2.5 Sind die Kegelschnitte noch zu retten?

Der für die 7. Klasse ab 1.9.1991 neu in Kraft getretene Lehrplan sieht eine Neuanordnung des Lehrstoffes vor. Abgesehen von einem gänzlich neuen Kapitel ("Vernetzte Systeme") wird die analytische Behandlung des Kreises und der Kugel wieder in die 7. Klasse aufgenommen. So gesehen ein Vorteil, denn damit ist die Analytische Geometrie nicht mehr auf drei Klassen aufgeteilt, sondern beschränkt sich nur noch auf zwei Klassen und auf zwei Hauptteile:
Lineare- und Nichtlineare Analytische Geometrie.
Die Kegelschnittslinien werden somit nicht mehr völlig von der übrigen Analytischen Geometrie abgespalten (vgl. Laub!), ja sie scheinen sogar dort ihren festen Platz wieder gefunden zu haben.
Für die Kegelschnittsgeometrie wäre diese Novellierung ein positiver Aspekt, wenn sie nicht gleichzeitig einer Einschränkung im Lehrplan unterworfen wäre.
Die Formulierung "Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich" ermöglicht natürlich eine Interpretation in verschiedene Richtungen. Ist damit nun eine über die Lehrplanforderung gehende Behandlung der Kegelschnitte gemeint oder bezieht sich dieser "Vorschlag" lediglich auf die im Lehrplan festgesetzten Bestimmungen?
Das letztere würde bedeuten, dass den Kegelschnitten auch weiterhin eine traurige Zukunft bevorsteht. Man denke da nur an die Stoffvielfalt (besonders in der 7. Klasse), die es dem Lehrer wirklich nicht leicht macht, alles durchzunehmen. Somit werden dann zwangsläufig gewisse Kapitel gekürzt oder gar gestrichen. Genau jener besprochene "Vorschlag" des Lehrplanes ist es dann, der die Entscheidung des Lehrers, was man nun wegfallen lassen kann und was nicht, beeinflussen könnte.
Dennoch gibt es noch einige schulmathematisch Verantwortliche, für die die Kegelschnittsgeometrie nichts von ihrer Bedeutung für den didaktischen Unterricht eingebüßt hat.
Prof. Dr. H.C.Reichel, um nur einen zu nennen, unterrichtete an der Universität Wien und war Mitautor eines Lehrbuches (1. bis 8. Klasse) für die Allgemeinbildenden höheren Schulen, wobei mit dem Schuljahr (92/93) die Serie mit dem Lehrbuch für die 8.Klasse abgeschlossen wurde.

Ich greife gerade dieses Buch heraus, weil es derzeit mit ungefähr 50% Marktanteil "Leader" auf dem Mathematikschulbuchsektor ist, und dementsprechend die gegenwärtige Situation des Mathematikunterrichts am besten reflektiert.

Durch den Einsatz der Autoren wurde es möglich, die Kegelschnitte (soweit dies der Lehrplan zuließ) wirklich sinnvoll in die analytische Geometrie "einzubetten" und ihnen damit ihren zustehenden Stellenwert in der Mathematik einigermaßen wiederzugeben.

Dies wurde im Lehrbuch der 7. Klasse folgendermaßen erreicht:[95]

Am Beginn der "Nichlinearen Analytischen Geometrie" wurde ein Teil dazu verwendet, die lineare analytische Geometrie zu wiederholen. Aufbauend auf diesem Grundstock kann nun die Analytische Geometrie des Kreises angegangen werden. Es folgt die Ellipse ("durch Stauchung eines Kreises: die y-Koordinaten der Kreispunkte wurden (mittels Strahlensatz) jeweils mit dem gleichen Faktor verkürzt"), Hyperbel und Parabel. Sie werden anhand der Brennpunktseigenschaft (Ellipse, Hyperbel) und der Ortsliniendefinition (Parabel) hergeleitet. Ebenso vertreten ist auch die Konstruktion der Kegelschnittslinien und die ihrer "Schmiegkreise".

Der nächste Teil ("Schnitt- und Berührauffgaben") befasst sich mit der Herleitung der Berührbedingung und Tangentengleichung ("Gegenseitige Lage der Kegelschnittslinien und Geraden").

Extremwertaufgaben in Verbindung mit Kegelschnitten bilden für den Moment den Abschluss der Kegelschnittsgeometrie.

In einem eigenen Kapitel ("Rückblick und Ausblick") wird nach der Behandlung der Kugel dennoch wieder auf Kegelschnitte eingegangen. Dabei zeigt sich deutlich die Handschrift Reichels. Beginnend mit dem 'Delischen Problem' (vgl. Kapitel 1!) wird gezeigt, wie sich daraus die Kegelschnitte als tatsächliche Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene erklären lassen. Nach dem Beweis der Scheitelgleichung der Kegelschnitte (alle drei Kegelschnitte werden durch eine Gleichung beschrieben):

$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2$ gibt das nächste Kapitel ("Komplexe Elemente") Einblick in die etwas "anspruchsvollere Welt" der Kegelschnittsgeometrie.

[95] Reichel, Müller, Hanisch, Laub, Lehrbuch der Mathematik 7, Wien 1991.

Dieser Teil befasst sich mit *„Tangenten, die man aus dem Ursprung an Kegelschnitte in Hauptlage legen kann“*, mit *„zerfallenden Kegelschnitten“* und, zu guter Letzt als Höhepunkt mit dem bereits besprochenen *„Beweis von Dandelin“.*

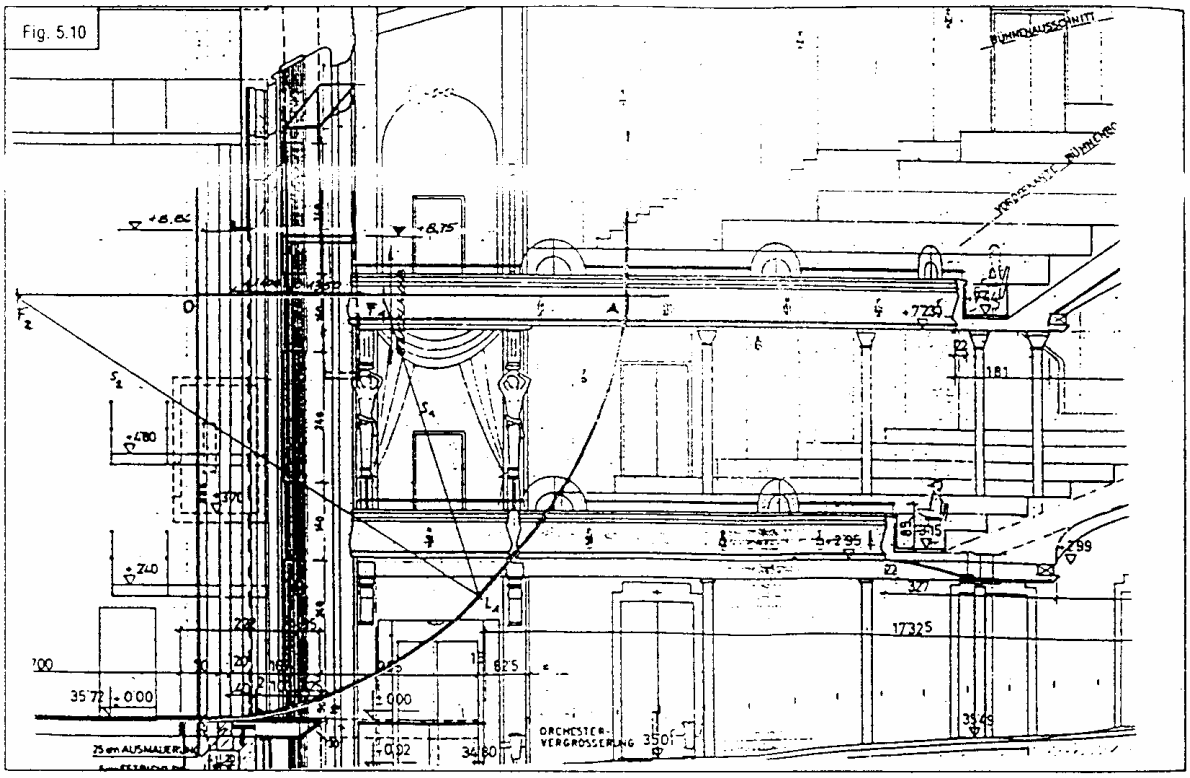
Allgemein lässt sich feststellen:
Ein gut gelungener Aufbau der Analytischen Geometrie, der durch die Wiederholung der Linearen Analytischen Geometrie am Beginn nichts von seinem Zusammenhang verloren hat. Die chronologische Abfolge erscheint logisch und schließt somit in dieser Beziehung weitgehend an die Tradition der älteren Geometriebücher an. (vgl. Mocnik!).

Das Fehlen so mancher wichtiger Teilbereiche der Kegelschnittsgeometrie im Lehrplan wird durch kluge "Umarbeitung" im Lehrbuch sehr gut wettgemacht.
Außerdem widmet ihr das Lehrbuch der 8. Klasse ein weiteres Kapitel *("Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung")*, in welchem die 'Flächen 2. Grades' und die 'Polarentheorie' einer ausführlichen Behandlung unterzogen werden.
Erwähnenswert ist ebenso die große Anzahl an realitätsbezogenen und interessanten Beispielen.

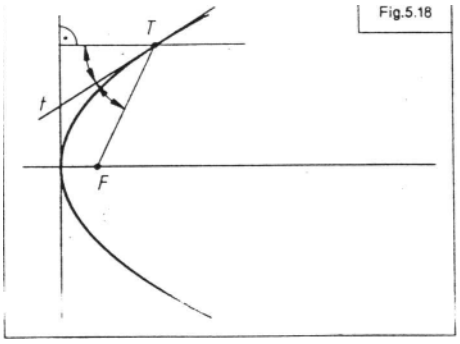
Stellvertretend dafür möchte ich auszugsweise 2 Angaben anführen:

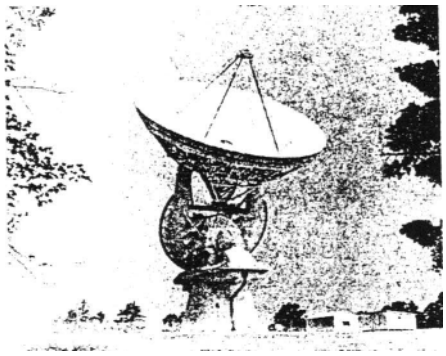
1) In Andrew Lloyd Webbers Musical "Das Phantom der Oper" "fällt" der Luster L, der über dem Publikum hängt, auf die Bühne. Nachdem er eine senkrechte Strecke zurückgelegt hat, bewegt er sich auf einer Ellipsenbahn. Dazu wird er von zwei Seilwinden F_1 und F_2 gesteuert, die sich 7 Meter oberhalb der Bühne befinden. F_1 liegt 2,5m vor, F_2 4,5m hinter dem Vorhang. Der Punkt L1 befindet sich aus Sicherheitsgründen 1,3m oberhalb der Bühne und 3,85m vor dem Vorhang. In welchem Punkt P trifft der Luster auf die Bühne? (Abb.)[96]

[96] Reichel, Müller, Hanisch, Lehrbuch der Mathematik 8, S.176



2) Es sei t eine Tangente einer Parabel und T der dazugehörige Berührpunkt. Beweise: Die Tangente t halbiert den Winkel zwischen FT und der Normalen auf die Leitgerade l durch T. Erkläre, wie diese Eigenschaft bei Parabolspiegel-teleskopen und Parabolscheinwerfern verwendet wird! (Abb.)[97]





[97] Reichel, Müller, Hanisch, Lehrbuch der Mathematik 8, S.190

Ich möchte an dieser Stelle noch einmal das Bemühen der Autoren dieses Lehrbuches hervorheben. Sie haben mit mannigfaltiger und detailreicher Einbeziehung der Kegelschnitte in die Analytische Geometrie versucht, der Einschränkung der Kegelschnittsgeometrie im Lehrplan entgegenzuwirken.
Das folgende Zitat soll ein wenig die „Philosophie“ dieses Lehrbuchs reflektieren:[98]

> *„Es wird so viel in das Buch hineingegeben, dass es unmöglich wird, alles durchzunehmen.“*
> (Gemeint sind hier die vielen Beispiele)

Der Mathemetiklehrer bekommt dadurch einen noch größeren Freiraum, die Gewichtung von Lehrinhalten selbst zu bestimmen.

3.2.6 Die letzten 15 Jahre

Was hat sich auf dem Schulbuchsektor bezüglich der Kegelschnitte in den letzten 15 Jahren getan?
Stellvertretend dafür möchte ich zwei Lehrbücher herausgreifen: jenes von Götz-Reichel[99] und jenes von Malle-Ramharter[100], mit dem ich durch besondere Umstände selbst als Vertragslehrer im Schuljahr 2007/2008 gearbeitet habe.

Im neuen Lehrplan, der für die AHS-Oberstufe seit dem Schuljahr 2004/2005 gültig ist[101], kehrten die Kegelschnitte wieder etwas vermehrt in den Mathematik-unterricht zurück. Die Kegelschnitte (nach wie vor im Kapitel der Nichlinearen analytischen Geometrie eingebettet) werden im Lehrplan wie folgt beschrieben:

---

[98] Prof. Dr. Hanisch, Mitautor dieses Lehrbuches
[99] Götz, Reichel, Müller, Hanisch, Lehrbuch der Mathematik 7, 4. Auflage 2004
[100] Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, Mathematik verstehen 7, 1. Auflage 2006
[101] BGBl. II Nr. 277/2004

Nichtlineare analytische Geometrie:

-) Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen

-) Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten

-) Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen

-) Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen

Nach wie vor wird der Kreis getrennt von den Kegelschnitten betrachtet. Dem Kreis wird in der Formulierung im Lehrplan durch die Trennung zu den Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel und Parabel nach wie vor mehr Bedeutung beigemessen und als eigener Aspekt betrachtet. Aufgrund der Tatsache, dass ein Kreis sich sehr leicht mit einem Zirkel konstruieren lässt, er bereits in der 1. Klasse durchgenommen wird (Kreisteile, Lagebeziehung: Kreis-Kreis, Kreis-Gerade), muss man ihm zugegebenermaßen einen besonderen Stellenwert beimessen. Trotzdem: Ist denn ein Kreis keine Kegelschnittslinie? Entsteht ein Kreis denn nicht ebenso durch einen Schnitt einer Ebene mit einem Drehkegel? Warum kann man denn die Einführung der „4“ Kegelschnittslinien denn nicht ***gemeinsam*** gestalten, indem man den geometrischen Aspekt der Thematik etwas in den Vordergrund rückt?

Beide Lehrbücher beginnen dieses Kapitel mit einer ähnlichen Abfolge, wobei die oben erwähnte Trennung bei Malle sehr deutlich zum Ausdruck kommt, denn er hat dem Kreis bzw. der Kugel ein eigenes Kapitel gewidmet [102](!):

[102] Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, Mathematik verstehen 7, S.3f

6 Kreis und Kugel 132
6.1 Der Kreis 132
6.2 Schnitt von Kreis und Gerade 136
6.3 Tangenten eines Kreises 139

6.4 Schnitt und gegenseitige Lage zweier Kreise 143
6.5 Die Kugel 146

7 Ellipse, Hyperbel und Parabel 150
7.1 Die Ellipse 150
7.2 Schnitt von Ellipse und Gerade 157
7.3 Tangenten einer Ellipse 159
7.4 Die Hyperbel 162
7.5 Asymptoten einer Hyperbel 169
7.6 Schnitt von Hyperbel und Gerade 171
7.7 Tangenten einer Hyperbel 172
7.8 Die Parabel 174
7.9 Schnitt von Parabel und Gerade 178
7.10 Tangenten einer Parabel 179
7.11 Kegelschnitte 181
7.12 Einige Anwendungen der Kegelschnitte 185
7.13 Historisches zu den Kegelschnitten 190

Wie hier zu erkennen ist, wird auf Seite 4 unter Kapitel 7 („Ellipse, Hyperbel und Parabel“) erst bei Punkt 7.11 auf Kegelschnitte als „Schnitte eines Drehkegels“ eingegangen. Und zwar einleitend mit den Worten:

> *„In diesem Abschnitt lernen wir, warum man Ellipse, Hyperbel und Parabel mit dem gemeinsamen Namen „Kegelschnitte“ versieht.“*[103]

Keine Erwähnung von einem Kreis! Ebenso wenig bei der graphischen Darstellung des Doppelkegels mit den verschiedenen Ebenen. Eine Schnittebene, die normal auf die Kegelachse steht, wird nicht erwähnt.[104]

Ähnlich ist die Situation bei Götz-Reichel: Beginnend mit dem Kreis als „selbständiges *Individuum“* mit der üblichen Ortsliniendefinition als *„Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben…“*, werden die Unterpunkte „Kreisschnitte“, und „Kreistangenten“ behandelt, bevor man zur Definition der Ellipse übergeht.

---

[103] Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, Mathematik verstehen 7, S.181
[104] Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, Mathematik verstehen 7, S.182

Also: Es werden die Kegelschnitte nacheinander abgehandelt, und so der Eindruck erweckt, diese „Kegelschnittslinien“ würden nichts miteinander gemein haben. Erst gegen Ende des Kapitels der „Nichtlinearen analytischen Geometrie“ wird auch hier auf den gemeinsamen Aspekt der „4“ im Kapitel: *„Rückblick und Ausblick“* eingegangen (wird im Normalfall im Unterricht aufgrund des Zeitmangels nicht wirklich behandelt). Man muss den Autoren allerdings zugute halten, dass der Kreis hier im Unterschied zum Lehrbuch von Malle als „Kegelschnitt“ gemeinsam mit Ellipse, Hyperbel und Parabel Berücksichtigung findet.[105]

Wenn man schon den Kreis als Ortslinie definiert, verschiedene Kreisgleichungen kennen lernt, bereits Konstruktionsbeispiele mit Kreisen in der Unterstufe durchgenommen hat, könnte man ja vermehrt die zugrunde liegende Geometrie heranziehen und mehr Beispiele rechnen, die auch geometrisch zu lösen sind !

Typisch dafür ist folgendes Beispiel:
Die Aufgabe besteht darin, von einem gegebenen Punkt aus Tangenten an einen gegebenen Kreis zu legen. Für dieses Beispiel gibt es 6 Lösungsmöglichkeiten (in der 7. Klasse):

1) mit dem THALESKREIS
2) mit der HESSE´schen ABSTANDSFORMEL
3) mit der BERÜHRBEDINGUNG
4) mit der SPALTFORM (als Polarengleichung)
5) mit dem PYTHAGOREISCHEN LEHRSATZ
6) mit einem GLEICHUNGSSYSTEM (Berührpunkt T liegt sowohl auf dem Kreis als auch auf der Tangente)

Beide Lehrbücher haben dieses Beispiel durchgerechnet bzw. erklärt. Zunächst jene Darstellung von Götz-Reichel:[106]

[105] Reichel, Müller, Hanisch, Lehrbuch der Mathematik 7, S.207
[106] Reichel, Müller, Hanisch, Lehrbuch der Mathematik 7, S.174

Beispiel I: Ermittle rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt P(8|6) an den Kreis k[M(3|1); $\sqrt{5}$]? Überlege verschiedene Lösungswege!

Lösung:

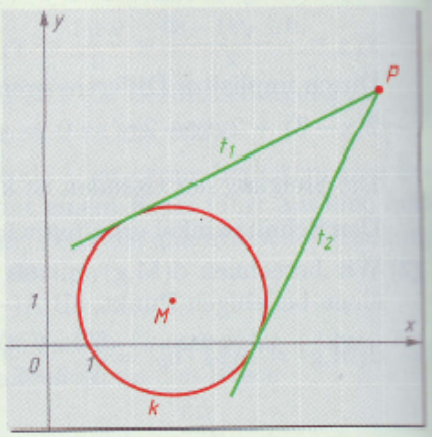
(1) Anwendendes Berührbedingung: $(k \cdot x_M - y_M + d)^2 = r^2(k^2+1) \rightarrow (3k - 1 + d)^2 = 5(k^2+1)$. Da die Tangenten $y = kx + d$ durch P gehen sollen, muss gelten: $6 = k \cdot 8 + d$, also $d = 6 - 8k$. Einsetzen in die Berührbedingung liefert eine quadratische Gleichung in k:

$(3k - 1 + 6 - 8k)^2 = 5(k^2 + 1) \Rightarrow$

$(-5k + 5)^2 = 5(k^2 + 1) \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0$

$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$ $\nearrow k_1 = 0{,}5 \Rightarrow d_1 = 2 \Rightarrow t_1: y = 0{,}5 \cdot x + 2$

$\searrow k_2 = 2 \Rightarrow d_2 = -10 \Rightarrow t_2: y = 2x - 10$



(2) Anwenden der HESSE'schen Abstandsformel: Wir verwenden P(8|6) als festen Punkt und $\vec{n} = (-k|1)$ als Normalvektor der gesuchten Tangente t: $y = kx + d$:

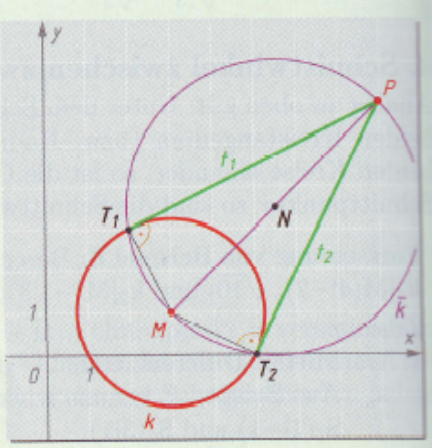
$r = d(M,t) = |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n_0}| = \left|\begin{pmatrix} 3-8 \\ 1-6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}\right|$

$\sqrt{5} = \left|\frac{5k - 5}{\sqrt{1+k^2}}\right| \Rightarrow 5(k^2 + 1) = (5k - 5)^2$

Die restliche Rechnung verläuft wie unter Lösungsweg **(1)**.

(3) Anwenden des THALESkreises: Da die Tangente normal auf den Berührradius steht, muss der Berührpunkt T auf dem THALESkreis $\bar{k}$ über der Strecke MP liegen. Dessen Mittelpunkt N ist der Halbierungspunkt der Strecke MP, sein Radius $\bar{r} = |\overrightarrow{MN}|$ (mittlere Figur):

$N = \frac{P + M}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8+3 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{r} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \sqrt{12{,}5}$



Die gesuchten Berührpunkte T_1 und T_2 sind die Schnittpunkte der beiden Kreise k und $\bar{k}$:

$\bar{k}: (x - 5{,}5)^2 + (y - 3{,}5)^2 = 12{,}5 \Leftrightarrow x^2 - 11x + y^2 - 7y + 30 = 0$

$k: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$

Durch Subtrahieren der beiden Gleichungen erhalten wir:

$5x + 5y - 25 = 0 \Rightarrow y = 5 - x$

Setzen wir für y in eine der beiden Kreisgleichungen ein und lösen die dabei auftretende quadratische Gleichung, so erhalten wir die Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2:

$(x - 3)^2 + ((5 - x) - 1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow$

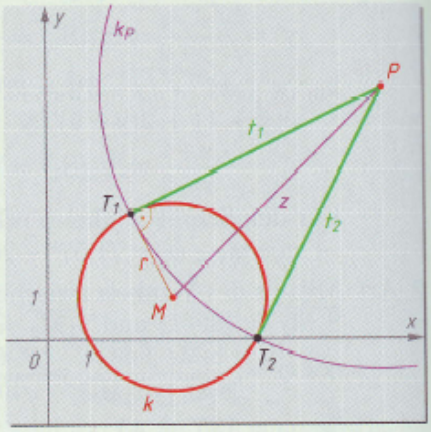
$x_1 = 2$ bzw. $x_2 = 5 \Rightarrow T_1(2|3)$ bzw. $T_2(5|0)$.

Unter Verwendung der Spaltform erhalten wir schließlich

$t_1: (2 - 3) \cdot (x - 3) + (3 - 1) \cdot (y - 1) = 5 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$

$t_2: (5 - 3) \cdot (x - 3) + (0 - 1) \cdot (y - 1) = 5 \Rightarrow 2x - y - 10 = 0$

(4) Anwenden des pythagoreischen Lehrsatzes: Gemäß der unteren Figur gilt $t^2 = z^2 - r^2$. In unserem Fall ist $z = |\overrightarrow{PM}| = |M - P| = |(-5|-5)| = 5\sqrt{2}$ und daher $t^2 = 50 - 5 = 45$. Die Schnittpunkte des Kreises $k_P[P; \sqrt{45}]$ mit k sind die gesuchten Berührpunkte T_1 und T_2:



$k_P: (x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 - 16x + y^2 - 12y + 55 = 0$

$k: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$

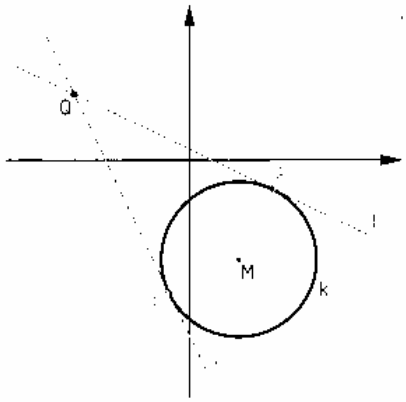
Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, so erhalten wir: $-10x - 10y + 50 = 0 \Rightarrow y = 5 - x$

Der Rest der Rechnung ist identisch mit Lösungsweg **(3)**.

Nun jene Lösungsvariante(n) von Malle:[107]

Tangenten von einem Punkt an einen Kreis

Durch den Punkt $Q = (-7|4)$ sind Tangenten an den Kreis k zu legen, der den Mittelpunkt $M = (3|-6)$ und den Radius $r = \sqrt{20}$ hat. Berechne die Koordinaten der Berührungspunkte.



Gleichung des Kreises k:
$k: (x-3)^2 + (y+6)^2 = 20$
$k: x^2 + y^2 - 6x + 12y + 25 = 0$

Gleichung der Tangente t in einem Berührungspunkt $P = (p_1|p_2)$:
$t: (x-3)\cdot(p_1-3) + (y+6)\cdot(p_2+6) = 20$

Da Q auf t liegt, gilt:
$(-7-3)\cdot(p_1-3) + (4+6)\cdot(p_2+6) = 20$
$-p_1 + p_2 + 7 = 0$

Da $P = (p_1|p_2)$ auf k liegt, gilt:
$p_1^2 + p_2^2 - 6p_1 + 12p_2 + 25 = 0$

Insgesamt erhalten wir also folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{cases} p_1^2 + p_2^2 - 6p_1 + 12p_2 + 25 = 0 \\ -p_1 + p_2 + 7 = 0 \end{cases}$$

Löse dieses Gleichungssystem selbst. Es ergibt sich $p_1 = 5 \vee p_1 = -1$. Aus der zweiten Gleichung ergeben sich die dazugehörigen Werte $p_2 = -2$ bzw. $p_2 = 8$.

Somit erhalten wir die Berührungspunkte:
$P = (5|-2)$, $P' = (-1|8)$

Mit Ausnahme von der Spaltform (als Polarengleichung) und dem Gleichungssystem (zu abstrakt) hat das Lehrbuch von Götz-Reichel alle Lösungsmöglichkeiten (inklusive graphischer Belegung) präsentiert. (Das Kapitel **Pol-Polare** wird in diesem Buch nicht aufgegriffen – Erweiterungsstoff in der 8. Klasse).

Dagegen präsentiert Malle lediglich eine (!) Lösungsmöglichkeit – noch dazu jene, die man nicht einmal graphisch anhand einer Konstruktion erklären kann. Die THALESKREIS-Methode kann er leider zu diesem Zeitpunkt nicht bringen, da der Schnitt zweier Kreise erst im nächsten Kapitel: *„Schnitt und gegenseitige Lage zweier Kreise“* durchgenommen wird.

[107] Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, Mathematik verstehen 7, S.141

Die Variante mit der Berührbedingung wird nicht verwendet (im gesamten Buch nicht), obwohl gerade die Herleitung der Berührbedingung eine sehr schöne Schüleraufgabe auch hinsichtlich der Fähigkeit des Argumentierens darstellt.

Obwohl beiden Büchern derselbe Lehrplan zugrunde liegt, sind bei der Gewichtung, der Abfolge und dem Inhalt dennoch große Unterschiede zu bemerken, was die Vermutung aufkommen lässt, dass der Lehrplan den Schulbuchautoren nach wie vor sehr viel Freiraum lässt. Warum also tendiert die Schulmathematik zu dieser „Entgeometrisierung“?

3.3 Einige Gedanken zur Didaktik des Mathematikunterrichts

Meines Erachtens wirkt sich diese bereits in Kap. 3.2.4. Seite 100 erwähnte „unpräzise Formulierung“ im Lehrplan, das heißt, eine Formulierung, die verschieden aufgefasst werden kann, sehr negativ auf die Entwicklung der Kegelschnittslinien im Unterricht aus (abgesehen davon, dass sie im Lehrplan sowieso einer Reduzierung unterworfen sind).

So gesehen ist es ja nicht primär die Schuld der Lehrbuchautoren, dass Kegelschnitte im Unterricht mehr oder minder zurückgedrängt werden. Man muss ebenso feststellen, dass durch die neue Schulmathematik die Geometrie allgemein sehr viel "an Boden verloren hat". Die Schulmathematik tendiert, wie bereits erwähnt, zu einer „Entgeometrisierung“!

"Nach einer statistischen Erhebung unter 100 praktischen Mathematikern, die dazu diente, festzustellen, welche Art von Anforderungen an sie hauptsächlich gestellt werden, benötigten 40 von ihnen in erster Linie Kenntnisse der Analysis und Algebra, 36 solche der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, 15 gaben Rechentechnik und lediglich 2 Geometrie als besonders notwendige Spezialgebiete an." [108]

Diese Tendenz ist Summe all der neu hinzugekommenen "abstrakteren" hochschulmathematischen Lehrinhalte.
"Anschauung" geht auf Kosten der "Abstraktheit", obwohl laut Lehrplan "Das Anschauungsvermögen auszubilden" eine Bildungs- und Lehraufgabe des Mathematikunterrichts darstellen soll. [109]

Die Schulung der Anschauung mit Berücksichtigung der räumlichen Lageverhältnisse und Beziehungen ist eine unerlässliche Bedingung für das Entstehen von Raumvorstellung. Deshalb sollte das Anschauungsvermögen, zusammen mit der Raumauffassung und -erfassung ein wichtiger Faktor innerhalb des formalen Bildungswertes der Mathematik bleiben.

Die Geometrie bietet viele Arten von Problemstellungen, die produktives Denken fördern können. Damit meine ich nicht nur Konstruktionsbeispiele, sondern auch "skizzenhaftes Zeichnen", welches vor allem bei der Analytischen Geometrie unerlässlich ist. Bereits vor 20 Jahren versuchte man dem Rückgang der Geometrie entgegenzuwirken:

"Geometrisch-anschauliche Darstellungen und die Interpretation solcher Darstellungen können ein wichtiges Mittel zu einem vertieften Verständnis mathematischer Inhalte sein. Hervorzuheben sind Veranschaulichungen von Zahlenbeziehungen, Rechenoperationen und Rechenregeln sowie graphische Darstellungen von funktionalen Beziehungen und von statistischen Ergebnissen." [110]

---

[108] Mitteilungen des mathematischen Labors, in: Provaznik, S.47
[109] Bundesgesetzblatt Nr. 275, S.1492
[110] Didaktische Grundsätze, in: Lehrplan-Service, Mathematik AHS. Kommentarheft 2, Wien 1988, S.35

Eine andere Gefahr ist auch in dem Umstand zu sehen, dass die Schulung des Denkens durch die Darbietung eines Übermaßes an Lehrstoff zur Funktion des Nachvollziehens wird. Hält sich der Lehrer streng an seinen Lehrplan, um damit eben seiner "Pflicht" nachzukommen, dann zeigen Schüler und Lehrer die Verhaltensweise einer "Konsumgesellschaft". Es wird schwierig, den Lehrstoff in seiner eigenen Differenzierung zu beurteilen. Möglicherweise, bedrängt vom Lehrplan und keinem schlechten Notendurchschnitt bei Schularbeiten, kann ein Lehrer geradezu animiert werden, die Schüler zum Nachvollzug anzuleiten. Dadurch wird die kritische Prüfung zur Klärung von Problemen wegen Zeitmangels fast unmöglich gemacht.

> *"Die Fortschritte der Mathematik bestehen weniger in einem Vermehren der Kenntnisse als in einem rationellen Einsatz des menschlichen Geistes: Wir verstehen so manches Mal auf leichtere Weise das zu tun, wozu die Genies der vergangenen Jahrhunderte nicht fähig waren."* [111]

Es ist sicherlich notwendig, den mathematischen Unterricht an die Mathematik der Gegenwart anzupassen und im Unterricht auch sinnvoll einzubauen.
Dennoch muss man sich bewusst werden, dass die Stoffvielfalt zwar dem Schüler Einblick in die Materie der höheren Mathematik gibt, aber kann dadurch nicht auch gleichzeitig die Verwirklichung des allgemeinen Bildungszieles gehemmt werden? (Sinnloses Rechnen einer Unzahl von Beispielen).

Klar ist, dass das Lösen von Aufgaben ein ausgezeichnetes Mittel ist, dem Lehrstoff "mehr Bedeutung" zu geben. Wenn man sich vorstellt, dass der Geometrieunterricht früher darin bestand, die Euklidische Geometrie zu vermitteln, ohne dass die Sätze auf Beispiele angewendet wurden, dann wird erst deutlich, was der heutige Unterricht durch die Verwendung von Übungsbeispielen an Lebendigkeit gewonnen hat. Jedoch kann eine diesbezügliche Übersteigerung zu einer Gefahr für einen didaktisch ergiebigen Unterricht werden.

---

[111] Revuz, S.46

Da es nicht sehr einfach ist, neue Aufgaben zu finden, ist man früher oft auf solche gekommen, bei denen alle möglichen "künstlichen" Schwierigkeiten vereinigt waren, die jedoch nie bei wirklichen mathematischen Problemen hätten vorkommen können.

Aus diesen Erörterungen ergibt sich auch die Gefahr für den Mathematik-unterricht: Mathematik als Zweckstudium für Anwendungen im Sinne eines mechanischen Lernens kann keinen Bildungswert haben! Wird Mathematik nur von einem reinen Formalismus geprägt, kann Bildung im eigentlichen Sinn nicht erreicht werden. Und gerade beim Geometrieunterricht ist es möglich, dieser Gefahr durch entsprechende didaktische Maßnahmen entgegenzuwirken.

Nachfolgende "Definition" zeigt recht deutlich jene Gründe auf, welche eine "Renaissance" des Geometrieunterrichts erforderlich machen:

> *"Geometrische Darstellungen können Sachverhalte, insbesondere auch arithmetische und algebraische Beziehungen, veranschaulichen, sie mit Vorstellungen verbinden und damit zu einem beziehungsreichen Mathematikunterricht sowie zu einem vertieften Verständnis beitragen. Geometrie ist eine fundamentale Teildisziplin der Mathematik. Aufbauend auf entsprechende Kenntnisse können in der Geometrie mathematische Grundtätigkeiten, wie produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren, kritisches Denken sowie Darstellen und Interpretieren, durchgeführt werden."*[112]

[112] Bürger, Mühlgassner, S.67

4. Kegelschnitte – Ein wichtiger Beitrag zum Unterricht

4.1 Einleitung

Das folgende Kapitel beschreibt die vielfältig didaktischen Möglichkeiten, die es im Mathematikunterricht bei der Behandlung der Kegelschnitte gibt.

Dazu Reichel:

> *"Kegelschnitte treten im MU unter den verschiedensten jeweils in sich 'geschlossenen' Gesichtspunkten in Erscheinung, die einerseits jeder für sich von Bedeutung sind, und wo andererseits gerade in den Querverbindungen und Wechselwirkungen besonders reizvolle Themen liegen."*[113]

Leider werden diese Querverbindungen und Wechselwirkungen im Mathematikunterricht ihrem Anspruch kaum gerecht. Wie schon im vorigen Kapitel erwähnt, ist im Lehrplan die Kegelschnittsgeometrie von der übrigen Geometrie in den vergangenen Jahren recht deutlich "getrennt" worden. Somit wurde es für den Schüler immer schwieriger, Kegelschnitte als solche in anderen Bereichen der Mathematik überhaupt zu erkennen. Dazu sieht der Lehrplan folgendes vor:

> *„Das analytische Beschreiben von geometrischen Objekten durch nichtlineare Gleichungen (Herleiten von Gleichungen), das analytische Untersuchen von geometrischen Beziehungen und das rechnerische Lösen von geometrischen Problemen sollen die Hauptaktivitäten der Schüler sein. Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich."*[114]

---

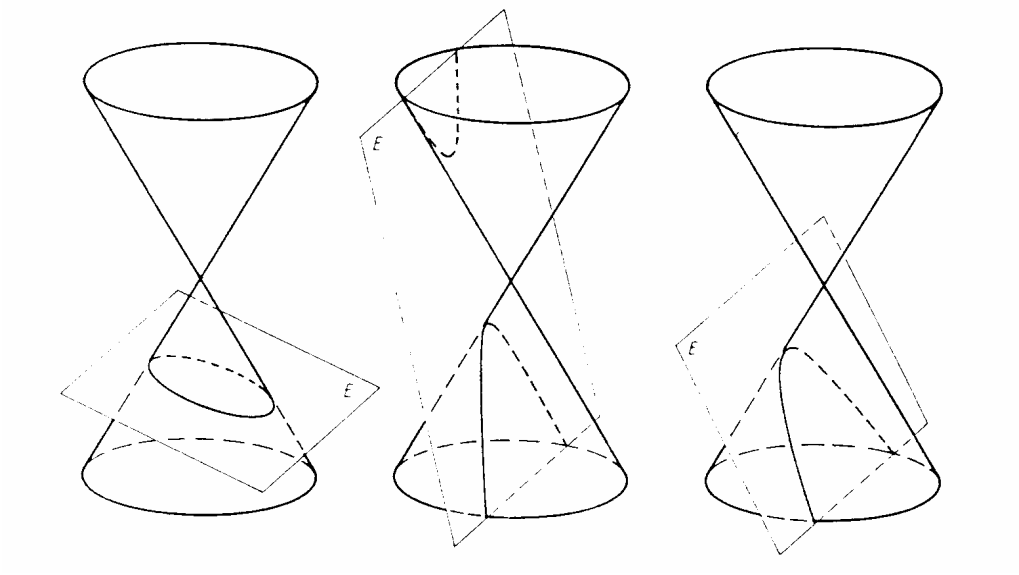
[113] Reichel; Ellipse, Hyperbel, Parabel, S.111
[114] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe 1991, S.146

Ebenso leidet durch die "Entgeometrisierung" das für die Schüler so wichtige räumliche Vorstellungsvermögen. Es wird versucht, beinahe alles analytisch zu beweisen, aber die Tatsache, dass z.B. der analytische Beweis (vor allem in der analytischen Geometrie) hauptsächlich auf einer geometrischen Konstruktion bzw. Vorstellung aufgebaut ist, bleibt oftmals unberücksichtigt. Wie man später sehen wird, haben die Kegelschnitte zahlreiche geometrische Eigenschaften, die sowohl analytisch als auch geometrisch bewiesen werden können.
Gerade solche Beispiele, bei denen sich der Schüler planimetrisch bzw. räumlich etwas vorstellen oder konstruktiv nachvollziehen kann, helfen, das Interesse an der "Sache" zu wecken. Eine wichtige Aufgabe der Geometrie ist es nun mal, den anschaulichen Teil der Mathematik zu repräsentieren.

4.2 Kegelschnitte als Schnitte eines Drehkegels

Definition:
Ein Kegelschnitt ist die Menge aller gemeinsamen Punkte eines sich auf zwei Seiten ins Unendliche erstreckenden Doppelkegels und einer beliebigen Ebene.

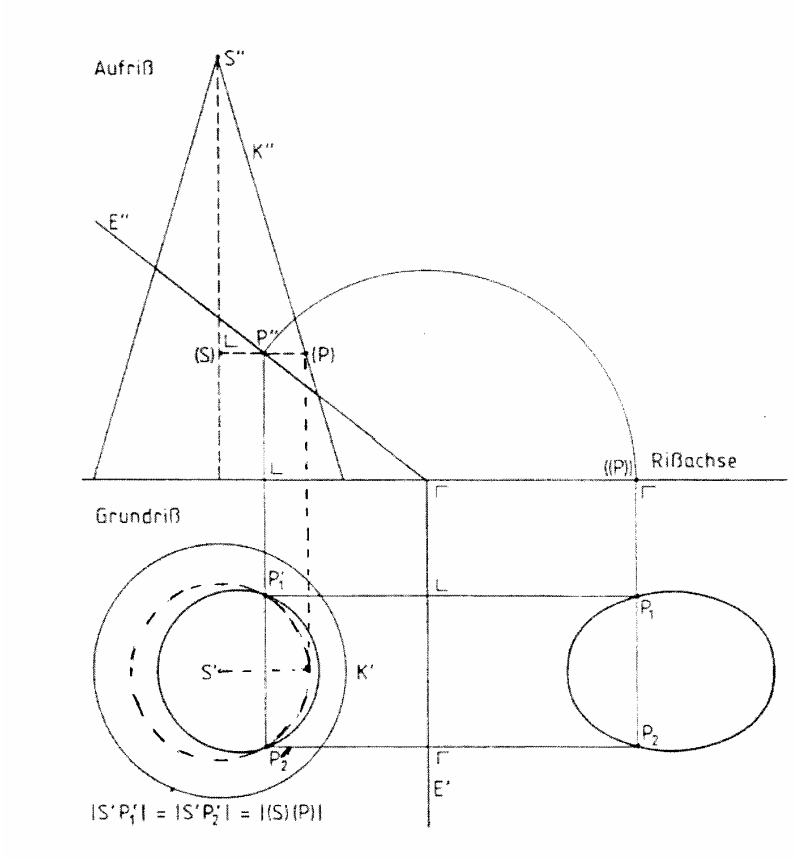
Neben einigen Sonderfällen (Ebene geht durch die Spitze des Kegels: daraus resultiert entweder ein Punkt, eine Gerade oder ein einander schneidendes Geradenpaar) entstehen durch den Schnitt die drei bekannten Kegelschnittsflächen Ellipse (spez. Kreis), Parabel und Hyperbel. (Abb.!)



Ein geometrischer Sachverhalt wie die Kegelschnitte eignet sich zur Behandlung in verschiedenen Darstellungsformen. Darunter gehört sicherlich der Umgang mit Kegelschnittsmodellen, wie sie in jeder Schule zu finden sind; ebenso gehört beispielsweise auch das Hantieren mit Faden- oder Papierstreifenkonstruktion zur Darstellung einer Ellipse dazu.

Falls im Mathematikunterricht Kegelschnitte als tatsächliche Schnitte am Kreiskegel eingeführt werden, ist es sehr schwierig, mit Aufrisszeichnungen und "räumlichen Skizzen" die wahre Gestalt des Kegelschnittes zu erkennen. Dennoch gibt es eine Möglichkeit, aus dem Aufriss eines Drehkegels und einer projizierenden Ebene den Kegelschnitt punktweise zu konstruieren.

Dieses **GRUND-AUFRISS-VERFAHREN** erfordert zwar einige wenige Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie, aber falls die Schüler bereits in der 3. und 4. Klasse Geometrisch Zeichnen als Unterrichtsfach hatten, stellt es bei weitem keine Überbeanspruchung für das räumliche Vorstellungsvermögen dar (Abb.).



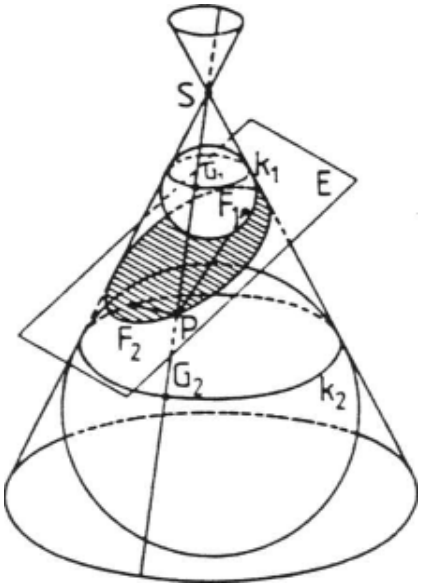
Hier wird versucht, die projizierende Schnittellipse punktweise zu konstruieren:
Sei P ein beliebiger Punkt dieser Ellipse (beginnend mit P´´ im Aufriss);
P´´ liegt ebenfalls auf einem Kleinkreis (projizierend mit Mittelpunkt S) parallel zum Basiskreis; P´ liegt klarerweise einerseits auf einem Ordner und andererseits auf dem Kleinkreis, der im Grundriss ja als tatsächlicher Kreis gesehen wird (da im Aufriss projizierend und parallel zur Grundrissebene); Die Schnittpunkte des Ordners mit dem Kleinkreis ergeben die Grundrissbilder P_1´ und P_2´ .
Da im Grundriss die Ellipse noch verzerrt dargestellt ist, muss sie noch um eine Drehung der Ebene um ihre Schnittgerade E´ in wahre Größe gebracht werden.
Erstmals tauchte dieses verfahren bei Albrecht Dürer (um 1500) auf, der diese Konstruktion 2-Tafel-Projektion nannte.

Der Einstieg der Kegelschnitte als Schnitte eines Kreiskegels ermöglicht eine gemeinsame Einführung aller Kegelschnitte mit dem Ziel, sie auch weiterhin gemeinsam behandeln zu können.

Dies wäre vor allem deshalb so wichtig, da bis dahin im Mathematikunterricht nur einzelne Kegelschnitte (und zudem völlig isoliert) aufgetreten sind (z.B. die Parabel als Graph der quadratischen Funktion $y=x^2$ oder die Hyperbel als Graph der indirekt proportionalen Funktion $y = \frac{1}{x}$.

Kegelschnitte entstammen ohne Zweifel der räumlichen Geometrie und diese Tatsache sollte im Unterricht auf keinen Fall vergessen werden.

Aus der räumlichen Geometrie heraus entstand nun ebenfalls der Beweis des bereits in Kapitel 3 erwähnten Belgiers Dandelin, demzufolge in jeden Teil des geschnittenen Kegels genau eine Kugel passt, welche sowohl Kegel als auch Ebene berührt. Folgende Abbildung gibt ein perspektivisches Bild:



P, ein beliebiger Ellipsenpunkt, wird einerseits mit den Berührpunkten F_1 und F_2 und andererseits mit der Kegelspitze S verbunden. Letztere Verbindung schneidet die Berührkreise (-kugeln) in G_1 und G_2. Es sind $|PF_1|$und $|PG_1|$Tangenten an dieselbe Kugel, wonach $|PF_1| = |PF_2|$ gilt.

Analoges gilt für $|PF_2|$ und $|PG_2|$. Insgesamt also $|PF_1| + |PF_2| = |G_1G_2| = 2a$.

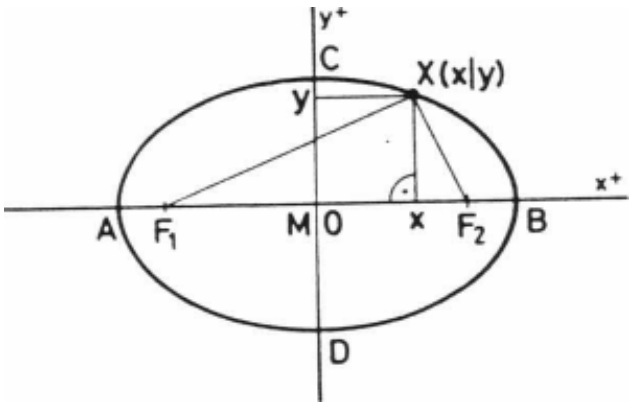
Das bedeutet, für jeden Punkt der Ellipse ist die Summe seiner Entfernungen von den beiden Berührpunkten gleich.

Nun befindet man bereits mitten in der ebenen Behandlung der Kegelschnitte.

Allgemein kann man sagen, dass ausgehend von der räumlichen Geometrie die Kegelschnittseigenschaften recht einfach abzuleiten und zu erkennen sind. Es ergeben sich auch hier in Bezug auf die Raumvorstellung sehr schöne Schüleraufgaben.

4.3 Kegelschnitte als Ortslinien

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, ist die **Ellipse** die Menge aller Punkte, wo die Summe der Entfernungen zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant 2a ist (Abb.):



$$\text{ell} = \{x \in R \;/\; |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$$

Aus der Ellipsengleichung in Hauptlage (Mittelpunkt im Ursprung, Brennpunkt (e/0) auf der x-Achse) ergibt sich folgende Gleichung:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+e)^2+y^2} \qquad \Rightarrow$$

$$(x-e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)+y^2} + (x+e)^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \Rightarrow$$

$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2 \qquad \Rightarrow \Rightarrow$$

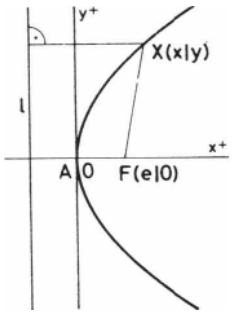
$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$ und da $b^2 = a^2 - e^2$ folgt

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ...die bekannte Gleichung der Ellipse in Mittelpunktslage.

Analoges gilt für die **Hyperbel**: Die Differenz der Entfernungen zu zwei festen Punkten ist konstant 2a:

$$ell = \{x \in R \ / \ |XF_1| - |XF_2| = 2a\}$$

Die **Parabel** (Abb.) ist die Menge aller Punkte, von denen jeder von einer gegebenen geraden l und von einem gegebenen Punkt F gleichen Abstand hat:



$$par = \{x \in R \ / \ |Xl| = |XF|\}$$

Sei l: x = -e, XF = $\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ und $Xl = e + x$, dann ist nach Definition

$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = e + x \Rightarrow (x-e)^2 + y^2 = e^2 + 2ex + x^2 \Rightarrow \Rightarrow$

$y^2 = 4ex$ und da $e = \frac{p}{2} \Rightarrow$ $\mathbf{y^2 = 2px}$ ...die Gleichung der Parabel

Ich habe deshalb die Herleitung der Kegelschnittsgleichungen so ausführlich kommentiert, um auch die Nützlichkeit analytischer Methoden bei der Charakterisierung geometrischer Eigenschaften zu zeigen.

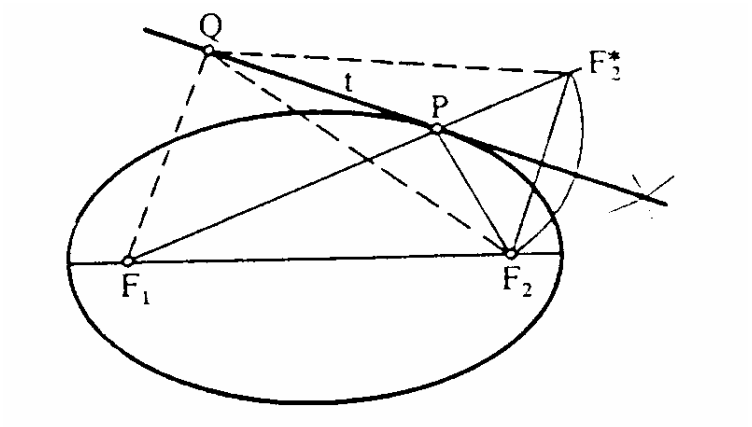
Der Schüler lernt, eine geometrische Aufgabe in eine rechnerische umzusetzen und mit dieser zu arbeiten: Mathematisierung eines realen Phänomens! Diese Aufgabe beinhaltet überdies eine sinnvolle Anwendung des Umgangs mit Wurzelgleichungen, die bereits in der sechsten Klasse besprochen wurden und keineswegs den Schüler überfordern.

In diesem Zusammenhang möchte ich noch an die Herleitung der Tangentengleichung erinnern, die ebenso interessante Beispiele bzw. Beweise liefert.

Es ergeben sich auch im Rahmen der *Tangenten an die Kegelschnitte* sehr interessante Rechen- bzw. Konstruktionsbeweise wie zum Beispiel:

Satz:

Die Tangente t halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen. (Abb.)



Begründung:

Verlängert man F_1P zu $F_1F_2^*$, sodass $|F_1F_2^*| = |F_1P| + |PF_2|$, dann gilt für alle Q (≠P) der Winkelsymmetralen t:

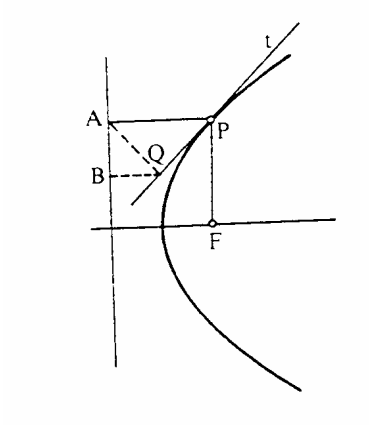
$|QF_2^*| = |QF_2|$ und daher ist

$|QF_1| + |QF_2| > |F_1F_2^*| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$

ð Q daher ≠ ell ð t hat mit der Ellipse genau einen Punkt gemeinsam und muss demzufolge die Tangente in T sein.

Satz:

Die Tangente an die Parabel halbiert den Winkel zwischen Brennstrahl und Leitstrahl. (Abb.)



Begründung:

Für jeden Punkt Q ($\notin$ P) auf z gilt:

IQAI > IQBI und IQAI = IQBI, weil t Winkelsymmetrale ist.

Daher ist IQFI > IQBI und Q kann kein Punkt der Parabel sein.

ð P ist der einzige gemeinsame Punkt der Geraden t und der Parabel, daher muss t die Tangente sein.

Solche Beweisverfahren finde ich im Mathematikunterricht sicherlich sehr nützlich, da einerseits die Argumentation logisch aufgebaut und andererseits sie auch konstruktiv nachvollziehbar ist.

Der Schüler bekommt dabei die Möglichkeit, jetzt nicht wie bisher mit "mechanischen" Mitteln eine Aufgabe zu lösen, sondern er kann einzig und allein mit logischen Schlussfolgerungen argumentieren und begründen.

4.4 Kegelschnitte als allgemeine Gleichungen 2. Grades

Die Bestimmung des Kegelschnittes aus einer allgemeinen Gleichung 2. Grades war noch ein wichtiger Bestandteil der Kegelschnittsgeometrie in den älteren Lehrbüchern.[115]

Jede allgemeine Gleichung 2. Grades **$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$** (1) lässt sich durch eine geeignete Parallelverschiebung und Drehung des Achsenkreuzes in eine bekannte Kegelschnittsgleichung überführen.

Um festzustellen, ob die Gleichung (1) eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, untersucht man das Verhalten gegenüber dem Unendlichen.
Die Hyperbel hat 2 ins Unendlich gehende Richtungen (die der Asymptoten), die Parabel hat eine solche Richtung (die Achse)[116]. Die Ellipse dagegen liegt ganz im Endlichen.

Zur Bestimmung der Steigung der durch die Gleichung (1) dargestellten Kurve bei unbegrenzt wachsender Abszisse dividiert man zunächst die Gleichung durch x^2 und erhält $A + B\frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})^2 + \frac{D}{x} + E\frac{y}{x}\frac{1}{x} + \frac{F}{x^2} = 0.$

Strebt $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\alpha$ bei wachsendem x einem bestimmten Grenzwert zu, dann ist

$$\lim (A + B\frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})^2 + \frac{D}{x} + E\frac{y}{x}\frac{1}{x} + \frac{F}{x^2}) = 0$$

Für $x \to \infty$ werden die Glieder mit den Koeffizienten D, E, F gleich 0. Daher sind die Richtungen nach dem Unendlichen durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung **$A + B\,\mathrm{tg}\alpha + C\,\mathrm{tg}^2\alpha = 0$** bestimmt:

---

[115] bis Rosenberg 1974!

[116] Für die Parabel $y^2=2px$ folgt $\lim \frac{y^2}{x^2} = \lim \frac{2p}{x} = 0$

$$\text{tg}\alpha = \frac{-B +/- \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

Es gibt demnach 2 Richtungen ins Unendliche, keine oder nur eine, je nachdem **B^2 - 4AC** größer, kleiner oder gleich 0 ist.

Daher ist die Gleichung 2. Grades

eine Hyperbel, wenn $B^2 > 4AC$

eine Ellipse, wenn $B^2 < 4AC$

eine Parabel, wenn $B^2 = 4AC$.

Aus dieser Entwicklung sieht man, dass die Art eines Kegelschnittes nur durch die Koeffizienten der quadratischen Glieder bestimmt wird.

Im Falle der Parabel ist $B^2 = 4AC$ oder $B = 2\sqrt{A}\sqrt{C}$; dann ergibt sich das Trinom

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ax^2 + 2\sqrt{A}\sqrt{C}\,xy + Cy^2 = (x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2$$

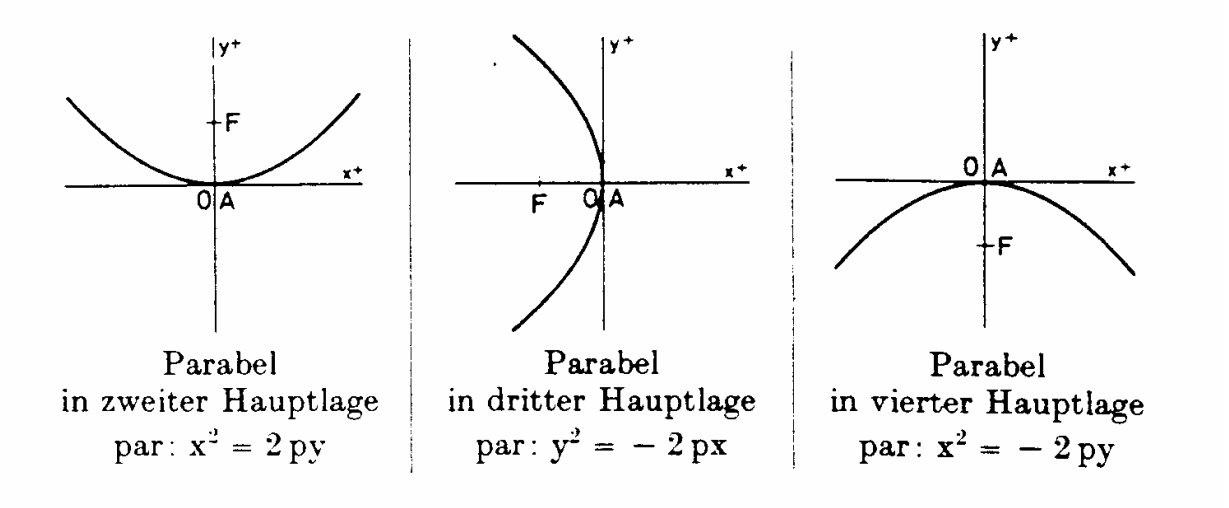
Bilden die quadratischen Glieder der Gleichung (1) ein vollständiges Quadrat, so stellt diese Gleichung eine Parabel dar.

Wie zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt, lässt sich der so ermittelte Kegelschnitt nun durch geeignete Parallelverschiebung und Drehung in eine bekannte Kegelschnittsgleichung überführen. Einzig bei der Parabel ist eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems nach dem Mittelpunkt unmöglich, da sie ihren „Mittelpunkt“ im Unendlichen hat. Die Gleichung der Parabel bringt man durch eine geeignete Drehung des Achsenkreuzes auf die achsenparallele Form und stellt mit ihrer Hilfe die Koordinaten des Scheitels fest.

Dieser Teilbereich der Koordinatengeometrie (Festlegen des Kegelschnittes, Schiebung, Drehung) ist seither vollständig aus dem Mathematikunterricht verschwunden.

Lediglich einige „Restbestände“ sind noch in den heutigen Lehrbüchern vertreten. Dazu zählen zum Beispiel die Hauptlagen der Kegelschnitte (jeweils um 90° um den Ursprung gedreht).

Man erhält zum Beispiel die zweite, dritte und vierte Hauptlage einer Parabel, wenn der Scheitel A im Ursprung bleibt, jedoch der Brennpunkt F auf der positiven y-Achse, auf der negativen x-Achse bzw. auf der negativen y-Achse liegt. (Abb.!)



In der Praxis wird aber der Schüler meist nur mit der bekannten Parabelgleichung in erster Hauptlage konfrontiert (2. Hauptlage als Funktion 2. Grades). Ebenso ist es schade, dass es sehr viele Schüler gibt, die keinen Zusammenhang zwischen Parabeln und quadratischen Funktionen sehen, weil ja im Allgemeinen eine solche Funktion im Mathematikunterricht vollkommen anders als eine Parabel behandelt wird (Berechnen der Nullstellen, des Extremwertes, etc.).

Bis vor wenigen Jahren verwendete man in den Lehrbüchern etwa noch die Begriffe Parabel 3.Ordnung bzw. Parabel 4.Ordnung, und meinte damit Polynome 3. bzw. 4.Grades. Jegliches Erkennen dieser Querverbindungen seitens der Schüler ist eine Rarität.

Viele Kapitel der Mathematik (vor allem in der Oberstufe) werden oft nur als selbständige Teile betrachtet, die mit anderen Bereichen keinerlei Verbindungen zu haben scheinen.

Dies ist in weiterer Folge sicherlich auch ein Grund für ein mangelndes Interesse bzw. für eine zu große Scheu einiger Schüler vor Mathematik.

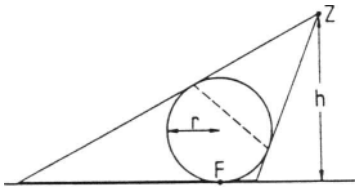
Um nur ein Beispiel aus einem anderen Fachbereich zu nennen: Es ist zwar recht bemerkenswert, wenn jemand weiß, dass der 30-jährige Krieg von 1618-1648 gedauert hat; dennoch bringt dieses Wissen nichts, wenn man nicht weiß, wodurch er ausgelöst wurde, wie er ausgegangen ist und welche Auswirkungen er auf die Weltpolitik hatte. Und genau dieses Wissen ist der Grund, warum man sich ebenso Gedanken über Ursachen anderer Vorgänge macht und feststellt, dass aktuelle Ereignisse sehr oft ihre Wurzeln in der Geschichte haben. So gewinnt man mehr und mehr Einblick in Beziehungsstrukturen und Querverbindungen von Ereignissen und Fakten, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben, die aber dennoch fest miteinander verwurzelt sind. Dadurch werden gewisse Dinge verständlicher bzw. durchschaubarer und somit auch leichter gemerkt.

Genau der gleiche Effekt lässt sich auf die Mathematik übertragen. Man soll ein Kapitel nicht vollkommen isoliert betrachten, sondern sollte versuchen, Beziehungen mit anderen Bereichen herzustellen, um möglicherweise dadurch das Verständnis und Interesse gegenüber der Mathematik zu erhöhen.

4.5 Kegelschnitte in unserer Umwelt

Elliptische Schlagschatten:

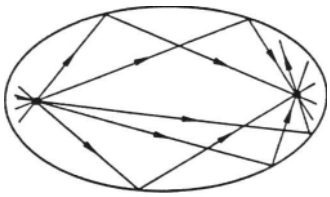
Ein einfaches Beispiel für das Auftreten von Ellipsen sind elliptische Schlagschatten. Sie entstehen durch Zentralbeleuchtung einer Kugel auf eine ebene Unterlage, wobei die die Kugel tangierenden Lichtstrahlen einen Kegel bilden. (Abb.)



Die Unterlage ist ein ebener Schnitt dieses Kegels und die Kugel somit eine DANDELINKUGEL. Der Berührpunkt der Kugel mit der Unterlage ist demnach ein Brennpunkt der Schattenellipse. Es ergibt sich auch dann ein elliptischer Schlagschatten, wenn die Kugel unter Parallelbeleuchtung steht.

Flüstergewölbe, Nierensteinzertrümmerer:

Eine der Ellipseneigenschaften (vgl. 4.3.) besagt, dass die Tangente in einem Ellipsenpunkt den Außenwinkel der Brennstrahlen in diesem Punkt halbiert. Man kann auch sagen, dass ein Strahl, der von einem Ellipsenbrennpunkt ausgeht, an der Ellipse (an der Tangente in diesem Punkt) so reflektiert wird, dass er durch den anderen Brennpunkt verläuft. (Abb.)

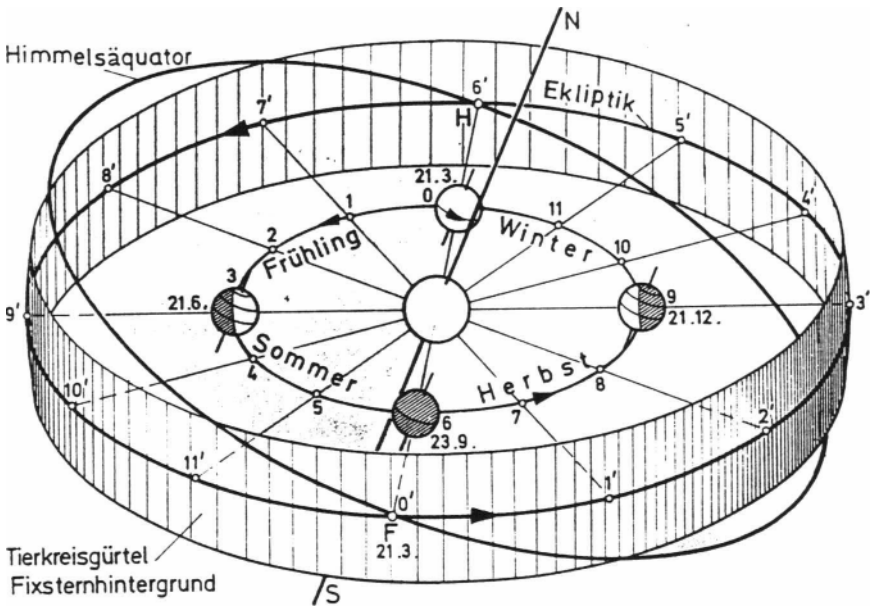


Genau diese Eigenschaft der Ellipse ist verantwortlich für das Prinzip des Flüstergewölbes. Ein Ton, von einem Brennpunkt des Drehellipsoids ausgehend, wird an der Wand so reflektiert, dass er durch den anderen Brennpunkt verläuft.

Zwei Sprecher, die in den beiden Brennpunkten stehen, können sich (im Idealfall) über eine größere Distanz hinweg im Flüsterton unterhalten.
Diese Eigenschaft findet auch in der Medizin Anwendung. Die modernen **Nierensteinzertrümmerer** arbeiten nach diesem Prinzip. Sie enthalten zwei Elektroden in je einem Brennpunkt, wobei in einem Brennpunkt Stoßwellen erzeugt werden, die sich im anderen Brennpunkt, wo sich der Nierenstein befindet, wieder treffen.

Sonnenbahnen:

Nikolaus **KOPERNIKUS** (1473-1543) stellte nach mehr als 30-jähriger Arbeit zusammenfassend unter anderem dar, dass sich *"die Erde während der Dauer eines Jahres einmal auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt".*[117]

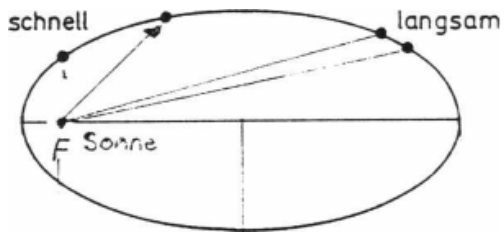


Der Frühlingspunkt F ist ein Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ekliptik. Der Frühlingsbeginn ist jener Zeitpunkt, zu dem die Sonne im Frühlingspunkt steht.

[117] Die Abbildung zeigt das heliozentrische oder kopernikanische Weltbild (nicht maßstabsgetreu)

Gleiches gilt für den Herbstpunkt H. Diese Zeitpunkte ergeben sich also aus der Beobachtung der Sonne. Würde die Erde tatsächlich eine Kreisbahn mit der Sonne als Zentrum gleichförmig durchlaufen, so müsste das "Sommerhalbjahr" vom 21.März bis zum 23.September ebenso lange dauern wie das "Winterhalbjahr" vom 23.September bis zum 21.März. Tatsächlich ist aber das Winterhalbjahr um 7 Tage kürzer. Schon Kopernikus wusste, dass die Annahme konzentrischer Kreisbahnen keine volle Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergibt.

Johannes **KEPLER** (1571-1630) erkannte aus sorgfältigen neuen Beobachtungen, die Tycho Brahe (1546-1601) angestellt hatte, dass alle Planetenbahnen drei ("Keplerschen") Gesetzen folgen (Abb.):



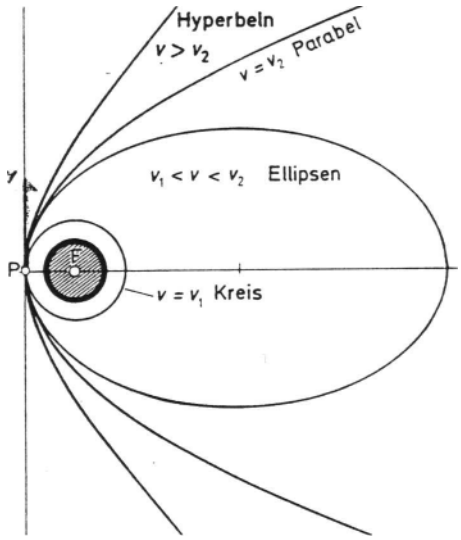
1) Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
2) Der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer elliptischen Bahnen: $\mathbf{T_1^2:T_2^2 = a_1^3:a_2^3}$

Die numerische Exzentrizität e (Der Abstand Vom Mittelpunkt einer Ellipse zu einem ihrer Brennpunkte) bei der Erde um die Sonne ist allerdings sehr gering.
Auf einer Ellipsenbahn läuft auch der bekannte Halley'sche Komet. Die Exzentrizität e ist auch hier sehr klein (rd. 1 km), wobei dagegen die Länge a der großen Halbachse dieser Ellipsenbahn 2670 Millionen km beträgt.

Isaac **NEWTON** (1643-1727) zeigte nach der Aufstellung des Gravitationsgesetzes[118], dass die Keplerschen Gesetze aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitet werden können. Damit wies er überzeugend nach, dass die Himmelskörper denselben Gesetzen folgen wie die Körper auf der Erde.

Die Gravitationskraft ist eine gegenseitige. Dadurch zieht der Mond die Erde mit der gleichen Kraft an wie die Erde den Mond. Das Drehzentrum der beiden Körper liegt im Massenmittelpunkt des Systems "Erde-Mond". Da aber die Masse der Erde mehr als 80mal so groß wie die des Mondes ist, befindet sich der Massenmittelpunkt auf der Verbindungsgeraden Erde-Mond ca. 5000km vom Erdmittelpunkt entfernt; also noch im Inneren der Erde.

Die Masse künstlicher Erdsatelliten hingegen ist gegen die Erdmasse vernachlässigbar klein. Der Massenmittelpunkt dieses Systems ist daher der Massenmittelpunkt der Erde.



Wird ein Satellit horizontal abgeschossen, ergibt sich nur bei einer ganz bestimmten Startgeschwindigkeit (v_1= 7,91km/s) eine Kreisbahn (Kreisbahngeschwindigkeit). Liegt die Startgeschwindigkeit darüber, aber unter der Fluchtgeschwindigkeit v_2 (11,19km/s), entfernt er sich immer weiter von der Erde. Dennoch kann er nur eine endliche Entfernung erreichen, somit bleibt er ein Satellit der Erde.

[118] Gravitation ist die von 2 Körpern auf Grund ihrer Massen aufeinander ausgeübte Anziehungskraft. Die Gravitationskraft wächst mit den Massen der sich anziehenden Körper und nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ihrer Massenmittelpunkte ab.

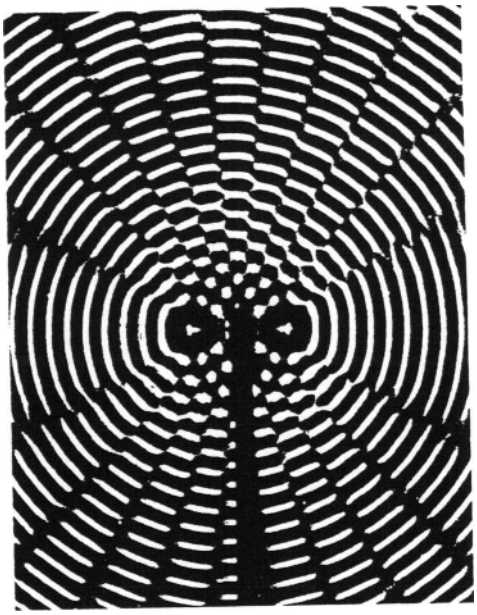
Je weiter er sich von der Erde entfernt, umso langsamer muss er dabei werden, da Bewegungsenergie in potentielle Energie umgewandelt wird. Die Schwerkraft wird dabei durch elektrische Anziehung zwischen den entgegengesetzt elektrisch geladenen Körpern ersetzt.

Newton konnte zeigen, dass diese Bahnen Ellipsen sein müssen, wenn eine zu i/r2 proportionale Kraft wirkt. Für die elektrische Wechselwirkung gilt dabei das Gleiche wie für die Gravitation. Würde die Gravitationskraft nicht in dieser Weise von der Entfernung abhängen, so würden sich keine Ellipsenbahnen ergeben und es könnte dadurch keine geschlossene Bahn immer wieder durchlaufen werden. Die Bestätigung der Planetenbahnen war und ist ein Kriterium für die Richtigkeit der Gravitation.
Überschreitet der Körper die Startgeschwindigkeit v_2, so kann er eine beliebig große Entfernung erreichen. Er verlässt den Anziehungsbereich der Erde (Marssonde!). Durch die immer schwächer werdende Erdanziehung "fliegt" der Körper entlang einer Hyperbelbahn ins "Unendliche".[119]
Die Geschwindigkeit v_2 würde eine Parabelbahn ergeben, die jedoch aus Gründen der Genauigkeit kaum jemals erreicht wird.

Welleninterferenz:

Zwei punktförmige Erreger F_1 und F_2 verursachen gleichphasig und mit konstanter Frequenz zwei einander überlagernde Felder von Kreiswellen. Bei der Interferenz dieser Wellen gibt es Gebiete, in denen ständig maximale Wellenamplitude auftritt (konstruktive Interferenz), und solche, in denen ständig Auslöschung erfolgt (destruktive Interferenz). Die Auslöschung erfolgt in jenen Punkten, die zu gegenphasigen Schwingungen angeregt werden, in denen also Wellenberge mit Wellentälern zusammentreffen. (Abb. nächste Seite).

[119] Auf diese Erkenntnis berufen sich ebenfalls die Theorien des Urknallmodells. Demnach besteht die Möglichkeit eines durch die Gravitation gebundenen Universums oder eines ständig wachsenden Universums, je nachdem die Bewegungsenergie die Fluchtenergie übertrifft oder nicht.



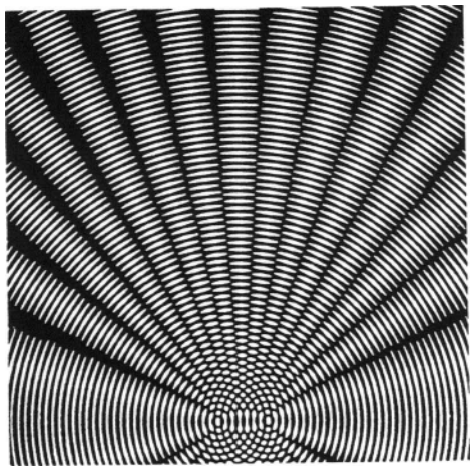
Die Linien ständiger Auslöschung gibt es bei solchen Punkten P, für die der Gangunterschied ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ ist:[120]

$$|F_1P - F_2P| = n\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Solche Punkte liegen auf Hyperbeln mit den Brennpunkten F_1 und F_2, die man beispielsweise als Zonen relativer Ruhe im wellenbewegten Wasser beobachten kann.

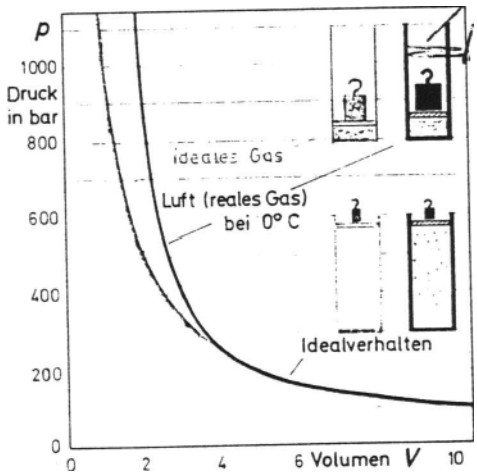
Die folgende Abbildung zeigt anhand eines Modellversuches zwei übereinander gelegte Glasplatten mit je einer Schar konzentrischer Kreise. Nur wo durchsichtige Kreise mit durchsichtigen Kreisen überlagert sind, kann Licht durchfallen. Je größer der Abstand der beiden Mittelpunkte F_1 und F_2 ist, desto näher rücken die **Interferenzhyperbeln** zusammen und desto größer wird auch ihre Anzahl.

[120] Zwei Wellen verstärken einander maximal, wenn der Gangunterschied ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge ist: $|F_1P - F_2P| = n\lambda$ (n = 0, 1, 2, …)



Luftdruck:

Zwischen Volumen V und Druck p eines Idealen Gases besteht ein **indirekt proportionales Verhältnis (Hyperbel).**



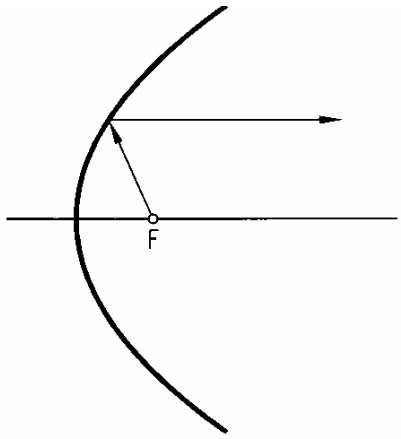
Diese Abbildung zeigt aufgrund von Messungen, wie der Druck von Luft ansteigt, wenn man sie bei konstanter Temperatur (=konstante mittlere Translationsenergie) komprimiert. Für das **ideale Gas** gilt daher:

N, E_T = konst. $\Rightarrow$ p = (2N/3V) E_T = konst./V $\Rightarrow$ **pV = konst.**
(Boyle-Mariottesches Gesetz)

Aus der Abbildung erkennt man weiters, dass Luft bei einer Temperatur von 0° C bis zu einem Druck von fast 200 bar vom Idealverhalten kaum abweicht.[121]
Erst über 200 bar erfüllen N Luftmoleküle ein merklich größeres Volumen als N Moleküle des idealen Gases bei gleichem Druck und gleicher Temperatur.

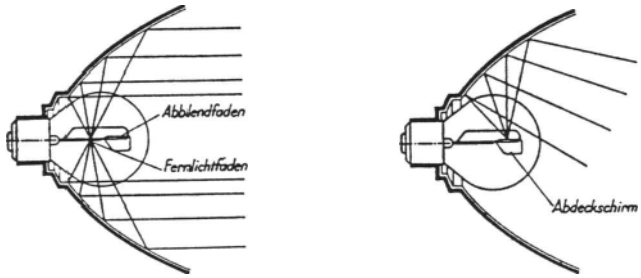
Parabolspiegel:

Alle achsenparallelen Strahlen laufen nach der Reflexion durch **einen** Punkt (Brennpunkt F). Das ist eine besondere Eigenschaft des Paraboloids:[122]



Umgekehrt werden Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt ausgehen, im rückwärtigen Parabolspiegel so reflektiert, dass sie parallel zur Achse des Paraboloids austreten. Dies beruht auf dem Reflexionsgesetz der Optik (Einfallswinkel = Reflexionswinkel).
Dieser Effekt wird beim Autoscheinwerfer genutzt, wo die von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Strahlen nach der Reflexion parallel nach vorne verlaufen: (Abb.)

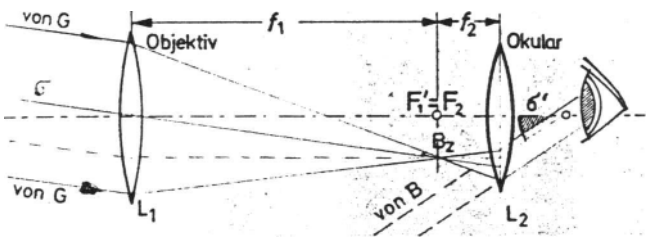
[121] Ein Gas befolgt die Zustandsgleichung des idealen Gases umso besser, je höher seine Temperatur über der Verflüssigungstemperatur liegt und je kleiner seine Dichte gegen die Dichte im flüssigen Zustand ist. Z.B. Helium, Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff verflüssigen erst bei Temperaturen weit unter -100°C und haben Dichten um 1000kg/m³. Von solchen Gasen darf bei Zimmertemperatur ideales Verhalten erwartet werden.
[122] Vgl. dazu jene Eigenschaft der Parabel in 4.2., wonach die Tangente in einem Punkt den Winkel zwischen Brennstrahl und Leitstrahl halbiert!



Die linke Abbildung zeigt das eingeschaltete Fernlicht. Die Lichtquelle ist eine Biluxlampe, die einen Fernlichtfaden annähernd im Brennpunkt des Scheinwerfers und einen Faden für das Abblendlicht etwas außerhalb der Brennweite enthält. Ist das Fernlicht eingeschaltet, so erhält man einen schwach auseinander laufenden Lichtkegel. Bei eingeschaltetem Abblendlicht fängt der unter dem Faden angebrachte Abdeckschirm diejenigen Strahlen ab, die den unteren Teil des Spiegels treffen würden.
Die umgekehrte Anwendung, wonach die Lichtstrahlen im Brennpunkt gebündelt werden, findet man bei **Parabolantennen**, wobei die eigentliche Antenne im Brennpunkt des Paraboloids angebracht wird.[123]

Linsen:

So wie beim Parabolspiegel achsenparallel einfallende Strahlen durch Reflexion gesammelt werden, so vereinigt eine **Sammellinse** (Konvexlinse) diese Strahlen durch Brechung (annähernd) in einem Punkt (Brennpunkt F, reeller Bildpunkt des unendlich fernen Punktes auf der optischen Achse).



[123] Bereits um Christi Geburt wurde diese Eigenschaft der Parabel ausgenützt, um Feuer zu erzeugen.

Das astronomische oder keplersche Fernrohr besteht aus zwei Sammellinsen (Abb. oben).
Das Objektiv vereinigt die einfallenden Strahlen zu einem reellen, umgekehrten Bild, das nahe beim Brennpunkt liegt.

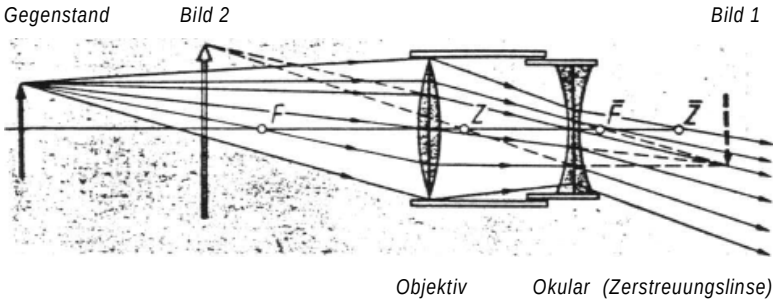
Die Hauptaufgabe des Fernrohres besteht in der Vergrößerung des Sehwinkels. Im Allgemeinen sieht man einen weit entfernten Gegenstand unter einem Sehwinkel σ. Der Beobachter sieht mit dem Fernrohr durch das Okular (Lupe) ein vergrößertes und seitenverkehrtes Bild, welches unter einem größeren Sehwinkel σ' erscheint. Da es sich um kleine Winkel handelt (tan $\sigma \approx 0$), gilt für die erzielte Winkelvergrößerung χ:

$$\chi = \frac{\sigma'}{\sigma} \approx \frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma} = \frac{F1'\frac{Bz}{f2}}{F1'\frac{Bz}{f1}} = \frac{f1}{f2}$$

Das Verhältnis der Brennweiten ist sowohl für die Vergrößerung der "Punkthelligkeit" bei der Beobachtung von Sternen, als auch für die Vergrößerung des Sehwinkels maßgebend.
Galileo Galilei entwickelte ein Fernrohr, durch das man "aufrechte", seitenrichtige Bilder betrachten konnte.[124]

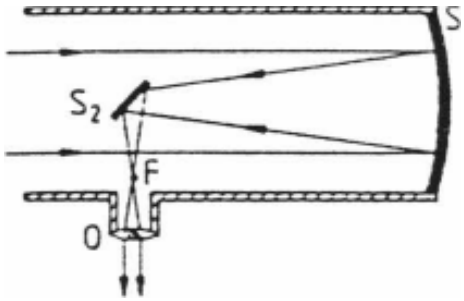
[124] Bei Feldstechern (binokulare Prismenfernrohre) wird ein seitenrichtiges und aufrechtes Bild mit Hilfe zweier Umkehrprismen hergestellt, die je eine Bildumkehr in zwei aufeinander normalen Richtungen bewirken.

Als Okular benutzte er eine Zerstreuungslinse (Konkavlinse), die innerhalb der Brennweite der Objektivlinse angebracht wurde: (Abb.)



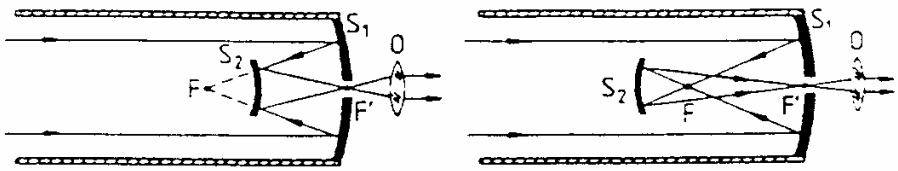
Die Entstehung des zur Sammellinse gehörigen Bildes 1 wird durch die Zerstreuungslinse verhindert. Sie lenkt die Strahlen so um, dass sie scheinbar vom näheren Bild 2 kommen.

Die Idee, astronomische Fernrohre auf der Grundlage des **Parabolspiegels** zu bauen, geht auf **Isaac Newton** zurück. Er fand eine Möglichkeit, die gebündelten Strahlen herauszuleiten, um die ankommenden Strahlen nicht vom Beobachter zu stören. (Abb.)



Eine um $\frac{\pi}{4}$ gegen die Spiegelachse geneigter ebener Spiegel, der vor dem Brennpunkt angebracht ist, leitet die Strahlen seitwärts aus dem Fernrohr.

Guillaume Cassegrin (17. Jhdt.) löste das Problem des störenden Beobachters mit einer Durchbohrung des Parabolspiegels: (Abb.)



Im Inneren befindet sich zusätzlich ein **hyperbolisch** gekrümmter Innenspiegel, von dem ein Brennpunkt gleichzeitig auch mit dem Brennpunkt des Paraboloids zusammenfällt, und der die ankommenden Strahlen zum anderen Brennpunkt hinlenkt (li. Abb.).

Das hinter dem zweiten Brennpunkt angebrachte Okular zeigt dem Beobachter ein reelles, verkleinertes, aber seitenverkehrtes Bild. Durch eine entsprechende Anbringung des hyperbolischen Spiegels (re. Abb.) kann der Beobachter dennoch ein seitenrichtiges Bild erkennen. Diese Idee findet vor allem bei großen Spiegelteleskopen Verwendung.

Um in sehr weite Entfernungen vorzudringen, muss man Fernrohre mit möglichst großem Objektivdurchmesser bauen. Sammellinsen aus Glas können mit großem Durchmesser nicht hergestellt werden, weil sich Glas wie ein zähflüssiger Körper verhält. Dadurch könnten sich solche Linsen im Laufe längerer Zeit verformen. Als Objektiv wird aus diesem Grund statt einer Linse ein Hohlspiegel verwendet.

Flugparabel:

Beim Werfen eines Körpers ist die Wurfbahn eine Parabel. Die Wurfbewegung setzt sich aus einer schrägen, gleichförmigen Bewegung und einer gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung zusammen. („Flugparabel“)

Der Weg eines mit einem anfänglichen Winkel ε und einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfenen Körpers setzt sich aus einer x- und einer y-Komponente zusammen, sodass für einen Punkt P(x/y) der Flugbahn nach einer bestimmten Zeit t gilt:

$x = v_0 t \cos\varepsilon$ und $y = v_0 t \sin\varepsilon - \frac{g}{2} t^2$ (g…Erdbeschleunigung ≈ 9,81m/s²)

Durch Einsetzen erhält man die Gleichung

$y = x \tan\varepsilon - \left(\frac{gx^2}{2v_0{}^2\cos^2\varepsilon}\right)$ [125]

Diese Funktion kann nun durch Umformung in eine Parabelgleichung übergeführt werden:

$$\frac{gx^2}{2v_0{}^2\cos^2\varepsilon} + y = x\tan\varepsilon \quad \Rightarrow \quad gx^2 + y\cdot 2v_0{}^2\cos^2\varepsilon = x\tan\varepsilon\cdot 2v_0{}^2\cdot\cos^2\varepsilon$$

Da $\tan\varepsilon\cdot\cos^2\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cos^2\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varepsilon)$ ist, folgt

$$x^2 - \frac{v_0{}^2}{g}\cdot x\cdot\sin(2\varepsilon) = \frac{-v_0{}^2}{g}\cdot 2y\cdot\cos^2\varepsilon$$ und

$$\left(x - \frac{v_0{}^2}{2g}\cdot\sin(2\varepsilon)\right)^2 = \frac{v_0{}^4}{4g^2}\cdot\sin^2(2\varepsilon) - \frac{v_0{}^2}{g}\cdot 2y\cdot\cos^2\varepsilon$$

und wegen $\sin^2(2\varepsilon) = 4\cdot\sin^2\varepsilon\cdot\cos^2\varepsilon$ folgt:

$$\left(x - \frac{v_0{}^2}{2g}\cdot\sin(2\varepsilon)\right)^2 = -\left(y - \frac{v_0{}^2}{2g}\cdot\sin^2\varepsilon\right)\cdot\frac{v_0{}^2}{g}\cdot 2\cos^2\varepsilon$$

Man gelangt durch diese Umformung zur Gleichung der Parabel **$(x-x_s)^2 = -2p(y-y_s)$.** Sie ist parallel zur Parabel **$x^2 = -2py$** in 4. Hauptlage (vgl. 4.4.!) mit dem Scheitel **$S(x_s/y_s)$**.

Aus unserer Wurfparabel ergeben sich demnach die Scheitelkoordinaten:

[125] Galileo Galilei hat erstmals diese Gleichung für den schiefen Wurf hergeleitet.

$x_S = \frac{v_0{}^2}{2g} \cdot \sin(2\varepsilon)$ und $y_S = \frac{v_0{}^2}{2g} \cdot \sin^2\varepsilon$

Folglich beträgt die Wurfweite die doppelte x-Koordinate des Scheitels:

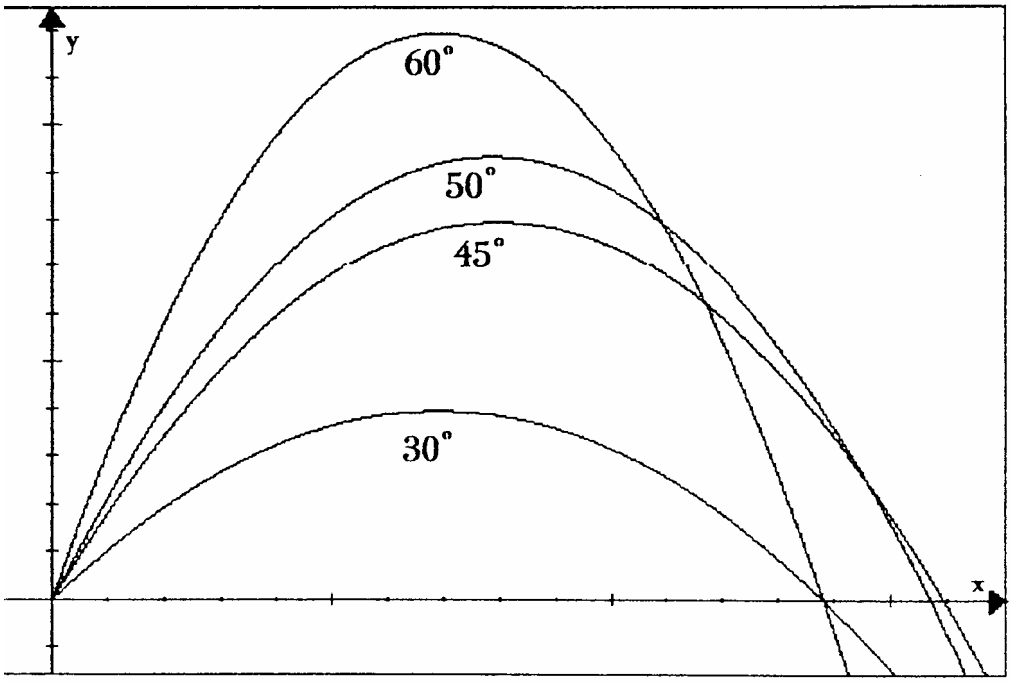
$$w(\varepsilon) = 2(\frac{v_0{}^2}{2g} \cdot \sin(2\varepsilon))$$

Um nun die größte Wurfweite zu berechnen, könnte zum Beispiel das Kapitel „Extremwertberechnung“ mit einbezogen werden und mit

$w'(\varepsilon) = 4 \cdot \frac{v_0{}^2}{2g} \cdot \cos(2\varepsilon)$ $\quad w'(\varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(2\varepsilon) = 0$ und $\varepsilon = 45°$

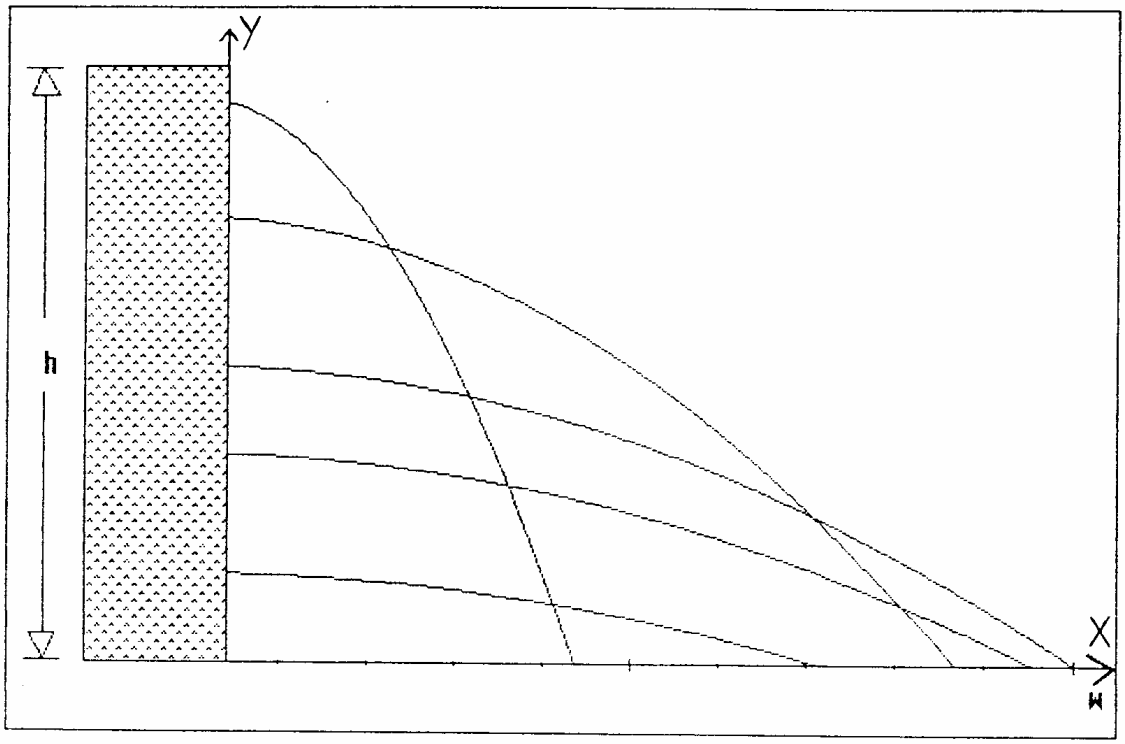
Das bedeutet, dass bei 45° ein Körper mit konstanter Abwurfgeschwindigkeit v_0 die maximale Weite erzielt.

Der folgende Versuch zeigt die unterschiedlichen Wurfweiten, die mit einem mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit und verschiedenen Wurfwinkeln ε geworfenen Körper erzielt werden: (Abb.)



Die Kurve einer Parabel entsteht ebenfalls bei einem waagrechten oder horizontalen Wurf. Er kann als Spezialfall eines schiefen Wurfes mit einem Wurfwinkel 0° angesehen werden.
Die Parabelkurve setzt sich aus einer gleichförmigen Horizontalbewegung und einer gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung zusammen.

Diese Flugbahn liegt beispielsweise vor, wenn Wasser aus einem Gefäß durch ein Loch in einer bestimmten Höhe der Seitenwand ausläuft: (Abb.)



Wenn in einer bestimmten Zeit Wasser der Masse m ausströmt, verschwindet die dementsprechende Masse in der Höhe h und damit eine potentielle Energie (mgh). Sie muss gleich der Bewegungsenergie des ausströmenden Wassers sein. Für eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt daher:[126]

$$\frac{mv^2}{2} = m \cdot g \cdot h \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gh}$$

[126] Die Geschwindigkeit wird nicht durch die Form der Öffnung beeinflusst!

Man kann also die Bahn des Wasserstrahls als rechten Ast einer Wurfparabel betrachten.

Ausgehend von der Gleichung einer Wurfparabel und dem Scheitel S(0/h_2) (h_2…Abstand des Loches in der Seitenwand bis zum Boden) erhält man nun:

$$x^2 = -(y - h_2) \cdot \frac{v_0{}^2}{g} \cdot 2\cos^2\varepsilon$$ [127]

Da bei dieser „Auslaufparabel“ ε = 0° $\Rightarrow$ $x^2 = -2 \cdot \frac{v_0{}^2}{g} \cdot (y - h_2)$

Für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt nun: $v_0 = \sqrt{2gh_1}$

(wobei h_1 die Höhe der Flüssigkeitssäule oberhalb der Auslaufstelle anzeigt; somit $h = h_1 + h_2$)

$\Rightarrow$ $x^2 = -4h_1 \cdot (y - h_2)$ …. Die Gleichung der momentanen Auslaufparabel in Abhängigkeit von h_1 und h_2.

Es erhebt sich nun die Frage, in welchem Verhältnis von h_1 und h_2 die Weite des Flüssigkeitsstrahles maximal ist:

Im Koordinatensystem (siehe vorige Abb.) sei P(w/0) jener Punkt der x-Achse, der vom Strahl getroffen wird.

In die Gleichung eingesetzt, ergibt sich jetzt:

$$w^2 = 4h_1h_2 \quad \Rightarrow \quad w = 2\sqrt{h_1h_2} \quad \Rightarrow \quad w = 2\sqrt{h_1(h - h_1)}$$

[127] Diese Auslaufparabel ist nun parallel zu einer Parabel in 4. Hauplage (x^2=-2py) um h_2 in y-Richtung verschoben

Um die maximale Weite zu erhalten, wird differenziert (Extremwert) und somit

$$w' = \frac{(h-2h_1)}{2\sqrt{h_1(h-h_1)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad h-2h_1 = 0 \qquad h_1 = \frac{h}{2} \quad \text{und da} \quad h = h_1 + h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

Befindet sich das Loch genau in der Mitte des Behälters, so erzielt der Strahl die maximale Weite.

4.6 Resümee

Diese kleine Auswahl an Beispielen soll verdeutlichen, in welch umfangreichem Ausmaß wir die Kegelschnitte in sehr vielen Formen des täglichen Lebens antreffen. Daraus resultiert auch ihre Bedeutung im praxisbezogenen Unterricht - sei es nun in der Mathematik oder in "verwandten" Fächern.

Ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts sollte sein, mathematische Methoden, die den Schülern in vielen Jahren "eingeimpft" werden, nun auch in außermathematischen Situationen und Problemstellungen anzuwenden. Sonst würden sie sich ja zu recht fragen, wozu sie denn all das lernen müssen, wenn sie es doch nie brauchen.

Die unmittelbare und alltägliche Umwelt ist reich an solchen "Untersuchungsmöglichkeiten" und ihre Analyse verhilft zur Erkennung und Vertiefung, was den Nutzen der eigentlichen Mathematik betrifft.

Nach Betrachtung all dieser Gesichtspunkte sollte man erkennen, wie wichtig die Behandlung der Kegelschnitte für einen diesbezüglichen Unterricht ist. Folglich wäre eine "Renaissance" der Kegelschnitte im Mathematikunterricht auf jeden Fall zu begrüßen!

5. Anhang

Schon im Vorwort dieser Arbeit habe ich einige Gründe für das "Verschwinden" der Kegelschnitte bzw. das der Geometrie kurz erwähnt. Ich möchte im Folgenden noch einmal jene Ursachen dafür zusammenfassen, die unmittelbar mit dem Mathematikunterricht in Zusammenhang stehen und auch eng miteinander verbunden sind:

1) Eine Ursache für den Rückgang der Geometrie ist sicherlich die in §3 erwähnte neue abstraktere Schulmathematik. Axiomatische Fundierung (bereits in der Unterstufe), begriffliche Präzisierung (Verwendung von Schreibweisen der wissenschaftlichen Mathematik) sind typische Zeichen für diesen "übertriebenen" Formalismus. All das geht natürlich an der Geometrie nicht spurlos vorüber. Die "Lebendigkeit", das Markenzeichen der Geometrie, geht dadurch verloren. Es gibt zu wenig anschaulichen Unterricht, zu wenig konkrete Geometrie, wenig Anwendungen und Konstruktionen.

Dazu meinte *Zeitler* in einem Vortrag (als Pädagoge):[128]

> *"Die geistige Entwicklung eines jeden Kindes beginnt mit der Anschauung. Jedes Kind will und muss seine Umwelt 'erfassen', 'begreifen'.*
> *Kinder malen, Kinder zeichnen. Sie sind von Natur aus kleine Geometer. Man kann nicht mit sterilen, abstrakten Strukturen beginnen - diese stehen am Ende einer recht langen Entwicklung. Deshalb ist Schule ohne Geometrie ein Widerspruch zur Natur des Kindes. zu seiner geistigen Entwicklunq."*

[128] H.Zeitler, S.46

2) Ein großer Teil der Schuld trifft aber auch die Universität. Warum gibt es denn schon seit Jahren bloß eine einzige (!) Vorlesung, die sich mit "reiner" Geometrie befasst?

Zugegeben, die anschauliche Geometrie mag nicht mehr dieselbe Bedeutung haben, wie noch vor Jahrzehnten, dennoch ist sie für einen didaktisch ergiebigen Unterricht unerlässlich. Angehende Lehrer werden in Geometrie kaum ausgebildet und können deshalb auch keine Begeisterung an die Schüler weitergeben.

Gleichzeitig verliert die Darstellende Geometrie als Schulfach durch die größere Wahlmöglichkeit der Fächer mehr und mehr an Bedeutung. Wo wird diese Entwicklung hinführen, zumal viele Disziplinen wie zum Beispiel Mechanik, Kinematik, Astronomie, Optik (vgl. 5.5!) nicht ohne anschauliche Geometrie leben können?

Dazu Zeitler:[129]

> *"Forschende Mathematiker bedienen sich unentwegt der Sprache der Geometrie. Sie müssen diese Sprache auch wirklich beherrschen. Ja, sie müssen mit dieser Sprache anschauliche Vorstellungen verbinden, mit all diesen Räumen, mit der Dimension, mit Mannigfaltigkeiten,...*
> *Im Übrigen glaube ich sogar, dass auch die Kreativität eines forschenden Mathematikers eng mit geometrischen Vorstellungen zusammenhängt. Jeder malt sich irgendwo (vielleicht verstohlens) seine 'Bildchen'."*

3) Eine große Schuld trifft aber auch jene (vgl. Kapitel 3), die für die Lehrplanerstellung und (m.E.) für die Lehrbücher verantwortlich sind. Dazu möchte ich als "Schlusswort" wieder Zeitler zitieren, der unter anderem auch als Schulbuchverfasser in all den Jahren einen sehr guten Einblick in diese Problematik gewonnen hat:[130]

---

[129] H.Zeitler, S.46
[130] H.Zeitler, S.45

"Eine Hauptschuld an der verhängnisvollen Fehlentwicklung des Geometrieunterrichts tragen sicher die vielen (allzu vielen) Lehrplan-konstrukteure, Superdidaktiker, Curriculumpropheten, aber auch die Schul-buchschreiber - ich selber nehme mich bei all dem nicht aus. Sie sind bei ihren Überlegungen selten vom Kind, vom Schüler, sondern allein vom Fach, von der Universitätsmathematik ausgegangen. Ziel war es, diese Universitäts-mathematik mit all ihrer (dort erforderlichen) Exaktheit und Abstraktion in die Schule zu bringen, vor allem aber zu zeigen, was man selber kann, was man "drauf hat". Inhalt, Geist und auch Wortwahl sprechen den Mathematiker, den Gelehrten an. Blättern Sie doch einmal in Schulbüchern! Diese Bücher sind für Kinder oft gar nicht mehr lesbar - aber sie strahlen eine merkwürdige Pseudoexaktheit, eine schwulstig wirkende Pseudowissenschaftlichkeit aus. Nichts als Schaumschlägerei! Manchem Autor möchte man zurufen: 'Sag es normal, sag es einfach! ' "[131]

„Geometrie verdient eine Rettung, weil sie schön ist." [132]

[131] Obwohl Zeitler sich hier nur auf Bayern bezieht, lassen sich große Ähnlichkeiten mit Österreich nicht leugnen.

[132] D.Laugwitz, in. H.Zeitler, S.46

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit dokumentiert den Verlauf der Kegelschnittsgeometrie in den Lehrplänen und Lehrbüchern im Laufe der Jahrhunderte bis heute. Sie zeigt die, für den Verfasser dieser Arbeit, leider traurige Tatsache auf, dass sie nach und nach aus den Lehrplänen und Lehrbüchern der Allgemeinbildenden höheren Schulen stückweise herausgeschnitten wurde.

Diese „Dokumentation“ gliedert sich in vier Abschnitte:

1) Im ersten Teil wird der geschichtliche Aspekt beleuchtet, ein historischer Zugang zu den Kegelschnitten hergestellt, in dem ihre Bedeutung für die damalige Zeit in den Vordergrund gerückt wird. Anhand von typischen, der damaligen Zeit entsprechenden mathematischen und geometrischen Fragestellungen (Würfelverdopplung,..) soll bewusst gemacht werden, dass Kegelschnitte, bzw. die Beschäftigung mit ihnen, nichts an ihrer „Lebendigkeit“ bis heute verloren haben, zumal es nicht sehr komplexe elementare Kenntnisse erfordert, um im Mathematikunterricht die Schüler mit der historischen Entwicklung vertraut zu machen.

2) Nach diesem historischen Rückblick beschäftigt sich die vorliegende Diplomarbeit mit dem Gymnasial- und Bildungswesen in Österreich. Um die gegenwärtige Situation des österreichischen Schulwesens in seiner Gesamtheit richtig interpretieren zu können, ist es notwendig, die diesbezüglichen historischen Entwicklungen zu berücksichtigen.

3) Der nächste Teil dokumentiert den „Werdegang“ der Kegelschnittsgeometrie in den Lehrplänen und Lehrbüchern der Allgemeinbildenden höheren Schulen. Hier wird vor allem versucht, anhand von Lehrbüchern der einzelnen Epochen den quantitativen (und zum Teil auch qualitativen) Vergleich herauszuarbeiten. Es stellt sich dabei auch die Frage, ob man den „Rückgang“ der Kegelschnitte im Mathematikunterricht noch aufhalten wird können.

4) Den Abschluss dieser Arbeit bildet ein kleiner Überblick über die zahlreichen Möglichkeiten, Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln. Da ja Kegelschnitte im täglichen Leben häufig auftreten (Scheinwerfer, Flugbahn eines Balles,…), lassen sich solche „alltäglichen“ Dinge doch sehr gut in den Unterricht einbinden. Eine Möglichkeit, den oft recht formalen Unterricht etwas aufzulockern.

Diese Arbeit möchte überzeugen, dass die Kegelschnittsgeometrie (bzw. die Geometrie ganz allgemein) einen wichtigen Beitrag im Unterricht leisten kann, arithmetische und algebraische Sachverhalte zu veranschaulichen und zu verbinden, und damit zu einem beziehungsreichen Mathematikunterricht sowie zu einem besseren Verständnis beizutragen.

LITERATURVERZEICHNIS

Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich
Hg. Czuber, Wirtinger, Suppantschitsch, Dintzl. Heft 3,6. Wien 1912.

Bürger-Fischer-Malle. Mathematik Oberstufe. Wien 1980.

Bürger-Fischer-Malle. Lehrbuch für die 3. Klasse Mathematik Oberstufe. Wien 1991.

Bürger, Mühlgassner. Zit. In: Lehrplan-Service. Mathematik AHS. Kommentarheft 2. Wien 1988.

Der große Ploetz. Auszug aus der Geschichte. Verlag Ploetz, Freiburg – Würzburg, 1980.

Gajdeczka – Kaller. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen.
4. Auflage, Wien 1910.

Gericke, Helmut. Mathematik in Antike und Orient. Berlin 1984.

Gotsmy, Heinrich. Die neue Oberstufe der ALLGEMEIN-BILDENDEN HÖHEREN SCHULEN. Wien 1988.

Götz-Reichel-Müller-Hanisch. Lehrbuch der Mathematik 7. 4. Auflage, Wien 2004.

Grimm, Gerald. Die Schulreform Maria Theresias 1747-1775. 1987

Gronau, Detlef. Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. Graz 2008.

Hocevar. Lehrbuch der Geometrie für die Oberstufe. (Ausgabe für die Gymnasien). 2. Auflage, 1905.

Hochleitner, Bernhard. Eine vergleichende Untersuchung des Mathematikunterrichtes in Österreich anhand von Lehrplänen und Büchern von 1780, 1820 und der letzten Jahrzehnte. Dipl.Arb., Wien 1986.

Instructionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich. Wien 1879, 1884, 1910.

Jahresbericht über das Archivgymnasium zu Soest am Schlusse des Schuljahres von Ostern 1865 bis dahin 1866. Soest 1866.

Kaiser-Nöbauer. Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Wien 1984.

Kaiser-Nöbauer. Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Wien 1998.

Laub, Josef. Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der Allgemeinbildenden höheren Schulen. 1. Bd., 3. Bd. Wien 1978, 1980.

Lehrplan der Allgemeinbildenden höheren Schulen. 3., ergänzte Auflage. Stand: 1. Juli 1988.

Lehrplan der österreichischen Gymnasien, aufgrund des Mittelschulgesetzes vom 2. August 1927.

Lehrplan-Service Mathematik AHS. Kommentarheft 2. Wien 1988.

Lehrplan-Service Mathematik AHS. Kommentarheft 2. Wien 1991.

Malle-Ramharter-Ulovec-Kandl. Mathematik verstehen 7. 1. Auflage, Wien 2006.

Mocnik, Holzmeister. Geometrie für die 5. bis 8. Klasse. Wien 1934.

Provisorische Lehrpläne für die Mittelschulen. Veröffentlicht auf Grund der Verordnung des Bundes ministeriums für Unterricht vom 18. Oktober 1946.

Provaznik, Franz. Die Bildungswerte des Mathematikunterrichts. Wien 1962.

Reichel, Hans-Christian. Ellipse, Hyperbel, Parabel. Sonderdruck aus Didaktik der Mathematik. Wien 1989.

Reichel-Müller-Hanisch-Laub. Lehrbuch der Mathematik 8. Wien 1992.

Reichel-Müller-Hanisch-Laub. Lehrbuch der Mathematik 8. Wien 1995.

Revuz. „Der Geist der Forschung muss jeden Mathematikunterricht beleben“. Zit. in: Pädagogische Mitteilungen. Wien 1970.

Rosenberg, Karl. Methodische geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit Lösungen und einem Leitfaden für die 7. und 8. Klasse der Mittelschulen und gleichgestellten Anstalten. 4. Auflage. Wien 1961.

Schermaier, Josef. Geschichte und Gegenwart des allgemeinbildenden Schulwesens in Österreich. Wien 1990.

Schwabel, Erwin. Die Gestaltung des mathematischen Unterrichts an Mittelschulen. Wien 1953.

Scirucsek-Unfried. Arbeitslehrbuch Mathematik 7. Wien 1975.

Scirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl. Mathematik 7 AHS. Wien 1991.

Struik, J.Dirk. Abriss der Geschichte der Mathematik. 6. Auflage. Berlin 1976.

Timp, E. Die Problematik „Klassenlehrer oder Fachlehrer“ in den Gymnasialreformen 1792-1849. Wien 1968.

Vicenzi, Otto. Das Gymnasium. Wien 1953.

Wapienik, A. Lehrbuch der Mathematik für die oberen Classen der Mittelschulen. Wien 1887.

Wotke, Karl. Die von der Studien-Revisions-Hofkommission (1797-1799) vorgeschlagenen Reformen der österreichischen Gymnasien. Wien und Leipzig 1915.

Gymnasiallehrplan der Wiener Gymnasiallehrerversammlung vom Jahre 1792. Wien und Leipzig 1914.

Zeitler, H. Axiomatik der Geometrie in Wissenschaft und Schule. Mitteilungen aus dem mathematisch-didaktischen Seminar für aktive Lehrer. Wien 1986.

Zingerle, Anton. Dom- und Stiftsschulen Tirols im Mittelalter. Innsbruck 1896.

LEBENSLAUF

Persönliche Daten:

Name, Vorname:	Tomasitz, Dean
Adresse:	1230 Wien, Atzgersdorferstr. 171
Geburtsdatum:	14. Dezember 1963
Geschlecht:	männlich

Schulbildung:

1970 - 1974	Volksschule bei den Schulbrüdern in 1150 Wien, Gebrüder-Lang Gasse
1974 - 1983	Bundesrealgymnasium in 1080 Wien, Albertgasse 18-22

Studium:

1984 - 1985	Lehramtsstudium an der Uni-Wien und an der TU-Wien Mathematik, Darstellende Geometrie
1985 - 1993	Lehramtsstudium an der Uni-Wien Mathematik, Französisch

Tätigkeiten:

1983 - 1984	Wehrdienst in Wr.Neustadt; Ausbildung als LKW-Fahrer
1985	Schilehrerausbildung des USZ-Wien am Kitzsteinhorn
1986 - 1988 (Feb.)	Anstellung als Schilehrer in der Schischule Saalbach
1985 - 1996	Statist an der Volksoper Wien
1986 - 1996	Erwerbstätig an einer Maturaschule in den Fächern Mathematik, Darstellende Geometrie und Französisch
1996 - 2008	Leiter des Lerninstitutes *„Lerninstitut Mariahilf – Institut für ergänzende Bildung“*
dazwischen 2005-2006	Karenz
seit März 2008	Vertragslehrer (Mathematik) an der AHS Zirkusgasse, 1020 Wien, AHS Rahlgasse 1060 Wien Wiederaufnahme des Lehramtsstudiums UF Mathematik, Französisch

Wien, im November 2008

Ich versichere, dass ich die Diplomarbeit selbst verfasst, andere als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt und mich und auch sonst keiner unerlaubter Hilfe bedient habe.

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: ☐ HoA ☒ HoD

MSC2000: 00A35 – 97-03 – 97C90 – 97D10 – 97U20 – 51M04 – 51N20

CCS98: - -

ZDM88: A30 – G40 – G70 – U20

BK: 31.01 – 31.04

Schlagwortketten nach RSWK
Kegelschnitt – Mathematikunterricht – Geschichte 1900- (123)
- - Kegelschnitt – Schulbuch – Geschichte 1900- (213)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

4.11.2008
.....
Datum

.....
Unterschrift