universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Von der linearen Gleichung bzw. Ungleichung zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht unter Einsatz des Computers

Verfasser

Christian Schreiner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Matrikelnummer:	0303749
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 884
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Unterrichtsfach Mathematik
Betreuer:	MMag. Dr. Christoph Ableitinger

Wien, am 07. Juli 2009

Danksagung

Mein allererster Dank ist an meine Eltern gerichtet, die mir während meiner Studienzeit immer zur Seite gestanden sind, und mir mein Studium finanziert und ermöglicht haben.

Ich möchte mich an dieser Stelle auch bei allen jenen Menschen bedanken, die mich während meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Ganz besonders möchte ich mich aber bei meinem Betreuer, MMag. Dr. Christoph Ableitinger, bedanken, der mir beim Verfassen dieser Diplomarbeit durch seine nette und zuvorkommende Art, speziell aber anhand seines Wissens und seiner Ratschläge stets hilfreich zur Seite gestanden ist.

Danke Christoph für die ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation

„**Operations Research** (**OR**) bzw. **Unternehmensforschung** ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, das sich mit der Optimierung bestimmter Prozesse oder Verfahren beschäftigt“ (aus [13]).
Ursprünglich stammt der Begriff „Operations Research“ aus dem militärischen Bereich und bezeichnete während des zweiten Weltkriegs die Entwicklung spezieller Methoden zur Lösung strategischer Probleme durch interdisziplinäre Arbeitsgruppen. Nach dem Krieg fanden die verwendeten Verfahren schwerpunktmäßig Einzug in den Bereichen der Wirtschaft, wo es hauptsächlich darum ging, mathematische Methoden zur Behandlung betriebswirtschaftlicher und volkswirtschaftlicher Fragestellungen zu entwickeln, wie z. B. die Minimierung von Kosten, die Maximierung des Gewinns, die optimale Ausnutzung von Fertigungskapazitäten, usw. Heute findet der Begriff „Operations Research“ sowohl in den Wirtschaftswissenschaften, als auch in den Ingenieurswissenschaften und in der Wirtschaftsinformatik Anwendung, wo es hauptsächlich um die Generierung mathematischer Modelle und deren numerische Lösung geht. Der Begriff „Operations Research“ umfasst heute eine Vielzahl mathematischer Begriffe und Methoden. Dazu gehören die Gebiete lineare Optimierung, nichtlineare Optimierung, Graphentheorie, Monte-Carlo-Simulation, Spieltheorie usw. Dabei ist die **lineare Optimierung** (im Englischen **linear programming**) oder auch **lineare Planungsrechnung** ein sehr wichtiges, aber relativ junges Gebiet in der angewandten Mathematik mit zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten (vgl. [5] S. 1f).
Während die Mathematik schon seit Jahrhunderten auf physikalische, naturwissenschaftliche und technische Fragestellungen angewandt wurde, haben ökonomische Anwendungen der Mathematik erst eine relativ kurze Tradition. Früher wurde nämlich für wirtschaftliche Problemstellungen nicht die Mathematik, sondern das kaufmännische Talent und die Erfahrung einer Unternehmerin bzw. eines Unternehmers für wichtiger gehalten. Diese Einstellung bzw. Situation hat sich jedoch seit dem zweiten Weltkrieg geändert. Der Erste, der damals mathematische Methoden bei der Suche nach optimalen Lösungen von organisatorischen und wirtschaftlichen Problemen (im Jahre 1939) einsetzte, war der russische Mathematiker **L. V. Kantorowitsch** (* 1912, † 1986). Er gilt als der Begründer der linearen Optimierung. Weiters wurde gegen Ende des zweiten Weltkriegs die Beschäftigung mit Optimierungsproblemen vor allem in den USA gefördert. Jedoch der eigentliche Durchbruch für die Theorie der linearen Optimierung erfolgte erst ab dem Jahre 1947, als **G.**

B. Dantzig (* 1914, † 2005) ein rechnerisches Verfahren, den **Simplex-Algorithmus**, gefunden hatte. Dieser Algorithmus ist bis heute das zentrale Instrument der linearen Optimierung, denn damit können schließlich alle (lösbaren) linearen Optimierungsaufgaben gelöst werden (vgl. [1] S. 153).

Ein weiterer Aspekt dabei ist, dass durch die rasante Entwicklung von immer leistungsfähigeren Computern dieses Verfahren immer mehr an Bedeutung gewonnen hat. Denn die in der Praxis auftretenden Problemstellungen haben für gewöhnlich mehr als zwei oder drei Variablen, manchmal sogar hunderte oder tausende Variablen. D. h. die praktische Anwendung der Mathematik besteht darin, Lösungen für Probleme zu finden, die sich der unmittelbaren Anschauung entziehen. Es ist daher unmöglich, solche Aufgaben ohne Computereinsatz, geschweige denn graphisch zu lösen.

Heutzutage findet die lineare Optimierung vielfach Anwendung bei

- Produktionsproblemen in der Industrie,
- Mischungsproblemen in der Nahrungs- und Futtermittelerzeugung,
- Bebauungsproblemen in der Stadtplanung und Landwirtschaft,
- Schichtarbeitproblemen bei (öffentlichen) Versorgungs-, Sicherheits- und Sozialeinrichtungen, in (Fremden-)Verkehrsbetrieben, auf Baustellen, in Bergwerken, usw.,
- Transportproblemen im LKW-, Bahn- und Flugverkehr, bei der Post, bei der Zeitungsverteilung, usw.,
- Investitionsproblemen,

um an dieser Stelle nur eine kleine Auswahl zu nennen (vgl. [8] S. 221).

Eine sehr ausführliche Erläuterung der Geschichte des „Operations Research" bzw. der linearen Optimierung findet man in [2] S. 14-37.

Das Ziel der linearen Optimierung besteht darin, z. B. einer Unternehmerin oder einem Unternehmer optimale Entscheidungen (im Hinblick auf den Gewinn) zu ermöglichen. Diese Entscheidungen können beispielsweise die Art und das Ausmaß der Produktion betreffen. Eine Unternehmerin bzw. ein Unternehmer hat schließlich nur eine begrenzte Menge von Maschinen, Rohmaterialien, Arbeitskräften, Lagerflächen, usw. zur Verfügung und muss ihre bzw. seine Entscheidungen aufgrund dieser und eventuell noch anderer Rahmenbedingungen treffen, wie viel sie bzw. er von welchem Produkt erzeugen soll, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen. Je mehr Faktoren und Rahmenbedingungen eine solche Problemstellung beeinflussen, desto schwieriger und komplexer ist zunächst die mathematische Formulierung des Problems, und desto schwieriger wird schließlich die Entscheidung und der Rechenaufwand hinsichtlich einer optimalen Lösung (vgl. [1] S. 153).

Durch die lineare Optimierung soll daher ein Plan erstellt werden, wie ein vorgegebenes Ziel unter bestehenden Bedingungen bestmöglich erfüllt werden kann. Bei der Erstellung des Plans (**Planungsprozess**) besteht die Phase der Lösungsfindung also darin, ausgehend von den für die Planung relevanten Daten sowie einem zu definierenden Ziel ein **mathematisches Modell** zu entwickeln, welches das reale Problem möglichst gut repräsentiert und aus dem Vorschläge für ein optimales Vorgehen abgeleitet werden können. Dieses Modell wird dann mithilfe geeigneter mathematischer Verfahren und Methoden numerisch gelöst (Kapitel über Simplexverfahren), wobei hier Vorgaben und Erkenntnisse aus der mathematischen Theorie einfließen (vgl. [5] S. 2).

Der Planungsprozess kann im Wesentlichen in sechs Schritte unterteilt werden (siehe Abbildung 1.1).

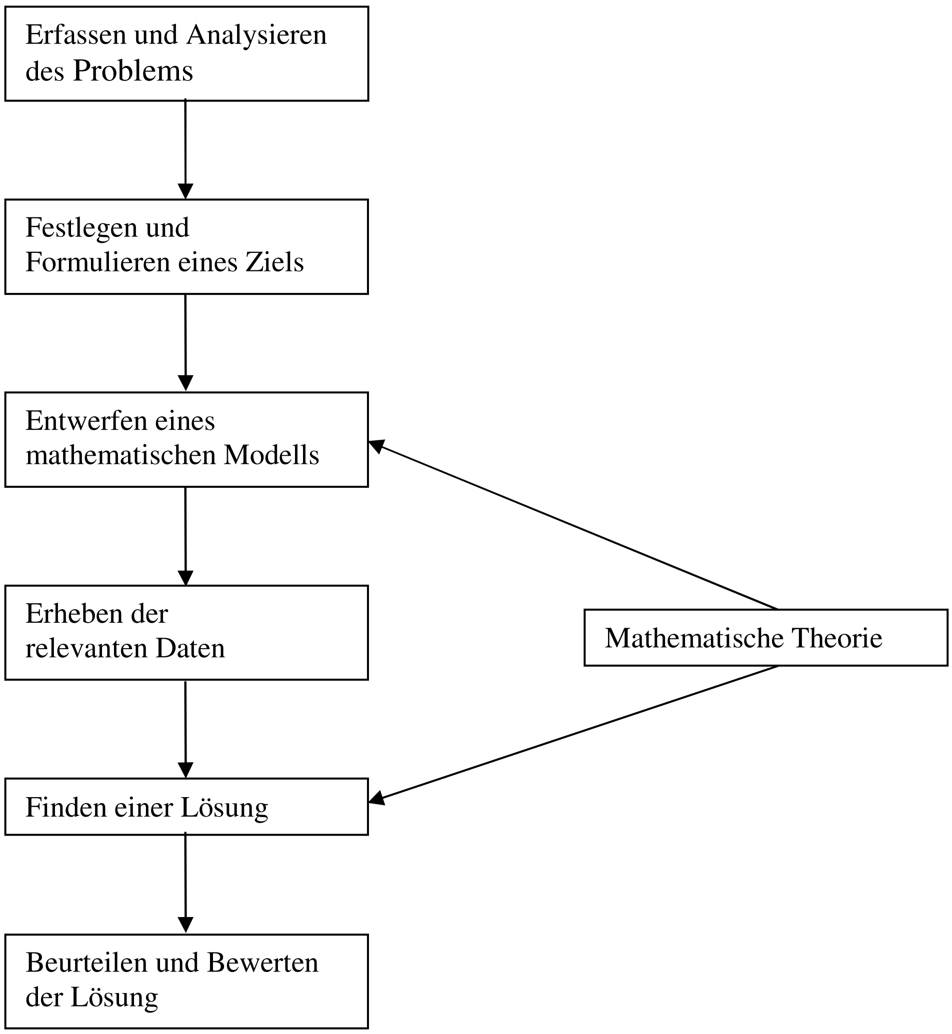


Abbildung 1.1: Planungsprozess (aus [5] S. 3)

Das Erstellen eines mathematischen Modells für eine Problemstellung spielt im Planungsprozess eine zentrale Rolle und ist oft mit großen Schwierigkeiten verbunden, da es sich aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher Anwendungsbereiche kaum systematisch darstellen lässt. Daher sollte man sich bereits zu Beginn der Modellierung folgende Fragen stellen (aus [5] S. 3):

- „Welche quantifizierbaren und für das Problem relevanten Informationen habe ich?"
- „Welche Zusammenhänge bestehen?"
- „Was sind die Handlungsmöglichkeiten?"
- „Welche Einschränkungen bzw. Bedingungen sind dabei zu beachten?"
- „Was will ich optimieren?"
- „Sind Vereinfachungen möglich?"
- „Kann das Modell in eine Standardform gebracht werden (siehe Abschnitt 5.3)?"

Eine ausführlichere Skizzierung der mathematischen Modellbildung bzw. eine Auflistung der einzelnen Schritte, die zum Aufbau eines mathematischen Modells benötigt werden, kann im in [2] S. 40-42 nachgelesen werden.

Um einen ersten Einblick in den Anwendungsbereich der linearen Optimierung – insbesondere in die mathematische Modellbildung für gewisse Problemstellungen – zu erhalten, werden anschließend drei Beispiele präsentiert. In diesen Beispielen wird die Anzahl der Variablen und Bedingungen (unrealistisch) klein sein. Diese sollen daher lediglich als Motivation und als Grundlage für später, aber auch als Anhaltspunkte für die folgenden Kapitel dienen. Damit soll vor allem aufgezeigt bzw. erkannt werden, dass die Kapitel 2, 3 und 4 die mathematischen Grundlagen für die lineare Optimierung bilden.

Beispiel 1.1

Für ein Fest sollen Würste gekauft werden. Der zuständige Fleischhauer beabsichtigt dafür drei Wurstsorten W_1, W_2 und W_3 herzustellen. Es stehen vier Zutaten zur Verfügung: Leber (L), Speck (Sp), Fleisch (F) und Innereien (I). Die nachfolgende Tabelle zeigt die Zusammensetzung je Wurst in Gramm (vgl. [4] S. 53).

	W_1	W_2	W_3
Leber (L)	30	60	10
Speck (Sp)	40	40	20
Fleisch (F)	60	30	40
Innereien (I)	20	30	40

Es stehen maximal 25 kg Leber, 36 kg Speck, 24 kg Fleisch und 16 kg Innereien zur Verfügung. Man rechnet pro Wurst mit einem Gewinn von 2,50 € für W_1, 2,00 € für W_2 und

3,00 € für W_3. Wie viele Würste sollten von den einzelnen Sorten hergestellt werden, damit der Gewinn möglichst groß ist?

Mathematische Modellierung:

Von der Sorte W_1 werden x_1 ($x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \geq 0$), von der Sorte W_2 werden x_2 ($x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0$) und von der Sorte W_3 werden x_3 ($x_3 \in \mathbb{R},\ x_3 \geq 0$) Stück hergestellt.

Der Gewinn

$$z = F(x_1, x_2, x_3) = 2{,}5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$$

ist zu maximieren unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 30 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 &\leq 25000 \\ 40 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 &\leq 36000 \\ 60 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 &\leq 24000 \\ 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 &\leq 16000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

<u>Beispiel 1.2</u>

„Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit Futtersorten A bzw. B. Jede Futtersorte muss Nährstoffe I, II, III im Umfang von mindestens 6, 12 bzw. 4 Mengeneinheiten (ME) enthalten“ (aus [11] S. 10).

Nährstoffgehalt	A	B
I	20 %	10%
II	20 %	40 %
III	0 %	40 %
Preis in Geldeinheiten/ME	5	6

Mathematische Modellierung:

Sieht man x_1 ($x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \geq 0$) ME von Sorte A bzw. x_2 ($x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0$) ME von Sorte B pro Futterration vor, so sind die Gesamtkosten

$$z = F(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$$

zu minimieren unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 0{,}2\cdot x_1+0{,}1\cdot x_2 &\geq 6\\ 0{,}2\cdot x_1+0{,}4\cdot x_2 &\geq 12\\ 0{,}4\cdot x_2 &\geq 4\\ x_1,x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

<u>Beispiel 1.3</u>

Zwei Kohlebergwerke K_1 und K_2 versorgen mit ihrer gesamten Tagesproduktion drei Kohlekraftwerke W_1, W_2 und W_3. Die tägliche Produktion der Bergwerke beträgt 110 t bei K_1 und 90 t bei K_2. Die Kohlekraftwerke benötigen von den beiden Bergwerken folgende Mengen: W_1 benötigt insgesamt 70 t, W_2 benötigt insgesamt 80 t und W_3 benötigt insgesamt 50 t.

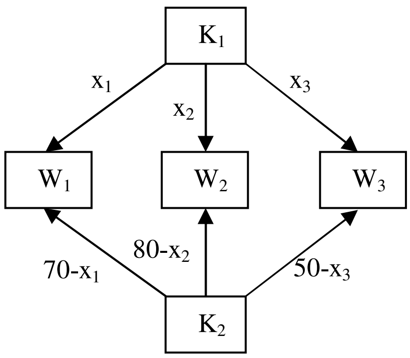
Die Transportkosten in Euro pro Tonne Kohle ergeben sich aus der folgenden Tabelle (vgl. [4] S. 29).

	W_1	W_2	W_3
K_1	40	30	30
K_2	50	20	60

Wie viele Tonnen muss jedes Bergwerk an jedes einzelne Kraftwerk liefern, um den Bedarf jedes Kraftwerkes zu decken und um die Transportkosten so niedrig wie möglich zu halten?

Mathematische Modellierung:

K_1 liefert x_1 ($x_1\in\mathbb{R},\ x_1\geq 0$) Tonnen Kohle an W_1, x_2 ($x_2\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0$) Tonnen an W_2 und x_3 ($x_3\in\mathbb{R},\ x_3\geq 0$) Tonnen an W_3.



Die Kosten

$$z = F(x_1, x_2, x_3) = 40 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 50 \cdot (70 - x_1) + 20 \cdot (80 - x_2) + 60 \cdot (50 - x_3) =$$
$$= -10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 30 \cdot x_3 + 8100$$

sind zu minimieren unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} & x_1 \le 70 \\ & x_2 \le 80 \\ & x_3 \le 50 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 110 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 . \end{aligned}$$

In den Beispielen 1.1, 1.2 und 1.3 wurden also mathematische Modelle für Problemstellungen aus jeweils unterschiedlichen Bereichen konstruiert. In jedem dieser Beispiele handelt es sich um das Problem, eine Lösung eines Systems von Bedingungen zu finden, das ein Ziel minimiert oder maximiert. Die mathematischen Modelle haben also ähnliche Struktur. Die Grundaufgabe der linearen Optimierung besteht daher darin, ein mathematisches Modell für eine gewisse Problemstellung zu entwickeln, das folgende allgemeine Form hat:
Maximiere oder minimiere eine Zielfunktion

$$z = F(x_1, ..., x_n)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$f_i(x_1, ..., x_n) \begin{Bmatrix} \ge \\ = \\ \le \end{Bmatrix} b_i \quad \text{für } i = 1, ..., n$$

$$x_1, ..., x_n \ge 0 .$$

In dieser Arbeit werden ausschließlich lineare Optimierungsprobleme betrachtet. Das bedeutet, dass die Funktionen F und f_i **linear** sind, also **lineare** (Funktions-)**Gleichungen** bzw. **lineare Ungleichungen** vorliegen. Die Definition einer linearen Gleichung bzw. einer linearen Ungleichung wird in den folgenden Kapiteln 2 und 4 angegeben.

Nach dieser kurzen Einführung in die lineare Optimierung – insbesondere des Planungsprozesses – muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass das Grundkonzept der linearen Optimierung sowie mathematische Verfahren um Modelle zu lösen, erst in Kapitel 5 ausführlich thematisiert werden können, nachdem in den Kapiteln 2, 3 und 4 wichtige mathematische Grundlagen, auf denen die lineare Optimierung basiert, behandelt wurden.

Dabei werden in den einführenden Kapiteln vorwiegend die Bücher [1], [8] und [9] als Grundlage verwendet. Weiters wurde zuvor darauf hingewiesen, dass heutzutage der Computer im Bereich der linearen Optimierung eine bedeutende Rolle spielt. Zudem sieht der Lehrplan für Mathematik in der AHS-Oberstufe und in der Handelsakademie einen Computereinsatz im Unterricht vor. Im Lehrplan für Mathematik in der AHS-Oberstufe heißt es im allgemeinen Teil (aus [14]): „Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts“. Und im Lehrplan für Mathematik in der Handelsakademie steht bei der Bildungs- und Lehraufgabe (aus [15]): „Die Schülerinnen und Schüler sollen Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner in allen Jahrgängen einsetzten und mathematische Problemstellungen damit lösen können“. Daher werden bereits in den Kapiteln 2, 3 und 4 die Möglichkeiten eines Computereinsatzes aufgezeigt. Es kommen dabei zwei Computerprogramme zum Einsatz, nämlich die dynamische Mathematiksoftware **GeoGebra** und das Computeralgebrasystem **Maple**. Darauf aufbauend wird dann in Kapitel 5 demonstriert, wie lineare Optimierungsprobleme mit zwei bzw. in besonderen Fällen mit drei Variablen mithilfe von GeoGebra graphisch und interaktiv gelöst werden können. Außerdem wird in Kapitel 5 ein Tool (**Simplex**) vorgestellt, das sich im Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft Excel als Add-In einbinden lässt. Mithilfe dieses Tools können in Microsoft Excel Simplextableaus definiert, Pivotspalten ausgetauscht und schließlich Pivotoperationen durchgeführt werden. Zu guter Letzt wird ein Applet, der **O**nline **S**implex **I**nstructor (**OSI**), vorgestellt, mit dem lineare Optimierungsprobleme anhand des Simplexalgorithmus gelöst werden können. Das Besondere an diesem Applet ist jedoch, dass dabei die einzelnen Schritte bei der Lösungsfindung erklärt werden und eine Auswertung des Ergebnisses zu Verfügung steht. Der Computer soll dabei natürlich nicht als Black Box fungieren. Vielmehr soll Wert darauf gelegt werden, Lösungsverfahren von linearen Optimierungsproblemen eingehend zu studieren und den Computer an geeigneter Stelle als sinnvolles und gewinnbringendes Hilfsmittel einzusetzen. Es soll also mit dieser Arbeit aufzeigt werden, wie ein didaktisch sinnvoller Einsatz von Computerprogrammen im Mathematikunterricht am Beispiel der linearen Optimierung erfolgen kann. Daher werden in Kapitel 6 die verwendeten

Computerprogramme didaktisch analysiert und Vorschläge für einen adäquaten Einsatz im Mathematikunterricht gegeben.

2 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

2.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen werden benötigt, um praktische Probleme (Technik, Wirtschaft, Natur, …) oder auch Fragestellungen im alltäglichen Leben mathematisch darstellen bzw. modellieren und lösen zu können. Sie spielen daher in der angewandten Mathematik eine bedeutende Rolle.
Im Bereich der linearen Optimierung werden lineare Gleichungen dazu benötigt, ein mathematisches Modell (die Zielfunktion und gegebenenfalls auch Nebenbedingungen) einer Problemstellung entwerfen zu können. Darauf wurde bereits in Kapitel 1 hingewiesen und das lässt sich auch durch Betrachtung der allgemeinen Form des mathematischen Modells eines linearen Optimierungsproblems bzw. anhand der Beispiele 1.1, 1.2 und 1.3 einsehen.

Bevor jedoch der Begriff der linearen Gleichung, der zuvor schon mehrmals aufgetreten ist, definiert werden kann, muss zunächst der Begriff des geordneten n-Tupels reeller Zahlen und der Begriff des n-dimensionalen reellen Vektorraums eingeführt werden.

Definition 2.1.1
Fasst man n Variablen $x_1,...,x_n$ zu einer geordneten Liste $(x_1,...,x_n)$ zusammen, so spricht man von einem **geordneten n-Tupel reeller Zahlen** oder einem **n-dimensionalen reellen Zahlenvektor**. Der von der Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1,...,x_n)$ gebildete Raum wird als **n-dimensionaler reeller Vektorraum $\mathbb{R}^n$** bezeichnet:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

Die Definition des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist lediglich eine Abstraktion der bekannten Vektorräume $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mit $\mathbb{R}$ wird die Menge aller reellen Zahlen bezeichnet. $\mathbb{R}^2$ bezeichnet die Menge aller geordneten reellwertigen Zahlenpaare (x_1, x_2), also $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$. Und $\mathbb{R}^3$ bezeichnet die Menge aller geordneten reellwertigen Zahlentripel (x_1, x_2, x_3), also

$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Die bekannten Rechengesetze (Addition und Skalarmultiplikation) des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ können problemlos für den $\mathbb{R}^n$ übertragen werden. D. h. für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)\\
&\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}\\
&\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}\\
&\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}\\
&(r\cdot s)\cdot\vec{u}=r\cdot\left(s\cdot\vec{u}\right)\\
&r\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=r\cdot\vec{u}+r\cdot\vec{v}\\
&(r+s)\cdot\vec{u}=r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{u}\\
&1\cdot\vec{u}=\vec{u}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.1.1

So wie einer reellen Zahl, einem geordneten Zahlenpaar oder einem geordneten Zahlentripel ein Punkt auf der Zahlengeraden, in der x_1-x_2-Ebene oder im dreidimensionalen Raum entspricht, entspricht einem geordneten n-Tupel reeller Zahlen ein Punkt im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1.2

Eine Gleichung der Gestalt

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}, \quad (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0),$$

$$G=\mathbb{R}^n$$

heißt **lineare Gleichung** mit **n Variablen (Unbekannten) $x_1, x_2, \ldots, x_n$** in der **Grundmenge $G=\mathbb{R}^n$**.

Die Ausdrücke $a_i \cdot x_i \; (i = 1, \ldots, n)$ heißen lineare Glieder, die Zahl b heißt absolutes Glied. Falls $b = 0$ ist, heißt die Gleichung homogen und im Fall $b \neq 0$ heißt die Gleichung inhomogen.

Bemerkung 2.1.2

Die Grundmenge G ist jene Menge, aus der die Elemente zum Einsetzen für die Variablen $x_1,...,x_n$ entnommen werden können.

Aus dieser allgemeinen Definition lassen sich schließlich lineare Gleichungen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen angeben. Zum Beispiel:

- lineare Gleichungen mit einer Variablen in G=$\mathbb{R}$:

  $a_1 \cdot x_1 = b \quad a_1, b \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0$

- lineare Gleichungen mit zwei Variablen in G=$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$=$\mathbb{R}^2$:

  $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, \quad (a_1, a_2) \neq (0,0)$

- lineare Gleichungen mit drei Variablen in G=$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$=$\mathbb{R}^3$:

  $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b \quad a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$

Während eine lineare Gleichung $a_1 \cdot x_1 = b$ genau eine Lösung (Punkt) in $\mathbb{R}$ besitzt, besitzt eine lineare Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ eine Menge von Punkten als Lösungen im $\mathbb{R}^2$, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Die Punktmenge wird **Gerade** im zweidimensionalen Vektorraum ($\mathbb{R}^2$) genannt. Im dreidimensionalen Vektorraum ($\mathbb{R}^3$) wird die Punktmenge, deren Koordinaten eine lineare Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$ erfüllen, **Ebene** genannt. Die Menge aller geordneten n-Tupel im n-dimensionalen Raum ($\mathbb{R}^n$), deren Koordinaten eine lineare Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ erfüllen, heißt **Hyperebene**.

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme spielen in der linearen Optimierung eine wichtige Rolle. Es ist nämlich ein wichtiger Zwischenschritt, lineare Optimierungsprobleme auf eine einheitliche Gestalt (Normalform bzw. Standardform, siehe Abschnitt 5.3) zu bringen, wobei dann unter den Nebenbedingungen nur mehr lineare Gleichungen vorkommen. Dies führt also zu linearen Gleichungssystemen.

Definition 2.2.1

Ein **Gleichungssystem** mit **m Gleichungen und n Variablen** (Unbekannten) der Form

$$G=\mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

heißt **lineares Gleichungssystem** vom Typ $(m \times n)$.

Die $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten des Systems und die $x_j \in \mathbb{R}$ sind die Unbekannten $(i = 1, \ldots, m \text{ bzw. } j = 1, \ldots, n)$. Das aus den reellen Zahlen $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ bestehende Schema heißt Koeffizientenschema oder auch **Koeffizientenmatrix A** des Gleichungssystems und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ heißt **Störvektor** oder Störspalte:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Ist die Störspalte $\vec{b}$ der Nullvektor $\vec{0}$, so heißt das Gleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Bemerkung 2.2.1

Das lineare Gleichungssystem kann in einer verkürzten Schreibweise dargestellt werden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Bei linearen Gleichungssystemen mit m Gleichungen und n Variablen können drei unterschiedliche Lösungsfälle (Lösbarkeitskriterium) eintreten:

- Wenn das **lineare Gleichungssystem** genauso viele Gleichungen wie Unbekannte (**m = n**) besitzt, so existiert im Allgemeinen (siehe Satz 3.4.2) ein einziges geordnetes n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, welches das Gleichungssystem erfüllt. Das Gleichungssystem ist dann eindeutig (**einelementig**) lösbar, d. h. es liegt der **Hauptfall** vor.
- Wenn das **lineare Gleichungssystem** weniger Gleichungen als Unbekannte (**m < n**)

besitzt, so wird es im Allgemeinen (siehe Satz 3.4.2) von unendlich vielen (d. h. einer einparametrigen, zweiparametrigen, … Menge von) geordneten n-Tupeln $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Das Gleichungssystem ist **unterbestimmt**.

- Wenn das **lineare Gleichungssystem** mehr Gleichungen als Unbekannte (**m > n**) besitzt, dann gibt es im Allgemeinen (siehe Satz 3.4.2) keine Lösung (leere Menge). Das Gleichungssystem ist **überbestimmt**.

2.3 Graphisches Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe des Computers

Da lineare Optimierungsprobleme mit zwei bzw. in besonderen Fällen auch mit drei Variablen graphisch gelöst werden können, wird in diesem Abschnitt als Einführung bzw. als Vorbereitung auf Abschnitt 4.4 und 5.2 demonstriert, wie lineare Gleichungen mit zwei oder drei Variablen graphisch dargestellt bzw. wie die Lösungsmenge L von linearen Gleichungssystemen mit zwei (drei) Gleichungen und zwei (drei) Variablen durch den Einsatz des Computers graphisch dargestellt und bestimmt werden kann.
Für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen gibt es im Allgemeinen (wenn weder die homogenen noch die inhomogenen Gleichungen proportional sind) ein einziges geordnetes Zahlenpaar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, welches das Gleichungssystem erfüllt (die Lösungsmenge L ist einelementig). Ist dies nicht der Fall, so können zwei Sonderfälle eintreten. Nämlich einerseits, dass die homogenen, nicht aber die inhomogenen Gleichungen proportional sind. Das bedeutet, dass die beiden Geraden parallel sind. Das Gleichungssystem ist dann unlösbar. Andererseits kann es vorkommen, dass die inhomogenen Gleichungen proportional sind, d. h. die beiden Geraden sind parallel und fallen zusammen. Das Gleichungssystem ist dann mehrdeutig lösbar.
Im folgenden Beispiel wird demonstriert, wie die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen graphisch bestimmt werden kann.

Beispiel 2.3.1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + x_2 &= 38 \\ x_1 - x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Um die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems in GeoGebra graphisch bestimmen zu können, müssen die beiden linearen Gleichungen mit zwei Variablen $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ (Geraden) graphisch dargestellt werden. Dazu werden diese durch Äquivalenzumformungen zunächst auf die Form $x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \cdot x_1 + \frac{b}{a_2}$ gebracht. Setzt man anschließend $k = -\frac{a_1}{a_2}$ und $d = \frac{b}{a_2}$ so erhält man: $x_2 = k \cdot x_1 + d$. Das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen hat dann folgende Form:

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 \cdot x_1 + 38 \\ x_2 &= x_1 - 2. \end{aligned}$$

Dies sind gerade Funktionsgleichungen von linearen Funktionen, welche in GeoGebra durch die Eingabe von *f:y=–4·x+38* und *g:y=x–2* in die Eingabezeile (GeoGebra erlaubt keine Eingabe von indizierten Variablen in die Eingabezeile) und durch Drücken der Eingabetaste graphisch dargestellt werden können. Damit auch die Beschriftung der beiden Geraden angezeigt wird, muss zunächst der Cursor über einer der Geraden positioniert werden. Durch Betätigung der rechten Maustaste, der Auswahl des Menüpunkts *Eigenschaften* und der Auswahl der Registrierkarte *Grundeinstellungen* gelangt man dann in jenes Menü, wo die erforderlichen Einstellungen vorgenommen werden können. Es muss *Beschriftung anzeigen* mit einem *Häkchen* markiert werden und im zugehörigen Klappmenü *Name & Wert* ausgewählt werden (für die zweite Gerade kann dies analog durchgeführt werden).

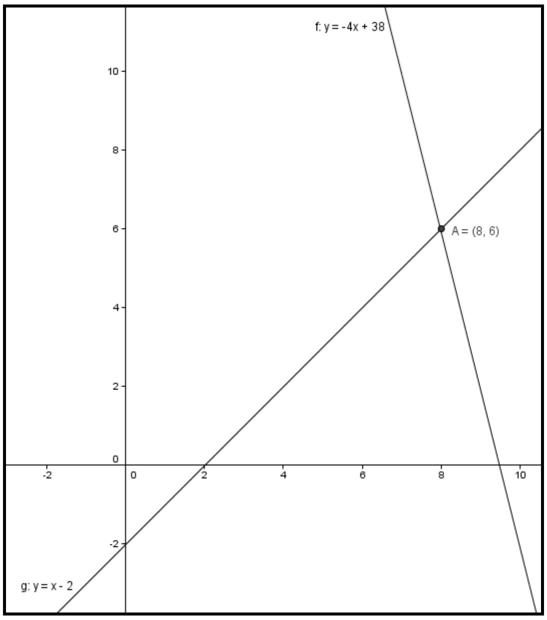


Abbildung 2.3.1: Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystem - GeoGebra

Das lineare Gleichungssystem ist nach dem Lösbarkeitskriterium eindeutig bestimmt, es liegt der Hauptfall vor. Die beiden Geraden schneiden einander in einem Punkt $A \in \mathbb{R}^2$. Der Schnittpunkt A kann in GeoGebra durch die Auswahl von *Schneide zwei Objekte* im entsprechenden Klappmenü in der Symbolleiste und durch die anschließende Markierung zweier sich schneidender Objekte definiert werden. Damit die Beschriftung des Schnittpunkts A – insbesondere die Lösungsmenge L (Koordinaten) – angezeigt wird, kann analog wie zuvor vorgegangen werden. Es gibt also ein einziges geordnetes Zahlenpaar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, welches das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen erfüllt, d. h. die Lösungsmenge L ist einelementig: $L = \{(8, 6)\}$.

Während man bei der graphischen Darstellung bzw. Bestimmung der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen mit dem zweidimensionalen Raum – also der x_1-x_2-Ebene ($\mathbb{R}^2$) – ausgekommen ist, erfordert die graphische Darstellung bzw. Bestimmung der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen – insbesondere die graphische Darstellung einer linearen Gleichung mit drei Variablen $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$ (Ebene) – einen Übergang auf den dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$). Jedoch kann sich die graphische Darstellung bzw. Bestimmung der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen ohne zu Hilfenahme einer geeigneten Software äußerst mühsam gestalten. Da man bei der graphischen Darstellung von linearen Gleichungen mit drei Variablen bei der Verwendung von GeoGebra an die Grenzen des Programms stößt, wird ab sofort bei der graphischen Darstellung bzw. Bestimmung der Lösungsmenge L von linearen Gleichungssystemen mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen Maple verwendet.

Da ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen unterbestimmt ist, ist die Lösungsmenge L nach dem Lösbarkeitskriterium im Allgemeinen (wenn weder die homogenen noch die inhomogenen Gleichungen proportional sind) einparametrig, d. h. die Ebenen schneiden einander. Es können auch hier zwei Sonderfälle eintreten. Einerseits kann es vorkommen, dass die homogenen, nicht jedoch die inhomogenen Gleichungen proportional sind. Dann sind die Ebenen parallel und das Gleichungssystem ist unlösbar. Andererseits besteht die Möglichkeit, dass die inhomogenen Gleichungen proportional sind. Dann fallen die Ebenen zusammen und die Lösungsmenge L ist zweiparametrig.

Im folgenden Beispiel wird vorgeführt, wie die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Variablen in Maple graphisch bestimmt werden kann.

<u>Beispiel 2.3.2</u>

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen:

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 &= 6 \\ -4\cdot x_1 + 7x_2 - 4\cdot x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Um die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems in Maple graphisch bestimmen zu können, müssen die beiden linearen Gleichungen mit drei Variablen (Ebenen) graphisch dargestellt werden. Für die graphische Implementierung der linearen Gleichungen muss zunächst das Paket *plots* mit dem Befehl *with(plots):* geladen werden. Danach können zwei Ebenen *p1* und *p2* durch die Eingaben *p1:=2·*x_1*–*x_2*+2·*x_3*=6;* und *p2:=–4·*x_1*+7·*x_2*–4·*x_3*=1;* definiert und anschließend mit dem Befehl *implicitplot3d([p1,p2],* x_1*=-5..5,* x_2*=-5..5,* x_3*=-5..5, axes=normal);* graphisch dargestellt werden. Die Parameter x_1*=-5..5,* x_2*=-5..5,* x_3*=-5..5* bestimmen dabei die Größe des Bildbereichs der Grafik und der optionale Parameter *axes=normal* bedeutet, dass die Koordinatenachsen eingezeichnet werden.

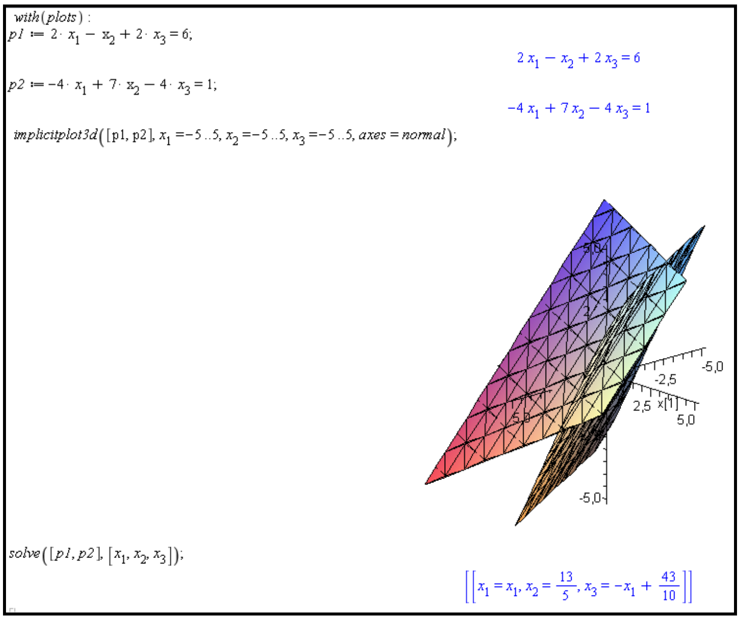


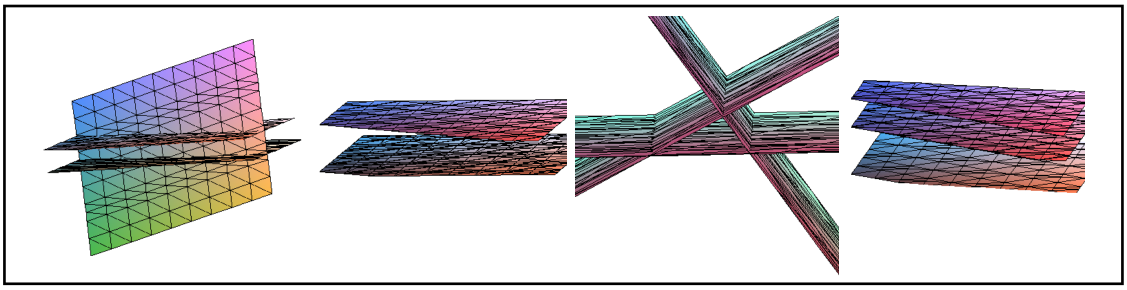
Abbildung 2.3.2: Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystem – Maple (1)

Die beiden Ebenen schneiden einander in einer Gerade g. Für die Berechnung der Parameterdarstellung der Schnittgerade g kann der Befehl *solve([p1,p2], [x_1,x_2,x_3])* verwendet werden: $g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}6 \\ 4{,}3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Variablen ist also einparametrig:

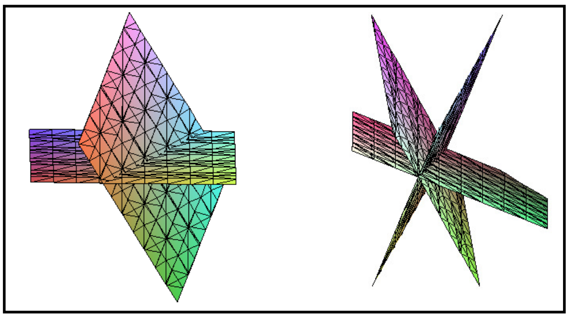
$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}6 \\ 4{,}3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Liegt ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen vor, so gibt es bei der graphischen Darstellung bzw. Bestimmung der Lösungsmenge L nach dem Lösbarkeitskriterium im Allgemeinen (siehe Satz 3.4.2) ein einziges geordnetes Zahlentripel $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, welches das Gleichungssystem erfüllt (Lösungsmenge L ist einelementig). Andernfalls können auch hier Sonderfälle eintreten. Aufgrund der Vielzahl von möglichen Sonderfällen ist es am übersichtlichsten und am verständlichsten, wenn diese graphisch dargestellt werden:

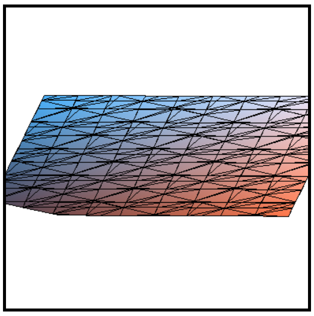
- Die Lösungsmenge L ist die leere Menge.



- Die Lösungsmenge L ist einparametrig.



- Die Lösungsmenge L ist zweiparametrig.



Im folgenden Beispiel wird die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen in Maple graphisch bestimmt.

Beispiel 2.3.3

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen:

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11\,. \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung der linearen Gleichungen mit drei Variablen (Ebenen) erfolgt analog zu Beispiel 2.3.2.

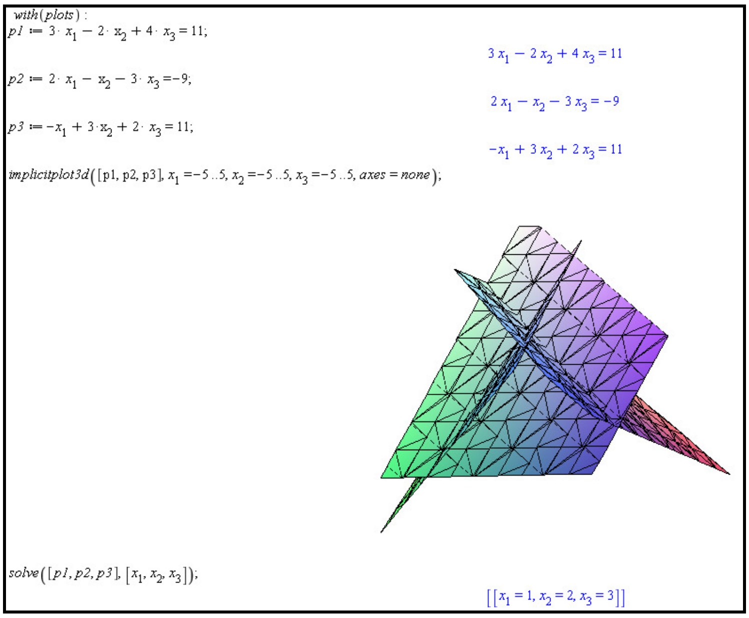


Abbildung 2.3.3: Lineares Gleichungssystem – Maple (2)

Das lineare Gleichungssystem ist nach dem Lösbarkeitskriterium eindeutig bestimmt, es liegt der Hauptfall vor. Die drei Ebenen schneiden einander in einem Punkt $S \in \mathbb{R}^3$. Es gibt also ein einziges geordnetes Zahlentripel $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, welches das Gleichungssystem erfüllt. Für die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunkts S kann der Befehl *solve([p1,p2,p3], [x1,x2,x3])* verwendet werden: $S = \{(1,2,3)\}$. Die Lösungsmenge L ist daher einelementig: $L = \{(1,2,3)\}$.

Eine graphische Veranschaulichung der Lösungsmenge L von linearen Gleichungssystemen mit mehr als drei Variablen (also ab einer Dimension größer als drei) ist nicht mehr möglich, da dies außerhalb der menschlichen Vorstellungskraft liegt.

Bemerkung 2.3.1

Noch ein kleiner Zusatz zur graphischen Darstellung in Maple: Um dreidimensionale Grafiken (Abbildung 2.3.2, 2.3.3) aus verschiedenen Perspektiven betrachten zu können, können diese beliebig gedreht werden. Dazu muss die Grafik einmal mit der linken Maustaste angeklickt werden. Anschließend wird oberhalb des Eingabebereichs eine Menüleiste eingeblendet.

Abbildung 2.4.4: Menüleiste für die Grafik

Durch Veränderung der beiden linken Parameter (rote Kreise) erfolgt schließlich die gewünschte Rotation der Grafik.

Bemerkung 2.3.2

In den Beispielen 2.3.2 bzw. 2.3.3 wurden geeignete x_1-, x_2- und x_3-Bereiche (*x_1=-5..5, x_2=-5..5, x_3=-5..5*) gewählt, um jeweils eine aussagekräftige Grafik zu erhalten. Natürlich könnte man auch andere Bereiche, beispielsweise *x_1=-10..10, x_2=-10..10, x_3=-10..10*, für die x_1-, x_2- und x_3-Achse definieren, um einen größeren Zeichenbereich zu erhalten. Durch Probieren von verschiedenen Parametern lässt sich aber sehr schnell feststellen, welche Parameterwahl zu einer adäquaten Darstellung führt. Darauf wird auch noch in Kapitel 6 genauer eingegangen.

3 Matrizen

3.1 Einführung und Grundlagen

In Definition 2.2.1 trat der Begriff Koeffizientenmatrix bzw. Koeffizientenschema auf. Dieser Begriff soll in diesem Abschnitt erläutert und konkretisiert werden.
Matrizen spielen in der Technik, in den Naturwissenschaften aber auch in der Wirtschaft eine wichtige Rolle. Zudem werden Matrizen auch beim Lösen von linearen Gleichungssystemen (siehe Abschnitt 3.5) und in der linearen Optimierung benötigt (siehe Abschnitt 5.3).
Matrizen werden vor allem dazu verwendet, um Tabellen oder Systeme (siehe Abschnitt 3.3 und Abschnitt 4.2) in einem kompakten und prägnanten Zahlenschema (einer Kurzschreibweise) darzustellen.

Beispiel 3.1.1
Ein Betrieb produziert aus vier Rohstoffen fünf Produkte. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist in folgender Tabelle angegeben.

Produktionstabelle	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4	Produkt 5
Rohstoff 1	2	4	1	1	3
Rohstoff 2	3	5	5	4	0
Rohstoff 3	1	4	1	0	5
Rohstoff 4	0	2	3	5	1

Die Daten bzw. Zahlen aus der Tabelle lassen sich in einem Zahlenschema (Matrix) eindeutig darstellen. Dies ergibt eine sogenannte Produktionsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird üblicherweise mit Großbuchstaben A, B, C, … bezeichnet.
Im obigen Beispiel besteht die Matrix A aus 4 Zeilen und 5 Spalten, d. h. es liegt eine (4×5)-Matrix (sprich: 4 kreuz 5 Matrix) vor. Die Zahlen der Matrix nennt man die Elemente der Matrix. Die Position der Elemente in der Matrix wird dadurch festgelegt, indem jedem

Element ein geordnetes Paar von Indizes zugeordnet wird, nämlich der Zeilenindex und der Spaltenindex. In obiger Matrix A ist beispielsweise $a_{11} = 2, a_{23} = 5, a_{35} = 5$, usw.

Dies motiviert zu folgender allgemeinen Definition einer Matrix.

Definition 3.1.1

Ein Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{1. Spalte} \qquad\qquad \text{j-te Spalte} \quad \text{n-te Spalte} \end{array} \begin{array}{l} \text{1-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \text{m-te Zeile} \end{array}$$

heißt **Matrix** vom **Typ (m×n)**. Man schreibt:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \begin{cases} i = 1, \dots, m & \text{Zeilenindex} \\ j = 1, \dots, n & \text{Spaltenindex} \end{cases}$$

Der Zeilenindex läuft also von 1 bis m und der Spaltenindex läuft von 1 bis n.

Bemerkung 3.1.1

Der von der Menge aller reellen $(m \times n)$-Matrizen gebildete Raum wird mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet.

Weiters kann man die Zeilen bzw. Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten bzw. diesen eigene Bezeichnungen geben:

i-ter Zeilenvektor von A: $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n \qquad i = 1, \dots, m$

j-ter Spaltenvektor von A: $\vec{a}^{\,j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad j = 1, \dots, n$

Somit kann die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in den folgenden Kurzschreibweisen angegeben werden:

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) \text{ bzw. } A = (\vec{a}^{\,1}, \vec{a}^{\,2}, \dots, \vec{a}^{\,n})$$

Es gibt verschiedene Typen bzw. Sonderfälle von Matrizen:

- $m = n \quad n > 1$ quadratische Matrix (Anzahl der Zeilen = Anzahl der Spalten)
- $m = 1 \quad n > 1$ Zeilenvektor
- $m > 1 \quad n = 1$ Spaltenvektor
- $m = 1 \quad n = 1$ Skalar (reelle Zahl)
- Eine Matrix, in der alle Elemente null sind, nennt man Nullmatrix.

$$O_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  Diese Matrix wird als $(n\times n)$-Nullmatrix bezeichnet. Die Nullmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Matrixaddition.

- Eine besondere quadratische Matrix ist die Einheitsmatrix. In der Einheitsmatrix haben alle Elemente in der Hauptdiagonale den Wert 1 und alle anderen Elemente haben den Wert 0.

$$E_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hauptdiagonale}$$

  Somit gilt für alle Einheitsmatrizen: $e_{ij} = 1$ für $i = j$, sonst $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$

  Diese Matrix wird $(n\times n)$-Einheitsmatrix genannt.

Definition 3.1.2

Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind gleich, wenn sie gleich viele Zeilen und Spalten besitzen und wenn alle Elemente a_{ij} von A mit den entsprechenden Elementen b_{ij} von B übereinstimmen (also $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$).

D. h.: $a_{11} = b_{11} \wedge a_{12} = b_{12} \wedge \dots \wedge a_{mn} = b_{mn}$

3.2 Rechenoperationen mit Matrizen

Wie Vektoren (Sonderfälle von Matrizen) kann man auch Matrizen gleichen Typs $(m \times n)$, d. h. wenn die Zeilen- und Spaltenanzahl gleich ist, elementweise addieren, subtrahieren und mit einem Skalar multiplizieren.

Definition 3.2.1

Sind A und B Matrizen vom selben Typ $(m \times n)$ und $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

1) Man addiert zwei Matrizen A und B $(A+B)$, indem man gleichplatzierte Elemente der Matrizen A und B addiert:

   $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

   $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

2) Man subtrahiert zwei Matrizen A und B $(A-B)$, indem man gleichplatzierte Elemente der Matrizen A und B subtrahiert:

   $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

   $$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

3) Man multipliziert eine Matrix A mit einem Skalar c (c·A), indem man jedes Element von A mit dem Skalar c multipliziert.

   $c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij}) = (a_{ij} \cdot c) = (a_{ij}) \cdot c = A \cdot c$

   $$c \cdot A = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ c \cdot a_{m1} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot c & \cdots & a_{1n} \cdot c \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} \cdot c & \cdots & a_{mn} \cdot c \end{pmatrix} =$$

   $$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot c = A \cdot c$$

Definition 3.2.2

Ist A eine Matrix vom Typ $(m \times n)$ und B eine Matrix vom Typ $(n \times s)$, so ist die Multiplikation von A und B $(A \cdot B)$ definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1s} + \dots + a_{1n} \cdot b_{ns} \\ a_{21} \cdot b_{11} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{21} \cdot b_{1s} + \dots + a_{2n} \cdot b_{ns} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1s} + \dots + a_{mn} \cdot b_{ns} \end{pmatrix} =$$

$$(m \times n) \quad \cdot \quad (n \times s) \quad = \quad (m \times s)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{ks} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{ks} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{ks} \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ existiert also nur dann, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

Bemerkung 3.2.1

Ist $A_{(m\times n)} \cdot B_{(n\times s)} = C_{(m\times s)}$, so gilt für das Element c_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte:

$$c_{ij} = \overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b^j} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Dabei ist $\overrightarrow{a_i}$ ein Zeilenvektor der Matrix A und $\overrightarrow{b^j}$ ein Spaltenvektor der Matrix B.

Aufgrund obiger Bemerkung bzw. Definition kann man erkennen, dass hinter der Matrixmultiplikation das skalare Produkt zweier Vektoren steckt:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Weiters ist zu beachten, dass die Matrixmultiplikation (im Gegensatz zur Multiplikation mit einem Skalar) im Allgemeinen nicht kommutativ ist ($A \cdot B \neq B \cdot A$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 18 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Für quadratische Matrizen gilt jedoch: A·E = E·A = A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es existiert aber auch noch eine weitere wichtige Operation für Matrizen, nämlich das **Transponieren** einer Matrix.

Definition 3.2.3

Ist A eine Matrix vom Typ $(m \times n)$, dann entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten die **transponierte Matrix A^T** vom Typ $(n \times m)$:

$$A_{(m\times n)} = A^T_{(n\times m)} \qquad \text{bzw.} \qquad (a_{ij}) = (a_{ji})^T$$

Bemerkung 3.2.2

Durch das Transponieren eines Spaltenvektors erhält man einen Zeilenvektor, und umgekehrt erhält man durch das Transponieren eines Zeilenvektors einen Spaltenvektor. Daher kann die Verwendung der Spalten- oder Zeilenschreibweise beliebig gewählt werden, sie hängt jedoch von der jeweiligen Situation ab.

3.3 Matrizengleichung eines linearen Gleichungssystems

Betrachte folgendes lineares Gleichungssystem:

$$G=\mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix A dieses Gleichungssystems ist gegeben durch

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Das lineare Gleichungssystem lässt sich nun in einer Matrixform bzw. als **Matrizengleichung** folgendermaßen darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Lösungsvektor } \vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Störvektor } \vec{b}}$$

In Kurzform lautet die Matrizengleichung: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Dabei ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die **Koeffizientenmatrix** (enthält die Koeffizienten), der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist der **Lösungsvektor** (enthält die Unbekannten) und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ist der **Störvektor** (enthält die rechten Seiten der Gleichungen) des linearen Gleichungssystems.

Beispiel 3.3.1

Das lineare Gleichungssystem in Beispiel 2.3.3 lässt sich folgendermaßen in einer Matrizengleichung darstellen:

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\
2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -9 \\
-x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11
\end{aligned} \quad \text{entspricht} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.3.1

Für ein lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$) kann man neben der Koeffizientenmatrix A noch eine weitere Matrix definieren, nämlich die **erweiterte Koeffizientenmatrix A'**. Diese Matrix entsteht, wenn der Koeffizientenmatrix A die rechte Seite der Gleichungen (der Störvektor $\vec{b}$) als zusätzliche Spalte hinzugefügt wird. Die erweiterte Koeffizientenmatrix trägt daher die vollständige Information des Gleichungssystems.

$$A'_{(m \times (n+1))} = \left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

<u>Beispiel 3.3.2</u>

$$G = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad A'_{(3 \times 4)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

3.4 Lösbarkeit der Matrizengleichung und der Rang einer Matrix

Um die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ untersuchen zu können, ist der Begriff der linearen Unabhängigkeit von besonderer Bedeutung. Diese spielt vor allem bei der Rangbestimmung eine wichtige Rolle und anhand des Rangs der Koeffizientenmatrix A bzw. erweiterten Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right)$ kann schließlich eine Aussage über die Lösbarkeit bzw. die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems getroffen werden. Dies wird in diesem Abschnitt verdeutlicht.

Definition 3.4.1

Einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{v} = c_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \ldots + c_r \cdot \overrightarrow{u_r} = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \overrightarrow{u_i} \qquad \text{wobei } c_i \in \mathbb{R}$$

nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_r} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 3.4.2

Die r Vektoren $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_r} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$c_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \ldots + c_r \cdot \overrightarrow{u_r} = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \overrightarrow{u_i} = \vec{0}$$

stets $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ folgt. Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor $\vec{0}$ sich nur auf triviale Weise aus den Vektoren linear kombinieren lässt. Sind die Vektoren linear abhängig, dann kann mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren dargestellt werden.

<u>Beispiel 3.4.1</u>

Es sind die Vektoren $\overrightarrow{v_1} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ und $\overrightarrow{v_2} = (-2, 2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben und auf lineare Unabhängigkeit zu überprüfen.

Nach Definition 3.4.2 ist zu überprüfen, ob aus $c_1 \cdot (1, 2) + c_2 \cdot (-2, 2) = (0, 0)$ folgt, dass $c_1 = c_2 = 0$ ist.

Man erhält ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wird nun beispielsweise die Unbekannte c_2 aus der zweiten Gleichung ausgedrückt $(c_2 = -c_1)$ und anschließend c_2 durch $-c_1$ in der ersten Gleichung substituiert, so erhält man: $c_1 + 2c_1 = 0$.

Durch Auflösen dieser Gleichung nach der Variablen c_1 erhält man: $c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

Das bedeutet, dass die Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ linear unabhängig sind.

Beispiel 3.4.2

Es sind die Vektoren $\overrightarrow{v_1} = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ und $\overrightarrow{v_2} = (-2,-4) \in \mathbb{R}^2$ gegeben und auf lineare Unabhängigkeit zu überprüfen.

Nach Definition 3.4.2 ist zu überprüfen, ob aus $c_1 \cdot (1,2) + c_2 \cdot (-2,-4) = (0,0)$ folgt, dass $c_1 = c_2 = 0$ ist.

Daraus erhält man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 - 4c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Man kann sofort erkennen, dass die zweite Gleichung ein Vielfaches der ersten Gleichung ist (äquivalent zur ersten Gleichung ist), also eigentlich überflüssig ist. Durch Ausdrücken der Unbekannten c_1 aus der ersten Gleichung erhält man: $c_1 = 2c_2$.

Wählt man nun beispielsweise $c_2 = 1$, so folgt $c_1 = 2$.

Das bedeutet, dass die Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ linear abhängig sind.

Der Nullvektor lässt sich also als nichttriviale Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ darstellen:

$$\vec{0} = 2 \cdot \overrightarrow{v_1} + 1 \cdot \overrightarrow{v_2}.$$

Im n-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren (n+1 Vektoren aus dem Raum $\mathbb{R}^n$ sind bereits linear abhängig). Die Dimension gibt also an, wie viele linear unabhängige Vektoren es maximal gibt. Jeder Vektor im $\mathbb{R}^n$ kann eindeutig als Linearkombination von n linear unabhängigen Vektoren dargestellt werden. Dabei wird eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren eine **Basis** im $\mathbb{R}^n$ genannt. Die entsprechenden Sätze mit zugehörigen Beweisen können in [6] S. 29-34 und [12] S. 166-174 nachgelesen werden.

Definition 3.4.3

Unter dem Rang $rg(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ versteht man die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von A.

Analog kann man den Rang $rg(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von A definieren. Für die Bestimmung des Rangs einer Matrix ist es also egal, ob die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren oder die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren genommen wird. Dies führt zu dem gleichen Ergebnis, denn die Maximalzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren ist stets gleich der Maximalzahl von linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Den Satz bzw. Beweis findet man in [6] S. 65f.

Bemerkung 3.4.1

Ist $\operatorname{rg}(A) = r$, dann gibt es r linear unabhängige Spaltenvektoren von A ($r+1$ Spaltenvektoren sind bereits linear abhängig).

Satz 3.4.1

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

1) $\operatorname{rg}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$
3) $\operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$

Der Beweis des Satzes kann in [6] S. 66f nachgelesen werden.

Anhand des Rangs der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $A' = (A \mid \vec{b})$ kann nun die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen bzw. Matrizengleichungen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ untersucht werden.

Satz 3.4.2

Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Störvektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist die Matrizengleichung bzw. das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}((A \mid \vec{b}))$ ist. Gilt weiters $\operatorname{rg}(A) = n$, dann gibt es **genau eine Lösung** $x \in \mathbb{R}^n$.

Ist $\operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A \mid \vec{b})$, dann **existiert keine Lösung**, d. h. die Gleichungen widersprechen einander.

Falls $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}((A \mid \vec{b})) = r < n$ ist, gibt es **unendlich viele Lösungen** mit $n - \operatorname{rg}(A)$ freien Parametern.

Der Beweis ist in [6] S. 91 zu finden.

3.5 Gauß-Algorithmus

In diesem Abschnitt wird der **Gauß-Algorithmus** vorgestellt, mit dem man in erster Linie den Rang $\mathrm{rg}(A)$ der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bzw. den Rang $\mathrm{rg}\left(\left(A \mid \vec{b}\right)\right)$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ermitteln und des Weiteren die Lösungsmenge L des Gleichungssystems bestimmen kann. Dieser Algorithmus bildet die Grundlage für die Optimierungsmethoden (Simplex-Algorithmus) in Abschnitt 5.6.

Um ein geeignetes bzw. übersichtliches Schema zu erhalten, kann ein lineares Gleichungssystem (mit der Gestalt aus Definition 2.2.1) in der Form eines **Tableaus** angeschrieben werden:

$$G = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n
\end{array}$$

Das Ziel ist, dieses Tableau so umzuformen, dass sich $\mathrm{rg}(A)$ bzw. $\mathrm{rg}\left(\left(A \mid \vec{b}\right)\right)$ und die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems möglichst leicht bestimmen lassen. Dabei können folgende elementare Operationen durchgeführt werden, welche den Rang der Koeffizientenmatrix A bzw. den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right)$ und die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems nicht verändern:

- Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten,
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich null,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

(vgl. [6] S. 82).

Bemerkung 3.5.1

Werden Spaltenvertauschungen durchgeführt, so ist darauf zu achten, dass sich dadurch auch die Reihenfolge der Variablen verändert.

Das Ziel ist nun, ein Tableau $\left(A^* \mid \overrightarrow{b^*}\right)$ folgender Form zu erstellen (aus [5] S. 25):

$$\begin{array}{cccccccc|c}
x_{q_1} & x_{q_2} & \cdots & x_{q_r} & x_{q_{r+1}} & \cdots & x_{q_n} & \\
\hline
a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\
0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn}^* & b_r^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1}^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m^*
\end{array}$$

Aufgrund von Bemerkung 3.5.1 wurden im Tableau die Variablen über den einzelnen Spalten hinzugefügt, wobei die Indizes $q_1, \dots, q_n$ eine Permutation der Indizes $1, \dots, n$ sind. Die Diagonalelemente $a_{11}^*, \dots, a_{rr}^*$ sind alle von null verschieden und alle a_{ij}^* mit $i > r$ oder $i > j$ sind gleich null. Diese Form des Tableaus wird **Treppenform** genannt. Für den Rang $\mathrm{rg}(A^*)$ gilt dann: $\mathrm{rg}(A^*) = r$ (Anzahl der vom Nullvektor $\vec{0}$ verschiedenen Zeilenvektoren von A^*). Der Beweis kann in [12] S. 181-183 nachgelesen werden.

Nach Satz 3.4.2 ist ein lineares Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}\left(\left(A^* \mid \overrightarrow{b^*}\right)\right) = r$, da $\mathrm{rg}(A^*) = r$ ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $b_{r+1}^* = 0, \dots, b_m^* = 0$ ist. Durch Rückwärtseinsetzen erfolgt schließlich die Auflösung des linearen Gleichungssystems, wobei die Variablen $x_{q_{r+1}}, \dots, x_{q_n}$ frei gewählt werden können. Die restlichen Variablen können folgendermaßen bestimmt werden:

$$x_{q_i} = \frac{1}{a_{ii}^*} \cdot \left(b_i^* - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^* \cdot x_{q_j}\right) \qquad i = r, \dots, 1$$

Falls $r = m = n$ ist, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt – d. h. es gibt keine frei wählbaren Parameter (vgl. [5] S. 25).

Im Folgenden wird der **Gauß-Algorithmus** beschrieben (aus [5] S. 26):

Es sei die Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij}) = \left(a_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Störvektor $\vec{b} = (b_i) = \left(b_i^{(1)}\right) \in \mathbb{R}^m$ eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gegeben.

1. $k = 1$

2. Wähle ein Pivotelement, d. h. ein $a_{ij}^{(k)} \neq 0$, $i \in \{k, \dots, m\}$, $j \in \{k, \dots, n\}$! Sollte dies nicht möglich sein (weil entweder $k > \min(m, n)$ oder alle betreffenden

$a_{ij}^{(k)}$ verschwinden), so bricht das Verfahren ab. Der Rang der Matrix ist dann gleich $r = k - 1$.

3. Tausche die Zeilen und Spalten der Matrix so, dass das Pivotelement nun gleich $a_{kk}^{(k)}$ ist, d. h. tausche die i-te mit der k-ten Zeile und die j-te mit der k-ten Spalte!

4. Für $i = k+1, \dots, m$ setze

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)} \end{aligned}\right. \qquad j = k, \dots, n$$

5. Ersetze k durch $k+1$ und gehe zu Schritt 2 !

Das Tableau $\left(A^* \mid \vec{b^*}\right)$ in Treppenform ist nach Abbruch des Algorithmus für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ gegeben durch:

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^{(i)} & \text{für } i \le r = k-1 \\ a_{ij}^{(r+1)} & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad b_i^* = \begin{cases} b_i^{(i)} & \text{für } i \le r = k-1 \\ b_i^{(r+1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beispiel 3.5.1</u>

Betrachtet man abermals das lineare Gleichungssystem in Beispiel 2.3.3, so lässt sich dieses Gleichungssystem anhand des Gauß-Algorithmus auf Treppenform bringen. Dabei werden die einzelnen Pivotelemente rot markiert und die Quotienten $\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ neben den entsprechenden Zeilen notiert.

$$G = \mathbb{R}^3$$

x_1	x_2	x_3	
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$

x_1	x_2	x_3		
$\boxed{3}$	-2	4	11	
2	-1	-3	-9	$2/3$
-1	3	2	11	$-1/3$

x_1	x_2	x_3	
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$b_1^{(1)}$
0	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	$b_2^{(2)}$
0	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$

x_1	x_2	x_3		
3	-2	4	11	
0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{17}{3}$	$\frac{-49}{3}$	
0	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{44}{3}$	7

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_3^{(3)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
3 & -2 & 4 & 11 \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{-49}{3} \\
0 & 0 & 43 & 129
\end{array}
$$

Aus dem letzen Tableau kann schließlich der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathrm{rg}(A) = 3$ und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $\mathrm{rg}((A \mid \vec{b})) = 3$ abgelesen werden. Wegen $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}((A \mid \vec{b})) = 3 = n$ ($A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$), ist das lineare Gleichungssystem nach Satz 3.4.2 eindeutig lösbar. Durch Rückwärtseinsetzten kann die Lösung des Gleichungssystems bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{129}{43} = 3 \\
x_2 &= \left(-\frac{49}{3} + \frac{17}{3} \cdot x_3\right) \cdot 3 = \left(-\frac{49}{3} + \frac{17}{3} \cdot 3\right) \cdot 3 = 2 \\
x_1 &= (11 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2) \cdot \frac{1}{3} = (11 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3} = 1
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems ist also: $L = \{(1, 2, 3)\}$.

3.5.1 Gauß-Jordan-Algorithmus

Um die Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ noch leichter bestimmen zu können, kann das Tableau $\left(A^* \mid \overrightarrow{b^*}\right)$ in Treppenform in Abschnitt 3.5 noch weiter vereinfacht werden. Es werden zusätzlich alle Elemente a_{ij}^* für $i = 1, \dots, r$ und $j = i+1, \dots, r$ eliminiert und anschließend die Zeilen $1, \dots, r$ durch die Diagonalelemente $a_{11}^*, \dots, a_{rr}^*$ geteilt. Dadurch erhält man ein Tableau folgender Form (aus [5] S. 30):

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_{q_1} & x_{q_2} & \cdots & x_{q_r} & x_{q_{r+1}} & \cdots & x_{q_n} & \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn}^* & b_r^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1}^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m^*
\end{array}
$$

Diese Form des Tableaus wird als **Treppennormalform** (**kanonische Form**) bezeichnet. Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b^*_{r+1} = 0, \ldots, b^*_m = 0$. Das Rückwärtseinsetzen ist jetzt einfacher als zuvor (Abschnitt 3.5), wobei die Werte für $x_{q_{r+1}}, \ldots, x_{q_n}$ frei gewählt werden können. Die restlichen Variablen können folgendermaßen berechnet werden:

$$x_{q_i} = b^*_i - \sum_{j=r+1}^{n} a^*_{ij} \cdot x_{q_j} \qquad i = 1, \ldots, r$$

Der Vorteil des Tableaus in Treppennormalform liegt nun darin, dass die Werte der Variablen, wenn man $x_{q_{r+1}} = 0, \ldots, x_{q_n} = 0$ wählt, direkt aus dem Tableau abgelesen werden können: $x_{q_i} = b^*_i$ für $i = 1, \ldots, r$ (vgl. [5] S. 29f).

Bemerkung 3.5.1.1

Die in Abschnitt 5.6 auftretenden Tableaus bzw. Matrizen werden obige Treppennormalformgestalt haben, wobei stets $m < n$ sein wird.

Im Folgenden wird der **Gauß-Jordan-Algorithmus** beschrieben (aus [5] S. 31):

Es sei die Matrix $A = (a_{ij}) = (a^{(r)}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Vektor $\vec{b} = (b_i) = (b^{(r)}_i) \in \mathbb{R}^m$ gegeben, die mithilfe des Gauß-Algorithmus in Treppenform gebracht wurden und $\mathrm{rg}(A) = r$.

1. Für $k = r, \ldots, 2$ und $i = k-1, \ldots, 1$ setze

$$\left.\begin{aligned} a^{(k+1)}_{ij} &= a^{(k)}_{ij} - \frac{a^{(k)}_{ik}}{a^{(k)}_{kk}} \cdot a^{(k)}_{kj} \\ b^{(k+1)}_{i} &= b^{(k)}_{i} - \frac{a^{(k)}_{ik}}{a^{(k)}_{kk}} \cdot b^{(k)}_{k} \end{aligned}\right. \qquad j = k, \ldots, n$$

Das Pivotelement ist jeweils $a^{(k)}_{kk} \neq 0$.

2. Für $i = 1, \ldots, r$ setze

$$\left.\begin{aligned} a^*_{ij} &= \frac{a^{(i)}_{ij}}{a^{(i)}_{ii}} \\ b^*_{i} &= \frac{b^{(i)}_{i}}{a^{(i)}_{ii}} \end{aligned}\right. \qquad j = i, \ldots, n$$

Für $i > r$ ist $a^*_{ij} = a^{(r)}_{ij} = 0$ und $b^*_i = b^{(r)}_i$.

Nach Schritt 2 gilt $a^*_{11} = 1, \ldots, a^*_{rr} = 1$

Beispiel 3.5.1.1

Das lineare Gleichungssystem

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & -2 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array}$$

das in Beispiel 3.5.1 mithilfe des Gauß-Algorithmus auf Treppenform

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & -2 & 4 & 11 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{-49}{3} \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{array}$$

gebracht wurde, soll nun mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus auf Treppennormalform gebracht werden. Dabei werden die einzelnen Pivotelemente rot markiert und die Quotienten $\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ neben den entsprechenden Zeilen notiert.

$$\begin{array}{ccc|cl} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline 3 & -2 & 4 & 11 & -6 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{3}} & -\frac{17}{3} & \frac{-49}{3} & \\ 0 & 0 & 43 & 129 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cl} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline 3 & 0 & -30 & -87 & -30/43 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{-49}{3} & -17/129 \\ 0 & 0 & \boxed{43} & 129 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (nach Satz 3.4.2 eindeutig bestimmt, da $\text{rg}(A) = \text{rg}((A \mid \vec{b})) = 3$) lässt sich direkt aus dem Tableau ablesen:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad L = \{(1, 2, 3)\}.$$

3.6 Lösung der Matrizengleichung mithilfe des Computers

Wie man in Abschnitt 3.5 bzw. 3.5.1 sehen kann, ist die Rangbestimmung der Koeffizientenmatrix A bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right)$ und das Lösen eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (insbesondere die Verwendung des Gauß-Algorithmus und des Gauß-Jordan-Algorithmus) mit einigermaßen viel Rechenaufwand verbunden. Daher wird in diesem Abschnitt demonstriert, wie ein lineares Gleichungssystem in Maple implementiert und anschließend mithilfe geeigneter Befehle der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathrm{rg}(A)$ bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix $\mathrm{rg}\left(\left(A \mid \vec{b}\right)\right)$ und die Lösungsmenge L des Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bestimmt werden kann.
In Maple muss zunächst das Paket zur linearen Algebra mit dem Befehl *with(linalg):* geladen werden, denn in diesem Paket befinden sich jene Befehle, die zur Rangbestimmung einer Matrix und zum Lösen von linearen Gleichungssystemen benötigt werden. Anschließend kann über die Palette aus der linken Menü- bzw. Funktionsleiste die Koeffizientenmatrix A und der Störvektor $\vec{b}$ eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eingegeben werden.

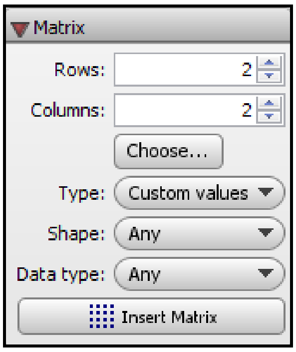


Abbildung 3.6.1: Palette für die Matrixeingabe

Durch Verwendung des Befehls *augment(Matrix, Vektor);* kann die Koeffizientenmatrix A und der Störvektor $\vec{b}$ zu einer Matrix zusammengesetzt werden. Dies ergibt dann die erweiterte Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right)$. Nun kann mittels des Befehls *rank(Matrix);* $\mathrm{rg}(A)$ bzw. $\mathrm{rg}\left(\left(A \mid \vec{b}\right)\right)$ berechnet werden und anhand von Satz 3.4.2 eine Aussage über die Lösbarkeit des Gleichungssystems getroffen werden. Für die Bestimmung der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems gibt es in Maple die Befehle *gausselim(Matrix);* bzw. *gaussjord(Matrix;)* mit denen der Gauß-Algorithmus bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $A' = \left(A \mid \vec{b}\right)$ angewendet wird. Die jeweilige Matrix liegt dann in Treppenform bzw. Treppennormalform vor, je nachdem welcher Algorithmus bzw. Befehl verwendet wurde. Daraus lässt sich dann ebenfalls (ohne einen zusätzlichen Befehl zu verwenden) der Rang einer Matrix bestimmen (siehe Abschnitt 3.5 und 3.5.1). Durch Verwendung des Befehls *backsub(Matrix);* erhält man schließlich die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems.

Beispiel 3.6.1

In den Beispielen 3.5.1 und 3.5.1.1 wurde durch Anwenden des Gauß-Algorithmus bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 &= -9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

mühevoll bestimmt. In folgender Abbildung wird gezeigt, wie in Maple mit den zuvor vorgestellten Befehlen die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems bestimmt werden kann.

with(linalg) :

$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$b := \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$B :=$ *augment*$(A, b);$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

rank$(A);$

$$3$$

rank$(B);$

$$3$$

$G :=$ *gausselim*$(B);$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 11 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & -\frac{49}{3} \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{bmatrix}$$

backsub$(G);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$GJ :=$ *gaussjord*$(B);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

backsub$(GJ);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.6.2: Gauß-Algorithmus und Gauß-Jordan-Algorithmus – Maple (1)

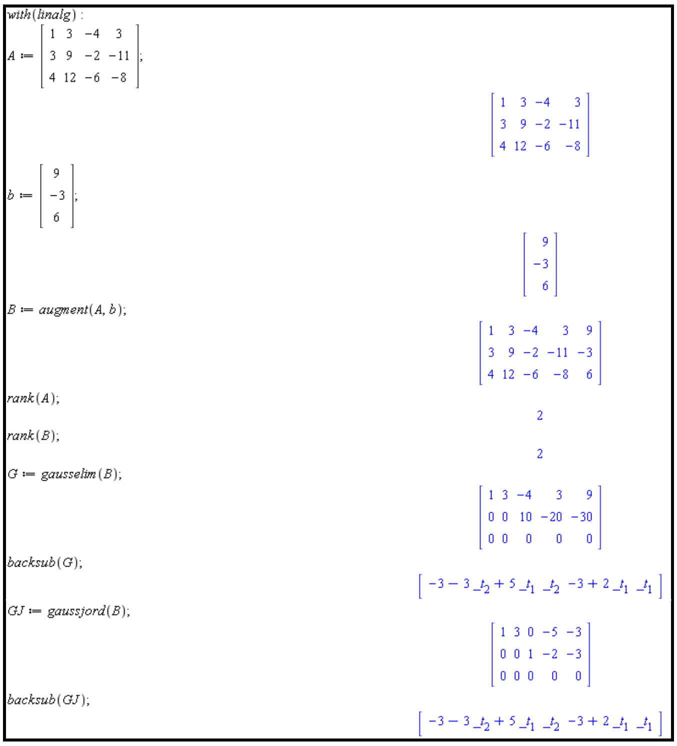
Beispiel 3.6.2

Für das lineare Gleichungssystem

$$G=\mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ 3x_2 - 4x_3 + \ 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + \ 9x_2 - \ 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - \ 6x_3 - \ 8x_4 &= 6 \end{aligned}$$

soll die Lösungsmenge L bestimmt werden.



```
with(linalg):
A := [[1, 3, -4, 3], [3, 9, -2, -11], [4, 12, -6, -8]];
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

```
b := [9, -3, 6];
```

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
B := augment(A, b);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

```
rank(A);
```

2

```
rank(B);
```

2

```
G := gausselim(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
backsub(G);
```

$$\begin{bmatrix} -3-3\_t_2+5\_t_1 & \_t_2 & -3+2\_t_1 & \_t_1 \end{bmatrix}$$

```
GJ := gaussjord(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
backsub(GJ);
```

$$\begin{bmatrix} -3-3\_t_2+5\_t_1 & \_t_2 & -3+2\_t_1 & \_t_1 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.6.3: Gauß-Algorithmus und Gauß-Jordan-Algorithmus – Maple (2)

Da $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \vec{b}) = 2 < 4 = n$ ist, besitzt das lineare Gleichungssystem nach Satz 3.4.2 unendlich viele Lösungen mit $n - \mathrm{rg}(A) = 4 - 2 = 2$ freien Parametern. Daher ist das lineare Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.

Man erhält schließlich die Lösungsmenge L:

$$L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}.$$

4 Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

4.1 Lineare Ungleichungen

In der linearen Optimierung werden neben linearen Gleichungen vor allem lineare Ungleichungen benötigt, um Bedingungen – insbesondere Nebenbedingungen – formulieren zu können, damit eine mathematische Modellbildung für eine Problemstellung vorgenommen werden kann (siehe Beispiel 1.1, 1.2 und 1.3). Daher wird der Begriff der linearen Ungleichung nun definiert.

Definition 4.1.1

Eine Ungleichung der Gestalt

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n \left\{\begin{matrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{matrix}\right\} b \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}, \quad (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0), \quad G=\mathbb{R}^n$$

heißt **lineare Ungleichung** mit **n Variablen (Unbekannten)** $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ in der **Grundmenge** $\mathbf{G=\mathbb{R}^n}$.

Die Ausdrücke $a_i \cdot x_i \; (i = 1, \ldots, n)$ heißen lineare Glieder, die Zahl b heißt absolutes Glied.

Bemerkung 4.1.1

In Definition 4.1.1 wird vom Fall $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n \neq b$ abgesehen.

Aus dieser allgemeinen Definition können schließlich lineare Ungleichungen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen angegeben werden. Zum Beispiel:

- lineare Ungleichungen mit einer Variablen in $G=\mathbb{R}$:

$$a_1 \cdot x_1 + b \left\{\begin{matrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{matrix}\right\} 0 \qquad a_1, b \in \mathbb{R}, \qquad a_1 \neq 0$$

- lineare Ungleichungen mit zwei Variablen in G=$\mathbb{R}^2$:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \begin{Bmatrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{Bmatrix} b \qquad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, \qquad (a_1, a_2) \neq (0,0)$$

- lineare Ungleichungen mit drei Variablen in G=$\mathbb{R}^3$:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 \begin{Bmatrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{Bmatrix} b \qquad a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}, \qquad (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$$

Während eine lineare Gleichung mit einer Variablen genau eine Lösung (Punkt) in $\mathbb{R}$ besitzt, besitzt eine lineare Ungleichung mit einer Variablen eine Menge von Punkten als Lösung, die einen Bereich auf der x_1-Achse (Zahlengeraden) darstellen (siehe Beispiel 4.1.1).

<u>Beispiel 4.1.1</u>

Gegeben ist die lineare Ungleichung $6 \cdot x_1 < 3$ (G=$\mathbb{R}$). Durch äquivalentes Umformen erhält man die lineare Ungleichung $x_1 < 0{,}5$. Die Lösungsmenge L der linearen Ungleichung ist: $L = \{ x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1 < 0{,}5 \}$. Diese lässt sich nun auf der Zahlengeraden veranschaulichen.

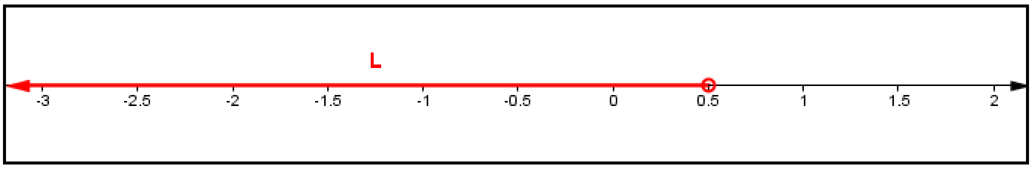


Abbildung 4.1.1: Zahlengerade – echte Ungleichheit

Wenn in einer linearen Ungleichung echte Ungleichheit $(<, >)$ herrscht, dann gehört der entsprechende Randpunkt nicht zur Lösungsmenge L und dieser wird mit einem nicht ausgefüllten Kreis dargestellt (Abbildung 4.1.1). Falls jedoch in einer linearen Ungleichung auch Gleichheit erlaubt ist $(\leq, \geq)$, dann gehört der entsprechende Randpunkt zur Lösungsmenge L und dieser wird mit einem ausgefüllten Kreis dargestellt (z. B. $L = \{ x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq 0{,}5 \}$, Abbildung 4.1.2).

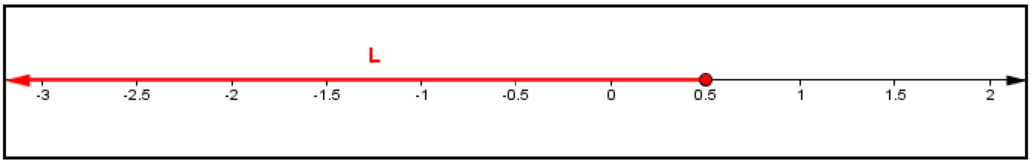


Abbildung 4.1.2: Zahlengerade – auch Gleichheit erlaubt

Im zweidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^2$) wird die Punktmenge, deren Koordinaten eine lineare Ungleichung mit zwei Variablen erfüllen, aus gutem Grund **Halbebene** genannt (siehe Beispiel 4.1.2).

<u>Beispiel 4.1.2</u>

Man betrachte in Beispiel 1.2 in den Nebenbedingungen die lineare Ungleichung mit zwei Variablen $0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 \geq 6$ $(\Leftrightarrow x_2 \geq -2 \cdot x_1 + 60)$. Die zugehörige lineare Gleichung mit zwei Variablen $0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 = 6$ $(\Leftrightarrow x_2 = -2 \cdot x_1 + 60)$ stellt eine Gerade in der x_1-x_2-Ebene dar und teilt diese in zwei Halbebenen H_1 und H_2.

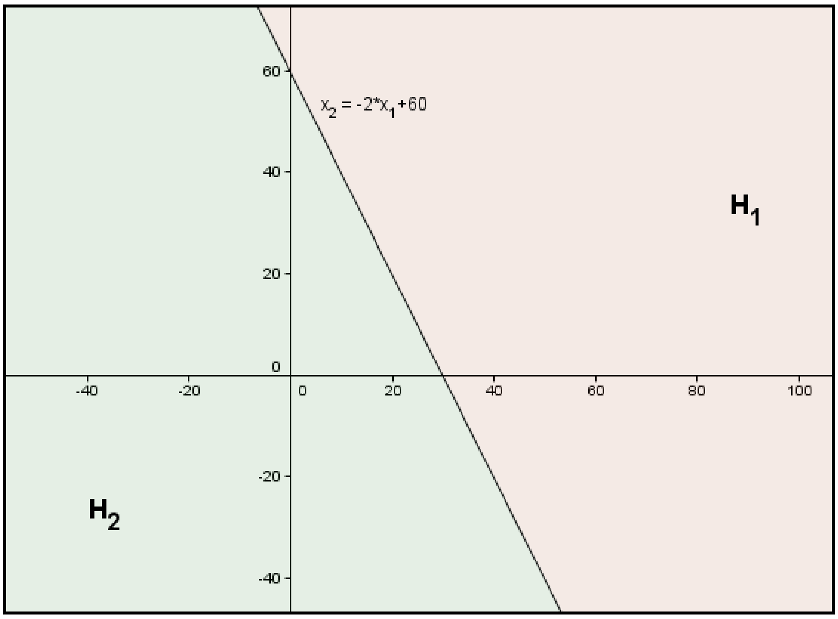


Abbildung 4.1.3: Graphische Darstellung der Halbebenen

Die Gerade $x_2 = -2 \cdot x_1 + 60$ begrenzt also die beiden Halbebenen, und wird daher **Randgerade** genannt.

Will man nun feststellen, welches Ungleichheitszeichen in den Halbebenen gültig ist, so kann man folgendes **Verfahren** anwenden (aus [1] S. 141):

„Man setzt die Koordinaten des Ursprungs in die Funktionsgleichung ein und erhält eine Ungleichung für die Punkte der Halbebene, in der der Ursprung liegt. Von dieser Ungleichung wird auf die Ungleichung der anderen Halbebene geschlossen; d. h. ist die Ungleichung für die Koordinaten des Ursprungs sinnvoll bzw. eine wahre Aussage, dann ist durch jene Halbebene, in der der Ursprung liegt, die Lösungsmenge der Ungleichung dargestellt. Ist dies nicht der Fall, dann ist die Lösungsmenge der Ungleichung durch die andere Halbebene dargestellt.“

Durch Anwenden dieses Verfahrens erhält man: $0 \geq -2 \cdot 0 + 60 \Leftrightarrow 0 \geq 60 \Rightarrow$ eine falsche Aussage. Somit ist die Halbebene H_1 inklusive der Randgeraden (da in der Ungleichung auch Gleichheit erlaubt ist) die Lösungsmenge L der gegebenen linearen Ungleichung:

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 \geq 6 \right\}.$$

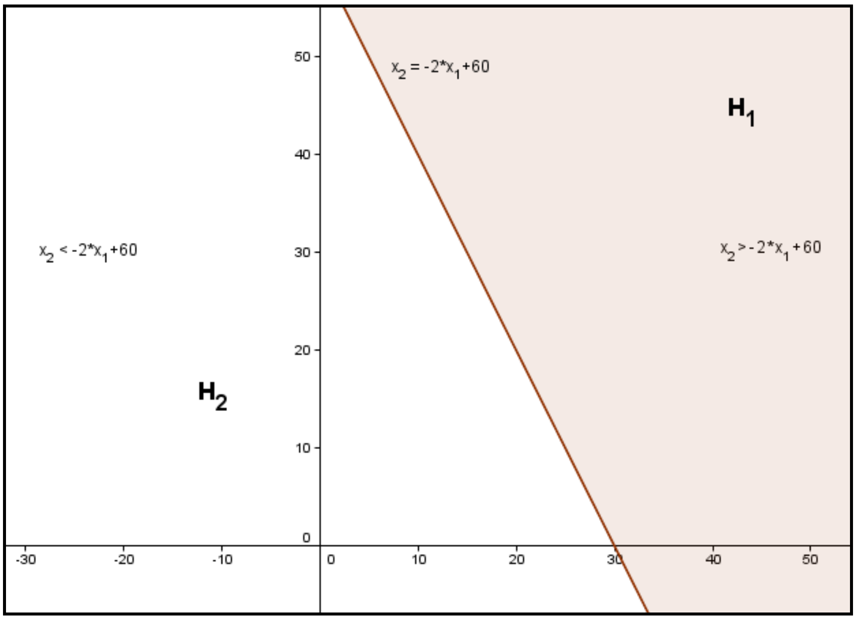


Abbildung 4.1.4: Graphische Darstellung der Lösungsmenge L

Im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) bzw. n-dimensionalen Raum ($\mathbb{R}^n$) wird die Punktmenge, deren Koordinaten eine lineare Ungleichung mit drei Variablen bzw. eine lineare Ungleichung mit n Variablen erfüllen, **Halbraum** genannt (siehe Beispiel 4.1.3).

<u>Beispiel 4.1.3</u>

Man betrachte in Beispiel 1.1 in den Nebenbedingungen die lineare Ungleichung mit drei Variablen $20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 16000$. Die zugehörige lineare Gleichung mit drei Variablen $20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 = 16000$ stellt eine Ebene im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) dar und teilt diesen in zwei Halbräume H_1 und H_2.

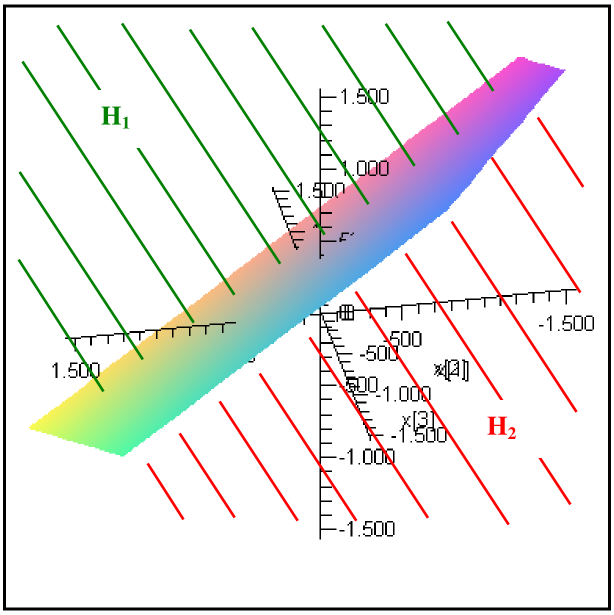


Abbildung 4.1.5: Graphische Darstellung der Halbräume

Die Ebene $20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 = 16000$ begrenzt also die beiden Halbräume und wird daher **Randebene** genannt. Da das obige Verfahren auch im $\mathbb{R}^3$ gilt, lässt sich damit feststellen, welches Ungleichheitszeichen in den Halbräumen gültig ist. Durch Anwenden dieses Verfahrens erhält man: $20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 \leq 16000 \Leftrightarrow 0 \leq 16000 \Rightarrow$ wahre Aussage. Somit ist der Halbraum H_2 inklusive der Randebene (da in der Ungleichung auch Gleichheit erlaubt ist) die Lösungsmenge L der gegebenen linearen Ungleichung:

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 16000\}.$$

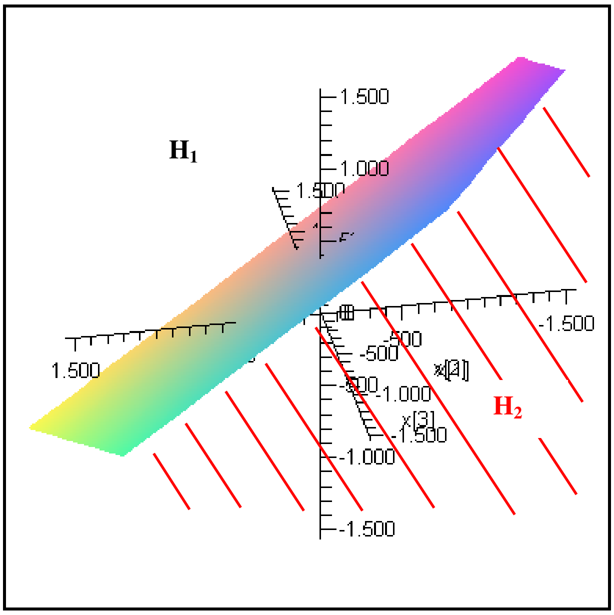


Abbildung 4.1.6: Graphische Darstellung der Lösungsmenge L

Bemerkung 4.1.2

Falls die Randgerade bzw. die Randebene einer Halbebene bzw. eines Halbraums durch den Ursprung verläuft und in den linearen Ungleichungen auch Gleichheit erlaubt ist, so liefert obiges Verfahren immer eine wahre Aussage. Dann muss ein weiterer Punkt aus einer der beiden Halbebenen bzw. Halbräume herangezogen werden, um festzustellen, welches Ungleichheitszeichen in den Halbebenen bzw. Halbräumen gültig ist.

Definition 4.1.2

Eine Halbebene heißt **offen** (Abbildung 4.1.7), wenn sie die Punkte ihrer Randgeraden nicht enthält. Sie heißt **abgeschlossen** (Abbildung 4.1.8), wenn sie die Punkte ihrer Randgeraden enthält.

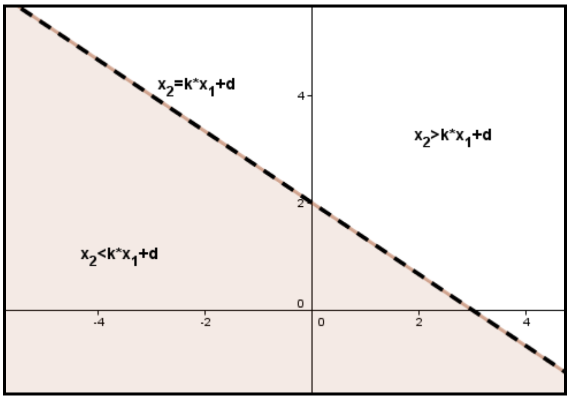


Abbildung 4.1.7: offene Halbebene im $\mathbb{R}^2$

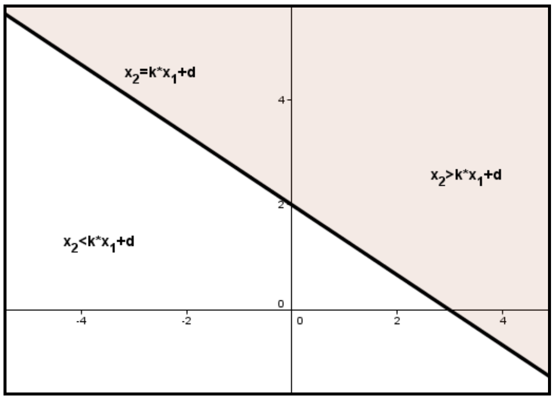


Abbildung 4.1.8: abgeschlossene Halbebene im $\mathbb{R}^2$

Ein Halbraum heißt **offen** (Abbildung 4.1.9), wenn er die Punkte seiner Randebene nicht enthält. Er heißt **abgeschlossen** (Abbildung 4.1.10), wenn er die Punkte seiner Randebene enthält.

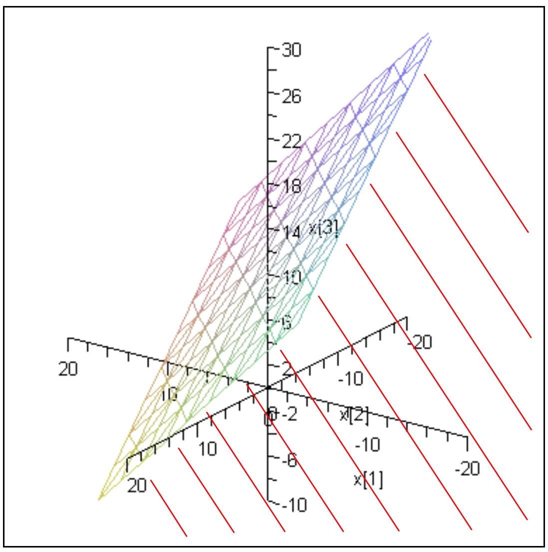


Abbildung 4.1.9: offener Halbraum im $\mathbb{R}^3$

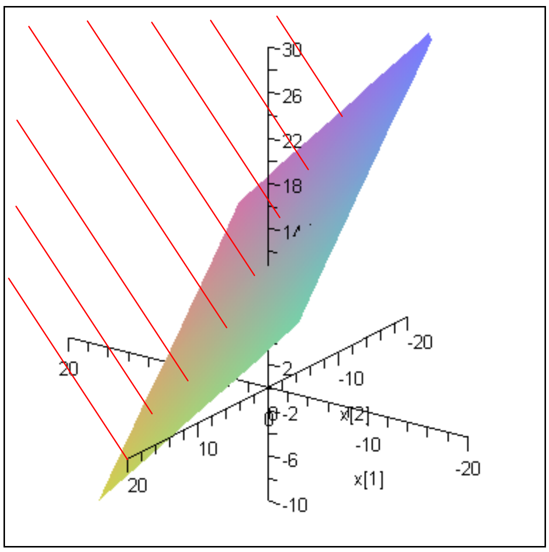


Abbildung 4.1.10: abgeschlossener Halbraum im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 4.1.3

In Beispiel 4.1.2 ist der Graph der Lösungsmenge L nach Definition 4.1.2 eine abgeschlossene Halbebene und in Beispiel 4.1.3 ist der Graph der Lösungsmenge L nach Definition 4.1.2 ein abgeschlossener Halbraum.

4.2 Lineare Ungleichungssysteme

Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt wurde, werden lineare Ungleichungen benötigt, um Bedingungen für ein lineares Optimierungsproblem formulieren zu können. Dazu werden häufig mehrere lineare Ungleichungen benötigt, was schließlich zu linearen Ungleichungssystemen führt. Lineare Ungleichungssysteme sind daher in der linearen Optimierung von großer Bedeutung (siehe Beispiel 1.1, 1.2 und 1.3).

Definition 4.2.1

Ein **Ungleichungssystem** mit **m Ungleichungen** und **n Variablen** (Unbekannten) der Form

$$G=\mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{lcc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n & (<)(\leq)(>)(\geq)(=) & b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n & (<)(\leq)(>)(\geq)(=) & b_2 \\
 & \vdots & \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n & (<)(\leq)(>)(\geq)(=) & b_m
\end{array}$$

heißt **lineares Ungleichungssystem** vom Typ (m;n).

Die $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten des Systems und die $x_j \in \mathbb{R}$ sind die Unbekannten $(i = 1, \ldots, m \text{ bzw. } j = 1, \ldots, n)$. Das aus den reellen Zahlen $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ bestehende Schema heißt Koeffizientenschema oder auch **Koeffizientenmatrix A** des Ungleichungssystems und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ heißt **Störvektor** oder Störspalte:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Bemerkung 4.2.1

Das lineare Ungleichungssystem lässt sich in einer verkürzten Schreibweise darstellen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,(<)(\leq)(>)(\geq)(=)\, b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Wie ein lineares Gleichungssystem kann man unter gewissen Voraussetzungen (wenn alle linearen Ungleichungen des Systems das gleiche Ungleichheitszeichen besitzen) auch ein lineares Ungleichungssystem in Matrizenschreibweise darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Lösungsvektor } \vec{x}} \begin{matrix} (<) \\ (\leq) \\ (>) \\ (\geq) \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Störvektor } \vec{b}}$$

In Kurzform lautet die Matrizenungleichung: $A \cdot \vec{x} \begin{matrix} (<) \\ (\leq) \\ (>) \\ (\geq) \end{matrix} \vec{b}$.

<u>Beispiel 4.2.1</u>

In Beispiel 1.1 stellen die Nebenbedingungen ein lineares Ungleichungssystem dar, welches nun als Matrizenungleichung dargestellt werden kann.

$$\begin{matrix} 30 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 \leq 25000 \\ 40 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 \leq 36000 \\ 60 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 24000 \\ 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \leq 16000 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 30 & 60 & 10 \\ 40 & 40 & 20 \\ 60 & 30 & 40 \\ 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 25000 \\ 36000 \\ 24000 \\ 16000 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

D. h.:

$$A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}.$$

Die Lösungsmenge (= **Zulässigkeitsbereich**) L eines linearen Ungleichungssystems ist der Durchschnitt aller Teillösungsmengen (Halbräume). Der Zulässigkeitsbereich L ist daher ein Polyeder, das durch Hyperebenen begrenzt ist. Alle Punkte aus diesem Bereich erfüllen dann alle linearen Ungleichungen und werden daher **zulässige Lösungen** genannt. Sie sind Lösungen des gesamten Ungleichungssystems.

4.3 Graphisches Lösen von linearen Ungleichungssystemen mithilfe des Computers

Nachdem bei den uns interessierenden linearen Optimierungsproblemen (siehe Kapitel 1 und 5) ausschließlich lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablenanzahl ≥ 2 auftreten, werden lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablen in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

In Abschnitt 2.3 wurde demonstriert, wie die Lösungsmenge L von linearen Gleichungssystemen mit zwei (drei) Gleichungen und zwei (drei) Variablen graphisch bestimmt werden kann.

Da die Implementierung bzw. graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L von linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen auf das graphische Darstellen von linearen Gleichungen (Randgeraden) hinausläuft, kann analog wie in Abschnitt 2.3 vorgegangen werden. Der Zulässigkeitsbereich L stellt dann je nach Anzahl von linearen Ungleichungen beispielsweise ein Dreieck, ein Viereck oder ein anderes Polygon dar.

Beispiel 4.3.1

Betrachtet man Beispiel 1.2, so kann man erkennen, dass die Nebenbedingungen ein lineares Ungleichungssystem darstellen:

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 \geq 6 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 \geq -2 \cdot x_1 + 60 \\
0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot x_2 \geq 12 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 \geq -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 30 \\
0{,}4 \cdot x_2 \geq 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 \geq 10 \\
x_1, x_2 \geq 0. &
\end{aligned}$$

Die zugehörigen linearen Gleichungen

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = -2 \cdot x_1 + 60 \\
0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot x_2 = 12 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 30 \\
0{,}4 \cdot x_2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = 10 \\
x_1, x_2 = 0 &
\end{aligned}$$

stellen die Randgeraden der einzelnen Halbebenen dar, welche in GeoGebra graphisch veranschaulicht werden können.

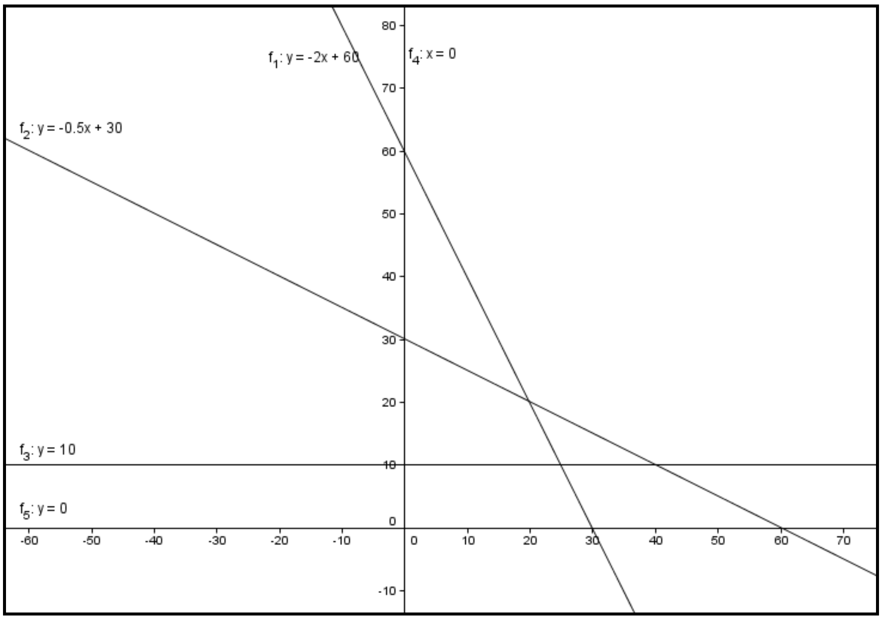
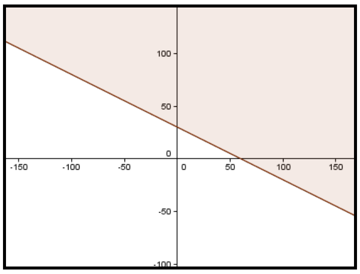


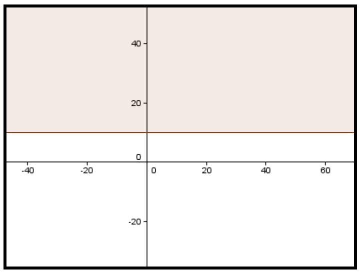
Abbildung 4.3.1: Graphische Darstellung der Randgeraden – GeoGebra

Da GeoGebra den Zulässigkeitsbereich L des linearen Ungleichungssystems nicht automatisch graphisch darstellen (einfärben) kann, muss man sich selbstständig überlegen, welche Halbebenen den einzelnen Ungleichungen entsprechen. Dies kann schließlich anhand des Verfahrens aus Abschnitt 4.1 erfolgen:

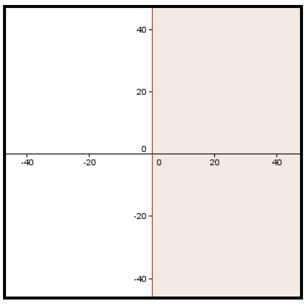
$x_2 \geq -2 \cdot x_1 + 60$



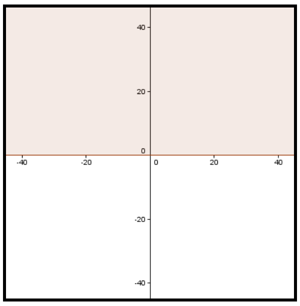
$x_2 \geq -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 30$



$x_2 \geq 10$



$x_1 \geq 0$



$x_2 \geq 0$

Der Zulässigkeitsbereich L des linearen Ungleichungssystems ist nun der Durchschnitt aller Teillösungsmengen (Halbebenen). In Abbildung 4.3.2 sind die zu den Teillösungsmengen zugehörigen Halbebenen mit Pfeilen gekennzeichnet. Die Bedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ bedeuten dabei, dass sich der Zulässigkeitsbereich L im 1. Quadranten befindet. Um schließlich den Zulässigkeitsbereich L in GeoGebra graphisch darstellen bzw. einfärben zu können, verwendet man einen Trick: Man definiert ein Vieleck (Polygon), mit dem man den Zulässigkeitsbereich L (roter Bereich) graphisch hervorheben kann, wobei die Eckpunkte des Polygons die Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs L sind. Da der Zulässigkeitsbereich L jedoch unbeschränkt ist, muss man ein ausreichend großes Polygon definieren, damit zumindest der im Bildbereich von GeoGebra sichtbare Zulässigkeitsbereich L eingefärbt wird.

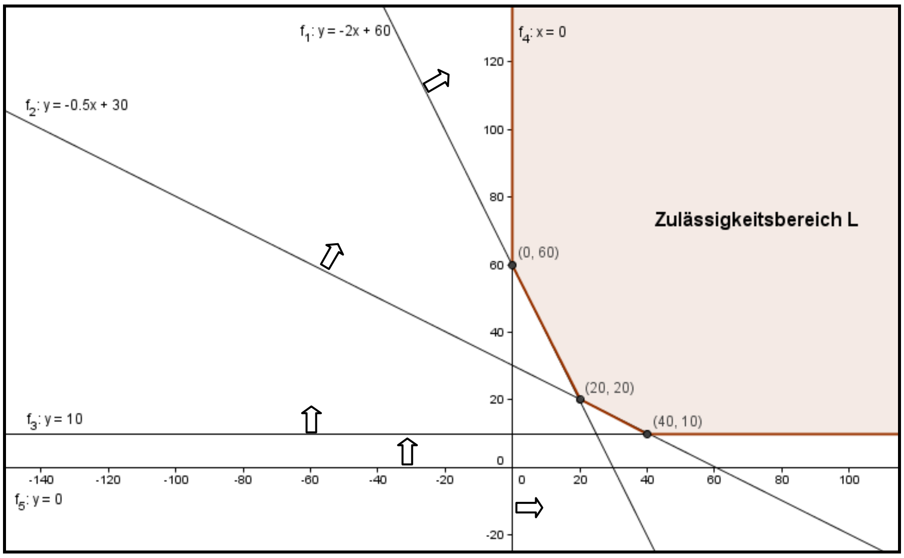


Abbildung 4.3.2: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L – GeoGebra (1)

Eine weitere Möglichkeit für die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen eröffnet sich durch die Verwendung von Maple. In Maple steht im Gegensatz zu GeoGebra eine Funktion (*inequal*) zur Verfügung, mit der man den Zulässigkeitsbereich L eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen, nachdem man der Funktion die einzelnen linearen Ungleichungen als Parameter übergeben und geeignete Bereiche (siehe Kapitel 6) für die x_1- und x_2- Achse definiert hat, graphisch darstellen kann. Um im obigen Beispiel den Zulässigkeitsbereich L des linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen in Maple graphisch darzustellen, müssen die folgenden Befehle eingegeben werden. Zunächst muss das *plot*-Paket mit dem Befehl *with(plots):* geladen werden. Anschließend kann durch die Eingabe des Befehls $inequal(\{0.2\cdot x_1+0.1\cdot x_2\geq 6,\ 0.2\cdot x_1+0.4\cdot x_2\geq 12,\ 0.4\cdot x_2\geq 4,\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\},\ x_1=-10..75,\ x_2=-10..75);$ der Zulässigkeitsbereich L graphisch dargestellt werden (blauer Bereich, Abbildung 4.3.3).

$with(plots):$

$inequal(\{0.2 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 \geq 6, 0.2 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 \geq 12, 0.4 \cdot x_2 \geq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, x_1 = -10..75, x_2 = -10..75);$

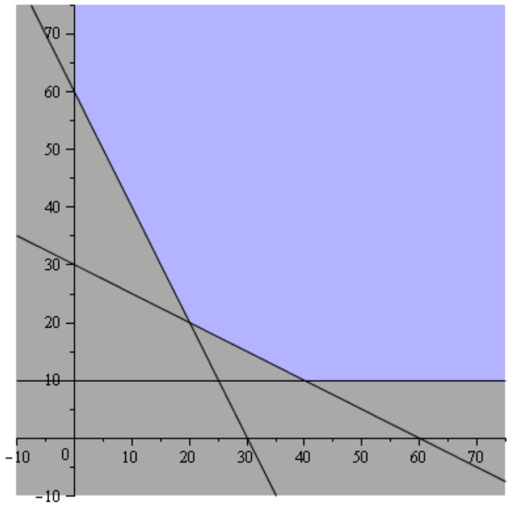


Abbildung 4.3.3: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L – Maple (1)

Bemerkung 4.3.1

Man kann nun erkennen, dass sich die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen in Maple wesentlich einfacher gestaltet als in GeoGebra. Jedoch wird sich diese eher „mühsame“ Variante der graphischen Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L bzw. die Verwendung von GeoGebra gegenüber Maple in Abschnitt 5.2 bewähren, da dann durch Hinzufügen eines Schiebereglers lineare Optimierungsprobleme mit zwei bzw. in besonderen Fällen mit drei Variablen auf eine einfache Art und Weise graphisch und interaktiv gelöst werden können. Beide Programme besitzen also gewisse Vorteile, welche einen verbindenden Einsatz der beiden Softwarepakete im Mathematikunterricht nahelegen (siehe Kapitel 6).

Während sich die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen in GeoGebra bzw. Maple noch als relativ einfach gestaltet, wird die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L eines linearen Ungleichungssystems mit drei Variablen in Maple viel komplexer. Um überhaupt eine sinnvolle und zudem noch übersichtliche Veranschaulichung des Zulässigkeitsbereichs L zu erhalten, muss zunächst ein Programmcode im Eingabebereich implementiert werden. Dieser Quellcode ist unter [16] erhältlich.

Der Zulässigkeitsbereich L stellt dann je nach Anzahl der linearen Ungleichungen beispielsweise ein Tetraeder, ein Hexaeder oder ein anderes Polyeder dar.

Beispiel 4.3.2

Betrachtet man in Beispiel 1.1 die Nebenbedingungen, so stellen diese ein lineares Ungleichungssystem mit drei Variablen dar:

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 30\cdot x_1+60\cdot x_2+10\cdot x_3 &\leq 25000\\ 40\cdot x_1+40\cdot x_2+20\cdot x_3 &\leq 36000\\ 60\cdot x_1+30\cdot x_2+40\cdot x_3 &\leq 24000\\ 20\cdot x_1+30\cdot x_2+40\cdot x_3 &\leq 16000\\ x_1,x_2,x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L des linearen Ungleichungssystems in Maple kann nun durch Implementierung des zuvor erwähnten Programmcodes und durch Eingabe der einzelnen linearen Ungleichungen des Ungleichungssystems erfolgen. Die Bedingungen $x_1,x_2,x_3 \geq 0$ bedeuten dabei, dass sich der Zulässigkeitsbereich L im 1. Oktanten befindet.

```
S := SolveTools[Inequality][LinearMultivariateSystem](
 {30·x + 60·y + 10·z ≤ 25000, 40·x + 40·y + 20·z ≤ 36000, 60·x + 30·y + 40·z ≤ 24000, 20·x + 30·y + 40·z ≤ 16000, x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0},
 [x, y, z]) :

makerange := proc(S :: set(relation), v :: name)
  local t, a, b;
  a := -infinity; b := infinity;
  for t in S do
   if type(t, `=`) then
    a := rhs(t); b := a
   elif lhs(t) = v then b := rhs(t)
   else a := lhs(t)
   end if
  end do;
  [a, b]
end proc:

makebox := proc(L)
 plot3d(
op(subs(x = L[1, 1], [[x, y, z], y = L[2, 1]..L[2, 2], z = L[3, 1]..L[3, 2]]))),
 plot3d(
op(subs(x = L[1, 2], [[x, y, z], y = L[2, 1]..L[2, 2], z = L[3, 1]..L[3, 2]]))),
 plot3d(
op(subs(y = L[2, 1], [[x, y, z], x = L[1, 1]..L[1, 2], z = L[3, 1]..L[3, 2]]))),
 plot3d(
op(subs(y = L[2, 2], [[x, y, z], x = L[1, 1]..L[1, 2], z = L[3, 1]..L[3, 2]]))),
 plot3d(
op(subs(z = L[3, 1], [[x, y, z], x = L[1, 1]..L[1, 2], y = L[2, 1]..L[2, 2]]))),
 plot3d(
op(subs(z = L[3, 2], [[x, y, z], x = L[1, 1]..L[1, 2], y = L[2, 1]..L[2, 2]])));
end proc:

plots[display](map(t → makebox(zip(makerange, t, [x, y, z])), S),
  axes = normal, labels = [x, y, z]);
```

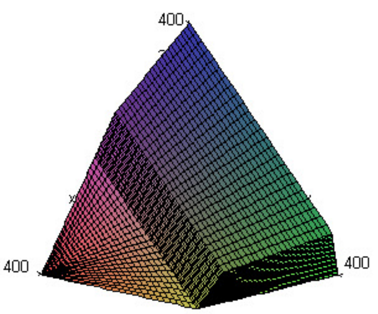


Abbildung 4.3.4: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L – Maple (2)

Dies ergibt ein Polyeder, das man beliebig rotieren lassen kann (siehe Bemerkung 2.3.1).

Tritt in einem linearen Ungleichungssystem mit drei Variablen eine lineare Gleichung auf, so wie dies in Beispiel 1.3 der Fall ist, dann lässt sich das lineare Ungleichungssystem mit drei Variablen auf ein lineares Ungleichungssystem mit zwei Variablen zurückführen. Dabei wird die lineare Gleichung nach einer Variablen aufgelöst (z. B. x_3) und in den linearen Ungleichungen des Ungleichungssystems substituiert.

Beispiel 4.3.3

Das lineare Ungleichungssystem mit drei Variablen in Beispiel 1.3

$$G=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} & x_1 \le 70 \\ & x_2 \le 80 \\ & x_3 \le 50 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 110 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

kann durch Ausdrücken der Variablen x_3 aus der linearen Gleichung ($x_1 + x_2 + x_3 = 110 \Leftrightarrow x_3 = 110 - x_2 - x_1$) und anschließendes Substituieren auf ein lineares Ungleichungssystem mit zwei Variablen zurückgeführt werden:

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} & x_1 \le 70 \\ & x_2 \le 80 \\ & x_1 + x_2 \le 110 \\ & 110 - x_1 - x_2 \le 50 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \ge 60 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L kann sowohl in GeoGebra also auch in Maple analog zu Beispiel 4.3.1 erfolgen.

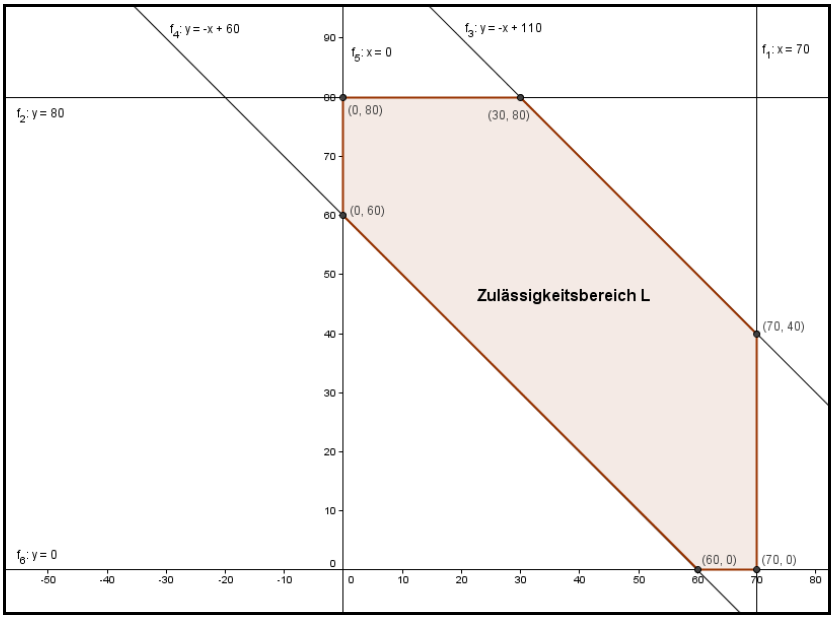


Abbildung 4.3.5: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L – GeoGebra (2)

```
with(plots) :
inequal( { x1 ≤ 70, x2 ≤ 80, x1 + x2 ≤ 110, x1 + x2 ≥ 60, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0}, x1 =−10 ..75, x2 =−10 ..85 );
```

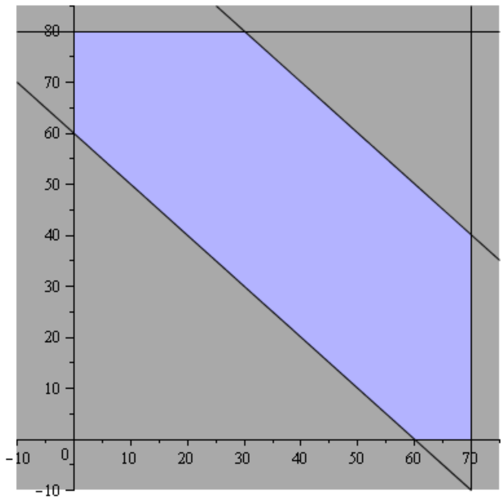


Abbildung 4.3.6: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L – Maple (5)

5 Lineare Optimierung

5.1 Das lineare Optimierungsproblem

In den vorhergehenden Kapiteln 2, 3 und 4 wurden wichtige mathematische Grundlagen sowie Algorithmen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen präsentiert, auf denen diverse Rechenverfahren der linearen Optimierung basieren. Weiters konnte man bereits in Kapitel 1 anhand der Beispiele 1.1, 1.2 und 1.3 einen kurzen Einblick in den Anwendungsbereich der linearen Optimierung (mathematische Modellbildung) erhalten. Diese Art von Problemstellungen bezeichnet man als lineare Optimierungsprobleme.

Definition 5.1.1

Unter einem **linearen Optimierungsproblem** versteht man die Aufgabe, eine **lineare Zielfunktion** der Gestalt

$$z = F(x_1,\dots,x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n + d = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + d$$

zu maximieren oder zu minimieren unter den **linearen Nebenbedingungen** (**Restriktionen**)

$$G = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n & (\le)(\ge)(=) & b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n & (\le)(\ge)(=) & b_2 \\
 & \vdots & \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n & (\le)(\ge)(=) & b_m
\end{array}$$

und unter den **Nichtnegativitätsbedingungen**

$$x_j \ge 0 \qquad \text{für alle } j = 1,\dots,n\,.$$

Der Summand d in der Zielfunktion F spielt bei der Minimierung bzw. Maximierung keine Rolle, denn die Minima bzw. Maxima von $z = F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + d$ und $z = F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ liegen an derselben Stelle $(x_1,\dots,x_n)$. Der Summand d bewirkt ja lediglich eine Translation des Funktionsgraphen in z-Richtung. Dieser kann daher später bei der Formulierung der Lösungsverfahren (Simplex-Algorithmus) auch weggelassen werden, muss aber bei der Berechnung des optimalen z-Werts berücksichtigt werden (siehe Beispiel 5.6.1.3, vgl. [11] S. 20).

Bemerkung 5.1.1

Bei manchen Problemstellungen in der Praxis kann es vorkommen, dass es Variablen gibt, die nicht vorzeichenbeschränkt sind. Das bedeutet, dass diese Variablen auch negative Werte annehmen können. In dieser Arbeit werden jedoch solche Problemstellungen nicht betrachtet, daher wurden in Definition 5.1.1 alle Variablen $x_j \geq 0$ gesetzt.

Definition 5.1.2

Ein Punkt $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, heißt **zulässiger Punkt** oder **zulässige Lösung**. Die Menge aller zulässigen Lösungen bildet den **Zulässigkeitsbereich L** des linearen Optimierungsproblems. $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ heißt **optimaler Punkt** oder **optimale Lösung**, wenn $\vec{x}$ zulässig ist und es keine zulässige Lösung $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit größerem (kleinerem) Zielfunktionswert $F(\vec{y})$ gibt als $F(\vec{x})$.

Beispiel 5.1.1

In einem Betrieb sind zwei Maschinen M_1 und M_2 vorhanden, mit denen zwei Produkte P_1 und P_2 hergestellt werden. Die notwendigen Bearbeitungszeiten der Maschinen M_1 und M_2, um 1 Stück von P_1 bzw. P_2 herstellen zu können, die maximalen Maschinenlaufzeiten pro Tag und den Verkaufspreis je Stück kann man aus nachfolgender Tabelle entnehmen (Zeitangaben in Minuten, Verkaufspreis in Euro) (vgl. [4] S. 16):

	P_1	P_2	max. Maschinenlaufzeit
M_1	15	30	450
M_2	25	20	480
Gewinn pro Stück	40	60	

Wie viel Stück von P_1 und P_2 müssen produziert werden, damit der Gesamtgewinn maximal wird?

Die Problemstellung kann nun gemäß Definition 5.1.1 veranschaulicht werden.

Mathematische Modellierung:

Von P_1 werden x_1 ($x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \geq 0$) Stück produziert und von P_2 werden x_2 ($x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$) Stück produziert.

Zu maximieren ist der Gesamtgewinn

$$z = F(x_1, x_2) = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 &\leq 450 \\ 25 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nach Definition 5.1.2 gilt:

Jedes geordnete Zahlenpaar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, das alle Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, ist eine zulässige Lösung des linearen Optimierungsproblems. Die Menge aller zulässigen Lösungen bildet den Zulässigkeitsbereich L (vgl. mit Abschnitt 4.2). Es wird nun eine optimale Lösung gesucht, also eine Lösung aus dem Zulässigkeitsbereich L, für welche die Zielfunktion maximal ist. Da im obigen linearen Optimierungsproblem nur zwei Variablen auftreten, wird im folgenden Abschnitt demonstriert, wie die optimale Lösung graphisch ermittelt werden kann.

5.2 Graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen

In Abschnitt 2.3 wurde bereits erwähnt, dass lineare Optimierungsprobleme mit zwei bzw. in besonderen Fällen mit drei Variablen (wenn unter den Restriktionen eine lineare Gleichung auftritt) graphisch gelöst werden können.

Beispiel 5.2.1

(graphische Lösung zu Beispiel 5.1.1)

Um den Zulässigkeitsbereich L des linearen Optimierungsproblems in GeoGebra graphisch darzustellen, kann wie in Abschnitt 4.3 vorgegangen werden, da die Nebenbedingungen ein lineares Ungleichungssystem darstellen.

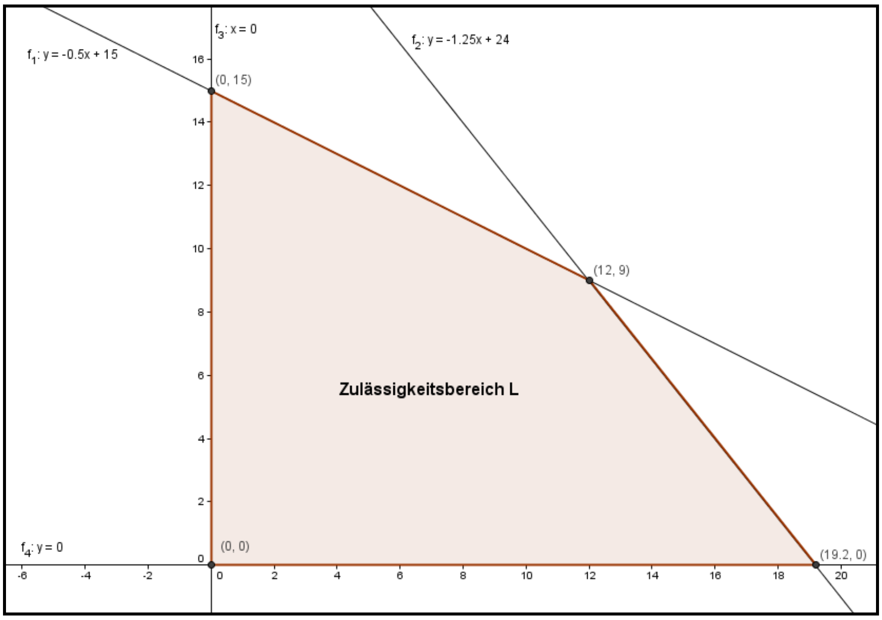


Abbildung 5.2.1: Graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L

Im Zulässigkeitsbereich L befinden sich alle zulässigen Lösungen. Jeder zulässigen Lösung entspricht ein gewisser Gesamtgewinn z. Beispielsweise erhält man für den Punkt $(0,0)$ des Zulässigkeitsbereichs L den Gesamtgewinn $z = 0$. Alle zulässigen Lösungen, die den gleichen Gesamtgewinn z ergeben, liegen jeweils auf einer Geraden. Die Funktionsgleichungen dieser Geraden erhält man, indem man die Zielfunktion auf folgende Form bringt: $GG_z : z = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \cdot x_1 + \frac{z}{60}$. Dies sind Geraden mit der Steigung $-\frac{2}{3}$ und dem Ordinatenabschnitt $\frac{z}{60}$. Es ist z. B. (Abbildung 5.2.5, grüne Geraden):

für $z = 0$: $\quad GG_0 : x_2 = -\frac{2}{3} \cdot x_1$ (Gesamtgewinn = 0),

für $z = 255$: $\quad GG_{255} : x_2 = -\frac{2}{3} \cdot x_1 + \frac{17}{4}$ (Gesamtgewinn = 255),

für $z = 765$: $\quad GG_{765} : x_2 = -\frac{2}{3} \cdot x_1 + \frac{51}{4}$ (Gesamtgewinn = 765).

Da alle obigen Geraden dieselbe Steigung haben, sind diese zueinander parallel. Der Ordinatenabschnitt $\frac{z}{60}$ wird umso größer, je größer z wird. In GeoGebra lässt sich diese Problemstellung folgendermaßen implementieren: Zunächst wird ein Schieberegler für den Gesamtgewinn z erstellt. Dazu muss im entsprechenden Klappmenü in der Symbolleiste *Schieberegler* ausgewählt werden. Anschließend kann der Schieberegler im Zeichenblatt durch einen Klick mit der linken Maustaste beliebig positioniert werden. Dabei öffnet sich ein

Menü, in dem die für den Schieberegler gewünschten Parameter (Name, Intervall, Schrittweite) definiert werden können. Für dieses Beispiel wird ein Schieberegler mit dem Namen z in einem Intervall von 0 bis 1000 und einer Schrittweite von 200 erstellt.

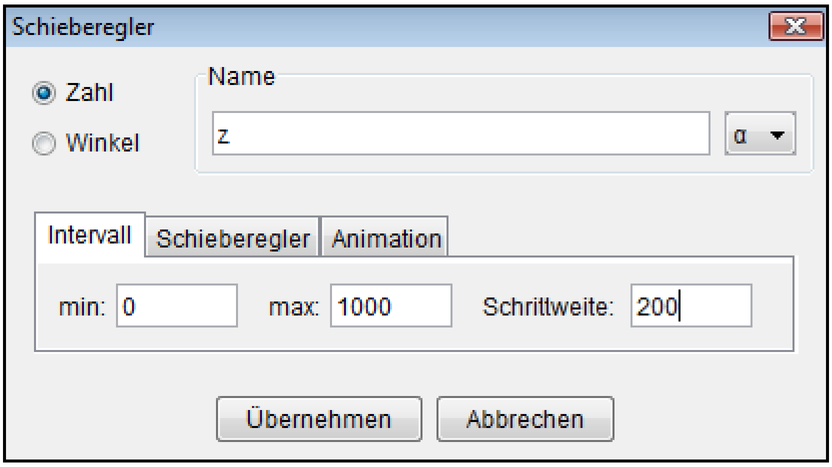


Abbildung 5.2.2: Parametereingabe für den Schieberegler

Nach einem Klick mit der linken Maustaste auf *Übernehmen* kann der Wert der Variablen z (Gesamtgewinn) mithilfe des Schiebereglers auf $z = 0$ gestellt werden, um zunächst die Ursprungsgerade $GG_0 : x_2 = -\frac{2}{3} \cdot x_1$ graphisch darzustellen. Dies erfolgt durch die Eingabe von *GG:y=(-2/3)*x+(z/60)* in die Eingabezeile. Damit auch die Beschriftung der Geraden angezeigt wird, kann wie in Abschnitt 2.3 vorgegangen werden. Die Auswahl einer Farbe für die Gerade GG (hier grün) lässt sich ebenfalls im Menü *Eigenschaften* (Registrierkarte *Farbe*) durchführen. Durch Betätigung des Schiebereglers kann dann der Wert der Variablen z (also der Gesamtgewinn z) vergrößert und damit die Gerade GG (Ursprungsgerade) parallel verschoben werden. Dies lässt sich sehr gut verdeutlichen, indem man beim Parallelverschieben der Geraden GG deren Spur einzeichnen lässt (Rechtsklick auf die Gerade und *Spur an* auswählen).

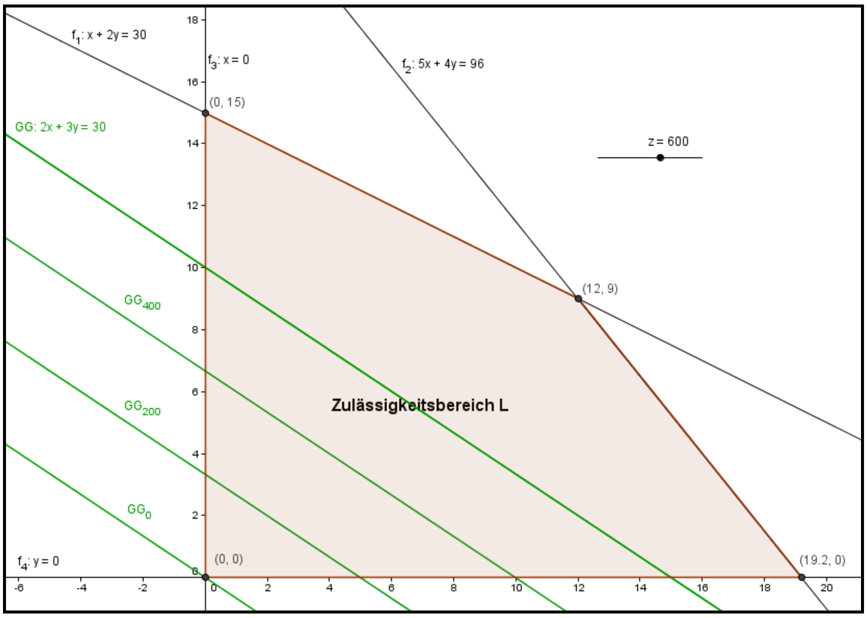


Abbildung 5.2.3: Parallelverschieben der Geraden GG_0

Ziel ist es nun, jenen Punkt des Zulässigkeitsbereichs L zu finden, der den größten z-Wert liefert. Dazu verschiebt man die Gerade GG durch Vergrößerung von z so lange parallel, solange die Gerade durch Punkte des Zulässigkeitsbereichs L verläuft. Den maximalen Gesamtgewinn z findet man durch jene Parallele zur Ursprungsgeraden, die dabei aber gerade noch einen Punkt des Zulässigkeitsbereiches L enthält (also den Zulässigkeitsbereich L nur noch am Rand berührt).

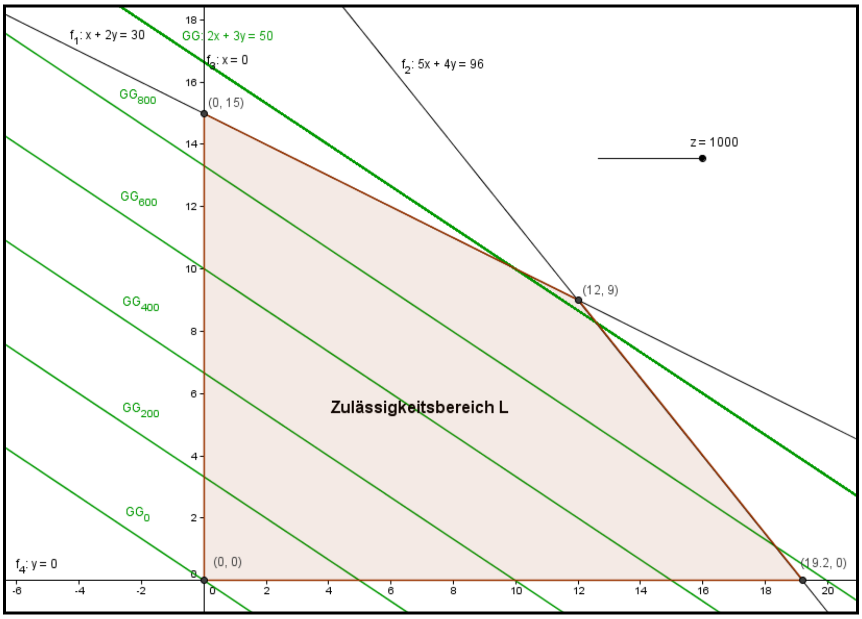


Abbildung 5.2.4: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung (1)

Durch Betrachtung von Abbildung 5.2.4 kann man erkennen, dass beim Parallelverschieben der Ursprungsgeraden der Rand des Zulässigkeitsbereichs L nicht erreicht wird, da das Intervall des Schiebereglers zu klein gewählt wurde. Durch gezieltes Probieren lässt sich aber bestimmen, welche Intervalllänge bzw. Schrittweite für die Problemstellung zielführend ist. Verändern kann man das Intervall und die Schrittweite des Schiebereglers dadurch, indem man diesen einmal mit der rechten Maustaste anklickt und den Menüpunkt *Eigenschaften* auswählt. In der Registrierkarte *Schieberegler* können dann die einzelnen Änderungen vorgenommen werden. Für diese Problemstellung erweist sich schließlich ein Intervall von 0 bis 1020 und eine Schrittweite von 255 als günstig.

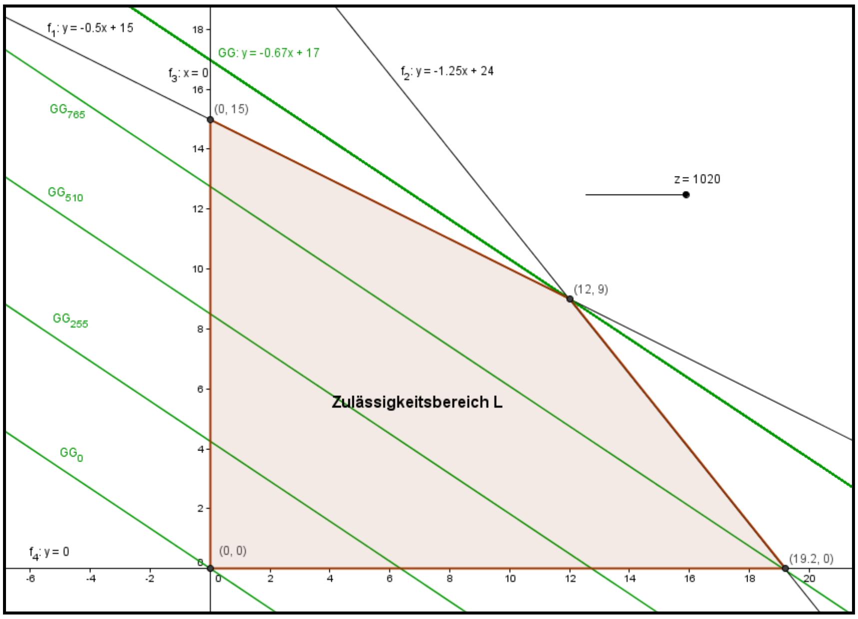


Abbildung 5.2.5: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung (2)

Wir erhalten in unserem Beispiel den maximalen Gesamtgewinn $z_{max} = 1020$ Euro (dieser Wert lässt sich beim Schieberegler ablesen) durch jene Gerade, die durch den Eckpunkt $(12, 9)$ des Zulässigkeitsbereiches L verläuft: $z_{max} = 1020 = 40 \cdot 12 + 60 \cdot 9$.

Den maximalen Erlös von 1020 Euro erzielt man, wenn man täglich 12 Stück von P_1 und 9 Stück von P_2 produziert.

Beispiel 5.2.2

(graphische Lösung zu Beispiel 1.2)

In Beispiel 4.3.1 wurde bereits der Zulässigkeitsbereich L des linearen Optimierungsproblems in GeoGebra graphisch dargestellt. Alle zulässigen Lösungen befinden sich in diesem Bereich. Beispielsweise erhält man für den Punkt $(30, 30)$ des Zulässigkeitsbereichs L die Gesamtkosten $z = 330$. Allgemein gilt: $GK_z : z = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{6} \cdot x_1 + \frac{z}{6}$. Dies sind Geraden mit der Steigung $-\frac{5}{6}$ und dem Ordinatenabschnitt $\frac{z}{6}$. Es ist z. B. (Abbildung 5.2.6, grüne Geraden):

$$\text{für } z = 220: \qquad GK_{220}: x_2 = -\frac{5}{6} \cdot x_1 + \frac{110}{3} \quad \text{(Gesamtkosten = 220),}$$

$$\text{für } z = 330: \qquad GK_{330}: x_2 = -\frac{5}{6} \cdot x_1 + 55 \quad \text{(Gesamtkosten = 330),}$$

$$\text{für } z = 440: \qquad GK_{440}: x_2 = -\frac{5}{6} \cdot x_1 + \frac{220}{3} \quad \text{(Gesamtkosten = 440).}$$

Bei der dynamischen Bestimmung der optimalen Lösung des linearen Optimierungsproblems in GeoGebra kann ähnlich wie in Beispiel 5.2.1 vorgegangen werden. Dazu wird zunächst ein Schieberegler z für die Gesamtkosten in einem Intervall (idealerweise von 0 bis 440) und einer Schrittweite von 110 erstellt werden. Anschließend wird der Wert der Variablen z mithilfe des Schiebereglers auf $z = 0$ gesetzt, um zunächst die Ursprungsgerade $GK_0 : x_2 = -\frac{5}{6} \cdot x_1$ graphisch darstellen zu können. Dies erfolgt durch die Eingabe von *GK:y=(-5/6)*x+(z/6)* in die Eingabezeile. Im Vergleich zum vorigen Beispiel ist hier zu beachten, dass die Ursprungsgerade nicht durch Punkte des Zulässigkeitsbereichs L verläuft. D. h. also, dass für $z = 0$ keine zulässigen Punkte (Lösungen) auf der Geraden liegen. Damit die Gerade GK durch den Zulässigkeitsbereichs L verläuft bzw. diesen zumindest berührt, ist es daher notwendig, die Gerade GK parallel zu verschieben. Dies gelingt wiederum dadurch, dass man den Wert der Variablen z durch Veränderung des Schiebereglers vergrößert. Um dies zu verdeutlichen, kann wie in Beispiel 5.2.1 beim Parallelverschieben der Geraden GK deren Spur eingezeichnet werden. Das bedeutet aber auch, dass dadurch der Ordinatenabschnitt wächst und damit die Gesamtkosten z steigen (Abbildung 5.2.6).

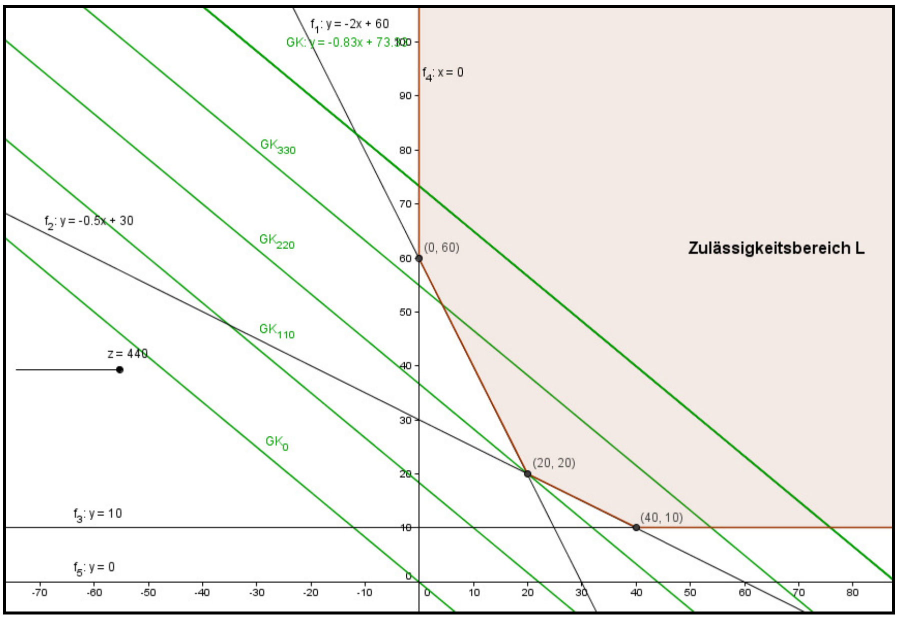


Abbildung 5.2.6: Parallelverschieben der Geraden GK_0

Man verschiebt die Gerade GK mittels des Schiebereglers nun so lange parallel, bis sie durch mindestens einen Punkt des Zulässigkeitsbereiches L verläuft (also den Zulässigkeitsbereich L nur am Rand berührt). Das Ziel ist, denjenigen Punkt im Zulässigkeitsbereich L zu bestimmen, welcher den kleinsten Ordinatenabschnitt $\frac{z}{6}$ der zugehörigen Gerade und damit die geringsten Gesamtkosten z bestimmt.

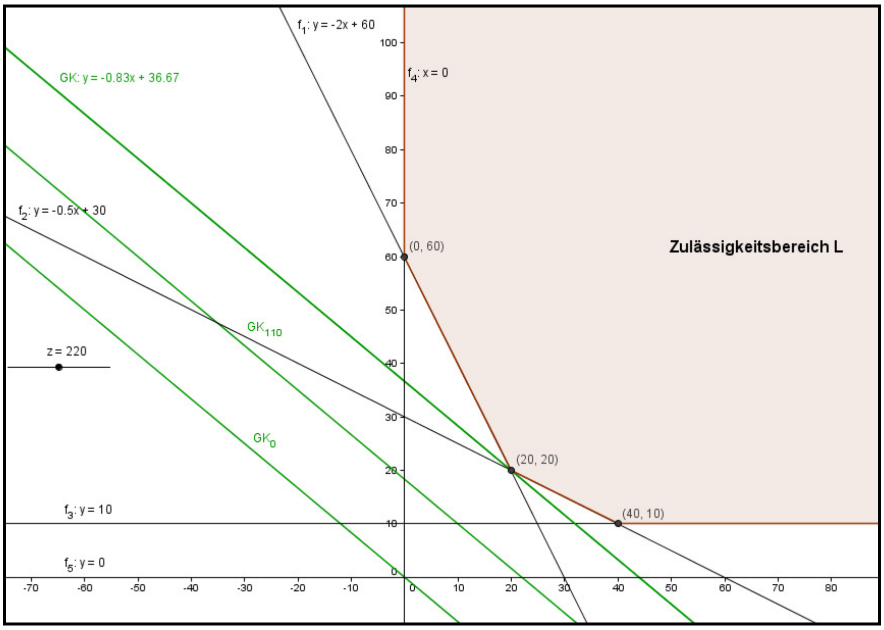


Abbildung 5.2.7: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung (3)

Die minimalen Gesamtkosten $z_{min} = 220$ (dieser Wert lässt sich beim Schieberegler ablesen) findet man in unserem Beispiel durch jene Gerade, die durch den Eckpunkt $(20, 20)$ des Zulässigkeitsbereiches L verläuft: $z_{min} = 220 = 5 \cdot 20 + 6 \cdot 20$.

Der Viehzuchtbetrieb hat die minimalen Gesamtkosten von 220 Geldeinheiten zu tragen, wenn die Rinder pro Futterration mit 20 ME von Sorte A und 20 ME von Sorte B gefüttert werden.

Beispiel 5.2.3

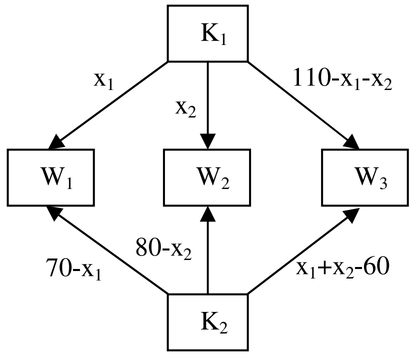
(graphische Lösung zu Beispiel 1.3)

In Beispiel 4.3.3 wurde bereits demonstriert, dass ein lineares Ungleichungssystem mit drei Variablen in dem eine lineare Gleichung vorkommt, auf ein lineares Ungleichungssystem mit zwei Variablen zurückgeführt werden kann. D. h., dass sich das lineare Optimierungsproblem mit drei Variablen in Beispiel 1.3 auf ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen reduzieren lässt. Das **mathematische Modell** lautet dann:

K_1 liefert x_1 ($x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \geq 0$) Tonnen Kohle an W_1, x_2 ($x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$) Tonnen an W_2 und $110 - x_1 - x_2$ Tonnen an W_3.

Um die Ausgangslage übersichtlich darzustellen, kann das Problem tabellarisch und graphisch veranschaulicht werden:

	W_1	W_2	W_3
K_1	x_1	x_2	$110-x_1-x_2$
K_2	$70-x_1$	$80-x_2$	x_1+x_2-60



Die Kosten

$$z = F(x_1, x_2) = 40 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 30 \cdot (110 - x_1 - x_2) + 50 \cdot (70 - x_1) + 20 \cdot (80 - x_2) + 60 \cdot (x_1 + x_2 - 60) =$$
$$= 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 4800$$

sind zu minimieren unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$x_1 \leq 70$$
$$x_2 \leq 80$$
$$x_1 + x_2 \leq 110$$
$$110 - x_1 - x_2 \leq 50 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Der Zulässigkeitsbereich L des linearen Optimierungsproblems wurde bereits in Beispiel 4.3.3 in GeoGebra graphisch dargestellt, die dynamische Bestimmung der optimalen Lösung kann wie in Beispiel 5.2.2 durchgeführt werden. Die Funktionsgleichung der Zielfunktion wird wie bei obigen Beispielen auf folgende Form gebracht: $TK_z: z = 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 4800 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{z-4800}{40}$. Dabei ist es für diese Problemstellung aber zweckmäßig, einen Schieberegler z in einem Intervall von 4800 bis 8600 und einer Schrittweite von 600 zu erstellen. Denn um zunächst die Ursprungsgerade graphisch darstellen zu können, muss z bereits einen Wert von $z = 4800$ besitzen (wegen des Summanden $\frac{z-4800}{40}$ in der Zielfunktion):

$z = 4800:\qquad TK_{4800}: x_2 = -\frac{5}{6}\cdot x_1 + \frac{4800-4800}{40} = -\frac{5}{6}\cdot x_1$ (Transportkosten = 4800).

Die Bestimmung der optimalen Lösung, durch Parallelverschiebung der Ursprungsgeraden, erfolgt schließlich wie in Beispiel 5.2.2.

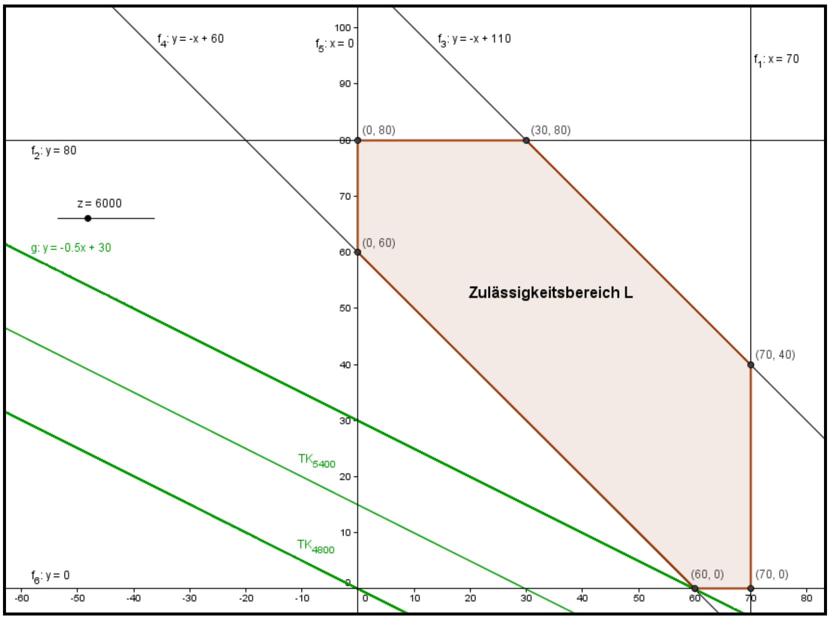


Abbildung 5.2.8: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung – GeoGebra (4)

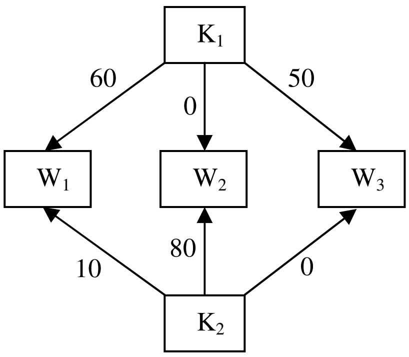
Dies ergibt die optimale Lösung $(60, 0)$ und damit $z_{min} = 6000 = 20\cdot 60 + 40\cdot 0 + 4800$.

Die Transportkosten sind also minimal, wenn folgende Lieferungen von Kohle (in Tonnen) an die Kohlekraftwerke erfolgen:

	W_1	W_2	W_3
K_1	60	0	50
K_2	10	80	0

D. h.: K_1 liefert 60 t Kohle zu W_1, 0 t Kohle zu W_2 und 50 t Kohle zu W_3.

K_2 liefert 10 t Kohle zu W_1, 80 t Kohle zu W_2 und 0 t Kohle zu W_3.



Bei Betrachtung der obigen Beispiele kann man erkennen, dass die Eckpunkte der jeweiligen

Zulässigkeitsbereiche L die optimalen Lösungen lieferten. In Abschnitt 5.5 wird dann gezeigt: Falls eine Zielfunktion ein Maximum oder Minimum auf L besitzt, so nimmt sie dies in einem Eckpunkt von L an. Weiters war der Zulässigkeitsbereich L in Beispiel 5.2.1 und in Beispiel 5.2.3 beschränkt. In Beispiel 5.2.1 war der Zulässigkeitsbereich L jedoch unbeschränkt. Es können aber auch **Sonderfälle** bei linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen auftreten, welche anschließend angeführt werden.

- Sonderfall 1 (mehrdeutige Lösung)

  Wird etwa in Beispiel 5.1.1 der Verkaufspreis von Produkt P_1 auf 30 Euro reduziert, so ergibt sich für das lineare Optimierungsproblem folgende neue **mathematische Modellierung**:

  Von P_1 werden x_1 ($x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \geq 0$) Stück produziert und von P_2 werden x_2 ($x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0$) Stück produziert.

  Zu maximieren ist der Gesamtgewinn

  $$z = F(x_1, x_2) = 30 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

  unter den Nebenbedingungen

  $$G=\mathbb{R}^2$$

  $$\begin{aligned} 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 &\leq 450 \\ 25 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

  Die graphische und dynamische Lösung dieser Problemstellung in GeoGebra kann wie in Beispiel 5.2.1 durchgeführt werden. Es muss zunächst die Zielfunktionsgleichung auf die folgende Form gebracht werden:

  $GG_z : z = 30 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{z}{60}$. Da die Steigung der Geraden GG_z mit der Steigung der Randgeraden $f_1 : 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 = 450 \Leftrightarrow f_1 : x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 15$ übereinstimmt, sind die Geraden GG_z und f_1 zueinander parallel. Das bedeutet, wenn die Ursprungsgerade mithilfe eines Schiebereglers z so lange parallel verschoben wird, bis sie den Zulässigkeitsbereich L nur noch am Rand berührt, dann muss sie mit der Randgeraden f_1 zusammenfallen (Abbildung 5.2.9).

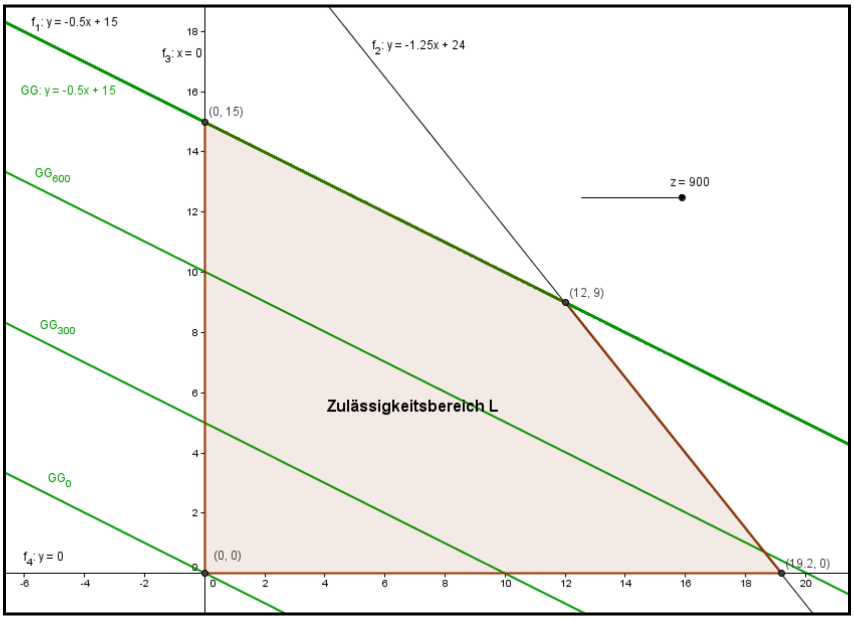


Abbildung 5.2.9: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung – Sonderfall 1 (1)

Es kommen nun alle ganzzahligen (da Stückzahlen ganzzahlig sind) geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als optimale Lösungen für das lineare Optimierungsproblem in Frage, welche sich auf der Verbindungskante der Eckpunkte $(0, 15)$ und $(12, 9)$ befinden. Denn alle diese zulässigen Lösungen liegen auf derselben Zielfunktions-Geraden und ergeben daher den gleichen maximalen Gesamtgewinn $z_{max} = 900$ (dieser Wert lässt sich beim Schieberegler ablesen). Um schließlich die ganzzahligen Koordinaten aller dieser optimalen Punkte bzw. Lösungen in GeoGebra ablesen zu können, kann ein Koordinatengitter eingezeichnet werden. Dies erfolgt durch einen Rechtsklick im Zeichenblatt und der Auswahl des Menüpunkts *Koordinatengitter*. Zudem kann durch einen Klick mit der rechten Maustaste auf eine freie Stelle im Zeichenblatt und der Auswahl des Menüpunkts *Eigenschaften* eine feinere Achsenskalierung der x_1- und x_2-Achse vorgenommen werden. Dazu muss in den beiden Registrierkarten *xAchse* und *yAchse* jeweils die Option *Abstand* mit einem Häkchen markiert und im zugehörigen Klappmenü *1* ausgewählt werden.

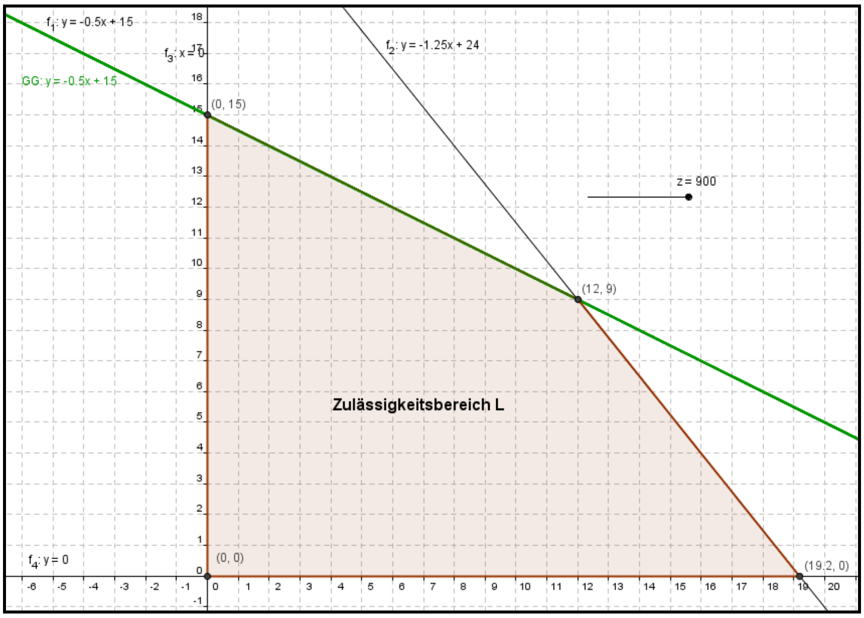


Abbildung 5.2.10: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung (Sonderfall 1) – Koordinatengitter

Für $0 \leq x_1 \leq 12$ und $x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 15$ ergeben sich also folgende optimale Lösungen:

$$(0,15), (2,14), (4,13), (6,12), (8,11), (10,10), (12,9).$$

Es kann aber auch vorkommen, dass sich auf der Verbindungskante zweier Eckpunkte keine ganzzahligen geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ befinden. Dann kommen für die Problemstellung ausschließlich die beiden Eckpunkte als optimale Lösungen in Frage. Dazu betrachtet man das folgende mathematische Modell:

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 28 \\ 2 \cdot x_1 + \quad x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$(x_1 \text{ und } x_2 \text{ ganzzahlig})$$

Die graphische und dynamische Lösung dieser Problemstellung in GeoGebra kann wie zuvor durchgeführt werden.

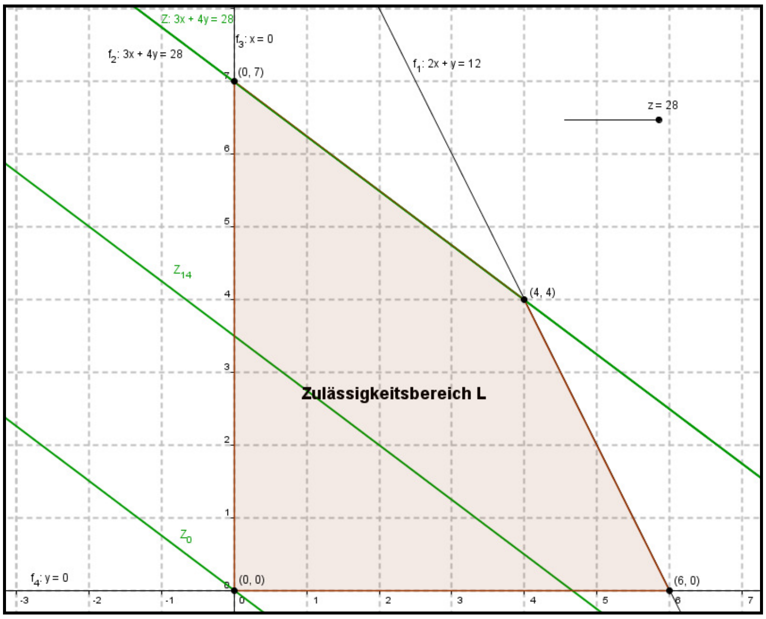


Abbildung 5.2.11: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung – Sonderfall 1 (2)

Für $0 \le x_1 \le 4$ und $x_2 = -\frac{3}{4} \cdot x_1 + 7$ ergeben sich also folgende optimale Lösungen:

$$(0\,,7) \text{ und } (4\,,4).$$

Würden beispielsweise auch die Koordinaten der beiden Eckpunkte nicht ganzzahlig sein, so müsste man zur Bestimmung der ganzzahligen Lösung(en) das *Branch & Bound – Verfahren* verwenden (siehe Ausblick in Kapitel 6, diskrete Optimierung).

- Sonderfall 2 (unbegrenzter Zielfunktionswert)

  Es gibt lineare Optimierungsprobleme, für die keine optimale Lösung existiert, weil der Zielfunktionswert im Zulässigkeitsbereich L beliebig wachsen kann (also nach oben unbeschränkt ist). Das bedeutet, dass die Zielfunktion beliebig weit parallel nach oben verschoben werden kann, ohne dass eine Grenze durch eine Nebenbedingung erreicht wird. „Der Zielfunktionswert wächst über alle Grenzen“ (aus [10] S. 36).

  Eine Frau möchte ihr erspartes Geld von 40 000 € in Wertpapiere anlegen. Dabei entscheidet sie sich für zwei Aktien A_1 und A_2. Die Aktie A_1 eines Telekommunikationsunternehmens kostet 25 € pro Anteil und die Aktie A_2 eines Mineralölkonzerns kostet 45 € pro Anteil. Die Jahresrendite der Aktie A_1 beträgt 2,50 € je Anteil und die der Aktie A_2 beträgt 4,80 € je Anteil. Aus Sympathiegründen beschließt die Frau, mindestens 100 Anteile von A_2 zu kaufen. Sie möchte jedoch maximal 18 000 € in die Aktie A_2 investieren.

Wie viele Anteile jeder Aktie soll die Frau kaufen, damit sie unter den genannten Bedingungen eine möglichst hohe Rendite erzielt?

Mathematische Modellierung:

Die Frau kauft x_1 ($x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \geq 0$) Anteile von Aktie A_1 und x_2 ($x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0$) Anteile von A_2.

Zu maximieren ist die Rendite

$$z = F(x_1, x_2) = 2{,}5 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 25 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 100 \\ 100 \cdot x_2 &\leq 18000 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Würde man beispielsweise bei der mathematischen Modellbildung des linearen Optimierungsproblems auf die Nebenbedingung $25 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 \leq 40000$ verzichten, so würde dies zum Sonderfall 2 führen, da der Zielfunktionswert, also die Rendite beliebig wachsen könnte – d. h. die Zielfunktionsgerade (Ursprungsgerade) könnte beliebig weit parallel verschoben werden.

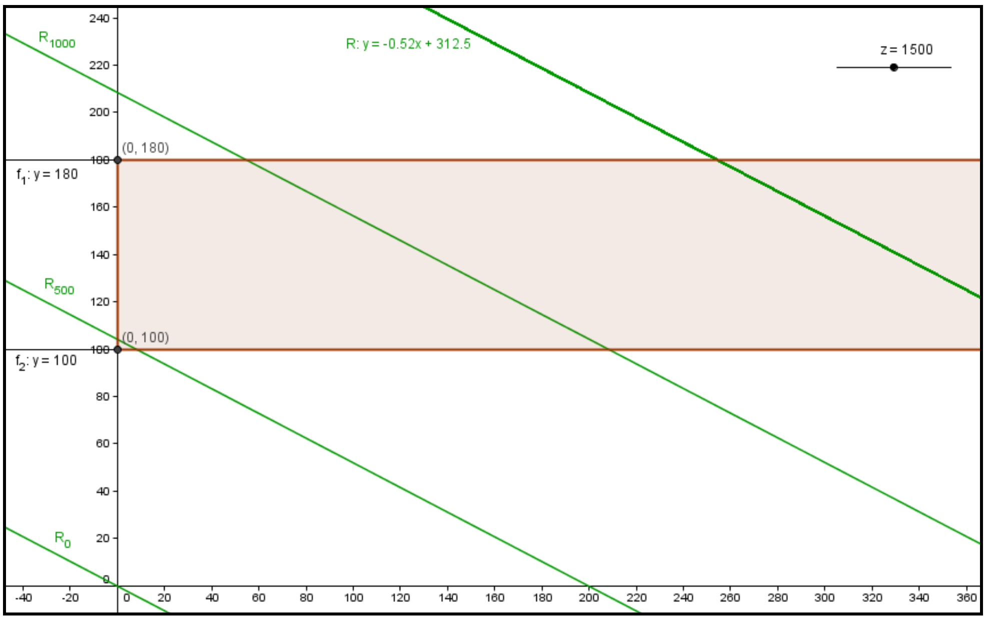


Abbildung 5.2.12: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung – Sonderfall 2

- <u>Sonderfall 3 (Degeneration/Entartung)</u>

  Die Degeneration tritt genau dann auf, wenn in einem linearen Optimierungsproblem eine oder mehrere Nebenbedingungen redundant sind. Für ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen bedeutet dies, dass sich in einem Eckpunkt des Zulässigkeitsbereichs L mehr als zwei Randgeraden schneiden oder dass zwei Randgeraden ident sind.

In einem Textilunternehmen können pro Stunde höchstens 6 Anzüge für Herren und 8 Ballkleider für Damen, zusammen aber höchstens 10 Kleidungsstücke hergestellt werden. Für einen Anzug werden 30 Meter Garn und für ein Ballkleid wird 15 Meter Garn benötigt. Die Nähmaschinen können in einer Stunde maximal 180 Meter Garn verarbeiten. Der Gewinn beträgt für einen Anzug 50 € und für ein Ballkleid 40 €. Wie viele Anzüge und Ballkleider sollte das Unternehmen stündlich anfertigen, damit der Gewinn möglichst groß ist?

Mathematische Modellierung:

Das Textilunternehmen stellt x_1 ($x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \geq 0$) Anzüge und x_2 ($x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0$) Ballkleider her.

Zu maximieren ist der Gewinn

$$z = F(x_1, x_2) = 50 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + \quad x_2 &\leq 10 \\ 30 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 &\leq 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bei der graphischen Darstellung des Zulässigkeitsbereichs L kann man erkennen, dass in den Eckpunkten $(2\,,8)$ und $(6\,,0)$ jeweils drei Randgeraden einander schneiden.

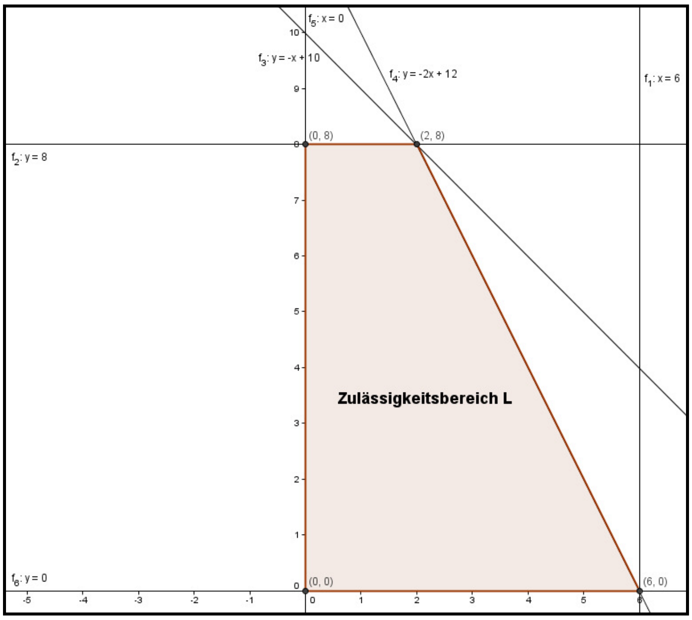


Abbildung 5.2.13: Degeneration – Sonderfall 3

Die Nebenbedingungen $x_1 + x_2 \leq 10$ und $x_1 \leq 6$ sind überflüssig und können daher weggelassen werden, ohne dass dabei die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems verändert wird. Denn alle Punkte aus dem Zulässigkeitsbereich L', des linearen Ungleichungssystems $30 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 \leq 180$, $x_2 \leq 8$ und $x_1, x_2 \geq 0$, erfüllen automatisch auch die linearen Ungleichungen $x_1 + x_2 \leq 10$ und $x_1 \leq 6$. Es ergibt sich also zu obigem linearen Ungleichungssystem ein neues sogenanntes **minimales äquivalentes** lineares Ungleichungssystem:

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 8 \\ 30 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 &\leq 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Die graphische Lösung dieser Problemstellung in GeoGebra kann wie in den Beispielen zuvor durchgeführt werden.

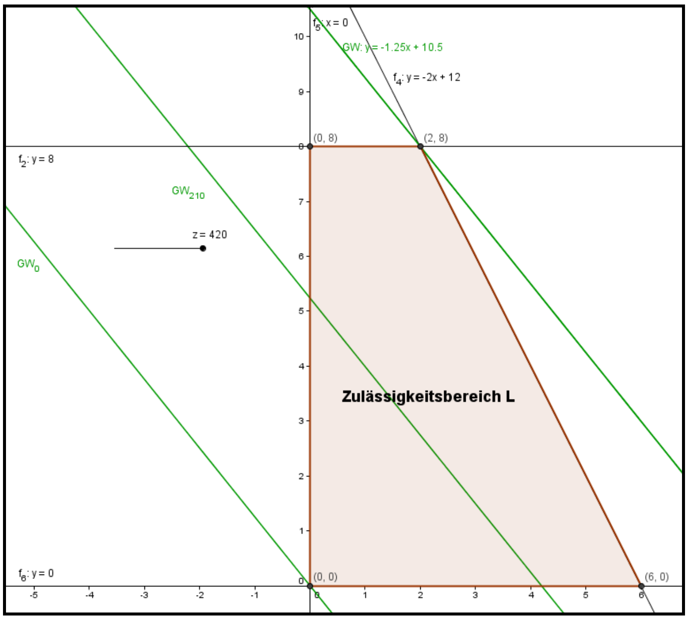


Abbildung 5.2.14: Graphische Bestimmung der optimalen Lösung – Sonderfall 3

Man erhält die optimale Lösung $(2,8)$ und damit $z_{\max} = 420 = 50 \cdot 2 + 40 \cdot 8$.

Das Textilunternehmen erzielt den maximalen Gewinn von 420 €, wenn stündlich 2 Anzüge und 8 Ballkleider angefertigt werden.

Obwohl für lineare Optimierungsprobleme mit mehr als zwei Variablen im Allgemeinen keine graphische Lösung möglich ist, lassen sich die verschiedenen Möglichkeiten analog auf höherdimensionale Problemstellungen übertragen. Hier gibt es dann ebenfalls (im Falle der Lösbarkeit) entweder eine eindeutige Lösung oder eine Schar von unendlich vielen Lösungen, die alle den gleichen optimalen Zielfunktionswert liefern (vgl. [5] S. 39f).
Wie sich dann die verschiedenen Sonderfälle beim Lösen von linearen Optimierungsproblemen mithilfe des Simplex-Algorithmus bemerkbar machen, wird in Abschnitt 5.6.2 demonstriert.

Bemerkung 5.2.1
In den obigen Beispielen wurden die Intervalle der einzelnen Schieberegler bzw. die Schrittweiten an die jeweiligen Problemstellungen angepasst. Genauso gut könnte man beispielsweise für die einzelnen Schieberegler auch ein größeres Intervall oder eine feinere Schrittweite wählen. Wesentlich für die Bestimmung der optimalen Lösung ist aber zum einen, dass das verwendete Intervall ausreichend groß ist, sodass man zunächst die Ursprungsgerade graphisch darstellen kann und beim Parallelverschieben der Geraden die optimale Lösung auch erreicht werden kann, und zum anderen, dass für den Schieberegler eine entsprechend feine Schrittweite gewählt wird, sodass man beim Parallelverschieben der Ursprungsgeraden den Rand des Zulässigkeitsbereichs L bzw. einen Eckpunkt auch „trifft".

Diese und noch weitere Kriterien, die für einen Einsatz im Mathematikunterricht notwendig sind, werden in Kapitel 6 noch ausführlich diskutiert.

5.3 Normalform linearer Optimierungsprobleme

Da sich die graphische Lösung von linearen Optimierungsproblemen mit einer Variablenanzahl >2 als äußerst mühsam gestaltet (wenn unter den Restriktionen keine Gleichung auftritt), sollen diese durch Verwendung eines Algorithmus (Simplex-Algorithmus) rechnerisch gelöst werden. Damit aber der Lösungsalgorithmus in Abschnitt 5.6 formuliert werden kann, müssen alle linearen Optimierungsprobleme – insbesondere die mathematischen Modelle – auf eine einheitliche Gestalt (Standardform) gebracht werden. Diese Gestalt nennt man auch die Normalform des linearen Optimierungsproblems.

Definition 5.3.1

Unter der **Normalform** eines linearen Optimierungsproblems versteht man die folgende Problemstellung:

Maximiere

$$z = F(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

unter den Nebenbedingungen (Restriktionen)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i && \text{für } i = 1,\dots,m, \\ &x_j \geq 0 && \text{für } j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3.1

Ein lineares Optimierungsproblem in Normalform ist also immer ein Maximumproblem, und es gibt bis auf die Nichtnegativitätsbedingungen nur noch Gleichheitsrestriktionen.

Weiters kann ein lineares Optimierungsproblem in Normalform in einer kompakten Form dargestellt werden.

Sei

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n},$$

dann gilt:

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$z = F(x) = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x} \rightarrow \mathrm{Max}$$

unter den Nebenbedingungen

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \geq \vec{0}.$$

Im Folgenden wird demonstriert, wie man lineare Optimierungsprobleme auf die einheitliche Gestalt (Normalform) gemäß Definition 5.3.1 bringen kann.

Jede Problemstellung lässt sich als Maximumproblem darstellen. Ein Minimumproblem wird zu einem Maximumproblem, indem man den „negativen Wert der Zielfunktion" maximiert. Der Ausdruck

$$z = F(x) = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x} \rightarrow \mathrm{Min}$$

wird also durch den Ausdruck

$$Z = -z = -F(x) = -\vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x} \rightarrow \mathrm{Max}$$

ersetzt. Anschließend werden zusätzliche Variablen, die sogenannten **Schlupfvariablen**, eingeführt, mit denen Nebenbedingungen in Ungleichungsform auf Nebenbedingungen in Gleichungsform umgewandelt werden können. Die Schlupfvariablen erfüllen dabei ebenfalls die Nichtnegativitätsbedingungen. Beispielsweise wird aus der linearen Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

durch Addition einer Variablen $u_i \geq 0$ die lineare Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + u_i = b_i \ .$$

Die Schlupfvariable u_i hat dabei die Aufgabe – falls die linke Seite der linearen Ungleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ kleiner als die rechte Seite ist – den Wert der Differenz $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$ zu übernehmen.

Analog wird aus der linearen Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$$

durch Subtraktion einer Variablen $v_i \geq 0$ die lineare Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - v_i = b_i \,.$$

Die Schlupfvariable v_i hat dabei die Aufgabe – falls die linke Seite der linearen Ungleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$ größer als die rechte Seite ist – den Wert der Differenz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i$ zu übernehmen.

Damit man die ursprünglichen Variablen des Problems von den Schlupfvariablen unterscheiden kann, werden erstgenannte als **Strukturvariablen** bezeichnet. Die Schlupfvariablen wurden zuvor mit u_i bzw. v_i bezeichnet. Jedoch in den folgenden Beispielen und Abschnitten werden die Strukturvariablen und die Schlupfvariablen in einem Vektor $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ zusammengefasst und die zu den Schlupfvariablen gehörenden Koeffizienten in der Zielfunktion gleich null gesetzt (vgl. [5] S. 41f und [11] S. 20-22).

Bemerkung 5.3.2

Falls eine lineare Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$ unter den Nebenbedingungen eines linearen Optimierungsproblems auftritt, so kann man diese durch zwei lineare Ungleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$ beschreiben. Anschließend können diese beiden linearen Ungleichungen ebenfalls durch Addition bzw. Subtraktion von Schlupfvariablen in lineare Gleichungen übergeführt werden. Das Beschreiben einer linearen Gleichung durch zwei Ungleichungen wird aus jenem Grund durchgeführt, um in jeder Nebenbedingung eine Schlupfvariable einführen zu können, sodass nach der Überführung der Problemstellung in Normalform die Matrizen jene Gestalt besitzen, welche für die Formulierung des Lösungsalgorithmus wesentlich ist.

Beispiel 5.3.1

Wir bringen Beispiel 5.1.1 nun in Normalform.

Ursprüngliche Gestalt:

Maximiere den Gesamtgewinn

$$z = F(x_1, x_2) = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 &\leq 450 \\ 25 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Normalform:

Maximiere den Gesamtgewinn

$$z = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 15 \cdot x_1 & + & 30 \cdot x_2 & + & x_3 & & & = & 450 \\ 25 \cdot x_1 & + & 20 \cdot x_2 & + & & & x_4 & = & 480 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 1 & 0 \\ 25 & 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Beispiel 5.3.2

(Beispiel 1.1 in Normalform)

Maximiere den Gewinn

$$\begin{aligned} z = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) &= 2{,}5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = \\ &= 2{,}5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^7$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcccccl} 30\cdot x_1 & + & 60\cdot x_2 & + & 10\cdot x_3 & + & x_4 & & & & & = & 25000 \\ 40\cdot x_1 & + & 40\cdot x_2 & + & 20\cdot x_3 & + & & x_5 & & & & = & 36000 \\ 60\cdot x_1 & + & 30\cdot x_2 & + & 40\cdot x_3 & + & & & x_6 & & & = & 24000 \\ 20\cdot x_1 & + & 30\cdot x_2 & + & 40\cdot x_3 & + & & & & x_7 & & = & 16000 \\ & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} & \geq & 0. \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 60 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 40 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 60 & 30 & 40 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 30 & 40 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 7}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 25000 \\ 36000 \\ 24000 \\ 16000 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

<u>Beispiel 5.3.3</u>

(Beispiel 1.2 in Normalform)

Maximiere die „negativen Gesamtkosten“

$$Z=-z=-F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=-5\cdot x_1-6\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5=-5\cdot x_1-6\cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^5$$

$$\begin{array}{rcrcccccl} 0{,}2\cdot x_1 & + & 0{,}1\cdot x_2 & - & x_3 & & & = & 6 \\ 0{,}2\cdot x_1 & + & 0{,}4\cdot x_2 & - & & x_4 & & = & 12 \\ & & 0{,}4\cdot x_2 & - & & & x_5 & = & 4 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0 \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & -1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

<u>Beispiel 5.3.4</u>

(Beispiel 1.3 in Normalform)

Maximiere die „negativen Kosten“

$$\begin{aligned} Z=-z=-F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= -20\cdot x_1-40\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6= \\ &= -20\cdot x_1-40\cdot x_2 \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^6$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & = & 70 \\
 & & x_2 & + & & & x_4 & & & & & = & 80 \\
x_1 & + & x_2 & + & & & & & x_5 & & & = & 110 \\
x_1 & + & x_2 & - & & & & & & & x_6 & = & 60
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 110 \\ 60 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Bemerkung 5.3.3

Die Struktur der Matrizen A in den Beispielen 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 und 5.3.4 wird in Abschnitt 5.6 von großer Bedeutung sein, da aufgrund dieser Gestalt der einzelnen Matrizen, lineare Optimierungsprobleme mithilfe des Simplex-Algorithmus gelöst werden können.

5.4 Basislösungen

Für die Bestimmung der optimalen Lösung eines linearen Optimierungsproblems durch Verwendung des Simplex-Algorithmus (Abschnitt 5.6) ist der Begriff der **Basislösung** unerlässlich. Daher wird dieser Begriff in diesem Abschnitt definiert. In Abschnitt 5.1 wurden bereits die Begriffe „zulässige Lösung“ und „optimale Lösung“ für lineare Optimierungsprobleme definiert. Diese Begriffe werden nun auch für lineare Optimierungsprobleme in Normalform definiert.

Definition 5.4.1

Ein Punkt $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Nichtnegativitätsbedingungen eines linearen Optimierungsproblems in Normalform erfüllt, heißt **zulässiger Punkt** oder **zulässige Lösung**. Die Menge aller zulässigen Lösungen bildet den **Zulässigkeitsbereich N** des linearen Optimierungsproblems in Normalform. $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ heißt **optimaler Punkt** oder **optimale Lösung**, wenn $\vec{x}$ zulässig ist und es keine zulässige Lösung $\vec{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit größerem Zielfunktionswert $F(\vec{y})$ gibt als $F(\vec{x})$.

Definition 5.4.2

Es sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ gegeben. Eine Lösung $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ heißt **Basislösung** der Problemstellung, wenn $n - m$ Variablen $x_{j_{m+1}}, ..., x_{j_n}$ gleich null sind und die zu den restlichen m Variablen $x_{j_1}, ..., x_{j_m}$ gehörenden Spaltenvektoren $\overrightarrow{a^{j_1}}, ..., \overrightarrow{a^{j_m}}$ der Koeffizientenmatrix A linear unabhängig sind. Eine Basislösung, die alle Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Basislösung**. Die zu einer Basislösung $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ gehörenden m linear unabhängigen Spaltenvektoren $\overrightarrow{a^{j_1}}, ..., \overrightarrow{a^{j_m}}$ heißen **Basisvektoren** und die $x_{j_1}, ..., x_{j_m}$ **Basisvariablen** (**BV**). Alle übrigen Spaltenvektoren bezeichnet man als **Nichtbasisvektoren** und die dazugehörigen Variablen als **Nichtbasisvariablen** (**NBV**). Eine Basislösung, bei der mindestens eine Basisvariable verschwindet, heißt **degeneriert** oder **entartet**.

Es gelten die folgenden beiden Sätze:

Satz 5.4.1

Es sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ gegeben. Dann gibt es stets ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gilt. Die Nebenbedingungen können also (bis auf die Nichtnegativitätsbedingungen $\vec{x} \geq 0$) stets erfüllt werden. Der Beweis des Satzes kann in [5] S. 45 nachgelesen werden.

Satz 5.4.2 (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Es sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ gegeben.

Existiert für die Problemstellung eine zulässige Lösung, dann existiert eine zulässige Basislösung.

Den Beweis des Satzes findet man in [7] S. 19.

Aufgrund von Satz 5.4.2 reduziert sich die Problemstellung auf die Aufgabe, die optimale Lösung unter den zulässigen Basislösungen zu suchen. Dies bedeutet, dass man alle zulässigen Basislösungen bestimmen und dabei die zugehörigen Zielfunktionswerte vergleichen muss, um das Optimum zu bestimmen. Für ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ gibt es maximal $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ mögliche Basislösungen (vgl. [7] S. 20).

Im Folgenden wird ein Algorithmus angegeben, mit dem lineare Optimierungsprobleme rechnerisch gelöst werden können (aus [5] S. 47):

Es sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ gegeben. Die m-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge $\{1, \ldots, n\}$ werden mit $B_1, \ldots, B_N$ bezeichnet, wobei $N = \binom{n}{m}$ ist.

1. Setze $k = 1$ und $z = -\infty$!

2. Bilde die Matrix $A_{B_k} = (a_j)_{j \in B_k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und den Variablenvektor $\overrightarrow{x_{B_k}} = (x_j)_{j \in B_k} \in \mathbb{R}^m$!

3. Ist $rg(A_{B_k}) = m$, so bestimme die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A_{B_k} \cdot \overrightarrow{x_{B_k}} = \vec{b}$! Setze nun $x_j = 0$ für $j \notin B_k$! Mit dieser Definition ist $\vec{x} = (x_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basislösung. Falls $\vec{x} \geq 0$, also falls die gefundene Basislösung zulässig ist, ersetze z durch $\max\left(z, \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x} \right)$!

4. Ersetze k durch $k+1$! Falls $k \leq N$, gehe zu Schritt 2 !

Nach Abbruch des Algorithmus ist z der maximale Zielfunktionswert.

<u>Beispiel 5.4.1</u>

In diesem Beispiel wird demonstriert, wie man anhand des obigen Algorithmus die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems in Beispiel 5.3.1 bestimmen kann.

Da $n = 4$ und $m = 2$ ist, muss man $\binom{4}{2} = 6$ lineare Gleichungssysteme lösen, wobei die Rangbestimmung der Matrizen A_{B_k} und das Lösen der linearen Gleichungssysteme durch Verwendung von Maple durchgeführt werden kann (wie in Abschnitt 3.6):

$k = 1$ und $z = -\infty$.

$B_1 = \{1, 2\}$: $A_{B_1} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 25 & 20 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_1}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_1}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{B_1} \cdot \overrightarrow{x_{B_1}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 25 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$ ($x_3 = 0$ und $x_4 = 0$) liefert die

zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_1}} = (12, 9, 0, 0) \Rightarrow z = \max(-\infty, 1020) = 1020$.

$k = 2$ und $z = 1020$.

$B_2 = \{1, 3\}$: $A_{B_2} = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_2}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_2}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{B_2} \cdot \overrightarrow{x_{B_2}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$ ($x_2 = 0$ und $x_4 = 0$) liefert die

zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_2}} = \left(\frac{96}{5}, 0, 162, 0\right) \Rightarrow z = \max(1020, 768) = 1020$.

$k = 3$ und $z = 1020$.

$B_3 = \{1, 4\}$: $A_{B_3} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_3}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_3}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{B_3} \cdot \overrightarrow{x_{B_3}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$ ($x_2 = 0$ und $x_3 = 0$) liefert die

nicht zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_3}} = (30, 0, 0, -270)$, da $x_4 < 0$ ist.

$k = 4$ und $z = 1020$.

$B_4 = \{2, 3\}$: $A_{B_4} = \begin{pmatrix} 30 & 1 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_4}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_4}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{B_4} \cdot \overrightarrow{x_{B_4}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 30 & 1 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$ ($x_1 = 0$ und $x_4 = 0$) liefert die

nicht zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_4}} = (0, 24, -27, 0)$, da $x_3 < 0$ ist.

$k = 5$ und $z = 1020$.

$B_5 = \{2, 4\}$: $A_{B_5} = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_5}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_5}) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{B_5} \cdot \overrightarrow{x_{B_5}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$$ ($x_1 = 0$ und $x_3 = 0$) liefert die

zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_5}} = (0, 15, 180, 0) \quad \Rightarrow \quad z = \max(1020, 900) = 1020$.

$k = 6$ und $z = 1020$.

$B_6 = \{3, 4\}$: $A_{B_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{B_6}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $rg(A_{B_6}) = 2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{B_6} \cdot \overrightarrow{x_{B_6}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 480 \end{pmatrix}$$ ($x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) liefert die

zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_6}} = (0, 0, 450, 480) \quad \Rightarrow \quad z = \max(1020, 0) = 1020$.

Somit ist $\overrightarrow{x_{B_1}} = (12, 9, 0, 0)$ die optimale Basislösung und $z_{max} = 1020$ der maximale Zielfunktionswert der Problemstellung (wie bereits aus Beispiel 5.2.1 bekannt ist).

<u>Interpretation der Schlupfvariablen</u>:

Die Schlupfvariablen x_3 und x_4 geben in Beispiel 5.4.1 die Zeit in Minuten an, in der die Maschinen M_1 und M_2 nicht genutzt werden (freie Kapazitäten). Die zulässige Basislösung $\overrightarrow{x_{B_6}} = (0, 0, 450, 480)$ bedeutet beispielsweise, dass die beiden Maschinen still stehen und daher nicht produziert wird (da $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 450$ und $x_4 = 480$). Bei der optimalen Basislösung $\overrightarrow{x_{B_1}} = (12, 9, 0, 0)$ sind die Schlupfvariablen $x_3 = x_4 = 0$. Das bedeutet, dass die Maschinen M_1 und M_2 voll ausgelastet werden (also keine freien Kapazitäten vorhanden sind).

Betrachtet man im obigen Beispiel die berechneten Basislösungen, so entsprechen die beiden ersten Koordinaten der Basislösungen gerade den Koordinaten der Schnittpunkte von jeweils zwei Randgeraden (Abbildung 5.4.1). Die beiden ersten Koordinaten der zulässigen Basislösungen ergeben dabei die Koordinaten der Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs L.

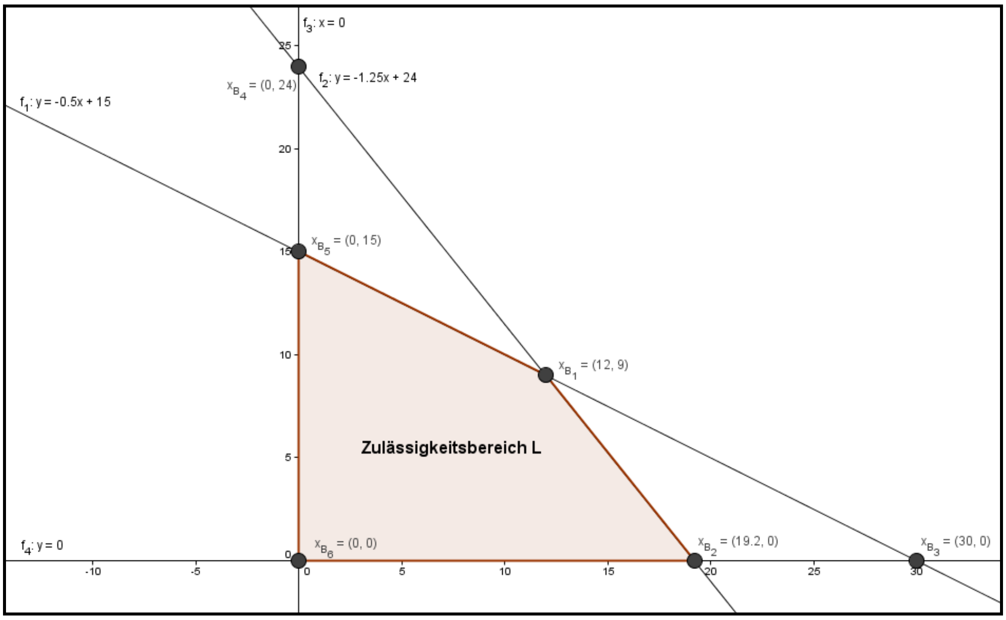


Abbildung 5.4.1: Graphische Darstellung der Basislösungen

Schon in diesem einfachen Beispiel erkennt man, dass diese Lösungsmethode bereits bei linearen Optimierungsproblemen mit zwei Strukturvariablen mit einem enormen Rechenaufwand verbunden ist. Für lineare Optimierungsprobleme mit drei Strukturvariablen wird die Situation noch komplexer (sowohl bei der rechnerischen Methode als auch bei der geometrischen Interpretation der Basislösungen). Betrachtet man Beispiel 1.1, so muss man bei dieser Problemstellung bei Verwendung des obigen Algorithmus $\binom{7}{4} = 35$ lineare Gleichungssysteme lösen. Die drei ersten Koordinaten der Basislösungen entsprechen dann den Koordinaten der Schnittpunkte von jeweils drei Randebenen. Für höhere Dimensionen, also für lineare Optimierungsprobleme in Normalform mit $\text{rg}(A) = m < n$, lässt sich dies entsprechend verallgemeinern, wobei die ersten m Koordinaten der Basislösungen den Schnittpunkten von Hyperebenen entsprechen.

Der vorgestellte Algorithmus ist für große n und m nicht mehr sehr effizient. Daher wird ein anderes Verfahren, der Simplex-Algorithmus in Abschnitt 5.6, für das Lösen von linearen Optimierungsaufgaben eingeführt und verwendet werden, mit dem sich der Rechenaufwand deutlich reduzieren wird.

Bemerkung 5.4.1

Aufgrund des hohen Rechenaufwandes wurde auf die Berechnung der optimalen Lösung von Beispiel 1.2 bzw. Beispiel 1.3 mittels obigem Algorithmus verzichtet. Die Berechnung lässt sich aber analog zu Beispiel 5.4.1 durchführen.

5.5 Die Geometrie linearer Optimierungsprobleme

In Abschnitt 5.2 wurden lineare Optimierungsprobleme mit zwei Strukturvariablen bzw. lineare Optimierungsprobleme mit drei Strukturvariablen, welche sich auf lineare Optimierungsprobleme mit zwei Strukturvariablen zurückführen ließen, graphisch gelöst. Die Eckpunkte der jeweiligen Zulässigkeitsbereiche L (Polygone), welche gerade den zulässigen Basislösungen entsprechen (siehe Beispiel 5.4.1), lieferten die möglichen Kandidaten für optimale Lösungen.
Um schließlich Aussagen bzw. Schlüsse über die Existenz und Lage der optimalen Lösungen von linearen Optimierungsproblemen mit einer beliebigen Anzahl von Strukturvariablen treffen zu können, ist der Begriff der Konvexität von besonderer Bedeutung.

Definition 5.5.1

Eine Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $P_1 \in M$ und $P_2 \in M$ für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ auch der Punkt $P_3 = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$ zu M gehört – d. h., dass alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen P_1 und P_2 zu M gehören. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so heißt der Punkt $P_3 \in M$ **Eckpunkt** oder auch **Extrempunkt** von M, wenn es keine zwei verschiedenen Punkte $P_1, P_2 \in M$ gibt, sodass gilt: $P_3 = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$ für eine reelle Zahl t mit $0 < t < 1$.

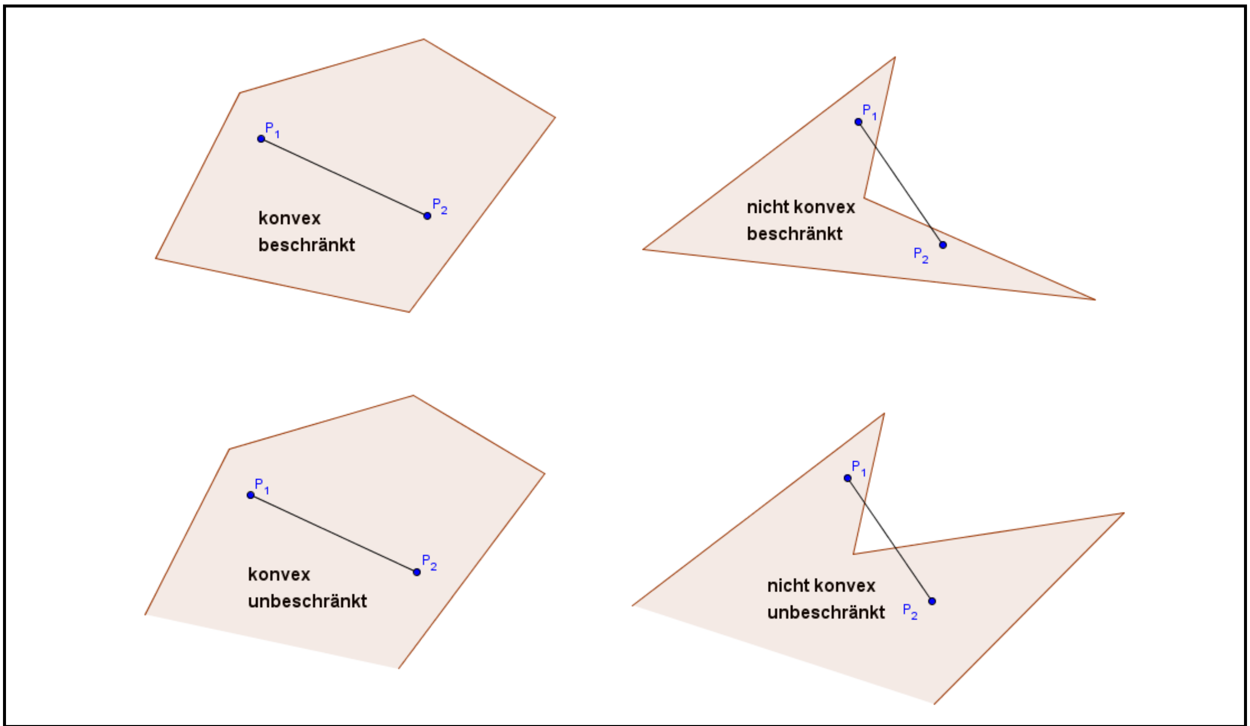


Abbildung 5.5.1: Konvexe und nicht konvexe Mengen im $\mathbb{R}^2$

Bemerkung 5.5.1

Die Geraden und Halbebenen im $\mathbb{R}^2$, die Ebenen und Halbräume im $\mathbb{R}^3$ und schließlich die Hyperebenen und Halbräume im $\mathbb{R}^n$ sind konvexe Mengen. Die entsprechenden Beweise findet man in [2] S. 171-176.

Definition 5.5.2

Eine Menge $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvexes Polytop**, wenn P sich als Durchschnitt endlich vieler Halbebenen bzw. Halbräume darstellen lässt. Ein beschränktes Polytop im $\mathbb{R}^2$ wird **konvexes Polygon** und im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^n$ **konvexes Polyeder** genannt.

In Beispiel 5.2.1 und 5.2.3 ist der Zulässigkeitsbereich L jeweils ein konvexes Polygon im $\mathbb{R}^2$ und in Beispiel 5.2.2 ist der Zulässigkeitsbereich L ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^2$. Der Zulässigkeitsbereich L in Beispiel 4.3.2 ist ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^3$. Werden die linearen Optimierungsprobleme in Normalform übergeführt, so ergeben sich die einzelnen Zulässigkeitsbereiche N als Durchschnitt von endlich vielen Hyperebenen im $\mathbb{R}^4$ (Beispiel 5.3.1), im $\mathbb{R}^7$ (Beispiel 5.3.2), im $\mathbb{R}^5$ (Beispiel 5.3.3) bzw. im $\mathbb{R}^6$ (Beispiel 5.3.4).
Da man eine Hyperebene $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ im $\mathbb{R}^n$ als Durchschnitt der Halbräume

$$H_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \geq b \right\}$$

und

$$H_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \leq b \right\}$$

schreiben kann, sind die Zulässigkeitsbereiche N der bisher betrachteten linearen Optimierungsprobleme in Normalform ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^4$ (Beispiel 5.3.1), ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^7$ (Beispiel 5.3.2), ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^5$ (Beispiel 5.3.3) bzw. ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^6$ (Beispiel 5.3.4).

Satz 5.5.1

Es sei die Menge aller zulässigen Lösungen $N = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ und } \vec{x} \geq \vec{0} \}$ eines linearen Optimierungsproblems in Normalform mit $\mathrm{rg}(A) = m < n$ ein konvexes Polytop. $\vec{x}$ ist genau dann eine zulässige Basislösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, wenn $\vec{x}$ ein Eckpunkt von N ist.
Den Beweis findet man in [7] S. 21f.

Aus Satz 5.4.2 und Satz 5.5.1 folgt nun:
Eine lineare Funktion $\vec{c}^T \cdot \vec{x}$ (Zielfunktion) nimmt ihr Maximum über einem beschränkten Zulässigkeitsbereich $N = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ und } \vec{x} \geq \vec{0} \}$, also einem konvexen Polyeder, in einem Eckpunkt von N an. Ist N unbeschränkt und existiert das Maximum von $\vec{c}^T \cdot \vec{x}$, so wird es ebenfalls in einem Eckpunkt angenommen (vgl. [5] S. 55).

Weiters gilt (vgl. [7] S. 22):

1) Ist $N = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ und } \vec{x} \geq \vec{0} \}$ eine nicht leere Menge, dann besitzt N mindestens einen Eckpunkt.
2) Existiert für ein lineares Optimierungsproblem in Normalform eine optimale Lösung, dann wird die optimale Lösung bzw. der optimale Zielfunktionswert in einem Eckpunkt von N angenommen.
3) Da ein lineares Optimierungsproblem in Normalform höchstens endlich viele Basislösungen besitzt, hat N höchstens endlich viele Eckpunkte.

Mithilfe des obigen Satzes bzw. den darauf folgenden Schlüssen wurde verdeutlicht, warum beim Lösen von linearen Optimierungsproblemen in Abschnitt 5.2 die optimale Lösung jeweils an einem Eckpunkt angenommen wurde. Es reicht daher völlig aus, die optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems unter den Ecken zu suchen.
Im folgenden Abschnitt wird ein Rechenverfahren, der Simplex-Algorithmus, vorgestellt, dem alle bisher gewonnen Kenntnisse zugrunde liegen. Mithilfe dieses Verfahrens lassen sich dann lineare Optimierungsprobleme mit einer beliebigen Strukturvariablenanzahl rechnerisch und in effizienter Weise lösen.

5.6 Der Simplex-Algorithmus

Der Name Simplex-Algorithmus spielt auf die geometrische Gestalt des Zulässigkeitsbereichs an. Das Simplex ist ein Begriff aus der Geometrie und beschreibt einen n-dimensionalen Körper (ein Polytop) (vgl. [17]).

Der Simplex-Algorithmus ist im Gegensatz zum Algorithmus in Abschnitt 5.4 eine sehr geschickte und sparsame Methode zur Lösungsbestimmung. Das Grundprinzip ist dabei folgendes: Der Algorithmus läuft ausgehend von einer Ecke des Zulässigkeitsbereichs L eines linearen Optimierungsproblems entlang seiner Kanten von Ecke zu Ecke – wobei in jedem Schritt der Zielfunktionswert vergrößert wird – bis er schließlich bei der optimalen Ecke (falls diese überhaupt existiert) ankommt.

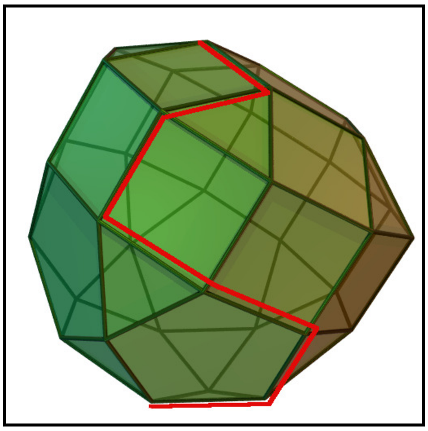


Abbildung 5.6.1: Geometrische Interpretation des Simplex-Algorithmus (aus [18])

Aufgrund der Übereinstimmungen der zulässigen Basislösungen mit den Ecken des Zulässigkeitsbereichs L (siehe Abschnitt 5.4) hantelt sich also dieses Verfahren von einer zulässigen Basislösung bis zur optimalen zulässigen Basislösung iterativ vor. Es müssen also nicht mehr alle Basislösungen bzw. zulässigen Basislösungen eines linearen Optimierungsproblems wie mit dem Algorithmus in Abschnitt 5.4 berechnet werden, was den Rechenaufwand deutlich reduziert.

Die Idee ist also, eine Folge von zulässigen Basislösungen $\left(\overrightarrow{x^r}\right)$ für ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$ zu erzeugen, bei der beim Übergang von $\overrightarrow{x^r}$ zu $\overrightarrow{x^{r+1}}$ jeweils eine Nichtbasisvariable neu in die Basis kommt und eine bisherige Basisvariable diese verlässt (**Basistausch**). Dabei soll außerdem der Zielfunktionswert wachsen, also $\vec{c}^{\,T} \cdot \overrightarrow{x^{r+1}} \geq \vec{c}^{\,T} \cdot \overrightarrow{x^r}$ sein (vgl. [5] S. 56).

Um den Simplex-Algorithmus veranschaulichen bzw. die einzelnen Rechenschritte leichter durchführen zu können, kann ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit $rg(A) = m < n$, ähnlich wie ein lineares Gleichungssystem in Abschnitt 3.5, in Form eines

Tableaus, des sogenannten **Simplex-Tableaus**, angeschrieben werden (aus [5] S. 56):

BV	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	z	$\vec{b}$
x_{j_1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	0	b_1
x_{j_2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	0	$\vdots$
x_{j_m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	1	$z-\text{Wert}$

Das Simplex-Tableau beinhaltet alle wesentlichen Informationen eines linearen Optimierungsproblems in Normalform mit $rg(A) = m < n$:

- Die Basisvariablen aller Gleichungen,
- die Koeffizienten aller Variablen,
- z als zusätzliche Variable (Einheitsvektor als Spalte) und
- die Werte der rechten Seiten.

Die letzte Zeile, welche die Koeffizienten der Zielfunktion enthält, wird als **Ergebniszeile** bezeichnet.

Weiters lässt sich das Simplex-Tableau durch Trennung von Basis- und Nichtbasisvariablen in kanonischer Form (siehe Abschnitt 3.5.1) anschreiben.

Zusätzlich sollen dazu noch zwei weitere Bedingungen erfüllt werden:

- Alle rechten Seiten sind nichtnegativ ($b_i \geq 0$). Dies lässt sich stets durch einen Vorzeichenwechsel in der jeweiligen Nebenbedingung durchführen.
- Jede einzelne Nebenbedingung enthält genau eine Variable, die nur in dieser Nebenbedingung vorkommt und deren Koeffizient positiv ist, also eine Schlupfvariable.

Ein Simplex-Tableau von dieser Gestalt (in kanonischer Form und den beiden zusätzlichen Bedingungen) wird auch **primal zulässig** genannt, wobei die $m+1$ verschiedenen Einheitsvektoren, die dabei auftreten, eine Basis bilden (vgl. [5] S. 56-58).

Da bei linearen Optimierungsproblemen in kanonischer Form die Schlupfvariablen $x_{n-m+1},...,x_n$ gerade die Basisvariablen sind, erhält man folgendes Simplex-Tableau, welches auch als das **Ausgangstableau** für den Simplex-Algorithmus bezeichnet wird (aus [5] S. 57):

BV	x_1	$\cdots$	x_{n-m}	x_{n-m+1}		$\cdots$		x_n	z	$\vec{b}$
x_{n-m+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n-m}$	1	0	$\cdots$		0	0	b_1
				0	1					
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
							1	0		
x_n	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n-m}$	0		$\cdots$	0	1	0	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_{n-m}$	0		$\cdots$		0	1	$z-\text{Wert}$

Ist das Ausgangstableau primal zulässig, dann lässt sich die zugehörige zulässige Basis- bzw. Ausgangslösung leicht bestimmen. Dazu setzt man die Nichtbasisvariablen gleich null, d. h.:

$$x_1,...,x_{n-m}=0.$$

Die Basisvariablen nehmen dann den Wert des in der entsprechenden Zeile stehenden Koeffizienten b_i $(i=1,...,m)$ an (siehe Abschnitt 3.5.1, Gauß-Jordan-Algorithmus):

$$\begin{aligned} x_{n-m+1} &= b_1, \\ &\vdots \\ x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Ziel ist nun, ausgehend von einem primal zulässigen Tableau durch Anwenden des Gauß-Jordan-Algorithmus ein neues primal zulässiges Tableau zu erstellen, sodass die zugehörige Basislösung einen besseren Zielfunktionswert liefert. Die Basislösung lässt sich dabei aber nur dann verbessern, wenn eine Nichtbasisvariable einen negativen Koeffizienten in der Ergebniszeile besitzt, wenn also $-c_k<0$ für ein $k\in\{1,...,n-m\}$ ist.

Es lässt sich dann der Zielfunktionswert verbessern, indem man die Variable x_k in die Basis aufnimmt und dafür eine bisherige Basisvariable die Basis verlässt (**Basistausch**) (vgl. [5] S. 58).

Im Folgenden wird der Algorithmus, mit dem eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable getauscht werden kann (**Basistausch**), angeführt. Dabei wird vom r-ten Simplex-Tableau ausgegangen:

BV	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	z	$\vec{b}$
$x_{k_1^r}$	a^r_{11}	a^r_{12}	$\cdots$	a^r_{1n}	0	b^r_1
$x_{k_2^r}$	a^r_{21}	a^r_{22}	$\cdots$	a^r_{2n}	0	b^r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	0	$\vdots$
$x_{k_m^r}$	a^r_{m1}	a^r_{m2}	$\cdots$	a^r_{mn}	0	b^r_m
z	$-c^r_1$	$-c^r_2$	$\cdots$	$-c^r_n$	1	$z-\text{Wert}$

Algorithmus zum Basistausch

Es sei das r-te Simplex-Tableau in kanonischer Form gegeben. Dann soll ein Pivotelement $a_{ij}^r \neq 0$ ausgewählt und das $(r+1)$-te Simplex-Tableau folgendermaßen berechnet werden (aus [5] S. 59):

1. Dividiere die Elemente der Pivotzeile durch das Pivotelement. D. h. berechne für $k = 1,...,n$

$$a_{ik}^{r+1} = \frac{a_{ik}^r}{a_{ij}^r}, \quad b_i^{r+1} = \frac{b_i^r}{a_{ij}^r} \quad !$$

2. Für alle übrigen Nebenbedingungen $l = 1,...,m$ $(l \neq i)$ führe für $k = 1,...,n$ die Rechnung

$$a_{lk}^{r+1} = a_{lk}^r - \frac{a_{lj}^r}{a_{ij}^r} \cdot a_{ik}, \quad b_l^{r+1} = b_l^r - \frac{a_{lj}^r}{a_{ij}^r} \cdot b_i^r$$

durch!

3. Für die Elemente $k = 1,...,n$ der Ergebniszeile rechne

$$-c_k^{r+1} = -c_k^r - \frac{-c_j^r}{a_{ij}^r} \cdot a_{ik}^r \quad !$$

4. Für den aktuellen Zielfunktionswert setze

$$z^{r+1} = z^r - \frac{-c_j^r}{a_{ij}^r} \cdot b_i^r \quad !$$

5. Setze $k_i^{r+1} = j$, d. h. die Variable x_j wird Basisvariable!

Das $(r+1)$-te Tableau hat dann wieder die kanonische Gestalt.

Bemerkung 5.6.1

Den Index i bezeichnet man als i-te Pivotzeile und den Index j als j-te Pivotspalte des Pivotelements $a_{ij}^r \neq 0$. Die jeweilige Pivotspalte wird durch Anwenden des obigen Algorithmus zum Einheitsvektor und ein anderer Einheitsvektor verschwindet dabei aus dem Tableau (Basistausch).

Mittels obigem Algorithmus kann also der Übergang zwischen benachbarten Basislösungen durchgeführt werden. Um nun sicherzustellen, dass man nach einem Basistausch eine zulässige Basislösung erhält und der Zielfunktionswert auch verbessert wird, muss man bei der Wahl der Pivotzeile bzw. der Pivotspalte, also bei der Wahl des Pivotelements nach jener Strategie vorgehen, die im folgenden Algorithmus angegeben wird.

Algorithmus (primaler Simplex-Algorithmus)

Es sei das r-te Simplex-Tableau primal zulässig und V_{NB}^r die Indexmenge der Nichtbasisvariablen bzw. V_B^r die Indexmenge der Basisvariablen mit $V_{NB}^r \cup V_B^r = \{1,...,n\}$. Ausgehend von diesem Tableau soll eine optimale Basislösung des linearen Optimierungsproblems gefunden werden (aus [5] S. 63).

1. Ist $-c_k^r \geq 0$ für alle $k = 1,...,n$

Dann: FERTIG (zugehörige Basislösung ist optimal).

Sonst: Bestimme ein Pivotelement!

a) Bestimme die Pivotspalte j durch die Bedingung

$$-c_j^r = \min\{-c_k^r : -c_k^r < 0 \wedge k \in V_{NB}^r\} \;!$$

b) Bestimme die Pivotzeile i durch die Bedingung

$$\frac{b_i^r}{a_{ij}^r} = \min\left\{ \frac{b_l^r}{a_{lj}^r} : a_{lj}^r, l = 1,...,m \right\} \;!$$

2. Ist $a_{lj}^r \leq 0$ für $l = 1,...,m$, dann ABBRUCH (keine optimale Lösung vorhanden).

3. Führe einen Basistausch mit dem Pivotelement a_{ij}^r durch und berechne das $(r+1)$-te Simplex-Tableau! Gehe zu Schritt 1 !

Beispiel 5.6.1

Man betrachte das lineare Optimierungsproblem in Beispiel 5.1.1 bzw. 5.3.1.

Maximiere den Gesamtgewinn

$$z = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 15 \cdot x_1 & + & 30 \cdot x_2 & + & x_3 & & & = & 450 \\ 25 \cdot x_1 & + & 20 \cdot x_2 & + & & & x_4 & = & 480 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0. \end{array}$$

Das Simplex-Tableau (Ausgangstableau) zu diesem linearen Optimierungsproblem sieht nun folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$\vec{b}$
x_3	15	30	1	0	0	450
x_4	25	20	0	1	0	480
z	−40	−60	0	0	1	0

Da das Ausgangstableau (erstes Simplex-Tableau) primal zulässig ist, lässt sich die zugehörige zulässige Basis- bzw. Ausgangslösung einfach bestimmen. Man setzt die Nichtbasisvariablen x_1 und x_2 gleich null. Dadurch erhält man: $x_3 = 450$ und $x_4 = 480$. Die zulässige Basislösung ist daher $\vec{x} = (0, 0, 450, 480)$ und der zugehörige Zielfunktionswert ist $z = 0$. Wegen der negativen Koeffizienten in der Ergebniszeile kann der Zielfunktionswert durch Verwendung des primalen Simplex-Algorithmus verbessert werden. Die Pivotspalte ist die zweite Spalte, da $-60 = \min\{-40, -60\}$ ist. Die Pivotzeile ist die erste Zeile, da $15 = \frac{450}{30} = \min\left\{\frac{450}{30}, \frac{480}{20}\right\}$ ist. Somit ist das Pivotelement $a_{12}^1 = 30$ (rote Markierung). Mittels des Algorithmus zum Basistausch führt man folgende Berechnungen durch:

- Für die Pivotzeile (erste Zeile):

$$a_{11}^2 = \frac{a_{11}^1}{a_{12}^1} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \quad a_{12}^2 = \frac{a_{12}^1}{a_{12}^1} = \frac{30}{30} = 1, \quad a_{13}^2 = \frac{a_{13}^1}{a_{12}^1} = \frac{1}{30}, \quad a_{14}^2 = \frac{a_{14}^1}{a_{12}^1} = \frac{0}{30} = 0,$$

$$b_1^2 = \frac{b_1^1}{a_{12}^1} = \frac{450}{30} = 15.$$

- Für die zweite Zeile:

$$a_{21}^2 = a_{21}^1 - \frac{a_{22}^1}{a_{12}^1} \cdot a_{11}^1 = 25 - \frac{20}{30} \cdot 15 = 15, \quad a_{21}^2 = a_{22}^1 - \frac{a_{22}^1}{a_{12}^1} \cdot a_{12}^1 = 20 - \frac{20}{30} \cdot 30 = 0,$$

$$a_{23}^2 = a_{23}^1 - \frac{a_{22}^1}{a_{12}^1} \cdot a_{13}^1 = 0 - \frac{20}{30} \cdot 1 = -\frac{2}{3}, \quad a_{24}^2 = a_{24}^1 - \frac{a_{22}^1}{a_{12}^1} \cdot a_{14}^1 = 1 - \frac{20}{30} \cdot 0 = 1,$$

$$b_2^2 = b_2^1 - \frac{a_{22}^1}{a_{12}^1} \cdot b_1^1 = 480 - \frac{20}{30} \cdot 450 = 180.$$

- Für die Ergebniszeile:

$$-c_1^2 = -c_1^1 - \frac{-c_2^1}{a_{12}^1} \cdot a_{11}^1 = -40 - \frac{-60}{30} \cdot 15 = -10,$$

$$-c_2^2 = -c_2^1 - \frac{-c_2^1}{a_{12}^1} \cdot a_{12}^1 = -60 - \frac{-60}{30} \cdot 30 = 0,$$

$$-c_3^2 = -c_3^1 - \frac{-c_2^1}{a_{12}^1} \cdot a_{13}^1 = 0 - \frac{-60}{30} \cdot 1 = 2,$$

$$-c_4^2 = -c_4^1 - \frac{-c_2^1}{a_{12}^1} \cdot a_{14}^1 = 0 - \frac{-60}{30} \cdot 0 = 0.$$

- Für den aktuellen Funktionswert:

$$z^2 = z^1 - \frac{-c_2^1}{a_{12}^1} \cdot b_1^1 = 0 - \frac{-60}{30} \cdot 450 = 900.$$

Dadurch erhält man das zweite Simplex-Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$\vec{b}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{30}$	0	0	15
x_4	$\boxed{15}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	180
z	-10	0	2	0	1	900

Die Nichtbasisvariablen x_1 und x_3 werden wieder null gesetzt. Man erhält dann für die Basisvariablen $x_2 = 15$ und $x_4 = 180$. Die zulässige Basislösung ist daher $\vec{x} = (0, 15, 0, 180)$ und der zugehörige Zielfunktionswert ist auf $z = 900$ gestiegen. Da noch immer ein negativer Koeffizient in der Ergebniszeile vorkommt, kann der Zielfunktionswert durch nochmaliges Anwenden des primalen Simplex-Algorithmus und des Algorithmus zum Basisaustausch verbessert werden. Die Pivotspalte ist die erste Spalte und die Pivotzeile ist die zweite Zeile, da $12 = \frac{180}{15} = \min\left\{\frac{15}{0{,}5}, \frac{180}{15}\right\}$ ist. Somit ist das Pivotelement jetzt $a_{21}^1 = 15$ (rote Markierung). Die einzelnen Berechnungen können analog zu vorher durchgeführt werden und man erhält das dritte Simplex-Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$\vec{b}$
x_2	0	1	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{30}$	0	9
x_1	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{1}{15}$	0	12
z	0	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	1020

Durch Nullsetzen der Nichtbasisvariablen x_3 und x_4 erhält man für die Basisvariablen folgende Werte: $x_1 = 12$ und $x_2 = 9$. Somit ist die zulässige Basislösung: $\vec{x} = (12, 9, 0, 0)$. Diese Lösung ist zugleich auch die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems, da in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten. D. h., dass der Zielfunktionswert nicht weiter verbessert werden kann $\Rightarrow z_{max} = 1020$. Der primale Simplex-Algorithmus bricht also an dieser Stelle ab.

Die einzelnen berechneten zulässigen Basislösungen bzw. der Verlauf des Simplex-Algorithmus können für dieses Beispiel folgendermaßen geometrisch interpretiert werden. Das erste Simplex-Tableau liefert die zulässige Basislösung $\vec{x} = (0, 0, 450, 480)$. Diese

Lösung entspricht der Ecke $(0,0)$ des Zulässigkeitsbereichs L. Durch das zweite Simplex-Tableau erhält man die zulässige Basislösung $\vec{x} = (0,15,0,180)$, welche der Ecke $(0,15)$ des Zulässigkeitsbereichs L entspricht. Das dritte Simplex-Tableau ergibt schließlich die zulässige und zudem optimale Basislösung $\overrightarrow{x_{max}} = (12,9,0,0)$. Der optimalen Lösung entspricht der Eckpunkt $(12,9)$ des Zulässigkeitsbereichs L. Das bedeutet also, dass der Algorithmus in der Ecke $(0,0)$ startet und über die Ecke $(0,15)$ zur optimalen Ecke $(12,9)$ läuft.

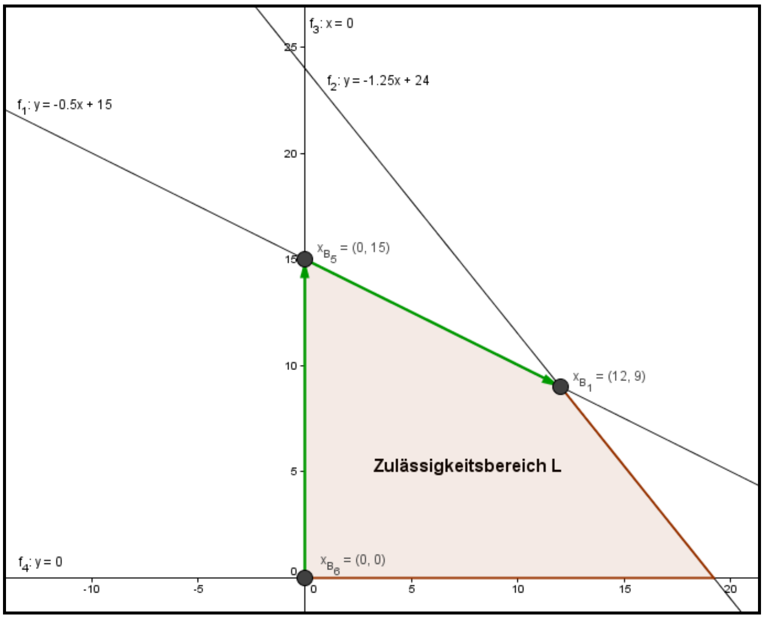


Abbildung 5.6.2: Graphische Darstellung der Lösungsschritte des Simplex-Algorithmus

<u>Analyse des Simplex-Algorithmus am Beispiel 5.6.1</u>:

Das erste Simplex-Tableau stellt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcccl} 15 \cdot x_1 & + & 30 \cdot x_2 & + & x_3 & & = 450 \\ 25 \cdot x_1 & + & 20 \cdot x_2 & + & & x_4 & = 480 \\ -40 \cdot x_1 & - & 60 \cdot x_2 & + & & z & = 0 \end{array}$$

mit der zulässigen Basislösung $\vec{x} = (0,0,450,480)$ und dem aktuellen Zielfunktionswert $z = 0$ dar. Nach Isolierung der Basisvariablen, erhält man:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 450 & - & 15 \cdot x_1 & - & 30 \cdot x_2 \\ x_4 & = & 480 & - & 25 \cdot x_1 & - & 20 \cdot x_2 \\ z & = & & & 40 \cdot x_1 & + & 60 \cdot x_2 . \end{array}$$

Nun soll ein Basistausch durchgeführt werden. Dabei wählt man als neue Basisvariable eine bisherige Nichtbasisvariable, die möglichst groß werden soll. Die größte Verbesserung von z ergibt die Nichtbasisvariable x_2, da der Wert der Zielfunktion um 60 Euro steigt, wenn x_2 um eine Einheit erhöht wird. Hingegen würde eine Erhöhung um eine Einheit der

Nichtbasisvariable x_1 nur eine Steigerung des Zielfunktionswertes um 40 Euro bewirken. Daher wird x_2 eine neue Basisvariable und x_1 bleibt eine Nichtbasisvariable mit dem Wert null. x_2 kann aber maximal $\frac{450}{30} = 15$ werden, ohne dass eine der Variablen x_3 bzw. x_4 negativ wird. Man erhält demnach: $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 450 - 15 \cdot 0 - 30 \cdot 15 = 0$, $x_4 = 480 - 25 \cdot 0 - 20 \cdot 15 = 180$, also die zulässige Basislösung $\vec{x} = (0, 15, 0, 180)$ und $z = 40 \cdot 0 + 60 \cdot 15 = 900$. Da $x_3 = 0$ ist, wird x_3 eine Nichtbasisvariable, d. h. x_3 verlässt für x_2 die Basis (Basistausch). Durch Auflösen der linearen Gleichung $x_3 = 450 - 15 \cdot x_1 - 30 \cdot x_2$ nach x_2 $(x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{x_3}{30} + 15)$ und anschließendes Substituieren in allen übrigen linearen Gleichungen erhält man ein neues lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccccc}
\frac{1}{2} \cdot x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{30} \cdot x_3 & & & = & 15 \\
15 \cdot x_1 & & & - & \frac{2}{3} \cdot x_3 & + & x_4 & = & 180 \\
-10 \cdot x_1 & & & + & 2 \cdot x_3 & + & z & = & 900,
\end{array}$$

welches durch das zweite Simplex-Tableau dargestellt wird. Anschließend werden wieder die Basisvariablen isoliert und dies ergibt:

$$\begin{array}{rcccccc}
x_2 & = & 15 & - & \frac{1}{2} \cdot x_1 & - & \frac{1}{30} \cdot x_3 \\
x_4 & = & 180 & - & 15 \cdot x_1 & + & \frac{2}{3} \cdot x_3 \\
z & = & 900 & + & 10 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_3 .
\end{array}$$

Da der Zielfunktionswert um 10 Euro steigt, wenn x_1 um eine Einheit erhöht wird, wird x_1 eine neue Basisvariable mit maximalem Wert $\frac{180}{15} = 12$ (ohne dass eine andere Variable negativ wird). Dagegen verringert sich der Zielfunktionswert um 2 Euro, wenn x_3 um eine Einheit erhöht wird. Daher bleibt x_3 eine Nichtbasisvariable mit dem Wert null. Dadurch erhält man: $x_1 = 12$, $x_2 = 15 - \frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{1}{30} \cdot 0 = 9$, $x_3 = 0$, $x_4 = 180 - 15 \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$, also die zulässige Basislösung $\vec{x} = (12, 9, 0, 0)$ und $z = 900 + 10 \cdot 12 - 2 \cdot 0 = 1020$. Da $x_4 = 0$ ist, wird x_4 eine Nichtbasisvariable, d. h. x_4 verlässt für x_1 die Basis (Basistausch). Durch Auflösen der linearen Gleichung $x_4 = 180 - 15 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_3$ nach x_1

($x_1 = \frac{2}{45} \cdot x_3 - \frac{1}{15} \cdot x_4 + 12$) und anschließendes Substituieren in allen übrigen linearen Gleichungen erhält man ein neues lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccccc} & & x_2 & + & \frac{1}{18} \cdot x_3 & - & \frac{1}{30} \cdot x_4 & & = & 9 \\ x_1 & & & - & \frac{2}{45} \cdot x_3 & + & \frac{1}{15} \cdot x_4 & & = & 12 \\ & & & & \frac{14}{9} \cdot x_3 & + & \frac{2}{3} \cdot x_4 & + \; z & = & 1020, \end{array}$$

welches dem dritten Simplex-Tableau entspricht. Werden die Basisvariablen abermals isoliert, so erhält man

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 12 & + & \frac{2}{45} \cdot x_3 & - & \frac{1}{15} \cdot x_4 \\ x_2 & = & 9 & - & \frac{1}{18} \cdot x_3 & + & \frac{1}{30} \cdot x_4 \\ z & = & 1020 & - & \frac{14}{9} \cdot x_3 & - & \frac{2}{3} \cdot x_4 . \end{array}$$

Eine Vergrößerung der Nichtbasisvariablen x_3 und x_4 würde nun eine Verringerung des Zielfunktionswerts z mit sich bringen. Daher ist die letzte zulässige Basislösung $\vec{x} = (12, 9, 0, 0)$ auch die optimale Lösung der Problemstellung und die beiden Maschinen M_1 und M_2 sind, wie bereits bekannt ist, voll ausgelastet.

5.6.1 Lösen von linearen Optimierungsproblemen mithilfe des Simplex-Tools in Microsoft Excel

Blickt man noch einmal auf Beispiel 5.6.1 zurück, so kann man erkennen, dass sich der Rechenaufwand bei der Lösungsbestimmung von linearen Optimierungsproblemen durch die Verwendung des Simplex-Algorithmus deutlich reduziert hat. Trotzdem müssen aber bei den Berechnungen der Koeffizienten der einzelnen Simplex-Tableaus mühsame Rechenoperationen (Pivotoperationen) durchgeführt werden. Daher wird im Folgenden das Tool *Simplex* vorgestellt, das sich in Microsoft Excel als Add-In einbinden lässt und mit dem Simplex-Tableaus definiert werden können. Das Tool ist unter [19] erhältlich.
Nachdem die Microsoft Excel – Datei heruntergeladen wurde, kann diese durch einen Doppelklick mit der linken Maustaste gestartet werden. Anschließend öffnet sich in Microsoft Excel ein neues Arbeitsblatt und ein neuer zusätzlicher Eintrag (*Simplex*) wird in der Menüleiste bereitgestellt.

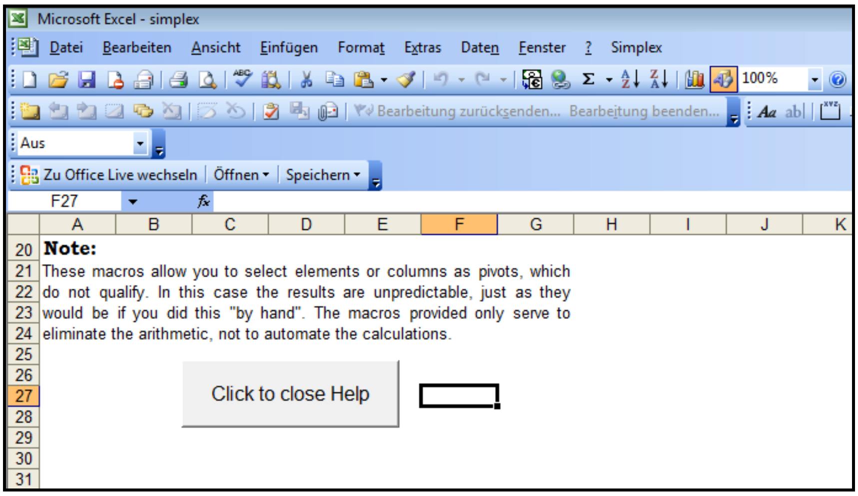


Abbildung 5.6.1.1: Simplex-Tool in Microsoft Excel

Mit einem Klick auf den Button *Click to Close Help* gelangt man in ein neues Arbeitsblatt, in dem dann Simplex-Tableaus definiert werden können.

Ein Simplex-Tableau muss dabei in folgender Form eingegeben werden:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c|c}
\text{BV} & x_1 & \cdots & x_{n-m} & x_{n-m+1} & \cdots & x_n & z & \vec{b} \\
\hline
x_{n-m+1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-m} & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n-m} & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\
\hline
z & -c_1 & \cdots & -c_{n-m} & 0 & \cdots & 0 & 1 & z-\text{Wert}
\end{array}
$$

<u>Beispiel 5.6.1.1</u>

(Lösung von Beispiel 5.1.1 bzw. 5.3.1 mithilfe des Simplex-Tools)

Zunächst müssen die Koeffizienten des Simplex-Tableaus in obiger Form in die Zellen des Datenblatts eingegeben werden. Danach wird jener Bereich, der die Koeffizienten enthält, markiert und über die Menüfolge *Simplex* ⇒ *SetTableau* als Ausgangstableau definiert.

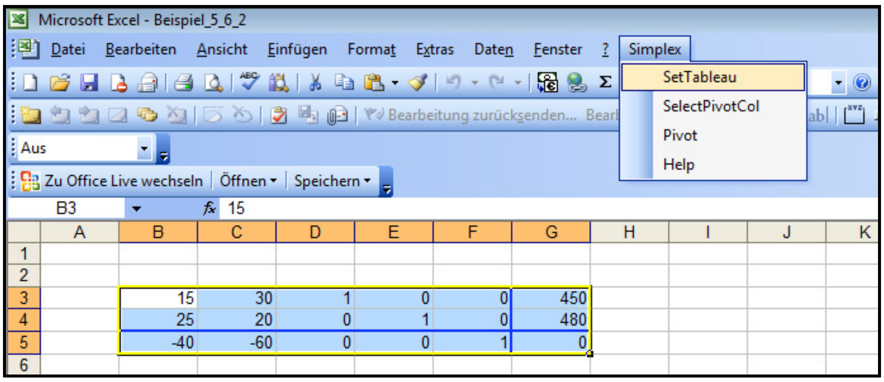


Abbildung 5.6.1.2: Definition des Simplex-Tableaus

Dabei wird das Tableau leider nicht automatisch beschriftet. Um eine übersichtliche und nachvollziehbare Darstellung des Simplex-Tableaus zu erhalten, muss die Beschriftung daher manuell durchgeführt werden.

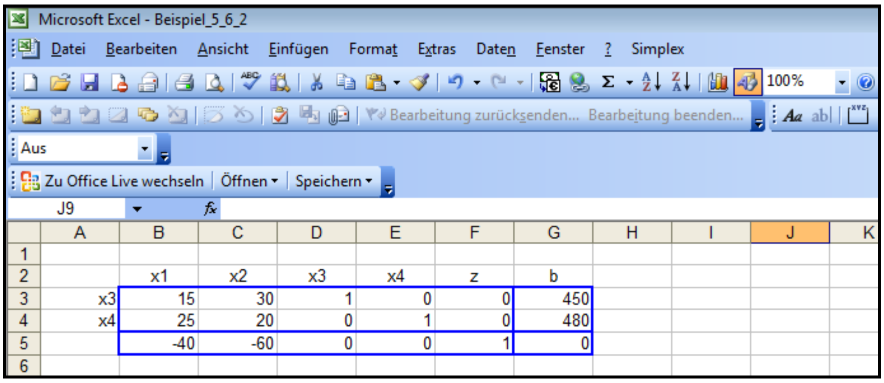


Abbildung 5.6.1.3: Beschriftung des Simplex-Tableaus

Wie bereits aus Beispiel 5.6.1 bekannt ist, kann der Zielfunktionswert (Zelle G5) wegen der negativen Koeffizienten in der Ergebniszeile (Zelle B5 und C5) durch Anwendung des primalen Simplex-Algorithmus verbessert werden. Gemäß des Algorithmus wird dann die Pivotspalte bestimmt ($-60 = \min\{-40, -60\}$). Durch Markierung der entsprechenden Spalte des Simplex-Tableaus und anschließender Aktivierung der Menüfolge *Simplex* ⇒ *SelectPivotCol* wird die Pivotspalte in Microsoft Excel ausgewählt. Dabei wird am rechten Ende des Tableaus eine Spalte hinzugefügt. Diese enthält die Quotienten (Zelle H3 und H4) für die Bestimmung der Pivotzeile ($15 = \min\{15, 24\}$).

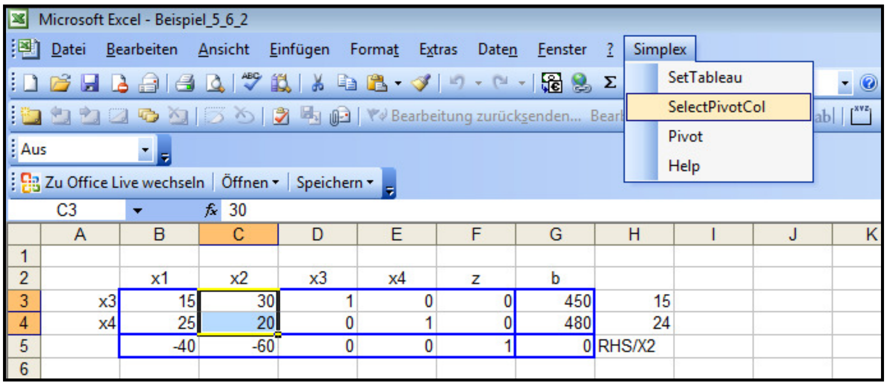


Abbildung 5.6.1.4: Auswahl der Pivotspalte

Die Pivotzeile ist also die erste Zeile und daher ist das Element in der ersten Zeile und zweiten Spalte des Simplex-Tableaus das Pivotelement (Zelle C3). Durch Markierung der Zelle C3 und der Auswahl von *Simplex* ⇒ *Pivot* erfolgt die Definition des Pivotelements (roter Rahmen).

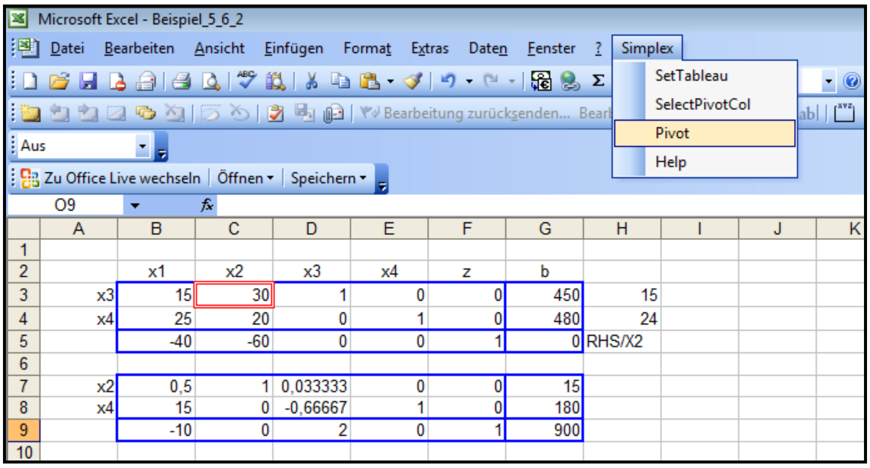


Abbildung 5.6.1.5: Auswahl des Pivotelements und Basistausch

Dadurch erhält man ein zweites Simplex-Tableau, welches zum zweiten Simplex-Tableau in Beispiel 5.6.1 äquivalent ist. Bei der Beschriftung des zweiten Tableaus ist zu beachten, dass ein Basistausch durchgeführt wurde, d. h. x_3 für x_2 die Basis verlassen hat. Daher muss die Spalte der Basisvariablen (links neben dem zweiten Simplex-Tableau) entsprechend angepasst werden. Da noch immer ein negativer Koeffizient in der Ergebniszeile (Zelle B9) vorkommt, kann der Zielfunktionswert (Zelle G9) durch nochmaliges Verwenden des primalen Simplex-Algorithmus verbessert werden. D. h., dass mit der Menüfolge *Simplex* ⇒ *SelectPivotCol* zunächst die Pivotspalte, durch die anschließende Betrachtung der Quotienten die Pivotzeile und schließlich mit der Menüfolge *Simplex* ⇒ *Pivot* das Pivotelement ausgewählt wird. Dies ergibt dann ein drittes Simplex-Tableau, welches äquivalent zum dritten Simplex-Tableau in Beispiel 5.6.1 ist.

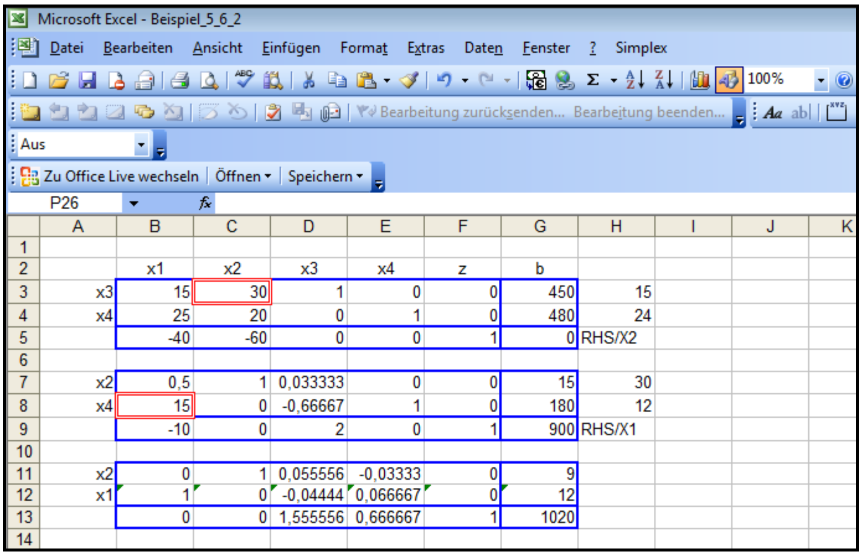


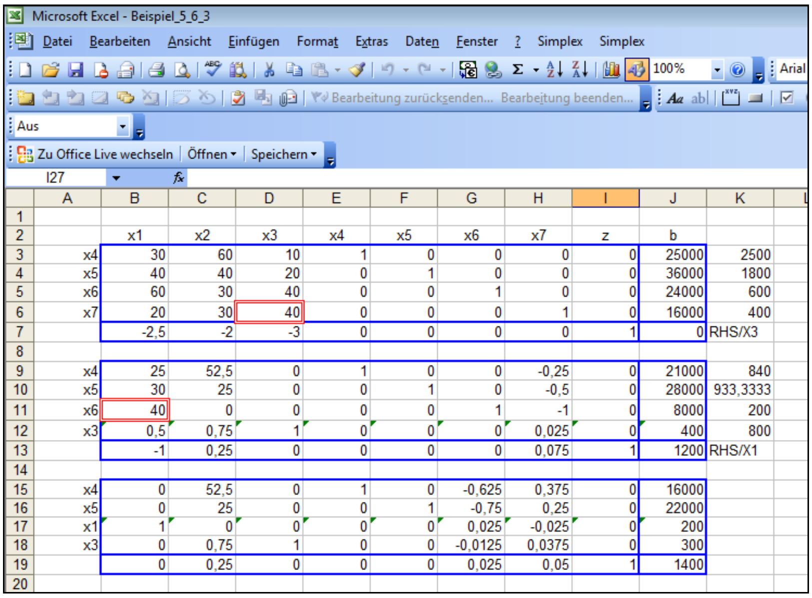
Abbildung 5.6.1.6: Drittes Simplex-Tableau – Endergebnis

Aufgrund der Tatsache, dass in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten, kann der Zielfunktionswert (Zelle G13) nicht weiter verbessert werden. Daher hat man die optimale Lösung der Problemstellung gefunden: $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 9$, d. h.

$\overrightarrow{x_{max}} = (12, 9, 0, 0)$ und $z_{max} = 1020$.

Beispiel 5.6.1.2

In diesem Beispiel wird die Lösung des linearen Optimierungsproblems in Beispiel 1.1 durch Verwendung des Simplex-Tools in Microsoft Excel bestimmt. Dabei wird analog zu Beispiel 5.6.1.1 vorgegangen.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z	b	
3	x4	30	60	10	1	0	0	0	0	25000	2500
4	x5	40	40	20	0	1	0	0	0	36000	1800
5	x6	60	30	40	0	0	1	0	0	24000	600
6	x7	20	30	40	0	0	0	1	0	16000	400
7		-2,5	-2	-3	0	0	0	0	1	0	RHS/X3
8											
9	x4	25	52,5	0	1	0	0	-0,25	0	21000	840
10	x5	30	25	0	0	1	0	-0,5	0	28000	933,3333
11	x6	40	0	0	0	0	1	-1	0	8000	200
12	x3	0,5	0,75	1	0	0	0	0,025	0	400	800
13		-1	0,25	0	0	0	0	0,075	1	1200	RHS/X1
14											
15	x4	0	52,5	0	1	0	-0,625	0,375	0	16000	
16	x5	0	25	0	0	1	-0,75	0,25	0	22000	
17	x1	1	0	0	0	0	0,025	-0,025	0	200	
18	x3	0	0,75	1	0	0	-0,0125	0,0375	0	300	
19		0	0,25	0	0	0	0,025	0,05	1	1400	
20											

Abbildung 5.6.1.7: Lösen von Beispiel 1.1 mithilfe des Simplex-Tools

Da im dritten Simplex-Tableau in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten, lässt sich der Zielfunktionswert nicht weiter verbessern und man erhält durch Nullsetzen der Nichtbasisvariablen x_2, x_6 und x_7 die Werte der Basisvariablen: $x_1 = 200$, $x_3 = 300$, $x_4 = 16000$ und $x_5 = 22000 \Rightarrow \overrightarrow{x_{max}} = (200, 0, 300, 16000, 22000, 0, 0)$.

Um den maximalen Gewinn von 1400 Euro (Zelle J19) zu erzielen, müssen 200 Stück von der Sorte W_1, 0 Stück von der Sorte W_2 und 300 Stück von der Sorte W_3 hergestellt werden.

Da die Schlupfvariablen x_4 und x_5 im letzten Simplex-Tableau Basisvariablen sind, werden die Nebenbedingungen, in denen diese Schlupfvariablen vorkommen, nicht ausgeschöpft. Die Werte von x_4 und x_5 beschreiben dabei die nicht ausgenutzten Kapazitäten der Nebenbedingung. D. h. von der Leber sind noch 16000 g = 16 kg und vom Speck sind noch 22000 g = 22 kg übrig.

Bislang wurden mit dem Simplex-Algorithmus nur Maximumprobleme gelöst. Daher wird im Folgenden thematisiert, wie damit auch Minimumprobleme bearbeitet werden können.

Dazu betrachtet man das lineare Optimierungsproblem in Beispiel 1.2 bzw. 5.3.3:

Maximiere die „negativen Gesamtkosten“

$$Z = -z = -F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -5 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -5 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^5$$

$$\begin{array}{rcrcccccl}
0{,}2 \cdot x_1 & + & 0{,}1 \cdot x_2 & - & x_3 & & & = & 6 \\
0{,}2 \cdot x_1 & + & 0{,}4 \cdot x_2 & - & & x_4 & & = & 12 \\
& & 0{,}4 \cdot x_2 & - & & & x_5 & = & 4 \\
& & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

Um den primalen Simplex-Algorithmus verwenden zu können, muss das Simplex-Tableau eines linearen Optimierungsproblems primal zulässig sein. Das Simplex-Tableau dieser Problemstellung lautet:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\vec{b}$
x_3	0,2	0,1	-1	0	0	0	6
x_4	0,2	0,4	0	-1	0	0	12
x_5	0	0,4	0	0	-1	0	4
z	5	6	0	0	0	1	0

Da die Koeffizienten der Schlupfvariablen positiv sein müssen, muss man die einzelnen Gleichungen, bei denen die Schlupfvariablen einen negativen Koeffizienten besitzen, mit -1 multiplizieren:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\vec{b}$
x_3	$-0{,}2$	$-0{,}1$	1	0	0	0	-6
x_4	$-0{,}2$	$-0{,}4$	0	1	0	0	-12
x_5	0	$-0{,}4$	0	0	1	0	-4
z	5	6	0	0	0	1	0

Dadurch erhält man aber kein primal zulässiges Simplex-Tableau, da nicht alle Koeffizienten $b_i \geq 0$ sind. Das bedeutet, dass der primale Simplex-Algorithmus nicht anwendbar ist. Zudem ist die zugehörige Basislösung $\vec{x} = (0, 0, -6, -12, -4)$ keine zulässige Basis- bzw. Ausgangslösung, da $x_3, x_4, x_5 < 0$ ist. Das bedeutet also, dass dadurch der Koordinatenursprung als Ecklösung ausgeschlossen wird. Es müssen daher auf das obige Simplex-Tableau Transformationen angewendet werden, sodass die zugehörige Basislösung des neuen (transformierten) Tableaus eine zulässige Ausgangslösung ist (also ein primal zulässiges Simplex-Tableau vorliegt).

Algorithmus zur Transformation des r-ten Simplex-Tableaus mit nicht zulässiger Basis- bzw. Ausgangslösung in ein primal zulässiges Simplex-Tableau mit zulässiger Basislösung (vgl. [20]):

1. Ist $b_k^r \geq 0$ für alle $k = 1,\ldots,n$

   Dann: Übergang zum primalen Simplex-Algorithmus.

   Sonst: Bestimme die Pivotzeile i, durch Auswählen einer beliebigen Zeile i mit Koeffizienten $b_i^r < 0$!

2. Bestimme die Pivotspalte j, durch Auswählen einer beliebigen Spalte j mit Koeffizienten $a_{ij}^r < 0$!

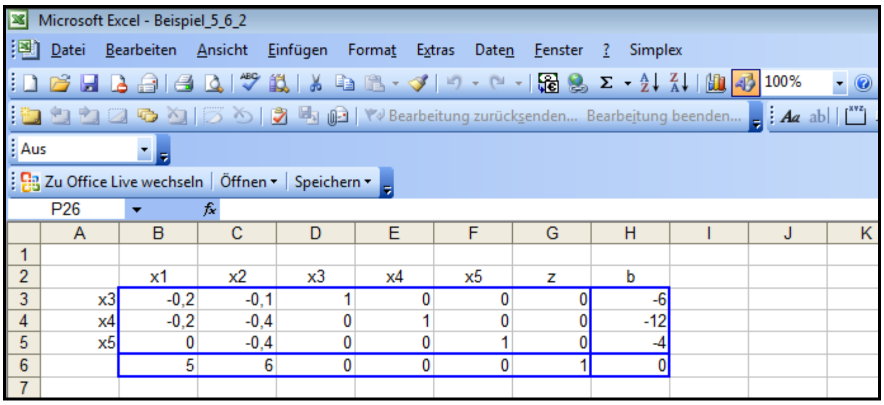
3. Existiert kein $a_{ij}^r < 0$, dann ABBRUCH (keine zulässige Lösung).

4. Führe einen Basiswechsel mit dem Pivotelement a_{ij}^r durch und berechne das $(r+1)$-te Simplex-Tableau. Gehe zu Schritt 1 !

Bemerkung 5.6.1.1

Hat man also ein Simplex-Tableau mit zulässiger Basislösung gefunden, so ist das Tableau auch primal zulässig. Es kann dann der primale Simplex-Algorithmus zur Lösungsbestimmung verwendet werden.

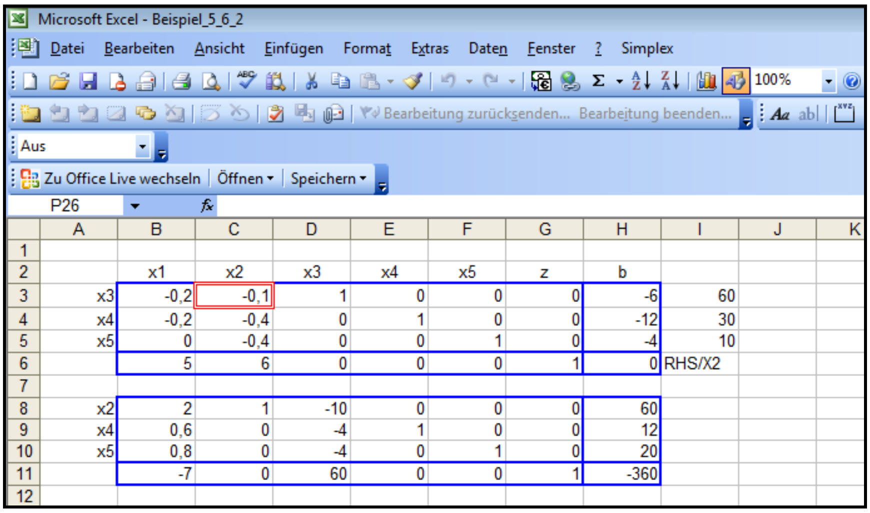
Die obige Problemstellung lässt sich nun mithilfe des eben beschriebenen Transformations-Algorithmus und des Simplex-Algorithmus lösen. Dazu wird wie in Beispiel 5.6.1.1 das Simplex-Tool in Microsoft Excel verwendet. Nach der Eingabe des Simplex-Tableaus stehen nach dem obigen Algorithmus fünf Pivotelemente zur Auswahl, da alle Werte in den Zellen H3, H4 und H5 negativ und auch alle Werte in den Zellen B3, C3, B4, C4 und C5 kleiner als null sind.


Microsoft Excel - Beispiel_5_6_2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		x1	x2	x3	x4	x5	z	b
3	x3	-0,2	-0,1	1	0	0	0	-6
4	x4	-0,2	-0,4	0	1	0	0	-12
5	x5	0	-0,4	0	0	1	0	-4
6		5	6	0	0	0	1	0

Abbildung 5.6.1.8: Auswahl des Pivotelements

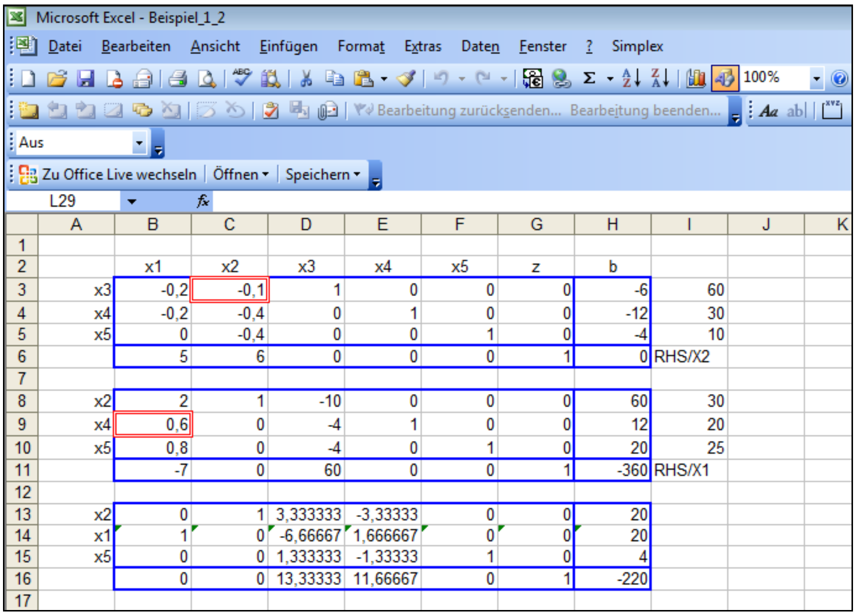
Nach der Auswahl der Zelle C3 als Pivotelement erhält man das folgende Simplex-Tableau. Natürlich hätte man auch eine andere Zelle von den fünf in Frage kommenden Zellen als Pivotelement auswählen können.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		x1	x2	x3	x4	x5	z	b			
3	x3	-0,2	-0,1	1	0	0	0	-6	60		
4	x4	-0,2	-0,4	0	1	0	0	-12	30		
5	x5	0	-0,4	0	0	1	0	-4	10		
6		5	6	0	0	0	1	0	RHS/X2		
7											
8	x2	2	1	-10	0	0	0	60			
9	x4	0,6	0	-4	1	0	0	12			
10	x5	0,8	0	-4	0	1	0	20			
11		-7	0	60	0	0	1	-360			
12											

Abbildung 5.6.1.9: Zweites Simplex-Tableau

Das zweite Simplex-Tableau ist primal zulässig und die zugehörige zulässige Basislösung ist $\vec{x} = (0\,,60\,,0\,,12\,,20)$. Daher kann nun der primale Simplex-Algorithmus für die Bestimmung der optimalen Lösung verwendet werden (wie in Beispiel 5.6.1 bzw. 5.6.1.1).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		x1	x2	x3	x4	x5	z	b			
3	x3	-0,2	-0,1	1	0	0	0	-6	60		
4	x4	-0,2	-0,4	0	1	0	0	-12	30		
5	x5	0	-0,4	0	0	1	0	-4	10		
6		5	6	0	0	0	1	0	RHS/X2		
7											
8	x2	2	1	-10	0	0	0	60	30		
9	x4	0,6	0	-4	1	0	0	12	20		
10	x5	0,8	0	-4	0	1	0	20	25		
11		-7	0	60	0	0	1	-360	RHS/X1		
12											
13	x2	0	1	3,333333	-3,33333	0	0	20			
14	x1	1	0	-6,66667	1,666667	0	0	20			
15	x5	0	0	1,333333	-1,33333	1	0	4			
16		0	0	13,33333	11,66667	0	1	-220			
17											

Abbildung 5.6.1.10: Drittes Simplex-Tableau

Beim dritten Simplex-Tableau bricht der primale Simplex-Algorithmus ab, da in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr vorkommen und daher der Zielfunktionswert nicht weiter verbessert werden kann.

Die Nichtbasisvariablen x_3 und x_4 werden dann wieder null gesetzt und für die Basisvariablen erhält man: $x_1 = 20$, $x_2 = 20$ und $x_5 = 4 \Rightarrow \overrightarrow{x_{max}} = (20\,,20\,,0\,,0\,,4)$. Es ist nun $Z_{max} = -z_{max} = -220$ (Zelle H16), d. h. $z_{min} = 220$ und $\overrightarrow{x_{min}} = (20, 20, 0, 0, 4)$. Weiters kann man erkennen, dass im dritten und letzten Simplex-Tableau die Schlupfvariable x_5 eine Basisvariable ist. Das bedeutet, dass die Nebenbedingung, in der die Schlupfvariable x_5 vorkommt, nicht ausgeschöpft wird.

Beispiel 5.6.1.3

In Beispiel 5.2.3 wurde die Problemstellung aus Beispiel 1.3 auf ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Strukturvariablen zurückgeführt und graphisch gelöst. In diesem Beispiel wird nun das lineare Optimierungsproblem mit drei Strukturvariablen (also ohne Zurückführen auf zwei Strukturvariablen) durch Verwendung des Transformations-Algorithmus und des primalen Simplex-Algorithmus gelöst. Zunächst muss das lineare Optimierungsproblem in Normalform übergeführt werden:

Maximiere die „negativen Kosten"

$$\begin{aligned} Z = -z = -F(x_1, x_2, x_3) &= 10 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 = \\ &= 10 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^8$$

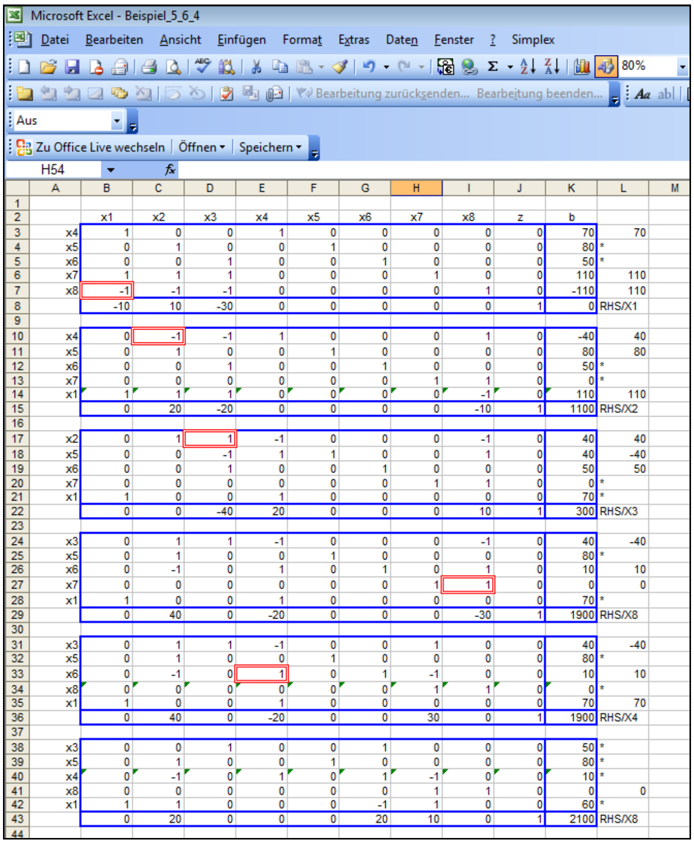
$$\begin{array}{cccccccccccccc} x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & & = & 70 \\ & & x_2 & & & + & & x_5 & & & & & = & 80 \\ & & & & x_3 & + & & & x_6 & & & & = & 50 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & & & & x_7 & & & = & 110 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & & & & & x_8 & & = & 110 \\ & & & & & & \multicolumn{6}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} & \geq & 0. \end{array}$$

Die in Beispiel 1.3 unter den Nebenbedingungen auftretende lineare Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ wurde vor der Überführung in Normalform durch zwei lineare Ungleichungen $x_1 + x_2 + x_3 \leq 110$ und $x_1 + x_2 + x_3 \geq 110$ (siehe Bemerkung 5.3.2) ersetzt. Anschließend wurden alle linearen Ungleichungen durch Einführung von Schlupfvariablen in lineare Gleichungen übergeführt.

Das Simplex-Tableau dieser Problemstellung ist nach Multiplikation der letzten Gleichung mit -1 (da der Koeffizient der Schlupfvariablen x_8 negativ ist) gegeben durch:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	b
x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	70
x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80
x_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	50
x_7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	110
x_8	1	1	1	0	0	0	0	1	0	-110
z	-10	10	-30	0	0	0	0	0	1	0

Das Simplex-Tableau ist nicht primal zulässig (da $b_5 < 0$ ist) und die zugehörige Basislösung $\vec{x} = (0, 0, 0, 70, 80, 50, 110, -110)$ keine zulässige Basis- bzw. Ausgangslösung (da $x_8 < 0$ ist). Daher muss das Simplex-Tableau durch Verwendung des obigen Transformations-Algorithmus in ein primal zulässiges Simplex-Tableau transformiert werden, das eine zulässige Basis- bzw. Ausgangslösung besitzt. Anschließend kann wie bei dem Minimumproblem in Beispiel 1.2 der primale Simplex-Algorithmus für die Lösungsbestimmung herangezogen werden.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z	b	
3	x4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	70	70
4	x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80	*
5	x6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	50	*
6	x7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	110	110
7	x8	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	-110	110
8		-10	10	-30	0	0	0	0	0	1	0	RHS/X1
9												
10	x4	0	-1	-1	1	0	0	0	1	0	-40	40
11	x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80	80
12	x6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	50	*
13	x7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	*
14	x1	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	110	110
15		0	20	-20	0	0	0	0	-10	1	1100	RHS/X2
16												
17	x2	0	1	1	-1	0	0	0	-1	0	40	40
18	x5	0	0	-1	1	1	0	0	1	0	40	-40
19	x6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	50	50
20	x7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	*
21	x1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	70	*
22		0	0	-40	20	0	0	0	10	1	300	RHS/X3
23												
24	x3	0	1	1	-1	0	0	0	-1	0	40	-40
25	x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80	*
26	x6	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	10	10
27	x7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
28	x1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	70	*
29		0	40	0	-20	0	0	0	-30	1	1900	RHS/X8
30												
31	x3	0	1	1	-1	0	0	1	0	0	40	-40
32	x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80	*
33	x6	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	10	10
34	x8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	*
35	x1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	70	70
36		0	40	0	-20	0	0	30	0	1	1900	RHS/X4
37												
38	x3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	50	*
39	x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	80	*
40	x4	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	10	*
41	x8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
42	x1	1	1	0	0	0	-1	1	0	0	60	*
43		0	20	0	0	0	20	10	0	1	2100	RHS/X8
44												

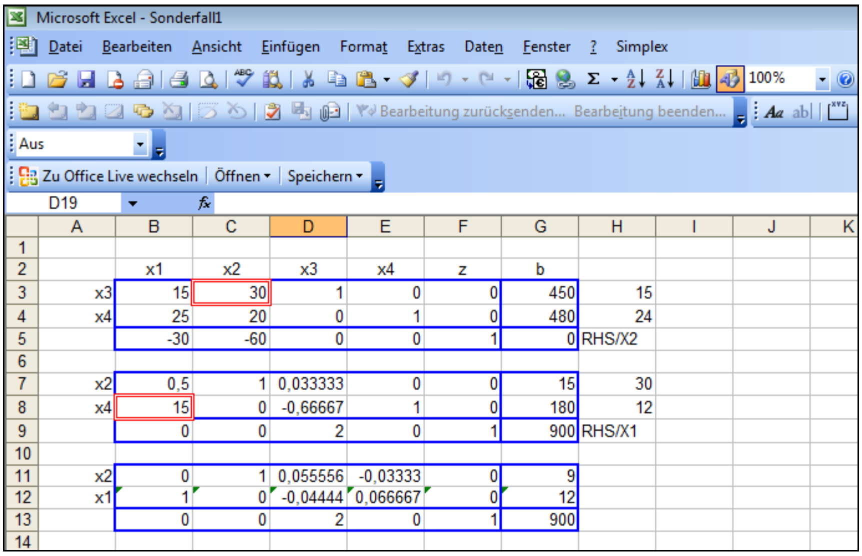
Abbildung 5.6.1.11: Lösen von Beispiel 1.3 mithilfe des Simplex-Tools

Die optimale Lösung $\overrightarrow{x_{max}} = (60, 0, 50, 10, 80, 0, 0, 0)$ lässt sich wieder aus dem letzten Simplex-Tableau ablesen. Für die minimalen Kosten z_{min} gilt: $Z_{max} = -z_{max} = 2100$ (Zelle K43), d. h. $z_{min} = -2100 + 8100 = 6000$ und $\overrightarrow{x_{min}} = (60, 0, 50, 10, 80, 0, 0, 0)$. Da der Summand 8100 beim Lösungsverfahren weggelassen wurde, muss dieser bei der Berechnung des optimalen Zielfunktionswerts berücksichtigt werden. Weiters treten im letzen Simplex-Tableau die Schlupfvariablen x_4 und x_5 als Basisvariablen mit den Werten $x_4 = 10$ und $x_5 = 80$ auf. Das bedeutet, dass die Nebenbedingungen, in denen diese Schlupfvariablen vorkommen, nicht ausgeschöpft sind. Die Schlupfvariable x_8 ist zwar auch eine Basisvariable, sie hat aber den Wert 0 (es liegt also eine degenerierte Basislösung vor, siehe Sonderfall 3 in Abschnitt 5.6.2). Daher sind in der betreffenden Nebenbedingung keine freien Kapazitäten vorhanden.

5.6.2 Sonderfälle beim Simplex-Algorithmus

In Abschnitt 5.2 – bei der graphischen Lösung von linearen Optimierungsproblemen – wurden bereits die verschiedenen möglichen Sonderfälle für lineare Optimierungsprobleme mit zwei Strukturvariablen graphisch betrachtet. Bei linearen Optimierungsproblemen mit mehr als zwei Strukturvariablen, für die normalerweise keine graphische Lösung der Problemstellung mehr möglich ist, ist es daher nicht mehr so einfach, das Eintreten eines solchen Sonderfalls zu erkennen. Es gibt aber auch bei der Verwendung des Simplex-Algorithmus gewisse „Erkennungsmerkmale“ für die verschiedenen Sonderfälle im Simplex-Tableau:

- Sonderfall 1 (mehrdeutige Lösung)
  (Lösen von Sonderfall 1 in Abschnitt 5.2 mithilfe des Simplex-Algorithmus)
  Das Vorliegen dieses Sonderfalls kann man im Simplex-Tableau dadurch erkennen, dass der Zielfunktionskoeffizient einer Nichtbasisvariablen den Wert Null besitzt. Das bedeutet, dass man eine Basisvariable gegen die Nichtbasisvariable mit dem Wert Null austauschen kann, ohne dass sich der Zielfunktionswert ändert. Dadurch erhält man weitere optimale Basislösungen (vgl. [5] S. 73).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		x1	x2	x3	x4	z	b	
3	x3	15	30	1	0	0	450	15
4	x4	25	20	0	1	0	480	24
5		-30	-60	0	0	1	0	RHS/X2
6								
7	x2	0,5	1	0,033333	0	0	15	30
8	x4	15	0	-0,66667	1	0	180	12
9		0	0	2	0	1	900	RHS/X1
10								
11	x2	0	1	0,055556	-0,03333	0	9	
12	x1	1	0	-0,04444	0,066667	0	12	
13		0	0	2	0	1	900	
14								

Abbildung 5.6.2.1: Sonderfall 1 im Simplex-Tableau

Im zweiten Simplex-Tableau treten in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auf. Daher kann der Zielfunktionswert nicht weiter verbessert werden $\Rightarrow$ $z_{max} = 900$ (Zelle G9) und $\overrightarrow{x_{max}} = (0\,,15\,,0\,,180)$.

Da aber bei dieser Problemstellung im zweiten Simplex-Tableau in der Ergebniszeile die Nichtbasisvariable $x_1 = 0$ ist, kann ein weiterer Basistausch durchgeführt werden, ohne dass sich der Zielfunktionswert ändert. Dadurch erhält man das dritte Simplex-Tableau und eine weitere optimale Basislösung: $\overrightarrow{x_{max}} = (12\,,9\,,0\,,0)$ und $z_{max} = 900$ (Zelle G13).

Aus diesen zwei optimalen Basislösungen lassen sich dann weitere optimale Basislösungen berechnen, indem man die beiden Lösungen als Linearkombination mit der Koeffizientensumme 1 schreibt:

$$\overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_n} \\ x_{2_n} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_n} \\ x_{2_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 - 12 \cdot t \\ 9 - 9 \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \cdot t \\ 9 + 6 \cdot t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0\,,1]$$

Durch Einsetzen geeigneter Werte für t ergeben sich dann ganzzahlige Lösungen (vgl. mit Sonderfall 2 in Abschnitt 5.2):

$$t = \frac{0}{6} = 0: \ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_1} \\ x_{2_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{6}{6} = 1: \ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ x_{2_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$t = \frac{1}{6}: \ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_3} \\ x_{2_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{2}{6}: \ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_4} \\ x_{2_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix},$$

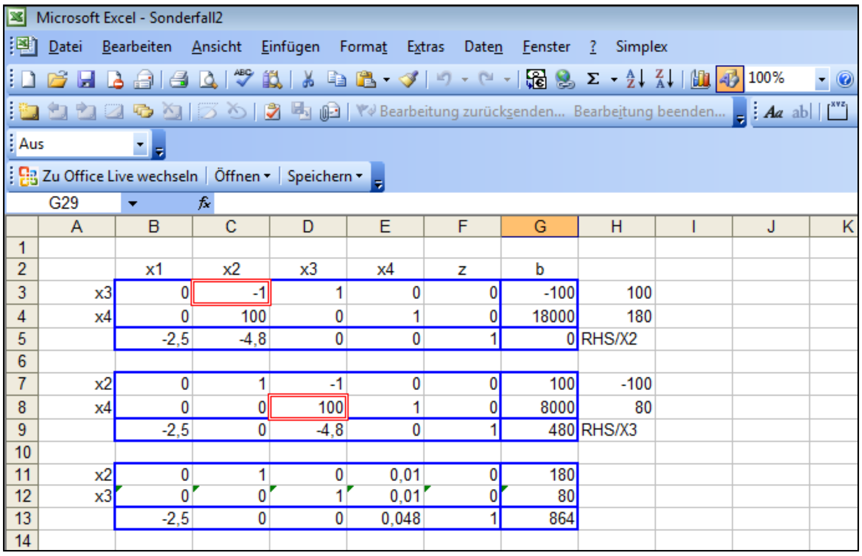
$$t = \frac{3}{6}:\ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_5} \\ x_{2_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{4}{6}:\ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_6} \\ x_{2_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix},$$

$$t = \frac{5}{6}:\ \overrightarrow{x_{max}} = \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ x_{2_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

- <u>Sonderfall 2 (unbegrenzter Zielfunktionswert)</u>

  (Lösen von Sonderfall 2 in Abschnitt 5.2 mithilfe des Simplex-Algorithmus)

  Sind in einem Simplex-Tableau alle Koeffizienten einer Nichtbasisvariablen kleiner oder gleich null, so ist der Zulässigkeitsbereich L unbeschränkt. Ist weiters der entsprechende Koeffizient in der Zielfunktionszeile kleiner als null, so kann der Zielfunktionswert beliebig groß werden, d. h. es existiert keine optimale Lösung (vgl. [5] S. 72).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		x1	x2	x3	x4	z	b	
3	x3	0	-1	1	0	0	-100	100
4	x4	0	100	0	1	0	18000	180
5		-2,5	-4,8	0	0	1	0	RHS/X2
6								
7	x2	0	1	-1	0	0	100	-100
8	x4	0	0	100	1	0	8000	80
9		-2,5	0	-4,8	0	1	480	RHS/X3
10								
11	x2	0	1	0	0,01	0	180	
12	x3	0	0	1	0,01	0	80	
13		-2,5	0	0	0,048	1	864	
14								

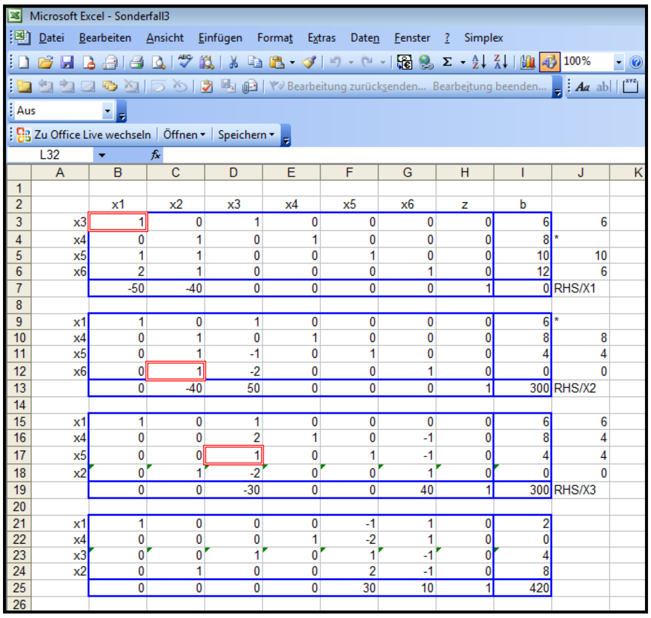
Abbildung 5.6.2.2: Sonderfall 2 im Simplex-Tableau

  Im dritten Simplex-Tableau tritt dieser Sonderfall ein, da die Koeffizienten der Nichtbasisvariablen x_1 (Zellen B11 und B12) gleich null sind und der entsprechende Koeffizient in der Zielfunktionszeile (Zelle B13) negativ ist.

- <u>Sonderfall 3 (Degeneration/Entartung)</u>

  (Lösen von Sonderfall 3 in Abschnitt 5.2 mithilfe des Simplex-Algorithmus)

  Dieser Sonderfall tritt im Simplex-Tableau auf, wenn eine Komponente des Vektors $\vec{b}$ verschwindet, d. h. eine der Basisvariablen gleich null ist. Beim darauffolgenden Schritt des Simplex-Algorithmus, also beim Basisaustausch, führt dies dazu, dass man auf der gleichen Ecke des Zulässigkeitsbereichs L stehen bleibt und dadurch auch der Zielfunktionswert nicht verbessert wird (vgl. [5] S. 68-70).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	z	b		
3	x3	1	0	1	0	0	0	0	6	6	
4	x4	0	1	0	1	0	0	0	8	*	
5	x5	1	1	0	0	1	0	0	10	10	
6	x6	2	1	0	0	0	1	0	12	6	
7		-50	-40	0	0	0	0	1	0	RHS/X1	
8											
9	x1	1	0	1	0	0	0	0	6	*	
10	x4	0	1	0	1	0	0	0	8	8	
11	x5	0	1	-1	0	1	0	0	4	4	
12	x6	0	1	-2	0	0	1	0	0	0	
13		0	-40	50	0	0	0	1	300	RHS/X2	
14											
15	x1	1	0	1	0	0	0	0	6	6	
16	x4	0	0	2	1	0	-1	0	8	4	
17	x5	0	0	1	0	1	-1	0	4	4	
18	x2	0	1	-2	0	0	1	0	0	0	
19		0	0	-30	0	0	40	1	300	RHS/X3	
20											
21	x1	1	0	0	0	-1	1	0	2		
22	x4	0	0	0	1	-2	1	0	0		
23	x3	0	0	1	0	1	-1	0	4		
24	x2	0	1	0	0	2	-1	0	8		
25		0	0	0	0	30	10	1	420		
26											

Abbildung 5.6.2.3: Sonderfall 3 im Simplex-Tableau

Im zweiten Simplex-Tableau tritt dieser Sonderfall ein, da $b_4 = 0$ (Zelle I12) ist und damit die Basisvariable $x_6 = 0$ ist. Die zugehörige, degenerierte (siehe Definition 5.4.2) zulässige Basislösung des Tableaus ist $\vec{x} = (6,0,0,8,4,0)$ mit dem Zielfunktionswert $z = 300$ (Zelle I13). Durch einen Basistausch (x_6 verlässt für x_2 die Basis) erhält man dann das dritte Simplex-Tableau. Der Koeffizient b_4 ist null geblieben und nun ist die Basisvariable $x_2 = 0$. Die zugehörige degenerierte zulässige Basislösung des Tableaus ist wie zuvor $\vec{x} = (6,0,0,8,4,0)$ mit dem gleichen Zielfunktionswert $z = 300$ (Zelle I19), d. h. man ist also auf derselben Ecke stehengeblieben. Durch einen weiteren Basistausch (x_5 verlässt für x_3 die Basis) erhält man das vierte und letzte Simplex-Tableau (da in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten). Die degenerierte optimale Basislösung der Problemstellung ist $\overrightarrow{x_{max}} = (2,8,4,0,0,0)$ mit dem Zielfunktionswert $z_{max} = 420$.

Geometrisch bedeutet der obige Verlauf des Simplex-Algorithmus, dass man sich entlang der folgenden Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs L bewegt hat (vgl. mit Abbildung 5.2.12): $(0,0) \to (6,0) \to (6,0) \to (2,8)$.

Bemerkung 5.6.2.1

Der Sonderfall 3 ist auch bereits in Beispiel 5.6.1.3 aufgetreten. In diesem Beispiel hat man sich entlang der folgenden Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs L bewegt:

$$(70,40,0,0,40,50,0,0) \to (70,0,40,0,80,10,0,0) \to (70,0,40,0,80,10,0,0) \to$$
$$\to (60,0,50,10,80,0,0,0)$$

5.6.3 Lösen von linearen Optimierungsproblemen mithilfe des Online Simplex Instructors (OSI)

In diesem Abschnitt wird zusätzlich zum Simplex-Tool in Microsoft Excel (Abschnitt 5.6.1) ein weiteres Programm, oder genauer gesagt ein Applet, der *Online Simplex Instructor* (OSI) vorgestellt. Das Applet ist unter [21] erhältlich.
Es besteht die Möglichkeit, das Applet direkt im Browser laufen zu lassen oder es herunterzuladen, um es lokal auf dem Computer starten zu können.
Wie schon beim Simplex-Tool fungiert auch der Computer beim OSI nicht als Black Box. Der OSI bietet neben einer automatischen Berechnung der Simplex-Tableaus die Möglichkeit, die einzelnen Simplex-Tableaus auch manuell berechnen zu können. Bei der automatischen Berechnung ist es zusätzlich möglich, sich ein „Demonstrationsvideo" der durchgeführten Rechenschritte anzusehen, die bei den Berechnungen der einzelnen Simplex-Tableaus durchgeführt werden mussten. Dadurch kann vor allem die Vorgehensweise des Simplex-Algorithmus (die Auswahl des Pivotelements und die Rechenschritte beim Basisaustausch) verdeutlicht werden. Bei der manuellen Berechnung der Simplex-Tableaus steht sogar eine automatische Fehlerprüfung zur Verfügung und man bekommt im Falle einer falschen Eingabe ein entsprechendes Feedback. Weiters wird für lineare Optimierungsprobleme mit zwei Strukturvariablen auch eine graphische Darstellung durchgeführt. Damit kann vor allem die iterative Vorgehensweise des Simplex-Algorithmus – von einer Ecke bzw. zulässigen Basislösung zur nächsten – graphisch veranschaulicht werden. Abschließend steht eine Auswertung des Ergebnisses zur Verfügung (vgl. [22]).

Im folgenden Beispiel wird demonstriert, wie das lineare Optimierungsproblem in Beispiel 5.1.1 mithilfe des OSI gelöst werden kann.

<u>Beispiel 5.6.3.1</u>
Beim Start des Applets (Schritt 1) muss man zunächst die Anzahl der Strukturvariablen eingegeben, also in diesem Fall 2.

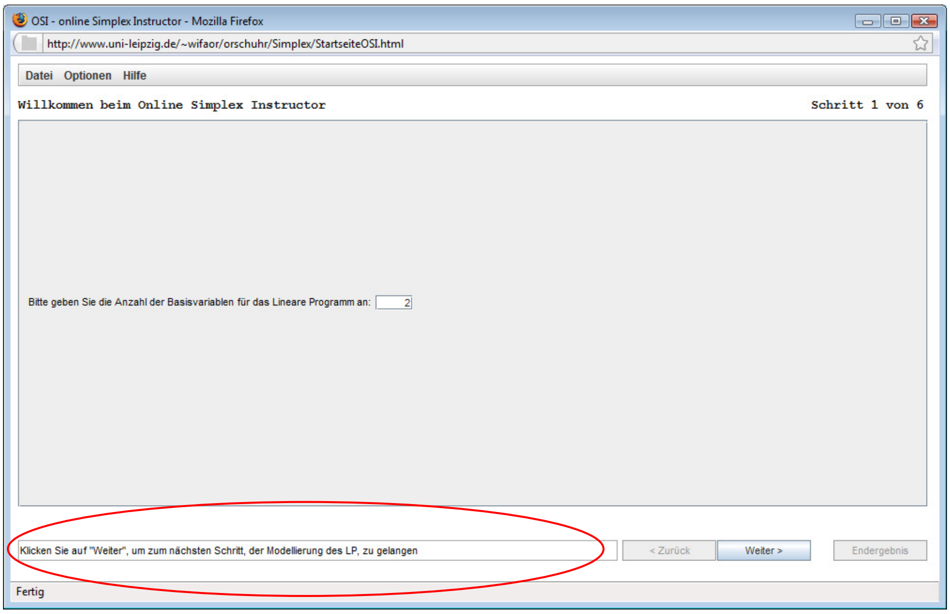


Abbildung 5.6.3.1: Eingabe der Strukturvariablenanzahl

Im Informationsbereich (roter Kreis) erhält man wichtige Anweisungen, die bei jedem Schritt durchgeführt werden müssen. Weiters erhält man in diesem Bereich Informationen über aktuelle Ereignisse, zusätzliche Hilfestellungen und Erläuterungen (vgl. [22]). Der Informationsbereich ist auch jener Bereich, in dem man bei einer falschen Eingabe eine Rückmeldung erhält.

Durch einen Klick mit der linken Maustaste auf *Weiter* gelangt man zu Schritt 2. Hier erfolgt die mathematische Modellbildung der Problemstellung. Mit dem Klappmenü (links oben) kann zunächst ausgewählt werden, ob es sich um ein Minimum- oder Maximumproblem handelt. Anschließend erfolgt die Eingabe der Koeffizienten der Zielfunktion und der einzelnen Nebenbedingungen. Mithilfe des Klappmenüs bei den Restriktionen kann man auswählen, ob ein „≤“-, „≥“- oder „=“-Zeichen in der Nebenbedingung vorkommt. Handelt es sich bei der Eingabe um einen negativen Koeffizienten, so muss einfach ein Minus vorangestellt werden (z. B. – 6). Besitzen Koeffizienten Kommastellen, so muss für die Eingabe des Kommas ein Punkt verwendet werden (z. B. 10.5). Mit dem Button kann eine weitere Restriktion hinzugefügt werden und mit dem Button kann eine Restriktion entfernt werden. Die Auswahlmöglichkeit von freien Variablen bzw. der Button zur Anzeige des dualen linearen Optimierungsproblems kann ignoriert werden, da in dieser Arbeit keine dualen Problemstellungen oder Problemstellungen mit freien Variablen betrachtet werden (siehe dazu [5] S. 73-87 und [11] S. 65-74). Aus der folgenden Abbildung kann die Implementierung des mathematischen Modells aus Beispiel 5.1.1 entnommen werden.

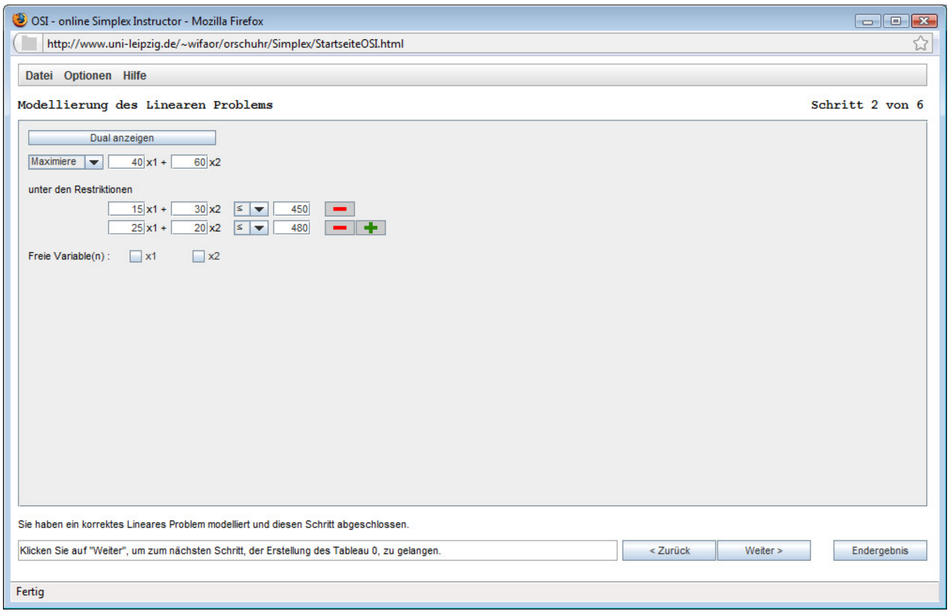
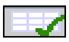


Abbildung 5.6.3.2: Eingabe des mathematischen Modells

Durch einen Linksklick auf *Weiter* gelangt man zu Schritt 3. Hier muss für das lineare Optimierungsproblem das Simplex-Tableau erstellt werden. Durch Betätigung des Buttons  wird das Simplex-Tableau automatisch erstellt und durch Klicken auf *Weiter* gelangt man zu Schritt 3. Entscheidet man sich jedoch für die manuelle Erstellung des Tableaus, so müssen die Koeffizienten in folgender Form eingegeben werden:

BV	x_1	$\cdots$	x_{n-m}	x_{n-m+1}	$\cdots$	x_n	$\vec{b}$
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_{n-m}$	0	$\cdots$	0	z – Wert
x_{n-m+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n-m}$	1	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n-m}$	0	$\cdots$	1	b_m

Diese Darstellungsform ist ähnlich zu jener, die in Microsoft Excel verwendet wurde. Der einzige Unterschied besteht darin, dass hier die Ergebniszeile die erste Zeile ist (beim Simplex-Tool war die Ergebniszeile die letzte Zeile) und die Spalte der Variablen z (Einheitsvektor) weggelassen wird. Nach der Eingabe der Koeffizienten erhält man – falls eine oder mehrere Koeffizienten falsch eingegeben wurden – eine entsprechende Rückmeldung im Informationsbereich. Im Falle einer falschen Eingabe kann man sich durch einen Klick auf den Button  etwaige falsche Koeffizienten anzeigen lassen. Die entsprechenden Kästchen werden dabei rot eingefärbt. In Abbildung 5.6.3.3 ist das Simplex-Tableau für dieses lineare Optimierungsproblem zu sehen. Dieses Simplex-Tableau ist bis auf Zeilenvertauschungen äquivalent zum ersten Tableau in Beispiel 5.6.1 bzw. 5.6.1.1.

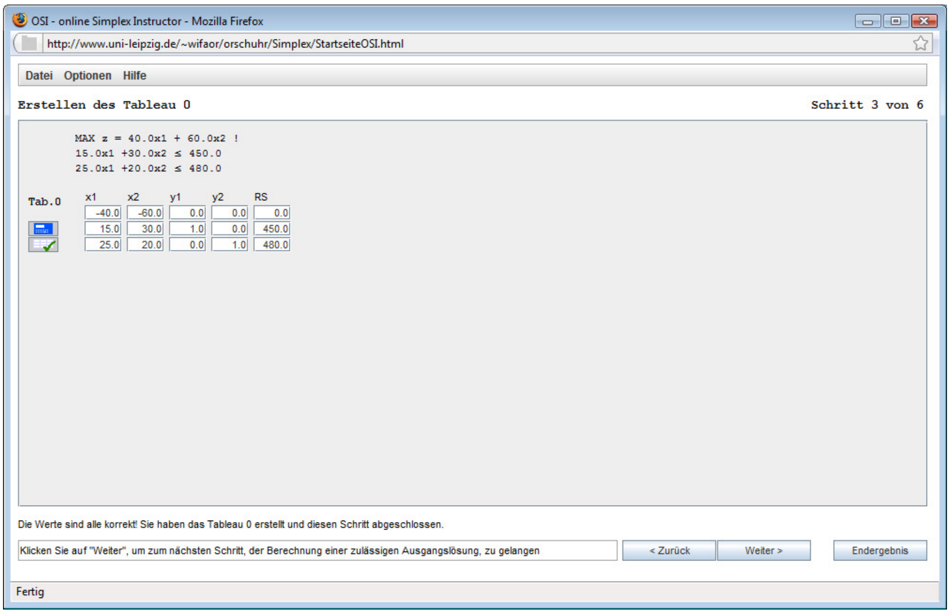
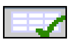


Abbildung 5.6.3.3: Erstellen des Simplex-Tableaus

Mit einem Linksklick auf *Weiter* kommt man zu Schritt 4. Aus Beispiel 5.6.1 bzw. 5.6.1.1 ist bereits bekannt, dass die dem Simplex-Tableau zugehörige Basis- bzw. Ausgangslösung $\vec{x} = (0,0,450,480)$ zulässig ist. Der OSI erkennt die Zulässigkeit der Ausgangslösung ebenfalls sofort, was sich durch ein entsprechendes Feedback äußert. Weiters wird der Zulässigkeitsbereich L des linearen Optimierungsproblems (da es sich um eine zweidimensionale Problemstellung handelt) graphisch dargestellt, wobei die Grafik durch einen Klick mit der linken Maustaste auf den Button *Großes Diagramm* vergrößert werden kann. Bei Betrachtung der Grafik kann man ebenfalls erkennen, dass die Basislösung $\vec{x} = (0,0,450,480)$ zulässig ist, da diese dem Eckpunkt $(0,0)$ entspricht, welcher zum Zulässigkeitsbereich L gehört. Man kann daher sofort auf *Weiter* klicken (Abbildung 5.6.3.4) und zu Schritt 5 übergehen.

Wäre das Simplex-Tableau nicht primal zulässig und die zugehörige Basislösung daher nicht zulässig, so kann man sich mithilfe des Buttons  ein primal zulässiges Simplex-Tableau mit zulässiger Ausgangslösung automatisch berechnen lassen. Entscheidet man sich jedoch für die manuelle Berechnung, so muss man ein primal zulässiges Simplex-Tableau mit zulässiger Basis- bzw. Ausgangslösung anhand des Transformations-Algorithmus (in Abschnitt 5.6) bestimmen. Dabei erhält man im Falle einer falschen Eingabe eine entsprechende Rückmeldung im Informationsbereich. Durch einen Klick mit der linken Maustaste auf den Button  werden dann die nicht korrekten Koeffizienten angezeigt.

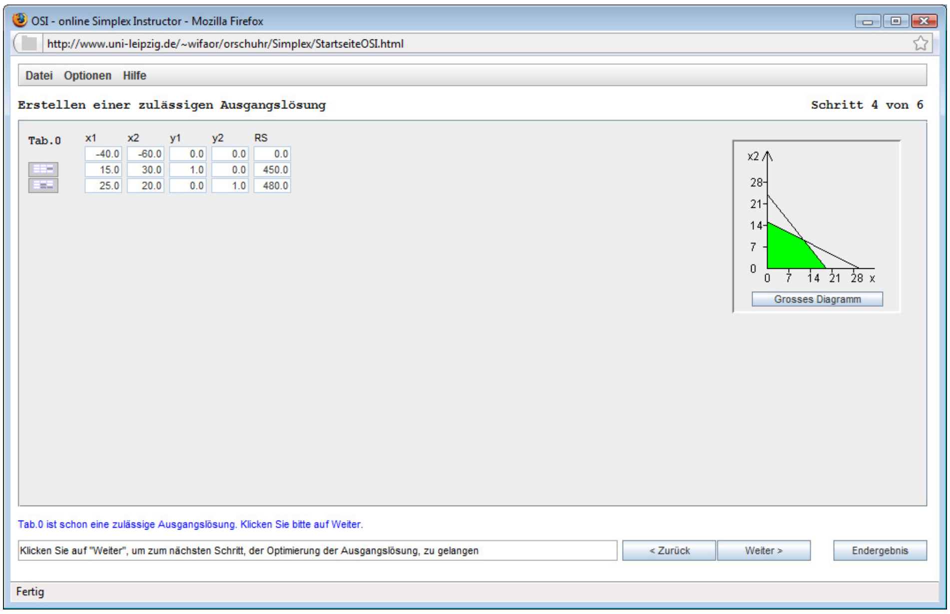
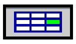
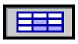
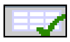


Abbildung 5.6.3.4: Erstellen einer zulässigen Ausgangslösung

Im fünften Schritt wird die optimale Lösung (sofern sie existiert) berechnet. Dabei besteht wieder die Möglichkeit, die optimale Lösung manuell oder automatisch zu berechnen. Dazu muss zunächst ein gültiges Pivotelement bestimmt werden. Dies kann ebenfalls manuell, gemäß des primalen Simplex-Algorithmus (in Abschnitt 5.6), oder automatisch durch Betätigung des Buttons  geschehen. Bei der automatischen Bestimmung wird ein zufälliges und gültiges Pivotelement ermittelt. Weiters kann man sich durch einen Klick auf den zweiten Button  alle gültigen Pivotelemente anzeigen lassen. Die entsprechenden Kästchen werden dann grau eingefärbt, wobei die Auswahl des Pivotelements dann ebenfalls manuell erfolgen muss. Würde man ein ungültiges Pivotelement auswählen, so würde das entsprechende Kästchen rot eingefärbt werden. Nach der Bestimmung eines gültigen Pivotelements, sei es manuell oder automatisch, erscheint ein neues und leeres Simplex-Tableau. Die Berechnung der Koeffizienten dieses Simplex-Tableaus kann durch Betätigung des Buttons  automatisch erfolgen oder eben manuell durch Verwendung des Algorithmus zum Basisaustausch (in Abschnitt 5.6). Nach der Eingabe der Koeffizienten erhält man hier im Falle einer falschen Eingabe ebenfalls eine entsprechende Rückmeldung im Informationsbereich. Mithilfe des Buttons  kann man sich die falsch berechneten Koeffizienten anzeigen lassen. Den Vorgang der Bestimmung eines gültigen Pivotelements und die Durchführung des anschließenden Basistausches, also die Berechnung eines neuen Simplex-Tableaus, wiederholt man solange, bis in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten. Dann lässt sich der Zielfunktionswert nicht weiter verbessern und man hat das letzte Simplex-Tableau mit der optimalen Basislösung erreicht. Die Kästchen, welche die Werte der Basisvariablen der optimalen Basislösung enthalten, werden dann blau ausgefüllt. Wird die automatische Berechnung der Koeffizienten des Simplex-

Tableaus verwendet, so werden alle nötigen Iterationen automatisch durchgeführt. Dazu können unter Umständen mehrere Iterationen (Berechnungen von Simplex-Tableaus) notwendig sein (in diesem Beispiel sind es zwei, Abbildung 5.6.3.5 und 5.6.3.6). Mithilfe des „Simplex-Tableau-Players“ lassen sich die einzelnen Iterationen als Animation abspielen und die einzelnen Rechenschritte werden dabei im Informationsbereich beschrieben. Die Buttons der Iterationssteuerung funktionieren wie die eines CD-Players und erklären sich daher von selbst.

Weiters repräsentiert die Zielfunktionsgerade die einzelnen Iterationsschritte in der Grafik. D. h. sie wird durch die zulässigen Basislösungen (Eckpunkte) der berechneten Simplex-Tableaus verschoben. Dadurch wird demonstriert, wie sich der Simplex-Algorithmus von einer Ecke zur nächsten bis hin zur optimalen Ecke bewegt.

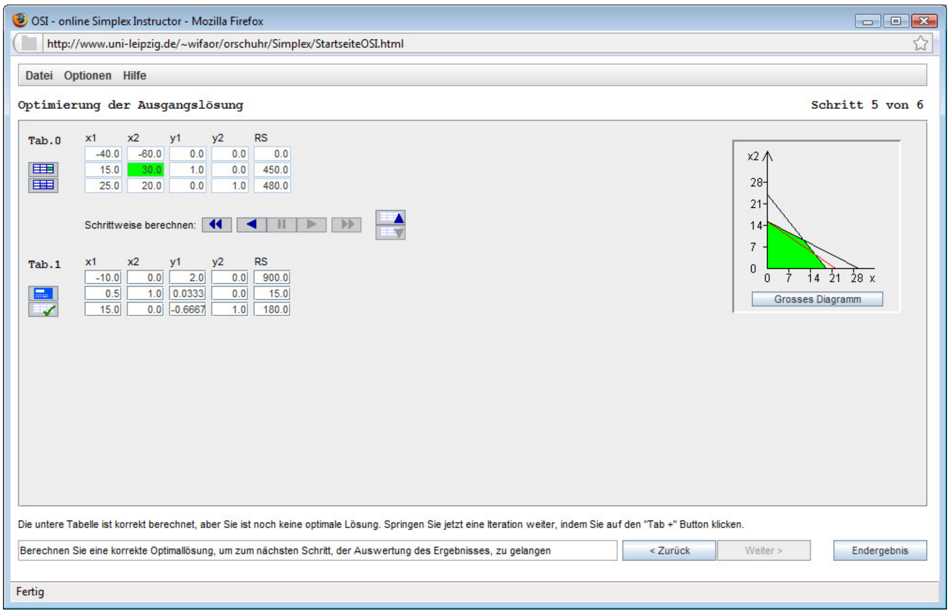


Abbildung 5.6.3.5: Bestimmung der optimalen Lösung – Iteration 1

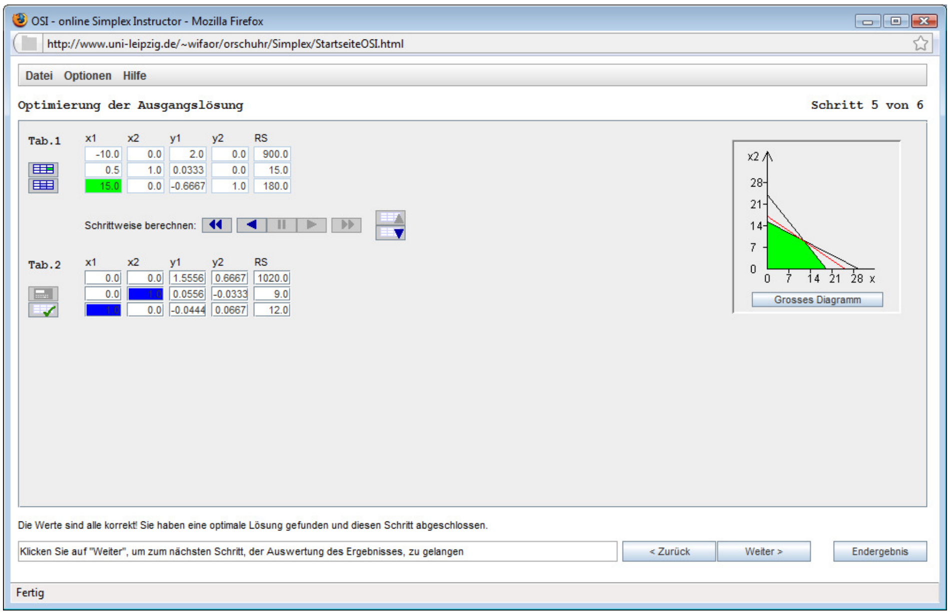


Abbildung 5.6.3.6: Bestimmung der optimalen Lösung – Iteration 2

Hat man also die optimale Basislösung der Problemstellung gefunden, so gelangt man durch einen Linksklick auf *Weiter* zu Schritt 6. Hier erfolgt eine Auswertung des Ergebnisses (Abbildung 5.6.3.7). Es werden die einzelnen Werte der Basis- und Nichtbasisvariablen aufgelistet und es können noch einmal die einzelnen Simplex-Tableaus (Iterationen), die zur Bestimmung der optimalen Lösung notwendig waren, betrachtet werden (Linksklick auf *Detaillösung anzeigen*). Weiters können Sensitivitätsanalysen bezüglich der Zielfunktionskoeffizienten und bzgl. der rechten Seiten durchgeführt werden. Diese werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, da diese Analysen in den Bereich der parametrischen linearen Optimierung fallen (siehe dazu [5] S. 139-151).

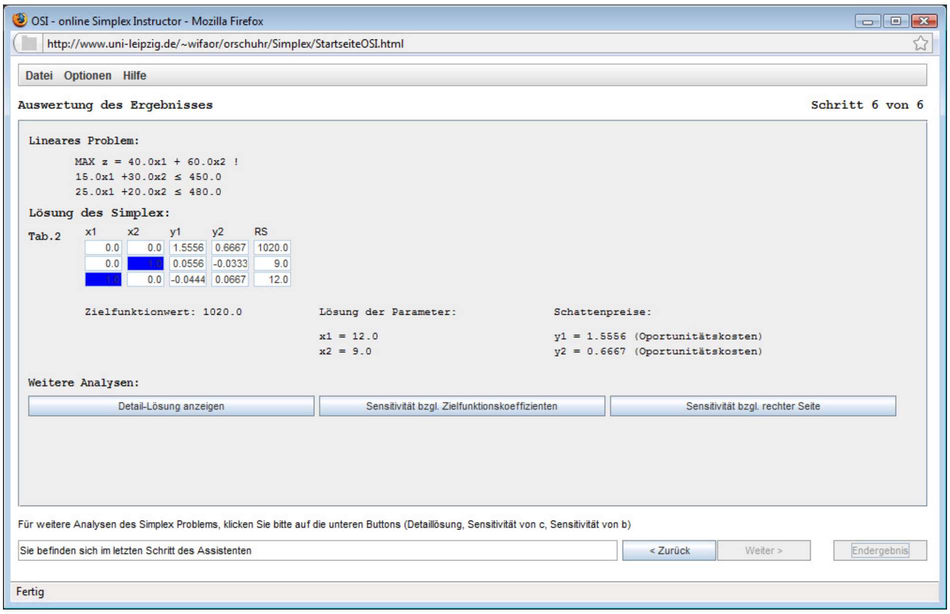


Abbildung 5.6.3.7: Auswertung des Ergebnisses

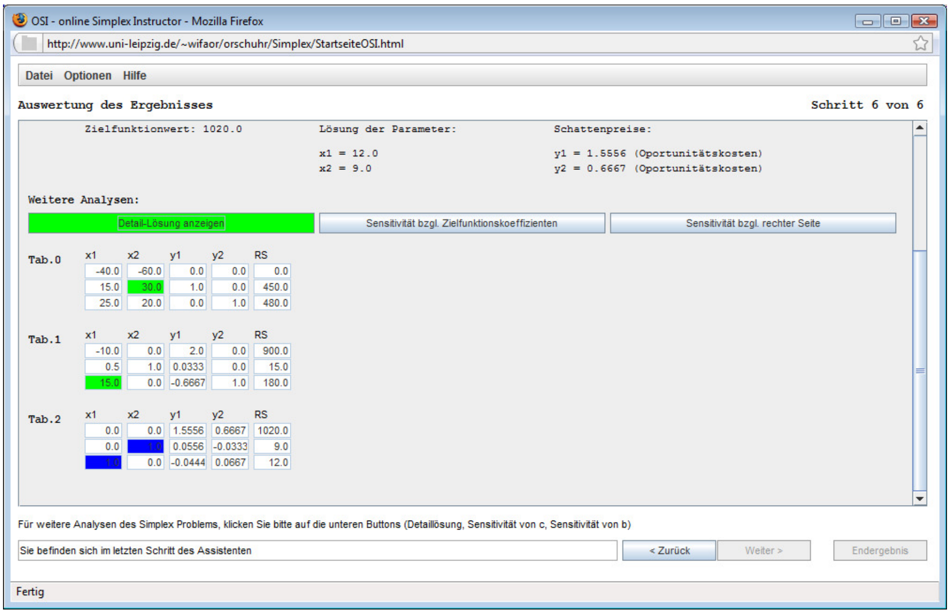


Abbildung 5.6.3.8: Detaillösung

Bemerkung 5.6.3.1

Alle anderen linearen Optimierungsprobleme, welche in Kapitel 5 vorgekommen sind, lassen sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten (wie in Beispiel 5.6.3.1 demonstriert) im OSI implementieren und lösen.

6 Resümee und didaktische Analyse mit Unterrichtsvorschlag

Das Thema lineare Optimierung eignet sich meiner Meinung nach sehr gut für den Einsatz im Mathematikunterricht. Auch der Forderung nach Computereinsatz im Unterricht (vgl. [14] und [15]), wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde, kann mit diesem Themenbereich bestens nachgekommen werden. In den Lehrplänen wird die lineare Optimierung zumindest als Option erwähnt: Im Lehrplan für das Wahlpflichtfach Mathematik in der AHS-Oberstufe wird das Thema bei den zusätzlichen möglichen Themenbereichen vorgeschlagen und im Lehrplan für Mathematik in der Handelsakademie kommt die lineare Optimierung beim Erweiterungslehrstoff im fünften Jahrgang vor (vgl. [14] und [15]).

Die lineare Optimierung ist zudem ein ausgezeichneter Themenbereich für die vertiefende Wiederholung mathematischer Themen des Lehrstoffs:

- Lineare Algebra (Vektoren, Umformen von linearen Gleichungen und Ungleichungen, Matrizen, Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe von Algorithmen – Gauß- und Gauß-Jordan-Algorithmus),
- Geometrie (Koordinatensysteme, graphisches Darstellen von linearen Gleichungen und Ungleichungen – insbesondere graphisches Lösen von linearen Gleichungs- und Ungleichungssystemen).

Weiters werden die folgenden mathematischen Kompetenzen geschult:

- „Darstellend-interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten“ (aus [14]). Diese Kompetenz wird in der linearen Optimierung beim Erstellen von mathematischen Modellen zu anwendungsbezogenen Problemstellungen geschult. Dabei müssen Situationen (lineare Optimierungsprobleme) in die Sprache der Mathematik übersetzt – also mathematische Modelle erstellt werden. Auch beim ökonomischen Analysieren von Simplex-Tableaus (siehe Abschnitt 5.6) wird diese Kompetenz gefördert. Dabei wird allerdings die umgekehrte Richtung wirksam, denn hier müssen die mathematischen Modelle interpretiert und in die Alttagssprache rückübersetzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen also Wechselbeziehungen zwischen einer außermathematischen Problemstellung und der Mathematik in Form eines Modells herstellen.

- „Formal-operatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken“ (aus [14]). Diese Kompetenz wird in der linearen Optimierung beim Lösen von linearen Gleichungssystemen durch Verwendung des Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus gefördert, der eine wichtige Grundlage für die Durchführung der Pivotoperationen beim Simplex-Algorithmus ist. Schließlich tritt diese Aktivität auch beim rechnerischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen (primaler Simplex-Algorithmus, Algorithmus zum Basistausch, Transformations-Algorithmus) auf.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen Lösungen interpretieren können (vgl. [15]). Diese Kompetenz wird sowohl beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen (Abschnitt 5.2), als auch beim rechnerischen Lösen von Problemstellungen durch Verwendung des Simplex-Algorithmus (Abschnitt 5.6) vermittelt.

Im Folgenden möchte ich einen Vorschlag machen, wie man in der AHS bzw. Handelsakademie eine Unterrichtssequenz zum Thema lineare Optimierung durchführen kann. Anhand der Durchführung der Sequenz im Unterricht soll den Schülerinnen und Schülern währenddessen oder am Ende bewusst werden, dass durch diesen anwendungsbezogenen Themenbereich, Mathematik nicht nur zum Selbstzweck betrieben wird, sondern in der Praxis tatsächlich zur Lösung von Problemstellungen herangezogen wird (also in vielen Bereichen des Lebens eine wichtige Rolle spielt). Es soll verdeutlicht werden, dass durch die Verwendung von linearen Gleichungen und Ungleichungen Problemstellungen aus der Umwelt mathematisch modelliert und gelöst werden können. Auch im Lehrplan wird das Lernen in anwendungsorientierten Kontexten ausdrücklich gefordert (aus [14]): „Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. […] Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.“

Die folgenden Unterrichtssequenzen zur linearen Optimierung werden in zwei Punkte gegliedert, um den Leserinnen und Lesern einen besseren Überblick zu gewähren. Der erste

Punkt beschäftigt sich mit einer Unterrichtssequenz für den Regelunterricht in der AHS bzw. Handelsakademie und der zweite Punkt mit einer Unterrichtssequenz für das Wahlpflichtfach Mathematik in der AHS. Bei der Durchführung der einzelnen Unterrichtssequenzen werden Arbeitsblätter verwendet, welche im Anhang zu finden sind. Weiters sind auf den Arbeitsblättern Literaturverweise angegeben, um den Lehrerinnen und Lehrern eine noch größere Auswahlmöglichkeit an Aufgaben anzubieten.
Es sei dabei ausdrücklich erwähnt, dass die einzelnen Unterrichtssequenzen als Vorschläge zu sehen sind und natürlich von den Lehrerinnen und Lehrern je nach Vorwissen und Kenntnissen der Schülerinnen und Schüler variiert werden können. Auch die Durchführungszeiten (Unterrichtsstunden), die ich bei den einzelnen Unterrichtssequenzen angeben werde, können unterschritten bzw. überschritten werden. Die Angabe soll lediglich eine realistische Orientierungshilfe darstellen.

- **AHS und Handelsakademie – Regelunterricht**

Die lineare Optimierung wird zwar im Lehrplan des Regelunterrichts für Mathematik in der AHS-Oberstufe (vgl. [14]) nicht explizit erwähnt, lässt sich aber ab dem 6. Jahrgang in der AHS im Zuge von linearen Ungleichungen bzw. Ungleichungssystemen durchaus im Unterricht einbringen. Im Lehrplan für Mathematik in der Handelsakademie wird die lineare Optimierung erst im Erweiterungslehrstoff ab dem 5. Jahrgang vorgeschlagen. Es besteht aber durchaus die Möglichkeit, die lineare Optimierung bereits ab dem 2. Jahrgang als Anwendungsgebiet linearer Ungleichungssysteme im Unterricht einzubauen (wie in der AHS).
Zunächst ist es sinnvoll, die Unterrichtssequenz in zwei Teile zu gliedern. Im ersten Teil der Unterrichtssequenz bietet sich an, wichtige mathematische Grundlagen (lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme und lineare Ungleichungen bzw. Ungleichungssysteme) samt Begriffen, die bereits im Unterricht behandelt wurden und auf denen die lineare Optimierung basiert, nochmals aufzuarbeiten bzw. zu wiederholen. Es soll dabei vor allem das Wechselspiel zwischen Algebra und Geometrie im Mittelpunkt stehen. D. h. es sollen lineare Gleichungen und Ungleichungen geometrisch interpretiert und umgekehrt aus den graphischen (geometrischen) Darstellungen algebraische Erkenntnisse gewonnen werden.
Der zweite Teil der Unterrichtssequenz beschäftigt sich mit dem graphischen und dynamischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei bzw. in besonderen Fällen mit drei Variablen in GeoGebra. Dabei geht es vor allem darum, dass der Modellbildungsprozess (das Abstraktionsvermögen und das problemlösende Verhalten bei der mathematischen Modellierung einer Problemstellung), also das darstellend-interpretierende

Arbeiten, und das graphische Lösen von linearen Optimierungsproblemen geschult werden. Weiters werden in der letzten Unterrichtsstunde der Unterrichtssequenz die Sonderfälle thematisiert, welche beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen auftreten können.

1. Unterrichtsstunde (lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen):
Hier soll auch gleich der Computer – insbesondere GeoGebra verwendet werden. Zunächst wird mit den Schülerinnen und Schülern die Benutzungsweise von GeoGebra besprochen und dabei grundlegende Bedienelemente (zur Darstellung von Geraden, zur Beschriftung bzw. Einfärbung von Geraden, zur Darstellung von Punkten bzw. Schnittpunkten, zum Zeichnen von Polygonen) erklärt, welche für das weitere Vorgehen wesentlich sind. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler die ersten vier Aufgaben des ersten Arbeitsblatts lösen, wobei die erste Aufgabe wie Beispiel 2.3.1 gelöst werden soll. Die vierte Aufgabe soll in Gruppen (zu je 3 bis 4 Personen) bearbeitet werden. Während die Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten, sollte die Lehrerin oder der Lehrer in eine Art Tutorenrolle schlüpfen, um eventuelle Hilfestellungen (mathematische oder programmtechnische) bereitstellen zu können. Abschließend werden die Ergebnisse der Aufgaben – vor allem Aufgabe 4 (Lösbarkeitskriterium) – gemeinsam besprochen und verglichen.

2. Unterrichtsstunde (lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen):
Zu Beginn wird eine kurze Diskussionsrunde mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt, in der die wichtigsten Begriffe über lineare Ungleichungen bzw. Ungleichungssysteme (Lösungsmenge einer linearen Ungleichung, Zulässigkeitsbereich eines linearen Ungleichungssystems, offene bzw. abgeschlossene Halbebene, geometrische Gestalt des Zulässigkeitsbereichs, zulässige Lösung) wiederholt und anhand von Beispielen illustriert werden. Im nächsten Schritt wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in GeoGebra graphisch veranschaulicht (eingefärbt) werden kann, da dies in diesem Programm nicht automatisch passiert wie beispielsweise in Maple. Weiters ist es für das weitere Vorgehen wichtig, dass den Schülerinnen und Schülern auch demonstriert wird, wie in GeoGebra ein unbeschränkter Lösungsbereich, zumindest im Bildbereich, graphisch hervorgehoben werden kann. Dazu eignet sich Beispiel 4.3.1. Anschließend sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit den Aufgaben 1 bis 4 von Arbeitsblatt 3 beschäftigen. Dabei wird die dritte Aufgabe in Partnerarbeit gelöst. Sollten in Aufgabe 4 beim Einfärben des Zulässigkeitsbereichs programmspezifische Probleme auftreten, so kann den Schülerinnen und Schülern dabei

geholfen werden. Die graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereichs eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen dient dann bereits als Vorbereitung auf das graphische Lösen von linearen Optimierungsproblemen. Gegen Ende der Unterrichtsstunde sollen die Ausarbeitungen von Aufgabe 3 gemeinsam reflektiert und diskutiert werden, um die wichtigsten Begriffe (Zulässigkeitsbereich, Polygon, zulässige und unzulässige Lösung) im Gedächtnis zu festigen.

<u>3. Unterrichtsstunde (lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen – Fortsetzung)</u>:
Da GeoGebra den Zulässigkeitsbereich eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen nicht automatisch graphisch darstellen kann, bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern anhand eines Beispiels (z. B. Beispiel 4.3.1) zu zeigen, wie dies in Maple automatisch erfolgen kann (Abschnitt 4.3). Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass bei der graphischen Darstellung in Maple der Zeichenbereich (Bildausschnitt) manuell festgelegt werden muss. Dies kann den Schülerinnen und Schülern am besten verdeutlicht werden, indem man sie Aufgabe 5 von Arbeitsblatt 3 in Maple graphisch lösen lässt, denn dadurch müssen die Schülerinnen und Schüler durch Experimentieren und gezieltes Probieren selbstständig geeignete x_1- und x_2-Bereiche bestimmen, was zu einem entdeckenden und experimentierenden Lernprozess führt. Hier wird auch die Möglichkeit eines verbindenden Einsatzes der beiden Softwarepakete ersichtlich, indem man die Schülerinnen und Schüler zunächst mit GeoGeabra arbeiten (Aufgabe 4, Arbeitsblatt 3) und anschließend die Ergebnisse in Maple überprüfen lässt (Aufgabe 5). Weiters sollen die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben 6 bis 8 von Arbeitsblatt 3 lösen, wobei sie selbstständig entscheiden können, ob sie die Ergebnisse durch Verwendung von Maple überprüfen. Diese Aufgaben bereiten bereits auf das graphische Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen vor. In Aufgabe 7 soll den Schülerinnen und Schülern verdeutlicht werden, welche Bedeutung die Bedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ haben (Beschränkung auf den ersten Quadranten). In Aufgabe 8 sollen die Schülerinnen und Schüler eine erste „Vorstufe“ eines linearen Optimierungsproblems mit zwei Variablen lösen. Denn hier sollen sie die Summe bzw. die lineare Gleichung (Funktion) $s = x_1 + x_2$ unter gewissen Bedingungen minimieren bzw. maximieren.

Zweiter Teil der Unterrichtssequenz:

4. Unterrichtsstunde (graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen)

Zunächst wird die Definition eines linearen Optimierungsproblems (Definition 5.1.1) im Unterricht eingeführt. Danach wird ein lineares Optimierungsproblem (z. B. Beispiel 5.1.1) präsentiert und das mathematische Modell gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erstellt. Anhand der Definition bzw. des mathematischen Modells des Beispiels soll den Schülerinnen und Schülern das Grundgerüst eines linearen Optimierungsproblems verdeutlicht werden. Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler gefragt, ob ihnen ein solches mathematisches Modell bekannt vorkommt bzw. ein solches Modell bereits in ähnlicher Weise untergekommen ist. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler auf die Aufgabe 8 von Arbeitsblatt 3 verweisen. Im nächsten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 1 bis 4 von Arbeitsblatt 4 lösen, wobei die Bearbeitung der Aufgaben 2 bis 4 in Partnerarbeit erfolgen soll. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei die wichtigsten Begriffe nochmals reflektieren und dadurch im Gedächtnis festigen. Bei Aufgabe 1 (und auch bei den linearen Optimierungsproblemen in den folgenden Unterrichtsstunden) kann zur Überprüfung der Korrektheit des Zulässigkeitsbereichs wieder Maple verwendet werden, dies sei jedoch den Schülerinnen und Schülern selbst überlassen. Abschließend werden die Ergebnisse der Aufgaben verglichen und besprochen. Als Hausübung sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 5 bearbeiten.

5. Unterrichtsstunde (graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen – Fortsetzung 1)

Zu Beginn werden von den Schülerinnen und Schülern 2 bis 3 mathematische Modelle von Aufgabe 5 (Hausübung) präsentiert und besprochen. Danach sollen sie sich mit Aufgabe 6 a) und b) beschäftigen. Hier ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die einzelnen Zielfunktionsgeraden parallel sind und mit wachsendem Zielfunktionswert auch der Ordinatenabschnitt wächst. Weiters sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass alle zulässigen Lösungen, die den gleichen Zielfunktionswert ergeben, jeweils auf einer Geraden liegen. Anschließend wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie ein Schieberegler in GeoGebra erstellt und die verschiedenen Parameter (Name, Intervall, Schrittweite) für diesen definiert werden können (siehe Abbildung 5.2.2). Zudem soll auch demonstriert werden, wie anhand eines Schiebereglers eine Gerade parallel verschoben werden kann. Nun sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 6 c) in Partnerarbeit lösen (wie Beispiel 5.2.1). Dabei soll wieder ein experimentierender und entdeckender Lernprozess stattfinden. Denn zum einen sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass hier ein Schieberegler für den Zielfunktionswert erstellt werden muss und zum anderen, dass für den Schieberegler ein ausreichend großes Intervall und eine entsprechend (feine) Schrittweite gewählt werden muss, damit beim Parallelverschieben der Zielfunktionsgeraden (Ursprungsgeraden) die optimale Lösung überhaupt „getroffen" werden kann. Da dies ein sehr wichtiger Schritt für das graphische Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen in GeoGebra ist (der nicht trivial ist), ist stets darauf zu achten, dass alle Schülerinnen und Schüler die (mathematische und programmtechnische) Vorgehensweise durchschauen. Durch Betätigung des Schiebereglers (Parallelverschieben der Ursprungsgerade) sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wie sich die Zielfunktionsgerade der optimalen Lösung annähert und sich dadurch auch der Zielfunktionswert und damit der Ordinatenabschnitt vergrößert. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 6 d) lösen. Als Hausübung wird Aufgabe 7 vorgeschlagen.

<u>6. Unterrichtsstunde (graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen – Fortsetzung 2)</u>

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich gleich mit Aufgabe 8 a) beschäftigen. Nach einem Vergleich des mathematischen Modells wird Aufgabe 8 b) gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern gelöst (wie Beispiel 5.2.2). Dabei soll nochmals gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vorgehensweise beim dynamischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen in GeoGebra reflektiert und diskutiert werden, um diese im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler zu festigen. Weiters soll ihnen bewusst werden, dass sich im Allgemeinen (es wird von Problemstellungen (Sonderfälle), bei denen der Koordinatenursprung zum Zulässigkeitsbereich gehört, abgesehen) bei Minimumproblemen die Ursprungsgerade außerhalb des Zulässigkeitsbereichs befindet. Alle Merkmale und Unterschiede zwischen Maximum- und Minimumproblemen sollen die Schülerinnen und Schüler in Aufgabe 8 c) in Gruppen (zu je 3 bis 4 Personen) zusammenfassen. Anschließend wird ein kurzer Ausblick in die ganzzahlige (diskrete) Optimierung gegeben. Dies kann etwa am folgenden Beispiel demonstriert und gemeinsam diskutiert werden (Dazu könnte aber auch ein mathematisches Modell, das die Schülerinnen und Schüler in Aufgabe 5 (Arbeitsblatt 4) entworfen haben und das keine ganzzahlige Lösung besitzt, verwendet werden.):

In einem Betrieb sind zwei Maschinen M_1 und M_2 vorhanden, mit denen zwei Produkte P_1 und P_2 hergestellt werden. Die notwendigen Bearbeitungszeiten der Maschinen M_1 und M_2, um 1 Stück von P_1 bzw. P_2 herstellen zu können, die maximalen Maschinenlaufzeiten pro Tag und den Verkaufspreis je Stück kann man aus nachfolgender Tabelle entnehmen.
(Zeitangaben in Minuten, Verkaufspreis in Euro)

	P_1	P_2	max. Maschinenlaufzeit
M_1	20	40	300
M_2	45	30	405
Gewinn pro Stück	40	60	

Mathematische Modellierung:

Von P_1 werden x_1 ($x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \geq 0$) Stück produziert und von P_2 werden x_2 ($x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$) Stück produziert.

Zu maximieren ist der Gesamtgewinn

$$z = F(x_1, x_2) = 40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 &\leq 300 \\ 45 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 &\leq 405 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(x_1 und x_2 ganzzahlig, da es sich um Stückzahlen handelt)

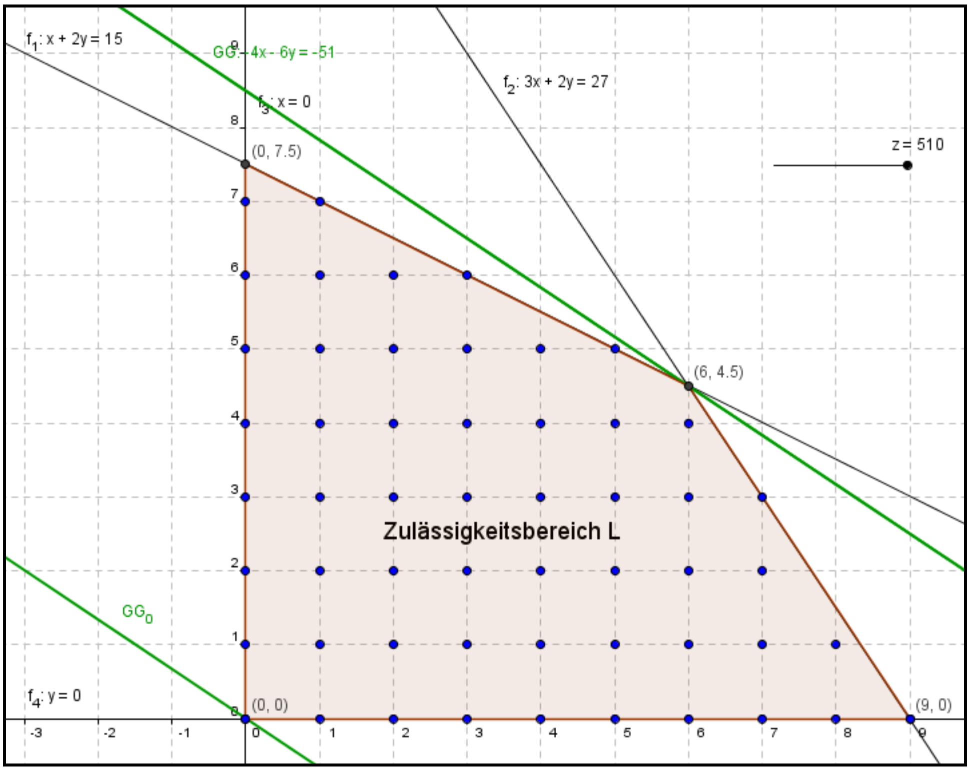


Abbildung 6.1: Ganzzahlige Optimierung (1) - nur die blauen Punkte sind der Zulässigkeitsbereich

Dies ergibt die nicht ganzzahlige optimale Lösung $(6;4{,}5)$ und damit $z_{max} = 510 = 40 \cdot 6 + 60 \cdot 4{,}5$.

Da $x_2 = 4{,}5$ nicht ganzzahlig ist, muss entweder $x_2 \leq 4$ oder $x_2 \geq 5$ sein. Diese beiden Fälle müssen dann gesondert betrachtet werden. Das bedeutet, dass man dadurch zwei Teilprobleme – insbesondere zwei Teilbereiche – erhält. Wird nun das Maximum über jedem der beiden Teilbereiche bestimmt, so erhält man für jedes Teilproblem eine optimale Lösung mit einem Zielfunktionswert, der kleiner als der ursprüngliche Zielfunktionswert ist (siehe Abbildung 6.2).

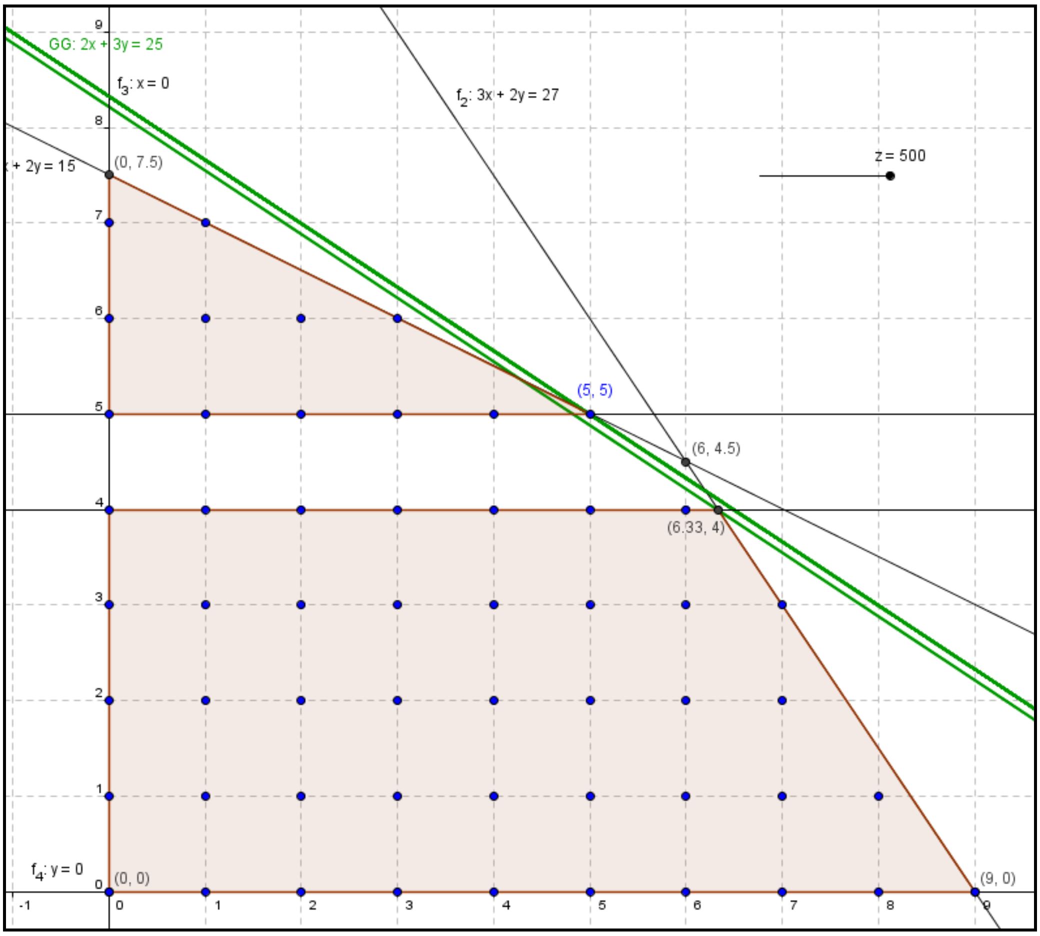


Abbildung 6.2: Ganzzahlige Optimierung (2) - nur die blauen Punkte sind die Zulässigkeitsbereiche

Wir erhalten also für $x_1 = 6{,}33$ und $x_2 = 4$ einen Zielfunktionswert von 493,2 und für $x_1 = 5$ und $x_2 = 5$ einen Zielfunktionswert von 500. Da sich der Zielfunktionswert $z = 500$ aus einer ganzzahligen Lösung ergibt, ist die Problemstellung gelöst. Wäre dies nicht der Fall (würde sich also der bessere Zielfunktionswert aus einer nicht ganzzahligen Lösung ergeben), dann müsste man das Verfahren wiederholen.

Der maximale Gewinn von 500 Euro wird erzielt, wenn man täglich 5 Stück von P_1 und 5 Stück von P_2 produziert.

Dieses Verfahren, das zur Lösung des obigen ganzzahligen linearen Optimierungsproblems verwendet wurde, wird *Branch & Bound –Verfahren* genannt (vgl. [11] S. 108-112).

Die Schülerinnen und Schüler werden mit solchen Aufgaben zwar im Folgenden nicht arbeiten, sollen aber immerhin wissen, dass es Problemstellungen gibt, für die ganzzahlige Lösungen wesentlich sind (z. B. Stückzahlen, volle Arbeitsstunden, usw.). Sie sollen also anhand dieses Beispiels einen Einblick in die Problematik und Komplexität bei linearen Optimierungsproblemen erhalten. Für Lehrerinnen und Lehrer ist es wichtig, dass sie bei der Auswahl bzw. Erstellung von linearen Optimierungsproblemen auf diese Problematik achten. Dies sollte aber normalerweise keine Schwierigkeiten bereiten, da die Aufgaben in den

Schulbüchern und Arbeitsblättern darauf abgestimmt sind. Als Hausübung sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 9 lösen.

7. Unterrichtsstunde (graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit drei Variablen, die sich auf lineare Optimierungsprobleme mit zwei Variablen zurückführen lassen)

In dieser Unterrichtsstunde sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man ein lineares Optimierungsproblem mit drei Variablen auf ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen zurückführen kann (wenn unter den Restriktionen eine Gleichung vorkommt). Dabei wird auch gleich als Ausblick erwähnt, dass sich die graphische Lösung von linearen Optimierungsproblemen mit einer Variablenanzahl ≥ 3 als äußerst mühsam gestaltet (wenn unter den Nebenbedingungen keine Gleichung vorkommt) und daher solche Problemstellungen nicht mehr graphisch sondern rechnerisch gelöst werden. Danach wird Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 5 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern modelliert und auf ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen zurückgeführt. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler die Problemstellung selbstständig in GeoGebra lösen (wie Beispiel 5.2.3). Weiters sollen für den Rest der Unterrichtsstunde die anderen beiden Aufgaben des fünften Arbeitsblatts durchgearbeitet werden.

8. Unterrichtsstunde (Sonderfälle beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen)

Zunächst lässt man die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 6 lösen. Dabei sollen sie feststellen, dass es keine eindeutige Lösung für diese Problemstellung gibt, weil eine Nebenbedingung dieselbe Steigung wie die Zielfunktion hat (die beiden Geraden also parallel sind). Danach wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie in GeoGebra alle Lösungen bestimmt werden können (wie in Abschnitt 5.2, Sonderfall 1). Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 2 lösen. Sie sollen dabei feststellen, dass die Zielfunktionsgerade beliebig weit parallel verschoben und dadurch der Zielfunktionswert beliebig groß werden kann, dass also keine konkrete optimale Lösung für die Problemstellung existiert (siehe Abschnitt 5.2, Sonderfall 2). Im nächsten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 3 lösen (was ihnen sicher keine Probleme bereitet). Hier sollen sie aber darauf hingewiesen werden, dass sie das Ungleichungssystem auf Minimalität zu überprüfen haben (falls sie die Überprüfung nicht bereits selbstständig durchgeführt haben). Anschließend sollen sie das zum Ungleichungssystem minimale äquivalente System angeben und die Problemstellung anhand dieses Ungleichungssystems lösen (wie in Abschnitt 5.2, Sonderfall 3). Den Schülerinnen und Schülern soll damit verdeutlicht werden, dass der Sonderfall genau dann eintritt, wenn sich in einem Eckpunkt des Zulässigkeitsbereichs mehr als zwei Randgeraden schneiden. Als Hausübung sollen die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben 4 und 5 von Arbeitsblatt 6 lösen.

- **Wahlpflichtfach Mathematik in der AHS-Oberstufe**

Wie zuvor schon erwähnt wurde, wird die lineare Optimierung im Lehrplan für das Wahlpflichtfach Mathematik in der AHS-Oberstufe bei den zusätzlichen möglichen Themenbereichen angeführt. In der folgenden Unterrichtssequenz wird davon ausgegangen, dass die lineare Optimierung noch nicht im Regelunterricht vorgekommen ist. Andernfalls können die entsprechenden Unterrichtsstunden weggelassen und ein späterer Einstieg in das Thema gewählt werden.

Die Unterrichtssequenz wird zunächst in drei Teile gegliedert. Der erste Teil beschäftigt sich mit den mathematischen Grundlagen, welche für die lineare Optimierung wesentlich sind. Dazu kann analog wie im ersten Teil der Unterrichtssequenz für den Regelunterricht vorgegangen werden, wobei aber noch zwei weitere Unterrichtsstunden eingeschoben werden. Eine Unterrichtsstunde beschäftigt sich mit dem graphischen Darstellen bzw. Bestimmen der Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen in Maple. Zunächst wird den Schülerinnen und Schülern die Vorgehensweise in Maple an einem Beispiel (wie in Beispiel 2.3.2 oder 2.3.3) demonstriert. Dabei muss aber darauf hingewiesen werden (wie bereits auch in Bemerkung 2.3.2 erwähnt wurde), dass bei der graphischen Darstellung der Zeichenbereich (Bildausschnitt) manuell festgelegt werden muss. Dies kann den Schülerinnen und Schülern am besten verdeutlicht werden, indem man sie Aufgabe 5 bis 8 von Arbeitsblatt 1 lösen lässt, denn dabei müssen sie durch Experimentieren und gezieltes Probieren selbstständig geeignete x_1-, x_2- und x_3-Bereiche bestimmen. Aufgabe 9 soll in Partnerarbeit bearbeitet und schließlich auch von einem Team präsentiert werden. Abschließend wird das Ergebnis in der Klasse diskutiert. Die Behandlung von Aufgaben im $\mathbb{R}^3$ dient dabei als Vorbereitung auf die Veranschaulichung des Zulässigkeitsbereichs eines linearen Ungleichungssystems mit drei Variablen (wie in Beispiel 4.2.3). Es können zwar lineare Optimierungsprobleme mit drei Variablen nicht graphisch gelöst werden, die Schülerinnen und Schüler sollen aber zumindest wissen, wie der Zulässigkeitsbereich einer dreidimensionalen Problemstellung aussieht. Weiters soll durch die Möglichkeit der Rotation einer Grafik in Maple das räumliche Vorstellungsvermögen geschult werden.

Die andere Unterrichtsstunde behandelt vorwiegend das rechnerische Lösen von Gleichungssystemen mithilfe von Algorithmen. Dabei soll vor allem die Matrizenschreibweise bzw. die Tableauschreibweise im Sinne formal-operativen Arbeitens (Simplex-Algorithmus) erlernt werden. Dazu wird zunächst die Definition einer Matrix (siehe Definition 3.1.1) eingeführt, da Matrizen für die Tableauschreibweise und für die Formulierung des Lösungsalgorithmus (Simplex-Algorithmus) benötigt werden. Weiters werden die Begriffe Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix erklärt und so ein Bezug zu linearen Gleichungssystemen hergestellt. Anschließend wird von den Schülerinnen und Schülern Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 2 gelöst, wodurch die beiden Begriffe verdeutlicht werden. Im nächsten Schritt wird zum rechnerischen Lösen von Gleichungssystemen mithilfe des Gauß- bzw. des Gauß-Jordan-Algorithmus übergegangen. Hier wird den Schülerinnen und Schülern zunächst an einem Beispiel demonstriert, wie ein lineares Gleichungssystem in Form eines Tableaus angeschrieben werden kann und es werden die beiden Algorithmen (Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus) eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann Aufgabe 2 a) durch Verwendung der beiden Algorithmen lösen. Im Zuge des Lösungsprozesses wird auch gleich erwähnt, dass die beiden Algorithmen bzw. die Gestalt der Matrizen, welche man nach Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus erhält, für den Simplex-Algorithmus wesentlich werden. Anschließend wird der Rang einer Matrix definiert und den Schülerinnen und Schülern gezeigt, dass sich mithilfe der beiden Algorithmen auch der Rang einer Matrix bestimmen lässt. Es soll schließlich herausgearbeitet werden, dass durch die Rangbestimmung Aussagen über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen getroffen werden können (siehe Satz 3.4.2). Daraufhin sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 2 b) lösen. Da die Verwendung der beiden Algorithmen mit einigermaßen viel Rechenaufwand verbunden ist, wird ihnen abschließend demonstriert, wie lineare Gleichungssysteme als Matrizen in Maple implementiert und mithilfe geeigneter Befehle gelöst werden können (wie in den Beispielen 3.6.1 und 3.6.2). Dies soll schließlich von den Schülerinnen und Schülern auch selbstständig in Maple (durch Bearbeitung von Aufgabe 3) durchgeführt werden.

Der zweite Teil der Unterrichtssequenz beschäftigt sich mit dem graphischen Lösen linearer Optimierungsprobleme mit zwei bzw. in besonderen Fällen mit drei Variablen in GeoGebra. Dabei geht es vor allem darum, dass der Modellbildungsprozess (das Abstraktionsvermögen und das problemlösende Verhalten bei der mathematischen Modellierung einer Problemstellung), sowie das graphische und dynamische Lösen von linearen Optimierungsproblemen geschult wird. Weiters werden auch die Sonderfälle thematisiert, welche beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen auftreten können. Dazu kann analog wie im Regelunterricht vorgegangen werden (siehe Unterrichtssequenz Regelunterricht).

Im dritten Teil der Unterrichtssequenz geht es darum, den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, wie man lineare Optimierungsprobleme auch rechnerisch lösen kann (Simplex-Algorithmus). Denn für lineare Optimierungsprobleme, die mehr als zwei Variablen besitzen, ist normalerweise (wenn unter den Restriktionen keine Gleichung auftritt) keine graphische Lösung möglich. Dabei soll den Schülerinnen und Schülern zunächst verdeutlicht werden, wie lineare Optimierungsprobleme in eine einheitliche Form übergeführt werden können, damit sich die Problemstellungen schließlich rechnerisch lösen lassen (also der Lösungsalgorithmus formuliert werden kann). Weiters werden wichtige Begriffe (Schlupfvariable, Basislösung, Basisvariable, primal zulässig, …) und Algorithmen (primaler Simplex-Algorithmus, Algorithmus zum Basistausch, Transformationsalgorithmus) zum rechnerischen Lösen linearer Optimierungsprobleme eingeführt. Auch die Einsatzmöglichkeiten des Computers (Simplex-Tool und Online Simplex Instructor) werden aufgezeigt und genutzt. Die Verwendung des Computers eröffnet die Chance auf verstärktes Analysieren von Lösungsschritten, Interpretieren von Lösungen, also auf darstellend-interpretierendes Arbeiten, da durch die Nutzung dieser Programme nicht mehr der algorithmisch-kalkülhafte Teil im Vordergrund steht. Natürlich werden die verschiedenen Sonderfälle, welche beim Lösen von linearen Optimierungsproblemen eintreten können, auch bei der Verwendung des Simplex-Algorithmus betrachtet.

1. Unterrichtsstunde (Normalform von linearen Optimierungsproblemen)

Da lineare Optimierungsprobleme mit mehr als zwei Variablen im Allgemeinen (wenn unter den Restriktionen keine Gleichung auftritt) nicht mehr graphisch gelöst werden können, müssen diese auf eine einheitliche Form (Normalform) gebracht werden (um den Lösungsalgorithmus formulieren zu können). Daher wird auch gleich zu Beginn der Unterrichtstunde die Normalform für lineare Optimierungsprobleme thematisiert und alle dazu notwendigen Transformationsschritte werden erklärt. Dabei soll von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden, dass bei der Überführung eines linearen Optimierungsproblems in Normalform die Schlupfvariablen eine wesentliche Rolle spielen. Weiters soll verdeutlicht werden, dass lineare Optimierungsprobleme in Normalform schließlich nur mehr Gleichungsrestriktionen besitzen. Diese Transformationsschritte werden dann beim Lösen der Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 7) konkret ausgeführt. Für die Bearbeitung der theoretischen

Aufgabenstellungen (Aufgabe 2 bis 4) sollen die entsprechenden Seiten aus Abschnitt 5.3 kopiert und an die Schülerinnen und Schüler verteilt werden. Anhand der Kopien sollen sie die Aufgaben in Partnerarbeit lösen. Abschließend werden die Ergebnisse der Ausarbeitungen in der Klasse verglichen und besprochen.

2. Unterrichtsstunde (Normalform von linearen Optimierungsproblemen – Fortsetzung)

Zu Beginn werden die Begriffe Basislösung, zulässige Basislösung, Basisvariable und Nichtbasisvariable eingeführt und besprochen (siehe Definition 5.4.2). Diese wichtigen Begriffe sollen von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit (kurz) schriftlich zusammengefasst und damit gefestigt werden, denn diese Begriffe sind für das weitere Vorgehen wesentlich. Anschließend wird ein erster Lösungsalgorithmus (siehe Abschnitt 5.4) vorgestellt und die Schülerinnen und Schüler sollen Aufgabe 5 durch Verwendung des Algorithmus und Maple lösen (wie Beispiel 5.4.1). Bei der Bearbeitung von Aufgabe 5 d) sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die zulässigen Basislösungen mit den Eckpunkten des Zulässigkeitsbereichs korrespondieren. Weiters soll ihnen bei der Lösung von Aufgabe 5 deutlich werden, dass die Verwendung dieses Algorithmus mit hohem Rechenaufwand verbunden ist. Hier soll dann als Ausblick bzw. Motivation erwähnt werden, dass sich schließlich der Rechenaufwand bei der Verwendung des Simplex-Algorithmus deutlich reduzieren wird, da dieser bei der Lösungsbestimmung geschickt vorgeht.

3. Unterrichtsstunde (Simplex-Algorithmus)

Zunächst wird den Schülerinnen und Schülern ein kurzer Überblick über die Geometrie von linearen Optimierungsproblemen (also die geometrische Form des Zulässigkeitsbereichs) gegeben und dabei werden auch die beiden Folgerungen von Satz 5.5.1 vorgestellt. Mithilfe dieser Folgerungen soll den Schülerinnen und Schülern dann verdeutlicht werden, warum beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsproblemen (im zweiten Teil der Unterrichtssequenz) die optimale Lösung jeweils an einem Eckpunkt angenommen wurde. Anschließend wird der Simplex-Algorithmus vorgestellt. Dabei soll den Schülerinnen und Schülern zunächst erklärt werden, wie der Simplex-Algorithmus bei der Lösungsbestimmung vorgeht. Dies soll dann auch als Hilfe bei der Recherche im Internet bzw. Bearbeitung von Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 8) dienen. Hier ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Algorithmus auf den bisher gewonnen Kenntnissen basiert (er arbeitet sich geschickt von einer Ecke bis zur optimalen Ecke vor). Als Vorbereitung auf den Simplex-Algorithmus wird dann das Simplex-Tableau bzw. die Tableauschreibweise eines linearen Optimierungsproblems eingeführt, wobei hier auch auf die Struktur bzw. Anordnung der

Information, welche das Tableau beinhaltet, näher eingegangen wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei Parallelen zu den Tableaus, die beim Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus aufgetreten sind, erkennen. Im nächsten Schritt wird der Begriff primal zulässig eingeführt und den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie die zugehörige Basislösung eines Simplex-Tableaus bestimmt werden kann. Hier ist es vor allem wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen und erkennen, welche Information die Simplex-Tableaus darstellen und welche Eigenschaften ein Tableau besitzen muss, damit es primal zulässig ist. Abschließend soll Aufgabe 2 gelöst werden.

4. Unterrichtsstunde (Simplex-Algorithmus – Fortsetzung)

Um die Lösung von Aufgabe 3 vorzubereiten, wird der Algorithmus zum Basistausch bzw. der primale Simplex-Algorithmus eingeführt. Beim Lösen der dritten Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wie sich der Simplex-Algorithmus zur optimalen Lösung vorarbeitet. Dazu sollen die Basislösungen, welche durch die einzelnen Simplex-Tableaus dargestellt werden, graphisch interpretiert werden (siehe Abbildung 5.6.2). Für den Rest der Unterrichtsstunde soll gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vorgehensweise des Simplex-Algorithmus bzw. die einzelnen Simplex-Tableaus in Aufgabe 3 ökonomisch analysiert (Auswahl des Pivotelements, Basiswechsel) werden (also Aufgabe 4 gelöst werden). Die Schülerinnen und Schüler sollen dadurch ein tieferes Verständnis für den Simplex-Algorithmus gewinnen.

5. Unterrichtsstunde (Simplex-Tool in Microsoft Excel)

In dieser Unterrichtsstunde soll die Möglichkeit eines Computereinsatzes aufgezeigt werden, indem das Simplex-Tool anhand eines Beispiels vorgestellt wird. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 9 lösen. Das Simplex-Tool eignet sich meiner Meinung nach sehr gut für den Einsatz im Unterricht, da sich damit Simplex-Tableaus in einfacher Art und Weise implementieren lassen und die Bedienung des Tools sehr schnell erlernt werden kann. Weiters steht dann durch die Verwendung des Simplex-Tools nicht mehr der algorithmisch-kalkülhafte Teil im Vordergrund, sondern das Verstehen und Interpretieren des Simplex-Algorithmus anhand von Aufgabenstellungen. Beim Lösen von Aufgabe 2 sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass kein primal zulässiges Simplex-Tableau vorliegt, da die Voraussetzungen dafür nicht erfüllt sind (siehe Abschnitt 5.6.1). D. h. auch, dass keine zulässige Ausgangs- bzw. Basislösung vorliegt und der Koordinatenursprung als Ecklösung ausgeschlossen wird. Damit solche Problemstellungen gelöst werden können, müssen Transformationen durchgeführt werden, welche ein nicht primal zulässiges Tableau in ein primal zulässiges Tableau mit zulässiger Basislösung umwandeln. Dazu wird der Transformations-Algorithmus im Unterricht eingeführt. Durch Verwendung des Transformations-Algorithmus und des Simplex-Tools sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 2 vollständig lösen. Als Hausübung sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgabe 3 lösen.

6. Unterrichtsstunde (Sonderfälle beim Simplex-Algorithmus)

In dieser Unterrichtsstunde soll aufgezeigt werden, wie sich die einzelnen Sonderfälle auf den Simplex-Algorithmus auswirken bzw. wie sich diese im Simplex-Tableau bemerkbar machen (Erkennungsmerkmale). Dabei wird auf jene Aufgaben zurückgegriffen, mit denen die Sonderfälle bereits graphisch gezeigt wurden. Das Eintreten der einzelnen Sonderfälle kann man den Schülerinnen und Schülern schließlich am besten verdeutlichen, indem man sie die Aufgaben 1 bis 3 von Arbeitsblatt 10 lösen lässt. Während des Lösungsvorgangs wird dann gezielt auf die einzelnen Erkennungsmerkmale hingewiesen. Diese werden anschließend in der Klasse analysiert und diskutiert. Abschließend sollen die Schülerinnen und Schüler die Erkennungsmerkmale jedes Sonderfalls (kurz) schriftlich zusammenfassen.

7. (und 8.) Unterrichtsstunde (Online Simplex Instructor)

Zum Schluss der Unterrichtssequenz wird den Schülerinnen und Schülern der Online Simplex Instructor anhand eines Beispiels vorgestellt (wie in Beispiel 5.6.3.1). Das Besondere am OSI ist, dass dieser sehr einfach zu bedienen ist und man bei den einzelnen durchzuführenden Schritten Hilfestellungen und Rückmeldungen erhält. Weiters werden (wenn gewünscht) die einzelnen Auswahl- und Rechenschritte dokumentiert, womit die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen weiter vertiefen können. Der OSI eignet sich daher auch hervorragend zum Selbststudium von linearen Optimierungsproblemen. Weiters kann man den OSI als Zusammenfassung des zweiten und dritten Teils der Unterrichtssequenz auffassen, da in ihm alle gewonnen Kenntnisse (graphische und algebraische) über lineare Optimierungsprobleme Anwendung finden. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann mithilfe des OSIs die Aufgaben von Arbeitsblatt 11 lösen. Auch die Sonderfälle, welche im Zuge der Unterrichtssequenz vorgekommen sind, sollen von den Schülerinnen und Schülern im OSI implementiert werden. Damit soll ihnen verdeutlicht werden, wie das Programm auf Sonderfälle reagiert bzw. welche Rückmeldung man erhält. Weiters sollen die Schülerinnen und Schüler durch Experimentieren und gezieltes Probieren (Veränderung der Koeffizienten der Zielfunktion oder der Nebenbedingungen an bereits gelösten Beispielen) weitere eigene Erfahrungen machen.

Bemerkung

In den einzelnen Unterrichtsstunden, in denen das Rechnen mit Algorithmen behandelt wurde, kann auch fächerübergreifender Unterricht mit Informatik erfolgen, indem man die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Algorithmen in einer beliebigen Programmiersprache implementieren lässt. Dies ermöglicht eine vertiefende Auseinandersetzung mit den Algorithmen, was zur Festigung bzw. Einprägung dieser im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler beitragen kann.

Anhang

Arbeitsblatt 1

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen

1.) Ermittle die Lösungsmenge der Gleichungssysteme graphisch in GeoGebra (G=$\mathbb{R}^2$)!

a) $\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 &= 21 \\ x_1 - \quad x_2 &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 3 \\ -10\cdot x_1 - 4\cdot x_2 &= -8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 &= -10 \\ -6\cdot x_1 - 15\cdot x_2 &= 30 \end{aligned}$

2.) Ergänze die unvollständig angegebene Gleichung so, dass das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar ist, also insbesondere unendlich viele Lösungen besitzt!

a) $\begin{aligned} 4\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 16 \\ \text{........} \quad &= 8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 - 2\cdot x_2 &= 4 \\ \text{........} \quad &= -12 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 5\cdot x_1 - 6\cdot x_2 &= 10{,}5 \\ \text{........} \quad &= 7 \end{aligned}$

3.) Ergänze die unvollständig angegebene Gleichung so, dass das Gleichungssystem unlösbar, also die Lösungsmenge leer ist!

a) $\begin{aligned} 5\cdot x_1 + 7\cdot x_2 &= 7 \\ x_1 \text{......} \quad &= \text{...} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6\cdot x_1 + 3\cdot x_2 &= -6 \\ -x_1 \text{......} \quad &= \text{...} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4\cdot x_1 - 5\cdot x_2 &= -8 \\ \text{......} + \quad x_2 &= \text{...} \end{aligned}$

4.) Beschreibe mit eigenen Worten, welche Fälle beim Lösen der linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen in Aufgabe 1 aufgetreten sind!

(Weitere Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Variablen findet man in [1] S. 134-140 und [8] S. 183-192.)

Lineare Gleichungssysteme mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen

5.) Ermittle die Lösungsmenge der Gleichungssysteme graphisch in Maple ($G=\mathbb{R}^3$)!

a) $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + x_3 &= 8 \\ -2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 5\cdot x_3 &= 8 \\ 12\cdot x_1 - 9\cdot x_2 + 15\cdot x_3 &= 24 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 3\cdot x_3 &= 7 \\ 10\cdot x_1 - 15\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6.) Gib eine Gleichung an, sodass das Gleichungssystem unlösbar ist, also die Lösungsmenge leer ist!

a) $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 &= 6 \\ \text{........} \quad &= \ldots \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 &= 0 \\ \text{........} \quad &= \ldots \end{aligned}$$

7.) Gib eine Gleichung an, sodass das Gleichungssystem eine zweiparametrige Lösungsmenge besitzt!

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 &= 1 \\ \text{........} \quad &= \ldots \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - 8\cdot x_3 &= 3 \\ \text{........} \quad &= \ldots \end{aligned}$$

8.) Ermittle die Lösungsmenge der Gleichungssysteme graphisch in Maple ($G=\mathbb{R}^3$)!

a) $$\begin{aligned} 4\cdot x_1 - x_2 + 7\cdot x_3 &= -18 \\ -2\cdot x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 &= 12 \\ 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 &= 23 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 &= 5 \\ 9\cdot x_1 + x_2 - 4\cdot x_3 &= 23 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 &= 6 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 6 \\ 4\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 7\cdot x_3 &= 8 \end{aligned}$$

9.) Beschreibe prägnant mit eigenen Worten

a) welche Fälle beim Lösen der linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und drei Variablen in Aufgabe 5 eingetreten sind,

b) welche Fälle beim Lösen der linearen Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Variablen in Aufgabe 8 eingetreten sind.

(Weitere Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei (drei) Gleichungen und drei Variablen findet man in [1] S. 144-152 und [9] S. 103-110.)

Arbeitsblatt 2

Matrizen und Algorithmen

1.) Stelle die folgenden Gleichungssysteme in einer Matrizengleichung dar und gib auch die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix A' an!

a)
$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 &= 1 \\ 2\cdot x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 &= 7 \\ 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 3\cdot x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2.) Stelle die Gleichungssysteme in Aufgabe 1 durch ein Tableau dar!

a) Löse die Gleichungssysteme mithilfe des Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus!

b) Wie groß ist der Rang der Koeffizienten- bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix?

3.) Implementiere die Gleichungssysteme aus Aufgabe 1 in Maple und löse diese durch Verwendung der Befehle für den Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus!

Arbeitsblatt 3

Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

1.) Ermittle die Lösungsmenge der linearen Ungleichungen graphisch in GeoGebra und gib an, ob es sich dabei um eine offene oder abgeschlossene Halbebene handelt (G=$\mathbb{R}^2$)!

a) $x_1 \geq 0$ b) $-x_1 > 4$ c) $-x_1 < -2$

d) $x_2 > 0$ e) $x_2 \leq 0$ f) $-x_2 \geq -3$

2.) Gegeben ist die Ungleichung $\frac{3}{5} \cdot x_1 + x_2 \geq 3$, sowie die Punkte $A(2,1)$, $B(1,3)$, $C(5,0)$ und $D(-2,3)$.

a) Erfüllen die Koordinaten der Punkte A, B, C und D die Ungleichung?

b) Ermittle die Lösungsmenge für G=$\mathbb{R}^2$ graphisch in GeoGebra und zeichne die Punkte A, B, C und D ein!

3.) Wie wird die Lösungsmenge von Ungleichungssystemen genannt und welche geometrische Figur stellt die Lösungsmenge dar? Was gilt für alle Punkte (Lösungen) aus diesem Bereich?

4.) Ermittle den Zulässigkeitsbereich der Ungleichungssysteme graphisch in GeoGebra (G=$\mathbb{R}^2$)!

a) $$\begin{aligned} -3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 &\leq 9 \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\geq 7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{5} &< 0 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 &> 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 6 \\ -2 \cdot x_1 - x_2 &> 4 \\ x_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq -1 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 &< 8 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - 4 \cdot x_2 &< 0 \end{aligned}$$

5.) Überprüfe die Ergebnisse in Aufgabe 4, indem du die einzelnen Ungleichungssysteme in Maple implementierst und die Lösungsmengen graphisch darstellst!

6.) Überprüfe, ob es sich bei den Ungleichungssystemen in Aufgabe 4 um minimale Systeme handelt und ermittle gegebenenfalls das zugehörige minimale äquivalente Ungleichungssystem!

7.) Ermittle den Zulässigkeitsbereich des Ungleichungssystems graphisch in GeoGebra ($G=\mathbb{R}^2$)!

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + x_2 &\le 1 \\ -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 &\le 6 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Was passiert, wenn die Bedingungen $x_1 \ge 0$ und $x_2 \ge 0$ weggelassen werden?

8.) Ermittle den Zulässigkeitsbereich der Ungleichungssysteme graphisch in GeoGebra ($G=\mathbb{R}^2$)! Gib die Koordinaten der Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs an! Für welche Werte von x_1 und x_2 ist die Summe $s = x_1 + x_2$ minimal bzw. maximal?

a)
$$\begin{aligned} x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \\ 2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &\le 38 \\ x_1 + 3\cdot x_2 &\le 20 \\ 3\cdot x_1 + x_2 &\le 30 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \\ x_1 + 3\cdot x_2 &\le 21 \\ x_1 + x_2 &\le 10 \end{aligned}$$

(Weitere Aufgabe zu linearen Ungleichungen und Ungleichungssystemen findet man in [4] S. 9-15 und [8] S. 208-211.)

Arbeitsblatt 4

<u>Graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen</u>

1.) „Messing ist eine Legierung von Kupfer und Zink. Durch Zusammenschmelzen sollen zwei Messingsorten M_1 und M_2 hergestellt werden. M_1 soll 80% Kupfer und (daher) 20% Zink, M_2 60% Kupfer und (daher) 40% Zink enthalten. Insgesamt stehen 240 kg Kupfer und 110 kg Zink zur Verfügung. Beim Verkauf von 1 kg M_1 erzielt man einen Gewinn von 2 Euro, beim Verkauf von 1 kg M_2 einen Gewinn von 1,80 Euro. Wie viel kg jeder Sorte muss man herstellen, um beim Verkauf maximalen Gewinn zu erzielen“ (aus [8] S. 212f)?
Erstelle ein mathematisches Modell zu der Problemstellung und stelle den Zulässigkeitsbereich graphisch in GeoGebra dar!

2.) Erkläre kurz mit eigenen Worten die Begriffe Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!

3.) Wozu dienen die Nichtnegativitätsbedingungen und welche Auswirkungen hat es, wenn diese weggelassen werden?

4.) Gib eine zulässige und eine unzulässige Lösung für das lineare Optimierungsproblem aus Aufgabe 1 an! Warum ist die Lösung unzulässig?

5.) Überlege dir ein mathematisches Modell mit zwei Variablen und zwei Nebenbedingungen!

6.) Graphische und dynamische Lösung von Aufgabe 1 in GeoGebra:

a) Veranschauliche im gleichen Arbeitsblatt, in dem du den Zulässigkeitsbereich graphisch dargestellt hast, die Zielfunktionen mit den Zielfunktionswerten 0 und 1000!

b) Stelle noch zwei weitere Zielfunktionen mit selbst gewählten Zielfunktionswerten graphisch dar und zeichne auf jeder Geraden zwei Punkte aus dem Zulässigkeitsbereich ein! Was fällt dir dabei auf?

c) Löse nun das lineare Optimierungsproblem durch Verwendung eines Schiebereglers dynamisch! Welcher Wert (Variable) soll mit dem Schieberegler verändert werden? Welche Probleme können dabei auftreten?

d) Welcher Punkt des Zulässigkeitsbereichs stellt die optimale Lösung dar und wie groß ist dort der Gewinn?

7.) „Eine Automobilfabrik erzeugt Personenkraftwagen der Type A und der Type B. Täglich können höchstens 600 Stück der Type A und höchstens 400 Stück der Type B hergestellt werden. Die Reifenfabrik kann täglich höchstens 3500 Reifen liefern. Bei einem Fahrzeug der Type A werden 2a €, bei einem Fahrzeug der Type B 5a € verdient.

a) Ermittle wie viele Autos der Type A und wie viele Autos der Type B erzeugt werden müssen, wenn der Tagesgewinn möglichst groß sein soll!

b) Berechne die Höhe des maximalen Tagesgewinns“ (aus [8] S. 215)!

(Beachte: Jedes Auto wird mit einem Reserverad ausgeliefert.)

8.) „Ein Landwirt verfügt über zwei Sorten von Düngemitteln. Der jeweilige Gehalt (in Mengeneinheiten ME pro Sack) an Kalzium, Stickstoff und Phosphor ist in der nachstehenden Tabelle angegeben. Der Preis der 1. Sorte verhält sich zum Preis der 2. Sorte wie 3:7. Es soll eine möglichst billige Mischung der beiden Düngemittel hergestellt werden, welche die in der Tabelle angegebenen Mindestmengen an Kalzium, Stickstoff und Phosphor enthält" (aus [8] S. 218):

	1. Sorte (ME/Sack)	2. Sorte (ME/Sack)	Mindestgehalt der Mischung (ME)
Kalzium	5	2	24
Stickstoff	3	3	27
Phosphor	1	3	15

a) Erstelle ein mathematisches Modell zu der Problemstellung!

b) Löse das lineare Optimierungsproblem graphisch in GeoGebra!

c) Was sind prinzipielle Unterschiede zwischen Aufgabe 1 und dieser Aufgabe? Wie verändert das die Suche nach der optimalen Lösung?

9.) Drei Freundinnen beschließen, eine Party zu veranstalten. Sie wollen auf der Party ein Fruchtmischgetränk anbieten, das aus Apfel- und Birnensaft hergestellt wird. Die Mädchen rechnen mit einem Mindestverbrauch von 40 l, wobei sie noch 15 l Apfelsaft haben, die verbraucht werden sollen. Aus geschmacklichen Gründen sollte vom Birnensaft mindestens so viel wie vom Apfelsaft enthalten sein. Ist jedoch der Anteil vom Birnensaft mehr als doppelt so hoch wie vom Apfelsaft, so wird das Getränk unbekömmlich. Für einen Liter Apfelsaft müssen sie 1,20 Euro und für einen Liter Birnensaft 1,50 Euro zahlen.

Wie viel von jeder Sorte müssen sie für das Fruchtmischgetränk verwenden, um ihre Party möglichst kostensparend feiern zu können?

Löse das lineare Optimierungsproblem graphisch in GeoGebra!

(Weitere lineare Optimierungsprobleme mit zwei Variablen findet man in [1] S. 156-158, [3] S. 27f, [4] S. 16-47, [8] S. 212-220 und [11] S. 9-14.)

Arbeitsblatt 5

Graphisches Lösen von linearen Optimierungsproblemen mit drei Variablen, die sich auf lineare Optimierungsprobleme mit zwei Variablen zurückführen lassen

1.) „Zwei Verkaufsstellen (V_1, V_2) benötigen täglich durchschnittlich 30000 l Milch meist im Verhältnis 2:3. Sie werden von drei Auslieferungsstellen (A_1, A_2, A_3) beliefert. Die durchschnittlichen Tageslieferungen betragen: 7500 l von A_1, 9000 l von A_2 und 13500 l von A_3. Die Transportkosten in €/hl können aus der Tabelle entnommen werden:

	V_1	V_2
A_1	3	4,5
A_2	7,5	10,5
A_3	6	4,5

Wie viel Liter sollen von den einzelnen Auslieferungsstellen zu den beiden Verkaufsstellen geführt werden, damit die gesamten Transportkosten so gering wie möglich sind? Mit welchen Kosten muss mindestens gerechnet werden“ (aus [3] S. 28)?
Löse das lineare Optimierungsproblem graphisch in GeoGebra!

2.) „Ein Jungbauer möchte seinen landwirtschaftlichen Betrieb auf Fleischproduktion umstellen. Er möchte 100 Jungrinder so kostengünstig wie möglich anschaffen. Die jährlichen Futterkosten dürfen 35000 € nicht überschreiten. Es stehen drei Rassen A, B und C zur Verfügung. Dabei möchte er von der Rasse A mindestens 30 Stück und von der Rasse B mindestens 20 Stück erwerben.
Der Stückpreis für ein Rind der Rasse A, B bzw. C beträgt 300 €, 150 € bzw. 200 €.
Die jährlichen Futterkosten für die Rassen A, B und C belaufen sich auf 200 €, 450 € und 400 €.
Wie viele Rinder von jeder Rasse soll er unter den gegebenen Bedingungen anschaffen“ (aus [4] S. 31f)?
Löse das lineare Optimierungsproblem in GeoGebra!

3.) Unter welchen Voraussetzungen kann man ein lineares Optimierungsproblem mit drei Variablen graphisch lösen?

(Weitere lineare Optimierungsprobleme mit drei Variablen, die sich auf lineare Optimierungsprobleme mit zwei Variablen zurückführen lassen findet man in [3] S. 27f und [4] S. 29-33.)

Arbeitsblatt 6

Sonderfälle bei linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen

1.) Löse das folgende mathematische Modell eines linearen Optimierungsproblems graphisch in GeoGebra!

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 30 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 \leq 450$$
$$25 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \leq 480$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

a) Was fällt dir bei der Lösungsbestimmung auf?

b) Was unterscheidet diese Aufgabe von den bisherigen Aufgaben? Woran liegt das?

2.) Löse das folgende mathematische Modell eines linearen Optimierungsproblems in GeoGebra!

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 2{,}5 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$x_2 \geq 100$$
$$100 \cdot x_2 \leq 18000$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

a) Was fällt dir bei der Lösungsbestimmung auf?

b) Was unterscheidet diese Aufgabe von den bisherigen Aufgaben? Woran liegt das?

3.) Löse das folgende mathematische Modell eines linearen Optimierungsproblems in GeoGebra!

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 50 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$G=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

a) Was fällt dir bei der Lösungsbestimmung auf?

b) Was unterscheidet diese Aufgabe von den bisherigen Aufgaben? Woran liegt das?

4.) Ändere das mathematische Modell des linearen Optimierungsproblems in Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 4) so ab, dass die Lösung mehrdeutig wird!

5.) Erfinde ein mathematisches Modell, bei dem der Zielfunktionswert unbeschränkt ist!

Arbeitsblatt 7

<u>Normalform von linearen Optimierungsproblemen</u>

1.) Überführe die linearen Optimierungsprobleme aus Aufgabe 1 und 7 (Arbeitsblatt 4) und Aufgabe 2 (Arbeitsblatt 5) in Normalform!

2.) Aus welchem Grund werden lineare Optimierungsprobleme in Normalform übergeführt?

3.) Erkläre kurz mit eigenen Worten, was man unter der Normalform von linearen Optimierungsproblemen versteht!

4.) Welche beiden Arten von Variablen gibt es bei der Normalform von linearen Optimierungsproblemen?

5.) Bestimme mit dem zuvor vorgestellten Algorithmus alle Basislösungen des linearen Optimierungsproblems aus Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 4)!

a) Welche Basislösungen sind zulässig und welche sind unzulässig?

b) Welche zulässige Basislösung ergibt den optimalen Zielfunktionswert?

c) Zeichne nun die Basislösungen in jener Grafik ein, welche du zuvor in GeoGebra für die graphische Lösungsbestimmung erstellt hast!

d) Was fällt dir dabei auf?

Arbeitsblatt 8

Simplex-Algorithmus

1.) Finde durch Recherche im Internet heraus, was der Simplex-Algorithmus ist und wie er bei der Lösungsbestimmung vorgeht!

2.) Wie lautet das Simplex-Tableau des linearen Optimierungsproblems aus Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 4)? Ist es primal zulässig? Begründe!

3.) Bestimme nun die Lösung des linearen Optimierungsproblems aus Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 4) mittels des Simplex-Algorithmus und interpretiere die Vorgehensweise des Algorithmus anhand der Grafik, welche du in Aufgabe 6 (Arbeitsblatt 4) erstellt hast!

4.) Analysiere die Vorgehensweise des Simplex-Algorithmus bzw. die einzelnen Simplex-Tableaus in Aufgabe 3 ökonomisch (Auswahl des Pivotelements, Basiswechsel)!

Arbeitsblatt 9

Simplex-Tool in Microsoft Excel

1.) Bestimme die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems aus Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 4) mithilfe des Simplex-Tools!

2.) Wie lautet das Simplex-Tableau des linearen Optimierungsproblems aus Aufgabe 8 (Arbeitsblatt 4)?

a) Ist es primal zulässig? Begründe!

b) Was muss bei dieser Aufgabe zunächst durchgeführt werden, bevor die optimale Lösung mithilfe des Simplex-Algorithmus bestimmt werden kann?

c) Bestimme die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems mithilfe des Simplex-Tools!

3.) Wähle von Arbeitsblatt 4 oder 5 drei lineare Optimierungsprobleme aus und löse die Problemstellungen mithilfe des Simplex-Tools!

Arbeitsblatt 10

Sonderfälle beim Simplex-Algorithmus

1.) Löse das mathematische Modell des linearen Optimierungsproblems in Aufgabe 1 (Arbeitsblatt 6) durch Verwendung des Simplex-Tools! Woran erkennst du im Simplex-Tableau (Erkennungsmerkmale), dass es eine mehrdeutige Lösung gibt?

2.) Löse das mathematische Modell des linearen Optimierungsproblems in Aufgabe 2 (Arbeitsblatt 6) durch Verwendung des Simplex-Tools! Woran erkennst du im Simplex-Tableau (Erkennungsmerkmale), dass es keine Lösung gibt?

3.) Löse das mathematische Modell des linearen Optimierungsproblems in Aufgabe 3 (Arbeitsblatt 6) durch Verwendung des Simplex-Tools! Woran erkennst du im Simplex-Tableau (Erkennungsmerkmale), dass eine Degeneration eintritt?

Arbeitsblatt 11

Online Simplex Instructor

Bestimme die optimale Lösung der folgenden linearen Optimierungsprobleme mithilfe des OSIs!

1.) Ein Bauer möchte 40 Hektar seines Besitzes mit Getreide und Rüben bebauen. Bei Getreide liegt der Arbeitsaufwand bei 7 Stunden pro Hektar. Bei Rüben beträgt der Arbeitsaufwand 21 Stunden pro Hektar. Er kann neben seiner restlichen Arbeit höchstens 420 Stunden im Jahr aufwenden.
Der Anbau von 1 Hektar Getreide kostet 4000 Euro, der von 1 Hektar Rüben 7000 Euro. Der Bauer hat insgesamt 175000 Euro zur Verfügung.
Er hat beim Verkauf seiner Erzeugnisse pro Hektar einen Gewinn von 5000 Euro beim Getreide und 8000 Euro bei den Rüben.
Wie viel Hektar Getreide bzw. Rüben soll er anbauen, damit er möglichst hohen Gewinn erzielen kann?

2.) Eine Firma stellt zwei Typen von Kühlschränken her. Die Abteilung, die die Kühlaggregate herstellt, kann pro Woche höchstens 40 Kühlaggregate für Typ 1 oder 60 Kühlaggregate für Typ 2 oder eine entsprechende Linearkombination herstellen. Die Montageabteilung für den Typ 1 kann pro Woche maximal 30 Geräte und die Montageabteilung für Typ 2 kann pro Woche maximal 40 Geräte zusammenbauen.
Pro Woche können insgesamt höchstens 50 Geräte verkauft werden. Der Gewinn pro Gerät beträgt 60 Euro bei Typ 1 und 45 Euro bei Typ 2.
Wie viel Geräte von jedem Typ muss die Firma pro Woche herstellen, damit der Gewinn möglichst groß ist (vgl. [4] S. 25)?
Löse das lineare Optimierungsproblem graphisch durch Verschieben der Zielfunktionsgeraden in GeoGebra!

3.) Eine Frau möchte ihr erspartes Geld von 40 000 € in Wertpapiere anlegen. Dabei entscheidet sie sich für zwei Aktien A_1 und A_2. Die Aktie A_1 eines Telekommunikationsunternehmens kostet 25 € pro Anteil und die Aktie A_2 eines Mineralölkonzerns kostet 45 € pro Anteil. Die Jahresrendite der Aktie A_1 beträgt 2,50 € je Anteil und die der Aktie A_2 beträgt 4,80 € je Anteil. Aus Sympathiegründen beschließt die Frau, mindestens 100 Anteile von A_2 zu kaufen. Sie möchte jedoch maximal 18000 € in die Aktie A_2 investieren.

Wie viele Anteile jeder Aktie soll die Frau kaufen, damit sie unter den genannten Bedingungen eine möglichst hohe Rendite erzielt?

4.) Ein Cateringservice soll Geflügelragout an einen Kunden liefern. Der Kunde möchte, dass im Gericht mindestens 8 kg Hühnerfleisch, 11 kg Putenfleisch und 6 kg Entenfleisch enthalten sind. Das Cateringservice hat zwei Sorten von Geflügel-Mischfleisch vorrätig, von denen jede Packung folgende Gewichtsanteile der Fleischsorten enthält:

Fleischsorte	Geflügel-Mischfleischsorte G_1	Geflügel-Mischfleischsorte G_2
Hühnerfleisch	2 kg	1 kg
Putenfleisch	1 kg	4 kg
Entenfleisch	0 kg	4 kg

G_1 kostet 19 Euro und G_2 kostet 68 Euro je Packung. Wie viele Packungen jeder Sorte müssen geliefert werden, damit die Kosten für das Geflügelragout möglichst gering sind?

5.) „Eine Gärtnerei hat sich auf Kakteen spezialisiert. Für eine Neuzüchtung mischt sie drei Sorten Erde zusammen, deren Gehalt an den Nährstoffen A, B und C in Gramm (g) pro Mengeneinheit (ME) Erde und Sorte ganz unterschiedlich ist:

	E_1	E_2	E_3
Nährstoff A	4	5	8
Nährstoff B	1	1	2
Nährstoff C	5	3	4
Kosten € / ME	4,95	3,50	7

Zahlreiche Versuche haben gezeigt, dass der Bedarf an Nährstoff A in einer gegebenen Zeitspanne die Menge von 800 g nicht unterschreiten darf. Für Nährstoff B liegt die Grenze bei 280 g, für Nährstoff C bei 650 g. Für welches Mischungsverhältnis wird sich der Züchter entscheiden, wenn er den Nährstoffbedarf so kostengünstig wie möglich decken muss“ (aus [5] S. 6)?

Literaturverzeichnis

[1] Brunner H., Hinkelmann H.-D., Kunesch A., Reichel H.-C. (1995): Mathematik für Handelsakademien Teil 1 für den II. Jahrgang. Österreichischer Gewerbeverlag, Wien.

[2] Dantzig G. B. (1966): Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

[3] Fiala F., Moser W. (2000): Mathematik Matura-Aufgaben. öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co KG, Wien.

[4] Gerling E., Ott R. (2008): Mathematik für berufliche Gymnasien. Lineare Optimierung. Merkur Verlag, Rinteln.

[5] Koop A., Moock H. (2008): Lineare Optimierung. Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.

[6] Kowalsky H. J., Michler G. O. (2003): Lineare Algebra. Walter de Gruyter GmbH & Co, Berlin.

[7] Luenberger D. G. (2008): Linear and Nonlinear Programming. Springer Verlag, New York.

[8] Reichel H.-C., Müller R., Laub J., Hanisch G., Körperth W. (1992): Lehrbuch der Mathematik 5. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[9] Reichel H.-C., Müller R., Laub J., Hanisch G. (1999): Lehrbuch der Mathematik 6. öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co KG, Wien.

[10] Runzheimer B., Cleff T., Schäfer W. (2005): Operations Research 1. Lineare Planungsrechnung und Netzplantechnik. Gabler Verlag, Wiesbaden.

[11] Stingl P. (2002): Operations Research. Linearoptimierung. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München/Wien.

[12] Strang G. (2003): Lineare Algebra. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

[13] http://de.wikipedia.org/wiki/Operations_Research
(zugegriffen am 27.03.2009)

[14] http://www.bmukk.gv.at
(zugegriffen am 18.05.2009)

[15] http://www.abc.berufsbildendeschulen.at
(zugegriffen am 18.05.2009)

[16] http://www.mapleprimes.com/forum/howgraphset3dlinearinequalitiesmaple11,
(zugegriffen am 25.03.2009)

[17] http://de.wikipedia.org/wiki/Simplex_(Mathematik)
(zugegriffen am 23.06.2009)

[18] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Simplex-method-3-dimensions.png&filetimestamp=20061020223352
(zugegriffen am 11.05.2009)

[19] http://www.math.louisville.edu/~t0ried01/simplex.xls
(zugegriffen am 02.10.2008)

[20] http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/SimplexAlg.pdf
(zugegriffen am 21.05.2009)

[21] http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/InitOSI.html
(zugegriffen am 21.05.2009)

[22] http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/DokumentationOSI.html#1.1
(zugegriffen am 21.05.2009)

Zusammenfassung

Anhand dieser Diplomarbeit soll aufgezeigt werden, wie ein anwendungsorientierter Mathematikunterricht am Beispiel der linearen Optimierung erfolgen kann. Nach einem kurzen geschichtlichen Überblick und einer Einführung in die lineare Optimierung – insbesondere des Planungsprozesses – in Kapitel 1, werden in den darauf folgenden Kapiteln 2, 3 und 4 wichtige mathematische Grundlagen, auf denen die lineare Optimierung basiert, behandelt. Da der Computer heutzutage eine bedeutende Rolle spielt, werden bereits in den einführenden Kapiteln die Möglichkeiten eines Computereinsatzes durch die Verwendung von GeoGebra und Maple aufgezeigt. In Kapitel 5 werden vorerst lineare Optimierungsprobleme graphisch bzw. dynamisch mithilfe von GeoGebra gelöst. Anschließend wird thematisiert, wie lineare Optimierungsprobleme rechnerisch gelöst werden können. Dazu werden grundlegende Begriffe (Schlupfvariable, Normalform, Basislösung, Basisvariable) eingeführt, um schließlich den Lösungsalgorithmus (Simplex-Algorithmus) formulieren zu können. Es werden auch in diesem Kapitel die Möglichkeiten eines Computereinsatzes verdeutlicht. Hierzu wird das Simplex-Tool für Microsoft Excel und der Online Simplex Instructor (OSI) verwendet. Abschließend gibt es in Kapitel 6 ein Resümee und eine didaktische Analyse mit einem Unterrichtsvorschlag. Im Anhang werden schließlich diverse Arbeitsblätter für Unterrichtseinheiten bereitgestellt. Es ist auch eine CD-ROM beigelegt, auf der alle Beispiele zu finden sind, welche in der Arbeit mit einem Computerprogramm gelöst wurden.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Vor- und Zuname:	Christian Schreiner
Adresse:	7212 Forchtenstein, Wulkalände 72
Geburtsdatum:	20. März 1984
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Familienstand:	ledig
Religionsbekenntnis:	römisch-katholisch
Eltern:	Richard Schreiner, geboren am 25. März 1960 Romana Schreiner, geboren am 15. März 1964

Schulausbildung

1990 bis 1994	Volksschule in Forchtenstein
1994 bis 2002	BRG Mattersburg (Matura mit ergänzendem Unterricht in Biologie)
2002 bis 2003	Zivildienst in Pöttsching (Kinderdorf)
2003 bis 2009	Studium an der Universität Wien und Technischen Universität Wien – Lehramt Mathematik und Lehramt Informatik und Informatikmanagement

Praktische Erfahrung

August 2002	ORF Landestudio Burgenland (Abteilung Marketing)
August 2005	ORF Landestudio Burgenland (Abteilung Marketing)
August bis September 2006	ORF Landestudio Burgenland (Abteilung Marketing)
August bis September 2007	ORF Landestudio Burgenland (Abteilung Marketing)
August bis September 2008	ORF Landestudio Burgenland (Abteilung Marketing)