universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Treefrog im Mathematikunterricht
Analyse eines Übungsprogramms für elementare Algebra

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Verfasserin:	Martina Lemmé
Matrikelnummer:	0102619
Studienrichtung:	Lehramt UF Mathematik UF Chemie
Betreuerin:	Dr. Anita Dorfmayr

Wien, Oktober 2009

Danksagung

Beim Erstellen dieser Arbeit wurde ich von vielen Menschen unterstützt. Ihnen möchte ich hiermit danken:

Frau Dr. Dorfmayr, meiner Betreuerin, für die Anregung, mich mit dem Programm Treefrog auseinanderzusetzen und die Unterstützung in den Monaten der Arbeit.

Frau Mag. Aichinger und Herrn Mag. Langensteiner vom BRG Enns und Herrn Mag. Spruzina vom BG Steyr Werndlpark für das Ermöglichen der Untersuchung von Treefrog in den Schulklassen.

Meinem Freundeskreis und meiner Familie, die immer für mich da waren, wenn ich sie benötigt habe. Besonders meinen Brüdern, die mir bei zahlreichen EDV-Problemen geholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Auf einem Aushang an der Fakultät für Mathematik wurden Interessenten bzw. Interessentinnen gesucht, die das Programm „Treefrog“ im Rahmen einer Diplomarbeit übersetzen wollten. Davon fühlte ich mich sehr angesprochen, da ich mich sehr für den EDV-Einsatz im Mathematikunterricht interessiere. Aus diesem Grund nahm ich Kontakt mit Anita Dorfmayr auf. Nachdem ich mir das Programm etwas näher angeschaut hatte, entschied ich, mich mit dem Thema näher auseinanderzusetzen.

Zu Beginn meiner Arbeit möchte ich eine kurze Einführung zum Thema EDV-Einsatz im Mathematikunterricht geben. Danach soll Treefrog, ein Übungsprogramm für elementare Algebra besprochen werden. Dieses wurde von Paul Strickland von der Liverpool John Moores Universitity entwickelt und im Rahmen dieser Arbeit von mir vom Englischen ins Deutsche übersetzt.

Der Einsatz von Treefrog im Mathematikunterricht wurde in der siebenten und neunten Schulstufe in der AHS untersucht. Informationen dazu finden sich im Kapitel „Testeinsatz in der Schule“. In den dritten Klassen wählte ich das Thema lineare Gleichungen und in den fünften quadratische Gleichungen. Zu diesen Themen wird ein kurzer Einblick geboten, wie diese in Schulbüchern besprochen werden. Die Ergebnisse der Untersuchung in der Schule finden sich in den Kapiteln Auswertung der Testergebnisse und Auswertung der Fragebögen.

2. EDV-Einsatz im Mathematikunterricht

Dieses Kapitel beruht mit Ausnahme des Teils zum EDV-Einsatz im Lehrplan im wesentlichen auf zwei Quellen: Dem Buch „Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen“ [6], das auf Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt basiert und sich dem Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) widmet. Als weitere Quelle dient der Rechenschaftsbericht des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ [1], das den Einsatz von Lernpfaden untersucht hat, bei denen neben CAS auch andere Programme, wie zum Beispiel Dynamische Mathematiksoftware, Tabellenkalkulationen und Flash-Animationen, eingesetzt wurden.

2.1. *EDV-Einsatz im Lehrplan*

Im Lehrplan der AHS findet man die Forderung nach dem Einsatz von neuen Technologien bereits in der Unterstufe. Unter dem Punkt „Bildungs- und Lehraufgabe“ heißt es:

> *Die Schülerinnen und Schüler sollen [...]verschiedene Technologien (zB Computer) einsetzen können.*
> *[Lehrplan Mathematik Unterstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf; 3.2.2009]*

Diese Forderung scheint einen so hohen Stellenwert zu haben, dass sie in einem eigenen Absatz genauer erläutert wird:

> ***Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer:***
> *Grundsätzlich sind schon ab der 1. Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbanken, ...) gegeben. Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen.*

Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.

[Lehrplan Mathematik Unterstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf; 3.2.2009]

In der Praxis wird, wie zum Beispiel in den Versuchsklassen (siehe Kapitel 4. Testeinsatz in der Schule) oft nur ein einfacher Taschenrechner zum numerischen Rechnen eingesetzt.

Im Lehrplan der AHS-Oberstufe findet man neben der Forderung

Die Beschaffung, Verarbeitung und Bewertung von Informationen hat auch mit Büchern (zB dem Schulbuch), Zeitschriften und mit Hilfe elektronischer Medien zu erfolgen.

[Lehrplan Mathematik Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf; 3.2.2009]

vor allem den Absatz:

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.

[Lehrplan Mathematik Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf; 3.2.2009]

Aus persönlichen Gesprächen mit einigen Maturanten und Maturantinnen liegt die Vermutung nahe, dass es allgemein viele Schüler und Schülerinnen gibt, welche noch nie mit einem CAS gearbeitet haben und denen auch dynamische Mathematiksoftware unbekannt ist. Auch Tabellenkalkulationen sind oft nicht aus dem Mathematikunterricht, sondern nur durch den Einsatz in anderen Fächern, wie zum Beispiel Chemie, bekannt.

2.2. Problemlöseprozess

Im Buch „Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen“ [6] wird das Problemlösen als eine der wichtigsten Fähigkeiten, welche die Schüler und Schülerinnen in Mathematik lernen sollen, angeführt. Dabei wird zwischen Aufgabe und Problem unterschieden. Während bei einer Aufgabe nur das Üben eines bekannten Algorithmus verlangt wird, ist ein Problem komplexer und der Schüler bzw. die Schülerin muss erst Strategien entwickeln, um es zu lösen. Dabei kann auf bekannte Algorithmen zurückgegriffen oder es können aus vorhandenen Regeln neue entwickelt werden. Der Unterschied zwischen Aufgabe und Problem wird am Beispiel einer quadratischen Gleichung erläutert: Um eine Aufgabe handelt es sich, wenn es nur darum geht, das Einsetzen in eine Lösungsformel zu üben. Ein Problem liegt vor, wenn die Schüler und Schülerinnen erst eine Lösungsstrategie entwickeln müssen, wie zum Beispiel das Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat – ohne Vorkenntnis dieses Lösungsweges.

2.2.1. Buchbergersche Kreativitätsspirale

Den Prozess des Problemlösens bzw. Lernens in der Mathematik lässt sich – wie in Abbildung 1 zu sehen ist – als Spirale darstellen (vergleiche [1] und [6]). Diese veranschaulicht nicht nur, wie die Entwicklung in der Mathematik vor sich geht, sondern auch, wie sie im Unterricht sein könnte.

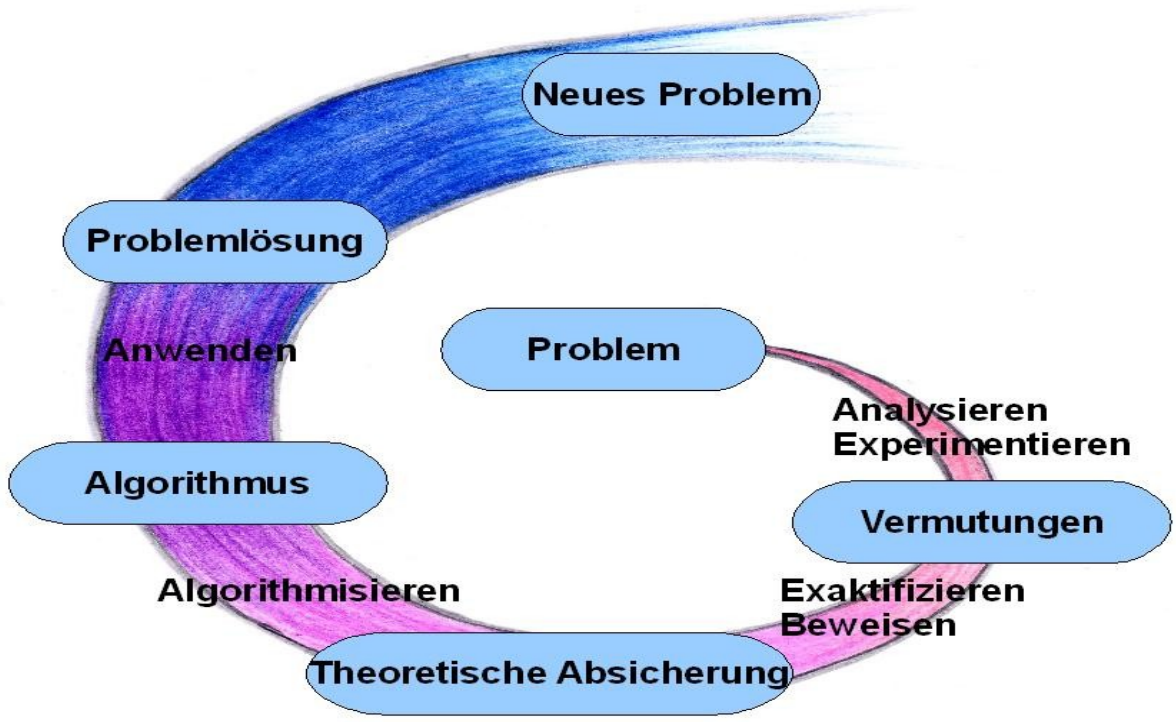


Abbildung 1: Buchbergersche Kreativitätsspirale

Am Anfang steht ein Problem, das mit bekannten Methoden nicht gelöst werden kann. Dieses kann eine einführende Aufgabe sein oder es kann sich auch um Beobachtungen oder gesammeltes Datenmaterial handeln. Um dieses neue Problem zu bearbeiten braucht man neue Algorithmen und Begriffe. Durch Analysieren und Experimentieren gelangt man zu ersten Vermutungen, das heißt, zu ersten Ideen für Regeln. Dieser Vorgang wird als heuristische Phase bezeichnet.
Ist eine Vermutung gefunden, muss diese exaktifiziert und bewiesen bzw. begründet werden. Diese theoretische Absicherung wird als exaktifizierende Phase bezeichnet. Ziel dieser Phase ist von einer Vermutung auf einen korrekten Beweis zu kommen. Teil dieser Phase ist auch aus dem erworbenen Wissen Algorithmen zu entwickeln, die zum Lösen des Problems nötig sind. Diese müssen im Anschluss daran auch getestet werden.
In der dritten Phase, der so genannten Anwendungsphase, sollen die gefundenen Algorithmen, Formeln und Regeln zur Lösung von Problemen verwendet werden.
Schließlich gerät man zu neuen komplexeren Problemstellungen, die nicht mit bereits bekannten Verfahren gelöst werden können und der Spiraldurchlauf beginnt von vorne. Auf diese Weise werden immer neue Vorgehensweisen dazugelernt und der Wissensstand erweitert.

Diese Phasen werden im folgenden genauer besprochen:

Heuristische Phase

Stößt man auf ein Problem, das mit bekannten Algorithmen nicht zu lösen ist, müssen neue Lösungswege gefunden werden. Beim Aufstellen von Vermutungen führt sinnloses Herumraten meist nicht zum Erfolg, sondern es muss gezielt vorgegangen werden. Zuerst wird das Problem analysiert und dann werden verschiedene Strategien angewandt um eine Vermutung zu erlangen. Mögliche Arbeitstechniken sind das Schließen von besonderen Fällen auf Allgemeines, systematisches Probieren und die Versuch-Irrtumsmethode.

Das Nutzen von heuristischen Methoden wird bereits im Lehrplan der AHS-Unterstufe gefordert. Insbesondere ist im Abschnitt „Bildungs- und Lehraufgabe" zu lesen:

> *Die Schülerinnen und Schüler sollen durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben.*
>
> *[Lehrplan Mathematik Unterstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf; 3.2.2009]*

Auch im Lehrplan der AHS-Oberstufe wird gefordert „Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret-anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln". Insbesondere findet man im Abschnitt „Mathematische Kompetenzen":

> *Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten: [...]*
>
>> ***Experimentell - heuristisches Arbeiten** umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen*

sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten.

[Lehrplan Mathematik Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf; 3.2.2009]

Auch liefert die heuristische Phase durch das Experimentieren, bei dem eigene Ideen der Schüler und Schülerinnen gefragt sind, einen wichtigen Beitrag zum Bildungsbereich „Kreativität und Gestaltung" des österreichischen Lehrplans.

Exaktifizierende Phase

Der heuristischen Phase folgt die exaktifizierende Phase. Hierbei werden Vermutungen der heuristischen Phase genauer definiert und begründet bzw. bewiesen. Dabei sollen mathematische Arbeitsweisen erlernt und die Argumentationsfähigkeit gesteigert werden.

Bereits im Lehrplan der AHS-Unterstufe bilden das Begründen und die exakte Sprache der Mathematik einen wesentlichen Bestandteil. Als mathematische Grundtätigkeit zu entwickeln ist

Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); [...] Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).

[Lehrplan Mathematik Unterstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf; 3.2.2009]

In der AHS-Oberstufe wird die Sprache der Mathematik weiter ausgebaut und das Beweisen erhält eine höhere Bedeutung.

Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten: [...]

***Kritisch - argumentatives** Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun* *haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs.*

[Lehrplan Mathematik Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf; 3.2.2009]

Anwendungsphase

Hat man einen Lösungsalgorithmus gefunden und bewiesen folgt die Anwendungsphase. Einerseits kann es sich dabei um rein innermathematische Anwendungen handeln, bei denen die erworbenen Kenntnisse geübt und gefestigt werden. Andererseits sollten aber auch anwendungsorientierte Problemstellungen nicht vernachlässigt werden, damit die Schüler und Schülerinnen die Nützlichkeit der Mathematik über reines „Rechnen" hinaus erkennen. Einwenden könnte man, dass realistische Anwendungsaufgaben für den Unterricht meist zu kompliziert sind und in der Schule daher stark reduzierte Modelle, die wenig Nähe zur Realität haben, verwendet werden. Tatsache ist jedoch, dass auch in den Naturwissenschaften stark vereinfachte Modelle verwendet werden, die nur einen Teilaspekt beschreiben. Diskutiert werden muss dabei nur, was ein Modell leisten kann und wo die Grenzen des Modells liegen. Dies ist besonders in den Naturwissenschaften wichtig, die die Sprache der Mathematik zur Beschreibung ihrer Probleme verwenden. Das Erkennen dieser Grenzen wird im Lehrplan der AHS-Unterstufe sogar explizit gefordert:

Die Schülerinnen und Schüler sollen [...] mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind.

[Lehrplan Mathematik Unterstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf; 3.2.2009]

Auch im Lehrplan der AHS-Oberstufe wird anwendungsorientierter Unterricht gefordert:

Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben-und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

[Lehrplan Mathematik Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf; 3.2.2009]

Besonders in der AHS-Oberstufe kann der Einsatz von CAS sehr hilfreich sein, wenn der Rechenaufwand bei Anwendungsaufgaben sonst zu hoch und nicht zu bewältigen wäre. Für den Fall, dass für Anwendungen weitergehende Kenntnisse nötig sind, bietet sich fächerübergreifender Unterricht an.

Weitere Vorteile des Einsatzes von EDV sind:

- Rekursive Modelle können bearbeitet werden;
- Visualisierung in 2D und 3D;
- Operieren wird erleichtert;
- leichtere Kontrollmöglichkeit, ob das Modell brauchbar ist;
- Nachbessern des Modells bei Unzulänglichkeiten rascher möglich;
- Möglichkeit den Einfluss der einzelnen Parameter zu untersuchen;
- Ergebnisse lassen sich in unterschiedlicher Form darstellen und präsentieren;
- Beschaffung von Informationen und aktuellen Daten mit Hilfe des Internets.

2.3. Das Black-Box/White-Box Prinzip

Laut Bruno Buchberger [3] gibt es zum Einsatz von CAS im Unterricht zwei Extreme. Die eine Gruppe von Lehrkräften fordert ein totales Verbot von CAS, weil dadurch die

Schulung des mathematischen Denkens verhindert wird. Die mathematische Kultur ginge verloren, wenn man die Lösung dem Computer überlässt. Die zweite Gruppe beschränkt sich auf kreatives Problemlösen und Erlernen von Lösungsrezepten. Das Erlernen der Algorithmen, auf denen diese Konzepte basieren, ist nicht mehr notwendig und interessant. Der Computer ist nur mehr Mittel zum Zweck. Die Funktionsweise und verwendete Algorithmen interessieren nicht.

Einen sinnvollen Mittelweg zwischen den zwei oben genannten Systemen bietet das White Box/Black Box-Prinzip. Dieses wurde von Bruno Buchberger für den Einsatz von EDV im Mathematikunterricht entwickelt.

White Box-Phase

In dieser Phase des verstehenden Lernens sollen ausgehend von einem Problem neue Begriffe und neue Algorithmen entwickelt und bewiesen werden. Ziel ist es die neuen Operationen auch ohne PC oder andere technische Hilfsmittel bewältigen zu können. Dazu muss eine ausreichende Anzahl an Aufgaben geübt werden. Der Computer dient in dieser Phase nur zur Unterstützung des experimentellen Lernens und wird auch für Black Boxes, die bereits in früheren White Boxes erforscht wurden, genutzt. Außerdem werden Module entwickelt, die später als Black Boxes genutzt werden können.

Black Box-Phase

In dieser Phase des erkennenden und begründenden Anwendens sollen die Schüler und Schülerinnen entscheiden, welcher der – in der White Box-Phase erarbeiteten – Algorithmen anzuwenden ist, und sie sollen ihren Entschluss begründen können. Die Durchführung übernimmt der Computer.

In der White Box-Phase wird also ein bisher unbekannter Lösungsweg entwickelt, während in der Black Box-Phase auf bereits bekannte Algorithmen zurückgegriffen wird, das heißt die Algorithmen werden „ohne Verständnis“ quasi als Kochrezept verwendet. Wenn es gelingt den Unterricht als eine Abwechslung von White und Black Boxes zu gestalten und der Einsatz von Black Boxes reflektiert wird, dann wäre das ein bedeutender Fortschritt, da auch im traditionellen Mathematikunterricht viele unreflektierte Black Boxes eingesetzt werden. Viele Schüler und Schülerinnen können zum Beispiel zwar Polynome ableiten, wissen aber nicht was der Begriff Differentialquotient bedeutet.

Beispiel CAS-Einsatz zu elementarer Algebra

Durch die Verwendung von CAS bereits in der White Box-Phase wird der Einsatz auch schon in der AHS-Unterstufe für die elementare Algbebra möglich. Dies wurde im Rahmen des österreichischen DERIVE-Projekts von Razenberger und Klinger in Versuchsklassen am Gymnasium Stockerau untersucht [6]. Dabei wurde die elementare Algebra in die vier White Box-Phasen „Termbox“, „Gleichungsbox“, „Gleichungssysteme“ und „Anwendungsbox" unterteilt (siehe Tabelle 1). Bereits behandelte White Boxes werden in der Folge bei weiterführenden Themen zu Black Boxes.

WHITE BOX	Genutzte BLACK BOXES
WHITE BOX 1: »Termbox« Aufstellen von Termen. Bearbeiten von Termen. Rechnen mit Termen.	Nutzen des CAS zum Testen und Üben.
WHITE BOX 2: »Gleichungsbox« Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungen. Äquivalenzumformungen.	BLACK BOX: »Termbox« Die Termumformungen übernimmt das CAS als Black Box.
WHITE BOX 3: »Gleichungssysteme« Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungssystemen.	BLACK BOXES: »Termbox« »Gleichungsbox« Das Termumformen und das Lösen einzelner Gleichungen übernimmt das CAS als Black Box.
WHITE BOX 4: »Anwendungsbox« Nutzen der Algebrakenntnisse beim Problemlösen. White Box-Aktivitäten: Modellbilden, Interpretieren.	BLACK BOXES: »Termbox« »Gleichungsbox« »Gleichungssysteme« »Differentialrechnungsbox« usw. Das Operieren übernimmt das CAS als Black Box.

Tabelle 1: Beispiel für Aufteilung in White und Black Boxes in der elementaren Algebra [Heugl et al, Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, S.161]

Elementare Algebra hat neben dem formalen auch einen inhaltlichen Aspekt, wobei in der Mathematik sowohl die Trennung der beiden als auch die Verknüpfung eine wichtige Rolle spielen. In der traditionellen Schulmathematik liegt der Schwerpunkt beim Formalen, während die Verknüpfung der beiden Bereiche zu kurz kommt. Durch CAS können Tätigkeiten im formalen Bereich ausgelagert werden und es bieten sich mehr Möglichkeiten zu testen und zu experimentieren, um das Verständnis zu vertiefen. Infolgedessen bleibt mehr Zeit für den inhaltlichen Aspekt und die Verknüpfung der beiden Bereiche.

Die Termbox

In der „Termbox“ bietet sich die Möglichkeit CAS für Strukturerkennungsübungen einzusetzen. Der Aufbau des Terms kann zum Beispiel durch Markieren von logisch korrekten Teiltermen untersucht werden. Auch durch die Eingabe kann die Strukturerkennung geübt werden.

Zum Erlernen von Termumformungen können die Schüler und Schülerinnen einerseits Bearbeitungstechniken erforschen, andererseits aber auch eigene entwickeln. Mit dem verwendeten CAS können sie nicht nur Ausdrücke und Teilausdrücke bearbeiten, sondern es bietet auch ein gutes Werkzeug, um Ergebnisse zu testen und Proben durchzuführen. So können Vermutungen überprüft werden. Besonders zu beachten ist dabei die Schnittstelle zwischen Operieren und Interpretieren, da das CAS manchmal unerwartete Resultate liefert bzw. individuelle Ergebnisse auf ihre Äquivalenz hin überprüft werden müssen. Der Schüler bzw. die Schülerin sollte erkennen, dass der Computer stur nach einem programmierten Algorithmus arbeitet, während der Mensch Ergebnisse auch bewerten und interpretieren kann.

Die Gleichungsbox

In der fünften und sechsten Schulstufe wird das Lösen von Gleichungen aus inhaltlichen Überlegungen entwickelt. Die Trennung des Formalen vom Inhaltlichen erfolgt in der siebenten Schulstufe. Eine zentrale Bedeutung erhält die Äquivalenzumformung. Der Gebrauch von CAS bietet den Schülern und Schülerinnen die Gelegenheit verschiedene Äquivalenzumformungen zu vergleichen und falsche bzw. nicht zielführende Methoden rasch zu erkennen. Auf diese Weise kann jeder persönliche Strategien entwickeln.

Betrachtet man eine Gleichung als Schnittpunkt zweier Funktionen, ist es auch möglich Äquivalenzumformungen zu veranschaulichen. Dazu werden die Funktionen im Grafikfenster gezeichnet und die Änderung durch Äquivalenzumformungen beobachtet.

Die Box: „Gleichungssysteme“
Wie in einer White Box-Phase gefordert, wird – speziell in Bezug auf Gleichungssysteme – besonderes Augenmerk auf das Definieren der Begriffe und das Entwickeln und Anwenden von Lösungsalgorithmen (sowohl ohne als auch mit Computer) gelegt. Die Schüler und Schülerinnen sollen die Gleichungssysteme nicht nur lösen, sondern auch aufstellen und deuten können. CAS kann hier als Black Box zum Durchführen der Äquivalenzumformungen verwendet werden.

Die Anwendungsbox
Diese White Box dient dazu Problemlösefertigkeiten zu entwickeln. Dabei sollen die bereits erlernten Algebrakenntnisse zur Lösung von Problemen eingesetzt werden. Der Schwerpunkt liegt beim Modellbilden und beim Interpretieren der Ergebnisse. Das Operieren übernimmt dabei der Computer.

Der Einsatz von CAS ist also bereits in der Unterstufe möglich und bietet vor allem neue Möglichkeiten um zu experimentieren und zu testen. Auch das Interpretieren von Ergebnissen wird verstärkt gefördert.
Neben CAS bietet der Einsatz von EDV aber noch zahlreiche andere Möglichkeiten, die im Folgenden besprochen werden sollen.

2.4. Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“

In diesem Projekt wurde in Zusammenarbeit der Initiativen ACDCA, GeoGebra und mathe online der Einsatz von Lernpfaden, das sind Unterrichtssequenzen mit elektronischen Lehr- bzw. Lernhilfen, im Mathematikunterricht untersucht. Dabei wurden die Lernpfade nicht auf den Einsatz elektronischer Lernmedien beschränkt, sondern auch Aspekte der „Neuen Lernkultur“ – darunter sind Methoden wie offenes Lernen und eigenverantwortliches Lernen zu verstehen – eingebracht. In den entwickelten Lernpfaden finden sich konkrete Hinweise, in welcher Sozialform die

Aufgaben bearbeitet werden sollen. Einige Aufgaben werden dabei ohne Computer durchgeführt.

Zu Beginn einer e-Learning-Sequenz muss nicht nur abgeklärt werden, welche Lernziele erreicht werden sollen und wie viel Zeit dafür zur Verfügung steht, sondern auch, in welcher Form die Schüler und Schülerinnen ihre Arbeit dokumentieren sollen. Möglichkeiten hierfür bietet die Mitschrift im Schulübungsheft oder das Anlegen einer eigenen Projektmappe. Auch über die Art und Kontrolle der Hausübungen müssen die Schüler und Schülerinnen informiert werden. Zur Sicherung des Unterrichtsertrages können auch Präsentationen durchgeführt werden. Beurteilungskriterien und eventuelle Abgabetermine sollten bereits am Anfang feststehen und bekannt gegeben werden.
Die Rolle der Lehrperson ist ähnlich wie bei offenen Lernformen. Sie entscheidet, welche Methode eingesetzt wird und hilft aktiv den einzelnen Schülern bzw. Schülerinnen, wobei auf die individuellen Bedürfnisse eingegangen werden kann. Die Lehrkraft ist verantwortlich für die Lernumgebung und daher auch dafür, dass ausreichend funktionierende technische Geräte vorhanden sind. Nicht zuletzt überprüft und bewertet sie die Lernprodukte.

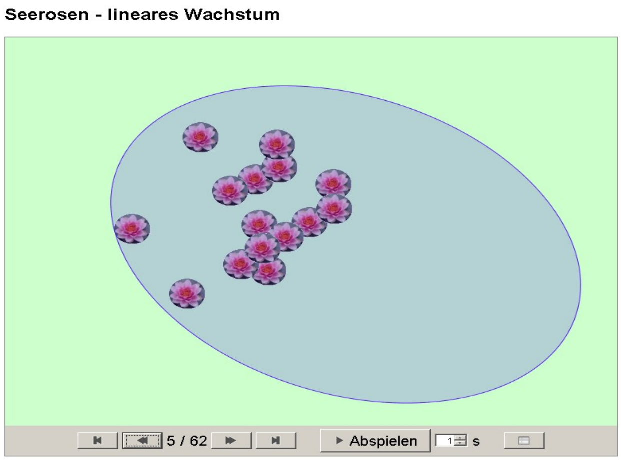
Elektronische Lernmedien ermöglichen eine Anpassung an das Lerntempo der Schüler und Schülerinnen. Auch der Schwierigkeitsgrad kann individuell eingerichtet werden. Das experimentelle Arbeiten wird unterstützt und es bieten sich Möglichkeiten zur Informationsbeschaffung, zur bildlichen Darstellung und Simulationen. Die Schüler und Schülerinnen haben Gelegenheit zur Selbstkontrolle und zur individuellen Wissensüberprüfung.
Wesentlich für den Lernerfolg ist jedoch nicht, welche Medien eingesetzt werden, sondern die Aufbereitung der Inhalte. Elektronische Lernmedien sollen daher dort eingebracht werden, wo sich dadurch ein Vorteil ergibt. Visuelles Lernen wird durch elektronische Lernmedien im Allgemeinen gut abgedeckt und es gibt ein großes Angebot. Haptisches Tun kommt bei e-Learning meist zu kurz und auch akustisches Lernen wird im Moment durch elektronisches Lernmaterial im allgemeinen zu wenig beachtet, obwohl es technische Möglichkeiten gäbe.

2.5. Unterstützende Programme für den Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht gibt es vielfältige Möglichkeiten für den Einsatz des Computers, die es ermöglichen alle Sinne anzusprechen. Einige davon werden im folgenden kurz vorgestellt.

Animationen, Videos, Bilder

Zur Veranschaulichung der Inhalte mit Bildern und Farben können Animationen und Videos eingesetzt werden. Ein Beispiel ist ein Vergleich unterschiedlicher Wachstumsarten anhand eines Seerosenteichs (vergleiche Abbildung 2). Die Schüler und Schülerinnen können beobachten, wie viele Seerosen in jedem Wachstums-schritt dazukommen und wie schnell sich der Teich füllt. Die Abbildungen sind jeweils nach dem fünften Wachstumsschritt entstanden.



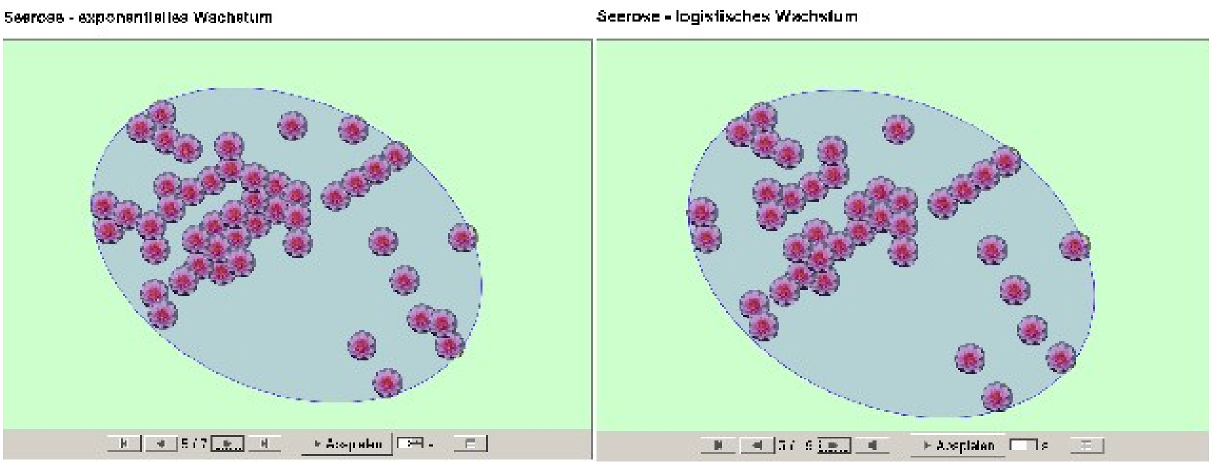


Abbildung 2: Beispiel Seerosenteich: Vergleich verschiedener Wachstumsarten
[PS Computerpraktikum für LAK SS 2006, Martina Lemmé, Johanna Liedlbauer, Melanie Steininger]

Dynamische Mathematiksoftware

Eine in Österreich weit verbreitete dynamische Mathematiksoftware ist GeoGebra, welches von Markus Hohenwarter entwickelt wurde. Dieses Programm ist eine

Weiterentwicklung dynamischer Geometriesoftware, welche erstmals mit Computeralgebra verbunden wird. Dynamische Geometriesoftware erlaubt, die Konstruktion mit Zirkel und Lineal am Computer zu simulieren. Dabei liegt der Vorteil darin, dass die Zeichnung im Nachhinein manipuliert werden kann, indem zum Beispiel ein Punkt verschoben wird und dabei beobachtet werden kann, wie sich alle abhängigen Objekte dadurch verändern. Bei GeoGebra befindet sich neben dem Geometriefenster ein Algebrafenster und Veränderungen werden immer simultan ausgeführt.

Test mit Selbstkontrolle

Eine weitere Möglichkeit für den EDV-Einsatz im Mathematikunterricht bieten Tests,die den Schülern und Schülerinnen ermöglichen ihr Wissen selbstständig zu überprüfen. Zum Beispiel mit Hilfe des Programms *Hot Potatoes* von *Half-Baked Software* lassen sich solche webbasierten, interaktiven Übungen leicht erstellen. Es bietet die Möglichkeit von Multiple Choice Aufgaben, Lückentext, Kreuzworträtseln und Zuordnungen bzw. Anordnungen. Ein Beispiel ist in Abbildung 3 dargestellt.

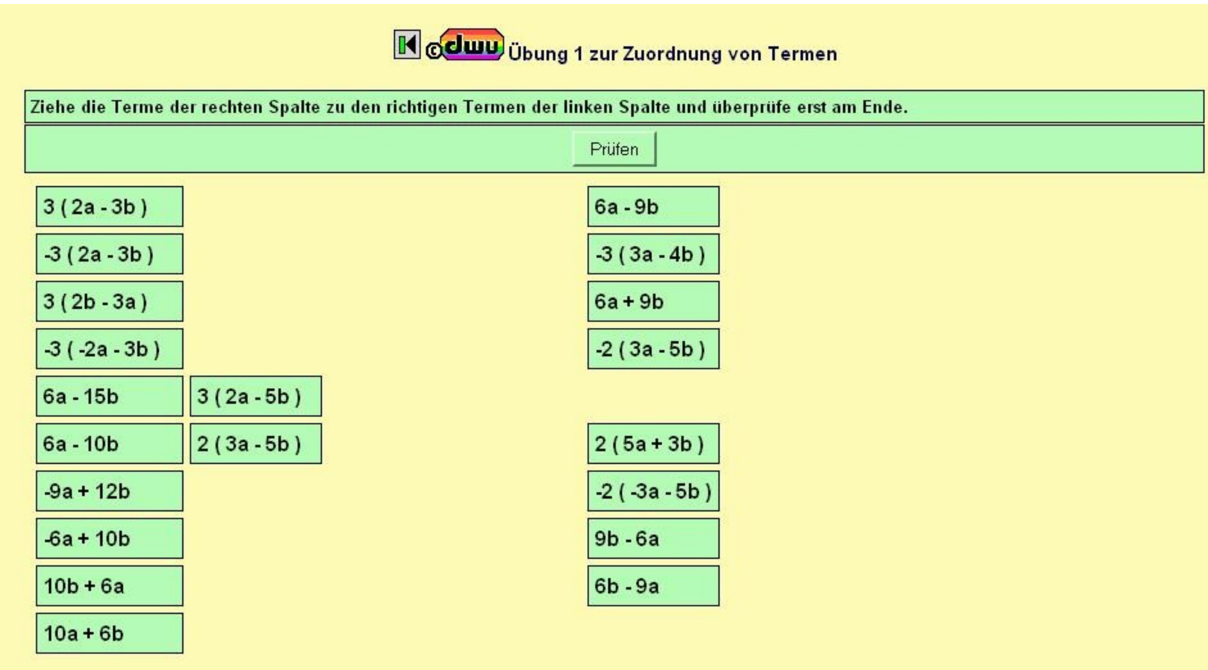


Abbildung 3: Übung mit Selbstkontrolle [http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte05.htm, Stand 10.8.2009]

Tabellenkalkulationen

Für das Bearbeiten von großen Datenmenge besonders im Bereich der Statistik sind Tabellenkalkulationen wie zum Beispiel *Excel* von *Microsoft* oder OpenOffice.org Calc oft sehr hilfreich.

Applets

Interaktive Übungen ermöglichen den Schülern und Schülerinnen, die Auswirkung von durchgeführten Veränderungen zu verfolgen. Ein Beispiel hierfür bietet das Applet „Was ist der Mittelwert?" aus dem Lernpfad „Beschreibende Statistik" des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" (siehe Abbildung 4).

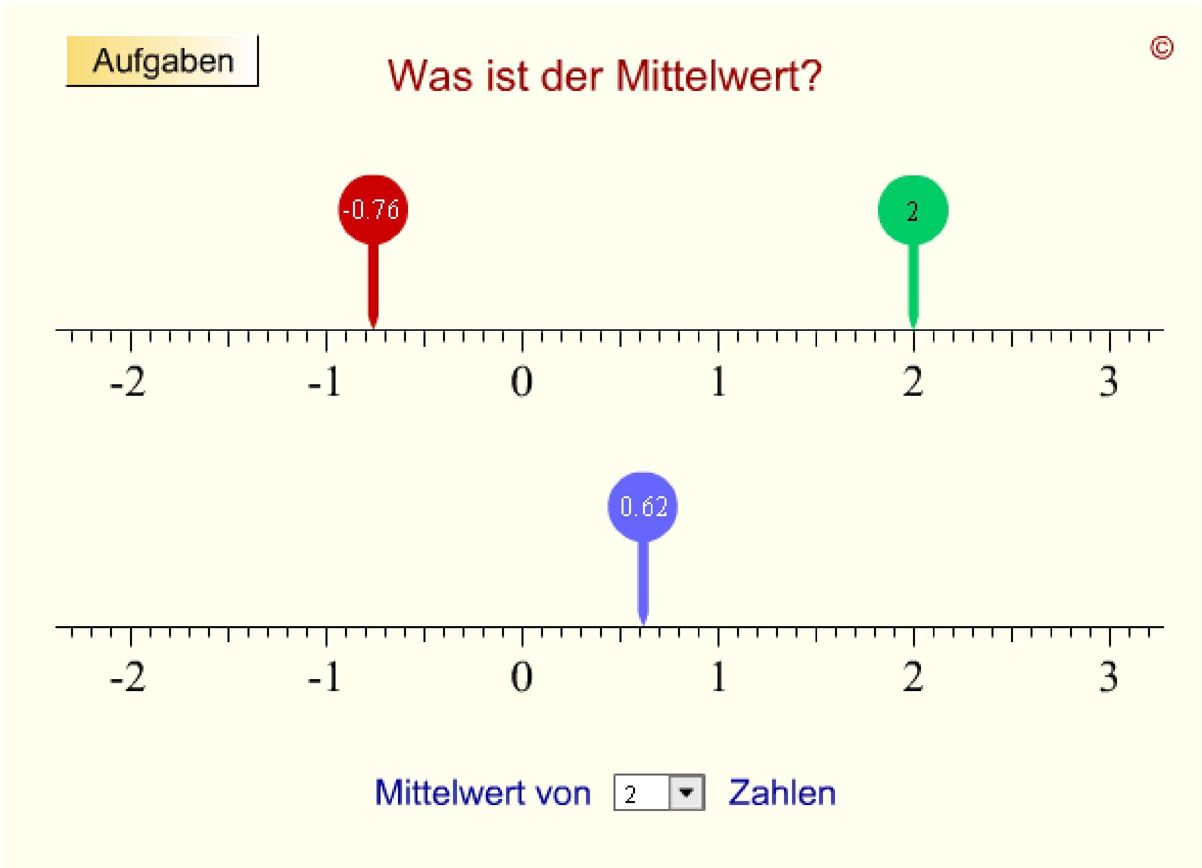


Abbildung 4: Applet „Was ist der Mittelwert?" aus dem Lernpfad „Beschreibende Statistik" des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" [http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/content/mittelwert/mittelwert.html 24.2.2009]

Das Applet ermöglicht den Schülern und Schülerinnen die Reaktion des Mittelwerts zu beobachten, wenn die beiden Ausgangswerte durch Anklicken und Ziehen mit der

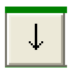
Maus variiert werden.
Diese Art der Veranschaulichung wurde auch von den Schülern und Schülerinnen beim Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" sehr positiv beurteilt.

Computeralgebrasysteme (CAS)
Dienen zum Bearbeiten von Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Algebra und Vektorrechnung. Funktionen können grafisch dargestellt und bearbeitet werden. Neben der Implementierung von CAS in grafikfähigen Taschenrechnern wie zum Beispiel dem *Voyage 200* von *Texas Instruments*, gibt es verschiedene Programme für den PC: Einerseits finden sich kommerzielle wie *Derive* von *Texas Instruments* oder *Mathmatica* von *Wolfram Research*. Andererseits gibt es Open Source Software wie *Maxima*, einer Verbesserung von *Macsyma*, welches vom *Massachusetts Institute of Technology* entwickelt wurde.

3. Das Programm Treefrog

Treefrog wurde von Paul Strickland von der Liverpool John Moores Universitity entwickelt. Das Programm dient zum Üben von einfacher Algebra, hauptsächlich für die Unterstufe. Ursprünglich wurde Treefrog in englischer Sprache geschrieben und später zunächst ins portugiesische übersetzt. Im Rahmen dieser Arbeit übersetzte ich das Programm ins Deutsche. Die Zielsetzung dabei war, dass die Schüler und Schülerinnen alle Texte in Deutsch erhalten. Anschließend sollte der Einsatz von Treefrog in der Schule getestet werden.

3.1. Übersetzung

Nach einem Gespräch mit Anita Dorfmayr wurde der Kontakt mit Paul Strickland hergestellt und ich erhielt Zugang zu einer englischen Version des Programms und alle zu übersetzenden Textteile. Einerseits mussten Dialogtexte und Hinweise übersetzt werden, andererseits die Tipps, die vom Programm als Hilfestellung angeboten werden. Die Dialogtexte bezogen sich auf die Kommunikation mit dem Benutzer, wie zum Beispiel die Bemerkung „Well done!“ („Gut gemacht!“), wenn eine Aufgabe korrekt gelöst wurde. Die Hinweise bestanden hauptsächlich aus Erklärungen für die einzelnen Felder und Buttons der Benutzeroberfläche. So erschien zum Beispiel der Hinweis „Pass to next question“ („Gehe zur nächsten Aufgabe“), wenn mit der Maus auf den Button  gezeigt wurde. Da die Tipps, die vom Programm geboten werden (siehe 3.2.1 Schüleransicht), jeweils auf eine konkrete Aufgabe bezogen werden und deshalb verschiedene Variable und Ausdrücke enthalten, erhielt ich für die Übersetzung Teile des Codes, bei denen ich die englischen Ausgabetexte ins Deutsche übersetzte. Die Übersetzung wurde im Anschluss daran von Paul Strickland ins Programm implementiert.
Bei der ersten Version traten jedoch noch einige Fehler auf. Am auffälligsten war, dass die Groß- und Kleinschreibung total durcheinander (vergleiche Abbildung 5) geraten war.

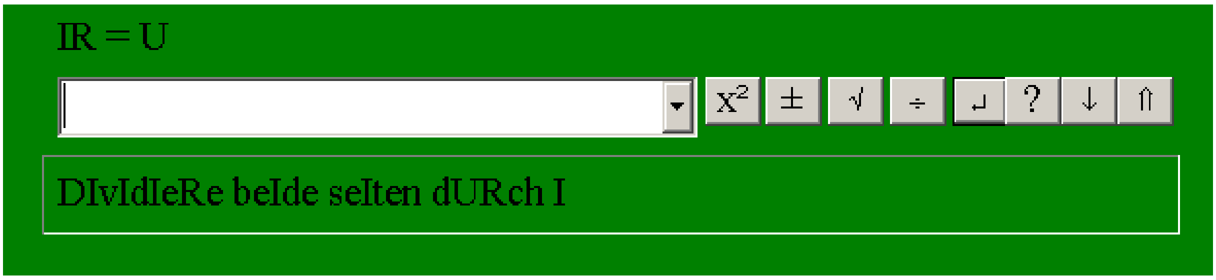


Abbildung 5: Screenshot erste Version 1

Neben der fehlerhaften Rechtschreibung, erschien auch oft die Meldung „Z eqhint iszero ….“ statt eines Hinweises.

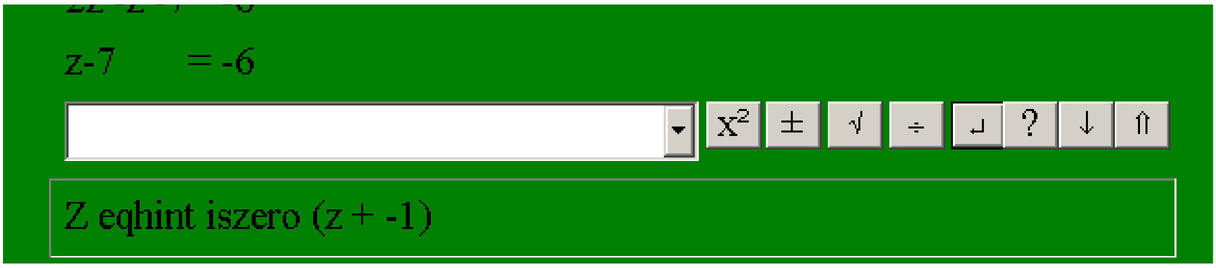


Abbildung 6: Screenshot erste Version 2

Diese Fehler wurden von Paul Strickland korrigiert und für den Fall, das kein Hinweis möglich ist, die Meldung „Kein Hinweis vorhanden!“ eingefügt.
Auch für einige Meldungen, die nach wie vor auf Englisch erschienen, wie zum Beispiel „Right click to change background colour“, wurden im Nachhinein noch die Übersetzungen hinzugefügt.

3.2. Verwendung von Treefrog

Die Aufgaben werden von der Lehrperson mit Hilfe eines Editors vorgegeben. Dabei kann zwischen ausgearbeiteten Beispielen zum Veranschaulichen der Rechenschritte und Aufgaben, die der Schüler oder die Schülerin selbst lösen muss, gewählt werden. Nach jedem Rechenschritt überprüft das Programm, ob die angegebene Äquivalenzumformung richtig ist, nicht aber, ob sie sinnvoll ist. Teilweise ist es für die Schülerinnen und Schüler möglich einen Hinweis zu erhalten. Wenn Treefrog keine Hilfestellung anbietet, kann im Editor zusätzlich ein Hinweis hinzufügt werden.

3.2.1. Schüleransicht

In der Schüleransicht wird als erstes die zu lösende Aufgabe angeführt. Darunter ist ein Eingabefenster, in das die Schüler und Schülerinnen ihren nächsten Schritt eingeben können. Handelt es sich zu Demonstrationszwecken um ein ausgearbeitetes Beispiel, hat der Schüler bzw. die Schülerin die Möglichkeit einfach nur Enter zu drücken und ein weiterer Rechenschritt wird in der nächste Zeile angegeben. Am Ende der Aufgabe erscheint ein Informationsfenster mit „Aufgabe beendet“ (siehe Abbildung 7). Es besteht allerdings auch die Möglichkeit die Aufgabe selbst zu bearbeiten, wenn die Demonstration nicht nötig ist. In diesem Fall erscheint am Ende ein Fenster mit „Gut gemacht!“

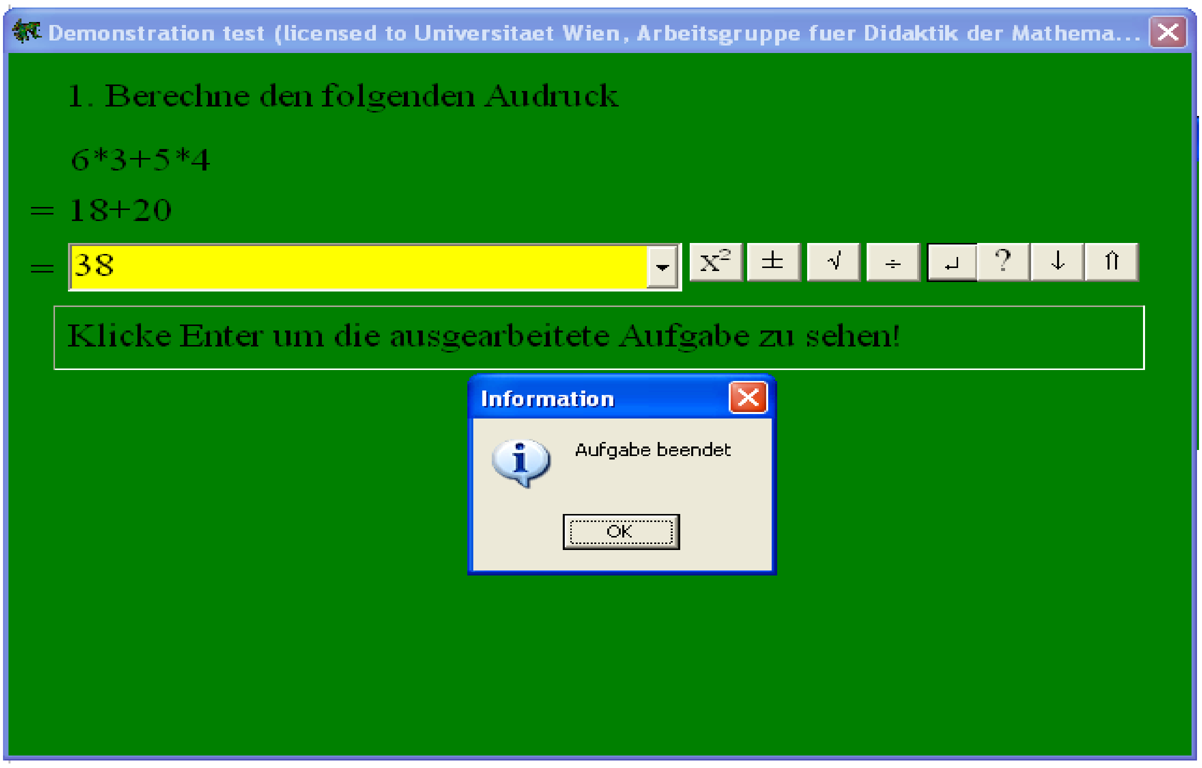


Abbildung 7: Ausgearbeitete Aufgabe

Bei den nicht ausgearbeiteten Aufgaben schreibt der Schüler oder die Schülerin den nächsten Rechenschritt in das Eingabefenster und drückt anschließend Enter. Wenn die letzte Eingabe korrekt ist, wird diese angeschrieben und ein neues Eingabefenster erscheint. Ist der letzte Rechenschritt falsch, wird dieser rot angezeigt und muss korrigiert werden (siehe Abbildung 7).

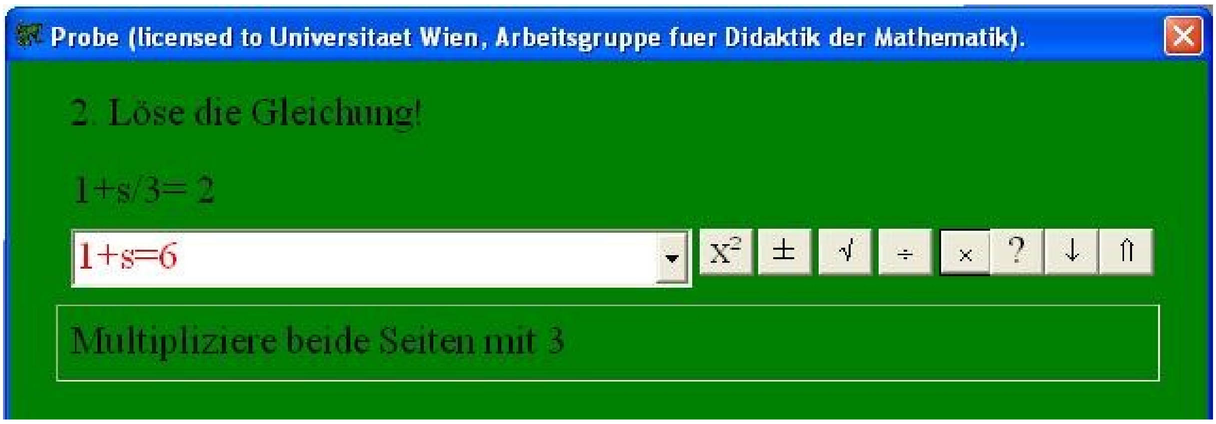
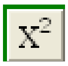
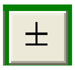


Abbildung 8: Falsche Eingabe

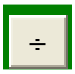
Um zu bestätigen, dass die Aufgabe korrekt gelöst wurde, erscheint am Ende ein Fenster mit der Botschaft „Gut gemacht!“ zur Bestätigung. Ein Dialogfenster zum Ändern der Hintergrundfarbe erreicht man mit einem Rechtsklick mit der Maus.
Am Ende eines Tests bekommt der Schüler bzw. die Schülerin eine Rückmeldung, wie viele Aufgaben bearbeitet wurden und welcher Anteil davon korrekt gelöst wurde.

Die Bedeutung der einzelnen Buttons:

 Eingabe von Quadrat

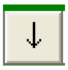
 Eingabe von „Plus oder Minus“

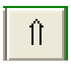
 Öffnet ein Dialogfenster zur Eingabe von Wurzeln.

 Öffnet ein Dialogfenster zur Eingabe von Brüchen.

 Statt Enter zu drücken, kann am Ende der Eingabe auch dieser Button verwendet werden.

 Zeigt einen Hinweis an, wenn einer vorhanden ist.

 Zur nächsten Aufgabe

 Öffnet eine Übersicht aller bisher bearbeiteten Aufgaben.

3.2.2. Der Editor

Im Editor werden von der Lehrperson die einzelnen Aufgaben für einen Test erstellt. Dabei wird von bereits vorhandenen Aufgaben ausgegangen. Diese erhält man durch einen Demotest, der Beispiele für alle möglichen Arten von Aufgaben enthält. Auch das Zurückgreifen auf früher zusammen gestellte Tests ist möglich.

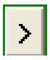
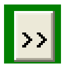
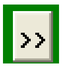
Zuerst muss also ein Test geöffnet werden. Die Aufgaben, die in diesem gespeichert sind, erscheinen im linken Fenster (siehe Abbildung 9). In das rechte Fenster werden die Aufgaben für den aktuellen Test eingegeben. Dazu werden zunächst die vorhandenen Aufgaben durch die Buttons  oder  vom linken ins rechte Fenster transferiert. Mit dem Button  können einzelne Aufgaben übertragen werden, während mit dem Button  der gesamte Test im rechten Fenster hinzugefügt wird.

Abbildung 9: Eingabefenster Editor

Hat man im rechten Fenster eine Aufgabe mit dem gewünschten Befehl, kann diese Angabe verändert werden. Dies möchte ich am Beispiel der Aufgabe zum Lösen der linearen Gleichung $3x+5=2$ erläutern:

Für diese Aufgabenstellung wird der Befehl NumEq benötigt. Dazu wird zunächst auf eine entsprechende Aufgabe im rechten Fenster doppelt geklickt (zum Beispiel Aufgabe 2 in Abbildung 9) und ein neues Eingabefenster erscheint (siehe Abbildung 10). In dieses kann in das oberste Feld die Aufgabenstellung geschrieben werden. In unserem Fall können wir „Löse die Gleichung!“ einfach beibehalten.

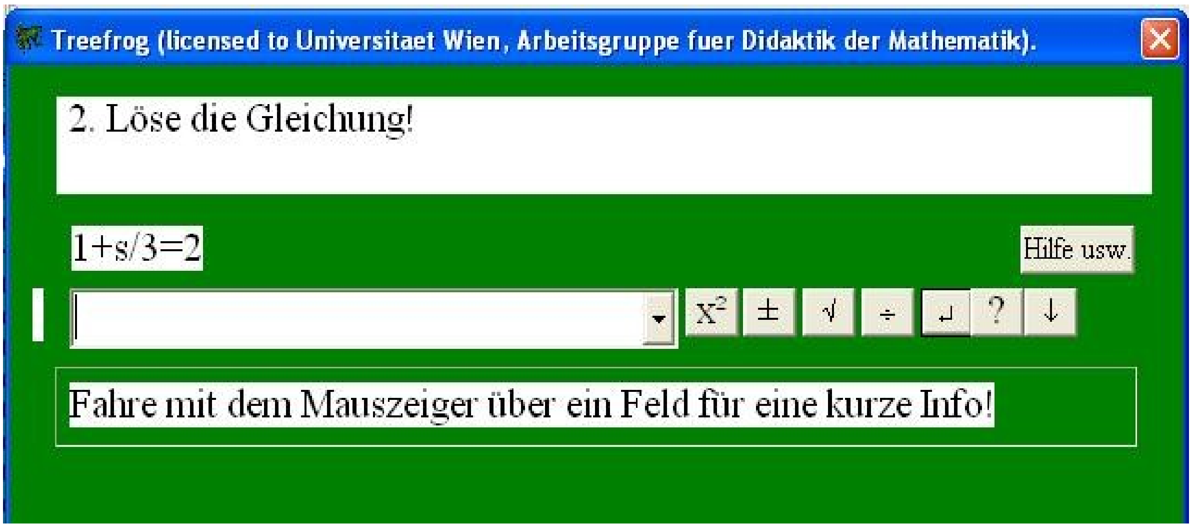


Abbildung 10: Eingabefenster für eine lineare Gleichung 1

In das Feld darunter wird die gewünschte Gleichung eingegeben. Dazu klickt man mit der Maus darauf und ein weiteres Eingabefenster erscheint (siehe Abbildung 11). Hier kann nun die Gleichung verändert werden, wobei darauf geachtet werden muss, dass auch die Variable, für welche die Gleichung gelöst werden soll, angegeben wird.

Abbildung 11: Eingabefenster für eine lineare Gleichung 2

Im mittleren Feld kann ein Hinweis eingetragen werden, für den Fall, dass Treefrog keinen automatischen Hinweis anbietet. Durch Klicken auf die Schaltfläche „OK“

werden die Eingaben bestätigt.

Im Anschluss daran wird die Aufgabe getestet, um Fehler in der Angabe zu vermeiden. Dazu wird sie auf die gleiche Art und Weise wie von den Schülern und Schülerinnen bearbeitet. Dabei kann auch durch Klicken auf  gleich überprüft werden, ob Hinweise von Treefrog angeboten werden (siehe Abbildung 12).

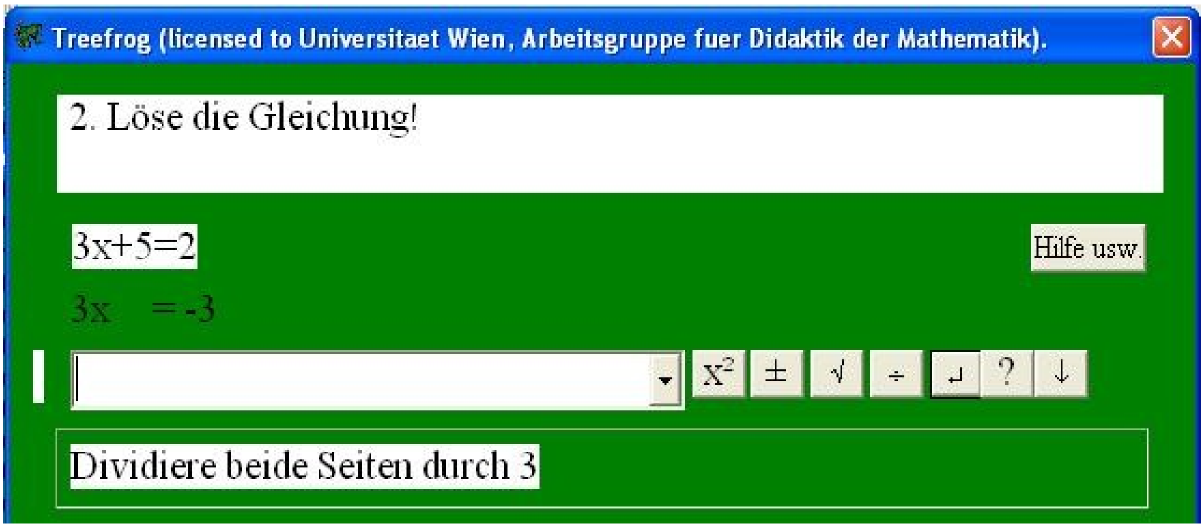


Abbildung 12: Testen der Aufgabe

Ist der Test erfolgreich beendet, erscheint ein Dialogfenster, in dem festgelegt werden muss, ob es sich um ein vorgerechnetes Beispiel (die beim Testen angegebenen Rechenschritte werden angezeigt) oder um eine Aufgabe handelt (siehe Abbildung 13)

Abbildung 13: Dialogfenster am Ende des Bearbeitens einer Aufgabenstellung

Damit ist die Bearbeitung einer Aufgabenstellung abgeschlossen und die nächste kann begonnen werden. Die Art der Eingabe variiert natürlich geringfügig je nach Art der Aufgabe. So sind in Abbildung 14 und Abbildung 15 die beiden Eingabefenster für das Erstellen einer Textaufgabe, die mit Hilfe einer linearen Gleichung gelöst werden kann, dargestellt (Befehl WdNumEq).

Abbildung 14: Eingabefenster für eine Textaufgabe, die mit Hilfe einer linearen Gleichung gelöst werden kann 1

Während für die Schüler und Schülerinnen nur Text sichtbar ist (siehe Abbildung 14), muss – wie in Abbildung 15 dargestellt ist – eine Startgleichung und eine Variable angegeben werden. Deshalb ist es für die Schüler und Schülerinnen später zwar möglich die Gleichung in einer äquivalenten Form anzugeben, aber nicht mehrere Variablen zu verwenden. Auch der zu verwendende Buchstabe wird hiermit vorgegeben und muss daher in der Angabe angeführt werden.

Abbildung 15: Eingabefenster für eine Textaufgabe, die mit Hilfe einer linearen Gleichung gelöst werden kann 2

3.3. *Arten von Aufgaben*

Im Folgenden werden die verschiedenen Arten von Aufgaben, die zur Verfügung stehen, besprochen und die relevanten Befehle im Editor angegebenen.

- **Rechenaufgaben**

  Hier handelt es sich um einfache Rechenaufgaben mit reellen bzw. komplexen Zahlen. Dabei können auch Brüche vorkommen. Diese müssen in der Lösung soweit wie möglich gekürzt sein, damit die Lösung als richtig anerkannt wird. Komplexe Zahlen können sowohl in der Form $a+bi$ als auch in der Form $bi+a$ angegeben werden. Die Aufgaben können auch Klammer- und Bruchterme enthalten. Dabei können die Rechenregeln, welche die Reihenfolge der Rechenoperationen bestimmen, geübt werden. Ein Einsatz ist auch beim Rechnen mit Bruchzahlen möglich. Allerdings kann das Programm Brüche $\frac{a}{b}$ nur in der Form „ a/b “darstellen. Den Schülern und Schülerinnen wird zwar ein Eingabefenster für Brüche angeboten, aber der Bruch danach in der genannten Form angeschrieben. Angeboten werden auch Rechenaufgaben mit komplexen Zahlen, um das Rechnen damit zu trainieren. Bei den reellen Zahlen ist es möglich Textaufgaben zu stellen.

  Befehle:

  - Eval: reelle Zahlen
  - WdEval: Textaufgabe mit reellen Zahlen
  - CompEval: komplexe Zahlen

- **Vereinfachen von Termen**

  Aufgaben zum Vereinfachen von Termen werden angeboten, wobei aber nicht nur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Termen geübt, sondern auch das Auflösen von Klammern trainiert werden kann. Zusätzlich können sowohl Textaufgaben als auch Aufgaben zum Finden des gemeinsamen Nenners bei Addition und Subtraktion von Bruchtermen gestellt werden.

  Befehle:

- Simp: Vereinfachen von Termen
- WdSimp: Textaufgabe
- RatFns: Finden des gemeinsamen Nenners bei Addition und Subtraktion von Bruchtermen

- **Faktorisieren**

  Sowohl Aufgaben zum Herausheben von Zahlen und Variablen, als auch binomische Formeln können effizient geübt werden.

  Befehl:

  - Factor

- **Lineare Gleichungen**

  Treefrog ermöglicht das Lösen von einfachen linearen Gleichungen mit einer Variablen. Das Ergebnis muss in der Form „Variable = Wert" angegeben werden, um vom Programm akzeptiert zu werden. Das ist natürlich ein Nachteil, da die Form „Wert = Variable" genauso richtig ist, aber nicht als Endergebnis zugelassen wird. Zusätzlich können auch Textaufgaben erstellt werden, bei denen die Schüler und Schülerinnen selbst eine Gleichung aufstellen müssen. Solange die Gleichung richtig ist, darf sie in jeder beliebigen äquivalenten Form angeschrieben werden. Allerdings ist es notwendig, eine Variable, die verwendet werden muss, vorzugeben. In der Folge dürfen keine weiteren hinzugefügt werden. Generell betrachten wir dazu folgende Aufgabe:

  > Der Vater ist doppelt so alt wie der Sohn und halb so alt wie der Großvater. Gemeinsam sind sie 126 Jahre. Wie alt ist der Vater (v)?

  Hier ist die Eingabe der Gleichung

  $$s+v+g=126$$

  verboten. Stattdessen muss die Gleichung sofort nur mit der Variablen v angegeben werden. Das heißt sie könnte zum Beispiel als

$$\frac{v}{2} + v + 2v = 126$$

angeschrieben werden. Dies ist natürlich ein entscheidender Nachteil, da viele Schüler und Schülerinnen die erste Gleichung als Zwischenschritt benötigen und deshalb zusätzlich zum Computer noch mit einem Zettel arbeiten müssen.

Befehle:

- NumEq: lineare Gleichung
- WdNumEq: Textaufgabe

- **Umformen von Formeln**

  Eine gegebene Formel soll nach der geforderten Variablen aufgelöst werden, wobei wieder nur jene Lösung als richtig akzeptiert wird, wenn die gesuchte Variable links von dem Gleichheitszeichen steht.

  Befehl:

  - Transpose

- **Quadratische Gleichungen**

  Treefrog ermöglicht auch Aufgaben zum Lösen von quadratischen Gleichungen mit einer Variablen. Das Ergebnis wird in der Form „Variable = erster Wert or Variable = zweiter Wert“ angegeben. Dabei sind nur reelle Lösungen zugelassen. Der Wert muss als Dezimalzahl bzw. als Bruch in seiner einfachsten Form angeschrieben werden, um als richtig zu gelten. Problematisch ist hier wieder die Eingabe: Den Schülern und Schülerinnen steht zwar ein Button zur Verfügung, der ihnen beim eintippen der Wurzel hilft (siehe Abbildung 16), danach wird die Wurzel jedoch in der Form „sqrt“ dargestellt.

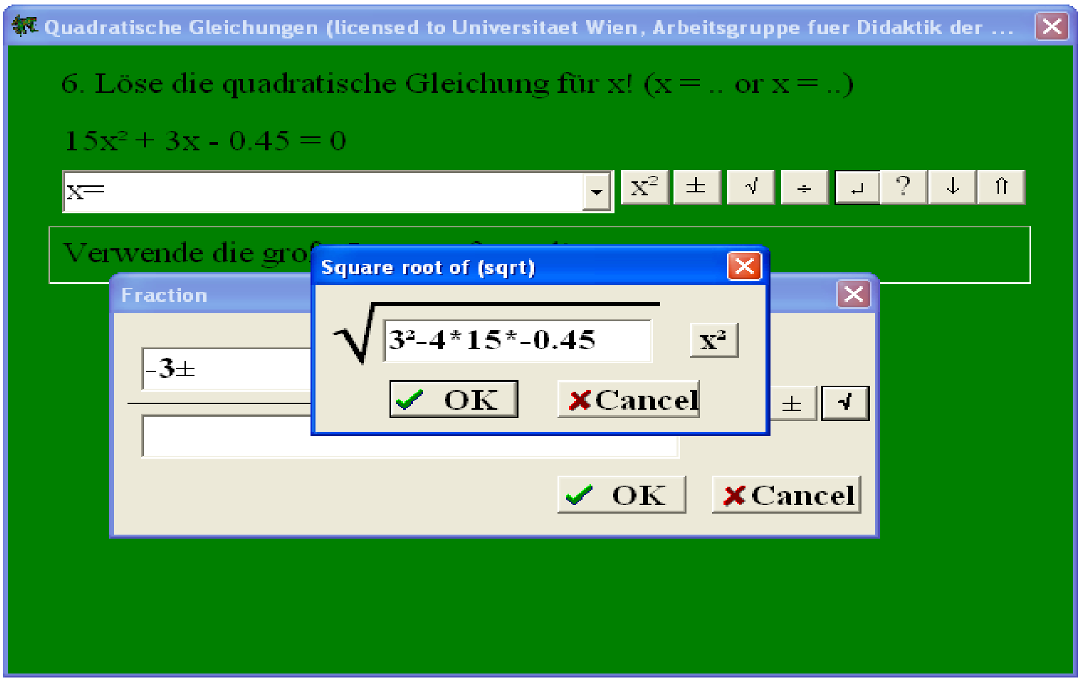


Abbildung 16: Eingabe der großen Lösungsformel

Besonders wenn für eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ die Lösungsformel $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ verwendet wird, kommt es zu Schwierigkeiten, weil nicht nur die Wurzel sondern auch ein Bruch eingegeben werden muss. Dieser kann wie bei den Rechenaufgaben besprochen zwar auch mit einem Eingabefenster geschrieben werden, danach wird er jedoch in der Form „ a/b “ angegeben. Dadurch erhält man einen langen Ausdruck, in dem sehr viele Klammern vorkommen (siehe Abbildung 17).

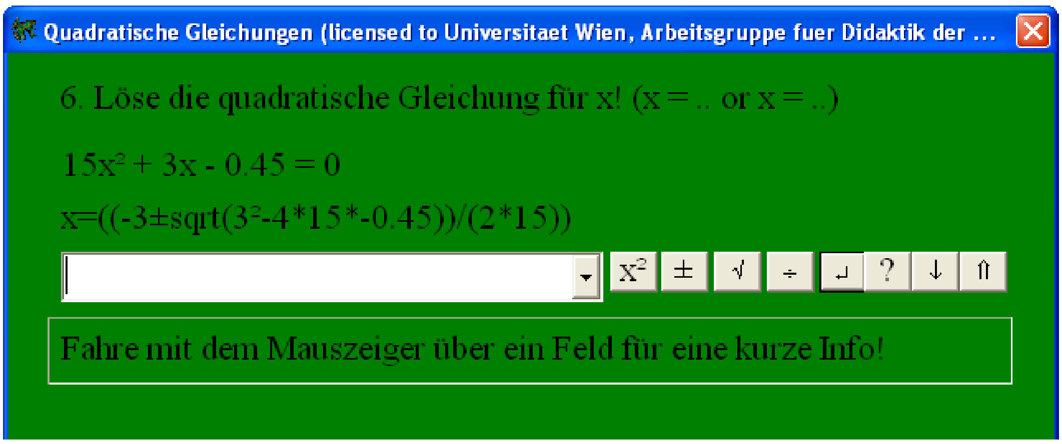


Abbildung 17: Ausgabe der großen Lösungsformel

Teilweise sind die Klammern auch unnötig. In Abbildung 17 könnte zum Beispiel die äußerste Klammer weggelassen werden. Das Lösen der Aufgabe wird dadurch sehr unübersichtlich.

Auch das Erstellen von Textaufgaben zu quadratische Gleichungen ist prinzipiell möglich. Jedoch müssen auch hier immer beide Lösungen angegeben werden, obwohl meist nur eine sinnvoll ist.

Befehle:

- QuadEq: Quadratische Gleichung
- WdQuadEq: Textaufgabe

- **Gleichungssysteme mit zwei Variablen**

Aufgaben zum Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten können gestellt werden. In manchen einfachen Fällen kann das Programm auch eine Mischung von einer quadratischen und einer linearen Gleichung verarbeiten. Das Ergebnis wird im ersten Fall in der Form „Variable1 = Wert and Variable2 = Wert" und im zweiten Fall mit „Variable1 = Wert and Variable2 = Wert or Variable1 = Wert and Variable2 = Wert" angegeben. Das Gleichungssystem muss eindeutig lösbar sein. Andere Fälle sind nicht zugelassen, da es keine Möglichkeit gibt, anzugeben, dass es unendlich viele oder gar keine Lösung gibt.

Das Lösen eines Gleichungssystem mit Treefrog kann allerdings etwas chaotisch sein, wie in Abbildung 18 zu sehen ist. Das Programm akzeptiert alles, was richtig ist, selbst wenn man dabei dem Ergebnis keinen Schritt näher kommt. Auch die Reihenfolge ist irrelevant. Die beiden Gleichungen können beliebig umgeformt werden. Allerdings ist damit nicht garantiert, dass beim Addieren der beiden Gleichungen eine Variable eliminiert wird Selbst wenn Gleichungen mehrmals addiert werden und die Gleichung komplizierter wird, kommt keine Fehlermeldung.

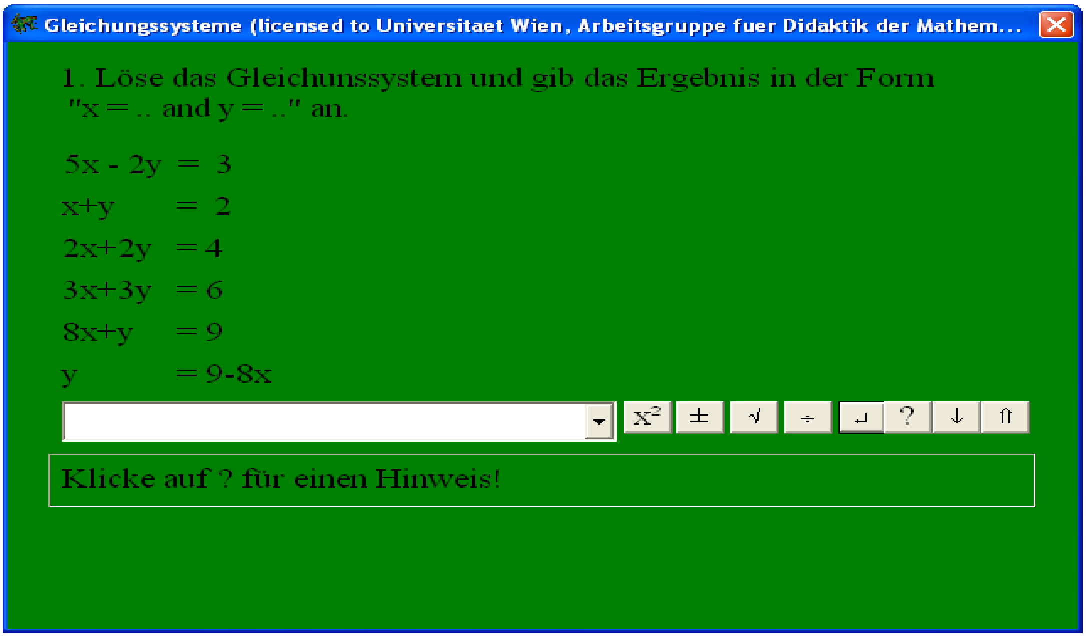


Abbildung 18: Mögliche Eingabe zur Lösung eines Gleichungssystems mit 2 Variablen

In dem Beispiel in Abbildung 18 soll das Gleichungssystem

$$5x-2y=3$$
$$x+y=2$$

gelöst werden. Dieses wird in den ersten zwei Zeilen dargestellt. Zuerst wird die zweite Gleichung mit zwei und anschließend mit drei multipliziert. Danach wird die erste und die vierte Zeile addiert, wodurch jedoch keine Variable wegfallt. Anschließend wird von der erhaltenen Gleichung noch 8x subtrahiert. Durch all diese Umformungen ist man der Lösung keinen Schritt nähergekommen und die Aufgabe ist unübersichtlich geworden, allerdings wurde alles von Treefrog akzeptiert, da es sich durchwegs um korrekte Äquivalenzumformungen handelt.

<u>Befehl</u>:

- Simul2

4. Testeinsatz in der Schule

Das Programm Treefrog wurde in der AHS in den dritten Klassen zum Thema lineare Gleichungen und in den fünften Klassen zum Thema quadratische Gleichungen ausprobiert. Durchgeführt wurden die Untersuchungen im Mai und Juni 2008 in einer dritten und einer fünften Klasse des BG/BRG Enns (beide RG) und in zwei dritten und zwei fünften Klassen des BG/BRG Steyr Werndlpark (alle Klassen G). Soweit Computerarbeistplätze vorhanden waren, arbeiteten die Schüler und Schülerinnen mit Treefrog. Alle anderen arbeiteten als Vergleichsgruppe mit einem Übungszettel. Dabei war zu überprüfen, ob sich der Lernerfolg im Vergleich zum Einsatz von Übungszetteln ändert. Mit Hilfe eines Fragebogens sollten die Schüler und Schülerinnen befragt werden, wie sie das Arbeiten mit dem Programm bewerten.

4.1. Forschungshypothese

Es wird untersucht, ob Treefrog einen besseren Lernerfolg erzielt als kommerzielle Methoden wie zum Beispiel Übungszettel. Dabei wird auch auf das Geschlecht Rücksicht genommen und folglich mögliche Differenzen wahrzunehmen und zu ergründen.

Für die dritten Klassen wurde ein positiver Übungseffekt erwartet, da der Einsatz des PCs, der gerade in Zeiten wie diesen großen Anklang bei Schülern und Schülerinnen unter anderem wegen der Kommunikationsmöglichkeiten findet, eine willkommene Abwechslung zum herkömmlichen Unterricht bietet. Darüber hinaus stellt die Kontrolle nach jeder Zeile eine zusätzliche Hilfestellung dar.

Für die fünften Klassen wurde kein Unterschied erwartet, da die Eingabe – wie in Kapitel 3.3 Arten von Aufgaben beschrieben – bei quadratischen Gleichungen so kompliziert ist, dass sie mögliche positive Einflüsse, wie zum Beispiel bei den dritten Klassen außer Acht lässt, und somit keinen oder nur negativen Effekt erwarten lässt.

4.2. Teilnehmer

Insgesamt nahmen 140 Schüler und Schülerinnen an der Untersuchung teil. Davon waren 79 weiblich und 61 männlich, 39 besuchten das BG/BRG Enns und 101 das

BG/BRG Steyr Werndlpark. 82 Versuchspersonen waren aus der 3. Klasse und 58 aus der 5. Klasse. Die genaue Verteilung der Mädchen und Burschen ist in Tabelle 2 dargestellllt.

		Geschlecht		Gesamt
		Weiblich	Männlich	
Klasse	3.Klasse	52	30	82
	5.Klasse	27	31	58
Gesamt		79	61	140

Tabelle 2: Anzahl der befragten Mädchen und Burschen in den 3. bzw. 5. Klassen

In Tabelle 3 ist die Anzahl der Schüler und Schülerinnen in den einzelnen Klassen aufgelistet:

Schule	Klasse	Gesamt	Weiblich	Männlich
Enns	3	23	19	4
	5	16	6	10
Steyr	3	29	18	11
		30	15	15
	5	18	6	12
		24	15	9

Tabelle 3: Anzahl der Schüler und Schülerinnen in den einzelnen Klassen

4.2.1. Aufteilung der Gruppen

Um eine zufällige Zuteilung in die Gruppe, welche mit Treefrog oder mit einem Übungszettel arbeitete, zu gewährleisten, wurden die Schüler und Schülerinnen nach den Katalognummern aufgeteilt. Zuerst sollten alle jene einen Platz am Computer bekommen, die eine ungerade Katalognummer hatten. Anschließend wurden die noch unbesetzten Arbeitsplätze mit Schülern und Schülerinnen mit aufsteigender Katalognummer aufgefüllt. Dies geschah vor allem um zu verhindern, dass nur jene Schüler und Schülerinnen mit Treefrog arbeiten, die gerne den Computer einsetzen. In den dritten Klassen arbeiteten 42 Schüler und Schülerinnen mit Treefrog und in den fünften 38 (siehe Tabelle 4)

		Übungsphase mit		Gesamt
		Treefrog	Übungszettel	
Klasse	3.Klasse	41	41	82
	5.Klasse	38	20	58
Gesamt		79	61	140

Tabelle 4: Anzahl derSchüler und Schülerinnen, welche mit Treefrog arbeiteten, in den 3. bzw. 5. Klassen

Da die Aufteilung der beiden Gruppen zufällig erfolgte, ergab sich auch die Geschlechterverteilung zufällig.

4.3. Planung und Durchführung

4.3.1. Planung

Die Untersuchung war für drei Einheiten geplant, wobei von der ersten und der letzten nur jeweils ein Teil benötigt wurde.

Übersicht:

1. Einheit: 15 Minuten	Kurzer schriftlicher Prätest
2. Einheit: 50 Minuten	Übungsphase
3. Einheit: 20 Minuten	Kurzer schriftlicher Posttest und Beantworten des Fragebogens

In der ersten Einheit sollten 15 Minuten dafür verwendet werden das Projekt vorzustellen und einen kurzen Prätest mit drei Aufgaben zum jeweiligen Thema durchzuführen, um den Wissensstand der Schüler und Schülerinnen überprüfen zu können.

In der zweiten Einheit sollten die Schüler, soweit PC-Arbeitsplätze vorhanden waren, mit Treefrog arbeiten und der Rest der Klasse die gleichen Aufgaben auf einem Übungszettel erhalten.

Zwanzig Minuten der dritten Einheit sollten für einen zweiten kurzen schriftlichen Test mit drei Aufgaben, die jenen des ersten Tests ähnlich waren, und für das Ausfüllen der Fragebögen verwendet werden. Dieser Posttest diente dazu den Lernerfolg zu überprüfen und die beiden Gruppen zu vergleichen.

4.3.2. Durchführung

Im BG/BRG Enns wurden in beiden Klassen wie geplant drei Mathematikstunden für die Durchführung verwendet. In der ersten Einheit wurden fünfzehn Minuten für den ersten Test verbraucht, danach fand der übliche Mathematikunterricht statt. In der zweiten Einheit wurde mit Treefrog bzw. dem Übungszettel gearbeitet. In der dritten Einheit wurden in den ersten zwanzig Minuten der zweite Test und der Fragebogen ausgefüllt. In Enns wurde ich von den Lehrkräften nur kurz vorgestellt und danach wurden die Einheiten von mir alleine abgehalten. Die Schüler und Schülerinnen waren begeistert, dass sie an einem Projekt teilnehmen durften und mehrere Schüler der fünften Klasse entschuldigten sich bei mir, dass sie nicht mehr Aufgaben lösen konnten.

Auf Wunsch der Lehrer fand die Untersuchung im BG Steyr Werndlpark in zwei aufeinanderfolgenden Einheiten an einem Tag statt. In der ersten Einheit wurde zuerst der erste Test ausgefüllt und danach geübt. Die erste Hälfte der zweiten Einheit wurde wiederum als Übungsphase genutzt und danach wurden der zweite Test und der Fragebogen ausgefüllt. Außerdem wurden parallel in zwei Computerräumen gearbeitet, wobei die Schüler und Schülerinnen von den jeweiligen Lehrpersonen, deren Unterrichtsstunden eigentlich stattfinden sollten, beaufsichtigt wurden. Ich erklärte den Schülern und Schülerinnen nur zu Beginn, was zu tun wäre und wechselte anschließend zwischen den beiden Räumen um bei Fragen oder Problemen zu helfen.

4.4. Lineare bzw. quadratische Gleichungen in Schulbüchern der 3. bzw. 5. Klassen

In diesem Kapitel soll verglichen werden, was Schulbücher zu den Themen, welche mit Treefrog in der Schule untersucht wurden, anbieten. Das heißt, in den dritten Klassen wird das Thema lineare Gleichungen und in den fünften Klassen quadratische Gleichungen näher besprochen.

4.4.1. Lineare Gleichungen in Schulbüchern der 3. Klasse

Aus der Vielzahl der angebotenen Schulbücher wurden dafür die Bücher „Zum

Beispiel Mathematik 3“ [4] und „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“ [7] zur näheren Analyse herangezogen.

Ersteres ist sehr bunt und meiner Ansicht nach für die Zielgruppe sehr ansprechend gestaltet. Des weiteren sind die Inhalte verständlich erklärt, sodass für die Schüler und Schülerinnen keine weitere Hilfestellung notwendig sein sollte. Das Buch wird hauptsächlich in der AHS eingesetzt.

Als Vergleich dazu dient „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“, das in Hauptschulen eingesetzt wird. In diesem Buch werden die Lernziele differenziert angegeben. Dabei wird unterschieden zwischen Lernzielen für Schüler und Schülerinnen, welche eine Lehre bzw. den Besuch einer weiterführenden Schule anstreben.

Im Buch „Zum Beispiel Mathematik 3“ wird das Lösen von Gleichungen zuerst mit Hilfe der Elementarumformungsregeln besprochen. Dazu werden die Grundrechnungsarten und ihre Umkehrung bildlich mit Hilfe von Pfeilen dargestellt (siehe Abbildung 19) und anschließend formuliert.

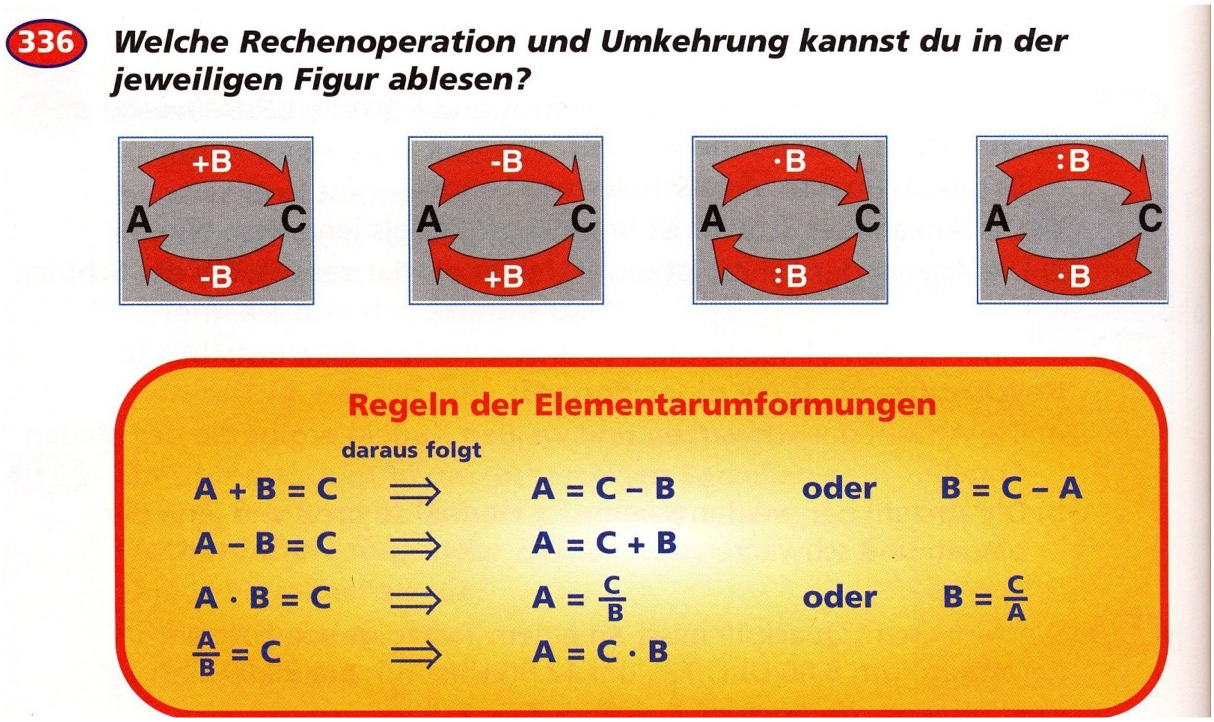


Abbildung 19: Elementarumformungen [Erber et al, Zum Beispiel Mathematik 3, S.54]

Dazu gibt es auch Aufgaben, die das Umformen von Gleichungen unter Bewusstmachen der Regeln trainieren. Die Waageregeln werden erst einige Kapitel später eingeführt, als auf beiden Seiten die Variable zum Quadrat wegfallen soll. (siehe Abbildung 20).

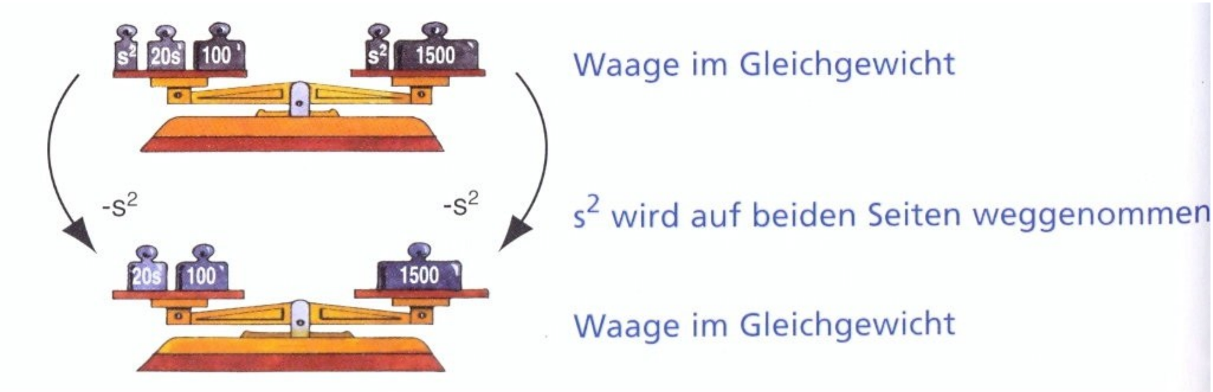
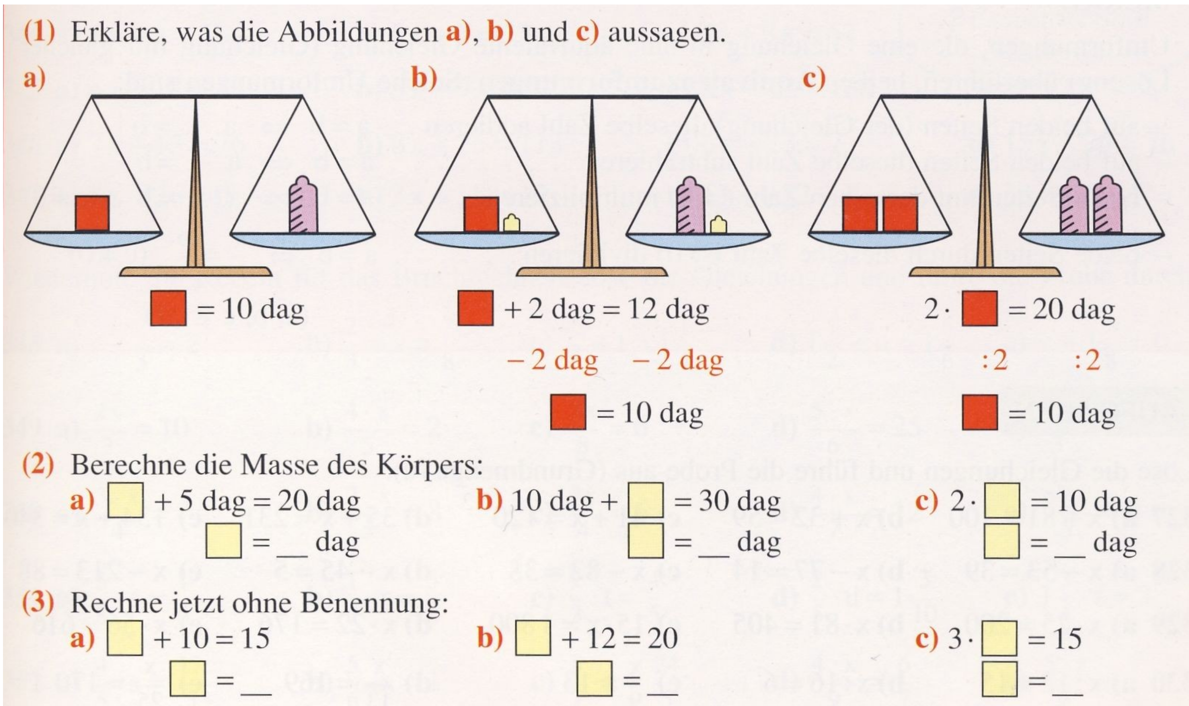


Abbildung 20: Veranschaulichung der Waageregeln [Erber et al, Zum Beispiel Mathematik 3, S.92]

In diesem Fall sind die Waageregeln als „Kürzungsregel" leichter einzusetzen als die Elementarumformungsregel, da diese einen zusätzlichen Schritt nötig machen würden.

Das Buch „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden" arbeitet sofort mit dem Bild der Waage im Gleichgewicht. So wird zunächst das Umformen von Gleichungen bildlich und mit Platzhaltern (Kästchen) veranschaulicht (siehe Abbildung 21).
Die Waageregeln werden zwar nie als solche benannt, aber einige Beispiele werden nach dem Prinzip „Wir führen auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation durch" bearbeitet. Anschließend werden die Regeln allgemein formuliert (siehe Abbildung 22).



(1) Erkläre, was die Abbildungen **a)**, **b)** und **c)** aussagen.

a) ■ = 10 dag

b) ■ + 2 dag = 12 dag
− 2 dag − 2 dag
■ = 10 dag

c) 2 · ■ = 20 dag
:2 :2
■ = 10 dag

(2) Berechne die Masse des Körpers:

a) □ + 5 dag = 20 dag
□ = __ dag

b) 10 dag + □ = 30 dag
□ = __ dag

c) 2 · □ = 10 dag
□ = __ dag

(3) Rechne jetzt ohne Benennung:

a) □ + 10 = 15
□ = __

b) □ + 12 = 20
□ = __

c) 3 · □ = 15
□ = __

Abbildung 21: Lösen von Gleichungen mit Hilfe des Waagemodells [Lewisch, Mathematik 3. Verstehen-Üben-Anwenden, S.57]

MERKE

Umformungen, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung (Gleichung mit gleicher Lösung) überführen, heißen **Äquivalenzumformungen**. Solche Umformungen sind:

- auf beiden Seiten (der Gleichung) dieselbe Zahl addieren . . $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- auf beiden Seiten dieselbe Zahl subtrahieren. . . . . $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$
- beide Seiten mit derselben Zahl ($\neq 0$) multiplizieren . . . . $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c \ (c \neq 0)$
- beide Seiten durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividieren . . . . . . $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \ (c \neq 0)$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$

Abbildung 22: Formulierung der Regeln [Lewisch, Mathematik 3. Verstehen-Üben-Anwenden, S.58]

Beim Aufstellen von Gleichungen zu Textaufgaben, bei denen zwei Größen verglichen werden, wird aber wieder auf das Modell einer Waage im Gleichgewicht zurückgegriffen (vergleiche Abbildung 23).

(2) Zwei Größen sind nicht gleich – Aufpassen beim Aufstellen der Gleichung!

Verkürzt man jede Seite eines Quadrats um 3 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Quadrats A_2 um 21 cm² **kleiner** als der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats A_1.

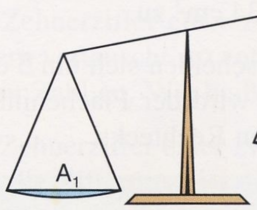
$A_1 > A_2$

	Quadrat 1	Quadrat 2
Seite	x	$x-3$
Flächeninhalt	$A_1 = x^2$	$A_2 = (x-3)^2$

Wir arbeiten wieder in zwei Schritten:

1. Schritt: Übersicht über die einzelnen Größen in Tabellenform.

2. Schritt: Aufstellen der Gleichung – nicht einfach, weil $A_1 > A_2$.

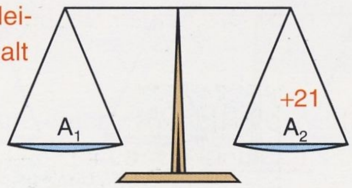


Denke an das Waagemodell: Die Waage muss ins Gleichgewicht kommen!

$A_1 > A_2 \rightarrow$ Die Waage ist nicht im Gleichgewicht.

Um die „Waage ins Gleichgewicht zu bringen", d. h. um die Flächeninhalte gleichzusetzen, haben wir zwei Möglichkeiten:

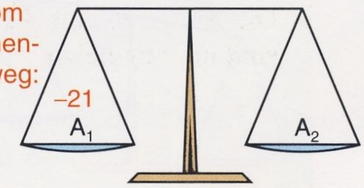
Wir geben zum kleineren Flächeninhalt 21 cm² dazu:



$x^2 = (x-3)^2 + 21$
$x = 5$

oder

Wir nehmen vom größeren Flächeninhalt 21 cm² weg:



$x^2 - 21 = (x-3)^2$
$x = 5$

Abbildung 23: Waagemodell zum Vergleich zweier Größen [Lewisch, Mathematik 3. Verstehen-Üben-Anwenden, S.197]

Wie Günther Malle in „Didaktische Probleme der elementaren Algebra" [9] anführt, ist das Erkennen von Termstrukturen eine Voraussetzung für das Umformen algebraischer Ausdrücke. Viele Schüler und Schülerinnen haben damit aber große Schwierigkeiten. Sein Vorschlag wäre, im Unterricht weniger das reine Umformen ohne Besprechen der Voraussetzungen zu üben, sondern mehr auf das Erkennen dieser Strukturen Wert zu .

Im Buch „Zum Beispiel Mathematik 3" wird diese Forderung erfüllt und verstärkt auf das Erkennen von Termstrukturen eingegangen. Dieses wird bewusst mit einigen Aufgaben gefördert, bei denen zum Beispiel Gleichungstypen erkannt bzw. Terme in verschiedene Gleichungstypen eingesetzt werden sollen.

Im Gegensatz dazu finden sich im Buch „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden" nur im Unterkapitel „*Wir vereinfachen Terme durch Multiplizieren und*

Dividieren“ einige Aufgaben zur Struktur von Termen und der Hinweis: „*Du kannst Terme schneller und sicherer berechnen, wenn du ihre Struktur erkennst*“[Lewisch, S.178] Außer an dieser Stelle wird die Struktur jedoch nicht beachtet.

Beim Übersetzen der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und dem Aufstellen einer passenden Gleichung schlagen beide Bücher als Hilfestellung die Informationen in einer Tabelle zu verarbeiten vor.
In „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“ wird zusätzlich noch ein schülergerechtes Schema zum Lösen von Textaufgaben angeboten (siehe Abbildung 24) und – wie bereits früher erwähnt – das Waagemodell zum Aufstellen der Gleichung bei Textaufgaben, bei denen zwei Größen verglichen werden, eingesetzt.

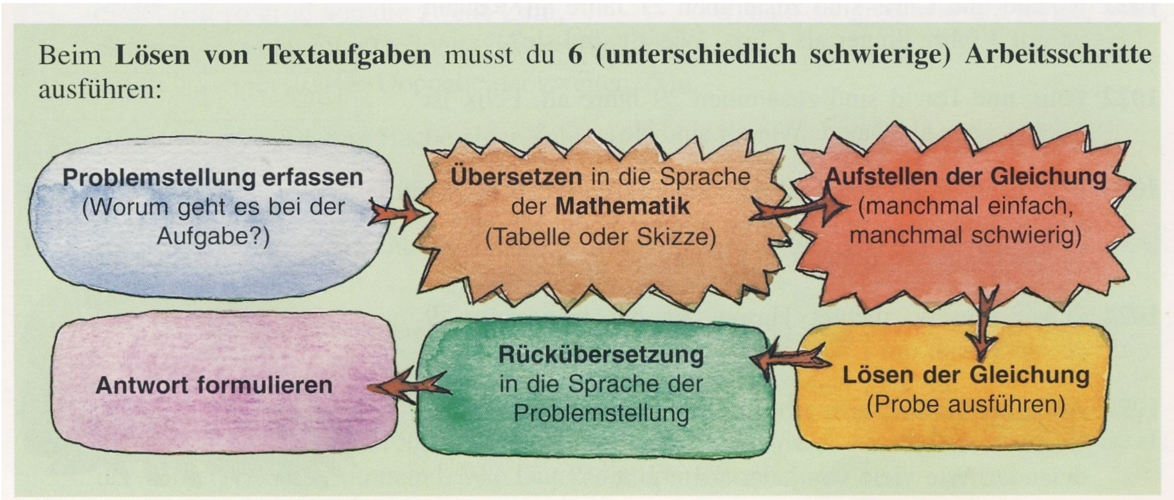


Abbildung 24: Schema zum Lösen von Textaufgaben [Lewisch, Mathematik 3. Verstehen-Üben-Anwenden, S.191]

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Büchern besteht in der Art der Aufgabenstellung. In „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“ gibt es zwar eine Vielzahl an Aufgaben, aber jeder Aufgabentyp wird von einem vorgerechneten Beispiel begleitet und zum Lösen muss meist nur mehr ein Schema abgearbeitet werden. So finden sich darin zum Lösen von einfachen linearen Gleichungen 164 Übungsaufgaben. Während in „Zum Beispiel Mathematik 3“ nur 24 Übungsaufgaben gestellt werden, bei denen nur das Finden einer Unbekannten verlangt wird. Weiterführende Aufgaben verlangen darüber hinaus etwas Überlegung oder das

Begründen der durchgeführten Rechenschritte.

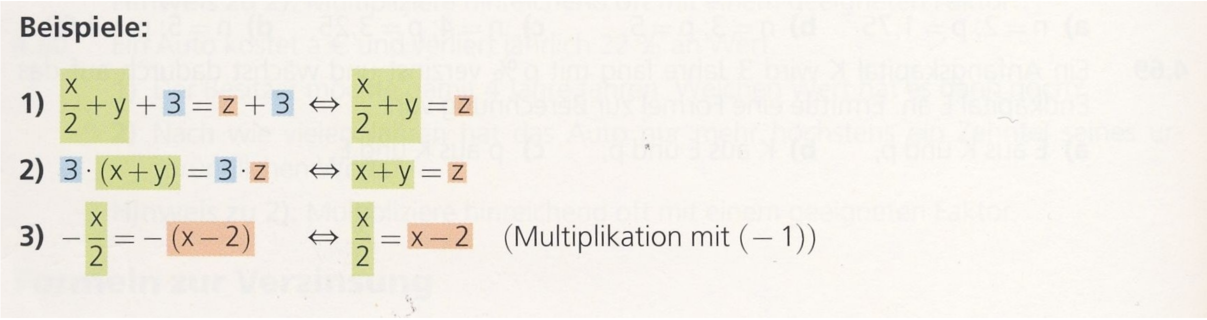
Fazit: „Zum Beispiel Mathematik 3“ ist wesentlich bunter und ansprechender gestaltet als „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“ und bietet anspruchsvollere Aufgabenstellungen. Des weiteren wird von den Schülern und Schülerinnen nicht nur stures Schema F-Rechnen, sondern auch tieferes Verständnis für das Lösen von Gleichungen verlangt. Ein vorgegebenes Schema ermöglicht jedoch auch leistungsschwächeren Schülern und Schülerinnen das Lösen von Gleichungen. Damit hat ein solches Schema, wie es „Mathematik 3: Verstehen – Üben – Anwenden“ angeführt wird, meines Erachtens im Mathematikunterricht in der Hauptschulen, besonders in der dritten Leistungsgruppe, durchaus seine Berechtigung.

4.4.2. Quadratische Gleichungen in Schulbüchern der 5. Klasse

Sehr häufig werden in den fünften Klassen die beiden Schulbücher „Mathematik verstehen 5“ [10] und „Mathematik Lehrbuch 5“ [5] eingesetzt. Diese sollen im folgenden Abschnitt speziell zum Thema quadratische Gleichungen verglichen werden.
Auf den ersten Blick fällt auf, dass der Text im Buch „Mathematik verstehen 5“ größer geschrieben ist, wodurch der Inhalt sofort übersichtlicher wirkt. Dafür wird in „Mathematik Lehrbuch 5“ mit Comicbildern wie zum Beispiel in Abbildung 25 versucht den Text etwas aufzulockern.

Abbildung 25: Comicstrip [Götz et al, Mathematik Lehrbuch 5, S.88]

Im Buch „Mathematik verstehen 5“ werden die Elementarumformungsregeln und die Waageregeln noch einmal explizit wiederholt. Zum besseren Verständnis werden vorgerechnete Beispiele angeführt, wobei Struktur durch Farben verdeutlicht wird (vergleiche Abbildung 26).



Beispiele:

1) $\frac{x}{2} + y + 3 = z + 3 \iff \frac{x}{2} + y = z$

2) $3 \cdot (x + y) = 3 \cdot z \iff x + y = z$

3) $-\frac{x}{2} = -(x - 2) \iff \frac{x}{2} = x - 2$ (Multiplikation mit (-1))

Abbildung 26: Beispiel zur Anwendung der Waageregeln [Malle et al, Mathematik verstehen 5, S.64]

In „Mathematik Lehrbuch 5“ werden nur die Waageregeln wiederholt, auch wenn das Bild einer Waage nicht verwendet wird. An dieser Stelle wird nur daran erinnert, dass eine Gleichung in eine äquivalente Form übergeht, wenn auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation durchgeführt wird. Beispiele dazu gibt es keine, aber einige Aufgaben.

In „Mathematik verstehen 5“ werden zuerst Lineare Gleichungssysteme besprochen und erst später quadratische Gleichungen, die in einem Kapitel gemeinsam mit quadratischen Funktionen behandelt werden. In „Mathematik Lehrbuch 5“ werden umgekehrt erst die quadratischen Gleichungen im Kapitel „Algebraisches Lösen von Gleichungen mit einer Variable“ besprochen. Erst später werden quadratische Funktionen und lineare Gleichungssysteme diskutiert.

Zunächst werden in beiden Büchern Sonderfälle besprochen. In „Mathematik verstehen 5“ sind das die Formen $x^2=a$, $(x-a)^2=b$ und $ax^2+bx=0$ und in „Mathematik Lehrbuch 5“ $ax^2+c=0$ und $ax^2+bx=0$. Danach werden in beiden Büchern für Gleichungen der Form $x^2+px+q=0$ die Lösungsformel $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ hergeleitet und die möglichen Lösungsfälle besprochen.

Die Autoren von „Mathematik Lehrbuch 5“ gehen zuerst von einer Gleichung der

Form $ax^2+bx+c=0$ aus. Diese wird anschließend normiert. Die Lösungsformel $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$ für die ursprüngliche Form wird nicht explizit hergeleitet, sondern wird als Übungsaufgabe an die Schüler und Schülerinnen gestellt. Dazu wird wieder die Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat vorgeschlagen. Zu dieser Lösungsformel ist die Bemerkung, dass für a=1 die Diskriminante $D=b^2-4\mathrm{ac}$ mit der Diskriminante der zuerst genannten Lösungsformel $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ übereinstimmt, angeführt. Dies ist natürlich falsch, da erstere um den Faktor vier größer ist. Dies ergibt sich, wenn in $D=b^2-4\mathrm{ac}$ für a=1, b=p und c =q eingesetzt wird. Daraus ergibt sich $D=p^2-4\mathrm{q}$ und dieses ist um den Faktor vier größer als $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$.

In „Mathematik verstehen 5“ wird hingegen die Lösungsformel $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$ erhalten, indem die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ durch a dividiert und anschließend in die bereits bekannte Lösungsformel $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ eingesetzt wird.

Der Satz von Vieta wird von beiden Büchern hergeleitet. Den größten Unterschied findet man hier im Übungsteil. Dieser besteht bei „Mathematik verstehen“ aus 55 Aufgaben, von denen nur die letzte

> *Welche ganzzahligen Lösungen kann die Gleichung $x^2+px+16=0$ haben?*
> *[Malle; S. 164; Aufgabe 11.43]*

keine reine Übungsaufgabe darstellt, sondern etwas Nachdenken erfordert.
Der Übungsteil von „Mathematik Lehrbuch 5“ besteht aus 56 Aufgaben, bei denen das Einsetzen in den Satz von Vieta geübt wird. Besonders interessant gestalten sich jedoch die folgenden 16 Aufgabenstellungen: Es gibt acht Aufgaben, bei denen eine Bedingung für den Koeffizienten p oder q gegeben ist und davon ausgehend Aussagen über die Lösung der Gleichung $x^2+px+q=0$ getroffen werden sollen. Eine zusätzliche Begründung dieser Aussagen wird verlangt. Daran anschließend

finden sich acht Aufgaben, bei denen umgekehrt. von einer Aussage über die Lösungen der Gleichung Bedingungen für die Koeffizienten gefunden werden sollen. Auch hier wird eine Begründung verlangt.

In „Mathematik verstehen 5" gibt es ein eigenes Kapitel „*Aufstellen und Interpretieren von Formeln*". Allerdings werden Textaufgaben, die mit Hilfe von quadratischen Gleichungen gelöst werden können, nicht extra besprochen, sondern sie befinden sich einfach im Übungsteil zu den quadratischen Gleichungen.
In „Mathematik Lehrbuch 5" findet sich zunächst das Kapitel „Textaufgaben – Gleichungen mit Formvariablen", indem das Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von linearen bzw. quadratischen Gleichungen besprochen und geübt wird. Dabei sollen teilweise Parameter, die in diesem Schulbuch Formvariable genannt werden, verwendet werden. Im Anschluss daran befindet sich das Kapitel „Gleichungen mit Formvariablen – Fallunterscheidungen". In diesem Abschnitt werden Überlegungen angestellt, welche Werte ein Parameter bei den einzelnen Umformungsschritten annehmen darf. Besonders aufgefallen ist mir dabei folgendes Textbeispiel:

Beispiel P: Bernhard behauptet: „In meiner Klasse gibt es um die Hälfte mehr Buben als Mädchen, insgesamt 24 Schüler." Wie viele Mädchen gehen in seine Klasse?
Lösung: x . . . Anzahl der Mädchen (G = $\mathbb{N}^*$)

$$x + \left(x + \frac{1}{2} \cdot x\right) = 24$$
$$\frac{5}{2} \cdot x = 24 \qquad \Big| : \frac{5}{2}$$
$$x = \frac{2}{5} \cdot 24 = 9{,}6$$

L = { }, weil $9{,}6 \notin \mathbb{N}^*$. Bernhards Bericht kann daher nicht stimmen.

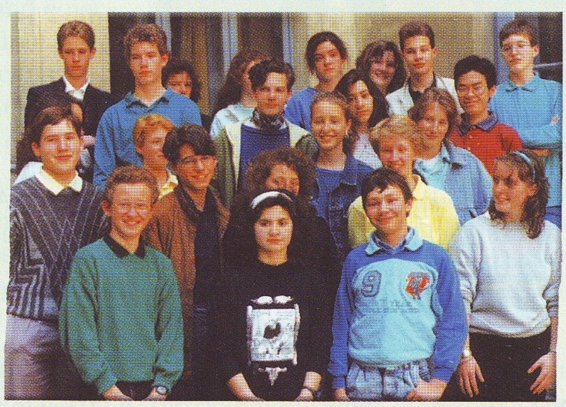


Abbildung 27: Textbeispiel zu Gleichungen mit Formvariablen [Götz et al, Mathematik Lehrbuch 5, S.93]

Zu diesem wird die Überlegung angestellt, dass Bernhard sich in der Gesamtzahl der Schüler – auf die weibliche Form wird hier wie so oft verzichtet – geirrt hat. Daher wird die Gesamtzahl durch eine Formvariable a ersetzt und danach überlegt, welche Werte sie annehmen darf, damit man für x eine ganze Zahl erhält. Es wird darauf hingewiesen, dass in diesem Fall wahrscheinlich 25 – und nicht 24 – Schüler und

Schülerinnen in der Klasse waren und Bernhard vergessen hat sich selbst mitzuzählen.
Damit ist zwar das Beispiel, das auf die Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen Bezug nimmt, gelöst, aber meiner Meinung nach wird es dadurch jedoch ziemlich unrealistisch und mir fehlt ein bisschen die Frage, wie Bernhards Aussage noch verstanden werden könnte. Ich halte es nämlich für wahrscheinlicher, dass in der Klasse zehn Mädchen und 14 Buben sind. Die Aussage „In meiner Klasse gibt es um zwei Fünftel mehr Buben als Mädchen" wäre allerdings im Alltag etwas ungewöhnlich und wird daher einfach ungefähr mit „In meiner Klasse gibt es um die Hälfte mehr Buben als Mädchen" formuliert.
Im Übungsteil finde ich besonders die Aufgabe

> *„Durch Zusammenschütten von 100 l Wasser von (1) 8°C, (2) a °C und einer bestimmten Menge von Wasser von 43 °C entsteht Wasser mit einer Temperatur von 18 °C. Berechne (in Abhängigkeit von a) die benötigte Menge an Wasser von 43 °C! Für welche a ist die Aufgabe lösbar?"*
>
> *[Götz et al, Mathematik Lehrbuch 5, ÖBV, S.95]*

interessant, da die Begründung, für welche a die Aufgabe lösbar ist, über die Mathematik hinausgeht. Dass a kleiner als 18°C sein muss, ist leicht ersichtlich, da es nicht möglich ist ein negatives Volumen hinzuzufügen. Dass a aber nicht kleiner als Null sein darf, liegt daran, dass dazu eine neue Formel notwendig wäre, da Wasser bei 0°C gefriert und sich dadurch nicht nur die Dichte ändert, sondern auch die Lösungswärme berücksichtigt werden müsste.

Fazit: Das Buch „Mathematik verstehen 5" ist übersichtlicher und die Erklärungen sind einfacher und verständlicher gestaltet. Das Buch „Mathematik Lehrbuch 5" bietet dafür mehr Informationen und teilweise anspruchsvollere Aufgabenstellungen.

4.5. Tests

Im folgenden werden die einzelnen Tests, die in der Schule eingesetzt wurden, aufgelistet.

4.5.1. Prätest 3.Klasse

Katalognummer:_______

1) $2(x - 5) - 81 = 8 - 9x$
2) $\frac{1}{2} + \frac{z}{3} = 5$
3) In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der eine spitze Winkel 5mal so groß wie der andere. Wie groß ist der kleinere?

4.5.2. Posttest 3.Klasse

Katalognummer:_______

1) $5 + \frac{x}{3} = x - 9$
2) $4(2x - 3) = 5x + 6$
3) Der Vater ist doppelt so alt wie der Sohn und halb so alt wie der Großvater. Gemeinsam sind sie 126 Jahre. Wie alt ist der Vater (v)?

4.5.3. Prätest 5.Klasse

Katalognummer:_______

1) Löse die quadratische Gleichung: $2(x^2 + 7) = 29 - x$
2) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $25u^2 - 16v^2 =$
3) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 + 10x + 21 = 0$

4.5.4. Posttest 5.Klasse

Katalognummer:_______

1) Löse die quadratische Gleichung: $2x^2 -1 = 7(2 - x)$
2) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $36s^2 - 4t^2 =$
3) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 - 14 x + 45 = 0$

4.6. *Übungsphase*

Im folgenden werden die Aufgaben angegeben, die die Schüler und Schülerinnen entweder mit Treefrog lösen sollten oder als Übungszettel erhielten.

4.6.1. Aufgaben 3.Klasse

1) 9x-7=4-2x
2) 1+ $\frac{s}{3}$ =-2
3) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 26 m. Die Breite ist um drei Meter kürzer als die Länge. Berechne die Länge a!
4) 5(3+x)-8=7x-3
5) O=2G+M, G=?
6) Beim Wienmarathon benötigt Franz doppelt so lange wie die schnellste Frau. Larissa ist 20 Minuten schneller als Franz und benötigt 4 Stunden 34 Minuten. Wieviel Minuten benötigt die Siegerin (s)?
7) 3(x + 7)=7x + 1
8) Der Vater ist doppelt so alt wie seine Kinder Markus und Verena zusammen. Verena ist drei Jahre älter als Markus. Der Vater ist 46 Jahre alt. Wie alt ist Markus (m)?
9) 6x+14=3(7+x)+2x
10) Addiert man zum doppelten einer Zahl die Zahl 9, so ergiebt sich 5. Wie lautet die Zahl x?
11) 8x + 3(x + 4) – 5(x + 3) = 3x + 4(x – 2)
12) Sandra kauft am Flohmarkt ein Buch, eine CD und ein Computerspiel. Das Buch kostet halb so viel wie die CD und das Computerspiel kostet das dreifache von dem Buch. Insgesamt bezahlt Sandra 18€. Wieviel kostet das Buch b?
13) 5(x-2)-7(x-3)=27-3(x+4)
14) Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ergiebt 35. Wie lautet die größere (y) der beiden Zahlen?

15) $3x-25=45-2x$

16) Romana ist doppelt so alt wie Gerhard. Vor vier Jahren war sie dreimal so alt. Wie alt ist Gerhard (g)?

17) $9z-7=7(7-z)$

18) Die Länge eines Rechtecks ist siebenmal so groß wie die Breite. Der Umfang beträgt 32 m. Berechne die Breite b!

19) $3(t+2)+5(t-8)=80+2(t-3)$

20) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ergiebt 39. Wie lautet die mittlere (x) der drei Zahlen?

21) Das Viertel einer Zahl ist um fünf größer als das Neuntel dieser Zahl. Wie groß ist diese Zahl x?

22) Alexander Zickler hat in den letzten zwei Jahren 38 Tore in der Fußball-Bundesliga erzielt. Im letzten Jahr gelangen ihm aber um sechs weniger als vor zwei Jahren. Wieviele Tore hat er im letzten Jahr erzielt (x)?

23) Benjamin Raich und Marlies Schild standen in der Saison 2007/2008 insgesamt 16-mal am Stockerl. Marlies Schild schaffte es zweimal öfter. Wie oft kam Benjamin Raich unter die ersten drei (x)?

24) Nick und Matthias bekommen zusammen 44 € Taschengeld. Da Nick drei Jahre älter ist, bekommt er um 6 € mehr. Wieviel € Taschengeld (x) bekommt Matthias?

4.6.2. Aufgaben 5.Klasse

1) Löse die quadratische Gleichung: $x^2-10x-39=0$

2) Löse die quadratische Gleichung: $4x^2-25=0$

3) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $144\,u^2-81\,v^2=$

4) Löse die quadratische Gleichung: $z^2-25z+50=(5z-25)/2$

5) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $9t^2-36=$

6) Löse die quadratische Gleichung: $15x^2+3x-0{,}45=0$

7) Löse die quadratische Gleichung:
$3(x^2-5)-7(x+2)=(x-2)(2x+3)-2(3x+7)$

8) Löse die quadratische Gleichung: $4x^2 + 25x = 0$

9) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $25a^2 + 30ab + 9b^2 =$

10) Löse die quadratische Gleichung:
$17x(x-2) + 2(2x-3)(5x+1) = 2(10x^2 - 11x - 8) + (4x-5)^2$

11) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $16 - 48y + 36y^2 =$

12) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 + 6{,}5x + 10 = 0$

13) Löse die quadratische Gleichung: $12t^2 - 95 = 24t - 60t + 35$

14) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $2x^2 - 18y^2 =$

15) Löse die quadratische Gleichung: $8x^2 - 18x + 7 = 0$

16) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $36x^2 - 108x + 81 =$

17) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 - x/6 - 1/3 = 0$

18) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $25x^2 + 100x + 100 =$

19) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 + 8x + 15 = 0$

4.7. Fragebögen

Im folgenden sind die Fragebögen angeführt, die die Schüler und Schülerinnen ausfüllen sollten. Den Fragebogen zu Treefrog für die Gruppe, welche mit dem Programm arbeitet und der allgemeine Fragebogen für die übrigen.

4.7.1. Fragebogen zu Treefrog

Klasse:________

Katalognummer:________

Mathematiknote (Semesterzeugnis):_______

□ weiblich □ männlich

1. Das Design des Programms
   □ gefällt mir. □ finde ich okay. □ gefällt mir nicht.
2. Die Eingabe in das Programm ist
   □ einfach. □ okay. □ umständlich. □ schwierig.
3. Dass ich nach jeder Zeile eine Kontrolle habe,
   □ finde ich hilfreich. □ ist mir egal. □ finde ich störend.

4. Dazugelernt habe ich

   □ gar nichts □ ein bisschen □ einiges □ sehr viel

5. Lieber arbeite ich mit

   □ einem Übungszettel □ Treefrog

6. Besonders gut gefallen hat mir

   ____

7. Überhaupt nicht gefallen hat mir

   ____

8. Mit dem Computer arbeite ich in Mathematik

   □ sehr oft. □ regelmäßig. □ manchmal. □ selten □ nie.

9. Im Unterricht arbeite ich mit dem PC

   □ weniger als 1x pro Monat

   □ alle 2 Wochen

   □ 1-2 x pro Woche

   □ öfter

10. In einer Woche benütze ich den PC (arbeiten, spielen, Internet,...) zu Hause ungefähr

    □ weniger als 1 Stunde

    □ 1-5 Stunden

    □ 5-10 Stunden

    □ 10-15 Stunden

    □ 15-20 Stunden

    □ mehr als 20 Stunden

4.7.2. Fragebogen allgemein

Klasse:______

Katalognummer:_______

Mathematiknote (Semesterzeugnis):______

□ weiblich □ männlich

1. Mit dem Computer arbeite ich in Mathematik

   □ sehr oft. □ regelmäßig. □ manchmal. □ selten □ nie.

2. Welche Mathematikprogramme kennst Du?
3. Welche Programme hast Du im Mathematikunterricht bereits verwendet?
4. Im Unterricht arbeite ich mit dem PC

□ weniger als 1x pro Monat
□ alle 2 Wochen
□ 1-2 x pro Woche
□ öfter

5. Besonders gut gefällt mir beim Einsatz des Computers im Unterricht____________
6. Überhaupt nicht gefällt mir beim Einsatz des Computers im Unterricht ___________
7. In einer Woche benütze ich den PC (arbeiten, spielen, Internet,...) zu Hause ungefähr
   □ weniger als 1 Stunde
   □ 1-5 Stunden
   □ 5-10 Stunden
   □ 10-15 Stunden
   □ 15-20 Stunden
   □ mehr als 20 Stunden
8. Ich verwende den Computer zu Hause hauptsächlich für______________________

4.8. Auswertung der Testergebnisse

Die Ergebnisse des Prätests und des Posttest werden hier verglichen. Dazu wurden die Aufgaben des Tests jeweils mit zwei Punkten bewertet, wenn sie vollständig richtig gelöst wurden. Einen Punkt erhielten die Schüler und Schülerinnen, wenn die Aufgabe teilweise richtig gelöst wurde. War die Aufgabe falsch oder nicht bearbeitet worden, dann bekamen sie keinen Punkt. Betrachtet man die Gesamtzahl der Punkte für die beiden Tests erhält man folgende Ergebnisse:

4.8.1. 3. Klasse

Die Aufgaben wurden als ganz richtig gewertet, wenn sie vollständig und richtig gelöst waren. Als teilweise richtig bei den Aufgaben 1) und 2), wenn nur ein kleiner Fehler (Vorzeichenfehler, Rechenfehler, ...) vorkam und bei Aufgabe 3), wenn die Gleichung richtig aufgestellt wurde (Aufgabenstellungen siehe Kapitel 4.5.1 Prätest

3.Klasse und 4.5.2 Posttest 3.Klasse).

In den dritten Klassen konnte nach einem t-Test (t_{40}=-2,380, p<0,5) bei jenen Schülern und Schülerinnen, welche im Laufe der Übungsphase Treefrog verwendeten, eine Verbesserung festgestellt werden. Während die durchschnittliche Punktezahl beim Prätest 3,5 betrug, erreichten die Schüler und Schülerinnen im Posttest im Schnitt 4,2 Punkte (siehe Abbildung 28).

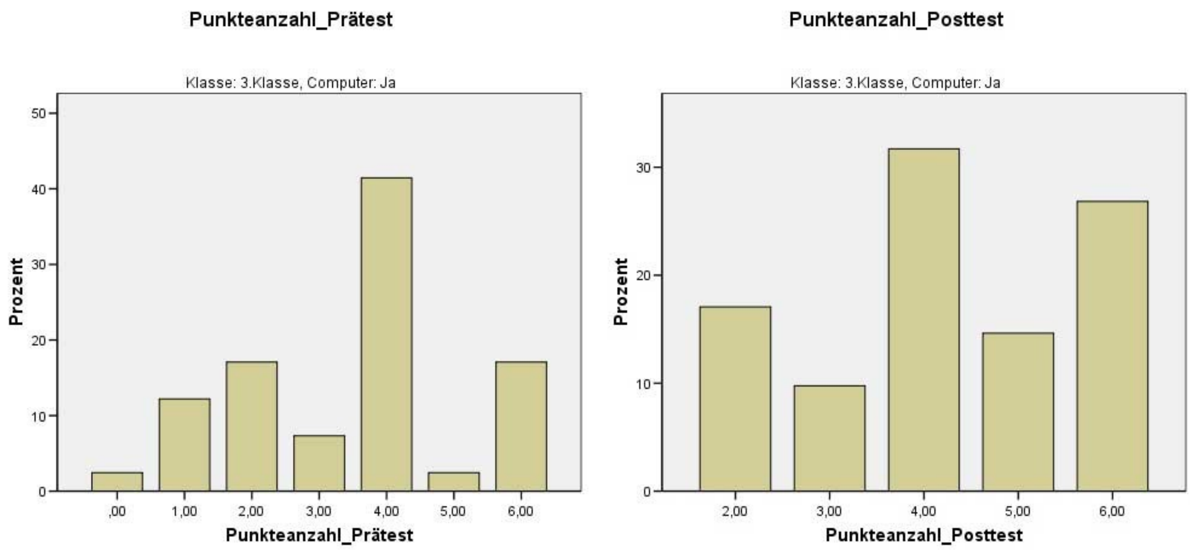


Abbildung 28: Testergebnis Treefrog

Kein signifikanter Unterschied zwischen Prätest und Posttest lässt sich bei jenen Schülern und Schülerinnen feststellen, welche mit einem Übungszettel arbeiteten (t_{40}=0,432, ns.)(vergleiche Abbildung 29).

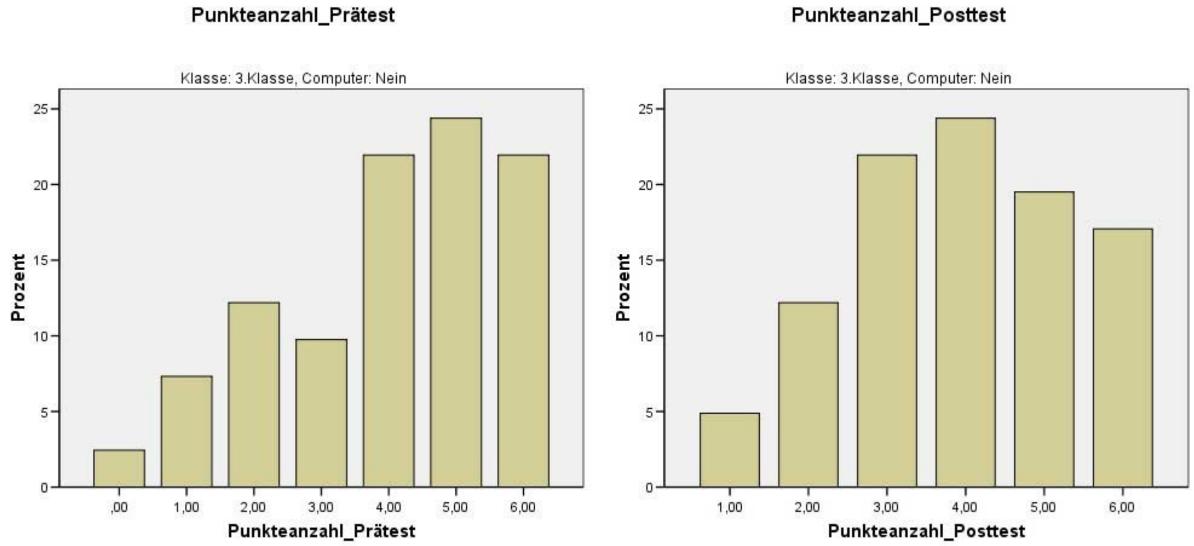


Abbildung 29: Testergebnis Übungszettel

In den dritten Klassen verbesserten sich also diejenigen Schüler und Schülerinnen, welche mit Treefrog gearbeitet hatten. Allerdings tritt der Fall auf, dass das Ergebnis nicht mehr signifikant ist, wenn die Gruppe in Mädchen (t_{28}=-1,840, ns.) und Burschen (t_{11}=-1,520, ns.) aufgeteilt wird. Dies könnte daran liegen, dass die Stichproben in diesen Fällen einfach zu klein sind.

4.8.1.1. Details zu den Aufgaben

Betrachten wir nun die einzelnen Aufgabenstellungen genauer. Zu jeder Aufgabe im Prätest gab es eine ähnliche Angabe im Posttest. Diese sollen hier jeweils gemeinsam besprochen werden.

1) $\frac{1}{2} + \frac{z}{3}$ = 5 (Prätest)und 5 + $\frac{x}{3}$ = x – 9 (Posttest)

   Hier findet sich der auffälligste Unterschied bei den einzelnen Aufgaben. Während sich diejenigen Schüler und Schülerinnen, welche mit Treefrog arbeiteten, etwas, aber nicht signifikant (t_{40}=-1,138, ns.) verbessern konnte, schnitt die zweite Gruppe beim Posttest sogar ein wenig, jedoch wiederum nicht signifikant (t_{40}=-1,810, ns.), schlechter ab wie beim Prätest (siehe Abbildung 30 und Abbildung 31). Auch der Unterschied zwischen den beiden

Gruppen im zweiten Test (vergleiche Abbildung 30) ist nicht signifikant (t_{40}=1,841, ns.).

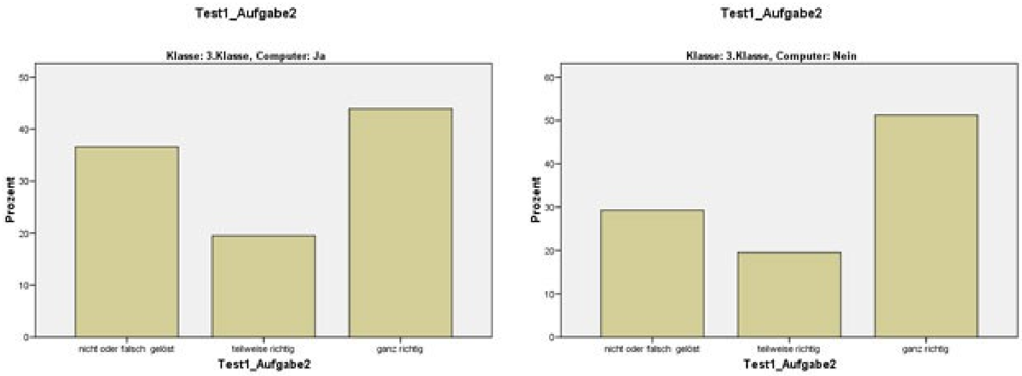


Abbildung 30: Testergebnis Aufgabe 2, Prätest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

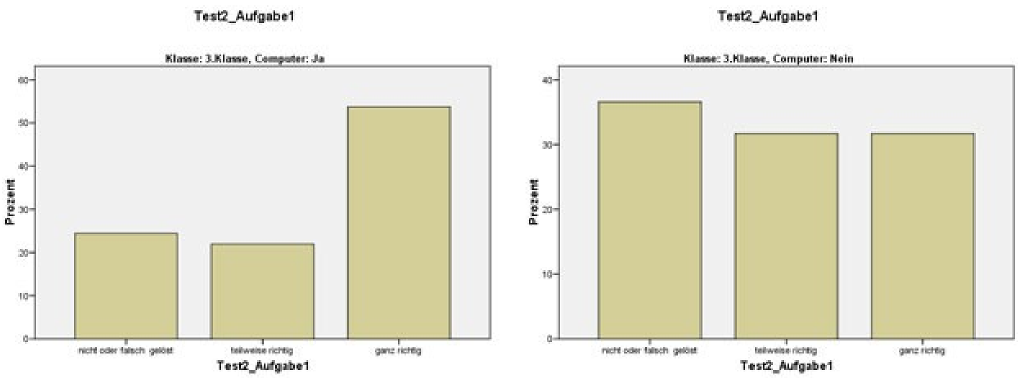


Abbildung 31: Testergebnis Aufgabe 1, Posttest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

2) $2(x - 5) - 81 = 8 - 9x$ (Prätest) und $4(2x - 3) = 5x + 6$ (Posttest)

Bereits beim Prätest konnte ein Großteil der Schüler und Schülerinnen die Aufgabe lösen. Beim Posttest war das Ergebnis bei beiden Gruppen noch besser (vergleiche Abbildung 32 und Abbildung 33). Nach dem t-Test haben sowohl jene, die mit Treefrog arbeiteten (t_{40}=-2,216, $p<0{,}05$), als auch diejenigen, die einen Übungzettel verwendeten (t_{40}=-2,427, $p<0{,}05$), sich signifikant verbessert.

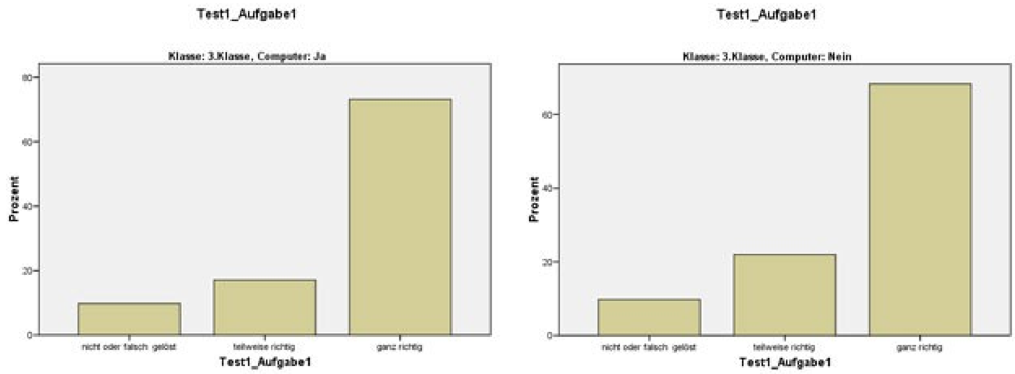


Abbildung 32: Testergebnis Aufgabe 1, Test 1, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

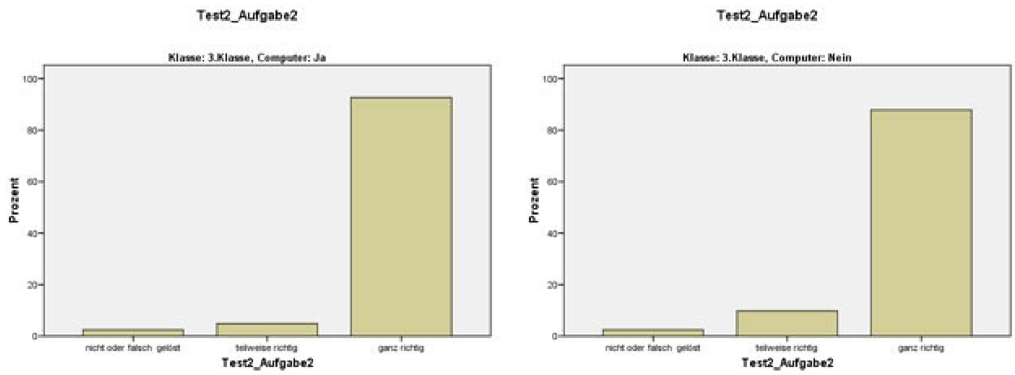


Abbildung 33: Testergebnis Aufgabe 2 aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

3) *In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der eine spitze Winkel 5mal so groß wie der andere. Wie groß ist der kleinere?* (Prätest) und *Der Vater ist doppelt so alt wie der Sohn und halb so alt wie der Großvater. Gemeinsam sind sie 126 Jahre. Wie alt ist der Vater (v)?* (Posttest)

   Beim Prätest lag die Schwierigkeit offensichtlich darin die Gleichung richtig aufzustellen. Fast die Hälfte aller Schüler und Schülerinnen scheiterte bereits daran. Diejenigen, die diese erste Hürde schafften, konnten sie aber fast immer lösen (siehe Abbildung 34).

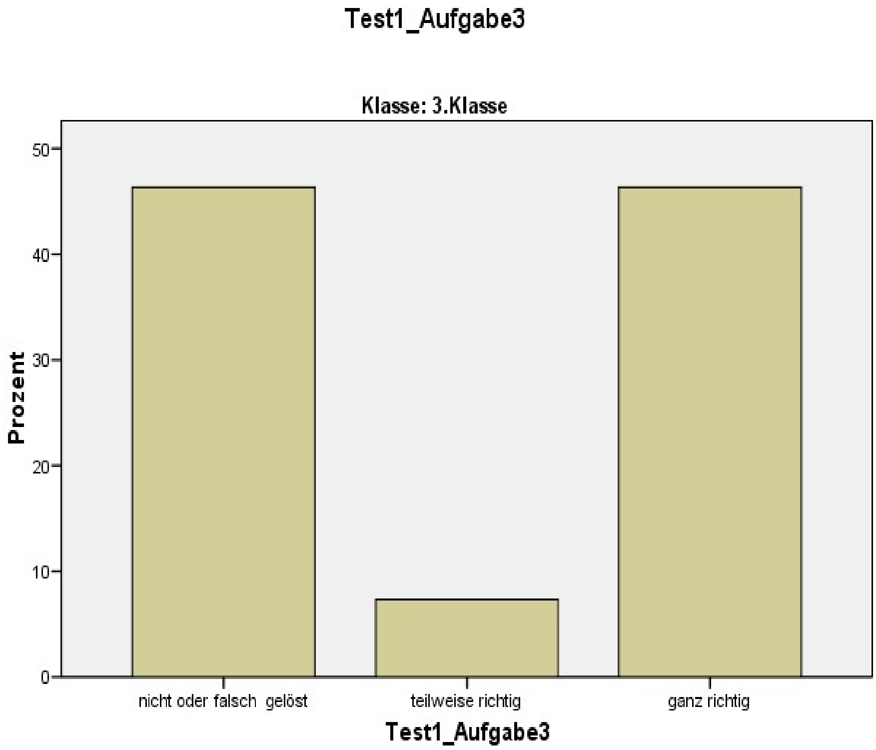


Abbildung 34: Testergebnis Aufgabe 3

Im Gegensatz dazu schafften es bei der Textaufgabe im Posttest in beiden Gruppen zwar zwei Drittel die richtige Gleichung aufzustellen, aber nur einem Drittel gelang es auch die Gleichung richtig zu lösen. Ein Unterschied zwischen den beiden Gruppen war bei den Textaufgaben nicht festzustellen (siehe Abbildung 35).

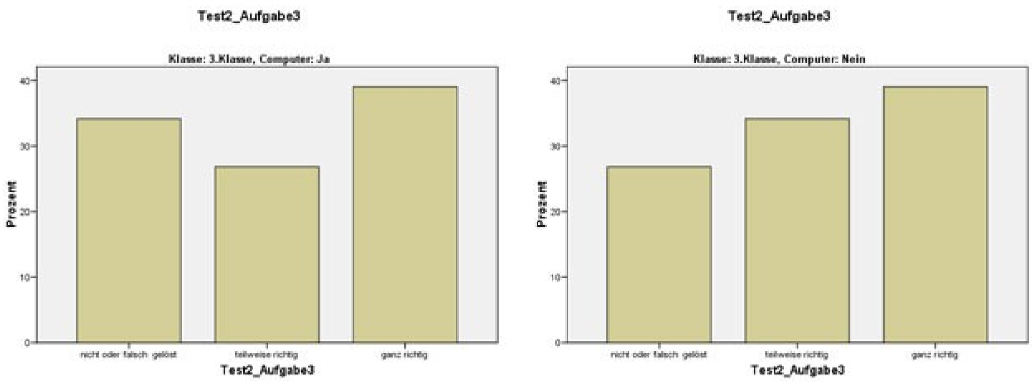


Abbildung 35: Testergebnis Aufgabe 3 aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

Interessanterweise gab es bei den Textaufgaben – unabhängig davon ob mit Treefrog gearbeitet wurde oder nicht – einen starken Unterschied zwischen den Schülern und Schülerinnen. Während 63% der Burschen die Aufgabe im Prätest vollständig richtig lösen konnten, schafften dies nur 37% der Mädchen (siehe Abbildung 36)

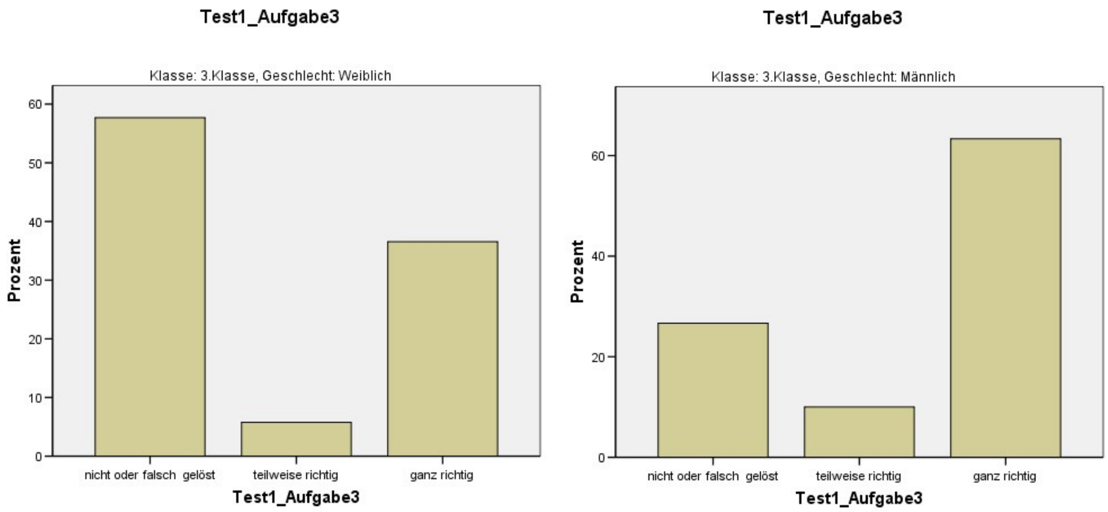


Abbildung 36: Testergebnisse Aufgabe 3 aufgeteilt nach Geschlecht

Auch beim Posttest schnitten die Burschen beim Lösen der Textaufgabe wesentlich besser ab als die Mädchen (siehe Abbildung 37).

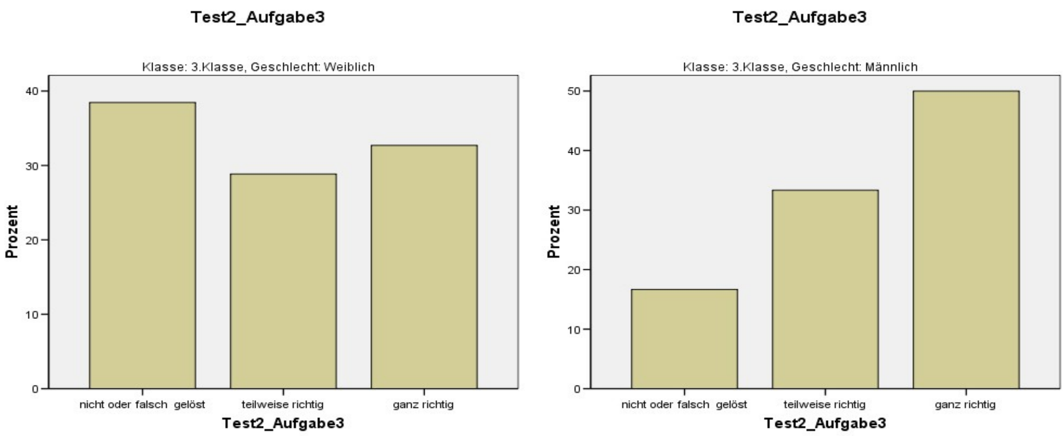


Abbildung 37: Testergebnis Aufgabe 3 aufgeteilt nach Geschlecht

4.8.2. 5. Klasse

Die Aufgaben wurden als ganz richtig gewertet, wenn sie vollständig und richtig gelöst waren; als teilweise richtig bei den Aufgaben 1) und 3), wenn nur ein kleiner Fehler (Rechenfehler, ...) vorkam oder zumindestens korrekt in eine Lösungsformel eingesetzt wurde. Die Aufgabe 2) wurde als teilweise richtig gewertet, wenn nur Flüchtigkeitsfehler vorkamen.

Für die fünften Klassen konnte nach einem t-Test (t_{37}=-2,127, p<0,5) bei jenen Schülern und Schülerinnen, welche im Laufe der Übungsphase Treefrog verwendeten, eine Verbesserung festgestellt werden. Die durchschnittliche Punktezahl steigerte sich von 2,9 im Prätest zu 3,5 im Posttest (vergleiche Abbildung 38).

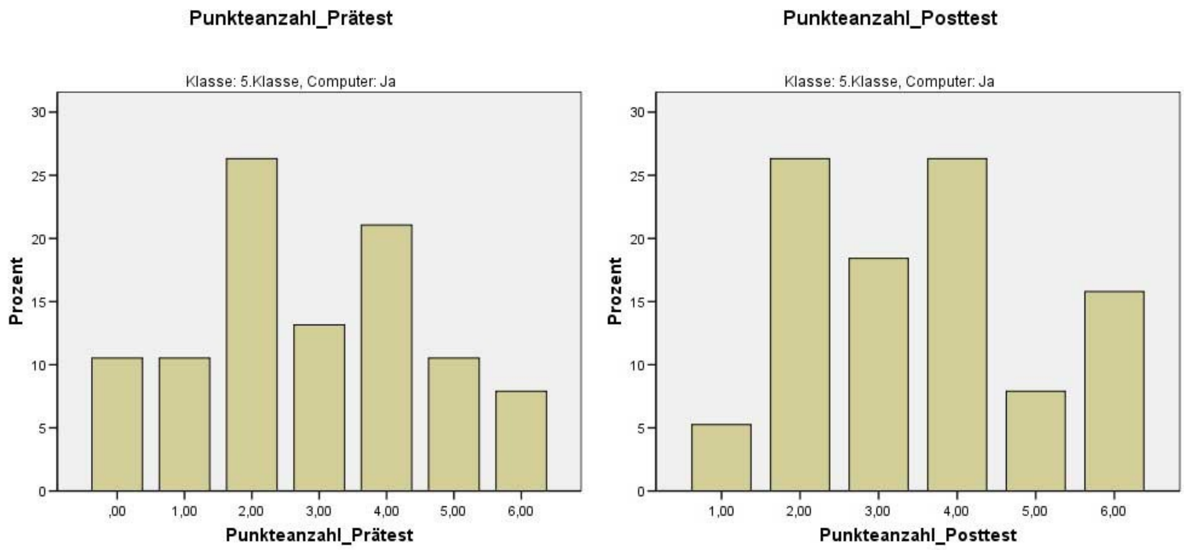
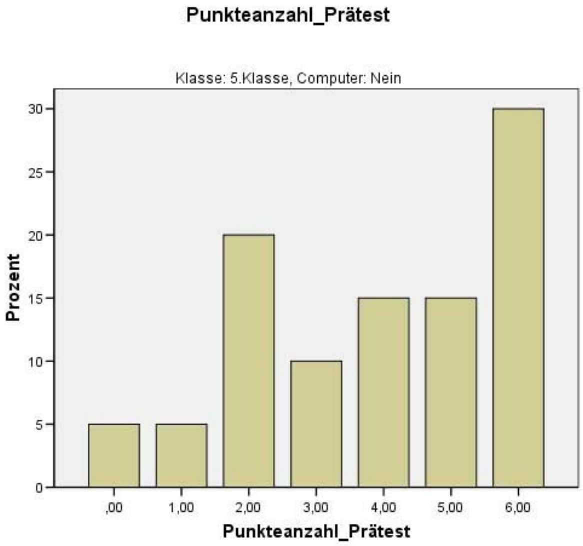


Abbildung 38: Testergebnis Treefrog

Kein signifikanter Unterschied zwischen Prätest und Posttest lässt sich bei jenen Schülern und Schülerinnen feststellen, welche mit einem Übungszettel arbeiteten (t_{19}=-0,513, ns.) (vergleiche Abbildung 39). Dies könnte jedoch darauf zurückzuführen sein, dass der Punktedurchschnitt bereits beim Prätest besser ist, als jener der Gruppe, welche Treefrog verwendete. Auch die Größe der Stichprobe war mit 20 Schülern und Schülerinnen wesentlich kleiner.



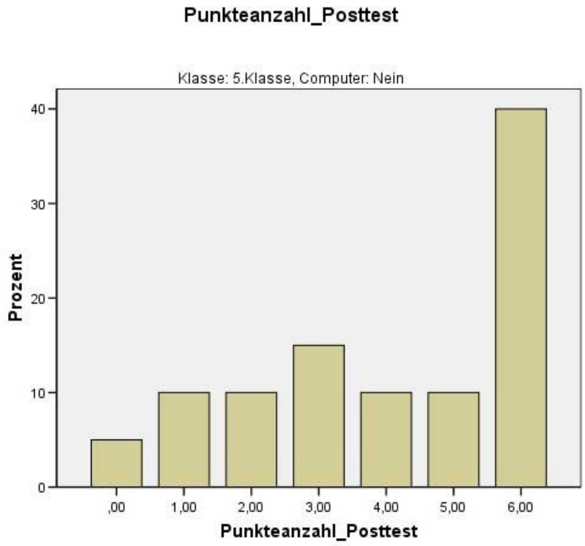


Abbildung 39: Testergebnis Übungszettel

4.8.2.1. Details zu den Aufgaben

Wie bei den dritten Klassen gab es zu jeder Aufgabe im Prätest eine ähnliche Angabe im Posttest. Diese sollen im folgenden wieder jeweils gemeinsam besprochen werden.

1) Löse die quadratische Gleichung: $2(x^2 + 7) = 29 – x$ (Prätest) bzw. $2x^2 -1 = 7(2 – x)$ (Posttest)

   Wie aus Abbildung 40 und Abbildung 41 ersichtlich, konnten sich weder jene Schüler und Schülerinnen, welche mit Treefrog arbeiteten (t_{37}=-2,127, p<0,5), noch die Kontrollgruppe (t_{19}=-1,314, ns.) verbessern.

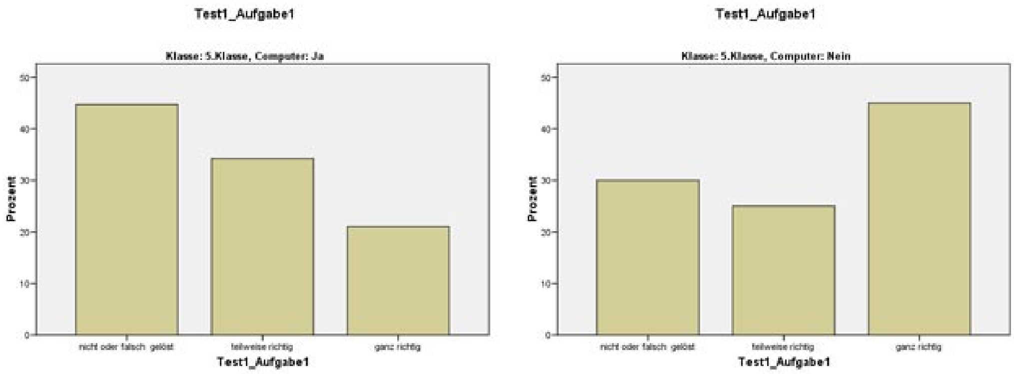


Abbildung 40: Testergebnis Aufgabe 1, Prätest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

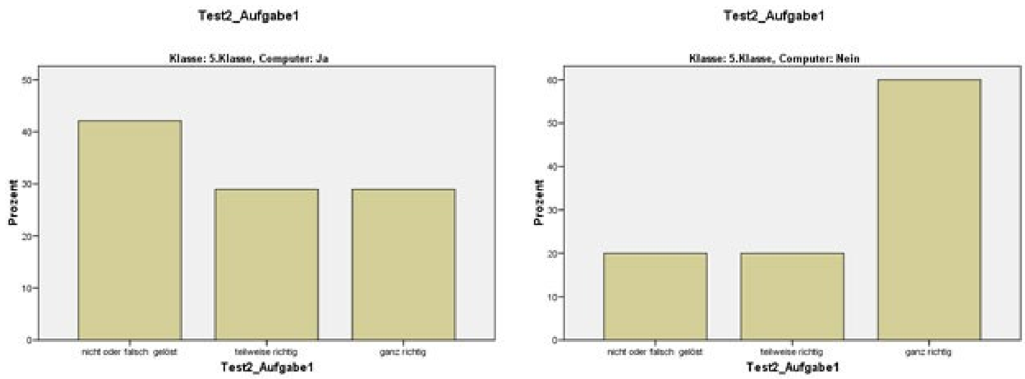


Abbildung 41: Testergebnis Aufgabe 1 aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

Interessanterweise schafften es 70% der Mädchen die Aufgabe des Prätests zumindest teilweise richtig zu lösen. Hingegen scheiterte fast die Hälfte aller Burschen an der Aufgabe (vergleiche Abbildung 42). Auch beim Posttest schnitten – unabhängig davon ob mit Treefrog geübt wurde oder nicht – bei dieser Aufgabe die Mädchen besser ab als die Burschen (vergleiche Abbildung 43).

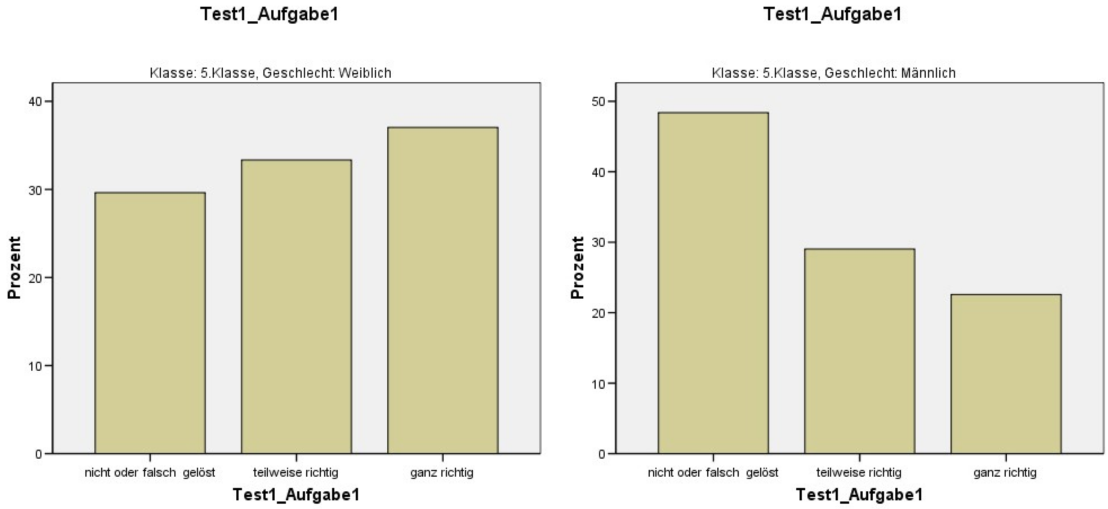


Abbildung 42: Testergebnis Aufgabe 1, Prätest, aufgeteilt nach Geschlecht

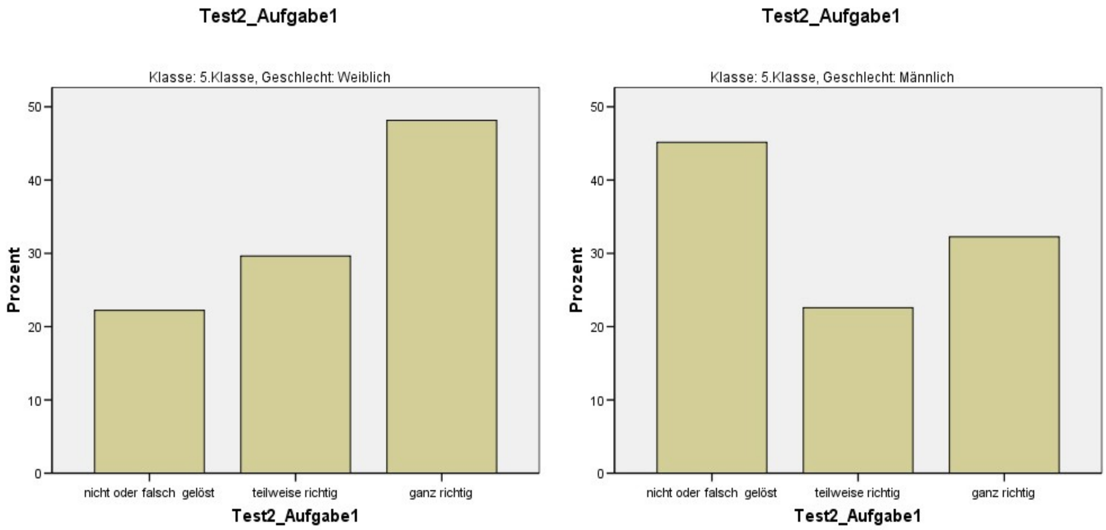


Abbildung 43: Testergebnis Aufgabe 1, Posttest, aufgeteilt nach Geschlecht

2) Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $25u^2 - 16v^2 =$ (Prätest) bzw. $36s^2 - 4t^2 =$ (Posttest)

   Bei dieser Aufgabe konnten sich jene Schüler und Schülerinnen, die mit Treefrog arbeiteten ($t_{37}=-4{,}845$, $p<0{,}05$), im Gegensatz zu denjenigen, die einen Übungszettel verwendeten ($t_{19}=-1{,}143$, ns.), (vergleiche Abbildung 44 und Abbildung 45) verbessern.

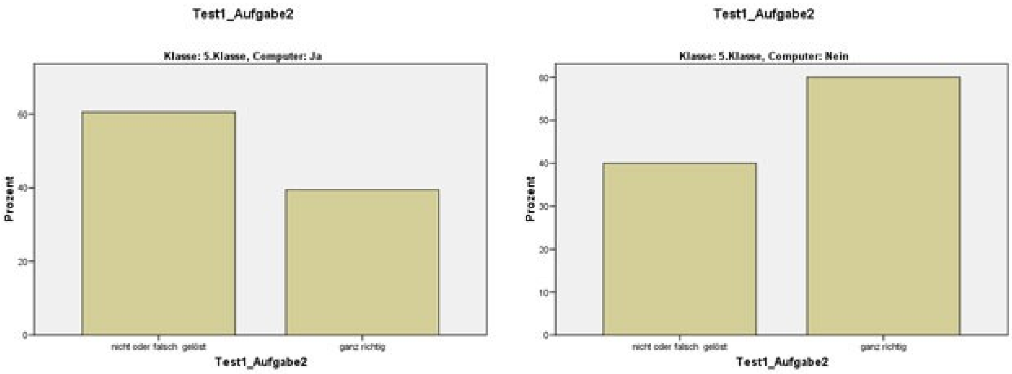


Abbildung 44: Testergebnis Aufgabe 2, Prätest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

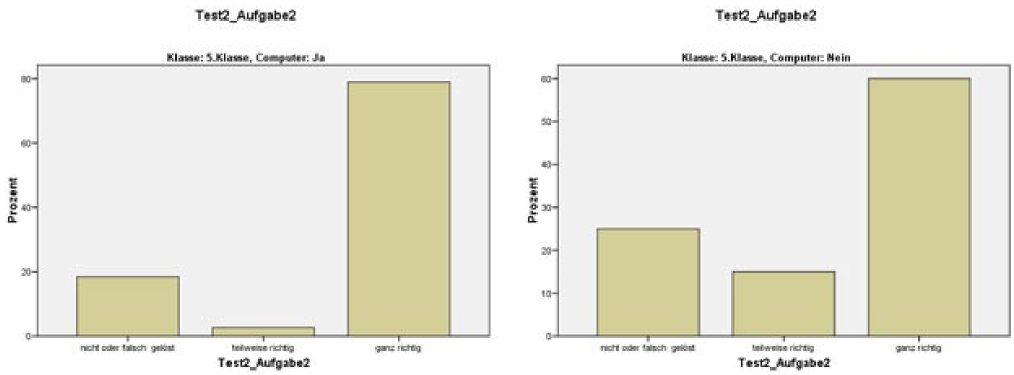


Abbildung 45: Testergebnis Aufgabe 2, Posttest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

3) Löse die quadratische Gleichung: $x^2 + 10x + 21 = 0$ (Prätest) bzw. $x^2 - 14x + 45 = 0$ (Posttest)

   Wie in Abbildung 46 und Abbildung 47 zu sehen ist, konnte sich bei dieser Aufgabe keine der beiden Gruppen verbessern (Treefrog: t_{37}=1.377, ns.; Übungszettel: t_{19}=2,032, ns.).

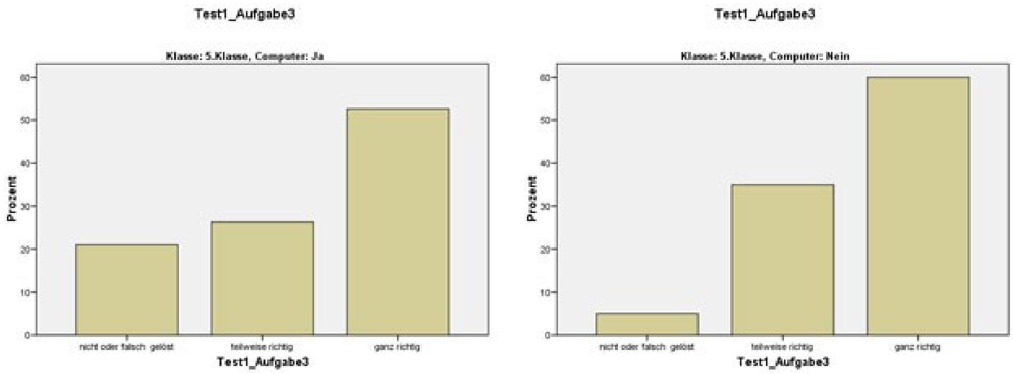


Abbildung 46: Testergebnis Aufgabe 3, Prätest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

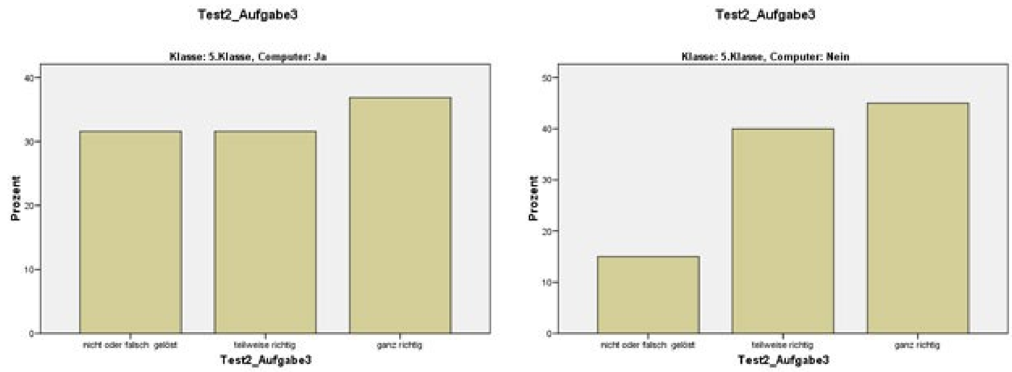


Abbildung 47: Testergebnis Aufgabe 3, Posttest, aufgeteilt in Übungsphase mit Treefrog (links) bzw. Übungszettel (rechts)

4.8.3. Resümee

Der für die dritten Klassen erwartete positive Übungseffekt ist tatsächlich eingetreten. Insgesamt lässt sich eine Verbesserung feststellen, die jedoch im Detail noch näher untersucht werden müsste. Möglich wäre vor allem ein positiver Effekt für das Rechnen mit Brüchen. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass Brüche durch die etwas kompliziertere Eingabe stärker beachtet werden müssen. Zusätzlich bietet das Arbeiten mit Treefrog den Vorteil, dass ein falscher Rechenschritt sofort zu einer Fehlermeldung führt. Dadurch werden zum Beispiel Fehler bei der Multiplikation (siehe Kapitel 4.8.4 Einige häufig auftretende Fehler) sofort gekennzeichnet und der Schüler bzw. die Schülerin ist gezwungen den letzten Schritt noch einmal zu überdenken.

Überraschend war, dass beim Rechnen mit dem Übungszettel keine signifikanter Lernerfolg festzustellen war.

Der positive Lerneffekt in den fünften Klassen war unerwartet. Obwohl die Eingabe kompliziert war und von den Schülern und Schülerinnen das Arbeiten mit Treefrog sehr negativ beurteilt wurde (siehe Kapitel 4.9.1 Fragen zu Treefrog), stellte sich eine Verbesserung ein. Dies könnte die Ursache darin haben, dass im BG/BRG Enns aufgrund der kleinen Klassengröße ein wesentlich größerer Anteil mit dem Programm arbeitete. Da viele Schüler und Schülerinnen in dieser Klasse nicht mehr in die Lösungsformel einsetzen konnten, wurde dieses Wissen in der Übungsphase aufgefrischt. Dies würde erklären, warum eine Verbesserung zu erkennen war.

4.8.4. Einige häufig auftretende Fehler

In den dritten Klassen bereitete das Vorhandensein von Brüchen den Schülern und Schülerinnen die größte Schwierigkeit. Dabei traten zwei Fehler besonders häufig auf:

- **Fehler bei der Multiplikation**

  Um zum Beispiel aus der Gleichung

  $$\frac{1}{2}+\frac{z}{3}=5$$

  den Bruch zu entfernen wird mit drei multipliziert. Dabei entsteht bei vielen Schülern und Schülerinnen jedoch folgende nicht korrekte Form:

  $$\frac{1}{2}+z=15$$

  Dieser Fehler könnte darauf zurückzuführen sein, dass die Struktur des Terms nicht richtig erkannt wurde.

- **Kürzen aus Summen**

  Sehr oft wird von Schülern und Schülerinnen folgende Umformung vorgenommen:

$$v+2\mathrm{v}+\frac{v}{2}=126$$
$$v+v=126$$

Hier wird scheinbar ein Schema entwickelt, dass gleichartige Zahlen im Zähler und Nenner gestrichen werden dürfen. Dass dies nur bei der Multiplikation und nicht bei der Addition erlaubt ist, wird ignoriert.

In den fünften Klassen treten sehr oft Vorzeichen- und Rechenfehler auf. Viele Schüler und Schülerinnen scheitern auch daran richtig in eine Lösungsformel einzusetzen. Neben diesen Schwierigkeiten sind zwei Arten von Fehlern besonders auffällig:

- **Entfernen des quadratischen bzw. linearen Glieds**

  Diese Fehler könnten darauf zurückzuführen sein, dass die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe gerne lösen möchten, aber mit der gegeben Form nichts anzufangen wissen. Daraufhin wird versucht die Gleichung in eine für sie lösbare Form zu bringen.

  Um eine lineare Gleichung zu erhalten ziehen manche Schüler und Schülerinnen zuerst die Wurzel auf folgende Art und Weise

$$x^2+x=7{,}5$$
$$2\mathrm{x}=\sqrt{(7{,}5)}$$

  und addieren danach– jetzt korrekterweise –.die beiden x

  Ein zweiter typischer Fehler ist die Entfernung des linearen Glieds, indem folgendermaßen umgeformt wird:

$$2\mathrm{x}^2+14=29-x$$
$$3\mathrm{x}^2-15=0$$

  Anschließend wird das Quadrat isoliert und die Wurzel gezogen.

- **Verallgemeinerung des Schemas** $\boldsymbol{x(x-b)=0 \Leftrightarrow x=c \vee x-b=0}$

  Offensichtlich wird bei Lösungsversuchen dieser Art

$$x(2\mathrm{x}-1)=15$$
$$x_1=15$$
$$2\mathrm{x}-1=15$$

das Schema $x(x-b)=0 \Leftrightarrow x=c \vee x-b=0$ unzulässiger weise zu $x(x-b)=c \Leftrightarrow x=c \vee x-b=c$ verallgemeinert.

4.9. *Auswertung der Fragebögen*

4.9.1. Fragen zu Treefrog

Wie aus Abbildung 48 ersichtlich, gefällt das Design des Programms nur 12% der Befragten, ein Großteil (69%) findet es okay und 19% gefällt es nicht.

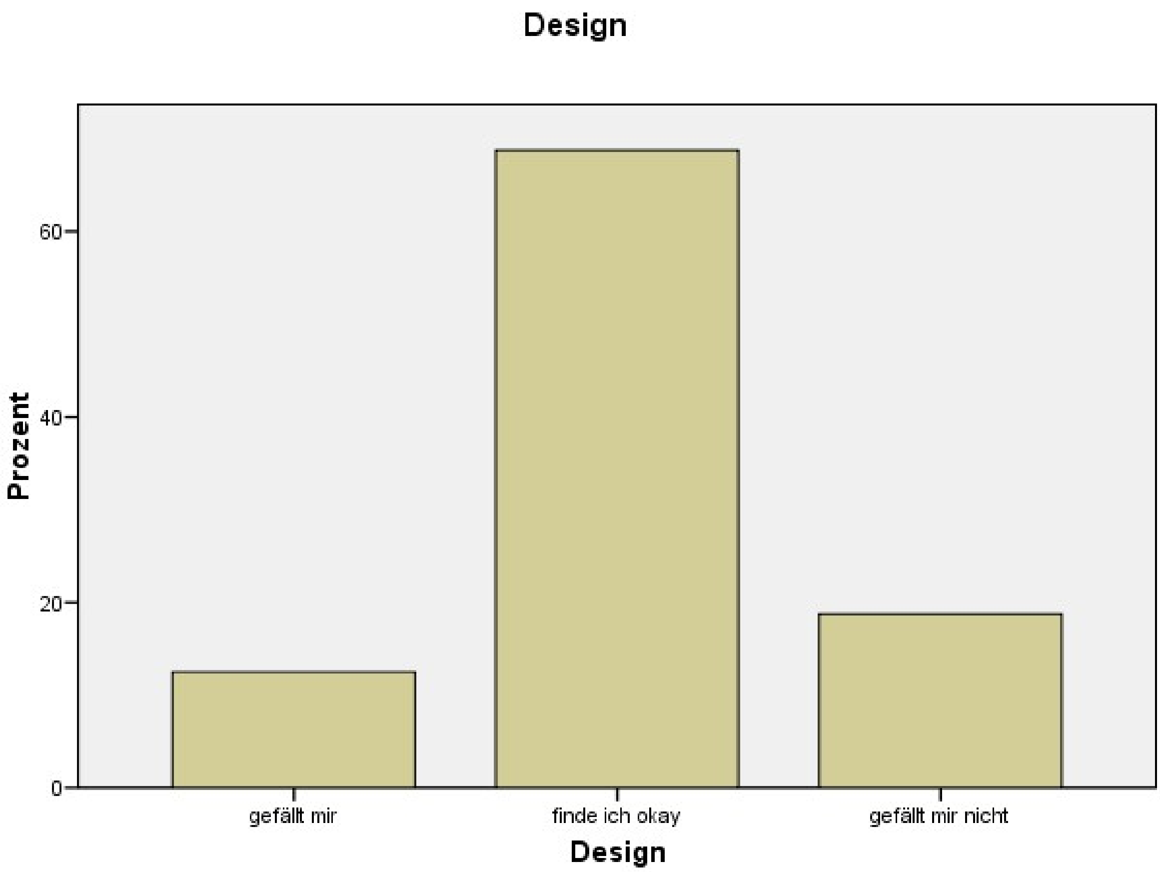


Abbildung 48: Das Design des Programms ....

Generell wird es von Mädchen positiver bewertet als von Burschen und von den dritten Klassen besser wie von den fünften Klassen. Meiner Meinung nach ist das Design nicht sehr ansprechend und könnte vielleicht durch ein Bild oder ähnliches aufgelockert werden.

Die Eingabe in das Programm wird von mehr als der Hälfte als umständlich angesehen (vergleiche Abbildung 49).

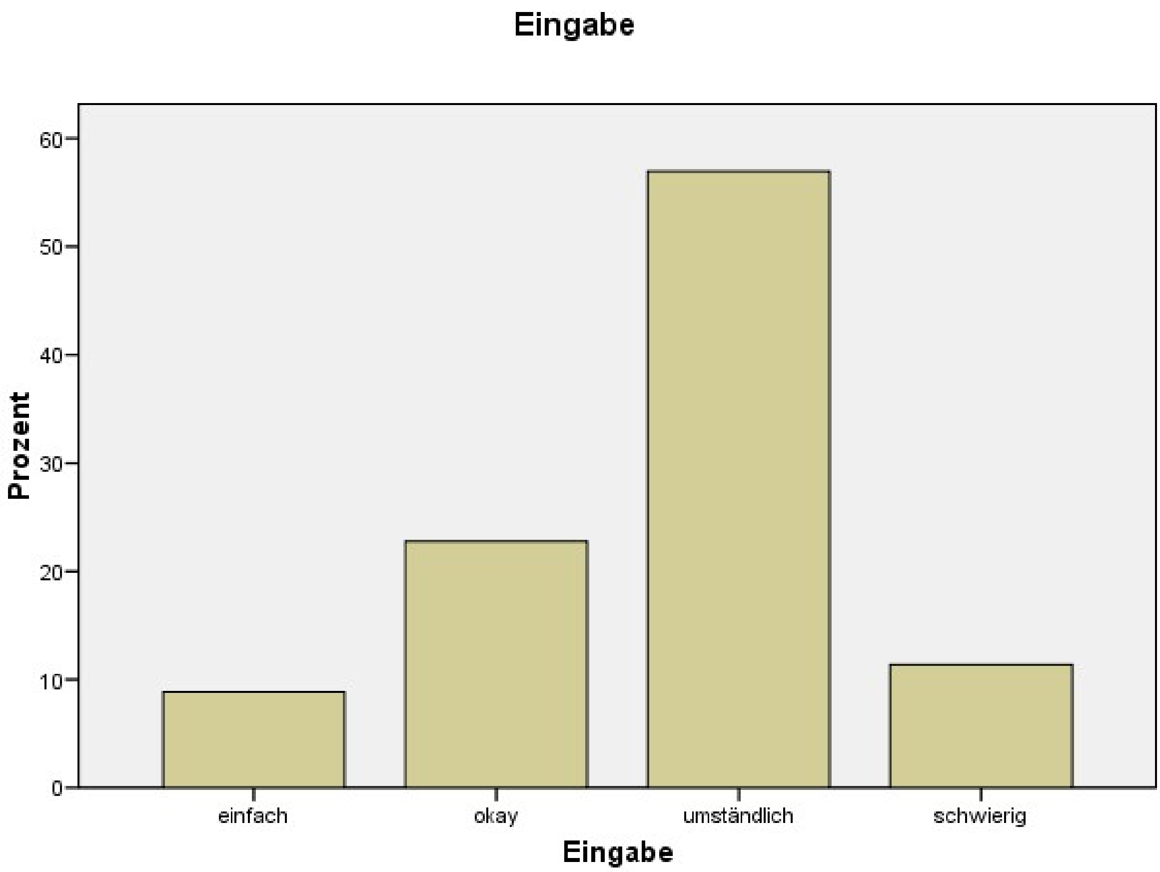


Abbildung 49: Die Eingabe in das Programm ist ...

Genauer betrachtet wird sie von Burschen in der dritten Klasse (siehe Abbildung 50 rechts) und von beiden Geschlechtern in den fünften Klassen (siehe Abbildung 51) von über 70% als umständlich beschrieben, während es bei den Mädchen der dritten Klassen (siehe Abbildung 50 links) nur 24% sind.

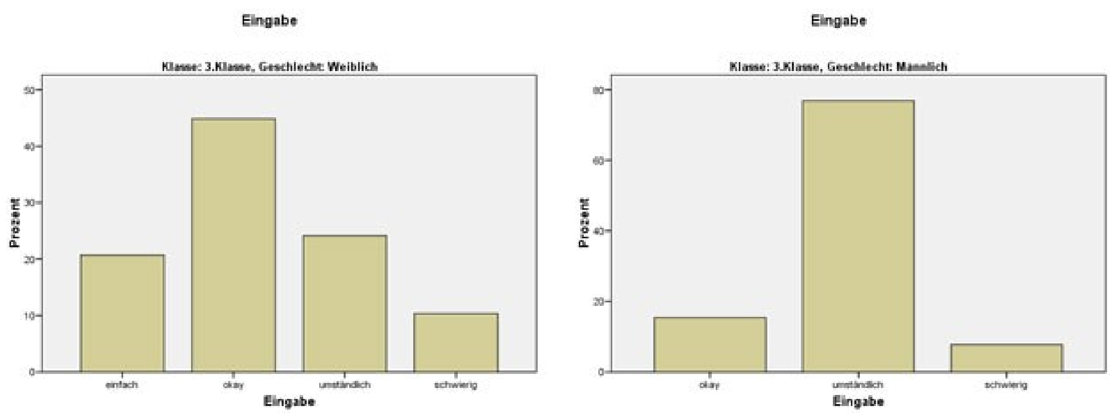


Abbildung 50: Die Eingabe in das Programm ist....; Antworten 3. Klasse weiblich (links) und männlich (rechts)

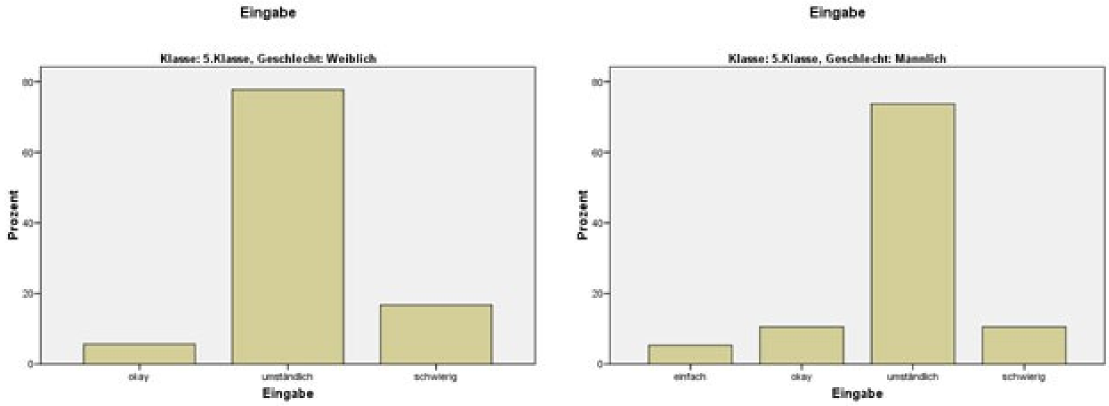


Abbildung 51: Die Eingabe in das Programm ist....; Antworten 5. Klasse weiblich (links) und männlich (rechts)

Die schlechte Bewertung in der fünften Klasse ist nicht überraschend, da es, wie bereits erwähnt, ziemlich umständlich ist Brüche und Wurzeln einzugeben und im Folgenden den Überblick nicht zu verlieren. Interessant finde ich, dass in den dritten Klassen doch 66% der Mädchen die Eingabe als einfach oder okay angeben, während von den Burschen keiner sie als einfach und nur 15% sie als okay empfinden. Ein Mädchen schrieb sogar beim Fragebogen „Besonders gut gefallen hat mir, dass es einfach zu verstehen war. Und wahrscheinlich auch den ANTI Computerfreaks der Umgang mit Treefrog leicht fällt.“

Die Kontrolle nach jeder Zeile wird von 68% der Befragten als positiv empfunden. Nur sehr wenige (3%) beurteilen die Überprüfung als störend (siehe Abbildung 52).

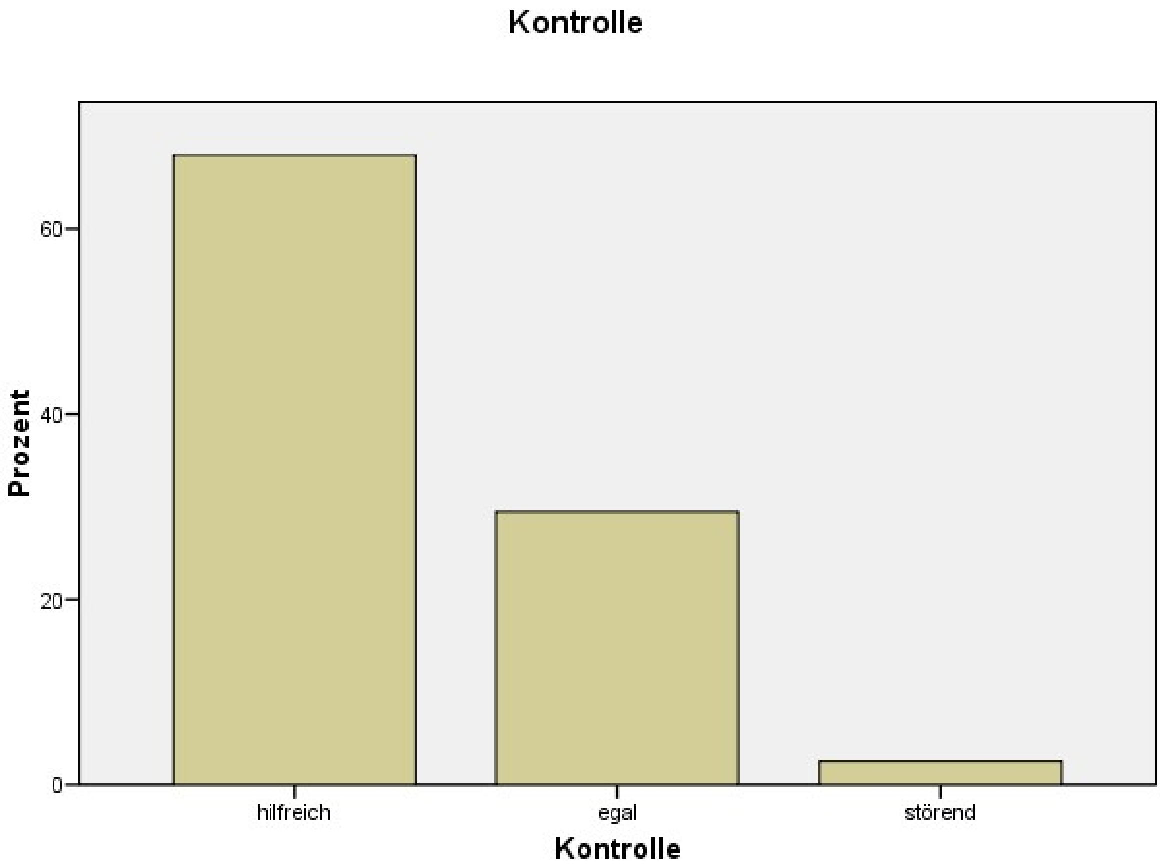


Abbildung 52: Dass ich nach jeder Zeile eine Kontrolle habe, ...

Wie aus Abbildung 53 hervorgeht finden 84% der Mädchen die Überprüfung der Rechenschritte hilfreich, wohingegen nur 42% der Burschen dieser Meinung sind. 55% der Burschen ist die Kontrolle egal.

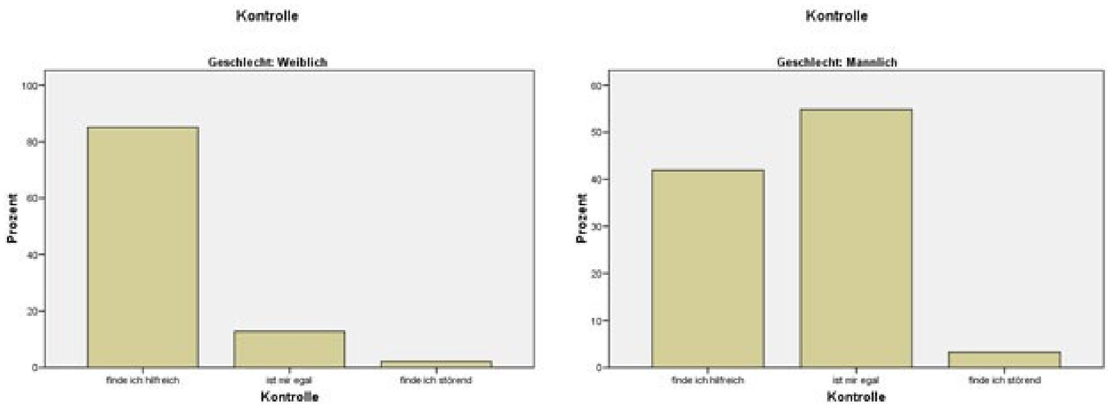


Abbildung 53: Dass ich nach jeder Zeile eine Kontrolle habe, ... aufgeschlüsselt nach Geschlecht

Zwischen den dritten und fünften Klassen findet man kaum einen Unterschied.

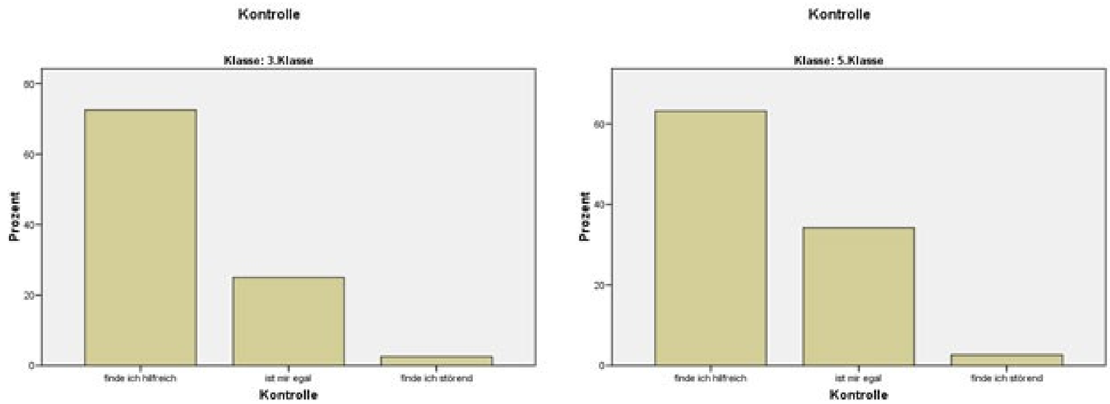


Abbildung 54: Dass ich nach jeder Zeile eine Kontrolle habe, ... aufgeschlüsselt nach Klassen

Wie aus Abbildung 55 ersichtlich ist, geben 65 % der Schüler und Schülerinnen an ein bisschen oder einiges dazugelernt zu haben, aber ein doch relativ großer Teil von 34 % gibt an gar nichts dazugelernt zu haben.

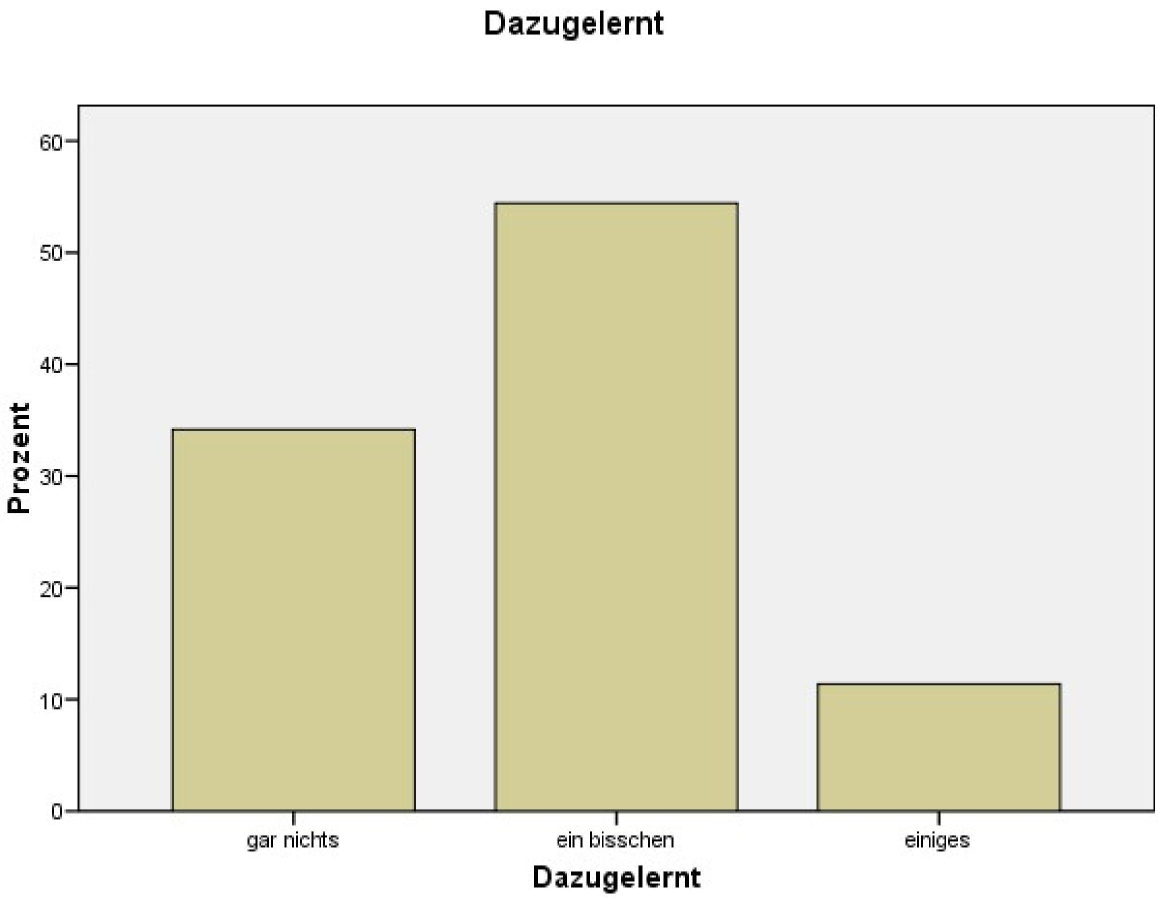


Abbildung 55: Dazugelernt habe ich ....

Der Anteil, der subjektiv nicht profitiert hat, ist bei den Burschen (45%) größer als bei den Mädchen (27%) (siehe Abbildung 56), wobei hier zwischen den dritten Klassen (21%) und den fünften Klassen (37%) eine große Differenz zu beobachten ist (siehe Abbildung 57).

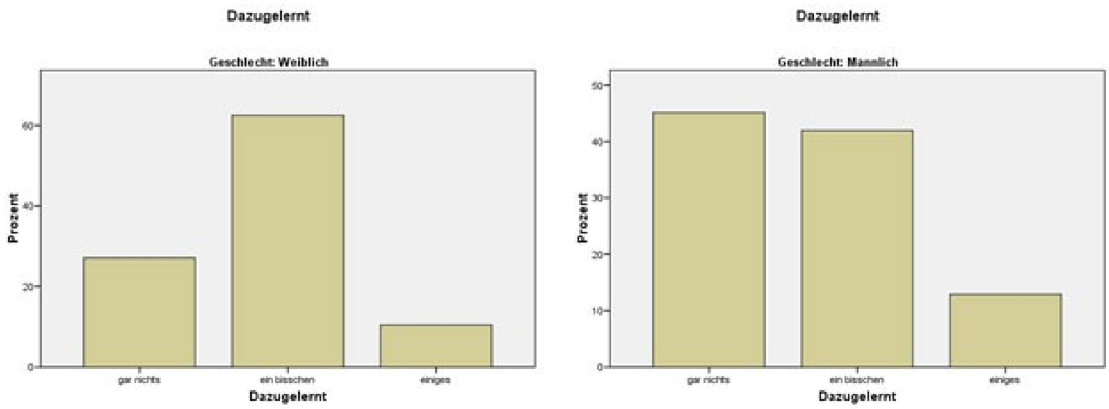


Abbildung 56: Dazugelernt habe ich .... aufgeschlüsselt nach Geschlecht

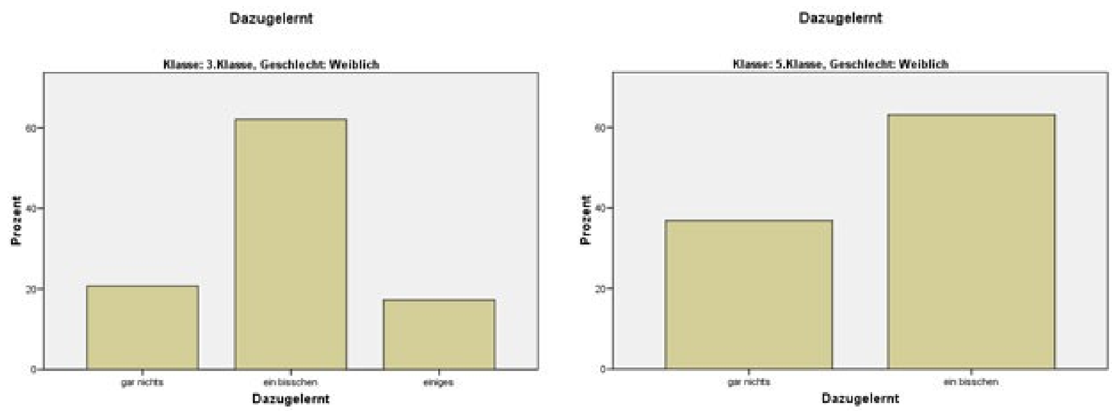


Abbildung 57: Dazugelernt habe ich .... Mädchen aufgeschlüsselt nach Klasse

Ein genauer Vergleich der fünften Klassen ergab folgendes Bild: In Enns haben alle Schüler und Schülerinnen, die eine Angabe gemacht haben, ein bisschen dazugelernt, während die fünften Klassen in Steyr angeben zu 60% gar nichts gelernt zu haben (vergleiche Abbildung 58).

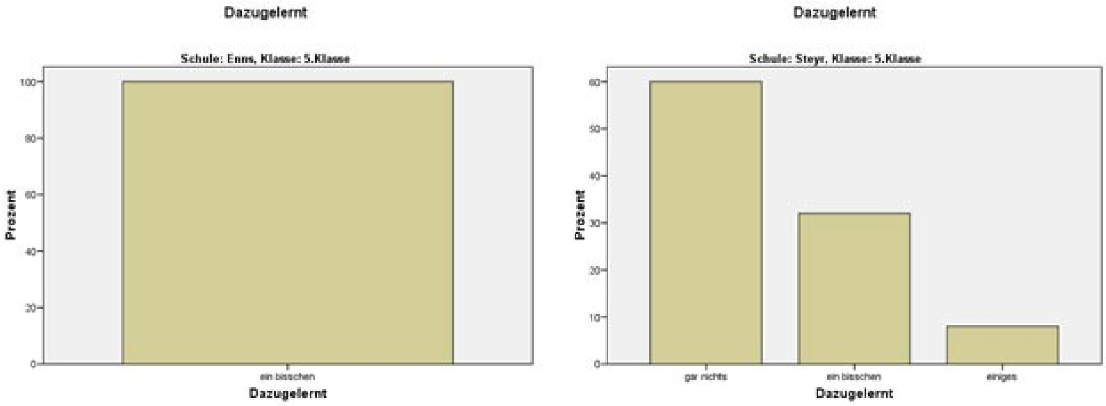


Abbildung 58: Dazugelernt habe ich .... Vergleich 5. Klasse Enns und 5.Klasse Steyr

Eine mögliche Erklärung für diese Beobachtung ist, dass in Enns – wie bereits in Kapitel 4.8.3 erwähnt – die Lösungsformeln nicht mehr präsent waren und während der Übungsphase einigen erklärt wurde, wie in die Lösungsformel überhaupt einsetzt wird. In den dritten Klassen sind die Ergebnisse zwischen Enns und Steyr ähnlich.

Besonders gefällt den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit die Hintergrundfarbe zu ändern. Dies ist die häufigste positive Rückmeldung und es gibt kaum einen Schüler bzw. eine Schülerin, welcher bzw. welche die ursprüngliche Farbe behielt, obwohl diese Funktion in keiner Klasse explizit erklärt wurde. Positiv erwähnt wird von vielen auch die Kontrolle nach jeder Eingabe und die Möglichkeit einen Hinweise zu erhalten. Auch die Option eine Aufgabe zu überspringen wird von einigen Schülern und Schülerinnen positiv angegeben.

Besonders kritisiert wird, dass die Eingabe umständlich ist und trotz des Programms Nebenrechnungen am Zettel ausgeführt werden müssen. Obwohl die Kontrolle nach jeder Zeile von vielen als Pluspunkt empfunden wird, wünschen sich einige, dass zusätzlich der Fehler angezeigt wird. Viele Schüler und Schülerinnen stört auch, dass Treefrog keine Rechenoperationen ausführen kann. Auch das Design wird mehrmals negativ erwähnt. Bei der Möglichkeit eine Aufgabe zu überspringen wird kritisiert, dass es nicht möglich ist wieder zurückzugehen.

4.9.2. Fragen allgemein

In Verbindung mit Mathematik gibt nur ein Mädchen aus der dritten Klasse an, dass sie regelmäßig mit dem Computer arbeitet. 92 % der Schüler und Schülerinnen geben an den Computer selten oder nie zu nutzen (siehe Abbildung 57).

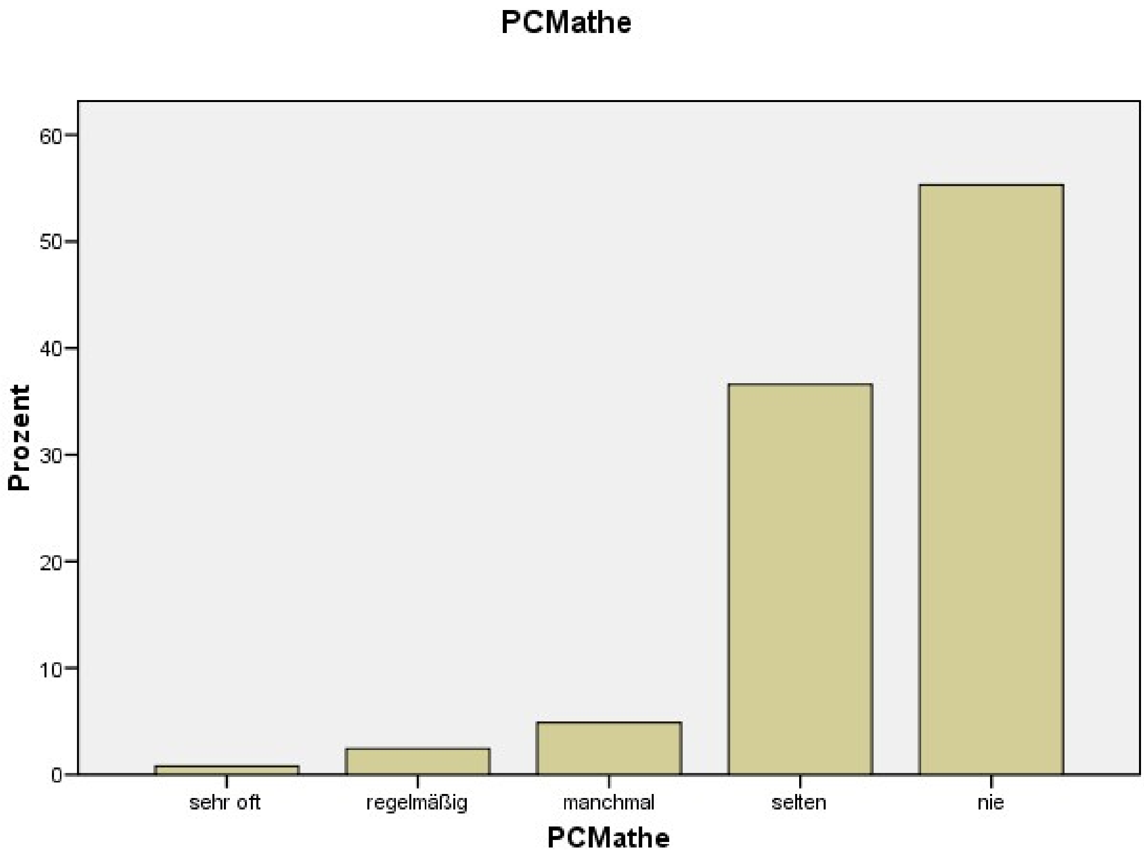


Abbildung 59: Mit dem Computer arbeite ich in Mathematik ...

Die Schüler und Schülerinnen einer fünften Klasse geben an im Mathematikunterricht bereits *Excel* verwendet zu haben. Einer zweiten fünften Klasse waren *GeoGebra* und *CAD 3D* bekannt.

Generell kennen die Schüler und Schülerinnen kaum Mathematikprogramme. Angeführt wurde vor allem *Excel* und von einem Schüler *OpenOffice Calc*. Auch *GeoGebra* wird öfter erwähnt. Einige nannten auch den Taschenrechner bzw. das Handy. Einmal wurden jeweils der Windows Standard Rechner und Billi Banni – Rechenzirkus, ein Programm mit Rechenübungen für Kinder im Alter von vier bis sieben Jahren, genannt.

Im Schulunterricht allgemein wurde der Computer öfter verwendet, wobei die Angaben jedoch auch innerhalb der Klassen sehr unterschiedlich waren. Fast die Hälfte gibt jedoch an im Unterricht weniger als einmal pro Monat den Computer zu benutzen (siehe Abbildung 60). Unter Umständen wurde die Frage von einigen Schülern und Schülerinnen auch nur auf den Mathematikunterricht bezogen, da auch in den fünften Klassen 36 % angeben, dass der PC alle zwei Wochen oder seltener genutzt wird, obwohl in diesem Schuljahr Informatik unterrichtet wird.

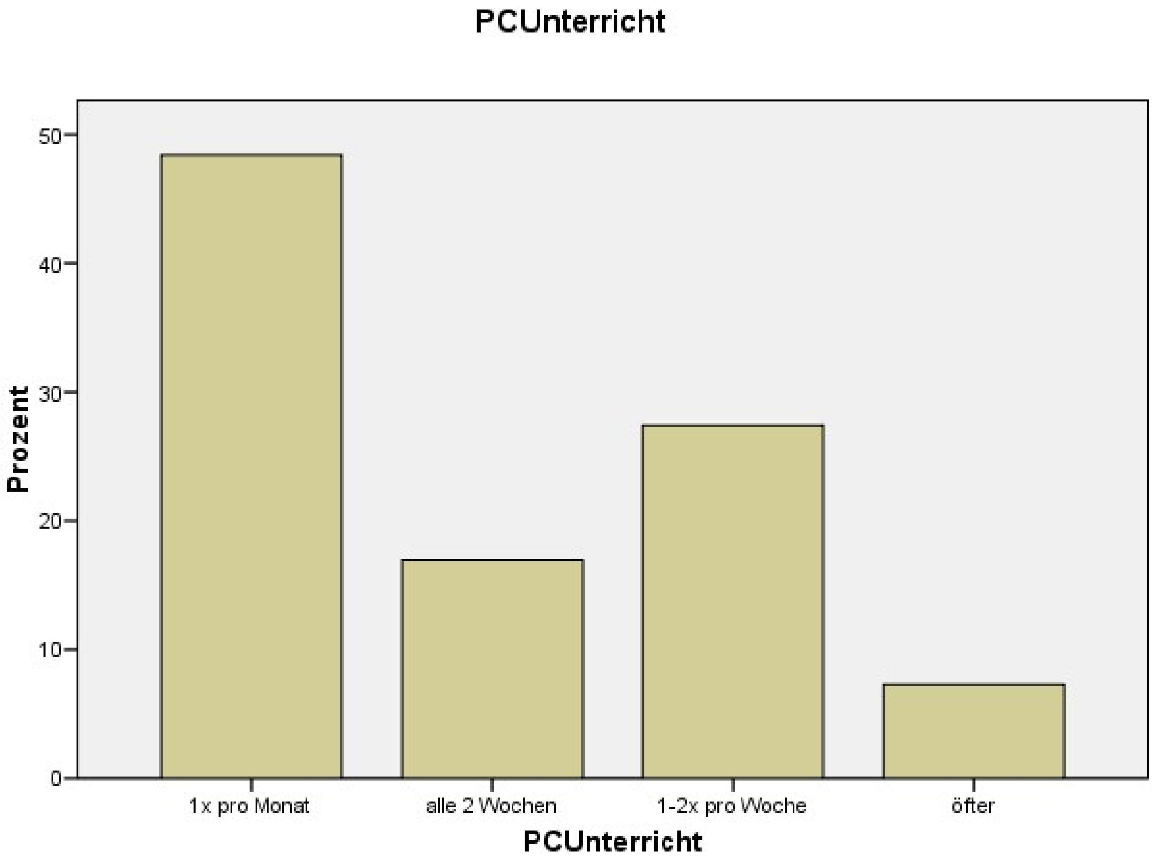


Abbildung 60: Im Unterricht arbeite ich mit dem PC ...

Die Rückmeldungen zum Computereinsatz im Unterricht waren überwiegend positiv. Nur eine Schülerin der fünften Klasse lehnte bei den Fragebögen den EDV-Einsatz völlig ab. Sie gab an, dass ihr „nichts“ daran gefällt und „alles“ missfällt.

Positiv finden die Schüler und Schülerinnen vor allem die Abwechslung und das selbstständige Arbeiten. Auch „praktisches Arbeiten“ wird von einigen genannt.

Einige geben auch an, dass weniger geschrieben werden muss. Manche betrachten scheinbar auch Einheiten, in denen der Computer eingesetzt wird, nur teilweise als Unterricht und geben an, dass man nicht so viel lernen muss und die Möglichkeit zum chatten und Internet surfen hat.

Interessanterweise wird am häufigsten die Infrastruktur kritisiert, das heißt der Computerraum (in Steyr im Keller) und die schwache Leistung der PCs, so dass es zu Überlastungen und Abstürzen kommt. Einen Schüler störte auch das Betriebssystem. In den fünften Klassen aus Steyr wurde häufig „langweilige Theorie" angegeben. Dies ist – wie ich aus Gesprächen mit Schülern und Schülerinnen vermute – auf einen sehr theorielastigen Informatikunterricht – auch die Angabe „Informatik mit verbrauchten Lehrern" kam vor – zurückzuführen.

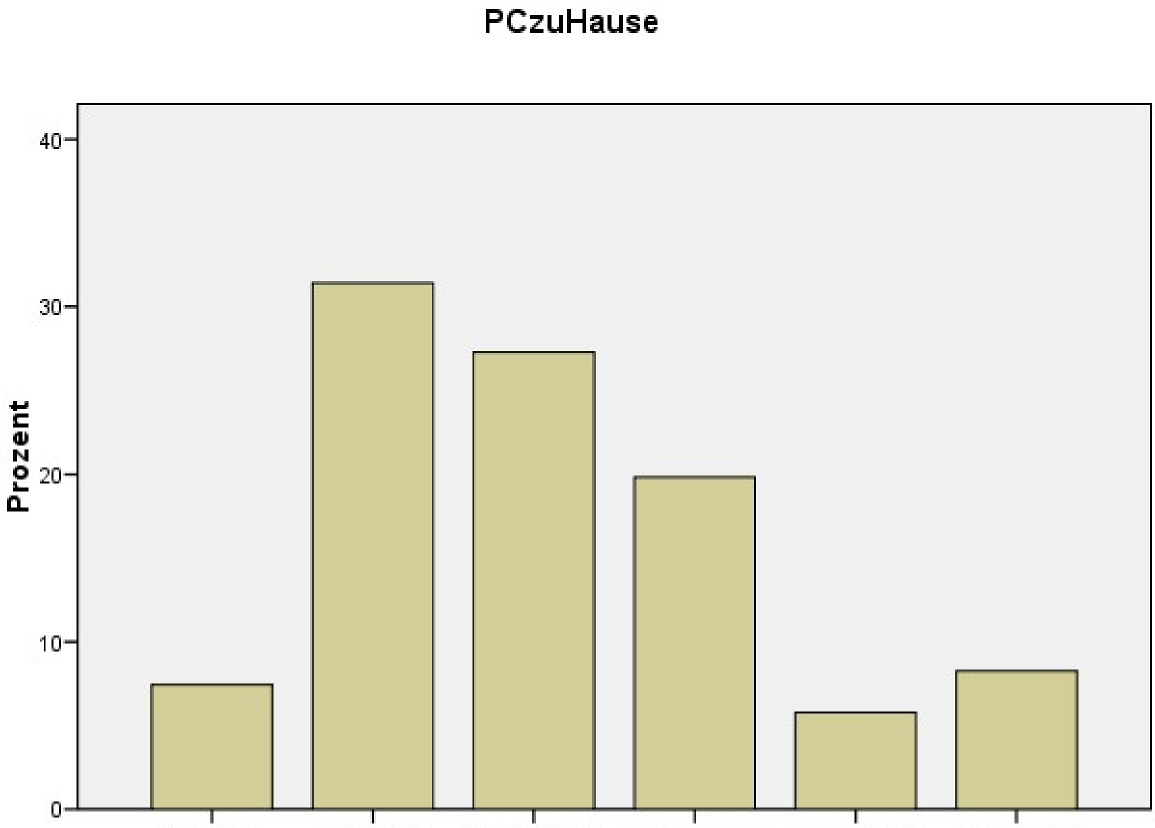


Abbildung 61: In einer Woche benütze ich den PC (arbeiten, spielen, Internet, ...) zu Hause ungefähr

Wie in Abbildung 61 dargestellt ist, setzten nur sieben Prozent der Schüler und Schülerinnen zu Hause den PC weniger als eine Stunde pro Woche ein. 31 %

verwenden den Computer für ein bis fünf, 27 % für fünf bis zehn und 20 % für zehn bis 15 Stunden. Acht Prozent geben an den PC mehr als 20 Stunden pro Woche zu nutzen.

Verwendet wird der Computer sehr häufig zum Internet surfen (Musik herunterladen, Recherchen für die Schule, Nachrichten lesen, Kommunikation, Supplierplan, *Szene1*, *Youtube*) und für Spiele (zum Beispiel Rollenspiele und *FIFA 07*). Auch Textverarbeitungs- und Prästentationsprogramme werden von vielen unter anderem für Hausübungen und Referate eingesetzt. Eine wesentliche Rolle spielt auch Musik, diese wird nicht nur abgespielt, sondern auch aufgenommen und bearbeitet. Einige Schüler und Schülerinnen nutzen den PC zum Bearbeiten von Bildern und für Videos.

5. Zusammenfassung

Treefrog, ein Übungsprogramm für elementare Algebra, wurde von Paul Strickland entwickelt und im Rahmen dieser Diplomarbeit ins Deutsche übersetzt. Im Anschluss daran wurde der Einsatz im Unterricht in der dritten und fünften Klasse AHS untersucht. An dieser Untersuchung nahmen 140 Schüler und Schülerinnen des BG/BRG Enns und BG/BRG Steyr Werndlpark teil.

Obwohl der EDV-Einsatz vielfältige Möglichkeiten bietet und auch im Lehrplan gefordert wird, sieht man anhand der Versuchsklassen, dass der PC im Mathematikunterricht noch nicht weit verbreitet ist. Die Ergebnisse der Fragebögen weisen jedoch darauf hin, dass die Schüler und Schülerinnen die Arbeit am Computer prinzipiell positiv beurteilen und dadurch Abwechslung geboten wird.

Im Rahmen der Untersuchung hat sich gezeigt, dass durch den Einsatz von Treefrog ein positiver Lernerfolg zu erwarten ist. Die Arbeit mit Treefrog wird jedoch von den Schülern und Schülerinnen eher negativ beurteilt, da sie die Eingabe umständlich und das Design wenig ansprechend finden. Alle zu der Arbeit mit dem Programm zu verpflichten, ist daher meines Achtens nach nicht zielführend. Ein Einsatz würde sich aber zum Beispiel beim Stationenlernen anbieten, wenn den Schülern und Schülerinnen die Wahl geboten wird, auf welche Art und Weise sie üben möchten. Dies wäre vor allem für jene geeignet, die gerne nach jeder Zeile eine Kontrollmöglichkeit haben wollen. Übungen mit Treefrog könnten auch denjenigen Schülern und Schülerinnen angeboten werden, welche Defizite in der elementaren Algebra in Bereichen aufweisen, welche sie bereits bewältigen sollten. Dadurch wird ihnen die Möglichkeit geboten vorhandene Lücken selbstständig zu schließen.

Literaturverzeichnis

(1) BIERBAUMER, Irma; BLEIER, Gabriele; DORFMAYR, Anita; EMBACHER, Franz; HEUGL, Helmut; HIMPSL, Klaus; HOHENWARTER, Markus, JAUCK, Gabriele; KLINGER, Walter; LINDNER, Andreas; OBERHUEMER, Petra; STEPANCIK, Evelyn; WEGSCHEIDER, Walter; 2006; Rechenschaftsbericht zum Forschungsprojekt des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur: Medienvielfalt im Mathematikunterricht; http://www.austromath.at/medienvielfalt/, 19.11.2008

(2) BUCHBERGER, Bruno; Should Students Learn Integration Rules?; 1989; http://www.risc.uni-linz.ac.at/publications/download/risc_350/1990-00-00-A.pdf, 28.11.2008

(3) BUCHBERGER, Bruno; Computer-Algebra: Das Ende der Mathematik?; Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2, 2000; http://www.risc.uni-linz.ac.at/publications/download/risc_2670/2000-05-22-A.pdf, 28.11.2008

(4) ERBER, Gabriele; OTTENSCHLÄGER, Johann; SCHLÖGLHOFER Franz; VORMAYR, Dieter; 3. Auflage 2006; Zum Beispiel Mathematik 3; Veritas-Verlag Linz

(5) GÖTZ, Stefan; REICHEL Hans-Christian; MÜLLER Robert; HANISCH Günter; unter Mitarbeit von Claudia WENZEL, Marianne MÜLLER; 1. Auflage 2004; Mathematik Lehrbuch 5; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien

(6) HEUGL, Helmut; KLINGER, Walter; LECHNER Josef; 1996; Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen – ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt; Addison-Wesley, Deutschland

(7) LEWISCH, Ingrid; 6. Auflage 2007; Mathematik 3: Verstehen-Üben-Anwenden,Veritas-Verlag Linz

(8) LINGEFJÄRD, Thomas; 2008; Samspelet mellan algebra och geometri; Nämnaren 04 2008; www.geogebra.org/publications/2008-Lingefjard-Namnaren-4.pdf 13.2.2009

(9) MALLE, Günther; unter Mitarbeit von Heinrich BÜRGER; Herausgegeben von

Erich Ch. WITTMANN; 1993; Didaktische Probleme der elementaren Algebra; Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden

(10) MALLE, Günther; Ramharter, Ester; ULOVEC, Andreas; KANDL, Susanne; unter Mitarbeit von Sonja MALLE, Bernhard SALZGER, Helge WOSCHITZ; 1. Auflage 2005; Mathematik verstehen 5; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien

(11) Lehrplan Mathematik Unterstufe, http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf, 3.2.2009

(12) Lehrplan Mathematik Oberstufe, http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, 3.2.2009

(13) HOT POTATOES; http://www.hotpotatoes.de/index.html, 19.5.2009

(14) Maxima, http://maxima.sourceforge.net/, 19.5.2009

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Martina Lemmé
Geburtsort:	Wien
Geburtsdatum:	12.5.1982
Familienstand:	ledig
Staatsbürgerschaft:	Österreich

Schulausbildung:

1988-1992	Volksschule in Linz und Enns
1992-2000	BG/BRG Steyr Werndlpark, Reifeprüfung am 23.7.2000
Okt. 2000 – Nov. 2001	Norwegischkurs an der Folkeuniversitetet in Asker
Okt. 2002 – Sept. 2003	Studium Lehramt Mathematik/Informatik und Informatikmanagement
seit Okt. 2003	Studium Lehramt Mathematik/Chemie an der Universität Wien