



universität
wien

MAGISTERARBEIT

Titel der Magisterarbeit

“Die ökonomische Dynamik der Armutsfalle als
Markov’sches Entscheidungsproblem
(stationäre Verteilungen und Stoppzeiten)”

Verfasser

Mag. Richard Kiener, Bakk.

angestrebter akademischer Grad

Magister der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften
(Mag.rer.soc.oec.)

Wien, im Mai 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt:
Studienrichtung lt. Studienblatt:
Betreuer:

A 066 951
Magisterstudium Statistik
O. Univ.-Prof. Mag.Dr. Georg Pflug

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Modell	4
2.1	Ein stochastisches dynamisches Modell mit Versicherung	4
2.2	Das stochastische diskontierte dynamische Programm	10
3	Der Kapitalstockprozess des Haushalts	18
3.1	Der Kapitalstockprozess als Markov-Kette	20
3.2	Das asymptotische Verhalten des Kapitalstockprozesses	27
3.3	Die Gleichgewichte der Markov-Kette	36
3.4	Stopzeiten	39
4	Zusammenfassung	46
A	Abstract	48
B	Diplomarbeit: “Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der Armutsfalle“	48
C	Akademischer Lebenslauf	203

1 Einleitung

Armut ist ein weltweites Problem und daher für die Wirtschaftswissenschaften von besonderem Interesse.

In dieser Arbeit wird ein dynamisches stochastisches Modell einer Ökonomie in diskreter Zeit mit einer möglichen Armutsfalle (*poverty trap*) entwickelt, vergleiche dazu R. Kiener [6]. Dieses stochastische dynamische Modell wird auch als stochastisches Ramsey Modell bezeichnet, siehe dazu B. Heer und A. Maussner [5]. Unter einer Armutsfalle versteht man hier eine Menge von Zuständen, in welcher ein Haushalt als arm gilt. Zudem kann er diese (Menge von Zuständen) über die Zeit hinweg nicht mehr verlassen.

Der hier modellierte Haushalt wählt zu jedem Zeitpunkt zwischen einer höher entwickelten und einer weniger entwickelten Technologie. Die Wahl der weniger entwickelten Technologie steht für einen armen Haushalt, die Wahl der höher entwickelten Technologie hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

Weiters maximiert der Haushalt seinen diskontierten erwarteten Nutzen über die Zeit. Dies bestimmt sein Konsum- und Investitionsverhalten. Die Verhaltensgleichungen des Haushalts werden in dieser Arbeit numerisch berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird weiters der Kapitalstock durch einen negativen Schock reduziert. Zudem beeinflusst das Investitionsverhalten eines Haushalts seinen Kapitalstock, welcher durch eine Versicherung mit Selbstbeteiligung teilweise vor Schäden geschützt ist. Der Kapitalstock wird als zeit-diskreter homogener Markov-Prozess beziehungsweise als zeit-diskrete homogene Markov-Kette modelliert.

Man beachte, dass sich der modellierte Haushalt in einer Spielsituation gegen die Natur befindet, somit haben seine Entscheidungen nur unmittelbare Auswirkungen auf seine eigene Wohlfahrt.

2 Das Modell

Im nun folgenden Kapitel betrachten wir ein dynamisches stochastisches Modell einer Ökonomie in dem der Kapitalstock mit einer Pflichtversicherung belegt ist. In der vorliegenden Arbeit verstehen wir unter einer Versicherung immer einen Austausch von Geld jetzt gegen Geld, das man unter bestimmten Bedingungen später erhält. Damit wird der Definition von K. J. Arrow [1] nachgegangen. Bezogen auf die Modelle in dieser Arbeit meint man mit Versicherung also den Austausch eines sicheren Geldstroms heute, gegen einen zufälligen Geldstrom morgen.

2.1 Ein stochastisches dynamisches Modell mit Versicherung

Betrachten wir ein Modell einer Ökonomie mit verschiedenen Individuen (Haushalte) über die (diskreten) Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$, also ein zeit-diskretes dynamisches Modell einer Ökonomie. In dieser Ökonomie gibt es nur ein Gut (Geld), dieses kann dem Kapitalstock zugeführt werden oder konsumiert werden. Sei $k_t \in \mathbb{R}_+$ der Kapitalstock eines beliebigen Haushalts zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$. Die Individuen unterscheiden sich nur durch ihre Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ (Kapitalintensität) und durch ihre jeweiligen persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Die persönlichen Fähigkeiten eines Haushalts seien weiters beschränkt, d.h. es wird die folgende Annahme getroffen:

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

Die Haushalte beeinflussen sich gegenseitig nicht und unterscheiden sich nur durch ihre Anfangsausstattung an Kapital und persönlichen Fähigkeiten. Somit genügt es einen beliebigen Haushalt mit der Anfangsausstattung

$$(k_0, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [1, 2]$$

zu betrachten.

Der Haushalt hat zwei Technologien zur Auswahl. Eine Technologie wird durch eine nicht-negative Funktion beschrieben, d.h. einem bestimmten Bündel an Fähigkeiten und Kapitalausstattung wird ein Output an Gütern zugewiesen. Man beachte, dass die Technologie f_L weniger entwickelt ist als die Technologie f_H d.h. $\alpha k_t^{\gamma_L} < \alpha k_t^{\gamma_H}$ für alle $k_t \in \mathbb{R}_+ : k_t > 1$ und für alle $1 \leq \alpha \leq 2$. Weiters ist die Technologie f_H mit Fixkosten $E \in \mathbb{R}_+$ belastet. Hier sei darauf hingewiesen, dass die Verwendung der weniger entwickelten Technologie f_L für einen armen Haushalt steht, die Verwendung der Technologie f_H hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

$$\begin{aligned}
f_L(\alpha, k_t) &= \alpha k_t^{\gamma_L} \\
f_H(\alpha, k_t) &= \alpha k_t^{\gamma_H} - E \\
0 < \gamma_L &< \gamma_H < 1
\end{aligned}$$

Der Haushalt wählt zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ zwischen den Technologien f_L oder f_H . Aus diesen beiden Technologien resultiert sodann die Produktionsfunktion¹ (1). Bemerkung: Diese Art von Produktionsfunktion in der Arbeit [6] als Produktionsfunktion vom Typ 1 bezeichnet.

$$f(\alpha, k_t) \stackrel{def}{=} \max\{\alpha \cdot A \cdot k_t^{\gamma_L}, \alpha \cdot B \cdot k_t^{\gamma_H} - E\} \quad (1)$$

Man beachte weiters, dass der Haushalt immer die effizientere Technologie wählt. Der Funktionswert der Produktionsfunktion $f(\alpha, k_t)$ heißt Einkommen des Haushalts zum Zeitpunkt t . Diese Produktionsfunktion wird z.B. von Christopher B. Barrett, Michael R. Carter und Munenobu Ikegami [2] verwendet.

Das bis zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ angesammelte Kapital eines Haushalts wird als Kapitalstock k_t bezeichnet. In jeder Periode $t \in \mathbb{N}_0$ muss sich der Haushalt zwischen konsumieren ($c_t \geq 0$) oder investieren (i_t) entscheiden. Der Kapitalstock k_t bildet sich in diesem Modell ohne Versicherungsleistung nach der Rekursion (2a). Sei $\Theta \subset (0, 1] \subset \mathbb{R}_+$ eine abzählbare Menge und $\theta_t \in \Theta$ \mathbb{P} -f.s. eine nicht-negative Zufallsvariable². Weiters sei $\delta \in (0, 1)$ eine Konstante.

$$k_{t+1} = \theta_{t+1}[i_t + (1 - \delta)k_t] \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (2a)$$

$$\theta_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta \subset (0, 1] \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (2b)$$

$$\mathbb{P}(\theta_t = 1) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (2c)$$

Man beachte, dass es sich bei δ um eine deterministische Abwertungsrate (Abschreibung) handelt. Sie verringert den Kapitalstock k_t erst nach der Produktion. Die positive Zufallsvariable $0 < \theta_t \leq 1$ beschreibt mögliche Katastropheneinwirkungen wie z.B. Dürre, Überschwemmung und Erdbeben. Nimmt θ_t den Wert 1 an, so gibt es keine zusätzliche Beeinträchtigung. Sollte jedoch $\theta_t < 1$ sein, so findet ein negativer Schock statt d.h. der Kapitalstock k_t wird nun noch einmal

¹Eine Produktionsfunktion ist eine nicht-negative Funktion auf $[1, 2] \times \mathbb{R}_+$ d.h.

$$f : [1, 2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

²**Notation:**

$Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Zufallsvariable auf Ω , siehe dazu auch H. Georgii [4].

abgewertet.

Sei $\rho : 0 < \rho < 1$ eine Konstante. Der Parameter ρ wird auch als Deckungsgrad beziehungsweise $1 - \rho$ als Selbstbeteiligungsquote bezeichnet. Die Konstante $\nu \geq 0$ steht für einen möglichen Versicherungsprämienaufschlag. Sei nun $(e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein Versicherungsvertrag und definiert durch

$$e_{t+1} = \rho \cdot (1 - \theta_{t+1}) \cdot [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad (3a)$$

$$a_t = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{t+1}] \cdot [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad (3b)$$

$$e_0 = 0 \quad (3c)$$

Die Versicherungsprämie (zum Zeitpunkt t) wird mit a_t bezeichnet und die Versicherungsleistung mit e_t . Somit ist $e_t \geq 0$ eine Zufallsvariable und $a_t \geq 0$ deterministisch. Die Zahlung a_t erfolgt zu Beginn, die Zahlung e_t am Ende des Zeitpunktes t . Es gilt festzuhalten, dass der Versicherungsvertrag (3) nur einen Anteil ρ des Kapitalstocks vor Schaden schützt.

Der Versicherungsvertrag $(e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erweitert die Gleichung (2a) zur Rekursion (4) (Dynamik des Modells).

$$k_{t+1} = \theta_{t+1}[i_t + (1 - \delta)k_t] + e_{t+1} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (4)$$

Die Versicherungsleistung e_{t+1} ergibt sich durch den Kapitalstock zum Zeitpunkt t und die Wahl der Höhe der Investition zum Zeitpunkt t sowie durch den Schock zum Zeitpunkt $t + 1$. Somit lässt sich die Versicherungsleistung e_{t+1} als Funktion von k_t , i_t und θ_{t+1} anschreiben, d.h. $e_{t+1} = e(i_t, k_t, \theta_{t+1})$. Sei e eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$e(i, k, \theta) \stackrel{def}{=} \rho \cdot (1 - \theta) \cdot [i + (1 - \delta)k]$$

definiert ist. Es ist offensichtlich, dass der Funktionswert $e(i_t, k_t, \theta_{t+1})$ zum Zeitpunkt t eine Zufallsvariable ist.

Der Haushalt entscheidet sich unter der Einschränkung seiner finanziellen Möglichkeiten zwischen konsumieren ($c_t \geq 0$) und investieren (i_t). Somit erhält man die Budgetgleichung (5).

$$0 \leq c_t + i_t + a_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (5)$$

Es gilt festzuhalten, dass sich die Versicherungsprämie a_t durch den Kapitalstock zum Zeitpunkt t und die Wahl der Höhe der Investition ergibt. Somit lässt sich

die Versicherungsprämie a_t als Funktion von k_t , i_t und θ_{t+1} anschreiben, d.h. $a_t = a(i_t, k_t, \theta_{t+1})$. Sei a eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$a(i, k, \theta) \stackrel{def}{=} (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta] \cdot [i + (1 - \delta)k]$$

definiert ist. Der Funktionswert $a(i, k, \theta)$ ist deterministisch.

Definition 1 (Risikofunktional oder Risikomaß). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Menge \mathcal{Y} sei die Menge aller \mathcal{F} -messbaren Funktionen (Zufallsvariablen) auf Ω . Ein Funktional von der Art $\mathcal{R} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder $\mathcal{R} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt Risikofunktional (risk functional) oder Risikomaß (risk measure).*

Diese Definition ist inhaltlich dem Buch von G. Pflug und W. Römisch [8] entnommen.

Sei $\mathbb{E}[\cdot]$ das Lebesgue-Integral (Erwartungswert) und $u(\cdot) \in \mathcal{C}^2$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R}_+ . Weiters sei die Funktion $u(\cdot)$ eine strikt monoton wachsende konkave Funktion, d.h. $u' > 0$ und $u'' < 0$. Sei \mathcal{R} ein Funktional und definiert durch

$$\mathcal{R}[Y] \stackrel{def}{=} \mathbb{E}\left[u(Y)\right] = \int_{\omega \in \Omega} u \circ Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad (6)$$

für alle nicht-negativen Zufallsvariablen $Y \in \mathcal{Y}_+$. Die Präferenzen des Haushalts werden durch das Risikofunktional \mathcal{R} beschrieben.

Formal gesprochen steht der Haushalt vor einem Entscheidungsproblem beziehungsweise befindet sich in einem Spiel gegen die Natur. Er wählt somit die optimale Strategie $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$. Diese nicht-negative Folge von Zufallsvariablen erhält man durch das stochastische Maximierungsproblem (7). Sei $\beta \in (0, 1)$ eine Konstante. Der Parameter β beschreibt die Vorliebe für heutigen Konsum vor morgigem Konsum und heißt Abzinsungsfaktor.

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathcal{R}[c_t] \\ c_t + i_t + a_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_{t+1} = \theta_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] + e_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (7)$$

Ökonomisch betrachtet lässt sich festhalten, dass in dieser Modellökonomie ein Haushalt mit beliebiger Anfangsausstattung $(k_0, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ seinen Konsum

$c_t \geq 0$ rational wählt.

Zudem ist weiters festzuhalten, dass der Investitionsplan (Investitionsprozess) des Haushalts $(i_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ durch den Konsumplan (Konsumprozess) des Haushalts $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eindeutig bestimmt ist. Der Investitionsprozess $(i_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ hat die folgende Form:

$$i_t^* = f(\alpha, k_t) - a(i_t, k_t, \theta_{t+1}) - c_t^* \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

In der vorliegenden Arbeit ist unter einem Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ immer ein optimaler Konsumprozess $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ zu verstehen, somit kann ab jetzt auf den Stern verzichtet werden. Dies gilt ebenso für den Kapitalstockprozess sowie für den Investitionsprozess.

Das stochastische Maximierungsproblem (7) lässt sich als stochastisches diskontiertes dynamisches Maximierungsprogramm (8) anschreiben, siehe dazu R. Kiener [6]. Sei $(\kappa_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen Variablen, die definiert sind durch

$$\kappa_{t+1} \stackrel{def}{=} f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \geq 0.$$

Die nicht-negative Variable κ_t entspricht dem Kapitalstock vor Schock inklusive der Versicherungsprämie zum Zeitpunkt t . Weiters sei Z eine Funktion, die durch

$$Z(\theta) \stackrel{def}{=} (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta]$$

definiert ist.

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(\kappa_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathcal{R} \left[f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right] \\ k_{t+1} = \underbrace{(\rho + (1 - \rho)\theta_{t+1})}_{\tilde{\theta}_{t+1}} \cdot \kappa_{t+1} \cdot \frac{1}{1 + Z(\theta_{t+1})} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (8)$$

Wobei es sich bei Φ um eine Korrespondenz handelt, die definiert ist durch

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{ \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s \}$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass k_t die Zustandsvariable und κ_{t+1} die Kontrollvariable des stochastischen diskontierten dynamischen Programms ist. Der Kapitalstockprozess³ $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ hat die folgende Form:

$$k_{t+1} = \underbrace{(\rho + (1 - \rho)\theta_{t+1})}_{\tilde{\theta}_{t+1}} \cdot \phi(k_t) \cdot \frac{1}{1 + Z(\theta_{t+1})} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

³Man beachte, dass es sich bei einem Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ um einen stochastischen Prozess handelt.

Die Funktion ϕ für die gilt $\phi(k_t) = \kappa_{t+1}$ heißt Politikfunktion. Man beachte, dass $\tilde{\theta}_{t+1}$ eine Zufallsvariable ist.

Sei $p \in (0, 1)$ eine Konstante. Nun werden hier bezüglich des Schockprozesses $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die zusätzlichen Annahmen (A1) und (A2) getroffen.

$$(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \quad i.i.d. \quad (A1)$$

$$\theta_t \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{X}{4} + \frac{1}{4} \text{ wobei } \mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{3-k} \quad k = 0, \dots, 3 \quad \forall t \quad (A2)$$

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist nun eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen. Hinzu kommt, dass es sich bei X um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 3 und p handelt.

Sei Z_ρ eine Konstante, die durch

$$Z_\rho \stackrel{def}{=} (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_0] = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}\left[\frac{3}{4} - \frac{X}{4}\right]$$

definiert ist. Man beachte, dass die Konstante Z_ρ für die Versicherungsprämie pro Kapitalstockeinheit steht. Somit kann man das stochastische diskontierte dynamische Programm (8) zum neuen stochastischen diskontierten dynamischen Programm (9) transformieren beziehungsweise auch vereinfachen.

$$\left\| \begin{array}{l} V(k_0) \stackrel{def}{=} \max_{(\kappa_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathcal{R} \left[f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right] \\ k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \cdot \frac{1}{1+Z_\rho} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (9)$$

Der Kapitalstock k_t ist die Zustandsvariable und κ_{t+1} ist die Kontrollvariable. Die Folge von positiven Zufallsvariablen $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$\tilde{\theta}_t \stackrel{def}{=} \rho + (1 - \rho)\theta_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0.$$

Die Funktion $V(k)$ wird Wertfunktion⁴ genannt, vergleiche dazu Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne Strøm [11]. Es gilt weiters festzuhalten,

⁴Sei $k \geq 0$ die Zustandsvariable und $\kappa \geq 0$ die Kontrollvariable (Aktionsvariable) des stochastischen diskontierten dynamischen Programms. Die Wertfunktion $V(k)$ ist somit die Lösung der Funktionalgleichung

$$V(k) = \max_{\kappa \in \Phi(k)} u \left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k \right) + \beta \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\theta}} \left[V \left(\tilde{\theta} \cdot \kappa \cdot (1 + Z_\rho)^{-1} \right) \right] \quad \forall k \in \mathbb{R}_+,$$

welche als Bellman Funktionalgleichung bekannt ist.

dass das stochastische diskontierte dynamische Programm (9) mit Hilfe des *Value Function Iteration* Algorithmus gelöst werden kann. Näheres zu diesem findet sich im Werk von M. Miranda und P. Fackler [7].

Der Kapitalstockprozess hat somit die folgende Form:

$$k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \phi(k_t) \cdot \frac{1}{1+Z_\rho} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Den Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch die folgende Gleichung

$$c_t \equiv f(\alpha, k_t) - \phi(k_{t+1}) + (1 - \delta)k_t$$

beziehungsweise den Investitionsprozess $(i_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$\begin{aligned} i_t &\equiv f(\alpha, k_t) - a(i_t, k_t, \theta_0) + \phi(k_t) - (1 - \delta)k_t \\ &\iff \\ (1 + Z_\rho) \cdot i_t &\equiv f(\alpha, k_t) + \phi(k_t) - (1 + Z_\rho)(1 - \delta)k_t. \end{aligned}$$

2.2 Das stochastische diskontierte dynamische Programm

Als Basis dienen hier folgende Werke: Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne Strøm [11] sowie M. Miranda und P. Fackler [7].

Sei $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen⁵ für die gilt $\tilde{\theta}_t \in \tilde{\Theta}$ \mathbb{P} -f.s. für alle t , wobei die Menge $\tilde{\Theta} \subset (0, 1]$ eine abzählbare Menge ist. Außerdem sei das Tupel

$$\left\{ S, A, \Phi, g, \beta, \mathcal{R}, (\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \right\}$$

ein stochastisches diskontiertes dynamisches Programm. Die Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als Zustandsraum bezeichnet, die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ als Aktionsraum. Falls $n = k = 1$, so nennt man $s \in S$ Zustandsvariable und $a \in A$ Aktions- oder Kontrollvariable. Die Abbildung $\Phi : S \rightarrow 2^A = \{B : B \subseteq A\}$ ist eine Korrespondenz d.h. $\Phi(s) \subseteq A$ für alle $s \in S$. Diese Korrespondenz Φ heißt zulässige Aktionskorrespondenz. Die Übergangsfunktion $g : S \times A \rightarrow S$, das Risikofunktional \mathcal{R} und der Diskontfaktor $\beta \in (0, 1)$ vervollständigen das Tupel. Die Transformationsfunktion g (Dynamik) hat die folgende allgemeine Form:

$$s_{t+1} = g(s_t, a_t, \tilde{\theta}_{t+1}) \quad s_0 \in S \text{ fix} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

⁵Alternativ kann $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine zeit-diskrete homogene Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum $\tilde{\Theta} \subset (0, 1]$ sein.

Wie bereits festgestellt, kann man das stochastische Maximierungsproblem (7) als ein stochastisches diskontiertes dynamisches Programm anschreiben, vergleiche dazu (8) mit (7). In dieser Arbeit wird die spezielle Transformationsfunktion (10) betrachtet.

$$k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \cdot \frac{1}{1+Z_\rho} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (10)$$

Die nicht-negative Kontrollvariable $\kappa_t \geq 0$ entspricht dem Kapitalstock vor Schock inklusive der Versicherungsprämie zum Zeitpunkt t .

Zur Wiederholung: Die nicht-negative Zufallsvariable $\tilde{\theta}_t$ und die Konstante Z_ρ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t &= \rho + (1 - \rho)\theta_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0, \quad \rho \in (0, 1) \\ Z_\rho &= (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_0] \end{aligned}$$

Es ist weiters festzuhalten, dass k_t die Zustandsvariable und κ_{t+1} die Aktionsvariable (Kontrollvariable) des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (8) ist. Sei $(\tilde{\kappa}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen Variablen, die definiert sind durch

$$\tilde{\kappa}_t \stackrel{def}{=} \frac{\kappa_t}{1 + Z_\rho} \quad \forall t \geq 0.$$

Es ist offensichtlich, dass die nachfolgende Rekursion der Modelldynamik (10) entspricht.

$$k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\kappa}_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Die nicht-negative Variable $\tilde{\kappa}_t \geq 0$ entspricht dem Kapitalstock vor Schock exklusive der Versicherungsprämie zum Zeitpunkt t .

Somit kann man das stochastische diskontierte dynamische Programm (9) als alternatives stochastisches diskontiertes dynamisches Programm (11) anschreiben.

$$\left\| \begin{aligned} \max_{(\tilde{\kappa}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \quad & \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathcal{R} \left[f(\alpha, k_t) + (1 - \delta)k_t - \tilde{\kappa}_{t+1} - Z_\rho \cdot \tilde{\kappa}_{t+1} \right] \\ & k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\kappa}_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & \tilde{\kappa}_{t+1} \in \tilde{\Phi}(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Wobei es sich bei $\tilde{\Phi}$ um eine neue Aktionskorrespondenz handelt, die definiert ist durch

$$\tilde{\Phi}(s) \stackrel{def}{=} \{(1 + Z_\rho)^{-1} \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass k_t die Zustandsvariable und $\tilde{\kappa}_{t+1}$ die Kontrollvariable des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) ist. Sei weiters $\tilde{\phi}$ die Politikfunktion des Programms (11). Man beachte, dass die beiden Politikfunktionen $\tilde{\phi}$ und ϕ proportional, d.h. $\phi \propto \tilde{\phi}$, zueinander sind.

$$(1 + Z_\rho) \tilde{\phi}(k) \equiv \phi(k)$$

Die nicht-negative Konstante $Z_\rho \geq 0$ steht für die Versicherungsprämie pro Kapitalstockeinheit.

Es gilt zu beachten, dass die Politikfunktion $\tilde{\phi}$ Teil der Lösung der Bellman Funktionalgleichung (12b) des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) ist. Sei $k \geq 0$ die Zustandsvariable und $\tilde{\kappa} \geq 0$ die Kontrollvariable (Aktionsvariable) des stochastischen diskontierten dynamischen Programms.

$$V(k) = \max_{\tilde{\kappa} \in \tilde{\Phi}(k)} v(\tilde{\kappa}, k) + \beta \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\theta}} \left[V(\tilde{\theta} \cdot \tilde{\kappa}) \right] \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad (12a)$$

$$\tilde{\phi}(k) = \arg \max_{\tilde{\kappa} \in \tilde{\Phi}(k)} v(\tilde{\kappa}, k) + \beta \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\theta}} \left[V(\tilde{\theta} \cdot \tilde{\kappa}) \right] \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad (12b)$$

Die Abbildung v ist eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$v(\tilde{\kappa}, k) \stackrel{def}{=} u \left(f(\alpha, k) + (1 - \delta)k - \tilde{\kappa} - Z_\rho \cdot \tilde{\kappa} \right)$$

definiert ist. Zur Wiederholung: Die Funktion $V(k)$ heißt Wertfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms.

Die nicht-negative Zufallsvariable (Konsum zum Zeitpunkt t)

$$f(\alpha, k_t) + (1 - \delta)k_t - \tilde{\kappa}_{t+1} - Z_\rho \cdot \tilde{\kappa}_{t+1}$$

betrachtet zum Zeitpunkt $t - 1$ setzt sich zusammen aus dem Einkommen $f(\alpha, k_t)$ (zum Zeitpunkt t), dem Kapitalstock nach Abschreibung $(1 - \delta)k_t$, der Versicherungsprämie

$$Z_\rho \cdot \tilde{\kappa}_{t+1} = a(i_t, k_t, \theta_0), \quad (i_t = \tilde{\kappa}_{t+1} - (1 - \delta)k_t)$$

und dem Kapitalstock vor einem etwaigen negativen Schock $\theta_{t+1} < 0$. Der Kapitalstock vor einem möglichen negativen Schock wird mit $\tilde{\kappa}_{t+1}$ bezeichnet. Man beachte, dass k_t und $\tilde{\kappa}_{t+1} = \tilde{\phi}(k_t)$ zum Zeitpunkt $t - 1$ zwei nicht-negative Zufallsvariablen sind und c_t das Argument des Risikofunktional ist.

Ferner sei $(\chi_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von positiven Zufallsvariablen, die durch

$$\chi_t(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + Z_\rho\right) \left[\rho + (1 - \rho)\theta_t\right] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0, \quad \rho \in (0, 1)$$

definiert sind. Eine weitere Form der Modelldynamik (10) stellt somit die Transformationsfunktion (13) mit fixem $\rho \in (0, 1)$ dar.

$$k_{t+1} = \chi_{t+1}(\rho) \cdot \bar{\kappa}_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (13)$$

Im Folgenden wird das stochastische dynamische Modell mit Hilfe des *Value Function Iteration* Algorithmus numerisch berechnet. Es gilt also das stochastische diskontierte dynamische Programm (9) zu berechnen. Um dieses stochastische diskontierte dynamische Programm numerisch berechnen zu können, werden die Parameter α , β , δ , ν , γ_L , γ_H und E fixiert auf $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $E = 6$. Weiters wird hier eine logarithmische Nutzenfunktion verwendet, d.h. $\mathcal{R}[Y] = \mathbb{E}[\ln(Y)]$.

Der Parameter der binomialverteilten Zufallsvariable X wird auf $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ gesetzt. Bei einem Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ von dieser Art kann man innerhalb von 100 Perioden fünfzehn negative Schocks erwarten.

Die Modellparameter wurden so gewählt, dass die numerisch berechnete Politikfunktion $\tilde{\phi}$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) über drei Fixpunkte⁶ verfügt. Dies ist Voraussetzung für die Existenz einer Armutsfalle, siehe dazu Abbildung 18 auf Seite 37 beziehungsweise auch die Arbeit [6].

Die Abbildung 1 zeigt die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit der exogenen Variablen $\rho = \frac{2}{10}$ (Deckungsgrad). Diese Funktion besitzt die Fixpunkte \bar{k}_L , \bar{k} und \bar{k}_H .

Auf den Abbildungen 1 und 2 befindet sich auf der x-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Zustandsvariable), auf der y-Achse der Kapitalstock vor Schock zum Zeitpunkt $t + 1$ als Kontrollvariable. Die durchgehende Linie ist die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$. Die strichlierte Linie repräsentiert die Winkelhalbierung von \mathbb{R}_+ .

⁶Der Wert $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$ heißt Fixpunkt der Funktion $\tilde{\phi}$ falls gilt:

$$\bar{k} = \tilde{\phi}(\bar{k})$$

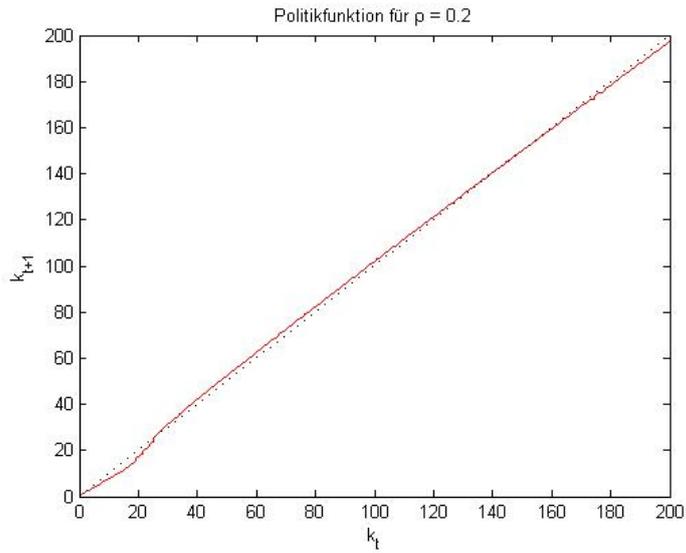


Abbildung 1: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$.

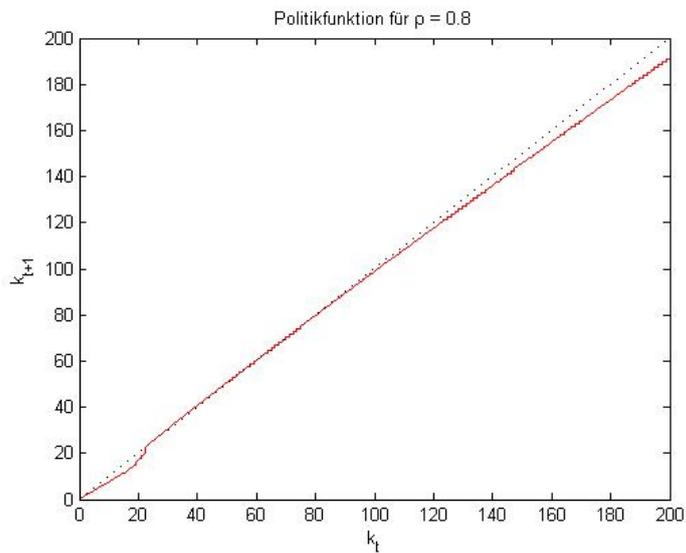


Abbildung 2: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$.

Man beachte, dass die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ gemeinsam mit dem Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ den Verlauf des Kapitalstockprozesses $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ bestimmt.

Anmerkung 1 (Entwicklung). Sei $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ der Kapitalstockprozess des hier betrachteten Modells und weiters seien \bar{k}_L , \bar{k} und \bar{k}_H die drei Fixpunkte der Politikfunktion von Abbildung 1. Dann gilt:

(i) Der Kapitalstock $k_t \in \mathbb{R}_+$: $k_t \leq \bar{k}_L$ nähert sich dem Fixpunkt \bar{k}_L falls kein negativer Schock auftritt.

$$0 < k_t \leq \bar{k}_L \text{ und } \theta_{t+1} = 1 \implies |k_{t+1} - \bar{k}_L| \leq |k_t - \bar{k}_L|$$

(ii) Falls kein negativer Schock auftritt entwickelt sich der Kapitalstock $k_t \in \mathbb{R}_+$: $\bar{k}_L \leq k_t < \bar{k}$ in Richtung des Fixpunktes \bar{k}_L .

$$\bar{k}_L \leq k_t < \bar{k} \text{ und } \theta_{t+1} = 1 \implies |k_{t+1} - \bar{k}_L| \leq |k_t - \bar{k}_L|$$

(iii) Der Kapitalstock $k_t \in \mathbb{R}_+$: $\bar{k} < k_t \leq \bar{k}_H$ nähert sich dem Fixpunkt \bar{k}_H falls kein negativer Schock auftritt.

$$\bar{k} < k_t \leq \bar{k}_H \text{ und } \theta_{t+1} = 1 \implies |k_{t+1} - \bar{k}_H| \leq |k_t - \bar{k}_H|$$

(iv) Der Kapitalstock $k_t \in \mathbb{R}_+$: $k_t \geq \bar{k}_H$ entwickelt sich in Richtung des Fixpunktes \bar{k}_H falls kein negativer Schock auftritt.

$$k_t \geq \bar{k}_H \text{ und } \theta_{t+1} = 1 \implies |k_{t+1} - \bar{k}_H| \leq |k_t - \bar{k}_H|$$

Die Abbildung 2 zeigt noch zusätzlich die Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit der exogenen Variablen $\rho = \frac{8}{10}$ (Deckungsgrad).

Sei $\Delta k_{t+1}(\tilde{\theta}_{t+1})$ eine Zufallsvariable⁷ und diese ist durch

$$\Delta k_{t+1}(\tilde{\theta}_{t+1}) = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(k_t) - k_t$$

definiert. Diese Zufallsvariable beschreibt die Veränderung des Kapitalstocks zwischen $t+1$ und t . Man beachte, dass eine positive Veränderung für ein (positives) ökonomisches Wachstum des Haushalts steht.

⁷Notation:

$$\Delta k_{t+1} \equiv \Delta k_{t+1}(\tilde{\theta}_{t+1})$$

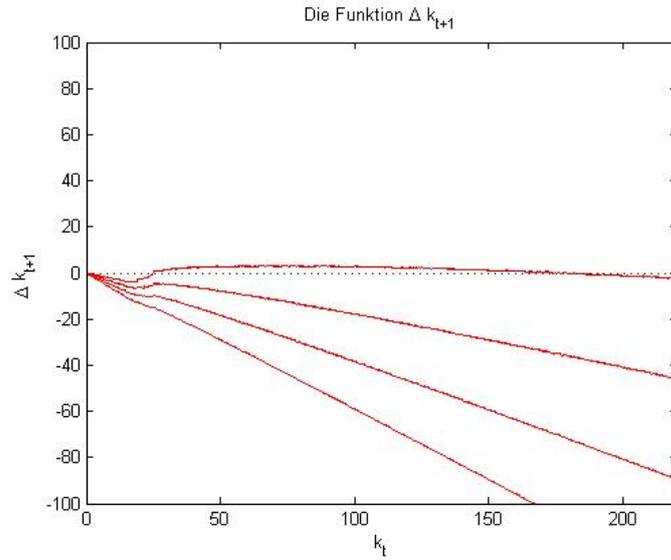


Abbildung 3: Die Abbildung zeigt die Funktion $\Delta k_{t+1}(\tilde{\vartheta})$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$ für $\vartheta^1, \dots, \vartheta^4 \in \tilde{\Theta}(\rho)$.

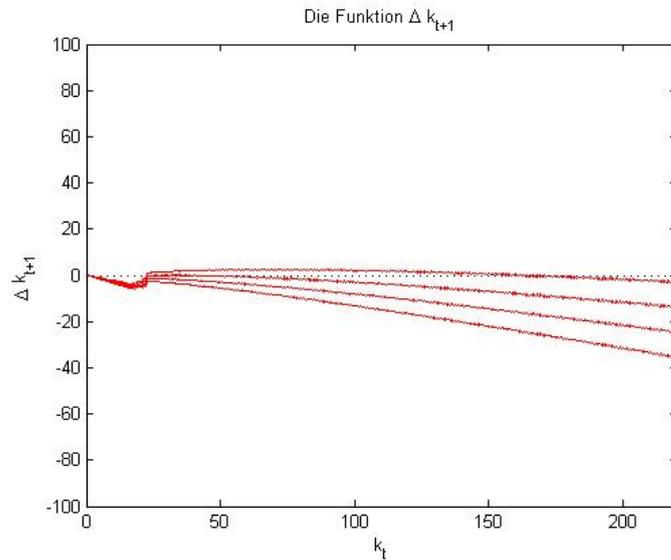


Abbildung 4: Die Abbildung zeigt die Funktion $\Delta k_{t+1}(\tilde{\vartheta})$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$ für $\vartheta^1, \dots, \vartheta^4 \in \tilde{\Theta}(\rho)$.

Die Abbildung 3 zeigt die möglichen Realisationen der Zufallsvariable Δk_{t+1} des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit dem Parameter $\rho = \frac{2}{10}$ und dies in Abhängigkeit vom Kapitalstock zum Zeitpunkt t .

Auf der Abbildung 4 wird der gleiche Sachverhalt beschrieben jedoch mit $\rho = \frac{8}{10}$ ein anderer Parameterwert verwendet.

3 Der Kapitalstockprozess des Haushalts

Sei $\{k_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow I = \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{N}_0\}$ eine Menge von nicht-negativen Zufallsvariablen. Diese Menge heißt nicht-negativer zeit-diskreter stochastischer Prozess⁸ und die Menge I heißt stetiger Zustandsraum, vergleiche dazu P. Billingsley [3].

Der zeit-diskrete stochastische Prozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ heißt hier Kapitalstockprozess und ist durch die Dynamik des Modells

$$0 \leq k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(k_t) \quad \forall t \geq 0$$

und den Startwert $k_0 \in \mathbb{R}_+$ definiert. Zur Erinnerung: Man beachte, dass $\tilde{\phi}(k)$ die Politikfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) ist, siehe dazu Seite 11.

Sei $\{g^i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : i \in \mathbb{N}_0\}$ eine Menge von Funktionen, die jeweils auf \mathbb{R}_+ durch

$$g^{i+1}(k) = \tilde{\theta}_{i+1} \cdot \tilde{\phi}(g^i(k)) \quad \forall i, \quad \tilde{\theta}_{i+1} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\theta}_0$$

und

$$g^1(k) = \tilde{\theta}_1 \cdot \tilde{\phi}(k), \quad \tilde{\theta}_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\theta}_0$$

definiert sind. Es sei darauf hingewiesen, dass auf Grund der obigen Definition

$$k_t = g^t(k_0)$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$ ist. Man beachte, dass die Zufallsvariablen der Folge $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ unabhängig und identisch verteilt sind.

Satz 1 (Kapitalstockprozess). *Sei $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ der Kapitalstockprozess des hier betrachteten Modells. Dieser zeit-diskrete stochastische Prozess erfüllt die folgende Eigenschaft:*

$$\mathbb{P}\left(k_{t+1} \parallel \{k_i : i = 0, \dots, t\}\right) = \mathbb{P}\left(k_{t+1} \parallel k_t\right) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Beweis. Seien die Funktionen $g^t : t \in \mathbb{N}_0$ so wie oben definiert und sei weiters $\mathcal{X}_t = \{k_i : i = 0, \dots, t\}$ eine Menge von Kapitalstöcken, d.h. $k_i \geq 0$ für alle i . Sei $t \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(k_{t+1} \parallel \mathcal{X}_t\right) = \mathbb{P}\left(g^{t+1}(k_0) \parallel \mathcal{X}_t\right)$$

⁸Notation:

$$(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0} = \left\{ k_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

$$= \mathbb{P}\left(\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(g^t(k_0)) \mid \mathcal{X}_t\right) = \mathbb{P}\left(\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(k_t) \mid \mathcal{X}_t\right)$$

Man beachte, dass die Kapitalstöcke k_0, \dots, k_{t-1} auf die Zufallsvariable $\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(k_t)$ keinen Einfluss haben. Somit gilt für alle t

$$\mathbb{P}\left(k_{t+1} \mid \{k_i : i = 0, \dots, t\}\right) = \mathbb{P}\left(k_{t+1} \mid k_t\right).$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen. QED

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante, dann heißt die Korrespondenz $\tilde{\Gamma}(k)$, die auf \mathbb{R}_+ definiert ist durch

$$k \mapsto \tilde{\Gamma}(k) \stackrel{def}{=} \left\{ (1 + Z_\rho) \cdot \lambda \cdot \left(f(\alpha, k) + (1 - \delta)k \right) \in \mathbb{R}_+ : \lambda = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\},$$

Diskretisierung der zulässigen Aktionskorrespondenz $\tilde{\Phi}(k)$. Für ein fixes nicht-negatives k ist $\tilde{\Gamma}(k)$ eine abzählbare endliche Teilmenge der zulässigen Aktionsmenge $\tilde{\Phi}(k)$. Die Konstante n wird in dieser Arbeit so gewählt, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Elementen $\frac{1}{10}$ beträgt.

Sei nun weiters $\{K_t \in \tilde{\Gamma}(\bar{k}_H) \mid \mathbb{P}\text{-f.s.} : t \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeit-diskreter stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum⁹. Der Punkt $\bar{k}_H \in \mathbb{R}_+$ ist der größte Fixpunkt der Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$, d.h.

$$\bar{k}_H = \max\{k \in \mathbb{R}_+ : k = \tilde{\phi}(k)\}.$$

Der stochastischer Prozess $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ ist definiert durch

$$K_{t+1} \stackrel{def}{=} \min\left\{k \in \mathbb{R}_+ \cap \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(K_t) \leq k\right\}$$

für alle $t \geq 0$ und weiters ist

$$K_0 \stackrel{def}{=} \min\left\{k \in \mathbb{R}_+ \cap \tilde{\Gamma}_n : k_0 \leq k\right\}.$$

Man beachte, dass K_t gegen k_t monoton konvergiert, wenn n gegen unendlich strebt zum Zeitpunkt t , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \min\left\{k \in \mathbb{R}_+ \cap \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_t \cdot \tilde{\phi}(K_{t-1}) \leq k\right\} = \tilde{\theta}_t \cdot \tilde{\phi}(K_{t-1}) \quad \forall t \geq 0$$

⁹Notation:

$$\tilde{\Gamma}_n = \left\{ (1 + Z_\rho) \cdot \lambda \cdot \left(f(\alpha, \bar{k}_H) + (1 - \delta)\bar{k}_H \right) \in \mathbb{R}_+ : \lambda = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}$$

und weiters gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \min \left\{ k \in \mathbb{R}_+ \cap \tilde{\Gamma}_n : k_0 \leq k \right\} = k_0$$

daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_t = k_t \quad \forall t.$$

Somit wird der zeit-diskrete stochastische Prozess $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ als Approximation für den Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ verwendet.

3.1 Der Kapitalstockprozess als Markov-Kette

Sei $\{K_t \geq 0 \text{ P-f.s.} : t \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeit-diskreter stochastischer Prozess, der definiert ist durch

$$K_{t+1} = \min \left\{ k \in \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(K_t) \leq k \right\}$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$ mit der Anfangsausstattung an Kapital

$$K_0 = \min \left\{ k \in \tilde{\Gamma}_n : k_0 \leq k \right\}.$$

Man beachte, dass $\tilde{\Gamma}_n \subset \mathbb{R}_+$ ein abzählbarer endlicher Zustandsraum ist. Zur Erinnerung: Der Punkt $\bar{k}_H \in \mathbb{R}_+$ ist der größte Fixpunkt der Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11).

Definition 2 (Markov-Kette). *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein zeit-diskreter stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum I_d , der Markov-Kette heißt, wenn für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$ und alle Zustände $i_0, \dots, i_t, i_{t+1} \in I_d$ die folgende Gleichung*

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_t = i_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} \mid X_t = i_t)$$

erfüllt ist. Diese Gleichung heißt auch Markov-Eigenschaft.

Die obige Definition ist dem Buch von D. Stirzaker [10] entnommen. Mit Hilfe der Definition 2 kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz 2 (Kapitalstockprozess). *Sei $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeit-diskreter stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum wie oben definiert, so ist dieser stochastische Prozess eine Markov-Kette.*

Beweis. Seien $i_0, \dots, i_t, i_{t+1} \in \tilde{\Gamma}_n$ beliebige Zustände der zeit-diskreten Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(K_{t+1} = i_{t+1} \mid K_0 = i_0, \dots, K_t = i_t)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\min\left\{k \in \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_{t+1} \tilde{\phi}(i_t) \leq k\right\} = i_{t+1} \mid K_0 = i_0, \dots, K_t = i_t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\min\left\{k \in \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_{t+1} \tilde{\phi}(i_t) \leq k\right\} = i_{t+1} \mid K_t = i_t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(K_{t+1} = i_{t+1} \mid K_t = i_t\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt die Markov-Eigenschaft. QED

Es gilt festzuhalten, dass die Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene Markov-Kette ist. Eine Markov-Kette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ heißt homogen falls gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \mathbb{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i) \quad \forall t, \quad \forall \tau, \quad \forall i, \quad \forall j$$

Für jede homogene Markov-Kette mit abzählbarem endlichem Zustandsraum existiert eine Übergangsmatrix $Q \geq 0$. Eine Übergangsmatrix ist eine stochastische Matrix¹⁰. Sei $P = (p_{ij})$ eine stochastische Matrix, die durch

$$p_{ij} = \mathbb{P}(K_{t+1} = j \mid K_t = i) \quad \forall i, \quad \forall j$$

beziehungsweise¹¹

$$p_{ij} = \mathbb{P}_{\tilde{\theta}} \left\{ \vartheta \in \tilde{\Theta} : \min\left\{k \in \tilde{\Gamma}_n : \vartheta \cdot \tilde{\phi}(i) \leq k\right\} = j \right\} \quad \forall i, \quad \forall j$$

definiert ist. Es gilt zu beachten, dass das Minimum existiert da die Menge $\tilde{\Gamma}_n$ abzählbar und endlich ist. Die stochastische Matrix P ist die Übergangsmatrix der homogenen Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$.

Zur Veranschaulichung der Dynamik der homogenen Markov-Kette mit der Übergangsmatrix P entwickeln wir nun einen speziellen Graphen.

¹⁰Eine stochastische Matrix $Q = (q_{ij})$ ist wie folgt definiert:

$$Q \in [0, 1]^{m \times m} : q_{ij} \geq 0, \quad \sum_j q_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad \forall j$$

¹¹Sei $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ \mathbb{P} -f.s. eine Zufallsvariable für die gilt:

$$\tilde{\theta} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\theta}_{t+1} \iff \tilde{\theta} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{\theta}_0$$

Sei $\{PT, NC, C, H\}$ eine Partition von $\tilde{\Gamma}_n$ und sei wie folgt definiert:

$$PT = \{k \in \tilde{\Gamma}_n : 0 < k \leq \bar{k}_L\} \quad (14a)$$

$$NC = \{k \in \tilde{\Gamma}_n : \bar{k}_L < k \leq \bar{k}\} \quad (14b)$$

$$C = \{k \in \tilde{\Gamma}_n : \bar{k} < k < \bar{k}_H\} \quad (14c)$$

$$H = \{\bar{k}_H\} \quad (14d)$$

Man beachte, dass \bar{k}_H laut Definition von $\tilde{\Gamma}_n$ ein Teil dieser Menge ist. Die Menge PT heißt in dieser Arbeit Armutsfalle (*poverty trap*). Ein Haushalt mit einem Kapitalstock $K_t \in PT$ ($k_t \in PT$) wählt die weniger entwickelte Technologie f_L und gilt somit als arm, vergleiche dazu die Arbeit [6]. Es gilt weiter:

$$K_\tau \in PT \implies K_t \in PT \forall t \geq \tau$$

Verfügt ein Haushalt über einen Kapitalstock, welcher in der Menge PT liegt, so wird seine weitere ökonomische Entwicklung $(K_t)_{t \geq \tau}$ diesen Bereich nicht mehr verlassen.

PT steht hierbei für *poverty trap*, NC für *non-climb*, C für *climb* und schließlich H für *high*.

Ökonomisch betrachtet lässt sich weiters festhalten, dass ein Haushalt in dieser Modellökonomie mit einem Kapitalstock $K_t \in C$ ein Entwicklungspotenzial besitzt. Ein Haushalt der über einen Kapitalstock $K_t \in NC$ verfügt, hat jedoch kein positives Wachstumspotenzial. Beide Aussagen beziehen sich auf den Zeitpunkt t .

Ferner gilt es noch festzuhalten, dass ein Haushalt mit einem Kapitalstock $K_t \in C \cup H$ immer die Technologie f_H zum Zeitpunkt t wählt, somit ist er zum Zeitpunkt t als nicht-arm einzustufen.

Seien $k^1 \leq, \dots, \leq k^m \in \tilde{\Gamma}_n$ die geordneten Elemente der Menge $\tilde{\Gamma}_n$, d.h.

$$\Gamma_n = \biguplus_{i=1}^m \{k^i\}.$$

Sei weiters $\rightarrow \subseteq \{PT, NC, C, H\} \times \{PT, NC, C, H\}$ eine Relation, die durch

$$\rightarrow \stackrel{def}{=} \left\{ (M_1, M_2) \in \{PT, NC, C, H\}^2 : \sum_{i:k^i \in M_1} \sum_{j:k^j \in M_2} p_{ij} > 0 \right\}$$

definiert ist. Dann heißt in dieser Arbeit das Tupel

$$\left(\{PT, NC, C, H\}, \rightarrow \right)$$

Übergangsgraph der Markov-Kette $\{K_t : t \geq 0\}$ mit der Übergangsmatrix (p_{ij}) . Man beachte, dass falls M_1 und M_2 Elemente der Partition sind und weiters (M_1, M_2) nicht Element der Relation ist, d.h. $M_1 \not\sim M_2$, dann gilt:

$$(p_{ij}) = 0$$

$$\begin{array}{l} i:k^i \in M_1 \\ j:k^j \in M_2 \end{array}$$

Die Modellparameter $\alpha, \beta, \delta, \nu, \gamma_L, \gamma_H$ und E werden auf $\alpha = 1, \beta = \frac{9}{10}, \delta = \frac{1}{10}, \nu = \frac{1}{10}, \gamma_L = \frac{1}{4}, \gamma_H = \frac{3}{4}$ und $E = 6$ fixiert.

Die Abbildung 7 zeigt den Übergangsgraphen der Markov-Kette $(K_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ des Modells mit $\rho = \frac{2}{10}$ als Deckungsgrad. Diese Markov-Kette besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\min \tilde{\Theta} \cdot \tilde{\theta}(\bar{k}_H) > \bar{k}$$

$$\min \tilde{\Theta} \cdot \tilde{\theta}(K) > \bar{k}_L \quad \forall K > \bar{k}$$

Hierzu vergleiche man die Politikfunktion des Modells auf Abbildung 1 beziehungsweise auch die Abbildungen 3 und 5.

Der Übergangsgraph der Abbildung 7 beschreibt ebenfalls die homogene Markov-Kette $(K_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit $\rho = \frac{8}{10}$ als Deckungsgrad. Man vergleiche hierzu die Politikfunktion des Modells auf Abbildung 2 beziehungsweise auch die Abbildungen 4 und 6.

Aufgrund der numerischen Berechnungen kann ein Übergangsgraph wie auf Abbildung 8 für dieses Modell beziehungsweise für diese Markov-Kette ausgeschlossen werden.

Man beachte, dass die Abbildung 5 die möglichen Realisationen der beiden Zufallsvariablen

$$K_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k}_H)$$

und

$$K_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k})$$

des Modells mit Parameter $\rho = \frac{2}{10}$ zum Zeitpunkt t abbildet. Außerdem findet man auf dieser Abbildung die Fixpunkte der Politikfunktion \bar{k}_L, \bar{k} und \bar{k}_H eingezeichnet. Weiters kann man alle Realisationen k^1, k^2, k^3 und k^4 der beiden Zufallsvariablen ablesen. Aus dieser Abbildung kann man sodann noch erkennen, dass die zwei Zufallsvariablen nur Realisationen besitzen, welche größer sind als der kleinste Fixpunkt der Politikfunktion. Dies gilt auch für Abbildung 6.

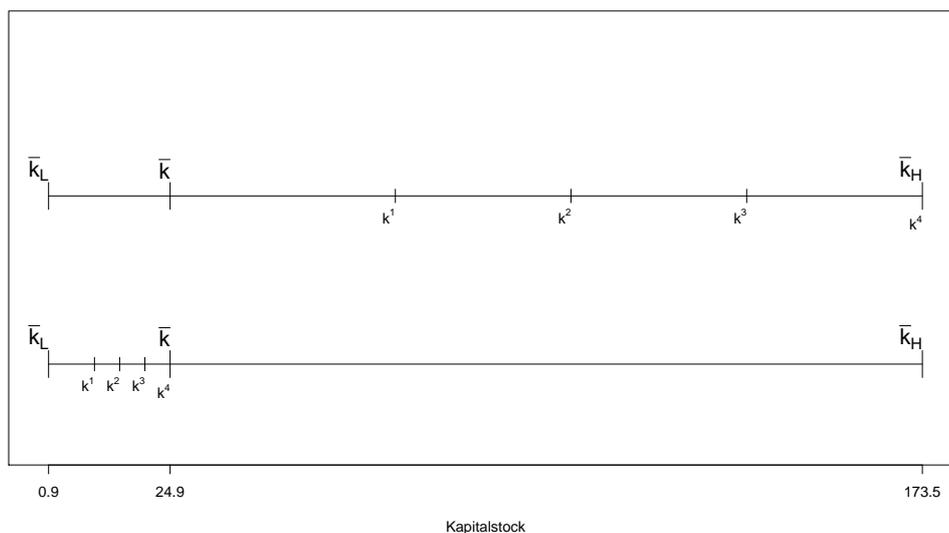


Abbildung 5: Die Abbildung zeigt die jeweiligen Realisationen k^1, k^2, k^3 und k^4 der beiden Zufallsvariablen $\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k}_H)$ (oben) und $\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k})$ (unten) zum Zeitpunkt t mit $\rho = \frac{2}{10}$ (Deckungsgrad).



Abbildung 6: Die Abbildung zeigt die jeweiligen Realisationen k^1, k^2, k^3 und k^4 der beiden Zufallsvariablen $\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k}_H)$ (oben) und $\tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(\bar{k})$ (unten) zum Zeitpunkt t mit $\rho = \frac{8}{10}$ (Deckungsgrad).

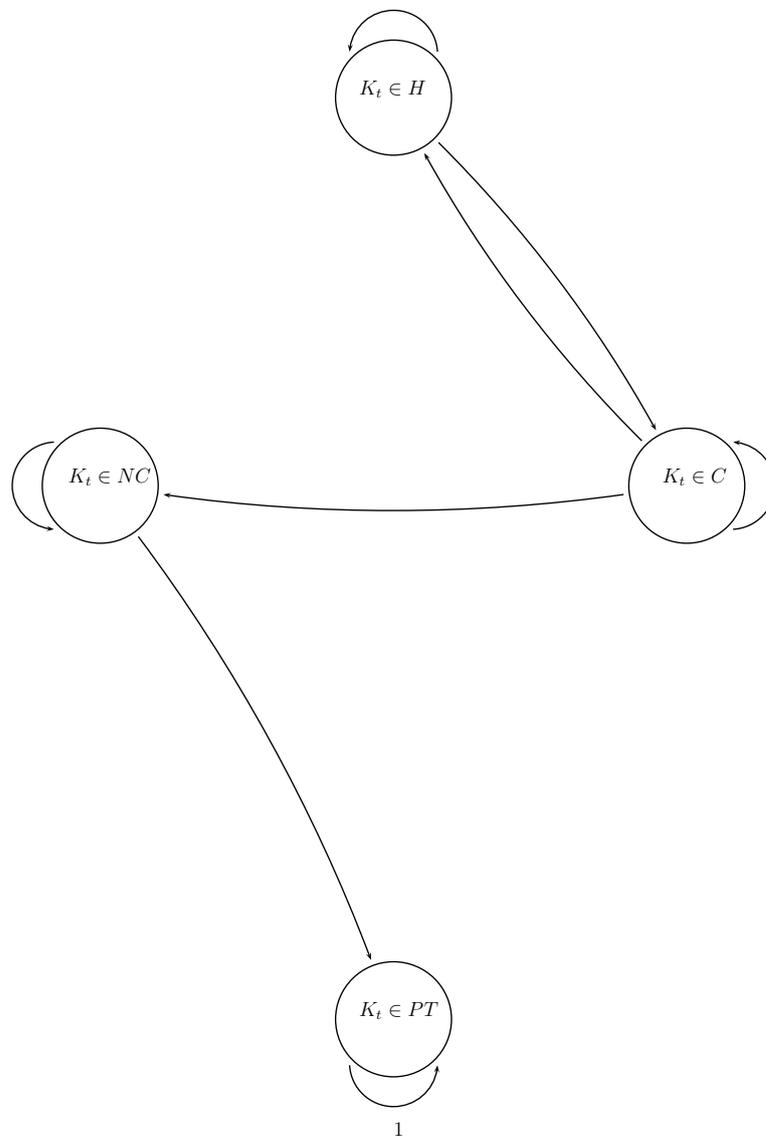


Abbildung 7: Die Abbildung zeigt den Zustandsgraphen der Markov-Kette $(K_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$.

Die Abbildung 6 beschreibt die gleichen beiden Zufallsvariablen wie auch Abbildung 5, jedoch wird hier mit $\rho = \frac{8}{10}$ ein anderer Parameterwert verwendet.

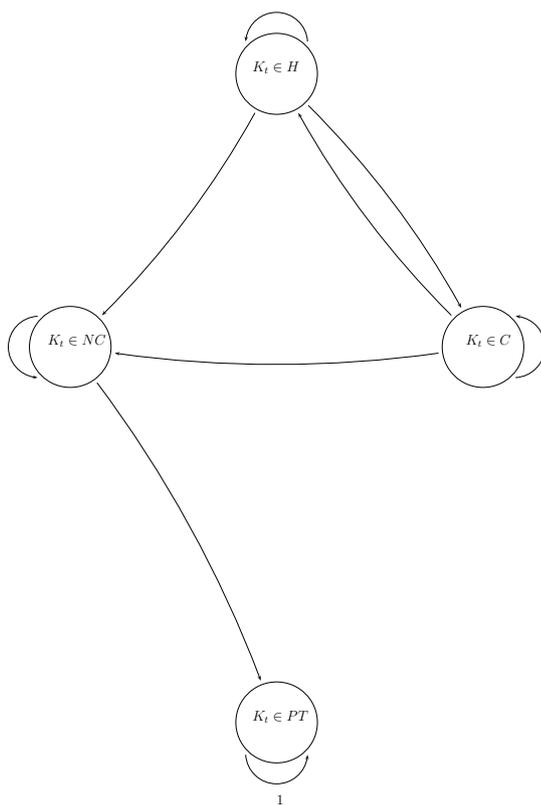


Abbildung 8: Die Abbildung zeigt einen Graphen, der im hier vorliegenden Modell ausgeschlossen werden kann.

3.2 Das asymptotische Verhalten des Kapitalstockprozesses

In diesem Abschnitt wird das asymptotische Verhalten des Kapitalstockprozesses betrachtet. Es wird also das Konvergenzverhalten in Verteilung der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ untersucht. Sei $P \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$ die Übergangsmatrix der homogenen zeitdiskreten Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit abzählbarem endlichem Zustandsraum. Sei $\{F_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ die Folge der Verteilungsfunktionen der homogenen Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$.

Notation:

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K \sim \pi \quad \stackrel{def}{\iff} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t = F_K$$

Man beachte, dass der Vektor π die Verteilungsfunktion¹² der diskreten Zufallsvariable K beschreibt.

Satz 3. Sei $P \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$ die Übergangsmatrix der homogenen zeit-diskreten Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit abzählbarem endlichem Zustandsraum $\tilde{\Gamma}_n$. Sei weiters $\{F_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ die Folge der Verteilungsfunktionen dieser homogenen Markov-Kette und \bar{P} eine stochastische $m \times m$ -Matrix für die gilt:

$$\bar{P} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P^t$$

Dann gilt für einen beliebigen Startwert $k^i \in \tilde{\Gamma}_n$ der Markov-Kette die folgende Aussage:

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K_i \sim (\bar{p}_{ij})_{j \geq 1}$$

Es gilt zu beachten, dass der Vektor $(\bar{p}_{ij})_{j \geq 1}$ die Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsvariable K_i beschreibt.

Beweis. Seien $k^1 \leq, \dots, \leq k^m \in \tilde{\Gamma}_n$ die geordneten Elemente des abzählbaren endlichen Zustandsraums.

Sei k^i der Startwert und F_i die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable K_i .

¹²Sei F_K die Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsvariable K und sei $\pi = (\pi_j)_{j=1}^m$ der dazugehörige stochastische Vektor, dann existiert für jedes k ein $n(k) \in \{j : 0 \leq j \leq m\}$, so dass gilt:

$$F_K(k) = \sum_{j=1}^{n(k)} \pi_j$$

Es gilt zu zeigen, dass für ein beliebiges fixes k^l gilt Folgendes:

$$F_t(k^l) \longrightarrow F_i(k^l), \quad \text{wenn } t \rightarrow \infty$$

D.h.

$$\sum_{j=1}^l p_{ij}^t \longrightarrow \sum_{j=1}^l \bar{p}_{ij}, \quad \text{wenn } t \rightarrow \infty$$

Man beachte, dass $p_{ij}^t = \mathbb{P}(K_t = k^j \mid K_0 = k^i)$ ist, d.h.

$$p_{ij}^t = \underset{1 \times m}{e_i} \cdot \underset{m \times 1}{P^t} \cdot e_j$$

Man kann festhalten, dass e_i und e_j zwei Einheitsvektoren sind. Es gilt weiters:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l p_{ij}^t = \sum_{j=1}^l \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = \sum_{j=1}^l \bar{p}_{ij}$$

D.h. wenn t gegen unendlich strebt und $K_0 = k^i$ ist, dann strebt die Funktion F_t gegen die Funktion F_i . QED

Definition 3. Sei $Q \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$ die Übergangsmatrix der homogenen zeit-diskreten Markov-Kette $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit abzählbarem endlichem Zustandsraum. Die Übergangsmatrix Q heißt stark ergodisch falls gilt:

$$R = \underset{m \times 1}{1} \cdot \underset{1 \times m}{\pi_Q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q^t$$

Man beachte, dass R eine Matrix mit identischen Zeilen ist.

Diese Definition ist der Arbeit von G. Pflug und W. Schachermayer [9] entnommen.

Definition 4. Sei $Q \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$ die Übergangsmatrix der homogenen zeit-diskreten Markov-Kette $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit abzählbarem endlichem Zustandsraum. Der stochastische Vektor $\pi_Q \in \mathbb{R}_+^{1 \times m}$ heißt stationäre Verteilung der Markov-Kette $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ falls gilt:

$$\pi_Q = \pi_Q \cdot Q$$

Somit kann man Folgendes festhalten: Sei Q eine stark ergodische Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_t\}$. Dann ist eine Zeile von $R = \lim_{t \rightarrow \infty} Q^t$ eine stationäre Verteilung von $\{X_t\}$.

Auf Grund der numerischen Berechnung des Ergodizitätskoeffizienten kann man feststellen, dass die Übergangsmatrix P der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ im Modell mit Parameter $\rho = \frac{2}{10}$ stark ergodisch ist. Somit ergeben die numerischen Berechnungen den stochastischen Vektor

$$\pi_P = \left(0, 0, 0, \frac{1}{10000}, \frac{1}{10000}, \frac{79}{10000}, \frac{14}{10000}, \frac{1486}{10000}, \frac{8419}{10000}, 0, \dots, 0\right)$$

(stationäre Verteilung). Weiters sei hier noch ergänzt, dass dieser Vektor über die Eigenschaft

$$\underset{m \times 1}{1} \cdot \underset{1 \times m}{\pi_P} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P^t$$

verfügt. Die Abbildungen 9 - 12 zeigen das Konvergenzverhalten der Übergangsmatrix P für den Zeilenvektor $(p_{mj})_{j \geq 1}$ nach 100, 300, 600 und 3000 Schritten.

Die Abbildung 12 zeigt die Eintragungen des Vektors π_P des Modells mit Parameter $\rho = \frac{2}{10}$. Man beachte, dass es sich hierbei um eine rechtssteile Verteilung handelt.

Die homogene zeit-diskrete Markov-Kette $\{K_t \in \tilde{\Gamma}_n \mathbb{P}\text{-f.s.} : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit Parameter $\rho = \frac{2}{10}$ besitzt somit die folgende asymptotische Eigenschaft:

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K \in PT \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Man kann folglich festhalten, dass ein Haushalt in diesem Modell früher oder später in die Armutsfalle geraten wird.

Im Gegensatz zum Modell mit Parameter $\rho = \frac{2}{10}$ zeigt sich im Modell mit $\rho = \frac{8}{10}$ ein anderes asymptotisches Verhalten. Die numerischen Berechnungen ergaben, dass die Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ gegen eine Blockmatrix konvergiert, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P^t = \begin{bmatrix} \underset{m_1 \times 1}{1} \cdot \pi_L & 0 \\ 0 & \underset{m_2 \times 1}{1} \cdot \pi_H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$$

Man beachte, dass in diesem Fall die Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ in zwei abgeschlossene Klassen zerfällt.

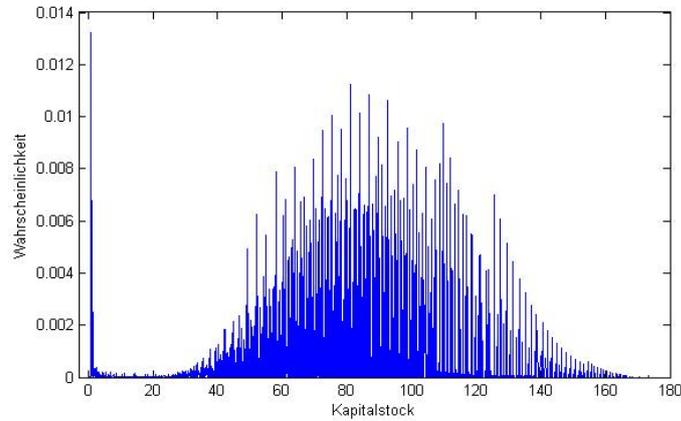


Abbildung 9: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_P der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$ mit Startwert \bar{k}_H nach 100 Iterationen.

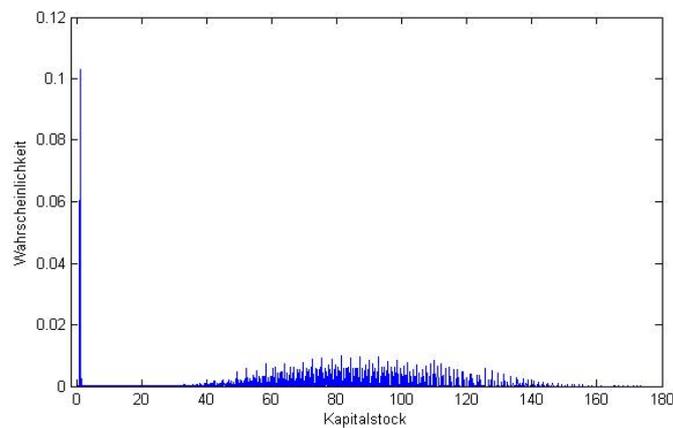


Abbildung 10: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_P der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$ mit Startwert \bar{k}_H nach 300 Iterationen.

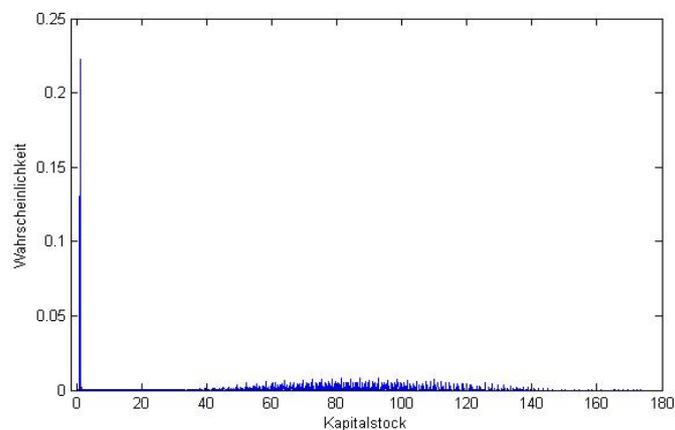


Abbildung 11: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_P der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$ mit Startwert \bar{k}_H nach 600 Iterationen.

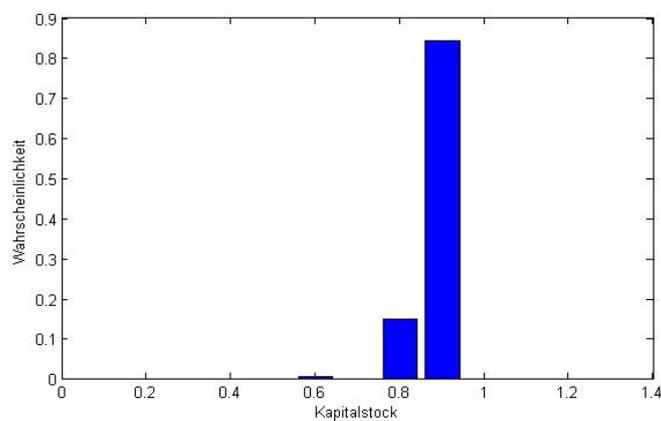


Abbildung 12: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_P der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$. Es gilt festzuhalten, dass die Werte außerhalb von PT verschwunden sind.

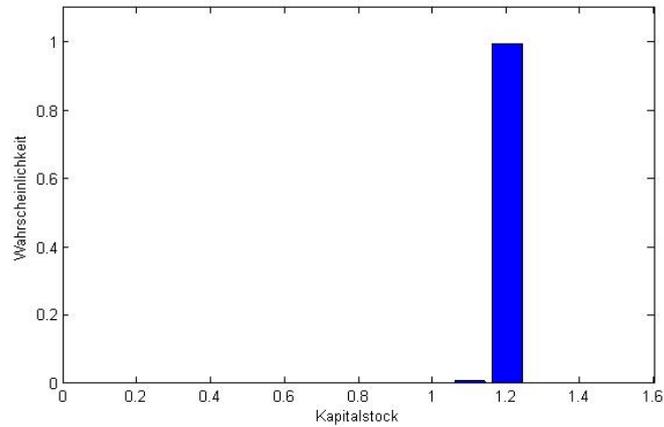


Abbildung 13: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_L der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$.

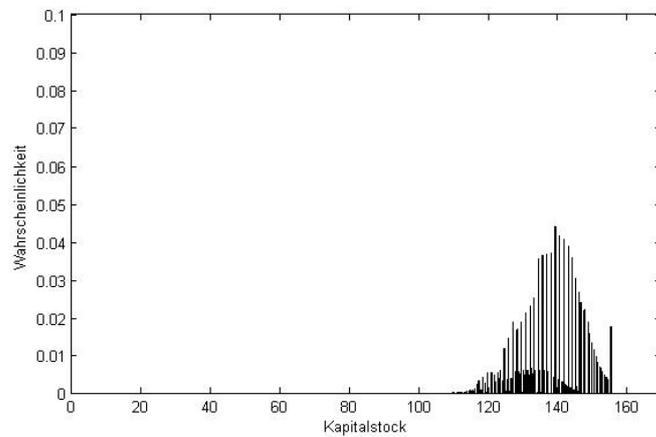


Abbildung 14: Die Abbildung zeigt die stationäre Verteilung π_H der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$.

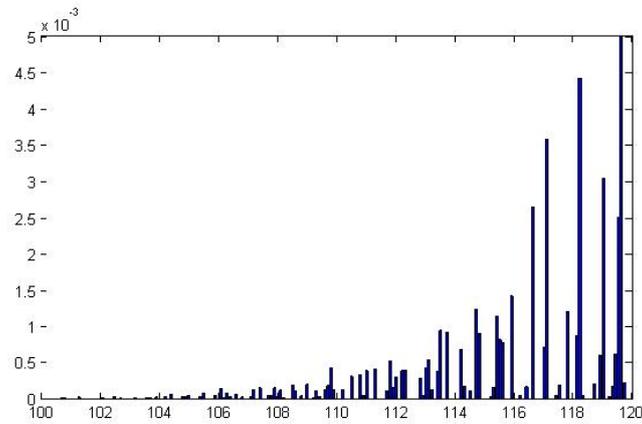


Abbildung 15: Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der stationären Verteilung π_H der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$ nach 601 Iterationen.

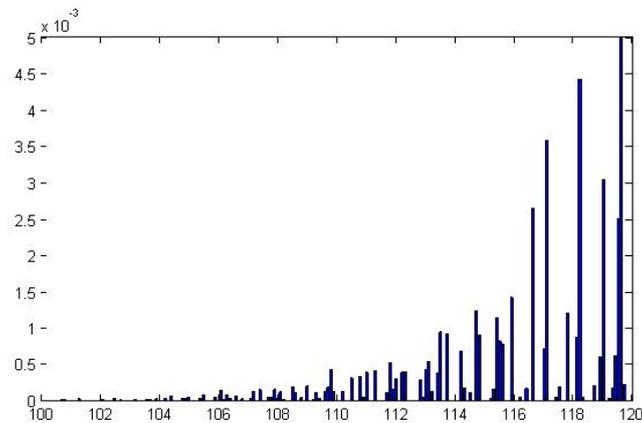


Abbildung 16: Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der stationären Verteilung π_H der Markov-Kette mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{8}{10}$ nach 602 Iterationen.

Seien $k^1 \leq, \dots, \leq k^m \in \tilde{\Gamma}_n$ die geordneten Elemente des abzählbaren endlichen Zustandsraums der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$. Dann kann man festhalten, dass diese homogene zeit-diskrete Markov-Kette mit Parameter $\rho = \frac{8}{10}$ die asymptotische Eigenschaften

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K_L \in PT \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall K_0 \leq \hat{k}, \quad (K_L \sim \pi_L)$$

und

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K_H > k^{m_1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall K_0 > \hat{k}, \quad (K_H \sim \pi_H)$$

besitzt. Der Wert $\hat{k} = k^{m_1}$ ist der Treshold-Wert des Modells. Die Abbildung 13 zeigt die Eintragungen des Vektors π_L und die Abbildung 14 die Eintragungen des Vektors π_H .

Aus den Abbildungen 15 und 16 ist ersichtlich, dass sich die Verteilung K_t nach 600 Iterationen nicht mehr verändert.

Seien C_L und C_H zwei disjunkte Teilmengen der Menge C , sodass $C_L \cup C_H = C$ und $C_L = \{k^1, \dots, \hat{k}\}$ ist. Dann zeigt die Abbildung 17 einen Übergangsgraphen der Matrix P .

Man kann somit festhalten, dass ein Haushalt in diesem Modell nicht zwangsweise in die Armutsfalle geraten muss.

Zusammenfassend sei nun angemerkt, dass ein Anstieg des Deckungsgrades ρ (exogene Variable) dazu führen kann, dass ein Haushalt mit einem Anfangskapitalstock, welcher größer ist als ein gewisser Treshold-Wert, auf lange Sicht nicht in die Armutsfalle geraten wird. Dieser Treshold-Wert ergibt sich aus dem Modell und wird mit $\hat{k} \in \tilde{\Gamma}_n$ bezeichnet. Die numerischen Berechnungen ergaben, dass der Treshold in der Menge C liegt.

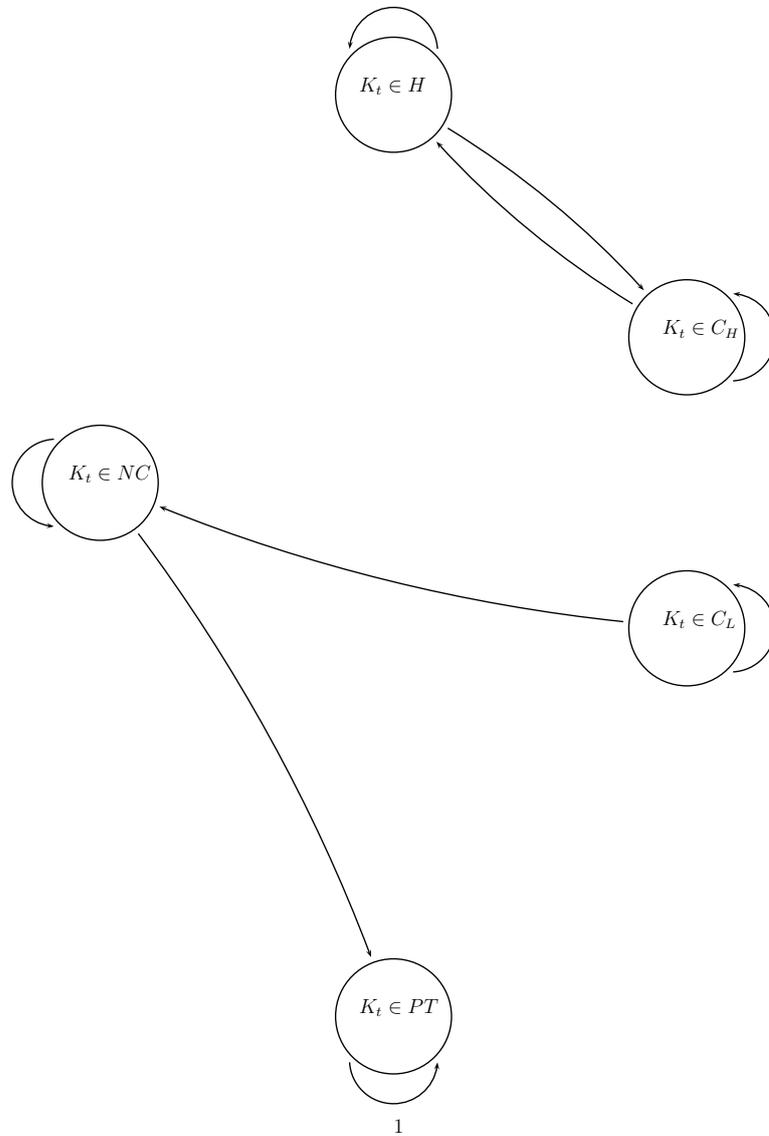


Abbildung 17: Die Abbildung zeigt einen weiteren möglichen Graphen der Übergangsmatrix P der Markov-Kette $(K_t)_{t \geq 0}$. Diese Form des Graphen ergibt sich bei einer exogenen Variablen von $\rho \geq \frac{1}{2}$.

3.3 Die Gleichgewichte der Markov-Kette

In diesem Kapitel wird das Modell (die Markov-Kette) auf mögliche asymptotische Gleichgewichte analysiert. Es wird sodann der Einfluss der exogenen Variablen ρ (Deckungsgrad) auf die Existenz von derartigen Gleichgewichten untersucht.

Definition 5 (asymptotisches Gleichgewicht). *Sei $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ ein stochastischer Prozess, dann heißt in dieser Arbeit die Zufallsvariable X asymptotisches Gleichgewicht falls gilt:*

$$X_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} X$$

Sei $\{PT, NC, C, H\}$ eine Partition von $\tilde{\Gamma}_n$, die durch

$$\{PT, NC, C, H\} = \left\{ (0, \bar{k}_L], (\bar{k}_L, \bar{k}], (\bar{k}, \bar{k}_H), \{\bar{k}_H\} \right\}$$

definiert ist. Zur Wiederholung: Die Menge PT heißt in dieser Arbeit Armutsfalle (*poverty trap*). Es gilt weiters festzuhalten, dass die Menge $C \cup H$ dem halboffenen Intervall $(\bar{k}, \bar{k}_H]$ entspricht. Die drei Konstanten \bar{k}_L , \bar{k} und \bar{k}_H sind die Fixpunkte der Politikfunktion. Aus der Abbildung 18 kann man die Werte dieser Fixpunkte in Abhängigkeit von der exogenen Variable ρ ablesen.

Sei K_L ein Gleichgewicht der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit der Eigenschaft

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K_L \in PT \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und weiters sei K_H ein Gleichgewicht, das die Eigenschaft

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K_H \in C \cup H \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

besitzt. Ansonsten sind diese asymptotischen Gleichgewichte beliebig. Man kann somit festhalten, dass die Menge PT ($C \cup H$) der Träger¹³ der Zufallsvariable K_L (K_H) ist.

Um die Gleichgewichte numerisch berechnen zu können, werden die Parameter α , β , δ , ν , γ_L , γ_H und E fixiert auf $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $E = 6$.

¹³Eine Menge \mathfrak{T} heißt Träger der Zufallsvariable X falls gilt:

$$\mathbb{P}(X \in \mathfrak{T}) = 1$$

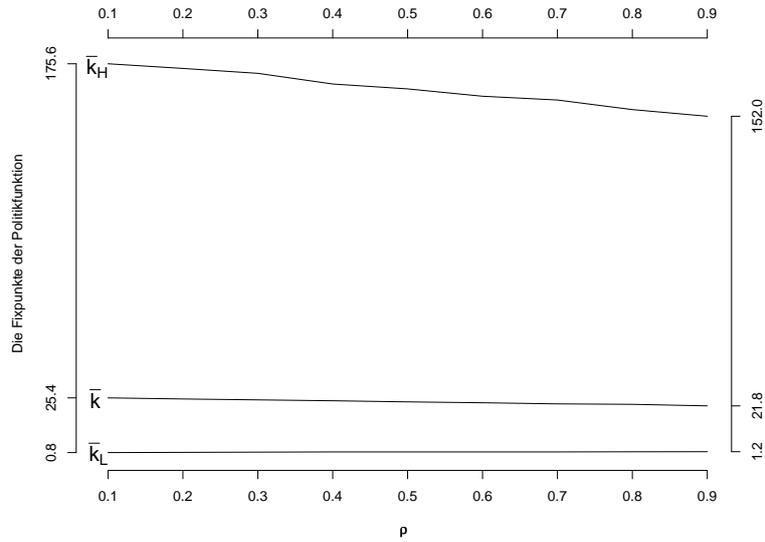


Abbildung 18: Die Abbildung zeigt die Fixpunkte der Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (11) mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$.

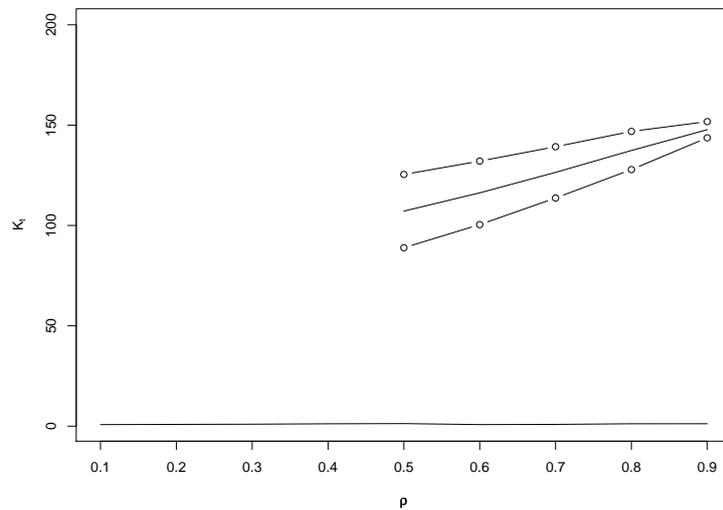


Abbildung 19: Die Abbildung zeigt die Erwartungswerte der Gleichgewichte in Abhängigkeit von der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad). Die beiden punktrichtrillierte Linien stellen das Band $\mathbb{E}[K_H | \rho] \pm \text{Std}[K_H | \rho]$ wieder in Abhängigkeit von ρ (Deckungsgrad) dar.

Sei $\hat{k} = \hat{k}(\rho)$ der jeweilige Treshold-Wert des Modells. Der Treshold ist hier ein Element der Menge C . Aus den numerischen Berechnungen ergibt sich die Abbildung 19. Diese zeigt die Funktion

$$\rho \mapsto \mathbb{E} \left[K_L | \rho \right] = \mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} K_t | K_0 \geq k^{m_1}, \rho \right]$$

sowie die Funktion

$$\rho \mapsto \mathbb{E} \left[K_H | \rho \right] = \mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} K_t | K_0 < k^{m_1}, \rho \right]$$

für alle $\rho \geq \frac{1}{2}$. Man beachte, dass die beiden punktstrichlierten Linien das Band

$$\rho \mapsto \mathbb{E} \left[K_H | \rho \right] \pm \text{Std} \left[K_H | \rho \right]$$

repräsentieren. Auf der Abbildung 19 kann man zudem erkennen, dass die Standardabweichung Std sinkt falls der Deckungsgrad $\uparrow \rho$ (exogene Variable) steigt.

Aus den numerischen Berechnungen kann man Folgendes erkennen: Das Modell beziehungsweise die Markov-Kette besitzt ein Gleichgewicht K_L für alle $\rho < \frac{1}{2}$ und zwei Gleichgewichte K_L und K_H für $\rho \geq \frac{1}{2}$, vergleiche dazu Abbildung 19.

3.4 Stoppzeiten

In diesem Teil der Arbeit gehen wir nun der Frage nach, zu welchem Zeitpunkt seiner ökonomischen Entwicklung sich der Haushalt das erste Mal in der Armut-falle befindet?

Diese Frage kann nur in Abhängigkeit zum Anfangskapitalstock beantwortet werden. Man beachte, dass Anfangskapitalstöcke $K_0 \leq \bar{k}_L$ hier nicht betrachtet werden.

Definition 6 (Stoppzeit). Sei $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene zeit-diskrete Markov-Kette mit abzählbarem endlichem Zustandsraum I_d sowie Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$ und weiters sei J eine echte Teilmenge von I_d für die gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} \in J \mid X_t \in J) = 1$$

Die Menge J heißt auch absorbierende Menge. Man beachte, dass die Menge PT die obige Eigenschaft erfüllt. Sei weiters T_J eine nicht-negative Zufallsvariable, die durch

$$T_J \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \in \mathbb{N}_0 : X_t \in J\}$$

definiert ist. Eine solche Zufallsvariable T_J heißt Stoppzeit. Es gilt festzuhalten, dass eine Stoppzeit T_J dieser Form auch Absorptionszeit heißt.

In dieser Arbeit ist man insbesondere an der Stoppzeit

$$T_{PT} = \inf\{t \in \mathbb{N}_0 : K_t \in PT\}$$

interessiert. Die Zufallsvariable T_{PT} entspricht dem Zeitpunkt des erstmaligen Eintritts in die Menge PT . Die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable und die mittlere Eintrittsdauer (Erwartungswert) ist hier in dieser Arbeit von Interesse.

Beginnen wir mit der Frage, welche Verteilungsfunktion die Stoppzeit T_{PT} besitzt, dies in Abhängigkeit vom Anfangskapitalstock. Die Zufallsvariable T_{PT} ist eine diskrete Zufallsvariable, d.h.

$$T_{PT} \in \mathbb{N}_0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Seien $k^1 \leq, \dots, \leq k^m \in \tilde{\Gamma}_n$ die geordneten Elemente des abzählbaren endlichen Zustandsraums $\tilde{\Gamma}_n$ der Markov-Kette $\{K_t \in \tilde{\Gamma}_n \mathbb{P}\text{-f.s.} : t \in \mathbb{N}_0\}$. Weiters sei $i \in \tilde{\Gamma}_n - PT = \{l : k^l \in \tilde{\Gamma}_n, k^l \notin PT\}$ und sonst beliebig. Dann gilt

$$\mathbb{P}(T_{PT} > 0 \mid K_0 = k^i) = 1$$

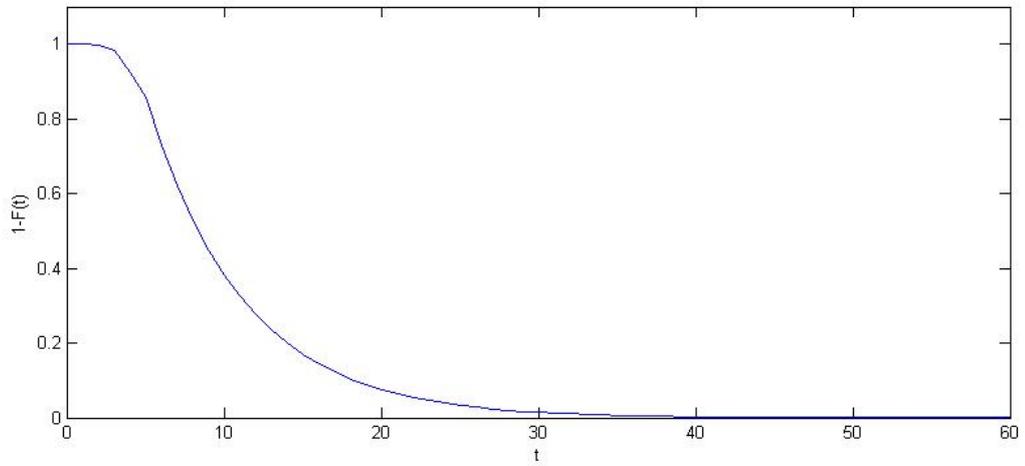


Abbildung 20: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = \bar{k}_L + 2$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit bei gegebenen Startwert.

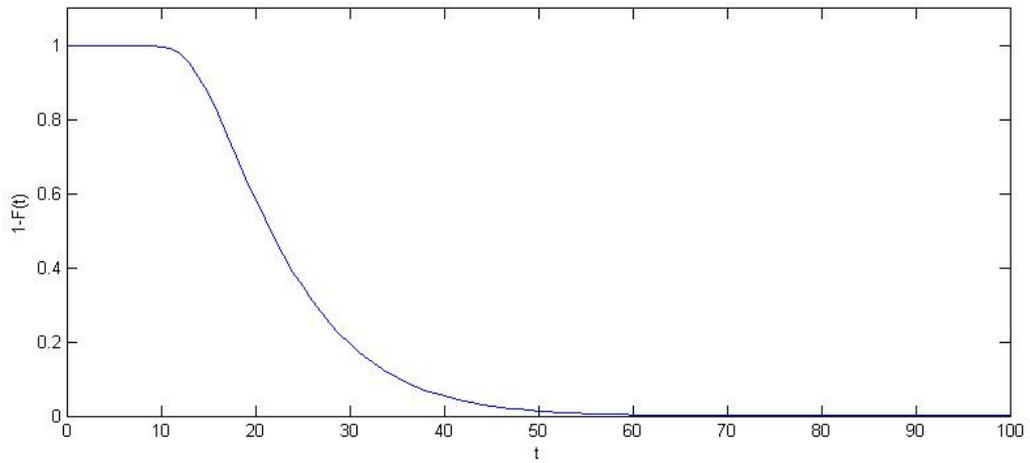


Abbildung 21: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = \bar{k}$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit bei gegebenem Startwert.

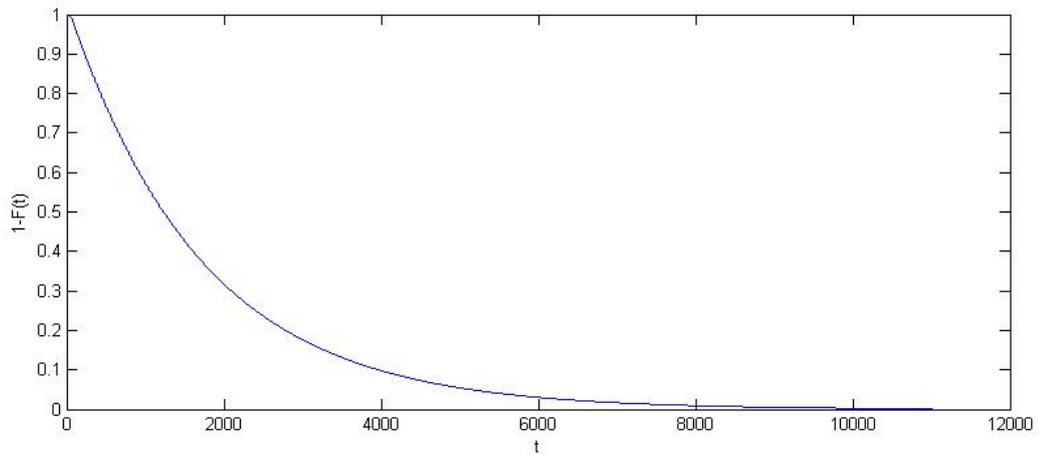


Abbildung 22: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = 100 \gg \bar{k}$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit bei gegebenem Startwert.

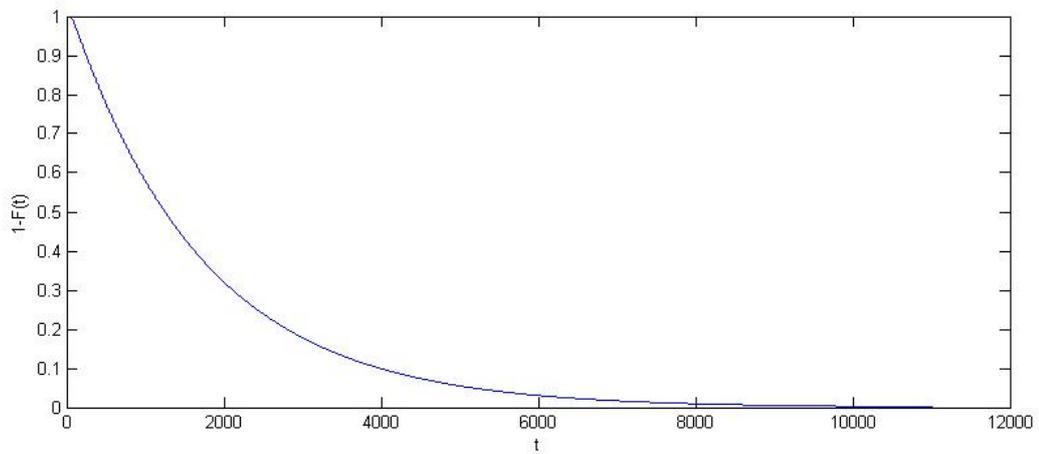


Abbildung 23: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = \bar{k}_H$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit bei gegebenem Startwert.

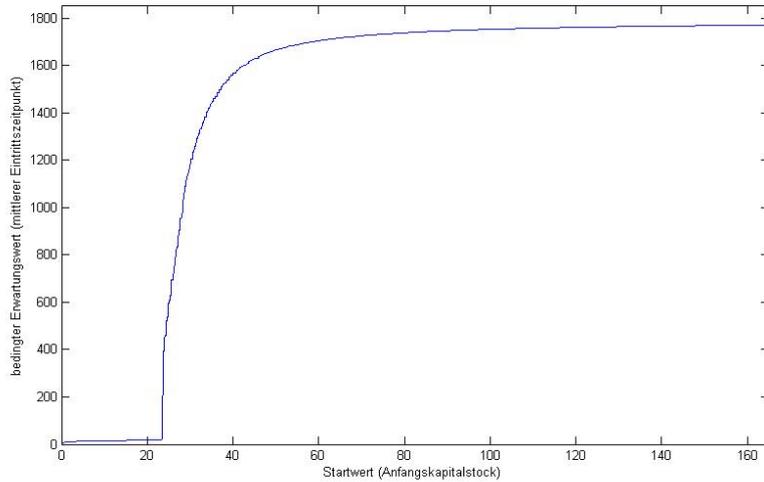


Abbildung 24: Die Abbildung zeigt die Funktion $k \geq 1 \mapsto \mathbb{E}[T_{PT} | K_0 = k]$ für das Modell mit den Parametern $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{10}$, $\delta = \frac{1}{10}$, $\nu = \frac{1}{10}$, $\gamma_L = \frac{1}{4}$, $\gamma_H = \frac{3}{4}$, $E = 6$ und $\rho = \frac{2}{10}$. Auf der x-Achse ist der Startwert der Stopzeit T_{PT} aufgetragen und auf der y-Achse kann man den bedingten Erwartungswert (mittleren Eintrittszeitpunkt) der Zufallsvariable T_{PT} ablesen.

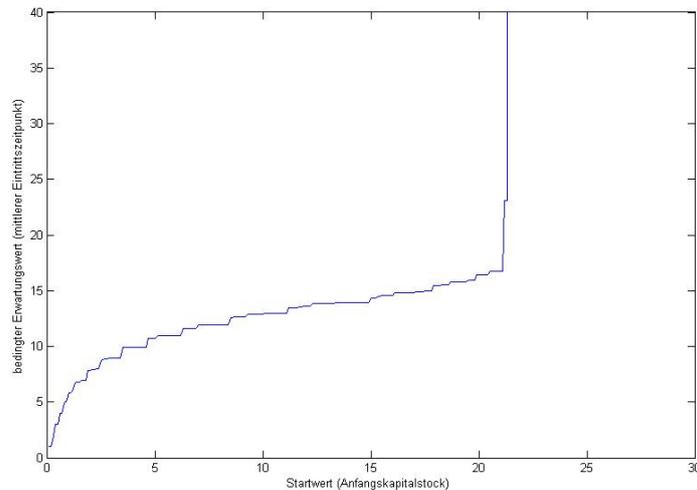


Abbildung 25: Die Abbildung zeigt die Funktion $k \geq 1 \mapsto \mathbb{E}[T_{PT} | K_0 = k]$ für das Modell mit $\rho = \frac{8}{10}$. Auf der x-Achse ist der Startwert der Stopzeit T_{PT} aufgetragen und auf der y-Achse kann man den bedingten Erwartungswert (mittleren Eintrittszeitpunkt) der Zufallsvariable T_{PT} ablesen. Man beachte, dass für alle Startwerte $k^i > 22$ der Erwartungswert unendlich ist.

für alle i und weiters

$$\mathbb{P}(T_{PT} > t + 1 \mid K_0 = k^i) = \sum_{j: k^j \notin PT} p_{ij} \mathbb{P}(T_{PT} > t \mid K_0 = k^j)$$

alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Sei $p_t = (p_t^i)_{i \in \tilde{\Gamma}_n - PT}$ ein Spaltenvektor, der durch

$$p_t^i = \mathbb{P}(T_{PT} > t \mid K_0 = k^i)$$

definiert ist. Weiters sei \hat{P} die Matrix, die aus P durch Streichen der Zeilen und Spalten aller Zustände $k^j \in \tilde{\Gamma}_n$, für die ferner gilt $k^j \in PT$, entsteht. Dann gilt:

$$p_{t+1} = \hat{P} \cdot p_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Sei $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Stoppzeit T_{PT} und $k^i > \bar{k}_L$ der Startwert der Markov-Kette, dann gilt

$$F(t) = \mathbb{P}(T_{PT} \leq t \mid K_0 = k^i) = 1 - \mathbb{P}(T_{PT} > t \mid K_0 = k^i) = 1 - p_t^i$$

für alle $t > 0$ und weiters ist $F(0) = 0$.

Für die numerischen Berechnungen zu den Abbildungen 20 - 23 wird die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) auf $\rho = \frac{2}{10}$ fixiert.

Die Abbildungen 20 - 23 zeigen die Funktion $1 - F(t)$ der Zufallsvariable T_{PT} für verschiedene Startwerte. Auf den Abbildungen 20 - 23 befindet sich auf der x-Achse jeweils der Anfangskapitalstock (Startwert) k_0 , auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T_{PT} > t \mid K_0 = k_0)$. Man beachte, dass die Fläche unter dieser Funktion dem bedingten Erwartungswert entspricht.

Seien $k^1 \leq, \dots, \leq k^m \in \tilde{\Gamma}_n$ die geordneten Elemente des abzählbaren endlichen Zustandsraums $\tilde{\Gamma}_n$ der Markov-Kette $\{K_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ und sei

$$i \in \{l : k^l \in \tilde{\Gamma}_n, k^l \notin PT\}$$

beliebig. Dann erhält man den mittleren Eintrittszeitpunkt durch

$$\mathbb{E}[T_{PT} \mid K_0 = k^i] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{PT} > t \mid K_0 = k^i) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^i$$

wobei $k^i > \bar{k}_L$ der Startwert der Markov-Kette ist.

Auf der Abbildung 24 kann man die numerisch berechneten bedingten Erwartungswerte

$$\mathbb{E}\left[T_{PT} \mid K_0 = k^i\right]$$

der Zufallsvariable T_{PT} in Abhängigkeit vom Anfangskapitalstock k^i erkennen. Auffallend ist, dass die Funktion der bedingten Erwartungswerte ungefähr ab dem Fixpunkt \bar{k} stark ansteigt um dann wieder abzuflachen. Man beachte, dass der Fixpunkt der Politikfunktion \bar{k} die Eigenschaften $\bar{k} = \max NC$ und $\bar{k} = \inf C$ besitzt.

Auf den Abbildungen 26-27 kann man die Funktion $1 - F(t)$ beziehungsweise die Verteilungsfunktion $F(t)$ der Stoppzeit T_{PT} erkennen. Dies für den Fall, dass der Deckungsgrad der Versicherung $\rho = \frac{8}{10}$ beträgt. Die Form der Verteilungsfunktion von T_{PT} ist abhängig vom Startwert k^i (Anfangskapitalstock). Man betrachtet auf diesen Abbildungen (26-27) die Ergebnisse für die Startwerte $\bar{k} - 3$ und $\bar{k} + 3$.

Die numerischen Berechnungen ergaben für ein $\rho \geq \frac{1}{2}$ und einen Startwert $k^i > \hat{k}$, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T_{PT} = \infty) > 0$ ist, somit folgt für diesen Fall:

$$\mathbb{E}\left[T_{PT} \mid K_0 = k^i\right] = \infty$$

Zur Wiederholung: Die Markov-Kette besitzt in diesem Fall ($\rho = \frac{8}{10}$) die zwei asymptotischen Gleichgewichte $K_L \in PT$ \mathbb{P} -f.s. und $K_H \notin PT$ \mathbb{P} -f.s.. Somit besitzt die Stoppzeit T_{PT} nur für Startwerte $k^i \leq \hat{k}$ einen endlichen (bedingten) Erwartungswert, siehe hierzu Abbildung 25.

Ferner ergaben die numerischen Berechnungen, dass sich der Treshold des Modells \hat{k} knapp oberhalb des Fixpunktes $\bar{k} = 22.5$ befindet. Die Abbildungen 25-27 zeigen dies.

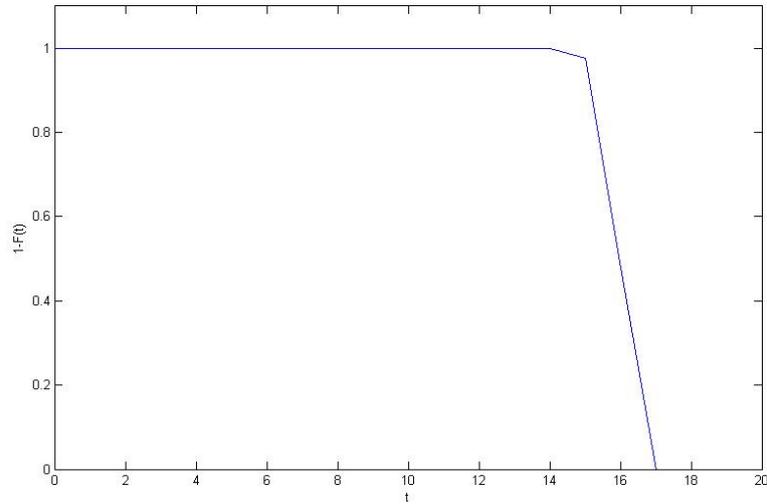


Abbildung 26: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = \bar{k} - 3$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit. Die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) ist auf $\rho = \frac{8}{10}$ fixiert.

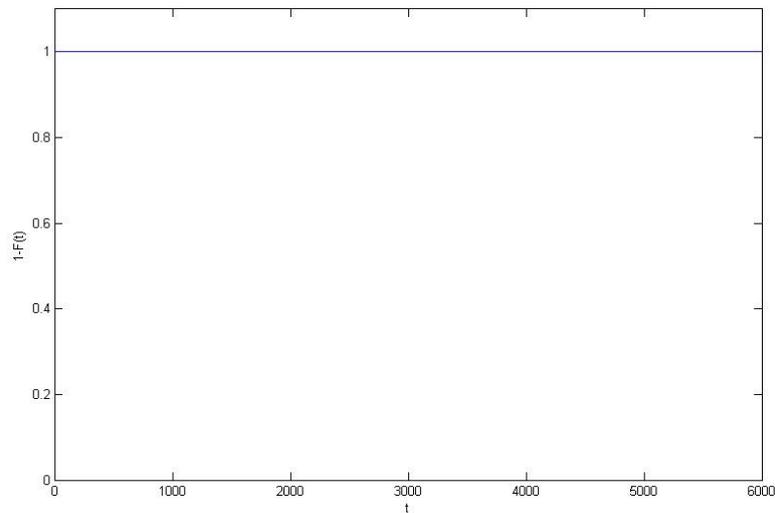


Abbildung 27: Die Abbildung zeigt die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(T_{PT} > t | K_0 = k_0)$ mit $k^i = \bar{k} + 3$ als Startwert (Anfangskapitalausstattung). Auf der x-Achse ist die Zeit t aufgetragen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit. Die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) ist auf $\rho = \frac{8}{10}$ fixiert.

4 Zusammenfassung

Das Modell beziehungsweise die Markov-Kette $\{K_t : t \geq 0\}$ verfügt über ein oder zwei asymptotische(s) Gleichgewicht(e). Ihre Anzahl ist abhängig von der exogenen Variablen ρ , die für den Deckungsgrad der Versicherung steht. Unter einem Gleichgewicht versteht man in der vorliegenden Arbeit eine Zufallsvariable $K \in \tilde{\Gamma}_n$ \mathbb{P} -f.s. für die gilt:

$$K \stackrel{\mathfrak{D}}{=} g(K)$$

Man beachte, dass die Funktion¹⁴ $g : \tilde{\Gamma}_n \rightarrow \tilde{\Gamma}_n$ die Dynamik der Markov-Kette beschreibt. Der Vektor $\pi : K \sim \pi$ heißt stabile Verteilung der Markov-Kette $\{K_t : t \geq 0\}$. Ein Gleichgewicht K heißt hier asymptotisches Gleichgewicht falls gilt:

$$K_t \xrightarrow{\mathfrak{D}} K$$

D.h. die Markov-Kette konvergiert in Verteilung gegen dieses Gleichgewicht K (Zufallsvariable). Die Verteilung eines asymptotischen Gleichgewichts heißt stationäre Verteilung der Markov-Kette. Das Modell besitzt ein asymptotisches Gleichgewicht K_L , das die Eigenschaft

$$K_L \in PT \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

erfüllt, d.h. der Haushalt gilt in allen möglichen Realisationen der Zufallsvariable K_L als arm. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Menge PT die Armutsfalle repräsentiert.

Sollte das Modell ein weiteres (zweites) asymptotisches Gleichgewicht K_H besitzen, so gilt für dieses

$$K_H \notin PT \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Die Existenz des asymptotischen Gleichgewichts beziehungsweise der asymptotischen Gleichgewichte wird durch die Berechnungen der Stoppzeit noch bekräftigt.

¹⁴Zur Erinnerung: Sei $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von *i.i.d.*-Zufallsvariablen, dann hat die Modelldynamik der Markov-Kette $K_{t+1} = g(K_t)$ die folgende Form:

$$g(K_t) = \min \left\{ k \in \tilde{\Gamma}_n : \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(K_t) \leq k \right\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Literatur

- [1] K. J. Arrow. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*. Yrjö Johnsson Lectures, 1965.
- [2] Christopher B. Barrett, Michael R. Carter, and Munenobu Ikegami. Poverty traps and social protection. *SP Discussion Paper*, (0804):1–36, 2008.
- [3] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [4] Hans-Otto Georgii. *Stochastik*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2004.
- [5] Burkhard Heer and Alfred Maussner. *Dynamic General Equilibrium Modeling*. Springer, 2005.
- [6] Richard Kiener. *Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der Armutsfalle*. Diplomarbeit (Universität Wien), 2010.
- [7] Mario J. Miranda and Paul L. Fackler. *Applied Computational Economics and Finance*. The MIT Press, 2005.
- [8] Georg Ch. Pflug and Werner Römisch. *Modeling, measuring, and managing risk*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- [9] Georg Ch. Pflug and W. Schachermayer. Coefficients of ergodicity for stochastically monotone markov chains. *Journal of Applied Probability*, 29(4):850–860, 1992.
- [10] David Stirzaker. *Stochastic Process and Models*. Oxford University Press, 2005.
- [11] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad, and Arne Strøm. *Further Mathematics for Economic Analysis*. Pearson Education Limited, 2005.

A Abstract

In dieser Arbeit wird ein dynamisches stochastisches Modell einer Ökonomie in diskreter Zeit mit einer möglichen Armutsfalle (*poverty trap*), aufbauend auf Richard Kiener [6], entwickelt. Die Diplomarbeit [6] befindet sich im Anhang zu der hier vorliegenden Arbeit. Dieses stochastische dynamische Modell wird auch als stochastisches Ramsey Modell bezeichnet.

Der Kapitalstockprozess, der die Lösung des Entscheidungsproblems des modellierten Haushalts ist, wird hier auf stationäre Verteilungen untersucht. Es sei darauf hingewiesen, dass dieser Kapitalstockprozess als Markov-Kette modelliert wird.

Man geht weiters der Frage nach, zu welchem Zeitpunkt seiner ökonomischen Entwicklung sich der modellierte Haushalt das erste Mal in der Armutsfalle befindet.

B Diplomarbeit: “Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der Armutsfalle“

Die vorliegende Magisterarbeit ergänzt und erweitert die Diplomarbeit [6], welche der/die Leser/in auf den folgenden Seiten findet.



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

“Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der
Armutsfalle”

Verfasser

Richard Kiener, Bakk.

angestrebter akademischer Grad

Magister der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften
(Mag.rer.soc.oec.)

Wien, im Februar 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt:
Studienrichtung lt. Studienblatt:
Betreuer:

A 140
Diplomstudium Volkswirtschaft
O. Univ.-Prof. Mag.Dr. Georg Pflug

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Neue Theorien zur Erklärung von andauernder Armut	5
1.2	Treshold Models of Poverty	6
2	Modelle ohne Versicherung	7
2.1	Das allgemeine dynamische Modell ohne Versicherung	7
2.2	Das deterministische dynamische Modell	13
2.3	Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks	15
3	Eigenschaften der Produktionsfunktionen vom Typ 1 oder 2	16
3.1	Produktionsfunktionen vom Typ 1	19
3.2	Produktionsfunktionen vom Typ 2	21
4	Dynamische Programmierung	22
4.1	Deterministische dynamische Programmierung	23
4.2	Stochastische dynamische Programmierung	27
5	Numerische Lösung der Modelle I	32
5.1	Value Function Iteration mit deterministischen Programmen	33
5.2	Das deterministische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1	37
5.3	Das deterministische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2	56
5.4	Value Function Iteration mit stochastischen Programmen	68
5.5	Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1	71
5.6	Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2	84
6	Modellsimulation I	94
6.1	Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1	95
6.2	Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2	96
7	Ergebnisse I	103
7.1	Das deterministische dynamische Modell \mathfrak{M}_1 versus dem deterministischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2	103
7.2	Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_1 versus dem stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2	105

8 Modelle mit Versicherung	108
8.1 Das allgemeine dynamische Modell mit Versicherung	110
8.2 Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks	115
9 Numerische Lösung der Modelle II	115
9.1 Value Function Iteration mit stochastischen Programmen	116
9.2 Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_1^v mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1	120
9.3 Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_2^v mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2	132
10 Modellsimulation II	143
10.1 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1	145
10.2 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2	147
11 Ergebnisse II	149
11.1 Die Auswirkungen einer Versicherung auf die Gleichgewichte der Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v	149
12 Zusammenfassung	152
A Abstract	155

1 Einleitung

Das Problem der Armut wird immer wieder öffentlich debattiert, auch zahlreiche Autorinnen und Autoren widmeten sich bereits diesem Thema. Es gibt jede Menge Erzählungen wie es der ärmste "Tellerwäscher" mit Mühe, Fähigkeit und starkem Willen zum Millionär schafft.

Dieser Gedanke wird vom Großteil der amerikanischen Bevölkerung als der Amerikanische Traum wahrgenommen und akzeptiert. Auch hat sich diese Sicht schon lange weit über die Grenzen Amerikas hinausgetragen. Sollte diese Annahme richtig sein, würde das bedeuten, dass sich jedes Individuum selbst zwischen Armut und Reichtum entscheiden kann. Diese Ansicht wird im Englischen als *achievement model of income determination* bezeichnet. Einige klassische ökonomische Theorien unterstützen diesen Ansatz auch, wenn auch in begrenztem Ausmaß. Selbst wohlhabende Individuen müssen laut R. Solow [17] und G. Loury [12] daran arbeiten, ihren Reichtum bzw. Wohlstand auch zu erhalten.

Dennoch ist Armut in vielen Teilen der Welt und auch in einzelnen Haushalten reicher Länder feststellbar. Das lässt viele Forscher die Aussagekraft des *achievement model of income determination* hinterfragen, vergleiche dazu S. Bowles, S. Durlauf und K. Hoff [7].

Zu Beginn des 21. Jahrhunderts können wir von einer nie dagewesenen Einkommensungleichheit sprechen, so berichten S. Bowles und H. Gintis [8] sowie S. Bowles, S. Durlauf und K. Hoff [7]: Mit einem Einkommen von 2\$ pro Tag zählt man zu der reicheren Hälfte der Weltbevölkerung d.h. (das heißt) der Median der Welteinkommensverteilung ist kleiner als 2\$. Weiters kann man beobachten, dass die reichsten 10% der Weltbevölkerung mehr als die Hälfte des Welteinkommens für sich beanspruchen können, während die ärmsten 50% nicht einmal 10% davon erhalten. Die Einkommensungleichheit hat auf der ganzen Welt in den letzten zwei Jahrhunderten beträchtlich zugenommen. Wird man in den USA als Kind von Eltern mit einem Einkommen im untersten Zehntel geboren, so ist die Chance, dass man als Erwachsener ebenfalls zu dieser Einkommensgruppe gehört 24 mal größer, als ein Einkommen aus dem obersten Zehntel zu erhalten.

Diese Beobachtungen sind selbst für Wirtschaftswissenschaftler schwer zu erklären, da freier Wettbewerb in Kombination mit liberalen demokratischen Institutionen zu einem Annähern im wirtschaftlichen Erfolg der verschiedenen Gruppen und Individuen führen sollte.

1.1 Neue Theorien zur Erklärung von andauernder Armut

Die Autoren S. Bowles, S. Durlauf und K. Hoff [7] führen in ihrem Buch an, dass die wirtschaftswissenschaftliche Forschung drei verschiedene, neue Theorien hervorgebracht hat, welche diese andauernde Armut erklären können. Alle drei entfernen sich massiv vom *achievement model of income determination*. Sie beschreiben Mechanismen, die andauernde Armut verursachen und eine sogenannte Armutsfalle (*poverty trap*) schaffen. Diese Theorien finden ihre Anwendung sowohl auf Wirtschaftsräume (Staaten, Regionen) als auch auf einzelne Haushalte. Durch Vereinfachung konnte die Forschung folgende Theorien entwickeln:

- critical thresholds
- dysfunctional institutions
- neighborhood effects

Durch Politischen Druck oder soziale Einflussnahme kommt es zu *dysfunctional institutions*, diese können ganze Nationen in Armut verstricken. Liegt eine hohe Ungleichheit in Macht und Wohlstand vor, beeinflusst dies die Förderung von öffentlichen Schulen, öffentlichen Gütern und den Schutz von Eigentumsrechten. Eine Gesellschaft, die es nicht schafft, gute Eigentumsrechte zu entwickeln, wird von geringer Investitionsbereitschaft und geringem Einkommen charakterisiert sein.

Der *neighborhood effect* ist eine Metapher für die Einflüsse die eine Person einer bestimmten Gruppe auf die anderen Mitglieder dieser Gruppe haben kann. Die Mitgliedschaft in dieser Gruppe kann vorgegeben sein, wie zB. Hautfarbe, Volksgruppe oder ergibt sich aus der Biografie des Individuums zB. Schulen, Nachbarschaft. Zum besseren Verständnis kann man sich folgende Situation vorstellen: In einer Wohngegend gibt es einen Anrainer, der sein Grundstück verkommen lässt. Das wirkt sich auf den Wert aller Grundstücke in dieser Gegend aus. Verhalten sich andere Anrainer ebenso, kann das zu einem gravierenden Wertverlust aller Grundstücke führen.

1.2 Threshold Models of Poverty

Diese Art von Modell zeichnet sich durch einen bestimmten Wert (*critical threshold*) aus. Wird dieser Wert unterschritten, bedeutet dies, dass sich das Individuum in einer Armutsfalle (*poverty trap*) befindet. Wird der Wert überschritten, greifen die zu Beginn der Einleitung angeführten klassischen ökonomischen Theorien. Letzteres gilt jedoch ausschließlich für die deterministischen dynamischen Modelle in dieser Arbeit. Der *critical threshold* an sich wird aus dem jeweiligen Modell berechnet.

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Modelle gehören in die Gruppe der *Threshold Models of Poverty*. Als kritischen Wert verwendet man hier das instabile Gleichgewicht des deterministischen dynamischen Modells (beim stochastischen dynamischen Modell das instabile stochastische Gleichgewicht), sofern dieses existiert.

2 Modelle ohne Versicherung

In diesem Kapitel wird ein dynamisches Modell einer Ökonomie mit einer möglichen Armutsfalle entwickelt. Der modellierte Haushalt oder das modellierte Individuum (das Wirtschaftssubjekt) sieht sich in diesem Modell einer Risikosituation gegenüber, das entspricht einer Spielsituation gegen die Natur. Die Entscheidungen des Individuums haben also nur Auswirkungen auf seine eigene Wohlfahrt.

Für dieses Kapitel wurden die Bücher von Robert J. Barro und Xavier Sala-i-Martin [5], Philippe Aghion und Steven N. Durlauf [2], P. Billingsley [6] und G. Pflug und W. Römisch [15] verwendet.

2.1 Das allgemeine dynamische Modell ohne Versicherung

Betrachten wir ein Modell einer Ökonomie mit verschiedenen Individuen j (Haushalte) über die (diskreten) Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$, also ein dynamisches Modell einer Ökonomie. In dieser Ökonomie gibt es nur ein Gut (Geld), dieses kann dem Kapitalstock zugeführt werden oder verbraucht (konsumiert) werden. Sei $k_{jt} \in \mathbb{R}_+$ der Kapitalstock des Haushalts j zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$. Die Individuen $j = 1, \dots, N$ unterscheiden sich nur durch ihre Anfangsausstattung an Kapital $k_{j0} \in \mathbb{R}_+$ (Kapitalintensität) und durch ihre persönlichen Fähigkeiten $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Die persönlichen Fähigkeiten eines Haushalts j seien weiters beschränkt, d.h. es wird die folgende Annahme getroffen: $1 \leq \alpha_j \leq 2$.

Zudem hat jedes Individuum zwei Technologien zur Auswahl. Eine Technologie wird durch eine nicht-negative Funktion beschrieben, d.h. einem bestimmten Bündel an Fähigkeit und Kapitalausstattung wird ein Output an Gütern zugewiesen. Die Technologie (1a) ist weniger entwickelt als die Technologie (1b) d.h. $\alpha_j k_{jt}^{\gamma^L} < \alpha_j k_{jt}^{\gamma^H}$ für alle $k_{jt} \in \mathbb{R}_+ : k_{jt} > 1$ und für alle $1 \leq \alpha_j \leq 2$. Weiters ist die Technologie (1b) mit Fixkosten $E \in \mathbb{R}_+$ belastet. Man beachte, dass die Verwendung der weniger entwickelten Technologie (1a) für einen armen Haushalt steht, die Verwendung der Technologie (1b) hingegen für einen nicht-armen Haushalt. Schließlich sei noch bemerkt, dass sich der Index L ("Low") auf die niedriger entwickelte Technologie bezieht, der Index H ("High") auf jene, die höher entwickelt ist.

$$f_L(\alpha_j, k_{jt}) = \alpha_j k_{jt}^{\gamma_L} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (1a)$$

$$f_H(\alpha_j, k_{jt}) = \alpha_j k_{jt}^{\gamma_H} - E \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (1b)$$

$$0 < \gamma_L < \gamma_H < 1 \quad (1c)$$

Man beachte, dass eine Technologie (f_L oder f_H) eine Funktion von $[1, 2] \times \mathbb{R}_+$ in \mathbb{R}_+ ist. Aus der Produktionsfunktion¹ (2) ist ersichtlich welche Technologie gewählt wurde. (Anmerkung: Es wird immer die produktivere gewählt.) In dieser Funktion bestimmt die Höhe des Kapitalstocks die Wahl der Technologie.

$$f(\alpha_j, k_{jt}) \stackrel{def}{=} \max\{\alpha_j k_{jt}^{\gamma_L}, \alpha_j k_{jt}^{\gamma_H} - E\} \quad (2)$$

Alternativ wird noch ein anderer Typ von Produktionsfunktion verwendet.

$$f_L(\alpha_j, k_{jt}) = \alpha_j A k_{jt}^\gamma \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

$$f_H(\alpha_j, k_{jt}) = \alpha_j B k_{jt}^\gamma - E \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

$$0 < A < B$$

$$0 < \gamma < 1$$

Diese beiden Technologien ergeben die Produktionsfunktion (3).

$$f(\alpha_j, k_{jt}) \stackrel{def}{=} \max\{\alpha_j \cdot A \cdot k_{jt}^\gamma, \alpha_j \cdot B \cdot k_{jt}^\gamma - E\} \quad (3)$$

Die Produktionsfunktion (2) bezeichnen wir mit Typ 1 und die Produktionsfunktion (3) mit Typ 2. Die Produktionsfunktion vom Typ 1 wird z.B. von Christopher B. Barrett, Michael R. Carter und Munenobu Ikegami [4] verwendet.

Man beachte, dass der Funktionswert von f (Produktionsfunktion) auch als Einkommen bezeichnet wird. D.h. $f(\alpha_j, k_{jt}) \in \mathbb{R}_+$ heißt Einkommen des Haushalts j zum Zeitpunkt t .

In jeder Periode $t \in \mathbb{N}_0$ muss sich j zwischen konsumieren ($c_{jt} \geq 0$) oder investieren (i_{jt}) entscheiden. Es darf jedoch produzierte Güter verwerfen, ohne

¹Eine Produktionsfunktion ist eine nicht-negative Funktion auf $[1, 2] \times \mathbb{R}_+$ d.h.

$$f : [1, 2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

dass dabei Kosten entstehen (*free disposal*). Somit kommt man zu folgender Ungleichung:

$$0 \leq c_{jt} + i_{jt} \leq f(\alpha_j, k_{jt}) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Das bis zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ angesammelte Kapital des Haushalts j wird als Kapitalstock k_{jt} bezeichnet. Der Kapitalstock k_{jt} bildet sich in diesem Modell nach der folgenden Regel (Kapitalstockdynamik):

$$k_{jt+1} = \theta_{t+1}[i_{jt} + (1 - \delta)k_{jt}] \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (4a)$$

$$\theta_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta \subset (0, 1] \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (4b)$$

$$\mathbb{P}(\theta_t = 1) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (4c)$$

Man beachte, dass es sich bei $\delta \in (0, 1)$ um eine deterministische Abwertungsrate (Abschreibung) handelt. Sie verringert den Kapitalstock k_{jt} erst nach der Produktion. Weiters sei $\theta_t \in \Theta \subset (0, 1]$ eine nicht-negative Zufallsvariable. Diese positive Zufallsvariable θ_t ist eine Verlustvariable, die mögliche Katastropheneinwirkungen wie z.B. Dürre, Überschwemmung und Erdbeben beschreibt. Die Menge $\Theta \subset (0, 1]$ sei abzählbar. Nimmt θ_t den Wert 1 an, so gibt es keine zusätzliche Beeinträchtigung. Sollte jedoch $\theta_t < 1$ sein, so findet ein negativer Schock statt d.h. der Kapitalstock k_{jt} wird zusätzlich abgewertet.

Weiters nehmen wir an, dass dem Individuum keine Kredite gewährt werden d.h.

$$i_{jt} \leq f(\alpha_j, k_{jt}) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Sei $t \in \mathbb{N}_0$ ein beliebiger Zeitpunkt. Wegen $\theta_t > 0$, $k_{jt} \geq 0$ und der Kapitalstockdynamik (4) gilt Folgendes:

$$i_{jt} \geq -(1 - \delta)k_{jt} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Die nun folgenden Definitionen sind inhaltlich dem Buch von G. Pflug und W. Römisch [15] entnommen.

Definition 1 (Risikofunktional oder Risikomaß). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Menge \mathcal{Y} sei die Menge aller \mathcal{F} -messbaren Funktionen (Zufallsvariablen²) auf Ω . Ein Funktional von der Art $\mathcal{R} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder $\mathcal{R} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt Risikofunktional (risk functional) oder Risikomaß (risk measure).*

²**Notation:**

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Zufallsvariable auf Ω .

In dieser Arbeit wird folgendes Risikofunktional verwendet

$$\mathcal{R}(X) \stackrel{def}{=} \mathbb{E} \left[u(X) \right] \quad (5)$$

wobei $u(\cdot) \in \mathcal{C}^2$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Die Funktion $u(\cdot)$ hat die beiden Eigenschaften $u' > 0$ und $u'' < 0$ d.h. $u(\cdot)$ ist eine strikt monoton wachsende konkave Funktion ³.

Ferner wird hier auch das Risikofunktional $\mathbb{E}[X]$, welches auch als Lebesgue-Integral (Erwartungswert) bezeichnet wird, angewendet⁴.

$$\mathbb{E}[X] \stackrel{def}{=} \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad (6)$$

Jedes Individuum $j \in \{1, \dots, N\}$ will nun seinen Nutzen maximieren. Ein beliebiges Individuum j wählt einen Konsumplan $(c_{jt}^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Konsumprozess), welcher der Maximierer des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(c_{jt})_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathcal{R}[c_{jt}] \\ c_{jt} + i_{jt} \leq f(\alpha_j, k_{jt}) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_{jt+1} = \theta_{t+1}[i_{jt} + (1 - \delta)k_{jt}] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_{j0} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right.$$

Der Parameter (Abzinsungsfaktor) $\beta \in (0, 1)$ beschreibt die Vorliebe für heutigen Konsum vor morgigem Konsum. Das Risikofunktional $\mathcal{R}(\cdot)$ von j hat die Form wie oben d.h.

$$\mathcal{R}(X) = \mathbb{E} \left[u_j(X) \right]$$

Die Individuen sind risikoavers d.h. es wird die stärkere Annahme getroffen, dass die Nutzenfunktionen $\{u_j(\cdot) : j = 1, \dots, N\}$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$u_j(x) \in \mathcal{C}^2 : \frac{du_j}{dx} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2u_j}{dx^2} < 0 \quad (7)$$

Es wird weiters angenommen, dass die Entscheidungsträger die Verteilungsfunktionen $(F_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ der Schocks $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sowie deren Abhängigkeiten kennen.

³Die Zufallsvariable $u(X)$ muss integrierbar oder quasiintegrierbar sein.

⁴ $X \in \mathcal{Y}$ muss integrierbar oder quasiintegrierbar sein.

Somit kann man unter einem allgemeinen dynamischen Modell ohne Versicherung ein Tupel verstehen d.h. eine Liste der Bestandteile des Modells. Das allgemeine dynamische Modell ohne Versicherung mit Produktionsfunktion vom Typ 1 wird als \mathfrak{M}_1 bezeichnet.

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \left\{ \mathbb{E}[u_j(\cdot)] : j = 1, \dots, N \right\}, \left\{ (\alpha_j, k_{j0}) : j = 1, \dots, N \right\}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, f(\alpha, k) \right\}$$

$$\text{mit } f(\alpha, k) = \max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\}$$

Das allgemeine dynamische Modell ohne Versicherung mit Produktionsfunktion vom Typ 2 wird hingegen als \mathfrak{M}_2 definiert.

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ \left\{ \mathbb{E}[u_j(\cdot)] : j = 1, \dots, N \right\}, \left\{ (\alpha_j, k_{j0}) : j = 1, \dots, N \right\}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, f(\alpha, k) \right\}$$

$$\text{mit } f(\alpha, k) = \max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\}$$

Es sei nun darauf hingewiesen, dass sich alle Haushalte j in einer Spielsituation gegen die Natur befinden, somit hat die jeweilige Entscheidung eines beliebigen Haushalts j nur Auswirkungen auf die jeweils eigene Wohlfahrt. Es genügt demnach, das Verhalten und die ökonomische Entwicklung (die Entwicklung des Kapitalstocks) eines beliebigen Haushalts zu analysieren, wobei dieser mit persönlichen Fähigkeiten α und zu Beginn mit einem nicht-negativen Kapitalstock $k_0 \in \mathbb{R}_+$ ausgestattet ist. Die persönlichen Fähigkeiten α dieses „typischen“ Haushalts sind größer oder gleich 1 aber kleiner oder gleich 2 d.h.

$$1 \leq \alpha \leq 2.$$

Des Weiteren besitzt dieser Haushalt eine beliebige Nutzenfunktion $u(\cdot)$ von der obigen Art⁵. Aufgrund dieser Bemerkungen kann auf den Haushaltsindex j von nun an verzichtet werden.

Lemma 1 (Eigenschaften von (5)). *Sei $u(\cdot) \in \mathcal{C}^2 : u' > 0, u'' < 0$ d.h. $u(\cdot)$ ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche strikt monoton wachsend und konkav ist. Weiters sei $\mathbb{E}[\cdot]$ das Lebesgue-Integral. Sei $\mathcal{R}(\cdot)$ nun ein Risikofunktional von der Form*

$$\mathcal{R}(X) \stackrel{def}{=} \mathbb{E} \left[u(X) \right] \quad \forall X \in \mathcal{Y}_+$$

5

$$u(x) \in \mathcal{C}^2 : \frac{du}{dx} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2u}{dx^2} < 0$$

$$\mathcal{Y}_+ \stackrel{def}{=} \left\{ Y \in \mathcal{Y} : Y \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \right\}$$

Das Risikofunktional $\mathcal{R}(\cdot)$ hat die folgenden Eigenschaften E1 bis E3.

$$Y_1 \stackrel{d}{=} Y_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(Y_1) = \mathcal{R}(Y_2) \quad (\text{E1})$$

$\mathcal{R}(\cdot)$ ist punktweise monoton d.h.

$$0 \leq Y_1 \leq Y_2 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(Y_1) \leq \mathcal{R}(Y_2) \quad (\text{E2})$$

$\mathcal{R}(\cdot)$ ist ein konkaves Risikofunktional auf \mathcal{Y}_+ d.h. für alle $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}_+$ gilt

$$\mathcal{R}(\lambda \cdot Y_1 + (1 - \lambda) \cdot Y_2) \geq \lambda \cdot \mathcal{R}(Y_1) + (1 - \lambda) \cdot \mathcal{R}(Y_2) \quad (\text{E3})$$

Die Eigenschaft E3 gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$.

Beweis. Seien Y_1 und Y_2 beliebige nicht negative Zufallsvariablen d.h. $Y_1, Y_2 \geq 0$ \mathbb{P} -f.s..

ad E1 Sei $F(y)$ die Verteilungsfunktion von Y_1 d.h. $F(y) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(Y_1 \leq y)$.
 $Y_1 \stackrel{d}{=} Y_2$ d.h. $\mathbb{P}(Y_1 \leq y) \equiv \mathbb{P}(Y_2 \leq y) \Rightarrow F(y) = \mathbb{P}(Y_2 \leq y)$. Somit gilt für zwei Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $Y_1 \stackrel{d}{=} Y_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[u(Y_1)] &= \int_{\omega \in \Omega} u(Y_1(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{y \in \mathbb{R}} u(y) \, dF(y) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} u(Y_2(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[u(Y_2)] \end{aligned}$$

ad E2 Sei $0 \leq Y_1 \leq Y_2$ \mathbb{P} -f.s. $\Rightarrow u(Y_1) \leq u(Y_2)$ \mathbb{P} -f.s.
 $\Rightarrow \mathbb{E}[u(Y_1)] \leq \mathbb{E}[u(Y_2)]$.

ad E3 Sei $\lambda \in [0, 1]$ beliebig und $u(\cdot)$ ist eine konkave Funktion auf \mathbb{R}_+ .

$$\begin{aligned} u(\lambda \cdot Y_1 + (1 - \lambda) \cdot Y_2) &\geq \lambda \cdot u(Y_1) + (1 - \lambda) \cdot u(Y_2) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[u(\lambda \cdot Y_1 + (1 - \lambda) \cdot Y_2) \right] &\geq \mathbb{E}\left[\lambda \cdot u(Y_1) + (1 - \lambda) \cdot u(Y_2) \right] \\ &= \lambda \cdot \mathbb{E}\left[u(Y_1) \right] + (1 - \lambda) \cdot \mathbb{E}\left[u(Y_2) \right] \end{aligned}$$

QED

Aus (8a) und (8b) ergibt sich durch Einsetzen (8c). Weiters besitzt die Nutzenfunktion $u(\cdot)$ die Eigenschaft $u' > 0$ und ferner ist \mathcal{R} punktweise monoton (E2), somit ist die Nebenbedingung (8c) bindend.

$$c_t + i_t \leq f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (8a)$$

$$k_t = \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}] \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (8b)$$

$$c_t + i_t = f\left(\alpha, \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}]\right) \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (8c)$$

Aufgrund der obigen Anmerkung hat die Budgetgleichung folgende Form:

$$c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (9)$$

Somit steht Haushalt vor einem Entscheidungsproblem. Er wählt die Strategie $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ für die gilt c_t^* ist nicht-negativ für alle t .

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}] \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (10)$$

Hierbei ist festzuhalten, dass der Investitionsplan (Investitionsprozess) $(i_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ durch den Konsumplan (Konsumprozess) $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eindeutig bestimmt ist.

2.2 Das deterministische dynamische Modell

Das allgemeine dynamische Modell wird zum deterministischen dynamischen Modell durch die zusätzliche Annahme (A1).

$$\theta_t(\omega) \equiv 1 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (A1)$$

Die Annahme (A1) schließt das Auftreten von Schocks ($\theta_t > 0$) aus. Der Haushalt produziert nun seine Güter mit einer risikolosen Technologie (Produktionstechnik) d.h. er wählt die risikolose Strategie $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$.

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot u(c_t) \\ c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (11)$$

Wird in das Maximierungsproblem (11) die Produktionsfunktion vom Typ 1 (Gleichung 2) eingesetzt, so erhält man das Maximierungsproblem (12).

Der Konsumplan $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1 unter der Annahme (A1) (im deterministischen dynamischen Modell).

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot u(c_t) \\ c_t + i_t = \max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (12)$$

Das Maximierungsproblem (13) erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 (Gleichung 3) in das Maximierungsproblem (11). Der Konsumplan $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ des Maximierungsproblems (13) entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A1) (im deterministischen dynamischen Modell).

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot u(c_t) \\ c_t + i_t = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (13)$$

In dieser Arbeit ist unter einem Konsumplan $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ immer ein optimaler Konsumplan $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ zu verstehen d.h. somit kann ab jetzt auf den Stern verzichtet werden.

Dieses deterministische dynamische Modell wird in der Literatur als Ramsey-Cass-Koopmans Modell bezeichnet, unter der Einschränkung, dass die Produktionsfunktion⁶ nur aus einer Technologie besteht, vergleiche dazu D. Romer [16].

⁶Sei γ eine Konstante für die gilt: $0 < \gamma < 1$, und sei weiters $f(\cdot)$ eine Produktionsfunktion von der folgenden Form:

$$f(\alpha, k_t) = \alpha k_t^\gamma$$

2.3 Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks

Für dieses stochastische dynamische Modell werden im Unterschied zum allgemeinen dynamischen Modell die zusätzlichen Annahmen (A2) und (A3) getroffen.

$$(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \quad i.i.d. \quad (A2)$$

$$\theta_t \in \Theta \stackrel{def}{=} \{0 < \vartheta_l \leq 1 : l = 1, \dots, L\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (A3)$$

Die Annahmen (A2) und (A3) vereinfacht (10) zum nachfolgenden stochastischen Maximierungsproblem (14):

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}] \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (14)$$

Man beachte, dass der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von *i.i.d.* Zufallsvariablen ist. Wird in das Maximierungsproblem (14) die Produktionsfunktion vom Typ 1 (Gleichung 2) eingesetzt, so erhält man das Maximierungsproblem (15). Der Konsumprozess $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1 unter den Annahmen (A2) und (A3) (im stochastischen dynamischen Modell mit i.i.d. Schocks).

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ c_t + i_t = \max\{\alpha k_t^{\gamma^L}, \alpha k_t^{\gamma^H} - E\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}] \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (15)$$

Das Maximierungsproblem (16) erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 (Gleichung 3) in das Maximierungsproblem (14). Der Konsumprozess $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ des Maximierungsproblems (16) entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2 unter den Annahmen (A2) und (A3) (im stochastischen dynamischen Modell mit i.i.d. Schocks).

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ c_t + i_t = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_t = \theta_t [i_{t-1} + (1 - \delta)k_{t-1}] \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (16)$$

Von nun an versteht man unter einem Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ immer einen optimalen Konsumprozess $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ d.h. der Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist immer die Lösung des stochastischen Entscheidungsproblems. Weiters ist es offensichtlich, dass es sich bei einem Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ um einen Stochastischen Prozess handelt.

Das obige stochastische dynamische Modell wird als stochastisches Ramsey Modell bezeichnet, sofern die Produktionsfunktion nur aus einer Technologie besteht, siehe dazu B. Heer und A. Maussner [10].

3 Eigenschaften der Produktionsfunktionen vom Typ 1 oder 2

Sei $f(\cdot)$ eine Produktionsfunktion von der folgenden Form:

$$f(\alpha, k) = \max\{f_L(\alpha, k), f_H(\alpha, k)\}$$

Wobei $f(\cdot)$ eine Funktion von Typ 1 (Gleichung 2) oder Typ 2 (Gleichung 3) ist. Die Funktionen $f_L(\cdot)$ und $f_H(\cdot)$ stellen zwei Technologien dar. Sei α eine Konstante und \bar{k} heißt Fixpunkt einer Technologie $f(\alpha, k)$ falls gilt, dass $\bar{k} \in \mathbb{R}_+ : f(\bar{k}) = \delta \cdot \bar{k}$ mit $\delta \in (0, 1)$. Man nennt \bar{k} einen Fixpunkt, da dieser ein Fixpunkt von $f(k) + (1 - \delta)k$ ist.

$$f(\bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} = \delta \cdot \bar{k} + (1 - \delta)\bar{k} = \bar{k}$$

Lemma 2. Seien $0 < \gamma, \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ drei Konstanten. Weiters sei $\bar{E}(\cdot)$ eine Funktion auf \mathbb{R}_+ für die gilt:

$$\bar{E} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : k \mapsto \alpha \cdot k^\gamma - \delta \cdot k$$

Dann ist die Funktion $\bar{E}(\cdot)$ strikt konvex und stetig differenzierbar auf \mathbb{R}_+ , ferner ist $\bar{E}(\cdot)$ strikt fallend auf $\{k : m < k < +\infty\}$ und strikt steigend auf $\{k : 0 < k < m\}$, wobei

$$m = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \arg \max_{k \in \mathbb{R}_+} \bar{E}(k)$$

$$\alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m = \max_{k \in \mathbb{R}_+} \bar{E}(k)$$

Beweis. Die Funktion $\bar{E}(\cdot)$ ist stetig differenzierbar auf \mathbb{R}_+ , da $\alpha \cdot k^\gamma$ und $\delta \cdot k$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}_+ sind.

$$\alpha \cdot \gamma \cdot k^{\gamma-1} = \delta \Leftrightarrow k = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = m \quad (\text{FOC})$$

$$\alpha \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \frac{k^\gamma}{k^2} < 0 \quad \forall k > 0 \quad (\text{SOC})$$

Aus (FOC) und (SOC) folgt $m = \arg \max_{k \in \mathbb{R}_+} \bar{E}(k)$. Weiters gilt:

$$m^{\gamma-1} = \gamma^{\frac{\gamma-1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{1-\gamma}} = \gamma^{-1} \cdot \delta \cdot \alpha^{-1} \quad (17)$$

$$\alpha \cdot \gamma \cdot (m \cdot c)^{\gamma-1} - \delta = \alpha \cdot \gamma \cdot m^{\gamma-1} \cdot c^{\gamma-1} - \delta \stackrel{(17)}{=} \delta(c^{\gamma-1} - 1) < 0 \quad \forall c > 1$$

d.h. die Funktion $\bar{E}(\cdot)$ ist strikt fallend auf $(m, +\infty)$.

$$(m, +\infty) = \{k : m < k < +\infty\} = \{c \cdot m : 1 < c < +\infty\}$$

Außerdem ist die Funktion $\bar{E}(\cdot)$ strikt steigend auf $(0, m)$, da Folgendes gilt:

$$\alpha \cdot \gamma \cdot (m \cdot c)^{\gamma-1} - \delta = \delta(c^{\gamma-1} - 1) > 0 \quad \forall c \in (0, 1)$$

$$(0, m) = \{k : 0 < k < m\} = \{c \cdot m : 0 < c < m^{-1}\}$$

QED

Lemma 3. Seien $0 < \gamma, \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ drei Konstanten. Weiters sei $E \geq 0$ und $m = \arg \max_{k \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot k^\gamma - \delta \cdot k$ (Laut Lemma 2 existiert ein solches m).

(i) Sei $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma - E$ mit $0 \leq E \leq \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$ eine Funktion auf \mathbb{R}_+ , dann existiert ein $\bar{k} \in \mathcal{K}$, welches ein Fixpunkt der Technologie $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma - E$ ist. Wobei die Menge \mathcal{K} und die Funktion $\bar{E}(\cdot)$ wie in Lemma 2 definiert ist.

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq k \leq \left(\alpha \cdot \delta^{-1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right\}$$

(ii) Die Funktion $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma$ ($E = 0$) besitzt zwei Fixpunkte d.h.

$$\{k : \alpha \cdot k^\gamma = \delta \cdot k\} = \left\{ 0, \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right\}$$

(iii) Die Funktion $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma - E$ mit $E = \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$ besitzt genau einen Fixpunkt d.h.

$$\{\bar{k} : \alpha \cdot \bar{k}^\gamma = \delta \cdot \bar{k}\} = \{m\}$$

(iv) Die Funktion $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma - E$ mit $E > \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$ besitzt keinen Fixpunkt und weiters gilt $f(k) < \delta \cdot k$ für alle $k \geq 0$.

(v) Sei $\bar{k} = \max\{k : \alpha \cdot k^\gamma - E = \delta \cdot k\}$ mit $0 \leq E \leq \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$, so gilt:

$$\alpha \cdot k^\gamma - E < \delta \cdot k \quad \forall k > \bar{k} \geq m$$

Beweis. Sei $0 < \gamma, \delta < 1 \leq \alpha$ und $E \geq 0$.

ad (i) Die stetige Funktion $\bar{E}(\cdot)$ besitzt zwei Nullstellen 0 und $(\alpha \cdot \delta^{-1})^{\frac{1}{1-\gamma}}$. Weiters ist $\bar{E}(\cdot)$ strikt konkav auf \mathcal{K} . Außerdem ist $\bar{E}(m)$ laut Lemma 2 ein globales Maximum. Daraus folgt:

$$\bar{E}(\mathcal{K}) = \{E \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq E \leq \bar{E}(m)\}$$

Sei $\bar{k} \in \mathcal{K} : \bar{E}(\bar{k}) = E$ dann gilt:

$$f(\bar{k}) = \alpha \bar{k}^\gamma - E = \alpha \bar{k}^\gamma - \alpha \bar{k}^\gamma + \delta \cdot \bar{k} = \delta \cdot \bar{k}$$

ad (ii) Die Null ist offensichtlich ein Fixpunkt von $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma$. Falls nun $\bar{k} \neq 0$ ist, so gilt Folgendes:

$$f(\bar{k}) = \alpha \cdot \bar{k}^\gamma = \delta \cdot \bar{k} \Leftrightarrow \bar{k} = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

ad (iii) Sei $m \in \mathbb{R}_+$ wie oben definiert. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \delta \cdot k &= \delta \quad \forall k \\ \frac{d}{dk} f(k) &= \alpha \cdot \gamma \cdot k^{\gamma-1} \\ \left. \frac{df(k)}{dk} \right|_{k=m} &\stackrel{(17)}{=} \delta \end{aligned}$$

Die Funktion $\alpha \cdot k$ ist im Punkt m eine Tangente von $f(\cdot)$, somit ist m der einzige Schnittpunkt der strikt konkaven Funktion $f(\cdot)$ mit $\alpha \cdot k$.

ad (iv) Es gilt:

$$\max_{k \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot k^\gamma - E - \delta \cdot k = \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m - E < 0 \quad \forall E > \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot k^\gamma - E < \delta \cdot k \quad \forall k \geq 0, \forall E > \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$$

d.h. die Funktion $f(k) = \alpha \cdot k^\gamma - E$ besitzt keinen Fixpunkt, falls $E > \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$ ist.

ad (v) Sei $0 \leq E \leq \alpha \cdot m^\gamma - \delta \cdot m$. Laut Lemma 2 gilt:

$$\begin{aligned} \exists k_m \in \mathbb{R}_+ : k_m \geq m, \bar{E}(k_m) &= E \\ \bar{E}(m) &> \bar{E}(k) \quad \forall k > m \\ \bar{E}(k_m) &> \bar{E}(k) \quad \forall k > k_m \end{aligned}$$

Weiters gilt $\bar{E}(k_m) = E$, somit folgt:

$$\begin{aligned} \bar{E}(k_m) - E &= 0 > \bar{E}(k) - E \quad \forall k > k_m \\ \Rightarrow \bar{E}(k) - E &= \alpha \cdot k^\gamma - E < \delta \cdot k \quad \forall k > k_m \end{aligned}$$

d.h. aber auch $k_m = \bar{k} = \max\{k : \alpha \cdot k^\gamma - E = \delta \cdot k\}$. Damit ist der Beweis vollständig.

QED

3.1 Produktionsfunktionen vom Typ 1

Eine Produktionsfunktion vom Typ 1 (Gleichung 2) hat die folgende Form:

$$f(\alpha, k_t) = \max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\}$$

mit den vier Konstanten $0 < \gamma_L < \gamma_H < 1$, $E \in \mathbb{R}_+$ und $1 \leq \alpha \leq 2$. Die Abbildung 1 zeigt eine Produktionsfunktion dieses Typs.

Lemma 4 (Produktionsfunktionen). *Die Produktionsfunktion vom Typ 1 ist stetig auf \mathbb{R}_+ und weiters gilt:*

$$\max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\} \equiv \mathbb{1}_{[0, \hat{k})}(k) \cdot \alpha k^{\gamma_L} + \mathbb{1}_{[\hat{k}, +\infty)}(k) \cdot (\alpha k^{\gamma_H} - E)$$

mit $\hat{k} \in \mathbb{R}_+ : \alpha \hat{k}^{\gamma_L} = \alpha \hat{k}^{\gamma_H} - E$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $\hat{k} \in \mathbb{R}_+ : \alpha \hat{k}^{\gamma_L} = \alpha \hat{k}^{\gamma_H} - E$. Nun gilt $\alpha k^{\gamma_L} > \alpha k^{\gamma_H} - E$ für alle $k \in (0, \hat{k})$ und αk^{γ_L} ist eine stetige Funktion. Außerdem gilt $\alpha k^{\gamma_H} - E > \alpha k^{\gamma_L}$ für alle $k \in (\hat{k}, +\infty)$ und $\alpha k^{\gamma_H} - E$ ist ebenfalls eine stetige Funktion. Es gilt weiters:

$$\lim_{k \uparrow \hat{k}} \alpha k^{\gamma_L} = \lim_{k \downarrow \hat{k}} \alpha k^{\gamma_H} - E$$

Somit ist $f(\cdot)$ stetig auf \mathbb{R}_+ und hat die Form

$$f(\alpha, k_t) \equiv \mathbb{1}_{[0, \hat{k})}(k) \cdot \alpha k^{\gamma_L} + \mathbb{1}_{[\hat{k}, +\infty)}(k) \cdot (\alpha k^{\gamma_H} - E)$$

Falls kein $\hat{k} \in \mathbb{R}_+$ existiert, dann gilt $f(\alpha, k_t) \equiv f_L(\alpha, k_t)$.

QED

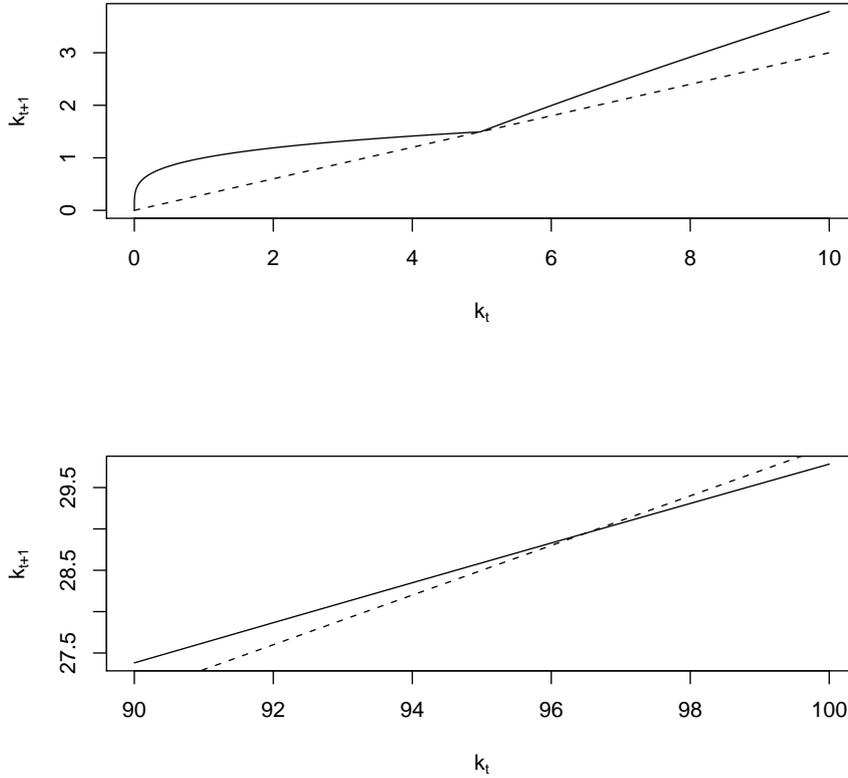


Abbildung 1: Die Abbildung zeigt Abschnitte der Funktionen $f(k) = \max\{k^{\frac{1}{4}}, k^{\frac{3}{4}} - \hat{E}(\bar{k}_L)\}$ und $g(k) = \frac{3}{10} \cdot k$ (strichlierte Linie).

Lemma 5. Seien $0 < \gamma_L < \gamma_H < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ vier Konstanten. Weiters seien $f_L(k) = \alpha \cdot k^{\gamma_L}$ und $f_H(k) = \alpha \cdot k^{\gamma_H} - E$ zwei nicht-negative Funktionen auf \mathbb{R}_+ mit $E \in \mathbb{R}_+$. Sei weiters $f(\cdot)$ eine Funktion auf \mathbb{R}_+ von der Form

$$f(\alpha, k) = \max\{\alpha \cdot k^{\gamma_L}, \alpha \cdot k^{\gamma_H} - E\}$$

Dann existiert ein $k_m \in \mathbb{R}_+$: $f(k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_m$.

Beweis. Sei $E > 0$ beliebig. Laut Lemma 3 existiert sowohl ein $k_l \in \mathbb{R}_+$ für das gilt $f_L(k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_l$ als auch ein $k_h \in \mathbb{R}_+$: $f_H(k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_h$. Setzt man nun $k_m = \max\{k_l, k_h\}$ so gilt

$$f(\alpha, k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_m$$

QED

3.2 Produktionsfunktionen vom Typ 2

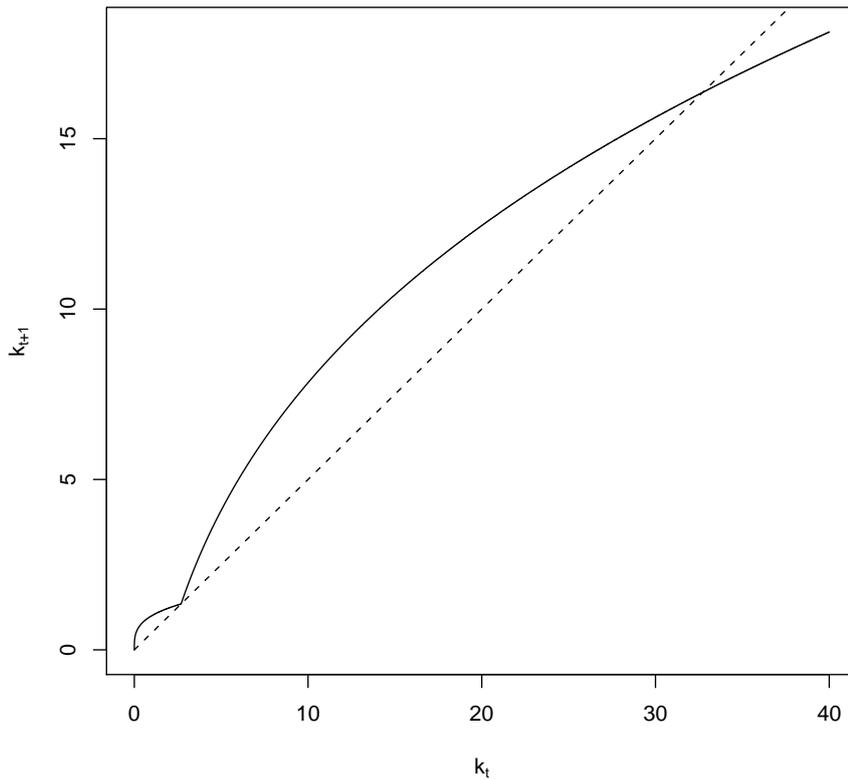


Abbildung 2: Die Abbildung zeigt einen Abschnitt der Funktionen $f(k) = \max\{k^{\frac{3}{10}}, 10 \cdot k^{\frac{3}{10}} - \hat{E}(\bar{k}_L)\}$ und $g(k) = \frac{1}{2} \cdot k$ (strichlierte Linie).

Eine Produktionsfunktion vom Typ 2 (Gleichung 3) hat die folgende Form:

$$f(\alpha, k_t) = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\}$$

Mit den fünf Konstanten $0 < \gamma < 1$, $E \in \mathbb{R}_+$, $0 < A < B$ und $1 \leq \alpha \leq 2$. Eine Produktionsfunktion vom Typ 2 ist auf Abbildung 2 zu sehen.

Lemma 6 (Produktionsfunktionen). *Die Produktionsfunktion vom Typ 2 ist stetig auf \mathbb{R}_+ und weiters gilt:*

$$\max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} \equiv \mathbb{1}_{[0, \hat{k})}(k) \cdot \alpha A k^\gamma + \mathbb{1}_{[\hat{k}, +\infty)}(k) \cdot (\alpha B k^\gamma - E)$$

mit $\hat{k} \in \mathbb{R}_+ : \alpha A \hat{k}^\gamma = \alpha B \hat{k}^\gamma - E$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $\hat{k} \in \mathbb{R}_+ : \alpha A \hat{k}^\gamma = \alpha B \hat{k}^\gamma - E$. Nun gilt $\alpha A k^{\gamma_L} > \alpha B k^{\gamma_H} - E$ für alle $k \in (0, \hat{k})$ und $\alpha A k^\gamma$ ist eine stetige Funktion. Außerdem gilt $\alpha B k^\gamma - E > \alpha A k^\gamma$ für alle $k \in (\hat{k}, +\infty)$ und $\alpha B k^\gamma - E$ ist ebenfalls eine stetige Funktion. Es gilt weiters:

$$\lim_{k \uparrow \hat{k}} \alpha A k^{\gamma_L} = \lim_{k \downarrow \hat{k}} \alpha B k^\gamma - E$$

Somit ist $f(\cdot)$ stetig auf \mathbb{R}_+ und hat die Form

$$f(\alpha, k_t) \equiv \mathbb{1}_{[0, \hat{k})}(k) \cdot \alpha A k^\gamma + \mathbb{1}_{[\hat{k}, +\infty)}(k) \cdot (\alpha B k^\gamma - E)$$

Falls kein $\hat{k} \in \mathbb{R}_+$ existiert, dann gilt $f(\alpha, k_t) \equiv f_L(\alpha, k_t)$.

QED

Lemma 7. Seien $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$, $0 < A < B$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ fünf Konstanten. Weiters seien $f_L(k) = \alpha A \cdot k^\gamma$ und $f_H(k) = \alpha \cdot B k^\gamma - E$ zwei nicht-negative Funktionen auf \mathbb{R}_+ mit $E \in \mathbb{R}_+$. Sei weiters $f(\cdot)$ eine Funktion auf \mathbb{R}_+ von der Form

$$f(\alpha, k) = \max\{\alpha \cdot A k^\gamma, \alpha \cdot B k^\gamma - E\}$$

Dann existiert ein $k_m \in \mathbb{R}_+ : f(\alpha, k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_m$.

Beweis. Sei $E > 0$ beliebig. Laut Lemma 3 existiert sowohl ein $k_l \in \mathbb{R}_+$ als auch ein $k_h \in \mathbb{R}_+$ für die gilt:

$$k_l \in \mathbb{R}_+ : f_L(k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_l$$

$$k_h \in \mathbb{R}_+ : f_H(k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_h$$

Setzt man nun $k_m = \max\{k_l, k_h\}$ so gilt

$$f(\alpha, k) < \delta \cdot k \quad \forall k > k_m$$

QED

4 Dynamische Programmierung

Dieses Kapitel folgt zum Teil dem Buch von Rangarajan K. Sundarams [19] sowie jenem von Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne Strøm [20].

4.1 Deterministische dynamische Programmierung

Ein deterministisches diskontiertes dynamisches Programm kann durch das Tupel $\{S, A, \Phi, f, r, \beta\}$ beschrieben werden. Die Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als Zustandsraum bezeichnet, die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ als Aktionsraum. Falls $n = k = 1$, so nennt man $s \in S$ Zustandsvariable und $a \in A$ Aktions- oder Kontrollvariable. Die Abbildung $\Phi : S \rightarrow 2^A = \{B : B \subseteq A\}$ ist eine Korrespondenz d.h. $\Phi(s) \subseteq A$ für alle $s \in S$. Diese Korrespondenz Φ heißt zulässige Aktionskorrespondenz. Die Übergangsfunktion $f : S \times A \rightarrow S$, die Auszahlungsfunktion $r : S \times A \rightarrow \mathbb{R}$ und der Diskontfaktor $\beta \in [0, 1)$ vervollständigen das Tupel. Mit der Hilfe des Tupels $(S, A, \Phi, f, r, \beta)$ kann man nun das deterministische diskontierte dynamische Optimierungsproblem definieren.

$$\left\| \begin{array}{l} V(s_0) \stackrel{def}{=} \max \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot r(s_t, a_t) \\ s_{t+1} = f(a_t, s_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ a_t \in \Phi(s_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ s_0 \in S \quad \text{fix} \end{array} \right.$$

Die Funktion $V(\cdot)$ heißt Wertfunktion, vergleiche dazu Rangarajan K. Sundarams [19].

Die Gleichungen (18a) - (18c) sind die Nebenbedingungen des Maximierungsproblems (11).

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (18a)$$

$$c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (18b)$$

$$c_t, k_t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (18c)$$

Aus den Nebenbedingungen (18a) - (18c) ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_{t+1} = f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ c_t &\in \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq f(\alpha, k_t) + (1 - \delta)k_t\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Das Maximierungsproblem (11) entspricht somit dem deterministischen diskontierten dynamischen Programm (19).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot u(c_t) \\ k_{t+1} = f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ c_t \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (19)$$

Wobei $\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass k_t die Zustandsvariable ist und c_t die Kontrollvariable.

Wird die Produktionsfunktion vom Typ 1 (Gleichung 2) eingesetzt, so erhält man die zulässige Aktionskorrespondenz (20).

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha s^{\gamma_L}, \alpha s^{\gamma_H} - E\} + (1 - \delta)s\} \quad (20)$$

Die zulässige Aktionskorrespondenz (21) erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 (Gleichung 3).

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha A s^\gamma, \alpha B s^\gamma - E\} + (1 - \delta)s\} \quad (21)$$

Alternativ kann man das deterministische diskontierte dynamische Programm (19) zum folgenden neuen deterministischen diskontierten dynamischen Programm transformieren:

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(\kappa_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot u\left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t\right) \\ k_{t+1} = \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ fix und } \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (22)$$

Wobei $\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{k \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq k \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass jetzt k_t die Zustandsvariable ist und κ_{t+1} die Kontrollvariable. Den Kapitalstockpfad $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch die nachfolgende Rekursionsgleichung.

$$\kappa_{t+1} = \phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

$$k_{t+1} \equiv \kappa_{t+1}$$

Die Funktion $\phi(k) \in \Phi(k) \forall k$ nennt man die Politikfunktion des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (22). Ferner sei ψ eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die definiert ist durch

$$\psi(k) \stackrel{def}{=} f(\alpha, k) - \phi(k) + (1 - \delta)k \quad (k \in \mathbb{R}_+).$$

Man beachte, dass die Funktion $\psi(k) \in \Phi(k) \forall k$ die Politikfunktion des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (19) ist.

Den Konsumplan $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch die folgende Gleichung

$$c_t \equiv f(\alpha, k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t$$

beziehungsweise auch durch

$$c_t = \psi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0.$$

Der Konsumplan $c_t = \max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\} - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$ entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1 unter der Annahme (A1), wenn der Kapitalstockpfad $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (22) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) ist.

Das Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A1) hat nun die Form $c_t = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\} - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$. Man beachte, dass in diesem Fall der Kapitalstockpfad $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (22) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) ist.

Für deterministische diskontierte dynamische Programme von der nachfolgenden Art kann man den Satz 1 formulieren. Man beachte, dass dieses deterministische diskontierte dynamische Programm über die Übergangsfunktion $f(a) = a$ verfügt.

$$\left\| \begin{array}{l} V(s_0) = \max \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot v(s_t, s_{t+1}) \\ s_{t+1} \in \Phi(s_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ s_0 \in S \quad \text{fix} \end{array} \right\|$$

Es sei weiters darauf hingewiesen, dass s_t die Zustandsvariable ist und s_{t+1} (der Zustand von morgen) die Kontrollvariable. Das deterministische diskontierte dynamische Programm (22) ist von eben dieser Art.

Proposition 1. *Sei $v(s, s') \geq 0$ eine stetige, beschränkte und reellwertige Funktion. Weiters sei $\beta \in (0, 1)$ und $S \subseteq \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz $\Phi(\cdot)$ sei stetig und kompaktwertig. $\Phi(s)$ sei konvex und nicht-leer für alle $s \in S$. Dann besitzt (23) eine eindeutige Lösung $V(s)$. Diese erfüllt die Rekursionsgleichung.*

$$V(s) = \max_{s' \in \Phi(s)} v(s, s') + \beta \cdot V(s') \quad \forall s \in S \quad (23)$$

Es gilt noch zu bemerken, dass s die Zustandsvariable ist und s' (der Zustand von morgen) die Kontrollvariable.

Beweis. Siehe Stokey und Lucas (Satz 4.6) [18]

QED

Satz 1. Seien $0 < \gamma_L < \gamma_H < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ vier Konstanten und weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (22) mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (23) erfüllt.

Beweis. Zuerst gilt es zu zeigen, dass $u(f(\alpha, k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t)$ beschränkt ist. Es genügt zu zeigen, dass k_t beschränkt ist. Sei $k_t \geq 0$ für alle t und weiters sei

$$\bar{k} = \max\{k : f(\alpha, k) = \delta \cdot k\}$$

Laut Lemma 5 besitzt eine Produktionsfunktion vom Typ 1, welche die oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt, einen solchen Fixpunkt \bar{k} . Dieser Fixpunkt \bar{k} hat laut Lemma 3 die folgende Eigenschaft:

$$\alpha \cdot k^{\gamma_H} - E < \delta \cdot k \quad \forall k > \bar{k} > \hat{k}$$

Falls $k_t \leq \bar{k}$ so gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq c_t &= f(\alpha, k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t \leq f(\alpha, \bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} - k_{t+1} \\ 0 &\leq f(\alpha, \bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} - k_{t+1} = \bar{k} - k_{t+1} \\ &\Rightarrow k_{t+1} \leq \bar{k} \end{aligned}$$

Falls $k_t > \bar{k}$ so gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq c_t &= f(\alpha, k_t) - k_{t+1} + k_t - \delta k_t \leq k_t - k_{t+1} \\ &\Rightarrow k_{t+1} \leq k_t \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned} k_0 \leq \bar{k} &\Rightarrow k_t \leq \bar{k} \quad \forall t \Rightarrow c_t \leq \bar{k} \quad \forall t \\ k_0 > \bar{k} &\Rightarrow k_t \leq k_0 \quad \forall t \Rightarrow c_t \leq k_0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Weiters ist $u(\cdot)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ und somit ist $u(\cdot)$ beschränkt. Es ist laut Definition von $u(\cdot)$ offensichtlich, dass $u(\cdot)$ eine stetige und reellwertige Funktion ist. Weiters ist $0 < \beta < 1$ und $S = \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz (20) ist stetig und kompaktwertig. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}_+$ ist die Menge $\Phi(s)$ konvex und nicht-leer, da $\Phi(s)$ ein abgeschlossenes Intervall ist. Aus Proposition 1 folgt nun die Behauptung von Satz 1. QED

Satz 2. Seien $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ drei Konstanten und weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (22) mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (23) erfüllt.

Beweis. Sei $f(\cdot)$ wie oben definiert. Dann existiert laut Lemma 7 und 3 ein $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$ für das gilt

$$\alpha \cdot B \cdot k^\gamma - E < \delta \cdot k \quad \forall k > \bar{k} < \hat{k}$$

Daraus folgt wiederum

$$k_0 \leq \bar{k} \Rightarrow c_t \leq \bar{k} \quad \forall t$$

$$k_0 > \bar{k} \Rightarrow c_t \leq k_0 \quad \forall t$$

Weiters ist $u(\cdot)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ und somit ist die Funktion $u(\cdot)$ beschränkt. Die Funktion $u(\cdot)$ ist stetig und reellwertig, laut der Definition von $u(\cdot)$. Außerdem ist $0 < \beta < 1$ und $S = \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz (21) ist stetig und kompaktwertig. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}_+$ ist die Menge $\Phi(s)$ konvex und nicht-leer. Somit folgt aus Proposition 1 die Behauptung und dies beendet den Beweis. QED

Man beachte, dass das deterministische diskontierte dynamische Programm (22) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) oder (21) laut Satz (1) und (2) jeweils eine Lösung $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Kapitalstockplan) besitzt. Somit besitzen die Maximierungsprobleme (12) und (13) ebenfalls jeweils eine Lösung $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Konsumplan).

4.2 Stochastische dynamische Programmierung

Sei $\{S, A, \Phi, f, r, \beta\}$ ein deterministisches diskontiertes dynamisches Programm. Weiters sei $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} : \theta_t \in \Theta$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen, wobei die Menge $\Theta \subset (0, 1]$ eine abzählbare Menge ist. Alternativ kann $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine zeit-diskrete homogene Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum $\Theta \subset (0, 1]$ sein. Um ein stochastisches diskontiertes dynamisches Programm zu erhalten, wird die Transformationsfunktion $f(\cdot)$ folgendermaßen neu definiert:

$$s_{t+1} = f(s_t, a_t, \theta_{t+1}) \quad s_0 \in S \text{ fix} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Ein stochastisches diskontiertes dynamisches Maximierungsprogramm hat somit folgende Form:

$$\left\| \begin{array}{l} V(s_0, \theta_0) \stackrel{def}{=} \max \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[r(s_t, a_t)] \\ s_{t+1} = f(s_t, a_t, \theta_{t+1}) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ a_t \in \Phi(s_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ s_0 \in S \text{ fix} \end{array} \right.$$

Die Funktion $V(\cdot)$ wird Wertfunktion genannt, vergleiche dazu Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne Strøm [20].

Aus den Nebenbedingungen (18a) - (18c) des stochastischen Maximierungsproblems (14) ergeben sich die folgenden beiden (stochastischen) Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_{t+1} = \theta_{t+1} [f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ c_t &\in \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq f(\alpha, k_t) + (1 - \delta)k_t\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Das stochastische Maximierungsproblem (14) lässt sich somit als ein stochastisches diskontiertes dynamisches Maximierungsprogramm anschreiben.

$$\left\| \begin{aligned} \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} & \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ & k_{t+1} = \theta_{t+1} [f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & c_t \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & k_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ fix} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Der Kapitalstock k_t ist die Zustandsvariable und der Konsum c_t die Kontrollvariable. Die zulässige Aktionskorrespondenz hat die Form

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c : 0 \leq c \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}.$$

Die Gleichungen (25a) - (25c) sind die Nebenbedingungen des stochastischen Maximierungsproblems (14).

$$k_{t+1} = \theta_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (25a)$$

$$c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (25b)$$

$$c_t, k_t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (25c)$$

Sei $\kappa_t \geq 0$ eine nicht-negative Variable und diese ist definiert durch

$$\kappa_{t+1} \stackrel{def}{=} i_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \geq 0$$

Somit kann man das stochastische diskontierte dynamische Programm (24) zum folgenden neuen stochastischen diskontierten dynamischen Programm transformieren:

$$\left\| \begin{aligned} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} & \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E} \left[u \left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right) \right] \\ & k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ & k_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ fix und } \beta \in (0, 1) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Wobei $\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{\kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass jetzt k_t die Zustandsvariable ist und κ_{t+1} die Kontrollvariable. Der Kapitalstockprozess⁷ $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ hat die folgende Form:

$$k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Die Funktion $\phi(k) \in \Phi(k) \forall k$ heißt Politikfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (26).

Sei ψ eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$\psi(k) \stackrel{def}{=} f(\alpha, k) - \phi(k) + (1 - \delta)k \quad (k \in \mathbb{R}_+)$$

definiert ist. Es gilt festzuhalten, dass die Funktion $\psi(k) \in \Phi(k) \forall k$ die Politikfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (24) ist.

Den Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch die folgende Gleichung

$$c_t \equiv f(\alpha, k_t) - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad (27)$$

beziehungsweise auch durch

$$c_t = \psi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0.$$

Die Funktion $\psi(k)$ beschreibt somit das Konsumverhalten des Haushalts in Abhängigkeit vom jeweiligen Kapitalstock k .

Der Konsumprozess $c_t = \max\{\alpha k_t^{\gamma^L}, \alpha k_t^{\gamma^H} - E\} - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$ entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1 , wenn der Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (26) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) ist.

Das Konsumverhalten (Konsumprozess) des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2 hat die Form $c_t = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\} - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$. Man beachte, dass in diesem Fall der Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (26) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) ist.

⁷Es sei darauf hingewiesen, dass es sich bei einem Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ um einen Stochastischen Prozess handelt.

Für stochastische diskontierte dynamische Programme von der nachfolgenden Art kann man den Satz 2 formulieren, vergleiche dazu Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne Strøm [20]. Es sei weiters darauf hingewiesen, dass s_t die Zustandsvariable ist, s_{t+1} (der Zustand von morgen) die Kontrollvariable und θ_{t+1} der Schock von morgen.

$$\left\| \begin{array}{l} \max \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot v(s_t, s_{t+1}, \theta_{t+1}) \\ s_{t+1} \in \Phi(s_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ s_0 \in S \quad \text{fix} \end{array} \right.$$

Es gilt noch zu beachten, dass dieses stochastische diskontierte dynamische Programm über die stochastische Bellman Funktionalgleichung (28) verfügt. Man setze

$$v(\kappa_t, \kappa_{t+1}, \theta_t) = u\left(f(\alpha, \theta_t \kappa_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)\theta_t \kappa_t\right)$$

beziehungsweise

$$v(s_t, s_{t+1}, \theta_t) = u\left(f(\alpha, \theta_t s_t) - s_{t+1} + (1 - \delta)\theta_t s_t\right).$$

Somit gilt: Das stochastische diskontierte dynamische Programm (26) ist von dieser Art.

Proposition 2. *Sei $v(s, s', \theta) \geq 0$ eine stetige, beschränkte und reellwertige Funktion. Weiters sei $\beta \in (0, 1)$ und $S \subseteq \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz $\Phi(\cdot)$ sei kompaktwertig und $\Phi(s)$ konvex für alle $s \in S$. Dann besitzt (23) eine eindeutige Lösung $V(s)$.*

$$V(s, \theta) = \max_{s' \in \Phi(s, \theta)} v(s, s', \theta) + \beta \cdot \mathbb{E}_{\theta' | \theta} [V(s', \theta')] \quad \forall s \in S \quad \forall \theta \in \Theta \quad (28)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass s (der Zustand von heute) die Zustandsvariable ist und s' (der Zustand von morgen) die Kontrollvariable.

Beweis. Siehe Adda und Cooper (Theorem 3) [1]

QED

Das stochastische diskontierte dynamische Programm (26) mit der nachfolgenden Aktionskorrespondenz $\Phi(\cdot)$ entspricht dem Entscheidungsproblem des stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_1 .

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha s^{\gamma_L}, \alpha s^{\gamma_H} - E\} + (1 - \delta)s\}$$

Satz 3. Seien $0 < \gamma_L < \gamma_H < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ vier Konstanten. Weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (26) mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (28) erfüllt.

Beweis. Seien $\theta, \theta_t \in (0, 1]$ beliebig. Zuerst gilt es zu zeigen, dass $v(\cdot)$ eine beschränkte Funktion ist. Sei $k_t \geq 0$ für alle t und weiters sei

$$\bar{k} = \max\{k : f(\alpha, k) = \delta \cdot k\}$$

Laut Lemma 5 besitzt eine Produktionsfunktion vom Typ 1, welche die oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt, einen solchen Fixpunkt \bar{k} . Dieser Fixpunkt \bar{k} hat laut Lemma 3 die folgende Eigenschaft:

$$\alpha \cdot (\theta k)^{\gamma_H} - E < \delta \cdot k \quad \forall k > \bar{k} > \hat{k}$$

Falls $k_t \leq \bar{k}$ so gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq c_t &= f(\alpha, \theta_t k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)\theta_t k_t \leq f(\alpha, \bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} - k_{t+1} \\ 0 &\leq f(\alpha, \bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} - k_{t+1} = \bar{k} - k_{t+1} \\ &\Rightarrow k_{t+1} \leq \bar{k} \end{aligned}$$

Falls $k_t > \bar{k}$ so gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq c_t &= f(\alpha, \theta_t k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)\theta_t k_t \leq k_t - k_{t+1} \\ &\Rightarrow k_{t+1} \leq k_t \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum:

$$\begin{aligned} k_0 \leq \bar{k} &\Rightarrow k_t \leq \bar{k} \quad \forall t \Rightarrow c_t \leq \bar{k} \quad \forall t \\ k_0 > \bar{k} &\Rightarrow k_t \leq k_0 \quad \forall t \Rightarrow c_t \leq k_0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Weiters ist $u(\cdot)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ und somit ist $v(\cdot)$ beschränkt. Es ist laut Definition von $v(\cdot)$ offensichtlich, dass $v(\cdot)$ eine stetige, konkave und reellwertige Funktion ist. Weiters ist $0 < \beta < 1$ und $S = \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz ist intervallwertig und somit auch kompaktwertig. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}_+$ ist die Menge $\Phi(s)$ konvex und nicht-leer, da $\Phi(s)$ ein abgeschlossenes Intervall ist. Aus Proposition 1 folgt nun die Behauptung von Satz 1. QED

Das Entscheidungsproblem des stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2 entspricht dem stochastischen diskontierten dynamischen Programm (26) mit der folgenden Aktionskorrespondenz:

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha A s^\gamma, \alpha B s^\gamma - E\} + (1 - \delta)s\}$$

Satz 4. *Seien $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ drei Konstanten. Weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (26) mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (28) erfüllt.*

Beweis. Sei $f(\cdot)$ wie oben definiert und seien $\theta, \theta_t \in (0, 1]$ beliebig. Dann existiert laut Lemma 7 und 3 ein $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$ für das gilt

$$\alpha \cdot B \cdot (\theta k)^\gamma - E < \delta \cdot k \quad \forall k > \bar{k} < \hat{k}$$

Daraus folgt wiederum:

$$k_0 \leq \bar{k} \Rightarrow c_t \leq \bar{k} \quad \forall t$$

$$k_0 > \bar{k} \Rightarrow c_t \leq k_0 \quad \forall t$$

Weiters ist $u(\cdot)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ und somit ist die Funktion $v(\cdot)$ beschränkt. Die Funktion $v(\cdot)$ ist stetig und reellwertig, laut der Definition von $v(\cdot)$. Außerdem ist $0 < \beta < 1$ und $S = \mathbb{R}_+$ eine konvexe Menge. Die zulässige Aktionskorrespondenz ist ebenfalls kompaktwertig. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}_+$ ist die Menge $\Phi(s)$ konvex und nicht-leer. Somit folgt aus Proposition 1 die Behauptung und dies beendet den Beweis. QED

5 Numerische Lösung der Modelle I

In diesem Kapitel wird das deterministische diskontierte dynamische Programm (22) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) und das deterministische diskontierte dynamische Programm (22) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) numerisch berechnet. Außerdem wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (4) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) und das stochastische diskontierte dynamische Programm (4) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) numerisch berechnet. Zur numerischen Berechnung wird eine logarithmische Nutzenfunktion verwendet, diese erfüllt die Eigenschaft (7). Weiters sei $\beta = \frac{9}{10}$ und $\delta = \frac{1}{10}$. Somit vereinfacht sich das deterministische diskontierte dynamische Programm (22) zum deterministischen diskontierten dynamischen Programm (29) mit der zulässigen

Aktionskorrespondenz (20) oder (21) und einer Produktionsfunktion vom Typ 1 oder Typ 2.

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \ln\left(f(\alpha, k_t) - k_{t+1} + \frac{9}{10}k_t\right) \\ k_{t+1} = \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (29)$$

Das stochastische diskontierte dynamische Programm (4) vereinfacht sich zum stochastischen diskontierten dynamischen Programm (30) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) oder (21) und einer Produktionsfunktion vom Typ 1 oder Typ 2.

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln\left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10}k_t\right) \right] \\ k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (30)$$

Weiters ist zu beachten, dass die zusätzliche Verteilungsannahme (A4) für $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ getroffen wird. Sei $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ oder alternativ $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$.

$$\theta_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{wobei } \mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{3-k} \quad k = 0, \dots, 3 \quad \forall t \quad (\text{A4})$$

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sei nun eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen. Weiters ist offensichtlich, dass es sich bei X um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 3 und p handelt. Die Abbildung 3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsmasse von einer solchen Zufallsvariable X . Mit einem Parameterwert von $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ kann man innerhalb von 100 Perioden fünfzehn negative Schocks erwarten, dies bei einem Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ von der Art (A4). Fünf negative Schocks kann man dazu alternativ mit einem Parameterwert von $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$ erwarten.

5.1 Value Function Iteration mit deterministischen Programmen

Für die numerische Berechnung der nachfolgenden Optimierungsprobleme (31) und (34) wird in dieser Arbeit der Wertfunktions Iterations Algorithmus verwendet. Näheres zu diesem findet sich im Werk von M. Miranda und P. Fackler [14] Als Startwert (Vektor) dient in diesem Kapitel $v_0(k)$. Sei weiters

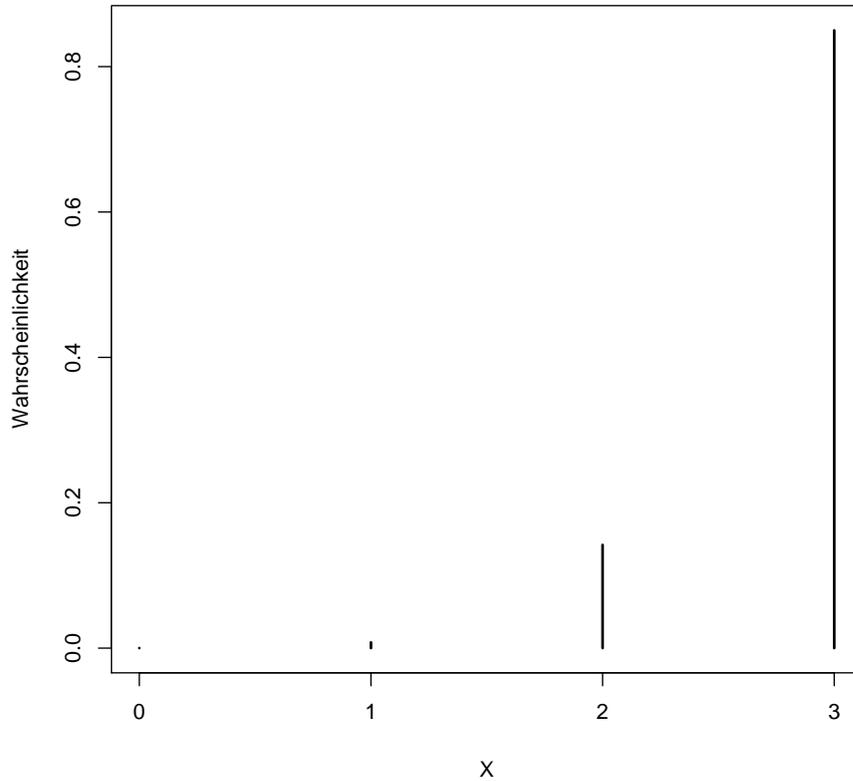


Abbildung 3: Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsmasse von X mit $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

k die Zustandsvariable und κ die Kontrollvariable. Somit erhält man die nachfolgende Rekursionsgleichung:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot v_j(\kappa) \quad j = 0, \dots, T$$

$$v_0(k) = u\left(f(\alpha, k) + (1 - \delta)k\right)$$

Sei $\Gamma(\cdot)$ eine Diskretisierung von $\Phi(\cdot)$, die definiert ist durch

$$\Gamma(k) \stackrel{def}{=} \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq f(\alpha, k) + (1 - \delta)k \right\}$$

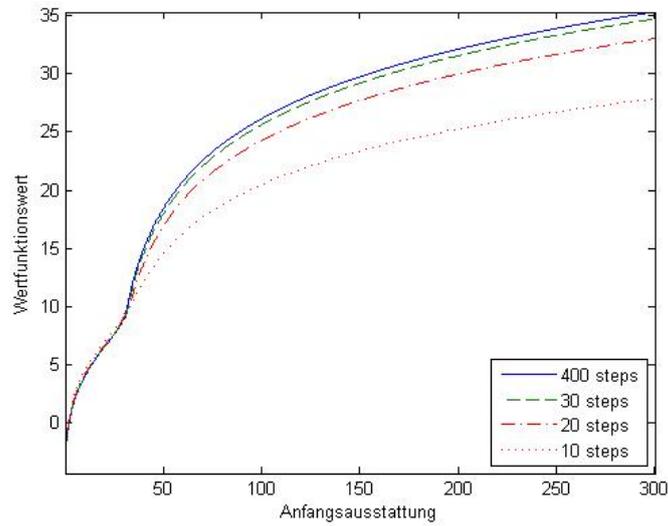


Abbildung 4: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

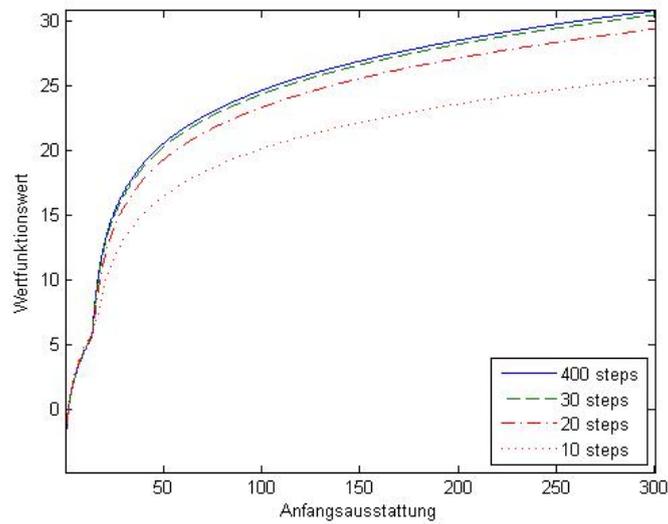


Abbildung 5: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 19.4$.

für alle $k \in \mathbb{R}_+$. Weiters ist $G = \left\{ \lambda \cdot g \in \mathbb{R}_+ : \lambda \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\} \right\}$ mit $g \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$.

Der Algorithmus (Rekursionsgleichung) wird T mal wiederholt, bis sich die Wertfunktion schließlich nicht mehr wesentlich verändert (Abbruchkriterium) oder nach 400 Wiederholungen. In dieser Arbeit wurde ein Abbruchkriterium von $\frac{1}{100}$ verwendet.

Nach T Wiederholungen erhält man die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ durch das nachstehende Optimierungsproblem:

$$\phi(k) \simeq \arg \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot v_T(\kappa)$$

Außerdem erhält man die Wertfunktion $V(\cdot)$ durch

$$V(k) \simeq \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot v_T(\kappa)$$

Das deterministische diskontierte dynamische Programm (31) lässt sich mit Hilfe der folgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln\left(\max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\} - \kappa + \frac{9}{10}k\right) + \frac{9}{10} \cdot v_j(\kappa) \quad j = 0, \dots, T$$

Setze $v_0(k) = \ln\left(\max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\} + \frac{9}{10}k\right)$ als Startwert ein. Die diskretisierte zulässige Aktionskorrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} + (1 - \delta)k \right\}$$

Die Abbildung (4) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (31) mit den Parametern $\gamma_H = 0.75$, $\gamma_L = 0.25$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$ nach 1, 5, 10 und maximal 400 Schritten. Auf der Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert.

Analog lässt sich das deterministische diskontierte dynamische Programm (34) mit Hilfe der folgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln\left(\max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} - \kappa + \frac{9}{10}k\right) + \frac{9}{10} \cdot v_j(\kappa) \quad j = 0, \dots, T$$

Als Startwert setze $v_0(k) = \ln(\max\{\alpha Ak^\gamma, \alpha Bk^\gamma - E\} + \frac{9}{10}k)$. Die diskretisierte Korrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max\{\alpha Ak^\gamma, \alpha Bk^\gamma - E\} + (1 - \delta)k \right\}$$

Die Abbildung (5) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des deterministischen diskontierten dynamischen Programms (34) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 19.4$ nach 10, 20, 30 und maximal 400 Schritten. Auch auf dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert. Dieses Konvergenzverhalten weisen alle deterministischen diskontierten dynamischen Programme in dieser Arbeit auf.

5.2 Das deterministische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1

Das Verhalten des Haushalts im deterministischen dynamischen Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1, welches auch als Modell \mathfrak{M}_1 unter Annahme (A1) bezeichnet wird, soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende Verhaltensgleichung des Haushalts numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \phi(k_t) \quad \forall t$$

Die Verhaltensgleichung beschreibt somit implizit das optimale Spar- beziehungsweise Konsumverhalten eines Haushalts bei einem gegebenen Kapitalstock $k_t \in \mathbb{R}_+$. Dazu gilt es, das deterministische diskontierte dynamische Programm (31) zu lösen.

Das Konsumverhalten des Haushalts erhält man durch die Verhaltensgleichung

$$c_t = \psi(k_t) = f(\alpha, k_t) - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad \forall t,$$

während sich das Investitionsverhalten des Haushalts durch die Verhaltensgleichung

$$i_t = \phi(k_t) - (1 - \delta)k_t \quad \forall t$$

beschreiben lässt. Man beachte, dass Konsum und Investition zueinander in Beziehung stehen (Budgetgleichung), d.h.

$$c_t \equiv f(\alpha, k_t) - i_t$$

Sei \mathbf{c} eine Funktion, die auf $\{k \in \mathbb{R}_+ : k > 0\}$ durch

$$\mathbf{c}(k) \stackrel{def}{=} \frac{\psi(k)}{f(\alpha, k)}$$

definiert ist. Der Funktionswert $\mathbf{c}(k)$ heißt Konsumquote. Aus der obigen Identität erhält man die folgende Gleichung:

$$\mathbf{c}(k_t) = 1 - \frac{i_t}{f(\alpha, k_t)} \quad \forall t$$

Um das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) eines Haushalts zu analysieren, reicht es somit die Funktion $\mathbf{c}(k)$ zu betrachten. Es sei weiters darauf hingewiesen, dass der Wert $1 - \mathbf{c}(k)$ Sparquote heißt.

Das deterministische diskontierte dynamische Programm (31) des deterministischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 1 in das Problem (29).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \ln \left(\max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\} - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10} k_t \right) \\ k_{t+1} = \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (31)$$

Wobei $\Phi(s) = \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha s^{\gamma_L}, \alpha s^{\gamma_H} - E\} + \frac{9}{10} s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$.

Im Folgenden wird das deterministische diskontierte dynamische Programm (31) numerisch berechnet. Man erhält dadurch dessen Politikfunktion $\phi(k)$ und untersucht diese sodann nach Fixpunkten. Diese Fixpunkte repräsentieren die Gleichgewichte des Modells \mathfrak{M}_1 unter Annahme (A1). Dabei geht man der Frage nach, ob in diesen Gleichgewichten, jeweils für sich betrachtet, entweder die höhere oder die niedrigere Technologie verwendet wird. Zur Erinnerung: Die Verwendung einer niedrigeren Technologie steht für einen armen Haushalt, die Verwendung einer höheren (Technologie) hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

Definition 2 (Gleichgewicht). *Unter einem Gleichgewicht versteht man in dieser Arbeit immer ein stationäres Gleichgewicht. Ein Kapitalstock k_τ heißt stationäres Gleichgewicht falls gilt:*

$$k_t = k_\tau \quad \forall t \geq \tau$$

Man beachte, dass die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts $\phi(k)$ die Gleichgewichte des deterministischen Modells \mathfrak{M}_1 sind. Dies gilt auch für das

deterministische Modell \mathfrak{M}_2 .

Um das deterministische diskontierte dynamische Programm (31) berechnen zu können, werden die Parameter γ_H und γ_L fixiert auf $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $\gamma_L = \frac{1}{4}$. Auf den nun folgenden Grafiken 6 - 7 und 12 - 17 findet sich auf der x-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Zustandsvariable), auf der y-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt $t + 1$ (Kontrollvariable).

Die Abbildung 6 zeigt die Politikfunktion $\phi(k)$ von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $E = 7.8$ und $\alpha = 1$, die Abbildungen 8 und 9 zeigen die dazugehörige Politikfunktion $\psi(k)$. Auf den Abbildungen 8 - 9 befindet sich auf der x-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Zustandsvariable), auf der y-Achse jeweils der Konsum zum Zeitpunkt t (als alternative Kontrollvariable). Die durchgehende Linie ist die Politikfunktion. Die punktierte Linie repräsentiert die Winkelhalbierung von \mathbb{R}_+ . Die strichlierte dritte Linie bildet gemeinsam mit der x-Achse die zulässige Aktionskorrespondenz.

Auf der Abbildung 6 erkennt man, dass die Politikfunktion einen instabilen Fixpunkt und zwei stabile Fixpunkte besitzt, dies lässt sich aus der S-ähnlichen Form ablesen. Außerdem schneidet die Politikfunktion $\phi(k)$ dreimal die Winkelhalbierung.

Besitzt eine Politikfunktion zwei stabile Fixpunkte, so repräsentieren diese die beiden stabilen Gleichgewichte des Modells. In dieser Arbeit wird der kleinere stabile Fixpunkt sodann als kleines stabiles Gleichgewicht (Armutsfalle) bezeichnet. Der verbliebene stabile Fixpunkt wird als großes stabiles Gleichgewicht benannt.

Die Abbildung 10 zeigt die Funktion $\mathfrak{c}(k)$ für die numerisch berechnete Politikfunktion $\phi(k)$ von Abbildung 6. Die dazugehörige Funktion $1 - \mathfrak{c}(k)$ zeigt die Abbildung 11.

Die x-Achse der Abbildung 10 bildet gemeinsam mit der strichlierten Linie ein Band. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt lediglich einen Teil seines Einkommens $f(\alpha, k_t)$, sein Vermögen $(1 - \delta)k_t$ (zum Zeitpunkt t) bleibt unangetastet. Oberhalb der strichlierten Linie verbraucht er zusätzlich zu seinem Einkommen auch einen Teil seines Vermögens. Die Konsumquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock $\mathfrak{c}(k)$ steigt zunächst bis zu ihrem Maximum, fällt dann unter die strichlierte Linie und beginnt schließlich innerhalb des Bandes wieder zu steigen. Besonders hervorzuheben ist der Wechsel des Haushalts von der niedriger entwickelten Technologie f_L auf die höher enwi-

ckelte Technologie f_H ungefähr beim Maximum der Konsumquote, gleichzeitig reduziert er an dieser Stelle seine Konsumquote. Weiters wird an diesem Punkt aus einem armen Haushalt ein nicht-armer Haushalt.

Die beiden strichlierten Linien der Abbildung 11 bilden ebenfalls gemeinsam ein Band, innerhalb dessen der Haushalt eine positive Investition $i_t > 0$ tätigt. Von einer positiven Investition spricht man, wenn dem Kapitalstock neues Kapital zugeführt wird. Bei einer negativen Investition $i_t < 0$ hingegen verringert sich das Vermögen $(1 - \delta)k_t$ um diesen Wert. Die punktierte Linie beschreibt die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$ und in Abhängigkeit vom Kapitalstock (zum Zeitpunkt t). Nimmt diese punktierte Linie den Wert 1 an, so entspricht der Wert der Abschreibung dem Einkommen. Die Abschreibung im Verhältnis zum Einkommen steigt innerhalb des Bandes zunächst zum Wert 1 an, fällt dann langsam ab und bleibt sodann stabil. Die verbleibende (nicht unterbrochene) Linie stellt die Sparquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock $1 - \mathfrak{c}(k)$ zum Zeitpunkt t dar. Liegt diese oberhalb der punktierten Linie, so wächst der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} > k_t$. Liegt sie jedoch unterhalb der punktierten Linie, so verringert sich der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} < k_t$. Weiters ist zu beachten, dass es sich beim Schnittpunkt der beiden Linien um einen Fixpunkt handelt. Somit kann man auf der Abbildung 11 die drei Gleichgewichte erkennen, vergleiche dazu auch Abbildung 6.

Ferner gehen wir in diesem Kapitel zwei weiteren getrennten Fragestellungen nach: Erstens, welchen Einfluss hat die Veränderung der Fixkosten E auf die Gleichgewichte und, zweitens, welchen Einfluss haben die persönlichen Fähigkeiten α des Haushalts auf die Gleichgewichte?

Extremfälle, wie z.B. die Existenz nur eines Gleichgewichtes oder das Verschwinden eines solchen durch Veränderung eines Parameters, werden gesondert dargestellt (Abbildung 6-17).

Beginnen wir mit der Frage, welchen Einfluss die Fixkosten E auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die Gleichgewichte des deterministischen dynamischen Modells mit Produktionsfunktion vom Typ 1.

Die Abbildung 7 zeigt einen Ausschnitt der Abbildung 6. Das kleinere stabile Gleichgewicht ist hier allerdings besser ablesbar. Eben dieses Gleichgewicht ist mit der Armutsfalle zu bezeichnen. Verfügt der Haushalt über einen Kapitalstock k_t , der geringer ist als dieses kleinere (stabile) Gleichgewicht, so

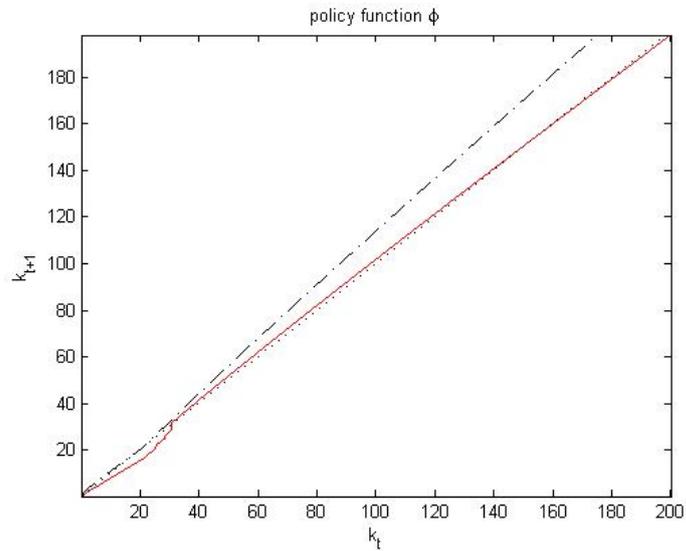


Abbildung 6: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

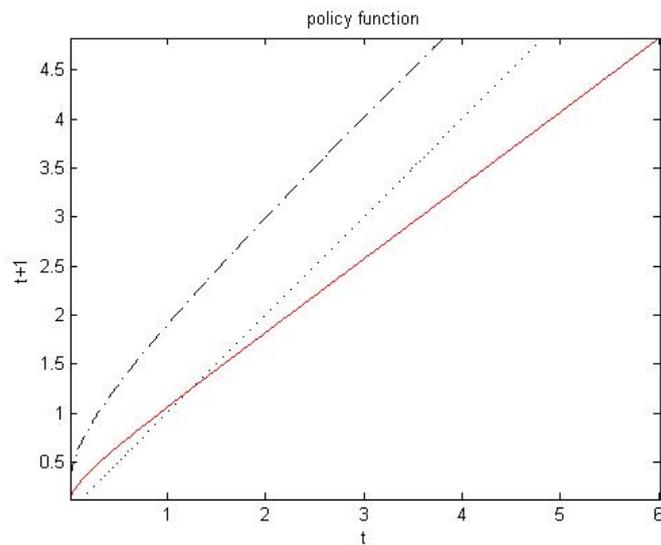


Abbildung 7: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

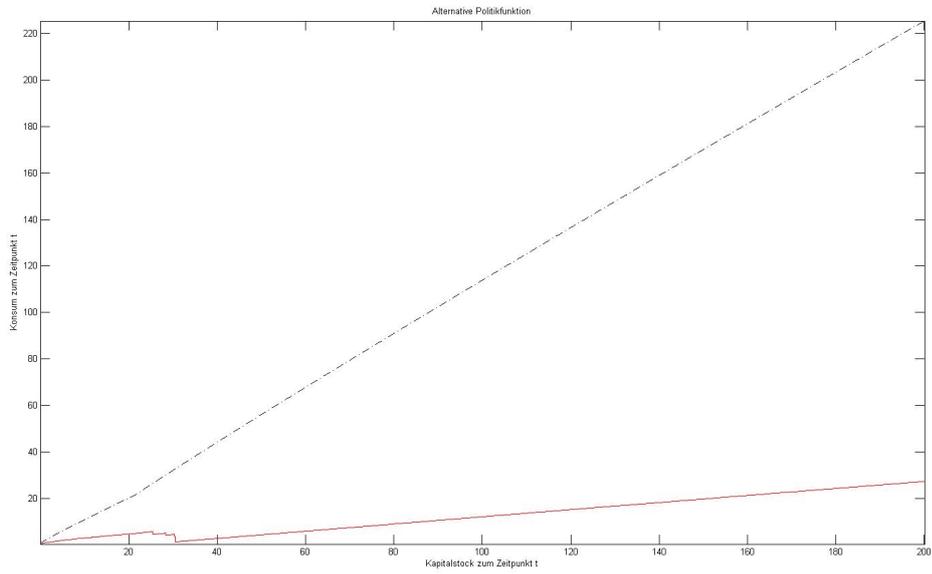


Abbildung 8: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ψ von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

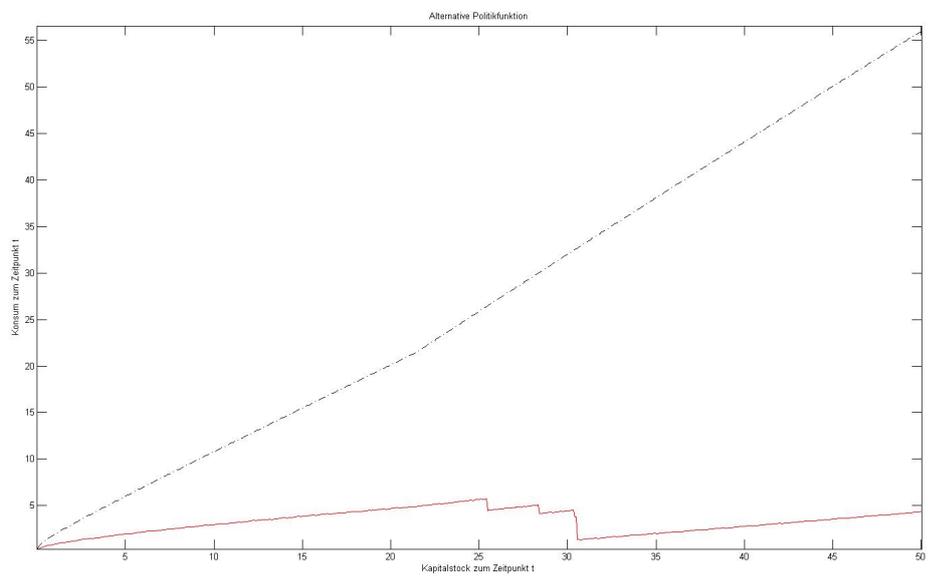


Abbildung 9: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion ψ von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

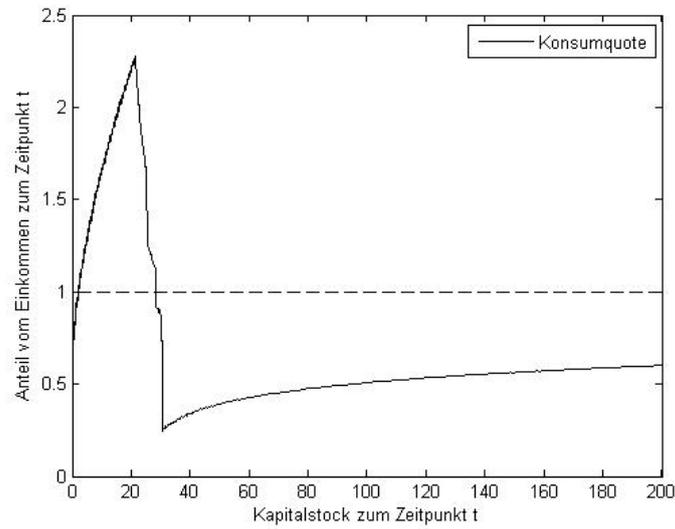


Abbildung 10: Die Abbildung zeigt das Konsumverhalten von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

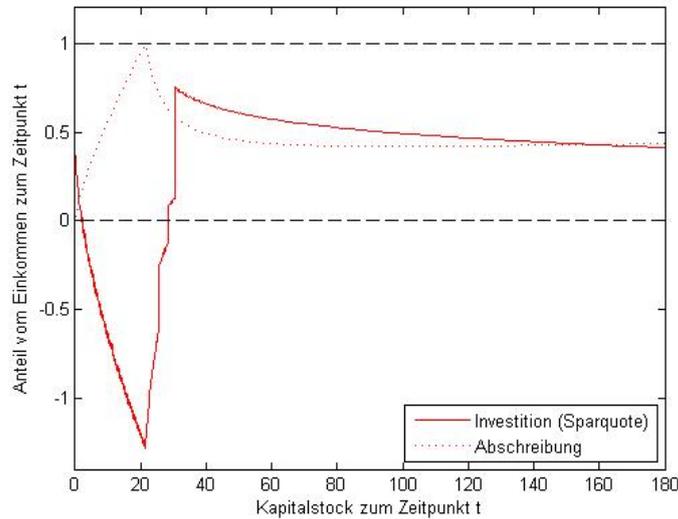


Abbildung 11: Die Abbildung zeigt das Sparverhalten von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

wird sein Kapitalstock nie über diese Grenze hinauswachsen. Sollte er über einen Kapitalstock k_t verfügen, der kleiner ist als das instabile Gleichgewicht, so wird sein Kapitalstock bis zum Erreichen des kleineren stabilen Gleichgewichtes schrumpfen. Die Abbildung 12 ist ein etwas größerer Ausschnitt der Abbildung 6. Auf dieser kann man das kleine stabile und das instabile Gleichgewicht erkennen.

Auf der Abbildung 13 ist die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $E = 15.7$ und $\alpha = 1$ zu erkennen. Die strichlierte Linie stellt die 1. Mediane dar, außerdem stellt die punkt-strichlierte Linie gemeinsam mit der x-Achse die zulässige Aktionskorrespondenz dar. Auf dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ wiederum zwei stabile und ein instabiles Gleichgewicht besitzt. Im Vergleich zur Politikfunktion der Abbildung 6 sieht man, dass durch den Anstieg der Fixkosten $E \uparrow$ das instabile Gleichgewicht größer geworden ist und das große stabile kleiner.

Auf der Abbildung 14 sieht man die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $E = 23.54$ und $\alpha = 1$. Die Fixkosten $E \uparrow$ sind wiederum erhöht worden auf $E = 23.54$. Dies hat zur Folge, dass die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ nur mehr ein Gleichgewicht besitzt, welches stabil ist. Die Abbildung 15 ist ein Ausschnitt der Abbildung 14, hier ist das einzige Gleichgewicht der Politikfunktion nun aber deutlicher zu erkennen. Durch den Anstieg der Fixkosten $E \uparrow$ existiert jetzt nur mehr das kleine stabile Gleichgewicht (Armutsfalle).

Verringert man die Fixkosten $E \downarrow$ auf den Wert $E = 18.8$, so besitzt die Politikfunktion nun ein stabiles und ein Sattelpunkt-Gleichgewicht, wie auf Abbildung 16 ersichtlich. Verfügt ein Haushalt über einen Anfangskapitalstock k_0 , welcher kleiner ist als dieses Sattelpunkt-Gleichgewicht, so entwickelt er sich in dessen Richtung. Verfügt der Haushalt hingegen über einen Anfangskapitalstock k_0 , der größer ist als dieses Sattelpunkt-Gleichgewicht, so entfernt er sich von ihm in Richtung (kleines) stabiles Gleichgewicht.

Die Abbildung 17 zeigt eine Politikfunktion $\phi(\cdot)$ bei welcher die Fixkosten $E \downarrow$ auf $E = 1.6$ gesenkt worden sind. In diesem Fall existiert nur mehr ein einziges stabiles Gleichgewicht. Die Abbildung 17 zeigt die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $E = 1.6$ und $\alpha = 1$. In diesem Fall gibt es keine Armutsfalle (kleines stabiles Gleichgewicht) mehr.

Sei nun der Parameter E (Fixkosten) eine exogene Variable. Die Korrespon-

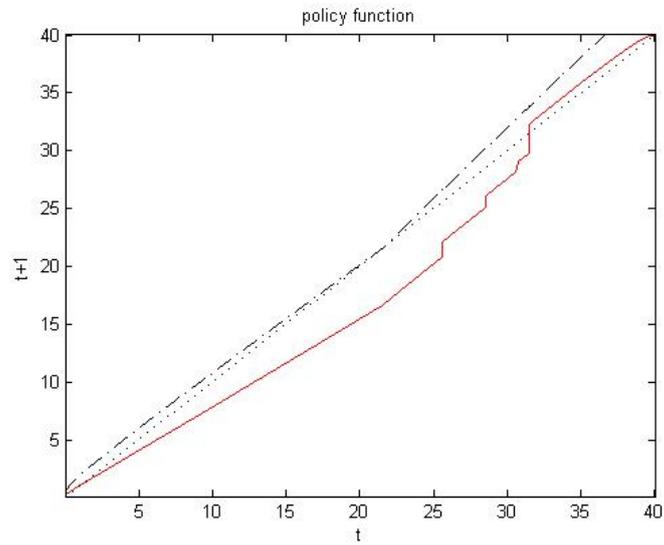


Abbildung 12: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 7.8$.

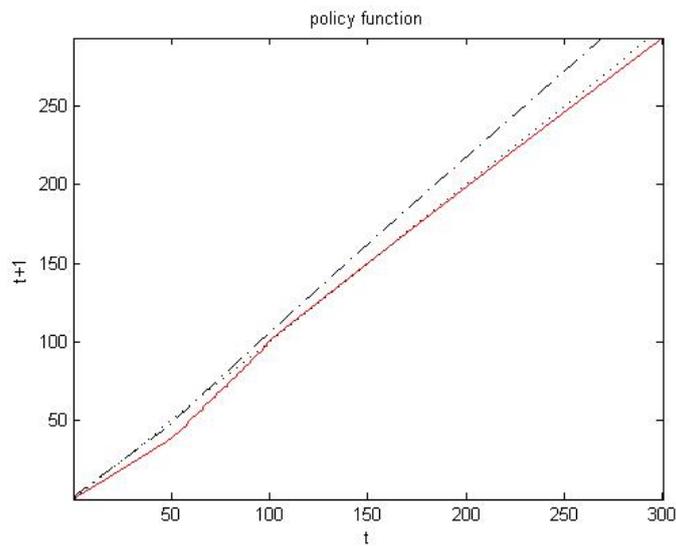


Abbildung 13: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 15.7$.

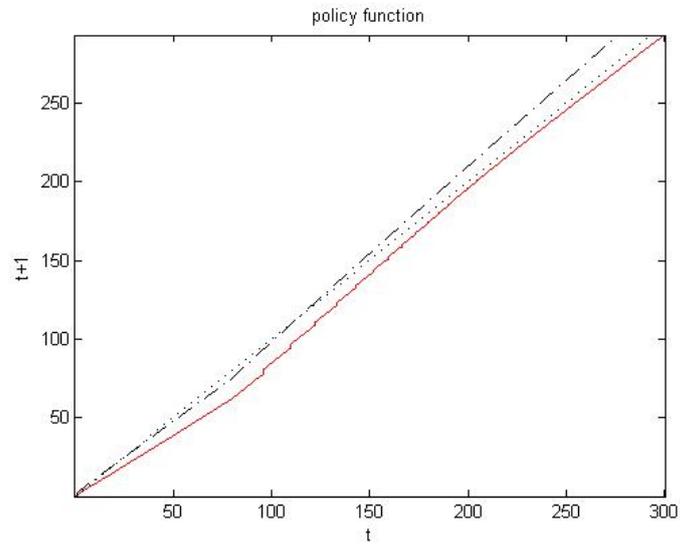


Abbildung 14: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 23.54$.

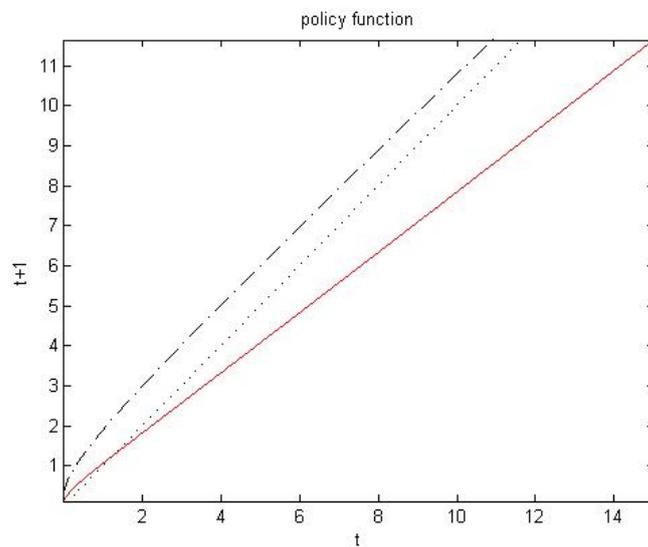


Abbildung 15: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 23.54$.

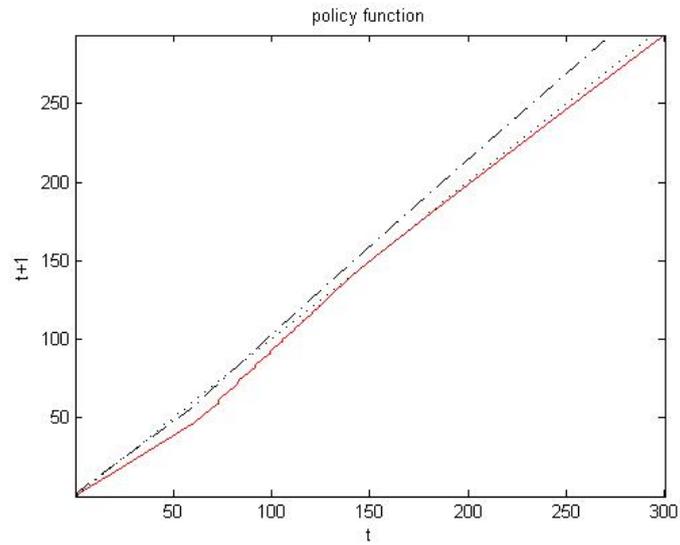


Abbildung 16: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 18.8$.

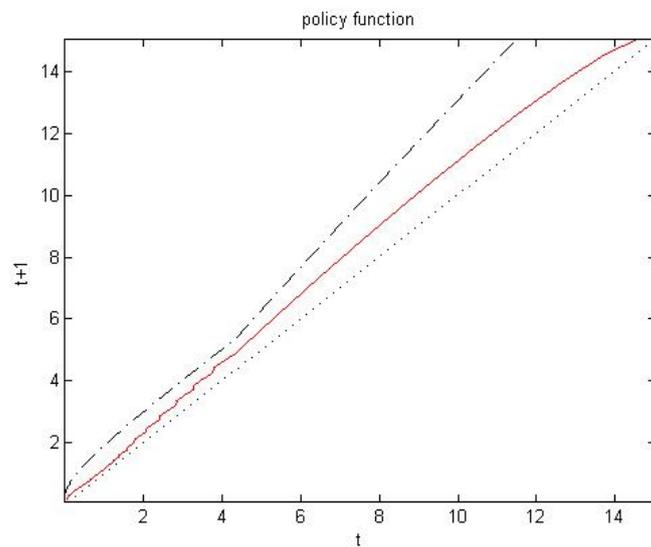


Abbildung 17: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $E = 1.6$.

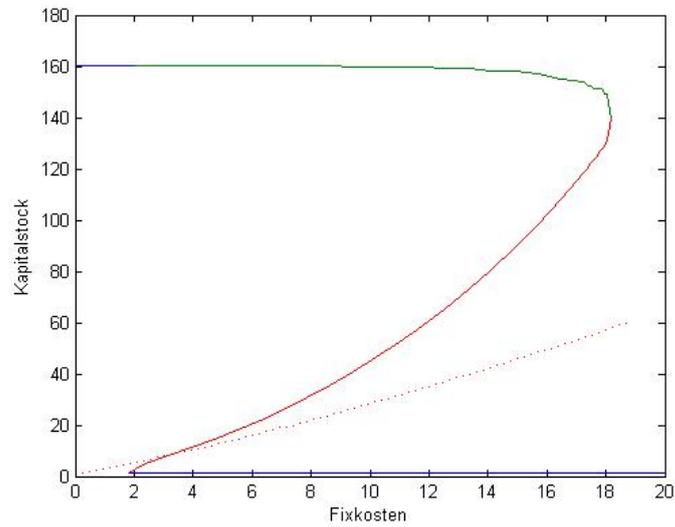


Abbildung 18: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1$.

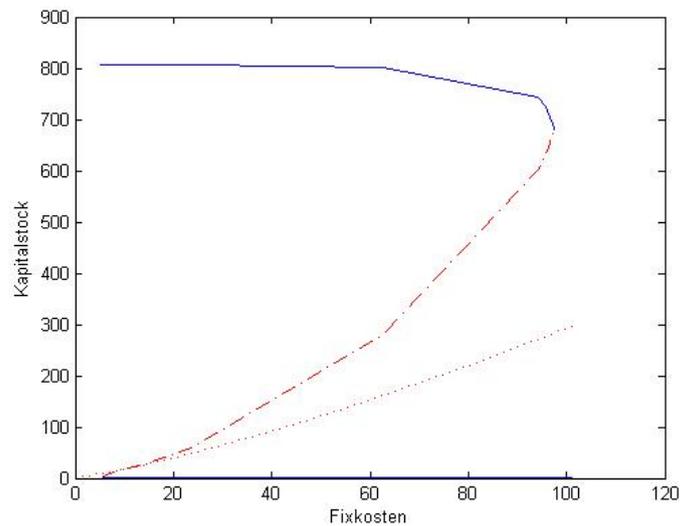


Abbildung 19: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1.5$.

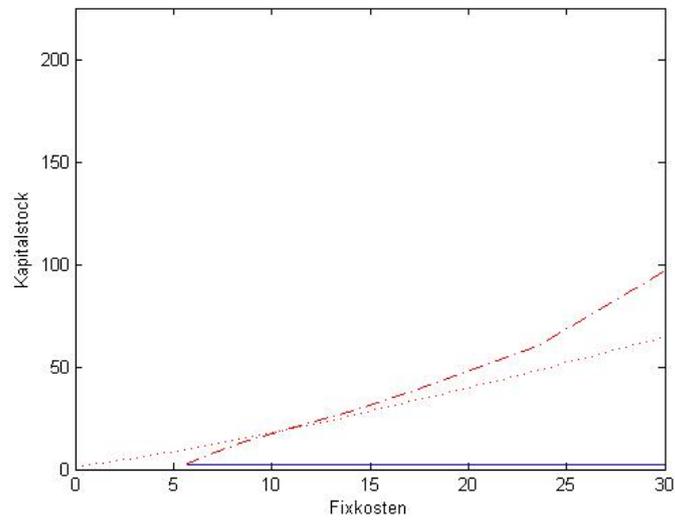


Abbildung 20: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1.5$.

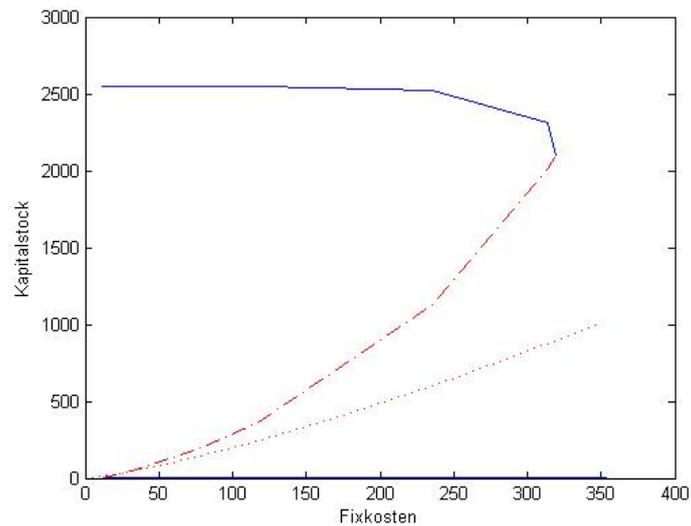


Abbildung 21: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 2$.

denz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ heißt Gleichgewichtskorrespondenz⁸ auf \mathbb{R}_+ und ist durch

$$\mathbf{EQ}(E) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \phi_E(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_E(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen deterministischen diskontierten dynamischen Programm (31) mit gegebenem E als Fixkosten. Um diese Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1$ für verschiedene Werte von E . Aus den Ergebnissen erhält man die Abbildung 18.

Bei der Abbildung 18 werden auf der x-Achse die Fixkosten E aufgetragen, auf der y-Achse die Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Bei dieser Grafik handelt es sich um ein Bifurkationsdiagramm. Darauf sind zwei Linien zu sehen, wobei die strichlierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E (Modelländerung), in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert der Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die andere Linie stellt die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ dar. Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden. Die unterste Funktion $\underline{EQ}(\cdot)$ verläuft ungefähr parallel zur x-Achse und steht für die kleinen stabilen Gleichgewichte. Haushalte, die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion \overline{EQ} repräsentiert die großen stabilen Gleichgewichte und diese Linie befindet sich - wie deutlich sichtbar ist - oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte Funktion stellt die instabilen Gleichgewichte dar. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie, so wird er sich zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \overline{EQ}(E)$$

für alle $E \in \mathbb{R}_+ : E_1^* \leq E \leq E_2^*$. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum kleinen Gleichgewicht d.h.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \underline{EQ}(E)$$

⁸Bei der Gleichgewichtskorrespondenz \mathbf{EQ} handelt es sich um eine Bifurkation.

für alle $E \in \mathbb{R}_+ : E_1^* \leq E \leq E_2^*$. Diese Funktion wird mit $EQ(\cdot)$ bezeichnet.

Befindet sich ein Haushalt in dem Feld zwischen der Armutsgrenze und der Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$, so gilt dieser nicht als arm, aber seine Entwicklung ($k_t \downarrow \underline{EQ}$) bewegt sich in Richtung Armut (kleines stabiles Gleichgewicht). Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln ($k_t \uparrow \underline{EQ}$).

Verfügt ein Haushalt über einen Kapitalstock, welcher kleiner ist als das kleine stabile Gleichgewicht d.h. $k_0 \leq \underline{EQ}$, so wird er sich in dessen Richtung entwickeln d.h. $k_t \uparrow \underline{EQ}$. Man beachte, dass der Kapitalstock eines Haushalts k_t , welcher kleiner ist als das kleine stabile Gleichgewicht, nie größer werden wird als eben dieses Gleichgewicht.

Verfügt nun aber ein Haushalt über einen Kapitalstock, welcher größer ist als das stabile große Gleichgewicht d.h. $k_0 \geq \overline{EQ}$, so wird sich der Kapitalstock zum großen Gleichgewicht entwickeln d.h. $k_t \downarrow \overline{EQ}$.

Sinken die Fixkosten $E \downarrow$, so trifft die Funktion der kleinen stabilen Gleichgewichte \underline{EQ} und die Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$ aufeinander, außerdem schneidet die Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$ die Armutsgrenze. Sinken die Fixkosten $E \downarrow$ nun noch weiter, so verbleibt nur noch das große stabile Gleichgewicht. Der Punkt des Zusammentreffens (E_1^*, k_1^*) ist ein Sattelpunkt. Dieser Fall ist in der Abbildung 17 zu sehen.

Steigen die Fixkosten $E \uparrow$, so wird sich die Funktion der großen stabilen Gleichgewichte \overline{EQ} mit der Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$ vereinigen. Auch dieser Punkt (E_2^*, k_2^*) ist ein Sattelpunkt. Steigen die Fixkosten $E \uparrow$ weiter, so verbleibt nur noch das kleine stabile Gleichgewicht. Dieser Fall ist aus der Abbildung 14 ersichtlich.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die Form der (stationären) Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E)$ auf \mathbb{R}_+ erkennen. Der Vektor $(E_1^*, k_1^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ heißt in dieser Arbeit kleiner Sattelpunkt (Sattelpunkt-Gleichgewicht), während man den Vektor $(E_2^*, k_2^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ großen Sattelpunkt nennt.

Auf Grund der Abbildung 18 hat die Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Form:

$$\mathbf{EQ}(E) = \begin{cases} \{\overline{EQ}(E)\} & E : 0 \leq E < E_1^* \\ \{k_1^*, \overline{EQ}(E)\} & E : E = E_1^* \\ \{\underline{EQ}(E), EQ(E), \overline{EQ}(E)\} & E : E_1^* < E < E_2^* \\ \{k_2^*, \underline{EQ}(E)\} & E : E = E_2^* \\ \{\underline{EQ}(E)\} & E : E_2^* < E < +\infty \end{cases}$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} k_l^* &= EQ(E_l^*) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^* &= \underline{EQ}(E_1^*) \\ k_2^* &= \overline{EQ}(E_2^*) \end{aligned}$$

Die Werte für (E_1^*, k_1^*) und (E_2^*, k_2^*) kann man aus der Abbildung 18 ablesen. Die Elemente der Gleichgewichtskorrespondenz wurden bereits oben definiert.

Sind die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 1 größer als E_2^* , so wird sich ein Haushalt - unabhängig von der Anfangskapitalausstattung k_0 - immer zum kleinen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h. $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \underline{EQ}$ (armes Gleichgewicht).

Sind hingegen die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 1 kleiner als E_1^* , so wird sich ein Haushalt - wieder unabhängig von seiner Anfangskapitalausstattung k_0 - immer zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h. $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \overline{EQ}$ (nicht-armes Gleichgewicht).

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als E_2^* , jedoch größer oder gleich als E_1^* d.h. $E_1^* \leq E \leq E_2^*$, so bestimmt die Anfangskapitalausstattung k_0 seine mögliche Entwicklung.

Nun greifen wir erneut die Frage auf, welchen Einfluss die persönlichen Fähigkeiten des Haushalts auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die Gleichgewichte des Modells.

Seien E und α nun zwei exogene Variablen. Weiters sei die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ eine Verallgemeinerung der Gleichgewichtskorrespondenz auf \mathbb{R}_+ von oben. Man beachte, dass die Fixkosten E und die

persönlichen Fähigkeiten α variieren. Die Gleichgewichtskorrespondenz auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ ist durch

$$\mathbf{EQ}(E, \alpha) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \phi_{E, \alpha}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E, \alpha}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen deterministischen diskontierten dynamischen Programm (31) mit gegebenem E und α . Um diese Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (31) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und verwendet jeweils verschiedene Werte von α und E . Aus den Ergebnissen erhält man die Abbildungen 18-21. Bei diesen Grafiken handelt es sich um Bifurkationsdiagramme. Diese Abbildungen (18-21) beschreiben beispielsweise das Modell mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$ und $\gamma_H = 0.75$.

Auf der x-Achse der Abbildungen 18-21 findet man wieder die Fixkosten E , auf der y-Achse den Kapitalstock. Um die Abbildungen zu erhalten, wird das Modell mehrmals berechnet, nur der Fixkosten-Wert und der α -Wert wird dabei jeweils variiert.

Weiters finden sich zwei Linien auf der Grafik: Die strichlierte Linie beschreibt die Armutsgrenze und die zweite Linie steht für die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$, welche sich aus drei Funktionen zusammensetzt: Die Funktion der kleinen Gleichgewichte $\underline{EQ}(E, \alpha)$, der instabilen Gleichgewichte $EQ(E, \alpha)$ und der großen stabilen Gleichgewichte $\overline{EQ}(E, \alpha)$ erzeugen gemeinsam die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ mit fixem α . Die Funktion $s_1 : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ heißt in der vorliegenden Arbeit Funktion der kleinen Sattelpunkte, während man die Funktion $s_2 : \alpha \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ hier Funktion der großen Sattelpunkte nennt⁹.

Auf Grund der Abbildungen 18-21 hat die Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Form:

$$\mathbf{EQ}(E, \alpha) = \begin{cases} \{\overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\alpha) \\ \{k_1^*(\alpha), \overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_1^*(\alpha) \\ \{EQ(E, \alpha), EQ(E, \alpha), \overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E_1^*(\alpha) < E < E_2^*(\alpha) \\ \{k_2^*(\alpha), EQ(E, \alpha)\} & E : E = E_2^*(\alpha) \\ \{\underline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E_2^*(\alpha) < E < +\infty \end{cases}$$

⁹Alternative Notation: $(E_l^*, k_l^*)(\alpha) = (E_l^*(\alpha), k_l^*(\alpha)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ für $l = 1, 2$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} k_l^*(\alpha) &= EQ(E_l^*, \alpha) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\alpha) &= \underline{EQ}(E_1^*, \alpha) \\ k_2^*(\alpha) &= \overline{EQ}(E_2^*, \alpha) \end{aligned}$$

Die Werte für $(E_1^*, k_1^*)(\alpha)$ und $(E_2^*, k_2^*)(\alpha)$ kann man aus der jeweiligen Abbildung ablesen.

Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ kann einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annehmen. Um die Abbildungen 18-21 zu erhalten, wurde die Gleichgewichtskorrespondenz für drei verschiedene Werte von α berechnet d.h. $\alpha \in \{1, 1.5, 2\}$.

Befindet sich ein Haushalt mit seinem Kapitalstock k_0 im oberen Bereich einer dieser Grafiken (18-21), begrenzt durch die Armutsgrenze und die Linie der instabilen Gleichgewichte, so entwickelt er sich zum großen stabilen Gleichgewicht. Besitzt ein Haushalt eine Kapitalausstattung k_0 , welche größer ist als die Armutsgrenze aber kleiner als die Grenze der instabilen Gleichgewichte, so wird sich dieser Haushalt über die Zeit zum kleinen stabilen Gleichgewicht entwickeln. Verfügt ein Haushalt über einen Kapitalstock, welcher kleiner ist als die Armutsgrenze und gleichzeitig größer als die Linie der instabilen Gleichgewichte, so wird sich dieser Haushalt hin zum großen stabilen Gleichgewicht bewegen. Ist ein Haushalt mit einem Kapitalstock ausgestattet, der kleiner ist als die Linie der instabilen Gleichgewichte und außerdem kleiner als die Armutsgrenze, so wird sich dieser in Richtung kleines stabiles Gleichgewicht entwickeln.

Zusammenfassend kann man folgende Aussagen treffen:

$$\begin{aligned} k_0 < EQ(E, \alpha) &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \underline{EQ}(E, \alpha) \\ k_0 > EQ(E, \alpha) &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \overline{EQ}(E, \alpha) \end{aligned}$$

für alle $E \in \mathbb{R}_+ : E_1^*(\alpha) \leq E \leq E_2^*(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+ : 1 \leq \alpha \leq 2$.

Seien $(E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $(E_2^*, k_2^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ die Sattelpunkte des deterministischen Modells \mathfrak{M}_1 , so entwickelt sich ein Haushalt mit einer Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten α und einer Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten $\underline{E} \in \mathbb{R}_+ : \underline{E} < E_1^*(\alpha)$ immer in Richtung des großen stabilen Gleichgewichtes $\overline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar unabhängig von der

Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$. In diesem Fall existiert keine Armutsschwelle. Verfügt der Haushalt hingegen über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten $E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(\alpha)$, so entwickelt er sich zum kleinen stabilen Gleichgewicht $\overline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$. In diesem Fall existiert nur die Armutsschwelle.

Die Form der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ lässt erkennen, dass bei Haushalten mit größeren persönlichen Fähigkeiten und bei gleichbleibenden Fixkosten die Armutsschwelle verschwinden kann, d.h. es existiert nur mehr ein großes stabiles Gleichgewicht bei gleichem E (Fixkosten).

Aus den numerischen Berechnungen kann man die folgende Eigenschaft der (stationären) Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ ablesen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_1^*(\alpha_1) < E_1^*(\alpha_2)$$

Man beachte dazu die Abbildungen 18-21 auf den Seiten 48-49. Somit gilt auch die folgende Aussage:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_2^*(\alpha_1) < E_2^*(\alpha_2)$$

Eine weitere Eigenschaft der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ ist die folgende:

$$E_1^*(1) = \min_{\alpha \in [1, 2]} E_1^*(\alpha)$$

Dazu beachte man erneut die Abbildungen 18-21 und die letzten beiden Eigenschaften. Somit gilt auch:

$$E_2^*(2) = \max_{\alpha \in [1, 2]} E_2^*(\alpha)$$

Seien $(E_1^*, k_1^*)(1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $(E_2^*, k_2^*)(2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei Sattelpunkte des deterministischen Modells \mathfrak{M}_1 , so entwickelt sich ein Haushalt mit einer beliebigen Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten α und einer Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E < E_1^*(1)$$

immer in Richtung des großen stabilen Gleichgewichtes $\overline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert keine Armutsschleife. Verfügt der Haushalt jedoch über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(2)$$

so entwickelt er sich immer zum kleinen stabilen Gleichgewicht $\underline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert nur die Armutsschleife.

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1, mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(2)$ jedoch größer oder gleich als $E_1^*(1)$ d.h. $E_1^*(1) \leq E \leq E_2^*(2)$, so bestimmt die Anfangsausstattung k_0 und α seine Entwicklung.

Die Abbildung 20 zeigt einen Ausschnitt der Abbildung 19. Die Funktion der kleinen Gleichgewichte ist nahe der x-Achse. Die großen stabilen Gleichgewichte befinden sich oberhalb des größten y-Achsenwertes (der Abbildungen) und sind somit nicht zu sehen. Die Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$ nähert sich der Funktion der kleinen stabilen Gleichgewichte $\underline{EQ}(\cdot)$ von oben an und die Funktionen enden beide im gleichen Punkt am linken Rand. Dieser Punkt ist ein Sattelpunkt $(E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d.h. verfügt der Haushalt über einen Kapitalstock k_0 , der kleiner ist als der Sattelpunkt, so entwickelt er sich in dessen Richtung. Verfügt der Haushalt hingegen über einen Kapitalstock k_0 , der größer ist als der Sattelpunkt, entfernt er sich von ihm in Richtung großes Gleichgewicht. Die Funktion der instabilen Gleichgewichte schneidet die Armutsgrenze.

5.3 Das deterministische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2

Das Verhalten des Haushalts im deterministischen dynamischen Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2, welches auch als Modell \mathfrak{M}_2 unter Annahme (A1) bezeichnet wird, soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende Verhaltensgleichung des Haushalts numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \phi(k_t) \quad \forall t$$

Dazu gilt es, das deterministische diskontierte dynamische Programm (34) zu lösen. Das deterministische diskontierte dynamische Programm (34) des deterministischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 in das Problem (29).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \ln \left(\max \{ \alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E \} - k_{t+1} + \frac{9}{10} k_t \right) \\ k_{t+1} = k_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (34)$$

Wobei $\Phi(s) = \{c \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq c \leq \max\{\alpha A s^\gamma, \alpha B s^\gamma - E\} + \frac{9}{10}s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$.

Das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) des Haushalts kann man mit Hilfe der Konsumquote (Sparquote) analysieren. Auf Grund der Identität

$$c(k_t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi(k)}{f(\alpha, k)} \equiv 1 - \frac{i_t}{f(\alpha, k_t)}$$

reicht es entweder die Konsumquote $c(k_t)$ oder die Sparquote $1 - c(k_t)$ zu betrachten.

Im Folgenden wird das deterministische dynamische Modell mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 (34) numerisch berechnet. Um das deterministische diskontierte dynamische Programm (34) berechnen zu können, werden die Parameter γ , A und B fixiert auf $\gamma = \frac{3}{10}$, $A = 1$ und $B = 10$.

Die Abbildungen 22 und 23 zeigen die Politikfunktion $\phi(k)$ von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$. Die Abbildungen 24 und 25 zeigen die dazugehörige Politikfunktion¹⁰ $\psi(k)$. Die durchgehende Linie ist die Politikfunktion. Die punktierte Linie repräsentiert die Winkelhalbierung von \mathbb{R}_+ . Die strichlierte dritte Linie bildet gemeinsam mit der x-Achse die zulässige Aktionskorrespondenz. Auf den Abbildungen 22 und 23 erkennt man, dass das Modell ein instabiles Gleichgewicht und zwei stabile Gleichgewichte besitzt.

¹⁰Bei der Politikfunktion $\psi(k)$ ist der Kapitalstock k_t die Zustandsvariable und der Konsum c_t die Kontrollvariable.

Die Abbildung 26 zeigt die Funktion $\mathbf{c}(k)$ für die numerisch berechnete Politikfunktion $\phi(k)$ der Abbildungen 22 und 23. Die Funktion $1 - \mathbf{c}(k)$ (Sparquote) ist auf Abbildung 27 zu sehen.

Die x-Achse der Abbildung 26 bildet gemeinsam mit der strichlierten Linie ein Band. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt nur einen Teil seines Einkommens $f(\alpha, k_t)$, sein Vermögen $(1 - \delta)k_t$ (zum Zeitpunkt t) bleibt unberührt. Oberhalb der strichlierten Linie verbraucht er zusätzlich zu seinem Einkommen auch einen Teil seines Vermögens. Die nicht unterbrochene Linie stellt $\mathbf{c}(k_t)$ (die Konsumquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock zum Zeitpunkt t) dar.

Auch die beiden strichlierten Linien der Abbildung 27 bilden gemeinsam ein Band, innerhalb (unterhalb) dessen der Haushalt eine positive (negative) Investition tätigt. Die punktierte Linie beschreibt die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$ und in Abhängigkeit vom Kapitalstock (zum Zeitpunkt t). Nimmt diese punktierte Linie den Wert 1 an, so entspricht der Wert der Abschreibung dem Einkommen. Die Abschreibung im Verhältnis zum Einkommen steigt innerhalb des Bandes zunächst zum Wert 1 an, fällt dann langsam ab und bleibt danach stabil.

Die Sparquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock $1 - \mathbf{c}(k)$ sinkt zunächst bis zu ihrem Minimum, steigt dann über die untere strichlierte Linie und beginnt schließlich wieder zu fallen. Besonders hervorzuheben ist der Wechsel des Haushalts von der niedriger entwickelten Technologie f_L auf die höher entwickelte Technologie f_H ungefähr beim Minimum der Sparquote, gleichzeitig erhöht er an dieser Stelle seine Sparquote. Weiters wird an diesem Punkt aus einem armen Haushalt ein nicht-armer Haushalt. Liegt $1 - \mathbf{c}(k)$ oberhalb der punktierten Linie, so wächst der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} > k_t$. Liegt sie jedoch unterhalb der punktierten Linie, so verringert sich der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} < k_t$. Weiters ist zu beachten, dass es sich beim Schnittpunkt der beiden Linien um einen Fixpunkt handelt. Somit kann man auf der Abbildung 27 die drei Gleichgewichte erkennen, vergleiche dazu auch die Abbildungen 22 und 23.

Man kann also festhalten, dass das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2 unter Annahme (A1) jenem vom \mathfrak{M}_1 unter Annahme (A1) qualitativ entspricht.

Hier geht man dann den gleichen Fragen nach, die auch in Kapitel 5.2 behandelt wurden. Nun die erste dieser Fragen: Welchen Einfluss haben die

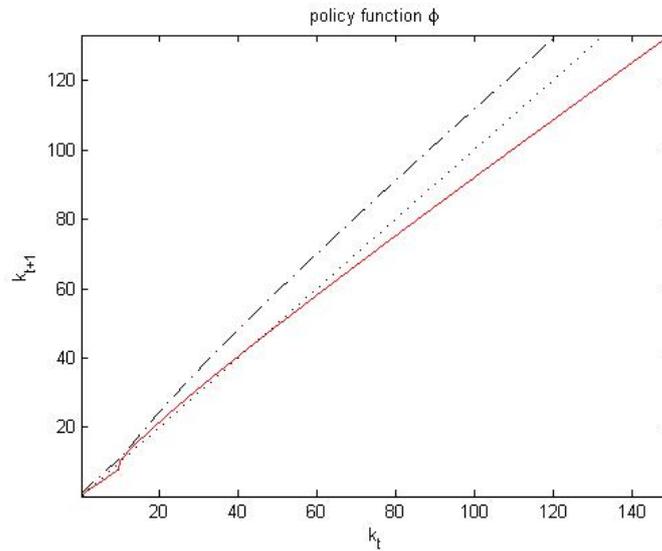


Abbildung 22: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

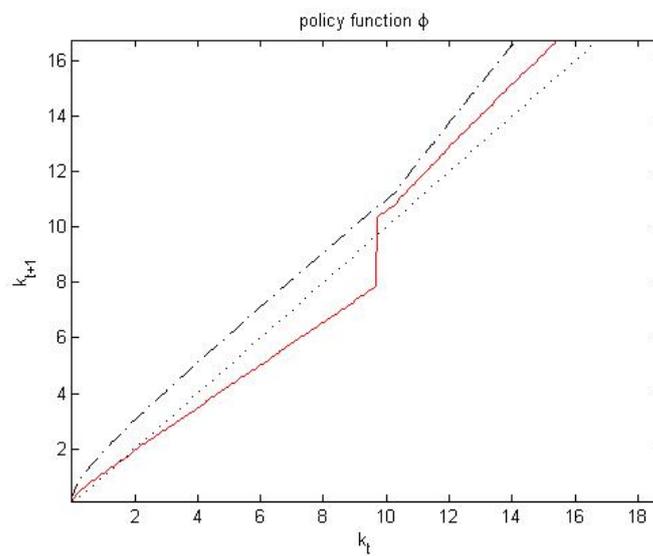


Abbildung 23: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

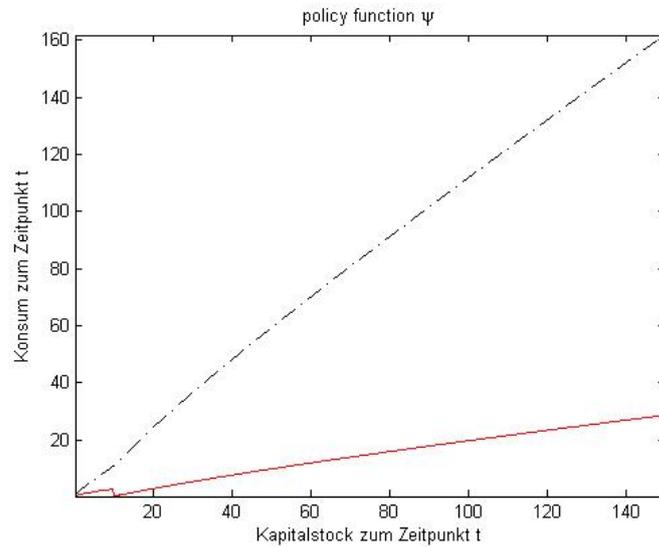


Abbildung 24: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ψ von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

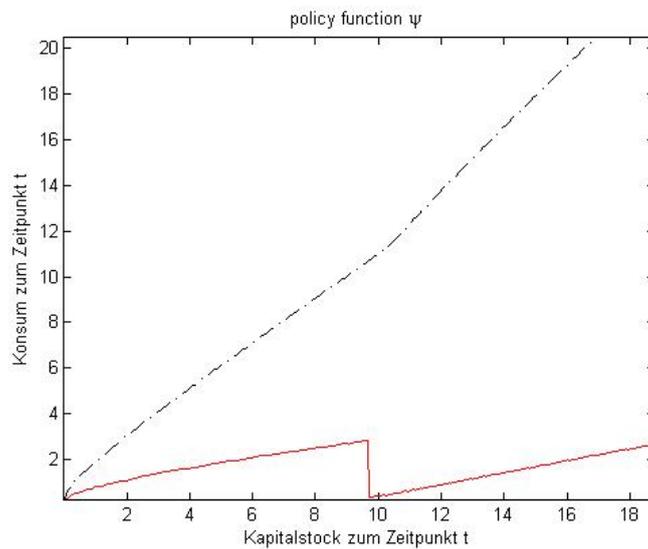


Abbildung 25: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion ψ von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

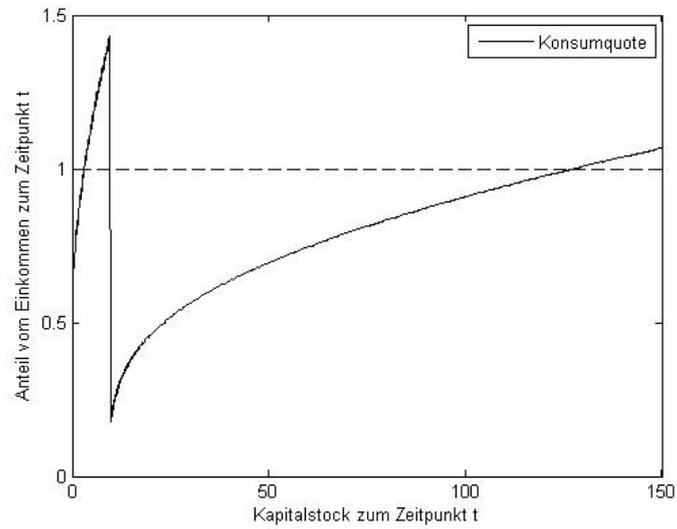


Abbildung 26: Die Abbildung zeigt das Konsumverhalten von (31) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

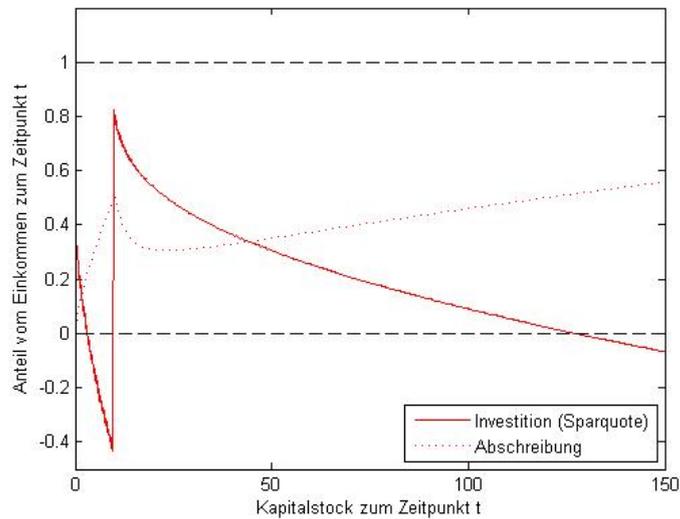


Abbildung 27: Die Abbildung zeigt das Sparverhalten von (31) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 18.1$.

Fixkosten E auf das Verhalten des Haushalts und somit auch auf die Gleichgewichte des deterministischen dynamischen Modells mit Produktionsfunktion vom Typ 2?

Auf den folgenden Abbildungen 28 - 29 findet sich auf der x-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Zustandsvariable), auf der y-Achse jeweils der Kapitalstock zum Zeitpunkt $t + 1$ (Kontrollvariable).

Auf den Abbildungen 28 und 29 sieht man die Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 24$. Die Fixkosten $E \uparrow$ wurden auf $E = 23.54$ erhöht. Dies hat zur Folge, dass die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ nur mehr über einen Fixpunkt verfügt, welcher stabil ist. Im Detail bedeutet dies, dass dieses Modell von der Art \mathfrak{M}_2 nun nur mehr ein kleines stabiles Gleichgewicht besitzt. Die Abbildung 29 ist ein Ausschnitt der Abbildung 28, hier ist der einzige Fixpunkt der Politikfunktion nun aber deutlicher zu erkennen. Durch den Anstieg der Fixkosten $E \uparrow$ existiert jetzt nur mehr das kleine stabile Gleichgewicht.

Die Abbildung 30 zeigt eine Politikfunktion $\phi(\cdot)$ bei welcher die Fixkosten $E \downarrow$ auf $E = 12$ gesenkt wurden. In diesem Fall existiert nur mehr ein einziges stabiles Gleichgewicht, welches auf Abbildung 30 erkennbar ist. Dieses Modell besitzt nun nur mehr ein großes stabiles Gleichgewicht.

Seien nun die Parameter E (Fixkosten) und α (persönliche Fähigkeiten) zwei exogene Variablen. Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ heißt Gleichgewichtskorrespondenz und ist durch

$$\mathbf{EQ}(E, \alpha) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \phi_{E, \alpha}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E, \alpha}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen deterministischen diskontierten dynamischen Programm (34) mit gegebenem E und α . Um diese Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$ und $\alpha = 1$ für jeweils verschiedene Werte von E . Aus den Ergebnissen erhält man beispielsweise die Abbildung 31.

Bei den Abbildungen 31-33 werden auf der x-Achse die Fixkosten E aufgetragen, auf der y-Achse die Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters sind zwei Linien zu sehen, wobei die strichlierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t

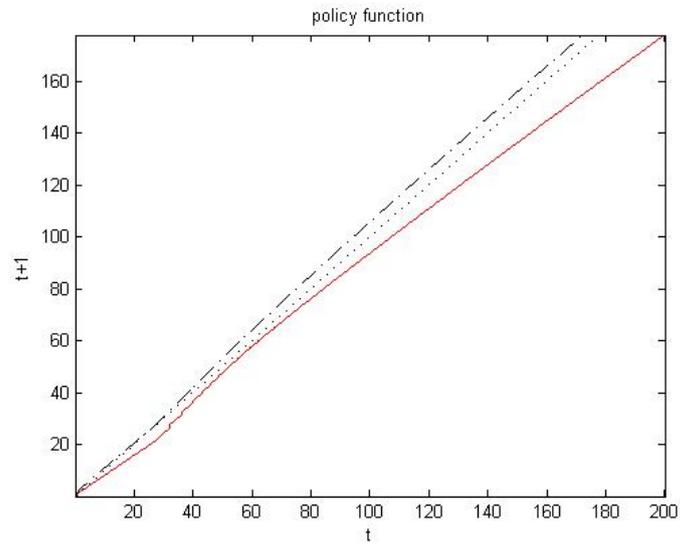


Abbildung 28: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 24$.

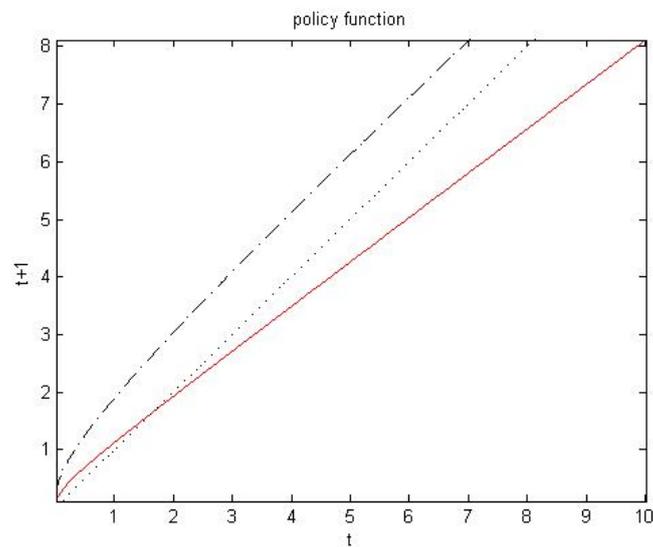


Abbildung 29: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 24$.

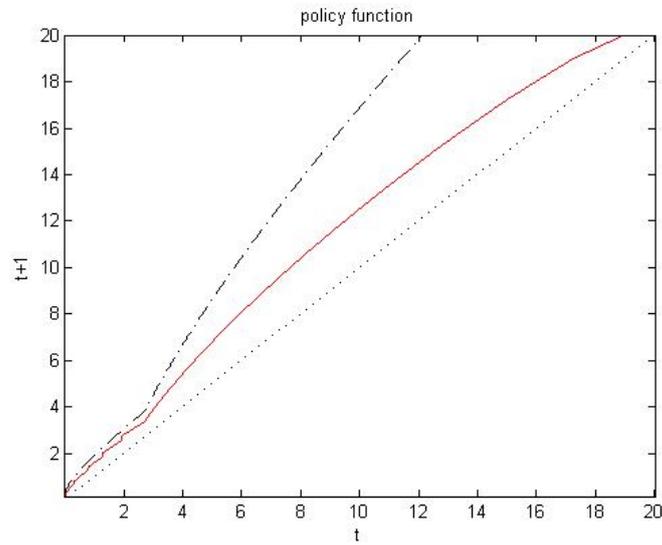


Abbildung 30: Die Abbildung zeigt einen Teil der Politikfunktion von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $E = 12$.

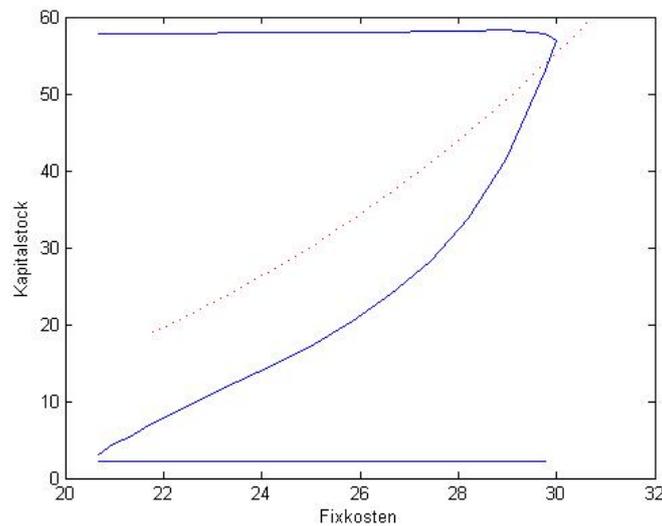


Abbildung 31: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$ und $\alpha = 1$.

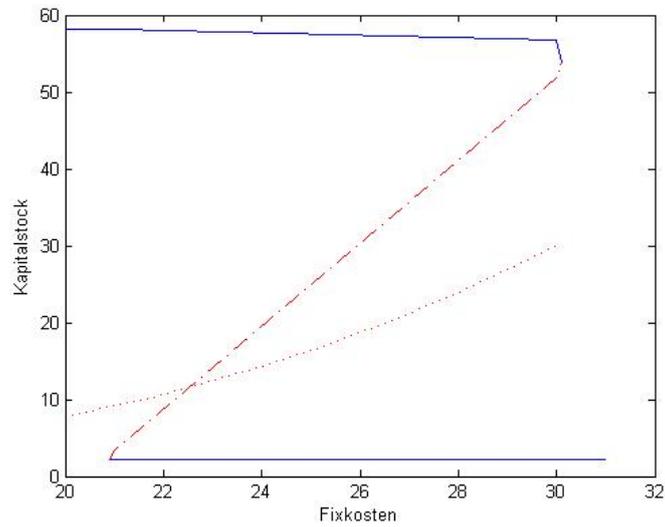


Abbildung 32: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$ und $\alpha = 1.2$.

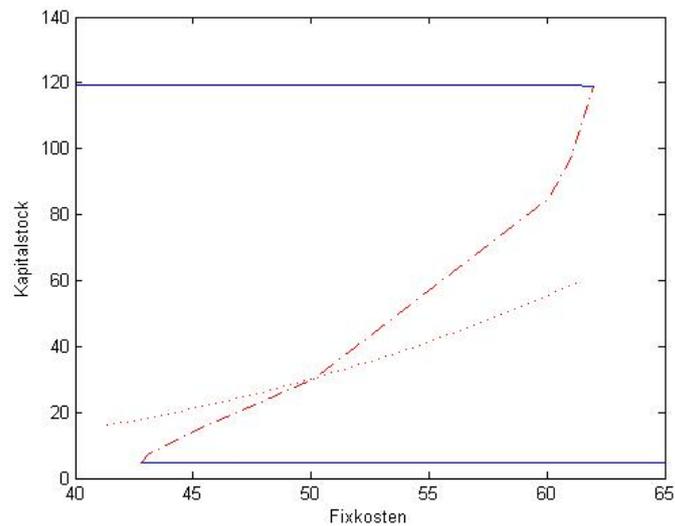


Abbildung 33: Diese Abbildung zeigt die stationären Gleichgewichte von (34) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$ und $\alpha = 2$.

und Fixkosten E (Modelländerung), in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert der Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die andere Linie stellt die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ dar. Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden. Die unterste Funktion $\underline{EQ}(\cdot)$ verläuft parallel zur x-Achse und steht für die kleinen stabilen Gleichgewichte. Haushalte, die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion \overline{EQ} repräsentiert die großen stabilen Gleichgewichte und diese Linie befindet sich - wie deutlich sichtbar ist - oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte Funktion stellt die instabilen Gleichgewichte dar. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie, so wird er sich zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum kleinen Gleichgewicht. Diese Funktion wird mit $EQ(\cdot)$ bezeichnet.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die Form der (stationären) Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ erkennen. Die Funktion $s_1 : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ heißt - wie bereits erwähnt - Funktion der kleinen Sattelpunkte, während man die Funktion $s_2 : \alpha \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ hier Funktion der großen Sattelpunkte nennt.

Aufgrund der Abbildungen 31-33 hat die Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Form:

$$\mathbf{EQ}(E, \alpha) = \begin{cases} \{\overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\alpha) \\ \{k_1^*(\alpha), \overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_1^*(\alpha) \\ \{\underline{EQ}(E, \alpha), EQ(E, \alpha), \overline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E_1^*(\alpha) < E < E_2^*(\alpha) \\ \{k_2^*(\alpha), \underline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_2^*(\alpha) \\ \{\underline{EQ}(E, \alpha)\} & E : E_2^*(\alpha) < E < +\infty \end{cases}$$

Weiters gilt auch hier:

$$\begin{aligned} k_l^*(\alpha) &= EQ(E_l^*, \alpha) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\alpha) &= \underline{EQ}(E_1^*, \alpha) \\ k_2^*(\alpha) &= \overline{EQ}(E_2^*, \alpha) \end{aligned}$$

Die Werte für $(E_1^*, k_1^*)(\alpha)$ und $(E_2^*, k_2^*)(\alpha)$ kann man aus der jeweiligen Abbildung ablesen. Man beachte dabei, dass α hier eine Konstante ist.

Sind die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 2 größer als $E_2^*(\alpha)$, so wird sich ein Haushalt - unabhängig von der Anfangskapitalausstattung k_0 - immer zum kleinen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h. $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \underline{EQ}$ (armes Gleichgewicht).

Sind jedoch die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 2 kleiner als $E_1^*(\alpha)$, so wird sich ein Haushalt - wieder unabhängig von seiner Anfangskapitalausstattung k_0 - immer zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h. $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t = \overline{EQ}$ (nicht-armes Gleichgewicht).

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 2 mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(\alpha)$, jedoch größer oder gleich als $E_1^*(\alpha)$ d.h. $E_1^*(\alpha) \leq E \leq E_2^*(\alpha)$, so bestimmt die Anfangskapitalausstattung k_0 seine mögliche Entwicklung.

Nun weiter zu Frage zwei: Welchen Einfluss haben die persönlichen Fähigkeiten des Haushalts auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts und somit auch auf die Gleichgewichte des deterministischen dynamischen Modells mit Produktionsfunktion vom Typ 2?

Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ kann einen, zwei oder drei Werte in $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ annehmen. Um die Abbildungen 31-33 zu erhalten, wurde die Gleichgewichtskorrespondenz für drei verschiedene Werte von α berechnet d.h. $\alpha \in \{1, 1.5, 2\}$.

Die Form der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ lässt erkennen, dass bei Haushalten mit größeren persönlichen Fähigkeiten und gleichbleibenden Fixkosten die Armutsfalle verschwinden kann, d.h. es existiert nur mehr ein großes stabiles Gleichgewicht bei gleichem E (Fixkosten).

Aus den numerischen Berechnungen kann man die folgenden Eigenschaften der (stationären) Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ ablesen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_1^*(\alpha_1) < E_1^*(\alpha_2)$$

Man beachte dazu die Abbildungen 31 und 33 in diesem Kapitel. Somit gilt auch die folgende Aussage:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_2^*(\alpha_1) < E_2^*(\alpha_2)$$

Eine weitere Eigenschaft der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ ist die folgende:

$$E_1^*(1) = \min_{\alpha \in [1,2]} E_1^*(\alpha)$$

Dazu beachte man nochmals die Abbildungen 18-21 und die letzten beiden Eigenschaften. Somit gilt auch:

$$E_2^*(2) = \max_{\alpha \in [1,2]} E_2^*(\alpha)$$

Seien $(E_1^*, k_1^*)(1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $(E_2^*, k_2^*)(2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei Sattelpunkte des deterministischen Modells \mathfrak{M}_2 , so entwickelt sich ein Haushalt mit einer beliebigen Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten α und einer Produktionsfunktion vom Typ 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E < E_1^*(1)$$

immer in Richtung des großen stabilen Gleichgewichtes $\overline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert keine Armutsschleife. Verfügt der Haushalt jedoch über eine Produktionsfunktion vom Typ 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(2),$$

so entwickelt er sich immer zum kleinen stabilen Gleichgewicht $\underline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert nur die Armutsschleife.

Am Ende dieses Kapitels lässt sich festhalten, dass sich die Ergebnisse der beiden Modelle unter Annahme (A1) (\mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2) inhaltlich decken.

5.4 Value Function Iteration mit stochastischen Programmen

Die nachfolgenden stochastischen Optimierungsprobleme (36) und (38) werden mit dem Wertfunktions Iterations Algorithmus numerisch berechnet. Dabei greift man wieder auf das Werk von M. Miranda und P. Fackler [14]

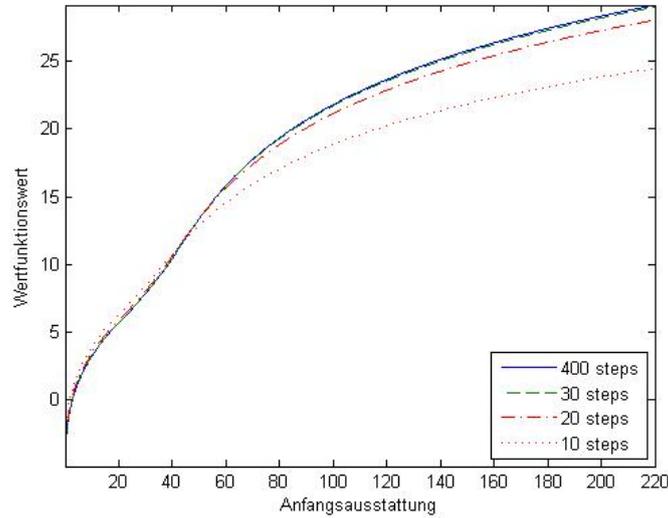


Abbildung 34: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

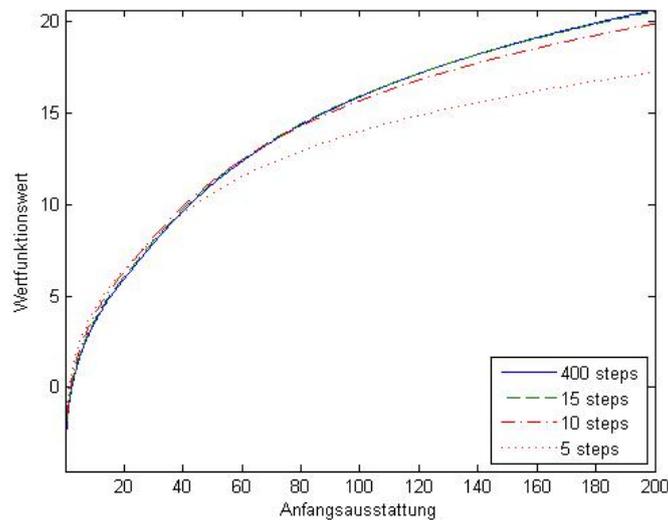


Abbildung 35: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 19.4$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

zurück. Sei k die Zustandsvariable und κ die Kontrollvariable. Als Startwert (Vektor) in diesem Kapitel dient $v_0(k)$. Beim Wertfunktions Iterations Algorithmus wird die nachfolgende Rekursionsgleichung wiederholt angewendet. Man sucht also nach dem Fixpunkt eben dieser Rekursionsgleichung.

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot \mathbb{E}\left[v_j(\theta \cdot \kappa)\right] \quad j = 0, \dots, T$$

$$v_0(k) = u\left(f(\alpha, k) + (1 - \delta)k\right)$$

Es wird weiters das Abbruchkriterium $\|v_{t+1} - v_t\| \leq \frac{1}{100}$ verwendet.

Sei $\Gamma(\cdot)$ eine Korrespondenz auf \mathbb{R}_+ , die definiert ist durch

$$\Gamma(k) \stackrel{def}{=} \left\{x \in G : 0 \leq x \leq f(\alpha, k) + (1 - \delta)k\right\}$$

für alle $k \in \mathbb{R}_+$. Weiters ist $G = \left\{\lambda \cdot g \in \mathbb{R}_+ : \lambda \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}\right\}$ mit $g \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$.

Im stochastischen dynamischen Modell mit i.i.d. Schocks gelten die beiden Annahmen (A2) und (A3) d.h.

$$\Theta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_L\}$$

Somit gilt für $j = 0, \dots, T$

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot \sum_{l=1}^L \mathbb{P}(\theta = \vartheta_l) \cdot v_j(\vartheta_l \cdot \kappa)$$

Nach T Iterationen erhält man die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ durch das nachstehende Optimierungsproblem.

$$\phi(k) \simeq \arg \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot \mathbb{E}\left[v_T(\theta \cdot \kappa)\right]$$

Außerdem erhält man die Wertfunktion $V(\cdot)$ durch

$$V(k) \simeq \max_{\kappa \in \Gamma(k)} u\left(f(\alpha, k) - \kappa + (1 - \delta)k\right) + \beta \cdot \mathbb{E}\left[v_T(\theta \cdot \kappa)\right]$$

Das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) lässt sich mit Hilfe der folgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln\left(\max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\} - \kappa + \frac{9}{10}k\right) + \frac{9}{10} \cdot \mathbb{E}\left[v_j(\kappa)\right]$$

für $j = 0, \dots, T$

Setze $v_0(k) = \ln(\max\{\alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E\} + \frac{9}{10}k)$ als Startwert ein. Die diskretisierte zulässige Aktionskorrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} + (1 - \delta)k \right\}$$

Die Abbildung (34) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (38) mit den Parametern $\gamma_H = 0.75$, $\gamma_L = 0.25$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ nach 10, 20, 30 und maximal 400 Schritten. Auf der Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert.

Analog lässt sich das stochastische diskontierte dynamische Programm (34) mit Hilfe der nachfolgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln\left(\max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} - \kappa + \frac{9}{10}k\right) + \frac{9}{10} \cdot \mathbb{E}\left[v_j(\kappa)\right]$$

für $j = 0, \dots, T$

Als Startwert setze $v_0(k) = \ln(\max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} + \frac{9}{10}k)$. Die diskretisierte Korrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max\{\alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E\} + (1 - \delta)k \right\}$$

Die Abbildung (35) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 19.4$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ nach 5, 10, 15 und maximal 400 Schritten. Auch auf dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert. Dieses spezielle Konvergenzverhalten weisen alle stochastischen diskontierten dynamischen Programme in dieser Arbeit auf.

5.5 Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1

Das Verhalten des Haushalts im stochastischen dynamischen Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1, welches auch als Modell \mathfrak{M}_1 unter den Annahmen (A2) und (A3) bezeichnet wird, soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende stochastische Verhaltensgleichung des Haushalts

numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \phi(k_t) \quad \forall t$$

Das Konsumverhalten des Haushalts erhält man durch die nachfolgende Verhaltensgleichung:

$$c_t = \psi(k_t) = f(\alpha, k_t) - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad \forall t$$

Weiters lässt sich das Investitionsverhalten des Haushalts durch die Gleichung

$$i_t = \phi(k_t) - (1 - \delta)k_t \quad \forall t$$

beschreiben.

Das stochastische Verhalten des Kapitalstocks setzt sich aus dem Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ und der Politikfunktion $\phi(k)$ des Haushalts zusammen. Dazu gilt es, das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) zu lösen. Das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) des stochastischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 1 in das Problem (30).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln \left(\max\{\alpha k_t^{\gamma^L}, \alpha k_t^{\gamma^H} - E\} - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10}k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (36)$$

Wobei $\Phi(s) = \{\kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq \max\{\alpha s^{\gamma^L}, \alpha s^{\gamma^H} - E\} + \frac{9}{10}s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$.

Im Folgenden wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) unter der Annahme (A4) numerisch berechnet. Man erhält dadurch die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ und untersucht mit deren Hilfe das jeweilige Modell auf θ -Gleichgewichte.

Definition 3 (θ -Gleichgewicht). *Unter einem θ -Gleichgewicht versteht man in dieser Arbeit immer einen Kapitalstock k_τ für den gilt:*

$$\theta_{\tau+1} = 1 \Rightarrow k_{\tau+1} = k_\tau$$

Man beachte, dass ein θ -Gleichgewicht von der Realisation der Zufallsvariable θ abhängt.

Die Fixpunkte der Politikfunktion $\phi(\cdot)$ repräsentieren somit die θ -Gleichgewichte des Modells \mathfrak{M}_1 unter den Annahmen (A2) und (A3). Dabei geht man der Frage nach, ob in diesen θ -Gleichgewichten - jeweils für sich betrachtet - entweder die höhere oder die niedrigere Technologie verwendet wird. Nochmals zur Erinnerung: Die Verwendung einer niedrigeren Technologie steht für einen armen Haushalt, die Verwendung einer höheren Technologie hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

Anmerkung 1 (θ -Gleichgewicht). *Erstens, ein θ -Gleichgewicht kann als Grenze verstanden werden. Der Kapitalstockprozess wird über diese nicht hinaus wachsen. D.h. sei k_τ ein θ -Gleichgewicht und $0 < k_0 \leq k_\tau$, dann gilt*

$$k_t \leq k_\tau \quad \forall t.$$

Zweitens strebt der Haushalt über die Zeit stets danach, sich in Richtung stabiles θ -Gleichgewicht zu entwickeln. Nur ein negativer Schock $\theta_t < 0$ kann ihn von diesem Entwicklungspfad abbringen, vergleiche dazu Abbildung 59 auf Seite 99 (Trajektorie eines Kapitalstockprozesses).

Konsum und Investition stehen zueinander über die Budgetgleichung in Beziehung. Die Budgetgleichung hat die folgende Form:

$$c_t + i_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t$$

Dividiert man beide Seiten durch das Einkommen zum Zeitpunkt t , d.h. $f(\alpha, k_t)$, dann erhält man die Gleichung

$$\frac{c_t}{f(\alpha, k_t)} + \frac{i_t}{f(\alpha, k_t)} = 1 \quad \forall t.$$

Die Funktion \mathbf{c} sei für alle $k > 0$ definiert durch $\mathbf{c}(k) \cdot f(\alpha, k) = \psi(k)$. Indem man nun $\mathbf{c}(k)$ in die obige Gleichung einsetzt, erhält man

$$\mathbf{c}(k) + \frac{i_t}{f(\alpha, k_t)} = 1 \quad \forall t.$$

Somit gilt: Um das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) eines Haushalts zu analysieren, reicht es die Funktion $\mathbf{c}(k)$ (Konsumquote) zu betrachten.

Um das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) berechnen zu können, werden die Parameter γ_H und γ_L auf $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $\gamma_L = \frac{1}{4}$ fixiert. Weiters gelten die Annahmen (A4) und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Die Abbildung 36 zeigt die Politikfunktion $\phi(k)$ von (36) mit den Parametern (exogenen Variablen) $E = 7.8$ und $\alpha = 1$ und die Abbildung 37 zeigt die dazugehörige Politikfunktion $\psi(k)$. Auf der Abbildung 36 (37) befindet sich auf der x-Achse der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Abbildung 37: Kapitalstock zum Zeitpunkt t) als Zustandsvariable, auf der y-Achse der Kapitalstock vor Schock zum Zeitpunkt $t + 1$ (Konsum zum Zeitpunkt t) als Kontrollvariable. Die durchgehende Linie ist die Politikfunktion. Die strichlierte Linie repräsentiert die Winkelhalbierung von \mathbb{R}_+ . Die punktierte dritte Linie bildet gemeinsam mit der x-Achse die zulässige Aktionskorrespondenz. Auf der Abbildung 36 erkennt man, dass die Politikfunktion einen instabilen Fixpunkt und zwei stabile Fixpunkte besitzt.

Die Abbildung 38 zeigt die Funktion $\mathbf{c}(k)$ für die numerisch berechnete Politikfunktion $\phi(k)$ von Abbildung 36. Die Abbildung 39 zeigt die dazugehörige Funktion $1 - \mathbf{c}(k)$ (die Sparquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock).

Die x-Achse der Abbildung 38 bildet gemeinsam mit der strichlierten Linie ein Band. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt lediglich einen Teil seines Einkommens $f(\alpha, k_t)$, sein Vermögen $(1 - \delta)k_t$ (zum Zeitpunkt t) bleibt unangetastet. Oberhalb der strichlierten Linie verbraucht er zusätzlich zu seinem Einkommen auch einen Teil seines Vermögens.

Die beiden strichlierten Linien der Abbildung 39 bilden ebenfalls gemeinsam ein Band, innerhalb dessen der Haushalt eine positive Investition $i_t > 0$ tätigt. Von einer positiven Investition spricht man, wenn dem Kapitalstock neues Kapital zugeführt wird. Bei einer negativen Investition $i_t < 0$ hingegen verringert sich das Vermögen $(1 - \delta)k_t$ um diesen Wert. Die punktierte Linie beschreibt die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$ und in Abhängigkeit vom Kapitalstock (zum Zeitpunkt t). Nimmt diese punktierte Linie den Wert 1 an, so entspricht der Wert der Abschreibung dem Einkommen. Die Abschreibung im Verhältnis zum Einkommen steigt innerhalb des Bandes zunächst zum Wert 1 an, fällt dann langsam ab und bleibt sodann stabil. Die verbleibende (nicht unterbrochene) Linie stellt die Sparquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock $1 - \mathbf{c}(k)$ zum Zeitpunkt t dar. Liegt diese oberhalb der punktierten Linie, so wächst der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} > k_t$. Liegt sie jedoch unterhalb der punktierten Linie, so verringert sich der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} < k_t$. Weiters ist zu beachten, dass es sich beim Schnittpunkt der beiden Linien um einen Fixpunkt handelt. Somit kann man auf der Abbildung 39 die drei Gleichgewichte erkennen, vergleiche dazu auch Abbildung 36.

Die Konsumquote (Sparquote) in Abhängigkeit vom Kapitalstock $c(k)$ auf Abbildung 38 (Abbildung 39) steigt (fällt) zunächst bis zu ihrem Maximum (Minimum), fällt (steigt) dann unter (über) die (untere) strichlierte Linie und beginnt schließlich innerhalb des Bandes wieder zu steigen (sinken). Auch hier liegt der Wechsel des Haushalts von der niedriger entwickelten Technologie f_L auf die höher entwickelte Technologie f_H ungefähr beim Maximum der Konsumquote, gleichzeitig reduziert (erhöht) er an dieser Stelle seine Konsumquote (Sparquote). Weiters wird an diesem Punkt aus einem armen Haushalt ein nicht-armer Haushalt.

Vergleicht man das deterministische Modell mit dem stochastischen, so lässt sich feststellen, dass der Haushalt im zweiten die Tendenz zu höheren Konsumquoten besitzt.

In diesem Kapitel gehen wir zwei weiteren getrennten Fragestellungen nach: Erstens, welchen Einfluss hat die Veränderung der Fixkosten E auf die Gleichgewichte und, zweitens, welchen Einfluss haben die persönlichen Fähigkeiten α des Haushalts auf die Gleichgewichte?

Beginnen wir mit der Frage, welchen Einfluss die Fixkosten E auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die θ -Gleichgewichte des stochastischen dynamischen Modells mit Produktionsfunktion vom Typ 1 unter Annahme (A4).

Sei nun der Parameter E (Fixkosten) eine exogene Variable und α fix. Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ heißt θ -Gleichgewichtskorrespondenz auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ und ist durch

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \phi_{E, \alpha}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E, \alpha}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen stochastischen diskontierten dynamischen Programm (36) mit gegebenem E als Fixkosten. Um diese Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha \in \{1, 1.2, 1.5, 1.8, 2\}$ für verschiedene Werte von E . Aus den Ergebnissen erhält man die Abbildungen 40 - 45 für verschiedene Werte von $\alpha : 1 \leq \alpha \leq 2$ (persönliche Fähigkeiten des Haushalts).

Auf den nun folgenden Abbildungen 40 - 45 finden sich auf der x-Achse die Fixkosten E , auf der y-Achse die θ -Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters sind mehrere Linien zu erkennen, wobei die punktierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h.

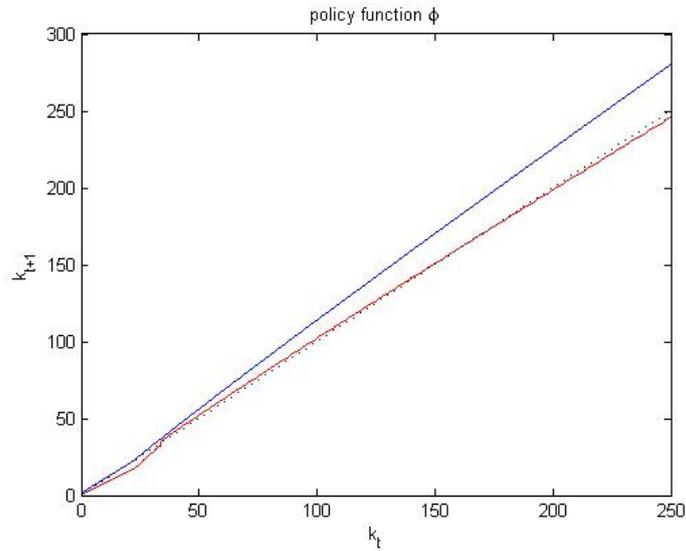


Abbildung 36: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ϕ von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

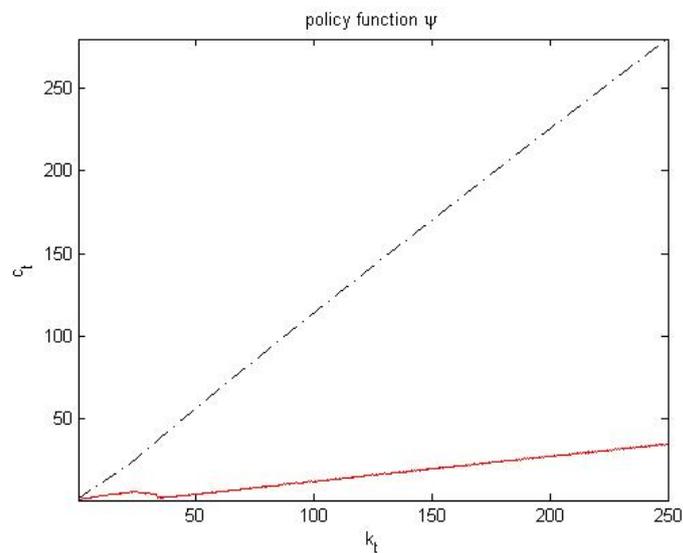


Abbildung 37: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ψ von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

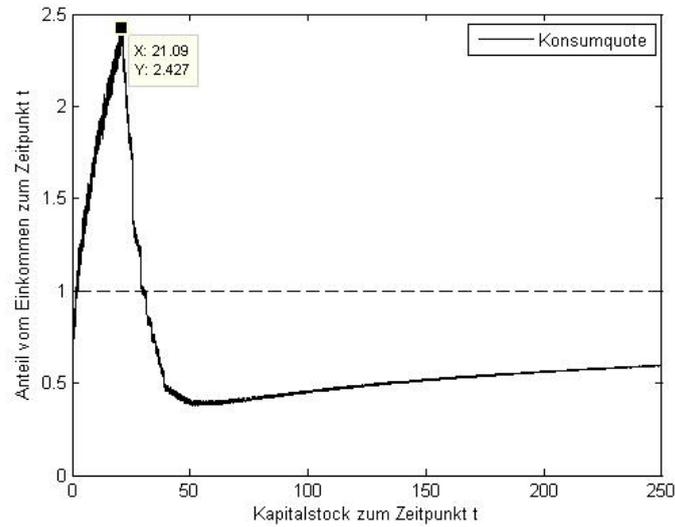


Abbildung 38: Die Abbildung zeigt das Konsumverhalten von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

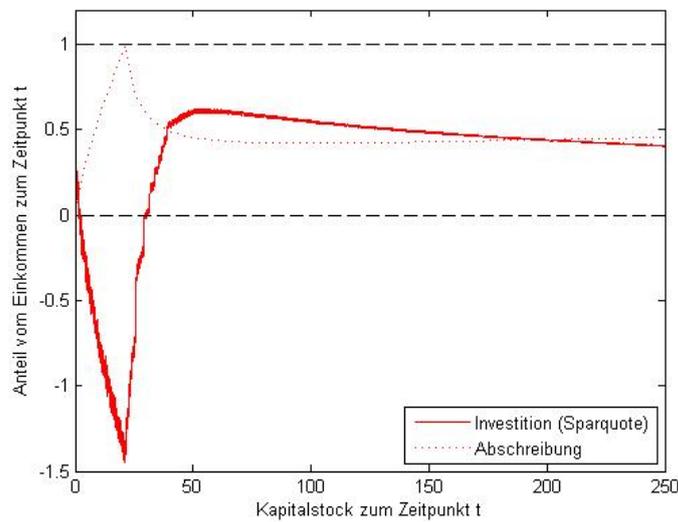


Abbildung 39: Die Abbildung zeigt das Sparverhalten von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

jeder Punkt unterhalb dieser Linie stehen für eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert er die höher entwickelte Technologie. Die anderen Linien stellen die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ dar. Aus den Abbildungen lässt sich erkennen, dass die jeweilige Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Auch hier kann die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ in drei stetige Funktionen unterteilt werden. Die unterste Funktion $\underline{\theta EQ}$ verläuft ungefähr parallel zur x-Achse und steht hier für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte. Haushalte, die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion $\overline{\theta EQ}$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und diese Linie befindet sich - wie deutlich sichtbar ist - oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte Funktion stellt die instabilen θ -Gleichgewichte dar, diese Funktion wird mit θEQ bezeichnet. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie und findet kein negativer Schock statt d.h. $\theta = 1$, so wird er sich zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum kleinen stabilen θ -Gleichgewicht. Dabei spielt es auch keine Rolle, ob es zu einem negativen Schock $\theta < 1$ kommt. Bei einem negativen Schock kann der Kapitalstock k_t unter das kleine stabile θ -Gleichgewicht fallen. Der Kapitalstock $k_t : 0 < k_t < \underline{\theta EQ}(E, \alpha)$ nähert sich dem kleinen stabilen θ -Gleichgewicht $\underline{\theta EQ}(\cdot)$ wieder falls kein negativer Schock auftritt.

Befindet sich ein Haushalt in dem Feld zwischen der Armutsgrenze und der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(\cdot)$, so gilt dieser nicht als arm, aber seine Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut (kleines stabiles θ -Gleichgewicht). Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(\cdot)$, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln falls kein negativer Schock stattfindet d.h. $\theta = 1$.

Sinken die Fixkosten $E \downarrow$, so trifft die Funktion der kleinen stabilen θ -Gleichgewicht $\underline{\theta EQ}$ und die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(\cdot)$ aufeinander, außerdem schneidet die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(\cdot)$ die Armutsgrenze. Verringert man die Fixkosten $E \downarrow$ weiter, so verbleibt nur noch das große stabile θ -Gleichgewicht. Dieser Fall ist auf den Abbildungen 40 - 45 zu sehen.

Steigen hingegen die Fixkosten $E \uparrow$, so wird sich die Funktion der großen sta-

bilen θ -Gleichgewichte $\overline{\theta EQ}$ mit der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(\cdot)$ vereinigen. Erhöht man die Fixkosten $E \uparrow$ schließlich erneut, so verbleibt nur noch das kleine stabile θ -Gleichgewicht. Dies ist auf der Abbildung 40 zu erkennen.

Die Funktion $s_1^\theta : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ heißt in der vorliegenden Arbeit Funktion der kleinen θ -Sattelpunkte, während man die Funktion $s_2^\theta : \alpha \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ hier Funktion der großen θ -Sattelpunkte nennt¹¹.

Auf Grund der Abbildungen 40 - 45 hat die θ -Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Form:

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha) = \begin{cases} \{\overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\alpha) \\ \{k_1^*(\alpha), \overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_1^*(\alpha) \\ \{\underline{\theta EQ}(E, \alpha), \theta EQ(E, \alpha), \overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E_1^*(\alpha) < E < E_2^*(\alpha) \\ \{k_2^*(\alpha), \underline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_2^*(\alpha) \\ \{\underline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E_2^*(\alpha) < E < +\infty \end{cases}$$

Weiters gilt auch im stochastischen Modell \mathfrak{M}_1 :

$$\begin{aligned} k_l^*(\alpha) &= \theta EQ(E_l^*, \alpha) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\alpha) &= \underline{\theta EQ}(E_1^*, \alpha) \\ k_2^*(\alpha) &= \overline{\theta EQ}(E_2^*, \alpha) \end{aligned}$$

Die Werte für $(E_1^*, k_1^*)(\alpha)$ und $(E_2^*, k_2^*)(\alpha)$ kann man aus der jeweiligen Abbildung (40 - 45) ablesen.

Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ kann einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annehmen. Um die Abbildungen 40 - 45 zu erhalten, wurde die Gleichgewichtskorrespondenz für drei verschiedene Werte von α berechnet d.h. $\alpha \in \{1, 1.2, 1.5, 1.8, 2\}$.

Zusammenfassend kann man folgende Aussagen treffen:

$$\begin{aligned} k_t < \theta EQ(E, \alpha) \text{ und } \theta_{t+1} = 1 &\Rightarrow \left| k_{t+1} - \underline{\theta EQ}(E, \alpha) \right| \leq \left| k_t - \underline{\theta EQ}(E, \alpha) \right| \\ k_t > \theta EQ(E, \alpha) \text{ und } \theta_{t+1} = 1 &\Rightarrow \left| k_{t+1} - \overline{\theta EQ}(E, \alpha) \right| \leq \left| k_t - \overline{\theta EQ}(E, \alpha) \right| \end{aligned}$$

¹¹Alternative Notation: $(E_l^*, k_l^*)(\alpha) = (E_l^*(\alpha), k_l^*(\alpha)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ für $l = 1, 2$

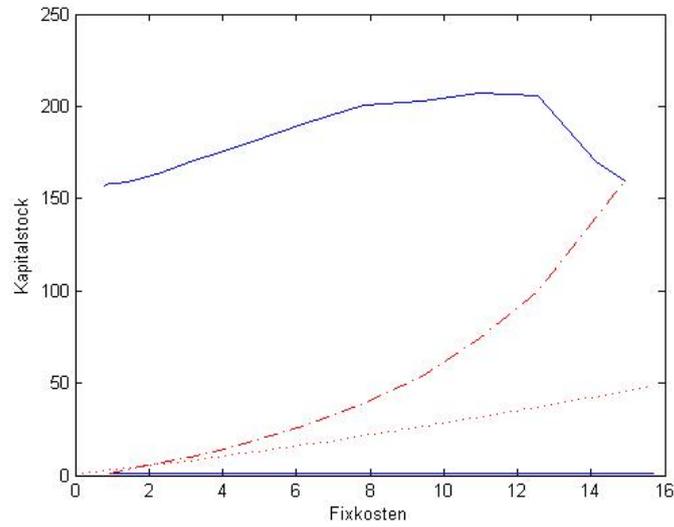


Abbildung 40: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

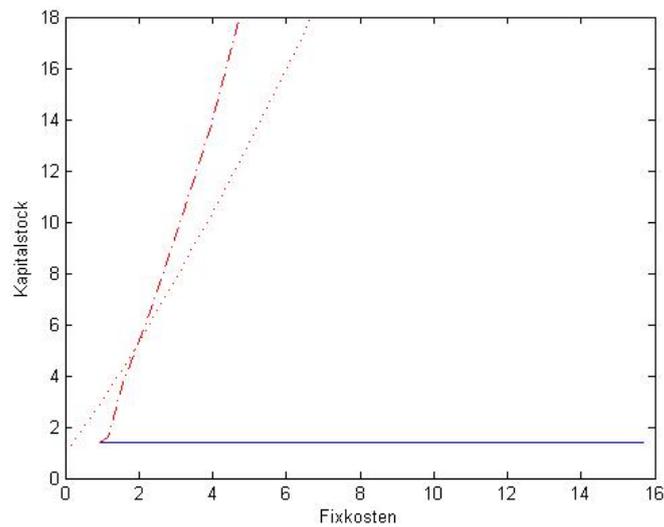


Abbildung 41: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

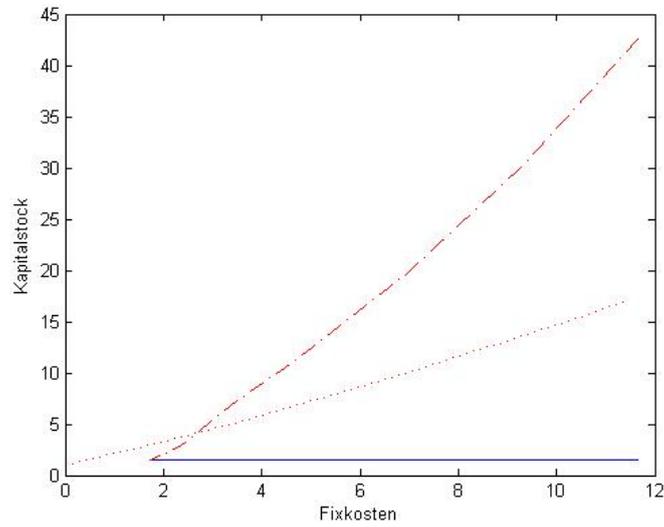


Abbildung 42: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1.2$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

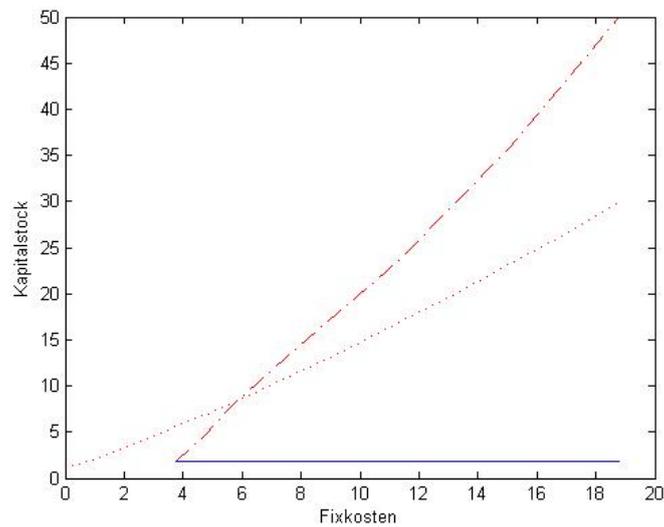


Abbildung 43: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1.5$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

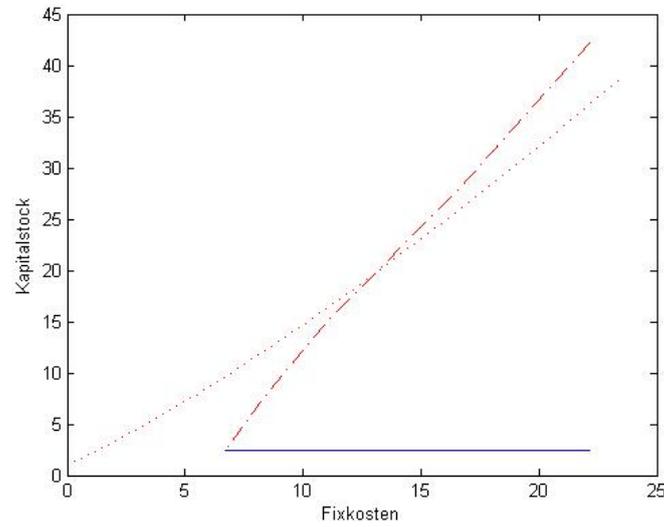


Abbildung 44: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

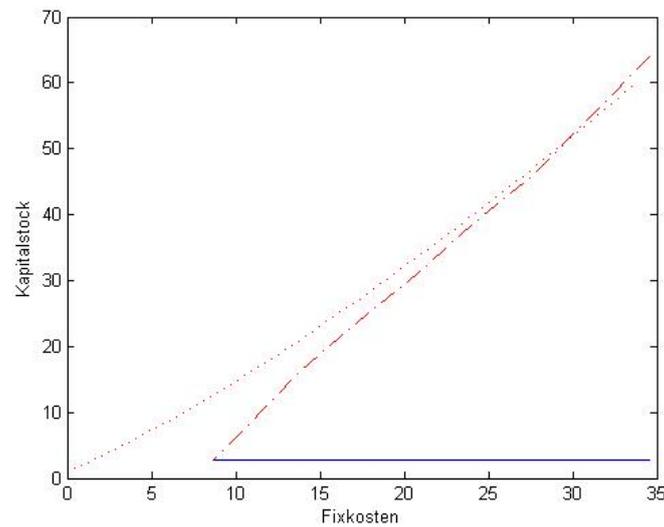


Abbildung 45: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 2$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

für alle $E \in \mathbb{R}_+ : E_1^*(\alpha) \leq E \leq E_2^*(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+ : 1 \leq \alpha \leq 2$. D.h. verfügt der Haushalt mit den persönlichen Fähigkeiten α über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(\alpha)$ jedoch größer oder gleich als $E_1^*(\alpha)$, so bestimmen der Kapitalstock k_t und der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gemeinsam seine weitere Entwicklung.

Sind die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 1 größer als der große θ -Sattelpunkt $E_2^*(\alpha)$ und tritt kein negativer Schock auf, so wird sich ein Haushalt - unabhängig von der Kapitalausstattung k_t - immer zum kleinen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln d.h.

$$\theta_{t+1} = 1 \Rightarrow |k_{t+1} - \underline{\theta EQ}(E, \alpha)| \leq |k_t - \underline{\theta EQ}(E, \alpha)|$$

(armes Gleichgewicht).

Sind hingegen die Fixkosten E einer Produktionsfunktion vom Typ 1 kleiner als der kleine θ -Sattelpunkt $E_1^*(\alpha)$ und tritt auch hier kein negativer Schock auf, so wird sich ein Haushalt - wieder unabhängig von seiner Kapitalausstattung k_t - immer zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln d.h.

$$\theta_{t+1} = 1 \Rightarrow |k_{t+1} - \overline{\theta EQ}(E, \alpha)| \leq |k_t - \overline{\theta EQ}(E, \alpha)|$$

(nicht-armes Gleichgewicht).

Nun greifen wir erneut die Frage auf, welchen Einfluss die persönlichen Fähigkeiten des Haushalts auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die θ -Gleichgewichte des Modells.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die folgende Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\alpha, E)$ ablesen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_1^*(\alpha_1) < E_1^*(\alpha_2)$$

Man beachte dazu die Abbildungen 40 - 45. Eine weitere Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\alpha, E)$ ist die folgende:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_2^*(\alpha_1) < E_2^*(\alpha_2)$$

Auch dies ist aus den oben erwähnten Abbildungen ersichtlich. Zudem besitzt die θ -Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Eigenschaft:

$$E_1^*(1) = \min_{\alpha \in [1,2]} E_1^*(\alpha)$$

Dazu beachte man erneut die Abbildungen 40 - 45. Aus den gleichen Gründen wie zuvor gilt auch:

$$E_2^*(2) = \max_{\alpha \in [1,2]} E_2^*(\alpha)$$

Seien $(E_1^*, k_1^*)(1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $(E_2^*, k_2^*)(2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei θ -Sattelpunkte des stochastischen Modells \mathfrak{M}_1 . Falls kein negativer Schock ($\theta < 1$) eintritt, entwickelt sich ein Haushalt mit einer beliebigen Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten α und Kapital k_t sowie einer Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E < E_1^*(1)$$

immer in Richtung des großen θ -Gleichgewichtes. Das bedeutet also in diesem Fall, dass seine Entwicklung unabhängig ist von Kapitalausstattung $k_t \in \mathbb{R}_+$ und persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. Es existiert dann keine Armutsfalle. Verfügt der Haushalt jedoch über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(2),$$

so entwickelt er sich immer zum kleinen stabilen θ -Gleichgewicht falls $\theta = 1$ und zwar wieder unabhängig von der Kapitalausstattung $k_t \in \mathbb{R}_+$ und der persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert nur die Armutsfalle.

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(2)$ jedoch größer oder gleich als $E_1^*(1)$ d.h. $E_1^*(1) \leq E \leq E_2^*(2)$, so bestimmt der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, die Anfangsausstattung k_0 und die persönlichen Fähigkeiten α seine Entwicklung.

5.6 Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2

Das Verhalten des typischen Haushalts im stochastischen dynamischen Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2, welches auch als Modell \mathfrak{M}_2 unter den Annahmen (A2) und (A3) bezeichnet wird, soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende stochastische Verhaltensgleichung des Haushalts numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \phi(k_t) \quad \forall t$$

Dazu gilt es, das stochastische diskontierte dynamische Programm (38) zu lösen. Das stochastische diskontierte dynamische Programm (38) des stochastischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 in das Problem (30).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln \left(\max \{ \alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E \} - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10} k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (38)$$

Wobei $\Phi(s) = \{ \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq \max \{ \alpha A s^\gamma, \alpha B s^\gamma - E \} + \frac{9}{10} s \}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$.

Im Folgenden wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (38) unter der Annahme (A4) numerisch berechnet. Man erhält dadurch die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ und untersucht mit deren Hilfe das jeweilige Modell auf stochastische Gleichgewichte.

Zur Wiederholung: Unter einem θ -Gleichgewicht versteht man in dieser Arbeit immer einen Kapitalstock k_τ , welcher θ -Gleichgewicht heißt sofern gilt:

$$\theta_{\tau+1} = 1 \Rightarrow k_{\tau+1} = k_\tau$$

Die Fixpunkte der Politikfunktion $\phi(\cdot)$ repräsentieren somit die θ -Gleichgewichte des Modells \mathfrak{M}_2 unter den Annahmen (A2) und (A3). Dabei geht man der Frage nach, ob in diesen θ -Gleichgewichten - jeweils für sich betrachtet - entweder die höhere oder die niedrigere Technologie verwendet wird. Nochmals zur Erinnerung: Die Verwendung einer niedrigeren Technologie steht für einen armen Haushalt, die Verwendung einer höheren Technologie hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

Es gilt auch hier: Um das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) eines Haushalts zu analysieren, reicht es die Funktion $\mathbf{c}(k)$ (die Konsumquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock) zu betrachten.

Um das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) berechnen zu können, werden die Parameter auf $\gamma = \frac{3}{10}$, $A = 1$ und $B = 10$ fixiert. Weiters

gelten die Annahmen (A4) und $p \in \left\{ \sqrt[3]{\frac{85}{100}} \right\}$.

Die Abbildung 46 zeigt die Politikfunktion $\phi(k)$ von (36) mit den Parametern (exogenen Variablen) $E = 7.8$ und $\alpha = 1$. Die dazugehörige Politikfunktion $\psi(k)$ ist auf der Abbildung 47 ersichtlich. Auf der Abbildung 46 (47) befindet sich auf der x-Achse der Kapitalstock zum Zeitpunkt t (Kapitalstock zum Zeitpunkt t) als Zustandsvariable, auf der y-Achse der Kapitalstock vor Schock zum Zeitpunkt $t + 1$ (Konsum zum Zeitpunkt t) als Kontrollvariable. Die durchgehende Linie ist die Politikfunktion. Die strichlierte Linie repräsentiert die Winkelhalbierung von \mathbb{R}_+ . Die punktierte dritte Linie bildet gemeinsam mit der x-Achse die zulässige Aktionskorrespondenz. Die Politikfunktion $\phi(k)$ auf Abbildung 46 verfügt über einen instabilen Fixpunkt und zwei stabile Fixpunkte.

Die Abbildung 48 zeigt die Funktion $\mathbf{c}(k)$ für die numerisch berechnete Politikfunktion $\phi(k)$ von Abbildung 46. Die Abbildung 49 zeigt die dazugehörige Funktion $1 - \mathbf{c}(k)$ (Sparquote).

Die x-Achse der Abbildung 48 bildet gemeinsam mit der strichlierten Linie ein Band. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt lediglich einen Teil seines Einkommens $f(\alpha, k_t)$. Oberhalb der strichlierten Linie verbraucht er zusätzlich zu seinem Einkommen auch einen Teil seines Vermögens $(1 - \delta)k_t$ zum Zeitpunkt t .

Die beiden strichlierten Linien der Abbildung 49 bilden ebenfalls gemeinsam ein Band, innerhalb dessen der Haushalt eine positive Investition $i_t > 0$ tätigt. Die punktierte Linie beschreibt die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$ und in Abhängigkeit vom Kapitalstock zum Zeitpunkt t . Die Abschreibung im Verhältnis zum Einkommen steigt innerhalb des Bandes zunächst an, fällt dann langsam ab und bleibt sodann stabil. Die verbleibende (nicht unterbrochene) Linie stellt die Sparquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock $1 - \mathbf{c}(k)$ zum Zeitpunkt t dar. Liegt diese oberhalb der punktierten Linie, so wächst der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} > k_t$. Liegt sie jedoch unterhalb der punktierten Linie, so verringert sich der Kapitalstock, d.h. $k_{t+1} < k_t$. Weiters ist zu beachten, dass es sich beim Schnittpunkt der beiden Linien um einen Fixpunkt handelt. Somit kann man auf der Abbildung 49 die drei Gleichgewichte erkennen, vergleiche dazu auch Abbildung 46.

Die Konsumquote (Sparquote) in Abhängigkeit vom Kapitalstock $\mathbf{c}(k)$ auf Abbildung 48 (Abbildung 49) steigt (fällt) zunächst bis zu ihrem Maximum

(Minimum), fällt (steigt) dann unter (über) die (untere) strichlierte Linie und beginnt schließlich innerhalb des Bandes wieder zu steigen (sinken). Auch hier liegt der Wechsel des Haushalts von der niedriger entwickelten Technologie f_L auf die höher entwickelte Technologie f_H ungefähr beim Maximum der Konsumquote, gleichzeitig reduziert (erhöht) er an dieser Stelle seine Konsumquote (Sparquote).

In diesem Kapitel gehen wir zwei weiteren getrennten Fragestellungen nach: Erstens, welchen Einfluss hat die Veränderung der Fixkosten E auf die Gleichgewichte und, zweitens, welchen Einfluss haben die persönlichen Fähigkeiten α des Haushalts auf die Gleichgewichte?

Um das stochastische diskontierte dynamische Programm (36) berechnen zu können, werden die Parameter auf $\gamma = \frac{25}{100}$, $A = 1$, $B = 10$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ fixiert.

Beginnen wir mit der Frage, welchen Einfluss die Fixkosten E auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die θ -Gleichgewichte des stochastischen dynamischen Modells mit Produktionsfunktion vom Typ 2 unter Annahme (A4).

Sei nun der Parameter E (Fixkosten) eine exogene Variable und α fix. Die Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ heißt θ -Gleichgewichtskorrespondenz auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ und ist durch

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \phi_{E, \alpha}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E, \alpha}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen stochastischen diskontierten dynamischen Programm (38) mit gegebenem E als Fixkosten. Um diese θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (38) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ sowie $\alpha \in \{1, 1.5, 2\}$ und verschiedene Werte von E . In den Abbildungen 50 - 53 ändert sich jeweils der α -Wert (persönliche Fähigkeiten des Haushalts).

Auf den nun folgenden Abbildungen 50 - 53 finden sich auf der x-Achse die Fixkosten E , auf der y-Achse die θ -Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters sind mehrere Linien zu sehen, wobei die punktierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert der

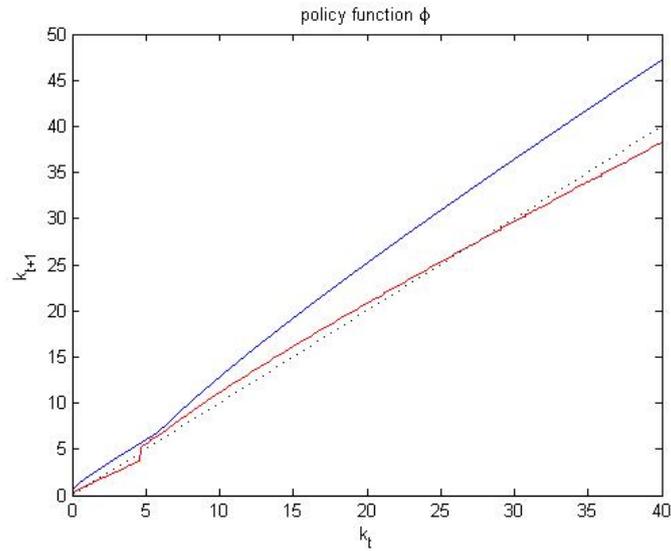


Abbildung 46: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ϕ von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

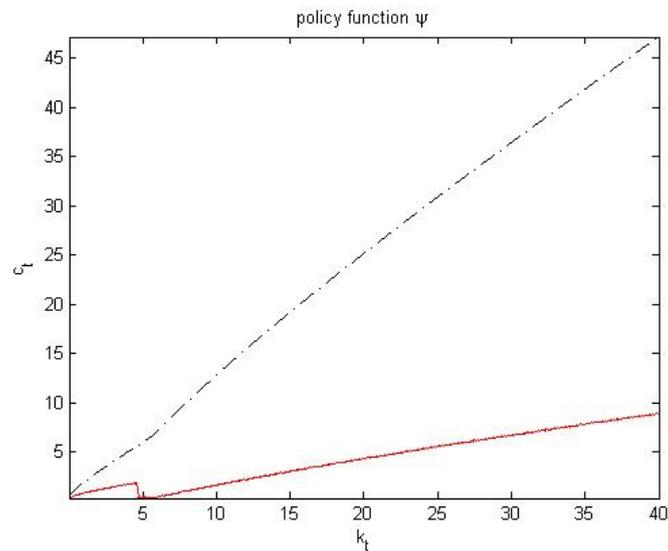


Abbildung 47: Die Abbildung zeigt die Politikfunktion ψ von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

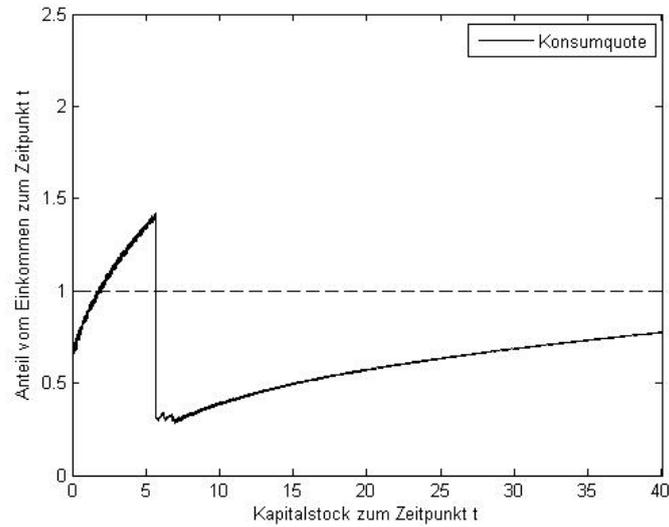


Abbildung 48: Die Abbildung zeigt das Konsumverhalten von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

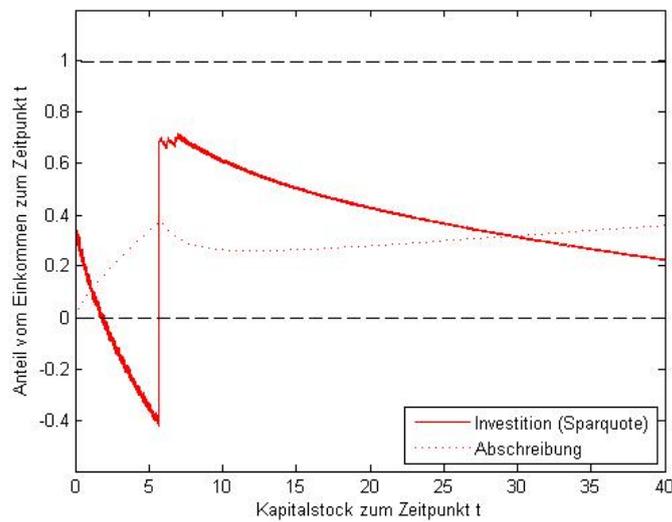


Abbildung 49: Die Abbildung zeigt das Sparverhalten von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.3$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die anderen Linien stellen die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ dar. Aus den Abbildungen lässt sich erkennen, dass die jeweilige Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Auch hier kann die θ -Gleichgewichtskorrespondenz in drei stetige Funktionen unterteilt werden: Die unterste Funktion $\overline{\theta EQ}(\cdot)$ verläuft ungefähr parallel zur x-Achse und steht für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte. Haushalte, die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion $\overline{\theta EQ}$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und diese Linie befindet sich - wie deutlich erkennbar ist - oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte Funktion stellt die instabilen θ -Gleichgewichte dar. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie und findet kein negativer Schock $\theta < 1$ statt, so wird er sich zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum θ -Gleichgewicht. Dabei spielt es auch keine Rolle, ob es zu einem negativen Schock kommt. Diese Funktion wird mit $\theta EQ(\cdot)$ bezeichnet.

Befindet sich ein Haushalt in dem Feld zwischen der Armutsgrenze und der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt dieser nicht als arm, aber seine Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut (kleines stabiles θ -Gleichgewicht). Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln vorausgesetzt es findet zudem kein negativer Schock $\theta < 1$ statt.

Sinken die Fixkosten $E \downarrow$, so treffen die Funktion der kleinen stabilen θ -Gleichgewichte und die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte aufeinander, außerdem schneidet die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte die Armutsgrenze. Verringert man die Fixkosten $E \downarrow$ weiter, so verbleibt nur noch das große stabile θ -Gleichgewicht. Dieser Fall ist auf den Abbildungen 50 - 53 zu sehen.

Steigen hingegen die Fixkosten $E \uparrow$, so wird sich die Funktion der großen stabilen θ -Gleichgewichte mit der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte vereinigen. Erhöht man die Fixkosten $E \uparrow$ schließlich erneut, so verbleibt nur noch das kleine stabile θ -Gleichgewicht.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die Form der θ -Gleichge-

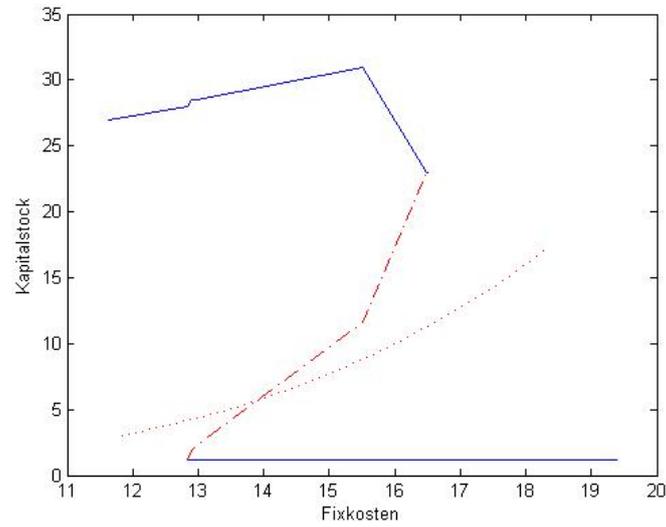


Abbildung 50: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

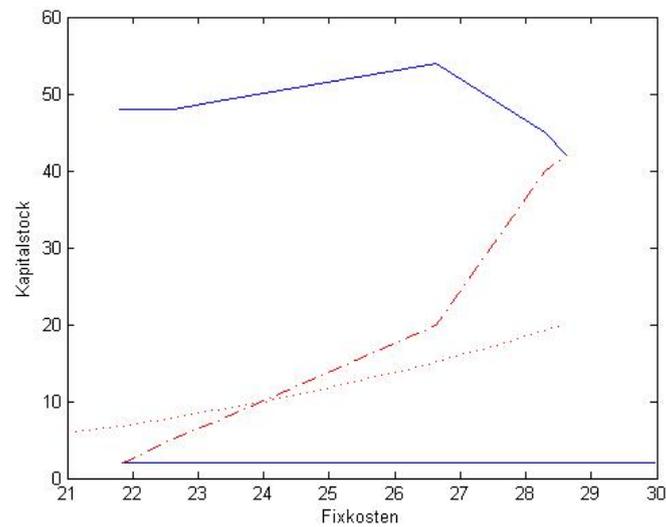


Abbildung 51: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1.5$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

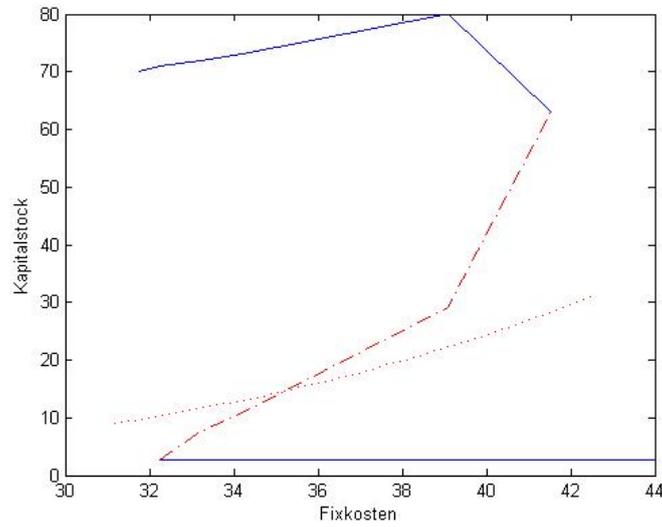


Abbildung 52: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 2$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

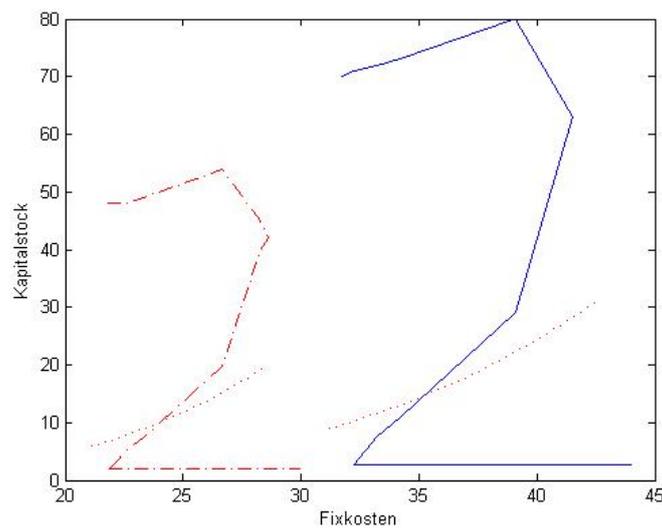


Abbildung 53: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (38) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha \in \{1.5, 2\}$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

wichtskorrespondenz \mathbf{EQ}_θ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ erkennen.

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha) = \begin{cases} \{\overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\alpha) \\ \{k_1^*(\alpha), \overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_1^*(\alpha) \\ \{\overline{\theta EQ}(E, \alpha), \theta EQ(E, \alpha), \overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E_1^*(\alpha) < E < E_2^*(\alpha) \\ \{k_2^*(\alpha), \overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E = E_2^*(\alpha) \\ \{\overline{\theta EQ}(E, \alpha)\} & E : E_2^*(\alpha) < E < +\infty \end{cases}$$

Weiters gilt auch in diesem stochastischen Modell \mathfrak{M}_2 :

$$\begin{aligned} k_l^*(\alpha) &= \theta EQ(E_l^*, \alpha) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\alpha) &= \overline{\theta EQ}(E_1^*, \alpha) \\ k_2^*(\alpha) &= \overline{\theta EQ}(E_2^*, \alpha) \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Funktion $s_1^\theta : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ wieder die Funktion der kleinen θ -Sattelpunkte ist, während man die Funktion $s_2^\theta : \alpha \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ erneut Funktion der großen θ -Sattelpunkte nennt. Die Werte für $(E_1^*, k_1^*)(\alpha)$ und $(E_2^*, k_2^*)(\alpha)$ kann man aus den Abbildungen 40 - 45 ablesen.

Nun greifen wir erneut die Frage auf, welchen Einfluss die persönlichen Fähigkeiten des Haushalts (α) auf die Fixpunkte der Politikfunktion des Haushalts haben und somit auch auf die θ -Gleichgewichte des Modells.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die folgende Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha)$ ablesen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_1^*(\alpha_1) < E_1^*(\alpha_2)$$

Man beachte dazu die Abbildungen 50 - 53. Eine weitere Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\alpha, E)$ ist die folgende:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow E_2^*(\alpha_1) < E_2^*(\alpha_2)$$

Auch dies ist aus den oben erwähnten Abbildungen ersichtlich. Schließlich kann man festhalten, dass sich die beiden stochastischen Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 inhaltlich decken (unter den Annahmen A2 und A3).

6 Modellsimulation I

Die folgenden Seiten befassen sich mit der Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich ein Haushalt nach 100 Perioden unterhalb des instabilen θ -Gleichgewichtes befindet, d.h. $k_{100} < \theta EQ(E, \alpha)$, dies im jeweiligen Modell. Zur Erinnerung: Verfügt ein Haushalt über einen Kapitalstock k_t , welcher geringer ist, als das instabile θ -Gleichgewicht, so wird er sich in Richtung kleines stabiles θ -Gleichgewicht (Armutsfalle) entwickeln.

Sei $\phi(\cdot)$ eine numerisch berechnete Politikfunktion eines Haushalts mit einer Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten und Kapital von α und k_0 . Die (stochastische) Verhaltensgleichung

$$k_{t+1} = \theta \cdot \phi(k_t)$$

und das Anfangskapital k_0 des Haushalts erzeugen gemeinsam einen Stochastischen Prozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Kapitalstockprozess).

Es werden Pfade des Kapitalstockprozesses $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0} | (\alpha, k_0)$ mit gegebener Anfangsausstattung der Länge 100 simuliert um mit Hilfe des Schwachen Gesetzes der großen Zahlen die folgende Funktion zu erhalten:

$$k_0 \mapsto \mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \alpha) \mid k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

Man beachte, dass k_{100} eine nicht-negative Zufallsvariable ist.

Aus dem Schwachen Gesetz der großen Zahlen (Satz 5.7 in H. Georgii [9]) folgt das Nachstehende: Sei $(X^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von nicht-negativen *i.i.d.* Zufallsvariablen und $X \stackrel{d}{=} X^n$, dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbb{1}_{[0, x]}(X^n) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Es wird die Annahme (A4) bezüglich des Schockprozesses

$$(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} : \theta_t = \theta \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

getroffen. Zur Erinnerung: Die Annahme (A4) lautet: Sei $p \in (0, 1)$ eine Konstante und θ eine nicht-negative Zufallsvariable der folgenden Form:

$$\theta = \frac{X}{4} + \frac{1}{4} : \mathbb{P}(X = k) = p^k (1 - p)^{3-k} \quad k = 0, \dots, 3$$

Bei X handelt es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 3 und p .

Für die in diesem Kapitel durchgeführten Simulationen wird die nachfolgende Eigenschaft des Modells \mathfrak{M}_1 (\mathfrak{M}_2) verwendet, allerdings unter der Voraussetzung, dass diese Modelle ein instabiles θ -Gleichgewicht besitzen: Verfügt ein Haushalt über einen Anfangskapitalstock k_0 , der nicht größer ist, als $\theta EQ(E, \alpha)$ (das instabile θ -Gleichgewicht), so wird der dazugehörige Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ nie über eben dieses θ -Gleichgewicht hinauswachsen. D.h.

$$k_0 \leq \theta EQ(E, \alpha) \Rightarrow k_t \leq \theta EQ(E, \alpha) \quad \forall t$$

Mit anderen Worten: Der Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ wird mit Wahrscheinlichkeit 1 in jedem beliebigen Zeitpunkt unter oder auf dem instabilen θ -Gleichgewicht liegen, sofern der Anfangskapitalstock k_0 kleiner oder gleich als das instabile θ -Gleichgewicht ist. Dies kann man aus den Abbildungen 54 (57) und 60 (63) ablesen.

6.1 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1

Mit Hilfe der nun folgenden Simulation gehen wir der Frage nach, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Kapitalstock k_t eines Haushalts nach 100 Perioden unterhalb eines kritischen Wertes liegt. Als kritischer Wert dient hier das instabile θ -Gleichgewicht. Es wird also die folgende Wahrscheinlichkeit für das stochastische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1 berechnet:

$$\mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \alpha) \mid k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist abhängig von der Anfangsausstattung an Kapitalstock k_0 des Haushalts.

Um die stochastische Verhaltensgleichung, welche den Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erzeugt, numerisch zu berechnen, werden die Parameter γ_H und γ_L auf $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $\gamma_L = \frac{1}{4}$ fixiert. Weiters werden die persönlichen Fähigkeiten α auf 1 fixiert und die Fixkosten E auf den Wert 7.8 festgelegt. Somit werden die Fixkosten E so gewählt, dass ein großes und ein kleines stabiles θ -Gleichgewicht sowie ein instabiles θ -Gleichgewicht existiert.

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen, wie bereits in (A4) beschrieben. Die Simulation erfolgt einmal mit dem

Parameter $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ und ein weiteres Mal mit $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$ (Parameter der Binomialverteilung).

Auf den Abbildungen 54 und 57 findet sich auf der x-Achse jeweils die Anfangskapitalausstattung k_0 , auf der y-Achse die dazugehörige Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen. Aus diesen beiden Abbildungen lässt sich erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen mit dem Anstieg ($k_0 \uparrow$) des Anfangskapitalstocks sinkt. D.h. je mehr Kapitalstock dem Haushalt zur Verfügung steht, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich in Richtung Armut entwickelt.

Die Abbildung 54 (57) zeigt für den Schockprozess, welcher durch A4 mit dem Parameter der Binomialverteilung $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ ($p^3 = \frac{95}{100}$) erzeugt wird, den Grafen

$$\left\{ (k_0, \mathbb{P}(k_{100} \leq \theta EQ(E, \alpha) \parallel k_0)) : k_0 \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Die Abbildungen 55 und 59 zeigen jeweils einen simulierten Kapitalstockpfad (eine Realisation des Kapitalstockprozesses), welcher einen Anfangskapitalstock besitzt, der kleiner ist als das instabile θ -Gleichgewicht. Die Abbildungen 56 und 58 hingegen zeigen einen Kapitalstockpfad, dessen Anfangskapitalstock größer ist als das instabile θ -Gleichgewicht. Man beachte, dass beim zweiten Abbildungspaar der jeweilige Kapitalstockpfad nicht in die Armut führt.

6.2 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2

Mit Hilfe der nun folgenden Simulation gehen wir der Frage nach, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Kapitalstock k_t eines Haushalts nach 100 Perioden unterhalb eines kritischen Wertes liegt. Als kritischer Wert dient hier das instabile θ -Gleichgewicht. Es wird also die folgende Wahrscheinlichkeit für das stochastische dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2 berechnet:

$$\mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \alpha) \parallel k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist abhängig von der Anfangsausstattung an Kapitalstock k_0 des Haushalts.

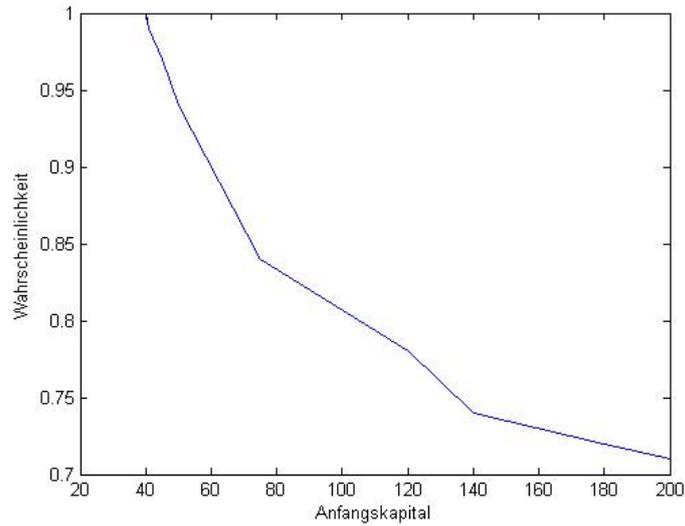


Abbildung 54: Die Parameter: $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$

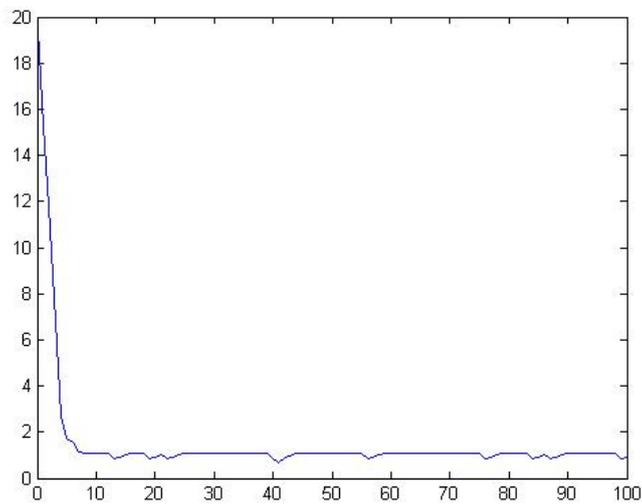


Abbildung 55: Der Startwert ist 19 und die Parameter sind $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$.

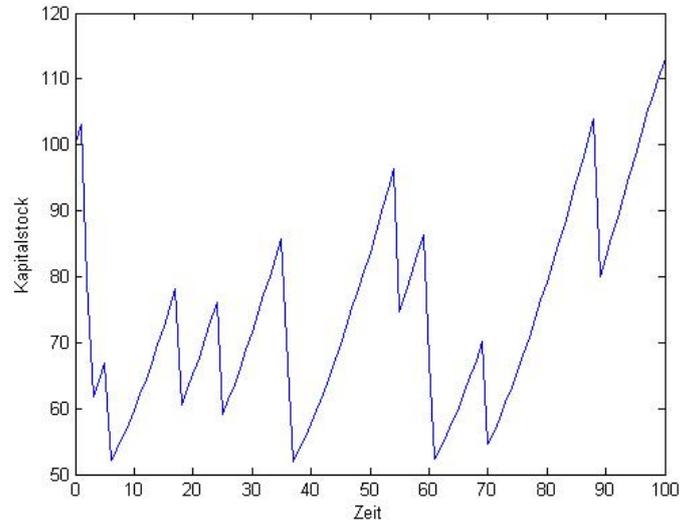


Abbildung 56: Der Startwert ist 101 und die Parameter sind $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$.

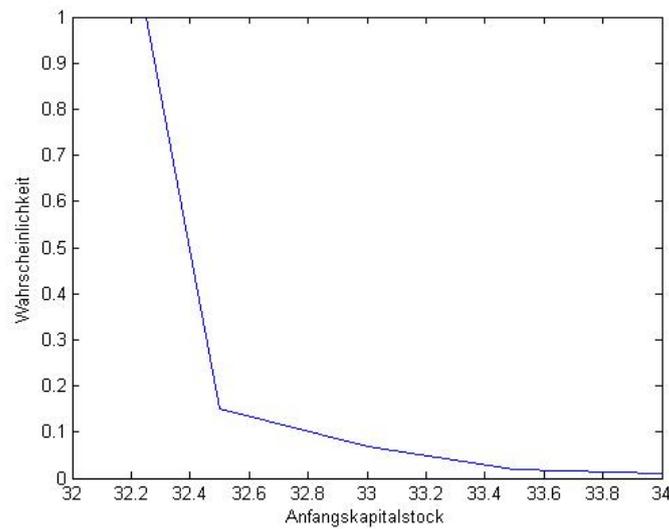


Abbildung 57: Die Parameter: $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$

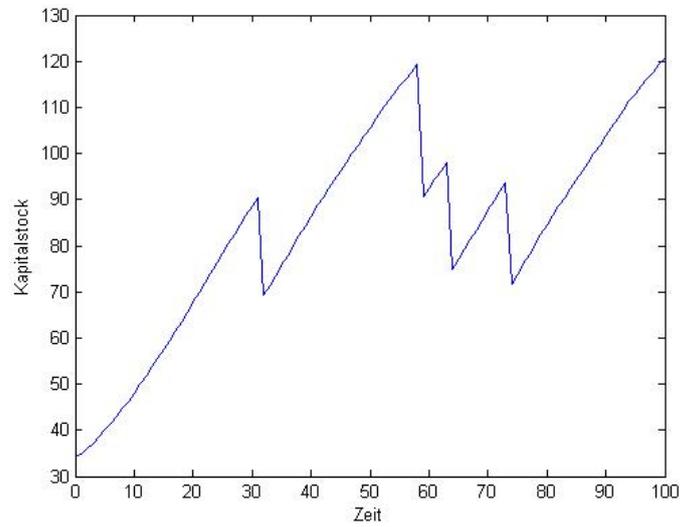


Abbildung 58: Der Startwert ist 34 und die Parameter sind $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$.

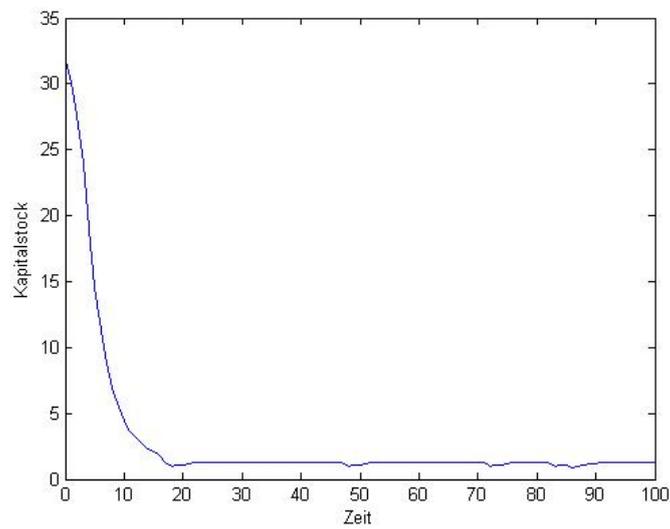


Abbildung 59: Der Startwert ist 32 und die Parameter sind $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{95}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 7.8$.

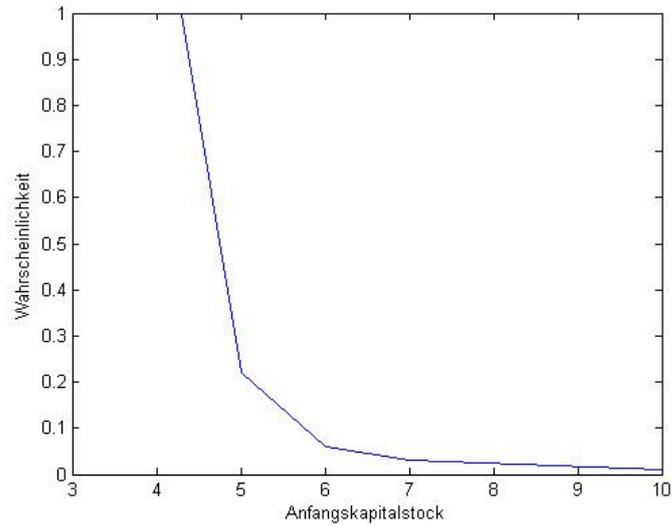


Abbildung 60: Die Parameter: $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$

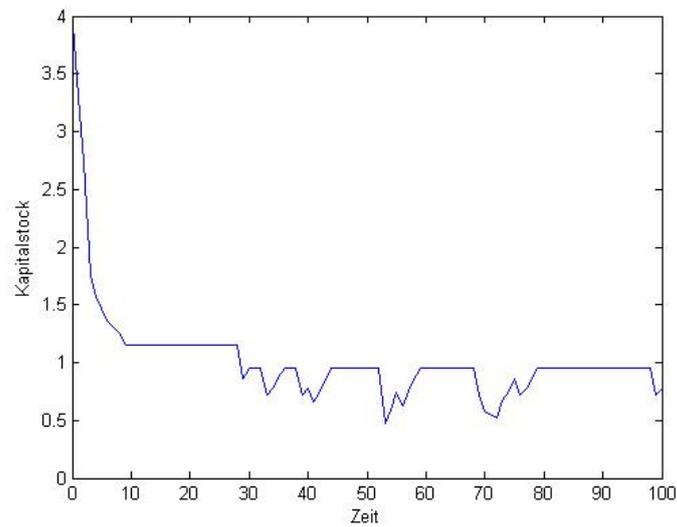


Abbildung 61: Der Startwert ist 4 und die Parameter sind $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$.

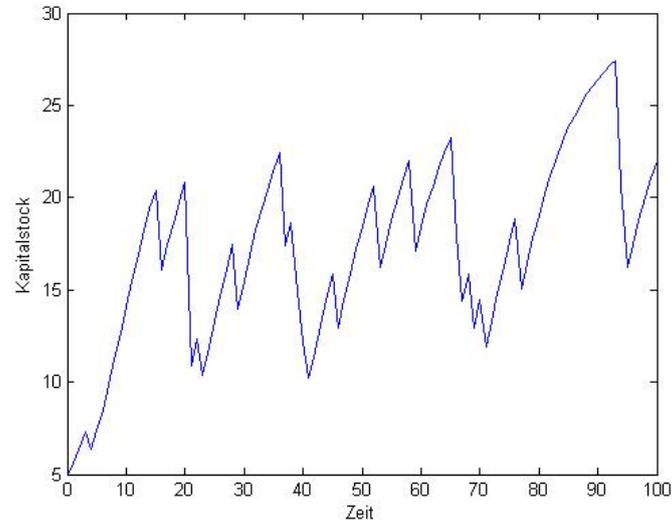


Abbildung 62: Der Startwert ist 5 und die Parameter sind $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$.

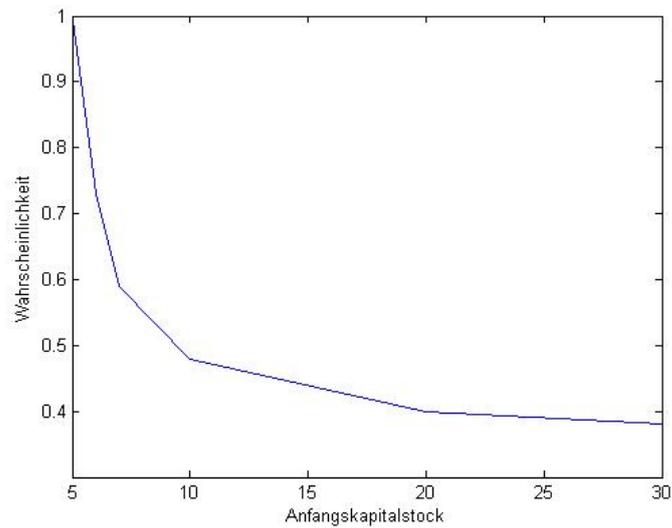


Abbildung 63: Die Parameter: $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$

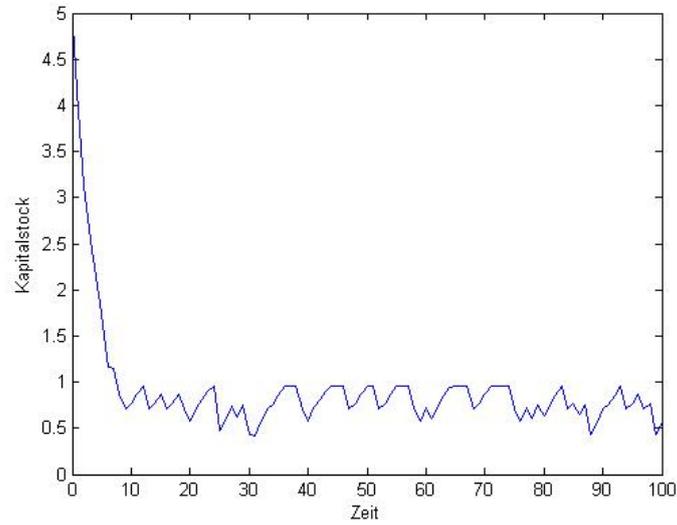


Abbildung 64: Der Startwert ist 5 und die Parameter sind $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$.

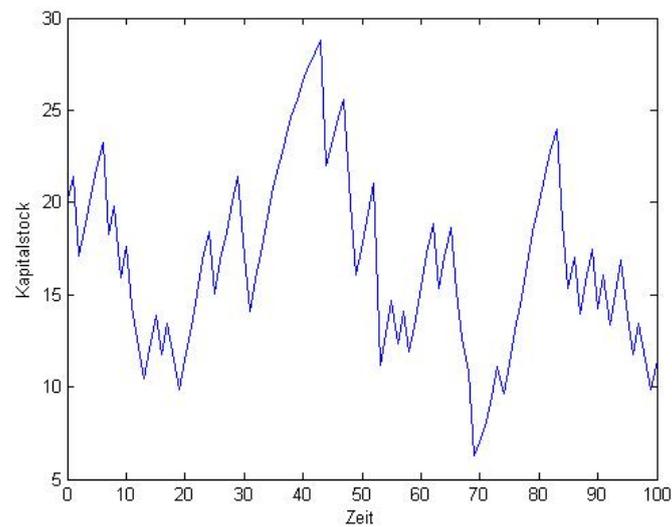


Abbildung 65: Der Startwert ist 20 und die Parameter sind $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$, $\rho = 0$ und $E = 13.57$.

Um die Politikfunktion des Haushalts numerisch zu berechnen werden die Parameter γ , A und B auf $\gamma = \frac{1}{4}$, $A = 1$ und $B = 10$ fixiert. Weiters werden die persönlichen Fähigkeiten α auf 1 fixiert und die Fixkosten E auf den Wert 13.57 festgelegt. Die Fixkosten E werden so gewählt, dass ein großes und ein kleines stabiles θ -Gleichgewicht sowie ein instabiles θ -Gleichgewicht existiert.

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen, wie bereits in (A4) beschrieben. Die Simulation erfolgt einmal mit dem Parameter $p = \sqrt[3]{\frac{70}{100}}$ und ein weiteres Mal mit $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ (Parameter der Binomialverteilung).

Auf den Abbildungen 60 und 63 findet sich auf der x-Achse jeweils die Anfangskapitalausstattung k_0 , auf der y-Achse die dazugehörige Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen. Aus diesen beiden Abbildungen lässt sich erkennen, dass im stochastischen Modell \mathfrak{M}_2 mit *i.i.d.* Schocks die Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen mit dem Anstieg des Anfangskapitalstocks $k_0 \uparrow$ sinkt. Auch hier bedeutet dies: Je mehr Kapitalstock dem Haushalt zur Verfügung steht, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich in Richtung Armut entwickelt.

Die Abbildungen 61 und 64 zeigen jeweils einen simulierten Kapitalstockpfad, welcher einen Anfangskapitalstock besitzt, der kleiner ist als das instabile θ -Gleichgewicht. Die Abbildungen 62 und 65 hingegen zeigen einen Kapitalstockpfad, dessen Anfangskapitalstock größer ist als das instabile θ -Gleichgewicht.

7 Ergebnisse I

In diesem Kapitel werden die Resultate aus den Kapiteln 6 und 5 zusammengefasst.

7.1 Das deterministische dynamische Modell \mathfrak{M}_1 versus dem deterministischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2

Qualitativ betrachtet unterscheidet sich das Konsumverhalten (Investitionsverhalten) des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1 nicht von jenem im Modell \mathfrak{M}_2 (jeweils unter der Annahme: $\theta_t \equiv 1 \forall t$ P-f.s.).

Die beiden Bifurkationsskizzen (Abbildung 66 und 67) auf Seite 106 fassen die numerischen Berechnungen der beiden Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A1) zusammen.

Die Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(\cdot)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden: Die Funktion $\underline{EQ}(\cdot)$ steht für die kleinen stabilen Gleichgewichte, die Funktion \overline{EQ} repräsentiert die großen stabilen Gleichgewichte und $EQ(\cdot)$ die instabilen Gleichgewichte.

Auf den Bifurkationsdiagrammen 66 und 67 werden jeweils auf der x-Achse die Fixkosten E aufgetragen, auf der y-Achse die Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters ist eine doppelte Linie zu erkennen, die die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert er die höher entwickelte Technologie. Die dicken Linien stellen die stabilen Gleichgewichtsfunktionen $\underline{EQ}(E, \alpha)$ und $\overline{EQ}(E, \alpha)$ dar. Die einfache Linie steht für die instabilen Gleichgewichte $EQ(E, \alpha)$. Aus den Abbildungen lässt sich klar erkennen, dass die Korrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt. Man beachte, dass die beiden deterministischen Modelle (\mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2) jeweils eine *turning point bifurcation* aufweisen, vergleiche dazu Yuri A. Kunetsov [11].

Die Sattelpunkte sind in den Skizzen (Abbildung 66 und 67) mit einem Kreis gekennzeichnet. Seien $E_1^*(1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $E_2^*(2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei Sattelpunkte des deterministischen Modells \mathfrak{M}_1 beziehungsweise \mathfrak{M}_2 , so entwickelt sich ein Haushalt mit einer Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E < E_1^*(1)$$

immer in Richtung des großen stabilen Gleichgewichtes $\overline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert keine Armutsfalle. Verfügt der Haushalt jedoch über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(2)$$

so entwickelt er sich immer zum kleinen stabilen Gleichgewicht $\underline{EQ}(E, \alpha)$ und zwar wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert nur die Armutsfalle.

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2, mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(2)$ jedoch größer oder gleich als $E_1^*(1)$ d.h. $E_1^*(1) \leq E \leq E_2^*(2)$, so bestimmt die Anfangsausstattung k_0 und α seine mögliche Entwicklung.

Die Menge M sei definiert durch

$$M(\alpha) \stackrel{def}{=} \{(E, k) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq k \leq EQ(E, \alpha), f_L(\alpha, k) \leq f_H(\alpha, k)\}.$$

Besitzt ein Haushalt eine Anfangsausstattung $(k_0, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ für die gilt $(k_0, \alpha) \in M(\alpha)$, so ist dieser Haushalt im Zeitpunkt $t = 0$ nicht-arm, aber seine zukünftige Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut d.h. $k_t \downarrow \underline{EQ}(E, \alpha)$ (kleines stabiles Gleichgewicht). Ein Haushalt dieser Form lässt sich als ein wirtschaftlicher Absteiger beschreiben.

Die Menge D sei definiert durch

$$D(\alpha) \stackrel{def}{=} \{(E, k) \in \mathbb{R}_+^2 : k \geq EQ(E, \alpha), f_L(\alpha, k) \geq f_H(\alpha, k)\}.$$

Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen Gleichgewichte $EQ(\cdot)$ d.h. $(k_0, \alpha) \in D(\alpha)$, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen Gleichgewicht entwickeln d.h. $k_t \uparrow \underline{EQ}(E, \alpha)$. Einen Haushalt dieser Form kann man sodann als wirtschaftlichen Aufsteiger bezeichnen.

Die Abbildung 67 zeigt den Einfluss der persönlichen Fähigkeiten α auf die Gleichgewichtskorrespondenz, diese wird nach rechts verschoben, wenn die persönlichen Fähigkeiten $\alpha \uparrow$ steigen.

7.2 Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_1 versus dem stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2

Die Haushalte in den stochastischen Modellen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unterscheiden sich hinsichtlich ihres Konsumverhaltens qualitativ nicht.

Die beiden Bifurkationsskizzen (Abbildung 68 und 69) auf Seite 109 fassen die numerischen Berechnungen der beiden stochastischen Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A4) zusammen.

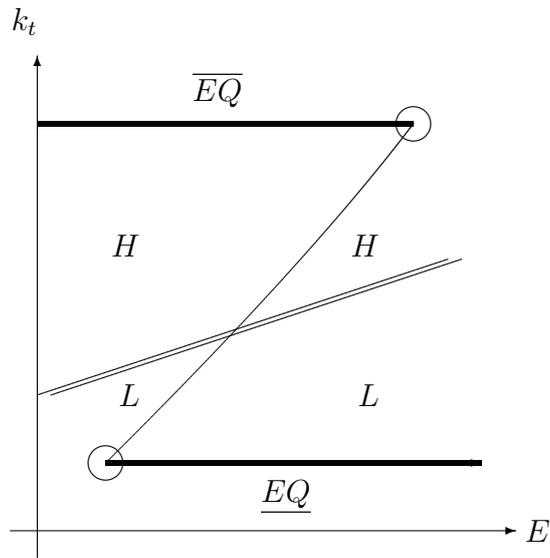


Abbildung 66: Die Abbildung zeigt eine Skizze der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E)$ auf \mathbb{R}_+ für die Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A1).

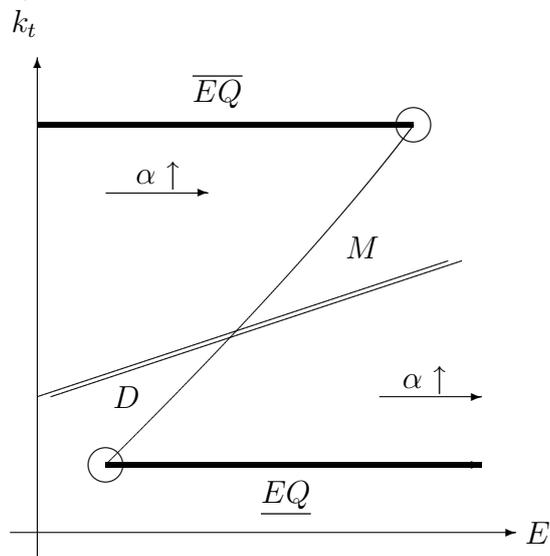


Abbildung 67: Die Abbildung zeigt eine Skizze der Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ für die Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A1).

Die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden: Die Funktion $\theta EQ(\cdot)$ steht für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte, die Funktion $\overline{\theta EQ}$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und $\theta EQ(\cdot)$ die instabilen θ -Gleichgewichte.

Auf den beiden Bifurkationsdiagramme 68 und 69 werden jeweils auf der x-Achse die Fixkosten E aufgetragen, auf der y-Achse die Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters ist eine doppelte Linien zu erkennen, die die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert der Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die dicken Linien stellen die stabilen θ -Gleichgewichtsfunktionen dar. Die einfache Linie steht für die instabilen θ -Gleichgewichte. Aus den beiden Abbildungen lässt sich klar erkennen, dass die Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha)$ wieder nur einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt. Es gilt festzuhalten, dass auch die stochastischen Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 eine *turning point bifurkation* aufweisen.

Die θ -Sattelpunkte sind in den Skizzen (Abbildung 68 und 69) mit einem Kreis gekennzeichnet. Seien $E_1^*(1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $E_2^*(2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei Sattelpunkte des stochastischen Modells \mathfrak{M}_1 beziehungsweise \mathfrak{M}_2 , so entwickelt sich ein Haushalt mit einer Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E < E_1^*(1)$$

immer in Richtung des großen stabilen θ -Gleichgewichtes, vorausgesetzt es tritt kein negativer Schock auf. Dies passiert wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert keine Armutsfalle. Verfügt der Haushalt jedoch über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2 mit Fixkosten

$$E \in \mathbb{R}_+ : E > E_2^*(2)$$

so entwickelt er sich immer zum kleinen stabilen θ -Gleichgewicht und zwar wieder unabhängig von der Anfangsausstattung an Kapital $k_0 \in \mathbb{R}_+$ und an persönlichen Fähigkeiten $\alpha \in [1, 2]$. In diesem Fall existiert nur die Armutsfalle.

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 oder 2, mit Fixkosten E , die kleiner oder gleich sind als $E_2^*(2)$ jedoch größer oder gleich als $E_1^*(1)$ d.h. $E_1^*(1) \leq E \leq E_2^*(2)$, so bestimmt der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$,

die Anfangsausstattung k_0 und α seinen Entwicklungspfad.

Die Menge M sei definiert durch

$$M(\alpha) \stackrel{def}{=} \{(E, k) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq k \leq \theta EQ(E, \alpha), f_L(\alpha, k) \leq f_H(\alpha, k)\}.$$

Besitzt ein Haushalt eine Anfangsausstattung $(k_0, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ für die gilt $(k_t, \alpha) \in M(\alpha)$, so ist dieser Haushalt im Zeitpunkt $t = 0$ nicht-arm, aber seine zukünftige Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut. Ein Haushalt dieser Form lässt sich als ein wirtschaftlicher Absteiger beschreiben.

Die Menge D sei definiert durch

$$D(\alpha) \stackrel{def}{=} \{(E, k) \in \mathbb{R}_+^2 : k \geq \theta EQ(E, \alpha), f_L(\alpha, k) \geq f_H(\alpha, k)\}.$$

Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen θ -Gleichgewicht d.h. $(k_t, \alpha) \in D(\alpha)$, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln sofern kein negativer Schock stattfindet. Hierbei kann man von einem möglichen wirtschaftlichen Aufsteiger sprechen.

Die Abbildung 69 zeigt den Einfluss der persönlichen Fähigkeiten α auf die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha)$, diese wird nach rechts verschoben, wenn die persönlichen Fähigkeiten $\alpha \uparrow$ steigen.

Zusammenfassend lässt sich über die Simulation der Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A4) festhalten: Je höher der Anfangskapitalstock k_0 eines Haushalts, umso geringer die Wahrscheinlichkeit in eine etwaige Armutsfalle zu geraten. Dies gilt für die beiden stochastischen dynamischen Modelle.

8 Modelle mit Versicherung

In dem nun folgenden Kapitel erweitern wir das allgemeine dynamische Modell um eine Versicherung. In der vorliegenden Arbeit verstehen wir unter einer Versicherung immer einen Austausch von Geld jetzt gegen Geld, das man unter bestimmten Bedingungen später erhält. Damit wird der Definition von K. J. Arrow [3] gefolgt. Bezogen auf die Modelle in dieser Arbeit meint man mit Versicherung also den Austausch eines sicheren Geldstroms heute, gegen einen zufälligen Geldstrom morgen.

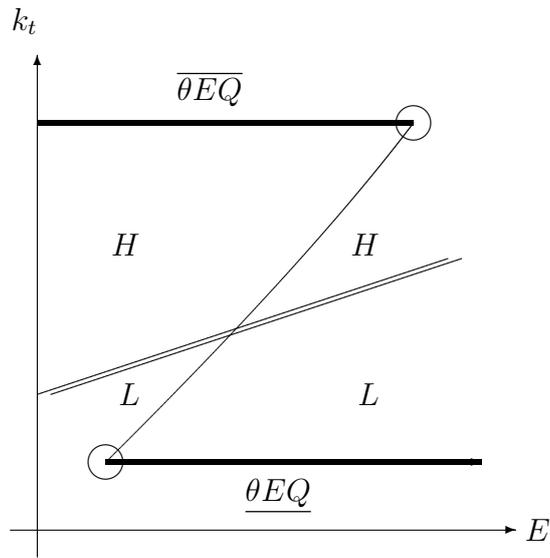


Abbildung 68: Die Abbildung zeigt eine Skizze der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha)$ auf \mathbb{R}_+ für die Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A4).

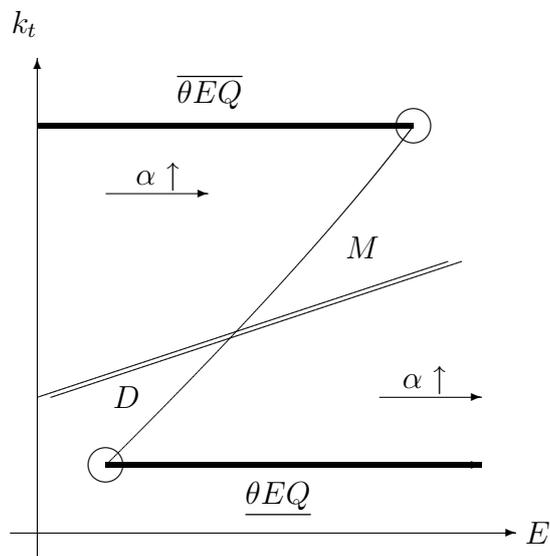


Abbildung 69: Die Abbildung zeigt eine Skizze der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \alpha)$ auf $\mathbb{R}_+ \times [1, 2]$ für die Modelle \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 unter der Annahme (A4).

Somit können wir weiter unten zwei unterschiedliche Modelle definieren: Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks, Versicherung und Produktionsfunktion vom Typ 1 - bezeichnet mit \mathfrak{M}_1^v - sowie das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks, Versicherung und Produktionsfunktion vom Typ 2, welches mit \mathfrak{M}_2^v bezeichnet wird.

Als Basis dienen hier folgende Werke: P. Zweifel und R. Eisen [21] und I. Macho-Stadler D. Pérez-Castrillo [13].

8.1 Das allgemeine dynamische Modell mit Versicherung

Hier führen wir die Möglichkeit einer Versicherung $(e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein. Die Versicherungsprämie wird mit a_t bezeichnet und die Versicherungsleistung mit e_t . Weiters ist $e_t \geq 0$ eine stochastische Einzahlung und $a_t \geq 0$ eine deterministische Auszahlung. Die Zahlung a_t erfolgt zu Beginn, die Zahlung e_t am Ende des Zeitpunktes t . Der Versicherungsvertrag (40) schützt einen Teil des Kapitalstocks $\rho \in [0, 1]$ vollständig. Der Parameter ρ wird auch als Deckungsgrad beziehungsweise $1 - \rho$ als Selbstbeteiligungsquote bezeichnet. Die Konstante $\nu \geq 0$ steht für einen möglichen Versicherungsprämienaufschlag.

$$e_{t+1} = \rho \cdot (1 - \theta_{t+1}) \cdot [i_{jt} + (1 - \delta)k_{jt}] \quad (40a)$$

$$a_t = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{t+1}] \cdot [i_{jt} + (1 - \delta)k_{jt}] \quad (40b)$$

$$e_0 = 0 \quad (40c)$$

$$\rho \in [0, 1] \quad (40d)$$

Das allgemeine dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 1 erweitert sich zu \mathfrak{M}_1^v .

$$\mathfrak{M}_1^v = \left\{ \{ \mathbb{E}[u_j(\cdot)] : j \in J \}, \{ (\alpha_j, k_{j0}) : j \in J \}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, (e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, f(\alpha, k) \right\}$$

$$\text{mit } f(\alpha, k) = \max \{ \alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E \}$$

Das allgemeine dynamische Modell mit Produktionsfunktion vom Typ 2 wird zu \mathfrak{M}_2^v .

$$\mathfrak{M}_2^v = \left\{ \{ \mathbb{E}[u_j(\cdot)] : j \in J \}, \{ (\alpha_j, k_{j0}) : j \in J \}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, (e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, f(\alpha, k) \right\}$$

$$\text{mit } f(\alpha, k) = \max\{\alpha Ak^\gamma, \alpha Bk^\gamma - E\}$$

Das Modell \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) heißt allgemeines dynamisches Modell mit Versicherung und Produktionsfunktion vom Typ 1 (Typ 2).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich auch in den Modellen \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v alle Haushalte $j \in J = \{1, \dots, N\}$ in einer Spielsituation gegen die Natur befinden, somit hat die jeweilige Entscheidung eines beliebigen Haushalts j nur Auswirkungen auf die eigene Wohlfahrt. Es genügt daher wieder, das Verhalten und die ökonomische Entwicklung (die Entwicklung des Kapitalstocks) des typischen Haushalts (wie oben definiert) zu analysieren. Zur Erinnerung: Diese typische Haushalt ist mit persönlichen Fähigkeiten α und zu Beginn mit einem nicht-negativen Kapitalstock $k_0 \in \mathbb{R}_+$ ausgestattet. Seine persönlichen Fähigkeiten α sind größer oder gleich 1 aber kleiner oder gleich 2. Des Weiteren besitzt unser Haushalt eine beliebige Nutzenfunktion $u(\cdot)$ von der obigen Art¹². Aufgrund dieser Bemerkungen kann auch hier wieder auf den Haushaltsindex j verzichtet werden.

Bemerkung: Ist der Wert $\rho = 1$ (Deckungsgrad), so spricht man von einer Vollversicherung. Tritt dieser Fall ein, so würde das Modell \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) zu einem deterministischen dynamischen Modell werden.

Das allgemeine dynamische Modell wird somit um die Versicherung (40) erweitert. Der Kapitalstock k_t bildet sich nun nach der folgenden Regel:

$$k_{t+1} = \theta_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] + e_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

In die obige Gleichung wird die Versicherungsleistung e_{t+1} von (40) eingesetzt. Somit erhält man die folgende Gleichung:

$$k_{t+1} = \left(\rho + (1 - \rho)\theta_{t+1} \right) [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Sei $(\tilde{\theta}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen und definiert durch

$$\tilde{\theta}_t \stackrel{\text{def}}{=} \left(\rho + (1 - \rho)\theta_t \right) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Dann kann man die stochastische Bildungsregel des Kapitalstocks auch folgendermaßen anschreiben:

$$k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

¹²

$$u(x) \in \mathcal{C}^2 : \frac{du}{dx} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2u}{dx^2} < 0$$

Die Budgetgleichung (9) erweitert sich zu:

$$c_t + i_t + a_t = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Durch das Einsetzen von (40) kommt man zur folgenden Gleichung:

$$c_t + i_t + (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{t+1}] \cdot [i_t + (1 - \delta)k_t] = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Sei $Z_t : t \in \mathbb{N}$ eine Folge und definiert durch $Z_t \stackrel{def}{=} (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_t]$. Man beachte, dass die Konstante Z_t für die Versicherungsprämie pro Kapitalstockeinheit zum Zeitpunkt t steht.

Dann kann man die Budgetgleichung auch folgendermaßen anschreiben:

$$c_t + i_t + Z_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] = f(\alpha, k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (41)$$

Somit wählt der Haushalt den Konsumplan $(c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0}$ im allgemeinen dynamischen Modell mit Versicherung $(e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$. Wobei $c_t \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

$$\left\| \begin{array}{l} (c_t^*)_{t \in \mathbb{N}_0} \in \arg \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ c_t = f(\alpha, k_t) - i_t - Z_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} [i_t + (1 - \delta)k_t] \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right\|$$

Dieses Maximierungsproblem lässt sich ebenfalls als ein stochastisches diskontiertes dynamisches Maximierungsprogramm anschreiben.

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E}[u(c_t)] \\ k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \frac{1}{1 + Z_{t+1}} [f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ c_t \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right\| \quad (42)$$

Die zulässige Aktionskorrespondenz hat die Form

$$\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{c : 0 \leq c \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s\}$$

Der Kapitalstock k_t ist die Zustandsvariable und der Konsum c_t die Kontrollvariable.

Man beachte, dass aus der Budgetgleichung (41) Unteres folgt.

$$Z_{t+1}i_t + i_t + Z_{t+1}(1 - \delta)k_t + (1 - \delta)k_t = f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Daraus folgt wiederum

$$\tilde{\theta}_{t+1} \left[i_t + (1 - \delta)k_t \right] = \frac{\tilde{\theta}_{t+1}}{1 + Z_{t+1}} \left[f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \right] \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Sei $(\kappa_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen Variablen, die definiert sind durch

$$\kappa_{t+1} \stackrel{def}{=} f(\alpha, k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t \geq 0.$$

Die nicht-negative Variable κ_t entspricht dem Kapitalstock vor Schock inklusive der Versicherungsprämie zum Zeitpunkt t .

Sei $(\chi_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von positiven Zufallsvariablen und definiert durch

$$\chi_t \stackrel{def}{=} \frac{\rho + (1 - \rho)\theta_t}{1 + (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_t]} = \frac{\tilde{\theta}_t}{1 + Z_t} = \frac{\rho}{1 + Z_t} + \frac{1 - \rho}{1 + Z_t} \cdot \theta_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Somit kann man das stochastische diskontierte dynamische Programm von oben zum folgenden neuen stochastischen diskontierten dynamischen Programm transformieren:

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E} \left[u \left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (43)$$

Wobei $\Phi(s) \stackrel{def}{=} \{ \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s \}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass jetzt k_t die Zustandsvariable ist und κ_{t+1} die Kontrollvariable. Der Kapitalstockprozess¹³ $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ hat die folgende Form:

$$k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Die Funktion $\phi(k) \in \Phi(k)$ heißt Politikfunktion. Sei ψ eine Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$\psi(k) \stackrel{def}{=} f(\alpha, k) - \phi(k) + (1 - \delta)k \quad (k \in \mathbb{R}_+)$$

¹³Man beachte, dass es sich bei einem Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ um einen Stochastischen Prozess handelt.

definiert ist. Man beachte, dass die Funktion $\psi(k) \in \Phi(k) \forall k$ die Politikfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (42) ist. Ferner sei $\tilde{\phi}$ eine nicht-negative Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , die durch

$$\tilde{\phi}(k) \stackrel{def}{=} \frac{1}{1+Z_0} \phi(k) \quad \forall k$$

definiert ist. Somit erhält man die nachfolgende alternative Rekursion für den Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit *i.i.d.* Schocks $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$:

$$k_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} \cdot \tilde{\phi}(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Der Funktionswert $\tilde{\phi}(k_t)$ entspricht dem Kapitalstock vor Schock (exklusive der Versicherungsprämie) zum Zeitpunkt t .

Den Konsumprozess $(c_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch die folgende Gleichung:

$$c_t \equiv f(\alpha, k_t) - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t$$

Der Konsumprozess $c_t = \max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\} - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$ entspricht dem Konsumverhalten des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_1^v , wenn der Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (43) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) ist.

Das Konsumverhalten (Konsumprozess) des Haushalts im Modell \mathfrak{M}_2^v hat die Form $c_t = \max\{\alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E\} - \phi(k_t) + (1 - \delta)k_t : t \in \mathbb{N}_0$. Man beachte, dass in diesem Fall der Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Lösung des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (43) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) ist.

Satz 5. *Seien $0 < \gamma_L < \gamma_H < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ vier Konstanten. Weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (43) mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (28) erfüllt.*

Beweis. Der Beweis folgt aus dem Beweis von Satz 3. QED

Satz 6. *Seien $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$ und $1 \leq \alpha \leq 2$ drei Konstanten. Weiters sei $E \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Konstante. Dann gilt die folgende Behauptung: Für das Maximierungsproblem (43) mit der Produktionsfunktion vom Typ 2 existiert eine Funktion $V(s)$, welche die Gleichung (28) erfüllt.*

Beweis. Der Beweis folgt aus dem Beweis von Satz 4. QED

Man beachte, dass das Verhalten (Entscheidungsproblem) eines Haushalts im allgemeine dynamische Modell mit Versicherung dem entspricht im allgemeinen dynamischen Modell mit Schockprozess $(\chi_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$.

8.2 Das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks

Für das stochastische dynamische Modell mit i.i.d. Schocks und Versicherung $(e_t, a_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ werden die zusätzlichen Annahmen (A2) und (A3) getroffen. Sei $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Schockprozess) eine Folge von *i.i.d.* Zufallsvariablen. Für die gilt:

$$\theta_t \in \Theta = \{0 < \vartheta_l \leq 1 : l = 1, \dots, L\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

Somit erhält man das folgende Optimierungsproblem:

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \beta^t \cdot \mathbb{E} \left[u \left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \chi_t \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix und} \quad \beta \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (44)$$

mit $\chi_t = \frac{\rho}{1+Z_t} + \frac{1-\rho}{1+Z_t} \cdot \theta_t$ und

$$\Phi(s) = \{ \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + (1 - \delta)s \}.$$

Man beachte, dass auch hier k_t die Zustandsvariable ist und κ_{t+1} die Kontrollvariable. Weiters gilt es festzuhalten, dass das stochastische diskontierte dynamische Programm das Konsumverhalten (Sparverhalten) des Haushalts bestimmt.

9 Numerische Lösung der Modelle II

In diesem Kapitel wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (45) einmal mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) und einmal mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (21) numerisch berechnet. Zur numerischen Berechnung wird auch hier eine logarithmische Nutzenfunktion verwendet, diese erfüllt die Eigenschaft (7). Weiters sei $\beta = \frac{9}{10}$ und $\delta = \frac{1}{10}$. Somit vereinfacht sich das stochastische diskontierte dynamische Programm (44) zum stochastischen diskontierten dynamischen Programm (45) mit der zulässigen Aktionskorrespondenz (20) oder (21).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10} \right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln \left(f(\alpha, k_t) - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10}k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (45)$$

Wobei $\Phi(s) = \{\kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq f(\alpha, s) + \frac{9}{10}s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass k_t die Zustandsvariable ist und κ_{t+1} die Kontrollvariable. Weiters wird die zusätzliche Annahme (A4) getroffen. D.h. der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sei nun eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen, definiert durch

$$\theta_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X}{4} + \frac{1}{4} \text{ wobei } \mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{3-k} \quad k = 0, \dots, 3 \quad \forall t.$$

Bei X handelt es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 3 und p .

In diesem Teil der Arbeit gehen wir der Fragestellung nach: Welchen Einfluss hat die Veränderung der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad) auf die Gleichgewichte der Modelle \mathfrak{M}_1^v beziehungsweise \mathfrak{M}_2^v ?

Auf der Abbildung 70 kann man die Veränderung der möglichen Zustände der Zufallsvariable $\chi(\rho)$ in Abhängigkeit der exogenen Variable ρ erkennen. Wenn nun die Selbstbeteiligungsquote $1 - \rho$ den Wert 0 annimmt, so handelt es sich bei χ um eine Konstante (degenerierte Zufallsvariable) und nicht mehr um eine Zufallsvariable im engeren Sinn. Dies ist aus der Abbildung 70 ersichtlich. Man beachte, dass es sich in diesem Fall um ein deterministisches dynamisches Modell handelt.

Auf der Abbildung 71 ist die folgende Eigenschaft zu erkennen:

$$\nu_1 < \nu_2 \Rightarrow \chi(\nu_2) < \chi(\nu_1) < 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

D.h. steigt der Versicherungsprämienaufschlag ($\nu \uparrow$), so sinken alle möglichen (nicht-negativen) Ereignisse d.h. $\chi(\nu) \downarrow 0$.

9.1 Value Function Iteration mit stochastischen Programmen

Die nachfolgenden stochastischen Optimierungsprobleme (46) und (48) werden mit dem Wertfunktions Iterations Algorithmus numerisch berechnet. Sei k die Zustandsvariable und κ die Kontrollvariable. In diesem Kapitel dient der Vektor $v_0(k)$ als Startwert.

Im stochastischen dynamischen Modell mit i.i.d. Schocks gelten die beiden Annahmen (A2) und (A3) d.h.

$$\chi_t \in X = \left\{ \frac{\rho}{1+z_t} + \frac{1-\rho}{1+z_t} \cdot \vartheta : \vartheta \in \Theta \right\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall t$$

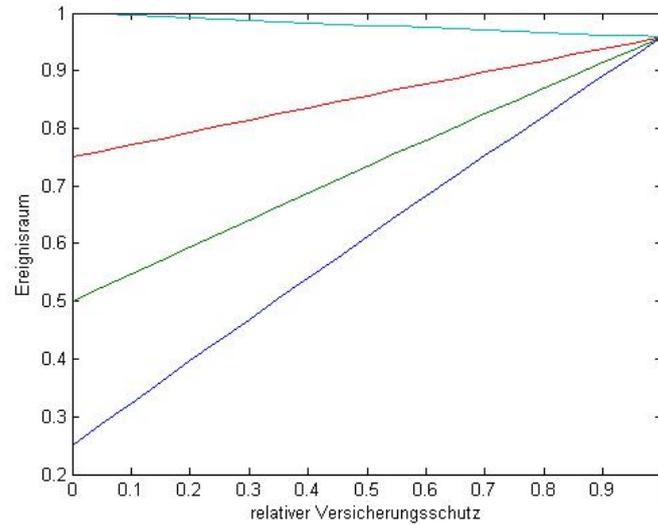


Abbildung 70: Die Abbildung zeigt die vier Funktionen $\rho_{\vartheta} \mapsto \frac{\rho}{1+Z} + \frac{1-\rho}{1+Z} \cdot \vartheta$ mit $Z = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta]$ sowie den Parametern $\nu = 0.1$ und $\vartheta \in \Theta$.

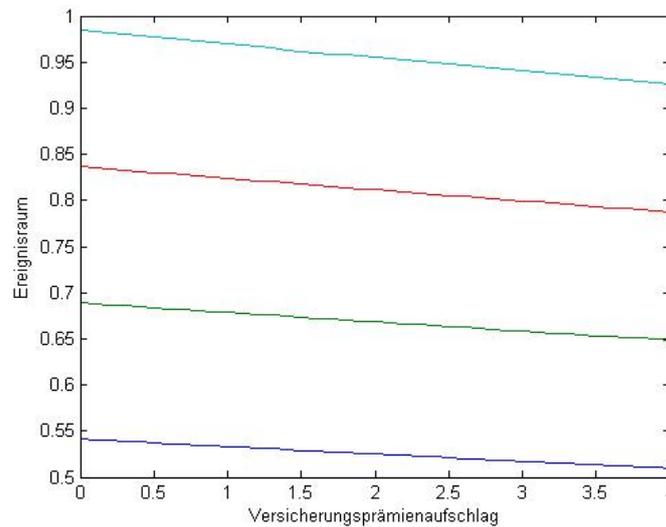


Abbildung 71: Die Abbildung zeigt die vier Funktionen $\nu_{\vartheta} \mapsto \frac{\rho}{1+Z(\nu)} + \frac{1-\rho}{1+Z(\nu)} \cdot \vartheta$ mit $Z(\nu) = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta]$ sowie den Parametern $\rho = 0.4$ und $\vartheta \in \Theta$.

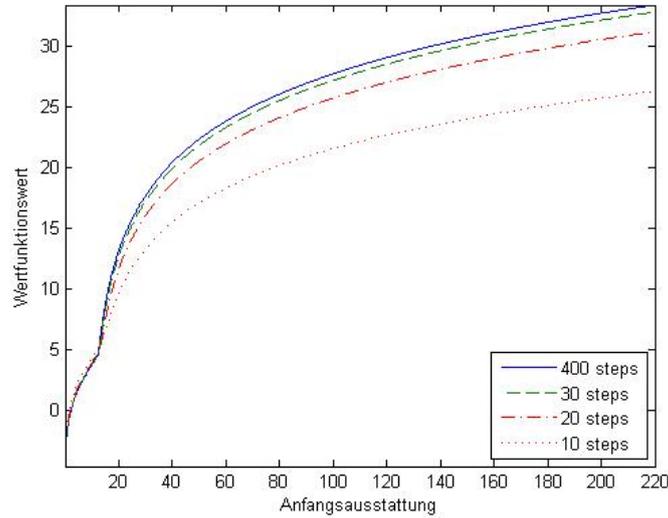


Abbildung 72: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 4$, $\rho = 0.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

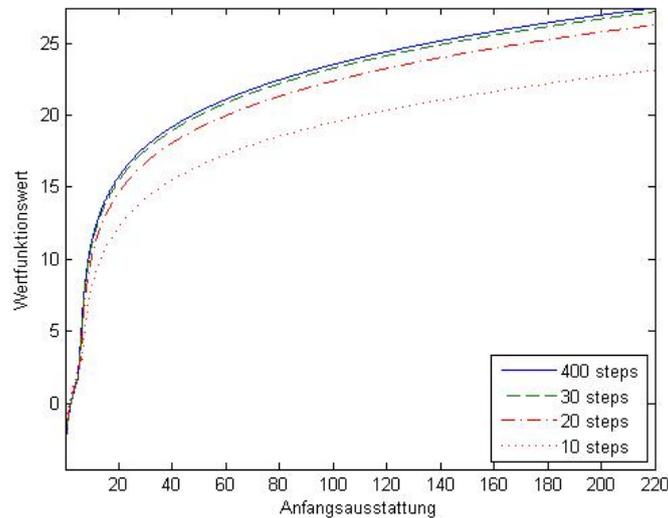


Abbildung 73: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$, $\rho = 0.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

$$\Theta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_L\}$$

Das stochastische diskontierte dynamische Programm (48) lässt sich mit Hilfe der folgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln \left(\max \{ \alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E \} - \kappa + \frac{9}{10}k \right) + \frac{9}{10} \cdot \mathbb{E} \left[v_j(\chi \cdot \kappa) \right]$$

$$\text{für } j = 0, \dots, T$$

Setze $v_0(k) = \ln \left(\max \{ \alpha k^{\gamma_L}, \alpha k^{\gamma_H} - E \} + \frac{9}{10}k \right)$ als Startwert ein. Die diskretisierte zulässige Aktionskorrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max \{ \alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E \} + (1 - \delta)k \right\}$$

Weiters ist $G = \left\{ \lambda \cdot g \in \mathbb{R}_+ : \lambda \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\} \right\}$ mit $g \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$.

Die Abbildung (72) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (46) mit den Parametern $\gamma_H = 0.75$, $\gamma_L = 0.25$, $\alpha = 1$, $E = 4$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ nach 10, 20, 30 und maximal 400 Schritten. Auf der Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert.

Analog lässt sich das stochastische diskontierte dynamische Programm (34) mit Hilfe der nachfolgenden Rekursion lösen:

$$v_{j+1}(k) = \max_{\kappa \in \Gamma(k)} \ln \left(\max \{ \alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E \} - \kappa + \frac{9}{10}k \right) + \frac{9}{10} \cdot \mathbb{E} \left[v_j(\chi \cdot \kappa) \right]$$

$$\text{für } j = 0, \dots, T$$

Als Startwert setze $v_0(k) = \ln \left(\max \{ \alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E \} + \frac{9}{10}k \right)$. Die diskretisierte Korrespondenz $\Gamma(\cdot)$ auf \mathbb{R}_+ hat die folgende Form:

$$\Gamma(k) = \left\{ x \in G : 0 \leq x \leq \max \{ \alpha A k^\gamma, \alpha B k^\gamma - E \} + (1 - \delta)k \right\}$$

Die Abbildung (73) zeigt das Konvergenzverhalten der Wertfunktion des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ nach 10, 20, 30 und maximal 400 Schritten. Auch auf dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Wertfunktion monoton konvergiert.

9.2 Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_1^v mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1

Das Verhalten des Haushalts im stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_1^v mit Produktionsfunktion vom Typ 1 unter der Annahme (A4) soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende stochastische Verhaltensgleichung des Haushalts numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \chi_{t+1}(\rho) \cdot \phi(k_t) \quad \forall t$$

Dazu gilt es, das stochastische diskontierte dynamische Programm (46) zu lösen. Die Zufallsvariable $\chi(\rho)$ unter Annahme (A4) ist in der Abbildung 70 dargestellt. Das stochastische diskontierte dynamische Programm (46) des stochastischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 1 in das Problem (45).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln \left(\max\{\alpha k_t^{\gamma_L}, \alpha k_t^{\gamma_H} - E\} - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10} k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (46)$$

Wobei $\Phi(s) = \{\kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq \max\{\alpha s^{\gamma_L}, \alpha s^{\gamma_H} - E\} + \frac{9}{10}s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Im Folgenden wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (46) unter der Annahme (A4) numerisch berechnet. Man erhält dadurch die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ und untersucht mit deren Hilfe das jeweilige Modell auf θ -Gleichgewichte.

Unter einem θ -Gleichgewicht versteht man in diesem Modell immer einen Kapitalstock k_τ für den gilt:

$$\theta_{\tau+1} = 1 \Rightarrow k_{\tau+1} = \frac{1}{1+Z_{\tau+1}} \cdot \phi(k_\tau) = k_\tau$$

Anders formuliert:

$$\theta_{\tau+1} = 1 \Rightarrow k_{\tau+1} = \tilde{\phi}(k_\tau) = k_\tau$$

Ein gilt festzuhalten, dass ein θ -Gleichgewicht des Modells \mathfrak{M}_1^v unter der Annahme (A4) ein Fixpunkt der Funktion $\tilde{\phi}(k)$ ist.

Das Konsumverhalten des Haushalts erhält man durch die Verhaltensgleichung

$$c_t = \psi(k_t) \quad \forall t$$

mit der Politikfunktion

$$\psi(k_t) = f(\alpha, k_t) + (1 - \delta)k_t - \phi(k_t) \quad \forall t,$$

während sich das Investitionsverhalten des Haushalts durch die Verhaltensgleichung

$$i_t = \frac{\phi(k_t)}{1 + Z_0} - (1 - \delta)k_t \quad \forall t$$

beziehungsweise

$$i_t = \tilde{\phi}(k_t) - (1 - \delta)k_t \quad \forall t$$

beschreiben lässt. Man beachte, dass Konsum und Investition zueinander in Beziehung stehen (Budgetgleichung), d.h.

$$c_t + a_t + i_t \equiv f(\alpha, k_t)$$

Somit gilt: Die Auszahlung für die Versicherungsprämie beträgt

$$a_t = \phi(k_t) - \frac{\phi(k_t)}{1 + Z_0} \quad \forall t.$$

Sei \mathfrak{c} eine Funktion, die auf $\{k \in \mathbb{R}_+ : k > 0\}$ durch

$$\mathfrak{c}(k) \stackrel{def}{=} \frac{\psi(k)}{f(\alpha, k)}$$

definiert ist. Man beachte, dass der Funktionswert $\mathfrak{c}(k)$ Konsumquote heißt. Ferner sei die Funktion \mathfrak{s} für alle $k > 0$ definiert durch

$$\mathfrak{s}(k) \stackrel{def}{=} \frac{\tilde{\phi}(k)}{f(\alpha, k)} - \frac{(1 - \delta)k}{f(\alpha, k)}.$$

Der Funktionswert $\mathfrak{s}(k)$ heißt Sparquote. Dividiert man beide Seiten der Budgetgleichung durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$ zum Zeitpunkt t dann erhält man die Gleichung (Identität)

$$\frac{c_t}{f(\alpha, k_t)} + \frac{a_t}{f(\alpha, k_t)} + \frac{i_t}{f(\alpha, k_t)} \equiv 1$$

Indem man nun $\mathfrak{c}(k)$ und $\mathfrak{s}(k)$ in die obige Gleichung einsetzt, erhält man

$$\mathfrak{c}(k) + \frac{a}{f(\alpha, k)} + \mathfrak{s}(k) = 1 \quad (a \in \mathbb{R}_+) \quad \forall k > 0.$$

Um das Konsumverhalten und Investitionsverhalten eines Haushalts zu analysieren, reicht es somit die Funktionen $\mathbf{c}(k)$ und $\mathbf{s}(k)$ zu betrachten.

Um auch das stochastische diskontierte dynamische Programm (46) berechnen zu können gilt: Unter der Annahme (A4) werden die Parameter $\gamma_H, \gamma_L, \alpha, E$ und p auf $\gamma_H = \frac{3}{4}, \gamma_L = \frac{1}{4}, \alpha = 1, E = 4$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ fixiert.

Die Abbildungen 74 und 75 zeigen die jeweilige Funktion $\mathbf{c}(k)$ (Konsumquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock) falls die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) auf $\rho = 0$ (keine Versicherung) beziehungsweise $\rho = 1$ (Vollversicherung) fixiert ist.

Sowohl auf der Abbildung 74 als auch auf der Abbildung 75 bildet die strichlierte Linie gemeinsam mit der x-Achse ein Band. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt immer nur einen Teil seines Einkommens, d.h. $c_t \leq f(\alpha, k_t)$. Oberhalb der strichlierten Linie konsumiert er mehr als er einnimmt, d.h. er reduziert dadurch sein Vermögen.

Vergleicht man die Konsumquote (in Abhängigkeit vom Kapitalstock) der beiden Abbildungen (74 und 75) so kann man Folgendes festhalten: Beide Funktionen beginnen innerhalb des Bandes und steigen dann bis zu ihrem Maximum, welches außerhalb des Bandes liegt, an. Ungefähr bei diesem Maximum tauscht der Haushalt die Technologie f_L (die Technologie eines armen Haushalts) gegen die Technologie f_H (die Technologie eines nicht-armen Haushalts). Schließlich fällt die jeweilige Funktion (Konsumquote) wieder unterhalb des Bandes und steigt dann langsam an.

Auf der Abbildung 76 ist die zu Abbildung 74 gehörige Funktion $\mathbf{s}(k) = 1 - \mathbf{c}(k)$ zu sehen. Weiters bilden zwei strichlierte Linien ein Band, innerhalb dessen der Haushalt nur einen Teil seines Einkommens investiert, d.h. $i_t \leq f(\alpha, k_t)$. Unterhalb des Bandes entsparnt sich der Haushalt. Die punktierte Linie steht für die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$. Bei den Schnittpunkten der Abschreibung mit der Funktion $\mathbf{s}(k)$ (Sparquote) handelt es sich um die Fixpunkte der Politikfunktion $\phi(k)$.

Auf der Abbildung 77 ist die zu Abbildung 75 gehörige Funktion

$$\mathbf{s}(k) = \frac{\tilde{\phi}(k)}{f(\alpha, k)} - \frac{(1 - \delta)k}{f(\alpha, k)}$$

zu sehen. Die zwei äußeren strichlierten Linien bilden auch hier ein Band, innerhalb dessen der Haushalt wieder nur einen Teil seines Einkommens consu-

miert beziehungsweise investiert. Die strichlierte Linie in der Mitte beschreibt die Versicherungsprämie geteilt durch das Einkommen. Bei den Schnittpunkten der Abschreibung mit der Funktion $\mathfrak{s}(k)$ (Sparquote) handelt es sich um die Fixpunkte der Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$.

Vergleicht man die beiden Abbildungen 76 und 77, so kann man wie folgt feststellen: Der Haushalt ohne Versicherung neigt im Gegensatz zu einem Haushalt mit Versicherung (Vollversicherung) zu höheren Sparquoten. Dies erklärt sich dadurch, dass der Haushalt mit Versicherung neben der Investition auch noch die Versicherungsprämie tragen muss.

Die auf den Abbildungen 78 und 79 sichtbaren Linien stellen das Maximum, d.h. die maximale zulässige Summe der diskontierten Erwartungsnutzen des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (46) dar, dies in Abhängigkeit vom Anfangskapitalstock k_0 . Zur Berechnung der Wertfunktion des Programms (46) werden drei unterschiedliche Werte für die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) verwendet: $\rho = 0$ (keine Versicherung), $\rho = 0.5$ (Teilversicherung) und $\rho = 1$ (Vollversicherung). Dadurch erhält man auch drei verschiedene Wertfunktionen.

Aus Abbildung 78 lässt sich erkennen, dass der Haushalt eine Vollversicherung ($\rho = 1$) bevorzugt. An zweiter Stelle steht für ihn eine Teilversicherung mit $\rho = 50\%$. Keine Versicherung zu besitzen ist für den Haushalt am unattraktivsten. Anders ausgedrückt:

$$\text{Vollversicherung} \succ \text{Teilversicherung} \succ \text{Nicht-Versicherung}$$

Man beachte, dass dies unabhängig vom Anfangskapitalstock k_0 gilt.

Die Abbildung 79 ist das Ergebnis einer Erhöhung des Versicherungsprämienaufschlags von $\nu = 0.1$ auf $\nu = 12$. Auf dieser Abbildung lässt sich sodann erkennen, dass sich die Präferenzen (\succ) des Haushalts zum genauen Gegenteil verändert haben: Der Haushalt zieht nun eine Nicht-Versicherung der Teilversicherung vor. Zuletzt steht die Vollversicherung, d.h.

$$\text{Nicht-Versicherung} \succ \text{Teilversicherung} \succ \text{Vollversicherung}$$

Dies gilt wieder unabhängig vom Anfangskapitalstock k_0 .

Gehen wir nun der Frage nach, ob in diesen θ -Gleichgewichten - jeweils für sich betrachtet - entweder die höhere oder die niedrigere Technologie verwendet wird. Nochmals zur Erinnerung: Die Verwendung einer niedrigeren

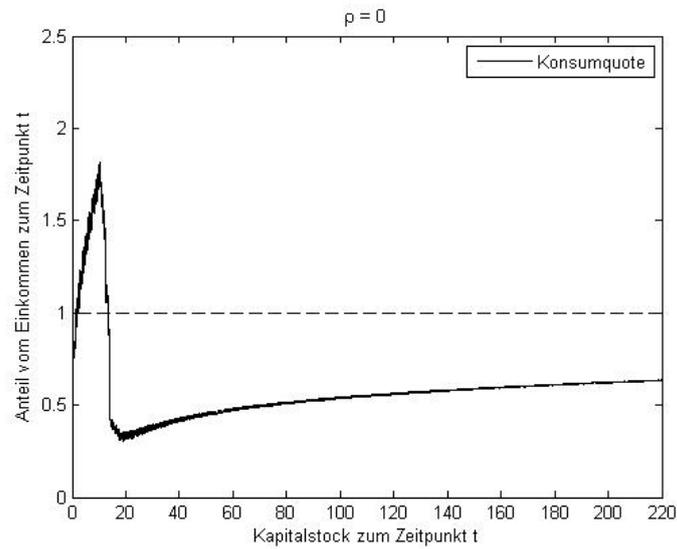


Abbildung 74: Die Abbildung zeigt die Funktion c von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 4$, $\rho = 0$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

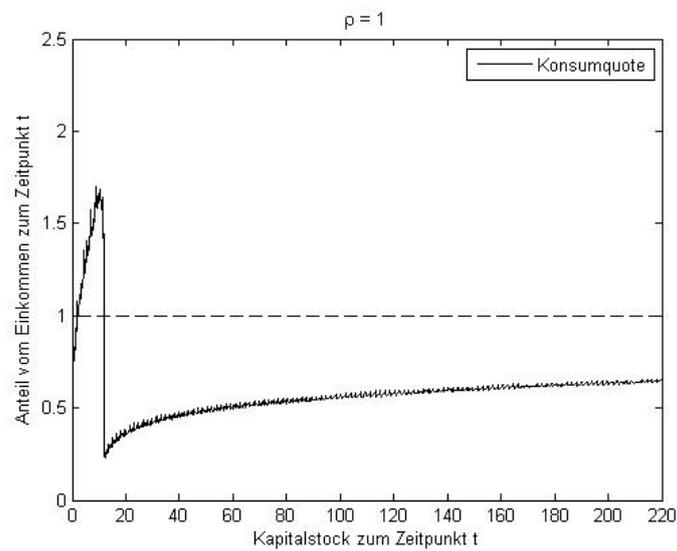


Abbildung 75: Die Abbildung zeigt die Funktion c von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 4$, $\rho = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

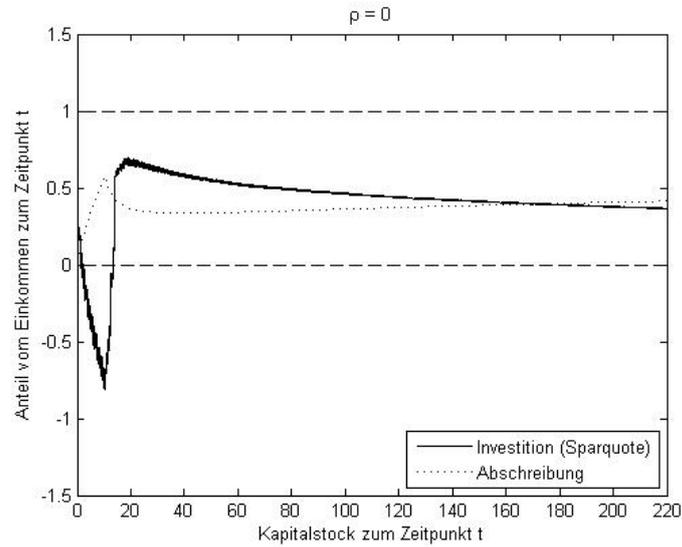


Abbildung 76: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathfrak{s} von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 4$, $\rho = 0$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

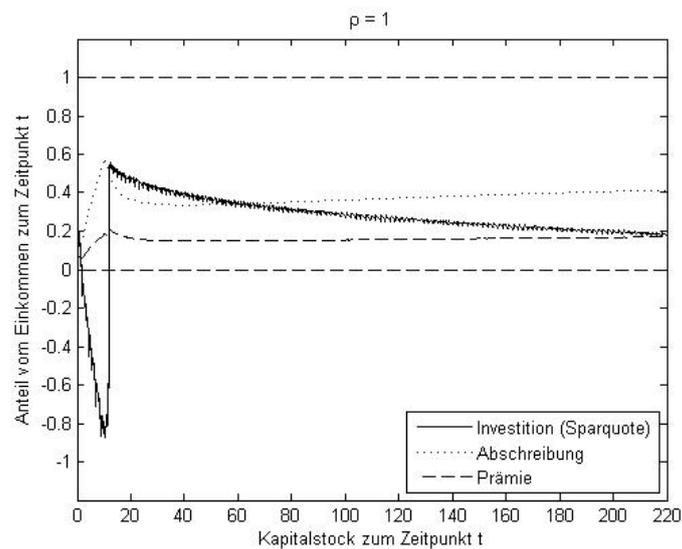


Abbildung 77: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathfrak{s} von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 4$, $\rho = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

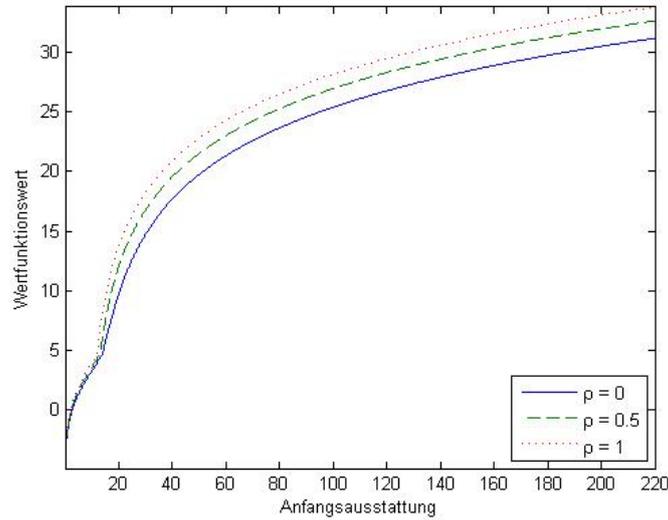


Abbildung 78: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

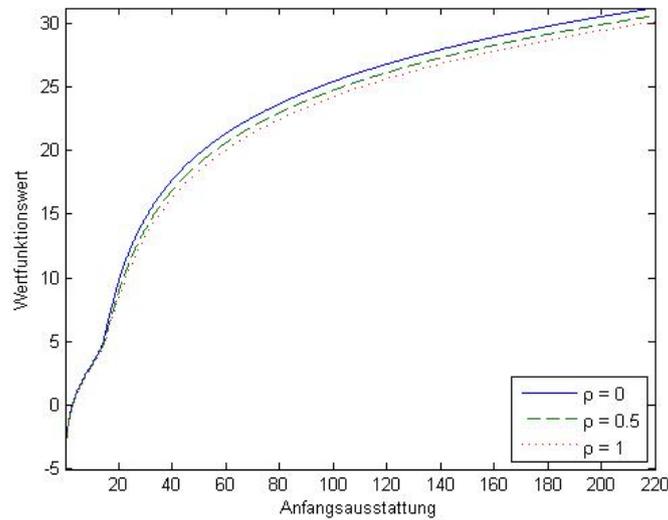


Abbildung 79: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $E = 7.8$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Technologie steht für einen armen Haushalt, die Verwendung einer höheren Technologie hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

In diesem Kapitel gehen wir weiters der Fragestellung nach: Welchen Einfluss hat die Veränderung der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad) beziehungsweise die Veränderung der Selbstbeteiligungsquote $(1 - \rho)$ auf die θ -Gleichgewichte des Modells \mathfrak{M}_1^v ?

Um auch das stochastische diskontierte dynamische Programm (46) berechnen zu können, werden die Parameter γ_H und γ_L auf $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $\gamma_L = \frac{1}{4}$ fixiert. Weiters gelten die Annahmen (A4) und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Seien nun die Parameter ρ (Deckungsgrad) und E (Fixkosten) zwei exogene Variablen und α fix. Die Korrespondenz \mathbf{EQ}_θ heißt θ -Gleichgewichtskorrespondenz auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ und ist durch

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \frac{1}{1+z_0} \cdot \phi_{E,\rho}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E,\rho}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen stochastischen diskontierten dynamischen Programm (46) mit gegebenem ρ , E und α . Um diese θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1$ für verschiedene Werte von E sowie einen fixen Wert für ρ . Aus den Ergebnissen erhält man die Abbildungen 80 - 85 für verschiedene Werte von $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$ (Deckungsgrad).

Auf den nun folgenden Abbildungen 80 - 85 finden sich auf der x-Achse die Fixkosten E , auf der y-Achse die θ -Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters sind mehrere Linien zu sehen, wobei die punktierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert er die höher entwickelte Technologie. Die anderen Linien stellen die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ dar. Aus den Abbildungen lässt sich erkennen, dass die jeweilige Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden. Die unterste Funktion $\underline{\theta EQ}(\cdot)$ verläuft ungefähr parallel zur x-Achse und steht für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte. Haushalte,

die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion $\overline{\theta EQ}$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und diese Linie befindet sich oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte, strichpunktierte Linie stellt die instabilen θ -Gleichgewichte dar. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie und findet kein negativer Schock $\theta < 1$ statt, so wird er sich zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum kleinen θ -Gleichgewicht. Dabei spielt es auch keine Rolle, ob es zu einem negativen Schock kommt. Diese Funktion wird mit $\theta EQ(\cdot)$ bezeichnet.

Befindet sich ein Haushalt in dem Feld zwischen der Armutsgrenze und der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt dieser nicht als arm, aber seine Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut (kleines stabiles θ -Gleichgewicht). Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln falls kein negativer Schock $\theta < 1$ stattfindet.

Sinken die Fixkosten $E \downarrow$, so treffen die Funktion der kleinen stabilen θ -Gleichgewichte und die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte aufeinander, außerdem schneidet die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte die Armutsgrenze. Verringert man die Fixkosten $E \downarrow$ weiter, so verbleibt nur noch das große stabile θ -Gleichgewicht.

Steigen hingegen die Fixkosten $E \uparrow$, so wird sich die Funktion der großen stabilen θ -Gleichgewichte mit der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte vereinigen. Erhöht man die Fixkosten $E \uparrow$ schließlich erneut, so verbleibt nur noch das kleine stabile θ -Gleichgewicht.

Die Funktion $s_1^\theta : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ wird in dieser Arbeit Funktion der kleinen θ -Sattelpunkte genannt, während man hier die Funktion $s_2^\theta : \rho \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ als Funktion der großen θ -Sattelpunkte bezeichnet. Aus den numerischen Berechnungen kann man die Form der θ -Gleichgewichtskorrespondenz \mathbf{EQ}_θ auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ erkennen.

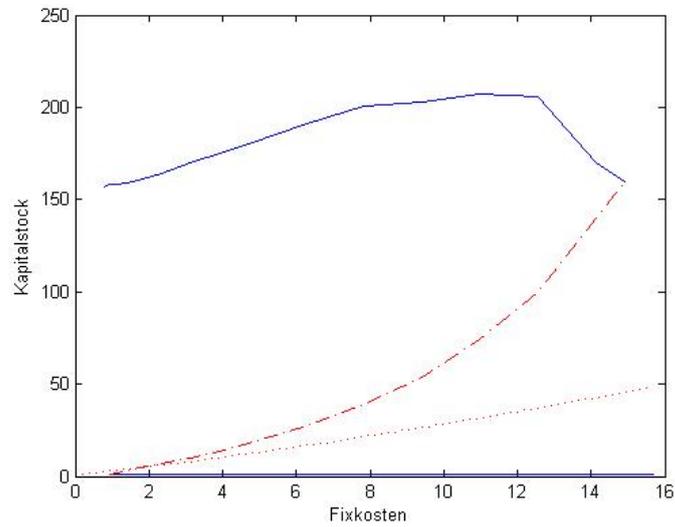


Abbildung 80: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (36) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 0$ und $\alpha = 1$.

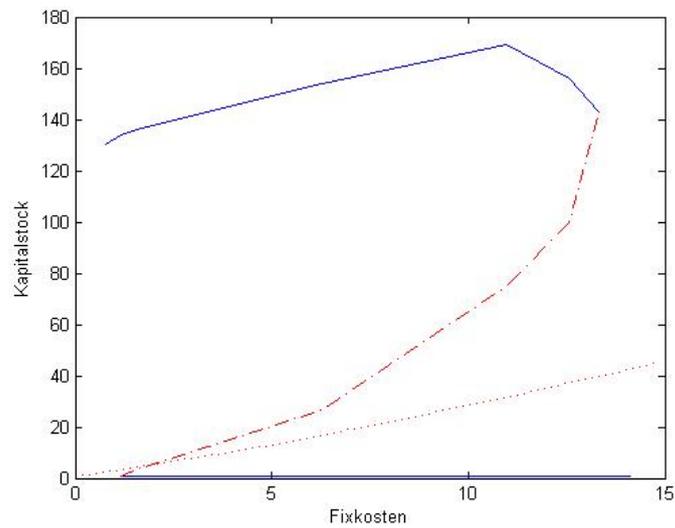


Abbildung 81: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 0.2$ und $\alpha = 1$.

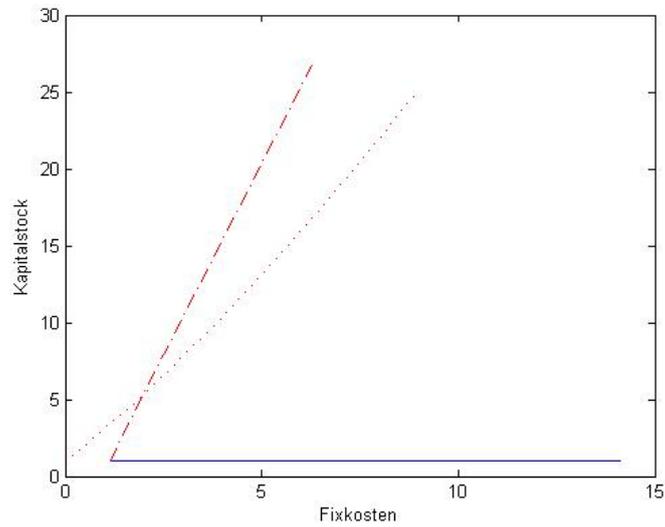


Abbildung 82: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 0.2$ und $\alpha = 1$.

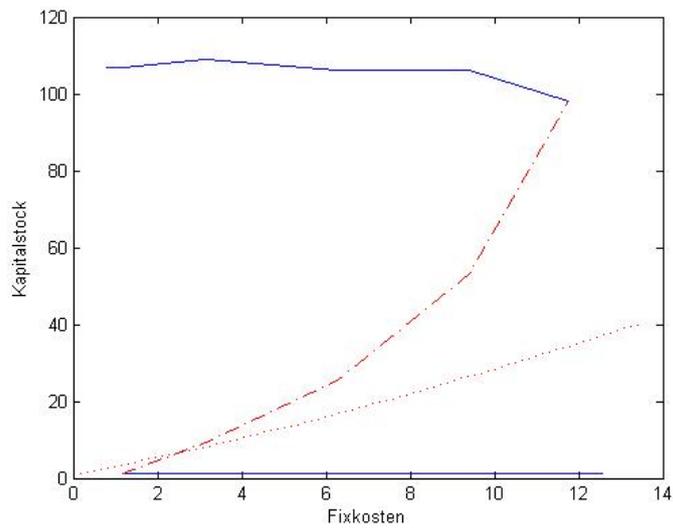


Abbildung 83: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 0.5$ und $\alpha = 1$.

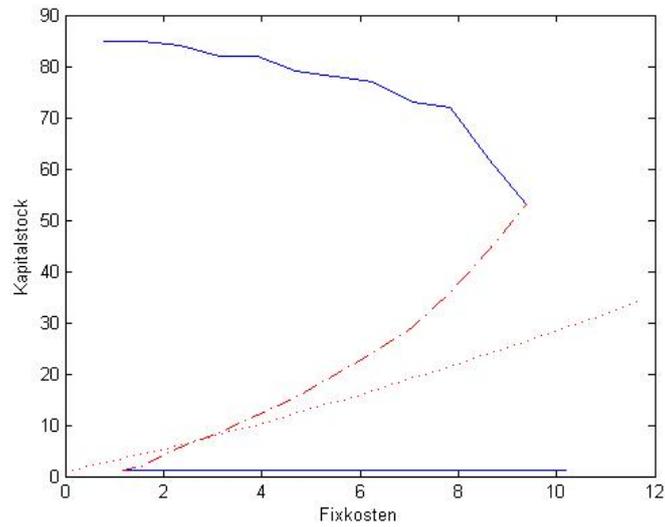


Abbildung 84: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 0.8$ und $\alpha = 1$.

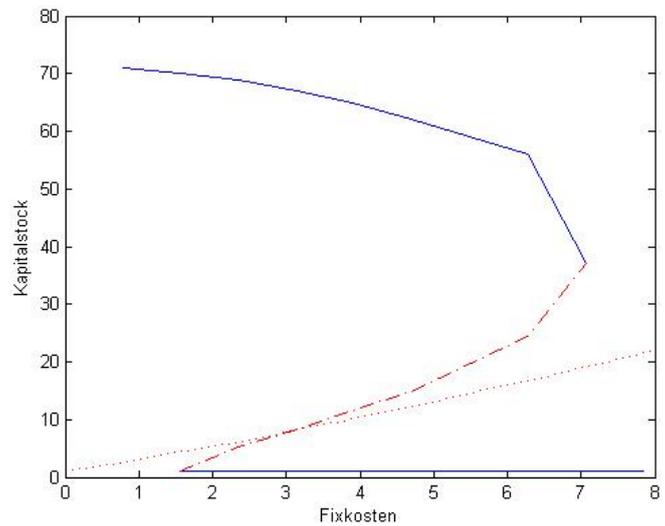


Abbildung 85: Diese Abbildung zeigt die deterministischen Gleichgewichte von (46) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\rho = 1$ und $\alpha = 1$.

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho) = \begin{cases} \{\overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\rho) \\ \{k_1^*(\rho), \overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E = E_1^*(\rho) \\ \{\underline{\theta EQ}(E, \rho), \theta EQ(E, \rho), \overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E_1^*(\rho) < E < E_2^*(\rho) \\ \{k_2^*(\rho), \overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E = E_2^*(\rho) \\ \{\underline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E_2^*(\rho) < E < +\infty \end{cases}$$

Die θ -Gleichgewichte $(k_1^*, E_1^*)(\rho)$ und $(k_2^*, E_2^*)(\rho)$ sind zwei θ -Sattelpunkte für die gilt:

$$\begin{aligned} k_l^*(\rho) &= \theta EQ(E_l^*, \rho) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\rho) &= \underline{\theta EQ}(E_1^*, \rho) \\ k_2^*(\rho) &= \overline{\theta EQ}(E_2^*, \rho) \end{aligned}$$

Die Werte für $(k_1^*, E_1^*)(\rho)$ und $(k_2^*, E_2^*)(\rho)$ kann man aus der jeweiligen Abbildung (80 - 85) ablesen.

Aus den numerischen Berechnungen kann man die folgende Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$ ablesen:

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow E_1^*(\rho_1) < E_1^*(\rho_2)$$

Man beachte dazu die Abbildungen 40 - 45. Eine weitere Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$ ist die folgende:

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow E_2^*(\rho_1) > E_2^*(\rho_2)$$

Auch dies ist aus den oben erwähnten Abbildungen ersichtlich.

9.3 Das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_2^v mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2

Das Verhalten des Haushalts im stochastischen dynamischen Modell \mathfrak{M}_2^v mit Produktionsfunktion vom Typ 2 unter der Annahme (A4) soll hier nun numerisch berechnet werden. Es soll also die folgende stochastische Verhaltensgleichung des Haushalts numerisch berechnet werden:

$$k_{t+1} = \chi_{t+1}(\rho) \cdot \phi(k_t) \quad \forall t$$

Dazu gilt es, das stochastische diskontierte dynamische Programm (48) zu lösen. Das stochastische diskontierte dynamische Programm (48) des stochastischen dynamischen Modells mit der Produktionsfunktion vom Typ 1 erhält man durch Einsetzen der Produktionsfunktion vom Typ 2 in das Problem (45).

$$\left\| \begin{array}{l} \max_{(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}} \sum_{t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot \mathbb{E} \left[\ln \left(\max \{ \alpha A k_t^\gamma, \alpha B k_t^\gamma - E \} - \kappa_{t+1} + \frac{9}{10} k_t \right) \right] \\ k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \kappa_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ \kappa_{t+1} \in \Phi(k_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \\ k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{fix} \end{array} \right. \quad (48)$$

Wobei $\Phi(s) = \{ \kappa \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq \kappa \leq \max \{ \alpha A s^\gamma, \alpha B s^\gamma - E \} + \frac{9}{10} s \}$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Im Folgenden wird das stochastische diskontierte dynamische Programm (48) unter der Annahme (A4) numerisch berechnet. Man erhält dadurch die Politikfunktion

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{1}{1+Z_0} \cdot \phi(k)$$

und untersucht mit deren Hilfe das jeweilige Modell auf θ -Gleichgewichte (Fixpunkte).

Zur Erinnerung: Unter einem θ -Gleichgewicht versteht man in diesem Modell immer einen Kapitalstock k_τ für den gilt:

$$\theta_{\tau+1} = 1 \Rightarrow k_{\tau+1} = k_\tau = \frac{1}{1+Z_{\tau+1}} \cdot \phi(k_\tau)$$

mit $Z_{\tau+1} = (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{\tau+1}]$.

Das Konsum- und Investitionsverhalten eines Haushalts kann mit Hilfe der beiden Funktionen $\mathbf{c}(k)$ (Konsumquote) und $\mathbf{s}(k)$ (Sparquote) analysiert werden. Man beachte dazu die Budgetgleichung

$$\mathbf{c}(k) + \frac{a}{f(\alpha, k)} + \mathbf{s}(k) = 1 \quad (a \in \mathbb{R}_+) \quad \forall k > 0.$$

Zur Wiederholung: Die Funktion \mathbf{s} ist für alle $k > 0$ definiert durch

$$\mathbf{s}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\phi}(k)}{f(\alpha, k)} - \frac{(1 - \delta)k}{f(\alpha, k)}$$

und die Funktion \mathbf{c} ist für alle $k > 0$ durch

$$\mathbf{c}(k) \stackrel{def}{=} \frac{\psi(k)}{f(\alpha, k)}$$

definiert.

Um das Konsumverhalten beziehungsweise das Investitionsverhalten eines Haushalts zu analysieren, reicht es somit die beiden Funktionen $\mathbf{c}(k)$ und $\mathbf{s}(k)$ zu betrachten.

Für die Berechnung des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (48) werden die Parameter γ , A und B fixiert auf $\gamma = \frac{25}{100}$, $A = 1$ und $B = 10$. Weiters gilt die Annahme (A4) mit $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Die Abbildungen 86 und 87 zeigen die jeweilige Funktion $\mathbf{c}(k)$ (Konsumquote in Abhängigkeit vom Kapitalstock) falls die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) auf $\rho = 0$ (keine Versicherung) beziehungsweise $\rho = 1$ (Vollversicherung) fixiert ist.

Sowohl auf der Abbildung 86 als auch auf der Abbildung 87 bildet die strichlierte Linie gemeinsam mit der x-Achse ein Band. Oberhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt mehr als er einnimmt, d.h. er greift auf sein Vermögen zurück. Innerhalb dieses Bandes konsumiert der Haushalt immer nur einen Teil seines Einkommens, d.h. $c_t \leq f(\alpha, k_t)$.

Die Funktion \mathbf{c} auf Abbildung 86 beginnt innerhalb des Bandes und steigt dann bis zu ihrem Maximum, welches außerhalb des Bandes liegt, an. Ungefähr bei diesem Maximum tauscht der Haushalt die Technologie f_L (die Technologie eines armen Haushalts) gegen die Technologie f_H (die Technologie eines nicht-armen Haushalts). Schließlich fällt sie (Konsumquote) wieder unterhalb des Bandes und steigt dann langsam an. Die Funktion der Abbildung 87 verhält sich gleichermaßen.

Auf der Abbildung 87 ist wieder die zu Abbildung 86 gehörige Funktion $\mathbf{s}(k) = 1 - \mathbf{c}(k)$ zu sehen. Ferner bilden zwei strichlierte Linien ein Band, innerhalb dessen der Haushalt nur einen Teil seines Einkommens investiert, d.h. $i_t \leq f(\alpha, k_t)$. Unterhalb des Bandes entspart sich der Haushalt. Die punktierte Linie steht für die Abschreibung δk_t geteilt durch das Einkommen $f(\alpha, k_t)$. Bei den Schnittpunkten der Abschreibung mit der Funktion $\mathbf{s}(k)$ (Sparquote) handelt es sich um die Fixpunkte der Politikfunktion $\phi(k)$.

Auf der Abbildung 89 ist die zu Abbildung 88 gehörige Funktion $\mathfrak{s}(k)$ ersichtlich. Die beiden äußeren strichlierten Linien bilden auch hier ein Band, innerhalb dessen der Haushalt wieder nur einen Teil seines Einkommens konsumiert beziehungsweise investiert. Die strichlierte Linie in der Mitte beschreibt die Versicherungsprämie geteilt durch das Einkommen. Die Schnittpunkte der Abschreibung mit der Funktion $\mathfrak{s}(k)$ (Sparquote) stellen die Fixpunkte der Politikfunktion $\tilde{\phi}(k)$ dar.

Vergleicht man die beiden Abbildungen 87 und 89 so kann man wie folgt feststellen: Der Haushalt ohne Versicherung neigt im Gegensatz zu einem Haushalt mit Versicherung (Vollversicherung) zu höheren Sparquoten. Dies erklärt sich dadurch, dass der Haushalt mit Versicherung neben der Investition auch noch die Versicherungsprämie tragen muss.

Die auf den Abbildungen 9 und 91 sichtbaren Linien stellen das Maximum, d.h. die maximale zulässige Summe der diskontierten Erwartungsnutzen des stochastischen diskontierten dynamischen Programms (48) dar, dies in Abhängigkeit vom Anfangskapitalstock k_0 . Zur Berechnung der Wertfunktion des Programms (46) werden wieder drei unterschiedliche Werte für die exogene Variable ρ (Deckungsgrad) verwendet: $\rho = 0$ (keine Versicherung), $\rho = 50\%$ (Teilversicherung) und $\rho = 1$ (Vollversicherung). Dadurch erhält man auch drei verschiedene Wertfunktionen.

Aus Abbildung 90 lässt sich erkennen, dass Folgendes gilt:

$$\text{Vollversicherung} \succ \text{Teilversicherung} \succ \text{Nicht-Versicherung}$$

Man beachte, dass dies unabhängig vom Anfangskapitalstock k_0 gilt.

Die Abbildung 91 ist das Ergebnis einer Erhöhung des Versicherungsprämienaufschlags von $\nu = 0.1$ auf $\nu = 12$. Auf dieser Abbildung lässt sich sodann erkennen, dass sich die Präferenzen (\succ) des Haushalts zum genauen Gegenteil verändert haben, d.h.

$$\text{Nicht-Versicherung} \succ \text{Teilversicherung} \succ \text{Vollversicherung}.$$

Dies gilt wieder unabhängig vom Anfangskapitalstock k_0 .

Nun gehen wir erneut der Frage nach, ob in diesen θ -Gleichgewichten - jeweils für sich betrachtet - entweder die höhere oder die niedrigere Technologie verwendet wird. Nochmals zur Erinnerung: Die Verwendung einer niedrigeren Technologie steht für einen armen Haushalt, die Verwendung einer höheren

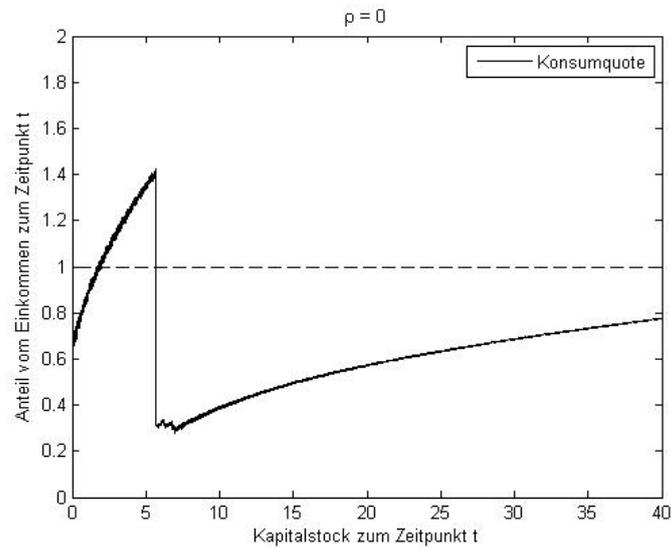


Abbildung 86: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathbf{c} von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

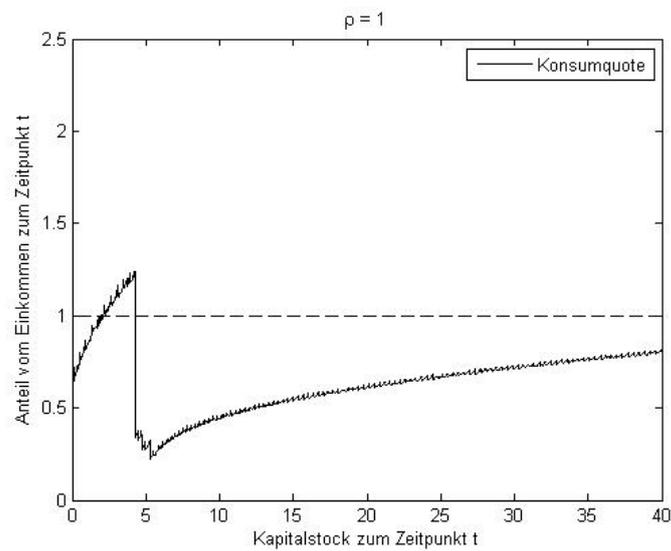


Abbildung 87: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathbf{c} von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

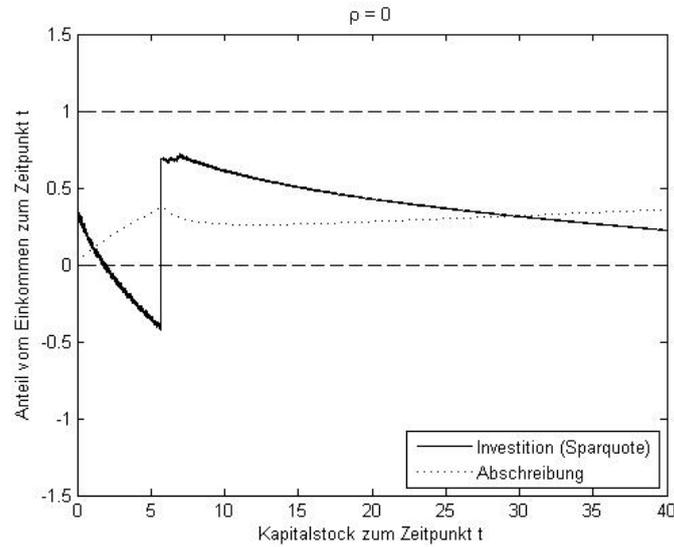


Abbildung 88: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathfrak{s} von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

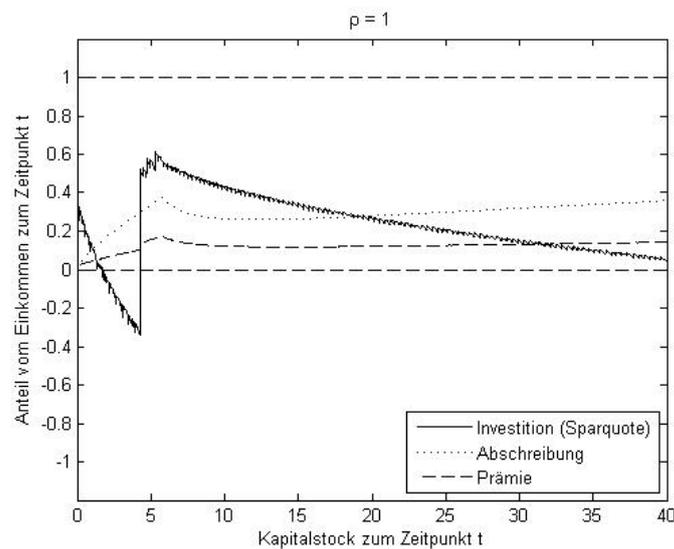


Abbildung 89: Die Abbildung zeigt die Funktion \mathfrak{s} von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

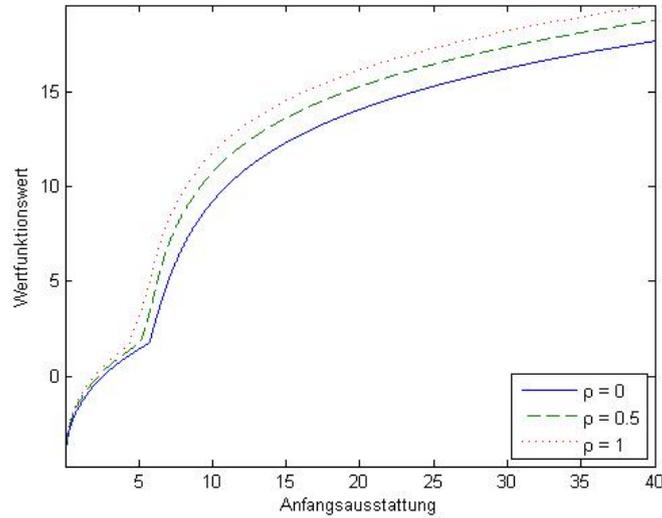


Abbildung 90: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

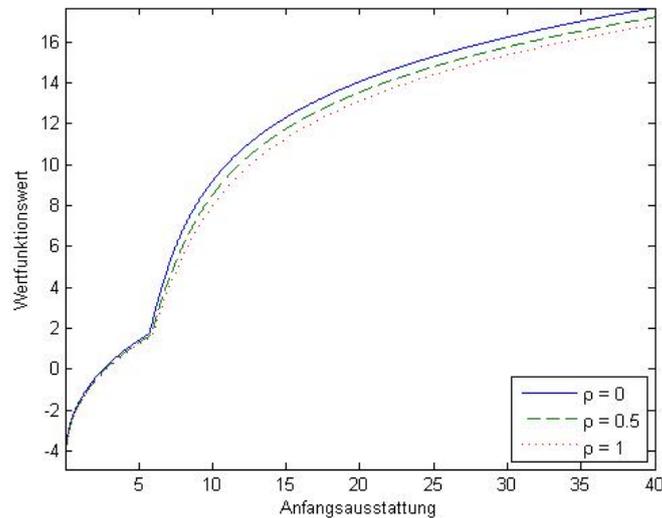


Abbildung 91: Die Abbildung zeigt die Wertfunktion von (46) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $E = 14$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

Technologie hingegen für einen nicht-armen Haushalt.

Zudem gehen wir in diesem Kapitel ebenfalls der Fragestellung nach: Welchen Einfluss hat die Veränderung der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad) auf die Gleichgewichte des Modells \mathfrak{M}_2^v ?

Seien nun die Parameter ρ (Deckungsgrad) und E (Fixkosten) zwei exogene Variablen und α fix. Die Korrespondenz \mathbf{EQ}_θ heißt θ -Gleichgewichtskorrespondenz auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ und ist durch

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho) \stackrel{def}{=} \left\{ k \in \mathbb{R}_+ : k = \frac{1}{1+Z_0} \cdot \phi_{E,\rho}(k) \right\}$$

definiert. Die Politikfunktion $\phi_{E,\rho}(\cdot)$ entstammt dem jeweiligen stochastischen diskontierten dynamischen Programm (48) mit gegebenem ρ , E und α . Um diese θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ zu erhalten, berechnet man die Politikfunktion des Problems (48) mit den Parametern $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$ und $\alpha = 1$ für verschiedene Werte von E (Fixkosten) und ρ (Deckungsgrad). Aus den Ergebnissen erhält man die Abbildungen 92 - 95.

Auf den nun folgenden Abbildungen 92 - 95 finden sich auf der x-Achse die Fixkosten E , auf der y-Achse die θ -Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Weiters sind mehrere Linien zu sehen, wobei die punktierte Linie die Grenze zwischen einem armen Haushalt und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb dieser Linie präferiert der Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die anderen Linien stellen die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ dar. Aus den Abbildungen lässt sich erkennen, dass die jeweilige Korrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ annimmt. Die Abbildungen 92 - 95 entsprechen somit inhaltlich den Abbildungen 80 - 85.

Auch hier kann die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ in drei stetige Funktionen unterteilt werden. Die unterste Funktion $\underline{\theta EQ}(\cdot)$ verläuft ungefähr parallel zur x-Achse und steht für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte. Haushalte, die dieses Gleichgewicht erreichen, gelten als arm, da sich diese Linie unterhalb der strichlierten Linie (Armutsgrenze) befindet. Die oberste Funktion $\overline{\theta EQ}$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und diese Linie befindet sich oberhalb der Armutsgrenze. Die letzte, punktstrichlierte Linie stellt die instabilen θ -Gleichgewichte dar. Befindet sich ein Haushalt oberhalb dieser Linie und findet kein negativer Schock $\theta < 1$ statt, so wird

er sich zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln. Liegt er hingegen unterhalb der Linie, so entwickelt er sich zum kleinen θ -Gleichgewicht. Dabei spielt es auch keine Rolle, ob es zu einem negativen Schock kommt. Diese Funktion wird mit $\theta EQ(\cdot)$ bezeichnet. Dies entspricht inhaltlich der θ -Gleichgewichtskorrespondenz des Modells \mathfrak{M}_1^v .

Befindet sich ein Haushalt im Feld zwischen der Armutsgrenze und der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt dieser nicht als arm, aber seine Entwicklung bewegt sich in Richtung Armut (kleines stabiles θ -Gleichgewicht). Befindet sich ein Haushalt hingegen an einem Punkt unterhalb der Armutsgrenze aber oberhalb der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte, so gilt der Haushalt zwar als arm, wird sich aber hin zum großen stabilen θ -Gleichgewicht entwickeln falls kein negativer Schock $\theta < 1$ stattfindet. Diese möglichen Entwicklungen decken sich mit jenen in Modell \mathfrak{M}_1^v .

Sinken die Fixkosten $E \downarrow$, so treffen die Funktion der kleinen stabilen θ -Gleichgewichte und die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte aufeinander, außerdem schneidet die Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte die Armutsgrenze. Verringert man die Fixkosten $E \downarrow$ weiter, so verbleibt nur noch das große stabile θ -Gleichgewicht.

Steigen hingegen die Fixkosten $E \uparrow$, so wird sich die Funktion der großen stabilen θ -Gleichgewichte mit der Funktion der instabilen θ -Gleichgewichte vereinigen. Erhöht man die Fixkosten $E \uparrow$ schließlich erneut, so verbleibt nur noch das kleine stabile θ -Gleichgewicht.

Auch die Aussagen zu den Auswirkungen der Fixkosten E auf das Modell \mathfrak{M}_2^v entsprechen jenen von Modell \mathfrak{M}_1^v .

Die Funktion $s_1^\theta : \alpha \mapsto (E_1^*, k_1^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ wird in dieser Arbeit Funktion der kleinen θ -Sattelpunkte genannt, während man hier die Funktion $s_2^\theta : \rho \mapsto (E_2^*, k_2^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ als Funktion der großen θ -Sattelpunkte bezeichnet. Aus den numerischen Berechnungen kann man die Form der θ -Gleichgewichtskorrespondenz \mathbf{EQ}_θ auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ erkennen.

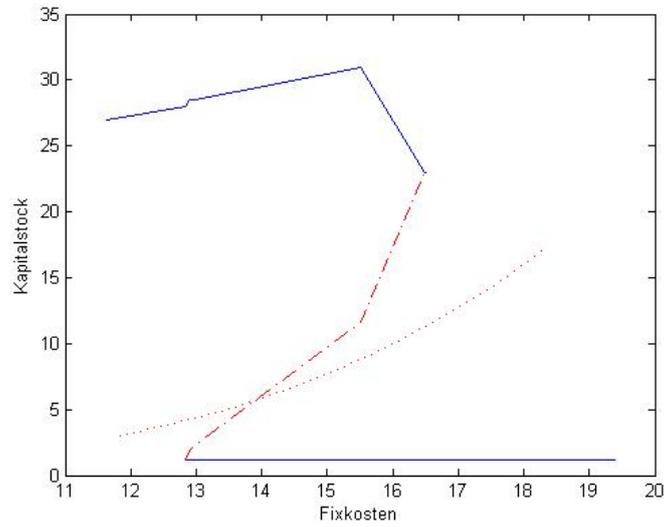


Abbildung 92: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\rho = 0$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

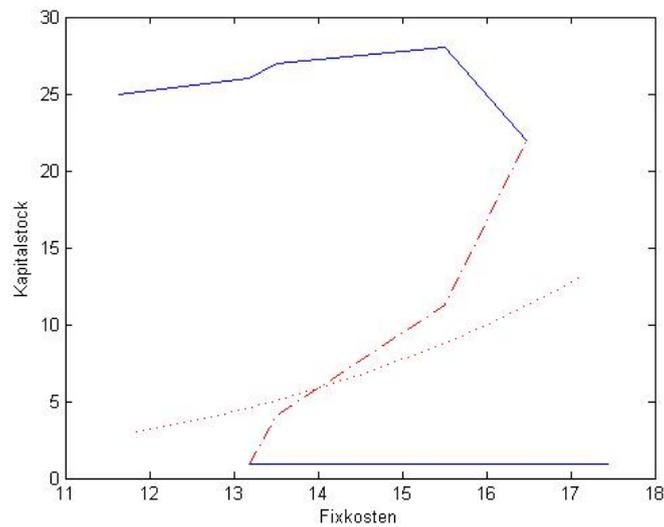


Abbildung 93: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\rho = 0.2$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

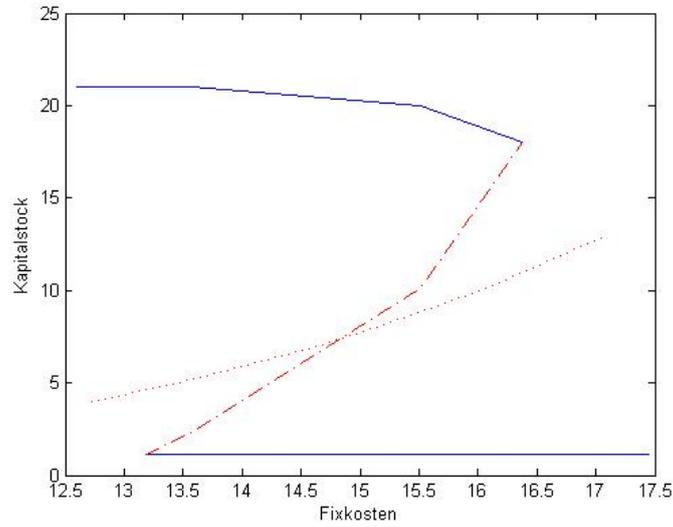


Abbildung 94: Diese Abbildung zeigt die θ -Gleichgewichte von (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\rho = 0.8$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

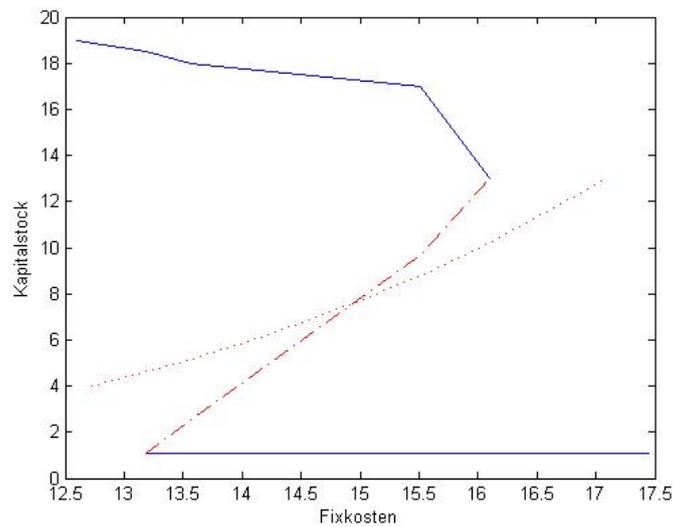


Abbildung 95: Diese Abbildung zeigt die deterministischen Gleichgewichte von (48) mit den Parametern $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\rho = 1$, $\alpha = 1$ und $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$.

$$\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho) = \begin{cases} \{\overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : 0 \leq E < E_1^*(\rho) \\ \{k_1^*(\rho), \overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E = E_1^*(\rho) \\ \{\theta EQ(E, \rho), \theta EQ(E, \rho), \overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E_1^*(\rho) < E < E_2^*(\rho) \\ \{k_2^*(\rho), \theta EQ(E, \rho)\} & E : E = E_2^*(\rho) \\ \{\overline{\theta EQ}(E, \rho)\} & E : E_2^*(\rho) < E < +\infty \end{cases}$$

Die θ -Gleichgewichte $(k_1^*, E_1^*)(\rho)$ und $(k_2^*, E_2^*)(\rho)$ sind zwei θ -Sattelpunkte für die gilt:

$$\begin{aligned} k_l^*(\rho) &= \theta EQ(E_l^*, \rho) \quad \text{für } l = 1, 2 \\ k_1^*(\rho) &= \overline{\theta EQ}(E_1^*, \rho) \\ k_2^*(\rho) &= \overline{\theta EQ}(E_2^*, \rho) \end{aligned}$$

Auch die Form der θ -Gleichgewichtskorrespondenz \mathbf{EQ}_θ auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ des \mathfrak{M}_2^v entspricht jener von Modell \mathfrak{M}_1^v . Die Werte für $(k_1^*, E_1^*)(\rho)$ und $(k_2^*, E_2^*)(\rho)$ kann man aus den Abbildungen 92 - 95 ablesen.

Folgende Eigenschaft der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(\cdot)$ kann aus den numerischen Berechnungen abgelesen werden:

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow E_1^*(\rho_1) < E_1^*(\rho_2)$$

Hierbei sind die Abbildungen 92 - 95 zu beachten. Ferner weist die θ -Gleichgewichtskorrespondenz die folgende Eigenschaft auf:

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow E_2^*(\rho_1) > E_2^*(\rho_2)$$

Dies ist ebenfalls aus den oben erwähnten Abbildungen ersichtlich. Diese beiden Eigenschaften zur θ -Gleichgewichtskorrespondenz im Modell \mathfrak{M}_2^v sind ident mit jenen im Modell \mathfrak{M}_1^v jedoch etwas schwächer ausgeprägt.

10 Modellsimulation II

Die folgenden Seiten befassen sich mit der Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich ein Haushalt nach 100 Perioden unterhalb des

instabilen θ -Gleichgewichtes befindet, d.h. $k_{100} < \theta EQ(E, \rho)$, dies im jeweiligen Modell mit Versicherung. Zur Erinnerung: Verfügt ein Haushalt über einen Kapitalstock k_t , welcher geringer ist, als das instabile θ -Gleichgewicht, so wird er sich in Richtung kleines stabiles θ -Gleichgewicht $\underline{\theta EQ}(E, \rho)$ (Armutsfalle) entwickeln.

Sei $\phi(\cdot)$ eine numerisch berechnete Politikfunktion eines Haushalts mit einer Anfangsausstattung an persönlichen Fähigkeiten und Kapital von α und k_0 . Die (stochastische) Verhaltensgleichung

$$k_{t+1} = \chi_{t+1} \cdot \phi(k_t)$$

und das Anfangskapital k_0 des Haushalts erzeugen gemeinsam einen Stochastischen Prozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ (Kapitalstockprozess).

Es werden Pfade des Kapitalstockprozesses $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0} | (\alpha, k_0)$ mit gegebener Anfangsausstattung der Länge 100 simuliert um dann mit Hilfe des Schwachen Gesetz der großen Zahlen die folgende Funktion zu erhalten:

$$k_0 \mapsto \mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \rho) \mid k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

Man beachte, dass k_{100} eine nicht-negative Zufallsvariable ist. Es wird weiters die Annahme (A4) bezüglich des Schockprozesses

$$(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} : \theta_t \stackrel{d}{=} \theta \quad i.i.d. \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

getroffen. Zur Erinnerung: Die Annahme (A4) lautet: Sei $p \in (0, 1)$ eine Konstante und θ_t eine nicht-negative Zufallsvariable.

$$\theta = \frac{X}{4} + \frac{1}{4} : \mathbb{P}(X = k) = p^k (1 - p)^{3-k} \quad k = 0, \dots, 3$$

Wobei es sich bei X um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 3 und p handelt.

Vorausgesetzt die Modelle \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) verfügen über ein instabiles θ -Gleichgewicht, welches mit $\theta EQ(E, \alpha)$ bezeichnet wird, so verwendet man für die Modellsimulationen diese Eigenschaft:

$$k_0 \leq \theta EQ(E, \alpha) \Rightarrow k_t \leq \theta EQ(E, \alpha) \quad \forall t$$

Ist der Anfangskapitalstock k_0 eines Haushalts kleiner oder gleich als das instabile θ -Gleichgewicht, so wird der dazugehörige Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ in jedem beliebigen Zeitpunkt kleiner oder gleich dem instabilen θ -Gleichgewicht sein, dies mit Wahrscheinlichkeit 1. Das kann man aus den Abbildungen 96 (97) und 98 (99) ablesen.

10.1 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 1

Die folgenden Simulationen sollen die Frage beantworten, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Kapitalstock k_t eines versicherten Haushalts mit einer Selbstbeteiligung von $\rho(1 - \theta)\kappa$ nach 100 Perioden unterhalb des instabilen θ -Gleichgewichts liegt. Somit wird die folgende Wahrscheinlichkeit für das stochastische dynamische Modell \mathfrak{M}_1^v berechnet (simuliert):

$$\mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \rho) \mid k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Anfangskapitalstock k_t des Haushalts und dem Parameter $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$ (Deckungsgrad). Zur Erinnerung: Ist der Wert $\rho = 1$, so spricht man von einer Vollversicherung. Tritt dieser Fall ein, so würde das Modell \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) zu einem deterministischen dynamischen Modell werden.

Um die Politikfunktion numerisch zu berechnen, werden die Parameter γ_H und γ_L auf $\gamma_H = \frac{3}{4}$ und $\gamma_L = \frac{1}{4}$ fixiert. Weiters werden die persönlichen Fähigkeiten α auf 1 fixiert und die Fixkosten E auf den Wert 7.8 festgelegt. Die Fixkosten E werden dabei so gewählt, dass ein großes und ein kleines stabiles θ -Gleichgewicht, sowie ein instabiles θ -Gleichgewicht existiert. Die Politikfunktion $\phi(\cdot)$ erzeugt mit dem Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ den Kapitalstockprozess $(k_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$.

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von nicht-negativen *i.i.d.* Zufallsvariablen, wie bereits in (A4) beschrieben. Die Simulation erfolgt mit dem Parameter $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ (Parameter der Binomialverteilung).

Die Modellsimulation erfolgt hier mit zwei unterschiedlichen Versicherungsverträgen. Diese unterscheiden sich nur in der Höhe des Deckungsgrads. So besitzt der erste Versicherungsvertrag die Form

$$e_{t+1} = \frac{2}{10} \cdot (1 - \theta_{t+1}) \cdot \kappa \quad (50a)$$

$$a_t = 1.1 \cdot \frac{2}{10} \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{t+1}] \cdot \kappa \quad (50b)$$

der zweite die Form

$$e_{t+1} = \frac{8}{10} \cdot (1 - \theta_{t+1}) \cdot \kappa \quad (51a)$$

$$a_t = 1.1 \cdot \frac{8}{10} \cdot \mathbb{E}[1 - \theta_{t+1}] \cdot \kappa \quad (51b)$$

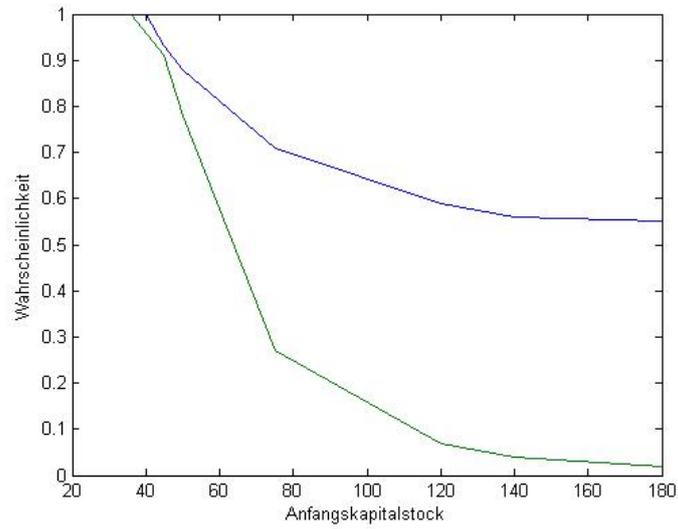


Abbildung 96: Die Parameter: $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ und $E = 7.8$

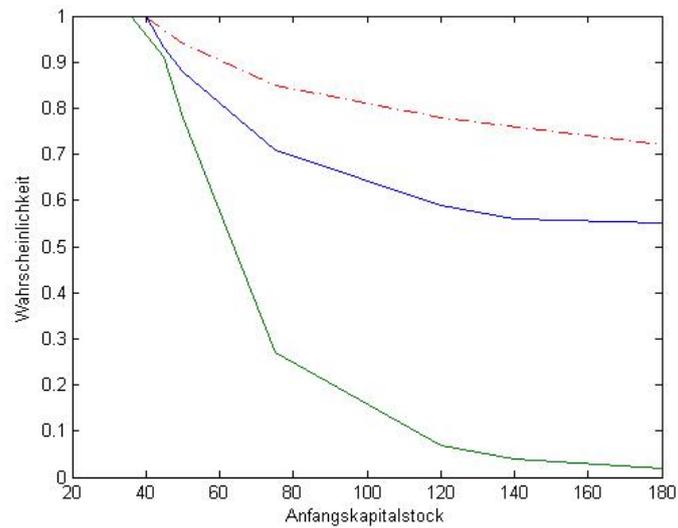


Abbildung 97: Die Parameter: $\gamma_L = 0.25$, $\gamma_H = 0.75$, $\alpha = 1$, $p = \sqrt[3]{\frac{85}{100}}$ und $E = 7.8$

D.h. die beiden Versicherungsverträge unterscheiden sich nur im Parameter $1 - \rho$ (Selbstbeteiligungsquote). Man beachte weiters, dass die Variable κ für den Kapitalstock vor einem möglichen Schock steht.

Auf den Abbildungen 96 und 97 findet sich auf der x-Achse jeweils die Anfangskapitalausstattung k_0 , auf der y-Achse die dazugehörige Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen. Die obere Linie in Abbildung 96 repräsentiert die Ergebnisse der Modellsimulation mit dem Deckungsgrad $\rho = \frac{2}{10}$, während die untere Linie ebenfalls dieser Abbildung für die Ergebnisse der Modellsimulation mit dem Parameter (Deckungsgrad) $\rho = \frac{8}{10}$ steht. Die Abbildung 97 ist eine Erweiterung der Abbildung 96. Neu ist hier die oberste, strichlierte Linie. Diese repräsentiert die Ergebnisse der Simulation des stochastischen Modells ohne Versicherung, d.h. $\rho = 0$. Beide Abbildungen (96 und 97) zeigen somit die jeweilige Auswirkung eines Anstiegs beziehungsweise Sinkens des Parameters ρ (Deckungsgrad).

Ferner lässt sich aus diesen Abbildungen (96 und 97) erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen mit dem Anstieg ($k_0 \uparrow$) des Anfangskapitalstocks sinkt. D.h. je mehr Kapitalstock dem Haushalt zur Verfügung steht, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich in Richtung Armut entwickelt. Es ist weiters zu erkennen, dass mit steigendem $\rho \uparrow$ die Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen, ebenfalls sinkt.

10.2 Modellsimulation mit i.i.d. Schocks und Produktionsfunktion vom Typ 2

Im Folgenden wird die Funktion

$$k_0 \mapsto \mathbb{P}\left(k_{100} \leq \theta EQ(E, \rho) \mid k_0\right) \quad \text{für } k_0 \in \mathbb{R}_+$$

berechnet und man folgt dabei dem gleichen Ablauf wie im Kapitel zuvor. Den Kapitalstockprozess erhält man durch die stochastische Verhaltensgleichung

$$k_{t+1} = \chi_{t+1}(\rho) \cdot \phi(k_t)$$

des stochastischen dynamischen Modells mit Versicherung und Produktionsfunktion vom Typ 2.

Bei der numerischen Berechnung der Politikfunktion $\phi(\cdot)$ werden die Parameter γ , A und B auf $\gamma = \frac{1}{4}$, $A = 1$ und $B = 10$ fixiert. Auch hier werden die

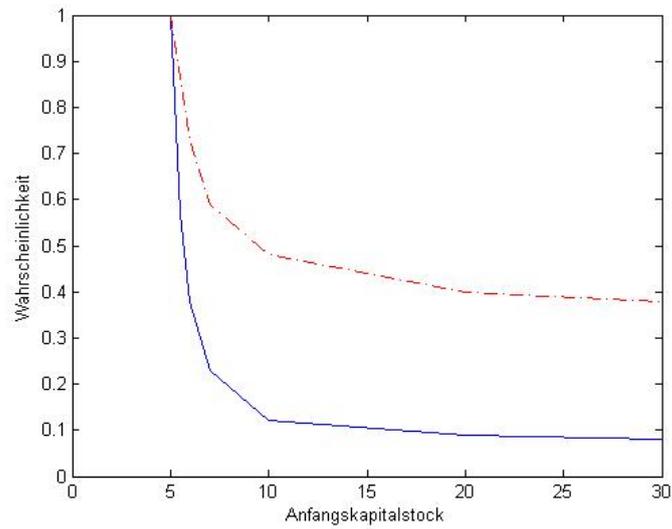


Abbildung 98: Die Parameter: $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $\rho = 0.2$, $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$ und $E = 13.57$

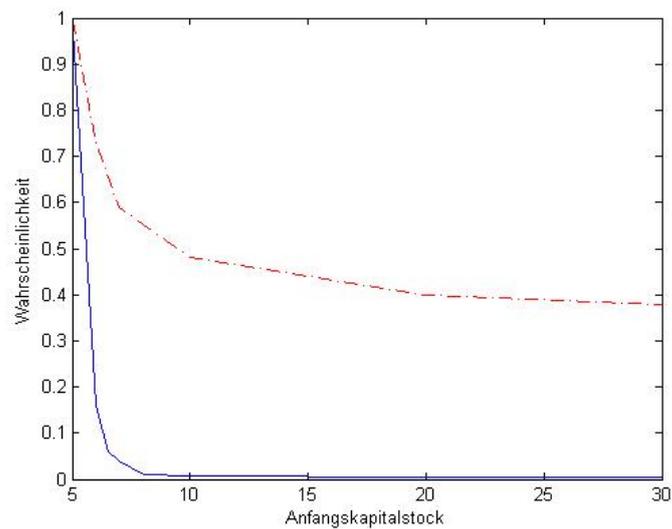


Abbildung 99: Die Parameter: $\gamma = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$, $\alpha = 1$, $\rho = 0.4$, $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$ und $E = 13.57$

persönlichen Fähigkeiten α auf $\alpha = 1$ fixiert und die Fixkosten E so gewählt, dass ein großes und ein kleines stabiles θ -Gleichgewicht sowie ein instabiles θ -Gleichgewicht existiert, d.h. $E = 13.57$.

Der Schockprozess $(\theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen, wie bereits in (A4) beschrieben. Die Simulation erfolgt mit dem Parameter $p = \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$ (Parameter der Binomialverteilung).

Auf den Abbildungen 98 und 99 findet sich auf der x-Achse der Anfangskapitalstock, auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Haushalt über einen Kapitalstock (k_{100}) nach 100 Perioden verfügt, welcher kleiner ist, als das instabile stabile θ -Gleichgewicht.

11 Ergebnisse II

Auf den folgenden Seiten werden die Resultate aus den Kapiteln 9 und 10 zusammengefasst.

11.1 Die Auswirkungen einer Versicherung auf die Gleichgewichte der Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v

In den stochastischen Modellen \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v lässt sich das gleiche Konsum- und Investitionsverhalten des Haushalts erkennen.

Die Skizzen (Abbildung 100 und 101) auf Seite 151, bei welchen es sich wieder um Bifurkationsdiagramme handelt, fassen die numerischen Berechnungen der beiden stochastischen Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v mit der Möglichkeit einer Versicherung mit Selbstbeteiligung unter der Annahme (A4) zusammen.

Die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}(E, \rho)$ kann in drei stetige Funktionen unterteilt werden: Die Funktion $\underline{\theta EQ}(\cdot)$ steht für die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte, die Funktion $\overline{\theta EQ}(\cdot)$ repräsentiert die großen stabilen θ -Gleichgewichte und $\theta EQ(\cdot)$ die instabilen θ -Gleichgewichte. Die θ -Gleichgewichtskorrespondenz nimmt einen, zwei oder drei Werte in \mathbb{R}_+ an. Das bedeutet, dass das stochastische Modell \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) entweder nur ein großes stabiles, nur ein kleines stabiles oder ein großes, ein kleines und ein instabiles (zugleich) θ -Gleichgewicht besitzt.

Auf den Abbildungen 100 und 101 werden jeweils auf der x-Achse die Fixkosten E aufgetragen, auf der y-Achse die θ -Gleichgewichte (Kapitalstock k_t). Es ist auch eine doppelte Linie zu sehen, die die Grenze zwischen einem armen und einem nicht-armen Haushalt darstellt. D.h. jeder Punkt unterhalb dieser Linie repräsentiert eine Kombination aus Kapitalstock k_t und Fixkosten E , in welcher der Haushalt die weniger entwickelte Technologie bevorzugt. Oberhalb der Linie präferiert der Haushalt die höher entwickelte Technologie. Die dicken Linien stehen für die stabilen θ -Gleichgewichtsfunktionen $\underline{\theta EQ}(E, \rho)$ (die kleinen stabilen θ -Gleichgewichte) und $\overline{\theta EQ}(E, \rho)$ (die großen stabilen θ -Gleichgewichte). Die einfache Linie stellt die instabilen θ -Gleichgewichte $\theta EQ(E, \rho)$ dar. Bei dieser Bifurkation handelt es sich erneut um die *turning point bifurkation*. Schließlich gilt es noch festzuhalten, dass auch hier beide Modelle diesen Bifurkationstyp aufweisen.

Die θ -Sattelpunkte sind in den Skizzen (Abbildung 100 und 101) mit einem Kreis gekennzeichnet. Seien $(k_1^*, E_1^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $(k_2^*, E_2^*)(\rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ zwei θ -Sattelpunkte des stochastischen Modells \mathfrak{M}_1^v (\mathfrak{M}_2^v) mit der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad¹⁴). Die Menge A sei definiert durch

$$A(\rho) \stackrel{def}{=} \{E \in \mathbb{R}_+ : E_2^*(\rho) < E \leq +\infty\}.$$

Verfügt ein Haushalt über eine Produktionsfunktion vom Typ 1 (Typ 2) mit Fixkosten E für die gilt $E \in A$ so trifft Folgendes zu:

$$\exists \tau \in \mathbb{N}_0 : k_t \leq \underline{\theta EQ}(E, \rho) \quad \forall t \geq \tau \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Dies gilt unabhängig von k_0 (der Anfangsausstattung an Kapital). D.h. der Haushalt wird mit Wahrscheinlichkeit 1 in die Armutsfalle geraten.

Die Abbildung 101 zeigt den Einfluss der exogenen Variable ρ (Deckungsgrad) auf die θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$, deren θ -Sattelpunkte sich einander nähern, wenn $\rho \uparrow$ steigt. Darum gilt die folgende Aussage:

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow A(\rho_1) \subseteq A(\rho_2)$$

Man beachte, dass die numerischen Berechnungen es nahelegen, dass $A(\rho_1)$ eine echte Teilmenge von $A(\rho_2)$ ist.

Zusammenfassend lässt sich über die Simulation der Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v unter der Annahme (A4) festhalten: Je höher der Anfangskapitalstock k_0

¹⁴Man beachte, dass $1 - \rho$ die Selbstbeteiligungsquote ist.

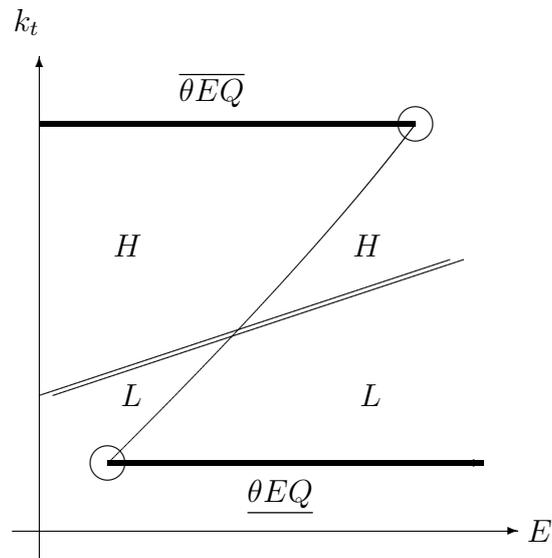


Abbildung 100: Die Abbildung zeigt eine Skizze der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$ für die Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v unter der Annahme (A4).

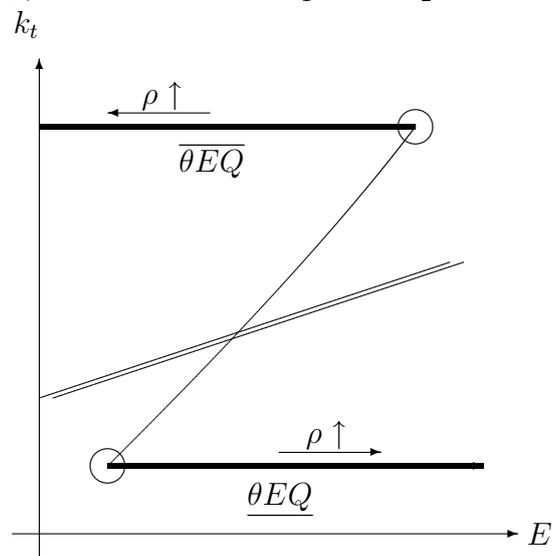


Abbildung 101: Die Skizze der θ -Gleichgewichtskorrespondenz $\mathbf{EQ}_\theta(E, \rho)$ für die Modelle \mathfrak{M}_1^v und \mathfrak{M}_2^v unter der Annahme (A4) zeigt den Einfluss des Parameters ρ auf die Modelle.

eines Haushalts, umso geringer ist die Wahrscheinlichkeit in eine etwaige Armutsfalle zu geraten. Dies gilt für alle stochastischen dynamischen Modelle in dieser Arbeit mit oder ohne Versicherung. Wichtig ist dabei auch noch, dass der Anfangskapitalstock k_0 größer ist als das instabile θ -Gleichgewicht, sofern dieses existiert.

Weiters ist festzuhalten, dass mit steigendem $\rho \uparrow$ die Wahrscheinlichkeit unter das instabile θ -Gleichgewicht zu fallen, sinkt, sofern das Modell \mathfrak{M}_1^ρ und \mathfrak{M}_2^ρ immer noch drei θ -Gleichgewichte besitzt. Der Anstieg von $\rho \uparrow$ kann aber auch dazu führen, dass nur mehr ein θ -Gleichgewicht existiert. Dabei unterscheidet man zwei Fälle: Es existiert nur mehr das große θ -Gleichgewicht (keine Armutsfalle) oder nur mehr das kleine θ -Gleichgewicht (Armutsfalle).

12 Zusammenfassung

In den deterministischen Modellen dieser Arbeit legen die exogenen Variablen Anfangsausstattung an Kapital, persönliche Fähigkeiten und Fixkosten der höher entwickelten Technologie, die Entwicklung eines Haushalts fest. Das heißt sie bestimmen konkret ob sich ein Haushalt zu einem nicht-armen oder armen Haushalt entwickelt.

Die stochastischen Modelle zeigen auf, dass jeder Haushalt mit positiver Wahrscheinlichkeit arm werden kann. Die drei bereits erwähnten exogenen Variablen bestimmen jedoch, ob eine Armutsfalle existiert. Besondere Bedeutung kommt dem Anfangskapitalstock zu: Je höher dieser ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb einer gewissen Zeit in die Armutsfalle zu schlittern.

Gegen Ende der Arbeit wird noch die Möglichkeit einer Versicherung mit Selbstbeteiligung eingeführt. Bei den Modellsimulationen stellt sich heraus, dass sie die Wahrscheinlichkeit in die Armutsfalle zu geraten reduziert. Sie kann allerdings auch dazu führen, dass alle Haushalte oder ein Teil dieser Haushalte einer Ökonomie mit Wahrscheinlichkeit 1 in die Armutsfalle geraten. Eine Versicherung (mit Selbstbeteiligung) wirkt sich demnach nicht automatisch positiv auf die Haushalte aus. Alle diese Ergebnisse gelten auch für eine Vollversicherung (Versicherung ohne Selbstbeteiligung).

Literatur

- [1] J. Adda and R. Cooper. *Dynamic Economics*. The MIT Press, 2003.
- [2] Philippe Aghion and Steven N. Durlauf. *Handbook of Economic Growth Volume 1a*. North-Holland, 2005.
- [3] K. J. Arrow. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*. Yrjö Johnsson Lectures, 1965.
- [4] Christopher B. Barrett, Michael R. Carter, and Munenobu Ikegami. Poverty traps and social protection. *SP Discussion Paper*, (0804):1–36, 2008.
- [5] Robert J. Barro and Xavier Sala i Martin. *Economic Growth*. The MIT Press, 2004.
- [6] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [7] Samuel Bowles, Steven N. Durlauf, and Karla Hoff. *Poverty Traps*. Princeton University Press, 2006.
- [8] Samuel Bowles and Herbert Gintis. The inheritance of inequality. *Journal of Economic Perspectives*, 16(3):3–30, 2002.
- [9] Hans-Otto Georgii. *Stochastik*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2004.
- [10] Burkhard Heer and Alfred Maussner. *Dynamic General Equilibrium Modelling*. Springer, 2005.
- [11] Yuri A. Kunetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag Applied Mathematical Sciences, 1998.
- [12] Glenn Loury. Intergenerational transfers and the distribution of earnings. *Econometrica*, 49(4):843–67, 1981.
- [13] Inés Macho-Stadler and J. David Pérez-Castrillo. *An Introduction to the Economics of Information*. Oxford University Press, Inc., 2001.
- [14] Mario J. Miranda and Paul L. Fackler. *Applied Computational Economics and Finance*. The MIT Press, 2005.
- [15] Georg Ch. Pflug and Werner Römisch. *Modeling, measuring, and managing risk*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

- [16] David Romer. *Advanced Macroeconomics*. Mc Graw-Hill Irwin, 2006.
- [17] Robert Solow. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65–94, February 1956.
- [18] Stokey, N. Lucas, and R. Lucas. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, 1989.
- [19] Rangarajan K. Sundaram. *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [20] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad, and Arne Strøm. *Further Mathematics for Economic Analysis*. Pearson Education Limited, 2005.
- [21] Peter Zweifel and Roland Eisen. *Versicherungsökonomie*. Springer, 2003.

Akademischer Lebenslauf

Richard Kiener
geb. 1976 in Grieskirchen/Oberösterreich

Ausbildung

1999-2003:	Handelsakademie für Berufstätige Wels, Thema der Abschlussarbeit: Balanced Scorecard (nach Kaplan/Norton)
2003-2009:	Bakkalaureatstudium der Statistik (Uni Wien, Abschluss 15. Sept. 2009)
2003-2010:	Diplomstudium der Volkswirtschaft (Uni Wien, Abschluss 23. Feb. 2010)
seit 2009:	Masterstudium der Statistik (Uni Wien)
Titel der Bakkalaureatsarbeiten:	“Forecasting Austrian electricity spot-prices using linear univariate time-series models” “Anpassen von theoretischen Copulas an Aktienkurse des ATX”
Titel der Diplomarbeit:	„Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der Armutsfalle (eine Spielsituation gegen die Natur)“
Titel der Magisterarbeit:	„Die ökonomische Dynamik der Armutsfalle als Markov’sches Entscheidungsproblem“
Sommer 2010:	Abschluss des Magisterstudiums der Statistik
wissenschaftliche Vortragserfahrung:	25.01.2010, Laxenburg: Vortrag von Auszügen der Diplomarbeit am „International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)“