DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit der Lösungen von skalaren gewöhnlichen Differentialgleichungen"

Verfasser

Christoph Grapa

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im August 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 884
Studienrichtung lt. Studienblatt:	UF Mathematik, UF Informatik
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit handelt von der Existenztheorie von Lösungen von skalaren gewöhnlichen Differentialgleichungen und beschäftigt sich hierbei sowohl mit der klassischen Theorie als auch mit alternativen Kriterien, um die Eindeutigkeit bzw. Nichteindeutigkeit dieser Lösungen zu garantieren.

Für den Abschnitt der Arbeit, in dem der klassische Ansatz aufbereitet wird, wird [Aulbach] als Textquelle herangezogen. Auch ein Großteil der dort dargebotenen Beispiele lehnt sich an die Darstellung in diesem Buch an. An einigen Stellen wird auf analytische Grundlagen in [Heuser] verwiesen.
Daraufhin werden die alternativen Theorien und dazugehörige Aspekte aus den Büchern [Agarwal/Lakshmikantham] und [Agarwal/O'Regan] wiedergegeben, wobei vereinzelt auch auf das Buch [Lakshmikantham/Leela] verwiesen wird.

Die Diplomarbeit gliedert sich nach der Einleitung in zwei Teile auf, einem ersten Teil, der auf die klassische Existenz- und Eindeutigkeitstheorie abzielt, und einem zweiten Teil, in dem alternative Eindeutigskeits- und auch Nichteindeutigkeitstheorien vorgestellt werden.
Im ersten Abschnitt wird zuerst der Lösungsbegriff genau definiert und die Verbindung zur Themenstellung anhand von einfachen Beispielen, die gelegentlich von Grafiken unterstützt werden, hergestellt. Nach Vorgabe von stärkeren Stetigkeitsbedingungen und Definition der Picard-Iteration nähert man sich dem klassischen Eindeutigkeitssatz, der ein erstes Fundament zur Betrachtung der Problembereiche bilden soll.
Im zweiten Abschnitt werden alternative Sätze zur Feststellung der Eindeutigkeit oder Nichteindeutigkeit vorgebracht, die in der Mehrheit mit der "normalen" Stetigkeit auskommen, dafür aber andere spezielle Voraussetzungen, z.B. hinsichtlich Monotonie oder Integralabschätzungen, verwenden. Darauf aufbauend wird die Anwendbarkeit der alternativen Theorie untersucht, wobei vor allem die Beispiele aus dem ersten Abschnitt berücksichtigt werden. Das Feld der präsentierten Eindeutigskeitstheoreme wird mit den allgemeinen Theoremen von Perron und Kamke abgerundet. Als Kontrast zu den Sätzen davor gehen wir abschließend auf das Nichteindeutigkeitskriterium von Lakshmikantham ein.

Als Vorkenntnisse sind zuallererst Grundlagen aus der Analysis, sowie die Anfänge der gewöhnlichen Differentialgleichungen und eine erste Auseinandersetzung mit entsprechenden Lösungsverfahren erforderlich.

Abstract

This diploma thesis deals with the existence theory of solutions of ordinary scalar differential equations and presents the classical theory as well as alternative approaches in order to guarantee the uniqueness and the nonuniqueness, respectively, of these solutions.

In the part of the thesis which considers the classical theory we follow the book [Aulbach]. Furthermore the majority of the stated examples in this part is closely related to the presentation in the book. As for some points where basics from analysis are needed, we refer to [Heuser].
Later the alternative theory and closely related aspects are being introduced, following the books [Agarwal/Lakshmikantham] and [Agarwal/O'Regan], with at times additional reference to the book [Lakshmikantham/Leela].

After the introduction the diploma thesis is divided into two mayor parts: The first part, which concentrates on the classical existence and uniqueness theory, and the second part, where alternative uniqueness and nonuniqueness theories are described.
In the first chapter the term solution will be defined rigorously and simple examples, which are sometimes accompanied by figures, will establish a link to the issue. Following stronger rules of continuity and the definition of the Picard-Iteration we intend to approach the conventional existence theorem, which should provide a first basis for the investigation of such problems.
In the second chapter we focus on alternative theorems that determine uniqueness or nonuniqueness, which on the one hand base on the "standard" continuity, but on the other need special preconditions, e.g., regarding monotonicity or the use of integral estimates. In continuation the applicability of the alternative theory will be explored, especially taking into account the examples presented in the first chapter. The field of the covered uniqueness criteria will be concluded with the general theorems of Perron and Kamke. Finally, in contrast to the previous theorems the nonuniqueness criterion of Lakshmikantham is described and proved.

As for preliminary knowledge basics of analysis come first, as well as the beginning chapters of ordinary differential equations and a first confrontation with respective solution methods are required.

Danksagung

Hiermit will ich mich bei allen Kollegen und Kolleginnen während meiner Studienzeit, im Speziellen bei Hans Wilhelm, Lukas, Michael und Markus, Freunde, die mich seit meiner frühen Schulzeit begleitet haben und die stets bereit waren, gemeinsame, manchmal spontane, Vorhabungen abseits der Universität anzugehen, bedanken.
Ebenso gedankt sei meinen Mitstudenten und Freunden Rainer und Christoph, gemeinsam haben wir etliche Lehrveranstaltungen absolviert und konnten von unseren Gruppenarbeiten, bei denen es nicht an Humor fehlte, enorm profitieren, sowie Jan und Ronald, die mit mir den Anfang bzw. das Ende des Studiums fast im Gleichschritt erlebt haben, und ich durch ihre Ratschläge immer wieder einen Schritt vorangekommen bin.

Darüber hinaus möchte ich mich bei allen Verwandten und bei meiner Familie, besonders bei meiner Mutter Margarete und Peter für die finanzielle und moralische Unterstützung, die ich nicht als selbstverständlich ansehe, während meines Studiums und auch für das Korrekturlesen dieser Diplomarbeit bedanken. Ein spezieller Dank geht auch an meinen Onkel Hans für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Im Besonderen gilt der Dank auch meiner Freundin Anna für die geistige Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit. An dieser Stelle will ich auf keinen Fall auf die Zeit meines Auslandssemesters in Santiago de Compostela vergessen, und vor allem ihr, und meinen Freunden und Freundinnen aus dieser Zeit danken. Ihr habt mir in einer entscheidenden Phase des Studiums Auftrieb gegeben, habt geholfen, neue Horizonte zu erblicken. Diese Erfahrungen haben mein Leben in einer außergewöhnlichen Weise bereichert und werden immer ein Teil von mir sein.

Meinen ehemaligen und gegenwärtigen Mitbewohnern und Mitbewohnerinnen aus dem Haus Burgenland sei gedankt für die zahlreichen geteilten Momente, von einem besinnlichen Glas Wein bis zum kollektiven Konzertbesuch, die einem Studentenleben das i-Tüpfelchen aufsetzen.

Nicht zuletzt will ich meinem Betreuer Professor Dr. Günther Hörmann zuerst für die Möglichkeit, dieses fachmathematische Thema bearbeiten zu können, und dann für die freundliche, stets geduldige Betreuung, im Zuge dieser ich immer das Gefühl hatte auf offene Ohren zu stoßen, einen herzlichen Dank aussprechen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit widmen wir uns dem Thema der Existenztheorie von Lösungen von skalaren gewöhnlichen Differentialgleichungen mit dem Schwerpunkt auf hinreichende Bedingungen für Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit dieser Lösungen. Aufgrund der Themenstellung, die schon mitten in das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen abzielt, sind bestimmte Vorkenntnisse vonseiten der Leserin bzw. des Lesers zum korrekten Verständnis der in der Arbeit besprochenen Theoreme, Lemmata und Beweise erforderlich. Dazu zählen Grundkenntnisse aus der Analysis, die Besonderheiten von expliziten und impliziten Differentialgleichungen und das Anwenden von fundamentalen Lösungverfahren, wie z.B. der Trennung der Variablen.
Als Motivation werden anfangs elementare Beispiele von Differentialgleichungen präsentiert, die sich zwar zum Großteil mithilfe von grundlegenden Verfahren lösen lassen, jedoch verbleibt in der Praxis, bei Neulingen wie auch bei Fortgeschrittenen, die Frage der Eindeutigkeit der Lösung nach dem erfolgten Lösungsprozess oftmals im Hintergrund bzw. wird sie nur unzureichend beantwortet.
Zentral im Hinblick auf das Auffinden und Beschreiben von Lösungen wird der Begriff des Anfangswertproblems sein. Ein Begriff, der es ermöglicht, Lösungsfunktionen innerhalb gewisser Intervalle, abhängig von der vorliegenden Anfangsbedingung, zu betrachten. Verbunden mit der grafischen Darstellung der Lösungsschar, die einen intuitiven Zugang zu der Problematik, wann es möglich oder unmöglich ist, eine eindeutige Lösung zu finden, bietet, soll ein von möglichst vielen Gesichtspunkten begleiteter Einstieg ins Themengebiet geschaffen werden.
Somit kann auch zu einem frühen Zeitpunkt ein Kernbeispiel, die DGL $y' = \sqrt[3]{y^2}$, bei dem das Auffinden einer eindeutigen Lösung erstmals zum Problemfall wird, diskutiert werden. Im ersten Teilstück dieser Diplomarbeit wird ferner versucht, dem Leser den klassischen - gewissermaßen populären - Satz von Picard-Lindelöf näher zu bringen. Dieser Satz greift u.a. zurück auf die von der Analysis vererbte Definition der Lipschitz-Stetigkeit und die Picard-Iteration, Begriffsgebilde, die im Vorfeld des Satzes eingeführt und geklärt werden. Als ein Teil des Hauptziels des ersten Kapitels wird außerdem auch der Beweis des Satzes in ausführlicher, für Studierende verständlicher Weise vorgeführt. Um diesen Abschnitt abzurunden, wird ein nichttriviales Anfangswertsproblem, das die Bedingungen von Picard-Lindelöf gänzlich erfüllt, gelöst. Auf diese Art kann nach Betrachtung des oben erwähnten Wurzelbeispiels ein tieferer Einblick in den Satz und in das Zusammenspiel der günstigen Vorbedingungen erlangt werden.
Im zweiten Teilstück wird bei den Grenzen von Picard-Lindelöf angesetzt und versucht, alternative Theorien und Betrachtungsweisen zur Eindeutigkeit der Lösungen von skalaren Differenzialgleichungen vorzubringen, ohne die Problemzonen des ersten

Kapitels außer Acht zu lassen. Damit soll der Intention des Werkes nachgekommen werden - abseits der "gewohnten" Gefilde von Picard-Lindelöf - theoretische Fundierung der Eindeutigskeitsätze mit praktischer Umsetzung in konkreten Fälle von Anfangswertproblemen so weit als möglich zu verknüpfen. Eine Gemeinsamkeit der präsentierten Theoreme liegt darin, dass die Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit für die rechte Seite der Differentialgleichung wegfällt. Zunächst werden die Eindeutigkeitskriterien von Peano, das spezielle Monotoniebedingungen vorschreibt, und von Osgood, das sich der Abschätzung über eine zusätzliche Funktion w bedient, vorgestellt. Kurz danach wird sich herausstellen, dass bereits diese Theoreme einen neuen, interessanten Blickwinkel auf die Probleme des ersten Kapitels bieten. Daraufhin führt der Weg weiter über die Theoreme von Nagumo und Lipschitz bis zu den sehr allgemein gefassten Kriterien von Perron und Kamke.
Ruft man sich den Anfangssatz der Einleitung in Erinnerung, so fällt auf, dass explizit von der Nichteindeutigkeit von Lösungen geschrieben wird. Als Abschluss der Arbeit wird eine Form der Nichteindeutigkeit durch die Bedingungen von Lakshmikantham charakterisiert.
Im Zuge der Betrachtung dieser Theorien werden die einzelnen Kriterien von Peano bis Lakshmikantham je nach Grad und Umfang der beinhalteten Bedingungen in verschiedene Unterkapitel aufgeteilt.

1 Grundlegende Theorie skalarer gewöhnlicher Differentialgleichungen und stetig differenzierbarer Lösungen

Für die in dem nachfolgenden Kapitel bereitgestellte Einführung zu den verwendeten Begriffen aus den Grundlagen der gewöhnlichen Differentialgleichungen haben wir uns an dem Buch [Aulbach] orientiert.

1.1 Anfangswertprobleme

Wenn man sich mit den Fundamenten der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen - kurz DGL - beschäftigt und in einer ersten Auseinandersetzung explizite und implizite DGL, Charakteristika linearer und autonomer DGL, und Lösungsverfahren, wie z.B. Trennung der Veränderlichen, studiert hat, wird man sich bald die Frage stellen: Besitzt die skalare Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ unter der Annahme, dass die rechte Seite f beliebig stetig vorgegeben wird, immer Lösungen?
In diesem Kapitel wollen wir diese Ausgangssituation noch etwas verschärfen, in dem wir einen beliebigen Punkt aus dem Definitionsbereich $G \subseteq \mathbb{R}^2$ von f vorgeben und dann fragen, ob er von dem Graph einer Lösung durchlaufen wird. Die zu diesem Zeitpunkt erstaunlich scheinende Antwort wollen wir dem Leser nicht vorenthalten: Eine sehr allgemeine, hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösungskurve einer Differentialgleichung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) zu einer gegebenen (skalaren) Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, ist die Stetigkeit der Funktion f.
Um die Eindeutigkeit einer Lösungskurve der DGL nachzuweisen, braucht man stärkere Bedingungen, hinreichend ist jedenfalls stetige Differenzierbarkeit - es genügt aber sogar die Lipschitz-Stetigkeit von f. Zunächst kommen wir aber zurück zur Suche von Lösungen und legen das Augenmerk auf die so genannten Anfangswertprobleme, bei denen Lösungen an einer einzigen x-Stelle, die dort gewisse Voraussetzungen erfüllen, gesucht werden. Genauer gesagt betrachten wir eine DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ und fügen noch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ hinzu.
Unter einer Lösung dieses Anfangswertproblems verstehen wir dann eine differenzierbare Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$ mit einem x_0 enthaltenden Lösungsintervall I (in $\mathbb{R}$), die folgenden Bedingungen Rechnung trägt:

a) Der Graph Γ von λ ist in G enthalten, i.e.

$$\Gamma(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I, y = \lambda(x)\} \subseteq G$$

b) Für alle x in I muss $\lambda'(x) = f(x, \lambda(x))$ zutreffen.

c) Zusätzlich dazu soll $y(x_0) = y_0$ gelten. Dabei bezeichnen wir y_0 als Anfangswert bei x_0.

Die Bedeutung von Anfangswertproblemen wollen wir anhand der folgenden Beispiele illustrieren und hiermit auf die Problematik der Existenz von Lösungen hinweisen:

Beispiel 1.1:
Betrachtet man die DGL

$$y'(x) = [y(x)]^2\, x \quad \text{gemeinsam mit der Anfangsbedingung} \quad y(0) = 2\ , \tag{1.1}$$

so kann man aus der z.B. durch Trennung der Variablen ermittelteten Lösungsschar der DGL $\lambda_\alpha(x) = \frac{2\alpha}{2-\alpha x^2}$ mithilfe der Bedingung $\lambda_\alpha(0) = 2$ den Parameterwert $\alpha = 2$ berechnen.
Es lässt sich nun relativ schnell nachweisen, dass die Funktion

$$\lambda_2(x) = \frac{4}{2-2x^2} = \frac{4}{2(1-x^2)} = \frac{2}{1-x^2}$$

tatsächlich eine Lösung des gestellten Anfangswertproblems ist, und zwar mit dem Lösungsintervall (-1,1) [-1 und 1 fungieren hier als Grenzen, da beide Nullstellen des Nennerpolynoms sind].
Andererseits ist zu beachten, dass λ_2 auch außerhalb des Intervalls (-1, 1), nämlich in den Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung liefert, dort löst λ_2 aber nicht das Anfangswertproblem, weil die beiden Intervalle die Anfangsstelle 2 nicht enthalten. Eine Grafik der Lösung, die die besprochenen Besonderheiten - farblich gekennzeichnet - widerspiegelt, kann man in Abbildung 1.1 weiter unten betrachten.

Beispiel 1.2:
Zu dem Anfangswertproblem

$$y'(x) = \operatorname{sgn} x,\ y(0) = 0 \tag{1.2}$$

kann man keine Lösung mit 0 innerhalb des Lösungsintervalls auffinden. Einerseits wäre die Ableitung der angenommenen Lösung für $x < 0$ gleich -1, andererseits wäre sie für $x > 0$ gleich 1. Eine solche Funktion kann bei 0 wegen der Zwischenwerteigenschaft für Ableitungen (vgl. [Heuser], Satz 49.10, Seite 285) nicht differenzierbar sein, Lösungen sollten aber per definitionem differenzierbar sein. Daher existiert in diesem Fall keine Lösung zum angegebenen Anfangswertproblem.

Anschließend an das vorhergehende Beispiel zur Nichtexistenz von Lösungen widmen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit der Möglichkeit einer bzw. mehrerer Lösungen. Um

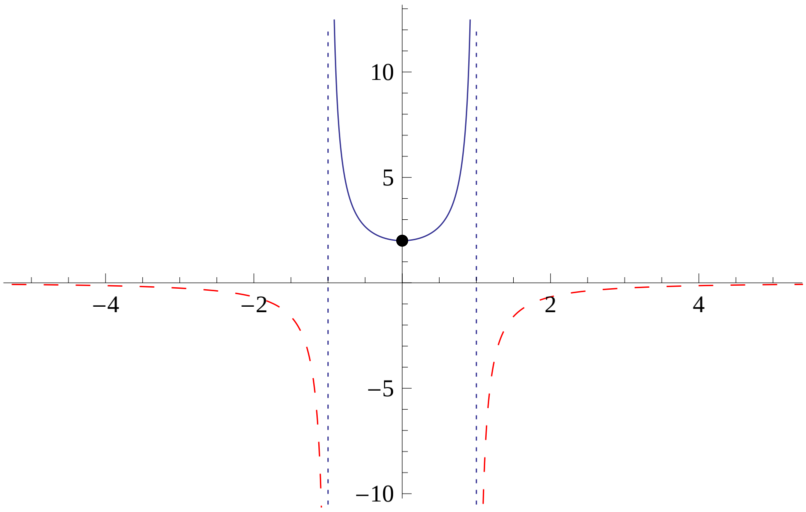

Abbildung 1.1: Die Lösung $\lambda_2(x)$ des Anfangswertproblems $y' = y^2\,x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 2$ dargestellt in einem Plot.

diese Fälle zu untersuchen, wollen wir zunächst konkretisieren, was es bedeutet, wenn es lediglich eine Lösung zu einem gestellten Anfangswertproblem gibt. Hierfür betrachten wir abermals das allgemeine Anfangswertproblem für Gleichungen 1.Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

und geben ein Intervall I mit $x_0 \in I$ vor. Dann besitzt das Anfangswertproblem eine **eindeutig bestimmte** oder **genau eine (globale) Lösung** auf I, wenn folgendes gilt: Stellen $\lambda_1, \lambda_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems dar, so gilt $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ für alle $x \in I$, d.h. aus dem Übereinstimmen der beiden Lösungen λ_1 und λ_2 der DGL bei $x = x_0$ folgt die Übereinstimmung auf dem ganzen Intervall I.
Darüber hinaus hat das Anfangswertproblem genau eine **lokale Lösung** oder ist **lokal eindeutig lösbar**, wenn es ein Intervall mit x_0 im Inneren gibt, auf dem das Anfangswertproblem - kurz AWP - genau eine Lösung besitzt.
Wie wir aber schon im obigen Beispiel gesehen haben, kann es auch passieren, dass man überhaupt keine lokale Lösung findet. Andererseits treten aber auch Situationen ein, bei denen lokal stets mehrere Lösungen, anstatt einer einzigen, existieren. Ein auf dieses Problem hinauslaufendes Beispiel, das fundamental für unsere weiteren Untersuchungen sein wird, wollen wir bald vorstellen. Zuvor liefern wir noch eine essentielle Definition:

Definition 1.1 (Lipschitz-Stetigkeit):
Als zu Grunde liegenden Definitionsbereich betrachten wir eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ heißt **(lokal) Lipschitz-stetig bzgl. y**, falls es zu jedem Punkt (x_0, y_0) aus G eine Umgebung U von (x_0, y_0) gibt und eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \tag{1.4}$$

für alle (x, y_1), $(x, y_2) \in U \cap G$.

Nach Vorgabe dieser Definition können wir uns auf das zuvor angekündigte Beispiel konzentrieren:

Beispiel 1.3:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sqrt[3]{y^2},\ y(0) = 0 \tag{1.5}$$

Hier ist $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$, $x_0 = y_0 = 0$, $G = [-a, a] \times [-b, b]$, und wir werden die folgenden zwei Eigenschaften zeigen:

a) f ist nicht Lipschitz-stetig bzgl. y,

b) das AWP hat unendlich viele Lösungen.

a.) Zunächst kommen wir zur Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit:
Genauer gesagt beabsichtigen wir zu zeigen, dass die Funktion $f\colon (x, y) \mapsto \sqrt[3]{y^2}$ nicht Lipschitz-stetig bzgl. y an den Punkten (x, 0) ist. Hierbei führen wir den Beweis indirekt, d.h. wir nehmen an, die Funktion $f\colon (x, y) \mapsto \sqrt[3]{y^2}$ erfülle die Lipschitz-Bedingung für Punkte $(x, 0)$, (x, y_1), mit $y_1 \neq 0$:

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| \leq L \cdot |y_1 - 0| = L \cdot |y_1|$$

Nach Einsetzen der Funktionswerte an den Stellen (x, y_1) und $(x, 0)$ erhalten wir

$$|y_1^{\frac{2}{3}}| = |y_1|^{\frac{2}{3}} = |\sqrt[3]{y_1^2}| = |f(x, y_1) - f(x, 0)| \leq L \cdot |y_1|$$

Nach Division durch $|y_1|^{\frac{2}{3}}$, lautet die Ungleichung wie folgt

$$1 \leq L \cdot |y_1|^{\frac{1}{3}}$$

Aus der Definition der Lipschitz-Stetigkeit würden wir nun folgern, dass diese Ungleichung insbesondere für **alle** (x, y_1), $(x, 0)$ in der Teilmenge $G = [-a, a] \times [-b, b]$ gelten muss. Lassen wir demnach $y_1 \to 0$ gehen, so folgt

$$1 \leq L \cdot \sqrt[3]{|y_1|} \to 0$$

d.h. wir erhalten einen Widerspruch! Somit ist die Abschätzung für y_1 beliebig nahe an 0 nicht gegeben, und die Funktion $f\colon (x, y) \mapsto \sqrt[3]{y^2}$ ist *nicht* Lipschitz-stetig bzgl. y an den Punkten (x, 0). $\diamond$
Ebenso ist übrigens auch die Funktion g = -f , d.h. in unserem Fall $g\colon (x, y) \mapsto -\sqrt[3]{y^2}$, nicht Lipschitz-stetig bzgl. y an den Punkten (x, 0) (klar, weil f Lipschitz-stetig $\Longleftrightarrow$ -f Lipschitz-stetig gilt).

b.) Zu dem in (1.5) gestellten AWP sind die Lösungen auch nur lokal nicht eindeutig, denn es besitzt auf jedem 0 enthaltenden Intervall unendlich viele Lösungen: So ist für beliebige α, β mit $-\infty < \alpha < 0 < \beta < \infty$ die Funktion

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} \frac{1}{27} \cdot (x-\alpha)^3, & \text{für } x \leq \alpha \\ 0\,, & \text{für } \alpha < x < \beta \\ \frac{1}{27} \cdot (x-\beta)^3, & \text{für } x \geq \beta \end{cases} \tag{1.6}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$. Um die Lösungseigenschaft zu verifizieren, betrachtet man die Funktion $\varphi_{\alpha,\beta}$ als erstes auf den drei Intervallen. Weiters erlangt man durch Untersuchung der Differenzenquotienten direkt die Erkenntnis, dass $\varphi_{\alpha,\beta}$ auch an den Stellen $x = \alpha$ und $x = \beta$ differenzierbar ist und dort die Ableitung Null besitzt. Somit kann man tatsächlich veranlassen, dass die Teillösungen zu einer globalen Lösung $\varphi_{\alpha,\beta}$ mit wählbaren Parametern α und β zusammengefügt werden.
Betrachtet man die in (1.6) dargestellten Lösungsfälle genauer, so erkennt man, dass es unendlich viele Möglichkeiten für $\alpha < 0 < \beta$ gibt, um verschiedene Lösungen mit demselben Anfangswert bei $x = 0$ zu erzeugen. Dabei ist es per definitionem essentiell, dass 0 in diesem Lösungsintervall liegt.
Auf der anderen Seite ergibt auch der Grenzfall $\alpha \to -\infty$ und $\beta \to \infty$ eine Lösung, nämlich die Funktion $\varphi(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.
Nichtsdestotrotz werden wir später für dieses Beispiel, bei dem eine eindeutige Lösung noch aussichtlos erscheint, aufgrund günstiger Funktionseigenschaften zumindest eine Teilerfolg verbuchen können.

Nach der Vorstellung einiger Problemstellungen in diesem Abschnitt über *Anfangswertprobleme* wollen wir jetzt einen Schritt weiter in Richtung hinreichende Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen gehen und ein Verfahren präsentieren, das uns im nachfolgenden Satz von Picard-Lindelöf äußerst hilfreich sein wird.

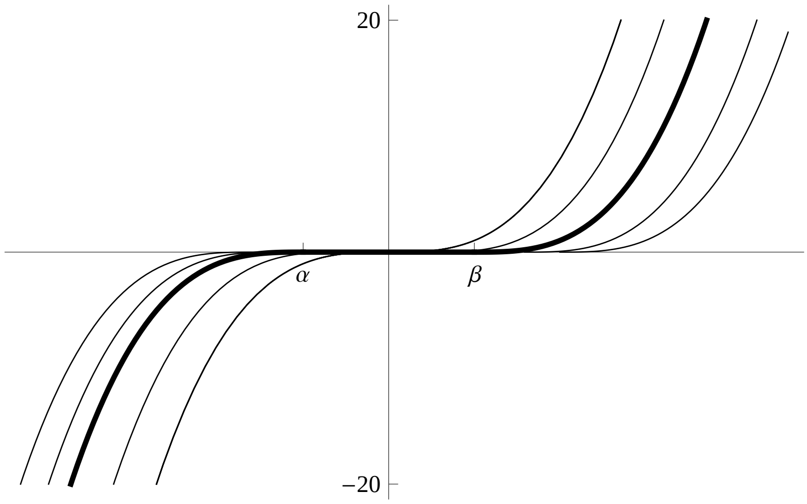

Abbildung 1.2: Lösungsschar der DGL $y' = \sqrt[3]{y^2}$ mit Parameter α und β

1.2 Picard-Iteration

Grundsätzlich folgt die Picard-Iteration der Idee, die gesuchte Lösung eines AWP als Grenzfunktion einer approximierenden Funktionenfolge zu bestimmen. Bei diesem Verfahren spielt natürlich Analysis, insbesondere gleichmäßige Konvergenz eine Rolle.
In den folgenden Zeilen wollen wir die Grundschritte zur Lösungsfindung mittels Picard-Iteration anhand des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

durchgehen. Der Grundgedanke dabei ist, eine Lösung der Gleichung mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation zu erhalten, wie im folgenden elementaren Beispiel angedeutet: Gegeben sei eine algebraische Gleichung

$$a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

Zuerst definiert man die Folge

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k},\ k \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv, aufbauend auf einem Startwert a_0, für den $1 \leq a_0 \leq 2$ gilt. Nun kann man für diese Voraussetzung leicht zeigen, dass für die Folge a_k die Eigenschaften

a) $1 \leq a_k \leq 2$

b) $a_{k+1} - a_k \geq 0$

für alle k aus N_0 zutreffen, und a_k somit eine monotone und beschränkte Folge darstellt. Nach Betrachtung des Konvergenzverhaltens von a_k für $k \to \infty$, erhält man den Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \sqrt{2},$$

der gleichzeitig die Lösung der Ausgangsgleichung darstellt.
Im nächsten Abschnitt können wir die beschriebene **Methode der sukzessiven Approximation** aufgrund des nachfolgenden Satzes, der sich an der Darstellung im Buch [Aulbach] auf Seite 34ff. anlehnt, später direkt auf unser Anfangswertproblem anwenden:

1.2.1 Umformung einer DGL in eine Integralgleichung

Satz 1.2 (Gleichwertigkeit der Darstellung als DGL und Integralgleichung):
Sei f: $\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig, wobei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, $(x_0, y_0) \in G$ und die Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ sei stetig, wobei I ein Intervall darstellt, $x_0 \in I$, und es gelte $\Gamma(\varphi) \subseteq G$ (Γ bezeichnet den Graphen). Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

a) φ ist Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$

b) φ erfüllt folgende Integralgleichung für alle x aus I:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

Um diesen Satz, also insbesondere die Aussage "'Darstellung als DGL mit Anfangsbedingung $\Leftrightarrow$ Darstellung als Integralgleichung“ zu zeigen, beweisen wir zwei Implikationen separat :

$(a \Rightarrow b)$:
Sei $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

Zuerst formen wir mittels Integration das gestellte AWP folgendermaßen um:

$$\varphi(x) - y_0 = \varphi(x) - \varphi(x_0) \underset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_{x_0}^{x} \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \tag{1.7}$$

Schließlich erhalten wir für alle x aus dem Intervall I:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \tag{1.8}$$

$(b \Rightarrow a)$:
Andererseits: Sei $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle (1.8), dann ist weiters $\tau \to f(\tau, \varphi(\tau))$ stetig auf $I \to \mathbb{R}$.

Nach Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung ist $x \to \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)\, d\tau$ stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)\, d\tau\right) = f(x, \varphi(x)) \tag{1.9}$$

daher gilt:

$$\varphi'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)\, d\tau\right) = f(x, \varphi(x))$$

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau = y_0 + 0 = y_0 \qquad \diamond \tag{1.10}$$

Als Idee zur Lösung unserer Differentialgleichung fließt jetzt die oben beschriebene Umformungsmethode gemeinsam mit der sukzessiven Approximation ein. Wir gehen von der unserem AWP entsprechenden Integralgleichung

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

aus. Anschließend wählen wir als Startfunktion und quasi "0. Approximation" die konstante Funktion

$$\varphi_0(x) := y_0 \quad \forall x \in I$$

Im ersten Schritt wird versucht, eine verbesserte Approximation mittels Addition des Integralausdrucks zu erreichen:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_0(\tau))\, d\tau = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)\, d\tau$$

Beim nächsten Schritt setzen wir

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_1(\tau))\, d\tau$$

Dem obigen Prinzip folgend und in dem Wissen, dass $\varphi_k \colon I \to \mathbb{R}$ stetig $(k \in \mathbb{N}_0)$ ist, definieren wir die so genannten "**Picard-Iterierten**"

$$\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.11}$$

für alle x aus I mit der Startfunktion

$$\varphi_0(x) := y_0$$

An diesem Punkt angelangt stellt sich die Frage: Inwiefern nützt uns diese Definition in Hinblick auf die Lösungsfindung der DGL?

Wenn wir für die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßige Konvergenz gegen φ garantieren können, und in (1.11) $k \to \infty$ gehen lassen, dann erhalten wir die gewünschten Beziehung:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \tag{1.12}$$

i.e. φ löst die Integralgleichung (1.11) - und stellt damit auch die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) dar. Nach der allgemeinen Darstellung dieser Approximationsmethode, des so genannten Verfahrens der Picard-Iteration, können wir es an einem sehr einfachen konkreten Beispiel veranschaulichen.

Beispiel 1.4 (Illustration der Picard-Iteration in einem Beispiel mit expliziter Lösung):
Beim Anfangswertproblem

$$y' = y \ , \ y(0) = c \tag{1.13}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen der Picard-Iteration:

$$\varphi_{k+1}(x) = c + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(\tau, \varphi_k(\tau))}_{\varphi_k(\tau)}\, d\tau$$

In der nächsten Etappe führen wie die Approximation durch:
"0.Approximation" - Startfunktion:

$$\varphi_0(x) := y_0 = c \quad \forall x \in I$$

"1.Approximation":

$$\varphi_1(x) = c + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(\tau, \varphi_0(\tau))}_{\varphi_0(\tau)}\, d\tau = c + \int_{x_0}^{x} c\, d\tau = c + c \cdot x = c \cdot (1 + x)$$

"2.Approximation":

$$\varphi_2(x) = c + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(\tau, \varphi_1(\tau))}_{\varphi_1(\tau)}\, d\tau = c + \int_{x_0}^{x} (c + (c\cdot\tau))\, d\tau = c + c\cdot x + c\cdot\frac{x^2}{2} = c\cdot(1 + x + \frac{x^2}{2})$$

Beobachtet man die Entwicklung der rechten Seiten der Approximationen, wird man feststellen, dass der Grad des Polynoms sich von Schritt zu Schritt um eins erhöht, so auch bei der k-ten Approximation:

$$\varphi_k(x) = c \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}) = c \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Lassen wir danach $k \to \infty$ gehen, erhalten wir:

$$\varphi(x) = c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = c \cdot e^x$$

was die korrekte Lösung des AWPs darstellt.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen DGL

In diesem Teil werden wir uns mit Bedingungen beschäftigen, die uns unter einigen Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von AWP sichern können. In dem bekannten Satz von Picard-Lindelöf, den wir im Anschluss genauer behandeln, werden mehrere bereits vorgestellte Definitionen und Sätze (u.a. Lipschitz-Stetigkeit, Picard-Iteration) als Bausteine verwendet. Dieser im Anschluss präsentierte Satz stellt eine Garantie für die zielführende Untersuchung von AWP aus und ist seit jeher sehr bedeutsam. Als Literaturquelle wird auf das Buch von [Aulbach], Seite 59, verwiesen.

1.3.1 Der Satz von Picard-Lindelöf

Im Detail geht es in diesem Satz darum, die Vorbedingungen so miteinander zu verknüpfen, dass wir am Ende neben der Existenz einer Lösung eines AWPs auch die Eindeutigkeit **der** Lösung garantieren können. Als Startpunkt wählen wir, wie schon gewohnt, ein AWP der Form

$$y' = f(x,y)\,,\ y(x_0) = y_0\,, \tag{1.14}$$

bei dem die Funktion f auf einem Rechteck der Form $\bar{S} = [x_0 + a, x_0 - a] \times [y_0 + b, y_0 - b]$ stetig ist. Wie wir aufgrund unseres Wurzelbeispiels in Erfahrung gebracht haben, impliziert diese Voraussetzung zwar die *Existenz* einer lokalen Lösungen des Anfangswertproblems, jedoch nicht deren Eindeutigkeit. Als entscheidende Maßnahme, um doch auch die Eindeutigkeit der Lösung zu erzielen, verstärken wir die Stetigkeit von f und verlangen im Sinne der Definition anfangs in diesem Kapitel, dass f Lipschitz-stetig bzgl. y sein soll. Nach dieser kurzen Beschreibung der Satzstruktur und Schilderung der Ausgangslage, folgt nun der Satz:

Satz 1.3 (Picard-Lindelöf):
Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0,$$

bei dem die Funktion f, die auf der offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert ist, auch reellwertig ist, und (x_0, y_0) in G liegt. Ferner sei f Lipschitz-stetig *bzgl. y*, d.h. für jeden Punkt aus G gibt es eine Umgebung U und eine Konstante $L > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

für alle (x, y_1), (x, y_2) aus $U \cap G$. Dann besitzt das obige Anfangswertproblem **genau eine Lösung** auf einem Intervall $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ mit geeignetem $\beta > 0$.

Beweis von Satz 1.3:
Dieser Beweis wird in mehreren Schritten durchgeführt.

Zur **Vorbereitung**: Wir reduzieren den Definitionsbereich auf ein Rechteck $\bar{S} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ statt G wie folgt:
Da die Lipschitz-Stetigkeit zu unseren Voraussetzungen zählt, gibt es eine Umgebung U des Anfangswertpaares (x_0, y_0), sodass die Abschätzung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

für ein $L > 0$ und alle $(x, y_1), (x, y_2)$ in $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$ gilt. Da die Menge G offen ist, können wir o.B.d.A schließen, dass U eine echte Teilmenge von G darstellt. Als Nächstes wählen wir $a, b > 0$ so klein, dass $\bar{S} := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq U$. Dadurch gilt auf $\bar{S}$ die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Aus diesem Grund genügt es, die Aussage mit $\bar{S}$ statt G zu beweisen.
Zuerst setzen wir

$$M := \max_{(x,y)\in\bar{S}} |f(x, y)| \ ,$$

Weil f stetig ist und $\bar{S}$ kompakt, gilt $0 \leq M < \infty$.
Gilt an dieser Stelle M = 0, so folgt $f(x, y) = 0$ für alle (x, y) aus $\bar{S}$ und die eindeutige Lösung ist gegeben durch die konstante Funktion

$$\varphi : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}, x \mapsto y_0$$

(für alle x aus $[x_0 - a, x_0 + a]$). Daher dürfen wir für die weiteren Berechnungen annehmen, dass $M > 0$ gilt und verwenden $\beta := \min(a, \frac{b}{M})$ als wichtigen Parameter für den ersten Beweisschritt. Es ist $0 < \beta \leq a$, $0 < M \cdot \beta \leq b$.

1.Schritt: (Picard-Iteration)
Wir wählen $I := [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ und definieren stetige Funktionen $\varphi_k \colon I \to \mathbb{R}$ durch Anwendung der Picard-Iteration (vgl. 1.2)

$$\varphi_0(x) := y_0$$

$$\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.15}$$

für alle x aus I. Als Detail am Rande sei darauf achtgegeben, dass $\Gamma(\varphi_k) \subseteq \bar{S}$ im Rechteck bleibt - de facto also der Graph aller k Funktionen in $\bar{S}$ enthalten ist) - deswegen sollte k nicht zu groß werden. Diese Definition ist auch sinnvoll, weil für alle x aus I : $\varphi_k(x) \in [y_0 - b, y_0 + b] =: J$ (somit (x, $\varphi_k(x)) \in \bar{S}$), wie aus den folgenden Überlegungen ersichtlich: Klarerweise ist $\varphi_0(x) \in J$; Gehen wir nun für $k \geq 1$ induktiv voran, dann gilt wegen der Darstellung als Integralgleichung

$$|\varphi_k(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))\, d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))|\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} M\, d\tau \right| = M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \beta \leq b \tag{1.16}$$

2.Schritt: (Abschätzung der Absolutbeträge)
Mit vollständiger Induktion zeigen wir in diesem Schritt, dass die Abschätzung

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \cdot L^k \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{1.17}$$

für alle x aus $[x_0 - a, x_0 + a]$ und alle k aus $\mathbb{N}_0$ gilt. Für die Induktionsvoraussetzung haben wir die obige Ungleichung mit k = 0 gilt: Nach (1.16) erhalten wir

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, x_0)\, d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M\, d\tau \right| = M \cdot |x - x_0|$$

In der Folge benützen wir nun (1.17) als Induktionsannahme. Für den Induktionsschritt folgt sogleich

$$|\varphi_{k+2}(x) - \varphi_{k+1}(x)| = \left| (y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_{k+1}(\tau))\, d\tau) - (y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau) \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f(\tau, \varphi_{k+1}(\tau)) - f(\tau, \varphi_k(\tau))]\, d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |[f(\tau, \varphi_{k+1}(\tau)) - f(\tau, \varphi_k(\tau))]|\ d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot |\varphi_{k+1}(\tau) - \varphi_k(\tau)|\ d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot M \cdot L^k \cdot \frac{|\tau - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \frac{M \cdot L^{k+1}}{(k+1)!} \int_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^{k+1} d\tau \right| = \frac{M \cdot L^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)} =$$

$$= M \cdot L^{k+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)!} \qquad \diamond$$

Nachdem wir hiermit auch die Differenzen für beliebig große k abgeschätzt haben, versuchen wir im folgenden Schritt Aufschlüsse über das Konvergenzverhalten von φ_k zu bekommen:

3.Schritt: (Gleichmäßige Konvergenz von $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$)
Durch gezieltes Umformen versucht man ein für die Konvergenzuntersuchung geeignete Darstellungsform von $\varphi_k(x)$ zu bekommen:

$$\varphi_k(x) - y_0 = \varphi_k(x) - \varphi_0(x) = \underbrace{\sum_{l=0}^{k-1} (\varphi_{l+1}(x) - \varphi_l(x))}_{Teleskopsumme}, \tag{1.18}$$

wobei die rechts erhaltene Teleskopsumme ausgewertet so aussieht:
$\varphi_1 + \varphi_0 + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 + \cdots - \varphi_{k-1} + \varphi_k - \varphi_{k-1}$, und bis auf $\varphi_k - \varphi_0$ alle Einträge wegfallen.

Die resultierende Funktionenreihe $\sum_{l=0}^{k-1}(\varphi_{l+1}(x) - \varphi_l(x))$ ist aber gleichmäßig konvergent, weil

$$\sup_{x\in I} |\varphi_{l+1}(x) - \varphi_l(x)| \underset{\text{siehe 2.Schritt}}{\leq} M \cdot L^l \cdot \frac{\beta^{l+1}}{(l+1)!}$$

und

$$\sum_{l=0}^{\infty} M \cdot L^l \cdot \frac{\beta^{l+1}}{(l+1)!}$$

eine konvergente Majorante zur obigen Funktionenreihe darstellt. Daher ist die Folge $(\varphi_k - y_0)_{k\in N}$ nach dem Satz von Weierstraß über konvergente Majoranten (siehe [Heuser], S. 555, 105.3) gleichmäßig konvergent und damit auch die Folge $(\varphi_k)_{k\in N}$, was zu zeigen war. $\diamond$

Aufgrund des soeben dargebrachten Beweises und der Tatsache, dass φ_k wegen der gleichmäßigen Konvergenz auch punktweise konvergent ist, können wir nun $\varphi(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$ für alle x aus I setzen. Nach dem Satz 104.2 aus dem Analysis-Buch von [Heuser] ("Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist wieder stetig") ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und

$$|\varphi(x) - y_0| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{|\varphi_k(x) - y_0|}_{\leq b} \leq b\ .$$

Was nun als Nächstes ansteht, ist, zu zeigen, dass φ das vorgegebene AWP auch tatsächlich löst.

4.Schritt: (φ ist Lösung des gestellten AWPs)

Behauptung: $(f(\cdot, \varphi_k(\cdot)))_{k\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent gegen $f(\cdot, \varphi(\cdot))$

Beweis der Behauptung:

$$|f(x, \varphi_k(x)) - f(x, \varphi(x))| \underset{\text{Lipschitz-Bed.}}{\leq} L \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \tag{1.19}$$

In Schritt 3 haben wir u.a. gezeigt, dass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist Somit konvergiert auch die Differenz $\varphi_k(x) - \varphi(x)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen 0. Das bedeutet schließlich, dass für k gegen ∞ auch

$$|f(x, \varphi_k(x)) - f(x, \varphi(x))|$$

gleichmäßig gegen 0 strebt, i.e. $(f(x, \varphi_k(x)))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gleichmäßig gegen $(f(x, \varphi(x)))$.

Nach diesen Überlegungen kann man sogleich Grenzwert und Integral (Folgerung der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionen - Analysis) vertauschen, d.h.

$$\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau \underset{\text{für } k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

Bauen wir diese Vertauschung wiederum in die Integralgleichung ein, so resultiert aus der anfänglichen Form

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau$$

für den Grenzwertübergang k gegen ∞ nun

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \; . \tag{1.20}$$

Somit stellt φ eine Lösung der Integralgleichung (1.8) dar und folglich auch eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung.
Mit diesem Resultat hat man gerade die Gewißheit erlangt, <u>dass</u> es <u>mindestens eine Lösung</u> eines AWPs unter den im Satz vorgebenen Voraussetzungen gibt. Ob es nur eine oder mehrere - voneinander unabhängige - Lösungen gibt, steht an diesem Punkt noch nicht fest. Diese Frage kann der im 4.Schritt nach der bewiesenen Konvergenz erfolgte Grenzübergang nicht beantworten. Um vorerst einen klaren Schlussstrich unter die geschilderte Lösungsproblematik zu ziehen, wird im folgenden und letzten Schritt nun schließlich die <u>Eindeutigkeit</u> der Lösung φ garantiert.

5.Schritt: (Eindeutigkeit von φ als Lösung des AWPs)
Angenommen $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lösung, d.h. insbesondere löst ψ auch die Integralgleichung. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass für alle k aus $\mathbb{N}$ und alle x aus I folgende Abschätzung gilt:

$$(D_k) \quad : \; |\varphi_k(x) - \psi(x)| \leq M \cdot L^k \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

(der Abstand von ψ zu φ_k wird beliebig klein).
Induktionsanfang <u>(k = 0)</u>:

$$|\varphi_0(x) - \psi(x)| = |y_0 - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(\tau, \psi(\tau))|}_{\leq M}\, d\tau \right| \leq M \cdot |x - x_0|$$

Induktionsschritt $\underline{(k \to k+1)}$:

$$|\varphi_{k+1}(x)-\psi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(\tau, \varphi_k(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau) \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, \varphi_k(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))|\, d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot |\varphi_k(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau \right| \underset{(D_k)}{\leq} \frac{M \cdot L^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^{k+1}\, d\tau \right|$$

$$\leq M \cdot L^{k+1} \cdot \frac{|x-x_0|^{k+2}}{(k+2)!}$$

Somit haben wir die Gültigkeit der Aussage (D_k) gezeigt, analog wie in Schritt 3 können wir daraus gleichmäßige und in der Konsequenz auch punktweise Konvergenz für $(\varphi_{k+1}(x) - \psi(x))$ folgern, d.h. für alle x aus I gilt

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(x) - \psi(x)| \underset{|x-x_0|\leq\beta}{\leq} \lim_{k\to\infty} M \cdot L^k \cdot \frac{\beta^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

Daher ist $\varphi = \psi$ für alle x aus I. $\diamond$

Beispiel 1.5:
Als Illustration für den Satz von Picard-Lindelöf untersuchen wir das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -\sqrt[3]{y^4},\ y(x_0) = y_0$$

hinsichtlich eindeutiger Lösbarkeit. Im ersten Schritt überprüfen wir, ob hier die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y zutrifft, einziger Problembereich ist in der Nähe der Punkte (x, 0), weil: Die Funktion $f\colon (x,y) \to -\sqrt[3]{y^4}$ ist jedenfalls stetig differenzierbar für alle $y \neq 0$, daher ist f dort sicherlich Lipschitz-stetig.
Folglich bleibt noch ausständig, die Lipschitz-Stetigkeit bei $y = 0$ zu überprüfen. Wir wollen zeigen, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass für y_1 nahe an 0 gilt:

$$|f(x,y_1) - f(x,0)| \leq L \cdot |y_1 - 0| = L \cdot |y_1|$$

In unserem Fall ist

$$|f(x,y_1) - f(x,0)| = |-\sqrt[3]{y_1^4} - 0| = |\sqrt[3]{y_1^4} - 0| = \sqrt[3]{|y_1|^4} =$$

$$= \sqrt[3]{|y_1|} \cdot |y_1|$$

Da für die rechte Seite des Ausdrucks $\sqrt[3]{|y_1|} \leq \frac{1}{2}$ für $|y_1| \leq \frac{1}{8}$ zutrifft, erhalten wir in der Folge mit $\delta = \frac{1}{8}$ und $L = \frac{1}{2}$ für alle (x, y_1):

$$|y_1 - 0| \leq \frac{1}{8} \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,0)| \leq \frac{1}{2} \cdot |y_1 - 0|.$$

Somit ist die Lipschitz-Bedingung für $L = \frac{1}{2}$ gegeben, folglich ist die Funktion $f\colon (x,y) \to -\sqrt[3]{y^4}$ Lipschitz-stetig bei $y = 0$. $\diamond$
In der auf der Abbildung 1.3 (siehe unten) erkennen wir, dass die Steigung der Tangente für $y_1 \to 0$ wirklich gegen 0 geht, was es plausibel macht, dass die Funktion f Lipschitz-stetig ist.
Da f nun insbesondere auch Lipschitz-stetig auf einer beliebigen offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, lässt sich nach Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung - je nach Wahl des Anfangswertes - auffinden.
Beziehen wir uns auf das konkrete Beispiel mit dem oben angegebenen Anfangswert $y(x_0) = y_0$, dann reduziert sich das Lösungsspektrum auf drei mögliche Lösungsfälle in Hinblick auf den Anfangswert y_0:

a) Ist $y_0 = 0$, dann stellt

$$y(x) = 0 \;\text{ für alle } x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

die einzige Lösung des AWPs dar.

b) Gilt $y_0 > 0$, dann lässt sich das Verfahren der Trennung der Variablen anwenden. Nach Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir

$$y(x) = \frac{27}{(x+c)^3}$$

als allgemeine Lösungsfunktion. Hierbei wird zwingend gefordert, dass

$$c = -x_0 + \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}$$

gilt. Somit schließen wir mit der Lösungsfunktion

$$y(x) = \frac{27}{x - x_0 + \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}}$$

wobei $x > x_0 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{y_0}}$ (der Nenner auf der rechten Seite der Funktionsgleichung soll positiv sein).

c) In dem Fall $y_0 < 0$, lässt sich nach derselben Methode wie in b.) ebenfalls die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{27}{(x+c)^3},$$

errechnen. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung erhält man wiederum

$$c = -x_0 + \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}\,,$$

jedoch existiert die folglich resultierende Lösungsfunktion

$$y(x) = \frac{27}{x - x_0 + \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}}$$

wiederum nur innerhalb eines Intervall, nämlich für $x < x_0 - \underbrace{\frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}}_{<0}$, also konkret für x aus $]-\infty, x_0 - \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}}[$.

In der auf der nächste Seite abgebildeten Grafik 1.4 beziehen wir uns auf das vorgegebene Beispiel mit der zusätzlichen Anfangsbedingung $y(4) = 1$. Wie man anhand dieser Grafik erkennen kann, gehen die Funktionswerte für x gegen 1^+ Richtung unendlich. Diese Tatsache können wir auch rechnerisch mithilfe der obigen Gleichungen des Falles $y_0 \neq 0$ belegen:
Wir erhalten

$$c = -x_0 + \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}} = -4 + \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = -4 + 3 = -1$$

und somit als Lösungfunktion

$$y(x) = \frac{27}{(x+c)^3} = \frac{27}{(x-1)^3}$$

Mit Blick auf das oben erwähnte, anschaulich vermutete Grenzverhalten der Funktion y, bestätigen wir folgedessen auf rechnerischem Weg:

$$\lim_{x \to 1+} y(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{27}{\underbrace{(x-1)^3}_{\to 0}} = \infty$$

Aus diesem Grund kann die Funktion y an der Stelle 1 - an der sie nicht einmal definiert ist und nicht stetig fortgesetzt werden kann - nicht den Ansprüchen einer Lösungfunktion der DGL genügen, insbesondere nicht der Differenzierbarkeit von y.
Wegen der geforderten Einhaltung der Lösungseigenschaft von y für **alle** x aus einem Intervall I (siehe Seite 3f.), kann y insbesondere für alle x aus $(1, \infty)$ diese Eigenschaft erfüllen, somit haben wir zusammenfassend, dass

$$y(x) = \frac{27}{(x-1)^3}$$

die Lösung für das AWP mit Anfangswert $y(4) = 1$, im Bereich $x > 1 \, (= x_0 - \frac{3}{\sqrt[3]{y_0}})$ ist.

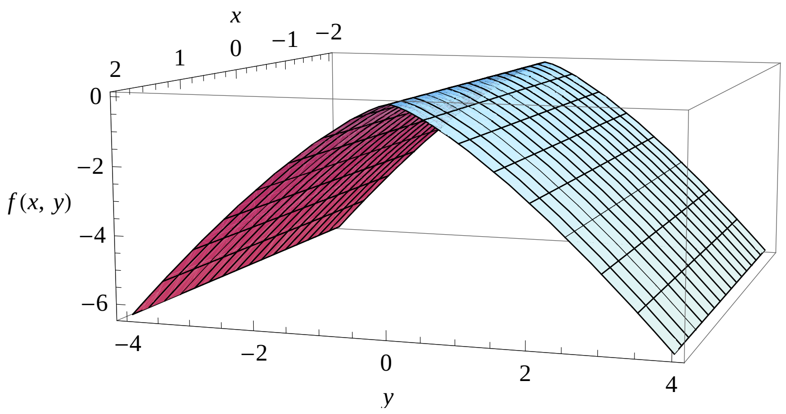

Abbildung 1.3: 3D-Grafik der in der DGL eingebetteten Funktion $f(x,y) = -\sqrt[3]{y^4}$

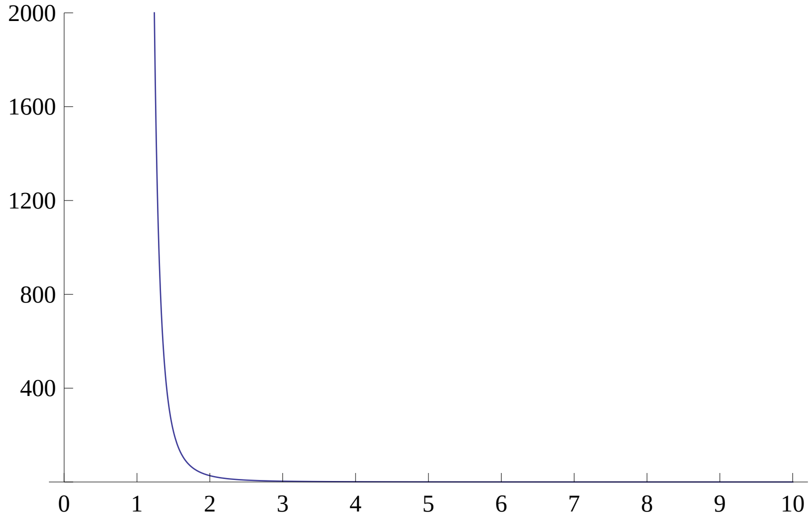

Abbildung 1.4: Die Lösungsfunktion der DGL $y'(x) = -\sqrt[3]{y^4}$ unter Vorgabe des Anfangswertes $y(4) = 1$

2 Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dieses Kapitel soll als erste Vertiefung in das Gebiet der Lösungstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen dienen und alternative Bedingungen zur Eindeutigkeit oder Nichteindeutigkeit einer Lösung dieser Gleichungen herausstreichen. Die dafür maßgeblichen Theoreme, Lemmata und Beweise werden aus den Büchern [Agarwal/O'Regan] und [Agarwal/Lakshmikantham] wiedergegeben.

2.1 Die Eindeutigkeitstheoreme von Peano und Osgood

Wie bereits am Anfang des vorigen Kapitels erwähnt wurde, reicht schon die Stetigkeit der Funktion f, um die Existenz einer Lösung eines AWPs sicherzustellen. Außerdem haben wir gesehen, dass für eine etwas speziellere Stetigkeitsvoraussetzung, die Lipschitz-Stetigkeit, gilt, dass die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist. In der Folge stellt sich die interessante Frage, ob es nicht andere hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der Lösung eines derartigen Anfangswertproblems außer der Lipschitz-Bedingung (viele Funktionsarten können dieser Bedingung nicht gerecht werden) gibt, und man so das Spektrum der eindeutig lösbaren AWP erweitern kann. Bevor wir erste Beispiele vorbringen, die auf einem alternativen Weg in dieses Spektrum aufgenommen werden können, wollen wir zunächst folgendes Theorem beweisen:

Theorem 2.1 (Peanos Eindeutigkeitskriterium):
Sei die Funktion f stetig auf einem Rechteck $\bar{S}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x_0 \leq x \leq x_0 + a,$ $|y - y_0| \leq b\}$ und monoton fallend in y für jedes fix gewählte x in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Dann hat das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)),\; y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

höchstens eine Lösung in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Beweis von Theorem 2.1:
Angenommen y_1 und y_2 sind zwei Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ mit Anfangswert $y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0)$, die sich dort an einigen Stellen unterscheiden.

Konkret nehmen wir an, dass $y_2(x) > y_1(x)$ für $x_1 < x < x_1 + \epsilon \leq x_0 + a$, während $y_1(x) = y_2(x)$ für $x_0 \leq x \leq x_1$ gilt, d.h. x_1 ist die größte untere Schranke der Menge A, die aus allen x besteht, für die $y_2(x) > y_1(x)$. So eine größte untere Schranke gibt es auch, weil die Menge A zumindest durch x_0 nach unten beschränkt wird.
Daher erhalten wir für alle x $\in (x_1, x_1 + \epsilon) : f(x, y_1(x)) \geq f(x, y_2(x))$ [f ist monoton fallend bzgl. y im gesamten Intervall], und es gilt weiters auch $y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \geq f(x, y_2(x)) = y_2'(x)$, weil y_1 und y_2 Lösungen der DGL sind.

Die Funktion $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ ist daher monoton fallend, denn aus der obigen Ungleichung erhalten wir $y_2'(x) - y_1'(x) \leq 0$. Somit gilt neben $z(x_1) = 0$ auch $z(x) \leq 0$ in $(x_1, x_1 + \epsilon)$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass
$y_2(x) > y_1(x)$ in $(x_1, x_1 + \epsilon)$ gilt. Dieser Widerspruch zeigt, dass $y_1(x) = y_2(x)$ auf ganz $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. ◇

An einem naheliegenden Beispiel, das im Vergleich zu anderen, anfangs erwähnten Beispielen aus der Reihe tanzt, können wir sogleich die Lehren aus der vorangegangen Beweisarbeit ziehen:

Beispiel 2.2:
Das Anfangswertproblem

$$y' = -\sqrt[3]{y^2} \quad ,$$

mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ stellt eine bzgl. der y-Achse gespiegelte Variante des Gegenbeispiels zum Satz von Picard-Lindelöf dar. Wie wir bereits gezeigt haben, ist die Funktion $f\colon (x, y) \to -\sqrt[3]{y^2}$ (zweidimensionaler Definitionsbereich) nicht Lipschitz-stetig bzgl. y in den Punkten (x, 0), d.h. wir können den Satz von Picard-Lindelöf nicht anwenden, da seine Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Hier können wir aber das Eindeutigkeitskriterium von Peano zur Anwendung bringen:

Erstens ist die der DGL zugrunde liegende Funktion

$$f\colon (x, y) \to -\sqrt[3]{y^2} \tag{2.2}$$

stetig auf dem Rechteck $\bar{S}_+ : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b$, zweitens ist sie auch monoton fallend in y, wenn $y \geq 0$ zutrifft, für ein festes x mit $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, da f den negativen Ast einer Wurzelfunktion mit positiver Diskriminante abbildet. Daher existiert eine eindeutige Lösung des AWP in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, die lediglich von der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ abhängig ist. In dieser Hinsicht unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Ist $y_0 = 0$, dann ist

$$y(x) = 0 \text{ für alle } x \in [x_0, x_0 + a] \tag{2.3}$$

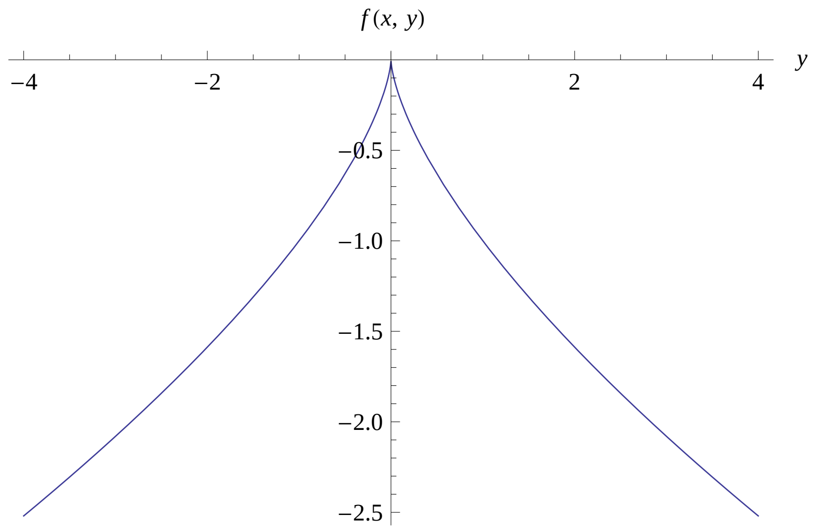

Abbildung 2.1: Ein Schnitt durch den Funktionsgraphen von f: $(x, y) \to -\sqrt[3]{y^2}$ im $\mathbb{R}^3$ bei beliebigen konstantem x-Wert

b) Gilt $y_0 > 0$, dann ist die Trennung der Variablen möglich und man erhält die allgemeine Lösungfunktion

$$y(x) = \frac{(-x-c)^3}{27} \tag{2.4}$$

auf dem Intervall $[x_0, x_0 + a]$. Setzt man nun die Anfangsbedingung (x_0, y_0) ein, so gelangt man zur Lösungfunktion des AWPs

$$y(x) = \frac{(-x + x_0 + 3 \cdot \sqrt[3]{y_0})^3}{27}\ , \tag{2.5}$$

wobei $x \geq x_0$ zwingend gelten muss.

Bemerkung: Dieses AWP ist nicht eindeutig lösbar auf $[x_0 - a, x_0 + a]$!

In der Abbildung 2.2 auf nächsten Seite wird die Lösung dieses Beispiels grafisch dargestellt.

Kommen wir an dieser Stelle zurück zum Gegenbeispiel 1.3 aus dem Einführungskapitel:

Beispiel 2.3:
Was das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sqrt[3]{y^2},\ y(x_0) = y_0$$

betrifft, können wir dabei bereits auf unsere Untersuchungen im 1.Kapitel zurückgreifen, wo wir gezeigt haben, dass die zugehörige Funktion

$$f\colon (x, y) \to \sqrt[3]{y^2} \tag{2.6}$$

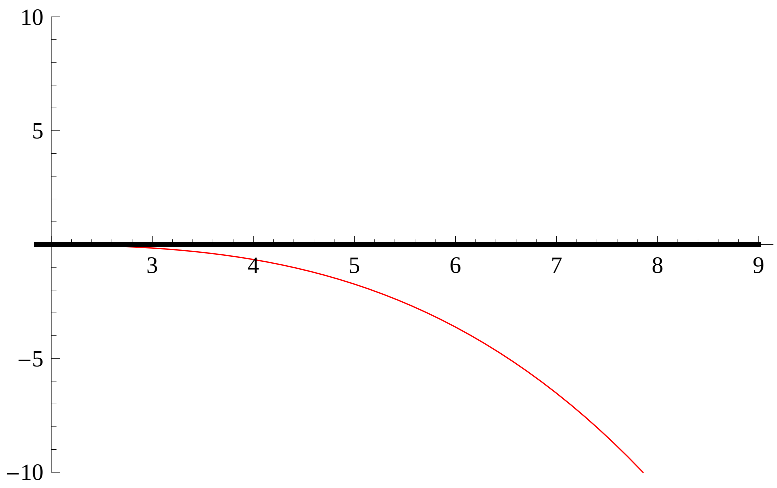

Abbildung 2.2: Lösungsbild der DGL $y'(x) = -\sqrt[3]{y^2}$, gezeichnet mit Mathematica

nicht Lipschitz-stetig bzgl. y an den Punkten (x, 0) ist.
Wir können auch in der nachfolgenden Zeichnung von f schnell erkennen, dass die Steigung der Tangente an f, wenn y gegen 0 geht, sich beliebig $-\infty$ bzw. ∞ annähert.

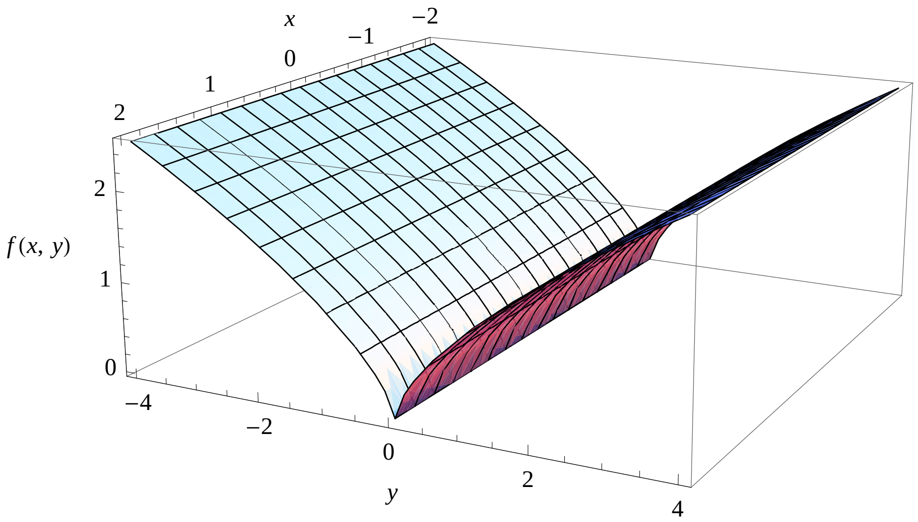

Abbildung 2.3: Die dem AWP zugrunde liegende Funktion f dargestellt in einem 3D-Plot

Daher können wir den Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.3) nicht anwenden. Folglich beabsichtigen wir, das Beispiel aus einer anderen Perspektive zu sehen, und überprüfen, inwieweit die Voraussetzungen des Eindeutigkeitskriteriums von Peano zutreffen:
Zuerst wählt man das Rechteck $\bar{S}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ |y - y_0| \leq b\}$ als Ursprungsbereich der Funktion f. Wie man relativ zügig erkennt, ist diese Funktion stetig auf dem Rechteck $\bar{S}_+$ (Potenzfunktion mit rationalem Exponenten),

d.h. die erste Bedingung für das Kriterium von Peano ist gegeben.
Was die Monotonie von f, die zweite wesentliche Voraussetzung, angeht, wird es spannend: Wandert man mit f von der Anfangsbedingung (x_0, y_0) aus nach rechts - also z.B. bis zum Wert $(x_0, y_0 + b)$, so ist f für $y > 0$ monoton steigend in y für ein festes x aus $[x_0, x_0 + a]$. Aus diesem Grund ist die zweite Bedingung des Theorems von Peano nicht erfüllt.
Konkret heißt das, dass wir auch mit dem Theorem von Peano keine Eindeutigkeit der Lösung für das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ garantieren können.
Nehmen wir uns das Beispiel $y' = \sqrt[3]{y^2}$ mit Anfangswert $y(0) = 0$ heraus, so können wir mit Blick auf Beispiel 1.3 aus Kapitel 1, insbesondere nach Berücksichtigung der Lösungsgleichung (1.6) mehrere Lösungen im Intervall $[0, a]$ angeben [vgl. Abbildung 2.4 auf der nächsten Seite]:

a) $\varphi_1(x) = 0$ für alle $x \in [0, a]$

b) $\varphi_2(x) = \dfrac{x^3}{27}$

c) Außerdem können wir für $\alpha > 0$ mit

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^3}{27} & \text{für } x > \alpha \end{cases}$$

beliebig viele Lösungen im angegebenen Intervall auffinden.

Dennoch ist es möglich, das Theorem von Peano für ein geeignetes Rechteck im Definitionsbereich von f anzuwenden und somit die Eindeutigkeit der Lösung dort zu garantieren:
Zuerst brauchen wir ein anderes Rechteck, das in unsere Voraussetzungen passt, auf dem f stetig ist. Aus diesem Grund wählen wir das Rechteck $\bar{S}_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x_0 - a \leq x \leq x_0, \, |y - y_0| \leq b\}$. Untersuchen wir die Monotonie von f rechts von $(x_0 - a, y_0)$, dem neu gewählten Anfangswertpaar, so gilt stets $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$ für $y_1 < y_2 < 0$ und ein festes x aus dem Intervall $[x_0 - a, x_0]$. Folglich ist f monoton fallend in y für ein festes x in $x_0 - a \leq x \leq x_0$. Damit sind beide Bedingungen für die Anwendung von Peanos Eindeutigkeitskriterium erfüllt.
Somit existiert die eindeutige Lösung des AWPs (1.5) auf dem Intervall $[x_0 - a, x_0]$, die wiederum speziell von der Wahl des Anfangswertes $y(x_0 - a) = y_0$ abhängig ist. Wie beim Beispiel 2.2 gibt es zwei unterschiedliche Fälle im genannten Intervall:

a) Ist $y_0 = 0$, dann gilt

$$y(x) = 0 \text{ für alle } x \in [x_0 - a, x_0] \tag{2.7}$$

b) Gilt $y_0 < 0$, dann kann man das Verfahren der Trennung der Variablen anwenden und man erhält die allgemeine Lösungfunktion

$$y(x) = \frac{(x + c)^3}{27} \tag{2.8}$$

auf dem Intervall $[x_0 - a, x_0]$. Setzt man nun die Anfangsbedingung $(x_0 - a, y_0)$ ein, so gelangt man zur speziellen Lösungfunktion des gegebenen AWPs

$$y(x) = \frac{(x - x_0 + a + 3 \cdot \sqrt[3]{y_0})^3}{27}\,, \tag{2.9}$$

wobei $x \leq x_0$ zwingend gelten muss.

Bemerkung: Wie schon oben in der Analyse des AWPs gezeigt, existiert keine eindeutige Lösung auf dem gesamten Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$.

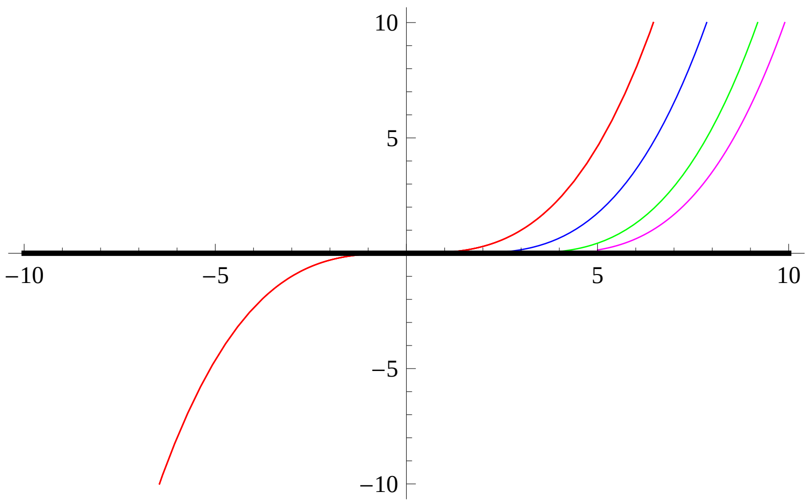

Abbildung 2.4: Lösungsbild von $y'(x) = \sqrt[3]{y^2}$ mit Mathematica

Bevor wir jetzt den nächsten Satz, das Eindeutigkeitskriterium von Osgood, beweisen, wollen wir an dieser Stelle ein Lemma betrachten, das uns ein wichtiges Resultat liefert, um im darauffolgenden Theorem die Lösungseindeutigkeit sicherzustellen.

Lemma 2.4:
Es sei w eine stetige und monoton steigende Funktion im Intervall $[0, \infty)$, mit $w(0) = 0$, $w(z) > 0$ für $z > 0$, und für die auch folgendes gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{a} \frac{dz}{w(z)} = \infty \tag{2.10}$$

Weiters sei u eine nicht-negative stetige Funktion auf [0,a].
Dann folgt aus der Ungleichung:

$$u(x) \leq \int_0^x w(u(t))\,dt, \quad 0 < x \leq a, \tag{2.11}$$

dass $u(x) = 0$ für alle x in $[0, a]$ gilt.

Beweis von Lemma 2.4:
Wir nehmen indirekt an, u sei nicht die Nullfunktion. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gibt es beliebig nahe bei 0 Punkte $t > 0$ mit $u(t) > 0$, denn andernfalls ist u konstant gleich 0 in einem Intervall $[0, t]$ und wir könnten statt $[0, a]$ das Intervall $[t, a]$ betrachten. Man definiere $v(x) = \max\limits_{0 \le t \le x} u(t)$. Konkret gilt, dass $v(x) > 0$ für $0 \le x < a$ und $u(x) \le v(x)$. Da u für jedes $x \in [0, a]$ auf $[0, x]$ eine stetige Funktion ist, gibt es ein $x_1 \in [0, x]$ mit $u(x_1) = \max\limits_{0 \le t \le x} u(t) = v(x)$, d.h. kurz:
Zu jedem x gibt es ein $x_1 \le x$, sodass $u(x_1) = v(x)$. Somit erhalten wir

$$v(x) = u(x_1) \le \int_0^{x_1} w(u(t))\, dt \le \int_0^x w(v(t))\, dt, \tag{2.12}$$

denn w ist eine steigende Funktion, d.h. für $u(x) \le v(x)$ ist $w(u(x)) \le w(v(x))$ und auch die Vergrößerung der oberen Grenze im Integral erhält die Ungleichung.
Damit genügt die nicht-fallende Funktion v derselben Ungleichung wie u. Nun setzen wir $\bar{v}(x) = \int_0^x w(v(t))\, dt$, dann gilt $\bar{v}(0) = 0$, $v(x) \le \bar{v}(x), \bar{v}'(x) = w(v(x)) \le w(\bar{v}(x))$ (weil w monoton steigend).
Daher gilt für $0 < \delta < a$:

$$\int_\delta^a \frac{\bar{v}'(x)}{w(\bar{v}(x))}\, dx \le a - \delta < a \tag{2.13}$$

denn aus $\bar{v}'(x) \le w(\bar{v}(x))$ folgt:

$$\frac{\bar{v}'(x)}{w(\bar{v}(x))} \le 1 \tag{2.14}$$

und daraus

$$\int_\delta^a \frac{\bar{v}'(x)}{w(\bar{v}(x))}\, dx \le \int_\delta^a 1\, dx = a - \delta \tag{2.15}$$

Jedoch bekommen wir nach Anwendung von (2.11), indem wir $\bar{v}(x)$ durch z substituieren ($\bar{v}'(x)$ dx = 1 dz):

$$\int_\delta^a \frac{\bar{v}'(x)}{w(\bar{v}(x))}\, dx = \int_\epsilon^\alpha \frac{dz}{w(z)}, \quad \textit{wobei } \bar{v}(\delta) = \epsilon, \quad \bar{v}(a) = \alpha; \tag{2.16}$$

Das Integral auf der rechten Seite geht aber gegen unendlich, wenn $\delta \to 0$ und somit $\epsilon = \bar{v}(\delta) \to 0$, während das Integral auf der linken Seite nach obiger Ungleichung durch a beschränkt bleibt. Dieser *Widerspruch* zeigt uns, dass v nicht positiv sein kann. Also muss $v(x) = 0$ für alle x gelten und daher $u(x) = 0$ auf ganz $[0, a]$. ◇

Theorem 2.5 (Osgoods Eindeutigkeitskriterium):
Sei $f\colon \bar{S} \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Rechteck $\bar{S} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ und für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{S}$ gelte die Ungleichung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le w(|y_1 - y_2|) \tag{2.17}$$

wobei w eine stetige und monoton steigende Funktion wie in Lemma 2.4 ist.
Dann hat das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ höchstens eine Lösung im Intervall $|x - x_0| \leq a$.

Beweis von Theorem 2.5:
Angenommen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien zwei Lösungen der DGL $y'(x) = f(x, y)$ in $|x - x_0| \leq a$ mit

$$y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0). \tag{2.18}$$

Dann können wir zunächst für $x \geq x_0$ folgende Abschätzung mit Hilfe der zugeordneten Integralgleichung geben:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = |y_1(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - y_2(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\, dt \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} w(|y_1(t) - y_2(t)|)\, dt \right| \tag{2.19}$$

Eigentlich haben wir hier nur die Betrachtung für den Fall $x > x_0$ angestellt, können diese aber auch für $x < x_0$ mithilfe von $\int_{x_0}^{x} \cdots = -\int_{x}^{x_0} \ldots$ zeigen. Daher gilt:
$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} w(|y_1(t) - y_2(t)|)\, dt \right|$ für alle $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Nun definieren wir für x in [0, a]

$$u(x) = |y_1(x_0 + x) - y_2(x_0 + x)|, \tag{2.20}$$

diese Funktion ist stetig (Zusammensetzung stetiger Funktionen) und nicht-negativ. Weiters gilt

$$u(x) = |y_1(x_0 + x) - y_2(x_0 + x)| \leq \int_{0}^{x} w(|y_1(x_0 + t) - y_2(x_0 + t)|)\, dt =$$

$$= \int_{0}^{x} w(u(t))\, dt \quad 0 < x \leq a \tag{2.21}$$

Daher gilt nach Lemma 2.4, dass $u(x) = 0$ in $[0, a]$, d.h. $0 = |y_1(x_0 + x) - y_2(x_0 + x)|$ in $[0, a]$ und damit $y_1(x) = y_2(x)$ in $[x_0, x_0 + a]$.

Für x in $[x_0 - a, x_0]$ können wir dieselbe Argumentation anwenden, man wählt lediglich $u(x) = |y_1(x_0 - x) - y_2(x_0 - x)|$ ($u(x)$ ist hier wieder stetig und nicht-negativ) und verwendet wieder die Ungleichung von Aussage (2.21). $\diamond$

Bemerkung: Tritt der Spezialfall $w(x) = L \cdot x$ auf, so sehen wir nach Einsetzen in die Osgood-Bedingung, dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq w(|y_1 - y_2|) = L \cdot |y_1 - y_2|$$

gilt, was genau der Ungleichung der Lipschitz-Bedingung entspricht. Somit wäre die Funktion f Lipschitz-stetig und man könnte auch die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf von dem Satz von Osgood ableiten.
Nach rückblickender Betrachtung des Theorems von Osgood erkennen wir, dass dieses im Vergleich zum bereits vorgestellten Theorem von Peano die Eindeutigkeit sogar symmetrisch um den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ im Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$ garantiert. Somit kämen wir durch eine einmalige geglückte Anwendung von Osgood zu einem symmetrischen Lösungsintervall, wo wir hingegen beim Theorem von Peano zweimal die Kriterien durchlaufen würden.

Im Anschluss wollen wir untersuchen, ob und inwieweit das Beispiel 2.2 den Bedingungen von Osgood gerecht werden kann:

Nachbetrachtung zum Beispiel 2.2:
Durch das Theorem von Peano konnten wir die Eindeutigkeit der Lösung zum AWP

$$y' = -\sqrt[3]{y^2},\ y(x_0) = y_0$$

nur im Intervall $[x_0, x_0 + a]$ zeigen. Da wir oben im Beispiel 2.2 während der Untersuchung des Lösungeindeutigkeit auf dem Intervall $[x_0 - a, x_0]$ an der Monotoniebedingung von Peano (siehe dazu Theorem 2.2) gescheitert sind und folglich diese Eindeutigkeit in letzterem Intervall nicht garantieren konnten, starten wir sogleich einen neuen Versuch über die Kriterien von Osgood:
Erstens wird dort gefordert, dass $f : \bar{S} \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Rechteck

$$\bar{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

ist.
Sowohl auf anschaulichem - wie bereits in Abbildung 2.1 zu sehen ist - wie auch auf rechnerischem Weg kann man diese Aussage für die (der DGL zugrunde liegende) Funktion $f : (x, y) \to -\sqrt[3]{y^2}$ und das Rechteck $\bar{S}$ bestätigen. An dieser Stelle wollen wir uns auf die Stetigkeit von Potenzfunktionen berufen und die Demonstration über die ϵ-δ Formulierung außen vor lassen.
Zusätzlich muss dem zweiten wesentlichen Kriterium, der Osgood-Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq w(|y_1 - y_2|),$$

für alle Zahlenpaare (x, y_1), (x, y_2) aus dem Rechteck $\bar{S}$ Rechnung getragen werden, hierbei bezeichnet w eine stetige und monotone Funktion derart, wie in Lemma 2.4 charakterisiert. Die Gültigkeit dieser Osgood-Bedingung wollen wir im folgenden Abschnitt genauer überprüfen:

Vorbemerkung - "0. Schritt": Es ist von vorrangiger Bedeutung, die Osgood-Bedingung für Werte y_1 und y_2 zu zeigen, die beliebig nahe beinander liegen - in dem zuerst betrachteten Fall soll $|y_1 - y_2| < 1$ gelten. Dazu wählen wir die Abschätzungsfunktion

$$w(z) = z^{\frac{2}{3}},$$

die vorweg also insbesondere stetig und monoton steigend im Intervall $[0, \infty)$ ist, wobei wir später genauer auf die Kriterien von Lemma 2.4 eingehen werden. Dadurch ergeben sich zwei Fälle, je nachdem, welchen Wert y_1 bzw. y_2 besitzt:

1. Fall: Wir setzen $y_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ voraus. Durch diese Vorschrift ist die Funktion f an den Stellen (x, y_1) und (x, y_2) insbesondere stetig differenzierbar oder *glatt* (Problemstelle $(x, 0)$ kann nicht erreicht werden). Aufgrund dieser zusätzlichen Eigenschaft kann der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe [Heuser], Satz 49.1, S. 279) zur Abschätzung des Abstandes der Funktionswerte benützt werden. Somit gilt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M \cdot |y_1 - y_2|.$$

Lassen wir demnach unsere Vorbedingung $|y_1 - y_2| < 1$ einfließen, folgt unmittelbar für alle betrachteten $y_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$, dass

$$|y_1 - y_2| < |y_1 - y_2|^{\frac{2}{3}} = w(|y_1 - y_2|)$$

gilt. Somit wäre die Osgood-Ungleichung (2.17) für diesen Fall erfüllt. Jedoch sei nebenbei noch bemerkt, dass zur korrekten Anwendung des Theorems noch der Nachweis der Bedingungen von Lemma 2.4 bzgl. w erbracht werden muss.

2.Fall: Gegeben sei nun $y_1 \neq 0$ und $y_2 = 0$. Daraus folgt, dass f , anders als im 1.Fall, nicht differenzierbar an beiden Stellen (x, y_1) und $(x, 0)$ ist, da nach Beispiel 1.3, Punkt a.), die Funktion $f : (x, y) \to -\sqrt[3]{y^2}$ nicht einmal Lipschitz-stetig bzgl. y an den Punkten $(x, 0)$ ist. Daher bevorzugen wir, die Stellen (x, y_1) und $(x, 0)$ direkt in die Osgood-Bedingung einzusetzen, somit muss

$$|f(x, y_1) - \underbrace{f(x, 0)}_{=0}| \leq w(|y_1 - 0|)$$

für alle Paare (x, y_1), $(x, 0)$ aus dem Rechteck $\bar{S}$ gelten. Vereinfachen wir diesen Ausdruck hinsichtlich f bzw. w, so erhalten wir

$$|-\sqrt[3]{{y_1}^2}| \leq \sqrt[3]{{y_1}^2} \tag{2.22}$$

für die Stellen (x, y_1), $(x, 0)$ aus $\bar{S}$. Wie rasch ersichtlich ist, gilt die Ungleichung (2.22) insbesondere für alle $y_1 \neq 0$ (es trifft sogar $=$ statt $\leq$ zu).

Einen Großteil der hinreichenden Bedingungen zur finalen Anwendung des Satzes v. Osgood haben wir mit den obigen Fallunterscheidung bzw. der Stetigkeitsuntersuchung

im Rechteck $\bar{S}$ schon nachgewiesen.
Was dennoch zum vollständigen Nachweis einer existierenden eindeutigen Lösung fehlt, ist die Gültigkeit von Lemma 2.4 für die Abschätzungsfunktion w.

<u>Grenzwertbedingung bzgl. w:</u> Präzise formuliert soll die essentielle Beziehung

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{a} \frac{dz}{w(z)} = \infty \tag{2.23}$$

für $w(z) = z^{\frac{2}{3}}$ gezeigt werden.
Zunächst sehen wir sofort, dass hier die Voraussetzungen $w(0) = 0$ und $w(z) > 0$ für $z > 0$ von Lemma 2.4 zutreffen. Bilden wir dann das Integral, so gelangen wir zu

$$\int_{\epsilon}^{a} \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = \int_{\epsilon}^{a} = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \bigg|_{\epsilon}^{a} = 3 \cdot \sqrt[3]{a} - 3 \cdot \sqrt[3]{\epsilon}$$

Bei nachfolgender Betrachtung des Grenzwertes, sehen wir, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{a} \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\epsilon \to 0+} 3 \cdot \sqrt[3]{a} - \underbrace{3 \cdot \sqrt[3]{\epsilon}}_{\to 0} = 3 \cdot \sqrt[3]{a}$$

eintritt. Weil hier a eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, ist dieser Grenzwert jedenfalls endlich bzw. das Integral $\int_{\epsilon}^{a} z^{-\frac{2}{3}}\, dz$ konvergiert für ϵ gegen 0^{+}. Jedoch wollten wir die Voraussetzung in Gleichung (2.22) zeigen. Somit haben wir eine Funktion w gefunden, die zwar die Ungleichung der Osgood-Bedingung, nicht aber die Grenzwertvoraussetzung des Lemmas 2.4 erfüllt.
Folglich kann das Theorem von Osgood nicht auf das AWP im Beispiel 2.2 angewandt werden. Hiermit ist die zugehörige eindeutige Lösung (2.3) bzw. (2.5), abhängig vom Anfangswert $y(x_0) = y_0$, tatsächlich nur auf dem Intervall $[x_0, x_0 + a]$ durch das Theorem von Peano garantiert. $\diamond$

Dass wir durch das beschriebene Eindeutigkeitskriterium von Osgood dennoch unseren Kenntnisbereich in Bezug auf eindeutig lösbare Anfangswertprobleme erweitern können, soll das folgende Beispiel zeigen:

Beispiel 2.6:
Betrachten wir das AWP

$$y' = f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \ln \frac{1}{y}\,, & \text{für } 0 < y \leq \frac{1}{e} \\ 0\,, & \text{für } y = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

$$y(0) = 0\,.$$

Erstens trifft es für die Ausgangsfunktion f zu, dass

$$\lim_{y \to 0+} y \cdot \ln \frac{1}{y} = \lim_{y \to 0+} \frac{\ln \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \to 0+} \frac{-\ln y}{\frac{1}{y}}$$

Nach der Regel von de l'Hopital bleibt der Grenzwert gleich, wenn man Zähler und Nenner getrennt ableitet [$g(x) \neq 0$, als Resultat: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$], damit erhält man:

$$\lim_{y\to 0+} \frac{-\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{-\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0+} y \cdot \frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0+} y = 0\,, \tag{2.25}$$

somit ist f stetig für $|x| < \infty$, $0 \leq y < \frac{1}{e}$.

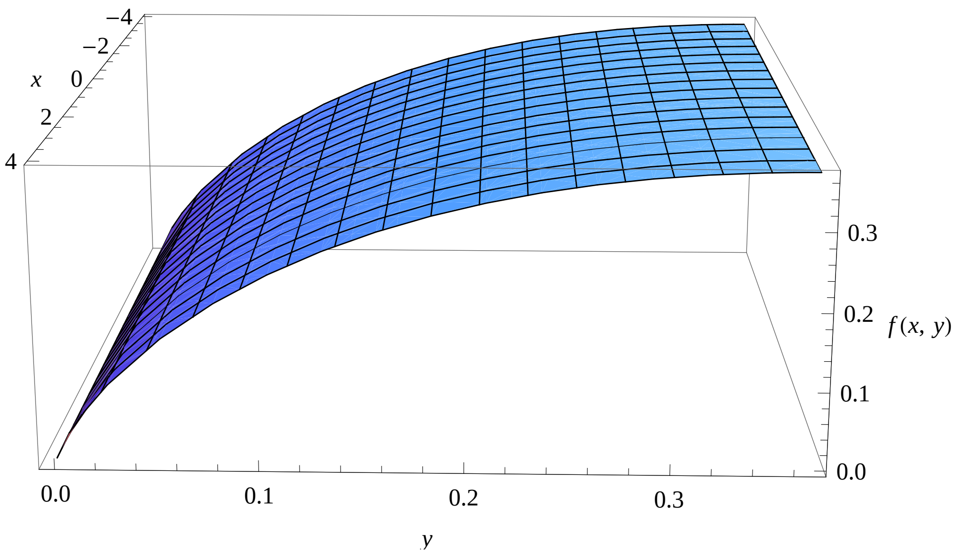

Abbildung 2.5: Die stückweise definierte Funktion f des AWPs in Beispiel 2.6, gezeichnet mit Mathematica

Jedoch genügt f in keiner Umgebung des Punktes (x, 0) der Lipschitz-Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

bzgl. y : Indirekt, sei $y_1 \neq 0$, dann würde für $y_2 = 0$ folgen:

$$L \cdot |y_1 - 0| \geq |y_1 \cdot \ln \frac{1}{y_1} - f(x, 0)| = |y_1 \cdot \ln \frac{1}{y_1}|$$

d.h. weiters

$$\underbrace{|y_1 \cdot \ln \frac{1}{y_1}|}_{=|y_1|\cdot|\ln \frac{1}{y_1}|} \leq L \cdot |y_1|$$

und schließlich

$$1 \leq \frac{L \cdot |y_1|}{|y_1| \cdot |\ln \frac{1}{y_1}|} = \frac{L}{\underbrace{|\ln \frac{1}{y_1}|}_{\to\infty \text{ für } y_1 \to 0}} \to 0\,,$$

demnach erhalten wir einen Widerspruch und die Abschätzung ist für y_1 in beliebiger Nähe zu 0 nicht gegeben. Nach der fallengelassenen Lipschitz-Bedingung ist klar, dass man den Satz von Picard-Lindelöf auf dieses AWP nicht anwenden kann. Auf der anderen Seite ist die Ausgangsfunktion f auch monoton steigend bzgl. y, d.h. auch das Eindeutigkeitskriterium von Peano kann uns hierbei keine Abhilfe schaffen.
Aus diesem Grund wählen wir

$$g(z) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } z = 0 \\ -z \cdot \ln z\,, & \text{für } 0 < z \leq \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e}\,, & \text{für } z > \frac{1}{e} \end{cases} \tag{2.26}$$

Klarerweise ist auch g stetig und monoton fallend im Intervall $[0,\infty)$ mit $g(0) = 0$, $g(z) > 0$ für $z > 0$. Um die Gültigkeit von Lemma 2.4 zu überprüfen, bilden wir zunächst

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{-z \cdot \ln z} = \lim_{\epsilon \to 0+} - \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{\frac{1}{z}}{\ln z}\, dz\,.$$

Nach genauerem Hinsehen fällt auf, dass im Zähler des Integranden genau die Ableitung des Nenners steht. Daher substitutieren wir $u = \ln z$ [$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$, somit auch $dz = z \cdot du$, die Integrationsgrenzen werden ebenfalls ersetzt, dabei gilt $\ln \dfrac{1}{e} = -1$] und erhalten

$$- \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{\frac{1}{z}}{\ln z}\, dz \overset{\text{Subst.}}{=} - \int_{\ln \epsilon}^{-1} \frac{1}{u}\, du$$

Sodann können wir den Ausdruck integrieren, demnach ist

$$- \int_{\ln \epsilon}^{-1} \frac{1}{u}\, du = - \ln |u| \Big|_{\ln \epsilon}^{-1} \tag{2.27}$$

Setzt man die untere Grenze für $|u|$ ein, gilt wegen $\epsilon < 1$ auch $\ln \epsilon < 0$, also insgesamt $|\ln \epsilon| = -\ln \epsilon = \ln \dfrac{1}{\epsilon}$, somit gelangen wird zu der Gleichung

$$- \ln |u| \Big|_{\ln \epsilon}^{-1} = \underbrace{- \ln 1}_{=0} + \ln \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right) = \ln \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right). \tag{2.28}$$

Blicken wir zurück auf den Grenzwert in der Bedingung von Lemma 2.4, so sehen wir nun zusammenfassend

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)$$

und, da $\ln \dfrac{1}{\epsilon}$ für $\epsilon \to 0$ gegen Unendlich strebt, schließlich

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty\,.$$

Somit erfüllt die Funktion g die Bedingungen von Lemma 2.4. ⋄
Des Weiteren bleibt noch zu zeigen, dass die Voraussetzungen für das Eindeutigkeitskriterium von Osgood selbst, also Ungleichung (2.17), gewährleistet ist.
Hierbei fällt auf, dass $\frac{d^2f}{dy^2} = -\frac{1}{y} < 0$ für alle y mit $0 < y \leq \frac{1}{e}$, folglich ist f konkav [zweite Ableitung an allen y-Stellen kleiner als 0].
Zu diesem Zeitpunkt wissen wir aus der Analysis, dass für eine konkave Funktion f jedenfalls $\partial_y f$ monoton fallend für y mit $0 < y \leq \frac{1}{e}$ ist. Betrachten wir rückblickend die stückweise definierte Funktion f, konstatieren wir, dass f nur von y abhängig ist, d.h. die DGL in (2.24) ist autonom.

Behauptung: Wir wollen nun zeigen, dass für y und $\tilde{y}$ mit $0 < y - \tilde{y} < y$

$$\frac{f(x, y - \tilde{y}) - f(x, 0)}{y - \tilde{y}} \geq \frac{f(x, y) - f(x, \tilde{y})}{y - \tilde{y}}$$

gilt.

Beweis der Behauptung: Um diese Behauptung zu belegen, definieren wir zuerst $h(y) := f(x, y)$ mit fixer Variable x. Wie schon im letzten Absatz bemerkt ist f konkav, damit ist auch h konkav. Weiters gilt

$$h'(y) = \partial_y f(x, y) \ ,$$

wobei h' ebenso wie $\partial_y f$ monoton fallend für y mit $0 < y \leq \frac{1}{e}$. Es seien α, β, γ und δ reelle Zahlen, die im Definitionsbereich von h liegen, mit $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe dazu [Heuser]) reelle Zahlen ξ_1 aus $]\alpha, \beta[$ und ξ_2 aus $]\gamma, \delta[$, sodass die Ungleichung

$$\frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} = h'(\xi_1) \geq h'(\xi_2) = \frac{h(\delta) - h(\gamma)}{\delta - \gamma} \tag{2.29}$$

gilt, d.h. nach Wahl von $\alpha = 0$, $\beta = y - \tilde{y}$, $\gamma = \tilde{y}$ und $\delta = y$ resultiert mit f in der ursprünglichen Schreibweise

$$\frac{f(x, y - \tilde{y}) - f(x, 0)}{y - \tilde{y}} \geq \frac{f(x, y) - f(x, \tilde{y})}{y - \tilde{y}} \ ,$$

was zu zeigen war [Letztlich ist die Konkavitätsbedingung ausschlaggebend dafür]. Die obige Gleichung ergibt nach Multiplikation mit $y - \tilde{y} > 0$ sogleich

$$f(x, y - \tilde{y}) - \underbrace{f(x, 0)}_{=0} \geq f(x, y) - f(x, \tilde{y})$$

und schließlich für f ausgewertet an den Stellen $(x, y - \tilde{y})$, $(x, \tilde{y})$ und (x, y)

$$-(y - \tilde{y}) \cdot \ln{(y - \tilde{y})} \geq -y \cdot \ln y + \tilde{y} \cdot \ln \tilde{y},$$

Dadurch erhalten wir zusammengefasst

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |(-y \cdot \ln y) + (\tilde{y} \cdot \ln \tilde{y})| \leq -|y - \tilde{y}| \cdot \ln |y - \tilde{y}| = g(|y - \tilde{y}|)\,,$$

was uns genau die Voraussetzung zur Anwendung von Osgoods Eindeutigkriterium liefert. $\diamond$

Mit der vorangegangenen Demonstration haben wir gezeigt, dass es sogar eine *eindeutige* Lösung zu dem AWP (2.24) gibt. Für den dort festgelegten Anfangswert $y(0) = 0$ kann es nur die Lösung

$$y(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

geben, denn sie erfüllt in jedem Fall in trivialer Weise die DGL.
Starten wir mit einer anderen Anfangsbedingung, wie z.B. $y(0) = \alpha$ für $0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$, so gilt ja wegen der Fallunterscheidung in (2.24) nahe x = 0:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \cdot \ln \frac{1}{y(x)}$$

Um die entsprechende Lösungsfunktion zu dieser Anfangsbedingung zu erhalten, führen wir das Verfahren der Trennung der Variablen durch. In Anlehnung an die Gleichungen (2.27) und (2.28) resultiert die Lösungfunktion

$$x = -\ln|\ln y| - c$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = \alpha$ folgt

$$c = -\ln|\ln \alpha|$$

und die Lösung des AWPs

$$x = -\ln|\ln y| + \ln|\ln \alpha| = \ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right) - \ln\left(\ln\frac{1}{y}\right) = \ln\left(\frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{\ln\frac{1}{y}}\right). \tag{2.30}$$

Diese errechnete Lösungfunktion nimmt, wenn man z.B. $\alpha = 0.1$ wählt, folgende Gestalt an:

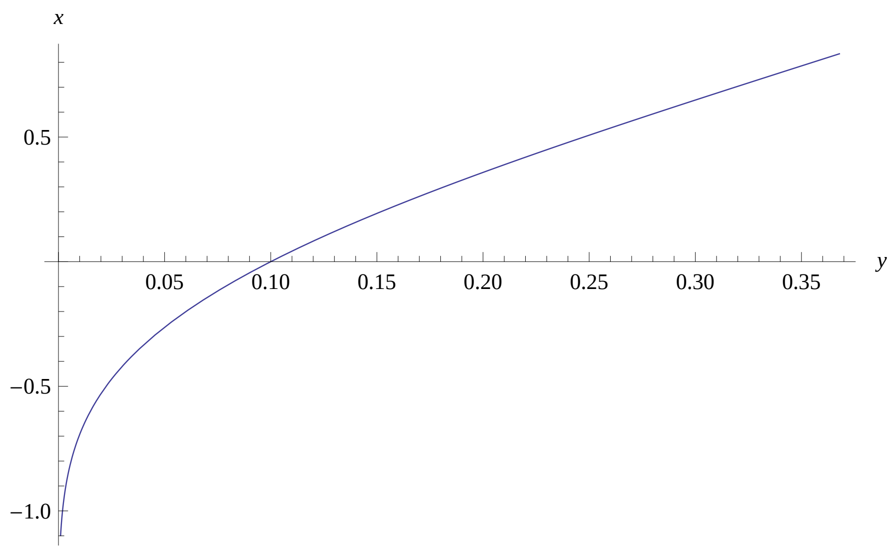

Abbildung 2.6: Die Lösung des AWPs (2.24) als Plot mit Mathematica

2.2 Das Eindeutigkeitstheorem von Nagumo und der Spezialfall des einseitigen Lipschitz-Theorems

Vor der Präsentation des Eindeutigkeitskriteriums von Nagumo wollen wir ein Lemma genauer betrachten, das mit seinen Aussagen über den Zusammenhang von Differentialquotient von u an der Stelle x_0 mit der Größe des Funktionswertes $u(x)$ in einem betrachteten Intervall um x_0 eine wichtige Rolle im nachstehenden Satz spielen wird.

Lemma 2.7:
Sei u eine stetige, nicht-negative Funktion auf $[x_0-a, x_0+a]$, des Weiteren sei $u(x_0) = 0$ und u sei differenzierbar an der Stelle x_0 mit $u'(x_0) = 0$. Dann folgt aus der Ungleichung

$$u(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{t - x_0} \, dt \right| \qquad , \tag{2.31}$$

dass $u(x) = 0$ für alle $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Beweis von Lemma 2.7:
Es reicht, die Aussage für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ zu zeigen (für den Fall $x_0 - a \leq x \leq x_0$ betrachte man $\int_{x_0}^{x} ... = -\int_{x}^{x_0} ...$). Wir definieren

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{t - x_0} \, dt \, . \tag{2.32}$$

Dieses Integral existiert tatsächlich, da wegen $u(x_0) = 0$ folgendes gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) = 0 \tag{2.33}$$

Somit ist der Integrand stetig fortsetzbar in $t = x_0$ und wir dürfen die Ableitung von v nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bilden und erhalten:

$$v'(x) = \frac{u(x)}{x - x_0} \leq \frac{v(x)}{x - x_0}\,, \tag{2.34}$$

da für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ gilt: $u(x) \leq v(x)$, $v(x_0) = 0$.

Wir behaupten, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v(x)}{x - x_0}\right) \leq 0 \tag{2.35}$$

gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{v(x)}{x - x_0}\right) &= \frac{v'(x) \cdot (x - x_0) - v(x) \cdot 1}{(x - x_0)^2} = \frac{v'(x)}{x - x_0} - \frac{v(x)}{(x - x_0)^2} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(v'(x) - \left(\frac{v(x)}{x - x_0}\right)\right)}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dies impliziert nun, dass $\dfrac{v(x)}{x - x_0}$ mononton fallend ist. Wegen $v(x_0) = 0$ erhalten wir $v(x) \leq 0$ für alle $x \geq x_0$. Nach Voraussetzung ist $u \geq 0$ und somit $v(x) \geq 0$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Daher muss insgesamt $v(x) = 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$ gelten. $\diamond$

Wir kommen nun zu dem angekündigten Eindeutigkeitssatz von Nagumo, wo wir unser Lemma 2.7 entscheidend einbringen können:

Theorem 2.8 (Nagumos Eindeutigkeitskriterium):
Es sei f stetig auf $\bar{S} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $0 \leq k \leq 1$ und für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{S}$ gelte die Ungleichung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|x - x_0|^{-1}|y_1 - y_2|, \quad x \neq x_0 \tag{2.37}$$

Dann hat das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ höchstens eine Lösung im Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Beweis von Theorem 2.8:
Wir nehmen an, dass y_1 und y_2 zwei Lösungen der gewöhnlichen DGL

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit Anfangsbedingung } y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0) \tag{2.38}$$

für alle x mit $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ sind. Zunächst schätzen wir für $x > x_0$ den Abstand der Lösungen mittels der zugehörigen Integralgleichungen ab:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = |y_1(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - y_2(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|}_{\text{Anwendung von (2.37)}}\, dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \frac{\overbrace{k}^{\leq 1} \cdot |y_1(t) - y_2(t)|}{|t - x_0|}\, dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{|t - x_0|}\, dt \tag{2.39}$$

Falls $x < x_0$: $\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$ entspricht $-\int_{x}^{x_0} f(t, y_1(t))\, dt$, ebenso für den Integralsummanden von y_2, also erhalten wir insgesamt:

$$u(x) := |y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{|t - x_0|}\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{|t - x_0|}\, dt \right| \tag{2.40}$$

Die Funktion u erfüllt nun die Voraussetzungen von Lemma 2.7. Zunächst ist u stetig als Betrag der Differenz der stetigen Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$) in $|x - x_0| \leq a$, und $u(x_0) = 0$, sowie $u \geq 0$ ist klar. Bezüglich der Differenzierbarkeit in x_0 beobachten wir als erstes, dass für $h \neq 0$ gilt:

$$\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h)}{h} \tag{2.41}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung können wir eine differenzierbare Funktion, in unserem Fall y_1 bzw. y_2 mit einer geeigneten Zahl ϑ zwischen 0 und 1 anschreiben

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &= |y_1(x_0 + h) - y_2(x_0 + h)| = \\ &= |y_1(x_0) + y_1'(x_0 + \vartheta \cdot h) \cdot h - y_2(x_0) - y_2'(x_0 + \vartheta \cdot h) \cdot h| \end{aligned} \tag{2.42}$$

und somit

$$\left| \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h)}{h} \right| = \lim_{h \to 0} \frac{|y_1(x_0) + h \cdot y_1'(x_0 + \vartheta_1 \cdot h) - y_2(x_0) - h \cdot y_2'(x_0 + \vartheta_2 \cdot h)|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cdot |y_1'(x_0 + \vartheta_1 \cdot h) - y_2'(x_0 + \vartheta_2 \cdot h)|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} |y_1'(x_0 + \vartheta_1 \cdot h) - y_2'(x_0 + \vartheta_2 \cdot h)| = |y_1'(x_0) - y_2'(x_0)| \tag{2.43}$$

weil y_1 und y_2 als Lösungen der DGL stetige erste Ableitungen besitzen. Schlußendlich ist

$$y_1'(x_0) = f(x_0, y_1(x_0)) = f(x_0, y_0) = f(x_0, y_2(x_0)) = y_2'(x_0), \tag{2.44}$$

somit insgesamt

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = 0, \tag{2.45}$$

d.h. u ist differenzierbar in x_0 und $u'(x_0) = 0$. Aus Lemma 2.7 folgt schließlich $u(x) = 0$ für alle $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, daher $y_1 = y_2$. $\diamond$

Im nächsten Absatz stellen wir ein Lemma vor, das den Leser in seiner Grundstruktur an das Lemma 2.7 erinnern wird und in gewisser Hinsicht als Erweiterung desselbigen aufgefasst werden kann: Jedoch geht man im folgenden Hilfssatz von etwas abgeänderten Bedingungen aus - statt $\frac{1}{t-x_0}$ steht eine stetige Funktion $q(t)$ als Faktor im Integral! Die Funktion $p\colon t \to \frac{1}{t-x_0}$ hingegen ist nicht stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$. Dafür wird in folgendem Lemma nicht verlangt, dass $u'(x_0) = 0$ zutrifft. Dieses Lemma wird durch seine erzielten Abschätzungen entscheidend in den Beweis des darauf folgende einseitige Lipschitz-Kriterium einfließen.

Lemma 2.9:
Es seien u und q zwei nicht-negative stetige Funktionen im Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$, die der Ungleichung

$$u(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} q(t) \cdot u(t)\, dt \right| \tag{2.46}$$

Rechnung tragen. Dann gilt $u(x) = 0$ für alle x aus $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Beweis von Lemma 2.9:
Zu allererst sei darauf hingewiesen, dass wir die Aussage nur für das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ zeigen - für $[x_0 - a, x_0]$ verläuft der Beweis ähnlich, man geht in jenem Fall von $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \cdots = -\int_{x}^{x_0} \ldots$ aus.
Zunächst definieren wir

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} q(t) \cdot u(t)\, dt$$

für alle x aus dem Intervall $[x_0, x_0 + a]$, so dass $v(x_0) = 0$ [klar, da $\int_{x_0}^{x_0} q(t)u(t)\, dt = 0$] und $v'(x) = q(x) \cdot u(x)$ [HS d. Differential- & Integralrechnung]. Verwenden wir danach die Ungleichung (2.46) aus der Voraussetzung des Lemmas, erhalten wir demnach, weil q und u positive Funktionen sind,

$$v'(x) = q(x) \cdot u(x) \leq q(x) \cdot \left| \int_{x_0}^{x} q(t) \cdot u(t)\ dt \right| = q(x) \cdot \int_{x_0}^{x} q(t) \cdot u(t)\ dt = \\ = q(x) \cdot v(x)$$

was zusammengefasst $v'(x) \leq q(x) \cdot v(x)$ bedeutet. Wenn man folglich beide Seiten dieser Ungleichung mit $\exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right)$ (≥ 0 o.B.d.A) multipliziert, so erhält man

$$v'(x) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) \leq q(x) \cdot v(x) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right)$$

Bringt man nun den Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung nach links, dann ergibt das:

$$v'(x) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) - q(x) \cdot v(x) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) \leq 0$$

Andererseits steht der Ausdruck links genau für die partielle Ableitung von $(\exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) \cdot v(x))$ nach x, somit schließen wir auf

$$\frac{d}{dx}\left(\exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) \cdot v(x)\right) \leq 0,$$

i.e. der Term $\left(\exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right) \cdot v(x)\right)$ ist monoton fallend. Insbesondere ergibt der Teil $\exp\left(- \int_{x_0}^{x} q(t)\ dt\right)$ stets eine reelle positive Zahl, wir nennen sie λ, für ein beliebiges x im Intervall $[x_0, x_0 + a]$. Da $\lambda \cdot v(x)$ monoton fallend für alle x aus demselben Intervall ist, folgt somit auch, dass $v(x)$ dort monoton fallend ist. Weil weiters $v(x_0) = 0$ gilt, folgt direkt $v(x) \leq 0$ und somit auch $u(x) \leq v(x) \leq 0$ für alle x aus $[x_0, x_0 + a]$. Laut Voraussetzung des Lemmas ist aber die Funktion u insbesondere nicht-negativ, wir erhalten einen Widerspruch zu $u(x) \leq 0$! Dadurch kann nur $u(x) = 0$ in $[x_0, x_0 + a]$ gelten. $\diamond$

Darüber hinaus können wir das Lemma 2.9 auch in einen Satz einbringen, der die Lipschitz-Stetigkeit nur in einem Teilintervall garantiert:

Theorem 2.10 (Einseitiges Lipschitz-Kriterium):
Es sei f stetig im Rechteck

$$\bar{S}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x_0 \le x \le x_0 + a,\ |y - y_0| \le b\}$$

(siehe Theorem von Peano, 2.1) und weiters erfülle f für alle (x, y), $(x, \tilde{y})$ in $\bar{S}_+$ mit $\tilde{y} \ge y$ die *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$f(x, \tilde{y}) - f(x, y) \le L \cdot (\tilde{y} - y)\ .$$

Dann hat das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

höchstens eine Lösung in $[x_0, y_0]$.

Beweis von Theorem 2.10:
Angenommen y und $\tilde{y}$ sind zwei verschiedene Lösungen des AWPs mit $y(x_0) = y_0 = \tilde{y}(x_0)$, die sich an einigen Stellen in $[x_0, x_0 + a]$ unterscheiden.
Wir nehmen an, dass $\tilde{y}(x) > y(x)$ für $x_1 < x \le x_1 + \epsilon \le x_0 + a$ gilt, und $\tilde{y}(x) = y(x)$ für $x_0 \le x \le x_1$. In anderen Worten: x_1 ist die größte untere Schranke der Menge A, die aus allen Werten x besteht, für die $\tilde{y}(x) > y(x)$ gilt. Diese größte untere Schranke existiert in jedem Fall, da A zumindest durch x_0 nach unten beschränkt wird. Aufgrund dieser Tatsache können wir für alle x aus $(x_1, x_1 + \epsilon]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) - y(x) &= y_0 + \int_{x_1}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\, dt - y_0 - \int_{x_1}^{x} f(t, y(t))\, dt = \\ &= \int_{x_1}^{x} (f(t, \tilde{y}(t)) - f(t, y(t)))\, dt\end{aligned}$$

gemäß der Darstellung des AWPs als Integralgleichung anschreiben. Setzen wir in der Folge die Voraussetzung des Kriteriums ein, dann erhalten wir für x aus $(x_1, x_1 + \epsilon]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) - y(x) &= \int_{x_1}^{x} (f(t, \tilde{y}(t)) - f(t, y(t)))\, dt \le \int_{x_1}^{x} L \cdot (\tilde{y}(t) - y(t))\, dt = \\ &= L \cdot \int_{x_1}^{x} (\tilde{y}(t) - y(t))\, dt \le L \cdot \left| \int_{x_1}^{x} (\tilde{y}(t) - y(t))\, dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_1}^{x} L \cdot (\tilde{y}(t) - y(t))\, dt \right|\end{aligned}$$

Wenn wir nun $u(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ wählen, können wir u im nächsten Schritt in das Lemma 2.9 einsetzen. Als Funktion ist u nicht-negativ, und auch stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Die Funktion q ist konstant gleich L, somit gilt

$$u(x) = \tilde{y}(x) - y(x) = 0$$

für alle x aus $(x_1, x_1 + \epsilon]$, was unserer Annahme $\tilde{y}(x) > y(x)$ für $x_1 < x \leq x_1 + \epsilon$ widerspricht! Somit ist gezeigt, dass $\tilde{y}(x) = y(x)$ auf dem gesamten Intervall $[x_0, x_0 + a]$ Gültigkeit besitzt, i.e. das AWP besitzt auf dem genannten Intervall höchstens eine Lösung. $\diamond$

2.3 Annäherung an das Eindeutigkeitsproblem über links- und rechtsseitige Ableitungen: Die Eindeutigskeitstheoreme von Perron und Kamke

In den letzten Theoremen (siehe Osgood, Nagumo und zuletzt das einseitige Lipschitz-Kriterium) haben wir uns oftmals auf Lemmata bezogen, in denen Integralbedingungen (z.B.: $u(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{t - x_0} \, dt \right|$ bei Lemma 2.7) eine zentrale Rolle spielen und auch wesentlich in den Beweis des zugehörigen Satzes (im Falle von Lemma 2.7 das Theorem von Nagumo) einfließen.
Wie wir nun sehen werden, ist es durchaus möglich, Eindeutigkeitskriterien auf andere Abschätzungsmöglichkeiten zu stützen. Konkret betrachten wir die Eigenschaften sogenannter maximaler und minimaler Lösungen von Anfangswertproblemen, die die Beweisgrundlage für die Sätze von Perron und Kamke bereiten werden.

Definition 2.1:
Eine Lösung r (bzw. ρ) des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \, , \; y(x_0) = y_0 \, ,$$

in einem Intervall J wird maximale (bzw. minimale) Lösung genannt, wenn zu einer beliebigen Lösung y des obigen AWPs, die in demselben Intervall J existiert, die Ungleichung

$$y(x) \leq r(x) \text{ (bzw. } \rho(x) \leq y(x) \text{)}$$

für alle x aus J eingehalten wird.

Darüber hinaus scheint klar, dass die maximale Lösung r und die minimale Lösung ρ eindeutig sind, falls sie existieren. Kommen wir nun zu drei Sätzen, bei denen uns primär das Resultat interessiert und deren Beweise wird an dieser Stelle nicht näher betrachten wollen, um einen konzentrierten Blick auf das darauffolgende, "große" Theorem von Perron werfen zu können.

Proposition 2.11:
Es sei die Funktion $f(x, y)$ stetig in $\bar{S}_+$, dann gibt es eine maximale Lösung r und eine minimale Lösung ρ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \; y(x_0) = y_0$$

im Intervall $[x_0, x_0 + \alpha]$ für einige positive α.

Für eine **Beweisidee** siehe [Lakshmikantham/Leela], 1.3 Maximal and Minimal Solutions, Theorem 1.3.1, S.11f.

Setzen wir nun voraus, dass die Funktion y stetig in einem Intervall J ist. Dann verwenden wir die folgende Notation zur Kennzeichnung der sogenannten Dini-Ableitungen:

$$\begin{aligned} D^{+}y(x) &= \limsup_{h \to 0+} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\ D_{+}y(x) &= \liminf_{h \to 0+} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\ D^{-}y(x) &= \limsup_{h \to 0-} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\ D_{-}y(x) &= \liminf_{h \to 0-} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Gilt $D^{+}y(x) = D_{+}y(x)$, so existiert die rechtsseitige Ableitung von y und wird mit y'_{+} bezeichnet. In gleicher Weise benennt man die linksseitige Ableitung von y mit y'_{-}.
Als Anwendung der maximalen Lösung r gehen wir sodann über zu Theoremen, die etwas über die Beziehung zur allgemeinen Lösung y aussagen sollen:

Proposition 2.12:
Es sei f stetig in einem Definitionsintervall D und r sei die maximale Lösung des AWPs

$$y'(x) = f(x, y(x))\,,\ y(x_0) = y_0$$

im Intervall $J = [x_0, x_0 + a)$. Darüber hinaus sei y eine Lösung der Differentialungleichung

$$D^{+}y(x) \leq f(x, y(x)) \tag{2.47}$$

in J. Dann impliziert $y(x_0) \leq y_0$ stets, dass $y(x) \leq r(x)$ für alle x aus J gilt.

Für eine **Beweisidee** siehe [Lakshmikantham/Leela], 1.4 Comparison theorems, Theorem 1.4.1, S.15f.

Proposition 2.13:
Die Funktion f sei stetig in dem Definitionsintervall D und es existiere ρ als die minimale Lösung des AWPs

$$y'(x) = f(x, y(x))\,,\ y(x_0) = y_0$$

im Intervall $J = (x_0 - a, x_0]$. Weiters sei y eine Lösung der Differentialungleichung

$$D_{-}y(x) \leq f(x, y(x)) \tag{2.48}$$

in J. Dann folgt aus $y_0 \leq y(x_0)$, dass $\rho(x) \leq y(x)$ für alle x aus J zutrifft.

Für eine **Beweisidee** siehe [Lakshmikantham/Leela], 1.4 Comparison theorems, Theorem 1.4.6, S.20.

Theorem 2.14 (Perrons Eindeutigkeitskriterium):
Angenommen

a) die Funktion $g(x,z)$ sei stetig und nicht-negativ in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$ und zu jedem x_1 mit $x_0 < x_1 < x_0 + a$ sei $z(x) \equiv 0$ die einzige differenzierbare Funktion in $[x_0, x_1)$, die den Bedingungen

$$z'(x) = g(x, z(x)) \quad \text{für } x \text{ mit } x_0 \leq x < x_1$$

und

$$z(x_0) = 0$$

genügt.

b) die Funktion $f(x,y)$ sei stetig in $\bar{S}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ |y - y_0| \leq b\}$ und erfülle für alle (x,y),$(x,\tilde{y})$ aus $\bar{S}_+$ die **Perron-Bedingung**

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq g(x, |y - \tilde{y}|)\,. \tag{2.49}$$

Somit folgt, dass das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ höchstens eine Lösung in $[x_0, x_0 + a]$ besitzt.

Beweis von Theorem 2.14:
Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. angenommen es existieren zwei Lösungen $y(x)$ und $\tilde{y}(x)$ des AWPs $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ in dem Intervall $[x_0, x_0 + a]$. Zuerst definieren wir $\phi(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)|$. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist klar, dass $\phi(x_0) = 0$. Um Proposition 2.12 verwenden zu können, wollen wir folgende Ungleichung beweisen:

$$\begin{aligned} D^+\phi(x) &\leq |y'(x) - \tilde{y}'(x)| = |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| \leq \\ &\leq g(x, |y(x) - \tilde{y}(x)|) \leq g(x, \phi(x)) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Unter Bezugnahme auf die zu erfüllende Ungleichung (2.49) folgern wir für alle (x,y), $(x,\tilde{y})$ aus dem Rechteck $\bar{S}_+$:

$$\begin{aligned} |y'(x) - \tilde{y}'(x)| &= |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| \leq g(x, |y(x) - \tilde{y}(x)|) \leq \\ &\leq g(x, \phi(x))\,. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Was wir noch zeigen müssen, ist, dass

$$D^+\phi(x) \leq |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \tag{2.52}$$

zutrifft - in anderen Worten, dass ϕ eine Lösung der Differentialungleichung (2.49) darstellt. Anfänglich können wir die Dini-Ableitung $D^+\phi(x)$ der Funktion ϕ, die als Betrag von $y(x)-\tilde{y}(x)$ insbesondere stetig ist, bilden. Wenn wir diese obere rechtsseitige Ableitung auswerten, erhalten wir

$$D^+\phi(x) = \limsup_{h\to 0+} \left(\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\right) = \limsup_{h\to 0+} \left(\frac{|y(x+h)-\tilde{y}(x+h)|-|y(x)-\tilde{y}(x)|}{h}\right)$$

Den Betrag der Differenz der Ableitungen von y und $\tilde{y}$ kann man ebenfalls mit dem Limes superior - beide beinhalteten Funktionen sind differenzierbar - ausdrücken:

$$|y'(x)-\tilde{y}'(x)| = \limsup_{h\to 0+} \left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{\tilde{y}(x+h)-\tilde{y}(x)}{h}\right| =$$

$$= \limsup_{h\to 0+} \left(\frac{\big|\big(y(x+h)-y(x)\big)-\big(\tilde{y}(x+h)-\tilde{y}(x)\big)\big|}{h}\right)$$

In diesem Moment scheint es klar auf der Hand zu liegen, dass wir die Ungleichung

$$(\star\star) \quad \underbrace{\limsup_{h\to 0+} \left(\frac{|y(x+h)-\tilde{y}(x+h)|-|y(x)-\tilde{y}(x)|}{h}\right)}_{=D^+\phi(x)} \leq$$

$$\leq \underbrace{\limsup_{h\to 0+} \left(\frac{\big|\big(y(x+h)-y(x)\big)-\big(\tilde{y}(x+h)-\tilde{y}(x)\big)\big|}{h}\right)}_{=|y'(x)-\tilde{y}'(x)|} \tag{2.53}$$

belegen müssen, wobei hier die Funktionen y und $\tilde{y}$ als Lösungen des AWPs insbesondere stetig sind. Wir beobachten, dass es ausreicht, die folgende Ungleichung für kleine $h>0$ zu beweisen:

$$(\triangle)\ |y(x+h)-\tilde{y}(x+h)|-|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \big|\big(y(x+h)-y(x)\big)-\big(\tilde{y}(x+h)-\tilde{y}(x)\big)\big|$$

Als erste Abschätzung hilft uns die Tatsache, dass der Absolutbetrag einer Zahl dieselbe Zahl nach oben beschränkt, somit

$$L := |y(x+h)-\tilde{y}(x+h)|-|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \left|\underbrace{|y(x+h)-\tilde{y}(x+h)|}_{=:R_1} - \underbrace{|y(x)-\tilde{y}(x)|}_{=:R_2}\right| =: R$$

Blicken wir etwas genauer auf die erhaltenen Absolutbeträge, so können wir drei Fälle unterscheiden:

<u>1. Fall</u> [$y(x) = \tilde{y}(x)$]: Damit ist R_2 gleich Null und wir dürfen folglich den Ausdruck $-y(x) + \tilde{y}(x)$ $(= 0)$ in R_1 hineinschleusen, sodann gilt

$$R_1 = |y(x+h) - y(x) + \tilde{y}(x) - \tilde{y}(x+h)| ,$$

was genau auf die rechte Seite in ($\triangle$) hinausführt.

<u>2. Fall</u> [$y(x) < \tilde{y}(x)$]: Wegen der Stetigkeit beider Funktionen gilt für $h > 0$ klein genug jedenfalls sicherlich $y(x+h) < \tilde{y}(x+h)$ und somit sind sowohl R_1 als auch R_2 negativ. Daher lösen wir die inneren Beträge in R jeweils mit Faktoren (-1) auf und erhalten genau die rechte Seite von R.

<u>3. Fall</u> [$y(x) > \tilde{y}(x)$]: Aus der Stetigkeit resultiert hier für genügend kleine $h > 0$ die Ungleichung $y(x+h) > \tilde{y}(x+h)$, daran anknüpfend gilt $R_1 > 0$ und $R_2 > 0$. In der Folge können die inneren Betragsstriche einfach weggelassen werden, was wiederum genau auf die rechte Seite von ($\triangle$) hinausläuft.

Mit dieser durchgeführten Fallunterscheidung haben wir nun nachvollzogen, dass die Ungleichung in ($\triangle$) gilt. Somit können wir aufgrund des Vergleichssatzes für konvergente (Teil-)Folgen aus dem Analysis-Buch von [Heuser], Seite 152, auch darauf rückschließen, dass die Ungleichung in ($\star\star$) gilt.
Im folgenden Schritt können wir die vorangegangene Beweisarbeit mit der Proposition 2.12 verknüpfen. Somit lautet unsere Ungleichung wie in (2.47):

$$\begin{aligned} D^+\phi(x) &\leq |y'(x) - \tilde{y}'(x)| = |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| \leq \\ &\leq g(x, |y(x) - \tilde{y}(x)|) = g(x, \phi(x)) \,. \end{aligned} \tag{2.54}$$

erweitern. Nun erhalten wir für jedes x_1, für das $x_0 < x_1 < x_0 + a$ zutrifft, mithilfe von Proposition 2.12 die Ungleichung

$$\phi(x) \leq r(x)$$

mit $x_0 \leq x < x_1$, wobei die Funktion r die maximale Lösung des AWPs darstellt. Andererseits wissen wir durch die Voraussetzungen des Theorems von Perron, dass $r(x) \equiv 0$ gilt. Daher ist auch $\phi(x) = 0$ in $[x_0, x_1)$, somit ist die Behauptung des Theorems bewiesen. $\diamond$

Bemerkung: Setzen wir $g(x, y) = h(x) \cdot y$ in der Ungleichung (2.49) von Theorem 2.14, wobei die Funktion $h(x) \geq 0$ in $[x_0, x_0 + a]$ und dort insbesondere stetig ist, so sehen wir, dass

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \underbrace{h(x)}_{\geq 0} \cdot |y - \tilde{y}|$$

zutrifft. Hiermit erhalten wir genau die Lipschitz-Bedingung, und man könnte die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf von dem Theorem von Perron ableiten.

Die Aussage des folgenden Theorems von Kamke ist noch eine Spur allgemeiner als die des Theorems von Perron, andererseits baut es gerade in den entscheidenden Teil auf das Theorem 2.14 auf. Betrachtet man die Bedingungen genauer, so erkennt man, dass im Theorem von Kamke nicht einmal die Stetigkeit von g in den Punkten (x_0, z) und die Differenzierbarkeit von z direkt in x_0 vorausgesetzt wird. Um die Aussage dennoch sicherzustellen, wird nach der Vorstellung des Theorems ein fundamentales Lemma eingeführt, das einen nicht zu unterschätzenden Teil zum Resultat des Kriteriums beiträgt.

Theorem 2.15 (Kamkes Eindeutigkeitskriterium):
Wir nehmen an, dass

a) die Funktion $g(x, z)$ stetig und nicht-negativ in $x_0 < x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$ sei und $z(x) \equiv 0$ sei für alle x_1 mit $x_0 < x_1 < x_0 + a$ die einzige in $x_0 < x < x_1$ differenzierbare Funktion, die stetig für $x_0 \leq x \leq x_1$ ist, für die weiters

$$z'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{z(x) - z(x_0)}{x - x_0};$$

existiert und, die die DGL

$$z'(x) = g(x, z(x)) \tag{2.55}$$

für alle x mit $x_0 < x < x_1$ und die Anfangsbediungung

$$z(x_0) = z'_+(x_0) = 0 \tag{2.56}$$

erfüllt.

b) die Funktion $f(x, y)$ stetig in $\bar{S}_+$ sei und für alle (x, y),$(x, \tilde{y})$ aus $\bar{S}_+$, unter der Bedingung $x \neq x_0$, wird die Ungleichung

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq g(x, |y - \tilde{y}|)$$

erfüllt.

Dann hat das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ höchstens eine Lösung in $[x_0, x_0 + a]$.

Um dieses Theorem verifizieren zu können, benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Lemma 2.16:
Es erfülle die Funktion $g(x, z)$ die Annahme (a) des Theorems von Kamke. Weiters sei die Funktion $g_1(x, z)$ stetig und nicht-negativ in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$. Noch dazu gelte $g_1(x, 0) = 0$ für alle x aus $[x_0, x_0 + a]$ und für alle $x \neq x_0$ sei

$$g_1(x, z) \leq g(x, z). \tag{2.57}$$

Dann ist für jedes x_1 mit $x_0 < x_1 < x_0 + a$ die Funktion $z(x) \equiv 0$ die einzige differenzierbare Funktion für x im Intervall $[x_0, x_1]$, die der Differentialgleichung

$$z' = g_1(x, z),\ z(x_0) = 0 \tag{2.58}$$

genügt.

Beweis von Lemma 2.16:
In diesem Fall genügt es zu zeigen, dass die maximale Lösung $r(x)$ von (2.58) für alle x aus $(x_0, x_0 + a)$ identisch Null ergibt (damit wäre r gleich 0 die einzige differenzierbare Funktion in $x_0 < x < x_1$ wie in (a) gefordert). Indirekt nehmen wir an, dass ein σ mit $x_0 < \sigma < x_0 + a$ existiert, sodass $r(\sigma) > 0$. Aufgrund der Ungleichung (2.57) ist insbesondere

$$z' = g_1(x, z) \leq g(x, z)$$

für alle x mit $x_0 < x \leq x_0 + a$. Da r gerade die maximale Lösung der DGL (2.58) darstellt, haben wir weiters

$$r'(x) \leq g(x, r(x)),\ x_0 < x \leq \sigma \tag{2.59}$$

gegeben. Wenn nun $\rho(x)$ die minimale Lösung von $z' = g(x, z)$ mit dem Anfangswert $z(\sigma) = r(\sigma) > 0$ ist, impliziert eine Anwendung von Proposition 2.13, dass

$$\rho(x) \leq r(x) \tag{2.60}$$

gilt - soweit $\rho(x)$ links von σ existiert. Wir werden sehen, dass die Lösung $\rho(x)$ unter der Verwendung von Standardargumenten bis zu $x = x_0$ fortgeführt werden kann: Wenn $\rho(\tau) = 0$ gilt, für ein τ mit $x_0 < \tau < \sigma$, können wir die Fortsetzung von ρ bewirken, indem wir $\rho(x) = 0$ für $x_0 < x < \tau$ definieren. Andernfalls sichert auch (2.60) die Fortsetzbarkeit der minimalen Lösung ρ.
Da ja $r(x_0) = 0$ ist (laut Voraussetzung von (2.58)), die Ungleichung (2.60) gilt und ρ als Lösung stetig differenzierbar sein muss, folgt

$$\lim_{x \to x_0^+} \rho(x) = 0$$

und daraufhin definieren wir $\rho(x_0) = 0$ (Bemerkung: $\rho(x_0)$ kann nicht beliebig von $\rho(x)$ für $x_0 < x < \tau$ abweichen). Des Weiteren existiert außerdem $r'_+(x_0)$, da $g_1(x, z)$ stetig bei $(x_0, 0)$ ist und $g_1(x_0, 0) = 0$, und ist gleich Null. Daher folgt basierend auf (2.60), dass $\rho'_+(x_0)$ existiert und $\rho'_+(x_0) = 0$.
Jedoch haben wir anfangs angenommen, dass $g(x, z)$ die Bedingungen von Theorem 2.15 befriedigt. In der Folge muss $\rho(x) \equiv 0$ gelten. Dies widerspricht aber der Tatsache,

dass wir $\rho(\sigma) = r(\sigma) > 0$ vorausgesetzt haben!!
Daraus folgt, dass schließlich $r(x) \equiv 0$ für alle x aus $(x_0, x_0 + a)$, somit ist die Behauptung des Lemmas belegt. ◇

Nach diesem Einschub kommen wir zurück auf das zuvor dargebrachte Eindeutigkeitskriterium von Kamke und wollen sogleich den Beweis vorführen:

Beweis von Theorem 2.15:
In einer ersten Betrachtung der Voraussetzungen des Theorems definieren wir die Funktion

$$g_f(x,z) = \sup_{|y-\tilde{y}|=z} |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \tag{2.61}$$

für x und z mit $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$. Weil schon f stetig in $\bar{S}_+$ ist, erfüllt g_f ebenfalls die Stetigkeitsbedingung in $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$. In Hinblick auf die Gleichung (2.61) ist klar ersichtlich, dass die Perron-Bedingung (2.49) von der Funktion g_f erfüllt wird. Überdies gilt gerade wegen (2.49) auch

$$g_f(x,z) \leq g(x,z)$$

für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $0 \leq z \leq 2b$. Wie wir schnell erkennen, ist $g_f(x,0) \equiv 0$ laut Definition der Funktion g_f. Demnach sind die Bedingungen von Lemma 2.16 erbracht, wobei man $g_1(x,y) = g_f(x,y)$ wählt. Wendet man dieses Lemma an, so erhält man

$$z(x) \equiv 0$$

als einzige diffenzierbare Funktion, die für jedes x_1 mit $x_0 < x_1 < x_0 + a$ das in (2.55) und (2.56) dargestellte AWP, das sich hier auf g_f bezieht

$$z' = g_f(x,z),\ z(x_0) = 0 \tag{2.62}$$

mit x aus dem Intervall $[x_0, x_1]$ erfüllt, d.h. z stellt insbesondere eine Lösung des AWPs (2.62) dar. Sodann können wir die Funktion g_f in das Theorem 2.14 von Perron einsetzen, da sie dort sowohl die Voraussetzungen von (a) und (b) erfüllt. Damit schließen wir mit der eindeutigen Lösbarkeit des AWPs

$$y'(x) = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

in $[x_0, x_0 + a]$ als Resultat. ◇

Bemerkung: Das zuletzt präsentierte Eindeutigskeitskriterium von Kamke ist augenscheinlicherweise noch allgemeiner gefasst als das Theorem von Perron. So beinhaltet es einige bereits beschriebene Kriterien als Spezialfälle, z.B.

a) Das Theorem 2.5 von Osgood in dem Intervall $[x_0, x_0 + a]$: Wenn man $g(x, y) = w(y)$ wählt, wobei die Funktion w die Bedingungen im Lemma 2.4 erbringt.

b) Das Eindeutigkeitskriterium von Nagumo (Theorem 2.8) im Intervall $[x_0, x_0 + a]$: Setzt man $g(x, y) = \frac{k \cdot y}{|x - x_0|}$ und vermöge $k \leq 1$.

2.4 Ein Wechsel der Perspektive: Das Nichteindeutigkeitskriterium von Lakshmikantham

Blättern wir durch das 2.Kapitel dieser Diplomarbeit, so fällt es auf, dass wir uns stets mit (über den Satz von Picard-Lindelöf hinausgehenden) Eindeutigkeitskriterien beschäftigt haben. Es gibt jedoch auch die andere Seite der "Medaille", nämlich die der nicht eindeutig lösbaren Anfangswertprobleme, wie wir bereits genauer bei Beispiel 2.3 gesehen haben. Um zu einigen dieser möglichen Ausgangsfälle hinreichend Stellung nehmen zu können, zeigen wir als Abschluss ein Theorem, das eng mit dem Eindeutigkeitskriterium von Kamke in Beziehung steht - werden dort bestimme Voraussetzungen nicht eingehalten, so kann die Folgerung der eindeutigen Lösung nicht getroffen werden. Kommen wir nun nach diesem kurzen Vorspann zu dem Satz:

Theorem 2.17 (Lakshmikanthams Nichteindeutigkeitskriterium):
Zu allererst sei auf die Tatsache hingewiesen, dass sich die folgenden Voraussetzungen immer auf den Anfangswert $y(0) = 0$ beziehen.
Es wird angenommen, dass

a) die Funktion $g(x, z)$ stetig in dem Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq z \leq 2b$ sei, und $g(x, 0) \equiv 0$ sowie $g(x, z) > 0$ für $z > 0$ gilt,

b) für jedes x_1, mit $0 < x_1 < a$, die Funktion $z(x) \not\equiv 0$ eine differenzierbare Funktion in $0 < x < x_1$ sei, die stetig in $0 \leq x \leq x_1$ ist, für die darüber hinaus $z'_+(0)$ existiert und, die die DGL
$$z'(x) = g(x, z(x)) \tag{2.63}$$
für alle x mit $x_0 < x < x_1$ und die Anfangsbedingung
$$z(0) = z'_+(0) = 0 \tag{2.64}$$
erfüllt.

c) die Funktion $f(x, y)$ stetig in $\bar{S}_+$ mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ sei und für alle $(x, y), (x, \tilde{y})$ aus $\bar{S}_+$, unter der Voraussetzung $x \neq 0$,
$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \geq g(x, |y - \tilde{y}|) \tag{2.65}$$
gilt.

Dann folgt, dass das AWP
$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(0) = 0 \tag{2.66}$$
mindestens zwei Lösungen in $[0, a]$ besitzt.

Beweis von Theorem 2.17:
Zunächst nehmen wir an, dass $f(x,0) \equiv 0$ gilt, sodass die Wahl von $\tilde{y} = 0$ in der Ungleichung (2.63) die Beziehung

$$|f(x,y) - \underbrace{f(x,0)}_{=0}| = |f(x,y)| \geq g(x,|y|)$$

liefert. Da f stetig angenommen wird und $g(x,z) > 0$ für $z > 0$ ist, kommen wir im nächsten Schritt zu

$$|f(x,y)| \geq g(x,|y|) > 0 \tag{2.67}$$

für alle $y \neq 0$ (bei $y = 0$ trifft laut Voraussetzung $|f(x,0)| \geq g(x,0) = 0$ für alle x zu!!).

Wir wollen nun als Folgerung dieser Ungleichung zeigen, dass entweder $f(x,y) < 0$ oder $f(x,y) > 0$ für $y \neq 0$ gilt:

Als stetige Funktion muss f nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano (siehe [Heuser], Satz 35.6, S. 223) für (x,y_1), (x,y_2) aus $\bar{S}_+$ mit $y_1, y_2 \neq 0$ und $x \neq 0$ für $f(x,y_1) > 0$ und $f(x,y_2) < 0$ zumindest eine Stelle $\xi \neq 0$ im Inneren von $[y_1,y_2]$ mit $f(x,\xi) = 0$ besitzen. Jedoch wissen wir aus dem vorangegangen Absatz, genauer gesagt aus Ungleichung (2.67), dass insbesondere

$$|f(x,y)| > 0$$

für $y \neq 0$ zutrifft. Somit kann es keine Stelle ξ mit $f(x,\xi) = 0$ im Intervall $[y_1,y_2]$ geben, d.h. es muss $f(x,y) > 0$ oder $f(x,y) < 0$ für alle $x, y \neq 0$ gelten, um die Stetigkeit von f zu wahren.
Durch die Annahme am Anfang des Beweises erkennen wir, dass für $y = 0$ o.B.d.A. $|f(x,y)| = g(x,|y|)$ gilt. Folglich erhalten wir für alle (x,y) aus $\bar{S}_+$ entweder

$$f(x,y) \geq g(x,|y|), \tag{2.68}$$

oder

$$f(x,y) \leq -g(x,|y|). \tag{2.69}$$

Aus den Annahmen folgt weiters, dass es ein σ mit $0 < \sigma < a$ gibt, sodass $z(\sigma) > 0$ zutrifft. Sei nun ρ die minimale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x,y(x)),\ y(\sigma) = z(\sigma), \tag{2.70}$$

dann können wir ähnlich wie in dem Beweis von Lemma 2.16 das folgende Argument benützen:
Nach der Voraussetzung des Theorems 2.17 stellt die Funktion z eine Lösung der DGL

(2.63) für alle x mit $0 < x_1 < x$ mit der Anfangsbedingung (2.64) dar. An unsere für $y \neq 0$ errechneten Ungleichung

$$f(x, y) \geq g(x, |y|)$$

anknüpfend, setzen wir an dieser Stelle z statt y ein (Bemerkung: z nicht-negativ), und erhalten

$$z' = g(x, z) \leq f(x, z)$$

für $z \geq 0$. Nach einem scharfen Blick auf den letzten Ausdruck erkennen wir, dass es sich hierbei um eine Differentialungleichung handelt, die von z gelöst wird. Somit können wir die These des Korollars 2.12 für die Funktion z bzgl. der DGL in (2.70) einbringen. Als Folgerung gelangen wir zu der Ungleichung

$$\rho(x) \leq z(x),$$

die links von σ soweit gegeben ist, als die minimale Lösung ρ existiert. Nehmen wir diesen Bereich genauer unter die Lupe, so sehen wir, dass $\rho(x)$ bis $x = 0$ fortsetzbar ist - analog zu der Vorgangsweise im Beweis von Lemma 2.16 - und es gilt

$$0 \leq \rho(x) \leq z(x) \tag{2.71}$$

für x im Bereich $0 \leq x \leq \sigma$. Aus der Voraussetzung (b) des Theorems entnehmen wir, dass $z(0) = z'_+(0) = 0$ zutrifft. Aufgrund dieser Bedingung und wegen der Ungleichung (2.70) resultiert ebenfalls $\rho(0) = \rho'_+(0) = 0$.
Nun belegen die im letzten Absatz vollzogenen Schlußfolgerungen, dass das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ y(0) = 0$$

eine Lösung ρ besitzt, die nicht identisch Null ergibt. Auf der anderen Seite lässt dasselbe AWP (2.66) verbunden mit der Annahme $f(x, 0) \equiv 0$ auch die konstante Lösung

$$\phi(x) = 0,$$

für alle x aus $[0, a]$ zu. Daher erhalten wir zwei verschiedene Lösungen zu dem vorgebrachten AWP (2.66). In Bezug auf den Fall in der Ungleichung (2.69) können wir in ähnlicher Art und Weise argumentieren und erreichen dasselbe Schlussresultat.

Wenn wir jetzt unsere Untersuchungen einem prüfenden Blick unterziehen, bemerken wir schnell, dass die Einschränkung $f(x, 0) \equiv 0$ einen Gutteil zum Verlauf des Beweises beigesteuert hat. In den folgenden Zeilen geht es darum, die Aussage des Kriteriums von Lakshmikantham ohne diese Einschränkung zu zeigen.
Ferner nehmen wir an, es gäbe eine Lösung $y_0(x)$ des Anfangswertproblems in (2.66), die für alle x in $[0, a]$ existiert.

Wenden wir nun die Transformation $w = y - y_0(x)$ an, so gelangen wir im nächsten Schritt zum Ausdruck

$$\begin{aligned} w' = y' - y_0'(x) = f(x,y) - f(x,y_0(x)) = f(x,w+y_0(x)) - f(x,y_0(x)) = \\ = F(x,w). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Beleuchten wir den letzten Umformungsschritt genauer, so erkennen wir, wenn man $w = 0$ wählt, dass

$$f(x,y_0(x)) - f(x,y_0(x) = 0 = F(x,0)$$

gilt, und zwar für alle x aus dem Intervall $[0,a]$. Folglich stellt $w(x) = 0$ eine Lösung der DGL (2.72) mit der zugehörigen Anfangsbedingung $w(0) = 0$ dar. Jedoch können wir uns andererseits ebenfalls auf die Beobachtungen unter Berücksichtigung der Einschränkung $f(x,0) \equiv 0$ (siehe Anfang des Beweises) stützen:
Nach der Voraussetzung (2.65) in Punkt (c) des Theorems gilt für alle (x,y), $(x,\tilde{y})$ aus $\bar{S}_+$ mit $x \neq 0$, also insbesondere auch für $\tilde{y} = y_0(x)$ (die Funktion $y_0(x)$ ist auch eine Lösung der DGL (2.66), folglich muss sie in die Bedingungen von (c) passen!), dass

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,y_0(x)| = |f(x,w+y_0(x)) - f(x,y_0(x))| = |F(x,w)| \geq g(x,|w|) = \\ = g(x,|y-y_0(x)|) \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung kann man die Ungleichung

$$|F(x,w)| \geq g(x,|w|) \tag{2.73}$$

herauslösen. Vergleichen wir diese Ungleichung mit der Beziehung in (2.67), so konstatieren wir, dass es sich bis auf die Variable w statt y um dieselbe Ungleichung handelt - vor allem ist auch $g(x,|w|) > 0$ wegen Bedingung (a). Demnach können wir an dieser Stelle für $F(x,w)$ ähnliche Überlegungen wie für $f(x,y)$ vor der Fallunterscheidung in der Mitte des Beweises anstellen.
Nach diesen Überlegungen besitzt das AWP (2.66) hingegen auch eine andere Lösung w, die nicht identisch Null ergibt. Als Folgerung davon erschließt sich uns, dass $y(x) = w(x) + y_0(x)$ nicht gleich $y_0(x)$ sein kann, somit besitzt das gestellte AWP zumindest zwei verschiedene Lösungen auf dem Intervall $[0,a]$. $\diamond$

Literaturverzeichnis

[Agarwal/Lakshmikantham] Agarwal, Ravi P. und Lakshmikantham, V.: "Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations", World Scientific Publishing, Singapore, 1993.

[Agarwal/O'Regan] Agarwal, Ravi P. und O'Regan, D.: "An introduction to ordinary differential equations", Springer, 2008.

[Aulbach] Aulbach, B.: "Gewöhnliche Differenzialgleichungen", 2.Auflage, 2004.

[Heuser] Heuser, H.: "Lehrbuch der Analysis - Teil 1", 15.Auflage, Teubner, 2003.

[Lakshmikantham/Leela] Lakshmikantham, V. und Leela, S.: "Differential and Integral inequalities", Vols. I and II, Academic Press, New York, 1969.

Lebenslauf

Zur Person:

Name:	Christoph Grapa
Adresse:	Bahnstraße 45b/5, 7000 Eisenstadt
Geburtsdatum:	31.Juli 1985
Familienstand:	ledig
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Eltern:	Mag.(FH) Margarete Grapa (verwitwet), Bankangestellte

Ausbildung:

1991 - 1995:	Volksschule in Eisenstadt
1995 - 2003:	Gymnasium der Diözese Eisenstadt, Wolfgarten
2004 - 2011:	Lehramtsstudium Mathematik und Informatik an der Universität Wien
seit WS 2007/08:	Bakkalaureatsstudium Finanz- und Versicherungsmathematik an der TU Wien
SS 2009:	ERASMUS-Auslandssemester an der Universidade Santiago de Compostela, Spanien
seit WS 2009/10:	Lehramtsstudium Mathematik und Spanisch an der Universität Wien
2004 - 2005:	Präsenzdienst beim österrischen Bundesheer

Sprachkenntnisse:

Englisch und Spanisch in Wort und Schrift