



universität  
wien

# MAGISTERARBEIT

Titel der Magisterarbeit

**Die Bahnstabilität der terrestrischen  
Planeten unseres Sonnensystems bei einer  
größeren Masse des Mars**

Verfasser

**Egon Tschurtschenthaler, Bakk.rer.nat.**

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 066861

Studienrichtung lt. Studienblatt: Magisterstudium Astronomie

Betreuer:

Univ.-Prof. Dr. Rudolf Dvorak



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Bedeutende historische Entwicklungen . . . . .	1
1.2	Begründung des Forschungsthemas . . . . .	3
1.2.1	Besondere Eigenschaften des Systems . . . . .	4
1.2.2	Entdeckungen von extrasolaren Planeten . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Dynamisches Modell und verwendete Methoden</b>	<b>9</b>
2.1	Unterschiede zum aktuellen Sonnensystem . . . . .	9
2.2	Gemeinsamkeiten mit extrasolaren Planetensystemen . . . . .	12
2.3	Quantitative Beschreibung des verwendeten Modells . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus</b>	<b>19</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	19
3.2	Eigenschaften . . . . .	24
3.2.1	Bereich $1 \leq \kappa_M \leq 6$ . . . . .	24
3.2.2	Erstes Auftreten der Sprünge bei $\kappa_M = 7$ . . . . .	28
3.2.3	Mean-motion Resonanzen . . . . .	34
3.2.4	Bereich $8 \leq \kappa_M \leq 10$ . . . . .	36
3.2.5	Bereich $\kappa_M \geq 30$ . . . . .	44
3.3	Dynamische Zusammenhänge . . . . .	54
3.3.1	Verhalten der Exzentrizitäten . . . . .	54
3.3.2	Zusammenhang der Exzentrizitäten mit den großen Halbachsen . . . . .	57
3.3.3	Vergleich der Inklinationen . . . . .	59
3.3.4	Variation der großen Halbachse . . . . .	61
3.3.5	Die 13:8 Mean-motion Resonanz zwischen Erde und Venus . . . . .	65
3.3.6	Veränderung der Anfangs-Bahnelemente und des dynamischen Systems . . . . .	72
3.3.7	System Erde-Venus . . . . .	77
3.3.8	Verhalten der Länge des Perihels . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>86</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>89</b>

---

<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>92</b>
6.1	Langzeitentwicklung der Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten . . . . .	92
6.2	Lebenslauf . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Danksagung</b>	<b>109</b>

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Bedeutende historische Entwicklungen

Die Voraussage der Bahnen, welche die uns immer gegenwärtigen Himmelskörper am Firmament beschreiben, hat auf den Menschen schon seit jeher große Faszination ausgeübt. Die Versuche, den Lauf der Gestirne korrekt vorherzusagen, reichen zurück in die babylonische Kultur und fanden ihre Fortsetzung im antiken Griechenland. Bereits die damaligen Unterfangen, die Geschehnisse am Himmel zu deuten, zeigen dass die Menschen den Gestirnen und ihrem Lauf schon immer eine hohe Bedeutung und einen entsprechenden Einfluss auf ihr Leben beigemessen haben. Jedoch beruhten die Erkenntnisse der damaligen Zeit über den Verlauf der Himmelskörper nur auf langwierigen Beobachtungen derselben, ohne tiefergehendes Verständnis über die dahinterliegenden Mechanismen. So dauerte es denn auch bis zum Beginn der Neuzeit, dass durch die Kopernikanische Wende der entscheidende Paradigmenwechsel initiiert werden konnte. Schließlich aber sollte es Johannes Kepler (1571 - 1630) sein, dem - basierend auf den Beobachtungen von Tycho Brahe (1546 - 1601) - eine Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten dieser Bewegungen gelingen konnte.

Diese Feststellungen, heute unter dem Namen der **3 Keplerschen Gesetze** bekannt, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- (i) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne liegt
- (ii) Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überquert in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- (iii) Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich proportional zu den Kuben der großen Halbachsen

Diese empirisch abgeleiteten Grundsätze (Kepler selbst vermochte noch nicht die physikalischen Zusammenhänge hinter diesen Gesetzen zu verstehen) lassen sich mittlerweile mathematisch sehr gut formalisieren. Das erste Kepler-Gesetz lässt sich somit durch die bekannte Ellipsengleichung ausdrücken als

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (1.1)$$

, wobei  $r$  die Distanz des Planeten zur Sonne bzw. zu seinem Gestirn darstellt,  $p$  den Halbparameter der Ellipse mit den Eigenschaften

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (1.2)$$

wo  $b$  die Länge der kleinen Halbachse und  $a$  jene der großen Halbachse bezeichnet. Weiters stellt  $e$  die Exzentrizität und  $\nu$  die wahre Anomalie dar. Gemäß der mathematischen Eigenschaften von Ellipsen lässt sich die große Halbachse auch beschreiben als

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (1.3)$$

, bzw. die kleine Halbachse als

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.4)$$

Die numerische Exzentrizität der Ellipse letztlich ergibt sich aus

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1). \quad (1.5)$$

Die Exzentrizität stellt dabei eine sehr interessante Größe dar, da sie gemeinsam mit der großen Halbachse die Form eines Orbits beschreibt. Während ein Wert von 0 die Kreisbahn widerspiegelt, stünde jener von 1 für eine Parabel; der Himmelskörper wäre in jenem Fall also nicht mehr gravitativ an sein Zentralgestirn gebunden und würde das jeweilige System damit vollständig verlassen.

Gemäß den Ausführungen von Stumpff (1959) lässt sich auch das 2. Kepler-Gesetz in Gleichungen ausdrücken. So lässt sich die vom Radiusvektor des Sterns aus überspannte Fläche nach einem Zeitabschnitt  $\Delta t$  präzisieren als

$$F_{\Delta} = \frac{r(r + \Delta r) \sin \Delta \nu}{2}, \quad (1.6)$$

wobei  $\Delta r$  und  $\Delta \nu$  die Differenzen in diesen Größen zum vorhergegangenen Wert kennzeichnen. Keplers Entdeckung lässt sich letztthin formulieren als

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \text{const.} \quad (1.7)$$

Kepler selber hingegen hatte Erklärungsansätze, die aus heutiger Sicht mehr der Numerologie bzw. auch Astrologie zuzuordnen wären. Trotzdem kann die Leistung der Formulierung seiner 3 Gesetze nicht hoch genug eingeschätzt

werden, markierte sie doch einen entscheidenden Eckstein hin zur Etablierung der Himmelsmechanik als eigenständige Wissenschaft.

Schließlich sollte unser Verständnis von den Bahnen der Himmelskörper noch umfassend erweitert werden, als Isaac Newton (1643 - 1727) sein berühmtes Gravitationsgesetz formulierte. Diese bahnbrechende Arbeit erklärte letztlich die Bewegungen der einzelnen Himmelskörper als Folge einer auf sie einwirkenden Kraft, nämlich

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.8)$$

wobei  $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$  die Newtonsche Gravitationskonstante,  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der beiden Körper, und  $r$  der Abstand zwischen den selben ist. Die aus dieser - jeweils zum anderen Massenkörper hin gerichteten - Kraft folgende Beschleunigung  $a$  des jeweiligen Objekts steht dabei nach dem 2. Newtonschen Axiom im Verhältnis

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = G \frac{m_2}{r^2} \quad (1.9)$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = G \frac{m_1}{r^2} \quad (1.10)$$

, sodass die Gravitationsbeschleunigung eines Körpers neben dem Abstand nur mehr von der Masse des jeweils anderen Himmelskörpers abhängt. Diese Erkenntnisse bildeten die Voraussetzung einer konkreten Vorhersage der weiteren Bewegung und stellten somit das Konzept der Planetenorbits auf eine solide wissenschaftliche Grundlage. Trotzdem sollte es noch sehr lange dauern, nämlich bis zum Ausreifen der Computertechnologien, bis die Bewegungen in Mehrkörper-Systemen langfristig vorhergesagt werden konnten.

## 1.2 Begründung des Forschungsthemas

Im Gegensatz zu früheren Zeiten steht uns heute also eine Vielzahl an Werkzeugen zur Verfügung, welche uns die Vorhersage der Bewegungen der Himmelskörper innerhalb von gegebenen Grenzen ermöglicht. Hier muss denn auch die Entscheidung getroffen werden, auf welche dynamischen Systeme diese angewendet werden sollen, bzw. welche Systeme es besonders wert sind, weiter untersucht zu werden. Ich habe mich dabei in dieser Arbeit für unser Sonnensystem entschieden, weil dies aus mehreren Gründen wissenschaftlich äußerst interessant ist.

Zum einen handelt es sich hierbei um das Planetensystem, in welchem wir leben und über welches wir wie kein anderes Bescheid wissen hinsichtlich dessen Entstehung, dessen dynamischen Prozessen sowie nicht zuletzt der darin stattgefundenen Bildung von Leben. Die Untersuchung des Sonnensystems ist daher besonders lohnenswert, da etwaige Erkenntnisse damit auch außerhalb des unmittelbaren Fachgebietes von Nutzen sein können. Da das Sonnensystem unsere Heimat, die Erde beherbergt, ist es prioritär, dessen Stabilität möglichst umfassend zu untersuchen. Dies hatte letztlich zur Folge, dass die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems in den Fokus der berühmtesten Mathematiker und Astronomen der letzten Jahrhunderte gerückt ist. Doch trotz der immensen Fortschritte im Verständnis desselben, ist die Stabilität des Sonnensystems auch jetzt noch nicht endgültig geklärt und stellt noch immer ausreichend Raum für weitere wissenschaftliche Untersuchungen dar.

### 1.2.1 Besondere Eigenschaften des Systems

Vor allem das innere Sonnensystem ist vom dynamischen Standpunkt äußerst interessant. Es zeigt Charakteristika von leichtem Chaos, wie Laskar (1988, 1989) durch eine semianalytische säkulare Störungstheorie und den damals noch sehr rechenintensiven numerischen Integrationen zeigen konnte. Während nun das äußere Sonnensystem nach heutiger Erkenntnis eine hohe Stabilität über eine Milliarde von Jahren aufweist, zeigen die terrestrischen Planeten teils irreguläres Verhalten. Als Indikator zur Feststellung von Chaos in dynamischen Systemen kann hier der maximale Lyapunov-Exponent herangezogen werden. Dieser erreicht für das System der inneren Planeten einen Wert um  $1/5 \text{ Myr}^{-1}$ . Das demonstriert, dass unser Sonnensystem keinesfalls ein dynamisch homogenes Gebilde ist, sondern dass sich eine Anschauung von zwei getrennten Untersystemen als durchaus zweckmäßig erweisen kann.

Dies belegen des Weiteren auch die Arbeiten von Dvorak & Süli (2002), Dvorak et al. (2005), Süli et al. (2005) und Süli & Dvorak (2007). Diese untersuchten die Stabilität der terrestrischen Planeten mit verschiedenen Massen, innerhalb eines jeweils vereinfachten Sonnensystems. Bei jenen Simulationen, wo die Massen der terrestrischen Planeten mittels eines *gemeinsamen* Massenfaktors erhöht wurden, zeigte sich dann trotzdem stabiles Verhalten bis zu einem Faktor von  $\sim [220]$ . Wurde hingegen nur die Masse der Erde alleine erhöht, dann führte dies bei einem verhältnismäßig kleinen Massenfaktor von ca.  $[5]$  zu einer Ejektion des Mars aus dem System. Abseits von diesem Instabilitätsfenster zeigte sich aber auch in diesem Fall reguläres Verhalten bis zu einem Massenfaktor von über  $[300]$ .

In meiner Arbeit habe ich nun genauso den Fokus auf die Stabilität der terrestrischen Planeten - sowie dessen Abhängigkeit von den Massen - gelegt. Schließlich weist dieses Untersystem mehrere interessante Eigenschaften auf. Bemerkenswert ist etwa die Tatsache, dass Venus und Erde nur minimal von der 13:8 Mean-motion Resonanz - der Resonanz der Umlaufzeiten der Planeten (MMR) - entfernt liegen. Diese Gegebenheit, verbunden mit der hohen dynamischen Kopplung der beiden Planeten führt im hier behandelten Fall einer größeren Marsmasse zu äußerst überraschenden Resultaten. Auch das besagte irreguläre Verhalten des inneren Sonnensystems selbst lässt sich nach heutigem Stand durch die Wirkung verschiedener Resonanzen erklären. Vor allem im Zusammenhang mit der Erde sind dabei die MMR von großer Bedeutung, liegt sie doch inmitten eines schmalen Bereichs zwischen der 13:8 Resonanz innerhalb und der stärkeren 5:3 Resonanz außerhalb.

Weiters kommen als störende Einflüsse für die terrestrischen Planeten noch säkulare Resonanzen zwischen den Bewegungen der Perihels und der Knoten dazu. Dies führt letztlich dazu, dass das Verhalten des inneren Sonnensystems Eigenschaften aufweist, welche als leicht chaotisch charakterisiert werden können. Das bedeutet jedoch nicht, dass dieses Untersystem nun instabil werden oder gar auseinanderbrechen wird. Im Gegensatz, zahlreiche Untersuchungen belegen die Stabilität des gesamten Sonnensystems. Es bedeutet aber, dass die Bahnen der inneren Planeten sich weniger regulär als jene der Gasplaneten verhalten und sich die Änderungen ihrer Bahnelemente somit auch weniger leicht vorhersagen lassen.

### **Änderung des dynamischen Modells**

Ein andere zentrale Schlussfolgerung chaotischen Verhaltens ist, dass minimale Variationen in den Anfangsbedingungen zu einem völlig anderen Verhalten der entsprechenden Bahnen führen. Dieser Grundlage folgend ist es auch nur zweckmäßig, das innere Sonnensystem bei veränderten Anfangsbedingungen zu studieren, da sich aufgrund dessen Sensitivität von den Anfangsparametern mit Sicherheit ein sehr unterschiedliches Verhalten einstellen wird. Eine der interessantesten Variationen ist sicherlich jene der Masse eines der terrestrischen Planeten. Im vorliegenden Fall wurde die Masse des Mars sukzessive erhöht und deren Auswirkungen auf das System der inneren Planeten untersucht. Durch eine Vergrößerung der Marsmasse stellt sich unter anderem der Fall ein, dass Venus, Erde und Mars in etwa über ähnliche Massen verfügen, was einen entsprechenden wechselseitigen Einfluss zur Folge hat.

Ein weiterer, besonders wichtiger Aspekt dieser Untersuchung ist aber auch die Tatsache, dass ein somit verändertes Sonnensystem dann als Modell für ein extrasolares Planetensystem dienen kann. Dies macht diese Studie doppelt wertvoll, da die Ergebnisse auf extrasolare Systeme angewendet werden können und somit auch bei der Suche nach Leben im Universum hilfreich sein können. Dass als Variation der Parameter eine Vergrößerung der Marsmasse vorgenommen wurde, steht in direktem Zusammenhang mit diesem Aspekt der Studie, weitere Kenntnisse über extrasolare Systeme zu gewinnen. Der aktuelle Stand der Beobachtungstechnik (April 2012) macht den Astronomen eine Entdeckung von extrasolaren Gesteinsplaneten mit einer Masse ähnlich jener der Erdmasse nur sehr schwer zugänglich. D.h., eine Simulation, welche den Mars mit seiner derzeitigen Masse oder gar den Merkur mit einschließen würde, wäre in Bezug auf ein Modell als extrasolares System von nur geringer Aussagekraft, da diese Planeten im Realfall gar nicht nachgewiesen werden können. Die erhaltenen Daten wären damit für die existierenden extrasolaren Systeme auch nur von verminderter Relevanz. Diesem Umstand Rechnung zu tragen wurden in Bezug auf die terrestrischen Planeten zwei wesentliche Dinge verändert:

- (i) Die Masse des Mars wurde durch einen Massenfaktor  $\kappa_M$  schrittweise erhöht. Dies führt dazu, dass mit größer werdendem  $\kappa_M$  das innere Sonnensystem einem real nachweisbarem extrasolaren System immer mehr ähneln wird. Die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungen werden miteinander verglichen und der Einfluss der Marsmasse auf die Stabilität der terrestrischen Planeten untersucht.
- (ii) Der Merkur wurde aus obigen Gründen in die Simulation nicht mit eingeschlossen. Er besitzt durch seine geringe Masse auch nur einen schwachen Effekt auf die anderen inneren Planeten. Weiters würde eine Einbeziehung des Merkurs wegen seiner verhältnismäßig geringen großen Halbachse enorme zusätzliche Rechenkapazität bedingen, die jedoch bezogen auf seinen gravitativen Einfluss auf die anderen Planeten nicht gerechtfertigt ist.

Eine weitere Ausführung dieses Sachverhalts erfolgt in der Beschreibung des verwendeten dynamischen Modells.

### 1.2.2 Entdeckungen von extrasolaren Planeten

Die Suche letztlich nach extraterrestrischem Leben im Universum und die damit verbundene Suche nach extrasolaren Systemen, welche terrestrische Pla-

neten innerhalb der habitablen Zone beherbergen, ist nunmehr zu einem der obersten Forschungsvorhaben aufgestiegen. Noch in den 1980er Jahren waren die Möglichkeiten nicht gegeben, extrasolare Planeten, sogenannte Exoplaneten zweifelsfrei nachzuweisen. Die ersten Kandidaten für mögliche Planeten konnten damals nicht innerhalb der Messfehlergrenzen bestätigt werden wie Gamma Cephei b (Campbell et al. 1988) oder wurden für einen Braunen Zwerg gehalten wie HD 114762 b. Dies änderte sich schlagartig Anfang 1992, als zunächst zwei sowie dann im selben Jahr noch ein dritter Begleiter in einer weniggleich auch lebensfeindlichen Umgebung um den Pulsar PSR 1257+12 nachgewiesen werden konnten.

Die erste Entdeckung eines Exoplaneten um einen sonnenähnlichen Stern erfolgte schließlich im Oktober 1995 im System 51 Pegasi, was auch gleichzeitig den Auftakt markierte zu einer sich immer schneller steigernden Serie von neuen Entdeckungen, welche sich bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt unvermindert fortsetzt. Die Zahl neuer Nachweise extrasolarer Planeten steigt mittlerweile dermaßen rasant, dass bei Abschluss dieser vorliegenden Arbeit (April 2012) bereits über 750 Planeten detektiert waren (Schneider<sup>1</sup> 2012 a) und es demgemäß auch nicht mehr zweckmäßig erscheint, die tagesaktuelle Anzahl zu zitieren.

Trotz des bemerkenswerten Fortschritts bei der Entdeckung von neuen Exoplaneten sind die bisher nachgewiesenen Systeme aber oft nicht besonders repräsentativ. Dies lag vielfach daran, dass durch die verwendeten Nachweismethoden nur Planeten entdeckt werden konnten, welche bestimmte Eigenschaften oder Bahnelemente aufweisen. Da die direkte Beobachtung von Exoplaneten nur in den seltensten Fällen möglich ist, mussten andere Methoden zu deren Entdeckung herangezogen werden. Demgemäß hat sich in der Vergangenheit besonders die Radialgeschwindigkeitsmethode bewährt. Dieses Verfahren, bei dem die durch den Doppler-Effekt verursachten Verschiebungen in den Spektrallinien gemessen werden, hat aber entscheidende Nachteile. Zum einen kann daraus keine genaue Masse eines Planeten, sondern nur eine Minimum-Masse abgeleitet werden. Und zum anderen wird durch die Anwendung der Methode bereits eine Selektion vorgenommen, da hiermit eher Planeten entdeckt werden, welche über große Massen und geringe Halbachsen verfügen. Dies führt dazu, dass masseärmere Planeten oder aber jene, welche wie Uranus und Neptun weit von ihrem Zentralgestirn entfernt liegen,

---

<sup>1</sup>Unter der Leitung von Jean Schneider (CNRS-LUTH, Paris Observatory) wurde der sogenannte *Interaktive Katalog der Extrasolaren Planeten* entwickelt. Hierbei handelt es sich um eine aktualisierte online-Datenbank, worin die derzeit detektierten Exoplaneten mitsamt deren nachgewiesenen Eigenschaften aufgelistet werden.

in den Entdeckungen unterrepräsentiert sind. Demgemäß wird im folgenden Kapitel ein dynamisches Setup definiert, welches diesem besonderen Umstand Rechnung trägt.

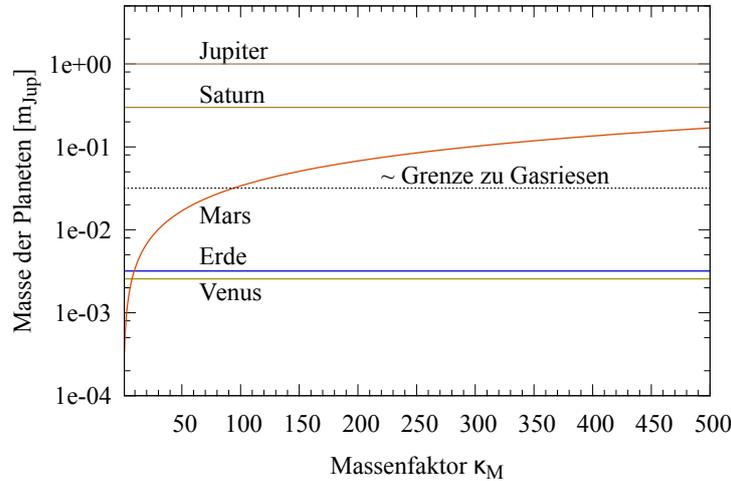
Es sei hier vervollständigend noch bemerkt, dass die Radialgeschwindigkeitsmethode bisher zwar die erfolgreichste Detektionsmethode für Exoplaneten war, in Zukunft aber vermehrt auch andere Nachweismethoden Anwendung finden. Diesbezüglich äußerst vielversprechend ist die Transitmethode, bei welcher die periodischen Helligkeitsänderungen, beim Vorbeiziehen des Planeten über den Stern in Sichtlinie des Beobachters, registriert werden. Diese photometrische Methode gibt somit Aufschluss über den Radius des beobachteten Planeten und verbunden mit der Radialgeschwindigkeitsmethode auch über dessen Masse. Weitere übliche Nachweismethoden sind die astrometrische Messung, Microlensing, Timing-Methoden sowie auch die direkte Beobachtung bei jungen Planeten mit großen Entfernungen.

## 2 Dynamisches Modell und verwendete Methoden

### 2.1 Unterschiede zum aktuellen Sonnensystem

Wie im vorigen Kapitel beschrieben, wurde das Sonnensystem aufgrund einer Vielzahl von Überlegungen nicht exakt als dynamisches Modell übernommen, sondern in mehreren Punkten abgeändert. Die Gründe hierfür sind eine Angleichung des Modells an extrasolare Systeme zum einen, sowie eine Erhöhung der Recheneffizienz zum anderen. Der sonnennächste Planet Merkur, mit einer großen Halbachse von 0.387 AU und einer Masse von nur 0.055 Erdmassen ( $m_E$ ), wurde demgemäß nicht mitgerechnet. Bis Januar 2012 konnte noch kein Exoplanet mit einer dermaßen geringen Masse nachgewiesen werden, der um einen Hauptreihenstern kreist. Der Exoplanet mit der bisher geringsten Mindestmasse ist der 1992 entdeckte Pulsar-Begleiter PSR 1257+12 b, der jedoch nur über Pulsar-Timing nachgewiesen werden konnte. Da Merkur-ähnliche Planeten sonst jedoch noch nicht detektiert werden können, bleibt dessen Weglassen somit ohne Folgen in Bezug auf ein detektierbares Exosystem. Da die niedrigste große Halbachse damit aber jene der Venus mit zunächst 0.723 AU ist, konnten die Rechnungen durch die größere Integrations-Schrittweite erheblich verschnellert werden, sodass insgesamt mehr Simulationen durchgeführt werden konnten.

Eine weitere Änderung nach der selben Maßgabe betrifft die beiden Eisriesen Uranus und Neptun. Bei 95.4 % der bisher entdeckten Exoplaneten mit bekannter großer Halbachse ist diese jeweils kleiner als diejenige des Saturns (Schneider 2012 b). Demgemäß erscheint es zweckmäßig, durch ein Weglassen von Uranus und Neptun die Rechenzeit weiter zu minimieren. Denn auch hier folgt aus einer Nichtberücksichtigung dieser Planeten nahezu keine Auswirkung in Bezug auf ein Modell als nachweisbares extrasolares System. Im Gegenteil, Exosysteme mit mehr als 5 Planeten, wie HD 10180 oder Kepler-11 mit je 6 bestätigten Begleitern, stellen derzeit noch Einzelfälle dar und können daher nicht als Modellsysteme dienen. Ein weiterer Aspekt ist der Fokus dieser Arbeit, der auf den terrestrischen Planeten Venus, Erde und Mars liegt. Deren dynamisches Verhalten wird stark von den inneren Gasriesen Jupiter und Saturn beeinflusst, wohingegen der gravitative Einfluss der beiden Eisriesen verhältnismäßig gering ausfällt.



**Abbildung 2.1:** Die Änderung der Marsmasse in Abhängigkeit vom Massenfaktor  $\kappa_M$  in Einheiten von Jupitermassen, bei logarithmischer y-Achse. Ersichtlich auch die anderen 4 simulierten Planeten, sowie der ungefähre Übergang zum Gasriesen.

### Änderung der Marsmasse

Ein Schlüsselement dieser Simulation schließlich ist die Variation der Masse des Mars. Zum einen kann dadurch der Einfluss des Mars auf die anderen terrestrischen Planeten genauer untersucht werden. Und zum anderen wird der Modellcharakter für extrasolare Systeme mit zunehmendem Massenfaktor  $\kappa_M$  immer mehr erhöht. Der Mars besitzt bei Beginn der Simulationsreihe eine Masse von nur  $0.106 \cdot m_E$ . Der, zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit, nach dem Pulsarbegleiter PSR 1257+12 b masseärmste nächste Exoplanet ist der Begleiter eines Untergwerges, KOI-55 c. Nach Charpinet et al. (2011) handelt es sich hierbei wahrscheinlich um einen Planetenkern, der seine äußeren Hüllen während der Roten-Riesen Phase seines Muttersterns verloren hatte. Auch wenn es sich hier wieder um eine extrem lebensfeindliche Umgebung handelt, so ist doch die Mindestmasse dieses Planetenkerns interessant. Für KOI-55 c beträgt diese nur  $0.667 \cdot m_E$ , er wäre damit noch masseärmer als Venus. Der Nachweis des Planetenkerns, genauso wie des zweiten bestätigten Begleiters, gelang durch eine Abwandlung der direkten Beobachtung. Dabei wurde aufgrund der Reflektion des Sternlichts die Existenz der beiden Planeten abgeleitet, wodurch sowohl auf die Masse als auch auf den Radius geschlossen werden konnte.

Bezugnehmend auf diese Entdeckung ist es zweckmäßig, die Masse der Venus als sinnvolle untere Grenze für unser Modell von detektierbaren Exoplane-

ten anzunehmen. Zwar wird es immer wieder Entdeckungen geben, wodurch noch masseärmere Exoplaneten bekannt gegeben werden. Doch stellen diese bis auf weiteres noch nicht den Regelfall dar. Und auch beim obgenannten Stern KOI-55 handelt es sich nicht um einen Hauptreihenstern, sondern um einen pulsierenden heißen B Unterzwerg. Für ein sinnvolles Modell eines nachweisbaren Exosystems ist die Venusmasse ein vernünftiger Mindestwert, wenn damit Exoplaneten in ähnlicher Konfiguration repräsentiert werden sollen. D.h., ab  $\kappa_M \sim 8$ , ab wo der Mars mindestens über diese Masse verfügt, beginnt dieses System, den geforderten Modellcharakter für detektierbare Exosysteme zu entwickeln. Dieses Modell besteht zunächst aus 3 erdähnlichen inneren Planeten und 2 äußeren Gasriesen. Mit größerem  $\kappa_M$  wird dabei die Stabilität der inneren Planeten immer stärker vom Mars dominiert.

### **Veränderung des Systems in Abhängigkeit von $\kappa_M$**

In Abbildung 2.1 ist das Verhältnis der Marsmasse zu den anderen Planetenmassen im Laufe der Integrationsreihe abgebildet. Die 5 gerechneten Planeten sind in Einheiten der Jupitermasse im Diagramm aufgetragen, wobei die Marsmasse mit zunehmendem  $\kappa_M$  linear anwächst. Während der gravitative Einfluss des Mars auf die beiden anderen terrestrischen Planeten am Anfang noch sehr geringfügig ausfällt, liegt seine Masse bei  $7 \leq \kappa_M \leq 10$  im selben Bereich wie die anderen erdähnlichen Planeten. Dieser Fall ist dynamisch bereits sehr interessant, da er entsprechenden wechselseitigen Einfluss zwischen den 3 inneren Planeten impliziert. Das Modell wird zu diesem Zeitpunkt besonders der Anschauung von zwei räumlich und in ihren Eigenschaften voneinander getrennten Untersystemen gerecht. In Folge der weiteren Integrationen entwickelt sich der Mars zum dominanten Körper im Untersystem der inneren Planeten, stellt aber selbst noch einen Gesteinsplaneten mit fester Oberfläche dar.

Dies ändert sich allmählich um einen Wert von  $\kappa_M \sim 95$ , wo seine Masse einen Wert von etwa  $10 \cdot m_E$  erreicht. In diesem Massenbereich zeigt sich bereits die Bildung von Gasriesen, sodass das System nur mehr über 2 erdähnliche Planeten verfügt. Der Wert von  $10 \cdot m_E$  stellt dabei keine starre Grenze dar, sondern nur einen ungefähren Richtwert. Gemäß einem vielversprechenden Modell der Entstehung von Gasriesen ist dabei die Masse des entsprechenden Planetenkerns ausschlaggebend. Der Kern selbst bildet sich durch die Akkretion von Planetesimalen, welche seine Masse immer weiter anwachsen lassen. Wird hierbei das Niveau der sogenannten kritischen Masse überschritten, folgt ein intensiver Prozess der Ansammlung von umgebendem Gas um den

Kern. Hierdurch steigt die Planetenmasse bedeutend an und es bildet sich eine äußere Gashülle. Nach Wuchterl (2004) beträgt dabei die kritische Masse, die für die Entstehung eines Gasriesen notwendig ist, etwa  $7 \leq m_E \leq 15$ .

D.h., für den Bereich  $\kappa_M > 100$  dient dieses System als Modell für zwei äußere Gasriesen, sowie einen inneren, der von zwei terrestrischen Planeten umgeben ist. Dieser Fall wurde gerechnet für einen Massenfaktor bis zu  $\kappa_M = 500$ . Hierbei verfügt der Mars über  $0.169 \cdot m_{Jup}$ , bzw. über  $0.564 \cdot m_{Sat}$ , was in Verbindung mit den großen Halbachsen der Planeten eine durchaus denkbare Konstellation für ein Exosystem darstellt. Im verkleinerten Maßstab beispielsweise ist das System HD 37124, mit drei nachgewiesenen Gasriesen in analogen Positionen mit jeweils  $\sim 0.7 \cdot m_{Jup}$ , ein Exempel für einen in etwa ähnlichen Fall. Auch die Tatsache, dass sich der Mars als Gasriese innerhalb der Eislinie des Sonnensystems befindet, ist für den Modellcharakter nicht weiter hinderlich. Dass weiter außen entstandene Gasriesen nach innen wandern können, ist etwa durch planetare Migration ausreichend erklärbar. Somit lässt sich feststellen, dass diese Simulationsreihe eines vereinfachten Sonnensystems mit vergrößerter Marsmasse einen hinreichend guten Modellcharakter für Exosysteme besitzt. Bezogen auf die mittlerweile hohe Rate an neuen Entdeckungen ist dabei auch anzunehmen, dass ähnliche oder nur unwesentlich verschiedene Systeme wie das hier behandelte, detektiert werden können.

## 2.2 Gemeinsamkeiten mit extrasolaren Planetensystemen

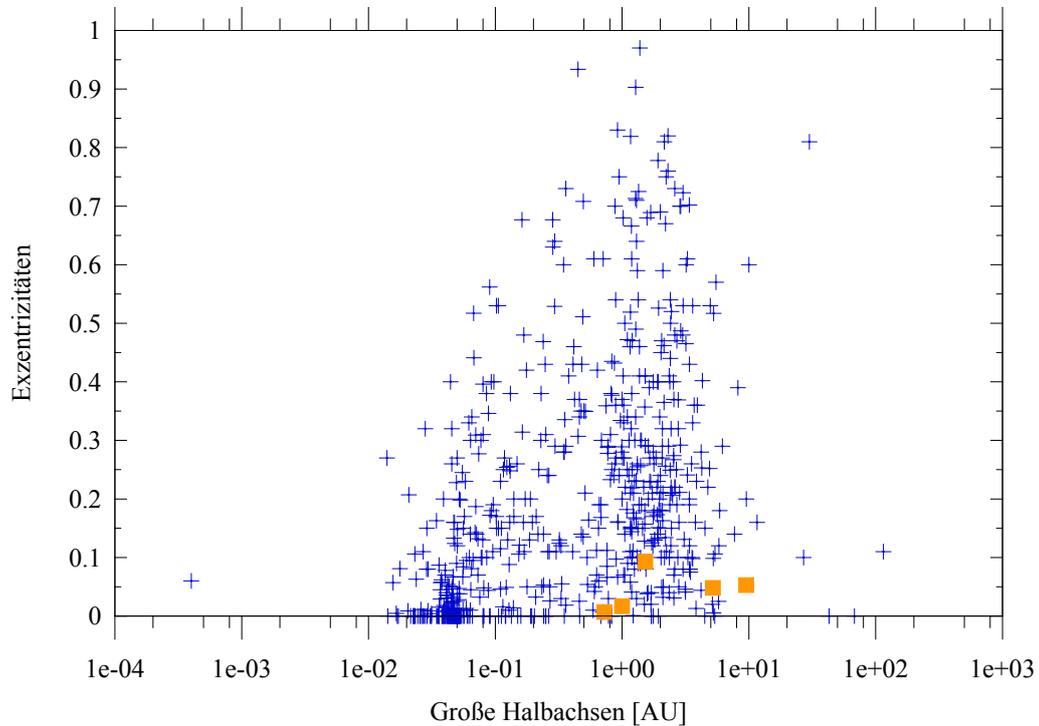
Die nachgewiesenen extrasolaren Planetensysteme weisen gemäß dem Datenkatalog von Schneider (2012 b) zunehmend Eigenschaften ähnlich dem unseren auf. Vor allem in Bezug auf die Massen von neu entdeckten Exoplaneten ist ein statistisch signifikanter Drift hin zu masseärmeren Planeten feststellbar. Dies hat zur Folge, dass Detektionen von Erden oder Super-Erden zukünftig keine Einzelfälle mehr darstellen, sondern diese in Form eines regulären Prozesses gefunden werden können. Ein weiteres Merkmal, das sich in den letzten Jahren etwas angeglichen hat, ist die Anzahl der vorhandenen Planeten im System. Zwar bestehen 85.2 % der bis Januar 2012 nachgewiesenen Exosysteme aus Zentralgestirnen mit nur einem einzigen planetaren Begleiter. Doch konnten aufgrund der großen Anzahl an Entdeckungen bereits 88 multiplanetare Systeme detektiert werden, von welchen wiederum in 28 Fällen drei oder mehr umkreisende Planeten festgestellt werden konnten.

### Die großen Halbachsen und Exzentrizitäten der Exoplaneten

Ein Punkt hingegen, wo nach vier große Unterschiede zu den Planeten in unserem Sonnensystem bestehen, betrifft die Exzentrizitäten. Die nachgewiesenen Exoplaneten bewegen sich auf weit weniger kreisförmigeren Orbits um ihre Muttersterne, als wir dies von den Planeten in unserem Sonnensystem gewohnt sind. Ein weiterer Unterschied schließlich besteht in der Entfernung der bisher detektierten Exoplaneten zu ihren Sternen. Da die meisten Planeten bisher mit der Radialgeschwindigkeitsmethode entdeckt wurden, zeigt sich als Bias eine starke Konzentration um geringe große Halbachsen herum. Insbesondere Hot Jupiters, Gasriesen in der Größe Jupiters oder darüberhinaus, mit einer typischen großen Halbachse von etwa  $0.015 \text{ AU} \leq a \leq 0.1 \text{ AU}$ , wurden hierdurch besonders häufig entdeckt. Dies zeigt, dass extrasolare Planetensysteme durchaus große Unterschiede zu unserem eigenen aufweisen können. Dabei muss aber stets beachtet werden, dass diese durch die beschränkten Nachweismöglichkeiten eine statistische Verzerrung beinhalten und somit nur einen Ausschnitt der wirklich existierenden Systeme darstellen.

In Abbildung 2.2 (erstellt anhand des Exoplanetenkatalogs von Schneider (2012 b)) ist ein Vergleich der beiden wichtigsten Bahnelemente, der großen Halbachse  $a$  und der Exzentrizität  $e$ , von extrasolaren Planeten mit jenen von unserem Sonnensystem dargestellt. Dabei werden die Anfangswerte der in die Simulation einbezogenen Planeten Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn in Bezug zu den Eigenschaften der nachgewiesenen Exoplaneten dargestellt. Es zeigen sich dabei starke Unterschiede zwischen den verschiedenen Exzentrizitäten von Exoplaneten, welche auf ähnlich großen Halbachsen wie die fünf Planeten des Modells liegen. Dies mag zunächst als ein Nachteil für den Modellcharakter der Berechnungen erscheinen, da für ein repräsentatives Modellsystem somit eigentlich auch mit größeren Exzentrizitäten gerechnet werden sollte. Wenn man aber die Erkenntnisse der Entstehung von Leben und die damit verbundenen Voraussetzungen mit einfließen lässt, dann erscheint eine Wahl von kleineren Exzentrizitäten zweckmäßig. Dies, da exzentrische Bahnen sich nachteilig auf die Habitabilität von Planeten auswirken und die Bildung von Leben tendenziell durch geringe Exzentrizitäten gefördert wird. In Bezug auf den Modellcharakter für - möglichst habitable - Exoplaneten können die Exzentrizitäten der fünf behandelten Planeten also gleichbelassen werden.

Ein weiterer sichtbarer Unterschied betrifft, wie bereits angeführt, die großen Halbachsen. Vor allem die Konzentration von Exoplaneten um Halbachsen  $\leq 0.1 \text{ AU}$  stellt einen starken Gegensatz zum Sonnensystem dar, wobei sie mehrheitlich durch Hot Jupiters sowie auch Hot Neptunes zustande kommt. Auch hier ist die Habitabilität nicht gegeben, sodass der Modellcharakter



**Abbildung 2.2:** Die Exzentritäten der bisher detektierten Exoplaneten, verglichen mit deren großen Halbachsen. Die blauen Kreuze stellen jene Exoplaneten dar, von denen jeweils diese beiden Bahnelemente sicher bekannt sind. Als Vergleich dazu sind die simulierten Planeten unseres Sonnensystems, von Venus bis Saturn, in orangenen Kästchen gegeben. Die x-Achse ist logarithmisch, wobei die drei kleinen Achsenmarkierungen die Faktoren 2, 5 und 8 der vorherigen großen Markierungen angeben.

der gerechneten Systeme intakt bleibt. Als augenscheinliches und auch nicht überraschendes Merkmal der extrasolaren Planeten lässt sich weiters festhalten, dass die Exzentritäten immer geringer werden, je näher sich ein Planet an seinem Stern befindet. Durch die Wirkung der Gezeitenkraft wurden hier die ursprünglichen Orbits stetig kleiner und kreisförmiger.

### Beispiele für Planeten auf extremen Orbits

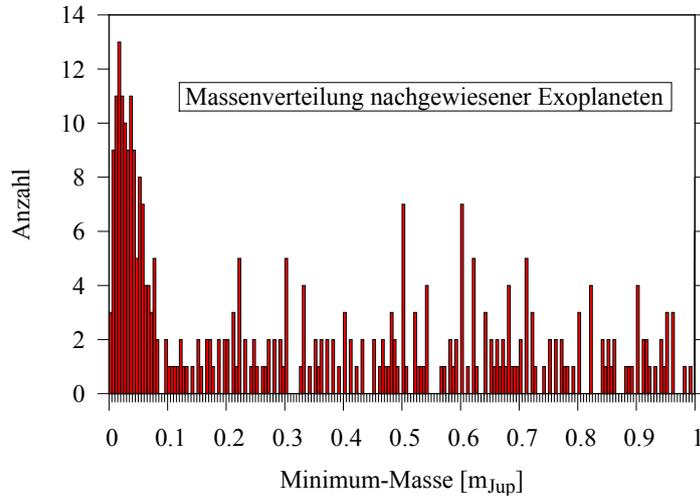
Gemäß dem genannten Exoplanetenkatalog von Schneider handelt es sich dabei bei jenem Planeten mit der bisher geringsten nachgewiesenen großen Halbachse um einen Pulsarbegleiter, nämlich PSR 1719-14 b. Dieser etwa Uranus-große Planet wurde erst 2011 entdeckt und weist eine große Halbachse von nur 0.0004 AU auf, wie im Diagramm ersichtlich. Dies bedeutet, dass

er den Pulsar in einer Rekordzeit von nur 2.2 Stunden umkreist. Umgekehrt dazu finden sich auch Planeten, deren große Halbachsen mehrere Hundert AU betragen. Der dabei in obiger Abb. 2.2 dargestellte weiteste von seinem Zentralgestirn entfernte Exoplanet ist Fomalhaut b mit einer großen Halbachse von 115 AU. Da aber in diesem Diagramm nur jene Exoplaneten dargestellt sind, von denen sowohl die große Halbachse als auch die Exzentrizität bekannt sind, gibt es darüberhinaus noch andere Planeten mit riesigen Entfernungen. Die bisher größte nachgewiesene große Halbachse zeigt hierbei der Exoplanet WD 0806-661B b mit etwa 2500 AU. Da hierbei die Detektion durch Radialgeschwindigkeitsmessung oder Transitbeobachtung völlig versagen würde, können solche Planeten auch nur mehr über Imaging nachgewiesen werden.

Extreme Bedingungen herrschen weiters auch auf dem Planeten HD 20782 b vor. Dieser Gasriese, mit einer Mindestmasse der etwa doppelten Jupitermasse, weist die bislang größte nachgewiesene Exzentrizität mit einem Wert von 0.97 auf, wie auch im Diagramm ersichtlich. Dies führt zu dem Extremfall, dass sich sein Aphel bei 2.72 AU, sein Perihel aber nur bei 0.04 AU befindet. Ähnlich hohe Exzentrizitäten weisen ebenso auch die Planeten HD 80606 b mit einem Wert von 0.93, sowie noch HD 4113 b mit einem von 0.90 auf. Auch bei diesen beiden handelt es sich dabei um Gasriesen, deren große Halbachsen jeweils dem inneren Sonnensystem zuzuteilen wären.

### Die Massen der Exoplaneten

In Abbildung 2.3 (Werte gemäß dem Katalog von Schneider (2012 b)) ist die Häufigkeit der verschiedenen Exoplanetenmassen in Form eines Histogramms gegeben. Da Gasriesen mit einer Masse von mehreren Jupitermassen  $m_J$  für unsere Simulation nicht von Belang sind, wurde hier der Ausschnitt  $m_{min} \leq m_J$  genauer dargestellt. Man erkennt deutlich die hohe Konzentration von Planeten bei  $\leq 0.085m_J$ , wobei etwa die Hälfte davon wohl durch Super-Erden bis ca.  $0.03m_J$  gebildet wird. Gemessen am Trend der Entdeckungen hin zu immer masseärmeren Planeten wird sich dieser Effekt in den nächsten Jahren weiter verstärken. Was den Bereich  $> 0.085m_J$  betrifft, so sind keine statistisch besonders signifikanten Unterschiede darin feststellbar. Teilweise bleiben einige Bereiche leer, was auf die hohe Auflösung zurückzuführen ist.



**Abbildung 2.3:** Mindestmassen von Exoplaneten. Die Anzahl der detektierten Planeten, bis hin zu 1 Jupitermasse, ist in Intervallen mit einer Auflösung zu  $\Delta = 0.005m_{Jup}$  dargestellt. Man beachte, dass die angegebenen Massen zumeist Mindestwerte darstellen, da die Lage der Bahnebene häufig nicht bekannt ist. Die angegebenen Massen ergeben sich also aus  $(m \sin i)$ , wobei  $i$  die Lage der Bahnebene in Bezug zur Himmelsebene angibt.

## 2.3 Quantitative Beschreibung des verwendeten Modells

Die Bahnelemente und Massen unseres Modells, des vereinfachten Sonnensystems, weisen also feststellbare Gemeinsamkeiten sowie auch Unterschiede mit den bisher bekannten extrasolaren Systemen auf. In Tabelle 2.1 sind die Zahlenwerte dargestellt, welche für die Simulation verwendet wurden. Dabei gilt Folgendes zu bemerken:

- (i) Die Masse des nichtberücksichtigten Merkurs wurde zur Sonne hinzugeaddiert
- (ii) Die Masse des Erdmondes wurde jener der Erde hinzugefügt.
- (iii) Die Planeten wurden jeweils als Punktmassen gerechnet
- (iv) Die zwischen den Himmelskörpern wirkenden Kräfte wurden gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetz formuliert.

Die Länge der Integrationen betrug dabei zwischen 20 Myr bis 1 Gyr. Hierbei wurden jene Bereiche länger gerechnet, in welchen sich dynamisch interessantes Verhalten der terrestrischen Planeten zeigte. Die Wahl der geeigneten

**Tabelle 2.1:** Anfängliche Bahnelemente (JD 2449200.5) des vereinfachten Sonnensystems in Bezug auf die mittlere Ekliptik und das Äquinoktium J2000, sowie die Massen bei  $\kappa_M = 1$ . Die Größen  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$  und  $m$  stehen für große Halbachse, Exzentrizität, Inklination, Argument des Perihels, Länge des aufsteigenden Knotens, mittlere Anomalie und Masse in Einheiten der Sonnenmasse.

	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn
$a$	0.7233296	0.9999998	1.5237507	5.2027870	9.5300499
$e$	0.0067996	0.0166987	0.0933535	0.0483379	0.0533435
$i$	3.3946796	0.0007533	1.8503091	1.3046348	2.4864444
$\omega$	54.7175838	103.9464204	286.4617876	275.2010177	339.5198854
$\Omega$	76.6952705	358.8589930	49.5756758	100.4706643	113.6685162
$M$	254.3711051	206.8999238	230.8138346	183.8978087	238.2931603
$m$	0.2447840e-5	0.3040433e-5	0.3227149e-6	0.9547907e-3	0.2858776e-3

Integrationszeit war dabei prinzipiell ein Kompromiss zwischen einem aussagekräftigem Resultat sowie einer Eingrenzung der Rechenzeit. Somit wurde zunächst mit 20 Myr begonnen, bei vielen Fällen dann weiter gerechnet bis 200 Myr sowie in einigen Situationen das Verhalten bis 1 Gyr hin untersucht. In letzterem Fall ist dabei zu bemerken, dass Rechnungen über sehr lange Zeiträume nicht mehr dieselbe Aussagekraft aufweisen können. Obwohl stets mit der Maximalgenauigkeit von  $10^{-15}$  gerechnet wurde, bekommen hier Ungenauigkeiten und Rundungsfehler eine immer größere Bedeutung. Eine Auflistung der gewählten Integrationszeiten und Massenfaktoren findet sich in Tabelle 2.2.

Als numerisches Integrationsverfahren für die Simulation wurde der Lie-Integrator angewandt. Dieser basiert auf der Grundlage, dass die Differentialgleichungen auch durch Differenzieren gelöst werden können. Die Grundbedingung besteht dabei darin, eine Rekursion zu finden, mit der die Terme einer definierten Lie-Reihe bestimmt werden können. Da ein geschlossener Ausdruck aber oft nicht möglich ist, werden die Terme ab einer gewissen Anzahl abgebrochen. Durch die Konvergenz der Reihen bleibt dies jedoch ohne bedeutende Auswirkungen auf die Genauigkeit. Informationen zum Lie-Integrator finden sich unter Hanslmeier & Dvorak (1984), Delva (1984) und Lichtenegger (1984). Für den vorliegenden Fall erweist sich der Lie-Integrator als sehr effektives Werkzeug. Dies, da durch die Störungen eines sehr massereichen Mars große Exzentrizitäten bei den anderen terrestrischen Planeten auftreten. Für diese Situation ist die Effektivität des Lie-Integrators auch höher als jene von symplektischen Integratoren. Da sich die Schrittweite während

**Tabelle 2.2:** Beschreibung der Integrationsparameter. Die einzelnen Spalten stehen für den Massenfaktor, dessen Schrittweite, der Integrationslänge, der Marsmasse in den Einheiten von Jupitermassen und Erdmassen.

$\kappa_M$	$\Delta\kappa_M$	Integrationszeit (Myr)	Marsmasse [ $M_J$ ]	Marsmasse [ $M_E$ ]
1 - 2	1	200	0.00034 - 0.00068	0.11 - 0.21
3 - 9	1	1000	0.0010 - 0.0030	0.32 - 0.96
10 - 30	1	200	0.0034 - 0.0101	1.06 - 3.18
31 - 80	1	20	0.0105 - 0.0270	3.29 - 8.49
85 - 120	5	20	0.029 - 0.041	9.02 - 12.74
130 - 200	10	20	0.044 - 0.068	13.80 - 21.23
225 - 500	25	20	0.076 - 0.169	23.88 - 53.07

der Simulation automatisch ändern lässt, können die verfügbaren Rechenkapazitäten somit sehr effizient genutzt werden, ohne dabei Einbußen bei der Qualität der Resultate in Kauf nehmen zu müssen. Des weiteren, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse untereinander besser gewährleisten zu können, wurden alle Integrationen auf dem selben Computer ausgeführt.

## 3 Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus

### 3.1 Grundlagen

In den nun folgenden Kapiteln werden die Resultate der Simulation detailliert dargestellt. Da sich der Massenfaktor von  $1 \leq \kappa_M \leq 500$  erstreckt, decken die Berechnungen verschiedenartige Planetensysteme ab, welche demgemäß auch jeweils unterschiedliches Verhalten aufweisen. Somit ergibt sich eine Reihe an verschiedensten Ergebnissen, da die Änderung von  $\kappa_M$  unweigerlich mit einer Modifikation des dynamischen Systems verbunden ist. Vor allem für die inneren Planeten ergibt sich dadurch eine jeweils andere Konstellation, da der Mars mit seiner aktuellen Masse noch verhältnismäßig geringe Auswirkungen auf die anderen beiden Planeten ausübt. Durch die Änderung des Massenfaktors erfahren Erde und Venus also einen bedeutenden zusätzlichen gravitativen Einfluss. Eine Vergrößerung von  $\kappa_M$  wirkt sich somit ähnlich aus, als ob ein neuer Körper im Untersystem der inneren Planeten hinzugekommen wäre. Da dieses Untersystem aber derzeit schon leichtes Chaos aufweist, wird ein massiver Mars folglich zu großen Änderungen im Verhalten dieser Planeten führen. So zeigt sich nun auch in den großen Halbachsen von Erde und Venus ein bemerkenswertes Signal, das so auch nicht zu erwarten gewesen wäre.

#### Beschreibung des Signals

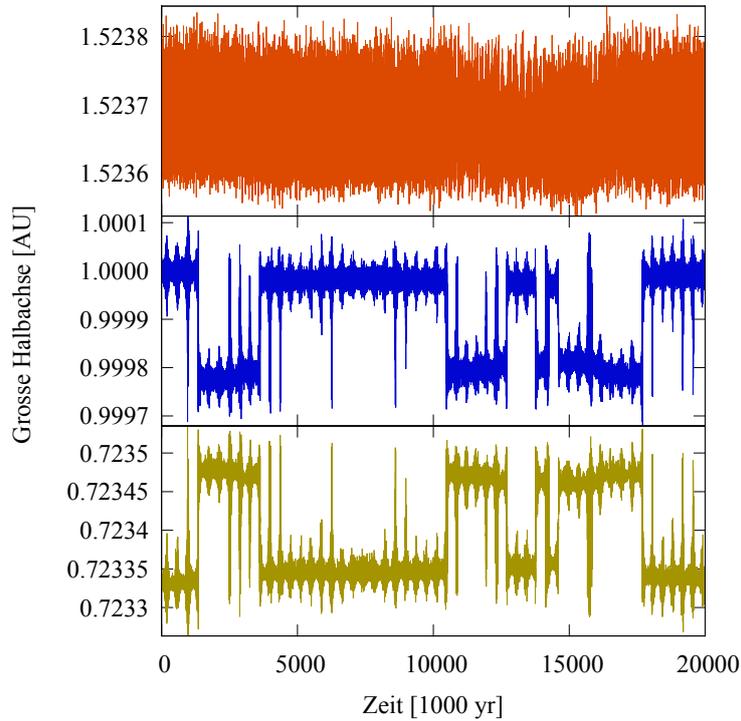
Bei anfänglichem  $\kappa_M$  zeigen Erde und Venus noch keine besonderen Auffälligkeiten in ihren großen Halbachsen. Umso überraschender ist es daher, dass bereits bei  $\kappa_M = 3$  periodische Störungen sichtbar werden, welche sich in Form von Elongierungen in der Bewegung der großen Halbachse zeigen. In den folgenden Integrationen mit zunehmendem Massenfaktor werden die Elongationen dann immer stärker und offensichtlicher. Sobald der Mars nun in etwa die Masse der anderen erdähnlichen Planeten erreicht hat, zeigen sich sporadisch wiederholende Sprünge in den Halbachsen der anderen beiden inneren Planeten. Da Erde und Venus eine hohe dynamische Kopplung aufweisen, geschehen diese Sprünge bei ihnen jeweils in die gegensätzliche Richtung, wohingegen der Mars davon unberührt bleibt. In Abbildung 3.1 ist dieses interessante Signal dargestellt, in einem Bereich wo die drei inneren Planeten

zirka massegleich sind ( $\kappa_M = 9$ ).

#### **Aktueller Wissensstand**

Die Recherche in der Literatur nach diesem Signal von Sprüngen in den großen Halbachsen zeigte auf, dass es sich hierbei um ein sehr wenig bekanntes Phänomen handelt. Bis zum Zeitpunkt des Abschlusses dieser Arbeit konnte noch keinerlei Beschreibung derselben dargelegt werden. So handelt es sich denn hierbei um ein Signal, das in entsprechenden Publikationen zwar angeführt, jedoch nicht weiter erläutert wurde. Dabei sind diese Sprünge bereits länger bekannt und konnten für Asteroiden schon sehr früh aufgezeigt werden (Scholl & Froeschlè 1974, Froeschlè & Scholl 1977, Yoshikawa 1989). In weiterer Folge konnte es auch für Planeten nachgewiesen werden (Kiseleva-Eggleton et al. 2002, Dvorak et al. 2003). Jegliche Publikationen, in denen sich dieses Muster der großen Halbachsen findet, weisen dabei die Gemeinsamkeit auf, dass selbiges jedoch nicht weitergehend beschrieben wird. Somit bot die Literatur bei der Beschreibung dieses Signals nicht viel Hilfestellung an. Andererseits ergab sich dadurch jedoch auch die Möglichkeit, gewisse neue Informationen herauszufinden.

Das Auftreten dieser charakteristischen Sprünge ist ein vollkommen unerwartetes Phänomen, das vor Beginn der Simulation unmöglich hätte vorhergesehen werden können. Dies unterstreicht gleichzeitig die Notwendigkeit von Untersuchungen dieser Art, da vor allem aufgrund des leicht chaotischen Verhaltens der terrestrischen Planeten kleinste Abänderungen in den Anfangsbedingungen zu völlig neuen Ergebnissen führen können. Unter diesem Aspekt scheint die Untersuchung der erdähnlichen Planeten unseres Sonnensystems unter veränderten Bedingungen mehr als gerechtfertigt, da somit auch neue interessante Eigenschaften darin entdeckt werden können. Als imponantes Beispiel für diesen Sachverhalt sei hier bereits auf jene periodischen Elongationen vorgegriffen, die bereits vor Auftreten der Sprünge selbst sichtbar werden. Diese sind nämlich schon bei doppelter Marsmasse andeutungsweise zu erkennen. Da hierbei aber nun das simulierte Planetensystem vom dynamischen Standpunkt aus noch nicht allzu unterschiedlich von unserem jetzigen System ist, kann dies durchaus wichtige Implikationen auf unser eigenes Sonnensystem haben. Da diese Störungen mit kleiner werdendem Massenfaktor immer geringer werden und diese bereits bei niedrigem  $\kappa_M$  sichtbar werden, so könnten diese durchaus bereits in unserem jetzigen System vorhanden sein, wenn auch nur in marginaler Größe.



**Abbildung 3.1:** Die großen Halbachsen der terrestrischen Planeten Mars (oben, rotbraun), Erde (mitten, blau) und Venus (unten, ockerfarben) bei  $\kappa_M = 9$  über einen Zeitraum von 20 Myrs. Bei Erde und Venus sind die mit einer Periode von 0.38 Myr sich wiederholenden Elongationen ebenso sichtbar wie die irregulären Sprünge, welche aufgrund der dynamischen Kopplung invers zueinander erfolgen. Die große Halbachse des Mars verbleibt daran gemessen erstaunlich unauffällig. Trotzdem muss bemerkt werden, dass das chaotische Verhalten der inneren Planeten für sehr lange Zeiträume (1 Gyr) auch den Mars instabil werden lässt.

Das Signal selbst weist stark chaotisches Potential auf. Der Zeitpunkt der Sprünge ist gänzlich unvorhersehbar und in hohem Maß von Zufallsparametern abhängig. So reicht eine minimale Abänderung der Anfangs-Bahnelemente bereits aus, um den Zeitpunkt der Sprünge vollständig zu verändern. Gleiches gilt auch für eine Änderung bei den Integrationsparametern oder der verwendeten Rechenarchitektur. Wird beispielsweise die Rechen-Schrittweite des Integrators beeinflusst oder aber die Genauigkeit der Gleitkommazahlen nur geringfügig verändert, so folgt daraus stets eine völlig andere Anordnung der Sprünge. Es lässt sich somit sagen, dass diese *jumps* in den großen Halbachsen von Erde und Venus chaotischer Natur sind und sich demgemäß einer genauen Vorhersagbarkeit entziehen. Dies gilt insbesondere für sehr lange Rechenzeiträume. Bei einer Integrationszeit über 1 Gyr werden hier alle drei terrestrischen Planeten instabil, sodass keine sinnvolle Vorhersage ihrer

Bahnen mehr erfolgen kann. Die jumps ziehen also unweigerlich instabiles Verhalten der terrestrischen Planeten nach sich.

#### **Gleichbleibende Merkmale**

Was sich weiters feststellen lässt ist die Tatsache, dass sich die Sprünge nur innerhalb eines festen Intervalls in der großen Halbachse vollziehen. Die obere und untere Grenze, innerhalb welches sich dieses Signal bewegt, bleiben bei obgenannten Änderungen hingegen gleich. Und auch bei einer Vergrößerung des Massenfaktors ändert sich die Breite und Lage dieses Intervalls stets nur geringfügig. Im Gegensatz zu anderen dynamischen Fällen, wo auch Chaos in Erscheinung tritt, bleibt hierbei die große Halbachse zunächst stabil innerhalb definierter äußerer Grenzen. Somit lässt sich sagen, dass diese jumps gewisse konstante Merkmale aufweisen. Zwar lässt sich über die zeitliche Abfolge ihres Auftretens selbst keine Aussage treffen. Doch die Positionen, auf welchen sich die große Halbachse nach den Sprüngen wiederfindet, lassen sich unabhängig vom  $\kappa_M$  stets klar eingrenzen. Dies legt bereits den Gedanken nahe, dass es eine besondere dynamische Ursache geben muss, welche bewirkt, dass die Halbachsen immerzu auf die selben Werte und anschließend wieder auf ihre Ausgangsposition zurück springen.

Eine weitere Besonderheit sind die elongierten *Spitzen* in den großen Halbachsen, die sich zwischen den einzelnen Sprüngen zeigen. Diese weisen zusätzlich die Auffälligkeit auf, dass sie sich periodisch in bemerkenswert gleichbleibenden Abständen wiederholen. Weiters handelt es sich hierbei um ein äußerst stabiles Signal, welches auch bei etwas veränderten Anfangsbedingungen leicht reproduzierbar ist. Der Zusammenhang zwischen diesen Spitzen und dem Auftreten der irregulären Sprünge zeigt sich dabei bereits darin, dass die Sprünge - welche ja unregelmäßig vorkommen - immer genau mit einer der Spitzen zusammenfallen. Letztere bilden somit die Voraussetzung, dass Sprünge in den großen Halbachsen überhaupt erst möglich werden. Erst sobald, bei ausreichendem  $\kappa_M$ , die Elongationen groß genug geworden sind, treten die ersten Sprünge in den Halbachsen auf. Eine Untersuchung der jumps beinhaltet somit konsequenterweise auch eine genauere Beobachtung der Spitzen, auch wenn diese in den Plots weniger spektakulär aussehen mögen.

#### **Verhalten der anderen Planeten**

Ein weiterer interessanter Aspekt betrifft die Reaktion der übrigen Planeten. Da es sich bei diesen Sprüngen um ein äußerst unkonventionelles Signal handelt, liegt zunächst der Verdacht nahe, ähnliche Anomalien könnten auch die anderen Planeten betreffen. Vor allem beim Mars, der sich in Bezug auf Masse und großer Halbachse in ähnlicher Konstellation wie Venus und Erde befindet, und der mit diesen beiden eine Art Untersystem bildet, ließe sich ähnliches Verhalten vermuten. Umso überraschender ist es daher, dass sich beim Mars, im krassen Gegensatz zu den anderen beiden terrestrischen Planeten, keine signifikanten Besonderheiten feststellen lassen. Selbiges gilt auch für die Gasriesen Jupiter und Saturn. Somit zeigt sich bei den Halbachsen von keinem der übrigen Planeten eine Änderung jener Art, die auf eine ähnliche Störung hindeuten würde.

Es lässt sich festhalten, dass der störende Einfluss einzig Erde und Venus betrifft. Vergleicht man nämlich das Verhalten der übrigen Planeten bei anfänglichem und bei erhöhtem Massenfaktor, so lässt sich daraus kein Zusammenhang mit den Sprüngen bei den beiden inneren Zwillingplaneten ableiten. Vor allem Jupiter und Saturn zeigen gar keine Besonderheiten in ihren Bahnen, bewegen sie sich doch auch im Wesentlichen unter dem Einfluss ihres eigenen Untersystems. Doch auch der Mars, der zu den inneren Planeten hinzugehört, zeigt weder ein ähnliches Signal, noch Spuren einer Beeinflussung vom selben Effekt. Bis auf geringe Schwankungen in seiner großen Halbachse, die jedoch auch unabhängig von den Sprüngen vorkommen, zeigt der rote Planet ein stabiles Verhalten. Jedenfalls lässt sich feststellen, dass keinerlei Sprünge oder Spitzen bei den anderen drei Planeten des Systems sichtbar werden und dass dieses leicht chaotische Signal auf die beiden innersten Planeten begrenzt bleibt.

Da die drei anderen Planeten von diesem störenden Einfluss aber gänzlich unberührt bleiben und da diese Störung sich bei Erde und Venus hingegen in dermaßen eindrucksvoller Weise wiederfindet, lässt sich demgemäß die Ursache hierfür in den Eigenschaften der beiden Planetenschwestern suchen. Vor allem ist interessant, dass der Mars keinerlei Effekt zeigt, obwohl nur durch dessen größere Masse überhaupt das Auftreten des Signals erst ermöglicht wird. Verkleinert man die Masse des Mars wieder in Richtung des Ausgangswertes, so sinkt die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der jumps dabei rapide ab. Und für jenen Fall der obigen Abbildungen, dass die drei inneren Massen in etwa gleich groß sind, treten die Sprünge besonders deutlich zutage. D.h., auch wenn der Mars selber von der Störung unbeeinflusst bleibt, so stellt er doch durch seine größere Masse letztlich einen der wichtigsten Ver-

ursacher derselben dar.

## 3.2 Eigenschaften

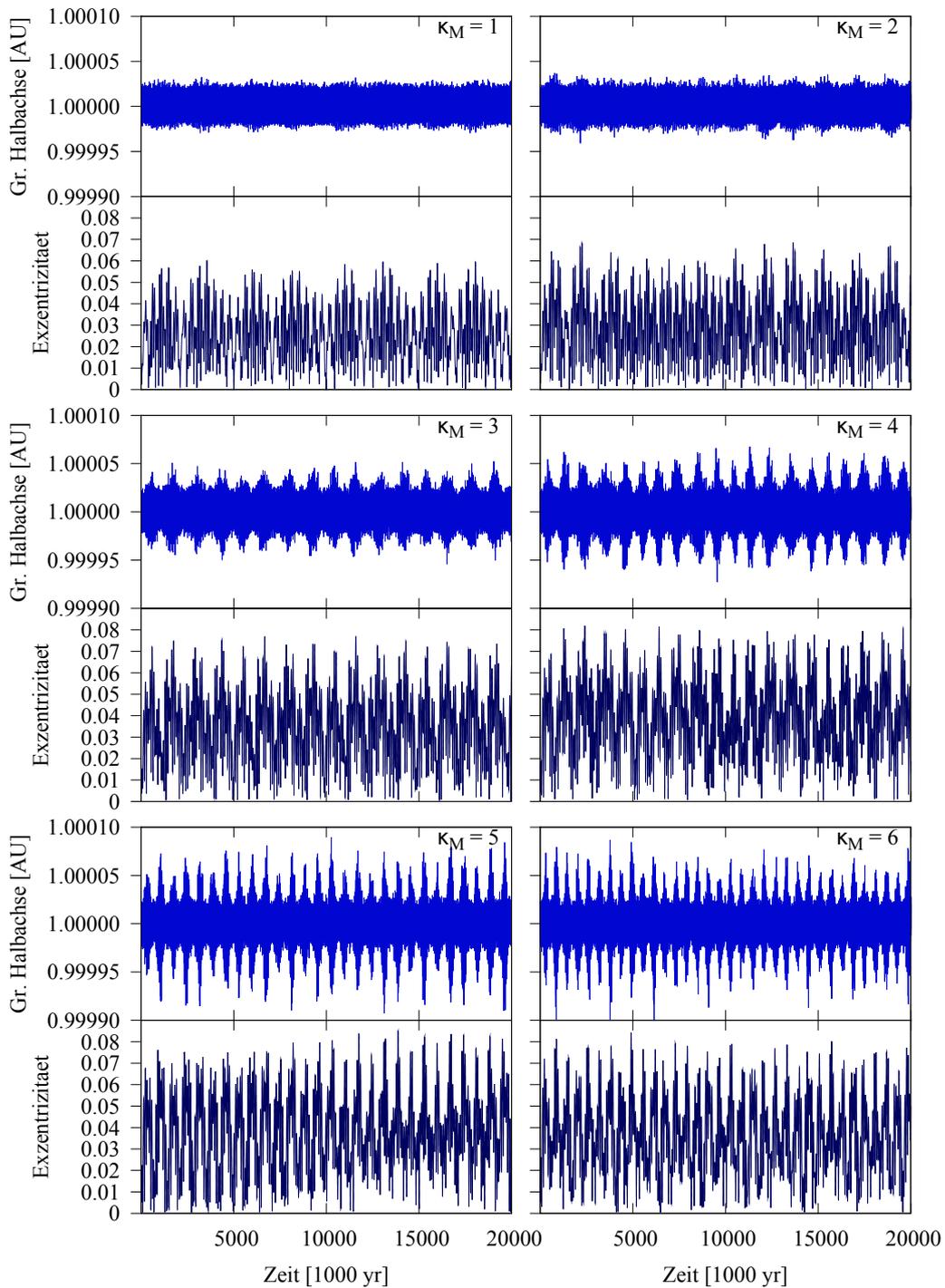
### 3.2.1 Bereich $1 \leq \kappa_M \leq 6$

#### $1 \leq \kappa_M \leq 2$

In Abbildung 3.2 sowie Tabelle 3.1 ist die Entwicklung der großen Halbachse und Exzentrizität der Erde über sechs verschiedene Simulationen für den Bereich  $1 \leq \kappa_M \leq 6$  dargestellt. Anhand dieser Daten erschließt sich eindrucksvoll die Abhängigkeit der Störungen von der Masse des Mars. Beginnend mit  $\kappa_M = 1$  sind noch keine besonderen Auffälligkeiten erkennbar. Die Exzentrizitäten verbleiben über die volle Integrationszeit von 20 Myrs unterhalb einem Wert von etwa 0.06 und in der großen Halbachse sind noch keine augenscheinlichen Störungen erkennbar. Dies ändert sich bereits für  $\kappa_M = 2$ . In der großen Halbachse der Erde - genauso wie auch bei jener der Venus - zeigen sich bereits kleine Störungen mit einer Periode von ca. 1.5 Myrs. Als interessante Gegebenheit zeigt sich dabei, dass sich die Periode der Exzentrizität ebenfalls geändert hat und nun auch den selben Wert annimmt. Bemerkenswerterweise fallen die Maxima in der Exzentrizität immer mit den peaks in den Störungen der großen Halbachse zusammen. Außerdem erreichen die Maxima in der Exzentrizität nun auch um etwa 0.01 höhere Werte.

#### $\kappa_M = 3$

Bei  $\kappa_M = 3$  schließlich treten die Störungen in der großen Halbachse in Form von Elongationen deutlich zutage. Wohingegen im vorigen Plot nur diffuse Unregelmäßigkeiten erkennbar waren, zeigen sich hier stattdessen klare Auslenkungen, welche in Form und Periode nun klarer definiert sind. Die Größenordnung dieser Spitzen ist hierbei schon dermaßen angewachsen, dass die Schwingungsbreite bei deren Auftreten bereits doppelt so groß ist wie im Ausgangszustand. Zudem ist deren Frequenz im Vergleich zum vorigen Massenfaktor angestiegen, was sich auch in der Exzentrizität niederschlägt. Es lässt sich eine hohe Kopplung im Verhalten der Exzentrizität zur großen



**Abbildung 3.2:** Die große Halbachse sowie die Exzentrizität der Erde über 20 Myrs, für die Simulationen von  $\kappa_M \in [1, 6]$ . Die 6 Plots dokumentieren die stetige Verstärkung der Elongationen mit steigendem Massenfaktor. Der Vergleich der großen Halbachsen mit den Exzentrizitäten zeigt dabei bemerkenswerte Synchronität.

**Tabelle 3.1:** Die Änderungen der großen Halbachse  $a$  und Exzentrizität  $e$  der Erde im Bereich  $\kappa_M \in [1, 6]$ .  $\Delta a$  und  $\Delta e$  stehen dabei für die maximalen Änderungen dieser Bahnelemente in Bezug auf den Startwert derselben. D.h., sie bezeichnen die größte aufgetretene Abweichung der jeweiligen Größe von ihrem Ausgangswert, bezogen auf die Integrationszeit von 20 Myrs. Weiters stellt  $\nu$  die Frequenz der periodischen Störungen dar.

$\kappa_M$	$\Delta a$ [AU]	$\Delta e$	$\nu$ [1 / 20 Myr]
1	$3.2 \times 10^{-5}$	0.043	8.0
2	$4.1 \times 10^{-5}$	0.052	12.1
3	$5.4 \times 10^{-5}$	0.060	16.2
4	$7.3 \times 10^{-5}$	0.065	19.9
5	$9.3 \times 10^{-5}$	0.068	27.9
6	$11.0 \times 10^{-5}$	0.067	33.6

Halbachse feststellen, sodass die peaks der beiden Bahnelemente mit bemerkenswerter Häufigkeit zusammenfallen. Weiters lässt sich ein erneuter Anstieg in den Maxima der  $e$ 's registrieren, wenn auch weniger stark wie bei der Vergrößerung des Massenfaktors von [1] auf [2].

#### $4 \leq \kappa_M \leq 5$

Die Eigenschaften der Elongationen verstärken sich weiter bei  $\kappa_M = 4$ . Da die Diagrammgrenzen in der y-Achse bei den sechs Plots in der Abb. 3.2 jeweils gleich groß gewählt wurden, dokumentieren die einzelnen Plots besonders anschaulich die stetige Vergrößerung der Amplituden durch eine Erhöhung des Massenfaktors. Der Einfluss der Marsmasse auf diese charakteristischen Störungen von Erde und Venus ist somit evident. Dies ebenso wie auch die Kopplung im Signal von großer Halbachse und Exzentrizität. Die Perioden dieser beiden Bahnelemente ändern sich weiterhin synchron. Beachtet man den nächsten Fall von  $\kappa_M = 5$ , so setzt sich dieser Effekt unvermindert fort. Die fortschreitende Vergrößerung der Amplitude verbunden mit dem Anstieg in der Frequenz bewirken hierbei bereits eine starke Änderung in der Form der Elongationen. Waren diese bei kleinerem Massenfaktor noch nicht erheblich vom Ausgangssignal zu unterscheiden, so ragen sie hier bereits in auffälliger Weise aus diesem heraus. Weiters ist ihre Erscheinungsform nun nicht mehr rundlich mit breiten Maxima, sondern zackenförmig mit diskreten Extremwerten.

#### $\kappa_M = 6$

Der letzte Plot für den Massenfaktor von [6] schließlich bestätigt die Ableitungen aus den vorherigen Grafiken. So sind die maximalen Auslenkungen der großen Halbachse für diesen Fall erneut leicht angestiegen, was sich vor allem bei den ersten Spitzen zeigt. Dies bewirkt, dass die maximale Amplitude der Störungen somit auf die Größenordnung von  $10^{-4}$  AU angestiegen ist. Dieser Wert mag zwar auf den ersten Blick nahezu unwesentlich erscheinen; vor allem in Bezug auf anderweitige Änderungen für jene dynamische Fälle, wo Chaos registriert werden kann. In jenen Fällen lassen sich gewaltige Veränderungen in der großen Halbachse beobachten, wobei nicht selten auch der Planet aus dem System hinausgeworfen werden kann. Wisdom (1981) konnte beispielsweise das chaotische Verhalten im Asteroidengürtel entdecken, das im Zusammenhang mit der Mean-motion Resonanz steht. Durch die Wirkung der 3:1 Resonanz mit dem Jupiter wuchs hierbei die Exzentrizität äußerst schnell an, sodass die betroffenen Asteroiden nach Auftreten von starkem Chaos aus dieser Kirkwood-Lücke hinausgestört wurden.

Verglichen dazu mögen die Störungen von Erde und Venus zunächst noch relativ unscheinbar anmuten. Würde man das Augenmerk nur auf die Größe der Auslenkungen selbst legen, so möchte man noch nichts Interessantes dahinter vermuten. Änderungen der großen Halbachse in der Größenordnung von  $10^{-4}$  AU können schließlich sehr schnell hervorgerufen werden. Der wesentliche Unterschied zu Schwebungen oder anderen Einflüssen der selben Größenordnung besteht aber in dem unveränderlichem regelmäßigen Muster der Störung, welches dieses Signal dadurch als äußerst untersuchungswürdig befinden lässt. Die Elongationen selbst sind in hohem Maße periodisch, wobei die Periode selber eine Funktion von der Marsmasse darstellt. Betrachtet man alle Plots der Abb. 3.2, so lässt sich ein kontinuierlicher quasi-linearer Anstieg in der Frequenz der Elongationen, bewirkt durch eine Vergrößerung des Massenfaktors, feststellen.

Ebenso signifikant ist die Vergrößerung der Auslenkungen der großen Halbachse, sowie die Vergrößerung der Exzentrizitäten. Für  $\kappa_M = 6$  zeigt sich dabei eine maximale Exzentrizität von über 0.08, und dies bereits innerhalb einer Integrationszeit von 20 Myrs. Verglichen mit den Werten von  $\kappa_M = 1$  stellt dies einen eklatanten Gegensatz zu unserem aktuellen Planetensystem dar. Die Exzentrizität wiederum stellt dabei ein Bahnelement dar, welches über das Maß an Chaos Auskunft geben kann, das in der Bewegung des jeweiligen Himmelskörpers vorherrscht. Das Auftreten der Spitzen ist für die Erde also mit einem merklichen Rückgang der Stabilität ihrer Bahn verbunden. Wenig überraschend lässt sich das gleiche Verhalten der Exzentrizität

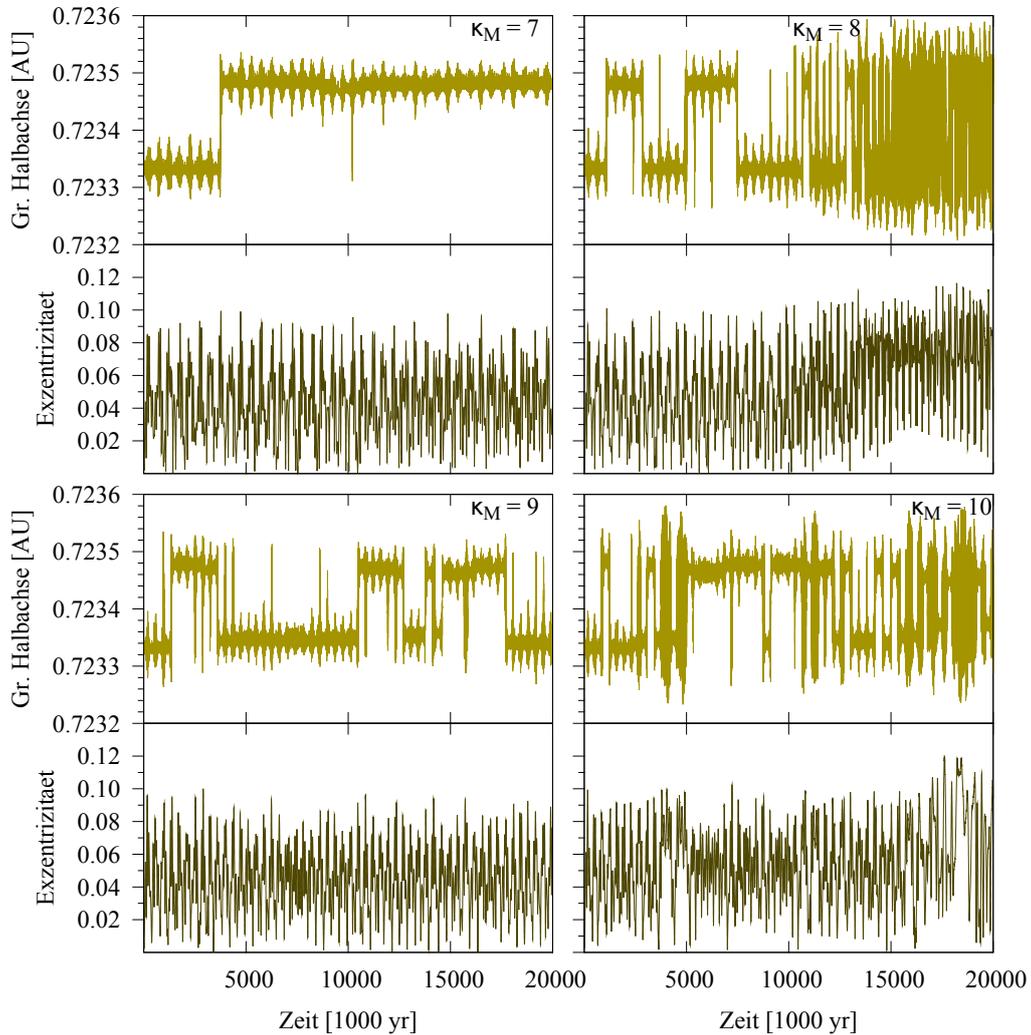
denn auch bei der Venus beobachten. Die dynamische Kopplung bleibt auch bei der Vergrößerung der Massenfaktors intakt, sodass die Frequenz der  $e$ 's bei Venus und Erde mit größerem  $\kappa_M$  gemeinsam anwächst. Da sich die maximalen Exzentrizitäten der Venus auch in selbem Maß wie jene bei der Erde steigern, wird auch deren Bahn ein Stück weit chaotischer.

Da sich Erde und Venus, bezogen auf die anderen Planeten unseres Sonnensystems, verhältnismäßig nahe beieinander befinden, hat ein Anwachsen beider Exzentrizitäten demgemäß auch schwere Folgen für deren Stabilität. Der Abstand zwischen den beiden Planetenschwestern kann sich etwa durch einen unkontrollierten Anstieg der Exzentrizitäten dermaßen minimieren, dass dadurch nahe Begegnungen möglich werden. Kommt es nun zum Eintritt eines Planeten in die Hill-Sphäre eines anderen, so folgt eine dramatische Änderung in der großen Halbachse, wodurch ein Himmelskörper schließlich auch das System verlassen kann. Somit sind die Exzentrizitäten von Erde und Venus wichtige Indikatoren für die Stabilität des inneren Sonnensystems, da sie die Möglichkeit von *close encounters* vorwegnehmen.

#### 3.2.2 Erstes Auftreten der Sprünge bei $\kappa_M = 7$

Während bis zu der um den Faktor [6] vergrößerten Marsmasse vor allem die Elongationen in der großen Halbachse im Vordergrund stehen, ändert sich dies für größere Massenfaktoren. Die Simulationen von  $1 \leq \kappa_M \leq 6$  zeigen bereits auf, dass die Elongationen mit jeder höheren Marsmasse ihre Form verändern. Abgesehen vom Anstieg der Frequenz fällt dabei vor allem die immer höhere Amplitude ins Auge, welche diese Elongationen wie angeführt immer weiter und spitzer werden lässt. Dies bildet wiederum die Grundlage für das Auftreten von Sprüngen in der großen Halbachse. Erst sobald diese Zacken ausgeprägt genug und über ein bestimmtes Maß hin elongiert sind, treten die ersten Sprünge in Erscheinung. Der Grenzwert hierfür liegt bei  $1 \times 10^{-4}$  AU für die Erde und  $0.7 \times 10^{-4}$  AU für die Venus. D.h. ab einer Auslenkung von etwa dieser Größe wächst sich die Elongation in einen Sprung aus, sodass sich die große Halbachse nachher auf einem veränderten Wert wiederfindet. Da der obige Grenzwert für einen Massenfaktor von [6] schon nahezu erreicht wurde und die Elongationen zunehmend größer werden, zeigt sich das Phänomen der Sprünge bereits für  $\kappa_M = 7$  erstmalig innerhalb der Integrationszeit von 20 Myrs.

Dieses Verhalten sowie der Übergang von der Elongation zum Sprung lässt sich anschaulich in den Abbildungen 3.3 und 3.5 betrachten. Darin sind das



**Abbildung 3.3:** Die große Halbachse der Venus im Vergleich mit deren Exzentrizität, über 20 Myrs. Die vier Plots zeigen die Region  $\kappa_M \in [7, 10]$ .

Verhalten der großen Halbachse und der Exzentrizität von Venus und Erde für den Bereich  $7 \leq \kappa_M \leq 10$  dargestellt. Diese Region ist geprägt durch die Evolution der Sprünge von anfänglichem sporadischem Auftreten hin zu immer regulärerem Vorkommen. Die Simulationen spiegeln dabei einen Massenbereich wieder, innerhalb derer die Marsmasse zunächst in der Größenordnung der Venus liegt und dann hin zu jener der Erde anwächst. Das bedeutet, dass für diese Region des Massenfaktors somit ein Untersystem der terrestrischen Planeten vorliegt, in welchem die drei Planeten alle in etwa die gleichen Massen aufweisen. Doch trotz dieser bemerkenswerten Gegebenheit bleibt das System der inneren Planeten weiterhin inhomogen, da Erde und Venus ein

dynamisch anderes Verhalten zeigen als der Mars.

Durch die aufrecht bleibende dynamische Kopplung zwischen den beiden Zwillingplaneten Erde und Venus verändern sich deren große Halbachsen gemeinsam aufgrund der Störungen, wie der Vergleich zwischen den beiden Abbildungen 3.5 und 3.3 demonstriert. Die jeweiligen Bahnelemente zeigen bemerkenswerte Übereinstimmung bezüglich des Austauschs des Bahndrehimpulses unter diesen beiden Planeten. Der Mars hingegen bleibt davon zunächst unberührt. Aufgrund dieser Tatsache soll aber nicht angenommen werden, dass der Mars gar keine Kopplung zu den anderen beiden Planeten hätte und dass diese somit wiederum eine Art Untersystem bilden würden. Vielmehr wird sich zeigen, dass es andere dynamische Ursachen gibt, welche bewirken, dass diese Störungen nur auf Erde und Venus beschränkt bleiben. Der Mars weist letztlich eine signifikante Kopplung zu den anderen beiden Planeten auf, die sich vor allem in der Entwicklung seiner Exzentrizitäten niederschlägt.

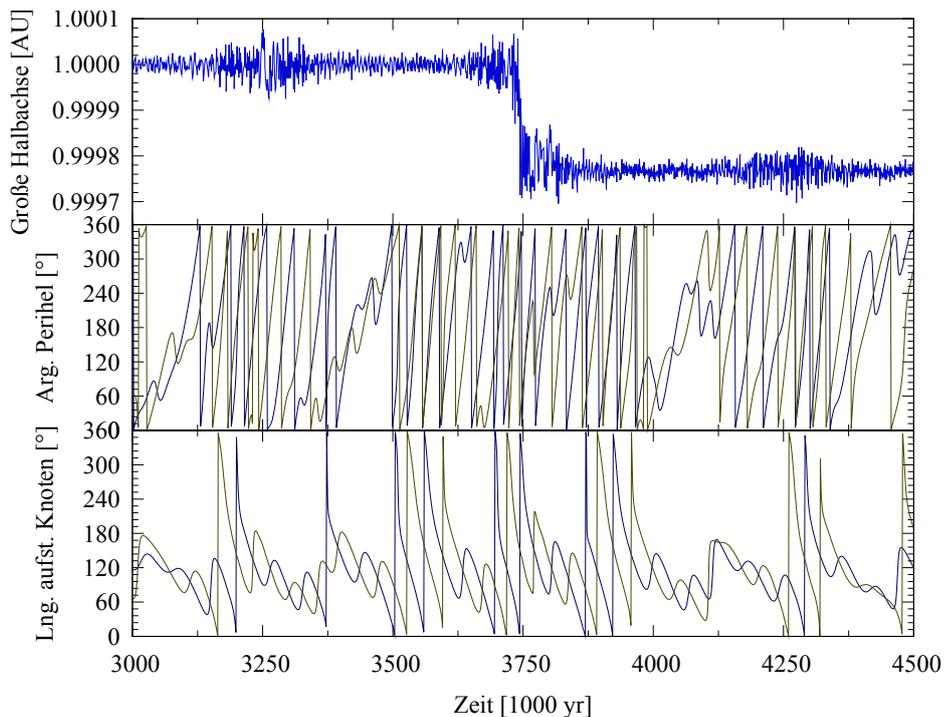
In der großen Halbachse hingegen ist das Signal des Mars für den genannten Massenbereich nicht sonderlich interessant, was im deutlichen Gegensatz zu jenem seiner inneren Nachbarn steht. Bei  $\kappa_M = 7$  nämlich lässt sich zum ersten Mal ein Sprung in deren großen Halbachsen binnen einer Integrationszeit von 20 Myrs feststellen. Rechnet man hingegen mit deutlich höheren Integrationszeiten, so lässt sich das insgesamt erste Auftreten der Sprünge auch schon bei kleinerem  $\kappa_M$  beobachten. Dieser Sachverhalt stellte mit einem Grund dar, in diesem Massenbereich die Länge der Integrationen entsprechend zu erhöhen. Die Berechnungen mit einer Länge von 20 Myrs eignen sich nämlich aufgrund der Komplexität des Signals nicht dazu, Aussagen über längerfristiges Verhalten treffen zu können. Für die hier nun angegebene symptomatische Untersuchung des Signals hingegen ist der Zeitraum von 20 Myrs ausreichend aussagekräftig.

#### **Charakteristik eines Sprunges**

Das erste Auftreten der Sprünge innerhalb der 20 Myrs bei dem Massenfaktor [7] illustriert besonders gut den gleitenden Übergang von den Spitzen zu den Sprüngen. Dabei gilt für die Erde (qualitativ gilt die folgende Beschreibung genauso auch für die Venus, nicht aber quantitativ) folgender Vorgang: erreicht die Spitze eine Auslenkung von über  $\sim 1 \cdot 10^{-4}$  AU, dann flacht die Schwingung in weiterer Folge nicht wieder ab, sondern steigt einseitig sprunghaft an. Durch diese ruckartige Bewegung ändert die große Halbachse rapide

ihren Wert und findet sich sofort danach bei 0.99977 AU wieder. Von diesem Niveau aus wiederholt sich das Störsignal, indem sich die vorherigen Elongationen dort weiter fortsetzen. Was den Sprung angeht, so ist vor allem zu bemerken, dass dieser binnen verhältnismäßig kürzester Zeit, nämlich weniger Tausend Jahre, vonstatten geht. So lässt sich bei ausreichender Vergrößerung des Plots beobachten, dass die Halbachse ihren Wert binnen einer einzigen Oszillation auf das neue Niveau hin ändert. Der Sprung selber verändert in weiterer Folge jedoch nicht das Verhalten des Störsignals selber. So bleiben sowohl die Form als auch die Frequenz der Elongationen ident, sodass das Signal einfach nur vertikal verschoben wurde.

#### Verhalten der Perihels und der Knoten



**Abbildung 3.4:** Das Verhalten des Arguments des Perihels (mitten) und der Länge des aufsteigenden Knotens (unten) von jeweils Erde (blau) und Venus (ockerfarben) für  $\kappa_M = 7$ . Es wurde dabei jener Zeitausschnitt gewählt, innerhalb dessen der Sprung vonstatten geht, wie für die Erd-Halbachse (oben) ersichtlich.

Interessant ist auch die Änderung des Arguments des Perihels  $\omega$  und der Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  von Erde und Venus. In Abbildung 3.4 sind diese beiden Bahnelemente in jenem Zeitraum dargestellt, wo sich der

Sprung in den großen Halbachsen vollzieht. Der Ausschnitt umfasst eine Integrationszeit von 1.5 Myrs und bildet neben dem Sprung noch die zwei umliegenden Elongationen in der großen Halbachse ab. Dabei weist der jump mit den Elongationen jene Gemeinsamkeit auf, dass das Argument des Perihels von Erde und Venus dabei jeweils rotiert. D.h., wann immer eine dieser Störungen in den Halbachsen vorkommt, hat sich ein Wechsel von Libration auf Rotation im Argument des Perihels von beiden Planeten vollzogen. Dieses Merkmal lässt sich dabei über den gesamten Integrationsverlauf hin durchgehend feststellen. Dies bedeutet, dass diese Übergänge von Libration auf Rotation genauso periodisch sind wie die Störungen der Halbachse und die Änderungen der Exzentrizität.

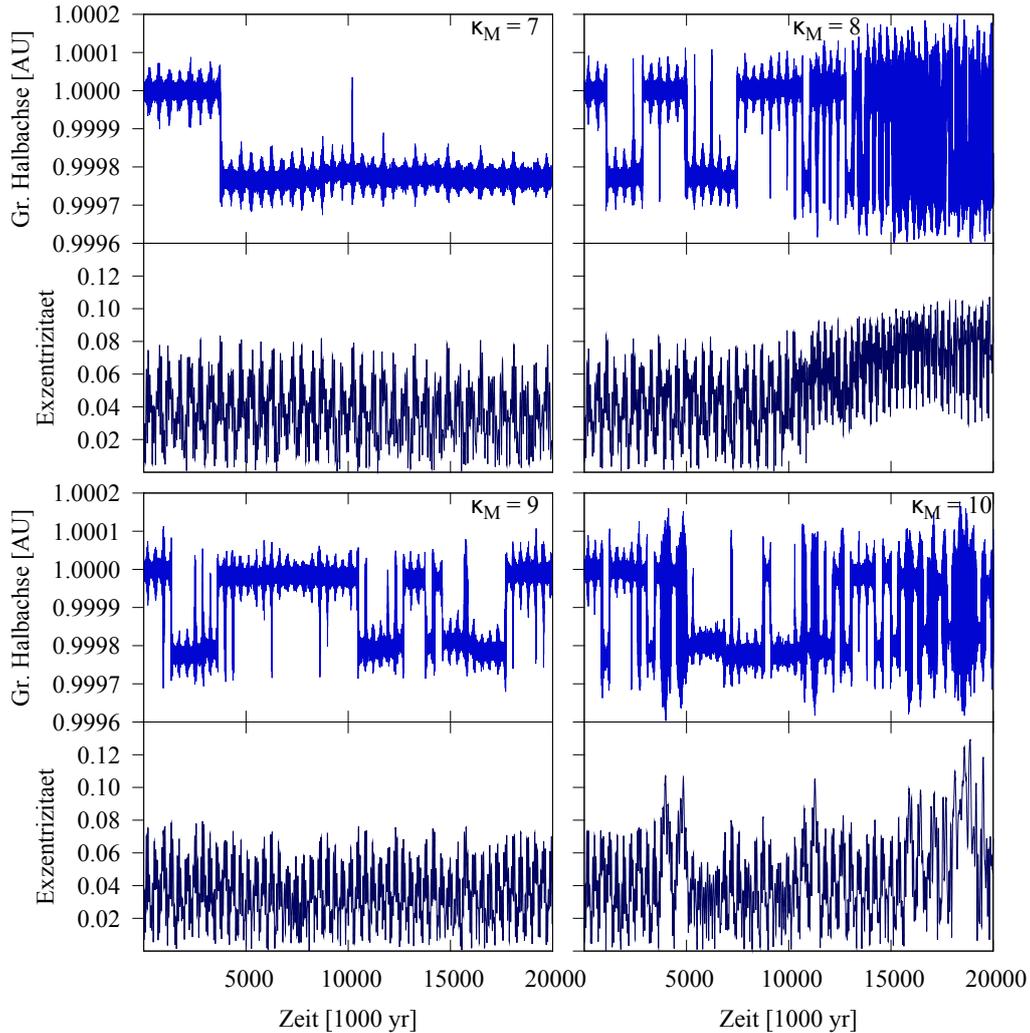
Was hingegen die Länge des aufsteigenden Knotens betrifft, so ist selbiger Effekt hierin zwar vertreten, aber weniger stark ersichtlich. So zeigt dieses Bahnelement bei jeweils Erde und Venus auch dann stellenweise noch Libration, wenn die großen Halbachsen durch die periodische Störung elongiert sind. Was sich jedoch feststellen lässt, ist die ausgezeichnete Kopplung zwischen Erde und Venus, deren Knoten jeweils nahezu synchron verlaufen. Bedingt durch die ebenfalls gute Kopplung der Argumente des Perihels führt dies dazu, dass sich Erde und Venus in periodischen Abständen auch zueinander ausrichten können. Die Länge des Perihels - welche sich aus Addition dieser beiden Bahnelemente ergibt - weist in jenen Fällen dann bei beiden Planeten einen ähnlichen Wert auf. Hierbei handelt es sich um einen besonders schützenden Mechanismus, der die beiden Himmelskörper vor zu nahen Begegnungen bewahrt. Konjunktionen des Perihels der Erde mit dem Aphel der Venus werden aufgrund dieses Effekts vermieden. Auffallend ist hierbei, dass wann immer diese schützende Konstellation erreicht wird, gleichzeitig die Auslenkungen in den großen Halbachsen wieder zurückgehen. Es handelt sich hierbei also um eine sehr stabile Konfiguration.

#### **Weitere Anzeichen von Sprüngen**

Im folgenden Verlauf lassen sich weitere - sehr kleine - Sprünge beobachten, die das Signal jeweils minimal nach innen oder außen verschieben. Diese sind für  $\kappa_M = 7$  beispielsweise bei etwa 8.5 Myrs sowie 11 Myrs ersichtlich. Auffällig dabei ist jeweils, dass auch diese sehr niedrigen Sprünge jeweils direkt bei einer Elongation erfolgen. Die Elongationen bilden somit die Grundlage für das Vorkommen von abrupten Änderungen in  $a$ , wenngleich diese auch sehr klein ausfallen mögen. Bei etwa 10 Myrs lässt sich eine äußerst starke Elongation feststellen. Betrachtet man diese in Vergrößerung,

### 3 SPRÜNGE IN DEN GROSSEN HALBACHSEN VON ERDE UND VENUS

so zeigt sich, dass es sich hierbei um einen der großen Sprünge handelt. Im Unterschied zum vorhergehenden Sprung erfolgt hier aber sofort wieder eine Rückwärtsbewegung, sodass die große Halbachse wieder auf ihren Ausgangswert zurückkehrt.



**Abbildung 3.5:** Das Verhalten der großen Halbachse und Exzentrizität der Erde über 20 Myrs. Die vier Plots stellen die Region  $\kappa_M \in [7, 10]$  dar.

Bei detaillierter Betrachtung wird auch die Ursache hierfür klarer. Denn nachdem ein Sprung erfolgt ist, oszilliert das Signal kurzfristig zwischen dem Anfangs- und Endwert. D.h., es zeigt sich unmittelbar nach dem jump eine etwa sinusoidale Schwingung, wodurch die große Halbachse zwischen den beiden diskreten Niveaus pendelt. Dieser Vorgang ist dabei von sehr kurzer

Dauer und endet letztthin genauso abrupt wie er angefangen hat. Da diese Pendelbewegung äußerst plötzlich endet, hängt es von der letzten eben dieser Schwingungen ab, wo die Halbachse sich nach dem jump befinden wird. Dieser Vorgang ist äußerst chaotisch und es ist daher nicht möglich, die Position der großen Halbachse nach einem jump vorherzusagen. Voraussagen lässt sich hingegen nur, dass nachher einer dieser beiden diskreten Werte angenommen wird, nämlich im Fall der Erde entweder 1.00000 AU oder 0.99977 AU als Zentrum der weiteren Bewegung.

### 3.2.3 Mean-motion Resonanzen

Es muss nun betont werden, dass es sich bei dieser Region um 0.99977 AU herum, auf die sich der Sprung vollzieht, um einen aus dynamischer Sicht äußerst empfindlichen Bereich handelt. Es befindet sich hierbei nämlich auch die Position der 13:8 Mean-motion Resonanz (MMR) mit der Venus; diese liegt für den Fall der aktuellen Halbachsen bei 0.999782 AU. Bedenkt man die dynamische Signifikanz solch einer Resonanz (auch wenn hierbei 5. Ordnung), dann ist ihr Effekt auf die beiden Planeten in dieser Region keinesfalls vernachlässigbar. Darum soll hier in weiterer Folge nun das prinzipielle Schema einer MMR kurz skizziert werden. Dies, damit selbiges Muster bei weiteren Ergebnissen, mit eventueller Lage der beiden Planeten in Nähe der Resonanz, stets vergegenwärtigt werden kann.

Eine Mean-motion Resonanz hat nämlich zur Auswirkung, dass bei einem Aufenthalt der beiden Planeten in selbiger Position deren mittlere Bewegungen  $n$  zueinander gekoppelt wären. D.h., wenn man die Bewegung des Perihels zunächst noch unberücksichtigt lässt, dann folgt daraus die Relation

$$\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p} = \frac{13}{8} \quad (3.1)$$

, wobei die gestrichelte Variable den äußeren Planeten bezeichnet. Da  $p$  und  $q$  ganze Zahlen sind, fänden sich Erde und Venus hierbei nach regelmäßigen Zeitabständen in den selben relativen Positionen zueinander wieder. Dies geschieht immer wieder nach jener Zeit  $t$ , für welche

$$nt - n't = 2\pi \quad (3.2)$$

gilt. Somit ergibt sich gemäß den nun weiteren Folgerungen von Murray & Dermott (1999) für die Periode  $T_{Kon}$  zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen der beiden Planeten entsprechend

$$T_{Kon} = \frac{2\pi}{n - n'}. \quad (3.3)$$

Weil nun

$$p(n - n') = qn' \quad (3.4)$$

gilt, lässt sich diese Periode auch anders ausdrücken. Seien  $T$  und  $T'$  die Umlaufzeiten des inneren und äußeren Planeten, dann gilt

$$T_{Kon} = \frac{p}{q} \frac{2\pi}{n'} = \frac{p}{q} T' = \frac{p+q}{q} T. \quad (3.5)$$

Bezogen auf die hier behandelte Situation von Erde und Venus würde dies bedeuten, dass

$$T_{Kon} = \frac{8}{5} T_{Erde} = 1.6 \text{ yr.} \quad (3.6)$$

Die Venus vollführt in dieser Zeit eine Umdrehung mehr und kommt somit auf 2.6 Umläufe. Somit gäbe es bei exakter Lage der beiden Planeten in der 13:8 Resonanz entsprechend 5 relative Positionen, an denen sich die beiden immer wieder treffen. Es gilt

$$qT_{Kon} = pT' = (p+q)T. \quad (3.7)$$

Dabei gibt  $q$  die Ordnung der Resonanz an. Diese gibt Auskunft darüber, an wievielen Positionen solche Konjunktionen stattfinden. Die Konjunktionen von Erde und Venus etwa zeichnen wegen  $q = 5$  ein Fünfeck, welches in der Astronomie als *Venus-Pentagramm* bekannt ist. Damit weiters eine Resonanz auch wirklich exakt ist, muss noch die Bewegung der Länge des Perihels  $\tilde{\omega}$  bei der Berechnung derselben mitberücksichtigt werden. Dieses ergibt sich aus dem Argument des Perihels und der Länge des aufsteigenden Knotens

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega. \quad (3.8)$$

Wenn selbiger Wert sich ändert, dann manifestiert sich dies auch in einer veränderten Position des Planeten, sodass dieser sich somit nun wieder außerhalb der Konjunktion befinden kann. Auch wenn die Präzessionsraten klein sind im Verhältnis zu den mittleren Bewegungen

$$\dot{\tilde{\omega}} \ll n, \quad (3.9)$$

so sind sie doch dann sehr wichtig, wenn sich zwei Planeten äußerst nahe an einer Resonanz befinden. In jenen Fällen kann gerade ihr Wert dazu führen, dass die exakte Resonanz erreicht wird. Wenn etwa die Exzentrizitäten  $e = 0$  und  $e' \neq 0$  sind, ist die MMR dann gegeben, wenn

$$(p+q)n' - pn - q\dot{\tilde{\omega}}' = 0 \quad (3.10)$$

erfüllt ist. Dies lässt sich auch schreiben als

$$\frac{n - \dot{\omega}'}{n' - \dot{\omega}'} = \frac{p + q}{p}. \quad (3.11)$$

Die beiden Terme des Bruches auf der linken Seite stellen dabei jeweils Relativbewegungen dar. Man denke bezüglich der Subtraktion von  $\dot{\omega}'$  an ein rotierendes Bezugssystem, welches mit dem Perihel des äußeren Planeten mitrotiert. Da nun die Länge des Perihels variabel ist, treffen sich die Planeten nur in *relativ* zueinander gleichen Positionen.

Der Sachverhalt der Mean-motion Resonanzen war hierbei insofern wichtig zu benennen, da das Vorhandensein der Sprünge in den Halbachsen von Erde und Venus zu einer äußerst bedeutenden Verschiebung derselben führt. Denn schließlich befinden sich in dieser Region sogar mehrere verschiedene MMR zwischen diesen beiden Planeten, nämlich zusätzlich auch noch die 5:3 und 8:5 Resonanz. Betrachtet man die Position der Sprünge - welche für die Erde auf 0.99977 AU und wieder zurück stattfinden -, dann ist dabei vor allem der Einfluss der 13:8 Resonanz interessant. Bei der weiteren Beschreibung der Sprünge selber sei somit stets daran erinnert, dass sich in unmittelbarer Nähe eben diese Resonanz befindet. Die obige kurze mathematische Beschreibung soll dazu dienen, hier zunächst die einfachsten Zusammenhänge der Mean-motion Resonanz darzulegen. Diese sind hier bereits deshalb vonnöten, da sich die Halbachsen ab dem nun erfolgten Auftreten der Sprünge zwangsläufig immer wieder in die Nähe dieses speziellen Bereichs bewegen. In den folgenden Abschnitten kann somit wieder der Fokus auf die Beschreibung der jumps selber gelegt werden.

### 3.2.4 Bereich $8 \leq \kappa_M \leq 10$

$$\kappa_M = 8$$

Wenn man nun die Aufenthaltsdauer der großen Halbachse der Erde an verschiedenen Werten betrachtet, so findet sie sich beim Vorkommen von Sprüngen nahezu während der gesamten Integrationszeit auf entweder 1.00000 oder 0.99977 AU, bzw. deren unmittelbaren Umgebungen wieder; jedoch nicht in dem Bereich dazwischen. Denn bei den Oszillationen, welche unmittelbar nach den Sprüngen vorkommen, wird nämlich der Zwischenbereich inmitten dieser beiden Werte sehr schnell überbrückt. Sobald die Schwingung dann abrupt endet, bewegt sich die Halbachse noch zu einem dieser beiden diskreten Niveaus und verbleibt dort bis zum nächsten jump. Somit ergibt sich auch, dass die große Halbachse nach den Sprüngen nicht immer ihren Wert ändert,

**Tabelle 3.2:** Die Änderungen der großen Halbachse  $a$  und Exzentrizität  $e$  der Erde im Bereich  $\kappa_M \in [7, 10]$ .  $\Delta a$  und  $\Delta e$  stellen die maximalen Abweichungen vom Anfangswert innerhalb von 20 Myrs dar, während  $\nu$  die Frequenz der periodischen Störungen angibt.

$\kappa_M$	$\Delta a$ [AU]	$\Delta e$	$\nu$ [1 / 20 Myr]
7	$3.3 \times 10^{-4}$	0.067	39.0
8	$4.1 \times 10^{-4}$	0.090	47.6
9	$3.2 \times 10^{-4}$	0.062	52.6
10	$4.0 \times 10^{-4}$	0.112	$\sim 57$

sondern nur etwa bei der Hälfte derselben. In den anderen Fällen kehrt sie nach kurzer Oszillation wieder auf ihren Ausgangswert zurück. Hierbei handelt es sich dann um jene unvollständigen jumps, die auf den ersten Blick zwar wie riesige Spitzen anmuten, in Wirklichkeit aber bereits Sprünge darstellen.

Diese lassen sich anschaulich auch im Plot für  $\kappa_M = 8$  der genannten Abb. 3.5 beobachten. Die Anzahl an jumps mit nachher verschobener großer Halbachse ist in etwa gleich groß wie jener, wo die große Halbachse wieder auf ihre Ausgangslage zurückschwingt. Die Wahrscheinlichkeit, welcher der beiden Werte nach einem jump angenommen wird, ist somit zufallsverteilt. Wird noch dazu mit einer anderen Computerarchitektur gerechnet, so reicht diese Änderung bereits aus, um die Position der Halbachse nach einem Sprung erneut zu ändern, was das hohe Maß an Chaos darin unterstreicht. Die jumps, bei denen sich nachher die Lage der großen Halbachse nicht geändert hat, mögen zwar auf den ersten Blick wie gewöhnliche Spitzen, nur eben mit doppelter Größe, ausschauen. Dies ist jedoch ein Trugschluss, der bei einer Vergrößerung des entsprechenden Ausschnitts besonders deutlich zutage tritt. Während nämlich die Spitzen eine langsame und stetige Vergrößerung ihrer Amplitude aufweisen, geschieht dies bei den jumps plötzlich und ruckhaft. Bei den Spitzen dauert es viele Periodenlängen, bis deren maximale Amplitude von  $1 \cdot 10^{-4}$  AU erreicht ist. Hingegen bei den jumps erfolgt das Anwachsen auf deren Auslenkung von  $\sim 2 \cdot 10^{-4}$  AU binnen einer einzigen Periode. Auch wenn in der Arbeit später noch eine detaillierte Vergrößerung eines Sprungs vorgestellt wird, so ist es doch wichtig, hier bereits diese beiden Effekte auseinanderzuhalten - sprich die Spitzen einerseits und jene jumps, bei denen die große Halbachse wieder auf ihren Ausgangswert zurückkehrt, andererseits.

**Beginnendes Auftreten von Chaos** Bei der Simulation mit  $\kappa_M = 8$  tritt zudem ab etwa 13 Myrs eine Veränderung des Signals auf. Wohingegen im Zeitraum davor wohldefinierte jumps mit diskreten Anfangs- und Endwerten auftreten, zeigt sich hier ein eher diffuses Muster. Der Grundsatz, dass die große Halbachse nach den Sprüngen immer einen der beiden definierten Werte annimmt, gilt in diesem Bereich nun nicht mehr. Diese Region ist geprägt vom Auftreten von Chaos, was sich gemäß Tabelle 3.2 auch am Zuwachs ihrer Exzentrizität ablesen lässt. Wie bereits im vorigen Abschnitt ausgeführt, ist das Vorkommen von Sprüngen ab einer gewissen Zeit auch immer mit einer Abnahme an Stabilität der betroffenen Orbits verbunden. Auch wenn die jumps selbst stabil innerhalb äußerer Grenzen erscheinen, so impliziert deren Auftreten doch das Vorhandensein eines störenden Einflusses. Dieser wiederum kann zunächst für die Stabilität der Bahnen noch folgenlos bleiben, für längere Zeiträume jedoch starke Instabilitäten darin verursachen.

Betrachtet man etwa den Plot für  $\kappa_M = 8$  der Abb. 3.5, so fällt auf, dass dieser für die erste Hälfte der Integrationszeit ein beeindruckend reguläres Muster beinhaltet. Hätte man hier die Länge der Integration mit 10 Myrs festgelegt, so würde man anhand des Resultats keinerlei irreguläres Verhalten vermuten. Dies ist typisch für Chaos, dass zunächst stabil aussehende Orbits bei Betrachtung über längerfristige Zeiträume plötzlich instabil werden können, und man gegebenenfalls irgendwann sogar das Auseinanderbrechen des Systems beobachten kann. Bezogen auf den hier dargelegten Fall erscheint es also mehr als zweckmäßig, wie im vorigen Kapitel geschildert, eine Langzeit-Integration für die interessantesten der Fälle auszuführen. Die Ergebnisse derselben werden später noch separat vorgestellt.

Das chaotische Verhalten gegen Ende des Diagramms bei  $\kappa_M = 8$  jedenfalls legt bereits nahe, dass die jumps eine begrenzte Stabilität haben und irgendwann in irreguläres Verhalten münden. Gegen Ende der Integrationszeit schwankt hier die große Halbachse der Erde zwischen 0.9996 und 1.0002 AU. Dies bedeutet, dass ihre Amplitude hierbei um mehr als den Faktor 10 größer ist als bei  $\kappa_M = 1$ . Bezieht man dazu noch die Entwicklung der Exzentrizität ein, so lässt sich die Verminderung von Stabilität gut illustrieren. Während bei aktueller Marsmasse die maximale Exzentrizität bei 0.06 verbleibt, liegt sie hierbei über 0.10. Dabei spiegelt die Exzentrizität das Verhalten der großen Halbachse sehr gut wieder. Die peaks fallen gegen Anfang der Simulation von  $\kappa_M = 8$  jeweils zusammen, sodass die beiden Bahnelemente wiederum die gleichen Frequenzen aufweisen. Und für den Bereich gegen Ende der Integrationszeit, wo die große Halbachse irreguläres Verhalten zeigt, lässt sich ein deutlicher Anstieg in der Exzentrizität registrieren. Die beiden

Größen sind somit signifikant aneinander gekoppelt.

#### $\kappa_M = 9$

Bei  $\kappa_M = 9$  schließlich tritt äußerst stabiles Verhalten auf. Innerhalb der 20 Myrs lässt sich kein derart chaotisches Signal wie beim vorigen Massenfaktor feststellen. Die Sprünge bleiben hier sehr stabil und die große Halbachse findet sich stets auf zwei klar definierten abgetrennten Bereichen wieder. Innerhalb derer schwankt sie, ausgelöst durch kleinere Sprünge, noch etwas herum. Der Zwischenbereich um etwa 0.9999 AU wird hingegen durch die jumps stets sehr schnell überbrückt. Das stabile Verhalten lässt sich demgemäß auch wieder an der Exzentrizität ablesen, diese bleibt stets unterhalb von 0.08. Vergleicht man nun dieses stabile Resultat mit jenem irregulären für einen Massenfaktor von [8], so stellt auch dieser Sachverhalt ein wichtiges Merkmal für das Auftreten von Chaos dar: obwohl die Anfangsbedingungen für die beiden Simulationen so nah aneinander liegen, ergibt sich doch höchst unterschiedliches Verhalten innerhalb der hier gegebenen Integrationszeit. Bei der Untersuchung von Chaos zeigt sich nämlich immer wieder, dass auch in jenen Bereichen wo chaotisches Verhalten vorliegt, es immer wieder einzelne Stabilitätsfenster gibt. In diesen zeigt sich dann auffallend reguläres Verhalten über lange Zeiträume, dies trotz der sie umgebenden instabilen Bereiche.

Dieses reguläre Verhalten macht den Plot von  $\kappa_M = 9$  besonders interessant, um die Eigenschaften der Sprünge sowie der Elongationen zu untersuchen. Da diese über den gesamten Verlauf hin stabil bleiben und durch keine anderen chaotischen Einflüsse verdeckt werden, tritt deren Verhalten hier besonders deutlich zutage. Da die Anzahl an den vorhandenen Elongationen, bzw. Sprüngen sich hierbei genau bestimmen lässt, kann daraus zweckmäßigerweise die Frequenz des Störsignals ermittelt werden, hierbei also  $\sim 52$  [1 / 20 Myrs]. Vergleicht man diese Frequenz nun mit den vorhergehenden Simulationen, so lässt sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen dieser Frequenz der Störungen und der Marsmasse feststellen. Jegliche weitere Erhöhung von  $\kappa_M$  hat ausnahmslos eine Vergrößerung der Frequenz zur Folge. Da der Mars als Verursacher somit aber selber keinerlei Anzeichen von diesem Signal in seiner großen Halbachse zeigt, lässt sich bereits erahnen, dass der Fall sich als komplexer darstellen wird. So ist der Mars mit seiner vergrößerten Masse zwar der Auslöser dieses Signals, nicht aber dessen alleinige Ursache, wie sich in den nächsten Abschnitten noch zeigen wird.

Was die Frequenz des Störsignals betrifft, so ist nicht nur dessen strikte

Abhängigkeit vom Massenfaktor interessant, sondern auch ihre starke Korrelation zur Exzentrizität. Wie bei den großen Halbachsen, so ergibt sich auch bei diesen der Fall, dass die Periode dieser Änderungen in der Exzentrizität mit zunehmendem  $\kappa_M$  immer weiter abnimmt. Betrachtet man die Position der jeweiligen peaks in den beiden Bahnelementen, so lässt sich eine ausgezeichnete Kopplung zwischen diesen beiden Größen feststellen, sodass die Elongationen immer genau dann auftreten, sobald die Exzentrizität ihren jeweiligen Maximalwert erreicht. Und auch für Maxima in den Exzentrizitäten, die kleiner als sonst ausfallen, lassen sich entsprechend flachere Spitzen in den großen Halbachsen registrieren. Es ergibt sich somit ein direkter Zusammenhang zwischen dem Wert der Exzentrizität und dem Ausmaß der Elongation in der großen Halbachse.

Was die absoluten Werte der Exzentrizitäten betrifft, so haben sich diese - sofern keine chaotischen Einflüsse einwirken wie bei der Integration von  $\kappa_M = 8$  - in diesem Massenbereich nun stabilisiert. Während der Bereich von  $1 \leq \kappa_M \leq 6$  davon geprägt war, dass die Extremwerte der Exzentrizitäten sukzessive größer wurden, so ist für höheren Massenfaktor keine weitere Steigerung derselben mehr ersichtlich. Dies stets vorausgesetzt, dass sich kein irreguläres Verhalten in der großen Halbachse zeigt, da die Exzentrizität in jenen Fällen unkontrolliert anwächst. Für stabile große Halbachsen hingegen zeigen die Plots der Abb. 3.5 deutlich, dass die maximalen Exzentrizitäten bei etwa 0.08 verbleiben und nicht mehr weiter anwachsen, im Gegensatz zu deren Entwicklung für kleinere  $\kappa_M$ 's in Abb. 3.2. Da es sich bei  $\kappa_M = 9$  um eine besonders stabile Region handelt, lässt sich sogar ein Rückgang der maximalen Exzentrizität für diesen Bereich beobachten.

Bei der großen Halbachse hingegen lässt sich für die selbe Simulation kein Rückgang bei der Größe der periodischen Auslenkung bemerken. Im Gegenteil, die Elongationen werden durch eine Vergrößerung der Marsmasse immer stärker, sodass es dadurch auch immer häufiger zu Sprüngen kommt. Da Elongationen mit einer Amplitude  $> 1 \cdot 10^{-4}$  AU direkt in einen jump münden, führt die tendenzielle Vergrößerung der Elongationen unweigerlich zu einem häufigeren Vorkommen der jumps selber. Während bis  $\kappa_M = 6$  noch keinerlei Sprünge innerhalb von 20 Myrs auftreten, und diese bei  $\kappa_M = 7$  noch rar sind, zeigt sich bei einem Massenfaktor von [9] bereits eine große Anzahl verschiedener Sprünge. Dies hat zur Folge, dass die große Halbachse dauernd zwischen 1.00000 und etwa 0.99977 AU hin- und hergeschoben wird. Da die Amplitude der Spitzen mit höherer Marsmasse immer größer wird, lässt sich folgern, dass ein höheres  $\kappa_M$  schließlich zu einem immer häufigeren Auftreten von Sprüngen führt.

**Tabelle 3.3:** Vergleiche der Langzeitintegrationen bis zu  $\kappa_M = 9$ :  $t_{Sprung}$  gibt die Zeitdauer an, ab wann sich der erste Sprung in der großen Halbachse der Erde zeigt.  $t_{instabil}$  steht für den Zeitraum, ab wann der Erdorbit instabil wird.

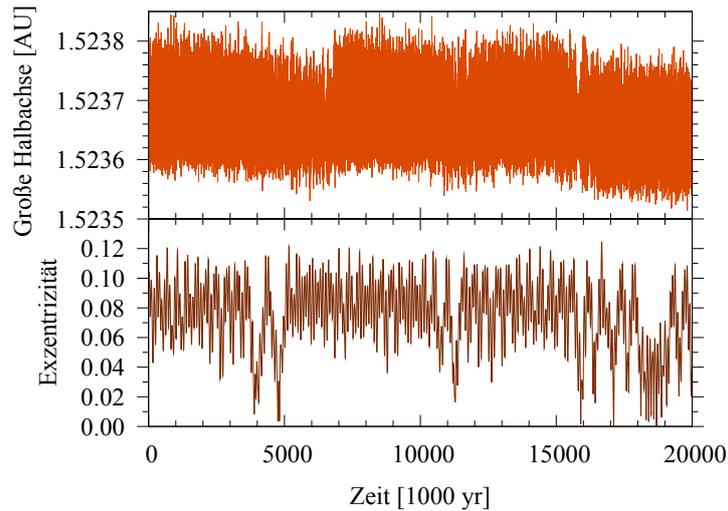
$\kappa_M$	$t_{Sprung}$ [Myr]	$t_{instabil}$ [Myr]
1	keine Sprünge	stabil
2	keine Sprünge	stabil
3	keine Sprünge	stabil
4	keine Sprünge	stabil
5	301.1	stabil
6	53.7	stabil
7	3.7	687
8	1.1	654
9	0.9	898

Da die Sprünge selber aber chaotischer Natur sind, ist ein erhöhtes Auftreten derselben zwangsläufig mit einem Rückgang an Stabilität verbunden. D.h. je stärker die Sprünge bei einem Orbit vorkommen, umso schneller wird dieser durch diesen Prozess instabil. In Tabelle 3.3 sind dabei die Zeiträume angegeben, ab wann die Sprünge beim jeweiligen Massenfaktor zum ersten Mal vorkommen. Diese Zeitdauer ist ein guter Indikator dafür, wie häufig die jumps bei der jeweiligen Halbachse auftreten. Weiters sind in der Tabelle zum Vergleich die Zeitdauern angegeben, ab wann der jeweilige Erdorbit instabil wird. Die Beurteilung nach Instabilität erfolgt dabei aufgrund des Maximalwerts der Exzentrizität. Überschreitet dieser einen Wert von 0.35, dann führt dies für die Erde, bedingt durch Bahnkreuzungen mit der Venus und der Möglichkeit von close encounters, irgendwann zu starkem Chaos. Somit wurde eine Überschreitung dieses Grenzwerts als Instabilität klassifiziert.

Vergleicht man nun die Zeiten  $t_{Sprung}$  und  $t_{instabil}$  mit dem Massenfaktor, so ergibt sich eine beeindruckende Korrelation. Zum einen beschleunigt eine größere Marsmasse das Auftreten von jumps stetig. Des weiteren zeigt sich aber auch noch, dass das Vorkommen von Sprüngen mit einer rapiden Abnahme an Stabilität verbunden ist. Es gibt nur 2 Simulationen, bei denen der Erdorbit (sowie auch jener von Venus und Mars) trotz Vorhandensein von Sprüngen über 1 Gyr stabil bleibt, nämlich  $\kappa_M \in \{5,6\}$ . Dabei ist zu bemerken, dass in diesen beiden Fällen die Sprünge auch erst sehr spät auftreten. Es lässt sich deshalb vermuten, dass bei einer noch längeren Integrationszeit auch diese beiden Fälle instabil würden. Für die weiteren Fälle von  $\kappa_M > 9$

jedenfalls lassen sich bedingt durch die Sprünge starke Irregularitäten feststellen.

$$\kappa_M = 10$$



**Abbildung 3.6:** Die große Halbachse und Exzentrizität des Mars bei  $\kappa_M = 10$  über einen Zeitraum von 20 Myrs. Gut sichtbar sind die Störungen in der Exzentrizität durch die inneren beiden Planeten.

Betrachtet man schließlich noch den Fall für  $\kappa_M = 10$  aus der genannten Abb. 3.5, dann erkennt man dort teils stabiles, teils irreguläres Verhalten. Die Regionen, wo Spitzen und Sprünge innerhalb eines regulären Musters auftreten, werden immer wieder unterbrochen durch Bereiche, in denen dieses Muster zerstört wird. In jenen chaotischen Bereichen schwankt die große Halbachse über das gesamte Gebiet, das sonst jeweils übersprungen wird. Erwartungsgemäß lässt sich auch hier eine starke Korrelation zur Exzentrizität feststellen. Der vorher empirisch abgeleitete Grundsatz, dass die Höhe der Exzentrizität auch gleichzeitig Aufschluss über die Schwankungsbreite der großen Halbachse gibt, lässt sich hier erneut bestätigen. Eine Exzentrizität oberhalb von zirka 0.085 führt dazu, dass das Schema der jumps aufgelöst wird durch eine Schwankung der großen Halbachse über den Bereich zwischen etwa 0.9996 und 1.0002 AU. Interessant ist dabei die Tatsache, dass diese Schwankung somit ihr Zentrum etwa in der Mitte jener beiden diskreten Werte hat, auf die die jumps sonst jeweils erfolgen, somit also nicht mehr bei jenem ursprünglichen Ausgangsniveau von 1.00000 AU. Es zeigt sich, dass die große Halbachse der Erde dazu neigt, nach innen zu tendieren - respektive jene der Venus nach außen.

Eine besonders auffällige Störung der drei terrestrischen Planeten lässt sich außerdem bei einer Integrationszeit von etwa 4 Myrs feststellen. Diese ist in den Abb. 3.3 für die Venus und 3.5 für die Erde eindrucksvoll ersichtlich. Bei 3.9 Myrs sowie 4.7 Myrs zeigt sich ein abrupter Anstieg in den Exzentrizitäten aller beider Planeten; wobei hierbei die Erde noch stärker betroffen ist. Diese Störung schlägt sich dabei etwa gleich stark in den großen Halbachsen der beiden Planeten nieder. Da nun weiters die Exzentrizitäten von Erde und Venus aufgrund deren dynamischer Kopplung meist gegenläufig zueinander verlaufen, stellt sich die Frage, warum sie hierbei gemeinsam anwachsen.

Die Ursache für dieses Verhalten liegt im Einfluss des Mars, der hierbei bereits über etwas mehr als die Erdmasse verfügt. Betrachtet man die Abbildung 3.6, dann lässt sich die Wechselwirkung mit den inneren Planeten am Verhalten seiner Exzentrizität ablesen. Es zeigt sich, dass die Vergrößerung der Exzentrizitäten bei Erde und Venus durch eine Verringerung bei jener des Mars kompensiert wird. Bei den gleichen Zeiträumen von 3.9 und 4.7 Myrs wird der Mars nahezu kreisförmig. Die dynamische Interaktion mit den inneren beiden Planeten ist somit evident, auch wenn seine große Halbachse noch verhältnismäßig schwach gestört wird. Es zeigt sich weiters, dass mit größer werdendem  $\kappa_M$  die dynamische Kopplung zwischen Erde und Venus sukzessive aufgebrochen wird. Sobald der Mars nämlich die selbe bzw. größere Masse hat wie die inneren Planeten, erfolgt der Austausch des Bahndrehimpulses nicht nur mehr allein zwischen Erde und Venus, sondern zusätzlich auch zwischen dem Mars.

Ein weiteres Feature, das in der Simulation für  $\kappa_M = 10$  erkennbar ist, betrifft die Änderung der jumps in der großen Halbachse. Es lässt sich nämlich gegen Ende der 20 Myrs ein deutliches Zusammenstreben des Anfangs- und Endwertes der Sprünge hin zu einem gemeinsamen mittleren Wert registrieren. Dies zeigt bereits, dass die Sprünge keinesfalls dauerhaft unverändert bleiben, sondern für längere Zeiträume dazu neigen, zusammenzufallen. Der Mittelwert, auf den das Signal dabei zustrebt, befindet sich für die Erde bei etwa 0.9999 AU, also  $1 \cdot 10^{-4}$  AU unterhalb vom Anfangswert der Simulation. Die Venus, bedingt durch die starke dynamische Kopplung zur Erde, neigt unterdessen in die gegenteilige Richtung, wobei hier der Mittelwert eine Verschiebung von etwa  $0.7 \cdot 10^{-4}$  AU nach außen beinhaltet.

Durch das langsame Zusammendriften der äußeren Werte werden die jumps selber immer kleiner. Da dieser Trend zwar langsam, aber konstant vonstatten geht, lässt sich prognostizieren, dass die jumps ab einer gewissen Zeit

vollständig verschwinden werden. Betrachtet man diese Bewegung von einem anderen Standpunkt aus, so liegt der Vergleich zu einer gedämpften Pendelbewegung nahe. Diese wird von den großen Halbachsen von Erde und Venus so lange ausgeführt, bis die jumps ganz zusammengefallen sind, somit also der Ruhepunkt des Pendels erreicht ist. Zu diesem Zeitpunkt ist jedenfalls wichtig zu bemerken, dass die jumps nicht konstant bleiben, sondern sich fortlaufend zusammenbewegen und damit stets nur von vorübergehender Natur sind.

Es zeigt sich also, dass der gewählten Integrationszeit in diesem Bereich eine hohe Bedeutung zuteil wird. Diese Tatsache war letztlich auch mit ausschlaggebend dafür, den Massenbereich für kleine  $\kappa_M$ 's später über sehr lange Zeiträume - nämlich 1 Gyr - zu betrachten. Es zeigt sich nämlich, dass die jumps umso früher zusammenfallen, je höher die Frequenz an vorkommenden Elongationen ist, folglich also je größer die Masse des Mars ist. Während das Signal für kleine Massenfaktoren noch sehr lange stabil bleibt, fällt es für größere  $\kappa_M$ 's umso rascher in sich zusammen. Dies führt dazu, dass die Sprünge nicht im gesamten Massenbereich von  $1 \leq \kappa_M \leq 500$  sichtbar sind, sondern hauptsächlich nur in einem kleinen Intervall desselben. Dies ist bemerkenswerterweise genau jener Bereich, wo in etwa die Äquivalenz der Massen im inneren Sonnensystem gegeben ist. Für eine Marsmasse, die signifikant kleiner als die Venusmasse ist, nämlich  $\kappa_M \leq 4$ , treten noch keine Sprünge - auch nicht in den Langzeitintegrationen von 1 Gyr - in Erscheinung. Und für jene Marsmasse, welche bedeutend größer als die der Erde ist wie  $\kappa_M > 30$ , verschwinden die Sprünge durch ein Zusammenfallen derselben sofort wieder.

#### 3.2.5 Bereich $\kappa_M \geq 30$

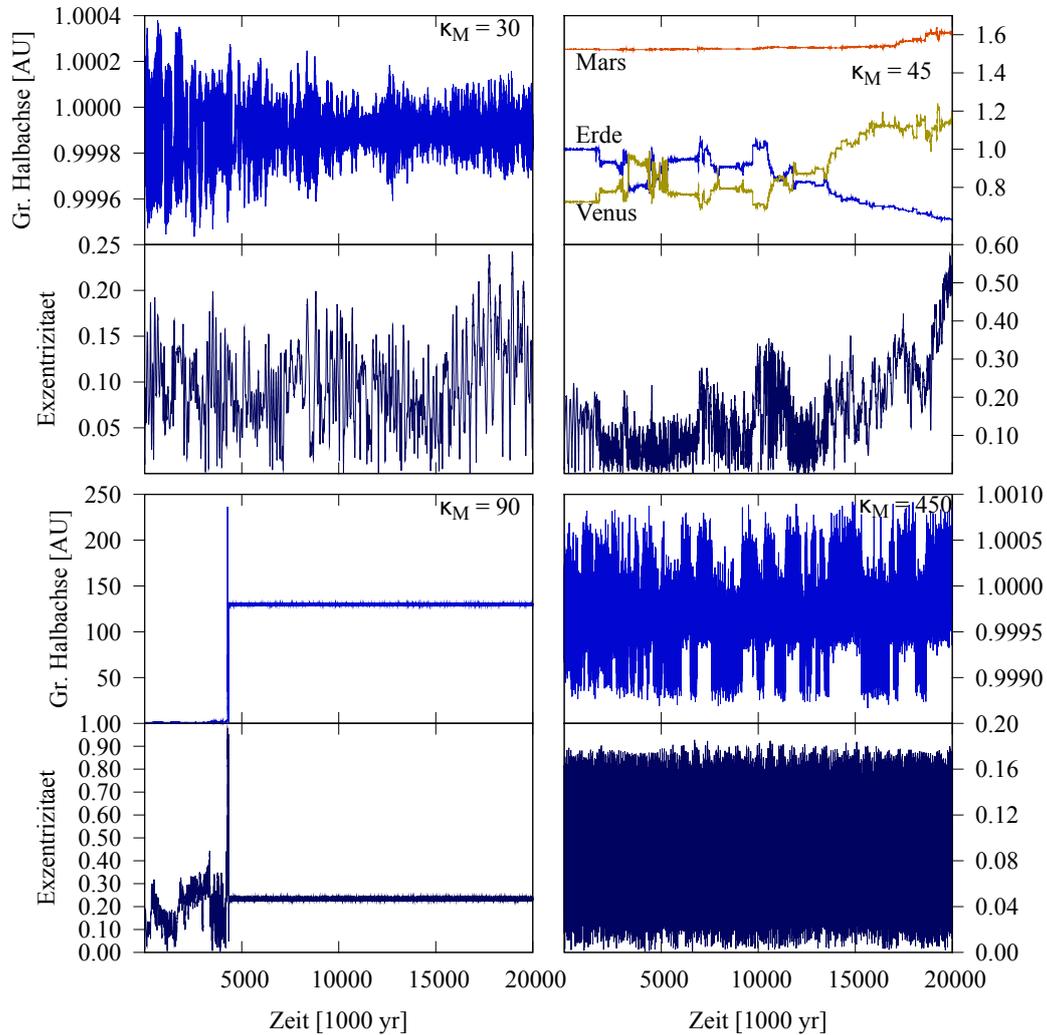
Für große  $\kappa_M$ 's lässt sich das Auftreten von stark chaotischem Verhalten bei Erde und Venus beobachten, wobei insbesondere der Erdorbit extrem gestört wird. Dies lässt sich anschaulich in der Abbildung 3.7 illustrieren, in welcher die Entwicklung der Erdbahn durch einen massiveren Mars in deren Nachbarschaft dargestellt ist. Da die Berechnungen der Simulationsreihe bis hin zu  $\kappa_M = 500$  durchgeführt wurden, zeigt die Abbildung vier verschiedene Plots aus einer jeweils sehr unterschiedlichen Region. Dies ist dahingehend interessant, als dadurch der Einfluss eines massereichen Planeten in unmittelbarer Umgebung der Erde gut illustriert werden kann. Die einzelnen Plots zeigen jeweils äußerst unterschiedliches Verhalten auf und stehen repräsentativ für die Ergebnisse der einzelnen Massenbereiche.

#### $\kappa_M \sim 30$

Bei  $\kappa_M = 30$  stellt der Mars eine Super-Erde dar und ist bereits massereicher als Venus und Erde zusammen. Dies hat entsprechende Folgen für die Stabilität dieser beiden innersten Planeten dieser Simulation. Schaut man sich beispielsweise die Exzentrizitäten an, so lässt sich feststellen, dass diese gegenüber dem Normalfall für aktuelle Marsmasse deutlich angewachsen sind. Mehr noch, mit einer maximalen Exzentrizität von 0.242 ist diese sogar doppelt so hoch als der Extremwert für den gesamten Bereich von  $\kappa_M \in [1, 10]$ . Der Effekt einer vergrößerten Marsmasse wird somit offensichtlich. Da die Venus von dieser Störung ebenfalls betroffen ist, hat dies weitreichende Konsequenzen für das innere Planetenpaar. Die maximale Exzentrizität der Venus für denselben Fall beträgt nämlich 0.291, also nochmals höher. Dies bewirkt nun, dass die minimale Distanz zwischen dem Perihel der Erde und dem Aphel der Venus von derzeit 0.26 AU mit anwachsenden Exzentrizitäten immer weiter abfällt, sodass schließlich die Erde zu einem orbit crosser der Venus wird. Bedingt durch die verhältnismäßige Nähe der beiden Planeten führt die Vergrößerung in den Exzentrizitäten für diesen Fall zu einer maximalen Überlappung der beiden Bahnen von 0.16 AU.

Der Mars hingegen verläuft auf einer viel stabileren Bahn. Weder in seiner großen Halbachse, noch in seiner Exzentrizität lassen sich vergleichbare Zeichen von Chaos finden. Die sich als Chaos-Indikator gut eignende maximale Exzentrizität ist sogar noch kleiner als im Ausgangszustand mit aktueller Masse. Im Verhältnis zur Integration bei  $\kappa_M = 1$  ist sie um 14.4 % abgesunken auf einen Wert von 0.106. Dies zeigt, dass die Homogenität des Untersystems der drei inneren Planeten durch eine Vergrößerung der Marsmasse verloren geht. Während im Ausgangszustand die drei terrestrischen Planeten des Vereinfachten Sonnensystems noch einigermaßen ähnliche dynamische Eigenschaften aufweisen, lässt sich nun ein Bruch in diesem Verhalten feststellen. Der Mars als Super-Erde dominiert die Stabilität der beiden inneren Planeten, die wiederum untereinander starke Störungen im jeweils anderen Himmelskörper hervorrufen. Während der Mars durch seine große Entfernung zur Erde und seine moderate Exzentrizität eine ziemlich ungestörte einsame Bewegung vollführt, geraten die innersten beiden Planeten in chaotische Bahnen.

Dadurch, dass Erde und Venus ihre Bahnen kreuzen, sind sie starken irregulären Störungen ausgesetzt. Dies äußert sich darin, dass die Exzentrizitäten in vollkommen unvorhersagbarer Art ihren Wert ändern. Während bei kleinerem  $\kappa_M$  noch stark periodische Oszillationen präsent waren, die eine gewisse Prognostizierbarkeit für zukünftiges Verhalten erlaubten, zeigt sich bei



**Abbildung 3.7:** Die große Halbachse sowie die Exzentrizität der Erde für verschiedene Massenfaktoren, über einen Zeitraum von jeweils 20 Myrs. Die vier Plots beschreiben die Simulationen für  $\kappa_M \in \{30, 45, 90, 450\}$ .

$\kappa_M = 30$  stattdessen nur mehr ein irreguläres Signal. Aufgrund der extremen Sensitivität desselben von den Anfangsbedingungen lässt sich für dieses weder zukünftiges Verhalten abschätzen, noch überhaupt das bereits errechnete bestätigen. Kleinste Änderungen bei den Integrationsparametern reichen hier bereits aus, um ein vollkommen anderes Signal zu erzeugen, sodass dieses Ergebnis nur eines einer Vielzahl an in Frage kommenden Resultaten darstellt.

**Zusammenfallen der Sprünge** Während nun die Exzentrizität großen irregulären Schwankungen unterworfen ist, verbleibt die große Halbachse dahingegen in einem klar abgegrenzten Bereich. In Bezug auf die hohen Änderungsraten in  $e$ , zeigt die große Halbachse zunächst erstaunlich unauffälliges Verhalten: die maximale Änderung in Relation zum Ausgangswert liegt bei dieser Simulation von  $\kappa_M = 30$  unterhalb einer Promille, was gemessen am destabilisierenden Einfluss der Venus somit sehr marginal ausfällt. Interessanterweise zeigen sich die größten Schwankungen dabei am Anfang dieser Integration, also nicht in jenem Bereich wo die maximalen Exzentrizitäten zu beobachten sind. Dies lässt sich durch die Entwicklung der Sprünge für größere Massenfaktoren erläutern. Dadurch dass die jumps konvergieren, also mit zunehmender Integrationszeit immer kleiner werden, fallen sie in begrenzter Zeit in sich zusammen. Dabei geht dieser Vorgang umso schneller vonstatten, je größer die Masse des Mars ist. Während dieses Zusammenfallen bei einem  $\kappa_M$  von  $\sim [20]$  noch eine Zeitdauer von zirka 20 Myrs in Anspruch nimmt, so sinkt diese Zeit für  $\kappa_M = 30$  bereits auf ziemlich genau die Hälfte.

Dabei bleibt das vorherrschende Muster in den allermeisten Fällen dasselbe: die jumps werden immer kleiner, bis sie sich in etwa der Mitte treffen. Die große Halbachse verharrt dann für begrenzte Zeit konstant auf diesem mittleren Wert. Es mag damit zunächst der Eindruck entstehen, dass diese Konfiguration fortan beibehalten würde, da das chaotische Signal der Sprünge nunmehr verschwunden ist. Allerdings handelt es sich bei diesem mittleren Wert, auf welchen die jumps für die meisten Simulationen zusteuern, um einen äußerst instabilen Punkt. In weiterer Folge zeigt sich nämlich stets irreguläres Verhalten in den großen Halbachsen von Erde und Venus, sodass ein erneutes Auseinanderfallen derselben beobachtet werden kann. Dieser kritische Wert, auf den die großen Halbachsen stets zustreben, und der daraufhin stets starke Störungen in den Bahnen bewirkt, beträgt für die Erde  $\sim 0.9999$  AU und für die Venus  $\sim 0.7234$  AU.

Auffällig ist vor allem, dass sich dieses selbe Verhalten für unterschiedliche Massenfaktoren wiederholt. Da das Auftreten von Sprüngen in nahezu allen Fällen mit einem stetigen Konvergieren der großen Halbachsen hin zu jenem mittleren Wert verbunden ist, lässt sich auf die Existenz eines dynamischen Zusammenhangs zwischen den Sprüngen und dem Niveau eben dieses definierten Wertes schließen. Dies wird untermauert von der Tatsache, dass auch beim Auftreten von verschiedenen großen Sprüngen der Wert von  $0.9999$  AU stets genau im Zentrum derselben liegt; d.h. die jumps erfolgen unabhängig von der jeweiligen Anfangs-Konfiguration und vom Massenfaktor immer genau um diesen gleichen Wert als Zentrum herum. Da sich dieses Verhalten nur für

die beiden innersten Planeten allein ergibt, liegt die Ursache dafür denn auch in der dynamischen Anordnung von Erde und Venus. Der Mars mit seiner vergrößerten Masse mag hingegen nur jenen externen Störer darstellen, der die beiden inneren Planeten für dieses Verhalten empfindlich macht.

Somit lässt sich festhalten, dass die diskreten Werte von 0.9999 AU für die Erde und 0.7234 AU für die Venus - auf welche die jumps immer zustreben - zwei exponentierte Niveaus darstellen, die in Verbindung zueinander eine weitreichende Störung des anderen Himmelskörpers zur Folge haben. Bemerkenswert ist dies vor allem aufgrund der Tatsache, dass diese Niveaus nur 0.01 % von den jeweiligen Anfangswerten entfernt liegen. Da das Vereinfachte Sonnensystem mit aktuellen Halbachsen jedoch eine bemerkenswert stabile Konfiguration darstellt, unterstreicht dies die Besonderheit dieser Niveaus. Denn wegen einer derart marginalen Änderung in den großen Halbachsen lässt sich normalerweise keine dermaßen extreme Veränderung des Systems beobachten. Im gegenwärtigen Fall jedoch hat das Erreichen dieser Niveaus stets zur Folge, dass starkes Chaos in den beiden Orbits auftritt. Es lässt sich somit schlussfolgern, dass die Konstellation der beiden inneren Planeten hierbei trotz dieser nur minimalen Änderung eine vollkommen andere ist als im Ursprungszustand. In Bezug auf die Ursache der Störungen lässt sich das Problem somit stark einschränken, da es nicht unbegrenzt viele Möglichkeiten gibt, ein dermaßenes Störsignal durch eine nur 0.01 %-ige Änderung der Halbachsen zu erzeugen.

#### $\kappa_M \sim 45$

Was nunmehr die Auswirkungen auf die Stabilität von Erde und Venus angeht, so zeigen sich die Folgen dieser Konstellation als gravierend. Sobald nämlich die großen Halbachsen auf diese instabilen Niveaus kommen, zieht dies denn auch in den meisten Fällen eine entsprechende Reaktion in den Exzentrizitäten nach sich. Sobald diese wiederum stark genug geworden sind, damit orbit crossing ermöglicht wird, bewirkt dies unweigerlich nahe Begegnungen zwischen diesen beiden Planeten. Die Folgen davon sind im Plot für  $\kappa_M = 45$  der Abb. 3.7 dargestellt. Dabei sind die großen Halbachsen der drei terrestrischen Planeten abgebildet, wobei der Mars in diesem Fall die 4.78-fache Masse der Erde besitzt. Vergleicht man nun seine Bahn mit jenen der beiden anderen Planeten, so zeigt sich relativ gesehen eine einigermaßen Unabhängigkeit derselben von den Vorgängen weiter drinnen im System, vor allem gegen Anfang der Simulation. Der Mars verändert seine große Halbachse während des Verlaufs der Integration nämlich nur um 7.5 %, während

die beiden inneren Planeten in willkürlich anmutenden dramatischen Schwankungen ständig ihre Positionen tauschen.

Bedingt durch die wohlbekannt dynamische Kopplung zwischen Erde und Venus zeigt sich ein symmetrisches Bild derer Halbachsen. Dies ändert sich ab 13.5 Myrs; dieser Zeitpunkt markiert das letzte Aufeinandertreffen der beiden großen Halbachsen im Verlauf der Integration. In weiterer Folge ist dann ein Aufbrechen der dynamischen Kopplung zu beobachten. Dieser Vorgang wird durch ein immenses Anwachsen der Exzentrizitäten verursacht, welche eine Vervielfachung des Einflusses vom Mars auf die Bewegung der - nun weiter außen liegenden - Venus bewirkt. Die maximale Exzentrizität der Venus für diesen Massenfaktor beträgt nämlich 0.565, jene des Mars immerhin 0.223. Das Verhalten der Exzentrizitäten hat wiederum zur Konsequenz, dass die Venus im Verlauf der Simulation in die Marsbahn eindringt und somit dessen starkem gravitativen Einfluss unterliegt. Dies wirkt sich, wenn auch schwächer, ebenfalls als Störung für den Mars aus, der gegen Ende der Integrationszeit ebenfalls Schwankungen in der großen Halbachse zeigt. Dieser Fall könnte letztlich zur Folge haben, dass die Venus nach einer Reihe von Bahnkreuzungen irgendwann dem Mars sehr nahe kommen und dadurch von ihm aus dem inneren Sonnensystem hinausgestört würde.

Des Weiteren zeigt sich im Signal eine extreme Sensitivität von den Anfangsparametern. Dieser gemeinhin als Schmetterlingseffekt bekannte Prozess wirkt sich im vorliegenden Fall für  $\kappa_M = 45$ , sowie allgemein für die meisten Fälle bei  $\kappa_M > 30$  dahingehend aus, dass das Ergebnis der Integration nicht mehr als Vorhersage des tatsächlichen Verhaltens gewertet werden kann. Denn da durch die Störungen eines massereicheren Mars nahe Begegnungen der beiden inneren Planeten hervorgerufen werden, ergeben sich zwangsläufig immense Bahnänderungen bei diesen beiden. Diese aber können niemals exakt berechnet werden, da sie zu empfindlich von Faktoren sind, auf welche man bei der Simulation keinen Einfluss hat. Die begrenzte Rechengenauigkeit wirkt sich hier ebenso problematisch aus wie die Fehlergrenzen bei den Anfangsbahnelementen.

#### $\kappa_M \sim 100$

Besonders beispielhaft zeigt sich das irreguläre Verhalten bei jenen Massenfaktoren, wo der Mars über die Masse eines Gasriesen, bzw. einer sehr massiven Super-Erde verfügt. Es bestätigt sich hierbei erneut, dass eine signifikante Steigerung von  $\kappa_M$  jeweils eine Verminderung der Stabilität der beiden in-

neren Planeten nach sich zieht. D.h., für  $1 \leq \kappa_M \leq \sim 100$  zeigt sich jeweils aufs Neue der Grundsatz, dass je massereicher der Mars ist, umso instabiler die anderen beiden terrestrischen Planeten werden. Obwohl dies auch durchaus so erwartet worden wäre, sollte diese Entwicklung aber nicht als automatisch angesehen werden. Bei der Untersuchung der Stabilität von verschiedenen Planetensystemen zeigt sich nämlich durchaus das Verhalten, dass die Vergrößerung einer der Massen nicht zwangsläufig negative Folgen für die umliegenden Planeten haben muss. Im vorliegenden Fall hingegen zeigt sich durchaus der eindeutige Trend, dass bei einer Vergrößerung der Marsmasse die Bahnen der inneren beiden Planeten zunächst immer irregulärer werden.

Dies bezieht sich in besonderem Maße auf die Erde. Es lässt sich nämlich beobachten, dass die Störung der Erdbahn bei einer Erhöhung von  $\kappa_M$  stärker ausfällt als jene bei der Venus. Die Konsequenz desselben ist somit in den meisten Fällen, dass die Erde von allen fünf Planeten des Vereinfachten Sonnensystems die größten Veränderungen ihrer Bahneigenschaften verzeichnet. Da die Störungen des Mars mit größerem Massenfaktor immer stärker werden, führt dies für  $\kappa_M \sim 100$  zu einer Ejektion eines der Planeten. Hiervon ist sodann in den meisten Fällen die Erde betroffen. Dies erklärt sich auch durch die unmittelbare Nähe der Erde zum massereichen Mars, wohingegen die Venus durch ihre größere Entfernung etwas geschützter ist. Die Erdbahn hingegen wird von außen und durch ihre hohe Exzentrizitäten zudem von innen gestört, sodass sie nur in seltenen Fällen im inneren Sonnensystem verbleibt.

#### **$300 \leq \kappa_M \leq 500$**

Das Rauswerfen der Erde aus dem System ist die natürliche Konsequenz einer immer stärker werdenden Störung vom Mars, bedingt durch eine Vergrößerung dessen Masse. Es ließe sich somit vermuten, dass eine weitere Vergrößerung des Massenfaktors ebenfalls zusätzliche Störungen bewirkt, sodass dadurch beispielsweise alle beiden inneren Planeten aus dem System hinausgeworfen werden. Dem ist aber nicht so: überraschenderweise führen sehr hohe Werte von  $\kappa_M$  wieder zu mehr Stabilität im inneren Sonnensystem! Äußerst bemerkenswert zeigt sich diese Entwicklung ab einem Massenfaktor von [300], wie in Tabelle 3.4 ersichtlich. Für diesen Fall wäre der Mars zweifellos ein Gasriese, der hierbei über mehr als das 30-fache der Erdmasse verfügen würde. Aufgrund der verhältnismäßigen räumlichen Nähe zur Erde hat dies einen gewaltigen gravitativen Einfluss für den Blauen Planeten sowie auch für die Venus zur Folge. Umso unvorhergesehener ist daher das

**Tabelle 3.4:** Die Änderungen der großen Halbachse  $a$ , Exzentrizität  $e$  und Inklination  $i$  der Erde im Bereich  $\kappa_M \in [50, 500]$ . Die  $\Delta$ 's stehen für die maximale Abweichung der jeweiligen Größe vom Anfangswert binnen einer Integrationszeit von 20 Myrs.

$\kappa_M$	$\Delta a$ [AU]	$\Delta e$	$\Delta i$ [Grad]
50	<b>escape</b>	<b>1</b>	38.5
100	0.293	0.617	38.9
150	<b>escape</b>	<b>1</b>	36.7
200	0.271	0.770	31.9
250	0.295	0.626	13.0
300	$0.97 \times 10^{-3}$	0.173	7.8
350	$1.04 \times 10^{-3}$	0.165	6.4
400	$1.11 \times 10^{-3}$	0.170	6.8
450	$1.33 \times 10^{-3}$	0.168	6.4
500	$1.35 \times 10^{-3}$	0.167	6.7

Resultat, dass für  $\kappa_M \geq 300$  wieder ein hohes Maß an Stabilität im inneren Sonnensystem einkehrt. Während für die Massenfaktoren davor stets immense Bahnänderungen, sowie sehr oft auch die Ejektion eines Planeten aus dem System beobachtbar war, verschwindet dieses Verhalten wieder für sehr große  $\kappa_M$ 's.

Trotz der Existenz eines Gasriesen im inneren Sonnensystem überrascht dieses also durch sehr reguläres Verhalten für alle einzelnen Himmelskörper: jeder der Planeten verbleibt dabei auf der ihm angestammten Bahn. Für die Integrationen der Region  $300 \leq \kappa_M \leq 500$  zeigt sich nur ein einziges Mal chaotisches Verhalten, nämlich bei einem Instabilitätsfenster im Bereich bei  $\kappa_M = 375$ . Dies wiederum stellt ein wohlbekanntes Merkmal für die Umgebung von chaotischen Regionen dar. Obwohl ab einem Massenfaktor von [300] das Planetensystem wieder stabiles Verhalten aufweist, zeigen sich doch Effekte des unmittelbar davor wirkenden starken Chaos. Dies erstreckt sich nämlich bis zu einem Massenfaktor von [275] - und hinterlässt weiters sporadische Fenster darüberhinaus, in welchen sich dieses Verhalten dann erneut zeigt. Dieses Ergebnis deckt sich sehr gut mit den allgemeinen Erfahrungen der Untersuchung von Stabilität und Chaos.

Der Bereich für sehr große Marsmassen führt somit zu stabilen Bahnelementen von Erde und Venus, sodass selbige entsprechend ohne Störungen untersucht werden können. Interessant ist dies vor allem dahingehend, dass

das Muster der jumps in der großen Halbachse für  $\kappa_M > 10$  bedingt durch die starken Störungen nicht mehr richtig sichtbar war und später sogar ganz verschwunden ist. Da die Störungen des Mars für sehr große Massenfaktoren ja aber wieder zurückgehen, könnte das Auftreten von jumps somit auch in diesem Bereich wieder erneut möglich werden. Eine entsprechende Untersuchung der Plots ergibt diesbezüglich gemischte Ergebnisse: zwar zeigen sich in den allermeisten Simulationen keine Anzeichen mehr für die Existenz von Sprüngen. Doch es gibt auch einzelne Fälle, in denen ein erneutes Auftreten des Signals zu beobachten ist, wenngleich auch in veränderter Form. Die Integrationen für  $\kappa_M = 225$  und  $\kappa_M = 450$  (Abb. 3.7) ergeben nämlich deutliche Sprünge in den Halbachsen wiederum von Erde und Venus. Dies ist in jener Hinsicht interessant, als alle anderen Integrationen für den Massenfaktor  $\in [200, 500]$  keinerlei vergleichbares Signal aufweisen.

**Neuerliches Auftreten von Sprüngen** Die Existenz der jumps in diesem Bereich für hohes  $\kappa_M$  ist somit festgestellt; ihr Vorkommen ist jedoch bedeutend geringer als jenes bei den sehr niedrigen Massenfaktoren. Doch nicht nur die Häufigkeit derselben hat sich verändert, auch die Erscheinungsform der Sprünge ist eine andere geworden. Zum einen ist das Phänomen der Elongationen hier nun gar nicht mehr ersichtlich. Und bei den jumps selber sind die Schwankungen in der großen Halbachse im Vergleich zu den anderen Sprüngen aus dem niedrigen Massenbereich signifikant größer geworden; zudem befinden sich auch deren Zentren nun auf einem leicht veränderten Niveau. Die Sprünge nach außen führen nun nämlich nicht mehr auf 1.0000 AU, sondern der mittlere Wert befindet sich 0.0001 AU darüber. Im Gegenzug gelangt die große Halbachse bei einem Sprung nach innen nicht mehr auf 0.99977 AU, sondern das Zentrum der Bewegung liegt hierbei nun bei 0.9995 AU.

Neben dieser Positionsänderung wird die neue Form der Sprünge in diesem Bereich vor allem durch eine Erhöhung der Schwingungsbreite herbeigeführt. Während die natürliche Schwankung der großen Halbachse bei jenen Sprüngen, die noch am Anfang der Simulationsreihe bei kleinen  $\kappa_M$ 's vorkamen, noch unterhalb von 0.0001 AU lag, zeigt sich bei dieser Form von jumps eine deutliche Vergrößerung derselben. Diese Schwingung hat hier nämlich eine Breite von über 0.001 AU, was einer Steigerung von mehr als dem Faktor 10 des ursprünglichen Werts gleichkommt. Dieses Verhalten lässt sich auf die gravitative Störung des Gasriesen Mars zurückführen. Denn auch für alle anderen Simulationen in dieser Region von  $\kappa_M$ , für welche im Gegensatz hierzu jedoch keine Sprünge beobachtet werden können, zeigt die große Halbachse dieselbe Schwingungsbreite von 0.001 AU. Bedenkt man, dass diese Region

für  $\kappa_M$  unmittelbar auf jene andere Region folgt, in welcher jeweils ein Planet aus dem System hinausgeschmissen wurde, so mag man diese Schwankung noch als sehr gemäßigt erachten.

**Signal der Exzentrizität** Dies zeigt sich ebenfalls an der dazugehörigen Exzentrizität. Diese verläuft für die hier behandelte Integration von  $\kappa_M = 450$ , wo sich die modifizierten jumps in der großen Halbachse zeigen, erstaunlich regulär. Die Exzentrizität oszilliert dabei zwischen einem minimalen Wert von 0.0006 und einem maximalen von 0.186, wobei es eine hohe Regelmäßigkeit aufweisen kann. Bei der Analyse der Oszillation lässt sich dabei eine Überlagerung von zwei verschiedenen Signalen feststellen. Das längerperiodischere davon führt zu einer sich wiederholenden Größenänderung der Schwingungsbreite der Oszillation zwischen einem Wert von 0.09 und 0.18, innerhalb eines Zeitraums von etwa 110,000 Jahren. Unabhängig von der sich somit ändernden Amplitude zeigt sich in diesem Muster eine weitere kurzperiodische sinusoidale Schwingung mit einer quasi-konstanten Periode um die 10,000 Jahre. Dies stellt einen weiteren Unterschied zu den anderen jumps dar, da solch ein Muster bei deren zugehörigen Exzentrizitäten nicht zu beobachten war.

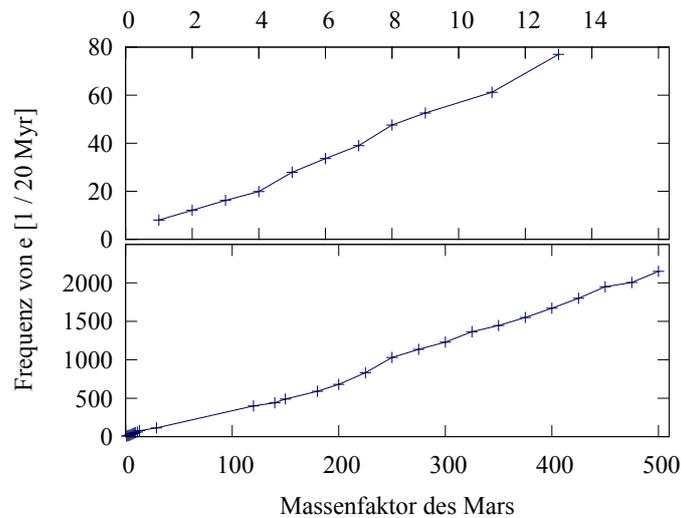
Nichtsdestotrotz zeigt sich auch ein evidenter Zusammenhang: die Frequenz der großen Oszillationen der Exzentrizität ist bereits für geringe  $\kappa_M$ 's mit jedem nächsthöheren Massenfaktor weiter angestiegen. Sobald der Mars in den Simulationen jedoch massereicher als die Erde geworden ist, wurden die chaotischen Einflüsse hierdurch dermaßen stark, dass wegen der Verzerrung des Signals eine weitere Analyse der Frequenz der Exzentrizitäten nicht mehr möglich war. Da nun aber diese Störungen für die sehr großen Massenfaktoren wieder abgeklungen sind, lassen sich auch die Oszillationen in den Exzentrizitäten wieder erkennen. Da hierdurch die Frequenz wieder zutage tritt, lässt sich selbige in einen Zusammenhang mit den anderen Frequenzen für die sehr kleinen  $\kappa_M$ 's bringen. Dies führt zu einer Bestätigung des Trends, der sich bereits für kleine Marsmassen angedeutet hatte. Es existiert eine nahezu lineare Korrelation zwischen der Masse des Mars und der Frequenz in den Exzentrizitäten der Erde.

## 3.3 Dynamische Zusammenhänge

### 3.3.1 Verhalten der Exzentrizitäten

#### Abhängigkeit von $\kappa_M$

Die Korrelation zwischen der Frequenz der periodischen Störungen und der Größe von  $\kappa_M$  ein Aspekt, der es wert ist genauer betrachtet zu werden. Die Anzahl der Oszillationen in der Exzentrizität der Erde ist nämlich für jede Erhöhung des Massenfaktors angestiegen, wobei es bei diesem Prozess keine einzige Ausnahme gab. Betrachtet man nun die Steigerung der Frequenz der Änderungen der Exzentrizitäten vom quantitativen Standpunkt aus, so lassen sich bemerkenswerte Eigenschaften hierin feststellen.



**Abbildung 3.8:** Die Frequenz der Schwingungen in der Exzentrizität der Erde, in Abhängigkeit von der Masse des Mars. Die y-Achse gibt jeweils an, wieviele Oszillationen in der Exzentrizität binnen eines Integrationszeitraums von 20 Myrs vorkommen. Dies zeigt sich als eine Funktion des Massenfaktors, der aufgeteilt auf zwei Bereiche dargestellt ist. Der obere Plot zeigt die Region  $\kappa_M \in [1, 13]$ , während der untere Plot den gesamten Simulationsbereich für  $\kappa_M \in [1, 500]$  darstellt. Bei manchen  $\kappa_M$ 's (z.B. 10, 12) konnten die Frequenzen aufgrund von Störungen dabei nicht mehr bestimmt werden. Die Achsenverhältnisse der beiden Diagramme sind identisch, sodass die Steigungen der beiden Graphen untereinander verglichen werden können.

In Abbildung 3.8 ist die Frequenz der Änderungen der Exzentrizitäten der Erde - und somit auch die Frequenz der Spitzen in der großen Halbachse - für verschiedene  $\kappa_M$ 's dargestellt. Da der Bereich von  $30 \leq \kappa_M \leq 110$  durch das Auftreten von starkem Chaos geprägt ist, sind in diesen Integrationen auch keine Oszillationen in den Exzentrizitäten mehr ersichtlich. In den daran direkt benachbarten stabilen Bereichen der  $\kappa_M$ 's der Simulationsreihe hingegen kann die große Halbachse ab einem gewissen Zeitpunkt zwar immer noch instabil werden; allerdings zeigt sich hier zumindest für einen beschränkten Zeitraum lang reguläres Verhalten in den Halbachsen und Exzentrizitäten. Dies eröffnet die Möglichkeit, während dieses stabilen Zeitraums die Frequenz der Oszillationen in der Exzentrizität zu untersuchen, und diese dann auf die Zeitdauer der 20 Myrs zu interpolieren. In den daran anschließenden Bereichen schließlich ( $\kappa_M \leq 7$  sowie  $\kappa_M \geq 300$ ) zeigt sich wieder soweit stabiles Verhalten, dass die Schwingungen in der Exzentrizität über die vollen 20 Myrs stabil bleiben.

Bei der Analyse der Oszillationen in der Exzentrizität zeigt sich ein fundamentaler Zusammenhang. Die Frequenz der Schwingungen erhöht sich nämlich signifikant linear mit der Masse des Mars. Im oberen Plot aus der Abb. 3.8 ist dabei jener Bereich für  $\kappa_M$  dargestellt, in welchem sich auch die periodischen Elongationen und Sprünge in den großen Halbachsen zeigen. Da die Marsmasse von ihrem aktuellen Niveau aus mit jeder Simulation immer nur vergrößert wurde, ist [1] hierbei der Mindestwert für  $\kappa_M$ . Wenn man den Trend aus dem Plot nun umkehren würde für kleinere Massenfaktoren, so würde die Frequenz der Schwingungen für einen infinitesimal kleinen Massenfaktor etwa 0 ergeben.

#### **Die Venus-Exzentrizität**

Sehr diskret zeigt sich weiters der Einfluss der Marsmasse auf die Exzentrizität der Venus. Wie bekannt, ist für  $\kappa_M = 1$  eine starke dynamische Kopplung mit der Erde gegeben, die sich am Verlauf der beiden Exzentrizitäten eindrucksvoll ablesen lässt. Doch je massereicher der Mars wird, umso mehr gerät die Bahn der Erde in seinen Einflussbereich. Für einen massiven Mars ergibt sich somit der Umstand, dass die Erde ihre Kopplung mit der Venus langsam verringert um mit steigendem  $\kappa_M$  ihren Bahndrehimpuls immer mehr mit dem Mars auszutauschen. Dies hat für die hier behandelten Exzentrizitäten zur Folge, dass jene der Venus sich dann grundlegend anders entwickeln als diejenigen der Erde. Die dargestellte lineare Abhängigkeit der Erd-Exzentrizitäten von der Marsmasse gilt somit für  $\kappa_M > 100$  nur mehr für sie selber, und nicht

mehr hingegen für die Venus. Die Frequenz der Venus-Exzentrizitäten steigt zwar in Abhängigkeit von  $\kappa_M$  weiter an, allerdings verringert sich die Steigung mit jeder weiteren Erhöhung des Massenfaktors immer mehr. Der anfänglich lineare Verlauf wie bei der Erde geht somit über in eine zunehmend logarithmische Funktion.

#### Form der Exzentrizitäts-Änderungen

Die einzelnen Datenpunkte im genannten Diagramm weichen für die Erde nur geringfügig vom Fit einer geradlinigen Funktion ab, welche den Nullpunkt des Diagramms schneidet. Dieses Verhalten zeigt sich ebenso für den anderen Plot, der die Frequenzen der Erd-Exzentrizitäten bis zum Massenfaktor [500] beschreibt. Obwohl hierbei im Intervall von  $\kappa_M \in [30, 110]$  aufgrund des stark chaotischen Verhaltens keinerlei Daten mehr extrahiert werden konnten, verbinden sich die Werte davor und danach zu einer Geraden mit vergleichbarer Steigung wie im Gesamtbereich. Dies bestätigt den konstanten bleibenden Einfluss des Massenfaktors, unabhängig vom betrachteten Bereich. Die Schwingungen in den Exzentrizitäten für  $\kappa_M \geq 120$  präsentieren sich weiters sehr regelmäßig und zeigen weniger lokale Abweichungen von ihrer Grundform. Für  $\kappa_M \geq 300$  schließlich fallen letztere Störeinflüsse in den meisten Fällen komplett weg und die Schwingungen nehmen eine nahezu perfekte sinusoidale Form an, die sich im weiteren Verlauf einzig noch in der Amplitude verändert. Die vorliegende Frequenzen könnte nun des Weiteren auf das Vorhandensein einer säkularen Resonanz hindeuten. Dies, da der Einfluss derselben ebenfalls linear mit der Masse geht.

#### Bezug der Exzentrizität zur Länge des Perihels

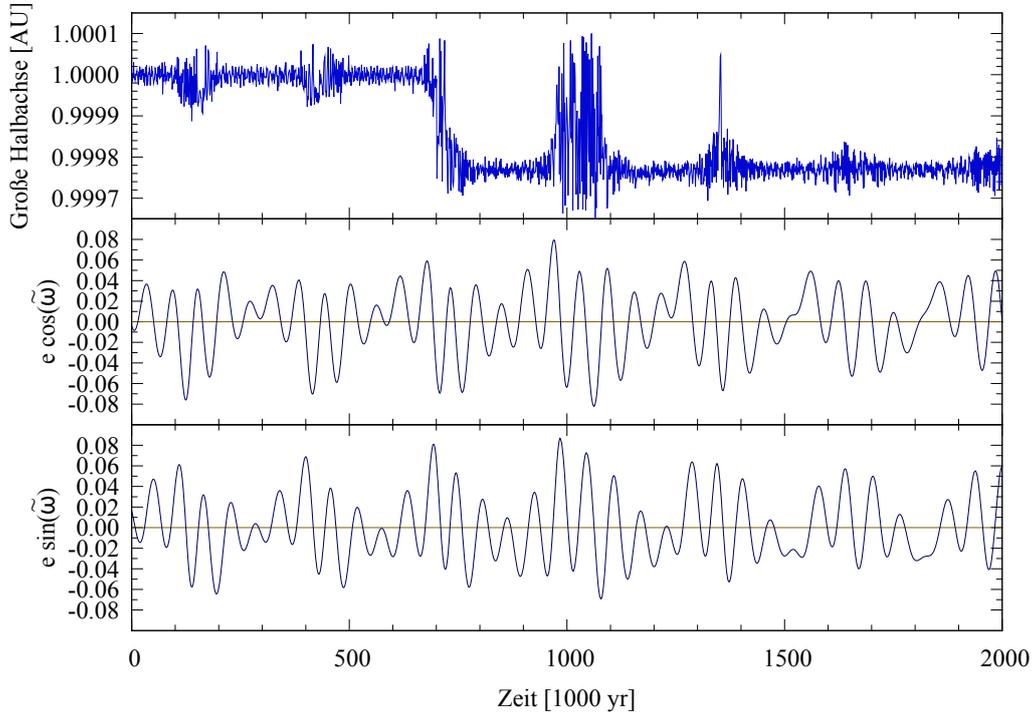
In Abbildung 3.9 ist für die Simulation von  $\kappa_M = 12$  ein Vergleich zwischen der großen Halbachse der Erde und den Parametern

$$k_1 = e \cos(\tilde{\omega}) \quad (3.12)$$

und

$$k_2 = e \sin(\tilde{\omega}) \quad (3.13)$$

dargestellt. Diese sind wichtige dynamische Größen und bringen die Änderung der Lage des jeweiligen Orbits in Verbindung zu seiner Exzentrizität.  $k_1$  und  $k_2$  zeigen dabei erwartungsgemäß eine sehr gute Korrelation zu den Störungen der Halbachse, da diese sich ja auch in der Exzentrizität niederschlagen. Somit erreichen sowohl  $k_1$  und  $k_2$  jeweils dann ihre größten Absolutwerte, wenn



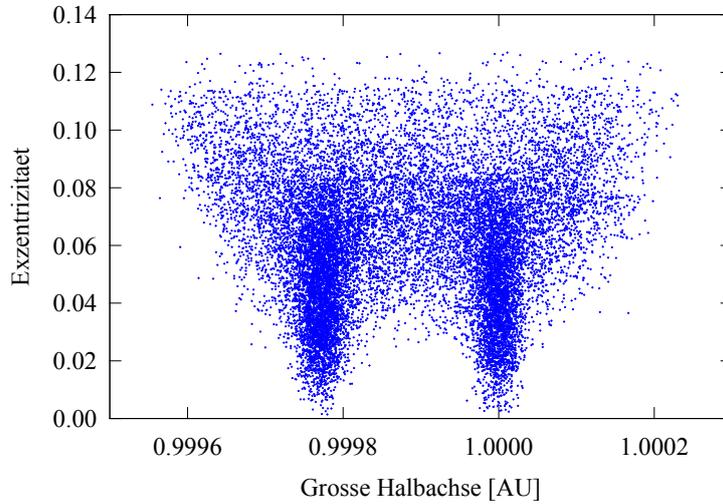
**Abbildung 3.9:** Die große Halbachse der Erde (oben) mit den Parametern  $k_1$  (mit-  
ten) und  $k_2$  (unten), für die Simulation von  $\kappa_M = 12$ . Aus Gründen der besseren  
Erkennbarkeit wurde hierbei ein Teilausschnitt von 2 Myrs abgebildet.

sich eine Elongation oder ein Sprung in der großen Halbachse zeigt. In den  
Bereichen dazwischen, wo keine Störung ersichtlich ist, verbleiben die Abso-  
lutwerte von  $k_1$  und  $k_2$  unterhalb von 0.04. Gut ersichtlich ist außerdem das  
Merkmal der Störung, dass die Länge des Perihels bei Auftreten derselben  
rotiert. Dies äußert sich im Plot durch eine Oszillation zwischen positiven  
und negativen Werten. Bei Libration hingegen geht diese wieder zurück, wie  
andeutungsweise zwischen den Störungen erkennbar.

### 3.3.2 Zusammenhang der Exzentrizitäten mit den großen Halbachsen

$$0 \leq e \leq 0.02$$

Die hohe Kopplung zwischen den Oszillationen in der Exzentrizität und den  
Spitzen in der großen Halbachse ist ein Aspekt, der dieses Signal besonders  
interessant macht. Betrachtet man nämlich Abbildung 3.10, so lässt sich die-  
ser Zusammenhang dort besonders anschaulich ablesen. Für niedrige Exzen-



**Abbildung 3.10:** Die Exzentrizität aufgetragen gegen die große Halbachse der Erde bei  $\kappa_M = 12$  (siehe dazu auch die Abb. 3.9 und 3.11). Gut sichtbar sind die beiden diskreten Niveaus auf 1.00000 AU und 0.99977 AU, zwischen den die große Halbachse hin- und herspringt.

trizitäten ( $\leq 0.02$ ) befindet sich die große Halbachse ständig auf einem der beiden exponierten Werte von 1.00000 oder 0.99977 AU. Ihre Positionen zwischen diesen beiden Niveaus wechselt sie ausschließlich über schnell vonstatten gehende Sprünge, welche im Exzentrizitäts-Bereich unmittelbar darüber erst beginnen. D.h., für sehr kleine Exzentrizitäten kann es auch zu keiner Bildung von jumps kommen. Die große Halbachse verbleibt hierbei stationär auf einem der beiden Niveaus, mit einer Schwankungsbreite von nur  $5 \cdot 10^{-5}$  AU.

#### $e > 0.02$

Erst ab einer Exzentrizität von  $> 0.02$  kann es zur Ausbildung von ersten Sprüngen kommen, wobei diese bis 0.03 nur in vereinzelten Fällen auftreten, und sich ab einem Wert von 0.04 häufen. Gleichzeitig lässt sich eine deutliche Vergrößerung der Schwankungsbreite der großen Halbachse feststellen. Bis zu einer Exzentrizität von 0.08 befindet sich die große Halbachse zwar immer noch die meiste Zeit auf einem der beiden diskreten Niveaus, doch die Auslenkungen sind hier bereits von der Größe, dass sie den jeweils anderen diskreten Wert erreichen. In weiterer Folge ergibt sich dann, dass sich das Muster der jumps für Exzentrizitäten  $> 0.08$  ganz auflöst; die große Halbachse weist in diesem Fall eine Schwankung über den gesamten Bereich

auf, von 0.9996 AU bis 1.0002 AU. D.h., für  $e > 0.08$  ergibt sich keinerlei erhöhte Aufenthaltswahrscheinlichkeit der großen Halbachse mehr für ein gewisses Niveau. Stattdessen zeigt sich in diesem Bereich eine nahezu homogene Häufigkeitsverteilung der großen Halbachse.

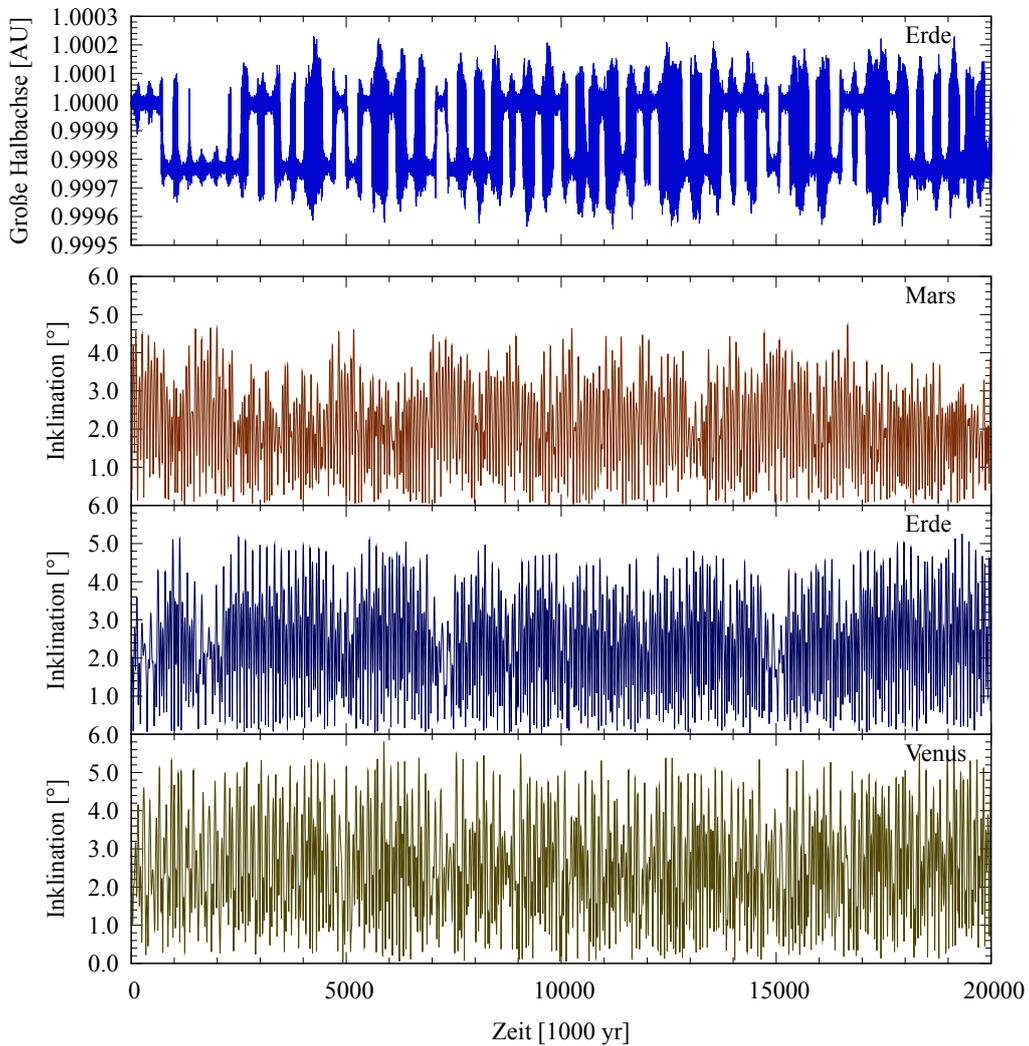
#### Folgerungen

Somit ergibt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der großen Halbachse und der Exzentrizität. Der Verlauf der Exzentrizität ist dabei geprägt von einer etwa linearen Vergrößerung der Schwingungsbreite der großen Halbachse. Dies resultiert in einer einprägsamen Form des Signals, das sich somit aus zwei gleichschenkligen Dreiecken ergibt, die voneinander um 0.00023 AU verschoben sind. Dieser Effekt schlägt sich im Verlauf der großen Halbachse dahingehend nieder, dass die Auslenkungen derselben direkt aus der Exzentrizität abgeleitet werden können. Aus dem Wert der Exzentrizität lässt sich somit direkt auf das Verhalten der großen Halbachse folgern. Zusätzlich ergibt sich ein Mindestwert der Exzentrizität, unterhalb von welchem das Auftreten von Sprüngen nicht mehr möglich ist. Für  $\kappa_M = 12$  stellt sich dieses Niveau für  $e_{min} = 0.025$ . Für ein regelmäßiges Vorkommen der jumps wiederum wird eine minimale Exzentrizität von 0.04 benötigt. Und jede weitere Steigerung der Exzentrizität erhöht zunächst die Wahrscheinlichkeit für ein Auftreten derselben, bis schließlich oberhalb von 0.08 langsam chaotisches Verhalten beginnt, wodurch das Muster der jumps wiederum zerstört wird.

#### 3.3.3 Vergleich der Inklinationen

Betrachtet man weiters das Verhalten der Inklinationen, so zeigen sich darin gut sichtbare Kopplungen zwischen den drei terrestrischen Planeten. In Abbildung 3.11 ist ein Vergleich der drei Inklinationen für  $\kappa_M = 12$  dargestellt, mit der großen Halbachse der Erde als Bezugssignal. Zu den anderen weiteren Bahnelementen hingegen besteht kein nennenswerter Zusammenhang mehr. Im genannten Diagramm zeigt sich nun zum einen ein ähnlicher Verlauf für die Inklinationen von Erde und Venus. Diese verändern sich über den gesamten Integrationsverlauf hin gemeinsam, sodass deren Bahnen dadurch zumeist fast die gleichen Neigungen aufweisen. Deren Änderungen werden kompensiert durch die Entwicklung der Inklination des Mars. Diese verhält sich nämlich invers zu den anderen beiden, sodass seine Maxima stets mit den Minima der anderen beiden Planeten zusammenfallen und umgekehrt. Dieses Verhalten ist hier für  $\kappa_M = 12$  exemplarisch dargestellt und betrifft genauso die anderen Massenfaktoren in diesem Bereich, wo in etwa die Äquivalenz

### 3 SPRÜNGE IN DEN GROSSEN HALBACHSEN VON ERDE UND VENUS



**Abbildung 3.11:** Die große Halbachse der Erde (1.), sowie die Inklinationen von Mars (2.), Erde (3.) und Venus (4.) bei  $\kappa_M = 12$ ; die Integrationszeit beträgt 20 Myrs. Die Skala der y-Achse ist bei den drei Inklinationen jeweils gleich groß, um die Vergleichbarkeit dieser Bahnelemente untereinander zu gewährleisten.

der Massen des inneren Sonnensystems gegeben ist. Für  $\kappa_M > 30$  hingegen gilt dieser Sachverhalt aufgrund des starken Auftretens von Chaos nicht mehr.

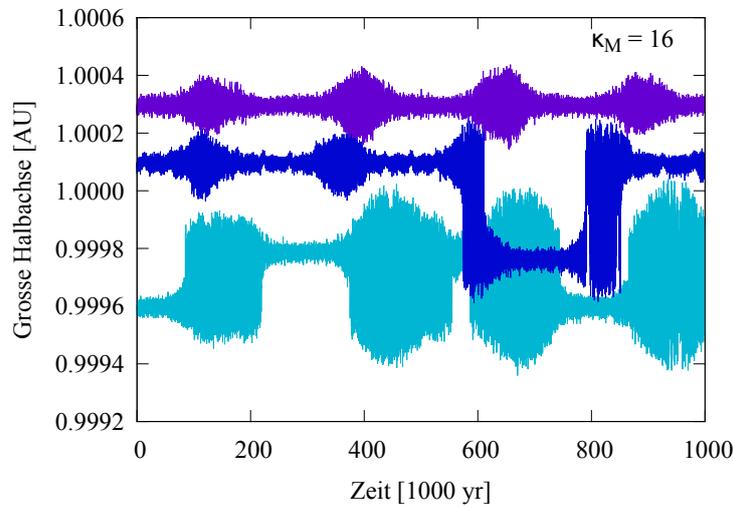
Ein weiteres Merkmal der Inklinationen ist der Zusammenhang zu den Störungen der großen Halbachse. Zwar lassen sich die Zeitpunkte der Sprünge und periodischen Spitzen selber nicht im Signal der Inklinationen identifizieren. Jedoch zeigt sich, dass wann immer die großen Halbachsen von Erde und Venus irreguläres Verhalten zeigen, dies dann auch in den Inklinationen

dieser beiden Planeten ersichtlich ist. Wenn die Änderungen derer Halbachsen hingegen klein sind, dann verbleiben auch die Inklinationen von Erde und Venus auf einem geringeren Niveau. Grundsätzlich lässt sich weiters bemerken, dass die Veränderung der Inklinationen durch die Änderung von  $\kappa_M$  beim Mars anders verläuft als bei den beiden inneren Planeten. Bezogen auf den Ausgangswert von  $\kappa_M = 1$  sind die Inklinationen des Mars durch Vergrößerung des Massenfaktors sukzessive zurückgegangen, wohingegen jene von Erde und Venus dadurch gemeinsam angestiegen sind. Dies hat zur Folge, dass die Größenordnung der Inklinationen in diesem Massenbereich für alle drei terrestrischen Planeten in etwa die selbe geworden ist.

#### 3.3.4 Variation der großen Halbachse

Um also überhaupt das Muster der Sprünge hervorrufen zu können, bedarf es einer äußeren Störung, die die Exzentrizitäten der Erde und auch der Venus anwachsen lässt. Als dieser Störer fungiert im vorliegenden Fall der Mars, dessen höhere Masse wie bereits gezeigt eine Vergrößerung der Exzentrizitäten zur Folge hat. Unabhängig von den Exzentrizitäten spielen aber auch die Positionen der großen Halbachsen eine wichtige Rolle in Bezug auf das Auftreten von jumps. Denn wie im vorigen Abschnitt dargelegt, springen die großen Halbachsen der beiden inneren Planeten immer genau auf das selbe Niveau. Diesbezüglich ist es äußerst interessant zu wissen, welche Rolle dabei den Anfangswerten der großen Halbachse zuteil wird. Da nämlich alle Integrationen die Gemeinsamkeit haben, dass sie von den aktuellen Bahnelementen ausgehen, bleiben die Anfangswerte der großen Halbachse für alle  $\kappa_M$ 's gleich und die Sprünge der Erde geschehen somit stets vom selben Niveau von 1.00000 AU aus. Unter diesem Umstand erscheint es zweckmäßig, die selbe Simulation auch von veränderten Anfangsbedingungen der großen Halbachse aus zu starten. Somit lässt sich der Zusammenhang, nicht nur der Exzentrizitäten, sondern auch der großen Halbachsen mit dem Auftreten der Sprünge besser verstehen. Eine Gemeinsamkeit dieser Simulationen mit verschobener großer Halbachse ist dabei, dass bei Auftreten von Sprüngen die jumps langfristig stets instabil werden.

Die Abbildung 3.12 beschreibt solch einen Vergleich von verschiedenen Simulationen mit unterschiedlichen Anfangswerten der großen Halbachse. Die Anfangs-Bahnelemente der drei dargestellten Integrationen sind bis auf eine Verschiebung in der großen Halbachse der Erde identisch. Und obwohl der Unterschied hierin nur  $7 \cdot 10^{-4}$  AU beträgt, sehen die drei Graphen doch sehr verschieden aus. Dieser Umstand ergibt sich durch die Tatsache, dass



**Abbildung 3.12:** Drei verschiedene Simulationen für jeweils die große Halbachse der Erde, bei einem Massenfaktor von jeweils [16]. Der cyane Graph entspricht einer Verschiebung des Anfangswertes um  $4 \cdot 10^{-4}$  AU nach innen, der blaue einer Verschiebung desselben um  $1 \cdot 10^{-4}$  AU nach außen und beim violetten Graphen wurde die große Halbachse um  $3 \cdot 10^{-4}$  AU weiter draußen gestartet. Die Abbildung stellt einen Integrationszeitraum von 1 Myr dar, da das Signal bei längeren Zeiträumen durch das Auftreten von Chaos überdeckt wird.

die große Halbachse der Erde dabei einmal unterhalb des bevorzugten Werts von 0.99977 AU gestartet wurde (cyan), einmal darüber (blau) und einmal auf einem noch höheren Wert (violett). Diesem Schema lag der Gedanke zugrunde, das Verhalten der Sprünge für gleichen Massenfaktor aber unterschiedliche Anfangswerte der großen Halbachse zu untersuchen. In den Resultaten der Integrationsreihe zeigte sich nämlich immer dasselbe Verhalten, dass die große Halbachse der Erde ihre Position ausnahmslos von 1.00000 AU auf 0.99977 AU und wieder zurück wechselte.

#### $a_{Erde} = 1.0001 \text{ AU}$

Durch eine Verschiebung der großen Halbachse auf ein anderes Niveau kann dadurch getestet werden, inwiefern sich der Wert, auf welchen die Halbachse jeweils springt, ändern wird. Dabei zeigt sich äußerst bemerkenswertes Verhalten. Obwohl nämlich die große Halbachse der Erde sich nun jeweils auf einer anderen Position befindet, geschehen die Sprünge - sofern sie noch vorkommen - trotzdem auf das selbe Niveau. Betrachtet man beispielsweise die Integration mit einem Startwert von 1.0001 AU, so wiederholt sich hier dasselbe bekannte Muster wie in den Simulationen mit unveränderten An-

fangswerten: es zeigen sich periodische Elongationen, die in manchen Fällen zum Auftreten von Sprüngen führen. Letztere jedoch unterscheiden sich in interessanter Art und Weise von den anderen Sprüngen der vorherigen Simulationen mit unveränderter Halbachse. So fallen die jumps hierbei nun um etwa 40 % größer aus als vorher, was einem Sprung von  $3.3 \cdot 10^{-4}$  AU nach innen entspricht. Dies wiederum hat zur Folge, dass sich die große Halbachse nach dem Sprung erneut auf jenem selben exponierten Wert von 0.99977 AU wie bei den anderen Simulationen wiederfindet.

#### **$a_{Erde} = 0.9996$ AU**

D.h., um wiederum auf diesen gleichen Wert zu gelangen, springt die große Halbachse weiter als sonst; während sich somit also die Struktur der jumps verändert, bleibt der Wert, auf den diese jumps springen, unverändert. Dies zeigt auf, dass die Sprünge selber nur eine Folge sind von einer dynamischen Ursache, die durch die Position von Erde und Venus auf eben jenen exponierten Niveaus hervorgerufen wird. Dieser Sachverhalt bestätigt sich erneut für die Integration mit einem Anfangswert der Erde von 0.9996 AU. Hierbei kehren sich die Sprünge sogar um in die gegenteilige Richtung, wieder um auf etwa das selbe Niveau zu gelangen. Umgekehrterweise springt die Venus nun erwartungsgemäß nach innen. Das Verhalten, dass sich die Sprünge umkehren, je nachdem von welcher Seite von  $\sim 0.99978$  AU aus die große Halbachse der Erde gestartet wird, wird dabei auch für Simulationen mit anderen Startwerten immer wieder reproduziert. Es handelt sich somit hierbei um einen fundamentalen Zusammenhang.

#### **$a_{Erde} \geq 1.0003$ AU**

Ein weiterer interessanter Aspekt dieser Integrationen mit verschobener großer Erd-Halbachse ist die Tatsache, dass die Sprünge ausbleiben, wenn der Startwert der Erde sich zu weit vom bevorzugten Niveau von etwa 0.99978 AU weg befindet. Eine Verschiebung der großen Halbachse von mehr als  $5 \cdot 10^{-4}$  AU von diesem Niveau weg verursacht ein Verschwinden der Sprünge, sodass nur mehr die Elongationen selber übrig bleiben. Dieses Verhalten wurde bereits in obigem Plot illustriert und lässt sich weiters auch für andere Integrationen mit jeweils sehr unterschiedlichen Verschiebungen bestätigen; so wurden diesbezüglich verschiedene andere Integrationen ausgeführt, bei denen der Startwert der großen Halbachse jeweils innerhalb des Bereichs von  $10^{-2}$  AU vom aktuellen Wert aus gewählt wurde. Hierin lässt sich für die verschiedenen Simulationen jeweils feststellen, dass die Elongationen auch

dann noch weiterhin vorkommen, sobald das Auftreten von Sprüngen aufgrund genügend großer Verschiebungen der großen Halbachse ausgeschlossen werden kann. Dies wiederum ergibt, dass es sich bei den Sprüngen sowie den Elongationen um zwei unterschiedliche Signale handelt, deren Vorkommen nicht zwangsläufig gekoppelt ist. Im Gegenteil, die Existenz von Sprüngen ist nur innerhalb eines sehr engen Fensters gegeben, das entsprechende Werte in der Exzentrizität sowie der großen Halbachse voraussetzt. Die Elongationen hingegen sind noch weit darüber hinaus möglich und sind in ihrem Verhalten viel weniger sensitiv von Änderungen in den Anfangsbedingungen. Dieser Sachverhalt zeigt sich als Resultat aller Integrationen, bei denen der Anfangswert der großen Halbachse der Erde variiert wurde.

#### **Ausblick**

Nachdem somit das Auftreten der Sprünge und jenes der Elongationen auseinandergehalten werden können, stellt sich nun die wichtige Frage nach der Ursache für jene Tatsache, dass die Sprünge auf immer dieselben Niveaus stattfinden. Die statistische Signifikanz für diese Gegebenheit ist nämlich dermaßen ausgeprägt, dass es sich bei eben diesen beiden Werten zwangsläufig um besondere Niveaus handeln muss; sozusagen, dass der Aufenthalt der großen Halbachsen auf eben diesen Niveaus eine wichtige dynamische Folge für Erde und Venus nach sich ziehen muss. Hierfür kommen zunächst noch verschiedene Möglichkeiten in Frage, die es in weiterer Folge zu reduzieren gilt. Durch die tendenzielle Komplexität des gegebenen dynamischen Systems finden verschiedenste Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Himmelskörpern statt. Um nun unverfälschte Informationen aus dem Verhalten des Systems zu extrahieren, wurden nun nochmals weitere andere Integrationen durchgeführt, bei denen diese Komplexität des Systems schrittweise reduziert wurde.

Im gegenwärtigen dynamischen Fall ergibt sich nämlich eine hohe Überlappung des zu untersuchenden Signals durch andere Effekte, die sich aus der Konstellation der einzelnen Himmelskörper ergeben. Durch eine Simplifizierung des Systems kann dadurch der Einfluss auf die großen Halbachsen von Erde und Venus soweit reduziert werden, dass nur mehr das geforderte Signal der Sprünge selber übrig bleibt. Dies erlaubt dann einen direkten Rückschluss auf die Ursachen, welche für das Auslösen der jumps dann noch in Frage kommen. Um also den Verursacher der Sprünge besser eingrenzen zu können, wurden verschiedenste weitere Simulationen durchgeführt; wie etwa Berechnungen des selben Systems in der Ebene, Veränderungen der großen Halbachsen aller Planeten, Veränderungen der Exzentrizitäten, Weg-

lassen und Hinzufügen bestimmter Planeten, usw.

### 3.3.5 Die 13:8 Mean-motion Resonanz zwischen Erde und Venus

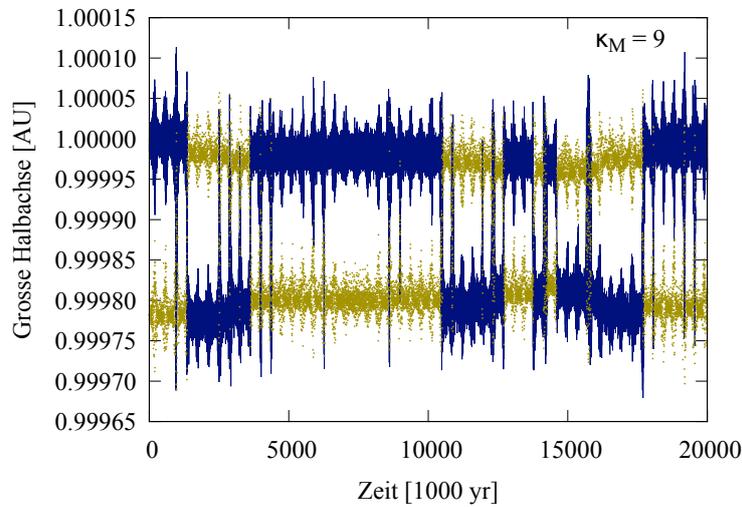
Durch die Analyse dieser Daten ließen sich entsprechende Schlussfolgerungen auf jenen Effekt ziehen, der die Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus verursacht. Als solcher lässt sich nämlich die 13:8 Mean-motion Resonanz (MMR) zwischen Erde und Venus identifizieren. Bereits im aktuellen Fall sind die beiden Planeten nur marginal von der Resonanz getrennt; sie liegt für die Erde bei einer großen Halbachse von 0.999782 AU. Bedingt durch die Störung eines massereicheren Mars kommt es zu jenen Schwankungen in den großen Halbachsen der beiden inneren Planeten, die sie immer weiter in den Einflussbereich der MMR drängen. Durch die stetige Vergrößerung der Spitzen kommen Erde und Venus schließlich immer näher an die Resonanz. Sobald die Spitzen dann elongiert genug sind und somit der exakte Wert der Resonanz erreicht wird, beginnen sich die Sprünge in den Halbachsen dieser Planeten auszubilden.

#### Veränderung der Position der MMR

Das Verhältnis der Sprünge in den großen Halbachsen zur Position der 13:8 MMR ist in Abbildung 3.13 anschaulich dargestellt. Der ockerfarbene Graph gibt dabei jeweils jenen Wert an, auf den die große Halbachse der Erde gelangen müsste, um sich in der 13:8 Resonanz mit der Venus zu befinden. Denn wie schon im vorigen Abschnitt dargelegt, zeigt die Venus aufgrund der dynamischen Kopplung mit der Erde dieselben Sprünge wie diese, nur eben in die gegensätzliche Richtung. Dies wiederum bedeutet, dass sich die Position der MMR genauso mit jedem Sprung der Erd-Halbachse in die dazu gegenteilige Richtung bewegt. Denn die jeweilige Lage der Resonanz für die Erde ergibt sich ausgehend vom 3. Kepler-Gesetz als Funktion der großen Halbachse der Venus, also

$$a_a = \left( \frac{a_i^3 U_i^2}{U_a^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.14)$$

, wobei  $a_a$  hier die große Halbachse des äußeren Planeten,  $a_i$  die große Halbachse des inneren Planeten,  $U_i$  die Anzahl der Umläufe des inneren Planeten und  $U_a$  die dazugehörigen Umläufe des äußeren Planeten angibt. Wenn man nun also in einem ersten Schritt die Lage der 13:8 Resonanz aus der großen Halbachse der Venus bestimmt (und somit zunächst die Länge des Perihels  $\tilde{\omega}$



**Abbildung 3.13:** Der blaue Graph mit einem Anfangswert von 1.0000 AU stellt die große Halbachse der Erde bei  $\kappa_M = 9$  dar. Der ockerfarbene Graph hingegen gibt die dazugehörige Position der 13:8 Mean-motion Resonanz an, welche sich direkt aus der großen Halbachse der Venus errechnen lässt. Der Verlauf ist über einen Integrationszeitraum von 20 Myrs abgebildet.

nicht mitberücksichtigt), so kann dieser Wert schon in Zusammenhang mit der großen Halbachse der Erde gebracht werden. Somit lässt sich diese Position der MMR über den Verlauf der Integrationszeit darstellen und im Vergleich mit der Position der Erd-Halbachse analysieren.

Hierbei zeigt sich ein beeindruckendes Muster. Die MMR startet aus ihrem aktuellen Niveau von 0.999782 AU aus und zeigt in der Folge dieselben periodischen Spitzen wie die Erde. Bedingt durch diese Spitzen kommen die große Halbachse der Erde und die Position der MMR einander in periodischen Zeitabständen sehr nahe, sodass sie bei den peaks derselben nahezu zusammenfallen. Bei 950,000 yrs schließlich ist die Elongation groß genug, um zu bewirken, dass sich Erde und Venus kurzfristig genau in der 13:8 Resonanz (bezogen auf die große Halbachse der Venus, unbeabsichtigt vom Einfluss der Länge des Perihels) befinden. Dieses Ereignis führt bereits zu jener abrupten Richtungsänderung in den großen Halbachsen, die sich in den Diagrammen als spontaner Sprung darstellt. Dabei ergibt sich das Bild, dass das Zusammentreffen der großen Halbachsen mit der Resonanz sich dahingehend äußert, dass die Halbachsen dadurch jeweils auf die andere Seite katapultiert werden, sodass ihr Abstand zur Resonanz danach wieder der selbe ist.

#### **Pendelbewegung um einen mittleren Wert herum**

D.h., bei den Sprüngen wird stets der gesamte Bahndrehimpuls nur zwischen Erde und Venus ausgetauscht, was zu einer Spiegelung der Positionen von großer Halbachse und der MMR vor und nach den Sprüngen führt. Dies erklärt auch den Umstand, dass selbige Sprünge für größere  $\kappa_M$ 's nicht mehr auftreten. Denn dadurch, dass die Erdbahn hierdurch immer stärker in den Einflussbereich des Mars gerät, folgt ein Bahndrehimpulsaustausch auch mit diesem Planeten. Die dynamische Kopplung mit der Venus wird hierdurch sukzessive aufgelöst, was zur Folge hat, dass die Erd-Halbachse und die Position der 13:8 MMR nicht mehr synchron ihre Plätze tauschen können. Denn die großen Halbachsen von Erde und Venus zeigen bei aufgelöster dynamischer Kopplung hierdurch auch verschiedenartige Bewegungen. Dies wiederum führt dazu, dass sich die Position der Resonanz (welche sich ja eben aus der Position der Venus ergibt) auch nicht mehr spiegelsymmetrisch wie die große Halbachse der Erde verhalten kann. Und dadurch fällt die Grundlage für das weitere Auftreten des Signals weg: die zwingende Symmetrie nämlich zwischen der Lage der Resonanz und jener der großen Halbachse.

Denn hierdurch führen die großen Halbachsen von Erde und Venus eine Pendelbewegung mit der Position der MMR aus. Da diese beiden Planeten für die hier relevanten Fälle von  $\kappa_M$  ein Untersystem innerhalb des vereinfachten Sonnensystems bilden, verhalten sie sich lange Zeit so, als ob sie eine von den äußeren Planeten abgeschlossene Bewegung ausführen. Ihre Bahnelemente weisen eine ausgezeichnete Kopplung auf, sowie das charakteristische Signal ihrer großen Halbachsen bleibt sehr lange konstant und verhält sich demgemäß wie ein ungedämpftes Pendel. Nichtsdestotrotz gibt es aber störende Einflüsse der anderen Planeten, welche dazu beitragen, dass dieses Signal eben nicht konstant bleibt. Denn wie bereits dargelegt, lässt sich für jede Simulation - bei genügend hoher Integrationszeit - nach endlicher Zeit ein Zusammenfallen der Sprünge beobachten.

Aufbauend auf den Erkenntnissen über das Verhalten der 13:8 MMR lässt sich somit folgern, dass dieses Zusammenfallen jeweils der Tatsache entspricht, dass Erde und Venus sich nach einer gewissen Zeit genau in die Resonanz bewegen. Da es sich hierbei aber nicht um eine stabile Resonanz handelt - wie etwa die 3:2 MMR zwischen Neptun und Pluto - hat dies entsprechend störende Einflüsse für die Stabilität der beiden Planeten zur Folge. Die Resultate aus den Simulationen demonstrieren, dass das Hineinfallen von Erde und Venus in die exakte Resonanz zu einer starken Ausprägung von Chaos führt. Die Exzentrizitäten ergeben in der Folge unkontrolliertes Anwachsen und die großen Halbachsen zeigen irreguläres Verhalten. Somit stellt das Bild

der Sprünge jeweils nur eine Momentaufnahme dar, welche einem resonance trapping vorausgeht und in weiterer Folge zu Chaos sowie teilweise auch einem Zerfall des Systems führt. Dieser Sachverhalt konnte dadurch festgestellt werden, indem die zunächst stabil wirkenden Systeme mit längerer Integrationszeit weitergerechnet wurden - teilweise bis hin zu 1 Gyr (auch wenn bei jenen Simulationen dann entsprechende Ungenauigkeiten resultieren). Diese Berechnungen führten zur Erkenntnis, dass das Vorkommen der Sprünge letztlich immer zum capture in die MMR führt, welche dann wiederum das Auftreten von Chaos zur Folge hat. Somit lässt sich schlussfolgern, dass das Signal der Sprünge in den großen Halbachsen ein Anzeichen für chaotisches Verhalten ist und auf lange Zeiträume betrachtet zur Instabilität der davon betroffenen Orbits führt.

#### Störungen durch die MMR

Diese Instabilität ist dabei eine natürliche Konsequenz der wirkenden Störungen, die durch die Kopplung der mittleren Bewegungen der beiden Himmelskörper verursacht werden. Den Ableitungen von Dvorak, Freistetter & Kurths (2005) sowie Dvorak (2010) eng folgend lässt sich dies anhand der Delaunay-Elemente erklären. Diese 6 Bahnelemente, welche von dem französischen Mathematiker und Astronomen Charles Eugène Delaunay (1816 - 1872) eingeführt wurden, haben für den jeweils  $i$ -ten Planeten die Form

$$L_i = \kappa_i \sqrt{a} \quad (3.15)$$

$$G_i = L_i \sqrt{(1 - e_i^2)} \quad (3.16)$$

$$H_i = G_i \cos i_i \quad (3.17)$$

$$l_i = M_i \quad (3.18)$$

$$g_i = \omega_i \quad (3.19)$$

$$h_i = \Omega_i, \quad (3.20)$$

wobei hierbei

$$\kappa_i = k^2(m_i + m_0), \quad (3.21)$$

wobei  $k$  die Gauss'sche Gravitationskonstante,  $m_i$  die Masse des jeweiligen Planeten und  $m_0$  hierbei die Masse der Sonne angibt. Diese kanonischen Elemente führen zu den Differentialgleichungen

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\delta F_i}{\delta \gamma_i} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = -\frac{\delta F_i}{\delta \Gamma_i}. \quad (3.23)$$

Hierbei haben die Elemente

$$\Gamma_i = (L_i, H_i, G_i)^T \quad (3.24)$$

jeweils als konjugierte Elemente

$$\gamma_i = (l_i, h_i, g_i)^T. \quad (3.25)$$

$F_i$  hingegen benennt hierbei die Störfunktion, welche wiederum nun in Fourier-Reihen entwickelt werden kann. Wegen der Form der Differentialgleichungen gelangen die Autoren (nach Ableitung in Bezug auf das konjugierte Element und darauffolgender Integration) für das Element  $\Gamma_i$  zum Ausdruck

$$\Gamma_i = \Gamma_i^0 + \Gamma_i^1 t + \sum_{j,k \neq 0} \frac{E_{1,2}}{jn_1 + kn_2} \cos [(jn_1 + kn_2)t + D_{1,2}]. \quad (3.26)$$

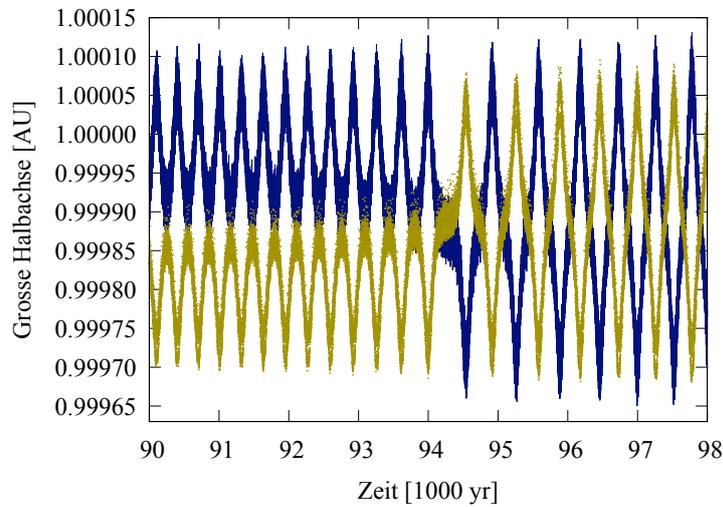
Hierbei stellen  $E_{1,2}$  die Amplituden dar, die sich als Polynomfunktionen von  $a_1, a_2, e_1, e_2, i_1$  und  $i_2$  ergeben.  $D_{1,2}$  steht für die Phasenkoeffizienten, welche von den Delaunay-Elementen  $g_1, g_2, h_1$  und  $h_2$  abhängen, wobei hierbei lediglich der Planet 1 vom Planeten 2 gestört wird. Die Autoren haben hier zu Demonstrationszwecken eine Theorie 1. Ordnung abgeleitet, wo die Bahnelemente des störenden Planeten unverändert belassen wurden. Für genauere Resultate muss dabei dann auch der Fall für entsprechend höhere Ordnungen betrachtet werden. Trotzdem ist in obiger Gleichung aber schon der Zusammenhang mit der Wirkung der Mean-motion Resonanz ersichtlich. Denn die Größe des Teilers ( $jn_1 + kn_2$ ) hängt eben davon ab, wie nah sich die beiden Himmelskörper an einer solchen Resonanz befinden. D.h., wenn das Verhältnis der mittleren Bewegungen  $n_i$  mit

$$\frac{n_1}{n_2} \simeq -\frac{k}{j} \quad (3.27)$$

etwa erfüllt ist, dann wird der Teiler fast 0. Eine Division durch nahezu 0 wiederum führt zu extremen Werten, sodass die Amplituden  $E_{1,2}$  in diesem Fall großen Änderungen unterworfen sind. Zwar gehört die 13:8 Resonanz nicht zu den besonders stark wirkenden MMR. Jupiter und Saturn etwa befinden sich im aktuellen Fall nahe der schon bedeutenderen 5:2 Resonanz, wobei der Teiler hierbei

$$5n_{Jup} - 2n_{Sat} = 0.00112 \quad (3.28)$$

beträgt. Jedoch ergibt sich bei Erde und Venus der Umstand, dass die Sprünge bei genügend langer Integrationszeit zusammenfallen - und somit die Halbachsen hin zur exakten Resonanz verschieben. Da der Teiler somit marginal



**Abbildung 3.14:** Die große Halbachse der Erde (blau) und die Lage der 13:8 MMR mit der Venus (ockerfarben) für die Integration mit  $\kappa_M = 16$ , über einen Ausschnitt von 8,000 Jahren. Hierbei wurde ein output-Intervall von nur 43 Tagen gewählt, um den Verlauf eines Sprunges mit adäquater Auflösung betrachten zu können. Der Sprung vollzieht sich im Zeitraum zwischen 94,000 und 94,600 Jahren.

klein wird, resultieren daraus jene gewaltigen Störungen, die letztlich auch den beobachteten Zerfall des dynamischen Systems zur Folge haben können.

#### Betrachtung eines jumps in Vergrößerung

Nachdem nun die störende Wirkung der Mean-motion Resonanz auf die Bahnen von Erde und Venus dargelegt wurde, ist es nun weiters interessant, sich den Prozess des Einfangens selbst in diese Resonanz in Vergrößerung anzuschauen. Denn der Übergang von den periodischen Elongationen in den Halbachsen hin zur Ausbildung eines richtigen Sprunges hängt direkt von der jeweiligen Position der MMR ab. In Abbildung 3.14 ist jener Ausschnitt einer Integration dargestellt, in der sich solch ein Sprung entwickelt. Selbige Integration wurde mit einer kurzen Integrationszeit und einer dafür extrem niedrigen Ausgabeschrittweite ausgeführt. D.h., durch die große Anzahl an somit erhaltenen Daten lässt sich der ausgewählte Bereich mit einer hohen Auflösung betrachten, um dadurch das Verhalten eines solchen Sprunges in deutlicher Vergrößerung darzustellen.

Wie bereits angeführt, führt die Position der Resonanz dieselbe Bewegung aus wie die großen Halbachsen der Planeten, nur eben invers. Da sich durch die hohe dynamische Kopplung beide Planeten gegensätzlich zueinander be-

wegen, verändert sich die jeweilige Position der 13:8 MMR in eben derselben Art und Weise. Aufgrund dieses Fakts lässt sich die Entwicklung eines Sprunges als ein mit der MMR streng achsensymmetrisch ablaufendes Ereignis beschreiben. Dabei lässt sich bereits vor dem Sprung eine starke Konvergenz von den peaks der großen Halbachse sowie jenen der MMR hin zu einem gemeinsamen mittleren Wert beobachten. Beide führen im Vorfeld des Sprunges eine regelmäßige Oszillation aus, wobei sich deren Amplituden mit zunehmender Zeitdauer vergrößern. Dies hat ein stetiges, nahezu lineares Annähern der beiden Scheitel zur Folge. Die Schwingungsbreite des Signals im Scheitel beträgt dabei für die Erde  $7 \cdot 10^{-5}$  AU, wobei eine nochmalige Vergrößerung des Graphen (als Ausgabe-Schrittweite des Integrators wurden hier 43 Tage gewählt) erneut ein bemerkenswertes Muster derselben preisgibt.

Die Schwankung von  $7 \cdot 10^{-5}$  AU besteht nämlich aus einer harmonischen sinusoidalen Schwingung, die sich wiederum genauso im Signal der Position der MMR wiederfindet. Die Periode dieser Oszillationen beträgt dabei nur 35 Jahre. Wenn man sich nun das Signal der Abb. 3.14 genauer anschaut, so lässt sich beobachten, dass der Sprung just dann vonstatten geht, sobald die beiden Scheitel einander genau überlappen. Dieser Vorfall entspricht dann einem Zusammenfallen auch der beiden kurzperiodischen Oszillationen, sodass sich die Erde hier für kurze Zeit genau in der Resonanz mit der Venus befindet. Dieses Ereignis ist dabei von sehr kurzer Dauer, denn als Folge desselben wird die Erd-Halbachse um den Wert ihrer Auslenkung nach innen katapultiert. Um die Bahndrehimpulsänderung aufzufangen, führt die Venus die selbe Art der Bewegung nach außen aus. Dies wiederum hat zur Folge, dass die aktuelle Position der MMR ebenso nach außen wandert und sich in Bezug auf die weitere Oszillation wiederum auf der Gegenseite der großen Halbachse befindet.

Im weiteren Simulationsverlauf zeigt sich eine reguläre Schwingung, deren Amplitude für die Erdhalbachse sich mit  $2.5 \cdot 10^{-4}$  AU im Vergleich zu jener vor dem Sprung genau verdoppelt hat. Die große Halbachse und die Position der MMR treffen sich jeweils im Zentrum und ziehen sich im Muster einer ungedämpften Pendelbewegung gegenseitig an. Dieses Verhalten bleibt aber nicht lange stabil, sodass sich die große Halbachse und die Position der Resonanz wieder voneinander trennen und nachher wieder jene Oszillation wie vor dem Sprung ausführen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit gleich groß - und letztlich zufällig - auf welches der beiden diskreten Niveaus die große Halbachse zurückfällt. Kehrt sie wieder auf ihren Ausgangswert zurück, so haben sich die Folgen des Sprunges wieder kompensiert. Fällt sie hingegen auf das andere Level, so wiederholt sich das vorangegangene Muster auf jenem nach innen verschobenen Niveau.

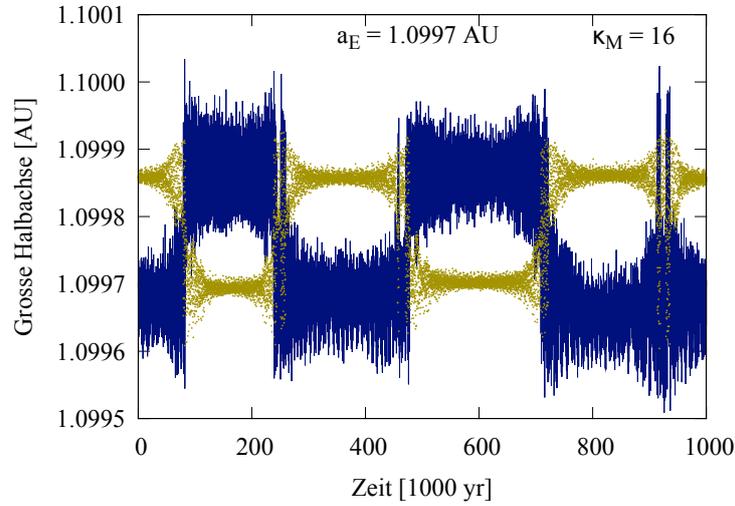
Das Verhalten vor und nach den Sprüngen ist dabei wiederum symmetrisch. Im selben Maß, wie die Amplituden angewachsen sind, dämpfen sie sich nach einem erfolgten Sprung wieder ab, um kurzfristig jenes reguläre Verhalten wie bei  $\kappa_M = 1$  zu erreichen. Dann wachsen die Exzentrizitäten der beiden Planeten wieder an und die Auslenkung in der großen Halbachse steigt an, sodass sich ein erneuter Sprung ausbilden kann. Dieses Verhalten wiederholt sich immer wieder, bis irgendwann die Sprünge auf das Niveau der Resonanz zusammengefallen sind.

#### **3.3.6 Veränderung der Anfangs-Bahnelemente und des dynamischen Systems**

In weiterer Folge gilt es zu beweisen, dass Mean-motion Resonanzen die exklusive dynamische Ursache für die Sprünge sind, und dass nicht noch andere Effekte das Signal verzerren. So kämen in Anbetracht des simulierten Systems noch andere Möglichkeiten wie three-body-dynamics - Venus, Erde und Mars liegen nämlich für  $7 \leq \kappa_M \leq 10$  alle drei in einem ähnlichen Massenbereich - oder auch säkulare Resonanzen in Frage. Letztere würden aber bereits deshalb an Wahrscheinlichkeit einbüßen, da die große Halbachse über die Resonanz drüber springen könnte. Unabhängig dessen wurde das Signal der jumps und ihr Zusammenhang zur MMR weitergehend analysiert, indem ihr jeweiliges Verhalten für eine Veränderung der Anfangs-Bahnelemente und des dynamischen Systems untersucht wurde. D.h., es wurden noch weitere Integrationen gestartet, um die Abhängigkeit der Sprünge von den jeweiligen Bahnelementen und Konstellationen herauszufinden. Die Ergebnisse und Schlussfolgerungen dieser weiteren Simulationen sollen im Folgenden vorgestellt werden.

#### **Verschiebung der Erd-Halbachse in die Nähe einer anderen MMR**

Als eine der wesentlichen Variationen wurde eine Veränderung bei den großen Halbachsen der Planeten vorgenommen. Hier zeigten sich bedeutende Ergebnisse, wenn die großen Halbachsen von Erde und/oder Venus geändert wurden. Wann immer dieselben in die Nähe einer Mean-motion Resonanz von nicht zu hoher Ordnung postiert wurden, zeigte sich ich dort das Muster der Sprünge erneut. Als Beispiel hierfür sei die Abbildung 3.15 angeführt, bei der die Erde nahe der 15:8 Resonanz mit der Venus gestartet wurde. Dies wurde bewerkstelligt, indem bei einem Massenfaktor von [16] alle sonstigen



**Abbildung 3.15:** Die große Halbachse der Erde (blau) für einen Anfangswert von 1.0997 AU bei  $\kappa_M = 16$ , über einen Zeitraum von 1 Myr. Ockerfarben dargestellt ist die jeweilige Position der 15:8 MMR mit der Venus.

Bahnelemente unverändert belassen wurden, nur die große Halbachse der Erde auf einen Wert von 1.0997 AU verschoben wurde. Unmittelbar darüber, bei 1.099859 AU befindet sich die 15:8 MMR mit der Venus für deren aktuelle Position. Im Verlauf der Integration zeigt sich dabei dasselbe Muster der Sprünge der großen Halbachse um die Resonanz herum.

Dabei zeigt das Signal hierbei eine leicht veränderte Form, was auf die Verschiebung der Erd-Halbachse zurückzuführen ist. Da sich die Erde hier auf einer etwas anderen Position befindet, wirkt sich für sie der Bahndrehimpulsaustausch mit der Venus auch leicht anders aus als im vorigen Fall. Insbesondere fällt hier nun das unterschiedliche Verhältnis zwischen der Schwingungsbreite der Erdhalbachse und jener der MMR-Position auf. Was hingegen die achsensymmetrische Ausrichtung der jumps der Erdhalbachse und der Resonanz angeht, so bleibt das Verhalten gleich wie jenes bei der 13:8 MMR. Die jumps führen jeweils zu einer Spiegelung der beiden Graphen, wobei der Abstand zwischen ihnen dadurch annähernd gleich bleibt.

So wie bei den Kommensurabilitäten 13:8 und 15:8 zeigt sich das Signal der Sprünge für viele andere Mean-motion Resonanzen, wobei das Grundmuster immer dasselbe bleibt. Dies lässt den Schluss zu, dass tatsächlich die Resonanzen der mittleren Bewegung die Ursache für die jumps bilden. Denn die Sprünge hören jeweils dann auf, sobald die große Halbachse sich zu weit von der Resonanz weg befindet. Um das Verhalten für diese Fälle besser zu studie-

ren, wurde eine Vielzahl von Integrationen durchgeführt, bei denen jeweils die Startwerte von  $a_E$  und  $a_V$  leicht abgeändert wurden. Dabei zeigt sich in erster Linie der Zusammenhang, dass das Auftreten der jumps bei der 13:8 Resonanz keine Besonderheit darstellt. Das Signal der Sprünge wiederholt sich nämlich für verschiedenste MMR's, wobei es sich in Abhängigkeit von der Ordnung der Resonanz unterschiedlich ausprägt. Für Resonanzen sehr niedriger Ordnung wird das Signal sehr stark gestört, sodass das Muster rasch sehr unkenntlich wird. Bei Resonanzen höherer Ordnung hingegen schwächt sich das Signal der jumps sehr ab, bis es bei diesem Bereich irgendwann gar nicht mehr sichtbar ist. Am besten ausgeprägt ist das Muster für den Bereich der MMR's 4. bis 8. Ordnung.

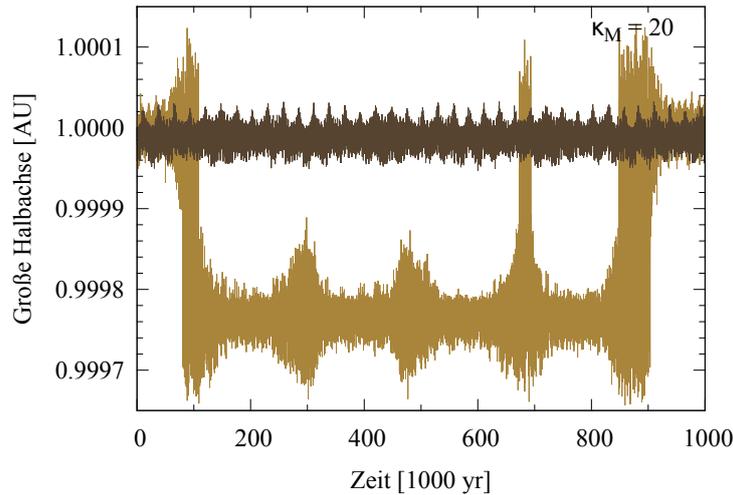
Ein weiterer Aspekt der Resultate ist die Bestätigung, dass die Spitzen unabhängig von den Sprüngen vorkommen können. Diese Gegebenheit hat sich für alle verschiedenen Integrationen bewährt. Das Signal der jumps kann ausschließlich in unmittelbarer Nähe einer Mean-motion Resonanz vorkommen. Die Spitzen hingegen zeigen sich auch noch in derartigen Entfernungen der Resonanz, dass bereits die Überlappung mit der nächstfolgenden Resonanz beginnt. Vor allem in der Umgebung der 13:8 MMR genügt eine Verschiebung der großen Halbachse um 0.017 AU, um in die 8:5 oder aber in die 5:3 Resonanz zu gelangen.

#### **Änderung der Inklinationen**

Um weitere Erkenntnisse über die dynamischen Ursachen zu gewinnen, wurden außerdem Integrationen mit veränderter Inklination durchgeführt. Um den Einfluss einer Resonanz der Knoten ausschließen zu können, wurden hierzu Simulationen in der Ebene durchgeführt. D.h., die anderen Bahnelemente wurden unverändert belassen, nur die Inklinationen der Planeten wurden auf Null gesetzt. Dabei zeigte sich der Sachverhalt, dass die Sprünge in den großen Halbachsen in unveränderter Form weiterhin vorkommen und sich auch das Muster mit den MMR nicht geändert hat. Zwar verändern sich die Graphen zwangsläufig aufgrund der Sensitivität derselben von den Anfangsbedingungen. Doch für das Vorkommen der Elongationen und Sprünge selbst bleibt die Inklination ohne Einfluss. Dies ist insofern ein wichtiges Ergebnis, da somit wieder eine weitere Ursache sicher ausgeschlossen werden kann. Hierin bestand auch der Sinn der zusätzlichen Integrationen mit veränderten Anfangsbedingungen, andere mögliche Einflüsse sukzessive ausschließen zu können. Die Integrationen in der Ebene haben somit das Ergebnis geliefert, dass eine mögliche Resonanz der Knoten keinerlei Ursache für das Auftreten der

Sprünge darstellt.

#### Änderung der Anzahl der Himmelskörper



**Abbildung 3.16:** Ein Vergleich der großen Halbachse der Erde über einen Zeitraum von 1 Myr bei zwei verschiedenen dynamischen Systemen. Der hellbraune Graph steht für die Simulation, wo der Saturn weggelassen wurde. Der schwarzbraune Graph hingegen ist das Ergebnis der Simulation, wo der Jupiter nicht mitgerechnet wurde. Es gilt jeweils  $\kappa_M = 20$ . Die Resultate zeigen eindrucksvoll, dass die Sprünge unabhängig vom Saturn weiterhin vorkommen. Ein Weglassen des Jupiters hingegen bewirkt das Verschwinden derselben.

Als eine weitere Variation des dynamischen Systems wurden Integrationen durchgeführt, bei denen auch die Anzahl der Himmelskörper variiert wurde. So wurden einerseits Simulationen ausgeführt, bei denen zusätzliche Planeten mitgerechnet wurden; sowie andererseits auch solche, wo manche Planeten weggelassen wurden. Im ersteren Fall war es vor allem interessant zu wissen, wie ein vollständigeres Modell des Sonnensystems die bisherigen Ergebnisse des vereinfachten Modells verändern würde. Dabei zeigte sich das Resultat, dass auch bei Hinzunahme von Merkur, Uranus und Neptun die Sprünge weiterhin vorkommen, wenn denn die Masse des Mars vergrößert blieb. D.h., die abgeleiteten Ergebnisse beziehen sich also nicht nur auf ein Vereinfachtes Sonnensystem, das dem aktuellen Fall nicht ausreichend entsprechen würde. Sondern das Weglassen von Merkur und den beiden Eisriesen war - wie anfangs bereits beschrieben - keine dermaßen große Änderung am System, als dass sie die Ergebnisse maßgeblich abgeändert hätte.

Neben einer Einbeziehung von zusätzlichen Himmelskörpern im verwendeten dynamischen System ist vor allem das Weglassen einzelner Planeten von großer Wichtigkeit. Hierdurch kann der Einfluss der jeweiligen Planeten auf das Verhalten des inneren Sonnensystems kenntlich gemacht werden. Dabei wurden zunächst einzelne Planeten aus dem System weggenommen und anschließend eine Kombination derselben vorgenommen. Als am wenigsten einflussreichsten für die Bahnen der terrestrischen Planeten zeigte sich dabei der Saturn. Bei jenen Simulationen, in welchen einzig der Saturn weggelassen wurde, hielten sich die Veränderungen für Venus, Erde und Mars sehr in Grenzen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass diese inneren Planeten überwiegend durch den Einfluss des Jupiters dominiert werden. Vor allem aber ergab sich auch jener Sachverhalt, dass die Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus bei dieser Simulation beibehalten wurden. D.h., unabhängig von der Tatsache, dass der gravitative Einfluss des Saturns komplett wegfiel, zeigte sich immer noch dasselbe Muster in den großen Halbachsen der beiden innersten Planeten.

Völlig anders hingegen ist die Situation für den Jupiter. Wenn die gleichen Simulationen ohne den Jupiter gerechnet werden, dann bleiben die Sprünge plötzlich vollständig aus, wie in Abbildung 3.16 ersichtlich. Dieses Verhalten lässt sich dabei für verschiedene  $\kappa_M$ 's reproduzieren. Somit lässt sich feststellen, dass der störende Einfluss des Jupiters ein Faktor ist, der das Auftreten der Sprünge begünstigt. Da ein Weglassen des Jupiters somit das Verschwinden der Sprünge zur Folge hat, ist es interessant zu wissen, welcher Zusammenhang zwischen der Masse des Jupiters und dem Verhalten der jumps besteht. Um dies zu analysieren, wurde der Fall des Jupiters differenzierter betrachtet, indem die Masse dieses Gasriesen sukzessive verringert wurde. Ein Vergleich dieser Simulationen ergibt klar sichtbare Trends in den großen Halbachsen und Exzentrizitäten.

Je niedriger die Jupitermasse ist, umso geringer werden die Exzentrizitäten von Erde und Venus. Dies wiederum hat Auswirkungen auf das Verhalten der großen Halbachsen. Da die Spitzen dort stets mit den peaks der Exzentrizitäten gekoppelt sind, sind auch sie nun umso weniger stark ausgeprägt. Dabei geht die Amplitude der Spitzen umso mehr zurück, je kleiner die Masse des Jupiters wird. Da große Auslenkungen bei den Spitzen aber vonnöten sind, um das Auftreten der Sprünge zu ermöglichen, wird folglich auch deren Vorkommen stark reduziert. Somit lässt sich feststellen, dass die Anzahl an Sprüngen in einem gegebenen Integrationszeitraum umso geringer ausfällt, je masseärmer der Planet Jupiter ist. Der Einfluss der Jupitermasse auf das Auftreten der jumps geht dabei annähernd genauso linear wie der Einfluss

der Marsmasse.

Wenig überraschend ist die Tatsache, dass ein Weglassen von Erde oder Venus zur Auswirkung hat, dass die Sprünge beim jeweils anderen Planeten gänzlich verschwinden. Durch die dadurch fehlende Mean-motion Resonanz und dynamische Kopplung mit dem anderen Planeten fallen die Voraussetzungen weg, welche die Sprünge in den großen Halbachsen überhaupt erst ermöglichen. Was aber das Vorhandensein der übrigen Planeten im System - nämlich Mars, Jupiter und Saturn - betrifft, so ist keinerlei Voraussetzung zu erkennen, dass deren Existenz wirklich notwendig ist, um das Vorkommen der Sprünge zu ermöglichen. D.h., zwar haben die verschiedenen Integrationen gezeigt, dass ein Weglassen von Mars oder Jupiter zu einem Verschwinden der Sprünge führen würde. Jedoch ist die Ursache desselben, dass ein Fehlen dieser Planeten niedrigere Exzentrizitäten bei Erde und Venus bewirken würde, was sich wiederum negativ auf das Auftreten der Sprünge auswirkt. Die Existenz von Mars und Jupiter selber ist jedoch keine zwingende Voraussetzung, um das Vorkommen der Sprünge zu ermöglichen.

### 3.3.7 System Erde-Venus

**Tabelle 3.5:** Die Anfangs-Bahnelemente (JD 2449200.5) für das System Erde-Venus in Bezug auf die mittlere Ekliptik und das Äquinoktium J2000, sowie deren Massen. Die Größen  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$  und  $m$  bezeichnen große Halbachse, Exzentrizität, Inklination, Argument des Perihels, Länge des aufsteigenden Knotens, mittlere Anomalie und Masse in Einheiten der Sonnenmasse. Die Exzentrizitäten stellen hierbei variable Größen dar, die je nach Integration auf verschiedene Startwerte gesetzt wurden. Bei den Inklinationen wurde entweder mit einem fixen Wert oder aber in der Ebene gerechnet.

	Venus	Erde
$a$	0.7233296	0.9999998
$e$	variabel	variabel
$i$	3.3946796 / 0.0	0.0007533 / 0.0
$\omega$	54.7175838	103.9464204
$\Omega$	76.6952705	358.8589930
$M$	254.3711051	206.8999238
$m$	0.2447840e-5	0.3040433e-5

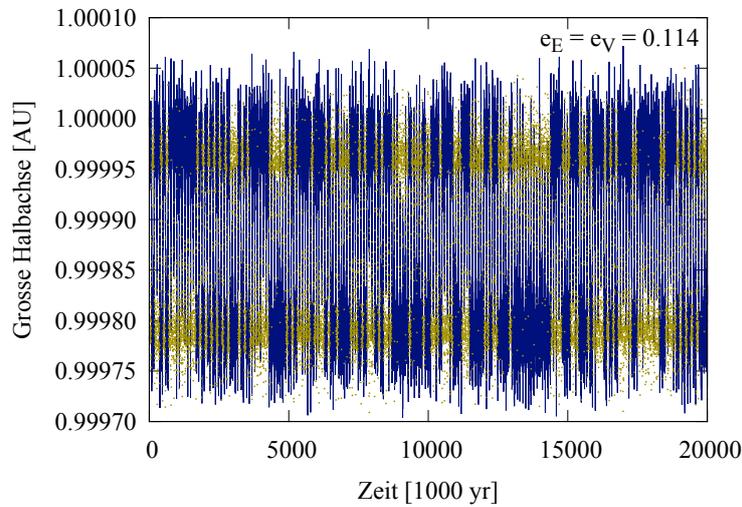
Wenn man bedenkt, dass die Ursache der Sprünge die Mean-motion Resonanz in Verbindung mit den Exzentrizitäten darstellt, so sollte es denn auch

möglich sein, das Muster der Sprünge in einem System nur mit Erde und Venus beobachten zu können. Dies würde zu einer Bestätigung der Annahme führen, dass keinerlei Effekt eines der anderen Planeten eine Rolle dabei spielt, die jumps hervorzurufen. Um nun diese Annahme zu verifizieren, wurden weiters auch noch Integrationen ausgeführt, die nur Erde und Venus beinhalten, wobei beide ihre aktuelle Position in der großen Halbachse beibehalten. Dabei wurde versucht, das Muster der Sprünge auch für diesen dynamischen Fall zu erzeugen, wobei bis auf die Exzentrizitäten (und gegebenenfalls auch die Inklinationen) die Bahnelemente sonst unverändert belassen wurden. Die entsprechenden Bahnelemente und Massen sind in Tabelle 3.5 aufgelistet; der Erdmond wurde hierbei der Masse der Erde hinzuaddiert. Der Sinn dieser Simulationen lag letztlich darin, das System so weit zu vereinfachen, dass nur mehr jene Faktoren übrigblieben, die für das Auftreten der Sprünge zwingend notwendig sind.

#### **Auftreten von Sprüngen im Planetensystem Erde-Venus**

Dabei ist es gelungen, das Muster der jumps auch dann hervorzurufen, wenn nur mehr Erde und Venus im System übrigbleiben - und auch dann, wenn die Simulation in der Ebene stattfindet. Der Schlüssel hierfür war die geeignete Wahl der Exzentrizitäten; hierfür wurde das System Erde-Venus mit verschiedensten Anfangs-Exzentrizitäten gerechnet und jeweils das Verhalten der großen Halbachsen analysiert. Somit konnten schließlich jene Fälle ausfindig gemacht werden, in denen sich jumps in den großen Halbachsen ausbildeten. Einer jener Fälle ist in Abbildung 3.17 dargestellt. Es handelt sich hierbei um jene Integration, bei der Erde und Venus jeweils eine Exzentrizität von 0.114 aufweisen. Die beiden Planetenbahnen befinden sich dabei in der Ebene. Dies wäre zwar nicht Voraussetzung gewesen, um die jumps zu erzeugen; doch kann somit eine etwaige Kopplung der Knoten ausgeschlossen werden. Alle weiteren Bahnelemente blieben gleich wie im aktuellen Fall.

Dabei ist das Auftreten der Sprünge für dieses System, das nur die Planeten Erde und Venus beinhaltet, durchaus bemerkenswert. Es lässt nämlich eine Reihe von Schlussfolgerungen zu, die für den Fall des 5-Planeten-Systems so nicht möglich gewesen wären. So lässt sich nun mit Sicherheit sagen, dass keine three-body-dynamics oder Ähnliches die jumps verursacht. Jeglicher Einfluss auf das Signal ist einzig und allein im dynamischen Wechselspiel von Erde und Venus zu suchen. Auch säkulare Resonanzen können nun außer Acht gelassen werden. Diese Erkenntnis konnte zwar schon aus anderen Integrationen abgeleitet werden; beispielsweise zeigten die Perihels und Knoten



**Abbildung 3.17:** Die große Halbachse der Erde (blau) dargestellt zusammen mit der Position der 13:8 MMR (ockerfarbene Punkte) über einen Zeitraum von 20 Myrs. Das dynamische System besteht hierbei einzig aus den Planeten Erde und Venus. Die Anfangs-Exzentrizitäten wurden auf jeweils 0.114 und die Inklinationen auf Null gesetzt. Es ist klar ersichtlich, dass die Sprünge auch dann auftreten, wenn Mars, Jupiter und Saturn weggelassen werden.

des Jupiters dann keine Änderungsraten mehr, als etwa der Saturn weggelassen wurde. Dies, da eben jener Planet ihm hier fehlte, der ihn sonst mitzog. Bezogen auf das Verhalten von Erde und Venus hätte sich dies dann aber auch auswirken müssen. Denn beim vorherigen Vorhandensein einer säkularen Resonanz hätte sich dieses Fehlen nun bemerkbar gemacht; was in Bezug auf die Sprünge aber nicht geschah. Jedenfalls kann eine säkulare Resonanz nun ausgeschlossen werden. Für das System Erde-Venus würde sie weiter draußen liegen.

Somit weisen die Resultate der Simulationen aus dem System Erde-Venus den großen Vorteil auf, dass das Signal nunmehr keinen äußeren Störeinflüssen mehr unterliegt, welche eine entsprechende Verzerrung desselben verursachen könnten. Die jumps sind somit das ausschließliche Produkt eines Drei-Körper-Systems, das sich nahe an einer Mean-motion Resonanz befindet. Eine gewichtige Rolle kommt dabei den Exzentrizitäten zu. Die hohe Sensitivität der Sprünge von den Exzentrizitäten zeigt sich zunächst darin, dass einzig und allein die Änderung der Anfangs-Exzentrizitäten ausreicht, um die Sprünge wieder verschwinden, bzw. sie auch verstärkt zutage treten zu lassen. Das System Erde-Venus mit den aktuellen Exzentrizitäten - indem also alle Bahnelemente mit den derzeitigen übereinstimmen - ruft selber noch keine jumps in

den großen Halbachsen hervor. Das selbe System mit Anfangs-Exzentrizitäten von 0.12 hingegen weist dieses markante Muster auf. Das Vorhandensein von Sprüngen in den Halbachsen lässt sich somit allein durch die Wahl der Exzentrizitäten steuern.

#### **Sensitivität der Sprünge von den Exzentrizitäten**

Dabei sind die jumps dermaßen empfindlich für die Anfangswerte der Exzentrizitäten, dass minimale Differenzen hierin über ein Vorkommen oder Nicht-Vorkommen der jumps entscheiden. So liegt etwa der Bereich, ab welchem das abrupte Auftreten der Sprünge beginnt, zwischen  $0.113 < e_{E,V} < 0.114$ . D.h., aufgrund der extremen Sensitivität des Signals von den Exzentrizitäten führt ein um 0.001 niedrigerer Wert in den Anfangs-Exzentrizitäten von Erde und Venus zu einem völligen Verschwinden der Sprünge. Ab 0.114 hingegen ist dieses Signal plötzlich zugegen und tritt hierbei schon in sehr hoher Regelmäßigkeit auf, wie sich auch der Abb. 3.17 entnehmen lässt. Eine weitere Erhöhung der Anfangs-Exzentrizitäten führt zunächst noch zu einem noch stärkeren Vorkommen derselben. Dabei ist jenes Intervall, innerhalb dessen höhere Exzentrizitäten zur Bildung von weiteren jumps beitragen, verhältnismäßig klein. Bei gemeinsamen Anfangs-Exzentrizitäten oberhalb von 0.15 wird das Signal immer instabiler und zerfällt in weiterer Folge. D.h., das Muster der jumps lässt sich ohne Störungen derselben nur innerhalb eines schmalen Streifens in den Start-Exzentrizitäten beobachten, wobei die Breite desselben etwa 0.04 beträgt. Für Werte  $\geq 0.20$  schließlich folgt binnen weniger Myrs vollständige Instabilität, was zu einem Zerfall dieser Systeme führt.

Was hingegen die Kopplung zwischen den Elongationen in der großen Halbachse und den peaks in den Exzentrizitäten betrifft, so besteht diese genauso auch im System Erde-Venus. Da dieser Umstand nun also für verschiedenste dynamische Systeme beobachtet werden konnte, lässt sich folgern, dass es sich hierbei um eine fundamentale Eigenschaft der Elongationen handelt. Die Elongationen können demzufolge nur synchron mit den Extremwerten der Exzentrizitäten auftreten. In den Integrationen des Systems Erde-Venus treten die Spitzen in den beiden Planeten jeweils ausschließlich gekoppelt mit den peaks der Exzentrizitäten des Planeten Erde auf. Dabei sind auch hier die Spitzen umso ausgeprägter, je höher die Maxima in den Exzentrizitäten sind. Dies stellt auch den Grund dar, wieso das Vorkommen der jumps so eng an die Höhe der Exzentrizitäten gekoppelt ist. Denn nur wenn die Spitzen genügend elongiert sind, münden sie direkt in einen Sprung. Da aber

die Elongierung umso kleiner ausfällt, je niedriger die maximalen Exzentrizitäten sind, lässt sich ein direkter Zusammenhang zwischen den Sprüngen und den absoluten Werten der Exzentrizitäten herstellen. So beeinflussen die Exzentrizitäten über die Größe der Auslenkung der Spitzen direkt die Wahrscheinlichkeit eines Auftretens von Sprüngen.

Im hier beschriebenen Fall für Anfangs-Exzentrizitäten von 0.114 beschreiben die Exzentrizitäten von Erde und Venus perfekte sinusoidale Oszillationen. Diese haben dieselbe Periode von zirka 100,000 Jahren und verlaufen aufgrund der dynamischen Kopplung - und der Tatsache, dass keine zusätzlichen anderen Planeten mehr vorhanden sind - erwartungsgemäß invers zueinander. Die Amplitude der Erd-Exzentrizität beträgt hierbei 0.038 und jene der Venus 0.055. Dabei liegt der Maximalwert der Erdexzentrizität bei 0.142, respektive 0.160 derjenige der Venus. Dies ist insofern interessant, als dass die Elongationen und Sprünge in den großen Halbachsen jeweils nur mit den peaks der Exzentrizitäten der Erde und nicht hingegen mit jenen der Venus zusammenfallen. Denn die Exzentrizität der Venus ist hierzu phasenverschoben. D.h., das Auftreten der Elongationen ist exakt gekoppelt mit den Maxima in den Exzentrizitäten der Erde und den Minima in den Exzentrizitäten der Venus.

#### 3.3.8 Verhalten der Länge des Perihels

Da das System Erde-Venus keinen äußeren Störeinflüssen von anderen Planeten mehr unterliegt, ist hier die weitere Untersuchung der übrigen Bahnelemente besonders lohnenswert. Dies, da etwaige Effekte hierin unverfälscht von äußeren Perturbationen zutage treten können. Da die Ursache der Sprünge in der Mean-motion Resonanz zu suchen ist, bietet sich eine Analyse der Längen des Perihels  $\tilde{\omega}$  an. Denn das kritische Argument  $\phi$  der MMR ist auch hiervon abhängig:

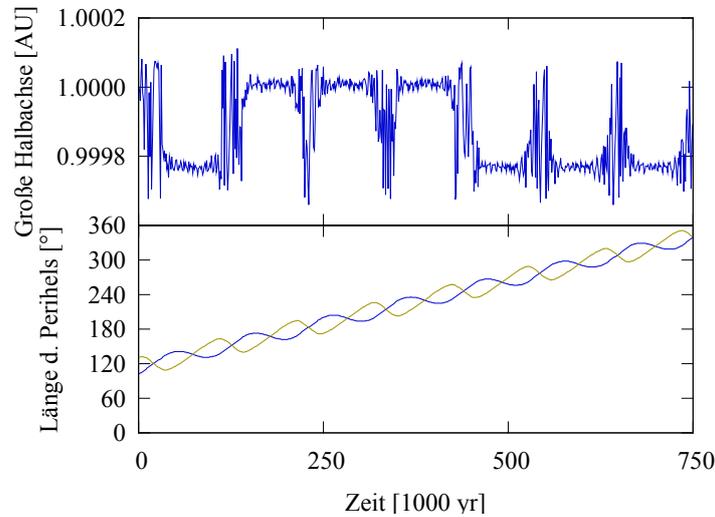
$$\phi = (p + q)\lambda' - p\lambda - q\tilde{\omega}', \quad (3.29)$$

wobei

$$\lambda = M + \tilde{\omega}. \quad (3.30)$$

Hierbei stellt  $M$  die mittlere Anomalie dar; die gestrichelte Variable steht für den äußeren Planeten - in diesem Fall die Erde;

In Abbildung 3.18 ist der Verlauf der Länge des Perihels über einen Ausschnitt der Integration für das System Erde-Venus dargestellt. Für den selben Zeitabschnitt von 750,000 Jahren ist in der oberen Grafik die große Halbachse der Erde dargestellt, sodass die Zusammenhänge zu den Sprüngen sichtbar



**Abbildung 3.18:** Die große Halbachse der Erde (oben) sowie die beiden Längen der Perihels (unten) der Erde in blau und der Venus ockerfarben. Die Abbildung umfasst aus Gründen der besseren Erkennbarkeit einen Teilausschnitt von 750,000 Jahren. Dabei wurden nur die Planeten Erde-Venus gerechnet, mit den aktuellen Inklinationen und gewählten Anfangs-Exzentrizitäten von jeweils 0.20.

werden. Aufgrund der Konstellation des Systems aus nur zwei Planeten ergibt sich ein äußerst reguläres Muster der beiden Längen der Perihels von Erde und Venus. Hier zeigen sich zwei ähnliche, phasenverschobene Schwingungen mit einer gleichmäßigen Steigung. Die Differenz der beiden  $\tilde{\omega}$ 's resultiert somit in einer sinusoidalen Oszillation um einen konstanten mittleren Wert herum.

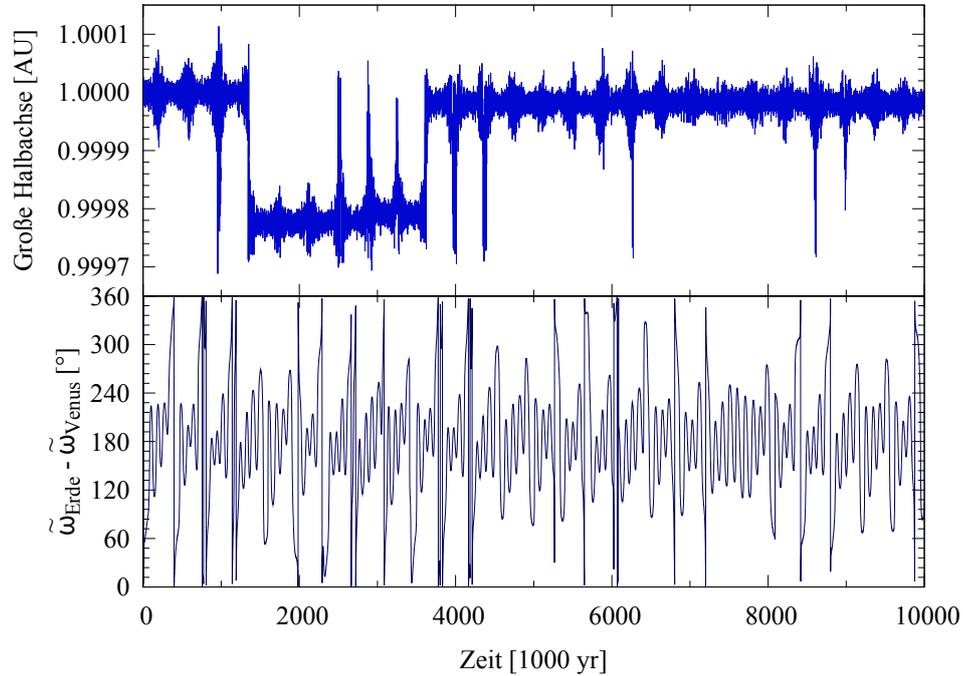
Als äußerst interessant stellt sich die Verbindung der Länge der Perihels zu den Sprüngen in den großen Halbachsen heraus. Schließlich sind die Elongationen, welche die Grundlage der Sprünge bilden, signifikant periodisch. Dabei lässt sich dieselbe Periode hierbei auch bei den Längen der Perihels beobachten. Eine vollständige Schwingung derselben entspricht dabei genau der Zeitdauer zwischen zwei Sprüngen in der großen Halbachse bzw. zweier Oszillationen in der Exzentrizität. Es zeigt sich für dieses System also eine exakte Korrelation zwischen dem Verhalten der Länge der Perihels sowie den Mustern in den Halbachsen und Exzentrizitäten. Betrachtet man nun diesen Zusammenhang genauer, so lässt sich ein Auftreten der Sprünge genau bei jedem zweiten Kreuzen von den Längen der Perihels identifizieren. D.h., immer dann, wenn ihre Werte zum zweiten Mal nacheinander identisch geworden sind, vollzieht sich exakt auch ein Sprung in der großen Halbachse.

#### Vereinfachtes Sonnensystem

Hierbei bietet sich ein Vergleich zum verallgemeinerten Fall des Vereinfachten Sonnensystems (Venus - Saturn) an. Dort zeigt sich, dass die Längen der Perihels rotieren, sobald sich eine Elongation oder ein Sprung ausbildet. Im Bereich dazwischen hingegen, wo der Sprung wieder verschwunden ist, kommt es stets zur Libration von mindestens einem der beiden Perihels. In den meisten Fällen ist dabei eine sehr gute Kopplung zu sehen, sodass die Längen der Perihels sowohl von der Erde als auch von der Venus in diesem Zeitraum librieren. Es sei hierbei angemerkt, dass dieser Effekt sich für verschiedenste dynamische Fälle reproduzieren lässt. In allen anderen Simulationen - bei denen wahlweise die Massen geändert wurden, die großen Halbachsen hin zu anderen MMR verschoben, die Anzahl der Planeten verändert, etc. - ließ sich dieser Zusammenhang jeweils verifizieren. Somit ist es zweckmäßig, sich den Zusammenhang der beiden Längen des Perihels von Erde und Venus zueinander anzuschauen.

In Abbildung 3.19 ist die Differenz zwischen diesen beiden Größen über den Verlauf von 10 Myrs angegeben. Dabei lässt sich eine beachtenswerte Korrelation derselben zu den periodischen Störungen in der großen Halbachse feststellen. Die Differenz der  $\tilde{\omega}$ 's zeigt nämlich in den selben periodischen Abständen Übergänge von Libration auf Rotation. Hierbei handelt es sich um einen fundamentalen Zusammenhang, der über die volle Integrationszeit erhalten bleibt und sich auch für unterschiedliche  $\kappa_M$ 's reproduzieren lässt. Diese Eigenschaft ist also ein Merkmal, das unweigerlich mit dem Auftreten der Sprünge selber verbunden ist.

Ein wichtiger Aspekt dieses Signals ist dabei die Tatsache, dass die Differenz der  $\tilde{\omega}$ 's bei Auftreten der periodischen Spitzen um den Wert von 180 Grad herum libriert. D.h., die Bahnen haben sich hierbei gegeneinander ausgerichtet, was Konjunktionen des Perihels der Erde mit dem Aphel der Venus zur Folge hat. Dies wiederum ist eine besonders ungünstige Konstellation in Bezug auf die Stabilität der beiden Orbits, da sich die beiden Planeten somit regelmäßig sehr nahe kommen können. Dies erklärt auch die hierbei stattfindenden Störungen in den Bahnelementen dieser beiden Planeten. Umgekehrt lässt sich feststellen, dass immer dann, wenn die Elongationen in der Halbachse wieder verschwunden sind, die Differenz der  $\tilde{\omega}$ 's etwa den Wert 0 annimmt. Sie befinden sich hierbei also in einer schützenden Konfiguration.



**Abbildung 3.19:** Im oberen Plot ist die große Halbachse der Erde für  $\kappa_M = 9$  dargestellt; das dynamische System ist hierbei das Vereinfachte Sonnensystem (5 Planeten); der betrachtete Zeitausschnitt beträgt 10 Myrs. Im unteren Plot ist die Differenz der Längen des Perihels von Erde und Venus gegeben. Die Übergänge von Libration auf Rotation sind jeweils klar zu erkennen.

#### Auswirkungen auf das kritische Argument der Mean-motion Resonanz

Dieser Sachverhalt hat nun bedeutende Folgen für das Verhalten der Mean-motion Resonanz. Denn wie bereits angeführt, ist die Länge des Perihels ein Term, der den Wert des kritischen Arguments ändert. Der beschriebene Effekt wirkt sich also dahingehend aus, dass das kritische Argument periodische Übergänge von Libration auf Rotation ausführt, die wiederum genau mit dem Auftreten der Sprünge korrelieren. Hierbei handelt es sich um einen sehr wichtigen Vorgang, da sich die großen Halbachsen von Erde und Venus anfangs zwar unmittelbar bei, aber eben nicht genau in der Resonanz befinden. Für diesen Fall wird dem Verhalten der Längen der Perihels hohe Bedeutung zuteil. Im gegenwärtigen Fall wirkt es sich prägend auf die Exzentrizitäten und großen Halbachsen aus. Und da das kritische Argument hierbei keine schützende, sondern eine störende Resonanz beschreibt, ist die Folge dieses Effekts langfristig Instabilität und Chaos, wie die Integrationen über lange Zeiträume beweisen. Somit handelt es sich bei dem Signal der jumps letztlich

### 3 SPRÜNGE IN DEN GROSSEN HALBACHSEN VON ERDE UND VENUS

---

um eine spezielle Form des resonance trapping, das jeweils ein Einfangen der betroffenen Planeten in die Resonanz - und letztlich das Auftreten von Chaos in den Orbits derselben - zur Folge hat.

## 4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Stabilität der inneren Planeten unseres Sonnensystems untersucht, wobei die Masse des Mars durch einen Massenfaktor  $\kappa_M$  sukzessive erhöht wurde. Das verwendete dynamische System beinhaltete die fünf Planeten Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn und lässt sich somit als Vereinfachtes Sonnensystem beschreiben. Durch die schrittweise Vergrößerung der Marsmasse verändert sich dieses System im Laufe der Integrationen, sodass ab  $\kappa_M \sim 95$  darin nur mehr zwei terrestrische Planeten und dafür drei Gasriesen vorhanden sind. Dabei wurden die Integrationen ausgeführt bis zu  $\kappa_M = 500$  und die Zeitdauer zunächst mit 20 Myrs festgelegt. Aufgrund interessanter Resultate wurde der Bereich  $1 \leq \kappa_M \leq 30$  weitergerechnet bis 200 Myrs und die Region  $3 \leq \kappa_M \leq 9$  sogar einer Langzeitintegration von 1 Gyr unterzogen.

Die Ergebnisse der Simulationen bestimmter  $\kappa_M$ 's zeigten ein beeindruckendes Muster von sich wiederholenden Sprüngen in den großen Halbachsen von Erde und Venus. Da dieses Muster bisher noch niemals genauer erforscht worden ist, wurde der Fokus dieser Arbeit auf die Beschreibung selbigen Signals gelegt. Hierbei handelt es sich um sporadisch vorkommende jumps in den großen Halbachsen von Erde und Venus zwischen zwei jeweils wohldefinierten Werten. Bei der großen Halbachse der Erde finden die Sprünge zwischen 1.00000 und 0.99977 AU statt, bei der Venus hingegen zwischen 0.72333 und 0.72347 AU. Dabei zeigt dieses Signal eine hohe Regelmäßigkeit und bleibt für lange Zeiträume stabil. Aufgrund der dynamischen Kopplung zwischen diesen beiden Planeten ist das Muster der Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus identisch, nur invers. Dabei ist das Signal chaotischer Natur: marginale Änderungen in den Anfangsbedingungen reichen aus, um den Zeitpunkt der Sprünge zu beeinflussen, sodass sich ein jeweils anderes Bild ergibt. Das Muster selber - die Art der Sprünge, die beiden definierten Niveaus sowie die äußeren Grenzen - bleiben jedoch jeweils stabil. Dies und andere interessante Eigenschaften dieses Signals ließen es als gerechtfertigt erscheinen, die Beschreibung desselben in den Mittelpunkt dieser Arbeit zu rücken.

Als ein zentrales Element des Vorkommens der Sprünge lässt sich die Anwesenheit von periodischen Auslenkungen in den großen Halbachsen von Erde und Venus anführen. Diese sind insofern wichtig, als dass sie die Grundlage für ein Auftreten der jumps schaffen. In allen Integrationen, in denen sich

die jumps beobachten ließen, gingen diesen zuerst immer diese Elongationen voraus. D.h., nur wenn diese periodischen Spitzen stark genug angewachsen sind, mündet ihre Auslenkung direkt in einen Sprung, wodurch der großen Halbachse eine fixe Verschiebung wiederfährt. Von jenem neuen Niveau aus wiederholt sich das Muster der Elongationen und in weiterer Folge auch das der Sprünge, sodass die großen Halbachse stets zwischen diesen beiden Niveaus pendelt. Dabei weisen die Elongationen mehrere signifikante Korrelationen auf. Die wichtigste derselben ist jene mit den Exzentrizitäten: die Elongationen treten nämlich immer genau dann auf, wenn die Erd-Exzentrizität ihr Maximum erreicht. Dies führt dazu, dass die Frequenz dieser Spitzen in der großen Halbachse genau mit jener der Schwingungen in der Exzentrizität übereinstimmt. Umso bemerkenswerter wird dieser Zusammenhang, sobald die Frequenz der Änderungen der Exzentrizität in Abhängigkeit von  $\kappa_M$  variiert. Hier zeigt sich nämlich eine lineare Korrelation, was sich dann ebenso in der Frequenz der Elongationen niederschlägt.

Da diese Spitzen aber die Grundlage für die Sprünge bilden, führt eine höhere Frequenz der Spitzen unweigerlich zu einer vergrößerten Anzahl von Sprüngen im jeweiligen Integrationszeitraum. Somit kommen die Sprünge durch eine Erhöhung von  $\kappa_M$  denn auch vermehrt vor. Dabei zeigt sich, dass selbige nicht dauerhaft stabil bleiben können, sondern langsam zusammendriften. Dies führt dazu, dass die Sprünge ab einer gewissen Zeit auf einen mittleren Wert zusammenfallen. Da die Anzahl an Sprüngen mit der Marsmasse korreliert, findet dies umso früher statt, je größer  $\kappa_M$  ist. Da ein massiver Mars aber auch Instabilitäten bei den anderen beiden terrestrischen Planeten zur Folge hat, führt ein  $\kappa_M > 7$  bei diesen zum Auftreten von starkem Chaos. Je größer die Marsmasse ist, umso stärker fällt dieser Effekt aus, sodass für  $\kappa_M > 45$  oft ein Zerfall des Systems beobachtet werden kann. Dabei zeigt sich die interessante Gegebenheit, dass für  $\kappa_M > 300$  das instabile Verhalten wieder verschwindet und die Orbits der inneren Planeten wiederum zu regulärem Verhalten zurückfinden.

Was hingegen das Auftreten der Sprünge und ihre dynamischen Ursachen betrifft, so wurden weitere Integrationen mit veränderten Anfangsbedingungen ausgeführt, um dies zu ergründen. Dabei zeigte sich der Sachverhalt, dass Mean-motion Resonanzen mit dem Auftreten der Sprünge in Verbindung stehen. Die Lage der Resonanz, die - aufgrund der ebenfalls vorkommenden Sprünge im jeweils anderen Planeten - dasselbe Muster der Elongationen und Sprünge zeigt, tauscht dabei mit den großen Halbachsen ständig die Positionen. Sobald die beiden nach gegebenem Zeitraum zusammengefallen sind, zieht dies das Auftreten von starkem Chaos bedingt durch die Wirkung der

Resonanz nach sich. Verschiedenste Integrationen haben dabei gezeigt, dass das Vorkommen von Sprüngen keine Besonderheit für den speziellen Fall der 13:8 Resonanz darstellt, sondern sich für verschiedenste andere MMR reproduzieren lässt.

Als besonders aufschlussreich haben sich weiters jene Simulationen dargestellt, bei denen nur das System Erde-Venus gerechnet wurde. Hierbei ließen sich durch die Wahl geeigneter Anfangs-Exzentrizitäten die charakteristischen Sprünge in den großen Halbachsen erneut erzeugen. Dadurch konnte jeglicher äußere Einfluss - wie three-body-resonances, säkulare Resonanzen, sonstige Einflüsse der anderen Planeten - als Ursache ausgeschlossen werden. Stattdessen ergab die Analyse der Bahnelemente  $\omega$  und  $\Omega$  bemerkenswertes Verhalten. Die Schlussfolgerung desselben auf das Verhalten des kritischen Arguments brachte dabei eine entscheidende Korrelation zu dem Vorkommen der Sprünge. So zeigte sich, dass ein Wechsel des kritischen Arguments von Libration auf Rotation mit dem Auftreten der Sprünge in Verbindung steht.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können als Input dienen für verschiedene dynamische Modelle. Zum einen wurde hierbei der Einfluss des Mars auf das Untersystem der inneren Planeten untersucht. Dies ist dahingehend interessant, da die terrestrischen Planeten unseres Sonnensystems bekanntermaßen stark unterschiedliches Verhalten als die äußeren Planeten zeigen. Vor allem aber wurde hierbei das Signal der Sprünge in den großen Halbachsen von Erde und Venus aufgezeigt und näher beschrieben. Hier handelt es sich um einen Effekt, der bisher in der Literatur noch nicht ausreichend beschrieben werden konnte. Die Erklärung desselben in Zusammenhang mit den Mean-motion Resonanzen stellt dabei einen Sachverhalt dar, der auch bei anderen dynamischen Systemen von Nutzen sein kann. Schließlich gleicht das hier verwendete Modell eines Vereinfachten Sonnensystems mit massivem Mars zudem mehr den bisher entdeckten extrasolaren Planetensystemen. Aufgrund der mittlerweile hohen Anzahl an Entdeckungen könnte dabei auch ein ähnliches System wie das hier beschriebene nachgewiesen werden.

## 5 Conclusion

In the current thesis the stability of the inner planets of our Solar system was investigated, with the mass of Mars being successively increased by a mass factor  $\kappa_M$ . The applied dynamical model consisted of the five planets Venus, Earth, Mars, Jupiter and Saturn, and can therefore be described as simplified Solar system. Because of the stepwise enlargement of the mass of the Mars, the physical nature of this system is strongly changing throughout the different integrations; from  $\kappa_M \sim 95$  on it consists of only two terrestrial planets and three gas giants. The integrations were executed until  $\kappa_M = 500$ . The time span was primarily fixed to 20 Myrs. Due to interesting results the range  $1 \leq \kappa_M \leq 30$  was calculated farther to 200 Myrs and in the region  $3 \leq \kappa_M \leq 9$  even a long-term integration until 1 Gyr was made.

The results of the simulations of certain  $\kappa_M$ 's showed an impressive pattern of iterative jumps in the semimajor axes of Earth and Venus. Because this pattern was never studied in detail, the focus of this thesis was especially held on the description of this signal. It shows sporadic occurring leaps in the semimajor axes of Earth and Venus between two well defined values. In the semimajor axis of Earth these jumps take place between the values 1.00000 und 0.99977 AU, for Venus between the two values 0.72333 und 0.72347 AU. There, this signal shows a high regularity and remains stable over long time spans. Because of the dynamical coupling between these two planets the patterns of the jumps in the semimajor axes of Earth and Venus are identical, but inverse. The signal itself has a chaotical nature: marginal variations in the initial conditions are sufficient to change the temporal starting point of the jumps to a completely different appearance. But the pattern itself - the character of the jumps, the two well defined levels as well as the outer borders - always rests stable in these cases. This and other interesting properties of this signal more than justify to dedicate most of the scope of this work to it.

As a vital element of the appearance of the jumps, the presence of periodic spikes in the semimajor axes of Earth and Venus can be noted. These are very important, because they build the substructure for the jumps and are therefore necessary for their existence. In every single integration where jumps had been formed, these elongations were always visible as well. This means that only when these periodic spikes were strengthened enough, their displacement initiates a jump and the semimajor axis is shifted. Restarting from this new level the pattern of the elongations - and therefore also the

one of the jumps - reiterates in a way that the semimajor axis makes a pendulum motion between the two defined values. Also, the elongations show many significant correlations. The most important of them concerns the eccentricities: the elongations are always occurring at the points in time when the eccentricity of the Earth reaches its local maximum. This leads to the situation that the frequency of this spikes in the semimajor axis coincides exactly with the one of the oscillations in the eccentricity. This coherence becomes even more impressive once the frequency of the variations of the eccentricity is changing as a function of  $\kappa_M$ . In this case, even a linear correlation is visible, which is hence also visible in the frequency of the elongations.

Because of the fact that this spikes are building the basis for the jumps, a higher frequency in the spikes is leading inevitably to a higher quantity of jumps in the given integration time span. Therefore the number of this leaps is getting enlarged by increasing  $\kappa_M$ . Hereby, it can be shown that the leaps do not have the possibility to rest stable permanently, but are converging slowly. This leads to the condition that jumps within a given time span are falling together to a mean value. Because the quantity of jumps correlates with the mass of the Mars, this happens earlier if the factor  $\kappa_M$  is greater. But given that a massive Mars also induces instability in the orbits of the two other terrestrial planets, a  $\kappa_M > 7$  leads to the occurrence of strong chaos in these orbits. The greater the mass of the Mars, the stronger this effect; for  $\kappa_M > 45$  the decay of the system can often be observed. Another very interesting feature is that for  $\kappa_M > 300$  the instable motion disappears and the orbits of the inner planets are more regular again.

Concerning the appearance of the jumps and their dynamical reasons, further integrations with different initial conditions were made to shed light on this question. Here, the circumstance that mean motion resonances are responsible for the occurrence of the jumps can be illustrated. The position of the resonance, which - based on the likewise appearing signal of the jumps in the semimajor axis of the other planet - shows the same pattern of elongations and leaps, fulfills a characteristic pendulum motion with the semimajor axes. At the point when both values have converged to a common level, this constellation then gives rise to strong chaos due to the influence of the resonance. Different integrations also showed that the appearance of the jumps does not demonstrate a particularity for the special case of the 13:8 resonance, but can be reproduced for various other MMR's.

Very informative indeed are the simulations where only the system Earth-Venus was calculated. Here it was possible to generate the characteristic jumps

in semimajor axes, while changing only the initial eccentricities to some distinct values. Through that procedure it was possible to exclude every other influence - like three-body-resonances, secular resonances, other influences of the outer planets - concerning the dynamical reasons of the jumps. Instead the analysis of the orbital elements  $\omega$  and  $\Omega$  offered a remarkable behavior. The deduction of this case to the behaviour of the critical argument brought a decisive correlation for the occurrence of the jumps. It could be shown that a change of the critical argument from libration to rotation coincides with the appearance of the jumps.

The results of the current thesis may serve as input for various dynamical models. On one hand, the influence of Mars on the subsystem of the inner planets was investigated. This is interesting to the effect that the terrestrial planets of our Solar system show a quite well known, different behavior than the outer planets. First and foremost in this work the special signal of jumps in the semimajor axis of Earth and Venus were shown and described. Here one can see an effect that up to now was not characterized very well in the literature, and displays a striking feature. The description of the effect in relation with mean motion resonances is also a circumstance that can be helpful in other dynamical systems. Last but not least the applied dynamical model of a simplified Solar system with a massive Mars looks more alike a detectable exoplanetary system, as can be discovered nowadays. Based on the meanwhile relatively high number of new detections it could also be possible that a not too different or even similar system as the one described here could be discovered.

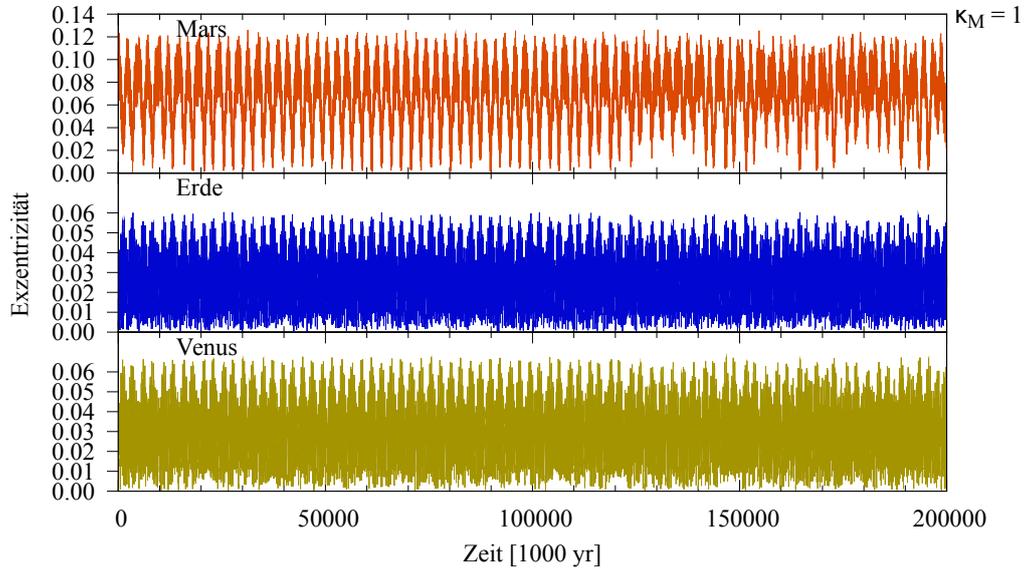
## 6 Anhang

### 6.1 Langzeitentwicklung der Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten

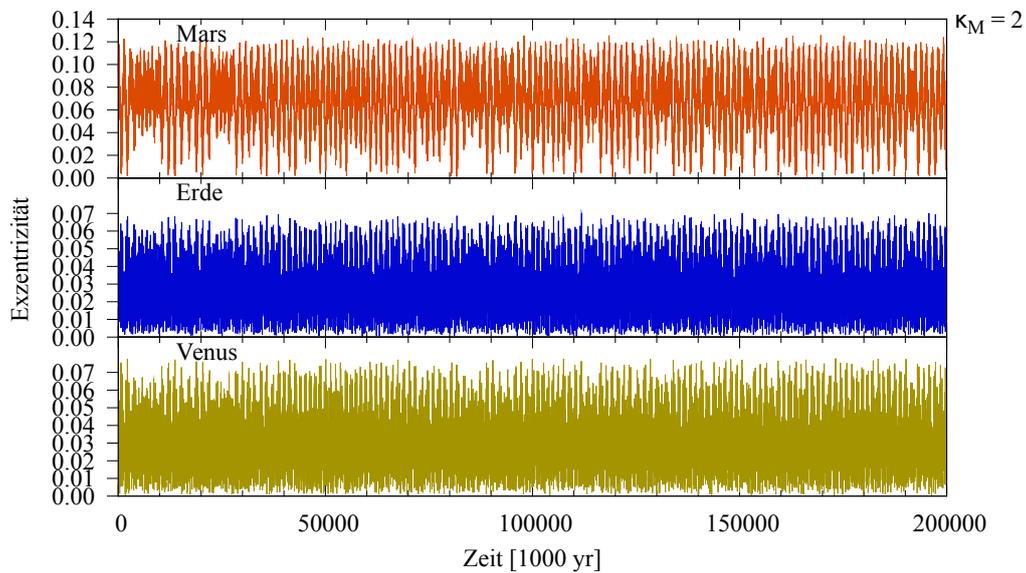
Ein äußerst bedeutender Indikator hinsichtlich der Beurteilung eines Orbits nach Stabilität und Chaos stellt die Exzentrizität, bzw. deren maximaler Wert, dar. Dies deshalb, da die Höhe der maximalen Exzentrizität bereits die Wahrscheinlichkeit von orbit crossings und nahen Begegnungen vorwegnimmt. Die Veränderung der Exzentrizität über den Verlauf der Integrationszeit spiegelt somit letztlich die Entwicklung der Bahnstabilität des jeweiligen Orbits wieder. Und da sich die vorliegende Arbeit mit der Stabilität der drei terrestrischen Planeten auseinandersetzt, ist eine grafische Illustrierung der Exzentrizitäten jener Planeten mehr als zweckmäßig. Dabei ergibt sich aber die Situation, dass das Vorhandensein von zahlreichen Abbildungen den Rahmen der Arbeit sprengen könnte. Diesem Umstand Rechnung zu tragen, wurden die Abbildungen, welche den Verlauf der Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten illustrieren, in ein eigenes Kapitel am Ende verschoben.

Im Folgenden sind die Plots eben jener Simulationen dargestellt, für welche das System über sehr lange Zeiträume betrachtet wurde. Im hier dargestellten Bereich für  $1 \leq \kappa_M \leq 30$  wurde primär eine Integrationszeit von 200 Myrs gewählt. Der für den Verlauf der Sprünge hingegen sehr interessante Bereich von  $3 \leq \kappa_M \leq 9$  wurde gar bis zu 1 Gyr hin gerechnet. Ab  $\kappa_M = 5$  treten die Sprünge dabei bei allen Integrationen in Erscheinung. Die folgenden Abbildungen stellen hierbei allesamt Fälle dar, die jeweils sehr langfristige Prognosen bezüglich der Stabilität der Bahnen beinhalten. Dies muss jedoch unter dem Gesichtspunkt gesehen werden, dass bei sehr sensitivem Verhalten das erhaltene Ergebnis nur mehr eine *Möglichkeit* von verschiedensten in Frage kommenden Resultaten darstellt.

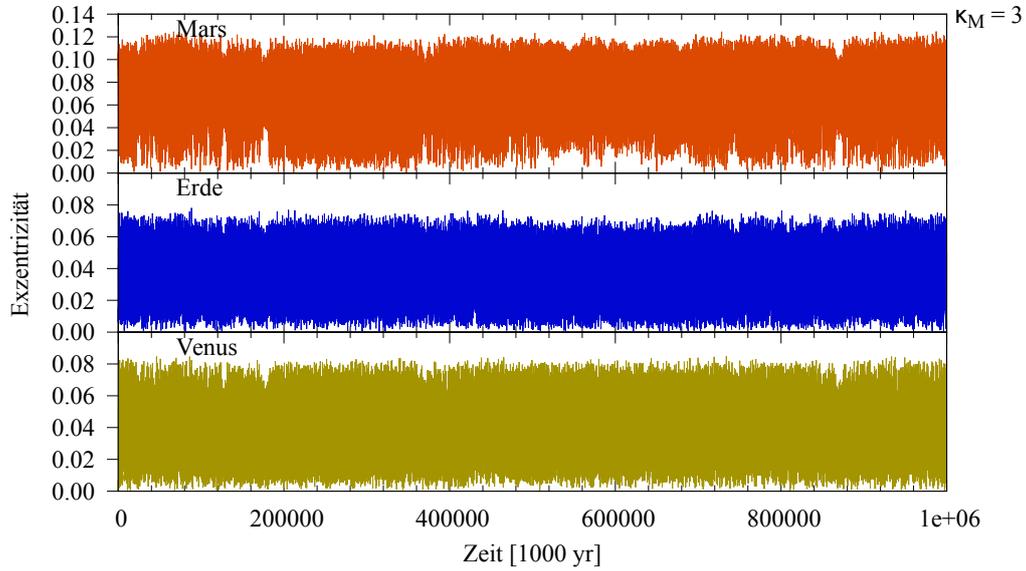
Dies vorausgeschickt, sind auf den folgenden Seiten die Ergebnisse der Langzeituntersuchungen der Exzentrizitäten von den drei terrestrischen Planeten dargestellt. Dabei wurden die Exzentrizitäten der drei Planeten übereinander abgebildet und jeweils in den Farben ihrer natürlichen Oberflächen illustriert. Die Grenzen der y-Achse sind dabei für Erde und Venus ident, um eine bessere Vergleichbarkeit zwischen diesen beiden Planeten zu gewährleisten.



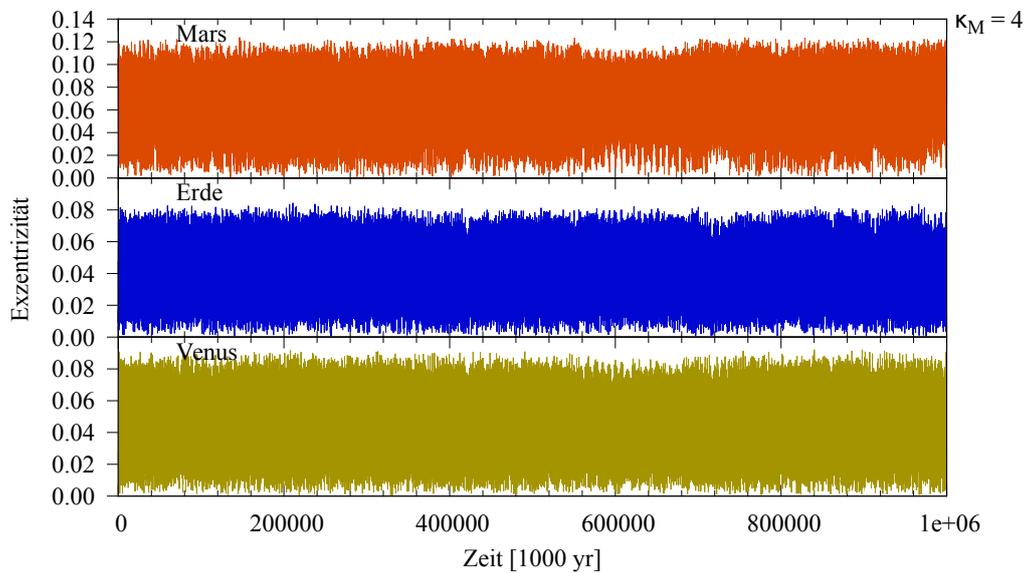
**Abbildung 6.1:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 1$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



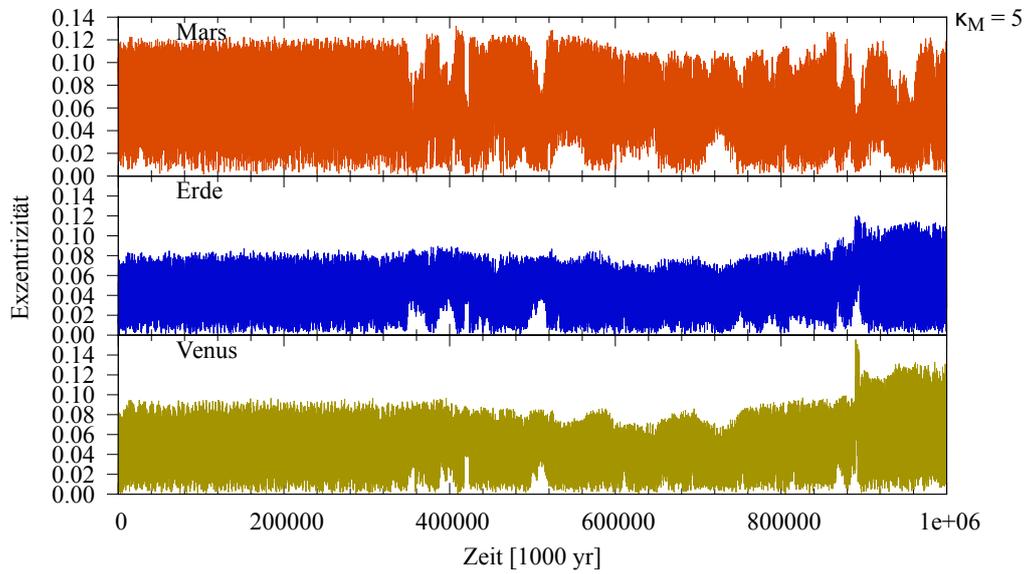
**Abbildung 6.2:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 2$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



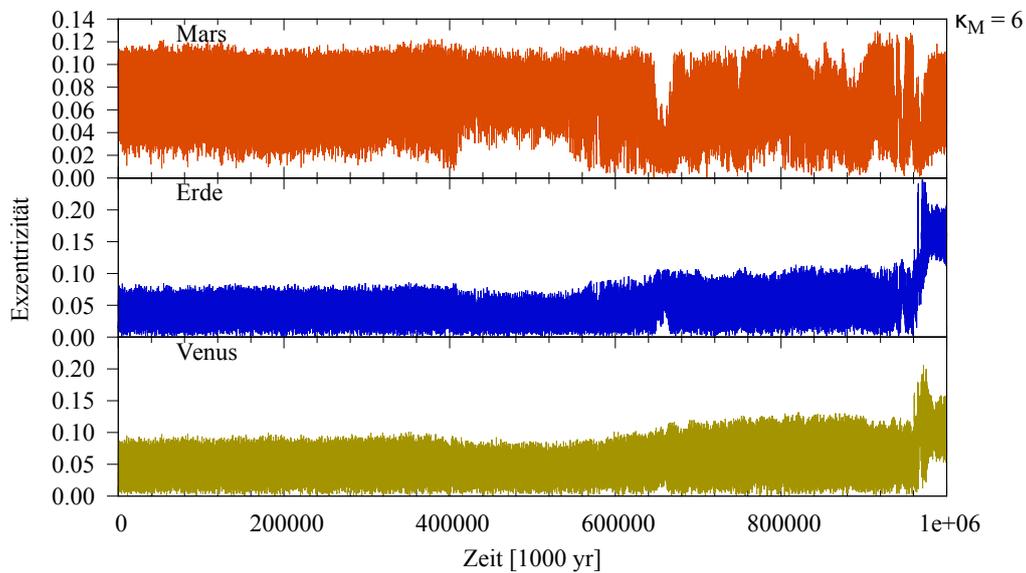
**Abbildung 6.3:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 3$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr.



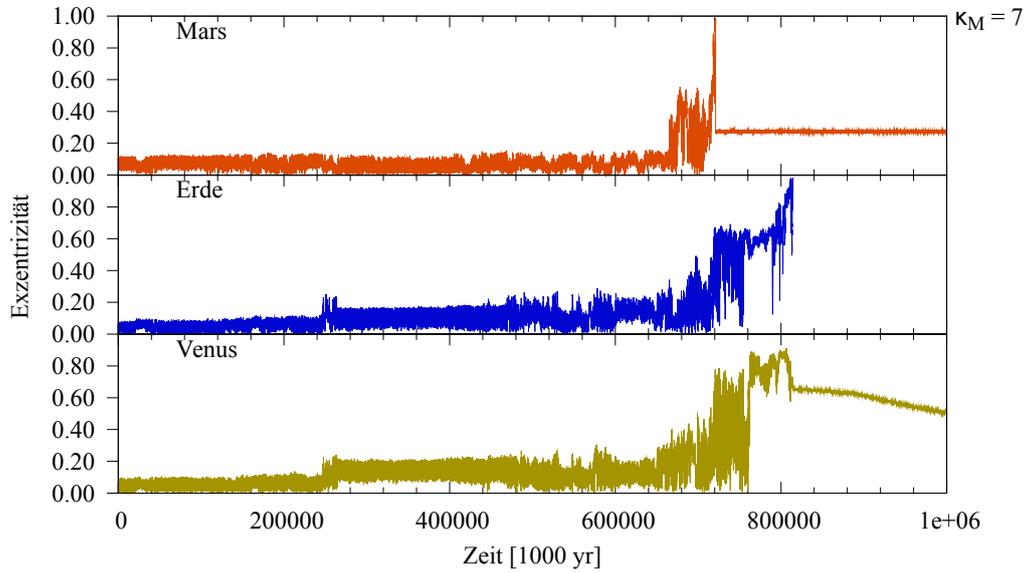
**Abbildung 6.4:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 4$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr.



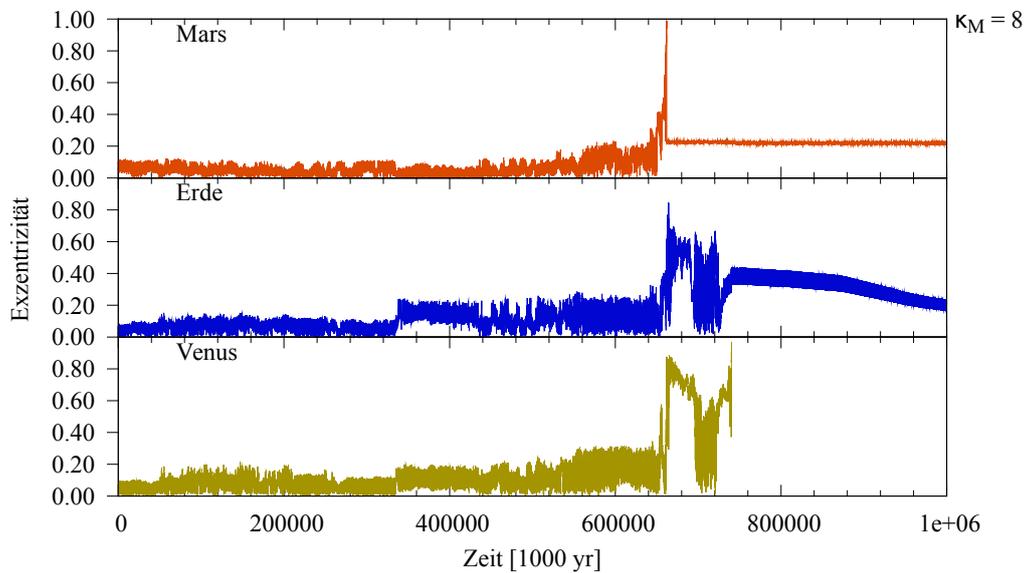
**Abbildung 6.5:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 5$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr.



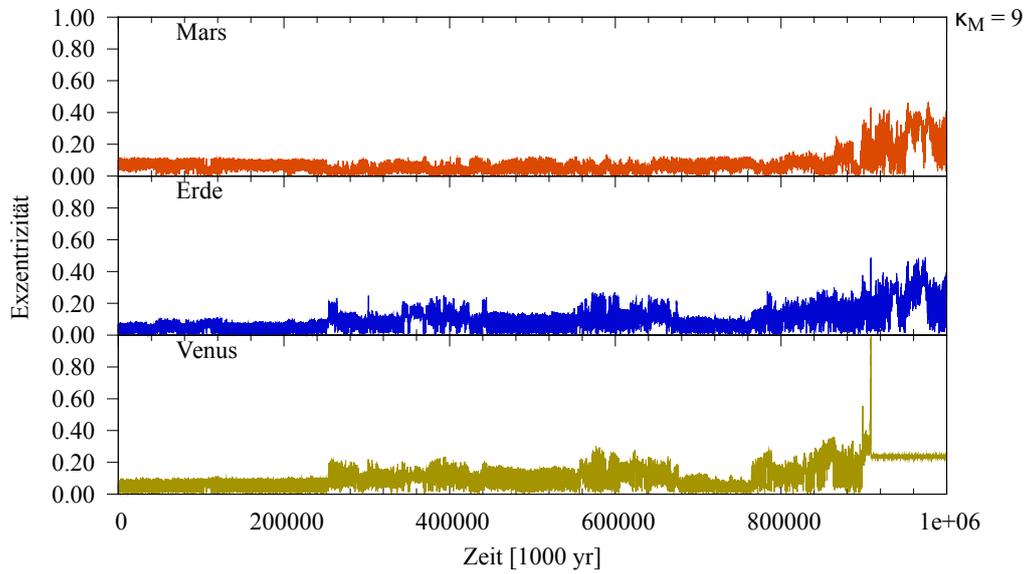
**Abbildung 6.6:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 6$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr.



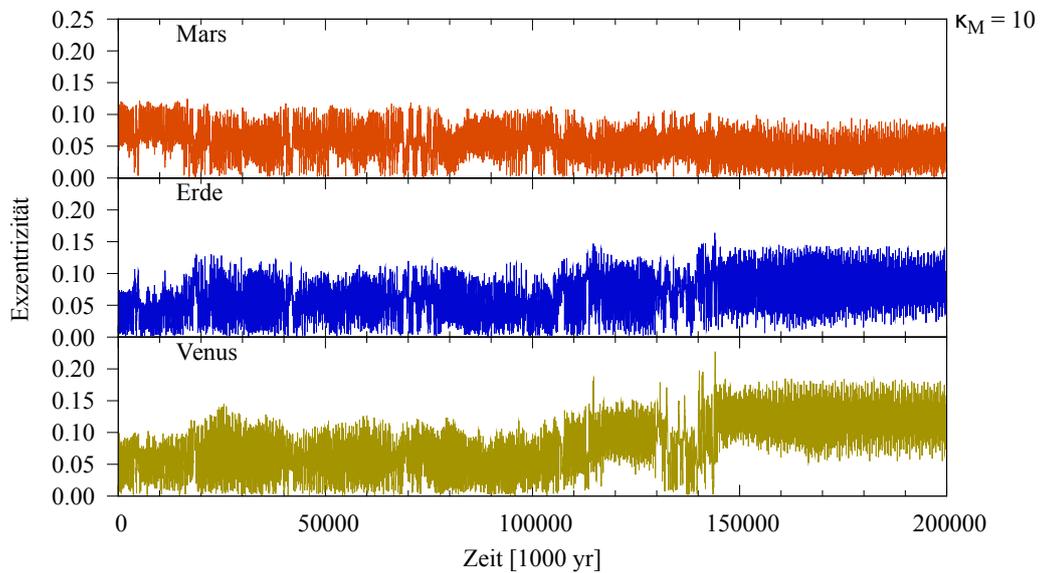
**Abbildung 6.7:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 7$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr. Die Erde wird hierbei aus dem System hinausgeworfen.



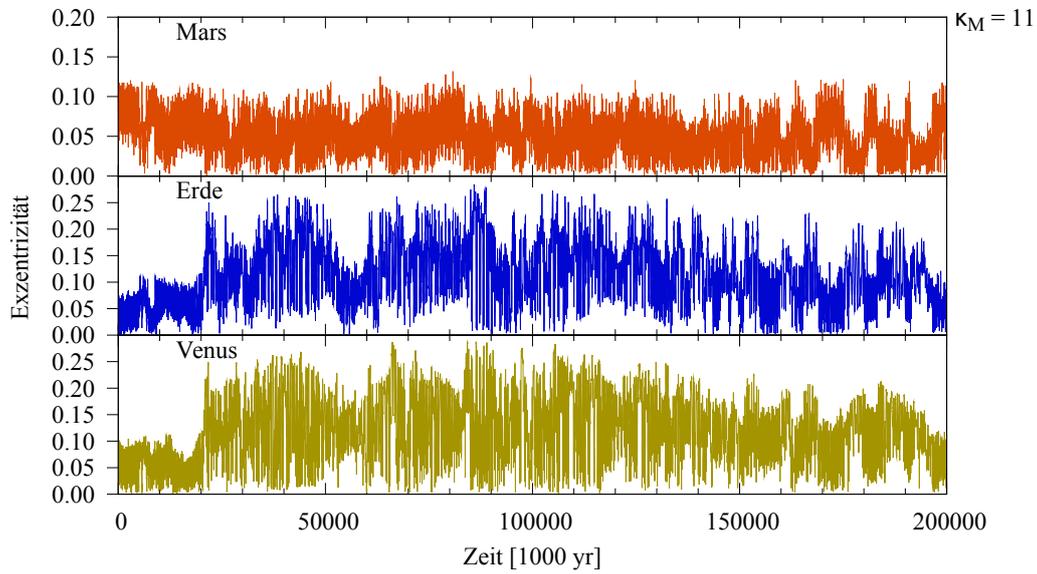
**Abbildung 6.8:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 8$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr. Hierbei wird die Venus aus dem System hinausgeworfen.



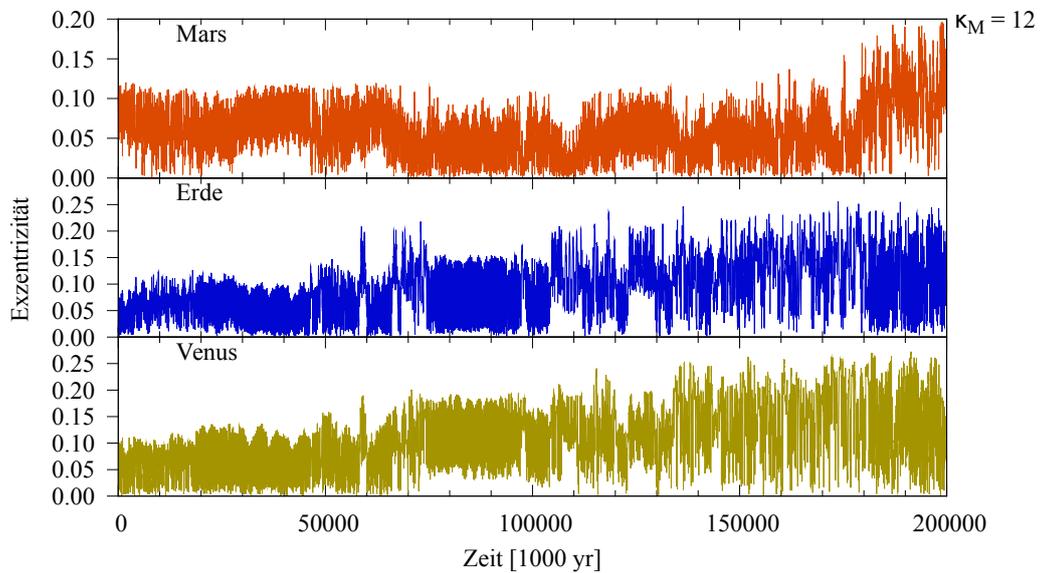
**Abbildung 6.9:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 9$ . Die Integrationszeit beträgt 1 Gyr.



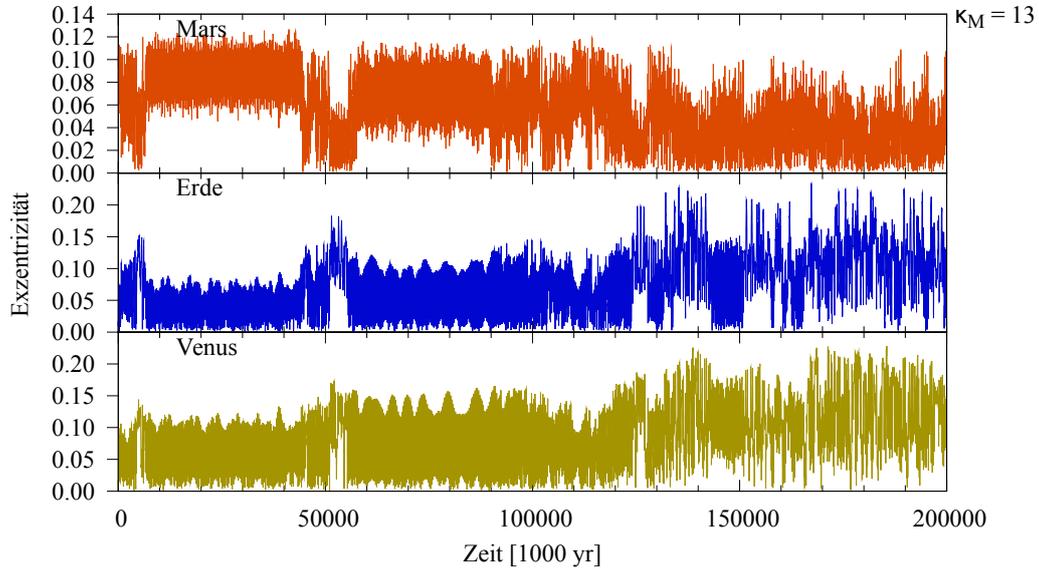
**Abbildung 6.10:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 10$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



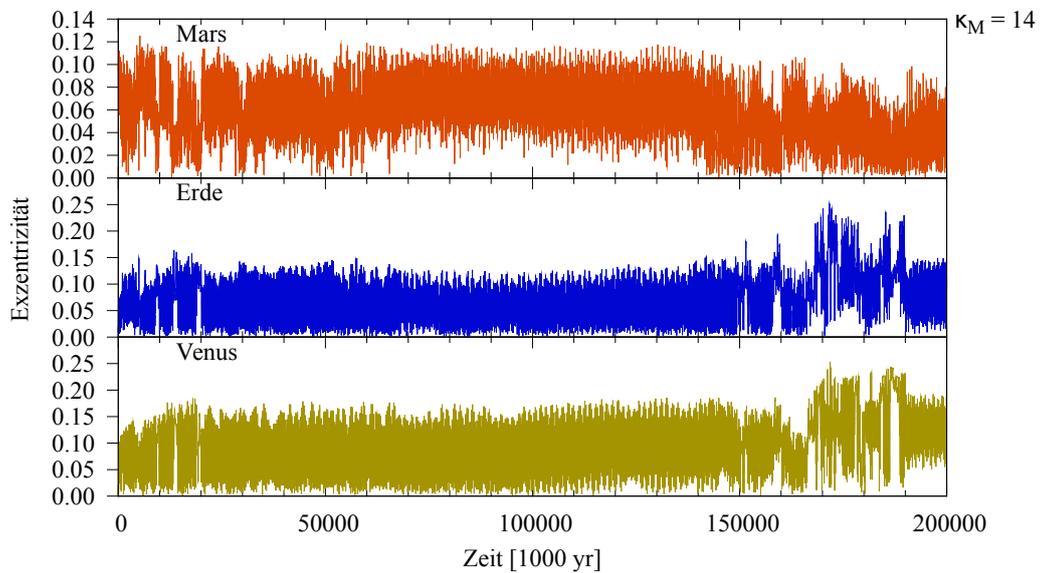
**Abbildung 6.11:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 11$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



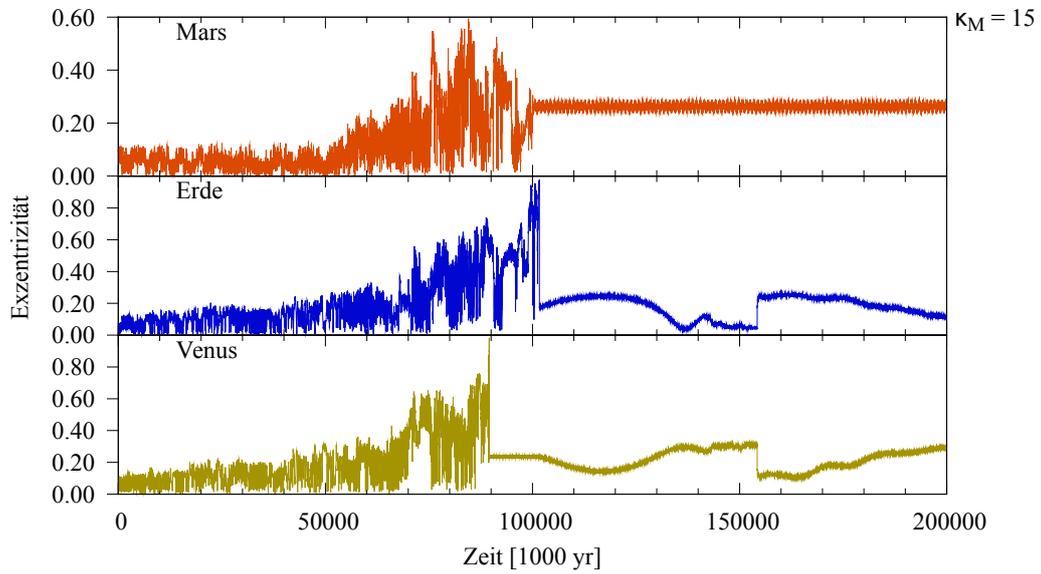
**Abbildung 6.12:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 12$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



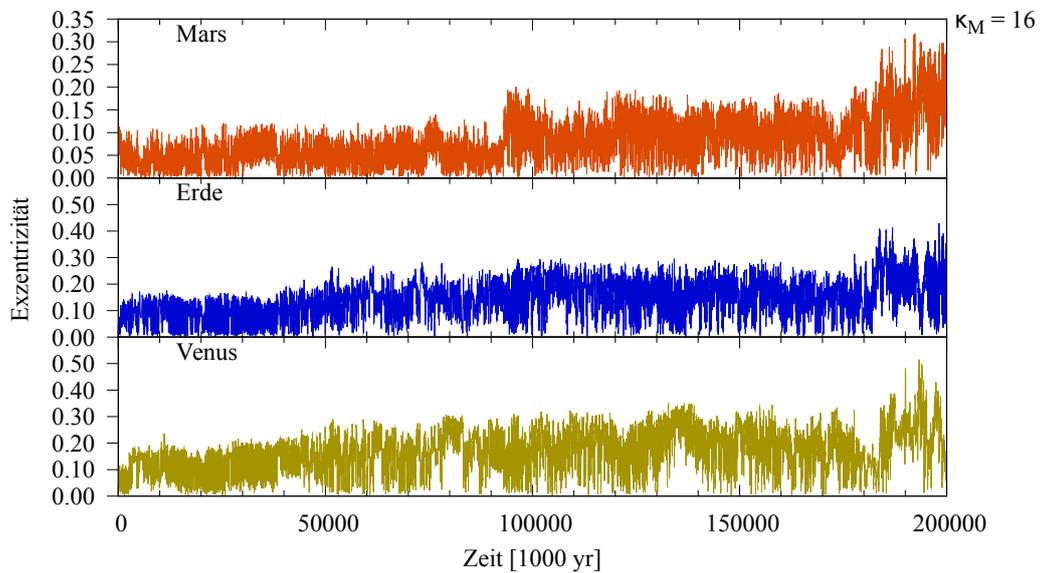
**Abbildung 6.13:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 13$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



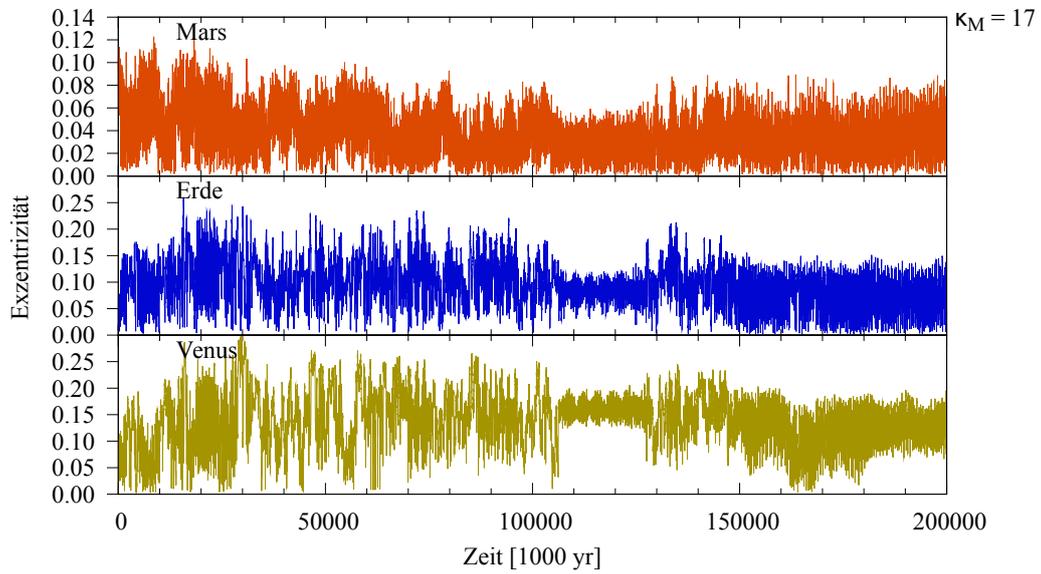
**Abbildung 6.14:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 14$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



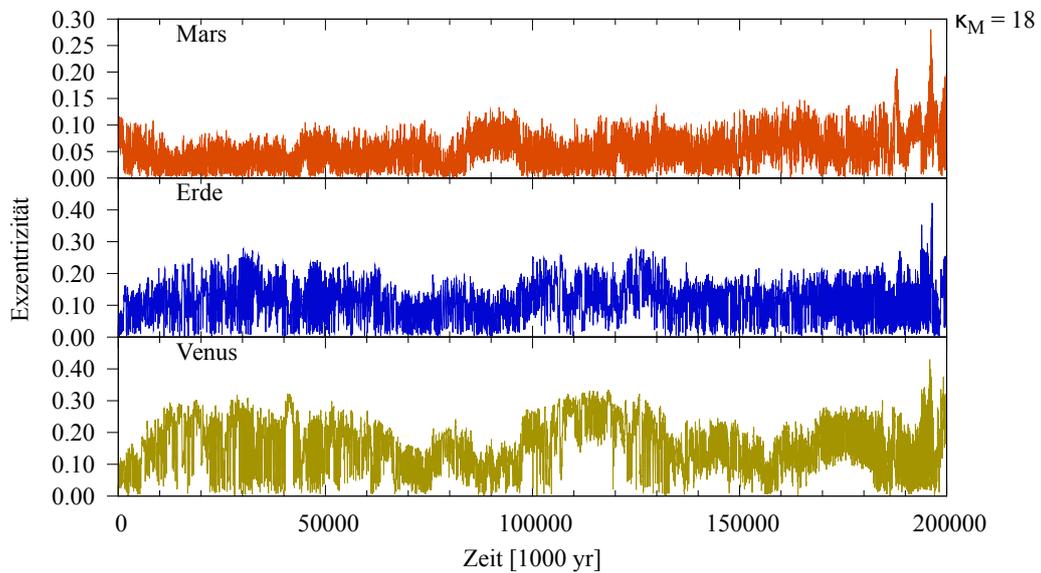
**Abbildung 6.15:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 15$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



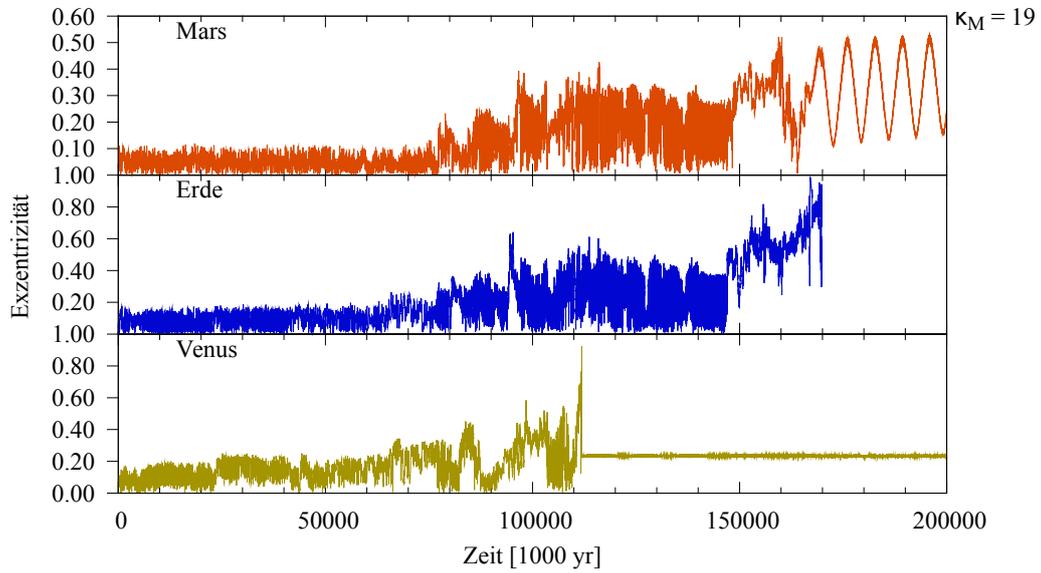
**Abbildung 6.16:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 16$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



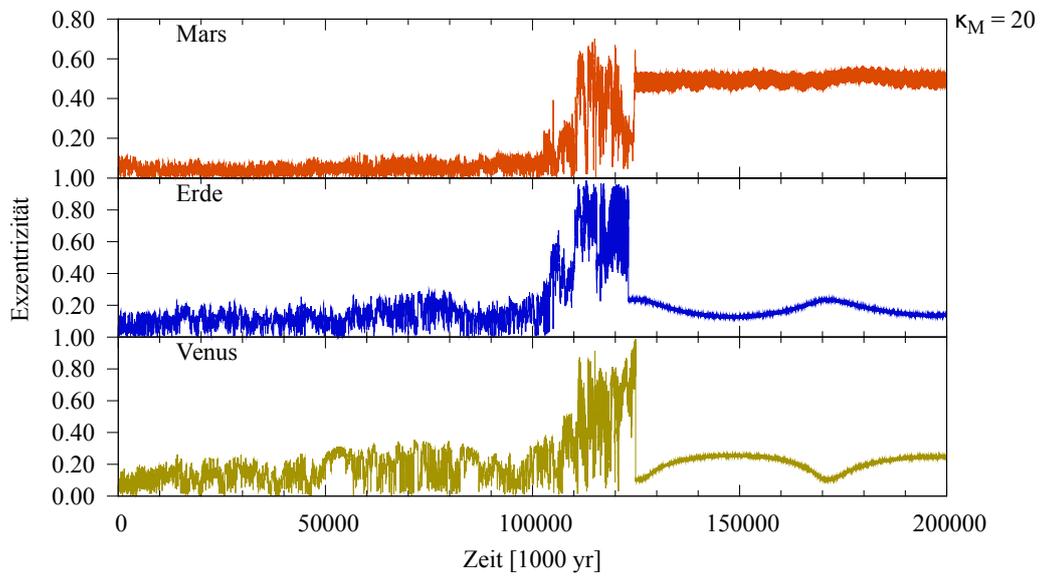
**Abbildung 6.17:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 17$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



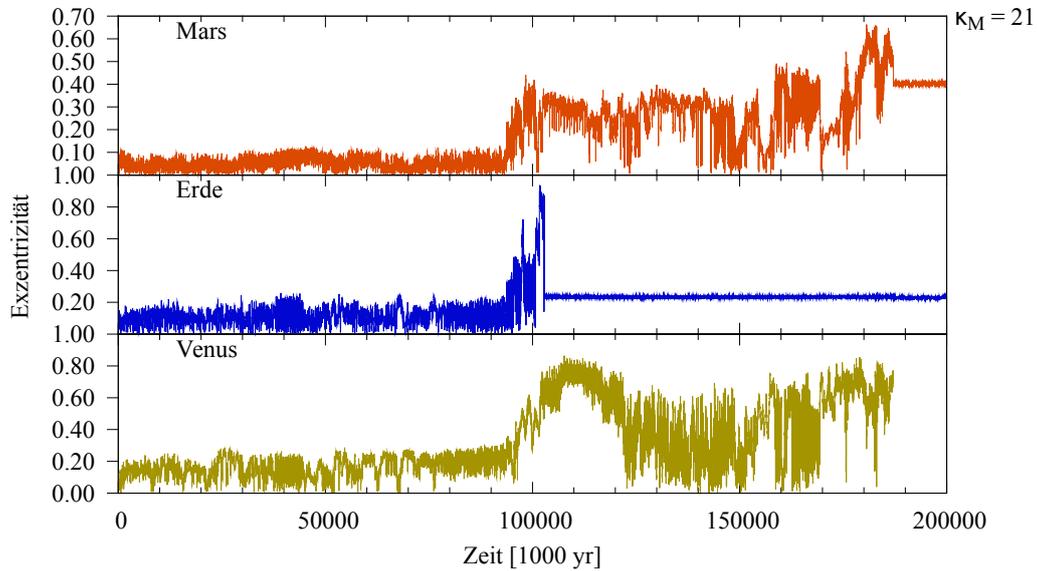
**Abbildung 6.18:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 18$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



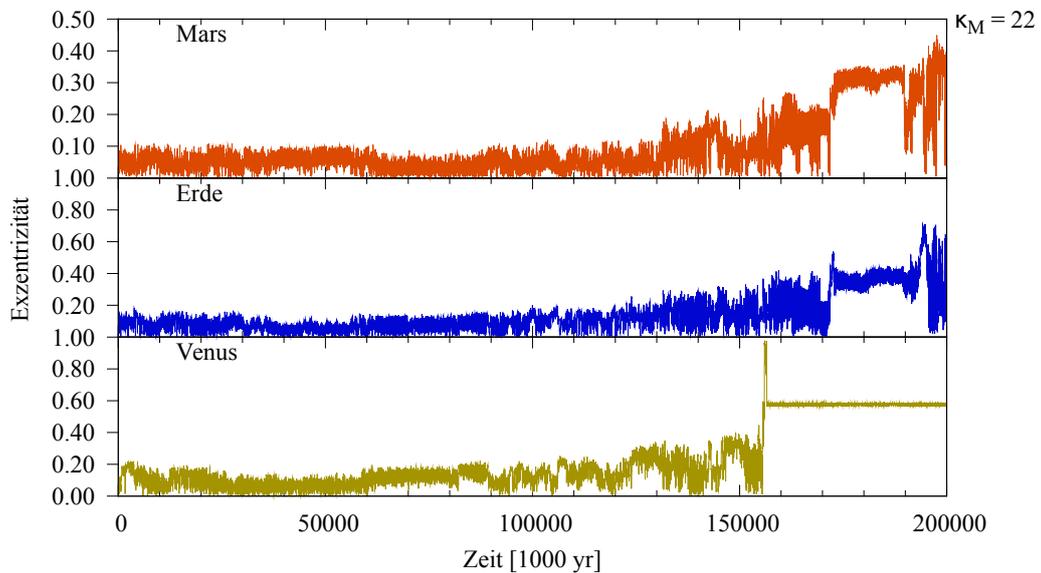
**Abbildung 6.19:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 19$  über einen Zeitraum von 200 Myrs. Hierbei wird die Erde aus dem System hinausgeworfen.



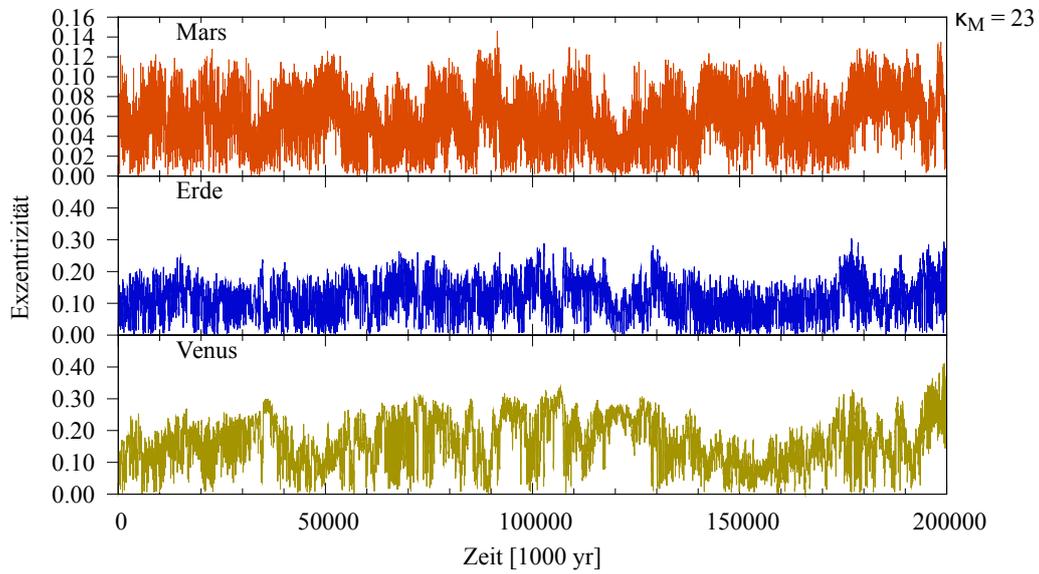
**Abbildung 6.20:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 20$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



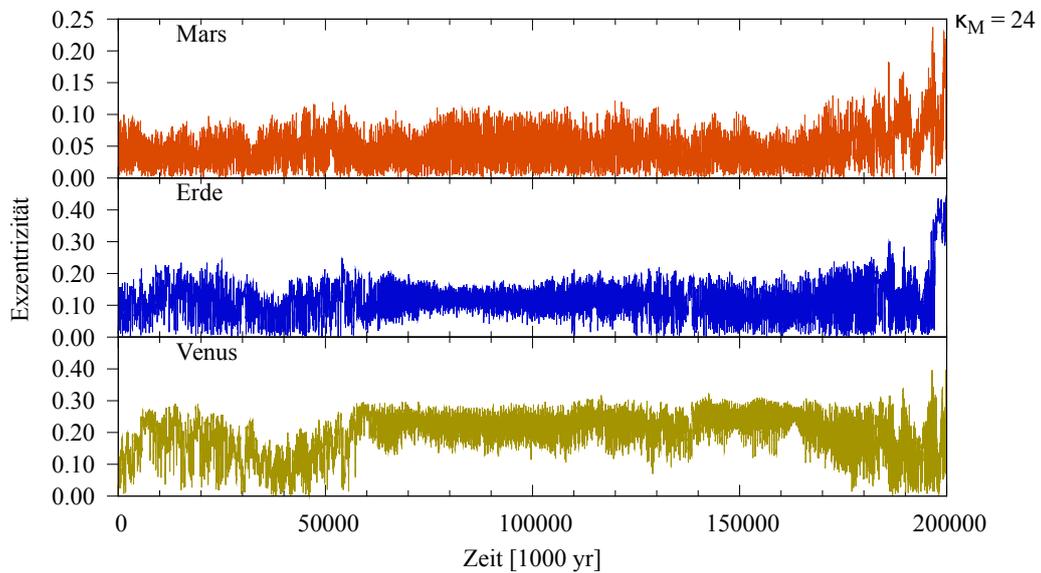
**Abbildung 6.21:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 21$  über einen Zeitraum von 200 Myrs. Hierbei wird die Venus aus dem System hinausgeworfen.



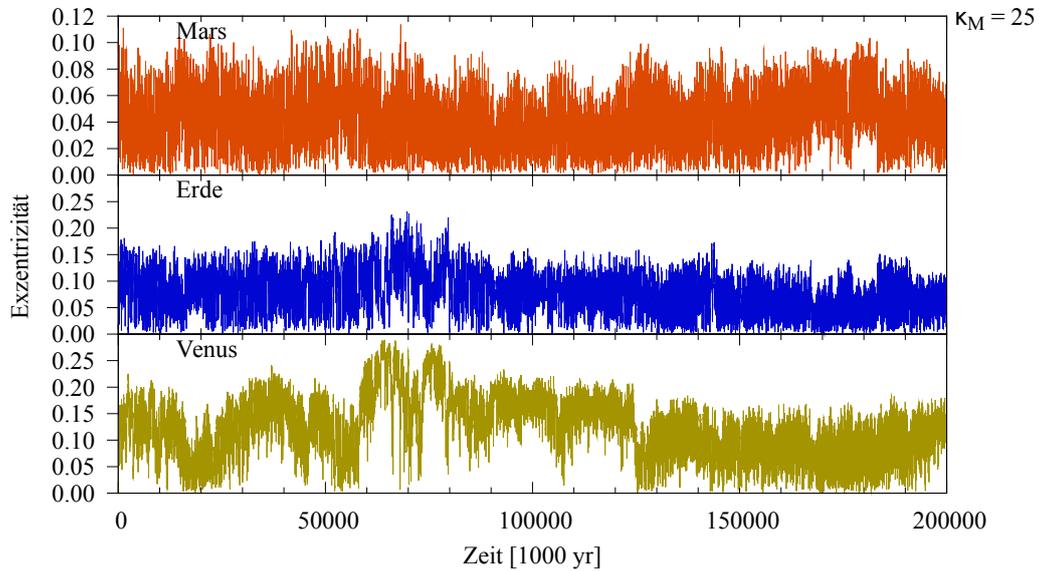
**Abbildung 6.22:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 22$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



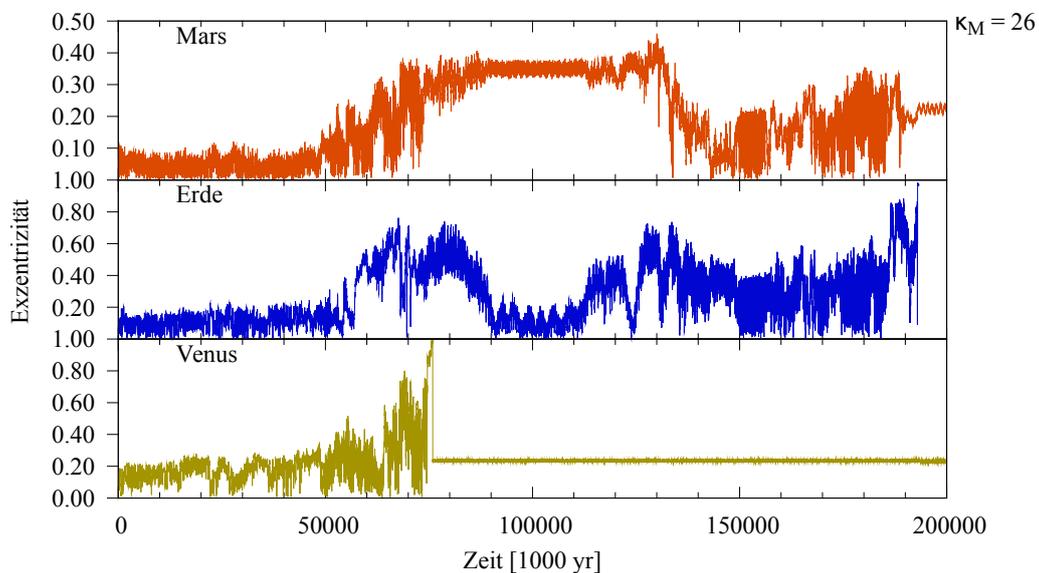
**Abbildung 6.23:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 23$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



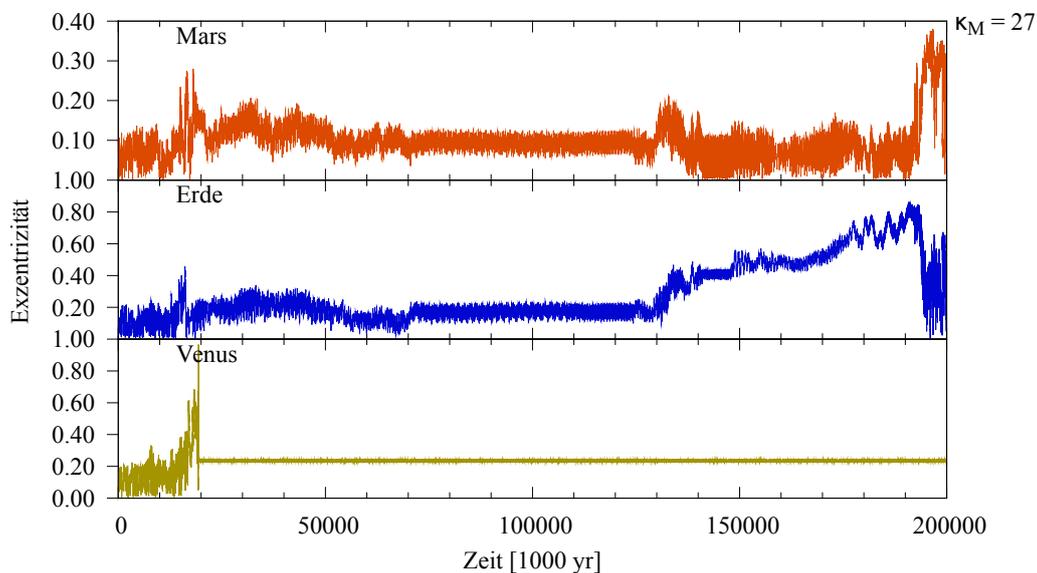
**Abbildung 6.24:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 24$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



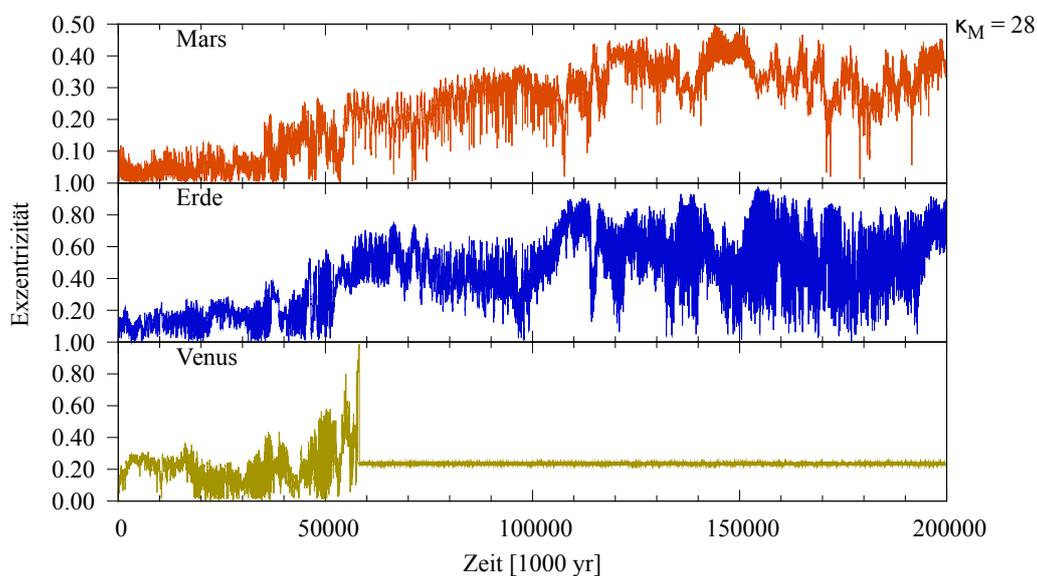
**Abbildung 6.25:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 25$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



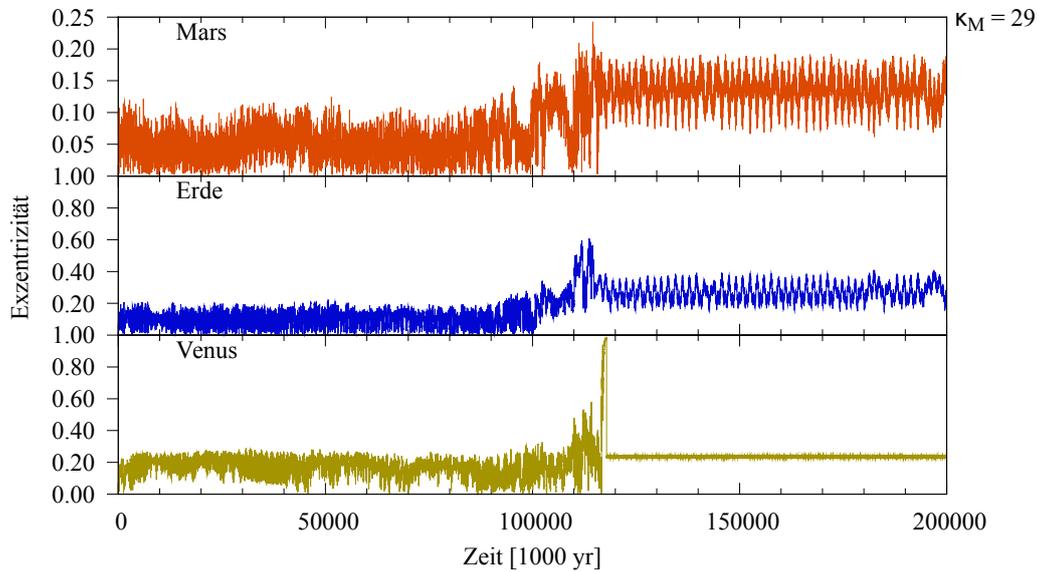
**Abbildung 6.26:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 26$  über einen Zeitraum von 200 Myrs. Hierbei wird die Erde aus dem System hinausgeworfen.



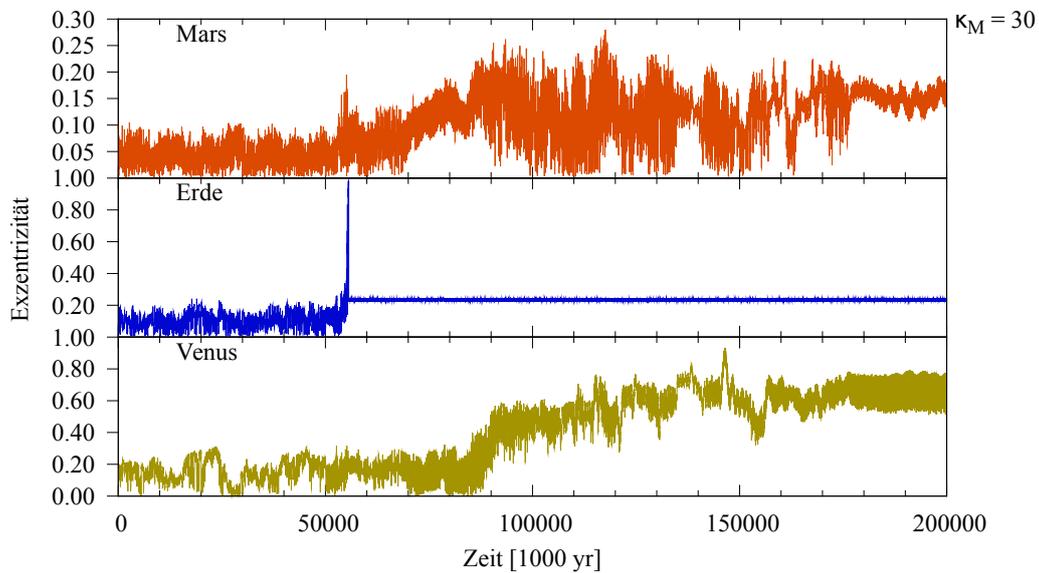
**Abbildung 6.27:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 27$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



**Abbildung 6.28:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 28$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



**Abbildung 6.29:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 29$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.



**Abbildung 6.30:** Die Exzentrizitäten der drei terrestrischen Planeten bei  $\kappa_M = 30$  über einen Zeitraum von 200 Myrs.

## 6.2 Lebenslauf

### Persönliche Angaben

Name	Egon Tschurtschenthaler, Bakk.
Adresse	Porzellangasse 30/224 1090 Wien (A)
E-Mail	egi01it@yahoo.de
Staatsangehörigkeit	Italienisch
Geburtsdatum	25.02.1985
Geschlecht	Männlich

### Ausbildung

2009 - heute	Magisterstudium Astronomie an der Universität Wien
2004 - 2009	Bakkalaureatsstudium Astronomie an der Universität Wien (Abschluss mit Auszeichnung)
2001 - 2004	Oberschule für Geometer "Peter Anich", Bozen
1999 - 2001	Realgymnasium "J.P. Fallmerayer", Brixen
1996 - 1999	Mittelschule Mühlbach
1991 - 1996	Volksschule Rodeneck

### Weitere berufliche Tätigkeiten

Freie Mitarbeit im elterlichen Gastronomiebetrieb

### Auszeichnungen

2008/09	Leistungsstipendium des Landes Südtirol für hervorragende Studienleistungen
2009/10	Leistungsstipendium des Landes Südtirol für hervorragende Studienleistungen

## 7 Danksagung

Ich danke Herrn Prof. R. Dvorak für die Unterstützung während des Verfassens dieser Magisterarbeit.

Weiters bedanke ich mich bei der Universität Wien für die genossene Ausbildung.

Schließlich möchte ich auch meiner Familie und meinen Freunden für die moralische Unterstützung danken.

# Literaturverzeichnis

- [1] Campbell B., Walker G. and Yang S. 1988, *A search for substellar companions to solar-type stars*, Apj, 331, 902
- [2] Charpinet S., Fontaine G., Brassard P., Green E. M., van Grootel V., Randall S. K., Silvotti R., Baran A. S., Østensen R. H., Kawaler S. D. and Telting J. H. 2011, *A compact system of small planets around a former red-giant star*, Nature, 480, 496
- [3] Delva M. 1984, *Integration of the elliptic restricted three-body problem with Lie series*, Celest. Mech., 34, 145
- [4] Dvorak R. 2010, *The Role of Resonances in Astrodynamical Systems*, <http://www.univie.ac.at/adg/Publications/resonance-cont-phys.pdf>
- [5] Dvorak R., Freistetter F. and Kurths J. 2005, *Chaos and Stability in Planetary Systems*, Springer
- [6] Dvorak R., Pilat-Lohinger E., Funk B. and Freistetter F. 2003, *Planets in habitable zones: A study of the binary Gamma Cephei*, A&A, 398, 1
- [7] Dvorak R. and Süli Á. 2002, *On the Stability of the Terrestrial Planets as Models for Exosolar Planetary Systems*, Celest. Mech. Dyn. Astron., 83, 77
- [8] Dvorak R., Süli Á. and Freistetter F. 2005, *Our solar system as model for exosolar planetary systems*, Dynamics of Populations of Planetary Systems - Proceedings of IAU Colloquium 197, edited by Knežević Z. and Milani A., Cambridge University Press, 63
- [9] Froeschlè C. and Scholl H. 1977, *A qualitative comparison between the circular and elliptic sun-Jupiter-asteroid problem at commensurabilities*, A&A, 57, 33
- [10] Hanslmeier A. and Dvorak R. 1984, *Numerical Integration with Lie Series*, A&A, 132, 203
- [11] Kiseleva-Eggleton L., Bois E., Rambaux N. and Dvorak R. 2002, *Global Dynamics and Stability Limits for Planetary Systems around HD 12661, HD 38529, HD 37124, and HD 160691*, ApJ, 578, 145
- [12] Laskar J. 1988, *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, A&A, 198, 341

- [13] Laskar J. 1989, *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system*, Nature, 338, 237
- [14] Lichtenegger H. 1984, *The dynamics of bodies with variable masses*, Celest. Mech., 34, 357
- [15] Murray C.D. and Dermott S.F. 1999, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press
- [16] Schneider J. 2012 a, *Interactive Extra-solar Planets Catalog*, <http://www.exoplanet.eu/catalog.php> vom 03.01.2012
- [17] Schneider J. 2012 b, *Interactive Extra-solar Planets Catalog*, <http://www.exoplanet.eu/catalog.php> vom 19.01.2012
- [18] Scholl H. and Froeschlè C. 1974, *Asteroidal Motion at the 3/1 Commensurability*, A&A, 33, 455
- [19] Stumpff K. 1959, *Himmelsmechanik I, Das Zweikörperproblem und die Methoden der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [20] Süli Á. and Dvorak R. 2007, *A planetary system with an escaping Mars*, Astron. Nachr., 328, 4
- [21] Süli Á., Dvorak R. and Freistetter F. 2005, *The stability of the terrestrial planets with a more massive 'Earth'*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 363, 241
- [22] Wuchterl G. 2004, *Planet Formation. Towards Estimating Galactic Habitability*, Astrobiology: Future Perspectives, by P. Ehrenfreund et al., Kluwer Academic Publishers, 305, 67
- [23] Yoshikawa M. 1989, *A survey of the motions of asteroids in the commensurabilities with Jupiter*, A&A, 213, 436
- [24] Wisdom J.L. 1981, *The origin of the Kirkwood gaps: A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability 1. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem*, PhDT, 5W