



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Unmöglich möglich?

Die drei klassischen Konstruktionsprobleme und mögliche Lösungen

Verfasser

Matthias Sebastian Konzett

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaft (Mag.rer.nat.)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium UF Mathematik und
UF Geschichte, Sozialkunde und Politische
Bildung

Betreuer:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
1.1. „Alles ist möglich“	3
1.2. (Klassische) Konstruktionsprobleme	3
1.3. Die griechische Mathematik.....	4
1.4. Konstruktionsvorschriften	7
1.5. Mögliche Konstruktionen.....	9
2. Würfelverdopplung.....	17
2.1. Die Geschichte	17
2.2. Das Problem	21
2.3. Die Einleitung	21
2.4. Die Behauptung	25
2.5. Der Unmöglichkeitsbeweis.....	25
2.6. Alternative Lösungen	27
2.6.1. Problem der mittleren Konstanten	27
2.6.2. Die Lösung von Platon.....	28
2.6.3. Lösung mittels zweier Parabeln	30
2.6.4. Lösung mittels Origamics.....	32
3. Winkeldreiteilung.....	38
3.1. Die Geschichte	38
3.2. Das Problem	42
3.3. Die Einleitung	42
3.4. Der Unmöglichkeitsbeweis.....	43
3.5. Alternative Lösungen	46
3.5.1. Lösung mittels Origamics.....	46
3.5.2. Lösung mittels Konchloide	52
3.5.3. Lösung nach Archimedes	46

4. Quadratur des Kreises.....	61
4.1. Das Problem	61
4.2. Die Geschichte	61
4.3. Der Unmöglichkeitsbeweis.....	68
4.4. Näherungslösungen.....	88
4.4.1. Abschätzung von Archimedes.....	88
4.4.2. Lösung mittels Quadratrix	95
4.4.3. Näherungslösung von Adam Kochansky	103
5. Fazit.....	106
6. Literaturverzeichnis	108
7. Anhang	111
7.1. Abstract – Deutsch	111
7.2. Abstract - English	111
7.3. Lebenslauf.....	113

1. Einleitung

1.1. „Alles ist möglich“

Im Gegensatz zum bekannten Werbespruch des Glücksspiels Lotto – „Alles ist möglich“ – ist in der Mathematik eben nicht alles möglich. Die Mathematik ist eine der wenigen, wenn nicht sogar die einzige Wissenschaft, in der es möglich ist, die Unmöglichkeit zu beweisen. Hierbei geht es jedoch nicht um Definitionsprobleme, wie etwa bei der Teilung durch die Zahl 0, welche per Definition als unmöglich gilt, sondern um mathematische Probleme, die sich als unlösbar herausgestellt haben.

Unmöglichkeitsbeweise tauchen, sobald man sich etwas intensiver mit der Mathematik beschäftigt, regelmäßig und in so gut wie jedem Teilgebiet auf. Nicht zuletzt deswegen habe ich mich bei dieser Arbeit speziell auf die Geometrie konzentriert und auch hier nochmals das Gebiet ein wenig eingegrenzt, indem ich meinen Fokus auf allgemeine Konstruktionsprobleme, sowie natürlich auf die drei klassischen „antiken“ Konstruktionsprobleme im Speziellen gelegt habe.

Bevor ich mich nun dem inhaltlichen Teil dieser Arbeit widme, möchte ich noch betonen dass in dieser Arbeit bewusst auf eine geschlechterneutrale Sprache verzichtet worden ist. Zwar sollte nicht außer Acht gelassen werden, dass es bereits in der Antike bedeutende Mathematikerinnen gab, von der Neuzeit erst gar nicht zu sprechen, doch ist mir im Verlauf der Recherche keine einzige Mathematikerin untergekommen die sich mit den drei klassischen Konstruktionsproblemen beschäftigte.

1.2. (Klassische) Konstruktionsprobleme

Bereits im antiken Griechenland haben sich die Mathematiker mit Unmöglichkeitsszenarien beschäftigt, auch wenn ihnen dies damals wohl noch nicht wirklich bewusst war. So wurden zu jener Zeit die drei klassischen Konstruktionsprobleme formuliert:

- Winkeldreiteilung
- Würfelverdopplung
- Quadratur des Kreises

Zwar gelten diese drei Probleme heute als nicht konstruierbar und damit als „unmöglich“ (nach den weiter unter beschriebenen Konstruktionsvorschriften), doch war das den Griechen damals noch nicht ersichtlich, auch wenn so manchem eventuell die „Möglichkeit der Unmöglichkeit“ bereits in den Sinn kam. Es dauerte weitere 2000 Jahre, bis es Mathematikern gelang, die Unmöglichkeit zu beweisen. Doch bereits in der Antike gab es etliche Versuche, die drei Probleme durch die Verwendung von zusätzlichen Konstruktionsbedingungen zu lösen. Im Folgenden werde ich auf eben jene drei klassischen Probleme sowie die verschiedensten und teilweise auch sehr kreativen Lösungen, die sich im Laufe der Zeit dafür gefunden haben, genauer eingehen.

Obwohl der Schwerpunkt dieser Arbeit natürlich auf rein mathematischen Überlegungen aufbaut, möchte ich zu Beginn trotz allem einen kurzen historischen Abriss über die griechische Geschichte der Mathematik geben. Nicht zuletzt, da der griechische Weg Mathematik zu betreiben, einen klaren Bruch zu der davor herrschenden Mathematik darstellte und auch das Fundament der uns heute bekannten Mathematik ist.

1.3. Die griechische Mathematik

Dass die griechische Mathematik sehr stark auf ihren Vorgängern, der ägyptischen sowie der babylonischen Mathematik, aufbaut, ist heute nicht mehr zu leugnen. Viele der griechischen Mathematiker gaben auch selbst an, viele Ideen, vor allem aus dem Bereich der Geometrie, aus Ägypten und Babylon übernommen zu haben. Auch das Niveau der vorgriechischen Mathematik wurde lange Zeit unterschätzt. So wussten die Ägypter offenbar, wie man das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfs errechnet, auch wenn dies nie theoretisch formuliert wurde, sondern lediglich in der Praxis seine Anwendung fand.

Die Babylonier wiederum zeichneten sich dadurch aus, dass sie bereits in der Lage waren, quadratische Gleichungen zu lösen.

Warum also hat speziell die griechische Mathematik eine so wichtige Bedeutung? – Diese Frage lässt sich sehr schnell und leicht beantworten, es ist die Systematik und die theoretische Herangehensweise, die die griechische Mathematik von allem Vorhergehenden unterscheidet. Die griechische Mathematik war keine empirische Mathematik und entfernte sich auch sehr schnell von jeglichen praktischen Überlegungen. Als Vorreiter sei hier vor allem Thales von Milet genannt, der im frühen 6. Jahrhundert v. Chr. lebte. Es handelt sich dabei um den ersten Mathematiker, von dem man nachweisen kann, dass er nicht nur allgemein gültige Sätze formulierte, sondern auch bewies, auch wenn leider die Beweise dieser Zeit nicht überliefert sind.

„In other words, ancient Greece introduced the concept of proof into mathematics. The first proofs of mathematical assertions are attributed to Thales of Milete. Unfortunately, we do not know how he proved mathematical results; we only know what he proved. Proclus reports that Thales was the first to prove (a) that a circle is divided into two equal parts by its diameter and (b) that when two straight lines intersect, angles are equal.“ [Kai 1996, S. 375]

Eine der wissenschaftlichen Höhepunkte der griechischen Mathematik stellt das von Euklid zusammengetragene Werk „Die Elemente“ dar, eine Abhandlung über die Arithmetik und Geometrie der damaligen Zeit. Das Einzigartige an diesem Werk war der systematische Aufbau, dem eine Reihe von Definition, Axiomen und Postulaten vorgeschickt wurde, mit deren Hilfe dann die anschließenden Sätze bewiesen wurden. Diese Vorgehensweise bestimmt noch immer das Bild der Mathematik. Bis in die heutige Zeit wird noch immer spekuliert, warum sich die Griechen abwandten vom bisher typischen praktischen Bezug der Mathematik hin zu einer Systematik. Einer der Faktoren dürfte im Wesen der griechischen Gesellschaft liegen, nicht nur, da ja die Griechen ähnlich wie die Römer eine sehr abneigende Haltung gegenüber jeglicher Arbeit hatten, da man für solche Zwecke schließlich die

Schicht der Sklaven zu Verfügung hatte, sondern auch, da die Philosophie und das Nachdenken im Allgemeinen eine sehr griechische Tugend war.

Der zweite, meiner Meinung nach auch sehr plausible Grund, dürfte im von den Griechen verwendeten Zahlensystem liegen. Die Griechen verwendeten als Zahlensymbole einfach ihre Buchstaben und entwickelten ein System, das dem römischen sehr ähnlich war. Dies führte aber dazu, dass sämtliche Rechnungen sehr aufwändig durchzuführen waren und vor allem Additionen und Divisionen ein hohes Maß an Geduld und Konzentration verlangten. Auch hierin könnte eben einer der Gründe liegen, warum sich die Griechen gerne mit abstrakteren Problemen beziehungsweise verallgemeinerten Fragestellungen beschäftigten.

Ein weiteres typisches Merkmal der griechischen Geschichte ist zwar in seiner Bedeutung für die allgemeine Mathematik weit bedeutungsloser, dafür aber für das von mir behandelte Thema umso wichtiger: die Geometrisierung der Mathematik. Auch hierfür lassen sich nur Vermutungen anstellen, die jedoch zumindest sehr plausibel klingen. Einerseits dürfte natürlich das oben erwähnte Zahlensystem der Griechen auch hier wieder einen gewissen Einfluss haben, da man durch die Geometrisierung der Probleme natürlich den algebraischen Weg sehr oft umgehen kann.

Die zweite Erklärung geht auf die Ideologie der Legende der griechischen Mathematik zurück, Pythagoras von Samos. Wobei auch hier anzumerken ist, dass es heutzutage, wie so oft bei sogenannten Ikonen, schwer festzustellen ist, wie viel von dem, was heutzutage Pythagoras zugeschrieben wird, wirklich von ihm stammte und wie vieles erst im Zuge seines Einflusses entstanden ist und ihm erst im Nachhinein zugeschrieben wurde. Ich verwende daher den Begriff Pythagoräer, da dies wohl im Allgemeinen näher an der Wahrheit liegt.

Für jene Gruppe an Mathematikern galt, dass die Welt nur aus Zahlen bestand. Wahrscheinlich erinnert sich so mancher noch an den eventuell in der Schulzeit gehörten Ausspruch „Alles ist Zahl“, wobei hier hinzufügend zu erwähnen ist, dass unter dem Begriff Zahl nur ganze Zahlen verstanden wurden. Brüche wurden also als Verhältnisse von „Zahlen“ betrachtet und

nicht als eigenständige Zahlen. Das Problem ist jedoch, dass sich die uns bekannten Zahlen nicht zur Gänze in das pythagoräische Verständnis eingliedern lassen, da sich beispielsweise irrationale Zahlen nicht als Verhältnisse von „Zahlen“ darstellen lassen. Dies dürfte jedoch auch schon den frühen griechischen Mathematikern aufgefallen sein, da solche Zahlen sehr oft vorkommen, beispielsweise als Diagonale des Einheitsquadrates. Man kann davon ausgehen, dass den Pythagoräern solche Zahlen bereits sehr früh bekannt waren, nicht zuletzt deshalb, da ähnliche Zahlen auch im Symbol des Geheimbundes, dem Pentagramm, auftauchen. Der Widerspruch der sich dadurch für die, dem Geheimbund zugehörigen, Mathematiker dank ihrer Philosophie ergab, ist ihnen wohl nicht verborgen geblieben. Es wäre also eine naheliegende Idee, auch hierin einen Grund für die Geometrisierung der Mathematik zu sehen, da es dabei den Weg ermöglicht, solche Widersprüche fürs Erste zu umgehen.

Da jedoch auch in der Geometrie eine gewisse Systematik herrschen musste, entwickelten die Griechen gewisse geometrische Axiome, die man auch als Konstruktionsvorschriften bezeichnen kann. Im Folgenden möchte ich jene Vorschriften kurz auflisten, da ich auch im Laufe dieser Arbeit mehrmals darauf zurückkommen werde.

1.4. Konstruktionsvorschriften

In der heutigen Literatur variieren die Anzahl der Punkte sowie die Formulierung teilweise sehr stark, der mathematische Sinn dahinter bleibt jedoch stets derselbe.

Zurückzuführen sind die Konstruktionsvorschriften auf Euklid, der sie in seinem wohl bekanntesten Werk, „die Elemente“, verschriftlichte. Bevor ich auf die heute übliche Formulierung eingehe, führe ich zuerst noch das Originalzitat aus Euklids Werk an:

„Gefordert soll sein:

- 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*
- 2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*

3. *Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,*
4. (Ax. 10) *Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*
5. (Ax. 11) *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“* [Euc 1997, S. 2f]

Aus diesen, von Euklid Postulate genannten, fünf Punkten leiteten sich dann die Konstruktionsvorschriften ab. Zur Ergänzung sollte noch erwähnt werden, dass die Bezeichnung, die Euklid verwendete, heutzutage irreführend wirkt, da man in diesem Zusammenhang eher von Axiomen reden würde als von Postulaten, wobei hierbei wiederum darauf zu achten ist, dass jene Punkte, die Euklid unter dem Kapitel „Axiome“ aufzählt, heutzutage eben nicht zu den Axiomen zählen würden.

Da sich meine Arbeit sehr intensiv mit geometrischen Konstruktionen beschäftigt, werde ich des Öfteren von der Konstruktion mit „Zirkel und Lineal“ sprechen. Gemeint sind also Konstruktionen, bei denen lediglich diese zwei Hilfsmittel zugelassen sind. Geht man zurück in die Antike, wird man diese zwei Begriffe jedoch so nicht vorfinden. Damals stellte man sich die Frage, welche Konstruktionen mit einer Geraden und einem Kreis möglich wären. Dies erklärt auch, warum man bei der Bezeichnung „Lineal“ kein übliches Lineal meint, sondern eines ohne jegliche Markierungen.

Wie bereits erwähnt, gibt es in der heutigen Literatur die verschiedensten Formulierungen für die Konstruktionsvorschriften, auch wenn der mathematische Sinn stets unverändert bleibt. Im Folgenden nun eine der gängigen Varianten:

1. Durch zwei verschiedene Punkte kann man die Verbindungsgerade legen.
2. Zu zwei nicht parallelen Geraden kann man den Schnittpunkt konstruieren.

3. Um einen gegebenen Punkt M als Mittelpunkt kann man einen Kreis k zeichnen, der die Entfernung r zweier gegebener Punkte (oder vorher konstruierter Punkte) als Radius hat.
4. Die Schnittpunkte zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden kann man konstruieren.

Manchmal werden diese vier Punkte noch um einen weiteren ergänzt:

5. Durch diese vier Konstruktionsvorschriften werden alle konstruierbaren Punkte in endlich vielen Schritten erreicht.

Nun stellt sich natürlich automatisch die Frage, welche Konstruktionen denn mittels dieser fünf Konstruktionsvorschriften möglich sind.

1.5. Konstruktion von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten

Die Zahlen, die im Folgenden bei den einzelnen Konstruktionsschritten in Klammern dabeistehen, beziehen sich auf die oben bereits erwähnten vier Konstruktionsvorschriften, damit klar ersichtlich ist, welche der Vorschriften wann verwendet werden. Um die Anleitung möglichst kurz zu halten, werde ich jedoch bereits einmal erklärte Konstruktionsschritte in Folge als gegeben annehmen, um eine ständige Wiederholung der Basisschritte zu vermeiden.

Der Vollständigkeit halber sollte noch erwähnt werden, dass es sich bei dem bisher erwähnten Zirkel ursprünglich wohl um einen Klappzirkel handelte. Gemeint ist also ein Zirkel, der beim Aufheben zusammenklappt und nicht die eingestellte Größe behält. Man kann jedoch sehr leicht nachweisen, dass es durch die elementaren Vorschriften möglich ist, Strecken zu übertragen. Deshalb wird heutzutage, aus Gründen der Übersicht, meist von einem uns bekannten Zirkel ausgegangen. Aus den gleichen Gründen werde auch ich in meiner Arbeit die Möglichkeit nutzen, Strecken „einfach“ mittels Zirkel zu übertragen, anstatt jedes Mal diese Streckenverschiebung vorzunehmen.

1.5.1. Die Summe

Um aus zwei gegebenen Strecken mit den Längen a und b eine Strecke mit der Länge $a + b$ zu konstruieren, beginnt man mit zwei beliebigen Punkten, durch die man eine Gerade legt (1). Nun wählt man auf eben jener Geraden einen beliebigen Punkt und bezeichnet jenen Punkt als O . Ausgehend von diesem „Nullpunkt“ als Mittelpunkt zeichnet man einen Kreis mit dem Radius a (3), schneidet diesen Kreis mit der Geraden (4) und bezeichnet den einen dabei erhaltenen Schnittpunkt als Punkt A . Der Abstand zwischen Punkt O und Punkt A beträgt nun genau die Länge a . Als Nächstes zeichnet man einen weiteren Kreis, diesmal mit dem eben konstruierten Punkt A als Mittelpunkt und dem Radius b . Schneidet man nun den neuen Kreis wiederum mit der Geraden, erhält man auf der dem ersten Kreis ferner liegenden Seite einen Schnittpunkt B . Die Strecke zwischen O und B besitzt nun exakt die Länge $a + b$ (Abb. 1).

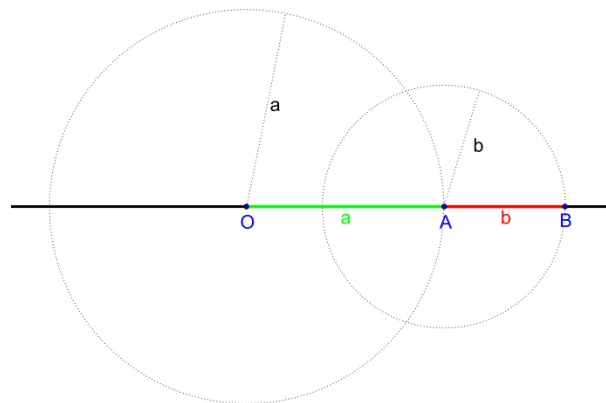


Abbildung 1

1.5.2. Die Differenz

Die Subtraktion, als Umkehrfunktion der Addition, funktioniert konstruktiv analog zur Addition. Der einzige Unterschied besteht am Schluss bei der Bezeichnung des Schnittpunkts B . Nimmt man bei der Addition den dem ersten Kreis ferner liegenden Schnittpunkt, bezeichnet man bei der Subtraktion den näher liegenden Schnittpunkt als Punkt B . Die Strecke zwischen O und B besitzt nun exakt die Länge $a - b$. Bei dieser Konstruktion

ist natürlich vorausgesetzt, dass die längere der beiden gegebenen Strecken als Strecke a bezeichnet wird (Abb. 2).

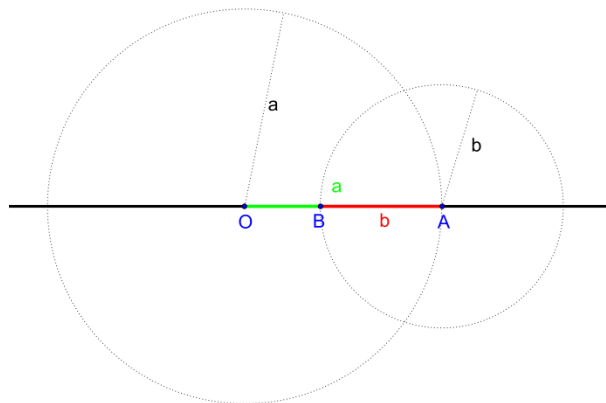


Abbildung 2

1.5.3. Das Produkt

Für die Multiplikation sowie die Division von Streckenlängen muss auf die Strahlensätze zurückgegriffen werden. Im Folgenden möchte ich die Aussage der Strahlensätze nochmals ausführen.

Exkurs: Der Strahlensatz

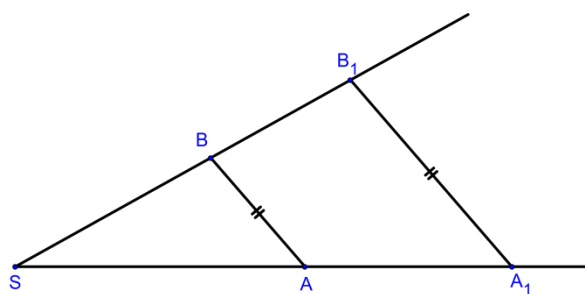


Abbildung 3

Folgende Aussagen gelten in Abbildung 3:

- $SA : SA_1 = SB : SB_1$
- $SA : AA_1 = SB : BB_1$
- $SA : SA_1 = AB : A_1B_1$

Nun aber zurück zur Multiplikation. In diesem Fall müsste nicht zwischen der längeren und der kürzeren Strecke unterschieden werden, ich werde aber weiterhin die längere Strecke mit a bezeichnen und die kürzere mit b . Im ersten Schritt konstruiert man eine Gerade und wählt darauf einen beliebigen Nullpunkt. Von dort trägt man im nächsten Schritt rechts vom Nullpunkt zuerst die Länge 1 ab und anschließend die Länge a . Nun bildet man eine, zur eigentlichen Geraden senkrechte, Gerade durch den Punkt O . Dafür konstruiert man einen Kreis mit beliebigem Radius r , dessen Mittelpunkt im Punkt O liegt (3). Anschließend schneidet man diesen Kreis mit der ursprünglichen Gerade, um die zwei Schnittpunkte zu konstruieren (4) (Abb. 4).

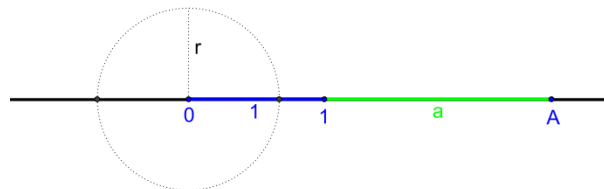


Abbildung 4

Nun zeichnet man zwei neue Kreise mit gleichem Radius, der wieder beliebig gewählt werden kann, jedoch größer sein muss als der Radius des ersten Kreises. Die Mittelpunkte der Kreise stellen die eben konstruierten Schnittpunkte zwischen dem ersten Kreis und der Gerade dar (3). Anschließend schneidet man diese zwei Kreise und erhält zwei neue Schnittpunkte (4). Diese Schnittpunkte verbindet man miteinander (1) und erhält damit eine, durch den Punkt O gehende, Normale auf die eigentliche Gerade (Abb. 5).

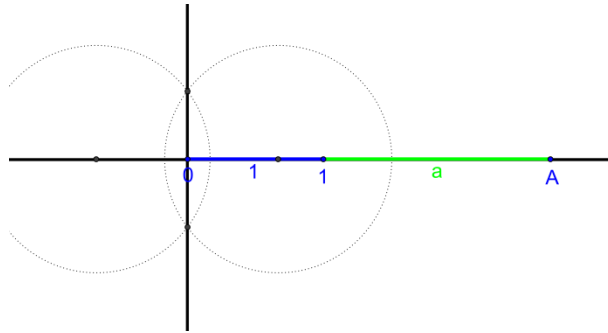


Abbildung 5

Auf dieser Geraden trage ich nun die Strecke b ab und verbinde den Punkt mit dem Endpunkt der Strecke 1 (1). Anschließend muss man noch eine, zu jener Strecke parallel liegende, Strecke konstruieren, die durch den Punkt A geht. Im ersten Schritt konstruiert man eine auf die Strecke zwischen den Punkten B und 1 normale Gerade. Danach konstruiert man einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Punkt A ist und dessen Radius größer ist als der Normalabstand von A zu der eben konstruierten Geraden (3) (Abb. 6).

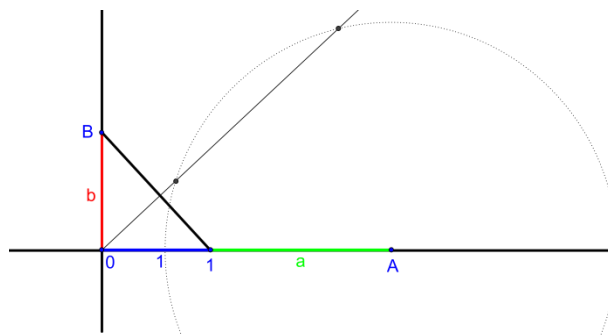
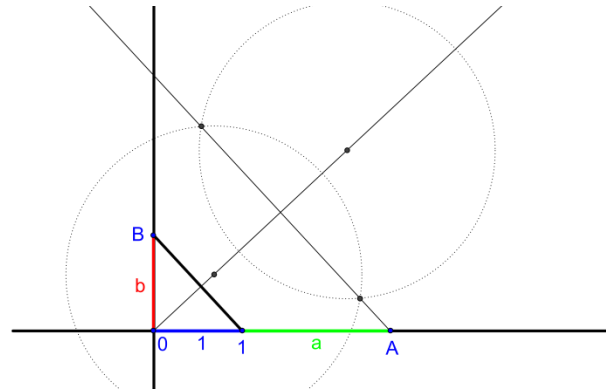
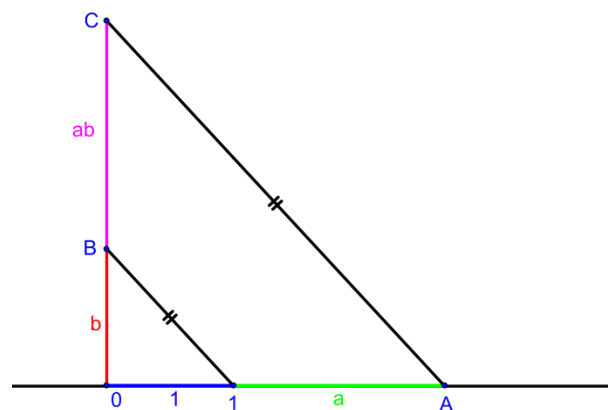


Abbildung 6

Anschließend konstruiert man wieder die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden normal auf die Strecke von 1 nach B (4) und bildet um diese Schnittpunkte erneut zwei Kreise mit dem gleichen Radius, für den diesmal lediglich gelten muss, dass er länger ist, als die Hälfte des Abstands zwischen den zwei Schnittpunkten. Nun kann man die zwei Schnittpunkte der beiden Kreise ebenfalls wieder verbinden und erhält dadurch eine Gerade parallel zur Geraden zwischen den Punkten 1 und B , die durch den Punkt A verläuft (Abb. 7).



Schneidet man nun diese Gerade mit der Geraden, auf der die Länge b abgetragen ist, so erhält man einen Schnittpunkt C (2). Aus dem Strahlensatz folgt nun, dass die Länge zwischen dem Punkt O und dem Punkt C exakt die Strecke $a \cdot b$ ist (Abb. 8).



1.5.4. Der Quotient

Auch die Division bezieht sich auf den Strahlensatz und verläuft, bis auf die Anordnung der Strecken, analog zur oben beschriebenen Konstruktion, weswegen ich hier auch nur die Skizze als Erklärung anführen möchte (Abb. 9).

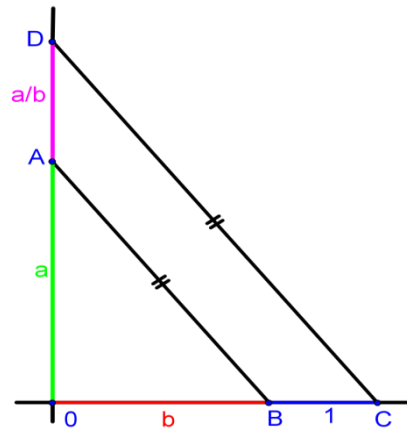


Abbildung 9

Daraus können wir folgern, dass die (positiven) rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ bzw. } \mathbb{N}, b \neq 0\}$ jedenfalls konstruierbar sind. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob man diese Zahlenmenge an konstruierbaren Zahlen noch erweitern kann und stößt sehr schnell auf folgende Einsicht:

1.5.5. Das Quadrat

Da es sich beim Quadrieren einer Zahl lediglich um eine Multiplikation der Zahl mit sich selbst handelt, sind also sämtliche Quadratzahlen von konstruierbaren Zahlen selbstverständlich wiederum konstruierbar. Ich verweise an dieser Stelle auf die bereits oben erklärte Methode der Multiplikation. Anschließend fragt man sich natürlich, ob dies auch für die Umkehrfunktion, also das Wurzelziehen, gültig ist.

1.5.6. Die Wurzel

Die Grundlage hierzu bietet der zur Satzgruppe des Pythagoras gehörende Höhensatz, der folgende Aussage ermöglicht.

Exkurs: Der Höhensatz

Man nehme ein rechtwinkeliges Dreieck und zeichne die Höhe h auf die Hypotenuse ein. Dadurch wird die Hypotenuse in zwei Abschnitte, normalerweise p und q genannt, geteilt und es gilt folgende Gleichung (Abb. 10):

$$h^2 = p \cdot q.$$

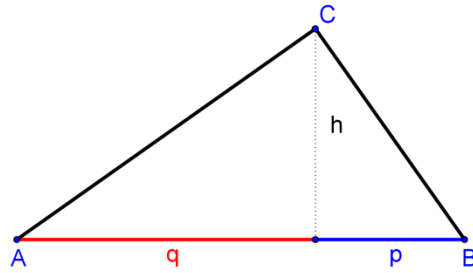


Abbildung 10

Bewiesen wird dieser Satz meist durch mehrmalige Anwendung des Satzes von Pythagoras. Ein Beweis findet sich heutzutage in fast jedem Schulbuch.

Nun aber zurück zum eigentlichen Thema, dem Wurzelziehen. Hierfür trägt man zu Beginn eine Strecke mit der Länge der Zahl a ab, dessen Wurzel man konstruieren möchte, und fügt dann noch die Länge 1 hinzu. Anschließend bildet man über der gesamten Strecke $a + 1$ einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke $a + 1$ und dessen Radius gleich $\frac{a+1}{2}$ ist, und konstruiert dort, wo die Länge a endet, eine normale Gerade auf die Strecke. Aufgrund des Höhensatzes gilt nun, dass jenes Stück der Gerade, zwischen der eigentlichen Strecke und dem Schnittpunkt mit dem Kreis, genau die gesuchte Länge $\sqrt{a}$ ist (Abb. 11).

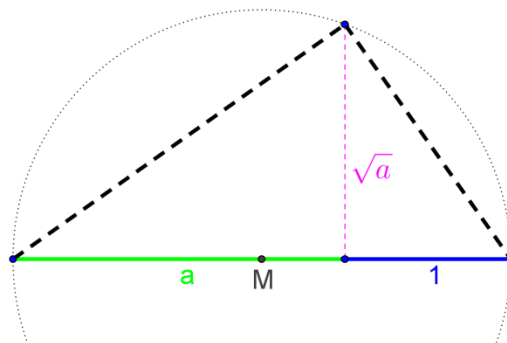


Abbildung 11

2. Würfelverdopplung

2.1. Die Geschichte

Das Problem der Würfelverdopplung – auch „Delisches Problem“ genannt – bei dem das Volumen eines gegebenen Würfels verdoppelt werden soll, ohne dass sich dabei seine Gestalt ändert, ist vor allem durch die mit ihm verbundene Sage bekannt geworden. Der Sage nach herrschte zur Zeit Platons, also rund um das 4. Jahrhundert v. Chr. eine verheerende Pest auf der Insel von Delos, eine recht kleine Insel im Ägäischen Meer, der die Delier nicht Herr wurden. Wie zu jener Zeit üblich, wenn man sich als Volk in einer aussichtslosen Lage befand, wendeten sich die Delier an das Orakel von Delphi, einer Weissagungsstätte und wohl die wichtigste Kultstätte des alten Griechenlands, um von dort einen Rat zu erhalten. Man empfahl daraufhin den Deliern, das Volumen ihres würfelförmigen Altars zu verdoppeln, um die Götter dadurch zu beschwichtigen. Die Delier erkannten sehr schnell, dass die Volumsverdopplung bei gleichbleibender Form des Altars eine große Schwierigkeit darstellte und wandten sich an den bereits damals sehr geschätzten Philosophen Platon. Laut Theon von Smyrna, ebenfalls ein griechischer Philosoph, der rund 300 Jahre später lebte, habe ihnen Platon erklärt, dass ihr Gott in Wirklichkeit keinen doppelt so großen Altar benötige und dies lediglich ein Hinweis darauf sein solle, dass die Griechen die Mathematik und damit verbunden natürlich auch die Geometrie nicht genügend schätzten [vgl. Wae 1966, S. 264].

Eine andere Quelle, von der man mittlerweile aber auch davon ausgeht, dass es sich dabei um keinen authentischen Brief handelt, kennen wir durch einen Brief, der uns von Eutokios überliefert und angeblich von Eratosthenes an König Ptolemaios geschickt wurde, der wie folgt lautet:

„Es wird erzählt, einer der alten Tragödiendichter habe den Minos auf die Bühne gebracht, wie er eben daran war, dem Glaukos ein Grabmal aufrichten zu lassen. Wie er aber erfahren hatte, dass das Grabmal nach allen drei Richtungen hundert Fuss messe, habe er gesagt: ‚Zu klein hast du das

Heiligtum des königlichen Grabes gemacht; doppelt so gross soll es sein. Verdopple schnell, ohne die schöne Form zu verderben, jede Seite des Grabmals!’ Er schien sich aber geirrt zu haben. Durch Verdopplung der Seiten wird die Fläche vervierfacht, der Körper aber verachtfacht. Er erkundigte sich nun bei den Geometern, durch welches Verfahren man einen gegebenen Körper unter Beibehaltung seiner Form verdoppeln könne und das Problem wurde die ‚Verdopplung der Würfels‘ genannt; denn sie gingen von einem Würfel aus und trachteten diesen zu verdoppeln. Wie sie nun lange hin und her überlegten, entdeckte als erster Hippokrates von Chios, dass, wenn zwischen zwei Strecken, von denen die grösste doppelt so gross ist wie die kleinste, zwei mittlere Proportionalen gefunden werden könnten, dass dann der Würfel verdoppelt werden könnte. So wurde die Schwierigkeit selbst durch eine andere, nicht geringere, ersetzt. Nach einiger Zeit, so wird erzählt, seien gewisse Delier, denen in einem Orakelspruch aufgetragen worden war, einen Altar zu verdoppeln, in dieselbe Schwierigkeit geraten. Sie hätten zu den Geometern um Platon eine Gesandtschaft geschickt, und sie dessen würdig erachtend, hätten sie diese aufgefordert, das Gesuchte zu finden. Wie sich nun diese mit Eifer dem Problem hingaben, zwischen zwei gegebenen Grössen zwei mittlere Proportionalen zu finden, habe Archytas das Problem durch Halbzylinder, Eudoxos aber durch die sogenannten gebogenen Linien gelöst...“ [Wae 1966, S. 263 f.]

Wie viel davon der Wahrheit entspricht, ist natürlich heutzutage nicht mehr leicht festzustellen. Man weiß aber sehr wohl, dass die Grundzüge des Problems deutlich älter sind, da bereits die Babylonier auf kubische Gleichungen gestoßen sind, die die Gestalt $x^3 = V$ hatten. Die wohl wahrscheinlichste Annahme, wie die Griechen ohne das Studium der babylonischen Geschichte auf das Problem gestoßen sein könnten, ist wohl die, dass sie es als Erweiterung der Frage nach der Quadratverdopplung betrachteten. Wobei hier abermals darauf hingewiesen werden sollte, dass es genügend Belege dafür gibt, dass sich die Griechen innig mit der babylonischen Mathematik auseinandergesetzt haben. Die Quadratverdopplung war nämlich bereits in der Antike als lösbare Fragestellung bekannt und war mit Zirkel und Lineal auch sehr leicht durchführbar. Man nehme ein beliebiges Quadrat und zeichne die Diagonale ein (Abb. 12) [vgl. Scr 2000, S. 41].

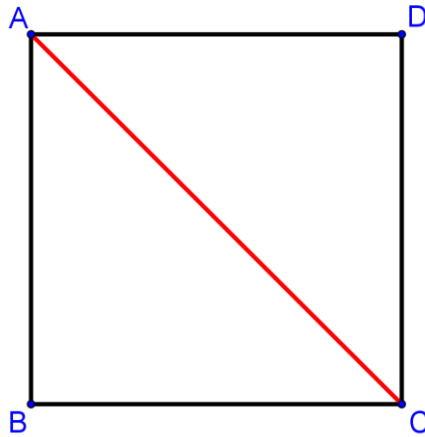


Abbildung 12

Anschließend bildet man über der Diagonale ein erneutes Quadrat, dessen Seitenlänge nun die Länge der Diagonale ist (Abb. 13).

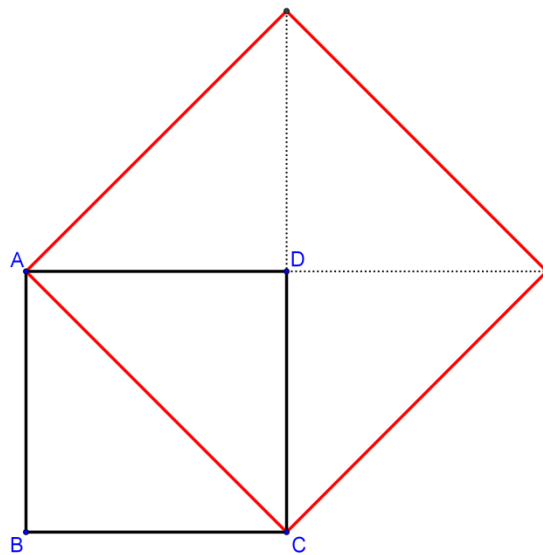


Abbildung 13

Es ist sehr schnell ersichtlich, dass das dadurch entstandene Quadrat aus vier Dreiecken besteht, die gleich den zwei Dreiecken sind, die das alte Quadrat gebildet haben. Dadurch hat man also ein Quadrat konstruiert das den doppelten Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats hat.

Geschichtlich sollte hierbei noch der bekannte Dialog von Platon erwähnt werden, indem Sokrates aus einem Sklaven nur durch das Stellen von Fragen die Antwort, wie man denn ein Quadrat verdopple, hervorholt.

Dieser Dialog ist aufgrund der didaktischen Finesse vor allem im Bereich der Bildungswissenschaften noch sehr präsent [vgl. Sch 1984, Kap. 55, 56].

Algebraisch betrachtet war es der nächste Schritt nach dem Ziehen von Quadratwurzeln, das ja bereits die Babylonier beherrschten, das Ziehen von Kubikwurzeln.

Bereits sehr früh, um ungefähr 440 v. Chr., wandelte der Grieche Hippokrates von Chio die Würfelverdopplung in ein äquivalentes Problem um, dem Auffinden zweier mittlerer Proportionalen zwischen einer gegebenen Länge und dem Doppelten dieser Länge (vgl. S. 19). Wie genau dies mit der Würfelverdopplung im Zusammenhang steht, führe ich in Abschnitt 2.6.1 aus.

Die wohl interessanteste Lösung des Problems fand Menaichmos, da er das Problem damit löste, dass er die von ihm gefundenen Kegelschnitte einsetzte. Hier zeigt sich sehr gut, dass es sich bei den klassischen Konstruktionsproblemen auf keinen Fall nur um mathematische Spielereien handelte, sondern dass die Beschäftigung mit den Problemen, auch wenn man heutzutage weiß, dass sie ausnahmslos unlösbar sind, viele neue mathematische Errungenschaften hervorbrachte. Die damaligen Mathematiker waren aber von den Kurven von Menaichmos nur minder begeistert, wohl vor allem deshalb, da sie mit diesen neuen Kurven wenig anfangen konnten. Auch Platon gehörte zu den Skeptikern von Menaichmos Methode und ähnlichen Lösungsvorschlägen.

„Diese sind nichttheoretische Methoden und zerstören das Gute in der Geometrie.“ [Kai 1998, S. 194]

Den Beweis von Menaichmos werde ich aber im Kapitel 2.6.3 nochmals ausführlich behandeln.

Eine andere Lösung, die ich hier nur der Vollständigkeit halber angeben möchte, wurde von Archytas von Tarent, einem Pythagoräer, gefunden, indem er einen Torus, heutzutage eher bekannt als Doughnut, einen Zylinder und einen Konus, eine Art Kegel, miteinander schnitt und so auf die gesuchten mittleren Proportionalen stieß. Diese Lösung ist meines Erachtens besonders erstaunlich, da es zeigt, wie groß das abstrakte

Vorstellungsvermögen der damaligen griechischen Mathematiker sein musste [vgl. Huf 2005, S. 343 f.].

Zwei weitere, für die Mathematik nicht uninteressante Lösungen präsentieren Nikomedes und Diokles durch das Aufstellen zweier neuer Kurven, einerseits der Konchoide, die ebenfalls in der Winkeldreiteilung noch eine Rolle spielen wird, sowie der Kissoide, einer der Muschelkurve ähnlichen und daher auch nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Kurve [vgl. Bre 1953, S. 25-29].

Aber auch in späterer Zeit verlor das Problem nicht an Brisanz. Als Beispiel soll hier der Jesuitenmathematiker Gregorius a San Vincento genannt werden, der 1647 eine weitere Konstruktion fand, die diesmal die Hyperbel zu Hilfe nahm [vgl. Kai 1998, S. 180].

Analog zur Winkeldreiteilung geht man davon aus, dass bereits die Griechen die Möglichkeit ins Auge fassten, dass es sich hierbei um ein unlösbares Problem handelte. Es dauerte allerdings trotzdem bis ins 19. Jahrhundert, bis durch die Vorarbeit von Gauß und dann vor allem durch die, von Évariste Galois entwickelte, Galoistheorie, der Boden für den Unendlichkeitsbeweis geebnet war. Bereits sieben Jahre nach der Entdeckung des französischen Mathematikers fand ein Landsmann von ihm, Pierre-Laurent Wantzel, den Unmöglichkeitbeweis.

2.2. Das Problem

Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

2.3. Die Einleitung

Der Unmöglichkeitbeweis kommt aus dem Teilgebiet der Algebra. Um den Beweis schlüssig führen zu können, bedarf es noch einer kurzen Vorarbeit, damit das Fundament dieses Beweises geschaffen wird.

Bevor man sich mit der Frage beschäftigt, wie man beweisen soll, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, stellt sich natürlich die Frage, wie man beweisen kann, dass eine Zahl konstruierbar ist. Um diese Frage zu klären, benötigen wir vorerst den Begriff des quadratischen Erweiterungskörpers.

Unter einem quadratischen Erweiterungskörper wird eine Körpererweiterung um die Wurzel einer bereits aus dem Körper stammenden Zahl verstanden. Mit dessen Hilfe können Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal beschrieben werden. Warum es sich dabei um die Erweiterung gerade mit Wurzeln handelt, lässt sich wie folgt motivieren:

Bei der dazugehörigen Konstruktionsaufgabe kommt man früher oder später immer an einen Punkt, wo man eine Gerade (oder einen Kreis) mit einem Kreis schneiden muss. Wenn man nun die allgemeine Geradengleichung sowie die allgemeine Kreisgleichung betrachtet:

$$k: (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

$$g: y = kx + d$$

und jene zwei Gleichungen nach einer Variable (in diesem Fall nach x) auflöst, erhält man:

$$(x - x_m)^2 + (kx + d - y_m)^2 = r^2.$$

Möchte man diese Gleichung nun lösen, beispielsweise mit der „großen Lösungsformel“, so kommt man zur Erkenntnis, dass die Lösung eine Wurzel beinhaltet, die natürlich nur in den seltensten Fällen eine natürliche Zahl ergibt. Aufgrund dessen definiert man den Quadratischen Erweiterungskörper und übersetzt das geometrische Konstruieren mit Zirkel und Lineal in das algebraische sukzessive Adjungieren von Wurzeln zum Grundkörper $\mathbb{Q}$.

2.3.1. Lemma – Quadratischer Erweiterungskörper

Sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ und $c \in K$ ein Element mit $\sqrt{c} \notin K$. Dann bildet die Menge $K(\sqrt{c})$ aller Elemente der Gestalt $a + b\sqrt{c} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in K$ einen

Teilkörper von $\mathbb{C}$, der K echt umfasst. Man sagt dann, $K(\sqrt{c})$ sei ein quadratischer Erweiterungskörper von K , der aus K durch Adjungieren von $\sqrt{c}$ entsteht.

2.3.2. Beweis

Es ist bloß zu zeigen, dass mit $\alpha, \beta, \gamma \in K(\sqrt{c})$ auch $\alpha - \beta, \alpha\beta$ und für $\gamma \neq 0$ auch γ^{-1} in $K(\sqrt{c})$ liegen, d. h. wieder die Gestalt $p + q\sqrt{c}$ mit $p, q \in K$ besitzen.

Alle anderen Körperaxiome sind von selbst erfüllt, da alle Elemente von $K(\sqrt{c})$ komplexe Zahlen sind und daher alle geforderten Rechenregeln erfüllen. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{C}$ auch das Nullelement in $K(\sqrt{c})$ und $1 \in \mathbb{C}$ das Einselement von $K(\sqrt{c})$. Anders ausgedrückt: $K(\sqrt{c})$ bildet mit den in $\mathbb{C}$ definierten Rechenoperationen selbst einen Körper.

Sei also

$$\alpha = a_1 + b_1\sqrt{c} \text{ und } \beta = a_2 + b_2\sqrt{c},$$

dann ist

$$\alpha - \beta = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{c} \in K(\sqrt{c})$$

und

$$\alpha \cdot \beta = a_1a_2 + b_1b_2c + (b_1a_2 + a_1b_2)\sqrt{c} \in K(\sqrt{c})$$

wobei

$$a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, a_1a_2 \pm b_1b_2c \text{ und } b_1a_2 \pm a_1b_2$$

wieder in K liegen.

Sei nun $\gamma = a + b\sqrt{c} \neq 0$, dann ist auch $a - b\sqrt{c} \neq 0$. Denn für $b = 0$ ist das wegen $a = \gamma \neq 0$ klar. Wäre $b \neq 0$ und $a - b\sqrt{c} = 0$, so wäre $\sqrt{c} = \frac{a}{b} \in K$ und das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Es ist also wegen $K \subseteq \mathbb{C}$ auch $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c \neq 0$ und überdies ein Element aus K . Somit ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\gamma^{-1} &= \frac{1}{a + b\sqrt{c}} = \frac{a - b\sqrt{c}}{(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c})} = \frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2c} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2c} + \frac{-b}{a^2 - b^2c}\sqrt{c}\end{aligned}$$

ebenfalls ein Element von $K(\sqrt{c})$ ist, da $\frac{a}{a^2 - b^2c}$ und $\frac{-b}{a^2 - b^2c}$ in K liegen.

[vgl. Sch 2010]

□

2.3.3. Beispiel eines quadratischen Erweiterungskörpers

Da der Begriff des quadratischen Erweiterungskörpers für die ersten zwei Unmöglichkeitsskizzen dieser Arbeit von grundlegender Bedeutung ist, möchte ich hier noch ein Beispiel eines quadratischen Erweiterungskörpers anführen:

$$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Möchte man nun eine weitere Wurzel hinzufügen, beispielsweise $\sqrt{3}$, so erhält man:

$$\begin{aligned}K_2 &= K_1(\sqrt{3}) = \{c + d\sqrt{3} : c, d \in K_1\} = \\ &= \{(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})\sqrt{3} : a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}\} = \\ &= \{a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + b_2\sqrt{6} : a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}\}\end{aligned}$$

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass es sich bei dem quadratischen Erweiterungskörper auch wirklich um einen Körper handelt, das heißt, dass alle Körperaxiome erfüllt sind, widmen wir uns der Frage, welche Zahlen konstruierbar sind.

Wir wissen bereits, dass eine Zahl genau dann konstruierbar ist, wenn ich sie durch die Einhaltung der obigen Konstruktionsvorschriften konstruieren kann. Nun stellt sich aber die Frage, wie man herausfinden kann ob eine Zahl konstruierbar ist oder nicht, ohne für jede Zahl eine Konstruktion vorgeben zu müssen. Wir probieren aus den Vorschriften eine algebraische Definition für die Konstruierbarkeit von Zahlen zu finden. Dies funktioniert mit den bereits definierten Erweiterungskörpern. Die Idee dahinter ist, dass eine Zahl

genau dann konstruierbar ist, wenn man, ausgehend von einem Körper der nur aus konstruierbaren Zahlen besteht (z. B. $\mathbb{Q}$), jenen solange um konstruierbare Zahlen erweitert bis man schlussendlich einen Körper gefunden hat, indem die zu konstruierende Zahl enthalten ist. Formalisiert bedeutet dass:

2.3.4. Satz – Konstruierbarkeit von Zahlen

Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es eine Kette $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_M$ von Teilkörpern von $\mathbb{C}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. L_0 ist ein beliebiger Körper, der nur aus konstruierbaren Zahlen besteht, z. B. $L_0 = \mathbb{Q}$.
2. Jedes $L_{j+1} = L_j(\sqrt{c_j})$ ist eine quadratische Erweiterung von L_j , $0 \leq j < M$.
3. $z \in L_M$.

Einen Beweis zu diesem Satz werde ich im Abschnitt 4.3.15 führen, da die dafür notwendigen Voraussetzungen erst im vierten Kapitel meiner Arbeit angeführt werden.

Nachdem nun gezeigt wurde, unter welchen Bedingungen eine Zahl konstruierbar ist, können wir uns wieder dem eigentlichen Problem zuwenden.

2.4. Die Behauptung

Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ entspricht nicht den oben genannten Kriterien und ist somit nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

2.5. Der Unmöglichkeitsbeweis

Dies wird indirekt gezeigt. Angenommen, die Zahl $\alpha = \sqrt[3]{2}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, dann gäbe es nach Satz 2.3.4 eine Kette $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_M$ von sukzessiven quadratischen Erweiterungen von $L_0 = \mathbb{Q}$, sodass $\alpha \in L_M$ wäre.

Dieser Beweis wird in zwei Teilen geführt. Der erste Teil zeigt, wenn es in einem quadratischen Erweiterungskörper $K(\sqrt{c})$ ein Element α mit $\alpha^3 = 2$ gibt, dann muss ein solches Element bereits schon im Körper K existieren. Der zweite Teil des Beweises zeigt, dass in $\mathbb{Q}$ kein α existiert mit $\alpha^3 = 2$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da wenn ein solches α in L_M liegen würde, es dann auch in L_{M-1} liegen müsste. Somit müsste es automatisch auch im „ersten“ dieser Körper, also in $L_0 = \mathbb{Q}$ liegen.

Erster Schritt:

Sei $\alpha \in K(\sqrt{c})$ mit $\alpha^3 = 2$, dann gibt es $a, b \in K$ mit $(a + b\sqrt{c})^3 = 2$. Ist hier $b = 0$, so ist $\alpha = a \in K$ und damit alles gezeigt. Sei daher $b \neq 0$, dann ist:

$$\begin{aligned} 2 &= (a + b\sqrt{c})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c} \\ &= a^3 + 3ab^2c + (3a^2b + b^3c)\sqrt{c}. \end{aligned}$$

Hier muss der Koeffizient $(3a^2b + b^3c)$ von $\sqrt{c}$ gleich 0 sein, da sonst:

$\sqrt{c} = \frac{2-a^3-3ab^2c}{3a^2b+b^3c}$. Da es sich jedoch bei K um einen Körper handelt und $a, b \in K$ sind, würde das bedeuten, dass auch $\sqrt{c} \in K$ wäre. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu: $K(\sqrt{c})$ ist ein quadratischer Erweiterungskörper von K .

Somit erhalten wir also zwei Gleichungen:

$$\text{I: } 3a^2b + b^3c = 0$$

$$\text{II: } a^3 + 3ab^2c = 2$$

Da wir wissen, dass b nicht Null ist, gilt für die erste Gleichung:

$$\text{I: } 3a^2 + b^2c = 0 \Rightarrow b^2c = -3a^2.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt das:

$$\text{II: } 2 = a^3 + 3a(-3a^2) = a^3 - 9a^3 = -8a^3 = (-2a)^3.$$

Das bedeutet, es gibt ein Element $\gamma = -2a$ in K mit $\gamma^3 = 2$. Somit wäre die erste Behauptung bewiesen.

Zweiter Schritt:

Zu zeigen: Es gibt kein $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha^3 = 2$.

Denn angenommen $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 2$. Dann wäre $m^3 = 2n^3$ mit natürlichen Zahl m, n . In der eindeutigen Primfaktorzerlegung von m^3 müsste daher 2 mit einer Vielfachheit auftreten, die durch 3 teilbar ist, während die Vielfachheit von 2 in $2n^3$ von der Form $3k + 1$ wäre. Das ist ein Widerspruch.

[vgl. Sch 2010]

□

2.6. Alternative Lösungen

2.6.1. Problem der mittleren Konstanten

Bereits im antiken Griechenland wussten die damaligen Mathematiker, dass man das Problem der Würfelverdopplung auf ein äquivalentes Problem überführen konnte, und zwar auf das Auffinden der sogenannten zwei mittleren Konstanten. Es gilt dabei, zu zwei gegebenen Längen a und b zwei Zahlen x und y zu finden, sodass gilt: $a:x = x:y = y:b$. Dass es sich dabei wirklich um ein äquivalentes Problem handelt, ist sehr schnell ersichtlich. Im ersten Schritt betrachtet man die drei verschiedenen Gleichungen, die in der obigen Gleichungskette stecken:

$$\text{I: } ay = x^2$$

$$\text{II: } bx = y^2$$

$$\text{III: } ab = xy$$

Daraus folgt wiederum:

$$\text{I} \cdot \text{III} : a^2b = x^3$$

$$\text{II} \cdot \text{III} : ab^2 = y^3$$

Setzt man nun b als doppelte Länge von a , dann erhält man aus der oberen der beiden Gleichungen: $x^3 = 2a^3$. Diese Gleichung entspricht wieder dem Ausgangsproblem, und so wurde gezeigt (es handelte sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen), dass es sich bei dem Problem der mittleren Konstanten tatsächlich um ein äquivalentes Problem handelt. Speziell im antiken Griechenland war es sehr beliebt, Lösungen für eben jenes Problem zu entwickeln, um der Konstruktion der Würfelverdopplung näher zu kommen. Ziel war es dabei jedoch meistens, eine allgemeine Lösung für das

Problem der mittleren Konstanten zu finden, da dadurch der spezielle Fall $b = 2a$ natürlich auch gelöst wäre.

2.6.2. Die Lösung von Platon

Auch Platon widmete sich der Suche nach den zwei mittleren Proportionalen, wobei an dieser Stelle vermerkt werden muss, dass man oft nicht mehr unterscheiden kann, ob der Beweis wirklich auf den Gedanken von Platon beruht oder ihm der Beweis lediglich im Nachhinein zugeschrieben worden ist. Heutzutage geht man bereits eher davon aus, dass es sich dabei nicht um einen Beweis Platons handeln kann, da die in jenem Beweis verwendeten Hilfsmitteln von ihm stets aufs schärfste kritisiert wurden.

Platons Konstruktion beginnt mit zwei senkrecht aufeinander liegenden Geraden, auf denen man die Länge a sowie die Länge b abträgt (Abb. 14).

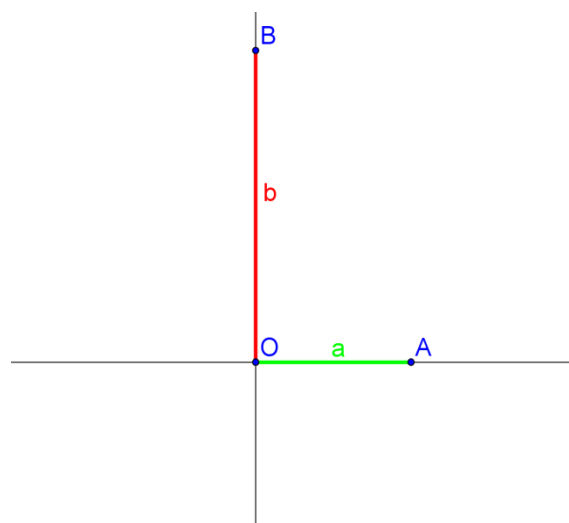


Abbildung 14

Wie bereits weiter oben erwähnt, handelt es sich hierbei um einen allgemeinen Beweis für $a, b > 0$. Da mein Augenmerk jedoch mehr auf dem speziellen Fall $b = 2a$ liegt, hat die Strecke b in den Skizzen stets die Länge $2a$.

Anschließend konstruiere man eine beliebige Gerade, die durch den Punkt B verläuft und die waagrechte Gerade links vom Punkt O schneidet. Diesen

Schnittpunkt bezeichnet man mit C . Auf jene Gerade konstruiert man nun eine Normale, die durch den Schnittpunkt C verläuft, und schneidet diese Gerade nun mit der zu der Strecke CB parallelen Geraden durch den Eckpunkt A . Den dadurch entstandenen Schnittpunkt bezeichnet man mit S (Abb. 15).

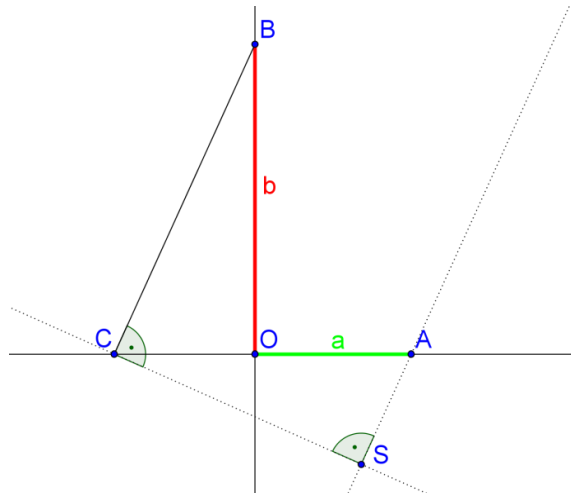


Abbildung 15

Nun verschiebe man die eben erhaltene Konstruktion solange, bis der Punkt S auf der Geraden OB liegen bleibt, auf der bereits die Strecke b eingezeichnet worden ist. Gleichzeitig soll der Punkt C weiterhin auf der Geraden OA liegen bleiben, auf der die Strecke a abgetragen worden ist. Die beiden rechten Winkel sollen ebenfalls erhalten bleiben. Die soeben auf diese Weise verschobenen Punkte werden nun mit C' und S' bezeichnet (Abb. 16).

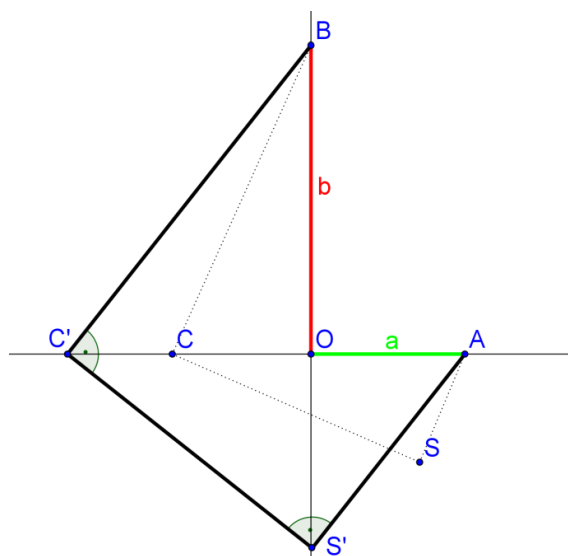


Abbildung 16

Definiert man nun noch $x := OS'$ und $y := OC'$, dann erhält man über den Höhensatz (Abb. 17):

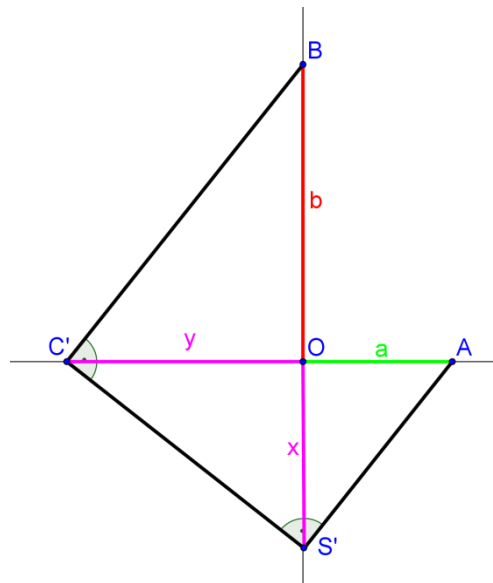


Abbildung 17

$$1. OS'^2 = OC' \cdot OA \text{ bzw. } x^2 = y \cdot a$$

$$2. OC'^2 = OB \cdot OS' \text{ bzw. } y^2 = b \cdot x$$

Daraus folgt wieder die uns bekannte Verhältniskette: $a : x = x : y = y : b$.
[vgl. Her 1927, S. 43 f.] □

2.6.3. Lösung mittels zweier Parabeln

Diese Lösung geht zurück auf Menaichmos, ebenfalls ein antiker griechischer Mathematiker und Bruder des Deinostratos, auf den wir noch später in dieser Arbeit zurückkommen werden (Abschnitt 4.4.2). Das Faktum, dass die Parabeln in Menaichmos auch ihren Entdecker fanden, macht diesen Beweis nur umso interessanter. Auch hier wird die Lösung wieder über die mittleren Proportionalen x, y mit $a : x = x : y = y : b$ gefunden.

Die Ausgangslage ist sehr ähnlich zum bereits gezeigten Beweis von Platon. Man beginnt mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden und trägt die Strecken a und b auf (Abb. 18).

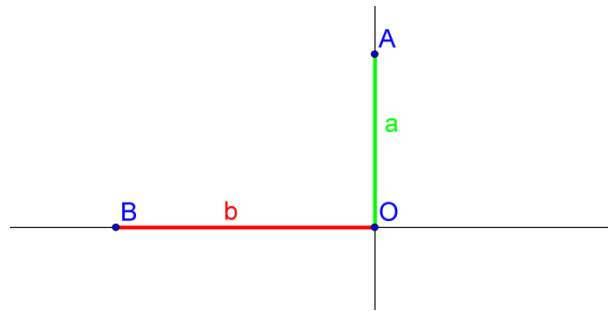


Abbildung 18

Als Nächstes konstruiert man eine Parabel in erster Hauptlage, deren Scheitel im Punkt O und deren Brennpunkt auf der Verlängerung der Strecke BO liegt. Als Parameter für die Parabel wird hierbei die Strecke b herangenommen. Anschließend konstruiert man eine weitere Parabel, deren Scheitel ebenfalls im Punkt O liegt, diesmal jedoch so, dass sie in zweiter Hauptlage liegt, also der Brennpunkt auf der Strecke OA liegt. Diesmal wird jedoch die Strecke a als Parameter verwendet. Nach der Konstruktion der beiden Parabeln ermittelt man den gemeinsamen Schnittpunkt (Abb. 19).

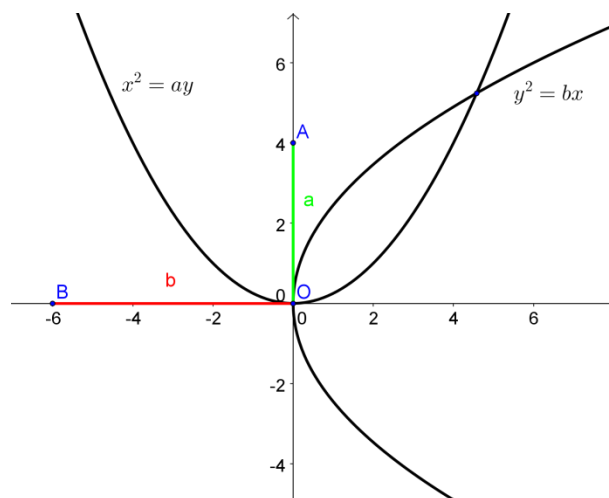


Abbildung 19

Die Behauptung ist nun, dass es sich beim Normalabstand der Trägergeraden von BO zum Schnittpunkt der beiden Parabeln um die Strecke y und beim Normalabstand der Trägergeraden von OA zum Schnittpunkt um die Strecke x handelt (Abb. 20).

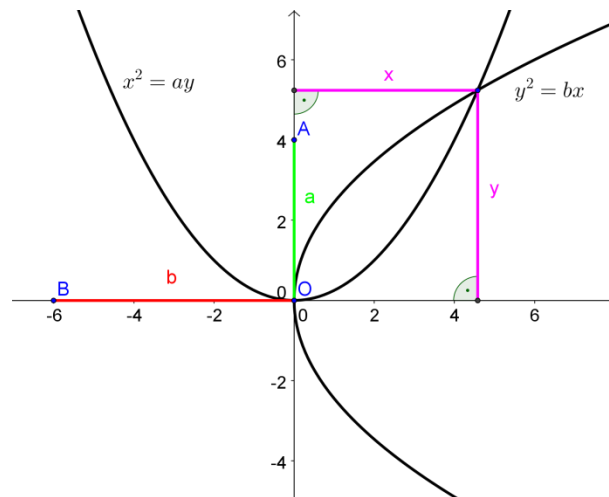


Abbildung 20

Dank der formalen Sprache ist der Beweis heutzutage sehr leicht nachvollziehbar. Die erste Parabel ergibt durch das Einsetzen der Parameter in die Definition:

$$y^2 = b \cdot x \text{ und dadurch } x : y = y : b.$$

Aus der zweiten Parabel erhalten wir:

$$x^2 = a \cdot y \text{ und dadurch } x : y = a : x.$$

Verknüpft man nun die zwei Gleichungen, erhalten wir abermals:

$$a : x = x : y = y : b.$$

Setzt man nun wieder die Länge $b = 2a$, erhält man die Lösung zur Würfelverdopplung. [vgl. Herr 1927, S. 44 f.] $\square$

2.6.4. Lösung mittels Origamics

Bevor ich mich dieser relativ neuen und doch sehr kreativen Lösungsmethode zuwende, sollte jedoch noch kurz erklärt werden, was man unter dem Begriff „Origamics“ genau versteht.

2.6.4.1. Was ist Origamics?

Origami, also die Kunst des Papierfaltens, kommt ursprünglich aus dem fernen Osten und hat dort schon eine über Jahrtausende anhaltende Tradition. Die Begriffsbezeichnung basiert auf den japanischen Wörtern

„oru“ für Falten und „kami“ für Papier. In Japan, jenem Land mit dem wohl stärksten Origami-Bezug, wird Origami meist als Hobby betrachtet, das ursprünglich auf Kinder abzielte. Dies ist auch der Grund, warum man auch heutzutage Origamibücher immer in den Kinderabteilungen findet. Der Begriff „Origamics“ ist demnach eine Wortkreation aus den Wörtern „Origami“ und „Mathematics“ und bezeichnet damit ein noch sehr junges Feld der modernen Mathematik. Der Begriff wurde von Kazuo Haga 1994 beim „Second Origami Science Meeting“ vorgeschlagen und fand sofort große Zustimmung.

„The term origamics is composed of the stem ‘origami’ and the suffix ‘ics’, which is often used to indicate science or technology, as in mathematics. Another definite difference between origami and origamics is their end product. The former produces paper models of animals, flowers, fruits, vehicles and so forth; while the latter often does not create beautiful or skillful products, but rather some paper with a lot of wrinkles, furrows or creases.“ [Hag 2008, S. XI]

Kazuo Haga wird oftmals als Erfinder dieser neuen Richtung der Mathematik bezeichnet. Wie sehr dies der Wahrheit entspricht, kann bisher nur vermutet werden, da es noch keine wissenschaftliche Forschung in Bezug auf die Geschichte dieses neuen Teils der Mathematik gibt. Es ist jedoch nicht abzustreiten, dass Kazuo Haga auf jeden Fall zu den ersten Menschen gehört, die sich mit diesem Thema auseinandersetzten. Der mittlerweile pensionierte Professor für Biologie der Universität Tsukuba in Japan hat sich vor allem im Zuge seiner Forschungsarbeiten intensiv mit dem Thema befasst. Während den verschiedensten biologischen Experimenten kam es immer wieder zu langen Wartezeiten, die Haga nutzte, um sich als Hobbymathematiker mit dem Papierfalten zu beschäftigen.

Seine erste mathematische Entdeckung mit Origami, die er 1978 machte, war gleichzeitig wohl seine bekannteste. Während einer seiner Experimentierpausen stieß er beim Falten auf ein interessantes „Phänomen“. Da Mathematik jedoch nicht sein Fachgebiet war, zog er einen Freund zu Rate, einen theoretischen Physiker, der sich ebenfalls leidenschaftlich mit Origami-Geometrie beschäftigte. Jener erkannte die Genialität seiner

Überlegung auf der Stelle und veröffentlichte in einer japanischen Mathematik-Fachzeitschrift einen Artikel mit dem Titel „Origami Geometry, Haga Theorem“ und seitdem ist jenes „Phänomen“ als Satz von Haga bekannt. Dank des von Haga bewiesenen Satzes ist es sehr einfach, die Seite eines beliebigen Ausgangsquadrats zu dritteln [vgl. Hag 2008, S. V-XII].

Ich möchte den Beweis und die Aussage dieses Satzes von Haga, der auch als Fundamentalsatz des „Origamics“ bezeichnet wird, jedoch bewusst nicht ausführen, da er für die anschließenden Beweise irrelevant ist.

Im Folgenden möchte ich nun die Origamics-Methode für die Würfelverdopplung präsentieren.

2.6.4.2. Die Behauptung

Man nehme ein quadratisches Blatt Papier und falte es in drei gleich große Abschnitte (Abb. 21).

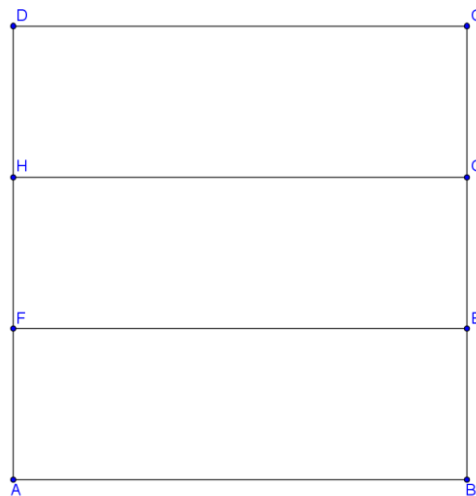


Abbildung 21

Nun falte man die Kante BC so, dass der Eckpunkt B auf der Kante AD zu liegen kommt und gleichzeitig der Punkt E auf der Linie GH (Abb. 22).

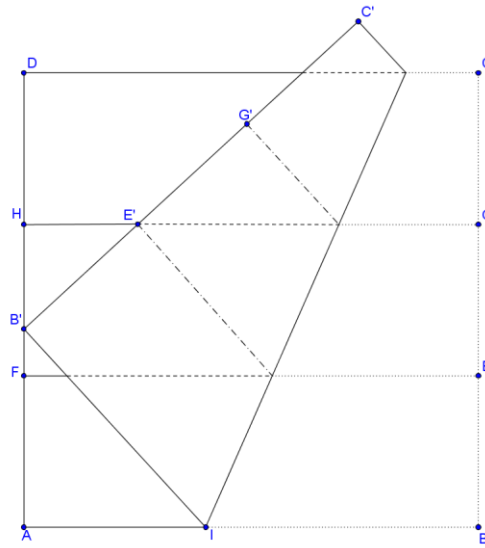


Abbildung 22

Die Behauptung ist nun, dass:

$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}.$$

2.6.4.3. Beweis der Behauptung

Sei o.B.d.A. die Strecke $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$, dann ist $\overline{BE} = 1$ (Abb. 23).

Weiters sei

$$x := \overline{B'D},$$

$$y := \overline{AB'},$$

$$a := \overline{AI},$$

$$b := \overline{IB'} = \overline{IB},$$

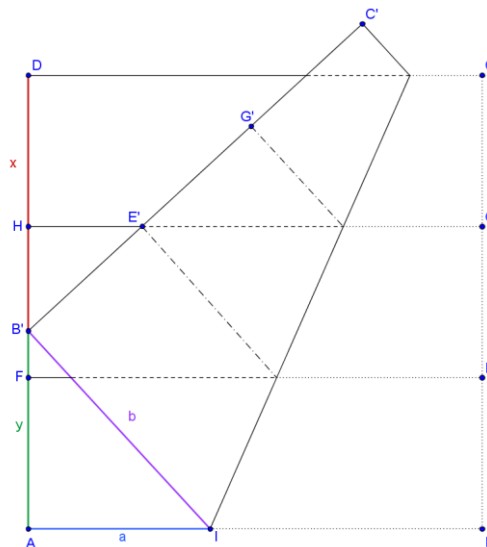


Abbildung 23

dann ist $x + y = 3 = a + b$.

The diagram shows a rectangle \$ABCD\$ with vertices \$A\$ (bottom-left), \$B\$ (top-left), \$C\$ (top-right), and \$D\$ (bottom-right). A point \$I\$ is located on the bottom side \$AD\$. A purple line segment connects vertex \$B\$ to point \$I\$, labeled with length \$b\$. A horizontal dashed line extends from \$I\$ through the interior of the rectangle. A parallelogram is constructed by translating the vector \$\vec{BI}\$ to the right. The top vertex of this parallelogram is labeled \$C'\$, and its other vertices are \$E'\$ (on \$BC\$) and \$G'\$ (on \$CD\$). The angle at vertex \$I\$ between the base \$AI\$ and the diagonal \$BI\$ is labeled \$\alpha\$. The angle at vertex \$B\$ between the side \$AB\$ and the diagonal \$BI\$ is labeled \$\beta\$. On the left side \$AD\$, there are points \$F\$ and \$H\$ below \$B\$. A red vertical line segment \$x\$ is shown above \$H\$, and a green vertical line segment \$y\$ is shown below \$F\$. Dotted lines extend horizontally from \$H\$ and \$F\$ across the diagram.

Nun folgt ein „Umformungstrick“, indem man die Gleichung mit drei multipliziert und gleichzeitig eines der drei x^3 auf die andere Seite der Gleichung bringt. Anschließend wird die Gleichung noch mit (-1) multipliziert und man erhält:

$$\underline{x^3} = -2x^3 + 18x^2 - 54x + 54 = 2(3 - x)^3 = \underline{2y^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2} = \frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}}$$

Im letzten Schritt versucht man nun dieses Verhältnis auf eine Länge zu übertragen (Abb. 25).

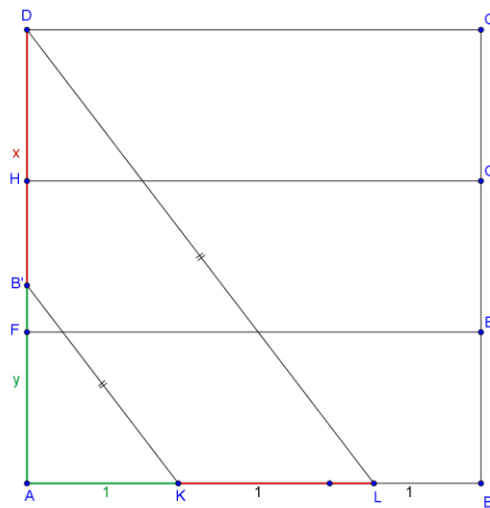


Abbildung 25

Wir wissen aufgrund des Strahlensatzes, dass gilt:

$$x : y = |\overline{KL}| : 1$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2} = \frac{|\overline{KL}|}{1} = |\overline{KL}|.$$

[vgl. Göt 2009]

□

3. Winkeldreiteilung

3.1. Die Geschichte

Die Winkeldreiteilung stellt wohl das „unspektakulärste“ der drei klassischen Probleme dar, nicht zuletzt, da es weder sprichwörtlich geworden ist, noch einer Sage zugrunde liegt. Aber auch jenes Problem beschäftigte Mathematiker verschiedenster Regionen und Generationen, und so gibt es auch hier einen reichlichen Fundus an Lösungsversuchen. Man kann davon ausgehen, dass das Problem wohl auch deshalb so berühmt wurde, da es sich bei der Winkelhalbierung um eine sehr leichte Konstruktion handelt, die ich anfänglich kurz ausführen möchte.

Möchte man einen beliebigen Winkel φ (Abb. 26) in zwei gleich große Teile teilen, so muss man lediglich die Winkelsymmetrale einzeichnen. Für jeden Punkt auf der Winkelsymmetrale gilt dabei, dass der Normalabstand zu den zwei Schenkeln stets gleich groß sein soll. Daraus leitet sich folgende Konstruktionsvorschrift ab:

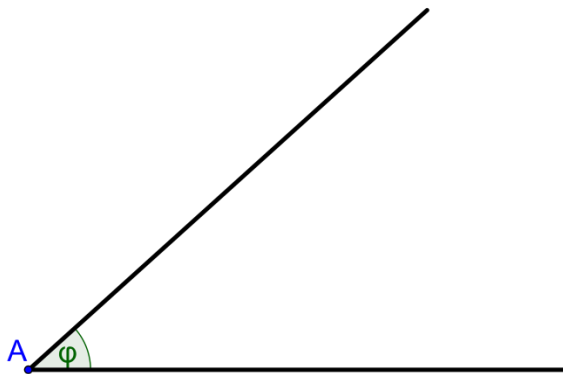


Abbildung 26

Man konstruiere einen Kreis mit beliebigem Radius, dessen Mittelpunkt der Scheitel des zweizuteilenden Winkels ist, und schneide jenen Kreis mit den zwei Schenkeln des Winkels (Abb. 27).

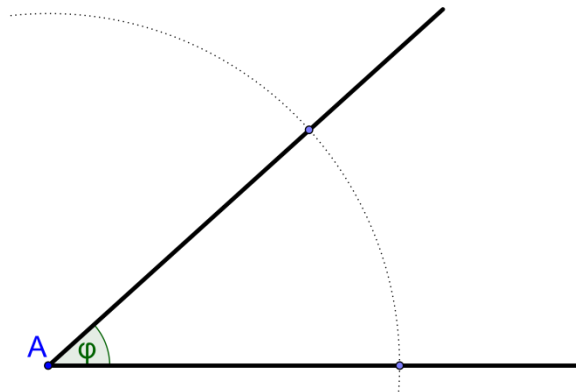


Abbildung 27

Anschließend konstruiere man zwei neue Kreise, deren Mittelpunkte jeweils die soeben erhaltenen Schnittpunkte sind und deren Radius zwar beliebig, jedoch für beide Kreise gleich ist (Abb. 28).

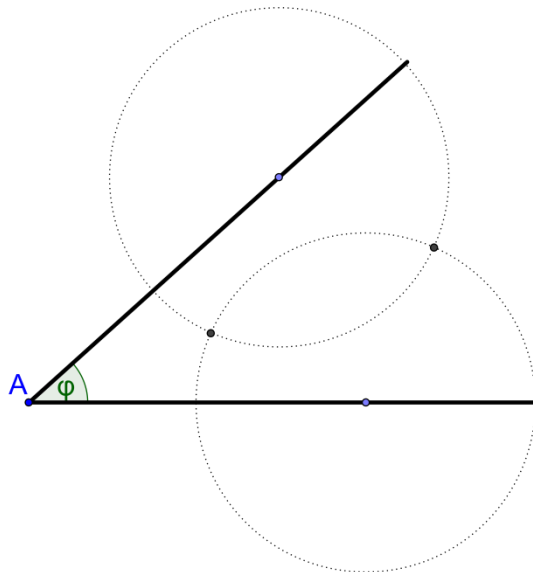


Abbildung 28

Schneidet man nun diese zwei Kreise, so erhält man neuerlich zwei Schnittpunkte, und durch Verbinden jener zwei Punkte erhält man die Winkelsymmetrale und damit zwei Winkel, die gleich groß sind und zusammen den ursprünglichen Winkel φ ergeben (Abb. 29).

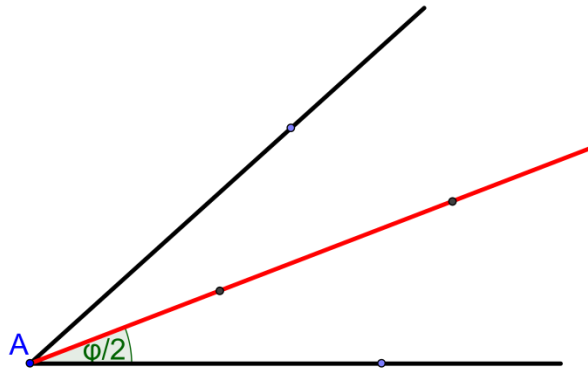


Abbildung 29

Man sieht also, dass die Aufgabe, einen Winkel in zwei gleich große Teile zu teilen, kein allzu großes Problem darstellt. Damit ist die Frage nach der Dreiteilung eines Winkels aber sehr naheliegend. Eine weitere Erklärung über den Ursprung des Problems basiert auf der Astronomie. Für astronomische Zwecke rechnete man früher viel mit sogenannten Sehnentafeln – dabei handelt es sich um Tabellen von Winkeln und ihren zugehörigen Sehnen. Heutzutage würde man für solche Berechnungen die Sinusfunktion verwenden, damals stieß man, ohne ins Detail gehen zu wollen, früher oder später auf das Problem, aus der Sehne für 3° die Sehne für 1° zu gewinnen. Eine weitere Erklärung für den Ursprung des Problems könnte aber auch die Konstruktion von Vielecken bieten, da beispielsweise bei der Konstruktion eines 9-Ecks der jeweilige Innenwinkel gleich $\frac{360^\circ}{9}$ und damit $\frac{60^\circ}{3}$ sein müsste [vgl. Scr 2000, S. 44, 79 f.]. Es ist also sehr naheliegend, dass die Griechen in einem sehr frühen Stadium ihrer Geometrie bereits auf dieses Problem stießen, auch wenn man über die ursprüngliche Ursache nur mehr Vermutungen anstellen kann.

Ähnlich wie auch bei den anderen Problemen war der Kreativität in der Lösungssuche fast keine Grenze gesetzt. So gab es von sogenannten „Neusis“- oder auch Papierstreifenkonstruktionen, also Konstruktionen, bei denen eine bestimmte Strecke eingeschoben bzw. auf einem Lineal markiert wurde, über nicht konstruierbare Kurven bis hin zu Winkeldreiteilungsgeräten sehr viele verschiedene Herangehensweisen. Die wohl bekannteste „Neusis“-Konstruktion geht zurück auf einen der bekanntesten Mathematiker der

damaligen Zeit, den Griechen Archimedes, und wird in Abschnitt 3.5.2 noch genauer erläutert.

Eine weitere sehr berühmte Lösung geht auf den Sophisten Hippias von Elis zurück, der am Ende des 5. Jahrhunderts v. Chr. lebte und dafür eine Kurve gefunden hatte, deren Name im ersten Moment irreführend wirkt, die Quadratrix. Der Name jener Kurve geht auf Deinostratos zurück, der jene Kurve rund ein Jahrhundert später benutzte, um damit den Kreis zu quadrieren. Auf diesen Beweis komme ich im letzten Kapitel meiner Arbeit zu sprechen. Der ursprüngliche „Erfinder“ dieser Kurve, Hippias, zeigte jedoch bereits damals, dass mittels der Quadratrix die Dreiteilung jedes beliebigen Winkels möglich ist. Eine zweite, wohl ursprünglich für diesen Zweck gefundene, Kurve ist die von Nikomedes zuerst erwähnte Konchoide, oder auch Muschelkurve genannt, mit deren Hilfe die Dreiteilung eines beliebigen Winkels ebenfalls gelang [vgl. Ger 1994, S. 91 f.].

Um noch zu verdeutlichen, wie wichtig dieses Problem auch im Laufe der Geschichte geblieben ist, soll noch erwähnt sein, dass auch Albrecht Dürer in seinem 1525 veröffentlichten Werk „Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt“ eine Näherungslösung für das Problem angegeben hat.

Erst im 19. Jahrhundert, im Jahr 1837, gelang es dem französischen Mathematiker Pierre Laurent Wantzel, die Unmöglichkeit dieses klassischen Problems zu beweisen, indem er auf die – sieben Jahre zuvor von Évariste Galois entwickelte und nach ihm benannte – Galoistheorie zurückgriff. Ähnlich wie bei der Würfelverdopplung gibt es auch bei der Winkeldreiteilung ein äquivalentes Problem, und zwar das geometrische Finden der Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x - 2a = 0$ mit $a > 0$.

Die Idee des Unmöglichkeitsbeweises ist es, dass man mit Zirkel und Lineal lediglich die Grundrechnungsarten sowie das Quadrieren und das Quadratwurzelziehen realisieren kann, nicht aber die Kubikwurzel einer Zahl, und dadurch gelang Pierre Wantzel der Beweis der Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung.

Dass das Problem dadurch aber noch immer nicht an Reiz verloren hat, zeigt auch sehr eindrucksvoll das von dem Mathematiker Underwood Dudley im Jahr 1987 verfasste Buch „A Budget of Trisection“, in dem er drei „Winkeldreiteiler“ besuchte, um deren Motivation zu erforschen, ein bereits als unmöglich bewiesenes Problem trotzdem weiterhin zu lösen zu versuchen. Man sieht also, dass diese Fragestellung bis heute noch immer große Aufmerksamkeit genießt.

3.2. Das Problem

Im Allgemeinen ist die Winkeldreiteilung nicht möglich. Dies bedeutet jedoch nicht, dass es für jeden Winkel unmöglich ist. Man bedenke beispielsweise, dass 180° geteilt durch drei 60° ergibt und man 60° mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (beispielsweise mittels Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks). Möchte man jedoch 60° nochmals durch drei teilen, stößt man auf ein Problem. In diesem Beweis wird gezeigt, dass die Winkeldreiteilung von 60° nicht möglich ist und damit auch im Allgemeinen nicht möglich ist.

3.3. Die Einleitung

Die Beweisführung dieses Beweises ähnelt sehr stark jener, die in Kapitel zwei bei der Würfelverdopplung benutzt wurde. Um jedoch den Beweis so führen zu können, bedarf es einer kurzen Vorbereitung.

Wie in der Mathematik oft üblich, verwendet man nicht die Winkelgrade sondern das Bogenmaß. Da der volle Einheitskreis einen Umfang von 2π besitzt und dies äquivalent zu 360° ist, entsprechen die 60° also genau $\frac{2\pi}{6}$ und demnach also $\frac{\pi}{3}$.

Unter der Verwendung der Formel von de Moivre, die

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

lautet, gilt nun:

$$\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)^3 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

3.3.1. Satz

Die komplexe Zahl $e^{\frac{i\pi}{9}} = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$ ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

3.4. Der Unmöglichkeitsbeweis

Es gilt, dass der Winkel von 60° konstruierbar ist, sowie:

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Daraus folgt, dass die Elemente des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ konstruierbar sind. Daher genügt es zu zeigen, dass es keine Kette $L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_M$ von sukzessiven quadratischen Erweiterungen gibt, sodass gilt: $\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) \in L_M$.

Auch dieser Beweis basiert wieder auf zwei Schritten.

Erster Schritt:

Ist K ein Körper für den gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ und ist

$x^3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ lösbar in $K(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in K\}$, dann muss die Gleichung auch bereits in K selbst lösbar sein. Dies gilt es nun zu zeigen.

Wegen

$$(a + b\sqrt{c})^3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \in K$$

berechnen wir

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c} = (a^3 + 3ab^2c) + (3a^2b + b^3c)\sqrt{c}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich kommt man auf folgende zwei Gleichungen. Man bedenke, dass die Koeffizienten vor dem Faktor $\sqrt{c}$ Null ergeben müssen, da sich das Element sonst nicht in K befinden könnte.

$$\text{I: } a^3 + 3ab^2c = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$\text{II: } 3a^2b + b^3c = 0$$

Wenn $b = 0$ gelten würde, dann wäre der erste Schritt bereits gezeigt, da dann gelten würde, dass $x^3 = a^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und somit hätte die Gleichung eine Lösung in K . Also angenommen, es gilt $b \neq 0$, dann dürfen wir die zweite Gleichung jedoch durch b dividieren und erhalten daher Folgendes:

$$\text{II: } 3a^2 + b^2c = 0$$

$$\text{II: } b^2c = -3a^2$$

Fügt man nun die zweite Gleichung in die erste ein, erhält man:

$$a^3 + 3a(-3a^2) = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$(-2a)^3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

Das bedeutet dass $(-2a) \in K$ eine Lösung von $x^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ist.

Zweiter Schritt:

Wie bereits zuvor möchte man nun zeigen, dass die Gleichung $x^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ keine Lösung hat.

Der Beweis erfolgt indirekt: angenommen es existieren $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, b, c) = 1$, sodass

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\sqrt{-3}\right)^3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Bedingung $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ bedeutet, dass es keinen gemeinsamen Teiler größer als Eins von a, b und c gibt.

Dabei gilt: $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\sqrt{-3}\right) \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Dann folgt daraus:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3 - \frac{9ab^2}{c^3} + \left(\frac{3a^2b}{c^3} - \frac{3b^3}{c^3}\right)\sqrt{-3} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich und der Multiplikation mit c^3 erhält man:

$$\text{I: } a^3 - 9ab^2 = \frac{c^3}{2}$$

$$\text{II: } 3a^2b - 3b^3 = \frac{c^3}{2}$$

Da $(a^3 - 9ab^2) \in \mathbb{Z}$ ist, weiß man aus der ersten Gleichung, dass c^3 von 2 geteilt wird. Wenn eine Primzahl ein Produkt teilt, dann gilt, dass die Primzahl mindestens einen der Faktoren teilen muss, da 2 eine Primzahl ist, und c^3 auch als Produkt mit sich selbst aufgefasst werden kann, gilt also, dass 2 auch c teilen muss. Betrachtet man nun die zweite Gleichung, $(3a^2b - 3b^3) \in 3\mathbb{Z}$, so sieht man, dass 3 den Zähler c^3 teilt, da aber 3 ebenfalls eine Primzahl ist, gilt aus dem gleichen Grund wie bereits oben erwähnt, dass 3 auch c teilt. Nun subtrahiert man von der oberen Gleichung die untere und erhält:

$$a^3 - 9ab^2 - 3a^2b + 3b^3 = 0.$$

Da die Zahl 3 sicher $(-9ab^2 - 3a^2b + 3b^3)$ teilt, muss 3 auch a^3 teilen. Daraus folgt aber wiederum, dass 3 auch a teilen muss. Man beachte dass das Produkt a^3 insgesamt dreimal durch die Zahl 3 teilbar ist, also durch 3^3 , selbiges gilt für die Faktoren $9ab^2$ und $3a^2b$. Daraus folgt, dass der Faktor b^3 ebenfalls durch 3 teilbar sein muss. Daher teilt 3 auch b und damit wurde gezeigt, dass 3 ein Teiler von a, b und c ist, und dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass der $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ ist.

[vgl. Sch 2010]

□

3.5. Alternative Lösungen

3.5.1. Lösung mittels Origamics

3.5.1.1. Die Behauptung

Man nehme ein rechteckiges Blatt Papier, es muss in diesem Fall kein Quadrat sein, obwohl es natürlich mit einem Quadrat genauso funktionieren würde. Zuerst falte man das Blatt einmal in der Mitte – man erhält die Eckpunkte E und F – anschließend faltet man die gerade eben entstandene Mittelfalte ebenfalls auf die Linie AB um das Blatt im unteren Teil zu vierteln – man erhält die Eckpunkte G und H (Abb. 30).

(In den folgenden Skizzen symbolisieren die strichlierten Linien stets Faltkanten.)

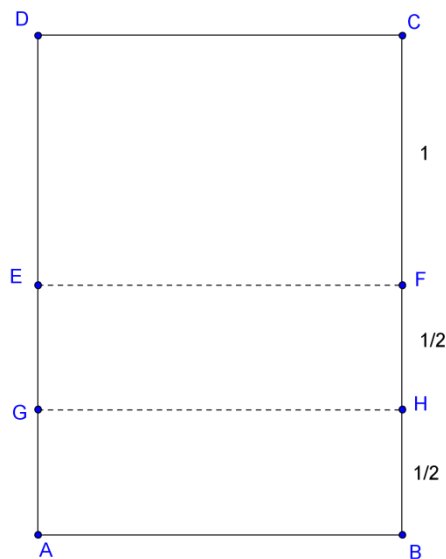


Abbildung 30

Nun wähle man einen beliebigen Punkt P auf der Strecke CD und falte das Blatt so, dass man den entsprechenden Winkel φ erhält. Diesen Winkel φ möchte man im Folgenden dreiteilen (Abb. 31).

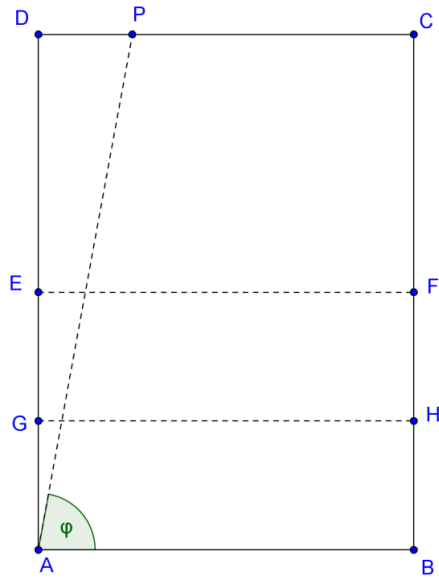


Abbildung 31

3.5.1.2. Die Konstruktion

Im ersten Schritt faltet man das Blatt so, dass der Punkt A auf der Strecke GH liegen bleibt, während gleichzeitig der Punkt E auf der Strecke AP landet (Abb. 32).

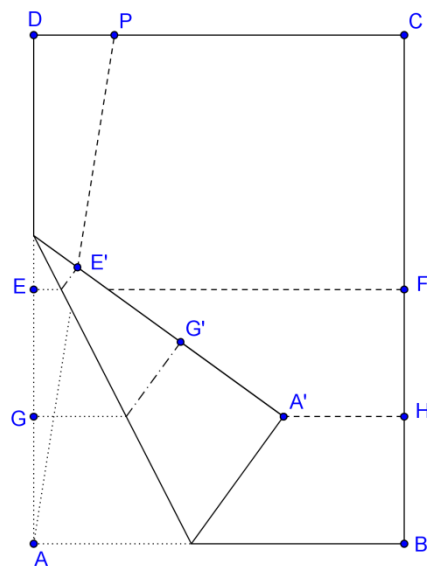


Abbildung 32

Anschließend faltet man das Blatt an der Strecke AG' sowie an der Strecke AA' und markiert den Schnittpunkt I der Geraden AG' mit der Geraden GH . Der Strahl der von A durch G' verläuft muss jedoch nicht zwangsläufig den Eckpunkt C beeinhaltten wie in Abb. 33.

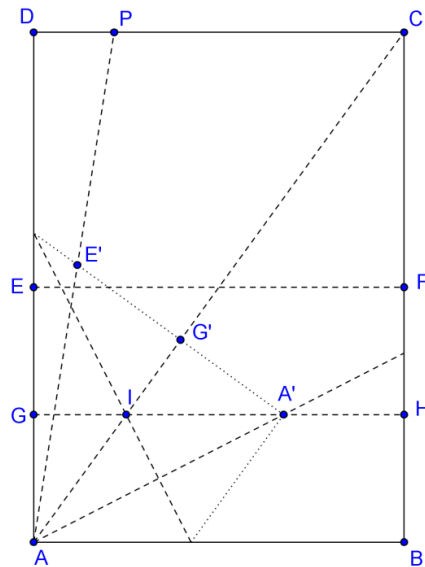


Abbildung 33

Nun bleibt zu zeigen, dass es sich bei den drei Winkeln $\angle BAA'$, $\angle A'AG'$ und $\angle G'AE'$ wirklich jeweils um ein Drittel des ursprünglichen Winkels $\angle BAP$ handelt.

3.5.1.3. Der Beweis

Da G der Mittelpunkt von AE ist, ist G' der Mittelpunkt von $A'E'$. Dadurch wissen wir auch, dass $IA = IA'$, $IG = IG'$ und $A'G = AG'$ gilt (Abb. 34).

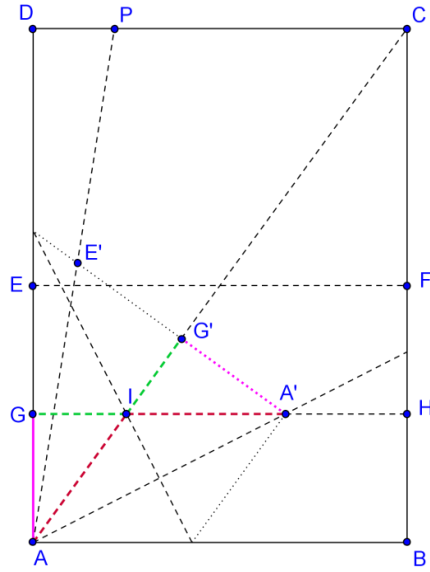


Abbildung 34

Da die drei Seiten der beiden Dreiecke gleichlang sind, gilt: $\triangle IAG \equiv \triangle IA'G'$. Aufgrund der Voraussetzung gilt (Abb. 33), dass der Winkel $\angle AGI$ ein rechter Winkel ist. Aufgrund der Kongruenz gilt dies auch für den Winkel $\angle IG'A'$ (Abb. 35).

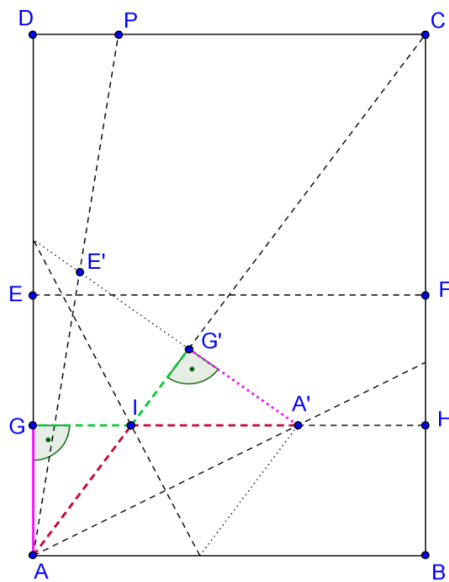


Abbildung 35

Da G' der Mittelpunkt von $A'E'$ ist und die Strecke AG' normal auf $A'E'$ steht, ist die Strecke AG' die Streckensymmetrale von $A'E'$ (Abb. 36).

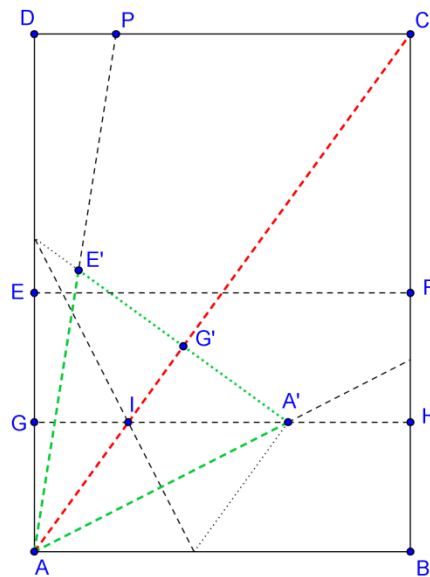


Abbildung 36

Da die Streckensymmetrale durch den Punkt A geht, wissen wir, dass das Dreieck $\triangle AE'A'$ gleichschenkelig sein muss, da jeder Punkt auf einer Seitensymmetrale stets den gleichen Abstand zu den zwei Eckpunkten A' und E' haben muss. Daraus folgt jedoch, dass die Streckensymmetrale gleichzeitig auch Winkelsymmetrale dieses Dreiecks ist und damit den Winkel $\angle E'AA'$ in zwei gleich große Winkel teilt (Abb. 37).

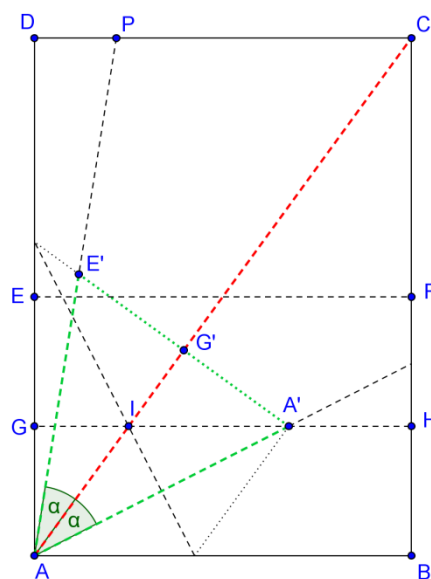


Abbildung 37

Da wir wissen, dass $AG = A'G'$ ist, wissen wir auch, dass $AG = A'G' = A'G''$ gilt (Abb. 38). Das bedeutet, dass der Normalabstand von A' zu der Strecke AG' gleich dem Normalabstand von A' zu der Strecke AB ist (Abb. 38).

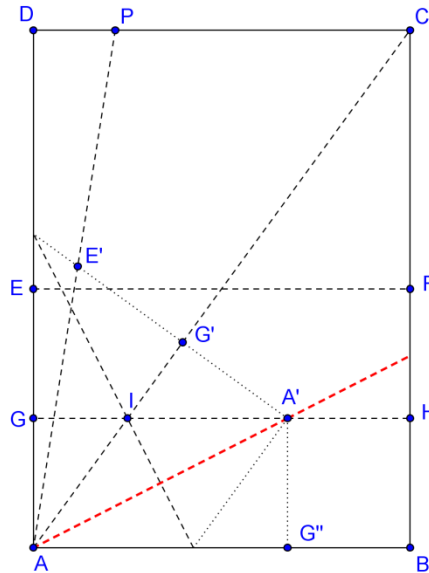


Abbildung 38

Dadurch ist die Gerade durch AA' eine Winkelsymmetrale des Dreiecks $\triangle G'AB$ und halbiert also den Winkel $\angle G'AB$. Daher wissen wir, dass gilt: $\angle A'AG'' = \angle G'AA'$. Aus Abbildung 37 wissen wir aber auch, dass: $\angle G'AA' = \angle E'AG'$ gilt, somit sind alle drei Winkel gleich groß. Hiermit haben wir einen beliebigen Winkel φ in drei gleich große Winkel α geteilt (Abb. 39).

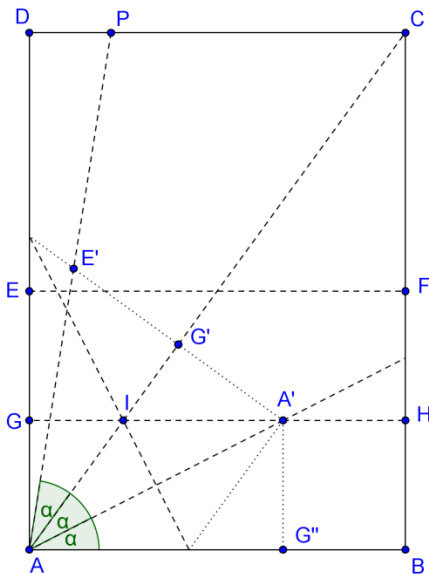


Abbildung 39

[vgl. Hen 2003, S. 44]

□

3.5.2. Lösung mittels Konchoide

Die Beweisführung geht zurück auf den griechischen Mathematiker und Philosophen Platon, dieser wiederum verwendet eine von Nikomedes definierte Kurve, die sogenannte Konchoide oder auch „Muschelkurve“. Beginnen möchte ich den Beweis mit der Definition eben jener Kurve.

3.5.2.1. Definition der Konchoide

Man nehme eine Gerade g sowie einen beliebigen Punkt A , der jedoch nicht auf der Geraden liegt. Dann legt man Strahlen durch diesen Punkt, die die Gerade schneiden. Auf diesen Strahlen schlägt man ab dem Schnittpunkt mit der Geraden eine beliebig feste Länge a ab. Die Punkte, die man dadurch erhält, verbindet man zu einer Kurve, die Konchoide (Abb. 40).

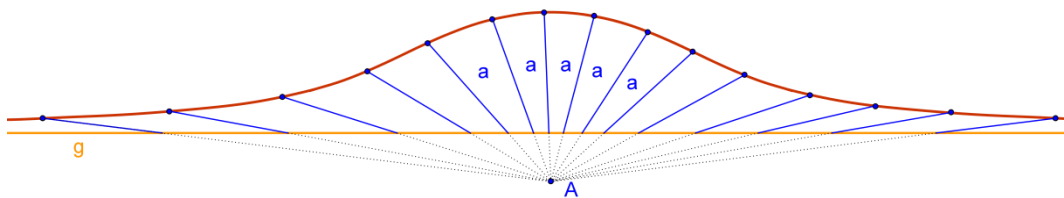


Abbildung 40

3.5.2.2. Die Konstruktion

Man wählt einen beliebigen Winkel α sowie einen Punkt B auf dem „oberen“ Schenkel. Anschließend konstruiert man eine Gerade g , die auf den „unteren“ Schenkel normal steht und durch den Punkt B geht. Nun konstruiert man die Konchoide mit dem Punkt A und der eben konstruierten normalen Geraden g , wobei der konstante Abstand diesmal die Länge $2AB$ betragen soll (Abb. 41).

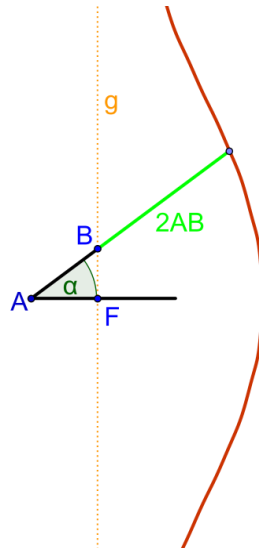


Abbildung 41

Als Nächstes legt man eine Gerade durch den Punkt B , die normal auf die Gerade g steht. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Konchoide wird D genannt. Nun verbindet man die Punkte A und D , der Schnittpunkt dieser Strecke mit der Geraden g bezeichnen wir mit C . Zum Abschluss bildet man noch den Mittelpunkt der Strecke CD und verbindet diesen Mittelpunkt mit dem Punkt B (Abb. 42).

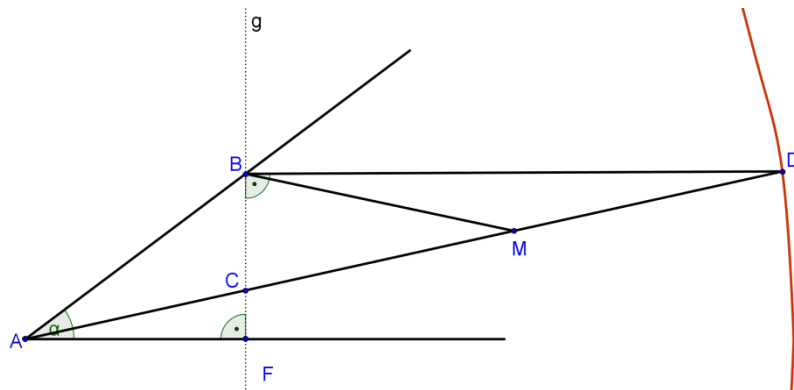


Abbildung 42

Nun bleibt zu zeigen, dass es sich bei dem Winkel $\angle FAD$ um ein Drittel des Winkels $\angle FAB$ handelt.

3.5.2.3. Der Beweis

Aus der Umkehrung des Satz von Thales folgt, dass der Punkt B auf einem Halbkreis liegt, dessen Mittelpunkt der Punkt M ist und dessen Radius gleich der Strecke CM beziehungsweise MD ist. Da die Konchoide so konstruiert wurde, dass der Abstand CD gleich zweimal der Abstand AB ist, gilt daher: $MB = MD = AB$ (Abb. 43).

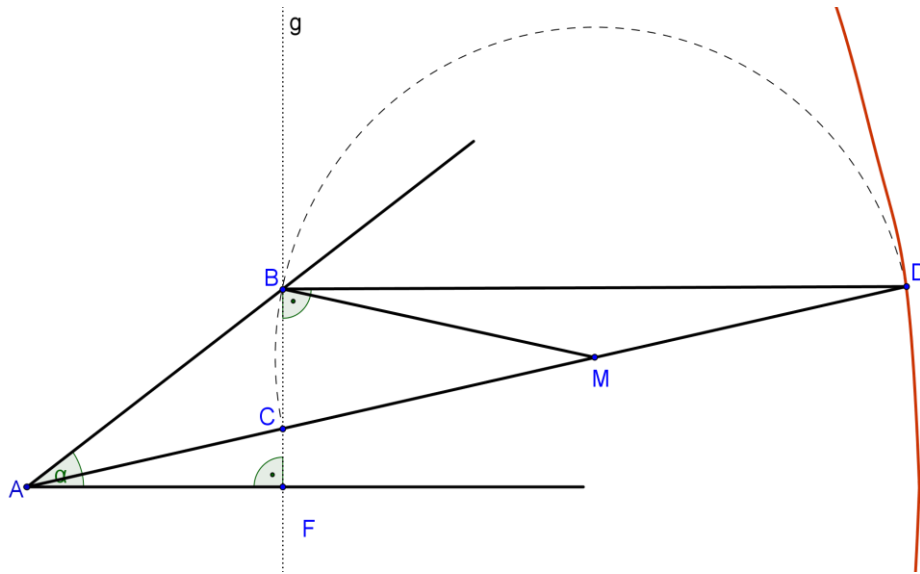


Abbildung 43

Wenn man den Winkel $\angle BDM$ mit β bezeichnet, dann ist der Winkel $\angle DAF$ ebenfalls β , da dies ein Parallelwinkel ist. Da oben bereits gezeigt worden ist, dass die Strecke MD gleich der Strecke MB ist, gilt, dass das Dreieck $\triangle BDM$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, dessen Basis die Länge DB bildet. Dadurch gilt aber, dass der Winkel $\angle MBD$ ebenfalls β ist (Abb. 44).

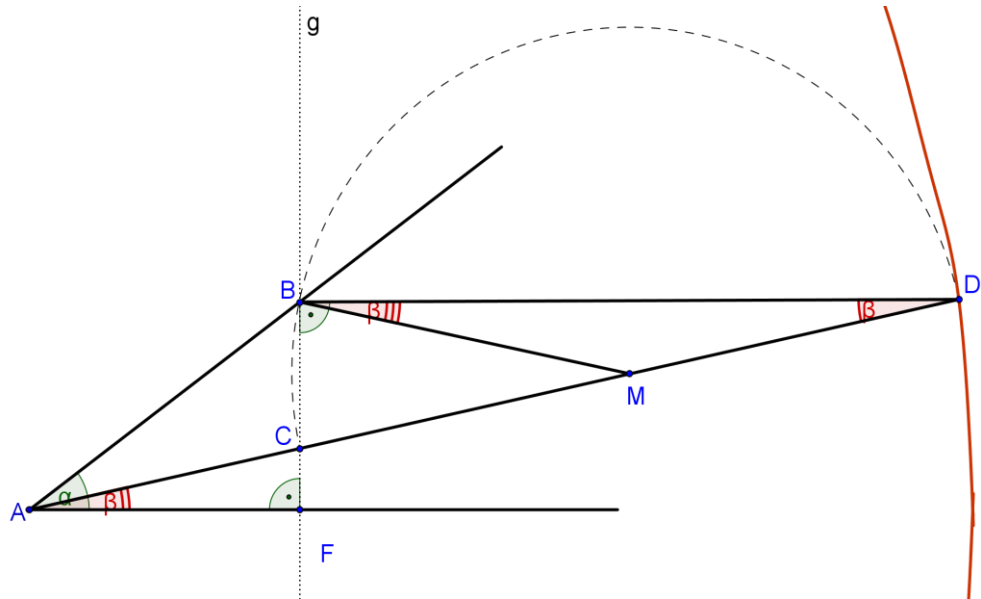


Abbildung 44

Bezeichnet man den Winkel $\angle DMB$ als ε , so erhält man: $\varepsilon = 180^\circ - 2\beta$. Bezeichnet man nun den Winkel $\angle BMA$ als γ , dann erhält man: $\gamma = 180^\circ - \varepsilon = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta$. Da wir wissen, dass die Strecke MB gleich der Strecke AB ist, ist das Dreieck $\triangle ABM$ ein gleichschenkeliges Dreieck, und damit gilt, dass der Winkel $\angle BAM$ gleich γ ist (Abb. 45).

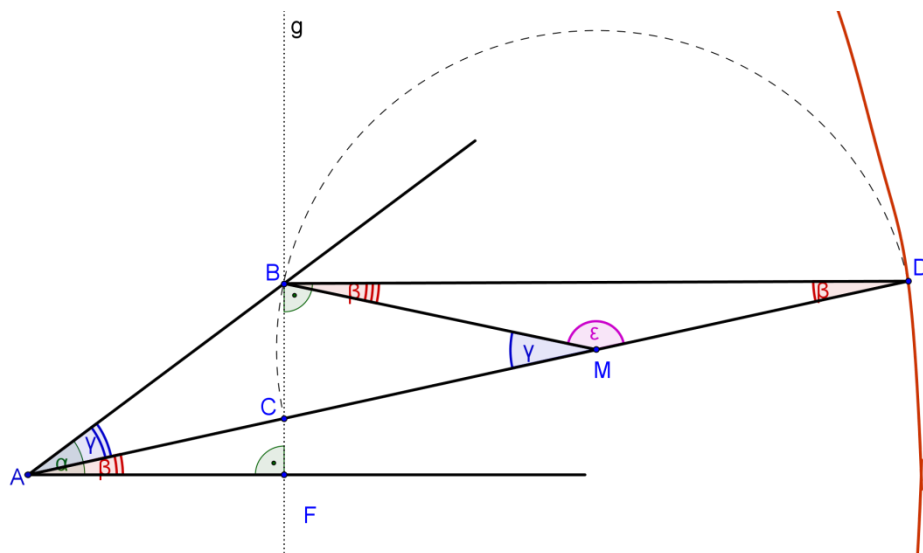


Abbildung 45

Damit gilt:

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta + 2\beta = 3\beta. \text{ [vgl. Wae 1966, S. 390-393]}$$

□

3.5.3. Lösung nach Archimedes

Dieser Beweis wird dem griechischen Mathematiker Archimedes zugeschrieben und basiert auf einem Lineal, das mit einer Markierung versehen worden ist. Da dieser Beweis sehr viel mit Winkeln arbeitet, habe ich die Bezeichnung der Winkel stets auf die beiliegenden Skizzen bezogen, um so die Übersicht zu erleichtern. Wenn also beispielsweise im Beweis von einem Winkel β die Rede ist, so wird nicht genauer erläutert, um welchen Winkel es sich handelt, sondern es ist stets jener Winkel gemeint, der auch in der Skizze als Winkel β vermerkt ist.

3.5.3.1. Die Konstruktion

Zuerst konstruiert man einen beliebigen Winkel φ der anschließend gedrittelt werden soll (Abb. 46).

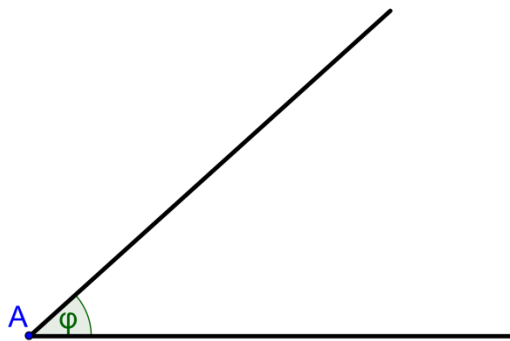


Abbildung 46

Nun wähle man einen Punkt B auf der waagrechten Strecke und zeichne einen Kreis dessen Radius gleich der Länge der Strecke AB ist. Der Schnittpunkt des zweiten Schenkels mit dem Kreis wird mit C bezeichnet. Anschließend verlängert man die Strecke AB noch über den Punkt A hinaus (Abb. 47).

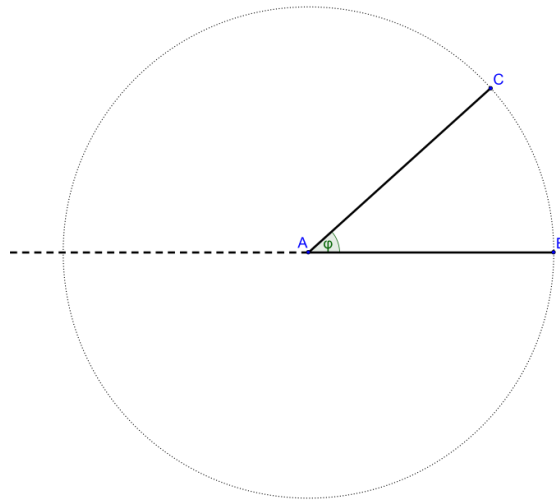


Abbildung 47

Im letzten Schritt sucht man sich auf der Verlängerung von AB einen Punkt D , der so gewählt ist, dass die Verbindungslinie DC den Kreis genau an jener Stelle E schneidet, sodass DE gleich dem Radius, also der Strecke AB , ist (Abb. 48).

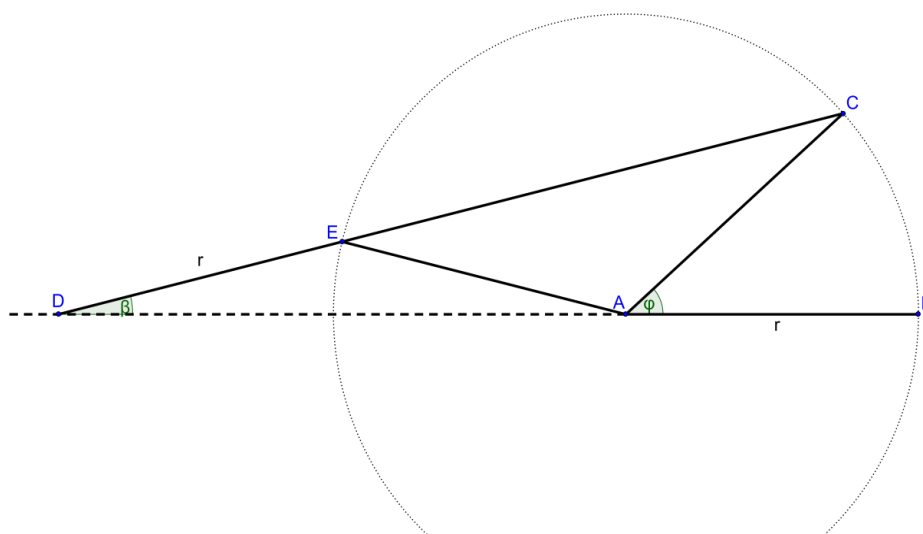


Abbildung 48

Um dies konstruieren zu können, verwendet man ein Lineal, auf dem die Länge der Strecke AB gekennzeichnet ist.

3.5.3.2. Die Behauptung

Der durch die Konstruktion entstandene Winkel $\angle EDA$ ist ein Drittel des Winkels $\angle CAB$:

$$\beta = \frac{\varphi}{3}.$$

3.5.3.3. Der Beweis

Bei dem Dreieck $\triangle DEA$ handelt es sich um ein gleichschenkeliges Dreieck. Das bedeutet, dass das Dreieck gleich große Basiswinkel besitzt und daher gilt (Abb. 49):

$$\angle EDA = \beta = \angle EAD.$$

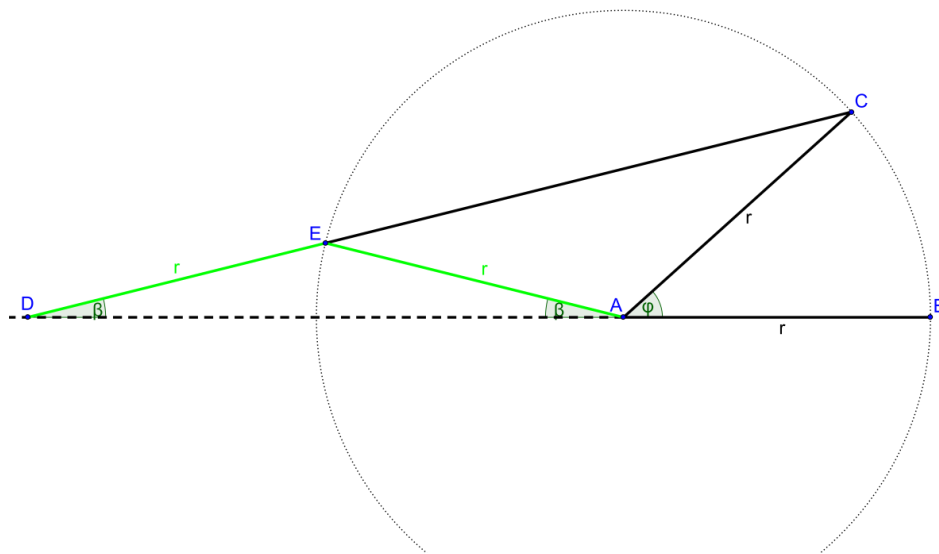


Abbildung 49

Da es sich bei dem Winkel γ um einen Supplementwinkel von ε handelt, gilt für jenen Winkel (Abb. 50):

$$\gamma = 2\beta.$$

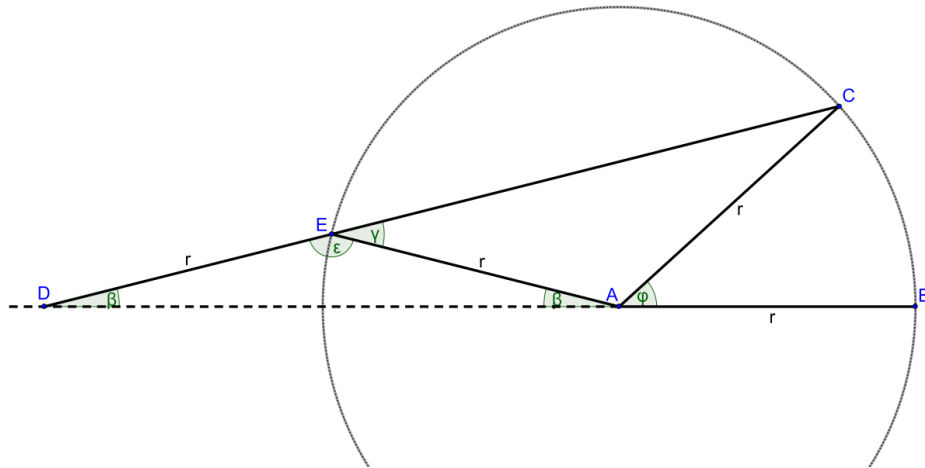


Abbildung 50

Dies ist leicht nachzuvollziehen, da folgende Gleichung gilt:

$$\gamma = 180^\circ - \varepsilon = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ - 180^\circ + 2\beta = 2\beta.$$

Nun widmet man sich dem Dreieck $\triangle ECA$, das aufgrund der Tatsache, dass beide Schenkel Radianten des gleichen Kreises sind, ebenfalls gleichschenkelig ist und dadurch auch wiederum die gleichen Basiswinkel besitzt (Abb. 51):

$$\angle AEC = \gamma = \angle ECA.$$

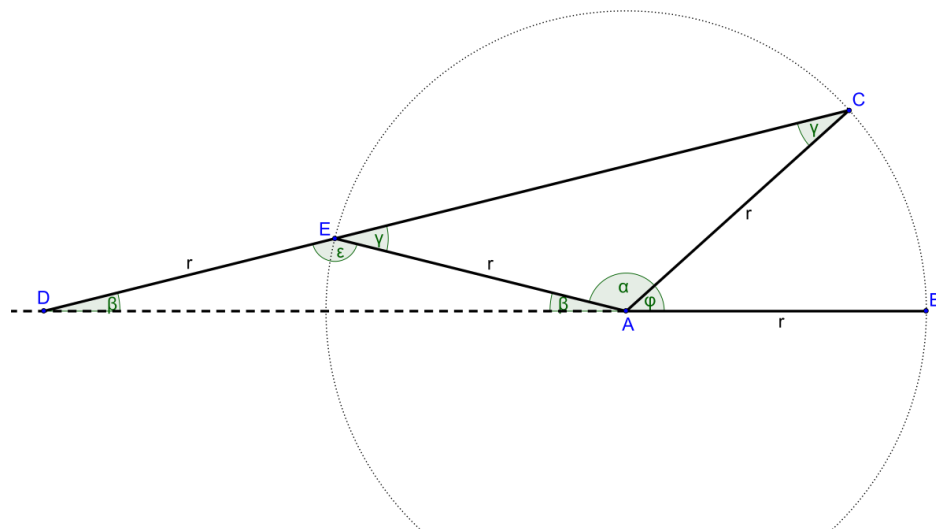


Abbildung 51

Schlussendlich folgt daraus (Abb. 52):

$$\begin{aligned}\varphi &= 180^\circ - (\beta + \alpha) = 180^\circ - (\beta + (180^\circ - 2\gamma)) = \\ &= 180^\circ - (\beta + (180^\circ - 2 \cdot (2\beta))) = 180^\circ - (\beta + 180^\circ - 4\beta) = \\ &= 180^\circ - \beta - 180^\circ + 4\beta = 3\beta\end{aligned}$$

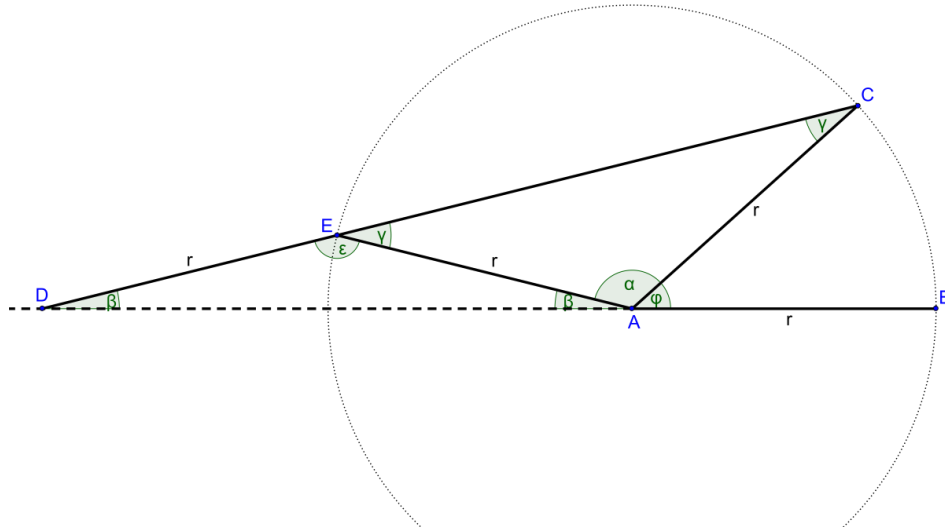


Abbildung 52

[vgl. Scr 2000, S. 46]

□

4. Quadratur des Kreises

4.1. Das Problem

Beim Beweis der Unmöglichkeit dieses Konstruktionsproblems dreht sich alles um die Transzendenz der Zahl π . Zur Einstimmung: man möchte ein zu einem Kreis flächengleiches Quadrat finden. Nun wissen wir, dass die Fläche eines Kreises bestimmt ist durch $r^2 \cdot \pi$, das bedeutet aber, dass ein flächengleiches Quadrat die Seitenlänge $r \cdot \sqrt{\pi}$ haben muss. Da der Kern dieses Problems darin besteht, einen bereits konstruierten Kreis in ein flächengleiches Quadrat umzuwandeln, gilt natürlich, dass der Radius eine konstruierbare, also algebraische Zahl ist. Daraus folgt jedoch, dass das Problem bei der Quadratur des Kreises darin liegt, die Wurzel der Kreiszahl zu konstruieren. Wir haben aber bereits gezeigt, dass man die Wurzel jeder konstruierbaren Zahl konstruieren kann, weshalb es genügen würde zu zeigen, dass die Zahl π konstruierbar ist. Im anschließenden Beweis wird gezeigt, dass es sich bei der Zahl π um eine transzendente und nicht um eine algebraische Zahl handelt und sie deshalb nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

4.2. Die Geschichte

Die Quadratur des Kreises stellt wohl das berühmteste der drei klassischen Konstruktionsprobleme dar, nicht zuletzt da es auch unter mathematisch weniger versierten Menschen zu einem Synonym der Unmöglichkeit geworden ist, bei dem nur noch in den seltensten Fällen ein Bezug zur Mathematik existiert. Als Beispiel soll hierbei auf einen Artikel aus dem Jahr 2011 der Süddeutschen Zeitung verwiesen werden, der wie folgt beginnt: „Die Aufgabe klingt wie die Quadratur des Kreises: Aus der Atomkraft aussteigen, aber ohne die Strompreise zu erhöhen oder Atomstrom zu importieren“ [Fri 2011].

Aber auch unter den Hobbymathematikern war das Thema sehr beliebt. Ein Grund dafür waren sicher auch die verschiedensten Mythen, die demjenigen,

der als erster die Quadratur des Kreises bewältigen würde, alles Mögliche verheißen. So glaubte man noch bis ins 19. Jahrhundert, dass man durch das Finden einer Lösung „den Zusammenhang der Vorgänge der irdischen Erscheinungswelt besser verstehe und vielleicht sogar Einblick in übernatürliche Geschehnisse erlange“ [Beu 1951, S. 6]. Einer anderen Auffassung nach war auch das englische Parlament sehr an einer Lösung interessiert und setzte einen hohen Geldpreis aus, da das Finden einer Lösung einen vermeintlichen Zusammenhang mit dem Auffinden der geographischen Länge auf hoher See hatte. Bei all diesen Behauptungen handelte es sich selbstverständlich nur um Mythen, auch wenn sie großen Anklang in der Bevölkerung fanden [vgl. Beu 1951, S. 6].

Viele der selbst ernannten „Quadratoren“ waren ihrer Lösung so sicher, dass sie sogar privat Preise aussetzten, für denjenigen, der einen Fehler in ihren Konstruktionen finden würde. Im 18. Jahrhundert nahm das Ausmaß an solchen „Scheinlösungen“ derart zu, dass die Pariser Akademie 1775 den Beschluss fasste, von nun an keine „Lösungen“ mehr für dieses Problem zu untersuchen, und es dauerte nicht lange, bis weitere Akademien diesem Vorbild folgten. Bemerkenswert an diesem Beschluss war, dass er zu einer Zeit gefasst wurde in der die Unmöglichkeit der Kreisquadratur noch nicht bewiesen war [vgl. Beu 1951, S. 7].

Das Problem dürfte aber auch bereits in der griechischen Geschichte nicht nur den mathematisch Versierten bekannt gewesen sein. Als Indiz dafür dient das Theaterstück von Aristophanes mit dem Titel „Die Vögel“, in dem er den Astronomen Meton Folgendes sagen lässt:

„Ein gerades Richtscheit nehme ich dann und messe, damit der Kreis viereckig werde; in der Mitte sei der Markt mit Straßen, welche senkrecht laufend just nach dieser Mitte führen, gleich den Strahlen, die ein Stern von seiner Scheibe pfeilgerade schießt nach jeder Richtung. ‚Traun, ein Thales ist der Mann!‘ ruft darauf Peisthetairos, der Führer der Vögel, spöttisch aus und prügelt den unglücklichen Meton hinaus“ [Kai 1998, S. 180]

Bei dieser offensichtlich falschen und nicht ernst gemeinten Quadratur des Kreises erkennt man sehr gut, wie präsent und bekannt dieses Problem im griechischen Alltag war.

Nach heutiger Quellenlage dürfte wohl Anaxagoras der erste Grieche gewesen sein, der sich intensiv mit der Frage beschäftigte. Nach Plutarch dürfte dies zur Zeit seiner Gefängnisstrafe gewesen sein, die der Philosoph wegen des Vorwurfs der Gottlosigkeit erdulden musste, da er behauptete, die Sonne sei ein glühender Stein. Als Zeitgenossen Anaxagoras beschäftigten sich aber auch Hippokrates von Chio, der Sophist Antiphon aus Athen und der Mathematiker Bryson von Herakleia mit jenem Problem. Antiphons Ansatz gilt dabei als Vorreiter der weiter unten beschriebenen Abschätzung von Archimedes, da auch Antiphon auf eingeschriebene regelmäßige Vielecke zurückgreift. Bryson von Herakleia ging noch einen Schritt weiter, indem er durch die zusätzliche Betrachtung von umschriebenen Vielecken den Begriff der unteren und oberen Grenze prägte, auch wenn sich seine Annahme, der Kreisumfang sei das arithmetische Mittel eines umschriebenen und eines eingeschriebenen Quadrates, als falsch herausstellte [vgl. Ger 1994, S. 94].

Aber auch bei diesem Problem dürfte es sich nicht um reinen Zufall handeln, der Anaxagoras dazu brachte, sich die Frage nach der Quadratur des Kreises zu stellen. So konnte man beispielsweise schon deutlich länger ein Rechteck in ein Quadrat umwandeln. Etwas schwieriger, aber den Griechen ebenfalls schon davor bekannt, ist die Quadratur eines beliebigen Dreiecks, auf beide Konstruktionen wird bei der alternativen Lösung mittels der Quadratrix nochmals genauer eingegangen (Abschnitt 4.4.2). Da man aber, wie bereits erwähnt, jedes beliebige Dreieck in ein flächengleiches Quadrat umwandeln kann, und sehr schnell ersichtlich wird, dass man jedes beliebige Polygon in eine endliche Zahl von Dreiecken unterteilen kann, gelang es auch, ein beliebiges Polygon in ein flächengleiches Quadrat umzuwandeln. Dafür muss man lediglich die aus den einzelnen Dreiecken erhaltenen Quadrate in ein Quadrat überführen und dies gelingt mit Hilfe des Satz von Pythagoras, da man mit jenem aus zwei Quadraten stets ein flächengleiches Quadrat findet. Durch das sukzessive Anwenden dieses Satzes erhält man schlussendlich

stets ein dem Polygon flächengleiches Quadrat. Da war die Fragestellung nach der Quadratur eines Kreises natürlich sehr naheliegend.

Es gab aber geschichtlich sogar noch einen weiteren Zwischenschritt, und zwar die Möndchenquadratur des Hippokrates. Jenem griechischen Mathematiker gelang es nämlich zu beweisen, dass die Summe der Flächeninhalte der sogenannten Möndchen eines rechtwinkligen Dreiecks, also jene gekrümmten Flächen, die entstehen wenn man zwei Halbkreise über den Katheten des Dreiecks und einen Halbkreis über die Hypotenuse zeichnet, gleich dem Flächeninhalt des besagten Dreiecks ist (Abb. 53).

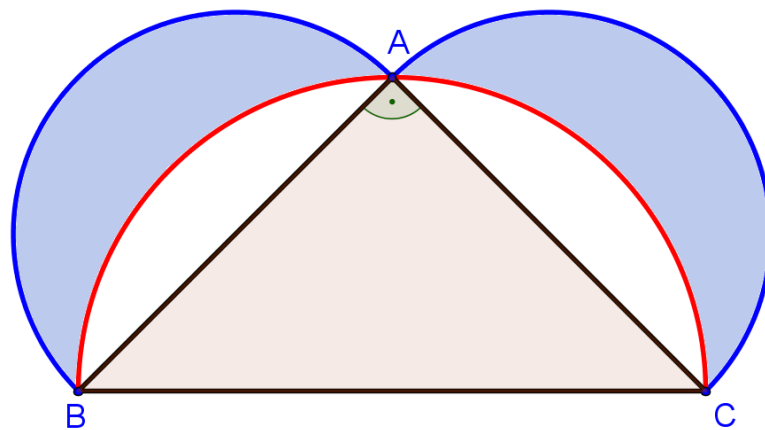


Abbildung 53

Nachdem man also auch die ersten gekrümmten Flächenstücke gefunden hat, deren „Quadratur“ möglich war, ist die Frage nach der Quadratur des Kreises wohl eine logische Konsequenz der vorangegangenen Entwicklung [vgl. Scr 2000, S. 47 f.].

Das Problem der Kreisquadratur ist sehr eng mit der Kreiszahl π verbunden – wie bereits in 4.1 erläutert wurde. Aus diesem Grund möchte ich im Folgenden auch noch der historischen „Suche“ nach der Kreiszahl einen kurzen Abschnitt widmen.

Die Geschichte der Kreiszahl lässt sich laut Eugen Beutel in drei Teile untergliedern:

*„a) Der **elementar geometrische Zeitraum** von den Anfängen mathematischer Untersuchungen bis zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung. Der Kreisumfang wird näherungsweise als rationales Vielfaches des*

Kreisdurchmessers mit jeder nur wünschenswerten Genauigkeit berechnet; die näherungsweise Quadratur des Zirkels kann mit jeder denkbaren Genauigkeit konstruktiv ausgeführt werden.

*b) Der **infinitesimale Zeitraum** von 1654-1766, in dem π durch analytische Ausdrücke mittels einer unendlichen Reihe von Operationen dargestellt wird.*

*c) Der **algebraische Zeitraum** 1766-1882, in dem das eigentliche Wesen der Zahl π erkannt wird. [...]“ [Beu 1951, S. 9]*

Der elementar-geometrische Zeitraum erstreckt sich zurück bis ins alte Ägypten, wo bereits im Papyrus „Rhind“, das man ungefähr auf die Zeit 1600-1700 v. Chr. datieren kann, eine erste Näherung für den Wert π angegeben wird. In diesem, nach dem schottischen Anwalt und Antiquar Alexander Henry Rhind, benannten Papyrus, findet sich die Näherung $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,16049 \dots$, auf die man wahrscheinlich empirisch gestoßen ist. Aber auch in anderen Hochkulturen, wie etwa im alten China, hat man sich bereits mit der Kreiszahl beschäftigt und schon Näherungen auf bis zu sieben Kommastellen gekannt [vgl. Dri 1980, S. 14 f. und 18]. In Griechenland wurde der Kreiszahl erst durch den oben bereits erwähnten Anaxagoras und seiner Frage nach der Quadratur des Kreises Aufmerksamkeit gewidmet. Der erste große Schritt zu einer Näherung von π gelang Archimedes. Durch das Ein- und Umschreiben von Vielecken gelang Archimedes auf folgende Abschätzung [vgl. Beu 1951, S. 13 f.]:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3,140845 \dots < 3,141592 \dots < 3,142857 \dots$$

Nach der griechischen Hochblüte dauerte es jedoch etliche Jahrhunderte, bevor es zu wesentlichen Verbesserungen der von Archimedes aufgestellten Abschätzung kam. Die Römer waren bekanntlich wenig interessiert an Grundlagenforschung, und da das Problem der Quadratur des Kreises eher einen theoretischen als einen praktischen Charakter hat, genügte den

Römern eine ungenaue Abschätzung der Kreiszahl π mit $3\frac{1}{8}$ [vgl. Beu 1951, S. 19].

Der nächste große Schritt erfolgte 1220 durch die von Leonardo von Pisa gefundene Annäherung:

$$\pi \approx \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3,141818 \dots$$

Bis auf die eben erwähnte Ausnahme blieb es aber über die Jahrhunderte sehr ruhig in Bezug auf das klassische Konstruktionsproblem. Zurück in den Fokus des mathematischen Interesses kam es erst durch den Humanismus im beginnenden 15. Jahrhundert, in dem sich die damalige Bildungsschicht den antiken Klassikern zuwandte. Demzufolge ist es auch wenig verwunderlich, dass der wohl nächste große Schritt auf der Suche nach der Kreiszahl auf den Arbeiten einer mathematischen Legende beruht, Sir Isaac Newton. Hierbei waren vor allem seine Entdeckung auf dem Gebiet der unendlichen Reihen, sowie die von ihm aufgestellte Sinus- und Cosinusreihe von Bedeutung. Durch diese Vorarbeit Newtons gelang es James Gregory zu Beginn des 18. Jahrhunderts mit Hilfe der von ihm entdeckten arc-tangens Reihe π auf 72 Kommastellen genau anzugeben [vgl. Beu 1951, S. 34-37]. Es folgt eine Reihe von steten Verbesserungen, die eine immer höhere Anzahl an exakten Nachkommastellen mit sich brachte, bei der sich auch namhafte Mathematiker, wie etwa Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler, beteiligten.

Den griechischen Buchstaben π als deren Bezeichnung verdankt die Kreiszahl dem bereits erwähnten Mathematiker Leonhard Euler, obwohl man, um historisch akkurat zu bleiben, das Werk „Synopsis palmariorum matheseos“ von William Jones 1706 als ersten Beleg für die Verwendung des Buchstaben nennen muss. Diese neue Bezeichnung fand jedoch unter den Fachgelehrten keinen nennenswerten Anklang und wurde erst durch die Verwendung Eulers, einerseits in den zahlreichen Briefwechseln mit anderen Mathematikern, andererseits auch in seinem 1748 erschienen Hauptwerk „Introductio in analysin infinitorum“ von einem breiten Fachpublikum wahrgenommen und weiterverwendet [vgl. Beu 1951, S. 43].

Es war wohl auch jener Euler, der in der Mitte des 18. Jahrhunderts in seinem Lehrbuch „Introductio in Analysin Infinitorum“ zum ersten Mal eine Transzendenzvermutung äußerte, und damit wohl am Beginn der theoretischen Auseinandersetzung mit der Kreiszahl π steht.

Als nächster wichtiger Beitrag auf dem Weg zum Transzendenzbeweis der Kreiszahl sei hier der Existenzbeweis transzendenter Zahlen des französischen Mathematikers Joseph Liouville aus dem Jahre 1844 genannt, durch den es ihm zusätzlich gelang, auch die ersten transzendenten Zahlen anzugeben. Es handelt sich dabei um speziell konstruierte Kettenbrüche, die auch nach seinem Erfinder benannt wurden, die sogenannten „Liouville Zahlen“. Einem weiteren französischen Mathematiker, nämlich Charles Hermite, verdanken wir die erste schon vorher in einem anderen Zusammenhang bekannte transzendente Zahl, indem er 1873 bewies, dass die nach Leonhard Euler benannte „eulersche Zahl e “, die Basis des natürlichen Logarithmus, transzendent sei [vgl. Men 1934, S. 17-20].

Aber nicht nur in Frankreich wurde an dem Begriff der Transzendenz geforscht, und so gelang es dem deutschen Vater der Mengenlehre, Georg Cantor, nicht nur neuerlich die Existenz von transzendenten Zahlen zu beweisen, sondern zusätzlich zu zeigen, dass es „mehr“ transzendente Zahlen als algebraische Zahlen gibt. Dank seiner Arbeit aus dem Jahr 1874 wusste man nun, dass die Menge der algebraischen Zahlen lediglich abzählbar, ist wohingegen die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar ist [vgl. Men 1934, S. 20]. Und auch der für dieser Arbeit letzte wichtige Schritt gelang in Deutschland als Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1882 endgültig die Transzendenz von π beweisen konnte und damit ebenfalls zeigte, dass das Problem der Quadratur des Kreises mit den aus der Antike vorgegebenen Möglichkeiten wirklich unmöglich lösbar ist. Wie so oft ist der erste Beweis jedoch nicht gleich der eleganteste, und so konnte sich einerseits Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1885 mit der ersten Vereinfachung und andererseits der u. a. für seine 23 mathematischen Probleme bekannte David Hilbert 1893 mit einer weiteren Vereinfachung ebenfalls ihren Namen auf Ewigkeit mit der Kreiszahl π in Verbindung bringen [vgl. Beu 1951, S. 56]. Ich

werde mich bei dem in Kapitel 4.3.26 ausgeführten Transzendenzbeweises ebenfalls auf die 1893 erschienene Version von David Hilbert stützen.

Nach dem Vorbild eines französischen Merksatzes entwickelte Weinmeister übrigens im Jahr 1878 einen Merkvers, um sich die ersten 24 Stellen von π besser merken zu können:

*„Wie o! dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh’!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!“* [Beu 1951, S. 42]

Die Anzahl der Buchstaben der einzelnen Wörter stellen hierbei die Ziffern dar. So steht das Wort *wie* für 3, *o* für 1, *dies* für 4 und π für 1, also für den Anfang der Zahl $\pi = 3,141\dots$

Mit der Berechnung von D.F. Ferguson aus dem Jahre 1946, bei der er die Kreiszahl auf insgesamt 810 Dezimalstellen berechnete und dabei bereits eine Rechenmaschine zu Hilfe nahm, begann das Zeitalter der Computerberechnungen. Ab diesem Zeitpunkt nahm dann die Anzahl von berechneten Kommastellen rasant zu, und heutzutage ist man dank der immer schnelleren Rechenzeit von Computern schon deutlich über der Einmilliardengrenze. Wie sinnlos diese genauen Berechnungen für jeglichen praktischen Bezug sind, erklärt Eugen Beutel sehr treffend:

„Ist z.B. π auf nur 25 Dezimalen richtig, so könnte damit der Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich dem Abstand des Mittelpunkts der Erde von dem uns nächsten Fixstern ist, auf $\frac{1}{1000000}$ mm genau berechnet werden. Welche Genauigkeit schon in 100 Stellen liegt, vermag sich der menschliche Geist überhaupt nicht vorzustellen.“ [Beu 1951, S. 42]

4.3. Der Unmöglichkeitsbeweis

4.3.1. Einleitung

Wir wollen zeigen, dass π nicht konstruierbar ist, da es sich um eine transzendente Zahl handelt (wir werden ebenfalls zeigen, dass jede konstruierbare Zahl algebraisch ist). Für diesen Beweis benötigt man wieder

einen Einblick in das Feld der Erweiterungskörper, weswegen im Folgenden eine Reihe von notwendigen Definitionen und Sätzen folgt. Ich werde mich bei den Beweisen auf jene beschränken, die kein allzu tiefes Wissen aus den Gebieten der Linearen Algebra beziehungsweise der Algebra benötigen, um das Ausmaß der Vorbereitung für den abschließenden Beweis in einem möglichst kleinen Rahmen zu halten. Zu Beginn der Arbeit hatten wir bereits den Begriff eines quadratischen Erweiterungskörpers und nun folgt die allgemeine Definition eines Erweiterungskörpers.

4.3.2. Definition – Erweiterungskörper

Ist $(K, +, \cdot)$ ein Teilkörper des Körpers $(L, +, \cdot)$, so wird L ein „*Erweiterungskörper von K* “ (auch: „*Körpererweiterung von K* “) genannt; symbolisch: $L : K$. Ein Körper M heißt ein „*Zwischenkörper der Erweiterung $L : K$* “, wenn $(M, +, \cdot)$ ein Teilkörper von $(L, +, \cdot)$ mit $K \subseteq M \subseteq L$ ist.

Also Beispiel möchte ich hier die komplexen Zahlen als Körpererweiterung der rationalen Zahlen nennen, wobei die reellen Zahlen dabei einen Zwischenkörper bilden.

Man kann eine Körpererweiterung aber auch so auffassen: Ein Erweiterungskörper $(L, +, \cdot)$ eines Körpers $(K, +, \cdot)$ kann man als Vektorraum über K sehen unter der Voraussetzung, dass man unter der Vektoraddition die Körperaddition in L und unter der Skalarmultiplikation die Körpermultiplikation von Elementen aus L (den Vektoren) mit Elementen aus K (den Skalaren) auffasst. Aus dieser Überlegung geben wir die folgende

4.3.3. Definition – Grad der Körpererweiterung

Ist $(L, +, \cdot)$ ein Erweiterungskörper des Körpers $(K, +, \cdot)$, so versteht man unter dem „*Grad der Körpererweiterung $L : K$* “ die Dimension des Vektorraums L über dem Körper K ; symbolisch: $[L : K]$ ($= \dim_K L$). $L : K$ heißt „*endlich*“, wenn $[L : K]$ endlich ist; sonst „*unendlich*“.

Als Beispiel sei hier die Körpererweiterung der rationalen Zahlen um die Zahl $\sqrt{2}$ genannt für die gilt: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, da etwa $\{1, \sqrt{2}\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$ ist.

Da man bei konstruierbaren Zahlen auf eine Kette von Erweiterungskörpern stößt, stellt sich natürlich die Frage in welchem „dimensionalen“ Zusammenhang diese endlich vielen Zwischenkörper stehen.

4.3.4. Satz – Gradsatz

Ist M ein Zwischenkörper der Erweiterung $L : K, K \subset M \subset L$, dann gilt:
 $[L : K] = [L : M][M : K]$.

4.3.5. Beweis – Gradsatz

Sei $B = \{a_i \mid i \in I\}$ eine Basis von M über K und sei weiters $C = \{b_j \mid j \in J\}$ eine Basis von L über M . Dann folgt daraus, dass $D = \{c_{i,j} = a_i b_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ eine Basis von L über K ist, denn zu jedem $a \in L$ (über M) gibt es endlich viele $b_j \in C, m_j \in M$ mit

$$a = \sum_{j \text{ endlich}} m_j b_j ,$$

da ja C eine Basis von L über M bildet. Weiters gibt es aber auch zu jedem $m_j \in M$ (über K) endlich viele $a_i \in B, k_{ij} \in K$ mit

$$m_j = \sum_{i \text{ endlich}} k_{ij} a_i ,$$

da ja B eine Basis von M über K bildet. Dadurch erhält man für ein beliebiges $a \in L$:

$$a = \sum_{i,j \text{ endlich}} k_{ij} (a_i b_j).$$

Somit wurde gezeigt, dass L über K von D erzeugt wird, nun muss nur noch gezeigt werden, dass D auch linear unabhängig über K ist. Dies gilt, da:

$$0 = \sum_{i,j \text{ endlich}} \alpha_{ij} (a_i b_j) \text{ mit } \alpha_{ij} \in K \Rightarrow 0 = \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \alpha_{ij} a_i \right)}_{\in M} b_j.$$

Da es sich bei C um eine Basis über M handelt, wissen wir das gilt:

$$\sum_i \alpha_{ij} a_i = 0 \quad \forall j.$$

Da aber B wiederum eine Basis über K ist folgt daraus, dass $\alpha_{ij} = 0 \quad \forall j, i$ sein muss.

Daraus kann man auf folgende Gleichungskette schließen:

$$[L : K] = \dim_K L = |I \times J| = |I| \cdot |J| = (\dim_K M) \cdot (\dim_M L) = [M : K] \cdot [L : M]$$

[vgl. Kow 1982, S. 136 f.] □

4.3.6. Definition

Ist $L : K$ eine Körpererweiterung und $A \subseteq L, A \neq 0$, dann heißt der Durchschnitt über alle Zwischenkörper $K \subset M \subset L$ mit $A \subseteq M$ der „*durch Adjunktion von A zu K entstandene Teilkörper von L*“, symbolisch: $K(A)$ (d. h. $K(A)$ ist der kleinste Teilkörper von L , welcher K und A enthält); man sagt: $A \subseteq L$ wird zu K „*adjungiert*“.

Ist $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ endlich in L , so schreibt man $K(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ist $A = \{a\}, a \in L$, dann heißt $K(a)$ „*einfache*“ Körpererweiterung von K in L und $a \in L$ „*primitives Element von $K(a)$* “.

4.3.7. Definition – algebraisch/transzendent

Ist $L : K$ eine Körpererweiterung von K , dann heißt ein Element $a \in L$ „*algebraisch über K*“, wenn es ein Polynom $p \in K[x]$ mit $p \neq 0$ und $p(a) = 0$ gibt; $a \in L$ heißt „*transzendent über K*“, wenn es nicht algebraisch über K ist (d. h. wenn für $p \in K[x]$ mit $p(a) = 0$ folgt $p = 0$).

Natürlich ist das Polynom in obiger Definition nicht eindeutig, erst das folgende Lemma identifiziert eines davon.

4.3.8. Lemma – Minimalpolynom

Es sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über K ; dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $m_a \in K[x]$ vom kleinsten Grad mit $m_a(a) = 0$. Beweis in [Kow 1982, S. 138].

Da nun die Existenz eines solchen Minimalpolynoms gezeigt ist, kann man folgende Definition treffen:

4.3.9. Definition – Grad

Ist $L : K$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über K , dann heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom $m_a \in K[x]$ kleinsten Grades mit $m_a(a) = 0$ das „Minimalpolynom von a über K “; unter dem „Grad von $a \in L$ “ versteht man den Grad seines Minimalpolynoms $\text{Grad } m_a$.

4.3.10. Satz

Ist $L : K$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über K , dann gilt:

1. $K(a) = \{p(a) \in L \mid p \in K[x] \text{ beliebig}\}$;
2. $\{e, a, a^2, \dots, a^{(\text{Grad } a)-1}\}$ ist eine Basis von $K(a)$ über K ;
3. $[K(a) : K] = \text{Grad } a (= \text{Grad } m_a)$.

Beweis in [Kow 1982, S. 139 f.].

4.3.11. Definition – algebraische Körpererweiterung

Eine Körpererweiterung $L : K$ heißt „algebraisch“, wenn jedes Element $a \in L$ algebraisch über K ist; sie heißt „transzendent“, wenn es zumindest ein transzendentes Element $a \in L$ gibt.

4.3.12. Satz

Jede endliche Körpererweiterung $L : K$ ist algebraisch über K , und es gibt $a_1, a_2, \dots, a_m \in L$ (algebraisch über K) mit $L = K(a_1, a_2, \dots, a_m)$, wobei $m = [L : K]$.

4.3.13. Beweis

Ist $[L : K] = m$ und ist $a \in L$ beliebig, dann sind die $m + 1$ Elemente $\{e, a, a^2, \dots, a^m\} \subseteq L$ linear abhängig (da $\dim_K L = m$ und damit nur höchstens m Elemente linear unabhängig sein können). Also gibt es $k_0, k_1, \dots, k_m \in K$ mit

$$k_0 + k_1 a + \dots + k_m a^m = 0,$$

wobei nicht alle $k_i = 0$ sind. Das heißt es gibt ein Polynom

$$p = k_0 + k_1x + \dots + k_mx^m \in K[x]$$

für das gilt, dass $p \neq 0$ und $p(a) = 0$ ist. Somit ist jedes $a \in L$ ist algebraisch über K . Wegen $[L : K] = m$ gibt es eine Basis $B = \{a_1, \dots, a_m\}$ von L über K , deren Elemente algebraisch über K sind (jedes $a \in L$ ist algebraisch, wie soeben gezeigt wurde). Nach Definition gilt $K(a_1, \dots, a_m) \subseteq L$ (der Durchschnitt von Teilkörpern in L).

Ist umgekehrt $a \in L$, so ist a in der Form $a = k_1a_1 + \dots + k_ma_m$ mit $k_i \in K$ darstellbar (da $a_1, \dots, a_m$ eine Basis bilden), sodass wegen $k_i, a_i \in K(a_1, \dots, a_m)$ auch $a \in K(a_1, \dots, a_m)$ folgt (da es sich bei $K(a_1, \dots, a_m)$ um einen Körper handelt und dadurch die Abgeschlossenheit gilt). Daraus folgt $L = K(a_1, a_2, \dots, a_m)$. [vgl. Kow 1982, S. 141] $\square$

Anschließend möchte ich abermals auf die Konstruierbarkeit von Zahlen zurückkommen, da nun das Fundament für den Beweis dieses Satzes gelegt worden ist. In diesem Satz und dem anschließenden Beweis konzentriere ich mich ausschließlich auf die Konstruierbarkeit von reellen Zahlen, da ja die komplexen Zahlen (vgl. 2.3.4) konstruierbar sind, sobald der Real- sowie der Imaginärteil konstruierbar sind. Jene zwei Zahlen sind aber stets reell weswegen diese Beschränkung auch zulässig ist.

4.3.14. Satz – Konstruierbarkeit von Zahlen

Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es eine endliche Körperkette $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_M \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $L_{j+1} = L_j(\sqrt{\beta_j})$, $\beta_j \in L_j$, $\beta_j \geq 0$, sodass $\alpha \in L_M = \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \dots, \sqrt{\beta_{M-1}})$ erfüllt ist.

4.3.15. Beweis – Konstruierbarkeit von Zahlen

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ konstruierbar, so muss, nach der Definition aus dem ersten Kapitel, die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ nach endlich vielen Konstruktionsschritten erreicht werden. Ist man etwa bei (vgl. 2.3)

$$\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_j, L_j = \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}, \sqrt{\beta_1}, \dots, \sqrt{\beta_{j-1}}),$$

so muss man beim nächsten Schritt eventuell die reelle Zahl

$\sqrt{\beta_j}, \beta_j \in L_j, \beta_j \geq 0$, zu L_j adjungieren:

$$\begin{aligned} L_{j+1} = L_j(\beta_j) &= \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}, \sqrt{\beta_1}, \dots, \sqrt{\beta_{j-1}})(\sqrt{\beta_j}) \\ &= \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \dots, \sqrt{\beta_j}). \end{aligned}$$

Da nach n Schritten $a \in \mathbb{R}$ konstruiert ist, so gilt

$$a \in L_n = \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \dots, \sqrt{\beta_{n-1}}).$$

Somit wäre die eine Richtung gezeigt, für die andere wissen wir, dass es ein

$n \in \mathbb{N}$ und $\beta_1, \dots, \beta_n$, sodass $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$L_{j+1} = L_j(\sqrt{\beta_j}), \beta_j \in L_j, \beta_j \geq 0, \text{ und } a \in L_n.$$

Durch Induktion nach n kann gezeigt werden, dass jedes $\alpha \in L_n$ konstruierbar ist. Für $n = 0$ ist dies sehr schnell ersichtlich, da dann $L_n = L_0 = \mathbb{Q}$ gilt und bereits im ersten Kapitel gezeigt worden ist, dass sämtliche rationale Zahlen konstruierbar sind. Im Induktionsschritt geht man nun also davon aus, dass alle reellen Zahlen aus L_j für $0 \leq j < n$ konstruierbar sind, dann folgt daraus, dass auch jede reelle Zahl der Gestalt $a + b\sqrt{c}$, $a, b, c \in L_j$, $c \geq 0$, konstruierbar ist. Gleichzeitig gilt aber nach Lemma 2.3.1, dass der Körper $L_{j+1} = L_j(\sqrt{\beta_j})$ aus eben genau den Zahlen $a + b\sqrt{\beta_j}$, $a, b, \beta_j \in L_j$, $\beta_j \geq 0$, besteht. Daraus folgt also, dass jedes Element aus L_{j+1} konstruierbar ist und damit auch jedes $a \in L_n$.

[vgl. Kow 1982, S. 146 f.] □

Damit gelangen wir schlussendlich zu den zwei entscheidenden Korollaren.

4.3.16. Korollar

Ist $a \in \mathbb{R}$ konstruierbar, dann liegt a in einem Zwischenkörper L von $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 2^k$.

4.3.17. Beweis

Da $a \in \mathbb{R}$ konstruierbar ist, gibt es, nach dem Satz über konstruierbare Zahlen, eine Körperkette $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n = L \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in L_n = L$ und $L_{i+1} = L_i(\sqrt{\beta_i})$, $\beta_i \geq 0$. Es ist $[L_{i+1} : L_i] = 2$, da $\sqrt{\beta_i} \notin L_i$, $\sqrt{\beta_i} \in L_{i+1}$ algebraisch über L_i (das entsprechende Polynom besitzt die Gestalt $x^2 - \beta_i \in L_i[x]$) und $\{1, \sqrt{\beta_i}\}$ bildet nach Satz 4.3.10 eine Basis von $L_{i+1} : L_i$: das Polynom $x^2 - \beta_i$ ist das Minimalpolynom von $\sqrt{\beta_i}$ und daher muss der Grad von $\sqrt{\beta_i}$ gleich 2 sein. Nach dem Gradsatz folgt daher für ein $k \in \mathbb{N}$:

$$[L : \mathbb{Q}] = [L_n : \mathbb{Q}] = \underbrace{[L_n : L_{n-1}]}_{=2} \cdot \underbrace{[L_{n-1} : \mathbb{Q}]}_{[L_{n-1} : L_{n-2}] \cdot [L_{n-2} : \mathbb{Q}]} = 2 \cdot [L_{n-1} : L_{n-2}] \cdot [L_{n-2} : \mathbb{Q}] = \dots = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{\beta_0}) : \mathbb{Q}]}_2 = 2^k \quad (\beta_0 \in \mathbb{Q}).$$

[vgl. Kow 1982, S. 147]

□

Daraus folgt jedoch sofort, dass jede konstruierbare Zahl algebraisch sein muss, da nach Satz 4.3.12 jede endliche Körpererweiterung algebraisch ist.

4.3.18. Korollar

Transzendente reelle Zahlen über $\mathbb{Q}$ (gerade π , e , ...) sind nicht konstruierbar.

4.3.19. Beweis

Dieser Beweis wird indirekt geführt. Angenommen $a \in \mathbb{R}$ sei transzendent und konstruierbar; dann liegt $a \in \mathbb{R}$ in einem Erweiterungskörper $L : \mathbb{Q}$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 2^k$ (Korollar 4.3.16); d. h. insbesondere, $L : \mathbb{Q}$ ist eine endliche Erweiterung. Nach Satz 4.3.12 gilt jedoch, dass jede endliche Körpererweiterung algebraisch ist. Das bedeutet, dass jedes Element aus L algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und damit auch $a \in L$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $a \in L$ sei transzendent. [vgl. Kow 1982, S. 147]

□

Die in 4.3.7 verwendete Definition von „*algebraisch*“ war eine sehr allgemeine Version, die benötigt wurde, um sie im obigen Beweis über die Nichtkonstruierbarkeit von transzendenten Zahlen zu verwenden. Da im

weiteren Verlauf aber lediglich komplexe Zahlen vorkommen, kann man diese Definition auch konkretisieren. Es ist also eine komplexe Zahl z algebraisch, wenn sie Wurzel (beziehungsweise Lösung) eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, oder gleichbedeutend, Wurzel eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Die erste Formulierung bedeutet: es gibt eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$, derart, dass gilt:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

Für $z \neq 0$ kann dabei auch immer $a_0 \neq 0$ angenommen werden. Die Zahl z heißt „ganz algebraisch“, wenn sie Wurzel eines normierten Polynoms mit ganzen Koeffizienten ist, das heißt, $a_n = 1$ gewählt werden kann und die übrigen Koeffizienten trotzdem ganz bleiben.

Im Folgenden möchte ich ein paar algebraische Zahlen, sowie die entsprechenden Polynome auflisten, um ein anschauliches Beispiel für die obige Definition zu liefern:

Algebraische Zahl z	Entsprechendes Polynom p mit $p(z) = 0$
$\sqrt{2}$	$p(x) = x^2 - 2$
i	$p(x) = x^2 + 1$
$\sqrt[3]{7}$	$p(x) = x^3 - 7$
$\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$	$p(x) = x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 27x^2 + 36x - 23$

Als nächsten Schritt brauchen wir die Definition von symmetrischen sowie von elementarsymmetrischen Polynomen, um anschließend den Hauptsatz über symmetrische Polynome zu verstehen.

4.3.20. Definition – symmetrisch

Ein Polynom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Veränderlichen heißt symmetrisch, wenn es sich bei beliebiger Permutation der Argumente nicht ändert.

Formal bedeutet dies:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n.$$

S_n ist dabei die Permutationsgruppe vom Grad n .

Beispiele für symmetrische Polynome wären:

- $p(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Beispiele für nichtsymmetrische Polynome wären:

- $p(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$
- $p(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$

4.3.21. Definition – elementarsymmetrisch

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ s_3 &= x_1x_2x_3 + \dots + x_k x_r x_s + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{1 \leq k < r < s \leq n} x_k x_r x_s \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

heißen elementarsymmetrische Polynome in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Auf elementarsymmetrische Polynome stößt man, wenn man beispielsweise Produkte von Linearfaktoren ausmultipliziert, da sie dann die Koeffizienten des entstehenden Polynoms bilden. In diesem Fall stellen die Nullstellen des Polynoms die Variablen der einzelnen elementarsymmetrischen Polynome dar. So gilt beispielsweise:

$$(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) = x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n$$

mit

$$s_1 = s_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ usw.}$$

Dass dies auch wirklich stimmt, lässt sich sehr schnell über die Verallgemeinerung der Satzgruppe von Vieta zeigen.

Nun folgt eine der wichtigen Kernaussagen für den anschließenden Beweis von Hilbert: der (Haupt-)Satz über symmetrische Polynome.

4.3.22. Hauptsatz über symmetrische Polynome

Wir betrachten einen Körper K , der $\mathbb{Q}$ enthält. Jedes symmetrische Polynom in den n Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$

$$P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$$

lässt sich eindeutig darstellen als ein Polynom

$$S \in K[s_1, \dots, s_n]$$

wobei $s_1, \dots, s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome über den x_i sind. Hat dabei P nur ganzzahlige Koeffizienten, so gilt das auch für S .

Beweis in [Toe 2010, S. 139-150].

$K[x_1, \dots, x_n]$ wird *noetherscher Ring* genannt, es handelt sich dabei um einen Polynomring in mehreren Variablen über einem Körper K . Unter einem Polynomring versteht man die Menge aller Polynome, dessen Koeffizienten aus dem Ring R , oder wie in unserem Fall aus dem Körper K , stammen sowie von den Variablen $x_1, \dots, x_n$ abhängen. Verknüpft werden sie mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen.

Um den Hauptsatz über symmetrische Polynome etwas verständlicher zu machen, möchte ich zwei kurze Beispiele angeben. Die elementarsymmetrischen Polynome in zwei Variablen sind gegeben durch $s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $s_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Demnach gilt für folgende symmetrische Polynome:

$$\begin{aligned}
P(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 = s_1^2 - 2s_2 = s_1(x_1, x_2)^2 - 2s_2(x_1, x_2) \\
P(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 - x_1^3 x_2^3 + x_2^2 x_1 = s_1 \cdot s_2 - s_2^3 \\
&= s_1(x_1, x_2) \cdot s_2(x_1, x_2) - s_2(x_1, x_2)^3
\end{aligned}$$

4.3.23. Abgeschlossenheit der algebraischen Zahlen bezüglich der Multiplikation

Die algebraischen Zahlen bilden einen Körper, doch möchte ich darauf verzichten, den kompletten Beweis dafür vorzulegen und werde mich nur auf die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation beziehen, da jener Punkt im anschließend Beweis von Hilbert seine Verwendung findet.

a. Aussage

Das Produkt $\alpha \cdot \beta$ von algebraischen Zahlen α, β ist wieder algebraisch.

b. Die Beweisidee

Man betrachtet zunächst zwei algebraischen Zahlen α und β , die beide Lösung eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten oder gleichbedeutend Lösung eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind. Laut dem Fundamentalsatz der Algebra zerfallen die entsprechenden Polynome der algebraischen Zahlen über den komplexen Zahlen in ihre Linearfaktoren:

$$P_\alpha(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

und

$$P_\beta(x) = (x - \beta) \cdot (x - \beta_1) \dots (x - \beta_k).$$

Beide Polynome haben also nur rationale Koeffizienten. Die Koeffizienten des Polynoms P_α kann man auch als die elementarsymmetrischen Polynome $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ auffassen, wobei die Variablen dieser elementarsymmetrischen Polynome die Nullstellen $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind. Demnach entspricht jeder Koeffizient von P_α genau einem elementarsymmetrischen Polynom. Gleiches gilt verständlicherweise auch für das Polynom P_β , dessen Koeffizienten in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1, s_2, \dots, s_{k+1}$ dargestellt werden können (mit den Variablen $\beta, \beta_1, \dots, \beta_k$). Da es sich bei den Koeffizienten von P_α und P_β ausschließlich um rationale Zahlen handelt, gilt dies natürlich auch

für die elementarsymmetrischen Polynome $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_{n+1}$ (sei o.B.d.A. $k \leq n$). Nun definiert man ein neues Polynom in $\mathbb{C}[x]$ durch:

$$T(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} (x - \alpha_i \beta_j)$$

für $\alpha := \alpha_0$ und $\beta := \beta_0$.

Die $\alpha_i \beta_j$ durchlaufen sämtliche Kombinationen der Nullstellen von P_α und P_β .

Die Intention dahinter ist natürlich, dass $T(\alpha\beta) = 0$ gilt.

Nun müsste nur noch gezeigt werden, dass die Koeffizienten von T wiederum alle rational sind. Es ist sofort ersichtlich, dass die Koeffizienten von T nicht von der Reihenfolge der α_i und β_j abhängen und damit als symmetrische Polynome in diesen Zahlen aufgefasst werden können. Laut dem Hauptsatz über symmetrische Polynome lässt sich T also als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1, s_2, \dots, s_m$ über den Nullstellen $\alpha_i \beta_j$ darstellen. Diese elementarsymmetrischen Polynome von T sind ebenfalls ausschließlich rationale Zahlen, um dies zu verdeutlichen möchte ich dies anhand der ersten beiden elementarsymmetrischen Polynomen zeigen:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(\alpha_0 \beta_0, \dots, \alpha_n \beta_k) = \alpha_0 \beta_0 + \dots + \alpha_n \beta_k = \\ &= \underbrace{(\alpha_0 + \dots + \alpha_n)}_{\substack{s_1(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \\ \in \mathbb{Q}}} \cdot \underbrace{(\beta_0 + \dots + \beta_k)}_{\substack{s_1(\beta_0, \dots, \beta_k) \\ \in \mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q} \\ s_2 &= s_2(\alpha_0 \beta_0, \dots, \alpha_n \beta_k) = \alpha_0 \beta_0 \alpha_0 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_{k-1} \alpha_n \beta_k = \\ &= \left(\underbrace{\alpha_0 \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n}_{\substack{s_2(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \\ \in \mathbb{Q}}} + \sum_{j=0}^n \alpha_j^2 \right) \cdot \left(\underbrace{\beta_0 \beta_1 + \dots + \beta_{k-1} \beta_k}_{\substack{s_2(\beta_0, \dots, \beta_k) \\ \in \mathbb{Q}}} + \sum_{j=0}^n \beta_j^2 \right) = \\ &= (s_2(\alpha_0, \dots, \alpha_n) + s_1(\alpha_0, \dots, \alpha_n)^2 - 2 \cdot s_2(\alpha_0, \dots, \alpha_n)) \\ &\quad \cdot (s_2(\beta_0, \dots, \beta_k) + s_1(\beta_0, \dots, \beta_k)^2 - 2 \cdot s_2(\beta_0, \dots, \beta_k)) \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Da die rationalen Zahlen einen Körper bilden gilt die Abgeschlossenheit. Da es sich bei T um ein normiertes Polynom handelt, wurde also gezeigt, dass die Zahl $\alpha\beta$ ebenfalls algebraisch ist. Das Produkt von algebraischen Zahlen ist also wiederum eine algebraische Zahl. [vgl. Toe 2009, S. 196 f.] $\square$

4.3.24. Definition – Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Wichtig für den Beweis der Transzendenz von π ist vor allem folgende Eigenschaft:

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Der Beweis dieser Eigenschaft funktioniert mittels partieller Integration sowie Induktion und ist beispielsweise im zweiten Teil des von Harro Heuser verfassten „Lehrbuches der Analysis“ angeführt [Heu 2008 S. 195 ff.].

4.3.25. Der Unmöglichkeitsbeweis nach Hilbert

a. Die Beweisidee

Wie bereits oben erwähnt, gilt für jede algebraische Zahl, dass sie als Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten aufgefasst werden kann. Die Idee bei diesem Beweis ist es zu zeigen, dass dies für die Kreiszahl π eben nicht zutrifft, sie daher also transzendent sein muss. Der Beweis wird indirekt geführt, das heißt, dass man davon ausgeht, dass π eine Lösung eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Durch die oben ausgearbeiteten Sätze und Definitionen und ein paar Kunstgriffen gelingt es zu zeigen, dass es kein Polynom gibt, das die Zahl π als Nullstelle besitzt.

b. Der Beweis

Dieser Beweis wird also indirekt geführt. Angenommen π ist algebraisch, dann ist aber auch $i\pi$ algebraisch, da es sich bei der imaginären Einheit ebenfalls um eine algebraische Zahl handelt und da das Produkt zweier algebraischen Zahlen, wie in 4.3.24 bereits gezeigt wurde, ebenfalls algebraisch ist. Wir wissen nun dank Euler, dass:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

gilt für $\varphi \in \mathbb{R}$ und daher ist auch:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Somit kommen wir auf die bekannte Formel:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Jetzt betrachtet man, ausgehend von der Annahme, dass $\alpha_1 = i\pi$ algebraisch vom Grad n ist, mit den anderen Nullstellen $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ des entsprechenden Polynomes p_1 vom Grade n mit rationalen Koeffizienten den Ausdruck

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = 0, \quad (1)$$

wobei $N = 2^n - 1$, da es insgesamt 2^n Glieder gibt und das erste davon die Zahl 1 ist.

Wie man selbst nachrechnen kann, sind die β_i gewisse Summen der α_j , es gilt:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \alpha_n$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

Also sind die β_i die Nullstellen der Polynome:

$$p_1 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

$$p_2 = (z - \alpha_1 - \alpha_2)(z - \alpha_1 - \alpha_3) \cdots (z - \alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

$$p_3 = (z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(z - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4) \cdots (z - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

$$\vdots$$

$$p_l(z) = \left(z - \sum_{j=1}^n \alpha_j \right)$$

Betrachtet man nun das normierte Polynom p_1 , dessen Koeffizienten rational sein müssen. Da jene Koeffizienten auch die elementarsymmetrischen Polynome $s_1, \dots, s_n$ über den Nullstellen α_i sind,

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \in \mathbb{Q}$$

$$s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n \in \mathbb{Q}$$

$$s_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_k\alpha_r\alpha_s + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \in \mathbb{Q}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{Q},$$

handelt es sich natürlich auch hierbei um rationale Zahlen.

Betrachtet man nun das Polynom

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_l$$

so sieht man, dass sämtliche Koeffizienten aus Summen und Produkten der α_i bestehen und daher als Polynome in den α_i aufgefasst werden können. Da sich die Koeffizienten auch beim Vertauschen der Nullstellen α_i nicht ändern, sind jene Polynome auch symmetrisch, wodurch man den Hauptsatz der symmetrischen Polynome darauf anwenden kann. Sie lassen sich demnach eindeutig als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1, \dots, s_n$ darstellen. Da es sich bei den $s_1, \dots, s_n$ ausschließlich um rationale Zahlen handelt, muss selbiges natürlich auch für die Koeffizienten des Polynoms P gelten, da es sich dabei lediglich um Produkte und Summen der Koeffizienten von p_1 handelt.

Nun multiplizieren wir dieses Polynom mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen τ der Nenner sämtlicher Koeffizienten und erhalten so ein Polynom

$$Z(z) = \tau \cdot P(z)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten, dessen Grad $N = 2^n - 1$ ist, und welches die β_i als Nullstellen hat.

Einige dieser β_i werden eventuell gleich Null sein und da gilt $e^0 = 1$, ergibt sich:

$$\underbrace{(1 + e^{\alpha_1})}_{=0} (1 + e^{\alpha_2}) \dots (1 + e^{\alpha_n}) = \underbrace{1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_N}}_{\rightarrow 0} =$$

$$\underbrace{a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M}}_{\rightarrow 0} = 0 \quad (2)$$

mit $a \in \mathbb{N}$ und $M \leq N$.

Dieser Umformung entspricht ein Teilen des ganzzahligen Polynomes Z durch den Faktor z^{N-M} , die verbleibenden β_i ungleich Null sind dann die Nullstellen des ganzzahligen Polynomes

$$f(z) = \frac{Z(z)}{z^{N-M}} = bz^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M.$$

Nun gelangen wir zum Kern dieses Beweises indem wir den obigen Ausdruck (2) mit folgendem Integral multiplizieren:

$$\int_0^\infty := \int_0^\infty z^\delta [g(z)]^{\delta+1} e^{-z} dz,$$

wobei δ wiederum eine ganze positive Zahl bedeutet und wo zur Abkürzung $g(z) = b^M f(z)$ gesetzt ist. Dabei ändert sich der Wert von (2) nicht. Dann ergibt sich durch die Multiplikation folgender Ausdruck:

$$a \int_0^\infty + e^{\beta_1} \int_0^\infty + e^{\beta_2} \int_0^\infty + \dots + e^{\beta_M} \int_0^\infty.$$

Dieser Ausdruck wird nun wie folgt zerlegt:

$$P_1 = a \int_0^\infty + e^{\beta_1} \int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} \int_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} \int_{\beta_M}^\infty$$

$$P_2 = e^{\beta_1} \int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} \int_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} \int_0^{\beta_M}$$

Das Integral $\int_0^\infty z^\delta [g(z)]^{\delta+1} e^{-z} dz$ ist wieder gleich einer ganzen, durch $\delta!$ teilbaren Zahl, dies lässt sich mit Hilfe der Gamma-Funktion zeigen. Zuerst muss jedoch der Ausdruck $[g(z)]^{\delta+1}$ aufgelöst werden. Dies geschieht mittels des Multinomialsatzes, der wie folgt lautet:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

wobei der Multinomialkoeffizient definiert ist als:

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_n} := \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \text{ mit } \sum_{i=1}^n k_i = k.$$

Im Folgenden möchte ich lediglich die ersten Glieder des aufgelösten Ausdrucks anschreiben und dann zu einer vereinfachten Darstellung wechseln, um die Übersicht zu bewahren.

$$g(z) = b^M(bz^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M) = b^{M+1}z^M + b^Mb_1z^{M-1} + \dots + b^Mb_M$$

und damit ist

$$\begin{aligned} [g(z)]^{\delta+1} &= \frac{(\delta+1)!}{(\delta+1)!0!0!\dots0!} \\ &\cdot [(b^{M+1}z^M)^{\delta+1} + (b^Mb_1z^{M-1})^{\delta+1} + \dots + (b^Mb_M)^{\delta+1}] \\ &+ \frac{(\delta+1)!}{\delta!1!0!\dots0!} \\ &\cdot \{[(b^{M+1}z^M)^\delta \cdot (b^Mb_1z^{M-1}) + (b^{M+1}z^M)^\delta \cdot (b^Mb_2z^{M-2}) + \dots \\ &+ (b^{M+1}z^M)^\delta \cdot (b^Mb_M)] \\ &+ [(b^Mb_1z^{M-1})^\delta \cdot (b^{M+1}z^M) + (b^Mb_1z^{M-1})^\delta \cdot (b^Mb_2z^{M-2}) + \dots \\ &+ (b^Mb_1z^{M-1})^\delta \cdot (b^Mb_M)] + \dots\} + \dots \end{aligned}$$

Wenn man nun jeden einzelnen der oben angegebenen Terme mit $z^\delta e^{-z}$ multipliziert, erhält man Folgendes:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty &= \int_0^\infty z^\delta [g(z)]^{\delta+1} e^{-z} dz = \\ &= \int_0^\infty (b^{(M+1)(\delta+1)} z^{\delta+M(\delta+1)} e^{-z} + \dots + (b^Mb_M)^{\delta+1} z^\delta e^{-z}) dz. \end{aligned}$$

Nun ist es uns möglich, dieses Integral auf die einzelnen Summanden aufzuteilen, um uns dann jeweils die Eigenschaft der Gammafunktion (Abschnitt 4.3.25) zu eigen zu machen. Damit erhalten wir:

$$b^{(M+1)(\delta+1)}(\delta+M(\delta+1))! + \dots + (b^Mb_M)^{\delta+1}\delta!.$$

Damit wurde gezeigt, dass das Integral $\int_0^\infty$ gleich einer ganzen durch $\delta!$ teilbaren Zahl ist. Des Weiteren gilt zusätzlich:

$$\frac{1}{\delta!} \int_0^\infty \equiv b^{\delta M+M} b_M^{\delta+1} \quad (\delta + 1),$$

da ja bis auf das absolute Glied jeder Term von $[g(z)]^{\delta+1}$ mindestens ein z besitzt und anschließend mit z^δ multipliziert wird. Dadurch ergibt das Integral eine Zahl, die $(\delta + 1)!$ enthält.

Somit gilt für das erste Integral der Summe P_1 :

$$\frac{1}{\delta!} a \int_0^\infty \equiv a b^{\delta M+M} b_M^{\delta+1} \quad (\delta + 1).$$

Nun betrachten wir noch die restlichen Integrale der Summe P_1 und verwenden dabei folgende Substitution: $z = z' + \beta_i$.

$$e^{\beta_i} \int_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (z' + \beta_i)^\delta [g(z' + \beta_i)]^{\delta+1} e^{-z'} dz' = (\delta + 1)! \cdot G(\beta_i).$$

Um dies nachvollziehen zu können, muss man sich vorerst den Ausdruck

$$g(z' + \beta_i) = b^{M+1}(z' + \beta_i)^M + b^M b_1(z' + \beta_i)^{M-1} + \dots + b^M b_M$$

genauer ansehen. Wie bereits oben erwähnt, stellen die β_i die Nullstellen des Polynoms dar, somit gilt also $g(\beta_i) = 0$. Daher muss auch gelten, dass der Ausdruck $g(z' + \beta_i)$ wieder Null ergeben muss, wenn man z' Null setzt. Dadurch kann das Polynom $g(z' + \beta_i)$ kein absolutes Glied besitzen, das heißt jeder Term muss mindestens ein z' beinhalten. Durch das Potenzieren mit der Zahl $\delta + 1$ ist somit der kleinste vorkommende Grad von z' gleich $\delta + 1$. Dies bedeutet aber, dass wenn die einzelnen Terme mittels der Gammafunktion aufgelöst werden, jeder Term mindestens den Faktor $(\delta + 1)!$ enthält. Jenen kann man nun herausheben und als Rest erhält man ein Polynom G in β_i , über das wir wissen, dass es ein ganzzahliges Polynom von β_i ist.

Hieraus folgt, dass der Ausdruck P_1 gleich einer ganzen durch $\delta!$ teilbaren Zahl wird. Es gilt mit dem Modul $\delta + 1$ die Kongruenz

$$\frac{P_1}{\delta!} \equiv a b^{\delta M+M} b_M^{\delta+1} \quad (\delta + 1).$$

Nun widmen wir uns der zweiten Summe und benützen hierfür die Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale, die wie folgt lautet:

$$\left| \int_{\phi} f(z) dz \right| \leq L \cdot \max_{z \in \phi} |f(z)|.$$

Es bezeichnet ϕ einen Weg der Länge L . Für das Integral

$$\int_0^{\beta_i} z^{\delta} [g(z)]^{\delta+1} e^{-z} dz = \int_0^{\beta_i} [z \cdot g(z)]^{\delta} g(z) \cdot e^{-z} dz$$

bedeutet dies nun, dass die Länge des geradlinigen Weges von 0 nach β_i gleich dem Betrag der β_i ist. Um das Maximum der Funktionswerte auszurechnen, wird die Funktion aufgeteilt in $z \cdot g(z)$ und $g(z) \cdot e^{-z}$. Daraus ergeben sich folgende zwei Abschätzungen:

$$|z \cdot g(z)| \leq K := \max_{z \in \bigcup_{i=1}^M [0, \beta_i]} |z \cdot g(z)|$$

$$|g(z) \cdot e^{-z}| \leq k := \max_{z \in \bigcup_{i=1}^M [0, \beta_i]} |g(z) \cdot e^{-z}|$$

Stetige Funktionen sind beschränkt auf kompakten Intervallen.

Für die einzelnen Integrale erhält man dann diese Abschätzung:

$$\left| \int_0^{\beta_i} \right| \leq |\beta_i| \cdot k \cdot K^{\delta}.$$

Da die zwei Abschätzungen k und K so gewählt worden sind, dass sie die Maxima für sämtliche β_i darstellen, können wir den Ausdruck P_2 wie folgt abschätzen:

$$|P_2| < (|\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}|) \cdot k \cdot K^{\delta}.$$

Nun sei δ so gewählt, dass $(\delta + 1)$ eine Primzahl größer als a, b, b_M ist und gleichzeitig folgende Ungleichung erfüllt:

$$\frac{(|\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}|) \cdot k \cdot K^{\delta}}{\delta!} < 1.$$

Aufgrund der Wahl von δ ist der Ausdruck $\frac{P_1}{\delta!}$ also eine nicht durch $(\delta+1)$ teilbare und daher notwendig von Null verschiedene ganze Zahl. Da wie bereits gezeigt der Ausdruck $\frac{P_2}{\delta!}$ eine Zahl ist, dessen Betrag sicher kleiner ist als Eins, folgt daraus, dass die Gleichung

$$\frac{P_1}{\delta!} + \frac{P_2}{\delta!} = \frac{1}{\delta!} (P_1 + P_2) = 0$$

unmöglich ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass die Kreiszahl π algebraisch ist, also die Lösung eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist, da wir ja angenommen haben, dass die Gleichung (1) bzw. (2) gilt. [vgl. Hil 1893, S. 216-219] $\square$

4.4. Näherungslösungen

Wie bereits in der Einleitung des Kapitels angedeutet, ist es diesmal sehr schwer, alternative Lösungen zu jenem Problem zu finden, da die Quadratur des Kreises nicht nur nicht mit den vorgegebenen Konstruktionsvorschriften unmöglich ist, sondern auch nicht mit Hilfe von algebraischen Kurven lösbar ist. Deswegen habe ich mich vor allem auf die Näherungskonstruktionen zur Berechnung der Kreiszahl π konzentriert. Anfangen möchte ich dabei mit der Abschätzung von Archimedes.

4.4.1. Abschätzung von Archimedes

Es ist eine der ältesten und wohl auch die bekannteste Abschätzung für die Kreiszahl π und sie geht zurück auf einen der bekanntesten Mathematiker der Antike, Archimedes, der folgende Grenzen für die Zahl π entdeckte:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (\text{vgl. 4.2})$$

Die Idee hinter dieser Abschätzung ist eine sehr naheliegende. Wenn man eine Reihe von Polygonen bildet, die dem Kreis eingeschrieben werden, nähert sich der Umfang der eingeschriebenen Polygone dem Umfang des Kreises an. Da man jedoch konstruktiv nicht den Grenzwert dieser Polygone bilden kann, bleibt die Zahl stets kleiner als der echte Wert von π . Wenn man

sich nun dem Kreisumfang auch von außen mit umschriebenen Polygonen nähert, bekommt man insgesamt eine immer genauere untere und obere Schranke für die Kreiszahl.

Im folgenden Abschnitt möchte ich nun skizzieren, wie Archimedes seine zwei Abschätzungen für die Kreiszahl π berechnet hat. Ich werde mich dabei auf die obere Schranke konzentrieren und für die untere nur das Endergebnis präsentieren, da der Rechenweg sehr ähnlich verläuft.

Der Ausgangspunkt ist ein Kreis mit beliebigem Radius r , dem ein regelmäßiges Sechseck umschrieben ist (Abb. 54). Die Strecke AC ist gleich dem Radius der Kreises, wobei der Punkt A den Mittelpunkt des Kreises darstellt und C der Berührungspunkt der Sechseckseite $S_6 = BB'$ an den Kreis ist.

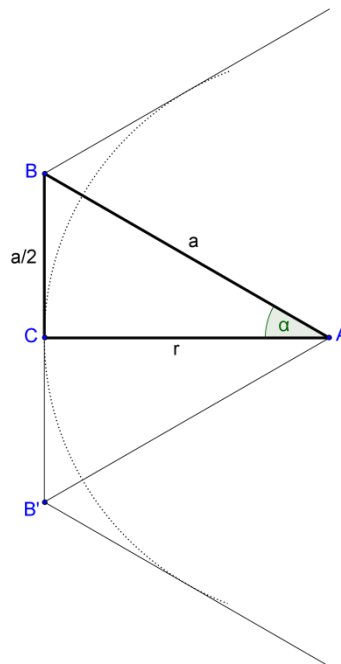


Abbildung 54

Da das regelmäßige Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht, gilt: $BB' = AB = a$. Da es sich bei dem Dreieck $\triangle ABB'$ also um ein gleichseitiges Dreieck handelt, ist die Strecke BC die Hälfte der Strecke BB' und damit: $BC = \frac{a}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir nun für den Radius r :

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Aus der Gleichung $r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ erhalten wir nun durch Umformung folgendes Ergebnis für die Strecke AB : $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit:

$$\frac{a}{2r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bzw. } \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Daraus leitet sich folgendes Verhältnis ab:

$$r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1.$$

An jener Stelle benützt Archimedes für die Zahl $\sqrt{3}$ eine Abschätzung, die etwas kleiner ist als der eigentliche Wert dieser irrationalen Zahl und zwar den Bruch $\frac{265}{153}$. Wie genau Archimedes auf jene Abschätzung gekommen ist, ist heute leider nicht mehr nachvollziehbar, der Fakt, dass jene Abschätzung aber geringfügig kleiner ist als die Zahl $\sqrt{3}$, dürfte bewusst gewählt sein, da es einen der Kernpunkte der Berechnung darstellt. Somit erhält Archimedes folgende Ungleichung:

$$r : \frac{a}{2} > 265 : 153.$$

Aus der Konstruktion wissen wir, dass $r : \frac{a}{2} = AC : BC$ gilt. Damit ist auch

$$AC : BC > 265 : 153.$$

Insgesamt ergibt sich folgende (Un-)Gleichungskette ($AB = 2 \cdot BC$, Abb. 54):

$$(r + a) : \frac{a}{2} = (AC + AB) : BC > (265 + 2 \cdot 153) : 153 > 571 : 153.$$

Der nächste Schritt des Approximation bezieht sich auf den sogenannten „Satz über die Winkelhalbierende“.

Exkurs: Satz über Winkelhalbierende

Jede Winkelhalbierende (Winkelsymmetrale) eines Dreiecks teilt eine Seite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

Ich werde auf einen allgemeinen Beweis dieses Satzes verzichten und mich auf den uns vorliegenden Fall konzentrieren. Aufgrund des Satzes gilt nun also (Abb. 55):

$$BD : DC = AB : AC,$$

dabei ist AD die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$. Die Strecke DC entspricht der halben Seite eines umschriebenen Zwölfecks (Abb. 55).

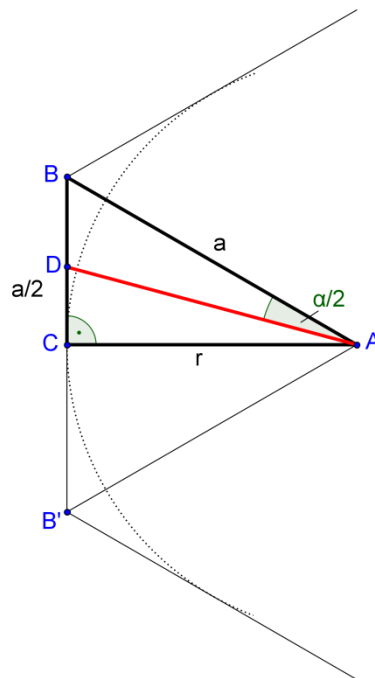


Abbildung 55

Dass jene Verhältnisse wirklich gleich groß sind, kann man wie folgt zeigen. Zuerst betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $\triangle ADC$:

$$\frac{AC}{CD} = \tan \sphericalangle CDA .$$

Wendet man nun den Sinussatz auf das Dreieck $\triangle ABD$ an, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{AB}{\sin \sphericalangle ADB} = \frac{DB}{\sin \sphericalangle BAD} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{\sin \sphericalangle ADB}{\sin \sphericalangle BAD} .$$

Es gilt:

$$\frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD} = \tan \angle CDA,$$

weil

$$\tan \angle CDA = \frac{\sin \angle CDA}{\cos \angle CDA} \stackrel{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha}{=} \frac{\sin \angle ADB}{\cos \angle CDA}$$

und

$$\cos \angle CDA = \sin \angle CAD = \sin \angle BAD.$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD : DC = AB : AC.$$

Im nächsten Schritt kommt das Gesetz der korrespondierenden Addition zu tragen. Jenes besagt, dass wenn für vier Größen a, b, c, d das Verhältnis $a : b = c : d$ zutrifft, dann ist auch:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \text{ weil } \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ gilt.}$$

Daraus folgt für die obige Gleichung:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB+AC}{AC} = \frac{BD+DC}{DC}.$$

Durch elementare Umformung und einer Abschätzung von weiter oben erhält man schließlich:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{BD+DC} = \frac{AB+AC}{BC} > \frac{571}{153}.$$

Also:

$$AC : DC > 571 : 153$$

und man erhält durch Quadrieren:

$$AC^2 : DC^2 > 571^2 : 153^2,$$

bzw.

$$(AC^2 + DC^2) : DC^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2.$$

Da es sich bei dem Dreieck $\triangle ACD$ um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt, kann man hier den Satz von Pythagoras anwenden, der in diesem Fall besagt, dass $AC^2 + DC^2 = AD^2$ gilt.

Eingesetzt in die obige Ungleichung erhält man nun:

$$AD^2 : DC^2 > 349450 : 153^2.$$

Hier verwendet Archimedes abermals eine verblüffend exakte Approximation für die Wurzel der Zahl 349450, wobei auch diesmal die Abschätzung etwas kleiner ist als die exakte Zahl, um die Ungleichung nicht zu verfälschen:

$$AD : DC > 591\frac{1}{8} : 153.$$

Mit der Abschätzung vor dem Quadrieren ergibt sich

$$(AC + AD) : DC > \left(571 + 591\frac{1}{8}\right) : 153 = 1162\frac{1}{8} : 153.$$

Nun bildet man erneut eine Winkelhalbierende, diesmal durch den Winkel $\angle DAC$ und erhält als Schnittpunkt mit der Strecke BB' den Punkt E (Abb. 56).

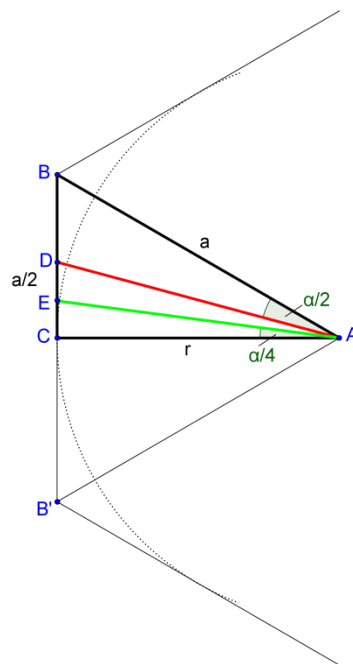


Abbildung 56

Wendet man nun erneut den Satz der Winkelhalbierenden an, erhält man folgendes Verhältnis:

$$AD : AC = ED : EC.$$

Durch das Gesetz der korrespondierenden Addition erhält man:

$$(AD + AC) : AC = (ED + EC) : EC = DC : EC.$$

Daraus folgt durch elementare Umformung

$$(AD + AC) : DC = AC : EC.$$

In Verbindung mit der zuletzt aufgestellten Ungleichung ergibt das:

$$AC : EC > 1162\frac{1}{8} : 153$$

Da es sich beim Winkel $\angle EAC$ um ein Achtel des Winkels $\angle B'AB$ handelt, ist die Strecke EC genauso lang wie die Hälfte der Seite eines umschriebenen regelmäßigen 24-seitigen Polygons S_{24} . Daraus folgt:

$$r : \frac{1}{2}S_{24} > 1162\frac{1}{8} : 153.$$

Daraus leitet sich für den Umfang des regelmäßigen 24-seitigen Polygons folgendes Verhältnis ab:

$$r : U_{24} > 1162\frac{1}{8} : (153 \cdot 48) = 1162\frac{1}{8} : 7344.$$

Archimedes rechnet nun mit dieser Methode weiter und erhält schlussendlich folgendes Verhältnis für den Umfang des umschriebenen regelmäßigen 96-Ecks:

$$r : U_{96} > 4673\frac{1}{2} : 29376 \text{ bzw. } U_{96} : r < 29376 : 4673\frac{1}{2}.$$

Da der Umfang des umschriebenen Polygons stets größer sein muss als der Umfang des Kreises, gilt also: $2\pi r < U_{96}$ und daher:

$$\pi = 2\pi r : 2r < 29376 : \left(2 \cdot 4673\frac{1}{2}\right) = 14688 : 4673\frac{1}{2} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Durch ein sehr ähnliches Vorgehen, nur eben mit eingeschriebenen Vielecken anstatt umschriebenen, erhält Archimedes schlussendlich auch die untere Abschätzung durch:

$$U_{96} : 2r > 6336 : 2017 \frac{1}{4}.$$

Daraus ergibt sich analog zu oben:

$$\pi = 2\pi r : 2r > 6336 : 2017 \frac{1}{4} > 3 \frac{10}{71}.$$

Und somit erhält man schlussendlich die von Archimedes aufgestellte Abschätzung für die Kreiszahl π :

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

[vgl. Beu 1951, S. 15-19].

4.4.2. Lösung mittels Quadratrix

Diese konstruktive Lösung baut auf einer Kurve auf, die nicht zur Gänze durch Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Der Beweis geht ungefähr auf das Jahr 350 v. Chr. zurück, auf einen griechischen Mathematiker namens Deinostratos. Dieser wiederum verwendet in seinem Beweis eine noch ältere Idee, die von Hippias definierte Quadratrix. Bevor ich aber den Beweis hier darlegen möchte, werde ich die Quadratrix definieren.

4.4.2.1. Definition der Quadratrix

Die Quadratrix lässt sich auf einem quadratischen Bereich definieren. Man stelle sich also vor, man habe ein Quadrat (Abb. 57).

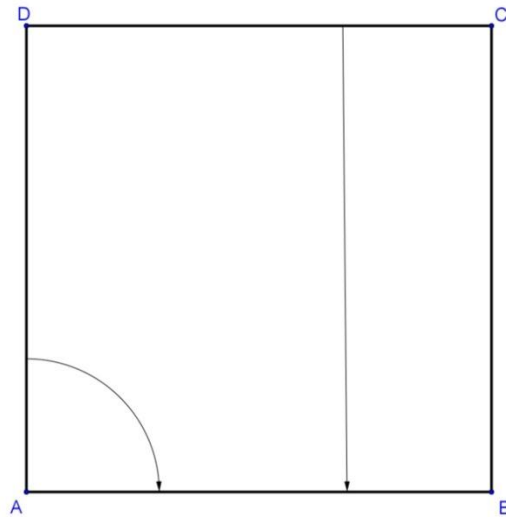


Abbildung 57

Die Quadratrix entsteht, indem man die Seite CD sowie die Seite AD auf die Seite AB „wandern“ lässt. Dies soll gleichförmig sowie gleichzeitig geschehen (Abb. 57). Die einzelnen Schnittpunkte der zwei sich bewegenden Seiten bilden die einzelnen Punkte der Quadratrix (Abb. 58).

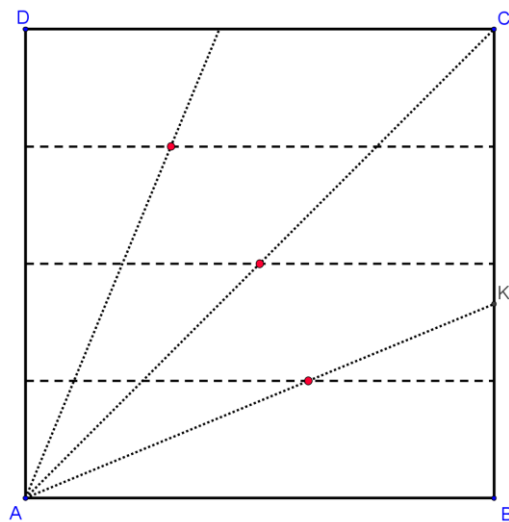


Abbildung 58

Wenn man nun die einzelnen Schnittpunkte verbindet, erhält man eine Kurve – die Quadratrix (Abb. 59).

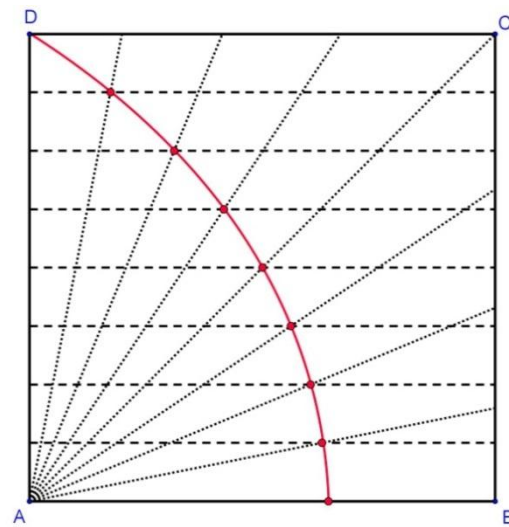


Abbildung 59

4.4.2.2. Die Behauptung

Die Behauptung, die es nun zu beweisen gilt, lautet, dass das Verhältnis der Bogenlänge $\widehat{BD}$ des Viertelkreises, dessen Mittelpunkt der Eckpunkt A und der Radius die Strecke AB ist, zur Strecke AB gleich dem Verhältnis der Strecke AB zur Strecke AQ, also vom Punkt A bis zum Schnittpunkt der Quadratrix Q mit der Seite AB, ist. Formal bedeutet das: $\widehat{BD} : AB = AB : AQ$ (Abb. 60).

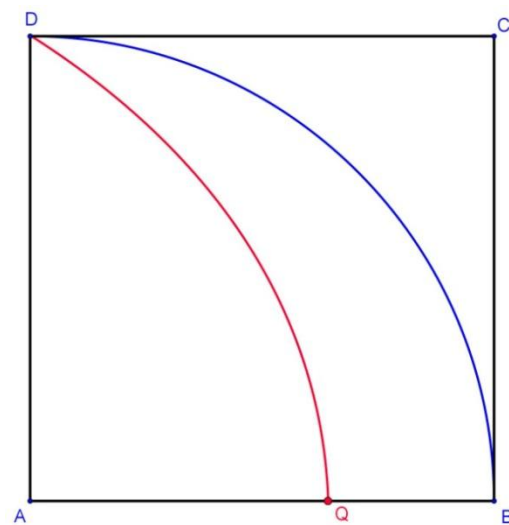


Abbildung 60

4.4.2.3. Beweis der Behauptung

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, es gilt:

$\widehat{BD} : AB = AB : AK$ mit $AQ \neq AK$. Dann gibt es zwei mögliche Fälle:

- $AK > AQ$
- $AK < AQ$

1. Fall: $AK > AQ$

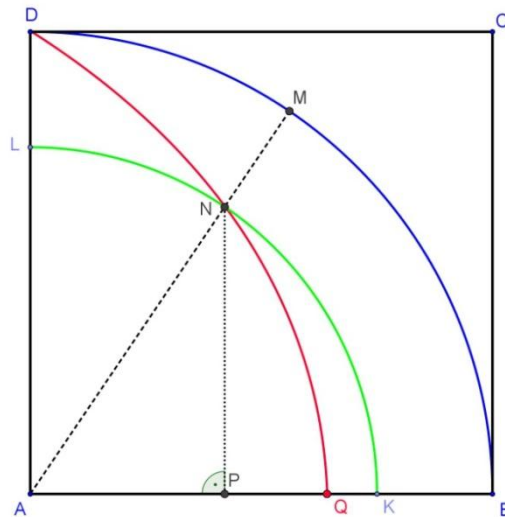


Abbildung 61

Für die Widerlegung dieser Behauptung muss man Abbildung 61 betrachten. Es handelt sich um ein Quadrat, dem ein Viertelkreis eingeschrieben ist, dessen Radius gleich der Strecke AB ist. Des Weiteren ist in roter Farbe die Quadratrix eingezeichnet, sowie in grün ein kleinerer konzentrischer Viertelkreis, der entweder, wie im ersten Fall, einen Radius hat, der größer ist als die Strecke AQ oder, wie im zweiten Fall, kleiner ist als die Strecke AQ . Zu guter Letzt markiert man den Schnittpunkt N der Quadratrix mit dem kleineren Viertelkreis und zieht eine Gerade vom Punkt A aus durch diesen Schnittpunkt N . Abschließend benennen wir noch den Schnittpunkt dieser Gerade mit dem größeren Viertelkreis mit M . Neben der ursprünglichen Behauptung, die es zu widerlegen gilt, ergibt sich daraus eine zweite Gleichung, da die Radien der Viertelkreise im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie die entsprechenden Bogenlängen:

$$\text{I: } AB : AK = \widehat{BD} : \widehat{KL}$$

$$\text{II: } \widehat{BD} : AB = AB : AK$$

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir: $AB = \widehat{KL}$.

Aus logischer Überlegung und in Anbetracht der Definition der Quadratrix folgt ebenfalls:

$$PN : AD = \widehat{KN} : \widehat{KL} = \widehat{MB} : \widehat{DB}.$$

Da der erste Teil der Gleichung eventuell nicht sofort ersichtlich ist, möchte ich ihn etwas genauer erläutern. Aus der Definition der Kreisbogenlänge weiß man, dass folgende Gleichheit gilt:

$$\widehat{KL} : \widehat{KN} = \frac{r\pi 90}{180} : \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{r\pi}{2} : \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{90}{\alpha}.$$

Aus der Definition der Quadratrix wissen wir, dass in den Punkten der Quadratrix die Verhältnisse der Winkel immer gleich der Verhältnisse der Normalabstände zu der Seite AB sein muss. Daraus folgt:

$$\frac{90}{\alpha} = AD : PN = \widehat{KL} : \widehat{KN}.$$

Da das Verhältnis von Kreisbögen des selben Kreises stets unabhängig vom Radius ist, gilt daher schlussendlich:

$$PN : AD = \widehat{KN} : \widehat{KL} = \widehat{MB} : \widehat{DB}.$$

Daraus folgt: $AD = AB = \widehat{KL} \Rightarrow PN : \widehat{KL} = \widehat{KN} : \widehat{KL} \Rightarrow PN = \widehat{KN} \rightarrow \text{WID}$

Dies führt zu einem Widerspruch, da die Strecke PN niemals gleich groß sein kann wie die Bogenlänge $\widehat{KN}$.

2. Fall: $AK < AQ$

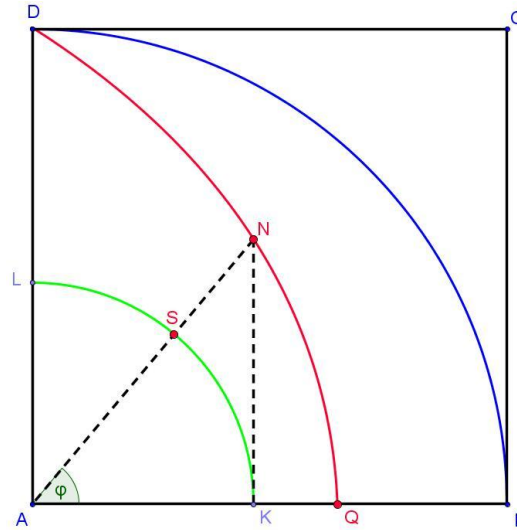


Abbildung 62

Die Konstruktion ist sehr ähnlich zum ersten Fall, nur dass diesmal der kleinere Viertelkreis die Quadratrix nicht schneidet, weil die Länge AK kleiner ist als die Länge AQ (Abb. 62). Im Punkt K legt man dann eine senkrechte Gerade auf die Seite AB und nennt den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Quadratrix N . Anschließend verbindet man die Punkte A und N und der Schnittpunkt des Viertelkreises mit dieser Verbindungsgerade wird S genannt. Fast analog zu der obigen Beweisführung gilt dann:

$$\text{I: } \widehat{BD} : AB = \widehat{KL} : AK$$

$$\text{II: } \widehat{BD} : AB = AB : AK$$

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir: $AB = \widehat{KL}$.

Aus logischer Überlegung und in Anbetracht der Definition der Quadratrix folgt ebenfalls:

$$\widehat{KL} : \widehat{KS} = AD : KN.$$

Daraus folgt: $AD = AB = \widehat{KL} \Rightarrow \widehat{KL} : \widehat{KS} = \widehat{KL} : KN \Rightarrow KN = \widehat{KS}$.

Nun muss nur noch gezeigt werden, dass der Abstand der Punkte K und N nicht gleich groß sein kann wie die Bogenlänge vom Punkt K zum Punkt S . Der Winkel φ ist aufgrund der Konstruktion begrenzt auf folgendes Intervall: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Nun gilt aber für eben jenes Intervall Folgendes: $0 < \varphi < \tan(\varphi)$.

Dies ist gleichbedeutend mit der Behauptung:

$$\tan x > x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan x - x > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zu zeigen ist also, dass die Funktion $f(x) := \tan x - x$ im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ stets positiv ist. Dies gilt, da

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Da aber gilt, dass $f(0) = 0$ und wie eben gezeigt wurde $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, folgt daraus, dass $f(x) > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und damit dass $\tan x > x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aus der Definition des Tangens folgt: $\tan(\varphi) = \frac{KN}{AK} \Rightarrow KN = \tan(\varphi) \cdot AK$.

Aus der Definition der Bogenlänge folgt: $\widehat{KS} = AK \cdot \varphi$.

Wenn nun die Bogenlänge $\widehat{KS}$ gleich der Länge KN sein soll, dann müsste φ gleich dem $\tan(\varphi)$ sein und das ist ein Widerspruch: siehe oben!

Somit wissen wir, dass die ursprüngliche Behauptung gelten muss:

$$\widehat{BD} : AB = AB : AQ \quad \square$$

Nun bleibt natürlich noch zu zeigen, wie man aus der soeben gezeigten Eigenschaft schlussendlich zu einem einem Kreis flächengleichen Quadrat gelangt.

4.4.2.4. Der Weg zum Quadrat

Aus 4.4.2.2 wissen wir: $\widehat{BD} : AB = AB : AQ \Rightarrow \widehat{BD} \cdot AQ = AB^2$.

Wenn die Größen AQ und AB bekannt sind, kann man sich mit Hilfe des Höhensatzes die Bogenlänge $\widehat{BD}$ ausrechnen (Abb. 63).

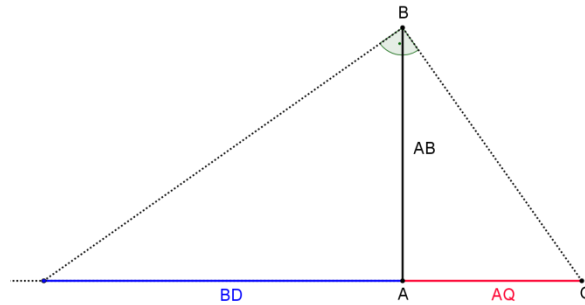


Abbildung 63

Dafür zeichnet man die Länge AQ und verlängert diese weiter nach links. In A zeichnet man nun eine Normale auf AQ mit der Länge von AB . Anschließend verbindet man Q mit B und zeichnet dann auf diese Verbindungslinie wieder eine Normale. Dort, wo die Normale die Verlängerung der Strecke AQ schneidet, erhält man die Länge $\widehat{BD}$ (Abb. 63).

Nun wissen wir, dass der Umfang des Kreises der Strecke $4 \cdot \widehat{BD}$ entspricht, und konstruieren deswegen folgendes rechtwinkeliges Dreieck (Abb. 64).

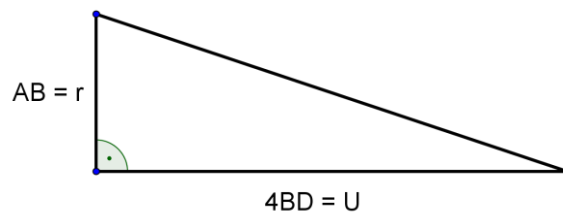


Abbildung 64

Dieses rechtwinkelige Dreieck ist flächengleich mit dem Kreis, dessen Radius der Länge AB entspricht:

$$A_{\Delta} = \frac{U \cdot r}{2} = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi = A_{\circ}.$$

Nun müssen wir dieses flächengleiche rechtwinkelige Dreieck noch in ein flächengleiches Quadrat überführen. Das flächengleiche Rechteck erhalten wir, indem wir die eine Seite des Rechtecks mit der Basisseite des Dreiecks und die andere Seite des Rechtecks mit der Hälfte der Höhe des Dreiecks gleichsetzen (Abb. 65).

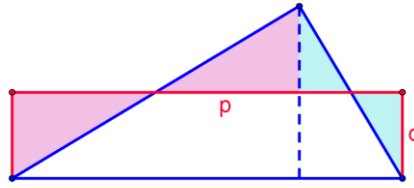


Abbildung 65

Im letzten Schritt benutzen wir abermals den Höhensatz, um die Länge der Quadratseite zu konstruieren.

Aus dem Höhensatz wissen wir: $p \cdot q = h^2 \Rightarrow h$ ist die gesuchte Seitenlänge (Abb. 66).

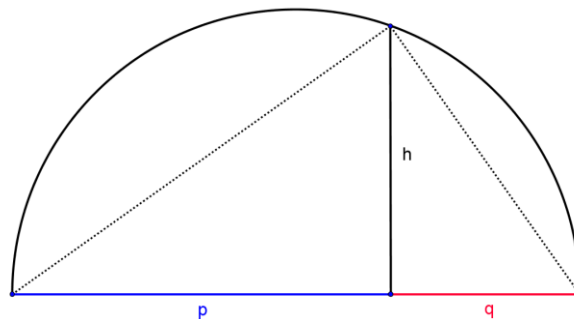


Abbildung 66

[vgl. Kow 2010]

□

4.4.3. Näherungslösung von Adam Kochansky

Folgende Näherungslösung geht auf Adam Kochansky zurück, der 1685 Mathematiker des polnischen Königs Johann III. Sobieski war. Es handelt sich hierbei um eine Näherungskonstruktion der Zahl π .

4.4.3.1. Die Konstruktion

Zuerst konstruiert man einen Kreis, dessen Radius die Länge 1 besitzt und legt an einem beliebigen Punkt B eine Tangente. Nun zeichnet man von B aus durch den Mittelpunkt den Durchmesser ein und markiert den obigen Punkt mit A . Anschließend trägt man die Strecke 1 vom Punkt B aus entlang des Kreises ab und markiert diesen Punkt mit F (Abb. 67).

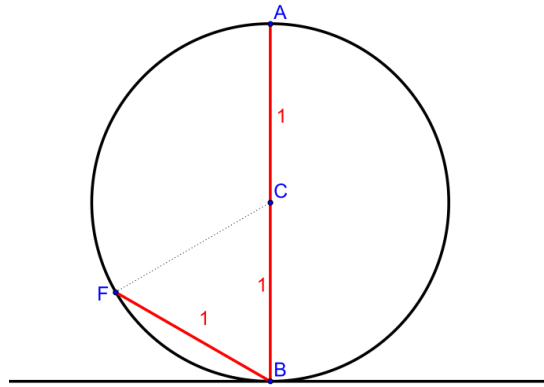


Abbildung 67

Im nächsten Schritt bildet man nun auf den Mittelpunkt der Strecke FB eine lotrechte Gerade und schneidet sie mit der Tangente, um den Schnittpunkt D zu erhalten (Abb. 68).

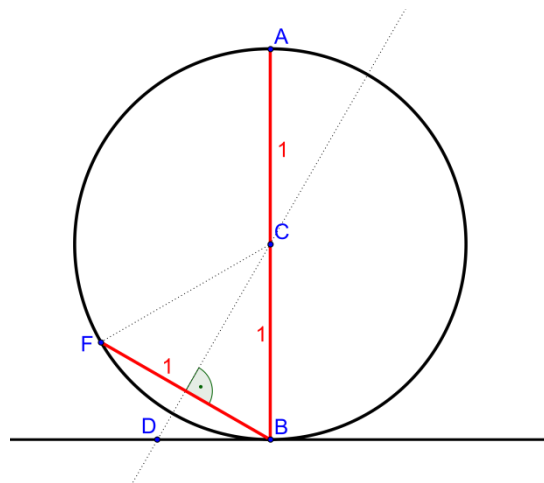


Abbildung 68

Im letzten Schritt der Konstruktion legt man eine Strecke von D aus über den Punkt B , deren Länge gleich dreimal der Länge der Strecke BC ist. Den Endpunkt dieser neuen Strecke bezeichnet man mit E und verbindet dann den Punkt E mit dem Punkt A (Abb. 69).

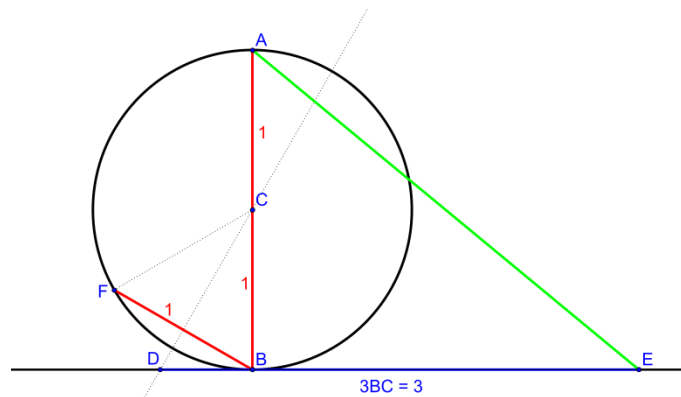


Abbildung 69

4.4.3.2. Die Behauptung

$$AE = \sqrt{\frac{40}{3} - 2 \cdot \sqrt{3}} = 3,141533 \dots \approx \pi.$$

4.4.3.3. Der Beweis

Aufgrund der Voraussetzung wissen wir: $AC = CB = BF = 1$. Da aber auch $FC = CB = BF = 1$ gilt, ist das Dreieck $\triangle BFC$ ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a = 1$. Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, weiß man einerseits, dass jeder der drei Winkel 60° groß sein muss und andererseits, dass die Streckensymmetrale der Strecke FB gleich der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle FCB$ ist. Dadurch gilt aber, dass der Winkel $\angle DCB = 30^\circ$ ist. Das Dreieck $\triangle DBC$ ist ein rechtwinkeliges Dreieck und es folgt:

$$\tan 30^\circ = \frac{DB}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DB = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mit dem Satz des Pythagoras sehen wir:

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + BE^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 + 9 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{40}{3} - \sqrt{\frac{36}{3}} = \\ &= \frac{40}{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = 13.\dot{3} - 3,4641016 \dots = 9,8692317 \dots \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich für AE folgender Wert:

$$AE = \sqrt{9,8692317 \dots} = 3,141533 \dots$$

[vgl. Beu 1951, S. 46 f.]

□

5. Fazit

Zu Beginn meiner Arbeit habe ich mir die Frage gestellt, warum die drei klassischen Konstruktionsprobleme solch eine Anziehungskraft auf unterschiedlichste Menschen zu den verschiedensten Zeiten hatten. Es gibt und gab für die Mathematik weitaus größere Probleme als diese drei, und trotzdem haben sich bis heute auch sehr namhafte Mathematiker aber auch Amateure mit diesen Problemen auseinandergesetzt. Ich denke, es gibt zwei sehr naheliegende Erklärungen für dieses Phänomen.

Einerseits ist es wohl die vermeintliche Simplizität dieser Probleme. So ist es sehr einfach, einem mathematischen Laien zu erklären, was die Aufgabe bedeutet. Dies lässt natürlich so manchen die falsche Schlussfolgerung ziehen, dass auch die Lösung ähnlich einfach aussehen muss und das wiederum spornt natürlich auch mathematisch eher unerfahrene Menschen dazu an, sich mit dem Thema auseinanderzusetzen.

Die zweite große Ausstrahlung, die diese Probleme auf den mathematischen Laien haben, ist die Anzahl von großen und bekannten MathematikerInnen, die sich wie schon erwähnt ebenfalls mit dem Thema auseinandergesetzt haben. Wie ich aus Interviews entnehmen konnte, stellte dies vor allem für Laien einen wichtigen Beweggrund dar, da sie die Hoffnung hatten, trotz ihrer beschränkten mathematischen Fähigkeiten auf eine elementare Lösung zu stoßen, die jene großen MathematikerInnen bisher übersehen hatten. Interessant ist dabei auch, dass sich jener Schlag von HobbymathematikerInnen bis in die heutige Zeit gehalten hat, und das, obwohl die Probleme nun schon seit über einem Jahrhundert als offiziell unlösbar gelten.

Den meiner Meinung nach falschen Schluss, den man aus dieser Überlegung ziehen könnte, wäre es, die Beschäftigung mit solchen Fragestellungen als reine Spielerei abzuwerten. Dem möchte ich vehement widersprechen, nicht zuletzt, da jene drei Fragestellungen historisch mit so manchen mathematischen Errungenschaften in Verbindung gebracht werden können.

An dieser Stelle sei beispielsweise auf den Griechen Menaichmos verwiesen, der durch das Problem der Würfelverdopplung auf die Kegelschnitte stieß.

In meinen Augen, als angehender Lehrer, ist aber vor allem auch der fachdidaktische Bezug des Themas von großem Interesse. Bereits als Schüler haben mich persönlich geometrische Probleme sehr angesprochen, da die Veranschaulichung des Ganzen natürlich immer gegeben ist. Ich denke im Schulalltag könnte man die Beispiele in den Unterricht einbauen (wobei natürlich nicht alle in dieser Arbeit vorkommenden Beweise tauglich für den Schuleinsatz sind, also mögliches Beispiel sei hier aber beispielsweise die Winkeldreiteilung mittels Origamics erwähnt, die in der Oberstufe eines Realgymnasiums keine allzu große Herausforderung darstellen sollte), da es meiner Meinung nach gleich auf mehreren Ebenen motivierend auf SchülerInnen wirken kann. Die Beschäftigung mit solchen Themen ist ein gutes Beispiel für den Entwicklungsprozess von Beweisen in der Mathematik. SchülerInnen betrachten Mathematik viel zu oft als „gottgegeben“ und wären verblüfft, wie vieles von dem, was man vor allem in der Oberstufe als mathematisches Werkzeug verwendet, lange Zeit umstritten oder unbekannt war. Zu guter Letzt sollte aber auch der spielerische Charakter dieser Probleme nicht unterschätzt werden. So ist natürlich davon abzuraten, den SchülerInnen die Unmöglichkeit dieses Problems vorzuenthalten, auch wenn man womöglich auf die Ausführung der Unmöglichkeitsbeweise verzichten sollte, doch könnten die SchülerInnen sich sehr wohl mit alternativen Lösungen beschäftigen, nicht zuletzt, da manche ja auch einen Bezug zum Schulstoff haben, wenn man beispielsweise an den Origamicsbeweis der Würfelverdopplung und die dort verwendeten Begriffe der Winkel- und Streckensymmetrale denkt.

Abschließend kann ich sagen, dass ich sehr viel durch diese Diplomarbeit gelernt habe und mein Interesse an diesen Problemen nur noch größer geworden ist. Auch wenn die drei klassischen Probleme heutzutage als „gelöst“ oder eben „unmöglich“ gelten, verkörpert die Geschichte dahinter genau jenen entdeckenden Charakter, den ich an der Mathematik schätzen gelernt habe.

6. Literaturverzeichnis

- [Beu 1951] Beutel, Eugen: Die Quadratur des Kreises. B.G. Teubner, Leipzig, 5. Auflage, 1951.
- [Bre 1953] Breidenbach, Walter: Das delische Problem. Die Verdoppelung des Würfels. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1953.
- [Dri 1980] Drinfel'd, Gerson: Quadratur des Kreises und Transzendenz von π . Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
- [Euc 1997] Euclides; Thaer, Clemens: Die Elemente. Bücher I-XIII, in: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235. Scheßlitz, 3. Auflage, 1997.
- [Fri 2011] Fried, Nico: Eine Art neue industrielle Revolution, in: Süddeutsche Zeitung. Verfasst am: 21.04.2011. Abgefragt am: 06.07.2012. <http://www.sueddeutsche.de/wirtschaft/ehetik-kommission-zur-energiewende-eine-art-neue-industrielle-revolution-1.1087828>
- [Ger 1994] Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Fourier Verlag, Wiesbaden, 3. Auflage, 1994.
- [Göt 2009] Götz, Stefan: Mitschrift der Vorlesung: Schulmathematik 1. Arithmetik und Algebra. Universität Wien, Wintersemester 2009.
- [Hag 2008] Haga, Kazuo: Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.
- [Hen 2003] Henn, Hans-Wolfgang: Elementare Geometrie und Algebra. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2003.

- [Her 1927] Herrmann, Aloys: Das delische Problem. Die Verdoppelung des Würfels. Teubner, Leipzig, 1927.
- [Heu 2008] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis. Teil 2. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 14. Auflage, 2008.
- [Hil 1893] Hilbert, David: Über die Transzendenz der Zahlen e und π , in: Mathematische Annalen. Band 43. Springer, Berlin, S. 216-219, 1893.
- [Huf 2005] Huffman, Carl: Archytas of Tarentum. Pythagorean, Philosopher, and Mathematician King. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Kai 1998] Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: Geschichte der Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 2. Auflage, 1998.
- [Kai 1996] Kaiser, Hans: The Problem of the Duplication of a Cube, in: Posamentier, Alfred: The Art of Problemsolving. Corwin Press, Thousand Oaks, S. 371-382, 1996.
- [Kow 1982] Kowol, Gerhard; Mitsch, Heinz: Algebra 1. Skriptum zur Vorlesung. Prugg Verlag, Eisenstadt, 1982.
- [Kow 2010] Kowol, Gerhard: Mitschrift der Vorlesung: Geschichte der Mathematik. Universität Wien, Wintersemester 2010.
- [Men 1934] Menger, Karl: Ist die Quadratur des Kreises lösbar?, in: Alte Probleme – neu Lösungen in den exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge. Zweiter Zyklus. Deuticke, Leipzig, Wien, 1934.
- [Sch 1984] Schleiermacher, Friedrich: Platons Werke. Akademie Verlag, Berlin, 1984.
- [Sch 2010] Schlosser, Michael: Mitschrift der Vorlesung: Algebra für LAK. Universität Wien, Sommersemester 2010.

- [Scr 2000] Scriba, Christoph J.; Schreiber, Peter: 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [Toe 2010] Toenniessen, Fridtjof: Das Geheimnis der transzendenten Zahlen. Eine etwas andere Einführung in die Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2010.
- [Und 1987] Underwood, Dudley: A budget of trisections. Springer, New York, 1987.
- [Wae 1966] Van der Waerden, Bartel Leendert: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und Griechische Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 2. Auflage, 1966.

7. Anhang

7.1. Abstract – Deutsch

Die drei klassischen Konstruktionsprobleme, die Würfelverdoppelung, die Quadratur des Kreises sowie die Winkeldreiteilung, sind wohl allseits bekannt und bedürfen keiner weiteren Erklärung. In dieser Diplomarbeit widme ich mich den drei Unmöglichkeitbeweisen, wobei ich mich bei der Quadratur des Kreises und damit beim Transzendenzbeweis der Kreiszahl π auf den Beweis von David Hilbert gestützt habe, der relativ viel Vorwissen abverlangt. Weiters beinhaltet die Arbeit alternative tatsächliche Lösungsmöglichkeiten, wobei hier natürlich nicht auf die Vollständigkeit geachtet worden ist, sondern vorrangig versucht worden ist, exemplarisch einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten zu geben. Als kleines Highlight, vor allem da das Teilgebiet der Mathematik noch ein relative junges ist, seien hier noch die zwei Faltbeweise aus dem Gebiet des Origamics genannt.

Eingebettet sind die Beweise jeweils in einen geschichtlichen Hintergrund, um die Entwicklung der Probleme besser verstehen zu können.

Diese Diplomarbeit bietet also einen Überblick über diese drei antiken Probleme sowie einen Einblick in die verschiedensten Möglichkeiten, das „Unmögliche möglich“ zu machen.

7.2. Abstract - English

The three famous geometric problems of antiquity, doubling the cube, squaring the circle and the trisection of an angle, are well known and do not need any further explanations. This diploma thesis contains all three proofs, which show that they cannot be constructed using only a straight edge and a compass. In order to show that squaring a circle is also impossible I used the

proof found by David Hilbert back in the 19th century, but it does need a lot of background knowledge to fully understand this proof. Furthermore, it contains a couple of alternative solutions, but it is almost impossible to provide a complete overview of all the possibilities for alternative solutions, therefore I tried to pick out as many different methods as I could find. Probably the latest solution, which is also shown in this thesis, is the one using the field of origamics – a combination of mathematics and paper folding –, which got invented a mere 40 years ago.

In addition to the proofs shown in this thesis you will also find an overview of the historical background in order to get a better understanding of how the approach to these mathematical problems has changed over time.

7.3. Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name	Matthias Sebastian Konzett
Geburtsdatum	23.11.1987
Geburtsort	Wien
Staatsbürgerschaft	Österreich
Eltern	Michael und Ingrid Konzett

Ausbildung:

2007 – 2012	Studium an der Universität Wien Unterrichtsfach Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung
2006 – 2007	Studium an der Universität Wien Publizistik und Kommunikationswissenschaft
13.06.2006	Reifeprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg
1998 – 2006	BG und BRG 6 Rahlgasse 4 1060 Wien
1994 – 1998	Priv. Volksschule mit Öffentlichkeitsrecht Ziegelofengasse 2 1040 Wien

Sonstiges:

01. – 06.2004	Auslandsaufenthalt in den USA über AFS-Wien Besuch der Valley High School 1505 West Court Street 48503 Flint, Michigan
---------------	---