DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„M&M – Muster und Mathematik“

Möglichkeiten für den Unterricht in der Sekundarstufe I und II

Verfasser

Gabriel Pühringer

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreuerin / Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG

> *„Nichts ist wichtiger, als die Quelle des Erfindens zu sehen, die nach meiner Meinung interessanter sind als die Erfindungen selbst.“ Leibniz (1646-1716) (VO Probleme des Mathematikunterrichts 2008)*

Dieses Zitat hat mich dazu veranlasst, mich mit den Mustern in der Mathematik genauer zu beschäftigen. Muster treten in vielen unterschiedlichen Bereichen der Mathematik auf. Oft kann man versuchen, in Strukturen, Zahlen und auch in der Natur Muster zu entdecken. Die Lösung solcher Aufgaben hat für mich einen spielerischen Charakter, nämlich verschiedene Wege einfach auszuprobieren und zu versuchen, versteckte Muster zu ergründen. Es gehört zum Wesen der mathematischen Muster, „*dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann. Der Umgang mit ihnen schließt also Offenheit und spielerische Variation konstruktiv ein“* (Wittmann 2003, S. 8). Diese Offenheit und der spielerische Charakter können im Unterricht eine Abwechslung zum regulären Mathematikunterricht bieten, der alle Inhalte in „Scheiben“ zerlegt und diese Schritt für Schritt den Schülerinnen und Schülern („mundgerecht“) präsentiert.

Da Muster in vielen Bereichen der Mathematik vorkommen, eignen sie sich für alle Mathematikerinnen und Mathematiker „*von den ersten mathematischen Aktivitäten des Kleinkindes bis hin zu den aktuellen Forschungen der mathematischen Spezialisten“* (Wittmann 2003, S. 8). Meiner Meinung nach sollte im Unterricht bei entsprechenden Themen immer wieder auf die vorhandenen, sich anbietenden Muster eingegangen werden.

Daher soll der Frage nachgegangen werden, wie und wo Mustererkennung im Mathematikunterricht eine Rolle spielt. Dazu wird versucht, im ersten Kapitel aufzuzeigen, dass Mathematik im Allgemeinen und auch speziell der Mathematikunterricht der AHS viele Muster beinhalten, die es zu entdecken gilt. Devlin (2002) geht sogar so weit, dass er Mathematik als Wissenschaft durch Muster beschreibt. Ohne genau alle Teilgebiete aufzuzählen, die sich im Laufe der Jahrhunderte entwickelt haben, bietet er eine mögliche Antwort auf die Frage: „Was ist Mathematik?“: „*Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern.“*

Mathematik kann als eine abstrakte Wissenschaft angesehen werden, die sich mit Zahlenmustern, Formenmustern, Bewegungsmustern (wie z. B. Freier Fall) … auseinander setzt. In dieser Arbeit wird im zweiten Kapitel nur auf Zahlenmuster bzw.

Muster beim Zählen eingegangen, um einen Einblick zu vermitteln, wie diese abstrakte Wissenschaft entstanden und aufgebaut ist.

Die Entwicklung der abstrakten Zahlen war in der Geschichte ein langer Prozess, der sich über mehrere tausend Jahre dahingezogen hatte. Erste Methoden bedienten sich einer äquivalenten Menge an Steinen oder Stöckchen, die für jedes Gut in eine Schale gelegt wurden. Es wurde zum Beispiel ein Stöckchen für jedes Schaf und ein Steinchen für jedes Rind in eine Schale gelegt. Beim erneuten Durchzählen wurde dann für jedes vorbeikommende Tier ein Gegenstand herausgenommen. Diese Methode wurde nach und nach verbessert und schlussendlich wurden außen auf die Schalen Symbole geschrieben, die die Anzahl einer Ware festlegte, ohne einen äquivalenten Inhalt zu benötigen. Damit wurden erstmals abstrakte Symbole verwendet. Die Symbole haben sich bis heute immer wieder verändert, aber das zu Grunde liegende Muster ist gleich geblieben.

Im Aufbau der natürlichen Zahlen wurden mit der Zeit immer neue Muster entdeckt, die von mathematischem Interesse sind. Ein Beispiel finden wir in der Geschichte des Mathematikers *Carl Friedrich Gauß*, der als junger Schüler die Summe der ersten hundert natürlichen Zahlen berechnen sollte. Er erkannte darin ein Muster und konnte diese Aufgabe (für den Lehrer) überraschend schnell lösen. Daraus ergibt sich die heute bekannte Summenformel nach Gauß:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Gauß erkannte dieses Muster sehr schnell, aber wie ist ihm das gelungen? Dieser Frage wird im dritten Kapitel nachgegangen. Wir versuchen eine Systematik zu entwickeln, die uns hilft, in Aufgabenstellungen und in Problemen gezielt nach Mustern zu suchen. Wir entdecken somit Mustererkennung als eine mögliche Problemlösungsstrategie. Gerade im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es eine Fülle von Aufgaben, die mit Hilfe eines Musters gelöst werden können. Schritt für Schritt soll eine Vorgehensweise erarbeitet werden, die zum Lösen von Problemen herangezogen werden kann. Dieser Prozess kann in Form eines Handlungsmusters festgehalten werden. Entscheidend sind dabei Leitfragen, die die Schülerinnen und Schüler immer näher an eine Lösung heranführen sollen.

Bei den Aufgaben in den verschiedenen Bereichen der Mathematik kommen drei Kategorien am häufigsten vor: Aufgaben, die nur mit Hilfe eines Muster gelöst werden können; Aufgaben, die schneller mit einem Muster gelöst werden können; sowie Aufgaben, die mit der Methode „reduce, expand and find a pattern“ gelöst werden. Damit wurde ein Einteilungsprinzip für die Aufgaben gefunden, das neben der Entwicklung eines Unterrichtskonzepts zur Durchführung der Problemlösungsstrategie Mustererkennung im vierten Kapitel eingesetzt wird. Dabei wird auch ein Bezug zu den Bildungsstandards hergestellt, die immer mehr Bedeutung im Mathematikunterricht erhalten. Alle Aufgaben werden demzufolge in die Methoden wie eben genannt sowie in die Handlungsbereiche der Bildungsstandards eingeteilt (vgl. Kapitel 4.2.).

Zum Lösen mathematischer Probleme wird auch versucht, Aufgabenstellungen in verschiedenen Darstellungen zu betrachten. Dadurch werden oft neue Einsichten und Muster erkannt, die entscheidend für die Lösung eines Problems sind.

Einerseits kann der Wechsel von Darstellungen *als heuristisches Mittel* angesehen werden, das dazu dient, mathematische Probleme zu lösen, wie im dritten Kapitel beschrieben wird, oder andererseits kann er auch als *Sicherung von mathematischem Wissen* betrachtet werden. Dieser zweite Aspekt wird im fünften Kapitel behandelt. Zuerst soll geklärt werden, welche Darstellungsformen im Mathematikunterricht verwendet werden und wie diese aussehen. Dabei werden die Darstellungsebenen nach *Bruner* (E-I-S-Prinzip) verwendet. Diese Ebenen beinhalten in erster Linie Handlungen (enaktiv), Grafiken (ikonisch) sowie Zeichen (symbolisch). Im Wechsel der Darstellungen können erneut Muster erkannt werden, die Schülerinnen und Schülern neue Einsichten erlauben. So können wir in der Summenformel von Gauß durch verschiedene Darstellungen völlig andere Aspekte erkennen. Die linke Seite, die den Prozess des Addierens vorzeigt, kann durch Punktmuster anders dargestellt werden, um so die Formel zur direkten Berechnung zu erhalten (vgl. Kapitel 5.3.). Dieser Wechsel kann innerhalb einer Darstellungsebene oder zwischen den Darstellungen ablaufen. Damit können wir erneut eine Einteilung der Aufgaben vornehmen.

Mathematische Muster kommen auch noch in vielen weiteren Bereichen vor (vgl. Devlin 2002), ich möchte mich in dieser Diplomarbeit jedoch weitgehend auf die Schul-Mathematik beschränken, da ich hauptsächlich in diesem Bereich tätig sein werde. Diese Abgrenzung wird teilweise überschritten, um manche Aufgabenstellungen vollständig lösen zu können.

2. Mathematik: Wissenschaft der Muster

> *"One of the inherent beauties of mathematics is the logic and order that it exudes. This logic can be seen „physically" as a pattern or as a series of patterns."* (Posamentier & Krulik 1998, S. 37)

Die Schönheit der Mathematik liegt also in ihrer Struktur und ihrem Aufbau. Um diese zu verstehen, müssen wir die Muster in der Struktur erkennen und begreifen. Dieser Ansicht ist auch Devlin (2002). Er stellt sich die Frage: „Was ist Mathematik?".

In der Entwicklung der Mathematik ist dabei ein enormer Wandel abgelaufen. Lange Zeit ist die Mathematik unverändert die Wissenschaft der Zahlen und der geometrischen Formen geblieben. Erst mit der gleichzeitigen Entdeckung der Differential- und Integralrechnung von Leibniz und Newton im 17. Jahrhundert begann der Siegeszug der Analysis. Immer weitere Erkenntnisse versuchten die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler auf diesem Gebiet zu finden.

Um die Wende zum 20. Jahrhundert bestand die Mathematik aus vielleicht zwölf Gebieten, wie zum Beispiel: Arithmetik, Geometrie, Analysis … Heute würden wir vermutlich bis zu 70 Gebiete aufzählen können. Diese Entwicklung führt so weit, dass die Antwort auf die Frage: „Was ist Mathematik?" zunehmend schwieriger wird. Da Mathematik in erster Linie aufgrund der Vorgehensweise und der Methode beschrieben wird, entstand die neue Definition von Mathematik aus der Einleitung (vgl. Devlin 2002, S. 3 – 5).

Mathematik kann also als eine Wissenschaft angesehen werden, die nach (abstrakten) Mustern sucht. Beispiele für diese Muster wären Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster (wie z. B. Freier Fall), Handlungsmuster … realer oder fiktiver Natur.

Um diese Struktur des Aufbaus der Mathematik zu beschreiben, wird im Folgenden auf Zahlenmuster sowie auf die Entstehung der natürlichen Zahlen genauer eingegangen. Auch die Herangehensweise und die Methoden der Mathematik bilden bestimmte Muster. Diese tauchen auch in der Schule auf und können dort als Handlungsmuster erkannt werden.

2.1. Entstehung des Zahlenmusters der natürlichen Zahlen

Zu Beginn des Mathematikunterrichts in der Unterstufe lernen Schülerinnen und Schüler den Zahlenstrahl kennen. Die natürlichen Zahlen werden dabei am Beginn behandelt. Erste Zahlenformen wie die der Römer werden besprochen und das dekadische Zahlensystem wird eingeführt. In diesem Kapitel möchte ich der Frage nachgehen, wie diese Zahlen entstanden sind und weshalb sie diese Gestalt haben.

Wenn wir sagen, dass wir noch 12 Euro in unserer Geldtasche haben, weiß jede/r, worum es dabei geht. Aber wie kommt es dazu? Wir verwenden im Alltag oft das Muster der Einheit, der Zweiheit und so weiter. Vorher muss uns aber bewusst sein, was drei Äpfel, drei Kinder und drei Steine gemeinsam haben. Das Symbol der Zahl 3 beschreibt somit diese Gemeinsamkeit. Wir verwenden also ein mathematisches, abstraktes Muster.

> *„Wenn wir die Zahl so als einen abstrakten Begriff für gewisse Muster in der Welt erfasst haben, wird sofort ein weiteres Muster sichtbar, ein mathematisches Muster der Zahlen: Die Zahlen sind geordnet in der Reihenfolge 1, 2, 3, …, die nächste Zahl ist immer um 1 größer als die vorhergehende.“* (Devlin 2002, S. 16)

Mit dieser Definition der Zählzahlen haben wir eine erste Vorstellung für den Aufbau der natürlichen Zahlen gefunden. Diese sind geordnet und werden immer um eine Einheit („1“) größer als die vorhergehende Zahl. In der Mathematik finden wir auch noch viel tiefer liegende Muster in den Zahlen wie das der ungeraden und geraden Zahlen. Diese Muster werden in den folgenden Kapiteln noch näher behandelt.

Wie sind nun aber diese mathematischen Zahlen zum Zählen entstanden? Dazu betrachten wir die Geschichte der Mathematik und den Ursprung der Zahlen etwas genauer.

Auch heute gibt es noch Naturvölker, die nicht in unserem Sinne zählen können. Nur kleine Ziffern wie die Eins, Zwei oder Drei sind bekannt. Ihre Anzahl erfasst man auf einen Blick. Bei mehr als drei Objekten wird es schon schwieriger (vgl. Reichel & Humenberger 2007, S. 12 – 13).

Heute machen Kinder im Alter von ungefähr fünf Jahren einen entscheidenden Sprung in ihrer Entwicklung, für den die Menschheit mehr als 6000 Jahre gebraucht hat. Sie eignen sich den Begriff einer Zahl an und erkennen die Gemeinsamkeiten von fünf Äpfeln, fünf Kindern, fünf …

Ursprünglich haben die Menschen eine Eins-zu-Eins-Zuordnung gemacht. Das bedeutet für jedes Rind wurde ein Kieselstein in eine Schale gelegt und für jedes Schaf ein kleines Stöckchen. Wenn man gefragt wurde, wie viele Rinder und Schafe man denn besitze, konnte man nur auf die Stöckchen und die Kieselsteine zeigen. Erste Merkmale für dieses Zählverfahren wurden auf einem eingekerbten Knochen gefunden. Dieser wurde auf ein Alter von ungefähr 35.000 Jahre datiert und diente vermutlich der Zählung der Vollmonde (vgl. Devlin 2002, S. 16 – 18).

Ein nächster entscheidender Schritt wurde bei Grabungen im Nahen Osten entdeckt: kleine Tongefäße mit unterschiedlichen Inhalten wie Kugeln, Scheiben, Dreiecke, Rechtecke… Jede dieser Formen stand für ein bestimmtes Gut. Damit wurde erstmals Planung und Tauschhandel ermöglicht. Diese Formen breiteten sich von ca. 8000 v. Chr. bis 6000 v. Chr. aus und haben sich dann bis ca. 3000 v. Chr. nicht wesentlich verändert. Erst als größere Siedlungen und neue Produkte, wie Gewänder, Metallgegenstände und so weiter, entstanden sind, wurden neue komplexere Formen verwendet. Ein großer Nachteil dieser Methode lag in der Versiegelung der Tongefäße. Um sich über die Anzahl zu vergewissern, musste man immer das Siegel aufbrechen. Die Sumerer entwickelten daher eine Methode, die Gefäße zu beschriften. In den noch weichen, ungebrannten Ton wurden die Symbole außen eingeritzt (vgl. Devlin 2002, S. 19 – 20).

Wenn aber außen steht, was innen vorhanden ist, wird der Inhalt der Zählformen mehr oder weniger überflüssig. Die Zählformen brauchte man nicht mehr, da alles, was man wissen wollte, bereits außen draufgeschrieben wurde. Als letzte wesentliche Verbesserung wurden die Zählformen von einem Buchhalter durch Zeichen ersetzt. Damit wurde das Zählen entwickelt. Es wurden zwar andere Zeichen als unsere heute verwendet, die Methode jedoch blieb unverändert (vgl. Devlin 2002, S. 21 – 22).

Ein Unterschied liegt im verwendeten Zahlensystem. Wir benutzen heute das dekadische Zahlensystem mit arabischen Ziffern. Bei den Römern wurden ganz andere Zahlenzeichen verwendet und vor allem gab es noch kein Stellenwertsystem.

Damit wurde ein Muster entwickelt, das bis heute angewendet wird. So wird deutlich, *„dass der Weg von den physischen Gegenständen zu einer abstrakten Darstellung ein erheblicher Sprung im Erkenntnisvermögen war.“* (Devlin 2002, S. 22)

Die Veränderung der Darstellung der Zahlen kann heute mit der Entwicklung des Verständnisses der Mathematik von Lernenden verglichen werden. Gerade junge Schülerinnen und Schüler (in der Vorschule) verwenden sehr häufig enaktive Darstellungen, um die mathematischen Inhalte besser verstehen zu können. Erst nach und nach werden ikonische und dann erst symbolische Darstellungen zum Erklären verwendet.

2.2. Verwendung von Handlungsmustern im Mathematikunterricht

Der Mathematikunterricht ist immer noch stark an der Systematik fachlicher Inhalte orientiert. Im Sinne des prozessorientierten Unterrichts wird aber versucht, das Augenmerk weniger auf die Summe des zu lernenden Stoffes zu richten, sondern den beim Lernen von Mathematik ablaufenden Prozess zu verfolgen. Es bedarf im Unterricht aber einer klaren Richtlinie, welche mathematischen Inhalte von Belang sind. Das wird in Österreich mit dem Lehrplan weitgehend vorgegeben. Als Lehrerin oder Lehrer habe ich dabei wenig autonome Entscheidungsmöglichkeiten, den zu behandelnden Stoff zu ändern. Was aber im Ermessen der Lehrkraft liegt, ist die Methode und die Vorgehensweise, *wie* dieser Stoff präsentiert wird. So kann und muss ich als Lehrerin oder Lehrer zwischen den *Standards zu mathematischen Inhalten* und den *Standards zu mathematischen Prozessen* differenzieren. Mathematische Prozesse werden in Österreich in den Bildungsstandards genauer erläutert, welche in Kapitel 3.2.2. vorgestellt und erklärt werden (vgl. Leuders 2003, S. 265 – 266).

Es kommen im Unterricht aber bestimmte Themengebiete vor, die eine Art „Bedienungsanleitung für mathematische Werkzeuge“ beinhalten. Diese Anleitungen können wir als „Handlungsmuster“ bezeichnen. Diese legen fest, wie Schülerinnen und Schüler mit den Werkzeugen der Mathematik am besten umgehen sollen. Das wohl bekannteste Beispiel ist die Kurvendiskussion in der Differentialrechnung, welche in den meisten Schulbüchern mit einer Art „Rezept“ zur Durchführung verknüpft ist. Je nach Themengebiet verwenden die Schülerinnen und Schüler verschiedene Formeln und Werkzeuge wie zum Beispiel den Differentialoperator. Da dessen Anwendungsmöglichkeiten sehr vielseitig sind, bedarf es zur richtigen Handhabung einen angeleiteten Ablauf.

Handlungsmuster können aber auch prozessorientiert sein, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Wie an ein Problem herangehen wird, läuft im Allgemeinen nach demselben Muster ab. Beispielsweise muss ein Problem zuerst verstanden werden, damit man es lösen kann und damit in weiterer Folge eine Vorgehensweise bzw. einen Plan entwickelt werden kann, der näher an die Problemlösung heranführt. Wie diese Handlungsmuster beim Problemlösen aussehen, wird in Kapitel 4.1. genauer anhand eines Unterrichtskonzeptes zur Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ erklärt.

An dieser Stelle möchte ich exemplarisch ein Handlungsmuster vorstellen, welches vielen Schülerinnen und Schülern aus ihrer Schulzeit in Erinnerung bleiben wird.

Kurvendiskussion

In der siebten Klasse lernen die Schülerinnen und Schüler Anwendungen der Differentialrechnung genauer kennen. Diese kann z. B. dazu verwendet werden, Funktionsgraphen zu untersuchen. Dabei werden der Verlauf, die Monotonie und die Krümmung genau unter die Lupe genommen. Wie diese Untersuchung abläuft, unterliegt immer demselben Muster, welches als Richtlinie anzusehen ist, da bei den Aufgaben nur mehr bestimmte Schritte gemacht werden müssen bzw. können:

„Bei diesen Kurvendiskussionen orientieren wir uns an folgenden Punkten (als unverbindliche Leitlinie):

1. *Umfassendste Definitionsmenge, Stetigkeit, Polstellen*
2. *Nullstellen*
3. *Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)*
4. *Wendepunkte (samt Wendetangente)*
5. *Monotonieverhalten*
6. *Krümmungsverhalten*
7. *Asymptotisches Verhalten*
8. *Graph (notfalls unter Verwendung einer zusätzlichen Wertetabelle*
9. *Symmetrie(beweis)*
10. *Periodizität(sbeweis)“* (Götz & Reichel 2011, S. 96)

Dieses Handlungsmuster bietet den Schülerinnen und Schülern eine Orientierungshilfe, damit der Ablauf möglichst effizient ist und keine wichtigen Eigenschaften vergessen werden. Es beinhaltet viele Fertigkeiten, wie Polynomdivision, Ableiten, Bruchrechnung und andere mehr, die die Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schulzeit erlernt haben. Diese zehn Punkte verbinden diese erlernten Fertigkeiten zu einem fertigen Konzept, welches die Untersuchung von Funktionen erheblich erleichtert.

Weitere Beispiele für Handlungsmuster sind unter anderen Extremwertaufgaben, Kongruenzsätze, Partialbruchzerlegung, Lagebeziehung dreier Ebenen, Gleichungssysteme in mehreren Variablen (vgl. Gaußverfahren). Diese Handlungsmuster geben den Schülerinnen und Schülern vor, wie sie an eine Aufgabe herangehen müssen, damit sie zum gewünschten Ergebnis kommen. Dabei wird ein kreativer Prozess weitgehend verhindert. Gerade dieser hat sich aber für einen problemorientierten Unterricht als besonders wichtig herausgestellt.

3. Mustererkennung als Problemlösungsstrategie

3.1. Problemlösungsstrategien

Bevor wir uns mit Problemlösungen auseinandersetzen, muss geklärt werden, was Probleme im Mathematikunterricht sind. Im Alltag stoßen wir täglich auf Probleme, die wir lösen müssen. Wir wollen unter anderem Arbeit und Freizeit organisieren sowie Einkäufe und Urlaube planen. Dafür haben wir unterschiedlichste Strategien entwickelt. Einige haben bessere Vorgehensweisen als andere und diese führen somit schneller zum Ziel.

In vielen Städten werden z. B. bestimmte Straßen immer nach dem gleichen Muster nummeriert. Gerade und ungerade Hausnummern befinden sich jeweils auf einer Seite der Straße und die Nummerierung wird vom Stadtzentrum aus nach außen durchgeführt. Dieses Muster hilft uns, uns im Straßensystem besser zu orientieren.

Jede/r hat für sich passende Methoden entwickelt, wie man anstehende Probleme einer Lösung zuführt. Dies geschieht oft ganz unbewusst und intuitiv. Wir verwenden dafür jene Erfahrungen, die wir bei ähnlichen Problemstellungen bereits gemacht haben, und greifen so auf Bekanntes und Bewährtes zurück.

Wie im Alltagsleben kommen auch in der Mathematik immer wieder Aufgabenstellungen vor, die spontan nicht lösbar erscheinen. Man steht vor einem Problem, bei dem man nur durch eine bestimmte Vorgehensweise der Lösung näher kommt. In der Geschichte der Mathematik hat es ebenfalls Situationen gegeben, bei denen die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler auf Probleme gestoßen sind, die sie mit den bis dahin bekannten mathematischen Methoden nicht lösen konnten. Eine Lösungsstrategie ist das Erkennen eines Musters und soll in diesem Abschnitt anhand einiger Beispiele näher beschrieben werden (vgl.: Bruder & Collet 2011, S. 7 – 8 und Posamentier & Krulik 1998, S. 1 – 2).

3.1.1. Was sind mathematische Probleme und Lösungsstrategien?

Zuerst scheint es sinnvoll zu klären, was die Begriffe *Problem und Problemlösen* im Mathematikunterricht bedeuten. Eine mögliche Definition bieten Bruder & Collet (2011, S. 11):

> *„Ein Problem im Mathematikunterricht soll eine Anforderungssituation bezeichnen, die subjektiv als (...) schwierig erlebt wird. Diese Anforderungssituation erscheint den Lernenden nicht spontan bewältigbar (, ...) und verlangt eine für das Individuum „neue" Lösung. Das gilt auch dann, wenn das Problem als solches schon von vielen anderen Personen gelöst wurde."*

In dieser Definition wird von einer Anforderungssituation gesprochen, welche aber nicht genauer beschrieben wird. Auf welchen Lebensbereich oder auf welches Thema sich dieser Begriff bezieht, bleibt dabei offen. Wie diese Anforderungssituation aussehen kann, sollte weiter definiert werden. Timo Leuders (2003, S. 119 – 120) erstellt in seinem Buch „Mathematik-Didaktik" einen Überblick über verschiedene Anschauungen des Problemlösens. Dabei können diese Anforderungssituationen unterschiedliche Aspekte bedeuten.

1. Problemlösen = Lernen?

   „*Vom lerntheoretischen Standpunkt aus ist jedes Lernen ein Problemlösen. Ein Problem ist schlichtweg eine Diskrepanz [...]: zwischen vorliegendem Ausgangszustand und erwünschtem Zielzustand."* (Leuders 2003, S. 119)

2. Problemlösen = (Text)-Aufgaben bearbeiten?

Im Sinne der obigen Definition ist diese Auffassung richtig und spiegelt den Ablauf des Mathematikunterrichts wider, indem Aufgaben der Reihe nach abgearbeitet werden. Da diese Aufgaben klare Ziele und Ausgangspunkte besitzen, bleibt für Schülerinnen und Schüler nur wenig Raum individuelle Ideen einzubringen.

3. Problemlösen = Rätsellösen

In manchen Ländern (zum Beispiel USA) finden wir Problemlösungskompetenz als Lernziel im Regelunterricht. Problemlösen wurde zu einer zentralen Komponente des Mathematikunterrichts und als wichtiger Punkt im Curriculum verankert. Dabei ist es wichtig, die Aufgaben so zu wählen, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur mit Hilfe von Tricks die Probleme lösen können, sondern dass sie Lösungsstrategien entwickeln und diese auch reflektieren (vgl. Leuders 2003, S. 120). So können sie erlernte Lösungsstrategien gezielt für neue Problemstellungen heranziehen und diese auch auf andere Bereiche der Mathematik übertragen. Es ergibt sich die gewünschte Selbstständigkeit beim Lösen von Problemen.

> *„Erst dadurch, dass ein Problem über sich hinausweist, indem es zu tragfähigen mathematischen Ideen hinführt, wird es unterrichtlich produktiv.“* (Leuders 2003, S. 120)

Um dies zu veranschaulichen, sei ein Beispiel angeführt:

Aufgabe 3.1. **Umfüllproblem**

> *„Zwei Gläser sind mit der gleichen Menge Rotwein bzw. Weißwein gefüllt. Nun entnimmt man ein Zehntel des Rotweines und mischt ihn in den Weißwein. Dieselbe Menge des vermischten Weins füllt man wieder in den Rotwein zurück. Ist nun mehr Rotwein im Weißwein oder umgekehrt?“* (Leuders 2003, S. 121)

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler mit Bruchteilen von Bruchteilen rechnen. Damit kann man zu neuen Konzepten und Begriffen überleiten.

Gehen wir davon aus, dass sowohl im Rotweinglas als auch im Weißweinglas ein Liter Wein ist, und wir aus dem Rotweinglas ein zehntel Liter entnehmen.

$$1r : 1w \rightarrow \frac{9}{10}r : 1w + \frac{1}{10}r$$

Wir haben also im Rotweinglas noch $\frac{9}{10}l$ Rotwein und im Weißweinglas $\frac{10}{10}l$ Weißwein und $\frac{1}{10}l$ Rotwein. Nun nehmen wir aus dem Weißweinglas $\frac{1}{10}l$ mit diesem Mischverhältnis von 1:10 heraus, dann bleibt im Weißweinglas ein Liter im Mischverhältnis von 1:10 übrig. Im Rotweinglas erhalten wir:

$$\frac{9}{10}r + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{11}r + \frac{10}{11}w\right) = \frac{9}{10}r + \frac{1}{10 \cdot 11}r + \frac{10}{10 \cdot 11}w =$$

$$\frac{99+1}{10\cdot 11}r+\frac{1}{11}w=\frac{10}{11}r+\frac{1}{11}w$$

Damit enthält das Rotweinglas ebenfalls einen Liter Wein im Mischverhältnis 10:1. Es ist genauso viel Rotwein im Weißwein wie umgekehrt.[1]

3.1.2. Auswahl an wichtigen Problemlösungsstrategien

Probleme, wie in Kapitel 3.1.1. definiert, kommen im Mathematikunterricht an verschiedenen Stellen vor. Gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern werden im Unterricht Verfahren entwickelt, mit denen sie diese Problemstellungen lösen können.

Eine Auflistung einiger Strategien findet man beispielsweise in Posamentier & Krulik (1998, S. 4 – 5):

1. Working backward
2. Finding a Pattern [Reduce, expand and find a pattern]
3. Adopting a different point of view
4. Solving a simpler, analogous problem (…)
5. Considering extreme cases
6. Making a draw (visual representation)
7. Intelligent guessing and testing (including approximation)
8. Accounting for all possibilities (exhaustive listing)
9. Organizing data
10. Logical reasoning

Diese Liste ist keinesfalls vollständig, beinhaltet meiner Meinung nach aber die wichtigsten Strategien, die im Unterricht eingebaut werden können. Anders wie bei Posamentier & Krulik können diese auch in Unterkategorien wie bei Bruder & Collet zusammengefasst werden. Dabei wird zwischen heuristischen Strategien (z. B.: Rückwärtsarbeiten), heuristischen Hilfsmitteln (z. B.: Grafik), heuristischen Prinzipien (z. B.: Zerlegen und Ergänzen) sowie heuristischen Regeln unterschieden (vgl. Bruder

[1] Triviallösung: Wenn man davon ausgeht, dass in beiden Gläsern gleich viel Wein vorhanden ist und

& Collet 2011, S. 37). Ergänzend zur Auflistung von Posamentier & Krulik möchte ich noch die Strategie des Vorwärtsarbeiten anführen, die im Unterricht unbewusst häufiger angewendet wird. Dabei geht es vor allem darum, zu erkennen, welche Informationen für die Aufgabe gegeben sind und wozu diese Informationen dienen können.

Zum Lösen eines mathematischen Problems ist es meist notwendig, mehrere Strategien zu verbinden. Beispiele, bei denen alle Strategien eingesetzt werden können oder im Gegenteil nur eine Strategie verwendet werden kann, sind eher selten. Die Lernenden müssen abwägen, welche Strategien für die Bewältigung ihre Aufgabenstellung hilfreich sind.

3.1.3. Wie löse ich ein Problem?

> *„Viele Schülerinnen und Schüler stehen Problemaufgaben relativ hilflos gegenüber. Es fehlt ihnen an Strategien, die ein gezieltes Herangehen an Aufgaben ermöglichen, für die sie keinen fertigen Lösungsalgorithmus kennen."* (Tietze et al. 1997, S. 91)

Als Lehrerin oder Lehrer können wir dem Schüler oder der Schülerin Hilfe anbieten, um eine gezielte Herangehensweise an Probleme zu trainieren. Schülerinnen und Schüler sollen versuchen, das Problem zu verstehen und die dafür notwendigen Lösungsstrategien zu erkennen. Dabei muss aber berücksichtigt werden, dass sich das Problem für viele Schülerinnen und Schüler jeweils anders darstellt. Entscheidend ist für den/die Lernende/n, dass er/sie einen möglichen Weg findet und diesen auch verifizieren kann. Dabei ist es aber wichtig zu erkennen, dass es nur wenige Probleme in der Mathematik gibt, die nur einen einzigen Lösungsweg aufweisen (vgl. Tietze et al. 1997, S. 94).

Wie dieser Prozess des Herangehens an eine Problemstellung aussehen kann, wird unter anderem in Bruder & Collet (2011, S. 18 – 20)[2] beschrieben. Zur groben Einteilung

[2] In der Literatur wird dabei meist Polya als Grundlage verwendet. Vergleiche dazu auch Tietze et al. 1997, S. 100.

werden dabei die vier Phasen des Problemlösens nach Polya (1995 – 4. Aufl., S. 19) herangezogen:

1. Phase: Verstehen der Aufgabe
2. Phase: Ausdenken eines Plans
3. Phase: Ausführen des Plans
4. Phase: Rückschau

In der ersten Phase sollen die Schülerinnen und Schüler das Problem der Aufgabe erkennen und durch geeignete Fragen besser verstehen. Sie können durch verschiedene Zugänge die Aufgabe genauer betrachten, indem zum Beispiel eine Figur gezeichnet wird, in der die zur Verfügung stehenden Daten gekennzeichnet werden. Damit setzt sich der Schüler oder die Schülerin weiter mit dem Problem auseinander. Es sollten geeignete Bezeichnungen eingeführt werden, wodurch er/sie gezwungen ist, *die Dinge, die er benennen will, zu betrachten.* Dabei müssen sie auch entscheiden, ob das Problem für sie ohne Hilfestellung nicht lösbar ist oder sie mit ihrem bisherigen Wissen in der Lage sind, an die Aufgabe heranzugehen (vgl. Polya 1995 – 4. Aufl., S. 20).[3] Mit diesem Thema hat sich Vygotskij (in Brandes 2005, S. 12 – 14) näher beschäftigt und daraus die Vorstellungen zur Zone der nächsten Entwicklung erarbeitet. Dabei findet sich die Zone der nächsten Entwicklung in der Differenz von der Leistung eines Kindes, die es selbstständig und ohne Hilfestellungen erreichen kann, mit der Leistung, die es durch Nachahmung in kollektiver Tätigkeit oder durch Anleitung erbringen könnte. Daran zeigt sich deutlich das Entwicklungspotential eines Kindes. Nach Vygotskij sieht man das vor allem an dem, was es mit Hilfe einer Lehrperson zustande bringt:

> *„Was das Kind heute mit Hilfe des Erwachsenen vollbringt, wird es selbstständig tun können."* (Vygotskij, in Brandes 2005, S. 13)

Damit ist gemeint, dass ein guter Unterricht der Entwicklung der Schülerinnen und Schüler vorauseilt und so eine Möglichkeit schafft, dass die Schülerinnen und Schüler unter Anleitung den nächsten Schritt machen können. Dadurch sollte es ihnen gelingen, dieses neue Wissen zu verinnerlichen.

[3] Anmerkung: Wie die PISA-Ergebnisse zeigen, scheitern heute viele Kinder und Jugendliche bereits in dieser ersten Phase, da hier die erforderliche Lesekompetenz oft nicht ausreicht, eine komplexe Fragestellung zu erfassen bzw. zu reflektieren.

Um also selbständig neue Heurismen zu entdecken und zu entwickeln ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig erkennen, welche Aufgabenstellungen oder welche Probleme sie alleine im Stande sind zu lösen.

In der zweiten Phase soll versucht werden, durch gezielte Fragen dem Lösungsplan näher zu kommen.

> *„Die eigentliche Leistung bei der Lösung einer Aufgabe ist es allerdings, die Idee des Planes auszudenken." Polya (1995 – 4. Aufl., S. 22)*

„Kennst du eine verwandte Aufgabe?" oder *„Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken?"* Die Schülerinnen und Schüler sollen bekannte Strategien heranziehen und überprüfen, ob sie für die vorliegende Problemstellung brauchbar sind.

Beim Ausführen des Plans (Phase 3) soll jeder Schritt der Problemlösung kontrolliert werden. Nach Polya liegt dabei das Hauptaugenmerk darauf, dass der Schüler oder die Schülerin bei jedem Schritt der Problemlösung von deren Sinnhaftigkeit und Richtigkeit überzeugt ist.

Die vierte und letzte Phase dient der Vertiefung des Gelernten. Dabei soll die Problemlösung nochmals reflektiert werden, um sie später auch auf andere Aufgaben übertragen zu können. Es wird dabei versucht, andere Möglichkeiten (im Sinne einer Probe) zu finden, um die Richtigkeit des Ergebnisses zu bestätigen oder um einen noch schnelleren Lösungsweg zu erhalten (vgl. Polya, 1995 – 4. Aufl., S. 22 und Bruder & Collet, 2011, S. 18 – 19).

Dazu formulieren Bruder & Collet eine mögliche Interpretation aus Sicht der Schülerinnen und Schüler:

> *„Die Idee für den Unterricht ist jetzt, dass die Schüler/innen lernen sollen, eine für sie schwierige Aufgabe (also für sie ein Problem) zu strukturieren: erst einmal verstehen, worum es geht, dann überlegen, wie man vorgehen könnte (vielleicht schon verschiedene Möglichkeiten in Betracht ziehen), dann einen „Plan" machen (vielleicht auch eine Zeitplanung z.B. beim Fertigen eines Referates oder einer langfristigen Hausaufgabe). Dann wird schrittweise versucht, die gesteckten Ziele zu erreichen, und man schaut hinterher bzw. auch zwischendurch immer mal wieder, wie weit man denn schon gekommen ist und was geholfen hat, das Problem zu lösen."*

3.2. Problemlösen im Mathematikunterricht

3.2.1. Problemlösekompetenz im Lehrplan

Problemlösung ist in vielen Ländern eine immer wichtiger werdende Kompetenz und gewinnt auch in Österreich immer mehr an Bedeutung, sodass der Mathematikunterricht in den letzten Jahren in Richtung kompetenzorientierten Unterricht weiterentwickelt wurde.

In Österreich wird Problemlösen nicht als eigenes Kapitel wie zum Beispiel *Zahlen und Maße* betrachtet, da sich Problemlösungskompetenzen nicht auf einzelne Fachgebiete der Mathematik beschränken.

Im **Lehrplan der AHS Unterstufe – Mathematik** wird in den Bildungs- und Lehraufgaben folgendes angeführt:

> *„Die Schülerinnen und Schüler sollen*
>
> - *durch Reflektieren mathematischen Handelns und Wissens Einblicke in Zusammenhänge gewinnen und Begriffe bilden;*
> - *durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;"* (Lehrplan AHS Unterstufe – Mathematik 2000, S. 1)

Der Lehrplan legt somit fest, dass Problemlösekompetenzen und heuristische Methoden zentrale Lehraufgaben darstellen. Ebenso wird das Reflektieren des mathematischen Handelns und Wissens explizit erwähnt. Aufgrund dessen sollen die Schülerinnen und Schüler Aufgaben und Problemstellungen mit Hilfe bestimmter Lösungsstrategien bearbeiten und diese auch reflektieren. Dadurch kann erreicht werden, dass die Inhalte weiter vertieft und gefestigt werden.

Problemlösungskompetenzen spielen im Lehrplan AHS Unterstufe – Mathematik auch in anderen Bereichen eine Rolle, z. B. im Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule und den didaktischen Grundsätzen.

> *Der Mathematikunterricht soll folgende […] Grunderfahrungen ermöglichen:*
>
> - *Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen.* (Lehrplan AHS Unterstufe – Mathematik 2000, S. 1 – 2)

Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Hilfe von Problemstellungen aus dem Alltag motiviert werden, da Problemlösekompetenzen auch im Alltag oft eine entscheidende Rolle spielen. Je nach Klasse können so Themenschwerpunkte beim Problemlösen gesetzt werden.

In der **Oberstufe** finden sich im Lehrplan Mathematik keine direkten Verweise auf Problemlösungsstrategien. Weder in den Kompetenzen noch in den Aspekten der Mathematik wird festgehalten, ob und in welchem Umfang Problemlösen eine Rolle spielen soll. Im Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule wird nur noch auf den Unterstufenlehrplan verwiesen:

> *„Die bereits im Lehrplan der Unterstufe definierten Beiträge sind altersadäquat weiter zu entwickeln und zu vertiefen.“* (Lehrplan AHS Oberstufe – Mathematik 2004, S. 2)

Somit bleibt es der Lehrerin oder dem jeweiligen Lehrer selbst überlassen, ob und in welchem Umfang er/sie Problemlösen in die einzelnen Themenbereiche einbringt.

3.2.2. Problemlösen in den Bildungsstandards

Durch die Einführung der Bildungsstandards wurde in Österreich versucht, mehr Verbindlichkeit und Nachhaltigkeit in den Unterricht zu bringen. Dadurch soll sichergestellt werden, dass Schülerinnen und Schüler bestimmte grundlegende Kompetenzen lernen. Die Bildungsstandards legen die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten und achten Schulstufe fest.

Hier möchte ich nur die Bildungsstandards der achten Schulstufe kurz erklären. Heugl & Peschek (2007, S. 9) verwenden dafür ein dreidimensionales Modell, dass die mathematischen Kompetenzen in vier Handlungsbereiche, vier Inhaltsbereiche sowie drei Komplexitätsbereiche zusammenfasst (Abbildung 3.1.).

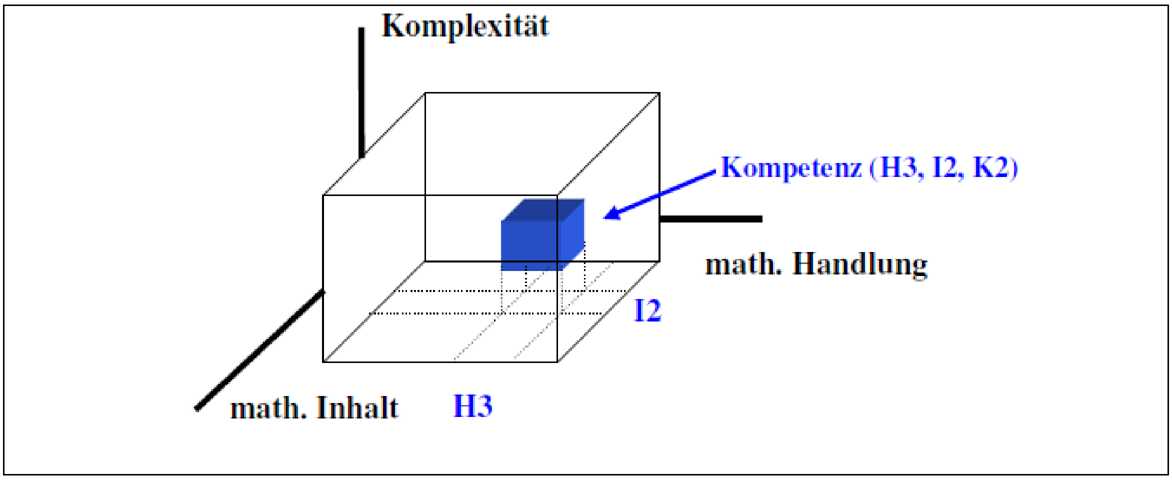


Abbildung 3.1. Kompetenzmodell (Heugl & Peschek 2007, S. 9)

Dadurch werden jeder mathematischen Kompetenz ein bestimmter Handlungsbereich, ein Inhaltsbereich und ein Komplexitätsbereich zugeordnet, sodass insgesamt 48 mathematische Kompetenzen entstehen, die langfristig verfügbare Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler nach der achten Schulstufe sein sollten. Wie die Komponenten der drei Bereiche aussehen, wird in Tabelle 3.1. zusammengefasst:

Handlungsbereich	**Inhaltsbereich**	**Komplexitätsbereich**
H 1 Darstellen, Modellbilden	*I* 1 Zahlen und Maße	*K* 1 Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten
H 2 Rechnen, Operieren	*I* 2 Variable, funktionale Abhängigkeiten	*K* 2 Herstellen von Verbindungen
H 3 Interpretieren	*I* 3 Geometrische Figuren und Körper	*K* 3 Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren
H 4 Argumentieren und Begründen	*I* 4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen	

Tabelle 3.1.

Obwohl, wie in Kapitel 3.2.1. festgehalten wurde, in der Unterstufe im Lehrplan Mathematik Problemlösekompetenzen vorzufinden sind, werden diese im Bildungsstandardmodell nicht explizit verlangt.

In der Diplomarbeit „*Problemlösen im Zeitalter von Bildungsstandards und Zentralmatura*“ von Magdalena Thaler wird der Frage nachgegangen, ob Problemlösekompetenzen in den heutigen Prüfungen verlangt werden. Es hat sich herausgestellt, dass die „*Fähigkeit, Probleme zu lösen, in diesem Modell nicht explizit als Kompetenz angeführt* [wird]. *Dennoch sollten die Bildungsstandards aber Raum geben, Problemlöseaufgaben im Unterricht zu verwenden, da diese möglicherweise zur Erreichung anderer Kompetenzen hilfreich sein könnten.*“ (Thaler 2011, S. 54)

Umgekehrt werden aber beim Problemlösen der zweite und der dritte Komplexitätsbereich benötigt. Beim Problemlösen wird von den Schülerinnen und Schülern verlangt, verschiedene mathematische Inhalte miteinander zu verbinden. Weiter ist auch Reflektieren, das heißt über die Lösung und den Lösungsweg nachdenken, ein wesentlicher Schritt beim Problemlösungsprozess nach Polya.

Im Rahmen der Bildungsstandards werden immer wieder Aufgaben veröffentlicht, die teilweise in Testungen in Pilotschulen verwendet wurden oder in Projektschriften und den Praxishandbüchern angeführt wurden, um damit die Bildungsstandards anhand typischer Aufgaben zu illustrieren. Wenn wir diese genauer betrachten und nach dem Problemlösungscharakter untersuchen, unterteilen sie sich grob in drei Kategorien (vgl. Thaler 2011, S. 38 und 64):

1. Nur knapp über 6 % der Aufgaben stellt ein Problem dar, das keinen offensichtlichen Lösungsweg besitzt und nach einer neuen Strategie gesucht werden muss. Dabei wird mathematische Kreativität und mathematisches Verständnis gefordert.
2. Ein Viertel der Beispiele weist zumindest teilweisen Problemcharakter auf, das heißt die meisten Schülerinnen und Schüler stehen mit diesen Aufgaben vor einem Problem und empfinden die Aufgaben nicht als Routineübungen.
3. Am häufigsten mit ca. 68% kommen Beispiele vor, die eine reine Routineübung darstellen. Für diese Beispiele müssen Formeln und bereits bekannte Mittel angewendet werden, um die Aufgabe zu lösen, und fallen somit nicht in den Bereich der Problemlösung.

Wir finden nur wenige reine Problemlösungsaufgaben in den Bildungsstandards, aber dafür eine „*nicht zu unterschätzender Anteil an Mischformen*. […] *Daraus wird ersichtlich, dass Problemlöseaufgaben auf jeden Fall eine Rolle im*

Mathematikunterricht und bei den Überprüfungen spielen sollen und ihre Vermittlung im Unterricht gefördert gehört.“ (Thaler 2011, S. 65)

Diese Aussage bezieht sich auch auf die Zentralmatura, die im Rahmen der zitierten Diplomarbeit ebenfalls untersucht wurde, und bestärkt somit auch die Relevanz der Problemlösungskompetenz als Unterrichtsziel, welches die Schülerinnen und Schüler in der achten Schulstufe erlangen sollten.

3.2.3. Wie soll Problemlösen im Mathematikunterricht durchgeführt werden?

> *„Wenn es den in Mathematik geistig weniger beweglichen Lernenden gelingt, geeignete Problemlösungsstrategien (Heurismen) zu erlernen und flexibel anzuwenden, können von ihnen in begrenzten Themenbereichen ähnliche Problemlöseergebnisse erzielt werden wie von den intuitiven Problemlösern.“*

Diese Hypothese steht im Vordergrund der Motivation für die Lehrerinnen und Lehrer, einen guten, problemlösungsorientierten Unterricht zu gestalten. Sie stammt aus Bruder & Collet (2011, S. 36) und wird von ihnen als empirisch bestätigt ausgewiesen. Lehrpersonen können somit davon ausgehen, dass Problemlösen gelernt werden kann und versucht werden sollte, Schülerinnen und Schüler mit Schwächen beim Lösen von Problemen schrittweise zu unterstützen.

Voraussetzungen für einen guten problemorientierten Unterricht

Bevor wir hier genauer auf den Unterricht eingehen, möchte ich einige Voraussetzungen diskutieren, die in eine problemorientierte Unterrichtsplanung eingehen sollten. Problemlösen sollte für die Schülerinnen und Schüler eine *aktive* Tätigkeit im Unterricht darstellen. Der Schwierigkeitsgrad und die Lösungsaussicht sollten so abgestimmt sein, dass ein Großteil der Kinder die Aufgabe lösen kann und somit ein Erfolgserlebnis haben (vgl. Leuders 2003, S. 130 und Tietze et al. 1997, S.

113). Dieses Erfolgserlebnis wird in Bruder & Collet (2011, S. 34 – 35) als **Heureka-Effekt**[4] (Heureka – ich hab´s!) bezeichnet und geht zurück auf den griechischen Gelehrten Archimedes, der nach erfolgreicher Lösung eines Problems diesen Ausspruch getätigt haben soll. Erfahren Schülerinnen und Schüler dieses Glücksgefühl, gehen sie die Probleme danach mit mehr Motivation und Zuversicht an. Um es den Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, Probleme selbstständig lösen zu können, sollte der Lehrer bzw. die Lehrerin die Kinder mit *individuell* schwierigen Aufgaben konfrontieren. Dadurch vermeidet man eine Ablehnung oder Frustration bei misslungenen Lösungsversuchen. Dabei ist es wichtig, diesen Ansatz mit der bereits erwähnten Vorstellung der „Zone der nächsten Entwicklung" zu vergleichen, welche vom tatsächlichen Entwicklungsstand der Schülerinnen und Schüler und dem daraus resultierenden Potential ausgeht. Aufgaben sollten am Anfang so gestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler diese ohne Hilfestellungen selbstständig lösen können, das heißt, sie sollten anfangs Heurismen verlangen, die dem individuellen Anforderungsprofil der Schülerinnen und Schüler entsprechen. Erst im zweiten Schritt sollten die Kinder mit komplexeren Heurismen und Aufgaben konfrontiert werden. Dabei fungiert der Lehrer oder die Lehrerin als Wegweiser/in und gibt durch gezielte Informationen und Hilfestellungen den Weg vor (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 113).

Weitere wichtige Aspekte sind unter anderem **offene Aufgabenformate**, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig wählen können, welchen Weg sie einschlagen und **Automatisierungsprozesse der Heurismen**, die entscheidend zum Erlernen des Problemlösens beitragen.

Bestimmte Aufgabenformate haben klare Ausgangsbedingungen und ein vorgegebenes Ziel. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler liegt dabei nur darin, den gewünschten Weg, der zuvor von der Lehrerin oder dem Lehrer vorgezeigt wurde, vom Start bis zum Ziel zu verfolgen. Dieses Aufgabenformat wird als **geschlossen** bezeichnet. Nach Leuders (2003, S. 128 und 147) sollten diese Aufgaben „geöffnet" werden, um verschiedene Interpretationen und Lösungswege zuzulassen. Dadurch wird den Schülerinnen und Schülern einerseits ermöglicht, sich kreativ zu entfalten, d. h. eigene

---

[4] Danach wurde die Wissenschaftsdisziplin, die sich mit Methoden der Problemlösung auseinandersetzt, benannt: Heuristik.

Wege einzuschlagen, und andererseits bieten offene Aufgaben die Option, unterschiedlich schwere und komplexe Lösungsansätze zuzulassen, die je nach Schülerin oder Schüler entsprechen.

Ein mögliches Beispiel dazu finden wir in *Erlebnis Arithmetik* von Timo Leuders (2010).

> *„Erkundung 3.1: Wie gut kennen Sie eigentlich Quadratzahlen? Sicher, die Folge der Quadratzahlen ist Ihnen hinlänglich vertraut:*
>
> $$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$$
>
> *Aber steckt in dieser Zahlenliste noch mehr als die Tatsache, dass es Quadrate sind? Gibt es noch mehr Strukturen, Muster und Zusammenhänge? […]“* (Leuders 2010, S. 41)

Diese Aufgabe fordert dazu auf, unterschiedliche Strukturen zu finden, ohne festzulegen, welche das sind. Je nach Interesse und Durchhaltevermögen können einige Muster entdeckt werden, die in Kapitel 4.2.5. noch genauer behandelt werden. Falls dabei Muster gefunden werden, sollten die Schülerinnen und Schüler auch versuchen, diese zu erklären und zu begründen.

Die einfachste Art selbst Aufgaben zu erstellen, die ein offenes Antwortformat haben, ist **Öffnen durch Weglassen**. Dadurch können mehrere Lösungswege und Interpretationen zugelassen werden und die Schülerinnen und Schüler können sich kreativ entfalten. Dazu möchte ich ein Beispiel anführen:

> *Ein Kinobesitzer will am ruhigen Montag Kunden anlocken. Daher bietet er an diesem Tag alle Karten zu 3 € statt zu 8 € an. Statt der üblichen 30 Besucher kommen 50. Hat sich die Aktion gelohnt?*

Durch Öffnen dieser Aufgabe erhalten wir:

> *Ein Kinobesitzer will am ruhigen Montag Kunden anlocken. Üblicherweise kommen nur ca. 30 Besucher. Was kann er tun?* (Leuders 2003, S. 128)

4-Phasenmodell für einen guten problemorientierten Unterricht

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen wird im Folgenden ein Unterrichtskonzept aus Bruder & Collet (2011, S. 114) in Form eines 4-Phasenmodells vorgestellt:

1. **Gewöhnen an Heurismen** und an ein strukturiertes Vorgehen beim Problemlösen über das Verwenden typischer Fragestellungen in einem reflektierten Problemlöseprozess durch die Lehrkraft
2. **Bewusstmachen heuristischer Elemente und Einsichten in deren Wirksamkeit** anhand von überzeugenden Musterbeispielen
3. **Zeitweilige bewusste Übungen und Anwendungen** der neu kennengelernten Heurismen anhand unterschiedlich schwieriger Aufgaben
4. **Schrittweise bewusste Kontexterweiterung für den Einsatz der Heurismen und zunehmend unterbewusste Nutzung**

Auch andere Autoren wie Mason (1992), Leuders (2003) und Tietze et al. (1997) verwenden ähnliche Phasen zum Erlernen der Heurismen. Diese gehen größtenteils auf Polya, den „Urvater" des Problemlösens, zurück. Dessen Einteilung und Aufbau wurde bereits in Kapitel 3.1.3. „Wie löse ich ein Problem?" kurz beschrieben. In dieser Arbeit wird das 4-Phasenmodell nach Bruder & Collet (2011) genauer dargestellt und für ein Unterrichtskonzept zur Einführung der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung" herangezogen. Wie dieser Unterricht aussehen kann und wie die einzelnen Phasen konkret gemacht werden können, wird im Kapitel 4.1. mittels eines didaktischen Konzepts und anhand einiger Beispiele im Bereich der Mustererkennung erarbeitet. An dieser Stelle sollte noch genauer ausgeführt werden, was allgemein mit den vier Phasen erreicht werden soll. Dazu finden wir in Bruder & Collet (2011) nähere Erläuterungen zu den einzelnen Phasen des Unterrichtskonzeptes, welche ich zusammengefasst wiedergeben möchte.

In der ersten Phase versucht die Lehrkraft als Vorbild aufzutreten und die Schülerinnen und Schüler an gewisse Arbeitsmethoden heranzuführen. Dafür stellen sich die Schülerinnen und Schüler bestimmte Fragen, wie „*Worum geht es?*" oder „*Was wissen wir schon im Zusammenhang mit diesem Problem?"*. Dadurch sollte erreicht werden, dass die Aufgabe verstanden wird und klar ist, was zur Lösung des Problems beitragen kann. Zu einem späteren Zeitpunkt, an dem bereits Methoden und Heurismen bekannt sind, können weitere Fragen von der Lehrerin oder dem Lehrer ergänzt werden:

- *Welche Methoden und Techniken stehen uns zur Verfügung?*
- *Welche eignen sich für das Problem?*
- *Wie kann man die gegebene Situation strukturieren?*

Durch wiederholte Verwendung der Fragen durch die Lehrkraft können die Schülerinnen und Schüler diese Herangehensweise verinnerlichen und auch selbstständig anwenden lernen.

Anschließend folgt der Prozess der Problemlösung, der individuell an das Problem angepasst werden sollte. Dafür sind unter anderem Schritte, wie bereits in Kapitel 3.1.3. „Wie löse ich ein Problem?“ erwähnt, notwendig.

Nach dem selbstständigen Herangehen an ein Problem sollten die Schülerinnen und Schüler gemeinsam im Klassenverband oder in Gruppen zunächst festhalten, welche Lösungswege und Lösungsversuche vorgekommen sind. Dann sollte wieder durch gezielte Fragen der Lehrerin oder des Lehrers herausgefunden werden, wie der Lernzuwachs dieser Aufgabe zu charakterisieren ist. Diese Fragen sollten wie zu Beginn der Aufgabe ein bestimmtes Handlungsmuster bereitstellen, auf welches die Schülerinnen und Schüler zurückgreifen können.

- *Welche mathematischen Inhalte haben uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?*
- *Welche Strategien waren nützlich?*
- *Was war neu für uns?*
- *Welche Fragen sind offen geblieben?*
- *Gibt es eine (eindeutige) Lösung für dieses Problem?*
- *Geht es auch einfacher?*

Diese Reflexionsphase bedarf gerade zu Beginn einer Unterstützung durch die Lehrerin oder den Lehrer. Langfristiges Ziel sollte aber sein, dass die Schülerinnen und Schüler lernen selbstständig die Fragen zu beantworten und relevante neue Fragen zu finden.

In der zweiten Phase sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit den Problemlösungsstrategien selbst auseinander setzen. Dazu muss von der Lehrkraft versucht werden, anhand von geeigneten Musterbeispielen die *Notwendigkeit* derselben und auch die *Machbarkeit* klar herauszuheben. Das sind Aufgaben, die leicht einsichtig sind und keine großen Vorkenntnisse verlangen. Als Beispiel möchte ich hier auf die Aufgabe 3.5. aus dem nächsten Kapitel 3.3. „Mustererkennung“ verweisen, bei der die ersten 100 Zahlen addiert werden sollen. Dabei kann man gut erkennen, dass das Verwenden der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ einen entscheidenden Vorteil bringt (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 116 – 117 und Tietze et al. 1997, S. 113).

Als weiteres Beispiel möchte ich das Mauersteinbeispiel aus Bruder & Collet (2011, S. 38) erwähnen.

Aufgabe 3.2. **Mauersteinbeispiel**

„Finden Sie in einer Minute möglichst viele verschiedene Verwendungsmöglichkeiten für einen Mauerstein!“

Bei diesem Beispiel sollen die Lernenden möglichst viele Möglichkeiten aufschreiben, ohne lange darüber nachzudenken. Dabei werden große Unterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern auftauchen. Dann wird ein Zugang vorgestellt, bei dem die Eigenschaften des zentralen Gegenstandes festgehalten werden. Ein Stein ist zum Beispiel schwer, hat eine bestimmte Form und besteht aus einem bestimmten Material. Sein ursprünglicher Verwendungszweck ist ebenfalls von Bedeutung und ergibt weitere Verwendungsmöglichkeiten. Damit haben wir zu Beginn festgehalten, was uns zur Verfügung steht und was von dem Objekt gegeben ist. Die verwendete Strategie, die dabei benutzt wird nennt man „Vorwärtsarbeiten“.

Ersetzt die Lehrkraft nun den Mauerstein durch ein anderes Objekt, wird es durch die Anwendung der Strategie „Vorwärtsarbeiten“ einigen leichter fallen, Verwendungsmöglichkeiten zu finden. Manche, die beim ersten Mal viele Möglichkeiten gefunden haben, könnten nun weniger erreichen. Diese hindert die Anwendung der Strategie offenbar, intuitiv gehen sie schneller an das Problem heran. Bei komplexeren Aufgaben wird es aber auch für diese Schülerinnen und Schüler notwendig sein, Strategien zum Erreichen des Zieles einzusetzen (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 39 – 41).

Im Unterricht kann so die Notwendigkeit von Problemlösungsstrategien gezeigt werden. Diese Strategien müssen anschließend *einzeln und explizit* erlernt werden. Dabei ist auch die Reihenfolge von Bedeutung. Die Lehrerin oder der Lehrer sollte zuerst einfachere, intuitivere Methoden wie Vorwärtsarbeiten vorstellen und erklären und erst

Schritt für Schritt zu komplexen Vorgangsweisen weitergehen. Dabei sollte bei möglichst vielen Schülerinnen und Schülern der oben erwähnte Heureka-Effekt eintreten. Der erlernten Strategie wird abschließend ein prägender Name gegeben und wie in der ersten Phase ein Fragenprofil zugeordnet, welches zusätzlich mit Musterbeispielen unterstützt werden kann.

Diese Profile kann der Lehrer oder die Lehrerin auch in Form einer gestuften Hilfestellung vorbereiten, die die Schülerinnen und Schüler je nach Wissensstand heranziehen können. Dadurch wird erreicht, dass die Schülerinnen und Schüler, die nicht die notwendigen Vorkenntnisse besitzen und diese auch nicht rekonstruieren können, Rückhalt haben. Durch das Nachschlagen in einer Kartei wird die Recherche bewusster, als wenn sie in ihrem Heft nur ein paar Seiten zurückschauen (vgl. Leuders 2003, S. 130).

Weiters ist wichtig, dass die Musteraufgaben allen Schülerinnen und Schülern gestellt werden. Diese sollten dabei ausreichend Zeit erhalten, um sich individuell mit den Themen auseinander zu setzen, da bei anderen Unterrichtsszenarien wie fragend-entwickelndem Unterricht nicht alle Schülerinnen und Schüler aktiviert werden können, weil manche mehr Zeit als andere benötigen. Danach folgt eine weitere Auseinandersetzung mit dem Lernpartner oder in einer Gruppe, um Unklarheiten und Lösungsansätze zu diskutieren. Damit wird für die Lernenden eine Möglichkeit zur Rückfrage und Bestätigung durch Mitschülerinnen und Mitschüler gegeben, die Sicherheit auf dem Weg zu einer Lösung gibt. Abschließend folgt dann noch eine Diskussion der Kernideen in der Klasse, wo diese dann weiter ausgebaut und analysiert werden können. Dabei sollte das Interesse für den Lösungsweg (nicht die Lösung selbst) herausgehoben werden, da dieser für das Erlernen des Problemlösens von entscheidender Bedeutung ist (vgl. Leuders 2003, S. 130 und Bruder & Collet 2011, S. 119).

Um nachhaltig zu arbeiten, sollte die Lehrperson die zu lernende Strategie klar hervorheben und sprachlich knapp und verständlich formulieren, damit die Schülerinnen und Schüler immer darauf zurückgreifen können (vgl. Tietze et al. 1997, S. 113).

Die dritte Arbeitsphase dient zur Vertiefung der gelernten Strategien. Dabei sollten die Heurismen anhand geeigneter Aufgaben bewusst angewendet werden, um den Nutzen der Strategie auch über das einführende Musterbeispiel hinaus zu erkennen. Dafür sollten Beispiele mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden vorliegen. Auf der einen Seite könnten besonders schnelle und intuitive Schülerinnen und Schüler bei zu leichten Aufgaben den Nutzen der Strategien nicht erkennen, da für sie ein intuitiver Zugang (vgl. Aufgabe 3.2. Mauersteinbeispiel) eher erfolgsversprechend ist, der keine besondere Strategie erfordert. Andererseits könnte durch zu schwierige Aufgaben verhindert werden, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler Erfolgserlebnisse (Heureka-Effekt) haben.

Lehrerinnen oder Lehrer müssen verschiedene Schwierigkeitsgrade für die Schülerinnen und Schüler sichtbar machen. Das gelingt einerseits durch Kennzeichnung der Aufgaben oder andererseits durch Verwendung von binnendifferenzierenden Aufgabenformaten wie Blütenaufgaben, die mit jeder Teilaufgabe schwerer werden.

Zum Schluss dieser Phase sollten die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Heurismen anhand von Musterbeispielen kennen. Dabei ist vor allem die Vorgehensweise, eine bereits gelöste Aufgabe in Hinblick auf ihre Lösungsstrategie zu verbalisieren und in Bezug darauf ähnliche Aufgaben wiederzuerkennen, von Belang und nicht das Auswendig-Reproduzieren der Heurismen und der zu verwendenden Fragen (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 120).

In **der vierten** und letzten **Phase** liegt das Unterrichtsziel in der automatisierten, verständigen Nutzung der erlernten Heurismen. Dafür wird in der Schule aber relativ viel Zeit nötig sein, um möglichst viele Kinder zu dieser unterbewussten Nutzung zu führen. Ein weiteres anstrebenswertes Ziel ist die Transferfähigkeit der Schülerinnen und Schüler. Die Anwendungsgebiete der Heurismen müssen dabei schrittweise erweitert werden, um den Kindern nicht nur die Anwendung auf einem begrenzten Gebiet zu zeigen und so nicht bloß ein weiteres Rechenschema zu erhalten. Diese vierte Phase könnte sich bei der neuen Einführung einer Problemlösungsstrategie ergeben, bei der länger zurückliegende Heurismen wieder aufgegriffen werden (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 121).

3.3. Mustererkennung

In diesem Abschnitt möchte ich genauer auf die Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ eingehen. In der Mathematik werden Muster zum Lösen von Aufgaben in der Zahlentheorie und in vielen anderen Bereichen verwendet. Auch in der Schule kommen solche Aufgaben vor. Ein typisches Beispiel findet man in: Reichel & Humenberger (2009, S. 219).

Aufgabe 3.3. **Fibonacci- Folge**

> *„Die Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 … spielt in der Natur eine wichtig Rolle. Sie wurde nach dem italienischen Mathematiker Leonardo da Pisa (ca. 1170 – ca. 1250) „Fibonacci- Folge“ benannt.*
>
> 1. *Versuche zu erkennen, wie eine Zahl der Folge aus den vor ihr stehenden Zahlen entsteht! Wie lauten die nächsten drei Zahlen?*
> 2. *Berechne für je zwei aufeinander folgende Zahlen das Verhältnis der größeren zur kleineren Zahl! Du kannst erkennen: Je höher die Zahlen werden, desto mehr nähert sich dieses Verhältnis der Verhältniszahl 1,618… des „Goldenen Schnittes“.“*

Im ersten Teil der Aufgabe wird gefragt, welche drei Zahlen in der Fibonacci-Folge als nächstes kommen. Auf den ersten Blick können wir dafür keine Zahlen nennen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler das Muster dieser Folge zuerst suchen und erkennen. Wenn sie wissen, wie die Rechenvorschrift aussieht, die ihnen die nachfolgenden Zahlen ergibt, können sie die Aufgabe lösen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten das nächste Glied der Folge, indem sie die zwei davor stehenden Glieder addieren. Damit fällt es den Schülerinnen und Schülern leicht, die folgenden drei Zahlen zu bestimmen, da dafür nur mehr Additionen durchgeführt werden müssen (vgl. Posamentier & Krulik 1998, S. 37).

Dieser Typ von Aufgabenstellung verlangt zum Lösen das Erkennen eines Musters. Wir ordnen diesen Aufgabentyp in Kategorie 3 (vgl. Kapitel 3.2.2.). Es handelt sich um klar vorgegebene Regeln und Vorschriften, die bei jedem Beispiel dieser Art gleich bleiben werden.

Auch das nächste Beispiel gehört zu dieser Kategorie. Hier wird es den Schülerinnen und Schülern das Auffinden des Musters wesentlich schwerer fallen, da das gesuchte Muster komplexer ist. Bei dieser Aufgabe kann auch vermittelt werden, dass selbst wenn sie ein Muster gefunden haben und so die gesuchten Zahlen berechnen können, dieses jedoch nicht eindeutig sein muss. Es kann für eine Aufgabenstellung mehrere Muster mit mathematisch sinnvollen Erklärungen geben.

Aufgabe 3.4. **Folgen**

> *Betrachte die Folge* 1, 2, 4, 8, 16, … *Finde die nächste Zahl der Folge und Begründe deine Entscheidung.*

Als nächste Zahl könnte 31 oder 32 kommen. Für beide Zahlen können wir ein Muster angeben.

i. Zum Erzeugen der **Zahl 32** kann man das Muster $2^{(n-1)}$ verwenden:

Jede Zahl ist das Doppelte der vorhergehenden Zahl.	Oder anders interpretiert wird jede Zahl als Zweierpotenz gebildet.
$z_n = 2^{n-1}$	$z_n = 2^{n-1}$
1	$2^0 = 1$
$1 \cdot 2 = 2$	$2^1 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$	$2^2 = 4$
$4 \cdot 2 = 8$	$2^3 = 8$
…	…

ii. Für die **Zahl 31** kann man ein Muster im *Pascal´schen Dreieck* finden. Die Summe der Zahlen der Zeilen ergibt die gesuchte Folge. Ab der sechsten Zeile werden dabei aber nur noch die Zahlen rechts vom Strich addiert:

1	= 1
1 1	= 2
1 2 1	= 4
1 3 3 1	= 8
1 4 6 4 1	= 16
1 5 10 10 5 1	= 31
1 6 15 20 15 6 1	= 57
1 7 21 35 35 21 7 1	= 99
…	…

Das Pascal´sche Dreieck wird so gebildet, dass sich jeder Eintrag als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen ergibt. Dieses Zahlendreieck wurde nach dem Mathematiker *Blaise Pascal* benannt und beinhaltet auch wichtige Informationen aus der Kombinatorik (vgl. Leuders 2010, S. 20).

Diese Zahlenfolge repräsentiert die Aufteilung eines Kreises durch n Punkte auf der Kreislinie. Durch paarweises Verbinden der Punkte am Kreis wird dieser in Teilgebiete zerlegt. Dabei wird eine allgemeine Lage der Geraden angenommen, das heißt, keine drei Geraden oder mehr dürfen einander in einem Punkt schneiden (vgl. Posamentier & Krulik 1998, S. 38).

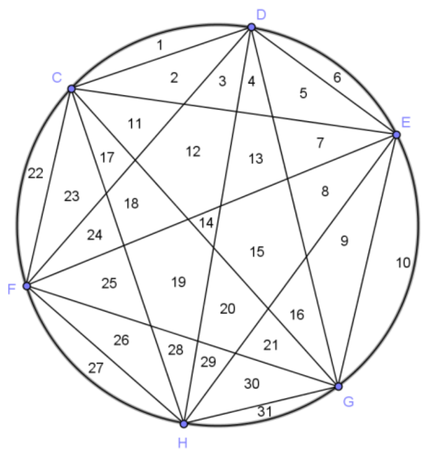


Abbildung 3.2.

In Abbildung 3.2. wird ein Kreis mit sechs Punkten auf der Kreislinie dargestellt. Dabei wird der Kreis in 31 Teilgebiete durch paarweises Verbinden dieser Punkte zerlegt, was genau der Summe der Einträge rechts vom Strich in der sechsten Zeile des Pascal´schen Dreiecks entspricht.

Bei diesen Beispielen war zum Lösen der Aufgabe immer das Erkennen eines Musters notwendig. Erst wenn eine Schülerin oder ein Schüler dieses Muster gefunden hat, kann er/sie das Problem lösen.

Bei manchen Aufgaben kann das Ergebnis auf verschiedene Weise erhalten werden. Dazu gibt es unterschiedliche Aufgabentypen, bei denen durch Mustererkennung ein wesentlich *leichterer und eleganterer Weg* eingeschlagen wird, als wenn die Aufgabe durch die traditionellen und gängigen Methoden gelöst wird (vgl. Posamentier & Krulik 1998, S. 37 – 38). Dieser Aufgabentyp hat bereits teilweisen Problemcharakter und liegt in der Kategorie 2 (vgl. Kapitel 3.2.2.). Schülerinnen und Schüler können je nach Geschick unterschiedliche Lösungswege einschlagen. Meist findet sich ein offensichtlicher Weg, der einfache aber langwierige Rechenarbeit nach sich zieht.

Aufgabe 3.5. **Gaußsumme**

Das wohl bekannteste Beispiel dazu finden wir im Leben des deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Eine Anekdote überliefert, dass Gauß im Alter von ca. neun Jahren (unterschiedliche Angaben) von seinem Lehrer *J. G. Büttner* die Aufgabe bekam, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren (unterschiedliche Angaben in der Literatur: auch 1 – 60; Strafaufgabe, …). Während seine Kollegen begannen, die Zahlen zu addieren, schrieb Gauß nach kurzer Zeit nur eine Zahl auf seine Schreibtafel und legte sie dem Lehrer vor. Dieser stellte verblüfft fest, dass er die richtige Zahl gefunden hatte: 5050. Damit war Gauß‘ mathematisches Genie offenbar.

Seine Klassenkollegen hatten Schritt für Schritt die Zahlen aufaddiert:

$$1 + 2 = 3, \qquad 3 + 3 = 6, \qquad 6 + 4 = 10, \qquad 10 + 5 = 15, \qquad \ldots$$

Diese gängige Methode führt zwar zum Ziel, benötigt aber viel Zeit, da die Schülerinnen und Schüler einen großen Rechenaufwand bewältigen müssen.

Gauß hingegen erkannte, dass aus jeweils zwei geschickt gewählten Zahlen die gleiche Summe entsteht. Die erste und die letzte sowie die zweite und die vorletzte usw. ergeben immer 101:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$4 + 97 = 101$$

$$\dots$$

$$49 + 52 = 101$$

$$50 + 51 = 101$$

Das ergibt 50 Paare zu je 101. Er musste somit nur die einfache Multiplikation

$$101 \cdot 50 = 5050$$

durchführen (vgl. Wußing 1976, S. 14 – 15).

Das Erkennen dieses Musters hat die Bewältigung der Aufgabe wesentlich einfacher gemacht als der herkömmliche Weg und lässt sich analog auf ähnliche Problemstellungen übertragen. Bei genauerer Betrachtung lässt sich dieses Muster auf die natürlichen Zahlen 1 bis n fortsetzen und ergibt dann die Gauß´sche Summenformel (auch „kleiner Gauß“ genannt).

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Bei diesem Lösungsweg, der von Gauß gefunden wurde, wird in der Musterfindung eine gerade Anzahl von Summanden verwendet. Es stellt sich somit die Frage, ob die Formel auch für ungerade Anzahlen stimmt.

Man kann diese Formel durch den Wechsel in eine geometrische Darstellung auch für ungerade n zeigen, worauf wir aber erst im Kapitel 4.2.1. eingehen werden.

Oft findet man auch Beispiele, die durch *Kombination von mehreren Lösungsstrategien* bewältigt werden können. Ein gutes Beispiel dafür findet man in Krulik & Rudnick (1996, S. 149 – 151). Diese Aufgabe stellt für Schülerinnen und Schüler ein Problem dar und gehört daher in die Kategorie 1 (vgl. Kapitel 3.2.2.). Es gibt keinen offensichtlichen Lösungsweg, den die Schülerinnen und Schüler einschlagen könnten. Sie müssen nach einer Strategie suchen, die sie verwenden können.

Aufgabe 3.6.

> *„Laura is training her white rabbit, Ghost, to climb a flight of 10 steps* [Treppe mit 10 Stufen]. *Ghost can hop up 1 or 2 steps each time he hops. He never hops down, only up. How many different ways can Ghost hop up the flight of 10 steps?"*

In diesem Beispiel sind die Zahlen 1, 2 und 10 beliebig gewählt und könnten ohne Änderung der Aufgabenstellung durch andere Zahlen ersetzt werden. Das heißt wir können dieses Problem auch mit einer geringeren Stufenanzahl lösen. Damit haben wir Punkt 4 *Solving a simpler, analogous problem* der Problemlösungsstrategien angewendet. Da die Stufenanzahl 10 beliebig gewählt werden kann, verringern wir diese zuerst auf 1 Stufe, und erhalten damit nur einen möglichen Weg. Dann erweitern wir die Stufenanzahl schrittweise und tragen diese in eine Tabelle ein. Dieser Prozess wird von Krulik & Rudnick *Reduce and Expand* bezeichnet und hängt bei der Lösungsfindung immer von einem Muster ab, das sich beim Erweitern erkennen lässt.

Wir erhöhen im Beispiel die Treppenanzahl und tragen die möglichen Wege in Tabelle 3.2. ein, bis wir daraus ein Muster erkennen, das sich für unsere Aufgabe verallgemeinern lässt.

Stufenanzahl	Anzahl der mögl. Wege	Mögl. Wege
1	1	1
2	2	1-1 2
3	3	1-1-1 1-2 2-1
4	5	1-1-1-1 2-1-1 2-2 1-2-1 1,1,2
5	8	1-1-1-1-1 2-2-1 2-1-1-1 2-1-2 1-2-1-1 1-2-2 1-1-2-1 1-1-1-2
6	13	
7	21	
8	34	
9	55	
10	89	

Tabelle 3.2.

Aus der Tabelle 3.2. können wir erkennen, dass in der Anzahl der möglichen Wege ein bestimmtes Muster steckt. Es handelt sich um die *Fibonacci-Folge,* die wir bereits aus Aufgabe 3.3. kennen. Damit man diese Folge aber auch sicher erkennt, muss man mehr als drei Stufen wählen, da man sonst auch eine andere, nicht zutreffende Folge finden könnte.

Wir haben damit 89 mögliche Wege, wie der Hase, Ghost, die Treppe hochkommen kann. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die Anwendung der *Fibonacci-Folge* auch richtig ist. Der Hase kann immer nur eine oder zwei Stufen nehmen. Wenn er auf der 5. Stufe steht, war er zuvor auf der dritten oder auf der vierten Stufe. Dadurch erhalten wir für die Möglichkeiten, um auf die fünfte Stufe zu kommen, die Summe der Möglichkeiten der vierten und der dritten Stufe.

Als Lehrer könnte man nun dieses Beispiel noch erweitern und die Schülerinnen und Schüler fragen, welches Ergebnis sie erhalten, wenn der Hase 1, 2 oder 3 Stufen springen kann. Wie würde sich dadurch das Ergebnis verändern? Durch diese weitere

Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler die Problemstellung erneut betrachten und die entscheidenden Schritte anwenden, um diese zu verallgemeinern. Dazu müssen sie eine Folge finden, die ähnlich wie die *Fibonacci- Folge* entsteht, nur dass die Summe aus den letzten drei Zahlen und nicht aus zwei Zahlen entsteht.

Zusammenfassend können wir hier zwei unterschiedliche Einteilungen in Kategorien erkennen. Erstens können die Aufgaben zur Mustererkennung in die drei Kategorien aus Kapitel 3.2.2. eingeteilt werden, wobei dabei der Focus eher auf den Bildungsstandards liegt. Zweitens kann die Eingliederung in Aufgabentypen der Mustererkennung gemäß diesem Abschnitt erfolgen. Es wurden *drei Aufgabentypen* behandelt:

1. Aufgabenstellungen, die zum Lösen das Erkennen eines Musters verlangen.
2. Aufgabenstellungen, die durch das Erkennen eines Musters einfacher und eleganter gelöst werden können als mit herkömmlichen Rechenmethoden.
3. Aufgabenstellungen, die mit der Methode *reduce, expand and find a pattern* gelöst werden.

4. UNTERRICHTSBEISPIELE ZUR MUSTERERKENNUNG ALS PROBLEMLÖSUNGSSTRATEGIE

4.1. Unterrichtskonzept

In diesem Abschnitt wird allgemein ein *didaktisches Konzept* für die Einführung der „Mustererkennung“ als Problemlösungsstrategie vorgestellt, welches größtenteils dem 4-Phasenmodell nach Bruder & Collet folgt, welches in Kapitel 3.2.3. näher erläutert wurde. Diese Theorie beschreibt allgemein den Prozess, der beim Erlernen von Problemlösungsstrategien zu berücksichtigen ist.

Im Laufe dieser Unterrichtssequenzen lernen die Schülerinnen und Schüler ein Handlungsmuster kennen, welches die Herangehensweise an Problemstellungen erleichtert. Schrittweise wird ihnen dieses Muster näher gebracht. Zuerst beginnt der Lehrer bzw. die Lehrerin, das Handlungsmuster an der Tafel bei ersten Beispielen einzusetzen. Nach und nach wird die Lehrkraft bei weiteren Aufgaben in den Hintergrund treten, bis die Schülerinnen und Schüler am Ende die selbstständige Anwendung dieses Handlungsmusters größtenteils beherrschen.

Das Unterrichtskonzept gliedert sich in vier Abschnitte. Die zeitliche Einteilung der einzelnen Sequenzen des Unterrichtskonzepts hängt stark von den verwendeten Methoden des Lehrers bzw. der Lehrerin ab. Durch problemorientiertes Unterrichten soll versucht werden, selbstständiges Arbeiten zu fördern und zu ermöglichen, jedoch benötigt diese Methode meist mehr Zeit im Unterricht.

Bei den verwendeten Beispielen werden viele Inhalte der Unterstufe verwendet. Dabei können bereits erste Problemlösungsaufgaben durchgeführt werden. Die Erarbeitung der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ kann am Ende der Unterstufe oder Anfang der Oberstufe erfolgen.

Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler

- Problem und Problemlösung wurde im Unterricht ausreichend erklärt.

Die Begriffe „Problem“ und „Problemlösung“ haben in der Mathematik eine besondere Bedeutung, die den Schülerinnen und Schülern erklärt werden muss. Um das zu veranschaulichen kann die Lehrkraft Beispiele verwenden, die aufzeigen, wodurch eine Aufgabe Problemcharakter erhält. Ein dafür adäquates Beispiel ist Aufgabe 3.1. „Mischverhältnis“, welches in Kapitel 3.1. präsentiert wurde. Bei dieser Aufgabe gibt es keinen vorgegebenen Weg, wie die Schülerinnen und Schüler zum Ergebnis kommen können. Ein Großteil von ihnen wird versuchen, die Aufgabe wie in Kapitel 3.1. zu lösen.

- Einzelne Heurismen wurden bereits vorgestellt.

Da Mustererkennung eine der schwierigeren Heurismen ist, sollte diese nicht zu Beginn der problemorientierten Unterrichtseinheiten eingeführt werden. Welche Strategien vor der Mustererkennung bereits eingeführt werden, wird an dieser Stelle der Lehrerin oder dem Lehrer selbst überlassen. [5]

Um die Schülerinnen und Schüler an die Heurismen heranzuführen, eignen sich besonders offene Aufgabenstellungen, die den Voraussetzungen des Unterrichtkonzeptes nach Bruder & Collet (Kapitel 3.2.3.) vorgestellt wurden.

Im Wesentlichen beziehen sich die Unterrichtssequenzen aufeinander, so können die Ziele der einzelnen Unterrichtssequenzen gleichzeitig als Vorkenntnisse der folgenden Stunde aufgefasst werden.

4.1.1. Die Strategie bekannt machen!

i. Unterrichtsziele

- Die Schülerinnen und Schüler sollen ein strukturiertes Vorgehen bei Problemlösungen kennenlernen.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen die entscheidenden Schritte erkennen (Reflexion der Handlungen).

[5] Eine mögliche Reihenfolge der Einführung bieten Bruder und Collet (2011, S. 118).

ii. Zeitplanung der Unterrichtssequenz

Die Dauer der ersten Unterrichtsphase hängt davon ab, ob die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Problemlösungsstrategien bereits gewohnt sind. Das bedeutet, dass sie bereits mehrere Strategien bewusst einsetzen beziehungsweise auch kombinieren und weiterentwickeln können. Ist das der Fall, dann kann die erste Phase gekürzt durchgeführt werden, das heißt, es wird nur ein Teil einer Unterrichtseinheit in Anspruch genommen oder sogar übersprungen.

iii. Ablauf der Unterrichtssequenz

Zu Beginn der Unterrichtseinheit soll kurz wiederholt werden, was bereits über Problemlösungsstrategien bekannt ist. Dazu gehören auch Handlungsmuster, welche bei vorher erarbeiteten Heurismen erstellt wurden, sowie ein Fragenkatalog, der den Lernenden eine Stütze im weiteren Arbeiten bietet. Er beinhaltet *Leitfragen*, die dem Schüler oder der Schülerin das Problem verständlicher und bewusster machen sollten.

An dieser Stelle wird nun auch die Problemlösungsstrategie „Mustererkennung" ansetzen. Durch ein geeignetes Beispiel wird aufgezeigt, dass die bereits bekannten Methoden keine entscheidende Hilfe darstellen und daher versucht werden sollte, neue Wege auszuprobieren. Zur Orientierung sollte das erste Beispiel zur Mustererkennung von der Lehrerin oder dem Lehrer frontal in einer Interaktion zwischen den Lernenden und der Lehrkraft vorgetragen werden. Die Lehrkraft kann damit ein neues Handlungsmuster zur Orientierung anbieten. Eine mögliche Aufgabe für den Einstieg ist das bereits erwähnte Summenbeispiel von Gauß (vgl. Aufgabe 3.5. und Aufgabe 4.6.).

Zu Beginn der Aufgabe ist es wichtig, diese zu verstehen. Daher sollte der Lehrer bzw. die Lehrerin einen Schüler oder eine Schülerin bitten, die Aufgabe in eigenen Worten zu erklären. Als mögliche Stütze könnte die Lehrperson folgende Leitfragen nach der Reihe verwenden:

1. Leitfrage: *Worum geht es?*
2. Leitfrage: *Was wissen wir schon im Zusammenhang mit dem Problem?*
3. Leitfrage: *Welche Methoden und Techniken stehen zur Verfügung und eignen sich für das Problem?*

4. Leitfrage: Wie kann man die gegebene Situation strukturieren?[6]

Der Lehrer oder die Lehrerin bearbeitet gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die erste Aufgabe. Die Gaußaufgabe kann zunächst mit Hilfe von geometrischen Mustern, wie in Kapitel 4.2.1. gezeigt wird, gelöst werden. Anschließend wird die Aufgabe gemeinsam besprochen, um festzuhalten, welche Schritte zur Lösung beigetragen haben und wo bei diesen Aufgaben der Lernzuwachs festzustellen ist. Dafür können weitere Leitfragen verwendet werden:

5. Leitfrage: Welche mathematischen Inhalte haben uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?

6. Leitfrage: Welche Strategien waren nützlich für uns?

7. Leitfrage: Was war neu für uns?

8. Leitfrage: Welche Fragen sind offen geblieben?[7]

Um den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, dass auch andere Lösungswege existieren können, kann die Aufgabe durch eine andere Anordnung der Zahlen gelöst werden (vgl. Lösung der Aufgabe 3.5.).

Als zweite Aufgabe könnte von der Lehrerin oder dem Lehrer ein klassisches Beispiel aus dem Bereich „Folgen und Reihen“ gezeigt werden, um einen weiteren Bereich vorzustellen, in dem Muster zur Lösung von Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 4.1.

> *Betrachte die Folge* $1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ \ldots$
>
> *Versuche herauszufinden, wie die Folgeglieder gebildet werden und bestimme damit die nächsten drei Folgeglieder.*

Welche Muster dabei verwendet werden können, wurde bereits in Kapitel 3.3. gezeigt.

---

[6] Diese Leitfragen können in Bruder & Collet (2011, S. 115) nachgelesen werden.
[7] Siehe: Bruder & Collet (2011, S. 115).

4.1.2. Mustererkennung als Arbeitserleichterung

Bei vielen Aufgaben kann durch das Finden eines Musters ein wesentlich schnellerer und eleganterer Lösungsweg gefunden werden. Dieser Aufgabentyp zeigt den Schülerinnen und Schülern die Nützlichkeit der Strategie und soll in dieser Unterrichtssequenz eingesetzt und reflektiert werden.

i. Unterrichtsziele

- Die Schülerinnen und Schüler sollen die Wirksamkeit der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ verstehen.
- Einsicht über die Notwendigkeit und Nützlichkeit derselben soll erreicht werden.
- Möglichst alle Schülerinnen und Schüler sollen ein Erfolgserlebnis haben (Heureka-Effekt).

ii. Zeitplanung der Unterrichtssequenz

Im ersten Teil dieser Sequenz sollten die Schülerinnen und Schüler versuchen, selbstständig an ein Problem mit Hilfe der Mustererkennung heranzugehen. Dafür wird eine Unterrichtseinheit eingeplant.

Im zweiten Teil steht das Bewusstmachen über die Nützlichkeit und Notwendigkeit dieser Problemlösungsstrategie bei der Reflexion im Vordergrund. Der Rest der Stunde dient der Herausarbeitung einer speziellen Gliederung der neuen Strategie „Mustererkennung“.

iii. Ablauf der Unterrichtssequenz

Als **Einstieg** in diese Phase wird den Schülerinnen und Schülern eine Aufgabe gestellt, die sie mit den bereits bekannten Mustern lösen können.

Aufgabe 4.2. **Summe der geraden Zahlen**

Berechne die Summe der ersten 100 geraden Zahlen mit unterschiedlichen Mustern:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 198 + 200$$

Bei dieser Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Ansätze wählen bzw. von der Lehrerin oder dem Lehrer unterschiedliche Hilfestellungen erhalten:

- *Geometrische Muster* wie in Abbildung 4.1. für die ersten *n* Zahlen verwenden:

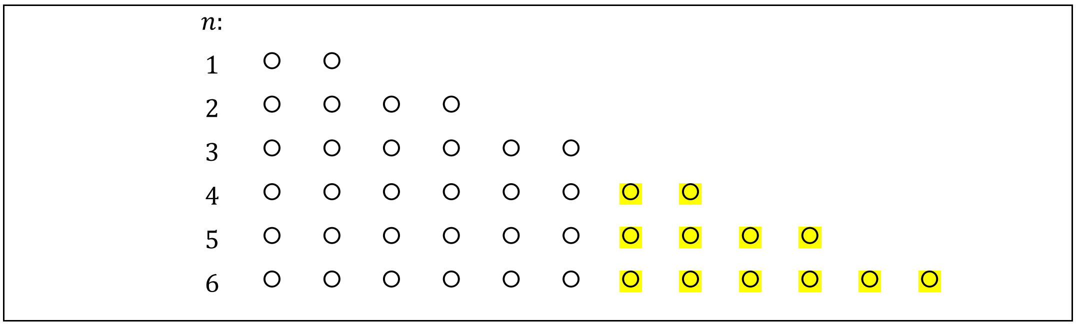


Abbildung 4.1. Darstellung der ersten sechs geraden Zahlen in Form eines Punktmusters.

Durch Umordnen des Punktmusters der ersten sechs geraden Zahlen erhält man Abbildung 4.2.:

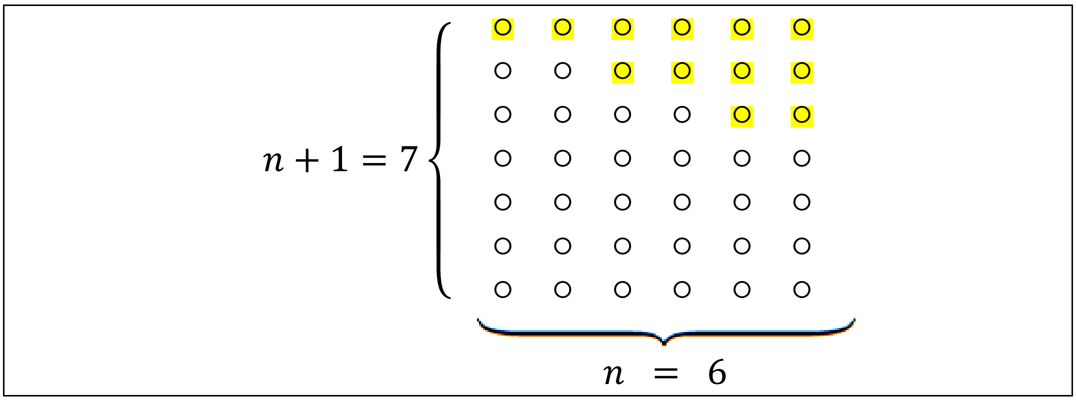


Abbildung 4.2. Darstellung in Form eines Rechtecks.

Bei der Anordnung der Punkte in Form einer Pyramide wie in Abbildung 4.3. kann diese in zwei Dreiecke aus den natürlichen Zahlen aufgeteilt werden:

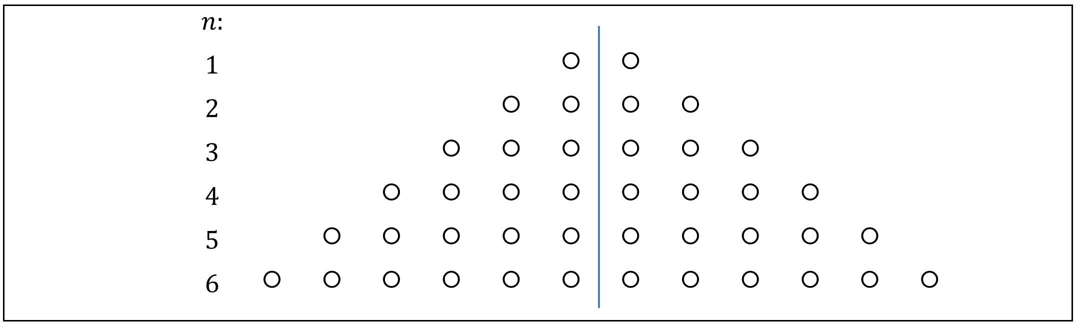


Abbildung 4.3. Darstellung in Form einer Pyramide.

- *Neu anordnen*: Je zwei Zahlen ergeben dieselbe Summe!

$$2 + 200 = 202$$

$$4 + 198 = 202$$

$$6 + 196 = 202$$

$$\vdots$$

- *Erweitern*: Die Zahlen einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge aufschreiben:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 2 & + & 4 & + & 6 & + & 8 & + & 10 & + & 12 & + \cdots + & 196 & + & 198 & + & 200 \\ 200 & + & 198 & + & 196 & + & 194 & + & 192 & + & 190 & + \cdots + & 6 & + & 4 & + & 2 \end{array}$$

  Wenn man die untereinander stehenden Zahlen addiert, erhält man 100-mal die Zahl 202. Da jeder Summand doppelt vorkommt, muss das Ergebnis halbiert werden:

$$\frac{100 \cdot 202}{2} = 10100.$$

- *Herausheben*: Aus der Summe der geraden Zahlen kann aus jeder Zahl der Faktor 2 herausgehoben werden!

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 198 + 200 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 99 + 100)$$

  Damit erhält man die Aufgabe der letzten Stunde und kann dafür die gefundene Formel $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ verwenden.

Nach dem Lösen dieser Aufgabe folgt ein Vergleich in Partnerarbeit oder Kleingruppe, wo Unklarheiten und Lösungsmöglichkeiten besprochen werden können. Anhand dieses Beispiels können die Schülerinnen und Schüler erklären, welche Ansätze und Muster aus der letzten Stunde für die Lösung dieser Aufgabe verwendet wurden.

Bei der anschließenden Reflexion im Plenum sollte der Lehrer oder die Lehrerin die Lernenden bewusst auf die Leitfragen verweisen. Dazu sollten sie unterschiedliche

Lösungswege vorstellen. Dabei können weitere Leitfragen, die zum Lösen des Problems hilfreich waren, aufgeschrieben werden:

9. Leitfrage: *Kannst du die Aufgabe anders darstellen (Punktmuster, Skizze, ...)?*

10. Leitfrage: *Wie können die Zahlen anderes angeordnet werden?*

Im **zweiten Teil** dieser Unterrichtssequenz liegt das Hauptaugenmerk auf der *Nützlichkeit der Strategie*. Dazu können folgende Aufgaben verwendet werden:

Aufgabe 4.3.

Berechne die Summe der Reihe: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}$ [8]

Der herkömmliche Weg diese Aufgabe zu lösen wäre jeden Bruch durch Erweitern auf gleichen Nenner zu bringen und anschließend zu addieren. Diese Methode würde zwar die Rechenfertigkeiten mit Brüchen trainieren, dafür aber sehr viel Zeit in Anspruch nehmen sowie ein größeres Risiko für Rechenfehler mit sich ziehen. Wie diese Aufgabe mit Hilfe eines Musters gelöst werden kann, wird in Kapitel 4.2.2. gezeigt. Die Lehrerin oder der Lehrer kann an dieser Stelle erneut Hilfestellungen anbieten. Mögliche Leitfragen wären zum Beispiel:

11. Leitfrage: *Obige Summanden haben eine besonders auffällige Gestalt. Erlaubt dieses Muster eine andere Darstellung?* [9]

12. Leitfrage: *In welche Teile kann die Aufgabe zerlegt werden, um eine schrittweise Bearbeitung zu ermöglichen?*

[8] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 59-60).

[9] Vergleiche dazu den ersten Lösungsweg der Aufgabe 4.11. in Kapitel 4.2.2. Dabei wird eine bereits bekannte Formel zum Umformen verwendet.

Aufgabe 4.4.

Wir tragen die Zahlen von 2 bis 1000 in Tabelle 4.1. ein. In welcher Spalte steht die Zahl 1000?[10]

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
	2		3		4		5
9		8		7		6	
	10		11		12		13
17		16		15		14	
	18		19		20		21
25		24		23		22	
	26		27		28		29
				…		30	

Tabelle 4.1. Darstellung der natürlichen Zahlen von 2 bis 1000

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, was die Einträge in einer Spalte gemeinsam haben. Sie könnten zwar wieder alle Zahlen aufschreiben, aber es wird wesentlich leichter gehen, wenn ein Muster unter den Zahlen gesucht wird (Lösung siehe Kapitel 4.2.3.).

Der Auftrag an die Schülerinnen und Schüler sollte zunächst nur die Lösung einer der beiden Aufgaben sein. Die Lernenden sollen versuchen, die Lösung zu finden und die Lehrkraft kann dabei individuelle Hilfestellungen anbieten, wobei die selbstständige Anwendung des Handlungsmusters im Vordergrund stehen sollte.

Bei der Reflexion kann zur Untermauerung der Nützlichkeit gefragt werden, ob das Anwenden einer Lösungsstrategie gewinnbringend war und wie sich dieser Nutzen geäußert hat. Der Fragenkatalog wird dann mit zusätzlichen Fragen über Mustererkennung erweitert.

[10] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 53-54).

4.1.3. Übungen

i. Unterrichtsziele

- Die Schülerinnen und Schüler beherrschen die Anwendung der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ für ausgewählte Musteraufgaben aus verschiedenen Bereichen der Mathematik.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen in Hinblick darauf ähnliche Aufgaben als solche und können bereits gelöste Aufgaben ebenfalls darauf bezogen verbalisieren und erklären.

ii. Zeitplanung der Unterrichtssequenz

Zum Erlernen der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ in unterschiedlichen Gebieten wird eine Übungsphase von mehreren Stunden benötigt. Um möglichst viele Bereiche abzudecken, sollen Aufgaben aus allen Handlungsbereichen bearbeitet werden.

iii. Ablauf der Unterrichtssequenz

Es werden den Schülerinnen und Schülern mehrere Musteraufgaben aus Kapitel 4.2. vorgelegt, wobei der Lehrer oder die Lehrerin darauf achten muss, dass diese Aufgaben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade haben. Diese Musteraufgaben sollen nun weitgehend von allen Schülerinnen und Schülern selbstständig gelöst werden. Dadurch können sie unterschiedlich bevorzugte Zugänge selbst erkunden und werden nicht durch andere Vorschläge vom individuellen Weg abgebracht.

Beispiele, die nicht von den Schülerinnen und Schülern gelöst werden können, benötigen demzufolge noch zusätzliche individuelle Hilfestellungen der Lehrkraft, da die Schülerinnen und Schüler Aufgaben unterschiedlich auffassen. Diese Hilfestellungen können von der Lehrkraft verbal vermittelt oder auf Zetteln auf einem Tisch platziert werden.

Weiters könnten die Schülerinnen und Schüler auch in Experten- bzw. Expertinnengruppen eingeteilt werden, die die Informationen vorstellen und sich dabei gegenseitig Hilfe anbieten.

Als weitere Übungsgelegenheit sollen den Schülerinnen und Schülern auch Hausübungen gegeben werden, da dabei ein selbstständiges Arbeiten erforderlich ist.

4.1.4. Vertiefen & Erweitern

Mustererkennung spielt in vielen Bereichen der Mathematik eine Rolle und kann in der Folge dieser Unterrichtssequenzen auch in anderen Bereichen angewendet werden. Einerseits kann beim Aufbau der Zahlenräume wie im zweiten Kapitel und andererseits bei der Änderung von Darstellungen in Form von Beweisen oder Erklärungen auf Muster verwiesen werden. Auch diese Bereiche können in der letzten Unterrichtssequenz mit einfließen, obwohl sie nicht direkt mit Problemlösungsstrategien zu tun haben.

i. Unterrichtsziele

- Die Schülerinnen und Schüler erlernen eine unterbewusste verständige Nutzung der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“.
- Das Anwendungsgebiet der Mustererkennung wird schrittweise erweitert.

ii. Zeitplanung der Unterrichtssequenz

Die unterbewusste Nutzung der heuristischen Strategien bedarf einer längeren regelmäßigen Auseinandersetzung mit der Thematik, wobei zur dritten Unterrichtseinheit ein zeitlicher Abstand eingehalten werden sollte.

iii. Ablauf der Unterrichtssequenz

Hierbei handelt es sich keineswegs um Unterrichtseinheiten, die nur zum Thema Mustererkennung abgehalten werden. Der Lehrer oder die Lehrerin versucht mit Hilfe von weiterführenden Beispielen (wie Aufgabe 4.7.: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen) den Schülerinnen und Schülern weitere Anwendungsgebiete der Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ zu präsentieren.

Weiters können Aufgaben gelöst werden, die mehrere Strategien benötigen. Die Schülerinnen und Schüler müssten dafür die neu erlernte Strategie mit anderen verbinden oder auf andere übertragen.

Wenn im Unterricht eine weitere neue Strategie erarbeitet wird, kann die Problemlösungsstrategie „Mustererkennung“ wieder aufgegriffen werden.

Diese Unterrichtsziele sind sehr hoch angesetzt und können keineswegs von allen Schülerinnen und Schülern erreicht werden. Diejenigen, die alle Ziele erreicht haben, werden zu immer besseren Problemlösern bzw. Problemlöserinnen.

4.2. Musteraufgaben aus verschiedenen Bereichen der Mathematik

Dieser Abschnitt behandelt unterschiedliche Gruppen von Aufgaben im Bereich der Mustererkennung. Diese werden in die vier Handlungsbereiche der Bildungsstandards eingeteilt, bestehend aus Darstellen & Modellbilden **[H1]**, Rechnen & Operieren **[H2]**, Interpretieren **[H3]** sowie Argumentieren & Begründen **[H4]**.

Weiters wird dabei auch noch eine andere Einteilung verwendet. Am Ende des Kapitels 3.3. haben wir unterschiedliche Formen von Aufgaben zur Mustererkennung erarbeitet. Es wurden drei Aufgabentypen definiert:

1. **[M1]** Zum Lösen der Aufgabe *muss ein Muster* gefunden werden.
2. **[M2]** Durch das Finden eines Musters kann die Aufgabe *schneller und eleganter* als mit den herkömmlichen Methoden gelöst werden.
3. **[M3]** Zum Lösen der Aufgabe wird die Methode *reduce, expand and find a pattern* angewendet (vgl. Aufgabe 3.6.).

Folglich werden den Beispielen jeweils ein Handlungsbereich und ein Aufgabentyp zugeordnet.

4.2.1. Darstellen und Modellbilden

> „[Dieser Handlungsbereich umfasst Tätigkeiten wie das] *Übertragen gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform. Modellbilden erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä.“* (Praxishandbuch für „Mathematik“, S. 10)

Diese Beschreibung beinhaltet Tätigkeiten, wie:

- Zeichnungen einfacher geometrischer Figuren und Körper anzufertigen
- alltagssprachliche Formulierungen in die Darstellung bzw. die Sprache der Mathematik zu übersetzen

- problemrelevante mathematische Zusammenhänge zu identifizieren und mathematisch darzustellen
- aus bekannten mathematischen Modellen neue Modelle zu entwickeln
- zwischen Darstellungen oder Darstellungsformen zu wechseln (tabellarisch, grafisch, symbolisch)

(vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 11 und Bildungsstandards: Baseline 2009, 3.1 Testfach Mathematik).

Aus dem Bereich der Mustererkennung fallen folgende Beispiele zumindest größtenteils in diesen Handlungsbereich:

i. Musteraufgaben H1 M1

Aufgabe 4.5. **Zahlenfolgen**

Finde die nächsten beiden Glieder der Folge:[11] $s_n = 1, 0, 2, 3, 3, 8, 4, 15, 5, \dots .$

Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler versuchen, in der Folge eine Rechnungsvorschrift zur Entwicklung weiterer Zahlen zu finden. Dafür müssen sie aber zuerst erkennen, dass dabei zwei Folgen ineinander verschachtelt sind. Sie müssen also die Folge in zwei Teilfolgen mit den geraden und ungeraden Folgegliedern aufteilen. Sie erhalten dadurch:

$$s_{ungerade} = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \dots$$

$$s_{gerade} = 0, \quad 3, \quad 8, \quad 15, \dots$$

Damit wird es den Schülerinnen und Schülern leichter fallen, eine Vorschrift zu finden und die nächsten beiden Zahlen anzugeben.

[11] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 61).

ii. Musteraufgaben H1 M2

Aufgabe 4.6. **Gaußsumme**

Berechne die Summe der ersten 100 natürlichen Zahle! Versuche eine andere Möglichkeit, als die Zahlen nach der Reihe zu addieren, zu entdecken!

Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler einen gegebenen Sachverhalt der Arithmetik in eine andere mathematische Darstellung übertragen, um somit einen schnelleren Lösungsweg zu erhalten.

Einerseits können die Schülerinnen und Schüler die gegebene Aufgabe in eine andere arithmetische Darstellung übertragen, sodass sie jeweils Zahlenpaare mit gleicher Summe erhalten. Nach dieser Vorgehensweise wurde die Aufgabe in Kapitel 3.3. gelöst.

Ein anderer Ansatz wäre durch eine geometrische Anordnung von Punkten in Form von Dreieckszahlen gegeben. Diese Methode hätte auch den Vorteil, dass sie sowohl für gerade Anzahlen, wie bei der ersten Methode, als auch für ungerade Anzahlen von Summanden die Summenformel bestätigt (vgl. Leuders 2010, S. 123).

Als Lösungsansatz stellen wir die ersten Zahlen in Form eines Punktmusters wie in Abbildung 4.4. dar. Dann erhalten wir:

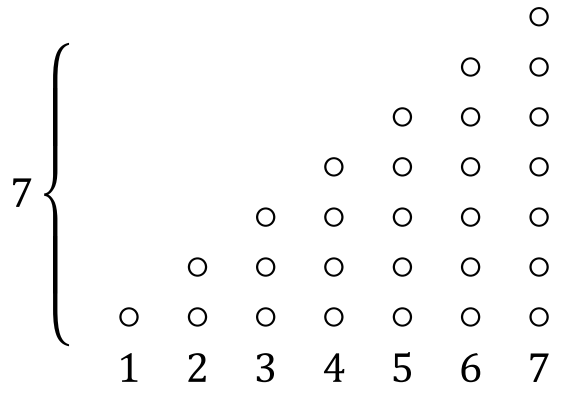


Abbildung 4.4.

Diese Anordnung der ersten 7 Zahlen kann nun so umgestellt werden, dass sich daraus ein Rechteck ergibt (Abbildung 4.5.):

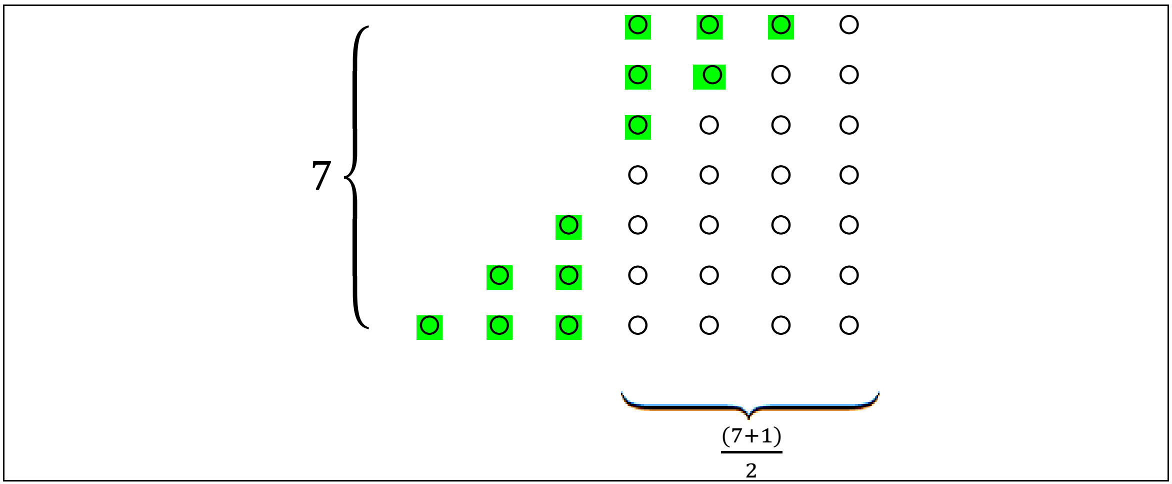


Abbildung 4.5.

Wir erhalten daraus:

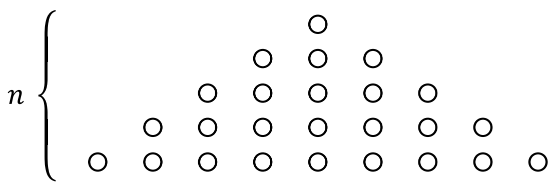
$$\sum_{i=1}^{7} i = \frac{(7+1)}{2} \cdot 7 = 28.$$

Diese Darstellung ist unabhängig von der Anzahl der Punkte und lässt sich daher auch auf $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ Punkte erweitern. Diese Art von Beispielen nennt man generische Beispiele. Dabei kann man daraus leicht vom Speziellen auf die allgemeine Situation schließen (vgl. Leuders 2010, S. 21). Wir erhalten schließlich die Gauß´sche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2}.$$

Aufgabe 4.7. **Summe der ersten n ungeraden Zahlen**

Finde eine Berechnungsvorschrift für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen (Pyramidenzahlen) p_n:



Auch an diese Aufgabe kann unterschiedlich herangegangen werden. Erstens können die Werte in einer Tabelle eintragen werden, um so ein Muster zu finden, zweitens kann die Pyramide (ungleich) geteilt und so auf die vorherige Aufgabe zurückgeführt werden und drittens können die Punkte durch spezielle Anordnungen zu geometrische Mustern und Figuren zusammengesetzt werden.

Im ersten Fall tragen wir die Werte in Tabelle 4.2. ein, um so die geeignete Berechnungsvorschrift leichter erkennen zu können.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\mathbf{p_n}$	1	4	9	16	25	36	49

Tabelle 4.2.

Dabei können einige Schülerinnen und Schüler bereits erkennen, dass $p_n = n^2$ für die Zahlen 1 bis 7 gilt. Dann bleibt aber noch zu zeigen, dass diese Berechnung auch für alle natürlichen ungeraden Zahlen stimmt.

Doch gehen wir zuerst davon aus, dass das Muster noch nicht erkannt wurde und wir an das Problem schrittweise herangehen. Dann versuchen wir im ersten Schritt eine rekursive Darstellung zu finden, die von einem Eintrag zum nächsten führt.

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = p_1 + 3, \qquad p_3 = p_2 + 5, \qquad \ldots,$$

$$p_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$$

Um eine allgemeine Darstellung zu finden, wird die Summe bis zur n-ten Zeile verwendet, und versucht, von dieser auf die $(n+1)$-te Zeile zu gelangen. In der n-ten Zeile befinden sich $2n - 1$ Punkte. Werden diese $2n - 1$ Punkte zu p_{n-1} addiert, ergibt das eine Vorschrift, die von einer Zahl p_{n-1} zur nächsten Zahl p_n führt:

$$p_n = p_{n-1} + (2n - 1).$$

Um jetzt aber p_n zu bestimmen, muss jede Zahl p_{n-k} $(k = 1, \ldots, n-1)$ berechnet werden. Für $n = 100$ würde das einen sehr großen Rechenaufwand nach sich ziehen. Bei dieser Vorgehensweise wurden die Pyramidenzahlen *horizontal* angeordnet (vgl. Leuders 2010, S. 116-117).

Eine **zweite Möglichkeit** finden wir, wenn wir die Summe p_n dieser Zahlen wie in Abbildung 4.6. *vertikal* aufteilen.

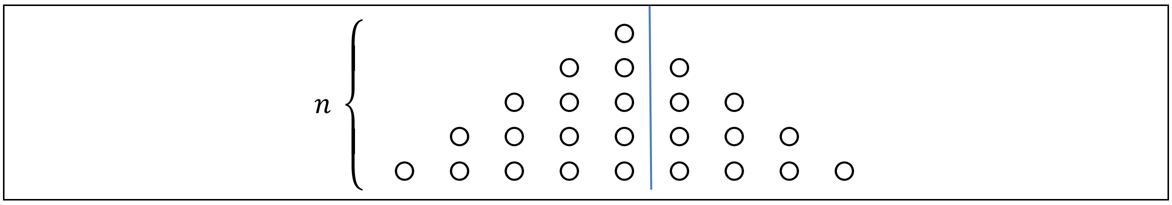


Abbildung 4.6.

Nun ergibt sich die Summe $l_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$ für den linken Teil der Pyramide und $r_n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1)$ für den rechten Teil, die gemeinsam wieder p_n ergeben. Für diese beiden Summen kann jetzt die bereits aus Aufgabe 4.6. bekannte Gauß´sche Summenformel verwendet werden:

$$l_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$r_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}.$$

Zusammen erhält man:

$$p_n = l_n + r_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2}.$$

Das ergibt weiter:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n \cdot (n+1+n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Mit dieser Darstellung $p_n = n^2$ kann nun direkt das Ergebnis bestimmt werden, ohne zuerst alle Zwischensummen zu bestimmen.

Als **dritte Möglichkeit** kann noch versucht werden, die Pyramide anders anzuordnen, um auf eine Formel zu kommen, mit der die Summe direkt bestimmt werden kann. Auch die Pythagoreer haben sich diese Aufgaben schon durch Gruppen von Punkten veranschaulicht. Aus diesen Punkterastern haben sie dann versucht, durch geometrische Anordnung und Umstrukturierungen ein bestimmtes Muster zu erkennen.

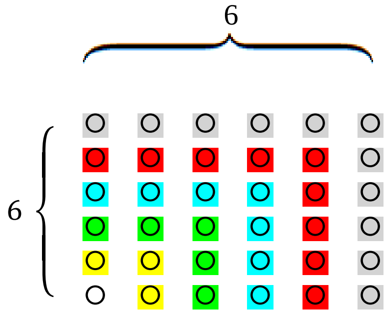


Abbildung 4.7.

Abbildung 4.7. stellt die Summe $p_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$ dar.

Somit erhält man wieder die Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen, durch ein generisches Beispiel gezeigt, als

$$p_n = n^2.$$

Eigentlich wäre diese Aufgabe bereits abgeschlossen, aber aus dem Punktmuster in Abbildung 4.7. können noch weitere Gesetzmäßigkeiten abgelesen werden. Damit haben sich auch die Pythagoreer auseinander gesetzt. Es taucht dabei die Frage auf, wie aus einer Quadratzahl n^2 die nächste Zahl $(n+1)^2$ entsteht. Wenn zu einer quadratischen Zahl n^2 auf zwei angrenzenden Seiten jeweils n Kugeln angebracht werden und eine weitere Kugel in der freien Ecke, wie in Abbildung 4.8. dargestellt, ergibt das die nächsten Quadratzahl $(n+1)^2$ (vgl. Meschkowski 1961, S. 4).

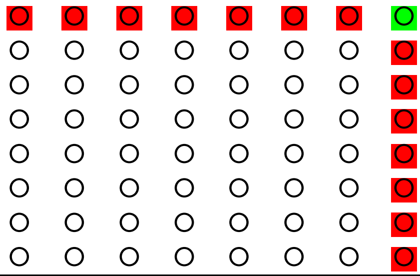


Abbildung 4.8.

Das ergibt:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Daraus kann nun umgekehrt abgelesen werden, „*dass die Differenz auf einander folgender Quadratzahlen die Folge der ungeraden Zahlen liefert.*“ (Meschkowski 1961, S. 4)

Ähnlich zur Aufgabe zu den Pyramidenzahlen gibt es auch die Summe der geraden Zahlen. Diese Aufgabe lässt sich ebenfalls mit der Gauß´schen Summenformel bestimmen:

$$2+4+6+8+10+\cdots+2k=2\cdot(1+2+3+4+5+\cdots+k)=2\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$
$$=k\cdot(k+1).$$

iii. Musteraufgabe H1 M3

Aufgabe 4.8. **Winkelsumme im *n*-Eck**

> *Ein Dreieck hat eine Winkelsumme von 180°. Versuche herauszufinden, wie groß die Summe der Innenwinkel eines 20-Ecks ist!*[12]

Die Winkelsumme eines 20-Ecks wird den Schülerinnen und Schülern im Allgemeinen nicht bekannt sein. Meistens werden sie aber die Winkelsumme eines Dreiecks und eines Vierecks kennen. Ohne nun einfach mit einer Formel für die Winkelsumme eines *n*-Ecks den Wert zu bestimmen, kann wieder versucht werden, ein Muster zu entdecken. Beginnend bei einem Dreieck können die Schülerinnen und Schüler die Winkelsummen aufschreiben. Das heißt, wir verwenden die Strategie *reduce, expand and find a pattern.* Um die Winkelsumme eines 20-Ecks zu bestimmen, versuchen wir, beginnend bei einem Viereck, alle weiteren n-Ecke so in Dreiecke aufzuteilen, dass einander keine Strecken innerhalb des *n*-Ecks schneiden (vgl. Posamentier & Krulik 1998, S. 40). Bis zum Achteck wird diese Aufteilung in Abbildung 4.9. dargestellt.

---

[12] Aus dem Englischen inhaltlich übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 40).

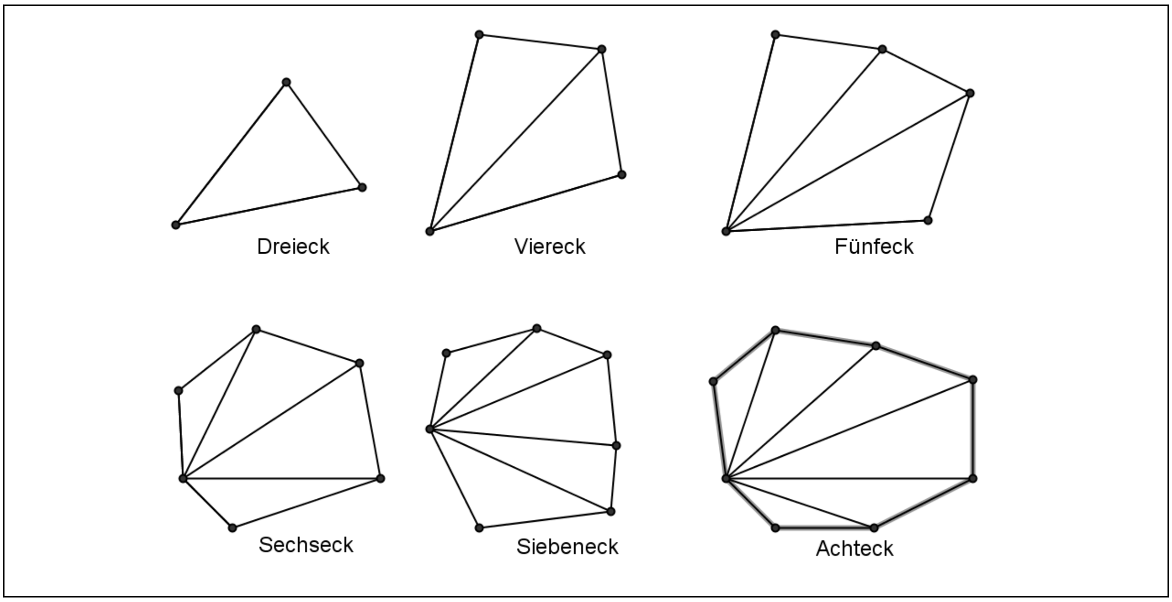


Abbildung 4.9.

Somit haben wir mit Hilfe einer graphischen Darstellung das Problem so vereinfacht, dass wir nun erkennen können, dass mit jeder zusätzlichen Ecke auch noch ein zusätzliches Dreieck entsteht. Wir tragen diese Daten in Tabelle 4.3. ein, um gegebenenfalls ein Muster besser sehen zu können.

Anzahl der Ecken	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**	**20**	**…**	$\boldsymbol{n}$
Anzahl der Dreiecke	1	2	3	4	5	…	18	…	$n-2$
Winkelsumme	180°	360°	540°	720°	900°	…	3240°	…	$(n-2) \cdot 180°$

Tabelle 4.3.

Ein Viereck kann in zwei Dreiecke mit jeweils 180° geteilt werden. Geben wir nun noch ein Dreieck dazu, erhalten wir ein Fünfeck mit einer Winkelsumme von $3 \cdot 180° = 540°$. Mit diesem Muster können wir weiter arbeiten und erhalten so die ersten Einträge der Tabelle.

Bereits nach den ersten Einträgen erkennen wir, dass die Summe der Winkel ein Vielfaches von 180 Grad sein muss und können somit fast direkt angeben, dass die Winkelsumme eines 20-Ecks 3240° beträgt.

4.2.2. Rechnen und Operieren

Einerseits versteht man unter Rechnen die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit Zahlen und andererseits die Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte. Operieren meint die Planung und Durchführung von Rechen- und Konstruktionsabläufen. Geometrisches Operieren und Arbeiten mit und in Tabellen werden dabei als Beispiele angeführt (vgl. Praxishandbuch für „Mathematik", S. 10, Bildungsstandards: Baseline 2009).

„Charakteristische Tätigkeiten sind zum Beispiel

- *elementare Rechenoperationen durchführen, potenzieren, Wurzel ziehen*
- *Maßeinheiten umrechnen*
- *in Termen und Gleichungen (Formeln) Zahlen einsetzen, Werte berechnen*
- *Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen umformen*
- *Gleichungen und Ungleichungen lösen*
- *mit und in Tabellen oder Grafiken operieren*
- *elementare geometrische Konstruktionen durchführen"* (Heugl & Peschek 2007, S. 11)

i. Musteraufgaben H2 M1

Aufgabe 4.9. **Zahlenmaschine**

Wenn wir einer Funktionsmaschine eine Zahl vorgeben, wirft diese unter Berücksichtigung einer bestimmten Funktion, bestehend aus den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, eine andere Zahl aus. Wenn wir die natürlichen Zahlen 1 bis 6 eingeben, erhalten wir die Werte in Tabelle 4.4. Welche Zahl erhalten wir, wenn wir 9 eingeben?[13]

[13] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 43).

Input (x)	Output
1	1
2	9
3	29
4	67
5	129
6	221

Tabelle 4.4.

Wie diese Funktionsmaschine funktioniert kann man nur schwer erraten. Daher ist ein geplanter Zugang zum Finden eines Musters empfehlenswert. Dazu müssen wir herausfinden, was die Funktionsmaschine mit der eingegebenen Zahl macht. Bei genauerer Betrachtung der ausgegebenen Werte kann man erkennen, dass diese immer (knapp) über dem Kubik der ursprünglichen Zahl liegt. Wir tragen die gefundenen Daten und deren Abweichung zur dritten Potenz in Tabelle 4.5. ein und versuchen daraus ein Muster zu erkennen.

Input $\boldsymbol{x}$	Output	Kubik $\boldsymbol{x}^3$	Differenz 1	Differenz 2
1	1	1	0	$(1-1)$
2	9	8	1	$(2-1)$
3	29	27	2	$(3-1)$
4	67	64	3	$(4-1)$
5	129	125	4	$(5-1)$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\boldsymbol{x}$		x^3		$(x-1)$

Tabelle 4.5.

Daraus kann ein Muster gefunden werden. Da die Funktionsmaschine aber nur mit den Grundrechenarten auskommen muss, wird x^3 als $x \cdot x \cdot x$ geschrieben. Die verwendete Funktion ist somit: $f(x) = x \cdot x \cdot x + x - 1$ und wir erhalten für $f(9)$:

$$f(9) = 9 \cdot 9 \cdot 9 + 9 - 1 = 737.$$

Aufgabe 4.10. **Fibonacci - Folge**

Die Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 … spielt in der Natur eine wichtig Rolle. Sie wurde nach dem italienischen Mathematiker Leonardo da Pisa (ca. 1170 – ca. 1250) „Fibonacci- Folge“ benannt.

1. *Versuche zu erkennen, wie eine Zahl der Folge aus den vor ihr stehenden Zahlen entsteht! Wie lauten die nächsten drei Zahlen?*
2. *Berechne für je zwei aufeinander folgende Zahlen das Verhältnis der größeren zur kleineren Zahl! Du kannst erkennen: Je höher die Zahlen werden, desto mehr nähert sich dieses Verhältnis der Verhältniszahl 1,618… des „Goldenen Schnittes“.*

Wie an diese Aufgabe herangegangen wird, wurde bereits in Kapitel 3.3. beschrieben.

ii. Musteraufgaben H2 M2

Aufgabe 4.11. **Summe einer Reihe**

Bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}\,.$$

Diese Aufgabe bietet wieder unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten. Jeder Bruch kann berechnet und auf gleichen Nenner gebracht werden. Damit kann die Aufgabe zwar gelöst werden, aber die Gefahr von Rechenfehlern und die lange Rechenzeit sprechen gehen diese Methode. Die Schülerinnen und Schüler sollten so an die Aufgabe herangehen, dass sie versuchen, ein Muster in der Darstellung der Brüche zu finden.

Jeder Bruch kann unter Verwendung dieser Formel auch als Differenz zweier Brüche dargestellt werden:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{x\cdot y}.$$

Wir erhalten:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{2-1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$$

Aus diesen Umformungen können wir erkennen, dass die Summe aller Brüche aus dem ersten Bruch $\frac{1}{1}$ und aus dem letzten Bruch $\frac{1}{50}$ mit negativem Vorzeichen besteht. Alle anderen Brüche heben sich auf. Somit erhalten wir:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}.$$

Wir können in dieser Aufgabe auch ein anderes Muster erkennen. Wenn die Brüche der Reihe nach addiert werden, ergibt sich:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

$$\vdots$$

Daraus lässt sich bereits ein Muster ablesen. Die Summe der Brüche ergibt sich aus dem letzten Summanden $\frac{1}{49\cdot 50}$ und beträgt $\frac{49}{50}$. Diese Lösungsmethode würde auch zu Aufgabentyp 3 passen. Wir beginnen zunächst einmal mit nur einem Bruch und arbeiten dann nach und nach weiter, bis wir ein Muster erkennen können.

iii. Musteraufgaben H2 M3

Aufgabe 4.12. **Brüche**

Bestimme den Quotienten von $\frac{1}{5\,000\,000\,000\,000}$.

Um diese Aufgabe zu lösen, berechnen wir zuerst einen einfacheren Bruch („reduce, expand and find a pattern") und erhöhen schrittweisen den Divisor und tragen die Werte in Tabelle 4.6. ein:

Brüche	Anzahl der Nullen im Nenner	Ergebnis	Anzahl der Nullen nach dem Komma im Ergebnis
$\mathbf{\frac{1}{5}}$	0	0,2	0
$\mathbf{\frac{1}{50}}$	1	0,02	1
$\mathbf{\frac{1}{500}}$	2	0,002	2
$\mathbf{\frac{1}{5000}}$	3	0,0002	3
$\mathbf{\frac{1}{50000}}$	4	0,00002	4
…	…	…	…
$\mathbf{\frac{1}{5\,000\,000\,000\,000}}$	12	0,0000000000002	12

Tabelle 4.6.

So kann man aus den ersten Zeilen der Tabelle 4.6. ein Muster erkennen. Die Anzahl der Nullen im Nenner ist gleich der Anzahl der Nullen nach dem Komma im Ergebnis. Wird dieses Muster fortgesetzt, erhält man das Ergebnis der letzten Zeile.

4.2.3. Interpretieren

„Interpretieren meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten." (Praxishandbuch für „Mathematik", S. 10)

Dabei sind folgende Tätigkeiten charakteristisch:

- *„Werte aus Tabellen oder graphischen Darstellungen abzulesen, sie im jeweiligen Kontext deuten*
- *Tabellarisch, grafisch oder symbolisch gegebene Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten*
- *Zusammenhänge und Strukturen in Termen, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen erkennen, sie im Kontext deuten*
- *Rechenergebnisse im jeweiligen Kontext deuten*
- *Zutreffende und unzutreffende Interpretationen erkennen“* (Heugl & Peschek 2007, S. 12)

i. Musteraufgaben H3 M1

Aufgabe 4.13. **Restklassen allgemein**

Wir tragen die Zahlen von 2 bis n in Tabelle 4.7. ein. In welcher Spalte steht die Zahl n?[14]

A	B	C	D	E	F	G	H
	2		3		4		5
9		8		7		6	
	10		11		12		13
17		16		15		14	
	18		19		20		21
25		24		23		22	
	26		27		28		29
				…		30	

Tabelle 4.7. Darstellung der natürlichen Zahlen von 1 bis 30

[14] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 53-54).

Um diese Aufgabe lösen zu können müssen die Schülerinnen und Schüler nach einem Muster in der Tabelle suchen. Zunächst kann man erkennen, dass innerhalb einer Spalte die Zahlen immer um acht größer werden. Wenn wir die Zahlen in einer Spalte durch acht dividieren, bleibt somit immer derselbe Rest.

- **A**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 1.
- **B**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 2.
- **C**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 0.
- **D**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 3.
- **E**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 7.
- **F**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 4.
- **G**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 6.
- **H**: Jede Zahl dieser Spalte hat bei Division mit 8 den Rest 5.

Wenn wir nun n durch acht dividieren erhalten wir den Rest 0, 1, …, 6 oder 7. Damit haben wir abhängig vom Rest bei Division durch 8 eine eindeutige Zuteilung zu einer der Spalten gefunden.

Dieses Beispiel eignet sich gut um auf das Thema Restklassen überzuleiten. Alle natürlichen Zahlen fallen bei Division durch acht in eine dieser acht Spalten. Die Zahl acht wird dabei als Modul bezeichnet. Die Zahlen 5, 13, 21, 29, … sind dann kongruent 5 modulo acht. In der Mathematik werden dafür folgende Notationen nach Carl Fr. Gauß verwendet:

$$13 \equiv 5\ (mod\ 8) \text{bzw.}\, 13 \equiv 5(8).$$

Gelesen wird diese Zeile „13 ist kongruent zu 5 modulo 8“.

ii. Musteraufgaben H3 M2

Aufgabe 4.14. **Restklassen Spezialfall**

In Aufgabe 4.13. wurde ein Beispiel zu Restklassen so gestaltet, dass die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Zuteilung zu Spalten bei Division mit acht finden mussten. Im Unterricht sollte diese Aufgabe vorerst nur bis zu einem konkreten Wert, wie zum Beispiel 1000, gegeben werden. Dadurch wird die Aufgabenstellung klarer und es wird den Schülerinnen und Schülern im Allgemeinen leichter fallen, an das Problem heranzugehen. Mit dieser Änderung der Aufgabenstellung kann die Aufgabe auch durch Eintragen wie in Tabelle 4.7. gelöst werden und geht somit von Kategorie M1 zu Kategorie M2 über. Das Eintragen in die Tabelle dauert zwar sehr lange und ist anfällig für Fehler, liefert aber das richtige Ergebnis: Spalte C.

Es wäre wünschenswert, dass die Schülerinnen und Schüler einen eleganteren Lösungsweg wie bei Aufgabe 4.13. einschlagen und so zu einem Ergebnis kommen:

$$\frac{1000}{8} = 125 \text{ mit Rest} = 0.$$

Damit liegt 1000 in der Spalte C.

Aufgabe 4.15. **Struktur von Gleichungen**

Versuche folgende Gleichung zu lösen. Kannst du in der Gleichung eine besondere Struktur erkennen? [15]

$$(2x^2 - x + 4)^2 - 6(2x^2 - x) = 19$$

Der erste Zugang zu dieser Aufgabe der Schülerinnen und Schüler ist zuerst alles ausmultiplizieren und zusammenfassen. Dabei werden sie auf eine Gleichung 4. Grades stoßen, welche sie nicht ohne Hilfe lösen können.

Gehen sie aber strukturiert an die Aufgabe heran und versuchen ein Muster zu entdecken, erkennen sie vielleicht, dass der Term $2x^2 - x$ zweimal vorkommt. Diesen können sie dann mit $u = 2x^2 - x$ substituieren und erhalten dadurch

$$(u + 4)^2 - 6u = 19.$$

Dabei handelt es sich um eine quadratische Gleichung, welche wesentlich leichter gelöst werden kann. Man erhält $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ sowie zwei imaginäre Lösungen.

Im Allgemeinen wird es den Schülerinnen und Schülern nicht möglich sein, solche Muster und Strukturen zu finden. Gelingt es ihnen aber, erhalten sie einen wesentlich eleganteren und schnelleren Lösungsweg.

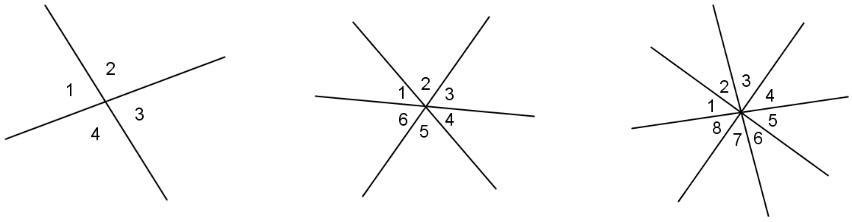
---

[15] Aus dem Englischen übersetzt. In: Posamentier & Krulik (1998, S. 66).

iii. Musteraufgaben H3 M3

Aufgabe 4.16. **Scheitelwinkel**

In Abbildung 4.10. werden mehrere, einander in einem Punkt schneidende Geraden gezeigt. Wie viele Paare von Scheitelwinkel würden 10 Geraden erzeugen, wenn du auch nebeneinander liegende Winkel addieren kannst (z. B.: 1 – 4 und 1+2 – 4+5)?



Anzahl der Geraden:	2	3	4
Scheitelwinkel:	2	6	12

Abbildung 4.10.

Bei der Interpretation dieser Abbildung bzw. Zuordnung können die Schülerinnen und Schüler auf zwei unterschiedliche Ansätze kommen.

Ersten kann man in der Folge der entstehenden Zahlen erkennen, dass diese aus dem Produkt $n \cdot (n-1)$ entsteht, wobei n die Anzahl der einander schneidenden Geraden ist. Damit ergeben 10 Geraden 90 Paare.

Eine andere Möglichkeit ergibt sich, wenn man erkennt, dass je zwei Geraden zwei Scheitelwinkelpaare erzeugen. Im ersten Schritt gibt es nur eine Möglichkeit, aus den beiden Geraden zwei auszuwählen und wir erhalten zwei Paare. Im zweiten Schritt gibt es drei Geraden und somit drei Möglichkeiten die Geraden auszuwählen. Damit erhalten wir dann 6 Möglichkeiten. Bei vier Geraden erhalten wir $\binom{4}{2} = 6$ Auswahlmöglichkeiten und somit 12 Scheitelwinkelpaare.

Wenn wir dieses Muster („ reduce, expand and find a pattern“) dann auf 10 Geraden übertragen, erhalten wir 90 Paare:

$$\binom{10}{2} = 45 \;\rightarrow\; 45 \cdot 2 = 90.$$

Allgemein ist $\binom{n}{2} \cdot 2 = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot 2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1)$.

Aufgabe 4.17. **Quadratmuster**

In Abbildung 4.11. wird eine Folge von Bildern gezeigt. Versuche herauszufinden, wie viele graue und weiße Quadrate im 10. Bild dieser Folge vorkommen!

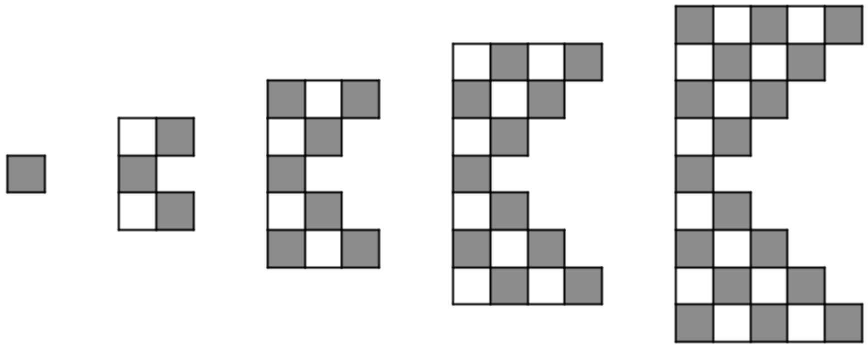


Abbildung 4.11.

Ohne bis zum zehnten Bild weiter zu zeichnen, benötigen wir für die Lösung der Aufgabe ein Muster, das die Anzahl der (grauen bzw. weißen) Quadrate für jedes Bild beschreibt. Dafür tragen wir die vorliegenden Daten in Tabelle 4.8. ein.

Bildnummer	1	2	3	4	5
# Quadrate gesamt	1	5	11	19	29
# Quadrate grau	1	3	7	11	17

Tabelle 4.8.

Um die *Gesamtanzahl* der Quadrate zu erhalten, wird zum Quadrat der Bildnummer n^2 der Summand $(n-1)$ addiert. So sehen wir: $\#\ Quadrate\ ges. = n^2 + (n-1)$.

Für die Anzahl der *grauen* Quadrate betrachten wir die erhaltene Folge s_n: $1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 17,\ ...$. Die Differenzen dieser Folgeglieder ergeben ein Muster, welches sich fortsetzen lässt: $2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6, \ldots$. Wenn man die dazukommenden Quadrate in Abbildung 4.11. genau betrachtet und abzählt, kann man dieses Muster begründen.

Damit setzt man diese Folge bis zum zehnten Bild fort („reduce, expand and find a pattern“) und erhält (vgl. Tabelle 4.9.):

Bildnummer	1	2	3	4	5	…	9	10
# Quadrate gesamt	1	5	11	19	29	…	89	109
# Quadrate grau	1	3	7	11	17	…	49	59
Differenzen		2	4	4	6	6	…	10

Tabelle 4.9.

Damit erhalten wir im zehnten Bild der Folge insgesamt 109 Quadrate, wobei 59 Quadrate grau hinterlegt sind.

4.2.4. Argumentieren und Begründen

„Argumentieren meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.

Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt.“ (Praxishandbuch für „Mathematik“, S. 10)

Tätigkeiten des Handlungsbereiches *Argumentieren und Begründen* sind:

- *„mathematische Argumente nennen, die für oder gegen die Verwendung eines bestimmten mathematischen Begriffs, eines Modells oder einer Darstellung(sform), für oder gegen einen bestimmten Lösungsweg bzw. eine bestimmte Lösung, für oder gegen eine bestimmte Interpretation sprechen.*
- *darüber die Entscheidung für die Verwendung argumentativ begründen*
- *mathematische Vermutungen formulieren und begründen*
- *mathematische Zusammenhänge herleiten oder beweisen*
- *zutreffende und unzutreffende mathematische Argumentationen bzw. Begründungen erkennen und begründen.“* (Heugl & Peschek 2007, S. 12)

Diese Kompetenz der Handlungsbereiche findet bei fast allen Beispielen eine Anwendung. Im dritten Kapitel wurde der Zugang zu Problemlösungsaufgaben immer so formuliert, dass am Ende einer Aufgabe die erhaltene Lösung und der verwendete Lösungsweg reflektiert werden soll. Diese Handlung fällt nach obiger Beschreibung in den Bereich des *Argumentierens und Begründens*. Da ich Beispiele und Aufgabenstellungen aber nur einer Kategorie zuordnen möchte, wird dieser Aspekt des Reflektierens bei der Einteilung nicht berücksichtigt. Es werden somit nur Aufgaben angeführt, die größtenteils in diesen Handlungsbereich gehören.

i. Musteraufgaben H4 M1

Aufgabe 4.18. Binäres Zahlensystem

> *Die Folge* $s_n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ *wird durch Zweierpotenzen der Gestalt* $2^{(n-1)}$ *gebildet. Damit kann ähnlich zum Dezimalsystem ein Zahlensystem mit Basis 2 erstellt werden. Dieses Zahlensystem wird in Informatik verwendet und heißt Binärsystem*[16]*. Suche dir genauere Informationen zum Binärsystem und versuche zu erklären, wie die Zahlen umgerechnet werden können. Welche Gemeinsamkeiten kannst du in den beiden Systemen entdecken? Welche der beiden Zahlen ist größer:* $(23)_{10}$ *oder* $(11101)_2$*? – Begründe deine Antwort!*

Diese Aufgabe beinhaltet ein selbstständiges Erlernen eines neuen Zahlensystems und kann einerseits zur Einführung im Unterricht bearbeitet werden, oder andererseits als vertiefendes Beispiel eingesetzt werden. Entscheidend ist nur, wo die Schülerinnen und Schüler die zusätzlichen Informationen finden können. Entweder sie entnehmen diese aus dem verwendeten Schulbuch oder aus einem zusätzlichen Hilfsmittel wie das Internet oder andere Literatur.

Zuerst müssen sie klären, wie das binäre Zahlensystem aufgebaut ist und wofür die Ziffern des Systems stehen. Dahinter steckt ein Muster, welches das Umrechnen vom Binärsystem ins Dezimalsystem beschreibt. Genau dieses Muster müssen die

[16] Wird auch Zweiersystem oder Dualsystem genannt.

Schülerinnen und Schüler finden und ergründen. Damit sollte es ihnen möglich sein, die Gemeinsamkeiten der Zahlensysteme zu erkennen und zu beschreiben.

Um entscheiden zu können, welche Zahl größer ist, müssen sie verstehen, wie die Zahlen von einem Zahlensystem ins andere umgerechnet werden können. Auch die Schreibweise $(23)_{10}$ wird den Schülerinnen und Schüler am Anfang nicht bekannt sein. Dabei steht die Zahl 11101 für

$$(11101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 29.$$

Damit ist die Zahl $(11101)_2$ größer als $(23)_{10}$.

ii. Musteraufgaben H4 M2

Aufgabe 4.19. Summenformel

Eine der schönsten Summenformel ist diese:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

- *Erklären Sie den folgenden ikonischen Beweis für die Formel (Abbildung 4.12.)! Wo finden Sie jeweils alle Teile der Gleichung im Bild wieder?*
- *Versuchen Sie einen Beweis mit vollständiger Induktion!*[17]

[17] Aus Leuders 2010, S. 138.

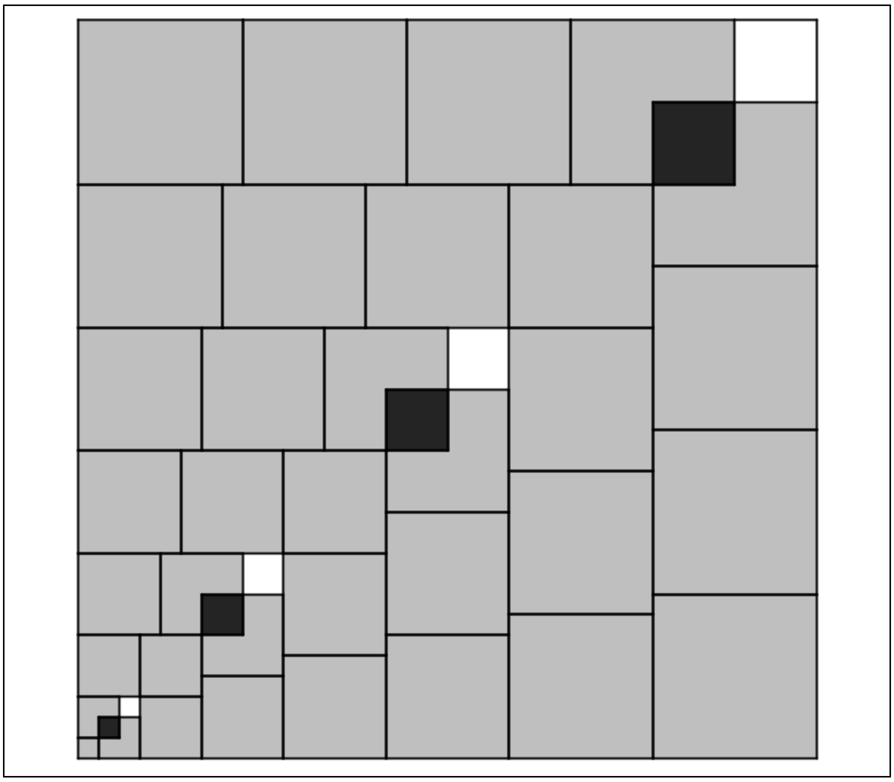


Abbildung 4.12.

Für diese Aufgabe ist einerseits Interpretation und andererseits Begründen von entscheidender Bedeutung. Im ersten Teil müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Seitenkante des Quadrats die Länge $1 + 2 + \ ... \ + 8$ hat. Zur Lösung können weitere Hilfestellungen angeboten werden:

- Wo im Bild sieht man $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$?
- Wo im Bild sieht man 1^2 und wo 5^2?
- Wo im Bild sieht man $5^2 \cdot 5 = 5^3$?
- Wo sieht man $6^2 \cdot 6 = 6^3$?

Wenn die Schülerinnen und Schüler diese Flächen bestimmt haben, wird es nicht mehr schwer fallen, die anderen zu entdecken. Es ist aber nicht einfach, den Beweis in Worten zu erklären, da die Sprache der Mathematik (für viele Kinder) nur schwer verständlich ist.

Wie diese Formel mit einem Induktionsbeweis gezeigt werden kann, wird in dieser Arbeit nicht gezeigt, da dieser Lösungsweg nicht in die verwendeten Kategorien passt und zu dem ein Standardverfahren darstellt.

iii. Musteraufgaben H4 M3

Aufgabe 4.20. 1000 Türen

In einem alten Gefängnis, das 1000 Zellen in einem Gang hat, beschließt der Wärter, nachdem alle Insassen eingeschlafen sind, alle 1000 Türen aufzusperren. Nachdem er damit fertig ist, geht er an den Anfang zurück und beginnt alle Türen mit geraden Nummern zu verschießen. Wieder am Anfang angekommen, macht er sich nun auf den Weg, um jede dritte Türe zu verschließen, wenn sie noch offen ist, oder wieder zu öffnen, wenn sie bereits verschlossen ist. Nach jeder dritten folgt jede vierte, dann jede fünfte, jede sechste, usw. Jedes Mal, wenn er am Ende angekommen ist und jede n-te Tür verschlossen oder geöffnet hat, macht er sich auf den Weg zurück zum Anfang und macht dann mit jeder (n+1)-ten Türe weiter. Als er mit allen 1000 Durchgängen fertig ist, setzt er sich hin und fällt in einen tiefen Schlaf. Welche Insassen können am Morgen fliehen?[18]

Begründe, warum bestimmte Türen geschlossen und andere geöffnet sind!

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen sich die Schülerinnen und Schüler zuerst bewusst machen, welches Ziel sie verfolgen. Wie können sie herausfinden, welche Türen offen sind, ohne alles aufzuschreiben und durchzuzählen? Für die ersten Türen scheint das relativ einfach zu gehen, aber je größer die Nummer, desto mehr Teiler kommen dafür in Frage. Hier hilft ihnen wieder die Methode „*reduce, expand and find a pattern*“ weiter. Betrachten wir zuerst nur die Türen mit Nummern von 1 bis 17 und versuchen daraus ein Muster zu erkennen, welches wir dann für die weiteren Türen fortsetzen können.

[18] Aus dem Englischen inhaltlich übersetzt. In: Ewen (1996, S. 10).

Türnummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
1. Gang	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
2. Gang		G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O
			G	G	O	O	O	G	G	G	O	O	O	G	G	G	O
⋮				O	O	O	O	O	G	G	O	G	O	G	G	O	O
					G	O	O	O	G	O	O	G	O	G	O	O	O
						G	O	O	G	O	O	O	O	G	O	O	O
							G	O	G	O	O	O	O	O	O	O	O
								G	G	O	O	O	O	O	O	G	O
									O	O	O	O	O	O	O	G	O
										G	O	O	O	O	O	G	O
											G	O	O	O	O	G	O
												G	O	O	O	G	O
													G	O	O	G	O
														G	O	G	O
															G	G	O
																O	O
17. Gang																	G

Tabelle 4.10.

In Tabelle 4.10. wird der Prozess des Schließens und Öffnens des Wärters dargestellt. Dabei wird jede Veränderung in einer Zeile dargestellt (O steht für Offen und G für Geschlossen). Fassen wir nun die Ergebnisse der Tabelle zusammen und schreiben auf, welche Türen offen sind und welche geschlossen.

Türnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Resultat	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	G	O	G

Tabelle 4.11.

Die Türen 1, 4, 9 und 16 sind offen und alle anderen sind geschlossen. Das heißt, nur die Quadratzahlen von 1 bis 20 sind offen. Dieses Muster können wir nun weiter fortsetzen und erhalten so alle offenen Türen mit den Nummern 1, 4, 9, 16, …, 900, 961.

Abschließend sollte noch erklärt werden, warum gerade die Quadratzahlen offen bleiben und alle anderen nicht. Eine Tür wird genau dann geschlossen oder geöffnet, wenn der Wärter jede k-te Tür ändert und k die Türnummer n teilt. Wenn wir uns die Teiler einer Zahl ansehen, so kommen diese immer in Paaren vor. 24 hat zum Beispiel die Teiler 1, 2 und 4 mit den dazugehörigen Komplementärteilern 24, 12 und 6. Die Anzahl der Teiler ist folglich gerade, es sei denn, eine Zahl besitzt einen Teiler, der ebenfalls Komplementärteiler ist. Das ist der Fall bei den Quadratzahlen und sonst nicht. 16 hat die Teiler 1, 2 und 4 mit den Komplementärteilern 16, 8 und 4. Damit hat diese Zahl eine ungerade Anzahl an Teilern und bleibt in unserer Aufgabe offen.

4.2.5. Erkundungen

Ein weiteres Aufgabenformat in denen Muster vorkommen können sind Erkundungen. Diese Aufgaben lassen sich nicht ohne weiteres in die einzelnen Handlungsbereiche eingliedern und kommen in dieser Form auch nicht bei den Bildungsstandards vor. Das Ziel dieser Aufgaben liegt im kreativen und individuellen Herangehen an Beispiele. Erkundungen enthalten häufig offene Aufgabenstellungen. Den Schülerinnen und Schülern werden weder bestimmte Handlungsmuster, Methoden noch Ziele vorgegeben. Dadurch wird jedem Schüler bzw. jeder Schülerin die Herangehensweise selbst überlassen. Wie intensiv sie sich mit dem Beispiel auseinandersetzen, hängt allein von ihrer Motivation und Kreativität ab.

Aufgabe 4.21. **Folge der Quadratzahlen**

In dieser Aufgabe gehen wir nicht von der Summe der ungeraden Zahlen aus (Aufgabe 4.7.), sondern versuchen in der Folge der Quadratzahlen noch andere Muster zu entdecken.

> *„Erkundung 3.1: Wie gut kennen Sie eigentlich Quadratzahlen? Sicher die Folge der Quadratzahlen ist Ihnen hinlänglich vertraut:*
>
> $$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$$
>
> *Aber steckt in dieser Zahlenliste noch mehr als die Tatsache, dass es Quadrate sind? Gibt es noch mehr Strukturen, Muster und Zusammenhänge? […]"*
> (Leuders 2010, S. 41)

Um diese Aufgabe zu lösen, verlangt es mathematische Kreativität und Interesse. Der Start in die Aufgabe kann durch zusätzliche Hilfestellungen, wie z. B. „Betrachte die Ziffern oder Differenzen!" erleichtert werden.

Im **ersten Schritt** sollten alle Ideen aufgeschrieben werden, ohne diese sofort zu bewerten. Erst im **zweiten Schritt** werden diese dann genauer betrachtet und auf ihre Richtigkeit hin geprüft. Auch falsche Annahmen können vielleicht richtig gestellt oder erweitert werden und so zu neuen Erkenntnissen führen.

Leuders bietet in seinem Buch (2010, S. 42) auch eine umfangreiche Liste an Entdeckungen an.

1. *Jede zweite Zahl ist gerade.*
2. *Manche Quadratzahlen passen zusammen:* $9 + 16 = 25, 36 + 64 = 100$.
3. *Die Endziffern sind symmetrisch angeordnet: 0 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0.*
4. *Die Abstände wachsen regelmäßig:* $1 + 3 = 4, 4 + 5 = 9, 9 + 7 = 16, 16 + 9 = 25$.
5. *Das Produkt zweier Quadratzahlen ist wieder eine Quadratzahl.*
6. *Die Summe aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist immer ungerade.*
7. *Die Quersumme von dreistelligen Quadratzahlen ist wieder eine Quadratzahl:* $121 \rightarrow 1 + 2 + 1 = 4,\ \ 144 \rightarrow 1 + 4 + 4 = 9$, *usw.*
8. *Gerade Quadratzahlen sind immer durch 4 teilbar.*
9. *Die Differenz der Quadrate ist die Summe der ursprünglichen Zahlen:* $4 - 1 = 2^2 - 1^2 = 3$ *und* $2 + 1 = 3$ *oder* $36 - 25 = 6^2 - 5^2 = 11$ *und* $6 + 5 = 11$.
10. *Das Vierfache einer Quadratzahl ist wieder eine Quadratzahl.*

Im **zweiten Schritt** wird nun überprüft, welche dieser Aussagen stimmen und welche nicht. Manche dieser Aussagen sind offensichtlich und wir sehen sofort, dass sie sich beim Fortsetzen der Folge nicht als falsch herausstellen werden.

zu 1. *Jede zweite Zahl ist gerade*. Die erste Aussage scheint offensichtlich zu sein. Die Vermutung alleine reicht in der Mathematik aber nicht aus, um eine Aussage als wahr anzuerkennen. Betrachten und erweitern wir die Folge und tragen sie in Tabelle 4.12. mit den Ausgangszahlen ein:

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\boldsymbol{n}^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

Tabelle 4.12.

Auch bei den ursprünglichen Zahlen ist jede zweite Zahle gerade. Das lässt darauf schließen, dass beim Quadrieren, also beim Multiplizieren mit sich selbst, eine ungerade Zahl ungerade bleibt und eine gerade Zahl gerade. Dazu kann man die Gestalt einer geraden Zahl allgemein mit $k \in \mathbb{N}$ anschreiben als:

$$n = 2k \rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Ebenso für die ungeraden Zahlen:

$$n = 2k + 1 \rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Am jeweiligen letzten Ausdruck erkennen wir, dass die Gestalt „Gerade – Ungerade" beim Quadrieren erhalten bleibt. Damit ist diese Aussage gezeigt.

zu 2. Betrachten wir dazu wieder die ursprünglichen Zahlen in der Gleichung:

$$9 + 16 = 25 \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Die Zahlen 3, 4, 5 bilden eines der Pythagoreischen Tripel. Mit diesem Zahlentripel können viele weitere Tripel erzeugt werden.

Schreiben wir dazu auch die zweite Gleichung in ihre ursprünglichen Zahlen an:

$$36 + 64 = 100 \rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2.$$

Dann erhalten wir 6^2, 8^2, 10^2. Diese Zahlen können auch als Vielfache des vorher gefundenen Tripels dargestellt werden:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 = (2 \cdot 5)^2.$$

Somit kann man erkennen, dass die zweite Gleichung ein Vielfaches der ersten Gleichung ist:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow \mathbf{2^2} \cdot (3^2 + 4^2) = \mathbf{2^2} \cdot 5^2.$$

An Stelle von 2^2 kann auch n^2 eingesetzt werden und somit erhalten wir unendlich viele Gleichungen der Gestalt:

$$n^2 \cdot 3^2 + n^2 \cdot 4^2 = n^2 \cdot 5^2 \leftrightarrow (3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2.$$

Weiters kann nun noch der Frage nachgegangen werden, ob es auch noch andere Pythagoreische Zahlentripel gibt und wie diese gefunden werden können.

zu 3. Um dieses Muster besser sehen zu können, werden die Quadratzahlen von 0 bis 20 in Tabelle 4.13. dargestellt.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Tabelle 4.13.

Tabelle 4.13. zeigt, dass die Annahme der symmetrischen Endziffern für die ersten 20 Quadratzahlen stimmt. Nun kann der Frage nachgegangen werden, ob diese Annahme für alle Quadratzahlen richtig ist. Dafür werden die Zahlen in Zehnerpotenzen dargestellt und mit sich selbst multipliziert. Im Folgenden wird einer dieser Fälle gezeigt. Alle anderen verlaufen analog.

Für 1 und 11 zeigt die Tabelle bereits die Endziffer 1. Allgemein setzen wir eine „solche“ Zahl z mit Endziffer 1 stets mittels

$$x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

an und multiplizieren sie mit sich selbst.

Das ergibt:

$$(x_n \cdot 10^n)^2 + \cdots + 2 \cdot x_1 \cdot 10^1 \cdot 1 \cdot 10^0 + (1 \cdot 10^0)^2$$
$$= x_n^2 \cdot 10^{2n} + \cdots + 2 \cdot x_1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

Damit wurde gezeigt, dass die Endziffer 1 beim Quadrieren erhalten bleibt.

zu 4. Dieses Muster wurde bereits in Aufgabe 4.7. behandelt.

zu 5. *Das Produkt zweier Quadratzahlen ist wieder eine Quadratzahl.*

Um diese Aussage zu bestätigen wählen wir zuerst ein Beispiel und überprüfen, ob sie dabei stimmt. Wir wählen die Zahlen 4 und 5:

$$4^2 \cdot 5^2 = 400 = 20^2 = (4 \cdot 5)^2.$$

Allgemein wählen wir zwei natürliche Zahlen n und m. Dann ist das Produkt der Quadrate gleich dem Quadrat des Produktes:

$$n^2 \cdot m^2 = (n \cdot m)^2.$$

zu 6. *Die Summe aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist immer ungerade.*

Aus der ersten Aussage wissen wir, dass jede zweite Quadratzahl gerade ist und die anderen ungerade. Somit kann die Aussage auch anders formuliert werden.

Die Summe einer geraden und einer ungeraden Quadratzahl ist immer ungerade.

Da die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ist diese Aussage bestätigt.

zu 7. Betrachten wir die Quersumme der ersten dreistelligen Quadratzahlen größer als 100 und tragen diese in Tabelle 4.14. ein.

$\boldsymbol{n}$	11	12	13	14	15	16
$\boldsymbol{n}^2$	121	144	169	196	225	256
Quersumme	4	9	16	16	9	13

Tabelle 4.14.

Auf den ersten Blick deutet alles darauf hin, dass wir ein neues Muster bestätigen können. Erst bei der sechsten dreistelligen Quadratzahl erhalten wir als Quersumme eine Primzahl. Damit haben wir aber einen Widerspruch zu unserer Aussage gefunden. Somit ist dieses Muster falsifiziert.

zu 8. *Gerade Quadratzahlen sind immer durch vier teilbar.*

Wie wir in der ersten Annahme gesehen haben, ist jede zweite Quadratzahl gerade. Dabei ist aber auch die ursprüngliche Zahl gerade und wir können daher gerade Quadratzahlen allgemein anschreiben durch:

$$n^2 \; gerade \Rightarrow \; n \; gerade \; \Rightarrow n = 2k \; mit \; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow 4 \left| 4k^{2\Rightarrow} 4 \right| n^2.$$

Damit wurde die Aussage gezeigt.

zu 9. *Die Differenz der Quadrate ist die Summe der ursprünglichen Zahlen.*

In der Sprache der Mathematik bedeutet diese Aussage: $n^2 - m^2 = n + m$.

Um dieses Muster zu bestätigen wählen wir zwei natürliche Zahlen n und m mit $n = m + 1$. Damit bilden wir die Differenz der Quadrate, die linke Seite der obigen Gleichung:

$$n^2 - m^2 = (m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1.$$

Setzen wir auch in die rechte Gleichung $n = m + 1$ ein, dann erhalten wir: $2m + 1$. Damit haben wir gezeigt, dass die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen die Summe der ursprünglichen Zahlen ergibt.

Weiters können wir dazu den allgemeinen Fall betrachten. Dazu wählen wir zwei natürlichen Zahlen n und m mit $n = m + d \; mit \; d \in \mathbb{N}$ und bilden wieder die Differenz der Quadratzahlen:

$$n^2 - m^2 = (m+d)^2 - m^2 = 2md + d^2 \stackrel{!}{=} 2m + d \leftrightarrow d = 1.$$

Somit muss also $n = m + 1$ sein!

zu 10. Diese Aussage folgt aus der fünften Aussage. Setzt man $n = 2$ dann folgt:

$$4 \cdot m^2 = 2^2 \cdot m^2 = (2m)^2.$$

5. Mustererkennung im Wechsel von Darstellungen

Ein weiterer wichtiger Bereich, in dem Mustererkennung häufig vorkommt, ist der Wechsel von Darstellungen. Bereits zu Beginn des Mathematikunterrichts wird versucht verschiedene Darstellungsformen zu verwenden, um den Schülerinnen und Schülern ein besseres Verständnis für Mathematik zu ermöglichen, da *„sich bei verschiedenen Individuen die einzelnen Darstellungsformen jeweils verschieden auf den Lernerfolg auswirken“* (Bauer 1978, S. 33) können. Dabei spielt der flexible Wechsel zwischen den Darstellungsarten eine wesentliche Rolle.

> *„Insbesondere ist der Wechsel zwischen bildlich geometrischen Darstellungen und den klassischen mathematischen Symbolen (wie Ziffern oder Operationszeichen) in den Mathematikbüchern der Grundschule fester Bestandteil."* (Böttinger 2006, S. 135)

Das Denken der Schülerinnen und Schüler ist nach Piaget stark an die Anschauungsmittel gebunden, welche dazu beitragen sollen, dass sich die Schülerinnen und Schüler Anschauungsbilder zu mathematischem Wissen aufbauen können (vgl. Böttinger 2006, S. 135).

Daraus wird ersichtlich, dass unterschiedliche Darstellungsformen für ein besseres Verständnis sorgen. Bei Hußmann et al. (2011, S. 48 – 51) finden wir dazu eine Auseinandersetzung über das bessere Verstehen mit verschiedenen Darstellungen.

> *„Vielfalt von Darstellungen gilt als ein wichtiges Charakteristikum von Mathematik und als ein möglicher Weg zu einem fundierten Verständnis von mathematischen Begriffen.“* (Hußmann et al. 2011, S. 48)

Einerseits kann der Wechsel von Darstellungen *als heuristisches Mittel* angesehen werden, das dazu dient, mathematische Probleme zu lösen, wie im dritten Kapitel beschrieben wurde, oder andererseits auch als *Sicherung von mathematischem Wissen* betrachtet werden. Beide Aspekte kommen im Mathematikunterricht bei allen Inhaltsgebieten vor. Dabei ist es für das Verständnis von Mathematik wichtig, dass der Wechsel als sinnvoll erachtet wird.

> *„Es muss einsichtig werden, dass in einer anderen Darstellung neue Zusammenhänge deutlich werden, die vorher nicht sichtbar waren. Kinder sind Lernende und müssen in der Regel diese Einsicht erst gewinnen.“* (Böttinger 2006, S. 136)

Lehrerinnen oder Lehrer sollten daher versuchen, diese Einsicht zu vermitteln, damit die Schülerinnen und Schüler den Wechsel von Darstellungsformen akzeptieren und anwenden können. Es werden wie beim Problemlösen nicht alle Kinder gleichermaßen geschickt damit umgehen können, aber es kann versucht werden, den Lernenden dabei zu helfen. Die Lehrkraft kann den Wechsel der Darstellungsebenen durch übergeordnete Problemstellungen unterstützen und sollte ihn nicht nur zum Selbstzweck behandeln (vgl. Böttinger 2006, S. 136). Dabei wird nicht nur ein Wechsel zwischen den einzelnen Darstellungsebenen angestrebt, sondern auch der Wechsel innerhalb einer Darstellungsebene. Die Schülerinnen und Schüler müssen zum Beispiel die Umgangssprache in die mathematische Fachsprache übersetzen können und umgekehrt (vgl. Bauer 1978, S. 33 – 34).

5.1. Repräsentationsebenen

Im Wesentlichen unterscheidet man zwischen drei Darstellungsebenen:

i. *enaktiv*, das heißt durch Handlung (persönliches Tun und vor Ort)
ii. *ikonisch*, d. h. durch Bilder (Plan, Grafik, Skizze, …)
iii. *symbolisch*, d. h. durch Zeichen und Sprache (Variablen, Ziffern, …)

Diese Darstellungsformen sollten für alle Themengebiete im Mathematikunterricht genutzt werden. Traditionell beginnt der Mathematikunterricht eher bei der symbolischen Ebene und von dieser ausgehend werden dann andere Ebenen zur Anschauung und Vertiefung herangezogen. Darstellungen auf ikonischer Ebene werden dafür häufiger verwendet, während enaktive Darstellungen im Regelunterricht eher selten vorkommen (vgl. Heske 2003, S. 186 – 187).

Ganz anderes wird der Zugang durch das *E-I-S Prinzip* nach Bruner bestimmt. Die Lehrkraft sollte als erste Darstellungsform die enaktive Ebene wählen und dann schrittweise mehr in Richtung der symbolischen Ebene arbeiten.

> *„Im Laufe der Entwicklung ergeben sich Akzentverschiebungen zwischen diesen Darstellungsebenen. Zunächst dominiert die enaktive, dann die ikonische und schließlich die symbolische Darstellung.“* (Zech 2002, S. 104)

Ziel der Verwendung dieser unterschiedlichen Darstellungsebenen ist der intuitive Wechsel zwischen den Ebenen. Diese *Beweglichkeit* beeinflusst maßgeblich die kognitiven Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler (vgl. Bauer 1978, S. 34 und Bruner 1971, S. 21).

> *„Der intellektuelle Erwachsene zeichnet sich durch die Fähigkeit aus, – den Erfordernissen entsprechend – flexibel zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen zu wechseln.“* (Zech 2002, S. 105)

Durch diese Beweglichkeit im Wechsel der Darstellungen kann folglich besseres Begreifen der Aufgaben erreicht werden.

i. Enaktive Darstellungen

Der Prozess, bei dem mathematische Aufgaben durch Handlungen näher erläutert werden, wird *Enaktivieren* genannt. Dabei wird versucht durch Handlungen Informationen über mathematische Ideen zu finden und zu verstehen. Diese Handlungen sind jedoch an Ort und Zeit gebunden und können daher nicht beliebig reproduziert werden. Diese Einmaligkeit ist charakteristisch für enaktive Darstellungsformen. Inhalte können nicht wie bei den anderen Darstellungsformen schriftlich festgehalten werden (vgl. Bauer 1978, S. 70).

In den ersten Schuljahren wird diese Darstellungsebene häufiger angewendet. Da aber für den zu lernenden Stoff nach und nach immer weniger geeignetes Material vorhanden ist, wird diese Darstellungsform in den höheren Klassen immer weniger eingesetzt und lediglich zur Motivation mancher Inhalte verwendet (vgl. Bauer 1978, S. 71).

Aufgabe 5.1. **Operative Päckchen mit Quadrat- und Fastquadratzahlen**

„Zur Übung des Einmaleins können zwei Päckchen mit Quadrat- und Fastquadrataufgaben gegenübergestellt werden. [19]

$1 \cdot 1 =$	$0 \cdot 2 =$
$2 \cdot 2 =$	$1 \cdot 3 =$
$3 \cdot 3 =$	$2 \cdot 4 =$
$4 \cdot 4 =$	$3 \cdot 5 =$
$\vdots$	$\vdots$
$10 \cdot 10 =$	$9 \cdot 11 =$

Lege diese Multiplikationen mit Plättchen und vergleiche die jeweiligen Ergebnisse. Was fällt dir dabei auf?

Wenn diese Aufgaben mit Plättchen veranschaulicht werden, erkennen viele Kinder bereits bei den ersten Rechnungen, dass die Ergebnisse der linken Spalte immer um eins größer sind als die der rechten Spalte. Wie kommt das? Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich mit dem Darstellen in Form eines Punktmusters mit Plättchen ergründen:

> „*Wenn man mit Plättchen z. B. ein 4mal4-Muster gelegt hat, kann man die letzte Zeile wegnehmen und als weitere Spalte hinzufügen. Dabei bleibt immer ein Plättchen übrig.* [vgl. Abbildung 5.1.] “ (Wittmann 1997, S. 51)

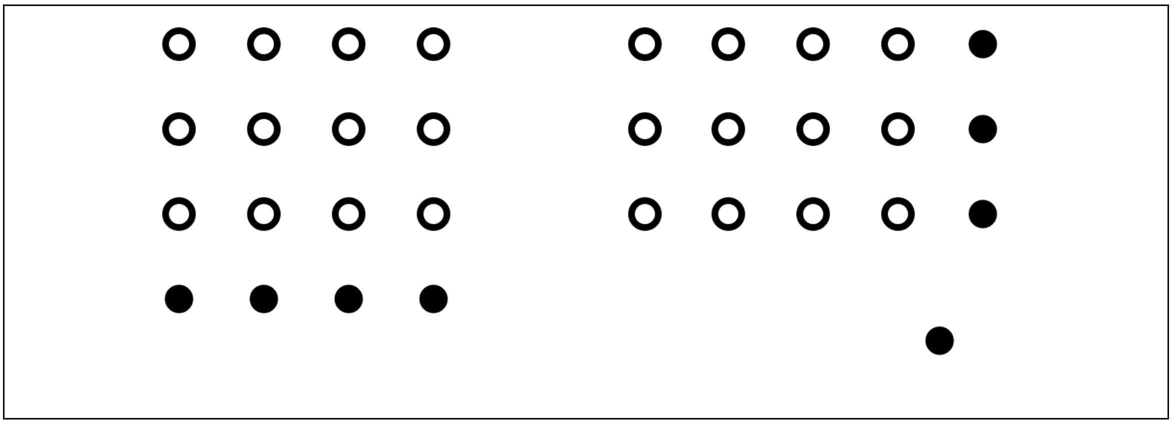


Abbildung 5.1.

[19] Vgl. Wittmann 1997, S. 51

Der Prozess des Enaktivierens erleichtert dabei die Erkenntnis und unterstützt so die Anschauung der Schülerinnen und Schüler. Generell lassen sich Multiplikationen als verkürzte Addition in Form von rechteckigen Punktmustern darstellen. Damit ist es auch auf einen Blick ersichtlich, dass gleiche Summanden addiert werden. Auch das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz können durch solche Muster veranschaulicht werden (vgl. Wittmann 1997, S. 50).

ii. Ikonische Darstellungen

Ikonische Darstellungen sind unter anderem Zeichnungen, Skizzen, Tabellen und Grafiken. Der Prozess des Erstellens einer bildhaften Darstellung aus einer Vorstellung wird *Ikonisieren* genannt. In der Schule wird am häufigsten gezeichnet, das heißt ein mathematischer Inhalt wird auf der zweidimensionalen Zeichenebene dargestellt. Dadurch können Zusammenhänge erfasst, Teile hervorgehoben sowie einzelne Informationen herausgenommen werden (vgl. Bauer 1978, S. 71 – 72).

Schwierigkeiten können dabei zwischen bildhaften und symbolhaften Darstellungen auftreten. Ob eine Darstellung bildhaften oder symbolhaften Charakter bestitz, wird durch die semantische und syntaktische Dimension bestimmt.[20] Bilder können durch sprachliche Darstellungen nur mit Informationsverschiebung ersetzt werden, während Symbole ohne Informationsverluste auch rein sprachlich dargestellt werden können. Es lässt sich aber nicht für alle Personen festlegen, ob eine Darstellung ein Bild oder ein Symbol ist, da diese Entscheidung auch von der Person abhängt, die diese betrachtet (vgl. Bauer 1978, S. 76 – 77).

Aufgabe 5.2. **Transfer der Multiplikation auf Bruchzahlen**

Wie in Aufgabe 5.1. beschrieben, lässt sich die Multiplikation mit Plättchen in Form von Rechtecken darstellen. Diese Darstellung kann auch ikonisch durch Punktmuster gemacht werden. Nicht wesentlich anders sind auch Rechteckgitter einsetzbar. Diese

[20] Bauer geht dabei genauer auf die Unterschiede der semantischen und der syntaktischen Dimension ein (vgl. Bauer 1978, S. 73 – 77).

haben den Vorteil, dass auch die Multiplikation von rationalen Zahlen dargestellt werden kann (vgl. Abbildung 5.2.).

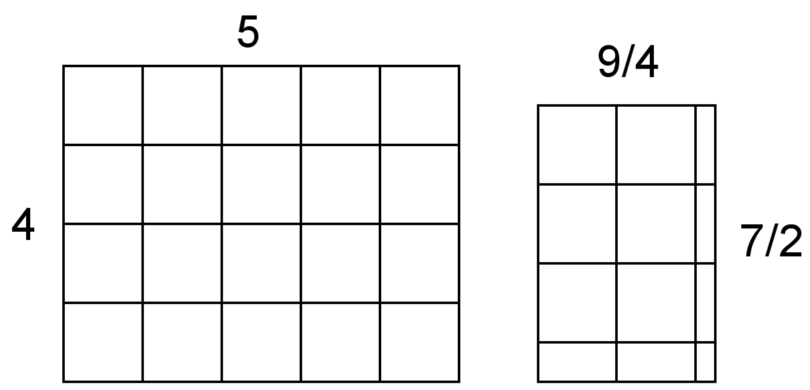


Abbildung 5.2.

iii. Symbolische Darstellungen

Sprache hat einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der kognitiven Fähigkeiten eines Kindes. Auch die Abweichung der Fachsprache „Mathematik“ von der Umgangssprache ist ein entscheidender Grund, weshalb im Mathematikunterricht die Sprache an sich eine entscheidende Rolle erhalten sollte (vgl. Bauer 1978, S. 78).

Der Prozess, der Inhalte in Form von sprachlichen Darstellungen wiedergibt, wird *Formalisieren* bzw. *Verbalisieren* genannt. Dabei wird unterschieden, ob die Schülerinnen und Schüler etwa die Symbolsprache bzw. die Fachsprache der Mathematik verwenden (d. h. Formalisieren) oder die Inhalte in die Umgangssprache überführen (d. h. Verbalisieren) (vgl. Bauer 1978, S. 78 – 81).

Beim *Formalisieren* wird versucht, die Zeichen nicht nach ihrer gebräuchlichen Art zu verwenden, zum Beispiel Buchstaben zu einzelnen Wörtern im herkömmlichen Sinn zu verbinden, sondern diese nur ihrer grafischen Form nach zu verwenden. Zweck dieser Formalisierung ist die Vervollkommnung der mathematischen Fachsprache zu einer rein künstlich erschaffenen Formalsprache. Jeder Mathematiker und jede Mathematikerin verwendet daher eine mathematische Fachsprache, die abhängig von der Person und vom Themengebiet unterschiedlich nahe an der vollendeten Formalsprache liegt (vgl. Bauer 1978, S. 78 – 81).

Der umgekehrte Prozess wird *Verbalisieren* genannt und geht häufig von der mathematischen Fachsprache aus in Richtung Alltagssprache.

> *„Im einzelnen gehört dazu* [auch] *ein Übersetzen von Vorstellungen, Handlungen, Bildern und Teilen einer formalen Sprache in die natürliche Sprache. Insbesondere ist Verbalisieren ein der Richtung des Formalisierens entgegengesetzter Prozess….“* (Bauer 1978, S. 82)

Durch das Verbalisieren können Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen und Gedanken präzisieren. Zusammenhänge werden dadurch leichter behalten und können auch eher reproduziert werden. Daher soll in der Schule auf eine adäquate selbstständige Formulierung mathematischer Inhalte geachtet werden. Auch bei Problemstellungen wie im dritten Kapitel wird zu Beginn versucht, die Aufgabe zu verstehen. Dazu kann die Aufgabenstellung auch verbalisiert werden. Umgekehrt soll aber der Prozess des Formalisierens nicht zu kurz kommen, da dadurch abstraktes Denken ermöglicht wird (vgl. Bauer 1978, S. 82 – 83).

Aufgabe 5.3. **Lehrsatz des Pythagoras**

Für die Seitenlänge jedes rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diese formale Darstellung des Lehrsatzes kann auch verbal formuliert werden:

> *In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten (a und b) gleich dem Quadrat der Hypotenuse (c)!*

Zusammenfassend können nun folgende Wechsel zwischen den Darstellungsebenen auftreten, welche sich nach Grevsmühl (1995, S. 17) graphisch beschreiben lässt (Abbildung 5.3.):

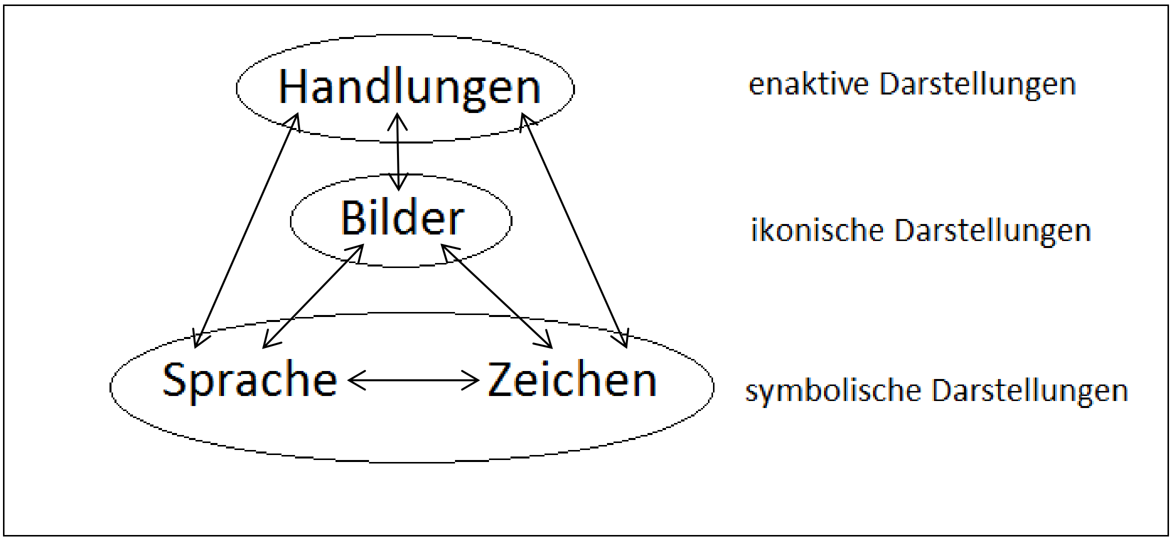


Abbildung 5.3.

In dieser Diplomarbeit wird nur auf den Wechsel der Darstellungen eingegangen, der häufiger im Bereich der Mustererkennung auftaucht. Diese werden konkret bei den behandelten Beispielen beschrieben. Nähere Beschreibungen findet man unter anderem in Bauer (1978), Zech (2002) sowie Hole (1975).

5.2. Lehrplan und Bildungsstandards

Im **Lehrplan der AHS Unterstufe** wird mehrmals auf die Nutzung unterschiedlicher Darstellungsformen hingewiesen. Bereits in der Einleitung wird Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeit ausgewiesen und danach noch genauer festgehalten:

„Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln:

- …
- *Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere: … Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).*
- …
- *Darstellen und Interpretieren, insbesondere: verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten; geometrisch-zeichnerisches*

> *Darstellen von Objekten; Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen; …“* (Lehrplan AHS Unterstufe – Mathematik 2000, S. 1)

Auch an anderen Stellen wird noch genauer auf den Umgang mit Darstellungen eingegangen. Es wird zum Beispiel festgehalten, dass Schülerinnen und Schüler Texte in mathematische Handlungen umsetzen sowie Formeln in sprachliche Formulierungen auflösen können. Dabei geht es auch um den Erwerb der mathematischen Fachsprache, die von der Umgangssprache stark abweicht und so bei den Schülerinnen und Schülern Diskrepanzen erzeugen kann. Elementare Begriffe der Mathematik wie zum Beispiel „diskret, stetig oder differenzieren“ haben in der Umgangssprache andere Bedeutungen. In der Umgangssprache versteht man unter „diskret“ eher verschwiegen, taktvoll und rücksichtsvoll. In der Fachsprache wird der Begriff bei Größen verwendet, die nur bestimmte, voneinander getrennte Werte einnehmen können. Auch innermathematisch gibt es unterschiedliche Verwendungen von Begriffen. Das rechtwinkelige Dreieck, das bestimmte Seitenlängen sowie einen Flächeninhalt besitzt, wird beispielsweise auch zur Beschreibung von Punktmustern herangezogen. Wir haben zum Beispiel die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n in Form eines rechtwinkeligen Dreiecks in Aufgabe 4.6. dargestellt.

Diese Diskrepanz zwischen Fachsprache und Umgangssprache soll durch die Lehrkraft hervorgehoben und durch elementare Begriffe, Symbole und Darstellungsformen zur Beschreibung mathematischer und außermathematischer Sachverhalte geklärt werden. Auch im Lehrstoff wird an mehreren Stellen darauf hingewiesen, möglichst oft Darstellungen unterschiedlicher Art zu verwenden, um dadurch mit den mathematischen Darstellungsformen vertraut zu werden. In allen Klassen und vielen Themengebieten wird darauf hingewiesen, unterschiedliche Darstellungen zu verwenden (vgl. Lehrplan AHS Unterstufe – Mathematik 2000, S. 1 – 9).

Auch im **Lehrplan der AHS Oberstufe** wird auf die unterschiedlichen Darstellungsformen eingegangen, wobei die enaktive Darstellung nicht erwähnt wird. In der Oberstufe ist auf bestimmte mathematische Kompetenzen besonders einzugehen:

> *„ …*
>
> *Kompetenzen die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten:*

- *Darstellend – interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten*
- *... “* (Lehrplan AHS Oberstufe – Mathematik 2004, S. 1)

Weiters ist der Bildungsbereich „Sprache und Kommunikation“ genauso wie in der Unterstufe zu berücksichtigen, um so schrittweise die mathematische Sprache weiter zu entwickeln.

Im Bereich der **Bildungsstandards** (vgl. Kapitel 3.2.2. sowie Kapitel 4.2.1.) wird auf die Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen ebenfalls Wert gelegt. Der erste Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ beinhaltet jene Anforderungen, die für den Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen notwendig sind.

„Charakteristische Tätigkeiten sind z. B.:

- *alltagssprachliche Formulierungen in die Sprache/Darstellung der Mathematik übersetzen*
- *einen gegebenen mathematischen Sachverhalt in einen andere Darstellungsform (tabellarisch, grafisch, symbolisch/Rechnersyntax) übertragen; zwischen Darstellungen oder Darstellungsformen wechseln*
- *Zeichnungen einfacher geometrischer Figuren und Körper anzufertigen*
- *... “* (Heugl & Peschek 2007, S. 11)

Zusammenfassend wird in Österreich sowohl im Lehrplan als auch in den Bildungsstandards großer Wert auf die Darstellungsformen und den Wechsel zwischen den Darstellungen gelegt. Einzig die enaktive Darstellungsform findet in den höheren Klassen keine Erwähnung. Da aber oft nur von allen Darstellungsformen die Rede ist und nicht explizit angeführt wird, welche davon verwendet werden müssen, kann an geeigneter Stelle versucht werden, auch diese Darstellungsform sinnvoll einzusetzen. Man muss aber berücksichtigen, dass sie von bestimmten Materialien abhängt, die bei vielen abstrakteren Themengebieten oft nicht vorhanden sind (siehe 5.1).

Mustererkennung oder das Verwenden von Mustern kommt im Zusammenhang mit einem Wechsel von Darstellungen aber nicht vor. Da es aber oft einen entscheidenden Vorteil bringt, gezielt Muster als ikonische Darstellungsform einzusetzen, bleibt es der Lehrkraft überlassen, diese im Unterricht zu verwenden. Einige Beispiele, bei denen Muster als Darstellungsmittel Anwendungen finden, werden im nächsten Unterkapitel vorgestellt.

5.3. Anwendungen und Beispiele in der Mathematik

In verschiedenen Aufgaben können neue Aspekte und Muster beim Wechsel der Darstellung auftreten. Dabei kann ein besseres Verständnis erreicht oder ein neuer Gesichtspunkt erkannt werden. Als passendes Beispiel wird hier auf die Summenformel von Gauß erneut eingegangen. Wie bereits im dritten und vierten Kapitel erarbeitet, kann die Summe unterschiedlich dargestellt werden. Dadurch können wir verschiedene Einsichten zur Entstehung der Summenformel gewinnen:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Die ersten beiden Teile beschreiben die gleiche Summe und unterscheiden sich in der Darstellung nur in den verwendeten Zeichen. Um nicht eine lange Kette von Additionen anschreiben zu müssen, wurde in der Mathematik das Summenzeichen eingeführt. Dieses Zeichen ist einen Schritt zur Entwicklung der Notation in Richtung der abstrakten Formalsprache. Um aber die Summe tatsächlich auszurechnen, müssen alle Zahlen der Reihe nach addiert werden (*Prozess*).

Interessant ist der letzte Teil der Formel. Hier erhalten wir für beliebiges n sofort ein Ergebnis (*Produkt*) durch die explizite Formel. Wir wollen also verstehen, was beim letzten Gleichheitszeichen gemacht wurde, um das Produkt zu erhalten. Dazu übertragen wir die Summe in eine andere Darstellungsform, die den Prozess leichter verständlich macht:

Darstellung in Form eines Punktmusters (Abbildung 5.4.):

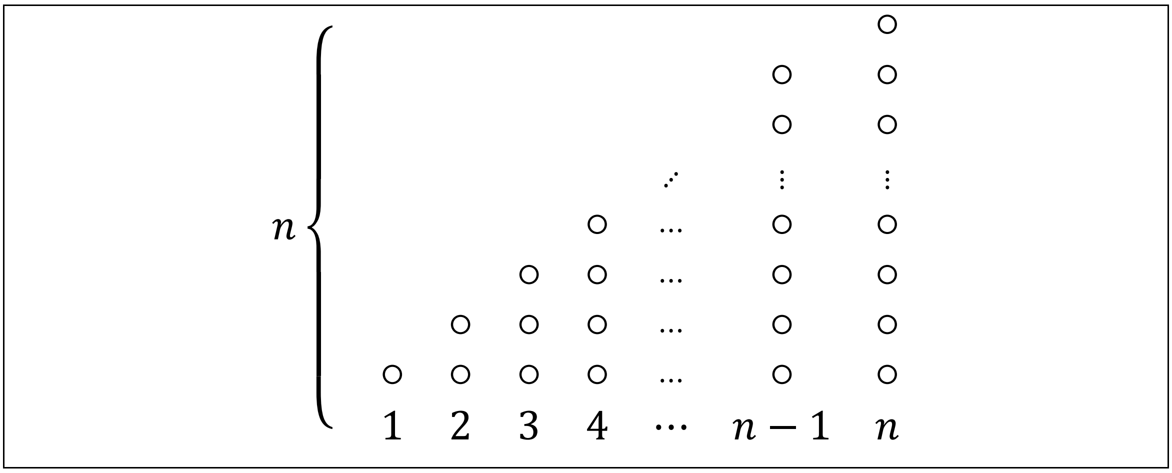


Abbildung 5.4. Darstellung in Form eines Punktmusters

Diese Form der Darstellung wurde in Kapitel 4.2.1. verwendet, um die Summenformel zu beweisen. Dieses Dreieck kann durch Umstrukturieren in ein Rechteck mit Seitenlängen $\frac{n}{2}$ und $(n+1)$ geändert werden (vgl. Aufgabe 4.6. Gaußsumme) oder durch Erweiterung mit dem gleichen Dreieck zu einem Rechteck mit Seitenlängen n und $(n+1)$ (vgl. Abbildung 5.5.).

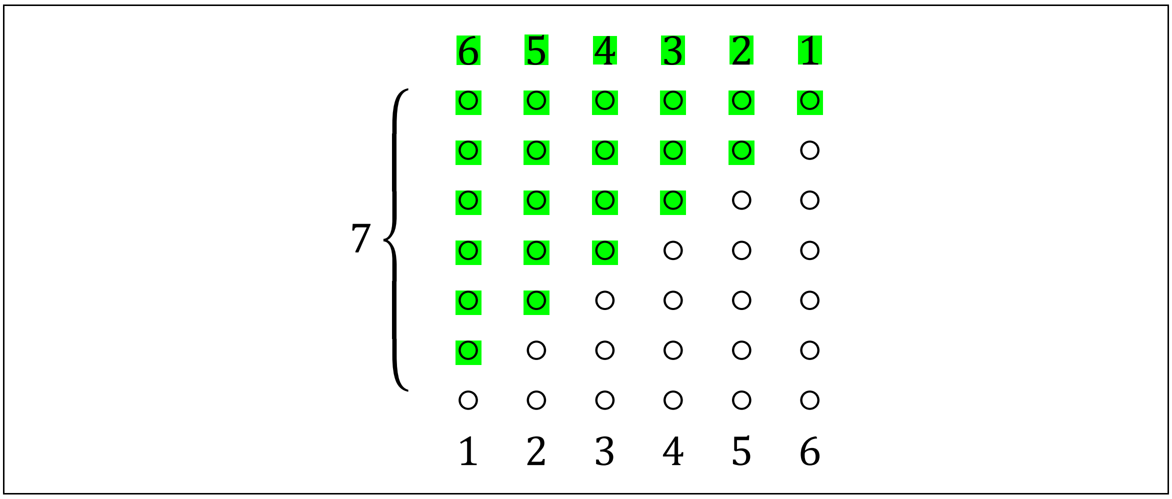


Abbildung 5.5. Erweiterung durch ein Dreieck derselben Größe für $n = 6$

Diese Form der Darstellung entspricht der ikonischen Darstellung (Ikonisieren), wobei dazu auch Elemente der symbolischen Darstellung, wie zum Beispiel Variablen, verwendet werden.

Die Umstrukturierung bzw. die Erweiterung mit einem weiteren Dreieck hat es erleichtert, ein Muster in dieser Summe zu erkennen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sie durch Anlegen eines weiteren Musters oder Umlegen des vorhandenen Musters neue Einsichten gewinnen.

Darstellung durch Umordnen der Zahlen:

$$1 + 100$$
$$2 + 99$$
$$\vdots$$
$$50 + 51$$

Der Darstellungswechsel wurde dabei in einer Darstellungsebene vollzogen. Die symbolische Darstellung wurde in einer anderen symbolischen Darstellung übergeführt, um leichter ein Muster in der Summe erkennen zu können. Je zwei Zahlen bilden die gleiche Summe. Dieses Prinzip lässt sich auch auf andere gleichartige Summen übertragen, wie bereits in Kapitel 4.1.2. gezeigt wurde.

5.3.1. Wechsel innerhalb einer Darstellungsebene

Aufgabe 5.4. **Eine Summe natürlicher Zahlen**

Berechne:

$$1 + 2 + \cdots + 19 + 20 + 19 + \cdots + 2 + 1 =$$

Zeige damit folgende Formel:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2.$$

Diese Aufgabenstellung behandelt eine reine symbolische Darstellung. Das einführende Beispiel können die Schülerinnen und Schüler auf verschiedene Arten rechnen. Einfaches Addieren der Zahlen sowie Anwendung der Gauß´schen Summenformel (vgl. Aufgabe 4.6.) führen dabei zum richtigen Ergebnis. Vorteil der Summenformel der natürlichen Zahlen liegt eindeutig in der weiteren Anwendung im Beweis der Formel.

Die linke Seite der Formel stellt einen Prozess dar, der aufwändiges Addieren beinhaltet. Überraschenderweise ist diese Summe gleich n^2. Auf den ersten Blick kann man nicht erkennen, wieso dieses Gleichheitszeichen richtig ist. Dazu verändern wir die linke Seite der Formel und stellen diese mit Hilfe von Summenzeichen dar:

$$1 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 1$$

$$= [1 + \cdots + (n-1) + n] + [1 + \cdots + (n-1)] = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Damit erhalten wir zwei Summen natürlicher Zahlen, die wir nun als solche auch leichter erkennen und folglich mit Hilfe der Gauß`schen Summenformel berechnen können.

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + n^2 - n) = n^2.$$

Diese Anwendung der Summenformel hat uns nun gezeigt, wie wir den Prozess des Berechnens der Summe in ein fertiges Produkt übertragen können. Dabei haben wir die ursprüngliche symbolische Darstellungen so verändert, dass wir schließlich die Formel beweisen konnten. Diese Aufgabe kann auch im Wechsel zwischen den Darstellungen elegant gelöst werden, indem wir die Aufgabe mit Punktmustern darstellen. Dieser Lösungsweg wird in Aufgabe 5.7. gezeigt.

Aufgabe 5.5. **Gremium gewählt aus $2n$ Personen**

Aus einer Gruppe von n Männern und n Frauen soll ein n-köpfiger Ausschuss gewählt werden. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten auf zwei verschiedene Arten und beweise so folgende Formel: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Diese Formel verbindet zwei unterschiedliche Zählweisen. Diese können durch eine geeignete symbolische Darstellung veranschaulicht werden. Im ersten Schritt betrachten wir die linke Seite der Formel und übertragen sie in eine andere formale Darstellung. Diese lässt sich durch Umformen des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ weiter verändern:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$

Für $k = 0$ (Anzahl der Männer im Gremium) erhalten wir nur eine mögliche Auswahl:

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n-0} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Für $k = 1$ erhalten wir:

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} = n \cdot n = n^2$$

(d. h., pro Mann müssen $n - 1$ Frauen aus n ausgesucht werden).

Diesem Auswahlverfahren liegt ein bestimmtes Muster zugrunde. Wir wählen zuerst k aus n Männern aus und dann $n - k$ aus n Frauen. Alle möglichen Fälle zusammen ergeben dann die ursprüngliche Summe, welche die möglichen Zusammensetzungen des n-köpfigen Ausschusses beschreibt.

Die rechte Seite der obigen Gleichung $\binom{2n}{n}$ kann als n-elementige Auswahl von Personen (männlich und weiblich) aus einer Gesamtmenge von $2n$ Personen (n Männer und n Frauen) angesehen werden. Das heißt, wir verwenden dafür nur eine Personengruppe aus der n Mitglieder des Gremiums gewählt werden.

Das bedeutet, wir haben diese Darstellungsarten und Muster mit Hilfe eines Wechsels innerhalb der Zählweisen gezeigt. Beweisen ließe sich diese Formel auch mit Hilfe der Induktion, was ebenfalls eine formale Darstellung der Lösung und somit einen Wechsel innerhalb der Darstellungsebene nach sich ziehen würde.

5.3.2. Wechsel zwischen den Darstellungsebenen

Aufgabe 5.6. **Addition natürlicher Zahlen**

Im Bereich der natürlichen Zahlen können viele Erkenntnisse durch Darstellungen mit Punktmustern vertieft werden. Betrachten wir folgende Aussagen über die Addition natürlicher Zahlen:

i. *Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.*
ii. *Die Summe zweier ungeraden Zahlen ist gerade.*
iii. *Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.*

Um diese Aussagen besser verstehen zu können bzw. den Beweis dieser Aussagen leicht nachvollziehen zu können, übertragen wir diese verbalen Darstellungen (symbolisch) in eine andere Darstellungsform, die dafür besser geeignet ist. Einerseits können diese Aussagen mit Hilfe von formalen Ausdrücken im Sinne der symbolischen Darstellung gezeigt werden, andererseits kann zur Darstellung auch ein Punktmuster bzw. Steinchenmuster (figurierte Zahlen) verwendet werden (vgl. Wittmann & Ziegenbalg 2004, S. 36).

Um diese Aussagen *formal zu beweisen*, betrachten wir Zahlen der Form $2k$ (gerade) und $2k+1$ (ungerade). Dabei nutzen wir die Eigenschaft, dass gerade Zahlen bei der Division mit 2 immer den Rest 0 haben und ungerade Zahlen den Rest 1. Die Variable k steht für eine beliebige natürliche Zahl. Addiert man nun diese Zahlen, erhält man:

i. $2k+2l=2(k+l)$ (gerade)
ii. $(2k+1)+(2l+1)=2k+1+2l+1=2k+2l+2=2(k+l+1)$ (gerade)
iii. $(2k+1)+2l=2k+1+2l=2(k+l)+1$ (ungerade).

Im *ikonischen Beweis* verwenden wir ebenfalls die Teilbarkeitsregel durch 2. Gerade Zahlen stellen ein Punktmuster dar, das aus zwei vollen Reihen besteht, und ungerade Zahlen besitzen dazu noch einen einzelnen Punkt (vgl. Abbildung 5.6.) (vgl. Wittmann & Ziegenbalg 2004, S. 35 – 36).

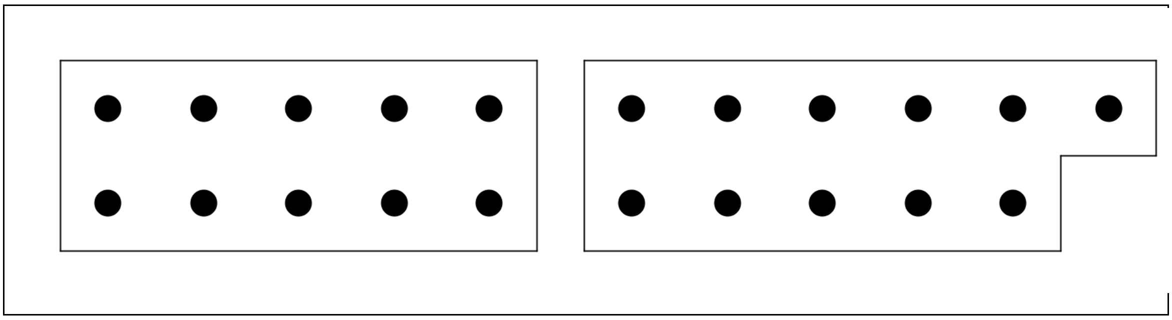


Abbildung 5.6. Ikonische Darstellung einer geraden Zahl (links) und einer ungeraden Zahl (rechts).

i. Verbinden wir graphisch zwei gerade Zahlen, dann werden diese Doppelreihen zusammengesetzt. Wir erhalten wieder zwei volle Reihen, was eben einer geraden Zahl entspricht (vgl. Abbildung 5.7.):

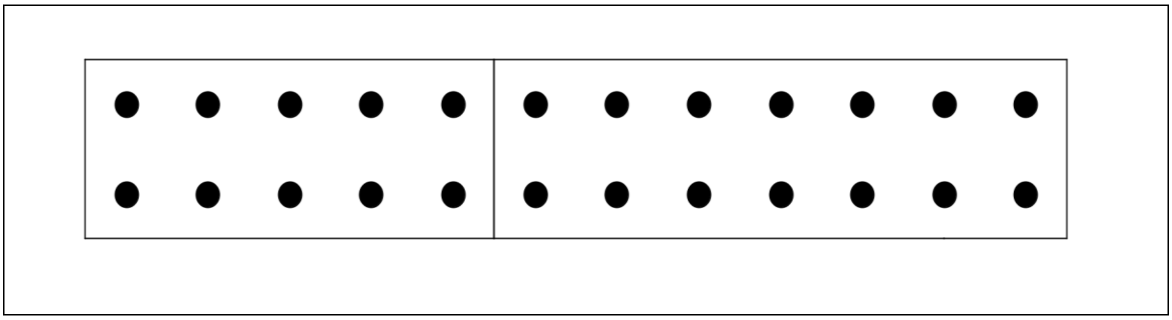


Abbildung 5.7. Ikonische Darstellung der Summe zweier gerader Zahlen.

ii. Die Summe zweier ungerader Zahlen lässt sich nach dem gleichen Prinzip darstellen und ergibt eine gerade Summe (vgl. Abbildung 5.8.):

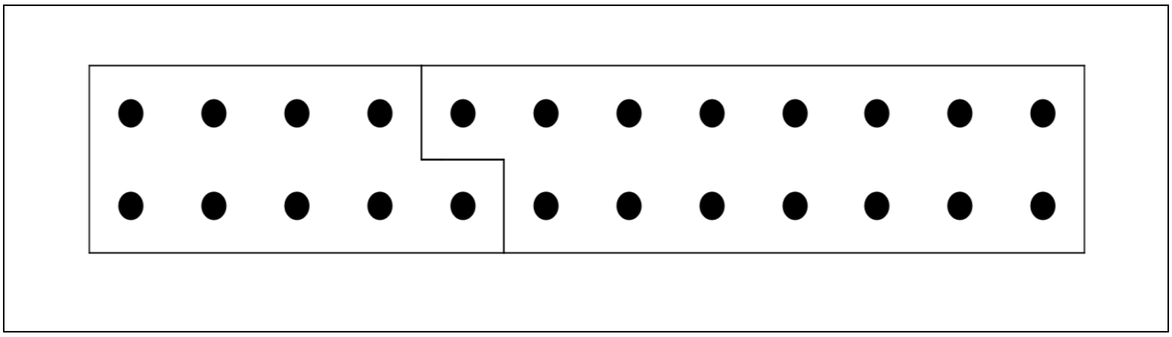


Abbildung 5.8. Ikonische Darstellung der Summe zweier ungerader Zahlen.

iii. Wenn wir nun eine gerade mit einer ungeraden Zahl zusammensetzen, erhalten wir eine ungerade Zahl (vgl. Abbildung 5.9.):

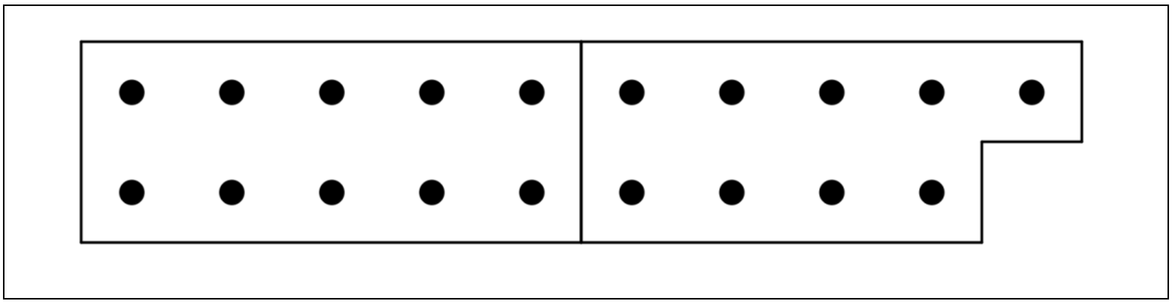


Abbildung 5.9. Ikonische Darstellung der Summe einer geraden mit einer ungeraden Zahl.

Der formale Beweis dieser Aussagen wird mit Variablen geführt, der ikonische Beweis arbeitet hingegen mit Punktmustern, die aber auch symbolischen Charakter haben. Ein angeführtes Muster steht dabei „*stellvertretend für beliebige Muster dieses Typs. Sie dienen dazu, Operationen zu illustrieren, welche allgemein anwendbar sind und daher Allgemeingültigkeit der Beweisführung sichern.*“ (Wittmann & Ziegenbalg 2004, S. 42). Diese Vorgehensweise wurde bereits bei früheren Beispielen verwendet. Diese prototypischen Aufgaben werden als *generische Beispiele* bezeichnet.

Aufgabe 5.7. **Eine Summe natürlicher Zahlen** (siehe Aufgabe 5.4.)

Diese Aufgabe kann auch anders gelöst werden. Dazu können wir die ursprünglich symbolische Darstellung in eine ikonische Darstellung verändern. Dazu erstellen wir ein Punktmuster für $n = 6$ (vgl. Abbildung 5.10.):

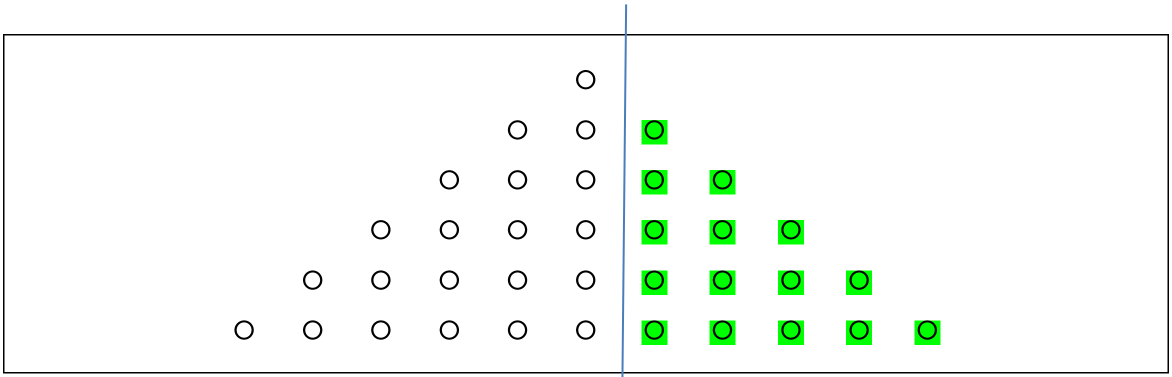


Abbildung 5.10.

Trennen wir den rechten Teil ab und setzen ihn mit dem linken Dreieck zu einem Viereck zusammen, erhalten wir ein Quadrat mit Seitenlänge 6 (vgl. Abbildung 5.11.).

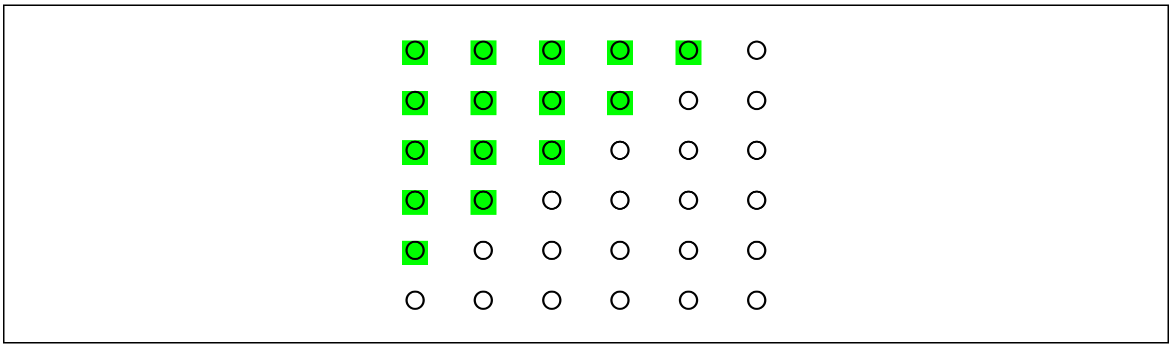


Abbildung 5.11.

Durch diese Übertragung in ein neues Punktmuster haben wir durch Umlegen von Punkten die Formel beweisen können. Dieses dargestellte Beispiel steht wieder für alle Muster dieses Typs, womit wir wieder ein generisches Beispiel gefunden haben.

Aufgabe 5.8. **Anzahl der Quadrate auf einem Schachbrett**

Jemand behauptet, auf einem gewöhnlichen Schachbrett könne man 204 Quadrate aufspüren. Stimmt das?[21]

Wir stellen diese verbal gestellte Aufgabe zuerst ikonisch dar, um einen besseren Einblick in den Aufbau eines Schachbretts zu erhalten (vgl. Abbildung 5.12.).

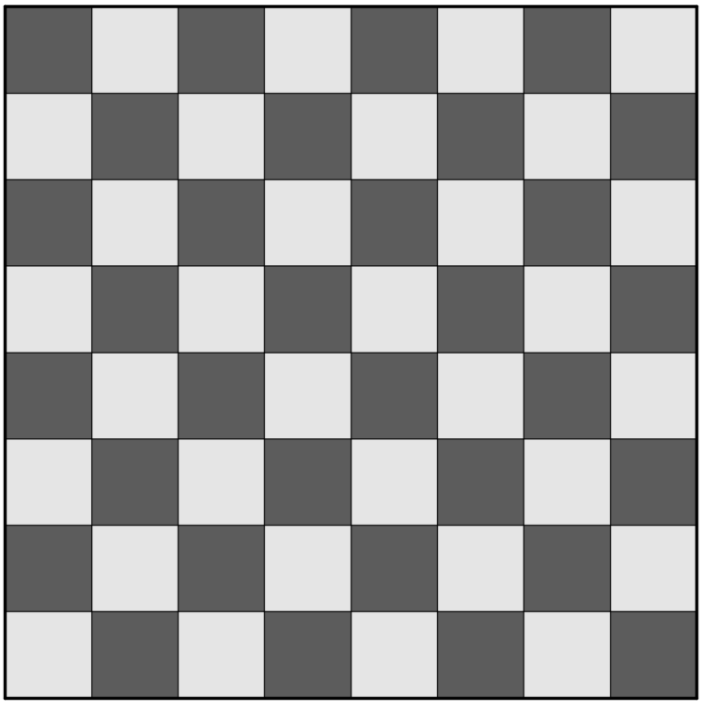


Abbildung 5.12. Ikonische Darstellung eines Schachbretts.

Aus Abbildung 5.12. können wir erkennen, dass 64 gleich große Quadrate vorkommen. Diese sind aber die kleinsten Quadrate, die im Schachbrett auftauchen. Zunächst muss erkannt werden, dass nicht nur die kleinen Quadrate zur gesuchten Anzahl beitragen, sondern dass diese auch zusammengefasst neue größere Quadrate ergeben, wie in Abbildung 5.13. gezeigt wird:

[21] Vgl. Mason 1992, S. 33 – 35.

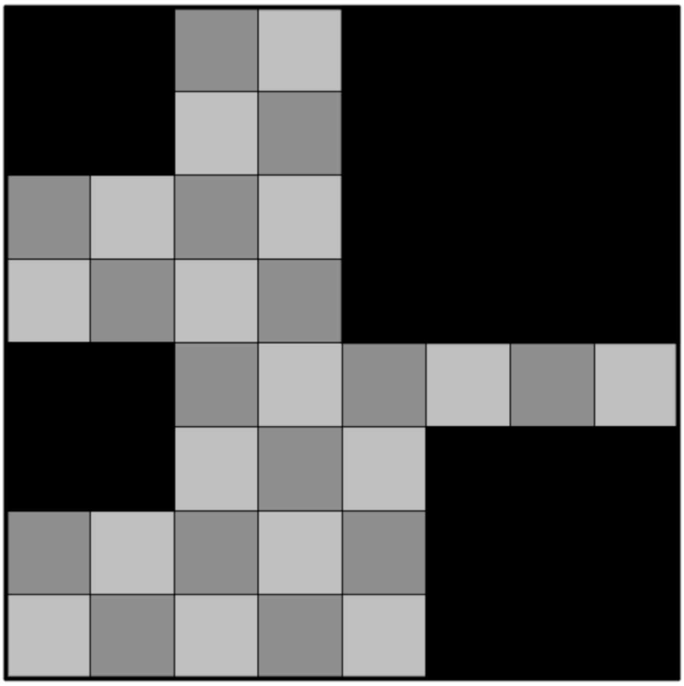


Abbildung 5.13. Einige mögliche Quadrate auf einem Schachbrettmuster.

Um eine Systematik zu erhalten, erstellen wir eine Tabelle, in der die erhaltenen Quadrate eingetragen werden (siehe Tabelle 5.1.). Wenn wir größere Quadrate betrachten, sehen wir, dass diese sich auch überlappen können. Wir brauchen zum Bestimmen der Anzahl der 2×2-Quadrate eine Methode, mit der die Zählung systematisch ablaufen kann. Betrachten wir dazu die erste Zeile. Darin können wir 7 sich überlappende Quadrate einzeichnen, die die oberste Linie berühren. Das heißt in jeder Zeile befinden sich 7 Quadrate und es gibt 7 mögliche Zeilen. Wir erhalten somit $7^2 = 49$ mögliche 2×2-Quadrate. Ebenso verfahren wir für alle größeren Quadrate und erhalten so alle Ergebnisse der Tabelle 5.1. Dabei ergibt sich ein Muster, das die Überlegungen für alle weiteren Quadrate erleichtert. Die Anzahl der vorkommenden $n \times n$-Quadrate ist eine Quadratzahl. Da bei größeren Quadraten die Anzahl der Möglichkeiten der Anordnungen im Schachbrett immer kleiner wird, erhalten wir daraus die fallende Folge der Quadratzahlen beginnend bei 64.

Größe	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2
Zahl	64	49	36	25	16	9	4	1

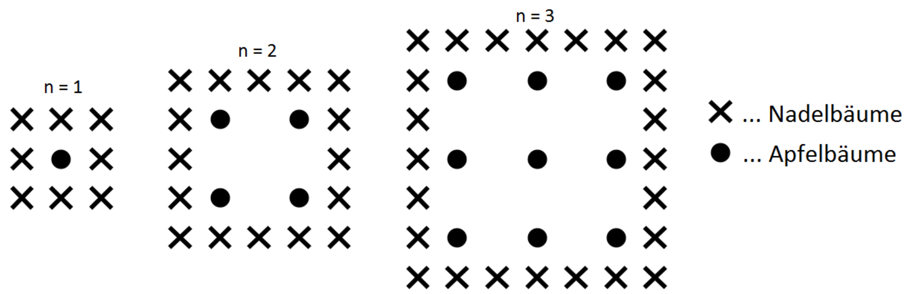
Tabelle 5.1. Anzahl der Quadrate auf einem Schachbrett

Zusammen ergibt sich daraus die Summe der gefunden Quadrate. Wir erhalten 204 Quadrate im Schachbrettmuster, womit die Behauptung der Aufgabe gezeigt wurde.

Zum Lösen dieser Aufgabe haben wir die Angabe zunächst in ikonische Darstellung übertragen. Dieser Wechsel hat uns einen neuen Blick auf die Aufgabe ermöglicht, sodass wir die Quadrate erkennen und zählen konnten. Diese bilden ein Muster, welches teilweise überlappende Quadrate beinhaltet. Entscheidend ist aber der systematische Aufbau des Zählens bei dieser Aufgabe. Durch die Darstellung in einer Grafik und einer Tabelle haben wir ein hilfreiches Muster (Folge der Quadratzahlen) zum Zählen entdeckt. Dieses Muster kann abschließend auch noch auf größere Quadrate ($n > 8$) angewendet werden.

Aufgabe 5.9. **Obstgarten bepflanzen**

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum. Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (n) *von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:*



Bestimmen Sie Terme, mit denen Sie die Anzahl a_n *der Apfelbäume und die Anzahl* b_n *der Nadelbäume berechnen können. Je nachdem wie man auf das Muster der Nadelbäume blickt erhält man unterschiedliche Terme. Suchen Sie möglichst viele verschiedene.*[22]

[22] Leuders 2010, S. 115

Auf den ersten Blick hat diese Aufgabe nichts mit Darstellungswechsel zu tun. Bereits in der Angabe wird der Inhalt sowohl verbal als auch ikonisch wiedergegeben. Für die Schülerinnen und Schüler bleibt jedoch die Aufgabe, die ikonischen Darstellungen in eine Formel zu übersetzen. Diese Aufgabe war im Jahr 2000 Teil der PISA-Studie. Dabei ist es für die Mathematik nicht von Bedeutung, welche Bäume gesetzt werden oder wer diese Bäume verwendet. Wichtig ist für uns nur das vorgelegte mathematische Muster, welches wir in die symbolische Sprache übertragen müssen. Andere Informationen sind dafür überflüssig und dienen nur der Anschauung. Dabei handelt es sich um eine typische Arbeitsweise der Mathematik, die sich zuerst nicht um die Anwendung kümmert. In unserem Beispiel geht es um Arithmetik. Es handelt sich dabei um einen Zweig der reinen Mathematik, der Zusammenhänge und Strukturen in symbolischen und bildlichen Mustern ergründet (vgl. Leuders 2010, S. 115 – 116).

Da in dieser Aufgabe Folgen von mathematischen Mustern betrachtet werden, müssen wir zuerst festhalten, dass jedes einzelne Muster für sich alleine steht und kein Zusammenhang mit den anderen Mustern besteht. Diese werden nach einem Konstruktionsprinzip weiter fortgesetzt und hängen nur von der Folgenummer ab. Wie aus einem Muster das nächste erzeugt wird, bleibt bei diesem Lösungsweg unbegründet. Wichtig ist der Bezug zur Folgenummer, da diese die Anzahl der Apfelbaureihen widerspiegelt (Böttinger 2007, S. 297).

Von der Aufgabenstellung wird nicht vorgegeben, wie wir die Darstellungen geeignet strukturieren können. Für die Anzahl a_n der Apfelbäume kann man schnell erkennen, dass es sich dabei um das Quadrat der Anzahl n der Reihen der Apfelbäume handelt:

$$a_n = n^2.$$

Um aber die Anzahl der Nadelbäume zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten, die Muster zu strukturieren. Für $n = 3$ könnte man folgende Strukturen finden (vgl. Abbildung 5.14.):

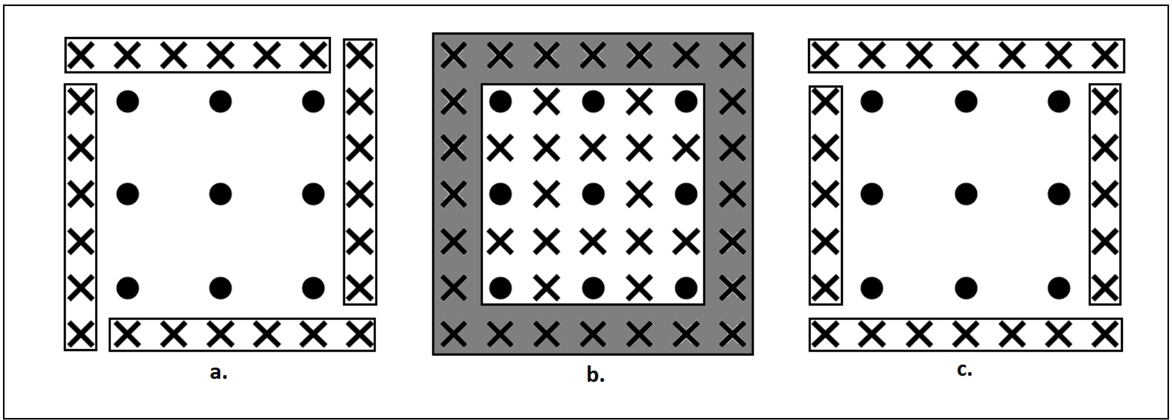


Abbildung 5.14. Strukturierung der Obstplantage für $n = 3$.

Die in Abbildung 5.14. dargestellten Strukturierungen helfen dabei, die Anzahl der vorhandenen Nadelbäume schneller bestimmen zu können. Im Fall a. wurden die Nadelbäume in vier gleich große Abschnitte unterteilt. Diese lassen sich durch die Anzahl der Apfelbaumreihen n wie folgt ausdrücken:

$$\text{a.}\quad b_n = 4 \cdot 2n.$$

Im zweiten Fall b. erhalten wir die Anzahl der grau hinterlegten Nadelbäume aus der Differenz der beiden dargestellten Quadrate. Wir erhalten:

$$\text{b.}\quad b_n = (2n+1)^2 - (2n-1)^2.$$

Im Fall c. erhalten wir:

$$\text{c.}\quad b_n = 2 \cdot (2n+1) + 2 \cdot (2n-1).$$

Alle drei Fälle führen auf das gleiche Ergebnis $b_n = 8n$. Jede der Herangehensweisen war aber anders. Genauso könnten Schülerinnen und Schüler bei diesen Aufgaben verschiedene Wege finden und die Muster unterschiedlich auslegen.

Am Ende dieser Aufgaben sollte unbedingt festgehalten werden, welches Wissen die Schülerinnen und Schüler nachhaltig verwenden können sollten. Dabei haben sich folgende Strategien ergeben:

- Zurückführen auf zentrale Muster, die in vielen Situation angewendet werden können, wie zum Beispiel Quadrate und Rechtecke (vgl. Summenformel von Gauß)
- Gleich starke Punktebündel zu markieren und zusammenzufassen (vgl. Aufgabe 5.9. Obstgarten)

- Umstrukturieren von Bildern, um bekannte Strukturen sichtbar zu machen, mit denen man einfacher zählen kann (vgl. Aufgabe 5.7. Eine Summe natürlicher Zahlen)
- Verschiedene Darstellungsmittel, um Muster zu beschreiben (vgl. 0. Anzahl der Quadrate auf einem Schachbrett) (vgl. Hussman et al. 2011, S. 48 – 49).

Diese Strategien wurden in dieser Diplomarbeit bei mehreren Aufgaben angewendet und haben sich dabei als sehr hilfreich herausgestellt.

6. RESUMÉ

Wie lässt sich Mathematik mit ihren zahlenreichen Forschungsgebieten einfach beschreiben? Eine mögliche Antwort, die bei Mathematikern und Mathematikerinnen großen Anklang gefunden hat, gibt Devlin (2002) in seinem Buch *Muster der Mathematik*. Da in all diesen dort vorgestellten Forschungsgebieten viele Muster untersucht und fortgesetzt werden, kommt Devlin zu folgender Definition: „*Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern!*“

Aber nicht nur in der höheren Mathematik stoßen wir auf Muster, auch in der Schulmathematik treten diese an verschiedenen Stellen auf. Bereits bei der Entwicklung der Zählzahlen (bzw. der natürlichen Zahlen) wurde ein systematischer Aufbau verwendet, der heute das Muster der Zahlen prägt. In diesem Aufbau haben sich zahlreiche Muster ergeben, die in den einzelnen Kapiteln untersucht wurden. So kann beispielsweise die Summe von einer bestimmten Anzahl natürlicher Zahlen durch geometrische (ikonische) Darstellungen in Form von Punktmustern erheblich schneller gelöst werden, anstatt diese der Reihe nach zu addieren. Bei der Entstehung der Zahlen wurden unterschiedliche Methoden angewendet, um eine bestimmte Gesamtheit, beziehungsweise eine bestimmt Menge an Objekten, zu bestimmen. Die erste Methode basiert auf einer eher enaktiven Darstellung dieser Menge. Für jedes Tier oder jedes Gut wurde ein Steinchen oder ein Stöckchen in eine Schale gelegt. Diese Eins-zu-Eins-Zuordnung hatte aber den Nachteil, keinen Überblick über die Anzahl zu haben. Man konnte nur auf einen Haufen Stöckchen zeigen und sagen, dass man diese Menge der Ware besitzt. Eine Verbesserung erreichte man mit dem Einsatz der ersten Symbole als Zuordnungen. Diese wurden auf Tongefäße gemalt. Jeder Ware und jeder Anzahl ordnete man ein Bild zu. Neben diesem Bild blieben aber immer noch die Inhalte der Gefäße, also die zugeordneten Stöckchen, vorhanden. Erst im letzten Schritt wurde auf den Inhalt verzichtet, da dieser schon auf der Schale durch Symbole ausreichend beschrieben wurde. Damit wurden erstmals abstrakte Symbole für die Anzahl bestimmter Mengen eingesetzt. Diese Entwicklung von der enaktiven über die ikonische zur symbolischen Ebene finden wir auch im Mathematikunterricht.

Im Bereich der Problemlösungsstrategien stellte sich heraus, dass Mustererkennung einen entscheidenden Vorteil bringen kann. Es lohnt sich für Mathematiker und Mathematikerinnen diese Muster zu suchen und näher zu ergründen. Bei der Erarbeitung dieses Kapitels haben sich dabei drei verschiedene Aufgabentypen herauskristallisiert:

i. Aufgaben, die nur durch geschicktes Einsetzen eines Musters gelöst werden können.
ii. Aufgabenstellungen, die durch das Erkennen eines Musters einfacher und eleganter gelöst werden können als mit herkömmlichen Rechenmethoden.
iii. Aufgabenstellungen, die mit der Methode *reduce, expand and find a pattern* gelöst werden.

Mustererkennung als Problemlösungsstrategie sollte auch im Schulunterricht nicht fehlen. Sowohl der Lehrplan als auch die Bildungsstandards fordern problemorientierten Unterricht. Beim Problemlösen unterscheiden wir auch die Handlungsbereiche, die durch die Bildungsstandards festgelegt werden. Diese zentralen, mathematischen Vorgehensweisen sowie die Aufgabentypen der Mustererkennung ergeben die Einteilung der einzelnen Aufgabenstellungen. Oft liegen die Aufgaben auch zwischen einzelnen Bereichen, diese können ineinander übergehen. Vor allem in Bezug auf Handlungsbereiche gibt es oft keine klar erkennbare, objektive Grenze. Diese Aufgaben in den „Grauzonen" werden dann der Kategorie zugeordnet, in der der Kernprozess des Erkennens eines Musters liegt. Für den Unterricht wird ein Konzept vorgestellt, welches in vier Sequenzen aufgeteilt wurde. Die Lehrerin oder der Lehrer müssen im ersten Schritt die Problemlösungsstrategie vorstellen und den Schülerinnen und Schülern näher bringen. Bei ersten Aufgabenstellungen wird dann in der zweiten Sequenz versucht, die Nützlichkeit der Anwendung dieser Strategien klar herauszustreichen, damit die Schülerinnen und Schüler dieser auch als Arbeitserleichterung wahrnehmen. Die letzten beiden Sequenzen dienen der Übung und der Vertiefung der gelernten Strategie und sollen in erster Linie die selbstständige Nutzung fördern. Erst wenn die Schülerinnen und Schüler die Strategie gut beherrschen, können sie diese auch auf andere Situationen übertragen und anwenden.

Mustererkennung spielt auch in anderen Bereichen eine bedeutende Rolle. Im *Wechsel von Darstellungsebenen* zwischen enaktiv, ikonisch und symbolisch können ebenfalls Muster entdeckt werden, die den Schülerinnen und Schülern die Inhalte oft besser verständlich machen. Diese *Wechsel* können *innerhalb einer Darstellungsart* sowie *zwischen Darstellungsarten* ablaufen. Damit ergibt sich eine Einteilung der Aufgaben. Bei komplexeren Aufgabenstellungen finden wir aber meist eine Mischform der einzelnen Wechsel.

Dabei haben sich bestimmte Herangehensweisen als hilfreich herausgestellt, wie zum Beispiel *das Zurückführen auf zentrale Muster* wie Quadrate und Rechtecke beim Summieren und Zählen oder *das Umstrukturieren von Bildern*, um bekannte Muster verwenden zu können. Diese Methoden haben beim Herangehen an eine Aufgabe einen neuen Einblick erlaubt und so zur Lösung oder zu besserem Verständnis verholfen.

Daher kann davon ausgegangen werden, dass Mustererkennung im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle im Unterricht spielen sollte und eine zunehmende Beschäftigung der Lehrkräfte mit diesem Thema notwendig wäre.

7. QUELLENVERZEICHNIS

Bauer, L. (1978): Mathematische Fähigkeiten: mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn: Schöningh.

Böttinger, C. (2006): Arithmetische Darstellungen – Punktmusterdarstellungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006: Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim [u. a.]: Franzbecker, S. 135 – 138.

Böttinger, C. (2007): Ein Kategoriensystem beim Wechsel von Repräsentationsebenen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim [u. a.]: Franzbecker, S. 295 – 298.

Bruder, R., Collet, C. (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruner, J. S. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung der Harvard-Universität. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Devlin, K. (2002, 2. Aufl.): Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg [u. a.]: Spektrum, Akad. Verlag.

Ewen, I. (1996): Strategies for Problem Exploration. In: Posamentier, A. S. (Ed.) (1996): The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, California: Corwin, S. 1 – 82.

Götz, S., Reichel, H.-Ch. (Hrsg.) (2011): Mathematik 7. Wien: öbv.

Heske, H. (2003): Ganzheitliches Lernen. In: Leuders, T. (2003): Mathematik-Didaktik: Praxisbuch für die Sekundarstufe 1 und 2. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 185 – 198.

Hole, V. (1975, 3. Aufl.): Erfolgreicher Mathematikunterricht: Keine Angst vor seiner Planung, Durchführung und Beurteilung. Freiburg: Herder.

Hußmann, S., Schacht, F. et al. (2011): Besser verstehen mit verschiedenen Darstellungen. In: Mathematik lehren Nr. 164, Seelze: Friedrich Velber. S. 48 – 51.

Krulik, S., Rudnick, J. C. (1996): Reduce, Expand, and Look for a Pattern. In: Posamentier, A. S. (Ed.) (1996): The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, California: Corwin, S. 149 – 158.

Leuders, T. (2003): Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe 1 und 2. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T. (2010): Erlebnis Arithmetik: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe 1 + 2. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Mason, J. (1992, 3. Aufl.): Hexeneinmaleins – kreativ mathematisch denken. München: R. Oldenburg.

Meschkowski, H. (1961): Denkweisen großer Mathematiker - Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

Polya, G. (1995, 4. Aufl.): Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme. Tübingen [u. a.]: Francke.

Posamentier, A. S., Krulik, S. (1998): Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: a resource for a mathematics teacher. Thousand Oaks, California: Corwin.

Probleme des Mathematikunterrichts (2008): Vorlesung an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien im SS 2008.

Reichel, H.-Ch., Humenberger, H. (Hrsg.) (2007): Das ist Mathematik 1. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen. Ausgabe für Lehrerinnen und Lehrer. Wien: öbvhpt.

Reichel, H.-Ch., Humenberger, H. (Hrsg.) (2009): Das ist Mathematik 3. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 3. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen. Wien: Österreichischer Bundesverlag.

Thaler, M. (2011): Problemlösen im Zeitalter von Bildungsstandards und Zentralmatura – Chance oder Verlust für den Mathematikunterricht? Diplomarbeit an der Universität Wien.

Tietze, U., Klika, M., Wolpers, H. (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2 – Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

Wittmann, E. C. (1997): Von Punktmustern zu quadratischen Gleichungen. In: Mathematik lehren Nr. 83: Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien. Seelze: Friedrich.

Wittmann, E. C., Ziegenbalg, J. (2004): Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In: Müller, G. N., Steinbring, H., Wittmann, E. C. (Hrsg.) (2004): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer, S. 35 – 55.

Wußing, H. (1976, 2. Aufl.): Carl Friedrich Gauß (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner). Leipzig: Teubner.

Zech, F. (2002, 10. Aufl.): Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Weinheim: Beltz.

Internetquellen:

Bildungsstandards: Baseline 2009 (8. Schulstufe): Testfach Mathematik: https://www.bifie.at/buch/1116/3/1/3 (am 06.05.2012)

Grevsmühl, U. (1995):

2. Handlungsorientierung und Veranschaulichung. In: Didaktisches Begleitheft der Universität Tübingen.

http://www.grevsmuehl.de/diffbrief.htm (am 06.05.2012)

Heugl, H., Peschek, W. (2007):

Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07, herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Klagenfurt.

http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf (am 24.4.2012)

Lehrplan der AHS Unterstufe – Mathematik (2000):
http://bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (am 27.03.2012)

Lehrplan der AHS Oberstufe – Mathematik (2004):
http://bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (am 27.03.2012)

Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe: Bildungsstandards – für höchste Qualität an Österreichs Schulen:
https://www.bifie.at/node/315 (am 13.04.2012)

Wittmann, E. C. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? http://www.nibis.de/nli1/gohrgs/Allgemein/faecher/mathematik/sinus%20grundschule/Was%20ist%20MathematikWittmann.pdf (am 13.10.2012)

Vygotskij, L.: Zone der nächsten Entwicklung. In: Brandes, H. (2005): Vygotskij und die elementarpädagogische Reformdebatte heute.
http://www.ehs-dresden.de/fileadmin/uploads_hochschule/Forschung/Publikationen/Studientexte/Studientext_2005-03_Brandes.pdf (am 24.04.2012)

8. Anhang

8.1. Abstract

Muster treten in der Mathematik an den verschiedensten Stellen auf. Auch in der Schulmathematik können Muster entdeckt werden. Die wichtigsten Bereiche wie *Mustererkennung als Problemlösungsstrategie* und *Mustererkennung im Wechsel von Darstellungen* werden im Rahmen dieser Diplomarbeit untersucht. Zu Beginn wird auf den abstrakten Zahlenbegriff eingegangen, um dessen Ursprung zu ergründen. Beim Zählen erzeugen wir ein bestimmtes Muster, wodurch jeder abstrakten Zahl eine bestimmte Anzahl von Objekten in einer gegebenen Gesamtheit zugeordnet wird. Daraus ergeben sich die natürlichen Zahlen, deren Struktur weitere interessante Muster hervorbringt.

Neben den theoretischen Hintergründen der beiden Eckpfeiler *Problemlösungsstrategie* und *Darstellungsebenen* werden zahlreiche Aufgaben vorgestellt, die Vorteile bei der Verwendung von Mustern beinhalten. Das wohl bekannteste Beispiel ist die Entstehung der Gauß´schen Summenformel, die er noch als Schulkind entdeckt hatte. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen kann durch Umstrukturieren direkt berechnet werden.

Die Aufgaben im Bereich der Problemlösungsstrategien werden in die Handlungsbereiche der Bildungsstandards sowie in die Aufgabentypen der Mustererkennung eingeteilt. Dabei kommen Beispiele vor, die das Erkennen eines *Muster zum Lösen benötigen*, die *durch ein Muster schneller und eleganter* gelöst werden können, sowie Aufgaben, die durch die Methode *reduce, expand and find a pattern* gelöst werden.

Aufgaben im Wechsel der Darstellungsebenen werden ebenfalls in zwei Kategorien eingeteilt. Dabei wird zwischen dem *Wechsel innerhalb* und dem *Wechsel zwischen den Darstellungsebenen* unterschieden.

Da Mustererkennung in vielen Bereichen der Schulmathematik eine Rolle spielt, kann und soll diese im Unterricht behandelt werden. Auch die Lehrpläne und die Bildungsstandards fordern einen problemorientierten Unterricht und unterstützen somit den Einsatz in der Schule.

8.2. Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Gabriel Pühringer
Geboren:	01.01.1987 in Linz
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Wohnort:	Brandmayergasse 3, 1050 Wien

Ausbildung:

1993 – 1997	Volksschule Haibach o. d. Donau
1997 – 2006	Stiftsgymnasium Wilhering Maturaabschluss im Juni 2006
Seit WS 2007	Universität Wien: Lehramt Mathematik und Physik

Berufliche Erfahrungen:

Seit 2002	Organisation eines dreitägigen Sommerlager des Panda-Clubs Haibach
2005 – 2007	Teilnahme im Sommer an einer dreiwöchigen Ferienaktion
2010 & 2011	Teilnahme am einwöchigen Forschercamp in Biedermannsdorf als Referent und Workshopleiter an einer begabungsfördernden Maßnahme im mathematisch – naturwissenschaftlichen Bereich
Seit April 2011	Geringfügige Beschäftigung als Landschaftsgärtnergehilfe bei Garten Dobretzberger in 4081 Hartkirchen