



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Geometrische Aspekte in der Theorie der
Farbmetrik von Erwin Schrödinger“

Verfasserin

Gerburg Neunteufl

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im März 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 407 E

Studienrichtung lt. Studienblatt: Unterrichtsfach Mathematik und
Darstellende Geometrie

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Gerhard Kowol

Vorwort

Vielleicht erscheint es ungewöhnlich, dass eine Mathematikerin sich mit dem Thema Farbe beschäftigt. In der Mathematik ist, wenn man sie kennen gelernt hat, gar nichts ungewöhnlich und für viele Mathematiker auch nicht. In den meisten stecken noch andere Interessen und Talente und sie suchen tiefer in die jeweilige Materie einzudringen. Zumindest geht es mir so. Ich bin zur Mathematik erst über die Malerei bzw. Kunst gekommen. Das künstlerische Umfeld ist nicht nur ein ganz anderes, sondern auch die Arbeitsweise ist ganz anders ausgerichtet. Beide Materien werden studiert und in beiden wird hinterfragt, jedoch in jeweils unterschiedlicher Art und Weise.

Für eine naturalistische Studie zum Beispiel hat man zu Beginn meist eine weiße Malfläche und Farben (Farbmittel) vor sich. Man versucht nun, das was man sieht, darzustellen. Beschränkt man sich auf die farbigen Eindrücke und möchte diese genau nachmischen, so wird man scheitern. Man kann sich nur durch eine angenäherte Farbwahl zufrieden geben.

Wie hängen die wahrgenommenen Farben der gesehenen Wirklichkeit und die Farben einer Abbildung dieser Wirklichkeit zusammen? Wie können Farben genau definiert werden und welche Strukturen lassen sich erkennen? Dies scheint auch eine philosophische Frage zu sein. Schon Descartes ([Farb], S.21) ordnet nicht nur den Gegenständen geometrische Eigenschaften zu, sondern auch den Farben.

Der Farbenraum ist nicht intuitiv begreifbar. Wir sind von Farben umgeben und sind mit ihnen aktiv verbunden, so dass es nicht leicht ist, die Struktur des Farbraumes zu erkennen. Versucht man Buntstifte derart zu

ordnen, dass die Farbe eines jeden Buntstiftes aus der Mischung der Farben der Nachbarstifte hervorgeht, so scheitert man kläglich. Wo würde ich beispielsweise den rosa Buntstift einordnen, wenn zwischen Weiß und Rot bereits Gelb und Orange liegt? Also lässt sich keine Anordnung finden, die linear verläuft. Auch eine kreisförmige Anordnung ist nicht zufriedenstellend. Weiß und Schwarz und deren Mischfarben, die verschiedenen Grautöne, sowie auch Mischfarben der bunten Farben, zum Beispiel Olivgrün, haben zwischen Gelb - Orange - Rot - Violett - Blau - Grün - Gelb keinen Platz. Die Dimension des Farbraumes muss daher größer als 1 sein. Das Problem erweist sich als ein nicht triviales, wobei andere Farb- und Lichteigenschaften wie Kontrast, Farbtemperatur, Reflexion und Remission etc. noch berücksichtigt werden müssen, um die Vielfalt der Farben messbar zu machen.

In unserem Sprachgebrauch ist Farbe ein Begriff, der vielseitig verwendet wird und daher ist es notwendig diesen zuerst zu präzisieren. Eine verbreitete Annahme ist, dass jede Farbe durch die Angabe der Wellenlänge eindeutig bestimmt ist, doch wird dabei das menschliche Empfinden völlig ausgeblendet. In dieser Arbeit wird genau erklärt, dass Farbe wissenschaftlich gesehen ein psychologischer Begriff ist. Das Messen von Farbe ist der Psychophysik zugeordnet und es wird durch unmittelbare Beobachtung - also ohne Hilfsmittel - durchgeführt.

Informationen der Wahrnehmung dienen der Orientierung und ermöglichen eine mentale Repräsentation der physikalischen Umwelt. In mancher Hinsicht ist die Wahrnehmung sehr zuverlässig, sie kann aber auch zu falschen Vorstellungen über die Welt führen. Eine psychophysikalische Analyse kann helfen dies zu klären.

Da das Thema sehr komplex und fächerübergreifend ist, war ein sehr tiefgründiges Arbeiten erforderlich, was auch mit einem hohen zeitlichen Aufwand einherging. Die Literatursuche über die Farbmeterik aus mathematischer Sicht erwies sich als schwierig. Insofern beschränke ich mich auf die

essentielle Arbeit Schrödingers, welche aber keine detaillierte mathematische Ausarbeitung beinhaltet. Ich musste daher die mathematischen Zusammenhänge zuerst ausarbeiten, strukturieren und in eine gerechte Form bringen. An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer Professor Gerhard Kowol meinen ganz besonderen Dank aussprechen für seine Geduld und Unterstützung!

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung an mich.

Inhaltsverzeichnis

1	Der affine Farbraum	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Licht und Farbe	4
1.3	Addition von Lichtern und Farben	5
1.4	Multiplikation mit einer reellen Zahl	13
1.5	Dimensionsfrage	16
1.6	Farbvalenzraum und der affine Farbraum	25
1.7	Das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System	30
1.8	Farbtafel und Spektralkegel	34
1.9	Das $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ -Normvalenzsystem	40
1.10	Koordinatentransformation	43
1.11	Schlussbemerkung zu diesem Kapitel	51
	Übersicht zu den Bezeichnungen	52
2	Der Farbraum mit Riemannmetrik	53
2.1	Einleitung	53
2.2	Linienelemente des Farbenraumes	57
2.3	Linienelement nach Helmholtz	61
2.4	Linienelement nach Schrödinger	64
2.5	Einstellung auf gleiche Helligkeit	66
2.6	Theoretischer Ansatz für das Linienelement	72
2.7	Empfindlichkeit des Farbunterschiedes von Spektralfarben	75
2.8	Farbkreiserversuch	77

2.9 Ein Maß der Verschiedenheit zweier Farben	82
2.10 Mac Adam Ellipsen	91
2.11 Farbtafel mit einer einheitlichen Skala	97
Zusammenfassung / Abstract	103
Zusammenfassung (deutsch)	103
Abstract (english)	104
Literaturverzeichnis	105
Abbildungsnachweis	107
Lebenslauf	109

Kapitel 1

Der affine Farbraum

1.1 Einleitung

Der Schwerpunkt meiner Arbeit ist die Lehre von den Maßbeziehungen der Farben, die so genannte Farbmeterik. Sie stellt mittels mathematischer Formeln das visuelle Ergebnis einer Farbbetrachtung oder eines Farbvergleiches zahlenmäßig dar. Die Voraussetzungen dafür sind das eindeutige Bestimmen und Messen von Farbe. Es scheint uns unmittelbar klar zu sein, was Farbe ist, da es unseren Alltag bestimmt. Jedoch wird der Begriff Farbe im übertragenen und nicht fachlichen Sinn für völlig Unterschiedliches verwendet. Im Englischen wird zwischen colour/color, paint und dye unterschieden, also zwischen Farbton, Anstrichfarbe und Farbstoff. Hier wird also zwischen dem Effekt Farbe („farbig“) und der Ursache für Farbe („streichen“, „färben“) unterschieden. Der Begriff Farbe beinhaltet auch die Wortbedeutungen: Körperfarbe, Farbgebung, Lichtfarbe, Malmittel und Farbeindruck. Letzteres kommt dem Fachbegriff Farbe am nächsten. Es gibt einen großen Unterschied zwischen dem Begriff Farbe der deutschen Alltagssprache und der psychologischen Fachsprache. Farbe ist kein physikalischer Begriff. Wir orientieren uns im Alltag durch Farben und das führt dazu, dass wir Farbe als äußere Objektqualität erleben, anstatt dass wir uns bewusst sind, dass Farbe eine *subjektive Sinnesempfindung* ist.

Für Analysen sind daher nur Versuchsanordnungen erfolgreich, bei denen Farben nicht an Objekten anhaftend wahrgenommen werden, sondern bei denen Farbfelder möglichst ohne Struktur verwendet werden, die von jedem Punkt die gleiche Reizstrahlung abgeben. Solche Reizfelder unterscheiden sich nur durch die Position zum Gesichtsfeld, die äußere Form und die abgegebene Strahlung. Dabei ist das Auge von Testpersonen das alleinige Messinstrument.

Welche Merkmale der Farbeindrücke nimmt das Auge wahr? Es kann festgestellt werden, ob zwei Farbreize visuell unterscheidbar sind oder nicht. Dies ist die empirische Grundlage dieses ersten Kapitels. Die zweite Beurteilung des Auges ist ähnlich der ersten, doch werden Farbattribute beurteilt. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Helligkeit, die im zweiten Kapitel behandelt wird. Bei den vorgestellten Farbanpassungsversuchen stellen Beobachter Farben bei konstanter Helligkeit auf größte Ähnlichkeit ein.

Für das Farbsehen sind im Allgemeinen Farbreize¹ notwendig, also Licht im physikalischen Sinne. Licht kann als solches nicht gesehen werden. Der Zusammenhang zwischen der psychologischen Farbenlehre und den physikalischen Eigenschaften der Farbreize sowie deren wahrgenommene Attribute wird durch psychophysische Beziehungen hergestellt. Es lassen sich wesentliche strukturelle Merkmale der Farbreize in der Farbwahrnehmung finden, die sich mathematisch im Rahmen der Theorie der Vektorräume wiedergeben lassen. Die Ergebnisse der Versuchsreihen können dann auf geometrische Eigenschaften hin geprüft werden.

Nach einer ersten Abgrenzung der Fachbegriffe möchte ich die Forschungsfragen formulieren. Wie ist der Farbraum definiert, so dass 1) jede Farbe aus den Nachbarfarben gemischt werden kann, und dass 2) die Farbdifferenzen

¹Wir sehen auch Farben eine kurze Zeit nachdem wir die Augenlider geschlossen haben. Diese sind die Gegenfarben der zuvor gesehenen. Dieser Effekt entsteht durch die rezeptiven Felder in der Netzhaut.

zu den Nachbarfarben genau jene sind, wie sie das Auge wahrnimmt? Das heißt, die Farben werden derart aneinander gereiht, dass sie erstens gerade noch vom Auge unterscheidbar sind und zweitens zwischen zwei Farben keine Farbe mehr eingeschoben werden kann.

Die wissenschaftlichen Auseinandersetzungen zur Farbmétrie reichen bis in die Antike zurück. Eine Auflistung der Personen und der von ihnen aufgestellten Farbsysteme füllt viele Seiten und kann auf der Internetseite colorsystem.com nachgelesen werden. Die Wissenschafts- und Kulturgeschichte zeigen, dass die Farbmétrie durchgehend ein wichtiges Forschungsthema war und auch heute nicht abgeschlossen ist.

Die einfache Farbmétrie beruht auf den Grassmannschen Gesetzen und beurteilt die Gleichheit von Farben. Entscheidende Fortschritte erzielte 1920 Erwin Schrödinger aufbauend auf Erkenntnissen des Mathematikers Hermann Grassmann und des Physikers Hermann v. Helmholtz. Diese bekommen in der gängigen Fachliteratur meines Erachtens wenig Beachtung, obwohl sie Grundlage der heutigen Farbmétrie sind. Schrödinger zeigt, dass die notwendigen Voraussetzungen gegeben sind, um von einem Vektorraum der Menge aller Farben sprechen zu können. Die heute gebräuchlichen farbmétrischen Systeme beruhen auf der affinen Geometrie und der Vektordarstellung von Farben (genau genommen von Farbvalenzen, wie wir später erfahren werden). Diese Farbstruktur wurde erstmals von Schrödinger in seinen Arbeiten *Grundlinien einer Theorie der Farbmétrie im Tagessehen, Mitteilung I und II, 1920* ([Schrö1], [Schrö2]) entwickelt und wird hier im ersten Kapitel ausgeführt. Die erste Forschungsfrage wird dadurch beantwortet.

Für das Beantworten der zweiten Frage ist eine tiefgründige Auseinandersetzung der Farbabstände und der Farbwahrnehmung erforderlich. Die erste erfolgreiche Forschungsarbeit dazu stammt ebenfalls von Schrödinger 1920 [Schrö3] und ist als Grundstein für die weitere Entwicklung der Riemannschen Farbmétrie anzusehen. Daher geht diese Arbeit vorwiegend auf die Theorie von Schrödinger ein und führt den Ausgangspunkt, die Theorie von

H.v. Helmholtz ebenso vor wie spätere Ergebnisse unter anderem von D. L. Mac Adam. Dieser entwickelte eine Farbtafel mit einer einheitlichen Farbskala, wodurch die zweite Forschungsfrage beantwortet wird. Darüber berichtet sich im zweiten Kapitel.

Weiterführende Literatur ist am Ende der Arbeit aufgelistet.

1.2 Licht und Farbe

Da die Ursache des Farbsehens in erster Linie das Auftreffen von Licht auf der Netzhaut ist, richtet sich der Fokus von Schrödinger zuerst auf Licht und sodann auf die induzierte Farbe. Dieser Vorgang lässt sich quantitativ sehr genau verfolgen. Die Lichtstrahlen bzw. elektromagnetischen Wellen werden durch Farbreizfunktionen f beschrieben, wobei zu jeder Wellenlänge λ aus dem sichtbaren Spektrum $S = [380\text{nm}, 780\text{nm}]$ die Energiemenge angegeben ist. Die Menge der möglichen Energiewerte wird mit E bezeichnet:

$$f : S \rightarrow E, \quad \lambda \mapsto f(\lambda)$$

$f(\lambda)$ ist entweder in Form der Strahlungsenergie W , gemessen in J (Joule), oder meist mit der relativen Strahlungsverteilung S_λ (skaliert mit $S_{560\text{nm}} = 100$) angegeben. $f(\lambda)$ kann im ersten Fall offensichtlich nur Werte ≥ 0 annehmen; im zweiten Fall ist die Verteilungsfunktion nicht negativ. Insbesondere kann f stets als reelle Funktion interpretiert werden. Eine andere elektromagnetische Strahlung kann keine Ursache für das Farbsehen sein und wird daher nicht beachtet.

Die Strahlung einer Lichtquelle gelangt meistens nicht direkt ins Auge, sondern nach mehrmaliger Reflexion. Hinzu kommt häufig eine Absorption oder bei lichtdurchlässigen Oberflächen eine Transmission, die von der Beschaffenheit des Körpermaterials abhängen. Der letztlich reflektierende Teil resultiert aus den Reflexionseigenschaften, die durch eine spezifische Reflexionsfunktion beschrieben werden. Der ins Auge eintreffende Farbreiz hat die spektrale Energieverteilung, die sich aus dem Produkt der spektralen Ener-

gieverteilung der Strahlungsquelle und der spektralen Reflexionsfunktion der Oberfläche ergibt. Siehe dazu das Schema in Abbildung 1.1.

Aufgrund von Erfahrungstatsachen gilt, dass mehrere verschiedene Farbreizfunktionen $f_i, i \in I$ Indexmenge, Lichtstrahlen beschreiben, die bei stets gleichbleibender Lichtquelle φ als ein und dieselbe Farbe F wahrgenommen werden. Diese können unter einer anderen Lichtquelle verschieden aussehen. Solche Farben werden als *metam* bezeichnet. Siehe dazu Abbildung 1.2.

Eine *Farbe* F lässt sich mittels der Menge \mathcal{M}_F beschreiben, die genau die Funktionen $f_i, i \in I$, der als gleich wahrgenommenen Lichter enthält. Die Menge aller Farbreizfunktionen von Lichtstrahlen wird mit \mathcal{M} bezeichnet und die Menge aller wahrgenommenen Farben mit \mathcal{F} . Farben werden im Weiteren immer mit Großbuchstaben $A, B \dots$, Farbreizfunktionen mit Kleinbuchstaben $a, b \dots$ bezeichnet. Es gilt also $\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{M}_F$.

1.3 Addition von Lichtern und Farben

Dem Mischen oder der *Addition* von Lichtern entspricht physikalisch gesehen die Superposition von zwei Lichtstrahlen und somit die Addition der beiden Farbreizfunktionen. In der Farbtheorie wird zwischen der oben erwähnten *additiven Farbmischung* und der *subtraktiven Farbmischung*, also dem Mischen von Farbmitteln, unterschieden (siehe Abbildung 1.3). Diese ist jedoch genauso als Lichtmischung beschreibbar, da nur die reflektierenden Farbreize ausschlaggebend sind, deren Farbreizfunktionen stets durch Messgeräte (Kolorimeter und Spektralphotometer) bestimmt werden können. Daher konzentrieren wir uns nur auf Lichtmischungen und es bedarf keiner zusätzlichen Betrachtungen der subtraktiven Farbmischung.

Sind f und g zwei Elemente aus \mathcal{M} , so ist ihre Mischung oder Summe

$$f + g.$$

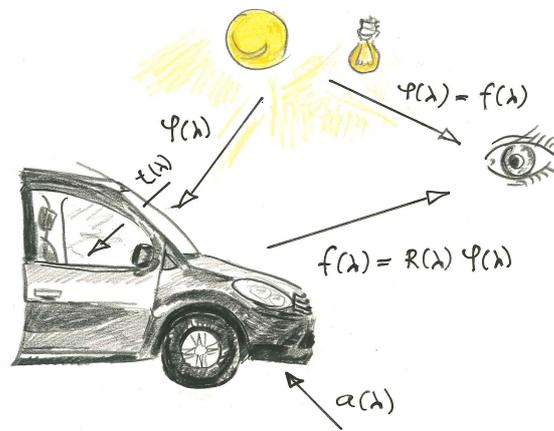


Abbildung 1.1: Die Farbreize, die ins Auge eintreffen, sind von der Situation der Lichtquelle und der Objektqualität abhängig. Strahlt eine Lichtquelle $\varphi(\lambda)$ direkt ins Auge, dann gilt $\varphi(\lambda) = f(\lambda)$. Treffen die Lichtstrahlen zuerst auf ein Objekt, so lenkt das Material des Objekts die Strahlung ab. Diese werden dann etwa von der Absorptionsfunktion $a(\lambda)$ und Transmissionsfunktion $t(\lambda)$ beschrieben. Das zurückgeworfene Licht hat eine ganz andere Farbreizfunktion. Die Änderung wird mit der Reflexionsfunktion $R(\lambda)$ beschrieben. Für die ins Auge einfallenden Farbreize gilt dann: $f(\lambda) = R(\lambda)\varphi(\lambda)$.



Abbildung 1.2: Metame Farbwirkung von zwei Farbfeldern pro Tafel mit unterschiedlichen Reflexionsfunktionen bei verschiedenen Lichtquellen: mittleres Tageslicht D65 mit einer Farbtemperatur von 6504 K, Glühbirne A mit ca. 3000 K und Dreibandleuchtstoffröhre TL84 (F11) mit 4000 K.

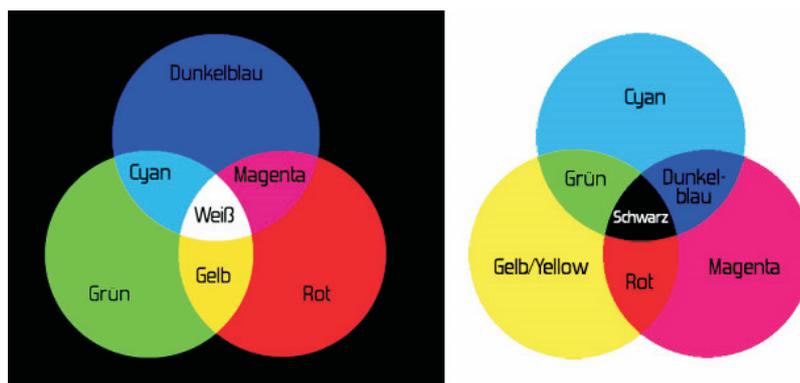


Abbildung 1.3: links: Additive Farbmischung; rechts: subtraktive Farbmischung

Es ist nicht selbstverständlich, dass diese Lichtmischung einer festen Farbmischung der beiden wahrgenommenen Farben F und G entspricht. Denn die Operation der Mischung ist vieldeutig, da man aus den vielen Repräsentanten $f_i \in \mathcal{M}_F$, $g_j \in \mathcal{M}_G$ der zu mischenden Farben je zwei beliebige auswählen kann, und die jeweiligen Summen könnten Lichter beschreiben, die verschieden wahrgenommen werden. Schrödinger ([Schrö1], S. 411) bemerkt dazu jedoch, dass uns die Erfahrung folgendes lehrt: Alle Lichter, die aus der Addition von jeweils unterschiedlichen Farbrepräsentanten resultieren, werden als ein und dieselbe Farbe wahrgenommen. Dies wird ausgedrückt im

3. Satz von Grassmann ([Schrö1], S. 411): *Gleichaussehende Lichter gemischt ergeben gleichaussehende Lichter.*

Dieser Satz beruht also auf empirischen Ergebnissen und kann nicht formal bewiesen werden.

Wir entnehmen daraus einen direkten Zusammenhang zwischen Farben und Lichtern bzgl. der Addition, nämlich dass die Summe $f + g$ der Farbreizfunktionen denselben farbigen Repräsentanten H hat wie die Superposition der beiden wahrgenommenen Strahllichter F und G . Das Mischen von Farben wird symbolisch mit $+$ dargestellt

$$H := F + G.$$

Daher ist es möglich, anstatt mit Lichtern direkt mit Farben zu operieren.

In Abbildung 1.4 ist ein Beispiel zu einer metamen Farbmischung von Spektralfarben² angeführt, welches den 3. Satz von Grassmann bestätigt.

Die Addition in \mathcal{M} ist kommutativ und assoziativ, da die Elemente als reelle Funktionen aufgefasst werden können. Daher hat auch die Addition in \mathcal{F}

²Man spricht von einer *Spektralfarbe*, wenn die entsprechende Farbreizfunktion nur in einem sehr kleinen Intervall aus $S = [380nm, 780nm]$ Strahlungsenergie aufweist und ansonsten 0 ist. Sie lässt sich nur durch diese eine Art herstellen, und meist gibt man nur eine genaue Wellenlänge und nicht ein Intervall an. Die Spektralfarben weisen die größte Sättigung ihrer Farbart auf.

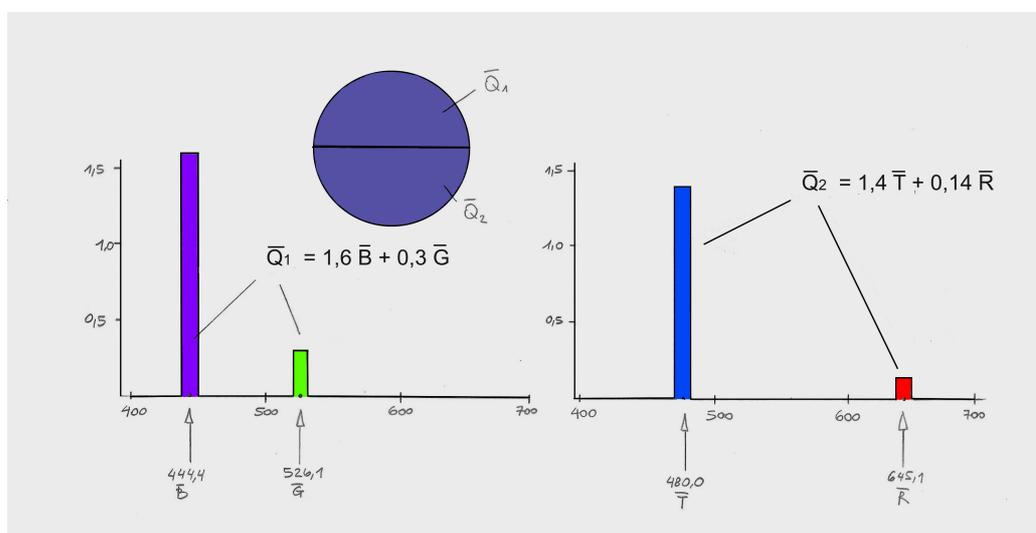


Abbildung 1.4: Farbmischungen \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 aus den Spektralfarben $\lambda = 444,4$ nm und $\lambda = 526,1$ nm bzw. $\lambda = 480,0$ nm und $\lambda = 645,1$ nm in den Verhältnissen $1,6 : 0,3$ bzw. $1,4 : 0,14$ ergeben den selben Farbton. In Abbildung 1.18 ist eine Fortsetzung dieses Beispiels dargestellt.

diese Eigenschaften, da sie sich mittels der Zuordnung einer Farbreizfunktion zu einer Farbe

$$\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}, \quad f \mapsto F \quad (1.1)$$

übertragen lässt. Es gilt also

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \quad (A, B, C \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Auch aus der praktischen Erfahrung ist dies ersichtlich. Es spielt bei der Lichtüberlagerung zweier Projektoren keine Rolle, welcher Projektor zuerst eingeschaltet wird. Es ist stets dieselbe Farbe bzw. Farbmischung zu sehen.

Das neutrale Element der Addition ist Schwarz O :

$$A + O = A$$

Die zu Schwarz O zugehörigen repräsentierenden Farbreizfunktionen aus \mathcal{M}_O weisen keine bzw. kaum Strahlungsenergie auf, zumindest ist diese so gering, dass deren Licht nicht mehr für das Auge wahrnehmbar ist.

Bisher haben wir gezeigt, dass $(\mathcal{F}, +)$ und $(\mathcal{M}, +)$ die Eigenschaften einer kommutativen Halbgruppe erfüllen. Diese lassen sich erweitern zu abelschen Gruppen, da folgender Satz aus der Algebra gilt:

Satz: *Jede kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel lässt sich in eine abelsche Gruppe einbetten.*

Um diesen Satz anwenden zu können, ist noch zu zeigen, dass die Kürzungsregel in \mathcal{F} und \mathcal{M} gilt, d.h. dass aus

$$A + X = A + X' \quad \text{folgt:} \quad X = X'.$$

In \mathcal{M} ist die Addition von Funktionen punktweise definiert, so dass die Kürzungsregel gilt, weil sie in \mathbb{R} erfüllt ist. Für \mathcal{F} ist dagegen die Gültigkeit der Kürzungsregel nicht selbstverständlich. Man muss dazu den 3. Satz von Grassmann strenger formulieren:

3. Satz (a): *Gleichaussehende Lichter, und nur diese, ergeben gemischt mit gleichaussehenden Lichtern wieder gleichaussehende Lichter.*

Im Allgemeinen gilt dieser Satz aufgrund der praktischen Erfahrung über die Farbmischung. In speziellen Fällen jedoch trifft er nicht zu, etwa wenn eine sehr lichtschwache Farbe X mit einer lichtstarken Farbe A zu einer neuen Farbe B gemischt wird:

$$A + X = B$$

Die beiden Farben A und B sind dann kaum unterscheidbar. Eine kleine Abänderung von X zu X' , die aber noch bemerkbar ist, ist in der Mischung nicht erkennbar und ergibt also immer noch B :

$$A + X' = B = A + X \quad \text{und} \quad X \neq X'$$

Solche Fälle werden in der Farbmeterik nach Grassmann unbeachtet gelassen. Sein mathematisches Modell der Farben weicht an dieser Stelle von den natürlichen Phänomenen des Farbsehens ab.

Schrödinger vergleicht die Unsicherheit der Bestimmung von X mit der experimentellen Unsicherheit der Differenz von Winkeln bei der Dispersion einer Glassorte. Wenn man einen kleinen Abweichungswinkel aus der Differenz zweier großer Abweichungswinkel bestimmt, treten experimentelle Unsicherheiten auf. Dennoch würde niemand die Eindeutigkeit bei der Subtraktion von Lichtwinkeln anzweifeln. Analog kann auch die Eindeutigkeit der Differenzbildung von Farben angenommen werden, sofern die Probleme der höheren Farbmeterik ausgeblendet werden: Das heißt, die Eigenschaften von sehr kleinen „Farbabständen“ werden außer Betracht gelassen. Was genau unter dem Begriff des Farbabstandes zu verstehen ist, wird im zweiten Kapitel erklärt.

Unter Berücksichtigung dieses Sachverhaltes nimmt der 3. Satz von Grassmann schließlich folgende Form an:

3. Satz (b): *Gleichaussehende Lichter, und nur diese, ergeben gemischt mit gleichaussehenden Lichtern wieder gleichaussehende Lichter – bei entsprechend großen Farbabständen.*

Damit ist die Gültigkeit der Kürzungsregel $(\mathcal{F}, +)$ gesichert.

Gemäß des Beweises des Einbettungssatzes werden zu \mathcal{F} und \mathcal{M} neue Elemente hinzugefügt, so dass die Subtraktion immer ausführbar ist. Die auf diese Weise erhaltenen Gruppen werden mit $\widehat{\mathcal{F}}$ und $\widehat{\mathcal{M}}$ bezeichnet.

Insbesondere gibt es zu jeder Farbe $A \in \widehat{\mathcal{F}}$ ein additiv inverses Ele-

ment $-A$ mit der Eigenschaft:

$$A + (-A) = O$$

Analog gilt dies in $\widehat{\mathcal{M}}$, denn diese Menge ist die Vereinigung von \mathcal{M} mit der Menge aller Farbreizfunktionen mit negativen Funktionswerten. Solchen Farbreizfunktionen entsprechen natürlich keine physikalischen Objekte.

Die Bedeutung des Subtrahierens

$$B + (-A) =: B - A$$

von zwei Farben A, B wird nicht interpretiert. Ob eine „negative“ Farbe etwa als Filter interpretiert wird, ist algebraisch nicht relevant. Wir können die Subtraktion von Farben jedoch dahingehend unterscheiden, ob sie in der Praxis einen Sinn ergibt oder bloß theoretisch existiert.

Lässt sich eine Farbe X finden, so dass sie mit A gemischt B ergibt, dann macht die Gleichung $B - A = X$ mit der negativen Farbe $-A$ auch Sinn. Solch ein X lässt sich jedoch nicht immer finden, etwa bei zwei Spektralfarben $S_{\lambda_i}, S_{\lambda_j}$: Da die zugehörigen Farbreizfunktionen s_{λ_i} und s_{λ_j} in disjunkten Intervallen stets positive Strahlungsenergie aufweisen, folgt aus der Gleichung

$$s_{\lambda_i} + x = s_{\lambda_j},$$

dass x auch negative Werte annehmen müsste. Einer solchen Farbreizfunktion x entspricht aber keine wahrnehmbare Farbe. Die Subtraktion $S_{\lambda_j} - S_{\lambda_i} = X$ existiert somit bloß rein theoretisch.

Die beiden Gruppen $\widehat{\mathcal{M}}$ und $\widehat{\mathcal{F}}$ lassen sich homomorph aufeinander beziehen. Dazu gehen wir von der oben angegebenen Funktion (1.1)

$$\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}, \quad f \mapsto F,$$

aus, wobei F die wahrgenommene Farbe zu f ist. Wir bezeichnen α als die

Wahrnehmungsfunktion. Wie gezeigt wurde, gilt für diese

$$\alpha(f + g) = \alpha(f) + \alpha(g) = F + G.$$

Nun erweitert man α zu $\hat{\alpha} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(f) &:= \alpha(f), & \hat{\alpha}(-f) &:= -\alpha(f) \quad (f \in \mathcal{M}) \\ \text{und } \hat{\alpha}(f - g) &:= \alpha(f) - \alpha(g) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dann $\hat{\alpha}$ ein surjektiver Homomorphismus.

1.4 Multiplikation mit einer reellen Zahl

Aus der wiederholten Ausführung der Addition einer Farbe A ergibt sich eine Operation von \mathbb{Z} auf $\widehat{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned} mA &:= A + A + A \cdots + A, \\ (-m)A &:= -(mA) \quad (m \in \mathbb{N}), \\ 0A &:= O \end{aligned}$$

Die Operation lässt sich auch invertieren. Um

$$\frac{1}{m}A =: Y$$

zu finden, wählen wir einen Lichtrepräsentanten a von A aus und multiplizieren ihn mit $\frac{1}{m}$:

$$\frac{1}{m}a =: y \quad \text{und setzen} \quad \hat{\alpha}(y) := Y$$

Es gilt dann: $mY = m\hat{\alpha}(y) = \hat{\alpha}(my) = \hat{\alpha}(a) = A$

Dabei muss noch gezeigt werden, dass diese Operation unabhängig vom Repräsentanten a von A ist. Sei also \bar{a} ein weiterer Repräsentant für A und sei

$$\frac{1}{m}\bar{a} =: z, \quad \hat{\alpha}(z) := Z.$$

Dann ist analog $mZ = A$, insgesamt daher

$$A = mY = mZ.$$

Zu zeigen ist, ob daraus $Y = Z$ folgt. Oder gibt es doch verschiedene Farben Y und Z mit $Y \neq Z$, die die Multiplikation mit einer Zahl $m \in \mathbb{Z}$ auf gleiche Farben führen: $mY = mZ$?

Schrödinger ([Schröl], S. 417) deutet auf Experimente hin, die zu Ergebnissen führen, dass Farbgleichungen sich bei Herabsetzung der Intensität in Ungleichungen verwandeln. Denn in einem Bereich der Netzhaut, dem sogenannten Skotom, findet kaum Reizübertragung von Hell und Dunkel statt. Schrödinger blendet diesen Sachverhalt zunächst aus und verweist auf die höhere Farbmetrik (Purkinjescher Effekt). Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Eindeutigkeit nach Schrödinger folgendermaßen beweisen:

Angenommen, $Y \neq Z$, aber $mY = mZ$. Von den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (m-1)Y &= (m-1)Z \quad \text{und} \\ (m+1)Y &= (m+1)Z \end{aligned}$$

kann keine richtig sein, denn zusammen mit $mY = mZ$ würde daraus der Widerspruch $Y = Z$ folgen. Da mit $mY = mZ$ auch $kmY = kmZ$ folgt ($k \in \mathbb{N}$ beliebig), kann man analog schließen, dass

$$\begin{aligned} (km-1)Y &\neq (km-1)Z \quad \text{und} \\ (km+1)Y &\neq (km+1)Z. \end{aligned}$$

Schrödinger postuliert nun: *Es gibt keine zwei Lichter, die bei gleichmäßiger Erhöhung der Intensität in periodischem Wechsel gleich und wieder ungleich werden.*

Damit erhält man einen Widerspruch. Es muss also doch $Y = Z$ gelten.

Da nun die skalare Multiplikation einer Farbe A mit dem Faktor $\frac{1}{m}$ als sinnvoll nachgewiesen wurde, lässt sie sich unmittelbar auf Faktoren aus \mathbb{Q} erweitern. Man setzt

$$\frac{n}{m}A := n \left(\frac{1}{m}A \right), \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Dabei sind die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (p \cdot q)A &= p(qA), \\ (p + q)A &= pA + qA, \\ p(A + B) &= pA + pB, \end{aligned}$$

für beliebige $p, q \in \mathbb{Q}$ erfüllt. Dies erkennt man sofort durch Zurückgehen auf Lichtrepräsentanten der Farben A und B . Während man vom physikalischen Standpunkt aus mit \mathbb{Q} als Operatorenbereich das Auslangen findet, verwendet man von mathematischer Seite her meist \mathbb{R} als Operatorenbereich. Dazu muss man zeigen, dass $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i A$ existiert, falls die Folge $q_i \in \mathbb{Q}$ ($i \in \mathbb{N}$) konvergiert: $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = q$. Für den Beweis geht man wieder auf repräsentierende Lichter zurück. Für die reellen Funktionen $a \in \widehat{\mathcal{M}}_A$ ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q_i a = qa =: \tilde{a}.$$

Nun möchten wir diese Eigenschaft auf die Menge der Farben übertragen. Für einen stetigen Transfer ist uns der empirische

2. Satz von Grassmann ([Schrö1], S. 415): *Wenn ein Licht sich stetig ändert, ändert sich seine Farbe stetig.*

hilfreich. Das scheint auch naheliegend zu sein, denn kleine Änderungen der Farbreizfunktion können auch nur kleine Veränderungen in der Farbwahrnehmung bedeuten. Somit ist die Wahrnehmungsfunktion α stetig, und es gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q_i A = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i \alpha(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(q_i a) = \alpha(qa) = \alpha(\tilde{a}) =: \tilde{A} \quad (q_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

Formal lässt sich diese Beziehung unmittelbar auf beliebige $q_i \in \mathbb{R}$ erweitern, wobei dann α durch $\hat{\alpha}$ zu ersetzen ist. Doch entspricht $q_i A$ für $q_i \in \mathbb{R}^-$ keiner realen Farbe.

Nach dem Satz aus der Analysis: *Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen*, ist der Operatorenbereich \mathbb{R} für $\hat{\mathcal{F}}$ gesichert. Ersichtlich gelten bzgl. dieser Operation, also der skalaren Multiplikation mit reellen Zahlen, die Gesetze:

$$\begin{aligned} q(A + B) &= qA + qB, \\ (q + r)A &= qA + rA, \\ (qr)A &= q(rA), \\ 1 \cdot A &= A \quad (q, r \in \mathbb{R}; \quad A, B \in \hat{\mathcal{F}}) \end{aligned}$$

Damit bildet die Menge $\hat{\mathcal{F}}$ aller Farben und deren Inversen einen Vektorraum über \mathbb{R} .

1.5 Dimensionsfrage

Um die Dimension dieses Vektorraums bestimmen zu können, müssen wir uns der Farbmischung noch genauer widmen. Bisher haben wir das Mischen von Farben derart thematisiert, dass damit eine neue Farbe erzeugt werden kann. Sehen wir die Gleichung einer Farbmischung genauer an, so lesen wir aus ihr ein Mischrezept für eine Farbe, wobei die Koeffizienten $t_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n$,

die Dosierung der Farben angeben. Es bestehe nun zwischen den gegebenen Farben die lineare Beziehung:

$$t_1A + t_2B + \dots + t_iF = O$$

Zunächst stellt sich die Frage, ob es für jede wirkliche Farbe ein solches Herstellungsrezept gibt, und wie dieses praktisch aussieht? Bzw. wie viele verschiedene Farbreize sind für die Herstellung einer Farbe notwendig? Das heißt, wir stellen fest, unter welchen Kriterien die Farben linear abhängig bzw. unabhängig sind.

Um diese Fragen beantworten zu können, bedarf es genauerer Ausführungen zur visuellen Wahrnehmung. Das Auge ist das einzige uns zur Verfügung stehende Messgerät bzgl. der Farbe. Dabei ist die Farbwahrnehmung einzelner Menschen nicht übereinstimmend, da wir Licht unterschiedlich wahrnehmen. Einer sieht die Walderdbeere rot leuchten und freut sich, für den anderen ist diese in ihrer Umgebung, neben den vielen grünen Blättern, schwieriger erkennbar. Die Farbrezeptoren sind nicht bei jedem Menschen gleich aktiv. Aus der Physiologie ist bekannt, dass für das Farbsehen Rezeptoren an der Netzhaut, die sogenannten Zapfen, verantwortlich sind. Es gibt von ihnen drei Arten: Für Rot, Grün und Blau, die unter den verschiedenen Wellenlängen unterschiedlich reagieren. Dies besagt die *Drei-Farben-Theorie* aus den Erkenntnissen von Thomas Young, James Clerk Maxwell und Hermann von Helmholtz. Werden die Farbrezeptoren durch Farbreize (Licht) angeregt, löst dies eine Aktivität in sogenannten antagonistischen rezeptiven Feldern von Farbneuronen aus. Erst in den spezialisierten Strukturen der primären Sehrinde und in den nachgeschalteten höheren Hirnregionen werden farbspezifische Zellen gefunden. Die Farbwahrnehmung geschieht nicht unmittelbar, sondern nach der *Kries-Zonentheorie* in mehrfachen Umwandlungsschritten durch Gegenfarbeneuronen.

Was wir als Farbe wahrnehmen, ist die zuerst physiologische, neuronale und dann psychische Verarbeitung eines Farbreizes. Diese Verarbeitungsebe-

nen müssen auch begrifflich unterschieden werden. Die Farbwahrnehmung im physiologischem Sinne wird als *Farbvalenz* ([Rich], S. 31) bezeichnet, deren Gesamtheit mit \mathcal{F}^* bzw. $\widehat{\mathcal{F}}^*$ für den erweiterten Bereich. Die verarbeitete Wahrnehmung wird als *Farbe* bezeichnet, deren erweiterte Gesamtheit wie bisher durch $\widehat{\mathcal{F}}$ symbolisiert wird. Aristoteles unterschied generell Farbwahrnehmung und Farbempfindung. Die Abbildung von der Menge $\widehat{\mathcal{M}}$ der Farbreizfunktionen auf $\widehat{\mathcal{F}}^*$ bezeichnen wir mit $\widehat{\alpha}^*$. Klarerweise gelten die hergeleiteten Eigenschaften für $\widehat{\mathcal{F}}$ genauso für $\widehat{\mathcal{F}}^*$.³ In der Praxis beruhen diese Eigenschaften auf Farbanpassungsversuchen mit *unmittelbarer* Beobachtung, deren Bedingungen derart streng sind, dass die in der Kries-Zonentheorie beschriebenen Einflüsse bewußt auszuschalten versucht wurden (Farbfelder auf schwarzen Hintergrund, siehe Abbildung 1.7). Psychologische Daten sind Ergebnisse von unmittelbarer Beobachtung durch Versuchspersonen, während physikalische Daten durch eine *mittelbare* Beobachtung gewonnen werden, also mit Hilfe von Messgeräten.

Wir konzentrieren uns nun auf Farbvalenzen und werden eine Farbvalenzmetrik definieren. Dazu stützen wir uns auf Erkenntnisse der Physiologie, die drei wesentliche Arten menschlicher Farbtüchtigkeit unterscheidet ([Schrö1], S. 419).

1. Für Farbtüchtige (Trichromaten) sind alle drei Farbrezeptoren aktiv, wie in Abbildung 1.5 dargestellt. Ihr Farbsehen kann durch ein linear unabhängiges Farbtripel beschrieben werden. Vier Farbvalenzen sind stets linear abhängig. Die Farbmannigfaltigkeit hat daher die Dimension 3.
2. Für Menschen mit Farbenfehlsichtigkeit (Dichromaten) sind zwei Farbrezeptoren aktiv. Ihr Farbsehen kann durch ein linear unabhängiges Farbpaar beschrieben werden. Drei Farbvalenzen sind linear abhängig.

³Um Bezeichnungsverwirrungen zu verhindern, ist auf Seite 52 eine Übersicht beigefügt.

Die Farbmannigfaltigkeit hat die Dimension 2.

3. Für Farbenblinde (unterschieden in Monochromaten oder Achromaten) ist nur eine Art von Farbrezeptoren oder keine aktiv. Nach der Kries-Zonentheorie ist in beiden Fällen nur ein Schwarz-Weiß-Sehen möglich. Daher sind in beiden Fällen bereits je zwei Farben linear abhängig. Die Farbmannigfaltigkeit hat die Dimension 1.

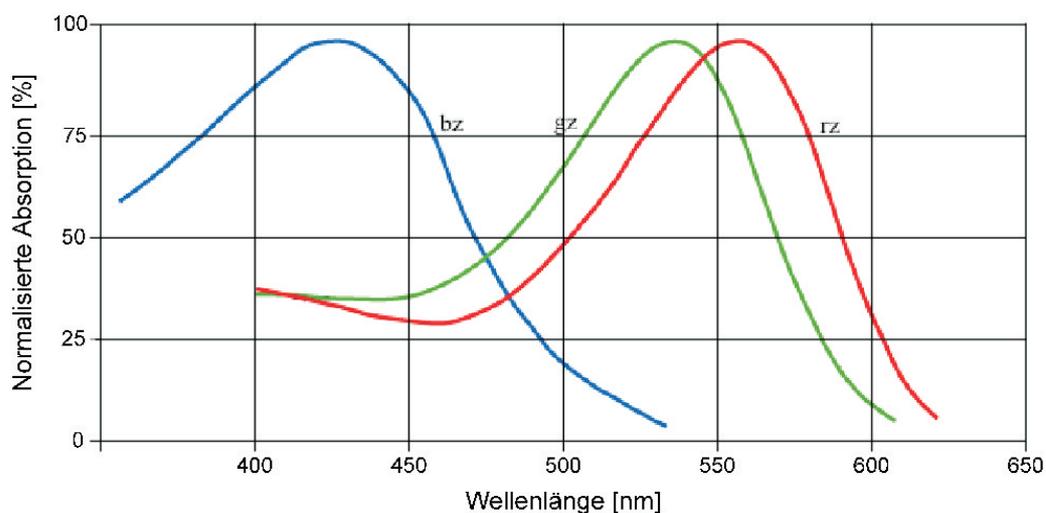


Abbildung 1.5: Diese drei Kurven sind die spektralen Absorptionskurven der drei Farbrezeptoren. Sie beschreiben die sogenannte Reizantwort der drei Farbrezeptoren in Abhängigkeit von der Wellenlänge des einwirkenden Lichtreizes. Im Allgemeinen ist der Verlauf der Kurven immer der gleiche, es können individuelle Empfindlichkeitskurven geringfügig abweichen.

Natürlich gibt es auch individuelle Ausprägungen der Farbrezeptoren. Dies betrifft vor allem relative Schwächen bei der Rotdifferenzierung oder bei der Rot-Grün-Differenzierung („Rot-Grün-Blindheit“). Es könnten auch andere Faktoren die Farbwahrnehmung beeinflussen. Wir haben die Fähigkeiten des „bewußten“ Erkennens und des Beschreibens von Farbunterschieden teilweise erst erlernen müssen, womit der Verdacht besteht, dass kulturbedingte Einflüsse Auswirkungen auf eine unterschiedliche Farbwahrnehmung haben

könnten. Deshalb finden sich immer wieder unterschiedliche Farbbezeichnungen. Bis ins 19. Jahrhundert wurden z.B. in China Grün und Blau sprachlich nicht einheitlich verwendet und in der Malerei undifferenziert eingesetzt, als wären sie von nur einer Farbart. Goethe bezeichnete Orange als Rotgelb. Orange, aber auch Magenta, sind im Deutschen als Bezeichnungen erst im 19. Jahrhundert aufgetreten. Als Braun wurden im 17. Jahrhundert dunkelviolette und dunkelblaue Farbtöne bezeichnet. Aus dem Sprachgebrauch kann jedoch nicht darauf geschlossen werden, welche Farben Menschen imstande sind wahrzunehmen ([Deu], S. 67). Das trichromatische Sehvermögen teilen wir mit den Menschenaffen. Die Entwicklung der drei Zapfenarten wurde vor 30 bis 40 Millionen Jahren abgeschlossen. Somit sind die physiologischen Voraussetzungen dem farbtüchtigen Menschen seit jeher gegeben die gesamte Farbenvielfalt wahrzunehmen. Ein tatsächlich stark beeinflussender Faktor auf die Farbwahrnehmung ist generell die Lichtsituation. Die Farbwahrnehmungen variieren unter verschiedenen Lichtsituationen komplizierter als der Weißabgleich der Digitalkamera ([Deu], S. 282). Entsprechen die ins Gehirn kommenden Signale der Netzhaut nicht dem, was erwartet wird, so schaltet sich im psychischen Verarbeitungsprozess eine „automatische Korrekturfunktion“ ein. Man spricht dann von der *Farbkonstanz*. Zum Beispiel wird eine sich von gelb auf grau verändernde bananenförmige Fläche noch gelb gesehen, wogegen eine neutrale Fläche bei dieser Farbveränderung schneller als grau wahrgenommen wird. Dieses Phänomen ist wissenschaftlich noch nicht genau geklärt. Die Annahme, dass das Gehirn auf gespeicherte Erinnerungen zurückgreift, wenn es die Farbempfindung hervorruft, erscheint jedoch plausibel. Wir wissen auch, dass in der Farbwahrnehmung ein Übungseffekt eine bemerkbare Rolle spielen kann. Menschen, die beruflich mit Farben zu tun haben wie beispielsweise Innenarchitekten, Farbchemiker und Maler, haben häufig eine individuell ausgeprägte Farbwahrnehmung, weil sie sich Farben auch leichter merken können. Urwaldvölker unterscheiden im Alltag zwischen ca. zwanzig Grünfarbtönen. Die Empfindlichkeitskurven der Abbildung 1.5 würden in diesem Fall größere Maxima anzeigen als bei anderen Beobachtern.

Vorerst gehen wir jedoch nicht näher auf derartige individuelle Unterschiede in der Wahrnehmung der Farbtüchtigen ein, da sie derart klein sind, dass sie auf die Dimension der Farbmannigfaltigkeit keine Auswirkung haben.

Wir beschränken uns auf den ersten Fall der Farbtüchtigen mit der Farbmannigfaltigkeit der Dimension 3 und lassen die niedrig-dimensionalen Fälle weg. Empirisch kann man sich jedoch nicht sicher sein, ob es nicht noch eine oder mehr Farbvalenzen gibt, die nicht aus den anderen drei mischbar sind. Schließlich haben wir nicht durchprobiert, ob nicht doch ein linear unabhängiges Farbquadrupel oder gar -quintupel existiert, bemerkt Schrödinger ([Schrö1], S. 420). Daher beweist er die Dreidimensionalität anders; und zwar verwendet er den

1. Satz von Grassmann ([Schrö1], S. 420): *Zu jedem Licht lässt sich ein gleichaussehendes herstellen, und zwar durch Mischung aus Weiß und einer reinen Spektralfarbe oder mit einem bestimmten Purpurgemisch:*

$$\begin{aligned}\alpha^*(f) &= \alpha^*(s_\lambda) + \alpha^*(w_i) \quad \text{oder} \\ \alpha^*(f) &= \alpha^*(p) + \alpha^*(w_i).\end{aligned}$$

Was wir als Weiß W wahrnehmen, bezeichnen wir mit $\alpha^*(w_i)$ und wird an dieser Stelle nicht näher definiert. Manche Farbmischungen ergeben nach unserer Beobachtung Weiß (siehe Abbildung 1.3). Als Purpurgemisch $\alpha^*(p)$ sind jene Mischfarben zu verstehen, die aus den Endfarben des Spektrums gemischt werden, wie etwa Rot $\alpha^*(s_r)$ und Violett $\alpha^*(s_v)$ gemischt Purpur ergeben.

Die Mischreihen innerhalb der Spektralfarben und der Purpurgemische bilden eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die Intensitätsvariationen von Weiß eine eindimensionale Mannigfaltigkeit und daher ergeben sie in der Kombination eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Schrödinger kritisiert

diese Absicherung der Dreidimensionalität des Farbraumes, da sie zuviel voraussetzt. Er beweist die Dreidimensionalität auf folgende systematische Weise:

Die Spektrallichter s_λ fester Strahlungsdichte unterscheiden sich im Allgemeinen nicht durch ihre Intensität, sondern ausschließlich durch ihre Farbart und vertreten diese mit größtmöglicher Sättigung:

$$\alpha(s_{\lambda_i}^*) \neq t\alpha^*(s_{\lambda_j}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

Solche Paare von s_λ sind daher im Allgemeinen linear unabhängig. Wir werden später zeigen, dass es auch linear abhängige Spektralfarben gibt.

1.Fall: Binäre Mischungen von Spektrallichtern ergeben einen *neuen* Farbreiz, der nach dem ersten Satz von Grassmann eine weißliche Abwandlung eines Spektrallichts $\alpha^*(s_{\lambda_k})$ ist:

$$\alpha^*(s_{\lambda_i}) + \alpha^*(s_{\lambda_j}) = F = \alpha^*(s_{\lambda_k}) + \alpha^*(w_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_k \quad (1.2)$$

Eliminieren wir aus dieser Gleichung den Weißanteil $\alpha^*(w_i)$, welcher bloß die Helligkeit ausmacht, so erhalten wir

$$t_i\alpha^*(s_{\lambda_i}) + t_j\alpha^*(s_{\lambda_j}) = t_k\alpha^*(s_{\lambda_k}) \quad (t_i, t_j, t_k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}). \quad (1.3)$$

Nun untersuchen wir, ob die Folgerung der ersten Gleichung (1.2) auf die zweite (1.3) für alle Spektralfarben gültig ist. Oder gibt es Spektralfarben Tripel, welche die zweite Gleichung nicht erfüllen und daher linear unabhängig sind?

Durch Einsetzen verschiedener Spektralfarben erkennen wir mit Hilfe von Abbildung 1.3 folgendes: Setzen wir in Gleichung (1.2) eine rote und grüne Spektralfarbe ein, so erhalten wir als neue Farbe einen gelben

Farbton, welcher sich nach Abbildung 1.3 aus einem Weißanteil und einer gelben Spektralfarbe zusammensetzt. Nehmen wir den Weißanteil heraus, erhalten wir eine gültige Gleichung (1.3), da die Farbmischung der beiden lichtschwächeren Spektralfarben Rot und Grün die gelbe Spektralfarbe ergibt. Das Spektralfarbentripel Rot, Grün und Gelb ist daher linear abhängig.

Setzen wir unseren Versuch mit einem neuen Spektralfarbentripel Rot, Grün und Dunkelblau fort. Aus Abbildung 1.3 lesen wir vorerst ab, dass das aus Rot und Grün gemischte Gelb mit Dunkelblau gemischt Weiß ergibt. Die erste Gleichung (1.2) hat daher ein negatives Vorzeichen auf der rechten Seite:

$$\alpha^*(s_r) + \alpha^*(s_g) = -k\alpha^*(s_b) + \alpha^*(w_i)$$

Die Farbmischung von Rot und Grün ist nur durch eine äußere Farbmischung von Dunkelblau und Weiß gleichzusetzen. Wird der Weißanteil wieder eliminiert, erhalten wir keine sinnvolle Gleichung mit $t_k < 0$. Das Spektralfarbenmischungsprodukt Rot und Grün ergibt kein negatives Dunkelblau. Das heißt die Gleichung (1.3) ist nur dann gültig, wenn $t_i, t_j, t_k = 0$ sind. Somit haben wir ein linear unabhängiges Spektralfarbenentripel gefunden und gezeigt, dass die Dimension der Farbmännigfaltigkeit mindestens 3 sein muss.

Eine ternäre Mischung aus Spektrallichtern liefert hingegen nichts Neues, denn drei aus diesen sind durch zwei ersetzbar:

$$\underbrace{\alpha^*(s_{\lambda_i}) + \alpha^*(s_{\lambda_j}) + \alpha^*(s_{\lambda_k})}_{\alpha^*(s_{\lambda_m}) + \alpha^*(w_j)} \stackrel{1. \text{ Grassmann}}{=} \alpha^*(s_{\lambda_l}) + \alpha^*(w_i)$$

Fassen wir die Weißanteile zusammen, so erhalten wir:

$$\alpha^*(s_{\lambda_m}) + \alpha^*(s_{\lambda_k}) = \alpha^*(s_{\lambda_l}) + \alpha^*(w_k)$$

Die Mischung aus drei Spektralfarbvalenzen lässt sich daher auf zwei reduzieren.

2.Fall: Nun berücksichtigen wir in diesem Dimensionsbeweis den zweiten Teil des ersten Satzes von Grassmann. Setzen wir in die binäre Mischung anstatt eines Spektrallichts ein Purpurgemisch ein, dann ergibt dies binäre Farbmischungen, die aus Weiß und einem Purpurgemisch $\alpha^*(p_F)$ nachgemischt werden können:

$$\begin{aligned} \alpha^*(s_{\lambda_i}) + \alpha^*(s_{\lambda_j}) = F &= \alpha^*(p_F) + \alpha^*(w_i) \\ &= \alpha^*(s_{\lambda_r}) + \alpha^*(s_{\lambda_v}) + \alpha^*(w_i) \end{aligned}$$

Wir formen um und erhalten:

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha^*(s_{\lambda_i}) - \alpha^*(s_{\lambda_r})}_{\alpha^*(m)} + \underbrace{\alpha^*(s_{\lambda_j}) - \alpha^*(s_{\lambda_v})}_{\alpha^*(n)} &= \alpha^*(w_k) \\ \alpha^*(m) + \alpha^*(n) &= \alpha^*(w_k) \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 1.6) Nun erhalten wir ein Paar *komplementäre* Farbvalenzen, die gemischt Weiß ergeben und kein neues Farbgemisch.

Wir haben somit gezeigt, dass die Dimension des Farbvalenzraumes höchstens 3 ist und dass jedes Licht aus drei reinen Spektrallichtern gemischt werden kann:

$$\alpha^*(f) = \alpha^*(s_{\lambda_i}) + \alpha^*(s_{\lambda_j}) + \alpha^*(s_{\lambda_k})$$

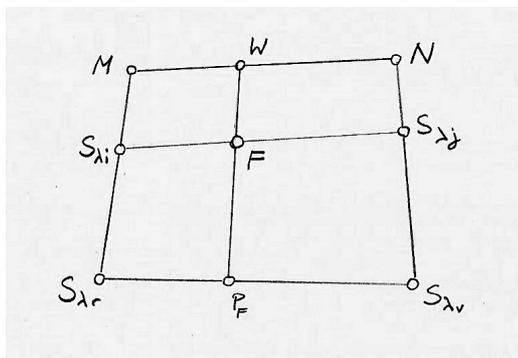


Abbildung 1.6: Anordnung der Farbvalenzen aus dem zweiten Teil des Dimensionsbeweises. Wie wir später sehen werden, ist der Farbvalenzraum konvex und die Spektralfarbvalenzen definieren den Rand. Darum sind die beiden Farben N und M auch Spektralfarben und die beiden Tripel $(S_{\lambda_r}, S_{\lambda_i}, M)$, $(S_{\lambda_v}, S_{\lambda_j}, N)$ sind linear abhängig.

1.6 Farbvalenzraum und der affine Farbraum

Fassen wir nun das bisher Gesagte zusammen, so kann jedem Farbreiz, mit- hin jedem Reiz der eine Farbwahrnehmung auslöst, nach dem ersten Satz von Grassmann eine dreidimensionale Farbvalenz zugeordnet werden. Es handelt sich bei der Struktur der Farbvalenzen um eine dreidimensionale Farbman- nigfaltigkeit – für Beobachter mit uneingeschränkter Farbtüchtigkeit. In ihr sind die Addition, die Subtraktion und die Skalarmultiplikation mit einer reel- len Zahl definiert. Für diese Operationen gelten die Axiome des Vektorraums.

THEOREM 1.1. Die Struktur $\langle \widehat{\mathcal{F}}^*, +, \cdot \rangle$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Dieser wird als *Farbvalenz- raum* bezeichnet. Die Teilmenge \mathcal{F}^* von $\widehat{\mathcal{F}}^*$ ist konvex. Es gibt die Abbildung α^* von $\widehat{\mathcal{M}}$ auf $\widehat{\mathcal{F}}^*$, so dass für alle f, g in $\widehat{\mathcal{M}}$, t in \mathbb{R} und alle x in $\widehat{\mathcal{F}}^*$ gilt:

1. $\alpha^*(f + g) = \alpha^*(f) + \alpha^*(g)$
2. $\alpha^*(t \cdot f) = t \cdot \alpha^*(f)$
3. $f_i, g_j \in \widehat{\mathcal{M}}_F$ genau dann, wenn $\alpha^*(f_i) = \alpha^*(g_j)$

Nun ist jeder 3-dimensionale \mathbb{R} -Vektorraum isomorph zum \mathbb{R}^3 .

Sei $K = \{A_1, A_2, A_3\}$ eine geordnete Basis des \mathbb{R} -Vektorraumes $\widehat{\mathcal{F}}^*$, dann existieren für jedes $F \in \widehat{\mathcal{F}}^*$ Koeffizienten $t_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, so dass sich F als Linearkombination der A_i darstellen lässt:

$$F = \sum_{i=1}^3 t_i A_i$$

Die Koordinatenabbildung Φ_K ordnet jeder Farbvalenz F bzgl. der Basis K den Koordinatenvektor (t_1, t_2, t_3) zu:

$$\Phi_K : \widehat{\mathcal{F}}^* \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F \mapsto \Phi_K(F) := (t_1, t_2, t_3)$$

Dieser formale Aufwand ist notwendig, um zu vermeiden, dass eine Farbe oder eine Farbvalenz einem Vektor gleichgesetzt wird, wie es jedoch häufig in der Literatur geschieht. Beispielsweise werden in den Büchern *Optik, Lehrbuch der Experimentalphysik* von L. Bergmann und E. Schaefer ([Optik], S. 712 - 714) und *Einführung in die Farbmatrik* von M. Richter ([Rich], S. 52 - 91) dieselben Variablen für die Farbvalenzen und deren Koordinatenvektoren verwendet.

In der Praxis werden die Farbvalenzen F von einem Beobachter aus den drei Primärvalenzen A_1, A_2 und A_3 nachgemischt, indem deren Lichter superpositioniert und derart dosiert werden, dass das Farbfeld dem gegebenen Farbreiz f visuell gleicht. Siehe dazu Abbildung 1.7. Die Ergebnisse können von Beobachter zu Beobachter verschieden sein. Das Auge justiert bei Lichtveränderungen ständig nach, wie wir dies oben unter Farbkonstanz beschrieben haben. Insofern ist es auch schwierig Weiß zu definieren. Wenn der Blick vom späten Tageslicht in Kunstlicht gerichtet wird, sieht man einen kurzen Moment ein „weißes“ Blattpapier rötlich, da die Farbtemperatur des Kunstlichtes niedriger ist als die des natürlichen Lichtes. Doch dieser Moment ist sehr kurz, denn das Auge skaliert das neue Weiß. Ein Blick zurück ins Tageslicht, lässt Farben bläulicher erscheinen. Exakte Duchführungen von

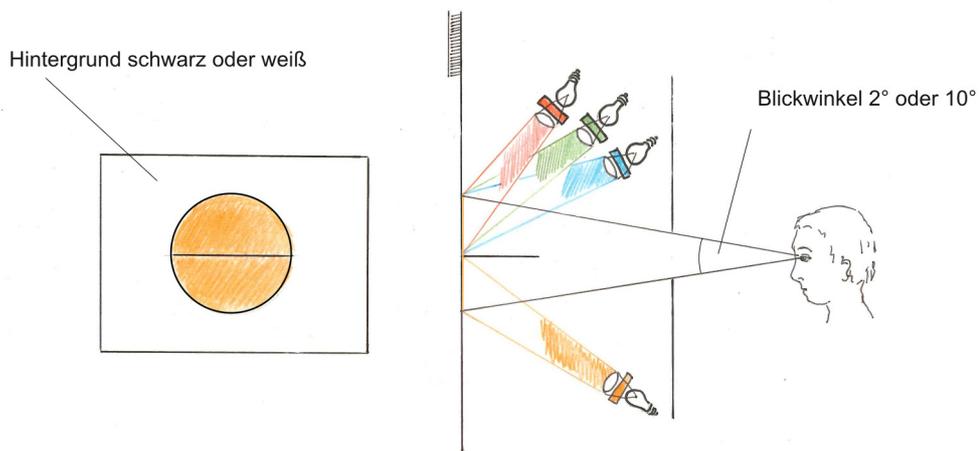


Abbildung 1.7: Der Farbanpassungstest durch einen Beobachter. Die CIE hat Daten mit unterschiedlichen Ausgangssituationen veröffentlicht. Es wurde zum einen der Sehwinkel von 2° zu 10° variiert und zum anderen das neutrale Umfeld von Schwarz zu Weiß.

Messungen sind daher äußerst schwierig. Bei der Farbvalenzmetrik geht es, wie bereits oben erklärt, um die physiologische Reizantwort. Die Versuche müssen so gestaltet werden, dass dieses Nachjustieren des Auges kaum Einfluss auf die Versuche haben.

Die bisherige Koordinatenbestimmung erfordert für jeden Farbreiz eine praktisch durchgeführte Farbanpassung. Das ist allerdings sehr aufwändig. Mit der im Folgenden vorgestellten Methode können die Koordinaten jeder bekannten Farbreizfunktion unmittelbar bestimmt werden, wenn eine gewisse Vorarbeit geleistet wurde.

Wenden wir Eigenschaften aus den Sätzen von Grassmann an: Sind die Koordinaten für einen Farbreiz f mit $\alpha^*(f) = F$ bekannt: $\Phi_K(F) = (t_1, t_2, t_3)$, so sind die Koordinaten dieses Farbreizes mit unterschiedlicher Intensität gegeben: $\Phi_K(\alpha^*(uf)) = \Phi_K(uF) = (ut_1, ut_2, ut_3)$

Eine weitere Vereinfachung der Koordinatenkonstruktion ist durch die Additivität möglich. Sind die Koordinaten von zwei Farbreizen f und g bekannt, so sind die Koordinaten der Farbmischung gegeben:

$$\Phi_K(F + G) = \Phi_K(\alpha^*(f)) + \Phi_K(\alpha^*(g))$$

Ein Farbreiz f ist als Summe von Farbreizen s_1, \dots, s_n mit den Intensitätsfaktoren I_1, \dots, I_n , mit $n \in \mathbb{N}$, beschreibbar. Sind daher die Koordinaten von $\alpha(s_i) = S_i$ und $i = 1 \dots n$ bekannt, so können auch die Koordinaten von f bzw. dessen zugehöriger Farbvalen F bestimmt werden:

$$\Phi_K(F) = I_1 \Phi_K(S_1) + \dots + I_n \Phi_K(S_n) \quad (1.4)$$

Die Koordinaten der Reize s_1, \dots, s_n sind experimentell nach dem Farbanpassungstest zu bestimmen. Sie werden so gewählt, dass sich aus ihnen alle möglichen Farbreize in angepasster Dosierung erzeugen lassen. Dafür eignen sich aus übersichtlichen und praktischen Gründen monochromatische Spektralreize s_λ , da sie nur durch zwei Zahlenangaben – die Wellenlänge λ und ihre Strahlungsenergie $s(\lambda)$ – beschrieben werden und nicht wie bei polychromatischen Farbreizen durch eine Farbreizfunktion mit Eintragungen auf

dem ganzen Wellenlängenbereich. In gleichmäßigen Abständen $\Delta\lambda$ des Wellenlängenbereiches werden Spektralreizfunktionen s_λ bestimmt. Die Strahlungsenergie soll bei all diesen gleich sein und jenen Wert annehmen, der in der Summe der s_λ das gleiche Licht erzeugt, wie die Summe der Primärfarbenvalenzen A_1, A_2, A_3 :

$$\alpha(s_1) + \cdots + \alpha(s_n) = A_1 + A_2 + A_3 \quad (1.5)$$

Farbmischungen dieser Art nennt man ein *auf der Basis der Wellenlänge energiegleiches Spektrum* ([Irt], S. 16).

Um die Koordinaten der S_λ konkret zu erhalten, muss eine Basis aus linear unabhängigen Primärvalenzen festgelegt werden, deren Farbmischung bis auf drei Koeffizienten gleich aussieht wie die Summe der Spektrallichter. Dies werden wir im nächsten Abschnitt genau behandeln.

Für eine geometrische Beschreibung des Vektorraumes müssen wir noch klären, mit welchem Anschauungsraum die Farbvalenzeigenschaften kompatibel sind. Da keine Längen und Winkeln im Farbvalenzraum sinnvoll definiert werden können, scheidet der Euklidische Anschauungsraum aus. Schrödinger ([Schrö1], S. 422) stellt aufgrund der geltenden Axiome fest, dass der Farbraum eine affine Struktur hat. Dies beruht auf dem folgenden Satz, der aus der linearen Algebra bekannt ist ([Mitsch], S. 113):

Satz: Zu jedem Vektorraum V über einen Körper K gibt es einen affinen Punktraum \mathcal{A} , der V als zugehörigen Vektorraum besitzt.

Dem Beweis dieses Satzes entsprechend ist \mathcal{A} die Menge aller Koordinatenvektoren $\Phi_K(F)$ des Vektorraumes \mathbb{R}^3 , der isomorph zum Farbvalenzraum $\widehat{\mathcal{F}}^*$ ist. Die Elemente von \mathcal{A} werden Punkte genannt. Dann kann man zu jedem Paar von Punkten $\Phi_K(F), \Phi_K(G) \in \mathcal{A}$ den Vektor

$$\overrightarrow{\Phi_K(F)\Phi_K(G)} = \Phi_K(G) - \Phi_K(F)$$

aus \mathbb{R}^3 definieren.

Auf diese Weise erhält man den affinen Punktraum \mathcal{A} , der *affiner Farbvalenzraum* genannt wird. Die *Farbvalenzpunkte* sind die Endpunkte der von 0 ausgehenden Vektoren in \mathbb{R}^3 . Zwei verschiedene Farbpunkte bestimmen genau eine Gerade, das ist ein eindimensionaler Unterraum von \mathcal{A} . Ebenen sind zweidimensionale Unterräume von \mathcal{A} .

Legen wir drei verschiedene Achsenrichtungen fest und tragen auf diesen jeweils die Basisvektoren A_1, A_2, A_3 ab, so können die Farbvalenzpunkte eindeutig eingemessen werden. Bei einer anderen Wahl dieser Richtungen bekommen wir natürlich ein anderes Anschauungsbild der selben Farbvalenzen, wobei dem Winkelmaß zwischen den Achsenrichtungen keine Eigenschaft des Farbvalenzraumes zukommt. Der Abstand zweier beliebiger Farbvalenzpunkte ist im affinen Raum nicht invariant bzgl. affiner Transformationen, weshalb auch der Abstand von Punktepaaren bedeutungslos ist.

1.7 Das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System

In der Norm (1931) der CIE⁴ wurden Primärreize festgelegt ([Irt], S. 17):

die Spektrallichter mit $\lambda = 700,0$ nm für ein Rot,
 $\lambda = 546,1$ nm für ein Grün
 und $\lambda = 435,8$ nm für ein Blau.

Diesen Primärreizen werden Basisvektoren \mathbf{R}, \mathbf{G} und \mathbf{B} zugeordnet, die das sogenannte $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System definieren (siehe Abbildung 1.8).

Da die Farbrezeptoren Rot, Grün und Blau absorbieren, gleichen die Mischvorgänge im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System jenen der Farbrezeptoren an der Netzhaut und in der ersten Ebene der rezeptiven Felder. Aus der inneren Farb Mischung dieser drei Primärreize geht ein möglichst großer Farbbereich hervor.

Die Strahlungsintensitäten dieser Primärvalenzen sind nicht absolut festgelegt worden. Die Mischung der Primärvalenzen sollte wegen der Beziehung (1.5) jedoch gleichaussehend sein, wie das energiegeliche Spektrum. Dies ist

⁴Die CIE – Commission internationale de l'éclairage – ist die internationale Beleuchtungskommission

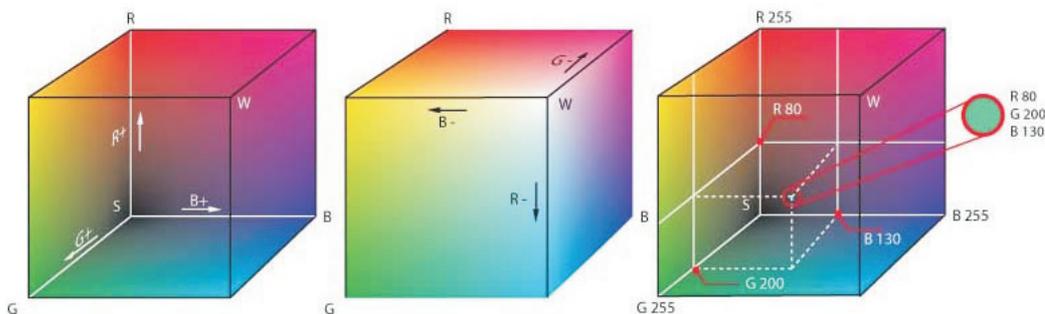


Abbildung 1.8: Der Vektorraum des (R, G, B)-Systems. Hier wurde für eine leichtere Vorstellbarkeit ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gewählt.

unter den Strahlungsverhältnissen $I_R : I_G : I_B = 72,10 : 1,38 : 1,00$ der Fall. Für das energiegleiche Spektrum gilt somit

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &:= \mathbf{S}_{380} + \cdots + \mathbf{S}_{780} \\ &= 72,1\mathbf{R} + 1,38\mathbf{G} + 1\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Wählt man daher die Koordinatenvektoren von \mathbf{R} , \mathbf{G} , \mathbf{B} wie folgt:

$$\mathbf{R} = \left(\frac{1}{72,1}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{G} = \left(0, \frac{1}{1,38}, 0 \right), \quad \mathbf{B} = (0, 0, 1),$$

so erhält man für den Koordinatenvektor von $\mathbf{W} = (1, 1, 1)$. Die Koordinaten eines Spektralreizes s_λ ergeben sich aus

$$\mathbf{S}_\lambda = t_1(\lambda)\mathbf{R} + t_2(\lambda)\mathbf{G} + t_3(\lambda)\mathbf{B}.$$

Die Koordinaten aller Spektralreize liefern drei Eichfunktionen, die sogenannten *Spektralwertkurven* \bar{r} , \bar{g} und \bar{b} mit den *Spektralwerten* $\bar{r}(\lambda) = t_1(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda) = t_2(\lambda)$ und $\bar{b}(\lambda) = t_3(\lambda)$. Dabei wird einer bestimmten Wellenlänge ein Spektralwert zugeordnet. Siehe dazu Abbildung 1.9.

Nach den experimentellen Ergebnissen der Farbanpassungsversuche sind die Spektralwerte und damit auch die Spektralwertkurven bei jedem Testbeobachter verschieden. Um dem entgegenzuwirken hat die CIE 1931 den

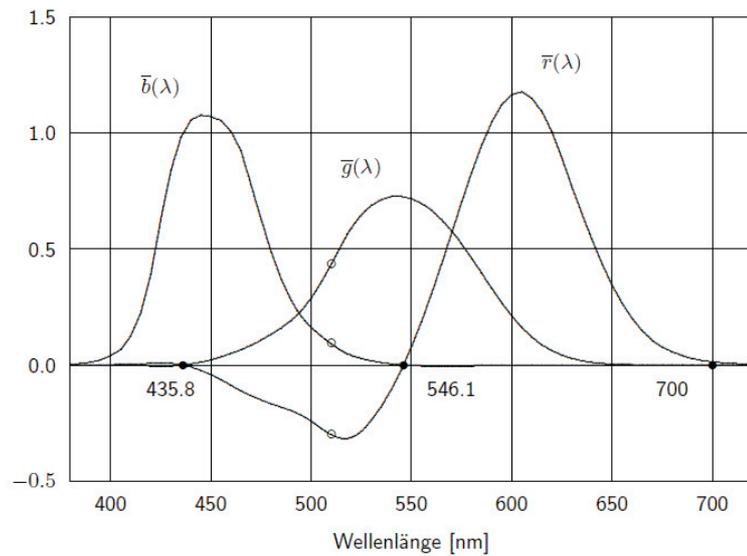


Abbildung 1.9: Spektralwertfunktionen $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ der drei Primärreize mit den Wellenlängen: 700,0 nm (Rot), 546,1 nm (Grün), 435,8 nm (Blau) und deren Strahlungsintensitäten in den Verhältnissen $I_R : I_G : I_B = 72,10 : 1,38 : 1,00$. Die Koordinaten der Spektralreizfunktion s_{510} sind aus dem Graphen abzulesen $\mathbf{S}_{510} = (-0,3; 0,44; 0,09)$. Die Koordinaten des genormten energiegleichen weißen Lichts sind: $\mathbf{W} = (1,1,1)$, wegen der Beziehung (1.5). Die beiden Kurven \bar{r} und \bar{g} haben bei $\lambda = 435,8$ nm eine Nullstelle, da das Spektrallicht $s_{435,8}$ dem Basisvektor $\mathbf{B} = (0,0,1)$ zugeordnet wird und \mathbf{R}, \mathbf{G} in der letzten Koordinate 0 stehen haben.

fiktiven 2°-Normbeobachter aus den Messergebnissen von Guild (1931) und Wright (1928/29) festgelegt. Dabei wurden bei den Versuchen mit 17 Beobachtern Farbanpassungen mit den Primärreizen bei einem Öffnungswinkel von 2° durchgeführt und aus den Ergebnissen der Mittelwert bestimmt. Spätere Wiederholungen (1955) von Stiles haben mit fortschrittlicher Messtechnik und bei einem Schwinkel von 10° die früheren Ergebnisse bestätigt.

In der Norm von 1931 der CIE sind die Koordinaten des (R, G, B)-Systems in zwei Genauigkeitsstufen veröffentlicht worden. Zum einen verwendete man die Spektralreizfunktionen in 1 nm-Schritten im Wellenlängenbereich 360 nm bis 830 nm und bestimmte die Koordinaten der Farbvalenzen bis zur fünften Dezimalstelle genau. Die zweite Liste beinhaltet die Koordinaten von 80 Spektralfarben in 5 nm-Schritten aus dem Wellenlängenbereich von 380 bis 780 nm. Dieser Bereich wird üblicherweise als der Sehbereich anerkannt.

Die Koordinaten eines jeden Farbreizes f können nach der Gleichung (1.4) mittels der Spektralwertkurven und ohne experimentelle Farbanpassung bestimmt werden:

$$\mathbf{F} = \sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \cdot (\bar{r}(\lambda)\mathbf{R} + \bar{g}(\lambda)\mathbf{G} + \bar{b}(\lambda)\mathbf{B}),$$

$$\mathbf{F} = \left(\sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{r}(\lambda) \right) \mathbf{R} + \left(\sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{g}(\lambda) \right) \mathbf{G} + \left(\sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{b}(\lambda) \right) \mathbf{B}$$

Die Koordinaten von $\mathbf{F} =: (\bar{R}(f), \bar{G}(f), \bar{B}(f))$ bzgl. der Farbreizfunktion f sind daher:

$$\bar{R}(f) = \sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{r}(\lambda), \quad \bar{G}(f) = \sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{g}(\lambda), \quad \bar{B}(f) = \sum_{\lambda=380}^{780} I_{\lambda} \bar{b}(\lambda).$$

Diese Farbkoordinaten werden im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System als *Farbwerte* eines Reizes f bezeichnet.

1.8 Farbtafel und Spektralkegel

Die dreidimensionale Darstellung des Farbraumes ist für praktische Zwecke nicht handlich. Bereits in der Antike hat Archimedes zweidimensionale Farb- anordnungen entwickelt, wie später auch Newton und Goethe und viele andere Wissenschaftler und Künstler. Im dreidimensionalen Farbraum sind die Eigenschaften der additiven Farbmischung anschaulich klar. In einer zweidimensionalen *Farbtafel*, speziell dem sogenannten *Maxwell-Dreieck*, geht die Anschaulichkeit jedoch nicht ganz verloren, wie wir später sehen werden.

Dieses Dreieck ist durch die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ bestimmt und liegt in der Ebene ε :

$$\bar{R}(f) + \bar{G}(f) + \bar{B}(f) = 1 \quad (1.6)$$

Da im dreidimensionalen Farbvalenzraum Vektoren derselben Richtung den Farbvalenzen gleicher Farbart zugeordnet sind, entspricht die Änderung der Vektorlänge nur einer Änderung der Leuchtdichte. Die Farbart bleibt daher gleich. Die oben beschriebene Ebene ε inzidiert nicht mit dem Ursprung, und ε schneidet jeden Farbvektor in sogenannten *Farborten*, sobald dieser eine entsprechende Länge aufweist. In der Farbtafel sind daher alle Farbarten vertreten.

Die Farborte werden durch baryzentrische Koordinaten $\beta(f)$ beschrieben, die als *Farbwertanteile* bezeichnet werden. Aus den Farbwerten $\bar{R}(f), \bar{G}(f), \bar{B}(f)$ berechnet man die Farbwertanteile:

$$\beta(f) := \left(r(f) : g(f) : b(f) \right),$$

dabei sind

$$\begin{aligned} r(f) &= \frac{\bar{R}(f)}{\bar{R}(f) + \bar{G}(f) + \bar{B}(f)}, \\ g(f) &= \frac{\bar{G}(f)}{\bar{R}(f) + \bar{G}(f) + \bar{B}(f)}, \\ b(f) &= \frac{\bar{B}(f)}{\bar{R}(f) + \bar{G}(f) + \bar{B}(f)}. \end{aligned}$$

Zwei solcher Koordinaten geben bereits die dritte aufgrund der baryzentrischen Eigenschaft (1.6) an. Der durch die Farbwertanteile beschriebene Farbort $\beta(f)$ ist die Projektion des durch die Farbwertanteile $\bar{R}(f)$, $\bar{G}(f)$ und $\bar{B}(f)$ beschriebenen Punktes auf ε , wobei der Ursprung das Projektionszentrum ist. Die Primärvalenzen R, G, B werden auf die Dreieckspunkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ projiziert.

Anschaulich gilt für Farbmischungen folgendes:

Aus der Gleichung $F = t_1A + t_2B$ folgt, dass $\beta(f)$ die Strecke $\overline{\beta(a)\beta(b)}$ im Verhältnis t_2/t_1 teilt. Damit lässt sich jede Farbort in der Farbtafel einmessen – siehe Abbildung 1.10. Der Rand der Farbvalenzpunkte wird durch die konvex gekrümmte *Spektralwertkurve* und die Purpurlinie gebildet. Auf dieser Kurve liegen die Farborte der Spektralfarben aus dem sichtbaren Wellenlängenbereich. Die Purpurlinie ist die Verbindungslinie der Kurvenendpunkte Violett (ganz nahe Blau) und Rot (siehe Abbildung 1.11).

Im Inneren der Spektralkurve liegen alle Farborte, deren Farbvalenzen durch Mischung aus Spektralfarben entstehen; das sind also alle zu physikalisch realen Farbreizen gehörenden Farborte. Der größere Teil des Spektralfarbenzuges verläuft außerhalb des Farbdreiecks der drei Primärvalenzen **R, G, B**; die entsprechenden Farbvalenzen entstehen durch äußere Farbmischung der Primärvalenzen.

Da es keine zwei Lichter gibt, die gemischt Dunkelheit ergeben, gibt es keinen reellen Farbvalenzvektor in entgegengesetzter Richtung zu einem reellen Farbvalenzvektor. Im dreidimensionalen affinen Anschauungsraum spannen die Vektoren der Spektralvalenzen daher einen konvexen Kegel mit der Spitze

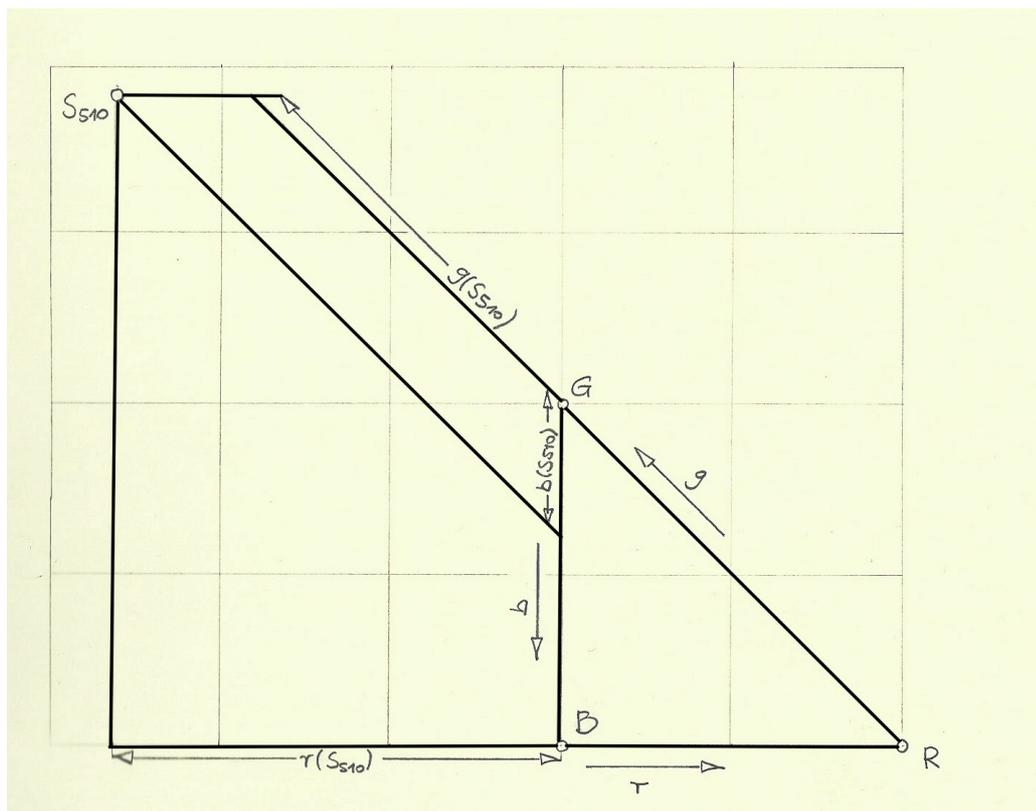


Abbildung 1.10: In der (r,g) -Farbtafel sind die Primärreize die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Koordinaten einer Farbvalenz werden mittels Teilverhältnissen eingemessen. Dies wird hier mit der Spektralfarbe S_{510} aus Abbildung 1.9 gezeigt. Die Koordinaten $\beta(s_{510}) = (-1, 304; 1, 913; 0, 391)$ werden zuerst im entsprechenden Teilverhältnis auf der Dreiecksseite eingetragen.

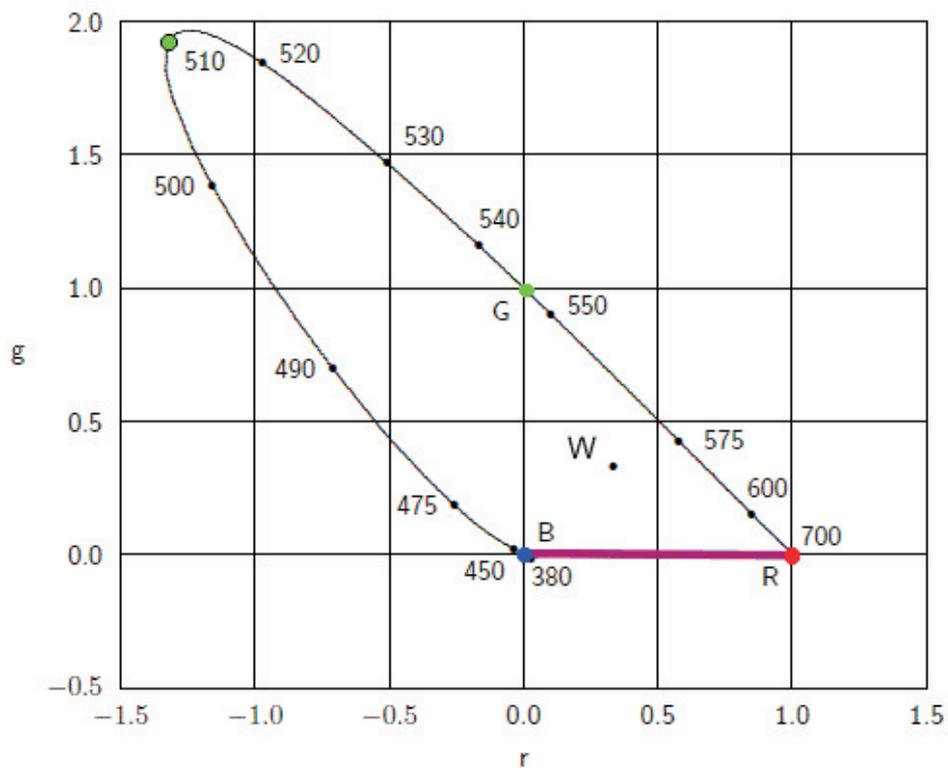


Abbildung 1.11: (r,g) -Farbtafel. Die Spektralwertanteile liegen auf der Spektralwertkurve. Der Punkt W entspricht dem Farbort von unbuntem Licht und wird als weiß wahrgenommen. Die rosa markierte Linie stellt die Purpurlinie dar. Auf ihr liegen die Farborte aller möglichen Mischungen aus den Spektralreizen s_{380} bis s_{780} .

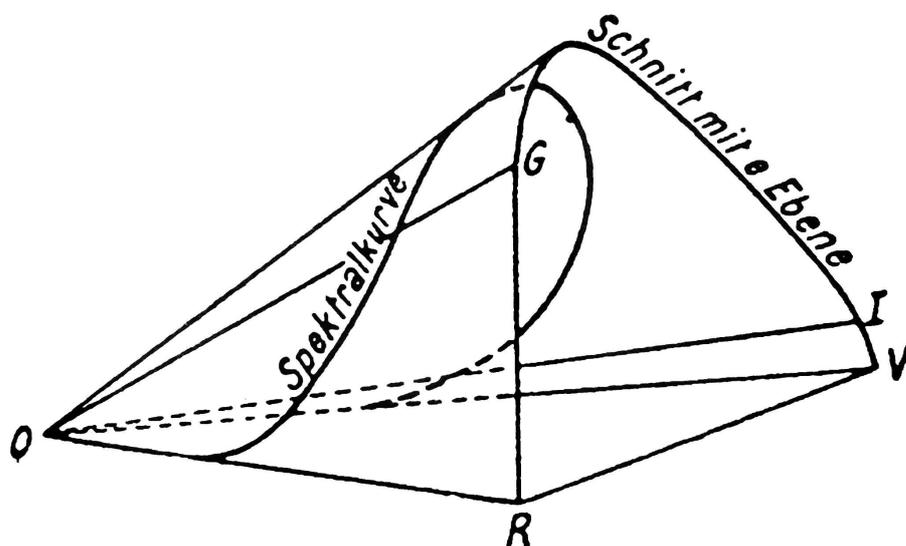


Abbildung 1.12: Schrödinger-Tüte

im Ursprung auf.

Dieser Kegel wird von Schrödinger ([Schrö2], S. 428) *Spektralkegel* genannt und häufig nennt man diesen sogar *Schrödinger-Tüte* (siehe den Kegel in Abbildung 1.12 und einen affin ähnlichen Spektralkegel in den Abbildungen 1.16 und 1.17). Die Schnittkurve dieses Kegels mit der Ebene ϵ , der Farbtafel, ist die Spektralwertkurve. Diese und die *Spektralkurve* liegen auf dem Kegelmantel. Auf der Spektralkurve liegen die Spitzen der Spektralvektoren und deren Verlauf ist von der speziellen Energieverteilung des Lichtspektrums abhängig; nicht jedoch die Form des Kegelmantels. Ist in einem Wellenlängenbereich die Strahlungsenergie größer, so wird die Kurve an dieser Stelle vom Ursprung weiter hinausgedrückt. Die Form des Mantels verändert sich bei verschiedenen spektral zusammengesetzten weißen Lichtquellen wie z.B. Tageslicht und Gasentladungslampen.

Farborte nahe des Ursprungs sind Farbvalenzen zugeordnet, deren Farbreize eine eher niedrige Strahlungsenergie aufweisen; bei größerer Entfernung ist die Strahlungsenergie relativ stark. Das heißt aber nicht, dass Vektoren

gleicher Länge Farbreizen gleicher Strahlungsenergie zugeordnet sind.

Die wichtigste Eigenschaft ist die unveränderliche Gestalt des Kegels im affingeometrischen Sinn. Der Mantel ist nicht durchgehend gekrümmt, sondern besitzt mehrere annähernd ebene Flächenstücke in den Zwischenstrecken. Schrödinger ([Schrö2], S. 428) beschreibt diese Bereiche sogar als Strecken von $\lambda = 430$ nm bis 475 nm im blauen Bereich und $\lambda = 630$ nm bis 655 nm im roten Bereich. Nach den Messergebnissen der CIE ist die Spektrallinie zwischen den Werten $\lambda = 380$ nm bis 450 nm und $\lambda = 560$ nm bis 780 nm nur annähernd eine Gerade. Unterschiede dieser Werte kommen zustande, da von verschiedenen Lichtern ausgegangen wurde, aus denen die Spektralwertkurven bestimmt wurden. In diesen Bereichen sind aus zwei Spektralfarben jene, die dazwischen liegen, mischbar. Somit sehen wir Orange mit größter Sättigung, nämlich als Spektralfarbe Orange. Diese ist aufgrund der linearen Beziehung aus den Spektralfarben Rot und Grün additiv mischbar. Solche Spektralfarben erfüllen die Gleichung $S_i + S_j = S_k$, wie wir bereits beim 2. Teil des Dimensionsbeweises (1.5) gesehen haben.

In den Endpunkten der Spektralkurve zieht sich der Spektralvektor in sich zusammen ohne die Richtung zu ändern. Das heißt, in diesen Endstrecken ist jede Spektralfarbe aus jeder anderen dieser Umgebung durch bloße Intensitätsänderung mischbar. Die End- und Zwischenstrecken heißen aufgrund ihrer Mischbarkeit aus einer bzw. zwei Spektralfarben *mono-* bzw. *dichromatisch*.

Auch wenn Weiß bisher nicht eindeutig definiert werden konnte, kann davon ausgegangen werden, dass es irgendwo im Inneren einen Vektor gibt, der dem weißen Licht entspricht. Farbvalenzen, deren Farborte auf einer Halbebene durch diesen Vektor liegen, gehen aus jener in der Halbebene liegenden Spektralfarbe oder Purpurfarbe mit Weiß verdünnt hervor. Je näher der Farbort an Weiß liegt, desto ungesättigter ist dieser bzgl. seiner Farbart. Die Sättigung kann aber generell nicht durch den Abstand von Weiß bestimmt werden. Die Vektoren der komplementären Farben sind mit dem Vektor von Weiß komplanar und schließen diesen ein.

1.9 Das $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ -Normvalenzsystem

Bei der Darstellung des $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -Systems haben wir gesehen, dass viele Farbwerte negativ sind, weil diese nur durch eine äußere Farbmischung beschrieben werden können. Es gibt keine reellen Primärfarbreize, so dass alle Farbwerte positiv sind. Das wäre jedoch ein wünschenswerter Vorteil, da hier das negative Vorzeichen keine relevante Eigenschaft beschreibt. Ein solches System wurde von der CIE 1931 nach Abschluss der Untersuchungen von Wright und Guild eingeführt und wird heute noch benutzt. Man bezeichnet es als das $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ -Normvalenzsystem mit den Basisvektoren $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ([Irt], S. 21). Diese liegen außerhalb des konvexen Farbvalenzkegels. Das bedeutet natürlich, dass es keine physikalisch erzeugbaren Farbreize gibt, die $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ zugeordnet werden. Sie sind *virtuelle* Farbvalenzen. Die neuen positiven Farbwerte $\bar{X}(f), \bar{Y}(f)$ und $\bar{Z}(f)$ werden *Normfarbwerte* und $x(f), y(f)$ und $z(f)$ werden *Normfarbwertanteile* genannt. Die zugehörigen Normspektralwertkurven \bar{x}, \bar{y} und \bar{z} sind im gesamten sichtbaren Wellenlängenbereich positiv (siehe Abbildung 1.13). Neben dieser Eigenschaft, liegt dem $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ -System noch eine weitere Forderung zugrunde. In den Normfarbwerten soll eine Information über die Helligkeit beinhaltet sein, die im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -Systems vernachlässigt wird. Welche Rolle spielt die Helligkeit?

Das photometrische Maß der Helligkeit einer vom menschlichen Auge wahrgenommenen Fläche ist die Leuchtdichte L einer Lichtquelle. Dabei wird das sichtbare Licht, welches einen Punkt auf einer Oberfläche in eine bestimmte Richtung verlässt, in der Einheit cd/m^2 gemessen ($cd = \text{Candela}$). Die Einheit wird in der Farbmeterik üblicherweise weggelassen. Je größer der Wert eines Farbreizes ist, desto heller erscheint uns klarerweise die zugehörige Farbvalenz.

Ist die Leuchtdichte der Primärreize \mathbf{R}, \mathbf{G} und \mathbf{B} gegeben durch L_R, L_G, L_B , und ist die Mischung einer Farbvalenz F aus den drei Primärvalenzen be-

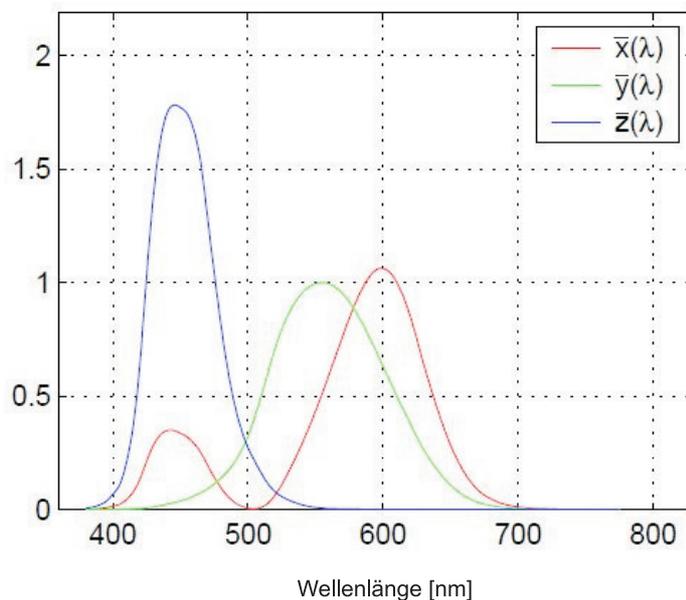


Abbildung 1.13: Normspektralwertkurven

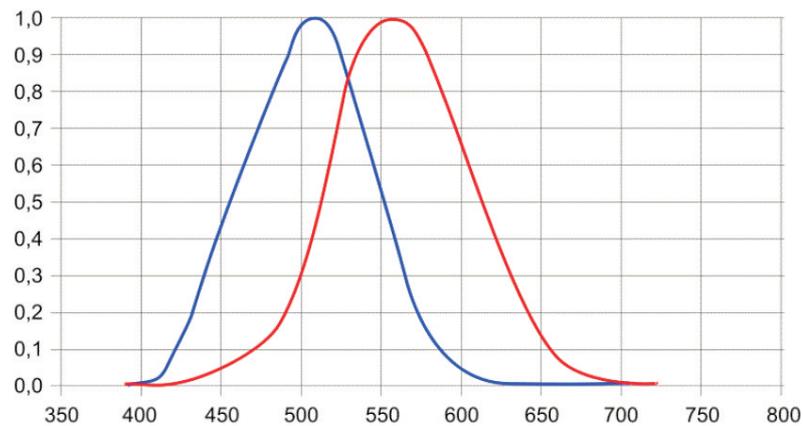
kannt, so besagt das *Abney'sche Gesetz* für die Leuchtdichte von F :

$$L_F = t_1 L_R + t_2 L_G + t_3 L_B$$

Es besteht also derselbe lineare Zusammenhang wie bei der Farbvalenzmischung.

Wir bezeichnen eine Farbe als Weiß, wenn deren Koeffizienten $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ sind. Für die Leuchtdichte L_W gilt dann die Gleichung

$$L_W = L_R + L_G + L_B = 1.$$

Abbildung 1.14: Hellempfindlichkeitskurve $V(\lambda)$

Die Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges wird mit diesen beiden Kurven $V(\lambda)$ beschrieben. Dabei gilt in der Tageslichtsituation die für das Normsystem relevante rote Kurve und im Dämmerungslight die blaue (Purkinje Effekt). Zu jeder Wellenlänge λ , in horizontaler Richtung mit der Einheit nm, ist die zugehörige Hellempfindlichkeit als relative Leuchtdichte innerhalb der Werte 0 und 1 senkrecht eingetragen. Diese sind mit $V(555) = 1$ normiert. Die Messergebnisse sind von dem 2°-Normbeobachter der CIE empirisch ermittelt worden.

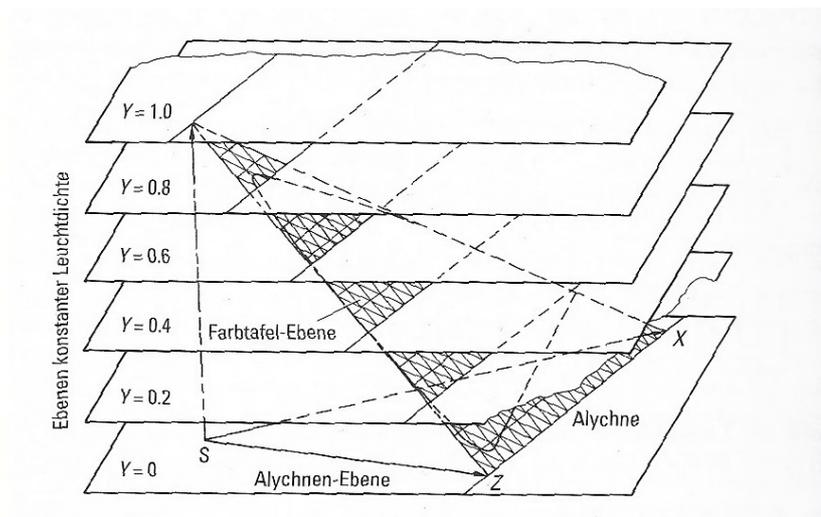


Abbildung 1.15: Alychne

1.10 Koordinatentransformation

Da die Koordinaten der Spektralfarbvalenzen deren Spektralwerte sind, ist die Leuchtdichte L_λ gegeben durch ([Wys], S. 135):

$$L_\lambda = \bar{r}_\lambda L_R + \bar{g}_\lambda L_G + \bar{b}_\lambda L_B \quad (1.7)$$

Gehen wir nun auf das Hellempfinden näher ein, so beschreibt die Hellempfindlichkeitskurve $V(\lambda)$ – Genaueres in der Abbildung 1.14 – die relative Leuchtdichte des energiegleichen Spektrums. Die Funktion $V(\lambda)$ ist aufgrund der obigen Gleichung (1.7) eine Kombination der drei Spektralwertkurven.

Im Normfarbsystem sind die *Normspektralwertkurven* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ so gewählt, dass bereits die Kurve \bar{y} die Hellempfindlichkeitskurve zur Gänze beschreibt:

$$V(\lambda) = c \cdot \bar{y}(\lambda), \quad c \in \mathbb{R}$$

Für die Normfarbreize \mathbf{X}, \mathbf{Y} und \mathbf{Z} ist die Leuchtdichte:

$$L_Y = 1, \quad L_X = L_Z = 0$$

Die Leuchtdichte einer Farbvalenz F ist daher ident mit dem Normfarbwert $\bar{Y}(F)$:

$$L_F = \bar{X}(F)L_X + \bar{Y}(F)L_Y + \bar{Z}(F)L_Z = \bar{Y}(F)$$

In der Darstellung des Normvalenzraumes liegen die Farbvalenzen gleicher Leuchtdichte in derselben Ebene: $Y = \bar{Y}(F)$ parallel zur (X, Z) -Ebene, die als *Alychne* bezeichnet wird, was soviel wie „das Lichtlose“ bedeutet. In dieser liegen die Punkte der Primärvalenzen X und Z und außer dem Schwarzpunkt O keine reellen Farbvalenzen. Siehe Abbildung 1.15.

Der Zusammenhang zwischen dem Normvalenzsystem und dem $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System ist im Abbildungsdiagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{F}}^* & \xrightarrow{id} & \widehat{\mathcal{F}}^* \\ \Phi_R \downarrow & & \downarrow \Phi_X \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{M_{RX}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Die Abbildung Φ_X ist die Koordinatenabbildung von $\widehat{\mathcal{F}}^*$ nach \mathbb{R}^3 zur Basis $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ und Φ_R jene zur Basis $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$. Für die Basiswechseltransformation M_{RX} gilt: $M_{RX} \circ \Phi_R = \Phi_X \circ id$ bzw. wenn $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ die Normvalenzen bedeutet:

$$M_{RX}^t \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Basiswechselmatrix M_{RX} ist von der CIE bestimmt worden ([Optik], S. 716).

$$\mathbf{X} = 2.365\mathbf{R} - 0.515\mathbf{G} + 0.005\mathbf{B}$$

$$\mathbf{Y} = -0.897\mathbf{R} + 1.426\mathbf{G} - 0.014\mathbf{B}$$

$$\mathbf{Z} = -0.468\mathbf{R} + 0.089\mathbf{G} + 1.009\mathbf{B}.$$

Möchte man von dem Normvalenzsystem in das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System zurückrechnen, so gilt:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = (M_{RX}^t)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{R} \\ \bar{G} \\ \bar{B} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$(M_{\mathbf{R}\mathbf{X}}^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.490 & 0.310 & 0.200 \\ 0.177 & 0.812 & 0.011 \\ 0.000 & 0.010 & 0.990 \end{pmatrix}$$

Die Basisvektoren \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} ergeben im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -Raum wegen

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{72,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1,38} \\ 0.011 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.007 \\ 0.225 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.588 \\ 0.011 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.007 \\ 0.99 \end{pmatrix}.$$

Nun können auch die Spektralwertkurven punktweise durch die Spektralwerte in die *Normspektralwertkurven* umgerechnet werden oder sie werden wie im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System durch Farbanpassungstests bestimmt. Es findet in diesem Fall eine Normierung in Bezug auf die Helligkeit durch einen Faktor k statt. Die Normfarbwerte $\bar{x}(f)$, $\bar{y}(f)$ und $\bar{z}(f)$ zu einer gegebenen Farbreizfunktion f sind wie im Abschnitt 1.7 mittels der Normspektralwertkurven zu berechnen. Die Werte der Farbreizfunktion $f(\lambda)$ werden für alle Wellenlängen im sichtbaren Bereich im Abstand $\Delta\lambda$ mit den Normspektralwerten und dem Wellenlängenintervall $\Delta\lambda$ multipliziert und die Produkte werden addiert ([Wys], Tab. I(3.3.1), II(3.3.1)):

$$\bar{X}(f) = \sum_i (kf(\lambda_i)\bar{x}(\lambda)\Delta\lambda) = c \sum_i (f(\lambda_i)\bar{x}(\lambda))$$

$$\bar{Y}(f) = \sum_i (kf(\lambda_i)\bar{y}(\lambda)\Delta\lambda) = c \sum_i (f(\lambda_i)\bar{y}(\lambda))$$

$$\bar{Z}(f) = \sum_i (kf(\lambda_i)\bar{z}(\lambda)\Delta\lambda) = c \sum_i (f(\lambda_i)\bar{z}(\lambda))$$

Der Faktor k wird folgendermaßen berechnet:

$$k = \frac{100}{\sum_i (f(\lambda_i) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda)}$$

Für den Faktor c gilt:

$$c = \frac{100}{\sum_i (f(\lambda_i) \bar{y}(\lambda))}$$

Im Falle eines Farbreizes der Normlichtarten A und D65 sind die Normfarbwerte und Normfarbwertanteile mit jenen des energieglichen Spektrums in der Tabelle zum Vergleich aufgelistet:

Lichtart	X	Y	Z	x	y
Energiegleiches Spektrum	100.00	100.00	100.00	0.3333	0.3333
Normlichtart A	109.87	100.00	35.59	0.4476	0.4074
Normlichtart D65	95.05	100.00	108.90	0.3127	0.3290

Der Normspektralkegel, Abbildung 1.16, beschreibt die Menge der Farbvalenzen \mathcal{F}^* mit Schwarz als Ursprung.

An den Rändern des Wellenlängenbereich verschwinden die Kegelerzeugenden, da die zugeordneten Spektrallichter keine Strahlungsenergie aufweisen. Die Energieverteilung für das von der CIE genormte Spektrallicht nimmt genau die Gestalt von Abbildung 1.17 an, so dass der rote Bereich eher flach aufgefächert ist und im blauen Bereich die Strahlungsenergie sehr hoch ist. Die Purpurlinie sehen wir jedoch nicht.

Würden wir von einem anderen Licht ausgehen, würde der Farbvalenzkegel eine andere Gestalt annehmen und die hier nun verschwindenden Mischfarben zwischen Rot und Blau könnten eventuell sichtbar sein, und an einer anderen Stelle würden dann die Farbvektoren verschwinden. Ich verweise auf das vor wenigen Jahren erschienene Buch von Georg Nussbaumer „Zur Farbenlehre“ ([Nus]), worin die Unterschiedlichkeiten des Spektrums von Licht-

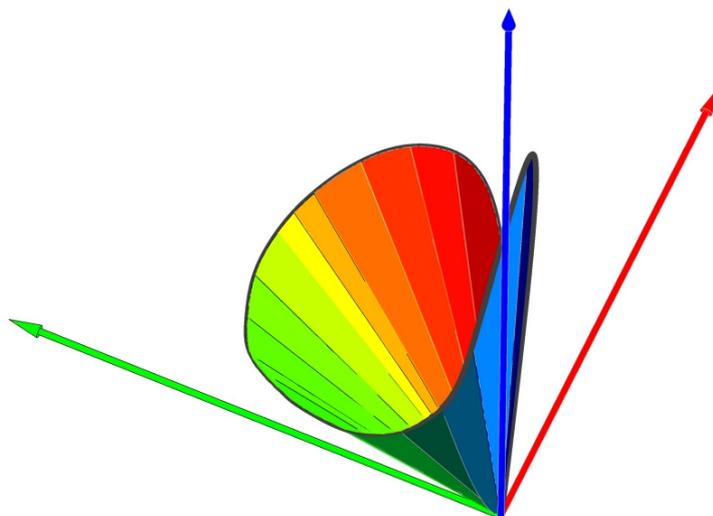


Abbildung 1.16: Spektralkegel aus Normspektralwerten. Die Randkurve wird durch die Farborte der Spektralfarbvalenzen beschrieben. Die Erzeugenden sind die Vektoren der Spektralreize.

quellen genau empirisch vorgeführt werden.

Schneiden wir aus dem Spektralkegel die Ebene:

$$\bar{X}(F) + \bar{Y}(F) + \bar{Z}(F) = 1$$

aus, so erhalten wir die *Normfarbtafel*.

Aus den Normfarbwerten werden die baryzentrischen Koordinaten bzw. *Normfarbwertanteile* wie im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System berechnet und in der Normfarbtafel dargestellt. Die Koordinaten der Farbmischungen des Beispiels aus Abbildung 1.4 sind durch folgende Berechnungen zu bestimmen und in Abbildung 1.18 eingezeichnet. Die beiden metameren Farben Q_1 und Q_2 werden

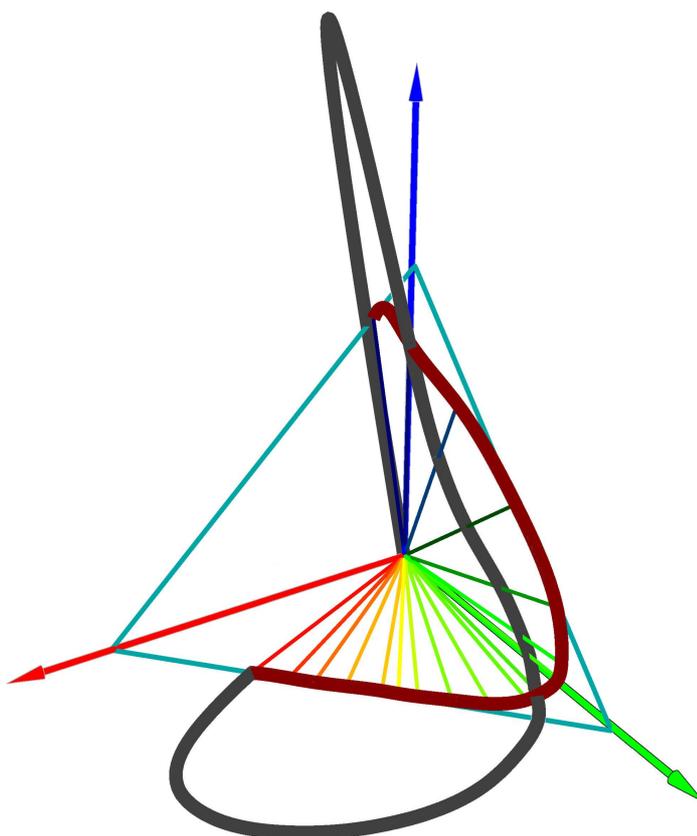


Abbildung 1.17: Diese Ansicht ist die gedrehte Ansicht aus Abbildung 1.16. Die Randkurve des Spektralkegels ist schwarz dargestellt. Die Erzeugenden werden durch die Einheitsebene, der schon genannten Farbtafel, in der Spektralwertkurve (braun) geschnitten. Die Längen der Spektralfarbvektoren des roten und blauen Endbereichs nehmen rasch ab. Die entstandene Öffnung wird durch Vektoren geschlossen, deren Spitzen auf der Purpurlinie liegen, diese ist in der Farbtafel (1.18) dargestellt.

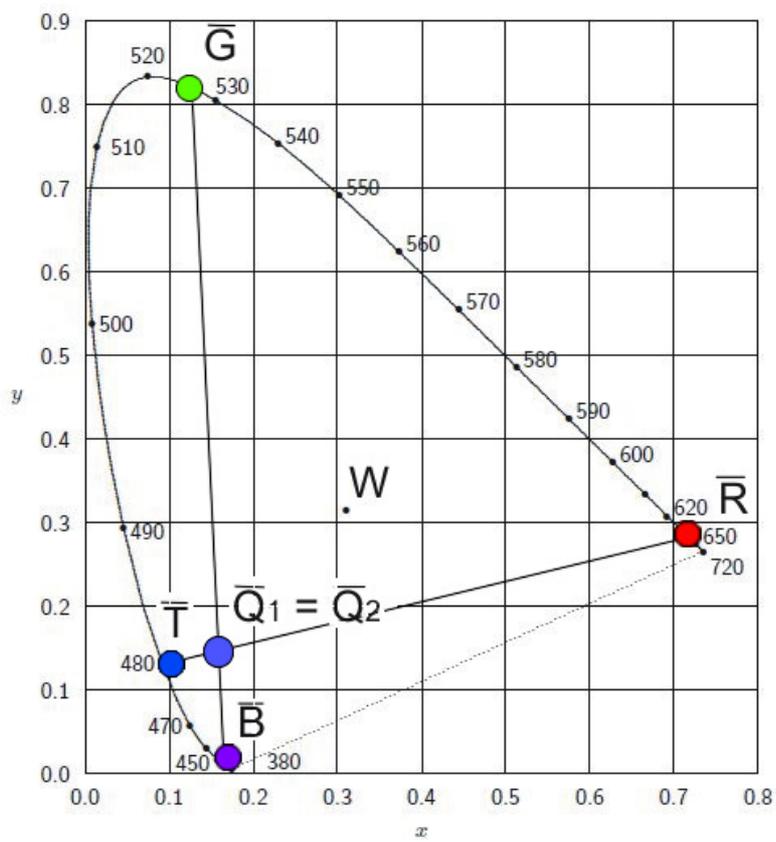


Abbildung 1.18: Normfarbtafel

durch verschiedene Spektralfarben gemischt.

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1 &= 1,6\bar{B} + 0,3\bar{G} \\ \bar{Q}_2 &= 1,4\bar{T} + 0,14\bar{R}, \quad \text{wobei} \\ \bar{B} &= S_{444,4}, \quad \bar{G} = S_{526,1}, \quad \bar{T} = S_{480,0}, \quad \bar{R} = S_{645,1}.\end{aligned}$$

Die Normspektralwertanteile dieser vier Spektralfarben lassen sich aus den Tabellen I(3.3.1) in ([Wys]) entnehmen.

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1 &= 1,6 \begin{pmatrix} 0,161554 \\ 0,01340 \\ 0,825046 \end{pmatrix} + 0,3 \begin{pmatrix} 0,12317 \\ 0,822386 \\ 0,054444 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2954374 \\ 0,2681558 \\ 1,3364068 \end{pmatrix} \\ \bar{Q}_2 &= 1,4 \begin{pmatrix} 0,09129 \\ 0,13270 \\ 0,77601 \end{pmatrix} + 0,14 \begin{pmatrix} 0,723097 \\ 0,276883 \\ 0,00002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22903958 \\ 0,22454362 \\ 1,0864168 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Normfarbwertanteile von \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 werden durch Dividieren mit der jeweiligen Koordinatensumme, also 1,9 und 1,54, erhalten:

$$\beta(Q_1) = \begin{pmatrix} 0,155493368 \\ 0,141134632 \\ 0,703372 \end{pmatrix}, \quad \beta(Q_2) = \begin{pmatrix} 0,148727 \\ 0,145807545 \\ 0,7050465455 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten der beiden Farbvalenzen unterscheiden sich nur klein wenig und deren Punkte sind daher in der Farbtafel sehr nahe beieinander. Bei dem kleinen Maßstab in Abbildung 1.18 werden sie als gleich eingezeichnet, denn die zugehörigen Farben werden auch gleich wahrgenommen.

Aus der Normfarbtafel (Abbildung 1.18) entnehmen wir, dass die Enden der Spektrallinie sowohl im roten als auch blauen Bereich sehr abflachen. Wesentlich dabei ist die Eigenschaft, dass die Spektralfarben innerhalb dieser Zwischenstrecken aus jenen am Rande liegenden Spektralfarben mischbar sind.

1.11 Schlussbemerkung zu diesem Kapitel

Theoretisch ist die Einführung eines solchen Spektralkegels unproblematisch, denn wie auch Schrödinger betont, sind für die Herleitung in einer auf dem Vektorraum basierenden affinen Geometrie keine Begriffe wie Sättigung, Weißanteil oder Komplementärfarbe nötig. Diese wären nur mit großem Aufwand definierbar. Eine experimentelle Durchführung ist hingegen schwierig. Hier geben wir uns mit Durchschnittswerten, aus denen der Normbeobachter bestimmt wurde, zufrieden.

Wir erkennen, wie anspruchsvoll es ist, die Farbwahrnehmung zu strukturieren. Mit der Unterscheidung in Farbe und Farbvalenz haben wir gewissen Problematiken ausweichen können. Bei den Sätzen von Grassmann hat sich gezeigt, dass diese nicht bei jeder beliebigen Farbauswahl gültig sind. Doch erlauben sie einen affinen Farbvalenzraum zu definieren. Dieser hat eine wichtige Bedeutung in der Anwendung. Das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System wird vor allem zur Darstellung von Farbbildern auf Computermonitoren verwendet. Rote, grüne und blaue Phosphore werden durch Elektronenstrahlen zum Leuchten gebracht. Um diese durch Licht erzeugten Bilder durch additive Farbmischung darstellen zu können (drucken), wird das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System ins sogenannte (\mathbf{CMYK}) -System umgerechnet. Die Hauptdiagonale des $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System, die von Schwarz nach Weiß zeigt, wird umgedreht, so dass der Koordinatenursprung in Weiß liegt. Die Basis wird dann von Cyan, Magenta und Gelb (Yellow) gebildet. Da in der Anwendung kein zufriedenstellendes Schwarz durch Übereinanderdrucken der drei Grundfarben erreicht wird, kann dem durch Hinzufügen von Schwarz (BlacK oder Key) geholfen werden. Die Größe der Farbbereiche des $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ - und (\mathbf{CMYK}) -Systems ist in der Praxis geräteabhängig. Dennoch hat das $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System stets einen viel größeren Farbbereich. Die subtraktiv gemischten Farbmittel sind erst durch Reflexion von Licht sichtbar. Farbmittel können daher einige hoch gesättigte Farben wie die mancher Lichtreize nicht hervorrufen [RGB].

Für uns ist der affine Farbvalenzraum im nächsten Kapitel hilfreich, um einen Farbraum zu definieren, welcher eine Zuordnung der Farbabstände zu jenen der Wahrnehmung kennt.

Übersicht zu den Bezeichnungen:

\mathcal{M}	Menge der Farbreizfunktionen
$\widehat{\mathcal{M}}$	Menge der Farbreizfunktionen und virtuellen Farbreizfunktionen mit negativen Anteil
\mathcal{F}	Menge der Farben
$\widehat{\mathcal{F}}$	Menge der Farben und virtuellen Farben
\mathcal{F}^*	Menge der Farbvalenzen
$\widehat{\mathcal{F}}^*$	Menge der Farbvalenzen und virtuellen Farbvalenzen

	(R,G,B)-System	(X,Y,Z)-System
Basisvektoren	R, G, B	X, Y, Z
Farbvalenzen in $\widehat{\mathcal{F}}^*$	R, G, B	X, Y, Z
Spektralwertkurve	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$	$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
monochromat. Farbreiz s_λ	Spektralwerte: $\bar{r}(\lambda), \bar{g}(\lambda), \bar{b}(\lambda)$	Normspektralwerte: $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$
Farbtafel $\beta(s_\lambda)$	Spektralwertanteile: $r(\lambda), g(\lambda),$	Normspektralwertanteile: $x(\lambda), y(\lambda)$
polychromat. Farbreiz f	Farbwerte: $\bar{R}(f), \bar{G}(f), \bar{B}(f)$	Normfarbwerte: $\bar{X}(f), \bar{Y}(f), \bar{Z}(f)$
Farbtafel $\beta(f)$	Farbwertanteile: $r(f), g(f)$	Normfarbwertanteile: $x(f), y(f)$

Kapitel 2

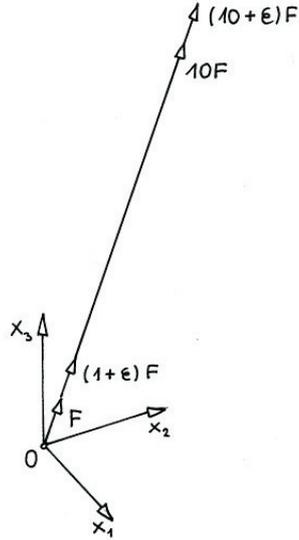
Der Farbraum mit Riemannmetrik

2.1 Einleitung

Im vorigen Kapitel wurde der affine Farbvalenzraum eingeführt und Vor- und Nachteile angeführt. Die vorteilhaften Eigenschaften zeigen sich in den vielzähligen Anwendungen. Ein wesentlicher Nachteil ist, dass dem Abstand zweier Farborte keine relevante Bedeutung zukommt. Wir können zum Beispiel nicht feststellen, ob zwei Farben gleich hell sind bzw. welche der beiden heller ist. Denn wir haben es mit Beziehungen zwischen Farben zu tun, welche ausschließlich durch Verwendung des Gleichheitsurteils experimentell gewonnen werden. Die Eigenschaften *zwischen* Farben entsprechen im Farbvalenzraum keiner geometrischen Quantität. Der Farbvalenzraum ist in diesem Sinne nicht auf die Farbwahrnehmung abgestimmt, denn die Farben sind nach willkürlichen Abständen geordnet.

In diesem Kapitel wollen wir einen Farbraum definieren, dessen Farbabstände in Zusammenhang mit der Farbwahrnehmung stehen. Nach Schrödinger wird heute allgemein angenommen, dass der Raum der Farbwahrnehmung eine Riemannsche Metrik besitzt. Zuerst werden wir anhand eines einfachen

Beispiels ([Schrö3], S. 483) zeigen, weshalb eine euklidische Metrik nicht zum Ziel unserer Ansprüche führt:



Wir hellen eine Farbe F ein wenig auf, so dass wir diese Veränderung noch gut mit dem Auge unterscheiden können. Für die neue Farbe gilt das Mischrezept $(1 + \epsilon)F$. Der Wert $\epsilon \in \mathbb{R}$ wird so gewählt, dass die beiden Farben $10F$ und $(10 + \epsilon)F$ nicht unterscheidbar sind (siehe Abbildung 2.1). Die euklidischen Abstände der Vektorspitzen sind jedoch für beide Farbpaare gleich.

$$|F - (1 + \epsilon)F| = |\epsilon F| = |10F - (10 + \epsilon)F|$$

Somit lassen sich die Helligkeitsverhältnisse nicht durch den euklidischen Abstand beschreiben. Auch die psychophysikalischen Gesetze der Sinneseindrücke für objektive Intensitätsänderung sprechen gegen diese Annahme. Der Physiologe Ernst Heinrich Weber formulierte 1834 ein Gesetz, welches die durch ein Sinnesorgan registrierbare eben merkliche Veränderung beschreibt. Der Unterschied ΔR zum vorangehenden Reiz R steht in einem gleich bleibenden Verhältnis k . Das *Webersche Gesetz* lautet

$$k = \frac{\Delta R}{R}.$$

Die Weiterentwicklung dieses Gesetzes erfolgte 1860 durch den Physiker und Begründer der Psychophysik Gustav Theodor Fechner. Dabei werden kleine

Empfindungsveränderungen ΔE beschrieben durch

$$\Delta E = c \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad (\text{Fechnersches Gesetz}). \quad (2.1)$$

Unter der Annahme, dass c konstant und unabhängig von R ist, folgt daraus durch Integration für die Intensität E einer Empfindung

$$E = c \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad (\text{Weber-Fechnersches Gesetz}).$$

Meist gibt die Integrationskonstante R_0 den Schwellenreiz an. Das *Weber-Fechner-Gesetz* besagt also, dass sich die subjektiv empfundene Stärke von Sinneseindrücken proportional zum Logarithmus der objektiven Intensität des physikalischen Reizes verhält.

Der Psychophysiker Stanley Smith Stevens entwickelte dieses Gesetz weiter und stellte 1957 einen neuen Zusammenhang her. Die Empfindung $E = E(R)$ bzgl. eines Reizes R wird annähernd beschrieben durch

$$\frac{\Delta E}{E} = k \frac{\Delta R}{R}.$$

Dabei ist $k \in \mathbb{R}^+$ eine Proportionalitätskonstante. Die Integration dieser Beziehung führt zur *Stevensschen Potenzfunktion*:

$$\begin{aligned} \int \frac{dE}{E} &= k \int \frac{dR}{R} \\ \ln E &= k \cdot \ln R + \ln c \\ E(R) &= c \cdot R^k \end{aligned}$$

Die aus der Integration stammende Konstante c legt die Skalierung fest. Mit diesem Gesetz werden generell komplexe Empfindungen beschrieben. Dabei ist aus physiologischen Experimenten für das Helligkeitsempfinden der Wert $k = 0,33$ bestimmt worden. Für $k < 1$ ist der Graph bzgl. dem des Weber-Fechner-Gesetzes bis auf die Verschiebung um 1 ähnlich.

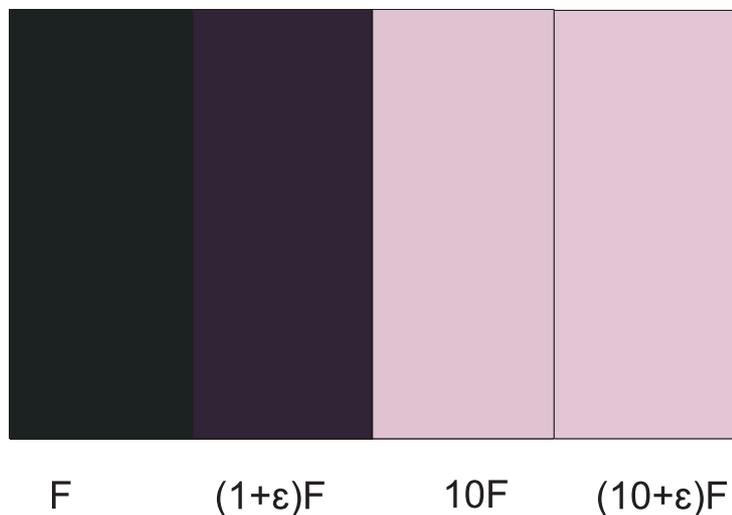


Abbildung 2.1: Diese vier Farben der selben Farbart haben im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ - System mit $\varepsilon = 0,5$ die Koordinaten: $F(23, 19, 21)$; $1,5F(34, 29, 31)$; $10F(230, 190, 210)$ und $10,5F(240, 200, 220)$.

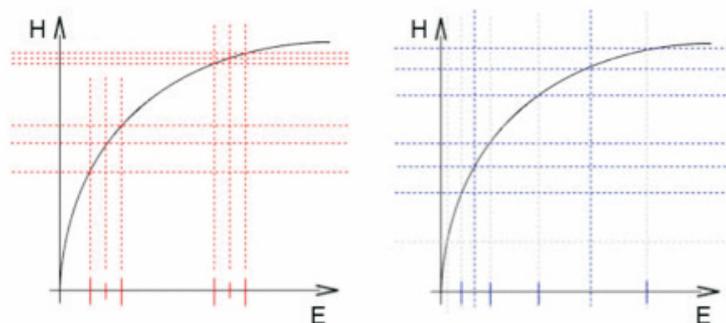


Abbildung 2.2: Darstellung der Stevensschen Potenzfunktion: Sie stellt den Zusammenhang der Energie des Lichts E mit der Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges H her. Man erkennt links durch die Hilfslinien bei gleichem dE die unterschiedlich starke Hellempfindung, rechts sieht man bei gleichem dH die unterschiedliche Energie des Lichtes.

Wie wir in Abschnitt 2.3 sehen werden, sind diese Gesetze der psychophysikalischen Empfindungstheorie für die erste Theorie von Helmholtz über den Farbraum unter der Berücksichtigung der psychologischen Farbwahrnehmung von Bedeutung. Dieser Ansatz und auch dessen Weiterentwicklung durch Schrödinger beruhen auf der Linienelement-Theorie, welche Farbabstände definiert, die im Zusammenhang mit der Farbwahrnehmung stehen.

Nach den Forschungsergebnissen der letzten dreißig Jahre zeigt sich, dass es keine streng empirisch begründeten Gesetze der psychophysikalischen Empfindungstheorie gibt ([Irt], S. II). Die in diesem Abschnitt vorgestellten Formeln erweisen sich jedoch stets als gute Annäherungen.

2.2 Linienelemente des Farbenraumes

Linienelemente werden dazu verwendet, den Abstand zweier Punkte zu bestimmen, d.h. Farben so zu quantifizieren, dass sich ein numerisches Maß für Farbunterschiede ergibt. Nun werden nicht Urteile über Gleichheit bzw. Verschiedenheit von Farben, wie in der niederen Farbmeterik, als empirische Basis verwendet, sondern zwei Farben werden auf deren größte Ähnlichkeit eingestellt. Durch dieses Verfahren lässt sich eine Metrik der Farben herleiten.

Dieser Ansatz für das Linienelement geht auf Helmholtz (1891, 1896) zurück, wurde von Schrödinger weiterentwickelt und von Mac Adam erstmals 1942 empirisch – bis auf Experimentungenauigkeiten – bestätigt.

Wie leiten sich Linienelemente in einem Farbenraum her, der nicht euklidisch sein kann? Wir betrachten vorerst den euklidischen Abstand und behalten für die anschauliche Vorstellung den im ersten Teil definierten affinen Farbvalenzraum bei und werden diesen dann im Sinne der Riemannschen Geometrie interpretieren. Sind im euklidischen Raum die Koordinaten zweier benachbarter Punkte X und Y in der Form (x_1, x_2, x_3) und $(x_1 + dx_1, x_2 +$

$dx_2, x_3 + dx_3$) gegeben, dann gilt für die Distanz ds der beiden Punkte

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2.$$

Siehe dazu Abbildung 2.3. Um die Distanz in Räumen ohne euklidischer Metrik zu beschreiben, muss die Größe ds durch kompliziertere Funktionen von dx_1, dx_2, dx_3 und x_1, x_2, x_3 dargestellt werden. Betrachten wir nun für $(ds)^2$ die allgemeine quadratische Form

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= g_{11}(dx_1)^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}(dx_2)^2 \\ &\quad + 2g_{23}dx_2dx_3 + g_{33}(dx_3)^2 + 2g_{31}dx_3dx_1 \\ &= \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}dx_idx_k, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei die Koeffizienten g_{ik} stetige Funktionen der Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind. Definitionsgemäß ist dabei die zugehörige Bilinearform $f : \widehat{F}^* \times \widehat{F}^* \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. die Matrix $(g_{ik})_{i,k=1,2,3}$, die sie bei gegebener Basis eindeutig bestimmt, ein kovarianter Tensor 2. Stufe.

Die Form (2.2) sei für jede Wahl der $(dx_1, dx_2, dx_3) \neq (0, 0, 0)$ und für alle Punkte (x_1, x_2, x_3) positiv definit, so dass also stets $ds > 0$ gilt. Unter diesen Voraussetzungen beschreibt ds ein Abstandselement – also ein *Linielement* – in einem dreidimensionalen Riemannschen Raum.

Der genaue Wert eines solchen Abstandselements ds ist unwesentlich und hängt vordergründig von einer Normierung und dem energiegleichen Spektrum bzw. den drei gewählten Primärfarben ab. Der Ansatz des Linielements ist aber unabhängig vom gewählten System von Eichwerten, da dieses invariant gegenüber beliebiger Transformationen der x_i ist.

Unter bestimmten Bedingungen lässt sich ein dreidimensionaler Riemannscher Raum in einen dreidimensionalen euklidischen Raum einbetten, so dass

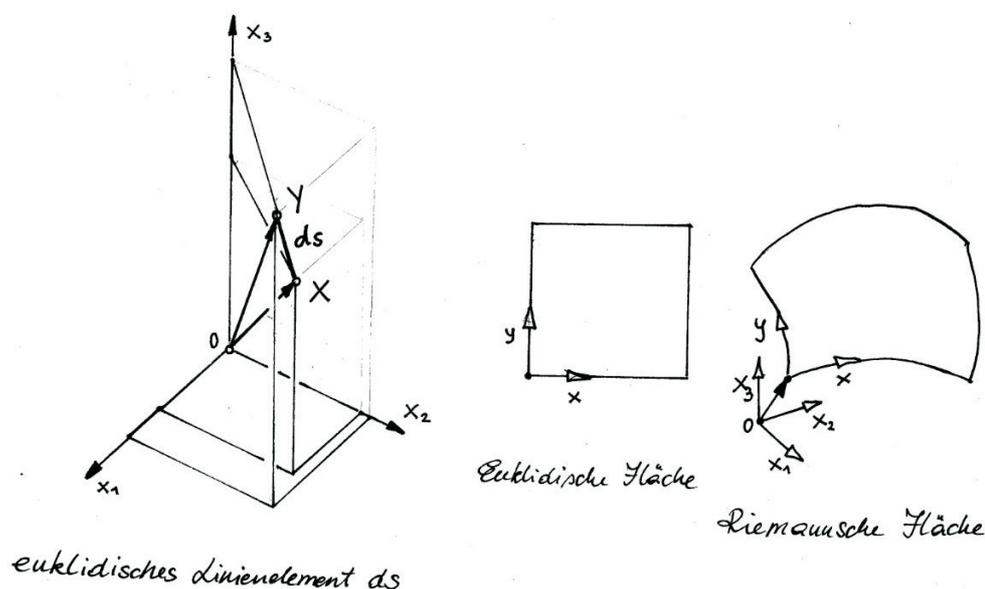


Abbildung 2.3: Raumsituationen

die Eigenschaften der Distanz erhalten bleiben. Dazu müsste man drei Funktionen $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ und $u_3(x_1, x_2, x_3)$ finden, für die gilt

$$(ds)^2 = (du_1)^2 + (du_2)^2 + (du_3)^2.$$

Im Allgemeinen ist eine solche Transformation nicht möglich. Auch wenn diese Bedingung in einen Riemannschen Raum nicht erfüllbar ist, kann der Riemannsche Raum trotzdem in einen euklidischen abgebildet werden – die Dimension ist dann allerdings größer als drei. Die Funktionen $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$, \dots , $u_m(x_1, x_2, x_3)$ mit $m > 3$ erfüllen dabei die Gleichung

$$(ds)^2 = (du_1)^2 + (du_2)^2 + \dots + (du_m)^2.$$

Die allgemeine Dimensionsformel (2.3) besagt, dass ein n -dimensionaler Riemannscher Raum in einen m -dimensionalen euklidischen Raum eingebettet

werden kann, wobei

$$m = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.3)$$

([Wys], S. 657). Für den hier relevanten Fall $n = 3$ ergibt sich also $m = 6$. Andererseits folgt für $n = 2$, dass ein zweidimensionaler Riemannscher Raum in einen dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet werden kann. Wie wir später sehen werden, liegt solch ein Fall bei Farbpunkten gleicher Helligkeit vor, die einen zweidimensionalen Unterraum bilden. Dieser kann somit als Fläche im gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum dargestellt werden. Siehe dazu Abbildung 2.3.

Im Allgemeinen ist eine längentreue Abbildung eines Raumes in einen anderen der selben Dimension, nur dann möglich, wenn in allen einander entsprechenden Punkten die Gaußkrümmung gleich ist. Da diese im euklidischen Raum in jedem Punkt 0 ist, geht das also nur, wenn auch im Riemannschen Raum diese Eigenschaft in jedem Punkt erfüllt ist.

Das Bestimmen der Koeffizienten g_{ik} der Linienelemente stellt eine große Herausforderung dar. Wir werden erfahren, dass diese aufgrund empirischer Schwellenmessungen und Berechnungen der Standardabweichung angegeben werden können. Damit lassen sich Linien gleicher Ausprägungen einzelner Farbattribute im Farbraum darstellen, wenn sich ein Zusammenhang zwischen einer geometrischen Eigenschaft und dem entsprechenden Farbattribut finden lässt.

Bezüglich der empirischen Testverfahren unterscheidet man heute zwischen zwei Arten von physiologischen Experimenten und entsprechenden psychologischen Theorien, die entweder auf der Erregung der drei Farbrezeptoren oder auf der Erregung der Gegenfarbkanäle beruhen. Die letztere Herangehensweise wird hier nicht ausgearbeitet; sie ist bei Wyszecki und Stiles ([Wys], Kap. 5) nachzulesen. Die erste Art von Experimenten wird unter

anderem von Schrödinger ausgeführt und in diesem Kapitel ausführlich behandelt. Vorweg sehen wir uns den ursprünglichen Ansatz der Linientheorie nach Helmholtz an.

2.3 Linienelement nach Helmholtz

Die Grundlagen der Linienelement-Theorie von Helmholtz 1896 ([Helm], Abschn. II, § 21) sind das Fechnersche Gesetz, die Dreifarbentheorie und das physiologische Prinzip des Eigenlichts des Auges. Denn selbst bei geschlossenem Auge sieht man nicht nur schwarz, da das Auge nie ganz frei von Farbbildern ist.

Die Größe dE von Empfindungsunterschieden setzt sich im Farbsehen aus drei Empfindungskomponenten dE_1, dE_2, dE_3 nach der Theorie der Dreifarbentheorie zusammen. Helmholtz nimmt an, dass dieser Zusammenhang durch eine homogene Funktion zweiten Grades beschrieben werden kann. Die in Betracht genommenen kleinen Farbunterschiede ergeben im allgemeinen kleine Werte bei Gliedern höherer Ordnung, die deshalb nicht berücksichtigt werden. Für das Linienelement ergibt sich somit

$$dE = dE_1^2 + dE_2^2 + dE_3^2.$$

Das heißt, jede Farbempfindung wird durch drei unabhängige und gleichartige physiologische Prozesse erklärt ([Lam], S. 283). Für diese werden nach dem Fechnerschen Gesetz (2.1) bei mäßiger Lichtstärke die einfachen Formen

$$dE_i = k \frac{dx_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

angenommen ([Helm], S. 451). Sind x_i zu den Farben der drei Farbrezeptoren der Netzhaut geeicht, so wird aus Erfahrungswerten $k = 1/3$ gesetzt. Somit

ist das Linienelement

$$dE^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{dx_1^2}{x_1^2} + \frac{dx_2^2}{x_2^2} + \frac{dx_3^2}{x_3^2} \right). \quad (2.4)$$

Helmholtz gibt auch einen allgemeinen Ansatz an, der auch bei schwacher Lichtstärke gilt. Dabei wird das Eigenlicht des Auges mit den Konstanten a, b, c berücksichtigt:

$$(ds)^2 = \left(\frac{dx}{a+x} \right)^2 + \left(\frac{dy}{b+y} \right)^2 + \left(\frac{dz}{c+z} \right)^2. \quad (2.5)$$

Diesen Ansatz hat Helmholtz nicht weiter verfolgt. Eine Überarbeitung davon, welche eine gute Übereinstimmung mit Daten aus Farbttests liefert, ist von W. S. Stiles 1946 entwickelt worden. Siehe dazu auf Seite 99.

Untersuchungen des Helligkeitsunterschiedes zweier Farben oder deren Helligkeitsgleichheit beinhaltet zwei Variablen: die Farbart und die Sättigung. Im Farbexperiment ist daher nicht einfach festzustellen, welche Farbe heller oder dunkler ist (Siehe Abbildung 2.4). Aus der linken Spalte dieser Abbildung ist nicht ersichtlich, wie sich diese vier Farben bzgl. der Helligkeit verhalten. Überraschenderweise ist in den ersten drei Reihen die Helligkeitskoordinate stets gleich mit 130 und nur in der unteren Reihe mit 100 geringer. Vergleicht man jeweils die oberen und unteren beiden Reihen, würde man glauben, die jeweils untere sei im Verlauf heller. Die Abstufungen wirken im Vergleich dieser vier Farbarten nicht gleichmäßig. Insofern kann am in Abbildung 2.4 beschriebenen (**HSL**)-System kritisiert werden, dass die linearen Helligkeitsabstände - zum Beispiel wie hier um jeweils 1/3 verringert - nicht der Helligkeitwahrnehmung des Auges entsprechen. Gleiche Helligkeit von verschiedenen gleichhellen Farbarten bleibt durch lineares Ändern der Helligkeit nicht erhalten.

Helmholtz ([Helm], S. 440) äußert sich zur Helligkeitwahrnehmung folgendermaßen: *Ich persönlich muss wiederholt erklären, dass ich mir ein Urteil*

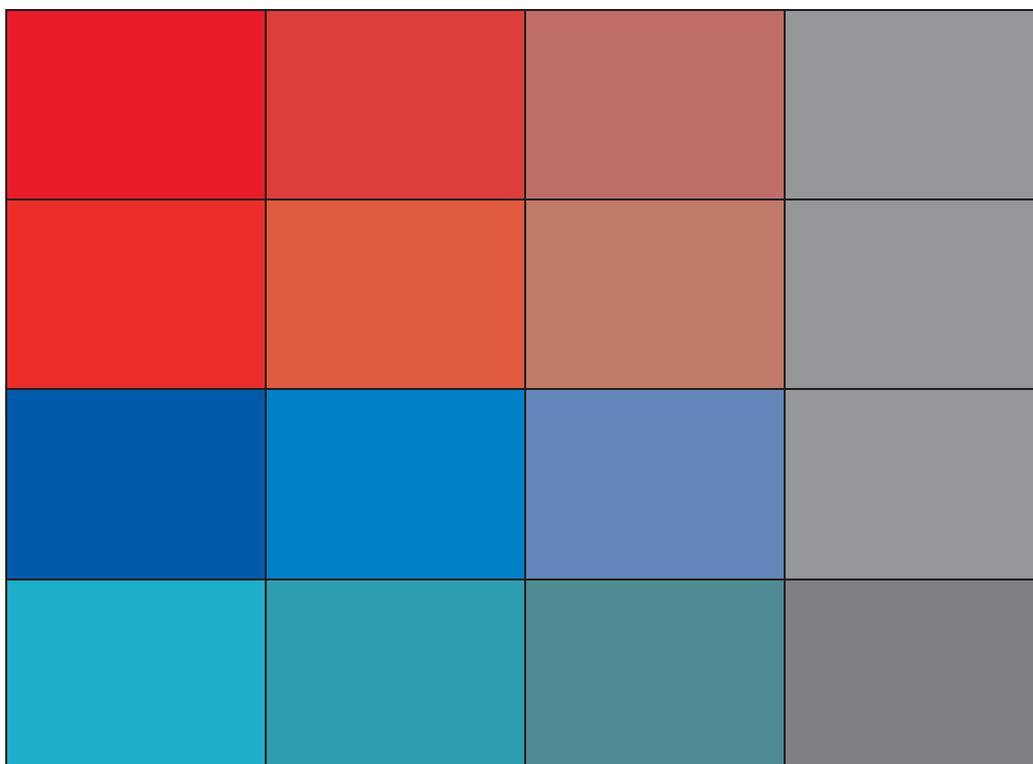


Abbildung 2.4: Helligkeitsabstufungen. Die Farbkoordinaten wurden hier nicht im $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ -System bestimmt, sondern in dem dazu affinen (\mathbf{HSL}) -System.

Farbart	1	1	1	1
Sättigung	214	143	71	0
Helligkeit	130	130	130	130
Farbart	7	7	7	7
Sättigung	214	143	71	0
Helligkeit	130	130	130	130
Farbart	157	157	157	157
Sättigung	214	143	71	0
Helligkeit	130	130	130	130
Farbart	135	135	135	35
Sättigung	214	143	71	0
Helligkeit	100	100	100	100

Die Farbvalenz wird dabei mit Hilfe der Farbart (englisch **hue**), der Farbsättigung (**saturation**) und der Helligkeit (**lightness**) bestimmt. Durch gleichmäßiges Verringern der Sättigung der vier Farbart in der linken Spalte - jeweils $1/3$ - gelangt man zu den Grauwerten in der rechten Spalte, so dass die vier Helligkeiten verglichen werden können.

über Gleichheit von heterochromen Helligkeiten kaum zutraue, höchstens über größere und kleinere in extremen Fällen. Über das Hilfsmittel eines Farbkreisels versucht er Helligkeitsunterschiede eindeutig ablesen zu können. In Abschnitt 2.8 werden wir allerdings erfahren, dass es bei diesem Versuch gar nicht um Helligkeitsunterschiede geht. Es wundert einen daher nicht, dass in der darauffolgenden Auflage von Helmholtz' *Handbuch der Physiologischen Optik* [Helm] von 1905 kaum noch mathematische Ausführungen zu finden sind.

2.4 Linienelement nach Schrödinger

Schrödinger stellt Hypothesen für das Maß des Unterschiedes von gerade noch unterscheidbaren Farben auf. Er formuliert drei Annahmen ([Schrö3], S. 483):

1. Die Einstellung zweier Farben X, Y auf *größte Ähnlichkeit* besteht darin, ein relatives Minimum der Funktion $s(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ aus der Gleichung (2.2) zu bestimmen (siehe Abbildung 2.5 links). Die von X gleichweit entfernten Farbpunkte, d.h. die von X gerade eben unterscheidbaren Farben liegen auf einem kleinen Ellipsoid mit Mittelpunkt X (siehe Abbildung 2.5 rechts). Die Werte der Tensorkomponenten g_{ik} werden aus den Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit ermittelt.

Daraus leitet sich die nächste Annahme her:

2. Für zwei Farben, die sich gerade ebenmerklich unterscheiden, können die dx_i als Differenziale angesehen werden. Da die g_{ik} bei ebenmerklich verschiedenen Farben nicht stark variieren und keine Sprungstellen auftreten, können auch die ds als Differenziale gesehen werden. Außerdem hat ds für *jedes* ebenmerklich verschiedene Farbenpaar den selben Wert und die Ellipsen sind gleich groß. Denn aus der ersten Annahme ist eine Riemannsche Metrik für die Mannigfaltigkeit von Zahlentripeln (x_1, x_2, x_3) mit ds als Linienelement festgelegt. Der konkret für

ds gewählte Wert ist nicht von Bedeutung, es handelt sich nur um eine Normierungskonstante. Diese Metrik ist invariant gegenüber lineare Transformationen der x_i und unabhängig von den gewählten Primärfarben.

- Die kürzeste Verbindungsstrecke eines Farbenpaares ist nicht euklidisch, sondern entlang der geodätischen Linie zu bestimmen. Die Verschiedenheit eines solchen Paares wird als Größe $\int ds$ gemessen. Die kürzeste Verbindungsstrecke hat den kleinsten Wert $\int ds$. Zwei Farben sind um so ähnlicher, mit je weniger ebenunterscheidbaren Zwischenstufen man den „kontinuierlichen“ Übergang von der einen zur anderen durchführen kann.

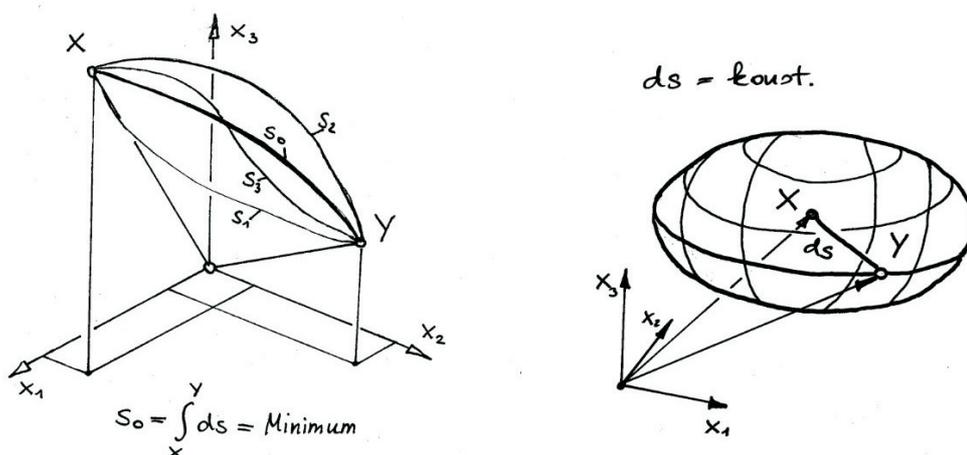


Abbildung 2.5: Links: Kürzeste Abstände im Riemannschen Sinne; Rechts: Die von X im Riemannschen Sinne gleich weit entfernten Punkte liegen auf einem Ellipsoid.

Bisher ist noch nicht festgelegt worden, auf welche Farbqualität die größte Ähnlichkeit eingestellt wird und auf welcher Farbqualität die Farbreihen beruhen sollen. Schrödinger hat sich auf die Einstellung gleicher Helligkeit beschränkt. Im Farbraum ist die Helligkeit - wie wir im ersten Kapitel gesehen haben - von der Länge des Farbvektors abhängig. Nahe des Ursprungs

ist die Helligkeit eher gering und wird bei zunehmender Entfernung größer. Insofern eignet sich die Einstellung auf gleiche Helligkeit sehr gut, um die theoretische Definition des Farbraums zu erarbeiten.

2.5 Einstellung auf gleiche Helligkeit

Die Helligkeit von Farbe korrespondiert mit der Strahlungsintensität des zugehörigen Farbreizes. Daher versteht man unter Helligkeit jene Eigenschaft einer Farbe, die sich am stärksten ändert, wenn die Strahlungsintensität in jeder Wellenlängen des sichtbaren Bereichs mit konstantem Faktor geändert wird. Zwei Farben, die sich in der Reizart nur wenig unterscheiden, kann man auf gleiche Helligkeit bringen, indem man die Strahlungsintensität einer Farbe abändert.

Zu einem festen Punkt F ist ein variabler Punkt F' gegeben, so dass die Farbvektoren \overrightarrow{OF} , $\overrightarrow{OF'}$ in ähnliche Richtungen zeigen ([Schrö3], S. 487). Um F konstruiert man eine Schar von Ellipsoiden gleichen Abstandes (im Riemannschen Sinne) und wählt davon jene aus, welche die Gerade OF' zur Tangente hat. Dann ist der Berührungspunkt F'' mit F gleich hell. Der Abstand des neuen Punktes F'' zu F soll Durchmesser eines Ellipsoids nach Hypothese 1 sein. Führen wir diese Konstruktion für weitere Punkte aus der nahen Umgebung von F durch, so liegen die gleich hellen Punkte auf einem Flächenelement, das sogenannte *gleich-helle Flächenelement*, auch *Isolychne* genannt (siehe dazu Abbildung 2.6).

Konstruieren wir an ein solches Ellipsoid den Tangentenkegel aus O und fassen diesen theoretisch als Zylinder auf, dann ist das gleich-helle Flächenelement die zur Zylinderachse OF konjugierte Durchmessersebene des Ellipsoids. Die Gleichung des Ellipsoids ist

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k = c,$$

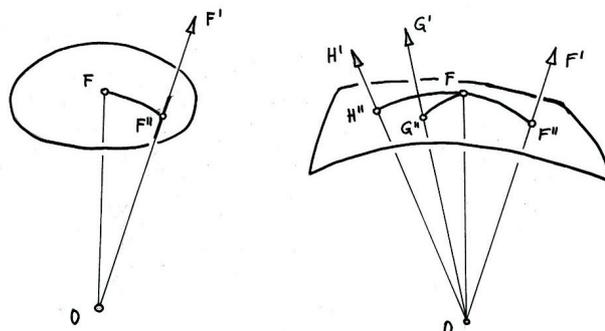


Abbildung 2.6: Links: Gerade OF' berührt Ellipsoid um F in F'' . Rechts: Die Punkte gleich heller Farben liegen auf der Isolychne.

also das Linienelement mit einem festem Wert c . Dieses gleichhelle Flächenelement steht im Riemannschen Sinne orthogonal zur Richtung \overrightarrow{OF} . Die Intensitätsänderung im Punkt F erfolgt in Richtung des Ortsvektors \overrightarrow{OF} , so dass

$$F'' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$ ist parallel zur Isolychne, und da diese Ebene im Riemannschen Sinne normal auf OF steht, ist

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} x_i dx_k = 0 \quad (2.6)$$

die Differenzialgleichung der Isolychne im Punkt $F(x_1, x_2, x_3)$.

Ein sinnvoll definierter Begriff der Helligkeit muss transitiv sein, also wenn F'' gleich hell ist wie G'' , und G'' gleich hell wie H'' , dann sollen auch F''

und H'' gleich hell sein. Diese Eigenschaft nützen wir nun und schreiten aus F'' zu einem gleich hellen Punkt G'' und von diesem wieder zum nächsten gleich hellen Punkt H'' und so fort, in beliebiger Richtung auf dem gleich hellen Flächenelement. Daraus ergibt sich eine Linie gleichheller Farben, die sich an einer Stelle schließt, wo etwa eine Farbe K'' auf dem Orstvektor $\overrightarrow{OF''}$ liegt und daher $K'' = F''$ gilt. Dies soll für jeden beliebigen Weg gleich heller Farben innerhalb eines sinnvollen Helligkeitsbegriffes gelten. Die Flächenelemente (2.6) lassen sich somit zu Integralfächen zusammenfassen und die linke Seite des Ausdruckes (2.6) ist daher integrierbar. Es muss daher einen Multiplikator $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ geben, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\lambda g_{ik} x_i)}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\lambda g_{il} x_i)}{\partial x_k}, \quad k, l = 1, 2, 3; \quad l \neq k.$$

Damit ein solches λ existiert müssen die g_{ik} die Schwarzschen Bedingungen erfüllen, die man folgendermaßen erhält: Differenzieren ergibt auf der linken Seite den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \cdot g_{ik} x_i + \frac{\partial g_{ik} x_i}{\partial x_l} \cdot \lambda \right).$$

Die rechte Seite wird analog differenziert. Durch Umformen gelangt man zu den drei Gleichungen

$$\sum_{i=1}^3 \lambda \left(\frac{\partial(g_{ik} x_i)}{\partial x_l} - \frac{\partial(g_{il} x_i)}{\partial x_k} \right) = - \sum_{i=1}^3 \left(g_{ik} x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} - g_{il} x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right),$$

wobei $k, l = 1, 2, 3; l \neq k$. Durch Multiplikation mit $g_{pm} x_p$, wobei m ein neuer Index ist, und anschließendes Aufsummieren verschwindet die rechte Seite und man erhält, da $\lambda \neq 0$ ist,

$$\sum_{p=1}^* \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^3 g_{pm} x_p \left(\frac{\partial(g_{ik} x_i)}{\partial x_l} - \frac{\partial(g_{il} x_i)}{\partial x_k} \right) = 0;$$

dabei bedeutet \sum^* , dass nur über die drei Tripel $(k, l, m) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ summiert wird. Da $g_{ik} = g_{ki}$, reduziert sich der Klammerausdruck zu

$$\frac{\partial(g_{ik}x_i)}{\partial x_l} - \frac{\partial(g_{il}x_i)}{\partial x_k} = x_i \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} \right).$$

Somit folgt

$$\sum_{p=1}^* \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 g_{pm} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} \right) x_i x_p = 0. \quad (2.7)$$

Dies ist die Schwarzsche Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass die Differenzialgleichung (2.6) integrierbar ist.

Die Koeffizienten g_{ik} sind empirisch zu bestimmen und die Integrabilitätsbedingung (2.7) wurde tatsächlich durch Messdaten bestätigt. Wäre dem nicht so, würde der Helligkeitsbegriff über verschiedene Farben keinen Sinn ergeben.

Aufgrund der Integrabilität existiert bei geeigneter Wahl von $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ eine Funktion $h(x_1, x_2, x_3)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^3 \lambda g_{ik} x_i, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Ist die Funktion h konstant, so beschreibt diese eine Fläche durch den festen Punkt F . Für verschiedene Werte von h zerlegen diese den Farbraum zwiibelartig. Es sind im Riemannschen Sinne Orthogonalflächen bzgl. des Ortsvektors \overrightarrow{OF} . Diese sind die oben erwähnten Isolychnen. Dabei ist der Wert $h(x_1, x_2, x_3)$ das Maß für die Helligkeit.

Wir sind damit noch nicht bei einem definierten Abstandsmaß angekommen, denn h ist durch die letzte Beziehung noch nicht ausreichend bestimmt.

Jede eindeutige Funktion von h stellt nämlich die selbe Flächenschar dar und kann als Helligkeitsniveau in einer Skala interpretiert werden. Dafür ist also eine Normierung notwendig. Diese ist beispielsweise möglich, wenn angenommen wird, dass die Isolychnen in sich ähnlich sind und zum Ursprung in ähnlicher elementargeometrischer Lage stehen. Diese Annahme bedeutet für Farbmischungen, dass bei proportionaler Veränderung der objektiven Intensität zweier Lichtgemische die Farbgleichheit erhalten bleibt. Das erinnert an das Unterkapitel 1.4 und den 2. Satz von Grassmann. Wie dort erwähnt, hat Schrödinger darauf hingewiesen, dass diese Annahme in manchen Experimenten widerlegt wurde.

Es kann sein, dass zwei färbige Objekte rot und blau im Sonnenlicht gleich hell wahrgenommen werden, aber im Dämmerlicht nicht. Zum Beispiel sind solch blaue Autos abends besser zu sehen als rote. Diese Helligkeitsverschiebungen werden als das Purkinjesche Phänomen bezeichnet (Siehe Abbildung 1.14).

Dennoch kann in gewissen Grenzen angenommen werden, dass eine von 2, 3 und dann 4 Glühlampen beschienene Fläche als 2, 3 bis 4 mal so hell wahrgenommen wird. Diese damit beschriebene Additivität der Helligkeit resultiert nicht direkt aus den Farbgleichungen ([Schrö3], S. 491). Auch wird das Purkinjesche Phänomen bzgl. unterschiedlichem Hellempfinden im Tag- und Nachtsehen nicht berücksichtigt. Schrödinger nimmt die Linearität der Helligkeitsveränderung als Näherung an, da diese bei mittleren Lichtverhältnissen zu beobachten ist. Rechnerisch bedeutet dies, dass h eine homogene Funktion ersten Grades ist und demnach der Eulersche Satz anwendbar ist:

$$h = x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3}.$$

Verwenden wir hier (2.8), dann ergibt sich

$$h = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \lambda g_{ik} x_i x_k \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{h}{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} x_i x_k}.$$

Setzen wir λ in (2.8) ein, formen diese Gleichung um und integrieren $\frac{\partial h}{h}$, dann erhalten wir

$$\frac{\partial \ln h}{\partial x_l} = \frac{\sum_{i=1}^3 g_{il} x_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} x_i x_k}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Das sind drei Gleichungen, die $\ln h$ bis auf eine additive Konstante und h bis auf einen unwesentlichen Proportionalitätsfaktor bestimmen.

Somit haben wir ein Maß für die Helligkeit definiert. Um es konkret anzugeben, müssten die Komponenten des Metriktensors (g_{ik}) für den gesamten Farbenraum experimentell bestimmt werden. Dazu müssten somit zu allen Farben Messdaten erstellt werden. Eine solche praktische Herangehensweise ist offensichtlich nicht erfolgsversprechend, weshalb noch weitere theoretische Annahmen getroffen werden müssen. Schrödinger stellt einen Ansatz für die Bestimmung des Linienelementes auf ([Schrö3], S. 495). Empirische Bestimmungen der Unterschiedlichkeitsempfindungen wurden von Mac Adam und Brown (siehe Kap. 2.10) und anderen ([Wys], S. 319) erst ab 1942 erfolgreich durchgeführt.

Bevor wir uns der weiteren Theorie von Schrödinger widmen, beantworten wir die am Schluss von Abschnitt 2.3 offen gebliebene Behauptung, dass der Ansatz von Helmholtz zu einer nicht haltbaren Helligkeitsfunktion führt.

Setzen wir in die Gleichung (2.9) die speziellen Werte (2.4) aus dem Ansatz von Helmholtz ein, so ergibt dies

$$\frac{\partial \ln h}{\partial x_i} = \frac{1}{3x_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Kurven gleicher Helligkeit bei Anwendung des Helmholtzschen Linienele-

ments werden daher beschrieben durch

$$h = c\sqrt[3]{x_1x_2x_3}, \quad (2.10)$$

wobei c eine Konstante ist. Jedoch sind diese Kurven empirisch nicht haltbar. Schrödinger bezeichnet diese Helligkeitsfunktion bei einer Helligkeitsverteilung des Sonnenspektrums als „scheußlichen Kamelrücken“ ([Schrö3], S. 493), da die Extremstellen im Verleichen zu den Messdaten an den falschen Stellen zu stark ausgeprägt sind.

Der zweite Grund, weshalb der Ansatz nicht haltbar ist, liegt in der Eigenschaft der Helligkeit begründet, dass sie sich annähernd additiv verhält:

$$h(x_1, x_2, x_3) + h(x'_1, x'_2, x'_3) = h(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3). \quad (2.11)$$

Dies ist für die Funktion (2.10) klarerweise nicht erfüllt. Helmholtz selbst hat Versuche mit einem Farbkreislauf durchgeführt und falsch interpretiert und daher die Additivität der Helligkeit bezweifelt. Die richtige Interpretation von Schrödinger der Farbkreislaufversuche steht dagegen nicht im Widerspruch zur Additivität der Helligkeit. Dies werden wir in Abschnitt 2.8 noch genau vorführen.

2.6 Theoretischer Ansatz für das Linienelement

Da bis um 1920 erst zwei bekannte Farbmessungen bzgl. des Linienelements durchgeführt und veröffentlicht wurden, die noch nicht ausagekräftig genug waren, hat Schrödinger ([Schrö3], S. 491) für das Linienelement einen theoretischen Ansatz entwickelt, der durch Messungen nachzuprüfen ist.

Im letzten Abschnitt haben wir erwähnt, dass die Helligkeit eine annähernd additive Eigenschaft (2.11) der Farbe ist. Durch partielles Differenzie-

ren dieser Gleichung folgt

$$\frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3), \quad l = 1, 2, 3.$$

Die drei Differenzialquotienten $\partial h/\partial x_l$ sind somit konstant, da die beiden Wertetripel beliebig gewählt wurden. Die Funktion h ist daher homogen und linear

$$h(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Diese Form bleibt durch eine lineare Transformation, also durch Änderung der Eichfarben, unverändert. Die Ebenenschar der Isolychnen erfüllt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \tag{2.12}$$

Nach Abschnitt 2.5 müssen die Ebenen dieser Schar im Riemannschen Sinne orthogonal auf \overrightarrow{OF} stehen.

Nun bildet die Transformation ζ mit

$$\zeta(X) = \begin{pmatrix} \zeta_1(x_1) \\ \zeta_2(x_2) \\ \zeta_3(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1x_1} \\ \sqrt{a_2x_2} \\ \sqrt{a_3x_3} \end{pmatrix}$$

Radienvektoren in Radienvektoren ab und die Ebenenschar (2.12) wird in die Kugelschar

$$\zeta_1(x_1)^2 + \zeta_2(x_2)^2 + \zeta_3(x_3)^2 = c$$

verwandelt. Der euklidische Abstand im ζ -Raum bleibt daher erhalten.

Mittels dieses theoretischen Ansatzes kann Schrödinger nun folgenden Ansatz von Wolfgang Pauli ([Schrö3], S. 495) verwerfen:

$$4(\zeta_1(x_1)^2 + \zeta_2(x_2)^2 + \zeta_3(x_3)^2) = a_1 \frac{dx_1^2}{x_1} + a_2 \frac{dx_2^2}{x_2} + a_3 \frac{dx_3^2}{x_3} = ds^2.$$

Wenn nämlich zwei verschiedene Farben gleicher Farbarten nur in der Intensität geändert werden, so ist

$$dx_1 = \epsilon x_1, \quad dx_2 = \epsilon x_2, \quad dx_3 = \epsilon x_3 \quad i = 1, 2, 3; \quad \epsilon \ll 1.$$

Daraus ergibt sich der Abstand

$$ds = \epsilon \sqrt{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}.$$

Für ein konstantes ϵ ist ds aber nicht konstant, was das Fechnersche Gesetz jedoch verlangt. Um zu einem brauchbaren Ergebnis zu kommen, verwendet Schrödinger, dass die Isolychnen, wie man aus der Differenzialgleichung (2.6) erkennt, sich nicht ändern, wenn dem Linienelement eine bestimmte Koordinatenfunktion als Faktor hinzugefügt wird. Wird für diesen Faktor die reziproke Helligkeit

$$\frac{1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}$$

gewählt, so sind für alle Farben und nicht nur für die gleiche Farbart, die Fechnerstufen konstant.

Damit ist nun das Linienelement vollständig bestimmt; und zwar ist der Maßtensor

$$\begin{aligned} g_{ik} &= 0, & i &\neq k \\ g_{ii} &= \frac{a_i}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3} \\ ds^2 &= \frac{1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3} \left(\frac{a_1 dx_1}{x_1} + \frac{a_2 dx_2}{x_2} + \frac{a_3 dx_3}{x_3} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Konstanten a_i sind experimentell zu bestimmen, so dass

$$h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

die Helligkeit der Farbe (x_1, x_2, x_3) misst. Dieses Linienelement (2.13) berücksichtigt die mit der Erfahrung übereinstimmende Helligkeitsfunktion und das

Fechnersche Intensitätsgesetz mit derselben Konstante für alle Farben. Da es gegen lineare Transformationen der x_i nicht invariant ist, ist jede Form in die es übergeführt wird, ein möglicher Ansatz.

2.7 Empfindlichkeit des Farbunterschiedes von Spektralfarben

Um über die Bedeutung eines theoretischen Ansatzes etwas sagen zu können, sind empirische Vergleichswerte heranzuziehen. Als Erfahrungskontrolle hat Schrödinger ([Schrö3], S. 496) die Farbunterschiede der Spektralfarben genauer analysiert. Er war auf die wenigen Datensätze angewiesen, die es zu seinen Lebzeiten gab. Er hat aus dem Ansatz des Linienelements, welcher sich auf alle Farben bezieht, einen speziellen für Spektralfarben abgeleitet, und diesen anschließend mit den experimentellen Resultaten seiner Zeit kontrolliert.

Ausgehend von einem Punkt eines Spektralreizes der Stelle λ schreitet man entlang der Spektralwertkurve zu einem nahen Punkt des Spektralreizes zur Stelle $\lambda + d\lambda$. Die Koordinaten zweier benachbarter Farbtöne sind

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_{\lambda+d\lambda} = \begin{pmatrix} x_1 + dx_1 \\ x_2 + dx_2 \\ x_3 + dx_3 \end{pmatrix}.$$

Das Linienelement soll jedoch aus diesen beiden Koordinaten bestimmt werden:

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} (1 + \epsilon)x_1 \\ (1 + \epsilon)x_2 \\ (1 + \epsilon)x_3 \end{pmatrix}, \quad S_{\lambda+d\lambda} = \begin{pmatrix} x_1 + dx_1 \\ x_2 + dx_2 \\ x_3 + dx_3 \end{pmatrix},$$

denn die beiden zugehörigen Spektralfarben sollen stets unterscheidbar sein, auch wenn der Helligkeitsunterschied annähernd um den Wert $\epsilon = d \ln h$

ausgeglichen wird. Daher ist

$$(1 + \epsilon)x_i - (x_i + dx_i) = \epsilon x_i - dx_i = x_i d \ln h - dx_i,$$

und für das Linienelement erhalten wir somit

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}(x_i d \ln h - dx_i)(x_k d \ln h - dx_k) \\ &= \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} x_i x_k d \ln \frac{x_i}{h} d \ln \frac{x_k}{h}. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir den Ansatz (2.13), dann gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{a_1 x_1}{h} \left(d \ln \frac{x_1}{h} \right) + \frac{a_2 x_2}{h} \left(d \ln \frac{x_2}{h} \right) + \frac{a_3 x_3}{h} \left(d \ln \frac{x_3}{h} \right) \quad \text{mit} \\ h &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3. \end{aligned}$$

Dabei sind x_i und daher auch h Funktionen von λ . Die Ableitung nach λ (mit einem Strich bezeichnet) ist

$$ds = \sqrt{\frac{a_1 x_1}{h} \left(\frac{x'_1}{x_1} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{a_2 x_2}{h} \left(\frac{x'_2}{x_2} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{a_3 x_3}{h} \left(\frac{x'_3}{x_3} - \frac{h'}{h} \right)^2} d\lambda.$$

Die Primärfarben werden nicht an Weiß normiert, sondern die Primärfarben sollen gleichhell erscheinen oder in Mischungen den gleichen Helligkeitswert haben. Das heißt die Primärfarben der Farbtests müssen auf diese Eigenschaft umgerechnet werden. In diesem Fall sind alle a_i , $i = 1, 2, 3$, gleich 1. Die Helligkeitsfunktion ist daher

$$h = x_1 + x_2 + x_3.$$

Das Linienelement wird im allgemeinen Fall zu

$$ds^2 = \frac{1}{h} \left(\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3} \right),$$

im obigen speziellen Fall zu

$$ds = \sqrt{\frac{x_1}{h} \left(\frac{x'_1}{x_1} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{x_2}{h} \left(\frac{x'_2}{x_2} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{x_3}{h} \left(\frac{x'_3}{x_3} - \frac{h'}{h} \right)^2} d\lambda.$$

Werden die empirischen und rechnerischen Werte verglichen (siehe Abbildung 2.7), so sind die Ergebnisse enttäuschend weit voneinander entfernt. Bei einer graphischen Darstellung der beiden Werte erkennen wir jedoch einen ähnlichen Verlauf der Unterschiedlichkeitsempfindung im Spektrum. Die Extremstellen der beobachteten Werte sind gegenüber den rechnerischen Werten in Richtung niedrigerer Wellenlänge verschoben. Dann sind die Verläufe der beiden Kurven nicht weit von einander entfernt. Der Hochpunkt der berechneten Werte ragt aber trotzdem weit über den beobachteten Hochpunkt hinaus. Jedoch kann man das Ergebnis insofern positiv beurteilen, als die Ausgangssituation der Theorie unabhängig von Messdaten und einer allgemeinen Normierung war. Keine einzige Zahl wurde für die theoretische Rechnung direkt benützt, und selbst die zugehörige Lage der Primärfarben im Vektorraum ist nicht festgelegt.

2.8 Farbkreiserversuch

In der langen Geschichte der Farbtheorie versuchte man stets, Theorien durch empirische Farbversuche zu belegen. Allein, dass bis heute noch farbmetrische Fragen offen sind, zeigt, wie schwierig es ist, Farbversuche sinnvoll zu planen und richtig auszuwerten. Oftmals waren Messwerte zu sehr fehlerbelastet, da ausschließlich das menschliche Auge ohne jegliche technische Unterstützung von Photometern die einzigen Messdaten lieferte, wodurch sich leicht auch gravierende Fehler einschleichen können. Im rein analytischen Überdenken von solchen praktischen Versuchen kann daher ein anderer Zusammenhang entdeckt werden, als zuvor angenommen wurde. So ist es, wie wir bereits erwähnt haben, Schrödinger ergangen, als er den Farbkreiserversuch von Helmholtz mit seinen aus rein theoretischen Überlegungen stammenden

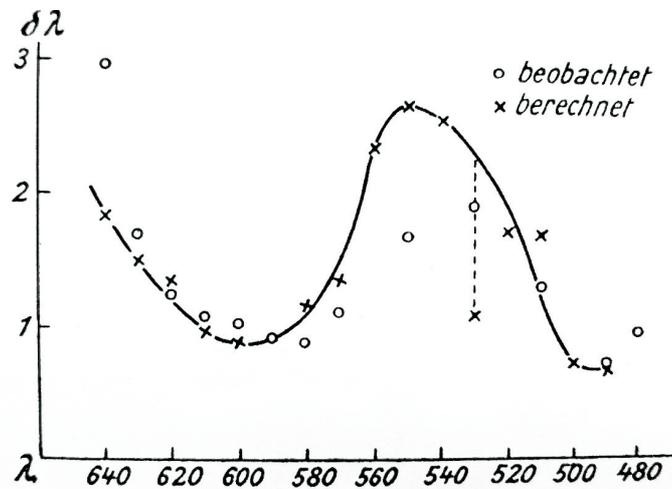


Fig. 2.

Abbildung 2.7: Grafische Darstellung der berechneten und beobachteten Daten $d\lambda$ für Spektralfarben. (Schrödinger hat die Skala der Wellenlänge entgegengesetzt dargestellt.)

den Resultaten interpretierte ([Schrö3], S. 500). Helmholtz bemerkte nicht, dass sein Versuch, wie implizit angenommen, keine Aussage über einen Helligkeitsvergleich zwischen zwei Farben ergab, sondern einen Versuch für die Einstellung auf größte Ähnlichkeit zweier Farben darstellt. Dies hat Schrödinger festgestellt und auch bewiesen.

Wie wird dieser Versuch genau durchgeführt? Man geht von zwei Farben A und B aus und bezeichnet ihre Farbmischung mit C . Die Scheibe des Kreisels wird bis auf einen Sektor des Winkels $\alpha' \approx 3,5^\circ - 7^\circ$ mit der Farbmischung C gefärbt. Der freigebliene Sektor wird in einem inneren Ring R_1 mit der Farbe A gefärbt und im äußeren Ring R_2 wird dieser Sektor nochmals mit einem zweiten Winkel $\beta' < \alpha'$ geteilt. Der eine Teil bleibt schwarz, der andere, innerhalb β' , wird mit B gefärbt (siehe Abbildung 2.8).

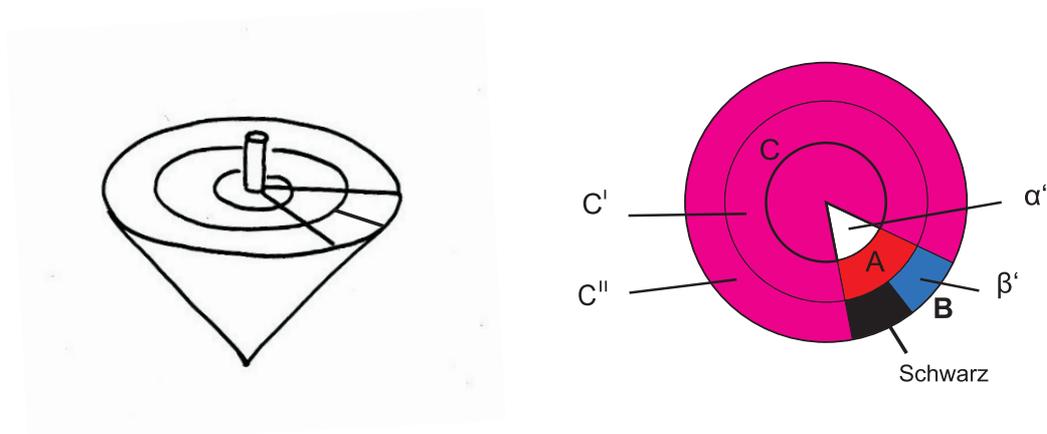


Abbildung 2.8: Farbkreisel

Für die Mischfarbe C gilt

$$C = \lambda A + \mu B, \quad \lambda + \mu = 1. \quad (2.14)$$

Die Koeffizienten λ und μ sind brauchbarer, wenn sie in Beziehung zu den Winkeln der Kreisscheibe stehen. Wir können uns vorstellen, dass die Mischfarbe C durch Rotieren zweier Sektoren A und B zustande kommt. Es ist also unwesentlich, ob die Farbmischung C aufgetragen wird, oder ob dieser Sektor durch den Winkel λ' geteilt und mit der Farbe A und B coloriert wird. Die Winkeldifferenz $2\pi - \alpha'$ bezeichnen wir mit μ' . Die Koeffizienten λ und μ lassen sich dann aus diesen Winkeln umrechnen:

$$\lambda = \frac{\lambda'}{2\pi - \alpha'}, \quad \beta' = \frac{\mu'}{2\pi - \alpha'}.$$

Der Winkel α' sei nun fest und β' wird so lange variiert, bis die beiden Farben beim Rotieren in den Ringen C' und C'' des Kegels möglichst wenig unterscheidbar werden. Helmholtz nahm an, dass dies eine Einstellung auf gleiche Helligkeit sei. Dann würden Farbveränderungen von A und B mit

$$\alpha A = \frac{\alpha'}{2\pi - \alpha'} A \quad \text{und} \quad \beta B = \frac{\beta'}{2\pi - \beta'} A,$$

die Helligkeit der Mischung C in einem gleichbleibenden Verhältnis verändern. Die Annahme ist dabei, dass die Helligkeiten generell eine additive Eigenschaft besitzt. Die Helligkeiten von A und B müssten sich für jede Farbmischung C reziprok verhalten, wie die Zuwächse α zu β bzw. die Winkel α' zu β' :

$$\frac{h(A)}{h(B)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Dies tritt aber nicht ein. Schrödinger zeigt formal, dass das Winkelverhältnis $\frac{\beta'}{\alpha'}$ nicht mit dem Verhältnis der Helligkeiten übereinstimmt, da letzteres nicht konstant ist.

Betrachten wir den Sachverhalt nun geometrisch-anschaulich. Wegen (2.14) liegt C auf der Verbindungsgerade von A und B . Die Mischfarbe C wird zweimal verändert: Die Farbe des inneren Rings C' ist die Mischung von C und A :

$$C' = C + \alpha A.$$

Analog gilt für die Farbe des äußeren Rings C'' :

$$C'' = C + \beta B.$$

Dabei ist C'' mit dem variierenden Winkel β' so zu wählen, dass es möglichst ähnlich wahrgenommen wird und zugleich im Vektorraum natürlich möglichst nahe C' ist (siehe Abbildung 2.9).

Wir legen um C' ein Ellipsoid, das die Gerade CC'' , die parallel zu OB ist, in C'' berührt. C'' ist im Allgemeinen nicht gleich hell wie C' . Nur im Grenzfall $C = B$ sind die Richtungen \overrightarrow{OC} und $\overrightarrow{CC''}$ identisch wie bei einem gewöhnlichen Helligkeitsversuch.

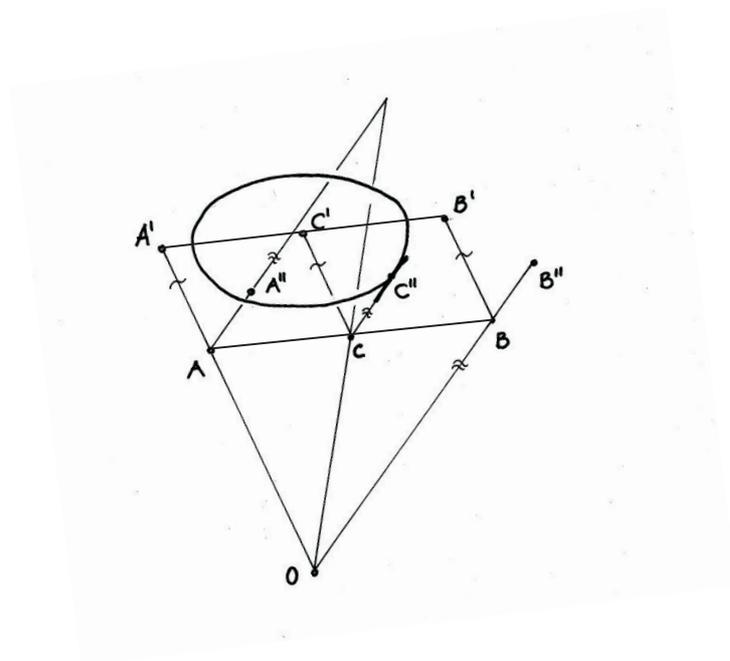


Abbildung 2.9: Vektordarstellung des Farbkreiselsversuchs

Rechnerisch ergibt sich bei der Annäherung von C'' an C' folgendes: Ist $A(y_1, y_2, y_3)$, $B(z_1, z_2, z_3)$ und $C(x_1, x_2, x_3)$, dann gilt

$$x_i = \lambda y_i + \mu z_i.$$

Die Koordinaten von C' sind $x_i + \alpha y_i$, die von C'' sind $x_i + \beta z_i$, so dass der Vektor $\overrightarrow{C'C''}$ die Koordinaten $\beta z_i - \alpha y_i$ ($i = 1, 2, 3$) hat. Die Gerade $C'C''$ ist konjugiert zur Tangente des Ellipsoids mit der Richtung $\overrightarrow{CC''}$. Daher gilt

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} (\beta z_i - \alpha y_i) z_k = 0.$$

Das Helligkeitsverhältnis der festen Farbe A zur variierenden Farbe B be-

rechnet sich daraus zu

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} y_i z_k}{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} z_i z_k},$$

wobei die a_{ik} die Tensorkomponenten bzgl. C' sind. Setzen wir nun das von Schrödinger entwickelte Linienelement ein:

$$a_{ik} = 0, i \neq k$$

$$a_{ii} = \frac{1}{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}$$

Daraus folgt

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{z_1}{x_1} y_1 + \frac{z_2}{x_2} y_2 + \frac{z_3}{x_3} y_3}{\frac{z_1}{x_1} z_1 + \frac{z_2}{x_2} z_2 + \frac{z_3}{x_3} z_3}. \quad (2.15)$$

Im oben genannten Grenzfall $C = B$, also $x_i = z_i$, gibt das Verhältnis (2.15) tatsächlich das Helligkeitsverhältnis an. Andernfalls können wir nicht davon ausgehen. Je stärker die variierte Farbe B mit z_i von der Farbmischung C mit x_i abweicht, um so mehr Einfluss hat diese auf die Helligkeit. Die Verhältnisse der Gewichtungsfaktoren z_i/x_i überwiegen und es gibt keinen konstanten Verlauf eines festen Helligkeitsverhältnisses.

2.9 Ein Maß der Verschiedenheit zweier Farben

Bisher haben wir die Farben größter Ähnlichkeit gesucht, um die möglichst kleinen Farbabstände nach der Wahrnehmung des individuellen Auges bestimmen zu können. Das heißt, wir haben bisher das Linienelement stets in differenzieller Form benützt. Nun wollen wir die Verschiedenheit von stark ungleichen Farben mittels dem Linienintegral der kürzesten Verbindungslinie

messen und das Ergebnis mit den praktischen Versuchsergebnissen vergleichen.

Wir gehen von zwei sehr unterschiedlichen Farben aus, dabei soll die eine Farbe F fest und die andere Farbe F' veränderlich sein ([Schrö3], S. 505). Die beiden zugehörigen Richtungsvektoren sollen also in sehr unterschiedliche Richtungen zeigen. F' wird entlang seines Ortsvektors in einen neuen Punkt F'' verändert, der F am nächsten liegt. Dazu legen wir aus F das geodätische Lot auf den Vektor $\overrightarrow{OF'}$ und erhalten als Fußpunkt F'' .

Sind F und F'' nun gleich hell, d.h. liegen diese beiden Punkte auf derselben Isolychne

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c? \quad (2.16)$$

Wir wählen ein Koordinatensystem, so dass $a_i = 1$ für $i = 1, 2, 3$ gilt, und wenden dann die Transformation

$$\zeta_i = \sqrt{x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

an, wie in Abschnitt 2.6.

Die Distanz zweier Farben ist

$$ds^2 = 4 \frac{d\zeta_1^2 + d\zeta_2^2 + d\zeta_3^2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}.$$

Nimmt man vorteilhaft das Koordinatensystem der ζ_i als rechtwinkelig an, herrscht Kugelsymmetrie um den Nullpunkt.

Die geodätische Linie zwischen zwei allgemeinen Farbpunkten $\zeta(Y) =: Y^*$ und $\zeta(Z) =: Z^*$ im ζ_i -Raum ist daher eine Kurve in der Fläche OY^*Z^* (siehe Abbildung 2.11). Betrachten wir in der Ebene OY^*Z^* das Polarkoordinatensystem r, φ , dann ist der durch dr und $d\varphi$ bestimmte Ausdruck ds^2 immer derselbe und von der Lage der Ebene unabhängig. Wählt man speziell die

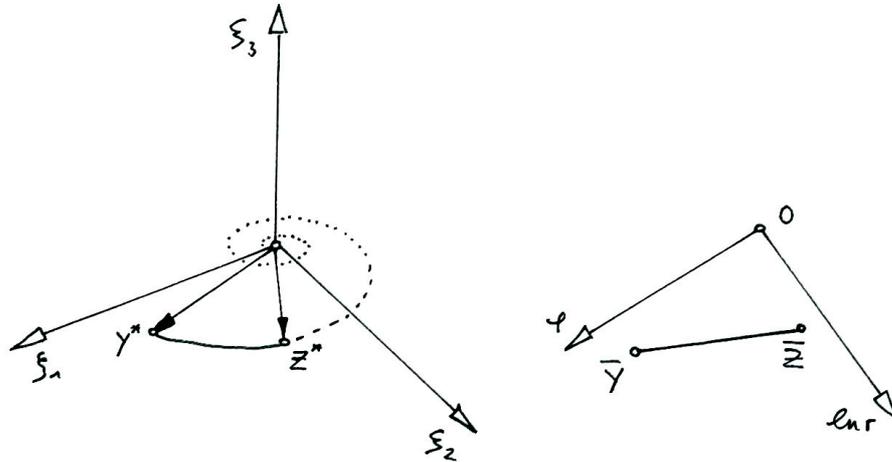


Abbildung 2.10: Die geodätische Linie zweier Punkte ist im ζ -Raum ein Kurvenabschnitt einer logarithmischen Spirale (links) und eine geradlinige Strecke in den Variablen φ und $\ln r$ (rechts).

Ebene $\zeta_3 = 0$, so ist die geodätische Linie zwischen zwei Farbpunkten festgelegt durch

$$ds^2 = 4 \left(\frac{dr^2}{r^2} + d\varphi^2 \right) = 4 [(d \ln r)^2 + d\varphi^2]. \quad (2.18)$$

Wir erkennen daraus, dass in den Variablen φ und $\ln r$ die geodätischen Linien geradlinig sind, also im ζ_i -Raum ebene, logarithmische Spiralen mit der Asymptote in 0 beschreiben (Siehe Abbildung 2.10). Betrachten wir das Verhältnis

$$\frac{\varphi - \varphi''}{\varphi' - \varphi'} = \frac{\ln \frac{r}{r'}}{\ln \frac{r''}{r'}},$$

wobei φ und r variabel sind und φ' , r' die Polarkoordinaten von Y und φ'' , r'' die von Z sind.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\varphi' = \varphi'', r' \neq r''$,

dann ist φ konstant. Die geodätische Linie ist daher sowohl im ζ_i -Raum als auch im x_i -Raum eine Gerade durch den Ursprung, da unter der Transformation (2.17) feste Verhältnisse erhalten bleiben. Die Farbabstufungen sind reine Helligkeitsabstufungen entlang der Geraden durch den Ursprung.

b) $\varphi' \neq \varphi'', r' = r''$,

dann ist r konstant, und die logarithmische Spirale in der Ebene OY^*Z^* wird im ζ_i -Raum zum Großkreis einer Kugel Σ^* mit der Gleichung

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = c.$$

Diese wird im x -Raum auf die Isolychne Σ (2.16) abgebildet und die geodätische Linie zwischen zwei gleichhellen Punkten (da $r = c$) ist eine ebene Kurve auf der Isolychne. Da jeder Farbvektor orthogonal zu den Isolychnen im Riemannschen Sinne steht, bildet jene ebene Kurve das gemeinsame geodätische Lot zweier beliebiger Farbvektoren.

Die oben gestellte Frage, ob der Fußpunkt F'' und F auf der selben Isolychne liegt, ist somit mit ja zu beantworten. Dies gilt sowohl für gerade unterscheidbare Farbenpaare als auch für stark verschiedene Farben.

Aus der Gestalt des Linienelements lässt sich auch ablesen, dass die Maßbestimmung auf den isolychnen Kugeln Σ^* des ζ -Raumes mit der üblichen euklidischen Maßbestimmungen übereinstimmt. Sie entspricht also der sphärischen Geometrie. Dabei ändert sich aber klarerweise der Maßstab mit dem Kugelradius, der jeweils die Längeneinheit festlegt. Das Maß der Verschiedenheit zweier ungleicher Farben Y, Z wird durch die Länge der geodätischen Linie zwischen ihnen geliefert. Sind die Radien r', r'' und die Winkel φ', φ''

der beiden Farbvektoren in der durch den Ursprung gehenden Ebene bekannt, so ist es gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_Y^Z ds &= 2 \int_Y^Z \sqrt{(d \ln r)^2 + d\varphi^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{\ln \frac{r''}{r'}}{\varphi'' - \varphi'}\right)^2 + 1} \cdot \int_Y^Z d\varphi \\ &= \sqrt{\left(\ln \frac{r''^2}{r'^2}\right)^2 + 4(\varphi'' - \varphi')^2}. \end{aligned}$$

Dieses Maß setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen sind die Längenverhältnisse der Farbvektoren im ζ -Raum maßgebend für den Helligkeitsunterschied und zum anderen wird der Farbartunterschied von den Winkeln beeinflusst.

Die Umrechnung auf die ursprünglichen Koordinaten $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$ geschieht folgendermaßen: Man nimmt deren Helligkeiten als

$$h_y = \sum y_i, \quad h_z = \sum z_i$$

an, so gilt

$$h_y = r'^2, \quad h_z = r''^2, \quad \arccos \frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}} = \varphi'' - \varphi'.$$

Damit erhält man für das Verschiedenheitsmaß den Ausdruck

$$\int_Y^Z ds = \sqrt{\left(\ln \frac{h_z}{h_y}\right)^2 + 4 \left(\arccos \frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}}\right)^2}.$$

Ein anschauliches Verständnis bekommen wir, wenn wir den Verlauf dieser geodätischen Linien kennen. Dafür ist es hilfreich, die Inverse der ζ -Transformation zu betrachten. Die Koordinatenebenen $\zeta_i = 0$ werden in die

Koordinatenebenen $x_i = 0$ abgebildet. Ist nun die Ebene Y^*Z^*O , auf welcher die geodätische Linie von Y^*Z^* verläuft, gegeben durch

$$a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + a_3\zeta_3 = 0,$$

so entspricht ihr im x -Raum der Ausdruck

$$a_1\sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2} + a_3\sqrt{x_3} = 0.$$

Durch quadrieren folgt

$$\begin{aligned} a_1^2x_1 &= a_2^2x_2 + a_3^2x_3 - 2a_2a_3\sqrt{x_2x_3} \\ (a_1^2x_1 - a_2^2x_2 - a_3^2x_3)^2 &= 4a_2^2a_3^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt einen quadratischen Kegel mit der Spitze im Ursprung. Die Kegelflächen des x -Raumes mit der Spitze in 0 werden im ζ -Raum auf die Ebenen durch 0 abgebildet (Siehe Abbildung 2.11.). Farbvektoren des x -Raumes liegen innerhalb dieses Kegels. Der Schnitt mit den Koordinatenebenen ergibt stets doppelt zu zählende Geraden. Z.B. für $x_1 = 0$:

$$(a_2^2x_2 - a_3^2x_3)^2 = 0.$$

Dies zeigt, dass der Kegel alle drei Koordinatenebenen berührt.

Eine isolychne Ebene

$$x_1 + x_2 + x_3 = c$$

geschnitten mit den drei Koordinatenebenen ergibt ein gleichseitiges Spurdreieck. Ein solches kennen wir bereits aus der Farbtabelle mit den Eckpunkten R, G, B . Innerhalb dieses Dreiecks liegt die Schnittkurve des Farbvektorkegels mit der Isolychne. Dieser Kegelschnitt kann daher nur eine Ellipse sein und ist geodätisch, da diese in der Isolychne liegt. Die kürzeste Farbreihe der beiden Farbpunkte Y und Z auf der Farbtabelle ist ein Ellipsenbogen.

Hiermit haben wir ohne Rechnung einen Überblick über den Verlauf der geodätischen Linien auf der Isolychne erhalten. Es ist die Menge aller innerhalb des Farbdreiecks eingeschriebenen Ellipsen.

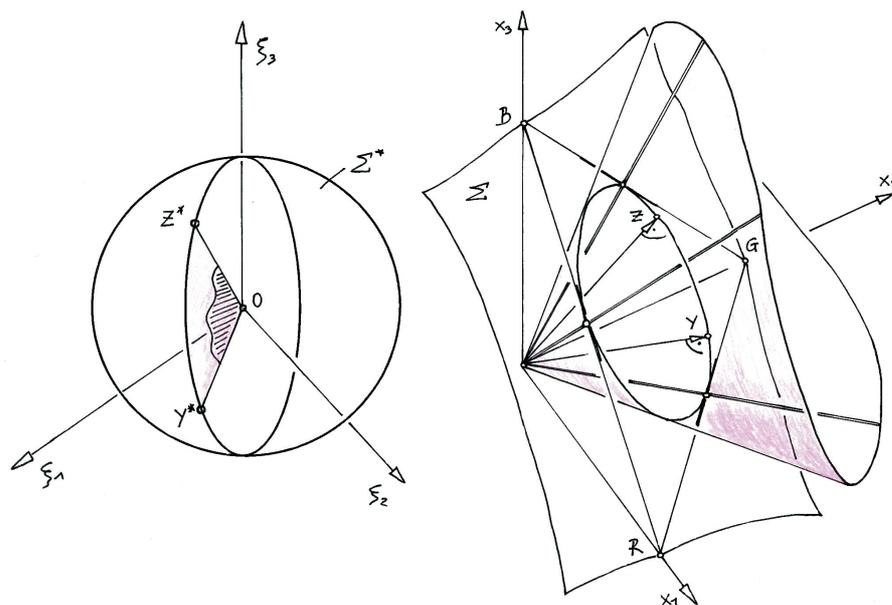


Abbildung 2.11: Die Ebene OY^*Z^* im ζ -Raum wird unter der inversen ζ -Transformation in einen Kegel im x -Raum abgebildet durch Y, Z mit Spitze in O . Die Kugel Σ^* wird unter selbiger Abbildung auf die Isolychne Σ abgebildet.

Durch jeden Punkt und vorgegebener Ausgangsrichtung innerhalb des Farbdreiecks, lässt sich eine eindeutige geodätische Linie bestimmen. Es ist eine Ellipse tangential zu den Dreieckseiten. Somit sind die notwendigen fünf Angaben für einen eindeutig bestimmten Kegelschnitt, also ein Punkt und vier Tangenten, gegeben.

Wir sind bisher von einigen besonderen Annahmen ausgegangen: Z.B. der eines rechtwinkligen Koordinatensystems und der von Isolychnen, deren Farbdreieck gleichseitig ausgefallen ist. Diese Beschränkungen sind für eine

allgemeine Aussage unwesentlich, da die Berührbedingungen gegenüber linearen Transformationen invariant sind. Daher können wir nach dieser Theorie allgemein formulieren, dass die kürzesten Übergangsreihen zwischen zwei gleichhellen Farben in jedem beliebigen Farbdreieck (die Grundfarben müssen nicht gleiche Helligkeit aufweisen) auf eingeschriebenen Ellipsenbögen liegen.

Für zwei ungleiche Farben mit unterschiedlichen Helligkeiten gibt nach (2.18) die Formel

$$ds = 2\sqrt{(ds \ln r)^2 + d\varphi}$$

das allgemeine Verschiedenheitsmaß an. Setzen wir die x_i -Koordinaten ein, so erkennt man nicht leicht den Verlauf dieser Geodäten. Mehr Klarheit gewinnt man, wenn man die obige Differenzialgleichung analysiert. Das Verschiedenheitsmaß ds setzt sich, wie bereits erwähnt, aus zwei Teilen zusammen. Die Helligkeitsveränderung $d \ln r$ ($= \frac{1}{2} d \ln h$) und die Reizartänderung $d\varphi$ sind entlang der geodätischen Linie einander proportional. Entlang der zweiten Änderung wird die Helligkeitsänderung gleichmäßig aufgeteilt. Die geodätische Linie zweier verschiedener Farbpunkte kann man folgendmaßen bestimmen: Zuerst ermittelt man den geodätischen Ellipsenbogen der Reizartstufen in einer Isolychne und variiert diesen durch einen konstanten Bruchteil der ebenunterscheidbaren Helligkeitstufen ungeänderter Reizart.

Durch diesen theoretischen Ansatz Schrödingers sind wir am Ziel angekommen. Wir haben einen Farbraum mit einer Riemannschen Metrik erhalten, dessen Farbabstände an die Wahrnehmung des Auges angepasst sind. Dies war möglich, indem anfangs eine Farbe eines Farbenpaares auf gleiche Helligkeit angepasst wurde.

Es wäre auch möglich, eine Farbmétrie zu definieren, wenn der Ansatz auf gleichen Farbton oder gleiche Sättigung ausgerichtet ist. Wie diese Vor-

gangsweise aussehen könnte, ist in einer Auflistung von Rainer Zwisler genau angegeben. Aus dieser ist auch eine Definition der drei Qualitätsmerkmale von Farben: Helligkeit, Farbart und Sättigung im Verständnis des geometrischen Farbraumes zu entnehmen. Weitere Eigenschaften des Farbraumes werden dadurch hervorgehoben.

Auflistung von Zwisler [Zwis]:

- *Helligkeit (brightness): Je weiter ein Punkt X vom Ursprung entfernt ist, desto heller wird er empfunden; ist die Entfernung zwischen zwei Punkten X und Y entlang einer geodätischen Linie minimal, erscheinen die beiden zugehörigen Farben gleich hell. Hält man nun den Punkt fest, lässt sich auf jedem Strahl vom Ursprung weg ein Punkt finden, der bei gleicher Entfernung zum Ursprung minimal vom Punkt entfernt ist. Alle derartigen Punkte zusammen definieren eine Oberfläche im Farbraum, die als Kontur gleicher Helligkeit aufgefasst werden kann. Dieses Verfahren lässt sich für verschiedene Entfernungen zum Ursprung und somit für verschiedene Helligkeiten durchführen.*
- *Farbart (hue): Auf einer Oberfläche gleicher Helligkeit lassen sich nun Linien gleichen Farbtons bestimmen, die alle ihren Ursprung am Punkt haben, der einem achromatischen Reiz mit der entsprechenden Helligkeit entspricht. Diese Linien lassen sich wiederum für verschiedene Helligkeiten ermitteln; alle diese Linien zusammen bilden dann eine Kontur konstanten Farbtons.*
- *Sättigung (chroma): Auf einer Oberfläche konstanter Helligkeit lassen sich aber auch Linien gleicher Buntheit bestimmen; hierbei handelt es sich um konzentrische Riemannsche Kreise, deren Ursprung wieder im Punkt liegt, der den achromatischen Reiz entsprechender Helligkeit entspricht.*

2.10 Mac Adam Ellipsen

Die bisher vorgestellte Theorie Schrödingers zur Beschreibung eines gekrümmten Farbraumes fand zu seiner Zeit wenig Beachtung. Zum einen ergaben die experimentellen Resultate damals nur eine mäßig gute Übereinstimmung mit seinen theoretischen Ergebnissen. Diese waren nicht sehr umfangreich und noch dazu mit Messfehlern behaftet. Zum anderen fand man keine unmittelbare Anwendung der höheren Farbtheorie und daher wurde diese als Liebhaberwissenschaft etwas verdrängt. Generell wurde die klassische Psychophysik ziehlich abgetan, wogegen in der Gegenwart ein starkes Anwachsen des Interesses festzustellen ist.

Erste Weiterentwicklungen nach Schrödingers Veröffentlichung ergaben sich durch die systematische Untersuchung der Ellipsen für Farbreize von David L. Mac Adam 1942 ([MacA], S. 33). Er konnte während des zweiten Weltkrieges bei der Firma Kodak genaue Messungen durchführen. Diese Messreihen zielen darauf ab einen Zusammenhang zwischen der Wahrnehmung des Unterschiedes zweier Farben und einem geometrischen Farbabstand - bzgl. der Farbtafel des CIE- Farbraumes von 1931 - herzustellen.

Das Experiment verläuft in erster Linie wie die Farbanpassungsversuche aus Abbildung 1.6. Unter einem Sehwinkel von 42° sieht eine Testperson den Umfeldreiz der Normlichtart C mit einer Leuchtdichte von 24 cd/m^2 . Das geteilte Testfeld wird unter 2° -Entfernung¹ mit einer Leuchtdichte von 48 cd/m^2 beleuchtet. Eine Hälfte des Testfeldes wird durch einen Standardreiz ausgeleuchtet, welcher eine Mischung aus den drei genormten Primärreizen ist. In die zweite Hälfte des Testfeldes wird eine Farbmischung der selben Primärreize projiziert. Der Beobachter kann durch Drehen an einem Kontrollknopf den Farbreiz verändern, während dieser entlang einer Geraden im CIE 1931 (x, y) -Farbdiagramm variiert und die Helligkeit bei 24 cd/m^2 kon-

¹Das bedeutet eine 1 € Münze in der Entfernung von ca. 52 cm zu betrachten.

stant bleibt. Die Testperson ändert den variablen Farbreiz so lange, bis ein gerade wahrnehmbarer Unterschied bemerkt werden kann. Dieser Vorgang wird mehrmals an 25 fixen Farbreizen entlang unterschiedlicher Farbarrichtungen in der Farbtafel wiederholt. Bei jedem Versuch wird die Distanz zwischen dem variablen und dem fixen Farbort notiert. Es zeigt sich, dass die Punkte der Schwellenwerte annähernd auf einer Ellipse liegen (Abbildung 2.12). Die Darstellung 2.13 zeigt alle 25 Ellipsen in der CIE-Farbtafel. Man beschreibt diese sogenannte Diskriminationsellipse durch die Gleichung

$$g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 = 1.$$

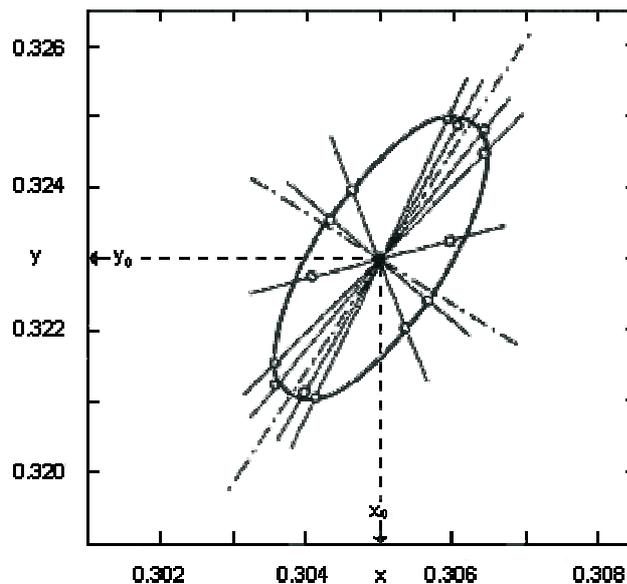


Abbildung 2.12: Diskriminationsellipse von Mac Adam

Dabei sind dx und dy die jeweiligen Koordinatendifferenzen der Schwellenpunkte zum Ellipsenmittelpunkt. Die Koeffizienten g_{ik} werden aus den Messwerten berechnet. Mac Adam und Silberstein ([Wys], S. 308) schließen aus ihren Analysen, dass die Daten bzgl. des Abstandes zum festen Farbreiz normalverteilt sind. Diese Normalverteilung ist in jedem Farbanpassungsversuch durch die Standardabweichung (σ_x, σ_y) und den Korrelationskoeffizienten ρ

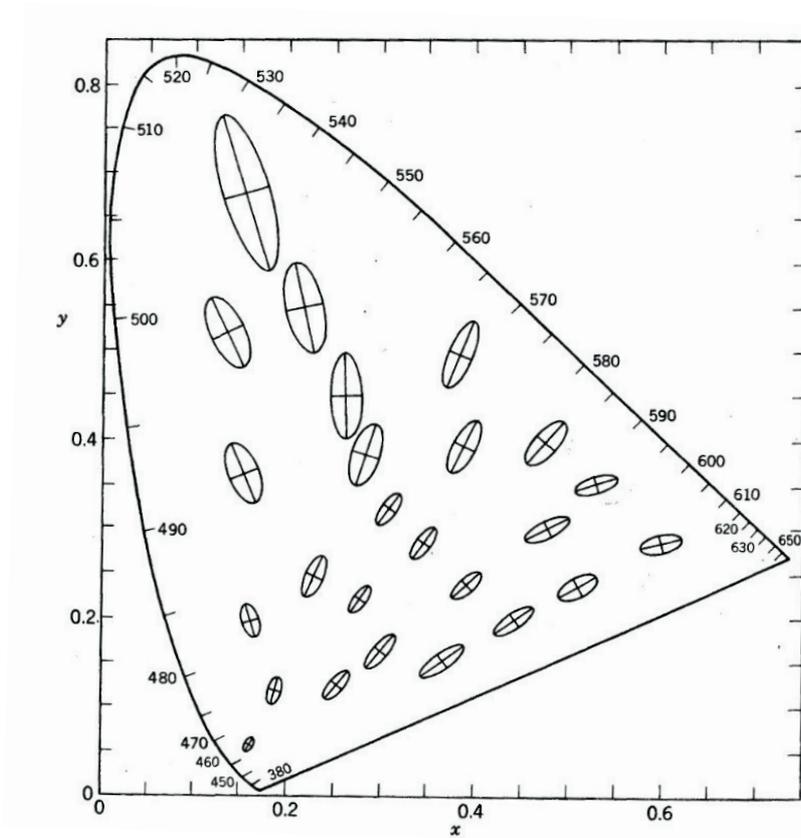


Abbildung 2.13: Mac Adam Ellipsen im CIE Diagramm. Die Achsen der Ellipsen sind 10-fach vergrößert.

bestimmt. Aus diesen, von einem Farbreiz zum anderen variierenden, Werten werden die Koeffizienten g_{ik} folgendermaßen berechnet:

$$g_{11} = \frac{1}{\sigma_x^2(1 - \rho^2)}, \quad g_{12} = \frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y(1 - \rho^2)}, \quad g_{22} = \frac{1}{\sigma_y^2(1 - \rho^2)}.$$

Die Haupt- und Nebenscheitel a und b sowie der Neigungswinkel φ der Diskriminationsellipsen in allgemeiner Lage, können dann aus den g_{ik} einfach bestimmt werden

$$\tan 2\varphi = \frac{2g_{12}}{g_{11} - g_{22}}.$$

Dabei ist $\varphi < 90^\circ$, wenn $g_{12} < 0$ und $\varphi > 90^\circ$, wenn $g_{12} > 0$. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= g_{22} + g_{12} \cot \varphi, \\ \frac{1}{b^2} &= g_{11} - g_{12} \cot \varphi. \end{aligned}$$

Umgekehrt können die Koeffizienten g_{11} , g_{12} und g_{22} aus dem Haupt- und dem Nebenscheitel a und b und dem Neigungswinkel φ berechnet werden:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{a^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \varphi \\ g_{12} &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ g_{22} &= \frac{1}{a^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{b^2} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten g_{ik} können analytisch nicht leicht bestimmt werden, daher stützt man sich auf grafische Verfahren. Nach den erstellten Diagrammen von Mac Adam (siehe Abbildungen 2.14 bis 2.16) kann man für jede Farbart in der Farbtafel die Komponenten der Maßtensoren angenähert ablesen. Auf diesen Tafeln sind die Funktionen g_{ik} nach den Farborten (x, y) dargestellt. Es zeigt sich, dass in allen drei Diagrammen das Gebiet um Blau starke Veränderungen in den Werten aufweist. Man könnte das damit erklären, dass die

Unterschiedsschwellen dort näher liegen als in anderen Farbgebieten. Doch sind die Farbabstände der CIE Tafel nicht an die Farbwahrnehmung angepasst.

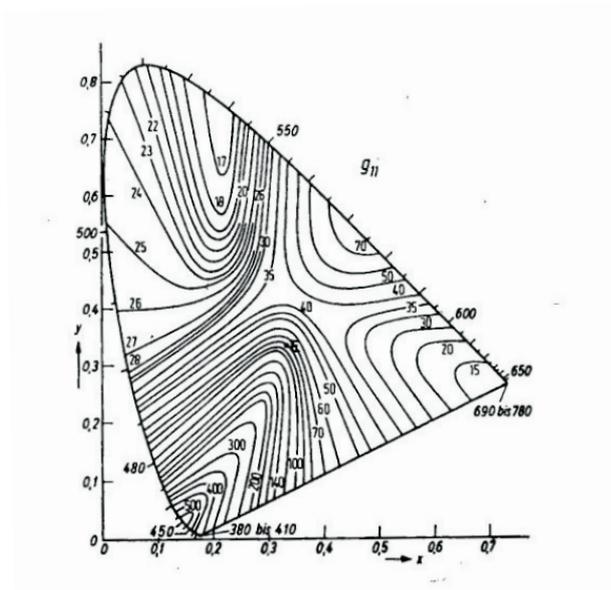
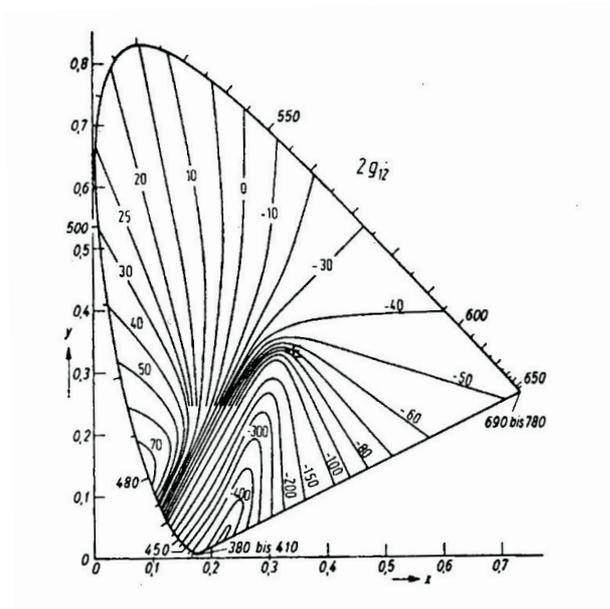
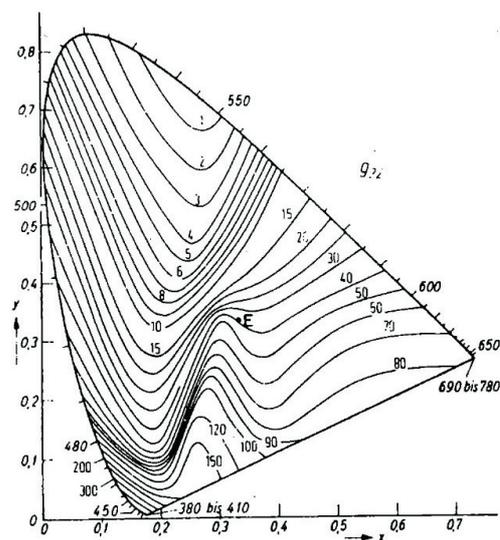


Abbildung 2.14: Komponente g_{11} des Masstensors

Wird durch diese Farbexperimente und deren Auswertung die theoretische Vorarbeit Schrödingers bestätigt? Spätere Farbanpassungsversuche ergaben Daten von teilweise sehr verschiedenen Diskriminationsellipsen, wodurch in den Jahren nach 1960 die ganze Theorie in Frage gestellt wurde. In neueren Forschungsergebnissen stellte sich jedoch heraus, dass die Versuchsanordnung bis ins kleinste Detail von Bedeutung ist. Zum Beispiel hat die Versuchsperson einen Lerneffekt in ihrer Farbwahrnehmung (siehe Abbildung 2.17). Somit sind unmittelbare Tests fehlerreicher, als Tests mit durchgeplanten Vorübungen für die Testpersonen. Schrödingers Theorie und die Farbanpassungsversuche von Mac Adam sind nicht nach deren unmittelbaren Ergebnissen zu bewerten, sondern geben die Richtung für die neue Farbmetrikforschung vor und sind aus diesem Grund von großer Bedeutung.

Abbildung 2.15: Komponente $2g_{12}$ des MasstensorsAbbildung 2.16: Komponente g_{22} des Masstensors

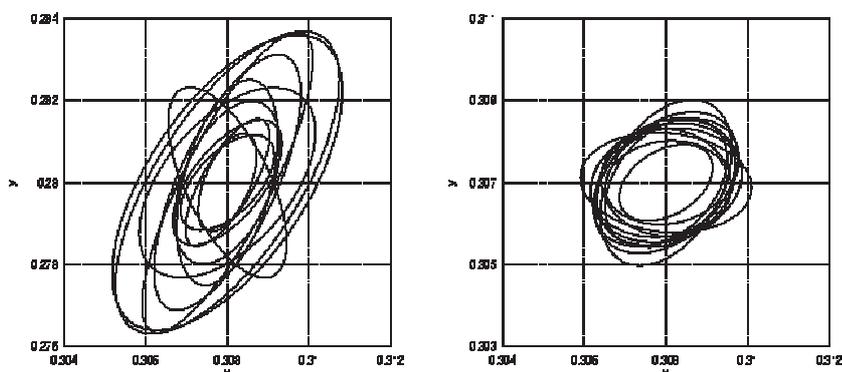


Abbildung 2.17: Übungseffekt bei Brown 1957. Ergebnisse der 12 Versuchspersonen. Links sind die Diskriminationsellipsen des ersten Experiments, rechts des siebzehnten. Man sieht deutlich den Übungseffekt.

2.11 Farbtafel mit einer einheitlichen Skala

Auch wenn wir die Ergebnisse von Mac Adam soeben relativiert haben, sind seine weiteren theoretischen Ansätze zu einer Farbtafel mit einer einheitlichen Farbskala [MacA] sehr beachtenswert. Um einen Farbraum und eine zugehörige Metrik zu definieren und deren Eigenschaften zu analysieren, haben wir bereits ein Maß für die Farbverschiedenheit theoretisch bestimmt. Uns ist bekannt, dass es Farbbereiche in der CIE-Farbtafel gibt, welche wahrnehmungsmäßig nicht unterscheidbar sind. Diese Bereiche sind, wie wir wissen, annähernd ellipsenförmig. Das heißt, uns fehlt noch eine Anordnung der unterscheidbaren Farben, deren Farbabstände jener der Wahrnehmung entsprechen und deren Farbbereiche für jede Farbe stets gleich groß sein sollen. Um dies zu erreichen transformieren wir die Diskriminationsellipsen in Einheitskreise, so dass die Einheit der Farbdifferenz gleich 1 ist (siehe Abbildung 2.18).

Der Winkel ω zwischen den neuen Achsen x^* , y^* ist aus den Tensorkomponenten zu bestimmen

$$\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Für die neuen Koordinaten gilt:

$$x^* = k \cdot \sqrt{g_{11}}, \quad y^* = k \cdot \sqrt{g_{22}},$$

wobei k die Länge des Ortsvektors (x, y) oder eine günstig gewählte Konstante ist. Das Linienelement verändert sich nun zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{dx^*}{k\sqrt{g_{11}}} \right)^2 + 2 \left(\frac{dx^*}{k\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{dy^*}{k\sqrt{g_{22}}} \right)^2 \cos \omega + \left(\frac{dy^*}{k\sqrt{g_{22}}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{k^2} (g_{11} dx^{*2} + 2g_{12} dx^* dy^* + g_{22} dy^{*2}). \end{aligned}$$

Beispiel ([Wys], S. 312): Der Farbreizbereich um den Punkt $(x, y) = (0, 305; 0, 323)$ wird so transformiert, dass die Mac Adam Ellipse auf einen Kreis mit Radius $ds = 1$ abgebildet wird. Die Komponenten g_{ik} sind aus den Abbildungen 2.14 bis 2.16 zu entnehmen:

$$g_{11} = 102 \cdot 10^4, \quad g_{12} = -50 \cdot 10^4 \quad g_{22} = 53 \cdot 10^4,$$

$$\text{so dass} \quad \cos \omega = \frac{-50}{\sqrt{102 \cdot 53}} = -0,679 \quad \text{und} \quad \omega = 132,8^\circ.$$

Interpretiert man nun die transformierte Farbtabelle als Riemannsche Fläche (siehe Abbildungen 2.19 und 2.20), so kann diese in einen dreidimensionalen euklidischen Vektorraum eingebettet werden, wobei jede Ellipse in einen Kreis mit gleichem Radius übergeht. Wir erhalten eine Farbfläche mit einer einheitlichen Skala! Diese Fläche wird *uniform chromaticity scale surface* genannt. Die ebenunterscheidbaren Farbpunkte von einem Farbpunkt F liegen alle genau eine Einheit entfernt von F .

Die in dieser Arbeit vorgestellte Linienelement-Theorie von Schrödinger gab einen Anstoß für weitere Forschungen zur Riemannschen Farbmétrie, so dass bessere Übereinstimmungen zwischen den Daten aus den Versuchreihen und den entwickelten Formeln erreicht werden. Eine als erfolgreich anzusehende Überarbeitung des Helmholtzschen Linienelementes hat W.S. Stiles 1946 ([Wys], S. 660) vorgestellt. Er modifizierte das Linienelement von Helmholtz (2.5) nicht so drastisch, wie Schrödinger es tat. Bei den von Stiles entwickelten Farbtésts wird in das 10° monochromatische Testfeld ein zweites Bild mit einem geringem Wellenlängenunterschied von nur 63 Millisekunden hineinprojiziert. Aus den Daten dieser Farbtésts ergeben sich ebenso Abstandsellipsen mit ähnlicher Orientierung wie jene von Mac Adam allerdings 20-fach größer.

Für das Linienelement ergeben sich für die drei Reaktionsmechanismen jeweils *verschiedene* Weber-Brüche im Vergleich zum Ansatz von Helmholtz:

$$ds^2 = \left(\frac{\varsigma(R)}{\rho} dR \right)^2 + \left(\frac{\varsigma(G)}{\gamma} dG \right)^2 + \left(\frac{\varsigma(B)}{\beta} dB \right)^2,$$

wobei sich für die experimentell bestimmten Funktionen

$$\varsigma(R) = \frac{9}{1 + 9R}, \quad \varsigma(G) = \frac{9}{1 + 9G}, \quad \varsigma(B) = \frac{9}{1 + 9B} \quad \text{und}$$

$$\rho = 1,28, \quad \gamma = 1,65, \quad \beta = 7,25.$$

ergeben. Auch zu diesem Linienelement gibt es einen transformierten *uniform color space* – ähnlich dem von Mac Adam.

Eine noch bessere Vorhersage des Farbverschiedenheitsvermögens erzielt E. A. Trabka 1968 ([Wys], S.672) aus dem Linienelement von Stiles, indem er einen sogenannten Signalrauschabstand bestimmt, welcher einen Einfluss auf die Berechnungen hat.

Eine allgemeine und die bisher komplexeste Linienelement-Theorie bzgl. der Farbmétrie haben J. J. Vos und P. L. Walraven 1972 ([Wys], S. 673) vorgestellt. Dabei wird die Quantennatur des Lichtes miteinbezogen und die

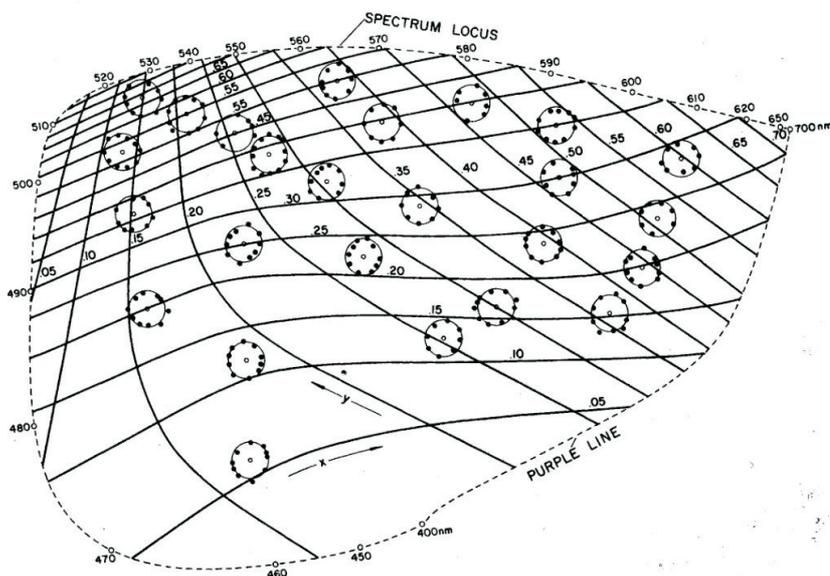


Abbildung 2.18: Eine nichtlineare Transformation der CIE-Farbtabelle, so dass die Diskriminationsellipsen in Kreise überführt werden.

Farbttests beziehen sich auf das foveale Sehen von nur 2° großen Farbfeldern. Die Werte R, G, B geben die Anzahl der von den entsprechenden Zapfentypen absorbierten Photonen an. Es gilt bis heute als das allgemeinste Modell des Linienelementes, mit dem sich die Daten der Farbunterscheidung für den gesamten Bereich verschiedener Leuchtdichten recht gut vorhersagen lassen. In den anderen Modellen wurde die Unterscheidbarkeit von Farben gleicher Helligkeit meist nur für monochromatische Reize bestimmt.

Ein aus den Daten ersichtlich gewordener Nachteil dieser Theorien ist, dass die Adaption des Auges zu wenig explizit berücksichtigt wurde, wie B. Wandell 1985 [Zwis] betonte. Er meinte, dass die metrischen Koeffizienten g_{ik} des Linienelementes vom Adaptionszustand des Auges abhängig sind und dies auch der Grund für die Nichtlinearität sei. Weiterführende Forschungsergebnisse bzgl. der Adaption des Auges bei der Farbwahrnehmung hat H. Irtel in seiner Habilitationsschrift *Psychophysische Invarianzen in der Farb- und Helligkeitswahrnehmung* 1991 ([Irt], S. 48 - 61) vorgestellt.

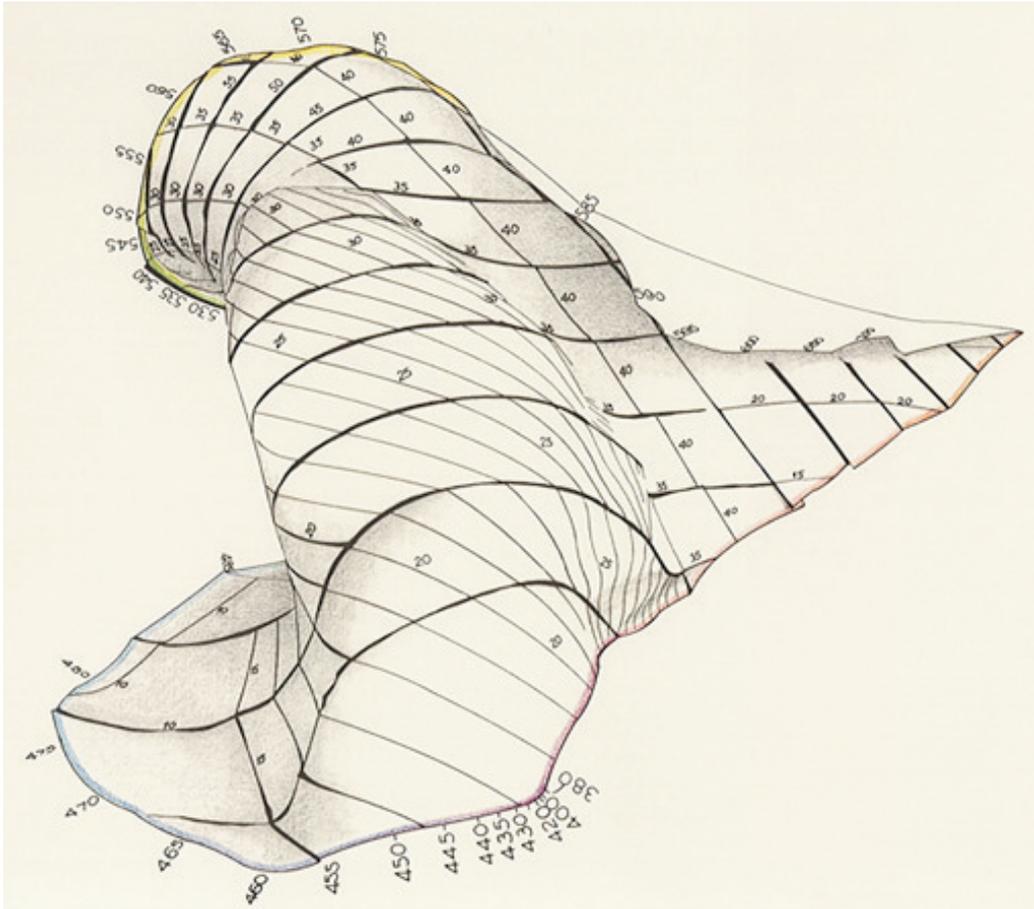


Abbildung 2.19: Die transformierte Farbtafel als Farbfläche mit einer einheitlichen Skala und eingezeichneten geodätischen Linien ausgehend von Mac Adam Ellipsen. (Fotografie des Flächenmodells)

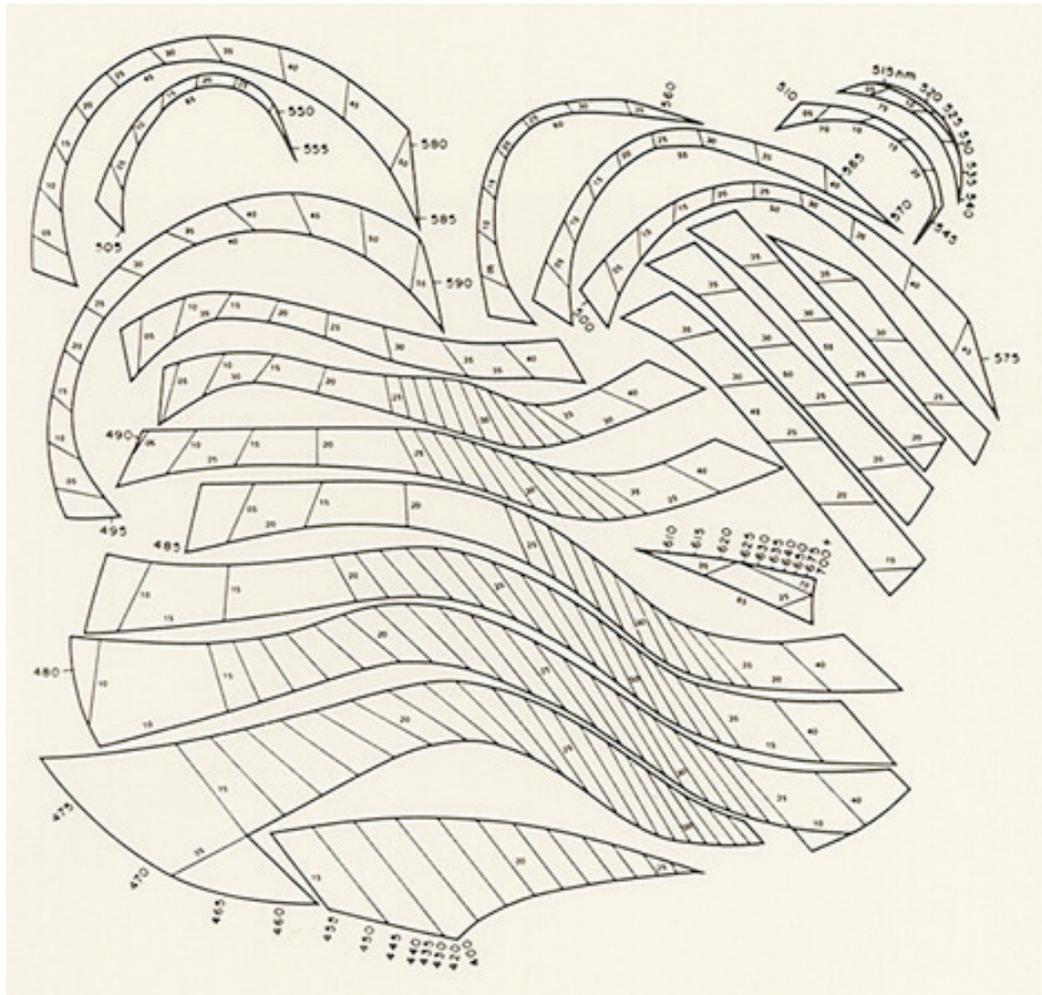


Abbildung 2.20: Die abwickelbaren Teile der Farbfläche mit einheitlicher Skala.

Zusammenfassung / Abstract

Zusammenfassung (deutsch)

Die Farbmometrik ist die Lehre von Maßbeziehungen der Farben. Farben sind eine psychische Empfindung, welche durch einen physikalischen Farbreiz ausgelöst werden. Diese Arbeit beruht auf Erwin Schrödingers Erkenntnissen über die Farbmometrik von 1920. Im ersten Teil wird die physiologische Wirkung von Farbreizen behandelt, die als Farbvalenzen bezeichnet werden. Die algebraische Struktur der sogenannten Farbvalenzmenge wird mit Hilfe der drei empirischen Sätze von Hermann G. Grassmann bestimmt. Sie bildet einen Vektorraum V über \mathbb{R} der Dimension 3. Durch spezielle Basiswahl erhält man verschiedene Farbsysteme. Geometrisch lassen sie sich in dem V zugeordneten affinen Punktraum darstellen.

Im zweiten Teil wird ein Farbraum definiert, dessen Farbabstände im Zusammenhang mit der Farbwahrnehmung stehen. Schrödingers rein theoretische Überlegungen führen zu einer Definition gleicher Helligkeit im Farbraum. Seine Theorie des Linienelements für die Einstellung gleicher Helligkeit führt zu einem mit einer Riemannschen Metrik versehenen Farbraum, wodurch sich Farbabstände bestimmen lassen. Zugleich widerlegt diese Theorie diejenige von Hermann v. Helmholtz. Dies zeigt Schrödinger anhand des Farbkreisversuches von Helmholtz, in dem nicht wie angenommen Farben auf gleiche Helligkeit eingestellt wurden, sondern auf größte Ähnlichkeit. Schrödingers Theorie führt zu Diskriminationsellipsen, welche später von David L. Mac Adam empirisch bis auf Messungenauigkeiten bestätigt wurden.

Abstract (english)

A Geometric View of Erwin Schrödinger's Color Metric

Colorimetry is the science of measuring colors. Colors are a psychological impression triggered by a physical color impulse. This thesis is based on Erwin Schrödinger's findings in colorimetry in 1920. The first part covers the physiological effect of color impulses, called color stimuli. The algebraic structure of the set of tristimulus values is determined by means of Hermann G. Grassmann's three empiric statements. It forms a 3-dimensional vector space V on \mathbb{R} and choosing specific bases yields different color systems. Geometrically they can be depicted in the affine point space corresponding to V .

In the second part a color space is defined with color distances correlating to color perception. Schrödinger's theoretical considerations resulted in a definition of equal brightness within the color space. His theory of the line element for equal brightness adjustments leads to a color space endowed with a Riemannian metric whereby color distances can be determined. Moreover he disproves Hermann v. Helmholtz' theory. Schrödinger shows this by a color spinner experiment in which colors were not, as assumed, adjusted on equal brightness but on greatest similarity. Schrödinger's theory entails discrimination ellipses that David L. Mac Adam confirmed empirically later on, except for measurement inaccuracies.

Literaturverzeichnis

- [Deu] Deutscher, G.: Im Spiegel der Sprache. Beck, München, 2010
- [Chan] Changizi, M.: Die Revolution des Sehens. Klett-Cotta, Stuttgart, 2012
- [Farb] Steinbrenner, J., Glasauer, S.: Farben; Betrachtungen aus Philosophie und Naturwissenschaften. Suhrkamp, Frankfurt am Main, 2007
- [Gschw] Gschwind, P.: Mass, Zahl und Farbe. Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach, 2000
- [Helm] Helmholtz, H. v.: Handbuch der Physiologischen Optik. Voss, Hamburg-Leipzig, 1896
- [Irt] Irtel, H.: Psychophysische Invarianzen in der Farb- und Helligkeitswahrnehmung. Habilitation Universität Regensburg, 1991
- [Klei] Klein, G.: Farbenphysik für industrielle Anwendungen. Springer, Berlin-Heidelberg, 2004
- [Kuf] Kufner, A.: Raum und Entfernung; Wie man in der Mathematik mißt. Harri Deutsch, Thun, 1981
- [Lex] Kern, O., Maurer, J., Steffens, J., Thode, T., Voller, R.: Vieweg Mathematik Lexikon, 3. Aufl. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1995
- [Lam] Lambert, T.: Zur Wissenschaftstheorie der Farbenlehre. Bern Studies for History and Philosophie of Science, Bern, 2000
- [MacA] Mac Adam, A.: Specification of Small Chromaticity Differences, Journal of The Optical Society of America 33 (10), S. 18-26, 1943

[Mathe] Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.: Mathematik. Spektrum, Heidelberg, 2008

[Mitsch] Mitsch, H.: Lineare Algebra und Geometrie II. Prugg, Wien, 1979

[Nus] Nussbaumer, I.: Zur Farbenlehre. Splitter, Wien, 2008

[Optik] Bergmann, L., Schaefer, C.: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3: Optik. 10. Aufl. De Gruyter, Berlin, 2004

[RGB] <http://de.wikipedia.org/wiki/RGB-Farbraum>, 02/2013

[Rich] Richter, M.: Einführung in die Farbmeterik. 1. Aufl. Sammlung Götschen, Band 2608. De Gruyter, Berlin, 1976

[Schrö1] Schrödinger, E.: Grundlinien einer Theorie der Farbmeterik im Tagsehen, Mitteilung I. Annalen der Physik (IV. Folge) 63, S. 387-426, 1920

[Schrö2] Schrödinger, E.: Grundlinien einer Theorie der Farbmeterik im Tagsehen, Mitteilung II. Annalen der Physik (IV. Folge) 63, S. 427-456, 1920

[Schrö3] Schrödinger, E.: Grundlinien einer Theorie der Farbmeterik im Tagsehen, Mitteilung III. Annalen der Physik (IV. Folge) 63, S. 481-512, 1920

[Stro] Stromer, K.: Farbsysteme in Kunst und Wissenschaft. Dumont, Köln, 2002

[Vekto] Spiegel, M.: Vektoranalysis. Haag+Herrche, Frankfurt am Main, 1990

[Wys] Wyszecki, G., Stiles W. S.: Color Science. 2. Aufl. Wiley, New York, 2000

[Zwis] <http://www.zwisler.de/scripts/farbtheo/node4.html>, 01/2013

Abbildungsnachweis

1.1	Gerburg Neunteufl (G.N.)	6
1.2	http://de.wikipedia.org/wiki/Metamerie_(Farblehre) , 11/2012	7
1.3	http://www.farbnebel.de/farbenlehre.htm , 11/2012	7
1.4	G. N.	9
1.5	http://de.wikipedia.org/wiki/Zapfen(Auge) , 11/2012	19
1.6	G. N.	25
1.7	G. N.	27
1.8	http://de.wikipedia.org/wiki/RGB-Farbraum , 11/2012	31
1.9	(Irt), S. 17	32
1.10	G. N.	36
1.11	(Irt), S. 19	37
1.12	(Schröd), S. 428	38
1.13	http://empamedia.ethz.ch/courses/bfr03/files/t4.pdf , 01/2013	41
1.14	http://de.wikipedia.org/wiki/V-Lambda-Kurve , 01/2013	42
1.15	(Optik), S. 718	42
1.16	G. N.	47
1.17	G. N.	48
1.18	(Irt), S. 22	49
2.1	G. N.	56
2.2	http://de.wikipedia.org/wiki/Weber-Fechner-Gesetz 01/2013	56
2.3	G. N.	59
2.4	G. N.	63
2.5	G. N.	65

2.6	G. N.	67
2.7	(Schrö3), S. 499	78
2.8	G. N.	79
2.9	G. N.	81
2.10	G. N.	84
2.11	G. N.	88
2.12	(Wys), S. 307	92
2.13	(Wys), S. 308	93
2.14	(Gschw), S. 177	95
2.15	(Gschw), S. 177	96
2.16	(Gschw), S. 178	96
2.17	(Gschw), S. 205	97
2.18	(Wys), S. 311	100
2.19	(Stro), S. 134	101
2.20	(Stro), S. 135	102

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Gerburg Neunteufl

E-mail: GerburgNeunteufl@gmail.com

Schulische Ausbildung:

1982-1986 Volksschule Felix-Dahn, Graz

1986-1994 BRG Petersgasse, Graz

Juni 1994 Matura

1994-1996 Meisterschule für Malerei, Graz

Universitäre Ausbildung:

WS 1996 Beginn des Mathematikstudiums

WS 1997 Fotografie, Akademie der bildenden Künste

WS 1998 Beginn Zweitfach Darstellende Geometrie

WS 2000 - SS 2001 Auslandsstudienjahr Erasmus

Università di Padova, Italien

WS 2005 - SS 2007 Fotografie, Universität für Angewandte Kunst

Unterbrechung der Studienzeit:

2007 - 2011 Arbeit als persönliche Assistentin für Menschen
mit Behinderung

Vorträge und Präsentationen:

- Juni 2011 Vortrag: „Mit dem Auge Farben ordnen“,
Universität für Angewandte Kunst
- Mai 2010 Vortrag: „Abstrakte Musik im Gedanken der Temperierung“,
Universität für Angewandte Kunst
- 2007 Ausstellung: Galerie Westlicht, Wien
Filmpräsentation: „Ein anderer Lebensraum“,
Kino Schikaneder, Wien
- 2006 Ausstellung: Fotografie Forum, Frankfurt am Main

Ich versichere:

- dass ich die Diplomarbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfe bedient habe.
- dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch im Ausland (einer Beurteilerin/ einem Beurteiler zur Begutachtung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe.
- dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Gerburg Neunteufl

Datum

Unterschrift