DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Datenorientierter Zugang im Stochastikunterricht – Konzeptentwürfe und Unterrichtsvorschläge“

Verfasserin

Johanna Kreft

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Diplomstudium Lehramt UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie

Betreuer: Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Abstract

Die vorliegende Diplomarbeit hat den datenorientierten Zugang im Stochastikunterricht zum Gegenstand. Dabei ist das Ziel, durch das Arbeiten mit Daten ein tieferes Verständnis für statistische Vorgänge zu entwickeln. Es geht nicht (mehr) um das algorithmische Abarbeiten von statistischen Verfahren, sondern Daten sollen die Grundlage bilden, auf welcher die statistischen Verfahren erst angewandt werden. Auf diese Weise werden mögliche Muster und Strukturen in den Daten gezeigt und Mathematik kann (in Freudenthals Sinne) als Instrument wahrgenommen werden, das hilft, die Umwelt verständlicher zu machen. Der Realitätsanspruch und die Authentizität des Mathematikunterrichts werden infolgedessen verstärkt.

Die Diplomarbeit stellt den datenorientierten Zugang vor und versucht mit Hilfe von Konzeptentwürfen und konkreten Unterrichtvorschlägen weitere Anreize für das Arbeiten mit realen Daten zu schaffen. Es werden Arbeitsblätter gestaltet und die didaktischen und methodischen Hintergründe der einzelnen Unterrichtsvorschläge genauer vorgestellt. Anhand der Unterrichtsvorschläge wird gezeigt, aus welchen verschiedenen Bereichen Daten gewonnen werden können. So können die Schülerinnen und Schüler ihr Telefonier-Verhalten untersuchen, herausfinden wie Mädchen und Buben unterschiedlich den Computer benützen und das Verhältnis von Bauchnabelhöhe und Körpergröße eines Menschen betrachten. Auf diese Weise wird Mathematikunterricht nicht nur realitätsnahe, sondern die Schülerinnen und Schüler können sich selbst als Gegenstand des Mathematikunterrichts wahrnehmen.

Im Rahmen der Diplomarbeit soll gezeigt werden, wie der datenorientierte Zugang den Stochastikunterricht verbessern und lebendiger gestalten kann.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mit ihrer fachlichen und persönlichen Unterstützung zur Realisierung dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Mag. Stefan Götz für die geduldige und sehr gute Betreuung während der gesamten Dauer der Diplomarbeit.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern für die finanzielle und mentale Hilfestellung während der gesamten Zeit meines Studiums.

Nicht zuletzt danke ich all meinen großartigen Freundinnen und Freunden für die ermutigenden Gespräche, für die vielen schönen Ablenkungen und für die mentale Unterstützung. Ganz besonders möchte ich mich an dieser Stelle bei Karolin Pernegger für die fotografische Umsetzung und bei Katrin Mair für die zahlreichen Anregungen und den wichtigen emotionalen Rückhalt bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der datenorientierte Zugang beschreibt einen aktuellen Zugang im Stochastikunterricht, bei welchem, wie aus der Bezeichnung geschlossen werden kann, die Daten im Mittelpunkt stehen. Ziel des neuen Zugangs ist es, den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen im Umgang mit Daten zu vermitteln. Dabei geht es nicht nur um das Lesen von Grafiken bzw. das Berechnen und Interpretieren von Mittelwerten. Vielmehr soll ein tiefes Verständnis für wesentliche Eigenschaften von Daten und statistische Vorgänge entwickelt werden, wobei vor allem die „Einsicht in die Variabilität von Daten" (vgl. Wild & Pfannkuch 1999) zentral ist. Anders als im klassischen Stochastikunterricht stehen so nicht die einzelnen statistischen Verfahren selbst im Vordergrund. Vielmehr werden diese als Werkzeug verstanden, um Strukturen und Muster in den Daten aufzuzeigen. Der Stochastikunterricht wird auf diese Weise realitätsnäher und authentischer.

Die Hervorhebung der Datenanalyse im Mathematikunterricht kann als Reaktion auf die allgemein zunehmende Bedeutung von Daten verstanden werden. Daten spielen eine immer wichtigere Rolle in unserer Gesellschaft. In Zeiten der modernen Wissensgesellschaft ist die Fähigkeit, mit quantitativem Zahlenmaterial umzugehen, unumgänglich. „Grundkenntnisse und Fertigkeiten im quantitativen Argumentieren gehören in einer offenen Gesellschaft und Massendemokratie genauso zu den Kulturtechniken wie Lesen, Schreiben und Rechnen" (Engel 1999, S.77). Es ist die Aufgabe des Stochastikunterrichts, auf diese Anforderungen einzugehen.

Im angloamerikanischen Raum hat der datenorientierte Zugang bereits Einzug in die Klassenzimmer gefunden. Da es sich dabei um einen im deutschsprachigen Raum eher neuen Zugang handelt, findet sich hier noch kein breites Angebot an Aufgaben und Unterrichtsvorschlägen zu dem Thema. Diese Diplomarbeit stellt den Versuch dar, die Auswahl an Aufgaben zum datenorientierten Zugang im Stochastikunterricht für die Sekundarstufe I und II zu erweitern.

Es werden im Folgenden Unterrichtsvorschläge für das gesamte Stochastikcurriculum vorgestellt, wobei auf alle Stadien der Datenanalyse, wie Datenerhebung – Aufbereitung von Daten – Analyse der Daten – Interpretation – Prognose – Validierung der Prognose, eingegangen wird. Auf diese Weise soll ein breites Verständnis für die Datenanalyse gewonnen werden. Zu den verschiedenen Stadien der Datenanalyse werden Arbeitsblätter gestaltet, um selbstständiges Untersuchen der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Als Grundlage dient das Buch von Eichler & Vogel (2009) „Leitidee Daten und Zufall". Dabei handelt es sich um das umfangreichste Werk zur Datenorientierung im Stochastikunterricht im deutschsprachigen Raum.

Die in dieser Diplomarbeit ausgearbeiteten Unterrichtsvorschläge werden zum Teil von Eichler & Vogel (2009), sowie weiteren Autoren (z. B. Riemer 1991, Engel & Vogel 2005), übernommen und modifiziert. Zusätzlich werden sie durch eigene Unterrichtsvorschläge ergänzt und in einem didaktischen Rahmen verortet.

Dieser didaktische Rahmen wird im ersten Kapitel vorgestellt. Er wird anhand von drei Aspekten entwickelt: dem Modellierungskreislauf (siehe Kap. 1.1), dem Konzept des statistischen Denkens (1.2) und dem Spiralprinzip nach Bruner (siehe 1.3).

Im zweiten Kapitel erfolgt eine Bestandsaufnahme. Inwieweit hat der datenorientierte Zugang bereits Berücksichtigung im Stochastikunterricht gefunden? Dafür werden die Bildungsstandards der USA, Deutschlands und Österreich betrachtet. Auf diese Weise soll verdeutlicht werden, dass der datenorientierte Zugang im österreichischen Curriculum noch kaum vorgesehen ist.

Im dritten Kapitel wird geklärt, welche Daten sich für einen lebendigen Stochstikunterricht am besten eignen. Zudem werden Möglichkeiten vorgestellt, wie Daten im Unterricht erhoben werden können.

Das vierte Kapitel widmet sich der Analyse der Daten. Dabei werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Aufbereitung von univariaten sowie bivariaten Datensätze vorgestellt.

Im fünften Kapitel erfolgt der Übergang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der Konzeption der Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ wird dabei besondere Bedeutung beigemessen. Hier sollen die Daten die verschiedenen Konzepte illustrieren und so Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung besser miteinander verbinden.

Im sechsten Kapitel werden schließlich Ausblicke auf die schließende Statistik gegeben. Im Speziellen wird auf den Hypothesentest eingegangen. Um Unterricht im Spiralprinzip zu ermöglichen, werden dabei die Daten der Erhebung wieder aufgegriffen.

Ziel ist, mit Hilfe der Diplomarbeit einen Anreiz für das Arbeiten mit Daten im Stochastikunterricht zu schaffen. Die Unterrichtsvorschläge werden am österreichischen Lehrplan (der HS-, NMS sowie AHS) erläutert.

1 Der didaktische Rahmen

Mathematikunterricht wird durch das Arbeiten mit echten Daten realitätsnäher und authentischer.

Daten spielen in verschiedenster Form eine wesentliche Rolle in unserem Alltag und Schülerinnen und Schüler sind auf vielfältigste Weise tagtäglich mit Daten konfrontiert:

„Es ist überwältigend, welche Rolle Daten bei Entscheidungen in der Geschäftswelt, der Politik, der Forschung und im täglichen Leben spielen. Konsumentenumfragen bestimmen die Entwicklung und das Marketing neuer Produkte. Meinungsumfragen bilden die Grundlagen von Strategien politischer Kampagnen, und Experimente werden eingesetzt, um die Sicherheit und Wirksamkeit neuer medizinischer Behandlungsmethoden zu bewerten. Statistiken werden oft auch missbraucht, um die öffentliche Meinung zu beeinflussen oder um die Qualität und Effektivität kommerzieller Produkte fälschlich darzustellen. Schülerinnen und Schüler brauchen Grundkenntnisse von Datenanalyse und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, um statistisch argumentieren zu können – Fertigkeiten, die für informierte Staatsbürger und intelligente Konsumenten notwendig sind." (NCTM 2001, S.11)

Es ist der Aufgabe der Schule, die Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf diese Anforderungen vorzubereiten. Hier steht vor allem der Stochastikunterricht in der Verantwortung. „Die Stochastik ist nicht als bloße ‚Zufalls- oder ‚Wahrscheinlichkeitslehre' nur für Filmhelden und die Glücksspielwelt reserviert! Mit ihrer empirischen Verankerung in der alltäglichen Welt ist sie untrennbar mit der Welt der Daten verbunden. Man schaut mit den Daten zunächst in Vergangenheit und Gegenwart, um besser begründete Aussagen für kommende Ereignisse machen zu können. Daher beginnt unserer Überzeugung nach die Stochastik bei den Daten, und dort sollte auch der Stochastikunterricht beginnen." (Eichler & Vogel 2009, S.V).

Der datenorientierte Zugang bündelt dabei eine Vielzahl an verschiedenen didaktischen Konzepten.

Bemerkenswert an der zunehmenden Datenorientierung ist für Moore (1997) die Tatsache, dass es sich dabei nicht nur um eine Veränderung des Inhalts handelt, sondern auch um eine Veränderung der allgemeinen Lernkultur. Moore spricht von einer neuen Pädagogik („new pedagogy"): „What is striking about the current reform movement is not only it´s momentum but the fact that it centers on pedagogy as much as content. We ought, say the reformers, to radically alter our style of teaching" (Moore 1997, S.123).

Der didaktische Rahmen wird im Wesentlichen von drei Aspekten bestimmt:

- So demonstriert der Modellierungskreislauf die einzelnen Stadien der Datenanalyse und verdeutlicht so gleichzeitig die Bedeutung/Umkehrung von Theorie und Praxis verdeutlichen (siehe Kap. 1.1).
- Anhand des Konzepts des statistischen Denkens wird aufgezeigt, dass beim datenorientierten Zugang nicht die statistischen Verfahren, sondern das allgemeine Verständnis für statistische Sacherhalte im Mittelpunkt steht (siehe Kap. 1.2).
- Schließlich wird im Kapitel 1.3 illustriert, wie mit Hilfe der Daten Unterricht im Spiralprinzip stattfinden kann und so die Verbindung zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung betont wird.

1.1 Der Modellbildungskreislauf

Den Ausgangspunkt für den datenorientierten Zugang bilden die Daten. Darauf bezogen werden mathematische Techniken entwickelt um „Aussagen über Muster und Struktur“ der Daten machen zu können. „Dann erst werden die Theorieteile entwickelt, mit denen Muster und Strukturen formal beschrieben werden können“ (Wolpers 2002, S.108). Die Abfolge Theorie-Praxis wird somit umgedreht: Es wird nicht zuerst die Theorie eingeführt und dann Aufgaben „gerechnet“, die diese Theorie anwenden, sondern über Aufgaben wird die Theorie erst entwickelt.

Anhand des Modellierungskreislaufs wird die genaue Vorgehensweise des datenorientierten Zugangs ersichtlich. Aufbauend auf den klassischen Modellierungskreislauf, hier in der Ausführung von Eichler & Förster (2008), entwickelten Eichler & Vogel (2009) einen stochastischen Modellierungskreislauf, der den datenorientierten Zugang verdeutlicht (siehe Abb. 1.1).

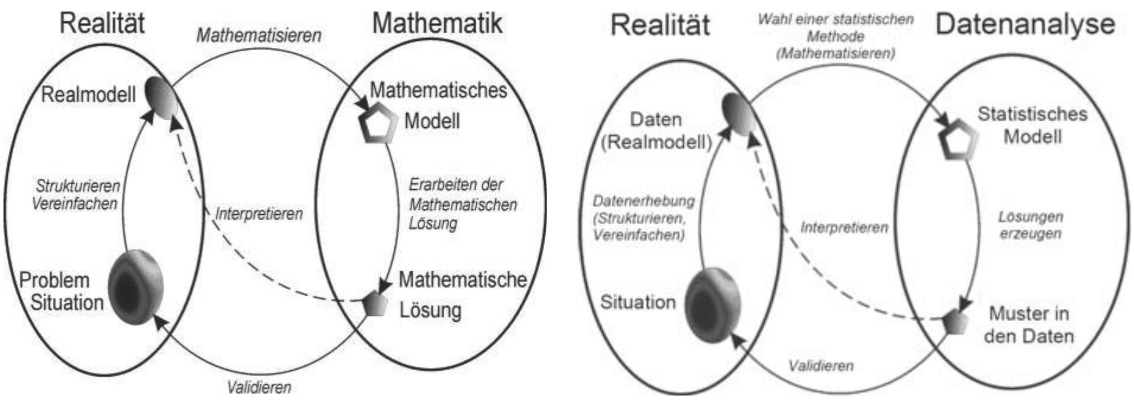


Abb. 1.1.: links: Modellbildungskreislauf nach Eichler & Förster 2008, S.135; rechts: Spezifizierung als stochastischer Modellbildungskreislauf (Eichler &Vogel 2009, S.132)

Der Modellierungskreislauf illustriert dabei die verschiedenen Phasen: Ausgehend von einer realen Situation bzw. einer realen Problemstellung werden Daten gesammelt, die die Realität strukturieren und vereinfachen, um sie so mathematisch analysierbar zu machen. Aus dem realen Modell wird durch die Wahl einer statistischen Methode ein mathematisches Modell gebildet (z. B.: arithmetisches Mittel, Kreisdiagramm, Streudiagramm, Boxplot). Mit Hilfe des mathematischen Modells werden dann die Eigenschaften des Datensatzes quantifiziert, um so mögliche Muster und Strukturen der Daten herauszubilden. „Im Schritt des Mathematisierens wird dieses Realmodell in ein mathematisches Modell übertragen, das in formaler Hinsicht die mathematische Weiterverarbeitung ermöglicht. Der Ansatz zur Datenanalyse (reduziert man die Daten auf das arithmetische Mittel oder auf ein Quantil?) bestimmt wesentlich das nachfolgende Analyseergebnis. Dieser Modellierungsschritt umfasst stets die Suche nach einem Muster in der Variabilität der statistischen Daten und damit stets auch die Reduktion der in den Daten enthaltenen Informationen“ (Eichler & Vogel 2009, S.133).

Um Aussagen über den zugrundliegenden Sachverhalt machen zu können, werden die gewonnen Lösungen dann im Hinblick auf die Ausgangssituation interpretiert. Zudem wird überprüft, ob das gewonnene Ergebnis ein für die Ausgangssituation tragfähiges Ergebnis geliefert hat (Validierung).

Der Modellierungskreislauf demonstriert die Bedeutung der Daten. Die Daten fungieren als Vermittler zwischen der Realität und der mathematischen Analyse. Mathematik ist somit weniger Selbstzweck, sondern wird als Instrument verstanden um uns unsere Umwelt verständlicher zu machen. Dies entspricht dem phänomenologischen Ansatz Freudenthals. „Unsere mathematischen Begriffe, Strukturen und Vorstellungen sind erfunden worden als Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen sozialen und geistigen Welt zu ordnen“ (Freudenthal 1983). Damit unterscheidet sich der datenorientierte Zugang von klassischen Stochastikunterricht, der sich oft auf das reine Mathematisieren (siehe rechter Teil des Modellierungskreislaufs in Abb. 1.1) beschränkt.

Mit Hilfe von Daten werden reale Situationen analysierbar gemacht. Die Stochastik dient so als Werkzeug zur Strukturierung unserer Umwelt. „So kann die Stochastik mehr als viele andere mathematische Disziplinen Schülerinnen und Schülern ermöglichen, die Mathematik als mächtiges Instrument kennenzulernen, um Teile der Welt zu beschreiben, zu verstehen oder zu erklären. Um die Realität mit Hilfe der Mathematik oder der Stochastik fassen zu können, bedient man sich eines Modells, dessen Konstruktion und Bearbeitung als Kreislauf (…) beschrieben werden kann.“ (Eichler 2009a, S.2)

1.2 Statistisches Denken

Das Ziel des datenorientierten Zugangs ist die Herausbildung und Entwicklung statistischen Denkens. Beim statistischen Denken geht es um das Verständnis, warum und wie statistische Untersuchungen ablaufen und ausgeführt werden, sowie um ein Verständnis für die wesentlichen Ideen, die statistischen Untersuchungen zu Grunde liegen, wie Variabilität, Wahl der Methode, visuelle Darstellungsmethoden:

„Statistical thinking involves an understanding of why and how statistical investigations are conducted and the „big ideas“ that underlie statistical investigations. These ideas include the omnipresent nature of variation and when and how to use appropriate methods of data analysis such as numerical summaries and visual displays of data“ (Ben-Zvi & Garfield 2004, S.3).

Das Konzept des statistischen Denkens verdeutlicht weiter, dass beim datenorientierten Zugang nicht das Erlernen von statistischen Verfahren und Fertigkeiten im Mittelpunkt steht. Vielmehr soll ein tiefes Verständnis für statistische Vorgänge entwickelt werden, wobei hier folgene Überlegung dahinter liegt: was nützt das Beherrschen von Verfahren, wenn diese dann nicht angewandt und interpretiert werden können (vgl. Wild & Pfannkuch 2004, S.17)?

Nach Wild und Pfannkuch (1999) sind fünf Aspekte für das statistische Denken wesentlich und somit zentral für „jede eingehende Beschäftigung mit einer stochastischen Problemstellung“:

- Erkennen der Notwendigkeit von Daten
- Flexible Repräsentation der relevanten Daten
- Einsicht in die Variabilität von statistischen Daten
- Argumentieren mit statistischen Modellen
- Verbinden von Kontext und Statistik

(vgl. Eichler & Vogel 2009, S. XII)

Erkennen der Notwendigkeit von Daten (recogniton of the need of data):

Hier geht es um die Erkenntnis, dass es bei vielen Situationen unzureichend ist, sich bloß auf persönliche Erlebnisse, „Stammtischmeinungen“ und Anekdoten zu beziehen. Vielmehr soll das Bewusstsein geschaffen werden, dass sich gültige Einschätzungen auf die genaue Untersuchung der realen Situation, in Form von Sammlung und Untersuchung von Daten, stützen müssen: „The foundation of statistical enquiry rest on the assumption that many real situations cannot be judged without the gathering and analysis of property collected data.“ (Wild & Pfannkuch 2004, S.18).

Flexible Repräsentation der relevanten Daten („transnumeration“):

Daten müssen aufbereitet werden um den Blick frei zu machen auf die Informationen die sie enthalten. Wild und Pfannkuch (1999) sprechen in diesem Zusammenhang von „Transnumeration“ und definieren es als das rechnerische Umformen um Verständnis zu erreichen: „We define it as "numeracy transformations made to facilitate understanding." (Wild & Pfannkuch 1999, S.227)

Wild & Pfannkuch nennen drei Instanzen der Transnumeration:

i. Daten, die die Qualität und Charakteristik der realen Situation abbilden, werden gesammelt.
ii. Die gesammelten Daten werden vom rohen Datenmaterial in eine andere Darstellungsform übergeführt (z. B.: Stabdiagramm, Box-Plot, Streudiagramm, …).
iii. Der Bedeutungsgehalt und das Urteil aus den Daten werden im Bezug zur realen Situation betrachtet (vgl. Wild & Pfannkuch 2004, S.18).

Wichtig ist, dass den Schülerinnen und Schülern ein breites Repertoire an verschiedenen Darstellungsformen vermittelt sowie das Bewusstsein geschaffen wird, dass verschiedene Darstellungsformen auch verschiedene Interpretationen zulassen (vgl. Pfannkuch 2008, S.1). Im Kapitel 4 wird näher darauf eingegangen.

Einsicht in die Variabilität von statistischen Daten („consideration of variation“):

Die Einsicht in die Variabilität von Daten ist das wesentliche Charakteristikum der Datenanalyse. Die Non-Uniformität unserer Umwelt ist der Grund, wieso wir überhaupt Statistik betreiben. So unterscheiden uns wir Menschen durch verschiedene Faktoren, wie Größe, Gewicht, usw. Auch ein Experiment, das unter den exakt selben Bedingungen durchgeführt wird, liefert in der Regel unterschiedliche Ergebnisse.

Laut Moore (1990) ist es ein Ziel des Stochastikunterrichts, Schülerinnen und Schülern ein Verständnis zu vermitteln, dass die Variabilität von Daten mehr Aspekte der Welt erklärt als deterministische Vorgänge: „One goal of instruction about probability is to help students understand that chance variation rather than deterministic causation explains many aspects of the world.“ (Moore 1990, S.99)

Durch das Verständnis für die Variabilität von Daten wird die Verbindung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung verdeutlicht: “Experience with variation in data is a first step toward recognizing the connection between statistics and probability.” (Moore 1990, S.99)
Da aufgrund der Variabilität keine konkreten Vorhersagen über das Eintreten eines bestimmten Ereignisses gemacht werden können, kann lediglich eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten angegeben werden. Das Ermitteln einer Wahrscheinlichkeit ist möglich, wenn sich die Daten zwar unterscheiden, auf lange Sicht jedoch Muster zu erkennen sind.
Aus diesem Grund soll die Variabilität nicht als lästiges „Nicht-gleich-sein“ abgetan werden, sondern vom Beginn stochastischer Betrachtung als wesentliche Eigenschaft von Daten verdeutlicht werden.

Argumentieren mit statistischen Modellen („reasoning with statistical models“):
Statistische Modelle wie arithmetisches Mittel, Median, Streuung oder grafische Darstellung fassen die Eigenschaften von Datensätzen zusammen und erlauben uns, damit zu argumentieren.
In der elementarsten Form geht es hierbei darum, ausgehend von den gewonnenen statistischen Darstellungen, wie Punktdiagramm, Histogramm, Box-Plot, Streudiagramm, Schlussfolgerungen zu ziehen. Jede Art von Darstellung strukturiert die Daten und ist abhängig von der Qualität und der Quantität der Daten: „In ist most basic form reasoning with statistical models includes reasoning from statistical plots such as bar plots, dot plots, histograms, box plots, scatter plots, two-way tables of counts. Each type of plot structurally organises the data and is dependent on the type of data, qualitative and quantitative.“ (Pfannkuch 2008, S.3)
Durch die Aufbereitung von Datensätzen werden mögliche Muster ersichtlich und es können Aussagen über die Struktur der Datensätze gemacht werden.

Verbinden von Kontext und Statistik („integrating the statistical and contextual“):
Wichtig ist es, die gewonnenen Strukturen und Muster wieder im Kontext der Realsituation zu betrachten. Der Kontext der Daten spielt bei der mathematischen Analyse eine wichtige Rolle, zum einen bei der Wahl einer geeigneten statistischen Methode, zum anderen bei der Interpretation des Ergebnisses. „Dieser Aspekt mag zunächst ebenfalls banal klingen. Dennoch ist auch hier für Schülerinnen und Schüler einerseits die Erkenntnis wichtig, dass die Analyse statistischer Daten für einen (möglichst realen) Kontext tatsächlich relevant ist. Andererseits ist bei einer angemessenen Datenanalyse der Blick immer wieder auf den

Datenkontext zu richten, um Interpretationsspielräume nicht über das Abarbeiten von Algorithmen aus dem Blick zu verlieren.“ (Eichler & Vogel 2009, S.XIII)
Mit Blick auf die Ausgangssituation können die Ergebnisse der statistischen Modelle richtig interpretiert werden. Zudem wird auf diese Weise der Realbezug von statistischen Methoden betont. Wie bereits am Modellierungskreislauf illustriert, schließt sich so der Kreis statistischer Betrachtung.

1.3 Unterricht gemäß des Spiralprinzips

Der datenorientierte Zugang verändert den Stochastikunterricht in vielen Aspekten. So hebt er die Bedeutung der beurteilenden Statistik und betont die Verbindung zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Im klassischen Stochastikunterricht liegt der Schwerpunkt meist auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf „relevante statistische Fragestellungen“ (Peschek 2000, S.151) wird dabei jedoch weitgehend verzichtet. Den Kern bilden meist Glücksspielaufgaben und so wird Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig als „Würfelbudenmathematik“ nicht wirklich ernst genommen (vgl. Peschek 2000, S.151).
Der Bereich der beschreibenden Statistik beschränkt sich im Unterricht oft auf das bloße Berechnen von Lageparameter wie arithmetisches Mittel, Median, Quartil oder Standardabweichung. Rechnerisch ist das nicht besonders anspruchsvoll und so wird der Bereich oft als für den Unterricht „zu leicht“ abgetan und schnell wieder verlassen.

Mit dem datenorientieren Zugang bekommt die beurteilende Statistik einen neuen Stellenwert, da mit ihrer Hilfe die Daten analysiert und Situationen strukturiert werden.
Zudem gelingt mit Hilfe der Daten ein direkter Übergang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die gewonnenen Resultate einer Datenanalyse werfen fast automatisch die Fragen auf „Ist das immer so?“ „Womit können wir zukünftig rechnen?“ „Aus diesen beiden Fragen resultiert die wahrscheinlichkeitstheoretische Erweiterung der Datenanalyse“ (Eichler & Vogel 2009, S.160). Zusätzlich wird auf diese Wiese verdeutlicht, dass Daten die Grundlage für eine Prognose bilden. „Eine (sic!) zentraler Aspekt des statistischen Denkens, der im Rahmen der Datenanalyse gereift sein sollte, ist: Für eine geeignete Erkenntnis benötigt man statistische Daten. (...) Dieser Aspekt ist nicht allein bei der Beschreibung empirischer Phänomene, sondern ebenso bei der Konstruktion von Prognosen oder Hypothesen bedeutend.“ (Eichler & Vogel 2009, S.160)

Das gewonnene wahrscheinlichkeitstheoretische Modell kann dann anhand einer Analyse empirischer Daten überprüft werden und so gelingt der Übergang zur beurteilenden Statistik.
Um diese Verbindung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter zu betonen und für die Schülerinnen und Schüler begreifbar zu machen, können (und sollen) Aufgaben immer wieder aufgegriffen und unter verschiedenen Gesichtspunkten untersucht werden: Die Daten, die in der fünften Schulstufe erhoben und deren Lageparameter in der sechsten berechnet werden, können später als Grundlage für eine Prognose dienen (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Angenommene Verteilungen könnten in weiterer Folge empirisch überprüft werden (schließende Statistik). Das entspricht dem Spiralprinzip nach Bruner (1970).
Im Sinne des Spiralprinzips werden so einzelne Inhalte immer wieder aufgenommen und auf höherem Niveau weitergeführt: „Der Anfangsunterricht in den Naturwissenschaften, Mathematik, Sozialkunde und Literatur sollte so angelegt sein, daß diese Fächer mit unbedingter intellektueller Redlichkeit gelehrt werden, aber mit dem Nachdruck auf dem intuitiven Erfassen und Gebrauchen dieser grundlegenden Ideen. Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf diese Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat. Kinder der vierten Klasse können durch Spiele gefesselt werden, deren Regeln sich von Prinzipien der Topologie und der Reihentheorie herleiten, und dabei selbst neue 'Ableitungen' oder Lehrsätze entdecken... Aber sie vermögen diese Ideen nicht in eine formale Sprache zu übersetzen oder mit ihnen umzugehen, wie es Erwachsene tun. Man muß noch viel über die 'Curriculum-Spirale' lernen, die auf höheren Ebenen immer wieder zu sich selbst zurückkommt." (Bruner 1970, S.26ff)
Unterricht gemäß dem Spiralprinzip bedeutet nach Bruner nicht nur Themen wieder aufzugreifen und zu erweitern, sondern auch zentrale Ideen, bevor sie formal eingeführt werden, bereits „durch intuitives Erfassen und intuitiven Gebrauch“ (Christmann 1980, S.149ff) vorzubereiten. So soll ein tieferes Verständnis erreicht werden und vermieden werden, dass sich das Verständnis auf die richtige Wahl einer Formel beschränkt.
„Vielleicht das schlagendste Beispiel hierfür bietet sich in der Art, wie ein Oberschüler, der noch keine Erfahrung mit einfachen geometrischen Figuren hat und noch nicht intuitiv mit ihnen umgehen kann, zum erstenmal mit der euklidischen Geometrie als einem System von mathematischen Grund- und Lehrsätzen in Berührung kommt. Hätte er die Gedankengänge und Verfahren schon früher in Form von intuitiver Geometrie auf einem Niveau, dem er leicht hätte folgen können, kennengelernt, wäre er wohl viel eher imstande gewesen, die

Lehr- und Grundsätze, mit denen er später konfrontiert wird, in ihrer tieferen Bedeutung zu verstehen.“ (Bruner 1970, S.49)

Bruner wählt hier zwar das Beispiel der Geometrie, aber auch für den Stochastikunterricht gilt, dass vor allem der Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft sehr formal eingeführt wird und so der Blick für die wesentlichen Ideen versperrt bleibt. „Was Lernenden (wie auch Lehrenden) dabei den Zugang zu zentralen Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie beträchtlich erschweren kann, ist die an vielen einführenden Lehrbüchern nachvollziehbare Beobachtung, dass grundlegende Begriffe (wie Ergebnis, Ereignis, Elementarergebnis, Ergebnis- bzw. Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion, etc.) oft sehr formalistisch-exakt eingeführt werden, obwohl diese Begriffe später gar nicht mehr, nicht in dieser Exaktheit oder überhaupt in ganz anderer Form benötigt werden“ (Peschek 2000, S.151). Was vom klassischen Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung übrig bleibt, ist oft nur die Erkenntnis, dass jene Aufgabenstellung jenen Formalismus fordert. Verstärkt wurde dies durch ein Aufgabendesign, das brav alle Zahlen angibt, die dann in den Taschenrechner eingegeben werden und dieser bringt die Lösung. Was genau berechnet wird, ist Nebensache.

Solche Strukturen versucht der datenorientierte Zugang aufzubrechen: Zum einen liegt es in der Natur der Daten keine „perfekt passenden Zahlen“ zu liefern. Zum anderen wird mit der Abfolge „Praxis dann Theorie“ ein rein formaler Zugang vermieden.

Um einen intuitiven Zugang und Unterricht im Spiralprinzip zu ermöglichen orientieren sich die folgenden Einführungsaufgaben zu den unterschiedlichen Themen „an dem didaktischen Prinzip der Repräsentationsformen nach Bruner“ (Wagner 2006, S.63). Bruner (1970) unterscheidet drei zunehmend abstraktere Repräsentationsebenen.

- Enaktive (handelnde) Darstellung: Sachverhalte werden handelnd durch konkretes Unterrichtsmaterial erfasst.
- Ikonische Darstellung: Sachverhalte werden durch grafische Darstellung (wie Diagramme, Grafen) erfasst.
- Symbolische Darstellung: Sachverhalte werden durch sprachliche Darstellung oder mathematische Symbole erfasst.

(vgl. Bruner 1966, S.11f)

Den Hintergrund bildet die Überlegung, auf welche Weise Kinder frei von rein gegenwärtigen Stimuli werden und diese gemeinsam mit gemachten Erfahrungen in ein allgemeines Modell überführen können: „how the child gets free of present stimuli and

conserves past experience in a model, and the rules that govern storage and retrieval of information for this model“ (Bruner 1966, S.10).
Bruners Theorie stützt sich dabei auf die Entwicklungstheorie von Piaget. Laut Piaget entwickelt das Kind die Fähigkeit zur formalen Kognition in Stufen (vgl. Christmann 1980, S.152).
Das Ziel ist, zwischen den verschiedenen Repräsentationsebenen wechseln zu können. „Die Fähigkeit, einen Inhalt von einem Repräsentationsmodus in andere zu übertragen (intermodaler Transfer), ist zu fördern.“ (Christmann 1980, S.155). Aus diesem Grund wird in den Unterrichtsvorschlägen immer wieder die Verbindung von handelnder, ikonischer und sprachlicher Repräsentationsebene motiviert.
Die ikonische Ebene spielt im datenorientierten Zugang ebenfalls eine wesentliche Rolle und wird in 4.2.2 genauer untersucht.

Der didaktische Rahmen zeigt, dass bei der Datenanalyse der Realitätsanspruch ausschlaggebend ist und es dabei nicht um das Erlernen von Verfahren, sondern um die Entwicklung eines stochastischen Verständnisses geht. Die Unterrichtsvorschläge werden in Folge immer wieder im Hinblick auf den Modellierungskreislauf und den fünf Aspekten des statistischen Denkens analysiert, um ihre Bedeutung für den datenorientierten Zugang weiter zu verdeutlichen. Es wird dabei versucht einen möglichst intuitiven Einstieg in die verschiedenen Möglichkeiten statistischer Betrachtung zu wählen. Um Unterricht im Spiralprinzip zu ermöglichen, werden die Aufgaben immer wieder aufgenommen und unter verschiedenen Gesichtspunkten analysiert.

2 Der Einzug ins Schulcurriculum – eine Bestandsaufnahme

Im Folgenden wird die Veränderung des Stochastikunterrichts im Kontext eines allgemeinen Wandels des Mathematikunterrichts betrachtet. Anhand der Analyse der Bildungsstandards verschiedener Länder soll nun gezeigt werden, dass sich der datenorientierte Zugang keineswegs nur auf ein didaktisches Konzept in der Theorie beschränkt, sondern bereits Einzug in die Klassenzimmer gefunden hat. Dabei wird ersichtlich, dass die Datenorientierung des Stochastikunterrichts in Österreich im internationalen Vergleich noch relativ wenig Bedeutung findet. Diese Bestandsaufnahme soll in weiterer Folge als Anreiz verstanden werden, den datenorientierten Zugang auch in Österreich mehr in den Stochastikunterricht einfließen zu lassen.

In der Diskussion um einen neuen Mathematikunterricht wird in der deutschsprachigen Literatur bereits seit einigen Jahren der datenorientierte Zugang für den Stochastikunterricht propagiert (vgl. Eichler & Vogel (2009), Eichler (2009a), Biehler (1999)). In den USA – im angloamerikanischen Raum wird diese Diskussion auch schon länger geführt – ist die datenorientierte Stochastik in Form der NCTM „principles and standards" in das Schulcurriculum aufgenommen worden (vgl. NCTM 2001). Auch in Deutschland legen die 2003 beschlossenen Bildungsstandards (vgl. KMK 2003) für die zehnte Schulstufe einen Schwerpunkt auf die Datenanalyse. Diese Etablierung des datenorientierten Zugangs kann als Teil des Prozesses gesehen werden, der versucht, dem Mathematikunterricht mehr Realitätsbezug zu geben.

2.1 Die Veränderungen im Kontext eines allgemeinen Wandels des Mathematikunterrichts

Die Datenorientierung des Stochastikunterrichts fügt sich in den Prozess eines allgemeinen Wandels des Mathematikunterrichts ein. Der Mathematikunterricht hat sich in den letzten Jahrzehnten auf Grund von gesellschaftspolitischen und geschichtlichen Veränderungen stark verändert. David Moore (1997) nennt drei wesentliche Prozesse, aus denen sich die Veränderungen ableiten lassen:

- Neue Technologien haben unsere Welt stark beeinflusst („advance of technology"). Sie haben nicht nur neue Möglichkeiten geschaffen, sondern auch neue Anforderungen.

- In der Arbeitswelt geht es kaum mehr ohne analytische und quantitative Fähigkeiten und EDV-Kenntnisse („quantization of society“). Diese „neuen“ Ansprüche üben Druck auf unser Bildungssystem aus, welches Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf die Arbeitswelt vorbereiten soll. Hinzu kommt, dass durch die gestiegenen Anforderungen im Arbeitsbereich immer mehr Menschen eine höhere Bildung anstreben. Die gesellschaftliche Struktur des Schulsystems hat sich dadurch verändert. War ein Gymnasium früher noch „eine auf klassische Bildungsinhalte ausgerichtete Eliteschule“, hat sie sich in den letzten 50 Jahren zu einer „Gesamtschule“ gewandelt, „die auf ein Leben in einer (Post-)industriellen Gesellschaft vorbereiten soll.“ (Wolpers 2002, S.97)
- Für die Mathematik ergibt sich daraus eine immer wichtigere Rolle in der Allgemeinbildung für eine immer breitere Schicht der Gesellschaft. Moore spricht von „democratization of mathematics“. Lerninhalte haben sich dadurch verändert. Das Vermitteln von klassischen Bildungsinhalten reicht nicht mehr aus, vielmehr ist es Aufgabe der Schule, die Schülerinnen und Schüler auf eine immer komplexere Welt vorzubereiten: „democratization tends do move mathematical studies away from the esoteric towards the immediely useful“ (Moore 1997, S.124).

Der Mathematikunterricht muss auf die Veränderungen der Gesellschaft reagieren. Moore sieht darin besonders eine Chance für den Stochastikunterricht:
„This is an opportunity for statistics: as mathematical studies shift towards a more utilitarian approach, a larger place for statistics (understood broadly as dealing with data and chance) opens up“. (Moore 1997, S.124)
Im Hinblick auf die Realitätsbezogenheit kommt der Stochastik wegen ihrer „Bedeutung für die Umwelterschließung“ (Wolpers 2002, S.99) eine zentrale Rolle zu.

Der Fortschritt der Technologien schafft nicht nur neue Anforderungen, in gewisser Weise ermöglicht er erst, dass Datenanalyse Teil des Stochastikunterrichts werden konnte. Denn ohne technische Hilfsmittel sind Berechnungen von statistischen Kenngrößen (wie arithmetisches Mittel, Median oder visuelle Darstellung) vor allem bei großen Datensätzen oft mühsame Handarbeit. Dies versperrt den Blick auf die eigentliche Ergebnisse und ihre Interpretationen. Datenverarbeitungsprogramme wie (die in der Arbeit verwendete Software) Excel und Fathom erleichtern das Berechnen und legen den Blick frei für die wesentlichen Inhalte und deren Interpretationen (siehe Kap. 4.2).

2.2 Realisierung in den Bildungsstandards

Der Stochastikunterricht ist nicht mehr nur Oberstufenstoff, er hat auch in die Sekundarstufe I und den Primarbereich Einzug gehalten Mit dem Vorziehen des Stochastikunterricht geschieht die von Bruner (1970) geforderte „Elementarisierung des Mathematikunterrichts".

Vor allem die Bildungsstandards heben die Bedeutung des Stochastikunterrichts für das Curriculum hervor: Standards wie die NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) principles and standards setzen den Stochastikunterricht bereits ab dem Kindergarten an und fordern und fördern so eine (erste) intuitive Begegnung mit dem Bereich der Stochastik. Auf diese Weise wird das Vorurteil entkräftet, dass „‚richtige Stochastik' eben zu schwer und nur ab der Oberstufe angemessen machbar sei." (Eichler & Vogel 2009, S.120)

In Folge werden die Bildungsstandards der USA, Deutschlands und Österreichs in Hinblick auf eine Realisierung des datenorientierten Zugangs analysiert. Die Auswahl der drei Länder begründet sich dadurch, dass die USA mit den NCTM „standards and principles" eben als Vorreiter der datenorientierten Stochastik gesehen werden kann. Deutschland ist aufgrund der vergleichbaren Schulstruktur von Interesse.

Es wird nicht nur auf die Bildungsstandards der Sekundarstufe I eingegangen, sondern – im Sinne der Elementarisierung des Stochastikunterrichts – auch ein Blick auf die Primarstufe geworfen.

Auf die Analyse der Lehrpläne wird verzichtet, da die innovativen Ideen heute meist über die Bildungsstandards Eingang in die Lehrpläne finden. Sehr wohl werden die vorgestellten Unterrichtsvorschläge in Bezug zum Lehrplan gesetzt, um so eine Umsetzung in der Schule zu ermöglichen und zu erleichtern.

2.2.1 USA

Die 2000 erschienenen „Principles and Standards for School Mathematics" des NCTM und ihre Vorgänger „Curriculum und Evaluation Standards 1989" gelten als Vorreiter vor allem für den modernen Stochastikunterricht. Sie heben die Bedeutung der Datenanalyse und Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor und sprechen sich für eine neue Lernkultur aus.

„Die Standards sind ein wichtiger Wegweiser für den Mathematikunterricht zu Beginn des dritten Jahrtausends, indem sie die Einbeziehung neuer Technologien in den Unterricht fordern, die Verbindung von Mathematik zur Umwelt und Erlebniswelt der Schüler stärker hervorheben und stärker das Handeln der Schüler in Situationen des Problemlösens betonen." (Engel 2001, S.43)

Bei den „principles and standards“ handelt es sich um eine Art Curriculum, das die gesamte Schullaufbahn, von Kindergarten bis Schulabschluss, umfasst. Während die *principles* allgemeine fächerübergreifende Unterrichtsmerkmale, wie Chancengleichheit, Technologieprinzip formulieren (vgl. Klieme u. a. 2007, S.37), behandeln die *standards* die konkreten Lerninhalte. Die „standards“ wiederum teilen sich in zwei Gruppen: in einen inhaltlichen Teil („content standards“) und einen prozessorientierten Teil („process standards“). „Der inhaltliche Teil beschreibt entsprechend, was ein Schüler oder eine Schülerin lernen sollte, der prozessorientierte Teil nennt Wege, wie inhaltliches Wissen erworben und angewendet werden kann. Die Aufstellung dieser verschiedenen Bereiche unter dem einen Begriff *Standards* zeigt, dass mathematische Inhalte und fachbezogene Arbeitstechniken eine unterrichtliche Einheit bilden.“ (Klieme u. a. 2007, S.38)
Diese Verbindung der inhaltlichen mit den prozessorientierten Kompetenzen findet man auch in den Bildungsstandards in Österreich und Deutschland. Anders als unsere Bildungsstandards (vgl. Klieme u.a. 2007) implizieren die „principles and standards“ keine allgemeine Überprüfung durch standardisierte Tests.
Zwar kann das amerikanische Curriculum nicht einfach so im österreichischen bzw. deutschen Curriculum abgebildet werden, da in der Tradition der gymnasialen Ausbildung mehr Wert auf Theorie gelegt wird und die LehrerInnenausbildung besser ist als in der USA (vgl. NCTM 2001, S. 6). Trotzdem finden einige Erkenntnisse auch Eingang in das deutsche bzw. österreichische Curriculum.

2.2.2 Deutschland

In den 2003 beschlossenen deutschen Bildungsstandards für die zehnte Schulstufe findet sich eine deutliche Betonung der Datenanalyse. Eine der fünf Leitideen, die den inhaltsbezogenen Bereich beschreiben, lautet „Daten und Zufall“ und bezieht sich auf den Stochastikunterricht. Darin steht wie folgt:
„Die Schülerinnen und Schüler

- werten grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie grafisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,

- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten."

KMK 2003, S.12

Die Stochastik wird zu einem wichtigen Bestandteil der Sekundarstufe I. Innerhalb des Stochastikunterrichts kommt der Datenanalyse eine wesentliche Rolle zu. Die Datenanalyse beschränkt sich dabei nicht auf das „Darstellen und Lesen von Daten in Standardgrafiken. Es wird auch explizit von der eigenen Planung und Durchführung statistischer Erhebungen gesprochen, ein Umstand dem bisher im Stochastikunterricht vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde." (Eichler & Vogel 2009, S.XI)

2.2.3 Österreich

Auch in Österreich verstärkt sich die Bedeutung der Stochastik für den Mathematikunterricht. In den für die achte Schulstufe 2008 beschlossenen verpflichtenden Bildungsstandards ist „Statistische Darstellung und Kenngrößen" ein Punkt von vier inhaltsbezogenen Kompetenzen:

"Inhaltsbereich Statistische Darstellung und Kenngrößen (I4)
Tabellarische und grafische Darstellungen statistischer Daten; konkret:

- tabellarische Darstellung statistischer Daten
- Durchschnittsberechnungen
- Stabdiagramm, Kreisdiagramm, Streifendiagramm, Piktogramm, Liniendiagramm, Streudiagramm
- absolute und relative Häufigkeiten
- arithmetisches Mittel, Median, Quartile
- Spannweite, Quartilsabstand"[1]

Im Gegensatz zu den deutschen Bildungsstandards lässt sich keine explizite Betonung des datenorientierten Zugangs finden. Die Formulierung der Bildungsstandards erweckt vielmehr den Eindruck, dass im österreichischen Curriculum (noch immer) die einzelnen statistischen Verfahren im Vordergrund stehen und weniger allgemeine Kenntnisse der Datenanalyse.
Auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt (noch) keine Rolle. Es muss bei diesem Vergleich jedoch beachtet werden, dass sich die Bildungsstandards der Sekundarstufe in Deutschland bis zur zehnten Schulstufe, in Österreich nur bis zur achten Schulstufe erstrecken.

---

[1] https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf (Zugriff: 12.8.2013)

2.3 Stochastikunterricht schon in der Primarstufe

Bei allen drei Standards ist zu erkennen, dass sich der Stochastikunterricht nicht mehr – wie frühere Lehrpläne das vorsahen – auf die Oberstufe beschränkt, sondern Teil des ganzen Curriculums der Sekundarstufe sein soll. Dadurch wird die Bedeutung des Stochastikunterrichts für die Sekundarstufe I ersichtlich.

In weiterer Folge ist von Interesse, inwiefern Aspekte der Datenanalyse bereits im Bereich der Primarstufe Berücksichtigung finden

Die NCTM „standards und principles" setzten zum Beispiel bereits im Kindergarten an.

In den deutschen Bildungsstandards für die Primarstufe bildet der Punkt „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" eine von sechs inhaltsbezogenen Kompetenzen. Bereits in der Volksschule sollen Kompetenzen wie „aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Information entnehmen" oder „Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen" erworben werden (vgl. KMK 2004, S.11).

Im Gegensatz dazu werden statistische Kompetenzen in den österreichischen Bildungsstandards der vierten Schulstufe nicht explizit erwähnt.

Es ist jedoch auf eine Materialsammlung der österreichischen statistischen Gesellschaft zu verweisen: Diese wurde zur „handlungsorientierte Vermittlung datenanalytischer Inhalte" für die Volksschule herausgebracht und steht im Internet frei zur Verfügung[2] (vgl. Engel 2001, S.47). Dabei werden Unterrichtsvorschläge zur Datenanalyse für die Volksschule aufbereitet. So wird eine Wetterbeobachtung vorgeschlagen, oder ein Experiment mit Popcorn durchgeführt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die datenorientierte Stochastik bereits Eingang in die Klassenzimmer gefunden hat. Im österreichischen Curriculum (eine Teilmenge davon sind die Bildungsstandards) findet der datenorientierte Zugang jedoch noch kaum Bedeutung. Die folgenden Unterrichtsvorschläge sollen als Anreiz verstanden werden, dies zu ändern.

---

[2] http://www.stat4u.at/download/1266/Infoblatt.pdf (Zugriff: 3.8.2013)

3 Wie man zu den Daten kommt

Im Folgenden soll geklärt werden, welche Daten sich für den datenorientierten Zugang am besten eignen. Dabei wird aufgezeigt, dass für einen datenorientierten Zugang mehr als nur die Arbeit mit realen Daten wichtig ist.
Im zweiten Teil dieses Kapitels werden Unterrichtsvorschläge zum Erheben von Daten im Unterricht gemacht. Auf diese Weise soll ein besseres Verständnis für alle Stadien statistischer Untersuchungen erreicht werden.

3.1 Welche Daten und woher?

Daten sind zentral für die Statistik: Mittelwert, Median oder Balkendiagramme können nicht ohne Daten ermittelt werden. So finden sich in den österreichischen Schulbüchern im Bereich der Statistik zahlreiche Datenangaben, aus denen Grafen dargestellt oder statistische Maßzahlen berechnet werden sollen.
Was ist nun wirklich so *neu* am datenorientierten Zugang?
Bei der Betrachtung der Aufgaben in österreichischen Schulbüchern zeigt sich, dass es sich bei den Datenangaben meist um fiktive Daten handelt:

> „Beim Rudern gibt es einen Vierer mit Steuermann. Die Athleten wiegen 88 kg, 92 kg, 84 kg und 50 kg. Bestimme das arithmetische Mittel, den Median und die mittlere absolute Abweichung." (Dorfmayr u. a. 2009, S.119)

Solche Aufgaben erwecken den Eindruck, dass es sich bei der Statistik vor allem um das Anwenden von Algorithmen und dem Darstellen von Grafen handelt. Aus welchem Grund sollen hier sonst die geforderten statistischen Maßzahlen berechnet werden?

Auch Aufgaben mit realen Daten werden von den Schülerinnen und Schülern selten als solche wahrgenommen. Vielmehr machen die Aufgaben den Eindruck, dass die Rechenoperation im Vordergrund steht und die Daten nur den Zweck erfüllen, die Rechenoperation zu üben:

„Häufigste Lehrberufe in Österreich:

Mädchen		Burschen	
Einzelhandel insgesamt	10 305	KFZ-Technik	6 996
Friseurgewerbe (Stylistik)	5 476	Elektroinstallationstechnik	4 987
Büro	5 262	Einzelhandel ingesamt	4 385
Restaurant	2 216	Machinenbautechnik	4 100
Gastronomie	1 853	Tischlerei	2937

Runde die jeweilige Anzahl der Lehrlinge in den einzelnen Lehrberufen (Stand: 2006) auf Hunderter und stelle sie einem geeigneten Balkendiagramm dar!“ (Reichel u. a. 2011, S.137)

Das Problem an dieser Aufgabe ist, dass das Aufgabendesign keinerlei Analyse und Interpretation des Ergebnisses fordert. Beim Vergleich der Lehrberufe handelt es sich zwar um ein für Schülerinnen und Schüler relevantes Thema, nur wird die Betrachtung des eigentlichen Sachverhalts nicht ausreichend motiviert. Der Kontext und die Motivation, genau diese Thematik zu betrachten ist nicht ersichtlich. So zeigen Statistiken, dass Mädchen und Buben immer dieselben Lehrberufe wählen. Die Aufgabe wird hier jedoch so gestellt, dass für die Schülerinnen und Schüler ebenso mit zehn anderen Zahlen gerechnet werden könnte.

Zusammenfassend ist zu erkennen, dass auch im klassischen Stochastikunterricht mit Daten gearbeitet wird, diese werden aber selten als solche wahrgenommen.

3.1.1 Argumente für das Arbeiten mit „lebendigen“ Daten

Um einen authentischen und realitätsnahen Unterricht zu fördern, soll mit lebendigen Daten gearbeitet werden. Aufbauend auf die Analyse der klassischen Stochastikaufgaben lassen sich folgende Punkte zusammenfassen, die eine lebendige authentische Betrachtung von Daten ausmachen und so den datenorientierten Zugang kennzeichnen:

- Den Daten liegt eine realen Situation bzw. eine reale Problemstellung zugrunde.
- Der Kontext muss mitgeliefert und mitberücksichtigt werden (vgl. Wild & Pfannkuch 1999).
- Das Aufgabendesign fördert eine selbstständige Betrachtung des Sacherhalt.
- Die Aufgaben werden von den Schülerinnen und Schüler als relevant wahrgenommen (vgl. Eichler & Vogel 2009).

Reale Daten

Zentral ist, dass es sich dabei um reale Daten handeln soll, die auch von den Schülerinnen und Schülern als solche wahrgenommen werden. Nur so kann Statistik als ein Instrument verstanden werden, das unsere Umwelt zu strukturieren und so besser zu verstehen hilft.

„Reale Daten, die von realen Problemsituationen Zeugnis geben, verleihen der Beschäftigung mit Statistik Legitimität und Bedeutung. Sie liefern einen authentischen Grund für die Beschäftigung mit Statistik, warum und wie Daten erhoben wurden und um die Datenanalyse auf einen Kontext zu beziehen. Der Einsatz realer, die Schüler interessierender Daten ist auch eine gute Methode, sie zum Nachdenken über Daten und relevante statistische Methoden zu bringen." (Engel 2007, S.14).

Kontext

Um den Realitätsbezug der Daten zu betonen, muss der Kontext mitberücksichtigt werden. So lautete bereits der fünfte Punkt des statistischen Denkens „*Verbinden von Kontext und Statistik („integrating the statistical and contextual"):* In den Aufgabenstellungen soll ersichtlich werden, woher die Daten kommen und was der Ausgangspunkt der Erhebung war.

„Daten sind Zahlen mit Kontext. Ohne einen prägenden, für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbaren Kontext werden Daten und die darauf angewendeten stochastischen Modelle weitgehend inhaltsleer bleiben, auch wenn sich die Algorithmik zu diesen Modellen zumindest kurzfristig trainieren lässt" (Eichler 2009a, S.6).

Der Kontext muss am Anfang und am Ende jeder statistischen Betrachtung stehen.

Aufgabendesign

Die Aufgabenstellung soll der selbstständigen Betrachtung und der Kreativität der Schülerinnen und Schüler viel Bedeutung beimessen. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht nur Ergebnisse berechnen, sondern aufgefordert werden, diese auch zu interpretieren. Auf diese Weise wird der Kontext der Daten betont und die Schülerinnen und Schüler lernen dabei mit statistischen Ergebnissen zu argumentieren. Die nun folgenden Arbeitsblätter sind so aufgebaut, dass sich die Schülerinnen und Schüler zum großen Teil selbstständig, teils in Einzelarbeit sowie teils in Gruppenarbeit mit der Materie auseinandersetzen. Das Erheben von Daten ist eine aktive Tätigkeit und soll auch als solche im Unterricht stattfinden. Unterschiedliche Unterrichtsvorschläge (vgl. Eichler 2009b, Riemer & Seebach 2013) zeigen, dass Gruppenarbeit ein wesentlicher Bestandteil der Datenanalyse ist. Denn je konzeptueller Lernen ist und je mehr analytische Fähigkeiten verlangt werden, umso größer ist die

Notwendigkeit zu diskutieren, und die Analyse zu erklären. In der Arbeit in Gruppen lernt man außerdem mathematische Sachverhalte zu kommunizieren (vgl. Johnson & Johnson 1989, S.237 nach Chick & Watson 2001, S.91).

Relevanz für Schülerinnen und Schüler

Daten und Aufgabenstellungen, die in einem direkten Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler stehen, eignen sich am besten um eine selbständige Betrachtung zu anzuregen. "It is essential that the practical and pedagogical advantages of working with data not succumb to an exclusive emphasis on teaching operations. Teachers and developers of curriculum material must exercise imagination in providing data that are meaningful to students." (Moore 1990, S.96). Aufgaben werden als authentisch wahrgenommen, wenn diese eine Bedeutung für die Schülerinnen und Schüler haben. Als Verstärkung der persönlichen Relevanz könnte bei der Aufgabe in Reichel u. a. (2011, S.137) in der Klasse eine Befragung zu den favorisierten Lehrberufen stattfinden. Auf diese Weise wird der persönliche Bezug zur Aufgabe betont und die Schülerinnen und Schüler können ihre eigene Position im Vergleich setzen.

Woher kommen die Daten?

Um Daten mit Bezug auf die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler zu finden, ist es sinnvoll, diese aus deren direktem Umfeld zu gewinnen. Auf diese Weise nehmen die Schülerinnen und Schüler den Kontext automatisch wahr.

Je nach Fragestellung können die Daten entweder von den Schülerinnen und Schülern selbstständig erhoben werden oder es wird mit bereits vorhandenen Datensätzen gearbeitet. Da die Schülerinnen und Schüler beim selbstständigen Erheben von Daten wesentliche statistische Inhalte direkt erfahren, sollen zumindest einmal im Unterricht Daten erhoben werden (siehe 3.2). Dafür können zum Beispiel das Computerverhalten (siehe 3.2.1), Sportaktivitäten oder TV-Gewohnheiten untersucht werden. Auch Experimente stellen eine spannende Möglichkeit dar an Daten zu kommen (siehe 3.2.2).

Wird alternativ zum selbstständigen Erheben von Daten auf bereits vorhandene Datensätze zurückgegriffen, lässt sich ebenso eine Vielzahl im direkten Umfeld der Schülerinnen und Schüler finden. Beispielsweise bietet das Smartphone zahlreiche Möglichkeiten für eine Datenanalyse: Die Größe von Emails kann analysiert werden (vgl. Riemer & Seebach 2013, S.18) oder auf die Dauer von Gespräche kann eingegangen werden (siehe 4.2.3). Ein Vorteil dieser Daten ist, dass sie automatisch vom Handy gesammelt werden und so nur noch analysiert werden müssen. Zudem wird dabei das eigene Nutzungsverhalten der Schülerinnen und Schüler untersucht und analysiert.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Verwendung von Datensätzen aus dem Internet. Dort findet sich eine schier unendliche Menge an Datensätzen zu unterschiedlichen Themen. Es ist jedoch Vorsicht geboten, denn nicht immer kann die Qualität dieser Datensätze garantiert werden. So ist oft nicht ersichtlich, wie die Daten erhoben wurden und ob es sich dabei um eine repräsentative Stichprobe handelt.

Ein für den Unterricht gut geeigneter Datensatz aus dem Internet ist der von der Uni Kassel zur Verfügung gestellte MUFFIN-Datensatz[3]. MUFFINS ist eine Abkürzung für „Median und Freizeitgestaltung für interessanten Stochastikunterricht“. Dabei handelt es sich um eine Online-Befragung, bei der mittlerweile 536 Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe mitgemacht haben. Der Datensatz enthält Ergebnisse zu mehr als 150 Merkmalen (wie Computerverhalten, Hobbys, Größe,…) die im direktem Zusammenhang mit der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler stehen.

Wie aus den vorangegangenen Ausführungen hervorgeht, gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten lebendige Daten zu gewinnen und so einen spannenden Stochastikunterricht zu ermöglichen.

3.1.2 Argumente für das Arbeiten mit simulierten Daten

In gewissen Situationen sind erhobene Datensätze jedoch zu klein, große Datensätze hingegen oft zu „sperrig“. Will man zum Beispiel eine Prognose zur Farbverteilung von Smarties minis machen (siehe 4.3.2) ist es eine etwas kostspielige Angelegenheit, dafür 500 Packungen zu untersuchen.

Hier stellt die Simulation von Daten eine geeignete Alternative dar. Bei der Simulation von Daten werden diese künstlich generiert, was per Hand bzw. in weiterer Folge auch mit dem Computer erfolgen kann. Die Simulation stellt eine Möglichkeit dar ohne großen Zeitaufwand eine große Anzahl an Daten zu erzeugen.

Zudem kann Stochastikunterricht mit Hilfe von Datensimulation experimenteller gestaltet werden. „Die Simulation von Zufallsexperimenten bietet die Möglichkeit eines experimentellen Zugangs im Stochastikunterricht. Die Simulationen entlasten von Kalkül sowie von Theorie, so dass die wichtigen Tätigkeiten der Modellierung und der Interpretation in den Mittelpunkt rücken können.” (Meyfarth 2008, S.1)

---

[3] http://www.mathematik.uni-kassel.de/~luf/elstoch/material/muffins.html (Zugriff: 3.10.2013)

Nach Biehler und Maxara (2007) kommen der Simulation, je nach Realisierung drei Funktionen zu:

- „Simulation zur Repräsentation von Zufallsexperimenten (lern- und motivationspsychologische, epistemologische Sicht)
- Simulation als Werkzeug im Wechselspiel mit analytischen (kombinatorischen) Methoden
- Simulation als Werkzeug, als Methode *sui generis"* (Biehler & Maxara 2007, S.45)

Simulation zur Repräsentation: Die Simulation von Daten hilft, den Stochastikunterricht gegenständlicher und erfahrbarer zu machen. „Im Unterschied zur Geometrie gibt es wenig natürliche Kontexte, um stochastische Erfahrungen zu sammeln. ... Simulation mit schnelleren Zufallsgeneratoren kann hier helfen, die gegenständliche Seite der Stochastik besser und erfahrbarer zu repräsentieren." (Biehler & Maxara 2007, S.46).
Vor allem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die wie bereits oben erwähnt im klassischen Stochastikunterricht sehr formal eingeführt wird, können mit Hilfe von simulierten Daten Sachverhalte wie das Prinzip Zufall (siehe 5.1.1) oder das Gesetz der großen Zahl (siehe 5.2.1) anschaulich verdeutlicht werden und so zu einem tieferen Verständnis beitragen.

Simulation im Wechselspiel mit analytischen Methoden: Simulierte Daten helfen nicht nur, Theorie zu veranschaulichen, sie können umgekehrt auch zur Theoriefindung beitragen: „Zum einen können analytisch bestimmte Ergebnisse mit einer Simulation überprüft werden. Zum anderen kann eine eingangs durchgeführte Simulation Ergebnisse liefern, die Erkenntnisse für andere Ansätze liefert" (Hoffmann 2012, S.17).
So können im Bereich der beurteilenden Statistik mit Hilfe von simulierten Daten erste Kriterien zur statistischen Signifikanz einer Stichprobe gemacht werden (siehe Kap. 6).

Simulation als Methode sui generis
Mit Hilfe von simulierten Datensätzen können auch Lösungsansätze von Problemstellungen gefunden werden, für die bis jetzt keine analytische Lösungsmethode bekannt ist. Auf diese Weise wird einem Vorurteil Vorschub geleistet, dass es in der Mathematik zu jeder Aufgabe eine bekannte Lösungsmethode gibt, die nur angewandt werden muss. „Dieser Ansatz vermittelt ferner ein umfassendes Bild der Mathematik abseits vorherrschender algebraischer/analytischer Herangehensweisen" (Hoffmann 2012, S.17).

Der Computer ist für das Simulieren von Daten wichtig. In weniger als einer Sekunde kann ein Datensatz mit mehr als 10 000 Merkmalsausprägungen erzeugt werden. Bevor jedoch der Computer das Simulieren übernimmt, sollten die Schülerinnen und Schüler dies zunächst per Hand lernen um einzelnen Schritte und Eigenheiten zu verstehen. „Schülerinnen und Schüler müssen zunächst *begreifen*, wie eine Simulation funktioniert oder auf welchen Modellannahmen eine Simulation basiert. Ist dieses Verständnis nicht vorhanden, so läuft eine Simulation ins Leere." (Eichler & Vogel 2009, S.163)
Für das Simulieren per Hand ist zunächst die Einsicht wichtig, dass z. B. eine Urne mit sechs verschiedenen Kugeln bezüglich des Zufalls dieselben Bedingungen mit sich bringt, wie ein Würfel. Biehler und Maxara (2007) sprechen von einem„zufallsäquivalenten Zufallsgerät": „Urne und Würfel sind ‚zufallsäquivalente' Zufallsgeräte. Die Äquivalenz ist in diesem Fall durch die Symmetrien der Geräte und der Versuchsbedingung fast unmittelbar einsichtig. Dies zu verstehen ist für Lernende ein wichtiger Schritt in der stochastischen Begriffsentwicklung." (Eichler & Vogel 2009, S.45)
Das Simulieren wird im Folgenden bei der Untersuchung der Farbverteilung von Smarties zum ersten Mal eingesetzt. Anschließend findet es vor allem im Bereich der Wahrscheinlichkeit weiter Verwendung.

3.1.3 Argumente für das Arbeiten mit fiktiven Daten

Zusätzlich zum Arbeiten mit realen und simulierten Daten gibt es durchaus Aufgaben bei denen das Arbeiten mit fiktiven Daten sinnvoll ist. Das ist vor allem dann der Fall, wenn ein bestimmtes Konzept illustriert oder ein gelernter Algorithmus weiter geübt werden soll. „Die Funktion dieser Aufgabenklasse ist es, Begriffe, Methoden oder den Vergleich von Begriffen und Methoden besonders deutlich zu machen" (Eichler 2009a, S.4).
So können Datensätze konstruiert werden, die z. B. die Robustheit des Median im Vergleich zum arithmetischen Mittels mit einem fiktiven Datensatz besser demonstrieren, als gewonnene Daten (siehe 4.3.3).
Im Sinne eines authentischen Unterrichts sollte jedoch jedes Mal darauf hingewiesen werden, wenn es sich um einen fiktiven Datensatz handelt. Zudem soll nur so weit wie nötig mit fiktiven Datensätzen gearbeitet werden. „Im Sinne eines datenorientierten, auf reale Fragestellungen zielenden Stochastikunterrichts sind konstruierte Datensätze aber nur ein Mittel zum Zweck." (Eichler & Vogel 2009, S.142)

Zusammenfassend lässt sich sagt, dass für einen gelungenen Mathematikunterricht zum großen Teil mit realen Daten gearbeitet werden soll. „Ein intellektuell ehrlicher Unterricht, der Kompetenzen im Anwenden von Mathematik ernst nimmt, verlangt die Thematisierung realer Fragestellungen und die Arbeit mit realen (nicht nur realistischen) Daten“ (Engel 2007, S.14). Die Daten sollen aus für die Schülerinnen und Schüler relevant sein und als authentisch empfunden werden. Der Realitätsbezug und die damit verbunden Authentizität der Aufgaben sind wesentliche Eigenschaften des datenorientierten Zugangs.
Die Simulation von Daten kann zusätzlich zu einer besseren Veranschaulichung beitragen. Vor allem im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es sinnvoll, mit simulierten Daten zu arbeiten, um so Modelle mit Hilfe von Daten zu illustrieren. Auf diese Weise kann auch ein konsistenter Übergang in die beurteilende Statistik erfolgen.
Daher ist es durchaus angemessen, in bestimmten Situationen auf fiktive Daten zurückzugreifen, vor allem wenn es um das Üben der mathematischen Fertigkeiten geht. „In der Phase des Entdeckens sollte überwiegend, wenn nicht ausschließlich, mit realen Datensätzen gearbeitet werden, in der Phase des Systematisierens und insbesondere des Übens könnte stärker auf konstruierte Datensätze zurückgegriffen werden.“ (Eichler & Vogel 2009, S.14)

3.2 Datenerhebung im Unterricht

Wie bereits erwähnt sollen Schülerinnen und Schüler nicht den Umgang mit Daten lernen, sondern, durch eigene Fragen motiviert, auch selber Daten erheben. „Der Hauptzweck des Sammelns von Daten ist es, Antworten auf Fragen zu finden, wenn die Antworten nicht unmittelbar offensichtlich sind. Die natürliche Neigung der Kinder, Fragen zu stellen, muss gefördert werden. Gleichzeitig sollen mit Hilfe der Lehrenden Wege entwickelt werden, um Informationen zur Beantwortung ihrer Fragen zu sammeln. So lernen die Schülerinnen und Schüler wann und wie sie Entscheidungen auf der Grundlage der Daten treffen können, wenn die Antworten nicht unmittelbar offensichtlich sind.“ (NCTM 2001, S.15)
Mit dem Erheben von Daten beginnt Stochastikunterricht bei den Anfängen jeder statistischen Untersuchung: „Eine komplette statistische Untersuchung weist verschiedene Phasen auf, die man kurz mit den Stichworten Problemstellung – Planung der Erhebung – Datenerhebung – Auswertung – Interpretation – Schlussfolgerung und Ergebnisbericht kennzeichnen kann. (…) Es ist wichtig, dass Schüler auch einen solchen kompletten Untersuchungszyklus erfahren.“ (Biehler & Hartung 2010, S.53)

Eine eigenständige Datenerhebung ist wichtig, um statistische Untersuchungen in ihrer Gänze zu verstehen. In Österreich findet sich das Erheben von Daten weder in den Bildungsstandards noch im Lehrplan. Und obwohl Datenerhebung bei den NCTM „standards and principles“ sowie bei der Leitidee „Daten und Zufall“ einen eigenen Aspekt darstellt, gibt es kaum Unterrichtsvorschläge zum Thema (vgl. Eichler & Vogel 2010, S.6).

Eichler und Vogel (2010) sehen dafür zwei Gründe:

- „Aspekte der Erhebung statistischer Daten, d. h. die Fragen, wie man wo und wann an ‚gute’ Daten gelangt, wird als quasi unmathematisches Vorgeplänkel zur eigentlichen Datenanalyse verstanden.
- Obwohl die Erhebung statistischer Daten am Anfang jeglichen statistischen Handelns steht, sind die statistischen Konzepte, die für die Beurteilung der Güte statistischer Daten notwendig sind, fortgeschrittener Natur. In ihrer Komplexität können sie erst von Schülern der Sekundarstufe II durchschaut werden.“ (Eichler & Vogel 2010, S.6)

Hinzu kommt, dass die Kompetenz „selbstständiges Erheben von Daten“ in einer Testsituation sehr schwer überprüfbar ist.

Trotz dieser berechtigten Einwände sprechen viele wichtige Punkte *für* das Erheben von Daten im Unterricht: Moore (1990) nennt dazu verschiedene Gründe wieso Datenerhebung ein wichtiger Teil des Stochastikunterrichts sein soll. So ist zum einen die Analyse von Daten am effektivsten bei Daten mit denen wir bereits vertraut sind. Diese Vertrautheit bewegt uns dazu, sowohl nach erwarteten Eigenschaften, als auch Erklärungen für nicht-erwartete Ereignisse zu suchen.

Zudem ist der Aufbau der Statistik, Daten zu erheben, um Fragen zu beantworten, als konzeptuelle Brücke zwischen Datenanalyse und beurteilende Statistik zu verstehen.

Außerdem gibt es kein besseres Heilungsmittel gegen extreme Einstellung – sei es ungerechtfertigten Zynismus oder unpassendes Vertrauen – als die Erfahrung einer statistischen Untersuchung, die mit einer Frage beginnt und mit einer Antwort endet, die sich auf selbst erhobene Daten stützt: „There are several reasons why producing data is an important part of teaching about data and chance. Data analysis is most effectively carried out on data with which we are intimately familiar, for familiarity suggests both expected features to look for and explanations for unexpected features. Statistical designs for producing data to answer specific questions are the conceptual bridge linking data analysis to classical probability-based inference. And there is no better cure for the extreme attitudes – either unwarranted cynicism or misplaced trust – with which statistical evidence is often greeted than experience that begins with a question and ends with answers based on data that we ourselves have produced.” (Moore 1990, S.111ff)

Einsicht in die Notwendigkeit der Daten (vgl. Wild & Pfannkuch 1999) und Kritikfähigkeit sind wichtige Fähigkeiten, die mit der Erhebung von Daten geschult werden können.

„Recognition for the need of data“
Schülerinnen und Schüler lernen beim Erheben von Daten Fragen auf empirischer Basis zu beantworten: „Der Anreiz für eine Datenerhebung besteht darin, dass auf eine Ausgangsfrage Antworten gesucht werden, die nicht nur auf persönlichen Überzeugungen, Einschätzungen, Wunschvorstellungen oder – etwas bösartiger formuliert – auf Stammtischmeinungen basieren.” (Eichler & Vogel 2009, S.14). Von einer Fragestellung ausgehend sammeln die Schülerinnen und Schüler Daten und können so eine – auf Daten basierende – Aussage treffen.
„Unabhängig vom Sachkontext ist es ein wichtiges Ziel des Stochastikunterrichts, die Sensibilität dafür auszubilden, eine empirische Basis für eigene Überzeugungen zu suchen oder zumindest die Erkenntnis zu gewinnen, dass die eigenen Überzeugungen auf einem (empirisch) unsicheren Grund stehen. Die selbstständige Planung statistischer Erhebungen kann dazu beitragen, dieses Ziel zu erreichen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.14)

Kritikfähigkeit
Des Weiteren wird ein besseres Verständnis für wesentliche statistische Inhalte (wie das Bestimmen von Merkmalen, Merkmalsträger, Merkmalsausprägung, Stichprobe oder Grundgesamtheit) geschaffen, da die Schülerinnen und Schüler diese für die Erhebung selber bestimmen und sich so aktiv mit statistischen Begriffen auseinandersetzen müssen. Mit diesem Verständnis werden Statistiken (z. B. in Zeitungen) mit anderen Augen betrachtet und kritisch(er) durchleuchtet. Kritikfähigkeit ist ein wichtiger Faktor der Datenkompetenz. „Außerhalb der Schule kann man im Allgemeinen davon ausgehen, dass die Schülerinnen und Schüler Entscheidungsprozesse über Publikationen in den Medien aufnehmen, aber nicht selbst Daten erheben werden. Will man aber Statistiken und die darauf beruhenden Aussagen kritisch beurteilen, so benötigt man nicht nur Kenntnisse in statischen Methoden, sondern auch Kenntnisse darüber, was gute und was schlechte Daten, was geeignete Fragestellungen oder sinnvolle Merkmalsdefinitionen sind“ (Eichler & Vogel 2009, S.18). Diese Kenntnisse werden beim Erheben von Daten erlangt.

Da die Datenerhebung noch keinen Einzug in die österreichischen Lehrpläne und Schulbücher gefunden hat, wird in den folgenden Ausführungen detaillierter darauf eingegangen.

Unterrichtsvorschlägen zum Erheben von Daten

Daten können durch Befragungen, Beobachtungen oder Experimente erhoben werden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.10). Zu jeder dieser drei Arten der Datenerhebung wird im Folgenden nun jeweils ein Unterrichtsvorschlag vorgestellt.

Bei den anschließenden Unterrichtsvorschlägen steht (noch) nicht die systematische Analyse der Daten im Vordergrund, sondern es werden Punkte, die für eine Erhebung von Bedeutung sind, geklärt. Besonderes Augenmerk wird auf das Festlegen von Merkmalen und der Stichprobe gelegt.

Konkrete Arbeitsaufträge wie, „Fasse die Ergebnisse in einem Text zusammen!“, „Welcher Flieger hat gewonnen?“ fordern die Schülerinnen und Schüler auf, die Daten zu interpretieren und fördern so eine erste intuitive Begegnung mit der Analyse von Daten. Dabei soll das Bewusstsein geschaffen werden, dass erste Eigenschaften zwar bereits bei der Erhebung der Daten ersichtlich werden, um mit den Ergebnissen argumentieren zu können, müssen die Daten jedoch geordnet und zusammengefasst werden. Auf diese Weise soll die Bedeutung von „Transnumeration“ (vgl. Wild & Pfannkuch 1999) verdeutlicht werden. Welche Form der Aufbereitung die Schülerinnen und Schüler dabei wählen, wird nicht festgelegt. Bei der Analyse werden die Schülerinnen und Schüler bereits intuitiv statistische Kenngrößen wie Minimum, Maximum, absolute bzw. relative Häufigkeit verwenden. Im Plenum können dann Auswertungsmethoden gesammelt und wenn nötig ergänzt werden. So kann beispielsweise das Bilden des Durchschnitts motiviert werden. Auf diese Weise kann das arithmetische Mittel intuitiv vorbereitet werden. Auch mit grafischen Darstellungen kann bereits vor ihrer Formalisierung gearbeitet werden.

Zum Lehrplan an HS bzw. NMS und AHS

Ansetzen könnte man das Erheben von Daten bereits in der fünften Schulstufe, als Einführung zu folgendem Punkt im Lehrplan der 1. Klasse[4]:

„1.4. Arbeiten mit Modellen, Statistik

- Tabellen und grafische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können.“

[4] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (Zugriff: 27.8.2013)

3.2.1. Befragung

Wie viel und wozu benutzt du den Computer?

Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand eines Auszugs aus dem Artikel „Haben Schüler das Rüstzeug für eine technologieintensive Welt?“ (OECD 2006, S.3) einen ersten Eindruck gewinnen, wie mit statistischen Erhebungen umgegangen werden kann. Dabei sollen sie die gestellten Fragen herauslesen und darauf aufbauend in Gruppen selbstständig einen Fragebogen entwickeln. Der Fragebogen wird dann von den Schülerinnen und Schülern einer anderen Gruppe beantwortet.
Anschließend werden die Begriffe Merkmal und Merkmalsausprägung eingeführt und definiert, genauso wie die verschiedenen Skalenniveaus (siehe Arbeitsblatt 2). Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert ihre Fragen der richtigen Skalierung zuzuordnen.
Da bei Befragungen selten alle befragt werden, sollen sich Schülerinnen und Schüler auch mit dem Erheben von Stichproben auseinandersetzen. Hierfür sollen sie eine Befragung der gesamten Schule selbstständig planen (siehe Arbeitsblatt 3).

Didaktischer und methodischer Hintergrund
In den folgenden Ausführungen werden sowohl einige Überlegungen vorgestellt, die zum einen den didaktischen und methodischen Hintergrund erläutern, als auch Punkte behandelt, die zusätzlich mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden können.

Festlegung des Merkmals
Bei einer Befragung ist, wie der Name schon sagt, die Formulierung der Frage zentral. *Wie wird gefragt?* Bei der hier dargestellten Befragung geht es um die Computernutzung. Was aber versteht man genau darunter? Auch ein Smartphone hat mittlerweile Funktionen eines Computers (Internet, Spiele). Soll die Nutzung von Smartphones miteinbezogen und ebenfalls erfragt werden? Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert (siehe Arbeitsblatt 1) genau festzulegen, was sie unter Computernutzung verstehen.
Das kann wie folgt aussehen:

> *Unter Computernutzung versteht man die Zeit, die man vor dem Computer verbringt, egal ob in Bezug auf Internet, Spiele oder andere Programme, zu Hause, sowie in der Schule.*

Bei der anschließenden Befragung werden Merkmale auf ihre Merkmalsausprägung untersucht. Zu beachten ist dabei, dass es sich dabei um Begriffe handelt, die Schülerinnen und Schüler umgangssprachlich verwenden. „Die mathematische Fachsprache bedient sich oft umgangssprachlicher Ausdrücke, die sie für ihren Gebrauch präzisiert“ (Malle 2004 zitiert nach Götz & Stepancik 2012a, S.20). Diese Präzisierung der mathematischen Fachsprache erfolgt auf Arbeitsblatt 2. Weiters werden die verschiedenen Skalenniveaus eingeführt.
Es ist dabei wichtig, ein Verständnis zu schaffen, dass die Skalierung eine wesentliche Auswirkung auf den Analyseprozess hat. Ansonsten besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler darin nur eine Beliebigkeit sehen.
„Die Merkmalausprägungen eines Merkmals lassen sich durch ihre *Skalierung* charakterisieren, die die weitere Analyse der statistischen Daten erheblich beeinflussen (sic!)“ (Eichler & Vogel 2009 S.5). Für die Zeit vor dem Computer lässt sich der Mittelwert bestimmen und sinnvoll interpretieren, bei dem nominal skalierten Merkmal „Computer zuhause ja/nein“ ergibt eine Mittelwertbildung keinen Sinn. Dieser Punkt kann mit den Schülerinnen und Schülern bereits besprochen werden und wird im Kapitel 4 konkretisiert.

Auch auf das Ergebnis der Befragung kann die Skalierung Auswirkungen haben:
„Wie gefragt wird oder welche Merkmalsausprägungen als Antwort zugelassen werden, kann ein Problem darstellen. Während Fragen etwa nach fest definierten Merkmalen wie der Körpergröße (metrische Skalierung) abgesehen von Mess- oder Schätzfehlern unproblematisch sind, kann es insbesondere bei ordinalskalierten Merkmalen Schwierigkeiten geben, wenn die zugelassenen Merkmalsausprägungen nicht eindeutig sind oder eine Frage nicht unbedingt von allen Befragten gleich in gleicher Weise verstanden wird“ (Eichler & Vogel 2009, S.5)
Wird als Merkmalausprägung oft/selten/nie zugelassen, bedeutet für den einen „selten“ vielleicht, was jemand anderer bereits als „oft“ verstehen würde.

Wer wird gefragt?

Eine Befragung zur Computernutzung von Schülerinnen und Schülern lässt sich in einer Klasse noch ohne Probleme durchführen. Was aber passiert wenn die Computernutzung der Schülerinnen und Schüler der gesamten Schule erhoben werden soll? Werden die Daten der ganzen Schule genauso aussehen wie die der Klasse? Eine Erhebung von allen Schülerinnen und Schülern erscheint zu mühsam, deswegen soll nur ein Teil befragt werden. Was muss dabei beachtet werden? Auch mit diesen Fragen sollen sich Schülerinnen und Schüler beschäftigen und so erste Kriterien für die Repräsentativität einer Stichprobe kennenlernen und in ihre Erhebung einfließen lassen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen ein Gefühl dafür entwickeln, dass verschiedene (Neben-)Merkmale Auswirkungen auf das zu beobachtende (Haupt-)Merkmal haben, und lernen, wie bei der Auswahl der Stichprobe diese Auswirkungen so gering wie möglich gehalten werden können. „Während im vorangegangen Abschnitt ein (Haupt-)Merkmal (sic!) definiert wurde, ist die Festlegung der Stichprobe darauf gerichtet, alle diejenigen anderen (Neben-)Merkmale (sic!) der Merkmalsträger zu kontrollieren, die einen Einfluss auf die Ausprägung des Hauptmerkmals haben können.“ (Eichler & Vogel 2010, S.9)

Man kann zum Beispiel aus unserer Erhebung in der Klasse annehmen, dass Geschlecht, Alter und Familie Einfluss auf die Computernutzung haben. So verbringen Buben durchschnittlich mehr Zeit vor dem Computer. Würden wir bei unserer Stichprobe nur Buben befragen, könnte man daraus nicht das Computerverhalten der gesamten Schule ableiten. „Um solche Einflüsse auf das zu erhebende Merkmal zu vermeiden, könnten Schüler (so wie Experten) versuchen, eine repräsentative Stichprobe zu erheben. Repräsentativ meint dabei, dass die Merkmalsträger in der Stichprobe zu allen ihren Merkmalen die gleichen Häufigkeitsverteilung aufweisen wie die Grundgesamtheit.“ (Eichler & Vogel 2010, S.9)

Dazu können folgende Punkte beachtet werden:

- „Sind in der Grundgesamtheit etwa gleich viele Mädchen und Jungen vorhanden? Dann könnte man darauf achten, in der Stichprobe ebenfalls etwa gleich viele Mädchen und Jungen zu befragen.
- Haben in der Schule die Klassenstufen unterschiedliche große Schülerzahlen? Dann könnten in der Stichprobe ebenfalls unterschiedlich große Stichproben aus den Klassenstufen befragt werden.“ (Engel & Vogel 2009, S. 6)

Diese Punkte können mit Schülerinnen und Schülern besprochen werden. Gleichzeitig sollen Schülerinnen und Schüler darauf sensibilisiert werden, dass viele Merkmale (sozialer Status, Interessen, …) einen Einfluss auf die Computernutzung haben, und deren Einflüsse nicht festgemacht werden können bzw. schwer zu erheben sind. Absolute Repräsentativität ist auch für den Experten ein „nicht zu erreichendes Gütemerkmal einer Erhebung.“ (Eichler & Vogel 2010, S.9)

Eine andere Möglichkeit, ein repräsentatives Ergebnis zu bekommen, besteht in der Erhebung einer Zufallsstichprobe, also Schülerinnen und Schüler zufällig auszuwählen. Dabei könnte man zum Beispiel am Schuleingang jede fünfte Person befragen. „Ist die Zufälligkeit gegeben und die Stichprobe groß genug, so kann man davon ausgehen, dass alle Merkmale – nicht nur das eigentlich zu erhebende – in der Stichprobe zumindest annähernd so verteilt sind wie in der Grundgesamtheit.“ (Eichler & Vogel 2010, S.9)

Erste Analyse

Die Schülerinnen und Schüler werden dazu angehalten, die Ergebnisse der Befragung in einem kurzen Text wieder zu geben (siehe Arbeitsblatt 1). Auf diese Weise werden sie ohne weitere Anweisungen dazu animiert, die Daten zusammen zu fassen und aufzubereiten.
Die der folgenden Analyse zugrunde liegenden Daten wurden aus dem MUFFINS-Datensatz[5] entnommen.

Ordnen

Um Ergebnisse aus der Befragung ermitteln zu können, müssen die Daten zuerst einmal geordnet werden. „Das Ordnen der Daten ist nicht explizit in der Aufgabenstellung enthalten, es findet jedoch bereits implizit bei der Erhebung statt. Die Daten zu sortieren ist eine wichtige Tätigkeit *vor* der eigentlichen Analyse, gerade dann, wenn diese Arbeit nicht an den Rechner übertragen wird.“ (Eichler & Vogel 2009, S.24)
Um konkrete Ergebnisse aus den Fragebögen zu entnehmen, müssen diese erst ausgewertet werden. Strichlisten stellen dabei eine gute Möglichkeit dar, die Daten schnell zusammenzufassen und geben automatisch eine erste Übersicht (siehe Abb. 3.1). Für eine einfachere Abzählbarkeit ist es ratsam, jeweils fünf Striche zu bündeln, wobei der fünfte Strich quer gezeichnet wird.

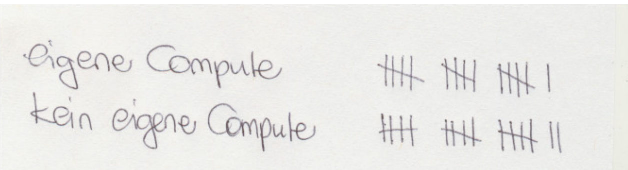


Abb. 3..1 Strichliste eigener Computer bzw. kein eigener Computer

Die Strichliste kann zusätzlich einen ersten grafischen Überblick liefern: „Wenn die Striche in gleichen Abständen gesetzt werden, ermöglicht bereits die Strichliste einen grafischen

5 http://www.mathematik.uni-kassel.de/~luf/elstoch/material/muffins.html (Zugriff: 15.8.2013)

Überblick über die Verteilung der Farben“ (Eichler & Vogel 2009, S.35), vgl. Stängel-Blatt-Diagramm.

Mit Hilfe der Strichliste kann nun sehr schnell die Anzahl ermittelt werden, wie viele der befragten Schülerinnen und Schüler einen eigenen Computer besitzen und wie viele nicht (siehe Abb. 3.2). Die Schülerinnen und Schüler verwenden dabei bereits intuitiv die absolute Häufigkeit. „Ordnet man die Daten hinsichtlich ihrer Merkmalsausprägung, so ergibt sich unmittelbar ein zählender Auswertungsschritt, der im Begriff der absoluten Häufigkeit mündet“ (Eichler & Vogel 2009, S.24). Der Begriff muss noch nicht systematisch eingeführt werden.

Computernutzung

PCeigener	ja	16
	nein	17
Spaltenzusammenfassung		33

S1 = Anzahl ( )

Abb. 3.2.: Anzahl der Schülerinnen und Schüler die einen Computer besitzt bzw. keine Computer besitzt

Aussagen, wie „Mehr als die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler haben keinen eigenen Fernseher im Zimmer“ oder „Weniger als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler nutzt den Computer zum Spielen“, können später als relative Häufigkeit formalisiert werden. Dabei müssen diese verwendeten Kennwerte nur noch mit dem Namen versehen und systematisiert werden.

Aber auch Kennwerte wie arithmetisches Mittel und Median können hier bereits motiviert werden. Beim Erheben der Daten könnte den Schülerinnen und Schüler auffallen, dass Buben mehr Zeit mit dem Computer verbringen als Mädchen. Diese Vermutung soll belegt werden. Dabei ist zu erkennen, dass die Analyse der Daten wesentlich durch ihre Eigenschaften gelenkt wird. Es stellt sich die Frage, wie man die Zahlen am besten zusammenfasst, um mögliche Vermutungen zu belegen.

Computernutzung

		Zeit_Comp
Geschlecht	männlich	13 7,5384615
	weiblich	19 4,4736842
Spaltenzusammenfassung		32 5,71875

S1 = Anzahl ( )
S2 = aMittel ( )

Abb. 3.3.: Durchschnittliche Zeit vor dem Computer. Unterschied Mädchen und Buben

Zwar wird das arithmetische Mittel laut Lehrplan erst formal in der 4. Klasse eingeführt, aber der Durchschnitt kann von den Schülerinnen und Schülern bereits in der 1. Klasse berechnet werden (vgl. Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.20). Mit Hilfe des Durchschnitts lässt sich erkennen, dass die Buben tatsächlich durchschnittlich mehr Zeit vor dem Computer verbringen (siehe Abb. 3.3).

Es geht bei der Analyse noch nicht um die formale Einführung der Kennwerte, vielmehr soll ein erstes Bewusstsein geschaffen werden, wie mit Hilfe von statistischen Methoden argumentiert werden kann.

Arbeitsblatt 1

Befragung

Computernutzung von Schülerinnen und Schülern

Haben Schüler das Rüstzeug für eine technologieintensive Welt?

Erkenntnisse aus den PISA-Studien

Im Rahmen der Erhebung 2003 der Internationalen Schulleistungsstudie PISA der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD) wurden die Schülerinnen und Schüler befragt. Die Ergebnisse zeigten, dass fast alle 15-jährigen Schülerinnen und Schüler in den OECD-Ländern Erfahrung mit der Nutzung von Computern haben; in Bezug auf die Dauer ihrer Computernutzung bestanden jedoch große Unterschiede zwischen den Ländern. Im Vergleich zu PISA 2000 hat sich der Zugang zu Computern im Elternhaus und in der Schule verbessert, und den meisten Schülerinnen und Schülern steht heute sowohl in der Schule als auch zu Hause ein Computer zur Verfügung. Der Zugang zu Computern ist in so gut wie allen Schulen gewährleistet, doch auch zu Hause benutzen den eigenen Angaben zufolge inzwischen mehr Schüler einen Computer.

Dieser Bericht befasst sich mit der Frage, wie die Schülerinnen und Schüler Computer einsetzen, und zeigt, dass sie sie für eine Vielzahl von Zwecken – und nicht nur für Computerspiele – nutzen. Nur eine Minderheit von Schülern gab an, häufig besondere Lernsoftware zu benutzen, aber immerhin die Hälfte der befragten Schüler berichtete, oft die Suchfunktionen des Internets zu nutzen und Textverarbeitungsprogramme zu verwenden, beides Tätigkeiten mit pädagogischem Wert. Die überwiegende Mehrzahl der Schüler fühlt sich sicher bei der Erledigung grundlegender IKT-Aufgaben wie Dateien öffnen, löschen oder sichern, und im Allgemeinen schätzen die Schülerinnen und Schüler ihre Internetfähigkeiten als gut ein. Zwar ist die Zahl der 15-Jährigen geringer, die davon überzeugt sind, komplexe Aufgaben – wie Multimedia-Präsentationen oder Computerprogramme erstellen – ohne fremde Hilfe bewältigen zu können, die meisten meinen jedoch, mit etwas Unterstützung dazu in der Lage zu sein.

(OECD 2006, S.3)

1. Der Text **fasst** einige **Ergebnisse** der Befragung **zusammen**. Leite daraus ab, welche **Fragen** gestellt wurden und welche **Antwortmöglichkeiten** in Frage kamen. Schreibe diese auf!

Umfrage zur Computernutzung

2. **Legt genau fest** was ihr unter Computernutzung versteht!
3. Plant in eurer Klasse ebenfalls eine **Umfrage zur Computernutzung** und führt sie durch!
4. Überlegt euch (zusätzlich zu den Fragen von oben) verschiedene **Fragestellungen**, mit denen ihr Eigenschaften zum Umgang mit dem Computer erheben könnt!
5. **Gestaltet** in Gruppen einen **Fragebogen**, **verteilt** ihn **an eure Mitschüler** und **wertet** eure gewonnen **Daten aus**!
6. **Verfasst** anschließend selber einen kurzen **Text,** der diese Auswertungen zusammenfasst!

Skalenniveaus

Merkmal: Als Merkmal wird in einer statistischen Untersuchung die *Eigenschaft* bezeichnet, die untersucht wird.
Merkmalsausprägung: Ist der *Wert* den das Merkmal annimmt.

Merkmal	**Merkmalsausprägungen**
Geschlecht	männlich, weiblich
Familienstand	ledig, verheiratet, ...
Schulnoten	1, 2, 3, 4, 5
Größe	x cm

Was wird gefragt?
Ihr habt mit euren Fragen verschiedene **Merkmale** auf ihre **Merkmalsausprägungen** hin untersucht. Je nach **Antwortmöglichkeit** haben die Merkmalausprägungen **unterschiedliche Skalierungen**.
Wir unterscheiden **drei Skalierungsarten**:

- Sind die Merkmalsausprägungen Begriffe, die man nicht ordnen kann, dann sind diese **nominalskaliert** (z. B.: Religion, Geschlecht, Ja/Nein Antworten)
- Kann man die Merkmalsausprägungen der Größe nach ordnen, aber die Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen sind nicht definiert, sind die Merkmalsausprägungen **ordinalskaliert** (z. B.: Schulnoten, Fragen mit Antwortmöglichkeiten wie: mehrmals täglich/täglich/wöchentlich/nie)
- Können die Merkmalausprägungen der Größe nach geordnet werden UND sind die Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen definiert, spricht man von **metrisch skalierten** Merkmalsausprägungen (z. B.: Größe, Gewicht, Stundenanzahl)

(vgl. Eichler & Vogel 2009, S.19)

I. Ordne deine Fragen der Skalierungsart zu!
II. Falls du einer Skalierungsart keine Frage zuordnen konntest, überlege dir weitere Fragen!

Nominalskaliert	Ordinalskaliert	Metrischskaliert
Hast du einen eigenen Computer? Antwortmöglichkeit Ja/Nein	Wie oft verwendest du einen Computer zu Hause? mehrmals täglich/täglich/wöchentlich/ nie	Wieviel Stunden am Tag spielst du am Computer? ca. __Stunden

Von der Totalerhebung zur Stichprobe

Die Umfrage in eurer Klasse war eine *Totalerhebung*, da jede Schülerin und jeder Schüler befragt wurde. *Totalerhebungen* sind besonders bei einer großen Anzahl von Menschen zu aufwändig. Deswegen wird oft nur eine *Stichprobe* erhoben, also nur ein Teil der Grundgesamtheit befragt. Wir wollen unsere Stichprobe (die Personen, die wir wirklich befragen) so auswählen, dass wir mit dem Ergebnis der Stichprobe eine Aussage über die Grundgesamtheit machen können.

Zur Planung

Stellt einen Plan auf, wie ihr bei der Befragung an eurer Schule vorgeht!

I. **Wen** wollt ihr für eure Stichprobe befragen?
II. **Kann man** aus dem Ergebnis aus eurer Klasse bereits auf das Computerverhalten der ganzen Schule **schließen**? **Begründe** deine Antwort!
III. Was würde passieren **wenn nur** die Buben/Mädchen befragt werden würden?

3.2.2 Experiment

Welcher Papierflieger fliegt weiter: Modell „Boing“ oder Modell „Airbus“?

Ein Experiment mit Papierfliegern durchzuführen, wird sowohl von Engel (vgl. Engel 2008, S.18), als auch von Eichler & Vogel (vgl. Eichler & Vogel 2010, S.12) vorgeschlagen. Wesentliche Ideen zur Ausarbeitung der Arbeitsblätter werden von Vogel (2009) übernommen, welcher ein Experiment mit Papierfröschen durchführt.

Bei dem vorgestellten Unterrichtsversuch soll ermittelt werden welcher Flugzeugtyp besser fliegt, Modell „Boing“ oder Modell „Airbus“ (siehe Abb. auf Arbeitsblatt 5). Die Schülerinnen und Schüler sollen zuerst eine Vermutung darüber anstellen, welches Flugzeug besser fliegt.

Mögliche Begründungen wären:

- „Modell ‚Airbus’ fliegt besser, da dieses Flugzeug breitere Tragflächen hat und somit mehr Auftrieb erfährt.
- Modell ‚Boing’ fliegt besser, weil das Flugzeug eine dynamischere Form hat als das andere Flugzeug.“

Zudem werden sie dazu aufgefordert, einen genauen Versuchsplan zu erstellen, um zu vermeiden, dass „einfach wild drauf los geflogen wird“ und so der Überblick verloren geht. Ein Versuchsplan „bietet Handlungssicherheit während des Experiments und bildet eine Grundlage für die nachträgliche Reflexion des Versuchsablaufs“ (Eichler & Vogel 2009, S.9).

Im Anschluss werden die Flieger gefaltet und die Daten erhoben. Die Bastelanleitungen für die einzelnen Flieger findet man im Internet[6]. Die Daten sollen dann von den Schülerinnen und Schülern – ohne ihnen dafür weitere Anweisungen zu geben – so aufbereitet werden, dass sie danach eine Aussage darüber abgeben können, welcher „Flugzeugtyp“ besser fliegt. Die Leitfragen (siehe Arbeitsblatt 4) sollen Schülerinnen und Schülern wichtige Anhaltspunkte für den Versuchsplan liefern.

Didaktischer und methodischer Hintergrund

„Stochastik lebt von Experimenten“ (Riemer 2009, S.20). Experimente stellen im Stochastikunterricht eine zentrale Funktion dar, um Sachverhalte zu untersuchen und Daten

[6] http://www.besserbasteln.de/Origami/papierflieger.html (Zugriff: 17.8.2013)

zu gewinnen. Auf diese Weise kann oft mit wenig Aufwand Stochastikunterricht spannender gestaltet werden.

Mit Hilfe eines Experiments wird ein bestimmter Sachverhalt künstlich herbeigeführt und untersucht. „Ein Experiment wird mit dem Ziel durchgeführt, Vermutungen über Wirkungszusammenhänge zu einem beobachteten Phänomen überprüfen und nach Möglichkeit Gesetzmäßigkeiten ableiten zu können.“ (Eichler & Vogel 2009, S.8)

Aufstellen einer Hypothese: Zuerst soll eine Vermutung über den Ausgang des Experiments gemacht werden. Diese Hypothese soll notiert und zudem begründet werden, damit sie später mit dem Ergebnis des Experiments verglichen werden kann. „Vorabvermutungen, d. h.: Hypothesen, zum Ausgang eines Experiments sind von besonderer Wichtigkeit, weil sie die Referenz für den Erkenntnisgewinn durch das Experiment bilden.“ (Eichler & Vogel 2009, S.8)
Es ist nicht im Vorhinein klar, welches der beiden Flugzeuge besser fliegt. Aus diesem Grund werden die Hypothesen der Schülerinnen und Schüler unterschiedlich ausfallen. Dies soll das Interesse dafür wecken, die eigene Vermutung anhand von Messungen, also dem Erheben von Daten, zu bestätigen. Das „Erkennen der Notwendigkeit von Daten“ („recognition of the need for data“) wird somit gefördert.

Festlegung des Merkmals
Bei diesem Experiment soll ermittelt werden, welches Flugzeug besser fliegt. Dafür muss jedoch zuerst festgelegt werden, was man unter „besser fliegen“ versteht: Geht es dabei darum besonders weit zu fliegen, oder bedeutet es, einem vorgegebenen Ziel so nahe wie möglich zu kommen. Die Erstellung des Versuchsplans soll die Schülerinnen und Schüler auf eine genaue Definition aufmerksam machen.
Als Merkmalfestlegung eignet sich die genaue Festlegung der Messung. Das könnte so aussehen:

> *Als Flugweite gilt die Entfernung von der festgelegten Startlinie – von wo der Flieger geworfen wird – bis zu dem Punkt, an dem der Flieger am Boden aufkommt -wobei eventuelles Rutschen nicht berücksichtigt wird. (vgl. Eichler & Vogel 2010, S.9)*

Es ist wichtig, dass die Messbestimmungen während des Experiments nicht verändert werden.

Auswahl der Stichprobe

Bei der Festlegung der Stichprobe besteht ein großer Unterschied zur Befragung. Bei einer Befragung ist zu erwarten, dass die Merkmalsausprägung bei einer Wiederholung, zumindest für einen bestimmten Zeitraum, gleich bleibt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.9). So ändert sich die durchschnittlich vor dem Computer verbrachte Zeit über einen gewissen Zeitraum nicht.

Bei wiederholtem Flug wird sich „die Ausprägung des Merkmals“ Flugweite von Flug zu Flug „aufgrund nicht kontrollierbarer Einflüsse ändern“ (Eichler & Vogel 2009, S.9). Die Variabilität der Daten (vgl. Wild und Pfannkuch 1999) wird hier augenscheinlich. Die Frage „Warum fliegt derselbe Papierflieger, wenn er von derselben Person geworfen wird nicht jedes Mal gleich weit“ (vgl. Arbeitsblatt 4) soll die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, sich mit der Variabilität von Daten auseinander zu setzten.

Bei der Auswahl der Stichprobe ist entscheidend, dass die Variabilität wird nicht nur von „nicht kontrollierbaren Faktoren“ beeinflusst, sondern auch von „systematischen Einflüssen“, deren Auswirkung minimiert werden kann. Dabei kann es sich zum Beispiel um Messfehler, unterschiedlich gute Falttechniken oder das Geschick des „Piloten“ handeln.

Die Schülerinnen und Schüler werden auf Arbeitsblatt 4 darauf hingewiesen und sollen selbstständig überlegen, welche Faktoren die Flugweite beeinflussen. So ist durchaus sinnvoll, dass eine bestimmte Person die Flugzeuge faltet, eine andere Person die Weite misst und wieder jemand anderer die Flugzeuge fliegen lässt. Auf diese Weise wird der Einfluss von unterschiedlich guten Flugtechniken auf das Resultat vermieden.

Erste Analyse der Daten

Um für die Analyse eine größere Anzahl von Daten zur Verfügung zu haben, werden die Daten der Schülerinnen und Schüler in der Klasse gesammelt. Sie werden dazu aufgefordert nur einen Wert der fünf erhobenen Daten als repräsentativen Wert auszuwählen (siehe Arbeitsblatt 5). Hier besteht der didaktische Nutzen vor allem in der Diskussion darum, *welcher* Wert ausgewählt werden soll. Eine mögliche Auswahl wäre z. B. den letzten Wert zu nehmen, mit der Begründung dass man eine gewisse Übungszeit braucht, um einen Papierflieger richtig zu werfen. Eine andere Möglichkeit wäre den mittleren Wert zu verwenden. Auf diese Weise würden sich die Schülerinnen und Schüler bereits intuitiv mit der Repräsentativität von Daten auseinandersetzen.

Die gesammelten Daten sollen die Schülerinnen und Schüler dann in einem Datenbild veranschaulichen. „Vor der Verwendung von Standardgrafiken bot es sich an, eigene

Datenbilder entwerfen zu lassen. So konnte das Problem einer „guten“ Visualisierung thematisiert werden.“ (Vogel 2009, S.24)

Aus der Tabelle 3.1 können je 30 Flugweiten der beiden Modelle abgelesen werden.

Modell: Airbus	Modell: Boing
267; 327; 366; 224; 223; 211; 246; 289; 307; 297; 265; 205; 404; 400, 437, 332; 418; 233; 187; 363; 350; 543; 279; 342; 431; 199; 204; 339; 393; 144	397; 431; 477; 522; 496; 333; 465; 455; 490; 460; 490; 556; 628; 813; 514; 409; 453; 503; 416; 553; 293; 319; 432; 421; 393; 438; 554; 505; 419; 603

Tab. 3.1: Flugweiten von Modell „Boing“ und Modell „Airbus“ in cm

Ordnen der Daten

Um die aus dem Experiment gewonnene Vermutung, dass das Modell „Boing“ das Flugzeug mit den größeren Weiten ist, zu begründen, müssen die Daten aufbereitet werden. Es bietet sich an, bei dieser Aufgabe das Stängel-Blatt-Diagramm einzuführen (siehe Abb. 3.4). Mit dem

Stängel-Blatt-Diagramm können metrisch skalierte Daten geordnet und übersichtlich dargestellt werden. „Der Vorteil dieser Darstellungsart ist, dass sich alle Daten rekonstruieren lassen, indem die Stammziffern mit allen Blattziffern verknüpft werden und dennoch die Form eines horizontal ausgerichteten Histogramms vorhanden ist, wenn darauf geachtet wird, dass die Ziffern annähern gleich große Flächen einnehmen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.37)

Modell „Airbus“		Modell „Boing“	
0		0	
1	44; 87; 99;	1	
2	04; 05; 11; 23; 24; 33; 46; 65; 67; 79; 89; 97	2	93
3	07; 27; 32; 39; 42; 50; 63; 66; 93;	3	19; 33; 93; 97
4	00; 04; 18; 31; 37	4	09; 16; 19; 21; 31; 32; 38; 53; 55; 60; 65; 77; 90; 90; 96
5	43	5	03; 05; 14; 22; 53; 54; 56
6		6	03; 28
7		7	
8		8	13

Abb. 3.4: Stängel-Blatt-Diagramm von jeweils 30 Flugweiten

Außerdem kann bereits Vokabular zur Beschreibung von Verteilungen entwickelt werden: Bei den erhobenen Daten fällt zum Beispiel auf, dass ein Wert viel größer ist. Dabei handelt es sich um einen „Ausreißer“. Man kann überlegen, ab wann ein Wert ein Ausreißer ist, und darüber diskutieren, wie dieser zustande gekommen ist.

Zwar erkennen Schülerinnen und Schüler meist sehr schnell welcher Flieger besser war, es fällt ihnen jedoch schwer, Kriterien zu benennen, mit denen dies belegt werden kann (vgl. Vogel 2009, S.24).

Um zu argumentieren, welches Modell besser war, könnten beispielsweise die Weiten in gute und schlechte aufgeteilt und abgezählt werden. Dabei muss vorher festgelegt werden, ab wann man von einer „gute Weiten" spricht. In diesen Fall kann man sich z. B. ab 400 cm von einer „guten Weite" sprechen.

papierflieger

	Flugzeug		Zeilen-zusammenfassung
	a	b	
Weite	5	25	30

S1 = Anzahl (Weite > 400)

Abb. 3.5: Anzahl der Flüge die weiter als 400 cm waren

Die Auswertung zeigt, dass das Modell „Boing" 25 Mal weiter als 400 cm geflogen ist, Modell „Airbus" hingegen nur fünf Mal (siehe Abb. 3.5). Aus diesem Grund kann Modell „Boing" zum Sieger gekürt werden.

Eine andere Möglichkeit wäre, mit der durchschnittlichen Flugweite zu argumentieren (siehe Abb. 3.6). Auch hier ist sowohl der Median als auch das arithmetische Mittel größer und das Modell „Boing" ist als klarer Sieger zu erkennen.

papierflieger

	Flugzeug		Zeilen-zusammenfassung
	a	b	
Weite	307,5 302	474,6 462,5	391,05 402

S1 = aMittel ( )
S2 = Median ( )

Abb. 3.6: Mittlere Weite (arithmetisches Mittel sowie Median) der beiden Flugzeugtypen

Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei das Bewusstsein entwickeln, dass es verschiedene statistische Methoden gibt, um Daten zusammen zu fassen.

Das Sammeln der Daten kann auch andere Fragestellung anregen, wie: Wer war der beste Pilot bzw. die beste Pilotin?

Arbeitsblatt 4

Experiment

Welches Flugzeug fliegt am besten?

- Gib, bevor ihr zu bauen beginnt, eine **Vermutung** ab: **Welcher Flieger** glaubst du fliegt am besten? Begründe deine Vermutung

Um deine Vermutung zu bestätigen oder zu widerlegen führen wir ein **Experiment** durch.
Bevor es losgeht, legt in Gruppen einen genauen **Versuchsplan** an! Dieser sollte folgende Punkte beinhalten:

1. Legt fest, was genau ihr unter **„gut“ fliegen** versteht. Geht es nur um die **Weite** oder auch um die **Präzision** (also wie nahe ein Flieger bei einem festgelegten Ziel landet)?

2. Bestimmt genau, **wie gemessen** wird und **welches Messinstrument** ihr verwendet.
   !**Ändert** eure Messbestimmungen während des **Experiments NICHT!**

3. Beachtet, dass **verschiedenen Faktoren** das Ergebnis beeinflussen. Überlegt euch, **wie vermieden werden könnte**, dass diese Einflüsse das Ergebnis verfälschen.

4. **Warum** fliegt derselbe Papierflieger, wenn er von derselben Person geworfen wird, nicht jedes Mal gleich weit?

5. **Einigt** euch in der **Gruppe**,
   - **wer** das **Flugzeug** fliegen lässt
   - **wer** die **Flugweite** misst
   - **wer** das **Protokoll** führt
   - **wie** oft geflogen werden soll

Wenn ihr alle Punkte behandelt und so euren Versuchsplan aufgestellt habt, könnt ihr mit dem **Falten beginnen.**

! Falte genau nach Anleitung!

Messprotokoll

(Quelle: www.besserbasteln.de)

Flugzeugtyp: „Boing“
PilotIn:
Messung:
Protkoll:

Flug	**Weite**
Flug 1	
Flug 2	
Flug 3	
Flug 4	
Flug 5	

Flugzeugtyp: „Airbus“
PilotIn:
Messung:
Protkoll:

Flug	**Weite**
Flug 1	
Flug 2	
Flug 3	
Flug 4	
Flug 5	

I. **Wählt** aus den fünf Flügen **einen Wert aus**, der für den Wettbewerb zählt!
   a. Begründet eure Auswahl!
II. Schreibt eure **Weite** an die **Tafel**, so sehen auch alle eure Mitschüler und Mitschülerinnen den Wert!
III. Entwerft aus allen Daten ein **Datenbild!**
IV. Zu welcher **Schlussfolgerung** kommt ihr: **Welches Modell war das bessere Flugzeug**? Begründet!

3.2.3 Beobachtung

Wie ist das Wetter diesen März?

Das Wetter eignet sich besonders gut für eine Beobachtung, da wir tagtäglich damit konfrontiert sind. Auch Eichler und Vogel schlagen eine Wetterbeobachtung als Datenerhebung vor (vgl. Eichler & Vogel 2010, S. 12).
Die Schülerinnen und Schüler sollen die Beobachtung selbstständig planen. Sind die Eckdaten abgeklärt, wird über einen festgelegten Zeitplan das Wetter beobachtet und dann analysiert (siehe Arbeitsblatt 6).

Didaktischer und methodischer Hintergrund
Was wird beobachtet? Das Wetter besteht aus vielen Komponenten, wie Niederschlag, Sonnenstunden, Temperaturen oder Luftdruck. Die Schüler und Schülerinnen müssen genau festlegen, was sie bei ihrer Beobachtung messen werden. „Bei einer systematischen Beobachtung wird die Aufmerksamkeit auf eine bestimmte Situation oder einen bestimmten Prozess gerichtet. Ziel ist es, im Beobachtungsprozess Daten zu sammeln die Auskunft über die interessierende Frage geben." (Eichler & Vogel 2009, S.12)
Zu beachten ist, dass einige Merkmale im Rahmen der Schulbeobachtung nicht – oder nur mit hohem Aufwand – untersucht werden können: So müsste für die Beobachtung der Anzahl der Sonnenstunden das Wetter den ganzen Tag lang beobachtet werden.
Wie bei der Befragung muss das zu beobachtende Merkmal und dessen Skalierung festgelegt werden. Wird die Temperatur und Niederschlagsmenge beobachtet, handelt es sich dabei um metrisch skalierte Daten. Wird hingegen nur notiert, ob es zwischen zwei Tagen Niederschlag gegeben hat oder nicht, sind diese Daten nominalskaliert. Auch eine Einteilung in viel/wenig/kein Niederschlag (Ordinalskalierung) wäre möglich, dafür muss vorher jedoch festgelegt werden, bei welcher Niederschlagsmenge man von viel Niederschlag spricht sowie ab wann es nur wenig ist. Das Merkmal muss *vor* der Beobachtung genau festgelegt werden und schafft so einen genaueren Rahmen für die Beobachtung.

Stichprobe
Da bei einer Beobachtung „das Auftreten von Merkmalsträgern in der Regel nicht kontrolliert werden kann, ist insbesondere die örtliche und zeitliche Festlegung der Stichprobe wichtig" (Eichler & Vogel 2010, S.9).

Beim Wetter ist das besonders gut ersichtlich: So macht es einen großen Unterschied ob die Temperatur am Morgen oder zu Mittag gemessen wird: „Gestern war es um 6:50 kälter als heute um 13:20“ impliziert nicht, dass das Wetter gestern schlechter war. Auch die Tatsache, dass es heute in Oslo kälter ist als in Wien ist mehr auf die geographische Lage zurückzuführen und kann so nicht einfach als „schlechteres Wetter“ bewertet werden.
Diese Punkte sollen mit Schülerinnen und Schülern besprochen werden. Für die Wetterbeobachtung ist es sinnvoll eine kleine Wetterstation vor der Schule aufzustellen. Dort werden dann zum Beispiel in der großen Pause über einen bestimmten Zeitraum die Daten abgelesen.

Erste Analyse der Daten

Wetterdaten liefern „nahezu unüberschaubar viele Ansatzmöglichkeiten, um Datenanalyse zu betreiben“ (Eichler & Vogel 2009, S.50): Die Daten können, je nach beobachtetem Merkmal (Temperatur, Niederschlag, Luftfeuchtigkeit) auf verschiedene Weise grafisch dargestellt und Lageparameter berechnet werden. Wie bei den beiden anderen Unterrichtsvorschlägen sollen die Schülerinnen und Schüler die gewonnenen Daten ohne weitere Anweisungen analysieren.
In unserem Fall wurde der März als besonders kalt empfunden. Es bietet sich an die erhobenen Daten mit den Wetterdaten aus dem Vorjahr zu vergleichen um das subjektive Empfinden empirisch zu belegen. Verschiedene Onlineportale liefern Wetterdaten der letzten Jahre von zumindest allen österreichischen Bezirkshauptstädten. Auf diese Weise wird ein annähernder Vergleich möglich. Anhand dieses Beispiels wird verdeutlicht, wie die Daten selbst häufig den weiteren Auswertungsschritt setzen. Dabei fordert die Aussage „Dieser März war besonders kalt“ einen Vergleich mit den Daten der Vorjahre. Es bestätigt sich der Verdacht, dass es im März 2012 deutlich wärmer war als im Jahr 2013 (Tab. 3.2). Wichtig ist hier wieder, dass dieser Verdacht auch verbalisiert werden kann. „Wie genau hast du festgestellt, dass es 2013 im März besonders kalt war?“ Die Daten müssen dafür zusammengefasst werden.
Die Schülerinnen und Schüler können dazu animiert werden, einen Funktionsgrafen zu zeichnen, der die Temperaturen von März 2013 und März 2012 wiedergibt (siehe Abb. 3.7). Dabei ist schnell zu erkennen, dass es 2013 im März an 27 Tagen kälter war als im Jahr davor.

wetter märz

	Datum	Temp_2012	Temp_2013	Niedersch_12	Niedersch_13	<neu
1	1	14	3	0,4	0	
2	2	15	3	0	0	
3	3	8	4	0	0	
4	4	7	5	0	0	
5	5	8	7	0	0	
6	6	5	14	0	0	
7	7	4	14	0	0	
8	8	2	10	1,4	0	
9	9	8	9	0	0,2	
10	10	11	10	0	0	
11	11	10	10	0	0	
12	12	11	4	0,4	0	
13	13	11	8	0,8	0,6	
14	14	10	-2	0	1	
15	15	11	0	0	0	
16	16	13	0	0	0	
17	17	18	2	0	0	
18	18	21	0	0	2,8	
19	19	12	7	0	0,8	
20	20	13	11	0	0	
21	21	17	7	0	0	
22	22	18	1	0	0	
23	23	19	0	0	0	
24	24	19	-3	0	0,4	
25	25	19	-2	0	4	
26	26	14	-3	0	3	
27	27	17	-1	0	0,2	
28	28	19	2	0	0	
29	29	18	5	3	0,2	
30	30	9	2	13	5,6	
31	31	13	1	5,6	12,4	

Tab. 3.2:Wetterdaten von März 2012 sowie von März 2013

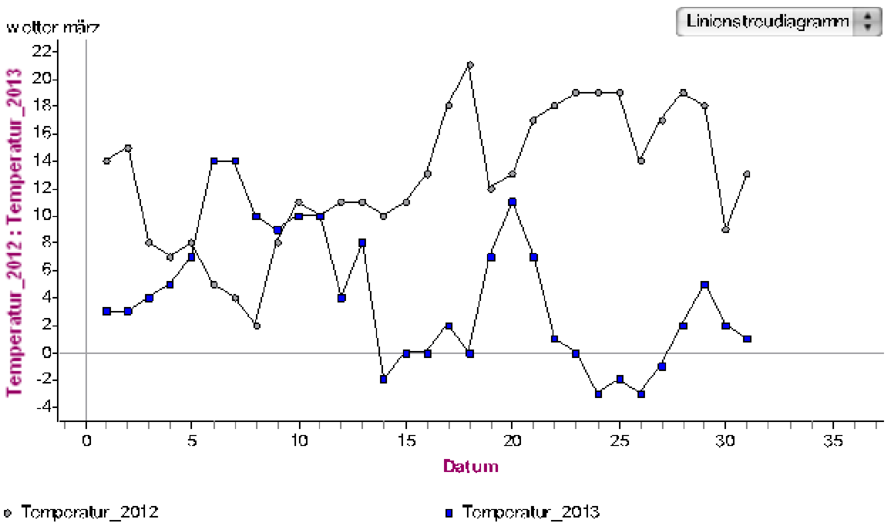


Abb. 3.7.: Grafische Darstellung der Wetterdaten von März 2012 und März 2013

Eine weitere Möglichkeit wäre, erneut das arithmetische Mittel beider Datensätze zu berechnen und diese miteinander zu vergleichen. Daraus ergeben sich folgende Werte:

Durchschnittstemperatur März 2012: 12,7°C

Durchschnittstemperatur März 2013: 4,1°C

Die Werte bestätigen den Verdacht, dass es im März 2013 viel kälter war als 2012. Aber kann daraus der Schluss gezogen werden, dass es im März 2013 besonders kalt war?

Um diese Frage zu beantworten werden nun beide Durchschnittswerte mit einem längerfristigen Durchschnittswert im März verglichen. Laut der Homepage der ZAMG liegt die Durchschnittstemperatur im März bei 5,3°C. Das ergab sich aus der Berechnung der Wetterdaten von 1981 bis 2001[7]. Das bedeutet, dass die Durchschnittstemperaturen im März 2013 gar nicht so weit unter dem Durchschnitt lagen. Im März 2012 hingegen war es viel wärmer als im Mittel.
Diese Aufgabe verdeutlicht, dass verschiedene Möglichkeiten der Analyse angewendet werden können und diese zum Teil auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Zudem wird ersichtlich, dass sich die Daten aus dem arithmetischen Mittel im Gegensatz zur grafischen Darstellung mit Hilfe eines Punktdiagramms nicht mehr rekonstruieren lassen. Auf diese Weise kann der Reduktionscharakter des arithmetischen Mittels bereits verdeutlicht werden.

Weitere Unterrichtsvorschläge zum Thema Wetter liefern Eichler bzw. Eichler & Vogel: Eichler (2009b) geht der Gültigkeit des Spruchs „April April, der macht was er will“ nach und entwickelt so eine Aufgabe, die „die Streuung oder Variabilität statistischer Daten in den Mittelpunkt des Analyseprozesses“ (Eichler 2009b, S.10) stellt.
Im Bereich der informellen beurteilenden Statistik kann man Fragen nachgehen wie: „ab wann spricht man von einem überdurchschnittlich warmen Sommer?“ (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.224)

Anhand der vorgestellten Unterrichtsvorschläge soll verdeutlicht werden, dass das Erheben von Daten eine gute Einführung in das grafische Darstellen von Daten (HS/NMS- bzw. AHS-Lehrplan 1. Klasse), sowie in das Berechnen von Lageparametern (HS/NMS- bzw. AHS-Lehrplan 2. Klasse) darstellt.
Das Erheben von Daten soll sich nicht nur auf die Anfänge stochastischer Untersuchungen beschränken. Es kann als Instrument verstanden werden, um empirisch belegte Antworten auf Fragen zu finden und soll daher auch in höheren Schulstufen immer wieder verwendet werden.

---

[7] http://www.zamg.ac.at/cms/de/klima/informationsportal-klimawandel/daten-download/klimamittel (Zugriff: 20.7.2013)

Beobachtung

Wie ist das Wetter im März? Wie können wir das Wetter messen?

> Heute sind wir vom Wetter fast unabhängig – und dennoch ist es immer ein Gesprächsthema, bei vielen bestimmt es die Tagesform, und am Ende der Nachrichten ist es die Wettervorhersage, die das Weltgeschehen wieder etwas unwichtiger erscheinen lässt und uns auf den nächsten Tag einstimmen soll. Warum auch immer – das Wetter interessiert uns.
>
> www.wdr.de

Wir bauen eine Wetterstation

- Überlegt euch, **was** genau ihr messen wollt und **welche Messinstrumente** ihr dafür braucht!
- Um wirklich **gültige und vergleichbare Wetterdaten** zu bekommen, muss festgelegt werden, **wo** und **wann** gemessen wird.
- Überlegt euch, über welchen **Zeitraum** ihr das Wetter beobachten wollt!
- **Notiert** eure **Daten** in **Tabellen** und entwerft dafür ein Daten-Bild!
- **Vergleicht** eure **Daten** mit der **Wettervorhersage für den Tag** und notiert die Unterschiede!
- **Vergleicht** die **Daten mit den Daten** des **Vorjahres**!

4 Die Analyse der Daten

Vor dem Hintergrund der didaktischen Theorien und dem Wissen über die Bedeutung von lebendigen Daten soll nun die Analyse der Daten genauer betrachtet werden.
Bei der Erhebung von Daten konnten die Schülerinnen und Schüler bereits erfahren, dass konkrete Aussagen über Daten nur durch eine Analyse gemacht werden können. Dafür müssen die Daten aufbereitet und interpretiert werden um so den Blick frei zu machen auf die Informationen, die in den Daten liegen.
Ein wesentliches Merkmal der Stochastik ist, dass es dafür eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Analyse gibt. Da es sich bei der Aufbereitung häufig um zeitaufwändige Verfahren handelt, spielt dabei der Computer eine zentrale Rolle.
Im weiteren Verlauf werden die verschiedenen Möglichkeiten der Analyse von Daten mitsamt dazu passenden Unterrichtsvorschlägen vorgestellt.

4.1 Transnumeration

Daten werden gesammelt um Informationen zu verschiedenen Sachverhalten zu erhalten. Aus dem rohen Datenmaterial lässt sich jedoch oft noch sehr wenig erkennen. Weiters reichen die Daten allein für eine fundierte Begründung erster Erkenntnisse meistens nicht aus. So wird zum Beispiel bereits während des Experiments ersichtlich, dass das Modell „Boing“ tendenziell größere Weiten erreicht (siehe Tab. 3.1), aber die Argumentation: „Modell ‚Boing’ ist das bessere Flugzeug, weil die Werte größer sind“ scheint unbefriedigend und ist auch nicht für alle Werte richtig. Um fundierte Aussagen über mögliche Muster und Strukturen der Daten zu machen, müssen diese aufbereitet werden. Das Stängel-Blatt-Diagramm lieferte für das „Flieger-Experiment“ eine erste Veranschaulichung der Daten (siehe Abb. 3.4).

Laut Chick (2004a) ist es eine der wichtigsten Aufgaben von Statistik, Belege zu liefern für die Charakteristika, die in den Daten liegen: „One of the important purposes of statistics is to provide evidence for stories that are contained within data sets. All the calculations or representations that are produced – from simple frequency tables to correlation coefficients to *t*-tests and more advanced techniques – are intended to present the data in such a way that the reader is convinced about the message within. The process of taking a data set and producing a more informative representation of it is vitally important.“ (Chick 2004a, S.1)

Für die Aufbereitung von Daten gibt es eine Vielzahl an Methoden wie das Darstellen in Tabellen, das grafische Darstellen, das Berechnen von Lageparameter, wie Mittelwerte oder Streuungsmaße. Wild und Pfannkuch (1999) sprechen in diesem Zusammenhang von „Transnumeration“ (siehe 1.2).
Ein wesentliches Charakteristikum der Stochastik ist, dass es nicht „die eine Lösungsmethode“ gibt, sondern „geeignete“ und weniger gut geeignete Methoden. „So gibt es zu jedem Realmodell, das aus den erhobenen statistischen Daten besteht, verschiedene statistische Modelle (bzw. statistische Methoden) der Aufbereitung. Diese unterschiedlichen Möglichkeiten lassen sich nicht in „richtig“ und „falsch“, sondern nur in „sinnvoll, gewinnbringend“ und „weniger sinnvoll, weniger gewinnbringend“ sortieren. Das heißt aber, dass die Schülerinnen und Schüler im Laufe der Zeit ein Verständnis dafür entwickeln sollen, welche Methode in einem bestimmten Sachkontext sinnvoll oder gewinnbringend sein kann.“ (Eichler & Vogel 2009, S.57)

Der Kontext spielt bei der Wahl der Methode eine wesentliche Rolle. „Der Gedanke der flexiblen Datenaufbereitung steht damit in einem engen Wechselverhältnis zum fünften Aspekt des statistischen Denkens, der *steten Verbindung der statistischen Arbeit mit dem Sachkontext.* Ohne diesen Sachkontext ist häufig nicht ersichtlich, warum eine statistische Methode weniger sinnvoll sein soll als eine andere. Ist dagegen ein konkreter Sachkontext mit den Daten verbunden, so kann man dies beurteilen” (Eichler & Vogel 2009, S.55). Sollen z. B. bei einer Wahlanalyse Koalitionsmöglichkeiten illustriert werden, eignet sich am besten ein Kreisdiagramm (siehe Abb. 4.1 rechts), da dieses die Anteile zur Grundgesamtheit am besten darstellen. Anhand von Balken- und Stabdiagrammen kann das Verhältnis zwischen den Parteien sowie stärkste Parteien dargestellt werden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.36).

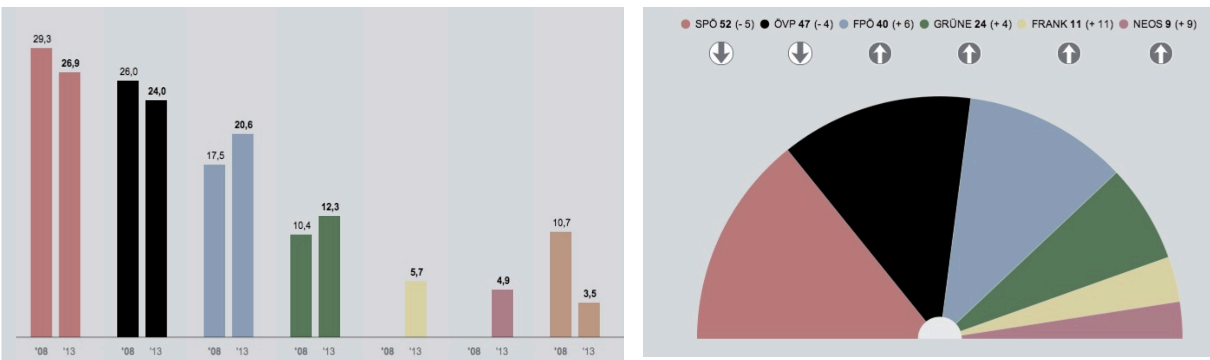


Abb. 4.1.: links: Balkendiagramm, rechts: Kreisdiagramm der Nationalsratswahl 2013 (Quelle: derstandard.at 01.10.2013)

„Schließlich kann die Anwendung verschiedener Methoden auch die Richtung der Datenanalyse verändern, z. B. dann, wenn sich Ergebnisse abzeichnen, die im Widerspruch zu vorab bestehenden Hypothesen stehen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.55)

Das Aufbereiten der Daten ist für Schülerinnen und Schüler mit einigen Schwierigkeiten verbunden, wie einige Studien aus dem angloamerikansichen Raum zeigen:
So ergab eine Studie von Chick und Watson (2001), dass das sinnvolle Aufbereiten der Daten Schülerinnen und Schülern schwerer fällt als das Interpretieren von aufbereiteten Datensätzen.
Schülerinnen und Schüler wissen oft nicht, wie die Daten am besten veranschaulicht werden können.
Studien zeigen außerdem, dass Schülerinnen und Schüler ohne eine erste Einführung kaum zu grafischen Darstellungen greifen, sondern primär andere Repräsentationsmethoden wählen: “During the first session, when the students were exploring the data and recording some of the things that interested them, very few came up with the idea of using a graphical representation to depict the data. Some wrote out information from a subset of the cards, others recorded some summative information in tables, whereas others verbalized.” (Chick &Watson 2001, S.106)

Aus diesem Grund ist es besonders wichtig, Schülerinnen und Schüler mit einem breiten Repertoire an Repräsentationsmöglichkeiten vertraut zu machen und sie auf mögliche Vor- und Nachteile hinzuweisen.
„Success with representation – particularly when messages in the data are complex, such as with association – is clearly dependent on knowing what types of representation are useful and having a range of techniques for transforming data into forms conducive to such representations.” (Chick 2004b, S.168)
Schülerinnen und Schüler müssen darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Aufbereitung der Daten nicht nur dazu dient, Informationen anschaulich darzustellen, sondern auch dafür, dass Informationen, die in den Daten liegen, oft erst ersichtlich werden, wenn die Daten gut aufbereitet sind.

4.2 Technische Hilfsmittel beim Aufbereiten von Daten

Datenverarbeitungsprogramme wie Excel und Fathom spielen bei der Aufbereitung von Daten eine wesentliche Rolle.

Das Berechnen von Median, arithmetischen Mittel oder Standardabweichung ist vor allem bei großen Datensätzen oft sehr zeitaufwändig. Der Computer schafft diese Berechnungen in einem Bruchteil dieser Zeit und so bleibt mehr Zeit für die Analyse und Interpretation der Ergebnisse.

Datenverarbeitungsprogramme dienen nicht nur zur Rechenhilfe, sie können auch zur Begriffsbildung verschiedener statistischer Methoden beitragen. „Die Software entlastet ***als Werkzeug*** nicht nur von Routine sondern ermöglicht ***als Lernumgebung*** auch das Entdecken tief liegender Zusammenhänge" (Riemer & Seebach 2013, S.17). So kann in Sekundenschnelle ermittelt werden, wie sich Median und arithmetisches Mittel verändern, wenn ein Wert aus dem Datensatz entfehrnt wird.

Der Computer hat laut Eichler & Vogel (2009) für den Stochastikunterricht drei Funktionen:

- Zum einen dient er als *Rechenhilfe*: Vor allem bei großen Datenmengen ist der Rechner aus dem Stochastikunterricht nicht mehr wegzudenken. Viele Rechenoperationen in der Stochastik sind einfach und elementar, aber zeitaufwändig, wie zum Beispiel das Ordnen großer Datensätzen, um Kennzahlen wie Median, Quartile usw. zu berechnen. Excel und Fathom ordnen und berechnen den Median in Sekundenschnelle. „Sind die Algorithmen (etwa zur Bestimmung eines arithmetischen Mittels) bekannt und anhand kleinerer Datensätze geübt, so ist der Rechner unseres Erachtens kaum aus dem Unterricht einer realitätsorientierten Stochastik wegzudenken, um nicht durchweg bei kleinen und möglicherweise konstruierten Datensätzen bleiben zu müssen." (Eichler & Vogel 2009, S.144)
- Der Rechner ist ein *Darstellungs- und Erforschungsinstrument*: Was für das Rechnen gilt, gilt auch für das Erstellen von grafischen Darstellungen: Für Schülerinnen und Schüler ist das Erstellen von grafischen Darstellungen nach einer gewissen Übung oft nicht mehr als mühsame Handarbeit. Ein Computer erledigt das Erstellen von grafischen Darstellungen in Sekundenschnelle. Auf diese Weise bleibt für die Schülerinnen und Schüler mehr Zeit für die Interpretation der Darstellung. Verschiedene Darstellungsarten können so miteinander verglichen werden. „Um Daten in angemessener Zeit flexibel darstellen zu können und so grafische Darstellungen sinnvoll zur Steuerung des Analyseprozesses werden zu lassen (…), ist ein Rechner sinnvoll." (Eichler & Vogel 2009, S.144)

- Der Computer kann die *Begriffsbildung* unterstützen: Verschiedene Datenverarbeitungsprogramme (wie Excel und Fathom) machen es möglich, Darstellungen interaktiv miteinander zu verknüpfen. So kann illustriert werden, welche Auswirkungen die Veränderung eines Wertes auf die Lageparameter bzw. grafischen Darstellungen hat. Die interaktive Verknüpfung ermöglicht, „dass innere Zusammenhänge durch simultane Änderungen sichtbar werden." (Eichler & Vogel 2009, S.145)

Der Rechner stellt eine große Hilfe dar und ist aus der Datenanalyse nicht mehr wegzudenken. Es ist jedoch sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler die Fertigkeiten zur Berechnung und Darstellung der einzelnen statistischen Methoden zuerst ohne Computer durchzuführen lernen, um wesentliche Eigenschaften der einzelnen statistischen Methoden nachvollziehen zu können und so besser zu verstehen.

4.3 Methoden zur Analyse von univariaten Datensätzen

Im Folgenden werden wesentliche Methoden der Aufbereitung von univariaten Daten anhand von Unterrichtsvorschlägen eingeführt. Dabei wird zu Beginn auf die Häufigkeitsverteilung eingegangen (siehe 4.3.1). Im Anschluss wird die grafische Darstellung von Daten mit Hilfe von Schokolinsen entwickelt (siehe 4.3.2). In Kapitel 4.3.3 werden statistische Maßzahlen eingeführt. Dabei wird vor allem auf die Einführung des Medians, sowohl auf die wesentlichen Unterschiede zwischen Median, arithmetischen Mittel und Modus eingegangen (siehe 4.3.3.1). Zudem wird die Streuung behandelt (siehe 4.3.3.2).

4.3.1 Häufigkeitsverteilung als Grundlage zur Analyse von Daten

Um konkrete Aussagen über die Eigenschaften der Daten machen zu können, werden Merkmalsausprägungen zusammengefasst (siehe Abb. 3.5). Auf diese Weise ergibt sich automatisch ein zählender Auswertungsschritt. Dieser Auswertungsschritt mündet im Begriff der absoluten Häufigkeit.

Will man zwei unterschiedlich große Datensätze vergleichen, ist es notwendig „den Begriff der Häufigkeit von der absoluten zur relativen Häufigkeit zu erweitern" (Eichler & Vogel 2009, S.23). So könnte die Befragung (siehe 3.2.1) ergeben, dass sowohl sechs Mädchen als auch sechs Jungs einen eigenen Fernseher im Zimmer haben. Daraus lässt sich schließen, dass gleich viele Mädchen wie Buben in der Klasse einen Fernseher in der Klasse haben. Beachtet man aber, dass 20 Mädchen und nur 13 Buben befragt wurden, ergibt sich, dass der

Anteil der Mädchen mit Fernseher deutlich geringer ist als der Anteil der Buben. So sind es bei den Buben fast die Hälfte, bei den Mädchen jedoch weniger als ein Drittel. Hier kann so die relative Häufigkeit vorbereitet werden, bevor sie in der zweiten Klasse eingeführt wird.

Die Gesamtheit der absoluten bzw. relativen Häufigkeiten, also die Paare Merkmalsausprägung und deren Anzahl, nennt man Häufigkeitsverteilung.
Es geht jedoch am Anfang der Datenanalyse weniger darum, dass die Schülerinnen und Schüler die genauen Definitionen einer Häufigkeitsverteilung kennen, bzw. um die formale Schreibweise, vielmehr sollen Schülerinnen und Schüler darauf aufmerksam gemacht werden, dass „die Häufigkeitsverteilungen durch eine Entscheidung des Datenanalytikers zustande kommt“ (Eichler & Vogel 2009, S.24). So hätte man die Flugweiten auch in mehr als zwei Klassen einteilen können, bzw. 300 cm als Grenze wählen können (siehe Abb. 4.2).

papierflieger

	Flugzeug		Zeilen-zusammenfassung
	a	b	
Weite	3	0	3
	22	5	27
	5	22	27
	0	2	2
	0	1	1

S1 = Anzahl $(\text{Weite} \leq 200)$
S2 = Anzahl $((\text{Weite} > 200)$ und $(\text{Weite} \leq 400))$
S3 = Anzahl $((\text{Weite} > 400)$ und $(\text{Weite} \leq 600))$
S4 = Anzahl $((\text{Weite} > 600)$ und $(\text{Weite} \leq 800))$
S5 = Anzahl $(\text{Weite} > 800)$

Abb. 4.2: Häufigkeitsverteilung der Flugweiten der beiden Papierflieger „boing“ und „airbus“ (vgl. 3.2.2)

„Mit dem Fokus der Häufigkeitsverteilung wird wesentlich festgelegt, was in nachfolgenden Analyseschritten in den Daten zu finden sein wird. Die Häufigkeitsverteilung ist das zentrale Untersuchungsobjekt der Datenanalyse.“ (Eichler& Vogel 2009, S.24)
Zudem kann ein Verständnis dafür gewonnen werden, dass das Zusammenfassen durch das Erheben von absoluten bzw. relativen Häufigkeiten eine wichtige Vorarbeit zur grafischen Darstellung von Daten darstellt. „Absolute und relative Häufigkeiten sind erste, ganz natürliche Schritte der Datenreduktion und die Grundlage für einige grafische Darstellungen von Daten.“ (Büchter & Henn 2005, S.28)

4.3.2 Grafische Darstellung

Ein wichtiger Teil der Aufbereitung von Daten ist deren grafische Darstellung.

„Grafische Darstellungen spielen insbesondere in der explorativen Datenanalyse eine bedeutsame Rolle: Wenn es darum geht, vorurteilsfrei Muster in den Daten aufzuspüren, die erst Anlass für die Bildung von Hypothesen geben, dann eigenen sich aufgrund ihrer ‚Unmittelbarkeit' besonders Grafiken" (Eichler & Vogel 2009, S.31). Im vorigen Kapitel sollten sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Erstellen eines Daten-Bildes bereits selbstständig daran annähern.

Bei der grafischen Darstellung werden Daten nicht nur geordnet und Informationen zugänglicher gemacht, sie dient auch dazu, Erkenntnisse anschaulich darzustellen.

Eichler und Vogel (2009) unterschieden drei Beweggründe für die grafische Darstellung

- *Die Kommunikation*: Eine grafische Darstellung fasst wesentliche Eigenschaften der Daten zusammen und veranschaulicht diese. Auf diese Weise werden die Eigenschaften der Daten besser kommuniziert (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.39).
- *Die Argumentation*: Durch die grafische Darstellung können zudem neue Erkenntnisse gewonnen werden, die in den Rohdaten noch nicht ersichtlich waren. „Grafische Darstellungen können den eigenen Analyseprozess von Daten wesentlich steuern, insbesondere dann, wenn sie Eigenschaften einer Verteilung sichtbar werden lassen, die in den Rohdaten so noch nicht entdeckt werden konnten und die dann einen neuen Untersuchungsansatz ergeben." (Eichler & Vogel 2009, S.39)
- *Die Reduktion:* Wie bei den meisten Repräsentationsmethoden handelt es sich dabei auch um eine Reduktion von Information. „Eine grafische Darstellung zeigt nicht die Daten selbst, sondern nur eine willkürliches Abbild der Daten" (Eichler & Vogel 2009, S. 39). Zwar ist diese Reduktion einerseits wünschenswert, weil sie den Blick frei legt auf wesentliche Informationen, andererseits findet bei der grafischen Darstellung immer auch ein Informationsverlust statt. So kann von den meisten grafischen Darstellungen nicht mehr zurück auf die Daten geschlossen werden.

Lehrplan für HS bzw. NMS und AHS-Unterstufe

Im Lehrplan findet sich das grafische Darstellen von Daten bereits in der ersten Klasse. Hier heißt es wie folgt

- „Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können."[8]

Bereits in der Volksschule sollen aus Grafen Informationen entnommen und interpretiert werden. So steht im Lehrplan der vierten Klasse:

– „Ablesen und Interpretieren von Daten aus grafischen Darstellungen (z. B. Tabellen, Diagramme, Graphen)".[9]

Das grafische Darstellen ist also schon sehr früh im Lehrplan vorgesehen. Im Sinne der drei Repräsentationsebenen von Bruner (vgl. 1.3) eignen sich als Einführung grafischen Darstellens besonders Aufgaben, bei denen die Daten angefasst werden können und so ein enaktiver Zugang ermöglicht wird. So schlagen die NCTM „standards and principles" beispielsweise bereits für den Kindergarten vor, anhand von Zählsteinen über das Ziel des Schulausflugs zu entscheiden (siehe Abb. 4.3). Mit Hilfe der Zählsteine erfolgt zudem automatisch auch eine ikonische Darstellung. In Eichler & Vogels (2009) Einführung zur grafischen Darstellung werden M&Ms auf ihre Farbverteilung untersucht.

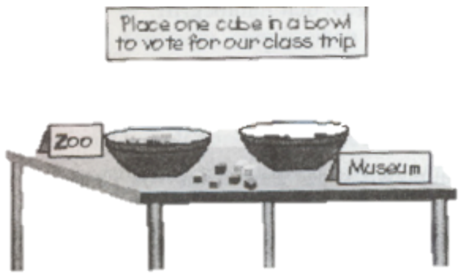


Abb. 4.3: Kinder sollen mit Hilfe von Zählsteinen auswählen, wo ihr Schulausflug hingehen soll. (Quelle: NCTM 2000, S.16)

Im Folgenden wird ein Unterrichtsvorschlag mit Smarties Minis vorgestellt. Wesentliche Ideen und Fragestellungen sind von Engel & Vogel (2005), sowie von Eichler & Vogel (2009) übernommen. Farbige Schokolinsen eignen sich besonders gut, weil „die Daten in Form der Smarties direkt angefasst" werden können. Die Sortierung nach Farben ist dabei

---

[8] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (Zugriff: 14.9.2013)
[9] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/3996/VS7T_Mathematik.pdf (Zugriff: 14.9.2013)

sehr naheliegend. Auch die einheitliche Größe kommt einer vergleichbaren Anordnung zu gute. Zudem bedeutet das Arbeiten mit Süßigkeiten eine zusätzliche Motivation.
Anhand des Unterrichtsvorschlags werden verschiedene Formen der grafischen Darstellung, wie Stabdiagramm, Kreisdiagramm und Piktogramm eingeführt. Dabei geht es weniger darum, eine genaue Konstruktionsanleitung zu liefern, sondern es soll vielmehr gezeigt werden, wie sich die einzelnen Darstellungsformen mit Hilfe einer konkreten Aufgabe einführen lassen.
Zudem kann das Prinzip Zufall intuitiv bereits veranschaulicht werden. Die Farben von Smarties Minis werden gleichverteilt abgefüllt. Bei den einzelnen Packungen unterschieden sich die Anzahlen der einzelnen Farben jedoch noch stark. Je größer die Stichprobe ist, umso kleiner werden die relativen Unterschiede zwischen den Anzahlen.

Zum Unterrichtsvorschlag
Jede Schülerin und jeder Schüler bekommt eine Packung Smarties Minis. Smarties Minis haben den Vorteil, dass die Anzahl der Schokolinsen (ca. 40 Stück pro Packung) leicht zu handhaben ist.
Bevor die Schülerinnen und Schüler die Packungen öffnen und die Farbverteilung untersuchen, sollen sie eine Schätzung abgeben (siehe Arbeitsblatt 7). Auf diese Weise soll die persönliche Beteiligung verstärkt werden und so ein Spannungsbogen erzeugt werden.
Im Anschluss werden die geschätzten Werte mit der tatsächlichen Anzahl der einzelnen Farben verglichen. Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, die Farben auf verschiedene Weise anzuordnen. Zudem sollen sie dabei untersuchen, welche Anordnung am besten die Anzahl sowie den Unterschied zwischen den Farben erkennen lässt.
Eine naheliegende Möglichkeit wäre, die Smarties in Haufen zu sortieren (siehe Abb. 4.4)

Abb. 4.4: Sortierung von zwei Packungen Smarties „in Haufen“

Zwar ist dabei auf den ersten Blick ersichtlich, dass in dieser Packung mehr blaue als braune Smarties waren, aber der Vergleich von lila und rosa Smarties ist schon schwieriger. Auch die gesamte Anzahl der Smarties kann bei dieser Darstellungsform nur schwer abgelesen werden. Ordnet man die Smarties hingegen der Länge lassen sich die Smarties leicht zählen. Zum anderen können die absoluten Häufigkeiten einfach verglichen werden (siehe Abb. 4.5). Eichler & Vogel (2009) sprechen bei dieser Darstellung von einem „realen Piktogramm".

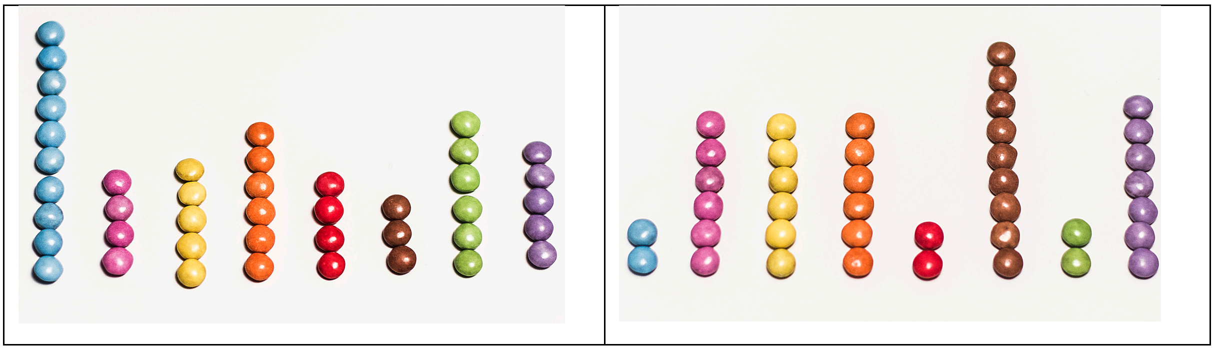


Abb. 4.5: Sortierung der Smarties „der Länge nach"

Im nächsten Schritt soll nun die „direkte Darstellungsform" ins Heft übertragen werden. Es erfolgt ein Übergang auf die ikonische Repräsentationsebene: „Auf diese Weise findet ein fließender Übergang von der enaktiven zur ikonischen Repräsentationsebene statt, indem aus der konkreten Handlung, die einzelnen Farben in Säulen darzustellen, die abstraktere bildliche Darstellung unmittelbar abgeleitet und in Beziehung zu den vorher erstellten Säulen gesetzt wird." (Eichler & Vogel 2009, S.33)
Im ersten Schritt kann dabei die Sortierung „nach Länge" einfach ins Heft kopiert werden (siehe Abb. 4.5). „In diesem Beispiel könnten Schülerinnen und Schüler auf einem karierten Blatt die einfachste Form eines Piktogramms, das so genannte ‚unverschlüsselte Piktogramm', zeichnen, in dem ein repräsentierendes Icon (z. B. ein Kreis) für ein repräsentiertes Objekt (eine Schokolinse) steht." (Eichler & Vogel 2009, S.32ff)
Um besseren Vergleich zu ermöglichen „werden die Icons zweckmäßigerweise in normierte Felder (z. B. Quadrate) eingezeichnet." (Eichler & Vogel 2009, S.33)

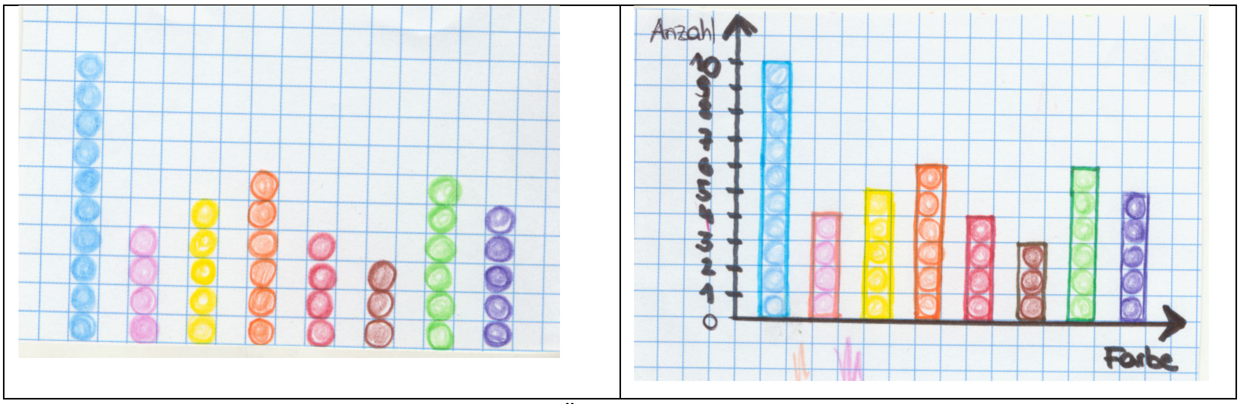


Abb. 4.6: Unverschlüsseltes Piktogramm und Übergang zum Balkendiagramm

Um in weiterer Folge ein Balkendiagramm zu erstellen bedarf es nur mehr einer Umrandung der einzelnen (Farb-)Säulen (siehe Abb. 4.6 rechts). Das Balkendiagramm wird auf diese Weise nicht abstrakt über eine Konstruktionsanleitung eingeführt, sondern direkt über die Darstellung der Schokolinsen erzeugt.

Aufbauend darauf sollen die Schülerinnen und Schüler eine Vermutung abgeben, wie die Packungen abgefüllt werden.

Dabei sind verschiedene Argumentationen möglich:

- Hypothese *A*: Meine Packung deutet darauf hin, dass blau bevorzugt wird. Der Grund könnte sein, dass blau eine beliebtere Farbe ist als zum Beispiel braun, das in der Packung sehr selten vorkommt.
- Hypothese *B*: Da sich die Smarties nicht im Geschmack unterscheiden, gibt es keinen Grund, eine Farbe zu bevorzugen. Die Farben werden in der gleichen Anzahl produziert und es ist Zufall, dass in meiner Packung mehr blaue als braune Linsen sind.

Auf diese Weise setzen sich Schülerinnen und Schüler bereits mit Prognosen auseinander.

Um zu untersuchen, ob ihre Prognose auch für die anderen Packungen gilt, sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Daten mit den Mitschülerinnen und Mitschülern vergleichen. Dabei wird ersichtlich, dass sich die Farbverteilungen in den einzelnen Packungen stark unterscheiden.

Die einzelnen Ergebnisse der Packungen sollen weiter mit der Verteilung aller Smarties verglichen werden. Um einen enaktiven Einstieg zu ermöglichen, werden die Schokolinsen, wie in Abb. 4.7. abgebildet, in Gläsern gesammelt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.33).

Abb. 4.7.: 21 Packungen Smarties in Gläser abgefüllt

Auf diese Weise entsteht direkt eine grafische Darstellung. Auch hier wäre eine 1:1-Übertragung ins Heft möglich. So kann ein Balkendiagramm erstellt werden, dessen Höhe die der Gläser ist.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Daten als Piktogramm grafisch darzustellen. Für ein „direktes Piktogramm“ wie oben ist die Anzahl der Smarties offensichtlich zu groß. Alternativ zum „direkten Diagramm“ können die Daten hier als „verschlüsseltes Piktogramm“ dargestellt werden (siehe Abb. 4.7). „Beim verschlüsselten Piktogrammen kann ein Icon mehrere Objekte repräsentieren. Daher sind diese nur zu lesen, wenn die Bedeutung eines Icons als ‚Schlüssel' mitgeliefert wird. Aufgrund dieser Verschlüsselung sind sie abstrakter als einfache, unverschlüsselte Piktogramme.“ (Eichler & Vogel 2009, S.33)

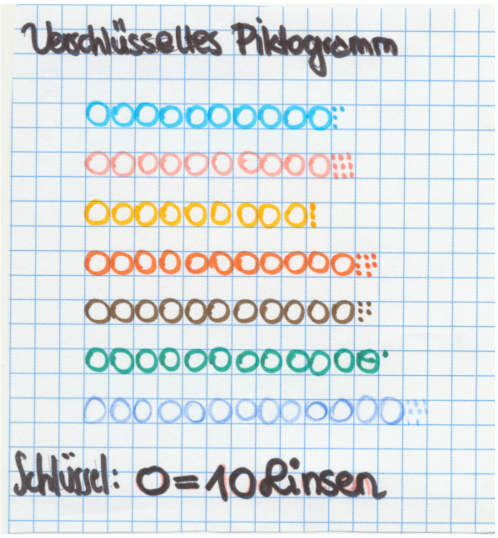


Abb 4.7.: Verschlüsseltes Piktogramm

Die Schülerinnen und Schüler können erste Aussagen über diese Verteilung machen. So ist zu erkennen, dass die Unterschiede zwischen den Anzahlen der Farben nicht mehr sehr groß sind. Aus diesem Grund kann die Hypothese A verworfen werden. Offensichtlich werden die Smarties doch gleichverteilt abgefüllt.

Sowohl das durch die Höhen der Gläser entstandene Balkendiagramm, als auch das verschlüsselte Diagramm können nicht direkt mit den vorigen Abbildungen verglichen werden. Es ist zwar zu erkennen, dass die verschiedenen Gläser annähernd gleich hoch mit Smarties gefüllt sind, der Unterschied zwischen den Anzahlen der einzelnen Farben bei der aggregierten Stichprobe also kleiner ist als bei der einzelnen Packung. Für einen quantitativen Vergleich der beiden Stichproben müssen jedoch die relativen Häufigkeiten betrachtet werden.„Erst mit der Betrachtung der Ergebnisse aus dem Hintergrund des jeweiligen Stichprobenumfangs lassen sich Vergleiche sinnvoll anstellen. Statt der absoluten Häufigkeiten werden die relativen Häufigkeiten miteinander vergleichen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.33ff)

Das Berechnen von relativen Häufigkeiten ist, wie oben bereits erwähnt, erst in der zweiten Klasse vorgesehen. Aus diesem Grund kann dieser Punkt auch erst später wieder aufgegriffen und untersucht werden. Um die Stichprobe einer Packung mit der aggregierten Stichprobe aus 21 Packungen zu vergleichen, werden nun die relativen Häufigkeiten betrachtet (Tab. 4.1).

	orange	gelb	rot	rosa	lila	blau	grün	braun
Relative Häufigkeit einer Packung mit 40 Smarties	0,1395	0,1163	0,0930	0,0930	0,1163	0,2326	0,1395	0,0698
Relative Hfgkt von 21 Packungen	0,1304	0,1145	0,1213	0,1190	0,1519	0,1066	0,1372	0,1190

Tabelle 4.1: Relative Häufigkeiten von einer Packung im Vergleich mit den relativen Häufigkeiten von 21 Packungen

Aus der Tabelle lassen sich nur schwer Schlüsse ziehen. Wieder kann hier die grafische Darstellung eine bessere Übersicht liefern. Die relativen Häufigkeiten lassen sich gut mit Hilfe eines Kreisdiagramms veranschaulichen (siehe Abb. 4.8). „Kreisdiagramme haben den Vorteil, den Stichprobenumfang als leicht erkennbare optische Einheit abbilden zu können“ (Eichler & Vogel 2009, S.36). Dabei werden die relativen (bzw. absoluten) Häufigkeiten als Kreissektoren dargestellt, „deren Fläche proportional zu den (absoluten oder relativen) Häufigkeiten der jeweiligen Merkmalsausprägungen sind“ (Eichler & Vogel 2009, S.36). Die Anteile können gut in einem direkten Vergleich wahrgenommen werden.

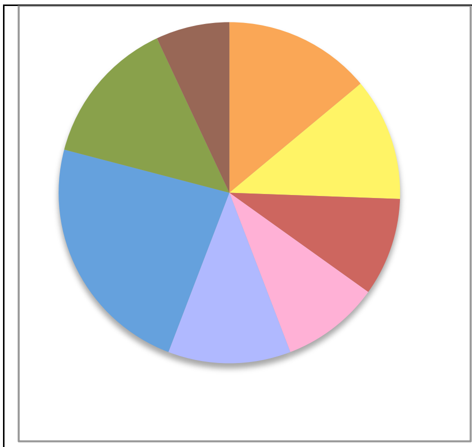
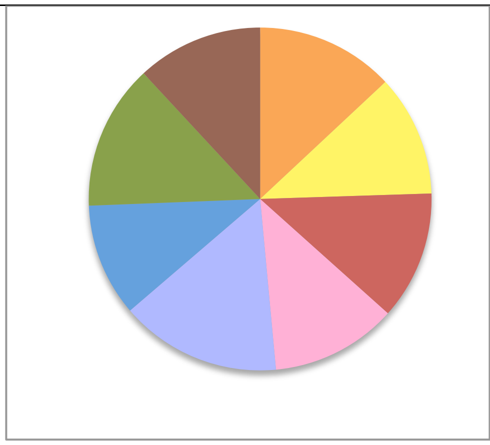
	
Farbanteile einer Packung	Farbanteile einer aggregierten Stichprobe mit 21 Packungen

Abb.: 4.8 Vergleich der Kreisdiagramme

Anhand der beiden Kreisdiagramme ist gut zu erkennen, dass die Anteile der einzelnen Farben bei der größeren Stichprobe annähernd gleich groß sind, wohingegen sie sich bei der kleinen Stichprobe stark unterscheiden.

Aufgrund der Vielzahl an grafischen Darstellungstypen ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler auf Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungsformen hinzuweisen. So lassen sich die Unterschiede der Stichproben noch besser erkennen, wenn die relativen Häufigkeiten der beiden Verteilungen als Balken nebeneinander dargestellt werden (siehe Abb. 4.9).

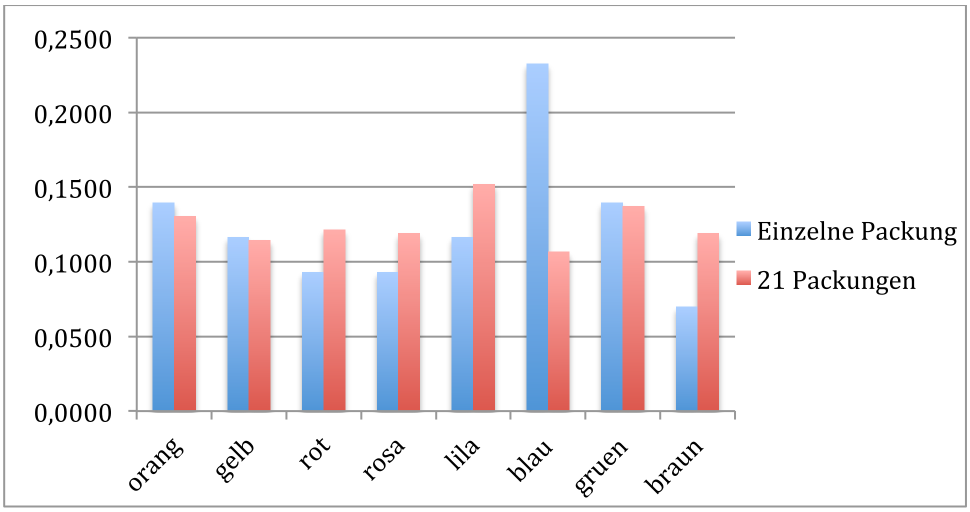


Abb. 4.9.: Vergleich einer einzelnen Packung mit einer aggregierten Stichprobe

Dabei ist zu erkennen, dass sich die relativen Häufigkeiten bei den einzelnen Packungen stärker unterscheiden als bei der Gesamtpackung (siehe Tab. 4.1).

Warum ist das so? Auf diese Weise können wesentliche Charakteristika von zufälligen Vorgängen bereits verdeutlicht werden. So verbirgt sich dahinter eine Gesetzmäßigkeit, die erst später formalisiert wird: „Es gilt, dass sich die Standardabweichung um das 5-fache reduziert, wenn der Stichprobenumfang um das 25-Fache erhöht wird. Dies ist den Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I in formalisierter Form nicht zu vermitteln, jedoch lässt sich diese Gesetzmäßigkeit hier phänomenologisch vorbereiten." (Eichler & Vogel 2009, S.34)

Simulieren

Dieses Phänomen kann mit Hilfe von simulierten Daten weiter illustriert werden. Wie bereits im Kapitel 3.1.2 beschrieben, soll das Simulieren zuerst per Hand durchgeführt werden. Aufgrund der aggregierten Stichprobe wird von einer Gleichverteilung ausgegangen. Mit Hilfe des Ziehens aus einer Urne können so weitere Packungen erzeugt werden. Es werden dabei 41 Mal ohne Zurücklegen acht verschiedene Farben gezogen. In weiterer Folge kann das Simulieren vom Computer übernommen werden. Abbildung 4.10 zeigt 10 000 simulierte Daten von Smarties im Vergleich mit den anderen Stichproben. Dabei wird ersichtlich, dass die Farben bei einer so großen Stichprobe tatsächlich annähernd gleichverteilt sind.

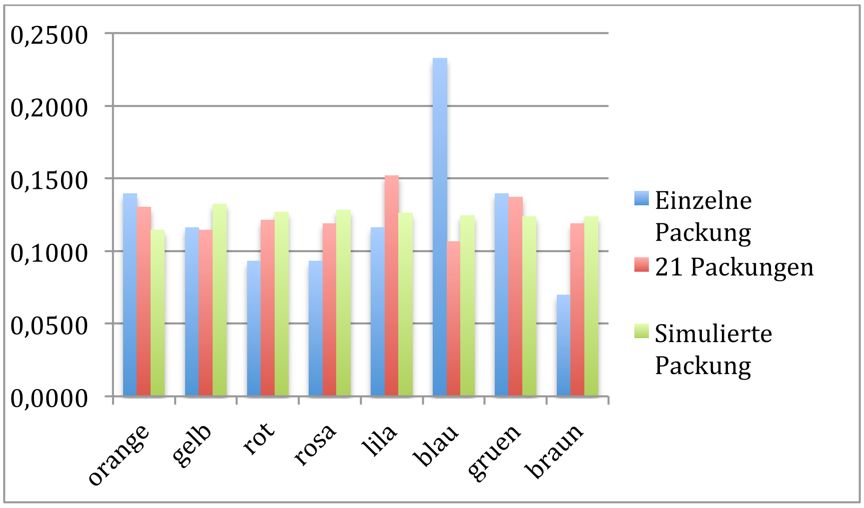


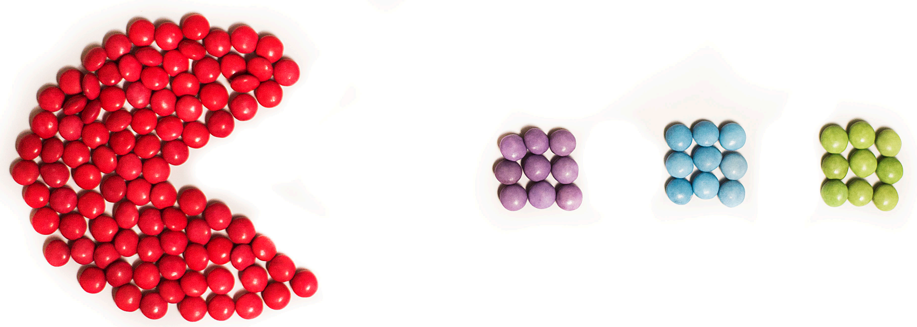
Abb. 4.10: Vergleich der relative Häufigkeitsverteilung: simulierten Daten (10000 Smarties, also rund 258 Packungen), aggregierte Stichprobe und eine einzelne Packung

Im Kapitel 6 wird die Smarties-Aufgabe noch einmal aufgegriffen. Es soll dabei mit empirischen Daten überprüft werden, ob es sich tatsächlich um eine Gleichverteilung handelt. Dafür wird zuerst ein Bereich angegeben, in welchem die Anzahl der blauen Smarties liegen müsste, wenn man von einer Gleichverteilung ausgeht. Danach werden die Daten erhoben.

Arbeitsblatt 7

Grafisches Darstellen

Farbverteilung von Smarties minis



Wie viele Smarties jeder Farbe befinden sich in **einer Packung**?

1. **Schätze** zuerst **die Anzahl** der verschiedenen Farben in einer Packung und notiere die Werte in der **Tabelle** unten!
2. **Öffne** eine Packung und **ordne** die Smarties nach Farben!
   Bei welcher Anordnung der Smarties lassen sich die **Anzahl** und die **Unterschiede zwischen den Anzahlen der Farben** am besten erkennen? Übertrage die Anordnung in dein Heft!
   Notier die **Anzahl** in den Tabellen!
3. **Welche Schlüsse** kannst du aus der Farbverteilung ziehen? Beschreibe wie deiner Meinung nach eine „typische Packung" aussieht!

Partnerarbeit

4. **Vergleiche deine Werte** mit den Werten deiner Sitznachbarin oder deines Sitznachbars! Notiert die Werte in der Tabelle und diskutiert über die Unterschiede!
5. Sammelt die Smarties anschließend in den vorgesehenen Gläsern! Was ist dabei zu erkennen? Stellt die **Ergebnisse graphisch** dar!
6. **Was fällt euch auf?** Nach welcher **Farbverteilung** werden die Packungen von Nestlé **abgefüllt**?

Farbe	**Geschätzte Anzahl**	**Tatsächliche Anzahl**	**Tatsächliche Anzahl deiner SitznachbarIn**	**Durchschnittswert in der Klasse**
rot				
gelb				
grün				
lila				
rosa				
braun				
blau				

Lesen und Interpretieren von Grafen

Im Sinne der Förderung von Datenkompetenz sollen Schülerinnen und Schüler nicht nur Grafen erstellen, sondern auch lernen, Informationen, die ein Graf enthält, zu lesen und richtig zu deuten. „Grafische Darstellungen können Aussagen transportieren, aber auch den eigenen Analyseprozess steuern. Um beide Funktionen sinnvoll nutzen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler diese grafischen Darstellungen lesen und interpretieren lernen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.40)

Unterrichtsvorschlag

Der folgende Unterrichtsvorschlag beinhaltet ein Balkendiagramm (siehe Arbeitsblatt 8). Es zeigt die Farbverteilung einer Gummibärenpackung. Auf diese Weise soll die Verbindung zum Schokolinsenbeispiel hervorgehoben werden.

Durch gezielte Fragestellungen sollen Schülerinnen und Schüler dazu angehalten werden, nicht nur Informationen direkt aus dem Grafen abzulesen, sondern diese Informationen auch zu vernetzen sowie Aussagen zu treffen, die über die aus dem Grafen zu schließenden Informationen hinausgehen. Die Art der Fragestellung ist nach Friel, Curcio & Bright (2001) zum Aufbau des Grafen-Verständnisses zentral. „Different levels of questioning provoke different levels of comprehension“ (Friel, Curcio & Bright 2001, S.132).

In der Analyse verschiedener Publikationen haben Friel, Curcio und Bright (2001) drei Stufen bezüglich des Lesens von Grafen herausgearbeitet. Sie orientieren sich dabei an der von Curcio (1987) verwendeten Terminologie:

- „Read the data“: In der ersten Stufe werden dem Grafen elementare Ergebnisse entnommen. „Die erste Kompetenz, die Schülerinnen und Schüler erwerben müssen, ist, einzelne Informationen zu den Daten und in Erweiterung auch über die Konstruktion der Darstellung aus der Grafik zu entnehmen“ (Eichler & Vogel 2009, S.62).
- Read in the data: In der zweiten Stufe werden Informationen zusammengefasst und verknüpft. „In der zweiten Stufe können Schülerinnen und Schüler nicht nur eine Information, sondern die in allen Daten vorhandene Gesamtinformation lesen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.62)
- „Read beyond the data“: Bei der letzten Stufe werden dem Grafen Informationen entnommen, die über die direkte Darstellung hinausgehen: „In einer abschließend zu erreichenden Stufe ist es Schülerinnen und Schülern möglich, Prognosen oder Aussagen,

die über die gegebenen Informationen hinausweisen, zu formulieren“ (Eichler & Vogel 2009, S.62). Das heißt zum Beispiel, mit Hilfe eines Grafen Prognosen über zukünftige Verteilungen zu treffen.

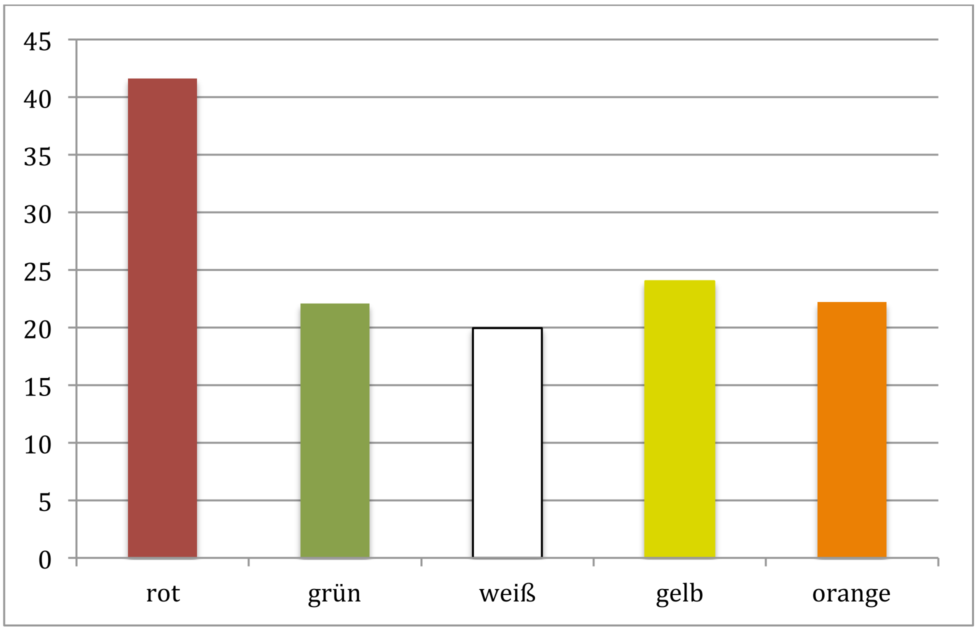
Die Fragen des Arbeitsblatts sind so aufgebaut, dass die Schülerinnen und Schüler zum Erklimmen der drei Stufen motiviert werden.

Durch gezielte Fragestellungen sollen Schülerinnen und Schüler letztlich dazu animiert werden, bestehende Grafiken tiefer zu untersuchen und so wesentliche statistische Zusammenhänge besser zu verstehen. „Teachers need to develop a framework within which to think about which questions to ask. Such a framework for question-asking is relevant for considering comprehension of graphs.“ (Friel, Curcio & Bright 2001, S.129ff)

Grafische Darstellungen lesen

Abb.: Gummibärenbande

Das folgende Diagramm stellt die Farbverteilung einer Gummibärenpackung (300g) dar.



Beantworte auf Grund der grafischen Darstellung folgende Fragen:

1) a) Welche Farbe kommt in einer Packung Gummibären am häufigsten vor?
   b) Wie viele rote, grüne, weiße, gelbe, bzw. Gummibärchen befinden sich in dieser Packung?

Farbe	rot	grün	weiß	gelb	orange
Anzahl					

2) **a) Wie viele Gummibärchen** befinden sich **insgesamt** in dieser Packung?
   b) Wie groß ist der **Unterschied** zwischen der Farbe mit den meisten Gummibären und den wenigsten Gummibären?
   c) Wie groß ist der Anteil der roten Gummibären in der Packung?

3) Was kannst du mit Hilfe des Diagrammes über die Farbverteilung von Gummibärchen allgemein sagen?

4.3.3 Statistische Maßzahlen

Um einen besseren Überblick über die Daten zu bekommen, wurden die Datensätze bereits auf eine Häufigkeitsverteilung bzw. auf die grafische Darstellung dieser Häufigkeitsverteilung reduziert. Viele Problemstellungen fordern jedoch eine noch stärkere Reduktion der Daten. Das ist vor allem dann der Fall, wenn Datensätze verglichen bzw. einzelne Datensätze kurz zusammengefasst werden sollen. Ein wesentliche Form der Aufbereitung von Daten liefert die Reduktion auf einzelne Werte, auf sogenannte statistische Maßzahlen, die die Verteilung der Daten charakterisieren: „Für den einfachen und übersichtlichen Umgang mit großen Datenmengen ist es hilfreich, einige wenige prägnante Werte zu haben, die solche Datenmengen möglichst gut repräsentieren" (Büchter & Henn, S.60).

Dabei werden zwei Arten von statistischen Messzahlen unterschieden.

- Lageparameter: Diese geben die zentrale Lage der Daten an (z. B. arithmetisches Mittel, Median, Modalwert).
- Streuungsmaße: Sie geben ein Maß für das Auseinanderliegen der Daten an (z. B. Quartilsabstand, Spannweite, Standardabweichung).

Lehrplan

Im Lehrplan für die HS bzw. NMS und AHS sind Lageparameter in der 4. Klasse vorgesehen.

- „Arbeiten mit Modellen, Statistik
    - Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (zB Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm)."

Streuungsmaße werden nicht explizit erwähnt. Ihre Thematisierung findet sich aber in Schulbüchern der 4. Klasse (vgl. Reichel u. a. 2012).

4.3.3.1 Lageparameter

Das arithmetische Mittel verwenden Schülerinnen und Schüler bereits als Durchschnitt bevor es formal eingeführt wird. Darauf wurde bereits beim Erheben von Daten eingegangen (siehe 3.2.1). In der vierten Klasse wird das arithmetische Mittel dann formalisiert und es geschieht „eine Erweiterung hinsichtlich anderer Mittelwerte sowie deren Vergleich (Götz & Süss-

Stepancik 2012a, S.21). Auf diese Formalisierung des arithmetischen Mittels wird hier nicht näher eingegangen.

Der folgenden Unterrichtsvorschlag hat nicht die Motivierung und Berechnung des arithmetischen Mittels zum Gegenstand (vgl. Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.21), vielmehr soll der Median motiviert werden. Gleichzeitig werden wesentliche Eigenschaften der verschiedenen Mittelwerte (arithmetische Mittel, Median und Modalwert) untersucht und verglichen. In einem zweiten Unterrichtvorschlag soll die Auswirkung der Verteilungsform (symmetrisch, links- bzw. rechtsseitige Verteilung) auf die Lage der Mittelwerte untersucht werden. Auf diese Weise soll verdeutlicht werden, dass die Wahl des Mittelwerts zu unterschiedlichen Ergebnissen für denselben Datensatz führen kann.

Einstiegsaufgabe – Stirnreihe

Der Median wird mit Hilfe einer „Stirnreihe" eingeführt. Dieser Unterrichtsvorschlag wurde dabei wesentlich von Götz & Süss-Stepancik (2012a) übernommen, die sich an Hanisch u.a. (2011, S.43) orientieren.

Dabei erfolgt ein „enaktiver Zugang zum Median", der durch die Anordnung der Größe nach gleichzeitig eine „nachhaltige ikonische Realisierung erzeugt" (Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.21).

Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Hilfe der Stirnreihe den Median selbstständig entdecken. Sie stellen sich dabei der Größe nach auf. Sie werden dazu aufgefordert ohne Maßband jene Person auszuwählen, die den durchschnittlichen Schüler bzw. die durchschnittliche Schülerin repräsentiert (siehe Arbeitsauftrag unten). Dabei ist es naheliegend, jene Person als „die durchschnittliche Schülerin" auszuwählen, die in der Mitte der Stirnreihe steht.

Arbeitsauftrag: „*Immer der Reihe nach*

> *Vielleicht hast du mit deiner Klasse schon einmal eine Stirnreihe gebildet und ihr habt euch dazu der Größe nach aufgestellt. Wie würdest du vorgehen, wenn du ohne Maßband und möglichst rasch eine Person auswählen sollst, die den durchschnittlichen Schüler bzw. Schülerin deiner Klasse in Hinblick auf die Körpergröße repräsentiert? Beschreibe deine Vorgehensweise." (Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.21)*

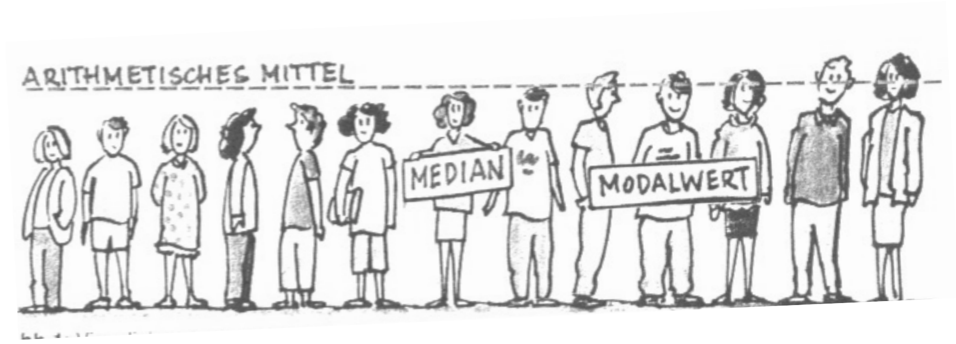


Abb. 4.11.: Visualisierung der Begriffe (Hanisch 2011 u. a., S.43)

Beim Median handelt es sich um die „Gruppenhalbierungswert", das heißt links und rechts vom Median liegen gleich viele Werte. Der Median wird bestimmt, indem man einen Datensatz der Größe nach ordnet und von links und von rechts zur Mitte zählt. „Ganz anders als bei der Ermittlung des arithmetischen Mittels wird sofort offensichtlich, dass diese Mitte – der Median – gänzlich ohne „Rechnung" auskommt" (Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.21). Dieser Algorithmus zur Ermittlung des Median impliziert, dass der Median nur bei ordinal- oder metrisch-skalierten Daten sinnvoll bestimmt werden kann.

Ist die Anzahl der Schülerinnen und Schüler ungerade, wird der Median der Körpergröße tatsächlich von einem Kind angenommen (siehe Abb. 4.11). Aus diesem Grund ist es für die Einführung des Medians sinnvoll zunächst mit einer ungeraden Anzahl in der Stirnreihe zu arbeiten. Das kann dadurch erreicht werden, dass entweder die Lehrperson mitmacht oder – wenn die Anzahl der Schülerinnen und Schüler ohnehin ungerade ist – nur beobachtet.

Haben die Schülerinnen und Schüler den Median ermittelt, soll in weiterer Folge geklärt werden, wie der Wert bestimmt wird, wenn die Anzahl der Personen gerade ist. Offensichtlich wird dann der Median nicht mehr von einer Person bzw. einem Wert der Datenreihe repräsentiert. In diesem Fall wird der Median als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte berechnet. „Bei einer geraden Anzahl ergibt sich ein prinzipielles Dilemma in zweierlei Hinsicht, denn der Literatur gemäß ist dann der Median das arithmetische Mittel der beiden mittleren (Körper-)Größen. Erstens verliert die Abbildung in gewisser Weise ihre Berechtigung, denn man findet im Allgemeinen keine Person mehr, die die Tafel „ Median" zu Recht halten dürfte. (…) Zweitens muss ja der Median jedenfalls dort als Mittelwert eingesetzt werden, wo nur ordinal skalierte Daten vorliegen, die die Bildung des arithmetischen Mittels verbieten" (Götz & Süss-Stepancik 2012a, S.21). Bei ordinalskalierten Daten einigt man sich auf die Konvention, dass der Median von zwei Werten repräsentiert wird.

Mit Hilfe der Stirnreihe kann zudem bereits eine Verbindung zum arithmetischen Mittel erfolgen, indem auch dieses berechnet und im Hinblick auf die Stirnreihe interpretiert wird. Dabei wird sofort ersichtlich, dass das arithmetische Mittel nicht direkt ermittelt werden kann, sondern berechnet werden muss. Dafür sind die genauen Daten der einzelnen Schülerinnen und Schüler notwendig. Zudem wird dieser Wert in der Regel nicht von einer Schülerin oder einem Schüler repräsentiert. Während der Median die Datenreihe in zwei Hälften teilt, nivelliert das arithmetische Mittel die Körpergrößen „vertikal“ (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.44).
Auch der Modalwert, jener Wert, der am häufigsten in einem Datensatz vorkommt, kann mit Hilfe der Stirnreihe veranschaulicht werden (siehe Abb. 4.11). Es wird festgehalten, dass sich der Modalwert auch bei nominalskalierten Daten ermitteln lässt.

Mit Hilfe der Stirnreihe kann zudem nicht nur der Median enaktiv eingeführt und in Verbindung mit den anderen Mittelwerten betrachtet werden, auch die verschiedenen Eigenschaften der Lageparameter können damit veranschaulicht werden:
So liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Median und dem arithmetischen Mittel in der Robustheit. „Die Eigenschaft statistischer Methoden, mehr oder weniger von der Veränderung einzelner (oder mehrerer) Daten beeinflusst zu werden, wird durch den Begriff der Robustheit beschrieben“ (Polasek 1994, zitiert nach Eichler & Vogel 2009, S.44). Beim Median handelt es sich im Gegensatz zum arithmetischen Mittel um einen robuste Methode. Das heißt, der Median ändert sich im Allgemeinen nicht, wenn eine Größe ausgetauscht wird. (Es sei denn der Median selbst wird ausgetauscht.) Das kann veranschaulicht werden, indem eine Schülerin bzw. ein Schüler durch eine andere Person mit unterschiedlicher Größe ersetzt wird. Der Median bleibt dabei gleich, das arithmetische Mittel muss hingegen neu berechnet werden. Auch die Auswirkung von Ausreißern kann untersucht werden, indem eine deutlich größere bzw. kleinere Person in die Stirnreihe dazu gestellt wird.

Unterschiedliche Interpretationen der Mitte

Im Folgenden werden die Auswirkungen der Verteilungsform auf die Mittelwerte untersucht. Auch hier werden unterschiedliche Eigenschaften von Median und arithmetischem Mittel sichtbar. Es geht vor allem darum, zu zeigen, wie mit Hilfe von arithmetischem Mittel und Median unterschiedliche Aussagen zu dem selben Datensatz gemacht werden können.

Didaktischer und methodischer Hintergrund

Hierfür wird die Dauer von Telefongesprächen untersucht. Die Untersuchung des Telefonier-Verhaltens eignet sich als Unterrichtsvorschlag aus verschiedenen Gründen: Zum einen können dabei die Daten von den Schülerinnen und Schülern untersucht werden. Auf diese Weise wird ein direkter Bezug erzeugt. Es ist anzunehmen, dass der Großteil der Telefongespräche sehr kurz dauert, einige wenige Gespräche dafür um ein Vielfaches länger. Die Dauer der Gespräche ist in der Regel also höchst unsymmetrisch verteilt (vgl. Riemer & Seebach 2013, S.18). Es handelt sich um eine linksseitige Verteilung. Für die Mittelwerte bedeutet dies, dass der Median und das arithmetische Mittel weit auseinander liegen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch die Analyse ihrer Daten Aussagen über ihr Telefonier-Verhalten machen (siehe Arbeitsblatt 9). Im Vergleich von arithmetischen Mittel und Median könnte eventuell obige Eigenschaft ihres großen Abstands bereits erkannt werden.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Telefonier-Gewohnheiten untersucht haben, werden sie mit zwei Aussagen konfrontiert (siehe Arbeitsblatt 9). Diese Aussagen stützen sich auf einen fiktiven Datensatz. Hier werden fiktive Daten verwendet, um die Unterschiede zwischen Median und dem arithmetischen Mittel noch besser hervorzuheben (siehe Kap.3.1.3).

Die beiden Aussagen sind offensichtlich unterschiedlich, es wird jedoch betont, dass keine der beiden falsch ist, sondern sich nur auf verschiedene Mittelwerte beziehen. Auf diese Weise wird zusätzlich verdeutlicht, dass verschiedene statistische Methoden verschiedene Ergebnisse und Interpretationen zulassen. Die grafische Aufbereitung der Daten zeigt klar, dass es sich bei den Verteilung um eine linksseitige Verteilung handelt (siehe Abb. 4.12). Mateo will Anna erklären, dass sie zu viel telefoniert und argumentiert aus diesem Grund mit dem größeren arithmetischen Mittel. Anna verteidigt ihr Telefonier-Verhalten indem sie mit dem kleineren Median argumentiert.

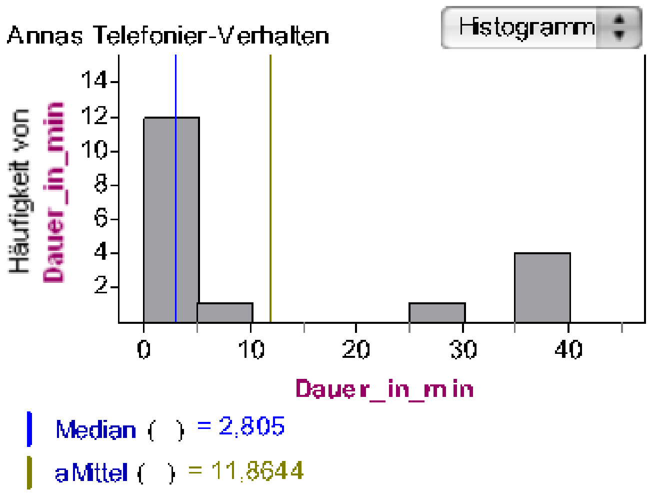


Abb. 4.12.: Annas Telefonier-Verhalten mit eingezeichnetem Median und arithmetischen Mittel

Mit der zweiten Argumentation (siehe Arbeitsblatt 10) soll darauf eingegangen werden, dass bei Kenntnis der Anzahl der Telefonate mit Hilfe des arithmetischen Mittels die gesamte Gesprächsdauer berechnet werden kann. Diese Vorgehensweise gilt für den Median nicht. Wieder sollen die Schülerinnen und Schüler die Gesetzmäßigkeit dabei selbstständig erkunden und versuchen diese zu begründen, um so ein tieferes Verständnis aufbauen.
Anschließend soll der Zusammenhang von Verteilungsform und Mittelwerten systematisiert werden, indem verschiedene Verteilungsformen den richtigen Mittelwerten zugeordnet werden. Mit der Puzzle-Methodik soll ein rein algorithmisches Abarbeiten aufgebrochen werden und so relationales Denken entwickelt werden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.65). Zudem wird das Lesen von Grafen weiter geübt.

Bezogen auf die Häufigkeitsverteilung gilt für den Vergleich von arithmetisches Mittel $\bar{x}$ und Median $x_{0,5}$ allgemein (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.46):

- Von einer linkssteilen Häufigkeitsverteilung spricht man dann, wenn der Großteil der Werte klein ist und einige wenige Daten viel größer sind (Abb. 4.13). Die wenigen sehr großen Daten treiben das arithmetische Mittel $\bar{x}$ in die Höhe. Der Median $x_{0,5}$ist bei dieser Verteilungsform kleiner als das arithmetische Mittel: $x_{0,5} < \bar{x}$.

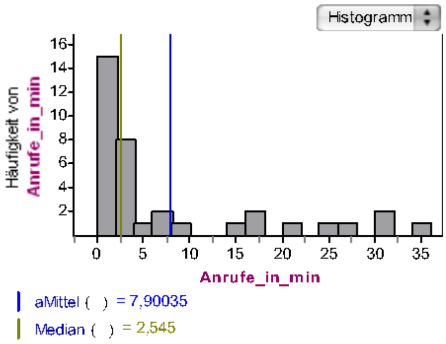


Abb. 4.13.: linksseitige Verteilung

- Von einer symmetrischen Häufigkeitsverteilung hingegen spricht man, wenn die Daten symmetrisch verteilt sind (Abb. 4.14). Arithmetisches Mittel und Median sind dabei (annähernd) gleich: $x_{0,5} = \bar{x}$.

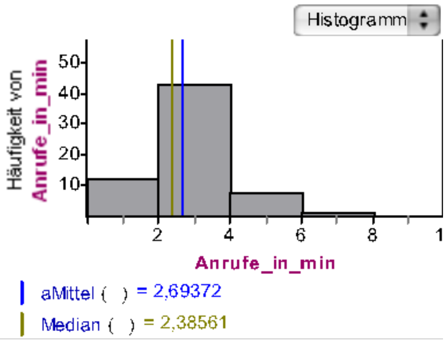


Abb. 4.14: symmetrische Verteilung

- Bei einer rechtsseitigen Häufigkeitsverteilung ist der Median größer als das arithmetische Mittel (Abb. 4.15). Das ist dann der Fall, wenn wenige sehr kleine Werte das arithmetische Mittel verringern: $x_{0,5} > \bar{x}$.

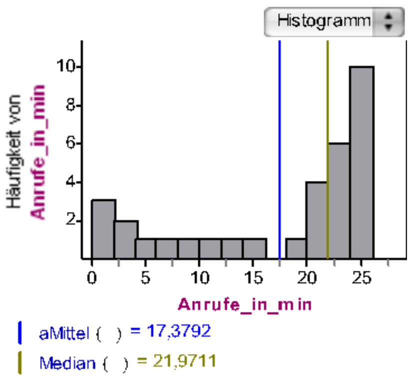


Abb. 4.15: rechtsseitige Verteilung

In der Realität gibt es im Allgemeinen einige linksseitige Verteilungen, bei welchen die verschiedenen Mittelwerte unterschiedliche instrumentalisiert werden. „So wird man fast immer, wenn sich in der Öffentlichkeit zwei konträre Meinungen zu der Interpretation sozialer Daten gegenüberstehen, das in den Daten steckende Phänomen entdecken, dass ‚viele wenig haben und wenige viel' (Einkommen, Wohnraum, Arbeitsweg, Zeitschriftenabonnements etc.). Falls es diese konträren Meinungen gibt, so versuchen beide Seiten, die in der Regel linkssteilen Verteilungen sozialer Daten zu verwenden, um mit der jeweils geeigneten Methode (Median oder arithmetisches Mittel) ihre Position (Besitzstandswahrung oder Protest) statistisch zu unterfüttern." (Eichler & Vogel 2009, S.47)

Die Schülerinnen und Schüler sollen bei dieser Aufgabe die Grafen und Mittelwerte nicht nur richtig zusammenfügen, sondern auch das zu Grunde liegende Telefonier-Verhalten in ein paar Sätzen beschreiben. Auf diese Weise soll dazu nicht nur der Graf gelesen werden, sondern auch Aussagen getroffen werden, die über die gegebenen Informationen hinausgehen („read beyond the data"). Dieser Unterrichtsvorschlag zeigt auf, wie grafische Darstellungen und statistsche Maßzahlen mitteinander verknüpft werden können.

Dein Handy im Fokus von Mittelwert und Median:

Welcher Telefoniertyp bist du?

Einzelentgeltnachweis

Kundennummer	13979532
Rechnungsnummer	112323288
Rechnungsdatum	03. Februar 2013

0650 7050 104 **Team 2010 Young**

Abrechnungszeitraum 03. Januar 2013 - 02. Februar 2013

Datum	Uhrzeit	Zielrufnummer	Servicebeschreibung	Service	Dauer	Netto
03. Jan.	10:27:58	0578XXX	Privates Netz	RUFL1	5:14	0,000
03. Jan.	11:50:38	06504534XXX	tele.ring	RUFL1	1:13	0,000
03. Jan.	18:46:18	06504534XXX	tele.ring	RUFL1	1:15	0,000
04. Jan.	10:15:11	06508351XXX	tele.ring	SMS	0:00	0,000
04. Jan.	13:40:12	06503837XXX	tele.ring	SMS	0:00	0,000
04. Jan.	13:57:12	06503837XXX	tele.ring	SMS	0:00	0,000
04. Jan.	15:32:10	06508229XXX	tele.ring	RUFL1	4:32	0,000
04. Jan.	18:39:00	06764742XXX	T-Mobile	RUFL1	8:56	0,000

- Besorge dir von deinem Netzbetreiber **die Liste aller ausgehenden Anrufe** des letzten Monats! (Bei vielen Netzbetreibern bekommst du diese online.)

- Fasse die Daten zusammen: Versuche mögliche **Muster** darin zu erkennen, indem du die Daten grafisch darstellt!
  Wie lange telefonierst du durchschnittlich? Berechne **arithmetisches Mittel** und **Median**!

- Was fällt dir bei der **Analyse** der Daten auf? Was musst du bei der Analyse zusätzlich beachten? Fasse dein Telefonierverhalten in einem **kurzen Text** zusammen!

- **Tausche dich** mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern **aus**: Welche verschiedenen „**Telefoniertypen**" gibt es in der Klasse? Könnt ihr **Gemeinsamkeiten** entdecken?

Arbeitsblatt 10

Vergleich von arithmetischem Mittel und Median (1/2)

Die folgende **Tabelle** zeigt alle Anrufe die Anna am 5. März 2013 getätigt hat:

Uhrzeit	**Dauer in Minuten**
7:23:14	3:24
7:42:28	2:28
7:46:58	1:27
7:53:19	0:58
11:15:23	2:12
13:26:26	2:28
13:59:14	35:03
15:10:13	1:56
15:31:11	1:12

Uhrzeit	**Dauer in Minuten**
15:41:04	38:11
16:22:15	2:41
16:30:00	2:56
16:40:13	38:00
17:02:11	2:16
17:08:18	38:27
18:29:13	29:17
19:13:33	3:12
20:11:23	7:26

Mateo und Anna **analysieren die Daten** und argumentieren danach wie folgt:

Anna, du telefonierst viel zu viel!!Im Mittel dauert bei dir ein Telefonat 12 Minuten!

Das stimmt nicht, im Mittel telefoniere ich nicht einmal drei Minuten lang!!!

Anna

Mateo

Keine der beiden Aussagen ist falsch, nur argumentieren sie mit **zwei unterschiedlichen Mittelwerten.**

I. **Rechne nach**: Wer argumentiert mit **welchem Mittelwert**?

II. **Erkläre**, warum Median und arithmetisches Mittel hier **soweit auseinander** liegen!

III. Wie verhalten sich **Median** und **arithmetisches Mittel** bei **deinen Daten?**

Ein Telefonat war durchschnittlich 12 Minuten lang. Du hast 18 Mal telefoniert, also insgesamt 216 Minuten. Das ist viel zu viel!!!!

Nein! Wenn ich so rechne, habe ich nur ca. 54 Minuten telefoniert.

Mateo

Anna

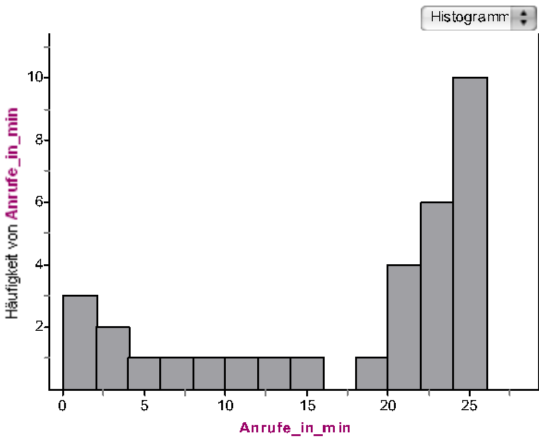
IV. Hier hat nur **Mateo richtig argumentiert**. **Wo** liegt Annas Fehler?

V. Welche **allgemeine Gesetzmäßigkeit** kannst du daraus ableiten?

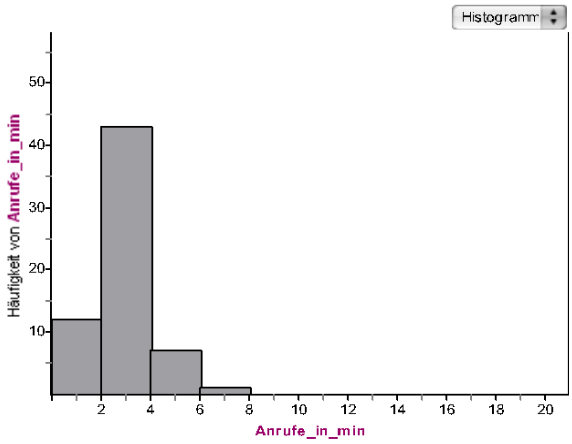
Vergleich von arithmetischem Mittel und Median (2/2)

Welcher Graf gehört zu **welchen Mittelwerten**? Ordne sie richtig zu!
Beschreibe in einem **kurzen Text** die möglichen **Telefoniergewohnheiten** dieser Personen!

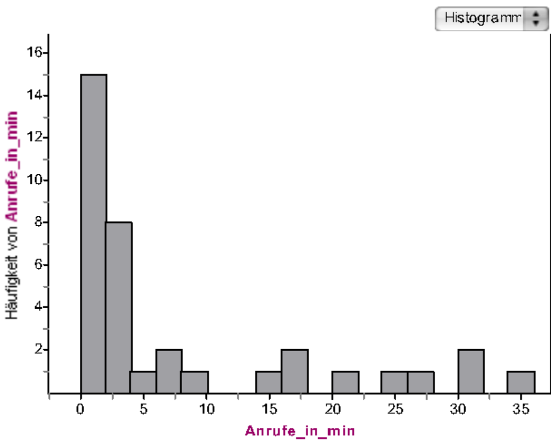
1



2



3



A

Anrufe_in_min	2,6937167 2,3856083

S1 = aMittel ( )
S2 = Median ( )

B

Anrufe_in_min	17,379187 21,971084

S1 = aMittel ( )
S2 = Median ( )

C

Anrufe_in_min	7,9003483 2,545

S1 = aMittel ( )
S2 = Median ( )

4.3.3.2 Streuungsmaße

Der Mittelwert als einziger repräsentativer Wert eines Datensatzes ist jedoch unzureichend, wie durch folgendes Beispiel illustriert werden kann (siehe Abb. 4.16).

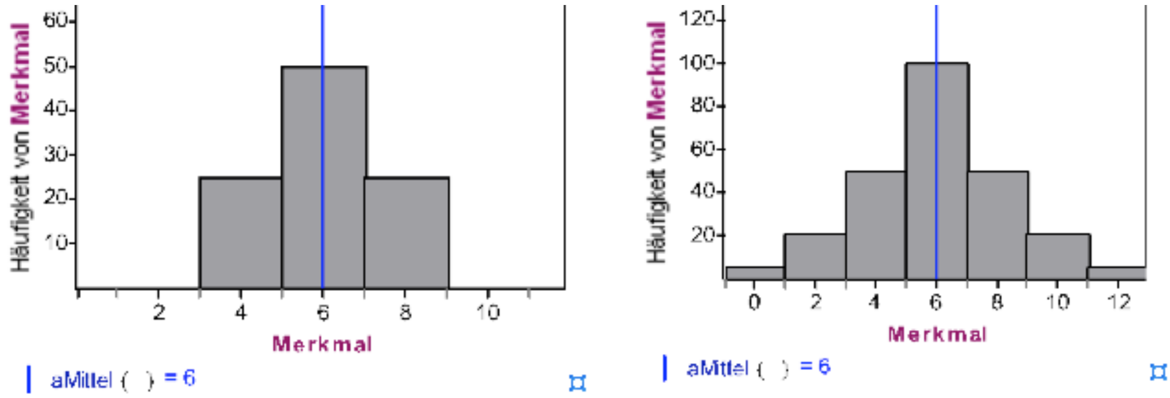


Abb. 4.16.: Zwei verschiedene Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung

Beide Datensätze haben zwar denselben Mittelwert, es ist aber auf den ersten Blick ersichtlich, dass sich beide Datensätze stark voneinander unterscheiden: Die Werte des ersten Datensatzes liegen sehr nahe am Mittelwert, während beim zweiten Datensatz die Werte wesentlich breiter verstreuen. Streuungsparameter sind zentral für eine gute Datenanalyse. „Vor der systematischen Untersuchung der Streuung steht die grundlegende Einsicht, dass statistische Daten nicht uniform sind.“ (Eichler & Vogel 2009, S.50)

Das Boxplot illustriert den Unterschied der Streuung noch besser (siehe Abb. 4.17).

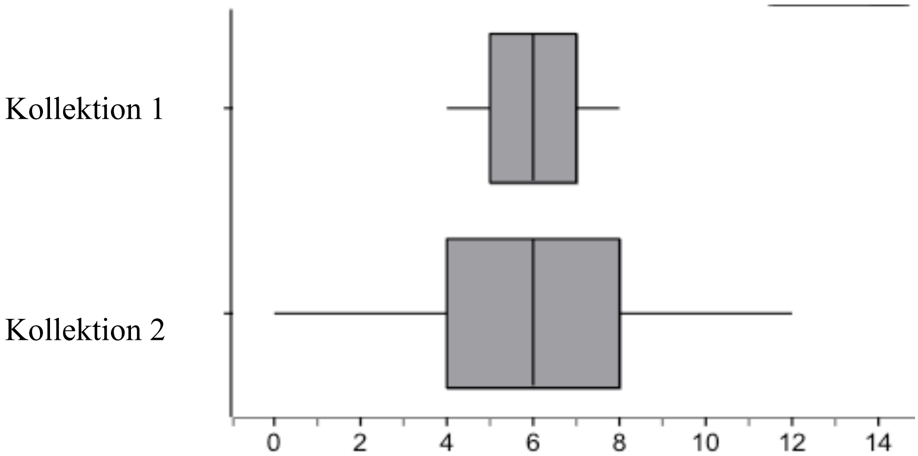


Abb. 4.17: Boxplot zweier unterschiedlicher Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung

Streuungsparameter sind zentral für eine gute Datenanalyse. „Vor der systematischen Untersuchung der Streuung steht die grundlegende Einsicht, dass statistische Daten nicht uniform sind“ (Eichler & Vogel 2009, S.50). Mit Hilfe von Streuungsparametern wird der Grad der Verteilung der Daten quantifiziert.

In diesem Fall ließe sich auf den ersten Blick die Spannweite R ermitteln. Dabei handelt es sich um den Abstand zwischen dem kleinsten Wert (Minimum) und größten Wert (Maximum).

Kollektion 1: $R = 8 - 4 = 4$

Kollektion 2: $R = 12 - 0 = 12$

Eine andere Möglichkeit ist, die Streuung mit Hilfe des Quartilsabstands anzugeben. Der Quartilsabstand wird ermittelt, indem der der Abstand zwischen erstem und drittem Quantil berechnet wird.

Kollektion 1: $QA = 7 - 5 = 2$

Kollektion 2: $QA = 8 - 4 = 4$

Im Gegensatz zu den Lageparametern sind Streuungsmaße nur sehr schwer zu motivieren. „Obwohl die Streuung im Prozess der Datenanalyse ungeheuer wichtig ist, ist es schwer, die Streuung als Produkt bzw. Ergebnis der Datenanalyse zu motivieren. So ist in der Regel das Muster, im eindimensionalen Fall also ein Lageparameter wie Median oder arithmetisches Mittel, von Interesse, nicht aber die Gestalt der Residuen bzw. die Abweichung vom Muster.“ (Eichler & Vogel 2009, S.49ff)

An dieser Stelle wird kein eigener Unterrichtsvorschlag vorgestellt, sondern nur auf den Unterrichtsvorschlag von Eichler (2009b) verwiesen. Bei diesem Beispiel wird die Wetterregel „April April der macht was er will“ hinsichtlich ihrer Gültigkeit überprüft. „Hier ist dagegen nicht das Muster, die Durchschnittstemperatur im April, sondern die Abweichungen von der Durchschnittstemperatur, also die Wechselhaftigkeit oder Variabilität des Aprilwetters von Interesse“ (Eichler 2009b, S.10). Der Grad der Variabilität der Daten steht bei dieser Aufgabe also im Zentrum der Untersuchung.

Dafür können verschiedene Modellierungen angestellt werden: „So könnten Schülerinnen und Schüler direkt die Tagestemperaturen und deren Streuung insgesamt (...) oder aber auch die Differenzen der Temperaturmaxima aufeinanderfolgender Tage (…) untersuchen.“ (Eichler 2009b, S.11)

Wie bei den Mittelwerten wird im klassischen Stochastikunterricht auch hier häufig der Fehler gemacht, dass die Streuungsparameter auf einen Wert, die Standardabweichung reduziert wird. Spannweite und Quartilsabstand scheinen zu einfach zu ermitteln zu sein und mathematisch nur wenig zu bieten. Dabei ist die Standardabweichung s anschaulich nur sehr schwer für die Schülerinnen und Schüler verständlich. Auch die Tatsache dass 68% der (normalverteilten) Daten im Intervall $[\bar{x} - s;\ \bar{x} + s]$ liegen, kann in Sekundarstufe I nur als gegeben hingenommen werden. Aus diesem Grund eignen sich Spannweite und Quartilsabstand für eine erste Bewertung der Streuung besser. So kann die Streuung bereits sehr früh in der Datenanalyse eingeführt werden.

Es wird erneut auf die Smarties-Aufgabe zurück gegriffen. Es kann alleine mit der Spannweite sehr gut verdeutlicht werden, dass die relativen Häufigkeiten der einzelnen Farben bei einer Packung viel weiter auseinander liegen, als bei der aggregierten Stichprobe mit 21 Packungen. Die entsprechenden Spannweiten sind

$R_{\text{einzel Packung}} = 0{,}1628$

$R_{\text{21 Packungen}} = 0{,}0454$

4.4 Zusammenhänge von Merkmalen – Analyse von zweidimensionalen Daten

Viele der bisher vorgestellten Unterrichtsvorschläge erfordern in weiterer Folge den Vergleich von Merkmalen. Oft stellt sich bei der Analyse der Daten fast automatisch die Frage nach einem (möglichen) Zusammenhang zwischen den untersuchten Merkmalen: „Die Fragen, die sich bei der Datenanalyse stellen, zielen fast zwangsläufig auf einen *Vergleich* oder auf die Suche nach *Ursache und Wirkung*. Beides sind Facetten eines Erklärungsansatzes für die Beschaffenheit der Daten bzw. für die Ergebnisse der ersten Analyse. Ein Weiterfragen dieser Art ist aber unmittelbar verbunden mit der Erweiterung der Analyse univariater Daten auf die Analyse bivariater Daten.“ (Eichler & Vogel 2009, S.119)

Lehrplan der HS bzw. NMS und AHS

Die Analyse von zweidimensionalen Daten ist im österreichischen Lehrplan in der vierten Klasse vorgesehen. Es heißt dort wie folgt:

„4. Arbeiten mit Modellen, Statistik

- funktionale Abhängigkeiten untersuchen und darstellen;

- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (z. B. Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm).“[10]

Streudiagramme sind auch Teil der Bildungsstandards:
Inhaltsbereich *Statistische Darstellung und Kenngrößen* (I4)

- Stabdiagramm, Kreisdiagramm, Streifendiagramm, Piktogramm, Liniendiagramm, Streudiagramm [11]

Der Vergleich von Merkmalen wird in der zehnten Schulstufe noch einmal aufgegriffen.
So heißt es im Lehrplan der sechsten Klasse:

- „Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik“ [12]

Es wird jedoch den Lehrerinnen und Lehrern bzw. den Schulbüchern überlassen was man unter „Kennzahlen der beschreibenden Statistik“ versteht: So wird zwar im Schulbuch „Mathematik 6” von Götz und Reichel die Punktewolke wieder behandelt, aber die Korrelation wird erst im Buch der 8. Klasse behandelt (vgl. Götz u. a. 2010, S.166 ff. und Götz u.a. 2013, S.246 ff.). Das Schulbuch „Mathematik verstehen 6“ widmet sich hingegen auf elf Seiten dem Zusammenhang von Merkmalen. Dabei werden zudem die statischen Maßzahlen der Regression, Korrelationskoeffizient und die Methode des kleinsten Quadrats eingeführt (vgl. Malle u. a. 2010, S.219ff).

Die folgenden Unterrichtsvorschläge sollen einen Einstieg in den Vergleich von Merkmalen darstellen. Dabei wird vor allem auf die genaue Einführung der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten (Streudiagramm, Vierfeldertafel bzw. Baumdiagramm) eingegangen.
Es werden Maßzahlen, die den Grad des statistischen Zusammenhangs von Merkmalen beschreiben, eingeführt. „Die Beschreibung des Zusammenhangs von Merkmalen ist unter folgenden Gesichtspunkten möglich:

- Die *Korrelation* zwischen Merkmalen beschreibt die Intensität eines Zusammenhangs zwischen den Merkmalen.

---

[10] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf, S.8 (Zugriff: 12.12.2013)
[11] https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf, S.5 (Zugriff: 12.12.2013)
[12] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, S.8 (Zugriff: 12.12.2013)

- Die *Regression* beschreibt einen Zusammenhang zwischen Merkmalen als funktionalen Zusammenhang so, dass von einem Merkmal auf das andere geschlossen werden kann.“ (Büchter & Henn 2004, S.40)

Im folgenden Unterrichtsvorschlag wird die Regression mit dem das Maß des linearen Zusammenhangs (Korrelation) untersucht. Dabei werden nicht die Standardverfahren wie die Methode des kleinsten Quadrats oder der Korrelationskoeffizient von Bravais und Paerson eingeführt. Vielmehr werden elementare Techniken vorgestellt, „also Methoden, deren potenzieller Nutzen in einem (nur qualitativ einschätzbaren) günstigen Verhältnis zu ihrer algorithmischen und begrifflichen Komplexität steht“ (Eichler & Vogel 2009, S.120).

- So wird bei der Regressionsanalyse eine Gerade mit dem Auge eingepasst und mit Hilfe der Residuen verbessert.
- Der Korrelationskoeffizienten wird durch Abzählen ermittelt.

Eichler & Vogel (2009) zeigen, dass es beim Einpassen einer Gerade zwischen der Methode des kleinsten Quadrats und dem Einpassen mit dem Auge mit anschließender Residuenanalyse nur geringe Unterschiede gibt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.96). Auch der „abzählende“ Korrelationskoeffizient liefert qualitativ dieselben Ergebnisse wie der Standard-Korrelationskoeffizient (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.102).

Bei größeren Datensätzen oder bei inferenzstatistischen Untersuchungen eigenen sich hingegen die „algorithmisierten Standardverfahren“ besser (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.121). Da es sich aber bei den folgenden Unterrichtsvorschlägen um kleine Datensätze handelt, sind die Unterschiede hier gering.

Im Sinne der Elementarisierung soll mit Hilfe der elementaren Verfahren ein tieferes Verständnis für das Bemessen des Zusammenhangs gewonnen werden. Auf diese Weise kann das Maß des Zusammenhangs bereits in der Sekundarstufe I eingeführt werden. Die statistischen Kenngrößen können dann in der sechsten Klasse wieder aufgenommen und durch die Einführung der *Methode des kleinsten Quadrats* und des Korrelationskoeffizienten nach Pearson und Brevais erweitert werden. So wird Unterricht im Sinne des Spiralprinzips ermöglicht.

Zudem soll durch den Einsatz von elementaren Methoden der Fokus von der Berechnung der Kennwerte auf deren Interpretation gelenkt werden. Vor allem bei der Interpretation von Zusammenhängen werden oft Fehler gemacht. So wird von einer starken Korrelation oft fälschlicherweise auf einen kausalen Zusammenhang geschlossen. Aus diesem Grund wird der Interpretation der Ergebnisse viel Bedeutung beigemessen.

In der Einstiegsaufgabe sollen Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang von Körpergröße und der Lage des Bauchnabels untersuchen. Beim Vergleich von nominalskalierten Daten werden, im Sinne des Spiralprinzips, die Ergebnisse der Schülerbefragung (siehe 3.2.1) wieder aufgegriffen.

4.4.1 Vergleich von metrischskalierten Daten

Wo befindet sich dein Bauchnabel?

Die Schülerinnen und Schüler sollen den Zusammenhang von Körpergröße und Höhe des Bauchnabels untersuchen. Dabei lernen sie die Daten in einer Punktwolke darzustellen und funktionale Zusammenhänge zu beschreiben. Im Vergleich mit dem Zusammenhang von Körpergröße und Haarlänge wird der Korrelationskoeffizient eingeführt und das Maß des Zusammenhangs weiter verdeutlicht.

Didaktischer und methodischer Hintergrund

Eichler & Vogel (2009) schlagen „Vermessungsaufgaben“ als Einführung in die Untersuchung des Zusammenhangs von Merkmalen vor. „Vermessungsdaten“ haben eine Vielzahl von Vorteilen: Zum einen lassen sich die Daten sehr schnell im Unterricht erheben. Gleichzeitig werden die Daten von den Schülerinnen und Schüler als authentisch wahrgenommen, da die eigenen Daten in Beziehung zu den anderen Daten gesetzt werden können (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.72). Zudem finden sich bei Vermessungsaufgaben Merkmale, deren linearer Zusammenhang offensichtlich sehr groß ist (Größe-Armlänge, Größe-Gewicht). Auf diese Weise soll das Einpassen einer Geraden motiviert werden. „Für einen Einstieg in die Regressionsanalyse eignen sich solche Beispiele, bei denen die entsprechende Punktwolke geradezu nach dem Ersatz durch eine Gerade ruft (…).“ (Eichler & Vogel 2009, S.74). Es soll jedoch hervorgehoben werden, dass bei Weitem nicht alle bivariaten Datensätze einen so starken linearen Zusammenhang aufweisen (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.74), weswegen auch Beispiele mit nicht-linearen Zusammenhang miteinbezogen werden. Aufpassen sollte man, dass es sich um keine zu „intimen“ Daten handelt, die Schülerinnen und Schülern unangenehm sein könnten. So ist von einer Untersuchung des Zusammenhang von Gewicht-Größe eher abzuraten „Die Ergebnisse werden interpretierbar sein und nicht diskriminierend.“ (Eichler & Vogel 2009, S.73)

Als Motivation zur „Vermessung des eigenen Körpers“ wird die bekannte Körperstudie von Leonardo da Vinci herangezogen (siehe Abb. auf Arbeitsblatt 12). Laut da Vincis Körperstudie teilt der Bauchnabel den Menschen im goldenen Schnitt. Aus diesem Grund könnte diese Aufgabe auch zur Systematisierung des goldenen Schnitts wieder aufgegriffen werden. Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert ihre Größe, die Höhe ihres Bauchnabels (vom Boden weg) sowie die Länge ihrer Haare zu messen. Die gewonnenen Daten werden in der Klasse gesammelt und in einer Tabelle eingetragen.
Zu Beginn soll der Zusammenhang von Körpergröße und Höhe des Bauchnabels untersucht werden.

Streudiagramm
Für eine übersichtliche Darstellung werden die Daten in einem Streudiagramm dargestellt. Dabei werden auf der x-Achse die Körpergröße und auf der y-Achse die Höhe des Bauchnabels eingetragen. Jedes Datenpaar wird so von einem Punkt repräsentiert. Es entsteht ein Streudiagramm oder auch Punktwolke genannt. Bei dieser Darstellungsform lassen sich die Originaldaten wieder rekonstruieren.
Da die Schülerinnen und Schüler zum ersten Mal mit einem Streudiagramm arbeiten, werden die einzelnen Arbeitsschritte am Arbeitsblatt 12 erklärt.
Um Zusammenhänge zu erkennen, ist eine „gute“ Skalierung der Koordinatenachsen wichtig. So sind die Daten bei einem Koordinatensystem, dessen Beginn im Ursprung liegt, bloß als „wilder Haufen“ zu erkennen, der nur für einen bestimmten Abschnitt eine Gerade vermuten lässt (siehe Abb. 4.18).

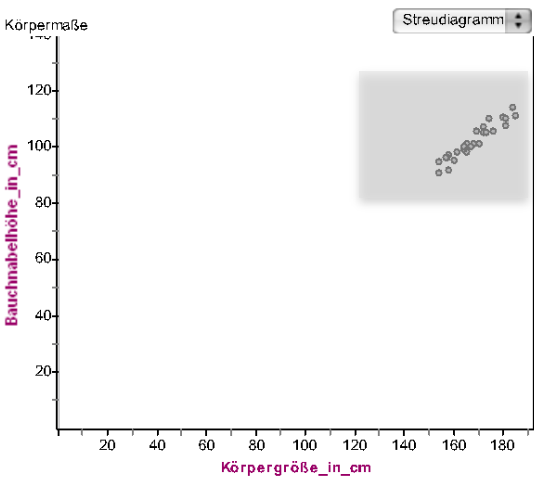


Abb. 4.18: Streudiagramm mit unpassender Skalierung des Koordinatensystems

Aus diesem Grund ist es ratsam, zu Beginn ein Koordinatensystem mit geeigneter Skalierung vorzugeben (siehe Arbeitsblatt 12). Auf diese Weise werden die Zusammenhänge besser wahrgenommen und der Fokus liegt bei der Interpretation. Damit die vorgegebene Skalierung nicht als Beliebigkeit abgehandelt wird, sollen Schülerinnen und Schüler begründen, wieso das Koordinatensystem hier nicht im Ursprung beginnt.

Die erhobenen Daten werden im Koordinatensystem eingetragen (siehe Abb. 4.19).

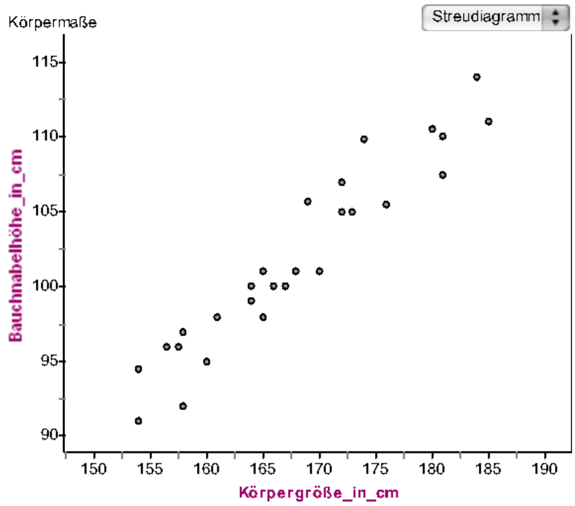


Abb. 4.19: Streudiagramm mit passender Skalierung

Es ist zu erkennen, dass je größer man ist, desto höher liegt der Bauchnabel, was bereits vorher vermutet wurde. Zudem fällt auf, dass die Daten ungefähr auf einer Geraden liegen, diese Gerade soll nun eingepasst werden.

In den angewandten Wissenschaften wird diese (Regressions)-Gerade mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Da dieses Verfahren sehr komplex und für die Behandlung in der Sekundarstufe I wenig geeignet ist, wird hier eine alternative Variante vorgestellt.

Eichler & Vogel (2009) schlagen als Einführung in die Regressionsanalyse ein „Zwei-Schritt-Verfahren“ vor:

1. „Einpassen eines Funktionsgraphen nach Augenmaß und Bestimmung der Funktionsgleichung
2. Analyse der Residuen (vertikal gemessene Entfernungen zwischen Datenpunkt und Funktionsgraph) und Entscheidung aufgrund der Residuenanalyse, ob die Datenanpassung genügt oder ob eine feinere Anpassung notwendig ist.“ (Eichler & Vogel 2009, S.75)

Die Funktionsgleichung der Geraden wird angegeben und soll auch mit Worten beschrieben werden. So ist zu erkennen, dass der Bauchnabel ca. auf $\frac{2}{3}$ der Körperhöhe liegt (siehe Abb. 4.20).

Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler berechnen, wo laut Geradengleichung der eigene Bauchnabel liegen müsste, und diesen Wert mit der tatsächlichen Lage vergleichen. Auf diese Weise soll verdeutlicht werden, dass mit Hilfe der Regressionsanalyse von einem Merkmal auf ein anderes Merkmal geschlossen werden kann. Da der eigene Bauchnabel in der Regel nicht auf der Geraden liegt und deswegen der berechnete Wert nicht mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmt, wird somit verdeutlicht, dass mit Hilfe der Geradengleichung nur ein Trend angegeben wird. Die genauen Werte lassen sich dadurch nicht berechnen. Die Residuen verdeutlichen die Abweichung zum berechneten Wert.

„Wurde eine Funktionsgleichung bestimmt, dann sind zwei Dinge didaktisch entscheidend: Einerseits sollen die Schülerinnen und Schüler die Funktionsgleichung im Sachkontext interpretieren können (…). Andererseits sollte ihnen bewusst gemacht werden, dass eine solche Funktionsgleichung die in den Daten steckende Information stark reduziert und auch nur in Grenzen aussagekräftig ist (etwa für *x* nahe 0 ist die lineare Funktion kein tragfähiges Modell mehr).“ (Eichler & Vogel 2009, S.76)

Im Vergleich mit den Mitschülerinnen und Mitschülern ist zu erkennen, dass verschiedene Geraden denselben Datensatz beschreiben können. Im Plenum wird betont, dass es keine „falsche“ oder „richtige“ Gerade gibt, sondern Geraden die „besser passen“ bzw. „weniger gut“. Diese Tatsache wird durch die Betrachtung der Residuen weiter verdeutlicht.

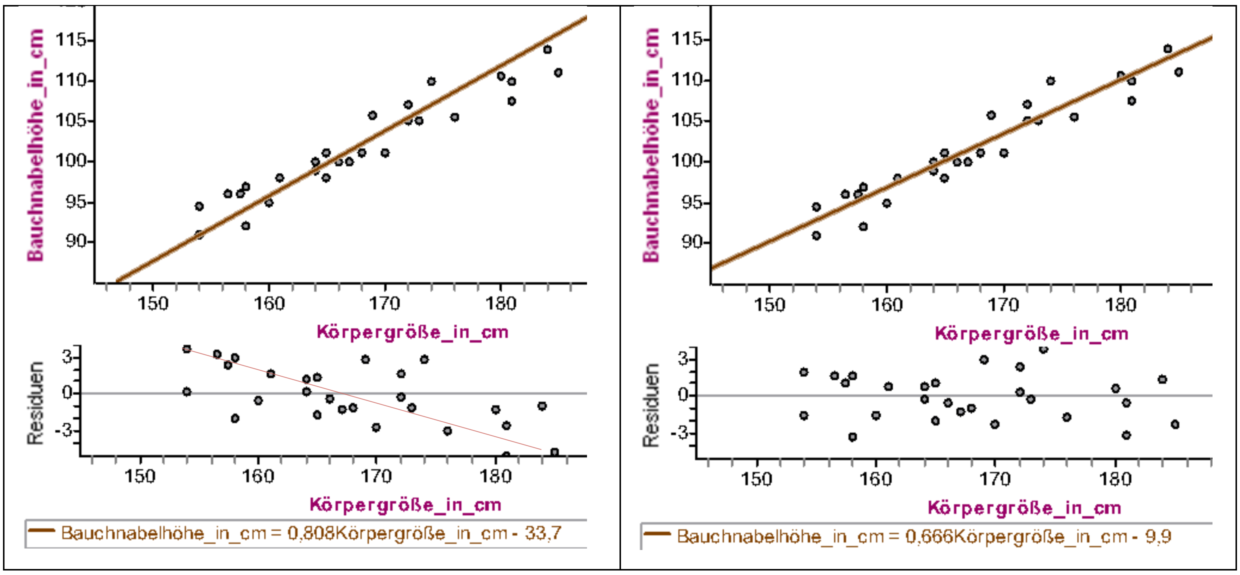


Abb. 4.20.: Streudiagramm und eingepasste Gerade, inklusive Residuenanalyse. links: Muster in den Residuen. rechts: ohne erkennbares' Muster

Eine Residuenanalyse ist per Hand sehr mühsam. Mit dem Datenverarbeitungsprogramm Fathom lässt sich ein Residuenplot mit nur einem Knopfdruck anfertigen. Hier stellt der Computer eine große Hilfe dar und kann seiner Funktion als *Darstellungs- und Erforschungsinstrument* (siehe Kap 4.2) Rechnung tragen. Es geht darum, die Gerade so zu verändern „bis die Residuen kein (sichtbares) Muster mehr aufweisen" (Eichler & Vogel 2009, S.75). Die genaue Analyse der eingepassten Gerade und der Residuenplots kann im Plenum erfolgen.

In der Abbildung links (siehe Abb. 4.20) ist am Residuendiagramm noch immer ein Muster zu erkennen. Es könnte erneut eine Gerade eingezeichnet werden. Wird die Gerade etwas nach rechts gekippt, kann dieses Muster ausgelöscht werden (siehe Abb. 4.20 rechts). Dieser Aspekt kann im Plenum besprochen werden.
Hintergrund hier ist, dass das Muster in den Residuen in die Funktionsgleichung der Gerade fließen soll, da diese das Muster der Daten beschreiben soll. Am Ende soll ein Residuenplot überbleiben, der keinerlei Muster mehr aufweist und so alleine die Variabilität der Daten verdeutlicht.

Zusammenhang Körpergröße und Haarlänge
Um nicht den Anschein zu wecken, dass es sich in der Regel um starke lineare Zusammenhänge handelt, wenn zwei Merkmale auf eine mögliche Verbindung hin untersucht werden, sollen die Schülerinnen und Schüler nun den Zusammenhang zwischen Haarlänge und Größe untersuchen. Dabei soll bereits im Vorhinein eine Vermutung abgegeben werden, ob ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Merkmalen besteht. Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, eine Punktwolke zu skizzieren. Dann erst werden die erhobenen Daten ausgewertet und mit der Vermutung verglichen.
Anzunehmen ist, dass die „größeren" Buben tendenziell „kürzere" Haare haben, es also einen negativen Zusammenhang gibt. Dieser wird jedoch weit weniger stark sein, weil auch kleine Menschen kurze Haare haben können bzw. große Menschen lange Haare.

Die Konstruktion der Punktwolke könnte hier bereits ein Datenverarbeitungsprogramm übernehmen. Es soll wieder eine Gerade eingefügt werden. Das Residuendiagramm zeigt, dass die Abweichungen hier viel größer sind (siehe Abb. 4.21). Es bestätigt sich also die Vermutung, dass hier der Zusammenhang der Merkmale weniger gut von einer Gerade beschrieben werden kann als vorhin. Diese Tatsache motiviert, ein Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zu finden.

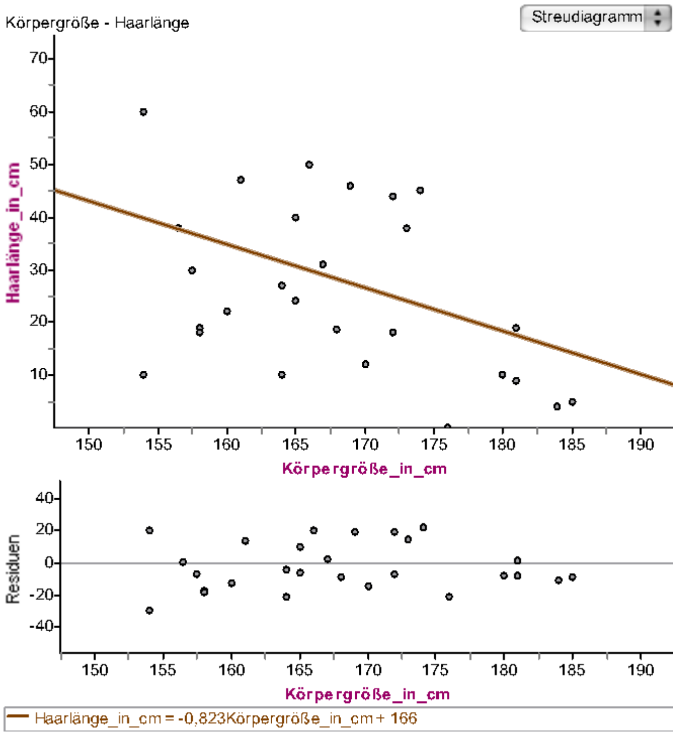


Abb. 4.21: Zusammenhang von Körpergröße und Haarlänge mit eingepasster Gerade und Residuenplot

Propädeutische Einführung des Korrelationskoeffizienten

Im Folgenden soll nun (ein elementarer) Korrelationskoeffizient als Kennzahl für den Grad des linearen Zusammenhangs hergeleitet werden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.97ff). Dabei soll zum einen die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten in den verschiedenen Wissenschaften Rechnung getragen werden und zum anderen die Einpassung einer Gerade inhaltlich legitimiert werden: „Die Behandlung der Korrelation ist sicher ein inhaltlicher Zusatz zum Curriculum der Sekundarstufe I. Die Frage der Güte des linearen Zusammenhangs zweier Merkmale besitzt allerdings enorme Bedeutung in den die Statistik anwendenden Wissenschaften. Zudem gewinnt man über die Betrachtung der Korrelation ein Kriterium dafür, dass es inhaltlich auch sinnvoll ist, eine Gerade in eine Punktwolke einzupassen." (Eichler & Vogel 2009, S.98). Der Korrelationskoeffizient wird hier durch Auszählen ermittelt.

Als Vorarbeit werden die Schülerinnen und Schüler dabei in zwei Gruppen eingeteilt. Die eine Gruppe untersucht den Zusammenhang von Körpergröße und Bauchnabel, die andere

den Zusammenhang von Körpergröße und Haarlänge. (Auf Arbeitsblatt 13 sind die Arbeitsschritte für den Zusammenhang Körpergröße und Bauchnabelhöhe formuliert.)
Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, diejenigen Personen zu ermitteln, die

- bei beiden Merkmalen größer sind als der Durchschnitt.
- die größer sind als der Durchschnitt, deren Bauchnabelhöhe/Haarlänge kleiner ist als der Durchschnitt.
- die kleiner sind als der Durchschnitt und deren Bauchnabelhöhe/Haarlänge größer ist als der Durchschnitt.
- bei beiden Merkmalen kleiner sind als der Durchschnitt.

Um die vier Gruppen auch am Streudiagramm zu verdeutlichen, wird das Mediankreuz eingezeichnet. Dabei wird sowohl der Median der Körpergröße als auch der Median der Bauchnabelhöhe als Parallele zu den Achsen eingezeichnet. Es entsteht ein Streudiagramm mit vier Feldern bzw. Quadranten, die den vier Gruppen entsprechen (siehe Abb. 4.22).

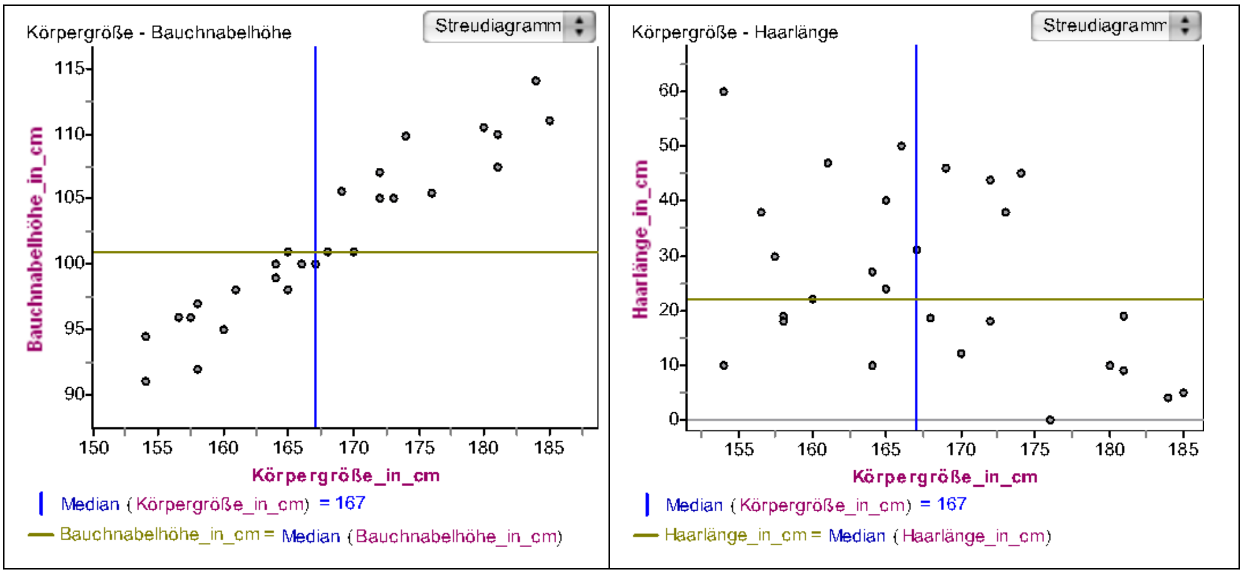


Abb. 4.22: Streudiagramm mit eingezeichnetem Mediankreuz. links: Zusammenhang: Körpergröße und Höhe des Bauchnabels; rechts: Körpergröße und Haarlänge

Diese Darstellung soll in weiterer Folge als Hilfestellung für die Interpretation des Korrelationskoeffizienten dienen.
Für die Einführung des Korrelationskoeffizienten werden zuerst ideale lineare Zusammenhänge betrachtet. „Entscheidend ist nun, die Eigenschaften der Punktwolke im Sinne eines linearen Zusammenhangs zu deuten. Ist solch ein linearer Zusammenhang

gegeben, so stellt eine Gerade ein gutes Muster oder Modell für die Repräsentation der Punktwolke sein. Um eine Vorstellung davon zu haben, was mit ‚gut' gemeint ist, betrachten wir die Sache zunächst einmal vom Ende her: Wie sehen Punktwolken aus, die durch das Mittelkreuz in vier Gruppen eingeteilt sind und diese Eigenschaften besitzen?" (Eichler & Vogel 2009, S.99)

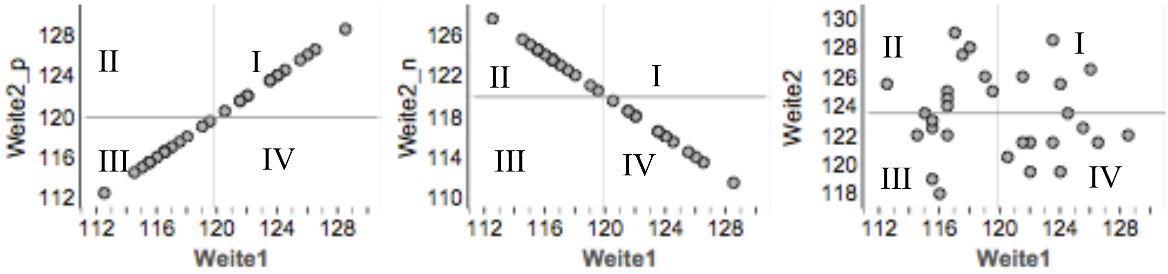


Abb. 4.23: links: idealer positiver linearer Zusammenhang, Mitte: idealer negativer linearer Zusammenhang; rechts: kein Zusammenhang (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.100)

Im Plenum werden aus diesem Grund die drei in Abb. 4.23 dargestellten Streudiagramme untersucht. Die drei Abbildungen stellen die Weiten von zwei Skisprungbewerben dar (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.100). Es ist dabei zu erkennen, dass beim perfekten positiven Zusammenhang alle Datenpunkte im I. und III. Quadranten liegen. Bei einem perfekten negativen Zusammenhang liegen alle Werte im II. und IV. Quadranten.

Allgemein kann festgehalten werden: „Die Punkte in den Quadranten I und III leisten einen positiven Beitrag zu einer (sic!) positiven linearen Zusammenhang der beiden Merkmale (…), Punkte in den Quadranten II und IV einen negativen Beitrag. Sind die Punkte in allen Quadranten gleichermaßen verteilt, dann ist nicht zu entscheiden, ob ein positiver oder ein negativer linearer Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen besteht." (Eichler & Vogel 2009, S.100)

Der sogenannte Korrelationskoeffizient wird als Zahl zwischen 1 und -1 festgelegt.

- „Gilt $r = +1$, so besteht ein perfekter positiver linearer Zusammenhang zwischen den bei den Merkmalen (Fall 1),
- gilt $r = -1$, so besteht ein perfekter negativer linearer Zusammenhang zwischen den bei- den Merkmalen (Fall 2),
- gilt $r = 0$, so besteht kein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen (Fall 3)." (Eichler & Vogel 2009, S.100)

Dieser Teil kann nicht von selber entdeckt werden, sondern gilt als Grundgerüst, „um einen Algorithmus für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten zu konstruieren. Elementar

wäre es, die Punkte in den Quadranten schlicht auszuzählen und auszuwerten.“ (Eichler & Vogel, S.101)
Eichler & Vogel schlagen einen „zählenden“ Korellationskoffizienten vor.
„Mit der Formel $r_z = \frac{n^+ - n^-}{n}$ erhält man einen einfachen Korrelationskoeffizienten (das z steht hier für „zählen“), der die oben genannten Anforderungen erfüllt.“ (Eichler & Vogel 2009, S.101)
Dabei gilt:
n^+… Anzahl der Punkte im I und III Quadranten,
n^-… Anzahl der Punkte im II und IV Quadranten,
wobei n ist die Gesamtanzahl der Daten ist.
Nach Eichler & Vogel werden die Punkte die direkt auf dem Mediankreuz liegen für die anliegenden Mediankreuze halb gezählt. In die Formel eingesetzt löschen sich diese Punkte aus, da sie sowohl positiv als auch negativ gezählt werden. Aus diesem Grund werden sie im Folgenden nicht weiter beachtet.

Aufbauend auf diese Formel ergibt sich für den Unterrichtsvorschlag im Hinblick auf den Zusammenhang von Körpergröße und Bauchnabelhöhe ein Korrelationskoeffizient von 0,85, für den Zusammenhang von Körpergröße und Haarlänge ein Wert von -0,33.
Der lineare Zusammenhang zwischen Körpergröße und Bauchnabel ist also, wie vermutet, stärker als bei Körpergröße und Haarlänge.

Interpretation der Kennwerte
Was aber besagt dieser Zusammenhang? Zuerst einmal ist festzuhalten, dass es sich bei beiden Vergleichen um sehr kleine Datensätze handelt. Vor allem beim Vergleich Körpergröße und Haarlänge könnten sich bei größeren Datensätzen durchaus andere Korrelationskoeffizienten ergeben. Hier ist von Bedeutung, den Schülerinnen und Schülern ein Verständnis dafür zu vermitteln, dass bei der Interpretation von Maßzahlen, die den Zusammenhang von Merkmalen quantifizieren, immer auch der Kontext berücksichtigt werden muss. „Ohne diesen inneren Zusammenhang ließen sich statistische Abhängigkeiten belegen, die im Sachkontext jeglicher Grundlage entbehren.“ (Eichler & Vogel 2009, S.122)

Scheinkorrelation

Es besteht durchaus die Möglichkeit, dass sich beim Zusammenhang von Körpergröße und Haarlänge aus Zufall ein hoher Korrelationskoeffizient ergibt. In der Analyse mit dem Sachkontext scheint jedoch klar, dass die Größe keine große Auswirkung auf die Haarlänge hat. Um die Bedeutung der Interpretation weiter zu illustrieren, kann auch auf andere Datensätze verwiesen werden. So geben Eichler & Vogel (2009, S.122) zwei Datensätze an (siehe Abb. 4.24), die zwar einen starken positiven bzw. negativen Zusammenhang aufweisen, aber „im Sachkontext lassen sich kaum sinnvolle Argumente für ihren inhaltlichen Zusammenhang anführen“ (Eichler & Vogel 2009, S.122).

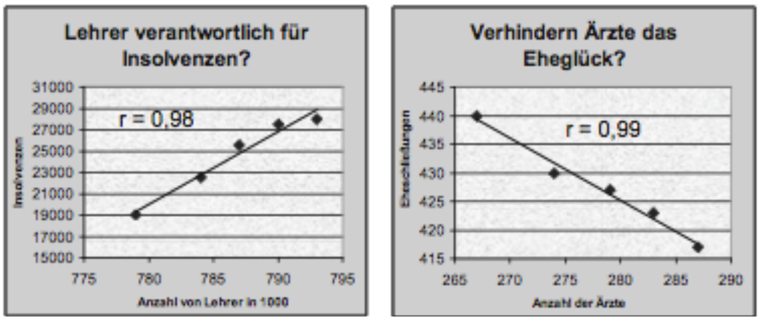


Abb. 4.24: „Statistische Nonsens-Abhängigkeiten“ (Eichler & Vogel 2009, S.122)

Es handelt sich dabei um Scheinkorrelationen, das heißt es besteht eine hohe statistische Korrelation, im Sachkontext hält diese jedoch nicht stand.

Scheinkausalität

Ein weiterer Fehler, der bei der Interpretation vom Zusammenhang zweier Merkmale immer wieder gemacht wird, ist, von einer hohen Korrelation auf eine Ursache-Wirkung Verbindung zu schließen. Bei der vorangegangenen Aufgabe ist offensichtlich eine große Körpergröße Ursache für einen höher liegenden Bauchnabel. Dies ergibt sich jedoch nicht auf Grund des hohen Korrelationskoeffizienten, sondern vielmehr aus der Interpretation des Kontextes. So sind bei größerer Körpergröße in der Regel auch die Beine länger und deswegen liegt auch der Bauchnabel höher.

Eichler & Vogel (2009) erläutern hier zur Veranschaulichung ein Beispiel, das den Zusammenhang von Sterbezahlen und Aufenthaltsorten untersucht. „Es ist bekannt, dass mehr Leute im Bett als auf der Straße, auf der Toilette, im Fußballstadion oder in der Kneipe sterben. Also sollte man das Bett tunlichst vermeiden und lieber in der Kneipe noch ein Bier bestellen“ (Eichler & Vogel 2009, S.122). Es ist wichtig, dass der Analyse des Korrelationskoeffizienten viel Bedeutung beigemessen und hervorgehoben wird, dass eine

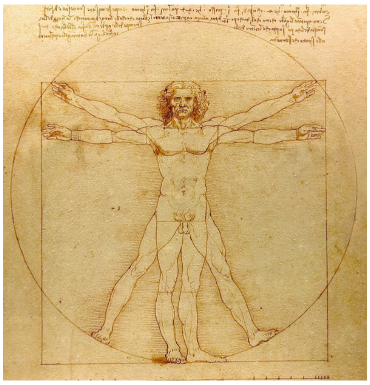
Analyse von Ursache und Wirkung immer in der Interpretation und nicht im Korrelationskoeffizienten selbst liegt: „So sagt ein hoher Korrelationskoeffizient nur etwas über einen linearen Zusammenhang zweier Merkmale aus. Jede Zuweisung, dass eines der Merkmale Ursache für die sich im anderen Merkmal zeigende Wirkung ist, ist reine Interpretation, die außerhalt der statistischen Methoden steht.“ (Eichler & Vogel 2009, S.122)

Arbeitsblatt 12

Vergleich von metrischskalierten Merkmalen

Körperproportionen: **Wo befindet sich dein Bauchnabel?**

In der berühmten Skizze des Universalgenies **Leonardo da Vinci** (1452 – 1519) werden die **Körperproportionen** eines „idealen" Menschen dargestellt.
Laut dieser Studie soll der **Bauchnabel** den **„idealen Menschen"** im goldenen Schnitt teilen.



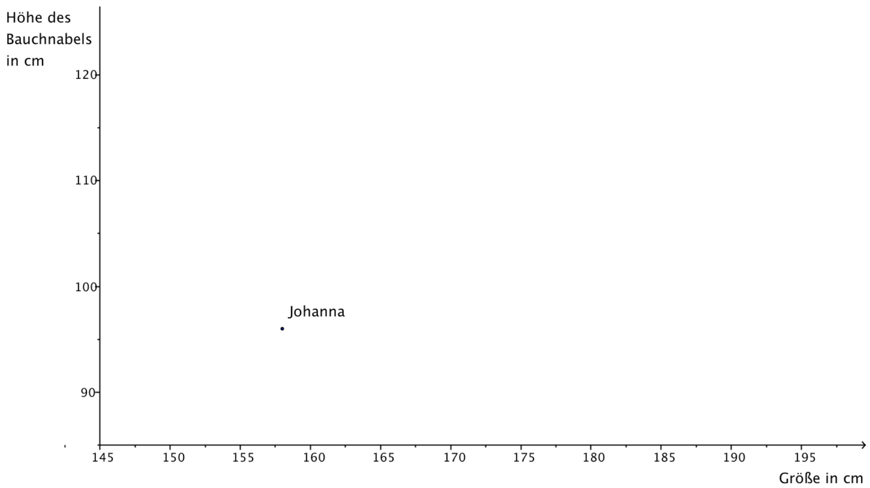
In Folge wollen wir die **Lage des Bauchnabels** genauer untersuchen!

Arbeitsauftrag (in Partnerarbeit)

1. Messt nach, auf welcher **Höhe** sich bei euch der **Bauchnabel** befindet und wie groß ihr seid! **Sammelt** die **Daten aller Schülerinnen und Schüler** und notiert sie in einer **Tabelle**!
2. Stellt in Partnerarbeit die erhobenen Daten, wie beschrieben, in einem **Streudiagramm** dar.

Konstruktionsanleitung **Streudiagramm**:

Bei einem Streudiagramm werden die einzelnen Datenpaare (Körpergröße/Höhe des Bauchnabels) in einem Koordinatensystem eingetragen. Tragt dafür auf der x-Achse eure Größe ein und auf der y-Achse die dazugehörige Höhe des Bauchnabels.



3. Wieso beginnt die x-Achse des Koordinatensystems erst bei 140cm, die y-Achse bei 80cm?
4. Beschreibe **in eigenen Worten, was** du anhand des **entstandenen Streudiagramms erkennst!**
5. **Fügt eine Gerade ein,** die möglichst gut zu den Koordinaten passt! Welche **Probleme** ergeben sich? Gebt eure **Geradengleichung** an und beschreibt sie in Worten!

$y =$ ___ $x +$ ____

Analyse der Daten

6. **Vergleicht eure Geradengleichung** mit euren Mitschülerinnen und Mitschülern! Was ist dabei zu erkennen?*f*
7. **Wie hoch** müsste **dein Bauchnabel** laut dieser Geradengleichung liegen? **Vergleicht** die Lösung mit der tatsächlichen Lage! **Warum** gibt es hier einen **Unterschied**?
   Gilt die Gleichung auch für die Werte, außerhalb des eingezeichneten Koordinatensystems liegen? Gib eine Vermutung ab und begründe diese!

8. Untersucht den Zusammenhang **Haarlänge – Körpergröße**
   a) Stellt eine **Vorabvermutung** auf:
   b) Gibt es einen Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen?
   c) **Zeichnet eine Punktwolke** wie ihr glaubt, dass diese aussehen wird!
   d) Konstruiert mit Hilfe der erhobenen Daten ein Streudiagramm und vergleicht sie mit euren Vermutungen!

Korrelationskoeffizient

Wir wollen ein Maß finden, das den Grad des linearen Zusammenhangs angibt.

9. Zeichnet das Median-Kreuz in das Streudiagramm ein!
   Konstruktionsanleitung **Mediankreuz**:
   Ermittelt den Median der Körpergröße, sowie der Höhe des Bauchnabels.
   Zeichnet durch den Median der Körpergröße eine Gerade die parallel zur y-Achse ist, sowie eine Gerade durch den Median der Bauchnabelhöhe die parallel zur x-Achse ist!
   Es entsteht ein Kreuz. Dieses Kreuz nennt man Mediankreuz.

10. Es entsteht ein Diagramm mit vier Quadranten. Kennzeichnet die Werte, die
    - bei beiden Merkmalen größer sind als der Durchschnitt.
    - die größer sind als der Durchschnitt und deren Höhe des Bauchnabels kleiner ist als der Durchschnitt.
    - die kleiner sind als der Durchschnitt und deren Höhe des Bauchnabels größer ist als der Durchschnitt.
    - bei beiden Merkmalen kleiner sind als der Durchschnitt!

11. Zählt die Anzahl der Punkte in jedem Quadranten! In welchen Quadranten liegen die meisten Werte?

4.4.2 Vergleich von nominalskalierten Merkmalen

Im Sinne des Spiralprinzips wird der Datensatz zur Computernutzung wieder aufgegriffen (siehe 3.2.1). Dabei soll untersucht werden, ob es hinsichtlich der Computernutzung Unterschiede zwischen Mädchen und Buben gibt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.119). Es wird erneut auf den Text der OECD zurückgegriffen, um den Vergleich zu motivieren (siehe Arbeitsblatt 14).

Bevor ein Zusammenhang der beiden Merkmale untersucht wird, werden die Informationen übersichtlich dargestellt. Die gängige Methode zur Darstellung von nominalskalierten Merkmalen ist die Kreuztabelle, oder auch Kontingenztafel genannt. Es wird im Folgenden gezeigt, dass bei dieser Darstellungsform jedoch einige Schwierigkeiten liegen und die Darstellung im Baumdiagramm eine bessere Alternative bietet.

Bei der Kreuztabelle werden in einer Tabelle die Kombinationen von Merkmalsausprägungen dargestellt (siehe Abb. 4.25). Die einzelnen Felder stellen die konjugierten Häufigkeiten dar. Am Rand stehen die Spalten- bzw. Zeilensumme. Diese geben die Häufigkeiten der einzelnen Merkmale an.

Bei der Analyse der Daten aus dem MUFFIN-Datensatz ergibt sich z. B., dass elf Buben und nur acht Mädchen regelmäßig Computer spielen (siehe Abb. 4.25).

Computerspiele

		ComputerspielerIn		Zeilen-zusammenfassung
		ja	nein	
Geschlecht	männlich	11	2	13
	weiblich	8	12	20
Spaltenzusammenfassung		19	14	33

S1 = Anzahl ( )

Abb. 4.25: Kreuztabelle mit absoluten Häufigkeiten

Dieses Ergebnis provoziert die Verwendung der relativen Häufigkeiten, da in diesem Fall zwei verschieden große Datensätze verglichen werden (siehe Abb. 4.26).

Computerspiele

		ComputerspielerIn		Zeilen-zusammenfassung
		ja	nein	
Geschlecht	männlich	0,33	0,06	0,39
	weiblich	0,24	0,36	0,61
Spaltenzusammenfassung		0,58	0,42	1

S1 = runde $\left(\frac{\text{Anzahl}(\ )}{\text{Gesamtanzahl}}; 2\right)$

Abb. 4.26: Kreuztabelle mit relativen Häufigkeiten

Bei der Darstellung mit relativen Häufigkeiten sind einige Tücken zu berücksichtigen (vgl. Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.33):

- So ist auf den ersten Blick nicht klar ersichtlich, wie groß die zugrunde liegende Gesamtanzahl ist und wie aussagekräftig somit die Stichprobe ist.
- Zudem werden die Zelleninhalte häufig falsch interpretiert. So wird die konjunktive relative Häufigkeiten mit der bedingten relativen Häufigkeit verwechselt. Anstatt der richtigen Aussage „24% aller Befragten sind weiblich *und* spielen Computerspiele" heißt es oft „24% der Mädchen spielen Computerspiele". Bei dem Anteil der Mädchen *m,* die den Computer zum Spielen verwenden *c* handelt es sich um die bedingte Häufigkeit $h(c|m)$. Diese relative Häufigkeit kann nicht unmittelbar aus der Vierfeldtafel abgelesen, sondern muss berechnet werden.
- In der Berechnung der bedingten Häufigkeit liegt jedoch die nächste Schwierigkeit. Um mit Hilfe der Einträge der relativen Vierfeldertafel die bedingte Häufigkeit zu ermitteln, müssen Prozent durch Prozent dividiert werden.

  $h(c|m) \approx \frac{0{,}2424}{0{,}6061} = 0{,}4$

  Dies ist intuitiv nur sehr schwer verständlich.

Aufgrund dieser Punkte plädieren Wassner, Biehler & Martignon (2007) beim Vergleich von nominalskalierten Merkmalen für die Verwendung von absoluten Häufigkeiten und Baumdiagrammen: „Kognitionspsychologische Erkenntnisse und didaktische Überlegungen bringen uns zur festen Überzeugung: In der Schulstochastik stehen am Anfang typischerweise relative Häufigkeiten und Vierfeldtafeln. Es sollten aber vielmehr „natürliche", absolute Häufigkeiten und Baumdiagramme im Vordergrund stehen, da sie die Modellierung derartiger Situationen deutlich anschaulicher und einfacher machen" (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.35).

Bei dem Baumdiagramm, das im klassischen Stochastikunterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorbehalten wurde, werden ausgehend von der Gesamtzahl die einzelnen Merkmalsträger als Äste der Bäume dargestellt. Da Schülerinnen und Schüler noch nie mit einem Baumdiagramm gearbeitet haben, kann hier ein leereres Baumdiagramm vorgegeben werden.

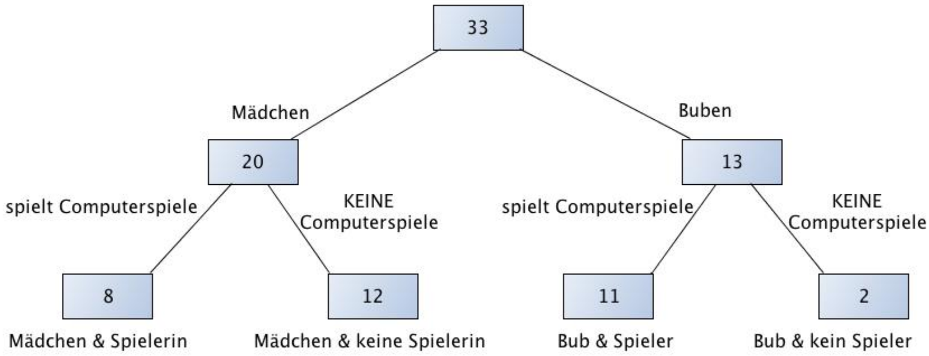


Abb. 4.27: Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten

Mit Hilfe des Baumdiagramms (siehe 4.27) kann nun sehr anschaulich ermittelt werden, wie groß der Anteil der Mädchen, die Computerspiele spielen, ist: So ist zu erkennen, dass 8 von 20 Mädchen häufig Computerspiele spielen, also $h(c|m) = \frac{8}{20} = 0{,}4$. Im Vergleich dazu spielen 11 von 13 Buben häufig Computerspiele: $h(c|b) = \frac{11}{13} \approx 0{,}85$.

Wird die Frage umgekehrt danach gestellt, wie viel Prozent Prozent der Computerspieler bzw. -spielerinnen Mädchen sind, wird das Baumdiagramm zu einem „Doppelbaum“ erweitert (vgl. Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.37) und auch hier kann der Anteil einfach abgelesen werden (siehe Abb. 4.28: 8 von 19 Computerspielern bzw. -spielerinnen sind Mädchen: $h(m|c)= \frac{8}{19} \approx 0{,}42$.

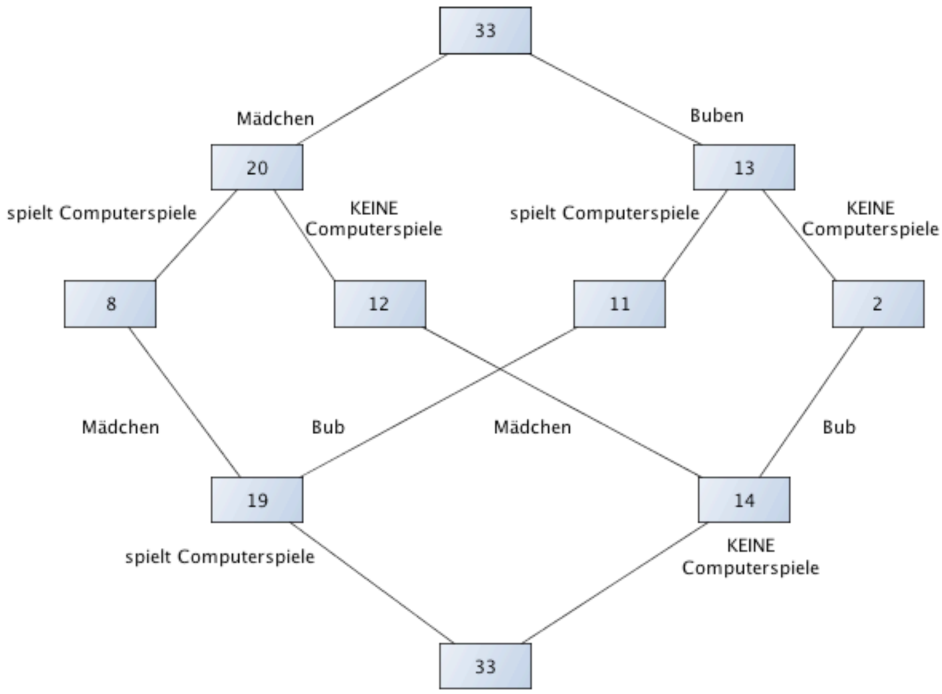


Abb. 4.28: Doppelbaum

Mit Hilfe des „Häufigkeitsbaums“ können bedingte Häufigkeiten anschaulich und intuitiv ermittelt werden. Wassner, Biehler & Martignon (2007) nennen drei wesentliche Vorteile des Konzepts der natürlichen Häufigkeit:

- „Modellierungen werden weitaus anschaulicher, da realistisch nachvollziehbar.
- Lösungen werden formal deutlich einfach, da schwierige Rechnungen der Art ‚Prozent von Prozent’ wegfallen.
- Es erfolgt ein verständiges Modellieren, im Gegensatz zu einem routinemäßigen Einsetzen in eine hergeleitet Formel und Eintippen in den Taschenrechner.“

(Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.37)

Vor allem das verständliche Modellieren sehen sie als wichtigen Punkt für die Verwendung von „Häufigkeitsbäumen“. „Gerade der letzte Punkt ist aus unserer Sicht das Hauptargument für eine verstärkt häufigkeitsbasierte Vorgehensweise in der Schulstochastik. Die Schüler sollen (sich) erklären können, wie es zu einem Ergebnis kommt.“ (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.37)

Bewertung der Unterschiede

Wie kann nun der Vergleich der Merkmale quantifiziert werden?

Es hat sich bereits herausgestellt, dass dabei die bedingten Häufigkeiten verglichen werden müssen. „Aus dem Vorangegangen ist möglicherweise deutlich geworden, dass es wenig sinnvoll ist, die konjugierten Häufigkeiten (also die vier inneren Einträge der Vierfelder-Tafel) zu vergleichen – zumindest dann, wenn die Teilstichproben, etwa zu Junge und Mädchen, unterschiedlich groß sind.“ (Eichler & Vogel 2009, S.82)

Es wird dabei die Schreibweise bedingter Häufigkeiten eingeführt. Die Bedingung wird mit einem Strich | verdeutlicht.

Unter $h(c|m)$ ist also die relative Häufigkeit eines Computerspielers/einer Computerspielerin unter der Bedingung, dass es sich dabei um ein Mädchen handelt, zu verstehen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich zudem überlegen, wie die beiden Häufigkeiten sein müssten, um daraus zu schließen, dass das Geschlecht keine Auswirkung auf das Computerspielverhalten hat. So ist das der Fall, wenn der Anteil der Mädchen, die Computerspiele spielen genauso groß ist wie jener Anteil der Buben: $h(m|c) = h(b|c)$.

Auf diese Weise kann das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit verdeutlicht werden.

Es stellt sich nun jedoch die Frage, welches Merkmal als bedingtes Merkmal festlegt wird.

- Eine Möglichkeit ist, das Geschlecht als Bedingung zu verwenden.

  Das ergibt, dass der Anteil der Buben, die häufig Computerspiele spielen mehr als doppelt so hoch ist wie der Anteil der computerspielenden Mädchen:

  $h(c|m) = \frac{8}{20} = 0{,}4$

  $h(c|b) = \frac{11}{13} \approx 0{,}85$

- Eine andere Möglichkeit wäre jedoch das Spielen von Computerspielen als Bedingung zu verwenden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.83), um den Zusammenhang von Geschlecht und Computerspielen zu untersuchen.

  $h(m|c) = \frac{8}{19} \approx 0{,}42$ und $h(b|c) = \frac{11}{19} \approx 0{,}57$

  Hier ist der Unterschied bedeutend kleiner.

Es zeigt sich, dass die beiden Ergebnisse verschiedene Interpretationen liefern: $h(c|m) \neq h(m|c)$. So geschieht bereits eine wichtige Vorbereitung für das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Es stellt sich die Frage, welche der beiden Berechnungen herangezogen werden soll, um den Zusammenhang von Geschlecht und Computerspielverhalten zu untersuchen.

„Welcher dieser beiden Vergleiche bedingter Häufigkeiten ist sinnvoll? Das ist die schwierige und Fehler produzierende Frage nach möglicher Ursache und Wirkung. (…) Es gibt im Allgemeinen keinen Algorithmus, mit Hilfe dessen entschieden werden kann, welches Merkmal Ursache und welches Wirkung sein könnte. Vielmehr ist es notwendig den Sachkontext zu interpretieren, um ein angemessenes Modell der Situation zu wählen.“ (Eichler & Vogel 2009, S. 83ff)

Es soll untersucht werden, ob sich das Computerspielverhalten in Bezug auf das Geschlechts unterscheidet. Das „Geschlecht“ ist die Ursache und die Auswirkung des Geschlechts auf „das Spielen von Computerspielen“ soll untersucht werden. Das bedeutet $h(c|m)$ und $h(c|b)$ zu vergleichen.

Auch hier verweisen Eichler & Vogel (2009) auf ein Beispiel um die Verwechslung von Ursache und Wirkung besser zu illustrieren. Es wird dabei der Zusammenhang von „Alkohol“ und „Tod bei einem Unfall“ untersucht (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.84). So hieß es in einem Zeitungsartikel, dass trotz des Rückgangs von tödlichen Unfällen, die unter Alkoholeinfluss entstanden, noch immer 12% der tödlichen Unfälle t auf Grund von Alkoholeinfluss a passieren. Ein vermeintlich geringer Prozentanteil. Deswegen ließ sich ein Politiker dazu hinreißen, darauf hinzuweisen, dass wenn dem so ist, es durchaus angebracht ist, noch ein Bier vor der Autofahrt zu trinken. Die Zeitung hat offensichtlich mit „der falschen bedingten Häufigkeit $h(a|t)$“ argumentiert.

„Um das Risiko des alkoholisierten Fahrens zu vermitteln, ist aber die Häufigkeit mit vertauschter Bedingung entscheidend, also: h_n(Tod bei Unfall | Alkohol). Diese Häufigkeit ist sicherlich größer als h_n(Tod bei Unfall | kein Alkohol)“ (Eichler & Vogel 2009, S.84). Auf diese Weise wird weiter verdeutlicht, dass beim Vergleich von Merkmalen die Interpretation des statistischen Ergebnisses wesentlich ist.

Arbeitsblatt 14

Zusammenhang von nominalskalierten Merkmalen

Verwenden Mädchen und Buben den Computer zu verschiedenen Unterhaltungszwecken?

„Geschlechtsspezifische Unterschiede bei der Häufigkeit der Computernutzung für das Internet und zu Unterhaltungszwecken

In allen an PISA 2003 teilnehmenden Ländern nutzen Jungen IKT häufiger als Mädchen für Internet und Unterhaltung. Besonders ausgeprägt sind die geschlechtsspezifischen Unterschiede bei den Angaben zur Nutzung für Computerspiele. Im Durchschnitt ist in den OECD-Ländern die Wahrscheinlichkeit einer häufigen Nutzung für solche Spiele bei Jungen doppelt so groß wie bei Mädchen (70% gegenüber 35%). Noch größer ist der Abstand in Dänemark und Schweden, wo über 80% der Jungen häufig Computerspiele spielen. In den Vereinigten Staaten, wo die Differenz zwischen Jungen und Mädchen geringer ist, benutzt über die Hälfte der 15-jährigen Mädchen den Computer oft für Computerspiele. Im Durchschnitt ist in den OECD-Ländern auch die Wahrscheinlichkeit, Spiele und andere Software herunterzuladen, bei Jungen doppelt so hoch wie bei Mädchen (51% gegenüber 25%). Dagegen nutzen Jungen und Mädchen Computer für elektronische Kommunikation in ähnlichem Maße, wobei durchschnittlich 56% der Jungen und 55% der Mädchen angeben, Computer häufig für diesen Zweck zu gebrauchen.“

(OECD 2006, S.47)

- Stelle eine erste **Vermutung** auf:
  Was glaubst du, spielen auch in deiner Klasse die **Buben** mehr Computerspiele als die **Mädchen**?

Untersuchung in eurer Klasse

Belegt (in **Partnerarbeit**) eure Vermutung indem ihr die **Daten** analysiert, die ihr bei der **Befragung** erhoben habt!

1) Stellt dafür die Daten in einem **Baumdiagramm** dar!

2) Beantwortet mit Hilfe des Baumdiagramms folgende **Fragen:**
   a. **Wie viele** Mädchen in eurer Klasse spielen Computerspiele und wie viele Buben?
   b. Wie viel Prozent der Buben spielen Computerspiele? Wie viel Prozent der Mädchen?

3) **Vergleicht** eure Ergebnisse mit den Schlussfolgerungen der OECD-Studie und fasst eure Erkenntnisse in einem kurzen **Text** zusammen!

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird vor allem der Konzeption der Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ besondere Bedeutung beigemessen. Daten helfen dieses Konzepte anschaulich zu illustrieren.
Um einen konsistenten Aufbau zu ermöglichen, wird in den ersten Unterrichtsvorschlägen wiederholt das Würfelspiel verwendet. Dabei werden nicht nur gewöhnliche Laplace-Würfel betrachtet, sondern auch Quader- und U-förmige „Würfel“. Auf diese Weise soll vermieden werden, dass sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff auf eine Laplace´sche Konzeption beschränkt. Würfel haben den Vorteil, dass Daten sehr einfach erzeugt werden können. Zudem bekommen Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, den Wahrscheinlichkeitsbegriff spielerisch zu erfahren. Die wesentlichen Ideen der Unterrichtsvorschläge werden zum großen Teil von Wolfgang Riemer (1991) übernommen und modifiziert. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung soll sich dennoch nicht auf Aufgaben aus dem Glückspielbereich (Würfel, Urnen, Münzen, usw.) beschränken. Aus diesem Grund werden im Anschluss Möglichkeiten vorgestellt, wie die Aufgaben der Datenanalyse auch Thema der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden können. Auf diese Weise soll die Verbindung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung überdies betont und das Spiralprinzip im Unterricht ermöglicht werden.

5.1 Einführung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist in Österreich im internationalen Vergleich (z. B. Deutschland, USA) sehr spät im Curriculum vorgesehen. Sie ist Teil des AHS-Lehrplans der 6. Klasse (10. Schulstufe).
So heißt es darin:
„Stochastik
- Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik
- Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen
- Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit

- *Arbeiten mit dem Satz von Bayes*“ [13]

Der Einstieg erfolgt aus Zeitmangel meist sehr abrupt und es bleibt wenig Zeit, um ein wesentliches Verständnis der Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall zu entwickeln. Dieses Verständnis ist jedoch zentral, um wesentliche Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erfassen.

„Der Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (erst) in der 6. Klasse AHS gibt der Einführung der essentiellen Begriffe ‚Wahrscheinlichkeit' und ‚Zufall' oft wenig Raum, gleicht eher einem Sprung ins kalte Wasser, dessen Folgen sich später, sei es bei der Interpretation von Ergebnissen oder beim Verstehen von Ideen und Methoden der Stochastik, als Mangelerscheinungen entpuppen (können).“ (Hauer-Typpelt 2010, S.1)

Es wird im Folgenden versucht, eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben, die der Entfaltung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hohen Stellenwert beimisst. Wie bei den vorigen Kapiteln wird anhand von Experimenten und des Arbeitens mit lebendigen Daten ein Einstieg geschaffen, mit Hilfe dessen die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Charakteristika der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbstständig erfahren können.„Begriffe wie Zufall und Wahrscheinlichkeit sind schon per se als didaktisch schwierig einzustufen. Es ist insbesondere das Abstrakte und Unanschauliche, was diesen Begriffen innewohnt, die es angeraten erscheinen lassen, die Zugangswege möglichst konkret und anschaulich zu gestalten. Auf diese Weise soll das zunehmend abstraktere stochastische Denkvermögen der Schülerinnen und Schüler angebahnt werden.“ (Eichler & Vogel 2009, S.170)

Ziel ist es, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur lernen, wie Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, sondern auch verstehen, was diese bedeuten. Stochastisches Denken soll so gefördert werden. Damit ist ein allgemeines Verständnis für zufällige Prozesse und das Treffen von Entscheidungen unter Unsicherheit gemeint.

Biehler sieht das stochastische Denken als wichtige Stütze: „Probabilistic thinking is the pillar of enlightenment: Chance is not magic but computable – at least to a certain extent, namely with regard to long run behavior. Risks become calculable and decision under uncertainty can be rationalized.“ (Biehler 1996, S.7)

[13] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, S. 5 (Zugriff: 3.9.2013)

5.1.1 Zufall

Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt oft als kontraintuitiv. Die falschen Vorstellungen begründen sich unter anderem darin, dass wir ein irreführendes Bild des Begriffs Zufall haben. Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jener Bereich der Mathematik, der versucht, den Zufall zu beschreiben: „Probability is the branch of mathematics that describes randomness.“ (Moore 1990, S.97)

Aus diesem Grund wird, bevor mit Wahrscheinlichkeiten gearbeitet wird, der Zufallsbegriff genau analysiert. Mögliche Präbegriffe – also bereits intuitiv vorhandene Vorstellungen – der Schülerinnen und Schüler werden aufgedeckt. Es soll ein für die Mathematik tragfähiger Begriff des Zufalls entwickelt werden.

Der Begriff Zufall kann nicht so einfach definiert werden und trotzdem haben wir alle bestimmte Vorstellungen und verwenden ihn umgangssprachlich auf verschiedene Weise („Welch Zufall, dass wir einander hier sehen“).

Im Folgenden wird der Begriff genauer analysiert. Dabei geht es nicht um eine philosophische Untersuchung, sondern „Ziel ist eine Isolierung von Aspekten und Bedeutungskomplexen des Zufallsbegriffes.“ (Sill 1993, S.84)

Im Gegensatz zu deterministischen Vorgängen kann der Ausgang eines zufälligen Vorgangs nicht vorausgesagt werden. Dennoch ist „zufällig“ kein Synonym für „wahllos“. So kann zwar bei *einem* zufälligen Vorgang das Ergebnis nicht vorhergesagt werden, es lassen sich aber bei einer großen Anzahl an Wiederholungen Muster erkennen: „Phenomena having uncertain individual outcomes but a regular pattern of outcomes in many repetitions are called *random.* ‚Random‘ is not a synonym for ‚haphazard‘ but a description of a kind of order different from the deterministic one that is popularly associated with science and mathematics.“ (Moore 1990, S.97)

Viele Vorgänge aus unserer Umwelt unterliegen dem Zufall. Zufall ist nicht nur Teil des Glücksspiels, sondern findet sich auch in Bereichen, in denen man es nicht vermutet. So gelten Physik und Biologie als Wissenschaften, die Naturgesetze beschreiben, also deterministische Vorgänge. Spätestens seit der Quantenphysik müssen Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen einsehen, dass nicht alle Vorgänge durch Naturgesetze beschrieben werden können. In der Welt der Atome können einzelne Ereignisse nicht mehr mit Hilfe von Naturgesetzen genau vorhergesagt werden. Es kann nur mehr mit einer – zumindest berechenbaren – Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass bestimmte Ereignisse eintreten.

Durch den anschließend vorgestellten Unterrichtsvorschlag sollen sich Schülerinnen und Schüler mit ihrer Vorstellung von Zufall auseinandersetzen. Umgangssprachliche (Miss-) Konzeptionen werden dabei aufgezeigt und sollen abgegrenzt werden. Darauf aufbauend sollen wesentliche Charakteristika des Zufallsbegriffs gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden.

Was ist Zufall?

Die Schülerinnen und Schüler werden zuerst dazu aufgefordert, in einem kurzen Essay zu erklären, was Zufall für sie bedeutet. Danach sollen sie bestimmen, ob es sich bei verschiedenen vorgestellten Ereignissen um Zufall oder keinen Zufall handelt, und ihre Entscheidung begründen (siehe Arbeitsblatt 15).

Didaktischer und methodischer Hintergrund

Das Schreiben eines kurzen Essays dient dazu, Schülerinnen und Schüler zu animieren, sich aktiv mit der Bedeutung des Zufallsbegriffs auseinanderzusetzen. Die Systematisierung in Form eines Essays soll ein erstes Bewusstsein dafür schaffen, dass der Begriff des Zufalls nicht so einfach beschrieben werden kann. Die Ergebnisse werden im Plenum diskutiert.
Im zweiten Teil der Aufgabe werden die Argumente anhand konkreter Situationen erarbeitet.
So können zu Aufgabe Nr. 1 folgende Argumente angeführt werden:

- Selmas Leistung ist bestimmt durch ihre Tagesverfassung, das Training, ihren Körperbau, deswegen ist sie kein Zufall.
- Da das Ergebnis festgelegt ist, ist es kein Zufall.
- Da man im Vorhinein nicht wissen kann, wie schnell Selma läuft, ist es Zufall.
- Selmas Leistung ist abhängig von verschiedenen Faktoren, deswegen ist sie Zufall.

Eine Möglichkeit ist, die Schülerinnen und Schüler für und gegen Zufall in einem Streitgespräch gegeneinander antreten zu lassen (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.155).
Zudem dient diese Aufgabe dazu, umgangssprachliche Definitionen und falsche Vorstellungen aufzuzeigen. Die einzelnen Aufgaben wurden so ausgewählt, dass daran wesentliche umgangssprachliche (Miss-)Konzeptionen – Eichler & Vogel (2009, S.158) sprechen von Präbegriffen – aufgezeigt werden können:

- So werden häufig ausschließlich sehr selten eintreffende Ereignisse als „zufällig“ bezeichnet („Welch ein Zufall, dass wir einander genau hier treffen“). Auf dem Arbeitsblatt geht Aufgabe Nr. 2 (Wetter) in diese Richtung.

- Als zufällig wird etwas bezeichnet, was von der Erwartung abweicht: „Im Sinne von Glück oder Pech wird die Bezeichnung Zufall in der Umgangssprache jedoch nicht nur zur Kennzeichnung seltener Ereignisse, sondern auch dann verwendet, wenn das eingetretene Ergebnis ohne ersichtlichen Grund von den Erwartungen abweicht“ (Sill 1991, S.85). Eine Studie von Schulz (1987) stellte fest, dass bei einem Fußballspiel der Ausgang dann als zufällig bestimmt wurde, wenn der Außenseiter gewann, und als nicht zufällig, wenn der Favorit gewann (vgl. Sill 1991, S.85). Beispiele sind Aufgabe Nr. 4 (Ried gewinnt) und Aufgabe Nr. 2 (Wetter).
- Nur Vorgänge mit gleichwahrscheinlichen Elementarergebnissen (Würfel, Münze, ...) werden als zufällig betrachtet. „Die Verbindung von Zufall und Gleichwahrscheinlichkeit ist teilweise so dominierend, daß (sic!) auch nicht gleichwahrscheinliche zufällige Ereignisse als gleichwahrscheinlich angesehen werden“ (vgl. Monks 1986, zitiert nach Sill 1991, S.85). Beispiel dafür ist die Aufgabe Nr. 8 (Würfel).
- Alles, was von Menschen beeinflusst werden kann, wird als nicht zufällig bezeichnet. So gaben bei einer Befragung von Schülerinnen und Schülern 65 % an, dass es kein Zufall sei, welche Note eine Schülerin bzw. ein Schüler bei einer Schularbeit erhalte. Ein Autounfall wurde aus der Sicht des Unschuldigen als zufällig, aus der Sicht des Schuldigen als nicht zufällig bezeichnet (vgl. Sill 1991, S.85). Beispiele sind in diesem Fall Aufgabe Nr. 1 (Selma läuft), Nr. 6 (Mateos Schularbeit), Nr. 7 (Zug) und Aufgabe Nr. 9 (Smartphones).

Nach der Abgrenzung des intuitiven Gebrauchs kann anhand der Aufgaben eine gemeinsame Entwicklung des Zufallsbegriffs erfolgen. Die Gemeinsamkeiten der Beispiele werden zusammengetragen und die Ergebnisse der Essays wiederholt. „Die Entwicklung eines für den Stochastikunterricht tragfähigen Zufallsbegriffs kann (wie bei der Begriffsbildung allgemein) durch die Diskussion der Unterschiede in den genannten Phänomenen, insbesondere aber in der Diskussion der Gemeinsamkeiten entstehen“ (Eichler & Vogel 2009, S.158). Es ist zu betonen, dass es nicht *die eine Definition* für den Zufall gibt. „Die zweifellos allgemeinste Bedeutung erhält der Zufallsbegriff, wenn er, wie in den meisten Stochastikbüchern üblich, primär in Beziehung zur Existenz verschiedener Ergebnismöglichkeiten gebracht wird. Ein Ereignis wird zufällig genannt, wenn es eintreten kann, aber nicht eintreten muß (sic!).“ (Sill 1991, S.86)

Man kann sich am Ende auf diese in der Mathematik tragfähige Definition des Zufalls einigen.

Zufallsexperiment, Zufallsversuch oder doch besser zufälliger Vorgang?

Im Stochastikunterricht hat sich im Zusammenhang mit zufälligen Ereignissen der Terminus „Zufallsexperiment“ eingebürgert. Im österreichischen AHS-Lehrplan ist in der 6. Klasse die Rede vom „Kennen des Begriffes Zufallsversuch”[14]. Mit dieser Ausdrucksweise soll der Charakter des Zufälligen, der diesen Vorgängen innewohnt, betont werden. Beim Zufallsexperiment bzw. Zufallsversuch handelt es sich jedoch um eine „problematische Terminologie“ (vgl. Sill 1993, Eichler & Vogel 2009), weil ein Zufallsexperiment nicht immer ein klassisches Experiment darstellt. Ein Experiment kennzeichnet sich dadurch, dass es geplant wird und beliebig wiederholbar ist (siehe 3.2.2). Die Planung und Wiederholbarkeit kann bei vielen im Stochastikunterricht betrachteten Vorgängen in Frage gestellt werden (z. B. Berechnen einer Fehlerwahrscheinlichkeit). Zudem impliziert ein Experiment das bewusste Eingreifen von Subjekten. Es werden jedoch auch Vorgänge betrachtet, bei denen der Mensch nicht bewusst eingreift (z. B. bei Wetterprognosen).

Sill (1993) sieht in der Verwendung des Begriffes Zufallsexperiment bzw. Zufallsversuch eine Ursache für die Trennung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung: „Die mit dieser ungenügenden sprachlichen Differenzierung verbundene begriffliche Verwirrung ist m. E. eine der Ursachen für die häufige Trennung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. In der Statistik werden Ergebnisse von Vorgängen betrachtet, die man offensichtlich nicht als Experiment ansehen kann, da sie unabhängig von dem beobachtenden Subjekt ablaufen. Wenn man z. B. die Schüler nach ihren Freizeitinteressen befragt, so ist hier das Zufallsexperiment nicht die durchgeführte Befragung. Das eigentliche Zufallsexperiment ist der Entwicklungsprozeß (sic!) der Schüler, in dessen Ergebnis die Freizeitinteressen entstanden sind.“ (Sill 1993, S.87)

Sill plädiert dafür, als Alternative zum Begriff des Zufallsversuchs – bzw. des Zufallsexperiments – den Begriff *zufälliger Vorgang* zu verwenden. Auf diese Weise soll „Zufall nicht primär als Merkmal einer Erscheinung bzw. eines Ereignisses, sondern als Eigenschaft eines Prozesses (bzw. eines Vorganges)“ (Sill 1993, S.87) angesehen werden. Es soll dadurch verdeutlicht werden, dass der Zufall im Vorgang selbst und nicht in der Erscheinung liegt. Auch in der vorliegenden Diplomarbeit wird in diesem Zusammenhang der Begriff des *zufälligen Vorgangs* verwendet.

[14] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, S.5 (Zugriff: 3.9.2013)

Arbeitsblatt 15

Was ist Zufall?

Schreibe einen kurzen Essay, in dem du erklärst, was für dich Zufall bedeutet!

Bei welchem der folgenden Ereignisse handelt es sich um **Zufall**? Begründe deine Entscheidung!

	Zufall	kein Zufall
1. Selma läuft beim Leichtathletikwettbewerb 100 m in 11:02. Begründung		
2. Am 14. Oktober schneit es in Wien. Begründung		
3. Ein vom Tisch geschobener Würfel fällt auf den Boden. Begründung		
4. SV Ried gewinnt gegen den FC Barcelona. Begründung		
5. Der FC Barcelona gewinnt gegen SV Ried. Begründung		
6. Mateo hatte bei der letzten Mathematikschularbeit einen Zweier. Begründung		
7. Der Zug kommt pünktlich. Begründung		
8. Der Wurf eines Würfels zeigt einen Sechser. Begründung		
9. Mehr als die Hälfte der Klasse hat ein Smartphone. Begründung		

5.1.2 Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff

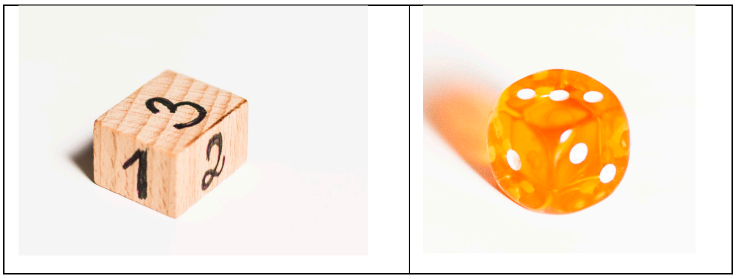


Abb. 5.1 Quaderwürfel und Laplacewürfel

Wie wahrscheinlich ist ein Sechser beim Würfeln? Quader- und normaler Würfel

Der folgende Unterrichtsvorschlag ist von Wolfgang Riemer (1991) übernommen, die einzelnen Arbeitsschritte sind an jene von Eichler & Vogel (2009) angelehnt.
Bei dieser Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff schätzen Schülerinnen und Schüler, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Augenzahlen 1 bis 6 bei einem normalen Würfel sowie bei einem Quaderwürfel (siehe Abb. 5.1) eintreten. Sie werden dazu aufgefordert, ihre Vermutung zu begründen und zu überprüfen (siehe Arbeitsblatt 16).

Didaktisch und methodischer Hintergrund
Mit Hilfe dieses Unterrichtsvorschlags soll der Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickelt werden. Dieser wird jedoch nicht formal eingeführt, sondern soll vielmehr an das Vorverständnis der Schülerinnen und Schüler anknüpft werden.
„Es geht bei dieser Aufgabe sicher nicht darum, den nur axiomatisch definierten Begriff der Wahrscheinlichkeit an sich zu entdecken. Vielmehr geht es um Folgendes: Die Schülerinnen und Schüler sollen Gelegenheit erhalten, ihre Intuitionen zu einem implizit vorhandenen Wahrscheinlichkeitsbegriff mit Hilfe experimenteller Erfahrungen zu systematisieren.“ (Eichler & Vogel 2009, S.149)

Der Unterrichtsvorschlag von Riemer (1991) scheint besonders gut dafür geeignet zu sein, die Vorstellung der Schülerinnen und Schüler von Wahrscheinlichkeit mit einem Experiment zu verknüpfen. Für Riemer ist das Arbeiten mit Hypothesen, sowie der anschließende Vergleich von Hypothese und Ergebnis, zentral für einen gelungenen Stochastikunterricht. Er formuliert folgendes statistisches Paradigma: „Egal, ob wir bei unseren Untersuchungen reale oder simulierte Daten verwenden: Das Formulieren von Fragen, das Erzeugen von

Erwartungshaltungen, das Aufstellen von Hypothesen vor den Experimenten und die Bewertung der Prognosen durch Gegenüberstellung von Voraussagen und Ergebnissen erst im nachhinein (sic!) muß (sic!) in unseren Augen zu einem Paradigma des Stochastikunterrichts werden. Seine konsequente Berücksichtigung hält statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte wie eine Klammer zusammen. Darüber hinaus werden Schüler unmittelbar ins Unterrichtsgeschehen einbezogen und emotional angesprochen, da ihre eigenen Hypothesen zur Disposition stehen.“ (Riemer 1991, S. 15)

Der Würfel im Stochastikunterricht

Es wird im Folgenden wiederholt auf den Würfel zurückgegriffen. Hierbei ist wesentlich, dass damit auch tatsächlich gewürfelt wird. Auf diese Weise werden Daten erzeugt, die mit der geschätzten Wahrscheinlichkeitshypothese verglichen werden können. So kann eine Hypothese nicht nur validiert werden, auch wesentliche Charakteristika des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kommen bei der Überprüfung durch tatsächliches Würfeln zum Vorschein:

So kommt nur in Ausnahmefällen beim Würfeln zweimal dasselbe Ergebnis. Auf diese Weise wird die Zufälligkeit des Vorgangs unterstrichen.

Auch wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser $\frac{1}{6}$ ist, kann es vorkommen, dass zwanzig Mal hintereinander kein Sechser gewürfelt wird.

Neben dem gewöhnlichen Laplace-Würfel wird auch ein Quaderwürfel (siehe Abb. 5.1) betrachtet. Diese Betrachtung eines partiell symmetrischen Objekts hat einige lernpsychologische Vorteile (vgl. Riemer 1991, S.34 ff.):

1. Der Quaderwürfel lässt mehrere sinnvolle Wahrscheinlichkeitsannahmen zu.

   Bei symmetrischen (Laplace-) Objekten, wie einer Münze oder einem normalen Würfel, ist es naheliegend, dass alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Es ergibt sich also nur eine mögliche Verteilung. „Damit verschwindet die fundamentale Idee der Statistik, daß (sic!) es für eine Situation verschiedene Modelle geben kann, daß (sic!) Wahrscheinlichkeiten stets hypothetischen Charakter haben, nur Annahmen darstellen, die mitunter auch verworfen werden müssen“ (Riemer 1991, S.34).

   Erfolgt also die Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff nur über symmetrische Objekte (wie das oft der Fall ist), erfolgt eine Reduktion des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf reine Gleichwahrscheinlichkeit.

2. Anhand von unsymmetrischen Objekten kann der Unterschied zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit illustriert werden.
   Als unsymmetrisches Objekt wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gerne ein Reißnagel betrachtet, daran kann dieser Unterschied jedoch nicht ausreichend gezeigt werden. Beim Reißnagel wird die Wahrscheinlichkeit direkt über die relative Häufigkeit bestimmt. Bei teilweise symmetrischen Objekten ist es dagegen naheliegend, eine Hypothese auf Grund der Symmetrie aufzustellen. Gegenüberliegende Seiten haben also die gleiche Wahrscheinlichkeit. Dieser Vermutung nähert man sich zwar bei der empirischen Überprüfung durch häufiges Würfeln, man erreicht sie aber nur in den seltensten Fällen wirklich: „Bei teilweise symmetrischen Objekten dagegen ist der Unterschied offensichtlich: Wahrscheinlichkeiten spiegeln die Symmetrien wider, relative Häufigkeiten nur in seltenen Ausnahmefällen, die in der Tat höchstes Erstaunen hervorrufen." (Riemer 1991, S.35)

Der Quaderwürfel bietet also für den Unterricht viele Vorteile, er wird auch beim subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff (siehe 5.2.2) wieder darauf Bezug genommen.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Hypothesen aufgestellt und begründet haben, werden sie im Plenum besprochen. Es erfolgt eine erste qualitative Überprüfung der Hypothesen.

Eine Möglichkeit ist, dass Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen in eine Liste eintragen. Die Hypothesen werden dann von den anderen Schülerinnen und Schülern nach ihrer Glaubwürdigkeit beurteilt (siehe Tab. 5.1): von 0 (nicht glaubwürdig) bis 1 (sicher richtig) (vgl. Riemer 1991, S.22).

	1	2	3	4	5	6	Glaubwürdigkeit
Person A	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,05	0,01
Person B	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,03

Tab. 5.1: Geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Laplace-Würfel

Person A glaubt anscheinend, dass der Sechser beim Würfeln seltener vorkommt. Vielleicht erwarten andere genau das Gegenteil. Man kann sich in einer Diskussion darauf einigen, dass es objektiv keinen Grund gibt, wieso ein Sechser öfter bzw. seltener fällt, und deswegen diese Hypothese verwerfen. Die Annahmen von Person B können ebenso verworfen werden, da die Summe der Wahrscheinlichkeiten größer ist als 1. Außerdem lässt sich kein objektiver Grund dafür finden, wieso der Einser weniger wahrscheinlicher ist als alle anderen Zahlen.

Eine andere Verteilung ergibt sich auf Grund der Symmetrieannahme. Ein Würfel ist symmetrisch, aus diesem Grund sind alle sechs Seiten gleich wahrscheinlich. Daraus ergibt sich nur eine mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung (siehe Tab. 5.2).

	1	2	3	4	5	6
Person C	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tab. 5.2: Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Grund der Symmetrieannahme (Laplace-Würfel)

Auch beim Quaderwürfel kann mit Hilfe der Symmetrie argumentiert werden: Es ist naheliegend anzunehmen, dass gegenüberliegende Seiten gleich wahrscheinlich sind (vgl. Riemer 1991, S.22).

Eine weitere Möglichkeit wäre es, die Wahrscheinlichkeiten auf Grund eines Flächenvergleichs aufzustellen (siehe Tab. 5.3).

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung der Wahrscheinlichkeit	0,147	0,128	0,225	0,225	0,128	0,147

Tab. 5.3: Hypothese auf Grund des Flächenvergleichs beim Quaderwürfel (vgl. Riemer 1991, S.25)

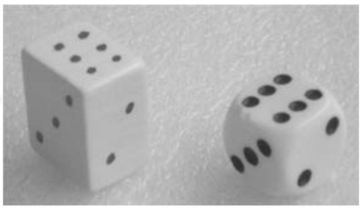
Später wird sich zeigen, dass diese Schätzung einer empirischen Überprüfung nicht standhält (siehe 5.2.1).

Arbeitsblatt 16

Wie wahrscheinlich ist ein Sechser beim Würfeln?

Die **Wahrscheinlichkeit** gibt das **Maß der Erwartung** an für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses. Diese Maßzahl wird in der Mathematik zwischen 0 (unmögliches Ereignis) und 1 (sicheres Ereignis) angegeben.

Quaderwürfel



Normaler Würfel

Schätze die Wahrscheinlichkeit und begründet deine Vermutung.

Normaler Würfel

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
geschätzte Wahrscheinlichkeit						

Quaderwürfel

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
geschätzte Wahrscheinlichkeit						

Gib für **beide Würfel** zusätzlich an:

1. **Wie** bist du auf deine geschätzten Wahrscheinlichkeiten gekommen? Erkläre mögliche Rechenschritte!
2. Welche **Begründung** gibt es für deine Hypothese?
3. Wie könntest du deine Schätzung **überprüfen**?

Gruppenarbeit

- **Sammelt** eure Vorschläge und überlegt euch in der Gruppe **welchen Weg** ihr weiterverfolgen wollt!
- **Würfelt** anschließend 100 Mal und berechnet die **relativen Häufigkeiten**!
- **Vergleicht** diese mit den **geschätzten Wahrscheinlichkeiten**! Was fällt euch auf?

5.2 Systematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Aufbauend auf das Riemer-Experiment soll nun der Wahrscheinlichkeitsbegriff systematisiert werden.

Die Schülerinnen und Schüler haben bereits Hypothesen aufgestellt, ihre Hypothesen begründet, sich Gedanken gemacht, welche Hypothesen aus welchen Grund verworfen werden müssen und wie diese überprüft werden könnten. Im Folgenden wird der von den Schülerinnen und Schülern erfahrene Wahrscheinlichkeitsbegriff (nur noch) systematisiert.

„Durch Handlungen voneinander klar abgegrenzte Begriffe werden schließlich nur noch mit Namen versehen. Ein solches Vorgehen ist gemeint, wenn Bauernsfeld vom ‚Aushandeln der Begriffe' spricht: Mathematische Begriffe werden eingeführt zur Strukturierung dessen, was Schüler tun – und nicht als Selbstzweck oder aus formallogischen Gründen." (Riemer 1991, S.10)

Die Systematisierung geschieht durch die empirische Überprüfung der aufgestellten Hypothesen. Die empirische Überprüfung erfolgt durch häufiges Würfeln. Dieser Vergleich von Hypothese und Ergebnis ist es auch, der, wie Riemer (1991) es nennt, Wahrscheinlichkeit und Statistik wie eine Klammer zusammenhält. Durch häufiges Würfeln kann die Hypothese mit einem tatsächlichen Ereignis verglichen werden und es kann überprüft werden, ob eintritt, was erwartet wurde.

Wie bereits vorher erwähnt, fordert der AHS-Lehrplan, dass die Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Unterricht der 6. Klasse thematisiert wird. Es soll dabei nicht nur ein Zugang ausgewählt werden, sondern Wahrscheinlichkeiten sollen sowohl als relative Anteile und relative Häufigkeiten als auch als subjektives Vertrauen verstanden werden.

Zu beachten ist, dass die drei Zugänge zwar Möglichkeiten darstellen, um Wahrscheinlichkeiten anzugeben, aber keiner der drei Zugänge alleine den Wahrscheinlichkeitsbegriff ausreichend beschreibt. So kommt es bei Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil (Laplace-Wahrscheinlichkeit) spätestens bei der Irrtumswahrscheinlichkeit zu Problemen.

Laut Riemer braucht es einen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der den „prognostischen", „hypothetischen" und „subjektiven" Charakter, der ihm innewohnt, beschreibt.

„Ein für die Statistik tragfähiger Wahrscheinlichkeitsbegriff muß (sic!)

(1) prognostischen Charakter haben, d. h. es muß (sic!) deutlich werden, daß (sic!) Wahrscheinlichkeiten Prognosen darstellen, um die die relativen Häufigkeiten schwanken werden.

(2) Er muß (sic!) hypothetischen Charakter haben, d. h. Wahrscheinlichkeitsannahmen, die sich in Versuchen nicht bewähren, müssen verworfen und durch bessere ersetzt werden.

(3) Sollten aus lernpsychologischen Gründen subjektive Aspekte nicht ausgeschlossen werden (sic!). Aussage der folgenden Form müssen erlaubt sein: ‚Nach Lage der Versuchsergebnisse halte ich Hypothese A für glaubwürdiger als Hypothese B.'" (Riemer 1991, S.19)

Durch die vorangegangene Einstiegsaufgabe (siehe Arbeitsblatt 16) soll diese Charakteristik demonstriert werden.

„Bisher haben wir Hypothesen aufgestellt und diese durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen verworfen, modifiziert oder beibehalten. Da wir unserem Ziel gemäß einen konsistenten Aufbau von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik anstreben, wird es bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr um eine ‚voraussetzungslose', ‚exakte' Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gehen" (Riemer 1991, S.28).

Bei der Formalisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist zudem zentral, dass es sich bei der Angabe von Wahrscheinlichkeiten stets um ein Modell handelt: „So genannte objektive Wahrscheinlichkeiten (...) können nicht exakt angegeben werden. Alle objektiven Wahrscheinlichkeiten, die als Zahlenwerte zwischen 0 und 1 angegeben werden, sind stets ein Modell der Realität, das bestimmte zufällige Phänomene beschreiben oder vorhersagen soll" (Eichler & Vogel 2009, S.148). Diese Eigenschaft wird durch die Tatsache verstärkt, dass man Hypothesen nicht einfach als „richtig" oder „falsch" beiseiteschieben kann.

5.2.1 Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit und als relativer Anteil

Im Folgenden wird durch die empirische Validierung aufgezeigt, wie und warum Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit oder als relativer Anteil verstanden werden kann.

Die Schülerinnen und Schüler werden auf Arbeitsblatt 16 aufgefordert, Überlegungen anzustellen, wie ihre Hypothesen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Quader-Würfel überprüft werden können. Die Vorschläge werden im Plenum gesammelt. Durch behutsame Lenkung der Lehrperson soll eine Sensibilisierung dafür geschaffen werden, dass, je öfter gewürfelt wird, das Modell umso besser wird.

„Wichtig hierbei ist die Erkenntnis, dass die Validierung umso besser ist, je mehr Würfe erfolgen. So kann z. B. ein einzelner Wurf nicht zu einer Validierung führen. Wie viel es sein sollten, muss an dieser Stelle offen bleiben und man kann pragmatisch eine im Unterricht zu bewältigende Anzahl wie 100 Würfe wählen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.151)
Die Schülerinnen und Schüler sollen zu zweit 100 Mal würfeln (eine Person würfelt, die andere notiert die Ergebnisse z. B. in Form einer Strichliste). Damit geschieht eine enaktive Annäherung an das Gesetz der großen Zahlen. Das Selber-Würfeln schafft dabei eine andere Anteilnahme als durch eine einfache Präsentation des Ergebnisses bewirkt werden kann.
Die Schülerinnen und Schüler werden anschließend dazu aufgefordert, die relative Häufigkeit mit ihren geschätzten Häufigkeiten zu vergleichen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Geschätzte Wahrscheinlichkeit auf Grund der Symmetrie	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Relative Häufigkeit nach 100 Versuchen	0,24	0,22	0,12	0,18	0,14	0,1

Tab. 5.4: Vergleich der geschätzten Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit beim normalen Würfel

Beim normalen Würfel ist zu erkennen, dass bei 100 Versuchen die relativen Häufigkeiten noch mehr oder weniger stark von den auf Grund der Symmetrie geschätzten Wahrscheinlichkeiten abweichen (siehe Tab. 5.4).
Anschließend werden alle Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler gesammelt und sowohl die einzelnen relativen Häufigkeiten als auch die kumulierte relative Häufigkeit für eine Augenzahl, in unserem Fall für die Augenzahl 1, betrachtet.
Die folgende Auswertung wurde von Eichler & Vogel (2009, S.152) übernommen und selbstständig durchgeführt. Dabei werden die in den Gruppen erzeugten Ergebnisse zusammen getragen. Dabei soll das Gesetz der Großen Zahlen veranschaulicht werden.
Zuerst soll ersichtlich werden, dass die relativen Häufigkeiten zwischen 0,05 und 0,24 streuen. Betrachtet man die kumulierten Häufigkeiten, wird deutlich, dass sich diese einpendeln (siehe Abb. 5.2).

Würfel

	Anz_Würfe	Anzahl1	rel_Hfgkt_1	GesAnz_Würfe	GesAnzl1	kum_relHfgkt_1
1	100	24	0,24	100	24	0,24
2	100	20	0,2	200	44	0,22
3	100	22	0,22	300	66	0,22
4	100	14	0,14	400	80	0,2
5	100	20	0,2	500	100	0,2
6	100	16	0,16	600	116	0,193333
7	100	8	0,08	700	124	0,177143
8	100	20	0,2	800	144	0,18
9	100	19	0,19	900	163	0,181111
10	100	5	0,05	1000	168	0,168

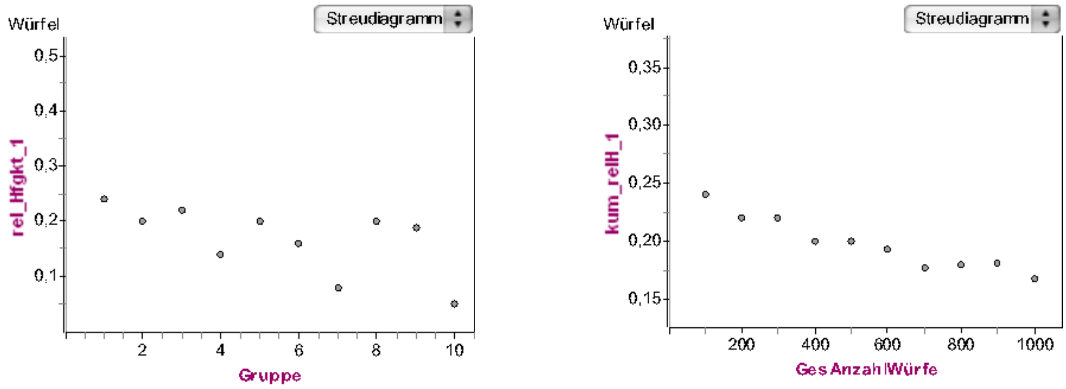


Abb. 5.2: Auswertung des normalen Würfels. Die Diagramme zeigen die relative Häufigkeit der einzelnen Gruppen (links) bzw. die kumulierte relative Häufigkeit (rechts).

Dieses Phänomen motiviert uns, eine noch größere Anzahl an Würfen zu betrachten. Mit Hilfe einer Simulation betrachten wir die kumulierte relative Häufigkeit von 4000 Mal würfeln.

Es ist zu erkennen, dass sich bei großer Stichprobe die kumulierte relative Häufigkeit stabilisiert (siehe Abb. 5.3). Dieses Phänomen nennt man das empirische Gesetz der großen Zahlen.

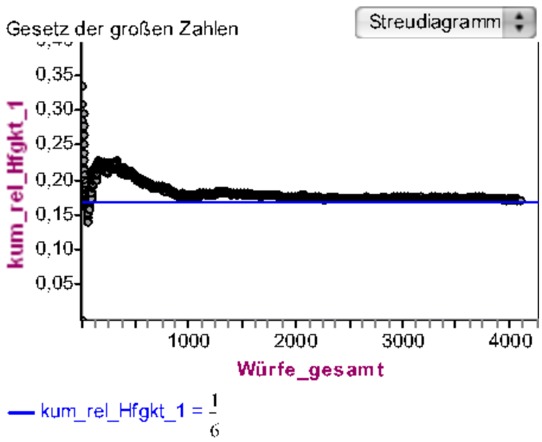


Abb. 5.3: Simulation von 4000 Würfen

Da es sich bei Wahrscheinlichkeiten um das Maß einer Erwartung handelt, lässt sich aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen „die relative Häufigkeit bei großen Stichproben bzw. Anzahlen von Versuchswiederholungen als Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses motivieren“ (Eichler & Vogel 2009, S.174).

Es kann festgehalten werden:

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Ein Zufallsversuch werde *n*-mal (sehr, sehr oft) unter gleichen Bedingungen durchgeführt und dabei das Eintreten eines Ereignisses *A* beobachtet.

Auf Grund des *empirischen Gesetzes der großen Zahlen* kann als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses *A* (mit einer gewissen Unsicherheit) die relative Häufigkeit von *A* unter diesen *n* Versuchen verwendet werden, d. h.: $h_{n(\text{groß})}(A) \approx P(A)$

(vgl. Eichler & Vogel 2009, S.174)

Im Anschluss vergleichen wir das Ergebnis der Validierung mit unserer Symmetrieannahme und der daraus resultierenden Gleichwahrscheinlichkeit (siehe Tab. 5.5).

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung der Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Relative Hfgkt nach 1000 Mal würfeln	0,168	0,172	0,164	0,185	0,154	0,157

Tab. 5.5: Vergleich der geschätzten Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den relativen Häufigkeiten nach 1000 Mal würfeln.

Die Validierung durch sehr häufiges Wiederholen ergibt, dass die relative Häufigkeit für einen Einser zwar nicht genau $\frac{1}{6}$, aber die Abweichung von $\frac{1}{6}$ sehr klein ist (so ergibt die relative Häufigkeit nach 1000 Würfen 0,168). Man hat also keinen Grund, von unserer vorher erstellten Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit abzuweichen.

Diese pragmatische Entscheidung für die Gleichwahrscheinlichkeit wird das *Prinzip des unzureichenden Grundes* genannt. „Ergibt das Experiment keinen Grund zur Annahme, dass das Modell der Gleichwahrscheinlichkeit nicht passend ist, übernimmt man dieses als empirisch validiertes Modell. Alle anderen Modelle, die nicht zu den Ergebnissen der empirischen Überprüfung passen (z. B. die vermeintlich seltenere 6), werden durch die Validierung verworfen." (Eichler & Vogel 2009, S.152)

Darauf aufbauend lässt sich die Laplace'sche Konzeption systematisieren

Laplace (Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil): „Ein Experiment, bei dem man aufgrund des *Prinzips des unzureichendes Grundes* davon ausgeht, dass alle Elementarereignisse eines Zufallsexperiments mit endlicher Ergebnismenge gleich wahrscheinlich sind, d. h. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, heißt *Laplace-Experiment*. Liegt ein Laplace-Experiment vor, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$." (Eichler & Vogel 2009, S.174)

Es gilt: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} =$ „$\frac{\text{Günstige}}{\text{Mögliche}}$"

Beim Quaderwürfel ist offensichtlich, dass nicht alle Seiten gleichwahrscheinlich sind. Es handelt sich dabei also um kein Laplace-Experiment. Die Überprüfung durch häufiges Würfeln ergibt zudem, dass das Modell des Flächenvergleichs verworfen werden muss (siehe Tab. 5.6).

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Geschätzte Wahrscheinlichkeit aufgrund von Flächenvergleich	0,147	0,128	0,225	0,225	0,128	0,147
Relative Häufigkeit bei 1300 Mal würfeln	0,05	0,09	0,37	0,33	0,11	0,05

Tab. 5.6: Vergleich der geschätzten Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit (1 000 Mal würfeln) beim Quaderwürfel (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.153)

Auf Grund des empirischen Gesetzes der großen Zahl kann nun von den relativen Häufigkeiten der vielen Versuche auf die einzelnen Wahrscheinlichkeiten geschlossen werden. Zusätzlich muss bei der Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells auch die Teilsymmetrie beachtet werden (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.153). Da kein Grund gefunden werden kann, wieso man bei gegenüberliegenden Seiten nicht von Gleichwahrscheinlichkeit ausgehen soll, können auf Grund des *Prinzips des unzureichenden Grundes* die unterschiedlichen relativen Häufigkeiten $h(5) = 0{,}11$ und $h(2) = 0{,}09$ auf Grund der Symmetrieüberlegung für die Schätzung $P(2) = P(5) \approx 0{,}10$ herangezogen werden (siehe Tab. 5.7).

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Geschätzte Wahrscheinlichkeit (aufgrund von 1300 Würfen)	0,05	0,11	0,37	0,33	0,09	0,05
Geschätzte Wahrscheinlichkeit mit Symmetrieüberlegung	0,05	0,10	0,35	0,35	0,10	0,05

Tab. 5.7: Überarbeitung der geschätzten Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Symmetrieüberlegung

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff lässt sich wie folgt zusammenfassen:

> „Wahrscheinlichkeiten sind Prognosen, um die die relativen Häufigkeiten in zukünftigen Versuchsserien schwanken werden.“ (Riemer 1991, S.19)

5.2.2 Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff

Bis jetzt wurde Wahrscheinlichkeiten als relativer Anteil oder relative Häufigkeit aufgefasst, man spricht in diesem Zusammenhang von objektiver Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeiten konnten „berechnet“ werden, weil wir Daten zur Verfügung hatten bzw. Informationen über den Würfel (z. B. Symmetrie) vorhanden waren.

Häufig liegen jedoch keine – oder nur unzureichende – Informationen vor. Viele alltägliche Entscheidungen basieren aus diesem Grund auf der subjektiven Einschätzung unter Unsicherheit. „Die Relevanz subjektiver Wahrscheinlichkeit in vielen Berufsfeldern aber auch im Bereich politischer Entscheidungen erfordert ihre Behandlung im Schulunterricht. Man denke beispielsweise an die Kreditvergabe, durchaus auch auf internationaler Ebene, beispielsweise durch den IWF oder die Weltbank. Gerade wenn es um große Summen zur Ankurbelung neuer Projekte geht, fließen neben wirtschaftlichen Kennziffern immer auch Einschätzungen von Expert/innen in Form informeller Informationen ein, um über die Kreditwürdigkeit von Wirtschaftstreibenden oder eines Landes zu entscheiden.” (Hauer-Typpelt 2010, S.6)

Aus diesem Grund ist es wichtig, dass der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff auch ausreichend im Schulunterricht thematisiert wird.

Mit Hilfe des folgenden Unterrichtsvorschlags soll eine Vorstellung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs entwickelt werden (siehe Arbeitsblatt 17). Es handelt sich um einen Unterrichtsvorschlag von Riemer (1991), der von Eichler & Vogel (2009) übernommen wurde. Es wird dabei gezeigt, wie sich die subjektive Wahrscheinlichkeit durch Sammeln von Informationen verändern und an die objektive Wahrscheinlichkeit annähern kann. Dabei geschieht außerdem eine erste Vorbereitung für den Satz von Bayes (siehe 5.4).

Quaderwürfel, U-Würfel oder doch ein ganz normaler Laplace-Würfel? (L, Q oder U?) Das ist hier die Frage!

Abb. 5.4: Quaderwürfel, Laplace-Würfel und U-Würfel

Bei diesem Würfelspiel wird zuerst eine Spielleitung bestimmt. Diese zieht – für die anderen Mitspielerinnen und Mitspieler verdeckt – einen der oben abgebildeten Würfel (siehe Abb. 5.4). Die Schülerinnen und Schüler schätzen, zuerst ohne weitere Informationen zu erhalten, mit welcher Wahrscheinlichkeit die drei Würfel ausgewählt wurden. Danach würfelt der Spielleiter verdeckt mit dem ausgewählten Würfel und teilt die Augenzahl den anderen mit. Die Spielerinnen und Spieler erhalten so eine zusätzliche Information über den ausgewählten Würfel. Da die drei Würfel auf Grund ihrer Form jeweils unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben, wird die Verteilung bei einem gewürfelten Zweier zu Gunsten des normalen Würfel geändert ($P_L(2) = 0{,}1\dot{6}$; $P_Q(2) = 0{,}1$; $P_U(2) = 0{,}08$). Daraus resultiert eine neue Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die drei Würfel. Dieses Prozedere – Würfeln und neues Schätzen – wird mindestens zwei Mal wiederholt bzw. so oft, bis die Spielerinnen und Spieler sich für einen der drei Würfel entscheiden können. Es wird in Gruppen gespielt. Das Spiel kann zwar auch zu zweit gespielt werden, mehrere Spieler eignen sich jedoch besser, da so die geschätzten Wahrscheinlichkeiten verglichen und besprochen werden können.

Didaktischer und methodischer Hintergrund

Mit Hilfe dieses Unterrichtsvorschlags lässt sich der Unterschied von objektiver und subjektiver Wahrscheinlichkeit anschaulich demonstrieren. Aus objektiver Sicht ist es nicht schwer, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Hat die Spielleiterin bzw. der Spielleiter den Quaderwürfel ausgewählt, dann gilt z. B. $P(Q) = 1$. Da die Mitspielerinnen und Mitspieler jedoch nicht sehen können, welcher Würfel ausgewählt wurde, müssen sie ohne weitere Zusatzinformation die Wahrscheinlichkeit P(Q) bestimmen.

Die Mitspielerinnen und Mitspieler können den Würfel nicht sehen, können aber „ihren *subjektiven* Eindruck zu der Situation numerisch ausdrücken“ (Eichler & Vogel 2009, S.165). Verschiedene Argumentationen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind möglich, z. B.:

- „Die Spielleitung hat drei Möglichkeiten, sich für einen Würfel zu entscheiden. Also sind jeweils zwei Möglichkeiten gleichwahrscheinlich“:

  $P(L) = P(Q) = P(U) = 0{,}\dot{3}$
- „Der U-Würfel sieht so sonderbar aus und bis jetzt wurde nur mit normalen oder Quaderwürfeln geworfen, aus diesem Grund wird ihn der Spielleiter auch auswählen“:

  $P(L) = 0{,}2; P(Q) = 0{,}3; P(U) = 0{,}5$

Alle diese Annahmen sind aus einer subjektiven Einstellung heraus getroffen worden, ohne weitere Information. Man spricht von a-priori-Verteilungen. „Diese Verteilung wird später auch *a-priori-Verteilung* genannt (...), da sie *vor* weiteren Informationen zu einer Situation aufgestellt wird.“ (Eichler & Vogel 2009, S.166)

Dabei sind zwei Dinge wichtig (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.166): Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss wie bei objektiven Wahrscheinlichkeiten auch 1 sein ($P(L) + P(Q) + P(U) = 1$). Wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung a-priori tatsächlich aussieht, ist jedoch subjektiv und kann nicht nachgeprüft werden.

Die Spielleiterin bzw. der Spielleiter teilt im Anschluss mit, welche Augenzahl mit dem ausgewählten Würfel gewürfelt wurde. Die Mitspielerinnen und Mitspieler bekommen so eine Information über den Würfel, darauf aufbauend wird eine neue Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung abgegeben. „Es liegt also nach der ersten Information eine Revision der a-priori-Verteilung vor. Die veränderte a-priori-Verteilung nach der ersten Information kann später a-posteriori-Verteilung genannt werden. Diese geht als neue a-priori-Verteilung vor dem zweiten Wurf in die Überlegung ein.“ (Eichler & Vogel 2009, S.167)

Die neubewerteten Wahrscheinlichkeiten werden hier von den Schülerinnen und Schülern zunächst rein intuitiv bewertet. So ist zwar bekannt, dass ein Zweier am wahrscheinlichsten von einem Laplace-Würfel gewürfelt wird ($P_L(2) = 0{,}1\dot{6}$; $P_Q(2) = 0{,}1$; $P_U(2) = 0{,}08$), wie genau sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten verändern, entscheiden jedoch die Schülerinnen und Schüler selbst. In der Regel unterscheiden sich die geschätzten Wahrscheinlichkeiten also zwischen den Schülerinnen und Schülern. Erst später werden die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Satzes von Bayes berechnet (siehe Kap. 5.4).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der verschiedenen Würfeln (siehe Arbeitsblatt 17) wurde von Riemers Würfelset übernommen[15]. Zu beachten ist dabei, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten beim U-Würfel 1,01 beträgt, also größer als 1 ist.

In Folge wird ein möglicher Spieldurchlauf demonstriert.

1. $P(L) = \frac{1}{3}$; $P(Q) = \frac{1}{3}$; $P(U) = \frac{1}{3}$

   → $\boxed{\text{Information: Wurf eines Zweiers}}$

   → $P(L) = 0{,}5$; $P(Q) = 0{,}27$; $P(U) = 0{,}23$

2. $P(L) = 0{,}5$; $P(Q) = 0{,}27$; $P(U) = 0{,}23$

   → $\boxed{\text{Information: Wurf eines Sechsers}}$

   → $P(L) = 0{,}70$; $P(Q) = 0{,}10$; $P(U) = 0{,}20$

3. $P(L) = 0{,}70$; $P(Q) = 0{,}10$; $P(U) = 0{,}20$

   → $\boxed{\text{Information: Wurf eines Einsers}}$

   → $P(L) = 0{,}85$; $P(Q) = 0{,}05$; $P(U) = 0{,}10$

4. $P(L) = 0{,}85$; $P(Q) = 0{,}05$; $P(U) = 0{,}10$

   → $\boxed{\text{Information: Wurf eines Fünfers}}$

   → $P(L) = 0{,}95$; $P(Q) = 0{,}02$; $P(U) = 0{,}03$

An diesem Punkt fällt die Entscheidung, dass es sich bei dem ausgewählten Würfel um einen normalen Würfel handelt. Obwohl man sich für den Laplace-Würfel entschieden hat, geht man davon aus, dass man sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % (= $P(Q) + P(U)$) geirrt hat. Man spricht von der subjektiven Irrtumswahrscheinlichkeit. Damit wird bei diesem Unterrichtsvorschlag auch ein wichtiger Begriff der beurteilenden Statistik vorbereitet.

Zudem wird demonstriert, wie durch Informationen unsichere Entscheidungen verändert werden können: „Dieses Spiel kann eine nähere numerische Beschäftigung mit dem Prinzip,

[15] http://www.riemer-koeln.de/mathematik/quader/bestellung.htm (Zugriff: 12.12.2013)

mit Hilfe von Informationen, eine begründete Entscheidung in einer subjektiv unsicheren Information zu treffen, motivieren …“ (Eichler & Vogel 2009, S.167 ff.). Damit stellt das hier vorgestellte Spiel eine gute Vorbereitung für den Satz von Bayes dar (siehe Kap. 5.4).

Quaderwürfel, U-Würfel oder doch ein ganz normaler Laplace-Würfel? Das ist hier die Frage!
Wer errät welcher Würfel gewählt wurde??

In folgender Tabelle sind die Würfel dargestellt und ihre – aufgrund einer langen Versuchsserie –geschätzten Wahrscheinlichkeiten

Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
		

Laplace-Würfel:

1	2	3	4	5	6
0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16

Quaderwürfel:

1	2	3	4	5	6
0,05	0,1	0,35	0,35	0,1	0,05

U-Würfel:

1	2	3	4	5	6
0,12	0,08	0,22	0,39	0,08	0,12

Wählt eine Spielleiterin oder einen Spielleiter aus. Diese/r **wählt verdeckt** einen der drei Würfel aus und legt (verdeckt) die anderen auf die Seite.

Schätze mit **welcher Wahrscheinlichkeit** die Spielleitung einen der drei Würfel ausgewählt hat!

Erste Schätzung	Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
Geschätzte Wahrscheinlichkeit			

Die Spielleitung soll nun einmal mit dem ausgewählten Würfel würfeln und teilt die Augenzahl mit. **Ändert sich deine geschätzte Wahrscheinlichkeit? Notiere** sie erneut!

Erste gewürfelte Augenzahl: ____

Zweite Schätzung	Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
Geschätzte Wahrscheinlichkeit			

Lasst die Spielleitung solange würfeln, **bis ihr euch so gut wie sicher seid** um welchen Würfel es sich handelt. Vergesst nicht nach jedem Wurf die Wahrscheinlichkeit **neu zu schätzen.**

Zweite gewürfelte Augenzahl: ____

Dritte Schätzung	Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
Geschätzte Wahrscheinlichkeit			

Dritte gewürfelte Augenzahl: ___

Vierte Schätzung	Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
Geschätzte Wahrscheinlichkeit			

Vierte gewürfelte Zahl: ___

Fünfte Schätzung	Laplace-Würfel	Quaderwürfel	U-Würfel
Geschätzte Wahrscheinlichkeit			

→ Die Spielleitung hat meines Erachtens mit ___% Sicherheit den ______ Würfel ausgewählt!

5.3 Baumdiagramme und das Berechnen von mehrstufigen Wahrscheinlichkeiten

In weiterer Folge werden nun Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Vorgänge betrachtet. Wieder wird mit Hilfe eines Würfelspiels der Algorithmus zur Berechnung entwickelt.

Wie lange dauert es bis ein Dreier gewürfelt wird?

Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, auf einem Zettel zu notieren, wie oft man ihres Erachtens würfeln muss, bis ein Dreier kommt. Zudem sollen sie angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihrer Meinung nach ein Dreier beim ersten, beim zweiten, beim dritten, … Mal gewürfelt wird (siehe Arbeitsblatt 18). Danach wird die Hypothese zuerst durch häufiges Würfeln überprüft, dann erst werden die Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Didaktischer und methodischer Hintergrund

Es wird erneut mit dem Würfel gearbeitet. Auf diese Weise soll ein konsistenter Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Sinne des Spiralprinzips gelingen. Bei diesem Unterrichtsvorschlag werden das Baumdiagramm und die beiden Pfadregeln eingeführt.
Zuerst aber schätzen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeiten. Die Hypothesen werden in Gruppen oder im Plenum diskutiert.

1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	≥10
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,11	0,12	0,13	0,2	0,3	0,02	0,01	0,005	0,005

Tab. 5.8: Zwei mögliche Schätzungen für die Wartezeit bis ein Dreier gewürfelt wird.

Mit dem Wissen aus den vorangegangenen Experimenten können die beiden Vermutungen (siehe Tab 5.8) bereits verworfen werden: So ist bereits bekannt, dass, aufgrund der Gleichwahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit einen Dreier zu würfeln $\frac{1}{6}$ beträgt.
Bei der zweiten Vermutung wird zusätzlich zu diesem Fehler offensichtlich irrtümlich angenommen, dass der Dreier am wahrscheinlichsten beim sechsten Wurf gewürfelt wird (mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3). Ziemlich sicher fällt der Dreier hier während der ersten sechs Würfe (0,96). Hier wurde offensichtlich die Wahrscheinlichkeit einen Dreier zu würfeln von $\frac{1}{6}$ falsch aufgefasst. An diesem Beispiel ist zu erkennen, dass mit Hilfe der Diskussion der geschätzten Wahrscheinlichkeitsverteilungen mögliche falsche Konzeptionen

des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aufgezeigt und korrigiert werden können. Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zeigt sich später, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Dreier zu würfeln, umso kleiner wird, je öfter gewürfelt wird, da bei jedem Misserfolg mit $\frac{5}{6}$ multipliziert wird. „Wieder haben wir eine Fülle von Hypothesen, eine ‚prickelnde' Erwartungshaltung, den ‚statistischen Spannungsbogen' zwischen Vorhersage und Experiment." (Riemer 1991, S.29)

Im Folgenden werden die Vermutungen durch häufiges Würfeln überprüft. In diesem Fall werden sechs Gruppen gebildet, die jeweils 36 Mal würfeln bis ein Dreier kommt. Die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten werden notiert. Insgesamt soll so 216 Mal gespielt werden. So kann die gewürfelte Anzahl später mit den am Baumdiagramm dargestellten absoluten Häufigkeiten verglichen werden.

	1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	≥10
Absolute Häufigkeit	49	29	17	26	15	11	22	9	1	37
Realtive Häufigkeit	0,23	0,13	0,08	0,12	0,07	0,05	0,10	0,04	0,005	0,171

Tab. 5.9: Absolute und relative Häufigkeitsverteilung nach 216 Mal würfeln

Es ist zu erkennen, dass ein Dreier am häufigsten bereits beim ersten Wurf gewürfelt wurde (siehe Tab. 5.9). Gleichzeitig ist zu beachten, dass bei 167 Würfen, also bei ca. 77% der Fälle, der Dreier erst *nach* dem ersten Wurf kam. 37 Mal waren mehr als neun Würfe notwendig bis ein Dreier gewürfelt wurde. Da nur 216 Mal gewürfelt wurde, ist dieses Ergebnis im Hinblick auf seine Repräsentativität jedoch mit Skepsis zu betrachten.

Das Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten

In weiterer Folge sollen die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Der mögliche Spielverlauf wird mit Hilfe eines Baumdiagramms dargestellt. Dieses ist den Schülerinnen und Schülern bereits aus dem Vergleich von nominalskalierten Merkmalen (vgl. 4.4.2) bekannt.

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurf einen Dreier zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, keinen Dreier zu würfeln, beträgt somit $\frac{5}{6}$.

Wenn beim ersten Mal kein Dreier kommt, wird erneut gewürfelt. Wieder ist die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier $\frac{1}{6}$, die Wahrscheinlichkeit, keinen Dreier zu würfeln, $\frac{5}{6}$.

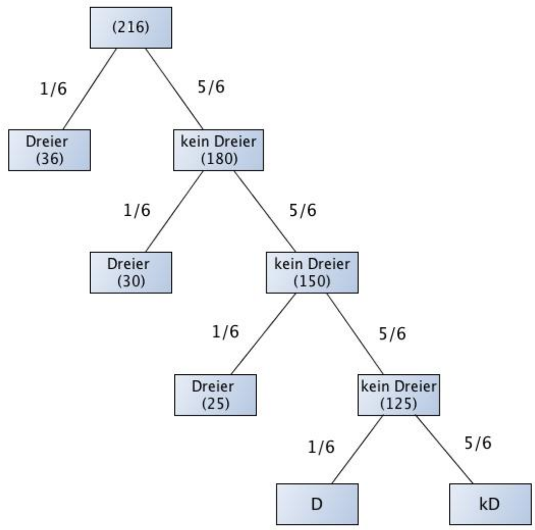


Abb. 5.5: Baumdiagramm „Wann kommt ein Dreier?“

Es geht bei der Darstellung des Baumdiagramms weniger darum, die Daten zu visualisieren. Vielmehr kommt dem Baumdiagramm eine strukturierende Funktion zu, die bei der Modellierung des Lösungswegs zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten helfen soll: „Das Baumdiagramm ist offensichtlich keine Visualisierung von Daten oder auch von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Vielmehr ist es eine Hilfestellung zur gedanklichen Strukturierung eines zufälligen Vorgangs. Es ist nicht selbst Lösung eines Problems, sondern eine Heuristik, um eine Lösung zu finden.“ (Eichler & Vogel 2009, S.209)

Wie beim Vergleich von nominalskalierten Merkmalen werden dabei auch die absoluten Häufigkeiten angegeben. Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann diese Darstellung auf den ersten Blick unnatürlich wirken: So beziehen sich die absoluten Häufigkeiten beim Vergleich von Merkmalen „auf existierende Grundgesamtheiten, die im Sinne der üblichen beschreibenden Statistik nach zwei Merkmalen geordnet wurden“ (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.38). Beispielsweise wurden beim Vergleich von nominalskalierten Merkmalen (vgl. 4.4.2) 33 Schülerinnen und Schüler bezüglich ihrer Computernutzung befragt. Bei der Wahrscheinlichkeitsaufgabe liegt in der Regel keine real existierende Grundgesamtheit vor. Vielmehr soll eine Prognose abgegeben werden.

Die Grundgesamtheit wird hier mehr oder weniger künstlich vorgegeben. Am besten eignet sich dabei eine Grundgesamtheit, die bei der Multiplikation mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten (möglichst lange) ganze Zahlen liefert. In diesem Fall geht man von 216 Spielen aus. Die weiteren absoluten Häufigkeiten werden mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten ermittelt. „Es erfolgt also eine ‚idealisierte Simulation’“ (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.38). Die Wahrscheinlichkeit, einen Dreier zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$. Somit ist bei 216 Spielen zu erwarten, dass bei *etwa* 36 Spielen der Dreier beim ersten Mal würfeln fällt.

Es ist jedoch bekannt, dass der Würfel ein Zufallsgerät ist und man „bei den relativen kleinen Zahlen mit deutlichen Abweichungen rechnen muss“ (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.38). Auch wenn die absoluten Häufigkeiten der idealisierten Simulation nicht der Realität entsprechen, sprechen einige Punkte für ihre Darstellung.

- Zum einen können die Werte der „realen Simulation“, also des Ergebnisses des wirklichen Spielens, mit den Werten „der idealen Simulation“ direkt verglichen werden. Auf diese Weise wird das Prinzip „Zufall“ weiter verdeutlicht. Die Abweichung zwischen der „idealisierten Simulation“ und der tatsächlichen Simulation wird einsichtig. Am Baumdiagramm ist zu erkennen, dass in etwa 36 Fällen der Dreier beim ersten Mal Würfeln fällt. Tatsächlich wurde der Dreier jedoch in 49 Fällen bereits beim ersten Mal gewürfelt. Bei größerer Versuchsanzahl nähert sich der reale Wert an den Wert der „idealen Simulation“ an.
- Es wird zudem verdeutlicht, dass mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnungen konkrete Prognosen für große Stichproben gemacht werden können. „Tatsächlich beinhaltet die in der Schule – früher oder später – vermittelte Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, dass man damit ungefähre Prognosen für relative Häufigkeiten bei großen Versuchsanzahlen machen kann“ (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.38). Später können die Häufigkeiten der „idealen Simulation“ als Erwartungswerte systematisiert werden.
- Zum anderen können mit Hilfe der zu erwartenden Werte die verschiedenen Pfadregeln veranschaulicht werden. Werden alle Zahlen durch 216 dividiert, erhält man man dieselben Ergebnisse wie mit Hilfe der Mulitplikationspfadregeln. Auf diese Weise werden die Pfadregeln intuitiv greifbar. Die Darstellung „erlaubt den Schülerinnen und Schülern, die Aufgabe mit anteiligen absoluten Häufigkeiten zu bearbeiten“ (Eichler & Vogel 2009, S.194).

  „Hier liegt der Zauber der natürlichen Häufigkeiten oder, genauer ausgedrückt, ihr Wert als Heuristik (…). Man tut ‚als ob’ das mentale verwirklichte Szenario das Resultat einer tatsächlichen Simulation wäre. Anschließend kann man innerhalb des simulierten Szenarios beschreibende Statistik betreiben und die gesuchten Proportionen bestimmen, die danach in eine Wahrscheinlichkeit zurückübersetzt werden können, und zwar in die ‚richtige Wahrscheinlichkeit'." (Wassner, Biehler & Martignon 2007, S.38)

So kann die Multiplikationspfadregel mit Hilfe der absoluten Häufigkeiten der „idealen Simulation" hergeleitet werden.

Die Wahrscheinlichkeit wird als relativer Anteil aufgefasst. Es kommt die Laplace´sche Wahrscheinlichkeitskonzeption („$\frac{Günstige}{Mögliche}$") zum Tragen. Dabei wird der Anteil der Werte, bei denen beim zweiten Mal ein Dreier gewürfelt wird, betrachtet.

$$\frac{Absolute\ Häufigkeit\ \text{"beim zweiten Mal einen Dreier würfeln"}}{Gesamtanzahl\ der\ Spiele} = \frac{30}{216} = \frac{216 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}{216} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Grundgesamtheit. Die Gesamtwahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses lässt sich berechnen, indem die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade multipliziert werden.

Daraus aufbauend lässt sich die erste Pfadregel systematisieren:

1. Pfadregel: „Besteht ein zufälliger Vorgang aus mehreren Stufen, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines konjugierten Ereignisses dadurch berechnen, dass die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades miteinander multipliziert werden." (Eichler & Vogel 2009, S.212)

Mit Hilfe der ersten Pfadregel können die mit Spannung erwarteten Ergebnisse für „wann zum ersten Mal ein Dreier kommt" ermittelt werden (siehe Tab. 5.10). Es lässt sich bei der Berechnung bereits ein Formalismus feststellen.

So gilt: P(Wartezeit *n*)) = $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

Später wird dieser Formalismus zur Systematisierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung erneut aufgegriffen (siehe Kap. 5.5).

1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	≥10
0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,194

Tab. 5.10: Berechnete Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Wartezeit bis ein Dreier gewürfelt wird

Auch die zweite Pfadregel kann in dieser Form hergeleitet werden. Es wird dafür die Wahrscheinlichkeit, beim ersten *oder* zweiten Mal einen Dreier zu würfeln, betrachtet. Am Baumdiagramm ist zu erkennen, dass man davon ausgehen kann, in etwa 66 der 216 Spiele den Dreier beim ersten oder zweiten Mal zu würfeln.

Im Sinne des Laplac´schen Wahrscheinlichkeitsansatzes wird die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet:

$$\frac{Absolute\ Häufigkeit\ beim\ ersten\ oder\ zweiten\ Mal\ einen\ Dreier\ zu\ würfeln}{Gesamtanzahl\ der\ Spiele} = \frac{36+30}{216}$$

$$= \frac{216 \cdot \frac{1}{6} + 216 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}{216} = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

Daraus kann die zweite Pfadregel verallgemeinert werden:

2. Pfadregel: Umfasst ein Ereignis A eines mehrstufigen zufälligen Vorgangs mehrere Pfade, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit von A durch die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten berechnen. (Eichler & Vogel 2009, S.213)

Anhand des Unterrichtsvorschlags wird ersichtlich, dass mit Hilfe der absoluten Häufigkeiten die Verbindung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und der beschreibenden Statistik verstärkt wird. Zudem wird die Konzeption der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil wieder aufgegriffen und kann in direkte Beziehung mit den gewürfelten Ergebnissen gesetzt werden. Der Modellcharakter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird auf diese Weise bereits intuitiv greifbar.

Wie aber wird die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zehn Würfe notwendig sind, berechnet?

Dafür müssten eigentlich *alle* Fälle, die mehr als neun Würfe benötigen, berechnet werden.

Es wird ein anderer Weg gewählt: Es ist bekannt, dass die Summe der einzelnen Ereignisse 1 ergibt. Das heißt die Wahrscheinlichkeit, zehn oder mehr Würfe zu benötigen, ist „das, was auf 1 noch fehlt“.

$$1 - \big(\mathrm{P}(1\mathrm{x}) + \mathrm{P}(2\mathrm{x}) + \mathrm{P}(3\mathrm{x}) + \ldots + \mathrm{P}(9x)\big) = \mathrm{P}(Wartezeit \geq 10)$$

$$1 - \mathrm{P}(Wartezeit < 10) = 0{,}194$$

Daraus lässt sich das Prinzip des Gegenereignisses formalisieren:

Das **Gegenereignis *A'*** von *A* tritt genau bei jenen Versuchsausausfällen ein, bei denen das Ereignis *A* nicht eintritt.

Die Gegenwahrscheinlichkeit *A'* ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis *A* nicht eintritt, es gilt: $P(A') = 1 - P(A)$

Arbeitsblatt 18

Mehrstufige Wahrscheinlichkeit

Wie lange muss man würfeln bis ein Dreier kommt?

1. **Wie lange** musst du auf lange Sicht warten**, bis ein Dreier** gewürfelt wird?

2. **Schätze die Wahrscheinlichkeiten**, dass man für einen Dreier nur einmal, zweimal, dreimal … würfeln muss und **trage die Werte** unten in der **Tabelle** ein!

3. **Vergleiche** mit deiner Sitznachbarin bzw. deinem Sitznachbarn! Diskutiert welche Hypothesen „besser“ oder „weniger gut“ sind!

Gruppenarbeit

4. **Jede Gruppe spielt nun 36 Mal. Das heißt ihr würfelt 36 Mal so lange bis ein Dreier kommt.** Notiert die **relativen Häufigkeiten** ebenfalls in der Tabelle.

5. **Vergleicht die relativen Häufigkeiten mit den geschätzten Werten** und zieht mögliche Schlüsse! **Warum** können beide **Werte verglichen werden**?

6. Überlegt euch, wie die einzelnen **Wahrscheinlichkeiten** nun **berechnet** werden können und tragt die Werte in die Tabelle ein.
   TIPP: Zur **Veranschaulichung** kann das Spiel als **Baumdiagramm** dargestellt werden!

Anzahl der Würfe bis zum Dreier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥10
Geschätzte Wahrscheinlichkeiten										
Absolute Häufigkeit bei 36 Mal würfeln										
Relative Häufigkeit bei 36 Mal würfeln										
Berechnete Wahrscheinlichkeiten										

5.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes

Es werden im Folgenden zwei bereits bekannte Würfelspiele erneut aufgenommen: Das Spiel „*L*, *Q* oder *U?*“ (siehe 5.2.2) dient zur Illustration der bedingten Wahrscheinlichkeit und zur Entwicklung des Satzes von Bayes. Mit Hilfe des Spiels „Wann kommt ein Dreier?“ wird das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit verdeutlicht.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Das Spiel „*L*, *Q* oder *U?*“ ist bereits aus der Einführung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs bekannt (siehe 5.2.2). Die immer neu geschätzten Wahrscheinlichkeiten sollen nun mit Hilfe des Satzes von Bayes berechnet werden. Für eine bessere Übersicht wird ein leicht abgeänderter Spielverlauf nun mit Hilfe des Baumdiagramms aus Sicht der Spielerin bzw. des Spielers illustriert (siehe Abb. 5.6.). Es wird davon ausgegangen, dass jedesmal ein Würfel gezogen wird und mit diesem einmal gewürfelt wird. Das Ereignis „es fällt ein Zweier“ wird dabei beobachtet.

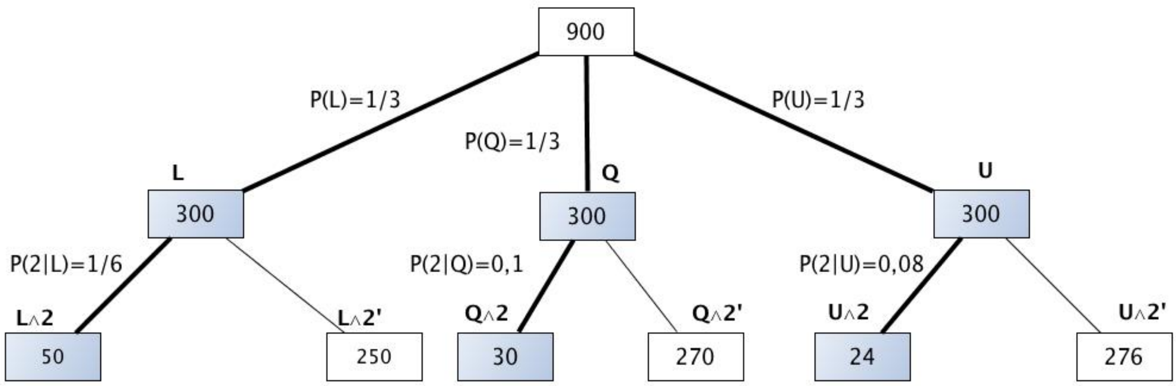


Abb.: 5.6: Baumdiagramm „L, Q oder U“

Dabei werden die „Äste“ mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet und zusätzlich erneut die absoluten Häufigkeiten angegeben. So kann der Satz von Bayes anschaulich hergeleitet werden.

Bei der ersten Verzweigung handelt es sich um die a-priori Wahrscheinlichkeit, also um die subjektive Einschätzung, welchen Würfel die Spielleitung ausgewählt hat. Aus Sicht der Spielerin bzw. des Spielers ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl des Würfels gleich groß. Hier sind jedoch auch andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen möglich (siehe Kap. 5.2.2).

Die Wahrscheinlichkeit, einen Zweier zu würfeln, hängt in weiterer Folge vom Würfel ab. Diese Tatsache führt dazu, dass nach dem Würfeln die Wahrscheinlichkeiten neu geschätzt werden. Das Ereignis „ich würfle einen Zweier“ ist vom vorigen Ereignis (Würfelauswahl) *abhängig*. Es wird dabei die aus dem Vergleich von nominalskalierten Merkmalen bereits bekannte Schreibweise $P(A|B)$ wieder aufgegriffen (siehe Kap 4.4.2). Damit drückt man die „Einflussnahme eines Ereignisses auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines anderen Ereignisses“ (Götz u. a. 2010, S.187) aus. Man spricht: A unter der Bedingung (Annahme oder Voraussetzung), dass B bereits eingetreten ist. In diesem Fall „wird ein Zweier gewürfelt“ unter der Bedingung, „dass der Spielleiter einen gewöhnlichen Laplace-Würfel gewählt hat“. Die zweiten Abzweigungen im Baumdiagramm (siehe Abb. 5.6) stellen also *bedingte Wahrscheinlichkeiten* dar.

Stochastische Unabhängigkeit

Es ist jedoch durchaus möglich, dass zwei Ereignisse keinen Einfluss aufeinander haben. Beim Vergleich von nominalskalierten Merkmalen wurde das Prinzip der (empirischen) Unabhängigkeit bereits thematisiert (siehe Kap. 4.4.2).

Um das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit weiter zu verdeutlichen, wird das Würfelspiel „Wie lange braucht es bis zu einem Dreier?“ wieder aufgegriffen (siehe 5.3). Das Spiel eignet sich deswegen so gut, weil hier oft die falsche Vorstellung von „stochastischer Abhängigkeit“ vorliegt (vgl. Götz u. a. 2010, S.187).

Das zeigt sich in folgender Fehlinterpretation: Bei der Überprüfung der Hypothese wurde 20 Mal kein Dreier gewürfelt. Dabei fiel folgende Bemerkung: „Ich habe schon zwanzigmal keinen Dreier gewürfelt, jetzt wird sicher bald ein Dreier kommen.“

Diese Aussage ist zwar im Zusammenhang wahr, dass es tatsächlich sehr unwahrscheinlich ist, erst beim einundzwanzigsten Mal einen Dreier zu würfeln. (Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\left(\frac{5}{6}\right)^{20} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}00435$.)

Die Vermutung, dass es aufgrund der langen Würfelserie ohne Dreier nun wahrscheinlicher ist, einen Dreier zu würfeln, ist jedoch eine irrtümliche Annahme. „Es war eine der Grundannahmen eines LAPLACE´schen Zufallsexperiments (und Würfeln ist ein solcher), dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bei jedem Versuch die gleichen sind, also vom Ausgang der vorangegangenen Versuche unabhängig sind.“ (Götz u. a. 2010, S.187)

Die gewürfelte Augenzahl eines Würfels ist *unabhängig* von der zuvor gewürfelten Augenzahl. Der Würfel hat kein Gedächtnis! Obwohl zwanzig Mal kein Dreier gewürfelt wurde, begünstigt diese „Pechsträhne" nicht, dass beim nächsten Wurf ein Dreier kommt. Diese Tatsache ist auch am Baumdiagramm (siehe Abb. 5.5) ersichtlich. Die Wahrscheinlichkeit, einen Dreier zu würfeln, ist jedes Mal gleich groß.

Es gilt P(3|20mal ohne drei) = P(3) = $\frac{1}{6}$.

Darauf aufbauend, kann das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit formalisiert werden:

Ein Ereignis *A* ist von einem Ereignis *B* stochastisch **unabhängig**, wenn gilt: P(*A*|*B*)=P(*A*|*B'*)= P(*A*)

Satz von Bayes

Beim Spiel „*L, Q* oder *U*?" ist die Wahrscheinlichkeit „beim Würfeln einen Zweier zu würfeln" von der „Auswahl des Würfels" *abhängig*. Das ist auch am Baumdiagramm zu erkennen: P(2|*L*) ≠ P(2|*Q*) ≠ P(2|*U*). Diese Tatsache wird zur Neubewertung der Wahrscheinlichkeiten, mit welchem Würfel geworfen wurde, herangezogen. Mit Hilfe der Information „es wurde ein Zweier gewürfelt" wurde die a-priori-Wahrscheinlichkeit „es wurde ein Laplace-Würfel ausgewählt P(*L*)" erneut geschätzt. Nun soll mit Hilfe der Baumdiagramme eine „rational begründbare Methode zur Revision dieser Wahrscheinlichkeiten" (Riemer 1991, S.44) gefunden werden. Dafür wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Laplace-Würfel ausgewählt wurde unter der Bedingung, dass ein Zweier gewürfelt wurde, *berechnet*: P(*L*|2).

Diese Berechnung wird im Folgenden mit Hilfe des Baumdiagramms anschaulich hergeleitet.

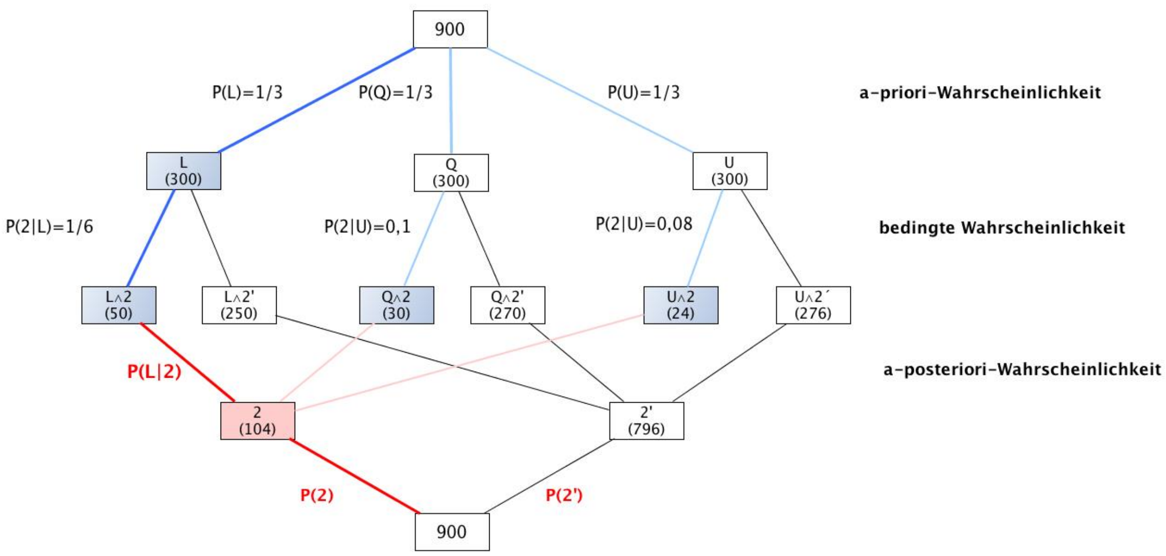


Abb. 5.7: Doppelbaum

Die gesuchte a-posteriori-Wahrscheinlichkeit P(L|2) ist dabei rot markiert. Mit Hilfe der absoluten Häufigkeit und der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitskonzeption kann diese Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$P(L|2) = \frac{\text{Häufigkeit von Laplace und Zweier}}{\text{Häufigkeit von Zweier}} = \frac{h(L \wedge 2)}{h(2)} = \frac{50}{104} \approx 0{,}48$$

Darauf aufbauend wird der Satz von Bayes systematisiert. Für ein besseres Verständnis werden dabei die einzelnen Schritte genau erklärt.

Auf Grund der ersten Pfadregel gilt: P($L \wedge$ 2) = P(L) · P(2|L).

Am Doppelbaum ist zu erkennen, dass P($L \wedge$ 2) auch durch den rot markierten Ast erreicht werden kann. Es gilt also aufgrund der 1. Pfadregel auch P($L \wedge$ 2) = P(2) · P(L|2)

Darauf aufbauend wird die Produktregel systematisiert:

Produktregel: $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Es gilt durch Umformung: P(L|2) = $\frac{\mathrm{P}(L \wedge 2)}{P(2)}$.

Wobei vorerst die Wahrscheinlichkeit, einen Zweier zu würfeln, nicht bekannt ist. Sie lässt sich jedoch mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel berechnen (siehe blaue Markierung Abb. 5.7). Es gilt: P(2) = P(2|L) · P(L) + P(2|Q) ·P(Q) + P(2|U) · P(U)

Hier kann der *Satz der totalen Wahrscheinlichkeit* systematisiert werden:

Bei zwei Ereignissen A und B gilt P(A) = P(A|B) · P(B) + P(A|B') · P(B')

Es kann nun die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem gewürfelten Zweier um einen normalen Würfel handelt (P(L|2)), auf folgende Art berechnen werden: P(L|2)= $\frac{\mathrm{P}(L \wedge 2)}{\mathrm{P}(2)} = \frac{\mathrm{P}(2|L) \cdot \mathrm{P}(L)}{\mathrm{P}(2)}$.

Das obige Ergebnis wird für P(2) eingesetzt:

P(L|2) = $\frac{\mathrm{P}(L) \cdot \mathrm{P}(2|L)}{\mathrm{P}(L) \cdot \mathrm{P}(2|L) + \mathrm{P}(Q) \cdot \mathrm{P}(2|Q) + \mathrm{P}(U) \cdot \mathrm{P}(2|U)}$

Darauf aufbauend kann der Satz von Bayes formalisiert werden.

Für zwei Ereignisse A und B gilt

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}|B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B') \cdot \mathrm{P}(A|B')}$$

Somit wurde eine Methode hergeleitet, die es möglich macht, die vorher geschätzten Wahrscheinlichkeiten „zu quantifizieren“. „Mit der Formel von Bayes ist es nun möglich, die Neueinschätzung zu berechnen und so ein besseres Maß für die Entscheidung zugunsten einer der beiden Hypothesen zu erlangen.“ (Eichler & Vogel 2009, S.200)

$$\mathrm{P}(L|2) = \frac{\mathrm{P}(2|L) \cdot \mathrm{P}(L)}{\mathrm{P}(2)} = \frac{0{,}1\dot{6} \cdot 0{,}\dot{3}}{0{,}1\dot{6} \cdot 0{,}\dot{3} + 0{,}08 \cdot 0{,}\dot{3} + 0{,}1 \cdot 0{,}\dot{3}} \approx 0{,}48$$

Dieses Ergebnis entspricht jenem, das wir aus dem Doppelbaum mithilfe des Laplace´schen Ansatzes berechnet haben. Wurde ohne die Information, dass ein Zweier gewürfelt wurde, die Wahrscheinlichkeit noch auf $\frac{1}{3}$ geschätzt, kann sie dank der Information „es wurde ein Zweier gewürfelt“ auf 0,48 verändert werden.

Es wird erneut gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(L|2)$ ist nun die neue a-priori-Wahrscheinlichkeit. Beim zweiten Wurf wird ein Sechser gewürfelt (siehe 5.2.2). Mit Hilfe des Satzes von Bayes wird erneut die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit berechnet. Dieses Vorgehen wird so oft wiederholt bis eine Entscheidung getroffen werden kann.

„Kann man aus einer Information, also einer einzelnen Erfahrung lernen, so ist es natürlich ebenso möglich, mehrere Informationen sukzessive oder in einem Schritt zu verarbeiten.“ (Eichler & Vogel 2009, S.200)

In der Tabelle 5.11 werden die vorher geschätzten Wahrscheinlichkeiten den mit Hilfe des Satzes von Bayes berechneten Wahrscheinlichkeiten gegenübergestellt. Die Entscheidung fällt auch hier zu Gunsten des Laplace-Würfels aus. Es ist jedoch zu erkennen, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit größer ist, als bei der subjektiven Schätzung angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Zahlenfolge *nicht* mit einem Laplace-Würfel gewürfelt wurde, beträgt 13%.

Geschätzte Wahrscheinlichkeiten				Berechnete Wahrscheinlichkeiten			
Information	P(*L*)	P(*Q*)	P(*U*)	Information	P(*L*)	P(*Q*)	P(*U*)
k. I.	0,33	0,33	0,33	k. I.	0,33	0,33	0,33
2	0,5	0,27	0,23	2	0,48	0,29	0,23
6	0,7	0,10	0,20	6	0,66	0,12	0,23
1	0,85	0,05	0,10	1	0,77	0,04	0,19
5	0,95	0,02	0,03	5	0,87	0,03	0,10

Tab.: 5.11: Vergleich der geschätzten Wahrscheinlichkeiten mit den durch den Satz von Bayes ermittelten Wahrscheinlichkeiten

5.5 Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Suche nach dem Muster

Die folgenden Unterrichtsvorschläge zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen sollen sich nicht nur auf das Herleiten und Erlernen der Formeln beschränken. Vielmehr soll der Modellcharakter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen verdeutlicht werden.

Die Schülerinnen und Schüler können bei der Datenerhebung bereits erkennen, dass sich Häufigkeitsverteilungen zum selben Sachverhalt unterscheiden, gleichzeitig jedoch Gemeinsamkeiten ersichtlich sind. „Die Herausforderung besteht bei diesem Schritt darin, dass die Schülerinnen und Schüler gleiche Strukturen, das Muster im Zufall sehen, obwohl kein Bild mit einem anderen exakt übereinstimmt.“ (Eichler & Vogel 2009, S.219)

Es stellt sich in weiterer Folge die Frage: Warum gibt es diese Gemeinsamkeiten und (wie) kann man diese beschreiben? „Die empirisch gestützte Strukturvermutung motiviert schließlich die Theoriebildung. Diese begründet sich in der Frage, warum die Bilder augenscheinlich eine gemeinsame (...) Struktur haben, obwohl doch überall der Zufall beim Bilderentstehen regiert hat“ (Eichler & Vogel 2009, S.219). Wir suchen nach dem Muster im Zufall. Es wurde bereits im Kapitel 5.1 festgehalten, dass der Zufall nicht genau vorausgesagt werden kann, jedoch auf lange Sicht Muster zu erkennen sind.

Die Muster können mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden. Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt es sich also um ein Modell, welches das in den Daten liegende Muster beschreibt. Biehler (1994) zieht hier eine Analogie zu Platons Ideenlehre. „Maxim: Work with the model. In a sense, the model (the probability distribution) is the deeper, although not completely known reality, of which the data provide some imperfect image. This attitude resembles Platonist ideas where every real square is only an imperfect image of the real perfect ideal square.” (Biehler 1994, S.7). Die

Wahrscheinlichkeitsverteilung kann also laut Biehler als jenes ideale Urbild verstanden werden, von dem die Daten das nicht-perfekte Abbild darstellen. Aufgrund des Zufalls sind die einzelnen Häufigkeitsverteilungen in der Regel unterschiedlich.

Zudem soll herausgestrichen werden, dass die empirische Verteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilung umso näher kommt, je größer die Stichprobe ist. Bei großem Stichprobenumfang stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine gute Prognose dar. Für die Visualisierung dieses Sachverhalts ist das Simulieren zentral. Die Schülerinnen und Schüler „können ebenso beim händischen Simulieren erkennen, dass bei wenigen Versuchen eben nicht das vielleicht vermutete Muster erscheint, sondern sich dieses allmählich durchsetzt." (Eichler & Vogel 2009, S.232)

Verbindungsglied zur schließenden Statistik

Ist ein Modell zu den Daten gefunden, stellt sich des Weiteren die Frage, ob ein bestimmter Datensatz auch wirklich zu einer vermuteten Wahrscheinlichkeitsverteilung passt. Auf diese Weise entsteht ein konsistenter Übergang zur schließenden Statistik. „Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind ein wichtiges Modellelement der Stochastik. Sie vermitteln zwischen empirischen Häufigkeitsverteilungen und zentralen Konzepten der schließenden Statistik, wie z. B. das Testen von Hypothesen und das Schätzen von Parametern" (Eichler & Vogel 2009, S.218).

Didaktische Umsetzung

Im Hinblick auf die didaktische Vermittlung muss geklärt werden, wie formal Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingeführt werden sollen. Ein Ansatz wäre, auf den Formalismus weitgehend zu verzichten und nur konkret auf die Problemstellungen einzugehen. „Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Zufallsvariablen und deren Verteilungen im Unterricht einzuführen. Eine Möglichkeit ist die, diese Begriffe nicht explizit zu behandeln, sondern auf die Begrifflichkeit und deren formale Fassung nur insoweit einzugehen, wie das bei jeweiligen Problemstellungen unbedingt erforderlich ist" (Wolpers 2002, S.200). Bei den vorgestellten Unterrichtsvorschlägen wird auf den Formalismus jedoch nicht gänzlich verzichtet. Vielmehr wird versucht die Verteilungen an konkreten Problemstellungen zu motivieren, um so zu einem besseren Verständnis beizutragen. Die Lösungsansätze werden in weiterer Folge formalisiert, um so Standardsituationen zu konstruieren, auf die bei den unterschiedlichen Anwendungsaufgaben immer wieder zurückgegriffen werden kann (vgl. Wolpers 2002, S.49).

Da die geometrische Verteilung bereits implizit beim Spiel „Wie oft würfelt man bis ein Dreier kommt?“ vorkam, wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung anhand dieser Aufgabe formalisiert. Die Binomialverteilung wird in weiterer Folge mit Hilfe des Galton-Bretts veranschaulicht und systematisiert.
Im Anschluss daran werden sowohl Binomialverteilung als auch die geometrische Verteilung an einer Problemstellung aus dem Alltag weiter verdeutlicht. Mit dieser Aufgabe soll die Verbindung zur Datenanalyse betont und Fragestellungen der beurteilenden Statistik vorbereitet werden.

5.5.1 Geometrische Verteilung

Bei dem Spiel „Wie oft würfelt man bis ein Dreier kommt?“ wurde bereits die entsprechende Wahrscheinlichkeit geschätzt, überprüft und berechnet. Wie oben bereits beschrieben (siehe Kap. 5.1.2) müssen nur mehr die „Begriffe ausgehandelt“ werden um so die Wahrscheinlichkeitsverteilung auch formal einzuführen.
Bis jetzt wurden zum Ausdruck der Wahrscheinlichkeit eines Sachverhalts unterschiedliche Schreibweisen verwendet (z. B.: P(2x); P(Wartezeit ≤ 10); P(1Mal würfeln).
Es kann mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden, dass hier die Einführung einer einheitlichen Schreibweise sinnvoll ist. Auf diese Weise wird die Zufallsvariable X motiviert. In diesem Fall wird X als die Anzahl der Würfe bis ein Dreier gewürfelt wird festgelegt. Anstatt P(2x), P(Wartezeit 2) usw. wird nun einheitlich P(X=2) geschrieben.
Konkret handelt es sich bei der Zufallsvariable X um eine Funktion, die jedem Ereignis eine Zahl zuordnet (siehe Abb. 5.8). Die Zufallsvariable kann die Werte 1, 2, 3, … annehmen.
In weiterer Folge wird den Werten je eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt also an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable X bestimmte Werte annimmt.

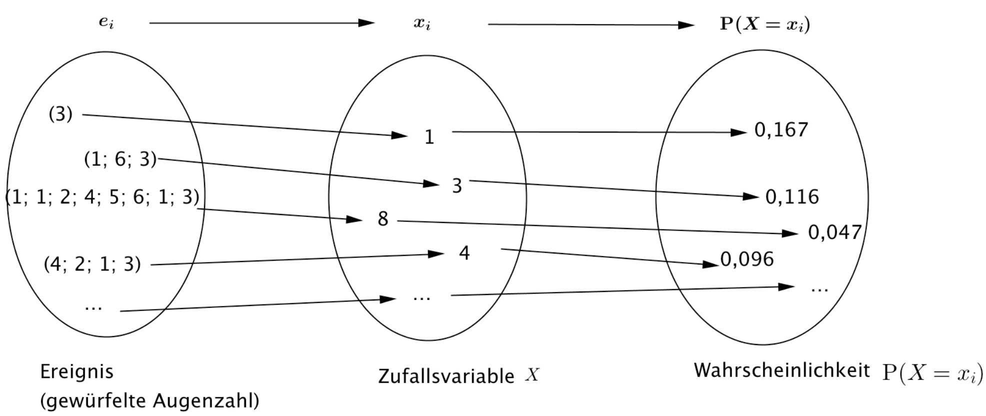


Abb. 5.8: Funktionsdarstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit ergeben sich häufig Formalismen. Mit deren Hilfe können Wahrscheinlichkeiten einfach berechnet werden.
So wurde beim Würfelspiel bereits eine Formel systematisiert (siehe 5.3):
$P(X = k)\ ) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$

Es ergab sich folgende Verteilung:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥10
Berechnete Wahrscheinlichkeiten	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,194

Tab. 5.12: Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Warten bis ein Dreier gewürfelt wird

Darauf aufbauend, lässt sich eine allgemeine Formel für geometrische Verteilungen aufstellen.

Hat man eine Aufgabe mit der Frage, wie oft man einen Versuch wiederholen muss bis ein bestimmtes Ereignis eintritt, liegt eine *geometrische Wahrscheinlichkeitsverteilung* vor.
Als Zufallsvariable X wird die Anzahl der Versuche bis zum Erfolg festgelegt.
Die Funktion $P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$ (k = 1; 2; 3; 4; …), gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass nach k Versuchen zum ersten Mal Erfolg eintritt.

Durch Simulation von Daten soll der Modellcharakter der Wahrscheinlichkeitsverteilung weiter verdeutlicht werden. Dafür werden unterschiedlich große Datensätze generiert und die Häufigkeitsverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung vergleichen. Es ist zu erkennen, dass je größer der simulierte Datensatz ist, desto mehr nähert sich die relative Häufigkeitsverteilung an die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Auf diese Weise wird verdeutlicht, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung für große Datensätze eine gute Prognose darstellt. Abbildung 5.9 zeigt den Vergleich von Häufigkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung.

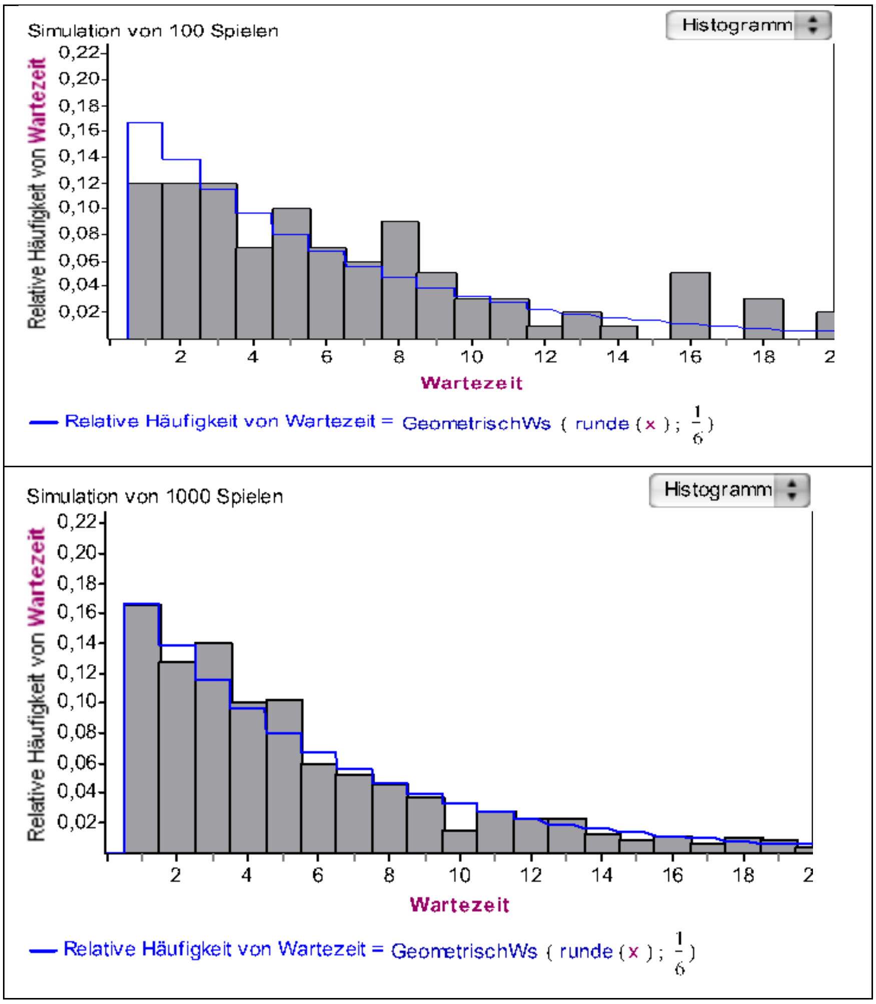


Abb. 5.9: Vergleich von Häufigkeitsverteilung (graue Balken) und Wahrscheinlichkeitsverteilung (blau). Oben: Simulation von 100 Spielen, unten: Simulation von 1000 Spielen

5.5.2 Binomialverteilung

Vor der formalen Einführung der Binomialverteilung werden mit Hilfe des Galton-Bretts (siehe Abb. 5.10) verschiedene Verteilungen simuliert. So kann beispielsweise das Würfel von simuliert werden und die Anzahl von „Kopf“ (oder „Zahl“) betrachtet werden. Wie sieht die Verteilung bei vier oder mehr geworfenen Münzen aus? Wie verändert sich die Verteilung wenn die Münze gezinkt ist (z. B. P(Zahl) = 0,7)? Wie sieht die Verteilung aus wenn die Anzahl von Sechser beim Würfel betrachtet wird? Durch die Veranschaulichung dieser Fragen am Galton-Brett soll ein Verständnis für wesentliche Charakteristika der Binomialverteilung gewonnen werden. Zu beachten ist, dass mechanisch eine Variation von *p* kaum realisierbar ist.

Abb. 5.10: Galton-Brett (Quelle: http://www.karlsims.com/marbles, Zugriff am 4.12..2013)

Zum Unterrichtsvorschlag

Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich das Themengebiet weitgehend selbstständig (siehe Arbeitsblatt 19). Wesentliche Ideen und Fragestellungen wurden von Eichler & Vogel (2009, S.225) übernommen.

Im Internet finden sich zahlreiche Computer-Galton-Bretter, mit denen experimentiert werden kann[16]. „Der computertechnische Nachbau des Galton-Bretts macht es möglich, dass die Schülerinnen und Schüler den Vorgang individuell betrachten und weitgehend erforschen können.“ (Eichler & Vogel 2009, S.225)

Erst im Anschluss daran wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung hergeleitet und formalisiert.

Das Galton-Brett

Bevor verschiedene Häufigkeitsverteilungen am Galton-Brett simuliert werden, sollen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Frage „Wo entscheidet der Zufall beim Galton-Brett?“ (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.223) das Prinzip Zufall noch einmal reflektieren.

Zudem sollen zwei wesentliche Eigenschaften des Galton-Bretts mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden.

- Es gibt nur zwei Möglichkeiten wie die Kugel fällt, wenn sie auf ein Holzstück fällt: entweder nach rechts oder nach links. Falls der unwahrscheinliche Fall eintritt, dass die Kugel auf dem Holzstück stehen bleibt, wird das als Fehlversuch gewertet und wiederholt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.224).

[16] http://www.subtangent.com/maths/ig-quincunx.php (Zugriff: 4.12.2013)

- Die einzelnen „Teilvorgänge“ sind voneinander unabhängig. „Das bedeutet, der bisherige Verlauf des Experiments hat keinerlei Einfluss auf den folgenden Teilvorgang” (Eichler & Vogel 2009, S.224). Die Fall-Position der einen Kugel hat keinerlei Auswirkungen auf die nächste Kugel.

Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, das Werfen von Münzen mit Hilfe des Galton-Bretts zu simulieren. Das Galton-Brett ist bezüglich des Münzwurfs ein „zufallsäquivalentes Zufallsgerät“, der Münzwurf und die stochastische Situation am Galton-Brett sind vollkommen strukturgleich (vgl. Eichler & Vogel 2009, S.224). Die Anzahl von „Zahl“ oder „Kopf“ soll dabei untersucht werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze das Symbol „Zahl“ zeigt, beträgt 0,5. Das heißt, die Kugel fällt am Galton-Brett mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder rechts bzw. links des Holzstücks (p = 0,5). Das Galton-Brett auf Abb. 5.10 besteht aus sechs Reihen, simuliert also den Münzwurf von sechs geworfenen Münzen bzw. den sechsmaligen Wurf einer Münze. Die Anzahl der Reihen entspricht also der Anzahl von Zufallsversuchen.

Beim Simulieren am (realen oder digitalen) Galton-Brett wird deutlich, dass sich die einzelnen Verteilungen bei kleinen Stichprobenumfang stark unterscheiden und keine Gesetzmäßigkeiten erkennbar sind (siehe Abb. 5.11, links).

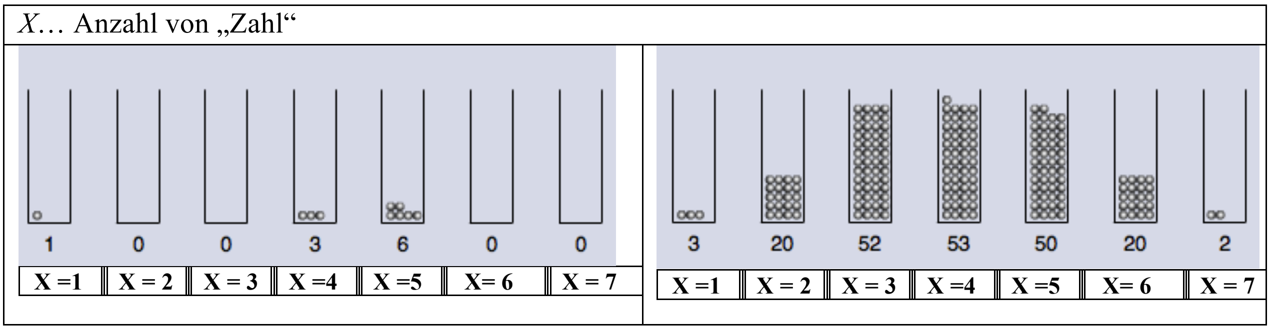


Abb. 5.11: Stichprobenumfang des Galton-Bretts wird verändert: links 10 Kugeln, rechts 200 Kugeln

Bei einer großen Versuchsanzahl ist hingegen ein Muster erkennbar (siehe Abb. 5.11, rechts) und die Form der verschiedenen Ausfälle wird sich bei allen Schülerinnen und Schülern gleichen: Die meisten Kugeln liegen in der Mitte, am Rand liegen weniger. Das Prinzip „Zufall“ und sein Muster werden somit mit Hilfe des Galton-Bretts auf einer ikonischen Repräsentationsebene verdeutlicht.

Zudem kann die Auswirkung der Wahrscheinlichkeit p auf die Verteilungsform untersucht werden. Wie ändert sich die Verteilungsform, wenn die Münze gezinkt ist (P(Zahl) = 0,7) oder die Anzahl von gewürfelten Sechsern untersucht wird? Beim „realen Brett“ wird dabei das Brett nach rechts bzw. nach links gekippt. Bei der Computersimulation können verschiedene Werte für die Wahrscheinlichkeit p eingestellt werden. Dabei ist zu erkennen, dass bei einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit (z. B. $p = 0{,}1$) die meisten Kugeln am linken Rand liegen. Bei einer sehr großen Wahrscheinlichkeit liegen die meisten Kugeln rechts. Je näher die Wahrscheinlichkeit an $p = 0{,}5$ liegt, desto symmetrischer wird die Verteilungsform (vgl. Abb.5.12).

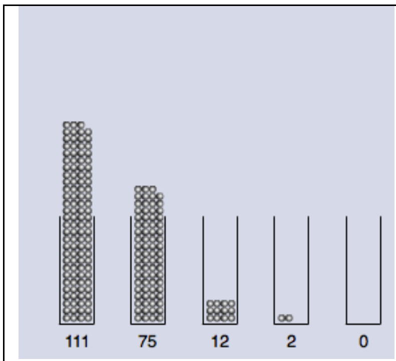
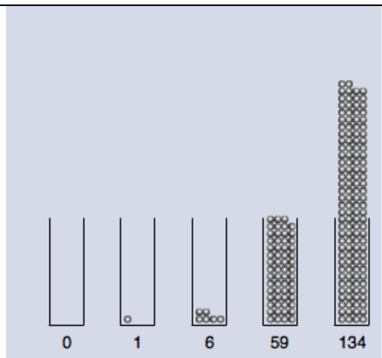
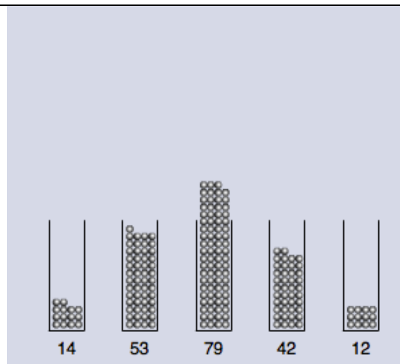
		
$n = 4$; $p = 0{,}1$	$n = 4$; $p = 0{,}9$	$n = 4$; $p = 0{,}5$

Abb. 5.12: Galtonbrett Wahrscheinlichkeit p wird verändert (jeweils 200 simulierte Kugeln)

Hier liegt ein wesentlicher didaktischer Nutzen des Galton-Bretts: So werden die Veränderungen von Parametern unmittelbar ersichtlich. „Die größere zeitliche Kontinuität (…) zwischen dem Zufallsvorgang und seiner Abbildung in der empirischen Häufigkeitsverteilung lässt kognitionspsychologisch betrachtet eine größere Kohärenz im Wahrnehmen und Denken der Schülerinnen und Schüler erwarten“ (Mayer 1997 zitiert nach Eichler & Vogel 2009, S.225). Anders als bei einer Simulation per Knopfdruck, wie sie mit Fathom erzeugt werden, wird hier das Zustandekommen der Verteilungen ersichtlich.

In weiterer Folge soll die entsprechende theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden.

Formalisierung der Binomialverteilung

Auch für die Formalisierung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung liefert das Galton-Brett eine gute Hilfestellung. So lässt sich in die Abbildung des Galton-Bretts sowohl das Pascal´sche Dreieck als auch das Baumdiagramm unmittelbar „hineindenken“ (vgl. Eichler &Vogel 2009, S.225).

Es wird mit Hilfe des Galton-Bretts verdeutlicht, dass bei einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}5$ in der Mitte mehr Kugeln landen als am Rand, weil es mehrere Möglichkeiten gibt dort hinzukommen. Das Pascal´sche Dreieck zeigt die Anzahl der Wege zu den Verzweigungspunkten.

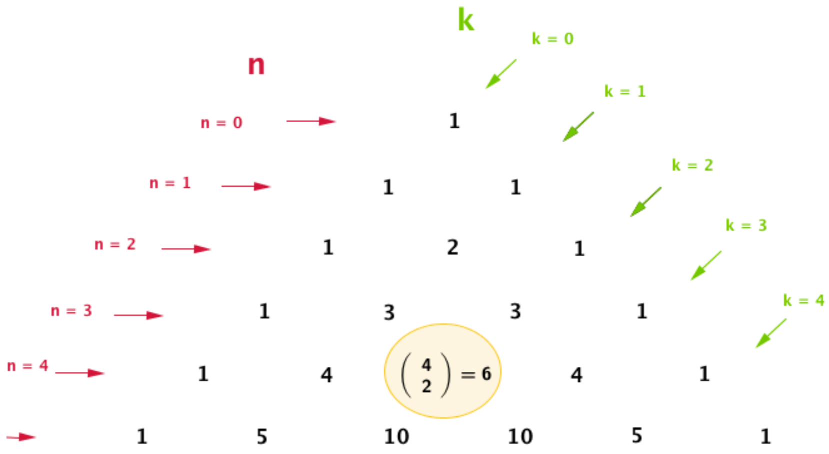


Abb. 5.13: Paschal´sche Dreieck

Die Anzahl der Möglichkeit kann mit Hilfe des Binomialkoeffizienten berechnet werden (vgl. Abb. 5.13). So gibt sechs Möglichkeiten, wie die Kugel am Galton-Brett an der in Abb. 5.13 markierten Position landen kann.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel genau in einem bestimmten Fach landet, kann mit Hilfe des Baumdiagramms (Abb. 5.14) veranschaulicht werden. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der Pfadregeln berechnet werden:

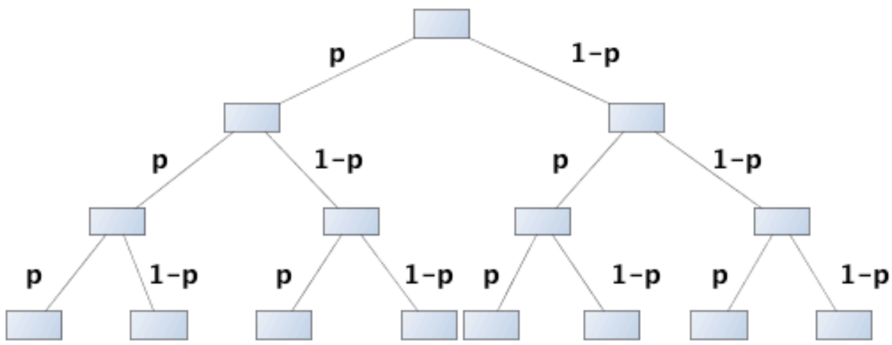


Abb. 5.14: Baumdiagramm

Im Anschluss kann formalisiert werden.

Ein zufälliger Vorgang, der …

… nur zwei Versuchsausgänge besitzt (Erfolg und Misserfolg)

… *n*-mal unter den selben Bedingungen wiederholt werden kann

heißt *n*-stufiges *Bernoulli-Experiment.*

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem *n*-stufigen BERNOULLI-Experiment mit der „Erfolgs“wahrscheinlichkeit *p* die Anzahl *X* der „Erfolge“ genau *k* ist, ist

$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, n$“

(Götz u. a. 2011, S.251)

Die am Galton-Brett generierten Daten bzw. die daraus gewonnenen relativen Häufigkeiten können im Anschluss mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten verglichen werden. Dabei wird ersichtlich, dass sich bei großen Datenmengen die Verteilung der absoluten Häufigkeiten an die Wahrscheinlichkeitsverteilung annähert. Das Gesetz der großen Zahlen wird auf diese Weise anschaulich demonstriert.

Binomialverteilung

Wie sieht die Verteilung am Galton-Brett bei vier geworfenen Münzen aus? Wie würde die Verteilung einer gezinkten Münze (z. B.: P(Zahl) = 0,7) aussehen? Experimentiert am Galton-Brett!

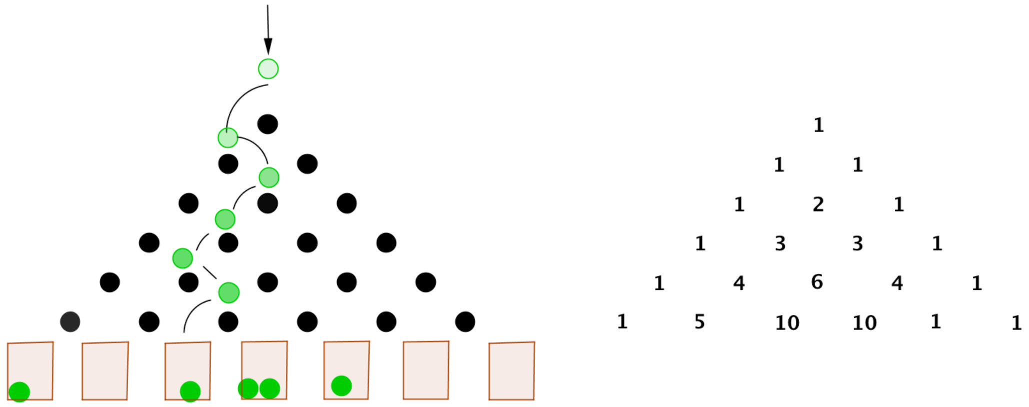


Abb.: links: Galton-Brett; rechts: Pasal´sche Dreieck

Das Galton-Brett

Partnerarbeit

1. Gebt, bevor ihr verschiedene Verteilungen am Galton-Brett simuliert, eine **Schätzung** ab, wie die einzelnen Verteilungen aussehen werden. Skizziert sie!

2. Beschreibt, wo genau der **Zufall** beim Galton-Brett entscheidet!
   Was hat das Galton-Brett mit dem Münzwurf zu tun?

3. **Experimentiert** mit einem **Computer-Galton-Brett** aus dem Internet!
   Experimentiert mit **verschiedenen Parametern** und notiert die Ergebnisse!

4. Versucht, **Gesetzmäßigkeiten** zu beschreiben:
   z. B.: Was passiert, wenn ***p*** **klein** ist? Was passiert, wenn ***n*** **groß** ist?

5. Was haben das **Galton-Brett** und das **Paschal´sche Dreieck** miteinander zu tun? Vergleiche die beiden Abbildungen oben!

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel im ersten, im zweiten, … Fach landet? Welche Gesetzmäßigkeit kannst du bei der Berechnung erkennen?

5.5.3 Verteilungen im Alltag – das Jahrhunderthochwasser

Die Binomialverteilung wird anhand eines Alltagsproblems weiter motiviert. Zusätzlich soll mit Hilfe dieser Aufgabe der Übergang zur beurteilenden Statistik gelingen.

Der folgende Unterrichtsvorschlag zeigt, dass die Ideen für einen datenorientierten Stochastikunterricht nicht nur in Mathematikbüchern gefunden werden können. So kam es im Frühling 2013 in Österreich (so wie in großen Teilen Deutschlands und Tschechiens) zu einem verheerenden Hochwasser (siehe Arbeitsblatt 20). In den Zeitungen war wiederholt von einer „Jahrhundertflut" die Rede. Ein Begriff, der schon elf Jahre zuvor – beim Hochwasser 2002 – laufend zu lesen und zu hören war. Zwei Jahrhunderthochwasser innerhalb von zwölf Jahren, da muss doch etwas falsch sein? Diese Fragestellung soll eine genauere Analyse veranlassen. Was genau versteht man unter einem Jahrhunderthochwasser? Die Schülerinnen und Schüler sollen dazu selbstständig im Internet recherchieren.

Im Anschluss an die Analyse können verschiedene Wahrscheinlichkeiten einer Jahrhundertflut berechnet werden. Dabei wird sowohl die Binomialverteilung, als auch die geometrische Verteilung angewandt.

Zum Unterrichtsvorschlag

Ein Jahrhunderthochwasser findet im Mittel einmal in hundert Jahren statt. Dabei handelt es sich um einen Pegelwert (oder eine Durchflussgeschwindigkeit), der aus den Wetterdaten der vergangenen Jahrhunderte berechnet wird. Theoretisch kann dieser Pegelwert jährlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 überschritten werden.

Da es sich um einen Prognosewert handelt, kann ein Jahrhunderthochwasser jedoch häufiger als einmal alle hundert Jahre stattfinden. Ist es ungewöhnlich, dass es zwei Jahrhundertfluten innerhalb der letzten zwölf Jahre gab?

Es wird davon ausgegangen, dass

- ein Hochwasser nur einmal im Jahr stattfindet.
- die Ereignisse unabhängig voneinander sind.

Mit Hilfe der Binomialverteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit für das in Rede stehende Ereignis berechnen.

Die Zufallsvariable *X* wird als die Anzahl der Jahrhunderthochwasser in *n* Jahren definiert. In diesem Fall ist das *n* zwölf.

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{10} \approx 0{,}006$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,006 findet ein Jahrhunderthochwasser genau zweimal in zwölf Jahren statt (siehe Arbeitsblatt 20 Aufgabe a)).
Es handelt sich dabei also um ein sehr unwahrscheinliches Ereignis.
Die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten zwölf Jahren mindestens ein weiteres Jahrhunderthochwasser stattfindet (siehe Arbeitsblatt 20 Aufgabe b)) beträgt 11,4%:
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{12} \approx 0{,}114$

Mit Hilfe der geometrischen Verteilung wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass es bis 2017 kein weiteres Jahrhunderthochwasser geben wird (siehe Arbeitsblatt 20 Aufgabe c)).

Die Zufallsvariable Y wird hier definiert als die Anzahl der Jahre bis zum Jahrhunderthochwasser.
$P(Y = k) = 0{,}99^{k-1} \cdot 0{,}01$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gemeinde Krems-Stein bis zur Fertigstellung der Hochwasserschutzanlage 2017 von einem weiteren Jahrhunderthochwasser verschont bleibt, beträgt 95,1%:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y > 5) &= 1 - \mathrm{P}(Y \leq 5) \\ &= 1 - \big(\mathrm{P}(Y = 1) + \mathrm{P}(Y = 2) + \mathrm{P}(Y = 3) + \mathrm{P}(Y = 4) + \mathrm{P}(Y = 5)\big) \\ &\approx 1 - 0{,}049 = 0{,}951 \end{aligned}$$

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich zudem die Frage stellen, welche Schlüsse und Konsequenzen aus der vermeintlichen Häufung an Hochwassern gezogen werden können. So kann nicht nur die Verbindung zwischen Datenanalyse und Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand dieser Aufgabe verdeutlicht werden, sondern es wird auch der Übergang zur schließenden Statistik illustriert: Klimaerwärmung und Flussregulierungen haben Auswirkungen auf das Hochwasser. Das häufige Auftreten von Jahrhundertfluten kann in weiterer Folge die Frage aufwerfen, ob neue Kennwerte erforderlich sind. Ab welchen Daten wird eine neue Modellierung notwendig?
Auf diese Weise wird die Brücke zur beurteilenden Statistik geschlagen (siehe Kap. 6).

Das Jahrhunderthochwasser 2002 und 2013

In **Österreich** (und weiten Teilen **Deutschlands**) fand im **Frühling 2013** ein **Hochwasser** statt. In diesem Zusammenhang war immer wieder von einem **Jahrhunderthochwasser (oder hundertjährigem Hochwasser)** die Rede. Begriffe, die man schon **zwölf Jahre** vorher beim **Hochwasser 2002** immer wieder hörte.

Zwei Jahrhunderthochwasser in zwölf Jahren, sollte es da nicht besser **zwölfjähriges** Hochwasser heißen?

2002

2013

I) Partnerarbeit

Recherchiert im Internet was genau man unter einem **Jahrhunderthochwasser** versteht!
Fasst eure Ergebnisse in einem kurzen **Text** zusammen!

II) Berechnen von **Wahrscheinlichkeiten**

Wir gehen davon aus, dass **pro Jahr höchstens ein** Hochwasser stattfindet und die Ereignisse voneinander **stochastisch unabhängig** sind.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass **innerhalb von zwölf Jahren** genau **zwei Jahrhunderthochwasser** stattfinden!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den **nächsten zwölf Jahren mindestens ein Jahrhunderthochwasser** stattfindet?

c) Der **Hochwasserschutzanlage** der Gemeinde Krems-Stein befand sich während des Hochwassers 2013 **noch in Bau**. Der Hochwasserschutz soll die Gemeinde vor den Fluten eines Jahrhunderthochwassers schützen. Die Fertigstellung des Damms ist bis **Ende 2017** geplant.

   Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass der Ort bis zum Fertigwerden von einem Jahrhunderthochwasser **verschont** bleibt?

d) **Zwei Jahrhunderthochwasser in zwölf Jahren** sind doch sehr **unwahrscheinlich** (siehe a)). Welche **Schlüsse und Konsequenzen** könnten aus der zunehmenden **Häufung von Jahrhundertfluten** gezogen werden?

6 Hypothesentests – Ausblick auf die schließende Statistik

Das Testen von Hypothesen wird ebenfalls mit Hilfe von bereits bekannten Aufgaben eingeführt. So wird bei der ersten Aufgabe die Frage gestellt, ob die aktuelle Häufung von Hochwasser für eine Neuberechnung der Kennwerte spricht. Bei der zweiten Aufgabe soll festgelegt werden, wie viele Smarties einer Farbe in der Packung sein müssen, um von einer Gleichverteilung auszugehen.

Wurden bis jetzt auf Grund von Daten Prognosen erstellt, sollen nun mögliche Prognosen (man spricht von Hypothesen) mit Hilfe von Stichproben auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden. Da prinzipiell unbekannt ist, ob eine Hypothese gilt oder nicht, wird, je nachdem wie die Stichprobe ausfällt, die Hypothese verworfen oder nicht.
„Wenn eine Hypothese anhand von Stichprobendaten getestet werden soll, dann wird man diese verwerfen, wenn das Stichprobenergebnis besonders unverträglich mit ihr erscheint. Passen die Stichprobendaten und die Hypothese hingegen gut zueinander, dann wird man sie nicht verwerfen. Da mit Stichproben gearbeitet wird, ist in beiden Fällen klar, dass man mit seiner Einschätzung falsch liegen kann“ (Büchter & Henn 2005, S.429). Hier kommt das „Prinzip des Zufalls“ zum Tragen: So ist es zwar unwahrscheinlich aber durchaus möglich, auf eine Stichprobe zu stoßen, die mit der Hypothese unverträglich erscheint und deswegen zu einer Verwerfung führt, obwohl diese gilt. Beziehungsweise kann ein Ereignis auftreten, dass zu einer Entscheidung zu Gunsten der Hypothese führt, obwohl diese *nicht* gilt.

AHS-Lehrplan
Im Lehrplan sind Hypothesentests in der 8. Klasse vorgesehen. So heißt dort:

- „Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen“

Hypothesentests zeichnen sich im klassischen Stochastikunterricht häufig dadurch aus, dass sie sehr trocken und praxisfern behandelt werden. In den Schulbüchern geht es meistens um die Gültigkeit von medizinischen Tests. Zudem werden die Aufgaben häufig bloß algorithmisch abgehandelt. Dabei bieten besonders Hypothesentests eine Fülle an Möglichkeiten für einen lebendigen Unterricht (vgl. Riemer 1991).
Die folgenden zwei Unterrichtsvorschläge stellen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. So gibt es eine Vielzahl an weiteren Möglichkeiten, Hypothesentests im Stochastikunterricht zu behandeln, zum Beispiel mit Hilfe der Bayes-Statistik, auf die hier nicht näher eingegangen

wird. Es geht im Folgenden vor allem um einen verständnisvollen Einstieg in das Testen von Hypothesen.

Büchter und Henn (2004, S.430) nennen zwei unmittelbar Vorgehensweisen um Hypothesentests einzuführen, die im Anschluss anhand der Unterrichtsvorschläge demonstriert werden.

- Die Daten werden zuerst erhoben und untersucht. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit der empirischen Daten unter der Bedingung, dass die Hypothese gilt, berechnet. Je nachdem wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, fällt die Entscheidung „ob wir an die Hypothese (…) glauben wollen oder nicht“ (Büchter & Henn 2005, S.430) bzw. für die Hypothese oder die Alternativhypothese.
- Bei der anderen Variante wird, aufbauend auf die Hypothese, eine Entscheidungsregel formuliert. Es wird dabei ein Bereich vorgegeben, in dem die Daten liegen müssen, um auf die Gültigkeit der Hypothese zu schließen. Erst dann werden die Daten erhoben. Liegen die Daten im vorgegebenen Bereich, wird davon ausgegangen, dass die Hypothese gilt. Liegen die Daten im Ablehnungsbereich, wird die Hypothese verworfen.

Dabei haben beide Vorgehensweisen ihre Vorteile: „Das zweite Vorgehen scheint objektiver zu sein, da zunächst eine Entscheidungsregel formuliert und die Entscheidung der Empirie überlassen wird. Demgegenüber entscheiden wir beim ersten Vorgehen erst nach Vorliegen der Ergebnisse und möglicherweise unter dem Eindruck des Zustandekommens dieses Ereignisses.“ (Büchter & Henn 2005, S.430)

Laut Meyfarth (2006) eignet sich die erste Variante besonders gut für einen Einstieg in das Hypothesentesten: „Der Einstieg in das Testen von Hypothesen über die Methode der P-Werte soll das Grundprinzip des Hypothesentests klar hervortreten lassen und somit zur eigenständigen Konstruktion von Tests sowie zur richtigen Interpretation der Entscheidungen und der berechneten Wahrscheinlichkeiten beitragen. Erst im Anschluss an diesen ausführlichen und langsamen Einstieg mit P-Werten werden Signifikanztests mit der Konstruktion von ein- und zweiseitigen Verwerfungsbereichen eingeführt” (Meyfarth 2006, S.86). Aus diesem Grund wird zur Einführung mit P-Werten gerechnet. Im zweiten Beispiel wird vor der Erhebung der Stichprobe eine Entscheidungsregel aufgestellt.

Besonderes Augenmerk wird bei beiden Aufgaben auf mögliche Fehlentscheidungen gelegt: Während bei der ersten Aufgabe der Zusammenhang von Stichprobengröße und Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung im Vordergrund steht, wird bei der zweiten

Aufgabe die Auswirkung verschiedener Alternativhypothesen auf die Größe der Fehlerwahrscheinlichkeit untersucht.

Simulation

Eine besondere Bedeutung kommt zudem der Simulation von Daten zu. So werden die zu überprüfenden Verteilungen zu Beginn simuliert und mit den empirischen Daten der Stichprobe verglichen. Auf diese Weise können erste qualitative Kriterien für eine Entscheidung gefunden werden.

6.1 Braucht es neue Hochwasserkennwerte?

In den Medien ist wiederholt die Rede davon, dass sich auf Grund der Klimaerwärmung extreme Wetterphänomene in Zukunft häufen werden. Erlauben die gegenwärtigen Daten den Schluss, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen (die aus den Daten der Vergangenheit berechnet wurden) nicht mehr passen und es neue Kennwerte braucht oder handelt es sich bei den Häufungen von Hochwassern der letzten Jahre nur um einen „Zufall"? „Es handelt sich bei den Fragen um ‚Kerninhalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung'. So wird hier ein konstruiertes Modell – als Ergebnis einer Datenanalyse – und dessen Implikation für eine bestimmte Anzahl für zukünftige zufällige Vorgänge untersucht." (Eichler & Vogel 2009, S.163)

Die Schülerinnen und Schüler haben sich in Kap. 5.3 bereits mit dieser Frage auseinander gesetzt.

Als weitere Motivation für die folgende Analyse dient das transkribierte Interview aus der ZIB 2 vom 4. Juni 2013. Der ORF-Moderator Armin Wolf sprach dabei mit Michael Staudinger, dem Chef der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG). Staudinger prognostizierte im Gespräch eine notwendige Neuberechnung der Kennwerte (siehe Arbeitsblatt 21). Sein Vergleich der veränderten Wetterdaten mit einem gezinkten Würfel illustriert den Sachverhalt sehr gut und knüpft an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler an. Zudem wird auf diese Weise gezeigt, wie statistische Sachverhalte in Diskussionen Bedeutung finden.

Motiviert durch Armin Wolfs Frage: „Das heißt, die 100-jährigen Hochwasser sind keine 100-jährigen mehr sondern die neuen 30-jährigen?" soll nun überprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Jahrhunderthochwassers HQ_{100}, unter der Berücksichtigung der Wetterdaten der letzten 130 Jahre, noch zutreffend ist, oder ob ein Hochwasser dieser Intensität statistisch nun eher alle 30 Jahre stattfinden wird. Letztendlich

wird sich herausstellen, dass bei dem beobachteten Zeitraum von 130 Jahren noch keine sichere Entscheidung getroffen werden kann.
Auf der Homepage des Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (BMVI) wird ein Jahrhunderthochwasser der Donau mit einer Durchflussgeschwindigkeit größer als 11.200 m^3/Sekunde definiert.[17] Statistisch kann es jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 zu einem solchen Ereignis kommen kann. Hat sich die Wettersituation in Österreich in den letzten Jahren so verändert, dass neue Kennwerte berechnet werden müssen?
Dafür wird nun die zu testende *Nullhypothese* H_o definiert.
H_o … Die Durchflussgeschwindigkeit von 11 200 m^3/Sekunde der Donau wird jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}01$ (HQ_{100}) überschritten.

Es stellt sich die Frage, ob man mittlerweile jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{30}$, also $0{,}0\dot{3}$, mit einem solchen Ereignis rechnen muss. Dieser Sachverhalt wird als *Alternativhypothese* H_1 definiert.
H_1 … Die Durchflussgeschwindigkeit von 11 200 m^3/Sekunde wird jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{30}$ (HQ_{30}) überschritten.

Beim Testen von Hypothesen entscheidet man sich nicht nur für oder gegen eine Hypothese, auch eine Entscheidung zwischen zwei konkurrierenden Hypothesen ist möglich. Wichtig ist dabei die Hervorhebung, dass als Alternativhypothesen nicht nur $0,\dot{3}$ in Frage kommt. Auch eine statistische Wiederholung alle 20, 50 oder 40 Jahre wäre möglich.
Die Zufallsvariable X wird als die Anzahl der Hochwasser in einem gewissen Zeitraum festgelegt. Der beobachtete Zeitraum n ist in diesem Fall aufgrund der Daten des BMVI 130 Jahre.

Simulation
Geht man nun von der Verteilung aus, dass es jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 zu einem Jahrhunderthochwasser kommen kann, erwartet man in 130 Jahren etwa „1,3“ Hochwasser. Wenn in den beobachteten 130 Jahren die Abweichung von einem Hochwasser besonders groß ist, wächst der Verdacht, dass die Verteilung nicht (mehr) zulässig ist (vgl.

[17] http://www.bmvit.gv.at/verkehr/schifffahrt/hochwasserschutz/index/html (Zugriff: 12.12.2013)

Biehler u. a. 2011, S.122). Auf Grund der Variabilität von Daten sind unter der Annahme der Nullhypothese jedoch auch Ereignisse mit mehr als drei Hochwassern im beobachteten Zeitraum möglich. Dieser Sachverhalt soll durch die Simulation von Daten illustriert werden. Dabei wird ein großer Datensatz der angenommen Verteilung B(130; 0,01) generiert (siehe Abb. 6.1).

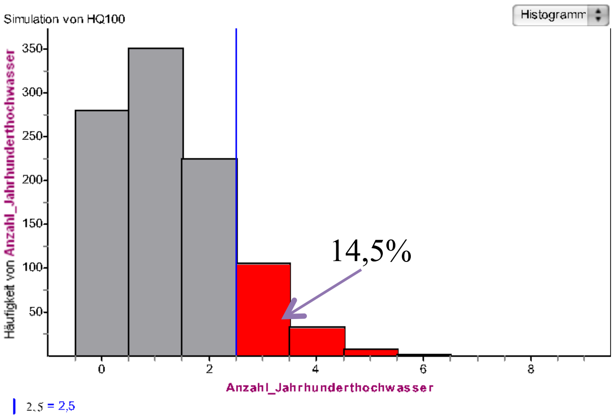


Abb. 6.1: Simulation von 1000 Binomialverteilungen B(130; 0,01) zur Häufigkeit von Jahrhunderthochwassern

Die simulierte Verteilung wird mit den empirischen Daten verglichen. „Man kann also auf nicht-formale und nicht-algorithmische Weise wesentliche Fragen der beurteilenden Statistik (Hypothesentest) behandeln." (Eichler & Vogel 2009, S.164)

4. Jänner 1883	8 520	HQ 10
1890	7 770	HQ 10
9. Juni 1892	8 340	HQ 10
2. August 1897	9 900	HQ 10
17. September 1899	11 200	HQ 100
1920	7 980	HQ 10
13. Juli 1954	10 200	HQ 30
1965	7 520	HQ 10
2. Juli 1975	8 800	HQ 10
1981	7 440	HQ 10
1985	7 300	HQ 10
4. August 1991	9 647	HQ 10
23. März 2002	8 589	HQ 10
14. August 2002	11 305	HQ 100
24. Juni 2009	8 200	HQ 10
2013	11300	HQ 100

Tab. 6.1.: Historische Hochwasser der Donau[18] inklusive Hochwasser 2013

Bei 14,5 % der simulierten Werte gab es im beobachteten Zeitraum mehr als zwei Hochwasser.

[18] http://www.bmvit.gv.at/bmvit/verkehr/schifffahrt/hochwasserschutz/index.html (Zugriff: 12.12.2013)

In weiterer Folge werden die Stichprobenausfälle für die Alternativhypothese simuliert. Diese Verteilung zeigt, dass in 81,7% der simulierten Fälle drei oder mehr Hochwässer stattfanden. Bei den meisten simulierten Werten betrug die Anzahl der Hochwasser vier.

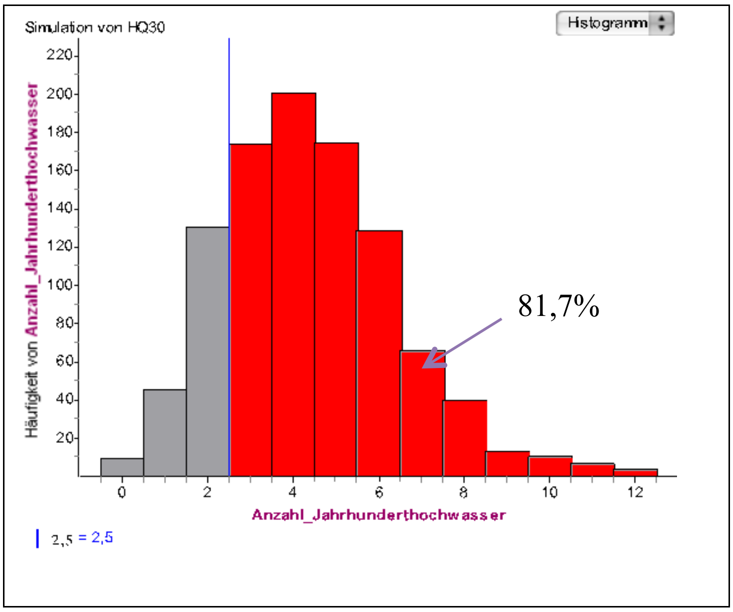


Abb. 6.2: Simulation von 1000 Binomialverteilungen (130; $0,\dot{3}$) zur Häufigkeit von Jahrhunderthochwasser

Die simulierten Daten lassen eine erste Vermutung zu: Drei oder mehr Hochwasser in einem Zeitraum von 130 Jahren treten häufiger auf, wenn die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{30}$ und nicht wie angenommen $p = 0{,}01$ ist.

Berechnen der Wahrscheinlichkeiten

Nun sollen die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden: Wie groß ist, unter der Annahme der Nullhypothese, die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 130 Jahren drei oder mehr Jahrhunderthochwasser stattfinden. Dabei handelt es sich um die sogenannten P-Wert. „Man legt nicht von vornherein ‚Verwerfungsbereiche' für ein bestimmtes Signifikanzniveau fest, sondern beurteilt, wie weit eine gemachte Beobachtung Zweifel an der Nullhypothese erzeugt" (Biehler u. a. 2011, S.125).

Dieser Wert wird mit der Wahrscheinlichkeit für drei oder mehr Hochwässer unter der Annahme der Alternativhypothese ($p = \frac{1}{30}$) verglichen.

Zuvor sollen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeit schätzen. Durch die Simulation und ihr Vorwissen von Binomialverteilungen haben sie erste Anhaltspunkte für ihre Schätzung gesammelt.

Im Anschluss wird berechnet:

$$\mathrm{P}(X \geq 3 \mid Ho) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2 \mid Ho) \approx 1 - \left(\sum_{i=0}^{2} \binom{130}{i} \cdot 0{,}01^{i} \cdot 0{,}99^{130-i} \right) = 0{,}142$$

Dieser Wert wird nun mit der Wahrscheinlichkeit für drei oder mehr Hochwasser unter der Bedingung, dass sich ein Hochwasser dieser Intensität statistisch alle 30 Jahre wiederholt, verglichen:

$$\mathrm{P}(X \geq 3 \mid H_1) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2 \mid H_1) \approx 1 - \left(\sum_{i=0}^{2} \binom{130}{i} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^{i} \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^{130-i} \right) = 0{,}812$$

Häufig werden diese berechneten Wahrscheinlichkeiten falsch interpretiert. So wird $p = 0{,}142$ als die Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit von H_o aufgefasst. „Mit 14,2% Sicherheit handelt es sich um ein Hochwasser, das sich statistisch alle hundert Jahre wiederholt: $(Ho|X \geq 3)$."

In Wahrheit handelt es sich jedoch (bloß) um die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von drei oder mehr Jahrhunderthochwasser unter der Bedingung, dass H_o bzw. H_1 gilt: $P\left(X \geq 3 \middle| H_{0(1)}\right)$.

Welcher Schluss kann nun aus den berechneten Wahrscheinlichkeiten gezogen werden?

Es bestätigt sich der Verdacht aus den simulierten Daten. Drei oder mehr Hochwasser innerhalb von 130 Jahren sind unter der Annahme der Alternativhypothese wahrscheinlicher als unter der Annahme der Nullhypothese. Die Wahrscheinlichkeit von 14,2 % für das Eintreten von drei oder mehr Hochwassern unter der Bedingung dass *Ho* gilt ist jedoch kein starkes Indiz für das Verwerfen der Nullhypothese.

Fehler 1. und 2. Art

Allgemein kann man sich aufgrund der Stichprobe und der theoretischen Annahmen für H_o oder für H_1 entscheiden. Diese Entscheidung kann in weiterer Folge richtig oder aber auch falsch sein (siehe Tab. 6.2).

	Annahme von H_0	Ablehnung von H_0
H_0 wahr	Richtig	Falsch (**Fehler 1. Art**)
H_0 falsch, d. h. H_1 wahr	Falsch (**Fehler 2. Art**)	Richtig

Tab. 6.2: Mögliche Entscheidungsfehler

- Angenommen H_o gilt: Entscheidet man sich aufgrund eines Stichprobenereignisses für die Nullhypothese H_o, weil das Stichprobenergebnis unter der Bedingung von H_o eine hohe Wahrscheinlichkeit ergibt, ist die Entscheidung richtig. Fällt hingegen aufgrund eines Stichprobenergebnisses mit geringer Wahrscheinlichkeit die Entscheidung gegen die Nullhypothese aus, ist die Entscheidung falsch. Man spricht in diesem Zusammenhang vom Fehler erster Art.

  Entscheidet man sich bei der Hochwasser-Aufgabe aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeit von 14,2% gegen die Nullhypothese, beträgt der Fehler erster Art 14,2%.
- Angenommen H_1 gilt: Wird aufgrund eines Stichprobenergebnisses, welches gut zur Alternativhypothese H_1 passt, eine Entscheidung zu Gunsten H_1 getroffen, ist die Entscheidung richtig. Wird hingegen die Alternativhypothese wegen eines Stichprobenergebnisses, dessen Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung von H_1 sehr klein bzw. unter der Bedingung von H_o sehr groß ist, verworfen, ist die Entscheidung falsch.

  Bei der Aufgabe kann beispielsweise festgelegt werden, dass man bei weniger als drei Hochwassern innerhalb von 130 Jahren von der Gültigkeit der Nullhypothese H_o ausgeht:

  $\mathrm{P}(X < 3|H_0) = 1 - \mathrm{P}(X \geq 3|H_0) = 1 - 0{,}142 = 0{,}858$

  $\mathrm{P}(X < 3|H_1) = 1 - \mathrm{P}(X \geq 3|H_1) = 1 - 0{,}812 = 0{,}188$

  Hier kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathrm{P}(X < 3|H_1)$ =18,8% zu einem Fehler. Man spricht vom Fehler zweiter Art.

Bei dem Beispiel ist zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art als auch für einen Fehler 2. Art noch relativ groß ist. Eine Entscheidung zu Gunsten der Alternativhypothese auf Basis der empirischen Daten erscheint aus diesem Grund als unsicher.

Wie können nun beide Fehler minimiert werden?

Zur besseren Verständigung kann hier mit simulierten Daten und Schiebereglern gearbeitet werden (vgl. Biehler u.a. 2011, S.138).

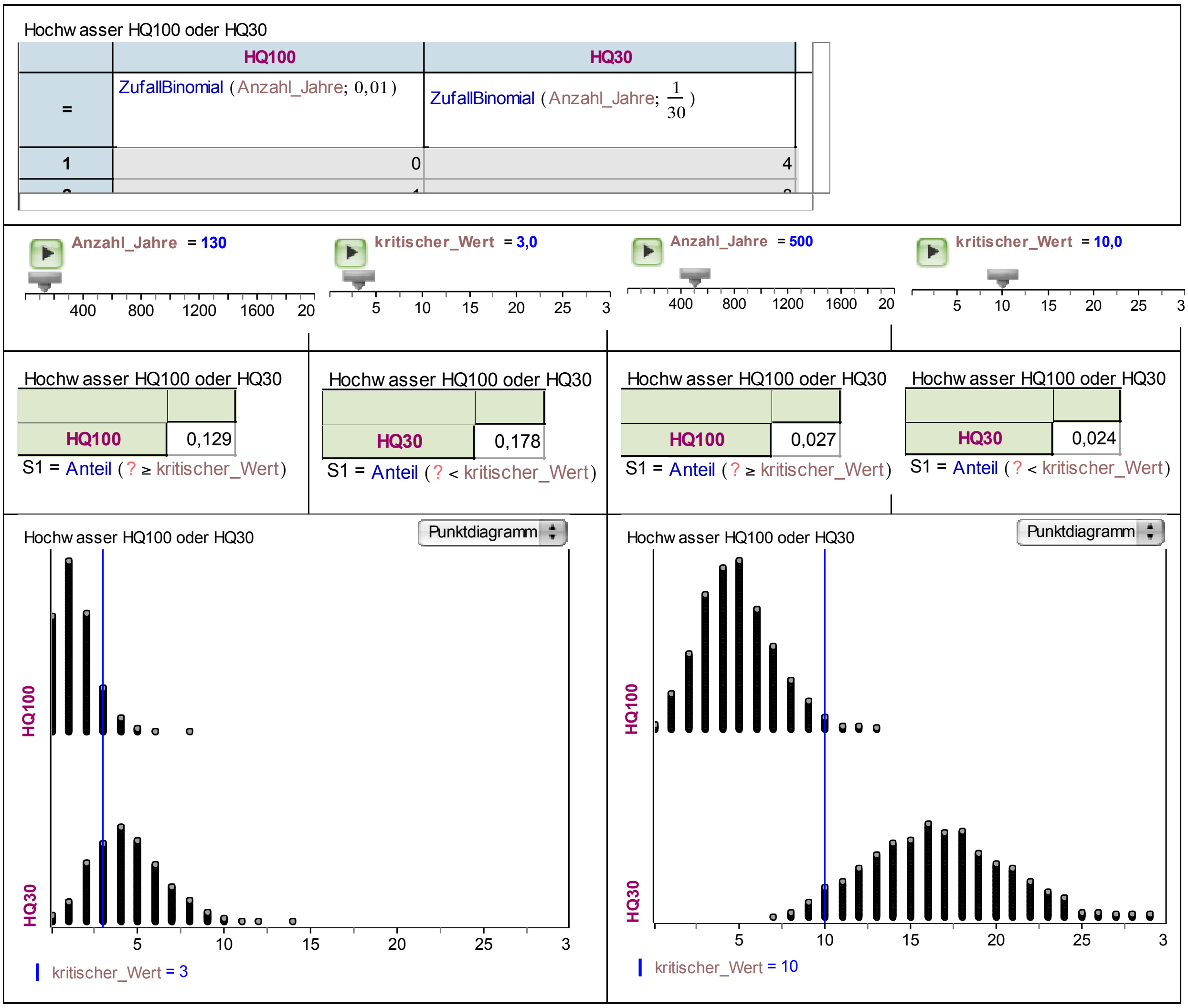


Abb. 6.3: Simulation zur Veranschaulichung des Fehlers 1. und 2 Art und des Zusammenhang mit n

Dabei wird ein kritischer Wert neben den konkurrierenden Verteilungen festgelegt. Ist das Ergebnis eine Stichprobe, also die Anzahl der Hochwässer in den beobachteten Zeitraum n größer als jener kritischer Wert, wird H_0 verworfen und die Entscheidung fällt zugunsten H_1 aus. Ergibt die Stichprobe hingegen einen Wert, der kleiner ist als der kritische Wert, wird von einer Gültigkeit von H_0 ausgegangen. Bei Gleichheit wird festgelegt, dass der Stichprobenumfang erhöht wird. Es wird hier somit bereits mit einer Entscheidungsregel gearbeitet.

Um die Auswirkung des kritischen Wertes auf die Entscheidung zu verdeutlichen, kann dieser Wert mit Hilfe eines Schiebereglers verändert werden. Der Anteil der simulierten Werte, die zu einem Fehler erster bzw. zweiter Art führen, wird automatisch angezeigt (siehe

Abb. 6.3). Auf diese Weise wird der Zusammenhang zwischen Fehler 1. und 2. Art illustriert. Dabei zeigt sich, dass bei einem größeren kritischen Wert zwar der Anteil der Daten, die zu einem Fehler erster Art führen, kleiner wird, dafür vergrößert sich der Anteil jener Daten, die zu einem Fehler zweiter Art führen.

Ebenso kann die Auswirkung der *n* beobachteten Jahre auf die Entscheidungsfehler veranschaulicht werden. Dazu wird mit Hilfe eines Schiebereglers *n* verändert und die Auswirkung auf den Anteil der Daten, die zu einem Fehler führen, betrachtet.
Dabei ist zu erkennen, dass umso weniger Daten zu einer falschen Verwerfung führen, je größer das *n* ist. So wird bei einer Simulation ersichtlich, dass der Anteil der simulierten Daten, die zu einer Verwerfung der Nullhypothese H_o führen würden, obwohl diese stimmt (Fehler 1.Art), 12,9 Prozent beträgt, wenn $n = 130$ ist. Der Anteil der Daten, der zu H_o führen würde, obwohl H_1 gilt, beträgt 17,8 Prozent. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art und zweiter Art ist hier also sehr hoch. Beobachtet man hingegen die Anzahl der Hochwässer in einem Zeitraum von 500 Jahren und legt den kritischen Wert bei zehn fest, führen nur mehr 2,7% der Daten zu einem Fehler erster Art und 2,4% zu einem Fehler zweiter Art (siehe Abb. 6.3).
Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz liefert die „mathematische Erklärung“. Es wird dafür die relative Standardabweichung $\frac{\sigma}{n}$ betrachtet:

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \sigma_{\frac{x}{n}}{}^2 = \frac{\sigma_x{}^2}{n^2} = \frac{n \cdot p \cdot q}{n^2} = \frac{p \cdot q}{n}, \text{also } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}$$

Daraus ergibt sich, dass, wenn *n* viermal so groß ist, sich die relative Schwankung halbiert. Dieser Sachverhalt wurde bereits beim Smarties-Beispiel intuitiv wahrgenommen (vgl. 4.3.2). So war bei einer Packung der Unterschied zwischen den Anzahlen der einzelnen Farben noch sehr groß. Aus diesem Grund kommen sich die Verteilungen bei großen *n* „weniger in die Quere“.
Um diesen Sachverhalt weiter darzustellen, werden die beiden Verteilungen grafisch dargestellt. Auf Abbildung 6.4 links ist zu erkennen, dass sich beide Verteilungen B(130; 0,01) und B(130; $0{,}0\dot{3}$) noch „stark überkreuzen“. Vergleicht man diese Darstellung der Binomialverteilungen von 1000 beobachteten Jahre, wird ersichtlich, dass die Überschneidung der beiden Verteilungen in Relation kleiner wird (siehe Abb. 6.4).

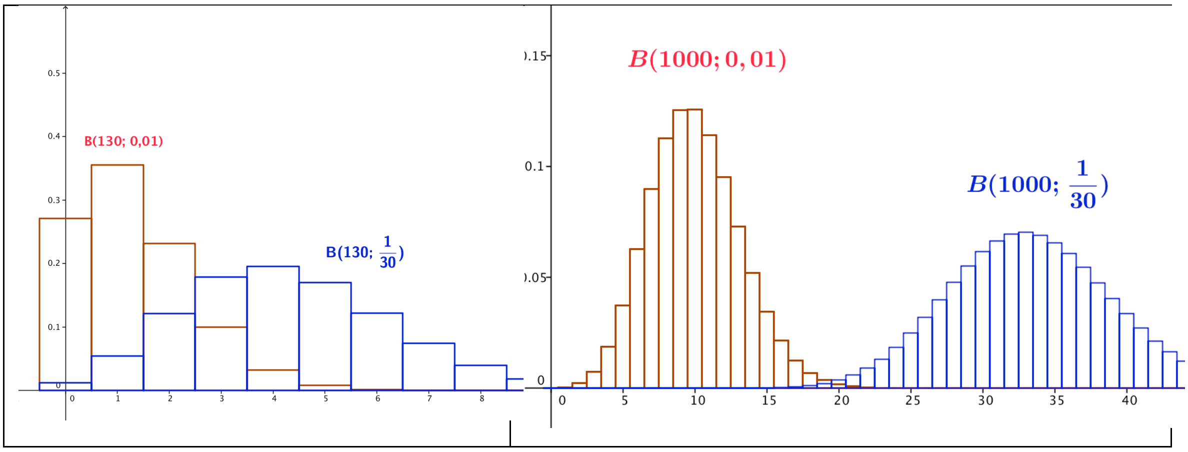


Abb. 6.4 links: Binomialverteilung für n = 130, rechts: Binomialverteilung für n = 1000

Was bedeutet das jetzt für eine mögliche Neuberechnung der Hochwasserkennwerte?

Drei oder mehr Hochwasser in den letzten 130 Jahren mit einer Durchlaufgeschwindigkeit von 11200 m^3/s sind wahrscheinlicher wenn man davon ausgeht, dass dieser Wert statistisch alle 30 Jahre erreicht bzw. überschritten wird. Für die Berechnung von neuen Kennwerten müssen jedoch mehr Jahre beobachtet werden.

Braucht es eine Neuberechnung von Hochwasserkenngrößen?

*Transkribiertes Interview aus der **ZIB 2** von 4.6.2013*
Armin Wolf interviewt den Chef der ZAMG **Michael Staudinger**

Wolf: *Jetzt haben wir innerhalb von elf Jahren das zweite Mal eine Flutkatastrophe die es statistisch nur alle 100 Jahre geben sollte. Ist das jetzt ein Ausreißer, wie man auch beim Würfeln hintereinander zwei Sechser würfelt obwohl das statistisch unwahrscheinlich ist oder müssen wir künftig öfters mit so extremen Hochwassern rechnen.*

Staudinger: Die Modelle zeigen, dass das in Zukunft öfters vorkommen wird. Man kann das nicht genau sagen, ob es alle 10 Jahre, alle 12 Jahre oder alle 30 Jahre vorkommen wird, aber man sieht einen deutlichen Trend, dass es bei den Hochwasserereignissen oder bei den Starkniederschlägen nach oben geht.
Weil Sie das Beispiel mit den Würfeln gebracht haben, das ist sehr gut. Man würfelt, hat ab und zu einen Sechser, dann entspricht es der Statistik. Wenn der Würfel ein bisschen gezinkt ist, kommen diese Sechser etwas häufiger vor und in so einer Situation sind wir. Hochwasser sind häufiger vorgekommen weil das Wettersystem gezinkt, das Wettersystem ist beeinflusst worden.

Wolf: In wie fern?

Staudinger: Durch alles was Klimaerwärmung betrifft, durch Emission die es gegeben hat und weiter geben wird. Das ändert die Strömungen, das ändert das generelle Temperaturniveau, das ändert das Vermögen Luftfeuchtigkeit aufzunehmen und den Niederschlag wieder abzugeben.

Wolf: *Aber ist das wirklich die Klimaerwärmung? Es gibt ja genügend Zyniker, die sagen wir haben Juni und wir haben 8 bis 10 Grad. Was hat das mit Klimaerwärmung zu tun?*

Staudinger: Klimaerwärmung ist ein globales Phänomen. Global wird es im Schnitt wärmer. In bestimmten Teilen feuchter. Es heißt auch, dass es aber natürlich bestimmte Regionen gibt, in denen es über Zeiträume kälter ist als im Mittel. Wie bei uns in den letzten Wochen.

Wolf: *Jetzt werden Hochwasser nach Eintrittswahrscheinlichkeiten eingeteilt. Muss man sich Klassifikationen überlegen, wenn ich Ihnen zu höre, man weiß nicht ob so was zukünftig alle 10, 12 oder 30 Jahre vorkommt. Das heißt die 100-jährigen Hochwasser sind keine 100-jährigen mehr sondern die neuen 30-jährigen.*

Staudinger: Das 100-jährig bezieht sich immer auf den Zeitraum der letzten 400-500 Jahre. Wenn es einen Trend beim Klima, beim Niederschlag, bei den Temperaturen gibt, wenn diese Kurve nach oben geht, muss neu berechnet werden und genau das machen die Modelle das man sagt: Ein Pegelstand von so und soviel kommt in Zukunft in der Häufigkeit vor. Da ist man dran das zu berechnen, die Modelle sind sehr gut. Sie sind sicher noch nicht perfekt, das man sagen kann, das wird genau in 10, in 50 oder in 100 Jahren passieren. Es ist sehr viel Forschungsarbeit zu leisten. Aber es wird ziemlich sicher keine 100 Jahre bis zum nächsten Hochwasser dauern. Ich glaube nicht, das wird deutlich kürzer.

1. **Fasse** das Interview **zusammen**! Welche **Konsequenzen** müssen laut Staudinger gezogen werden? Was **bedeutet** das für **Statistik**? Wozu braucht es überhaupt Kennwerte wie 30-jähriges, bzw. 100-jähriges Hochwasser?
2. **Simuliert** mit Hilfe von Fathom Daten! Wie sehen die **Datenreihen** für ein **100-jähriges** Hochwasser, wie für ein **30-jähriges** Hochwasser aus? **Wie oft** kommen Hochwasser bei der Simulation vor? Welche **Schlüsse** könnt ihr ziehen?
3. **Schätzt** wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass es in 130 Jahren drei oder mehr Jahrhunderthochwasser gibt. **Berechnet** die Wahrscheinlichkeiten, von drei oder mehr Hochwässern **unter der Bedingung der Nullhypothese** sowie unter der **Bedingung der Alternativhypothese**! Welche **Konsequenzen** ergeben sich?

6.2 Sind Smarties wirklich gleichverteilt?

Die Smarties-Aufgabe, die uns bereits zur Einführung in das grafische Darstellen von Daten diente (siehe 4.3.2), wird nun erneut aufgegriffen. So wurde die beim grafischen Darstellen prognostizierte Gleichverteilung von Nestlé bestätigt (siehe Arbeitsblatt 22). Es soll nun festgelegt werden, wie viele Smarties der einzelnen Farben in einer Packung sein müssen, damit der Behauptung von Nestlé Glauben geschenkt werden kann.

Dafür wird die Klasse in Gruppen eingeteilt, wobei jede Gruppe eine Farbe untersucht. In diesem Fall werden die blauen Smarties betrachtet. Da es in einer Smarties Packung acht verschiedene Farben gibt, geht man bei einer Gleichverteilung der Farben davon aus, dass beim Abfüllen der Smarties eine blaue Schokolinse mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{8}$ in der Packung landet. Dieser Sachverhalt wird als Nullhypothese definiert. Die Zufallsvariable *X* wird als Anzahl der blauen Smarties in einer Packung festgelegt.

$Ho\ldots p_{blau} = \frac{1}{8}$

Als Alternativhypothese wird die Verneinung der Nullhypothese festgelegt:

$H_1\ldots\ p_{blau} \neq \frac{1}{8}$

Beim Hochwasserbeispiel wurde gezeigt, dass die relative Schwankung bei kleinen Stichproben noch sehr groß ist. Das konnte wie bereits erwähnt auch bei der grafischen Erhebung von Smartiesanzahlen direkt erfahren werden. Aus diesem Grund wird nun die Höchst- bzw. Mindestanzahl von blauen Smarties für eine Großpackung von 533 Smarties (= 13 Packungen zu je ca. 41 Smarties) untersucht. Somit ist *n* hier 533.

Es soll nun eine Entscheidungsregel aufgestellt werden, in welchem Bereich die Anzahl der blauen Smarties liegen muss, um H_0 aufrecht zu erhalten: „Es gibt Situationen, in denen man aufgrund des durchgeführten Tests eine Entscheidung treffen muss, z. B. ob ein bestimmtes Medikament verboten wird, ob ein Wetteinsatz ausgezahlt wird oder ob ein Preisnachlass gewährt wird. In diesen Fällen wird vor dem Test festgelegt, ab welchem P-Wert man die Hypothese verwerfen möchte. Diese Grenze nennt man das Signifikanzniveau α des Tests." (Meyfarth 2006, S.92)

Schätzen

Bevor die Entscheidungsregel rechnerisch ermittelt wird, sollen die Schülerinnen und Schüler schätzen, in welchem Intervall die Anzahl der blauen Smarties liegen kann, damit ihres Erachtens (noch) von einer Gleichverteilung gesprochen werden kann. Auf diese Weise soll erneut ein Spannungsbogen erzeugt werden von der eigenen Erwartung über der anschließenden anschaulichen Darstellung von (simulierten) Daten bis hin zur tatsächlichen Berechnung.

Dabei können wieder eine Vielzahl an Argumentationen auftreten, die im Plenum besprochen werden sollen:

- So kann rein intuitiv argumentiert werden: „Damit ich Nestlé glauben schenke, müssen in einer Großpackung zwischen 60 und 70 blaue Smarties sein."
- Eine Möglichkeit wäre, mit Erwartungswert und Standardabweichung zu begründen: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$. Die Anzahl der blauen Smarties müsste so zwischen 58,99 und 74,26 liegen ($\mu = n \cdot p = 533 \cdot \frac{1}{8} = 66{,}625; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \approx 7{,}64$).

Zudem soll die Größe des Verwerfungsbereichs thematisiert werden: Was bedeutet ein kleines bzw. großes Intervall? Immerhin wäre eine Möglichkeit das Intervall zwischen 0 und 533 Smarties festzulegen Es ist jedoch offensichtlich, dass bei diesem Intervall auch jede andere Farbverteilung möglich wäre.

Wird das Intervall sehr klein gewählt, der Verwerfungsbereich also groß, steigt hingegen die Wahrscheinlichkeit, dass fälschlicherweise von der Nullhypothese abgesehen wird, obwohl diese gilt. Dieser Sachverhalt soll durch das Simulieren von Daten weiter veranschaulicht werden.

Simulieren

Wie in 6.1 sollen die Schülerinnen und Schüler Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe von simulierten Daten und Schiebereglern kennen und deuten lernen. Für den Unterrichtsvorschlag wird eine Fathomoberfläche vorbereitet. Der Anteil der Daten, die links von „mindestens" bzw. rechts von „höchstens" liegen, sowie die Summe der beiden werden automatisch angezeigt und sollen von den Schülerinnen und Schülern interpretiert werden (siehe Abb. 6.5). Dabei wird immer von der Gültigkeit von H_0 ausgegangen.

Auf diese Weise werden wesentliche Eigenschaften der Hypothesentests direkt ersichtlich. Bei einer Gleichverteilung ist mit 66,625 ≈ 67 blauen Smarties zu rechnen. Aufgrund der Variabilität von Daten werden die simulierten Packungen jedoch weniger bzw. mehr blaue

Smarties enthalten. Anhand der Abb. 6.5 ist zu erkennen, dass trotz Gleichverteilung einige wenige Stichproben sehr viel weniger blaue bzw. sehr viel mehr blaue Smarties enthalten, als erwartet.

Zudem ist mit Hilfe der Veränderungen der Grenzen zu erkennen, dass, je nachdem wie groß der Verwerfungsbereich gewählt wird, mehr oder weniger Stichprobenergebnisse außerhalb des Intervalls liegen. Unter der Voraussetzung dass die Nullhypothese gilt, führen diese Stichprobenergebnisse zu einer fälschlichen Verwerfung der Nullhypothese $p = \frac{1}{8}$.

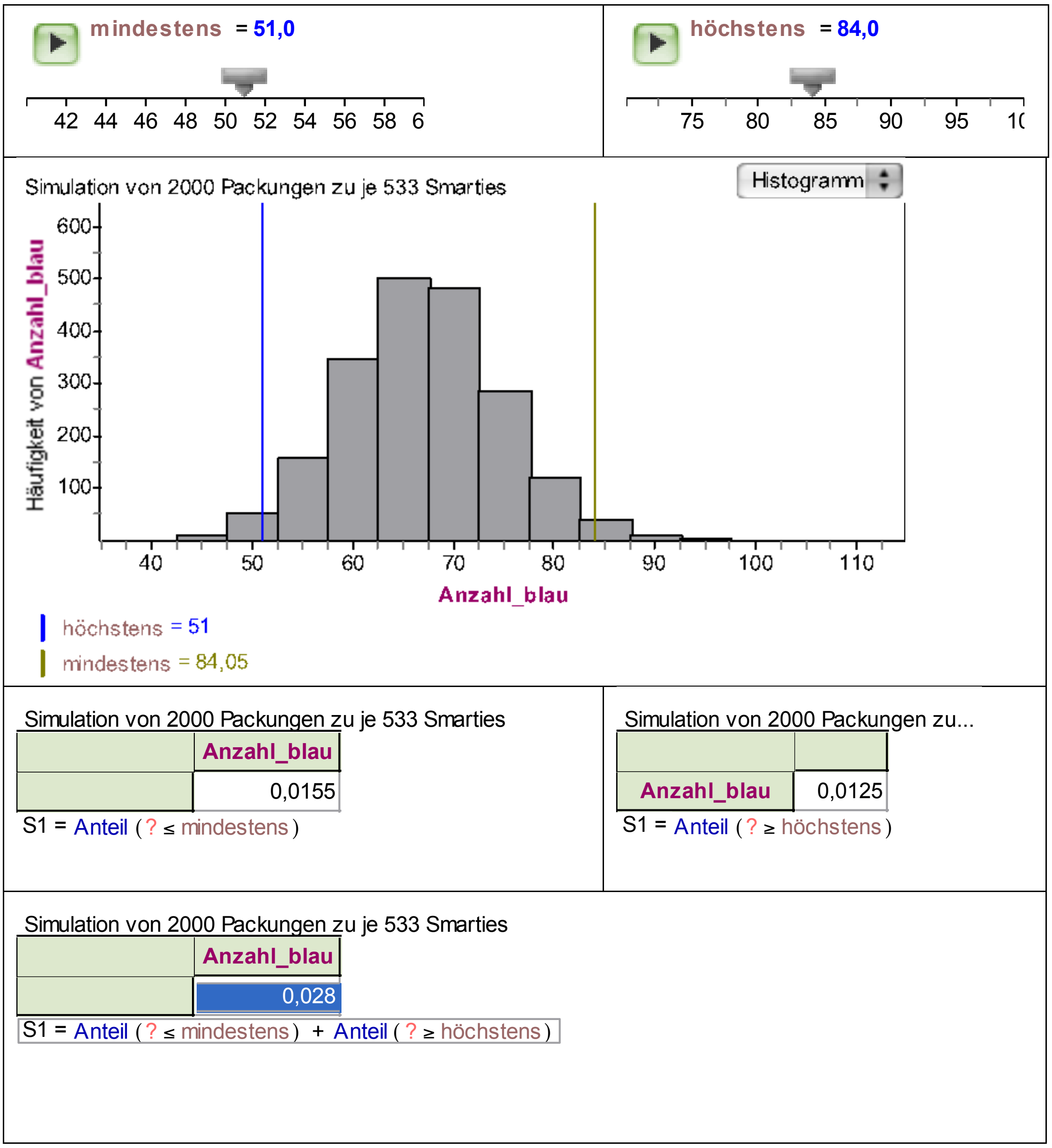


Abb. 6.5: Simulation von Daten zur Veranschaulichung der Intervallgrenzen

Berechnen

Die Simulation hat bereits wesentliche Vorarbeit für das Festlegen der Entscheidungsregel geliefert. Bei gleichverteilter Farbverteilung ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung sehr viel weniger bzw. sehr viel mehr blaue Smarties enthalten sind als die 67 erwarteten, gering.

Es wird nun im Vorhinein festgelegt, wie groß bei einer Gültigkeit von $p = \frac{1}{8}$ die Wahrscheinlichkeit α sein soll, dass Stichprobenergebnisse eintreten, die zu einer fälschlichen Verwerfung der Nullhypothese führen. „Wir legen einen Bereich ‚zu großer' und einen Bereich ‚zu kleiner' Werte fest, indem wir fordern, dass die Wahrscheinlichkeit dafür," dass *X* bei der Gültigkeit der Nullhypothese *p* = 1/8 „Werte aus diesem Bereich, annimmt, insgesamt eine kritische Grenze α nicht überschreitet. Damit legen wir die (Irrtums-)Wahrscheinlichkeit, die wir beim ersten Vorgehen im Nachhinein berechnet haben, von vorneherein selber fest." (Büchter & Henn 2005, S.431)

Wie soll nun α gewählt werden? „Je nachdem, wie schwerwiegend ein fälschliches Verwerfen der Ausgangshypothese ist, wird man α eher sehr klein oder auch etwas größer wählen" (Büchter & Henn 2005, S.431). Da ein Fehler bei den Smarties keine ernstzunehmenden Folgen hat, kann α z. B. als 0,1 festgelegt werden. Aus der Simulation ist bereits bekannt, je größer α ist, desto mehr Fälle führen zu einer fälschlichen Verwerfung der Nullhypothese. Auf lange Sicht ist zu erwarten, dass bei einer Gleichverteilung 10 % der Stichprobenergebnisse zu einer fälschlichen Verwerfung der Gleichverteilung führen werden.

Es soll nun das entsprechende Intervall berechnet werden. Dabei soll ein möglichst großer Wert *a* bzw. möglichst kleiner Wert *b* ermittelt werden, für welche gilt: $\mathrm{P}\left(a < X < b \middle| p = \frac{1}{8}\right) = 0{,}9$ bzw. $\mathrm{P}\left(X \le a \text{ oder } X \ge b \middle| p = \frac{1}{8}\right) = 0{,}1$.

„Da man gleichermaßen ‚zu große' und ‚zu kleine' Werte im Auge hat, *kann* man diesen *willkürlich festgelegt* Wert (…) gleichmäßig auf beiden Seiten der Verteilung aufteilen." (Büchter & Henn 2004, S.432)

Mit Hilfe des Computers werden nun die Grenze *a* und *b* folgendermaßen ermittelt:

$$\mathrm{P}\left(X \le a \middle| p = \tfrac{1}{8}\right) = \sum_{i=0}^{a} \binom{533}{i} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{i} \left(\frac{7}{8}\right)^{533-i} \le 0{,}05 \Rightarrow a = 53$$

$$P\left(X \geq b \middle| p = \tfrac{1}{8}\right) = \sum_{i=b}^{533} \binom{533}{i} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{i} \left(\frac{7}{8}\right)^{533-i} \leq 0{,}05 \Rightarrow b = 80$$

Um der Aussage von Nestlé glauben zu können, müssen also mehr als 53 und weniger als 80 blaue in einer Packung sein.

Für ein besseres Verständnis wird das Vorgehen grafisch illustriert (siehe Abb. 6.6).

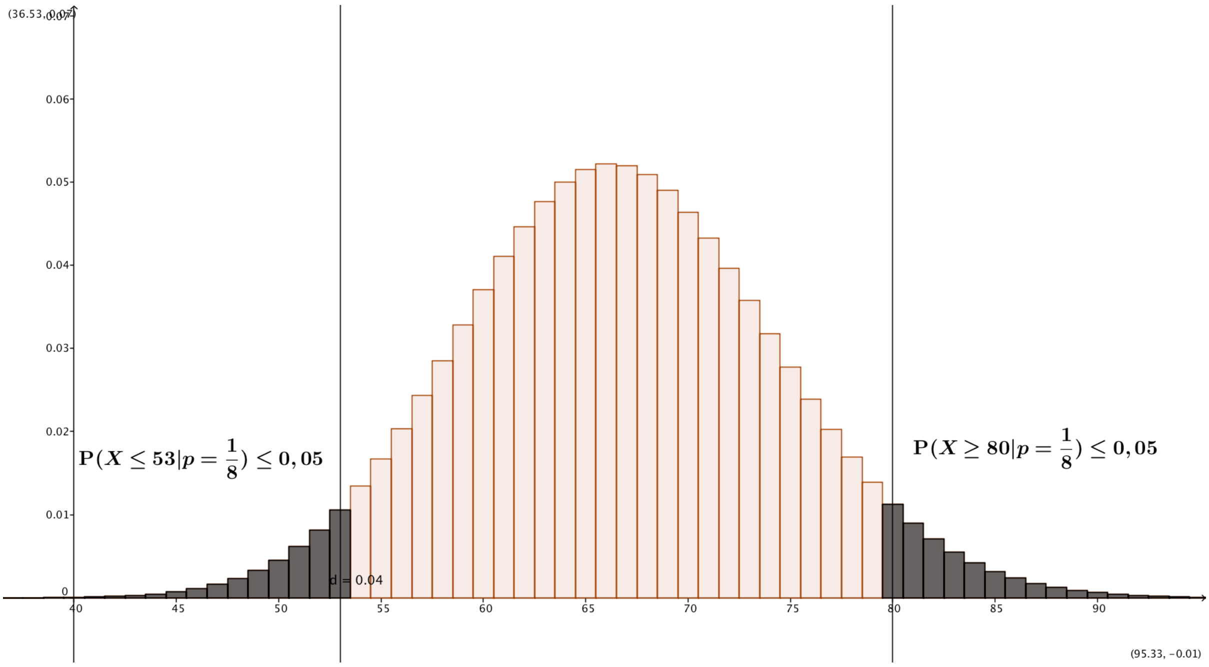


Abb 6.6: Veranschaulichung des Fehlers erster Art

Die Grenzen 53 und 80 trennen die Bereiche „verwerfen“ bzw. „nicht verwerfen“. Die schwarz abgebildeten Balken in Abb. 6.6 visualisieren die summierte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses, das außerhalb des Annahmebereichs liegt.
Nachdem nun die kritischen Werte angegeben worden sind, wird nun eine Smartiespackung geöffnet. Die untersuchte Packung enthält 76 blaue Smarties. Man geht auf Grund dieses Stichprobenergebnisses davon aus, dass die Nullhypothese gilt.

Fehler 1. und 2. Art

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art („fälschlicherweise verwerfen von H_0“) wurde bereits vor der Ermittlung der Intervallgrenzen bestimmt und beträgt 10%.
Die Wahrscheinlichkeit für den 2. Fehler kann in diesem Fall nicht allgemein bestimmt werden, da die Alternativhypothese mit p ≠ 1/8 nicht weiter festgelegt ist.

Es können hier jedoch verschiedene Werte als Alternativhypothese betrachtet werden, um so weitere Zusammenhänge zu illustrieren. In diesem Fall wird als Alternativhypothese eine Abfüllung $p = \frac{1}{6}$ dargestellt. Hintergrund könnte die Annahme sein, dass blau eine beliebte Farbe ist und deswegen häufiger vorkommt als z. B. braun oder rosa.

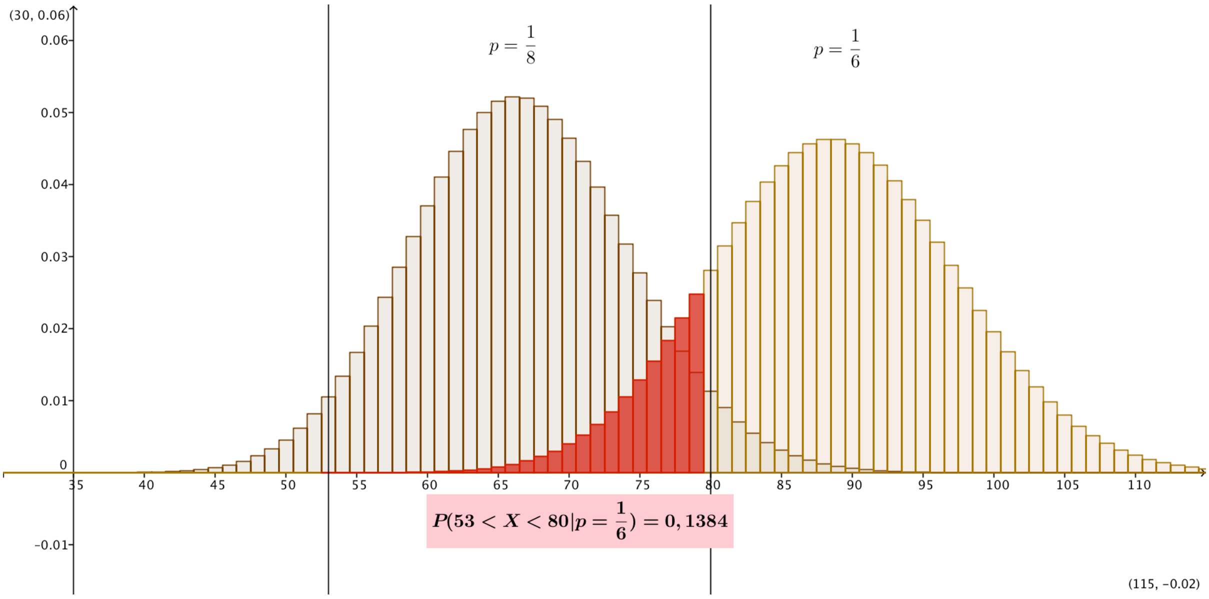


Abb. 6.7: Veranschaulichung des Fehlers zweiter Art bei einer Alternativhypothese von $p = \frac{1}{6}$

Die rot markierten Balken in Abb. 6.7 repräsentieren die summierte Wahrscheinlichkeit für „nicht verwerfen“ der Nullhypothese, obwohl die Alternativhypothese $p = \frac{1}{6}$ gilt.

Laut Büchter und Henn (2005, S.436) können mit Hilfe dieser Darstellung zwei Dinge hervorgehoben werden:

1. „Erstens erkennt man, wie die beiden möglichen Fehler für ‚verwerfen’ und nicht ‚nicht verwerfen’ zusammenhängen.“ Das wurde bereits in der Hochwasser-Aufgabe veranschaulicht.
2. „Zweitens kann man anhand der Abbildung erkennen, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art größer wird, je näher die Alternativhypothese an der Ausgangshypothese liegt.“

Dieser Sachverhalt kann durch die Analyse verschiedener Alternativhypothesen weiter verdeutlicht werden (siehe Tab. 6.3). Eine andere Möglichkeit wäre, den Zusammenhang mit Hilfe von Schiebereglern zu untersuchen.

p für H_1	$P(54 \leq X \leq 79) = \sum_{i=54}^{79} \binom{533}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{533-i}$
0,1	0,4806
$\frac{1}{9}$	0,7793
0,12	0,8994
$\frac{1}{7}$	0,6638
$\frac{1}{6}$	0,1384
0,2	0,0012

Tab. 6.3: Fehler 2. Art bei unterschiedlichen Alternativhypothesen

Anhand von Tab. 6.4 ist zu erkennen, dass, je näher die Alternativhypothese an der Nullhypothese liegt, umso größer wird der bedingte Fehler H_0 „nicht verwerfen“ (vgl. Büchter & Henn 2005, S.437).

Arbeitsblatt 22

Sind Smarties wirklich gleichverteilt?

Sehr geehrte Frau Kreft,

wir danken für Ihre Anfrage – welche uns aus Deutschland zur Beantwortung weiter geleitet wurde – und freuen uns über Ihr Interesse an unseren Produkten.

Laut Auskunft unseres Herstellerwerkes produzieren wir NESTLÉ Smarties Mini für jede der acht Farben die gleiche Menge.
Was wir aber nicht garantieren können ist jedoch, dass auch die SMARTIES in den Packungen zu gleichen Anteilen verpackt sind.

Wir hoffen Ihnen mit dieser Auskunft weiter geholfen zu haben und verbleiben

Mit freundlichen Grüßen
NESTLÉ KONSUMENTEN SERVICE
Rosita Ott

1. **Schätzung**
   Gib eine Schätzung ab: Wie viele blaue Smarties müssen deiner Meinung nach in einer Smarties Packung sein, damit du der Aussage von Nestlé Glauben schenkst?

   Ich glaube an die Behauptung von Nesté, wenn in einer Großpackung von 533 Smarties zwischen __ und ___ blaue Smarties sind.

2. **Simulation**
   Arbeite mit der Fathom-Oberfläche (siehe Abb. 6.5). Dabei wurden die Anzahl blauer Smarties von 2000 Packungen simuliert wenn ihr Anteil $\frac{1}{8}$ beträgt. Mit dem Schieberegler kannst du dabei die Intervallgrenzen verschieben. Dabei wird automatisch der Anteil der Daten, der außerhalb dieser Intervallgrenzen liegt, berechnet.

   i) Interpretiere! Was bedeuten die Daten, die links von „höchstens“ bzw. rechts von „mindestens“ liegen, für die Entscheidung?

   ii) Versuche, mit Hilfe des Schiebereglers Gesetzmäßigkeiten festzustellen:
   z. B.: Je größer das Intervall, umso ___________________________________.

   iii) Untersuche mit Hilfe der Schieberegler deine oben angegebenen Intervallgrenzen und interpretiere dabei die aus der Darstellung sich ergebende Werte!

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Diplomarbeit hat den datenorientierten Zugang im Stochastikunterricht zum Gegenstand. Das Ziel ist, Anreize für das Arbeiten mit Daten zu geben und zu zeigen, wie der datenorientierte Zugang dem Stochastikunterricht zu einem realitätsnahen und authentischen Kontext verhelfen kann.
Zu diesem Zweck werden Unterrichtsvorschläge in Form von Arbeitsblättern entwickelt und gestaltet. Diese beziehen sich auf den österreichischen Lehrplan und erstrecken sich über das gesamte Stochastikcurriculum der Sekundarstufe I und II, um zu einer nachhaltigen Umsetzung im Unterricht beizutragen.
Bei den Aufgaben der konzipierten Arbeitsblätter werden ausgehend von Fragestellungen Daten gesammelt, die mit Hilfe von verschiedenen statistischen Methoden analysiert werden. Die untersuchten Problemstellungen stammen dabei aus verschiedenen Bereichen. So wird unter anderem die Computer-Nutzung, das Telefonier-Verhalten oder der Zusammenhang von Körpergröße und Bauchnabelhöhe untersucht. Es handelt sich um Themen, die in einem direkten Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler angenommen werden können und auf den ersten Blick nicht unbedingt mit dem Mathematikunterricht in Verbindung gebracht werden. In diesem Punkt liegt ein wesentlicher Reiz des neuen Zugangs. Die Mathematik wird als Instrument verstanden, um unsere Umwelt zu strukturieren und Aussagen über sie zu machen.
Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in dieser Arbeit jedoch auf die Glückspielaufgaben zurückgegriffen, die wenig Relevanz für die Schülerinnen und Schüler haben. Hier wird zwar ebenfalls mit Daten gearbeitet, indem mit verschiedenen Würfeln gewürfelt wird. Hierbei geht es aber vor allem um die Veranschaulichung des „Zufalls" und des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Um die Relevanz von Zufall und Wahrscheinlichkeit zu demonstrieren, muss jedoch auch im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermehrt mit alltagsnahen Bereichen gearbeitet werden.

Die in dieser Diplomarbeit entworfenen Aufgabenstellungen stellen exemplarische Konzeptionsversuche eines datenorientierten Zugangs dar, welcher den Mathematikunterricht maßgeblich verändern kann. Es steht nicht mehr wie sonst üblich das Erlernen von Formeln und deren Anwendung im Vordergrund, sondern die direkte Anwendung statistischer Methoden. Bei der Formulierung der Arbeitsaufträge wird deutlich, dass das selbstständige Arbeiten bei der Analyse von Daten zentral ist. Wesentliche Eigenschaften von Daten müssen entdeckt werden. Dazu besteht ein erster Schritt in der Aufbereitung von Daten, wobei es dafür verschiedene Methoden gibt, die nicht richtig oder falsch, sondern sich für verschiedene Analysen mehr oder weniger gut geeignet sind. Zudem müssen Ergebnisse nicht nur berechnet, sondern auch interpretiert werden, um wesentliche Aussagen über die Daten zu treffen. Frontalunterricht eignet sich im Bereich der Datenanalyse daher weniger, vielmehr ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler die verschieden Aufgabenstellungen selbstständig bearbeiten.

Der Computer spielt eine bedeutende Rolle in der Datenanalyse. Nur mit seiner Hilfe kann der Fokus von der operativen Berechnung zur Interpretation und Argumentation gelenkt werden, da besonders große Datensätze händisch nur mit sehr viel Zeitaufwand bearbeitet werden könnten.

Diese Aspekte zeigen, dass für eine Realisierung des datenorientierten Zugangs entsprechende Rahmenbedingungen geschaffen werden müssen, denn nur wenige Schulen verfügen über die Ressourcen für einen regelmäßigen Unterricht mit dem Computer. Zudem hemmt die strenge 50-Minuten Taktung der Unterrichtsstunden häufig eine aufwändige selbstständige Bearbeitung von Daten.

Ausblickend kann außerdem festgehalten werden, dass für eine Umsetzung des datenorientierten Zugangs Maßnahmen in der LehrerInnenbildung und -fortbildung erforderlich sind. Nur wenn angehende Lehrerinnen und Lehrer Fertigkeiten vermittelt bekommen, wie mit Daten gearbeitet werden, kann eine Umsetzung ins Auge gefasst werden. Darüber hinaus bedarf es einer Überarbeitung der Schulbücher. Es finden sich darin zwar bereits Ansätze zur Datenanalyse, trotzdem stehen dabei noch großteils die einzelnen statistischen Verfahren und ihre algorithmische Abarbeitung im Mittelpunkt.

Im Zuge eines generellen Umdenkens kann der datenorientierte Zugang Einzug in den österreichischen Mathematikunterricht halten und so dazu beitragen, diesen attraktiver zu gestalten und den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen im Umgang mit Daten zu vermitteln.

Arbeitsblattverzeichnis

Literaturverzeichnis

Ben-Zvi, D.; Garfield, J. (2004): Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: Goals, Definitions and Challenges. In: Ben-Zwi, D.; Garfield, J. (Hrsg.): *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 3-17.

Biehler, R. (1994): Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes - Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? In: Garfield, J. (Hrsg.), *Research Papers from ICOTS 4*, Online: http://lama.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/People/biehler/Homepage/pubs/BiehlerIcots19941.pdf (Zugriff: 1.10.2013)

Biehler, R. (1997): Software for learning and for doing statistics. In: *International Statistical Review,* 65 (2), S.167-189. Online: http://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Biehler.pdf (Zugriff: 3.12.2013)

Biehler, R. (Hrsg.) (1999): Daten und Modelle. *mathematik lehren* 97.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2011): *Daten und Zufall mit Fathom – Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung*. Braunschweig: Schroedel.

Biehler, R.; Hartung, R. (2010): Die Leitidee Daten und Zufall. In: Blum, W.; Drüke-Noe, C.; Hartung, R.; Köller, O. (Hrsg.): *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* 4. Auflage. Berlin: Cornelsen-Scriptor, S. 51-69.

Biehler, R.; Maxara, C. (2007): Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. In: *Der Mathematikunterricht* 53(3), S. 45-61.

Bruner, J.S. (1966): *Towards a theory of instruction*. Cambridge: The Belknap Press.

Bruner, J.S. (1970): *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin-Verlag.

Büchter, A.; Henn, H. (2005): *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Heidelberg: Springer.

Chick, H. (2004a): *Representing association: children manipulating data sets*, Vortrag ICME-10, Dänemark. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/.../11/Chick.doc (Zugriff: 7.8. 2013)

Chick, H. (2004b): Tools of transnumeration: Early stages in the art of data representation. In: Putt, I. u. a., *MERGA 27: Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. S. 167-174. Online: http://www.merga.net.au/documents/RP182004.pdf (Zugriff: 3.12.2013)

Chick, H.; Watson, J. (2001): Data representation and interpretation by primary school students working in groups. In: *Mathematics Education Research Journal* (13), S. 91-111. Online: http://www.merga.net.au/documents/MERJ_13_2_Chick%26Watson.pdf (Zugriff: 4.12.2013)

Christmann, N. (1980). *Einführung in die Mathematik-Didaktik*. Paderborn: Schöningh.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 382–393.

Dorfmayr, A. (2009): MatheBuch 4. Klasse. Wien: Ed. Hölzel.

Eichler, A. (2009a): Zahlen aufräumen – Daten verstehen. In: *Praxis der Mathematik* 51(2), S. 1-7.

Eichler, A. (2009b): „April, April, der macht was er will“? Wetterkapriolen als Beispiele der Variabilität statistischer Daten. In: *Praxis der Mathematik* 51(2), S. 10-13.

Eichler, A.; Förster, F. (2008): Ein Märchenspiel – Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel. In: A. Eichler & F. Förster (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Band 12. Hildesheim: Franzbecker, S. 107-140.

Eichler, A.; Vogel, M. (2009): *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eichler, A.; Vogel, M. (2010): Datenerhebung – die Unbekannte in der Datenanalyse. In: *Stochastik in der Schule* 30 (2), S. 6-13.

Engel, J. (1999): Computer und Erziehung zur Datenkompetenz. In: Kadunz, G.; Ossimitz, G.; Peschek, W.; Schneider, E.; Winkelmann, B. (Hrsg.): *Mathematische Bildung und neue Technologien*, Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt 28.9. - 2.10.1998. Stuttgart-Leipzig: Teubner, S. 77-84.

Engel, J. (2001): Die NCTM Standards zur Stochastik und das Quantitative Literacy Programm. In: Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. (Hrsg.): *Anregungen zum Stochastikunterricht,* Bd. 1. Hildesheim: Franzbecker, S. 11-42.

Engel, J. (2007): Daten im Mathematikunterricht: Wozu? Welche? Woher? In: *Der Mathematikunterricht,* 53 (3), S. 12-22.

Engel, J.; Vogel, M. (2005): Von M&Ms und bevorzugten Farben: ein handlungsorientierter Unterrichtsvorschlag zur Leitidee Daten & Zufall in der Sekundarstufe I. In: *Stochastik in der Schule*, 25(2), S. 11-18.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Friel, S.; Curcio, F.; Bright, G. (2001): Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. In*: Journal for Research in Mathematics Education* (32) 2, S.124-158. Online:http://filebox.vt.edu/users/sboyce/Curriculum%20Summer%2003/Stat%20Articles/JRME2001-03-124a.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Götz, S.; Süss-Stepancik, E. (2012a): Welchen Mittelwert soll ich nehmen? Begriffsbildung im Stochastikunterricht. In: *mathematik lehren* 172, S. 20–24.

Götz, S.; Süss-Stepancik, E. (2012b): Daten, Daten, Daten – was sie uns verraten. Die Leitidee „Daten und Zufall" in der AHS Unter- und Oberstufe. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG*) 45, S. 29-42. Online: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2012%20Band%2045/VortragGoetzSuessStepancik.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Götz, S. (Hrsg.) u. a. (2010): *Mathematik 6*. Wien: öbv.

Götz, S. (Hrsg.) u. a. (2011): *Mathematik 7*. Wien: öbv.

Götz, S. (Hrsg.) u. a. (2013): *Mathematik 8*. Wien: öbv.

Hauer-Typpelt, P. (2010): Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 43, S.75-87. Online: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragHauerTyppelt.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Hanisch, G. u. a. (2011): *MatheFit4*. Wien:Verlag Besseres Buch.

Hoffmann, T. (2012). *eFATHOM: Entwicklung und Evaluation einer multimedialen Lernumgebung für einen selbstständigen Einstieg in die Werkzeugsoftware FATHOM*. Heidelberg: Springer.

Johnson, D. W.; Johnson, R. T. (1989): Cooperative learning in mathematics education. In: Trafton, P. R. (Hrsg.): *New directions for elementary school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 234-245.

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2003): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* München: Luchterhand. Online: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (Zugriff 11.12.2013)

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* München: Luchterhand. Online: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Klieme, E. u. a. (2007): *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*. Expertise. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Malle, G. (2004): Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen. In: *mathematik lehren 123.* S. 20-22.

Malle, G. u. a. (2010): *Mathematik verstehen 6*. Wien: öbv.

Mayer, R. E. (1997): Multimedia learning: Are we asking the right questions? In: *Educational Psychologist,* 32 (1), S. 1-19.

Meyfarth, T. (2006): Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom – Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien. In: *Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik*, Band 2. Online: http://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214683/4/KaDiSto2.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Meyfarth, T. (2008): Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe. In: *Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik*, Band 6. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006100414792/3/Kadisto6.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Monks, A. R. (1986): Gleichwahrscheinlich. In: *Stochastik in der Schule* 6 (2), S. 25-29.

Moore, D. (1990): Uncertainty. In: Steen, L. (Hrsg.): *On the shoulders of giants: New Approaches to numeracy*.Washington, DC: National Academy Press, S. 95-137. Online: http://faculty.wiu.edu/JR-Olsen/wiu/common-core/precursor-documents/PersonalUseOnlyOn%20the%20Shoulders%20of%20Giants.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Moore, D. (1997): New pedagogy and new content: The case of statistics. In: *International Statistical Review*, 65(2), S. 123-165.

NCTM, The National Coucil of Teachers of Mathematics (2001): Principles and standards for school mathematics (Übersetzung von Bescherer, C.; Engel, J.: Prinzipien und Standards für Schulmathematik: Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit). In: Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker. S. 11-42.

OECD (2006). *Haben Schüler das Rüstzeug für eine technologieintensive Welt? Erkenntnisse aus den PISA-Studien.* Online: http://www.oecd.org/pisa/38390257.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Peschek, W. (2000): Was kann man von einer „pflichtbewussten" Stichprobe erwarten? – Wahrscheinlichkeitsrechnung im Dienste angewandter Statistik. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG*) 32, S.151-160.

Online: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2000%20Band%2032/Peschek2000.pdf (Zugriff: 4.12.2013)

Pfannkuch, M. (2008): Training teachers to develop statistical thinking. In Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C.; Rossman, A. (Hrsg.): *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic4/T4P2_Pfannkuch.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Reichel, H-C. (Hrsg.) u. a. (2011): *Das ist Mathematik 1*. Wien: öbv.

Reichel, H-C. (Hrsg.) u. a. (2012): *Das ist Mathematik 4*. Wien: öbv.

Riemer, W. (1991): *Stochastische Probleme aus elementarer Sic*ht. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Riemer, W. (2009): Soundcheck: CD contra MP3. Ein Hörtest als Einstieg in die Stochastik. In: *mathematik lehren* 153, S. 20-23.

Riemer, W. & Seebach, G. (2013): Beschreibende Statistik: GeoGebras Kalkulationstabellen als Werkzeug und als Lernumgebung nutzen (ab 6. Klasse). In: *Praxis der Mathematik* (50), S.17-24. Online: http://riemer-koeln.de//mathematik/publikationen/beschreibende-statistik/deskriptive-statistik-geogebra.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Schulz, S. (1987): *Empirische Untersuchung zu den Kenntnissen und Vorstellungen von Schülern einer 8. Klasse über die Begriffe „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit".* Güstrow: Pädagogische Hochschule, Diplomarbeit.

Sill, H.-D. (1993): Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 2, S. 84-88.

Stachowiak, H. (1973): *Allgemeine Modelltheorie.* Wien: Springer.

Vogel, M. (2009): Experimentieren mit Papierfröschen. In: *Praxis der Mathematik* 51(2), S. 22-30.

Wagner, A. (2006): Entwicklung und Förderung von Datenkompetenz in den Klassen 1-6. In: *Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik,* Band 3. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214690/4/Kadisto3.pdf (Zugriff 4.12.2013)

Wassner, C.; Biehler, R.; Martignon, L. (2007): Das Konzept der natürlichen Häufigkeiten im Stochastikunterricht. In: *Der Mathematikunterricht* 53 (3), S. 33-44.

Wild, C.; Pfannkuch, M. (2004): Towards an Understanding of Statistical Thinking. In: Ben-Zwi, D. & Garfield, J. (Hrsg.): *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 17-46.

Wild, C.; Pfannkuch, M. (1999): Statistical Thinking in Empirical Enquiry. In: *International Statistical Review 67 (3*), S. 223-248.

Wolpers, H. (2002): Didaktik der Stochastik. In: Tietze, U.; Klika, M.; Wolpers, H. (Hrsg.): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd. 3*. Braunschweig: Vieweg.

Lebenslauf

Johanna Kreft

Zur Person

Geburtsdaten:	01.04.1987 in Ried im Innkreis (Oberösterreich)
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Kontakt:	johanna.kreft@gmx.at

Schulausbildung

1993 - 1997	Volksschule in Neuhofen im Innkreis
1997 - 2001	Hauptschule 1 im Ried im Innkreis
2001 - 2005	Bundesoberstufenrealgymnasium (BORG) in Ried im Innkreis
15.6.2005	Matura mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden

Studienverlauf

seit Okt 2006	Studium Mathematik und Philosophie & Psychologie (Lehramt) an der Universität Wien
Jan - Juni 2009	Erasmus: Auslandssemester an der Universität „Autònoma de Barcelona“

Berufserfahrung

Okt 2005 - Jan 2006	Praktikum in einem Kinderheim Amantaní in Cusco (Peru)
2006 - 2013	Tätigkeiten als Nachhilfelehrerin mobilenachhilfe.at, Lernquadrat und privat in Wien
2009 - 2011	Lageraushilfe American Apparel, Wien
2012 - 2014	Verkaufsassistentin Wood Wood, Wien

Weitere Qualifikationen

Deutsch – Muttersprache

Englisch –fließend in Wort und Schrift

Spanisch –fließend in Wort und Schrift

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: ☐ HoA ☒ HoD

MSC2000:

BK:

Schlagwortketten nach RSWK

Stochastikunterricht -

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

7.1.2014
Datum

Unterschrift