



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Differentialrechnung und Differentialgleichungen mit
Physikbezug im Mathematikunterricht“

Verfasser

Patrick Ritt

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, im Oktober 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Physik

Betreuer:

Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Ich möchte die Gelegenheit nutzen und mich an dieser Stelle bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Univ. Doz. Dr. Franz Embacher für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit danken. Er ist mir von der ersten Idee bis zur Ausformulierung und Fertigstellung dieser Diplomarbeit stets mit konstruktiven Ideen und Hilfestellungen zur Seite gestanden.

Besonders möchte ich mich auch bei Prof. OStR. Mag. Siegfried Nöbauer bedanken. Er war es, der meine Neugier an den Naturwissenschaften während meiner Schulzeit geweckt hat.

Ein ganz besonderer Dank gilt auch meinen Studienkollegen und Studienkolleginnen, mit denen ich die letzten Jahre an der Universität verbringen durfte. Diese Menschen sind es, die das Studium zu einem unvergesslichen Abschnitt meines Lebens gemacht haben und zu denen sich in den letzten Jahren eine tiefe Freundschaft entwickelt hat.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Familie und vor allem bei meinen Eltern bedanken. Sie haben mir meine Ausbildung und mein Studium ermöglicht. Sie waren immer für mich da, waren geduldig und verständnisvoll.

Vielen Dank!!

Inhaltsverzeichnis

1. Problemstellung	7
2. Lehrplanbezug	9
2.1 Mathematik.....	9
2.2 Physik	12
3. Didaktische Aspekte zur Differentialrechnung.....	15
3.1 Grunderfahrungen im Mathematikunterricht.....	15
3.2 Aspekte für einen erfolgreichen Verstehensprozess	17
3.3 Lerntheorien – aktive- und passive Positionen.....	19
3.4 Realitätsbezogener Mathematikunterricht	20
3.5 Kompetenzen durch Modellbilden.....	23
3.6 Fazit	23
4. Mathematisches Rüstzeug - Standardmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen und numerische Verfahren.....	25
4.1 Standardmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen	25
4.2 Beschreibung von Bewegungsgleichungen mit Hilfe von numerischen Verfahren ..	32
5. Grenzwertbegriff und Ableitung - Einführungsprojekte	35
5.1 Einführungsprojekt: Der Grenzwert - Glasröhrchenversuch.....	37
5.2 Die Momentangeschwindigkeit.....	41
5.3 Die Momentanbeschleunigung.....	46
6. Projekte für den Unterricht.....	52
6.0 Einführende Erklärungen und Begriffsdefinitionen	52
6.1 Lehr- und Lernziele.....	55
6.2 Ausarbeitung der Projekte.....	57
6.2.1 Die Vollbremsung eines Autos	57
6.2.2 Abkühlprozesse	62
6.2.3 Radioaktiver Zerfall.....	69
6.2.4 Der freie Fall ohne Luftreibung	74
6.2.5 Der freie Fall mit Luftreibung und der Stratosphärensprung.....	80
6.2.6 Zusammengesetzte Bewegung - Der schräge Wurf	89

6.2.7 Einschaltvorgang einer Spule (Induktivität) im Gleichstromkreis	98
6.2.8 Die Aufladung eines Kondensators	103
6.2.9 Raketenantrieb.....	110
6.2.10 Mathematisches Pendel	118
6.2.11 Das ungedämpfte Federpendel	126
6.2.12 Das Federpendel mit Dämpfung	133
7. Arbeitsblätter für den Unterricht	146
7.1 Die Vollbremsung eines Autos.....	146
7.2 Abkühlungsprozesse.....	149
7.3 Radioaktiver Zerfall	153
7.4 Der freie Fall ohne Luftreibung.....	155
7.5 Der freie Fall mit Luftreibung und der Stratosphärensprung	159
7.6 Zusammengesetzte Bewegung - Der schräge Wurf.....	163
7.7 Einschaltvorgang einer Spule (Induktivität im Gleichstromkreis).....	165
7.8 Die Aufladung eines Kondensators.....	168
7.9 Raketenantrieb	172
7.10 Mathematisches Pendel.....	176
7.11 Das ungedämpfte Federpendel.....	179
7.12 Das Federpendel mit Dämpfung.....	183
8. Ergebnisse der Testung von 2 Projekten.....	188
Quellenverzeichnis	195
Literatur.....	195
Online Quellen	197
Abbildungsnachweis	199
Anhang.....	200
1. Abstract	200
2. Lebenslauf.....	201
3. Hyperbelfunktionen.....	202
4. Areafunktionen.....	202

1. Problemstellung

Einer der größten Fundamentbausteine im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II ist das Gebiet der Differentialrechnung. Trotzdem hört man nur all zu oft von Nachhilfeschülerinnen und Nachhilfeschülern über die Differentialrechnung:

„Das ist doch das mit dem $f'(x)$, das gefällt mir, da hat man eine Tabelle und nach der berechnet man dann $f'(x)$.“, oder „Da berechnet man $f'(x)$ und setzt es Null, das ist dann das Minimum oder das Maximum, welchen Extremwert ich habe, sieht man dann durch $f''(x)$.“ - so oder so ähnlich. Oft stellt sich noch die Frage: „Was fange ich nun mit der Ableitung an?“¹

Von vielen Schülerinnen und Schülern, aber auch aus meiner eigenen Schulzeit, kenne ich dieses Problem, nicht wirklich zu wissen, welche Möglichkeiten sich durch das neu erlernte Wissen beziehungsweise die neu erlernten Fähigkeiten bieten. Im Falle der Differentialrechnung lernt man die Ableitungsregeln, setzt in vorgegebene Routinen ein, und schon kommt man zu einem Ergebnis, ohne zu wissen was tatsächlich dahinter steckt. Sehr beliebte Anwendungsgebiete der Differentialrechnung waren die Kurvendiskussion oder Extremwertaufgaben à la „die optimale Dose“, die seit Einführung der Standardisierten Reifeprüfung allmählich aus dem Mathematikunterricht verschwinden. Hinzu kommt noch eine Vielzahl weiterer Optimierungsaufgaben. Im weiteren Verlauf lernen die Schülerinnen und Schüler - vor allem in der BHS - Differentialgleichungen und elementare Lösungsmethoden kennen.

Genau hier möchte ich mit meiner Diplomarbeit ansetzen und das Potential dieser Themengebiete ausloten. Mit dem erlernten Werkzeug rund um Differentialrechnung und Differentialgleichungen lassen sich viele interessante und spannende Fragestellungen mathematisch behandeln. In dieser Diplomarbeit werden verschiedenste physikalische Themen mit Hilfe von Differentialrechnung und Differentialgleichungen mathematisch analysiert. Dies reicht von der Aufladung eines Kondensators bis hin zum Start einer Saturn V Rakete, mit der vor 45 Jahren die erste erfolgreiche Mondlandung absolviert wurde. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese und ähnliche Themen als Projekte einerseits für Lehrerinnen und Lehrer andererseits für Schülerinnen und Schüler vollständig aufbereitet. Die Projekte sind stets mit einem Input versehen, der einen Überblick über die Physik des gerade behandelten Kontextes gibt. Verschiedene Projekte enthalten unter anderem auch kurze Experimente, die im Rahmen dieser durchgeführt werden können. Sie sollen einen unmittelbaren Vergleich

¹ Auszug aus Gesprächen mit Schülerinnen und Schülern bei Nachhilfestunden.

zwischen experimentell gewonnenen Ergebnissen und mathematischen Berechnungen erlauben. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Projekte sind vor allem für die Durchführung in der BHS (mit dem Hauptaugenmerk auf die HTL) ausgelegt, können aber auch im AHS Bereich eingesetzt werden. Die Projektpalette erstreckt sich von kurzen Aufgabenstellungen für den Regelunterricht, die in einer Einheit gelöst werden können, bis hin zu aufwändigeren Projekten, die auch außerhalb des Unterrichts von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden können. Eine weitere Einsatzmöglichkeit ist die Bearbeitung dieser Projekte in Vertiefungsfächern oder freien Wahlfächern.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit erfolgte auch eine Durchführung zweier Projekte in einer Höheren Technischen Bundeslehranstalt (HTL) mit anschließender Evaluation.

Diese Arbeit ist der Anregung für neue Unterrichtselemente gewidmet, um den Mathematikunterricht möglichst lebendig und abwechslungsreich zu gestalten. Sie versucht, interessante alltagsweltliche Kontexte aus der Physik mit der Differentialrechnung im Mathematikunterricht zu verbinden und einen fächerübergreifenden Unterrichtsabschnitt zwischen Mathematik und Physik zu ermöglichen. Damit soll Schülerinnen und Schülern ein abwechslungsreicher Unterricht ermöglicht werden, in dem sie das Potential ihres erlernten Wissens und ihrer mathematischen Fähigkeiten ausnützen können.

Die Arbeit beginnt mit fachdidaktischen Überlegungen und der Einordnung der Projekte in die jeweiligen Lehrpläne. Im Anschluss wird das mathematische Rüstzeug festgelegt und die Projekte für den Unterricht sowie Unterrichtskonzepte vorgestellt. Den Abschluss macht die Auswertung der bereits zuvor erwähnten empirischen Untersuchung.

2. Lehrplanbezug

Im folgenden Abschnitt werden jene Kapitel aus den Lehrplänen aufgelistet, die im Rahmen dieser Diplomarbeit relevant sind. Diese Auflistungen sind ausgewählte Auszüge aus den jeweiligen Lehrplänen. Es werden zwei verschiedene Schultypen betrachtet, einerseits die AHS Oberstufe, in der die Differentialrechnung in der elften Schulstufe startet, andererseits die HTL als Vertreter der BHS. Stellvertretend werden Auszüge aus dem Lehrplan für Elektronik und Technische Informatik vorgestellt. Zusätzlich werden Auszüge aus den jeweiligen Physiklehrplänen gegeben, die den fächerübergreifenden Einsatz von Differentialrechnung und Differentialgleichung ermöglichen.

2.1 Mathematik

2.1.1 AHS Oberstufe

Gesamtwochenstundenanzahl:² 12

„Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.“³

7. Klasse:

„Differentialrechnung

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten

² Gemäß BMUKK: Änderung der Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen, 2003, BGBl. II 2003/283
URL: https://www.bmbf.gv.at/schulen/lehrdr/gesetze_verordnungen/VO_LP_AHS03_9431.pdf?4dzi3h [28.7.2014].

³ Zitat aus BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik, 2004, URL:
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [28.7.2014], S. 2.

(mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen

- *Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen*
- *Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen*
- *Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)*
- *Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen*
- *Lösen von Extremwertaufgaben*
- *Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit*
- *Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung“⁴*

8.Klasse:

„Integralrechnung

- *Ermitteln von Stammfunktionen*
- *Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von ‚sehr kleinen Produkten‘ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals*
- *Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*
- *Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln*
- *Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)*

Dynamische Prozesse

- *Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen*
- *Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen*
- *Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$ “⁴*

⁴ Auszug aus BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik, 2004, URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [28.7.2014], S. 5-6.

2.1.2 BHS⁵ - HTL für Elektronik und Technische Informatik

Gesamtwochenstundenanzahl:⁶ 15 (Angewandte Mathematik)

„Kompetenzbereich ‚Analysis‘:

Bildungs- und Lehraufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler

- können Funktionen in zwei Variablen geometrisch als Flächen im Raum interpretieren und an Hand von Beispielen veranschaulichen;
- können partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen;
- [...]
- können Anfangswertprobleme mit linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen und kennen im Besonderen die Lösungsfälle der linearen Schwingungsgleichung mit konstanten Koeffizienten;
- können Aufgaben des Fachgebietes durch Entwicklung von Funktionen in Potenz- und Fourierreihen bearbeiten, Integraltransformationen auf Aufgaben des Fachgebietes anwenden und für das Fachgebiet relevanten Systeme mit Hilfe von Differentialgleichungen modellieren.“⁷

„Lehrstoff:

III. Jahrgang:

Unendliche Folgen und Reihen:

Grenzwert, konvergente und divergente Folgen, rekursive Definition von Folgen; elementarer Reihenbegriff, Grenzwert von Funktionen, Stetigkeit, Unstetigkeitsstellen, Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen.

Differentialrechnung:

Ableitung, Ableitungsregeln, höhere Ableitungen, Konvexität; Extremwerte, Wendepunkte.

Integralrechnung:

⁵ Stellvertretend für die BHS wird der Lehrplan der HTL - Elektronik und Technische Informatik angeführt.

⁶ Gemäß BMUKK: Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Elektronik und Technische Informatik Anlage 1.2, 2011, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBL_II_Nr_300_2011_Anlage_1_2.pdf [28.07.2014].

⁷ Auszug aus BMUKK: Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Elektronik und Technische Informatik Anlage 1.2, 2011, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBL_II_Nr_300_2011_Anlage_1_2.pdf [28.07.2014], S. 4-5.

Stammfunktion und bestimmtes Integral, Grundintegrale; grundlegende und im Fachgebiet relevante Integrationsregeln; Numerische Integration. “⁸

„IV. und V. Jahrgang:

Funktionen mehrerer Variablen:

Darstellung von Funktionen von zwei Variablen; partielle Ableitungen; totales Differential, lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler.

Funktionenreihen:

Taylorpolynome, Potenzreihen, Konvergenzkriterien; Approximation von Funktionen durch trigonometrische Polynome, Fourierentwicklung.

Integraltransformationen:

Uneigentliche Integrale; Laplacetransformation; Fouriertransformation.

Lineare Differentialgleichungen:

Elementare Lösungsmethoden; lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; numerische Lösung von Anfangswertproblemen. “⁹

2.2 Physik

2.2.1 AHS Oberstufe

„5. und 6. Klasse:

Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen:

- [...]
- *Grundlagen der Elektrizitätslehre (einfacher Stromkreis, Spannung, Strom, elektrischer Widerstand, elektrische Energie und Umgang mit elektrischen Messgeräten) anwenden*

⁸Auszug aus BMUKK: Allgemeines Bildungsziel, Schulautonome Lehrplanbestimmungen, didaktische Grundsätze und gemeinsame Unterrichtsgegenstände an den Höheren Technischen und Gewerblichen (einschließlich Kunstgewerblichen) Lehranstalten, 2011, BGBl. II 2011/300, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBl_II_Nr_300_2011_Anlage_1.pdf [28.07.2014], S. 22.

⁹Auszug aus BMUKK: Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Elektronik und Technische Informatik Anlage 1.2, 2011, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBl_II_Nr_300_2011_Anlage_1_2.pdf [28.07.2014], S. 5.

- [...]
- *mit Hilfe der Bewegungslehre (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung: Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung) Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln*
- *an Hand von Grundeigenschaften mechanischer Wellen Verständnis für Vorgänge, beispielsweise aus Akustik oder Seismik, entwickeln und als Mittel für Energie- und Informationsübertragung verstehen*

7. und 8. Klasse:

Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen:

- [...]
- *mit Hilfe der Elektrodynamik Grundphänomene elektrischer und magnetischer Felder (Feldquellen, Induktionsprinzip, elektromagnetische Wellen, Licht, Polarisierung, Beugung) erklären können und ihre Bedeutung in einfachen technischen Anwendungen verstehen sowie ein sicherheitsbewusstes Handeln im Umgang mit elektrischen Anlagen entwickeln*
- *Einblicke in den Strahlungshaushalt der Erde gewinnen und Grundlagen der konventionellen und alternativen Energiebereitstellung erarbeiten*
- *Einsichten in kernphysikalische Grundlagen (Aufbau und Stabilität der Kerne, ionisierende Strahlung, Energiequelle der Sonne, medizinische und technische Anwendungen) gewinnen und die Problematik des Umgangs mit Quellen ionisierender Strahlung verstehen*
- [...] ¹⁰

2.2.2 BHS¹¹ - Elektronik und Technische Informatik

Unterrichtsfach Naturwissenschaften

„Kompetenzbereich ‚Physikalische Phänomene und Methoden‘:

Die Schülerinnen und Schüler können

- *physikalische Experimente planen, durchführen und protokollieren;*

¹⁰ Auszug aus BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Physik, 2004, URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf?4dzgm2 [10.03.2014], S. 3-4.

¹¹ Stellvertretend für die BHS wird der Lehrplan der HTL - Elektronik und Technische Informatik angeführt.

- *Zusammenhänge zwischen Messgrößen in Form von Tabellen, Diagrammen und Gleichungen darstellen;*
- *Hypothesen aufstellen und Modelle entwickeln und diese auf Plausibilität und Gültigkeit prüfen;*
- *naturwissenschaftliche Fragestellungen analysieren, Untersuchungsstrategien entwickeln und Lösungsansätze formulieren, mögliche Ergebnisse abschätzen und errechnen.*

Lehrstoff:**I. Jahrgang:**

Ausgewählte Phänomene der klassischen Physik (z.B. Reibung, Auftrieb, Brechung, Reflexion, thermische und elektrische Leitfähigkeit). Erhaltungssätze, insbesondere Energieerhaltung.

III. und IV. Jahrgang:

Phänomene und Methoden aus den folgenden Themenbereichen:

Bewegungsgleichungen; Schwingungs- und Wellenphänomene in Mechanik, Optik und Elektromagnetismus; Physikalische Felder (Gravitation, elektrische und magnetische Felder); Thermodynamik (z.B. Wärmetransport, Hauptsätze, Gaskinetik); Moderne Physik (Atom-, Kern- und Teilchenphysik, Quantenphysik, Relativitätstheorie, Astrophysik).¹²

¹² Auszug aus BMUKK: Allgemeines Bildungsziel, Schulautonome Lehrplanbestimmungen, didaktische Grundsätze und gemeinsame Unterrichtsgegenstände an den Höheren Technischen und Gewerblichen (einschließlich Kunstgewerblichen) Lehranstalten, 2011, BGBl. II 2011/300, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBl_II_Nr_300_2011_Anlage_1.pdf [15.09.2014], S. 25.

3. Didaktische Aspekte zur Differentialrechnung

Der Analysisunterricht in der Sekundarstufe II ist für Lehrerinnen und Lehrer stets ein Balanceakt zwischen strenger Theorie und einer anschaulichen Anwendung. Seit den siebziger Jahren geht der Trend wieder in Richtung Anwendungsorientierung im Analysisunterricht. Bereits im Jahre 1976 lautete das Thema des 1. Kärtner Symposiums *„Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundärstufe II“*.¹³

Der breitgefächerte Aufbau der Analysis, wie er im universitären Bereich zur Verfügung steht, kann nur in stark abgespeckter Form in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe übertragen werden. Um den inneren Verzweigungen der Analysis im Unterricht mehr Platz zu geben, wird daher die Anwendungsorientierung aber all zu oft verkürzt. Weiters verstärkt das klassische Aufgaben- und Prüfungssystem eine Kalkülorientierung im Mathematikunterricht. Diese drängt die echte Anwendungsorientierung noch weiter beiseite und ersetzt sie meist durch eingekleidete Aufgaben.¹⁴

Danckwerts und Vogel (2010) fassen das Problem folgendermaßen zusammen:

*„Der gängige Analysisunterricht hat die Tendenz, echte Anwendungen und heuristisches Arbeiten zugunsten der Analysis als entwickelte Theorie zu vernachlässigen.“*¹⁵

3.1 Grunderfahrungen im Mathematikunterricht

Dieses Spannungsfeld lässt nun die Frage nach dem Bildungsauftrag der Analysis im Mathematikunterricht aufkommen. Welche allgemeinbildenden Aspekte soll bzw. muss der Mathematikunterricht abdecken? Inwieweit sollen Anwendungen in den Unterricht eingebunden werden?

Katja Maaß und Hans-Wolfgang Henn fordern in einem Artikel zu *„Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht“* Anwendungen im Mathematikunterricht als Teil der Allgemeinbildung¹⁶:

„Ein verständiges Umgehen mit Anwendungen der Mathematik und mathematischen

¹³ Vgl. Blum (1996), S. 15.

¹⁴ Vgl. Danckwerts, Vogel (2006), S. 1-5.

¹⁵ Danckwerts, Vogel (2006), S. 5.

¹⁶ Vgl. Henn, Maaß (2003), S. 1.

Modellierungen muss Teil der Allgemeinbildung sein, die wir unseren Schülerinnen und Schülern ins Leben nach der Schule mitgeben[...]. Die Ergebnisse von TIMSS und PISA weisen aber darauf hin, dass der Mathematikunterricht insbesondere diese Kompetenz kaum vermittelt [...]“¹⁷

Heinrich Winter nennt in seinem Artikel „*Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*“ drei Grunderfahrungen, die der Mathematikunterricht dem Lernenden ermöglichen soll:

„(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.“¹⁸

Die erste Grunderfahrung spricht eine breite Palette von Anwendungen an, die mit den erlernten Mathematikfähigkeiten als Werkzeug gelöst werden können. In Bezug auf die Differentialrechnung wäre zum Beispiel die Berechnung der Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit zu nennen. Mit Differentialgleichungen lassen sich unzählige physikalische Vorgänge beschreiben, wie die noch folgenden Kapitel zeigen werden. Grunderfahrung 2 spricht die Theorie und den verzweigten Aufbau der Mathematik an. Heinrich Winter spricht mit (G2) „*die innere Welt der Mathematik*“¹⁹ an.²⁰ In Bezug auf das Kapitel der Differentialrechnung fallen hier Begriffe wie der Grenzwertbegriff, Differenzen- und Differentialquotient, die Definition der Ableitung sowie Regeln, Formeln, Gesetze und Beweise, die dieses Gebiet der Analysis als „*deduktiv geordnete Welt*“²¹ repräsentieren. Darunter fällt auch die kalkülhafte Verwendung verschiedener Rechenregeln (z.B. Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel). Die dritte Grunderfahrung geht über die Mathematik hinaus. Hier ist die Mathematik nur ein Werkzeug zur Lösung eines Problems bzw. zur Erreichung eines Ziels. Da hinein fallen zum Beispiel Probleme, die

¹⁷ Henn, Maaß (2003), S. 1.

¹⁸ Winter (2003), S. 7.

¹⁹ Winter (2003), S. 8.

²⁰ Vgl. Winter (2003), S. 8.

²¹ Winter (2003), S. 7.

trotz begrenzten Wissens durch geeignete Annahmen gelöst werden sollen.²²

Danckwerts und Vogel beschreiben eine Integration der drei Grunderfahrungen in den Analysisunterricht folgendermaßen:

„Die Forderung nach der expliziten Integration aller drei Grunderfahrungen bedeutet für den Analysisunterricht: Halte Ausschau nach solchen Problemen der ‚Welt‘, die mit Hilfe der analytischen Grundbegriffe modellierbar sind, sich mit elementarer analytischer Theorie lösen lassen und zugleich Analysis-spezifische heuristische Strategien herausfordern. Damit ist auch klar, wie wichtig eine Sicht der Analysis als Prozess ist (im Gegensatz zur Analysis als fertige und kanonisierte Theorie).“²³

3.2 Aspekte für einen erfolgreichen Verstehensprozess

Der erfolgreiche Verstehensprozess unterliegt einem komplexen Ablauf, der von verschiedensten Komponenten und Einflussfaktoren abhängig ist. Roth (2013) nennt folgende Aspekte, die für ein erfolgreiches Verstehen wichtig sind:²⁴

- Grundvorstellungen
- Fundamentale Ideen
- Grundwissen
- Grundfertigkeiten
- Grundkompetenzen

Im Lern- und Verstehensprozess ist es wichtig, diese Komponenten ausgewogen zusammenspielen zu lassen. Bedeutend ist dabei, dass die Schülerinnen und Schüler im geeigneten Maße gefordert werden, ohne von der Komplexität der Aufgabenstellungen über- oder gar unterfordert zu werden. Im folgenden Abschnitt werden nun die oben aufgelisteten Aspekte genauer betrachtet.

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen beschreiben intuitiv modellierte Auffassungen der Lernenden. Die Vorstellungen können einerseits positive Auswirkung auf das Verständnis mit sich bringen, sich andererseits aber auch als Fehlvorstellung negativ auf den Verstehensprozess auswirken. Rudolf vom Hofe (2003) unterscheidet zwischen „primären“ und „sekundären Grundvorstellungen“²⁵. Primäre

²² Vgl. dazu Winter (2003), S. 7ff.

²³ Danckwerts, Vogel (2006), S. 12.

²⁴ Nach Roth, Jürgen: Vorlesung Didaktik der Analysis, 2013, URL: http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_analysis/did_analysis_1_ziele_und_inhalte.pdf [22.3.2014], S. 1.24.

²⁵ Nach vom Hofe (2003), S. 6.

Grundvorstellungen resultieren aus eigenständigen Handlungen und selbst gemachten Erfahrungen. Sie werden durch sekundäre Grundvorstellungen erweitert. Bei sekundären Grundvorstellungen handelt es sich um mathematische Hilfsmittel, wie zum Beispiel Funktionsgraphen oder einem Koordinatensystem.²⁶ Vom Hofe (2003) nennt drei wichtige Komponenten, die im Sinne der Kompetenzentwicklung durch die Entwicklung von Grundvorstellungen angesprochen werden:

- *„Erfassung der Bedeutung eines neuen mathematischen Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge;*
- *Aufbau entsprechender mentaler Modelle, die den Begriff auf der Vorstellungsebene repräsentieren;*
- *Anwendung des Begriffs auf neue Sachsituationen (d.h. Modellierung).“²⁷*

Fundamentale Ideen

Der Begriff der fundamentalen Ideen ist nicht konkret präzisiert. Schreiber (2011) definiert eben jenen Begriff durch folgende drei Universalkriterien:

- *„Weite (Bündelung von Vor-Erfahrungen aus unterschiedlichen Bereichen, Allgemeinheit und Ausbaufähigkeit);*
- *Fülle (vielfältige Anwendbarkeit, Beziehungshaltigkeit zu mathematischen und außermathematischen Themen);*
- *Sinn (Zugänglichkeit ohne formale Begriffsbildung, Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung).“²⁸*

Schweiger (1983) nennt folgende Kriterien:

„Unter ‚Fundamentalen Ideen‘ (F. I.) werden Konzepte verstanden, die in der Mathematik

a) in der historischen Entwicklung eine Rolle spielen, die

b) geeignet sind, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern.

c) Ferner sollen sie geeignet sein, ein Bild der Mathematik für Außenstehende zu vermitteln; dieses beschränkt sich derzeit zumeist auf die populäre Darstellung von Randgebieten der Mathematik.

d) Außerdem müssen F. I. im Denken bzw. in der Sprache des Alltags verankert, d. h. präfiguriert sein [...].“²⁹

Für das Kapitel der Differentialrechnung zählen unter anderem die *„Idee des Approximierens“* oder

²⁶ Vgl. vom Hofe (2003), S. 5-8.

²⁷ Vom Hofe (2003), S. 7.

²⁸ Schreiber (2011), S. 84.

²⁹ Schweiger (1983), S. 83.

die „Idee der Änderungsrate“³⁰ zu den fundamentalen Ideen. Ein Beispiel dafür ist der Begriff des Grenzwertes - von der mittleren zur lokalen Änderungsrate. Weiters zählt auch das aus Extremwertberechnung hervorgehende Optimieren zu den fundamentalen Ideen der Analysis.³¹ Eine gängige Optimierungsaufgabe ist das Beispiel der *optimalen Dose*, bei der eine zylinderförmige Dose mit bestimmtem Volumen so bemaßt werden soll, dass die Oberfläche der Dose (und damit die Kosten für das Dosenmaterial) möglichst gering gehalten wird.

Grundwissen und Grundfertigkeiten

Grundwissen und Grundfertigkeiten beinhalten das notwendige mathematische Rüstzeug und die Fähigkeit, dieses richtig anwenden zu können. Dazu zählen Formeln, Sätze und Beweise sowie Definitionen und allgemeine Regeln. Ein Beispiel wären die Ableitungsregeln beim Differenzieren.³²

Grundkompetenzen

Unter mathematischen Grundkompetenzen versteht man den wichtigsten, unverzichtbaren Bereich eines Kapitels im Mathematikunterricht. Diese Kompetenzen stellen den grundlegenden Kern jener Fähigkeiten dar, den die Lernenden aus jedem Kapitel des Mathematikunterrichts unbedingt erwerben sollten. Malle (2013) definiert für die Differentialrechnung folgende Grundkompetenzen:

- „Den **Differenzenquotienten** (die **mittlere Änderungsrate**) kennen und interpretieren können.
- Den **Differentialquotienten** (die **Änderungsrate**) kennen und interpretieren können.
- Die **Leibniz'sche Schreibweise** für den Differenzen- und Differentialquotienten kennen.
- Wissen, dass bei einer **linearen Funktion** der **Differenzen- und der Differentialquotient** stets gleich der **Steigung** der Funktion ist.
- Den Begriff der **Tangente** als Grenzlage von Sekanten kennen und erläutern können.
- **Steigungen von Funktionsgraphen interpretieren** können.
- **Ableitungsregeln für Polynomfunktionen** kennen und anwenden können.
- **Höhere Ableitungen** kennen und für Polynomfunktionen berechnen können.“³³

3.3 Lerntheorien – aktive- und passive Positionen

Wie können Schülerinnen und Schüler möglichst viel aus den Aufgaben mitnehmen? Wittmann (2005) nennt in seinem Buch „*Handbuch produktiver Rechenübungen I*“ zwei verschiedene Grundpositionen des Lernens. Er unterscheidet zwischen der „*passivistischen Position*“ und der

³⁰ Nach Danckwerts, Vogel (2006), S. 13.

³¹ Vgl. Danckwerts, Vogel (2006), S. 12-13.

³² Vgl. Roth, Jürgen: Vorlesung Didaktik der Analysis, 2013, URL: http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_analysis/did_analysis_1_ziele_und_inhalte.pdf [22.3.2014], S. 1.24.

³³ Malle (2013), S. 12.

„aktivistischen Position“³⁴.

Die „passivistische Position“ geht aus der Assoziationspsychologie hervor und sagt aus, dass äußere Anreize für die Entstehung von Wissen verantwortlich sind. In diesem Fall bleibt der Schüler / die Schülerin passiv und macht das, was dem Lernenden im Vorhinein vorgemacht und gezeigt wird. Der Lehrer / die Lehrerin rechnet also ein Beispiel an der Tafel vor, die Schülerinnen und Schüler rechnen analoge Aufgaben nach. Die Schülerinnen und Schüler prägen sich das neue Wissen durch Wiederholung ein. Dazu zählt zum Beispiel das Lösen von Aufgaben, die mit analogen Rechenoperationen gelöst werden können. Den Gegenpol zur „passivistischen Position“ bildet die „aktivistische Position“, die aus der Kognitionspsychologie hervorgeht. Wissen entsteht dabei durch „aktive Konstruktion“³⁵. Das bedeutet, dass der Lernende sein Wissen selbst erarbeiten muss, und zwar durch aktive Auseinandersetzung mit Problemstellungen aus dem jeweiligen Stoffgebiet. Der Lehrer / die Lehrerin unterstützt den Lernenden dabei und begleitet die Schülerinnen und Schüler durch diesen Lernprozess.³⁶

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten hier nicht an trivialen Aufgaben, sondern unter anderem an Problemlöseaufgaben und offenen Aufgaben.

3.4 Realitätsbezogener Mathematikunterricht

Die in dieser Arbeit behandelten Aufgaben und Projekte sprechen vor allem die aktivistische Position des Lernens an. Die Schülerinnen und Schüler sollen aktiv durch eigenes Ausprobieren und Modellbilden eigene Erfahrungen an Aufgaben sammeln und so ihre Mathematikfähigkeiten, aber auch Problemlösefähigkeiten verbessern. Da die Unterrichtszeit doch sehr knapp bemessen ist und daher kaum Zeit für ausgedehnte Projekte zu einem bestimmten Thema bleibt, empfiehlt Brinkman (2009) die Projekte so zu gestalten, dass sie in wenigen Unterrichtseinheiten gelöst werden können:

„Will man Realitätsbezüge stärker im ‚normalen‘ Mathematikunterricht einbinden, so sollten daher mehr Aufgaben bereitgestellt werden, die (nicht unbedingt nur, aber im Wesentlichen) ein Unterrichtsthema fokussieren und sich in möglichst einer bis zwei Unterrichtsstunden bearbeiten lassen.“³⁷

Um ein tiefergehendes Verständnis für die bearbeiteten Themen zu erhalten, empfiehlt es sich, mehrere Fragen / Aufgabenstellungen zu einem Sachverhalt zu stellen, die mit Hilfe der Mathematik

³⁴ Nach Wittmann, Müller (2005), S. 157.

³⁵ Nach Wittmann, Müller (2005), S. 157.

³⁶ Vgl. Wittmann, Müller (2005), S. 157-159.

³⁷ Brinkmann (2009), S. 125.

gelöst werden können.³⁸

Modellbilden im Mathematikunterricht

Modellierung ist die prozesshafte Auseinandersetzung zur Lösung von realitätsbezogenen Problemstellungen im Mathematikunterricht.³⁹ Der Ablauf des Modellierungsprozesses verläuft nach Maaß (2007) in Stationen, die zu einem sogenannten „*Modellierungskreislauf*“ verbunden sind. Der Modellierungskreislauf verläuft dabei in zwei unterschiedlichen Ebenen, nämlich in jener der realen Welt und jener der Mathematik.⁴⁰

Nach Maaß (2007) verläuft der Modellierungskreislauf in folgenden Schritten:⁴¹

1. Vereinfachung des realen Problems
2. Mathematisierung des vereinfachten Problems (Übergang von der Realität in die Mathematik)
3. Mathematische Bearbeitung des aufgestellten Modells
4. Interpretation des Resultats des mathematischen Modells (Übergang von der Mathematik zurück in die Realität)
5. Validierung der Lösung auf Plausibilität

Durch Bearbeitung realitätsnaher Aufgabenstellungen mit Hilfe des Modellierungskreislaufes soll Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit geboten werden, ihre mathematischen Fähigkeiten situationsbezogen auf vielfältige Problemstellungen anwenden zu können.⁴²

Außermathematisches Wissen

Um sinnvolle und zielführende Modellannahmen treffen zu können, ist das Wissen über den außermathematischen Bereich unabdinglich. In der Literatur wird die Dimension, die das außermathematische Wissen beinhaltet, als „*Radius of action*“⁴³ bezeichnet. Sie enthält jene Kontexte aus der Realität, die von Schülerinnen und Schülern modelliert und mathematisch beschrieben werden können.⁴⁴

Da das mathematische Werkzeug oft in höheren Schulstufen behandelt wird als der physikalische Inhalt, werden in den noch folgenden Projekten (Kapitel 5 und Kapitel 6) stets außermathematische Inputs angegeben.

³⁸ Vgl. Brinkmann (2009), S. 125.

³⁹ Vgl. BIFIE (Hrsg.): Themenheft Mathematik „Modellieren“, 2012, URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m4_themenheft_modellieren_2012-02-08.pdf. [20.9.2014], S. 6.

⁴⁰ Vgl. Maaß (2007), S. 13.

⁴¹ Vgl. Maaß (2007), S. 13.

⁴² Vgl. Böhm (2010), S. 1.

⁴³ Nach Böhm (2010), S. 4.

⁴⁴ Vgl. Böhm (2010), S. 4.

Einsatz neuer Technologien im Unterricht

Schon im 18. Jahrhundert wurden vorrangig physikalische Phänomene mit Hilfe der Mathematik modelliert. Ein wichtiges Beispiel, das bis heute Gültigkeit hat, ist das Modell von Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit. Wichtige Vertreter dieser Zeit waren unter anderem Newton und Leibniz. Ihre Hilfsmittel waren auf Rechenschieber⁴⁵ und Logarithmentafeln beschränkt. Durch die ständige Weiterentwicklung von neuen Technologien ist es heute möglich, binnen weniger Minuten verschiedene Zusammenhänge graphisch darzustellen, oder komplexe Berechnungen mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (CAS) zu lösen. Dies erlaubt auch, komplexere realitätsbezogene Themen im Unterricht zu behandeln.⁴⁶

Die Nutzung „neuer Medien“ wird bereits im österreichischen Lehrplan der AHS gefordert:

„Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen.“⁴⁷

Für einen erfolgreichen und sinnvollen Einsatz von Computer-Algebra-Systemen im Unterricht ist eine Einführung in die verwendeten Systeme im Vorhinein unbedingt notwendig. Nur wenn das Programm beherrscht wird, kann es zeitersparend eingesetzt werden. Wichtig ist auch, dass der Fokus der Schülerinnen und Schüler nicht auf der Arbeit mit dem Computer liegt, sondern dass durch den Einsatz des Computers ein intensiveres Arbeiten und eine gründlichere Auseinandersetzung mit dem mathematischen Thema möglich wird.⁴⁸

Das Computer-Algebra-System soll den Schülerinnen und Schüler dabei helfen, einen tieferen Einblick in die Materie zu erhalten, ohne aber ein Blackbox System zu sein, in dem per Mausklick alle Ergebnisse schnell und einfach geliefert werden. Danckwerts und Vogel nennen den Einsatz neuer Technologien als hilfreiches Mittel für alle drei Winter'schen Grunderfahrungen:

„Zum einen ist der Computer ein leistungsfähiges Werkzeug zur Unterstützung von Modellbildungen und Simulationen ($\rightarrow$ G1), zum anderen kann er - vor allem durch dynamische Visualisierungen - den Aufbau adäquater Grundvorstellungen mathematischer Begriffe positiv beeinflussen ($\rightarrow$ G2), und schließlich beflügelt der Computer heuristisch-experimentelles

⁴⁵ Der erste (echte) Rechenschieber wurde bereits 1632 gebaut. Als Erfinder gilt William Oughtred (1574-1660). Auch Isaac Newton (1643-1727) beteiligte sich an der Weiterentwicklung des Rechenschiebers. Vgl. dazu URL:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber> [16.09.2014].

⁴⁶ Vgl. Siller (2009), S. 5-6.

⁴⁷ Zitat aus BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik, 2004, URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [7.8.2014], S. 3.

⁴⁸ Vgl. Siller (2009), S. 5-6.

*Arbeiten beim Problemlösen ($\rightarrow G3$)*⁴⁹.

3.5 Kompetenzen durch Modellbilden

Durch die Modellierung von realitätsnahen Problemen mit Hilfe der Mathematik trainieren die Schülerinnen und Schüler neben ihren Rechenfertigkeiten auch Fähigkeiten, die über das bloße Anwenden von Rechenoperationen hinausgehen.

Maaß (2007) nennt dazu folgende Kompetenzen:

- „Kompetenzen zum Verständnis eines realen Problems und zum Aufstellen eines Realmodells und eines mathematischen Modells,
- Kompetenzen zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells,
- Kompetenzen zur Interpretation mathematischer Resultate in einer realen Situation,
- Kompetenzen zur Validierung einer gefundenen Lösung.“⁵⁰

3.6 Fazit

Der Mathematikunterricht hat sich über die Jahrzehnte hinweg weiterentwickelt, weg vom reinen Ausführen von Rechenoperationen hin zum allgemeinbildenden Behandeln von Problemstellungen auch außerhalb der Mathematik. Ergebnisse von TIMSS und PISA zeigen allerdings, dass Problemlösefähigkeiten und Modellierungskompetenzen nur sehr gering bei Schülerinnen und Schülern vorhanden sind.⁵¹ Das Bearbeiten von mathematischen Sachverhalten aus dem Alltag soll genau diese Kompetenzen fördern. Über die Schulmathematik herrscht sehr oft die Meinung, sie sei weltfremd und im Leben außerhalb der Schule nicht anwendbar. Schülerinnen und Schüler haben oft das Problem, nicht zu wissen, welches Potential in den erlernten mathematischen Fähigkeiten liegt. Durch realitätsbezogene Aufgabenstellungen sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, welche Möglichkeiten ihnen mit den in der Schule erlernten Rechenfertigkeiten bereits zur Verfügung stehen. Zu guter Letzt soll auch das Interesse der Lernenden durch das Bearbeiten aktueller Themen aus dem außerschulischen Bereich gesteigert werden.

Viele Aufgabenstellungen bieten Ergebnisse, die einen überraschen und ins Staunen versetzen können.⁵²

⁴⁹ Danckwerts, Vogel (2006), S. 7.

⁵⁰ Maaß (2007), S. 16.

⁵¹ Vgl. Henn, Maaß (2003), S. 1.

⁵² Vgl. Herget, Merziger (2013), S. 6.

„Überraschendes kann dafür sorgen, dass wir Fragen entwickeln, neugierig nach einer Lösung suchen, konsequent weiterforschen - aus dem Gegenstand wird dann ein Lerngegenstand.“⁵³

⁵³ Herget, Merziger (2013), S. 4.

4. Mathematisches Rüstzeug - Standardmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen und numerische Verfahren

4.1 Standardmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Für die mathematische Bearbeitung der in den nächsten Kapiteln folgenden Projekte werden die Grundlagen von Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt und hier nicht weiter behandelt. Im kommenden Abschnitt werden verschiedene Lösungsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen vorgestellt. Mit diesen Lösungsmethoden können alle Differentialgleichungen - der im Rahmen dieser Arbeit behandelten Projekte - behandelt werden. Diese richten sich speziell an Lehrerinnen und Lehrer und sollen einen umfassenden Überblick geben. Folgende Methoden werden vorgestellt:

1. Methode der getrennten Variablen
2. Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen
3. Variablentransformation
 - a) Lineare Substitution
 - b) Homogene Substitution
4. Lösungsmethode für exakte Differentialgleichungen
5. Lösungsmethode mit integrierendem Faktor

4.1.1.Methode der getrennten Variablen⁵⁴

Bemerkung: Diese Methode wurde bereits in der zweiten Hälfte des 17.Jahrhunderts verwendet.

Als Ausgangssituation sei eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = g(x) * h(y(x))$$

⁵⁴ Nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL:
<http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 8-9.

gegeben.

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \quad \forall x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

wobei $h(y(x)) \neq 0 \quad \forall y \in J \subseteq \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird.

Sei $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0 \in J$. Integration beider Seiten liefert:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Man setzt nun $G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt$ und

$$H(z) := \int_{y_0}^z \frac{1}{h(s)} ds \rightarrow H(y(x)) = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{h(s)} ds.$$

Damit erhält man

$$G(x) = H(y(x)).$$

Wegen $h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J$ gilt nun $h(y) > 0$ oder $h(y) < 0 \quad \forall y \in J$. Damit gilt natürlich auch $1/h(y) > 0$ oder $1/h(y) < 0$. H ist damit streng monoton auf dem gesamten Intervall J , wodurch folgt, dass es eine Umkehrfunktion H^{-1} gibt, die stetig und streng monoton ist. Damit gilt

$$y(x) = H^{-1}(G(x)),$$

was nun die Lösung der Differentialgleichung liefert.

Folgender Satz zeigt nun die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung nach obiger Methode:

Satz:⁵⁵ Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in J$ und seien $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J$ gilt.

Sei $G: I \rightarrow \mathbb{R}, G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt$ ($x \in I$), sowie $H(y(x)) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{h(s)} ds$, so wie in obiger Lösungsmethode gesetzt. Weiters sei $I_1 \subseteq I$ ein Teilintervall, wobei $x_0 \in I_1$ und $G(I_1) \subseteq H(J)$.

Es existiert nun genau eine Lösung $\varphi: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ der exakten Differentialgleichung

$y'(x) = g(x) * h(y(x))$, die auch die Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ erfüllt. Für die Lösung gilt:

$$H(\varphi(x)) = G(x) \quad \forall x \in I_1$$

⁵⁵ Satz und Beweis nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 9.

Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass $\varphi(x) = H^{-1}(G(x))$ ($x \in I_1$) eine Lösung der Differentialgleichung darstellt:

$$\varphi(x_0) = H^{-1}(G(x_0)) = H^{-1}(0) = y_0, \text{ da } H(y_0) = 0 \text{ und } H \text{ stetig und streng monoton ist.}$$

Durch Differentiation von $H(\varphi(x)) = G(x)$ erhält man

$$g(x) = G'(x) = H'(\varphi(x)) * \varphi'(x) = \frac{1}{h(\varphi(x))} * \varphi'(x)$$

Durch Umformung erhält man

$$\varphi'(x) = g(x) * h(\varphi(x))$$

wodurch die Existenz gezeigt wäre.

Nun muss noch die Eindeutigkeit dieser Lösung gezeigt werden:

Ersetzt man in obiger Methode $y(x)$ durch $\varphi(x)$, so erhält man

$$H(\varphi(x)) = G(x) \quad \forall x \in I_1$$

Da H streng monoton ist, ist $\varphi(x) = H^{-1}(G(x))$ (für $x \in I_1$) eindeutig.

□

4.1.2. Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen⁵⁶

Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = a(x) * y(x) + g(x),$$

mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

a) Homogener Teil der Differentialgleichung

Zuerst wird die homogene Differentialgleichung $y'(x) = a(x) * y(x)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ betrachtet:

Ist $y_0 \neq 0$, kann hier gleich Methode 1 - „Trennung der Variablen“ - eingesetzt werden:

$$\frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^x a(s) ds$$

⁵⁶ Nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 25-27.

$$\Rightarrow \log(y(x)) = \log(y_0) + \int_{x_0}^x a(s) ds$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 * e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

Durch Differentiation kann man sich davon überzeugen, dass dies $\forall x \in I \subseteq \mathbb{R}$ eine Lösung für die homogene Differentialgleichung liefert.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit dieser Lösung zu zeigen:

Satz:⁵⁷ Die homogene Differentialgleichung $y'(x) = a(x) * y(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar mit der oben hergeleiteten Gleichung für $y(x)$.

Beweis: Sei $\varphi(x) := e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$. Damit folgt $\varphi'(x) = -a(x) * \varphi(x)$ und $\varphi(x_0) = 1$.

Angenommen $v: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ wäre eine weitere Lösung mit $v(x_0) = y_0$ für $x_0 \in I_1$

Sei nun $\psi(x) := v(x) * \varphi(x)$. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= v'(x) * \varphi(x) + v(x) * \varphi'(x) \\ &= a(x) * v(x) * \varphi(x) + v(x) * (-a(x) * \varphi(x)) = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass ψ konstant ist, wodurch gilt:

$$\Rightarrow \psi = \text{const} = v(x_0) * \varphi(x_0) = y_0 * 1 = y_0$$

$$\Rightarrow v(x) = y_0 * e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

□

b) Inhomogener Teil der Differentialgleichung

Hier wird folgender Grundgedanke verfolgt:

$\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}$ löst die homogene Differentialgleichung $\varphi'(x) = a(x) * \varphi(x)$ mit der Anfangswertbedingung $\varphi(x_0) = 1$.

Man verwendet nun den Ansatz:

$$y(x) = c(x) * \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ ist hier die Lösung der homogenen Gleichung. Die Multiplikation mit einer Funktion $c(x)$ stellt

⁵⁷ Satz und Beweis nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 25-26.

die Anpassung an die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ dar.

Differentiation dieses Ansatzes liefert:

$$y'(x) = c'(x) * \varphi(x) + c(x) * \varphi'(x) = c'(x) * \varphi(x) + \underbrace{c(x) * a(x) * \varphi(x)}_{= a(x) * y(x)} = a(x) * y(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) * \varphi(x) = g(x) \Rightarrow c'(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x)} = g(x) * e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

Durch Integration erhält man $c(x) = c_0 + \int_{x_0}^x g(r) * e^{-\int_{x_0}^r a(s) ds} dr$ und damit folgt:

$$y(x) = c(x) * \varphi(x) = \left(c_0 + \int_{x_0}^x g(r) * e^{-\int_{x_0}^r a(s) ds} dr \right) * e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

$y(x)$ setzt sich also aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen.

Folgender Satz beweist die Eindeutigkeit der Lösung durch die Methode der Variation der Konstanten:

Satz:⁵⁸ Die Differentialgleichung $y'(x) = a(x) * y(x) + g(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Beweis: Die Methode der Variation der Konstanten liefere die obige Formel für $y(x)$.

Setzt man nun die Anfangsbedingung $y_0 = y(x_0)$ in diese Formel ein, so erhält man:

$$y_0 = y(x_0) = (c_0 + 0) * 1 = c_0$$

und damit :

$$y(x) := \left(y_0 + \int_{x_0}^x g(r) * e^{-\int_{x_0}^r a(s) ds} dr \right) * e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

Dieses y ist damit die Lösung des Anfangswertproblems, denn

$y(x_0) = (y_0 + 0) * 1 = y_0$ und nach Differentiation folgt:

$$y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x g(r) * e^{-\int_{x_0}^r a(s) ds} dr \right)' * e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + \left(y_0 + \int_{x_0}^x g(r) * e^{-\int_{x_0}^r a(s) ds} dr \right) * \left(e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \right)',$$

⁵⁸ Satz und Beweis nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dgllak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 26-27.

$$\begin{aligned}
&= \left(0 + g(x) * e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds}\right) * e^{\int_{x_0}^x a(s)ds} + a(x) * y(x) \\
&= g(x) + a(x) * y(x).
\end{aligned}$$

□

4.1.3. Variablentransformation⁵⁹

Oft ist es möglich, eine komplizierte Differentialgleichung mittels Substitution auf eine Differentialgleichung zurückzuführen, die mit Hilfe der elementaren Methoden gelöst werden kann.⁶⁰

a) Lineare Substitution:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = g(\alpha * x + \beta * y(x) + \gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

Man substituiert: $a = \alpha * x + \beta * y(x) + \gamma \Rightarrow a' = \alpha + \beta * y'(x) = \alpha + \beta * g(a)$

Man erhält durch Substitution also die Differentialgleichung $a' = \alpha + \beta * g(a)$, eine autonome Differentialgleichung, die mit der Methode *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. Wichtig ist es zu beachten, dass die Anfangsbedingungen (x_0, y_0) mittransformiert werden müssen.

b) Homogene Substitution:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

Man substituiert: $b = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow b' = \frac{y'(x)*x - y(x)*1}{x^2} = \frac{1}{x} * \left(y'(x) - \frac{y(x)}{x}\right) = \frac{1}{x} * (g(b) - b)$

Man erhält durch Substitution die Differentialgleichung

$$b' = \frac{1}{x} * (g(b) - b),$$

die mit der Methode *Trennung der Variablen* gelöst werden kann.

⁵⁹ Nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 28-29.

⁶⁰ Vgl. Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 28.

4.1.4. Lösungsmethode für exakte Differentialgleichungen⁶¹

Bevor diese Lösungsmethode vorgestellt wird, wird die Definition einer exakten Differentialgleichung gegeben.

Definition:⁶² Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $R := I \times J$ und $g, h: R \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' * g(x, y) + h(x, y) = 0$$

heißt exakt, wenn (h, g) eine Stammfunktion auf R besitzt.

Lösungsmethode

Gegeben sei die Differentialgleichung in der Form

$$y' * g(x, y) + h(x, y) = 0$$

Vorbereitung: Die Differentialgleichung wird auf „Exaktheit“ überprüft. Dazu überprüft man ob $\partial_y h = \partial_x g$ gilt. Ist dies der Fall, so handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung und man kann mit (1.) fortfahren. Sollte dies nicht der Fall sein, die Differentialgleichung also nicht exakt sein, so wird auf die nächste Lösungsmethode (Lösungsmethode mit integrierendem Faktor) verwiesen. Ist die Differentialgleichung nun exakt, so wird sie folgendermaßen gelöst:

1. Konstruktion der Stammfunktion f zu (h, g)

$$\text{Ansatz: } f(x, y) = \int h(x, y) * dx + \varphi(y) \Rightarrow \partial_x f = h$$

$$\varphi \text{ anpassen: } \partial_y f = \partial_y \int h * dx + \varphi'(y) = g(x, y) \rightarrow \text{daraus } \varphi \text{ bestimmen.}$$

2. Um y zu erhalten muss nun die Gleichung $f(x, y) = c$ nach y aufgelöst werden.

Für die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist $c = f(x_0, y_0)$

4.1.5. Lösungsmethode mit integrierenden Faktoren⁶³

Wie in der Anleitung der Lösungsmethode der exakten Differentialgleichung bereits erwähnt, wird bei dieser Methode jener Fall behandelt, bei dem die Differentialgleichung nicht exakt ist.

Oft funktioniert folgende Methode:

⁶¹ Nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL:

<http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 30.

⁶² Definition nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL:

<http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 30.

⁶³ Nach Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen, 2012, URL:

<http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014], S. 32.

Man sucht eine Funktion $m: R \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto m(x, y), m(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in R$ mit der

$$y' * g * m + h * m = 0$$

exakt ist. Diesen Faktor m bezeichnet man als „Eulerscher Multiplikator“ oder „integrierender Faktor“. Für Exaktheit muss nun also gelten:

$$\partial_y(h * m) = \partial_x(g * m)$$

Oft kann eine triviale Lösung (zum Beispiel nur von einer Variable abhängig) für m gefunden werden.

4.2 Beschreibung von Bewegungsgleichungen mit Hilfe von numerischen Verfahren

4.2.1. Euler-Cauchy Verfahren⁶⁴

Das Euler-Cauchy Verfahren ist ein einfaches Verfahren zur numerischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen. Aufgrund der Einfachheit kann es, im Gegensatz zum komplexen Runge-Kutta-Verfahren, auch im Unterricht eingesetzt werden.⁶⁵ Dabei betrachtet man die Änderung des Ortes und der Geschwindigkeit nach einem gewählten kleinen Zeitintervall Δt . Zur Aufstellung der numerischen Beziehungen benötigt man lediglich die Kenntnis über die bereits aus dem Physikunterricht bekannten Formeln

$$\Delta x = v * \Delta t,$$

die sich aus der Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ableitet, sowie

$$\Delta v = a * \Delta t,$$

die sich wiederum aus der Definition der Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ergibt.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Anfangsort x_0 sowie eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt. Innerhalb eines Zeitintervalls Δt ändert sich der Ort des betrachteten Körpers (zum Beispiel die Masse beim mathematischen Pendel) um $\Delta x = x_1 - x_0$. Unter der Annahme, dass sich die Geschwindigkeit während eines Zeitintervalls Δt nicht ändert, gilt mit $\Delta x = v_0 * \Delta t$ für x_1 :

$$x_1 = x_0 + v_0 * \Delta t$$

⁶⁴ Vgl. Embacher (2013), S. 2-4 sowie vgl. Embacher (2010), S. 32-33.

⁶⁵ Vgl. Embacher (2010), S. 32.

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ändert sich die Geschwindigkeit auch während eines noch so kleinen Zeitintervalls. Um die Bewegung genauer beschreiben zu können, wird dies nun berücksichtigt. Dazu geht man mit analogem Gedankengang wie für den gerade beschriebenen Ort vor.

Die Änderung der Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt ist gegeben durch $\Delta v = v_1 - v_0$.

Für die Geschwindigkeit v_1 folgt (mit der obigen Beziehung $\Delta v = a * \Delta t$) schließlich

$$v_1 = v_0 + a * \Delta t.$$

Für die Beschleunigung verwendet man gemäß dem 2. Newton'schen Axiom die Beziehung $a = \frac{F(x_0)}{m}$. Damit folgt für v_1 nach Einsetzen:

$$v_1 = v_0 + \frac{F(x_0)}{m} * \Delta t$$

Dieses numerische Verfahren wird als Euler-Cauchy Verfahren bezeichnet. Das Problem dieses Verfahrens ist es jedoch, dass es für große Zeiteschritte ungenau ist. Für sehr kleine Zeitintervalle erhält man jedoch eine sehr große Anzahl von Schritten, was die numerische Berechnung erschwert.

Daher soll nun eine genauere Methode zur Berechnung nach Franz Embacher (2013) vorgestellt werden, die aus dem Heun Verfahren hervorgeht.

4.2.2. „Verbessertes Verfahren“⁶⁶

Für dieses Verfahren muss zusätzlich zu obigen Beziehungen (Geschwindigkeit und Beschleunigung) noch das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, nämlich

$$\Delta x = v_0 * \Delta t + \frac{a}{2} (\Delta t)^2$$

bekannt sein. Ein mit Beschleunigung a bewegter Körper legt bei einer Ausgangsgeschwindigkeit v_0 im Zeitintervall Δt den Weg Δx zurück.

Mit $\Delta x = x_1 - x_0$ gilt nun für den Ort x_1 (wobei wieder die Beziehung $a = \frac{F}{m}$ verwendet wird)

$$x_1 = x_0 + v_0 * \Delta t + \frac{F(x_0)}{2 * m} (\Delta t)^2.$$

$a_0 = \frac{F(x_0)}{m}$ bezeichnet dabei die Beschleunigung am Anfangsort x_0 . Die Beschleunigung am Ende des

⁶⁶ Vgl. Embacher (2013), S. 5-8 sowie vgl. Embacher (2010), S. 32-33.

Zeitintervalls (bei x_1) kann nun berechnet werden gemäß $a_1 = \frac{F(x_1)}{m}$. Um jetzt eine bessere Näherung als beim Euler-Cauchy Verfahren zu erhalten, verwendet man bei der Berechnung der Geschwindigkeit den Mittelwert der Beschleunigung im Zeitintervall, die man durch die Beschleunigungen am Anfang und am Ende des Zeitintervalls erhält. Für v_1 gilt damit:

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{F(x_0)}{m} + \frac{F(x_1)}{m} \right) * \Delta t$$

Mit Hilfe dieser Näherungen kann nun mit Tabellenkalkulationsprogrammen (wie zum Beispiel Microsoft Excel) die Bewegung numerisch beschrieben werden und zusätzlich mit Graphen anschaulich dargestellt werden.

Zusammenfassung:

- Für die numerische Berechnung nach dem Euler-Cauchy Verfahren gelten folgende allgemeine Beziehungen für den „ n -ten“ Schritt der Berechnung:

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} * \Delta t$$

für den Ort nach n Berechnungsschritten sowie

$$v_n = v_{n-1} + \frac{F(x_{n-1})}{m} * \Delta t,$$

für die Geschwindigkeit nach n Berechnungsschritten.

- Für die numerische Berechnung nach dem „verbesserten Verfahren“ gelten folgende allgemeine Beziehungen für den „ n -ten“ Schritt der Berechnung:

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} * \Delta t + \frac{F(x_{n-1})}{2 * m} (\Delta t)^2$$

für den Ort nach n Berechnungsschritten sowie

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{F(x_{n-1})}{m} + \frac{F(x_n)}{m} \right) * \Delta t,$$

für die Geschwindigkeit nach n Berechnungsschritten.

5. Grenzwertbegriff und Ableitung - Einführungsprojekte

Die erste Hürde bei der Einführung der Differentialrechnung im Mathematikunterricht ist der Begriff des Grenzwertes. Da die Differentialrechnung üblicherweise über diesen Begriff eingeführt wird, erschwert ein wackelndes Konzept zu Beginn den Einstieg in die Infinitesimalrechnung noch zusätzlich.⁶⁷

Christoph Ableitinger und Johanna Heitzer (2013) nennen unter anderem weitere Punkte, wo der Umgang mit Ableitungs- und Integralbegriff erschwert wird:

- „Die exakte Bestimmbarkeit der Tangentensteigung / des Flächeninhalts als Grenzwert konvergenter Folgen von Sekantensteigungen/Produktsummen wird bezweifelt, denn: Die Funktion s mit $s(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, die zu einem x_0 bei gegebener Funktion f jeder Intervallbreite h die zugehörige Sekantensteigung zuordnet, ist in $h = 0$ nicht definiert. Sie dort als durch die Tangentensteigung stetig ergänzbar zu akzeptieren, erfordert den Grenzwertbegriff. Der Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall $[x_1, x_2]$ ist definiert als $(n \rightarrow \infty)$ -Grenzwert zur Treppenfunktion $S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_1 + k * \frac{x_2-x_1}{n}) * \frac{x_2-x_1}{n}]$. Wie das Verschwinden aller Summanden durch deren unendliche Zahl ausgeglichen werden kann, ist nur mit tragfähigem Grenzwertkonzept begreifbar!
- Der im Hauptsatz verankerte Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral wird nicht eingesehen, da er - ob vollständig bewiesen oder intuitiv erfasst - wesentlich auf den Mittelwertsatz baut. Dieser aber gilt nur in dem durch Grenzwert hinzunahme vollständigen Körper $\mathbb{R}$: In $\mathbb{Q}$ hat weder $f(x) = x^3 - 5$ eine Nullstelle noch die Tangente $f(x) = \sin(x)$ bei 45° eine Steigung.“⁶⁸

Um abstrakte Begriffe wie den Grenzwertbegriff oder aber auch den Begriff der Momentangeschwindigkeit für den Unterricht für Schülerinnen und Schüler fassbarer zu machen, eignen sich oft kurze einfache Experimente, die im Unterricht bei der Einführung des Begriffs durchgeführt werden können. Oft wird etwas greifbarer, beziehungsweise besser verständlich, wenn

⁶⁷ Vgl. Ableitinger, Heitzer (2013), S. 2.

⁶⁸ Ableitinger, Heitzer (2013), S. 8-9.

sich Schülerinnen und Schüler konkrete Vorstellungen zum jeweiligen Begriff machen können. Im folgenden Abschnitt werden Beispielprojekte für den Unterricht vorgestellt, die zeigen sollen, wie den Schülerinnen und Schülern der Grenzwertbegriff, die Momentangeschwindigkeit und die Beschleunigung mit Hilfe physikalischer Hilfsmittel näher gebracht werden können. Diese Projekte sind für die 11. Schulstufe BHS beziehungsweise AHS nach Einführung der Differentialrechnung im Unterricht vorgesehen. Zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen (wie in Kapitel 6) ist ein tiefgehendes Verständnis dieser Begriffe unabdingbar. Aber auch Begriffe wie gleichförmige/ungleichförmige Bewegung und gleichmäßig/ungleichmäßig beschleunigte Bewegung spielen eine wichtige Rolle, um in weiterer Folge Bewegungsvorgänge richtig beschreiben zu können. Bei den folgenden Beispielen werden auch erste Tabellenkalkulationen mit Microsoft Excel durchgeführt. Dies soll auch im Hinblick auf weitere Kalkulationen förderlich sein wie sie in Kapitel 6 bei ausgewählten Beispielen eingesetzt werden - zum Beispiel bei der numerischen Berechnung von Bewegungsvorgängen .

5.1 Einführungsprojekt: Der Grenzwert - Glasröhrchenversuch⁶⁹

Folgendes einfaches Experiment, nach Hans Humenberger (2013), soll den Schülerinnen und Schülern den Begriff des Grenzwerts auf eine andere Art und Weise näherbringen. Dabei nähert man sich dem Grenzwert schrittweise immer weiter an.

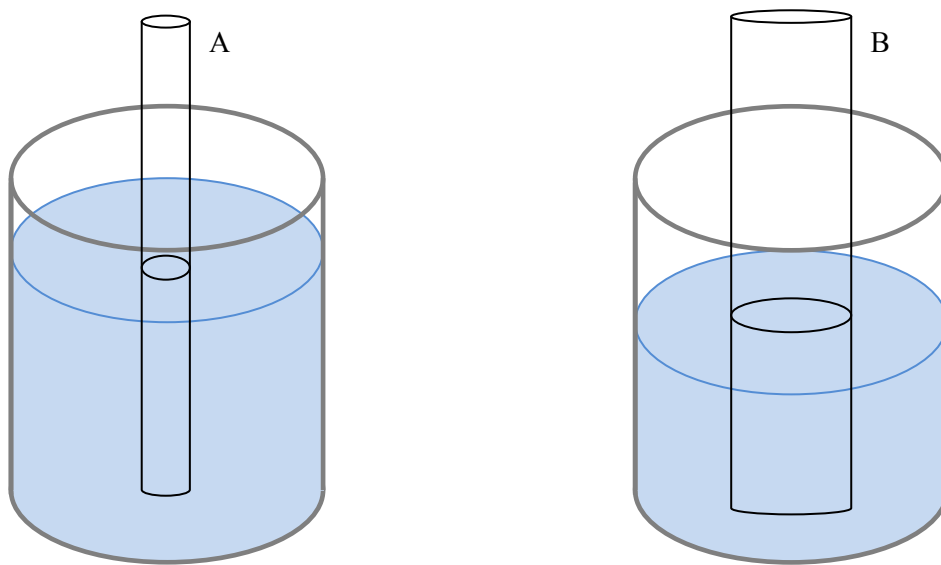


Abbildung 1: Glasröhrchenversuch nach Hans Humenberger.

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Durchführung des Glasröhrchenversuchs	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Versuchsmaterialien	
15	Definition des Grenzwertes	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Tafel, Heft	Definition und Eigenschaften
15	Mathematische Analyse und Tabellenkalkulation	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Computer + Software	
10	Zusammenfassung und Wiederholung	Lehrer/Klassengespräch	Tafel, Heft	

⁶⁹ Versuch nach Humenberger (2013), S. 34-37.

Versuchsmaterialien:

- 2 idente Glasbecher
- 2 Glasröhrchen mit unterschiedlichem Querschnitt (z.B. im Verhältnis 1:2 oder 1:3)
- Wasser

Versuchsdurchführung:

In die beiden Glasbecher wird unterschiedlich viel Wasser eingefüllt, sodass sich unterschiedliche Wasserhöhen ergeben. Diese werden gemessen. Es ist bei diesem Versuch von Vorteil, wenn Messbecher verwendet werden. Nun werden die beiden Röhrchen in die beiden Gläser eingeführt und auf den Tisch gestellt. Danach wird das obige Loch der Röhrchen mit dem Daumen gut verschlossen, sodass keine Luft von oben eindringen kann. Anschließend wird das Röhrchen A aus dem Wasser gehoben und in den Messbecher B geleert und umgekehrt. Nun wird wieder der Füllstand abgemessen und der Vorgang wiederholt. Nach mehreren Durchläufen verändert sich der Wasserpegel immer weniger – man nähert sich immer weiter dem „*Grenzwert*“ an.

Mathematische Analyse und Tabellenkalkulation⁷⁰

Experimentell wurde der Grenzwert durch Umfüllen bereits gefunden. Hans Humenberger (2013) empfiehlt eine anschließende Simulation mit Excel. Damit kann der Grenzwert auch durch mathematische Analyse und Tabellenkalkulation mathematisiert und begründet werden.

Warum verändert sich der Wasserstand nicht mehr?

Sei nun

- Q_A der Querschnitt des Röhrchens in Messbecher A
- Q_B der Querschnitt des Röhrchens in Messbecher B
- A_n die Wasserhöhe im Messbecher A nach n Durchläufen
- B_n die Wasserhöhe im Messbecher B nach n Durchläufen
- G die Grundfläche der Messbecher

Betrachtet man nun die Wasserhöhe in einem der beiden Messbecher, zum Beispiel in Messbecher A, so gilt für die Wasserhöhe nach $n + 1$ Durchläufen:

⁷⁰ Nach Humenberger (2013), S. 35-36.

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_B * B_n}{G} - \frac{Q_A * A_n}{G}$$

Man erkennt an dieser Gleichung: Einerseits wird Wasser aus Messbecher B hinzugefügt, andererseits Wasser in den Messbecher B abgegeben. Der Quotient beschreibt dabei gleich die Höhe des Wasserpegels, um die er erhöht beziehungsweise verringert wird.

Völlig analog läuft der Vorgang in Messbecher B ab:

$$B_{n+1} = B_n + \frac{Q_A * A_n}{G} - \frac{Q_B * B_n}{G}$$

Damit sich nun der Wasserstand in einem Messbecher nicht mehr ändert, muss

$A_{\infty+1} = A_{\infty} + 0$ erfüllt werden, was aus

$$„ \frac{Q_B * B_{\infty}}{G} - \frac{Q_A * A_{\infty}}{G} = 0 ”$$

und nach Umformung

$$\frac{Q_B * B_{\infty}}{G} = \frac{Q_A * A_{\infty}}{G}$$

folgen würde. Dies ist genau dann der Fall, wenn aus beiden Messbechern die gleiche Menge Wasser entnommen beziehungsweise hinzugefügt wird.

Dieses einfache Experiment kann nun auch mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms simuliert werden. Dazu werden obige Formeln in Microsoft Excel (oder einem ähnlichen Tabellenkalkulationsprogramm) eingetragen und für mehrere Runden durchgespielt. Für diese Simulation sind nur Grundkenntnisse hinsichtlich Tabellenkalkulationsprogrammen notwendig.

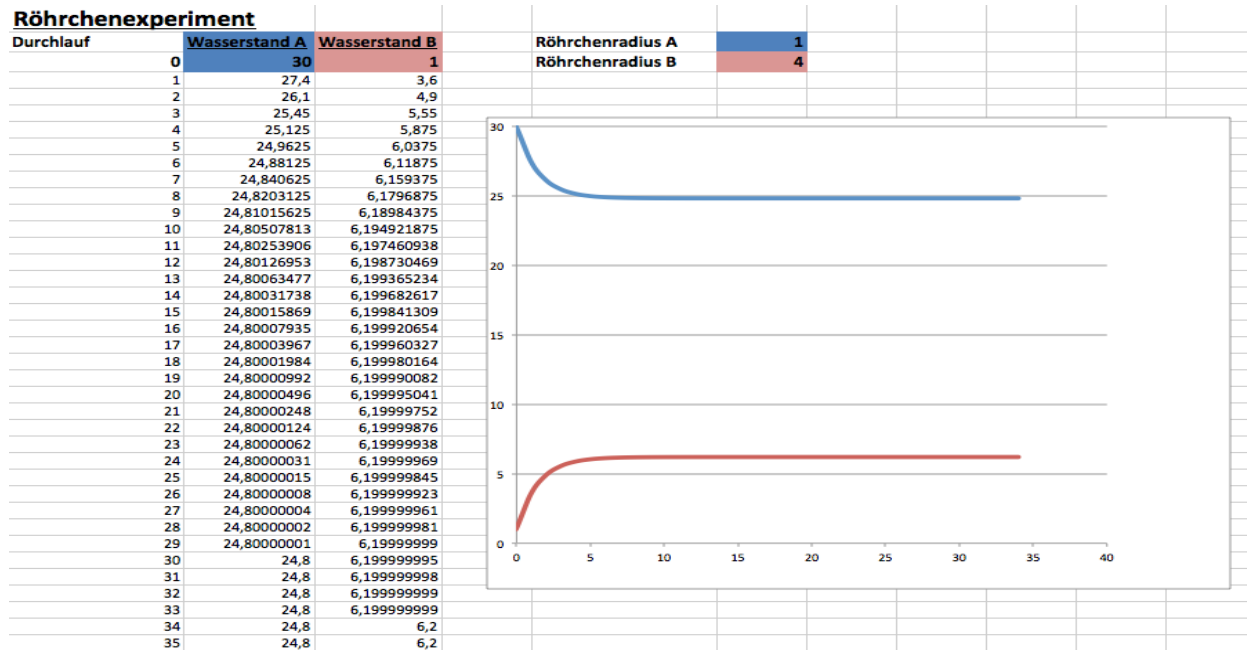


Abbildung 2: Simulation mit Microsoft Excel.

Durch Variation der Variablen erkennt man schnell einen Zusammenhang zwischen Wasserhöhe und Querschnittsfläche. Sehr leicht kann man sich von diesem Zusammenhang mit Hilfe der Mathematik überzeugen:

Aus

$$\frac{Q_B * B_{\infty}}{G} - \frac{Q_A * A_{\infty}}{G} = 0$$

folgt durch Multiplikation von G und Umformung:

$$Q_B * B_{\infty} = Q_A * A_{\infty}$$

und daraus:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{A_{\infty}}{B_{\infty}}$$

Das Wasserhöhenverhältnis ist also indirekt proportional zum Querschnittsflächenverhältnis der Röhrchen.

5.2 Die Momentangeschwindigkeit

5.2.1 Der Begriff „Momentangeschwindigkeit“

Nach der Einführung der Differentialrechnung im Mathematikunterricht ist den Schülerinnen und Schülern der theoretische Aspekt der Differentialrechnung bekannt. Ableitungen können berechnet werden. Jedoch fehlen vielen Schülerinnen und Schülern die Zusammenhänge mit bekannten Anwendungen, die ihnen helfen, Konzepte zu den theoretischen Begriffen zu bilden. Ein gutes Beispiel zur Veranschaulichung stellt unter anderem der Begriff der Momentangeschwindigkeit dar. Bevor nun ein konkretes Beispiel vorgestellt wird, sei noch auf verschiedene Sichtweisen zur Momentangeschwindigkeit hingewiesen, die Schülerinnen und Schüler einnehmen können. Hauke Friedrich (2013) nennt in diesem Zusammenhang zwei verschiedene, nämlich die „*isolierende Sichtweise*“ und die „*einbettende Sichtweise*“.⁷¹ Folgende Tabelle (aus „*Mathematik Lehren Nr. 180*“ entnommen) gibt einen Überblick:

D e n k w e l t e n			
S i c h t w e i s e n		Realwelt	Mathewelt
	isolierende Sichtweise	Zu einem Zeitpunkt legt man keinen Weg zurück, daher gibt es keine Momentangeschwindigkeit. Bewegung findet nur in einem Zeitraum statt.	Die lokalen Änderungen von Weg und Zeit sind Null, daher ist die lokale Änderungsrate auch Null, bzw. der Differenzenquotient wird zu $\frac{0}{0}$.
	einbettende Sichtweise	Wenn man sich bewegt, hat man zu jedem Zeitpunkt der Bewegung eine positive Momentangeschwindigkeit.	Die lokale Änderungsrate ist der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{df}{dx}$.

Tabelle 1: Sichtweisen zum Begriff Momentangeschwindigkeit. Aus Friedrich (2013), S. 32.

Um einen gemeinsamen Begriff der Momentangeschwindigkeit zu erhalten, empfiehlt es sich bereits

⁷¹ Nach Friedrich (2013), S. 31.

im Vorhinein auf diesen Begriff einzugehen. Als eine Möglichkeit zur Klärung des „Begriffsproblems“ verwendet Stefan Götz im Buch „Mathematik 7“ eine Tabelle, in der er den Bruch $\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}}$ für immer kleinere Zeitintervalle berechnet.

zurückgelegte Weglänge Δs	benötigte Zeit Δt	Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$
50m	1s	50m/1s=50m/s
5m	0.1s	5m/0.1s=50m/s
0.5m	0.01s	0.5m/0.01s=50 m/s
...	...	...

Tabelle 2: Berechnung der Geschwindigkeit für immer kleinere Intervalle. Aus Götz (2011), S.51.

Hieraus sieht man sofort, dass sich trotz der Intervallverkleinerung das Verhältnis nicht ändert. Betrachtet man diesen Quotient nun für beliebig kleine Zeitintervalle, erhält man als Grenzwert für den Quotienten $\Delta s/\Delta t$ für $\Delta t \rightarrow 0$ den Wert 50m/s. Diesen Grenzwert - die zugeordnete Geschwindigkeit - bezeichnet man dann als Momentangeschwindigkeit.⁷²

5.2.2 Die momentane Geschwindigkeit und die erste Ableitung:⁷³

Aus dem Physikunterricht ist bereits seit der Sekundarstufe I bekannt, dass sich die Geschwindigkeit eines geradlinig bewegten Körpers berechnen lässt durch:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Das bedeutet, die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke von Δs erhält man mittels Division der Streckenlänge durch die dafür benötigte Zeit. Man kann so aber nichts über die tatsächliche Geschwindigkeit zu einem konkreten Zeitpunkt, zum Beispiel zum Zeitpunkt t_0 sagen.

Man betrachtet nun einen Massenpunkt M , der sich entlang einer geraden Bahn bewegt. Schülerinnen und Schüler können sich den Begriff „Massenpunkt entlang einer Bahn“ als kleinen Punkt mit einer bestimmten Masse vorstellen, der sich entlang eines ausgerollten Maßbandes bewegt. Der aktuelle Aufenthaltsort zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird durch $s(t)$ angegeben. Die Funktion $s: t \rightarrow s(t)$ bezeichnet man als das *Weg-Zeit Gesetz*. Nun soll die Geschwindigkeit von M zum Zeitpunkt t_0

⁷² Vgl. Götz (2011), S.51.

⁷³ Nach Heuser (2009), S. 262-263.

bestimmt werden. Bereits bekannt ist, dass sich die mittlere Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t (wobei $t \neq t_0$) durch den Quotienten

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

bestimmen lässt. Der Wert des Quotienten ist nun aber von den gewählten Zeitpunkten abhängig. Um nun die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu bestimmen, betrachtet man zwei Zeitpunkte t und t_0 , die so knapp beieinander liegen, dass sich die mittleren Geschwindigkeiten $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ nicht mehr ändern.

Dies führt zu folgender Definition der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 :

$$v(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Dieser Ausdruck entspricht aber gerade der Ableitung der Weg-Zeit Funktion im Punkt t_0 ! Damit ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ableitung der Weg-Zeit Funktion $v(t_0) = s'(t_0)$ gefunden.

5.2.3 Einführungsprojekt: Geradlinige gleichförmige Bewegung

Um die Begriffe Geschwindigkeit und gleichförmige Bewegung zu festigen, kann die gleichförmige Bewegung zum Beispiel mit einer Rollfahrbahn im Physikunterricht noch einmal genau unter die Lupe genommen werden. Die Bewegung eines Rollwagens wird dabei zum Beispiel mit Schallsensoren gemessen und damit die Weg-Zeit Funktion aufgenommen. Durch Ableitung dieser Funktion kann die Geschwindigkeits-Zeit Funktion bestimmt werden. Durch Analyse dieser Daten sollen die Schülerinnen und Schüler einen weiteren Zugang zu den Begriffen Weg-Zeit Funktion, Geschwindigkeits-Zeit Funktion sowie zur Differentialrechnung erhalten. Es empfiehlt sich dabei auch, dass die Graphen von den Schülerinnen und Schülern selbst interpretiert und analysiert werden. Der Begriff der Weg-Zeit Funktion kann mit Hilfe der Funktionsweise eines Schallsensors anschaulich erklärt werden. Dabei wird in einem gewissen Zeitintervall der Abstand des Objekts zum Schallsensor durch Abtastung gemessen. Die Weg-Zeit Funktion ergibt sich dann aus dem Abstand des Objekts zum Schallsensor zu genau definierten Zeitpunkten.

Unterrichtsplanung:

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch	Tafel/Literatur	Wiederholung gleichförmige Bewegung
15	Durchführung des Versuchs	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Versuchsmaterialien	
10	Graphische Auswertung, Berechnung der Geschwindigkeits-Zeit Funktion	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Computer + Software	
5	Gemeinsame Zusammenfassung und Wiederholung	Lehrer/Klassengespräch	Tafel	Wiederholung der Begriffe: • gleichförmige Bewegung • Weg-Zeit Funktion • Geschwindigkeits-Zeit Funktion

Physikalischer Input:

1. Newton'sche Axiom: „*Kräftefreie Körper verharren in Ruhe oder bewegen sich geradlinig*

gleichförmig⁷⁴

Für die gleichförmige Bewegung gilt für das

$$\text{Weg-Zeit Gesetz: } s(t) = v_0 * t + s_0.$$

Durch Ableitung nach der Zeit erhält man das

$$\text{Geschwindigkeits-Zeit Gesetz: } v(t) = v_0.$$

Durchführung des Versuchs :

Eine gleichförmige Bewegung erhält man (unter Vernachlässigung sämtlicher Reibungskräfte) durch kurzes Anschieben (Anstupsen) des Fahrzeuges. Der Ort, als Funktion von der Zeit, kann zum Beispiel mit Hilfe eines Schallsensors aufgenommen werden und mit geeigneter Analysesoftware (z.B.: Coach 6) graphisch dargestellt werden. Durch einfache Ableitung dieser Funktion nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeits-Zeit Funktion des Fahrzeugs. Diese sollte bei der gleichförmigen Bewegung natürlich möglichst konstant sein.

Tipp: Die gleichförmige Bewegung eines Fahrzeuges auf der Rollfahrbahn wird durch leichte Schrägstellung der Bahn erreicht, sodass sich Reibungskräfte und Luftwiderstand möglichst aufheben.

Folgende Grafik zeigt die aufgenommen Werte für die geradlinige gleichförmige Bewegung mit einer Rollfahrbahn.

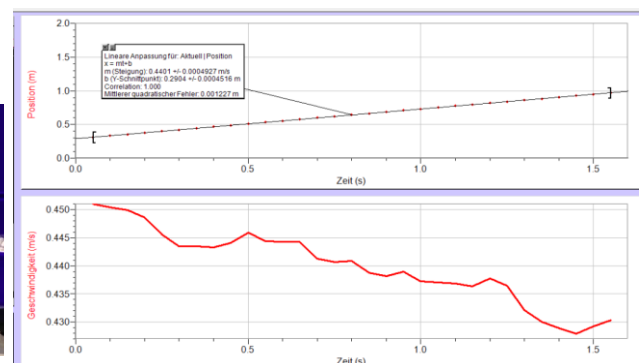


Abbildung 3: Rollfahrbahn (links) und Ergebnisse zur gleichförmigen Bewegung (rechts).

Der obere Graph zeigt den Ort als Funktion von der Zeit. Man erkennt sehr schön den linearen Verlauf des Abstandes vom Schallsensor. Der untere Graph zeigt die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit. Man sieht, dass die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit leicht sinkt. Dies ist natürlich auf die Reibung des Fahrzeuges zurückzuführen. Betrachtet man allerdings die Skalierung, so erkennt man, dass der Rückgang der Geschwindigkeit minimal ist.

⁷⁴ Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 37.

5.3 Die Momentanbeschleunigung

5.3.1 Die Beschleunigung und die zweite Ableitung⁷⁵

Die momentane Geschwindigkeit des in 5.2.2 kennengelernten Massenpunktes ist ebenfalls eine Funktion der Zeit und gegeben durch die Funktion $v = v(t)$.

Aus der Physik ist der Begriff der mittleren Beschleunigung a bekannt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}$$

Das bedeutet, dass sich die mittlere Beschleunigung aus dem Quotienten von Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit berechnen lässt. Völlig analog zu obigem Fall (in 5.2.2) kann also mit dieser Formel die durchschnittliche Beschleunigung über ein bestimmtes Zeitintervall berechnet werden. Gesucht ist aber wieder die Beschleunigung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 , die wir - wieder mit Hilfe der Differentialrechnung - ganz einfach erhalten können:

Um nun die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_0 zu bestimmen, betrachtet man zwei Zeitpunkte t und t_0 , die so knapp beieinander liegen, dass sich die mittleren Beschleunigungen $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ nicht mehr ändern.

Für die momentane Beschleunigung definiert man analog zu den obig angestellten Überlegungen:

$$a(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Das bedeutet also, dass die momentane Beschleunigung durch zweifache Ableitung der Weg-Zeit Funktion beziehungsweise durch einfache Ableitung der Geschwindigkeits-Zeit Funktion erhalten werden kann.

Zusammenfassung

Die Geschwindigkeits-Zeit Funktion berechnet sich aus der ersten Ableitung der Weg-Zeit Funktion, die Beschleunigung $a(t)$ aus der Ableitung der Geschwindigkeits-Zeit Funktion, also der zweiten Ableitung der Weg-Zeit Funktion.

⁷⁵ Nach Heuser (2009), S.263.

5.3.2 Einführungsprojekt: Geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Um diesen Begriff zu festigen, kann wieder das Experiment mit dem Rollwagen verwendet werden. Man betrachtet dabei einen kleinen Rollwagen auf einer Schiene, der sich gleichmäßig beschleunigt bewegt. Die Bewegung kann zum Beispiel mit Hilfe von Schallsensoren aufgenommen werden. Die aufgezeichneten Daten werden von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet.

Bemerkung: Mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms kann die Ableitung auch über verschiedene Näherungsverfahren ermittelt werden.

Unterrichtsplanung:

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch	Tafel/Literatur	Wiederholung gleichmäßig beschleunigte Bewegung
15	Durchführung des Versuchs	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Versuchsmaterialien	
10	Graphische Auswertung, Berechnung der Geschwindigkeits-Zeit Funktion	Gruppenarbeit oder Lehrer/Klassengespräch	Computer + Software	
5	Gemeinsame Zusammenfassung und Wiederholung	Lehrer/Klassengespräch	Tafel	Wiederholung: • Weg-Zeit Gesetz • Geschwindigkeits-Zeit Gesetz

Physikalischer Input:

2. Newton'sche Axiom: „Eine Beschleunigung eines Körpers wird hervorgerufen durch die Kraft

$$\vec{F} = m * \vec{a}.^{76}$$

m bezeichnet dabei die Masse und **a** die Beschleunigung des Körpers.

⁷⁶ Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 38.

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt für das

$$\text{Weg-Zeit Gesetz: } s(t) = \frac{a(t)}{2} * t^2 + v_0 * t + s_0.$$

Durch Ableitung nach der Zeit erhält man das

$$\text{Geschwindigkeits-Zeit Gesetz: } v(t) = a(t) * t + v_0.$$

Durchführung des Versuchs:

Für eine gleichmäßige Beschleunigung wird ein Fallgewicht verwendet, das über eine Umlenkrolle am Wagen befestigt wird. Zum Start wird das Fallgewicht ausgelassen und der Rollwagen beschleunigt. Das Gewichtstück wird so angebracht, dass es den Boden nicht vor Ende der Fahrbahn erreicht. Somit kann eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung über die ganze Fahrbahn aufgenommen werden.

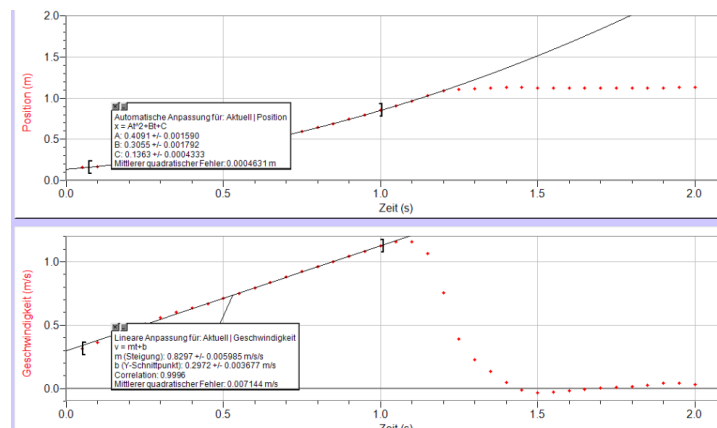


Abbildung 4: Ergebnisse zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

Im oberen Graphen sieht man sehr schön den quadratischen Anstieg des Orts als Funktion nach der Zeit bei einem Fallgewicht von 50g. Der untere Graph zeigt die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. Man erkennt einen linearen Anstieg. Bei diesem Graphen wurde ein Fit im Intervall [0.08 , 1] durchgeführt. Hier sieht man, dass die Graphen nach dem Weg-Zeit Gesetz beziehungsweise dem Geschwindigkeits-Zeit Gesetz verlaufen. Bei einer Durchführung dieses Versuchs wurde eine durchschnittliche Beschleunigung von $\sim 0,83 \text{ m/s}^2$ gemessen.

5.3.3 Einführungsprojekt: Zentripetalbeschleunigung⁷⁷

Zur Festigung und Übung der Handhabung der Begriffe Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung eignet sich für den Unterricht unter anderem ein physikalisches Phänomen, das wahrscheinlich jeder bereits am eigenen Leib verspürt hat. Jeder der schon einmal in einem „Tagada“ oder „Ringelspiel“ in einem Vergnügungspark seine Runden gedreht hat, kennt das Gefühl während der Rotation nach außen gedrückt zu werden.

Unterrichtsplanung:

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Erfahrungsaustausch-Ringelspiel	Lehrer/Klassengespräch	-	Mögliche Einstiegsfrage: Was spürt man im Ringelspiel / Tagada?
5	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch	Tafel/Heft	Zentripetalbeschleunigung
10	Mathematische Beschreibung	Gruppenarbeit Lehrer/Klassengespräch	Tafel/Heft	
5	Berechnung von Geschwindigkeit und Beschleunigung	Gruppenarbeit Lehrer/Klassengespräch	Tafel	Wiederholung: Weg-Zeit Gesetz Geschwindigkeits-Zeit Gesetz

In folgendem Beispiel soll nun die Zentripetalbeschleunigung hergeleitet werden. Dazu ist die Kenntnis über Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung notwendig, sowie die Schreibweise der Parameterform.

Mathematische Beschreibung

Man stelle sich nun die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn von oben betrachtet vor.

⁷⁷ Nach Embacher, Franz: Kreisbewegung, Schwingung und Welle, 2011, URL:

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/PhysikDidaktik/KreisbewegungSchwingungWelle.pdf> [20.9.2014], S. 1-6.

Der Mittelpunkt des Kreises soll - der Einfachheit halber - im Koordinatenursprung liegen. Ein Massenpunkt bewege sich nun auf der Kreisbahn. Die Bewegung findet nun in zwei Dimensionen statt. Um den Überblick zu behalten, verwendet man die Parameterdarstellung, die bereits aus der Vektorrechnung bekannt ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_{\text{Komponente}} \\ y_{\text{Komponente}} \end{pmatrix}$$

Wichtige Begriffe und Zusammenhänge:

$\vec{x}(t)$ beschreibt den Ortsvektor des Massenpunktes,

$\varphi(t)$ bezeichnet den Phasenwinkel,

ω bezeichnet die Kreisfrequenz.

Für den Phasenwinkel gilt: $\varphi(t) \propto t$. Die Kreisfrequenz ω bezeichnet den Proportionalitätsfaktor zwischen Phasenwinkel und Zeit t , sodass $\varphi(t) = \omega * t$ gilt.

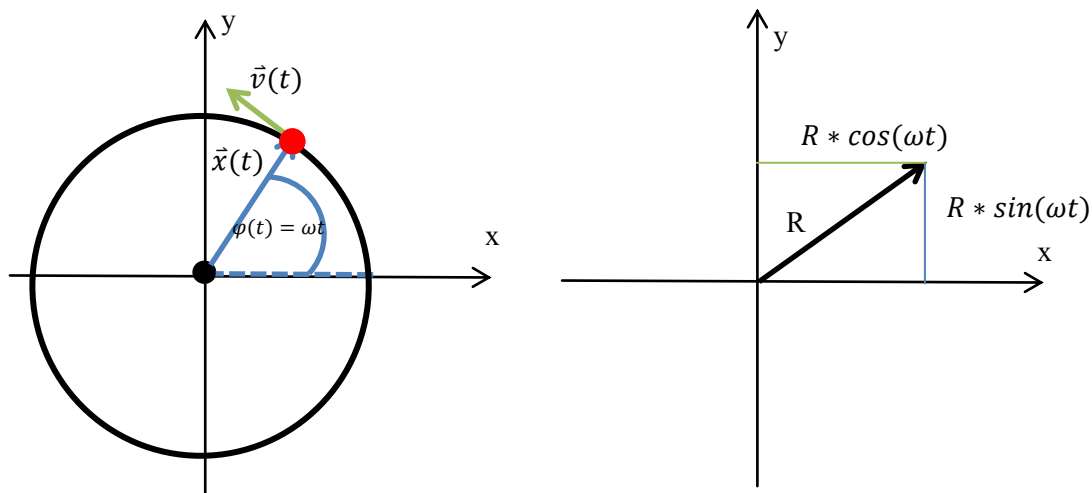


Abbildung 5: Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes auf der Kreisbahn.

Zum Zeitpunkt t befindet sich der Massenpunkt am Punkt

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R * \cos(\varphi(t)) \\ R * \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R * \cos(\omega * t) \\ R * \sin(\omega * t) \end{pmatrix}.$$

Man verwendet hier die Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck. Der Ortsvektor $\vec{x}(t)$ beschreibt dabei die Weg-Zeit Funktion. Um nun die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf dem Kreis zu berechnen, leitet man $\vec{x}(t)$ nach t ab und erhält

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R * \sin(\omega * t) \\ \omega R * \cos(\omega * t) \end{pmatrix} = \vec{v}(t),$$

die Geschwindigkeits-Zeit Funktion.

Weiteres Ableiten dieser Gleichung ergibt die Beschleunigung des Massenpunktes auf der Kreisbahn.

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R * \cos(\omega * t) \\ -\omega^2 R * \sin(\omega * t) \end{pmatrix}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Ausgangsfunktion $\vec{x}(t)$, so kann die Beschleunigung geschrieben werden als

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 * \vec{x}(t).$$

Man erhält hier die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Massenpunktes auf der Kreisbahn - eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Das negative Vorzeichen sagt aus, dass die Beschleunigung in die entgegengesetzte Richtung des Ortsvektors, sprich zum Kreismittelpunkt hin zeigt. Somit ist die Zentripetalbeschleunigung bereits gefunden.

Man betrachtet nun den Betrag der Beschleunigung:

$$a := |\ddot{\vec{x}}(t)| = |\omega^2 * \vec{x}(t)| = \omega^2 * R$$

Völlig analog folgt für den Betrag der Geschwindigkeit auf der Kreisbahn:

$$v := |\dot{\vec{x}}(t)| = |\omega * \vec{x}(t)| = \omega * R$$

Drückt man nun noch die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit aus, so erhält man

$$a = \frac{v^2}{R},$$

eine Formel für den Betrag der Beschleunigung.

Für den Unterricht empfiehlt sich ein Durcharbeiten dieser Einführungsbeispiele in Gruppenarbeit (Gruppengröße 3-4 Personen), beziehungsweise im Klassenverband im Schüler-Lehrer Gespräch.

6. Projekte für den Unterricht

6.0 Einführende Erklärungen und Begriffsdefinitionen

Das folgende Kapitel beinhaltet das Herzstück dieser Diplomarbeit. Zehn Projekte aus unterschiedlichsten physikalischen Themengebieten wurden für den Unterricht aufbereitet und werden nun vorgestellt. Die Aufgaben sind vollständig ausgearbeitet und können als Lehrerblatt (mit Lösungen und Rechenweg) verwendet werden. In Kapitel 7 sind die (zu den Ausarbeitungen kompatiblen) Schülerarbeitsblätter angeführt. Die Projekte sind vor allem für die 12. und 13. Schulstufe in HTL's vorgesehen, können aber auch in der 12. Schulstufe in der AHS bearbeitet werden. Zur besseren Orientierung von Aufwand und Schwierigkeitsgrad ist zu Beginn jeder Ausarbeitung ein eigens entwickeltes Leitsystem mit Schwierigkeitsniveau und Zeitaufwand angegeben. Für eine bessere Abschätzung des Ablaufs ist jeweils eine mögliche Unterrichtsplanung angegeben. Bevor nun die Beispiele vorgestellt werden, sei hier noch eine genaue Begriffsdefinition des Leitsystems angegeben. Das Leitsystem - aus drei übersichtlichen Boxen - liefert einen Überblick über Schwierigkeitsniveau, Projekttyp und Zeitdauer.

Schwierigkeitsniveau

Das Schwierigkeitsniveau ist in drei Kategorien unterteilt, die von 1-3 durchnummeriert sind. Schwierigkeitsniveau 1 beschreibt dabei die leichteste Kategorie und sollte von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können. Schwierigkeitsniveau 3 stellt die anspruchsvollste Kategorie dar. Sie ist vor allem für interessierte Schülerinnen und Schüler gedacht, die sich auch außerhalb des Unterrichts mit den Aufgabenstellungen beschäftigen. Folgende Kriterien werden bei der Einteilung der Niveaus berücksichtigt:

Schwierigkeitsniveau 1

Kriterien:

- Eine einfache Herleitung der Differentialgleichung aus den angegebenen Informationen ist möglich.
- Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt mit elementaren Lösungsmethoden.
- Die Lösung der Aufgaben ist stark geleitet.
- Der Rechenaufwand ist gering.

Schwierigkeitsniveau 2**Kriterien:**

- Eine einfache Herleitung der Differentialgleichung aus den angegebenen Informationen ist möglich.
- Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt mit elementaren Lösungsmethoden.
- Zur Lösung müssen Mathematikfähigkeiten aus unterschiedlichen Bereichen kombiniert werden.
- Der Rechenaufwand ist mittelmäßig.

Schwierigkeitsniveau 3**Kriterien:**

- Die Herleitung der Differentialgleichung erfordert die Verwendung verflochtener physikalischer Zusammenhänge.
- Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt mit aufwändigeren Lösungsmethoden.
- Zur Lösung müssen vielschichtige Substitutionen oder Rechenregeln eingesetzt werden.
- Der Rechenaufwand ist beträchtlich.

Projekttyp

Beim Projekttyp wird ebenfalls zwischen drei verschiedenen Kategorien unterschieden. Auswahlkriterien sind dabei die Zeitdauer, der Aufwand zur Lösung der Projekte sowie die benötigten Materialien für die Durchführung.

Typ**Stundenprojekt****Kriterien:**

- Das Projekt kann in einer einzigen Einheit (45-50 Minuten) bearbeitet werden.

Typ**Mehrstunden-
projekt****Kriterien:**

- Das Projekt kann in einer Doppeleinheit oder in maximal drei Unterrichtseinheiten bearbeitet werden.
- Das Projekt benötigt eine geringe Zahl von Materialien, die in der Schule erhältlich sind.

Typ**Projekt****Kriterien:**

- Das Projekt benötigt mindestens drei Unterrichtseinheiten und beinhaltet auch Arbeitsaufwand außerhalb des Unterrichts.
- Ein physikalischer Versuch benötigt diverse Komponenten und Materialien, wodurch eine Durchführung des Versuchs im Physikunterricht empfehlenswert ist.

Zeitdauer

Die abgeschätzte Zeitdauer ist ebenfalls in einem separaten Kasten angegeben. Diese bezieht sich auf die vorgeschlagene Unterrichtsplanung und soll als Orientierungshilfe dienen. Je nach Klassenstärke und Klassenniveau kann diese Zeitangabe natürlich stark vom angegebenen Wert abweichen.

Symbole

In der Tabelle für einen möglichen Unterrichtsablauf sind Vorschläge für die mögliche Sozialform beziehungsweise für die benötigten Materialien angegeben. Diese werden hier nun näher erläutert.

Sozialform

Lehrer/Klassengespräch... Arbeiten im Klassenverband. Die Lehrkraft bespricht konkrete Themen mit den Schülerinnen und Schülern, um auf ein bestimmtes Ziel hin zu arbeiten.

Gruppenarbeit... Die Gruppenstärke sollte eine maximale Anzahl von vier Personen nicht überschreiten.

Einzelarbeit... Die Bearbeitung der Aufgabe kann/soll in Einzelarbeit erfolgen.

Materialien

Arbeitsblatt... Hier sind die ausgearbeiteten Arbeitsblätter mit physikalischem Input, Aufgabenstellungen, Versuchen und etwaige Zusatzblätter vorgesehen.

Literatur... Zusätzliche (externe) Literatur kann/soll verwendet werden.

Computer... Einsatz eines Computer bzw. eines Computeralgebrasystems (auch ein programmierbarer Taschenrechner mit Graphikfunktion ist möglich).

Experiment... Materialien werden für ein Experiment benötigt. Die genaue Materialienliste ist jeweils auf dem jeweiligen Versuchsblatt angegeben.

(...) Abkürzungen mit Klammern versehen bedeuten, dass diese Komponente den Schülerinnen und Schülern optional angeboten werden kann, aber zur vollständigen Lösung nicht unbedingt benötigt wird.

6.1 Lehr- und Lernziele

Folgende allgemeine Lehr- und Lernziele, die durch die Bearbeitung der Projekte erreicht werden sollen, wurden formuliert:

Grobziele:

- Die Schülerinnen und Schüler können aus physikalischen Kontexten Bewegungsgleichungen bzw. Differentialgleichungen aufstellen.
- Die Schülerinnen und Schüler können die zuvor aufgestellten Bewegungsgleichungen lösen.
- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Fragestellungen durch geeignete Berechnungen zu lösen.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Ergebnisse geeignet interpretieren und Schlüsse aus ihren Berechnungen ziehen.

Feinziele:

- Die Schülerinnen und Schüler können ihre Mathematikfähigkeiten gezielt auf physikalische Probleme anwenden, um diese mittels Differentialgleichungen zu beschreiben.
- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, zu physikalischen Phänomenen passende

vereinfachte Modelle zu bilden, um diese mathematisch beschreiben zu können.

- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Differentialgleichungen mit verschiedenen elementaren Lösungsmethoden zu lösen. Dazu gehören:
 - Methode der getrennten Variablen
 - Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen
 - Variablentransformation
 - Lösungsmethode für exakte Differentialgleichungen
 - Lösungsmethode mit integrierendem Faktor

- Die Schülerinnen und Schüler können, entsprechend der Aufgabenstellungen, Weg-Zeit Funktion bzw. Geschwindigkeits-Zeit Funktion so manipulieren, dass entsprechende Eigenschaften aus den Funktionen gewonnen werden können.

- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Funktionen mit Hilfe von CAS-Software graphisch darzustellen und die Graphen richtig zu interpretieren.

6.2 Ausarbeitung der Projekte

6.2.1 Die Vollbremsung eines Autos

Schwierigkeitsniveau 1
Typ
Stundenprojekt
45 - 50 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer-Klassengespräch oder in Gruppen-/Einzelarbeit
15	Herleitung der Weg-Zeit Funktion und Berechnung des Bremsweges	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Berechnung mit konkreten Werten – Vergleich mit Faustregel	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
15	Betrachtung des Anhalteweges und Einfluss der Reaktionszeit Analyse mit verschiedenen Parametern - Vergleich mit Faustregel	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit Lehrer/Klassengespräch	Arbeitsblatt Computer	
	Zusammenfassung und Diskussion	Lehrer/Klassengespräch		

Physikalischer Input⁷⁸

Während der Fahrt :

F_m ...Motorkraft,
 F_r ... Reibungskraft (Luftwiderstand, Rollwiderstand)
 F_a ... Kraft vom Asphalt auf das Auto,
 F_g ... Kraft vom Auto auf den Asphalt.

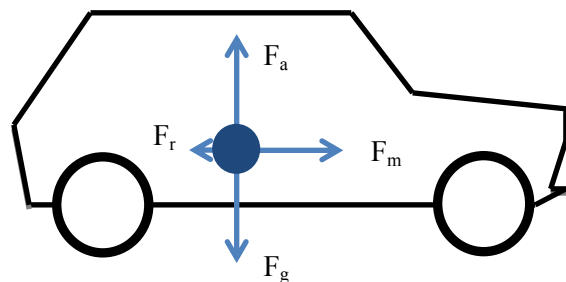


Abbildung 6: Kräfte auf ein Auto während der Fahrt.

⁷⁸ Informationen zum physikalischen Input nach Heuser(2009), S.333.

Vollbremsung:

F_b ... Reibungskraft beim Bremsen,

F_a ... Kraft vom Asphalt auf das Auto,

F_g ... Kraft vom Auto auf den Asphalt.

Bei der Vollbremsung wird die Kupplung betätigt, um die Motorkraft vollständig wegzunehmen. Das Auto wird verzögert. Alle zusätzlichen Reibungskräfte (Luftwiderstand...) werden hier vernachlässigt.

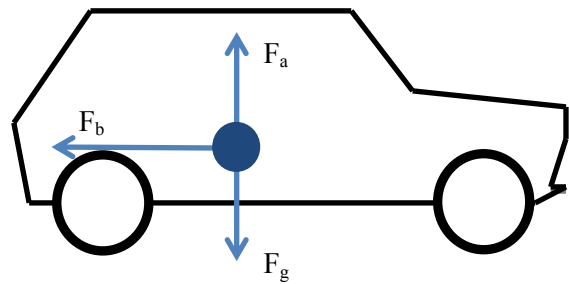


Abbildung 7: Kräfte auf ein Auto bei Vollbremsung (vereinfacht).

Die **Reibungskraft beim Bremsen** F_b bei blockierenden Rädern ist von der Kraft F_g , mit der Reifen und Asphalt aufeinander gedrückt werden sowie vom Reibungskoeffizienten abhängig.

Für die Reibungskraft gilt:

$$F_b = \mu * F_g$$

μ ist der Reibungskoeffizient und liegt üblicherweise zwischen ca.0.4 und ca.0.8 für Reifen auf Asphalt.⁷⁹ Dieser ist von den Oberflächeneigenschaften der Reifen sowie des Asphalts abhängig.

Wichtige Begriffe:

Der **Bremsweg** ist jener Weg, den ein Auto vom Beginn des Bremsprozesses bis zum Stillstand zurücklegt.

g ... Gravitationsbeschleunigung $\sim 9.8 \text{ m/s}^2$

v_0 ...Ausgangsgeschwindigkeit vor dem Bremsbeginn (in m/s)

$F = m * a = m * x''(t)$ in N (Newton)

Allgemeine Annahmen: Luftwiderstand wird vernachlässigt, konstante Bremskraft während des gesamten Bremsvorgangs, geradlinige Bewegung in x -Richtung.

Herleitung der Differentialgleichung⁸⁰

Für die (vereinfachte) Bewegungsgleichung eines Autos bei einer Vollbremsung mit blockierenden Rädern gilt damit:

$$m * x''(t) = \mu * F_g = F_b$$

⁷⁹ Daten aus: URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Haftreibung.html>[5.6.2014].

⁸⁰ Herleitung der Differentialgleichung und Berechnung des Bremsweges nach Heuser(2009), S.333.

Mit $F_g = -m * g$ folgt $m * x''(t) = -\mu * m * g$ und daher

$$v'(t) = x''(t) = -\mu * g.$$

Damit ist die (vereinfachte) Bewegungsgleichung bereits gefunden.

Lösung der Differentialgleichung

Geschwindigkeits-Zeit Gesetz:

Das negative Vorzeichen drückt aus, dass die Kraft gegen die Bewegungsrichtung zeigt, das Auto also verlangsamt wird.

Durch Integration der hergeleiteten Bewegungsgleichung nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t :

$$v(t) = -\mu * g * t + C$$

Mit $v(0) = v_0$ folgt für die Integrationskonstante $v(0) = v_0 = C$ und damit ist der Geschwindigkeitsverlauf zum Zeitpunkt t nach Bremsbeginn:

$$v(t) = v_0 - \mu * g * t$$

Weg-Zeit Gesetz:

Nun wird noch der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit der Zeit betrachtet:

Durch Integration der Geschwindigkeits-Zeit Funktion nach t erhält man

$$x(t) = v_0 * t - \mu * g * \frac{t^2}{2} + D.$$

Mit $x(0) = 0$ folgt für die Integrationskonstante $D = 0$ und damit für $x(t)$:

$$x(t) = v_0 * t - \mu * g * \frac{t^2}{2}$$

Analyse und Berechnung des Bremsweges

Nun wird die Zeit T bis zum Stillstand ($v(T) = 0$) des Autos berechnet.

Mit obiger Gleichung für die Geschwindigkeit folgt:

$$v(T) = 0 = v_0 - \mu * g * T \quad \text{und damit ist } T = \frac{v_0}{\mu * g} \quad \text{die Zeitdauer bis zum Stillstand.}$$

T nun in die Weg-Zeit Funktion eingesetzt ergibt:

$$x(T) = \frac{v_0^2}{\mu * g} - \mu * g * \frac{1}{2} * \left(\frac{v_0}{\mu * g} \right)^2$$

Durch kürzen von $\mu * g$ erhält man

$$x(T) = \frac{v_0^2}{\mu * g} - \frac{1}{2} * \frac{v_0^2}{\mu * g} = \frac{1}{2} * \frac{v_0^2}{\mu * g}.$$

Der Bremsweg B ist also gegeben durch

$$B = \frac{v_0^2}{2 * \mu * g}.$$

Zahlenbeispiel

- Geschwindigkeit $v_0 = 100 \text{ km/h} = 27.7 \text{ m/s}$
- Reibungskoeffizient $\mu = 0.4$

→ $B \sim 97.9 \text{ m}$

Vergleich mit der Faustformel aus der Fahrschule⁸¹

Faustformel aus der Fahrschule:

$$\text{Bremsweg} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} * \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10}$$

Bei der Faustformel wird die Geschwindigkeit in km/h angegeben, bei der oben hergeleiteten Formel jedoch in m/s. Das Ergebnis beider Formeln wird in Metern angegeben.

$$B = \frac{v_0 * v_0}{2 * 0,5 * 9,8} \quad \text{und} \quad B_{\text{Fahrschule}} = \frac{v_0 * v_0}{10 * 10} \approx 3,6 * 3,6$$

Das Produkt des Divisors bei der oben hergeleiteten Formel ist 9,8 (≈ 10). Das Produkt des Divisors in der Faustformel setzt sich nun einerseits aus diesem Faktor sowie dem Faktor zur Umrechnung von km/h in m/s ($3,6 * 3,6 \approx 10$) zusammen. Somit ist der direkte Zusammenhang hergestellt.

Anhalteweg

$$\text{Anhalteweg} = \text{Reaktionsweg} + \text{Bremsweg}$$

Der Reaktionsweg ist der zurückgelegte Weg bis der Fahrer/die Fahrerin den Bremsvorgang einleitet.

Unter Annahme, dass die Geschwindigkeit des Fahrzeugs vom Erkennen der Gefahr bis zur Einleitung

⁸¹ Faustformel und Idee nach Heuser (2009), S. 333.

des Bremsvorgangs konstant war, gilt für den Reaktionsweg bei einer Reaktionszeit T_R :

$$s_R = v_0 * T_R$$

Für den Anhalteweg gilt dann

$$A = s_R + B.$$

Zahlenbeispiel:

- Geschwindigkeit $v_0 = 100 \text{ km/h} = 27.7 \text{ m/s}$
- Reibungskoeffizient $\mu = 0.4$
- Reaktionszeit $T_R = 1 \text{ s}$
- Bremsweg $B \sim 97.9 \text{ m}$

$$A = 27.7 \text{ m} + 97.9 \text{ m} = 125.6 \text{ m}$$

Die Faustformel⁸² aus der Fahrschule für den Anhalteweg ist gegeben durch:

$$A = \frac{3 * v}{10} + \frac{v^2}{100}$$

Der quadratische Term ist bereits aus dem Vergleich mit der Faustformel für den Bremsweg bekannt.

Der lineare Term bezeichnet den Reaktionsweg. Der Anhalteweg selbst ist in Metern angegeben. Die Geschwindigkeit wird wie beim Bremsweg in km/h eingesetzt. Das Produkt des Divisors in der Faustformel setzt sich aus dem Faktor 3 und dem Faktor 3,6 - zur Umrechnung von km/h in m/s - ($3,6 * 3 \approx 10$) zusammen. Für den Term des Reaktionswegs gilt damit also:

$$R = \frac{3 * v}{10} \approx \frac{3 * v}{3 * 3,6}$$

Der Quotient $\frac{3}{3}$ bezeichnet die Reaktionszeit von rund einer Sekunde. Damit ist der Zusammenhang zwischen der hergeleiteten Formel für den Anhalteweg und der Faustformel aus der Fahrschule hergestellt.

⁸² Faustformel aus : Embacher, Franz: Was ist eine Gleichung?, URL: http://www.mathe-online.at/skripten/gleich/gleich_was_ist_eine_gleichung.pdf [16.9.2014], S.3.

6.2.2 Abkühlprozesse

Schwierigkeitsniveau 1
Typ
Stundenprojekt
50 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Physikalischer Input - Newton'sches Abkühlungsgesetz	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer-Klassengespräch oder in Gruppen-/Einzelarbeit
10	Herleitung und Berechnung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Berechnung des Kaffeeproblems	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
15	Experimentelle Bestimmung des Kaffee-Problems	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer Experiment	
10	Allgemeine Auflösung und allgemeine Lösung	Lehrer/Klassengespräch	Arbeitsblatt	im Lehrer-Klassengespräch

Abkühlungsprozesse können sehr einfach mithilfe von Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Damit lassen sich eine Reihe verschiedener Anwendungen analysieren. Folgendes Arbeitsblatt geht der Frage nach, welcher Kaffee schneller abkühlt, entweder jener mit Milch, der 10 Minuten stengelassen wird, oder derjenige, der erst 10 Minuten abkühlt und dem erst dann Milch hinzugefügt wird.

Physikalischer Input

Sei $T(t)$ die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt t und T_u die Umgebungstemperatur. Da hier bei diesem Projekt im speziellen Abkühlungsprozesse betrachtet werden, wird die Annahme getroffen, dass stets $T(t) > T_u$ gilt.

Newton'sches Abkühlungsgesetz⁸³

Das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreibt den Temperatúrausgleich zwischen einem Körper und seiner Umgebung. Für die Änderung der Temperatur des Körpers mit der Zeit Δt gilt

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -k(T(t) - T_u).$$

Das bedeutet, dass die Änderung der Temperatur mit der Zeit proportional zum Temperaturunterschied zwischen Körper und Umgebungstemperatur ist. Die vom Material abhängige Proportionalitätskonstante k bezeichnet man üblicherweise auch als Abkühlkonstante.

Herleitung der Differentialgleichung

Für infinitesimale Zeitänderungen erhält man eine Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = \frac{dT(t)}{dt} = T'(t) = -k(T(t) - T_u)$$

Lösung der Differentialgleichung⁸⁴

Den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers, nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz, erhält man durch die Lösung der oben aufgestellten Differentialgleichung. Zusätzlich werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

1. Die Umgebungstemperatur ist stets konstant $T_u = \text{const.}$
2. Die Temperatur des Körpers zu Beginn sei $T(0) = T_a$

Bemerkung: $T(t) = T_u$ ist bereits eine Lösung der Differentialgleichung.

Sei $T(t) \neq T_u$:

Die Differentialgleichung $\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_u)$ kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Dazu wird die Differentialgleichung umgeformt:

⁸³ Abgeleitet aus: Schwaiger, Jens: Beilage zur Vorlesung Differentialgleichungen für USW ab SS 2001, URL: <http://www.uni-graz.at/~schwaige/usw.pdf> [22.07.2014], S. 1.

⁸⁴ Allgemeine Annahmen und Lösung nach: Bernstein, Swanhild: Der Kaffee ist zu heiß- das Newtonsche Abkühlungsgesetz, URL: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~bernstei/HMI/mNewton.pdf> [22.7.2014], S. 4-5.

$$\frac{dT(t)}{(T(t) - T_u)} = -k dt$$

Durch Integration erhält man:

$$\int \frac{dT(t)}{(T(t) - T_u)} = - \int k dt$$

$$\ln|T(t) - T_u| = -k * t + D$$

Anwendung der Exponentialfunktion ergibt:

$$|T(t) - T_u| = e^{-k*t+D} = e^{-k*t} * C$$

wobei $C := e^D$ definiert wurde.

Wegen $T(t) > T_u$ kann der Betrag aufgelöst werden. Durch Umformung erhält man

$$T(t) = T_u + C * e^{-k*t}$$

Die Konstante C wird durch Betrachtung der Anfangsbedingung $T(0) = T_a$ bestimmt. T_a ist dabei die Ausgangstemperatur des abkühlenden Stoffes.

$$T(0) = T_a = T_u + C * 1$$

Und daraus folgt für die Integrationskonstante C :

$$T_a - T_u = C$$

und damit für die Lösung der Differentialgleichung:

$$T(t) = T_u + (T_a - T_u) * e^{-k*t}$$

Ein typisches Alltagsbeispiel ist der Temperaturverlauf bei der Abkühlung eines Bügeleisens. Die Metallplatte kühlt nach dem Ausschalten erst sehr rasch ab, nähert sich aber dann immer langsamer an die Umgebungstemperatur an.

Bemerkung: Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich die Temperatur eines abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur an. Betrachtet man die Temperaturfunktion so erkennt man, dass dies sowohl für $T > T_u$ als auch für $T < T_u$ gilt.

Das Kaffee-Problem⁸⁵

Ist nun jener Kaffee kühler, dem gleich Milch beigefügt wird, oder doch jener Kaffee, dem erst nach 10 Minuten die Milch beigemengt wird?

Tipp: Um die Motivation zur Berechnung in der Klasse zu steigern, empfiehlt sich bei dieser Aufgabe zuerst eine Abstimmung in der Klasse!

Sei nun

T_u ...die Umgebungstemperatur

T_a ...die Ausgangstemperatur des Kaffees (vor der Milchbeimengung)

T_m ...die Temperatur der Milch (aus dem Kühlschrank sodass $T_m < T_u$)

T_g ...die resultierende Temperatur des Gemischs

$m * C_M$...das Produkt aus Masse und spezifischer Wärmekapazität der Milch

$n * C_K$...das Produkt aus Masse und spezifischer Wärmekapazität des Kaffees

Für die Temperatur des Kaffee-Milch Gemisches verwendet man die Formel

$$T_g = \frac{n * C_K * T_a + m * C_M * T_m}{n * C_K + m * C_M}$$

Unter der Annahme, dass die spezifischen Wärmekapazitäten von Kaffee und Milch ident ist (d.h. $C_K = C_M = C$), gilt für obige Formel:

$$T_g = \frac{C * (n * T_a + m * T_m)}{C * (n + m)} = \frac{n * T_a + m * T_m}{n + m}$$

Nun werden die beiden Fälle mathematisch betrachtet:

1. Fall: In den Kaffee wird sofort eine bestimmte Menge Milch beigemengt:

Für die Temperatur des Kaffee-Milch-Gemischs gilt dann zu Beginn:

⁸⁵ Nach: Bernstein, Swanhild: Der Kaffee ist zu heiß- das Newtonsche Abkühlungsgesetz, URL: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~bernstei/HMI/mNewton.pdf> [22.7.2014], S. 5-6.

$$T_g(0) = \frac{n * T_a + m * T_m}{n + m}$$

Setzt man nun für die Zeit nach 10 Minuten (t_{10}) ein, so erhält man für die Temperatur:

$$T_g(t_{10}) = T_u + \left(\frac{n * T_a + m * T_m}{n + m} - T_u \right) * e^{-k * t_{10}}$$

2. Fall: Der Kaffee steht 10 Minuten und erst dann wird Milch beigemischt:

$$T_g(t_{10}) = \frac{n(T_u + (T_a - T_u) * e^{-k * t_{10}}) + m * T_m}{n + m}$$

Zahlenbeispiel⁸⁶

$$\begin{aligned} T_u &= 22^\circ\text{C}, & T_a &= 80^\circ\text{C}, & T_m &= 5^\circ\text{C}, & n &= 200 \text{ ml}, \\ m &= 30 \text{ ml}, & k &= 0.001/\text{s}, & t &= 600 \text{ s}, \end{aligned}$$

Damit folgt für die Temperatur im Fall 1 (sofortige Beimischung):

$$T_g(t_{10}) = 22 + \left(\frac{200 * 80 + 30 * 5}{230} - 22 \right) * e^{-k * t_{10}} = 22 + \frac{1109}{23} * e^{-0.001 * 600} \approx 48.5^\circ\text{C}$$

Für die Temperatur im Fall 2 (Beimischung nach 10 Minuten):

$$T_g(t_{10}) = \frac{200(22 + (80 - 22) * e^{-k * t_{10}}) + 30 * 5}{230} = \frac{455}{23} + \frac{1160}{23} * e^{-0.001 * 600} \approx 47.5^\circ\text{C}$$

Daraus folgt: Der Kaffee, bei dem die Milch gleich am Beginn beigemischt wird, ist wärmer als jener

⁸⁶ Grobe Abschätzung für die Abkühlkonstante k nach URL: <http://www.schulphysik.de/physik/cooling/newcoo1.htm> [22.07.2014].

Kaffee, bei dem die Milch erst nach 10 Minuten hinzugegeben wird. Die folgende Grafik zeigt, dass der Kaffee aus Fall 1 auch in weiterer Folge eine höhere Temperatur besitzt als der Kaffee aus Fall 2.

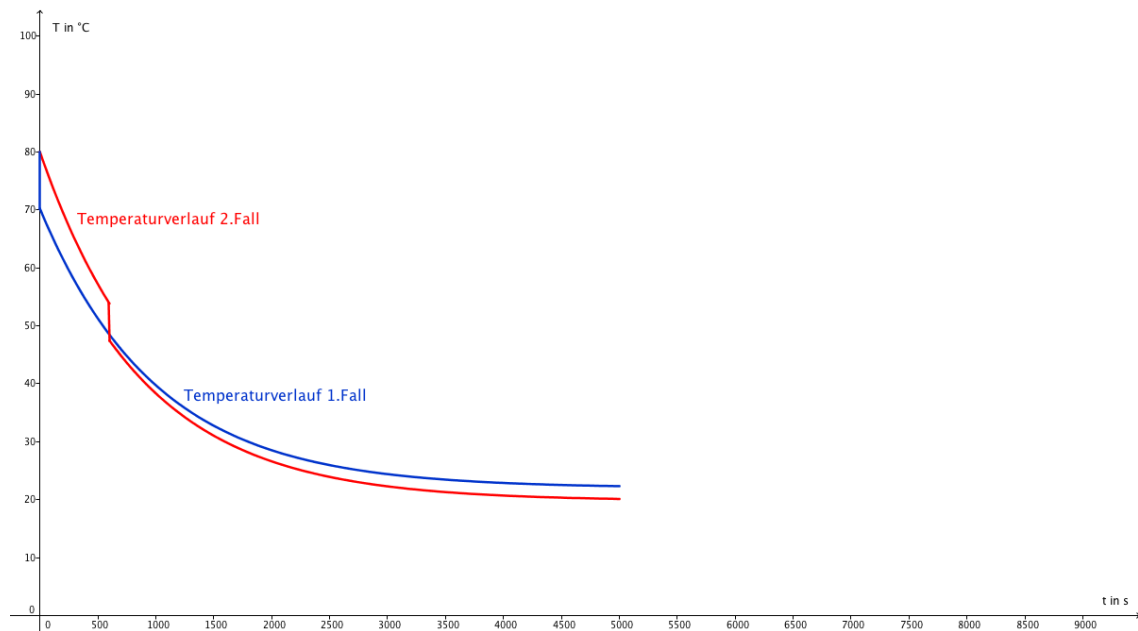


Abbildung 8: Temperaturverlauf für beide Fälle.

Versuch Bestimmung des Temperaturverlaufs

Benötigte Materialien

- 2 Tassen Kaffee (je 200ml)
- Milch 2 × 30ml
- Temperaturmessgerät
- Stoppuhr

Durchführung

Der Kaffee soll in möglichst gleiche Kaffeetassen eingefüllt werden. Danach wird in einer Tasse sofort 30ml Milch beigemischt. Im Anschluss wird mit Hilfe eines Temperaturmessgerätes die Temperatur in beiden Tassen gleichzeitig gemessen. Es empfiehlt sich eine Temperaturmessung alle 30 Sekunden. Die Werte können entweder notiert, oder (wenn vorhanden) gleich mit dem Computer aufgenommen werden. Nach 10 Minuten wird auch in der zweiten Kaffeetasse Milch beigemischt. In beiden Kaffeetassen wird nun die Temperatur gemessen und verglichen.

6.2.3 Radioaktiver Zerfall

Schwierigkeitsniveau 1
Typ
Stundenprojekt
50 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer- Klassengespräch oder in Gruppen- /Einzelarbeit
5	Herleitung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Lösung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Berechnung der Zerfallskonstante von ^{14}C Darstellung des Zerfallsverlauf von ^{14}C	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	
10	Berechnung des Alters von Ötzi	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	

Physikalischer Input

Radioaktiver Zerfall

Unter einem radioaktiven Zerfall versteht man die spontane Umwandlung von instabilen Atomkernen in andere Atomkerne unter Abgabe von Strahlung. 1896 wurde das Phänomen von Antoine Henri Becquerel entdeckt. Der Begriff der Radioaktivität wurde 2 Jahre später von Pierre und Marie Curie eingeführt. Der Zeitpunkt, wann sich ein Kern in einen anderen Kern umwandelt (dh. zerfällt), ist völlig zufällig. Für jede Substanz gibt es eine Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Neben dem künstlich herbeigeführten radioaktiven Zerfall bei der Kernspaltung gibt es aber auch noch eine Vielzahl von natürlichen Zerfällen in der Natur. Sie wird unter anderem zur Altersbestimmung bei der

Kohlenstoff-14 Methode (^{14}C Methode) verwendet.⁸⁷

Herleitung der Differentialgleichung⁸⁸

Die Anzahl der Kerne, die sich pro Zeiteinheit umwandeln, ist proportional zur Gesamtzahl $N(t)$ der instabilen Atomkerne. Die Zerfallskonstante λ bezeichnet dabei den für jedes Material charakteristischen Proportionalitätsfaktor.

Für die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenen Kerne gilt:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda * N(t)$$

Durch Bildung des Grenzwertes erhält man die Grundgleichung für den radioaktiven Zerfall

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda * N(t).$$

Der Vorgang des radioaktiven Zerfalls lässt sich also durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben:

$$N'(t) = -\lambda * N(t)$$

$N(t)$ beschreibt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne zum Zeitpunkt t . Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei N_0 die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne des radioaktiven Ausgangsmaterials.

Lösung der Differentialgleichung

Diese Differentialgleichung kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda * dt$$

Mit Integration folgt:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda * \int dt$$

$$\ln|N(t)| = -\lambda * t + D$$

⁸⁷ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Radioaktivität> [5.6.2014].

⁸⁸ Allgemeine Annahme nach: Hempel, Thomas: Differentialgleichungen – Ausgewählte Probleme aus der Physik, URL: http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf [29.05.2014], S. 1.

Wegen $N(t) > 0 \forall t > 0$ kann der Betrag aufgelöst werden. Anwenden der Exponentialfunktion liefert:

$$N(t) = e^{-\lambda * t + D} = e^{-\lambda * t} * C$$

wobei $C := e^D$ gilt.

Mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden:

$$N_0 = 1 * C = C$$

Damit gilt für die Lösung der Differentialgleichung:

$$N(t) = N_0 * e^{-\lambda * t}$$

Berechnung der Zerfallskonstante für C-14 aus der Halbwertszeit

Die Halbwertszeit ist für jedes radioaktive Material eine charakteristische Zeitdauer, die angibt wie lange es dauert, bis die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen ist.⁸⁹ Mit Hilfe der Halbwertszeit kann die Zerfallskonstante (λ) bestimmt werden.

Die C-14 Methode:

Die C-14 Methode dient zur Altersbestimmung von archäologischen Funden. Durch kosmische Strahlung, die unter anderem Neutronen mit extrem hoher Energie enthält, wird in der oberen Atmosphäre ^{14}N (Stickstoffkerne mit 7 Protonen und 7 Neutronen) umgewandelt in ^{14}C (6 Protonen und 8 Neutronen). ^{14}C ist instabil und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Durch stetigen Einfall der kosmischen Strahlung ist der ^{14}C Gehalt in der Atmosphäre nahezu konstant. Lebewesen, aber auch Pflanzen, nehmen ständig neues ^{14}C auf (durch Nahrung oder Atmung) sodass der ^{14}C Gehalt im Körper konstant bleibt. Stirbt das Lebewesen oder die Pflanze, so wird kein neues ^{14}C in den Körper zugeführt. Das ^{14}C im Körper zerfällt und seine Konzentration nimmt über die Jahrtausende immer weiter ab. Werden nun Überreste des Lebewesens ausgegraben, so kann über die Konzentration von ^{14}C im Körper das Alter des Lebewesens bestimmt werden.⁹⁰

Berechnung der Zerfallskonstante für ^{14}C :

Die Halbwertszeit ist jene Zeit, bis die Hälfte der Atomkerne des radioaktiven Materials zerfallen ist. Eingesetzt in die Lösung der Differentialgleichung erhält man daher:

⁸⁹ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Halbwertszeit>[5.6.2014].

⁹⁰ Vgl. URL: <http://www.weltderphysik.de/thema/alltag/c-14-methode/>[5.6.2014].

$$\frac{N_0}{2} = N_0 * e^{-\lambda * 5730}$$

Division durch N_0 und Anwendung der Logarithmusfunktion

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\lambda * 5730}),$$

liefert: $-0,693 = -\lambda * 5730.$

Durch Umformung erhält man die Zerfallskonstante:

$$\lambda \approx 0,000121/\text{Jahr}$$

Bestimmung des Alters eines berühmten alten Österreichers: Ötzi

Bei der Untersuchung der 1991 gefundenen Mumie konnte bestimmt werden, dass etwa 47%⁹¹ des ^{14}C bereits zerfallen waren.⁹²

Zur Bestimmung des Alters geht man wieder von der Lösung der Differentialgleichung aus:

$$N(t) = N_0 * e^{-\lambda * t}$$

Des Weiteren verwendet man nun die oben berechnete Zerfallskonstante für ^{14}C .

Es gilt dann:

$$0,53 * N_0 = N_0 * e^{-0.000121 * t}$$

Kürzen von N_0 und Anwendung der Logarithmusfunktion liefert:

$$\ln(0,53) = -0.000121 * t$$

$$\frac{0.6348}{0.000121} \approx 5246 \text{ Jahre}$$

Wissenschaftler der Universität Innsbruck schätzen das Alter von Ötzi auf 5300 Jahre.⁹³ Damit stimmt der oben berechnete Wert sehr gut mit den Daten der Universität Innsbruck überein.

⁹¹ Daten aus URL: <http://www.jagemann-net.de/biologie/bio13/evolution/C-14/c14.php> [5.6.2014].

⁹² Vgl. URL: http://www.uibk.ac.at/forschung/alpine_vorzeit/ [5.6.2014].

⁹³ Nach URL: http://www.uibk.ac.at/forschung/alpine_vorzeit/ [5.6.2014].

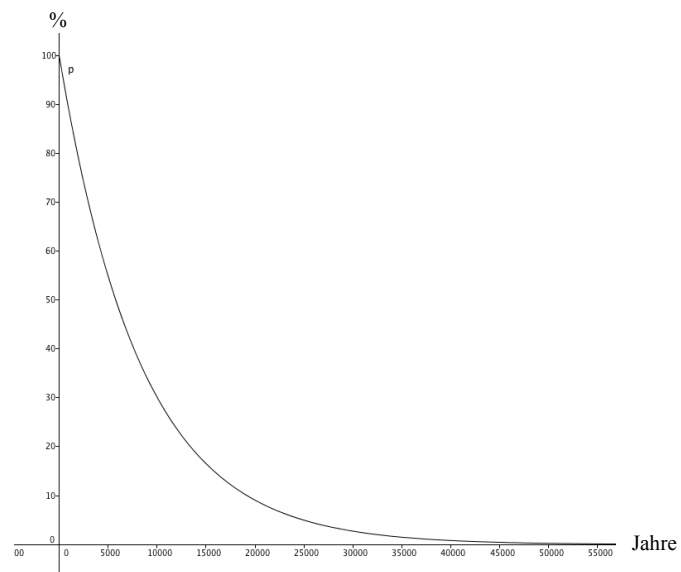


Abbildung 9 : Zerfallsverlauf von ^{14}C .

6.2.4 Der freie Fall ohne Luftreibung

Schwierigkeitsniveau 1
Typ
Stundenprojekt
50 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input und Wiederholung Zusammenhang Weg - Geschwindigkeit - Beschleunigung	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer- Klassengespräch oder in Gruppen- /Einzelarbeit
10	Aufstellung der Bewegungsgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Berechnung der Differentialgleichung und graphische Darstellung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Berechnung der Textaufgabe	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Versuch Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Experiment (Literatur)	

Physikalischer Input⁹⁴

Gravitationsgesetz und Fallgesetz

Das Newton'sche Gravitationsgesetz beschreibt die Anziehungskraft zweier Massen (z.B. Mensch und Erde) gemäß

$$F_g = G * \frac{M*m}{r^2}.$$

M ... Masse der Erde $5,974 * 10^{24}$ kg,

⁹⁴Nach: Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL: <http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [3.4.2014], S. 1.

r ...mittlerer Radius der Erde 6370km,

G ... Gravitationskonstante $G = 6,674 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg*s^2}$.

Mit Hilfe des zweiten Newton'schen Axioms ($F = m * a$) folgt

$$m * a = G * \frac{M*m}{r^2} = F.$$

Angeblich soll Newton durch einen vom Baum fallenden Apfel zur Herleitung dieses Gesetzes inspiriert worden sein.

Daraus erhält man durch kürzen der Masse m

$$a = G * \frac{M}{r^2}.$$

Dies entspricht der Beschleunigung eines fallenden Körpers auf den Erdboden ohne Berücksichtigung der Luftreibung. Setzt man hier nun die Werte für Gravitationskonstante, Masse und Radius der Erde (für bodennahe Experimente) ein, so erhält man einen Wert für die Gravitationsbeschleunigung a . Üblicherweise bezeichnet man die Gravitationsbeschleunigung mit dem Kleinbuchstaben g (vom englischsprachigen *gravity*).

Bemerkung: Die Gravitationsbeschleunigung g hängt vom Radius r und von der Erdrotation (Zentrifugalkraft) ab. Daher ist der Wert für die Gravitationsbeschleunigung g nicht überall auf der Erde gleich groß. Für die folgenden Berechnungen wird dies jedoch vernachlässigt und eine konstante Gravitationsbeschleunigung von $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ angenommen.

Mathematische Analyse⁹⁵

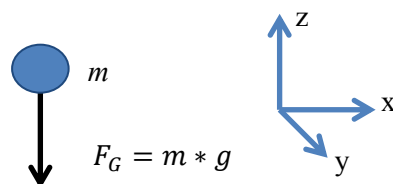


Abbildung 10: Gravitationskraft auf eine Masse und Koordinatensystem zur Orientierung.

Zum Einstieg wird der freie Fall ohne Luftreibung betrachtet. Man verwendet folgende allgemeine Annahmen:

⁹⁵ Herleitung und Lösung nach Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL: <http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [3.4.2014], S. 1-3.

1. Es existiert eine Anziehungskraft der Erde auf den fallenden Körper gemäß $F_G = m * g$.
2. Die Fallrichtung sei senkrecht zur Erdoberfläche in z-Richtung.

Damit gilt:

$$z'(0) = v_0 \text{ und } z(0) = 0$$

Herleitung der Differentialgleichung

Auf den Körper wirkt (nach obigen Annahmen) also nur die Schwerkraft gemäß

$$m * z''(t) = m * g = F_G.$$

Kürzen der Masse ergibt

$$z''(t) = g.$$

Damit ist die Differentialgleichung für den freien Fall ohne Luftreibung bereits gefunden.

Bemerkung: Diese unscheinbar wirkende Gleichung sagt etwas ganz Erstaunliches aus: Im Fall ohne Luftreibung ist die Beschleunigung eines fallenden Körpers unabhängig von der Masse des Körpers. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes bedeutet das, dass eine Feder genau so schnell zu Boden fällt wie ein schwerer Stein.

Lösung der Differentialgleichung

Zur Lösung der Differentialgleichung muss die Weg-Zeit Funktion berechnet werden. Bei dieser sehr einfachen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann dies durch zweimaliges integrieren erfolgen. Dies folgt direkt aus dem bekannten Zusammenhang

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}.$$

Geschwindigkeits-Zeit Funktion

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, muss die Beschleunigung nach der Zeit integriert werden.

Mit $\frac{dv(t)}{dt} = g$ erhält man durch Integration nach t

$$v(t) = g * t + C.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Ausgangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$. Daraus erhält man für die Integrationskonstante: $v(0) = v_0 = g * 0 + C$ und daher folgt $C = v_0$.

Die Geschwindigkeits-Zeit Funktion ist damit gegeben durch

$$v(t) = v_0 + g * t.$$

Weg-Zeit Funktion

Um nun die Weg-Zeit Funktion zu berechnen, muss die Geschwindigkeits-Zeit Funktion nach der Zeit integriert werden. Mit $\frac{dz(t)}{dt} = v(t)$ erhält man durch Integration nach t

$$z(t) = v_0 * t + \frac{1}{2} g * t^2 + C$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ möge $z(0) = z_0$ gelten. Damit folgt für die Integrationskonstante:

$$z(0) = z_0 = 0 + 0 + C \text{ und damit } C = z_0 .$$

Die Weg-Zeit Funktion ist somit gegeben durch

$$z(t) = z_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} g * t^2 .$$

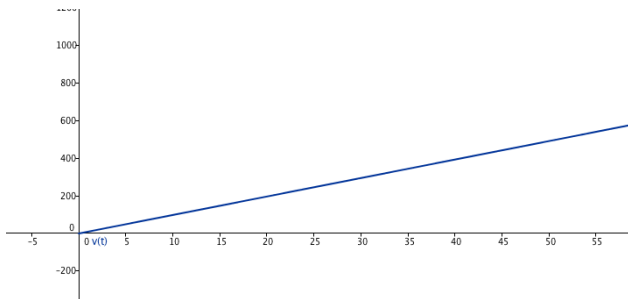


Abbildung 11: Die Geschwindigkeits-Zeit Funktion: ein linearer Verlauf.

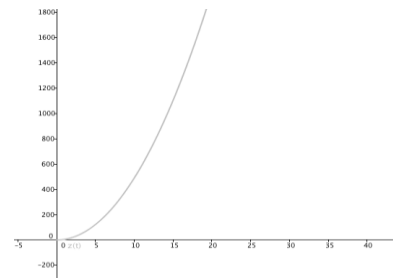


Abbildung 12: Die Weg-Zeit Funktion: man erkennt sehr schön die quadratische Abhängigkeit von t .

Beispielaufgabe

Aus einem Fenster eines Hauses wird aus einer Höhe von 10m eine Kugel mit der Masse von 0.5kg fallen gelassen. Berechnen Sie, unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, die Geschwindigkeit, mit der der Ball auf der Erde auftrifft sowie die Zeitdauer des freien Falls. Verwenden Sie die oben hergeleiteten Gleichungen für Geschwindigkeit und Weg.

Lösung

Anfangsbedingungen: $h = 10\text{m}$; $g = 9.81\text{m/s}^2$; $v_0 = 0\text{m/s}$; $z_0 = 0\text{m/s}$;

1. Berechnung der Falldauer:

Die Weg-Zeit Funktion ist gegeben durch

$$z(t) = z_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} g * t^2.$$

Mit den Anfangsbedingungen und den bekannten Werten gilt dann $z(t) = 0 + 0 + 4.905 * t^2$.

Der Ball wird aus 10m abgeworfen. Dies in obige Gleichung eingesetzt und nach t umgeformt ergibt bereits die Falldauer.

$$10 = 4.905 * t^2$$

Umformung ergibt:

$$t = \sqrt{\frac{10}{4.905}} \approx 1.43 \text{ s}$$

Nach etwa 1.43s kommt der Ball am Erdboden auf.

2. Nun wird noch die Geschwindigkeit beim Aufprall berechnet. Dazu wird die Geschwindigkeits - Zeit Funktion verwendet:

$$v(t) = v_0 + g * t$$

Für die Zeit wird die Falldauer eingesetzt. Man erhält damit für die Geschwindigkeit:

$$v(1.43) = 1.43 * 9.81 \approx 14.03\text{m/s} \approx 50.5\text{km/h}$$

Der Aufprall erfolgt mit einer Geschwindigkeit von rund 50.5 km/h.

Versuch Messung der Gravitationsbeschleunigung

Ziel: Durch Messung der Fallzeit einer Kugel soll die Gravitationsbeschleunigung bestimmt werden.

Benötigte Materialien:

- Fall und Auffangvorrichtung
- Zeitmessung
- Kugel

Alternativ:

- HD High Speed Kamera
- Analyseprogram (z.B. Coach 6)

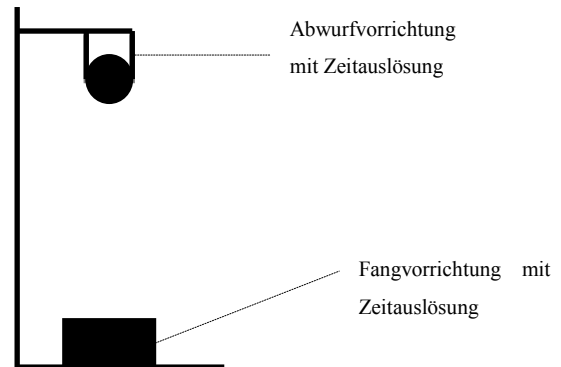


Abbildung 13: Versuchsskizze zur Messung der Gravitationsbeschleunigung.

Durchführung:

Mit Hilfe einer Fallvorrichtung wird eine kleine Metallkugel aus ca. 30cm Höhe abgeworfen und die Fallzeit über die integrierte Zeitmessung bestimmt. Es empfiehlt sich die Messung mehrmals durchzuführen und den Mittelwert der gemessenen Zeiten zu bilden. Mit der genauen Messung der Fallhöhe kann nun aus den hergeleiteten Formeln die Gravitationsbeschleunigung bestimmt werden.

Sollte kein Zeitmessgerät zur Verfügung stehen, empfiehlt sich eine Videoanalyse der fallenden Kugel. Damit kann die Fallhöhe in Abhängigkeit der Zeit bestimmt werden. Einfaches Ableiten dieser Funktion ergibt die Geschwindigkeits-Zeit Funktion, nochmaliges Ableiten die Beschleunigung.

Ergebnisse:

Durch 2-fache Ableitung des zurückgelegten Weges nach der Zeit, erhält man einen Wert für die Beschleunigung. Die angeführten Graphen zeigen den zurückgelegten Weg (rechts oben), die Geschwindigkeit (links unten) sowie die Gravitationsbeschleunigung (rechts unten). Bei dieser Videoanalyse wurde ein Wert von $g = 9,25 \text{ m/s}^2$ gemessen.

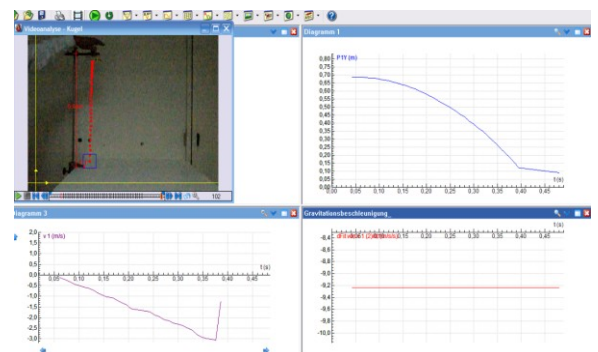


Abbildung 14: Ergebnisse der Videoanalyse.

6.2.5 Der freie Fall mit Luftreibung und der Stratosphärensprung

Schwierigkeitsniveau 2
Typ
Projekt
>100 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialie n	Anmerkungen
5	Physikalischer Input zum freien Fall mit Luftreibung	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer-Klassengespräch oder in Gruppen-/Einzelarbeit
10	Aufstellung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
25	Lösung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
60	Der Stratosphärensprung – Numerische Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	

Physikalischer Input

Der freie Fall mit Luftreibung

Die Luftreibung (oder auch Strömungswiderstand) ist, wie der Name bereits vermuten lässt, eine Kraft, die der Bewegung des Körpers durch die Luft (d.h. ein gasförmiges oder auch flüssiges Medium) entgegenwirkt. Die

Luftreibung steigt quadratisch mit der Geschwindigkeit und linear mit der Fläche A des Körpers, der Luftdichte ρ und zusätzlichen Eigenschaften der Oberfläche (Form, Struktur, usw.), die im Strömungswiderstandskoeffizient (bekannt unter „ c_w -Wert“) zusammengefasst werden.⁹⁶

Für die Luftreibung gilt:

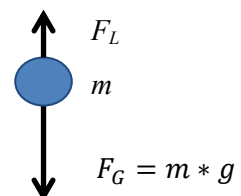


Abbildung 15: Gravitationskraft und Luftwiderstand eines fallenden Körpers.

⁹⁶ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstandskoeffizient> [16.6.2014].

$$F_L = c_w * \frac{1}{2} * v^2 * \rho * A$$

Der Strömungswiderstandskoeffizient liegt für handelsübliche Autos zwischen 0.8 (ca. Mercedes-Benz G-Klasse) und 0.2 (ca. Mercedes-Benz C-Klasse). Der Strömungswiderstandskoeffizient für einen stehenden Menschen liegt bei 0.78.⁹⁷

Tipp: Um sich die Luftreibung besser vorstellen zu können, genügt es während einer Autofahrt die Hand aus dem Fenster zu halten und die Handfläche zu drehen. Je größer die Widerstandsfläche desto stärker drückt die anströmende Luft die Hand nach hinten.

Herleitung der Bewegungsgleichung⁹⁸

Auf einen fallenden Körper wirken nun (anders als beim Fall ohne Luftreibung) mehrere Kräfte:

Die Schwerkraft F_G sowie die Luftreibung F_L . Wie aus obiger Abbildung erkennbar ist, wirken die Kräfte in entgegengesetzte Richtung.

Die auf einen fallenden Körper wirkende Gesamtkraft ist gegeben durch

$$m * a = m * v' = F_{ges} = F_G - F_L = m * g - c_w * \frac{1}{2} * v^2 * \rho * A.$$

Kürzen der Masse ergibt dann

$$a = v' = g - c_w * \frac{1}{2m} * v^2 * \rho * A$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

Bemerkung: Anders als beim Fall ohne Luftreibung wird hier die Differentialgleichung durch die Geschwindigkeit ausgedrückt da die Lösung dieser Differentialgleichung dadurch wesentlich vereinfacht wird.

Berechnung der Maximalgeschwindigkeit

Aus dieser Gleichung kann bereits die maximal erreichbare Geschwindigkeit des fallenden Körpers berechnet werden. Da die Reibungskraft quadratisch mit der Geschwindigkeit steigt, wird nach einer bestimmten Zeit die Luftreibung genauso groß wie die Schwerkraft. Der Körper wird dann nicht mehr

⁹⁷ Laut URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstandskoeffizient> [16.6.2014].

⁹⁸ Herleitung sowie Idee zur Berechnung der Maximalgeschwindigkeit nach: Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL: <http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [17.6.20014], S. 3-5.

beschleunigt und es stellt sich eine konstante Maximalgeschwindigkeit ein. Um daraus nun die Maximalgeschwindigkeit zu bestimmen, betrachtet man einfach jenen Punkt, an dem sich die Geschwindigkeit nicht mehr ändert, d.h. $v' = 0$ gilt.

Es gilt also:

$$v' = 0 = g - c_w * \frac{1}{2m} * v_{max}^2 * \rho * A$$

Umformung nach v_{max} ergibt dann

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 * m * g}{c_w * \rho * A}}$$

Lösung der Differentialgleichung⁹⁹

Die Lösung der Differentialgleichung kann nun mit der Methode der Trennung der Variablen erfolgen:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_w * \rho * A}{2m} * v^2$$

Daraus folgt durch Umformung $dv = \left(g - \frac{c_w * \rho * A}{2m} * v^2\right) * dt$ und daraus

$$\frac{dv}{\left(g - \frac{c_w * \rho * A}{2m} * v^2\right)} = dt.$$

Herausheben von g gibt

$$\frac{dv}{g * \left(1 - \frac{c_w * \rho * A}{2mg} * v^2\right)} = dt.$$

Der Term $\frac{c_w * \rho * A}{2mg}$ ist bereits aus der Berechnung der Maximalgeschwindigkeit bekannt. Es gilt

$\frac{c_w * \rho * A}{2mg} = \frac{1}{v_{max}^2}$. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man

$$\frac{dv}{g * \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)} = dt.$$

⁹⁹ Berechnung und Idee zur Substitution von v_{max} nach Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL:

<http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [17.6.20014], S. 4-8.

Die Multiplikation von g ergibt

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)} = g * dt.$$

Nun werden beide Seiten integriert:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)} = g * \int_0^t dt$$

Berechnung des rechten Integrals $g * \int_0^t dt$:

$$g * \int_0^t dt = g * (t - 0) = g * t$$

Berechnung des linken Integrals $\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)}$:

Zur Vereinfachung des Integrals wird substituiert: $x = \frac{v}{v_{\max}}$. Für die Substitutionskonstante erhält man aus $\frac{dx}{dv} = \frac{1}{v_{\max}}$, $dv = v_{\max} * dx$. Nun wird die Stammfunktion des Integrals berechnet:

Für das Integral erhält man damit:

$$\int \frac{v_{\max} * dx}{1 - x^2} = v_{\max} * \int \frac{dx}{1 - x^2} = v_{\max} * \operatorname{artanh}(x) \quad (\text{für } |x| \neq 1)$$

Nun muss noch rücksubstituiert und für die Grenzen eingesetzt werden:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)} = v_{\max} * \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right) \Big|_{v_0}^v = v_{\max} * \left[\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right) - \operatorname{artanh}\left(\frac{v_0}{v_{\max}}\right) \right]$$

Somit gilt:

$$\left[\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right) - \operatorname{artanh}\left(\frac{v_0}{v_{\max}}\right) \right] = \frac{g * t}{v_{\max}}$$

Mit der Annahme, dass die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null ist (d.h. $v_0 = 0$)

gilt $\operatorname{artanh}\left(\frac{v_0}{v_{\max}}\right) = 0$. Man erhält somit

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right) = \frac{g * t}{v_{\max}}$$

Die Umkehrfunktion von $\operatorname{artanh}(x)$ ist die $\tanh(x)$ Funktion¹⁰⁰. Diese auf beiden Seiten angewendet ergibt: $\frac{v}{v_{\max}} = \tanh\left(\frac{g * t}{v_{\max}}\right)$.

Umformung ergibt schließlich die Lösung der Differentialgleichung:

$$v(t) = v_{\max} * \tanh\left(\frac{g * t}{v_{\max}}\right)$$

Wie im Fall ohne Luftreibung wird auch hier die Weg-Zeit Funktion betrachtet. Diese erhält man durch Integration der Geschwindigkeits-Zeit Funktion nach t .

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_{\max} * \tanh\left(\frac{g * t}{v_{\max}}\right) dt = \frac{v_{\max}^2}{g} * \ln\left[\cosh\left(\frac{g}{v_{\max}} * t\right)\right]$$

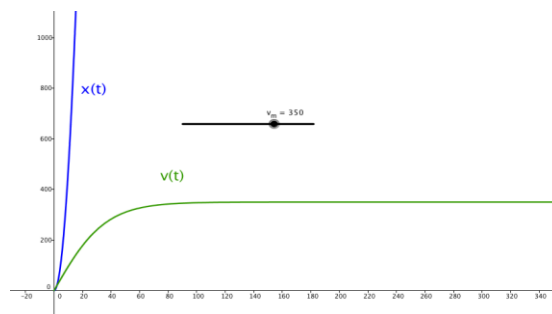


Abbildung 16: Graphische Darstellung von $x(t)$ und $v(t)$.

Der Stratosphärensprung

Am 14. Oktober 2012 war wohl kein anderes Ereignis so stark in den Medien vertreten wie der Stratosphärensprung des Österreichers Felix Baumgartner. Mit den Worten „*I am going home now*“ sprang der Österreicher aus 38969m Höhe zurück Richtung Erde. In diesem Abschnitt wird nun versucht, mit den oben aufgestellten Annahmen diesen Sprung noch einmal zu analysieren. Es soll nun versucht werden, die Maximalgeschwindigkeit und die Dauer bis zur Maximalgeschwindigkeit zu berechnen. Nach der Analyse des Red Bull Stratos Teams liegen folgende Eckdaten für den

¹⁰⁰ Ausführliche Erklärungen zu den Hyperbelfunktionen ($\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$) sind im Anhang zu finden.

Rekordsprung vor¹⁰¹:

- Absprunghöhe: 38969 m
- Maximal erreichte Geschwindigkeit: 1357,6 km/h
- Gesamtmasse (Anzug + Felix Baumgartner) 140kg

Numerische Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs während des freien Falls

Zunächst wird die maximal erreichte Geschwindigkeit betrachtet. In obigem Abschnitt wurde bereits eine Gleichung zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit aufgestellt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 * m * g}{c_w * \rho * A}}$$

Für die Gravitationsbeschleunigung gilt auf der Erdoberfläche die Näherung $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$. Dieser Wert ändert sich bis zur Absprunghöhe nur sehr wenig, weshalb eben jener Wert für die Berechnungen als konstant angenommen wird. Der Strömungswiderstandskoeffizient (c_w -Wert) war nur schwer für den Sprung vorauszusagen, da der Wert stark von der Position des Körpers im freien Fall abhängig ist. Aus Testsprüngen, aus rund 21000m Höhe, konnte ein durchschnittlicher Wert von 1.07 für das Produkt $c_w * A$ bestimmt werden¹⁰². Dieser Wert wird auch für diese Berechnung herangezogen. Nun bleibt noch der Wert für die Luftdichte ρ zu bestimmen. Da die Luftdichte, besonders in diesen Höhenlagen, sehr stark vom Wert nahe der Erdoberfläche abweicht, muss eine Näherungsformel herangezogen werden. Martin Apolin stellte für die Berechnung im Magazin Red Bulletin (Ausgabe Juli 2012) die Näherungsformel $\rho = 1.5906 * e^{-0.151 * h}$ auf.¹⁰³

Diese Näherungsformel soll nun auch hier eingesetzt werden. Wie in Kapitel „mathematisches Rüstzeug“ kennengelernt, wird nun eine numerische Berechnung der Geschwindigkeit und der Höhe angestellt. Dazu wird das Programm Microsoft Excel verwendet. Dabei werden zwei unterschiedliche Verfahren zur numerischen Berechnung verwendet. Begonnen wird mit dem Euler-Cauchy Verfahren und danach das auf dem Heun Verfahren beruhende „verbesserte Verfahren“ eingesetzt.

¹⁰¹ Daten von: URL: www.redbullstratos.com/science/scientific-data-review [20.6.20014] sowie Red Bulletin Ausgabe Juli 2012, S. 74.

¹⁰² Wert berechnet von Mag. DDr. Martin Apolin für die Red Bulletin Ausgabe Juli 2012.

¹⁰³ Vgl. Apolin (2012), S. 74-76.

Euler-Cauchy Verfahren

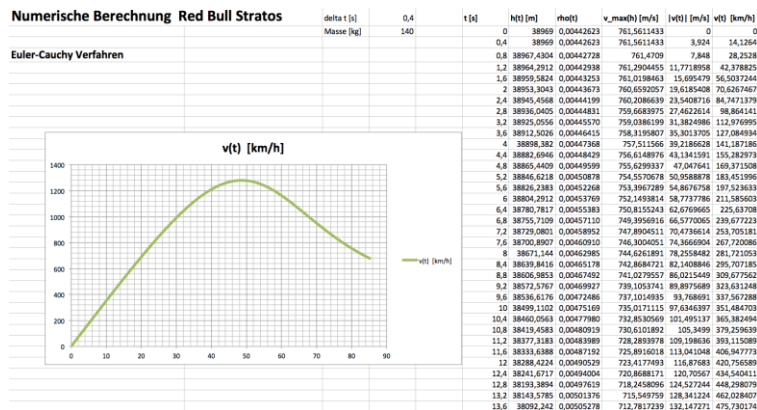


Abbildung 17: Screenshot der numerischen Berechnung in Microsoft Excel.

Als Starthöhe wurde die Absprunghöhe von Felix Baumgartner gewählt. Das Excel File wurde so erstellt, dass die Anfangsdaten eingegeben werden und automatisch der Verlauf der Geschwindigkeit berechnet wird. Als Zeitintervall wurde 0,4 Sekunden gewählt. Auch hier kann aber ein beliebiges Zeitintervall gewählt werden. Die Höhe gewinnt man aus der Subtraktion *Absprunghöhe – zurückgelegter Weg*. Der zurückgelegte Weg beim Zeitschritt $n + 1$ wird beim Euler-Cauchy Verfahren gemäß

$$x_{n+1} = x_n + v_n \cdot \Delta t$$

berechnet. Die Geschwindigkeit wird gemäß der Formel

$$v_{n+1} = v_n + \frac{F(x_n)}{m} \cdot \Delta t$$

berechnet, wobei $\frac{F(x_{n+1})}{m} = 9,81 \cdot \left(\frac{v_n^2}{v_{\max}^2} - 1\right)$ gilt (wie aus der Herleitung der Differentialrechnung folgt).

Die Luftdichte erhält man für jeden Zeitschritt gemäß

$$\rho(t_{n+1}) = 1.5906 \cdot e^{-0.151 \cdot h(t_{n+1})}.$$

Damit kann nun auch die Maximalgeschwindigkeit für jede Höhe berechnet, und somit der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit nach dem Absprung bestimmt werden.

Verbessertes Verfahren

Wie in Kapitel 4 kennengelernt kann nun ein verbessertes Verfahren zur Berechnung verwendet werden. Die Berechnungen für Weg und Geschwindigkeit erfolgen hier gemäß den Formeln

$$x_{n+1} = x_n + v_n * \Delta t + \frac{F(x_n)}{2*m} (\Delta t)^2 \quad \text{und}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \left(\frac{F(x_n)}{m} + \frac{F(x_{n+1})}{m} \right) * \Delta t.$$

Ergebnisse

Ergebnisse gemäß Euler - Cauchy Verfahren

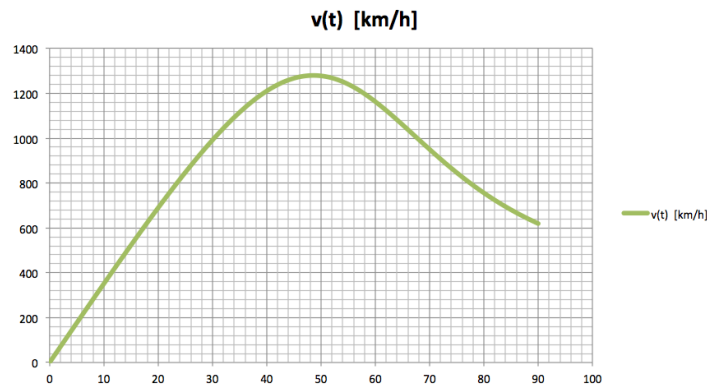


Abbildung 18: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit nach dem Euler-Cauchy Verfahren.

Ergebnisse gemäß dem „verbesserten Verfahren“

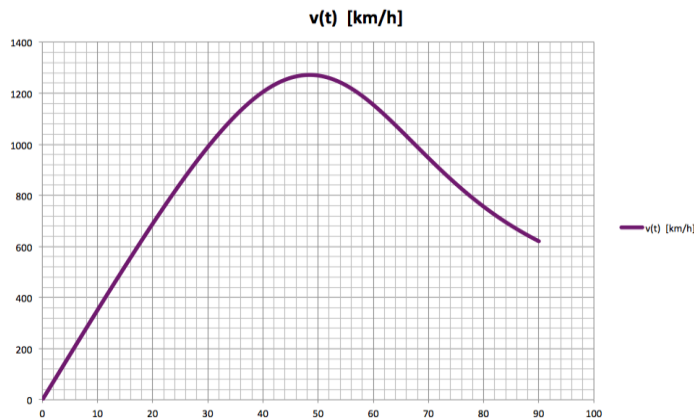


Abbildung 19: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit nach dem „verbesserten Verfahren“.

Vergleich

Die beiden Verfahren weichen nur in Bezug auf die Maximalgeschwindigkeit im Bereich von ± 10 km/h leicht voneinander ab.

Auswertung

Nach ca. 49 Sekunden wird die Maximalgeschwindigkeit bei obigen Berechnungen erreicht. Die Maximalgeschwindigkeit selbst liegt bei ca. 1272 km/h („verbessertes Verfahren“) bzw. ca. 1280 km/h (Euler-Cauchy Verfahren). Danach wird der fallende Körper aufgrund der stetig steigenden Luftdichte immer weiter abgebremst und die Geschwindigkeit verringert sich wieder. Baumgartner gab in einem

Interview an, bis etwa 35s keinen Gegenwind verspürt zu haben.

Abweichungen

Die Auswertungen des Analyseteams des Red Bull Stratos Projekts ergaben eine maximale Geschwindigkeit von 1357,6 km/h. Abweichungen der obigen Berechnung stammen einerseits von der Variation des Luftwiderstandbeiwerts (c_w -Wert), der nur experimentell durch andere Absprünge ermittelt werden konnte. Der c_w -Wert ändert sich natürlich, wenn die Lage des Körpers von jener aus den Testsprüngen abweicht. Dadurch war es selbst für das Red Bull Stratos Team sehr schwer, konkrete Voraussagen für die maximale Geschwindigkeit zu treffen. Weiters ist die Formel für die Luftdichte nur eine grobe Näherungsformel und weicht von den tatsächlichen Werten für die Luftdichte ab.

6.2.6 Zusammengesetzte Bewegung - Der schräge Wurf

Schwierigkeitsniveau 2
Typ
**Mehrstunden-
projekt**
80 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer-Klassengespräch oder in Gruppen-/Einzelarbeit
10	Aufstellung der Bewegungsgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
25	Lösung der Bewegungsgleichungen	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Literatur	
10	Analyse der Flugkurve	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
25	Berechnungen zur Wurfparabel	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
5	Berechnung Beispielaufgabe	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer Literatur	

Physikalischer Input¹⁰⁴

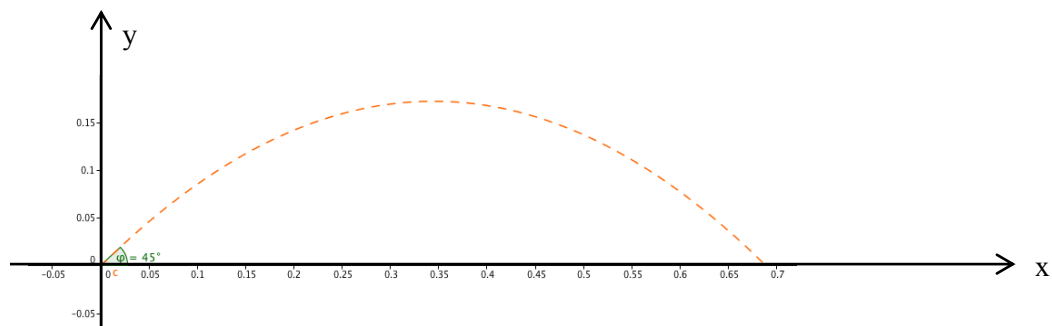


Abbildung 20: Flugbahn eines Körpers auf der Erde bei einem Abwurfwinkel von 45°.

¹⁰⁴ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wurfparabel>[22.7.2014].

Unter der Wurfparabel versteht man die Flugbahn eines Körpers beim Wurf auf der Erde. Die Parabelform ergibt sich daraus, da während des gesamten Fluges der Luftwiderstand vernachlässigt wird und damit nur die Schwerkraft auf den Körper wirkt.

Der schräge Wurf setzt sich aus zwei voneinander unabhängigen Bewegungen zusammen - der gleichförmigen Bewegung (waagrechter Wurf) und dem freien Fall. Diese beiden Komponenten der Bewegungen beeinflussen einander nicht.

Zur mathematischen Beschreibung wird die Bewegung in zwei Komponenten zerlegt, die horizontale x -Komponente und die vertikale y -Komponente. Da der Luftwiderstand außer Acht gelassen wird, bewegt sich der Körper in x -Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit. In y -Richtung wird der Körper konstant beschleunigt. Für die Gravitationskraft gilt $F = -m * g$ (wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

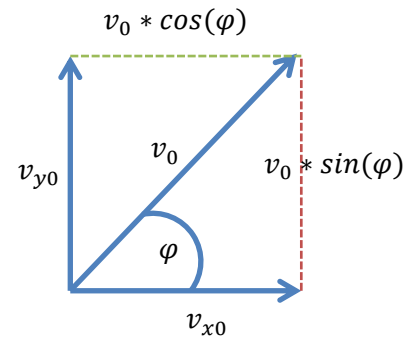


Abbildung 21: x - und y -Komponente der Geschwindigkeit.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen¹⁰⁵

Die Wurfbewegung setzt sich, wie bereits oben erwähnt, aus zwei unabhängigen Komponenten zusammen - der horizontalen x -Richtung und der vertikalen y -Richtung. Dies wird nun bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ausgenutzt. Das bedeutet, dass zwei Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, jeweils eine für x - und y -Richtung.

Bewegungsgleichung in x -Richtung

Da der Luftwiderstand vernachlässigt wird, wirken während des Fluges in x -Richtung keine Kräfte auf den Wurfkörper. Das bedeutet also

$$m * a_x(t) = F_x(t) = 0$$

Wie bereits bekannt ist die Beschleunigung durch die zweite Ableitung der Ortskomponente nach der Zeit definiert. Es gilt also weiters:

$$m * a_x(t) = m * \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x(t) = 0$$

Division durch m ergibt

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0,$$

¹⁰⁵ Nach Heuser (2009), S. 328.

womit die Bewegungsgleichung in x -Richtung bereits gefunden wäre.

Bewegungsgleichung in y -Richtung

Auf den geworfenen Körper wirkt auf der Erde die Schwerkraft gemäß $F_y = -m * g$. Das negative Vorzeichen zeigt einfach an, dass die Beschleunigung nach unten - Richtung Erdboden - zeigt. Da auch hier der Luftwiderstand vernachlässigt wird, ist dies die einzige Kraft auf den Körper. Somit gilt für die Bewegungsgleichung:

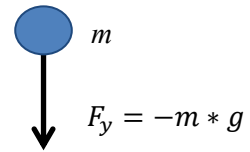


Abbildung 22:
Schwerkraft auf einen fallenden Körper ohne Luftreibung.

$$m * a_y(t) = m * \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -m * g = F_y(t).$$

Division durch m ergibt

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -g,$$

womit auch die Bewegungsgleichung in y -Richtung gefunden wäre.

Lösung der Differentialgleichungen

Lösung der Differentialgleichung: x -Komponente

Zur Lösung der Differentialgleichung muss hier die Weg-Zeit Funktion berechnet werden. Bei dieser sehr einfachen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann dies durch zweimaliges integrieren erfolgen. Dies folgt direkt aus dem bekannten Zusammenhang

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Die Bewegungsgleichung der x -Komponente ist gegeben durch

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0.$$

Durch einmalige Integration erhält man die Geschwindigkeits-Zeit Funktion

$$\int \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \int 0 * dt.$$

Integration liefert:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = C$$

Wobei C hier für eine beliebige Konstante steht. Mit Hilfe der Randbedingung $v(0) = v_{x0}$ kann nun die Konstante ermittelt werden. Es gilt dann $v(0) = v_{x0} = C$ und damit gilt für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion:

$$v(t) = v_{x0}$$

Bemerkung: Man erkennt, dass auf der rechten Seite der Gleichung keine Abhängigkeit von t vorliegt. Die Geschwindigkeit in x -Richtung ist über die ganze Zeit hinweg konstant. Dies folgt direkt aus dem ersten Newtonschen Axiom.

Um die Weg-Zeit Funktion zu erhalten muss die Geschwindigkeits-Zeit Funktion integriert werden:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = \int v_{x0} * dt$$

Integration liefert

$$x(t) = v_{x0} * t + D.$$

Die Integrationskonstante D kann wieder über die Randbedingungen ermittelt werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt für die Ortsfunktion $x(0) = 0$. Dies in obiger Gleichung verwendet gibt für die Integrationskonstante D :

$$x(0) = 0 + D \rightarrow D = 0$$

Und damit gilt für die Bewegungsgleichung der x -Komponente:

$$x(t) = v_{x0} * t.$$

Lösung der Differentialgleichung: y -Komponente

Zur Lösung der Differentialgleichung muss auch hier die Weg-Zeit Funktion berechnet werden. Bei dieser sehr einfachen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann dies durch zweimaliges Integrieren erfolgen.

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, muss die Beschleunigung nach der Zeit integriert werden. Für die Beschleunigung in y -Richtung gilt $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = -g$.

Durch Integration erhält man

$$v(t) = -g * t + C.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Ausgangsgeschwindigkeit $v(0) = v_{y0}$. Daraus erhält man für die Integrationskonstante: $v(0) = v_{y0} = g * 0 + C$ und daher folgt $C = v_{y0}$.

Für den Geschwindigkeitsverlauf gilt damit:

$$v(t) = v_{y0} - g * t$$

Um nun die Weg-Zeit Funktion zu berechnen, muss die Geschwindigkeits-Zeit Funktion nach der Zeit integriert werden.

Durch Integration erhält man

$$y(t) = v_{y0} * t - \frac{1}{2} g * t^2 + D.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ möge $y(0) = y_0$ gelten. Damit folgt für die Integrationskonstante D :

$$y(0) = y_0 = 0 + D \text{ und damit } D = y_0.$$

Die Orts-Zeit Funktion ist dann gegeben durch

$$y(t) = y_0 + v_{y0} * t - \frac{1}{2} g * t^2.$$

v_{x0} und v_{y0} entsprechen den jeweiligen Anfangsgeschwindigkeiten in x - bzw. y -Richtung.

Die beiden Geschwindigkeiten v_{x0} in x - bzw. v_{y0} in y -Richtung, sind vom Abwurfwinkel φ abhängig. Für die beiden Geschwindigkeiten gilt:

$$v_{x0} = v_0 * \cos(\varphi) \text{ und } v_{y0} = v_0 * \sin(\varphi).$$

Dies folgt aus den geometrischen Zusammenhängen in Abbildung 21 auf Seite 90.

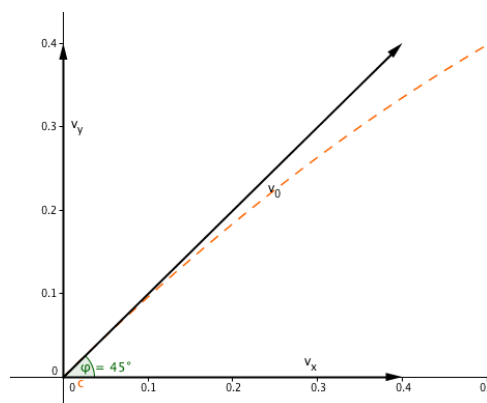


Abbildung 23: Graphische Darstellung mit GeoGebra.

Die beiden Bewegungsgleichungen können auch zu einem Vektor zusammengefasst werden. Man erhält dann:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 * t * \cos(\varphi) \\ y_0 + v_0 * t * \sin(\alpha) - \frac{g}{2} * t^2 \end{pmatrix}$$

Analyse der Flugkurve und weitere Berechnungen¹⁰⁶

Die Lösungen der einzelnen Komponenten der Bewegungsgleichungen wurden bereits berechnet. Nun wird noch die Funktion der Flugkurve berechnet und analysiert. Dazu muss zuerst die Gleichung $x(t) = v_{x0} * t$ nach t umgeformt werden. Umformung ergibt:

$$t = \frac{x(t)}{(v_0 * \cos(\varphi))}$$

Dies wird nun in die Gleichung $y(t) = v_0 * \sin(\varphi) * t - \frac{1}{2}g * t^2$ eingesetzt. Man erhält:

$$y(x) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} * x - \frac{g}{2 * v_0^2 * \cos(\varphi)^2} * x^2$$

Bemerkung: Die Flugkurve hat die Form einer Parabel. Diese Erkenntnis stammt von Galileo Galilei (1564-1642). Er verband sein Fallgesetz mit der Kegelschnittlehre des Apollonios von Perge (262-190v.Chr.).¹⁰⁷

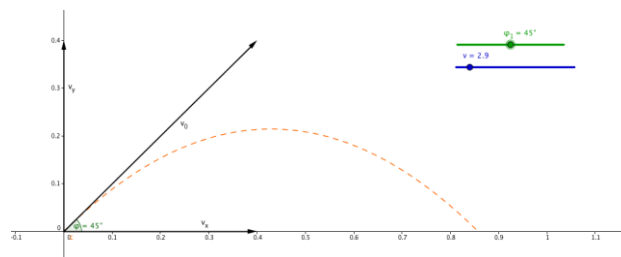


Abbildung 24: Analyse der Wurfparabel mit GeoGebra.

Berechnung der Steighöhe h (= maximal erreichte Höhe):

Um die maximale Steighöhe des Wurfgeschosses zu berechnen, betrachtet man die y -Komponente der Bewegung. Die maximale Steighöhe wird indirekt über die maximale Steigdauer t berechnet. Dazu stellt man die Überlegung an, zu welchem Zeitpunkt sich die y -Komponente nicht mehr ändert, d.h. der maximale Wert erreicht wird. Um dies zu bestimmen, betrachtet man die Änderung der Steighöhe nach der Zeit, d.h. $y'(t)$. Gesucht ist dabei jener Zeitpunkt, an dem sich die Steighöhe nicht mehr

¹⁰⁶ Nach Heuser (2009), S. 328-329.

¹⁰⁷ Vgl. Heuser(2009), S.329.

ändert, also $y'(t_h) = 0$ gilt. Die so ermittelte Zeit bezeichnet man als Steigzeit t_h .

$$y'(t_h) = v_0 * \sin(\varphi) - g * t_h = 0 \rightarrow t_h = \frac{v_0 * \sin(\varphi)}{g}$$

Wir setzen diese Steigzeit nun in die Weg-Zeit Funktion der y -Komponente ein und erhalten somit:

$$h = y(t_h) = \frac{(v_0 * \sin(\varphi))^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{(v_0 * \sin(\varphi))^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{(v_0 * \sin(\varphi))^2}{g}$$

Betrachtet man nun diese Gleichung unter Verwendung der Eigenschaften der Sinusfunktion, so stellt man fest, dass der höchste Wurf bei $\varphi = 90^\circ$ erreicht wird.

Bemerkung: Ob damit auch die größte Wurfweite erreicht wird, wird gleich bestimmt.

Berechnung der Wurfdauer

Um die Wurfdauer t_w zu erhalten, wird jener Zeitpunkt gesucht, an dem der Wurfkörper wieder am Boden aufkommt und $y(t_w) = 0$ gilt.

$$y(t_w) = (v_0 * \sin(\varphi)) * t_w - \frac{1}{2} g * t_w^2 = 0$$

Division durch t_w ergibt:

$$(v_0 * \sin(\varphi)) - \frac{1}{2} g * t_w = 0$$

Durch Umformung erhält man:

$$t_w = \frac{2 * v_0 * \sin(\varphi)}{g}$$

Bemerkung: Die Berechnung der Wurfdauer ist eine typische Anwendung der Nullstellenberechnung bei der Kurvendiskussion.

Berechnung der Wurfweite

Zur Berechnung der Wurfweite geht man mit ähnlicher Überlegung wie bei der Berechnung der Steighöhe vor. Man verwendet die Zeitdauer bis der geworfene Körper wieder am Boden aufkommt und setzt dies in die Weg-Zeit Funktion der x -Komponente ein. Durch einsetzen der Wurfdauer t_w in die Gleichung $x(t) = v_0 * \cos(\varphi) * t$ erhält man dann die Wurfweite w :

$$w(\varphi) = \frac{2 * v_0^2 * \cos(\varphi) * \sin(\varphi)}{g} = \frac{v_0^2 * \sin(2\varphi)}{g}$$

Bemerkung: Man erkennt, dass die Wurfweite von der Anfangsgeschwindigkeit und vom

Wurfwinkel abhängig ist.

Berechnung des idealen Wurfwinkels

Der ideale Wurfwinkel ist jener Winkel, bei dem die maximale Weite erreicht wird. Kugelstoßer bei den Olympischen Spielen trainieren jahrelang, um die Kugel mit exakt diesem Winkel abzuwerfen. Um nun diesen Winkel zu bestimmen, berechnet man das Maximum der $w(\varphi)$ Funktion. Das Maximum wird erreicht, wenn die Steigung der Funktion verschwindet, d.h. $w'(\varphi) = 0$ gilt.

Es gilt also:

$$w'(\varphi) = \frac{2 * v_0^2 * \cos(2\varphi)}{g} = 0$$

Da die Faktoren „2“, „ v_0 “ und „ g “ ungleich 0 sind, muss $\cos(2 * \varphi) = 0$ werden. Aufgrund der logischen Einschränkung $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ für den Abwurfwinkel, folgt dies genau für $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Zur Kontrolle, ob es sich bei $\varphi = \frac{\pi}{4}$ tatsächlich um den idealen Wurfwinkel handelt, betrachtet man um $\frac{\pi}{4}$ liegende Winkel und betrachtet die Wurfweitenfunktion $w(\varphi) = \frac{v_0^2 * \sin(2\varphi)}{g}$.

v_0 und g sind beide Konstanten und unabhängig vom Abwurfwinkel. Es genügt also den Term $\sin(2\varphi)$ im Intervall $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ genauer zu betrachten.

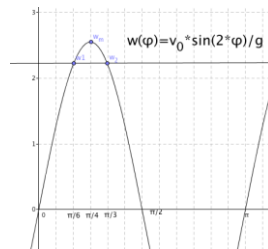


Abbildung 25: Betrachtung des Terms $\sin(2\varphi)$.

Durch Rechnung (oder durch graphische Betrachtung) erkennt man, dass $w\left(\frac{\pi}{6}\right) = w\left(\frac{\pi}{3}\right) < w\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gilt.

Der ideale Wurfwinkel liegt demnach tatsächlich bei $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise bei 45 Grad.

Beispielaufgabe

Ein Fußball wird vom Tormann mit 25m/s in einem Winkel von ca. 30° von der 16m Linie vor dem Tor abgestoßen. Nach wie vielen Metern landet der Ball, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt? Informieren Sie sich im Internet oder in der Bibliothek wie lange ein Fußballfeld ist. Kommt der Ball noch auf dem Spielfeld auf?

Erstellen Sie ein GeoGebra Arbeitsblatt, in dem Sie die Wurfparabel simulieren können. Bauen Sie dazu für den Abwurfwinkel und für die Anfangsgeschwindigkeit passende Schieberegler ein.

Lösung

Ist die Gleichung für die Wurfweite bereits hergeleitet, kann die Aufgabe schnell gelöst werden. Für die Wurfweite gilt:

$$w(\varphi) = \frac{v_0^2 * \sin(2\varphi)}{g}$$

Einsetzen der angegebenen Werte ergibt dann eine Wurfweite von

$$w(30) = \frac{25^2 * \sin(2 * 30))}{9.81} = 55.18m$$

Laut FiFa¹⁰⁸ Regelwerk muss ein Spielfeld eine Länge von 105m aufweisen. Damit landet der Ball rund 35m vor dem gegnerischen Tor.

¹⁰⁸ Gemäß: FIFA: Fussballstadien → Technische Empfehlungen und Anforderungen, 2007, URL:

http://de.fifa.com/mm/document/tournament/competition/51/54/02/football_stadiums_technical_recommendations_and_requirements_de_8212.pdf[15.7.2014].

6.2.7 Einschaltvorgang einer Spule (Induktivität) im Gleichstromkreis

Schwierigkeitsniveau 2
Typ
**Mehrstunden-
projekt**
50-60 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer-Klassengespräch oder in Gruppen-/Einzelarbeit
10	Herleitung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
15	Lösung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Darstellung in GeoGebra	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	
10	Versuch zum Einschaltverhalten einer Spule	Gruppenarbeit / Lehrer/Klassengespräch	Arbeitsblatt Experiment	Alternativ: Applet

Physikalischer Input

Eine Spule im Stromkreis zeigt ein besonderes Verhalten beim Einschaltvorgang. Dies zeigt sich durch ein langsames Ansteigen des Stromes beim Einschaltvorgang.¹⁰⁹

Um das Verhalten einer Spule zu verstehen, betrachtet man die sogenannte Lenz'sche Regel, die aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz folgt.

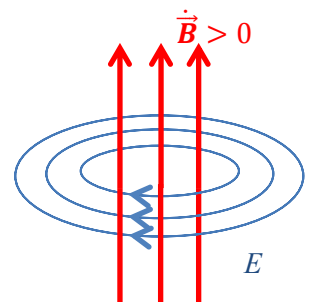


Abbildung 26: Eine Änderung des magnetischen Flusses bewirkt ein elektrisches "Wirbelfeld".

¹⁰⁹ Vgl. O.V.: Induktion und gegenseitige Induktion, URL: http://f1.hs-hannover.de/fileadmin/media/doc/f1/tel/abschnitt_5.pdf [29.05.2014], S. 43.

Eine Änderung des magnetischen Flusses in einer geschlossenen Leiterschleife bewirkt eine Gegenspannung (U_g), die wiederum einen Stromfluss verursacht. Dieser Strom wiederum erzeugt ein Magnetfeld, das sich der Änderung des magnetischen Flusses entgegensetzt.¹¹⁰

Die Induktivität L beschreibt das Verhältnis zwischen der Änderung des Stromes und der induzierten Gegenspannung gemäß

$$U_g(t) = -L * \frac{dI(t)}{dt}.$$

$U_R(t) = R * I(t)$ beschreibt den Spannungsabfall am Widerstand im Stromkreis.

Für die Gesamtspannung im Gleichstromkreis gilt $U = U_R(t) - U_g(t)$.

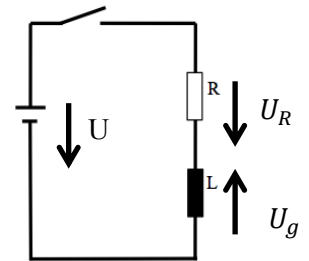


Abbildung 27: Schaltplan und Spannungen.

Wichtige Begriffe:

L ...Induktivität $L = N * \frac{\phi}{I}$ [L] = H,

ϕ ...Magnetischer Fluss [ϕ] = Vs,

I ...Strom [I] = A,

U ...Spannung [U] = V,

R ...Widerstand [R] = Ω .

N ...Windungszahl

Herleitung der Differentialgleichung¹¹¹

Beim Einschaltvorgang wird eine Gegenspannung induziert. Für diese gilt:

$$U_g(t) = -L * \frac{dI(t)}{dt}$$

¹¹⁰ Vgl. URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6521> [21.06.2014].

¹¹¹ Herleitung und Idee zur Substitution von $y(t) = I(t) - \frac{U}{R}$ bei der Herleitung der Differentialgleichung nach Hempel, Thomas:

Differentialgleichungen – Ausgewählte Probleme aus der Physik, URL: http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf [29.05.2014], S. 4.

Für die Gesamtspannung U im Gleichstromkreis gilt $U = U_R(t) - U_g(t)$

Für den Spannungsabfall am Widerstand gilt $U_R(t) = R * I(t)$. Eingesetzt erhält man nun die Differentialgleichung:

$$I(t) * R = U - L * \frac{dI(t)}{dt}$$

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{R}{L} (I(t) - \frac{U}{R}) + \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

Durch Substitution $y(t) = I(t) - \frac{U}{R}$ erhält man für die Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L} * y(t) = 0.$$

Lösung der Differentialgleichung

Nun kann diese Differentialgleichung durch **Trennung der Variablen** gelöst werden.

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = - \frac{R}{L} * dt$$

Durch Integration erhält man

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = - \int \frac{R}{L} * dt$$

und daraus

$$\ln(y(t)) = -\frac{R}{L} * t + D.$$

Durch Anwenden der Exponentialfunktion erhält man wieder

$$y(t) = e^{-\frac{R}{L} * t} * C.$$

Wobei $C := e^D$ angenommen wurde.

Nun muss noch rücksubstituiert werden:

$$I(t) = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L} * t} * C$$

Zuletzt muss noch die Konstante C bestimmt werden. Mit der Anfangsbedingung (zum Zeitpunkt $t = 0$ (vor dem Schließen des Stromkreises) sei der Strom $I(0) = 0$) folgt:

$$0 = \frac{U}{R} + 1 * C$$

und somit :

$$C = -\frac{U}{R}$$

Damit ergibt sich also für den zeitlichen Verlauf des Einschaltstroms:

$$I(t) = \frac{U}{R} * \left(1 - e^{-\frac{R}{L} * t}\right)$$

Darstellung der Lösung in GeoGebra

Verwendete Werte: $U = 9V$; $R = 27\Omega$; $L = 100mH$

Eingabe in GeoGebra: $f(x) = 9 / 27 (1 - e^{(-27x / 0.1)})$

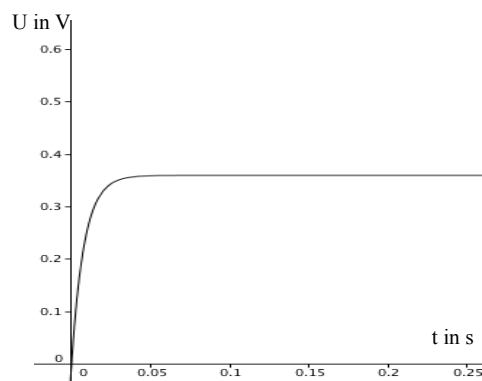


Abbildung 28: Darstellung des Einschaltvorgangs in GeoGebra.

Unterschiedliche Spulenwerte und ihre Auswirkung

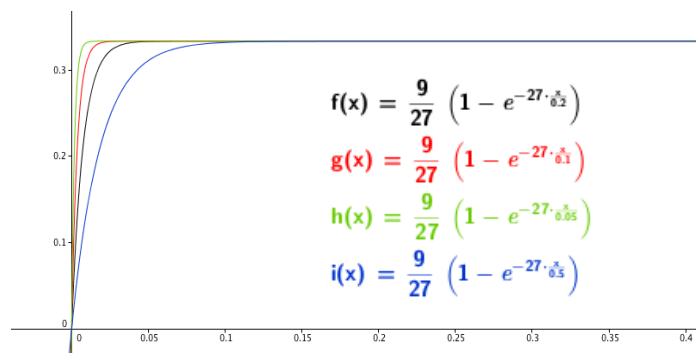


Abbildung 29: Unterschiedliche Spulenwerte und ihre Auswirkung.

Je größer die Induktivität umso länger dauert es, bis der Strom auf 100% ansteigt.

Versuch Einschaltvorgang eine Spule

Ziel: Aufnahme des Stroms als Funktion der Zeit beim Einschaltvorgang einer Spule.

Benötigte Materialien:

- Widerstand $R = 27\Omega$
- Spule $L = 100mH$
- Oszilloskop (oder Interface zur Stromaufnahme)
- Steckbrett und diverse Verbindungen

Schaltplan:

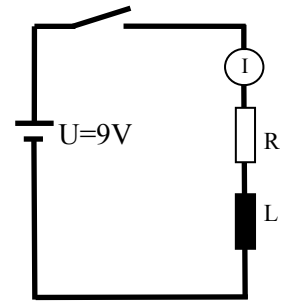


Abbildung 30: Schaltplan.

Durchführung:

Der Aufbau der Schaltung erfolgt gemäß dem gegebenen Schaltplan. Die Stromkennlinie wird als Funktion der Zeit aufgenommen. Im Anschluss erfolgt die Aufnahme von Messkurven für unterschiedliche Werte von L . **Tipp:** Zur Aufnahme des Stromes mit dem Oszilloskop nützt man den Spannungsabfall an einem Messwiderstand!

Abweichungen zwischen Experiment und Theorie treten unter anderem durch folgende Aspekte auf:

- Abweichungen durch Innenwiderstand der Spule,
- Toleranzbereiche der Widerstände,
- Messfehler,
- Innenwiderstände der Leitungen im Versuchsaufbau.

6.2.8 Die Aufladung eines Kondensators

Schwierigkeitsniveau 3

Typ

 Mehrstunden-
projekt

90 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input und WH Grundlagen Elektrotechnik	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer- Klassengespräch oder in Gruppen- /Einzelarbeit
10	Herleitung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
35-40	Lösung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	inhomogene Differentialgleichung!
5	Berechnung von Strom- und Spannungsverlauf	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
10	Graphische Darstellung von Strom- und Spannungsverlauf in GeoGebra	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	
15	Versuch Spannungsverlauf beim Kondensator	Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Experiment	

Physikalischer Input

Der Kondensator¹¹²

Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, das in nahezu jedem elektrischen Gerät eingebaut wird, um elektrische Ladung zu speichern. Ein Kondensator besteht im Wesentlichen aus zwei Elektroden und einem Dielektrikum dazwischen. Das Dielektrikum ist ein Isolator und verhindert einen Kurzschluss

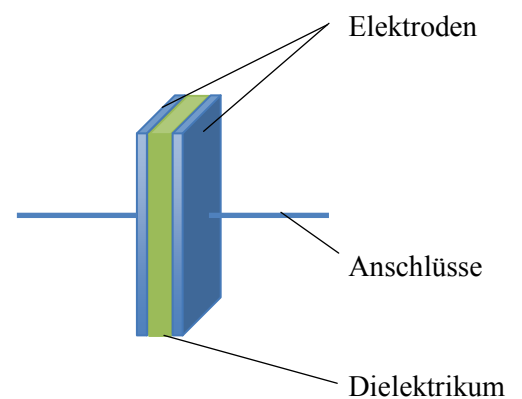


Abbildung 31: Aufbau eines Kondensators.

¹¹² Vgl. URL: <http://www.elektronik-kompodium.de/sites/bau/0205141.htm> [27.6.2014].

zwischen den Platten.

Wird nun an den Kondensator eine Spannung angelegt, so wird der Kondensator aufgeladen. Das bedeutet, eine Elektrode wird positiv und die andere Elektrode negativ aufgeladen. Auf beiden Elektroden befindet sich stets die gleiche Anzahl von Ladungsträgern, wobei sich auf einer Elektrode die negativen und auf der anderen Elektrode die positiven Ladungen befinden. Die charakteristische Eigenschaft des Kondensators ist die Kapazität C . Sie gibt an, wie viel elektrische Energie der Kondensator speichern kann. Die Einheit der Kapazität C ist F (Farad). Ein typischer Kondensator in einer elektrischen Schaltung hat eine Kapazität im Bereich von $\mu F = 10^{-6} F$ oder $nF = 10^{-9} F$. Es gelten folgende Zusammenhänge mit Strom, Spannung und Ladung:

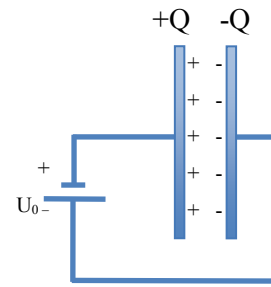


Abbildung 32: Ladungen an den Kondensatorplatten.

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{I \cdot t}{U}$$

Wobei:

Q ... elektrische Ladung $[Q] = C$ (Coulomb)

U ...elektrische Spannung $[U] = V$ (Volt)

C ... elektrische Kapazität $[C] = F$ (Farad)

I ...elektrische Stromstärke $[I] = A$ (Ampere)

Die elektrische Stromstärke beschreibt die Ladung Q , die in einer bestimmten Zeit t durch eine Querschnittsfläche hindurchtritt. Für die Stromstärke und die Ladung ist folgender Zusammenhang

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

gegeben.¹¹³

Abbildung 31 zeigt den schematischen Aufbau eines Kondensators, Abbildung 32 die Ladungsanordnung eines geladenen Kondensators.

¹¹³ Vgl. Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 277.

Herleitung der Differentialgleichung¹¹⁴

Aufladung eines Kondensators

Im Folgenden soll die Aufladung eines Kondensators mit Hilfe einer Differentialgleichung beschrieben werden. Zur Herleitung der Differentialgleichung betrachtet man zuerst den Stromkreis, der für die Aufladung des Kondensators benötigt wird.

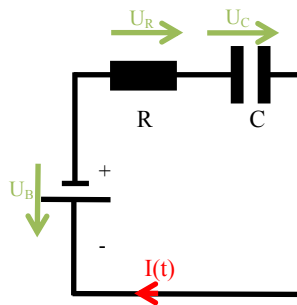


Abbildung 33: Schaltplan zur Aufladung eines Kondensators.

Der Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle (U_B), einem Vorwiderstand R und natürlich einem Kondensator C . Die Spannungen, die an den jeweiligen Bauteilen abfallen, lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$U_R(t) = I(t) * R$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Für die Gesamtspannung U_B in obigem Stromkreis gilt:

$$U_B = U_R(t) + U_C(t)$$

Nun werden für U_R und U_C die oben kennengelernten Beziehungen eingesetzt:

$$U_B = R * I(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

Man verwendet nun die Beziehung zwischen Stromstärke und die in einer gewissen Zeit t durch eine Querschnittsfläche durchgetretene Ladung $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$. Dies in obige Gleichung eingesetzt ergibt

¹¹⁴ Überlegungen zur Aufstellung der Differentialgleichung nach O.V.: Entladen und Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand, URL: <http://gfs.khmeyberg.de/Materialien/IIPhysik/KondensatorSpuleMathematik.pdf> [27.6.2014], S. 1.

$$U_B = R * \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}.$$

Division durch R liefert:

$$\frac{U_B}{R} = \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C * R} Q(t)$$

Damit ist die Differentialgleichung bereits gefunden. Die Aufladung eines Kondensators wird durch eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben.

Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung erfolgt mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten. Die Idee und der Ablauf dieses Verfahrens kann in Kapitel 4 “mathematisches Rüstzeug” nachgelesen werden.

Gegeben ist nun eine Differentialgleichung der Form $y'(t) = a(t) * y(t) + g(t)$

durch $\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{C * R} * Q(t) + \frac{U_B}{R}$ und mit der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$.

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C * R} Q(t) = 0$$

Diese kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{R * C}$$

Mit Integration folgt:

$$\int \frac{dQ(t)}{Q(t)} = - \int \frac{dt}{R * C}$$

$$\ln(Q(t)) = -\frac{t}{R * C} + \ln(E)$$

E ist dabei die Integrationskonstante. Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert:

$$Q(t) = E * e^{-\frac{t}{R * C}}$$

2. Inhomogener Teil der Differentialgleichung

Mit $\varphi(t)$, als Lösung der homogenen Differentialgleichung, verwendet man nun den Ansatz

$y(t) = c(t) * \varphi(t)$ zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

$\varphi(t) = E * e^{-\frac{t}{R*C}}$ ist nun die Lösung der homogenen Differentialgleichung, die Funktion $c(t)$ bezeichne die Anpassung an die Anfangsbedingung. Damit gilt für den Ansatz:

$$Q(t) = c(t) * E * e^{-\frac{t}{R*C}}$$

Ableitung dieses Ansatzes liefert:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = c'(t) * E * e^{-\frac{t}{R*C}} - c(t) * \frac{1}{R*C} * E * e^{-\frac{t}{R*C}} = -\frac{1}{C*R} * Q(t) + \frac{U_B}{R}$$

Daraus folgt nun:

$$c'(t) * E * e^{-\frac{t}{R*C}} = \frac{U_B}{R}$$

Durch Umformung folgt für $c'(t)$:

$$c'(t) = \frac{U_B}{R * E} * e^{\frac{t}{R*C}}$$

Durch Integration wird $c(t)$ ermittelt:

$$c(t) = \int c'(t) * dt = \frac{U_B}{R * E} * \int e^{\frac{t}{R*C}} * dt$$

Für $c(t)$ folgt

$$c(t) = \frac{U_B}{E} * C * e^{\frac{t}{R*C}} + D,$$

wobei D die Integrationskonstante darstellt.

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann gegeben durch:

$$Q(t) = c(t) * \varphi(t) = \left[\frac{U_B}{E} * C * e^{\frac{t}{R*C}} + D \right] * E * e^{-\frac{t}{R*C}}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$Q(t) = U_B * C + D * E * e^{-\frac{t}{R*C}}.$$

Mit der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ wird noch $D * E$ ermittelt:

$$Q(0) = 0 = U_B * C + D * E$$

Damit folgt

$$D * E = -U_B * C,$$

und damit folgt für die Lösung der Differentialgleichung

$$Q(t) = U_B * C * \left(1 - e^{-\frac{t}{R * C}}\right).$$

Mit $Q_0 := U_B * C$ folgt schließlich

$$Q(t) = Q_0 * \left(1 - e^{-\frac{t}{R * C}}\right)$$

Mit der Beziehung $Q(t) = C * U(t)$ folgt für den Spannungsverlauf bei der Aufladung des Kondensators:

$$U(t) = U_B * \left(1 - e^{-\frac{t}{R * C}}\right)$$

Der Stromverlauf folgt mit der Beziehung

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Durch Ableiten der Lösung der Differentialgleichung kann damit der Stromverlauf beim Einschaltvorgang berechnet werden:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -U_B * C * \frac{-1}{R * C} * e^{-\frac{t}{R * C}} = \frac{U_B}{R} * e^{-\frac{t}{R * C}} = I_B * e^{-\frac{t}{R * C}}$$

Darstellung von Spannungs- und Stromverlauf bei der Aufladung eines Kondensators¹¹⁵

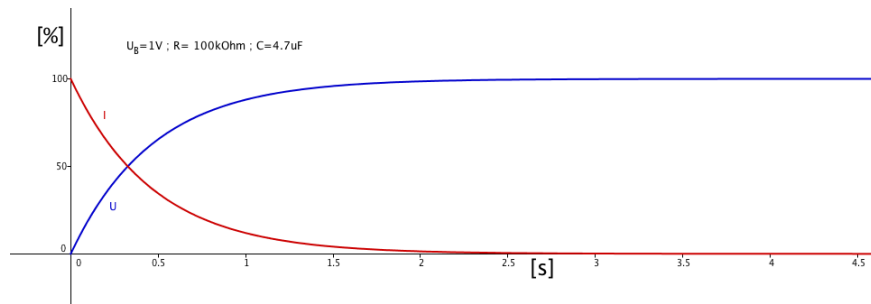


Abbildung 34: Darstellung von Strom und Spannungsverlauf.

Versuch Spannungsverlauf bei der Aufladung eines Kondensators

Mit Hilfe eines Oszilloskops soll der Spannungsverlauf bei der Aufladung eines Kondensators aufgenommen werden.

Benötigte Materialien:

- Widerstand $R = 100k\Omega$
- Kondensator $C = 4.7\mu F$
- Oszilloskop
- Diverse Steckverbindungen (je nach Aufbau)

Schaltplan:

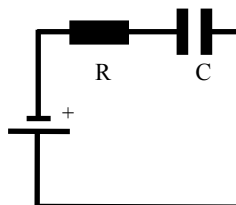


Abbildung 35: Schaltplan zur Aufladung eines Kondensators.

Durchführung:

Die Schaltung soll gemäß Schaltplan aufgebaut werden. Der Spannungsabfall am Kondensator wird mit Hilfe des Oszilloskops gemessen. Die Schaltung darf erst eingeschaltet werden, nachdem sie von der Lehrkraft auf ihre Richtigkeit überprüft wurde! Skizzieren Sie den Spannungsverlauf und vergleichen Sie den Verlauf mit dem mathematisch hergeleiteten Verlauf.

¹¹⁵ Eingabe in GeoGebra:

$$U(x) = 1 * (1 - e^{(-x) / (100000 (4.7) 10^{(-6)}))})$$

$$I(x) = 1 * e^{(-x) / (100000 (4.7) 10^{(-6)}))}.$$

6.2.9 Raketenantrieb

Raketen kennt man vor allem aus der Weltraumfahrt und natürlich von Feuerwerksraketen zu Silvester. Mit diesem Projekt soll nun der Bewegung einer Rakete mathematisch genau auf den Grund gegangen werden.

Schwierigkeitsniveau 3
Typ
**Mehrstunden-
projekt**
> 75 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer- Klassengespräch oder in Gruppen- /Einzelarbeit
5	Herleitung der Bewegungsgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
25	Lösung der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	Berechnung der Integrale bei Bedarf mit CAS System
10	Herleitung der Formeln für Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	
10	Darstellung von Weg-Zeit Funktion; Geschwindigkeits-Zeit Funktion und Berechnung der Brennschlusshöhe sowie der Brennschlussgeschwindigkeit mit Werten für die Saturn V Rakete	Gruppenarbeit/ Lehrer/Klassengespräch	Arbeitsblatt Experiment	
(5)	Video - Saturn V Start	Klassenverband	Computer	

Physikalischer Input¹¹⁶

Bei einer Rakete kommt das Rückstoßprinzip zur Anwendung. Beim Start einer Rakete strömt üblicherweise ein sogenanntes *Verbrennungsgas* aus. Das Ausströmen des Verbrennungsgases bewirkt eine Gegenreaktion, beruhend auf dem 3. Newtonschen Axiom:

¹¹⁶ Informationen zum physikalischen Input nach: Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 39 sowie nach Heuser (2009), S. 329-330.

Bei der Wechselwirkung zweier Körper gilt für die auftretenden Kräfte: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Übt Körper 1 eine Kraft auf Körper 2 ($\vec{F}_{12}$) aus, dann wirkt auch eine gleich große entgegengesetzte Kraft vom Körper 2 auf Körper 1 ($\vec{F}_{21}$).¹¹⁷

Übertragen auf die Rakete heißt, dass sie mit der gleichen Kraft nach oben gedrückt wird, mit der das Verbrennungsgas nach unten ausströmt. Die Kraft, die den Raketenkörper nach oben beschleunigt, wird als **Schubkraft** bezeichnet.

Die mathematische Beschreibung der Bewegung erfolgt mit Hilfe des Impulses und der Impulserhaltung. Wenn die Verbrennungsteilchen ausströmen, so besitzen sie einen Impuls p , für den ganz allgemein gilt:

$$p = m * v,$$

wobei m die Masse des ausströmenden Teilchens und v die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Der **Impulserhaltungssatz** sagt aus, dass die Summe der Impulse $m_1 * v_1 + m_2 * v_2$ zweier Massen m_1 und m_2 , mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 , konstant ist, solange keine äußere Krafteinwirkung stattfindet.¹¹⁸

Mathematische Analyse¹¹⁹

Herleitung der Differentialgleichung

Strömt nun das Verbrennungsgas nach unten aus (Impuls des Verbrennungsgases), so gibt es nun aufgrund der Impulserhaltung einen genau so starken, entgegengesetzten Impuls der Rakete.

Es wird die Annahme getroffen, dass sich die Rakete entlang der y -Achse bewegt. Die Rakete soll zum Zeitpunkt t inklusive Treibstoff die Masse $m(t)$ sowie die Geschwindigkeit $v(t)$ aufweisen. Die Verbrennungsgase strömen mit einer Geschwindigkeit $u(t)$ entgegengesetzt zur Raketenbewegung aus. Ihre Geschwindigkeit im Bezug auf die y -Achse ist dann $v(t) + u(t)$. Im Zeitintervall Δt ändert sich der Raketenimpuls um $\Delta p_r = m(t + \Delta t) * v(t + \Delta t) - m(t) * v(t)$ und der Impuls des ausströmenden Verbrennungsgases um $\Delta p_G = [m(t + \Delta t) - m(t)] * [v(t) + u(t)]$.

Unter der Annahme, dass keine äußeren Kräfte wirken, gilt nach dem Impulserhaltungssatz also

¹¹⁷ Vgl. Wagner, Reischl, Steiner (2010), S.39 und

vgl. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Gesetze[23.7.2014].

¹¹⁸ Vgl. dazu Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 40-41.

¹¹⁹ Die Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung sowie die Berechnungen von Brennschlussgeschwindigkeit und Brennschlusshöhe und allgemeine Annahmen nach Heuser (2009), S. 329-331.

$$\Delta p_r = \Delta p_G.$$

Ausmultiplizieren und herausheben von $m(t + \Delta t)$ sowie $u(t)$ ergibt

$$m(t + \Delta t) * [v(t + \Delta t) - v(t)] = [m(t + \Delta t) - m(t)] * u(t).$$

Im Anschluss wird durch Δt dividiert und der Grenzwert gebildet:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m(t + \Delta t) * \frac{[v(t + \Delta t) - v(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[m(t + \Delta t) - m(t)]}{\Delta t} * u(t)$$

Damit folgt:

$$m(t) * v'(t) = m(t) * y''(t) = m'(t) * u(t)$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung der Raketenbewegung unter Vernachlässigung äußerer Krafteinwirkungen.

$m'(t) * u(t) = F_{schub}$ beschreibt dabei die sogenannte Schubkraft.

Startet die Rakete auf der Erde, so muss auch noch die Schwerkraft F_G berücksichtigt werden (Luftwiderstand etc. wird außer Acht gelassen). Die obige Raketengleichung verändert sich wie folgt:

$$m * y''(t) = F_{schub} + F_G.$$

Im Folgenden werden noch einige Annahmen für die Berechnung getroffen.

- Die Rakete bewegt sich nach dem Start senkrecht zur Erde entlang der y-Achse.
- Der Startpunkt der Rakete wird in den Koordinatennullpunkt gelegt.
- Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $y'(0) = 0$.
- Die Masse der Rakete zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt bei $m(0) = m_0$ inklusive einer Treibstofflademasse L .
- Um die Berechnungen nicht zu verkomplizieren, nimmt man an, dass die Treibstoffverbrennung konstant $= \alpha$ ist. Es gilt dann $m(t) = m_0 - \alpha * t$. Ableitung ergibt die Änderung der Masse mit der Zeit $m'(t) = -\alpha$.
- Da man nur beschränkt Treibstoff an Bord einer Rakete mitnehmen kann, ist die Verbrennungsdauer auf ein Intervall $[0, T]$ beschränkt, wobei T durch $T := \frac{L}{\alpha}$ definiert ist.
- Die Ausströmgeschwindigkeit des Verbrennungsgases $u(t)$ wird als konstant angenommen mit $u(t) = -v_s$.

Mit diesen Annahmen ergibt sich für die Bewegungsgleichung:

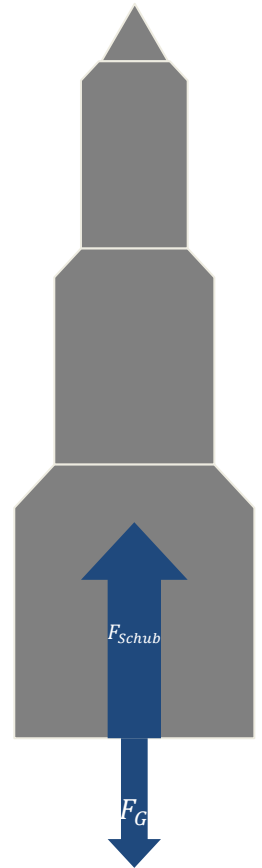


Abbildung 36: Schub- und Gravitationskraft beim Start einer Rakete.

$$m(t) * y''(t) = -v_s * m'(t) - m(t) * g$$

Bemerkung: Will man den Herleitungsaufwand gering halten, so kann auch die Beziehung für die Schubkraft $F_{schub} = m'(t) * u(t)$ direkt angegeben werden. Damit kann dann, gemeinsam mit der Schwerkraft, die Bewegungsgleichung in wenigen Minuten aufgestellt werden.

Lösung der Differentialgleichung

Durch Division durch $m(t)$ folgt für die Raketenbeschleunigung:

$$y''(t) = -v_s * \frac{m'(t)}{m(t)} - g = \frac{\alpha * v_s}{m_0 - \alpha * t} - g \text{ wobei } 0 \leq t \leq T$$

Mit der Beziehung $y''(t) = v'(t)$ gilt $y''(t) = v'(t) = -v_s * \frac{m(t)'}{m(t)} - g$.

Durch Integration der Funktion nach t

$$\int v'(t) dt = - \int \left(v_s * \frac{m(t)'}{m(t)} - g \right) dt,$$

erhält man

$$v(t) = -v_s * \ln(m(t)) - g * t + C.$$

Mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ kann die Integrationskonstante C bestimmt werden:

$$v(0) = 0 = -v_s * \ln(m(0)) - 0 + C$$

Für die Konstante C folgt daraus sofort $C = v_s * \ln(m_0)$.

Für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion der Rakete ergibt sich schlussendlich mit den Rechenregeln für den Logarithmus:

$$v(t) = -v_s * \ln(m(t)) - g * t + v_s * \ln(m_0) = v_s * \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - g * t = v_s * \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - g * t$$

wobei $0 \leq t \leq T$

Um nun die Weg-Zeit Funktion (und damit auch die Lösung der Differentialgleichung) zu erhalten, betrachtet man die bereits berechnete Geschwindigkeits-Zeit Funktion. Die Weg-Zeit Funktion erhält man durch Integration dieser Funktion nach t . Vorangehende Umformung erleichtert die Berechnung des Integrals:

$$y'(t) = v_s * \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - g * t = -v_s * \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - g * t = -v_s * \ln\left(1 - \frac{\alpha * t}{m_0}\right) - g * t \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

Durch Integration der Funktion nach t erhält man für die Weg-Zeit Funktion:

$$y(t) = v_s * \frac{m_0 - \alpha * t}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \alpha * t}{m_0} \right) - 1 \right] - \frac{1}{2} g * t^2 + C$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erhält man für die Integrationskonstante C :

$$0 = v_s * \frac{m_0 - \alpha * 0}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{m_0 - \alpha * 0}{m_0} \right) - 1 \right] - \frac{1}{2} g * 0^2 + C = -v_s * \frac{m_0}{\alpha} + C \text{ und damit } C = v_s * \frac{m_0}{\alpha}.$$

Eingesetzt in die Weg-Zeit Funktion erhält man die Lösung der Differentialgleichung:

$$y(t) = v_s * \frac{m_0 - \alpha * t}{\alpha} \ln \left(\frac{m_0 - \alpha * t}{m_0} \right) - \frac{1}{2} g * t^2 + v_s * t \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

Bemerkung: Da obiges Integral für Schülerinnen und Schüler doch ziemlich schwer zu lösen ist, empfiehlt sich eine Berechnung des Integrals mit einer CAS-Software. Sollten in der Schule keine Computer beziehungsweise keine CAS-Software zur Verfügung stehen, kann zum Beispiel auf der Website von Wolfram Alpha <http://www.wolframalpha.com> das Integral online und kostenlos (auch per Smartphone) berechnet werden.

Berechnung der Brennschlussgeschwindigkeit

Die Brennschlussgeschwindigkeit ist jene Geschwindigkeit, die eine Rakete nach Brennschluss, d.h. nach dem Abschalten des Triebwerks (wenn die Tanks aufgebraucht sind), erreicht hat.

Die Masse der Rakete beträgt zu diesem Zeitpunkt nur mehr das Leergewicht $m_l := m_0 - L$.

Die Brennschlussgeschwindigkeit ist dann nach $T = \frac{L}{\alpha}$ erreicht. Einsetzen von T in die Formel für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion ergibt dann die Brennschlussgeschwindigkeit. Für sie gilt:

$$v(T) = v_s * \ln \left(\frac{m_0}{m_l} \right) - g \frac{L}{\alpha}.$$

Berechnung der Brennschlusshöhe

Analog zur Brennschlussgeschwindigkeit ($m_l = m_0 - L$) erhält man die Brennschlusshöhe durch Einsetzen von T in die Weg-Zeit Funktion:

$$y(T) = v_s * \frac{m_l}{\alpha} \ln \left(\frac{m_l}{m_0} \right) - \frac{1}{2} g * \frac{L^2}{\alpha^2} + v_s \frac{L}{\alpha}$$

Arbeitsblatt - Start einer Saturn V Rakete

Die Saturn V Rakete war die Trägerrakete bei der ersten bemannten Mondlandung im Juli 1969. Im Folgenden soll mit den Daten für diese Rakete die Weg-Zeit Funktion, die Geschwindigkeits-Zeit Funktion sowie Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit berechnet werden.

Daten der Saturn V Rakete¹²⁰

Startmasse (total): 2 840t

Treibstofflademasse (bis Brennschluss First Stage): 2076t

Brennschlusszeit (bis Brennschluss First Stage): 2.5min = 150s

Kerosin-Gas Ausstoß/s: 13.33t/s

Schub: 680kN pro F1 Triebwerk, insgesamt (bei 5 Triebwerken) 3400kN

Ausströmgeschwindigkeit¹²¹: ~2500m/s

Damit können nun alle Daten berechnet werden.

Der Start der Apollo 11 kann nach der Berechnung unter folgendem Link nachverfolgt werden:

http://www.youtube.com/watch?v=F0Yd-GxJ_QM

¹²⁰Daten der Saturn V aus: NASA: Saturn V news reference, 1967, URL:

http://history.msfc.nasa.gov/saturn_apollo/documents/Introduction.pdf [23.07.2014] und URL: www.bernd-leitenberger.de/saturn5.shtml [23.07.2014].

¹²¹ Wert aus: URL: <http://www.stromberg-gymnasium.de/unterricht/faecher/ph/rakete/rakete-saturn.xls> [23.07.2014].

Lösung

Weg-Zeit Funktion:

Mit Hilfe der oben angegebenen Daten kann die Weg-Zeit Funktion mit einem CAS (Computeralgebrasystem) dargestellt werden:

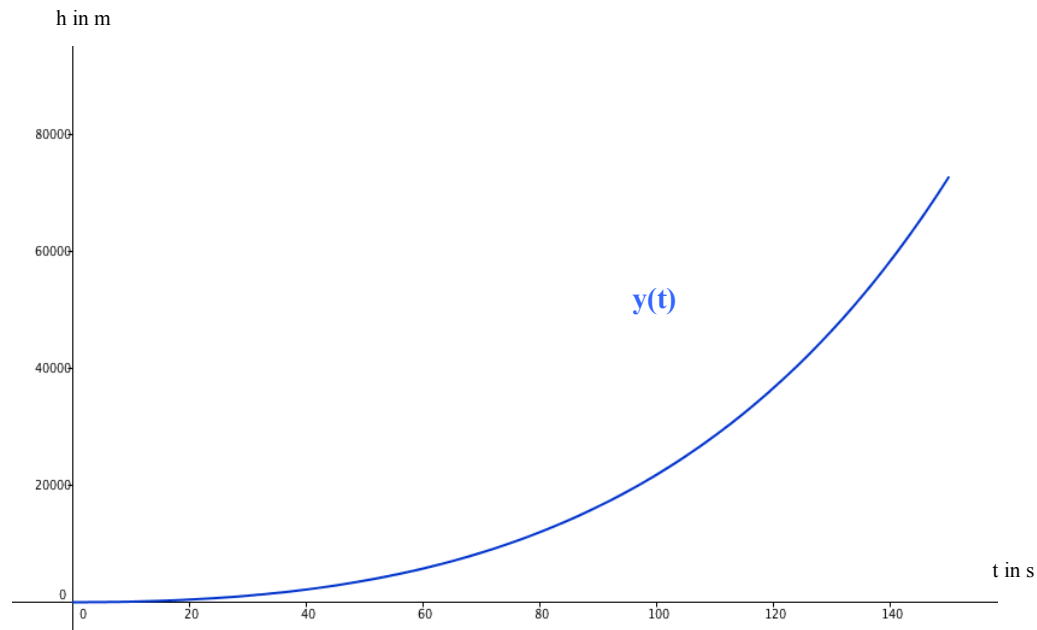


Abbildung 37: Berechnete Weg-Zeit Funktion der Saturn V Rakete, dargestellt in GeoGebra.

Geschwindigkeits-Zeit Funktion:

Mit Hilfe der oben angegebenen Daten kann die Geschwindigkeits-Zeit Funktion mit einem Computeralgebrasystem dargestellt werden:

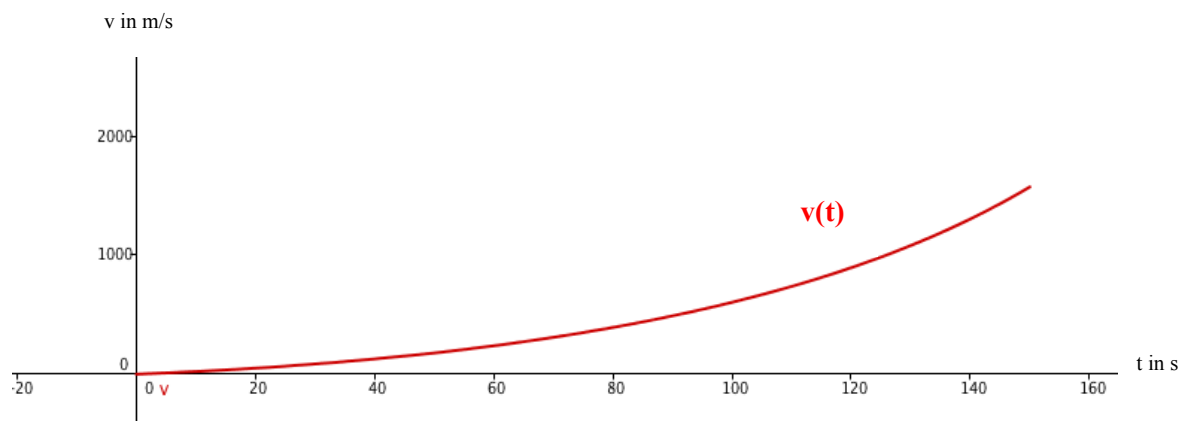


Abbildung 38: Berechnete Geschwindigkeits-Zeit Funktion der Saturn V Rakete, dargestellt in GeoGebra.

Berechnung der Brennschlusshöhe:

Mit oben hergeleiteter Formel für Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit können nun beide Werte durch Einsetzen der angegebenen Daten für die Saturn V Rakete berechnet werden:

Die Brennschlusshöhe:

$$y(150) = 2500 * \frac{764000}{13330} \ln\left(\frac{764000}{2840000}\right) - \frac{1}{2} 9.81 * 150^2 + 2500 * 150 = 76,504 \text{ km}$$

Die Brennschlussgeschwindigkeit:

$$v(150) = 2500 * \ln\left(\frac{2840000}{764000}\right) - 9.81 * 150 = 1810,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6519,528 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Brennschluss bezieht sich hier auf den Brennschluss der ersten Stufe. Folgende Werte wurden 1969 gemessen¹²²:

Brennschlusshöhe: 61 km

Brennschlussgeschwindigkeit 8600 km/h

Mögliche Abweichungen:

- In den aufgestellten Gleichungen wurden Vereinfachungen getroffen, die das Ergebnis verfälschen. So wurde zum Beispiel eine konstante Gravitationsbeschleunigung angenommen, die allerdings mit steigender Höhe immer weiter abnimmt.
- Der Großteil der Abweichung liegt allerdings daran, dass die Bewegung der Rakete als senkrecht zur Erde angenommen wurde. Tatsächlich fliegt die Rakete auf einer gekrümmten Bahn.

Nach der Lösung aller Aufgaben können Sie unter folgendem Link den Start der Apollo 11 (mit der Trägerrakete Saturn V) mit Geschwindigkeits- und Weg-Daten nachverfolgen.

http://www.youtube.com/watch?v=F0Yd-GxJ_QM

¹²²Daten aus URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_\(Rakete\)#Saturn_V](http://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_(Rakete)#Saturn_V) [23.7.2014].

6.2.10 Mathematisches Pendel

Schwierigkeitsniveau 3
Typ
**Mehrstunden-
projekt**
> 75 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
5	Physikalischer Input	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Entweder im Lehrer- Klassengespräch oder in Gruppen- /Einzelarbeit
10	Aufstellung der Bewegungsgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
25	Lösen der Differentialgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
30	Numerische Berechnung der Pendelschwingung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Computer	

Physikalischer Input¹²³

Das folgende Projekt behandelt die Bewegung eines mathematischen Pendels. Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Pendel, bei dem eine Masse an einem Faden mit der Länge l angehängt wird. Das Attribut "idealisiert" kommt daher, da folgende Vereinfachungen getroffen werden

1. Die Masse des Pendels wird als Massenpunkt betrachtet. Dabei nimmt man an, dass die ganze Masse in einem einzigen Punkt liegt.
2. Die Masse des Fadens des mathematischen Pendels wird vernachlässigt.
3. Beim mathematischen Pendel treten keinerlei Reibungseffekte auf.

Folgende Abbildung zeigt den Aufbau und die Kraftkomponenten am mathematischen Pendel bei Auslenkung um einen Winkel α .

¹²³ Informationen zum physikalischen Input nach Wagner, Reischl, Steiner(2010), S. 59-60.

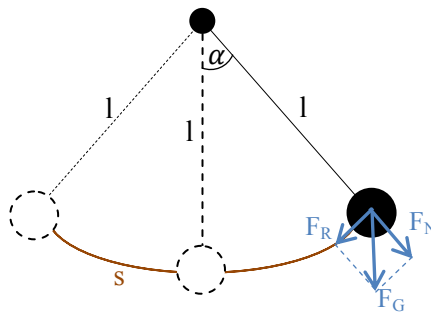


Abbildung 39: Mathematisches Pendel mit Kraftkomponenten.

Wird das Pendel um einen Auslenkwinkel α ausgelenkt, so erfolgt eine Aufteilung der Gewichtskraft F_G in die Normalkraft F_N und die Rückstellkraft F_R .

Betrachtet man das Kräfte-Parallelogramm in obiger Abbildung, so gilt für die Rückstellkraft

$$F_R = F_G * \sin(\alpha).$$

Mit der Gewichtskraft $F_G = -m * g$ folgt schließlich für die Rückstellkraft

$$F_R = -m * g * \sin(\alpha).$$

Wichtige Begriffe

- Amplitude: beschreibt die maximale Auslenkung
- Frequenz f : Anzahl der Schwingungszyklen/Sekunde
- Eigenkreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- Periode: ein voller Schwingungszyklus
- Periodendauer T : die Zeitdauer für einen vollen Schwingungszyklus:

$$T = 2 * \pi * f = 2 * \pi * \frac{1}{\omega} = 2 * \pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Gewichtskraft $F_G = -m * g$

Herleitung der Bewegungsgleichung¹²⁴

Der Auslenkwinkel α steht mit der Bogenlänge s und der Pendellänge gemäß $\alpha = \frac{s}{l}$ in Zusammenhang. Achtung: Hier muss der Winkel im Bogenmaß verwendet werden!

¹²⁴ Nach URL: <http://www.ahoefer.de/schwingungen/fadenpendel/fadenpendel.php> [12.06.2014].

Für die Rückstellkraft gilt damit

$$F_R = -m * g * \sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

Aus dem zweiten Newtonschen Axiom folgt durch Umformung für die Beschleunigung $a_R = \frac{F_R}{m}$.

Auf die Rückstellkraft angewendet gibt dies für die Tangentialbeschleunigung des Pendels:

$$a_R(t) = \frac{F_R(t)}{m} = -g * \sin\left(\frac{s(t)}{l}\right)$$

Wegen $a_R(t) = s''(t)$ folgt für die Differentialgleichung

$$s''(t) = -g * \sin\left(\frac{s(t)}{l}\right).$$

Die Weg-Zeit Funktion $s(t)$ ist in dieser Differentialgleichung in der Sinusfunktion enthalten und mit den kennengelernten Ansätzen zur Lösung der Differentialgleichung nicht lösbar. Da sich die Lösung dieser Differentialgleichung sehr komplex gestaltet und für den Schulunterricht nicht geeignet ist, betrachtet man im Folgenden eine Näherung für kleine Auslenkungen des Pendels.

Näherung für kleine Auslenkungen

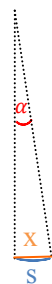


Abbildung 40: Näherung für kleine Auslenkungen.

Für kleine Auslenkungen weicht der Wert der Bogenlänge s nur gering von der Länge der Geraden x ab. Mit der trigonometrischen Funktion folgt dann die Approximation:

$$\sin(\alpha) \approx \frac{x}{l} \approx \frac{s}{l} = \alpha$$

Damit kann die Differentialgleichung für kleine Auslenkungen durch

$$s''(t) = -g * \frac{s(t)}{l}$$

angenähert werden. Mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ folgt für die Differentialgleichung:

$$s''(t) = -\omega^2 * s(t)$$

Lösung der Differentialgleichung

Die obige Differentialgleichung kann mit Hilfe des Ansatzes

$$s(t) = c * e^{\lambda t} \text{ mit } c \neq 0$$

gelöst werden. Leitet man $s(t)$ zweimal nach der Zeit ab, so erhält man

$$s''(t) = \lambda^2 * c * e^{\lambda t}.$$

Dieser Ausdruck wird nun in obige Differentialgleichung eingesetzt.

Man erhält damit:

$$\lambda^2 * c * e^{\lambda t} + \omega^2 * c * e^{\lambda t} = 0$$

Durch Herausheben von $c * e^{\lambda t}$ erhält man

$$c * e^{\lambda t} * (\lambda^2 + \omega^2) = 0.$$

Wegen der Voraussetzung $c \neq 0$ und da $e^{\lambda t} \neq 0 \forall t \in [0, \infty]$ folgt

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Umformung der quadratischen Gleichung nach λ ergibt

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i * \omega.$$

Die allgemeine Lösung der Pendelschwingung ist also gegeben durch:

$$s(t) = c_1 * e^{i*\omega*t} + c_2 * e^{-i*\omega*t}$$

Mit $e^{i*\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$ erhält man für $s(t)$:

$$s(t) = c_1 * [\cos(\omega t) + i * \sin(\omega t)] + c_2 * [\cos(-\omega t) + i * \sin(-\omega t)]$$

Wegen $\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$ und $\sin(\omega t) = -\sin(-\omega t)$ folgt für $s(t)$:

$$s(t) = c_1 * [\cos(\omega t) + i * \sin(\omega t)] + c_2 * [\cos(\omega t) - i * \sin(\omega t)]$$

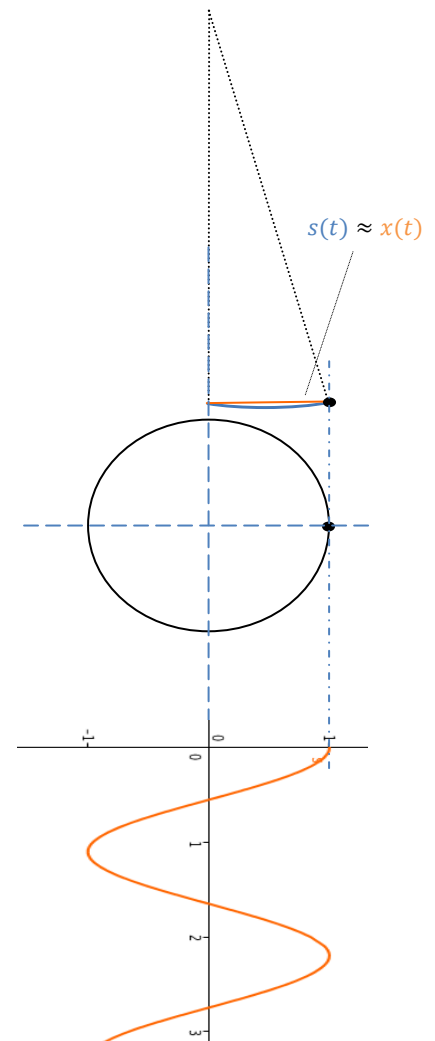


Abbildung 41: Zusammenhang zwischen Pendelschwingung und Cosinus Funktion.

Nun müssen noch die beiden Konstanten c_1 und c_2 berechnet werden.

Dazu betrachtet man zuerst die Bewegung des Pendels:

Nach einem Viertel der Schwingungsdauer $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ erreicht das Pendel den Nulldurchgang. Das bedeutet $s\left(\frac{T}{4}\right) = 0$. Wendet man dies in der Gleichung für die Pendelschwingung an so folgt:

$$s\left(\frac{T}{4}\right) = c_1 * \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + c_2 * \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$$

$$s\left(\frac{T}{4}\right) = 0 = c_1 * i - c_2 * i \rightarrow c_1 = c_2.$$

Damit erhält man

$$s(t) = c_1 * [\cos(\omega t) + i * \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i * \sin(\omega t)] = 2 * c_1 * \cos(\omega t)$$

Zum Startzeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Pendel auf Maximalauslenkung bei $s(0) = s_{max}$. Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man

$$s_{max} = 2 * c_1,$$

woraus sofort

$$c_1 = \frac{s_{max}}{2}$$

folgt.

Setzt man dies nun für die Konstante in obige Schwingungsgleichung ein, so erhält man schließlich für die Bewegung des idealen Fadenpendels

$$s(t) = s_{max} * \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right).$$

Durch Ableitung der Weg-Zeit Funktion nach der Zeit, erhält man noch die Geschwindigkeit des Pendels:

$$v(t) = s_{max} * \sqrt{\frac{g}{l}} * \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

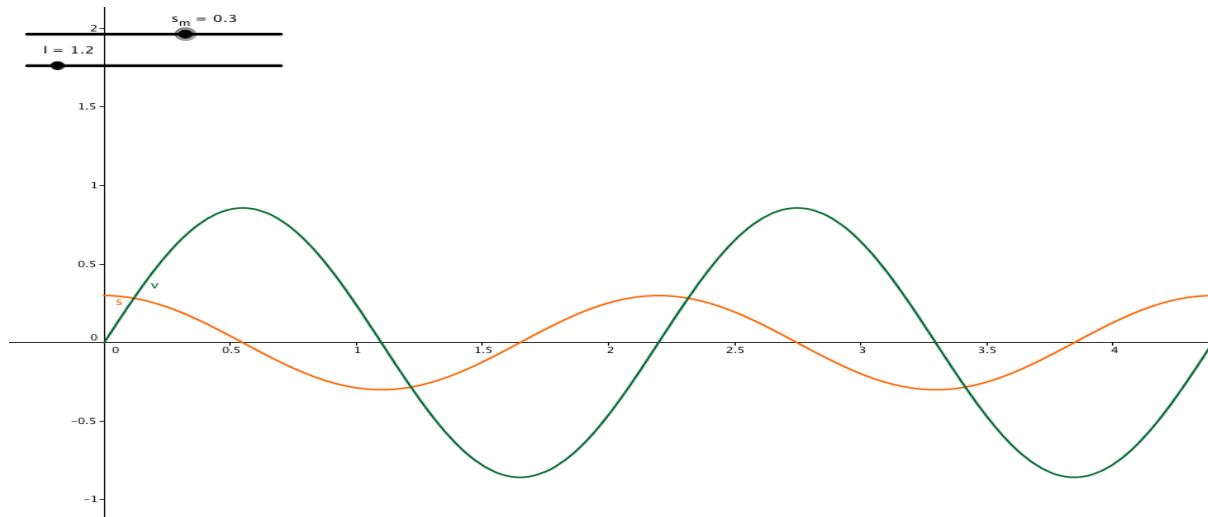


Abbildung 42: Darstellung der Schwingungsauslenkung und der Pendelgeschwindigkeit in GeoGebra mit Schieberegler für die Pendellänge und der maximalen Auslenkung s_{max} .

Eine Vergrößerung von s_{max} bewirkt eine

- Vergrößerung der Amplitude von $s(t)$.
- Erhöhung der Geschwindigkeit $v(t)$ des Pendels.

Eine Vergrößerung von l bewirkt eine

- Vergrößerung der Periodendauer.
- Verringerung der Geschwindigkeit $v(t)$ des Pendels.

Numerische Berechnung der Pendelschwingung

In obiger Lösung wurde eine Näherung für kleine Auslenkungen gemacht und $\sin(\alpha) \approx \alpha$ angenommen. Die Berechnung für große Auslenkungen mittels einer Differentialgleichung wird sehr aufwendig und ist daher für den Schulunterricht wenig geeignet. Es gibt aber trotzdem eine Möglichkeit, die Bewegung des Pendels für große Auslenkungen zu betrachten - die numerische Beschreibung. In Kapitel 4 wurde das auf dem Heun Verfahren beruhende „verbesserte Verfahren“ zur numerischen Berechnung kennengelernt.

Aus dem Weg-Zeit Gesetz und dem 2. Newtonschen Axiom folgt für den Ort zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} * \Delta t + \frac{F(x_{n-1})}{2 * m} (\Delta t)^2.$$

Für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt n gilt die Näherung

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{F(x_{n-1})}{m} + \frac{F(x_n)}{m} \right) * \Delta t.$$

Für die auf die Pendelmass wirkende Kraft wird

$$F(x) = - \left(\frac{m * g}{l} \right) * \sin(x)$$

verwendet.¹²⁵

Damit ist alles gegeben, was für die numerische Berechnung benötigt wird. Zur numerischen Berechnung eignet sich ein Tabellenkalkulationsprogramm wie zum Beispiel Microsoft Excel. Man wählt ein Zeitintervall Δt sowie den Ort x und die Geschwindigkeit v in jeweils einer Spalte. Zur besseren Veranschaulichung der errechneten Werte kann ein Graph erstellt werden, in dem x als Funktion der Zeit aufgetragen wird.

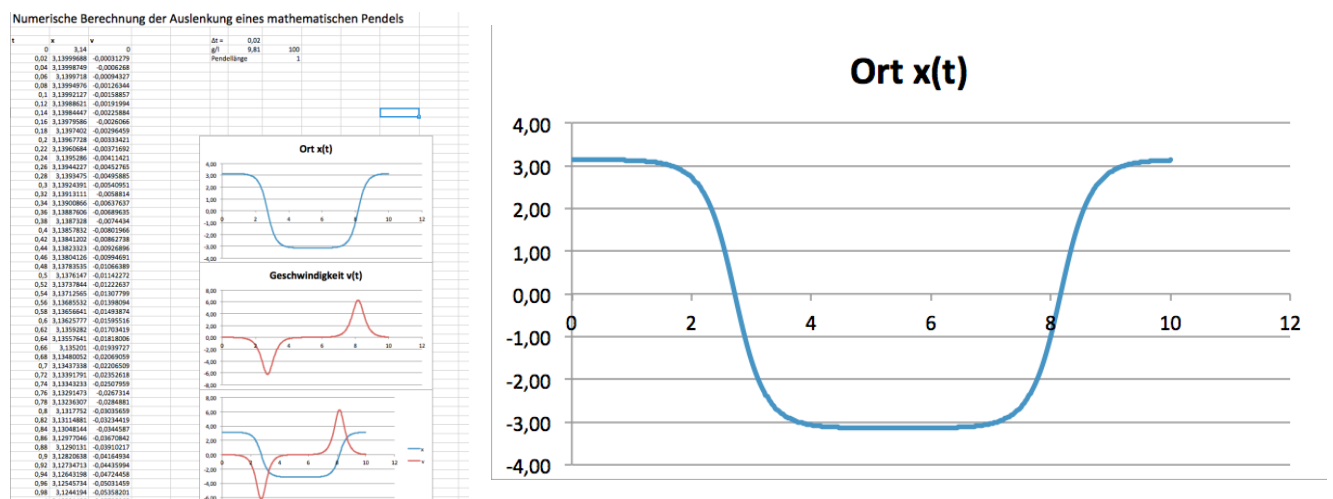


Abbildung 43: Graphische Darstellung der numerischen Berechnungen für $x(0) = 3.14$, $v(0) = 0$ und $l = 1$.

Vergleich

Trägt man nun die beiden Lösungen in einem Diagramm auf, so kann man die Abweichung der Lösung aus 6.2.10 erkennen. Während für kleine Winkel noch eine gute Übereinstimmung des Bewegungsverlaufs und der Näherung zu erkennen ist, zeigt sich ab einem Auslenkwinkel von ca. 10° bereits eine Abweichung der Periodendauer.

¹²⁵ Nach Embacher (2013), S. 12.

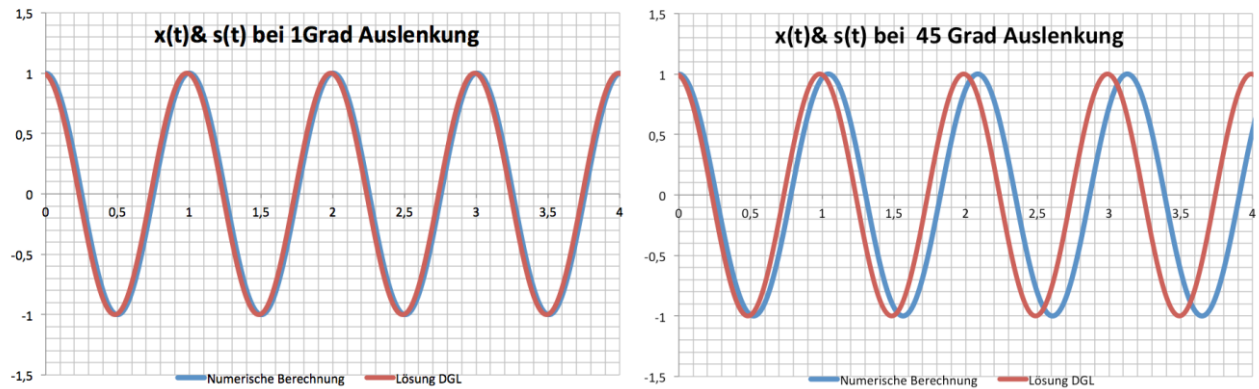


Abbildung 44: Vergleich der Lösungen für unterschiedliche Winkel.

In obiger Abbildung sind die Funktionsverläufe für 1° und 45° Auslenkungen aufgetragen. Man erkennt hier sehr schön die Abweichungen der beiden Lösungen.

Man erkennt daraus, dass die Periodendauer nicht nur allein vom Term $\sqrt{\frac{g}{l}}$ abhängig ist - wie in der Näherung angenommen - sondern auch der Anfangsauslenkwinkel eine wesentliche Rolle spielt.

6.2.11 Das ungedämpfte Federpendel

Schwierigkeitsniveau 3
Typ
**Mehrstunden-
projekt**
75 Minuten

Unterrichtsplanung

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Einführung in die Physik des Federpendels	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Alternativ selbstständiges Durcharbeiten
45	Herleitung der Weg-Zeit Funktion durch Lösen der Differentialgleichung Alternative: Simulation durch Applet	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
20	Durchführung des Versuches und Vergleich	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Experiment	

Physikalischer Input¹²⁶:

Zieht man am Massenstück eines Federpendels und lässt den Körper dann aus, so bewegt sich das Massenstück periodisch in y -Richtung (man nimmt der Einfachheit halber an, dass die Bewegung nur 1 dimensional erfolgt). $y(t)$ gibt dabei die momentane Lage der Masse zum Zeitpunkt t an.

Das Hook'sche Gesetz

Aus dem Physikunterricht ist das Hook'sche Gesetz bekannt. Was besagt nun dieses Gesetz? Es besagt, dass die sogenannte rücktreibende Kraft F_F einer Feder proportional zur Ausdehnung der Feder ist. Den Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als Federkonstante und verwendet für ihn üblicherweise die Variable k . In eine Formel verpackt lautet das Hook'sche Gesetz nun

¹²⁶ Informationen zum physikalischen Input und Erklärungen zum Federpendel nach URL:

<http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/10/schwingungen/federpendel/federpendel.htm> [27.03.2014] sowie

URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/vertikales_federpendel/vertikales_federpendel.php [22.6.2014].

$$F_F = -k * y.$$

Da die Federkraft der Auslenkung entgegenwirkt, enthält die Gleichung ein negatives Vorzeichen.

Das Federpendel

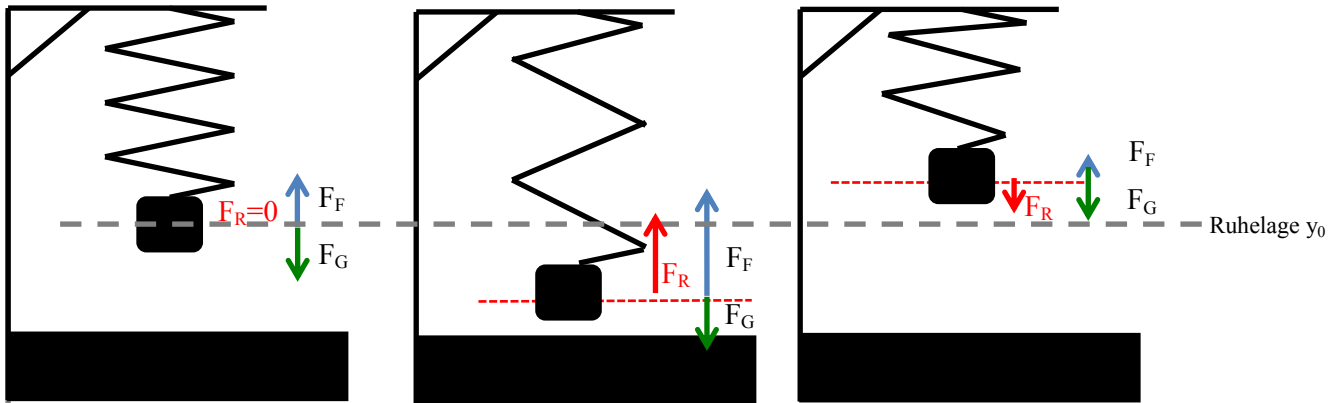


Abbildung 45: Zeitlicher Verlauf der Bewegung eines Federpendels mit Masse.

Ausgangssituation: An eine Metallfeder wird ein Körper mit einer bestimmten Masse befestigt. Die Feder dehnt sich (aufgrund der Gewichtskraft) bis in den sogenannten Gleichgewichtszustand aus. In diesem Zustand (wie in obiger Abbildung im Bild links) bewegt sich das Pendel nicht. Die Gewichtskraft F_G und die Federkraft F_F sind in diesem Zustand (betragsmäßig) gleich groß. Da sie in entgegengesetzte Richtungen zeigen, heben sich Gewichtskraft und die rücktreibende Federkraft auf. Es gilt:

$$F_F = -k * y_0 = -F_G$$

y_0 beschreibt dabei die Ausdehnung der Feder im Gleichgewichtszustand.

Wird nun die Feder aus dem Gleichgewichtszustand um y weiter nach unten ausgelenkt, so erhöht sich die Federkraft:

$$F_F = -k * (y_0 + y)$$

Für die resultierende rücktreibende Kraft F_R gilt dann

$$F_R = F_G + F_F = k * y_0 - k * (y_0 + y) = -k * y.$$

Das bedeutet: Durch Anziehen an der Feder wird die rücktreibende Kraft größer als die Gewichtskraft. Beim Auslassen beschleunigt die Masse nun in Richtung der rücktreibenden Federkraft. Die Gewichtskraft der Masse überwiegt oberhalb der Gleichgewichtslage gegenüber der Federkraft und die Masse wird folglich in Richtung der Gewichtskraft beschleunigt. Die Masse bewegt sich dabei

noch in Richtung der Federkraft, wird aber ab der Gleichgewichtslage immer weiter abgebremst, bis sie am Umkehrpunkt (maximaler Ausschlag) die Richtung ihrer Bewegung - in Richtung der Gewichtskraft - ändert. Der Vorgang verläuft nun analog in entgegengesetzte Richtung.¹²⁷

Wichtige Begriffe

- Amplitude: beschreibt die maximale Auslenkung
- Periode: ein voller Schwingungszyklus
- Frequenz f : Anzahl der Schwingungszyklen/Sekunde
- Eigenkreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Periodendauer T : die Zeitdauer für einen vollen Schwingungszyklus:

$$T = 2 * \pi * f = 2 * \pi * \frac{1}{\omega} = 2 * \pi * \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Federkonstante k : Proportionalitätsfaktor zwischen Auslenkung und rücktreibender Kraft

Bemerkung: In diesem Beispiel werden die Dämpfung und etwaige Luftwiderstände vernachlässigt.

Aufstellung der Differentialgleichung¹²⁸

Aus dem Physikunterricht ist bereits bekannt, dass die Kraft stets auch durch das Produkt $F = m * a$ beschrieben wird. Die Beschleunigung erhält man durch zweifaches Ableiten der Weg-Zeit Funktion.

Es gilt also für die Kraft ganz allgemein:

$$m * a(t) = m * y''(t) = F(t).$$

Wendet man nun diese Beziehung auf die oben hergeleitete resultierende Kraft an, so gilt:

$$m * y''(t) = -k * y(t)$$

Division durch m liefert:

$$y''(t) = -\frac{k}{m} * y(t)$$

Die Eigenkreisfrequenz ω ist definiert durch $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Setzt man die Eigenkreisfrequenz nun in obige Gleichung ein, so erhält man die lineare homogene

¹²⁷ Erklärung nach URL: <http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/10/schwingungen/federpendel/federpendel.htm> [27.03.2014].

¹²⁸ Nach URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/vertikales_federpendel/vertikales_federpendel.php [22.6.2014].

Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) + \omega^2 * y(t) = 0.$$

Der erste Schritt ist somit geschafft - die mathematische Beschreibung des Vorganges mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im nächsten Schritt gilt es diese Differentialgleichung zu lösen.

Lösung der Differentialgleichung

Die obige Differentialrechnung kann mit Hilfe des Ansatzes

$$y(t) = C * e^{\lambda t} \text{ mit } C \neq 0$$

gelöst werden. Leitet man $y(t)$ zweimal nach t ab, so erhält man

$$y''(t) = \lambda^2 * C * e^{\lambda t}.$$

Dieser Ausdruck wird nun in obige Differentialgleichung eingesetzt.

Man erhält damit:

$$\lambda^2 * C * e^{\lambda t} + \omega^2 * C * e^{\lambda t} = 0$$

Durch Herausheben von $C * e^{\lambda t}$ erhält man

$$C * e^{\lambda t} * (\lambda^2 + \omega^2) = 0.$$

Wegen der Voraussetzung $C \neq 0$ und $e^{\lambda t} \neq 0 \forall t \in [0, \infty]$ folgt

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Umformung der quadratischen Gleichung nach λ ergibt

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i * \omega.$$

Man erhält damit für die allgemeine Lösung¹²⁹

$$y(t) = C_1 * \sin(\omega * t) + C_2 * \cos(\omega * t).$$

Nun müssen noch die beiden Konstanten C_1 und C_2 berechnet werden.

¹²⁹ Gemäß Timischl, Kaiser(2005),S.154.

Dazu betrachtet man zuerst die Bewegung des Federpendels. Zum Startzeitpunkt $t = 0$ soll sich das Pendel im Ausgangszustand bei $y(0) = 0$ befinden (Man startet in diesem Fall sozusagen die Messung des Pendels im Nulldurchgang). Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$y(0) = 0 = C_1 * 0 + C_2 * 1$$

Daraus folgt sofort $C_2 = 0$.

Damit folgt für die allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 * \sin(\omega * t)$$

C_1 wird nun mit folgender Überlegung bestimmt: Die Schwingung erreicht ihren maximalen Ausschlag, den man als y_m bezeichnet, nach einer Viertelperiode also nach $\frac{T}{4}$. Es gilt also

$$y\left(\frac{T}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{2 * \omega}\right) = y_m = C_1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 * 1$$

woraus sofort $c_1 = y_m$ folgt.

Setzt man dies nun für die Konstante in obige Schwingungsgleichung ein, so erhält man schließlich für die Bewegung des idealen Federpendels:

$$y(t) = y_m * \sin(\omega t)$$

Rechenbeispiel¹³⁰:

Lösen Sie die Differentialgleichung eines ungedämpften schwingenden Feder-Masse-Systems und berechnen Sie die maximale Auslenkung des Pendels!

Folgende Werte sind dabei gegeben:

Masse des Systems $m = 2\text{ kg}$

Federkonstante $k = 32\text{ N/m}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 0$; $v_0 = 1,2\text{ m/s}$

¹³⁰ Nach Timischl, Kaiser (2005), S. 162.

Lösung:

Hier handelt es sich um ein ungedämpftes Feder Masse System mit der Differentialgleichung

$$y''(t) + \frac{k}{m} * y(t) = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(t) = y_m * \sin(\omega * t),$$

wie bereits hergeleitet.

Nun werden die konkreten Werte eingesetzt:

Mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ folgt für die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\omega = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4\text{s}^{-1}$
 y_m wird durch die Anfangsbedingung v_0 bestimmt:

$$y'(t) = v(t) = \omega * y_m * \cos(\omega * t)$$

Daraus folgt:

$$y'(0) = v_0 = \omega * y_m * \cos(\omega * 0) = \omega * y_m$$

$$y_m = \frac{v_0}{\omega} = \frac{1.2}{4} = 0.3$$

Somit ist mit

$$y(t) = 0.3 * \sin(4 * t)$$

die Bewegungsgleichung für den ungedämpften Fall gefunden.

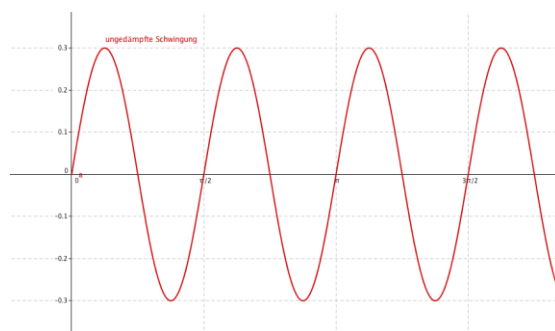


Abbildung 46: Ungedämpfte Schwingung.

Versuch Federpendel

Ziel: Messung des zeitlichen Verlaufs der Auslenkung beim Federpendel.

Benötigte Materialien:

- Feder und Halterung
- Belastungsmasse: 200g
- Maßstab
- High Speed Kamera mit Halterung
- Analysesoftware

Durchführung:

Die Auslenkung des Pendels wird mit der High Speed Kamera aufgenommen. Es wird mit der Belastungsmasse von 200g gearbeitet. Mit der Analysesoftware wird die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit aufgenommen. Im Anschluss soll der aufgenommene zeitliche Verlauf mit dem berechneten Verlauf verglichen werden.

Der Vergleich wird zeigen, dass Reibungskräfte für eine bessere Annäherung an den realen Fall berücksichtigt werden müssen.

6.2.12 Das Federpendel mit Dämpfung¹³¹

Schwierigkeitsniveau 3

Typ

Projekt

> 100 Minuten

Unterrichtsplanung

Bemerkung: Als Vorbereitung wird die Bearbeitung des Projekts „*Das ungedämpfte Federpendel*“ empfohlen.

Zeit [min]	Aktivität	Sozialform	Materialien	Anmerkungen
10	Einführung in die Physik des Schwingungsvorgangs	Lehrer/Klassengespräch Einzelarbeit Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	Alternativ selbstständiges Durcharbeiten
10	Herleitung der Bewegungsgleichung und Aufstellung der Bewegungsgleichung	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	
50	Lösung der Bewegungsgleichung für Schwingfall, Kriechfall aperiodischer Grenzfall	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt (Literatur)	
15+	Berechnung eines konkreten Beispiels mit Wertangaben	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt	
15+	Durchführung des Versuchs am Federpendel mit unterschiedlichen Massen	Einzelarbeit/ Gruppenarbeit	Arbeitsblatt Experiment PC	

¹³¹ In diesem Projekt wird nur der homogene Fall (d.h. ohne zusätzliche äußere Krafteinwirkung) betrachtet. Der inhomogene Fall (mit äußerer Krafteinwirkung) ist - unter anderem aufgrund von Phänomenen wie Resonanz und Resonanzkatastrophe - von großer physikalischer Bedeutung. Da die Berechnung des inhomogenen Falls hier aber den Rahmen sprengen würde, wird nur eine Literaturempfehlung für weiterführende Projekte angegeben. Unter der URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/erzwungene_schwingungen/erzwungene_schwingungen.php, findet man tolle übersichtliche Erklärungen zur inhomogenen Schwingung.

Physikalischer Input¹³²

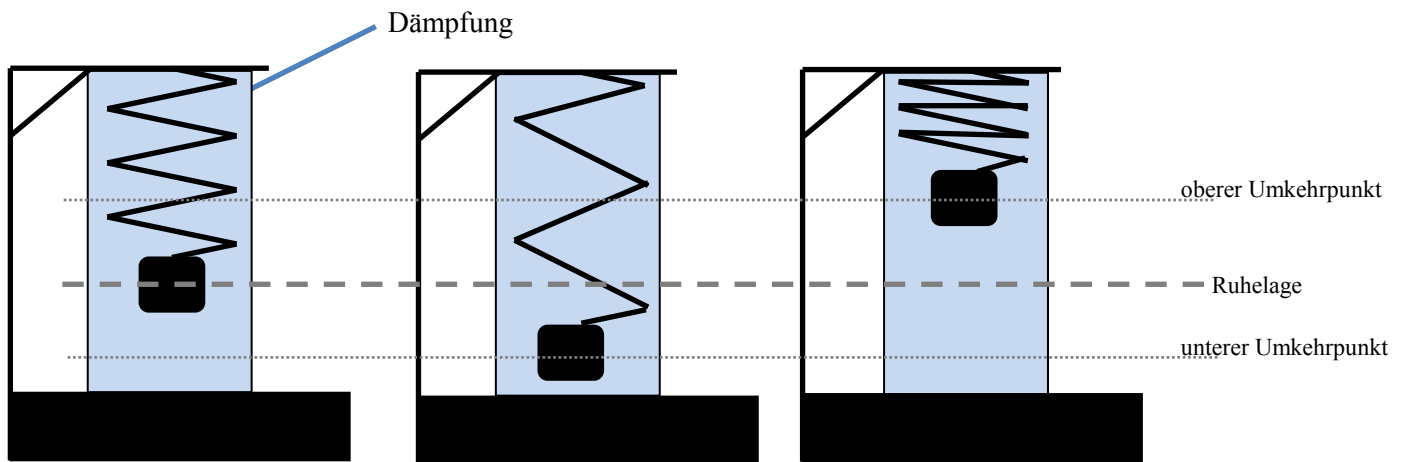


Abbildung 47: Zeitlicher Verlauf der Bewegung eines Federpendels mit Masse.

In vorigem Beispiel war vom ungedämpften Federpendel die Rede. Dabei verwendet man zur Vereinfachung die Annahme, dass auf das Feder-Masse-System keinerlei Reibungskräfte wirken. Im Folgenden wird nun auch die Dämpfung in die Betrachtung miteinbezogen.

Die Dämpfungskraft steigt (in guter Näherung) linear zur Geschwindigkeit der Feder. Für die Dämpfungskraft gilt damit:

$$F_D(t) = -D * v(t) = -D * y'(t)$$

Verschiedene Dämpfungsgrade

Salopp gesagt: umso stärker die Dämpfung ist, umso schneller hört das Schwingen der Feder wieder auf. Dies ist in vielen Einsatzbereichen auch so gewünscht. Bei der Federung eines Autos zum Beispiel soll die Feder möglichst rasch in den Ursprungszustand zurückgehen und nicht weiter nachschwingen.¹³³

Bei Musikinstrumenten - wie zum Beispiel bei den Saiten einer Gitarre - soll die Saite jedoch länger schwingen.

¹³² Informationen zum physikalischen Input nach URL:

http://www.ahoefer.de/schwingungen/gedaempfte_harmonische_schwingung/gedaempfte_harmonische_schwingung.php
[25.06.2014].

¹³³ Vgl. URL: <http://www.leifiophysik.de/themenbereiche/mechanische-schwingungen> [25.06.2014].

Allgemein unterscheidet man für eine freie Schwingung mit Dämpfung drei Schwingungsarten.¹³⁴

1. $\varepsilon < 1$: Schwingfall (schwache Dämpfung) :

Die Schwingung wird langsam immer kleiner.

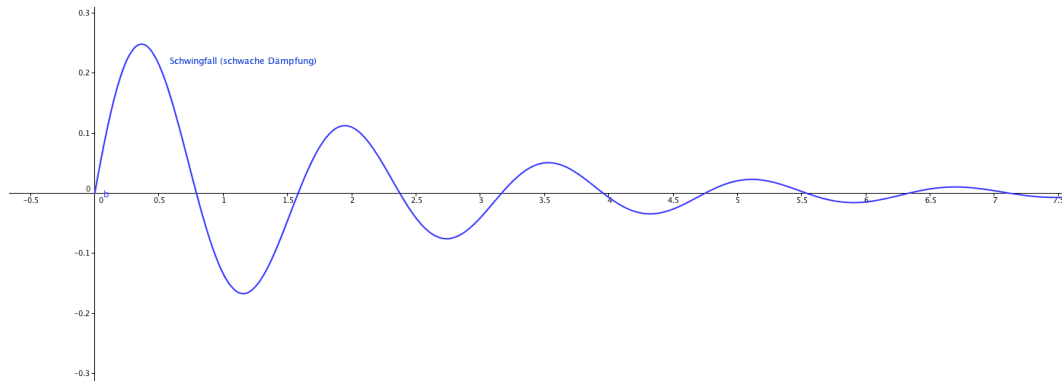


Abbildung 48: Schwingfall (schwache Dämpfung).

Anwendung: Zum Beispiel bei Saiteninstrumenten.

2. $\varepsilon > 1$: **Kriechfall:** Die Feder geht sehr langsam in die Ausgangslage zurück. Aufgrund der starken Dämpfung erfolgt keine Schwingung.

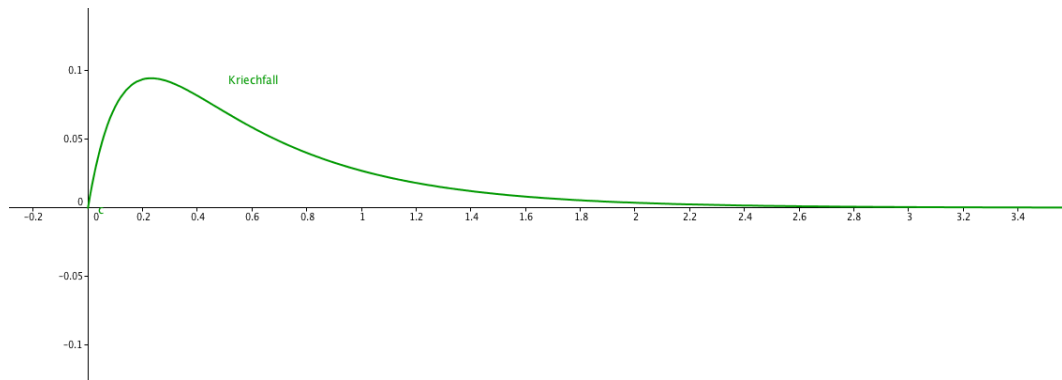


Abbildung 49: Kriechfall.

Anwendung: Eine Anwendungsmöglichkeit ist zum Beispiel eine automatisch schließende Tür. Die eingebaute Feder lässt die Tür nur ganz langsam schließen.

¹³⁴ Nach Timischi & Kaiser (2005), S.164 sowie
nach dazu URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/mechanische-schwingungen>[25.6.2014].

3. $\varepsilon = 1$: Aperiodischer Grenzfall

Die Feder geht ohne zu schwingen, möglichst rasch in die Ruhelage zurück.

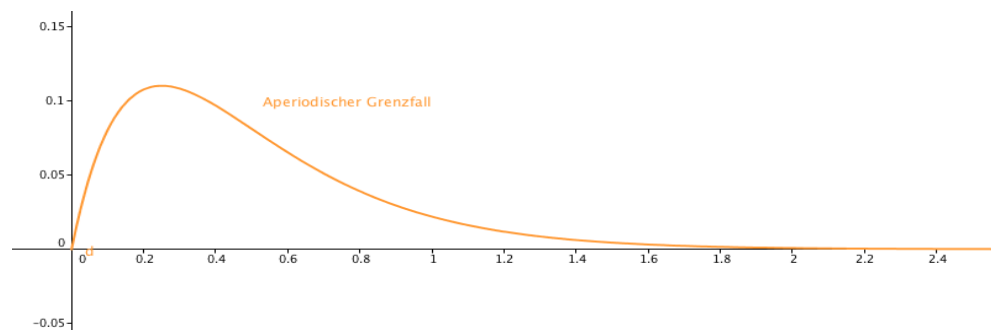


Abbildung 50: Aperiodischer Grenzfall.

Anwendung: Zum Beispiel die Federung bei einem Auto (Stoßdämpfer).

Herleitung der Differentialgleichung¹³⁵

Nun wird die Bewegungsgleichung für eine Feder mit Dämpfung aufgestellt.

Wichtige Begriffe:

m ... Pendelmasse

D ... Reibungs / Dämpfungskonstante

k ... Federkonstante

y_m ... Anfangsauslenkung

$\delta = \frac{D}{2m}$... Abklingkonstante

$\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0}$... Dämpfungsgrad

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$... Nennkreisfrequenz

$\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$... Eigenkreisfrequenz

$y_u = A * e^{-\frac{\delta T}{4}}$... 1. Umkehrpunkt

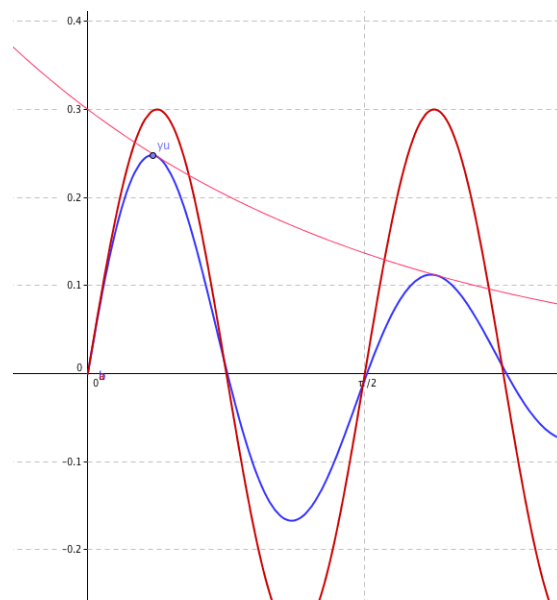


Abbildung 51: Der 1. Umkehrpunkt y_u .

¹³⁵ Herleitung der Differentialgleichung nach URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/gedaempfte_harmonische_schwingung/gedaempfte_harmonische_schwingung.php [25.06.2014].

Zusätzlich zur Bewegungsgleichung des Federpendels ohne Dämpfung, $y''(t) + \frac{k}{m} * y(t) = 0$ muss nun noch die Dämpfungskomponente berücksichtigt werden.

Somit folgt für die Bewegungsgleichung

$$m * y''(t) = -D * y'(t) - k * y(t).$$

Durch Umformung erhält man

$$y''(t) + \frac{D}{m} * y'(t) + \frac{k}{m} * y(t) = 0,$$

die Differentialgleichung einer freien Schwingung mit Dämpfung.

Lösung der Differentialgleichung

Um diese lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung zu lösen, wird der Ansatz

$$y(t) = C * e^{\lambda * t} \text{ mit } C \neq 0$$

verwendet. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung erhält man

$$C * \lambda^2 * e^{\lambda * t} + \frac{D}{m} * C * \lambda * e^{\lambda * t} + \frac{k}{m} C * e^{\lambda * t} = 0$$

Kürzen liefert das sogenannte charakteristische Polynom der Form:

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} * \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (*p-q Formel*) erhält man als Lösung für λ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2 * m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2 * m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

bzw.

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega$$

Hier können nun 3 Fälle unterschieden werden:

- $\delta < \omega_0$ der Schwingfall

- $\delta > \omega_0$ der Kriechfall
- $\delta = \omega_0$ der aperiodische Grenzfall

1. Fall – Schwingfall $\delta < \omega_0$:

Bei diesem Fall erhält man aufgrund von $\delta < \omega_0$ einen negativen Ausdruck unter der Wurzel und somit ist $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}$.

Die Lösung für λ ist gegeben durch:

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega \text{ und } \lambda_2 = -\delta - i\omega$$

Man erhält als allgemeine Lösung¹³⁶

$$y(t) = C_1 * e^{-\delta t} * \sin(\omega * t) + C_2 * e^{-\delta t} * \cos(\omega * t).$$

Herausheben von $e^{-\delta t}$ gibt:

$$y(t) = e^{-\delta t} * [C_1 * \sin(\omega * t) + C_2 * \cos(\omega * t)]$$

C_1 und C_2 werden durch Berücksichtigung der Anfangsbedingung bestimmt:

$$y(0) = 0 = C_1 * 1 * 0 + C_2 * 1 * 1 \rightarrow C_2 = 0$$

Der erste Umkehrpunkt y_u wird nach $\frac{T}{4}$ erreicht. Somit folgt für C_1 :

$$y\left(\frac{T}{4}\right) = y_u = e^{-\frac{\delta T}{4}} * [C_1 * 1]$$

und damit folgt für C_1 :

$$C_1 = y_u * e^{\frac{\delta T}{4}}$$

Damit folgt für die Lösung im Fall 1:

$$y(t) = y_u * e^{\frac{\delta T}{4}} * e^{-\delta t} * \sin(\omega * t) = y_u * e^{\delta(\frac{T}{4} - t)} * \sin(\omega * t)$$

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von C_1 ist die Berücksichtigung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

¹³⁶ Gemäß Timischl, Kaiser (2005), S.154.

Für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion gilt:

$$y'(t) = -C_1 * \delta * e^{-\delta t} * \sin(\omega * t) + C_1 * e^{-\delta t} * \omega * \cos(\omega * t) - C_2 * \delta * e^{-\delta t} * \cos(\omega * t) - C_2 * e^{-\delta t} * \omega * \sin(\omega * t)$$

Mit $C_2 = 0$ folgt für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion:

$$y'(t) = -C_1 * \delta * e^{-\delta t} * \sin(\omega * t) + C_1 * e^{-\delta t} * \omega * \cos(\omega * t)$$

Mit der Annahme $y'(0) = v_0$ folgt für C_1 :

$$y'(0) = v_0 = -C_1 * \delta * 1 * 0 + C_1 * 1 * \omega * 1,$$

woraus sich für C_1 sofort $C_1 = \frac{v_0}{\omega}$ ergibt.

Damit folgt für die Lösung im Fall 1 alternativ:

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} * e^{-\delta * t} * \sin(\omega * t)$$

2. Fall – Kriechfall $\delta > \omega_0$:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega$$

Wegen $\delta > \omega_0$ ist $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$ und die Lösungen für λ sind gegeben durch

$$\lambda_1 = -\delta + \omega,$$

$$\lambda_2 = -\delta - \omega.$$

Man erhält als allgemeine Lösung¹³⁷

$$y(t) = C_1 * e^{(-\delta + \omega)t} + C_2 * e^{-(\delta + \omega)t}.$$

Für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion gilt:

$$y'(t) = C_1 * (-\delta + \omega) * e^{(-\delta + \omega)t} + C_2 * (-\delta - \omega) * e^{-(\delta + \omega)t}$$

C_1 und C_2 werden wieder durch Berücksichtigung der Anfangsbedingung bestimmt:

$$y(0) = 0 = C_1 * 1 + C_2 * 1 \rightarrow C_1 = -C_2$$

¹³⁷ Gemäß Timischl, Kaiser (2005), S.154.

Unter der Annahme $y'(0) = v_0$ kann nun C_1 bestimmt werden.

Herausheben von C_1 in der Geschwindigkeits-Zeit Funktion ergibt:

$$y'(t) = C_1 * [(-\delta + \omega) * e^{(-\delta+\omega)*t} + (\delta + \omega) * e^{-(\delta+\omega)*t}]$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y'(0) = v_0$ folgt nun für C_1 :

$$y'(0) = v_0 = C_1 * [(-\delta + \omega) * 1 + (\delta + \omega) * 1] = C_1 * 2 * \omega$$

Damit gilt: $C_1 = \frac{v_0}{2 * \omega}$.

Damit folgt für die Lösung im Fall 2:

$$y(t) = \frac{v_0}{2 * \omega} * [e^{(-\delta+\omega)t} - e^{-(\delta+\omega)t}]$$

3. Fall - Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$:

Wegen $\delta = \omega_0$ ist $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = 0$ und die Lösungen für λ sind gegeben durch

$$\lambda_1 = -\delta,$$

$$\lambda_2 = -\delta.$$

Man erhält als allgemeine Lösung¹³⁸

$$y(t) = C_1 * e^{-\delta t} + C_2 * t * e^{-\delta t} = e^{-\delta t} * (C_1 + C_2 * t).$$

Für die Geschwindigkeits-Zeit Funktion gilt:

$$y'(t) = -\delta * C_1 * e^{-\delta t} + C_2 * e^{-\delta t} - \delta * C_2 * t * e^{-\delta t}$$

C_1 und C_2 werden wieder durch Berücksichtigung der Anfangsbedingung bestimmt:

$$y(0) = 0 = 1 * (C_1 + C_2 * 0) \rightarrow C_1 = 0$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y'(0) = v_0$ folgt nun für C_2 :

$$y'(0) = v_0 = C_2 * 1 - \delta * C_2 * 0 * 1$$

Damit gilt: $C_2 = v_0$

¹³⁸ Gemäß Timischl, Kaiser (2005), S.154.

Damit folgt für die allgemeine Lösung im Fall 3:

$$y(t) = v_0 * t * e^{-\delta t}$$

Rechenbeispiel¹³⁹:

Um einen besseren Überblick über die Eigenschaften bei unterschiedlichen Dämpfungsgraden zu erhalten, soll nun eine Aufgabe mit konkreten Beispielen berechnet werden:

*Lösen Sie die Differentialgleichung eines gedämpften schwingenden Feder-Masse-Systems:
Folgende Werte sind dabei gegeben:*

Masse des Systems $m = 2\text{ kg}$

Federkonstante $k = 32\text{ N/m}$

Dämpfungskonstante $D = \text{a) } 2\text{ kg/s}, \text{ b) } 20\text{ kg/s}, \text{ c) } 16\text{ kg/s}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 0; v_0 = 1,2\text{ m/s}$

Lösung:

a) Schwingfall (schwache Dämpfung)

$$y''(t) + \frac{2}{2} * y'(t) + \frac{32}{2} * y(t) = 0$$

Kürzen ergibt schließlich

$$y''(t) + y'(t) + 16 * y(t) = 0.$$

Einsetzen des Ansatzes $y(t) = C * e^{\lambda * t}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda + 16 = 0.$$

Mit der Lösungsformel (*p-q Formel*) für quadratische Gleichungen folgt als Lösung für λ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 16} = -\frac{1}{2} \pm i * \frac{3}{2}\sqrt{7},$$

also $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i * 3.968$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i * 3.968 \in \mathbb{C}$

¹³⁹ Nach Timischl, Kaiser (2005), S.162.

Es handelt sich also um einen Schwingfall.

Die Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall gegeben durch

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} * e^{-\delta * t} * \sin(\omega * t),$$

wie oben bereits hergeleitet.

Für die Abklingkonstante und die Eigenkreisfrequenz folgt (nach der allgemeinen Herleitung)

$$\delta = -0.5 \text{ und } \omega = 3.968.$$

Nun können die konkreten Werte bereits eingesetzt werden:

$$y(t) = \frac{1.2}{3.968} * e^{-\frac{1}{2} * t} * \sin(3.968 * t)$$

Damit erhält man als Lösung im Schwingfall:

$$y(t) = 0.3024 * e^{-\frac{t}{2}} * \sin(3.968 * t)$$

Für den Dämpfungsgrad folgt $\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\frac{D}{2m}}{\omega_0} = \frac{0.5}{4} = 0.125$ (schwache Dämpfung).

b) Kriechfall

$$y''(t) + \frac{20}{2} * y'(t) + \frac{32}{2} * y(t) = 0$$

Kürzen ergibt schließlich

$$y''(t) + 10y'(t) + 16 * y(t) = 0.$$

Einsetzen des Ansatzes $y(t) = C * e^{\lambda * t}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0.$$

Mit der Lösungsformel (*p-q Formel*) für quadratische Gleichungen folgt als Lösung für λ :

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{(5)^2 - 16} = -5 \pm 3 \text{ und damit } \lambda_1 = -2 \text{ und } \lambda_2 = -8. \in \mathbb{R}$$

Es handelt sich also um einen Kriechfall.

Die Lösung der Differentialgleichung in diesem Fall ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{v_0}{2 * \omega} * [e^{(-\delta+\omega)t} - e^{-(\delta+\omega)t}],$$

wie oben bereits hergeleitet.

Für die Abklingkonstante und die Eigenkreisfrequenz folgt (nach der allgemeinen Herleitung)

$$\delta = -5 \text{ und } \omega = 3.$$

Nun können die konkreten Werte bereits in die Lösung eingesetzt werden:

$$y(t) = \frac{1.2}{2 * 3} * [e^{(-5+3)t} - e^{-(5+3)t}]$$

Damit erhält man als Lösung im Kriechfall:

$$y(t) = 0.2 * [e^{-2t} - e^{-8t}]$$

Für den Dämpfungsgrad folgt $\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\frac{D}{2m}}{\omega_0} = \frac{5}{4} = 1.25$ (starke Dämpfung).

c) aperiodischer Grenzfall

$$y''(t) + \frac{16}{2} * y'(t) + \frac{32}{2} * y(t) = 0$$

Kürzen ergibt

$$y''(t) + 8y'(t) + 16 * y(t) = 0.$$

Einsetzen des Ansatzes $y(t) = C * e^{\lambda * t}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0.$$

Mit der Lösungsformel (*p-q Formel*) für quadratische Gleichungen folgt als Lösung für λ :

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{(4)^2 - 16} = -4 \text{ und damit } \lambda_1 = -4 \text{ und } \lambda_2 = -4 \in \mathbb{R}$$

Es handelt sich also um einen aperiodischen Grenzfall.

Die Lösung der Differentialgleichung in diesem Fall ist gegeben durch

$$y(t) = v_0 * t * e^{-\delta t},$$

wie oben bereits hergeleitet.

Für die Abklingkonstante folgt (nach der allgemeinen Herleitung)

$$\delta = 4.$$

Nun können die konkreten Werte in die Lösung bereits eingesetzt werden:

$$y(t) = 1.2 * t * e^{-4t}$$

womit man bereits die Lösung für den aperiodischen Grenzfall erhält.

Für den Dämpfungsgrad folgt $\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\frac{D}{2m}}{\omega_0} = \frac{4}{4} = 1$.

Die folgende Abbildung zeigt den Vergleich der vier unterschiedlichen Bewegungsverläufe.

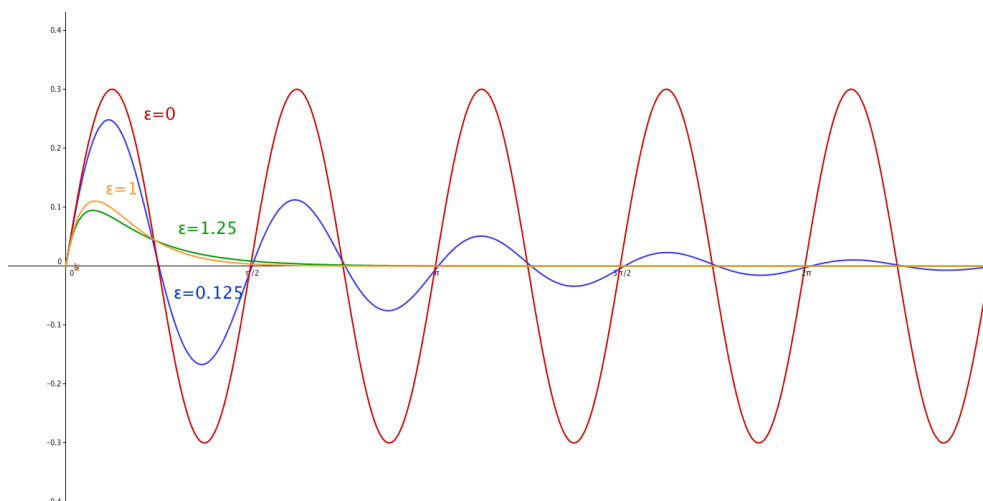


Abbildung 52: Unterschiedliche Bewegungsabläufe.

Versuch Federpendel

Ziel: Messung des zeitlichen Verlaufs der Auslenkung beim Federpendel.

Benötigte Materialien:

- Feder und Halterung
- Belastungsmasse: 200g, 400g, 50g
- Maßstab
- High Speed Kamera mit Halterung
- Analysesoftware

Durchführung:

Die Auslenkung des Pendels wird mit der High Speed Kamera aufgenommen. Die Weg-Zeit Funktion soll mit der Analysesoftware aufgenommen werden. Zu Beginn wird mit der Belastungsmasse von 200g gearbeitet.

Im Anschluss soll das Experiment auch berechnet werden. Für die Anfangsbedingungen empfiehlt sich entweder die Messung der Maximalauslenkung oder die Messung des 1. Umkehrpunktes, beziehungsweise die Bestimmung der Geschwindigkeit beim Nulldurchgang mit Hilfe der Analysesoftware.

7. Arbeitsblätter für den Unterricht

Folgendes Kapitel beinhaltet die Schülerarbeitsblätter, für die in Kapitel 6 angeführten Projekte. Die Arbeitsblätter sind direkt kompatibel mit den jeweiligen Ausarbeitungen. Der physikalische Input weicht bei manchen Arbeitsblättern leicht von dem der jeweiligen Ausarbeitung ab. Zu jedem Projekt wurden auch Projektziele definiert, die den Schülerinnen und Schülern einen besseren Überblick über das Projekt bieten soll.

7.1 Die Vollbremsung eines Autos

Ziele

- Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichung für die Vollbremsung eines Autos.
- Berechnung des Bremsweges für konkrete Werte und Vergleich mit der Faustformel in der Fahrschule.
- Berechnung des Anhalteweges.

Physikalischer Input¹⁴⁰

Die Physik des Bremsens

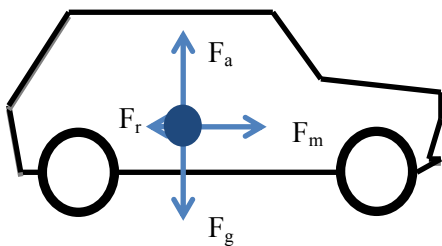


Abbildung 53: Kräfte auf ein Auto während der Fahrt (vereinfacht).

Während der Fahrt :

F_m ... Motorkraft,
 F_r ... Reibungskraft (Luftwiderstand, Rollwiderstand),
 F_a ... Kraft vom Asphalt auf das Auto,
 F_g ... Kraft vom Auto auf den Asphalt.

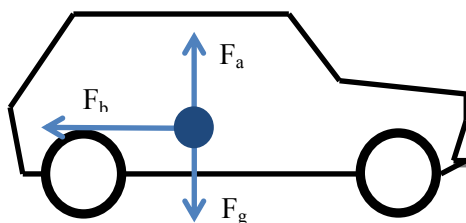


Abbildung 54: Kräfte auf ein Auto bei Vollbremsung (vereinfacht).

Vollbremsung:

F_b ... Reibungskraft beim Bremsen,
 F_a ... Kraft vom Asphalt auf das Auto,
 F_g ... Kraft vom Auto auf den Asphalt.
 Bei der Vollbremsung wird die Kupplung betätigt, um die Motorkraft vollständig wegzunehmen. Das Auto wird verzögert. Alle zusätzlichen Reibungskräfte (Luftwiderstand etc.) werden hier vernachlässigt.

¹⁴⁰ Informationen zum physikalischen Input nach Heuser(2009), S.333.

Die **Reibungskraft beim Bremsen** F_b bei blockierenden Rädern ist von der Kraft F_g , mit der Reifen und Asphalt aufeinander gedrückt werden sowie vom Reibungskoeffizienten abhängig.

Für die Reibungskraft gilt:

$$F_b = \mu * F_g$$

μ ist der Reibungskoeffizient und liegt üblicherweise zwischen 0.4 und 0.8 für Reifen auf Asphalt.¹⁴¹ Dieser ist von den Oberflächeneigenschaften der Reifen sowie des Asphalts abhängig.

Wichtige Begriffe

Der **Bremsweg** ist jener Weg, den ein Auto vom Beginn des Bremsprozesses bis zum Stillstand zurücklegt.

g ... Gravitationsbeschleunigung $\sim 9.8 \text{ m/s}^2$

v_0 ...Ausgangsgeschwindigkeit vor dem Bremsbeginn (in m/s)

$F = m * a = m * x''(t)$ in N (Newton)

$$F_g = -m * g$$

Allgemeine Annahmen: Luftwiderstand wird vernachlässigt, konstante Bremskraft während des gesamten Bremsvorgangs, geradlinige Bewegung in x -Richtung.

¹⁴¹ Daten aus: URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Haftreibung.html>[5.6.2014].

Aufgaben

1. Leiten Sie die Formel für den Bremsweg selbst her. Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

a) Überlegen Sie sich, wie die vereinfachte Bewegungsgleichung aussieht, wenn Sie nur die Reibungskraft beim Bremsen für den Bremsvorgang in Betracht ziehen und die allgemeinen Annahmen (siehe oben) berücksichtigen. Betrachten Sie die Bewegung geradlinig in x -Richtung.

b) Berechnen Sie die Weg-Zeit Funktion sowie die Geschwindigkeits-Zeit Funktion. Vergessen Sie dabei nicht auf etwaige Integrationskonstanten!

2. Wählen Sie konkrete Werte und setzen Sie diese in ihr Ergebnis ein. Vergleichen Sie es mit der Faustformel aus der Fahrschule:

$$\text{Bremsweg} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} * \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10}$$

Stimmt dies mit Ihrem Ergebnis überein?

Tipp: Beachten Sie dabei auch: In welchen Einheiten werden die einzelnen Werte angegeben?

3. Beim Erkennen einer Gefahr im Straßenverkehr spielt auch oft die Reaktionszeit eine wesentliche Rolle. Der Reaktionsweg ist nun jene Zeit, bis der Fahrer/die Fahrerin den Bremsvorgang einleitet. Wie fließt dieser nun bei der Berechnung des Anhalteweges (Zeit vom Erkennen der Gefahr bis zum Stillstand des Wagens) ein? Stellen Sie eine Formel für den Anhalteweg auf!

4. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für den Anhalteweg mit der Faustformel aus der Fahrschule:

$$A = \frac{3 * v}{10} + \frac{v^2}{100}$$

5. Was lässt sich über den Anhalteweg bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten (z.B.: 90km/h obwohl nur 70km/h erlaubt sind oder 150km/h statt 130km/h) sagen?

6. Was lässt sich über den Anhalteweg bei unterschiedlichen Witterungsbedingungen sagen (Unterschied des Reibungskoeffizienten)?

7.2 Abkühlungsprozesse

Abkühlungsprozesse können sehr einfach mithilfe von Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Damit lassen sich eine Reihe verschiedener Anwendungen beschreiben. Folgendes Arbeitsblatt geht der Frage nach, welcher Kaffee schneller abkühlt, entweder jener mit Milch, der 10 Minuten stehengelassen wird, oder derjenige, der erst 10 Minuten abkühlt und dem erst dann Milch hinzugefügt wird.

Ziele

- Herleitung des Temperaturverlaufs eines abkühlenden Körpers
- Mathematische Berechnung und Beantwortung der Frage

Welcher Kaffee hat nach 10 Minuten die höhere Temperatur? Jener Kaffee, dem sofort kalte Milch beigemengt wird, oder jener Kaffee, dem erst nach 10 Minuten kalte Milch beigemengt wird?

Physikalischer Input

Sei $T(t)$ die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt t und T_u die Umgebungstemperatur. Da hier im speziellen Abkühlungsprozesse betrachtet werden, wird die Annahme getroffen, dass stets $T(t) > T_u$ gilt.

Newton'sches Abkühlungsgesetz¹⁴²

Das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreibt den Temperatúrausgleich zwischen einem Körper und seiner Umgebung. Für die Änderung der Temperatur des Körpers mit der Zeit Δt gilt

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -k(T(t) - T_u).$$

Das bedeutet, dass die Änderung der Temperatur mit der Zeit proportional zum Temperaturunterschied zwischen Körper und Umgebungstemperatur ist. Die vom Material abhängige Proportionalitätskonstante k bezeichnet man üblicherweise auch als Abkühlkonstante. Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Umgebungstemperatur ist stets konstant $T_u = \text{const.}$
2. Die Temperatur des Körpers zu Beginn sei $T(0) = T_a$

¹⁴² Abgeleitet aus: Schwaiger, Jens: Beilage zur Vorlesung Differentialgleichungen für USW ab SS 2001, URL: <http://www.uni-graz.at/~schwaige/usw.pdf> [22.07.2014], S.1.

Aufgaben

1. Leiten Sie die Differentialgleichung für den Abkühlungsprozess her.

Tipp: Betrachten Sie dazu ganz einfach das Newton'sche Abkühlungsgesetz für infinitesimale Zeitänderungen!

2. Lösen Sie diese Differentialgleichung! Eine Möglichkeit zur Lösung ist die Methode der Trennung der Variablen!

3. Lösen Sie das Kaffee-Problem! Alle Informationen finden Sie am beigelegten Arbeitsblatt.

4. Bestimmen Sie nun experimentell, welcher Kaffee schneller abkühlt. Nehmen Sie dazu den Temperaturverlauf bei der Abkühlung mit einem Temperaturmessgerät auf. Alle Informationen finden Sie am beigelegten Arbeitsblatt.

Das Kaffee-Problem¹⁴³

Ist nun jener Kaffee kühler, dem gleich Milch beigefügt wird, oder doch jener Kaffee, dem erst nach 10 Minuten die Milch beigemischt wird?

Sei nun

T_u ...die Umgebungstemperatur

T_a ...die Ausgangstemperatur des Kaffees (vor der Milchbeimengung)

T_m ...die Temperatur der Milch (aus dem Kühlschrank sodass $T_m < T_u$)

T_g ...die resultierende Temperatur des Gemischs.

$m * C_M$...das Produkt aus Masse und spezifischer Wärmekapazität der Milch

$n * C_K$...das Produkt aus Masse und spezifischer Wärmekapazität des Kaffees

Für die Temperatur des Kaffee-Milch Gemisches verwendet man die Formel

$$T_g = \frac{n * C_K * T_a + m * C_M * T_m}{n * C_K + m * C_M}$$

Stellen Sie nun, mit Hilfe der Lösung der Differentialgleichung und obiger Gleichung des Kaffee-Milch-Gemischs, die allgemeinen Formeln für die jeweilige Temperatur nach 10 Minuten (600 Sekunden) für beide Fälle auf. Verwenden Sie die vereinfachende Annahme $C_K = C_M$.

Berechnen Sie dann mit folgenden Werten¹⁴⁴, welcher Kaffee nach 10 Minuten die höhere Temperatur aufweist! Stellen Sie den Temperaturverlauf graphisch mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B.: GeoGebra) dar.

$$T_u = 22^\circ\text{C}, \quad T_a = 80^\circ\text{C}, \quad T_m = 5^\circ\text{C}, \quad n = 200 \text{ ml},$$

$$m = 30 \text{ ml}, \quad k = 0.001/\text{s}, \quad t = 600 \text{ s}.$$

¹⁴³ Nach: Bernstein, Swanhild: Der Kaffee ist zu heiß- das Newtonsche Abkühlungsgesetz, URL: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~bernstei/HMI/mNewton.pdf> [22.7.2014], S. 4-5.

¹⁴⁴ Grobe Abschätzung für die Abkühlkonstante k nach URL: <http://www.schulphysik.de/physik/cooling/newcoo1.htm> [22.07.2014].

Versuch Bestimmung des Temperaturverlaufs

Benötigte Materialien

- 2 Tassen Kaffee (je 200ml)
- Milch 2 x 30ml
- Temperaturmessgerät
- Stoppuhr

Durchführung

Der Kaffee soll in möglichst gleiche Kaffeetassen eingefüllt werden. Danach wird in einer Tasse sofort 30ml Milch beigemengt. Im Anschluss wird mit Hilfe eines Temperaturmessgerätes die Temperatur in beiden Tassen gleichzeitig gemessen. Es empfiehlt sich eine Temperaturmessung alle 30 Sekunden. Die Werte können entweder notiert werden oder (wenn vorhanden) gleich mit dem Computer aufgenommen werden. Nach 10 Minuten wird auch in die zweite Kaffeetasse Milch beigemengt. In beiden Kaffeetassen wird nun die Temperatur gemessen und verglichen.

7.3 Radioaktiver Zerfall

Ziele:

- Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung für den radioaktiven Zerfall
- Bestimmung der Zerfallskonstante für ^{14}C
- Bestimmung des Alters der Mumie Ötzi

Physikalischer Input

Radioaktiver Zerfall

Unter einem radioaktiven Zerfall versteht man die spontane Umwandlung von instabilen Atomkernen in andere Atomkerne unter Abgabe von Strahlung. 1896 wurde das Phänomen von Antoine Henri Becquerel entdeckt. Der Begriff der Radioaktivität wurde 2 Jahre später von Pierre und Marie Curie eingeführt. Der Zeitpunkt, wann sich ein Kern in einen anderen Kern umwandelt (dh. zerfällt), ist völlig zufällig. Für jede Substanz gibt es eine Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Neben dem künstlich herbeigeführten radioaktiven Zerfall bei der Kernspaltung gibt es aber auch noch eine Vielzahl von natürlichen Zerfällen in der Natur. Sie werden unter anderem zur Altersbestimmung bei der Kohlenstoff-14 Methode (^{14}C Methode) verwendet.¹⁴⁵

Die Anzahl der Kerne, die sich pro Zeiteinheit umwandeln, ist proportional zur Gesamtzahl $N(t)$ der instabilen Atomkerne.¹⁴⁶ Die Zerfallskonstante λ bezeichnet dabei den für jedes Material charakteristischen Proportionalitätsfaktor.

Die Halbwertszeit

Die Halbwertszeit ist für jedes radioaktive Material eine charakteristische Zeitdauer, die angibt, wie lange es dauert, bis die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen ist.¹⁴⁷ Mit Hilfe der Halbwertszeit kann die Zerfallskonstante (λ) bestimmt werden.

Die C-14 Methode

Die C-14 Methode dient zur Altersbestimmung von archäologischen Funden. Durch kosmische Strahlung, die unter anderem Neutronen mit extrem hoher Energie enthält, wird in der oberen Atmosphäre ^{14}N (Stickstoffkerne mit 7 Protonen und 7 Neutronen) umgewandelt in ^{14}C (6 Protonen und 8 Neutronen). ^{14}C ist instabil und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Durch stetigen Einfall der kosmischen Strahlung ist der ^{14}C Gehalt in der Atmosphäre nahezu konstant. Lebewesen,

¹⁴⁵ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Radioaktivität> [5.6.2014].

¹⁴⁶ Vgl. Hempel, Thomas: Differentialgleichungen – Ausgewählte Probleme aus der Physik, URL: http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf [29.05.2014], S. 1.

¹⁴⁷ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Halbwertszeit> [5.6.2014].

aber auch Pflanzen, nehmen ständig neues ^{14}C auf (durch Nahrung oder Atmung) sodass der ^{14}C Gehalt im Körper konstant bleibt. Stirbt das Lebewesen oder die Pflanze, so wird kein neues ^{14}C in den Körper zugeführt. Das ^{14}C im Körper zerfällt und seine Konzentration nimmt über die Jahrtausende immer weiter ab. Werden nun Überreste des Lebewesens ausgegraben, so kann über die Konzentration von ^{14}C im Körper das Alter des Lebewesens bestimmt werden.¹⁴⁸

Aufgaben:

1. Leiten Sie mit Hilfe des physikalischen Inputs die Differentialgleichung für den radioaktiven Zerfall her!

Tipp: Sie erhalten eine Differentialgleichung 1. Ordnung, wenn Sie den Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ bilden!

2. Lösen Sie die oben hergeleitete Differentialgleichung!

Tipp: Eine Möglichkeit zur Lösung ist die Methode der getrennten Variablen.

3. Bestimmen Sie die Zerfallskonstante für das Isotop ^{14}C aus der Halbwertszeit!

Tipp: Die Halbwertszeit ist für jedes radioaktive Material eine charakteristische Zeitdauer, die angibt, wie lange es dauert bis die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen ist.

4. Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Lösung der Differentialgleichung und der oben berechneten Zerfallskonstante das Alter von Ötzi! Die 1991 in den Ötztaler Alpen gefundene Mumie ist die einzige konservierte Leiche aus der Kupfersteinzeit in Mitteleuropa. Bei der Untersuchung der ^{14}C Konzentration konnte bestimmt werden, dass etwa 47%¹⁴⁹ des ^{14}C bereits zerfallen waren.¹⁵⁰

5. Skizzieren Sie den Zerfallsverlauf für die Gesamtheit der Kerne mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B.: GeoGebra).

¹⁴⁸ Vgl. URL: <http://www.weltdrphysik.de/thema/alltag/c-14-methode/> [5.6.2014].

¹⁴⁹ Daten aus URL: <http://www.jagemann-net.de/biologie/bio13/evolution/C-14/c14.php> [5.6.2014].

¹⁵⁰ Vgl. URL: http://www.uibk.ac.at/forschung/alpine_vorzeit/ [5.6.2014].

7.4 Der freie Fall ohne Luftreibung

Ziele

- Die mathematische Beschreibung des freien Falls ohne Luftreibung.
- Die Berechnung der Zeitdauer und Aufprallgeschwindigkeit einer Kugel beim freien Fall aus 100m.
- Die experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstante.

Physikalischer Input¹⁵¹

Gravitationsgesetz

Das Newton'sche Gravitationsgesetz beschreibt die Anziehungskraft zweier Massen (z.B. Mensch und Erde) gemäß

$$F_g = G * \frac{M * m}{r^2}$$

M ... Masse der Erde $5,974 * 10^{24}$ kg,

r ...mittlerer Radius der Erde 6370km,

G ... Gravitationskonstante $G = 6,674 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg*s^2}$

Mit Hilfe des zweiten Newton'schen Axioms ($F = m * a$) folgt

$$m * a = G * \frac{M*m}{r^2} = F.$$

Angeblich soll Newton durch einen vom Baum fallenden Apfel zur Herleitung dieses Gesetzes inspiriert worden sein.

Daraus erhält man durch Kürzen der Masse m

$$a = G * \frac{M}{r^2}$$

Dies entspricht der Beschleunigung eines frei fallenden Körpers auf den Erdboden ohne Berücksichtigung der Luftreibung. Setzt man hier nun die Werte für Gravitationskonstante, Masse und Radius der Erde (für bodennahe Experimente) ein, so erhält man einen Wert für die

¹⁵¹Nach: Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL: <http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [3.4.2014], S. 1.

Gravitationsbeschleunigung a . Üblicherweise bezeichnet man die Gravitationsbeschleunigung mit dem Kleinbuchstaben g (vom englischsprachigen *gravity*).

Bemerkung: Die Gravitationsbeschleunigung g hängt vom Radius r und von der Erdrotation (Zentrifugalkraft) ab. Daher ist der Wert für die Gravitationsbeschleunigung g nicht überall auf der Erde gleich groß. Für die folgenden Berechnungen wird dies jedoch vernachlässigt und eine konstante Gravitationsbeschleunigung von $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ angenommen.

Zum Einstieg wird der freie Fall ohne Luftreibung betrachtet.

Aufgaben

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für den freien Fall ohne Luftreibung, mit Hilfe der oben angeführten physikalischen Beschreibung her.

Tipp: Verwenden Sie bloß folgende allgemeine Annahmen zur Aufstellung der Bewegungsgleichung:

- Es existiert eine Anziehungskraft der Erde auf den fallenden Körper gemäß $F_G = m \cdot g$.

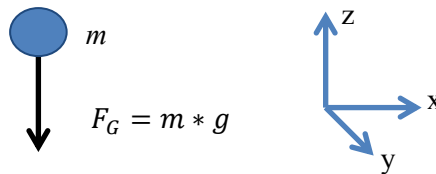


Abbildung 55: Gewichtskraft auf einen fallenden Körper ohne Luftreibung.

- Die Fallrichtung (senkrecht zur Erdoberfläche) erfolgt in z-Richtung mit den Anfangsbedingungen $z'(0) = v_0$; $z(0) = 0$.
2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Bestimmen Sie neben der Weg-Zeit Funktion auch die Geschwindigkeits-Zeit Funktion.
3. Lösen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus 1. & 2. folgende Aufgabe:

Aufgabe:

Aus einem Fenster eines Hauses wird aus einer Höhe von 10m eine Kugel mit der Masse von 0.5kg fallen gelassen. Berechnen Sie, unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, die Geschwindigkeit mit der der Ball auf der Erde auftrifft sowie die Zeitdauer des freien Falls. Verwenden Sie die oben hergeleiteten Gleichungen für Geschwindigkeit und Weg.

4. Führen Sie das folgende Experiment zur Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung durch!

Versuch Messung der Gravitationsbeschleunigung

Ziel: Durch Messung der Fallzeit einer Kugel soll die Gravitationsbeschleunigung bestimmt werden.

Benötigte Materialien:

- Fall und Auffangvorrichtung
- Zeitmessung
- Kugel

Alternativ:

- HD High Speed Kamera
- Analyseprogramm (z.B. Coach 6)

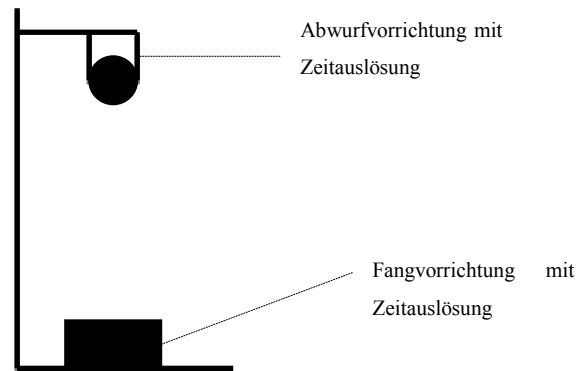


Abbildung 56: Versuchsskizze zur Messung der Gravitationsbeschleunigung.

Durchführung:

Mit Hilfe einer Fallvorrichtung wird eine kleine Metallkugel aus ca. 30cm Höhe abgeworfen und die Fallzeit über die integrierte Zeitmessung bestimmt. Es empfiehlt sich, die Messung mehrmals durchzuführen und den Mittelwert der gemessenen Zeiten zu bilden. Mit der genauen Messung der Fallhöhe kann nun aus den hergeleiteten Formeln die Gravitationsbeschleunigung bestimmt werden.

Sollte kein Zeitmessgerät zur Verfügung stehen, empfiehlt sich eine Videoanalyse der fallenden Kugel. Damit kann die Fallhöhe in Abhängigkeit der Zeit bestimmt werden. Ableiten dieser Funktion ergibt die Geschwindigkeits-Zeit Funktion, nochmalige Ableitung die Beschleunigung.

7.5 Der freie Fall mit Luftreibung und der Stratosphärensprung

Ziele

- Mathematische Beschreibung des freien Falls unter Berücksichtigung der Luftreibung.
- Berechnung der maximal möglichen Geschwindigkeit beim freien Fall.
- Numerische Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs beim Stratosphärensprung von Felix Baumgartner.

Physikalischer Input

Der freie Fall mit Luftreibung

Die Luftreibung (oder auch Strömungswiderstand) ist, wie der Name bereits vermuten lässt, eine Kraft, die der Bewegung des Körpers durch die Luft entgegenwirkt. Die Luftreibung steigt quadratisch mit der Geschwindigkeit, der Fläche A des Körpers, der Luftdichte ρ und zusätzlichen Eigenschaften der Oberfläche (Form, Struktur, usw.), die im Strömungswiderstandskoeffizienten (bekannt unter „ c_w -Wert“) zusammengefasst werden.¹⁵²

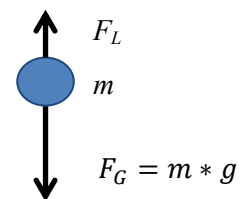


Abbildung 57: Gewichtskraft und Luftwiderstand auf einen fallenden Körper.

Für die Luftreibung gilt damit:

$$F_L = c_w * \frac{1}{2} * v^2 * \rho * A$$

Der Strömungswiderstandskoeffizient liegt für handelsübliche Autos zwischen 0.8 (ca. Mercedes Benz G-Klasse) und 0.2 (ca. Mercedes Benz C-Klasse). Der Strömungswiderstandskoeffizient für einen stehenden Menschen liegt bei 0.78.¹⁵³

Auf einen fallenden Körper wirken nun (anders als beim Fall ohne Luftreibung) mehrere Kräfte:

Die Gewichtskraft F_G sowie die Luftreibung F_L . Wie aus obiger Abbildung erkennbar ist, wirken die Kräfte in entgegengesetzte Richtung.

Tipp: Um sich die Luftreibung besser vorstellen zu können, genügt es während einer Autofahrt die Hand aus dem Fenster zu halten und die Handfläche zu drehen. Je größer die Widerstandsfläche desto stärker drückt die anströmende Luft die Hand nach hinten.

¹⁵²Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstandskoeffizient> [16.6.2014].

¹⁵³ Laut URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstandskoeffizient> [16.6.2014].

Aufgaben

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für den freien Fall unter Berücksichtigung der Luftreibung her. Verwenden Sie dazu die oben zur Verfügung gestellten Informationen.

Tipp: Drücken Sie die Bewegungsgleichung durch die Geschwindigkeit aus. (dh. $v'(t) = \dots$). Man erhält eine Bewegungsgleichung erster Ordnung. Die Lösung der Differentialgleichung wird dadurch wesentlich vereinfacht!

2. Berechnen Sie die maximal mögliche Geschwindigkeit v_{max} aus der aufgestellten Bewegungsgleichung! (Diese muss dazu noch nicht gelöst werden). Um aus der Bewegungsgleichung die Maximalgeschwindigkeit zu bestimmen, betrachtet man einfach jenen Punkt, an dem sich die Geschwindigkeit nicht mehr ändert! Überlegen Sie zuerst, wann dies genau der Fall ist!

3. Lösen Sie die Differentialgleichung.

Tipp: 1. Formen Sie Ihre Differentialgleichung so um, dass Sie einen Term durch oben berechnetes v_{max} ersetzen können.

2. In weiterer Folge können Sie zur Vereinfachung des Integrals

$$x = \frac{v}{v_{max}}$$

substituieren.

4. Arbeiten Sie das Zusatzblatt zum Stratosphärensprung von Felix Baumgartner durch!

Der Stratosphärensprung

Am 14. Oktober 2012 war wohl kein anderes Ereignis so stark in den Medien vertreten wie der Stratosphärensprung des Österreicher Felix Baumgartner. Mit den Worten „*I am going home now*“ sprang der Österreicher aus 38969m Höhe zurück Richtung Erde. In diesem Abschnitt wird nun versucht, mit den obig aufgestellten Annahmen diesen Sprung noch einmal zu analysieren. Es soll nun versucht werden, die Maximalgeschwindigkeit und die Dauer bis zur Maximalgeschwindigkeit zu berechnen. Nach der Analyse des Red Bull Stratos Teams liegen folgende Eckdaten für den Rekordsprung vor¹⁵⁴:

- Absprunghöhe: 38969 m
- Maximal erreichte Geschwindigkeit: 1357,6 km/h
- Gesamtmasse (Anzug + Felix Baumgartner) 140kg

Numerische Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs während des freien Falls

Zunächst wird die maximal erreichte Geschwindigkeit betrachtet. In obigem Abschnitt wurde bereits eine Gleichung zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit aufgestellt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 * m * g}{c_w * \rho * A}}$$

Für die Gravitationsbeschleunigung gilt auf der Erdoberfläche die Näherung $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$. Dieser Wert ändert sich bis zur Absprunghöhe nur sehr wenig, weshalb eben jener für die Berechnungen als konstant angenommen wird. Der Strömungswiderstandskoeffizient (c_w -Wert) war nur schwer für den Sprung vorauszusagen, da der Wert stark von der Position des Körpers im freien Fall abhängig ist. Aus Testsprüngen, aus rund 21000m Höhe, konnte ein durchschnittlicher Wert von 1.07 für das Produkt $c_w * A$ bestimmt werden¹⁵⁵. Dieser Wert wird auch für diese Berechnung herangezogen. Nun bleibt noch der Wert für die Luftdichte ρ zu bestimmen. Da die Luftdichte, besonders in diesen Höhenlagen, sehr stark vom Wert nahe der Erdoberfläche abweicht, muss eine Näherungsformel herangezogen werden. Martin Apolin stellte für die Berechnung im Magazin Red Bulletin (Ausgabe Juli 2012) die Näherungsformel $\rho = 1.5906 * e^{-0.151 * h}$ auf.¹⁵⁶

Diese Näherungsformel soll nun auch hier eingesetzt werden.

¹⁵⁴ Daten von URL: www.redbullstratos.com/science/scientific-data-review [20.6.20014] sowie Red Bulletin Ausgabe Juli 2012, S. 74.

¹⁵⁵ Wert berechnet von Mag. DDr. Martin Apolin für die Red Bulletin Ausgabe Juli 2012.

¹⁵⁶ Vgl. Apolin (2012), S.74-76.

Aufgaben

1. Stellen Sie nun eine numerische Berechnung an! Verwenden Sie dazu ein geeignetes Computerprogramm (z.B. Excel). Verwenden Sie dazu das Euler-Cauchy Verfahren oder das kennengelernte „verbesserte Verfahren“ das auf dem Heun Verfahren beruht. Als Starthöhe verwenden Sie die oben angeführte Absprunghöhe. Als Zeitintervall empfiehlt sich ein Intervall von 0.4 Sekunden. Die Höhe gewinnt man aus der Subtraktion *Absprunghöhe – zurückgelegter Weg*. Die Luftdichte erhält man für jeden Zeitschritt gemäß

$$\rho(t_{n+1}) = 1.5906 * e^{-0.151 * h(t_{n+1})}$$

Wiederholung:

Der zurückgelegte Weg beim Zeitschritt $n + 1$ wird beim „*Euler Cauchy Verfahren*“ gemäß

$$x_{n+1} = x_n + v_n * \Delta t$$

berechnet, die Geschwindigkeit gemäß der Formel

$$v_{n+1} = v_n + \frac{F(x_n)}{m} * \Delta t$$

Die Berechnungen für Weg und Geschwindigkeit beim „*verbesserten Verfahren*“ erfolgen gemäß den Formeln

$$x_{n+1} = x_n + v_n * \Delta t + \frac{F(x_n)}{2 * m} (\Delta t)^2$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \left(\frac{F(x_n)}{m} + \frac{F(x_{n+1})}{m} \right) * \Delta t$$

2. Stellen Sie die berechneten Werte als Graphen dar und bestimmen Sie daraus, wann die maximale Geschwindigkeit erreicht wird und wie hoch die maximale Geschwindigkeit dabei ist.

3. Die Auswertungen des Analyseteams des Red Bull Stratos Projekts ergaben eine maximale Geschwindigkeit von 1357,6 km/h. Wie nahe liegen Ihre Ergebnisse an diesem Wert? Warum gibt es hier Abweichungen? Nennen Sie einige Faktoren, die hier eine Rolle spielen könnten!

7.6 Zusammengesetzte Bewegung - Der schräge Wurf

Ziele

- Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichung für einen schrägen Wurf
- Herleitung und Analyse der Wurfparabel
- Berechnung der maximalen Steighöhe
- Berechnung der maximalen Wurfdauer und Wurfweite
- Berechnung des idealen Abwurfwinkels

Physikalischer Input¹⁵⁷

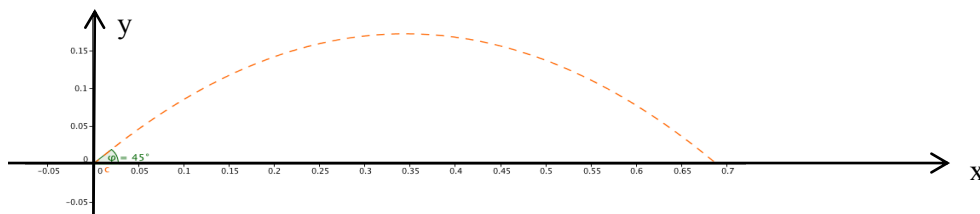


Abbildung 58: Flugbahn eines Körpers auf der Erde.

Unter der Wurfparabel versteht man die Flugbahn eines Körper beim Wurf auf der Erde. Die Parabelform ergibt sich daraus, da während des gesamten Fluges der Luftwiderstand vernachlässigt wird und damit nur die Schwerkraft auf den Körper wirkt.

Der schräge Wurf setzt sich aus zwei voneinander unabhängigen Bewegungen zusammen - der gleichförmigen Bewegung (waagrecht Wurf) und dem freien Fall. Diese beiden Komponenten der Bewegungen beeinflussen einander nicht.

Zur mathematischen Beschreibung wird die Bewegung in zwei Komponenten zerlegt, die horizontale x -Komponente und die vertikale y -Komponente. Da der Luftwiderstand außer Acht gelassen wird, bewegt sich der Körper in x -Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit. In y -Richtung wird der Körper konstant beschleunigt. Für die Gravitationskraft gilt $F = -m \cdot g$ (wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

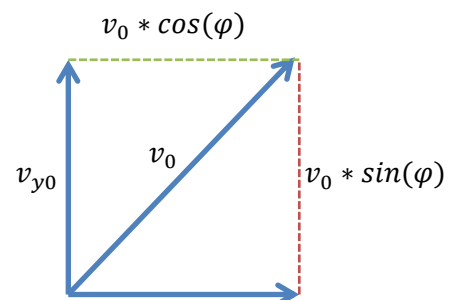


Abbildung 59: x - und y -Komponente der Geschwindigkeit.

Aufgaben

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für einen schrägen Wurf unter Vernachlässigung des

¹⁵⁷ Vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wurfparabel>[22.7.2014].

Luftwiderstandes auf.

Tipp: Stellen sie jeweils eine Differentialgleichung für die x - und y -Komponente auf. Beachten Sie, dass auf die x -Komponente der Bewegung keine externe Kraft wirkt, bei der y -Komponente hingegen die Schwerkraft.

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen!

Tipp: Verwenden Sie folgende Randbedingungen: $x(0) = 0$; $y(0) = 0$.

Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit in x - bzw. y -Richtung vom Abwurfwinkel abhängig ist: $v_{y0} = v_0 * \sin(\varphi)$ und $v_{x0} = v_0 * \cos(\varphi)$.

3. Nun soll die Flugkurve analysiert werden und die Wurfparabel hergeleitet werden. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor: Setzen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung der x -Komponente in Lösung der y -Komponente ein, sodass Sie eine Gleichung $y(x) = \dots$ erhalten. Erstellen Sie ein GeoGebra Arbeitsblatt, in dem Sie die Wurfparabel simulieren können. Bauen Sie dazu für den Abwurfwinkel und für die Anfangsgeschwindigkeit passende Schieberegler ein.

4. Berechnen Sie nun die maximal mögliche Steighöhe!

Tipp: Überlegen Sie sich, welche Komponente die Steighöhe bestimmt und verwenden Sie diese für Ihre Berechnungen. Berechnen Sie die Steigdauer (Überlegung: Wann ändert sich die maximale Steighöhe nicht mehr?) und setzen Sie diese in die berechnete Gleichung für die Steighöhe ein.

5. Berechnen Sie nun die Wurfdauer und damit die maximale Wurfweite.

Tipp: Überlegen Sie sich, wann der Wurfkörper wieder am Boden ankommt. Überlegen Sie sich, welche Komponente der Bewegung Sie für Ihre Berechnungen benötigen.

6. Berechnen Sie den idealen Abwurfwinkel!

Tipp: Stellen Sie die Wurfweite in Abhängigkeit des Winkels dar und berechnen Sie damit den bestmöglichen Abwurfwinkel für einen möglichst weiten Wurf. Der Abwurfwinkel liegt zwischen 0° und 90° .

7. Ein Fußball wird vom Tormann mit 25m/s in einem Winkel von ca. 30° von der 16 m Linie vor dem Tor abgestoßen. Nach wie vielen Metern landet der Ball, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt? Informieren Sie sich im Internet oder in der Bibliothek, wie lange ein Fußballfeld ist. Kommt der Ball noch auf dem Spielfeld auf?

Erstellen Sie ein GeoGebra Arbeitsblatt, in dem Sie die Wurfparabel des Fußballs darstellen.

7.7 Einschaltvorgang einer Spule (Induktivität im Gleichstromkreis)

Ziele

- Mathematische Beschreibung des Einschaltvorgangs einer Spule im Gleichstromkreis
- Graphische Darstellung des Stromverlaufs beim Einschaltvorgang
- Messung des Stromverlaufs im Rahmen eines Versuchs

Physikalischer Input

Eine Spule im Stromkreis zeigt ein besonderes Verhalten beim Einschaltvorgang. Dies zeigt sich durch ein langsames Ansteigen des Stromes beim Einschaltvorgang.¹⁵⁸

Um das Verhalten einer Spule zu verstehen, betrachtet man die sogenannte Lenz'sche Regel, die aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz folgt:

*Eine Änderung des magnetischen Flusses in einer geschlossenen Leiterschleife bewirkt eine Gegenspannung (U_g), die wiederum einen Stromfluss verursacht. Dieser Strom wiederum erzeugt ein Magnetfeld, das sich der Änderung des magnetischen Flusses entgegensetzt.*¹⁵⁹

Die Induktivität L beschreibt das Verhältnis zwischen der Änderung des Stromes und der induzierten Gegenspannung gemäß

$$U_g(t) = -L * \frac{dI(t)}{dt}$$

$U_R(t) = R * I(t)$ beschreibt den Spannungsabfall am Widerstand im Stromkreis.

Für die Gesamtspannung im Gleichstromkreis gilt $U = U_R(t) - U_g(t)$.

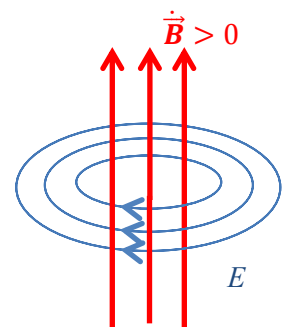


Abbildung 60: Die Änderung des magnetischen Flusses B , bewirkt ein elektrisches "Wirbelfeld" E .

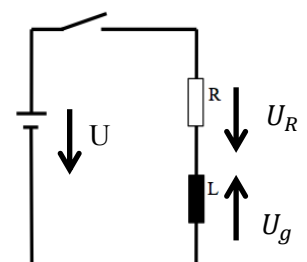


Abbildung 61: Stromkreis.

¹⁵⁸ Vgl. O.V.: Induktion und gegenseitige Induktion, URL: http://f1.hs-hannover.de/fileadmin/media/doc/f1/tel/abschnitt_5.pdf [29.05.2014], S. 43.

¹⁵⁹ Vgl. URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6521> [21.06.2014].

Wichtige Begriffe:

L .. Induktivität $L = N * \frac{\phi}{I}$ [L] = H,

ϕ ... Magnetischer Fluss [ϕ] = Vs,

I ...Strom [I] = A,

U ...Spannung [U] = V,

R ...Widerstand [R] = Ω .

N ...Windungszahl

Aufgaben

1. Stellen Sie die Differentialgleichung zu oben beschriebenen Phänomen auf. Setzen Sie dafür die bekannten Beziehungen in die Formel für die Gesamtspannung ein.

Tipp: Sie können durch die Substitution $y(t) = I(t) - \frac{U}{R}$ die Differentialgleichung vereinfachen! (Überlegen Sie dabei auch wie die Ableitung von $y(t)$ aussieht!)

2. Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie damit den zeitlichen Verlauf des Stromes! Eine Möglichkeit ist die Methode der Trennung der Variablen. Zur Berechnung der Proportionalitätskonstanten verwenden Sie folgende Überlegung:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ (vor dem Schließen des Stromkreises) ist der Strom $I(0) = 0$!

3. Stellen Sie Ihre Lösung mit einem Computeralgebrasystem (zum Beispiel GeoGebra) oder mit einem anderen Programm Ihrer Wahl dar.

4. Wählen Sie verschiedene Werte für die Spule. Was ändert sich an der Funktion, wenn die Induktivität auf den doppelten / auf den halben Wert geändert wird?

5. Führen Sie den Versuch gemäß Versuchsanleitung durch und nehmen Sie den Strom als Funktion der Zeit auf.

6. Vergleichen Sie Ihre Lösungskurve mit der gemessenen Funktion aus dem Experiment. Gibt es Abweichungen? Woran könnten diese Abweichungen liegen?

Versuch Einschaltvorgang eine Spule

Ziel: Aufnahme des Stroms als Funktion der Zeit beim Einschaltvorgang einer Spule.

Benötigte Materialien:

- Widerstand $R = 27\Omega$
- Spule $L = 100mH$
- Oszilloskop (oder Interface zur Stromaufnahme)
- Steckbrett und diverse Verbindungen

Schaltplan:

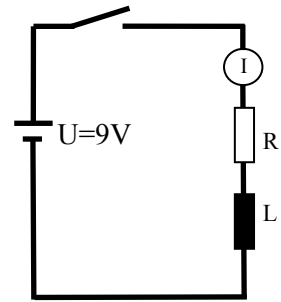


Abbildung 62: Schaltplan.

Durchführung:

Der Aufbau der Schaltung erfolgt gemäß dem gegebenen Schaltplan. Die Stromkennlinie wird als Funktion der Zeit aufgenommen. Im Anschluss erfolgt die Aufnahme von Messkurven für unterschiedliche Werte von L . **Tipp:** Zur Aufnahme des Stromes mit dem Oszilloskop nützt man den Spannungsabfall an einem Messwiderstand!

7.8 Die Aufladung eines Kondensators

Ziele

- Ermittlung der Differentialgleichung des Aufladevorgangs eines Kondensators.
- Lösung der Differentialgleichung und Berechnung des
 - Ladungsverlaufs bei der Aufladung,
 - Spannungsverlaufs bei der Aufladung,
 - Stromverlaufs bei der Aufladung.
- Graphische Darstellung von Spannungs- und Stromverlauf bei der Aufladung mit GeoGebra.
- Experimentelle Bestimmung des Spannungsverlaufs beim Ladevorgang.

Physikalischer Input

Der Kondensator¹⁶⁰

Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, das in nahezu jedem elektrischen Gerät eingebaut wird, um elektrische Ladung zu speichern. Ein Kondensator besteht im Wesentlichen aus zwei Elektroden und einem Dielektrikum dazwischen. Das Dielektrikum ist ein Isolator und verhindert einen Kurzschluss zwischen den Platten.

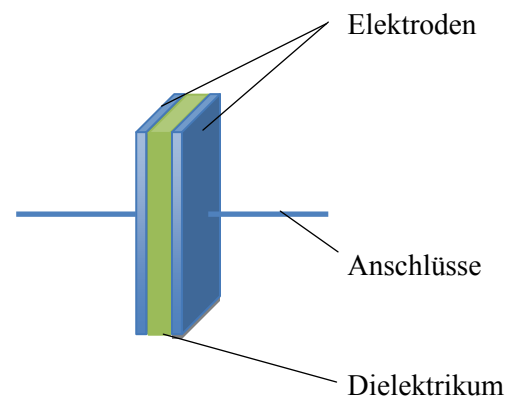


Abbildung 63: Aufbau eines Kondensators.

Wird nun an den Kondensator eine Spannung angelegt, so wird der Kondensator aufgeladen. Das bedeutet, eine Elektrode wird positiv und die andere Elektrode negativ aufgeladen. Auf beiden Elektroden befindet sich stets die gleiche Anzahl von Ladungsträgern, wobei sich auf einer Elektrode die negativen und auf der anderen Elektrode die positiven Ladungen befinden.

Die charakteristische Eigenschaft des Kondensators ist die Kapazität C . Sie gibt an, wie viel elektrische Energie der Kondensator speichern kann. Die Einheit der Kapazität C ist F (Farad). Ein typischer Kondensator in einer elektrischen Schaltung hat eine Kapazität im Bereich von $\mu F = 10^{-6} F$ oder $nF = 10^{-9} F$.

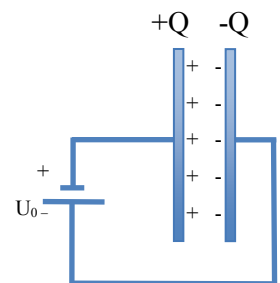


Abbildung 64: Ladungen an den Kondensatorplatten.

Es gelten folgende Zusammenhänge zwischen Strom, Spannung und Ladung:

¹⁶⁰ Vgl. URL: <http://www.elektronik-kompodium.de/sites/bau/0205141.htm> [29.5.2014].

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{I \cdot t}{U}$$

Wobei:

Q ... elektrische Ladung [Q] = C (Coulomb)

U ...elektrische Spannung [U] = V (Volt)

C ... elektrische Kapazität [C] = F (Farad)

I ...elektrische Stromstärke [I] = A (Ampere)

Die elektrische Stromstärke beschreibt die Ladung $Q(t)$, die in einer bestimmten Zeit t durch eine Querschnittsfläche hindurchtritt. Für die Stromstärke und die Ladung gilt dann folgender Zusammenhang:¹⁶¹

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Abbildung 63 zeigt den schematischen Aufbau eines Kondensators, Abbildung 64 die Ladungsanordnung eines geladenen Kondensators.

Aufladung eines Kondensators¹⁶²

Im Folgenden soll die Aufladung eines Kondensators mit Hilfe einer Differentialgleichung beschrieben werden. Zur Herleitung der Differentialgleichung betrachtet man zuerst den Stromkreis, der für die Aufladung des Kondensators benötigt wird.

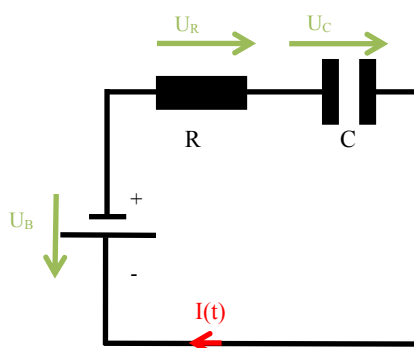


Abbildung 65: Schaltplan zur Aufladung eines Kondensators.

¹⁶¹ Vgl. Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 277.

¹⁶² Allgemeine Annahmen nach O.V. : Entladen und Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand, URL: <http://gfs.khmeyberg.de/Materialien/IIPhysik/KondensatorSpuleMathematik.pdf> [27.6.2014], S. 1.

Der Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle (U_B), einem Vorwiderstand R und natürlich einem Kondensator C . Die Spannungen, die an den jeweiligen Bauteilen abfallen, lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$U_R(t) = I(t) * R$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Für die Gesamtspannung U_B in obigem Stromkreis gilt

$$U_B = U_R(t) + U_C(t).$$

Aufgaben

1. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die den Aufladevorgang des Kondensators beschreibt.

Tipp: Um die Differentialgleichung aufzustellen, gehen Sie folgendermaßen vor: Verwenden Sie die Gleichung für die Gesamtspannung und setzen Sie die oben kennengelernten Beziehungen für $U_R(t)$ und $U_C(t)$ ein. Verwenden Sie dann die Beziehung zwischen Stromstärke und die in einer gewissen Zeit t durch eine Querschnittsfläche durchgetretene Ladung $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$.

2. Lösen Sie die Differentialgleichung!

Tipp: Sie erhalten eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Eine Methode zur Lösung ist die Methode der Variation der Konstanten. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$.

3. Berechnen Sie nun mit Hilfe der oben erhalten Lösung für $Q(t)$ den Spannungsverlauf $U(t)$ sowie den Stromverlauf $I(t)$.

Tipp: Denken Sie an die oben kennengelernten Zusammenhänge zwischen Ladung und Strom bzw. Ladung und Spannung!

4. Stellen Sie den Spannungsverlauf und den Stromverlauf für die Aufladung eines Kondensators mit Hilfe eines Computeralgebrasystems dar! (z.B.: GeoGebra).

5. Bestimmen Sie den Spannungsverlauf beim Aufladevorgang experimentell. Alle Informationen finden Sie auf dem nächsten Arbeitsblatt!

Experimentelle Bestimmung des Spannungsverlaufs bei der Aufladung eines Kondensators

Mit Hilfe eines Oszilloskops soll der Spannungsverlauf bei der Aufladung eines Kondensators aufgenommen werden.

Benötigte Materialien:

- Widerstand $R = 100k\Omega$
- Kondensator $C = 4.7\mu F$
- Oszilloskop
- Diverse Steckverbindungen (je nach Aufbau)

Schaltplan:

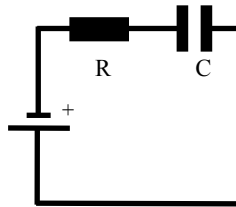


Abbildung 66: Schaltplan zur Aufladung eines Kondensators.

Durchführung:

Die Schaltung soll gemäß Schaltplan aufgebaut werden. Der Spannungsabfall am Kondensator wird mit Hilfe des Oszilloskops gemessen. Die Schaltung darf erst eingeschalten werden, nachdem sie von der Lehrkraft auf ihre Richtigkeit überprüft wurde!!! Skizzieren Sie den Spannungsverlauf und vergleichen Sie den aufgenommenen Verlauf mit dem mathematisch hergeleiteten Verlauf.

7.9 Raketenantrieb

Raketen kennt man vor allem aus der Weltraumfahrt und den Feuerwerksraketen zu Silvester. Mit diesem Projekt soll nun der Bewegung einer Rakete mathematisch genau auf den Grund gegangen werden.

Ziele

- Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichung beim Raketenstart.
- Berechnung von Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit.
- Darstellung von Weg-Zeit Funktion und Geschwindigkeits-Zeit Funktion der Saturn V Rakete (Mondlandungsrakete).
- Berechnung von Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit der Saturn V Rakete.

Physikalischer Input¹⁶³

Bei einer Rakete kommt das Rückstoßprinzip zur Anwendung. Beim Start einer Rakete strömt üblicherweise ein sogenanntes Verbrennungsgas aus. Das Ausströmen des Verbrennungsgases bewirkt eine Gegenreaktion, beruhend auf dem 3. Newtonschen Axiom:

Bei der Wechselwirkung zweier Körper gilt für die auftretenden Kräfte: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Übt Körper 1 eine Kraft auf Körper 2 ($\vec{F}_{12}$) aus, dann wirkt auch eine gleich große entgegengesetzte Kraft vom Körper 2 auf Körper 1 ($\vec{F}_{21}$).¹⁶⁴

Übertragen auf die Rakete heißt, dass sie mit der gleichen Kraft nach oben gedrückt wird, mit der das Verbrennungsgas nach unten ausströmt (Rückstoßprinzip). Die Kraft, die den Raketenkörper nach oben beschleunigt, wird als **Schubkraft** bezeichnet.

Die mathematische Beschreibung der Bewegung erfolgt mit Hilfe des Impulses und der Impulserhaltung. Wenn die Verbrennungsteilchen ausströmen, so besitzen sie einen Impuls p für den ganz allgemein gilt:

$$p = m * v,$$

wobei m die Masse des ausströmenden Teilchens und v die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Der **Impulserhaltungssatz** sagt aus, dass die Summe der Impulse $m_1 * v_1 + m_2 * v_2$ zweier Massen m_1 und m_2 , mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 , konstant ist, solange keine äußere Krafteinwirkung

¹⁶³ Informationen zum physikalischen Input nach: Wagner, Reischl, Steiner (2010), S. 39 sowie nach Heuser (2009), S. 329-331.

¹⁶⁴ Vgl. Wagner, Reischl, Steiner (2010), S.39 und

vgl. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Gesetze[23.7.2014].

stattfindet.¹⁶⁵

Strömt nun das Verbrennungsgas nach unten aus (Impuls des Verbrennungsgases), so gibt es nun aufgrund der Impulserhaltung einen genau so starken, entgegengesetzten Impuls der Rakete - die Rakete hebt ab.

Wichtige Begriffe:

Ausströmgeschwindigkeit des Verbrennungsgemischs: $v_s : [v_s] = m/s$

Schub: $F_{Schub} = u(t) * m'(t)$

Gravitationskraft: $F_G = -m * g$

Treibstofflademasse L : $[L] = kg$

Kerosin - Gas Ausstoß α : $[\alpha] = kg/s$

Brennschluss: Zeitpunkt an dem das Verbrennungsgemisch vollständig aufgebraucht ist.

Für die Berechnung werden noch einige vereinfachende Annahmen getroffen:¹⁶⁶

- Die Rakete bewegt sich nach dem Start senkrecht zur Erde entlang der y -Achse.
- Der Startpunkt der Rakete wird in den Koordinatennullpunkt gelegt.
- Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $y'(0) = 0$.
- Die Masse der Rakete, zum Zeitpunkt $t = 0$, liegt bei $m(0) = m_0$ inklusive einer Treibstofflademasse L .
- Um die Berechnungen nicht zu verkomplizieren, nimmt man an, dass die Treibstoffverbrennung konstant $= \alpha$ ist. Es gilt dann $m(t) = m_0 - \alpha * t$. Ableitung ergibt die Änderung der Masse mit der Zeit $m'(t) = -\alpha$.
- Da man nur beschränkt Treibstoff an Bord einer Rakete mitnehmen kann, ist die Verbrennungsdauer auf ein Intervall $[0, T]$ beschränkt, wobei T durch $T := \frac{L}{\alpha}$ definiert ist.
- Die Ausströmgeschwindigkeit des Verbrennungsgases $u(t)$ wird als konstant angenommen mit $u(t) = -v_s$.

Aufgaben

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung einer startenden Rakete her.

¹⁶⁵ Vgl. dazu Wagner, Reischl, Steiner (2010), S.40-41.

¹⁶⁶ Annahmen nach Heuser (2009), S. 329-330.

Tipp: Berücksichtigen Sie für die resultierende Kraft auf die Rakete nur den Schub, der durch das Austreten des Verbrennungsgases aus der Impulserhaltung folgt und die Gravitationskraft F_G . Setzen Sie die im physikalischen Input kennengelernten Beziehungen für den Schub und die Gravitationskraft ein!

2. Lösen Sie die Differentialgleichung. Berechnen Sie die Geschwindigkeits-Zeit Funktion sowie die Weg-Zeit Funktion.

Tipp: Sie können die Differentialgleichung durch zweimalige Integration auf $y(t)$ zurückführen und dadurch lösen. Vergessen Sie allerdings nicht auf etwaige Integrationskonstanten, die Sie über die Anfangsbedingungen bestimmen können! Oft kann es auch hilfreich sein, einen Ausdruck umzuformen, um ein Integral leichter berechnen zu können. Sollten Sie Probleme beim Auffinden einer passenden Stammfunktion haben, verwenden Sie ein Computeralgebrasystem zur Berechnung.

3. Leiten Sie die Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit aus der Geschwindigkeits-Zeit Funktion bzw. der Weg-Zeit Funktion her!

Tipp: Überlegen Sie sich dazu, zu welchem Zeitpunkt dies eintritt und setzen Sie in die geeignete Geschwindigkeits-Zeit Funktion bzw. Weg-Zeit Funktion ein.

4. Stellen sie die Weg-Zeit Funktion sowie die Geschwindigkeits-Zeit Funktion einer Saturn V Rakete mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B.: GeoGebra) dar.

5. Berechnen Sie die Brennschlusshöhe und die Brennschlussgeschwindigkeit dieser Rakete!

Arbeitsblatt - Start einer Saturn V Rakete

Die Saturn V Rakete war die Trägerrakete bei der ersten bemannten Mondlandung im Juli 1969. Im Folgenden sollen mit den Daten für diese Rakete die Weg-Zeit Funktion, die Geschwindigkeits-Zeit Funktion sowie Brennschlusshöhe und Brennschlussgeschwindigkeit berechnet werden.

Daten der Saturn V Rakete¹⁶⁷

Startmasse (total): 2 840t

Treibstofflademasse (bis Brennschluss First Stage): 2076t

Brennschlusszeit (bis Brennschluss First Stage): 2.5min = 150s

Kerosin-Gas Ausstoß/s: 13.33t/s

Schub: 680kN pro F1 Triebwerk, insgesamt (bei 5 Triebwerken) 3400kN

Ausströmgeschwindigkeit¹⁶⁸: ~2500m/s

Damit können nun alle Daten berechnet werden.

Der Start der Apollo 11 kann nach der Berechnung unter folgendem Link nachverfolgt werden:

http://www.youtube.com/watch?v=F0Yd-GxJ_QM

¹⁶⁷ Daten der Saturn V aus

NASA: Saturn V news reference, 1967, URL: http://history.msfc.nasa.gov/saturn_apollo/documents/Introduction.pdf [23.07.2014]
und URL: www.bernd-leitenberger.de/saturn5.shtml [23.07.2014].

¹⁶⁸ Wert aus URL: <http://www.stromberg-gymnasium.de/unterricht/faecher/ph/rakete/rakete-saturn.xls> [23.07.2014].

7.10 Mathematisches Pendel

Ziele

- Mathematische Beschreibung des Schwingungsverlaufs eines mathematischen Pendels
- Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichung
- Graphische Analyse der Schwingung
- Numerische Betrachtung der Bewegungsgleichung

Physikalischer Input¹⁶⁹

Das folgende Projekt behandelt die Bewegung eines mathematischen Pendels. Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Pendel, bei dem eine Masse an einem Faden mit der Länge l angehängt wird. Das Attribut “idealisiert“ kommt daher, da folgende Vereinfachungen getroffen werden

1. Die Masse des Pendels wird als Massenpunkt betrachtet. Dabei nimmt man an, dass die ganze Masse in einem einzigen Punkt liegt.
2. Die Masse des Fadens des mathematischen Pendels wird vernachlässigt.
3. Beim mathematischen Pendel treten keinerlei Reibungseffekte auf.

Folgende Abbildung zeigt den Aufbau und die Kraftkomponenten am mathematischen Pendel bei Auslenkung um einen Winkel α .

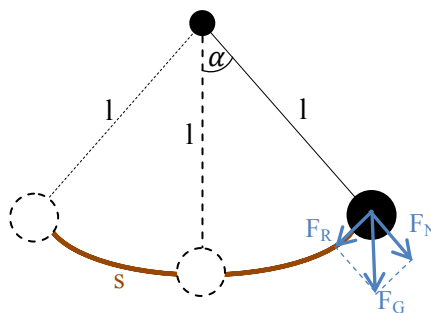


Abbildung 67: Mathematisches Pendel.

Wird das Pendel um einen Auslenkwinkel α ausgelenkt, so erfolgt eine Aufteilung der Gewichtskraft F_G in die Normalkraft F_N und die Rückstellkraft F_R .

¹⁶⁹ Informationen zum physikalischen Input nach: Wagner, Reischl, Steiner(2010), S. 59-60.

Betrachtet man das Kräfte-Parallelogramm in obiger Abbildung, so gilt für die Rückstellkraft

$$F_R = F_G * \sin(\alpha).$$

Mit der Gewichtskraft $F_G = -m * g$ folgt schließlich für die Rückstellkraft

$$F_R = -m * g * \sin(\alpha).$$

Der Winkel α steht mit der Bogenlänge s und der Pendellänge gemäß $\alpha = \frac{s}{l}$ in Zusammenhang.¹⁷⁰

Achtung: Hier muss der Winkel im Bogenmaß verwendet werden!

Für die Rückstellkraft gilt damit

$$F_R = -m * g * \sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

Wichtige Begriffe

- Amplitude: beschreibt die maximale Auslenkung
- Frequenz f : Anzahl der Schwingungszyklen / Sekunde
- Eigenkreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- Periode: ein voller Schwingungszyklus
- Periodendauer T : die Zeitdauer für einen vollen Schwingungszyklus:

$$T = 2 * \pi * f = 2 * \pi * \frac{1}{\omega} = 2 * \pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Gewichtskraft $F_G = -m * g$

¹⁷⁰ Nach URL: <http://www.ahoefer.de/schwingungen/fadenpendel/fadenpendel.php> [12.06.2014].

Aufgaben

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die oben kennengelernte Pendelschwingung her!

Tipp: Verwenden Sie das zweite Newton'sche Axiom und den Zusammenhang $s''(t) = a_R(t)$.

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung!

Tipp: Die Lösung der aufgestellten Differentialgleichung ist sehr schwierig und für den Schulunterricht zu komplex. Es gibt aber eine Möglichkeit die Differentialgleichung stark zu vereinfachen! Dabei betrachtet man eine Näherung für kleine Winkel.



Abbildung 68: Näherung für kleine Auslenkungen.

Für kleine Auslenkungen weicht der Wert der Bogenlänge s nur gering von der Länge der Geraden x ab. Mit der trigonometrischen Funktion folgt dann die Approximation

$$\sin(\alpha) \approx \frac{x}{l} \approx \frac{s}{l} = \alpha.$$

Tipp: Verwenden Sie diese Approximation. Die Differentialgleichung kann damit über den Ansatz $s(t) = c * e^{\lambda t}$ mit $c \neq 0$ gelöst werden.

Sie können folgende Anfangsbedingungen verwenden:

- Nach einem Viertel der Schwingungsdauer $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2 * \omega}$ erreicht das Pendel den Nulldurchgang. Das bedeutet $s(\frac{T}{4}) = 0$.
- Zum Startzeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Pendel auf Maximalauslenkung bei $s(0) = s_{max}$.

3. Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Lösung auch die Geschwindigkeits-Zeit Funktion.

4. Stellen Sie die Weg-Zeit Funktion und Geschwindigkeits-Zeit Funktion in GeoGebra dar. Verwenden Sie für die maximale Auslenkung s_{max} und die Fadenlänge l Schieberegler und beschreiben Sie, was sich durch Variation dieser Größen am Bewegungsverlauf ändert.

5. Führen Sie eine numerische Berechnung der Pendelschwingung durch!

Tipp: Verwenden Sie ein kennengelerntes (z.B.: das auf dem Heun Verfahren beruhende „verbesserte Verfahren“) und vergleichen Sie die numerische Lösung mit der angenäherten Lösung der Differentialgleichung. Verwenden Sie für die Kraft auf die Pendelmasse die Formel $F(x) = -\left(\frac{m * g}{l}\right) * \sin(x)$. Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationsprogramm!

7.11 Das ungedämpfte Federpendel

Ziele

- Die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Federpendels ohne Dämpfung.
- Vergleich mit der Bewegung eines Federpendels im Experiment.

Physikalischer Input¹⁷¹

Zieht man am Massenstück eines Federpendels und lässt den Körper dann aus, so bewegt sich das Massenstück periodisch in y -Richtung (man nimmt der Einfachheit halber an, dass die Bewegung nur 1 dimensional erfolgt). $y(t)$ gibt dabei die momentane Lage der Masse zum Zeitpunkt t an.

Das Hook'sche Gesetz

Aus dem Physikunterricht ist das Hook'sche Gesetz bekannt. Was besagt nun dieses Gesetz? Es besagt, dass die sogenannte rücktreibende Kraft F_F einer Feder proportional zur Ausdehnung der Feder ist. Den Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als Federkonstante und verwendet für ihn üblicherweise die Variable k . In eine Formel verpackt lautet das Hook'sche Gesetz nun

$$F_F = -k * y.$$

Da die Federkraft der Auslenkung entgegenwirkt, enthält die Gleichung ein negatives Vorzeichen.

Das Federpendel

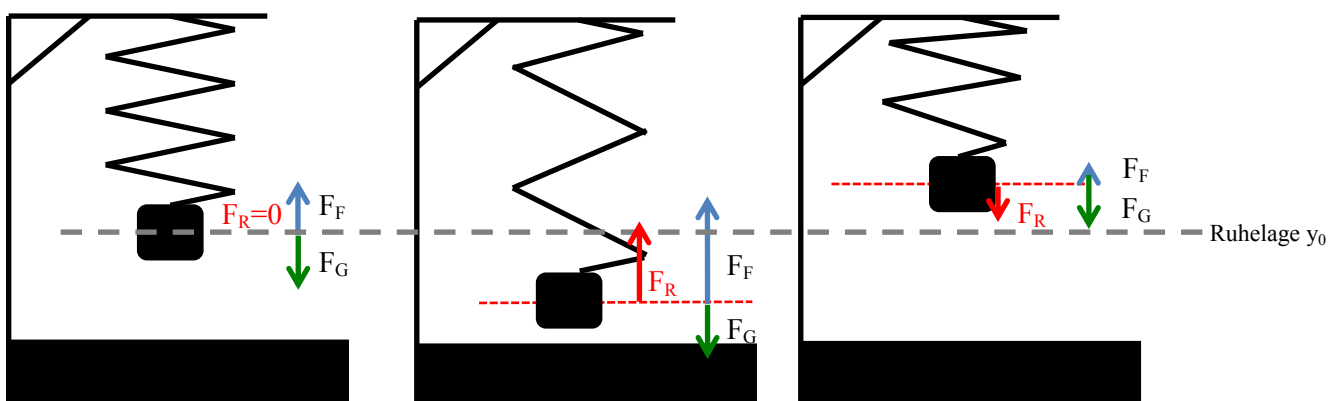


Abbildung 69: Zeitlicher Verlauf der Bewegung eines Federpendels mit Masse.

Ausgangssituation: An eine Metallfeder wird ein Körper mit einer bestimmten Masse befestigt. Die Feder dehnt sich (aufgrund der Schwerkraft) bis in den sogenannten Gleichgewichtszustand aus. In

¹⁷¹Informationen zum physikalischen Input und Erklärung zum Federpendel nach URL:

<http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/10/schwingungen/federpendel/federpendel.htm> [27.03.2014] sowie

nach URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/vertikales_federpendel/vertikales_federpendel.php [22.6.2014].

diesem Zustand (wie in obiger Abbildung im Bild links) bewegt sich das Pendel nicht. Die Gewichtskraft F_G und die Federkraft F_F sind (betragsmäßig) gleich groß. Da sie in entgegengesetzte Richtungen zeigen, heben sich Gewichtskraft und die rücktreibende Federkraft auf. Es gilt:

$$F_F = -k * y_0 = -F_G$$

y_0 beschreibt dabei die Ausdehnung der Feder im Gleichgewichtszustand.

Wird nun die Feder aus dem Gleichgewichtszustand um y weiter nach unten ausgelenkt, so erhöht sich die Federkraft:

$$F_F = -k * (y_0 + y)$$

Für die resultierende rücktreibende Kraft F_R gilt dann

$$F_R = F_G + F_F = k * y_0 - k * (y_0 + y) = -k * y.$$

Das bedeutet: Durch Anziehen an der Feder wird die rücktreibende Kraft größer als die Gewichtskraft. Beim Auslassen beschleunigt die Masse nun in Richtung der rücktreibenden Federkraft. Die Gewichtskraft der Masse überwiegt oberhalb der Gleichgewichtslage gegenüber der rücktreibenden Kraft und die Masse wird folglich in Richtung der Gewichtskraft beschleunigt. Die Masse bewegt sich dabei noch in Richtung der Federkraft, wird aber ab der Gleichgewichtslage immer weiter abgebremst, bis sie am Umkehrpunkt (maximaler Ausschlag) die Richtung ihrer Bewegung - in Richtung der Gewichtskraft - ändert. Der Vorgang verläuft nun analog in entgegengesetzte Richtung.¹⁷²

Wichtige Begriffe

- Amplitude: beschreibt die maximale Auslenkung
- Periode: ein voller Schwingungszyklus
- Frequenz f : Anzahl der Schwingungszyklen / Sekunde
- Eigenkreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Periodendauer T : die Zeitdauer für einen vollen Schwingungszyklus:

$$T = 2 * \pi * f = 2 * \pi * \frac{1}{\omega} = 2 * \pi * \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Federkonstante k : Proportionalitätsfaktor zwischen Auslenkung und rücktreibender Kraft

Bemerkung: In diesem Beispiel werden die Dämpfung und etwaige Luftwiderstände vernachlässigt.

¹⁷² Nach URL: <http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/10/schwingungen/federpendel/federpendel.htm> [27.03.2014].

Aufgaben:

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des oben beschriebenen ungedämpften Federpendels auf.

Tipp: Betrachten Sie dazu die wirkende Gesamtkraft, d.h. die resultierende Kraft F_R .

2. Lösen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung einer Methode, die Sie im Unterricht kennengelernt haben. Sollten Sie Probleme beim Auffinden einer allgemeinen Lösung haben, können Sie auch in externer Literatur nachschlagen.

Tipp: Für die Anfangsbedingungen verwenden Sie:

$$y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = v_0 \text{ (oder } y(\frac{T}{4}) = y_m)$$

3. Berechnen Sie folgende Aufgabe, indem Sie ihre Lösung der Differentialrechnung verwenden:

Lösen Sie die Differentialgleichung eines ungedämpften schwingenden Feder-Masse-Systems und berechnen Sie die maximale Auslenkung des Pendels!

Folgende Werte sind dabei gegeben:

Masse des Systems $m = 2\text{ kg}$

Federkonstante $k = 32\text{ N/m}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 0$; $v_0 = 1,2\text{ m/s}$

4. Stellen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B.: GeoGebra) dar.

5. Führen Sie angeführten Versuch mit einem Federpendel durch. Nehmen Sie mit Hilfe geeigneter Analysesoftware die Weg-Zeit Funktion auf und vergleichen Sie diese mit dem von ihnen berechneten Verlauf. Welche Unterschiede können Sie feststellen, beziehungsweise woran könnten diese Abweichungen liegen?

Versuch Federpendel

Ziel: Messung des zeitlichen Verlaufs der Auslenkung beim Federpendel.

Benötigte Materialien:

- Feder und Halterung
- Belastungsmasse: 200g
- Maßstab
- High Speed Kamera mit Halterung
- Analysesoftware

Durchführung:

Die Auslenkung Pendels wird mit der High Speed Kamera aufgenommen. Es wird mit der Belastungsmasse von 200g gearbeitet. Fragen Sie Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer nach der Federkonstante. Berechnen Sie den Verlauf mit Hilfe der von Ihnen aufgestellten Lösung der Differentialgleichung. Mit der Analysesoftware wird die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit aufgenommen. Im Anschluss soll der zeitliche Verlauf mit dem berechneten Verlauf verglichen werden. Können Sie Unterschiede feststellen?

7.12 Das Federpendel mit Dämpfung

Ziele

- Die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Federpendels mit Dämpfung
- Vergleich mit der Bewegung eines Federpendels im Experiment

Physikalischer Input¹⁷³

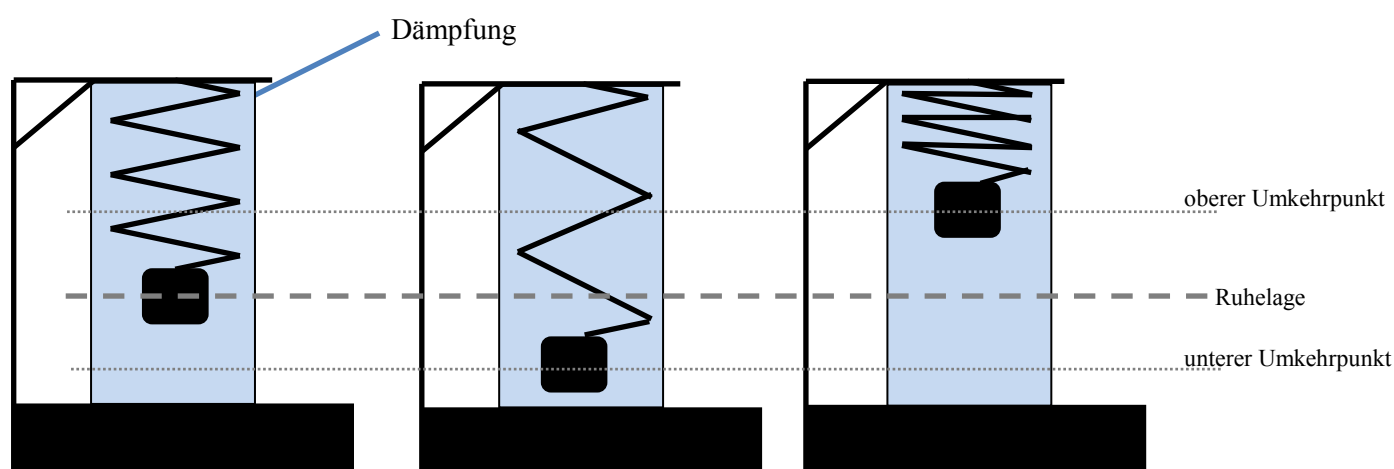


Abbildung 70: Zeitlicher Verlauf der Bewegung eines Federpendels mit zusätzlich angehängter Masse.

In vorigem Beispiel war vom ungedämpften Federpendel die Rede. Dabei verwendet man zur Vereinfachung die Annahme, dass auf das Feder-Masse-System keinerlei Reibungskräfte wirken. Im Folgenden wird nun auch die Dämpfung in die Betrachtungen miteinbezogen.

Die Dämpfungskraft steigt (in guter Näherung) linear zur Geschwindigkeit der Feder. Für die Dämpfungskraft gilt damit:

$$F_D(t) = -D * v(t) = -D * y'(t)$$

Verschiedene Dämpfungsgrade

Salopp gesagt: umso stärker die Dämpfung ist, umso schneller hört das Schwingen der Feder wieder auf. Dies ist in vielen Einsatzbereichen auch so gewünscht. Bei der Federung eines Autos zum Beispiel soll die Feder möglichst rasch in den Ursprungszustand zurückgehen und nicht weiter

¹⁷³ Informationen zum physikalischen Input nach URL:

http://www.ahoefer.de/schwingungen/gedaempfte_harmonische_schwingung/gedaempfte_harmonische_schwingung.php
[25.06.2014].

nachschwingen.¹⁷⁴

Bei Musikinstrumenten - wie zum Beispiel bei den Saiten einer Gitarre - soll die Saite noch länger schwingen.

Allgemein unterscheidet man für eine freie Schwingung mit Dämpfung drei Schwingungsarten:¹⁷⁵

1. $\varepsilon < 1$: Schwingfall (schwache Dämpfung) :

Die Schwingung wird langsam immer kleiner.

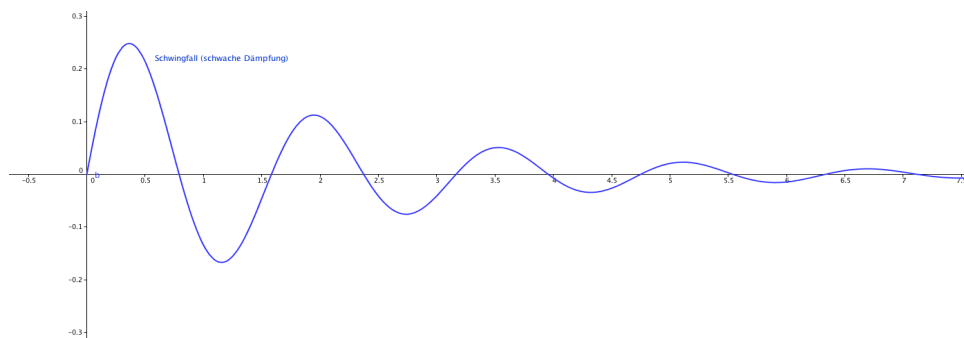


Abbildung 71: Schwingfall.

Anwendung: Zum Beispiel bei Saiteninstrumenten.

2. $\varepsilon > 1$: **Kriechfall:** Die Feder geht sehr langsam in die Ausgangslage zurück. Aufgrund der starken Dämpfung erfolgt keine Schwingung.

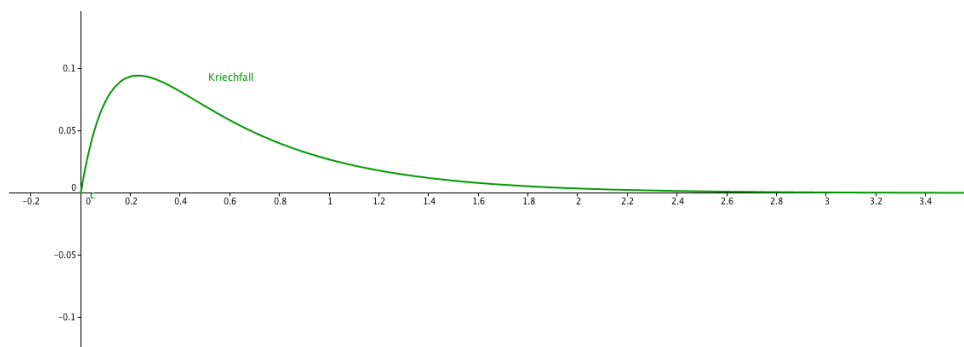


Abbildung 72: Kriechfall.

Anwendung: Eine Anwendungsmöglichkeit ist zum Beispiel eine automatisch schließende Tür. Die eingebaute Feder lässt die Tür nur ganz langsam schließen.

¹⁷⁴ Vgl. URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/mechanische-schwingungen> [25.06.2014].

¹⁷⁵ Nach Timischl & Kaiser (2005) S.164 sowie

nach URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/mechanische-schwingungen> [25.6.2014].

3. $\varepsilon = 1$: Aperiodischer Grenzfall

Die Feder geht ohne zu schwingen, möglichst rasch in Ruhelage zurück.

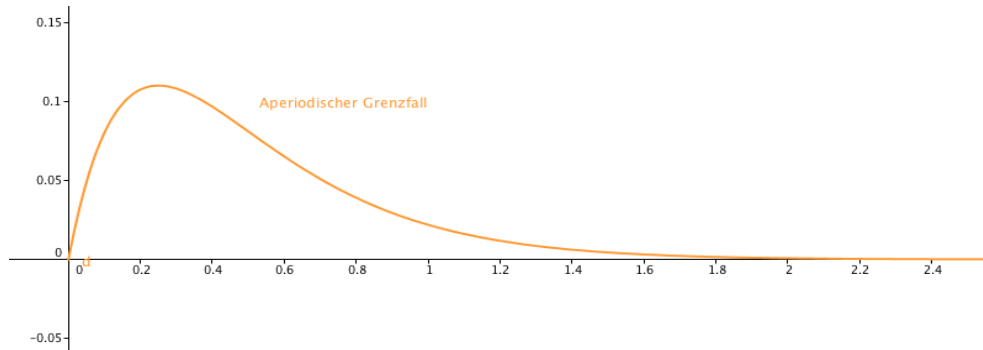


Abbildung 73: Aperiodischer Grenzfall.

Anwendung: Zum Beispiel die Federung bei einem Auto (Stoßdämpfer).

Wichtige Begriffe:

m ... Pendelmasse

D ... Reibungs/Dämpfungskonstante

k ... Federkonstante

y_m ... Anfangsauslenkung

$\delta = \frac{D}{2m}$... Abklingkonstante

$\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0}$... Dämpfungsgrad

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$... Nennkreisfrequenz

$\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$... Eigenkreisfrequenz

$y_u = A * e^{-\frac{\delta T}{4}}$... 1. Umkehrpunkt

$A = y_m * \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}$... Maximalauslenkung bei Dämpfung

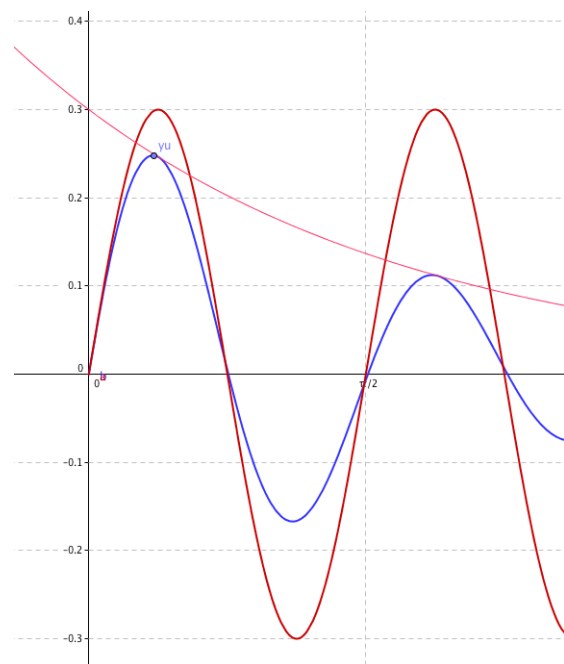


Abbildung 74: 1. Umkehrpunkt.

Aufgaben

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des oben beschriebenen gedämpften Federpendels auf.

Tipp: Betrachten Sie dazu die Bewegungsgleichung des ungedämpften Federpendels und berücksichtigen Sie noch zusätzlich die Dämpfungskomponente!

2. Lösen Sie diese Differentialgleichung unter Verwendung einer Methode, die Sie im Unterricht kennengelernt haben. Unterscheiden Sie die oben kennengelernten Bewegungsformen der freien Schwingung. Sollten Sie Probleme beim Auffinden einer allgemeinen Lösung haben, können Sie auch in externer Literatur nachschlagen.

Tipp: Für die Anfangsbedingungen verwenden Sie:

$$y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = v_0 \text{ (oder } y(T/4) = y_u)$$

3. Berechnen Sie folgende Aufgabe, indem Sie ihre Lösung der Differentialrechnung verwenden:

*Lösen Sie die Differentialgleichung eines gedämpften schwingenden Feder-Masse-Systems:
Folgende Werte sind dabei gegeben:*

Masse des Systems $m = 2\text{ kg}$

Federkonstante $k = 32\text{ N/m}$

Dämpfungskonstante $D = \text{a) } 2\text{ kg/s}, \text{ b) } 20\text{ kg/s}, \text{ c) } 16\text{ kg/s}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 0$; $v_0 = 1,2\text{ m/s}$

4. Stellen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B.: GeoGebra) dar.

5. Führen Sie den unten angeführten Versuch mit einem Federpendel durch. Nehmen Sie mit Hilfe geeigneter Analysesoftware die Weg-Zeit Funktion auf und vergleichen Sie diese mit dem von Ihnen berechneten Verlauf für eine schwache Dämpfung. Versuchen Sie, durch Vergleich der berechneten und der aufgenommenen Kurve, die Dämpfungskonstante möglichst gut anzunähern.

Versuch Federpendel

Ziel: Messung des zeitlichen Verlaufs der Auslenkung beim Federpendel.

Benötigte Materialien:

- Feder und Halterung
- Belastungsmasse: 200g, 400g, 50g
- Maßstab
- High Speed Kamera mit Halterung
- Analysesoftware

Durchführung:

Die Auslenkung des Pendels wird mit der High Speed Kamera aufgenommen. Die Weg-Zeit Funktion soll mit der Analysesoftware aufgenommen werden. Zu Beginn wird mit der Belastungsmasse von 200g gearbeitet.

Im Anschluss soll das Experiment auch berechnet werden. Für die Anfangsbedingung empfiehlt sich entweder die Messung der Maximalauslenkung oder die Messung des 1. Umkehrpunktes, beziehungsweise die Bestimmung der Geschwindigkeit beim Nulldurchgang mit Hilfe der Analysesoftware.

8. Ergebnisse der Testung von 2 Projekten

Zur besseren Abschätzung von Realisierbarkeit und benötigter Zeitdauer wurde ein Testlauf für zwei Projekte im Rahmen der Diplomarbeit geplant und durchgeführt. Dabei sollte jeweils ein Projekt auf Schwierigkeitsniveau 1 sowie auf Schwierigkeitsniveau 2 getestet werden.

Organisatorisches:

Am 26. Juni wurden an einer Höheren Technischen Bundeslehranstalt (HTL) zwei Projekte in einer 4. Klasse (12. Schulstufe) getestet. In der Klasse waren 16 Schüler anwesend. Der Zeitrahmen belief sich auf eine Doppelstunde (3. und 4. Unterrichtseinheit). Für die Testung wurden nach Absprache mit dem Mathematiklehrer der Klasse folgende Projekte ausgewählt:

- Die Vollbremsung eines Autos (Schwierigkeitsniveau 1)
- Der Einschaltvorgang einer Spule im Gleichstromkreis (Schwierigkeitsniveau 2)

Die Schüler der Klasse hatten das Kapitel Differentialgleichungen sowie elementare Lösungsmethoden 1. Ordnung (unter anderem die Methode der Trennung der Variablen sowie verschiedene andere Lösungsmethoden und diverse Lösungsansätze) bereits im vorangegangenen Unterricht kennengelernt, wodurch auf eine ausführliche Einführung verzichtet werden konnte. Im Anschluss an die Unterrichtseinheiten wurde eine Befragung mittels offenem Fragenbogen durchgeführt.

Projekt 1: Die Vollbremsung eines Autos

Zur Einführung und zum Kennenlernen des Aufgabenmodus wurde mit einer Aufgabe auf Schwierigkeitsniveau 1 begonnen. Alle Aufgabenstellungen können in Kapitel 6 nachgelesen werden. Nach kurzer Erklärung des Aufgabenmodus wurde das erste Projekt im Klassenverband gelöst. Begriffe wie Bewegungsgleichung, Weg-Zeit Funktion und Geschwindigkeits-Zeit Funktion wurden nochmals wiederholt. Es zeigte sich bereits zu Beginn, dass bei den Schülern dieser Klasse keine Probleme mit Differential- und Integralrechnung sowie mit der Verbindung dieser Rechenoperationen bestanden. Nach einer kurzen Einführung wurde von den Schülern der physikalische Input selbstständig durchgearbeitet. Hier traten keine Verständnisprobleme auf. Die Aufgabenstellungen wurden danach im Klassenverband durchgearbeitet. Die Aufstellung der Bewegungsgleichung sowie die Berechnung der Weg-Zeit Funktion und der Geschwindigkeits-Zeit Funktion machten dabei keinerlei Probleme. Im Anschluss wurde der Bremsweg berechnet. Hier zeigte sich, dass einige Schüler die Weg-Zeit Funktion bereits für den Bremsweg hielten. Durch Diskussion im Klassenverband über die Definition des Bremsweges konnte die Fehlinterpretation aufgelöst werden.

Im Anschluss wurde die hergeleitete Formel für den Bremsweg mit der Faustformel aus der Fahrschule verglichen. Da bei der hergeleiteten Formel für den Bremsweg in m/s und in der Faustformel aber mit km/h gerechnet werden musste, wurde den Schülern (in der Aufgabenstellung) bereits ein Hinweis auf korrekte Wahl der Einheiten gegeben. Mit diesem Hinweis konnten die Schüler den Vergleich problemlos anstellen. Die korrekte Berechnung des Anhalteweges (Reaktionsweg + Bremsweg) machte den Schülern keine Probleme. Bei der Berechnung mit konkreten Werten zeigten sich einige Schüler erstaunt über die Länge des Bremsweges. Auch die Variation der Werte (unterschiedliche Reibungskoeffizienten durch unterschiedliches Wetter beziehungsweise durch schlechte Bereifung oder zu hohe Geschwindigkeit) versetzte einige Schüler in Staunen. Es entbrannte eine Diskussion wobei die Schüler eifrig neue Berechnungen zu unterschiedlichen Situationen anstellten. Nach 45 Minuten wurde das Projekt erfolgreich beendet und zum zweiten Projekt dieses Tages übergegangen.

Projekt 2: Einschaltvorgang einer Spule

Nach der Einführung wurde ein Projekt auf Schwierigkeitsniveau 2 bearbeitet. Bei diesem Projekt sollten die Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit bzw. in Kleingruppen abreiten. Wieder stellte der physikalische Input kein Problem dar. Lediglich manche Bezeichnungen waren für die Lernenden ungewohnt. Bei der Aufstellung der Differentialgleichung hatten einige Gruppen zu Beginn Probleme. Durch einen Tipp (Vereinfachung der Differentialgleichung durch Substitution) konnten alle Probleme jedoch beseitigt werden. Diese Hilfestellung wurde nach der Testung in die Aufgabenstellung mit aufgenommen. Die Lösung der Differentialgleichung stellte weitgehend kein Problem dar. Lediglich bei der Rücksubstitution traten bei zwei Gruppen Fehler auf, wodurch ein falsches Ergebnis zustande kam. Zur Berechnung der Proportionalitätskonstanten sollten von den Schülern eigene Annahmen gewählt werden. Hier zeigte sich jedoch, dass dies für den Großteil der Schüler sehr schwer war. Im Klassenverband wurde dann gemeinsam eine Überlegung zum Stromverlauf zum Zeitpunkt $t = 0$ angestellt ($I(0) = 0$). Damit konnten alle Schüler die Differentialgleichung vollständig lösen. Diese Überlegung wurde ebenfalls nach der Testung in die Aufgabenstellung als Hilfestellung aufgenommen. Die Lösung der Differentialgleichung - der Stromverlauf - wurde von den Schülern mit Hilfe ihres programmierbaren Taschenrechners noch während der Unterrichtseinheit dargestellt. Aufgrund des Zeitmangels musste das eigentlich noch geplante Experiment (siehe dazu Kapitel 6) durch eine Applikation ersetzt werden. Diese wurde am Schluss der Unterrichtseinheit über einen Beamer gezeigt. Dabei wurden auch unterschiedliche Werte für die Spule und die jeweiligen Stromverläufe miteinander verglichen.

Im Anschluss an die beiden Unterrichtseinheiten wurde eine freiwillige Befragung der Schüler mittels Fragebogen durchgeführt. Die Fragen wurden in einem offenen Fragenformat gestellt.

Fragebogen

Danke, dass du an diesem Projekt mitgearbeitet hast! Bitte beantworte noch kurz die angegebenen Fragen. Die Fragebögen werden natürlich anonym behandelt. Die Teilnahme an dieser Umfrage ist selbstverständlich freiwillig! Die Auswertung der Fragen soll dazu dienen, das Projekt noch weiter zu verbessern.

1. Wie schätzt du deine Mathematikfähigkeiten ein?

2. Wie gefällt dir dieses Unterrichtskonzept prinzipiell?

3. Wie schwierig war es für dich, die Aufgaben zu bearbeiten? (Wo gab es Probleme? Wo bist du nicht mehr weitergekommen? Waren die Aufgabenstellungen klar verständlich?)

4. Wie bewertest du die Schwierigkeit der Aufgabenstellungen?

5. War für dich der physikalische Input klar ?

6. Vorschläge, was verbessert werden sollte:

Frage Nr.1 sollte bei der Auswertung helfen, die Antworten der Fragen 2-6 nach Mathematikfähigkeiten einteilen zu können. Hierbei sollte auch untersucht werden, wie Schüler mit unterschiedlichen Mathematikfähigkeiten die Komplexität der Aufgabenstellungen bewerteten. Frage Nr.2 sollte den allgemeinen Zuspruch für solche Projekte abklären. Die weiteren Fragen behandelten Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben, beziehungsweise die Schwierigkeit der Aufgabenstellungen allgemein. Frage Nr.5 sollte abklären, ob der physikalische Einführungstext den Ansprüchen von Schülerinnen und Schülern gerecht wird. Den Abschluss machte eine Frage bezüglich etwaiger Verbesserungsvorschläge.

Auswertung der Fragebögen

Gesamt wurden 13 Fragebögen von den Schülern abgegeben. Davon gaben vier Schüler an gute Mathematikfähigkeiten zu haben. Sieben Schüler bezeichneten ihre Mathematikfähigkeiten als mittelmäßig. Zwei Personen bezeichneten ihre Fähigkeiten als schlecht. Zum besseren Überblick der Auswertung der restlichen Fragestellungen werden nun jeweils Tabellen mit drei Spalten angegeben, wie Schüler mit unterschiedlichen Mathematikfähigkeiten die Fragen beantworteten. Die Einträge in den Tabellen entsprechen den Antworten der Schüler auf die jeweilige Frage. Die Reihenfolge der Antworten zu jeder Frage ist zufällig ausgewählt.

2. Wie gefällt dir dieses Unterrichtskonzept prinzipiell?

gut	mittel / durchschnittlich	schlecht
Sehr gut	Gruppenarbeit ist immer gut, da jeder seine Ideen einbringen kann und das Ergebnis mitgestalten kann	es ist ok
Gut (3x)	Mir gefällt es sehr gut	Gut
	Gut (2x)	
	Interessant, anders als sonst, ziemlich gut	
	Gut, Praxisnähe ist Pluspunkt	
	Verbindung von Theorie mit Versuchen macht den Unterricht interessanter → sehr gut	

3. Wie schwierig war es für dich, die Aufgaben zu bearbeiten? (Wo gab es Probleme? Wo bist du nicht mehr weitergekommen? Waren die Aufgabenstellungen klar verständlich?)

gut	mittel/durchschnittlich	schlecht
bewältigbar	nicht zu schwer	sehr schwierig
herausfordernd	nicht sehr schwer	schwer
Teilweise fehlt der Ansatz	scheiterte nur an Konzentration, weil bald Schulschluss	
Bsp.: Bremsvorgang kein Problem + Integrale nicht kompliziert gewesen	bin sehr gut vorangekommen und es sind keine Probleme aufgetreten	
	machbar wenn man will	
	nicht besonders schwer	

4. Wie bewertest du die Schwierigkeit der Aufgabenstellungen?

gut	mittel/durchschnittlich	schlecht
bewältigbar (2x)	durchschnittlich	einfach
etwas anspruchsvoll, gerade gut	mittel/mittelmäßig (3x)	schwer
Nicht zu schwer und nicht zu einfach → genau richtig	ist anspruchsvoll, aber leicht zu bewältigen	
	Anspruchsvoll	
	Rechenaufwand → machbar Herleitung der Diffgl. ungewohnt, daher etwas schwerer	

5. War für dich der physikalische Input klar ?

gut	mittel/durchschnittlich	schlecht
ja (3x)	ja (6x)	nein
ja gut erklärt	Die Erklärungen waren gut, also ja	ja

6. Vorschläge was verbessert werden sollte:

gut	mittel/durchschnittlich	schlecht
Das Konzept an sich passt und es muss meiner Meinung nach nicht verändert werden.	Alles perfekt	alles ok, aber nicht im Juni
Bsp. mit Spule vielleicht kurz erklären und wiederholen		

Auswertung und Resümee

Allgemein zeigte sich, dass die Schüler sehr positiv bezüglich dieser Projekte eingestellt waren. Dies zeigte sich auch direkt in der Mitarbeit während der Doppeleinheit. Obwohl dieser Tag der letzte reguläre Unterrichtstag dieses Schuljahres war, arbeiteten die Schüler sehr engagiert mit. Auch in mündlichen Gesprächen nach der Unterrichtseinheit kam positives Feedback von den Schülern. Besonders die Verbindung von Theorie und anschaulichen Anwendungen kam bei den Teilnehmern sehr gut an. Ein Schüler zeigte sich auch fasziniert von der Tatsache, durch einfache Modellannahmen tatsächlich jene Gesetze herleiten zu können, die man sonst nur aus dem Physikunterricht - als fertige Formel serviert - kennt. Ein weiterer Punkt, der sich auch in nachfolgenden Gesprächen als positiv herauskristallisierte, war die Arbeitsweise im Kleingruppenmodus. Als besonders interessant stellten sich die Antworten auf Frage 3 - der Schwierigkeit der Aufgaben - heraus. Hier zeigte sich, dass jene Schüler, die ihre Mathematikfähigkeiten als gut/sehr gut einschätzten, die Aufgaben eher als schwierig bezeichneten, während jene Schüler, die ihre Mathematikfähigkeiten als „mittelmäßig“ einschätzten, unter anderem als „nicht sehr schwer“ einschätzten. Die Schwierigkeit der Aufgabenstellungen wurde durch die Bank als anspruchsvoll, aber bewältigbar bezeichnet. Für 12 von 13 Befragten war der physikalische Input verständlich.

Durch Beobachtung der Schüler während der Doppeleinheit zeigte sich, dass die Schüler die beiden Projekte sehr gut annahmen. In Kleingruppen versuchten die Schüler verschiedene Probleme, die während der Bearbeitung auftraten, gemeinsam zu lösen. Die Lernenden versuchten mit verschiedenen Modellannahmen die Projekte zu lösen. Einige Male weiteten sich Diskussionen gruppenübergreifend über den gesamten Klassenverband auf. Die aus der Doppeleinheit gezogenen Schlüsse wurden auch auf alle anderen Projekte angewandt und die Fragestellungen nochmals überarbeitet.

Mit dem Verlauf der Doppeleinheiten war ich persönlich sehr zufrieden. Die Schüler arbeiteten trotz des fortgeschrittenen Schuljahres noch sehr beherzt mit und ich denke die Lernenden konnten aus den beiden Unterrichtsstunden einiges Neues mitnehmen.

Quellenverzeichnis

Literatur

Ableitinger, Christoph/Heitzer, Johanna: Grenzwerte unterrichten / Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen, in: Mathematik Lehren Nr.180, Seelze, 2013, S. 2-11.

Apolin, Martin: Geschwindigkeitskontrolle, in: Red Bulletin Juli 2012, 2012, S.74-76.

Blum, Werner: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven, in: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 23 Trends und Perspektiven / Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur „Didaktik der Mathematik“ in Klagenfurt vom 26. - 30. 9. 1994, Wien, 1996, S. 15-38.

Böhm, Ulrich: „Aller Anfang ist schwer, Modellieren lernen umso mehr!“- Erste Schritte auf dem Weg zur langfristigen Förderung von Modellierungskompetenzen im Mathematikunterricht, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Istron Band 15, Hildesheim/Berlin, 2010, S. 1-14.

Brinkann, Astrid: Miniprojekte und „lange“ Textaufgaben – Einbindung von Realitätsbezügen im „normalen“ Mathematikunterricht, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Istron Band 14, Hildesheim/Berlin, 2009, S. 125-129.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart: Analysis verständlich unterrichten, 1. Auflage Berlin/Heidelberg, 2006 (Nachdruck 2010).

Embacher, Franz: Elemente der theoretischen Physik, 1. Auflage, Wiesbaden, 2010.

Embacher, Franz: Bewegungsgleichungen lösen im Physikunterricht?, unveröffentlichter Aufsatz, Fakultät für Physik der Universität Wien, 2013.

Friedrich, Hauke: Zu einem Zeitpunkt gibt es keine Geschwindigkeit-oder-doch? / Die lokale Änderungsrate besser einordnen, in: Mathematik Lehren 180, Seelze, 2013, S.30-33.

Götz, Stefan (Hrsg.)/Reichel, Hans – Christian (Hrsg.) u.a. : Mathematik 7, 1. Auflage, Wien, 2011.

Henn, Hans-Wolfgang/Maaß Katja: Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Istron Band 8, Hildesheim/Berlin, 2003, S. 1-5.

Hergert Wilfried/Merziger Petra: Vom Staunen zum Lernen, in: Mathematik Lehren, Nr. 181, Seelze, 2013, S. 4-11.

Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1, 17.Auflage, Wiesbaden, 2009.

Humenberger, Hans: Ein Grenzwert zum Anfassen / Mit Glasröhrchen und Tabellen zu Gleichgewichten, in: Mathematik Lehren, Nr.180, Seelze, 2013, S.34-37.

Maaß, Katja: Praxisbuch: Mathematisches Modellieren: Aufgaben für die Sekundarstufe I, Berlin, 2007.

Malle, Günther u.a.: Mathematik verstehen 7, 1.Auflage, Wien, 2013.

Schreiber, Alfred: Universelle Ideen im mathematischen Denken: ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik, in: Begriffsbestimmungen: Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung, Berlin, 2011, S.61-103.

Schweiger, Fritz: „Fundamentale Ideen“ der Analysis und handlungsorientierter Unterricht, in: Didaktik der Mathematik, Heft 60 / Ein Bericht von der 16. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt, Wien, 1983, S.83-85.

Siller, Hans-Stefan: Realitätsbezogener Mathematikunterricht - Mathematik in unserer Umwelt, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Istron Band 13, Hildesheim/Berlin, 2009, S. 1-14 .

Timschl, Wolfgang/Kaiser, Gerald, Ingenieur Mathematik 4, 3.Auflage, Wien, 2005.

Vom Hofe, Rudolf: Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: Mathematik Lehren, Nr.118, Seelze, 2003, S. 4-8.

Wagner, Paul/Reischl, Georg/Steiner, Gerhard: Einführung in die Physik, Wien, 2010.

Winter, Heinrich: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung¹⁷⁶, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Istron Band 8, Hildesheim/Berlin, 2003, S. 6-15.

Wittmann, Erich/Müller, Gerhard: Handbuch produktiver Rechenübungen 1 / Band 1 Vom Einspluseins zum Einmaleins, 2. Auflage (Druck 2005), Leipzig, 2005.

¹⁷⁶ Überarbeitete Fassung des gleichnamigen Beitrags, erschienen in den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, Dez. 1995, S. 37-46.

Online Quellen

Bernstein¹⁷⁷, Swanhild: Der Kaffee ist zu heiß- das Newtonsche Abkühlungsgesetz, URL:

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~bernstei/HMI/mNewton.pdf> [22.7.2014].

BIFIE (Hrsg.): Themenheft Mathematik „Modellieren“, 2012, URL:

https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m4_themenheft_modellieren_2012-02-08.pdf [20.9.2014].

BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik, 2004, URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [28.7.2014].

BMUKK: Lehrplan AHS-Oberstufe Physik, 2004, URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf?4dzgm2 [10.03.2014].

BMUKK: Änderung der Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen, 2003, BGBl. II 2003/283 URL:

https://www.bmbf.gv.at/schulen/lehrdr/gesetze_verordnungen/VO_LP_AHS03_9431.pdf?4dzi3h [28.7.2014].

BMUKK: Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Elektronik und Technische Informatik Anlage 1.2,

2011, URL: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBl_II_Nr_300_2011_Anlage_1_2.pdf

[28.07.2014].

BMUKK: Allgemeines Bildungsziel, Schulautonome Lehrplanbestimmungen, didaktische Grundsätze und gemeinsame Unterrichtsgegenstände an den Höheren Technischen und Gewerblichen

(einschließlich Kunstgewerblichen) Lehranstalten, 2011, BGBl. II 2011/300, URL:

http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL_VO_2011/BGBl_II_Nr_300_2011_Anlage_1.pdf [15.9.2014].

Embacher, Franz: Kreisbewegung, Schwingung und Welle, 2011, URL:

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/PhysikDidaktik/KreisbewegungSchwingungWelle.pdf> [20.9.2014].

Embacher, Franz: Was ist eine Gleichung?, URL: [http://www.mathe-](http://www.mathe-online.at/skripten/gleich/gleich_was_ist_eine_gleichung.pdf)

[online.at/skripten/gleich/gleich_was_ist_eine_gleichung.pdf](http://www.mathe-online.at/skripten/gleich/gleich_was_ist_eine_gleichung.pdf) [16.9.2014].

FIFA: Fussballstadien → Technische Empfehlungen und Anforderungen, 2007, URL:

http://de.fifa.com/mm/document/tournament/competition/51/54/02/football_stadiums_technical_recommendations_and_requirements_de_8212.pdf [15.7.2014].

Hempel, Thomas: Differentialgleichungen – Ausgewählte Probleme aus der Physik, URL: [http://www.uni-](http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf)

[magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf](http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/dgl-phys1.pdf) [29.05.2014].

Kunzinger, Michael: Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen / Nach einer Vorlesung von

Günther Hörmann, 2012, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/1314dglak/dglak.pdf> [8.3.2014].

¹⁷⁷ Der Autorenname wurde nach der Veröffentlichung auf der jeweiligen Homepage angegeben.

Maxim: Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand, 2010, URL: <http://www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf> [17.6.2014].

NASA: Saturn V news reference, 1967, URL:
http://history.msfc.nasa.gov/saturn_apollo/documents/Introduction.pdf [23.07.2014].

O.V. : Induktion und gegenseitige Induktion, URL: http://fl.hs-hannover.de/fileadmin/media/doc/fl/tel/abschnitt_5.pdf [29.05.2014].

O.V. : Entladen und Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand, URL:
<http://gfs.khmeberg.de/Materialien/IIPhysik/KondensatorSpuleMathematik.pdf> [27.6.2014].

Roth, Jürgen: Didaktik der Analysis, 2013, URL:http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_analysis/did_analysis_1_ziele_und_inhalte.pdf [22.3.2014].

Schwaiger¹⁷⁸, Jens: Beilage zur Vorlesung Differentialgleichungen für USW ab SS 2001, URL:
<http://www.uni-graz.at/~schwaige/usw.pdf> [22.07.2014].

Websites allgemein

URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber> [16.09.2014].
URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Haftreibung.html> [5.6.2014].
URL: http://www.mathe-online.at/skripten/gleich/gleich_was_ist_eine_gleichung.pdf [16.9.2014].
URL: <http://www.schulphysik.de/physik/cooling/newcool.htm> [22.07.2014].
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Radioaktivität> [5.6.2014].
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Halbwertszeit> [5.6.2014].
URL: <http://www.weltderphysik.de/thema/alltag/c-14-methode/> [5.6.2014].
URL: <http://www.jagemann-net.de/biologie/bio13/evolution/C-14/c14.php> [5.6.2014].
URL: http://www.uibk.ac.at/forschung/alpine_vorzeit/ [5.6.2014].
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstandskoeffizient> [16.6.2014].
URL: <http://www.redbullstratos.com/science/scientific-data-review> [20.6.20014].
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wurfparabel> [22.7.2014].
URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6521> [21.06.2014].
URL: <http://www.elektronik-kompodium.de/sites/bau/0205141.htm> [27.6.2014].
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Gesetze [23.7.2014].
URL: <http://www.bernd-leitenberger.de/saturn5.shtml> [23.07.2014].
URL: <http://www.stromberg-gymnasium.de/unterricht/faecher/ph/rakete/rakete.htm> [23.07.2014].
URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_\(Rakete\)#Saturn_V](http://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_(Rakete)#Saturn_V) [23.7.2014].
URL: <http://www.ahoefer.de/schwingungen/fadenpendel/fadenpendel.php> [12.06.2014].
URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/vertikales_federpendel/vertikales_federpendel.php [22.6.2014].

¹⁷⁸ Der Autorenname wurde nach der Veröffentlichung auf der jeweiligen Homepage angegeben.

URL: <http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/10/schwingungen/federpendel/federpendel.htm> [27.03.2014].

URL: http://www.ahoefer.de/schwingungen/gedaempfte_harmonische_schwingung/gedaempfte_harmonische_schwingung.php [25.06.2014].

URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/mechanische-schwingungen> [25.06.2014].

URL: <http://www.mathe-online.at/materialien/Thomas/files/hyperbel.html> [16.9.2014].

URL: http://www.mathe-online.at/mathint/fun2/i_Area_gr.html [16.9.2014].

Abbildungsnachweis

Alle Abbildungen wurden – sofern nicht explizit angegeben – von mir persönlich erstellt.

Anhang

1. Abstract

Titel: Differentialrechnung und Differentialgleichungen mit Physikbezug im Mathematikunterricht

Verfasser: Patrick Ritt

Betreuer: Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Stichworte: Differentialrechnung, Differentialgleichungen, Mathematikunterricht

Abstract: Diese Diplomarbeit umfasst verschiedene vollständig ausgearbeitete Projekte mit Physikbezug, die von Schülerinnen und Schülern im Unterricht - mit Hilfe von Differentialrechnung und Differentialgleichungen - bearbeitet werden sollen. Die Auseinandersetzung mit den Projekten ist vor allem für Höhere Technische Bundeslehranstalten (HTL) in der 12. und 13. Schulstufe vorgesehen. Ein Einsatz in der 12. Schulstufe im Gymnasium ist jedoch ebenfalls möglich.

Der erste Teil dieser Diplomarbeit stellt einen Lehrplanbezug her und setzt sich mit fachdidaktischen Überlegungen bezüglich Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht auseinander.

Im zweiten Teil der Diplomarbeit werden zuerst Standardmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen und numerische Verfahren vorgestellt. Im Anschluss werden Einführungsprojekte zum Grenzwertbegriff und zur Ableitung vorgestellt. Der Hauptteil der Diplomarbeit befasst sich mit vollständig ausgearbeiteten Projekten zu physikalischen Phänomenen, die mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden können. Den Abschluss bildet eine Testung von zwei Projekten an einer Höheren Technischen Bundeslehranstalt.

2. Lebenslauf

Patrick Ritt

Persönliche Angaben:

Geburtsdatum : 01.11.1988

Geburtsort: Waidhofen/Ybbs

Familienstand: ledig

Religion: römisch-katholisch

Staatsbürgerschaft: Österreich

Eltern:

Karl Ritt (52), Postbeamter

Brigitte Ritt (48), Einzelhandelskauffrau

Geschwister:

Raphael Ritt (21), Musiker

Schulbildung:

2003-2008 HTL Steyr für Elektronik und Technische Informatik *(mit gutem Erfolg bestanden)*

1999-2003 Hauptschule Ertl

1995-1999 Volksschule Ertl

Studium:

seit 10.2009 Universität Wien, Lehramtsstudium UF Mathematik und UF Physik

03.2012 Abschluss des ersten Studienabschnitts

Präsenzdienst:

10.2008-04.2009 Kasernen Langenlebarn und Hörsching

Erfolgreich absolvierte Projekte:

Diplomarbeit „Optimierung der Temperaturüberwachungseinheit eines mobilen Wachsautomaten“ an der HTL Steyr 2008

Ramingtal - Briefberg 3 / 4443 - St.Peter/Au

Mobil:0664/4532163 - Email: patrick.ritt@aon.at

3. Hyperbelfunktionen¹⁷⁹

Ähnlich wie $\cos(t)$ und $\sin(t)$ am Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, können die Hyperbelfunktionen $\sinh(T)$ und $\cosh(T)$ als x- und y- Koordinaten der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ verstanden werden.

Die Hyperbelfunktionen sind durch Exponentialfunktionen folgendermaßen definiert:

Sinus hyperbolicus: $\sinh(T) := \frac{e^T - e^{-T}}{2}$

Cosinus hyperbolicus: $\cosh(T) := \frac{e^T + e^{-T}}{2}$

Tangens hyperbolicus: $\tanh(T) := \frac{e^T - e^{-T}}{e^T + e^{-T}}$

Cotangens hyperbolicus: $\coth(T) := \frac{e^T + e^{-T}}{e^T - e^{-T}}$

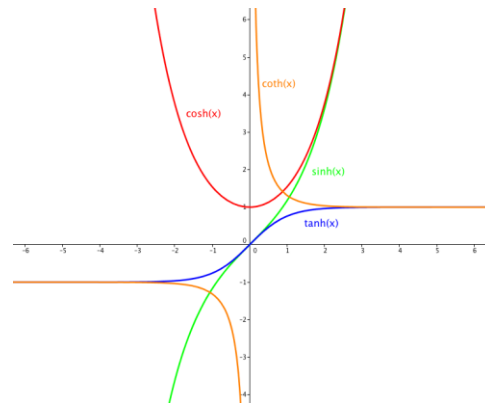


Abbildung 75: Hyperbelfunktionen.

4. Areafunktionen¹⁸⁰

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktion bezeichnet man als Areafunktionen.

Die *Areasinus hyperbolicus* Funktion ist die Umkehrfunktion der Sinus hyperbolicus Funktion. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{arsinh}(x) := \ln [x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

Die *Areacosinus hyperbolicus* Funktion ist die Umkehrfunktion der Cosinus hyperbolicus Funktion. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{arcosh}(x) := \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}]$$

Die *Areatangens hyperbolicus* Funktion ist die Umkehrfunktion der Tangens hyperbolicus Funktion. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{artanh}(x) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{für } |x| < 1$$

Die *Areacotangens hyperbolicus* Funktion ist die Umkehrfunktion der Cotangens hyperbolicus Funktion. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{arcoth}(x) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad \text{für } |x| > 1$$

¹⁷⁹ Vgl. URL: <http://www.mathe-online.at/materialien/Thomas/files/hyperbel.html> [16.9.2014].

¹⁸⁰ Vgl. URL: http://www.mathe-online.at/mathint/fun2/i_Area_gr.html [16.9.2014].

