universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Parkettierungen im Mathematikunterricht“

Verfasser

Aaron Daniel Oberlerchner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 445
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik & UF Biologie und Umweltkunde
Betreuerin / Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Dr. Stefan Götz

Danksagung

Ich möchte mich hier bei allen bedanken, die mich während der letzten Monate beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben.

Ganz besonders gilt dieser Dank Herrn Prof. Stefan Götz, der meine Arbeit geduldig betreut hat und mich nie lange warten hat lassen. Es war interessant zu sehen, wie sich durch seine Ideen und Vorschläge die Arbeit Schritt für Schritt entwickelte. Es war auch sein Verdienst mich dazu zu motivieren diese Diplomarbeit mit LaTeX zu erstellen. Es hat sich gelohnt! Zuletzt danke ich ihm noch für das Aufmerksam machen auf dutzende Tipp- und Beistrichfehler, sowie für viele kleine stilistische Anmerkungen. Vielen, vielen Dank!

Meiner lieben Ehefrau Lily danke ich für ihre Geduld, wenn ich häufig stundenlang Abbildungen mit Geogebra erstellt habe, sowie für ihre persischen Kochkünste mit denen sie mich oft verwöhnte. Man to ra kheili doost daram!

Meinen Eltern danke ich besonders (aber nicht nur) für die finanzielle Unterstützung. Danke Papa, danke Mama, ihr seid die Besten!

Zuletzt danke ich noch meinem Herrn und Schöpfer Jesus Christus, an den ich glaube. Du hast mich bis hierher geführt, dir widme ich diese Arbeit. Danke!

»Groß sind die Werke des Herrn und wer sie erforscht, der hat Freude daran.«
(Psalm 111, 2)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Thema Parkettierungen für den Mathematikunterricht behandelt. Zu Beginn werden neben der Suche nach Anknüpfungspunkten im Lehrplan der AHS auch einige didaktische Überlegungen angestellt. Die fachliche Aufarbeitung des Themas beginnt mit einem Grundlagenkapitel, in dem eine Definition einer Parkettierung und die Elemente eines Parketts behandelt werden. Es werden außerdem einige Terminologien vorgestellt. Das darauffolgende Kapitel ist den Polygonen gewidmet. Diese sind die Bausteine aller in dieser Arbeit behandelten Parkettierungen. Neben der Definition werden Eigenschaften regelmäßiger Polygone, sowie deren Konstruktion bearbeitet. Im Kapitel »Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen« wird einer klassischen Fragestellung nachgegangen, die zu den sogenannten »platonischen« und »archimedischen« Parkettierungen führt. Nachfolgend werden in einem kurzen Kapitel Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen vorgestellt. Konkret werden hier Parkettierungen mit allgemeinen Vier-, Fünf- und Sechsecken vorgestellt. Im vorletzten Kapitel »Symmetrien von Parketten« werden Kongruenzabbildungen sehr genau studiert. Dies führt unter anderem zu den Ebenengruppen periodischer Parkettierungen, welche auch gründlich besprochen werden. Zuletzt sind einige Unterrichtsvorschläge für die Schule abgefasst, wobei auch Arbeitsblätter angefügt sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **7**

2 Der Lehrplan und didaktische Überlegungen zum Thema Parkettierung **10**
2.1 Der Lehrplan der AHS 10
2.2 Didaktische Überlegungen 13

3 Grundlagen zu Parkettierungen **17**
3.1 Definition einer Parkettierung 17
3.2 Erste Beispiele – Parkettierungen in der Natur 18
3.3 Elemente eines Parketts 19
3.4 Terminologie 19
3.5 Normale Parkettierungen 23

4 Polygone **25**
4.1 Definition Polygon 25
4.2 Eigenschaften regelmäßiger konvexer Polygone 26
4.3 Konstruktion regelmäßiger Polygone 29

5 Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen **34**
5.1 Herleitung aller möglichen Knotentypen mit regelmäßigen Polygonen 35
5.2 Homogene Parkettierungen 39

6 Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen **43**
6.1 Parkettierungen mit Vierecken 43
6.2 Parkettierungen mit Fünfecken 46
6.3 Parkettierungen mit Sechsecken 48
6.4 Parkettierungen mit n-Ecken 50

7 Symmetrien von Parketten **51**
7.1 Kongruenzabbildungen bilden eine algebraische Gruppe 56
7.2 Die Ebenengruppen periodischer Parkettierungen 57
7.3 Die sieben Bandornamentgruppen 65
7.4 Rosettengruppen 67

8 Unterrichtsvorschläge **68**
8.1 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Grundlagen zu Parkettierungen« 69
8.2 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Polygone« 77
8.3 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen« 97
8.4 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen« 102
8.5 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Symmetrien von Parketten« . . 104

Literatur **110**

Lebenslauf **115**

Kapitel 1

Vorwort

Parkettierungen sind ein interessantes Phänomen. Sie haben etwas Faszinierendes an sich. Der Blick bleibt an ihnen haften und verliert sich im Aufbau. Es gibt wahrscheinlich nur wenige Menschen, die diesen Erscheinungen ihre Schönheit absprechen würden.

Bezeichnungen wie »platonisches« oder »archimedisches« Parkett lassen erahnen, dass sich schon lange Zeit Menschen den Kopf über dieses Thema zerbrochen haben. Mehr noch scheint es geradezu ein Bedürfnis des Menschen zu sein, nackte Flächen zu gestalten. Gewisse Ornamente, Mosaike, Muster oder Bemalungen gibt es in jeder Kultur, seit Anbeginn der Menschheit. Das in Abbildung 1.1 bemalte Schulterblatt eines Mammuts, ausgestellt im Naturhistorischen Museum Wien, gibt Zeugnis davon. Alle genannten »Verzierungen« tragen denselben Kern, nämlich den der Wiederholung, in sich. Parkettierungen sind im Grunde genommen nur die konsequente Fortführung davon. Die alten Perser brachten es in der Kunst des Parkettierens zu einem ersten Höhepunkt. In der Abbildung 1.1 rechts ist die Decke des Grabmals des persischen Dichterkönigs Hafez (1325 – 1390) zu sehen (Foto aus [12]). Die verwendete sogenannte Girih-Kachelung zeugt von einem tiefen Verständnis von Mathematik und Geometrie, sowie einem feinen Sinn für Ästhetik und Kunst – und das bereits vor 800 Jahren.

Abbildung 1.1: Anfang und Höhepunkt einer Idee

In Europa war Johannes Kepler (1571 – 1630) einer jener, der Pionierarbeit auf dem Gebiet der Parkettierungen leistete. In seinem Werk Harmonica mundi aus dem Jahre 1619, beschäftigte er sich ausführlich mit dem Thema. In jüngerer Zeit gelangten Parkettierungen durch verschiedene Künstler wieder zu mehr Popularität. Motiviert wurde dies sicherlich durch eine wichtige Erkenntnis des Kristallographen Jewgraf S. Fedorow (1853 – 1919) um 1890. Ihm verdankt die Mathematik den Beweis, dass es im Grunde genommen nur 17 verschiedene Typen von regelmäßigen Parkettierungen gibt.

Das Thema Parkettierungen schien dem berühmten Mathematiker David Hilbert (1862 – 1943) im Jahre 1900 wichtig genug, um ihm einen Platz in seiner berühmten Liste mit 23 Problemen einzuräumen (siehe [19], S. 466). Hilberts achtzehntes Problem geht einer Fragestellung zur Parkettierung des 3-dimensionalen Raumes nach, die hier aber nicht näher erläutert werden soll. Die Bemerkung soll zeigen, dass Parkettierungen nicht bloß Gegenstand der Unterhaltungsmathematik sind.

Die letzte große Überraschung lieferte Roger Penrose (geb. 1931), Mathematiker an der Universität Oxford. Er stellte eine Theorie der aperiodischen Flächenfüllung auf, mit der es später möglich war die Anordnung von Atomen in sogenannten Quasikristallen zu beschreiben. Diese wiederum sind von großer Bedeutung, da ihre Entdeckung im Jahre 1982 die Wissenschaft der Mineralogie in ihren Grundfesten erschütterte und sie zwang, ihre grundlegendste Definition, nämlich die des Kristalls, neu zu formulieren.

Konkrete und wichtige Anwendungen finden Parkettierungen heute in der Industrie und im Baugewerbe, sowie auch in Design und Kunst. Neben den klassischen Beton-Verbundpflastersteinen ist der Flächenschluss, das ist die abfallarme Zerlegung von Platten in kongruente Teile, eine erwähnenswerte Anwendung. Immer wieder entdecken Designer die Idee der Parkettierung neu und setzten sie entsprechend um. Wenn man die Augen offen hält, findet man Parkettierungen an vielen Stellen.

Mich selbst beschäftigen Parkettierungen schon mehrere Jahre. Die ersten bewussten Begegnungen hatte ich über die Werke von Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972). Ein außergewöhnlicher Künstler, der sich intensiv mit diesem Thema befasst hat und es vielfältig verarbeitet hat. Es ist tatsächlich schwer eine Arbeit über Parkettierungen zu finden, die nicht an irgendeiner Stelle den Namen Escher erwähnt.

Den Ausschlag gab dann aber ein Lehrveranstaltung bei Eugen Libowitzky über Mineralogie. Mit seiner Begeisterung und seinem didaktisch und fachlich sehr qualifizierten Unterricht weckte er in mir mehr als nur Aufmerksamkeit. Ich begann mich mehr und mehr mit dem Thema Parkettierungen zu befassen. Diese Diplomarbeit ermöglicht es mir mein Interesse zu vertiefen.

Ich habe nun also kurz angeführt warum das Thema bedeutsam ist und zuletzt auch was meine persönliche Motivation ist. Alleine das reicht freilich noch nicht aus das Thema im Rahmen des Mathematikunterrichts in der Schule zu behandeln. Bedeutsame Themen gibt es nämlich viele und auch Eigeninteresse mag zwar eine

notwendige Bedingung, aber sicher keine hinreichende dafür sein, etwas zu unterrichten.

Um also diese ganz grundsätzliche Rechtfertigungsfrage zu klären, beginne ich meine Arbeit damit zu untersuchen, wo die geeignetsten Anknüpfungspunkte im Lehrplan der AHS zu finden sind. Bevor dann eine schulische Umsetzung des Themas vorgeschlagen wird, soll eine Aufarbeitung des Themas erfolgen. Denn um über etwas sprechen zu können, muss man es natürlich erst einmal verstehen. Da eine umfassende Aufarbeitung des Themas in dieser Arbeit nicht möglich ist und diese ohnehin bereits in dem ausgezeichneten Werk »tilings and patterns« von Grünbaum und Shephard [13] geschehen ist, beschränkt sich die Auseinandersetzung auf ausgewählte Aspekte, wie zum Beispiel die Symmetrie von Parkettierungen. Das mathematische Niveau übersteigt das der Schulmathematik kaum. Nur an ein paar Stellen sollen gruppentheoretische Überlegungen angestellt werden. Das ist nötig, weil das Thema es verlangt und ist angebracht, weil das Hintergrundwissen sowieso immer etwas umfangreicher sein sollte, als jenes das vermittelt werden soll.

Kapitel 2

Der Lehrplan und didaktische Überlegungen zum Thema Parkettierung

2.1 Der Lehrplan der AHS

Im Lehrplan der sechsten Schulstufe [21] sind unter *2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern* folgende Punkte vorgesehen:

- Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen,
- die Figuren skizzieren und konstruieren können,
- erkennen, ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können,
- kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können;
- Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen, und für Konstruktionen anwenden können;
- Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen,
- Volumen von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgaben.

Mit Ausnahme des letzten Punktes ist es möglich, den ganzen Block 2.3, Arbeiten mit Figuren und Körpern, im Kontext von Parkettierungen sinnvoll zu behandeln, zu vertiefen und zusätzlich künstlerisch umzusetzen. Voraussetzungen, welche die Schüler und Schülerinnen (ab jetzt S&S) nach dem Lehrplan von der ersten Klasse mitbringen, sind (siehe [21]):

- Umfangs- und Flächenberechnung an Rechtecken, sowie einfache Formeln dafür beherrschen

- Umgehen mit Zeichengeräten (insb. Zirkel, Geodreieck o. ä.)
- einfache symmetrische Figuren kennen und herstellen können
- erstellen einfacher Skizzen von z. B. Rechtecken

Falls diese Lehrplaninhalte in der sechsten Schulstufe noch nicht ausreichend erreicht wurden, können Defizite durch die Auseinandersetzung mit Parkettierungen, erstens ans Licht gebracht werden und zweitens ausgeglichen werden. Es darf dabei nicht unberücksichtigt bleiben, was bereits die Grundschule an Vorarbeit leistet.

Im Lehrplan der Grundschule (siehe [22]) ist bereits in der zweiten Klasse das Untersuchen von Flächen, das spielerische Gestalten mit Körpern und Flächen, sowie das Hantieren mit Zeichengeräten für den Unterricht verpflichtend. Später wird bei weiterführenden Untersuchungen von Flächen auf Symmetrien, parallele Seiten und rechte Winkel eingegangen. Besonders Quadrat und Rechteck werden genau behandelt, hier werden auch erste Umfänge berechnet. Darüber hinaus werden die S&S mit Größen und Maßeinheiten vertraut gemacht. Bei den didaktischen Grundsätzen zur Geometrie stehen das spielerische Gestalten und schöpferische Tun im Fokus.

Aufarbeitung des Geometrieteils in den Schulbüchern

Der Lehrplan gibt einen Rahmen vor, der von Schulbuchautoren und -innen im Allgemeinen sehr ähnlich interpretiert wird. Eine kurze Auflistung soll zeigen, welche Inhalte in den Schulbüchern üblicherweise ganz konkret behandelt werden. Bei der Auseinandersetzung mit Parkettierungen soll möglichst viel davon – in neuem Kontext – wiederholt werden. Für die Aufstellung wurden die Inhalte von fünf Schulbüchern verglichen. Diese sind: »Das ist Mathematik 2« von Reichel, Humenberger [38]; »MatheMaster« von Steiner [42]; »MatheBuch« von Dorfmayer, Mistelbacher, Nussbaumer [5]; »Mathematik 2« von Ottenschläger, Ratzinger, Kreindl, Wagenhuber [33]; sowie »Ganz klar: Mathematik 2« von Achleitner, Ratzenberger-Klampfer, Weiklinger [1].

Dreiecke

- Bezeichnung (Ecken, Seiten, Winkel)
- Einteilung (nach Winkeln und Seiten)
- Eigenschaften der Dreiecke
  - Winkelsumme der Innen- und Außenwinkel
  - Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck
  - Beziehungen zwischen den Seiten (Dreiecksungleichung)
  - Eigenschaften besonderer Dreiecke

- Rechtwinkelig Dreiecke & Satz von Thales
- Dreieckskonstruktionen & Kongruenzsätze (SSS, WSW, SSW)
- Ähnliche Dreiecke
- Umkreis und Inkreis des Dreiecks (Streckensymmetrale, Winkelsymmetrale)
- Schwerpunkt und Schwerelinien
- Höhenschnittpunkt und Höhengeraden
- Euler´sche Gerade
- Flächeninhalt rechtwinkeliger Dreiecke
- Winkelsymmetralen der Außenwinkel und Ankreise
- Flächeninhalt allgemeiner Dreiecke

Vierecke

Zu Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat, Deltoid, allgemeinen und gleichschenkeligen Trapez, sowie zu dem allgemeinen Viereck werden folgende Punkte durchgenommen:

- Beschriftung (Ecken, Seiten, Winkel, Diagonalen)
- Eigenschaften
- Konstruktion
- Flächeninhalt

Zusätzlich wird fast in jedem Lehrbuch eine Hierarchie der Vierecke angegeben, gerne wird dafür das »Haus der Vierecke« verwendet. Nicht-konvexe Vierecke und Sehnenvierecke werden am Rand erwähnt. Eigenschaften der Vierecke betreffen konkret:

- Lage und Länge der Seiten
- Lage und Länge der Diagonalen
- Winkelsumme und Supplementärwinkel
- In- und Umkreis
- Symmetrieachsen

Die Konstruktion von Vierecken ist ein Kernstück in jedem Lehrbuch. Hier werden auch erste Grundlagen für die Vektorrechnung geschaffen, indem Eckpunkte als Koordinaten im Koordinatensystem angegeben werden. Die nötige Mindestanzahl an Angaben, die für eine Konstruktion erforderlich ist, wird in den meisten Schulbüchern festgehalten. Flächenberechnungen erfolgen über Zerlegungen in rechtwinkelige Dreiecke.

Regelmäßige Vielecke

Die Behandlung der regelmäßigen Vielecke kommt in den Schulbüchern sehr kurz. Nach der Definition der regelmäßigen Vielecke werden folgende Punkte behandelt:

- Bezeichnungen (Ecken, Seiten, Winkel)
- Winkelsumme der Innenwinkel
- Anzahl der Diagonalen
- Symmetrieachsen
- Bestimmungsdreieck
- Konstruktion regelmäßiger Vielecke (meist nur regelmäßiges 6- und 8-Eck)
- Um- und Inkreis von regelmäßigen Vielecken

Flächenberechnungen von Vielecken werden kaum thematisiert.

2.2 Didaktische Überlegungen

Warum das Thema Parkettierungen? Neben den Überschneidungen der Inhalte mit denen des Lehrplans gibt es weitere gute Gründe dafür, das Thema im Mathematikunterricht durchzunehmen. Für die Beschäftigung mit dem Thema nennt Heinrich [15] folgende Gründe:

- Parkette gelten als klassisches, kulturelles und zentrales Element der Mathematik.
- Von (bestimmten) Parketten geht eine eigentümliche Faszination, die auch heranwachsende junge Menschen in ihren Bann zu ziehen vermag.
- Wesentliche Aspekte und grundlegende, fachspezifische Arbeitsweisen von Mathematik können durch Aktivitäten an, in und mit Parketten gut erfasst, verstanden und betrieben werden.
- Der Themenkreis bietet gute Gelegenheiten, Querverbindungen zu anderen mathematischen Sachbereichen und außermathematischen Sachverhalten herzustellen.
- Aktivitäten an, in und mit Parketten erlauben es, ein und denselben mathematischen Sachverhalt aus unterschiedlichen Perspektiven zu betrachten.
- Die Behandlung des Gegenstandes ist sowohl zur Anreicherung des mathematischen Fachwissens als auch für den Ausbau von Problemfinde- und Problemlösefähigkeiten geeignet.

- Bei der Behandlung von Parketten können grundlegende Wissens- und Könnenselemente aus verschiedenen Sachbereichen wiederholend aufgegriffen und somit gefestigt werden.

Besonders der letzte Punkt soll hervorgehoben werden. Das Thema ist ein Vertiefungsthema und keines mit dem grundlegende Begriffe, wie Dreieck, Winkel oder ähnliches, eingeführt werden sollen. Es eignet sich aber hervorragend um alle diese Grundlagen zu wiederholen. Diese Möglichkeit der Wiederholung soll bei der Planung des Unterrichts ein zentraler Grundgedanke sein.

Kreativer Aspekt

Neben den oben angeführten Gründen gibt es auch noch einen künstlerisch, kreative Aspekt der unbedingt genannt werden sollte. Den S&S soll die Möglichkeit gegeben werden durch die künstlerisch und kreative Auseinandersetzung ein positives Mathematikerlebnis machen zu können. Möglichkeiten wären: jeder und jede S&S soll ein eigenes, persönliches Parkett entwerfen. Dieses kann dann z. B. auf Geschenkpapier gedruckt werden. Anbieter für solche Services sind im Internet schnell gefunden (z. B. `lisee.webnode.at/druck/geschenkpapier/` oder `www.FotoGeschenke.de`). Eine andere Möglichkeit wäre mit der ganzen Klasse ein Parkett zu entwerfen, mit dem dann eine Wand im Klassenzimmer übermalt wird. In jedem Fall sollen S&S etwas schaffen, über das sie sich freuen können, auf das sie stolz sein können und das ihnen lange in Erinnerung bleibt. Wichtig ist, dass solche Vorhaben nicht in reinen Selbstzweck ausarten, sondern immer im Kontext des Mathematikunterrichts bleiben.

Herangehensweise an das Thema

Nach Hardfeldt [14] steht beim Parkettieren, das der Autor als »Spiel mit Flächen« versteht, »vor allem die Idee des Passens im Vordergrund, indirekt auch die des Messens. Bereits im Vorschulalter beschäftigen sich Kinder mit Lege- und Puzzlespielen. Dabei kommt es darauf an, ob Teile ineinander oder nebeneinander passen.« Diese Beschäftigung schafft gute Grundlagen für eine weiterführende Auseinandersetzung mit dem Thema. Kinder erlernen beispielsweise so schon sehr früh eine Vorstellung von kongruenten Figuren oder begreifen was eine »Lücke« ist. Jedoch ist eine weitere Auseinandersetzung mit Parkettierungen im weiteren Verlauf eigentlich nicht explizit vorgesehen. Parkettierungen führen quasi ein Schattendasein im Mathematikunterricht. Wie bereits zuvor im Lehrplan angeführt stellt die Behandlung von geometrischen Grundfiguren einen großen Teil des Mathematiklehrplans dar. Ihre Abhandlung erfolgt einzeln und nacheinander. Ein ganz großer Vorteil von Parkettierungen ist, dass geometrische Grundfiguren wie Dreieck und Viereck nicht nebeneinander, sondern miteinander in einem neuen, ansprechenden Kontext behandelt werden können.

Ganz ähnliche Ansichten finden sich bei Eichler [6]. Er führt seine Überlegungen jedoch noch genauer aus. Er schreibt: »Parkette können den Kindern Anlass, Anschau-

ung und Anwendungsfeld für sehr vielfältige mathematische Inhalte und Aktivitäten sein. Aus inhaltlicher Sicht betrifft das:

- Überlegungen zur Form der Parkettsteine, ihre Untersuchung und Klassifizierung.
- Überlegungen inwieweit bestimmte Figuren allein oder in Kombination mit anderen Figuren parkettieren.
- Überlegungen zum Messen von Längen, Flächen und Winkeln der mit Parkettsteinen auszulegenden Figur.
- Experimentell gewonnene Vorerfahrungen zu Summen von Winkeln wenn beispielsweise mit Dreiecken einer Sorte oder mit Vierecken einer Sorte parkettiert wird.
- Überlegungen zum Vergleichen und Messen bezogen auf den Parkettstein selbst, auf seine Seitenlänge, die Größe seiner Winkel und die Größe seiner Fläche.
- Überlegungen zu den geometrischen Abbildungen Spiegelung, Drehung, Verschiebung und Schubspieglung bei der Herstellung eines Parketts, also das Erkennen, Benennen und Darstellen dieser Abbildungen.
- Überlegungen zu den entsprechenden Symmetrieeigenschaften des Parketts.

Beim ersten Betrachten ist es zunächst oft die Periodizität des Parketts, welche die Kinder fasziniert. In der Regel werden zuerst die Translationssymmetrie, Achsensymmetrie und danach weitere Symmetrien des Parketts entdeckt. [...] Beim Parkettieren können die Seiten eines Parkettsteins als Maß für die auszulegende Länge, die Fläche des Parkettsteins als Maß für die auszulegende Fläche und die Winkel des Parkettsteins als Maß für den auszulegenden Winkel dienen.«

Zeichnen von Parketten – Legen von Parketten

Der große Vorteil beim Zeichnen von Parketten ist, dass es ohne großen Aufwand durchführbar ist. Alles was benötigt wird ist ein Stift, ein Blatt Papier und eventuell Lineal oder ähnliche Zeichenhilfen. Zeichnen eignet sich gut, um bereits gefundene Parkette festzuhalten. Beim Nachzeichnen können wichtige Aha-Erlebnisse gemacht werden. Um neue, eigene Parkett zu finden ist ein Legen mit Schablonen aber effektiver. Die Formen können immer wieder ganz einfach schnell gelegt werden, während »Fehler« auf dem Papier radiert oder anders kaschiert werden müssen. Außerdem kann durch das Legen von Schablonen das exakte Zusammenpassen von Seiten und Winkeln besser erlebt werden.

Eichler empfiehlt Schablonen von Parkettsteinen in der Schule in einer Gruppenarbeit selbst herzustellen [6]. Es ist tatsächlich eine gute Idee, denn neben der Konstruktion des Parkettsteins werden einfache handwerkliche Fähigkeiten gefördert. Das Erlebnis im Mathematikunterricht etwas Handfestes zu schaffen ist für S&S außerdem sicher einprägsam.

Unterrichtsentwürfe zum Thema Parkettierung finden sich am Ende der Arbeit. Zuvor ist es nötig Grundlagen aufzuarbeiten.

Kapitel 3

Grundlagen zu Parkettierungen

3.1 Definition einer Parkettierung

Zu Beginn ist es wichtig eine verbindliche Definition für eine Parkettierung festzulegen und grundlegende Begriffe zu klären. Die in dieser Arbeit verwendete Definition einer Parkettierung *(engl. tiling)* lautet:

Eine Parkettierung ist eine lückenlose, überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Polygone.

Diese Definition soll nun besprochen werden. Zunächst wird darauf hingewiesen, dass es einige äquivalente Bezeichnungen für »Parkettierung« gibt, die in dieser Arbeit auch verwendet werden. Diese sind: Parkett, Kachelung, Zerlegung, Überdeckung und Pflasterung. Seltener findet man noch die Bezeichnung »Flächenschluss«, die jedoch in dieser Arbeit von jetzt an nicht mehr verwendet wird, da sie eher ausdrucksschwach scheint.

Mit »Ebene« ist die euklidische Ebene gemeint. Damit ist sichergestellt, dass Begriffe wie Winkel oder Länge klar definiert sind. Das ist wichtig, da mit diesen Begriffen später gearbeitet wird.

Mit den beiden Wörtern »lückenlos« und »überlappungsfrei« soll das gemeint sein, was sich die Mehrheit unter diesen – ohnehin selbsterklärenden – Begriffen vorstellt. Auf eine genaue mathematische Formulierung wird hier verzichtet.

Von weitaus größerem Interesse ist der Begriff »Polygon«. Polygone sind die Bausteine der in dieser Arbeit behandelten Parkettierungen. Synonym werden die Bezeichnungen Steine, Pflastersteine, Bausteine und Kacheln verwendet. Selbstverständlich gibt es auch »krummlinige« Parkettierungen, also solche, deren Bausteine keine Polygone sind. Das Wort »Polygon« müsste für eine allgemeinere Definition von Parkettierung durch »topologische Scheibe« ersetzt werden. Das Ziel dieser Arbeit ist es jedoch das Thema Parkettierungen für den Mathematikunterricht der Unterstufe aufzuarbeiten und Unterrichtsvorschläge zu erstellen. Dafür reicht es Parkettierungen zu untersuchen, die aus Polygonen aufgebaut sind. Außerdem sei angemerkt, dass natürlich jede krummlinige, ebene Figur durch ein entsprechendes Polygon approximiert werden

kann. Aufgrund ihrer Wichtigkeit in dieser Arbeit ist den Polygonen ein eigenes Kapitel gewidmet.

Verwandte Definitionen

Verändert man obige Definition der Parkettierung und lässt die Bedingung »lückenlos« fallen, dann erhält man die Definition einer sogenannten Packung *(engl. packing)*. Diese Definition führt in ein interessantes Gebiet, in dem es sehr oft um Dichtestpackungen geht. Lässt man die andere Bedingung, das »überlappungsfrei«, fallen, führt das zur Definition der Überdeckung *(engl. covering)* ebenfalls ein eigenes Gebiet in der Mathematik. Auf keines der beiden Themen wird hier näher eingegangen. Die Bemerkung soll nur zeigen, dass diese Themen eng verwandt sind, weil sie sehr ähnlichen Definitionen entspringen.

3.2 Erste Beispiele – Parkettierungen in der Natur

In der Schöpfung kann man die Idee der Parkettierung erkennen, wenn man beispielsweise Trockenrisse in Tonböden (siehe linkes Bild in Abbildung 3.1), den Aufbau von Spinnennetzen, die Aderungen bestimmter Laubblätter (rechtes Bild in Abbildung 3.1), das Fell gewisser Säugetiere (z. B. Giraffe) oder den Panzer einer Schildkröte betrachtet. Sogar auf dem menschlichen Körper findet man die Idee realisiert, wenn man die sogenannte »Felderhaut« unter die Lupe nimmt (siehe Bild Mitte in Abbildung 3.1).

Abbildung 3.1: Drei Beispiele aus der Natur (aus [43], [4] und [7])

3.3 Elemente eines Parketts

Kacheln *(engl. tiles)*, Knoten *(engl. vertices)* und Kanten *(engl. edges)* bilden die Elemente in einem Parkett. Die Anzahl an Kanten, die an einem Knoten zusammenlaufen, bezeichnet man als Wertigkeit des Knotens. Die Wertigkeit ist für jeden Knoten ≥ 3. Treffen sich zwei Seiten in einem Punkt, dann bezeichnet man diesen als Ecke einer Kachel. Es ist zwar jeder Knoten auch Ecke, aber nicht umgekehrt. (Zu beachten ist, dass man durch diese Herangehensweise Polygone mit gestrecktem Winkel zulässt. Das ist zwar kein Problem, aber im Klaren sollte man sich darüber dennoch sein.) Die Bezeichnung »Elemente« unterstreicht die Wichtigkeit der Begriffe. Sie bilden die Grundlage für jede Untersuchung an Parketten. Zur Illustration ist in Abbildung 3.2 ein Ausschnitt einer völlig beliebigen Parkettierung dargestellt, in der die obigen Begriffe demonstriert werden.

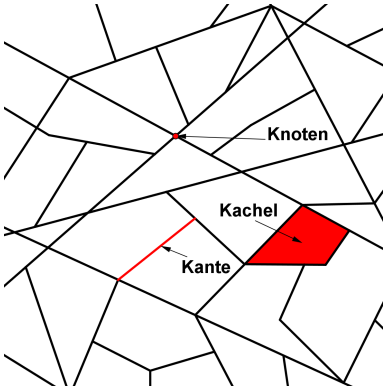


Abbildung 3.2: Ausschnitt einer ganz beliebigen Parkettierung

3.4 Terminologie

Rund um das Thema dieser Arbeit haben sich eine ganze Reihe von Begriffen entwickelt, die Untersuchungen bzw. Fragestellungen ermöglichen. Diese Begriffe beziehen sich auf die genannten Elemente eines Parketts.

Es sollen hier einige dieser Begriffe vorgestellt werden, die sich allesamt auf die verwendeten Kacheln beziehen. Konkreter geht es um die Anzahl verschiedener Kacheln und die Lage dieser Kacheln in einem Parkett. Es soll damit eine Richtung aufgezeigt werden, aus der man sich dem Thema nähern kann. Selbstverständlich findet man auch über die anderen beiden Elemente schöne Zugänge.

Nachbarn in einem Parkett

Ist die Schnittmenge zweier Kacheln nicht-leer, dann bezeichnet man die beiden Kacheln als Nachbarn *(engl. neighbors)*. Nachbarn haben mindestens einen gemeinsamen Punkt. Haben zwei Kacheln sogar eine gemeinsame Kante, nennt man sie angrenzend *(engl. adjacent)*. In der Abbildung 3.3 sind die Nachbarkacheln der

dunklen Kachel blau und angrenzende Nachbarn grün dargestellt. Die Betrachtung von Nachbarn ist ein sehr wichtiges Konzept bei der Untersuchung von Zerlegungen der Ebene. Sie ermöglicht einen wichtigen Ansatz zur Klassifizierung bestimmter Parkettierungen. Bei den später behandelten archimedischen Parkettierungen ist eine Forderung, dass jede Kachel die »gleichen« Nachbarn hat.

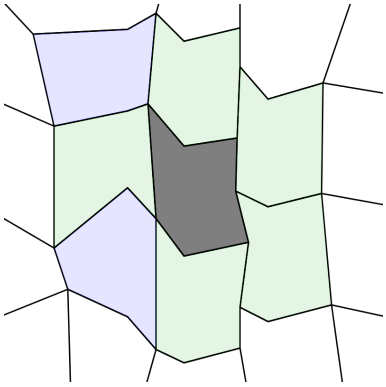


Abbildung 3.3: Nachbarn in einem Parkett

Monohedrale Parkettierungen

Wird in einer Parkettierung nur ein einziger Kacheltyp verwendet (d. h. alle Kacheln sind kongruent), so nennt man das Parkett monohedral. Ein besonders häufig anzutreffender Repräsentant ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

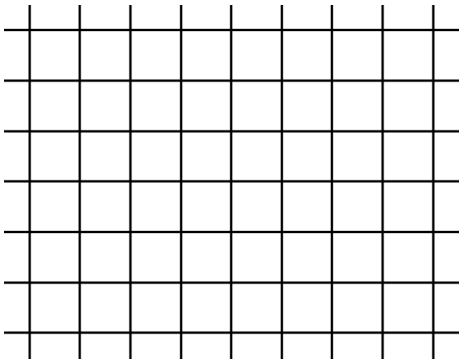


Abbildung 3.4: Ein Beispiel einer monohedralen Parkettierung

Die Eigenschaft eines Parketts monohedral zu sein, sagt noch nichts darüber aus, wie die Kacheln angeordnet sind. Diese können oft sowohl »regelmäßige« als auch »unregelmäßige« Parkettierungen ermöglichen. Auf zwei spezielle Anordnungsmöglichkeiten soll, ohne viele Worte, kurz hingewiesen werden.

Spiralförmige Parkettierungen

Spiralförmige Parkettierungen sind interessante Objekte. Mathematisch sind sie noch wenig beschrieben. Die Abbildung 3.5 (aus [13], S. 513) soll gleichermaßen als

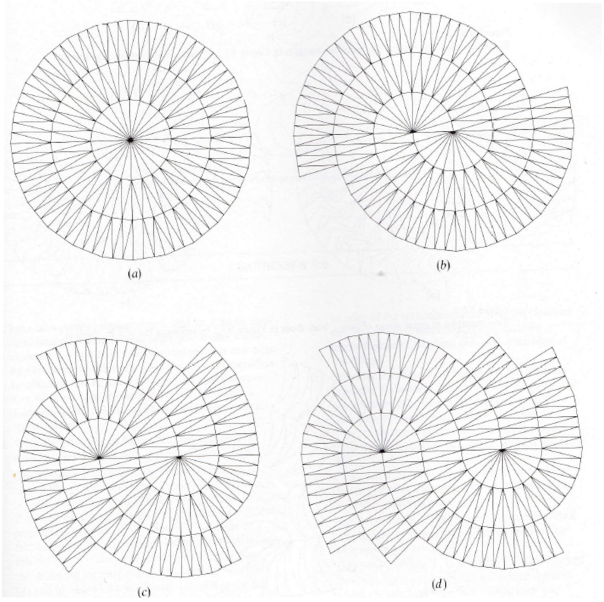


Abbildung 3.5: Konstruktion spiralförmiger Parkettierungen

Konstruktions- und Demonstrationsbeispiel dienen. Die Parkettierungen besteht aus ausschließlich gleichschenkeligen Dreiecken, sind also monohedral.

Parkettierungen mit selbstreplizierenden Kacheln

Besonders bemerkenswerte monohedrale Parkette sind jene, die aus selbstreplizierenden Kacheln *(engl. rep-tiles)* gebildet werden. Hierbei lassen sich mehrere gleichförmige Kacheln zu einer Figur zusammenlegen, die eine vergrößerte Version der ursprünglichen Kachel ergibt. Wiederholt man diese Prozedur immer wieder, gelangt man zu einer Überdeckung der Ebene. Inzwischen hat man viele solcher Kacheln gefunden. Genau genommen ist bereits die Parkettierung in Abbildung 3.4 ein triviales Beispiel hierfür. Als Paradebeispiel dient häufig die sogenannte »Sphinx«, dargestellt in Abbildung 3.6. Aus einer kleinsten Einheit lassen sich immer größere Kopien derselben erzeugen.

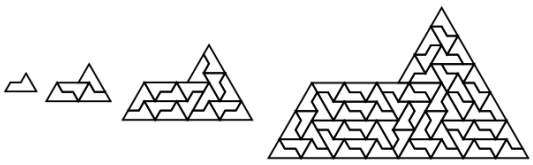


Abbildung 3.6: Die »Sphinx«

Isohedrale Parkettierungen

Kann man in einer monohedralen Parkettierung jede beliebige Kachel mit jeder anderen Kachel zur Deckung bringen, indem man das Parkett dreht, verschiebt oder spiegelt, so bezeichnet man die Parkettierung als isohedral, flächentransitiv, einfach

oder regulär. Ist dies nicht möglich, nennt man eine monohedrale Parkettierung nicht-isohedral, nicht-flächentransitiv, nicht-einfach oder nicht-regulär.

Es gibt nur endlich viele, nämlich genau 93, wesentlich verschiedene isohedrale Parkettierungen der Ebene. Hans-Günther Bigalke und Heinrich Wippermann haben ein ausgezeichnetes Buch mit Titel »Reguläre Parkettierungen« [3] genau zu diesem Thema verfasst.

Mit sehr vielen Parkettsteinen lassen sich sowohl reguläre als auch nicht-reguläre Parkettierungen erzeugen. Es ist aber bestimmt nicht uninteressant zu erfahren, dass es auch Parkettsteine gibt, die ausschließlich eine nicht-reguläre Parkettierung erlauben. Der deutsche Mathematiker Heinrich Heesch (1906 – 1995) konnte solche Parkettsteine als erster finden. Ihm zu ehren werden diese Parkette »Heesch-Parkette« genannt. Sie werden in der Literatur häufig zitiert. In Abbildung 3.7 ist ein Repräsentant einer Heesch-Parkettierung dargestellt.

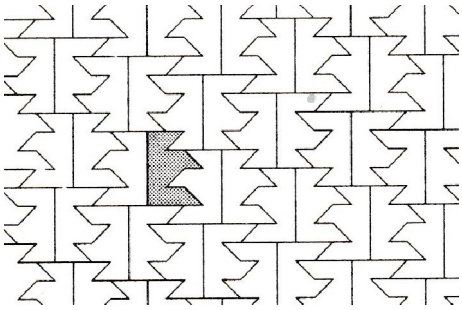


Abbildung 3.7: Ein von Heesch gefundenes Parkett (aus [3], S. 254)

k-hedrale Parkettierungen

Ein Parkett heißt k-hedral, wenn das Parkett aus k verschiedene Kacheln zusammengesetzt ist. In Abbildung 3.8 ist eine 2- bzw. 3-hedrale Parkettierung mit verschieden großen Quadraten dargestellt. Die dargestellte 2-hedrale Parkettierung kann als Beweisgrundlage für den Satz des Pythagoras verwendet werden.

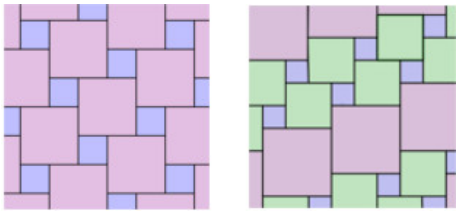


Abbildung 3.8: Repräsentanten 2- bzw. 3-hedraler Parkettierungen

Bei den später in dieser Arbeit behandelten sogenannten »archimedischen« Parkettierungen (siehe S. 39) handelt es sich um k-hedrale Parkettierungen.

k-morphe Kacheln

Oft ist es möglich mit einer Kachel die Ebene auf verschiedene Arten zu parkettieren. Erlaubt eine Kachel nur eine einzige Parkettierung, nennt man die Kachel monomorph, erlaubt sie die Ebene auf k-verschiedene Arten zu parkettieren, k-morph.

Viele Kacheln sind polymorph. Das bedeutet die Ebene kann auf beliebig viele verschiedene Arten gepflastert werden. Abbildung 3.9 zeigt eine mono-, eine di- und eine polymorphe Kachel, sowie deren Anordnungsmöglichkeiten. Das Quadrat ist polymorph, weil die Kacheln um einen beliebigen Betrag gegeneinander verschoben werden können.

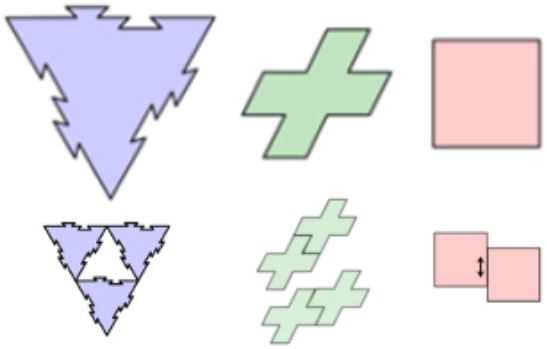


Abbildung 3.9: Beispiele einer mono-, di- und polymorphen Kachel und deren Anordnungsmöglichkeiten

Es ist möglich für ein vorgegebenes $k \in \mathbb{N}$ ein k-morphes Polygon zu konstruieren.

Eine besondere Anordnung – »edge-to-edge«

Die Forderung, dass in einer Parkettierung mit Polygonen eine Ecke eines Polygons niemals auf einer Seite eines Polygons zu liegen kommen darf, bezeichnet man im Englischen als »edge-to-edge«. Mit anderen Worten: Ecken dürfen nur auf Ecken treffen; Seiten nur auf Seiten. Stellt man diese »edge-to-edge« Bedingung an eine quadratförmige Kachel, so gibt es nur eine einzige Möglichkeit der Parkettierung, nämlich die aus Abbildung 3.4.

3.5 Normale Parkettierungen

Um sehr ausgefallene Zerlegungen der Ebene auszuschließen definieren Grünbaum und Shepard in ihrem Buch »tiling and patterns« eine sogenannte normale Parkettierung ([13], S. 121). Eine Parkettierung heißt normal, wenn sie folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. Jeder Baustein wird von einer einfachen, geschlossenen Kurve begrenzt.
2. Die Schnittmenge zweier beliebiger Bausteine ist entweder leer, ein Punkt oder eine durchgehendes Kurvenstück.

3. Jeder Baustein liegt gänzlich auf einer Kreisscheibe mit Radius U und enthält gleichzeitig eine Kreisscheibe mit Radius u; ist also begrenzt.

Die erste Bedingung verbietet beispielsweise überschlagende Polygone (siehe linkes Bild in Abbildung 3.10). Am besten erfüllt man diese Voraussetzung dadurch, dass man solche Kacheln erst gar nicht zulässt, indem die Definition des Polygons entsprechend formuliert wird. Bedingung Nummer zwei schließt alle Parkettierungen aus, bei denen die Schnittmenge zweier Kacheln aus zwei oder mehr Punkten oder zwei unzusammenhängenden Kurvenstücken besteht. Diese Bedingung hat mehr mit der Anordnung als mit der Form der Kachel selbst zu tun, wie man in den mittleren beiden Bildern in Abbildung 3.10 sehen kann. Die Anordnung links ist verboten, während die Anordnung rechts erlaubt ist. Die dritte Bedingung verhindert schlicht, dass die Kacheln zu groß oder zu klein werden (Bild rechts in Abbildung 3.10). Darüber hinaus liefert die letzte Bedingung eine Möglichkeit die Anzahl an Kacheln innerhalb einer gewissen Flächen nach oben und unten abzuschätzen, was für ein weiterführendes, vertiefendes Studium von enormer Bedeutung ist.

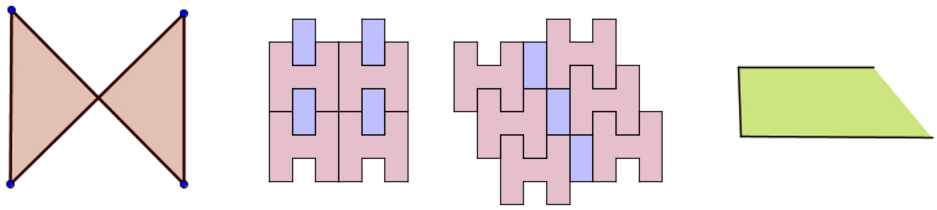


Abbildung 3.10: Zu den Eigenschaften normaler Parkettierungen

Da in dieser Arbeit ausschließlich normale Parkettierungen behandelt werden, wird die Bezeichnung normal weggelassen.

Kapitel 4

Polygone

Der Begriff Polygon wird den meisten Lesern und Leserinnen wohl sehr vertraut sein. Es zeigen sich aber bei genauerer Betrachtung gewisse Schwierigkeiten bzw. umfassen Definitionen eines Polygons oft mehr als man haben möchte. Im Kapitel »Grundlagen zu Parkettierungen« wurde darauf hingewiesen, dass überschlagende Polygone für Parkettierungen (wie sie in dieser Arbeit vorkommen) nicht geeignet sind. Im Folgenden wird genau erklärt, was ein Polygon ist und welche Anforderungen es für diese Arbeit zusätzlich erfüllen muss. Weiters erfolgt eine kurze, einfache Klassifizierung von Polygonen. Danach werden einige sehr grundlegende Eigenschaften regelmäßiger Polygone abgehandelt, die aber manchmal auch für allgemeine Polygone gelten. Regelmäßigen Polygone werden genauer untersucht, weil dies explizit auch im Lehrplan der AHS für die sechste Schulstufe gefordert wird. Zu dieser Untersuchung gehört speziell auch die Konstruktion dieser Vielecke.

4.1 Definition Polygon

Ein Polygon oder n-Eck (mit $n \geq 3$) ist ein geschlossener Streckenzug, der n verschiedene Punkte der Ebene durchläuft. Die einzelnen Streckenabschnitte bezeichnet man als Seiten, die Endpunkte der Streckenabschnitte als Ecken. Den geschlossenen Streckenzug bezeichnet man als Rand des Polygons. Die Länge des Randes heißt Umfang des Polygons (siehe auch [31]). Für die in dieser Arbeit verwendeten Polygone gilt weiter:

1. Jeweils drei aufeinanderfolgende Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
2. Eine Ecke darf nur zwei Seiten angehören.
3. Seiten dürfen nicht überschlagen (d. h. kreuzen).

Mit 1. werden Polygone mit gestreckten Winkeln ausgeschlossen, mit 2. werden solche konkaven Polygone ausgeschlossen, bei denen der Streckenzug derart eingeknickt ist, das eine Ecke auf einer Seite zu liegen kommt und durch die letzte Forderung werden alle überschlagenen Polygone ausgeschlossen.

Studiert man Polygone genauer, so kann man anhand der Größe der Winkel und der

Länge der Seiten die Gesamtheit aller möglichen Polygone in verschiedene Klassen unterteilen:

- Ist jeder Winkel kleiner 180°, so nennt man ein Polygon konvex.
- Ist mindestens ein Winkel größer 180°, so nennt man ein Polygon konkav.
- Sind alle Winkel gleich groß, nennt man ein Polygon gleichwinkelig.
- Sind alle Seiten gleich lang, nennt man ein Polygon gleichseitig.
- Sind alle Seiten gleich lang, nicht-überschlagend und sind alle Winkel gleich groß, dann nennt man ein Polygon regelmäßig konvex oder regulär.
- Liegen alle Ecken auf einem Kreis, so nennt man ein Polygon ein Sehnen- oder Sekantenpolygon.

Die folgende (bearbeitete) Abbildung 4.1 aus [18] gibt einen Überblick der Klassen der Polygone. Jedes regelmäßige konvexe Polygon ist auch Sekantenpolygon.

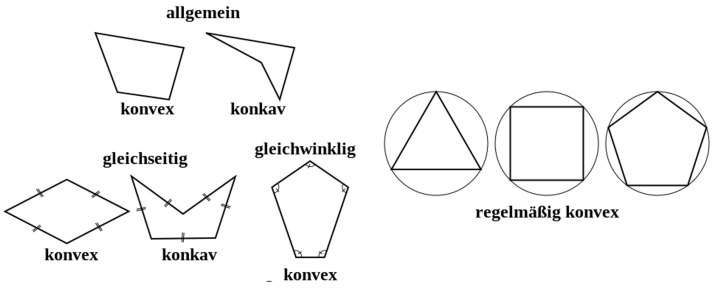


Abbildung 4.1: Unterteilung verschiedener Polygone

4.2 Eigenschaften regelmäßiger konvexer Polygone

Nach Definition ist ein Polygon regelmäßig konvex, wenn es konvex ist, alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind. Die Länge der Seiten bezeichnet man dann mit a; die Größe der Innenwinkel mit α.

Im weiteren werden solche Polygone schlicht »regelmäßig« bezeichnet, da konkave regelmäßige Polygone (das sind sogenannte Sternpolygone) ohnehin nicht behandelt werden. Es besteht also keine Verwechslungsgefahr. Anstelle von regelmäßigen Polygonen wird synonym der Begriff regelmäßiges n-Eck verwendet.

Im Folgenden werden nun einige sehr grundlegende Eigenschaften von regelmäßigen Polygonen abgehandelt:

Mittelpunkt

Regelmäßige Polygone besitzt einen Mittelpunkt M. Man erhält M als Schnittpunkt der Diagonalen, der Winkelsymmetralen bzw. der Streckensymmetralen des Polygons. Als Begründung dafür wird die Regelmäßigkeit des Polygons herangezogen.

Bestimmungsdreieck

Zeichnet man vom Mittelpunkt M aus alle Verbindungsstrecken zu den Eckpunkten, so zerfällt ein regelmäßiges n-Eck in genau n gleichschenkelige Dreiecke. Ein solches Dreieck bezeichnet man als Bestimmungsdreieck und ein n-Eck ist durch ein einziges solches Dreieck festgelegt. Es besteht quasi aus Kopien dieses Dreiecks. Die Größe des Spitzenwinkels eines Bestimmungsdreiecks beträgt $\frac{360}{n}°$, die Größe der Basiswinkel dementsprechend $(180 - \frac{360}{n}) : 2$.

Inkreis und Umkreis

Jedes regelmäßige Polygon hat einen Umkreis und eine dazu konzentrischen Inkreis mit Mittelpunkt M. Der Radius des Umkreises ist gleich der Schenkellänge des Bestimmungsdreiecks. Jener des Inkreises hat als Radius die Höhe der Basis des Bestimmungsdreiecks.

Anzahl der Diagonalen

Die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck ist $n \cdot \frac{(n-3)}{2}$.
Begründung: In einem regelmäßigen n-Eck kann man von jeder Ecke aus $n - 3$ Diagonalen ziehen. Zur betrachteten Ecke selbst und zu den beiden Nachbarecken führen ja keine Diagonalen. Insgesamt gibt es n verschiedene Ecken, mit je $n - 3$ Diagonalen. Da durch diese Abzählung jede Diagonale doppelt gezählt wird, muss man durch zwei dividieren, um die tatsächliche Anzahl zu erhalten.

Summe der Innenwinkel

Die Winkelsumme im regelmäßigen Polygon beträgt $180°\cdot(n - 2)$.
Begründung: Zeichnet man von einer beliebigen Ecke aus alle $n - 3$ Diagonalen, so zerfällt das Polygon in genau $n - 2$ Dreiecke, jedes mit 180° Innenwinkel. Veranschaulicht wird der Vorgang in Abbildung 4.2 anhand eines nicht-regelmäßigen Polygons. Die Aussage gilt nämlich allgemein für alle konvexen Polygone. Die Zerlegung eines Polygons durch Diagonalen in Dreiecke bezeichnet man auch als Triangulierung. Triangulierungen sind Ausgangspunkt für interessante weiterführende Untersuchungen an Polygonen.

Summe der Außenwinkel

Die Summe der Außenwinkel (das sind die Supplementärwinkel der Innenwinkel) in einem regelmäßigen Polygon beträgt immer 360°.
Begründung: Die Außenwinkel eines regelmäßigen Polygons sind alle gleich groß. In der Abbildung 4.3 sieht man, dass der Außenwinkel genauso groß ist wie der

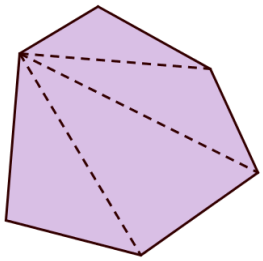


Abbildung 4.2: Triangulierung eines Polygons

Spitzenwinkel des Bestimmungsdreiecks. Der Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks beträgt $\frac{(180-\alpha)}{2}$. Der Außenwinkel errechnet sich so: $180 - 2 \cdot \frac{(180-\alpha)}{2} = \alpha$. Es gibt genauso viele Außenwinkel wie es kongruente Bestimmungsdreiecke gibt. Die Summe deren Spitzenwinkel ist aber genau 360°. Das gilt folglich auch für die Außenwinkel. Allgemeiner gilt, dass die Außenwinkelsumme in jedem beliebigen konvexen Polygon immer genau 360° beträgt.

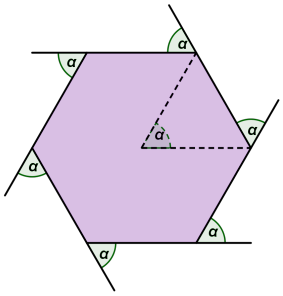


Abbildung 4.3: Außenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks

Ähnlichkeit

Haben zwei regelmäßige Polygone gleiche Eckenzahl, dann sind sie einander ähnlich. Das bedeutet, die Flächeninhalte und die Seitenlängen der Polygone verhalten sich proportional zueinander.

Symmetrie

Regelmäßige n-Ecke sind symmetrische Objekte. Fixiert man ein regelmäßiges n-Eck an seinem Mittelpunkt und dreht das Objekt um den Winkel $\frac{360}{n}$, so kommt es auf sich selbst zu liegen. Den Vorgang kann man beliebig oft wiederholen und es ist egal in welche Richtung man dreht. Man sagt, das n-Eck ist rotationssymmetrisch. Weiters sind n-Ecke auch spiegelsymmetrisch. Spiegelachsen gehen immer durch Seitenmittelpunkte bzw. Eckpunkte und dem Mittelpunkt des n-Ecks. Alle $2n$-Ecke sind darüber hinaus auch punktsymmetrisch bezüglich des M.

Berechnungen des Flächeninhalts von regelmäßigen Polygonen

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten den Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons bzw. eines allgemeinen Polygons zu berechnen. Das Prinzip der Zerlegungsgleichheit und das Prinzip der Ergänzungsgleichheit [31].

Das Prinzip der Zerlegungsgleichheit besagt: Zwei Flächen, die in gleich viele, paarweise kongruente Flächen zerfallen, sind inhaltsgleich.

Das Prinzip der Ergänzungsgleichheit besagt: Zwei Flächen, die durch Hinzufügen gleich vieler paarweise kongruenter Flächenstücke zu inhaltsgleichen Flächen ergänzt werden können, sind selbst inhaltsgleich.

Bei beiden Ansätzen versucht man das Unbekannte auf Bekanntes zurückzuführen. Für den Mathematikunterricht der sechsten Schulstufe der AHS bedeutet das immer, das Zerlegen in rechtwinkelige Dreiecke und/oder Rechtecke bzw. das Ergänzen auf Rechtecke mittels rechtwinkeliger Dreiecke und/oder Rechtecken.

Abbildung 4.4 aus [13], S. 95, zeigt eine bemerkenswerte Anwendung des Prinzips der Zerlegungsgleichheit. Die Abbildung demonstriert, dass ein regelmäßiges 12-Eck im Einheitskreis Flächeninhalt drei hat.

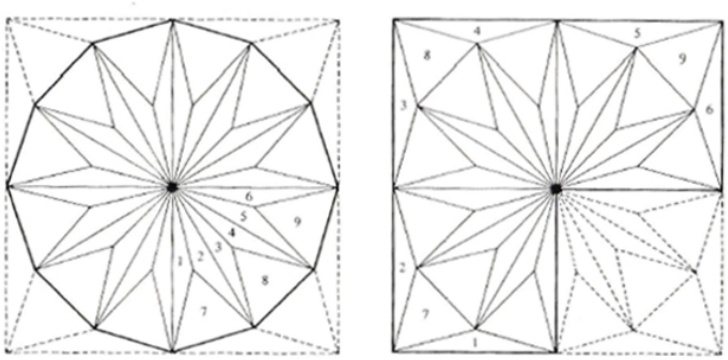


Abbildung 4.4: Zerlegung eines regelmäßigen Zwölfecks

Um den Flächeninhalt eines beliebigen regelmäßigen Polygons zu bestimmen zerlegt man es am besten in seine Bestimmungsdreiecke. Die Länge der Höhe h auf der Seite a lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Bezeichnet r die Länge des Schenkels, dann gilt: $h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ und der Flächeninhalt A des n-Ecks ist dann: $A = n \cdot \frac{(a \cdot h)}{2}$. Für die Behandlung in sechsten Schulstufe AHS ist zu beachten, dass der Lehrsatz des Pythagoras nicht vorausgesetzt werden kann.

4.3 Konstruktion regelmäßiger Polygone

Die n Bestimmungsdreiecke eines regelmäßigen n-Ecks haben ihre gemeinsame Spitze im Punkt M. Ein Bestimmungsdreieck hat einen Spitzenwinkel von $\frac{360}{n}°$. Die Frage

	Spitzenwinkel	Innenwinkel
3-Eck	120°	60°
4-Eck	90°	90°
5-Eck	72°	108°
6-Eck	60°	120°
7-Eck	ca. 71.5°	ca. 128.5°
8-Eck	45°	135°
9-Eck	40°	140°
10-Eck	36°	144°
11-Eck	ca. 32.7°	ca. 147.3°
12-Eck	30°	150°

Tabelle 4.1: Auflistung der Spitzen- und Innenwinkel der ersten zehn regelmäßigen Polygone

nach der Konstruierbarkeit eines regelmäßigen Polygons mit Zirkel und Lineal ist deshalb geometrisch gleichbedeutend mit der Teilung eines 360° Winkels in n gleich große Teile [31]. Die beiden Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks sind $\frac{1}{2} \cdot (180 - \frac{360}{n})$ groß und da zwei dieser Winkel einen Innenwinkel des Polygons bilden, beträgt dieser $180 - \frac{360}{n}$. Werte für die ersten zehn regelmäßigen Vielecke sind in Tabelle 4.1 festgehalten.

Dreiecks- und Viereckfolge

Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind die einfachsten regelmäßigen Vielecke. Ihre Konstruktion mittels Zirkel und Lineal ist sehr einfach. Konstruiert man, ausgehend von einem dieser beiden Polygone, die Streckensymmetralen der Seiten und schneidet diese mit dem Umkreis des Polygons, erhält man, zusammen mit den ursprünglichen Eckpunkten, die Eckpunkte eines regelmäßigen 6- bzw. 8-Ecks. Durch Iteration dieses Verfahrens gelingt es alle regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecke bzw. alle regelmäßigen $4 \cdot 2^n$-Ecke zu konstruieren. Diese beiden Folgen nennt man Dreiecks- bzw. Viereckfolge.

Konstruktion des regelmäßigen 5-, 10- und 15-Ecks

Konstruktion des regelmäßigen 10-Ecks

Es wird zunächst eine Anleitung (frei nach [28]) zur Konstruktion eines regelmäßigen 10-Ecks in vier Schritten angegeben (siehe Abbildung 4.5). Anschließend erfolgt eine Begründung zur Exaktheit der Konstruktion.

1. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt M. Er wird Umkreis des Zehnecks werden. Zeichne den Durchmesser $\overline{AB}$.

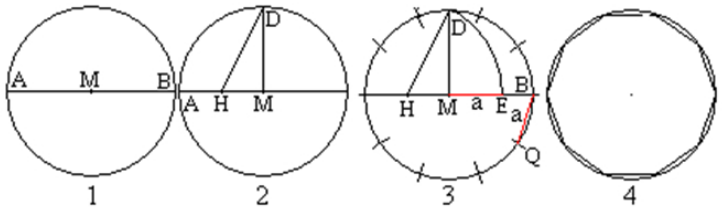


Abbildung 4.5: Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks in vier Schritten

2. Zeichne die senkrechte Gerade auf $\overline{AB}$ durch den Punkt M. Das führt zu Punkt D. Halbiere die Strecke $\overline{AM}$. Das führt zu Punkt H. Verbinde H und D.

3. Zeichne einen Kreisbogen mit Mittelpunkt H und dem Radius $\overline{HD}$ wie in der Abbildung 4.5 dargestellt. Er schneidet $\overline{MB}$ in E. Trage die Strecke $\overline{ME}$ von B aus auf dem Kreis ab. Das führt zu Punkt Q. Trage die Strecke $\overline{ME}$ noch neun Mal auf dem Kreis in gleicher Weise ab. Es ergeben sich die Eckpunkte des Zehnecks.

4. Verbinde alle nebeneinander liegende Eckpunkte durch Strecken. Das Ergebnis ist ein Zehneck.

Dass diese Konstruktion exakt ist, zeigt die nun folgende Überlegung. Die Konstruktionsanleitung beschreibt genau die bekannte, stetige Teilung der Strecke $\overline{AE}$ durch den Punkt M(siehe [45]). (Eine andere Bezeichnung für stetige Teilung ist der goldene Schnitt.) Außerdem wird $\overline{MB}$ (das ist der Radius des Zehnecks) vom Punkt E stetig geteilt. Bezeichnet man das Verhältnis des goldenen Schnitt mit ϕ, sieht man das so ein:
Wegen der Konstruktion ist: $\frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \phi$. Zu zeigen ist, dass auch $\frac{\overline{ME}}{\overline{EB}} = \phi$ gilt. Aus Abbildung 4.5 ist ersichtlich, dass $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{ME} + \overline{EB}$ der Fall ist. Daraus folgt:

$$\frac{\overline{ME} + \overline{EB}}{\overline{ME}} = \phi \Leftrightarrow 1 + \frac{\overline{EB}}{\overline{ME}} = \phi \Leftrightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{ME}} = \phi - 1 \overset{*}{\Leftrightarrow} \frac{\overline{EB}}{\overline{ME}} = \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{EB}} = \phi$$

*Für den goldenen Schnitt gilt $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ (siehe [45]).
Betrachtet man das regelmäßige Zehneck, so stellt man fest, dass es ein besonderes Bestimmungsdreieck hat. Es ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Die Seite s_{10} des regelmäßigen Zehnecks ist der größere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius r und deswegen ist die Konstruktion tatsächlich exakt. Dass es sich im Bestimmungsdreieck auch wirklich wie beschrieben verhält sieht man so ein: Der Basiswinkel mit 72° ist doppelt so groß wie der Spitzenwinkel mit 36°. Bildet man an einem der Basiswinkel die Winkelsymmetrale, so zerfällt das Bestimmungsdreieck ABM in zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC und ACM, wobei das Dreieck ABC dem ursprünglichen ähnlich ist. Für die ähnlichen Dreiecke ABC und ABM gilt somit:

$$\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BC} \quad bzw. \quad r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}).$$

Die Strecke $\overline{MB}$ wird durch den Punkt C also stetig geteilt. Formt man nach s_{10} um erhält man noch eine Formel für die Seitenlänge eines regelmäßigen 10-Ecks: $s_{10} = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$.

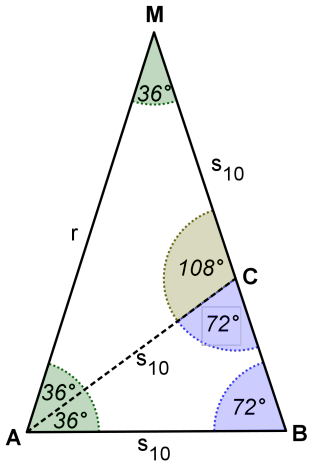


Abbildung 4.6: Das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Zehnecks

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

Aus einem regelmäßigen 10-Eck erhält man sofort ein regelmäßiges 5-Eck. Man muss lediglich Strecken zwischen jedem zweiten Eckpunkt des regelmäßigen 10-Ecks einzeichnen.

Konstruktion des regelmäßigen 15-Ecks

Das regelmäßige 15-Eck erhält man nicht ganz so unmittelbar. Der Spitzenwinkel des regelmäßigen 15-Ecks beträgt 24°. Die Zahl 24 kann man als die Differenz der Zahlen 60 und 36 auffassen. Diese Zahlen entsprechen aber genau den Größen der Spitzenwinkel der Bestimmungsdreiecke des regelmäßigen 6- bzw. 10-Ecks. Geometrisch bedeutet das, dass man beginnend mit einem regelmäßigen 6-Eck und dessen Umkreis, durch Abschlagen der Zehneckseite s_{10} (ausgehend von einem Eckpunkt des Sechsecks) die Seitenlänge s_{15} eines regelmäßigen 15-Ecks erhält (siehe Abbildung 4.7). Diese Länge wird einfach noch 14 Mal am Kreis abgeschlagen und die so erhaltenen Eckpunkte entsprechend durch Strecken verbunden. Das Ergebnis ist ein regelmäßiges 15-Eck. Die Abbildung 4.7 verdeutlicht den Vorgang.

Durch die drei erklärten Konstruktionsanleitungen erhält man ganz einfach eine Fünfer-, Zehner-, und Fünfzehnerfolge. Somit sind alle $5 \cdot 2^n$-, $10 \cdot 2^n$- und $15 \cdot 2^n$-Ecke konstruierbar ($n \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$).

Die Idee mit den Folgen zeigt, dass ein regelmäßiges n-Eck mit $n = q \cdot 2^k$ (q ungerade und $k \geq 1$) genau dann konstruierbar ist, wenn das regelmäßige q-Eck konstruiert werden kann. Man darf sich bei der Frage nach allen konstruierbaren, regelmäßigen Polygonen also auf jene mit ungerader Eckenzahl beschränken [31].

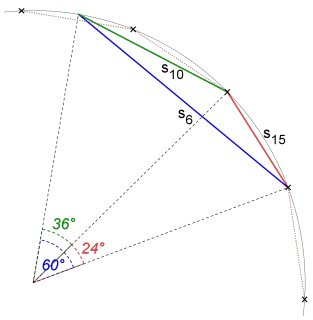


Abbildung 4.7: Konstruktion eines regelmäßigen 15-Ecks

Die Frage, ob den jedes regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Linear exakt konstruierbar ist, löste Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) bereits 1796 [10]. Er war damals noch keine 20 Jahre alt. Sein Ergebnis ist im nächsten Satz festgehalten. Ein Beweis des Satzes wird hier nicht geführt.

Der Satz von Gauß über die Konstruierbarkeit regelmäßiger Polygone

Ein regelmäßiges Vieleck mit ungerader Eckenzahl $\boldsymbol{n}$ *ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn alle Primfaktoren von* $\boldsymbol{n}$ *untereinander verschieden sind und die Form* $2^{2^k}+1$ *besitzen.*

Aus dem Satz folgt beispielsweise sofort, dass das regelmäßige 7-, 9- und 13-Eck mit Zirkel und Lineal nicht exakt konstruierbar sind. Es ist nicht bekannt, wie viele Primzahlen der Form $2^{2^k}+1$ es gibt. Für $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$ und $k=4$ erhält man jedenfalls die Primzahlen 3, 5, 17, 257 und 65537. In der Liste taucht die 17 auf. Speziell für dieses Polygon, also das regelmäßige 17-Eck, bewies Gauß nicht nur, dass es konstruierbar ist, sondern erbrachte auch noch die Anleitung zur Konstruktion desselben. Es gibt hierzu unzählige Beiträge im Internet und der Interessierte wird schnell fündig.

Eine Konstruktionsanleitung für das regelmäßige 257-Eck erbrachte Magnus Georg von Paucker (1787 – 1855) im Jahr 1822 [36] und sogar für das regelmäßige 65537-Eck konnte Johann Gustav Hermes (1846 – 1912) nach zehnjähriger Anstrengung (!) im Jahr 1894 eine 200 Seiten starke Konstruktionsvorschrift liefern [17].

Kapitel 5

Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen

»Tiling by regular polygons were the first kinds of tilings to be the subject of mathematical research.« ([13], S. 58)

Einer jener, der Pionierarbeit auf diesem Gebiet leistete war, Johannes Kepler (1571 – 1630). In seinem Werk »Harmonica mundi« aus dem Jahre 1619 beschäftigte er sich ausführlich mit Parkettierungen. Dabei ist die Auseinandersetzung mit diesem Thema keineswegs so trivial, wie es vielleicht scheint und viele Fragestellungen, die sich aus der Behandlung ergeben, sind nach wie vor völlig offen. Andererseits ist es so, dass die oft sehr einfachen Parkettierungen manchmal Lösungen komplexer Probleme darstellen (für Näheres siehe [13], S. 58).

Dieses Kapitel ist in dieser Arbeit von besonderem Interesse, da es den optimalen Anknüpfungspunkt an den Lehrplan der sechsten Schulstufe – in Bezug auf den Geometrieunterricht – darstellt. Tatsächlich ist es so, dass in gängigen Lehrbüchern dieses Thema immer wieder am Rand aufgegriffen wird. Beispiele hierfür wären das »Mathebuch 2« von Dorfmayr ([5], S. 232–239) oder auch »ganz klar Mathematik 2« ([1], S. 130).

Um Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen zu studieren, werden zunächst folgende einschränkenden Forderungen gestellt: Alle regelmäßigen Polygone haben gleiche Seitenlänge und liegen im Parkett »edge to edge«. Zur Wiederholung: Das bedeutet, dass niemals eine Ecke eines Polygons auf einer Seite eines anderen Polygons zu liegen kommt, sondern Ecken kommen immer auf Ecken und Seiten immer auf Seiten zu liegen.
Außerdem wird gefordert, dass sich die Knoten des Parketts nicht unterscheiden. Das heißt, an jedem Knoten stoßen immer dieselben Polygone, in gleicher Reihenfolge aufeinander. Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass an jedem Knoten im Parkett die Summe der zusammentreffenden Innenwinkel einen vollen Winkel ergeben muss. Diese Schlussfolgerung übersetzt man in eine Gleichung, deren Lösungen alle möglichen Anordnungen von regelmäßigen Polygonen mit Winkelsumme 360° darstellen. Diese Anordnungen sind, wie sich zeigen wird, zwar notwendige, aber nicht hinreichende

Voraussetzungen, um eine Parkettierung (nach den oben festgelegten Kriterien) zu ermöglichen. Im nächsten Abschnitt wird die besagte Gleichung formuliert und genauer untersucht.

5.1 Herleitung aller möglichen Knotentypen mit regelmäßigen Polygonen

Sei r die Anzahl der Polygone, die an einem beliebigen Knoten im Parkett zusammenstoßen und seien $n_1, \ldots, n_r$ regelmäßige, konvexe Polygone. Das Polygon n_i ist dabei ein n_i-Eck mit Innenwinkel $180 \cdot (\frac{n_i-2}{n_i})$ $\quad (n_i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq r)$.

Für jeden Knoten im Parkett gilt:

$$
\begin{aligned}
180 \cdot \left(\frac{n_1 - 2}{n_1}\right) + \ldots + 180 \cdot \left(\frac{n_r - 2}{n_r}\right) &= 360 \\
\left(\frac{n_1 - 2}{n_1}\right) + \ldots + \left(\frac{n_r - 2}{n_r}\right) &= 2 \\
\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n_r}\right) &= 2 \\
\frac{2}{n_1} + \ldots + \frac{2}{n_r} &= r - 2 \\
\frac{1}{n_1} + \ldots + \frac{1}{n_r} &= \frac{r}{2} - 1
\end{aligned}
$$

Die Gleichung unterliegt gewissen Einschränkungen. Da Innenwinkel regelmäßiger Polygone stets kleiner als 180° sind, treffen an jedem Knotenpunkt mindestens drei Polygone aufeinander (d. h. $r \geq 3$). Da das regelmäßige Dreieck mit 60° den kleinsten aller möglichen Innenwinkel hat, können höchstens sechs Polygone an einem Knotenpunkt zusammentreffen (d. h. $r \leq 6$). Insgesamt kann r also nur die Werte drei, vier, fünf und sechs annehmen.

Weiters können einander höchstens drei verschiedene Polygone an einem Knoten begegnen, denn schon die Winkelsumme von regelmäßigem 3-, 4-, 5- und 6-Eck ist größer als 360° (genau genommen beträgt sie $60 + 90 + 108 + 120 = 378$). Erst recht ist sie es für jede andere Kombination von vier verschiedenen, regelmäßigen Polygonen. Die nun infrage kommenden diophantischen Gleichungen lassen sich mittels Computer schnell lösen. Ohne technische Hilfsmittel ist es zwar möglich, durch Fallunterscheidungen und lange Tabellen alle möglichen Kombinationen systematisch aufzulisten und so zu den Lösungen zu kommen, es ist aber nicht empfehlenswert.

Die positiven, ganzzahligen Lösungen obiger Gleichung werden nun nach Anzahl der aufeinander treffenden Polygone aufgelistet. Jede gefundene Lösung wird auch grafisch veranschaulicht.

Fall I - Drei Polygone treffen an einem Knoten aufeinander

Gesucht sind alle positiven, ganzzahligen Lösungen der anfangs bestimmten Gleichung für $r = 3$:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Lösungen (aus [13], S. 61): *(3, 7, 42); (3, 8, 24); (3, 9, 18); (3, 10, 15); (3, 12, 12); (4, 5, 20); (4, 6, 12); (4, 8, 8); (5, 5, 10); (6, 6, 6)*

Veranschaulichung der Lösungen zu Fall I

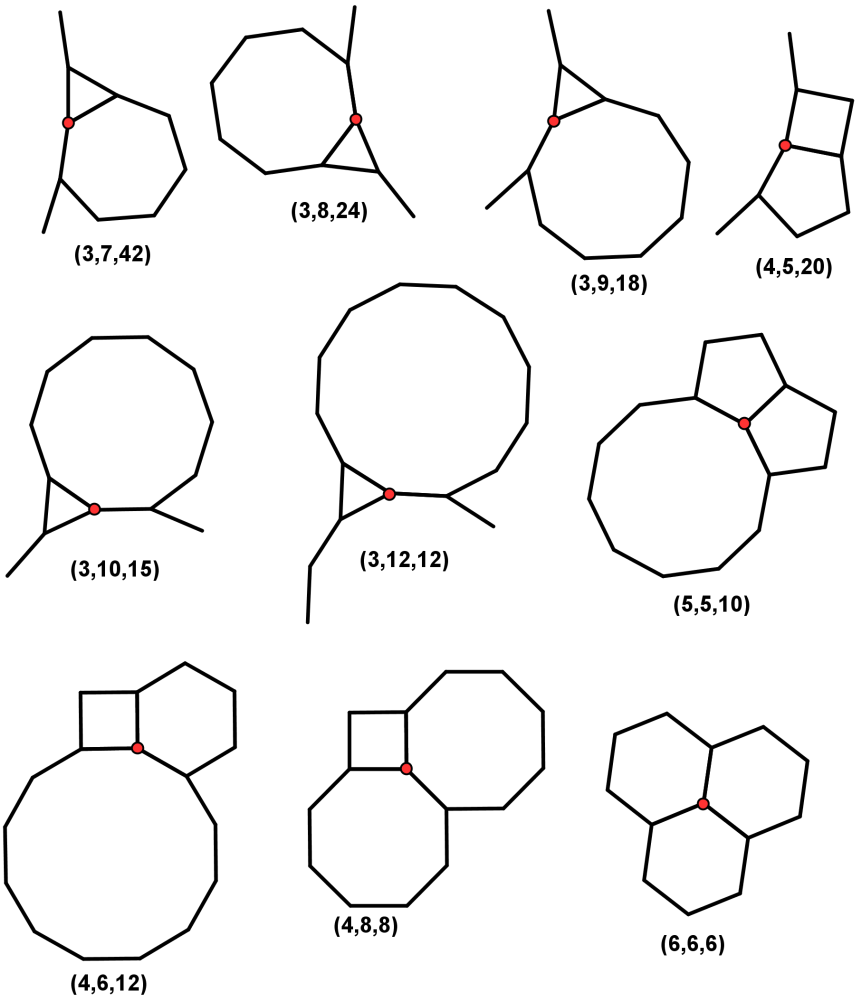


Abbildung 5.1: geometrische Lösungen zu Fall I

Fall II - Vier Polygone treffen an einem Knoten aufeinander

Gesucht sind alle positiven, ganzzahligen Lösungen der anfangs bestimmten Gleichung für $r = 4$:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

Lösungen (aus [13], S. 61): *(3, 3, 4, 12); (3, 3, 6, 6); (3, 4, 4, 6); (4, 4, 4, 4)*

Es ist zu beachten, dass die Lösungen *(3, 3, 4, 12)*, *(3, 3, 6, 6)* und *(3, 4, 4, 6)* durch nicht-zyklische Permutation der Einträge neue geometrische Lösungen des Problems liefern. Eine Reihenfolge spielt beim Lösen der Gleichung (aufgrund des Kommutativgesetzes) zwar keine Rolle, bei der Konstruktion jedoch sehr wohl. Auf diese Weise erhält man zusätzlich die Lösungen *(3, 4, 3, 12)*, *(3, 6, 3, 6)* und *(4, 3, 4, 6)*. Insgesamt gibt es also sieben Möglichkeiten vier regelmäßige Polygone zu einem vollen Winkel anzuordnen.

Veranschaulichung der Lösungen zu Fall II

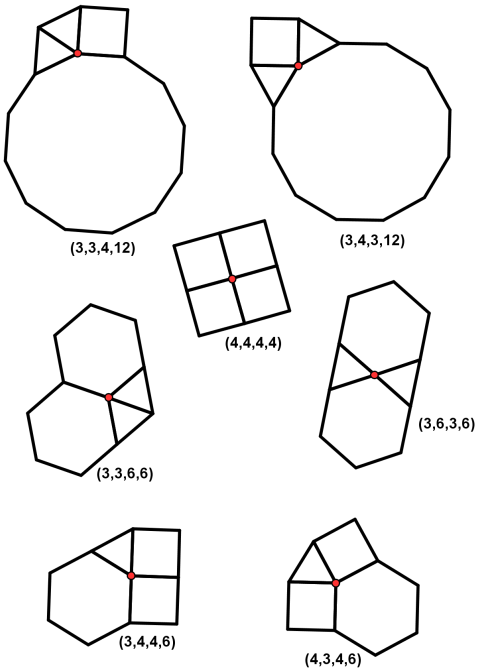


Abbildung 5.2: geometrische Lösungen zu Fall II

Fall III - Fünf Polygone treffen an einem Knoten aufeinander

Gesucht sind alle positiven, ganzzahligen Lösungen der anfangs bestimmten Gleichung für $r = 5$:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

Es gibt zwei Lösungen (aus [13], S. 61): *(3, 3, 3, 3, 6)* und *(3, 3, 3, 4, 4)*

Wie im Fall zuvor, erhält man durch Permutation der Einträge der Lösungstupel eine weitere (geometrische) Lösung, nämlich *(3, 3, 4, 3, 4)*. Für Fall III gibt es somit drei Lösungen.

Veranschaulichung der Lösungen zu Fall III

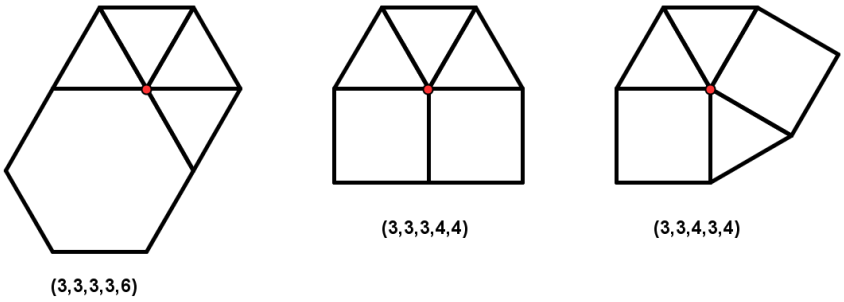


Abbildung 5.3: geometrische Lösungen zu Fall III

Fall IV - Sechs Polygone treffen an einem Knoten aufeinander

Gesucht sind alle positiven, ganzzahligen Lösungen der anfangs bestimmten Gleichung für $r = 6$:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

Einzige Lösung (aus [13], S. 61): *(3, 3, 3, 3, 3, 3)*

Veranschaulichung der Lösung zu Fall IV

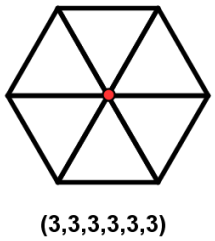


Abbildung 5.4: geometrische Lösung zu Fall IV

5.2 Homogene Parkettierungen

Es gibt zusammengefasst 17 positive, ganzzahlige Lösungen für das anfangs gestellte Problem. Durch Vertauschungen wurden, im geometrischen Sinne, weitere vier Lösungen gefunden; insgesamt also 21 Lösungen. Jedoch lässt sich nicht jede dieser Lösungen zu einem Parkett nach den anfangs festgelegten Kriterien fortsetzen. Tatsächlich ist es nur für elf Lösungen möglich. Diese bezeichnet man als *homogene* Parkettierungen. Dazu zählen die drei Parkette mit nur einer Sorte Polygone. Man bezeichnet sie oft als *platonische Parkette*. Die übrigen acht werden oft *archimedische Parkette* genannt. Es handelt sich sozusagen um die zweidimensionalen Analoga der platonischen bzw. archimedischen Körper.

Der Nachweis der eben gemachten Aussage ist nicht so einfach, wie man glauben könnte. Für jeden Fall muss gezeigt werden, das sich ausgehend von einem Knoten (die roten Punkte in den obigen Abbildungen), das Parkett fortsetzen lässt bzw. nicht fortsetzen lässt. Zur Erinnerung: Eine Forderung war, dass im Parkett jeder Knoten die gleiche Umgebung hat, also immer dieselben Polygone in derselben, zyklischen Reihenfolge aufeinandertreffen.

Eliminierung unbrauchbarer Lösungen

Die unbrauchbaren Lösungen kann man durch folgende Überlegung nach [46] eliminieren. Angenommen man hat z. B. die Lösung *(3, y, z)* für $r = 3$. An jedem Eckpunkt des Dreiecks müssen die gleichen Polygone aufeinander treffen. Das ist allerdings nur dann möglich, wenn $y{=}z$ ist (siehe Abbildung 5.5 links). Damit scheiden die vier Lösungen *(3, 7, 42); (3, 8, 24); (3, 9, 18); (3, 10, 15)* als Kandidaten für die Konstruktion eines archimedischen Parketts aus.

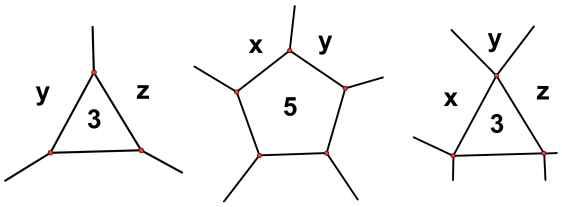


Abbildung 5.5: Schemata zur Eckenumgebung

Völlig analoge Überlegungen zeigen, dass auch nur Lösungen der Form *(5, x, x)* ein archimedisches Parkett erlauben (siehe Bild Mitte Abbildung 5.5). Damit fallen die gefundenen Lösungen *(4, 5, 20)* und *(5, 5, 10)* weg. Genauso verhält es sich schließlich auch mit den Lösungen *(3, 3, 4, 12)*; *(3, 4, 3, 12)*; *(3, 3, 6, 6)* und *(3, 4, 4, 6)* für $r = 4$. Nachvollziehen lässt sich das anhand des rechten Bildes in Abbildung 5.5.

Brauchbare Lösungen und Konstruktion der Parkette

Für die verbliebenen elf Lösungen müssen nun Konstruktionen angegeben werden, die zu einer Parkettierung führen. Dass dies tatsächlich nötig ist und nicht nur eine mathematische Spitzfindigkeit, zeigt die folgende (leicht veränderte) Abbildung 5.6 (aus [13], S. 64).

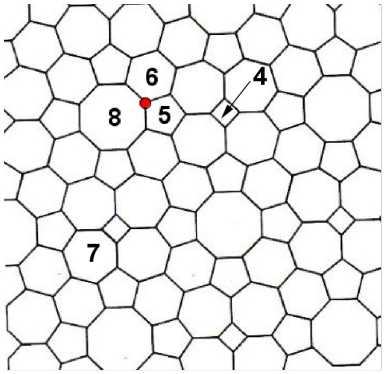


Abbildung 5.6: Parkettierung mit »regelmäßigen« Polygonen

Gezeigt ist eine Parkettierung mit vermeintlich regelmäßigen 4-, 5-, 6-, 7- und 8-Ecken. Die Parkettierung wirkt sehr regelmäßig, tatsächlich sind jedoch alle Polygone mit Ausnahme der Vierecke unregelmäßig. Man er kennt dies an den Knoten. Zum

Beispiel taucht im Bild der Knotentyp *(8, 6, 5)* auf. Die Winkelsumme würde bei drei solchen regelmäßigen Polygonen 363° betragen. Ein kleiner Fehler, der sich auf dem Papier gut verstecken lässt und das Auge täuscht. Ein Bild ist eben kein mathematischer Beweis.

Konstruktionsvorschriften werden in dieser Arbeit allerdings nicht angegeben. An dieser Stelle wird auf das Buch von Grünbaum und Shephard verwiesen ([13], ab S. 58). Das Ergebnis der bisherigen Untersuchung wird nichtsdestotrotz in Form von Abbildungen festgehalten, denn auch wenn ein Bild kein Beweis ist, so ist es dennoch schöner anzusehen als ein Zahlentupel. Zuvor erfolgt noch eine kleine Analyse der archimedischen Parkette, die man auf der Internetseite [32] findet:

- Es gibt nur ein archimedisches Parkett, das ein regelmäßiges Achteck enthält.
- Es gibt zwei archimedische Parkette, die nur aus regelmäßigen Dreiecken und Vierecken bestehen.
- Es gibt vier verschiedene archimedische Parkette, die regelmäßige Sechsecke enthalten.
- Es gibt zwei archimedische Parkette, die ein regelmäßiges 12-Eck enthalten.

Die acht archimedischen Parkettierungen

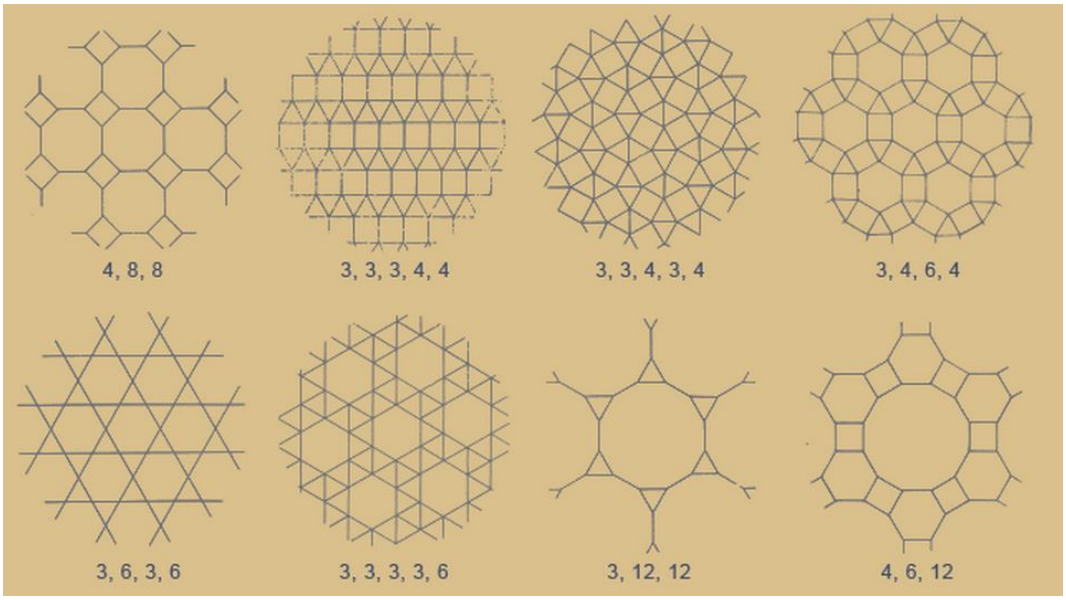


Abbildung 5.7: Die acht archimedischen Parkettierungen (aus [24])

Die drei platonischen Parkettierungen

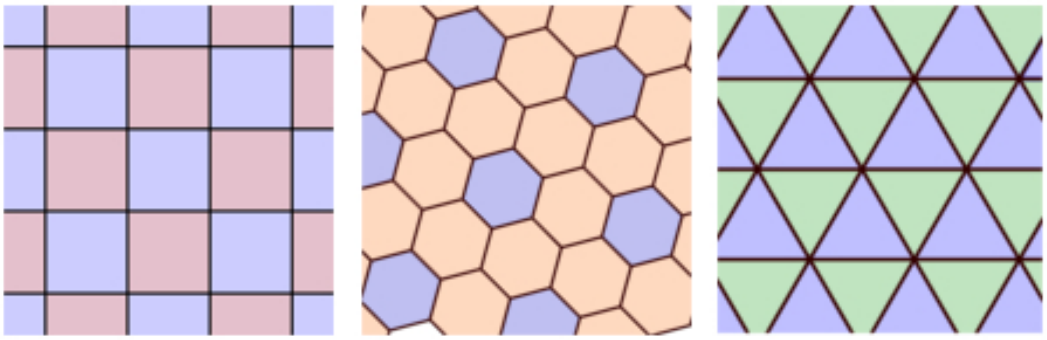


Abbildung 5.8: Die drei platonischen Parkettierungen

Inhomogene Parkettierungen – Ein ganz kurzer Ausblick

Bei den archimedischen bzw. platonischen Parkettierungen war eine Forderung, dass alle Knoten im Parkett dieselbe Umgebung haben. Lässt man diese Bedingung fallen, gibt es beliebig viele verschiedene Parkettierungen, wobei natürlich an jedem Knoten nur eine der elf aufgefundenen Kombinationen an Polygonen auftreten kann. Solche Parkettierungen bezeichnet man als inhomogene Parkettierungen. Es kann sehr reizvoll sein, sich hier kreativ zu betätigen. Auf der Homepage von Herrn Jürgen Koller [28] finden sich einige solcher Parkettierungen als Beispiel. Zwei davon sind in Abbildung 5.9 zu sehen.

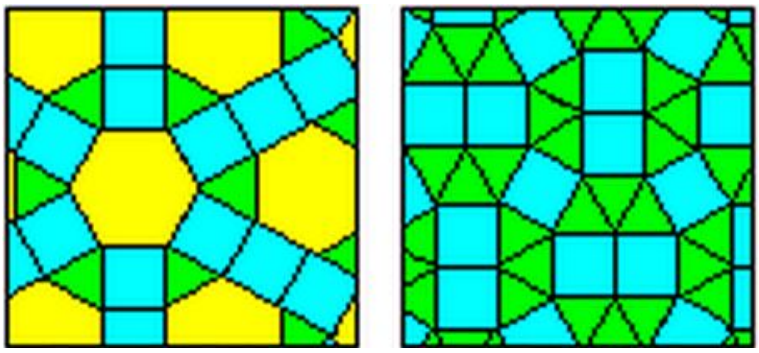


Abbildung 5.9: Zwei Beispiele inhomogener Parkettierungen

Kapitel 6

Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen

Nachdem nun eine kurze Abhandlung über Parkettierung mit regelmäßigen Polygonen erfolgte, werden nun einige Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen genauer betrachtet. Genau genommen werden mögliche monohedrale Parkettierungen mit allgemeinen Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecken vorgestellt. Die Klassifizierung für die genannten Polygone ist fortgeschritten, aber dennoch unvollständig. Für monohedrale Parkettierungen, die zusätzlich isohedral sind und noch eine weitere Bedingung erfüllen, gibt es eine Klassifizierung. Das Ergebnis ist sehr umfangreich. Es gibt in diesem Fall nämlich 107 Parkettierungen, die in [13] ab S. 474 genauestens dargestellt sind.

6.1 Parkettierungen mit Vierecken

Dass es möglich ist, die Ebene mit lauter Quadraten zu pflastern, ist allgemein bekannt. Es handelt sich dabei um eine der drei platonischen Parkettierungen. Dass auch Rechtecke, die keine Quadrate sind, die Ebene parkettieren, weiß jeder der einen Parkettfußboden hat. Hierbei gibt es (wie bei den Quadraten; siehe Abbildung 3.9) viele verschiedene Möglichkeiten der Umsetzung. Ein sehr häufiger Repräsentant ist das sogenannte Fischgrätmuster, dargestellt in Abbildung 6.1.

Abbildung 6.1: Das Fischgrätmuster: ein Parkett aus Rechtecken

Eine Frage, die sich stellt ist, ob es denn für jedes Viereck möglich ist die Ebene zu pflastern. Die Antwort lautet ja und soll nun begründet werden. Es wird ein geometrischer Beweis geliefert, der zeigt, dass es für jedes beliebige konvexe oder konkave Viereck möglich ist die Ebene zu parkettieren.

Begründung: An einem beliebigen (konvexen oder konkaven) Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (in der Abbildung farbig dargestellt) werden Punktspiegelungen des Vierecks (die man auch als 180° Drehungen interpretieren kann) an den Seitenmittelpunkten durchgeführt. Wiederholt man diesen Vorgang entsprechend gelangt man zu einer lückenlosen, überlappungsfreien Überdeckung der Ebene. Es werden hierbei nämlich immer entsprechende Ecken auf Ecken und entsprechende Seiten auf Seiten abgebildet. An jedem Knoten des entstehenden Parketts treffen genau vier Winkel aufeinander, die sich zu genau 360° ergänzen, weil es sich hierbei um die vier Winkel des ursprünglichen Vierecks (in dem die Winkelsumme bekanntlich 360° beträgt) handelt. In Abbildung 6.2 sind die Überlegungen nochmals grafisch festgehalten.

Die eben gebrachte geometrische Konstruktion funktioniert, wie erwähnt und darge-

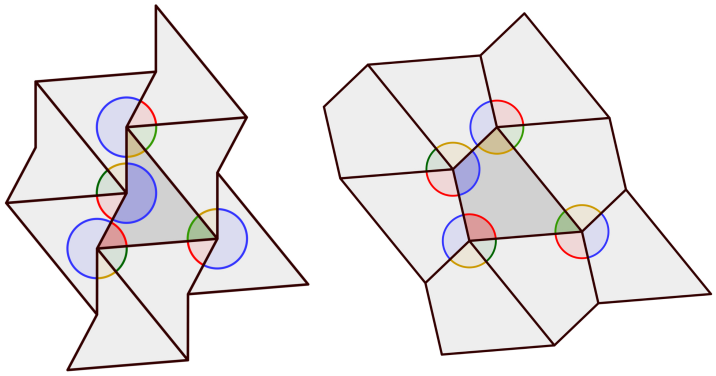


Abbildung 6.2: Jedes beliebige Viereck parkettiert die Ebene

stellt, für jedes Viereck, auch für konkave. Die Vierecke liegen in dieser Parkettierung immer edge-to-edge. Die so erzeugten Parkettierungen haben stets denselben Aufbau, der in Abbildung 6.3 intuitiv erfasst werden kann.

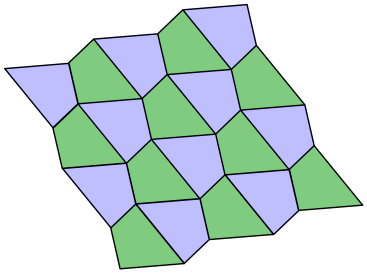


Abbildung 6.3: Regelmäßiger Aufbau einer Parkettierung

Es ist sehr interessant, dass es bestimmte Vierecke gibt, die Kachelungen mit noch

einem anderen Aufbau erlauben. In Abbildung 6.4 wird so ein Viereck präsentiert.

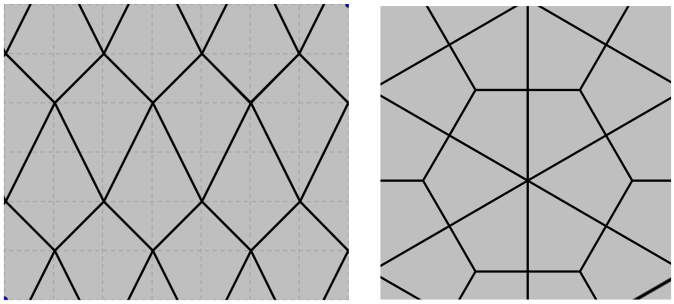


Abbildung 6.4: Parkettierungen mit einem speziellen Viereck

Parkettierungen mit Dreiecken

Nachdem nun geklärt ist, dass jedes beliebige Viereck parkettiert, ist es eigentlich kaum noch der Mühe Wert zu bemerken, dass natürlich auch jedes beliebige Dreieck das kann, insbesondere natürlich auch das gleichseitige Dreieck, wie ja bereits bei den platonischen Parkettierungen gezeigt wurde.

Was vielleicht an dieser Stelle erwähnenswert ist, ist, dass man ausgehend von einem nicht-rechtwinkeligen Dreieck mit drei verschieden langen Seiten sechs verschiedene Möglichkeiten hat, aus zwei solchen Dreiecken ein Viereck zu bilden, mit dem man dann parkettieren kann. Die Überlegung ist in Abbildung 6.5 veranschaulicht.

Aber auch ohne auf ein Viereck zu ergänzen sind monohedrale Parekttierungen mit

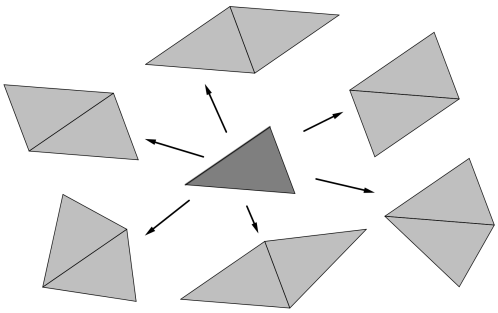


Abbildung 6.5: sechs verschiedene Möglichkeiten aus zwei gleichen Dreiecken ein Viereck zu bilden

allgemeinen Dreiecken möglich. Die im Kapitel »Grundlagen zu Parkettierungen« dargestellten, spiralförmigen Parkettierungen aus Abbildung 3.5 auf Seite 21 sind beispielsweise aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut. Ein anderes, schönes Beispiel ist in Abbildung 6.6 festgehalten.

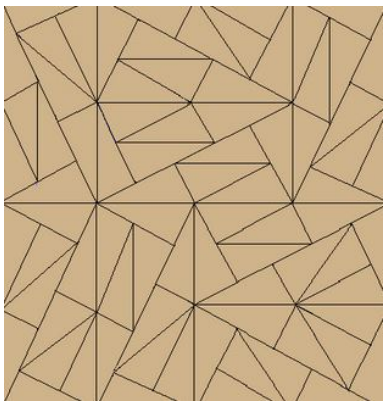


Abbildung 6.6: Parkettierung bestehend aus kongruenten Dreiecken (aus [35])

6.2 Parkettierungen mit Fünfecken

Regelmäßige Fünfecke gestatten keine monohedrale Parkettierung, wie bereits ausgeführt wurde. Das heißt natürlich noch lange nicht, dass es gar keine solchen Fünfecke gibt. Bis heute sind 14 Typen von konvexen Fünfecken gefunden worden, die eine nicht-isohedrale Überdeckung der Ebene erlauben [37]. Es ist nicht bekannt, ob diese Liste vollständig ist([13], S. 492). Über mögliche Typen nicht-konvexer Fünfecken ist wenig bekannt ([13], S. 495).

Die 14 konvexen Typen werden wie folgt beschrieben: In einem allgemeinen konvexen Fünfeck mit Innenwinkeln α, β, γ, δ und ϵ und den Seiten a, b, c, d und e (siehe Abbildung 6.7) müssen folgende Zusammenhänge gegeben sein, um eine Parkettierung zu gewährleisten (Typ 1–13 aus [13], S. 493 und 494; Typ 14 aus [40]):

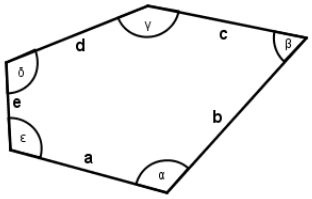


Abbildung 6.7: Allgemeines konvexes Fünfeck

Typ 1: $\delta + \epsilon = 180°$

Typ 2: $\gamma + \epsilon = 180°$, $a = d$

Typ 3: $\alpha = \gamma = \delta = 120°$, $a = b$, $d = c + e$

Typ 4: $\alpha = \gamma = 90°$, $a = b$, $c = d$

Typ 5: $\gamma = 2\alpha = 120°$, $a = b$, $c = d$

Typ 6: $\gamma + \epsilon = 180°$, $\alpha = 2\gamma$, $a = b = e$, $c = d$

Typ 7: $2\beta + \gamma = 360°$, $2\delta + \alpha = 360°$, $a = b = c = d$

Typ 8: $2\alpha + \beta = 360°$, $2\delta + \gamma = 360°$, $a = b = c = d$

Typ 9: $2\epsilon + \beta = 360°$, $2\delta + \gamma = 360°$, $a = b = c = d$

Typ 10: $\epsilon = 90°$, $\alpha + \delta = 180°$, $2\beta - \delta = 180°$, $2\gamma + \delta = 360°$, $a = e = b + d$

Typ 11: $\alpha = 90°$, $\gamma + \epsilon = 180°$, $2\beta + \gamma = 360°$, $d = e = 2a + c$

Typ 12: $\alpha = 90°$, $\gamma + \epsilon = 180°$, $2\beta + \gamma = 360°$, $2a = c + e = d$

Typ 13: $\alpha = \gamma = 90°$, $2\beta = 2\epsilon = 360 - \delta$, $c = d$, $2c = e$

Typ 14: $\delta = 90°$, $2\epsilon + \alpha = 360°$, $\gamma + \alpha = 180°$, $\beta + \delta + \epsilon = 360°$, $2e = 2c = a$

In Abbildung 6.8 aus [40] sind Vertreter aller Klassen repräsentiert. Die Typen sind in Leserichtung angeordnet.

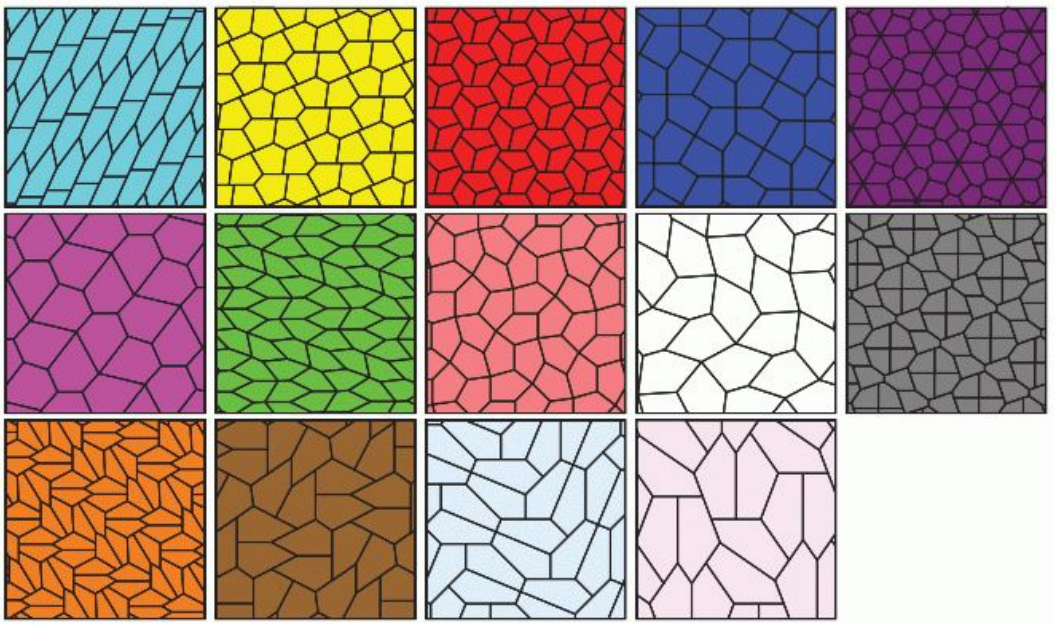


Abbildung 6.8: Repräsentanten aller 14 Typen parkettierender, konvexer Fünfecke

Die Ergebnisse gehen auf folgende Personen zurück:

Die Typen 1–5 wurden 1918 von Karl Reinhardt gefunden [39].

Die Typen 6–8 wurden 1968 von R. B. Kershner gefunden [27].

Typ 10 wurde 1975 von Richard James gefunden ([13], S. 495).

Die Typen 9, 11–13 wurden zwischen 1976-1977 von Marjorie Rice gefunden ([13], S. 495).

Typ 14 wurde 1985 von R. Stein gefunden ([40]).

6.3 Parkettierungen mit Sechsecken

Die Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken ist geradezu ein Paradebeispiel. Neben dem regelmäßigen Sechseck gibt es noch zwölf weitere Typen von konvexen Sechsecken die eine isohedrale Parkettierung zulassen und zusätzlich »proper« sind. (Der Begriff »proper« bedeutet, dass der Durchschnitt zweier Kacheln stets Seiten der Kacheln beinhaltet. Wenn man es nicht sehr genau nimmt, kann man auch »edge-to-edge« anstelle von »proper« sagen, obwohl es streng genommen nicht das gleiche ist. Für Näheres siehe [13], S. 472.)

Es sind drei Typen von konvexen Sechsecken bekannt, die eine monohedrale Parkettierung zulassen, die aber zusätzlich anisohedral ist, also keine isohedrale Parkettierung erlaubt. Diese drei Typen sind folgendermaßen festgelegt (aus [13] S. 493 und 494):

Typ 1: $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \epsilon + \zeta = 360°$, $a = d$

Typ 2: $\alpha + \beta + \delta = \gamma + \epsilon + \zeta = 360°$ $a = d$, $c = e$

Typ 3: $\alpha = \gamma = \epsilon = 120°$, $a = b$, $c = d$, $e = f$

Dabei beziehen sich alle Angaben auf ein allgemeines, konvexes Sechseck mit den Winkeln α, β, γ, δ, ϵ und ζ, sowie den Seiten a, b, c, d, e und f, wie in Abbildung 6.9 dargestellt. Ausschnitte der drei Typen anisohedraler Parkettierungen mit konvexen Sechsecken sind in Abbildung 6.10 auf Seite 49 festgehalten. Typ 1, Typ 2 und Typ 3 sind von oben nach unten dargestellt.

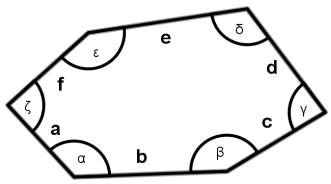


Abbildung 6.9: Allgemeines konvexes Sechseck

Von den anfangs erwähnten isohedral parkettierenden Sechsecken, sollen nur die punktsymmetrischen Sechsecke vorgestellt werden. Diese parkettieren allesamt die Ebene. Der Beweis hierzu steckt im Beweis, dass jedes Viereck die Ebene parkettiert (siehe 6.1).

Begründung: Ausgehend von einem beliebigen Viereck erhält man durch Punktspiegelung an einer der vier Mittelpunkte der Seiten und anschließender »Verschmelzung« ein punktsymmetrisches Sechseck. Dieses parkettiert, weil dessen Bestandteile parkettieren. Die auf diese Weise konstruierten Sechsecke können auch nicht-konvex sein. Weiters kann bei der Punktspiegelung ein Viereck anstelle eines Sechsecks entstehen. Das passiert genau dann, wenn sich die entsprechenden Winkel auf 180° ergänzen. Die Idee wird in Abbildung 6.11 grafisch dargestellt.

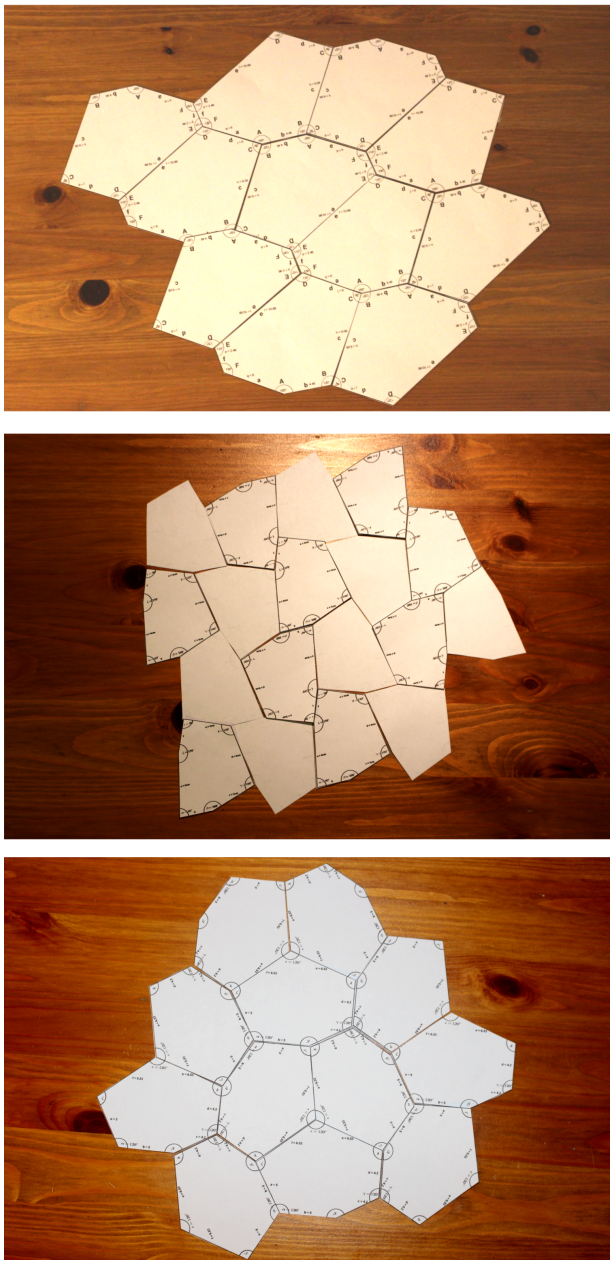


Abbildung 6.10: Drei Typen konvexer Sechsecke mit anisohedraler Parkettierung

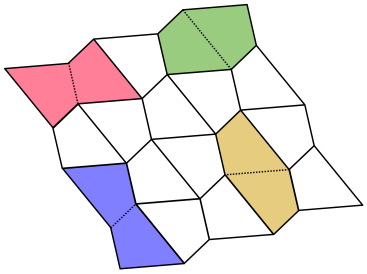


Abbildung 6.11: Konstruktion punktsymmetrischer Sechsecke aus Vierecken

6.4 Parkettierungen mit n-Ecken

Zuletzt soll noch geklärt werden, ob es denn für jedes n-Eck zumindest einen Vertreter gibt, der die Ebene parkettiert. Gibt es ein also ein 18-, ein 263- oder ein 1716-Eck, das die Ebene parkettiert? Die Antwort lautet ja. Ein weitere geometrische Überlegung nach [46] gibt eine anschauliche Erklärung und Anleitung hierfür solche Parkette zu finden.

Ausgehend von den beiden platonischen Parketten mit gleichseitigen Dreiecke bzw. Vierecken werden »Deformationen«, sowie in den Abbildungen sichtbar, durchgeführt. Es wird eine Seite »eingebuchtet«, während eine andere »ausgebuchtet« wird. Der ursprüngliche Flächeninhalt bleibt dabei gleich. Aus den Vierecken bzw. Dreiecken werden so nicht-regelmäßige, parkettierende 6-Ecke bzw. 5-Ecke. Durch Iteration des Verfahren erreicht man eine Folge von Polygonen mit allen ungeraden Eckenzahlen und eine mit allen geraden Eckenzahlen. In Abbildung 6.12 ist der erste Schritt der Überlegung dargestellt.

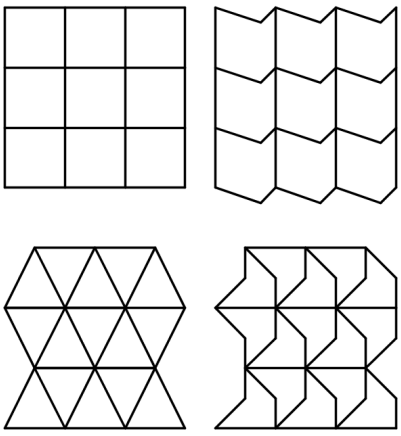


Abbildung 6.12: Darstellung der »Deformation«

Kapitel 7

Symmetrien von Parketten

Betrachtet man typisch anzutreffende Parkettierungen, wie etwa die beiden in den Abbildungen 7.1, so stellt man schnell fest, dass die offensichtliche Regelmäßigkeit der Objekte durch Symmetrien beschrieben werden kann. Der Begriff Symmetrie im geometrischen Sinne bedeutet, dass ein Objekt durch gewisse Vorgänge mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann.

Symmetrie ist eine wichtige Eigenschaft von Parkettierungen und soll in diesem Kapitel genau studiert werden. Was die Symmetrie so wichtig macht, ist die Tatsache, dass sie ein wichtiger Schlüssel zur Klassifizierung von Parkettierungen ist. Beispielsweise lassen sich die sogenannten periodischen Parkettierungen aufgrund ihrer Symmetrien in 17 verschiedene Klassen unterteilen. Das wird aber später genauer ausgeführt.

Die Vorgänge, die ein Objekt mit sich selbst zur Deckung bringen, nennt man Symmetrieoperationen. In der Ebene sind diese Symmetrieoperationen, die Drehung um einen Punkt, die Verschiebung des Objekts in eine bestimmte Richtung und die Spiegelung an einer Geraden.

Mathematisch gesehen sind diese Symmetrieoperationen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$. Man bezeichnet sie auch als Kongruenzabbildungen (lat. congruentia »Übereinstimmung«). Alle Kongruenzabbildungen haben zwei Dinge gemeinsam: Durch die Abbildung ändern sich der Abstand zwischen zwei Punkten nicht und auch die Größe eines

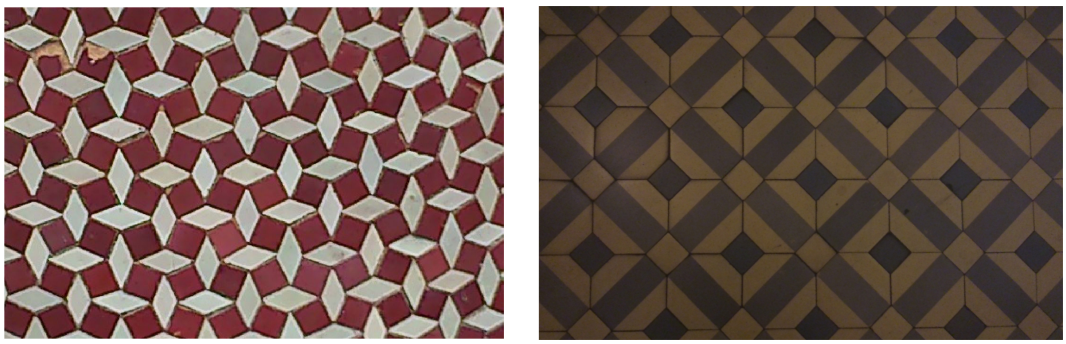


Abbildung 7.1: Zwei alltägliche Parkettierungen

Winkels bleibt unter solchen Abbildungen konstant. Etwas unscharf formuliert kann man sagen: Das Bild einer Kongruenzabbildung erscheint »unverzerrt«. Andernfalls ließe sich ein Objekt auch kaum zur Deckung mit sich selbst bringen. Die eben genannten Eigenschaften der Kongruenzabbildungen weisen diese aber als Isometrien des $\mathbb{R}^2$ aus. Jede Kongruenzabbildung ist also eine Isometrie. Um Symmetrien von Parkettierungen zu studieren, ist also eine Beschäftigung mit Isometrien des $\mathbb{R}^2$ nötig. Der nächste Teil der Arbeit steht ganz im Zeichen dieser Funktionen.

Die Isometrien des $\mathbb{R}^2$

Unter einer Isometrie des $\mathbb{R}^2$ versteht man, wie der Name schon andeutet, eine längentreue Abbildung. In diesem Unterkapitel wird ausgeführt, wie sich Isometrien mathematisch beschreiben lassen und wie man mit ihnen rechnet. Es wird sich weiter zeigen, dass Isometrien algebraische Gruppen bilden und das wird dann zu den Ebenengruppen periodischer Parkettierungen führen. Zunächst ist es aber nötig den Begriff der Isometrie mathematisch zu definieren.

Definition Isometrie des $\mathbb{R}^2$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt Isometrie, wenn gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Komposition von Isometrien

Die Komposition zweier Isometrien ist wieder eine Isometrie. Nichts anderes hätte man erwartet. Trotzdem soll es formal kurz festgehalten werden. Seien f und g zwei Isometrien des $\mathbb{R}^2$ und seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Es gilt:

$$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| = |g(x) - g(y)| = |x - y|$$

Also ist $(f \circ g)$ eine Isometrie.

Fixpunkt einer Isometrie

Gilt für eine Isometrie $h(p) = p$ so bezeichnet man p als Fixpunkt der Isometrie. Ist f eine Isometrie, so definiert $g(x) := f(x) - f(0)$ wieder eine Isometrie, weil $|g(x) - g(y)| = |(f(x) - f(0)) - (f(y) - f(0))| = |f(x) - f(0) - f(y) + f(0)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$. Weil $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ hat die Isometrie g Fixpunkt 0. Diese kleine Beobachtung hilft, weil sie erlaubt jede beliebige Isometrie in eine Isometrie mit Fixpunkt 0 zu überführen. Bei diesen handelt es sich aber um lineare Abbildungen, die man bequem als Matrizen darstellen kann, wie der nächste Abschnitt zeigt.

Isometrie mit Fixpunkt 0

Die Aussage, eine Isometrie mit Fixpunkt 0 ist eine lineare Abbildung, soll hier begründet werden. Dafür ist der Nachweis der Additivität und der Homogenität zu erbringen. Beides wird auch geometrisch argumentiert:

Seien x und y aus $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig und sei f eine Isometrie mit Fixpunkt 0. Die Punkte 0, x, y und $x + y$ bilden die Ecken eines Parallelogramms. Die Bilder dieser Ecken, also $f(0) = 0$, $f(x)$, $f(y)$ und $f(x + y)$, bilden ebenfalls ein Parallelogramm, das zum ersten kongruent ist (siehe linkes Bild in Abbildung 7.2). Von der Kongruenz der Parallelogramme überzeugt man sich so: Weil für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$ $|f(x) - f(0)| = |x - 0|$ also $|f(x)| = |x|$ gilt, liegen Punkte und deren Bilder immer auf konzentrischen Kreisen um den Ursprung 0. Die Längen der Seiten und Diagonalen stimmen überein, da die Abbildung längentreu ist. Für die Länge der Diagonalen gilt: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ bzw. $|f(x) + f(y)| = |x + y|$. Damit ändern sich die Größen der Winkel nicht und daher sind die Parallelogramme notwendigerweise kongruent. Es gilt daher $f(x) + f(y) = f(x + y)$. Damit ist die Additivität gezeigt.

Sei x aus $\mathbb{R}^2$ und λ eine reelle Zahl. Setze $y = \lambda x$. Die Punkte 0, x und y liegen auf eine Geraden durch den Ursprung. Die Bilder dieser Punkte, $f(0) = 0$, $f(x)$ und $f(y)$, liegen ebenfalls auf einer Geraden durch den Ursprung. Punkte und deren Bilder liegen wieder auf konzentrischen Kreisen um den Ursprung. Weil die Abbildung längentreu ist, stimmen die Abstände $|x-0| = |x|$ und $|f(x)-f(0)| = |f(x)-0| = |x|$ sowie $|\lambda x - x|$ und $|f(\lambda x) - f(x)| = |\lambda x - x|$ überein (siehe rechtes Bild in Abbildung 7.2). Das zwingt die Bildpunkte $f(0) = 0$, $f(x)$ und $f(\lambda x)$ auf eine Gerade durch den Ursprung. Dann muss aber $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ gelten (siehe rechtes Bild in Abbildung 7.2). Anders ausgedrückt: Mit $y = \lambda x$ gilt auch $f(y) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Damit ist die Homogenität begründet.

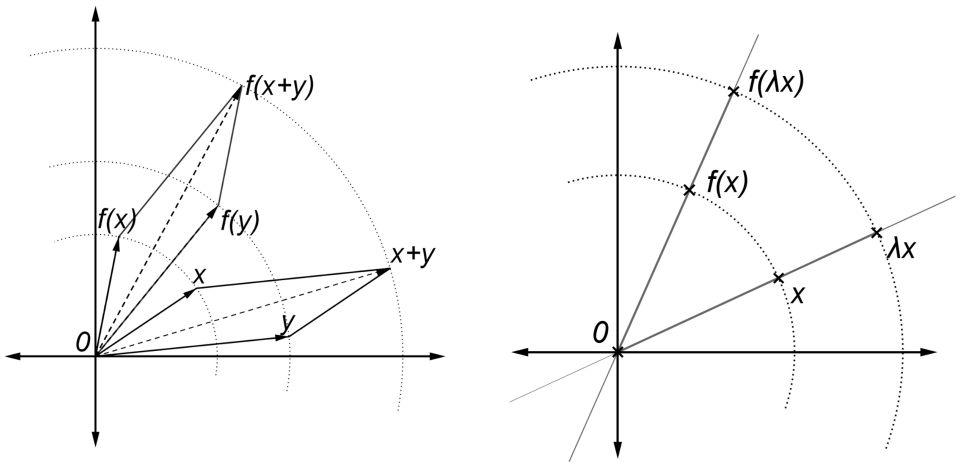


Abbildung 7.2: Grafische Veranschaulichung zur Begründung

Der nächste Abschnitt verrät, wie die Matrizen zu den eben beschriebenen linearen Abbildungen aussehen.

Matrizenform von Isometrien mit Fixpunkt 0

Soeben wurde begründet, warum Isometrien mit Fixpunkt 0 lineare Abbildungen sind. Die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildungen soll nun untersucht werden:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie mit 0 als Fixpunkt. Dann existiert ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, sodass die Matrix dieser linearen Abbildung entweder $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist.

Begründung: Sei $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ die Matrix der linearen Abbildung f und sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ beliebig. Weil f eine Isometrie ist gilt:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right|^2 &= \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\ \left| \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \right|^2 &= \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\ (ax_1 + cx_2)^2 + (bx_1 + dx_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Vergleich der Koeffizienten liefert:

$$\begin{aligned} &1.)\ a^2 + b^2 = 1 \\ &2.)\ c^2 + d^2 = 1 \\ 3.)\ &2ac + 2bd = 0 \Leftrightarrow ac + bd = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ haben wegen 1.) und 2.) offensichtlich Länge 1 und nach 3.) Skalarprodukt 0, sind also orthogonal. Wegen der Identität $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ gilt, dass $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dann muss aber $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$ sein, um die Orthogonalität zu erfüllen.

Man kann nun zeigen, dass die Matrix R_α eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel α um den Koordinatenursprung beschreibt. Die Matrix S_α hingegen liefert Spiegelungen an Ursprungsgeraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Für Genaueres siehe [20] ab S. 45.

Darstellung sämtlicher Isometrien des $\mathbb{R}^2$

Die Abbildungen R_α und S_α sind Isometrien mit Fixpunkt 0. Mit der zuvor gemachten Beobachtung, dass jede Isometrie in eine Isometrie mit Fixpunkt 0 überführt werden kann, zeigt man, dass jede Isometrie f eine der beiden folgenden Darstellungen hat: $f(x) = R_\alpha x + u$ oder $f(x) = S_\alpha x + u$.

Um alle Isometrien des $\mathbb{R}^2$ vollständig zu beschreiben definiert man für $u \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$:

$$R_{\alpha,u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \ mit \ \ R_{\alpha,u}(x) = R_\alpha \cdot x + u$$
$$S_{\alpha,u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \ mit \ \ S_{\alpha,u}(x) = S_\alpha \cdot x + u$$

Die Abbildung $R_{\alpha,u}$ dreht einen Punkt um den Winkel α um den Ursprung und verschiebt ihn anschließend um den Vektor u. Die Abbildung $S_{\alpha,u}$ ist eine Schubspiegelung. Für Genaueres siehe wieder [20] ab S. 45.

Berechnung der Komposition von Isometrien

Wie bereits oben gezeigt sind die Verknüpfungen von Isometrien selbst ebenfalls wieder Isometrien. Folgendes Beispiel soll exemplarisch zeigen, wie die Verknüpfungen von Isometrien im $\mathbb{R}^2$ konkret berechnet werden können.

Seien $R_{\alpha,u}(x) = R_\alpha \cdot x + u$ und $S_{\beta,v}(x) = S_\beta \cdot x + v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ zwei Isometrien des $\mathbb{R}^2$ mit Fixpunkt 0. Die Komposition von $R_{\alpha,u}$ mit $S_{\beta,v}$ soll berechnet werden.

$$\begin{aligned}
(R_{\alpha,u} \circ S_{\beta,v})(x) = R_{\alpha,u}((S_{\beta,v}(x)) = R_{\alpha,u}(S_\beta \cdot x + v) \overset{*}{=} R_{\alpha,u}(S_\beta x) + R_{\alpha,u}(v) = \\
\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \cdot x \right) + u + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot v + u = \\
\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot v + 2u = \\
\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{:=\gamma} & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \cdot x + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot v + 2u}_{:=w} = \\
\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \cdot x + w = \\
S_{\gamma,w} \cdot x
\end{aligned}$$

*Für diesen Schritt verwendet man, dass die Funktion $R_{\alpha,u}$ linear ist.

Falls γ größer 2π sein sollte subtrahiert man solange 2π bis $\gamma \in [0, 2\pi)$.

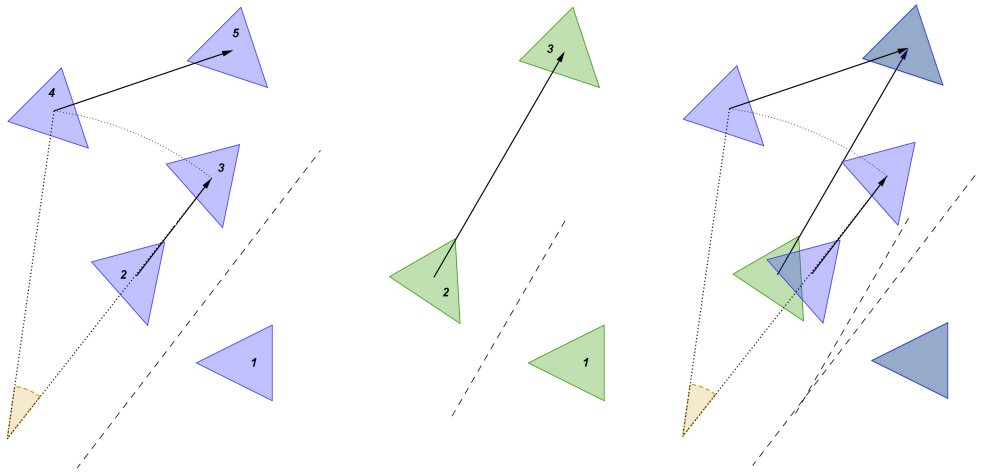


Abbildung 7.3: Veranschaulichung der Verknüpfungen

Veranschaulichung zur Komposition von Isometrien

Die Komposition einer Gleitspiegelung und einer Drehung mit Translation ergibt, wie gerade gezeigt wurde, wieder eine Gleitspiegelung. Die einzelnen Schritte, die während der Komposition geschehen, sind im linken Bild in Abbildung 7.3 festgehalten (blaue Dreiecke, 1-5). Diese Darstellung entspricht $R_{\alpha,u} \circ S_{\beta,v}$ angewendet auf ein Dreieck. Dieselbe Kongruenzabbildung des Dreiecks erhält man auch durch eine einzige Gleitspiegelung, dargestellt im mittleren Bild in Abbildung 7.3 (grüne Dreiecke, 1-3). Diese Veranschaulichung entspricht $S_{\gamma,w}$. Durch die Überlagerung der beiden Veranschaulichungen im Bild rechts in der Abbildung 7.3 wird gezeigt, dass die Bilder der Funktionen ident sind. Es ist zu beachten, dass die Spiegelachsen in den beiden Abbildungen nicht ident sind.

7.1 Kongruenzabbildungen bilden eine algebraische Gruppe

Die Kongruenzabbildungen mit der Komposition als Verknüpfung bilden eine algebraische Gruppe. Die Abgeschlossenheit ist ja bereits gezeigt. Das neutrale Element ist die natürlich die identische Abbildung, d. h. eine Isometrie mit $\alpha = 0$ und $u = 0$. Die Gültigkeit der Assoziativität und die Existenz inverser Elemente kann leicht nachvollzogen werden. Inverse Elemente sind jene, die eine Kongruenzabbildung wieder „rückgängig“ machen, d. h. wenn zuerst um α gedreht wurde bzw. um den Vektor u verschoben wurde, muss nun um α zurückgedreht bzw. um u zurückverschoben werden. Eine Spiegelung macht man dadurch „rückgängig“, indem man sie ein zweites Mal ausführt. Inverse Abbildungen gibt es also und man errät auch schnell wie sie aussehen. Dass die Reihenfolge, in der die Operationen ausgeführt werden

egal ist, sieht man auch leicht anhand des folgenden Abbildungsdiagramms ein (frei nach [11], S. 156). Dabei sind A, B und C Kongruenzabbildungen eines Objektes X. Mit X', X'' und X''' werden die entsprechenden Bilder der Abbildungen bezeichnet.

$$\overbrace{X \xrightarrow{A} X' \xrightarrow{B} X''}^{B\circ A} \xrightarrow{C} X''' \qquad\qquad X \xrightarrow{C\circ(B\circ A)} X'''$$

$$X \xrightarrow{A} \overbrace{X' \xrightarrow{B} X'' \xrightarrow{C} X'''}^{C\circ B} \qquad\qquad X \xrightarrow{(C\circ B)\circ A} X'''$$

Einen formalen Beweis, dass Kongruenzabbildungen eine algebraische Gruppe bilden findet man bei [11] auf S. 155–157.
Im nächsten Unterkapitel werden nun einige dieser algebraischen Gruppen genauer untersucht.

7.2 Die Ebenengruppen periodischer Parkettierungen

Als *periodische* Parkettierungen bezeichnet man solche Parkettierungen, die Translationen in zwei verschiedene Richtungen als Kongruenzabbildung besitzen. Die Translationsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also linear unabhängig. Sie erzeugen ein regelmäßiges Gitter im $\mathbb{R}^2$, dessen Gitterpunkte man als $\{na + mb | n, m \in \mathbb{Z}\}$ angeben kann.

Bei jeder Kongruenzabbildung muss dieses Gitter auf sich selbst abgebildet werden. Das verursacht allerdings Einschränkungen bei gewissen Kongruenzabbildungen, nämlich den Drehungen. Es gibt unter den genannten Voraussetzungen nämlich nur bestimmte n-zähligen Drehpunkte. Unter einem n-zähligen Drehpunkt versteht man einen festen Punkt, an dem man ein Objekt n-mal im Uhrzeigersinn um den gleichen Winkel drehen kann und das Objekt dabei immer mit sich selbst zu Deckung kommt. Die Größe des Winkels beträgt hierbei $\frac{360}{n}$.
Ein regelmäßiges 3-Eck hat beispielsweise einen 3-zähligen Drehpunkt; ein regelmäßiges 5-Eck einen 5-zähligen Drehpunkt. Drehpunkt ist dabei jeweils der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons. Ein Rechteck, das kein Quadrat ist, hat nur einen zweizähligen Drehpunkt (nämlich den Schnittpunkt seiner Diagonalen), um ein letztes Beispiel zu geben.

Man kann zeigen, das periodische Parkettierungen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte haben können. Für eine Begründung siehe [23]. Man bezeichnet das häufig als kristallografische Einschränkungen. Kristallografisch deswegen, weil diese Einschränkungen nicht nur theoretischer Natur sind, sondern tatsächlich einen Teil der Geometrie der uns umgebenden Welt bestimmen, nämlich den der Kristalle. Nicht-periodische Parkettierungen können hingegen beispielsweise auch 5-zählige oder auch 7-zählige Drehachsen haben.
Ein erwähnenswerter Punkt hierzu: Ein 6-zähliger Drehpunkt ist immer auch ein

3-zähliger und ein 4-zähliger Drehpunkt gleichzeitig auch ein 2-zähliger. Die Umkehrungen gelten nicht. Man sieht das leicht, anhand von regelmäßigen Vielecken bzw. einfachen geometrischen Formen, ein.

Da es auch nur endlich viele nicht-parallele Spiegelachsen gibt, die ein regelmäßiges Gitter auf sich selbst abzubilden, kann man schließen, dass es nur endlich viele Kongruenzabbildungen eines regelmäßigen Gitters (uns somit auch eines periodischen Parketts) gibt. Die Menge aller Kongruenzabbildungen, die das Parkett auf sich abbilden, bilden eine Gruppe [44]. Man bezeichnet die Gruppe der Kongruenzabbildungen eines periodischen Parketts als Ebenengruppe.

Verschiedene Parkette haben verschiedene Ebenengruppen und eine berechtigte Frage ist, wie viele verschiedene Ebenengruppen es gibt. Die Antwort auf die Frage lieferte ein russischer Kristallograph mit Namen Jewgraf S. Fedorow (1853 – 1919) um 1890 [8]. Er bewies, dass es genau 17 verschiedene Ebenengruppen gibt, die Anzahl also endlich ist. Repräsentanten für jede dieser Ebenengruppen sind schon seit Jahrhunderten bekannt, und wurden oft auch nebeneinander künstlerisch verarbeitet. Paradebeispiel hierfür ist die Alhambra in Spanien. Es ist daher erstaunlich, dass die Entdeckung Fjodorows nicht bereits viel früher erfolgte.

Herleitung der 17 Ebenengruppen

Unterteilt man die Menge aller möglichen regelmäßigen Gitter nach der Form ihrer Gitterzellen, so kann man sich auf nur fünf verschiedene regelmäßige Gitter beschränken. Die Beschränkung ergibt sich dadurch, dass es in einer periodischen Parkettierung nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte geben kann ([3], S. 260). In der Abbildung 7.4 aus [3], S. 261 ist für jedes der Gitter ein Repräsentant dargestellt. Eingezeichnet sind auch die sogenannten Gitterzellen. Das sind Vierecke, die von den beiden Translationsvektoren aufgespannt werden. Die fünf Gitter werden folgendermaßen beschrieben mit (nach ([3], S. 261):

- allgemeines Gitter: Die Gitterzelle stellt ein Parallelogramm dar, das zu keinem der anderen Fälle gehört. Man kann 2-zählige Drehpunkte finden.
- rechteckiges Gitter: Die Gitterzelle ist ein Rechteck (kein Quadrat). Man kann 2-zählige Drehpunkte finden.
- quadratisches Gitter: Die Gitterzelle ist ein Quadrat. Man kann 4-zählige Drehpunkte finden.
- rhombisches Gitter: Die Gitterzelle ist ein Rhombus, der keinen Innenwinkel der Größe 60° oder 90° enthält. Man kann 2-zählige Drehpunkte finden.
- hexagonales Gitter: Die Gitterzelle ist ein Rhombus mit einem Innenwinkel der Größe 60°. Man kann 6-zählige Drehpunkte finden.

Diese Gitter bilden die Grundlage zu einer Herleitung aller Ebenengruppen periodischer Parkettierungen. Überprüft man systematisch die Verträglichkeit der

Gitterzellen mit den möglichen Kongruenzabbildungen findet man, dass es genau 17 Ebenengruppen gibt. Eine ausführliche Herleitung für alle 17 Gruppen findet man bei [3] ab S. 262.

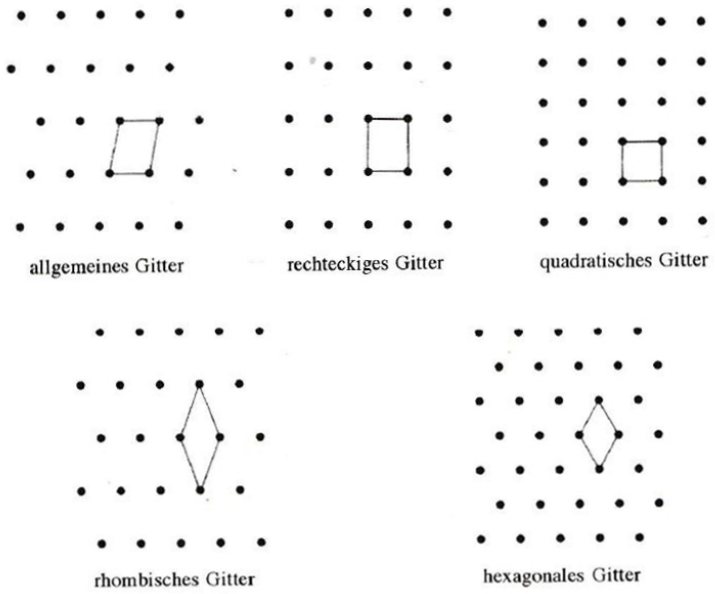


Abbildung 7.4: Die fünf regelmäßigen Gitter zur Herleitung der 17 Ebenengruppen

Die Bezeichnung der 17 Ebenengruppen periodischer Parkettierungen erfolgt international nach der Nomenklatur von Herman und Mauguin, die in den International Tables for Crystallography [29] festgelegt ist. Die Tabelle 7.1 auf Seite 60 listet die Namen der 17 Gruppen und die Form ihrer Gitterzellen auf. Sie nennt weiter die Anzahl der verschiedenen Klassen von Drehzentren bzw. die der verschiedenen Scharen von Spiegel- und Gleitspiegelachsen. Jede Gruppe hat per Definition auch Translationen in zwei verschiedene Richtungen. Diese werden nicht extra in der Tabelle angeführt. Eine genauere, weiterführende Untersuchung der Ebenengruppen, deren Symmetrien und Zusammenhängen zwischen den Gruppen, findet sich bei [30].

Jede Gruppe soll nun noch durch ein Parkett auf dem die Gruppe operiert repräsentiert werden. Um es übersichtlicher zu gestalten, werden die 17 Gruppen noch anhand der Zähligkeit ihrer Drehpunkte unterteilt:

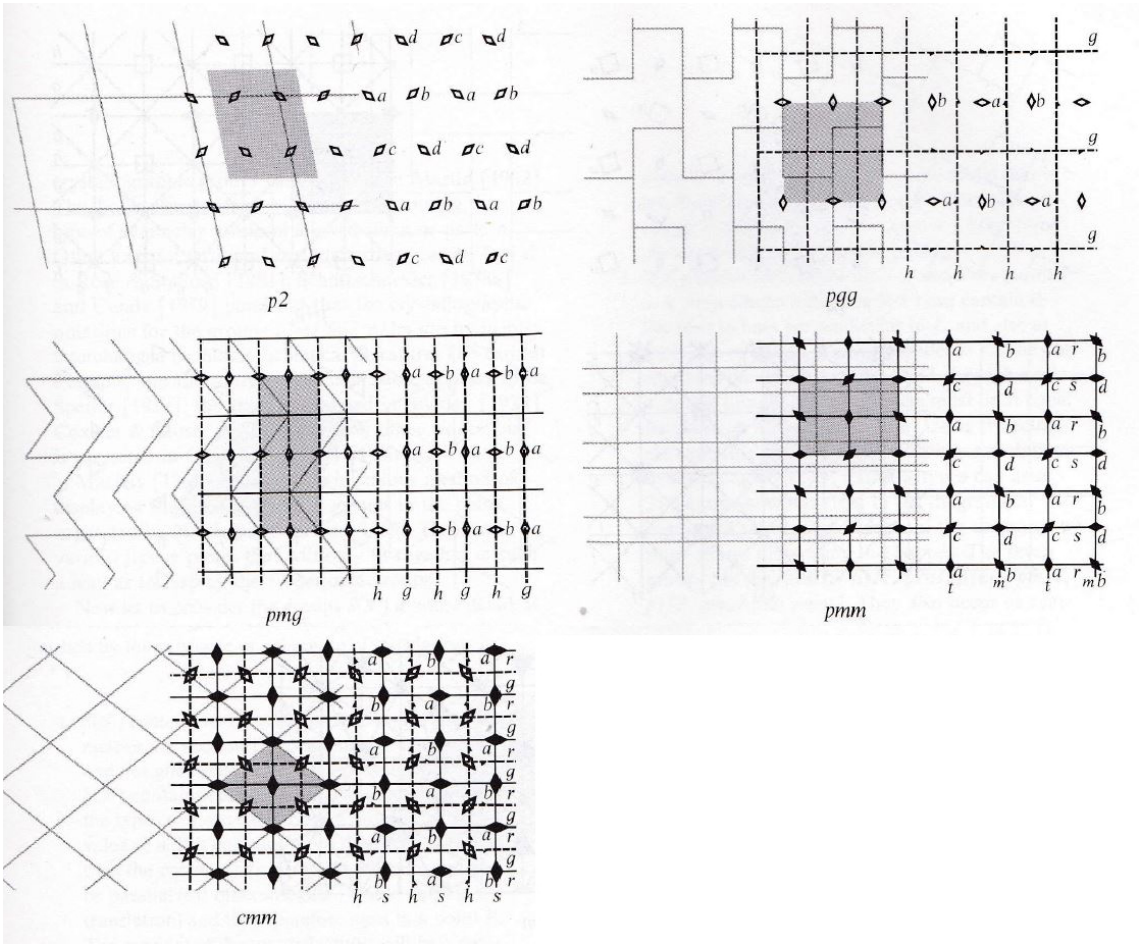
- Gruppen mit höchstens zweizähligen Drehzentren ($\alpha = 180°$): *p2, pmm, pgg, pmg, cmm*
- Gruppen mit höchstens dreizähligen Drehzentren ($\alpha = 120°$): *p3, p3m1, p31m*
- Gruppen mit vierzähligen Drehzentren ($\alpha = 90°$): *p4, p4m, p4g*
- Gruppen mit sechszähligen Drehzentren ($\alpha = 60°$): *p6, p6m*
- Gruppen ohne Drehungen: *p1, pm, pg, cm*

Die Abbildungen stammen sämtlich aus [13], S. 40–42. Zu sehen ist das Parkett in hellgrau, eine Gitterzelle in dunkelgrau und Symbole für Symmetrien. Dabei stehen Linsen, Dreiecke, Vierecke und Sechsecke für Drehpunkte. Sind die Symbole ausgefüllt, dann liegen sie auf einer Spiegelachse. Spiegelachsen sind durchgezogene Linien; Gleitspiegelachsen werden durch unterbrochene Linien dargestellt.

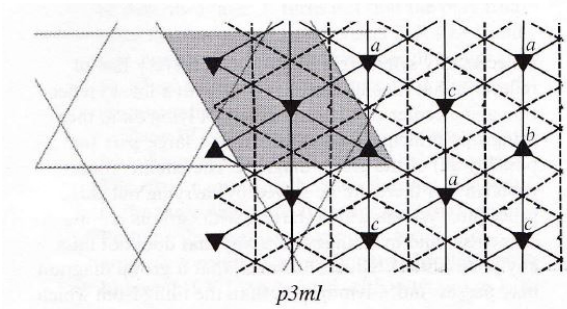
#	Gruppe	Form der Gitterzelle	Drehpunkte				Achsen	
			2	3	4	6	Spiegel	Gleit
1	p1	allgemein	0	0	0	0	0	0
2	p2	allgemein	4	0	0	0	0	0
3	pm	rechteckig	0	0	0	0	2	0
4	pg	rechteckig	0	0	0	0	0	2
5	cm	rhombisch	0	0	0	0	1	1
6	pmm	rechteckig	4	0	0	0	4	0
7	pmg	rechteckig	2	0	0	0	1	2
8	pgg	rechteckig	2	0	0	0	0	2
9	cmm	rhombisch	3	0	0	0	2	2
10	p4	quadratisch	1	0	2	0	0	0
11	p4m	quadratisch	1	0	2	0	3	1
12	p4g	quadratisch	1	0	1	0	1	2
13	p3	hexagonal	0	3	0	0	0	0
14	p3m1	hexagonal	0	3	0	0	1	1
15	p31m	hexagonal	0	2	0	0	1	1
16	p6	hexagonal	1	1	0	1	0	0
17	p6m	hexagonal	1	1	0	1	1	1

Tabelle 7.1: Auflistung der 17 Ebenengruppen mit deren Symmetrien

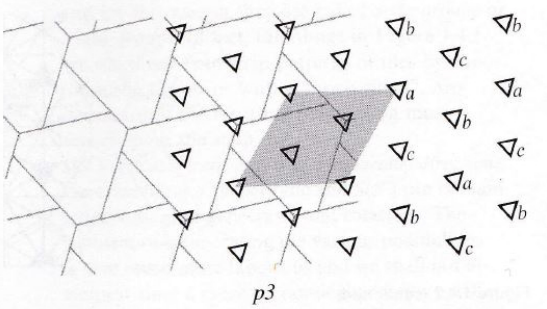
Repräsentanten aller Ebenengruppen mit höchstens zweizähligen Drehzentren



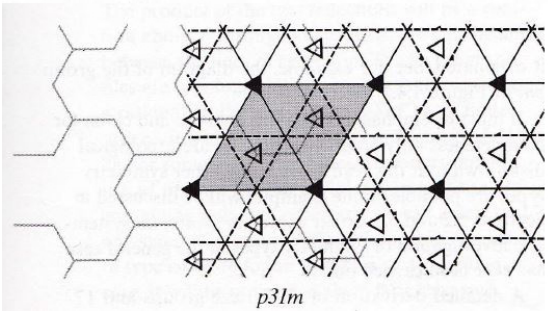
Repräsentanten aller Ebenengruppen mit höchstens dreizähligen Drehzentren



p3m1

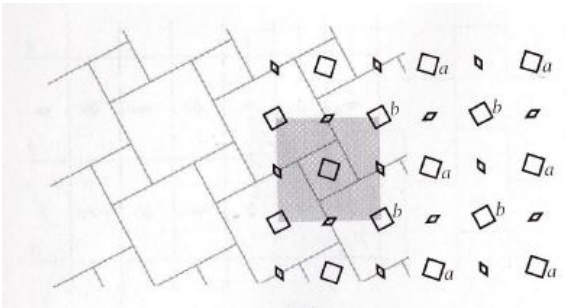


p3

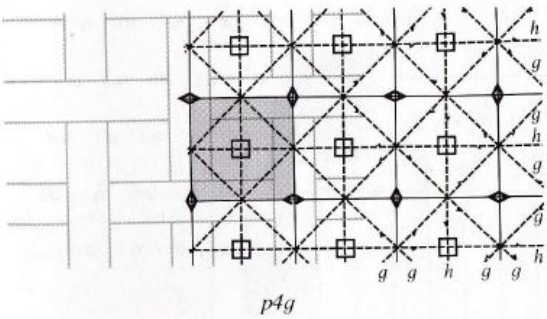


p31m

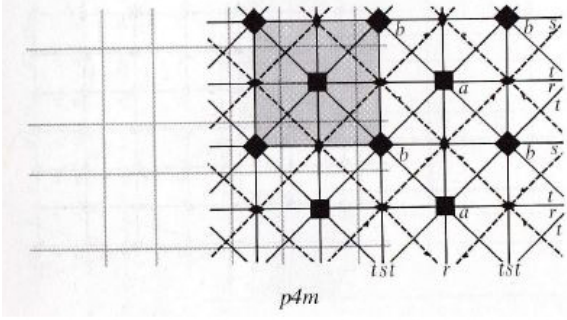
Repräsentanten aller Ebenengruppen mit vierzähligen Drehzentren



p4

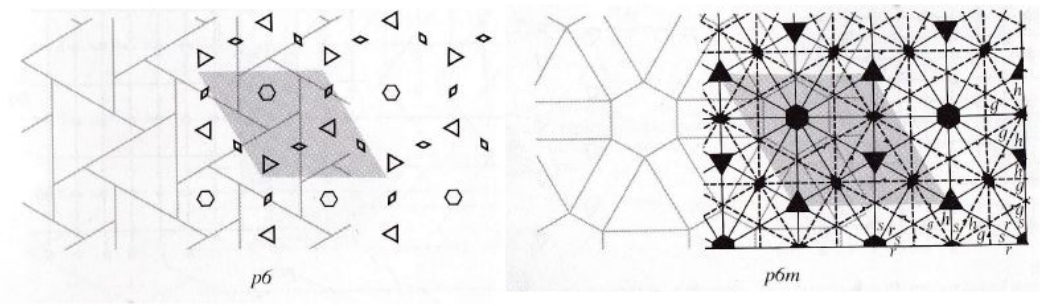


p4g

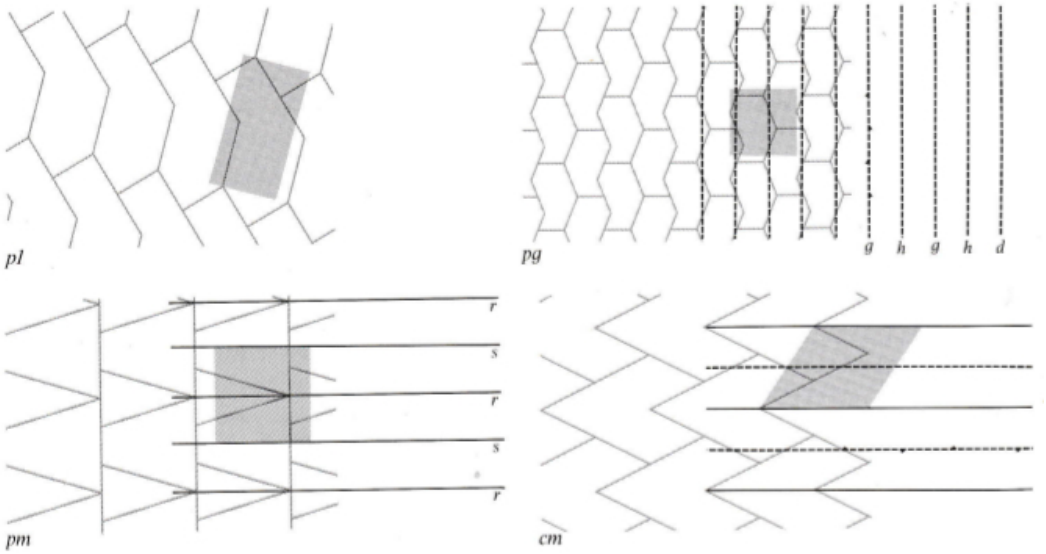


p4m

Repräsentanten aller Ebenengruppen mit sechszähligen Drehzentren



Repräsentanten aller Ebenengruppen ohne Drehungen



Darstellung einer Drehung

Anhand eines Ausschnitts des Parketts mit der Ebenengruppe *p6* soll eine Drehung mit Drehwinkel $\alpha = 60°$ im Uhrzeigersinn an einem sechszähligen Drehpunkt dargestellt werden. Der Vorgang ist in drei Bildern in Abbildung 7.5 dargestellt. Das mittlere Bild stellt eine Zwischenstufe dar. Die Einfärbung des Parketts soll hierbei lediglich das Vorstellungsvermögen unterstützen.

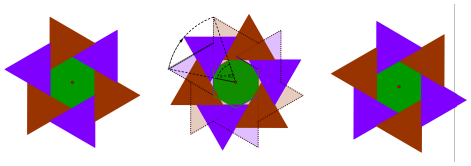


Abbildung 7.5: Darstellung einer Drehung um 60°

Bestimmung der Ebenengruppe eines periodischen Parketts

Um die Ebenengruppe einer Parkettierung möglichst einfach identifizieren zu können, gibt es einen Algorithmus in Form eines Diagramms, dargestellt in Abbildung 7.6. Man beginnt ganz oben und arbeitet sich Schritt für Schritt durch. Die Idee für die Anleitung stammt aus [2].

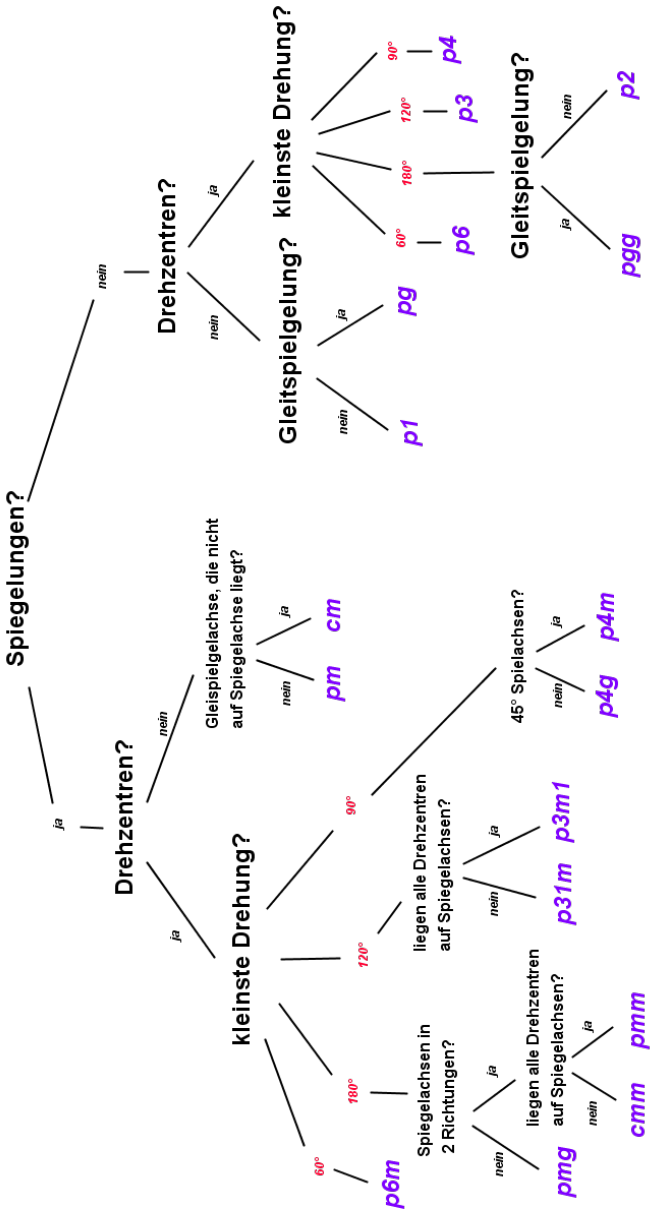


Abbildung 7.6: Algorithmus zur Bestimmung der Ebenengruppe einer periodischen Parkettierung

7.3 Die sieben Bandornamentgruppen

Ein Bandornament ist ein Objekt, das dadurch gebildet wird, dass eine kleinste Einheit durch Translation immer wieder aneinandergefügt wird und zwar in einer festen Richtung. Die kleinste Einheit kann dabei ein beliebiges Motiv sein. Die Smiley-Kette in Abbildung 7.7 soll als Beispiel für ein Bandornament dienen. Natürlich kann aber auch jede beliebige geometrische Figur als Motiv verwendet werden.

Abbildung 7.7: Ein Beispiel eines Bandornaments

Untersucht man Bandornamente auf Symmetrien, so stellt sich wie schon bei den Ebenengruppen heraus, dass diese endliche Gruppen bilden, es also nicht beliebig viele verschiedene Kongruenzabbildungen eines Bandornaments gibt. Man bezeichnet die Symmetriegruppe eines Bandornaments als *Bandornamentgruppe*. Eine andere gängige Bezeichnung ist *Friesgruppe*. Im Vergleich zu den Ebenengruppen gibt es bei diesen Gruppen Translationen in nur eine Richtung und es können daher höchstens zweizählige Drehpunkte vorhanden sein. Spiegel- und Gleitspiegelachsen können nur in Richtung des Translationsvektors verlaufen bzw. können Spiegelachsen auch normal auf diesen stehen. Insgesamt gibt es nur sieben verschiedene Bandornamentgruppen. Dass es wirklich nur sieben sind überprüft man durch systematisches Kombinieren der möglichen Symmetrieoperationen.

Die Benennung dieser sieben Gruppen wurde, genau wie die der 17 Ebenengruppen, in den International Tables for Crystallography (siehe [29]) festgelegt. Die Bezeichnungen *p111, p1a1, p1m1, pm11, p112, pma2* und *pmm2* stammen aus [13], S. 39 und weichen geringfügig von der internationalen Nomenklatur ab. Die Symmetrien der sieben Bandornamentgruppen finden sich in Tabelle 7.2.

#	Gruppe	Spiegelebenen	Gleitspiegelebenen	Drehpunkte
1	*p111*	0	0	0
2	*p1a1*	0	1	0
3	*p1m1*	1	0	0
4	*pm11*	2	0	0
5	*p112*	0	0	2
6	*pma2*	1	1	1
7	*pmm2*	3	0	2

Tabelle 7.2: Auflistung der sieben Bandornamentgruppen mit deren Symmetrien

Repräsentanten für jede der sieben Gruppen findet man in Abbildung 7.8 aus [13], S. 39.

Repräsentanten der sieben Bandornamentgruppen

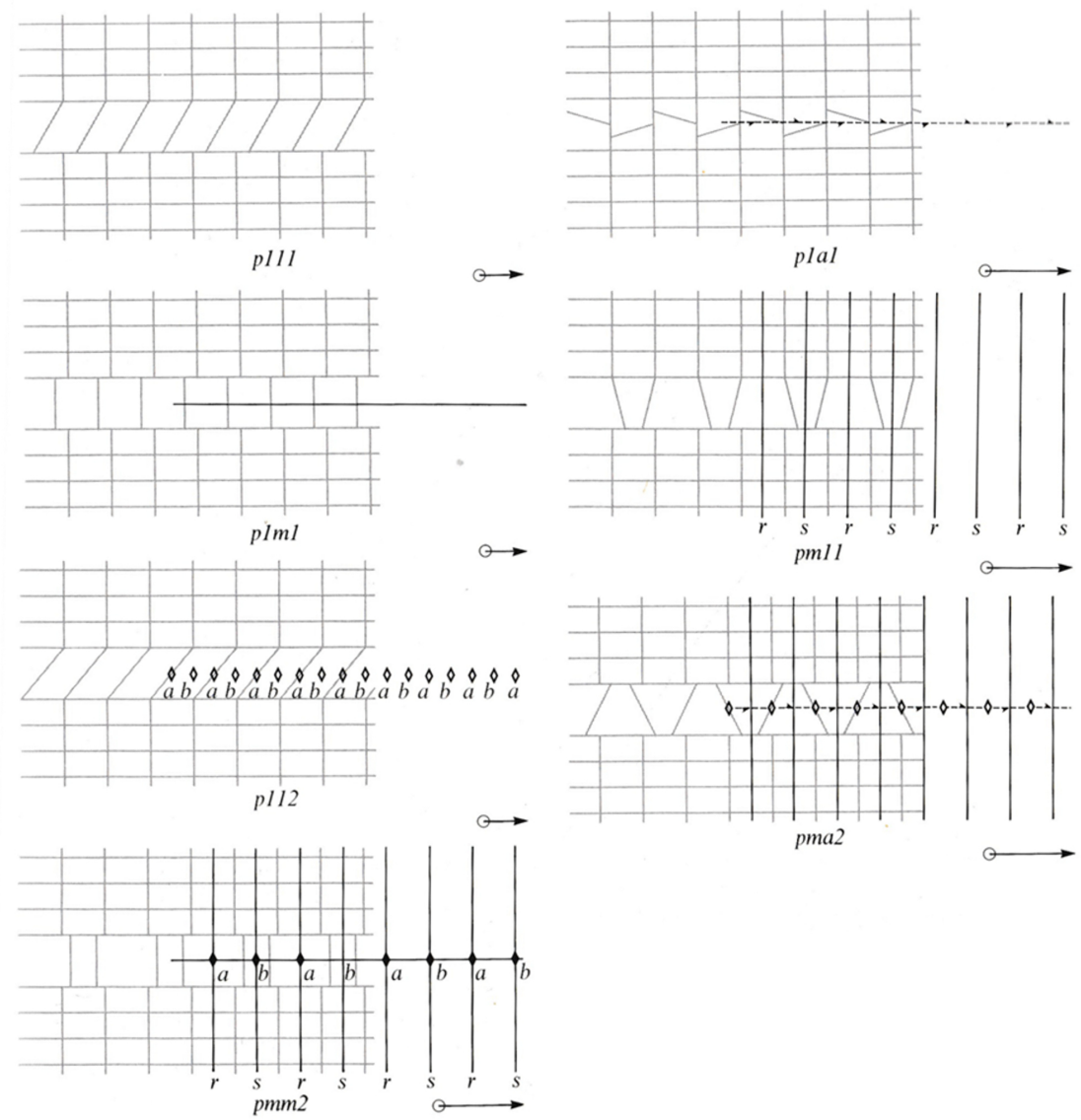


Abbildung 7.8: Repräsentanten der sieben Bandornamentgruppen

Bestimmung von Bandornamentgruppen

Um die Symmetriegruppe ein gegebenes Bandornament zu bestimmen gibt es einen einfachen Algorithmus, der schnell ans Ziel führt. Man beginnt im Diagramm der Abbildung 7.9 (Abbildung nach [26]) ganz oben und überprüft Schritt für Schritt die jeweils gefragte Symmetrie. Man gelangt so in höchsten vier Schritten zu einem Ergebnis. Die Symmetriegruppe der anfangs gebrachten Smiley-Kette identifiziert man so schnell als die Gruppe *pm11*.

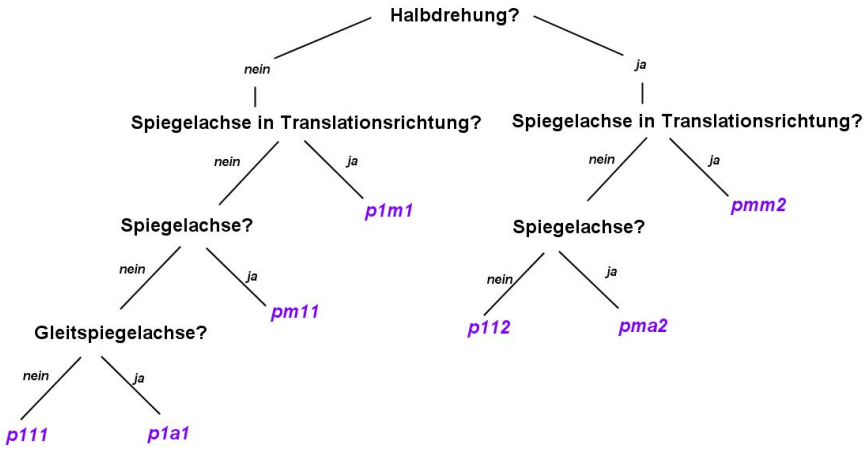


Abbildung 7.9: Algorithmus zur Identifizierung der Bandornamentgruppen

7.4 Rosettengruppen

Falls die Symmetriegruppe einer Parkettierung keine Translation aufweist hat man es mit *Rosettengruppen* zu tun. Die Elemente dieser Gruppen können nur Drehungen und/oder Spiegelungen des Parketts beschreiben. Beinhaltet die Gruppe nur Drehungen ist sie ident mit der Gruppe C_n, der zyklischen Gruppe der Ordnung n. Gibt es mehr als eine Spiegelachse, dann können diese nicht parallel sein (es gäbe sonst eine Translation). Sie schneiden deshalb in einem Punkt P. Die Verknüpfung zweier solcher Spiegelungen ist eine Rotation mit Winkel 2α, wobei α der Schnittwinkel der Spiegelachsen ist. Gruppen mit Spiegelungen und Drehungen sind ident mit D_n, der Diedergruppe mit Ordnung $2n$. Zusammengefasst ist also jede Symmetriegruppe ohne Translationen entweder vom Typ C_n oder D_n, wobei $n \geq 1$ und wobei mit D_1 bzw. C_1 die triviale Gruppe gemeint ist (nach [13], S. 43).

Kapitel 8

Unterrichtsvorschläge

Die hier verfassten Unterrichtsvorschläge sind als Wiederholung für Teile des Geometrieunterrichts der sechsten Schulstufe gedacht. Von den S&S wird kein zusätzliches Vorwissen verlangt. Es versteht sich von selbst, dass die hier geplanten Stunden erst nach Behandlung der regulären Lehrplaninhalte vorgesehen sind.

Für jede geplante Stunde wird:

- Ein Unterrichtsziel formuliert.
- Angegeben, welche Lehrplaninhalte wiederholt werden.
- Ein Zeitrahmen vorgegeben.
- Ein Vorschlag für den Ablauf angegeben.
- Eine »take-home-message« festgelegt.
- Ein Unterkapitel »Unterlagen« erstellt, indem sich die Arbeitsblätter (inkl. Lösungsvorschläge) für die einzelnen Stunden befinden.

Eine konkrete Ergebnissicherung ist, da die Stunden als Wiederholung gedacht sind, nicht vorgesehen.

8.1 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Grundlagen zu Parkettierungen«

ZIEL DER STUNDE

Die S&S werden mit Parkettierungen vertraut gemacht. Symmetrie wird als wichtige Eigenschaft vieler Parkettierungen erkannt.

WAS WIRD WIEDERHOLT

Symmetrie als wesentliche Eigenschaft von Figuren, sowie der Begriff Kongruenz.

ZEITRAHMEN UND AUFBAU

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-5	Vorstellung des Thema	PP-Präsenation	Computer-File
5-10	Besprechung	Gespräch	
10-30	Übungen zu Symmetrien	Computerarbeit	Computer-File
30-40	Analyse Parkettierung	Einzelarbeit	Arbeitsblatt
40-45	Suchen von Parkettierungen	Zweiergruppe	
45-50	Schlussbesprechung	Gespräch	

VORSTELLUNGEN ZUM ABLAUF

Als Einstieg wird den S&S eine ganz kurze Präsentation mit Abbildungen von Parkettierungen gezeigt (siehe 8.1: Präsentation). Die Bilder werden per Beamer an die Wand projiziert; notfalls gedruckt und ausgeteilt. Zusammen mit den S&S werden die Bilder besprochen und Gemeinsamkeiten erarbeitet. Frage die sich hier anbieten sind beispielsweise:

- Welche Formen haben die Kacheln?
- Welche Formen sind kongruent?
- Wie viele verschiedene Kacheln tauchen in einem Bild auf?
- Wie sind die Kacheln angeordnet?
- Was haben alle die Bilder gemeinsam?

Symmetrien sollen hier bewusst noch nicht angesprochen werden. Bei der Besprechung soll jedenfalls eine Definition einer Parkettierung erarbeitet werden.

Als nächster Schritt erfolgt eine Wiederholung mit den S&S darüber, welche Vielecke schon bekannt sind. Dabei soll besonders auf deren Symmetrien eingegangen werden. Die Wiederholung soll rein verbal erfolgen.

Um das Verständnis von Symmetrie nun weiter zu schärfen wird mit den S&S eine Computerübung gemacht. Bei dieser Übung werden vertraute Objekte aus dem

Alltag auf Drehzentren und Spiegelachsen überprüft. Die Übung wurde von Eugen Libowitzky erstellt und kann auf [25] gemacht werden (bzw. steht dort zum Download bereit). Zur Durchführung selbst: Optimal ist es natürlich wenn jedes Kind an einem eigenen Computer arbeiten kann. Wenn das nicht möglich ist, wird die Übung gemeinsam mit der ganzen Klasse gemacht (per Beamer).

Nach der Übung wird eine Parkettierung aus der am Anfang gebrachten Präsentation auf Symmetrien untersucht. Es ist dabei sehr wichtig darauf hinzuweisen und zu thematisieren, dass es sich lediglich um einen Ausschnitt einer Parkettierung handelt.

Den Rest der Stunde verbringen S&S in Zweiergruppen damit, Parkettierungen in ihrer Umgebung zu suchen und zu beschreiben. Dabei können Fotos gemacht werden oder Skizzen angefertigt werden. Jedes Kind soll aber zumindest eine Parkettierung fotografieren oder abzeichnen und auf Symmetrien untersuchen. Typische Fundorte für Parkette sind beispielsweise: Fußboden, Decke, Schuhsohlen, Hausdächer, Fassaden, Fliesenwände, Kleidungsstücke etc.

In den letzten fünf Minuten präsentieren einige S&S kurz der Klasse ihre Parkette. Die Lehrperson fasst die Inhalte der Stunde nochmals kurz zusammen und gibt den Kindern die »take-home-message« mit.

TAKE HOME MESSAGE

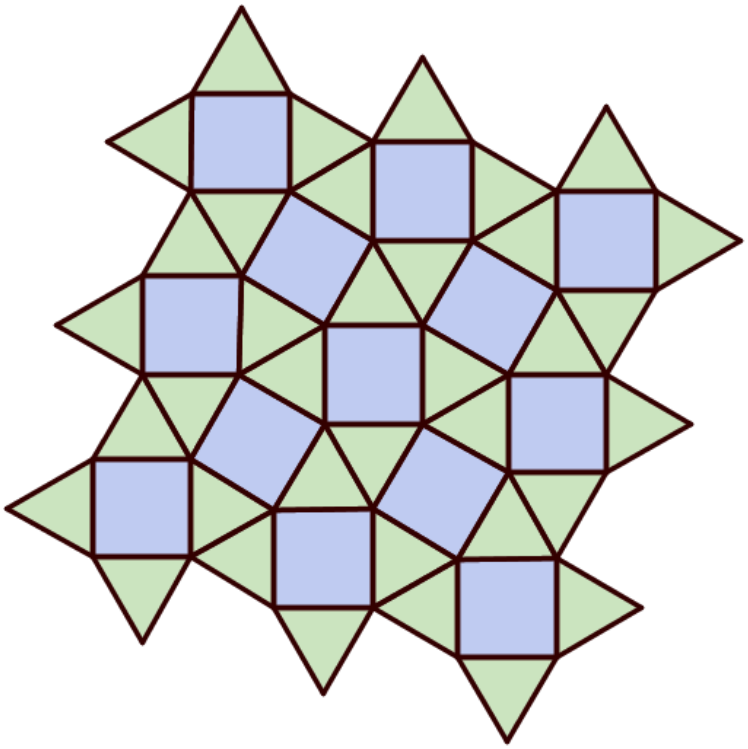
Parkette sind mathematische Objekte die überall in der Umwelt anzutreffen sind.

UNTERLAGEN

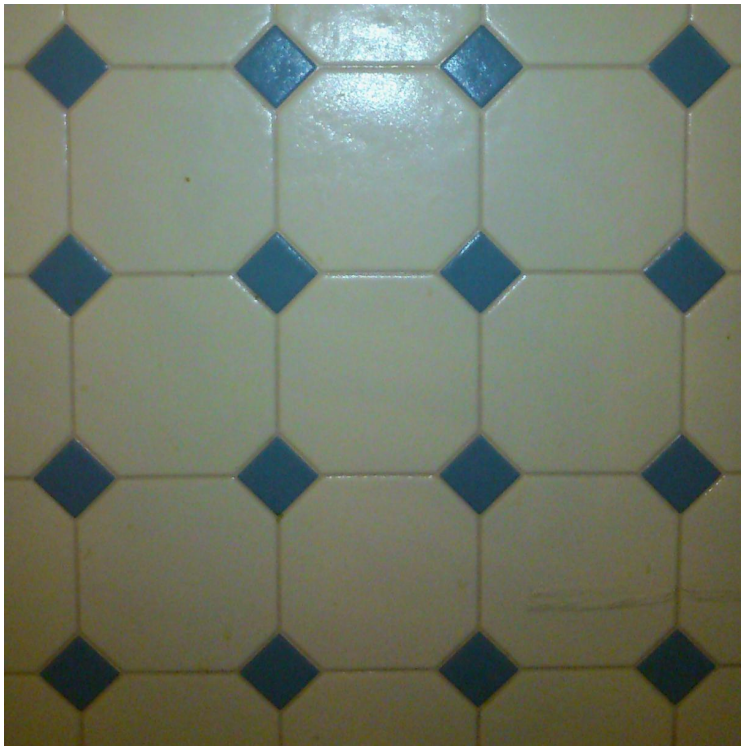
- Präsentation

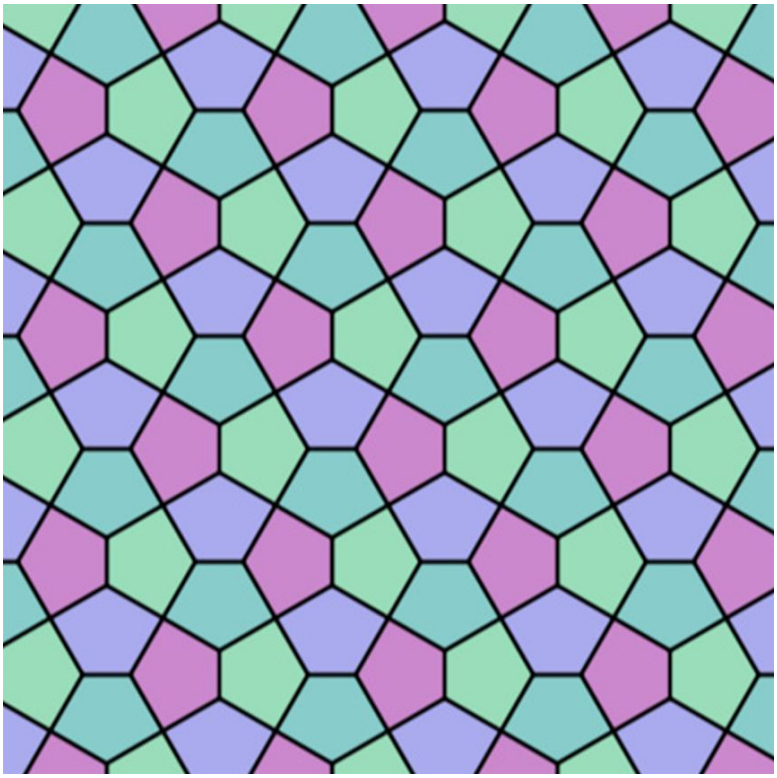
Parkettierungen

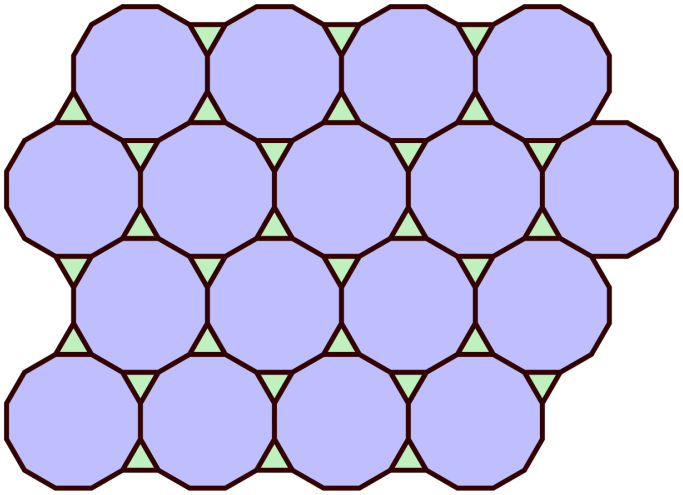
Unterrichtsvorschlag zum Kapitel „Grundlagen zu Parkettierungen“ -- Präsentation



Seite **3** von **6**







8.2 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Polygone«

ZIEL DER STUNDE

Wiederholung der Vierecke.

WAS WIRD WIEDERHOLT

Wesentliche Eigenschaften von Vierecken feststellen, sowie das Skizzieren dieser Figuren.

ZEITRAHMEN UND AUFBAU

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-5	Einleitung/Gruppeneinteilung	Gespräch	
5-40	Stationenbetrieb	Gruppenarbeit	Arbeitsblätter
40-45	Besprechung der Ergebnisse	Diskussion	
45-50	Schlussbesprechung	Gespräch	

VORSTELLUNGEN ZUM ABLAUF

Der Einstieg in die Stunde erfolgt mit der Fragestellung: Ist es möglich auch mit anderen Vierecken, außer dem Quadrat, Parkettierungen zu machen?

Zur Beantwortung dieser Frage wird eine Gruppenarbeit durchgeführt. Es werden Arbeitsgruppen zu je 3-4 S&S gebildet, die fünf Stationen durchlaufen und an jeder Station eines der Arbeitsblätter bearbeiten (siehe 8.2). Auf den Blättern finden sich jeweils eine genau Abbildung des betreffenden Vierecks, eine Liste mit den wichtigsten Eigenschaften, Platz zum Zeichnen und die entsprechenden Arbeitsaufträge. Folgende Vierecke werden behandelt:

1. Rechteck
2. Raute
3. Deltoid
4. gleichschenkeliges Trapez
5. allgemeines Viereck

Die S&S arbeiten selbstständig, die Lehrperson steht lediglich für Fragen zur Verfügung. Für jede Station sind rund sieben Minuten geplant, danach muss gewechselt werden.

Präsentation und Besprechung der Ergebnisse: Die Lehrperson geht der Reihe nach die fünf Arbeitsblätter mit der Klasse durch und bespricht einzelne Punkte, je nachdem welche Fragen sich ergeben. Alle S&S sollen jedoch mindestens begreifen:

- Die Winkelsumme in einem Viereck beträgt immer 360°.
- Jedes beliebige Viereck parkettiert die Ebene.

TAKE HOME MESSAGE

Jedes beliebige Viereck parkettiert die Ebene!

UNTERLAGEN

- Parkettierungen mit Rechtecken – Arbeitsblatt RECHTECK 1/2
- Parkettierungen mit Rechtecken – Arbeitsblatt RECHTECK 2/2
- Parkettierungen mit Rechtecken – Lösung Arbeitsblatt RECHTECK 1/2
- Parkettierungen mit Rechtecken – Lösung Arbeitsblatt RECHTECK 2/2
- Parkettierungen mit Rauten – Arbeitsblatt RAUTE 1/2
- Parkettierungen mit Rauten – Arbeitsblatt RAUTE 2/2
- Parkettierungen mit Rauten – Lösung Arbeitsblatt RAUTE 1/2
- Parkettierungen mit Rauten – Lösung Arbeitsblatt RAUTE 2/2
- Parkettierungen mit Deltoiden – Arbeitsblatt DELTOID 1/2
- Parkettierungen mit Deltoiden – Arbeitsblatt DELTOID 2/2
- Parkettierungen mit Deltoiden – Lösung Arbeitsblatt DELTOID 1/2
- Parkettierungen mit Deltoiden – Lösung Arbeitsblatt DELTOID 2/2
- Parkettierungen mit Trapezen – Arbeitsblatt TRAPEZ 1/2
- Parkettierungen mit Trapezen – Arbeitsblatt TRAPEZ 2/2
- Parkettierungen mit Trapezen – Lösung Arbeitsblatt TRAPEZ 1/2
- Parkettierungen mit Trapezen – Lösung Arbeitsblatt TRAPEZ 2/2
- Parkettierungen mit allg. Vierecken – Arbeitsblatt ALLG. VIERECK
- Parkettierungen mit allg. Vierecken – Lösung Arbeitsblatt ALLG. VIERECK

Spezielle Vierecke - Das Rechteck

► Das Rechteck ist ein Parallelogramm mit **vier rechten Winkeln**. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen** des Rechtecks sind **gleich lang** und **halbieren einander**. Sie werden mit ***d*** bezeichnet.

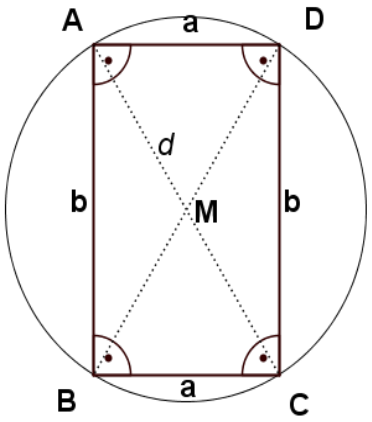
► Der **Schnittpunkt der Diagonalen** ist **Umkreismittelpunkt *M***.

► Das Rechteck besitzt **zwei Symmetrieachsen**. Sie stehen senkrecht auf den Seitenmittelpunkten.

► Die Flächenformel für das Rechteck lautet $\boldsymbol{A = a \cdot b}$.

► Die **Winkelsumme** im Rechteck beträgt **360°.**

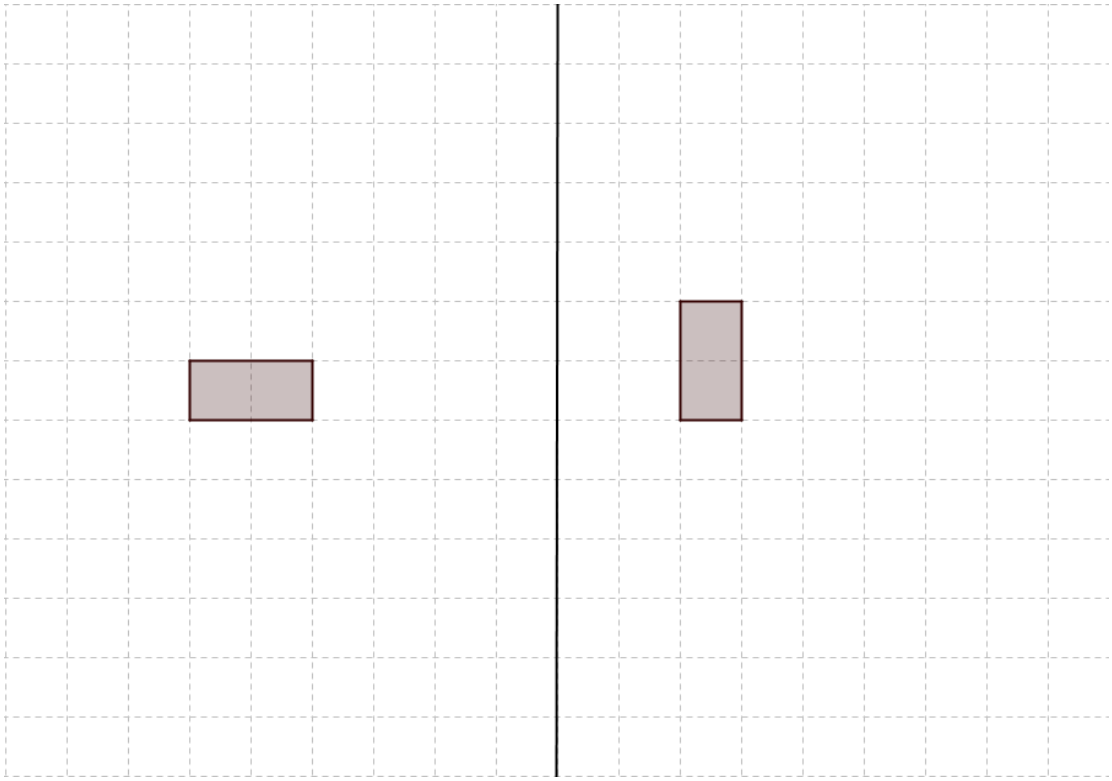
► Für die **Konstruktion** eines Rechtecks sind mindestens **zwei Angaben** notwendig.



Parkettierung mit Rechtecken:

- Skizziere weitere, kongruente Rechtecke, sodass die Ebene parkettiert wird!

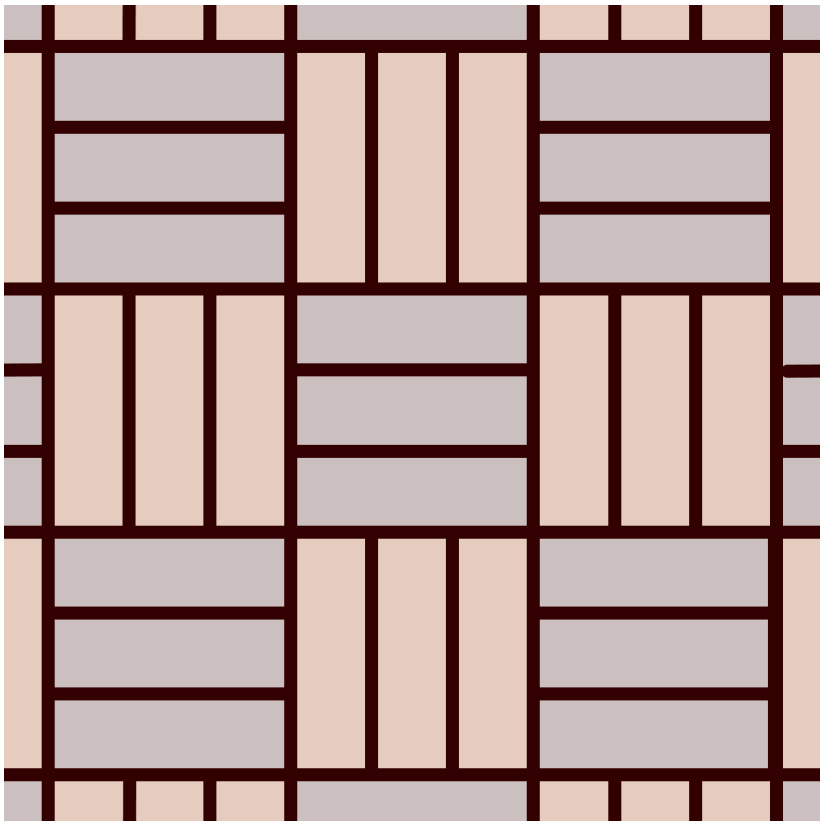
Finde zwei verschiedene Möglichkeiten!



Parkettierungen mit Rechtecken – Arbeitsblatt RECHTECK 1/2

Ein ganz spezielles Rechteck erlaubt eine weitere Parkettierung:

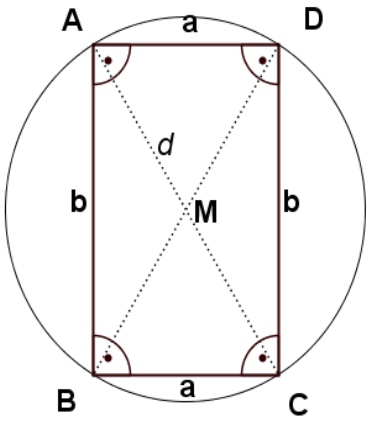
- *Welcher Zusammenhang gilt zwischen Länge und Breite des Rechtecks?*
- *Finde Spiegelachsen und zeichne sie ein!*
- *In dem Ausschnitt eines Parketts verstecken sich drei verschieden große Quadrate. Aus wie vielen Rechtecken werden sie gebildet?*



Antworten:

LÖSUNGSVORSCHLAG

Spezielle Vierecke - Das Rechteck



► Das Rechteck ist ein Parallelogramm mit **vier rechten Winkeln**. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen** des Rechtecks sind **gleich lang** und **halbieren einander**. Sie werden mit ***d*** bezeichnet.

► Der **Schnittpunkt der Diagonalen** ist **Umkreismittelpunkt *M***.

► Das Rechteck besitzt **zwei Symmetrieachsen**. Sie stehen senkrecht auf den Seitenmittelpunkten.

► Die Flächenformel für das Rechteck lautet $\boldsymbol{A = a \cdot b}$**.**

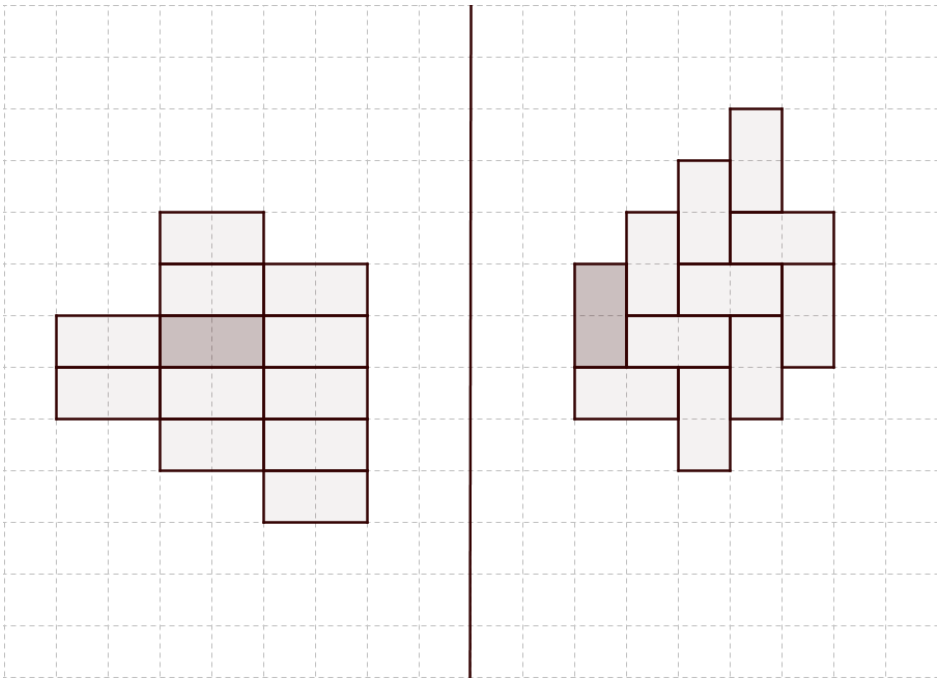
► Die **Winkelsumme** im Rechteck beträgt **360°.**

► Für die **Konstruktion** eines Rechtecks sind mindestens **zwei Angaben** notwendig.

Parkettierung mit Rechtecken:

- Skizziere weitere, kongruente Rechtecke, sodass die Ebene parkettiert wird!

Finde zwei verschiedene Möglichkeiten!

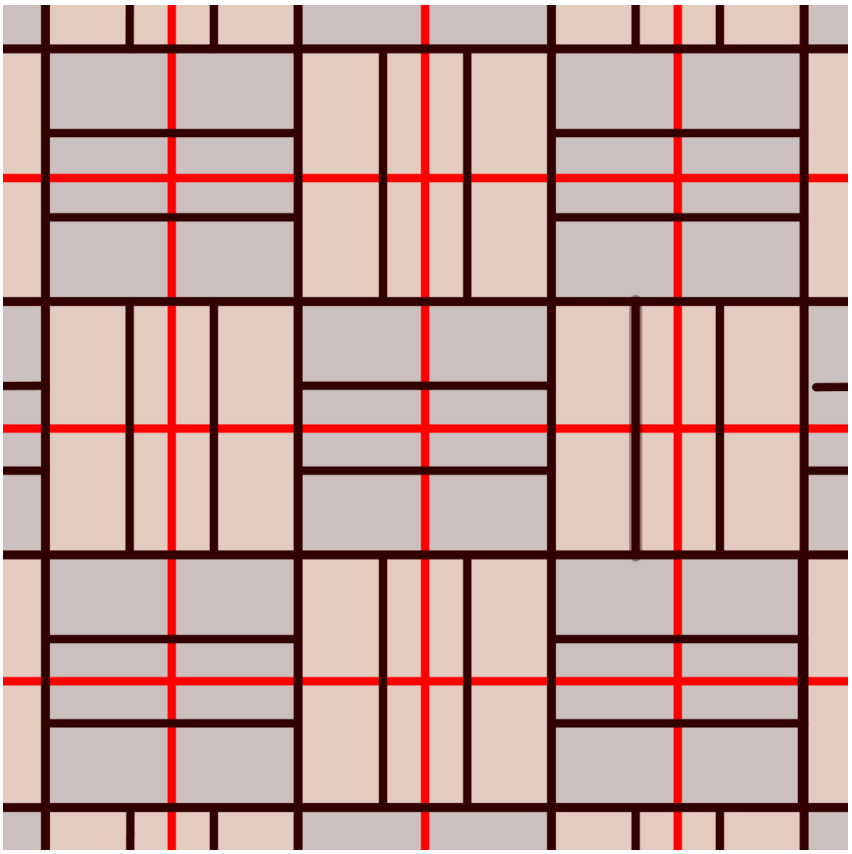


Parkettierungen mit Rechtecken – Lösung Arbeitsblatt RECHTECK 1/2

LÖSUNGSVORSCHLAG

Ein ganz spezielles Rechteck erlaubt eine weitere Parkettierung:

- *Welcher Zusammenhang gilt zwischen Länge und Breite des Rechtecks?*
- *Finde Spiegelachsen und zeichne sie ein!*
- *In dem Ausschnitt eines Parketts verstecken sich drei verschieden große Quadrate. Aus wie vielen Rechtecken werden sie gebildet?*



Antworten:

Länge ist gleich Breite Mal drei.

Die Quadrate bestehen aus 3, 12 und 27 Rechtecken.

Spezielle Vierecke – Die Raute

► Die **Raute** ist ein Parallelogramm mit **vier gleich langen Seiten**. Die Seite heißt ***a***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f*** der Raute sind **Symmetrieachsen** und **halbieren einander** und auch **die jeweiligen Winkel**.

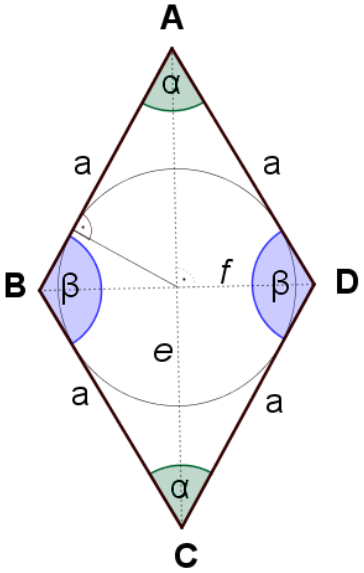
► Die **Winkel *α*** und ***β*** ergänzen einander auf **180°**. Die **gegenüberliegenden Winkel** sind **gleich groß**. Jeder Winkel ist kleiner 180°.

► Jede Raute besitzt einen **Inkreis**. Sein **Mittelpunkt** ist der **Schnittpunkt der Diagonalen**.

► Die **Winkelsumme** in der Raute beträgt **360°.**

► Eine **Flächenformel** für die Raute lautet $\boldsymbol{A = \frac{e \cdot f}{2}}$.

► **F**ür die **Konstruktion** einer Raute sind mindestens **zwei Angaben** notwendig.

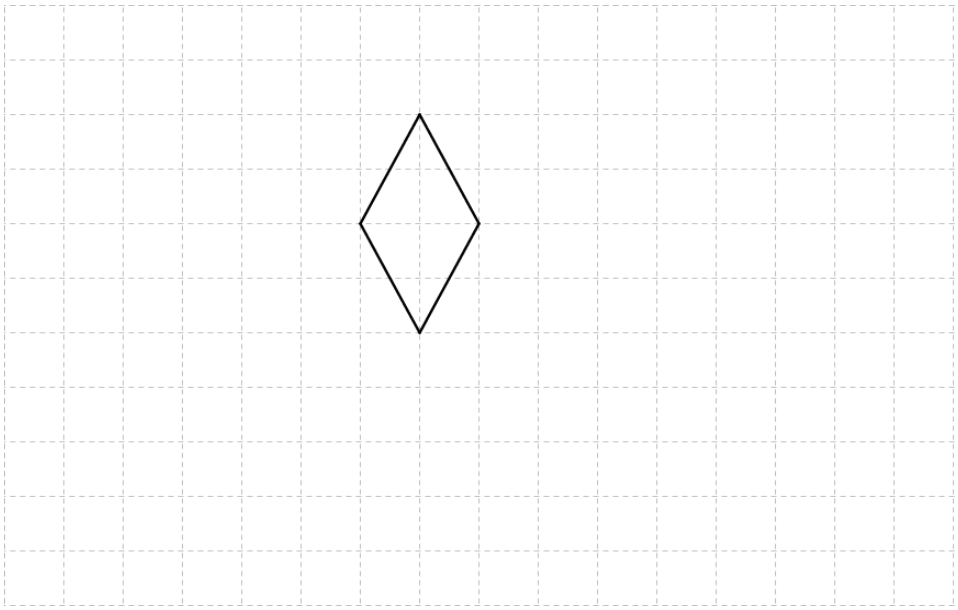


Parkettierung mit Rauten:

- Skizziere weitere, kongruente Rauten, sodass die Ebene parkettiert wird!

- Zeichne die Winkel α und β in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

- Zeichne die Diagonalen der Rauten ein! Kannst du die Flächenformel begründen?



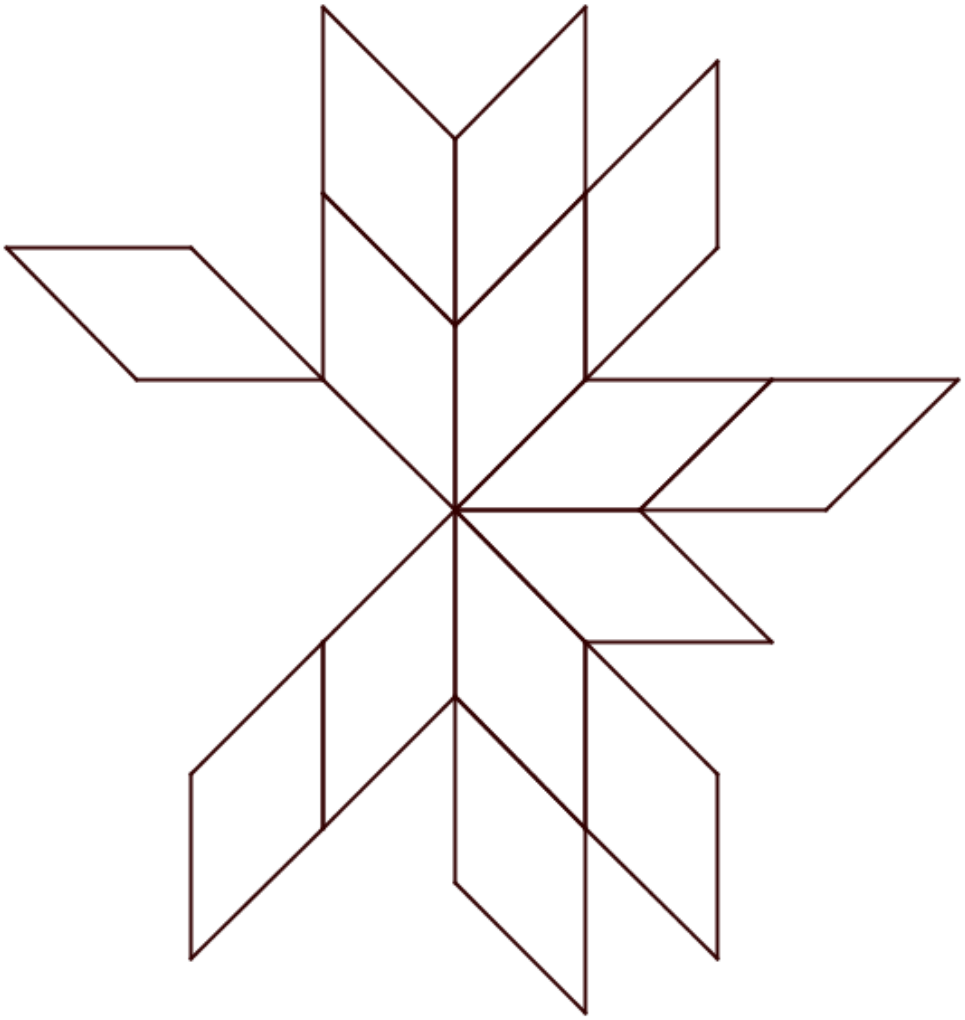
Eine spezielle Raute erlaubt eine etwas andere Parkettierung:

- Ermittle, ohne zu messen, die Größe der Winkel! (Hinweis: Nutze den vollen Winkel!)

- Konstruiere weitere, kongruente Rauten und setze das Parkett zu einem Stern fort!

(am besten gelingt dir das durch parallelverschieben mit dem Geodreieck!)

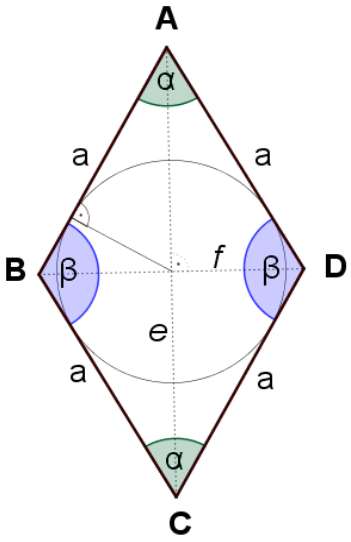
- Zeichne mit Farbstift alle Symmetrieachsen ein!



Antworten:

LÖSUNGSVORSCHLAG

Spezielle Vierecke – Die Raute



► Die **Raute** ist ein Parallelogramm mit **vier gleich langen Seiten**. Die Seite heißt ***a***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f*** der Raute sind **Symmetrieachsen** und **halbieren einander** und auch **die jeweiligen Winkel**.

► Die **Winkel *α*** und ***β*** ergänzen einander auf **180°**. Die **gegenüberliegenden Winkel** sind **gleich groß**. Jeder Winkel ist kleiner 180°.

► Jede Raute besitzt einen **Inkreis**. Sein **Mittelpunkt** ist der **Schnittpunkt der Diagonalen**.

► Die **Winkelsumme** in der Raute beträgt **360°.**

► Eine **Flächenformel** für die Raute lautet $\boldsymbol{A = \frac{e \cdot f}{2}}$.

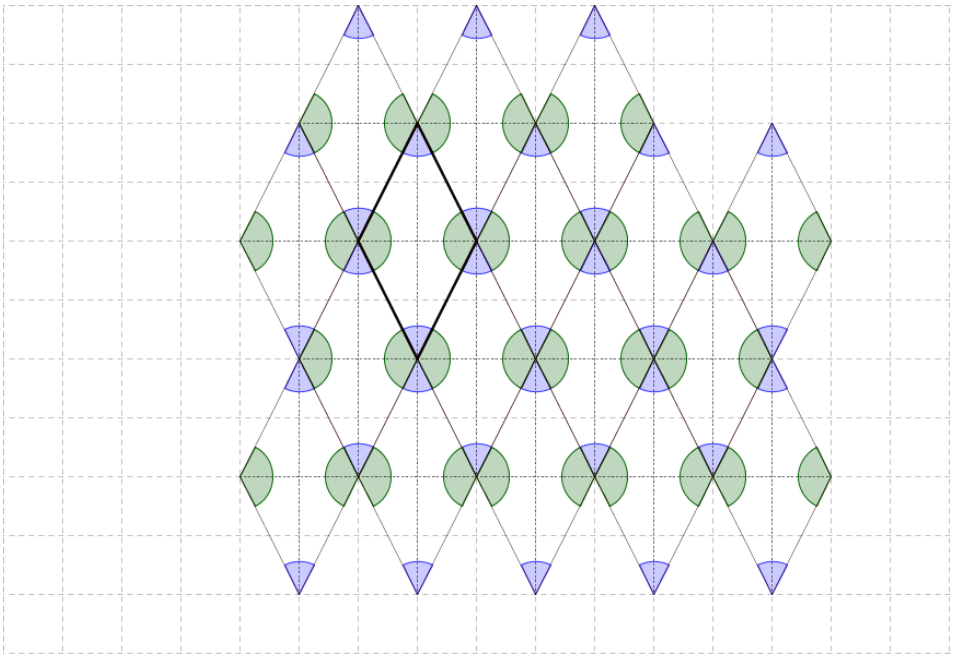
► **F**ür die **Konstruktion** einer Raute sind mindestens **zwei Angaben** notwendig.

Parkettierung mit Rauten:

- Skizziere weitere, kongruente Rauten, sodass die Ebene parkettiert wird!

- Zeichne die Winkel α und β in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

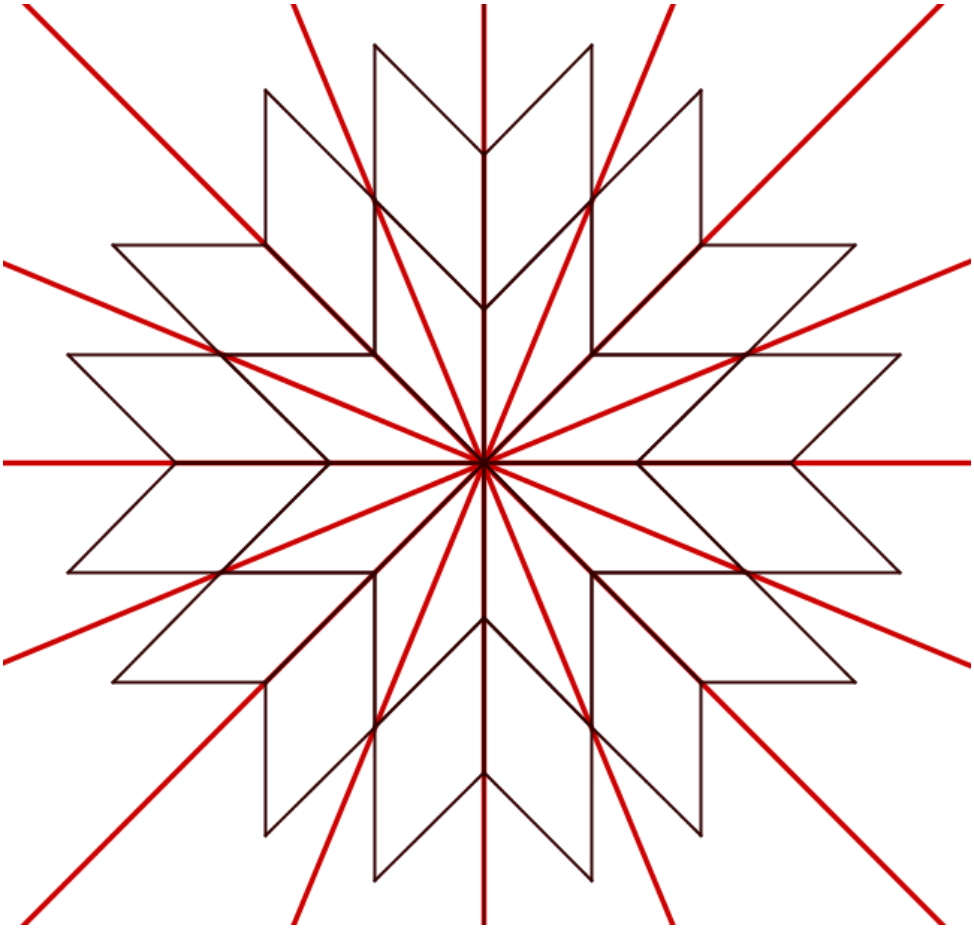
- Zeichne die Diagonalen der Rauten ein! Kannst du die Flächenformel begründen?



LÖSUNGSVORSCHLAG

Eine spezielle Raute erlaubt eine etwas andere Parkettierung:

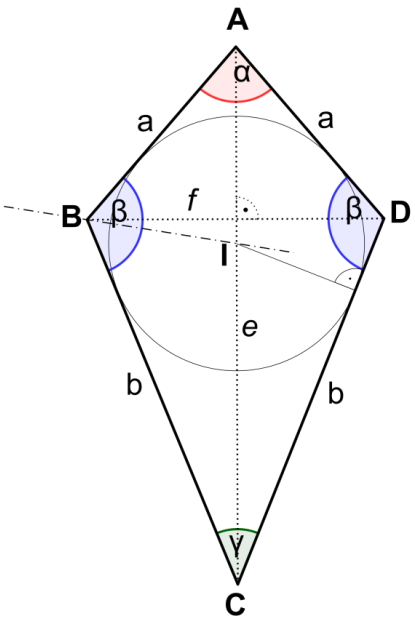
- Ermittle, ohne zu messen, die Größe der Winkel! (Hinweis: Nutze den vollen Winkel!)
- Konstruiere weiter kongruente Rauten und setze das Parkett zu einem Stern fort!
(am besten gelingt dir das durch parallelverschieben mit dem Geodreieck!)
- Zeichne mit Farbstift alle Symmetrieachsen ein!



Antworten:

Die Größe der Winkel beträgt 45° und 135°.

Spezielle Vierecke - Das Deltoid



► Das **Deltoid** hat **zwei Paar gleich lange Seiten**, die jeweils zusammenliegen. Die **Seiten** heißen ***a*** und ***b***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f* stehen normal aufeinander** und die **Diagonale *f*** wird **von** der **Diagonale *e* halbiert**.

► Die **Diagonale *e*** ist **Symmetrieachse** des Deltoids und **halbiert** die **Winkel *α* und *γ***.

► **Zwei Winkel** sind **gleich groß**; jeder Winkel ist kleiner 180°.

► Die **Winkelsumme** im Deltoid beträgt **360°.**

►Das Deltoid hat einen **Inkreis**, dessen **Mittelpunkt *I*** auf der **Diagonale *e*** liegt.

► Die **Flächenformel** für das Deltoid lautet $\boldsymbol{A = \frac{e \cdot f}{2}}$.

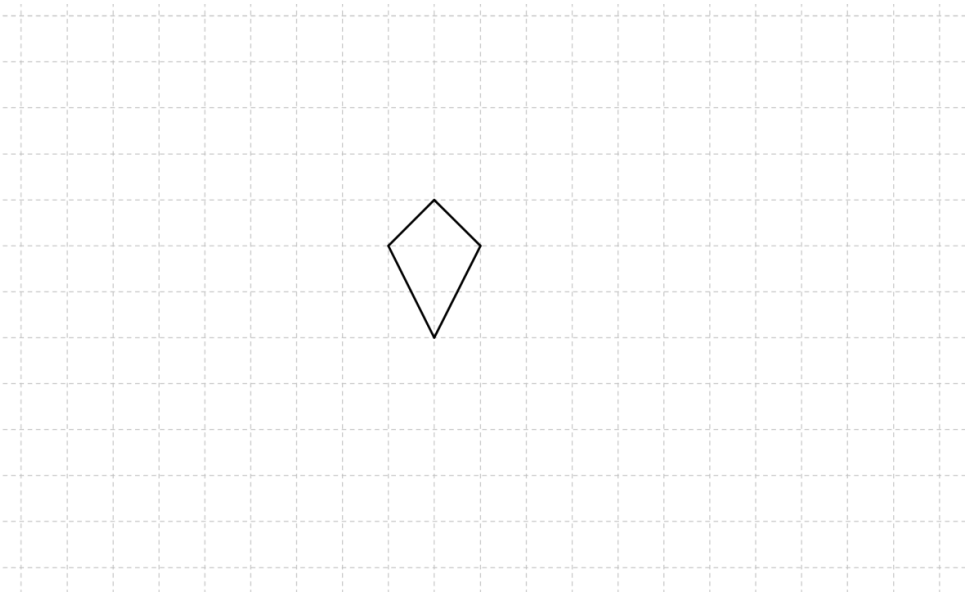
► Für die **Konstruktion** eines Deltoids sind mindestens **drei Angaben** notwendig.

Parkettierung mit Deltoiden:

- Skizziere weitere, kongruente Deltoide, sodass die Ebene parkettiert wird!

- Zeichne die Winkel α, β, und γ in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

- Zeichne die Diagonalen der Deltoide ein! Kannst du die Flächenformel begründen?

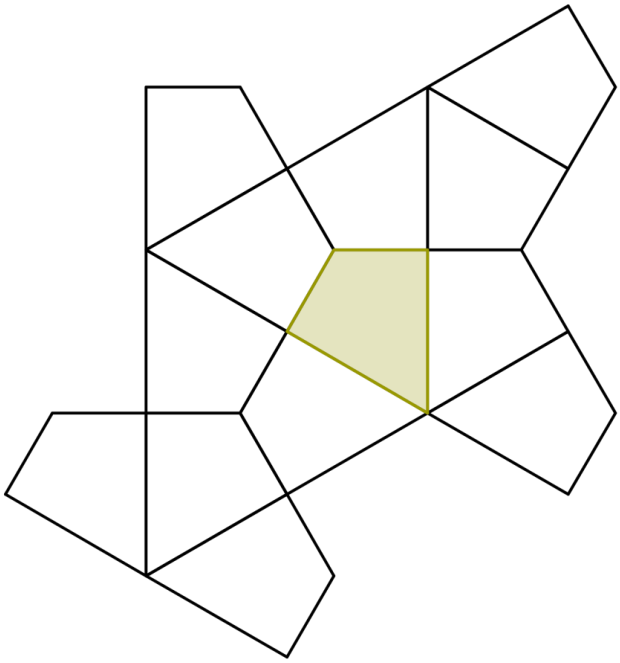


Ein ganz spezielles Deltoid erlaubt eine etwas andere Parkettierung:

- Ermittle, ohne zu messen, die Größe der Winkel in einem solchen Deltoid!

- Konstruiere weiter kongruente Deltoide und setze das Parkett fort (mind. 5)!

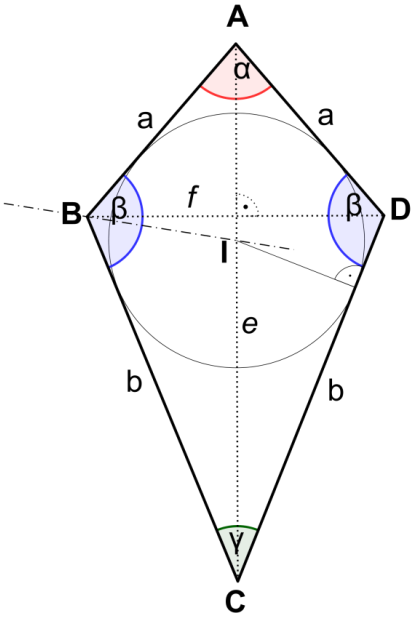
- In dem Parkett verstecken sich Rauten, Dreiecke und Sechsecke. Kannst du sie finden? Begründe warum es Rauten sind!



Antworten:

LÖSUNGSVORSCHLAG

Spezielle Vierecke - Das Deltoid



► Das **Deltoid** hat **zwei Paar gleich lange Seiten**, die jeweils zusammenliegen. Die **Seiten** heißen ***a*** und ***b***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f* stehen normal aufeinander** und die **Diagonale *f*** wird **von** der **Diagonale *e* halbiert**.

► Die **Diagonale *e*** ist **Symmetrieachse** des Deltoids und **halbiert** die **Winkel *α* und *γ***.

► **Zwei Winkel** sind **gleich groß**; jeder Winkel ist kleiner 180°.

► Die **Winkelsumme** im Deltoid beträgt **360°.**

►Das Deltoid hat einen **Inkreis**, dessen **Mittelpunkt *I*** auf der **Diagonale *e*** liegt.

► Die **Flächenformel** für das Deltoid lautet $\boldsymbol{A = \frac{e \cdot f}{2}}$.

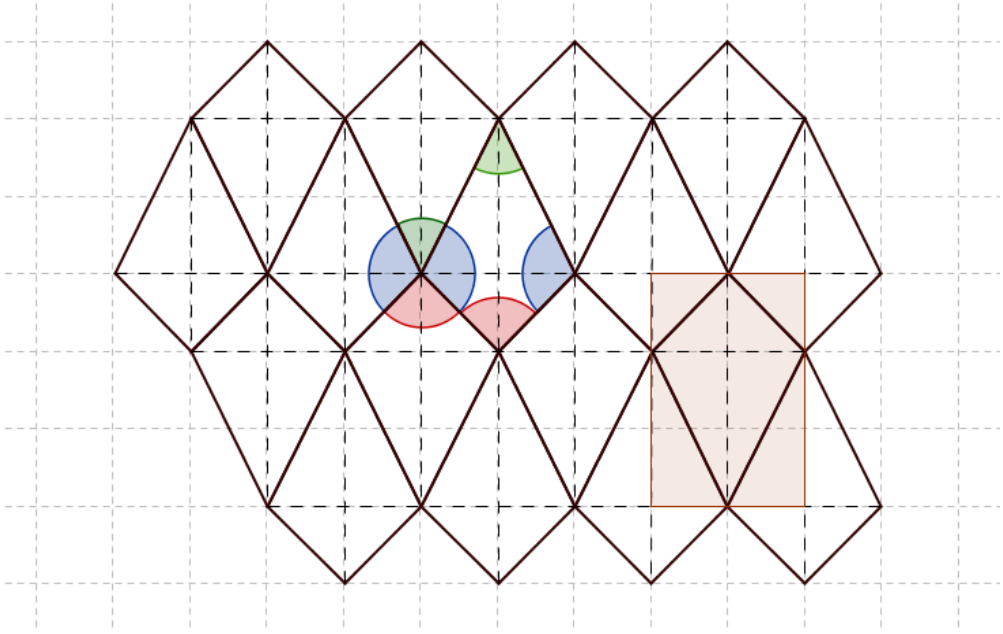
► Für die **Konstruktion** eines Deltoids sind mindestens **drei Angaben** notwendig.

Parkettierung mit Deltoiden:

- Skizziere weitere, kongruente Deltoide, sodass die Ebene parkettiert wird!

- Zeichne die Winkel α, β, und γ in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

- Zeichne die Diagonalen der Deltoide ein! Kannst du die Flächenformel begründen?



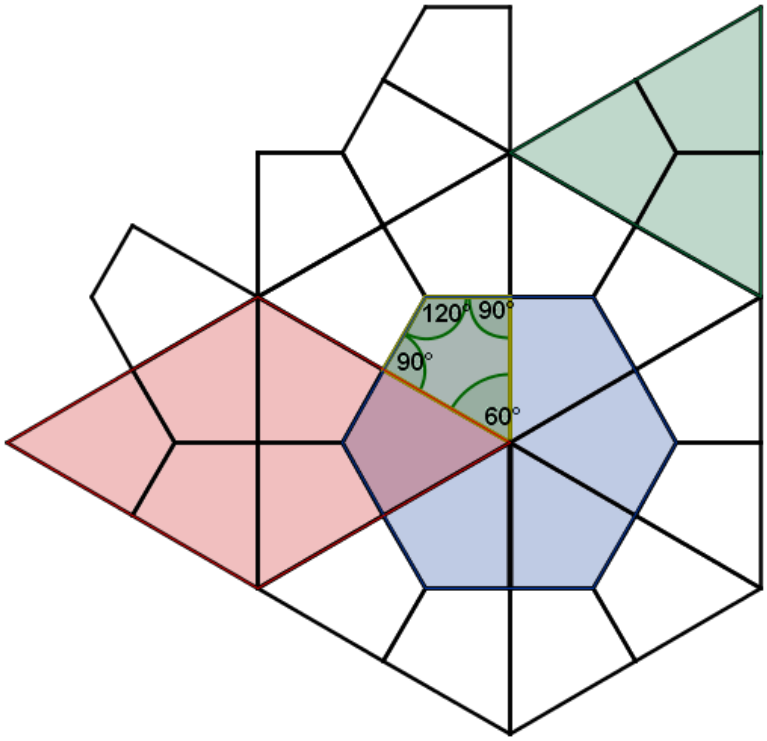
LÖSUNGSVORSCHLAG

Ein ganz spezielles Deltoid erlaubt eine etwas andere Parkettierung:

- Ermittle, ohne zu messen, die Größe der Winkel in einem solchen Deltoid!

- Konstruiere weiter kongruente Deltoide und setze das Parkett fort! (mind. 5)

- In dem Parkett verstecken sich Rauten, Dreiecke und Sechsecke. Kannst du sie finden? Begründe warum es Rauten sind!

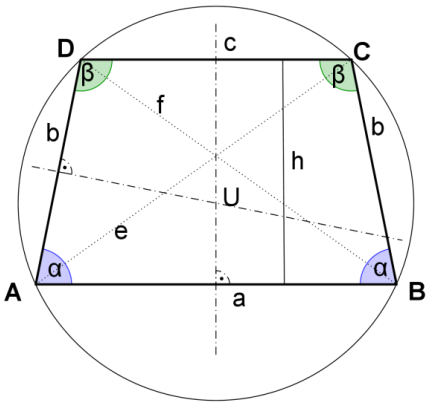


Antworten:

Es treffen immer gleiche Winkel aufeinander. Die Größe der Winkel ist 60°, 120° bzw. 90°.

Das rote Viereck ist eine Raute, weil alle vier Seiten gleich lang sind.

Spezielle Vierecke - Das gleichschenkelige Trapez



► Das **gleichschenkelige Trapez** hat **zwei verschieden lange, parallele Seiten** ***a*** und ***c*** mit Normalabstand ***h***. Die zwei gleich langen nicht-parallelen Seiten bezeichnet man mit ***b*** und man nennt sie auch **Schenkel**. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Das gleichschenkelige Trapez hat **zwei Diagonalen *e*** und ***f***. Sie sind **gleich lang** und ihr **Schnittpunkt** liegt **auf** der **Symmetrieachse**.

► Die **Streckensymmetrale der Seite *a*** ist **Symmetrieachse**.

► **Je zwei Winkel** im gleichschenkeligen Trapez **sind entweder gleich oder supplementär** (sie ergänzen einander auf 180°).

► Die **Winkelsumme** im gleichschenkeligen Trapez ist **360°**.

► Die **Streckensymmetralen der Schenkel** schneiden einander mit der Symmetrieachse in einem Punkt ***U***. Dieser ist **Mittelpunkt** des **Umkreises**.

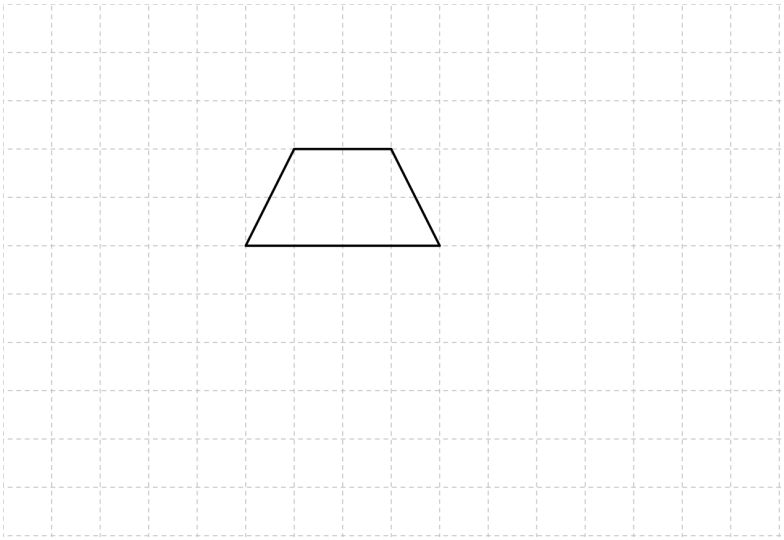
► Der **Flächeninhalt** kann beispielsweise berechnet werden mit $\boldsymbol{A = \frac{(a+c)}{2} \cdot h}$.

Parkettierung mit gleichschenkeligen Trapezen:

- Skizziere weitere, kongruente Trapeze, sodass die Ebene parkettiert wird!

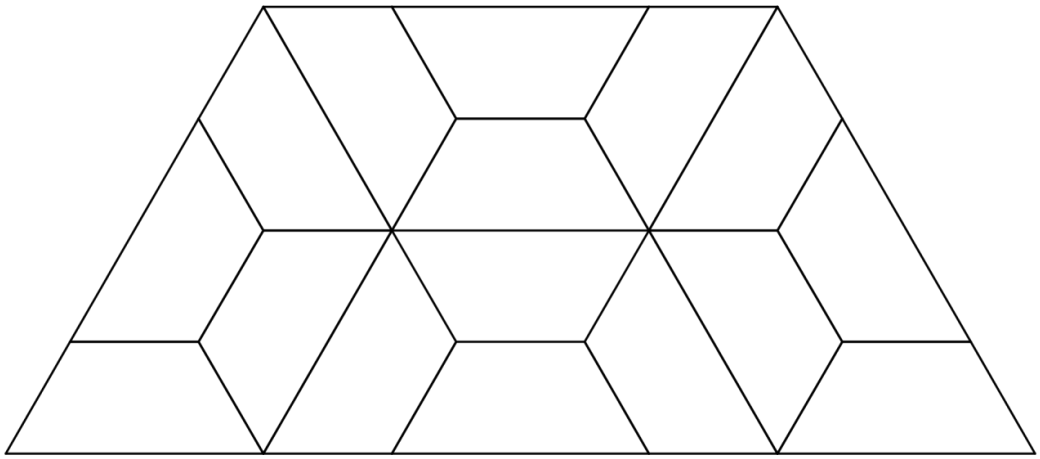
- Zeichne die Winkel α und β in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

- Verbinde zwei nebeneinanderliegende Trapeze! Kannst du die Flächenformel begründen?



Ein ganz spezielles gleichschenkeliges Trapez erlaubt eine weitere, andere Parkettierung:

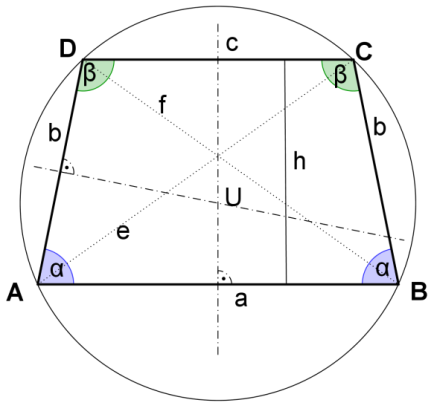
- Bestimme die Größe der Winkel ohne zu messen! (Hinweis: Nutze den vollen Winkel!)
- Betrachte die Länge der Seiten in einem Trapez. Welche sind gleich lang?
- Kannst du im Parkett die größeren Trapeze sehen? Aus wie vielen kleinen Trapezen bestehen sie?
  Wie verhält sich der Umfänge eines kleinen Trapezes zu dem eines Großen?
  Wie verhalten sich die Flächeninhalte der kleinen und großen Trapeze?



Antworten:

LÖSUNGSVORSCHLAG

Spezielle Vierecke - Das gleichschenkelige Trapez



► Das **gleichschenkelige Trapez** hat **zwei verschieden lange, parallele Seiten** ***a*** und ***c*** mit Normalabstand ***h***. Die zwei gleich langen nicht-parallelen Seiten bezeichnet man mit ***b*** und man nennt sie auch **Schenkel**. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

► Das gleichschenkelige Trapez hat **zwei Diagonalen** ***e*** und ***f***. Sie sind **gleich lang** und ihr **Schnittpunkt** liegt **auf** der **Symmetrieachse**.

► Die **Streckensymmetrale der Seite** ***a*** ist **Symmetrieachse**.

► **Je zwei Winkel** im gleichschenkeligen Trapez **sind entweder gleich oder supplementär** (sie ergänzen einander auf 180°).

► Die **Winkelsumme** im gleichschenkeligen Trapez ist **360°**.

► Die **Streckensymmetralen der Schenkel** schneiden einander mit der Symmetrieachse in einem Punkt ***U***. Dieser ist **Mittelpunkt** des **Umkreises**.

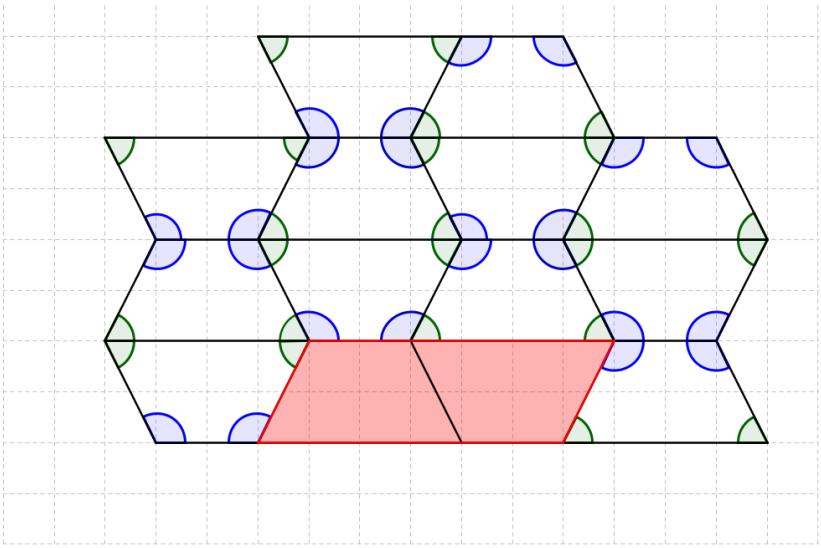
► Der **Flächeninhalt** kann beispielsweise berechnet werden mit $\boldsymbol{A = \frac{(a+c)}{2} \cdot h}$.

Parkettierung mit gleichschenkeligen Trapezen:

- Skizziere weitere, kongruente Trapeze, sodass die Ebene parkettiert wird!

- Zeichne die Winkel α und β in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?

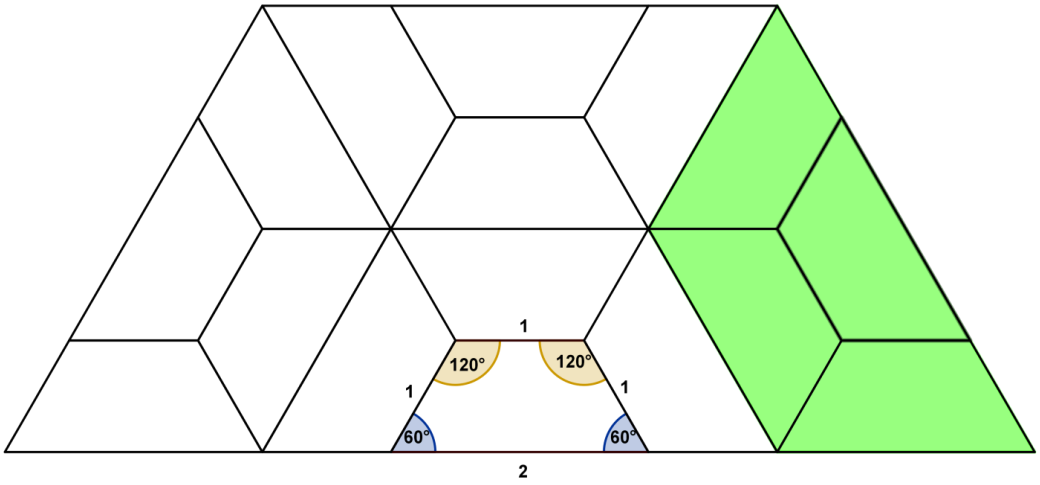
- Verbinde zwei nebeneinanderliegende Trapeze! Kannst du die Flächenformel begründen?



LÖSUNGSVORSCHLAG

Ein ganz spezielles gleichschenkeliges Trapez erlaubt eine weitere, andere Parkettierung:

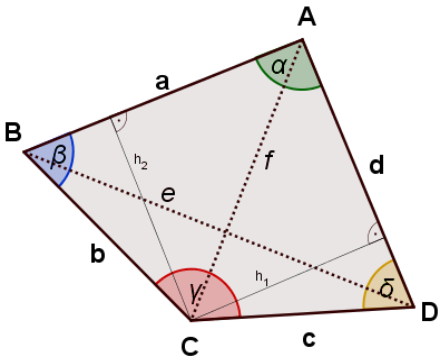
- Bestimme die Größe der Winkel ohne zu messen! (Hinweis: Nutze den vollen Winkel!)
- Betrachte die Länge der Seiten in einem Trapez. Welche sind gleich lang?
- Kannst du im Parkett die größeren Trapeze sehen? Aus wie vielen kleinen Trapezen bestehen sie?
  Wie verhält sich der Umfänge eines kleinen Trapezes zu dem eines Großen?
  Wie verhalten sich die Flächeninhalte der kleinen und großen Trapeze?



Antworten:

Die Winkel haben 60° bzw. 120°. Die längste Seite des Trapezes ist doppelt so Lange, wie die Länge der übrigen Seiten. Das Trapez lässt sich nämlich in drei gleichseitige Dreiecke zerlegen.
Die Umfänge verhalten sich wie 1:2.
Die Flächen verhalten sich wie 1:4.

Das allgemeine Viereck



► Das **allgemeine Viereck** hat vier verschieden lange Seiten ***a***, ***b***, ***c*** und ***d***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

►Das allgemeine Viereck hat **vier verschieden große Winkel** ***α***, ***β***, ***γ*** und ***δ***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f*** haben **unterschiedliche Länge**.

► Sind **alle Winkel kleiner 180°** heißt das Viereck **konvex**. Ist **ein Winkel größer 180°** heißt das Viereck **konkav**.

► Die **Winkelsumme** im allgemeinen Viereck beträgt **360°.**

► Die **Diagonale *f*** teilt das Viereck in zwei Dreiecke. Für den **Flächeninhalt** gilt beispielsweise: $\boldsymbol{A = \frac{1}{2}dh_1 + \frac{1}{2}ah_2}$. Dabei bezeichnen $\boldsymbol{h_1}$ und $\boldsymbol{h_2}$ die **Höhen der Dreiecke** auf den jeweiligen Seiten.

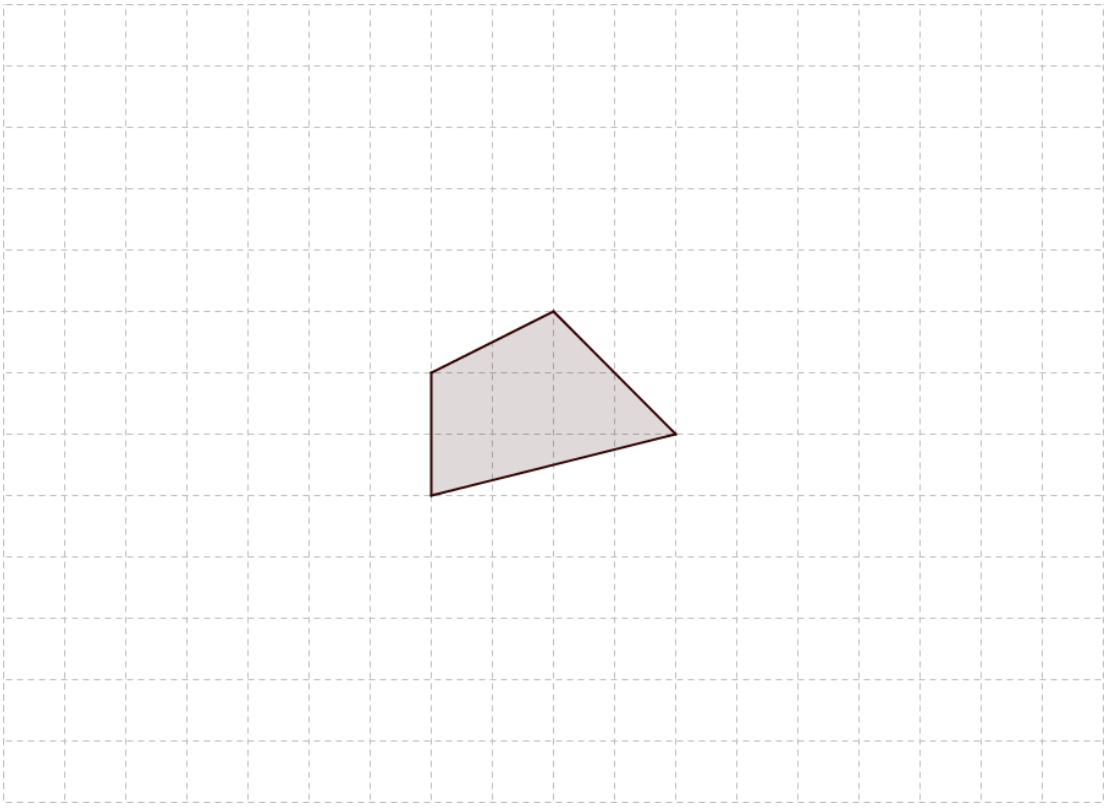
► Für die **Konstruktion** eines allgemeinen Vierecks sind mindestens **fünf Angaben** notwendig.

Parkettierung mit allgemeine Vierecken:

- Skizziere weitere, kongruente Vierecke, sodass die Ebene parkettiert wird!

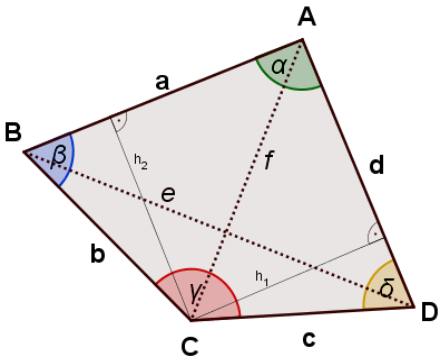
Anleitung: Führe an den Seitenmittelpunkten Punktspiegelungen der Eckpunkte durch!

- Zeichne die Winkel α, β, γ und δ in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?



LÖSUNGSVORSCHLAG

Das allgemeine Viereck



► Das **allgemeine Viereck** hat vier verschieden lange Seiten ***a***, ***b***, ***c*** und ***d***. Die Ecken heißen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D***.

►Das allgemeine Viereck hat **vier verschieden große Winkel** ***α***, ***β***, ***γ*** und ***δ***.

► Die **Diagonalen *e*** und ***f*** haben **unterschiedliche Länge**.

► Sind **alle Winkel kleiner 180°** heißt das Viereck **konvex**. Ist **ein Winkel größer 180°** heißt das Viereck **konkav**.

► Die **Winkelsumme** im allgemeinen Viereck beträgt **360°.**

► Die **Diagonale *f*** teilt das Viereck in zwei Dreiecke. Für den **Flächeninhalt** gilt beispielsweise:

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}dh_1 + \frac{1}{2}ah_2}$. Dabei bezeichnen $\boldsymbol{h_1}$ und $\boldsymbol{h_2}$ die **Höhen der Dreiecke** auf den jeweiligen Seiten.

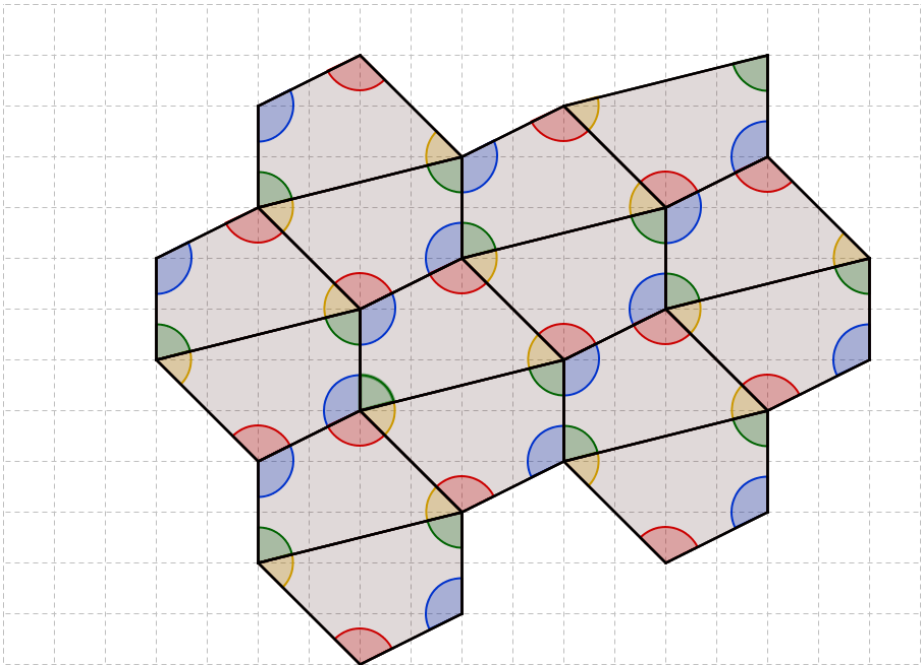
► Für die **Konstruktion** eines allgemeinen Vierecks sind mindestens **fünf Angaben** notwendig.

Parkettierung mit allgemeine Vierecken:

- Skizziere weitere, kongruente Vierecke, sodass die Ebene parkettiert wird!

Anleitung: Führe an den Seitenmittelpunkten Punktspiegelungen der Eckpunkte durch!

- Zeichne die Winkel α, β, γ und δ in verschiedenen Farben ein. Was siehst du?



Parkettierungen mit allg. Vierecken – Lösung Arbeitsblatt ALLG. VIERECK

8.3 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Parkettierungen mit regelmäßigen Polygonen«

ZIEL DER STUNDE

Die S&S sollen einfache Eigenschaften von Parketten kennen lernen.

WAS WIRD WIEDERHOLT

Untersuchen von regelmäßigen Vielecken und feststellen wesentlicher Eigenschaften derselben. Regelmäßige Vielecke skizzieren und konstruieren können.

ZEITRAHMEN UND AUFBAU

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-10	WH regelmäßige Vielecke	Frontalunterricht	
10-15	Besprechung arch. Parkette	Gespräch	Abbildung
15-25	platonische Parkette	Einzelarbeit	Arbeitsblatt
25-35	Innenwinkel reg. Vielecke	Gruppenarbeit	Tafel
35-45	Konstruktion plat. Parkette	Einzelarbeit	
45-50	Schlussbesprechung	Gespräch	

VORSTELLUNGEN ZUM ABLAUF

Einstieg in die Stunde: Wiederholung der regelmäßigen Vielecke, beginnend beim regelmäßigen Dreieck. Wiederholt wird die Definition, Winkelsumme und Größe der Innenwinkel sowie Symmetrieeigenschaften.

Als nächstes wird die Idee vermittelt Parkette mit regelmäßigen Vielecken zu konstruieren. Dazu wird den S&S ein Beispiel gezeigt, nämlich eine der acht archimedischen Parkettierungen. Das Bild kann an die Wand projiziert werden oder als Kopie ausgeteilt werden. Mit den S&S wird nun besprochen:

- Welche regelmäßigen Vielecke vorkommen.
- Welche Seitenlängen diese haben.
- Wie diese Vielecke angeordnet sind.

Als nächstes wird die Frage diskutierte, welche regelmäßigen Vielecke alleine die Ebene parkettieren? Falls die S&S nicht ohnehin alleine auf das regelmäßige Dreieck, Viereck und Sechseck kommen, ist es Aufgabe der Lehrperson sie zu diesen Antworten hinzuführen. Reizwörter dafür sind beispielsweise kariertes Heft, Bienenwaben, Badezimmerfliesen, ...

Mit den S&S wird nun der Frage nachgegangen, warum es nur diese drei Parkette geben kann. Dazu erhalten die S&S ein Arbeitsblatt (siehe S. 98). Auf dem Blatt finden sich Abbildungen der besagten Parkette und Arbeitsaufträge. Das Arbeitsblatt soll alleine gelöst werden, die Lehrperson macht gegen Ende dieses Unterrichtsteils

eine Auflösung für alle.

Die Bedingung, dass die Innenwinkel immer 360° ergeben müssen, wird nun weiter diskutiert. Ziel ist, dass die S&S verstehen, dass es nur drei solche (platonischen) Parkette geben kann. Auf der Tafel wird eine Tabelle mit den Innenwinkeln der ersten zehn regelmäßigen Vielecke erstellt. Für jeden gefunden Innenwinkel wird geprüft, ob 360 ganzzahliges Vielfaches davon ist. Die Unmöglichkeit einer platonischen Parkettierung mit regelmäßigen Fünfecken soll außerdem noch an der Tafel (mittels Freihandskizze) demonstriert werden.

Um den Stoff nochmals zu festigen und um das Konstruieren zu üben sollen die S&S die drei platonischen Parkette selbst auf einem blanken Blatt Papier zeichnen. Zunächst soll ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Sechseck mit einer Seitenlänge von drei Zentimetern konstruiert werden. Von dieser Figur ausgehend soll dann das Parkett erzeugt werden. Es ist Sache der S&S herauszufinden, wie man »am schnellsten« parkettieren kann.

Ganz zum Schluss fasst die Lehrperson nochmals alle wichtigen Punkte knapp zusammen und gibt den S&S wie immer die »take-home-message« mit.

TAKE HOME MESSAGE

Nur das regelmäßige Dreieck, Viereck und Sechseck parkettiert die Ebene!

UNTERLAGEN

- Parkettierungen mit regelm. Polygonen — Arbeitsblatt 1/2
- Parkettierungen mit regelm. Polygonen — Arbeitsblatt 2/2
- Parkettierungen mit regelm. Polygonen — Lösungsvorschlag

Untersuche die Parkette! Gehe so vor:

- *Zähle, wie viele Vielecke an einem Knotenpunkt immer zusammen treffen!*
- *Wie groß sind die Innenwinkel der Vielecke?*
- *Addiere die Innenwinkel an einem Knotenpunkt. Was haben alle drei Parkette gemeinsam?*

- Anzahl der Vielecke an einem Knotenpunkt:

Es treffen immer ___ Dreieck zusammen.
Es treffen immer ___ Vierecke zusammen.
Es treffen immer ___ Sechsecke zusammen.

- Größe der Innenwinkel

Der Innenwinkel des regelmäßigen Dreiecks hat ___°.
Der Innenwinkel des regelmäßigen Vierecks hat ___°.
Der Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks hat ___°.

- Summe der Innenwinkel an einem Knotenpunkt:

Beim 3-Eck-Parkett:

= ___ °

Beim 4-Eck-Parkett:

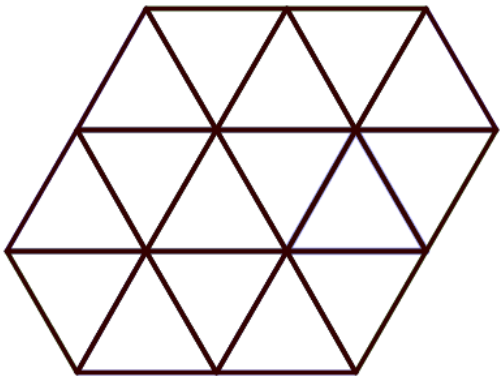
= ___ °

Beim 6-Eck-Parkett:

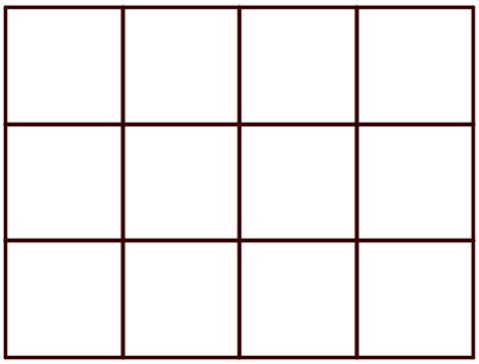
= ___ °

Alle Parkette haben gemeinsam: _____

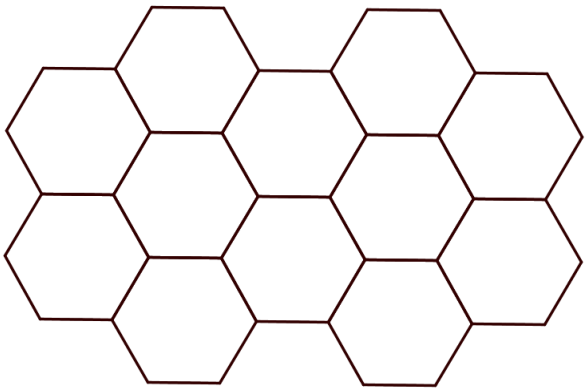
3-Eck-Parkett



4-Eck-Parkett



6-Eck-Parkett



Parkettierungen mit regelm. Polygonen – Arbeitsblatt 2/2

LÖSUNGSVORSCHLAG
Untersuche die Parkette! Gehe so vor:

- *Zähle, wie viele Vielecke an einem Knotenpunkt immer zusammen treffen!*
- *Wie groß sind die Innenwinkel der Vielecke?*
- *Addiere die Innenwinkel an einem Knotenpunkt. Was haben alle drei Parkette gemeinsam?*

- Anzahl der Vielecke an einem Knotenpunkt:

Es treffen immer ***sechs*** Dreiecke zusammen.

Es treffen immer ***vier*** Vierecke zusammen.

Es treffen immer ***drei*** Sechsecke zusammen.

- Größe der Innenwinkel

Der Innenwinkel des regelmäßigen Dreiecks hat ***60°.***

Der Innenwinkel des regelmäßigen Vierecks hat ***90°***.

Der Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks hat ***120°***.

- Summe der Innenwinkel an einem Knotenpunkt:

Beim 3-Eck-Parkett:

60°+60°+60°+60°+60°+60° = 360 °

Beim 4-Eck-Parkett:

90°+90°+90°+90° = 360 °

Beim 6-Eck-Parkett:

120°+120°+120° = 360 °

Alle Parkette haben gemeinsam: *Die Summe der Innenwinkel an einem Knoten ist immer 360°.*

8.4 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen«

ZIEL DER DOPPELSTUNDE

Konstruieren von parkettierenden allgemeinen Sechs- und Fünfecken. Ein Plakat soll entworfen werden.

WAS WIRD WIEDERHOLT

Allgemeines Konstruieren von Figuren.

ZEITRAHMEN UND AUFBAU - erste Stunde

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-5	Einstieg	Vortrag	Tafelskizze
5-30	Konstruktion	Einzelarbeit	A5 Papier
30-45	Vertiefung	Gespräch	Tafel
45-50	Vorschau		

ZEITRAHMEN UND AUFBAU - zweite Stunde

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-10	ausschneiden	Einzelarbeit	
10-20	parkettieren	Einzelarbeit	
20-50	Plakat gestalten	Gruppenarbeit	

VORSTELLUNGEN ZUM ABLAUF

Erste Stunde: Als Einstieg wird der Begriff der Parkettierung geklärt. Es eignet sich dafür die Parkettierung mit dem regelmäßigen Sechseck, weil dieses von z. B. Bienenwaben her bekannt ist. Den S&S wird erklärt, das es eine ganze Reihe von anderen Sechsecken und auch Fünfecken gibt, die auch die Ebene parkettieren.

Der Arbeitsauftrag an die S&S lautet, ein bestimmtes Fünfeck bzw. Sechseck anhand von gewissen Angaben zu konstruieren. Insgesamt gibt es 14 Fünfecke und drei Sechsecke zu konstruieren, nämlich genau jene aus dem Kapitel »Parkettierungen mit allgemeinen Polygonen«. Die S&S ziehen die Angabe zufällig aus einem Gefäß. Die Konstruktion erfolgt dann auf blankem A5 Papier und soll dort drei bis fünf Mal durchgeführt werden.

Nach dem Arbeitsschritt werden die Konstruktionen abgesammelt. Es folgt nun ein theoretischer Part, in dem Eigenschaften von Polygonen wiederholt werden. Die S&S werden über die nächste Stunde informiert. Die Lehrperson bereitet für die nächste Stunde die Vorlagen vor und kopiert sie einige Male.

Zweite Stunde: Die Kopien werden an die S&S ausgegeben und die Figuren sauber ausgeschnitten. Danach werden sie so zusammengelegt, dass eine Parkettierung

entsteht.

Mit allen gewonnenen Parketten wird ein Plakat gestaltet. Auf dem Plakat werden neben der Definition einer Parkettierung noch Aussagen über Polygone und Parkette festgehalten (z. B. Winkelsummen, Symmetrie, etc.). Das Plakat wird zum Schluss an einer passenden Stelle aufgehängt.

TAKE HOME MESSAGE

Parkettieren macht Spaß!

8.5 Unterrichtsvorschlag zum Kapitel »Symmetrien von Parketten«

ZIEL DER STUNDE

S&S sollen lernen ein Objekt gezielt auf Symmetrien zu untersuchen und anschließend selbst symmetrische Objekte entwerfen.

WAS WIRD WIEDERHOLT

Figuren skizzieren und konstruieren können. Kongruente Figuren herstellen können.

ZEITRAHMEN UND AUFBAU

Zeit	Inhalt	Methode	Material
0-10	Einführung	Vortrag	Abbildung Bandorn.
10-15	Diskussion	Gespräch	Abbildung Zaun
15-25	Entwerfen Zäune	Einzelarbeit	kariertes Papier
25-35	Präsentieren Bandorn.	Vortrag	Abbildung
35-50	Analyse Zäune	Gruppenarbeit	eigene Zeichnungen

VORSTELLUNGEN ZUM ABLAUF

Anhand eines einfachen Bandornaments, das an die Wand projiziert oder ausgeteilt wird (siehe S. 106), werden die S&S mit dem Thema konfrontiert. Der Aspekt der Unendlichkeit wird thematisiert und ebenso die Kongruenzabbildungen, die das Bandornament auf sich selbst abbilden.

Im nächsten Schritt werden gemeinsam mit den S&S Ideen gesammelt, wo in der Umwelt solche Objekte auftreten. Einige mögliche Antworten hier wären: Mauern, Muster auf Kleidungsstücken, Wanddekorationen, bei Schmuck, bei Tätowierungen und Zäunen. Vorteile von Symmetrie sollen hier ebenfalls diskutiert werden. Als weiteres Demonstrationsbeispiel wird den S&S ein Bild eines Gartenzauns vorgelegt (siehe S. 107).

Im nächsten Teil des Unterrichts entwerfen die S&S eigene Gartenzäune auf kariertem Papier. Bedingung dabei ist, das ausschließlich Polygone dafür verwendet werden. Einige Vorschläge finden sich bei den Unterrichtsmaterialien und sollten den S&S unbedingt vorher gezeigt werden (siehe S. 108).

Nach dem kreativen Zwischenpart bekommen die S&S die sieben Typen Bandornamentgruppen präsentiert und vorgestellt. Für jede Bandornamentgruppe wird ein Repräsentant vorgestellt. Dies geschieht mit der Abbildung 7.8 aus Kapitel »Symmetrien von Parketten«. Zu jedem Repräsentanten werden die Symmetrien erläutert. Besonders auf die Gleitspiegelachsen muss unbedingt genau eingegangen werden. Der Begriff »Translation« muss auch erklärt werden.

Nach diesem eher trockenen Teil versuchen die S&S die Symmetrie ihrer entworfenen

Zäune zu bestimmen anhand des Algorithmus aus Abbildung 7.9. Die Abbildung ist nochmals bei den Unterrichtsmaterialien beigefügt (siehe S. 109). Für diesen Unterrichtsteil benötigen die S&S sicherlich viel Hilfe. Es empfiehlt sich die S&S in Gruppen arbeiten zu lassen.

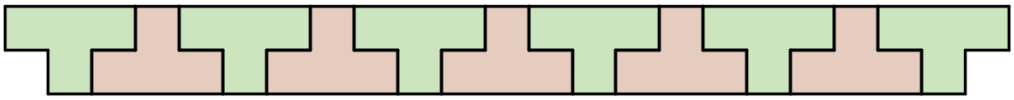
TAKE HOME MESSAGE

Auch in Gartenzäunen steckt Mathematik!

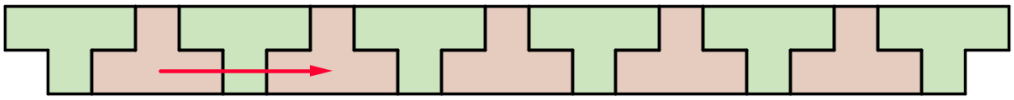
UNTERLAGEN

- Die Geometrie der Gartenzäune – Beispiel zur Einführung
- Die Geometrie der Gartenzäune – Zaun
- Die Geometrie der Gartenzäune – Vorschläge zum Zeichenauftrag
- Die Geometrie der Gartenzäune – Algorithmus

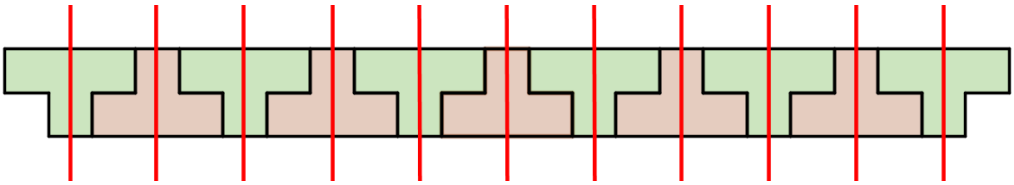
Beispiel eines Bandornaments



Das Bandornament besteht aus lauter gleichen Achtecken in zwei Farben. Wir denken uns das Bandornament nach links und rechts ohne Ende.



Durch Verschieben des Bandornaments entlang des roten Pfeils bleibt es unverändert.

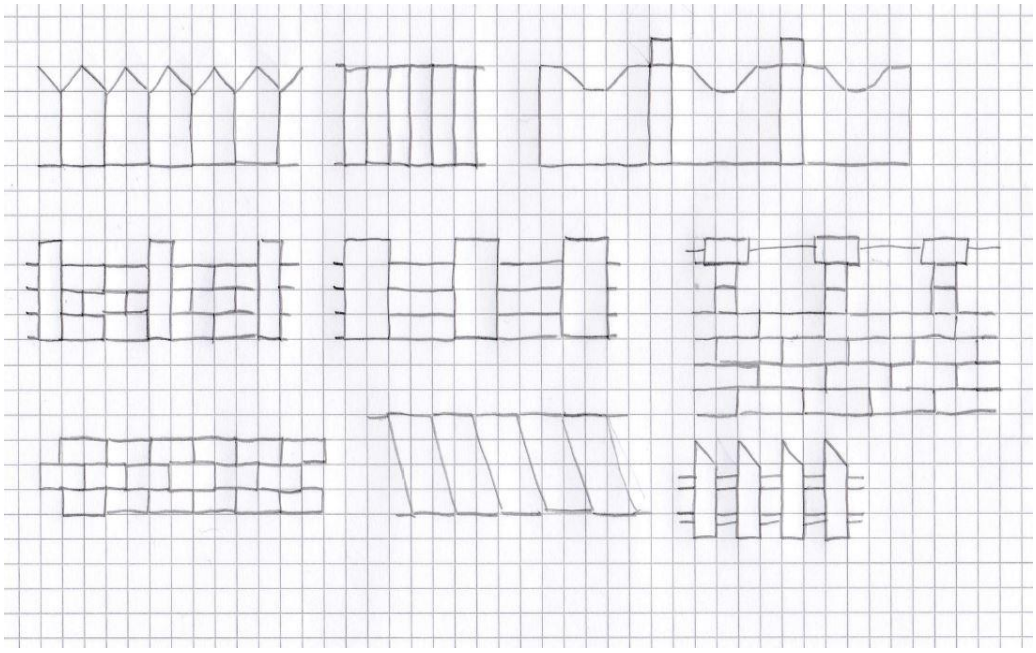


Durch Spiegeln des gesamten Bandornaments an den rot angedeuteten Spiegelachsen bleibt es auch unverändert.

Ein Gartenzaun als Beispiel für ein Bandornament

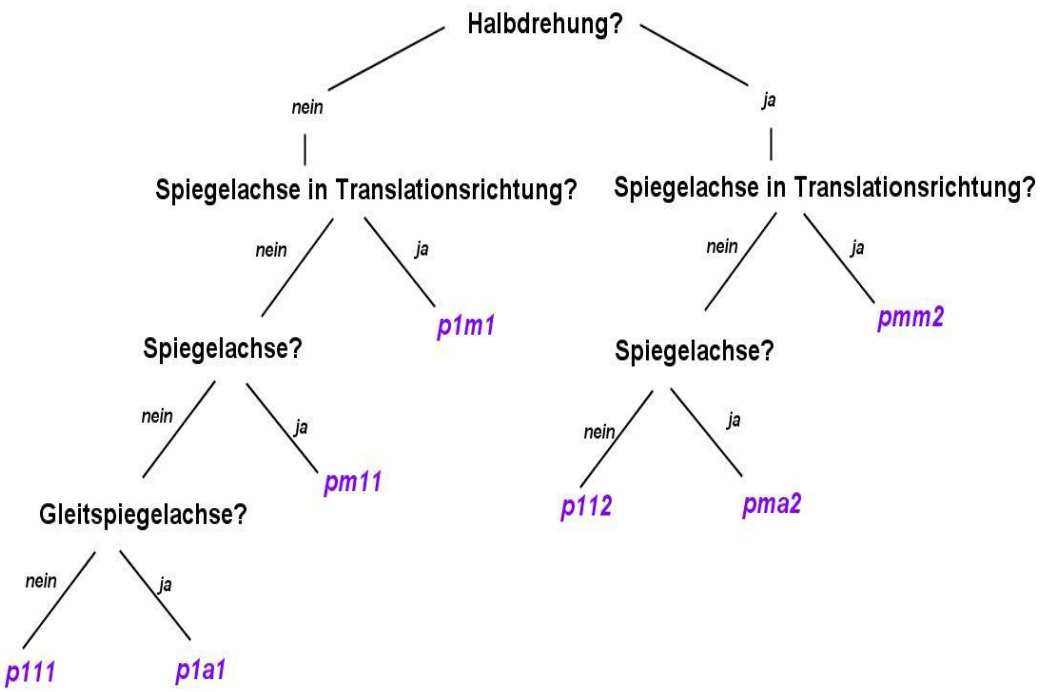
Die Geometrie der Gartenzäune - Zaun

Vorschläge für Gartenzäune



Die Geometrie der Gartenzäune – Vorschläge zum Zeichenauftrag

Anleitung zum Auffinden der passenden Symmetriegruppe



Die Geometrie der Gartenzäune – Algorithmus

Literaturverzeichnis

[1] Achleitner, Renate; Ratzenberger-Klampfer, Anita; Weikinger, Maria: Ganz klar Mathematik 2. Verlag Jugend & Volk GmbH, Wien 2006

[2] Benson, Donald C.: A Smoother Pebble - Mathematical Explorations. Oxford University Press, 2003 (1St Edition)

[3] Bigalke, Hans-Günther; Wippermann, Heinrich: Reguläre Parkettierungen mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994.

[4] Blattadern (Abbildung)
`http://images.fotocommunity.de/bilder/natur/pflanzen-pilze-flechten/blattadern-376f9298-971a-4462-88ed-b700cf4c039e.jpg`
(besucht im Oktober 2014)

[5] Dorfmayr, Anita; Mistelbacher, August; Nussbaumer, Alfred: MatheBuch. Verlag Neues Schulbuch, Wien 2006

[6] Eichler, Klaus-Peter: An Parkettierungen wachsen und lernen - Grundschule Mathematik. Friedrich Verlag, Selze 2009
`http://www.mathematikus.de/fileadmin/mathematikus_content/Dokumente/10_Arbeit_mit_Parketten.pdf`
(besucht im Juli 2014)

[7] Felderhaut des Menschen (Abbildung)
`http://www.scinexx.de/redaktion/wissen_aktuell/bild9/skin_structureg.jpg`
(besucht im Oktober 2014)

[8] Fjodorow, Evgraf Stepanovic: Symmetrie in the Plane. Zapiski Rus. Mineralog. Obscestva, Ser. 2, 28, 345–390 + 2 plates, 1891

[9] Franke, Marianne: Didaktik der Elementargeometrie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin 2000

[10] Gauß, Carl Friedrich: Disquisitiones Arithmeticae. Erschienen bei Gerhard Fleischer, Leipzig 1801

[11] Gorski, Hans-Joachim; Müller-Philipp, Susanne: Leitfaden Geometrie – Für Studierende der Lehrämter. Springer Verlag, Wiesbaden 2014 (6., überarb. u. erw. Aufl.)

[12] Grab von Hafez (Abbildung)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Roof_hafez_tomb.jpg/1024px-Roof_hafez_tomb.jpg
(besucht im Oktober 2014)

[13] Grünbaum, Branko; Shephard, Geoffrey Colin: Tilings and Patterns. W.H.Freeman, New York 1987

[14] Hardfeldt, Christian; Henning, Herbert: Muster, Flächen, Parkettierungen – Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht, Magdeburg 2002
http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/parkett.pdf
(besucht im Juni 2014)

[15] Heinrich, Frank: Parkettierungen I. Universität Braunschweig
https://www.tu-braunschweig.de/idm/mitarbeiter/professoren/heinrich
(besucht im Juli 2014)

[16] Henning, Herbert; Hartfeldt, Christian: Muster, Flächen, Parkettierungen – Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht.
http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/praesentation_parkettierung.pdf
(besucht im August 2014)

[17] Hermes, Johann Gustav: Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile. In: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. Göttingen 1894, S. 170–186

[18] Hierarchie der Polygone (Abbildung)
ttp://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4e/Polygon_types_de.svg/750px-Polygon_types_de.svg.png
(besucht im Juli 2014)

[19] Hilbert, David: Mathematical Problems. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, no. 10 (1902), 437–479. Earlier publications (in the original German) appeared in Göttinger Nachrichten, 1900, 253–297, and Archiv der Mathematik und Physik, 3dser., vol. 1 (1901), 44–63, 213–237.
http://www.ams.org/journals/bull/1902-08-10/S0002-9904-1902-00923-3/S0002-9904-1902-00923-3.pdf
(besucht im Oktober 2014)

[20] Hofbauer, Franz: Geometrie und Lineare Algebra. Vorlesung für das Lehramtsstudium, Universität Wien 2014

[21] Homepage des Bundesministeriums für Bildung und Frauen – Lehrpläne der AHS Unterstufe
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
(besucht im Juli 2014)

[22] Homepage des Bundesministeriums für Bildung und Frauen – Lehrplan der Volksschule
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_vs_gesamt_14055.pdf?4dzgm2
(besucht im Juli 2014)

[23] Homepage des Instituts für Technologie in Karlsruhe
http://las.physik.kit.edu/downloads/Kap_9-11.pdf
(besucht im Mai 2014)

[24] Homepage von Holger Ullmann – Tetraktys
http://tetraktys.de/geometrie-5.html
(besucht im Oktober 2014)

[25] Interaktive Übung von Eugen Libowitzky, Universität Wien, Institut für Mineralogie
www.univie.ac.at/Mineralogie/docs/2D_krist_Punktgruppen_Uebung.pps (besucht im Juni 2014)

[26] Jank, Walther: Ornamentgruppen. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft Nr. 15, (Lehrerfortbildungstagung 1987)
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1987%20Band%2015/Jank1987.pdf (besucht im Juni 2014)

[27] Kershner, R. B.: On paving the plane. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 839-844

[28] Koller, Jürgen: mathematische Bastelein
http://www.mathematische-basteleien.de/parkett.htm
(besucht im Juni 2014)

[29] Kopsky, Vojtech; Litvin, Daniel B.: Nomenclature, Symbols and Classification of the Subperiodic Groups – Report of a Working Group of the International Union of Crystallography Commission on Crystallographic Nomenclature.
http://www.bk.psu.edu/faculty/litvin/Download/D_IUCr_Report.pdf
(besucht im Juni 2014)

[30] Koth, Maria: Ornamente im GZ Unterricht. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft Nr. 18, (Lehrerfortbildungstagung 1990)
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1990%20Band%2018/Koth1990.pdf
(besucht im Juni 2014)

[31] Koth, Maria: Schulmathematik 2 – Geometrie. Vorlesung für das Lehramtsstudium, Universität Wien 2014

[32] Nibis-Schule
http://nibis.ni.schule.de/~ursula/Mathe/Geometrie/Parkettierung.htm
(besucht im Juni 2014)

[33] Ottenschläger, Johann; Ratzinger, Wolfgang; Kreindl, Rudolf; Wagenhuber, Manfred: Mathematik 2. Veritas Verlag, Linz 1992

[34] Pädagogische Hochschule Zentralschweiz Luzern
http://www.dieterortner.ch/luzern/parkettierung.pdf
(besucht im Juli 2014)

[35] Parkettierung bestehend aus Dreiecken (Abbildung)
http://www.hjcaspar.de/hpxp/parkett/braun.png
(besucht im Oktober 2014)

[36] Paucker, Magnus Georg: Geometrische Verzeichnung des regelmäßigen Siebzehn-Ecks und Zweyhundersiebenundfünfzig-Ecks in den Kreis. Jahresverhandlungen der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, Band 2, 1822, S. 160–219

[37] Pegg Eduard: mathpuzzle
http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html
(besucht im Juni 2014)

[38] Reichel, Hans-Christian; Humenberger Hans (Hrsg.): Das ist Mathematik 2. öbv, Wien 2008

[39] Reinhardt, Karl: Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. Inaugural-Dissertation, Univ. Frankfurt a.M. R. Noske, Borna und Leipzig, 1918

[40] Repräsentanten aller 14 Typen parkettierender konvexer Fünfecke (Abbildung)
http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html
(besucht im Oktober 2014)

[41] Sphinx (Abbildung)
http://euler.slu.edu/escher/upload/7/7e/Sphinx-substitution-tiling.png
(besucht im Dezember 2014)

[42] Steiner, Gerald: MatheMaster, Mathematik für die 6. Schulstufe. Reniets Verlag GmbH, Wien 2001

[43] Trockenrisse (Abbildung)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/Desertground_Mojave_Desert.JPG
(besucht im September 2014)

[44] Wikipedia – die freie Enzyklopädie: Ebene kristallographische Gruppe
http://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_kristallographische_Gruppe
(besucht im Dezember 2014)

[45] Wikipedia – die freie Enzyklopädie: Goldener Schnitt
http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt
(besucht im Dezember 2014)

[46] Willimann, Bernd: Homepage
http://www.willimann.org/A07020-Parkettierungen-Theorie.pdf
(besucht im Juni 2014)

LEBENSLAUF

Persönliche Angaben

Name: Aaron Daniel Oberlerchner
Geburt: 20.02.1985 in Vöcklabruck, Oberösterreich
Vater: Siegfried Oberlerchner; evang. Pfarrer
Mutter: Hanna Oberlerchner (geb. Burgstaller); Religionslehrerin

Ausbildung

2010 – 2014	Lehramtsstudium »Mathematik« und »Biologie und Umweltkunde« an der Universität Wien
2005 – 2010	Studiengang »Molekularbiologie« an der Universität Wien
1995 – 2004	Bundesrealgymnasium Schloss Wagrain in Vöcklabruck
1991 – 1995	Volkschule Attersee

Zivildienst

04.10.2004 – 30.09.2005	Seniorenheim St. Georgen im Attergau