



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

**Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht**

Eine Umsetzung kompetenzorientierten Lernens mit Unterrichtsbeispielen

Verfasserin

**Pamina Siegel**

angestrebter akademischer Grad

**Magistra der Naturwissenschaften**

(Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik und  
Unterrichtsfach Psychologie/Philosophie

Betreuer: Dr. Andreas Ulovec



## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, April 2015

# Kurzfassung

*Entdeckendes Lernen* ist eine Unterrichtsmethode, welche Schülerinnen und Schülern erlaubt, vorwiegend selbstständige Lernerfahrungen zu machen. Denn Lernen ist ein aktiver Prozess und verändert sich im Laufe der Schulbahn. Während Säuglinge und Kleinkinder mit Freude lernen, verlieren Schulkinder, welche plötzlich lernen müssen, die Lust daran. Hier können engagierte Lehrkräfte mit spannenden Unterrichtsformen die Freude am Lernen fördern oder sogar wecken. Die vorliegende Arbeit setzt deshalb an diesem Ansatz an und beinhaltet neben der Begriffsklärung und theoretischen Vorgangsweise von *Entdeckendem Lernen* auch den lerntheoretischen und bildungstheoretischen Hintergrund. Auf Basis eines Inhaltsbereichs der Bildungsstandards (I3: *Geometrische Figuren und Körper*) wurde schließlich für jede Schulstufe der Sekundarstufe I eine kompetenzorientierte Unterrichtsplanung mit der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* erarbeitet.

## Abstract

*Discovery learning* is a teaching method that allows students to make their own learning experiences. Learning is an active process and changes during life. While young children learn with joy, school children lose interest in it because they have to learn. That's where committed teachers can awake the interest in learning with exciting forms of teaching like *discovery learning*. This is the reason why this paper starts with a definition of this teaching method and explains the procedure. Additionally the psychological and educational background of *discovery learning* will be clarified. Finally there will be a competence – based lesson plan for each grade of secondary education based on the content area of geometry.

# Danksagung

Zunächst bedanke ich mich an dieser Stelle bei allen Personen, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und vor allem motiviert haben.

Ganz besonders gilt dieser Dank Herrn Dr. Andreas Ulovec, der meine Arbeit und somit auch mich betreut hat. Durch beharrlich kritisches Hinterfragen und konstruktive Kritik verhalf er mir zu einer durchdachten These und Fragestellung.

Daneben gilt mein Dank BA Sarah Herzog, welche in zahlreichen Stunden Korrektur gelesen hat. Viele Kommata, Satzstellungen und Rechtschreibfehler flogen dank ihrer Hilfe hinaus, außerdem konnte sie als Fachfremde immer wieder zeigen, wo noch Erklärungsbedarf bestand. Auch meiner guten Freundin und Englisch-Studentin Marietta Stroh danke ich, welche die englische Fassung des Abstracts auf Ausdruck überprüfte.

Danke auch an meine liebe Freundin und Studienkollegin Bianca Eßletzbichler, mit welcher ich fast alle Lehrveranstaltungen und Prüfungen gemeinsam absolvieren durfte. Durch deine zielgerichtete und sogleich liebevolle Art hast du mich oft im Studium motiviert und inspiriert.

Nicht zuletzt möchte ich auch meinen Eltern danken, die mir nicht nur während der Schulzeit, sondern auch im Studium stets helfend zur Seite standen und mir dieses überhaupt erst ermöglicht haben. Danke für eure liebevolle Unterstützung und Motivation.

Schließlich danke ich noch meinem Lebenspartner und besten Freund Christoph Löwy, der mich immer aufgemuntert und motiviert hat, egal wie verzweifelt ich war. Dein Verständnis und die Ermutigungen bedeuten mir sehr viel. Danke, dass du immer für mich da bist!

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Einleitung .....                                               | 8  |
| 2. Entdeckendes Lernen .....                                      | 9  |
| 2.1. Begriffsbestimmung.....                                      | 9  |
| 2.2. Geschichtlicher Hintergrund .....                            | 11 |
| 2.3. Lernverständnis und relevante lerntheoretische Modelle ..... | 13 |
| 2.3.1. Konstruktivistische Lerntheorie.....                       | 14 |
| 2.3.2. Jean Piaget – Theorie der kognitiven Entwicklung .....     | 17 |
| 2.4. Entdeckendes Lernen im Unterricht .....                      | 19 |
| 2.4.1. Vorgehensweise.....                                        | 20 |
| 2.4.2. Bedeutung für SchülerInnen und Lehrkräfte .....            | 23 |
| 2.4.3. Abgrenzung zu anderen Unterrichtsmethoden .....            | 24 |
| 2.4.4. Vor- und Nachteile .....                                   | 25 |
| 3. Lehrplanbezug .....                                            | 29 |
| 4. Kompetenzorientierter Unterricht und Bildungsstandards .....   | 33 |
| 4.1. Begriffsbestimmung.....                                      | 33 |
| 4.1.1. Was sind Kompetenzen? .....                                | 33 |
| 4.1.2. Was sind Bildungsstandards? .....                          | 36 |
| 4.2. Bildungsstandards im Mathematikunterricht .....              | 39 |
| 4.2.1. Handlungsbereiche .....                                    | 41 |
| 4.2.2. Inhaltsbereiche.....                                       | 42 |
| 4.2.3. Komplexitätsbereiche .....                                 | 43 |
| 4.3. Bedeutung für den Unterricht .....                           | 43 |
| 5. Unterrichtsplanungen .....                                     | 47 |
| 5.1. Unterrichtsplanung – 1. Klasse (5.Schulstufe) .....          | 49 |
| 5.2. Unterrichtsplanung – 2.Klasse (6.Schulstufe).....            | 58 |
| 5.3. Unterrichtsplanung – 3.Klasse (7.Schulstufe).....            | 67 |
| 5.4. Unterrichtsplanung – 4.Klasse (8.Schulstufe).....            | 78 |
| 6. Zusammenfassung und Schlussfolgerung .....                     | 90 |
| 7. Verzeichnisse .....                                            | 91 |
| 7.1. Literaturverzeichnis .....                                   | 91 |
| 7.2. Abbildungsverzeichnis.....                                   | 96 |
| Lebenslauf.....                                                   | 97 |

# 1. Einleitung

Im Zuge meiner Schulzeit und meines Studiums bekam ich oft mit, wie Lernende fast einschlafen, wenn sie mathematischen Stoffinhalt quasi auf dem Silbertablett serviert bekommen. Um dieser Tatsache in meiner zukünftigen Schulkarriere entgegenzuwirken, stellte ich mir die Frage, wie ich es erreichen kann, dass Schülerinnen und Schüler selbst lernen wollen bzw. wie ich sie als Lehrkraft zum Lernen motivieren kann. Eine mögliche Antwort bat mir die Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen*, da sie Schülerinnen und Schüler dazu motiviert, selbst nachzuforschen und nachhaltig zu lernen.

In vorliegender Arbeit erforschte ich deshalb auch selbst, was genau *Entdeckendes Lernen* ist und versucht folgende unterrichtsrelevante Fragen zu beantworten:

- Was versteht man unter dem Begriff *Entdeckendes Lernen*?
- Wie ist diese Methode entstanden?
- Welche lerntheoretischen Modelle stecken dahinter?
- Wie ist diese Methode in den Unterricht zu integrieren?

Ein wichtiger Aspekt dieser Unterrichtsmethode ist, was und wie viel von den behandelten Stoffgebieten von den Lernenden behalten wird. Diesen Aspekt griff auch das österreichische Unterrichtsministerium aufgrund schlechter Ergebnisse bei internationalen Schulvergleichen auf. Dabei konzentrierte man sich darauf, dass Schülerinnen und Schüler mit jenen Fähigkeiten ausgestattet werden, die sie für selbstständiges und lebenslanges Lernen benötigen. So kamen grundlegende Elemente des Unterrichtsprinzips *Entdeckendes Lernen* in den neu überarbeiteten Lehrplan. Es stellte sich also nicht mehr die Frage, was Schülerinnen und Schüler gelernt haben, sondern was sie davon auch können. So entwickelten sich der kompetenzorientierte Unterricht und die heute schon manifestierten Bildungsstandards.

Schlussendlich ist es natürlich wichtig, die zu Beginn gestellte Frage wie man Schülerinnen und Schüler zum Lernen motivieren kann, zu beantworten. Eine mögliche Antwort auf die Frage werden die von mir erstellten kompetenzorientierten Unterrichtsplanungen mit der Methode *Entdeckendes Lernen* geben. Dabei habe ich mich jedoch auf den dritten Inhaltsbereich der Bildungsstandards *Geometrische Figuren und Körper* beschränkt. Diese Diplomarbeit gibt also nicht zu jedem Thema einen passenden Unterrichtsvorschlag, sondern zeigt eine mögliche Anwendung kompetenzorientierten Lernens.

## 2. Entdeckendes Lernen

*Entdeckendes Lernen* ist eine Unterrichtsmethode, welche Lernenden gestattet, „weitgehend selbstständige Erfahrungen zu machen, Probleme zu lösen und Begriffe zu erarbeiten“ (Klewitz 1977, S.8). Entstanden ist dieses Konzept ursprünglich aus der Begriffsbildungsforschung des Psychologen Jerome Seymour Bruner (geb. 1915). Dieser leitete mit seinen Forschungen die kognitive Wende der allgemeinen Psychologie in Amerika ein und leistete wichtige Beiträge zur kognitiven Lernpsychologie.

In diesem Kapitel wird zunächst erklärt was allgemein unter *Entdeckendem Lernen* verstanden wird und wie diese Unterrichtsmethode entstanden ist. Anschließend wird auf das dem Konzept zugrundeliegende Lernverständnis näher eingegangen, welches auch im Lehrplan (siehe Kapitel 3) als grundlegendes Lernverständnis angenommen wird. Abschließend wird die allgemeine Vorgangsweise im Unterricht, die Bedeutung des Konzepts für Schülerinnen und Schüler bzw. Lehrkräfte und die Abgrenzung bzw. Vor- und Nachteile zu anderen Unterrichtsmethoden näher erläutert.

### 2.1. Begriffsbestimmung

Eine einheitliche Definition des Begriffs *Entdeckendes Lernen* gibt es nicht. Zu finden sind eher Um- und Beschreibungen verschiedener Autoren, die nicht immer übereinstimmen. *Entdeckendes Lernen* wird in der Literatur als Lernprozess, Unterrichtsmethode und Ziel des Unterrichts beschrieben (vgl. Klewitz 1977, S.153).

Elard Klewitz und Horst Mitzkat skizzieren diesen Begriff in dem Beitrag *Entdeckendes Lernen und Offener Unterricht*, worauf auch folgende Beschreibungen beruhen:

Ein Name, der in der Literatur immer wieder mit diesem didaktischen Konzept in Verbindung gebracht wird, ist jener des Psychologen Jerome Seymour **Bruner**. Für ihn ist *Entdeckendes Lernen* vor allem ein Lernprozess, in welchem es um die selbstständige Erschließung eines Wissensgebietes geht. Dabei schränkt er den Akt der Entdeckung nicht nur auf unbekanntes Wissen ein, sondern auf „fast alle Formen des Wissenserwerbs mit Hilfe des eigenen Verstandes“ (Bruner 1981, S.16). Demnach macht es keinen Unterschied ob ein Schüler, eine Schülerin oder ein Wissenschaftler etwas entdecken, es handelt sich stets um „ein Neuordnen oder Transformieren des Gegebenen“ um zu neuen Einsichten zu kommen (vgl.

ebd., S.16). So soll die Möglichkeit über Gegebenes hinauszugehen und zu weiteren neuen Erkenntnissen zu kommen, kombiniert werden.

Ein weiterer bekannter Name ist jener des Pädagogen und Kontrahenten Bruners, David Paul **Ausubel** (1918-2008). Jener sieht *Entdeckendes Lernen* nicht als Prozess wie Bruner, sondern als Unterrichtsmethode. Ausubel stellt Entdeckendes und Darbietendes Lernen gegenüber und kommt zu dem Schluss, dass bei Erstgenanntem nicht alle Lerninhalte, die gelernt werden sollen gegeben sind, wogegen beim darbietenden Unterricht der gesamte Inhalt in seiner schlussendlichen Form präsentiert wird. *Entdeckendes Lernen* ist für ihn schließlich eine Methode, welche den darbietenden Unterricht sinnvoll ergänzen kann (vgl. Klewitz 1977 S.153).

Im Beitrag *Entdeckendes Lernen und offener Unterricht* von Elard **Klewitz** und Horst **Mitzkart** wird wie schon angesprochen der Versuch gestartet, den Begriff zu skizzieren:

*„In engem Zusammenhang mit dem offenen Unterricht steht das entdeckende Lernen, das gleichsam als das methodische Grundprinzip [...] betrachtet werden kann. [...] Es soll vorläufig genügen das entdeckende Lernen als eine Unterrichtsmethode zu kennzeichnen, die dem Kind gestattet, weitgehend selbstständig Erfahrungen zu machen, Probleme zu lösen und Begriffe zu erarbeiten.“* (ebd., S.8)

Im Werk bezieht auch J.F. **Dearden** zum Begriff *Entdeckendes Lernen* Stellung und ist der Ansicht, dass die Lernenden Eigeninitiativen entwickeln. Auch nennt er unter anderem die Mathematik und andere Naturwissenschaften jene Bereiche, für die das *Entdeckende Lernen* die größte Bedeutung hat (vgl. Dearden 1977, S.68).

Der deutsche Mathematikdidaktiker Heinrich Winard **Winter** (geb. 1928) ist der Ansicht, dass es keine endgültige Definition des Begriffs *Entdeckendes Lernen* gibt. Im Werk *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* gibt Winter dennoch folgende Beschreibung:

*„‘Entdeckendes Lernen‘ ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen (wenn so etwas überhaupt direkt möglich ist), sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, daß [sic!] Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene konstruktive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und erst ermöglicht durch äußere Impulse.“* (Winter 1991, S.2)

Weitere Erläuterungen zu Winters Auffassung vom Begriff, wie beispielsweise eine Gegenüberstellung von Lernen durch Entdecken und Lernen durch Belehren oder Vor- und Nachteile des Unterrichtsprinzips sind im Kapitel 2.4 zu finden.

Die Begriffsbestimmungen verschiedener Pädagogen zeigen wie komplex und unterschiedlich *Entdeckendes Lernen* aufgefasst werden kann. Um das Konzept in der Unterrichtspraxis nützlich zu machen, ist es notwendig die Flexibilität des Begriffs zu erhalten und ihn auf unterschiedliche Unterrichtsbedingungen anzupassen.

*„Die Anpassung stellt sich als ein Abrücken von der Idealform des entdeckenden Lernens dar, wobei der Abstand im Einzelfall durchaus unterschiedlich weit sein kann; er läßt [sic!] sich differenziert durch die Begriffspaare ‚autonom – gelenkt‘, ‚offen – geschlossen‘ und ‚konkret – symbolisch‘ erfassen und beschreiben.“* (Klewitz 1977, S.155)

Für den weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird die Begriffsbeschreibung von Elard Klewitz und Horst Mitzkat herangezogen, in welcher *Entdeckendes Lernen* als eine Unterrichtsmethode gekennzeichnet wird, welche es Schülerinnen und Schülern (kurz: S. u. S.) erlaubt, „weitgehend selbstständig Erfahrungen zu machen, Probleme zu lösen und Begriffe zu erarbeiten“ (Klewitz 1977, S.8).

## 2.2. Geschichtlicher Hintergrund

Da nun eine grobe Skizzierung des Begriffs *Entdeckendes Lernen* vorgenommen wurde, folgt ein kurzer geschichtlicher Abriss wie dieser entstanden ist. Der dargebotene geschichtliche Überblick beruht, wenn nicht anders erwähnt, auf jenem im Beitrag *Entdeckendes Lernen – wieder entdeckt?* von Sabine Liebig (2002, S.5-8).

Die Grundidee des Entdeckenden Lernens kommt nicht aus der Pädagogik oder Didaktik der Neuzeit, vielmehr lassen sich die Ansätze dieses Konzepts bereits im Altertum festmachen. Der griechische Philosoph **Plato** (429-348 v. Chr.) verfasste den Dialog *Menon*, welcher als erste Mathematikstunde der Menschheitsgeschichte aufgefasst werden kann. In jenem spricht **Sokrates** mit einem unwissenden Sklaven, welcher entdeckt, dass das Quadrat über der Diagonale eines Quadrates eine doppelt so große Fläche hat wie das gegebene (vgl. Winter 1989, S.8-10). Plato begründet mit diesem Beispiel seine Theorie menschlichen Lernens, welches seiner Meinung nach eine Art Erinnerung der Wirklichkeit ist. Nach Plato steckt das Wissen in der unsterblichen Seele und muss nur vom Lernenden ins Bewusstsein gehoben werden. Dabei soll der Unterricht helfen um sozusagen die Idee des Lernenden zu gebären. Dies geschieht durch einen Dialog, in dem die Lehrperson dem Lernenden geschickte Fragen stellt und ihm so zur Erkenntnis verhilft. Winter sieht dieses Gespräch als Urbeispiel sokratischen Lehrens, da der Sklave eigenständig zur Erkenntnis kommt. Dennoch verurteilt er diese suggestive Art der Fragestellung, da sie dem Schüler bzw. der Schülerin kaum Antwortmöglichkeiten offen lässt (vgl. ebd., S.10). Trotzdem handelt es sich

um ein Schema in Dialogform, das entdeckende Lösungen generiert, da Sokrates bzw. Plato seine Mitmenschen zum Nachdenken angeregt hat.

Auch Gabriel Jacobs, ein Professor der Universität von Wales, fasst die Geschichte des *Entdeckenden Lernens* in einem 2005 publizierten Artikel kurz zusammen und nennt dabei neben Sokrates auch den Philosophen und Kirchenvater **Augustinus** (354 – 430 n. Chr.) als Beginn dieses Konzepts. Jener meinte die wahre Kunst des Lehrens sei die Neugierde im Schüler zu wecken. Außerdem verweist Jacobs auf weitere ähnliche Ansätze von Comenius, Locke, Rousseau und Pestalozzi (vgl. Jacobs 2005, S.357-359).

Im 17.Jahrhundert betonte der Pädagoge **Comenius**, dass Lernende durch eigene Erfahrungen und individuelle Entscheidungen selbst zur Einsicht gelangen sollen. Der Philosoph und Empirist **John Locke** (1632-1704) bemerkte schon damals die große Bedeutung der Neugier der Lernenden und verurteilte Lehrkräfte, die Wissen passiv an ihre S. u. S. verteilen. Im 18.Jahrhundert lenkte **Jean-Jacques Rousseau** (1712-1778) in seinem Erziehungsroman *Emil oder Über die Erziehung* den Fokus auf die Kindheit. Sein „Kind-zentriertes Lernen“ sorgte für öffentlichen Aufruhr, da das Kind von Geburt an durch Sinneseindrücke geprägt wird und die daraus resultierende unerlässliche Neugierde durch formalen Unterricht zerstört wird. Deshalb forderte er das Lernen durch Beobachten und Entdecken. Diesen Ansatz griff der Schweizer Pädagoge **Johann Pestalozzi** auf und fundierte Rousseaus Bildungsphilosophie. Dies ist in der heutigen Fachliteratur unter dem Begriff „intuitives Lernen“ zu finden (vgl. Jacobs 2005, S.357-359).

„Für die heutige Pädagogik liegt der Ursprung des *Entdeckenden Lernens* in den USA zu Beginn des 20. Jahrhunderts.“ (Liebig 2002, S.6) Der amerikanische Philosoph und Pädagoge **John Dewey** (1859-1952) stellte sich die erkenntnistheoretischen Fragen, wie gelernt und gedacht wird. Sein Ausgangspunkt war dabei menschliche Erfahrungen, die entweder von aktiver oder passiver Natur sein können. Aktive Erfahrungen werden gemacht bzw. gestaltet, passive als Folge von Handlungen erlitten. Als bedeutungsvoll sieht er jene, die etwas im Lernenden bewegen. Nur anhand von Theorie wäre Erkenntnis laut Dewey nicht möglich, da nur durch diese Beziehungen, Strukturen und Ordnungen verstanden werden können. Zu dieser Zeit fragte sich auch der US-amerikanische Staat wie schulischer Unterricht auszusehen habe, damit er demokratisch denkende StaatsbürgerInnen hervorbringt. So entwickelte John Dewey mit seinem Schüler **William Heard Kilpatrick** (1871-1956), welcher ebenfalls Pädagoge war, eine Projektmethode in welcher S. u. S. „selbstständig, eigenverantwortlich, planvoll und zielgerichtet arbeiten“ und verschiedene

Wege ausprobieren (ebd., S.6). Die Idee der Projektmethode wurde später ins Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* integriert.

Nicht nur in Amerika, auch in Europa bzw. in Deutschland wurde um die Jahrhundertwende über schulische Bildung diskutiert und die **Reformpädagogik** mit dem Leitspruch „Pädagogik vom Kinde aus“ (ebd., S.7) entstand. John Dewey ging schon davor weit über die reformpädagogischen Ansätze hinaus und kann eher zur Strömung des Konstruktivismus (siehe Kapitel 2.3.1) gezählt werden.

Eine sehr wichtige Grundlage zum Konzept des *Entdeckenden Lernens* schuf allerdings der berühmte Schweizer Psychologe und Erkenntnistheoretiker **Jean Piaget** (1896-1980). Auch er fragte sich, wie Wissen zu Stande kommt und hat in diesem Zusammenhang zwei wesentliche Aspekte genannt:

*„Zum einen ist dies die Erkenntnis, dass sich der Aufbau von Denk- und Handlungsstrukturen beim Kind im Wesentlichen in der aktiven Auseinandersetzung mit der Welt vollzieht und zum anderen, dass dieser Aufbau einen fortlaufenden Prozess beschreibt.“* (Zocher 2000, S.20)

Als Gegenbewegung zum Behaviorismus spiegeln nach Piaget also nicht konditioniertes Verhalten oder biologische Reifungsprozesse den Lernprozess wider, sondern der Lernende muss selbst etwas entdecken oder erfinden. Jedes Kind konstruiert seine eigene Wirklichkeit und erlebt diese als Ergebnis der menschlichen Entwicklung (vgl. Liebig 2002, S.8). In Kapitel 2.3.2. sind weitere Erläuterungen zur Piagets Theorie der kognitiven Entwicklung zu finden.

Diese Erkenntnisse von Piagets Entwicklungstheorie griff **Jerome S. Bruner** Ende der fünfziger Jahre als einer der ersten Pädagogen in der amerikanischen Reformdiskussion auf und entwickelte aus dieser Idee das „learning by discovery“, also das *Entdeckende Lernen* nach heutigem Verständnis. Bruner betrachtet *Entdeckendes Lernen* vor allem als Lernprozess (siehe 2.1 Begriffsbestimmung).

## **2.3. Lernverständnis und relevante lerntheoretische Modelle**

Nachdem eine Begriffsbestimmung und ein geschichtlicher Überblick *des Entdeckenden Lernens* dargeboten wurden, werden nun das Lernverständnis, welches diesem Konzept zugrunde liegt und relevante lerntheoretische Modelle erläutert. Wie schon im vorherigen Unterpunkt angesprochen, spielen der Konstruktivismus und sein Vertreter Jean Piaget eine wichtige Rolle für das Lernverständnis dieses Unterrichtsprinzips.

„Eine uralte anthropologische Frage, die immer wieder neu gestellt und aus unterschiedlichen Beobachtungsperspektiven neu beantwortet wird“, ist jene, was denn nun Lernen sei (Siebert 2005, S.30). Ob es nun Psychologen, Pädagogen oder Biologen bzw. Gehirnforscher sind, niemand kann ‚wirklich‘ sagen was Lernen ist. Viele sprechen oft im Alltag vom Begriff „Lernen“ und assoziieren ihn häufig mit der Schule. Lernen ist jedoch nicht zwingend an die Schule gebunden, sondern etwas Alltägliches. „Das Grundverständnis von Lernen ist [...] eine bleibende Veränderung dessen, was jemand aufgrund von Erfahrung kann oder weiß.“ (Seel 2003, S.17)

*„Dieses praktische Verständnis von Lernen als ‚etwas besser tun oder wissen als vorher‘ liegt auch dem pädagogisch-psychologischen Begriff von Lernen zugrunde, der sich ebenfalls auf eine Vielzahl von Prozessen bezieht – angefangen von erfahrungsbegründeten Veränderungen von Verhalten und Wissen bis hin zu Veränderungen von Werthaltungen und Ideologien.“ (ebd., S.17)*

Bevor der pädagogisch-psychologische Lernbegriff weiter ausgeführt wird, ist es von Bedeutung zu erwähnen, dass die Psychologie keine einheitliche Wissenschaft darstellt, sondern mehrere zum Teil auch gegensätzliche Forschungsrichtungen wie die Tiefenpsychologie, den Behaviorismus und die kognitive Psychologie beinhaltet. Die Zerstretheit resultiert aus dem Ursprung der abendländischen Philosophie, von welcher sich die Psychologie erst im 19. Jahrhundert als eigenständige Wissenschaft etabliert hat. Seit diesem Zeitpunkt beschäftigt sich die Psychologie mit dem menschlichen Lernen (vgl. Hobmair 2013, S.35).

Heutzutage bestimmt das kognitiv-konstruktivistische Erklärungsmodell das psychologische Verständnis des menschlichen Lernens und berücksichtigt neben der Informationsverarbeitung auch motivationale und sozial-kulturelle Bedingungen (vgl. Seel 2013, S.25). Aus jenem Erklärungsmodell des Lernens hat sich schließlich das *Entdeckende Lernen* entwickelt.

### **2.3.1. Konstruktivistische Lerntheorie**

Die konstruktivistischen Ansätze entwickelten sich nach Hobmair im 20. Jahrhundert und gehen davon aus, dass Wahrnehmung eine Konstruktion des Gehirns ist und keine wirkliche Abbildung der Welt. Diese Strömungen werden allgemein unter dem Namen Konstruktivismus zusammengefasst. Wie schon erklärt, wurden nach der kognitiven Wende in der Psychologie informationstheoretische Ansätze in den Bereichen Wissens- und Denkpsychologie entwickelt. Eine übergreifende Theorie mit philosophischen Wurzeln ist der Konstruktivismus, da er eine Theorie der Entstehung von Wissen mit Betonung auf

Entstehung des Wissensprozesses darstellt. Um die konstruktivistische Lerntheorie zu erklären, wurde das Werk *Pädagogischer Konstruktivismus* von Horst Siebert herangezogen.

Wissenschaftler verschiedener Richtungen können nicht wirklich sagen, was Lernen genau ist. Sogar die Neurowissenschaftler stellen nur fest, dass beim Lernen Synapsen verstärkt werden. Bei mehrfachen Wiederholungen stabilisieren sich also die Verbindungen im Gehirn und so werden „Spuren“ im Nervensystem hinterlassen. „Lernen erfolgt durch Verknüpfung von Informationsinputs (z.B. eine Nachricht) mit mentalen Schemata, und neuronalen Assoziationsfeldern.“ (Siebert 2005, S.31) Diese Informationsinputs kommen zwar von „außen“, dies bedeutet jedoch nicht, dass die Realität im Kopf wiedergespiegelt wird, sondern aktiv umgewandelt, wie beispielsweise Licht in Farbe. Darauf folgend werden die Informationen gedeutet und in passende Handlungen umgesetzt. Lernen ist somit auf interne kognitiv-emotionale Zustände und momentane körperliche Empfindungen begrenzt. Auch gehört wird nur, was gebraucht wird oder „bemerkenswert“ erscheint, und anschließend in passende Schemata eingeordnet (vgl. ebd., S.30f.).

Siebert nennt in seinem Werk acht Faktoren konstruktiven, konstruktivistisch aufgeklärten Lernens:

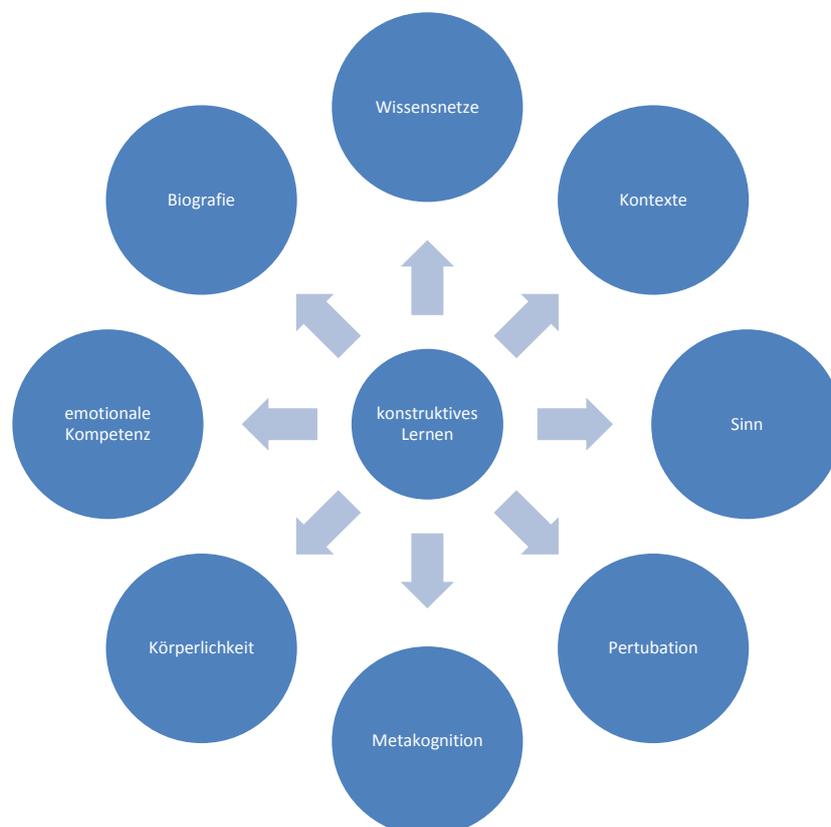


Abbildung 1: Faktoren konstruktiven, konstruktivistisch aufgeklärten Lernens (Siebert 2005, S.31)

Pädagogen müssen sich demzufolge damit anfreunden, dass nachhaltiges Lernen eine Mischung von Denken, Fühlen, Erinnern und körperlichen Empfindungen (be-greifen im wahrsten Sinne des Wortes) ist. Wie aus Abbildung 1 ersichtlich wird, ist Lernen von der Biographie abhängig und kontextgebunden, da Lernen weniger von den Inputs als von der individuellen Befindlichkeit bzw. Vorstrukturen abhängt. Lernen ist zufolge des Konstruktivismus ein auf sich selbst bezogener und selbst gesteuerter Prozess, wobei das eigene psychische System entscheidet, was es verarbeiten kann und auch möchte. So lernen alle Lernenden in der Klasse etwas anderes auf eine andere Art und Weise, da das Gelernte von ihrer individuellen Lerngeschichte und den Lerngewohnheiten abhängt (vgl. ebd., S.32f.).

Neues Wissen sollte anschlussfähig sein und trotzdem einen neuen Wert haben. Aus diesem Grund erfordert konstruktives Lernen eine Öffnung für Neues und Fremdes. Der dazugehörige Schlüsselbegriff ist die „Perturbation“ (siehe Abbildung 1). Dieser meint die Bereitschaft des Irritierens und Verunsicherns und entsteht durch Differenzenerfahrungen der Wahrnehmung von Unterschieden. Mit dem Begriff der „Metakognition“ ist die Fähigkeit und Notwendigkeit zur Wahrnehmung, wie Wirklichkeiten konstruiert werden, gemeint. Sie dient zur Evaluation der eigenen Lernstile und Lernmotive, denn für das eigene Denken, Lernen bzw. auch Nicht-Lernen ist jeder Lernende selbst verantwortlich. Die Lehrenden bereiten den Stoff didaktisch verständlich auf und sind für die Lernumgebung verantwortlich (vgl. ebd., S. 34f.).

Der konstruktivistische Lernbegriff erfordert „das Erkennen von Zusammenhängen, systemisch vernetztes Denken, reflexive Beobachtungen“ (ebd., S.35) und betont die Individualisierung des Lernens. Demnach ist der Konstruktivismus nicht unbedingt eine neue Methodik des Lehrens, sondern eher eine spezielle pädagogische Haltung. – Der Pädagoge Rolf Arnold (geb. 1952) formulierte diese Haltung passend mit Gelassenheit. – „Konstruktivität ist die Überzeugung, dass nicht einer Recht und alle anderen Unrecht haben, dass es mehrere mögliche Deutungen gibt, dass die Viabilität einer Lösung von den individuellen Erfahrungen abhängig ist, dass auch Wissenschaftsdisziplinen nur Modelle der Welt anbieten, dass Irrtümer als Normalfall zur menschlichen Existenz gehören.“ (ebd., S.103)

Konstruktivistische Ansätze des Lernens gehen nach Stangl davon aus, dass Lernen ein konstruktiver Prozess ist und kritisieren die Illusion des Aneignungs- und Abbildungs-Lernens. Vertreter dieses Ansatzes sind neben Jean Piaget (siehe Kap. 2.3.2) der russische Psychologe Lew Wygotski (1896-1934), John Dewey und Jerome S. Bruner.

Piaget veränderte mit seiner Theorie der Entwicklung das Verständnis von Lernvorgängen radikal und wurde für den Konstruktivismus wegweisend. „Lernen ist ein elementarer und lebenswichtiger Prozess, da sich ohne Lernen kein Leben weiterentwickeln kann.“ (Liebig 2002, S.8) Dies zeigt, dass Lernen ein aktiver Prozess ist, in welchem der Lernende seine Wirklichkeit konstruiert und in Abgleich mit der Umwelt bringt. Das daraus resultierende Wechselspiel zwischen der Anpassung an die gegebenen Lebensumstände bzw. der Schematisierung (Assimilation) und deren Aneignung und Veränderung (Akkommodation) ist für den Konstruktivismus entscheidend, um den Aufbau der menschlichen Wirklichkeitsbildung zu verstehen (vgl. ebd., S.8).

Der russische Psychologe Wygotsky hatte ähnliche Ansichten wie Piaget. Für ihn war jedoch die kulturelle Lernumwelt, also die Zone der weiteren Entwicklungsmöglichkeit wichtiger. Die Lernumgebung soll die S. u. S. konstruktiv vorantreiben, denn eine mehrfache Nachahmung ist nach Wygotsky der Tod des konstruktiven Lernens.

Dewey war, wie schon in Kapitel 2.2 behandelt, von großer Bedeutung für Lerntheorien im 20. Jahrhundert. Er ergänzte zu der Lernumwelt und dem theoretischen Konstrukt von Piaget ein haptisches Element, das „Lernen durch Tun“. Außerdem erkannte er, dass Lernen immer in eine Kultur eingebettet ist und sich auch mit dieser verändert (vgl. Stangl 2012).

Der Pädagoge Bruner ergänzte Piagets Konstruktivismus durch ein soziales Element und entwickelte wie schon im Kapitel 2.1 erläutert, das Konzept des *Entdeckenden Lernens*.

### **2.3.2. Jean Piaget – Theorie der kognitiven Entwicklung**

Wie schon erläutert, war Jean Piaget für den Konstruktivismus wegweisend und ein wichtiger Vertreter. Die Informationen dieses Abschnitts sind dem Lehrbuch „Psychologie“ von Hermann Hobmair entnommen.

Der Schweizer Psychologe Jean Piaget entwickelte die Theorie der kognitiven Entwicklung, welche folgende Grundaussage beinhaltet:

*„Alle lebenden Organismen haben die angeborene Tendenz einerseits Umweltgegebenheiten an ihren Organismus und andererseits den Organismus an die Erfordernisse der Umwelt anzugleichen.“ (Hobmair 2013, S.234)*

Das Grundthema Piagets waren die erkenntnistheoretischen Fragen wie Kinder das Wissen der Welt entwickeln und wie Erkenntnis überhaupt entsteht. Dabei fiel ihm auf, dass Kinder

ihr Weltbild durch aktive Auseinandersetzung mit der Realität konstruieren. Diese Anpassung wird von ihm als Adaption vom lateinischen Wort *adaptare*, welches anpassen bedeutet, bezeichnet. Die Einordnung, also Organisation dieser Umwelteindrücke geschieht nach Piaget mit Hilfe kognitiver Schemata, welche in Strukturen verbunden werden. Die Prozesse der Adaption und Organisation ergänzen sich, damit sich Menschen in komplizierten Umweltbedingungen zurechtfinden können (vgl. Hobmair 2013, S.234f.).

Wenn sich Kinder darum bemühen, neue Problemlösestrategien zu entwickeln, um die von der Umwelt gestellten Anforderungen zu bewältigen, durchlaufen sie nach Piaget einen weiteren Prozess, welcher wieder ein Gleichgewicht zwischen Organismus und der Welt herstellt. Diesen nennt er Äquilibration (vgl. ebd., S.235f.).

Die Anpassung an die Umwelt geschieht nach Piaget durch die beiden Prozesse Assimilation und Akkommodation. Bei dem Prozess der Assimilation gibt es eine Wirkung des Subjekts auf die Umwelt – Kinder passen somit neue Informationen an alte Schemata an. Beispielsweise könnte ein Kind sagen, dass alle Tiere, welche im Wasser schwimmen, Fische sind. Der gegenläufige Prozess der Akkommodation resultiert aus der Wirkung der Umwelt auf das Subjekt. Durch jenen ändern Kinder ihre Schemata, um neue Informationen einzugliedern. Bei dem vorher genannten Beispiel passt das Kind also sein Schema an die Umwelt an und weiß, dass nur bestimmte Wassertiere Fische sind. Ein Wechselspiel dieser beiden Prozesse wird solange fortgesetzt, bis ein Gleichgewicht (Äquilibration) erreicht ist. Diese drei Prozesse sind Stadien-unabhängige Theorien von Piaget (vgl. ebd., S.236).

Im Zuge der geistigen Entwicklung durchläuft das Kind nach Piaget nämlich vier Stadien, welche die kognitive Entwicklung beschreiben:

- Sensomotorisches Stadium
- Präoperationales Stadium
- Stadium der konkreten Denkopoperationen
- Stadium der formalen Denkopoperationen

Für die Sekundarstufe I (5. bis 8. Schulstufe) sind die beiden letztgenannten von Bedeutung, da das *Stadium der konkreten Denkopoperationen* ungefähr bis zum zwölften Lebensjahr andauert und das *Stadium der formalen Denkopoperationen* ca. ab dem zwölften Lebensjahr beginnt. Relevant für den Mathematikunterricht wäre hier, dass im dritten Stadium der Aufbau der Invarianz stattfindet. Damit ist ein Gefühl und das Vorstellungsvermögen für Mengen, Anzahl und Volumen gemeint. Im letzten Stadium folgt das hypothetisch, abstrakte Denken. Dabei entwickeln die Lernenden kombinatorisches Denken und vollziehen formal-

logische Schlussfolgerungen (vgl. Wittmann 1976, S.57-59). Hier wird ersichtlich warum Volumsberechnungen beispielsweise erst in der 7. Schulstufe, also im ungefähren Alter von 13 Jahren im Lehrplan aufscheinen. Auch statistische Kennzahlen sind erst später in der 8. Schulstufe in jenem zu finden.

Es muss jedoch beachtet werden, dass der Übergang der Stadien eher kontinuierlich erfolgt und fließende Grenzen aufweist, außerdem entwickeln sich alle Kinder individuell und können mitunter schon wesentlich früher gewisse Leistungen erbringen, denn für die Qualität der Denkentwicklung ist es wichtig, dass Kinder in jedem Stadium optimale Möglichkeiten erhalten, um die Schemata zu erwerben.

Der (Mathematik-)Unterricht sollte auf diese Stufen Rücksicht nehmen.

*„Begriffe, deren Bildung hypothetisch-deduktives Denken erfordern, können im Stadium der konkreten Operationen – das etwa den Alterszeitraum von 6 bis 12 umfaßt [sic!] – auch durch gezieltes Training nicht erworben werden.“ (Klewitz 1977, S.16).*

Außerdem brauchen Kinder in diesem Alter viele konkrete Beispiele und tägliche Anwendungsmöglichkeiten. Wird darauf verzichtet, weil der Unterricht zu abstrakt ist, kann maximal auf einer verbalen Ebene assimiliert werden, welche ein echtes Verständnis ausschließt. Nach Piaget sollte Erziehung nicht die Entwicklung beschleunigen, sondern das volle Potenzial, also jedes Stadium, ausschöpfen (vgl. ebd., S.17).

Schullernen, welches nach Piaget als bedeutungsvoll erachtet wird, muss die natürlichen Bedürfnisse des Kindes berücksichtigen. Lernende sollen also die Möglichkeit bekommen, in bestimmten Situationen ihre Umwelt erforschen bzw. „natürlich lernen“ zu können. Die Lehrkraft soll laut Piaget die Kinder mit Situationen konfrontieren, in welchen Strukturen geschaffen werden können. *Entdeckendes Lernen* ist jene Unterrichtsmethode, welche dem „natürlichen Lernen“ des Kindes am ehesten entspricht (vgl. ebd., S.17).

## **2.4. Entdeckendes Lernen im Unterricht**

Der Lernbegriff der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* stützt sich somit auf den Konstruktivismus und seinen Vertreter Jean Piaget. Wie schon ausgeführt, ist Lernen ein „Prozess aus Anpassung an die gegebenen Lebensumstände (Assimilation) und deren aktiver Aneignung und Veränderung (Adaption), also ein beständiger Antrieb das eigene System zu optimieren“ (Liebig 2002, S.8).

In der sich rasch verändernden Gesellschaft ist es deshalb umso wichtiger für Lehrpersonen, den S. u. S. lebenslanges Lernen beizubringen. Das Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* kann die Lust am Lernen wecken und fördert das selbstständige Lernen. Andere sinnvolle, selbstorganisierte Lernformen wären beispielsweise der offene Unterricht, Projektlernen oder auch die Arbeit mit dem Computer (vgl. ebd., S.9). Nach Sabine Liebig und Erkenntnissen der Lernpsychologie sind selbstbestimmtes und selbstreguliertes Lernen, die Individualisierung der Lernenden und lehrerunabhängige Lernmotivation für das Verständnis von Entdeckendem Lernen wichtig.

Nachdem nun die Begriffsbestimmung, ein geschichtlicher Überblick und die relevanten lerntheoretischen Modelle dieses Unterrichtsprinzips erläutert wurden, folgt eine Beschreibung der Vorgangsweise des Konzepts für den Unterricht.

#### **2.4.1. Vorgehensweise**

Um die Vorgehensweise im Unterricht zu beschreiben, wurde das Werk *Entdeckendes Lernen* von Ute Zocher herangezogen. Die Diplom-Pädagogin, welche an der Universität Heidelberg tätig ist, promovierte zum Thema Schulentwicklung und publiziert zu den Themen *Innere Schulentwicklung* und *Öffnung von Unterricht*. Ute Zocher forscht auch auf dem Gebiet des *Entdeckenden Lernens* und hilft Lehrkräften in einem Fortbildungsprogramm, die Erfahrung des *Entdeckenden Lernens* zu ermöglichen. Auch Dr. Karin Ernst, die Begründerin und Leiterin der Lernwerkstatt an der Technischen Universität Berlin, hat sich in den letzten zwei Jahrzehnten intensiv mit dem Unterrichtsansatz *Entdeckendes Lernen* auseinandergesetzt und zu dessen Verbreitung wesentlich beigetragen.

Die zentralen Kategorien dieser Arbeit in der Lernwerkstatt von Karin Ernst fasst Ute Zocher folgendermaßen zusammen: Der Ausgangspunkt, um entdeckend lernen zu können, sind die Fragen der Lernenden. Außerdem wichtig ist die Konversation mit den S. u. S. über das zu behandelnde Thema, um zu einem aktiven Erkenntnisprozess zu gelangen. Diese zentralen Ausgangspunkte werden nun näher erläutert:

Um das Konzept *Entdeckendes Lernen* praktisch umsetzen zu können, muss nach Ute Zocher den Fragen der Kinder nachgegangen werden. Die Fähigkeit, Fragen zu stellen setzt voraus, die Welt reflektierend und beobachtend zu erleben. Meist entstehen Fragen „durch Irritation, Abweichung von Erwartetem, Kuriositäten, die einem unvermittelt auffallen.“ (Zocher 2000, S.26) Das kindliche Verhalten ist durch exploratives Vorgehen geprägt, dies sollte die Lehrkraft nutzen und fördern, da sonst der Anstoß zum Erkunden und Verstehen

wollen verloren gehen kann. David Hawkins, ein amerikanischer Lehrer, schlägt dafür die Schaffung einer reichhaltigen Lernumgebung vor, um den Lernenden Möglichkeiten zum spielerischen Annähern an bestimmte Gegenstände zu bieten (vgl. Zocher 2000, S.25f.).

Wenn Lehrpersonen den Unterricht auf die Erwartung von fragestellenden Kindern stützen, kann es sein, dass die Lernenden einerseits zu einfach erscheinende oder weit über das Thema reichende Fragen stellen. Deshalb unterscheidet Karin Ernst „**vier Frage-Ebenen**, die im Laufe des entdeckenden Lernprozesses in der Regel aufscheinen und unterschiedliche Dimensionen der Erkenntnis und der Auseinandersetzung des Lernenden mit dem Gegenstand beschreiben.“ (Zocher 2000, S.26)

Die erste Fragephase, welche zu Beginn des Lernprozesses stattfindet, beinhaltet eher erste Begegnungen mit dem Thema und Fragen, die von keiner besonderen Tragfähigkeit für den Lernprozess sind. Diese Phase findet meist am Unterrichtsbeginn statt, wenn die Lehrkraft eine einleitende provokante Aussage macht oder eine Frage an die Klasse stellt (vgl. ebd., S.26f.).

Anschließend werden meist Materialien ausgeteilt oder Arbeitsaufträge aufgegeben, aus diesen erwachsen die weiteren Fragen zweiter Ebene. In dieser Phase führen die Lernenden untereinander Gespräche oder sprechen mit der Lehrperson. So entstehen konkretere Fragen, die schon Arbeitsschritte beinhalten können. Auch die Lehrkraft kann Fragen stellen, um Interesse bei den Lernenden zu wecken (vgl. ebd., S.27).

Nach Karin Ernst ist die dritte Ebene der Fragen im Arbeitsprozess verborgen und beinhaltet eine „wundervolle Idee“. Diese Fragen führen zur Einsicht und lassen sich auch auf andere Zusammenhänge übertragen, so erweitert sich die Handlungskompetenz der Lernenden, auf welche noch genauer im Kapitel 4.2.1 eingegangen wird (vgl. ebd., S.27).

In der vierten Frage-Ebene wird das persönliche Motiv herausgearbeitet und der Lernende fragt sich nach der Bedeutung dieses Prinzips. Die aktive Auseinandersetzung mit Fragen zeigt den Prozess des Lernens deutlich, damit befindet sich der Lernende mitten im entdeckenden Lernprozess (vgl. ebd., S.27).

Im Zentrum der aktiven Auseinandersetzung steht jedoch der Lernende selbst. Der Dialog mit dem zu bearbeitenden Thema ist wie schon oben erwähnt ein aktiver Erkenntnisprozess und genauso vielfältig wie die Fragen und Personen, welche sich damit beschäftigen bzw. etwas entdecken wollen (vgl. ebd., S.27). „Jede Frage und jeder Lernprozess entfaltet sich

entsprechend der Antworten, die der Lerngegenstand gibt und der Fragen, die an ihn gerichtet sind.“ (Zocher 2000, S.28)

Wenn sich Lernende mit einem Gegenstand aktiv und entdeckend auseinandersetzen, dann probieren und überlegen sie, ziehen Schlüsse oder lesen etwas nach. Das Begreifen von Zusammenhängen braucht Zeit, deshalb wechseln sich bei dieser Unterrichtsform oft planvolle Arbeitsphasen mit einem scheinbar chaotischen Herumprobieren ab. Dieser Umstand macht eine zeitliche Vorhersage für Lehrpersonen schwer (vgl. ebd., S.28f.).

Entdeckende Lernprozesse halten sich also nicht an 50-Minuten Rhythmen, sondern nehmen größere Zeiteinheiten in Anspruch, wobei die Autorin dieser Diplomarbeit auf die ungefähre Angabe von Unterrichtseinheiten bei der Planung geachtet hat (siehe Kapitel 5). Der Lernprozess dient primär dazu, Strukturen des Erkennens und Verstehens auszubilden (vgl. ebd., S.28f.).

*„Im Dialog mit dem Lerngegenstand können Erfahrungen im Sinne Deweys und Piagets gemacht werden, die die Denkweise und –muster beeinflussen und daher die Entfaltung der kindlichen Potenziale unterstützen. So entsteht für den Lernenden die Welt immer wieder neu.“* (Zocher 2000. S.29)

Wie schon erörtert, ist der Austausch über gewonnene Erkenntnisse und Beobachtungen von großer Bedeutung und in diesem Unterrichtsprinzip fest verankert. Deshalb gehören **Phasen des Austausches** zu jeder Einheit *Entdeckenden Lernens*. Diese binden die Arbeit jedes einzelnen Schülers und jeder Schülerin und bringen sie in einen größeren sozialen Kontext (vgl. ebd., S.30). Am Ende einer größeren Phase *Entdeckenden Lernens* werden die Ergebnisse in einer passenden Form präsentiert (siehe Kapitel 5).

Beim Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* wird also die Motivation von Kindern und Jugendlichen, zu lernen, genutzt. Sabine Liebig nennt einige Punkte, die das Prinzip gut zusammenfassen:

- „Kinder und Jugendliche setzen sich handelnd und reflektierend mit für sie realen und persönlich bedeutsamen Materialien, Gegenständen und Situationen auseinander.
- Individuelle Lernwege und Lernprozesse entstehen, die auf Vorwissen und die Fähigkeit der Lernenden aufbauen und diese erweitern.
- Im Sinne eines dialogischen Antwortverfahrens kommen die Lernenden zu ihren Ergebnissen.
- Jede muss für sich selbst lernen, denn Lernen ist eine persönliche Angelegenheit, für die man Verantwortung übernehmen muss.“ (Liebig 2002, S.9-10)

#### 2.4.2. Bedeutung für SchülerInnen und Lehrkräfte

Nachdem nun das Prinzip und die Durchführung des Unterrichtskonzepts *Entdeckenden Lernens* näher erläutert wurden, liegt nun der Fokus auf der Bedeutung für Lernende und Lehrende.

Die Begleitung entdeckender Lernprozesse stellt nach Ute Zocher höhere Anforderungen an Lehrkräfte, da sie in vielen Elementen vom üblichen Unterricht abweichen. „In Abgrenzung zu traditionellen Lehr- und Lernverständnissen oder ‚Laissez-faire‘-strukturierten Unterrichtssettings, in denen die Lehrperson ‚als eine Art unauffälliger Diener versucht, alle Bedürfnisse vorausszusehen und zu befriedigen‘, wird sie beim Entdeckenden Lernen mit vielfältigen Aufgaben konfrontiert.“ (Zocher 2000, S.31)

Eine dieser Aufgaben ist beispielsweise, dass **Lehrkräfte** Lernsituationen erkennen sollen aus welchen sich entdeckende Lernsequenzen entwickeln können. Hat die Lehrkraft solch eine Situation entdeckt, muss sie wissen, dass es keine systematische Strukturierung von Unterrichtseinheiten mehr gibt, da der Unterricht nicht linear ablaufen kann. Eine weitere Aufgabe ist die Schaffung des Lernraumes für die S. u.S., in welchem sie sich frei entfalten und viele Dinge ausprobieren können. Denn eine solche Atmosphäre unterstützt das *Entdeckende Lernen* und erleichtert den Übergang zur ersten fragestellenden Phase (vgl. ebd., S.31-32).

Als Lehrkraft ist es auch wichtig, mehrere, vielleicht sogar kreative Lösungsmöglichkeiten zu gestatten und Verständnis dafür aufzubringen. Sabine Liebig spricht hier von dem „Respekt vor den Gedanken der Lernenden und ihrer Art, diese auszudrücken“ (Liebig 2002, S.11).

Wie schon vorhin erläutert, ist das Gespräch mit den Lernenden von essentieller Bedeutung, dazu gehört eine aufrichtige Beziehung und Aufmerksamkeit bzw. Interesse für den Lernprozess des Schülers bzw. der Schülerin (vgl. Zocher 2000, S.31-32).

In den Unterrichtsplanungen in Kapitel 5 hat die Autorin vorliegender Arbeit Lernsequenzen für die Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* entwickelt und versucht auf alle hier auftretenden Aufgaben der Lehrkraft einzugehen.

Die Bedeutung dieses Lernprozesses für **Schülerinnen und Schüler** beschreibt Sabine Liebig folgendermaßen in ihrem Werk *Entdeckendes, Forschendes, Genetisches Lernen*: Da das Prinzip des Entdeckenden Lernens von einem konstruktivistischen Lernbegriff ausgeht,

sind die S. u. S. motiviert, etwas zu lernen und nachzufragen. Außerdem lernen sie durch selbstständiges Denken und indem sie Probleme lösen (vgl. Liebig 2002, S.10).

Die Aufgabe der Lehrkraft ist es hierbei natürlich, diese Fragen auch zuzulassen, zu ermutigen und in einen persönlichen Kontext für die S. u. S. zu stellen. Durch die Einbettung der Themen in die Umwelt bekommen die Lernenden die Chance, ihr Wissen durch eigene Aktivität zu erweitern und unter Einbeziehung ihrer Vorerfahrungen dort abgeholt zu werden, wo sie auch stehen. So machen S. u. S. Erfahrungen aus erster Hand, die sie nicht so schnell vergessen. Durch den Dialog mit der Sache werden sie außerdem dazu ermutigt eigene Lernmethoden zu entwickeln und auch anzuwenden. Gegen Ende erfahren die Lernenden, dass die Erkenntnis eine persönliche Bedeutung für sie hat. Ein nützlicher Nebeneffekt ist außerdem, dass die Frustrationstoleranz durch mögliche Umwege im Zuge des Problemlösens, zunimmt (vgl. Liebig 2002, S.10).

### 2.4.3. Abgrenzung zu anderen Unterrichtsmethoden

Nachdem die Vorgehensweise im Unterricht und die Bedeutung für Lernende und Lehrende erläutert wurden, folgt eine Abgrenzung zu anderen Unterrichtsmethoden. Jene soll den Unterschied zwischen *Lernen durch Entdecken* und *Lernen durch Belehren* verdeutlichen.

Heinrich Winter gibt in seinem Werk *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* eine solche Gegenüberstellung. Eine Auswahl des Vergleichs ist in Tabelle 1 zu finden:

| <b>Lernen durch Entdecken</b>                                                                                                                          | <b>Lernen durch Belehren</b>                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Lehrkraft setzt auf die Neugier und den Wissensdrang der S. u. S. und betrachtet sie als Mitverantwortliche am Lernprozess                             | Lehrkraft setzt stärker auf die Methode der Vermittlung und neigt stärker dazu, die S. u. S. als formende Objekte zu sehen                           |
| Lehrperson versucht die allgemeine Bedeutung des Lehrstoffes zu betonen und zentrale Ideen deutlich zu machen                                          | Lehrperson beschränkt sich hauptsächlich auf die innermathematische Einordnung des Stoffs und legt größeren Wert auf lokale Abgrenzungen des Inhalts |
| Lehrkraft bietet herausfordernde, lebensnahe und nicht so arm strukturierte Situationen an und ermutigt zum Beobachten, Erkunden, Probieren und Fragen | Lehrkraft gibt das Lernziel möglichst im engen Stoffkontext an und erarbeitet neuen Stoff durch Darbieten oder durch gelenktes Unterrichtsgespräch   |

|                                                                                                                          |                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Lehrperson gibt Hilfen als Hilfen zum Selbstfinden und hält die S. u. S. an, ihre Lösungsansätze selbst zu kontrollieren | Lehrperson gibt Hilfen als Hilfen zur Produktion der gewünschten Antwort und fühlt sich verpflichtet, selbst Schülerbeiträge zu beurteilen |
| Lehrkraft versucht (vermeintliche) Fehler von Lernenden mit den S. u. S. zu analysieren                                  | Lehrkraft versucht, das Auftreten von Schülerfehlern zu unterbinden                                                                        |

Tabelle 1: Gegenüberstellung von entdeckendem und belehrendem Lernen (vgl. Winter 1989, S.4-5)

Diese idealtypische Gegenüberstellung ist nach Winter kaum eine Klassifikation von realen Unterrichtsgeschehnissen. Sie macht jedoch deutlich, dass entdecken lassender Unterricht nicht bloß eine methodische Angelegenheit wäre, die man einfach durchführen könnte. Er ist jedenfalls voraussetzungsvoller als ein einfacher, belehrender Unterricht, was die geringe Verbreitung erklären könnte (vgl. ebd., S.5).

#### 2.4.4. Vor- und Nachteile

Bis jetzt wurde die Vorgehensweise, eine Abgrenzung des Konzept und die Bedeutung für Lernende und Lehrende erläutert. Die Frage wie *Entdeckendes Lernen* theoretisch in den Unterricht integrierbar ist, kann somit beantwortet werden. Es stellt sich somit nur noch die Frage, ob *Entdeckendes Lernen* im schulischen Kontext überhaupt sinnvoll ist.

Diese Frage stellte sich auch Sabine Liebig in ihrem Beitrag *Entdeckendes Lernen - wieder entdeckt*. Sie beantwortete sie mit einem eindeutigen „Ja“, weil durch dieses Unterrichtskonzept nachweislich bessere Transferleistungen erzielt werden. Außerdem wird nach Liebig die Merkfähigkeit erhöht, da die Lernenden individuell denken und Erkenntnisse weiter entwickeln, was zusätzlich zu einem Zuwachs an intellektueller Potenz führt (vgl. Liebig 2002, S.12f.).

Das Unterrichtsprinzip bietet außerdem die Möglichkeit zur Berücksichtigung unterschiedlicher Lerntypen, was im Regelunterricht zwar gefordert, jedoch fast unmöglich ist. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Lehrkraft die Lernenden als Subjekte ernst nimmt und somit besser differenzieren und fördern kann. Die Lehrperson hat also nicht eine Klasse mit 25 S. u. S., sondern 25-mal eineN SchülerIn vor sich (vgl. Liebig 2002, S.13f.)

Eine Aussage, die jedoch oft in der Literatur zu lesen ist, dreht sich um die Unvorhersagbarkeit und den zeitintensiven Aufwand von *Entdeckendem Lernen*. Dies

resultiert aus den Phasen des Lernens der S. u. S., welche durch ein Wechselspiel von planvollen Abläufen und unstrukturierten Vorgehensweisen gekennzeichnet sind. Dadurch kann es selbstverständlich auch zu Fehlschlägen und Stockungen kommen, bei welchen die Lernenden nicht weiter wissen (vgl. Liebig 2002, S.14).

Der Zeitaspekt ist auch bei Ausubel dem Kontrahenten Bruners (siehe Kapitel 2.1), als Kritikpunkt nachzulesen. Dieser meinte, dass Menschen ihr Wissen über Generationen weitergeben und mühsame Neuentdeckungen schon allgemein bekannter Phänomene einen unvertretbaren Zeitaufwand darstellen. Bruner war sich allerdings darüber im Klaren, dass völlig freies und unangeleitetes Arbeiten nicht ganz der schulischen Realität entspricht und schlug deshalb für diesen Bereich „angeleitetes Entdecken“ vor. Deshalb wurde in den Unterrichtsplanungen in Kapitel 5 auch die Methode des „angeleiteten Entdeckens“ verfolgt und teilweise Lernimpulse von der Autorin gegeben. Durch den entstandenen Mehrzeitaufwand dieser Methode fallen vielleicht ein oder zwei Unterrichtsthemen weg, doch das exemplarische und selbstständige Lernen wiegt dies wieder auf (vgl. ebd., S.15-16).

Nach Dearden ist nicht das Lernen von Fertigkeiten, Techniken oder Empfindungen jenes welches umstritten ist, sondern eher Lernen von Fakten, Begriffen und Prinzipien (vgl. Dearden 1977, S.68). Diese Aussage kann somit positiv auf die Frage ob *Entdeckendes Lernen* im schulischen Kontext sinnvoll ist, gewertet werden. Außerdem geht er darauf ein, dass die Naturwissenschaftlichen Fächer wie auch die Mathematik in der Schule am besten für dieses Unterrichtsprinzip geeignet sind.

In Bezug auf das Unterrichtsfach Mathematik hat sich Heinrich Winter stark mit diesem Thema beschäftigt und dieses in seinem Werk *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* erläutert. Wie schon im Kapitel 2.1 angesprochen, ist nach Winter der Begriff *Entdeckendes Lernen* schwierig bis gar nicht zu definieren. Er vertritt jedoch folgende Hauptthese:

*„Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, spezielle Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer faßbare [sic!] bildende Formung –, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen [sic!] entdeckenden Unternehmungen beruht.“* (Winter 1989, S.1)

Nach Winter lernen S. u. S. also am besten Mathematik, wenn sie es selbstständig entdecken. Diese Hauptthese stützt Winter mit sechs teils empirisch bestätigten Argumenten:

Zunächst meint er, dass erfolgreiches Mathematiklernen nur durch Gewinn von Einsicht geschehen kann. Einfaches Auswendiglernen hält nicht auf Dauer, außerdem ist Lernen mit und durch Einsicht in Bezug auf Transferleistungen sicherlich wirkungsvoller und schlussendlich ökonomischer. Als Nächstes spricht Winter die spezifische Wissensstruktur mathematischer Inhalte an, die Lernen durch Erfahrung erlaubt, da die Mathematik einerseits in sich logisch aufgebaut ist und andererseits alltägliche Anwendungen besitzt. Das dritte Argument stützt sich auf die Annahme, dass jeder Mensch mit natürlicher Neu- und Wissbegierde ausgestattet ist und sich deshalb um die eigenständige Erschließung neuen Wissens bemüht. So wird S. u. S. im Unterricht die Möglichkeit zu intellektuellen und emotionalen Identifikationen geboten. Wenn Lernende ihr Wissen vorrangig selbstständig erarbeiten, organisieren sie es stetig um. Dabei wird das Übertragen von Wissen auf andere Gegebenheiten, also das Transferieren trainiert, welches das vierte, stützende Argument für Winters Hauptthese ist. Das Nächste schließt an diesem an, da sich Lernende an Inhalte, die sie selbstständig entdeckt haben, länger und leichter wieder erinnern. Das letzte Argument bezieht sich auf die Auffassung von Lernen dieses Unterrichtsprinzips, da die Lernenden immer Weiterlernen im Lernprozess (vgl. Winter 1989, S.1-2)

Winter nennt jedoch nicht nur Vorteile *Entdeckenden Lernens*, sondern verweist auch auf inneren und äußeren Schwierigkeiten: Da die Wichtigkeit des Stoffes für die Zukunft des Lernenden schwer selbst abgeschätzt werden kann, müssen Lehrkräfte zumindest eine Stoffauswahl und Akzentuierung treffen. Da es des Weiteren auch ein zu erfüllendes Stoffkontingent pro Schuljahr gibt, ist ein gewisses Mindesttempo im Aneignungsprozess notwendig. *Entdeckendes Lernen* geht von der natürlichen Neugier der S. u. S. aus, welche sich nicht unbedingt auf ein Schulfach bzw. die Mathematik beziehen muss. Außerdem unterscheidet sich die Situation im Klassenzimmer grundlegend von jener einer Forschung, bei welcher echter Fortschritt durch Entdecken und Erfinden stattfindet. In solchen Situationen finden sich erwachsene Profis freiwillig zusammen und arbeiten offen. In der Schule werden Kinder, also Laien in einer Art Zwangsgemeinschaft nach festem Lehrplan unterrichtet. Dies erfordert aufgrund der Vergleichbarkeit ein gesteuertes Vorgehen. Hinzu kommt, dass in der heutigen Gesellschaft die Professionalität einer Lehrkraft sich darin zeigt, viele S. u. S. in kurzer Zeit zu ansehnlichen und vorzeigbaren Leistungen durch gekonntes Unterrichten zu führen, was Entdeckendem Lernen fast schon widerspricht (vgl. ebd., S.3).

Diese Einwände Winters zeigen, dass im schulischen Kontext ein eher planmäßiges, professionelles, also „gelenktes – entdecken“ machbar ist, so wie es auch Ausubel (s.o.) vorgeschlagen hat (vgl. ebd., S.3). Winter sieht eine hohe Wahrscheinlichkeit darin, etwas in der Schule zu entdecken, wenn es durch raffiniert zugespitzte Fragen herausgekitzelt wird.

Dies ist einer der Gründe, warum in den Unterrichtsplanungen in Kapitel 5 sehr viele Fragen zum Denkanstoß an die S. u. S. gestellt werden.

Doch alles in der Erziehung hat immer Nachteile. Die Frage, die sich hier stellt, ist, welche Vorteile diese Nachteile aufwiegen. Diese Frage stellte sich auch Dearden in seinem Beitrag *Was ist Entdeckendes Lernen?* und kam zu dem Entschluss, dass zwei Dinge notwendig sind, um *Entdeckendes Lernen* umzusetzen:

*„Einerseits eine gewisse Klarheit im eigenen Denken, um das eigene Vorgehen erklären zu können und andererseits die Überzeugung, daß [sic!] die Ziele dieser Methode einen ausreichenden pädagogischen Wert besitzen, um die möglichen Nachteile hinsichtlich der Zeitdauer des Lernprozesses und der Unsicherheit im Lernerfolg auszugleichen.“* (Dearden 1977, S.73)

Zusammenfassend ist *Entdeckendes Lernen* eine Unterrichtsmethode unter vielen und es kann nicht objektiv gesagt werden, ob es den meisten anderen überlegen ist. Nach Meinung der Autorin bietet diese jedoch, bei klaren Lernarrangements und guter pädagogischer Umsetzung große Vorzüge, da sie vor allem das selbständige Lernen der S. u. S. fördert, welches in der heutigen schnelllebigen Zeit immer wichtiger erscheint.

### 3. Lehrplanbezug

Nachdem nun ausführlich die Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* erklärt wurde, stellt sich die Frage wie und wann diese in den Unterricht integriert werden kann. Dazu sollten sich Lehrkräfte mit den fächerspezifischen Lehrplänen auseinandersetzen, um ein geeignetes Thema zur Umsetzung dieses Unterrichtsprinzips zu finden.

Für das Unterrichtsfach Mathematik ist der im Jahr 2009 überarbeitete Lehrplan der Sekundarstufe I auf der Homepage des Bundesministeriums für Bildung und Frauen nachzulesen. Dieser gliedert sich in einen allgemeinen Teil, welcher das allgemeine Bildungsziel und die didaktischen Grundsätze enthält und einen fächerspezifischen Teil, auf welchen nun Bezug genommen wird.

Der fächerspezifische Lehrplan für den Unterrichtsgegenstand Mathematik ist in drei Teile gegliedert. Der erste beschreibt die **Bildungs- und Lehraufgabe**, der zweite die **didaktischen Grundsätze**, der dritte den **Lehrstoff**. Im ersten Teil wird zunächst allgemein beschrieben, welche Erwartungen an die S. u. S. im Unterrichtsfach Mathematik gestellt werden. Anschließend geht der Lehrplan näher auf Unterrichtsziele, -inhalte und den Beitrag zu den Aufgaben- und Bildungsbereichen in der Schule ein. Im nächsten Abschnitt über didaktische Grundsätze wird auf die Jahresplanung, den Lernbegriff und gewünschte Unterrichtsformen eingegangen. Zuletzt folgt wie schon genannt der Kernbereich des Lehrstoffs.

Beim Durchlesen des Lehrplans fällt sofort auf, wie wichtig der Alltagsbezug von Mathematik und das selbstständige Gestalten von Lernprozessen für die S. u. S. sind. Schon diese beiden Aussagen sprechen für *Entdeckendes Lernen* im Mathematikunterricht. Im Unterpunkt „Unterrichtsziele und –inhalte“ wird unter anderem beschrieben, dass mathematische Grundtätigkeiten wie produktives geistiges Arbeiten, kritisches Denken sowie die Überprüfung von Vermutungen und Ergebnissen zu entwickeln sind.

Im zweiten Teil wird auf den Lernbegriff, insbesondere auf systematisches, situationsbezogenes und verständnisvolles Lernen, näher eingegangen. Dabei wird im Lehrplan der schon in Kapitel 2.3.1 beschriebene konstruktivistische Lernbegriff aufgegriffen, in welchem Lernen als Prozess aufgefasst wird.

*„Ein konstruktives Verhältnis der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik soll gefördert werden. Verständnisvolles Lernen ist ein individueller, aktiver, konstruktiver Prozess.“*  
(Bundesministerium für Bildung und Frauen 2009, S.2)

Besonders wird auf die Wichtigkeit des eigenen, aktiven Erarbeitens von Wissen im Gegensatz zu konsumierendem vorgegebenen Wissen eingegangen, was deutlich für die Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* spricht. Hinzu kommt, dass S. u. S. mathematische Begriffe und Verfahren durch eigene Aktivitäten in ihr Wissenssystem einbauen sollen.

*„Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen und Reflektieren.“* (Bundesministerium für Bildung und Frauen 2009, S.2)

Es wird klar und deutlich gesagt, dass offene Lernformen, wozu auch das Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* zählt, die „bestimmenden Unterrichtsformen des Mathematikunterrichts sein“ sollen (ebd., S.3). Außerdem sollen Lehrkräfte nicht sofort Lösungswege bereitstellen, sondern die S. u. S. sollen sich selbst mit dem Lehrstoff auseinandersetzen.

*„Schriftliche Darstellungen von Lösungswegen sollen erst dann angeboten werden, wenn sich die Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe – zumindest teilweise – auseinander gesetzt haben. [...] Keinesfalls darf der Unterricht auf das Erlernen von Verfahren und Fertigkeiten beschränkt werden.“* (ebd., S.2)

Allein dieser Absatz zeigt, wie tief entdecken lassender Unterricht im Lehrplan verankert ist. Um die S. u. S. zum Lernen zu motivieren sollen „selbstständiges Entdecken und Erfolgserlebnisse“ einen wesentlichen Beitrag leisten (ebd., S.3). Dies passiert mit Hilfe von „Problemstellungen aus Themenkreisen, die den Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler entsprechen“ (ebd., S.2).

Auch wird auf die Wichtigkeit des Arbeitens mit technologischen Hilfsmitteln wie Computer oder Taschenrechner, beim Bearbeiten von mathematischen Fragestellungen eingegangen. Dies wurde in den Unterrichtsplanungen im Abschnitt 5 berücksichtigt.

Zuletzt wird im zweiten Teil des Lehrplans über didaktische Grundsätze noch die Relevanz der historischen Betrachtung von Mathematik erwähnt, denn die S. u. S. sollen geeignete Einblicke in die Geschichte der Mathematik bekommen und auch einige wichtige Persönlichkeiten derselben kennen lernen. Auch darauf hat die Autorin der vorliegenden Arbeit in der Ausarbeitung der Unterrichtseinheiten Rücksicht genommen (siehe Abschnitt 5). Außerdem sind das Gesamtbild der Mathematik als dynamische Wissenschaft und ihre Bedeutung in der Gegenwart ebenfalls zu behandeln.

*„Die Mathematik soll als dynamische Wissenschaft dargestellt und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden. Die Bedeutung der Mathematik in der Gegenwart soll in den Unterricht einfließen.“* (ebd. S.2)

Nachdem nun die Bildungs- und Lehraufgabe bzw. die didaktischen Grundsätze des Mathematikunterrichts etwas näher erläutert wurden, folgt nun der dritte und letzte Teil des fächerspezifischen Lehrplans: der **Lehrstoff**.

*„Die Schülerinnen und Schüler sollen praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und grafisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können. Dabei sollen sie von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen.“* (Bundesministerium für Bildung und Frauen 2009, S.4)

Der Lehrstoff ist dabei für die Sekundarstufe I in vier Inhaltsbereiche aufgeteilt:

- Arbeiten mit Zahlen und Maßen
- Arbeiten mit Variablen
- Arbeiten mit Figuren und Körpern
- Arbeiten mit Modellen, Statistik

In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf dem Bereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“, welchen man kurz als Geometrie zusammenfassen kann. Dieser ist inhaltlich jedoch sehr allgemein gehalten, wie dieser Ausschnitt aus der dritten Klasse von Unterpunkt „3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ aus dem Lehrplan zeigt:

- *„den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können“* (ebd., S.7)

Diese Aussage drückt aus, dass S. u. S. nach einer geeigneten Umsetzung durch die Lehrperson den Lehrsatz des Pythagoras in ebenen Figuren nutzen können sollen. Bis auf allgemein gehaltene Hinweise im Lehrplan wird wenig über die Umsetzung des Stoffinhalts in diesem festgelegt. Die Unterrichtsplanungen in Kapitel 5 sollen dabei helfen.

Bei der Planung von Unterrichtseinheiten überlegen sich Lehrkräfte meist genau, was die Lernenden nach einer gewissen Zeit können sollen. Mit der Aussage im Lehrplan, dass S. u. S. den pythagoreischen Lehrsatz nützen können sollen, stellt sich also jene allgemeine Frage nach dem Unterrichtsertrag: Was können die S. u. S. nach diesen Unterrichtseinheiten?

Diese „Output-Orientierung“ der Curricula resultierte aus der Bildungsdebatte über die Qualität im schulischen Unterricht. Vor der Überarbeitung der Lehrpläne im Jahr 2009 waren das österreichische Bildungswesen bzw. die Lehrpläne vor allem durch die sogenannte „Inputsteuerung“, also das Abarbeiten von Inhalten im Lehrstoff, gekennzeichnet. (vgl. Beer 2007, S.32) Wenn ein inputorientierter Lehrplan erfüllt ist, können Lehrpersonen den zu erledigenden Schulstoff der Reihe nach abhaken. Solche Lehrpläne geben an, was gelehrt

werden soll. (vgl. Ziener 2006, S.25f.) Diese wurden durch die Wende in der Bildungspolitik und Bildungsverwaltung in Deutschland, ausgelöst durch unterdurchschnittliche Werte in internationalen Vergleichsuntersuchungen wie PISA (Programme for International Student Assessment) und TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) im Jahr 2000, auch in Österreich nach deutschem Vorbild überarbeitet (vgl. Beer 2007, S.32).

*„Das von PISA festgestellte Defizit [...] bestand nicht darin, dass in deutschen Schulen weniger Stoffe behandelt wurden als in anderen Ländern, sondern dass die Behandlung dieser Stoffe in viel zu geringem Maße dazu geführt hat, dass die Jugendlichen mit Lesefähigkeit, mit mathematischer und naturwissenschaftlicher Kompetenz ausgerüstet wurden.“* (Ziener 2006, S.26)

Doch die S. u. S. mit Kompetenz auszurüsten soll das oberste Ziel schulischer Bildung sein. Deshalb wurden auch in Österreich, ausgehend von der Entwicklung in Deutschland, Überlegungen zur Leistungskontrolle angestellt (vgl. Beer 2007, S.62). Daraus resultierten die heute schon manifestierten Bildungsstandards des Zentrums des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (kurz: BIFIE), welche jene Kompetenzen beinhalten, die bis zur 4. bzw. 8. Jahrgangsstufe von den S. u. S. erworben werden sollen. Um näher auf Bildungsstandards einzugehen, muss erst einmal die Frage geklärt werden, was Kompetenzen grundsätzlich sind und wie diese in den Unterricht implementiert werden können.

## 4. Kompetenzorientierter Unterricht und Bildungsstandards

Bildungsstandards wurden in Österreich in einer Verordnung im Jahr 2009 vom Ministerium für Unterricht, Kunst und Kultur eingeführt. Sie geben konkret formulierte Lernergebnisse an und legen fest, welche Kompetenzen alle S. u. S. bis zu einer bestimmten Schulstufe nachhaltig erworben haben sollen. Sie basieren auf den fächerspezifischen Lehrplänen und definieren, was die S. u. S. können sollen bzw. beschreiben erwartete Lernergebnisse. Dabei konzentrieren sie sich auf wesentliche Bereiche des Unterrichtsgegenstandes.

Bildungsstandards sind also von Kompetenzbeschreibungen charakterisiert. Zentrale Fragen, die sich Lehrkräfte und Schulen seit der Einführung der Bildungsstandards stellen, sind also jene, wie man Kompetenzen unterrichtet und was dies für die Planung des Unterrichts bedeutet (vgl. Ziener 2006, S.9).

In diesem Teil der vorliegenden Arbeit wird deshalb auf folgende Fragen näher eingegangen:

- Was sind Kompetenzen?
- Was sind Bildungsstandards?
- Welche Bedeutung haben sie für den Unterricht?

Abschließend wird das letzte Kapitel der vorliegenden Arbeit eine mögliche Antwort auf die Frage geben, wie kompetenzorientierter Unterricht umgesetzt werden kann. Die bereits vorgestellte Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* ist eine im Sinne der Bildungsstandards geeignete, um Schülerinnen und Schüler kompetent zu machen.

### 4.1. Begriffsbestimmung

#### 4.1.1. Was sind Kompetenzen?

Der Pädagoge Gerhard Ziener leitet in seinem Werk *Bildungsstandards in der Praxis* die Antwort auf diese Frage mit einem Selbstversuch ein, indem er fragt, was Lehrpersonen erwarten, wenn sie lehren oder lernen (vgl. ebd., S.13).

*„Das Ergebnis ist verblüffend: Auch ohne den Begriff zu gebrauchen, will ich andere kompetent machen oder selbst kompetent werden. Niemand will inkompetent sein.“* (ebd., S.13)

Der Begriff Kompetenz bedeutet wörtlich übersetzt „Fähigkeit“ und ist in der Alltagssprache grundsätzlich positiv konnotiert, da das Antonym „Inkompetenz“ eindeutig negativ besetzt ist. Der Ausdruck wurde in der Bildungsdebatte jedoch zum Zentralbegriff, da er auf die Bewältigung von elementaren Anforderungen menschlichen Handelns abzielt (vgl. Drieschner 2009, S.10).

In der Expertise *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards* haben Klieme et al. im Jahr 2003 Überlegungen zur Qualitätssicherung und –steigerung im Bildungswesen durch die Einführung von Standards wissenschaftlich fundiert und somit den Kompetenzbegriff beleuchtet (vgl. Beer 2007, S.31).

In Übereinstimmung mit dem Erziehungswissenschaftler und Psychologen, **Franz-Emanuel Weinert**, verstehen Klieme et al. unter Kompetenzen

*„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“* (Weinert 2001, S.27f.)

Der von Weinert beschriebene Kompetenzbegriff als Leistungsdisposition in einem bestimmten Fach hebt sich somit deutlich von jenem aus der Berufspädagogik stammenden Kompetenzbegriff ab. Dieser wird nämlich mit dem viel gebrauchten Konzept der Sach-, Methoden-, Sozial- und Personalkompetenz assoziiert (vgl. Klieme et al. 2003, S.22).

Nach dem Verständnis von Weinert ist Kompetenz eine „Disposition, die Personen befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen, also konkrete Anforderungssituationen eines bestimmten Typs zu bewältigen.“ (ebd., S.72) Durch unterschiedliche Nutzung und Vernetzung von Kompetenzen können sich auch „Schlüsselkompetenzen“ beim Aufbau von Wissen in bestimmten Bereichen bilden (vgl. ebd., S.22). Die unterschiedlichen Ausprägungen der Kompetenz werden von Weinert von individuellen Facetten bestimmt:

- Fähigkeit
- Wissen
- Verstehen
- Können
- Handeln
- Erfahrung
- Motivation

(vgl. ebd., S.72f.)

Die Definition von Weinert ist auch die Grundlage des Kompetenzbegriffs des Zentrums des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE), welches die Bildungsstandards für Österreich sowohl formuliert als auch testet (mehr dazu in Kapitel 4.1.2).

Wie anfangs bereits beschrieben, beschäftigt sich auch der Pädagoge **Gerhard Ziener** mit der Frage, was Kompetenzen sind und beleuchtet den Kompetenzbegriff, indem er an der eigenen Unterrichtserfahrung ansetzt. Er fragt sich, was S. u. S. nach einer gehaltenen Unterrichtseinheit können sollen und stößt dabei auf drei Antworttypen: Erstens sollen die zu Bildenden eine Zunahme von Kenntnissen haben, denn wer unterrichtet, möchte auch, dass S. u. S. nach einer bestimmten Zeit mehr wissen als zuvor. Zweitens soll eine „Zunahme an Fähigkeiten und Fertigkeiten im Zusammenhang und Umgang mit dem Gewussten erfolgen“ (Ziener 2006, S.17). Drittens sollen die S. u. S. sich auch dementsprechend verhalten können, und so eine Entwicklung von Einstellungen und Haltungen stattfinden (vgl. ebd., S.17f.).

So entwickelt Ziener folgendes Verständnis von Kompetenz:

*„Kompetenzen beschreiben die Befähigung eines Menschen im Blick auf seine Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen in ihrem wechselseitigen Zusammenspiel. Erst dann, wenn diese drei Dimensionen des Kompetenzbegriffs im Blick sind, ist sinnvollerweise von Kompetenz zu reden.“* (ebd., S.18)

Ziener nennt jedoch neben der eigenen Unterrichtserfahrung auch eine zweite Quelle des Kompetenzbegriffs: die Linguistik. Dabei geht er genauer gesagt auf die Sprechakttheorie ein, die zwischen Kompetenz und Performanz (von engl. *performance*) unterscheidet. Die „pädagogische“ Unterscheidung greift auf die klassische des Sprachwissenschaftlers Ferdinand de Saussure (1857 - 1913) zurück, welcher zwischen *langue* und *parole* unterschied. Damit ist einfaches Kommunizieren gemeint, bei welchem sich Menschen der Wörter einer Sprache bedienen und diese nach bestimmten Sprachregeln miteinander verknüpfen. Doch bevor es zu einem sogenannten Sprechakt (Performanz) kommt, muss zunächst über Sprachkompetenz verfügt werden. Je größer der Kompetenzspielraum, desto mehr kann die Person ausdrücken (vgl. ebd., S.19).

*„Kompetenz in diesem Sinne besteht also nicht nur aus den praktisch wirksamen und vorweisbaren Kenntnissen, Fertigkeiten und Einstellungen, sondern meint zugleich eine Wahlmöglichkeit und damit verbunden eine bestimmte Bereitschaft und Disposition, die jeweils neu und immer wieder anders aktiviert werden kann.“* (ebd., S.19)

In der ersten Bestimmung von Ziener trat Kompetenz in der ausgeführten Handlung auf, in der zweiten Bestimmung bildet sie die Voraussetzung von Handlungsfähigkeit (vgl. ebd., S.19).

Ziener erweitert unter Einbeziehung der oben genannten Aspekte Weinerts Definition von Kompetenzen, da diese nur einseitiges „kognitiv-problemlösendes Verhalten“ beschreibt. Jenes ist nach Ziener für den Schulalltag nicht ausreichend, da es Aspekte der Kreativität und Gestaltungsfreiheit nicht miteinbezieht (vgl. Ziener 2006, S.19f.).

Der Pädagoge **Hilbert Meyer** spricht in seinen Ausführungen über Lernkompetenzen in seinem Werk *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung* wie auch Ziener von Kompetenz und Performanz, wobei er darauf hinweist, dass statt „gezeigter Leistung“ oft der Begriff der Performanz verwendet wird. Um dies besser zu veranschaulichen ist in seinem Werk folgende Illustration (siehe Abbildung 2) zu finden:

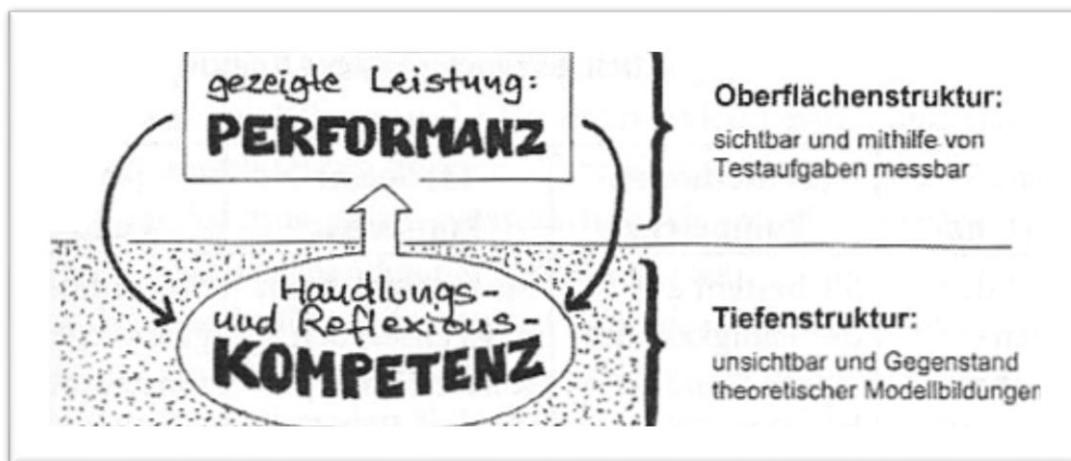


Abbildung 2: Kompetenz und Performanz (Meyer 2012, S.147)

Er definiert Kompetenz folgendermaßen:

*„Eine Kompetenz bezeichnet die Fähigkeit, durch Erfahrung und Lernen erworbenes Wissen und Können in immer wieder neue Handlungssituationen selbstständig, verantwortungsbewusst und situationsangemessen anzuwenden.“* (Meyer 2012, S.148)

Für den österreichischen Kompetenzbegriff, auf welchen die Bildungsstandards aufgebaut sind, reicht jedoch die grundlegende Definition des Erziehungswissenschaftlers Weinert. Die im nächsten Abschnitt erläuterten Bildungsstandards fragen jedoch die gezeigte Leistung, also die Performanz ab.

#### 4.1.2. Was sind Bildungsstandards?

Wie schon erklärt, wurden die Bildungsstandards aus dem im gesamten deutschen Sprachraum eingeleiteten Paradigmenwechsel für mehr Nachhaltigkeit und

Ergebnisorientierung im Unterricht entwickelt. Mit der Expertise *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards* hinterfragten Klieme et al. dieses Thema wissenschaftlich.

Auf die Frage hin, welche Leistungsstufe Bildungsstandards abfragen sollen, schlugen Experten Minimalstandards vor, also Mindestleistungen, die von allen Kindern zu erreichen sind. (vgl. Beer 2007, S.25).

*„Hier wird jedoch nachdrücklich empfohlen, in den nationalen Bildungsstandards für Deutschland ein verbindliches Minimalniveau festzuschreiben.“* (Klieme et al. 2003, S.27)

Im österreichischen Schulwesen wurde wie schon erwähnt das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung (kurz: BIFIE) für die Entwicklung, Implementierung und Überprüfung der Bildungsstandards vom Unterrichtsministerium beauftragt. Jene entschieden sich gegen die wissenschaftliche Grundlegung von Klieme et al. und legten die Bildungsstandards als Regelstandards fest (vgl. Beer 2007, S.80). Diese orientieren sich an sozialen Bezugsnormen und sollen von möglichst vielen Kindern erreicht werden (vgl. ebd., S.26).

Laut BIFIE sind Bildungsstandards

*„konkret formulierte Lernergebnisse, die sich aus den Lehrplänen ableiten lassen. Sie legen jene Kompetenzen fest, die Schüler/innen bis zum Ende der 4. Schulstufe in Deutsch und Mathematik sowie bis zum Ende der 8. Schulstufe in Deutsch, Mathematik und Englisch nachhaltig erworben haben sollen. Dabei handelt es sich um Fähigkeiten, Fertigkeiten und Haltungen, die für die weitere schulische und berufliche Bildung von zentraler Bedeutung sind.“* (BIFIE 2011a - 2014a)

Sie sollen Bildungsziele sowohl für Lernende als auch Lehrende transparenter und vergleichbarer machen. Durch die Orientierung, wann was gekonnt werden soll, konkretisieren sie die Ziele des Lehrplans und ergänzen diesen somit positiv. Außerdem soll so eine nachhaltige Ergebnisorientierung im Unterricht bewirkt werden und Lehrkräften mehr Vergleichbarkeit zwischen dem aktuellen und dem gewünschten Leistungsstand ihrer S. u. S. ermöglichen. Durch den konkreten Abgleich der erbrachten Leistungen werden auch individuelle Fördermaßnahmen leichter umsetzbar (vgl. BIFIE 2011a - 2014a).

Der Blick wird also durch die Bildungsstandards bzw. deren Formulierung von Grundkompetenzen auf das „Lernen“ selbst gerichtet. Wie Klieme et al. es ausdrücken, greifen Bildungsstandards nicht mehr auf Listen von Lehrstoffen und Lerninhalten zurück, sondern auf die Grunddimensionen der Lernentwicklung in dem jeweiligen Gegenstand (vgl. Klieme et al. 2003, S.21).

Dieses Zitat aus einem pädagogischen Jahreshaft verdeutlicht, dass Lerninhalte sozusagen als benötigte Platzhalter für zu erwerbende Kompetenzen gesehen werden können.

*„Es geht nicht darum, ob der jeweilige Lehrplan scheinbar „erfüllt“ ist, sondern darum, dass die Schülerinnen und Schüler tatsächlich Können und Wissen erwerben. Und zwar jenes Können und Wissen, das sie benötigen, um sich in der Welt zu orientieren, begründete Entscheidungen zu treffen und dann auch „Aufgaben und Situationen zu bewältigen“, die ihnen nicht die Schule sondern „das Leben“ stellt und stellen wird.“ (Arnold u.a. 2005, S.1)*

Gerhard Ziener schlug in seinem Werk *Bildungsstandards in der Praxis* vor, Bildungsstandards mit Kompetenzstandards gleichzusetzen:

*„Bildungsstandards in Form von Kompetenzstandards sind*

- **schülerorientiert**; ihr logisches Objekt sind jeweils die Schülerinnen und Schüler;
- **ergebnisorientiert**; es wird formuliert, was Schülerinnen und Schüler, wenn sie an geeigneten Inhalten erfolgreich lernen, am Ende können;
- **prozessorientiert**; kein Jugendlicher, der etwa den mittleren Bildungsabschluss anstrebt, „kann nicht“ lesen, schreiben, sprechen oder rechnen. Aber viele können dies nicht in ausreichendem, altersentsprechendem Maße. Im Blick auf die anzustrebende Kompetenz sind alle Schülerinnen und Schüler unterschiedlich weit, das heißt unterschiedlich weit vom Anfang wie vom Ziel entfernt.“ (Ziener 2006, S.31)

Die Ausrichtung am Kompetenzerwerb der Lernenden verlangt auch ein Umdenken bei der Planung und Gestaltung von Unterricht. Das soll natürlich nicht heißen, dass alle Lehrkräfte nie kompetenzorientiert unterrichtet haben. Die meisten beabsichtigen schon immer teils unbewusst, ihre Schülerinnen und Schüler kompetent zu machen (vgl. ebd., S.24). Das BIFIE unterstützt durch Informations- und Fortbildungsveranstaltungen bzw. Publikationen aktueller Begleitmaterialien Lehrkräfte bei der Umsetzung kompetenzorientierten Unterrichts. Mehr zur Umgestaltung des Unterrichts aufgrund der Einführung der Bildungsstandards in Abschnitt 4.3.

Die Überprüfung der Bildungsstandards findet periodisch und domänenorientiert statt, in jedem Überprüfungsyear steht ein anderes Fach im Zentrum. Für die Sekundarstufe I fand die erste flächendeckende Überprüfung im Mai 2012 statt, bei welcher alle S. u. S. der achten Schulstufe im Unterrichtsfach Mathematik getestet wurden. Wie in Abbildung 3 ersichtlich fand im Folgejahr die Überprüfung des Unterrichtsfaches Englisch statt. Die nächste Überprüfung der 8. Schulstufe wird 2016 im Unterrichtsfach Deutsch stattfinden.

|                             | 2012                    | 2013                 | 2014 | 2015 | 2016                |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------|------|------|---------------------|
| 8. Schulstufe (HS/AHS-UST.) | Überprüfung Mathematik  | Überprüfung Englisch | -    | -    | Überprüfung Deutsch |
|                             | 1. Zyklus 8. Schulstufe |                      |      |      |                     |

Abbildung 3: Überprüfungszyklus (BIFIE 2011f – 2014f)

Mit der Einführung der Bildungsstandards ist es möglich, durch regelmäßige Überprüfungen umfassende Ergebnisse bezüglich des Kompetenzstands der Lernenden zu erhalten. Diese werden wie schon beschrieben periodisch an S. u. S der vierten bzw. achten Schulstufe ermittelt, so können die erworbenen Kompetenzen objektiv mit den angestrebten Standards verglichen werden (vgl. BIFIE 2011f-2014f).

Die Auswertungen der Standardüberprüfungen werden an jede Schule geschickt, um gezielte Qualitätsentwicklungen in Gang zu setzen. Dabei erhalten alle S. u. S., Lehrkräfte und auch die Schulaufsicht die Ergebnisse. So bekommen die Lernenden objektive Rückmeldungen über ihre Leistungen und können diese auch mit anderen in Österreich vergleichen. Lehrpersonen erhalten anonymisierte Ergebnisse ihrer Klassen und können so ihre eigene Unterrichtsarbeit reflektieren und evtl. verbessern. Auch Schulleiter können durch die Ergebnisse evtl. einzelne Fächergruppen fördern und so Qualitätsentwicklungsmaßnahmen zur Verbesserung der Schülerleistungen setzen (vgl. BIFIE 2011e - 1014e).

Der Hintergedanke der generellen Überprüfung und Mitteilung der Ergebnisse ist der Wunsch, Unterricht und Schule in Österreich zu verbessern. Im folgenden Abschnitt wird nun auf die Bildungsstandards für Mathematik Bezug genommen.

## **4.2. Bildungsstandards im Mathematikunterricht**

Die Bildungsstandards für den Mathematikunterricht sind im Zuge der Gesetzesnovelle 2009 im Schulunterricht verankert worden und in Paragraph 17 des Schulunterrichtsgesetzes vollständig nachzulesen. Sie lenken den Blick auf Ergebnisorientierung, nachhaltigen Kompetenzaufbau und die individuelle Förderung im Unterricht (vgl. BIFIE 2011b – 2014b).

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf die umfassende Darstellung des Kompetenzmodells vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt in der 2007 erschienenen Publikation *Standards für mathematische Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8.Schulstufe*.

Die festgelegten Standards orientieren sich an zwei wichtigen bildungstheoretischen Anforderungen: **Lebensvorbereitung** und **Anschlussfähigkeit**. Denn eine der wichtigsten Aufgaben der Pflichtschule besteht darin, S. u. S. auf das Leben vorzubereiten.

Deshalb ist es für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I besonders wichtig, S. u. S. mit jenem mathematischen Wissen auszustatten, welches für die aktive, emanzipierte und reflektierte Teilnahme am gesellschaftlichen Leben erforderlich ist. Außerdem bildet das mathematische Wissen der Sekundarstufe I die Grundlage für weiterführende mathematische Ausbildungen und ist somit unerlässlich für das spätere Berufsleben (vgl. Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik 2007, S.7f.).

Die Bildungsstandards für Mathematik sind ein **dreidimensionales Kompetenzmodell**. Was genau unter Kompetenzen verstanden wird, wurde bereits in Abschnitt 4.1.1 erläutert.

Mathematische Kompetenzen beziehen sich hier auf mathematische Tätigkeiten und Inhalte sowie die Art der Komplexität. Aus diesen Tätigkeiten resultieren die drei Dimensionen des Kompetenzmodells:

- Handlungsdimension
- Inhaltsdimension
- Komplexitätsdimension

Für jede dieser Dimensionen mathematischer Kompetenzen existieren unterschiedliche Ausprägungen. Es ist offensichtlich, dass es verschiedene mathematische Handlungen, wie beispielsweise argumentieren und operieren, gibt. Die unterschiedlichsten Inhalte wurden bereits in Kapitel 3 mit Hilfe des Lehrplans erläutert. Dass jede mathematische Handlung bzw. jeder mathematische Inhalt verschiedene Grade der Komplexität aufweist, ist auch bekannt (vgl. ebd., S.9).

So entstehen im Modell der Bildungsstandards für Mathematik drei Bereiche, die erstens unterschiedliche Handlungen (H1, H2, ...) im **Handlungsbereich** zusammenfassen, zweitens zusammenhängende Inhalte (I1, I2, ...) im **Inhaltsbereich** und schließlich ähnliche Grade der Vernetzung (K1, K2, ...) zu einem **Komplexitätsbereich** verbinden (vgl. ebd., S.9).

Eine konkrete mathematische Kompetenz wird schließlich durch ein Tripel, bestehend aus je einem Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsbereich, beschrieben (siehe Abbildung 4).

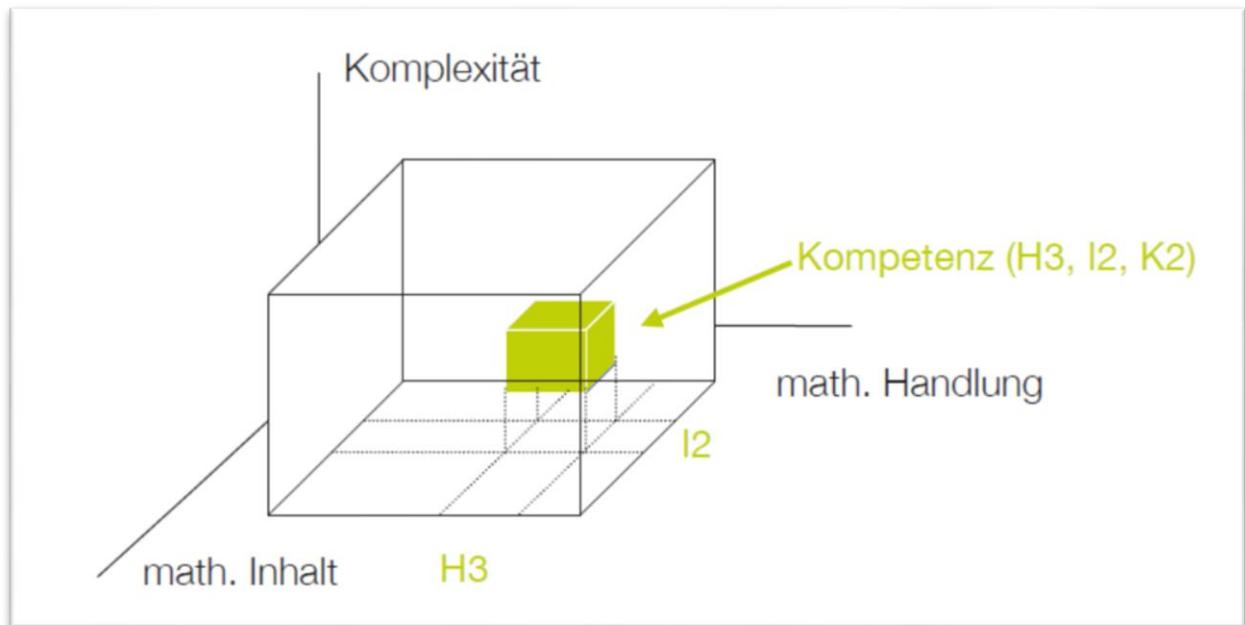


Abbildung 4: spezifische mathematische Kompetenz  
(Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik 2007, S.9)

Die mathematischen Bildungsstandards beschreiben jene Teilmenge mathematischer Kompetenzen, welche die S. u. S. bis zum Ende der 8. Schulstufe nachhaltig entwickelt haben sollen. Sie orientieren sich, wie schon erörtert, am Lehrplan und dem soeben beschriebenen Kompetenzmodell. Im Folgenden wird nun näher auf die verschiedenen Bereiche eingegangen:

#### 4.2.1. Handlungsbereiche

„Mathematisches Arbeiten umfasst vielfältige originäre mathematische wie auch außermathematische (Denk-)Tätigkeiten, die meist eng miteinander vernetzt sind bzw. aufeinander bezogen werden müssen.“ (ebd. S.10) Das Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik hat für die mathematischen Standards am Ende der 8. Schulstufe vier wichtige Tätigkeitsbereiche identifiziert und diese als Handlungsbereiche festgelegt.

- H1: Darstellen und Modellbilden
- H2: Rechnen und Operieren
- H3: Interpretieren
- H4: Argumentieren und Begründen

Charakteristische Tätigkeiten für den ersten Handlungsbereich *Darstellen und Modellbilden* wären beispielsweise jene, Skizzen anzufertigen bzw. geeignete Lösungswege zu finden. Unter *Rechnen und Operieren* fallen unter anderem elementare Rechenoperationen und Ergebnisse, die abgeschätzt werden müssen. *Interpretieren* meint etwa Rechenergebnisse im jeweiligen Kontext zu deuten. Für den letzten Handlungsbereich wären charakteristische Aktivitäten beispielsweise mathematische Vermutungen zu begründen bzw. Zusammenhänge herleiten zu können (vgl. ebd., S.10ff.).

#### 4.2.2. Inhaltsbereiche

Die Inhalte stammen aus dem derzeit gültigen Lehrplan und übernehmen auch in etwa die Unterteilungen des Stoffinhalts.

- I1: Zahlen und Maße
- I2: Variable, funktionale Abhängigkeit
- I3: Geometrische Figuren und Körper
- I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde der Fokus auf den dritten Inhaltsbereich gelegt, welcher nun genauer erklärt wird: Die S. u. S. sollen hier grundlegende geometrische Begriffe beherrschen und einfache geometrische Figuren und Körper, also deren Eigenschaften und Darstellungen kennen (vgl. ebd., S.13). Die hervorgehobenen Begriffe werden in der Unterrichtsplanung mit der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* in Kapitel 5 behandelt.

Darunter fallen:

- Punkt, Gerade, Ebene; Strecke, Winkel; Parallele, Normale
- **Symmetrie, Ähnlichkeit**
- Dreiecke, Vierecke, **Kreis**
- Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel, Kugel
- **Satz des Pythagoras**
- **Umfangs-, Flächen-, Oberflächen und Volumsformel**

Fundiertes Wissen über diese elementaren Grundbegriffe gehört zur Lebensvorbereitung für S. u. S., da sie Teil der Alltagssprache sind. Aussagen wie „der kreisrunde Tisch“ oder der „rechteckige Bildschirm“ sind geläufig, deshalb ist ein elementares Grundwissen Voraussetzung für die alltägliche Kommunikation. Auch nach der Schulzeit sollte beispielsweise noch ausgerechnet werden können, wie viel Farbe benötigt wird, um die

eigene Wohnung auszumalen. Hinzu kommt, dass räumliches Vorstellungsvermögen in vielen lebensweltlichen Situationen von großer Bedeutung ist (vgl. ebd., S.69).

Der Stoffinhalt der vier Inhaltsbereiche wird dazu auch in weiterführenden Schulen als Grundlage für komplexere mathematische Gebiete wie beispielsweise die Vektorrechnung oder Trigonometrie benötigt – mathematische Anforderungen kann man also auch hinsichtlich der Komplexität unterscheiden.

#### **4.2.3. Komplexitätsbereiche**

Mathematische Aufgaben oder Problemstellungen können manchmal durch die direkte Anwendung eines Begriffes, Satzes oder Verfahrens gelöst werden. Bei anderen muss hingegen schon kombiniert oder vernetzt gedacht werden und wieder andere verlangen Überlegungen über Eigenschaften und Zusammenhänge. Diese unterschiedlichen Komplexitätsanforderungen werden in drei Bereiche unterteilt (vgl. ebd., S.14):

- K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten
- K2: Herstellen von Verbindungen
- K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Für Lehrkräfte ist es wichtig, darauf zu achten, dass diese objektive Unterscheidung in verschiedene Komplexitätsbereiche kein Maß für das subjektive Schwierigkeitsempfinden der S. u. S. ist. Trotzdem können die objektiven Anforderungen mit K1 bis K3 zusammengefasst werden. Das *Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten* „meint die Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen, Verfahren und Darstellungen.“ (ebd., S.14) Wenn gleich mehrere von diesen angewendet oder verschiedene Tätigkeiten miteinander verbunden werden sollen, werden *Verbindungen hergestellt*. Unter dem dritten Komplexitätsbereich wird das Nachdenken über dargelegte Sachverhalte und deren mathematische Zusammenhänge verstanden (vgl. ebd., S.14).

### **4.3. Bedeutung für den Unterricht**

Da nun der allgemeine Kompetenzbegriff und die Bildungsstandards erläutert wurden, wird in diesem Abschnitt näher auf die Bedeutung der Einführung der Bildungsstandards bzgl. des Unterrichtsgeschehens eingegangen. Bildungsstandards sollen nicht nur den Blick auf die zu erreichenden Fähigkeiten der S. u. S. lenken, sondern auch positiv zu einem „guten

Unterricht“ für Lernende beitragen. Der Pädagoge Hilbert Meyer definiert guten Unterricht als jenen

*„Unterricht, in dem (1) im Rahmen einer demokratischen Unterrichtskultur (2) auf der Grundlage des Erziehungsauftrags (3) und mit dem Ziel eines gelingenden Arbeitsbündnisses (4) eine sinnstiftende Ordnung (5) und ein Beitrag zur **nachhaltigen Kompetenzentwicklung** aller Schülerinnen und Schüler geleistet wird.“ (Meyer 2004, S.13)*

Ein Maßstab für guten Unterricht sind nachgewiesene Kompetenzen, denn erfolgreicher Unterricht zeigt sich an dem, was S. u. S. nachhaltig können. Kompetenzen können somit auch als Ziele des Unterrichts und als Inhalte von Allgemeinbildung gesehen werden. Dadurch werden die sogenannten überfachlichen Kompetenzen, worunter die personale und soziale Kompetenz verstanden wird, beleuchtet. Wenn Kompetenzen als Ziele von Unterricht gesehen werden, fragen sich Lehrkräfte natürlich, ob die eigenen S. u. S. auch über diese verfügen. Die Reflexion über den Ertrag des eigenen Unterrichts und die Evaluation der Bildungsstandards werden so zur Grundfrage des pädagogischen Dialogs (vgl. Mürwald-Scheifinger, Weber 2011, S.110).



Abbildung 5: Zusammenhang zwischen fachlichen und überfachlichen Kompetenzen (Mürwald-Scheifinger, Weber 2011, S.111)

Die sogenannten fachlichen, also inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen und die bereits erwähnten überfachlichen Kompetenzen (personale und soziale) sollten sich ergänzen und unterstützen (siehe Abbildung 5). So muss im kompetenzorientierten Unterricht immer auf beide Bereiche geachtet und entsprechende Lernanlässe geschaffen werden (vgl. ebd., S.110).

Fachliche Kompetenzen kann man wie schon ausgeführt in **inhaltsbezogene** und prozessbezogene **Kompetenzen** unterteilen. Die Erstgenannten sind im Lehrplan (siehe Abschnitt 3) dargestellt:

- Arbeiten mit Zahlen und Maßen
- Arbeiten mit Variablen und funktionalen Abhängigkeiten
- Arbeiten mit Figuren und Körpern
- Arbeiten mit Modellen und statistischen Kenngrößen

Die **prozessbezogenen Kompetenzen** werden im Modell der Bildungsstandards unter dem Begriff „Handlungsdimensionen“ beschrieben (vgl. ebd., S.111):

- Darstellen und Modellbilden
- Rechnen und Operieren
- Interpretieren
- Argumentieren und Begründen

**Personale und soziale Kompetenzen**, also die überfachlichen, ergeben sich aus dem schon erläuterten Lernbegriff und beschreiben u.a. (vgl. ebd., S.111):

- Selbstständiges Arbeiten
- Kritisches Hinterfragen
- Kommunikationsvermögen und Teamfähigkeit

Nach Beer und Benischek können Standards viele positive Beiträge in den Bereichen Strukturierung, Lernzeit, Klarheit und Leistungserwartungen bringen. Trotzdem unterliegt „guter Unterricht“ nicht nur dem eigentlichen Unterrichtsgeschehen, denn die Lernentwicklung der S. u. S. hängt auch von den individuellen Voraussetzungen der Lernenden ab (vgl. Beer, Benischek 2011, S.20).

Zusammenfassend nennen sie in ihrem Beitrag *Aspekte kompetenzorientierten Lernens und Lehrens* folgende Punkte, welche kompetenzorientierten Unterricht unter anderen gut zusammenfassen:

- „Kompetenzorientierter Unterricht ermöglicht es, dass Lernende eigene Wege gehen und mithilfe individuell passender Anforderungen die bisherige Lebensbiographie weiterentwickeln.
- Die Schüler/innen setzen sich aktiv-konstruktiv mit Lern- und Leistungsanforderungen auseinander; [...]
- Lehrer/innen verstehen sich als Coaches, die das selbstgesteuerte Lernen unterstützen und fördern. Sie stellen möglichst passende Lernangebote zur Verfügung und ermöglichen das Erkennen von Lernstrategien. [...]
- Kompetenzorientierter Unterricht fördert auch die Beziehung der Schüler/innen untereinander und unterstützt somit die soziale Integration.“ (Beer, Benischek 2011, S.22f.)

Kompetenzorientiert zu unterrichten bzw. die Bildungsstandards in den Unterricht zu integrieren, bedeutet aber mehr als die bloße Vermittlung von Inhalten. „Neu ist, dass das Ziel des Unterrichts in einer ganz bestimmten Weise vorgegeben und formuliert ist, und zwar in Form von Kenntnissen, Fähigkeiten, Einstellungen und Haltungen (summarisch: Kompetenzen), die es im Unterricht verbindlich anzustreben gilt.“ (Ziener 2006, S. 43)

Der Zusammenhang von Kompetenzen und Inhalten erfordert jedoch eine genaue Betrachtung, da sie ein eigenes Verhältnis zueinander haben. Kompetenzen beschreiben, was S. u. S. können sollen. Dabei treten spezielle Stoffinhalte, bei welchen diese Kompetenzen wirksam werden, etwas in den Hintergrund. Der Befürchtung, Inhalte könnten im kompetenzorientierten Unterricht zu kurz kommen, kann mit folgender Frage entgegengewirkt werden:

„Welche Kompetenzen können an welchen Inhalten erworben werden?“ (ebd., S.28)

Dies ist höchstwahrscheinlich einer der Gründe, weswegen die Bildungsstandards für Mathematik in einen Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsbereich unterteilt wurden. Lehrpersonen haben deshalb im kompetenzorientierten Unterricht die Aufgabe, sich über den Sinngehalt der Bildungsstandards zu vergewissern und das Lernziel „Kompetenzerwerb“ durch geeignete Inhalte und Lernwege zu erreichen (vgl. ebd., S.29). Um anderen Lehrpersonen diese Aufgabe einerseits zu erleichtern und andererseits neue Anregungen zu geben, hat die Autorin der vorliegenden Arbeit je einen geeigneten Lernweg mithilfe der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* für jede Klasse der Sekundarstufe I entworfen, welche im folgenden Kapitel erörtert werden.

## 5. Unterrichtsplanungen

Dieser Abschnitt widmet sich nun abschließend der Umsetzung von *Entdeckendem Lernen* im kompetenzorientierten Mathematikunterricht.

Nach Rudolf Beer und Isabella Benischek sind Aspekte kompetenzorientierten Lernens und Lehrens vor allem die Nachhaltigkeit des Unterrichtsstoffs und die Individualisierung der Lernsituation (vgl. Beer, Benischek 2011, S.12ff.).

Beide Aspekte sprechen für die Umsetzung der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen*, da dieses durch die selbstständige Erarbeitung des Stoffinhalts sowohl die Nachhaltigkeit als auch die Individualisierung positiv beeinflusst. In ihrem Beitrag über kompetenzorientierten Unterricht in Theorie und Praxis schreiben Beer und Benischek außerdem, dass Sachkenntnisse als Grundlage von Kompetenzen gesehen werden können und umso besser behalten werden, je aktiver S. u. S. den Verstehensprozess mitgestalten dürfen.

Auch Gerhard Ziener betont die Selbstständigkeit der S. u. S. in Bezug auf kompetenzorientierten Unterricht:

*„Zwischen dem, was eine Lehrkraft im Unterricht intendiert und inszeniert, vermittelt und umsetzt durch bestimmte Methoden, und dem, was die Schülerinnen und Schüler daraus und damit machen, muss Korrespondenz herrschen. Kompetenzorientiertes Lehren und Lernen im Sinne einer nachhaltigen Befähigung wird in besonderer Weise auf die **Selbstständigkeit** der Schülerinnen und Schüler achten.“ (Ziener 2006, S.68)*

Auf diese Selbstständigkeit der Lernenden setzt das Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* unter anderem. Dabei nennt Sabine Liebig vier Kompetenzen, die bei der Unterrichtsmethode *Entdeckendem Lernen* vorausgesetzt, jedoch auch dadurch vermittelt werden (vgl. Liebig 2002, S.10):

- Entdeckungskompetenz
- Zielfindungskompetenz
- Handlungskompetenz
- Planungskompetenz

Als Aufgabe der Lehrkräfte sehen Beer und Benischek, die Lernenden in ihrem Lernweg zu begleiten und individuelle Lernangebote für sie bereitzustellen (vgl. Beer, Benischek 2011, S.12ff.). Die folgenden Unterrichtsplanungen, in welchen Mathematik entdeckt wird, zeigt eine mögliche Umsetzung kompetenzorientierten Unterrichts. Dabei hat die Autorin

vorliegender Arbeit besonders darauf geachtet viele Sinne anzusprechen, damit die Lernenden den Stoffinhalt im wahrsten Sinne des Wortes begreifen.

Jede Unterrichtsplanung wurde folgendermaßen aufgebaut: Zunächst wird das Thema der und die Anzahl der Stunden erläutert, anschließend folgt der Lehrplanbezug, welcher stets vom aktuellen Lehrplan des Bundesministeriums für Bildung und Frauen (siehe Literaturverzeichnis) entnommen ist. Folgend wird auf die Bildungsstandards bzw. die zu erreichenden Kompetenzen dieser Einheiten eingegangen, welche im Kapitel 4.2 genauer erläutert worden sind. Darauf folgen die angestrebten Lernziele der S. u. S. und die didaktische Situation der Unterrichtseinheiten. Um einen besseren Überblick über den geplanten Stundenverlauf zu erhalten, wurden davor Planungsphasen eingefügt.

Falls in den geplanten Unterrichtseinheiten Sondermaterial wie Kleber oder Schere benötigt werden, wird dies auch extra angeführt. Der Stundenverlauf selbst wird detailliert beschrieben und wurde teilweise mit Fotos zur Veranschaulichung ergänzt. Zuletzt sind die erstellten Arbeitsblätter für die jeweiligen Einheiten zu finden.

Die Literatur, die zur Erstellung der Unterrichtseinheiten herangezogen wurde, ist im Literaturverzeichnis zu finden.

## **5.1. Unterrichtsplanung – 1. Klasse (5.Schulstufe)**

### **Thema der Stunde(n)**

Symmetrie (Achsen- und Punktsymmetrie)

**Anzahl der Unterrichtseinheiten:** 2-3

### **Lehrplanbezug**

1.3. Arbeiten mit Figuren und Körpern:

Einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können

### **Bezugnahme auf die Bildungsstandards**

I3: Geometrische Figuren und Körper

H1: Darstellen und Modellbilden

H4: Argumentieren und Begründen

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten

K2: Herstellen von Verbindungen

K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

### **Angestrebte Lernziele**

Die S. u. S. sollen mit den Grundlagen der Symmetrie vertraut sein, Achsen- und Punktsymmetrien erkennen und selbst zeichnen können.

### **Didaktische Situation**

Das Thema „Symmetrie“ ist dem Gebiet der Geometrie zuzuordnen. „Vielleicht markiert Symmetrie – zumindest didaktisch gesehen – den Beginn von Mathematik.“ (Kramer 2013. S.16) Symmetrie ist etwas zutiefst Menschliches, da wir in unserem Streben nach Ordnung stets nach symmetrischen Strukturen vorgehen. Nebst Gebäuden wie Wohnhäusern, Kirchen als auch Theatern sind auch Fahr- oder Werkzeuge symmetrisch. Wir empfinden Symmetrie als etwas Schönes, dennoch existiert in der Realität des Alltags nichts, das völlig symmetrisch ist. Die Natur durchbricht die Symmetrie meist anhand von kleinen Asymmetrien bei Pflanzen und Tieren, wie Bäumen und Schmetterlingen. Es bestehen keine fachlichen Voraussetzungen für das Verständnis der Thematik, da die Schülerinnen und Schüler alle wichtigen Voraussetzungen bereits aus der Volksschule oder ihrem alltäglichen Leben mitbringen. Lehrkräfte können nach diesem Kapitel tiefere Einblicke in die Geometrie anbieten, die dem Stoff der ersten Klasse entsprechen.

### **Planungsphasen:**

- Vom Chaos zur Symmetrie
  - o Alternative: Arbeitsblatt („ergänzen“)
- Spiegelübung in Zweiergruppen
- Vertiefung und Arbeitsblatt
- Punktsymmetrische Übung im Kreis
- Gibt es Figuren, die sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch sind?
- Punkt- und achsensymmetrisches Muster (Hausübung)

### **Gepanter Stundenablauf:**

Wie schon beschrieben liegt das Ziel dieser Unterrichtseinheiten darin, den S. u. S. die Symmetrie der Mathematik als etwas Alltägliches näher zu bringen. Dafür ist es wichtig den Lernenden die Erfahrung von Symmetrie als etwas Schönes und Menschliches zu ermöglichen. Generell ist diese Unterrichtsplanung stark von Martin Kramers Werk *Mathematik als Abenteuer* beeinflusst (vgl. Kramer 2013, S.16-36).

So auch die folgende Übung, in welcher das Klassenzimmer in einen „maximal chaotischen Zustand“ versetzt wird. Jeder Schüler bzw. jede Schülerin soll alle Gegenstände so umstellen, dass der Raum möglichst unordentlich wirkt. Damit dies nicht in einem völligen Chaos endet, sollte den S. u. S. erklärt werden, dass man sich nun auf einer Theaterbühne befindet und der Umbau geräuschlos geschieht. Die S. u. S. dürfen also, bis das maximale Chaos im Klassenzimmer erreicht ist, nicht sprechen, können sich aber nonverbal durch Handzeichen verständigen. Außerdem ist es wichtig, dass keine Gegenstände übereinandergestapelt werden, da sonst Verletzungsgefahr entstehen könnte. Der Lehrertisch fungiert als Vorhang, dahinter können sich die Akteure ihre „Bühne“ ansehen und sich dieses Bild einprägen. Es ist dabei zu empfehlen, ein Foto von dem entstandenen Chaos zu machen, da sich das Klassenzimmer vermutlich nie wieder in demselben Zustand befinden wird. Nachdem sich jeder Schüler und jede Schülerin ein Bild davon gemacht hat, geht es nun darum, die Symmetrie als Ordnungsprinzip zu verstehen –, die S. u. S. sollen aufräumen. Die Klasse darf jedoch nicht die zuvor bereits vorhandene Sitzordnung wiederherstellen und hat nach dem Startzeichen der Lehrkraft genau 60 Sekunden Zeit, um den Raum so ordentlich wie möglich zu gestalten. Nachdem die Zeit vorüber ist, sollen die S. u. S. wieder auf die „Zuschauertribüne“ hinter den Lehrertisch kommen und sich das Zwischenergebnis ansehen. Anschließend haben sie wieder 60 Sekunden Zeit, um auf ein Zeichen der Lehrkraft hin die unordentlichen verbliebenen Stellen gänzlich aufzuräumen. Schließlich sollen alle Akteure wieder hinter den Lehrertisch kommen, danach darf nur noch ein Lernender auf die „Bühne“, um den Raum ordentlicher zu gestalten. Nach der Reihe

dürfen weitere S. u. S. alleine den Raum verschönern. Bald wird den Lernenden auffallen, dass dieser Prozess immer weitergeht. Somit haben sie ihre erste Erfahrung mit einem Grenzwertprozess gemacht. Die Schülerinnen und Schüler lernen dies also, ohne es zu merken. Am Ende der Übung sollen die S. u. S. ihre Eindrücke in ein paar Sätzen in ihrem Schulübungsheft festhalten, damit die Übung in Erinnerung bleibt (vgl. ebd., S.17-21).

Zusammenfassend kann man nun sagen, dass „Symmetrie eine Idee ist, die es in der Realität nicht gibt“ (ebd., S.18). Außerdem erleben die S. u. S. einen Grenzwertprozess: ungeachtet dessen, wie lange sie den Raum aufräumen, eine vollkommene Ordnung kann nie erreicht werden.

Schließlich kann die Lehrkraft die Symmetrieachse und ihre Sonderstellung einführen. Es ist nämlich zu erwarten, dass Gegenstände, von welchen nur Einzelstücke existieren (wie beispielsweise der Mistkübel) auf der Symmetrieachse landen (vgl. ebd., S.18). Diese drei Tatsachen werden auf der Tafel niedergeschrieben und in die Hefte übertragen, wie auf Abbildung 6 ersichtlich.

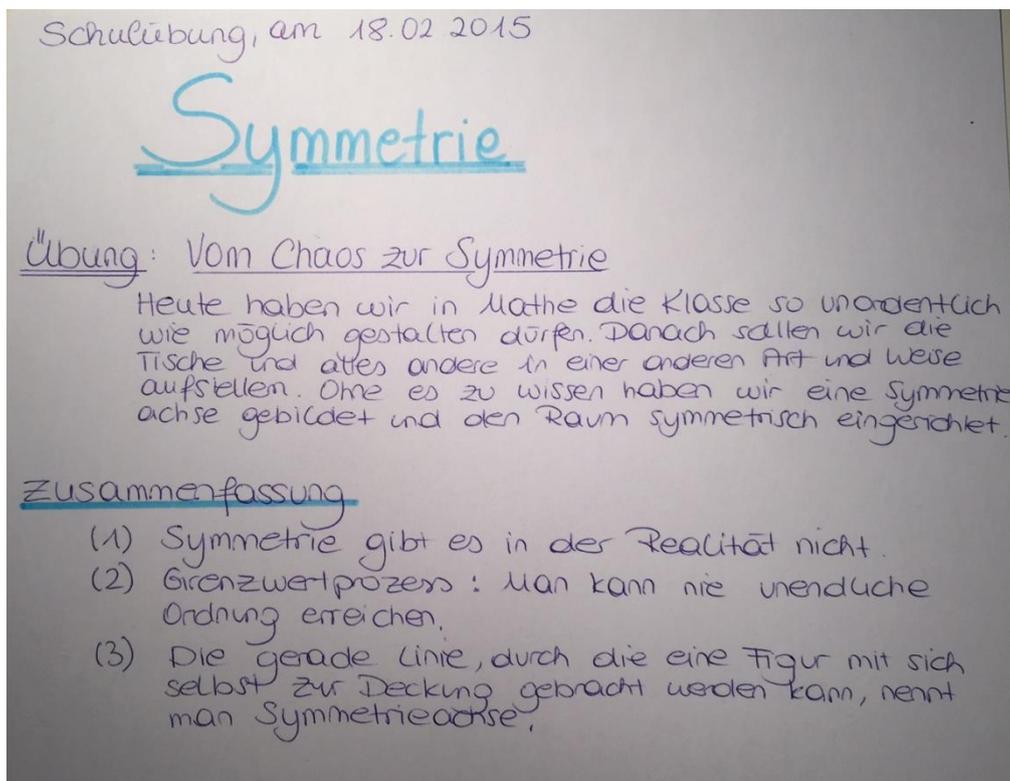


Abbildung 6: Vorschau Schulübungsheft

Nun haben die S. u. S. die Erfahrung gemacht, dass Symmetrie ein grundlegendes, menschliches Ordnungsprinzip ist.

Je nachdem wie viel Zeit noch in dieser Unterrichtsstunde übrig ist, kann man die S. u. S. ein Standbild kreieren lassen. Dazu sollen sie sich in Zweiergruppen aufteilen und im Raum entlang der Symmetrieachse gegenseitig spiegeln. Schlussendlich schießt die Lehrperson ein Foto, nachdem etwaige Fehler ausgebessert wurden. Diese Übung lässt sich je nach Zeitkapazität ausdehnen, indem sich die Lernenden symmetrisch bewegen dürfen und die Lehrperson nach einer gewissen Zeit „freeze“ ruft. In diesem Moment müssen die Akteure symmetrisch erstarren und ein neues Foto kann gemacht werden (vgl. ebd., S. 19-21). Gegen Ende der Schulstunde sollte man ungefähr fünf Minuten einplanen, um die ursprüngliche Sitzordnung wieder herzustellen.

Falls die eigene erste Klasse zu lebhaft für diese Übung sein sollte, besteht die Alternative, den Schülerinnen und Schülern das untenstehende Arbeitsblatt 1 auszuteilen. Auf diesem sind ein halbes Haus und ein halber Schmetterling abgebildet sowie die Anweisung jene zu vervollständigen. Ohne die Erwähnung des Begriffs „Symmetrie“ oder anderen Erläuterungen, werden sie die Objekte symmetrisch ergänzen. Die Lehrkraft kann anschließend erklären, dass dies natürlich ist, da wir „Symmetrie“ als schön erachten, und näher auf die Symmetrieachse eingehen. Auch diese Alternative bietet einen entdeckenden Einstieg in das Gebiet der Symmetrie.

Da nun eine Einstiegstunde zur Symmetrie und zur Achsensymmetrie im Speziellen erfolgt ist, wird die darauffolgende Stunde dazu genutzt, dieses Wissen zu vertiefen und zu erweitern. Hierfür sollte die Lehrperson zunächst Symmetrie und Achsensymmetrie im Heft definieren.

*„Viele Bauwerke, aber auch Dinge und Lebewesen in der Natur zeichnen sich durch eine besondere Form aus: die **Symmetrie (Spiegelungsgleichheit)**. Beiderseits einer (gedachten) **Achse** ergeben diese (fast) ein gespiegeltes Bild. Man spricht daher von **Achsensymmetrie**. [...] Figuren, die durch Spiegelung an einer geraden Linie mit sich selbst zur Deckung gebracht werden können, nennt man **achsensymmetrisch**. Die gerade Linie ist die **Symmetrieachse**.“ (Salzger et al. 2014, S. 181)*

Eine kleine Übung folgt mit dem untenstehenden Arbeitsblatt, auf welchem die S. u. S. zunächst die Symmetrieachsen einzeichnen und anschließend entdeckend zur Deckungsgleichheit ein Muster aus einem Blatt Papier schneiden sollen. Das Arbeitsblatt ist als Einzelarbeit gedacht und sollte still in der Klasse ausgearbeitet werden. Anschließend wird es mit der ganzen Klasse verglichen, wobei die Lehrkraft durch Handzeichen bei der ersten Frage abfragt, wie viele Symmetrieachsen gefunden wurden und die S. u. S. gleichzeitig mit Fingern aufzeigen. So werden einerseits alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen abgefragt und es kommt zu keiner Bloßstellung im Falle eines Fehlers.

Im Anschluss an das Arbeitsblatt bzw. nach dem Vergleich der Ergebnisse folgt entweder in derselben oder der darauffolgenden Stunde die Punktsymmetrie. Dafür stellen sich die S. u. S. in einem Kreis auf und suchen sich einen gegenüberstehenden Partner. Der Mittelpunkt des Kreises ist dabei das Symmetriezentrum. Zunächst sollen die S. u. S. eine neutrale Haltung einnehmen und anschließend vorerst nur eine Hand bewegen, um zu sehen, wie sich die parallel ausgeübte Bewegung auf die Punktsymmetrie auswirkt. Wenn die Lernenden damit vertraut sind, können sie auch schwierigere Figuren darstellen. Punktsymmetrie ist voraussichtlich schwerer zu erfassen, da es im Alltag nicht so oft vorkommt (vgl. Kramer 2013, S. 32).

Nach dieser Erfahrung zur Punktsymmetrie soll selbige nun auch im Schulübungsheft schriftlich festgehalten werden. Dazu sollen die Lernenden wieder eine kurze Zusammenfassung der Übung in ihr Heft übertragen und die mathematische Definition darunter festhalten:

*„Ist eine Figur nicht bezüglich einer Achse, sondern bezüglich eines Punktes symmetrisch, so spricht man von **Punktsymmetrie**. [...] Figuren, die durch Spiegelung an einem Punkt mit sich selbst zur Deckung gebracht werden können, nennt man **punktsymmetrisch**.“ (Salzger et al. 2014, S. 182).*

Abschließend zum Thema Symmetrie stellt die Lehrkraft eine Frage:

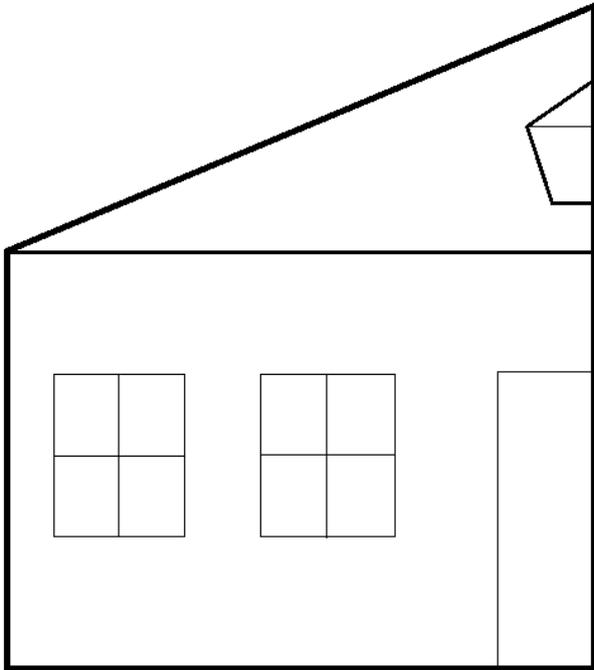
*„Gibt es Figuren, die sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch sind?“*

Um diese Frage zu beantworten, sollen sich die S. u. S. zunächst in Zweiergruppen für zwei Minuten beraten und anschließend entweder auf die rechte Seite des Lehrertischs gehen und hiermit die Frage mit „Ja“ beantworten oder auf die linke Seite und die Frage somit verneinen. Es würde ausreichen, wenn nur ein Paar auf der rechten Seite des Tisches steht und beispielsweise den Kreis oder das Quadrat nennt. Somit wäre mindestens eine Figur gefunden, die sowohl Punkt- als auch Achsensymmetrisch wäre.

Um diese Tatsache zu verinnerlichen sollen die Lernenden in derselben Stunde oder als Hausübung wieder ein Muster in ein Blatt Papier schneiden. Diesmal müssen sie das Blatt jedoch zweimal falten, damit die Punk- und Achsensymmetrie gegeben ist.

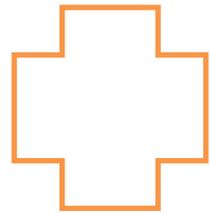
## Arbeitsblatt

Ergänze folgende Objekte vollständig:



## Arbeitsblatt – SYMMETRIE

1) Zeichne die Symmetrieachsen der Objekte ein!

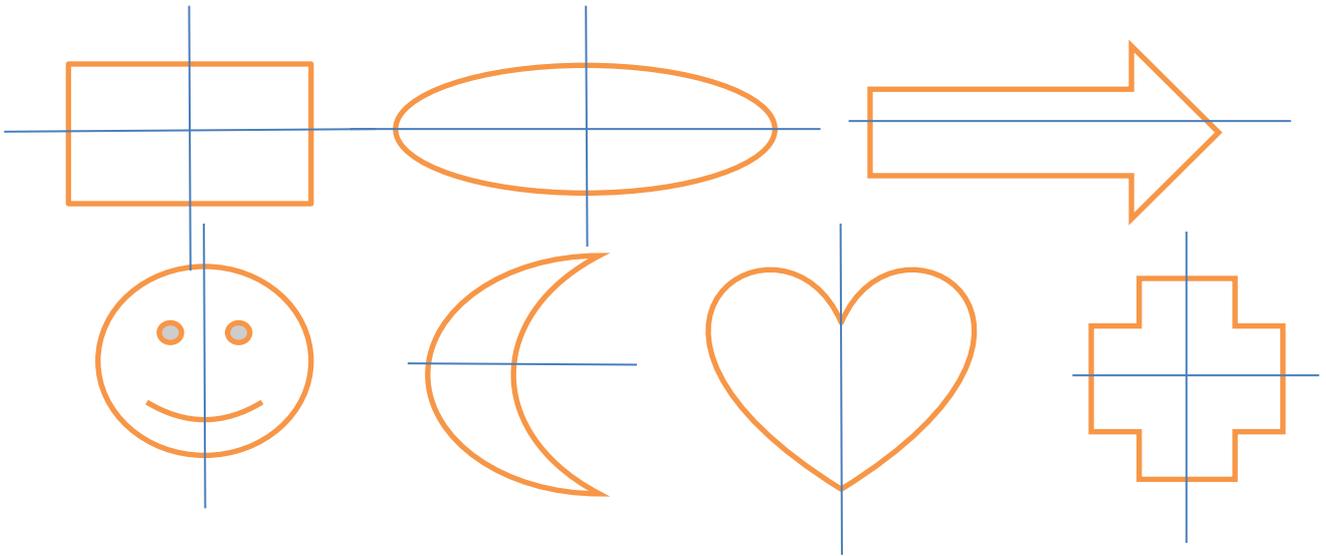


2) Nenne zumindest drei Gebäude oder Pflanzen in deinem Heimatort, die symmetrisch sind und fertige eine Skizze davon an!

3) Falte ein Blatt Papier und schneide ein Muster entlang der Falte! Was erhältst du beim Auseinanderfalten? Wie nennt man die Faltlinie? Klebe dein Muster ins Schulübungsheft sobald du fertig bist.

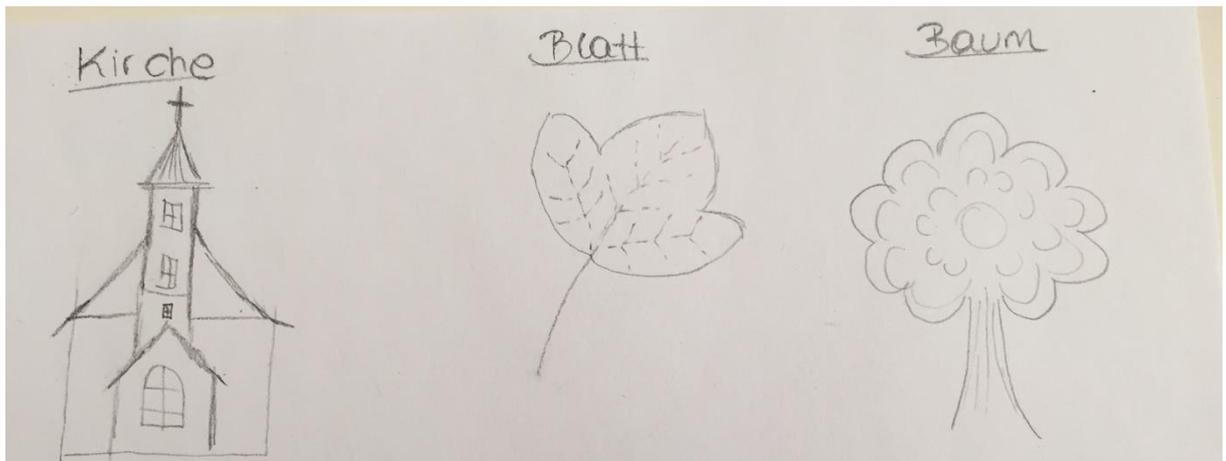
## Arbeitsblatt – SYMMETRIE

1) Zeichne die Symmetrieachsen der Objekte ein!



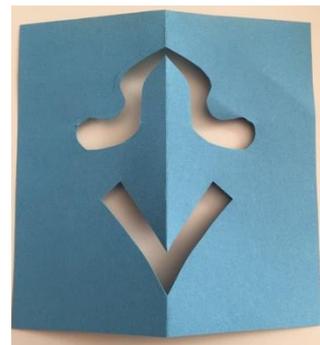
2) Nenne zumindest drei Gebäude oder Pflanzen in deinem Heimatort, die symmetrisch sind und fertige eine Skizze davon an!

*Mögliche Lösungen:*

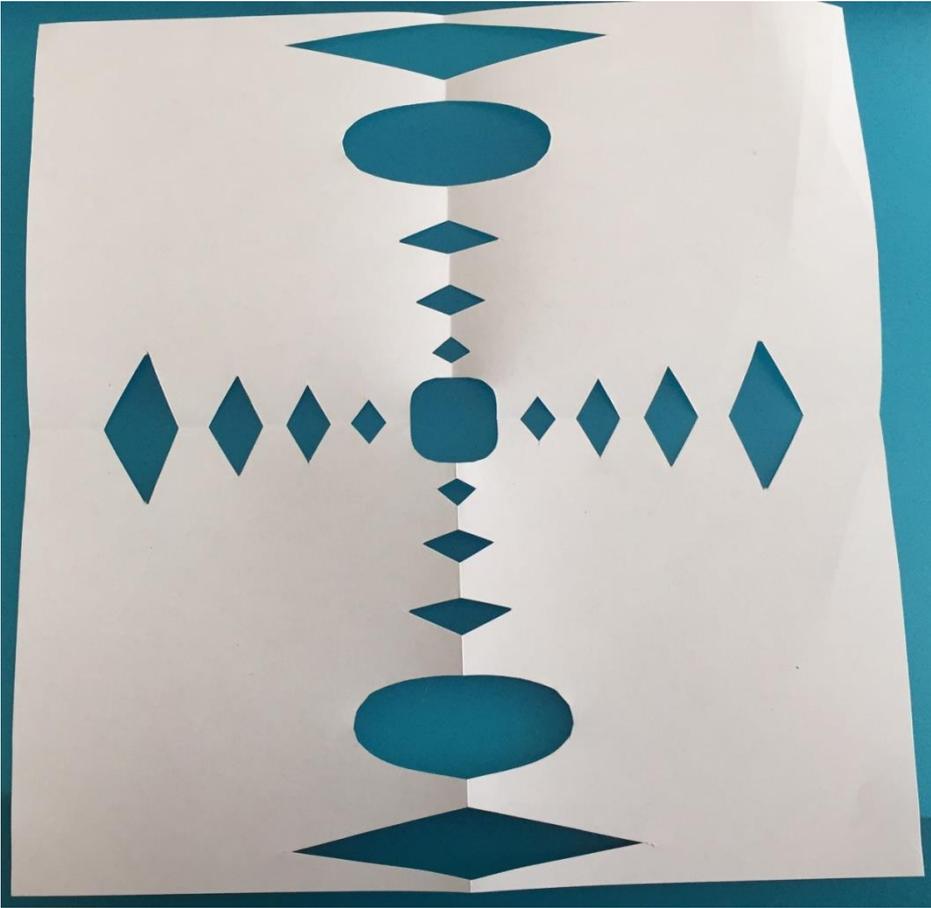


3) Falte ein Blatt Papier und schneide ein Muster entlang der Falte! Was erhältst du beim Auseinanderfalten? Wie nennt man die Faltlinie? Klebe dein Muster ins Schulübungsheft sobald du fertig bist.

- Ich erhalte ein symmetrisches Muster.
- Die Faltlinie wird Symmetrieachse genannt.
- Die Figur ist entlang dieser Achse deckungsgleich.



**Hausübung oder Abschlussübung in der Schulstunde:**



**Abbildung 7: Mögliche Lösung der Hausübung**

## 5.2. Unterrichtsplanung – 2.Klasse (6.Schulstufe)

### Thema der Stunde(n)

Kongruenz

**Anzahl der Unterrichtseinheiten:** 1-2

### Lehrplanbezug

2.3. Arbeiten mit Figuren und Körpern:

kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können

### Bezugnahme auf die Bildungsstandards

I3: Geometrische Figuren und Körper

H1: Darstellen und Modellbilden

H4: Argumentieren und Begründen

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten

K2: Herstellen von Verbindungen

K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

### Angestrebte Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen nach den Stunden definieren können, was Kongruenz ist, kongruente Figuren erkennen und auch selbst bilden können.

### Didaktische Situation

Das Thema Kongruenz gehört zum Gebiet der Geometrie. Es ist wichtig, nicht nur die typischen Dreieckskongruenzen wie SSW-Satz und dergleichen mit den Lernenden zu besprechen, sondern auf die alltägliche Anwendung dieses mathematischen Phänomens zu verweisen. Denn Kongruenz wird nicht nur für Suchbeispiele wie in herkömmlichen österreichischen Zeitungen oder für das Sternbeispiel auf dem Arbeitsblatt verwendet, sondern auch in der Kriminalabteilung der Polizei für Fingerabdrücke. Außerdem sieht man kongruente Abbildungen auch häufig in der Architektur. Sogar in Bewegungen lässt sich Kongruenz erkennen, wie es das Wasserballett oder auch marschierende Soldaten zeigen.

Die Schülerinnen und Schüler benötigen für diese Unterrichtsstunde die fachliche Voraussetzung mit einem Koordinatensystem umgehen zu können, sowie Basiswissen im Umgang mit der Geometriesoftware GeoGebra (wobei in dieser Stundenplanung darauf geachtet wurde auch computerfreie Alternativen anzubieten). Anschließend an eine

allgemeine Einführung zum Thema „Kongruente Figuren“ bietet es sich an, die Dreieckskonstruktionen und Kongruenzsätze (SSW, ...) mit den Lernenden durchzuführen.

### Planungsphasen:

- Einführung in das Thema der kongruente Figuren: Arbeitsblatt 1
- Vergleich des Arbeitsblattes, Beispiel Mathematikbuch und formelle Definition von kongruenten Figuren
- Übungsphase: Arbeitsblatt 2 – Kongruente Figuren
- Vergleich des Arbeitsblattes und Vermerk im Schulübungsheft

### Gepanter Stundenablauf

Ziel der Stunde ist es, kongruente Figuren erkennen und selbst bilden zu können. Dafür teilt die Lehrkraft am Beginn der Stunde ein Arbeitsblatt aus (siehe unten), bei welchem die Lernenden in Einzelarbeit zunächst an einem kleinen Suchspiel teilnehmen sollen (zwei gleiche Sterne finden). Hier setzt die Lehrkraft also am alltäglichen Verständnis der Gleichheit an und die Schülerinnen und Schüler werden automatisch die beiden kongruenten Sterne finden. Anschließend sollen sie ihrem Nachbarn die Entscheidung begründen. Die zweite Aufgabe des Arbeitsblattes wird mit GeoGebra bearbeitet (siehe Abbildung 8). Dabei sollen die Lernenden eine beliebige Form (Dreieck, Viereck, ...) zeichnen und dieses spiegeln, drehen und verschieben. Anschließend ist auf dem Arbeitsblatt zu vermerken, was ihnen dabei aufgefallen ist.

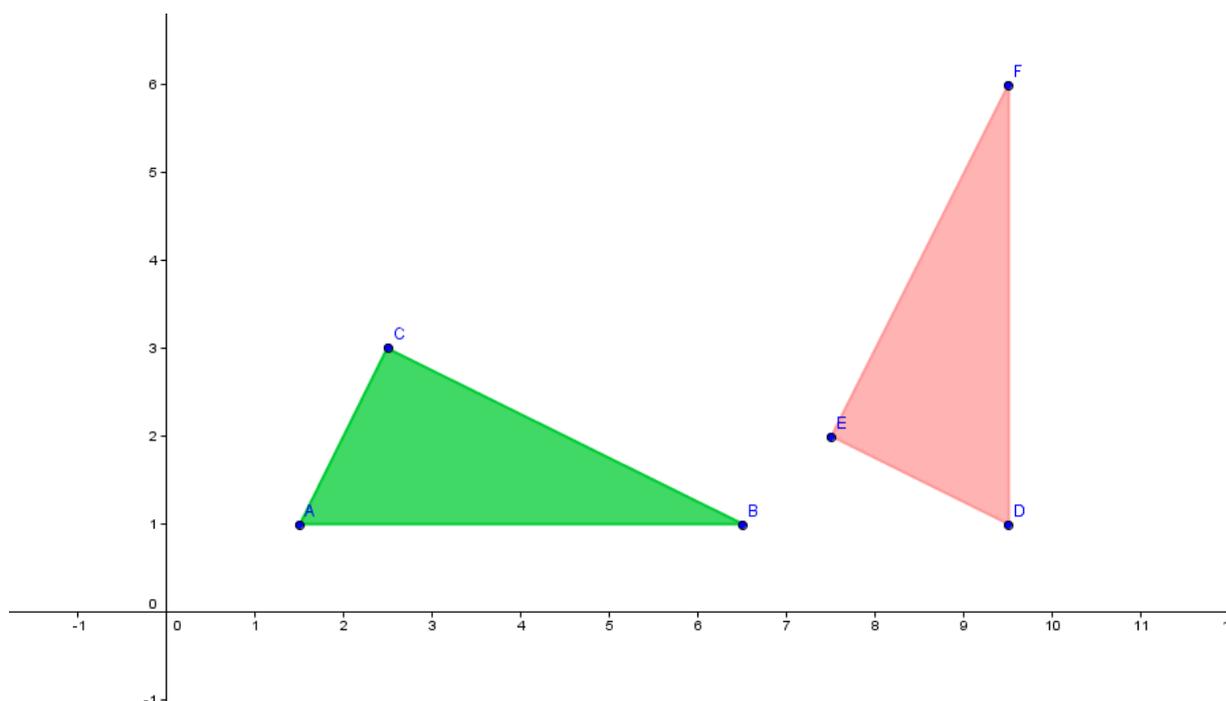


Abbildung 8: GeoGebra Aufgabe

Bei dieser Abbildung sieht man, wie die zweite Aufgabe auf GeoGebra aussehen könnte. Schließlich sollte den Kindern dabei auffallen, dass ihre Form (hier ein Dreieck) bei Verschiebung, Drehung und Spiegelung dieselbe bleibt. Das Objekt behält also Form und Größe.

Falls man aus technischen Gründen keinen Computer für die Lernenden zur Verfügung hat, kann man diese Aufgabe auch händisch machen, dabei sollen die Schüler sechs gleich große Dreiecke ausschneiden und verschiedenfarbig anmalen. Anschließend werden diese in die Schulübungshefte je einmal verschoben, gedreht und gespiegelt geklebt. Wieder fällt auf, dass ungeachtet dessen, wie man das Dreieck verschiebt, dreht oder spiegelt es Form und Größe behält (siehe Abbildung 9).

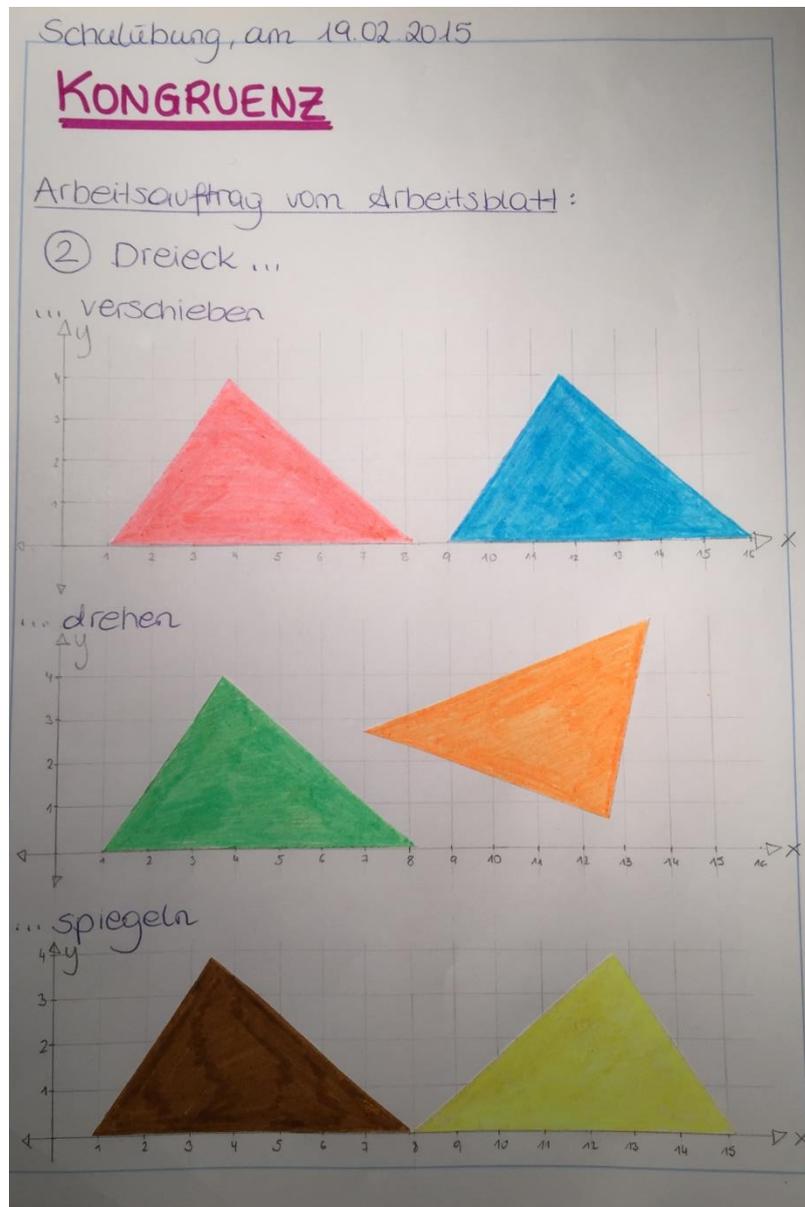


Abbildung 9: Alternative ohne GeoGebra

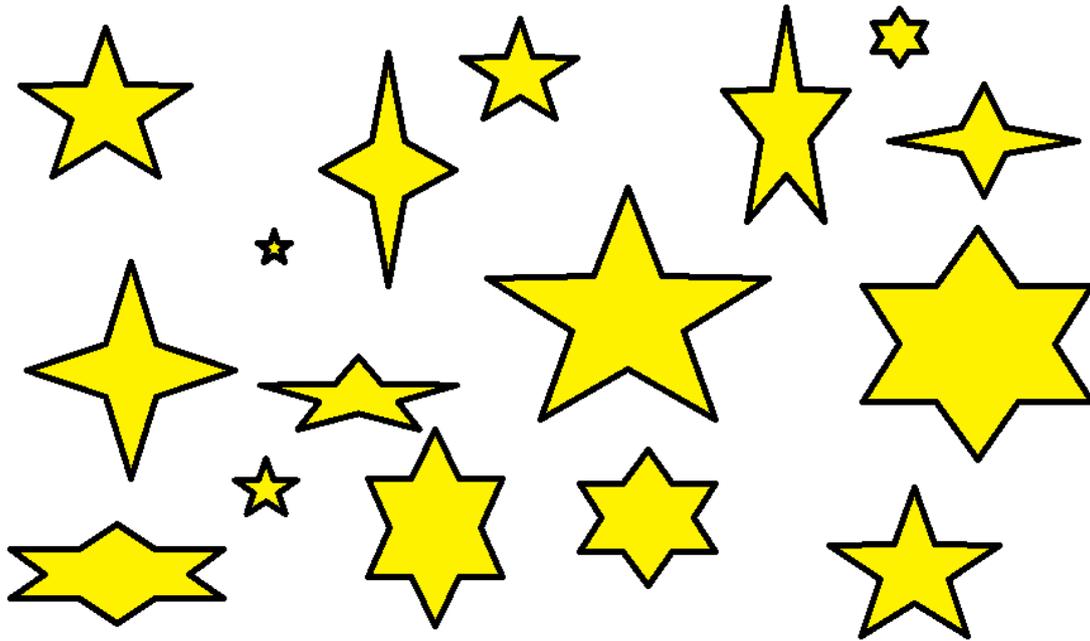
Nachdem das einführende Arbeitsblatt zum Thema „Kongruenz“ von den Schülerinnen und Schülern fertig bearbeitet wurde, vergleicht die Lehrkraft die Ergebnisse der Aufgaben. Aufbauend auf der Aufgabe zwei (Drehung, Spiegelung und Verschiebung eines Objekts) des Arbeitsblattes folgt ein Beispiel der Lehrkraft, um das Thema „Kongruenz“ förmlich einzuführen. Dafür eignet sich sehr gut das Mathematikbuch der ersten und zweiten Klasse. Diese sind zwar bezüglich der Farbe und der Ziffer (statt 1 nun 2) verschieden, jedoch aber in Form und Größe gleich, also kongruent. Nun folgt eine mathematische Definition der Kongruenz, welche die S. u. S. in ihre Hefte übertragen sollen.

*„Zwei Figuren sind genau dann **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie in **Form und Maßen übereinstimmen**. Sie **überdecken einander ganz genau**.“ (Salzger et al. 2015, S. 159)*

Nun folgt ein weiteres Arbeitsblatt, welches die Kreativität der Lernenden fördert. Hierbei sollen sie ein kongruentes Muster wahlweise per Hand oder GeoGebra erstellen. Da die Schülerinnen und Schüler bereits wissen, dass Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung und Verschiebung Figuren in kongruente Figuren überführt, sollte diese Aufgabe zu Kongruenzabbildungen den S.u.S. viel Freude bereiten. Weiter zum Thema soll nun die Kongruenz in Beispiel zwei anhand von Dreiecken begründet werden (siehe Arbeitsblatt). Das dritte und letzte Beispiel des Arbeitsblattes ist als „Knobelaufgabe“ betitelt. Hier sollen die Lernenden anhand eines Beispiels selbst herausfinden, ob aus Flächeninhaltsgleiche automatisch Kongruenz folgt und umgekehrt. Dies kann wahlweise alleine oder mit dem Sitznachbarn gelöst werden. Am Ende der Stunde wird das Arbeitsblatt (insbesondere Aufgabe zwei und drei) verglichen und die Lösung der letzten Aufgabe explizit nochmals im Schulübungsheft vermerkt.

## ARBEITSBLATT

- 1) Im folgenden Bild sind zwei Sterne gleich. Finde sie und erkläre deinem Nachbarn warum du dich so entschieden hast!

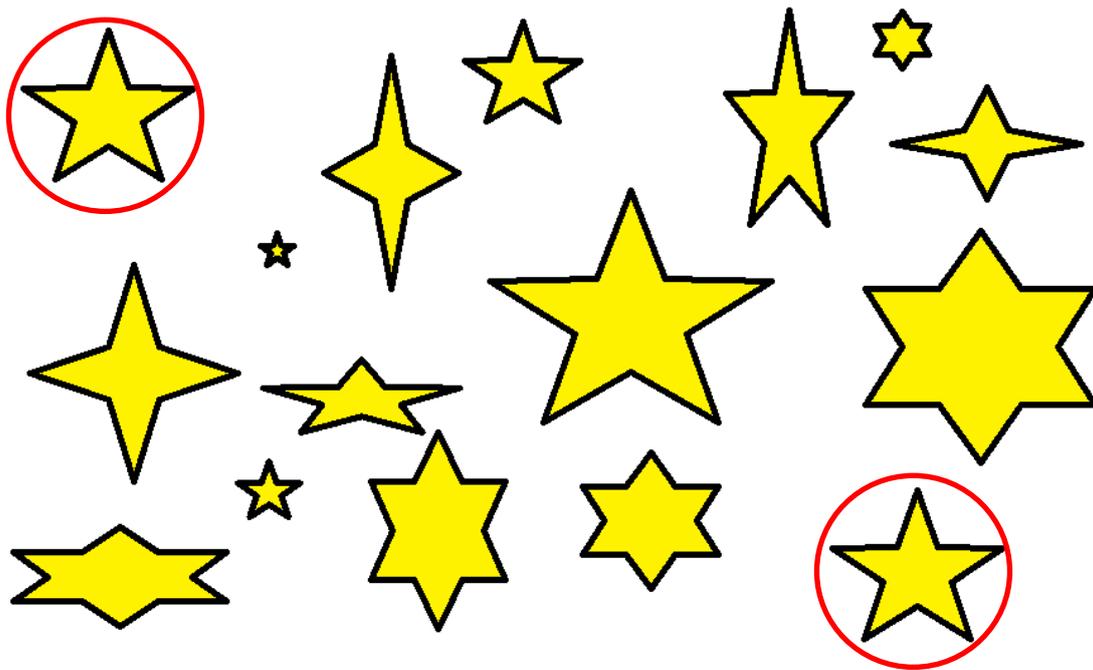


Erklärung:

- 2) Gehe mit deinem Sitznachbarn zum Computer, zeichne auf GeoGebra eine Form eurer Wahl und füll diese mit einer Farbe. Verschiebe, drehe und spiegele diese Form und schreibe bitte auf das Arbeitsblatt was dir dabei über die Form und Größe auffällt.

## ARBEITSBLATT - Lösung

- 1) Im folgenden Bild sind zwei Sterne gleich. Finde sie und erkläre deinem Nachbarn warum du dich so entschieden hast!



Mögliche Erklärung:

Ich habe mich für diese beiden Sterne entschieden, weil sie beide dieselbe Form und Größe haben.

- 2) Gehe mit deinem Sitznachbarn zum Computer, zeichne auf GeoGebra eine Form eurer Wahl und füll diese mit einer Farbe. Verschiebe, drehe und spiegele diese Form und schreibe bitte auf das Arbeitsblatt was dir dabei über die Form und Größe auffällt.

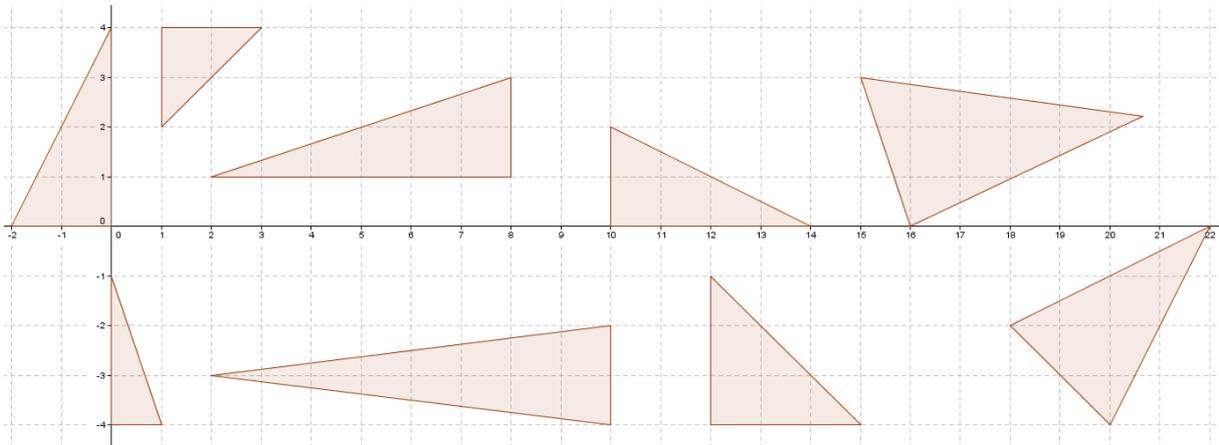
Mögliche Erklärung:

Egal, wie man das Dreieck dreht, verschiebt oder spiegelt, es behält immer Form und Größe.

## ARBEITSBLATT – KONGRUETE FIGUREN

- 1) Gestalte ein Muster aus kongruenten Figuren auf GeoGebra oder gleich hier auf diesem Arbeitsblatt.

- 2) Welche der abgebildeten Figuren sind kongruent? Male diese mit einer Farbe deiner Wahl aus!



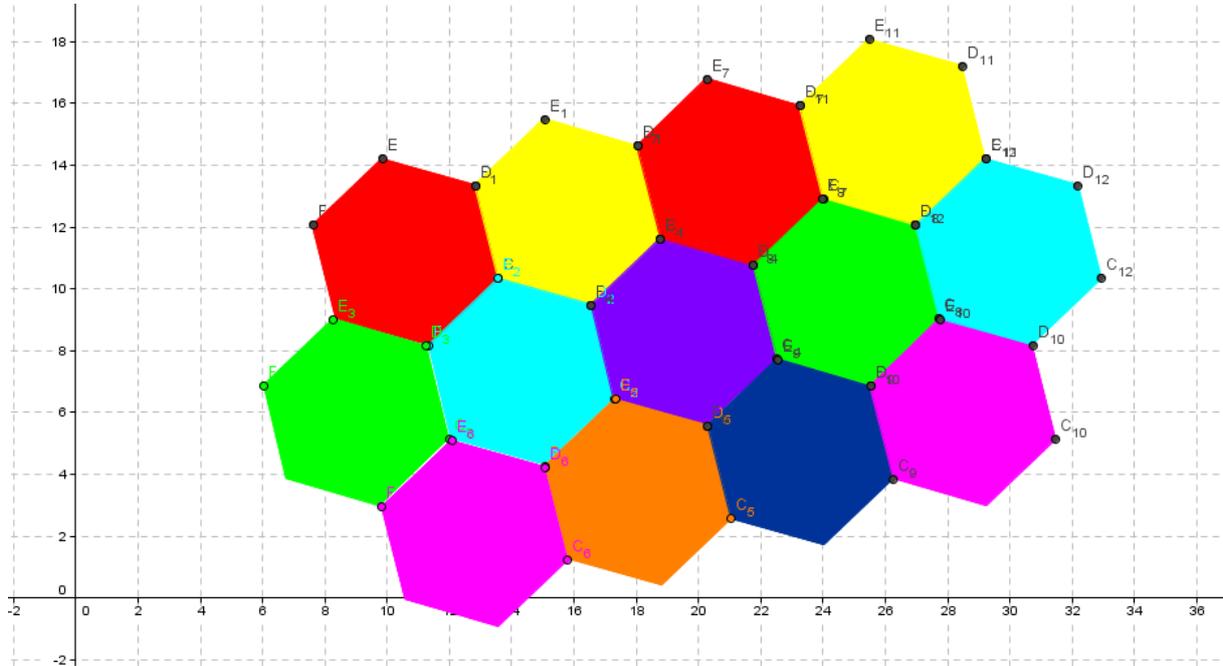
- 3) Knobelaufgaben (alleine oder mit deinem Sitznachbarn):

- Gegeben sind zwei Quadrate mit einer Fläche von  $100 \text{ cm}^2$ . Sind die beiden kongruent? Wenn ja, warum?
- Gegeben sind zwei Rechtecke mit einer Fläche von  $100 \text{ cm}^2$ .
  - Konstruiere beide Rechtecke und stelle fest, ob alle Rechtecke mit diesem Flächeninhalt kongruent sind!
  - Folgt aus zwei kongruenten Figuren automatisch, dass sie dieselbe Fläche haben?

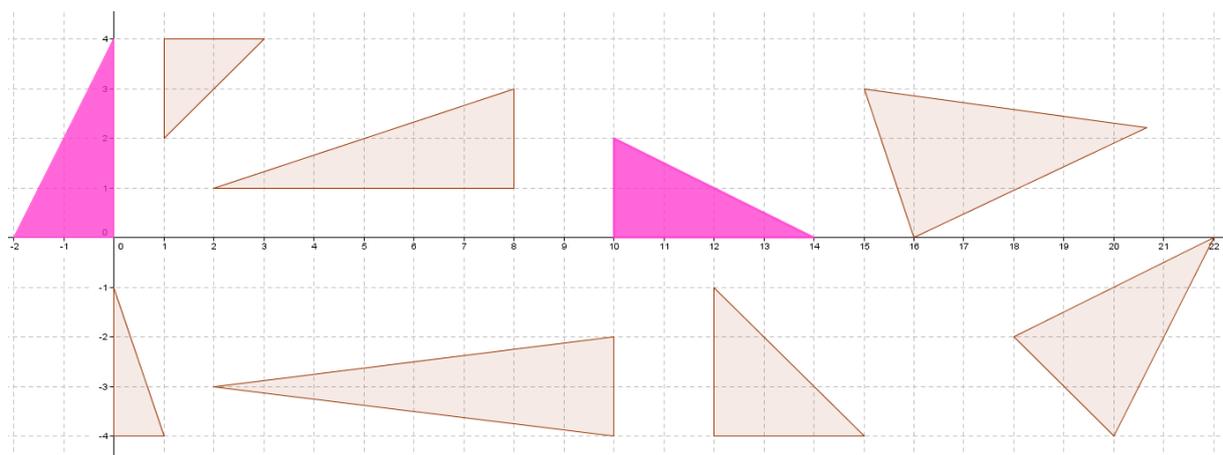
# ARBEITSBLATT – KONGRUETE FIGUREN- Lösung

- 1) Gestalte ein Muster aus kongruenten Figuren auf GeoGebra oder gleich hier auf diesem Arbeitsblatt.

Mögliches Muster:



- 2) Welche der abgebildeten Dreiecke sind kongruent? Male diese mit einer Farbe deiner Wahl aus!



3) Knobelaufgaben (alleine oder mit dem Sitznachbarn):

- a. Gegeben sind zwei Quadrate mit einer Fläche von  $100 \text{ cm}^2$ . Sind die beiden kongruent? Wenn ja, warum?

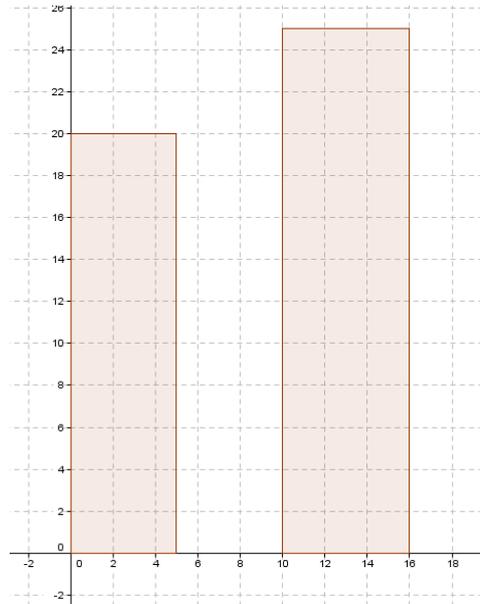
Da Quadrate zwei gleich lange Seiten haben, sind sie sowohl in Form als auch Größe gleich, also auch kongruent.

- b. Gegeben sind zwei Rechtecke mit einer Fläche von  $100 \text{ cm}^2$ .

- i. Konstruiere beide Rechtecke und stelle fest, ob alle Rechtecke mit diesem Flächeninhalt kongruent sind!

Mögliche Antwort:

Da es möglich ist, beliebig viele Rechtecke mit dem Flächeninhalt  $100 \text{ cm}^2$  zu zeichnen und diese nicht dieselbe Form haben, sind nicht alle flächeninhaltsgleichen Figuren auch kongruent.



- ii. Folgt aus zwei kongruenten Figuren automatisch, dass sie dieselbe Fläche haben?

Da Kongruenz bedeutet, dass die beiden Figuren dieselbe Form haben, müssen sie auch automatisch dieselbe Fläche haben.

### **5.3. Unterrichtsplanung – 3.Klasse (7.Schulstufe)**

#### **Thema der Stunde(n)**

Lehrsatz des Pythagoras

**Anzahl der Unterrichtseinheiten:** 2-3

#### **Lehrplanbezug**

3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern:

Den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können

#### **Bezugnahme auf die Bildungsstandards**

I3: Geometrische Figuren und Körper

H1: Darstellen und Modellbilden

H2: Rechnen und Operieren

H3: Interpretieren

H4: Argumentieren und Begründen

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten

K2: Herstellen von Verbindungen

K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

#### **Angestrebte Lernziele**

Die Schülerinnen und Schüler sollen den Lehrsatz des Pythagoras im Zusammenhang mit rechtwinkligen Dreiecken verstehen und anwenden können.

#### **Didaktische Situation**

Der Lehrsatz des Pythagoras gehört in das große Gebiet der Geometrie und findet im Alltag viel Anwendung. Die Schülerinnen und Schüler sollten für diese Unterrichtseinheiten wissen, was rechtwinklige Dreiecke sind und auch die Flächenformel dafür kennen. Außerdem ist die Flächenformel des Quadrats eine weitere fachliche Voraussetzung. Im Zuge der Unterrichtsstunden wird der Lehrsatz des Pythagoras schrittweise entdeckt, angewendet und schließlich auch überprüft und bewiesen. Ein typischer Fehler von Lernenden könnte das einfache Auswendiglernen des Satzes bezüglich der Variablennamen sein, womit sie Probleme hätten, diesen im Alltag anzuwenden. Dem wird mit alltäglichen Beispielen vorgebeugt.

Im Anschluss an diese Einheiten sollte die Lehrkraft mit den S. u. S. einige Beispiele zu diesem Thema rechnen. Dabei bieten sich etwa Aufgaben an, die folgendes Schema aufweisen: Es sind unterschiedlich beschriftete Dreiecke gegeben und die Lernenden sollen den Lehrsatz aus den Variablennamen formulieren. Außerdem könnte man den S. u. S. Tabellen mit Seitenlängen von Dreiecken geben, anhand welcher überprüft werden soll, ob jene rechtwinkelig sind.

### **Material**

S. u. S.: Papier, Schere, Lineal, Bleistift, Kleber,

Lehrperson: Maßbänder

### **Planungsphasen**

- Wiederholung rechtwinkeliges Dreieck (Arbeitsblatt 1)
- Hinführung zum pythagoreischen Lehrsatz (Arbeitsblatt 2)
- Formale Definition des Lehrsatzes und der Quadratwurzel
- Interpretation des Satzes über Flächen und Beweis (Arbeitsblatt 3)

### **Geplanter Stundenablauf**

Um den Lehrsatz des Pythagoras einzuführen, wird zunächst das rechtwinkelige Dreieck wiederholt. Dafür wird Arbeitsblatt 1 ausgeteilt, welches die S. u. S. in Einzelarbeit lösen sollen. Wenn sie die Aufgaben gelöst haben, werden mit dem Sitznachbarn die Ergebnisse verglichen. Hier wird erst einmal wiederholt, wie die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks heißen und wo der rechte Winkel im Dreieck liegt. Anschließend sollen die Lernenden die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks im Koordinatensystem ablesen. Dabei soll ihnen auffallen, dass es kein Problem ist die Katheten aus dem Koordinatensystem abzulesen, aber die Hypotenuse abgemessen werden muss. Dies ist die erste Richtung zum Lehrsatz des Pythagoras. Wenn die S. u. S. das Arbeitsblatt fertig bearbeitet haben, wird es mit der ganzen Klasse verglichen und es folgt ein zweites (Arbeitsblatt 2), welches sich dem Lehrsatz des Pythagoras annähert. Dabei sollen die Längen von drei rechtwinkligen Dreiecken abgelesen bzw. abgemessen und in eine Tabelle übertragen werden. Durch den Impuls, die Seitenlängen zu quadrieren und anschließend die quadrierten Katheten zu addieren, entdecken die Lernenden selbst den Zusammenhang des Lehrsatzes des Pythagoras. Sie wissen allerdings noch nicht, wie dieser heißt und sollen am Ende des Arbeitsblattes in einer Gruppe von vier Personen den herausgefundenen Zusammenhang verschriftlichen. Die Lehrperson geht während des Lösungsprozesses durch die Reihen und beobachtet das Gruppengeschehen. Wenn alle mit dieser Aufgabe fertig sind, sucht die

Lehrperson eine Gruppe aus, welche das Ergebnis laut vor der Klasse präsentiert. Dies wird voraussichtlich eine Unterrichtsstunde füllen.

Am Beginn der nächsten Mathematikeinheit wird der Lehrsatz formal im Schulübungsheft (siehe Abbildung 10) definiert:

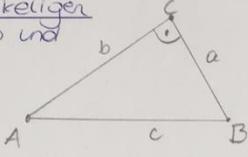
„Für die **Seitenlängen** jedes **rechtwinkligen Dreiecks** mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  gilt:  $a^2+b^2=c^2$ .“ (Humenberger 2009, S. 224).

Der Lehrsatz des Pythagoras

→ Arbeitsblatt 1  
→ Arbeitsblatt 2

Definition: Lehrsatz des Pythagoras  
Für die Seitenlängen jedes rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$



Quadratwurzel

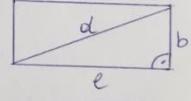
Die Zahl  $b$  heißt Quadratwurzel einer Zahl  $a$ , wenn  $b^2 = a$  ist. Dabei dürfen  $a$  und  $b$  keine negativen Zahlen sein. Das Berechnen der Quadratwurzel heißt Quadratwurzelziehen.

Mit Hilfe des Wurzelzeichens kann man die einzelnen Dreiecksseiten direkt aus dem Satz des Pythagoras ausdrücken

Umfangungen des pythagoreischen Lehrsatzes

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \\ b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \end{cases}$$

Beispiel: Bildschirmdiagonale berechnen  
 $e = 29,3 \text{ cm}$  ... Kathete  
 $b = 16,5 \text{ cm}$  ... Kathete



$$\Leftrightarrow d^2 = e^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{e^2 + b^2} = \sqrt{29,3^2 + 16,5^2} = \sqrt{1130,74} \approx 33,63 \text{ cm}$$

Aufgabe: Finde drei weitere Beispiele im Klassenzimmer und überprüfe die Diagonale rechnerisch!

Abbildung 10: Vorschau Schulübungsheft

Hier ist ein Hinweis auf die Mathematikgeschichte nützlich, da das Wort Geometrie, welches aus der Landvermessung kommt, einen sofortigen praktischen Bezug zum Lehrsatz bietet. Historisch gesehen entstehen Dreiecke (insbesondere rechtwinkelige) bei Vermessungsaufgaben. Wenn man also ein Feld vermessen möchte, einen exakten rechten Winkel benötigt oder wissen möchte, wie weit es zur gegenüberliegenden Diagonale ist,

benötigt man den Lehrsatz des Pythagoras. Hier hat die Geometrie ihren Ursprung, es begann alles mit der Erdvermessung: *geo* für „Erde“ und *metrie* für „Vermessung“ (vgl. Strogatz 2014, S.100).

Auch der Philosoph Pythagoras und sein Geheimbund sind faszinierende Themen für die S. u.S.. Mehr dazu im Lehrbuch MatheFit 3 von Günther Hanisch auf S.155.

Um den Lehrsatz des Pythagoras richtig anwenden zu können, müssen die S. u. S. auch das Ziehen der Quadratwurzel beherrschen. Diese sollte gleich nach der formalen Definition des Lehrsatzes folgen.

*„Die Zahl  $b$  heißt **Quadratwurzel einer Zahl**  $a$ , wenn  $b^2 = a$  ist. Dabei dürfen  $a$  und  $b$  keine negativen Zahlen sein. Das **Berechnen der (Quadrat-) Wurzel** heißt **(Quadrat-) Wurzelziehen**. Mit Hilfe des Wurzelzeichens kann man die einzelnen Dreiecksseiten direkt aus dem Satz von Pythagoras ausdrücken.“ (Humenberger 2009, S.226-227).*

Damit der Lehrsatz des Pythagoras gleich angewendet wird, misst die Lehrperson beispielsweise die Länge und Breite des Klassencomputers ab, um anschließend gemeinsam mit den S. u. S. die Bildschirmdiagonale zu bestimmen. Darauffolgend haben die Lernenden 15 Minuten Zeit um in den schon bestehenden Vierergruppen noch mehr Beispiele mit Maßbändern abzumessen. Die Daten werden ins Schulübungsheft übertragen und die Diagonale rechnerisch überprüft. Dabei sollen sie zumindest drei Beispiele finden (Tischdiagonale, Tafeldiagonale, Stuhldiagonale, Heftdiagonale, ...).

Nun haben die Schülerinnen und Schüler den Lehrsatz selbst kontrolliert (durch Abmessen), dies reicht jedoch nicht, um ihn mathematisch begründen zu können. Aus diesem Grund folgt nun ein haptischer Ergänzungsbeweis des Satzes, den die Lernenden wiederum in der gleichen Vierergruppe ausführen sollen (siehe Arbeitsblatt 3). Einführend kann man hier folgende Tatsache erklären:

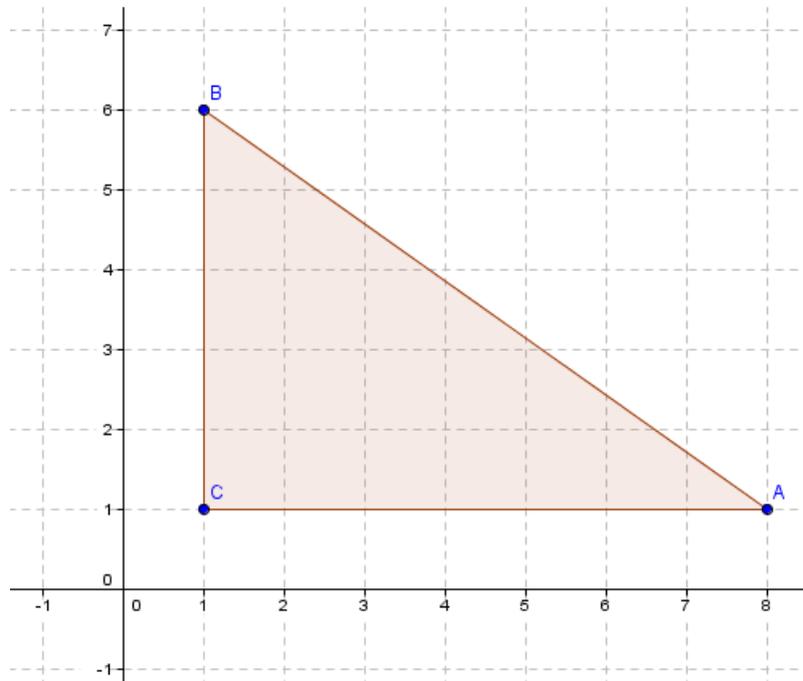
*„So betrachtet, erscheint der Satz des Pythagoras als eine Aussage über Längen. Eigentlich aber galt er schon immer als Aussage über Flächen. Früher wurde er folgendermaßen erklärt: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten.“ (Strogatz 2014, S.101)*

Nachdem die S. u. S. durch Abzählen überprüft haben, ob die Flächengleiche stimmt, wird nun der Lehrsatz selbst in Form eines Puzzles bewiesen (vgl. Kramer 2013, S.96-97). Die formale Definition und das darauffolgende Arbeitsblatt dauern mindestens eine Mathematikstunde.

Da der Lehrsatz bewiesen wurde, können Beispiele zum Vertiefen der Thematik gerechnet werden.

## Arbeitsblatt 1 – Wiederholung rechtwinkeliges Dreieck

- a. Wie heißen die Seiten im rechtwinkligen Dreieck? Beschrifte sie bitte hier in der Abbildung!



- b. Welche Seite ist die längste im rechtwinkligen Dreieck und wo liegt sie?

- c. Lies bitte die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks ab!

a =

b =

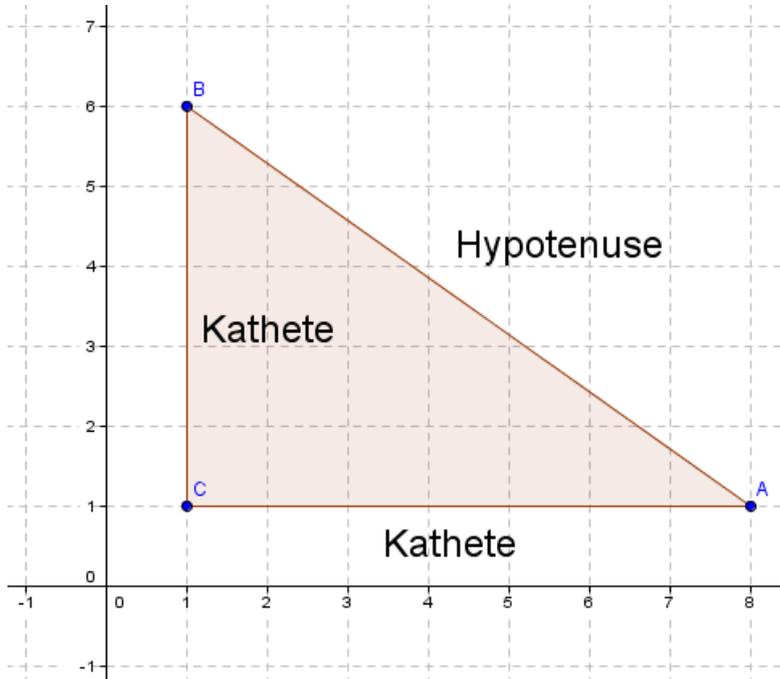
c =

- d. Was fällt dir dabei auf?

Bespreche die Ergebnisse mit deinem Sitznachbarn!

## Arbeitsblatt 1 – Wiederholung rechtwinkeliges Dreieck

- a. Wie heißen die Seiten im rechtwinkligen Dreieck? Beschrifte sie bitte hier in der Abbildung!

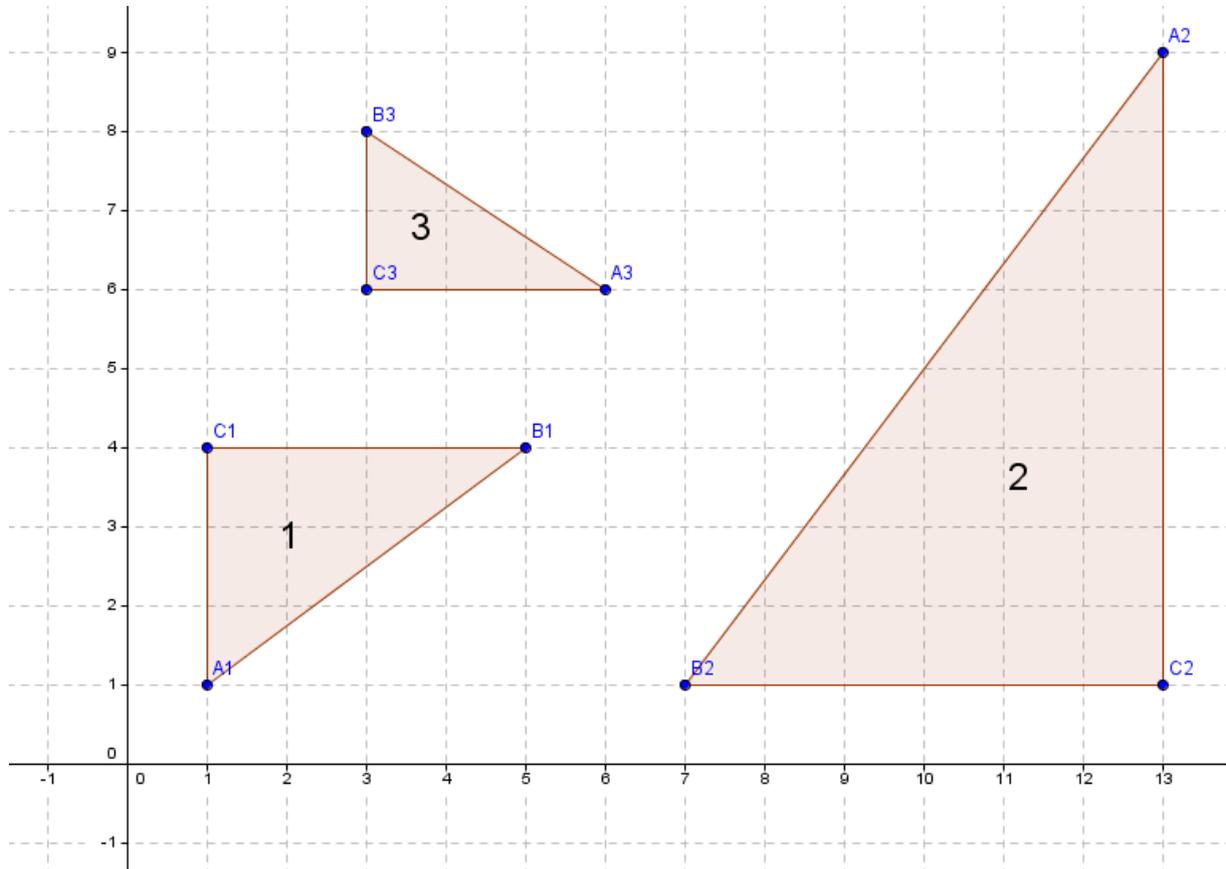


- b. Welche Seite ist die längste im rechtwinkligen Dreieck und wo liegt sie?  
Die Hypotenuse ist die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.
- c. Lies bitte die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks ab!
- a = 5
  - b = 7
  - c = 8,6
- d. Was fällt dir dabei auf?  
Die Seitenlänge von c (der Hypotenuse) kann man nicht ablesen, man muss sie abmessen.

Bespreche die Ergebnisse mit deinem Sitznachbarn!

## Arbeitsblatt 2 – DER LEHRSATZ DES PYTHAGORAS

Miss bitte die Seitenlängen der gegebenen Dreiecke ab und übertrage diese in die untenstehende Tabelle.

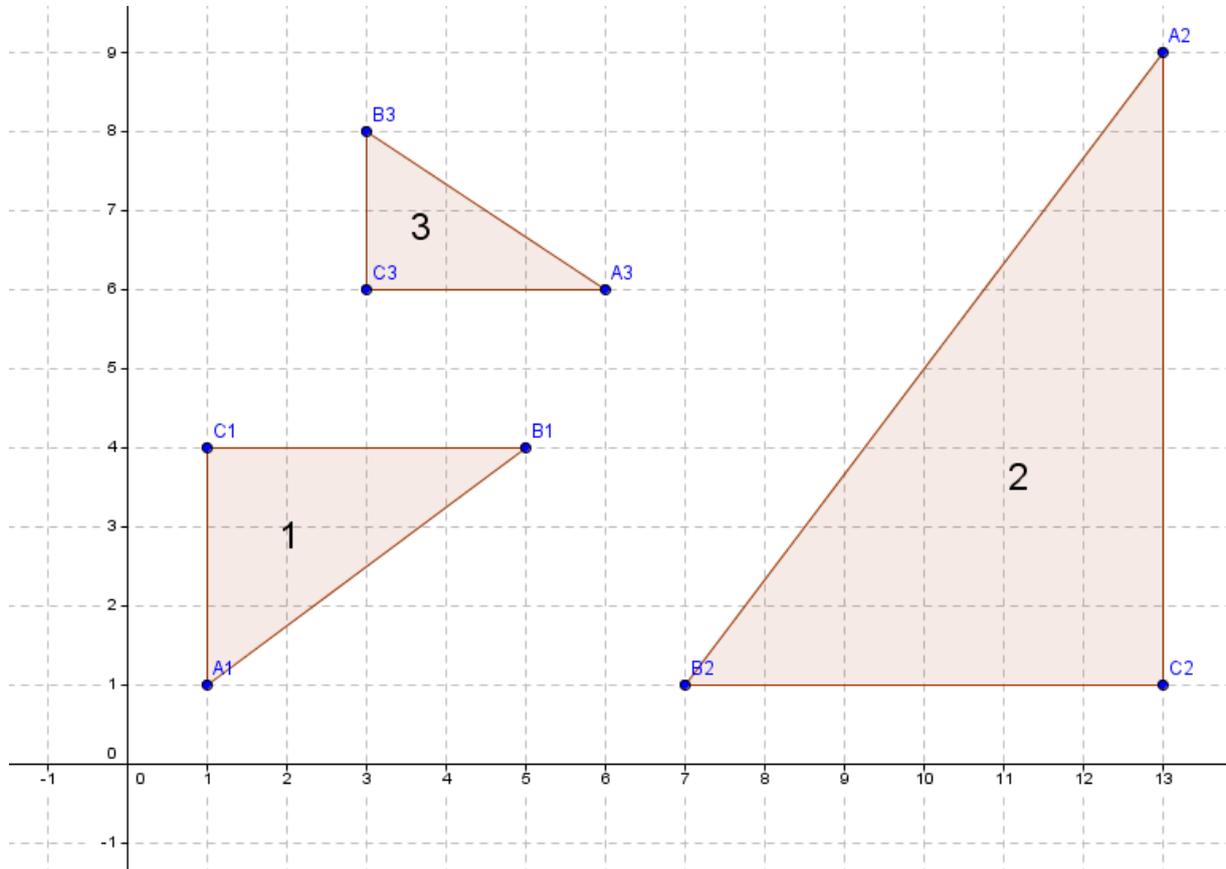


| Dreieck | a | b | c | a <sup>2</sup> | b <sup>2</sup> | c <sup>2</sup> | a <sup>2</sup> +b <sup>2</sup> |
|---------|---|---|---|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| 1       |   |   |   |                |                |                |                                |
| 2       |   |   |   |                |                |                |                                |
| 3       |   |   |   |                |                |                |                                |

Finde drei Gruppenpartner und bespreche mit ihnen was euch bei dieser Tabelle auffällt!

## Arbeitsblatt 2 – DER LEHRSATZ DES PYTHAGORAS

Miss bitte die Seitenlängen der gegebenen Dreiecke ab und übertrage diese in die untenstehende Tabelle.



| Dreieck | a | b | c        | a <sup>2</sup> | b <sup>2</sup> | c <sup>2</sup> | a <sup>2</sup> +b <sup>2</sup> |
|---------|---|---|----------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| 1       | 4 | 3 | 5        | 16             | 9              | 25             | 25                             |
| 2       | 6 | 8 | 10       | 36             | 64             | 100            | 100                            |
| 3       | 2 | 3 | ≈ 3,6055 | 4              | 9              | 13             | 13                             |

Finde drei Gruppenpartner und bespreche mit ihnen was euch bei dieser Tabelle auffällt!

Die Summe der quadrierten Kathetenlängen ergibt die Hypothenusenlänge quadriert.

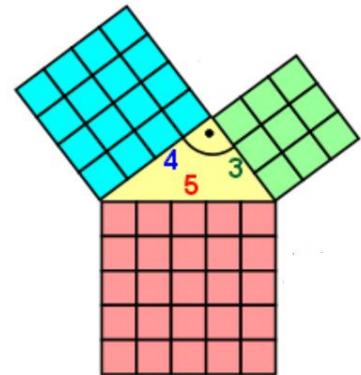
### Arbeitsblatt 3 – $a^2+b^2=c^2$ ???

Bis jetzt haben wir den pythagoreischen Lehrsatz nur bezüglich Längen betrachtet, ursprünglich war er jedoch ein Lehrsatz über Flächen.

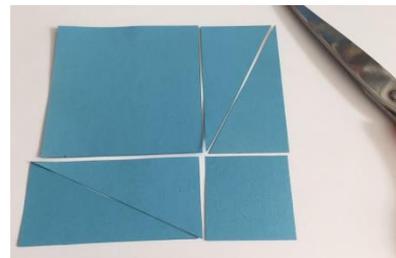
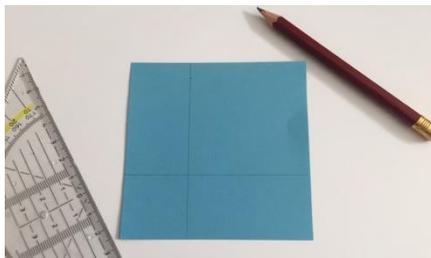
#### Lehrsatz des Pythagoras

„Die Summe der beiden Kathetenquadrate ist flächengleich mit dem Hypotenusenquadrat.“

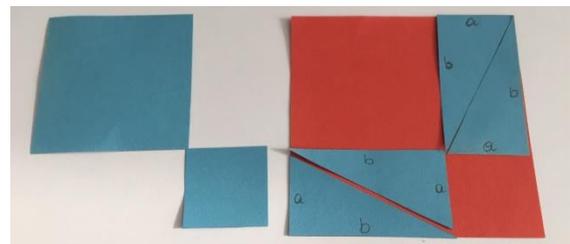
- a. Zähle die kleinen Kästchen zusammen und überprüfe ob die beiden Quadrate, die aus den Kathetenseiten entstanden sind wirklich zusammengezählt dieselbe Fläche ergeben wie das Quadrat aus der Hypotenusenseite.



- b. Schneide von einem quadratischen Stück Papier zwei gleich breite Streifen ab, sodass zwei Quadrate und zwei Rechtecke entstehen. Zerlege die beiden Rechtecke in zwei kongruente Dreiecke (siehe Abbildung).



Puzzle die Zerlegung auf ein zweites quadratisches Stück Papier und entferne die beiden Quadrate (siehe Abbildung). Beschrifte die kürzere Seite des Dreiecks mit  $a$  und die längere mit  $b$ .



- ➔ Wie kann man die Flächeninhalte der Quadrate beschreiben?
- ➔ Wie kann man mit diesem Puzzle den Lehrsatz des Pythagoras beweisen?

Arbeite mit deiner Vierergruppe an diesem Beweis und klebe anschließend die Beweisidee in dein Schulübungsheft!

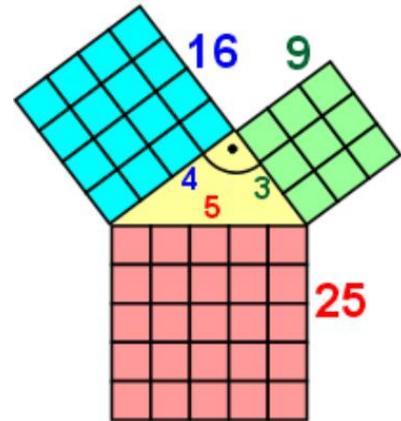
## Arbeitsblatt 3 – $a^2+b^2=c^2$ ??? - Lösung

Bis jetzt haben wir den pythagoreischen Lehrsatz nur bezüglich Längen betrachtet, ursprünglich war er jedoch ein Lehrsatz über Flächen.

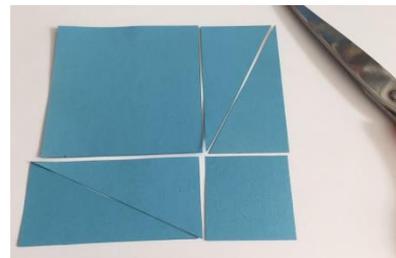
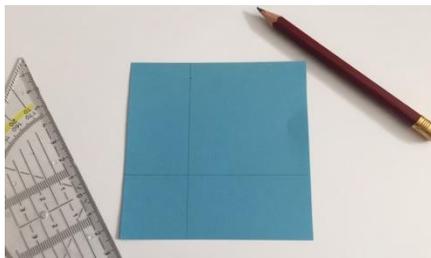
### Lehrsatz des Pythagoras

„Die Summe der beiden Kathetenquadrate ist flächengleich mit dem Hypotenusenquadrat.“

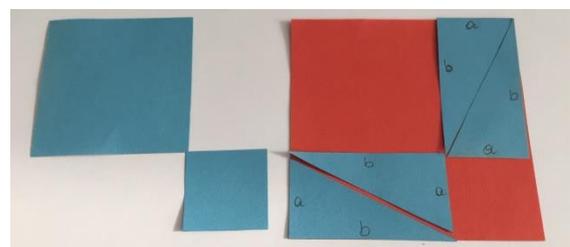
- c. Zähle die kleinen Kästchen zusammen und überprüfe ob die beiden Quadrate, die aus den Kathetenseiten entstanden sind wirklich zusammengezählt dieselbe Fläche ergeben wie das Quadrat aus der Hypotenusenseite.



- d. Schneide von einem quadratischen Stück Papier zwei gleich breite Streifen ab, sodass zwei Quadrate und zwei Rechtecke entstehen. Zerlege die beiden Rechtecke in zwei kongruente Dreiecke (siehe Abbildung).



Puzzle die Zerlegung auf ein zweites quadratisches Stück Papier und entferne die beiden Quadrate (siehe Abbildung). Beschrifte die kürzere Seite des Dreiecks mit  $a$  und die längere mit  $b$ .



- ➔ Wie kann man die Flächeninhalte der Quadrate beschreiben?
- ➔ Wie kann man mit diesem Puzzle den Lehrsatz des Pythagoras beweisen?

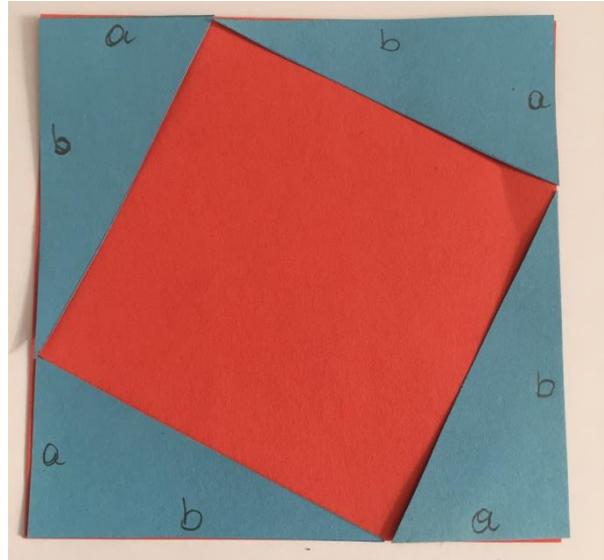
Arbeite mit deiner Vierergruppe an diesem Beweis und klebe anschließend die Beweisidee in dein Schulübungsheft!

Die Flächen des kleinen Quadrates ist  $a^2$  und die des großen  $b^2$ . Die rote Gesamtfläche ist demnach  $a^2 + b^2$ .

Die Dreiecke kann man so umlegen, dass nur noch ein Quadrat in der Mitte übrig bleibt.

Die Hypotenusenseitenlänge nennen wir  $c$ . Durch diese entsteht das neue Quadrat mit der Seitenlänge  $c$ .

Um die Fläche des neuen Quadrates auszurechnen, zieht man von der Gesamtfläche  $(a + b)^2$  einfach die vier Dreiecksflächen ab, also  $4 * \frac{1}{2}ab$

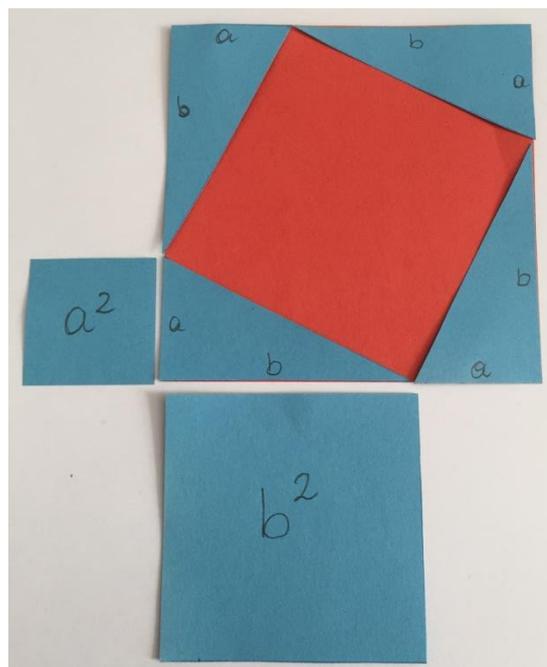


So kommt folgende Gleichung zustande:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4 * \frac{1}{2}ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

Das ist der Beweis für den Satz des Pythagoras.

Beweisidee:



## 5.4. Unterrichtsplanung – 4.Klasse (8.Schulstufe)

**Thema der Stunde(n):** Umfang und Fläche des Kreises

**Anzahl der Unterrichtseinheiten:** 3-4

### Lehrplanbezug

4.3. Arbeiten mit Figuren und Körpern:

Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können.

### Bezugnahme auf die Bildungsstandards

I3: Geometrische Figuren und Körper

H1: Darstellen und Modellbilden

H2: Rechnen und Operieren

H3: Interpretieren

H4: Argumentieren und Begründen

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten

K2: Herstellen von Verbindungen

K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

### Angestrebte Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen wissen, was die Kreiszahl  $\pi$  ist und welches Verhältnis sie angibt. Außerdem sollen sie anwendungsorientierte Aufgaben zur Umfangs- und Flächenberechnung des Kreises verstehen und lösen können.

### Didaktische Situation

Die Umfangs- und Flächenberechnung des Kreises gehört in das mathematische Teilgebiet der Geometrie. In dieser Stundenplanung wurde der alltägliche Bezug der Thematik fokussiert und die Kreiszahl  $\pi$  mit dem dazugehörigen Umfang und Flächeninhalt entdeckt.

Nach diesen Unterrichtseinheiten bietet es sich an, mit dem Flächeninhalt des Kreissektors und dem Umfang und Flächeninhalt des Kreisringes fortzusetzen. Die S. u. S. sollten in diesem Schuljahr bereits die Irrationalen Zahlen gelernt haben. Sicherlich kann man den Lernenden die Formel zur Umfangs- und Flächenberechnung einfach präsentieren und sie anschließend selbst Beispiele rechnen lassen, dagegen spricht jedoch, dass sie den Lösungsweg nicht selbst erarbeiten würden und somit keinen eigenen Erkenntnisgewinn

hätten. In dieser Stundenplanung wird auf den intensiven Lern- und Erkenntnisprozess Wert gelegt.

**Material:**

S. u. S.: Blei- und Buntstifte, Kleber, Schere, Zirkel, Geodreieck

Lehrperson: Maßbänder, Seile

**Planungsphasen:**

- Einführende Übung zum Kreisumfang (Abrollen – Arbeitsblatt 1)
- Vergleich der Ergebnisse und Überleitung zum experimentellen Bestimmen der Kreiszahl (Arbeitsblatt 2).
- Formale Definition der Kreiszahl und des Umfangs
- Alltäglich Beispiele zum Üben (Arbeitsblatt 3)
- Gemeinsame Erarbeitung des Beweises für die Flächenformel des Kreises
- Alltäglich Beispiele zum Anwenden (Arbeitsblatt 4).

**Geplanter Stundenablauf:**

Das Ziel dieser Einheiten ist, dass die Lernenden die Einsicht gewinnen, dass das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser bei jedem Kreis dasselbe ist. Außerdem sollen sie den Umfang und später auch die Fläche mit Hilfe dieses Verhältnisses, der Kreiszahl  $\pi$  berechnen und anwenden können.

Zu Beginn dieser Unterrichtseinheiten fragt die Lehrperson ob die S. u. S. noch wissen, was ein Kreis ist und wie man auf den Umfang dieses Kreises kommt. Schnell werden die Schüler und Schülerinnen auf die Idee des Abrollens und Abmessens kommen. Dies ist der Zeitpunkt, an welchem das Arbeitsblatt zum Kreisumfang ausgeteilt wird. Die Aufgaben auf dem Arbeitsblatt sind von dem Lehrbuch MatheFit 4 inspiriert (vgl. Hanisch 2010, S. 229-230). Hier sollen die Lernenden zunächst in Partnerarbeit eine Euro-Münze ihrer Wahl abrollen. Dafür wird eine Gerade gezeichnet, auf welcher Anfangs- und Endpunkt des Abrollprozesses markiert werden. Die Länge dieser Strecke ist der Umfang. Dieser Vorgang wird bei zwei anderen Münzen wiederholt und in eine Tabelle übertragen. Nach dieser Aufgabe sollen sich die Partner überlegen, ob es einen Zusammenhang zwischen der Streckenlänge, also dem Umfang und dem Durchmesser gibt. Es reicht vorerst, wenn den Lernenden auffällt, dass eine längere Streckenlänge einen größeren Umfang nach sich zieht.

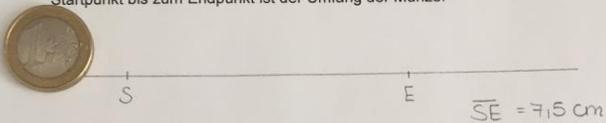
Wenn das Arbeitsblatt fertig bearbeitet wurde (siehe Abbildung 11), werden die Ergebnisse mit der Klasse verglichen, wobei hier aufgrund der vielen Euro-Münzen nur drei exemplarisch laut vorgelesen werden.

Wichtig beim Vergleich ist die dritte Aufgabe, bei welcher die S. u. S. den Zusammenhang herausfinden sollen.

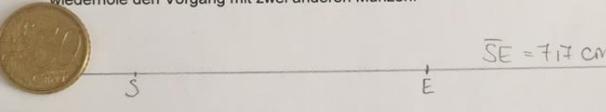
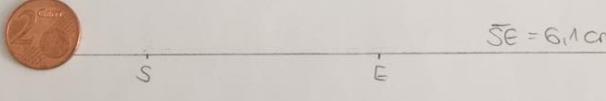
Falls sehr eifrige Partner auch schon auf die Idee gekommen sind, das Verhältnis von Umfang und Durchmesser zu berechnen, kann dieser Vorschlag gleich aufgegriffen werden um zum nächsten Arbeitsblatt überzuleiten.

**Arbeitsblatt – Umfang des Kreises**

1) Wie berechnet man den Umfang eines Kreises?  
Such dir einen Partner und nimm aus deiner Geldbörse eine Euro-Münze. Zeichne eine Gerade und markiere den Startpunkt der Münze. Rolle sie anschließend entlang der Linie ab und markiere den Punkt, an welchem die Münze wieder ihre Ausgangssituation erreicht hat. Die Länge der Strecke vom Startpunkt bis zum Endpunkt ist der Umfang der Münze.



2) Trage dein Messergebnis aus der ersten Aufgabe in folgende Tabelle ein und wiederhole den Vorgang mit zwei anderen Münzen.

| Münze         | Durchmesser | Streckenlänge |
|---------------|-------------|---------------|
| 1 Euro-Münze  | 2,3 cm      | 7,5 cm        |
| 50 Cent-Münze | 2,4 cm      | 7,7 cm        |
| 2 Cent-Münze  | 1,8 cm      | 6,1 cm        |

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Streckenlänge und dem Durchmesser?  
Je größer der Durchmesser, desto größer die Streckenlänge (= Umfang).

Abbildung 11: Lösung Arbeitsblatt – Umfang des Kreises

Im nächsten Schritt nähern wir uns  $\pi$  experimentell an. Das Abrollen einer Münze oder jedes Kreises wird als sehr mühsam empfunden, es muss also eine Alternative dafür geben. Hier kommt das nächste Arbeitsblatt ins Spiel. Bei diesem sollen zunächst Kreisbeispiele aus dem Alltag in einer Gruppenarbeit von vier Personen gefunden werden und anschließend drei dieser Beispiele in der Klasse vermessen werden. Die Ergebnisse werden erneut in eine Tabelle übertragen, wobei nun der Impuls, das Verhältnis von Umfang und Durchmesser zu berechnen, gegeben ist. Dabei sollen die S. u. S. darauf achten, alle Ergebnisse in der Einheit cm anzugeben, damit auch diese Kompetenzen gestärkt werden. Der Messvorgang beansprucht sicherlich mindestens 15 Minuten und sollte genau gemacht werden. Die Lehrperson stellt Maßbänder und Seile zur Verfügung, damit auch größere Gegenstände wie Mistkübel oder Blumentöpfe abgemessen werden können.

Im nächsten Schritt werden die Gruppenergebnisse mit anderen Gruppen verglichen und diskutiert, ob das Verhältnis tatsächlich vom Kreis unabhängig ist. Gegen Ende der Stunde löst die Lehrkraft die Gruppen auf und vergleicht die Gruppenarbeit mit der Klasse. Je

nachdem, wie viel Zeit in dieser Unterrichtseinheit noch übrig ist, können alle Gruppen ihre Ergebnisse präsentieren und an die Tafel schreiben, damit die Lehrkraft diese besser vergleichen kann. Am wichtigsten ist hierbei jedoch wiederum das letzte Beispiel mit der Klasse zu vergleichen und die Forschungsfrage, ob dies für alle Kreise gilt, aufzulösen.

Da die Messergebnisse aufgrund der Messfehler variieren werden, sollte die Lehrperson kurz auf absolute und relative Messfehler eingehen, um die unterschiedlichen Werte zu erklären. Diese statistischen Größen sind ebenfalls Unterrichtsstoff der vierten Klasse und bieten sich somit hier an vertieft zu werden. Diese Gruppenarbeit ist vom Werk Mathematik als Abenteuer inspiriert (vgl. Kramer 2013, S.108-110).

Am Beginn der nächsten Unterrichtseinheit wird die Kreiszahl  $\pi$  und der Umfang formal im Schulübungsheft definiert. Da in der letzten Stunde  $\pi$  experimentell bestimmt wurde, kann die Lehrperson genau dort ansetzen und den Lernenden erklären, dass die Kreiszahl immer das Verhältnis von Umfang und Durchmesser ist. Die irrationalen Zahlen lernt man auch in dieser Klasse, die Zahl  $\pi$  ist somit ein neuer Vertreter dieser unendlichen, nicht periodischen Zahlen. Hier kann die Lehrkraft auf die Forschungsaktivität der Mathematik verweisen, da der Rekord der bisherig bestimmten Nachkommastellen bei mehr als 2,7 Billionen Dezimalstellen liegt. Ganz genau werden wir die Zahl jedoch nie kennen (vgl. Strogatz 2014, S.143). Somit ist nun der Umfang als Produkt von Durchmesser und  $\pi$  definiert.

An dieser Stelle würde sich ein näherungsweise Bestimmen der Zahl  $\pi$  anbieten und auch ein geschichtlicher Ausflug in die Antike zu Archimedes, welcher eine Methode zur näherungsweisen Berechnung von  $\pi$  entwickelt hat (vgl. Humenberger 2012, S.190-195).

Nachdem die Zahl  $\pi$  und der Umfang des Kreises definiert wurden, sollten einige anwendungsorientierte Beispiele mit den Lernenden gerechnet werden. Hier bieten sich alltägliche Gegenstände an, die die S. u. S. in den vorherigen Stunden bestimmt haben, wie beispielsweise eine Trinkflasche oder ein Blumentopf. Als Hausaufgabe könnte man jeden Lernenden individuell ausrechnen lassen, wie viele Umdrehungen das Vorderrad seines Fahrrads machen würde, wenn er oder sie mit dem Rad zur Schule fahren würde. So verhindert man, dass die S. u. S. voneinander abschreiben und ermutigt sie dazu, die Welt mit einer mathematischen Brille zu sehen. Zusätzlich könnte man fragen, wie viele Umdrehungen das Rad des Vaters machen würde (welches voraussichtlich einen größeren Durchmesser hat). Dieses und weitere Beispiele sind auf dem Hausübungszettel zusammengefasst.

In der nächsten Mathematikstunde widmet sich die Lehrkraft dem Flächeninhalt eines Kreises. Um die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises zu kennen und auch anwenden zu können, bietet sich die Methode der näherungsweisen Bestimmung der Fläche über Kreissektoren an, wie sie auch in zahlreichen Mathematiklehrbüchern beschrieben wird (vgl. ebd., S.199).

Um das Ganze etwas lebhafter zu machen, sollen die Schülerinnen und Schüler zwei gleich große Kreise in ihr Schulübungsheft zeichnen. Aufgrund der Heftmodalitäten bietet sich ein Radius von 5 cm an. Dieser wird zunächst halbiert und die jeweiligen Hälften mit zwei verschiedenen Farben ausgemalt (siehe Abbildung 12).

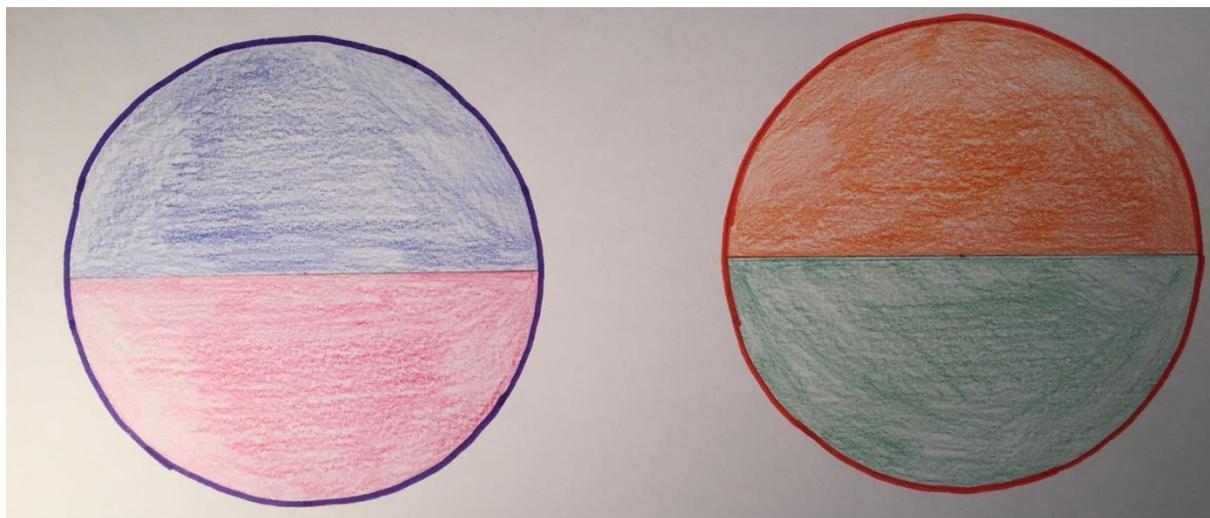


Abbildung 12: Zwei Kreise im Schulübungsheft

Der Umfang wird mit Filzstift nachgemalt und ausgerechnet. Bei einem Kreis mit Radius 5 cm beträgt der Umfang  $10\pi$ .

Wenn alle soweit sind, stellt die Lehrperson die Frage in den Raum, wie groß der Flächeninhalt des Kreises sein könnte. Die Frage wird an die Tafel geschrieben und die Lernenden dürfen nach dem Aufrufen ihre Schätzung oder Idee sagen, welche die Lehrperson an der Tafel notiert. Schlussendlich werden alle damit einverstanden sein, dass die Kreisfläche kleiner sein muss, als ein Quadrat mit demselben Durchmesser (10 cm). Die Kreisfläche ist jedenfalls kleiner als  $100 \text{ cm}^2$ . Um dies zu veranschaulichen, kann ein Quadrat um eines der beiden Kreise gezeichnet werden (siehe Abbildung 13). Die Kreisfläche wird vollständig innerhalb des Quadrates liegen (vgl. Kramer 2014, S.106).

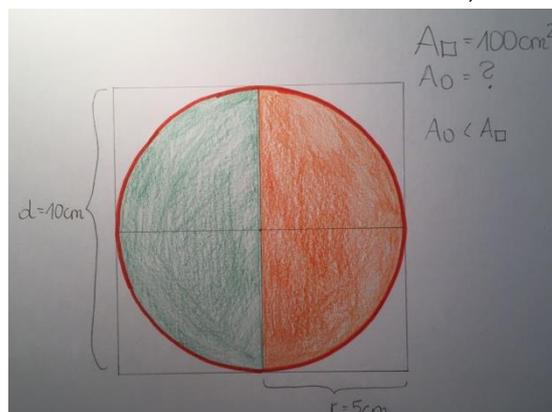


Abbildung 13: Quadrat um Kreis

Als nächstes wird der erste Kreis in acht gleich große Teile geteilt, wie vergleichsweise eine Geburtstagstorte. Anschließend sollen die S. u. S. den Kreis ausschneiden und in die acht Teile zerlegen.

Dabei stellt die Lehrkraft folgende Fragen an die Klasse und erarbeitet diese gemeinsam:

- Die entstandene Figur wird seitlich von einer geraden Linie begrenzt. Welche Länge hat diese Strecke? → Nachdem die S. u. S. auf den Radius gekommen sind, wird dieser seitlich eingezeichnet.
- Warum haben die beiden anderen Begrenzungen jeweils die Länge  $\frac{U}{2}$  ?
- Was passiert, wenn man die Zerlegung verkleinert, also statt acht Teilstücken beispielsweise zwölf nimmt? → Dies sollen die Lernenden gleich anhand des zweiten Kreises ausprobieren.
- An welche geometrische Figur nähert sich unsere gelegte Figur an? Kennen wir den Flächeninhalt dieser Figur? → Sofort werden die S. u. S. ein Rechteck erkennen und auch dessen Flächeninhaltsformel wissen.

Diese Fragen sind aus dem Lehrbuch MatheFit 4 inspiriert (vgl. Hanisch 2010, S.234-235).

Nun wird aus der Rechtecksflächeninhaltsformel die Flächenformel für den Kreis hergeleitet (siehe Abbildung 14).

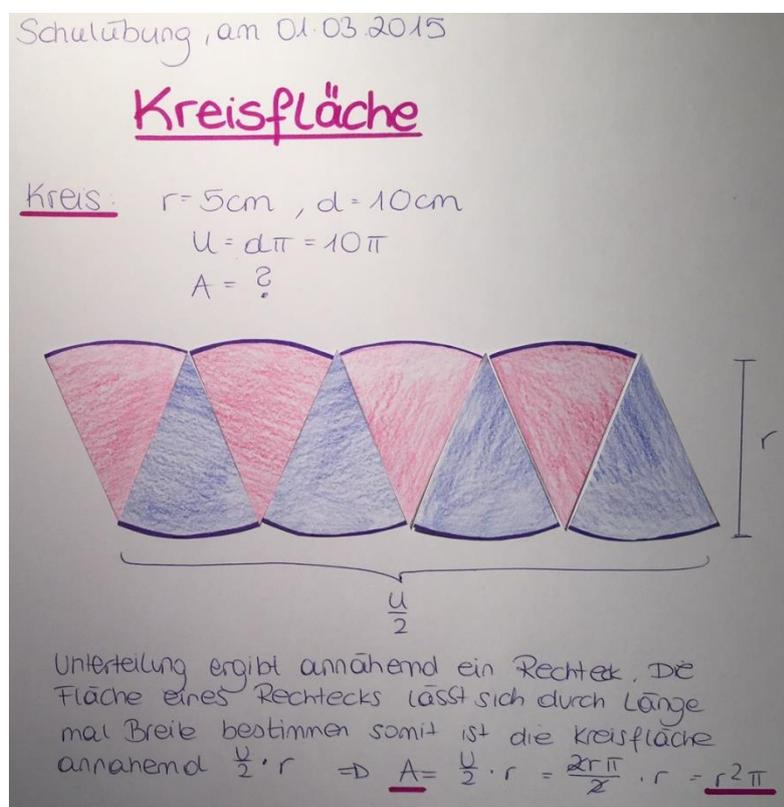


Abbildung 14: Herleitung der Flächenformel im Schulübungsheft

Nachdem die Unterteilung mit acht Teilstücken ins Heft geklebt wurde, widmen sich die S. u. S. nun dem zweiten Kreis, welcher in zwölf Teilstücke unterteilt wird. Dabei werden sie bemerken, dass sich das Rechteck umso deutlicher ergibt je feiner die Unterteilung ist. So wird schon in der Sekundarstufe I ein Grenzwertprozess schrittweise nachempfunden und verinnerlicht (vgl. Kramer 2014, S. 112-113).

Um auch die Berechnung der Kreisfläche zu verinnerlichen, sollte die Lehrperson bis zum Ende der Stunde die Flächeninhalte der bereits gefundenen Kreise im Klassenzimmer, von welchen die Durchmesser schon bekannt sind (siehe Arbeitsblatt 2), berechnen. Außerdem eignet sich das CD-Hüllen Beispiel hervorragend, um den Materialverbrauch zu berechnen. Dies kann einerseits mit der Lehrperson und der ganzen Klasse im Plenum geschehen oder anhand eines Arbeitsblattes (wobei der Teil, welcher nicht in der Stunde geschafft wurde, Hausübung ist).

## Arbeitsblatt 1 – Der Kreisumfang

1) Wie berechnet man den Umfang eines Kreises? Such dir einen Partner und nimm aus deiner Geldbörse eine Euro-Münze. Zeichne eine Gerade und markiere den Startpunkt der Münze. Rolle sie anschließend entlang der Linie ab und markiere den Punkt, an welchem die Münze wieder ihre Ausgangssituation erreicht hat. Die Länge der Strecke vom Startpunkt bis zum Endpunkt ist der Umfang der Münze.

2) Trage dein Messergebnis aus der ersten Aufgabe in folgende Tabelle ein und wiederhole den Vorgang mit zwei anderen Münzen.

| Münze | Durchmesser | Streckenlänge |
|-------|-------------|---------------|
|       |             |               |
|       |             |               |
|       |             |               |

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Streckenlänge und dem Durchmesser?

## Arbeitsblatt 2 – Die Kreiszahl $\pi$

1) Finde dich mit drei Gruppenpartnern zusammen und sucht mindestens drei Beispiele für Kreise im Alltag!

2) Miss mit einem Maßband, Seil oder deinem Geodreieck zumindest drei Umfänge und Durchmesser dieser Kreise ab und übertrage diese auf zwei Nachkommastellen gerundeten Ergebnisse in die untenstehende Tabelle (Einheit in cm).

| <b>Gegenstand</b> | <b>Umfang</b> | <b>Durchmesser</b> | <b>Verhältnis <math>\frac{U}{d}</math></b> |
|-------------------|---------------|--------------------|--------------------------------------------|
|                   |               |                    |                                            |
|                   |               |                    |                                            |
|                   |               |                    |                                            |
|                   |               |                    |                                            |

3) Ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser immer dasselbe, egal wie groß der Kreis ist? Vergleiche eure Messergebnisse mit anderen Gruppen und diskutiere, ob immer dasselbe Verhältnis herauskommen kann!

## Arbeitsblatt 2 – Die Kreiszahl $\pi$

- 1) Finde dich mit drei Gruppenpartnern zusammen und sucht mindestens drei Beispiele für Kreise im Alltag!

Mögliche Antworten:

- Ziffernblatt einer Uhr
- Grundfläche eines Blumentopfs
- Grundfläche eines Mistkübels
- Querschnittsfläche eines Bleistifts, Kerze
- Lenkrad, Fahrradreifen, Autoreifen

- 2) Miss mit einem Maßband, Seil oder deinem Geodreieck zumindest drei Umfänge und Durchmesser dieser Kreise ab und übertrage diese auf zwei Nachkommastellen gerundeten Ergebnisse in die untenstehende Tabelle (Einheit in cm).

Mögliche Ergebnisse:

| Gegenstand   | Umfang  | Durchmesser | Verhältnis $\frac{U}{d}$ |
|--------------|---------|-------------|--------------------------|
| Ziffernblatt | 9,7 cm  | 3,1 cm      | 3,13                     |
| Mistkübel    | 58,1 cm | 18,6 cm     | 3,12                     |
| Bleistift    | 2,1 cm  | 0,7 cm      | 3                        |
| Blumentopf   | 92 cm   | 29,3 cm     | 3,14                     |

- 3) Ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser immer dasselbe, egal wie groß der Kreis ist? Vergleiche eure Messergebnisse mit anderen Gruppen und diskutiere, ob immer dasselbe Verhältnis herauskommen kann!

Mögliche Antwort:

Die Ergebnisse sind alle ähnlich (ein bisschen mehr als 3). Es könnte also schon sein, dass das Verhältnis immer dasselbe ist und die Ungleichheit unserer Ergebnisse auf Messfehlern beruht. Je dicker der Faden, desto größer der Messfehler.

## Hausübungszettel zum Kreisumfang (Arbeitsblatt 3)

- 1) Stell dir vor, du fährst mit deinem Fahrrad zur Schule. Berechne die Anzahl der Radumdrehungen. (Tipp: Gib für die genaue Streckenlänge die Distanz auf google maps ein. Miss den Durchmesser deines Vorderrads ab!)
  
- 2) Wie lang ist der Durchmesser deiner Trinkflasche? Berechne den Umfang!
  
- 3) Was ist deine Lieblings-CD? Miss den Außendurchmesser und Innendurchmesser und berechne den äußeren und inneren Umfang! Welchen Umfang muss das Quadrat, welches als Hülle genützt wird, mindestens haben?
  
- 4) Welchen Umfang hat die Dose einer Gesichtscreme? (Tipp: Miss den Durchmesser und berechne den Umfang!)
  
- 5) Wie lang muss das Metallstück sein, aus welchem dein kreisförmiger Schlüsselanhänger gemacht wurde? Miss den Durchmesser und berechne den Umfang!

## Arbeitsblatt 4 – Kreisfläche

- 1) Berechne die Fläche des Ziffernblattes an deiner Uhr! Falls du keine Uhr hast, verwende die eines Nachbarn.
  
- 2) Wie viel  $\text{cm}^2$  Plastik braucht man für eine CD-Hülle? Berechne die Fläche deiner Lieblings-CD (siehe Hausübungsblatt) und überlege, wie viel Plastik der Hersteller für die Hülle benötigt, um diese CD einzupacken?
  
- 3) Nimm eine 1-Euro Münze aus deiner Geldbörse und berechne wie viel Prozent der Fläche in gold-gelber Farbe erscheint?
  
- 4) Für euren kreisrunden Tisch zu Hause möchte deine Familie eine neue Tischdecke kaufen. Wie viel  $\text{m}^2$  Stoff werden mindestens benötigt, damit der ganze Tisch bedeckt ist?

## 6. Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Nachdem nun mögliche Umsetzungen des Unterrichtsprinzips *Entdeckendes Lernen* von mir erläutert wurden, habe ich in diesem Abschnitt die wichtigsten Punkte kurz zusammengefasst und geschlussfolgert.

Wie ich bereits erklärt habe, ist *Entdeckendes Lernen* eine Unterrichtsmethode, welche es Lernenden gestattet, ihren Interessen nachzugehen und Themengebiete selbstständig zu erarbeiten. Entstanden ist dieses Konzept ursprünglich aus der Begriffsbildungsforschung des Psychologen Jerome S. Bruner. Die Methode wurde jedoch immer wieder spezifiziert bzw. weiterentwickelt, so beschäftigten sich beispielsweise in den 70er Jahren Horst Mitzkat und Elard Klewitz mit offenem Unterricht und entdeckendem Lernen. Die Lernwerkstatt von Dr. Karin Ernst und die Erläuterungen von Ute Zoicher runden das Thema im neuen Jahrtausend ab.

Mit der Frage „Was ist lernen?“ beschäftigen sich viele verschiedene Wissenschaften. Der Lernbegriff der Unterrichtsmethode *Entdeckendes Lernen* stützt sich auf jenen des Konstruktivismus und seinen Vertreter Jean Piaget. Dieser sieht Lernen als Prozess aus Anpassung und Aneignung an. In der sich rasch verändernden Gesellschaft ist es deshalb umso wichtiger für Lehrpersonen den S. u. S. lebenslanges Lernen beizubringen, welches auch im Lehrplan gefordert wird. Das Unterrichtsprinzip *Entdeckendes Lernen* ist deshalb eine fundierte Methode, um die Lust am Lernen zu wecken und das selbstständige Lernen zu fördern. Genau diese Aufgaben wurden auch den Grundkompetenzen in den Bildungsstandards vom Ministerium für Unterricht, Kunst und Kultur zugeschrieben. Diese basieren auf den Lehrplänen und sind von konkreten Lernergebnissen charakterisiert. Die von mir vorgestellten Unterrichtsplanungen geben einen Einblick, wie man kompetenzorientiert mit der Methode *Entdeckendes Lernen* unterrichtet und S. u. S. so zum Lernen begeistern kann.

Schlussendlich möchte ich noch darauf hinweisen, dass die Unterrichtsmethode auch weitere Definitionen zulässt und auf anderen Stoffgebieten, nicht nur der Geometrie, umgesetzt werden kann. Ein weiterer Ansatz dafür, was unter der Methode verstanden werden kann, wäre beispielsweise das rein forschende Lernen, welches jedoch meiner Meinung nach nicht optimal für den Mathematikunterricht geeignet ist. Leider gibt es keine aktuellen Studien, wie erfolgreich entdeckender Unterricht in Bezug auf den Lernoutput der S. u. S. ist. Deshalb fordere ich alle Lehrpersonen dazu auf, dieses Unterrichtsprinzip in den eigenen Unterricht zu integrieren um sich selbst von den Vorzügen *Entdeckenden Lernens* zu überzeugen.

## 7. Verzeichnisse

### 7.1. Literaturverzeichnis

Aepkers, M.; Liebig, S.: Entdeckendes, forschendes und genetisches Lernen. Hohengehren: Schneider Verlag 2002.

Bruner, J.S.: Der Akt der Entdeckung. In: Neber, H. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen. 3. Auflage. Hemsbach über Weinheim: Beltz Verlag 1981, S.15-29.

Dearden, R.F.: Was ist Entdeckendes Lernen? In: Schwartz, E. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Grundschulunterricht Band 4. Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Braunschweig: Georg Westermann Verlag 1977, S.68-73.

Drieschner, E.: Bildungsstandards praktisch. Perspektiven kompetenzorientierten Lehrens und Lernens. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften 2009.

Hanisch, G. (Hrsg.): MatheFit 4. Wien: Besseres Buch e.U. 2010

Hanisch, G. (Hrsg.): MatheFit 3. Wien: Besseres Buch e.U. 2009.

Hobmair, H. (Hrsg.): Psychologie. 5.Auflage. Köln: Bildungsv Verlag EINS GmbH 2013.

Humenberger, Hans (Hrsg.): Das ist Mathematik 3. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2009.

Humenberger, H. (Hrsg.): Das ist Mathematik 4. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2012.

Klewitz, E.; Mitzkat, H. und andere: Entdeckendes Lernen in der Grundschule. In: Schwartz, E. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Grundschulunterricht Band 4. Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Braunschweig: Georg Westermann Verlag 1977, S.153-168.

Klewitz, E.; Mitzkat, H.: Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. In: Schwartz, E. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Grundschulunterricht Band 4.

Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. Braunschweig: Georg Westermann Verlag 1977, S.7-26.

Kramer, M.: Mathematik als Abenteuer. Band 1. Geometrie und Rechnen mit Größen. Aulis Verlag 2013.

Liebig, S.: Entdeckendes Lernen – wieder entdeckt?. In: Bönsch, M.; Kaiser, A.: Basiswissen Pädagogik. Unterrichtskonzepte und –techniken. Band 4. Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen. Hohengehren: Schneider Verlag 2002, 4-16.

Meyer, H.: Was ist guter Unterricht? Berlin: Cornelsen 2004.

Meyer, H.: Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen 2012.

Neber, H. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen. Weinheim; Basel: Beltz 1973.

Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., Ulovec, A.,: Mathematik verstehen 1. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2014.

Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., Ulovec, A.,: Mathematik verstehen 2. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2015.

Seel, N. M.: Psychologie des Lernens. Lehrbuch für Pädagogen und Psychologen. 2. Auflage. München; Basel: Ernst Reinhardt Verlag 2003.

Siebert, H.: Pädagogischer Konstruktivismus. Lehrerzentrierte Pädagogik in der Schule und Erwachsenenbildung. 3.Auflage, Weinheim und Basel: Beltz Verlag 2005.

Strogatz, S.: The Joy of x. Die Schönheit der Mathematik. Ulm: CPI – Ebner & Spiegel 2014.

Weinert, F.E.: Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim/Basel: Beltz 2014

Wiechmann, J. (Hrsg.): Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis. Weinheim und Basel: Beltz Verlag 1999.

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg 1989.

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg 1976.

Ziener, G.: Bildungsstandards in der Praxis. Kompetenzorientiert unterrichten. Minden: Kallmeyer Verlag in Verbindung mit Klett 2006.

Zocher, U.: Entdeckendes Lernen lernen. Zur praktischen Umsetzung eines pädagogischen Konzepts in Unterricht und Lehrerfortbildung. Donauwörth: Auer Verlag GmbH 2000.

### **Internetquellen**

Beer, R., Benischek, I.: Aspekte kompetenzorientierten Lernens und Lehrens. In: BIFIE (Hrsg.): Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis. Graz: Leykam 2011, S.5-28.  
URL:[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_vs\\_sek1\\_kompetenzorientierter\\_unterricht\\_2011-03-23.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf) - Download am 25.03.2015.

BIFIE (Hrsg.): Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis. Graz: Leykam 2011.  
URL:[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_vs\\_sek1\\_kompetenzorientierter\\_unterricht\\_2011-03-23.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf) - Download am 25.03.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011a – 2014a): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/bildungsstandards> - Zugriff am 06.04.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011b – 2014b): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/node/48> - Zugriff am 06.04.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011c – 2014c): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/node/49> - Zugriff am 06.04.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011d – 2014d): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/node/50> - Zugriff am 06.04.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011e – 2014e): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/standardueberpruefung> - Zugriff am 06.04.2015

BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (2011f – 2014f): Bildungsstandards. URL: <https://www.bifie.at/node/57> - Zugriff am 06.04.2015

Bundesministerium für Bildung und Frauen (2009): Lehrplan für Mathematik. URL: [https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14\\_789.pdf?4dzgm2](https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2) – Download am 18.02.2015

Ernst, K.: Lernen mit Sinn und Verstand – neuere Erkenntnisse zum Entdeckenden Lernen. In: Angela Bolland u.a. (Hrsg.): Lernwege zum Thema Balance. Dokumentation der 10. bundesweiten Fachtagung der Lernwerkstätten, 22.-26.9.1997 in Bredbeck bei Bremen. - Bremen: Universität Bremen und Pädagogik-Kooperative, August 1998, S. 116 – 131. URL: <http://www.entdeckendes-lernen.de/3biblio/theorie/Sinn.pdf> - Download am 22.03.2015.

Ernst, K.: Entdeckendes Lernen – gestern und heute. In: LIVE e.V. (Hrsg.): Was sind eigentlich Sonnentaler? Berlin: LIVE e.V. 2008. URL: [http://www.bildungsnetz-berlin.de/download/doku\\_BNB\\_8\\_web.pdf](http://www.bildungsnetz-berlin.de/download/doku_BNB_8_web.pdf) - Download am 22.03.2015.

Jacobs, G.: Hypermedia and discovery based learning: What value?. URL: <http://ascilite.org.au/ajet/submission/index.php/AJET/article/view/1325/696> - Download am 17.03.2015.

Klieme, E. et al.; Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards - Eine Expertise, Bildungsforschung Band 1. Bonn, Berlin: 2007. URL: [http://www.bmbf.de/pub/zur\\_entwicklung\\_nationaler\\_bildungsstandards.pdf](http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf) - Download am 01.04.2015.

Kongruenz, Ähnlichkeit und Homöomorphie in Comics: URL: [http://www.stauff.de/matgesch/dateien/kongr\\_aehnl\\_homoeo.htm](http://www.stauff.de/matgesch/dateien/kongr_aehnl_homoeo.htm) - Download am 21.02.2015

Malvorlagen 1001: URL: <http://www.malvorlagen1001.de/malvorlagen/schmetterling/> - Download am 19.02.2015.

Mürwald-Scheifinger, E., Weber, W.: Kompetenzorientierter Unterricht – Sekundarstufe I – Mathematik. In: BIFIE (Hrsg.): Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis. Graz: Leykam 2011, S.109 -138. URL:

[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_vs\\_sek1\\_kompetenzorientierter\\_unterricht\\_2011-03-23.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf) - Download am 25.03.2015.

Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik (Hrsg.), Institut für Didaktik der Mathematik: Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Klagenfurt: 2007. URL: [http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept\\_Version\\_4-07.pdf](http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf) - Download am 02.04.2015.

Pädagogische Hochschule Heidelberg (2013): Der Satz des Pythagoras – Eine didaktische Umsetzung:[http://wikis.zum.de/geometrie/Der\\_Satz\\_des\\_Pythagoras\\_\\_Eine\\_didaktische\\_Umsetzung#Die\\_Reduktiven\\_Methoden\\_zur\\_Satzfindung](http://wikis.zum.de/geometrie/Der_Satz_des_Pythagoras__Eine_didaktische_Umsetzung#Die_Reduktiven_Methoden_zur_Satzfindung) – Download vom 28.02.2015.

Stangl, W.: Die konstruktivistische Lerntheorie. URL: <http://www.stangltaller.at/ARBEITSBLAETTER/LERNEN/LerntheorienKonstruktive.shtml> - Zugriff am 20.03.2015

Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e.V.: Projekt ZUM-Wiki. URL: [http://wikis.zum.de/zum/Mathematik-digital/Kongruenz\\_von\\_Dreiecken](http://wikis.zum.de/zum/Mathematik-digital/Kongruenz_von_Dreiecken) - Download am 21.02.2015

Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e.V. (2006): Infos zum Satz des Pythagoras. URL: <http://www.zum.de/dwu/infodep/i-pythagoras.htm> - Download am 28.02.2015.

Zocher, U.: Lernen entdecken - vom Entdeckenden Lernen und der Bedeutung der eigenen Frage. Readerbeitrag zur Tagung „Subjektsein in der Schule – eine Auseinandersetzung mit dem Lernbegriff Klaus Holzkaamps“. 2001. URL: <http://www.entdeckendeslernen.de/3biblio/theorie/subjektsein.htm> - Zugriff am 22.03.2015.

## 7.2. Abbildungsverzeichnis

|                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ABBILDUNG 1: FAKTOREN KONSTRUKTIVEN, KONSTRUKTIVISTISCH AUFGEKLÄRTEN LERNENS<br>(SIEBERT 2005, S.31) .....                     | 15 |
| ABBILDUNG 2: KOMPETENZ UND PERFORMANZ (MEYER 2012, S.147).....                                                                 | 36 |
| ABBILDUNG 3: ÜBERPRÜFUNGSZYKLUS (BIFIE 2011F – 2014F).....                                                                     | 38 |
| ABBILDUNG 4: SPEZIFISCHE MATHEMATISCHE KOMPETENZ<br>(ÖSTERREICHISCHES KOMPETENZZENTRUM FÜR MATHEMATIKDIDAKTIK 2007, S.9) ..... | 41 |
| ABBILDUNG 5: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN FACHLICHEN UND ÜBERFACHLICHEN KOMPETENZEN<br>(MÜRWARD-SCHEIFINGER, WEBER 2011, S.111) ..... | 44 |
| ABBILDUNG 6: VORSCHAU SCHULÜBUNGSHEFT.....                                                                                     | 51 |
| ABBILDUNG 7: MÖGLICHE LÖSUNG DER HAUSÜBUNG .....                                                                               | 57 |
| ABBILDUNG 8: GEOGEBRA AUFGABE.....                                                                                             | 59 |
| ABBILDUNG 9: ALTERNATIVE OHNE GEOGEBRA.....                                                                                    | 60 |
| ABBILDUNG 10: VORSCHAU SCHULÜBUNGSHEFT.....                                                                                    | 69 |
| ABBILDUNG 11: LÖSUNG ARBEITSBLATT – UMFANG DES KREISES .....                                                                   | 80 |
| ABBILDUNG 12: ZWEI KREISE IM SCHULÜBUNGSHEFT .....                                                                             | 82 |
| ABBILDUNG 13: QUADRAT UM KREIS .....                                                                                           | 82 |
| ABBILDUNG 14: HERLEITUNG DER FLÄCHENFORMEL IM SCHULÜBUNGSHEFT .....                                                            | 83 |

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: **Pamina Siegel**  
Nationalität: Österreich  
Familienstand: Ledig  
Führerschein: B

## Ausbildung

10/2010 (- 05/15): **Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie**, Universität Wien  
Abschluss: Magistra der Naturwissenschaften

09/2007 – 06/2010: *Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Bruck an der Leitha*, 2460 Bruck an der Leitha  
Ausbildungsschwerpunkt:  
Naturwissenschaften und Darstellende Geometrie

09/2002 – 06/2007: *Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Frauengasse*,  
2500 Baden

## Beruflicher Werdegang

03/2015: **Feldtestkorrektur für die SRDP (BHS)**  
BIFIE Wien, 5020 Salzburg

02/2015 – 06/2016: **Trainerin**  
WIFI Wien, 1180 Wien  
KUS-KURS – Berufsmatura Wien – Mathematik

09/2014 – 06/2015: **Tutorin**  
Universität Wien, 1010 Wien  
VO: Einführung in die Mathematik,  
VO: Reelle Analysis in mehreren Variablen und komplexe Analysis in einer Variablen

04/2014: **Feldtestkorrektur für die SRDP (AHS)**  
BIFIE Wien, 5020 Salzburg