DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht

Verfasserin

Mag.^{a} Elisabeth Wehofschitsch

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium
	UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

« Fais de ta vie un rêve,
et d'un rêve, une réalité »

„Mach aus deinem Leben einen Traum,
und lasse ihn Wirklichkeit werden."

Antoine de Saint-Exupéry (1943)
Le petit prince [Der kleine Prinz]

Ich danke allen, die mir in den letzten Jahren geholfen haben, meinen Traum vom Leben zu verwirklichen und meiner Berufung nachzugehen. Allen voran danke ich meinen Eltern, Gerlinde und Werner Wehofschitsch, die mich stets darin unterstützten meine Ziele zu verfolgen, und meinem Diplomarbeitsbetreuer Peter Raith, der wesentlich dazu beitrug, Beruf und Studium in Einklang bringen zu können.

Großer Dank gebührt meinem Lebensgefährten, Martin Sturm, der mir während des Studiums stets Halt gegeben hat. Gerade dann, wenn Beruf und Studium schwer zu vereinen waren, half er mir mein Ziel nicht aus den Augen zu verlieren. Während des Schreibens dieser Arbeit hat er meine Launen geduldig ertragen und ist mir stets mit Liebe, Unterstützung, Verständnis und Aufheiterung zur Seite gestanden.

Im Speziellen bedanke ich mich bei meiner Kollegin und Mentorin Mag.ª Ingrid Salner-Gridling, die mir im Schulalltag eine stete Quelle der Inspiration und Motivation ist und deren Perspektive und Diskussionsanregungen meinen Horizont stetig erweitern.

Abschließend bedanke ich mich bei allen FreundInnen und KollegInnen für ihre Unterstützung und vor allem bei meinen Klassen (insbesondere der 2B), die mir täglich zeigen, dass es die richtige Entscheidung war. DANKE!

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Dialogische Lernprinzip, das die beiden aus der Schweiz stammenden Didaktiker Peter Gallin und Urs Ruf begründeten, vorgestellt. Instrumente wie Kernideen, Auftrag, Lernjournal, Autographensammlung und Sesseltanz werden ebenso wie die Leistungsbewertung erläutert. An konkreten Unterrichtsbeispielen aus der 6. Schulstufe wird das didaktische Modell veranschaulicht. Beispielhafte SchülerInnenlösungen und persönliche Kommentare gewähren dabei Einblicke in die Arbeit mit diesem didaktischen Konzept.

Abstract

The thesis “Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht” (Learning through Dialogues in Mathematics) presents the basic theory of this concept, which was invented by the Swiss educationalists Peter Gallin and Urs Ruf. It discusses methods like “core ideas”, assignments, learning diaries and collections of autographs as well as the grading. The didactic model is illustrated by real classroom situations observed in a 2^{nd} form. Examples of students’ answers and personal comments help to gain an insight into practical work with this concept.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

« Seule compte la démarche. Car c'est elle qui dure et non le but qui n'est qu'illusion du voyageur quand il marche de crête en crête comme si le but atteint avait un sens. »

„Auf die Haltung allein kommt es an. Denn nur sie ist von Dauer und nicht das Ziel, das nur ein Trugbild des Wanderers ist, wenn er von Grat zu Grat fortschreitet, als ob dem erreichten Ziel Sinn innewohnt."

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

Es ist August 2014 und das neue Schuljahr beginnt in ein paar Wochen. Es wird Zeit sich an die Jahresplanung zu setzen. Eine 6. Schulstufe und eine 10. Schulstufe sollen im kommenden Jahr von mir in Mathematik unterrichtet werden. In den vergangenen zwei Jahren erfolgte die Jahresplanung meinerseits mit äußerster Genauigkeit. Anhand des Lehrplans, mittels des Lehrbuches und nach Rücksprache mit erfahreneren Kolleginnen wurden die Ziele für das Jahr von mir gesteckt, Lehr- und Lernziele ausgearbeitet und von einer Monatsplanung auf eine detaillierte Wochenplanung und schließlich Stundenplanung herunter gebrochen. Aus fachdidaktischen Zeitschriften, diversen Lehrbüchern, in der Schule vorhandenen Materialien und dem Internet bezog ich Inputs für meinen Unterricht. Die Einstiege sollten motivierend sein und möglichst nah an den Lebenswelten der SchülerInnen liegen. In weiterer Folge wurden die Themenbereiche Schritt für Schritt von mir geplant – welche Beispielabfolge macht Sinn, welche Sozialform eignet sich am besten, welche Beispiele sollen als Hausübung erledigt werden, in welchem Bereich eignet sich der Einsatz von Computern, usw.? Dabei war ich am Anfang immer besonders bemüht, wenn ich meine SchülerInnen in ein neues Stoffgebiet einführte, vermutend welche Schwierigkeiten und

Probleme auftreten könnten. Um sie nicht zu überfordern, steigerte ich den Schwierigkeitsgrad Schritt für Schritt und baute Übungsphasen ein. Vielfach wandte ich das LehrerIn-SchülerInnengespräch an, stellte Fragen an das Plenum der Klasse, ließ einige Zeit verstreichen, um nicht immer dieselben SchülerInnen aufzurufen und kommentierte anschließend die erhaltene Antwort. Wobei „kommentieren" hier wohl das falsche Verb ist, ich bewertete sie vielmehr. Entsprach die Antwort meinen Vorstellungen und passte sie in das Gebilde meines Unterrichts, das ich im Kopf hatte oder eben nicht.

An eine Instruktionsphase schloss sich vielfach eine Übungsphase an. Vor allem durch Einzelarbeit, während der ich durch die Reihen ging, und durch die anschließende Präsentation der Ergebnisse an der Tafel sollten die SchülerInnen dazu angehalten werden, selbst das Gelernte anzuwenden und etwaigen Unsicherheiten oder Verständnisproblemen auf die Spur zu kommen. Es folgte zumeist das nächste Kapitel, in dem ich ähnlich vorging. Vor Schularbeiten, die zweimal im Semester stattfanden, wurden noch Wiederholungseinheiten eingeschoben. Auf die Ergebnisse der Schularbeiten war ich immer sehr gespannt - ob meine SchülerInnen mir ihr Leistungsvermögen denn auch hier zeigen konnten? Hatten sie die Zusammenhänge verstanden? Konnten sie ihr Wissen einsetzen? Ein paar schafften dies ganz gut, andere hatten Schwierigkeiten beim Lösen einzelner Beispiele, insbesondere damit, von welcher Seite sie das Problem anpacken sollten, gerade bei Aufgabenstellungen, die komplexer waren.

Trotz großen Eifers und Engagements meinerseits und einer guten Lehrerin/SchülerInnenbeziehung hatte ich das Gefühl, dass ich nicht wirklich zu meinen SchülerInnen durchdrang. Alle zu aktivieren und zu packen war das Ziel, das ich nicht immer erreichte. Waren einige schon fertig mit den Beispielen, hatten andere noch tiefgreifende Verständnisprobleme. Manche verstanden sofort den Witz der Sache, andere schienen sich besonders schwer zu tun, trotzdem hieß es weitermachen und im Stoff vorankommen. Meine Faszination für Mathematik hatte meine SchülerInnen dabei noch nicht gepackt. Meine Erklärungen schienen nicht zu ihnen durchzudringen. Wie denn auch? Es war ja auch meine Faszination und es waren meine Erklärungen – was kümmerte dies die SchülerInnen? Die Frage, die sich mir immer aufdrängte war: Wie kommen meine SchülerInnen zu ihrer Faszination für Mathematik?

Finden Sie sich in meinen Ausführungen vielleicht wieder? Dann möchte ich Sie einladen, in der vorliegenden Diplomarbeit einen Weg zu entdecken, die Faszination ihrer SchülerInnen für die Mathematik oder jedes andere Fach zu wecken. Auch alle Übrigen, die diese Arbeit lesen aber nicht im Lehrberuf tätig sind, und dies daher wohl vorwiegend deshalb tun, weil sie mich kennen, lade ich hiermit ein, einen neuen Blick auf die Grunddynamik lebenslangen Lernens zu werfen. Diese Einleitung soll, wenn sie auch sehr persönlich gehalten ist und meine bisherige Unterrichtszeit reflektiert, dennoch ihrer Aufgabe gerecht werden:

In der folgenden Arbeit lege ich den Weg dar, den ich im kommenden Schuljahr 2014/15 mit meinen SchülerInnen der 6. Schulstufe beschreiten will. Mein Ziel ist es, sie zu mehr Eigenständigkeit aber auch zu ihrer Faszination von und Begeisterung für Mathematik zu führen. Das Konzept des Dialogischen Lernens in Sprache und Mathematik, das mich regelrecht in den Bann gezogen hat, wird bei diesem Unterfangen richtungweisend sein. Zunächst wird im zweiten Kapitel dieser Arbeit auf den in vielen Mathematikstunden vorherrschenden IST-Zustand eingegangen und einige Kritikpunkte werden herausgearbeitet. In Kapitel drei folgt die Darstellung des Dialogischen Lernprinzips und der charakteristischen Phasen ICH-DU-WIR. Diverse Instrumente und Leitideen dieses Lernkonzepts werden im vierten Kapitel dargelegt und mit Beispielen belebt. Das fünfte Kapitel widmet sich der Leistungsbewertung im Rahmen des Dialogischen Lernens. Kapitel sechs der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit konkreten Unterrichtsbeispielen aus der sechsten Schulstufe, wobei zunächst die Jahresplanung dargelegt und auf die vorherrschenden Rahmenbedingungen eingegangen wird. Anschließend folgen konkrete Aufgabenstellungen zu diversen Lehrplaninhalten, die mit ausgewählten SchülerInnenbeiträgen illustriert werden. Ein abschließendes Fazit rundet die Arbeit ab.

2 Kritik der „segmentierenden Didaktik“

*≪ Une administration n’est pas conçue pour résoudre des problèmes neufs.
Si dans une machine à emboutir, on introduit des pièces de bois,
il n’en sortira point des meubles. ≫*

*„Eine Maschine ist nicht dafür geschaffen neue Probleme zu lösen -
denn wirft man Holzstücke in eine Presse, werden sie sie
nicht als Möbelstücke verlassen.“*

Antoine de Saint-Exupéry (1942)
Pilote de guerre [Flug nach Arras]

Der aus der Schweiz stammende Mathematiker Prof. Dr. Peter Gallin und der ebenfalls aus der Schweiz stammende Germanist Prof. Dr. Urs Ruf sind die Begründer der dialogischen Didaktik. Sie verfassten hierzu Schulbücher („Ich-Du-Wir 1-6“) für die erste bis sechste Schulstufe (der Primarstufe in der Schweiz), die in erster Ausgabe 1999 erschienen sind. Ihr dialogisches Unterrichtsprinzip legen sie in den Hauptwerken „Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik Band 1 und 2“, sowie „Sprache und Mathematik in der Schule“ umfassend dar. Darin prägen und kritisieren Gallin und Ruf den Begriff der „segmentierenden Didaktik“ (Ruf und Gallin, 1999a, S. 229), die den (Mathematik-)Unterricht in vielen Klassen dominiert. Diese greift auf das „Prinzip der Linearität“ (Ruf und Gallin, 1998, S. 66) zurück. Inhalte werden demnach linear vom Einfachen zum Schwierigeren erarbeitet. Der Arbeitstakt und Rhythmus wird von der Lehrkraft vorgegeben, denn sie kennt das Stoffgebiet wie ihre Westentasche und blickt souverän auf das zurück, was die SchülerInnen als Lernziel noch vor sich haben. (Ruf und Gallin, 1998, S. 64) Diese Rückschauperspektive, aus der heraus, die Lehrkraft ihren Unterricht plant, ist ein weiteres Charakteristikum der segmentierenden Didaktik. Diese schlägt sich auch in der verwendeten Sprache nieder - sie verwendet die sprache des Verstandenen, die von allen Irrtümern bereinigt ist. Schritt für Schritt werden hierbei die SchülerInnen durch das Stoffgebiet manövriert, stets der Lehrkraft auf ihrem wohlüberlegten Weg folgend. Erkundet und heimisch geworden sind die SchülerInnen im Fachgebiet so nicht, bloß gelernt haben sie, wie eine Stoffmasse unbeschadet bewältigt wird.

Das einleitende Zitat dieses Kapitels von Antoine de Saint-Exupéry gibt dieses Prinzip anschaulich wieder. Frei übersetzt besagt es: Eine Maschine ist nicht dafür geschaffen neue Probleme zu lösen - denn wirft man Holzstücke in eine Presse, werden sie sie nicht als Möbelstücke verlassen. So verhält es sich auch im Unterricht. Diese Holzstücke, Brocken von Wissen, sind eines von drei mächtigen Instrumenten (siehe unten), die der Schule zur Verfügung stehen und die Urs Ruf und Peter Gallin identifizierten, um fachliche Normenkonflikte zu verdrängen. Darunter verstehen sie das Aufeinanderprallen zweier Welten im Unterricht, einerseits die singulären Seh- und Verhaltensweisen der SchülerInnen und andererseits die globalen Normen, die den Austausch unter Fachleuten regeln. Diese Konflikte zu erzeugen ist sogar „ureigenste Aufgabe“ (Ruf und Gallin, 1999a, S. 227) der Schule. Wie jedoch diese Konflikte inszeniert und verarbeitet werden, beeinflusst maßgeblich den Erfolg des Lernens, denn „Fachwissen, das im Widerspruch zu dem steht, was SchülerInnen für normal halten, untergräbt das Selbstvertrauen und behindert das Lernen anstatt Fachkompetenz zu erweitern“. (Ruf und Gallin, 1999a, S. 227). Das Umschiffen dieses Konfliktes und die im Folgenden präsentierten Instrumente identifizierten Ruf und Gallin als ursächlich für die passive Konsumhaltung der SchülerInnen im Unterricht:

1 die vordergründige Freundlichkeit beim schrittweisen Vermitteln der Stoffe

Eine Lehrkraft arbeitet ständig in der Optik der Rückschau - hat diese geradezu perfektioniert. Sie beginnt den Stoff zu gliedern und zu segmentieren und kennt schließlich jeden Winkel des Stoffgebietes, alle Bewegungen, die darin auszuführen sind und alle Tücken und Fallen, die es in sich birgt. Wird ein neues Stoffgebiet begonnen, stellt die Lehrkraft alles so dar, als ob es ganz selbstverständlich wäre. Die verwendete Sprache des Verstandenen unterstreicht diesen Prozess. Das bereits beschriebene Prinzip der kleinen Schritte entschärft jegliches Konfliktpotenzial, das das neue Stoffgebiet birgt.

> Jeder kleine Lernschritt führt nur wenig über das hinaus, was längst bekannt ist, und so wiegen sich die Lernenden in der falschen Sicherheit, immer noch festen Boden unter den Füßen zu haben. Die Lernenden werden dabei in den Zustand einer indifferenten, passiven Empfangsbereitschaft versetzt. Das Vermittelte wird sofort in einer Serie von gleichförmigen Übungsaufgaben eintrainiert. (Ruf und Gallin, 1999a, S. 229)

Unterstützend wirkt häufig der Aufbau gängiger Lehrbücher, worin nach kurzen Infoboxen gleichförmige Übungen folgen, bis der nächste Happen angeboten wird. „Einblicke in Zusammenhänge“, so folgern die Autoren weiter,

> ist das, was den wenigen Auserwählten vorbehalten ist, die auf dem unendlich langen Weg der Entbehrung nicht aufgegeben haben oder umgekommen sind. Wer also unter dem Diktat der segmentierenden Didaktik vorankommen will, muss Persönliches unterdrücken und seinem Führer gutgläubig auf dem wohlpräparierten Weg in eine ungewisse Zukunft folgen. Zu jedem Schritt, der für ihn vorgesehen ist, wird er aufgefordert: führt er ihn nicht genau in der vorgeschriebenen Weise aus, folgt postwendend die Korrektur: Frage, Antwort, Bewertung; Frage, Antwort, Bewertung ... (Ruf und Gallin, 1999a, S. 229).

2 die penetrante Bewertung aller SchülerInnenantworten im Unterricht
„Frage, Antwort, Bewertung -, diese[n] merkwürdige[n] Dreischritt der schulmeisterlichen Belehrung“, identifizieren Urs Ruf und Peter Gallin, als „das notwendige Gegenstück zur Segmentierung der Stoffe.“ Es wird kein Raum für persönliche Zweifel und eigenständiges Forschen gelassen. Permanent werden die Lernenden an der fachlichen Norm gemessen, so dass eine ständige Defizitperspektive vorherrscht. Sie versuchen der fachlichen Norm so gut wie möglich zu entsprechen und

> entfernen sich [...] immer weiter von dem, was sie selber zu beurteilen und aus eigener Kraft zu leisten vermögen. Weil die Schule die Normalität ihres eigenständigen Denkens und Tuns laufend entwertet, verlieren sie den Boden unter den Füßen und werden zu Marionetten fremder Normen und Vorschriften. (Ruf und Gallin, 1999a, S. 230)

3 die heimtückische Einschüchterung der Lernenden in Prüfungen
Das böse Erwachen folgt schließlich bei der Prüfung. Durch die immerwährende Bevormundung und das kleinschrittige Vorgehen im Rahmen der Wissensvermittlung wägen sich die Lernenden in trügerischer Sicherheit. Die Aufgaben ließen sich lösen, wenn nur alle eingeübten Teilschrittchen in der richtigen Reihenfolge abgerufen werden könnten. Doch welcher Schritt ist es denn jetzt, der an der Reihe ist? Wie ist an die Aufgabenstellung heranzugehen? Genau so ist das im Unterricht nicht behandelt worden! Laut Ruf und Gallin

> fügen sich die Teile nicht zu einem Ganzen, die Serie der eingeübten Fertigkeiten befähigt nicht zu kompetentem Handeln. Ganz auf sich allein gestellt, bringen viele Lernende ihr brav eingeübtes Repertoire durcheinander. Wahllos probieren sie ein paar Tricks aus, mit denen sie bei Übungsaufgaben Erfolg hatten. Aber im Ernstfall sieht plötzlich alles anders aus. Das Fachgebiet, das sich im Unterricht so nett und harmlos präsentiert hat, erscheint nun plötzlich voller Fallen und Abgründe. Jetzt in der Prüfung brechen alle Konflikte aus, die im Unterricht geschickt umgangen worden sind. Sie alle aufs Mal zu lösen unter Zeitdruck und Erfolgszwang, ist ein Ding der Unmöglichkeit. (Ruf und Gallin, 1999a, S. 230)

In ihrem zweiten Band bezeichnen Peter Gallin und Urs Ruf diesen Unterricht auch als „Unterricht im Geist des Maschinendenkens“ (Ruf und Gallin, 1999b, S. 183), ganz im Sinne des Eingangszitats. Sie fordern eine „Abkehr vom Paradigma der Machbarkeit, das alle Erwartungen in die Lehrperson setzt.“ (Ruf und Gallin, 1999b, 182f) und schildern die Merkmale, die dieser mechanistischen Didaktik zu Grunde liegen mit ausdrucksstarken Metaphern:

> - die Zerstückelung, Segmentierung und Normierung der Lehrstoffe bis zur Unkenntlichkeit und der daraus resultierende Stoffdruck;
> - die Beherrschung des Unterrichts durch perfekte Unterrichtsmaterialien und makellose Reinhefte, die eine falsche Sicherheit vortäuschen und den Blick auf die Schlüsselstellen im persönlichen Lernprozess verstellen;
> - die exhibitionistische Vorzeigementalität, die in Übungs- und Prüfungslektionen ihre Blüten treibt und Lernende zu Marionetten degradiert, die in der Hand ihres virtuosen Regisseurs perfekt funktionieren;
> - die mechanistische Arbeitsteilung unter den Fächern, welche die Lehrkräfte zwingt, isolierte Wissenssegmente (Fachwissen) zu vermitteln, ohne sich um deren Zusammenwirken (Bildung) zu kümmern.
> - die starre Zeiteinteilung des Stundenplans und die ermüdende Gleichförmigkeit des Klassenunterrichts, die passives Konsumieren oder Abschalten als Überlebensstrategie erfordern:
> - die eindimensionale Leistungsbewertung, die sich nur an normierten Zielvorgaben orientiert und keinerlei Anreize schafft, Initiative zu entwickeln, Entscheidungen zu treffen, etwas zu riskieren, Verantwortung zu übernehmen, sich zu einem eigenständigen Mitglied einer Klassengemeinschaft zu entwickeln, Solidarität zu üben und seinen Beitrag zum Ganzen zu leisten.
>
> (Ruf und Gallin, 1999b, S. 183)

Auch wenn ein freundlicher Umgang, Rücksicht, Verständnis und Geduld prägende Elemente dieses Unterrichts sind, so ist die Beziehung Mensch-Stoff nicht menschlich, sondern mechanistisch und Lehrende wie SchülerInnen erstarren in ihrer Rolle zu Subjekt und Objekt, zu Programmierer und Automat. Wird die Maschine erfolgreich gestartet (Motivation), die Eingabe optimal arrangiert (Präparation und Vermittlung des Wissens), das vorschriftsmäßige Funktionieren kontrolliert (Üben) und die Ausgabe korrekt überprüft und bewertet (Prüfung), hat der Programmierer seine Schuldigkeit getan. Bei starken Abweichungen von der Eingabe, wird die Maschine als zu wenig leistungsfähig eingestuft und auf weniger anspruchsvolle Arbeit umprogrammiert (Selektion) (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 183).

Im guten Glauben es bedarf intensiverer Betreuung und individueller Zuwendungen, werden die Teilschritte noch kleiner, die Übungen noch mechanistischer und das Stoffgebiet immer undurchdringlicher. Es wirkt, als sähen die SchülerInnen den Wald vor lauter Bäumen nicht mehr. Schließlich bleibt immer weniger Zeit für persönliche Begegnungen mit dem Stoff und der Stoffdruck erhöht sich immer weiter. Wie gelingt es, diesem Teufelskreis zu entkommen?

3 Das Dialogische Lernprinzip

≪ Tu seras d'abord piocheur de terre, bêcheur de terre,
et tu te lèveras pour arroser. ≫

„Du mußt geben, bevor du nimmst - und bauen, bevor du wohnst."

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

In diesem Sinne richtet die segmentierende Didaktik bereits die Wohnung ein, bevor noch die Wissensfundamente von jeder/m selbst gebaut wurden. Veranschaulicht wird dies durch die Kreissektoren in Abbildung 3.1.

Die Lernenden bekommen stückchenweise den Stoff vermittelt und müssen solange dranbleiben bis alle Segmente einen Kreis ergeben. Dabei verblasst bereits Gelerntes (hellgraue Segmente) und die Lehrkraft hat das Gefühl immer von vorne anfangen zu müssen. Dabei meinen Peter Gallin und Urs Ruf: „Falsch sind nicht die pädagogischen Ziele, falsch ist der Weg, auf dem man sie zu erreichen versucht." (Ruf und Gallin, 1998, S. 66) Ihr Weg weicht ab von der segmentierenden Didaktik, in der Lernwege durch Lehrkräfte in der Rückschau organisiert werden. Für sie muss die Faszination vom Stoff aus gehen und so müssen Lehrkräfte echte Erfahrungen im Fachgebiet ermöglichen. Hierfür ist es notwendig die Perspektive zu wechseln und von der Rückschau in die Vorschau überzugehen.

Abbildung 3.1: Segmentierende Didaktik

Das heißt den Lernenden eine Überblick über den Stoff zu geben und das bereits ganz zu Beginn. Dies geschieht mit Hilfe von Kernideen (siehe Kap. 4.1). Das sind anfangs kleine Kreise, die mit der Zeit immer größer werden – siehe dazu Abbildung 3.2.

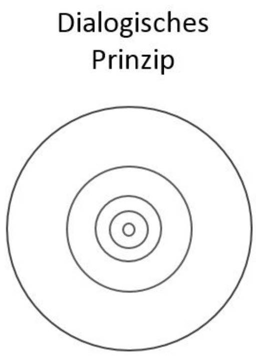


Abbildung 3.2: Dialogisches Prinzip

Jeder Zeit ist es möglich aufzuhören und der Kreis ist vollständig. Je nach Intensität der Auseinandersetzung werden die SchülerInnen unterschiedlich große Kreise erreichen. Kernideen veranschaulichen die Faszination, die von einem Stoffgebiet ausgeht. Sie inspirieren und verleiten Lernende zum Forschen. Sie zielen auch darauf ab, dass „die inneren Bilder, die sich auch Fachleute von ihren Gegenständen machen und in denen Gebilde von kaum durchschaubarer Komplexität (vorhanden sind) als etwas Ganzes erfasst und auf wenige wesentliche Merkmale reduziert werden." (Ruf und Gallin, 1999a, S. 45) Kernideen machen die SchülerInnen auf Unstimmigkeiten im Horizont ihrer singulären Welt aufmerksam wie etwa die Kernidee *Multiplikation mit* $^1/_2$ *vergrößert*. Sie öffnen die Augen für neue Zusammenhänge und fordern dazu heraus die eigene Meinung mit Hilfe des Schulstoffs neu zu überdenken. (vgl.Ruf und Gallin, 1998, S. 32)

Das dialogische Lernprinzip ist auch unter dem Begriff ICH-DU-WIR-Konzept bekannt, unter dem es beispielsweise auch im Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe in Teil 1 auf den Seiten 49 und 50 kurz umrissen wird. Dabei steht am Anfang das ICH. Nicht gängige Fragestellungen sondern Unruhe erzeugende Probleme sollen dem ICH zu authentischen Begegnungen mit dem Stoff verhelfen. Der erste Schritt ist eine singuläre Standortbestimmung, mit der die eigene Person gesichert und alle Kräfte mobilisiert werden sollen. Es geht zunächst einmal um die Wirkung, die ein Stoff in einer Person auslöst. „Die Verunsicherung spüren, sie zugeben und zulassen und dabei einen Ort suchen, wo man Tritt fassen und ihr standzuhalten vermag, das ist es worauf es in der ersten Phase des Lernens ankommt." (Ruf und Gallin, 1999a, S. 30) Ins Zentrum wird nicht die Sache gerückt, sondern die Person, die von der Sache provoziert wird. In dieser ersten Phase des Lernens haben daher auch alle eine Chance, denn jede/r steht in irgendeiner Beziehung zur Sache und soll darüber erzählen, auch wenn der Weg zur Lösung noch ein weiter ist.

Die erste Phase ist erfüllt, wenn anderen verständlich gemacht werden kann, wie die Begegnung mit dem neuen Sachverhalt erlebt wird und was sich im Inneren alles abspielt. Dies geschieht in der Sprache des Verstehens. Darunter sind singuläre, vorläufige Sprechweisen zu verstehen, deren sich auch ForscherInnen bedienen, die in der Vorschauperspektive in unbekannte Gebiete vorstoßen, sie erforschen und zu begreifen versuchen. (Ruf und Gallin, 1999a, S. 26). Kennzeichnend ist dabei die Verwendung des internen Sprachgebrauchs, wie bei ArchitektInnen, die Entwürfe auf eine Papierserviette kritzeln, Referatsnotizen, Stundenentwürfe bei LehrerInnen, Notizen zur Krankengeschichte bei Ärzten, usw. All diese Beispiele zeigen, wie selbstverständlich wir uns zunächst einmal ein Bild von Situationen in unseren eigenen Worten machen. Es sind oft erste Notizen, in denen bereits Grundgerüste vorhanden sind. Diese sind eben nur noch nicht präsentationsfertig. An ihnen muss noch gefeilt und geschliffen werden. Diese Sprache des Erzählens ist deshalb oft weit entfernt von der Sprache des Verstandenen und diese Brücke gilt es im Unterricht sukzessive aufzubauen. Die Lehrperson muss hierfür in dieser Phase ihr Fachwissen suspendieren und sich in der Kunst des Zuhörens üben. Sie hat den Gedanken der SchülerInnen zu folgen und nicht die SchülerInnen sind es, wie im Unterricht der segmentierenden Didaktik, die den Ausführungen der Lehrkraft folgen müssen. Denn zum Verständnis führt bekanntlich vor allem ein Weg: der selbst gegangene. Im Unterricht der segmentierenden Didaktik kommt hingegen vorwiegend die Sprache des Verstandenen zum Einsatz. Sie ist ökonomisch und effizient, sie erklärt und definiert. Sie stellt die Fachnorm dar und ist von allen Irrtümern bereinigt. Damit die Grundlage für den Unterricht die Umgangssprache der SchülerInnen bildet, ist die selbstständige Bearbeitung der Aufgaben ein wesentlicher Aspekt. Häufige LehrerInnenimpulse wie „Machen wir einmal eine Skizze.“ „Wie kannst du hier beginnen?“ „Worum geht es in der Aufgabe?“, etc. entfallen, denn im Zentrum steht die Erziehung zur Eigenständigkeit. Statt passivem Mitverfolgen eines fragend-entwickelnden Unterrichtsgeschehen steht die Eigentätigkeit im Vordergrund.

Getreu dem Leitgedanken „Verstehen ereignet sich im Gespräch“(Ruf und

Gallin, 1999a, S. 25), steht in der zweiten Phase des dialogischen Unterrichts der Austausch mit anderen im Mittelpunkt. Nachdem sich jede/r selbst mit dem Stoff auseinandergesetzt hat und mit ihm in Beziehung getreten ist, folgt der Austausch mit den MitschülerInnen. Wie auch schon in der singulären Standortbestimmung so auch im divergierenden Austausch kommt der Schriftlichkeit eine fundamentale Bedeutung zu. Denn „beim Schreiben verlangsamen und klären sich Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern zur Stellungnahme heraus." (Ruf und Gallin, 1999a, S. 55) Daher führen die Lernenden ein Reisetagebuch (siehe Kapitel 4.3), in dem sie alle Spuren schriftlich festhalten.

In dieser Phase bedarf es fachkundiger Anleitung und methodischer Hilfen. Eine solche Methode ist beispielsweise der Sesseltanz. Sind die Ideen in der ersten Phase festgehalten worden, legt jede/r ein leeres Blatt Papier mit der Überschrift Rückmeldungen neben den Entwurf. Die SchülerInnen geben ihren Platz frei und suchen sich einen freien Sessel. Wer dies nicht möchte, kann am eigenen Platz verweilen. Detaillierte Ausführungen mit methodischen Hinweisen und Hilfen folgen hierzu im nächsten Kapitel, in Abschnitt 4.4. Wichtig ist in dieser Phase, dass die Rückmeldungen in Form von Ich-Botschaften verfasst sind. Dadurch sollen Einsichten ermöglicht und produktive Kräfte geweckt werden. Sie geben somit eine unter vielen möglichen Meinungen wieder und lassen offen, dass andere es auch anders sehen können. Auch Lehrkräfte sollen regelmäßig den Lernenden Rückmeldungen zukommen lassen. Dabei soll Gelungenes verstärkt werden und das Potential von interessanten Versuchen und fruchtbaren Irrtümern freigelegt werden. Oft genügt es, Brauchbares herauszufiltern, ins Licht zu rücken und so neue Initiativen anzustoßen. (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 147).

Offene Aufträge (siehe Kapitel 4.2) nähren diese Phase und aus Rückmeldungen und Interpretationen erwachsen neue Kernideen und Aufträge. Aber auch die Variante mittels aktiver Kommunikation, bei der der Stoff sprachlich verständlich ausgedrückt werden muss, führt zu einer weiteren Durchdringung des selbigen. Die GesprächspartnerInnen üben sich darin, auf die Gedanken des Gegenübers einzugehen, etwaige Verständnisfehler könnten auf diese Weise geklärt, Grundlagenwissen aktiviert, weitere Ideen entwickelt und auftretende Probleme gemeinsam bewältigt werden. Zuhören, zusammenarbeiten, sich gegenseitig unterstützen, auf den/die andere eingehen, miteinander diskutieren, mit konträren Ansichten umgehen und sich einigen, seien einige soziale Kompetenzen, deren Aufbau durch dieses Konzept unterstützt wird. (vgl. Ulm, 2004, Seite 21)

In der dritten Phase werden die Ergebnisse dem Klassenplenum vorgestellt und mit Hilfe der Lehrkraft kommt das Reguläre ins Spiel. Alle einigen sich auf einen Algorithmus, eine Regel, einen Merksatz, eine Formel. Es folgt somit eine Zusammenfassung auf Basis ausgewählter Schülerarbeiten, die allen zugänglich gemacht werden etwa schriftlich durch eine Autographensammlung (siehe Kapitel 4.5) oder im Rahmen einer mündlichen Präsentation. Da sich alle intensiv mit einem Problem auseinandergesetzt haben, wollen sie auch wissen, wie es geht, und die Ausführungen der Lehrperson, die mathematische Konvention, treffen auf fruchtbaren Boden.

Mittels dieses ICH-DU-WIR-Konzeptes werden somit die SchülerInnen dazu angehalten ihr ganz persönliches, höchst individuelles Denk-Netz zu knüpfen, bevor ihnen eine Musterlösung präsentiert wird. Unbewusst nehmen sie dabei die unterschiedlichen sprachlichen Anforderungen wahr. Reicht es in der persönlichen Auseinandersetzung mit einem Thema, den internen Sprachgebrauch freien Lauf zu lassen, so wird es in der Kommunikation mit anderen dienlich sein, sich fachsprachlicher Formulierungen zu bedienen. Das Erlernen und der Einsatz der Fachsprache werden somit als sinnvoller Bestandteil des Lernprozesses und des Unterrichts erlebt.

4 Instrumente des Dialogischen Lernens

4.1 Kernideen – der zündende Funke, der Witz der Sache

*« Quand tu veux construire un bateau, ne commence pas par rassembler du bois,
couper des planches et distribuer du travail,
mais réveille au sein des hommes le désir de la mer grande et large. »*

*„Wenn du ein Schiff bauen willst, so trommle nicht Leute zusammen,
um Holz zu beschaffen Werkzeuge vorzubereiten,
Aufgaben zu vergeben und die Arbeit einzuteilen,
sondern wecke in ihnen die Sehnsucht
nach dem weiten, endlosen Meer."*

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

Kernideen wecken die Sehnsucht nach mehr. Sie fangen das ganze Stoffgebiet in vagen Umrissen ein, entwickeln eine herausfordernde Sicht auf einen komplexen Stoff und stellen für Lernende ein attraktives Gegenüber dar, das sie zum Handeln herausfordert. (vgl. Ruf und Gallin, 1999a, S. 55 & Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 102) Alles, was unserem Tun Antrieb und Richtung gibt, ist eine Kernidee: Hoffnungen, Wünsche, Erfahrungen, die sich zu persönlichen Fixpunkten unserer persönlichen Orientierung verdichtet haben, aber auch Ängste, Aversionen und Schädigungen, die

Abwehrreflexe auslösen und uns den Zugang zu neuen Einsichten versperren. Damit die SchülerInnen über die in ihnen vorhandenen Kernideen nachdenken und selber Kernideen in weiterer Folge generieren, soll die Lehrkraft ihre Kernideen offenlegen und Rechenschaft darüber ablegen, was sie hier und jetzt an dem Fachgebiet fasziniert, persönlich herausfordert, für sie der Witz der Sache ist. Dabei sollen die SchülerInnen nicht die unerreichbare Überlegenheit sondern die singuläre Betroffenheit einer Person spüren, denn so sind auch sie zu einer persönlichen Antwort aufgefordert.

Wie lassen sich Kernideen finden? Laut Gallin und Ruf stellen sie sich meist zufällig ein, bei alltäglichen Verrichtungen wie Essen, Telefonieren, Spazierengehen aber auch im engagierten Umgang mit dem eigenen Fach und im Gespräch mit KollegInnen oder FreundInnen, die andere Akzente setzen oder Widerstand anmelden. Aber auch Lehrmittel und LehrerInnenkommentare können zur kreativen Eigentätigkeit inspirieren. (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 17) Von diesen, tief in der Person verankerten, Haltungen müssen die Lehrpersonen den SchülerInnen erzählen, damit diese die Geschichten und Anekdoten als Musterbeispiele für das Aufspüren eigener Geschichten heranziehen können.

In ihrem zweiten Band stellen Gallin und Ruf eine 8-stufige Anleitung für das Aufspüren von Kernideen zur Verfügung:

1. Stellen Sie sich in ihrem Fach ein verhältnismäßig großes Stoffgebiet vor, das sie mögen. (Grammatik, Bruchrechnen, Rechtschreibung, Multiplikation, Lyrik, Flächen- und Volumenmessung, Kurzgeschichten, Kommunikation, Schätzen, usw.)

2. Blenden Sie alles aus, was Sie nur dann interessiert, wenn Sie an Ihre SchülerInnen und Schüler denken.

3. Versuchen Sie sich an den Moment zu erinnern, wo ihr Interesse an diesem Gebiet wach geworden ist: an die Quelle ihrer Faszination, an ein Schlüsselerlebnis, das Ihnen die Augen geöffnet hat.

4. Erinnern Sie sich an kein persönliches Schlüsselerlebnis? Dann müssen Sie sich auf die Suche nach einem Dialogpartner machen, der in einem andern Fachgebiet zu Hause ist als Sie. Erklären Sie ihm in möglichst einfachen Worten, was Sie persönlich über

Ihr Fachgebiet denken und was für Sie der Witz der Sache ist. Achten Sie auf die Reaktionen ihres Partners und lassen Sie sich von seinen Zweifeln und Rückfragen inspirieren.

5. Üben Sie sich jetzt im Erzählen! Stoff ist ihr Schlüsselerlebnis oder die Begegnung mit ihrem Dialogpartner. Geben Sie dem Erlebten die Gestalt einer Anekdote.

6. Hat ihre Anekdote eine attraktive Pointe? Können sie den Witz der Sache auf den Punkt bringen? Vielleicht mit einer herausfordernden Frage, einer simplen Geste, einer kühnen Behauptung, einem anregenden Spielangebot, einem ausbaufähigen Denkanstoß, einem animierenden Bild, einer dynamisierenden Handlungsanweisung? Gelingt Ihnen das, dann haben Sie eine keimfähige Kernidee geboren.

7. Vielleicht brauchen Sie jetzt noch ein Schlüsselobjekt, um ihre Kernidee wirkungsvoll in Szene zu setzen, etwas, was stellvertretend für das Ganze stehen kann: eine repräsentative Aufgabe, einen exemplarischen Text, einen charakteristischen Gegenstand.

8. Testen Sie Ihre Anekdote und Ihr Schlüsselobjekt im Freundeskreis, bevor Sie sie in die Klasse tragen. Wirkt die Kernidee? (Ruf und Gallin, 1999b, S. 18)

Anhand dieser Anleitung lässt sich sehen, wie sich die Stundenvorbereitung im dialogischen Lernkonzept weg von der Präparierung des Lehrstoffes hin zum Auffinden von Kernideen verlagert. Zur Veranschaulichung konkreter Kernideen findet sich im 2. Band folgende Anekdote zur Bruchrechnung von Peter Gallin:

> Als kleiner Junge durfte ich ab und zu im Sportwagen meines Onkels mitfahren. Weil dieser die damals eben gerade neu eingeführten Geschwindigkeitsbegrenzungen oft nicht beachtete, fragte ich ihn einmal schüchtern: War da hinten nicht eine 60er-Tafel? – Ja, da stand eine Tafel mit der Zahl 60, erwiderte der Onkel geistesgegenwärtig, sie bedeutet, dass ich 60 Kilometer in einer halben Stunde fahren darf. Ich stutzte. 60 Kilometer in einer halben Stunde? Natürlich! Geteilt durch einhalb gibt mehr! (Ruf und Gallin, 1999b, S. 25)

Das ist der Witz des Bruchrechnens und diese Kernidee begleitet ihn bis heute. Im Rahmen des Projektes Lernen auf eigenen Wegen sind einige Kernideen entstanden. Bei jener zur Flächenmessung, kann man den regen Wechsel zwischen Rückschau und Vorschau detailliert nachlesen. Dieser mündet schließlich in der Kernidee „Wie viel Platz brauche ich wo?“ (Ruf und Gallin, 1999b, S. 33-36). Nicht nur in den Fächern Deutsch und Mathematik lassen sich Kernideen generieren und für den Unterricht nutzen. Für den Unterrichtsgegenstand Geschichte und Sozialkunde entstand in einer Diskussion, die im Anschluss an ein Referat von Gallin und Ruf vor GymnasiallehrerInnen stattfand, die Kernidee *„Menschen hinterlassen Spuren.“* (Ruf und Gallin, 1999b, S. 38) Eine Kernidee, die auch im Geographie- und Wirtschaftskundeunterricht ergiebig ist, ebenso wie die Kernidee *Menschen siedeln sich an geographisch günstigen Orten an* - eine Thematik, die sich durch die GWK-Lehrpläne aller Jahrgangsstufen durchzieht. Das Wesen der Schrift wird in der Kernidee *Spuren legen, Spuren lesen* auf den Punkt gebracht.

Alltägliche Beispiele für die Arbeit mit Kernideen stellen nach Gallin und Ruf, Werbungen und Massenmedien dar. Denn gute Kernideen breiten sich wie ein Lauffeuer aus und wer bei Menschen, die sich nicht aus eigenem Antrieb dafür interessieren, Aufmerksamkeit erregen will, muss sich kurz fassen. Kernideen lähmen hingegen das Denken, wenn man sie mit Erkenntnissen verwechselt. Beide Seiten der Medaille gilt es bei der Suche nach Kernideen für den Unterricht im Auge zu behalten. „Damit Kernideen nicht zu Dogmen verkommen, müssen sie von Fall zu Fall neu formuliert werden.“ (Ruf und Gallin, 1998, S. 90) Es sind somit keine vorgefertigten Rezepte, die man aus der Schublade holt. Sie entstehen vielmehr spontan in Situationen, in denen SchülerInnen wie LehrerInnen vor Sachprobleme gestellt werden. Der Lehrperson obliegt es, sich in die Sichtweise der SchülerInnen einzuleben und ihre Fragen zu verstehen. So haben Kernideen stets den Charakter des Vorläufigen und verschwinden, wenn die Lernenden ein Stück weitergekommen sind und machen neuen Kernideen Platz. (vgl. Ruf und Gallin, 1998, S. 90) Zusammenfassend lässt sich festhalten:

- Kernideen muss man nicht suchen, man muss sie zugeben.

- Kernideen sind brisant und handlungswirksam. Wer sich beim Tun beobachtet, stößt zwangsläufig auf Kernideen.

- Kernideen sind der persönliche und oft unreflektierte Antrieb, der immer wirkt, wenn ich mich mit einer Sache befasse.

- Kernideen können topophil oder topophob – der Sache zu- oder abgewandt – sein. Sachfremde Kernideen wecken Abwehrkräfte, sachzentrierte Kernideen erzeugen Lernbereitschaft. Beiden Kräften müssen wir im Unterricht Raum geben.

- Sachzentrierte Kernideen findet man nur, wenn man nach der Bedeutung des Stoffs für die eigene Person fragt: Die Antwort stellt sich ein, wenn man den Lehrer[Innen]kommentar weglegt und den Stoff auf eigenen Wegen durchdringt.

- Die Kernidee der Lehrperson konkretisiert sich in einem weitgespannten Auftrag: Er steckt das Feld ab für ein Lernen auf eigenen Wegen und ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, eigene Kernideen zu entwickeln.

(Ruf und Gallin, 1999a, 62f)

4.2 Der Auftrag

≪ Pour ce qui est de l'avenir, il ne s'agit pas de le prévoir,
mais de le rendre possible. ≫

„Was die Zukunft anbelangt, so haben wir nicht die Aufgabe,
sie vorherzusehen, sondern sie zu ermöglichen."

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

Zukünftiges Lernen ermöglichen, das sollen die Aufträge, die basierend auf der Kernidee entwickelt werden. Durch die Perspektiven, die sie eröffnen, soll es zu einer „fruchtbaren und anhaltenden Auseinandersetzung mit dem Stoff" (Ruf und Gallin, 1999b, S. 49) kommen. Hierfür muss ein Auftrag mehrere Merkmale aufweisen: (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 49)

- Einstieg – der erste Teil muss für alle erfüllbar sein und auf ganz unterschiedlichen Niveaus zu interessanten Lösungen führen. Leistungsschwache SchülerInnen sollen nicht überrumpelt und leistungsstarke SchülerInnen nicht unterfordert werden. Alle sollen sich zu einem eigenen Produktionsschwung eingeladen und herausgefordert fühlen. Der Schlüsselauftrag der ersten Phase liegt in der Aufforderung zum freien und entspannten Assoziieren und kann etwa so, unabhängig von Fach und Schulstufe, gestellt werden:

  „Achte beim Lesen dieses Gedichtes/dieser Gleichung/...
  Auf deine Gedanken und Gefühle.
  Schreibe alles auf, was dir durch den Kopf geht."
  (Ruf und Gallin, 1999a, S. 28)

- Rampe – der zweite Teil lenkt den Blick auf den Witz der Sache. Die Aufträge sollten eine Rampe für Könner beinhalten. Durch sie sollen die Schnellsten und Begabtesten ihre Möglichkeiten voll ausschöpfen können und unter Umständen an die Grenzen stoßen.

- offene Aufgabenformulierungen – mehrere Lösungen und Sichtweisen sollen möglich sein. Die kreative Eigentätigkeit und Individuelles ist gefragt und stärkere wie schwächere SchülerInnen werden gleichermaßen herausgefordert. Für die Lehrperson bleibt es fortwährend spannend, da die Lösungen nicht vorhersehbar sind.

Das Formulieren von Aufträgen gehört zum Tagesgeschäft von Lehrpersonen. An die Lektüre der Reisetagebücher (Details in Kapitel 4.3) fügt sich die Formulierung neuer Aufträge. An ihnen sollen die Lernenden erkennen, dass das, was sie zum Unterricht beitragen, verstanden und ernst genommen wird. Lehrbücher können so zwar Ideen geben, wie Aufträge zu modellieren sind, sie bieten aber keine fertigen Aufgabenstellungen, so dass die Lehrkraft selbst gefordert ist. (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 52)

Eine Kategorie offener Aufträge gibt ein Objekt vor und fordert die SchülerInnen auf sich damit zu beschäftigen und Stellung zu beziehen. (vgl. Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 214) Beispielsweise sind verschiedene Winkel aufgezeichnet und die SchülerInnen sollen sie ohne Vorkenntnisse mit einem Geodreieck messen. Mögliche Folgeaufträge könnten darin bestehen, selbst einen bestimmten Winkel zu zeichnen und eine Anleitung zum Zeichnen von Winkeln mit einem Geodreieck zu verfassen. (vgl. Ruf und Gallin, 1998, S. 93-103) Oder eine komplizierte Gleichung liegt vor den SchülerInnen und sie sollen sie zunächst einmal in Ruhe anschauen und ihre Wirkung auf die eigene Person notieren. Im Folgenden würde ein offener Auftrag lauten: „Schau dir dieses mathematische Gebilde genau an. Achte dabei auf alles, was dir durch den Kopf geht. Schreibe alles so auf, wie es dir einfällt: Gedanken, Gefühle, Assoziationen, Einfälle, Erinnerungen, Fragen, Ängste, Ideen usw." (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 241) Anschließend könnten die Assoziationen diskutiert und ausgetauscht werden und Lösungsansätze verglichen werden. (vgl. Ruf und Gallin, 1999a, 22f) Schließlich ist vielleicht noch eine Geschichte zu der Gleichung zu verfassen, ganz gemäß der Kernidee: *Jede Rechnung ist eine Geschichte*. (vgl. Ruf und Gallin, 1999a, 42ff)

Mathematische Vorstellungsübungen, wie sie Christof Weber (siehe Details dazu in Weber, 2010) entworfen hat, können ein Objekt offener Aufträge sein. Es handelt sich dabei um Texte, die einen mathematischen Inhalt in einen außermathematischen Sachzusammenhang stellen. Beispielsweise

„ist die Tatsache, dass sich der Mittelpunkt einer gleitenden Strecke auf einer kreisförmigen Bahn bewegt, in das Szenario einer rutschenden Leiter gekleidet, an der auf halber Höhe eine Lampe befestigt ist." (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 146) Der erste Auftrag – erster Teil lautet hierbei wie folgt: (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 147)

a) Welche Form hat die Leuchtkurve, welche die Lampe bei der Bewegung der Leiter in das verdunkelte Zimmer „gezeichnet"? Beschreiben Sie Ihre Vermutungen und fertigen sie eine Skizze an.

b) Notieren Sie alle Ihre Vorstellungen – Bilder und Handlungen -, die Sie im Verlauf der Vorstellungsübung herangezogen haben.

c) Welche Ihrer Vorstellungen aus b) waren im Hinblick auf Ihre Vermutungen aus a) eher nützlich? Welche waren eher hinderlich?

Im zweiten Abschnitt des ersten Auftrages geht es um den Austausch der vorhandenen Perspektiven in der Klasse und um eine Aufforderung zum Perspektivenwechsel - Charakteristika der DU-Phase:

d) Lesen Sie die Beschreibungen ihrer Mitschülerin / ihres Mitschülers und formulieren Sie Rückmeldungen:

e) Welche Vorstellungen finden Sie bemerkenswert? Weshalb?

f) Welche Vorstellungen in b) sind Ihnen zur Beantwortung der Frage a) nützlich? Inwiefern?

g) Wie lautet nun Ihre Antwort auf die Frage a)? Welche Begründung haben sie dafür? (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 150)

Der zweite Auftrag zielt auf einen gemeinschaftlichen Wissensbildungsprozess ab und enthält die Rampe: (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 153)

> Unser Experiment an der Tafel deutet darauf hin, dass die an der Leiter befestigte Lampe eine rechtsgekrümmte Kurve beschreibt.

h) Entwickeln Sie weitere Argumente, die für diese Gestalt der Leuchtkurve sprechen.

i) Bestimmen Sie die genaue mathematische Gestalt der Leuchtkurve.

Eine zweite Kategorie offener Aufträge gibt kein Objekt vor, sondern versucht die Konzepte der SchülerInnen durch eine freie Produktion zu einem Unterrichtsthema zu aktivieren. Beispiele sind etwa „Schreib ein Gedicht!“(vgl. Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 215) oder „Geh auf die Suche nach Brüchen!“. (Ruf und Gallin, 1999c, S. 286)

Offene Aufträge haben immer eine diagnostische Komponente, die dazu beiträgt den Unterricht auf die Schülervorstellungen abzustimmen, indem SchülerInnenproduktionen wieder zurück in die Klasse gespielt und gemeinsam besprochen werden (siehe Kapitel 4.4.3 Autographensammlung). Die Aufforderung sachbezogene Zeichnungen oder Skizzen anzufertigen helfen dabei Vorstellungen sichtbar zu machen.

Um Erfahrung mit offenen Aufträgen zu sammeln, empfiehlt es sich bereits im Unterricht eingesetzte Aufgaben zu einem offenen Auftrag umzuformulieren. In Besser Lernen im Dialog findet sich hierfür das Beispiel der Aufgabe: „Wie viele Sekunden hat ein Jahr?“, die umformuliert wurde in: „Wie viele Sekunden bist du alt? Erläutere, wie du beim Rechnen vorgehst und welche Gedanken und Gefühle dich beim Lösen der Aufgabe begleiten.“ (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 216) Der große Unterschied liegt einerseits im persönlicherem Bezug der Aufgabe, der eigenen Betroffenheit, die mit einfachsten Mitteln erzeugt wird und andererseits in der Aufforderung, die zu überwindenden Hürden schriftlich festzuhalten.

Nach Bruder, 2003, S. 12 besteht eine Aufgabe aus einer Ausgangssituation (der Angabe), einer Transformation (dem Lösungsweg) und einer Endsituation (der Lösung).Werden diese Komponenten variiert, ergeben sich acht unterschiedliche Aufgabentypen, die zu abwechslungsreichen und offenen Aufträgen führen:

Angabe	Lösungsweg	Lösung	Aufgabentyp	Beispiel
X	X	X	gelöste Aufgabe, Musteraufgabe, Aufgabe zur Fehlersuche	- Stimmt das?… - Wo steckt der Fehler?
X	X	-	einfache Bestimmungsaufgabe (Grundaufgabe)	Löse die quadratische Gleichung $3x^2 - 7x = 8$, Kopfrechenaufgabe, Konstruktionsaufgabe
X	-	X	Strategiefindungs- oder Begründungsaufgabe	Begründe, warum das Gleichungssystem für ... unlösbar ist. Zeige für Vektoren in $\mathbb{R}^2$, *dass* $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ gilt
X	-	-	schwere Bestimmungsaufgabe, Problemaufgabe	Führe eine Befragung zu … durch, Ist dieser Milch-Tetra-Pack verpackungsoptimal gestaltet?
-	X	X	einfache Umkehraufgabe	Zwei Vektoren einzeichnen, sodass der gegebene Additionsvektor entsteht. Zahlenrätsel: nach bestimmten Operationen soll die gedachte Zahl ermittelt werden. Finde eine Geschichte zu dieser Gleichung: …
-	X	-	Eigenkonstruktion von Aufgaben zu einem bestimmten mathematischen Werkzeug	Gib die Gleichungen eines linearen Gleichungssystems an, dessen Lösungen sich besonders gut mit dem Additions-/ Gleichsetzung- / Substitutionsverfahren bestimmen lassen.
-	-	X	schwierige Umkehraufgabe, Modellierung mit Zielvorgabe	- Gegeben ist der Vektor $\vec{c}$. Gib zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an, so dass gilt $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. - Gib einen Vektor der Länge $\sqrt{37}$ an.

Angabe	Lösungsweg	Lösung	Aufgabentyp	Beispiel
-	-	(-)	offene Aufgabe	- Finde (mathematisch) optimale Verpackungsformen! Warum werden diese oft doch nicht verwendet, z.B. bei Süßwarenverpackungen? - Warum ist es unrealistisch, dass die Königstochter im Märchen der Froschkönig, aus Langeweile mit einer Kugel aus purem Gold spielte? Wie kannst du die Kugel so adaptieren, dass die Schilderung Sinn macht?

Tabelle 4.1: Aufgabentypen (vgl. Salner-Gridling, 2003, S. 67; Liebscher u. a., 2013, 117ff; Bruder, 2003, 12ff)

Diese acht Aufgabentypen ergänzen einander und decken im Lernprozess je spezielle Funktionen ab. Gelingt es somit im Zuge einer Unterrichtsreihe alle acht Typen zu integrieren und ausreichend Raum zur Bearbeitung zu geben, wird nachhaltiges Lernen effektiv gefördert. (vgl. Bruder, 2003, 12ff)

Folgende Kriterien eignen sich, um Offenheit von erstellten Aufträgen zu prüfen: (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 216)

a) Sind mehrere richtige und gute Lösungen möglich?

b) Erwarten Sie, dass Antworten kommen, die sie überraschen und interessieren werden?

c) Können die Schülerinnen und Schüler dazu etwas von ihren Gedanken und Gefühlen aufschreiben?

d) Denken Sie, dass alle – auch die stärksten – Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung in dem offenen Auftrag sehen?

4.3 Das Reisetagebuch/Lernjounal

« La vérité de demain se nourrit de l'erreur d'hier. »

„Die Wahrheit von morgen entsteht aus den Fehlern von heute."

Antoine de Saint-Exupéry (1942)
Pilote de guerre [Flug nach Arras]

Zur Sammlung aller persönlichen Lernschritte, ob Irrweg oder Schnellstraße, dient das Reisetagebuch. In ihm werden alle Aufträge der Lernenden schriftlich festgehalten. Es ersetzt alle übrigen Hefte eines Faches. Das Reisetagebuch gleicht einer Werkstatt, in der die SchülerInnen am Aufbau ihrer Fachkompetenz arbeiten. Das tun sie in ihrer individuellen und singulären Sprache des Verstehens. Neue Probleme werden hier zunächst in die eigene Sprechweise umgewandelt, in Geschichten eingebettet und mit persönlichen Erfahrungen und Erlebnissen in Verbindung gebracht. Gemessen an globalen fachlichen oder sprachlichen Normen sind die hier entstehenden Texte lückenhaft und nicht perfekt. Wird der Fokus auf die individuelle Entwicklung der Lernenden gelegt, so ist das Reisetagebuch ein unentbehrliches Dokument des Unterrichts. Hierfür müssen sie drei Merkmale erfüllen: sie müssen das Unterrichtsgeschehen chronologisch abbilden, Texte und Bilder müssen ausformuliert und ausgestaltet sein und die Lernenden müssen darin unzensiert, ohne spezielle Rücksicht auf globale Normen, ihre Gedanken zu Papier bringen dürfen. Stichwörter oder zusammenhangslose Kritzeleien genügen in diesem Sinne nicht. Als methodisches Instrument brauchen Lerntagebücher daher eine klare Struktur. Die Minimalanforderung liegt in Datum, Auftrag, Spuren und Rückmeldungen. Folgende Maximalvariante wird von Ruf und Gallin vorgestellt:

- Organisation des Reisetagebuchs
- Datum Wann habe ich diesen Eintrag gemacht? (Zeit als Ordnungsprinzip)
- Thema Womit befassen wir uns? (Schlagzeile/Blickfang)
- Auftrag Was muss ich tun? (Problem, Erwartungen, Hilfen, Ziele)
- Orientierung Wozu machen wir das? (Motive, Fragestellungen, Überblick)

- Spuren Welchen Weg beschreite ich bei der Lösung des Auftrags? (Persönliche Auseinandersetzung mit dem Thema)
- Rückblick Wo stehe ich jetzt? (Zusammenfassung, Merksatz, persönlicher Kommentar, offene Fragen, neue Aufträge)
- Rückmeldung Wer kann mir weiterhelfen? (Reaktionen, Tipps, Beurteilung: Lehrperson oder Mitschüler)

(Ruf und Gallin, 1999a, S. 64)

Die Beiträge der SchülerInnen im Reisetagebuch erfüllen keinen Selbstzweck und sollen daher von der Lehrkraft kommentiert werden. Die Reisetagebücher werden etwa zwei Mal wöchentlich eingesammelt, möglichst umgehend durchgesehen (nicht korrigiert!) und mit schriftlichen Kommentaren versehen. Diese Häufigkeit bezieht sich auf ein drei- bis vierstündiges Fach wie Mathematik oder Deutsch. In Fächern mit geringerer Stundenanzahl wird eine wöchentliche bis zweiwöchentliche Durchsicht angebracht sein. Auf gute Ideen (= Qualitäten) wird sofort positiv reagiert, Schwachstellen werden behutsam angesprochen. Speziell mit Lob soll nicht gespart werden. Wichtig ist es, Rückmeldung und Wertung möglichst nicht zu vermischen. Rückmeldungen stellen fachkundige Interpretationen der Beiträge dar. Sie sollen aufbauend und konkret sein, selbst, wenn der Auftrag nicht erfüllt ist. Dem Auffinden von Qualitäten in SchülerInnenarbeiten widmet sich im Detail das Kapitel 4.5.

Um einschätzen zu können, in welchem Ausmaß die allgemeinen Leistungsanforderungen bereits erfüllt wurden, erfolgt eine Bewertung mittels Häkchen. Sie zeigen an, wie sehr die Lernziele bereits erreicht sind oder ob sich die SchülerInnen noch intensiver mit der Sache auseinander setzen müssen. Letzteren Fall symbolisiert ein durchgestrichenes Häklein ($\not\checkmark$). Karge Arbeiten werden ohne Wertung zur Nacharbeit zurückgegeben. Wiederholte oder verspätet abgegebene Arbeiten werden nur noch mit erfüllt ($\checkmark$) beurteilt.

Ansonsten kann es bis zu drei Häkchen geben:

$\checkmark$Die/Der SchülerIn hat sich intensiv mit dem Auftrag befasst und im vorgegebenen zeitlichen Rahmen eine genügende Leistung erbracht oder sie/er wird es demnächst schaffen, wenn sie so weiterarbeitet, wie es bisher im

Reisetagebuch dokumentiert ist (diagnostische Komponente). Die Mindestanforderungen sind erfüllt. Es kann zum nächsten Auftrag übergegangen werden.

✓✓An mindestens einer Stelle ist eine besondere Leistung erkennbar: eine verborgene fachliche Perle, ein interessanter Einfall, ein erfolgversprechender Ansatz, eine originelle Denkbewegung, eine eigenständige Einschätzung, ein mutiger Versuch. Diese besondere Stelle immer auch hervorheben.

✓✓✓Ein "Wurf". Etwas Überraschendes. Vielleicht ein kühner Vorgriff, eine originelle Idee, ein unerwarteter Durchblick, ein interessantes Verfahren, ein spannendes Experiment, ein ungewöhnliches Problembewusstsein, ein spezielles Engagement, ein erstaunlicher Überblick, ein geistreicher Irrtum. Im Mittel werden dies 3 oder 4 SchülerInnen pro Auftrag schaffen. Oft sind dies die gleichen SchülerInnen. Aber immer wieder schafft auch ein/e mittelmäßige/r SchülerIn einen Wurf. Dies wird für sie/ihn zu einem besonderen Erlebnis.

(vgl. Ruf und Gallin, 1999b, S. 151)

4.4 Den Austausch unter Lernenden gestalten

« Si tu diffères de moi, mon frère, loin de me léser, tu m'enrichis. »

„Wenn Du anderer Meinung bist, verletzt Du mich nicht, Du bereicherst mich!"

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

4.4.1 Der Sesseltanz

Sind die Ideen, Lösungsstrategien, etc. in der ersten Phase festgehalten worden, legt jede/r ein leeres Blatt Papier mit der Überschrift „Rückmeldungen" neben den eigenen Entwurf. Die SchülerInnen geben ihren Platz frei und suchen sich einen freien Sessel. Wer dies nicht will,darf am eigenen Platz verweilen.

Es ist eine unkomplizierte Form des Austausches, bei der, laut Gallin und Ruf, die Neugier, über die Ausführungen der anderen, zumeist die Hemmung, das eigene Werk preiszugeben, aussticht. (vgl. Ruf und Gallin, 1999a, S. 39) Bei mehrmaligem Wechsel können Einblicke in die Rückmeldungen anderer gewonnen werden und so andere Perspektiven und Wertungen erlebt werden. Dadurch, dass nicht nur die AutorInnen der Texte, sondern auch die LeserInnen durch ihre schriftliche Rückmeldungen etwas von sich Preis geben, wird das Risiko der persönlichen Zurschaustellung ausgeglichen. Wie bereits erwähnt kommt der Sendung von Ich-Botschaften eine essentielle Bedeutung zu. Denn so wird es ermöglicht Einsichten in die Wirkung, die der Text auf andere hat, zu erlangen und produktive Kräfte zu wecken. Gerade bei mathematischen Ausführungen können wertvolle Rückmeldungen zu Struktur, Nachvollziehbarkeit, Einsatz von Skizzen, etc. gewonnen werden. Doch hieran müssen SchülerInnen nach und nach herangeführt werden. Hilfen wie sprachliche Muster, in Form der folgenden, formelhaften Satzanfänge, sind anfangs essentiell.

> Rückmeldungen [sind] Ich-Botschaften.
>
> Wie fängt deine Rückmeldung an?
> Mir gefällt ...
> Ich finde es gut ...
> Ich bin überrascht, wie ...
> Ich verstehe nicht ganz, warum ...
> Ich möchte gern wissen ...
> Hier fehlt mir ...
> Ich habe Mühe mit dem Satz ...
> Ich frage mich, ob ...
> Damit kann ich nichts anfangen ...
> Da muss ich widersprechen ...
> Das sehe ich anders ...
>
> (Ruf und Gallin, 1999a, S. 40 Auszug)

Die SchülerInnen haben die Möglichkeit von Produkten ihresgleichen auf vergleichbarem Niveau zu lernen und nicht von perfekten Meisterwerken. Es wird bessere Ausführungen geben und sie werden sich unterlegen fühlen, sie werden auch schlechteren Werken begegnen und ein Gefühl der Überlegenheit wird in ihnen aufkommen. Ganz im Sinne des Imitationslernens bekommen die SchülerInnen ein breites Spektrum zu sehen und können sich interessante Ansätze zu eigen machen. In Kapitel 6.2 finden sich Auszüge aus Rückmeldungen von SchülerInnen der 6. Schulstufe.

4.4.2 Stundenzusammenfassung

Die letzten acht Minuten der Unterrichtsstunde sollen die SchülerInnen dazu verwenden eine schriftliche Zusammenfassung des in dieser Stunde Gelernten zu erstellen. Für die Planung der nächsten Stunde werden diese Aufzeichnungen herangezogen. Es ist eine simple Methode um das Schreiben über Mathematik zu trainieren und einen Austausch zwischen Lernenden und Lehrenden zu schaffen. Sie kann ein wichtiges Feedback für die Lehrkraft sein, um zu sehen, was die SchülerInnen aus der Stunde mitnehmen konnten und wo noch Verständnisschwierigkeiten liegen. Wird diese Methode regelmäßig angewandt, lassen sich Lernschritte für die Lernenden übersichtlich dokumentieren.

4.4.3 Die Autographensammlung

Die Ausarbeitungen der SchülerInnen werden gesichtet und für den Unterrichtsfortgang nützliche Dokumente werden beiseite gelegt. Diese können einen speziellen persönlichen Zugang haben, fachlich ausgereift sein, auch gängige Sackgassen, typische Irrtümer oder neue Fragestellungen enthalten. Auf ein bis zwei Seiten werden die Beiträge von der Lehrkraft kopiert und in die Klasse zurückgespielt. So erhalten alle SchülerInnen Einblicke in ausgewählte Lösungen anderer anhand derer die Qualitäten und typischen Merkmale guter Arbeiten im Unterricht besprochen werden. Die Autographensammlung ist integraler Bestandteil des Unterrichts, wodurch die authentischen Beiträge der SchülerInnen eine weitere Wertschätzung erfahren. Laut Peter Gallin „zieht auch die Lehrperson einen großen Vorteil aus der Autographensammlung" (Keller, Winter und Ruf, 2008, S. 99), denn selbst wenn sie den Lehrstoff bereits unzählige Male unterrichtet hat, so werden sich die Antworten von Klasse zu Klasse unterscheiden und der Unterricht bleibt spannend. Im weiteren Unterrichtsgeschehen können die SchülerInnen beispielsweise in einer Stillarbeitsphase ihre Sichtweise zu den Lösungen der anderen formulieren. Im Plenum kann die Lehrkraft auf Qualitäten ausgesuchter Beiträge und ihre Auswahlkriterien eingehen. Dabei ist es für die SchülerInnen durchaus interessant zu erfahren, welche Kriterien die Lehrperson bei der Auswahl herangezogen hat. Durch diese Methode des lauten Denkens lernen sie einen Blick für Qualitäten zu entwickeln. Die Lehrkraft kann jedoch auch einzelne Lösungsansätze zur Diskussion stellen. Ebenso eignet sich eine Partnerarbeit, in der die SchülerInnen die Qualitäten in den Arbeiten der MitschülerInnen suchen und kurz präsentieren, zur Aufarbeitung der Autographensammlung im Unterricht.

Die Autographensammlung sollte nicht zu umfangreich ausfallen, damit sie sinnvoll analysiert und ausgewertet werden kann. Nicht nur herausragende Beiträge, sondern auch strukturiertes Vorgehen und besondere Leistungen schwächerer SchülerInnen sollen Einzug finden. Unter keinen Umständen sollen SchülerInnenleistungen schlecht gemacht werden. Hier gilt es an einer förderlichen Feedbackkultur zu arbeiten. (vgl. Keller, Winter und Ruf, 2008, 217ff)

4.5 Qualitäten finden

« Ce n'est point dans l'objet que réside le sens des choses, mais dans la démarche. »

„Nicht in der Sache liegt der Sinn, sondern im Prozess."

Antoine de Saint-Exupéry (1948)
Citadelle [Die Stadt in der Wüste]

Beim Verfassen von Rückmeldungen im dialogischen Lernprozess ist es wichtig, gemäß dem Leitgedanken *bewusst machen, was gelungen ist* zu arbeiten. Denn Rückmeldungen erfüllen einerseits die Aufgabe eines Zwischenfazits, in dem inne gehalten und auf die bisherige Leistung zurückgeblickt wird, wodurch sie den Produktionsschwung stoppen, sie sollen gleichzeitig jedoch neue Schreibanlässe liefern und eine weitere Auseinandersetzung mit den Inhalten motivieren. Damit dies gelingt, muss der Fokus der Rückmeldungen auf die Qualitäten (= gelungene Stellen) gelenkt werden und nicht auf Defizite, die die erbrachte Leistung schmälern und das Selbstbewusstsein angreifen. Der Blick auf Gelungenes hingegen stärkt das Selbstvertrauen, da diese Rückmeldungen mit angenehmen Gefühlen verbunden werden und so einen Platz im Bewusstsein einnehmen (vgl. Ruf und Gallin, 1999b, 229f).

Sich als Lehrkraft auf die Qualitäten in den SchülerInnenarbeiten zu fokussieren bedarf gezielter Übung. Die folgenden fünf Schritte sind hierbei fakultativ zu sehen und helfen die gelungenen Stellen ausfindig zu machen. Geschieht dies im Rahmen einer Fachkonferenz, im Team, werden meist noch mehr Qualitäten gefunden.

1. **Einstimmung**
   Vor der Durchsicht der SchülerInnenbeiträge sollen positive Erinnerungen an vergangene, gute Leistungen der Klasse oder des/r jeweiligen Schülers/in wach gerufen werden.

2. **Durchsicht mit offener Aufmerksamkeit**
   Die Arbeit wird zügig durchgesehen und das Augenmerk auf Stellen gelegt, die überraschen, erheitern, gefallen. Diese werden sofort

am Rand mit einem Symbol (ein Plus, ein Ausrufezeichen, etc.) gekennzeichnet. Fehler oder nicht gelungene Passagen werden strikt ausgeblendet und übergangen. Je nach Umfang der Ausarbeitung sollten zumindest ein bis zwei Qualitäten gefunden werden.

3. **Fokussierung auf die Qualitäten**
   Die markierten Stellen werden genauer unter die Lupe genommen und Notizen zu den identifizierten Passagen angelegt.

4. **Intention des/r Autors/in verstehen versuchen**
   Wenn man möchte, kann man sich noch weiter in die SchülerInnenarbeiten vertiefen und versuchen das Konzept ausfindig zu machen, das der/die Schüler/in verfolgt hat. So können die bestehenden Wissensstrukturen der SchülerInnen wirklich erkannt und weiterentwickelt werden und ihre Misskonzepte aufgespürt werden. Die häufig leitende Frage, in wieweit der Auftrag erfüllt ist, wird hier bewusst zurückgestellt.

5. **Selbstreflexion**
   Aufschlussreich kann es für eine Lehrkraft sein, wenn sie ihre Vorgehensweise beim Durchsehen der SchülerInnenarbeiten genauer betrachtet. Worauf richtet sich der eigene Blick? Reibt man sich an Fehlern auf? Begegnet man Widerständen? Kommt Freude beim Finden von Qualitäten auf? Welche neuen Aspekte in der eigenen Arbeit tun sich auf, wenn der Blick gezielt auf Gelungenes gelenkt wird?

   (vgl. Keller, Winter und Ruf, 2008, 224f)

Die gefundenen Qualitäten sollen den SchülerInnen mittels eines Symbols am Rand und/oder kurzer Kommentare rückgemeldet werden. Auch können sie Teil einer Autographensammlung sein, die der gesamten Klasse als Lerngrundlage dient und im weiteren Unterricht besprochen wird.

5 Leistungsbewertung

« Il faut exiger de chacun ce que chacun peut donner, [. . .] »

„Man muss von jedem fordern, was er zu leisten vermag, [. . .]“

Antoine de Saint-Exupéry (1943)
Le petit prince [Der kleine Prinz]

Die Leistungsbewertung im Rahmen des dialogischen Unterrichts stützt sich auf zwei Bereiche – die Prozessbewertung und die Produktbewertung. Diese Art der Leistungsbewertung erfolgt in der Schweiz auch bei der Maturaprüfung. Zur Endnote zählt einerseits der Durchschnitt der vierstündigen schriftlichen Prüfung und der mündlichen Prüfung (= die Produkt- bzw. Prüfungsnote) und andererseits der Mittelwert der Noten der letzten zwei Semester (die Erfahrungs- bzw. Prozessnote).

Die Produktbewertung ist somit das Maß der Entsprechung der globalen Norm. Sie gibt die Abweichung des SchülerInnenprodukts vom Idealprodukt wieder (Ergebnisevaluation) und urteilt unter einer strengen Defizitperspektive (summative Bewertung). Dies erfolgt im Wesentlichen bei Schularbeiten und Prüfungen. Im segmentierenden Unterricht stellen Zeugnisnoten hauptsächlich Produktnoten dar, da sich die individuelle SchülerInnenbeurteilung auf mehr oder minder zufällige Beobachtungen von Wortmeldungen im Unterricht beschränkt. Eine würdige Alternative hierzu stellt das Reisetagebuch dar. Darin enthaltene Aufzeichnungen zählen zur Prozessbewertung und stellen die so genannte Wegnote dar. Dabei wird die Leistungsfähigkeit von SchülerInnen abgebildet, etwa beim Eingrenzen und Bearbeiten eines Problemfeldes in Eigenregie oder beim Erreichen der eigenen Grenzen, wenn es sich neu zu organisieren gilt. Wie in Kapitel 4.3 beschrieben sind Rückmeldungen und Bewertungen in Reisetagebüchern zukunftsbezogen und legen die individuellen Möglichkeiten frei. Hierdurch soll die Zielerreichungswahrscheinlichkeit erhöht werden. Es handelt sich hierbei um eine formative Art der Bewertung. Individuelle Wege sind es, die im Reisetagebuch beschritten werden sollen und dabei liegt der Fokus auf sachgerechtem und zweckmäßigem Vorgehen beim Problemlösen. In diesem Sinne kann „[e]in fruchtbarer Irrtum, eine unerwartete Entdeckung oder eine Vertiefung des Problembewusstseins" höher einzuschätzen sein, „[...] als eine geradlinige Lösung" (Ruf und Gallin, 1999a, S. 85)

Wie bereits in Kapitel 4.3 beschrieben, erfolgt die Beurteilung im Reisetagebuch via Häkchen. Um die gesammelten Häkchen in eine Note überzuführen, ist zunächst der Mittelwert (x) der Häkchen pro Auftrag zu bilden. Dieser bewegt sich zwischen x = 0 und x = 3. Eine durchschnittliche Beurteilung von ✓- führt zu einer negative Produktnote. Ab einer durchschnittlichen Bewertung mit einem Häkchen (✓) erfüllt der/die Schüler/in die Anforderungen für ein Befriedigend.

> Mit „Befriedigend" sind Leistungen zu beurteilen, mit denen der Schüler die nach Maßgabe des Lehrplanes gestellten Anforderungen in der Erfassung und in der Anwendung des Lehrstoffes sowie in der Durchführung der Aufgaben in den wesentlichen Bereichen zur Gänze erfüllt; dabei werden Mängel in der Durchführung durch merkliche Ansätze zur Eigenständigkeit ausgeglichen. (jusline.at, 2015, §14 LBV)

Über das Wesentliche hinausgehende Leistungen erfordern im Reisetagebuch eine Durchschnittsbewertung von mehr als einem Häkchen. Die Umrechnung des Mittelwerts x in eine Wegnote W wird in der unten abgebildeten Grafik 5.1 veranschaulicht und mittels der Formel:

$$W = 5 - 2 \cdot \frac{\log(x+1)}{\log(2)}$$

errechnet. (vgl. Ruf und Gallin, 1999a, S. 88, adaptiert an das österreichische Beurteilungssystem).

Sowohl die Weg- als auch die Produktnote tragen zur Ermittlung der Zeugnisnote bei, jedoch nicht zu gleichen Teilen über eine, Gerechtigkeit suggerierende, Mittelwertberechnung. Mit welchem Gewicht die beiden Dimensionen in die Endnote eingehen, hängt von den Stärken der SchülerInnen ab. Jene Dimension, deren Beurteilung besser ausgefallen ist, wirkt sich

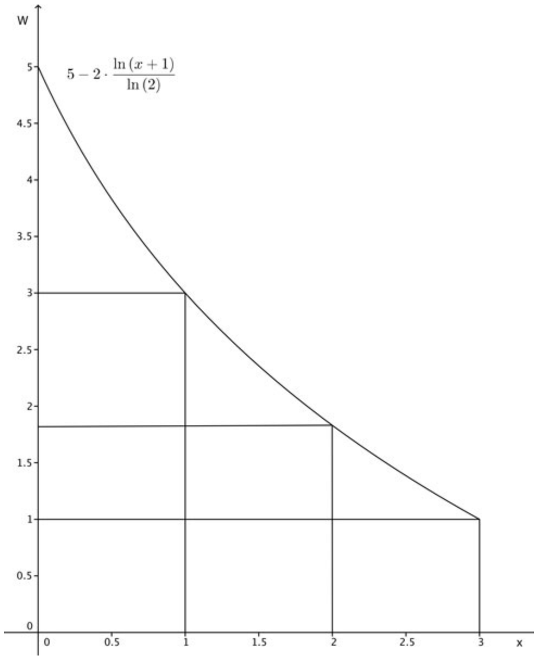


Abbildung 5.1: Umrechnung des Mittelwerts der Häkchen in eine Wegnote

stärker auf die Zeugnisnote aus. Hierfür stellten Gallin und Ruf folgende Formel zur Berechnung der Zeugnisnote auf - wobei der Unterschied des österreichischen Schulsystems, mit den Noten von „1: Sehr gut" bis „5: Nicht genügend", zum schweizerischen Schulsystem, mit der Notengebung „6: Sehr gut" in 0,5er Schritten bis „1: Sehr schlecht", auch hier bereits entsprechend berücksichtigt wurde:

$Z = \frac{W+P}{2} - 0.2 \cdot \frac{(W-P)^2}{10-W-P}$, falls W und P nicht zugleich 5 betragen

$Z = 5$, falls $W = P = 5$

(vgl. Ruf und Gallin, 1999a, S. 86, adaptiert an das österreichische Beurteilungssystem)

Vom klassisch berechneten Mittelwert wird ein quadratischer Korrekturterm subtrahiert, der eine Gewichtung zu Gunsten der besseren Teilnote bewirkt.

Diese kann die Lehrkraft durch den multiplikativen Faktor selbst steuern. Gallin und Ruf gewichteten die Korrektur mit 0.3. Da in meinen Unterricht auch reguläre Beispiele einfließen, setzte ich den Wert auf 0.2 fest. Dieser fällt umso mehr ins Gewicht, je stärker die beiden Noten voneinander abweichen. Dies zeigt die nachfolgende Tabelle, aus der die Zeugnisnote ermittelt werden kann.

Mittelwert der Produktnoten (Schularbeiten, Tests, etc.)	Mittelwert der Häkchen (Reistagebuch)						
	0	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**
1	2	2	2	2	1	1	1
1,5	3	2	2	2	2	1	1
2	3	3	2	2	2	2	1
2,5	3	3	3	2	2	2	2
3	4	3	3	3	2	2	2
3,5	4	4	3	3	3	2	2
4	4	4	3	3	3	2	2
4,5	5	4	4	3	3	2	2
5	5	4	4	3	3	2	2

Abbildung 5.2: Tabelle zur Ermittlung der Zeugnisnote

Der Tabelle in Abbildung 5.2 liegen die obigen Formeln zu Grunde. Sie liefert Lehrkräften wie SchülerInnen einen schnellen Überblick, wie die Einflussfaktoren Häkchen und Schularbeiten auf die Zeugnisnote einwirken. Leicht kann sie an individuelle Bedürfnisse angepasst werden.

Aus der Tabelle ist anschaulich ablesbar, dass sich etwa im extremen Fall einer durchschnittlichen Schularbeitsnote von „Sehr gut" und einem unzureichend geführtem (mit „Nicht genügend" bewertetem) Reisetagebuch die Zeugnisbeurteilung „Gut" ergibt. Vice versa ergibt sich diese Zeugnisnote bei mit durchschnittlich mit „nicht genügend" beurteilten Schularbeiten und mit herausragender Beurteilung des Reisetagebuchs.

6 Unterrichtsbeispiele zum dialogischen Lernprinzip

≪ Ce n'est pas la distance qui mesure l'éloignement. Le mur d'un jardin de chez nous peut enfermer plus de secrets que la muraille de Chine, … ≫

„Nicht der Abstand misst die Entfernung. In der Enge des eigenen Gartens kann es mehr Verborgenes geben als hinter der chinesischen Mauer, … “

Antoine de Saint-Exupéry (1931)
Terre des hommes [Wind, Sand und Sterne]

6.1 Jahresplanung für die 6. Schulstufe

In der Jahresplanung wurden die Inhaltsbereiche des österreichischen Lehrplans in eine zeitliche Abfolge gebracht und eine Bearbeitungsdauer veranschlagt (siehe Abbildung 6.1). Die im Folgenden vorgestellten Unterrichtsbeispiele wurden von September 2014 bis Mitte Januar 2015 in meinem Unterricht eingesetzt.

		Kernstoff	
September **1. – 5.** **8. – 12.** **15. – 19.** **22. – 26.**		Allgemeines; KV-Stunden; Wiederholung 1. Klasse Einstieg Arbeiten mit Variablen Arbeiten mit Variablen	WH (Maße (Zeit, Länge, Gewicht), Winkel, Fläche, Umfang, Rechenregeln, Kreis, Rechnen mit Dezimalzahlen, Körper) o Maße verwenden und Umwandlungen durchführen können in dem Ausmaß, wie es die Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Aufgaben erfordert und es dem Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler entspricht. o mit Variablen allgemeine Sachverhalte beschreiben, **(FÜ mit Physik!)** o Gleichungen und Formeln aufstellen, insbesondere auch in Sachsituationen, o unter Verwendung von Umkehroperationen einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen und Formeln umformen, o Formeln interpretieren.
Oktober **1. – 3.** **6. – 10.** **13. – 17.** **20. – 24.** **29.**	Koord.grp Fortbildung SA	Arbeiten mit Variablen Arbeiten mit Variablen Arbeiten mit Figuren und Körpern Arbeiten mit Figuren und Körpern Arbeiten mit Zahlen und Maßen	o Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren), o sowie Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern (und einfachen daraus zusammengesetzten Körpern) durchführen können, o Formeln für diese Umfangs-, Flächen- und Volumsberechnungen aufstellen können; **(FÜ mit Physik!)**
November **4. – 7.** **10. – 14.** **17. – 21.** **24. – 28.**	TdoT	Arbeiten mit Zahlen und Maßen Arbeiten mit Zahlen und Maßen Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche	o wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können EW: Primzahlen und das Sieb des Eratosthenes o Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden,
Dezember **1. – 5.** **9. – 12.** **15. – 19.**		Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche	o diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können o Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt
Jänner **7. – 9.** **12. – 16.** **19. – 23.** **26. – 30.**	SA BPT/ Zeugnis	Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche Arbeiten mit Figuren und Körpern	o Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen,
Februar **10. – 14.** **17. – 21.** **23. – 27.**	Schikurs Schikurs	Arbeiten mit Figuren und Körpern	o die Figuren skizzieren und konstruieren können,
März **2. – 6.** **9. – 13.** **16. – 20.** **23. – 27.**	SA	Arbeiten mit Figuren und Körpern Arbeiten mit Figuren und Körpern Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche	o Erkennen, ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können o kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können; o Multiplikation und Division von Brüchen
April **8. – 10.** **13. – 17.** **20. – 24.** **27. – 30.**	Autage	Arbeiten mit Zahlen und Maßen Brüche Arbeiten mit Figuren und Körper Arbeiten mit Figuren und Körper Arbeiten mit Modellen und Statistik	o Multiplikation und Division von Brüchen o Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen, und für Konstruktionen anwenden können; o charakteristische Kennzeichen von indirekten und direkten Proportionalitäten an Beispielen angeben können, o einfache Fragestellungen dazu formulieren, sie graphisch darstellen und lösen können,
Mai **4. – 8.** **13.** **18. – 22.** **27. – 29.**	1. frei 14./15. frei Sportwoche 28. – 3.	Arbeiten mit Modellen und Statistik Arbeiten mit Modellen und Statistik Arbeiten mit Zahlen und Maßen Arbeiten mit Zahlen und Maßen Arbeiten mit Zahlen und Maßen	o Fragen zu sinnvollen Anwendungsbereichen für solche Proportionalitäten stellen; o entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können, (FÜ mit Physik!) o Manipulationsmöglichkeiten erkennen; o Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen;
Juni **3.** **8. – 12.** **15. – 19.** **22. – 26.**	4./5. frei SA	Arbeiten mit Zahlen und Maßen Arbeiten mit Modellen und Statistik Arbeiten mit Figuren und Körpern Arbeiten mit Figuren und Körpern	o Bruchdarstellung, Dezimaldarstellung, Prozente o Relative Häufigkeiten ermitteln können o Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen, o Volumina von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgaben
Juli **1. – 3**		Aktivtage, Ausklang, Zeugnis	

Abbildung 6.1: Jahresplanung Mathematik

6.2 Rahmenbedingugen

Meine Lehrtätigkeit verrichte ich an einem Wiener Realgymnasium. Die Klasse, in der ich in der 6. Schulstufe das dialogische Lernprinzip integrierte, wurde von mir seit der 5. Schulstufe in Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde unterrichtet. Auch bin ich die Klassenvorständin dieser 14 Schüler und 12 Schülerinnen. Die Leistungen der Klasse in Mathematik waren zufriedenstellend, alle absolvierten die 5. Schulstufe positiv. Der Anteil der SchülerInnen mit Deutsch als Zweitsprache liegt bei 50%. Außerdem besuchen zwei mathematisch außerordentlich begabte Schüler die Klasse.

Führten die SchülerInnen im Vorjahr noch klassisch ein Schulübungsheft und eine Hausübungsmappe, so gab es in diesem Schuljahr ein Heft, das alle Aufträge, seien sie in der Schule oder zu Hause bearbeitet worden, enthielt. Diese Entscheidung fiel nach längerem Abwägen. Das letztlich entscheidende Argument, alles in einem Heft zu organisieren, war die leichtere Handhabung der chronologisch gesammelten Aufzeichnungen. Das unterrichtete Stundenausmaß von fünfzehn Werteinheiten und der Stundenplan mit Lücken am Vormittag, kamen dieser Entscheidung glücklicherweise entgegen. So sammelte ich häufig morgens die Hefte ab und konnte sie in Frei- oder Bereitschaftsstunden sichten und bereits in der Mathematikstunde den SchülerInnen zurück geben. Komplexere Aufträge sammelte ich einen Tag vor der nächsten Mathematikstunde ab, um ausreichend Zeit zur Verfügung zu haben. Zukünftig, mit zwei zusätzlichen Mathematikklassen, werde ich eine Mappe für alle Aufträge einfordern, um weiterhin eine adäquate Durchsicht sicherzustellen.

Am Beginn des Schuljahres und nach Absprache mit der Direktion, setzte ich die Eltern der Klasse am Elternabend von dem neuen Unterrichtsansatz in Kenntnis. Dabei wurde von mir die Führung des Lerntagebuchs und die Leistungsbewertung via Häkchen vorgestellt. Vereinbart wurde, nach etwa eineinhalb Monaten ein kurzes schriftliches Feedback von den Eltern einzuholen. Dabei stellte ich die folgenden drei Fragen, die nach dem Schulnotensystem zu beantworten waren, und bat um Anmerkungen:

- Ich kenne mich im Reisetagebuch aus
- Ich weiß über das Leistungsvermögen meines Kindes durch die Benotung via Häkchen Bescheid

- Die Kontrolle der Leistungen erfolgt für mich ausreichend regelmäßig

Die Rücklaufquote lag bei 60%. Die Rückmeldungen waren positiv und ermutigend. Die Bemühungen wurden von den Eltern durchwegs wertgeschätzt. Die Ordnung im Reisetagebuch, die mit der ersten Einschätzung abgefragt wurde, wurde mit durchschnittlich 2,9 am schwächsten bewertet.

In den nächsten Kapiteln sind exemplarisch einige Beispielaufträge angeführt. Diese und die eingescannten und kommentierten SchülerInnenarbeiten sollen einen Einblick in die Arbeit nach den Methoden des dialogischen Lernprinzips ermöglichen. Während der Durchsicht der SchülerInnenbeiträge wurden von mir gute Stellen mittels eines Plus gekennzeichnet und/oder mit Kommentaren versehen. Missglückte oder falsche Passagen markierte ich mit einem Rufzeichen.

6.3 Aufgabenstellungen

6.3.1 Wiederholung

Die ersten Wochen in der 6. Schulstufe wurden der Wiederholung gewidmet. Mein Ziel war es in dieser Zeit die SchülerInnen mit Instrumenten des dialogischen Lernens vertraut zu machen und diese sukzessive in den Unterricht einfließen zu lassen. Auch diente diese Zeit dazu, sich an den leicht geänderten Ablauf, etwa in der Handhabung des Hefts, zu gewöhnen. Zunächst wurden gemeinsam die großen Kapitel der 5. Schulstufe erarbeitet. Die SchülerInnen zogen einen Themenbereich und erhielt den Auftrag einem/r Volksschüler/in zu erklären, was sie dazu in der ersten Klasse gelernt hatten. In einem zweiten Schritt sollten Anwendungsgebiete aus dem Alltag gefunden werden und abschließend war ein Beispiel zu erfinden. Nachdem die Themenbereiche im Rahmen von Kurzinputs im Unterricht präsentiert worden waren, wurde aus den Beispielen der SchülerInnen und mit ergänzenden Aufgaben meinerseits das nachfolgende Übungsblatt erstellt. Im Rahmen einer Doppelstunde und als Hausübung waren die Beispiele schließlich zu lösen.

Wir wiederholen – Aufgaben

Winkel:

1. Zeichne einen Winkel $\alpha = 245°$!
2. Zeichne einen Winkel wie bei einer Uhr, auf der ein Zeiger auf 2, der andere Zeiger auf 3 steht!
3. Schreibe alle spitzen Winkel auf!
4. Zeichne einen 20°-Winkel so oft mit demselben Scheitelpunkt aneinander, dass ein stumpfer Winkel entsteht! Wie viele Winkel musst du mindestens zeichnen?

Zeit:

1. Wie viele Sekunden bist du alt?
2. Es ist 09:47. Der Zug „Fantasie-Städte" fährt ein. Frau Müller steigt ein. Sie muss nach Lotosstadt. Auf dem Weg liegen noch die Städte Erdland (fährt ein um 10:48), Peace-Stadt (trifft ein um 11: 17) und Fantasia-Land (trifft ein um 11: 43). Sie fährt 18 min von Fantasia-Land nach Lotosstadt. Der Zug hat 15 min Verspätung. Wann kommt der Zug in Lotosstadt an?

Rechenregeln:

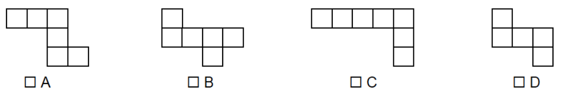
1. Löse den Term: $(900:9) \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 90 - (6 \cdot 7) : 14$
   Welche Klammer ist unnötig? Begründe!
2. Löse: $750 : 50 + 2 \cdot (75 + 50)$

Kreis:

1. Beschreibe in eigenen **Worten**, was eine Tangente ist!
2. Zeichne einen Kreissektor!

Körper:

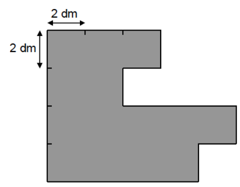
1. Wie viele Kanten und Ecken hat ein Würfel?
2. Aus welchem Netz kann man einen Würfel bauen? Begründe!



3. Beschreibe einen Drehkegel!

Flächeninhalt und Umfang:

1. Ermittle Flächeninhalt und Umfang der Figur!



2. In welche Einheiten würdest du umrechnen? Begründe!
   550 mm² 0,5 m² 46 000 dm² 250 000 000 cm² 2150 cm²
3. Ordne der Größe nach:
   a) Längen 675 cm 6,57 dm 67,5 m 6757 mm 6 m
   b) Flächen 3 dm² 300 cm² 3030 mm² 32 cm² 3 m²

Statistik:

1. Wenn Lea 12 €, Julian 9 € und Feili 10€ Taschengeld bekommen und im Durchschnitt bekommt jeder 11 €. Wie viel € Taschengeld bekommt dann Selma? Halte alle deine Überlegungen schriftlich fest!
2. Beim Eisessen in der 2B kauften 5 Schokoeis, 8 Vanilleeis und 6 Erdbeereis.
Wie viele SchülerInnen kauften sich ein Eis?
Warum macht es hier keinen Sinn einen Durchschnitt zu bilden? Begründe!
Wie könnte man die Aufgabe verändern, dass es Sinn macht den Durchschnitt zu bilden?

Dezimalzahlen:

Berechne: 48,44: 4 = 4,59 : 1,47 = 3,2 · 13,67 =

Abbildung 6.2: Wir wiederholen - Aufgaben

Exemplarisch sei hier die Ausarbeitung der Frage „Wie viele Sekunden bist du alt?“ eines Schülers herausgegriffen. Die praktikable Strategie der Festsetzung der Uhrzeit, wenn auch nicht auf die Sekunde genau, um einen Referenzpunkt für die Berechnung zu haben, wurde mit einem Plus gekennzeichnet. Im Plenum wurde verglichen wie viele Sekunden bereits für jede/n einzelnen im Leben vergangen sind und das Überschlagsrechnen wiederholt. In dieser Sequenz wurden auch viele weitere Zugänge präsentiert. Einige haben sogar ihre Geburtszeit eruiert um genaue Ergebnisse zu errechnen oder die Schaltjahre mit einbezogen. Es gab auch Arbeiten, in denen die SchülerInnen lediglich diverse Werte miteinander multiplizierten, ohne ihre Überlegungen nachvollziehbar aufzuschreiben. Das richtige Rechnen mit großen Zahlen wurde mit einem Häkchen wertgeschätzt, darüber hinaus gehende Beschäftigung mit der Problematik führte zu einer besseren Bewertung.

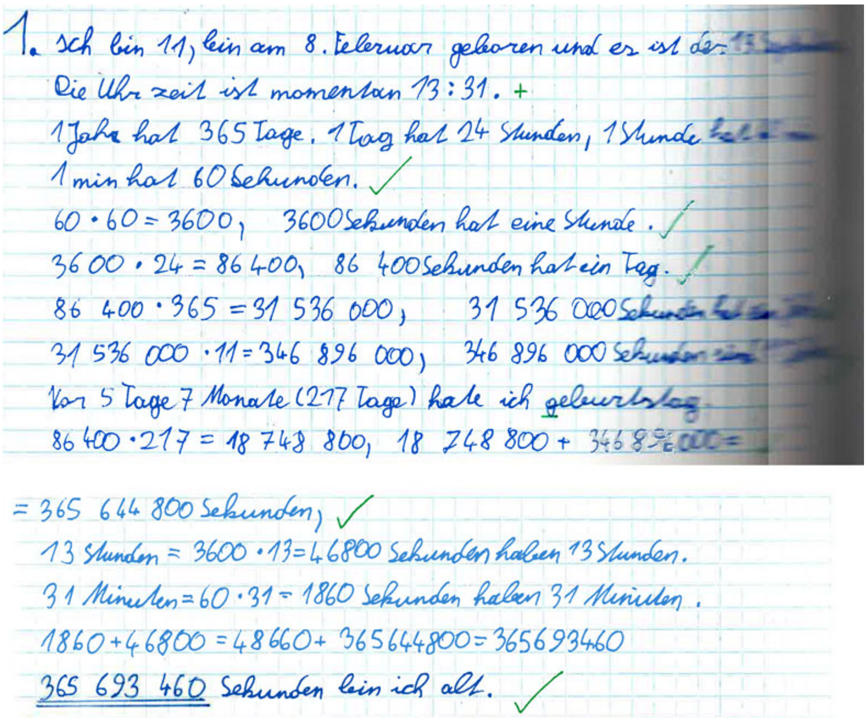

1. Ich bin 11, bin am 8. Feberuar geboren und es ist der 13.
Die Uhrzeit ist momentan 13:31. +
1 Jahr hat 365 Tage. 1 Tag hat 24 Stunden, 1 Stunde hat
1 min hat 60 Sekunden.
60 · 60 = 3600, 3600 Sekunden hat eine Stunde.
3600 · 24 = 86 400, 86 400 Sekunden hat ein Tag.
86 400 · 365 = 31 536 000, 31 536 000 Sekunden hat ein
31 536 000 · 11 = 346 896 000, 346 896 000 Sekunden sind
Vor 5 Tage 7 Monate (217 Tage) hatte ich geburtstag.
86 400 · 217 = 18 748 800, 18 748 800 + 346 896 000 =
= 365 644 800 Sekunden,
13 Stunden = 3600 · 13 = 46800 Sekunden haben 13 Stunden.
31 Minuten = 60 · 31 = 1860 Sekunden haben 31 Minuten.
1860 + 46800 = 48660 + 365644800 = 365693460
365 693 460 Sekunden bin ich alt.

Abbildung 6.3: Wie viele Sekunden bin ich alt?

Im Anschluss an die Bearbeitung der Wiederholungsaufgaben wurde von mir erstmals eine in Abbildung 6.4 angeführte Autrographensammlung erstellt. Bei der Durchsicht wurden interessante Beiträge sofort von mir markiert. Das Verkleinern und Zusammenfügen der einzelnen Ausarbeitungen war durchaus aufwändig und zeitintensiv, entfaltete jedoch bei den SchülerInnen die volle Wirkung. Sie erkannten ihre Beiträge wieder und waren stolz in der Klasse Anerkennung für ihre Leistungen zu erfahren.

Hierzu forderte ich die SchülerInnen zunächst auf, sich die Beiträge der Autographensammlung anzusehen und das Besondere an den Ausarbeitungen ihrer MitschülerInnen, deren Namen ich sorgfältig neben ihren Arbeiten vermerkt hatte, zu finden. Anschließend wurden die Beiträge einzeln durchgegangen und die Qualitäten zunächst von den SchülerInnen und ergänzend von mir herausgestrichen.

So wurde etwa die übersichtliche Darstellung der drei Möglichkeiten zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts, die mit anschaulichen Skizzen abgerundet wurde, hervorgehoben, ebenso wie die Verwendung von Variablen zur Aufstellung einer Formel für Umfang und Flächeninhalt. Auch die graphische Veranschaulichung der Angabe zu den Zugintervallen wurde in besonderem Maße gewürdigt. Speziell in der ersten Erklärung des Begriffs Tangente wurde die Wendung „eine Gerade, die im *Normalen* Winkel [...] steht" thematisiert. Die Leserlichkeit des Schriftbildes, ebenso wie die Ausdrucksweise einzelner Beiträge regten die SchülerInnen zur Diskussion an.

SchülerInnen, die bei einzelnen Beispielen Probleme hatten, erhielten mit der Autographensammlung zugleich eine Musterlösung. Abschließend war von den SchülerInnen ein Kommentar im Sinne einer Stundenzusammenfassung in ihrem Reisetagebuch zu verfassen. Darin sollten sie aufführen, was ihnen nützlich erschien und was sie für ihre zukünftigen Beiträge übernehmen wollten.

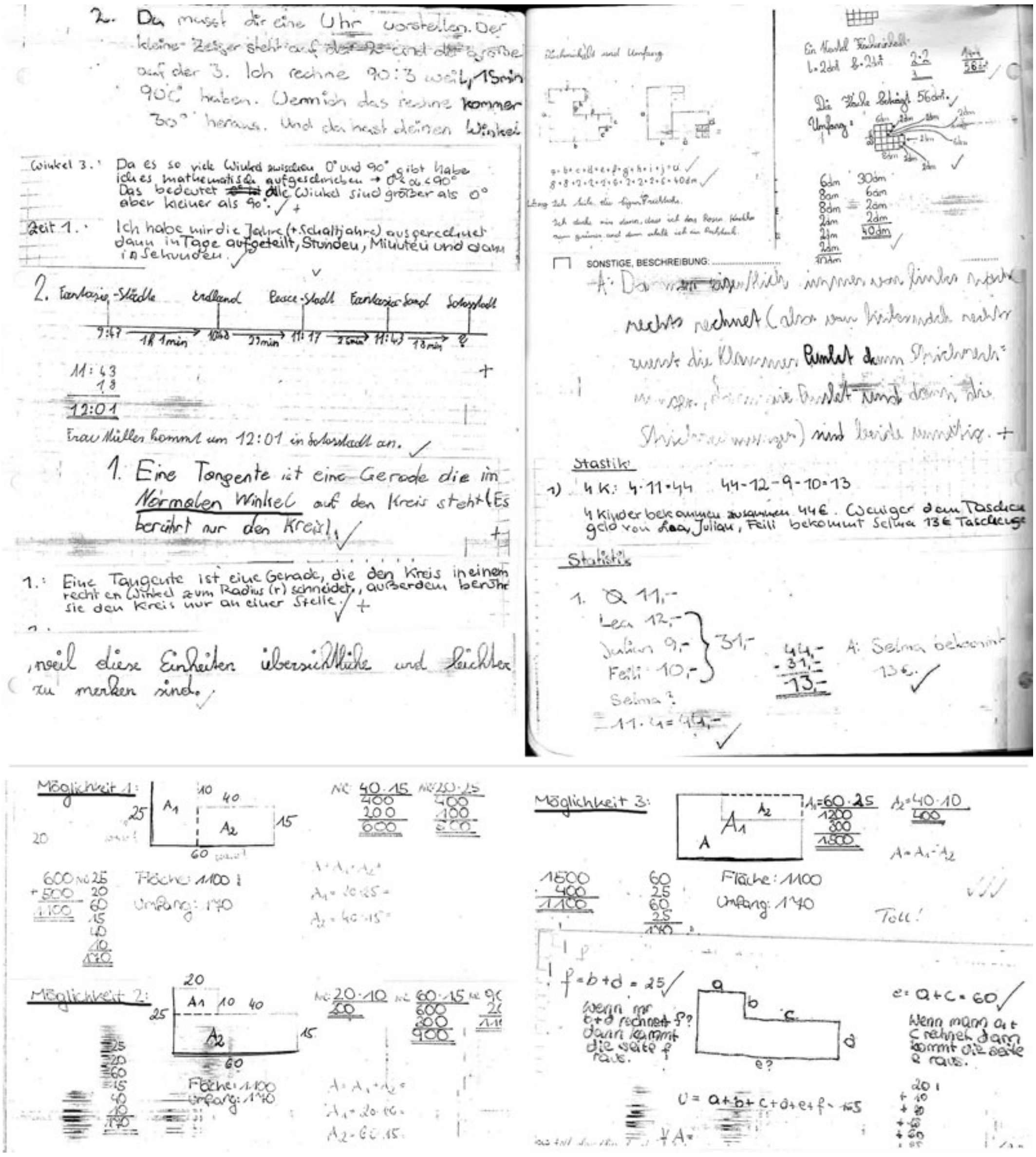


Abbildung 6.4: Autographensammlung - Wir wiederholen

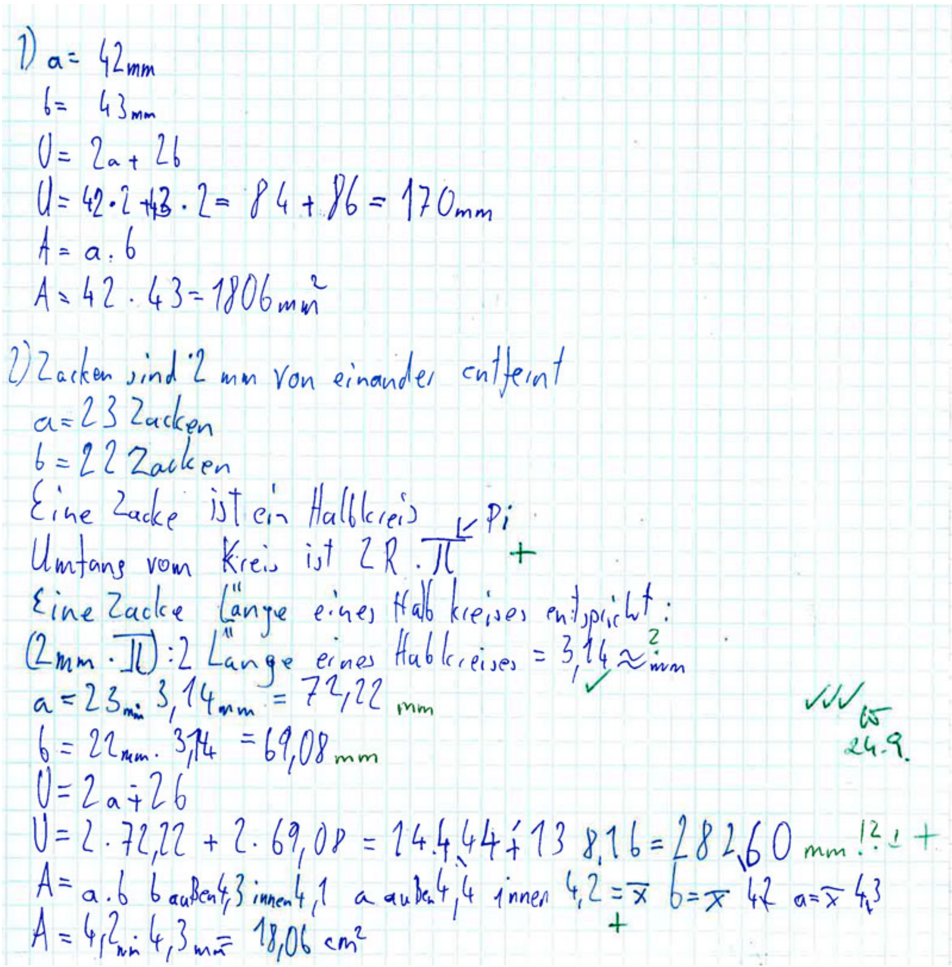
Im Zuge dieser Besprechung der Autographensammlung im Klassenverband wurde die Vorstellung geäußert, dass eine geringere Fläche eines Rechtecks stets mit einem geringeren Umfang einhergeht. In der folgenden Stunde erhielten die SchülerInnen daher den Auftrag in Abbildung 6.5:

geringere Fläche = geringerer Umfang?
Vergleiche die Abbildung von Bild und Briefmarke.
Berechne den jeweiligen Flächeninhalt und Umfang möglichst genau!

Abbildung 6.5: Bild/Briefmarke (Wagner, 2009, S. 36)

Diese Aufgabe wurde von vielen SchülerInnen lapidar gelöst und die Einkerbungen der Briefmarke haben sie nicht wesentlich in ihre Überlegungen miteinbezogen. Einige bekamen gar einen kleineren Umfang heraus - ✓. Aber auch bei dieser Aufgabe begegnete ich überraschenden und kreativen Lösungen. So benutzte eine Schülerin einen Faden, mit dem sie den Umfang abmaß, und benötigte bei der Briefmarke einen 2cm längeren Faden. Einen Schüler veranlasste die Aufgabenstellung gar dazu sich mit dem Umfang und der Fläche des Kreises zu beschäftigen. Dabei stieß er auf die Kreiszahl π und konnte schließlich große Unterschiede im Umfang bei etwa gleich großer Fläche ausmachen. Das war ein Wurf, der in Abbildung 6.6 angeführt ist!

Der Schüler legte den Rechenweg übersichtlich und gut strukturiert dar und arbeitete bei der Bestimmung von Umfang und Flächeninhalt mit Variablen und Formeln, was er bei den Wiederholungsbeispielen noch nicht getan hatte. Er zählte an jeder Seite die Zacken der Briefmarke und multiplizierte sie mit der Länge eines Halbkreises mit dem Radius von 1mm, somit erhielt er als zweiten Faktor genau π.



1) a = 42mm
b = 43mm
U = 2a + 2b
U = 42·2 + 43·2 = 84 + 86 = 170mm
A = a · b
A = 42 · 43 = 1806mm²

2) Zacken sind 2 mm von einander entfernt
a = 23 Zacken
b = 22 Zacken
Eine Zacke ist ein Halbkreis Pi
Umfang vom Kreis ist 2R · π +
Eine Zacke Länge eines Halbkreises entspricht:
(2mm · π) : 2 Länge eines Halbkreises = 3,14 ≈ mm² ✓
a = 23mm · 3,14mm = 72,22 mm
b = 22mm · 3,14 = 69,08 mm
U = 2a + 2b
U = 2 · 72,22 + 2 · 69,08 = 144,44 + 138,16 = 282,60 mm !?! +
A = a · b   b außen 4,3 innen 4,1   a außen 4,4 innen 4,2 = x̄   b = x̄ 4,2   a = x̄ 4,3
A = 4,2mm · 4,3mm = 18,06 cm²
✓✓✓ 15
24.9.

Abbildung 6.6: Bild/Briefmarke - Schülerlösung

6.3.2 Arbeiten mit Variablen, Gleichungen aufstellen und lösen

Der erste große Themenbereich des Jahres befasste sich mit Gleichungen und Variablen. Hierzu fand ich keine Beispiele in der Literatur, an denen ich mich hätte orientieren können, sodass ich eine Mischform aus dialogischem Unterricht mit zwischengelagerten, direkten Instruktionsphasen praktizierte. Die nachfolgenden Beispiele wurden von mir diversen Quellen entnommen und mit FachkollegInnen diskutiert.

Da im Rahmen des SQA-Projektes (Schulqualität AHS) ein Schwerpunkt an der Schule die Förderung des Textverständnisses und der Lesekompetenz über alle Fächer hinweg ist, entstand die folgende Einleitung zum Thema Gleichungen und Variablen. Der erste Auftrag widmete sich dementsprechend dem Textverständnis. Alle Aufträge zu einem Themenbereich wurden überdies mit einer Symbolgraphik zur besseren Wiedererkennung versehen. In diesem Themenbereich ist dies eine Waage.

Die fehlende Überschrift, ebenso wie der Flattersatz, die nicht vorhandenen Absätze und eine Flut an Fachbegriffen, waren beabsichtige Merkmale dieses einleitenden Textes. Das angeführte Zitat zum Gleichheitszeichen wurde Stewart, 2014, S. 7 entnommen.

Wie bei vielen Geheimschriften besteht auch der Code der Mathematik aus Zahlen und Buchstaben. Dass in der Mathematik nicht nur mit Zahlen gerechnet wird, wisst ihr bereits. Buchstaben haben wir schon in der ersten Klasse kennengelernt - etwa um die Seitenlängen eines Rechtecks zu beschriften. In der Mathematik nennt man sie auch Variable oder Unbekannte. Man setzt sie ein, wenn man die Zahlen, für die sie stehen, noch nicht kennt oder um allgemeingültige Aussagen aufzustellen. So wissen wir bereits, dass der Umfang jedes Rechtecks mit folgender Gleichung berechnet wird: $u = 2a + 2b$. In Worten: Um den Umfang eines Rechtecks zu erhalten, nimmt man zweimal die eine Länge und addiert zweimal die andere Länge. Gleichungen sind in der Mathematik besonders wichtig. Sie enthüllen wunderbare Muster und Regelmäßigkeiten oder codieren Informationen. Das Schlüsselsymbol ist das Gleichheitszeichen, =. Der Erfinder war Robert Recorde, der es 1557 in seinem Buch „Der Wetzstein des Wissens“ so einführte: „um die mühsame Wiederholung der Wörter „ist das Gleiche wie“ zu vermeiden, werde ich, wie ich es häufig bei meinen Arbeiten tue, zwei parallele Striche einsetzen oder zwillingshafte Linien gleicher Länge, weil keine zwei Dinge sich mehr gleichen können.“ Gleichungen können wahr oder falsch sein. Das Ziel in der Mathematik ist es wahre Aussagen zu erzeugen.

Auftrag 1: Textbearbeitung

- Lies Dir den Text gut durch!
- Lass in deinem Reisetagebuch eine ganze Seite Platz für den Text und die Angabe von Auftrag1!
- Schreibe dir anschließend unbekannte Wörter, die im Text vorkommen, in dein Reistagebuch!
- Nun suche alle mathematischen Begriffe, die der Text enthält, und schreibe sie auf!
- Der Text enthält keine Absätze. Füge Absätze ein und zerschneide den Text um ihn absatzweise ins Reisetagebuch zu kleben.
- Worum geht es in den einzelnen Absätzen? Finde ein Symbol oder ein Stichwort, das du neben den Absatz schreibst!
- Schreibe eine passende Überschrift über den Text!
- Was hat das Bild der Waage mit dem Text zu tun? Erkläre!

Abbildung 6.7: Gleichungen - Auftrag 1

Nach der Bearbeitung des Textes und der Klärung der unbekannten Begriffe wie Code, Schlüsselsymbol, Wetzstein oder wahre Aussage, folgten die weiteren Aufträge. Sie zielten darauf ab, ein Gefühl für unterschiedliche Termdarstellungen ein und derselben Zahl und in weiterer Folge für Gleichungen zu bekommen. Ein wesentlicher Aspekt dabei war zunächst die Bearbeitung in Einzelarbeit (ICH-Phase) und der anschließend Dialog, der sich in Partnerarbeit vollzog (DU-Phase). Dieser Leitgedanke wurde jeweils in den Aufträgen 2 und 3 praktiziert. Beide Beispiele stammen von Häring, 2011, 64f und wurden leicht adaptiert.

Auch bei dieser recht einfachen Aufgabenstellung konnte ich durchaus große Unterschiede im Komplexitätsgrad der Terme und Gleichungen feststellen. Die Rampe in den Aufträgen bestand darin, alle vier Rechenoperationen einzubauen. Nicht alle nahmen diese Herausforderung an - so bekam ich etwa die durchaus provokante Antwort „Ja“ zu lesen, ohne entsprechende Terme vorzufinden. Die Anzahl der Häkchen richtete sich nach der vorhandenen Komplexität der Terme, die auch bei der simplen, gedachten Zahl 10 hoch sein kann, und der Ausführlichkeit der Bearbeitung.

Auftrag 2: Zahlen verstecken

Denke dir eine beliebige Zahl aus und schreibe sie auf. Verstecke diese Zahl nun, indem du verschiedene Terme aufstellst, die diese Zahl dann wieder ergeben. Hier ein Beispiel: Verstecke die Zahl 100 auf verschiedene Möglichkeiten:

- 2•50
- 20+20+2•10+30
- 200:4+50
- 3•25+25
- 200–2•50
- ...

Schaffst du es auch in einem Term alle vier Rechenoperationen einzubauen?

Tausche deine Ergebnisse mit deinem/r Nachbarn/in aus und lass dir seine / ihre Vorgehensweise beim „Verstecken“ erklären.

Abbildung 6.8: Gleichungen - Zahlen verstecken

Auftrag 3: Zahlenrätsel mit bekanntem Ergebnis

Du kennst das Ergebnis einer Rechnung. Dieses Ergebnis soll nun mit einer Unbekannten(=Variablen) sowie passenden Rechenoperationen (+, -, •, :) erreicht werden.
! Es gilt Punkt vor Strich !
Hier ein Beispiel: Das Ergebnis soll 120 betragen.

- 5•x+70=120
- 3•x+84=120
- 4•x–80=120
- x–12•4=120
- ...

Gib deiner/m Sitznachbarn/in ein Ergebnis vor.
Versucht nun beide entsprechende Lösungsmöglichkeiten zu finden! Vergleicht eure Ergebnisse und tauscht euch aus!

Abbildung 6.9: Gleichungen - Zahlenrätsel

- $700 : 7 - d = 84$ ✓
- $35 + g = 84$ ✓
- $10 \cdot 8 + f = 84$ ✓
- $73 + j = 84$ ✓
- $i \cdot 21 = 84$ ✓
- $((21 - k + 5) \cdot 2) : 2 + 60 = 84$ ✓

✓ 8.10.

Abbildung 6.10: Zahlenrätsel - Schülerlösung

Aus den Gleichungen aus Auftrag 3 erstellte ich eine Beispielliste, die auch den nächsten Auftrag beinhaltete. Auffällig war, dass die SchülerInnen die Aufträge so rasch wie möglich abarbeiten wollten, ohne sich in die Aufgaben allzu sehr zu vertiefen. Daher erfolgte von mir der Auftrag, zu allen Gleichungen Streckenschaubilder anzufertigen, die zuvor erarbeitet worden waren. Die Rampe bestand darin, weitere Gleichungen dem Streckenschaubild zu entnehmen.

Auftrag 4:
Zeichne passende Streckenschaubilder zu den Gleichungen. Stelle mit Hilfe der Streckenschaubilder weitere Gleichungen auf.

Abbildung 6.11: Gleichungen - Auftrag 4

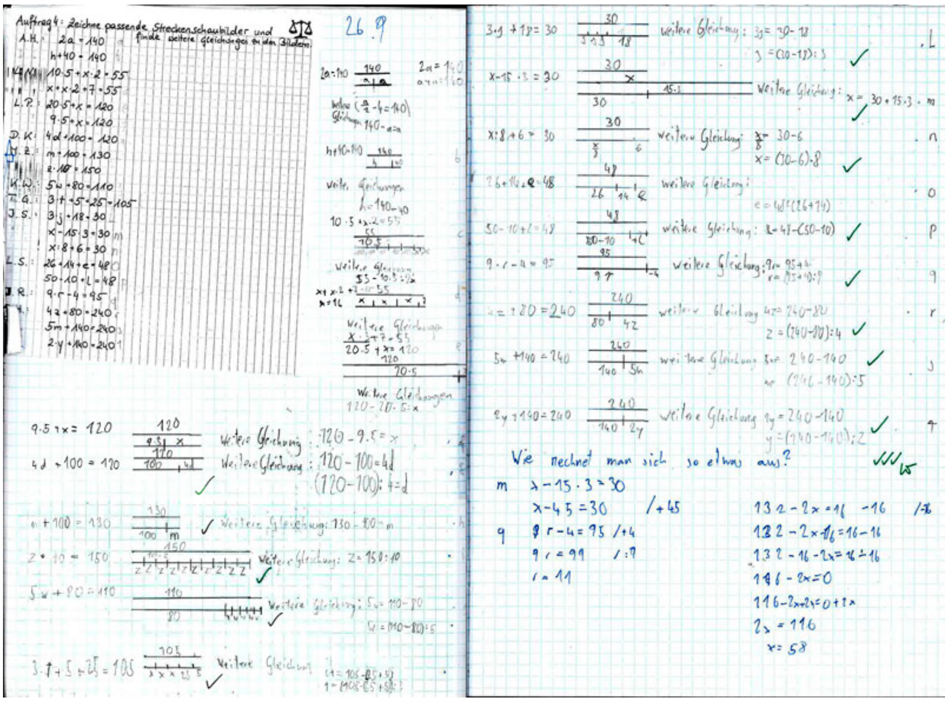


Abbildung 6.12: Streckenschaubilder - Schülerlösung 1

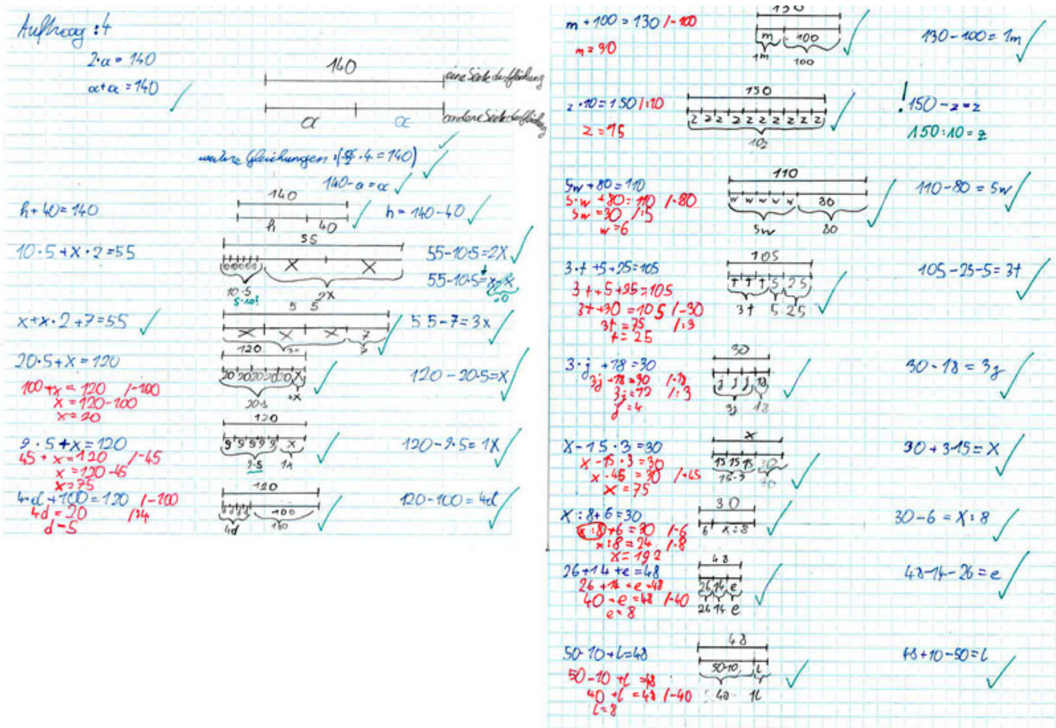


Abbildung 6.13: Streckenschaubilder - Schülerlösung 2

Dies war ein umfangreicher Auftrag, der in der zweiten Doppelstunde und als Hausübung auszuführen war. Die beiden präsentierten Schülerlösungen sind in den Abbildungen 6.12 und 6.13 veranschaulicht. Nicht alle SchülerInnen konnten den Auftrag in dieser Qualität ausführen, daher wurden die beiden Schülerlösungen auf Folie kopiert und im Unterricht besprochen. Jene SchülerInnen, die den Auftrag zur Zufriedenheit erledigt hatten (mindestens zwei Häkchen), bekamen indes den nächsten Auftrag um etwaiger Unruhe vorzubeugen.

Auftrag 5:

Versuche deine Gleichungen aus Auftrag 3 zu lösen! Wie gehst du dabei vor? Welche Gedanken machst du dir? Schreibe sie auf! Gehe erst zum Lösen der nächsten Gleichung über, wenn du dir sicher bist, dass dein Ergebnis stimmt! Wie kannst du überprüfen, ob du das richtige Ergebnis herausgefunden hast?

Welche Gleichungen sind leicht zu lösen? Welche bereiten dir Schwierigkeiten und warum?

Du wirst wohl bei diesem Auftrag Fehler machen – und das ist auch gut so! - schließlich haben wir ja noch nicht gelernt wie Gleichungen gelöst werden. Lösche die Fehler nicht aus und streiche sie nicht durch, kommentiere sie einfach als noch nicht richtig! Sie werden dir helfen ans Ziel zu kommen!

Abbildung 6.14: Gleichungen - Auftrag 5

1 •) $x+5=55 = 50+5=55$

Ich komme auf die Zahl 50, weil wenn das Ergebniss 55 ist und ich eine 5 vorgegeben habe und ich x zu 5 Addiere dann. kann es nur 50 sein.

2 •) $10\cdot 5+x\cdot 2=55 = \overset{50}{10\cdot 5}+\overset{5}{2{,}5\cdot 2}=55$

Ich komme auf 2,5, weil 2,5 mal 2 5 ergibt und da 10·5 50 ergibt weiß ich das das Ergebnis 55 ist

3 •) $x:2+x+4=55 = \overset{50}{100:2}\overset{+}{+}\overset{5}{1+4}=55$

Ich komme auf 100:2+1+4, weil das 55 ergibt. und, weil ich weiß das 100:2 50 ergibt und 1+4=5 und wenn ich diese Ergebnisse Addiere bekomme ich 55.

4 •) $200-3\cdot x+x=55 = 200\overset{-150+}{-3\cdot 50+}5=55$

Ich weiß das 3·50 150 ist das heißt wenn ich 200-150 rechne kommt mir 50 herraus das plus 5 ergibt 55.

5 •) $x+x\cdot 2+6=55 = 9\overset{+40+}{+20\cdot 2+}6=55$

Ich komme darauf, weil 20·2 40 ist das plus 9 ist 49 und das plus 6 ist 55.

Abbildung 6.15: Gleichungen lösen - Schülerinnenlösung

Es war für die SchülerInnen schwer, ihre Gedanken beim Lösen von Gleichungen schriftlich festzuhalten. In der Schülerinnenlösung aus Abbildung 6.15 ist dies ansprechend gelungen. Wie bereits im Auftrag vermutet, schlichen sich hier durchaus einige Fehler ein. Solange lediglich eine Unbekannte in der Gleichung vorkam, war es kein Problem diese zu bestimmen. Kam dieselbe Variable zweimal vor, wurden ihr unterschiedliche Werte zugeordnet. Die Vorstellung, dass eine Variable auch für die gleiche Zahl steht, war hier noch nicht vorhanden. Trotzdem wurde die Aufgabe mit zwei Häkchen belohnt, da es vor allem um das Verschriftlichen der Gedanken ging.

Mit dem folgenden Auftrag galt es, die mathematische Ausdrucksform der Gleichung in den Alltag einzubetten. Hierzu erhielten die SchülerInnen Auftrag 6.

Auftrag 6:
Erfinde zu drei deiner Gleichungen aus Auftrag 3, die eine Variable enthalten, passende, kreative Textaufgaben!

Abbildung 6.16: Gleichungen - Auftrag 6

Basierend auf den erstellten Textaufgaben der SchülerInnen entstand die nachfolgende Beispielsammlung (Abbildung 6.17). Die Beiträge fielen durchwegs kreativ aus und ihre Durchsicht war äußerst spannend. Die verwendete Sprache und die bereits vorhandene Komplexität mancher Aufgaben erfreuten mich und machten mich regelrecht stolz. Interessant war es, einen Einblick in die Lebenswelt der SchülerInnen zu erhalten - so finden sich Anspielungen auf die Berufe der Eltern, den Fußballstar Ronaldo oder Instagramm in den Aufgaben wieder.

Mit Hilfe der Initialen konnten die Beispiele den jeweiligen SchülerInnen zugeordnet werden. Hier bot sich den SchülerInnen die Gelegenheit, sich mit Gleichaltrigen zu vergleichen. Dadurch steigerte sich die Motivation für den darauffolgenden Auftrag (siehe Abbildung 6.18), konnten sie doch die Beispiele ihrer besten FreundInnen lösen. Die entstandene Autographensammlung diente auch als Aufgabenpool zum selbstständigen Üben.

Autographensammlung: Textgleichungen

D.B.: 700 Säcke werden in 7 Länder exportiert. Unterwegs gehen 21 Säcke verloren. Wie viele Säcke kommen in einem der Länder an, wenn in jedem Land gleich viele Säcke ankommen sollen?

A.H.: Tanja will sich ein Fahrrad um 140,- € kaufen. Dafür muss sie 2 Monate sparen. Wie viel soll sie monatlich sparen?

Felix verdient wöchentlich 200,- € und bekommt noch 20,- € von den Eltern. Nach der Mietszahlung bleiben ihm 140,- €. Wie hoch ist die Miete?

Theodor hat im Lotto gewonnen. Die Hälfte von der Summe gibt er seinen Eltern und 60,- € seinem Bruder. Ihm sind am Ende 1.239,- € übrig geblieben. Wie hoch war die Gewinnsumme?

M.J.: Herr Maier geht mit 200,- € einkaufen. Er kauft 7 Tiefkühlpizzen und einen doppelt so teuren Sack Kartoffeln. Er bekommt 110,- € zurück? Wie viel kostet eine Tiefkühlpizza?

J.H.: Herr Mayer hat 240,- €. Er gibt für ein Handy 140,- € aus. Den 2 Kindern gibt er den Rest. Wie viel Euro bekommt ein Kind?

Tom hat 240,- €. Er kauft sich Kopfhörer um 140€. Dazu kauft er sich fünf verschiedene Spiele. Wie viel kostet ein Spiel?

B.P.: Herr Müller hatte 80,- € in der Tasche. Er hat sich zwei Hemden gekauft und ihm bleiben aber noch 30,- €. Wie viel € hat ein Hemd gekostet? Hinweis: Beide Hemden haben gleich viel gekostet.

Frau Cristiano hat sich 9 Colas gekauft. Doch es gibt eine Aktion, wenn man 9 Colas kauft ist ein € geschenkt. Frau Christiano zahlt € 80,-.

Leo hat sich 3 Paar Schuhe gekauft und bekommt von der Kassiererin € 56,- Rabatt. Er zahlt noch 80,- €. Wie viel kostet ein Paar, wenn alle Schuhe gleich viel kosten?

M.Z.: Thomas hat fleißig € 500,- gesammelt und will sich ein neues Smartphone für € 408,- kaufen und 6 Hefte für je m €. Wie viel € kostet ein Heft?

J.R.: Jakub kauft sich Kaugummis und einen Bleistift der 70c kostet. 95c kostet alles zusammen. Wie viel kostet ein Kaugummi?

David kauft sich ein Fahrrad, das um die Hälfte verbilligt ist. Da es das letzte Stück ist, gibt ihm der Verkäufer noch fünf Euro Rabatt. Jetzt muss David nur noch 95 Euro bezahlen. Wie viel hat das Fahrrad ursprünglich gekostet?

Dr. Reiter kauft neun Packungen Objektträger. Als er nach Hause kommt, sind 4 Stück zerbrochen. Aber D.r. Reiter hat noch 95 Objektträger. Wie viele Objektträger sind in Einer Packung?

J.S.: Ein Türsteher zählt aus Langeweile wie viele Gruppen mit wie vielen Personen zur Party kommen. Nach 15 min kamen 4 Gruppen mit insgesamt 30 Personen. Die erste bestand 18 Personen, die anderen drei hatten alle dieselbe Anzahl an Personen inne. Wie viele Personen waren in der 2. Gruppe?

L.S.: In einem Zug sitzen 60 Personen. 20 von ihnen steigen aus. In den nächsten 4 Stationen steigen immer gleich viele Leute zu, aber keiner aus. Zum Schluss sitzen im Zug 48 Personen. Wie viele Personen sind bei den Stationen jeweils zugestiegen?

T.G.: 2 Möbelpacker tragen 5 Möbelstücke in den 4. Stock eines Wohnhauses. Sie bekommen 5,- € Trinkgeld. In Summe erhalten sie 105,- €. Wie viel ist für ein Möbelstück zu bezahlen?

Frau Müller möchte sich ein Handy um 105,- € kaufen. Sie bezahlt in Summe nur 30,- €. Den Rest möchte sie in 3 Monatsraten abbezahlen. Wie hoch ist eine Rate? Tipp: die Raten sind alle gleich hoch.

K.W.: In einer Tanzschule sind 110 Kinder angemeldet. 80 davon sind relativ gleich große Mädchen. Der Rest sind Buben, die in 5 verschiedenen Gruppen nach Größe eingeteilt werden können. Wie viele Buben sind in jeder Gruppe?

S.C.: Peter versendet 50 Partykarten. Zu seiner Party kommen 100 Leute. Wie viele Gäste dürften pro Karte kommen?

D.S.: Ein Mann likte 1000 Fotos auf Instagram. Wie viele Fotos hat er von jedem Benutzer gelikt, wenn er von allen gleich viele gelikt hat, bei 100 verschiedenen Benutzern.

Abbildung 6.17: Autographensammlung - Textgleichungen

A<u>uftrag 7:</u>

Suche dir fünf Textaufgaben deiner MitschülerInnen aus der Autographensammlung aus. Versuche die Gleichungen aufzustellen. Dort, wo es dir nicht gelingt, beschreibe, was dir Probleme bereitet. Versuche die aufgestellten Gleichungen zu lösen und überprüfe mittels einer Probe!

Abbildung 6.18: Gleichungen - Auftrag 7

Auftrag: Greichungen aufstellen
D.B.: (700-21):7 = X   NR: 679:7=97 49
679:7 = X
97 = X   A: Jedes Land erhält 97 Säcke.
A.H.: 140:2 = x   70 = X
A: Tanja muss 70€ Monatlich sparen.
*   *
200+20 - 140 = h
80 = h
A: Felix bezahlt als Miete 80€.
*   *
(1.239+60)·2 = A   2.598 = A
A: Theodor hat im Lotto 2.598
M.J.   90
200-110 = 90   10 10 10 10 10 10 10 20
90:9 = M   10 = M
A: Ein Tielfüllerpinsel kostet 10€.
J.H.: (240-140):2 = J
100:2 = J
50 = J
A: Jedes Kind bekommt 50€
*   *
(240-140):5 = Y   20 = Y
100:5 = Y
A: Ein Spiel kostet 20€.
B.P (80-30):2 = P
50:2 = P
25 = P
A: Ein Hemd kostet 25€.
*   *
Auftrag: 64)
65) a-f
66) a-e
64) 4x können nicht 18 sein wenn ein x 14 ist.
Wenn ein x eins ist dann ist 3x+6 nicht 21.
65) a) (32-18):2 = b ✓
b) 5·c-12 = 3·c   /+12
5·c = 3·c+12   /-3c
2c = 12   /:2
c = 6 ✓
c) 2·x+3·x+2 = 6x
5·x+2 = 6x   /-5x
2 = 1x ✓
d) 14+8·m = 10·m   /-8m
14 = 2m   /:2
7 = 1m ✓
e) 27-5·y = 12   /+5·y
27 = 12+5·y   /-12
15 = 5·y   /:5

Abbildung 6.19: Gleichungen aufstellen - Schülerlösung

In der Schülerlösung aus Abbildung 6.19 ist ersichtlich, dass der Schüler direkt die Variable durch einen Term ausdrückt. Dieses Isolieren der Variablen geschah oft, so dass ich die ursprünglichen Gleichungen der SchülerInnen auf eine Folie kopierte und sie in Partnerarbeit zuordnen ließ. Die jeweilige Zuordnung war mathematisch zu begründen, da manche sofort die Strategie anwendeten, nach gleichen Zahlen zu suchen. An diesen Auftrag schlossen sich weitere Beispiele zum Üben und Vertiefen aus dem Schulbuch an. Als Vorbereitung auf die Arbeit mit Concept Cartoons wurde abschließend gemeinsam ein Comic [„Gestern haben Sie noch behauptet, x wäre 2!"] interpretiert.

Als Wiederholung dieses Kapitels wählte ich einen Concept Cartoon (siehe Abbildung 6.21). Diese finden vor allem in den Naturwissenschaften weite

Verbreitung. Im angelsächsischen Raum ist diese Methode bereits länger bekannt, das Buch „Concept Cartoons in Science Education“ erschien im Jahr 2000, „Concept Cartoon in Mathematics Education“ wurde schließlich 2008 publiziert. Etwa zu diesem Zeitpunkt erreichte diese Diagnosemethode auch den deutschsprachigen Raum.

Concept Cartoons können entweder zu Beginn oder nach einer Unterrichtseinheit eingesetzt werden. Im ersten Fall dienen sie der Ermittlung von Präkonzepten, die alle Lernenden durch ihre Alltagserfahrungen mit in den Unterricht bringen, und ermöglichen der Lehrkraft einen Einblick in die Vorstellungswelt der SchülerInnen. Wird der Cartoon am Ende einer Unterrichtssequenz in die Klasse gespielt, dient er vor allem dazu, hausgemachte Fehlvorstellungen, sogenannte Misskonzepte, die durch unzureichenden Unterricht oder durch die Komplexität der Inhalte erzeugt werden, aufzudecken. Dies sind Fehler, die immer wieder bei SchülerInnen einer Jahrgangsstufe etwa in Schularbeiten ans Licht kommen. In beiden Fällen werden die Vorstellungen der SchülerInnen in das Unterrichtsgeschehen eingebunden und wird im Besonderen die Argumentationskompetenz der SchülerInnen geschult.

Auf Concept Cartoons sind Personen abgebildet, die miteinander über einen Sachverhalt diskutieren, im vorliegenden Fall über eine Alltagssituation, die Anzahl der Schüler und Schülerinnen an einer Schule. Die Aussagen der Personen können sowohl richtig als auch falsch sein. Es gilt jedoch nicht, die korrekte Äußerung, wie etwa bei Multiple-Choice-Aufgaben, ausfindig zu machen, sondern, unter Zuhilfenahme der eigenen Vorstellungen, Argumente für und wider die Richtigkeit der jeweiligen Aussagen aufzustellen und zu formulieren. Der hierzu erteile Auftrag (Abbildung 6.24) enthielt die Rampe eine Gleichung aufzustellen um die eigenen Argumente zu stützen.

Auftrag 9:
Was meinst du? Wie viele Schüler besuchen das Gymnasium? Wer hat sich geirrt und warum? Gelingt es dir eine Gleichung aufzustellen, die deine Überlegungen untermauert?

Abbildung 6.20: Gleichungen - Auftrag 9

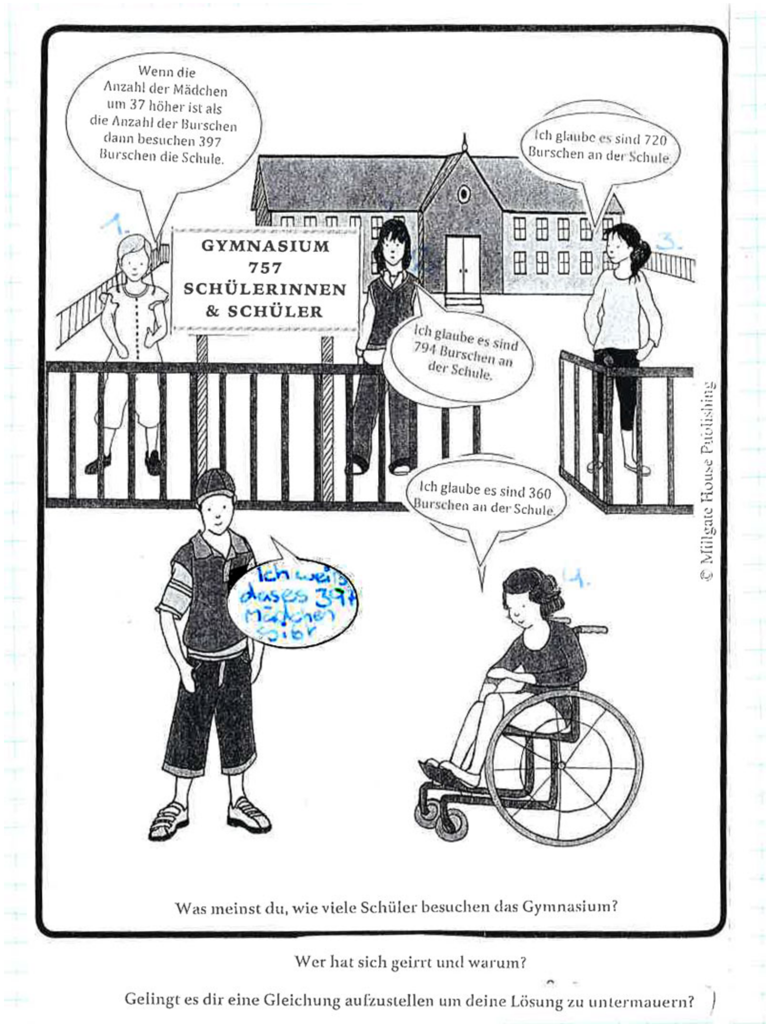
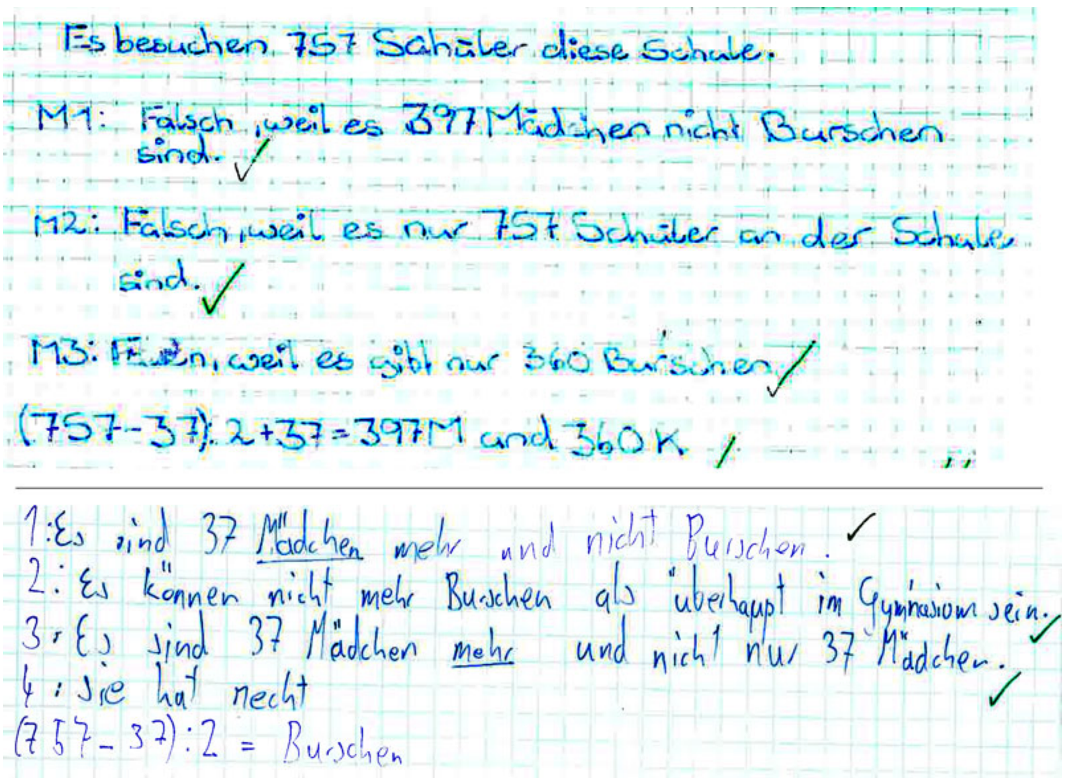


Abbildung 6.21: Gleichungen - Concept Cartoon (vgl. Keogh, Dabell und Naylor, 2008, S. 36)

Wie SchülerInnen diese Aufgabe lösten, zeigen die Abbildungen 6.22 und 6.23. Auch hier ist der Blick auf die Qualitäten entscheidend. Etwa ein Fünftel der Klasse hat den Auftrag sehr gut erledigt. Ein Drittel war mit damit überfordert bzw. hat vergessen ihn zu machen, ein weiteres Drittel hat die eine oder andere falsche Aussage identifiziert. In Abbildung 6.23 hat der Schüler die erste Äußerung durch Nachrechnen als falsch erkannt und auch die Absurdität der zweiten Äußerung demaskiert, ebenso wie die rechts oben getätigte Bemerkung. Jene Bemerkung, die der richtigen am nächsten kommt, bezeichnet er als „gut möglich", während er selbst zu einer anderen Lösung kommt. Gewürdigt wurden seine Bemühungen mit einem Häkchen, da bei der ersten Annäherung an diese Methode das Formulieren von Begründungen im Fokus stand.


Es besuchen 757 Schüler diese Schule.
M1: Falsch, weil es 397 Mädchen nicht Burschen sind. ✓
M2: Falsch, weil es nur 757 Schüler an der Schule sind. ✓
M3: Falsch, weil es gibt nur 360 Burschen ✓
(757-37):2+37=397M und 360 K. ✓

1: Es sind 37 Mädchen mehr und nicht Burschen. ✓
2: Es können nicht mehr Burschen als überhaupt im Gymnasium sein. ✓
3: Es sind 37 Mädchen mehr und nicht nur 37 Mädchen. ✓
4: Sie hat recht ✓
(757-37):2 = Burschen

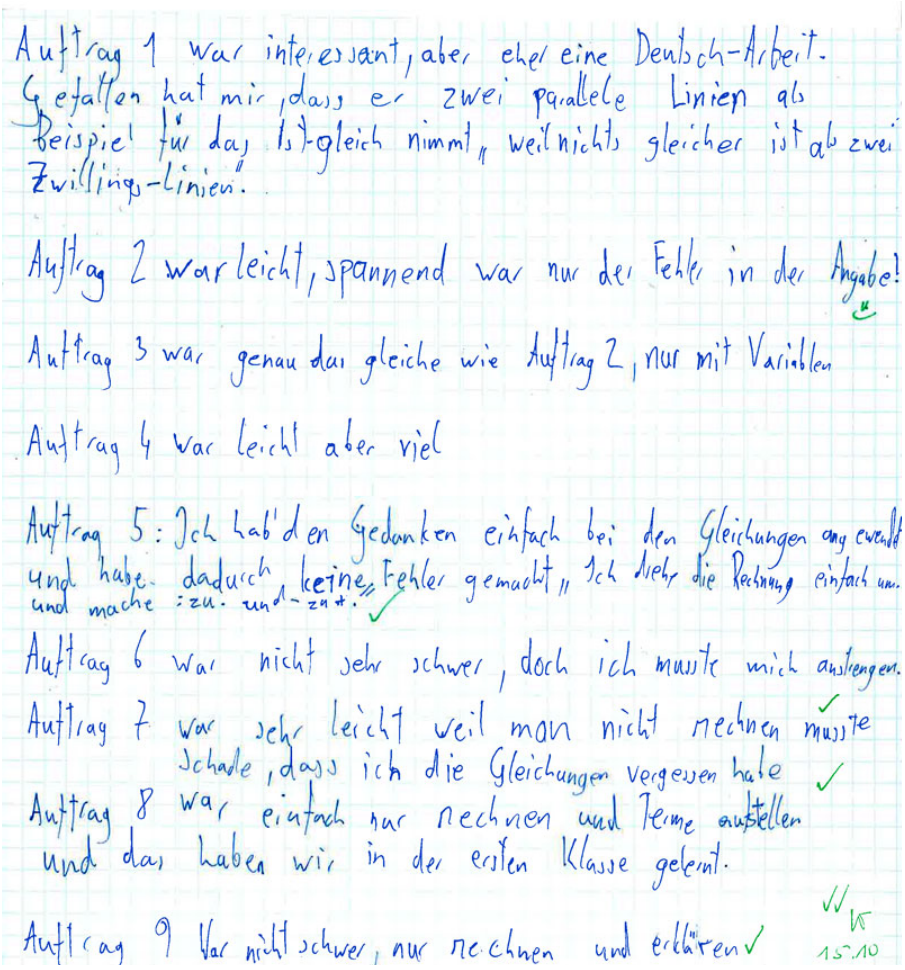
Abbildung 6.22: Concept Cartoon - SchülerInnenlösungen

Abbildung 6.23: Concept Cartoon - Schülerlösung

Auftrag 0:
Blättere ein wenig zurück in deinem Reisetagebuch.
Schreibe einen Rückblick.
Was hat dich gefreut, geärgert oder gelangweilt?
Was war besonders spannend, anstrengend oder schwierig?

Abbildung 6.24: Gleichungen - Reflexionsauftrag

Abschließend folgte eine Reflexion des Kapitels anhand des in Abbildung 6.24 erteilten Auftrags. Auch hier fielen die Beiträge sehr unterschiedlich aus. Einige bewerteten lediglich die Aufträge als interessant, cool oder doof, andere, wie in Abbildung 6.25, versuchten auch ihre Zugänge zu den Aufträgen in Worte zu fassen.



Auftrag 1 war interessant, aber eher eine Deutsch-Arbeit.
Gefallen hat mir, dass er zwei parallele Linien als
Beispiel für das „Ist-gleich" nimmt, „weil nichts gleicher ist als zwei
Zwillings-Linien".

Auftrag 2 war leicht, spannend war nur der Fehler in der Angabe!

Auftrag 3 war genau das gleiche wie Auftrag 2, nur mit Variablen

Auftrag 4 war leicht aber viel

Auftrag 5: Ich hab' den Gedanken einfach bei den Gleichungen angewendet
und habe dadurch „keine" Fehler gemacht. Ich dreh die Rechnung einfach um.
und mache :zu. und -zu +.

Auftrag 6 war nicht sehr schwer, doch ich musste mich anstrengen.

Auftrag 7 war sehr leicht weil man nicht rechnen musste
Schade, dass ich die Gleichungen vergessen habe

Auftrag 8 war einfach nur rechnen und Terme aufstellen
und das haben wir in der ersten Klasse gelernt.

Auftrag 9 war nicht schwer, nur rechnen und erklären

15.10

Abbildung 6.25: Reflexion - Schülerlösung

6.3.3 Volumen

Nach dem Themenbereich Gleichungen folgte im Anschluss an die Schularbeit das Kapitel Volumen. Nach Übungen zur Berechnung der Oberfläche eines Quaders und der Flächenmaße als Wiederholung folgte der Einstieg in die Volumsberechnung. Hierzu diente das Modell eines Kubikmeters, der aus mehreren Papierwürfeln von der Größe eines Kubikdezimeters bestand. Die SchülerInnen erkundeten das Modell und gemeinsam wurden Beispiele der Anwendungen des Volumens erarbeitet, ebenso wie die Berechnung des selbigen für gleichmäßige Körper nach der Formel: $V = G \cdot h$. Was ein gleichmäßiger Körper ist, wurde im Heft notiert und mittels Buchstaben, die im Rahmen des Geometrisch-Zeichnen-Unterrichts der 8. Schulstufe erstellt wurden, veranschaulicht.

Ein Arbeitsblatt mit vier zusammengesetzten Körpern diente als weiteres Unterrichtsmaterial. Im LehrerInnen-SchülerInnen-Gespräch wurden drei Möglichkeiten der Volumsberechnung erarbeitet und im Heft festgehalten (siehe Abbildung 6.26). Dabei achtete ich im Besonderen auf die Nachvollziehbarkeit der Rechenschritte und das Aufstellen von Formeln. Bis zur nächsten Unterrichtseinheit waren die Volumina der übrigen drei Körper zu berechnen. Hierzu waren mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten anzuwenden, die Rampe in diesem Auftrag bestand darin, alle drei Varianten zu benutzen.

Viele Hausübungen zeichneten sich, zu meiner Überraschung und Freude, durch einen klaren Aufbau, ebenso wie durch gelungene Skizzen, die auch im Zuge der Erstellung der Formeln genutzt wurden, aus. Die abgebildeten Arbeiten, vorzufinden in Abbildung 6.27 und 6.28, wurden von mir für eine weitere Autographensammlung ausgewählt. Die Übertragung der Angabe in eigene Skizzen schulte darüber hinaus das dreidimensionale Vorstellungsvermögen.

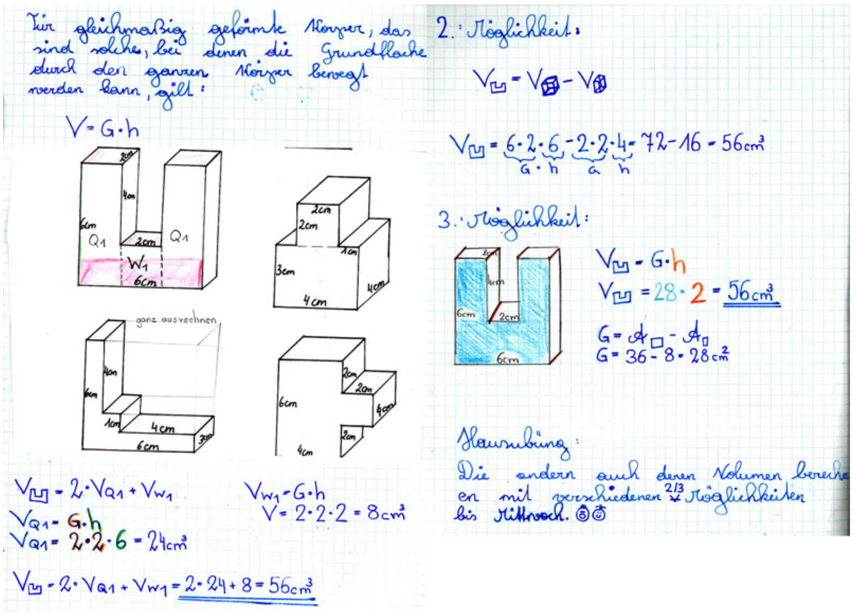


Abbildung 6.26: Volumen - Hefteintrag

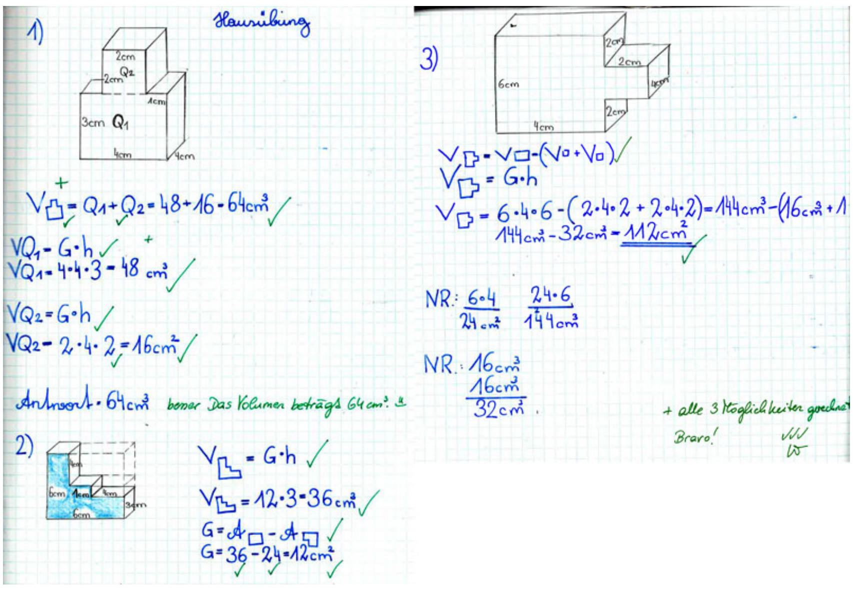


Abbildung 6.27: Volumen - Schülerinnenlösung

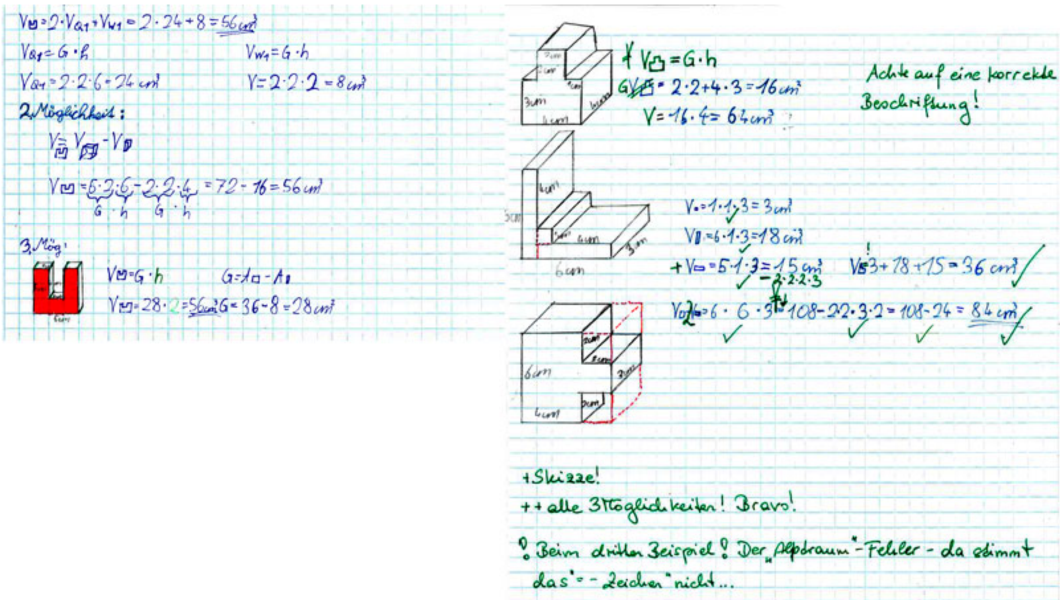
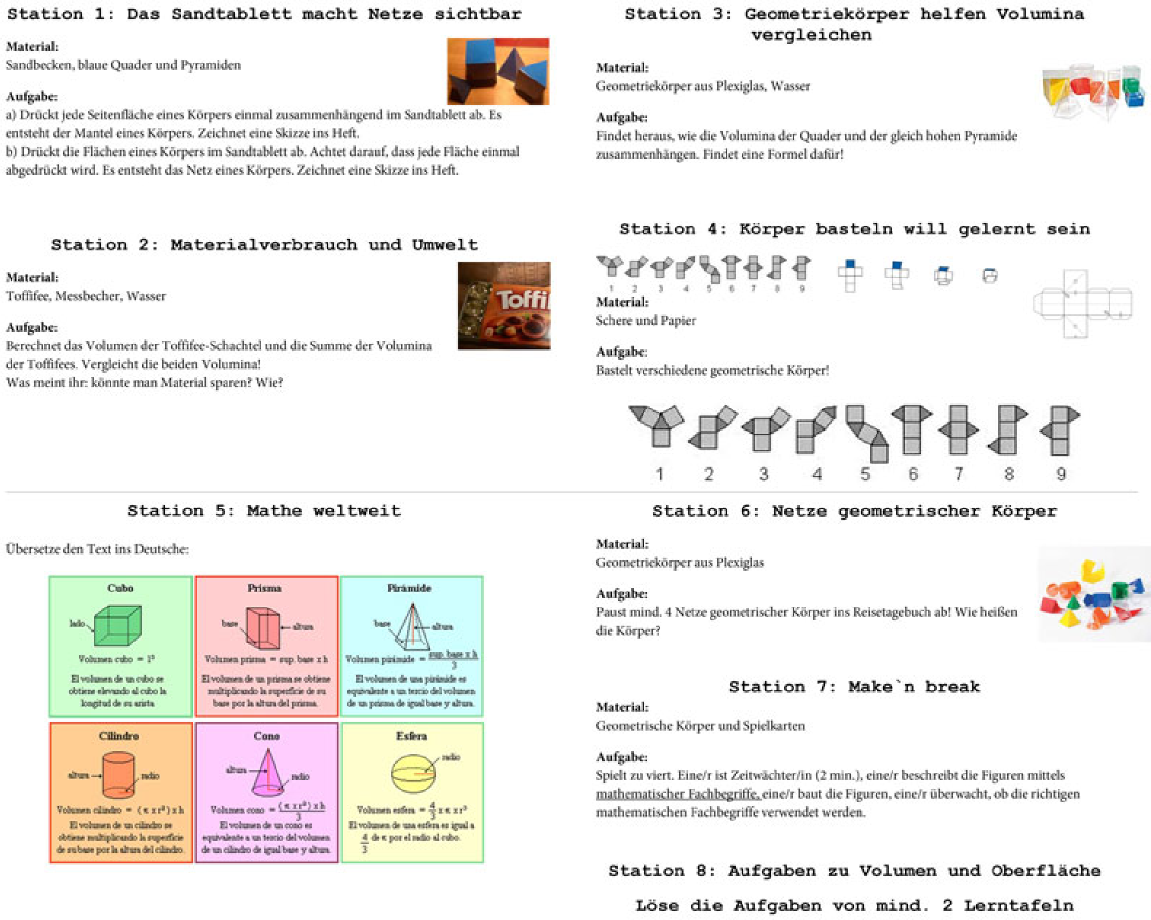


Abbildung 6.28: Volumen - Schülerlösung

Dieser, stark lehrerInnenzentrierten Periode schloss sich, zur Wiederholung und Vertiefung, ein Stationenbetrieb an. Neben dem bereits aus der 5. Schulstufe bekannten „Geometrie Make'n break", einem Sandtablett (Montessorimaterial) zum Abdrücken und Sichtbarmachen der Körpernetze, wurde auch das überschüssige Verpackungsvolumen von Süßigkeitsverpackungen durch Schütten und anhand von Berechnungen ergründet, ebenso wie die Maßumrechnungen geübt (mittels Zuordnungen auf Lerntafeln) und Volumina von Quader und gleich hoher Pyramide mittels Reismengen verglichen und durch eine Formel in Beziehung gesetzt. Spannend und herausfordernd war für die SchülerInnen die fünfte Station „Mathematik weltweit", bei der eine Übersetzung aus dem Spanischen gefragt war. Im Vordergrund stand hierbei miteinander zu arbeiten, zu üben, zu entdecken und zu forschen. Je nach Lust und Laune konnten die Stationen in Partnerarbeit bewältigt werden oder alleine. In dieser Doppelstunde ging es vor allem auch um die Selbsteinschätzung der SchülerInnen und lustvolles Lernen. Die Stationen wurden in Zusammenarbeit mit meiner geschätzten Kollegin Mag.[a] Salner-Gridling erstellt und sind nachfolgend der Abbildung 6.29 zu entnehmen.



Station 1: Das Sandtablett macht Netze sichtbar

Material:
Sandbecken, blaue Quader und Pyramiden

Aufgabe:
a) Drückt jede Seitenfläche eines Körpers einmal zusammenhängend im Sandtablett ab. Es entsteht der Mantel eines Körpers. Zeichnet eine Skizze ins Heft.
b) Drückt die Flächen eines Körpers im Sandtablett ab. Achtet darauf, dass jede Fläche einmal abgedrückt wird. Es entsteht das Netz eines Körpers. Zeichnet eine Skizze ins Heft.

Station 2: Materialverbrauch und Umwelt

Material:
Toffifee, Messbecher, Wasser

Aufgabe:
Berechnet das Volumen der Toffifee-Schachtel und die Summe der Volumina der Toffifees. Vergleicht die beiden Volumina!
Was meint ihr: könnte man Material sparen? Wie?

Station 3: Geometriekörper helfen Volumina vergleichen

Material:
Geometriekörper aus Plexiglas, Wasser

Aufgabe:
Findet heraus, wie die Volumina der Quader und der gleich hohen Pyramide zusammenhängen. Findet eine Formel dafür!

Station 4: Körper basteln will gelernt sein

Material:
Schere und Papier

Aufgabe:
Bastelt verschiedene geometrische Körper!

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Station 5: Mathe weltweit

Übersetze den Text ins Deutsche:

Cubo
lado
Volumen cubo = l^3
El volumen de un cubo se obtiene elevando al cubo la longitud de su arista.

Prisma
base, altura
Volumen prisma = sup. base x h
El volumen de un prisma se obtiene multiplicando la superficie de su base por la altura del prisma.

Pirámide
base, altura
Volumen pirámide = $\frac{\text{sup. base x h}}{3}$
El volumen de una pirámide es equivalente a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura.

Cilindro
altura, radio
Volumen cilindro = $(\pi \times r^2) \times h$
El volumen de un cilindro se obtiene multiplicando la superficie de su base por la altura del cilindro.

Cono
altura, radio
Volumen cono = $\frac{(\pi \times r^2) \times h}{3}$
El volumen de un cono es equivalente a un tercio del volumen de un cilindro de igual base y altura.

Esfera
radio
Volumen esfera = $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
El volumen de una esfera es igual a $\frac{4}{3}$ de π por el radio al cubo.

Station 6: Netze geometrischer Körper

Material:
Geometriekörper aus Plexiglas

Aufgabe:
Paust mind. 4 Netze geometrischer Körper ins Reisetagebuch ab! Wie heißen die Körper?

Station 7: Make`n break

Material:
Geometrische Körper und Spielkarten

Aufgabe:
Spielt zu viert. Eine/r ist Zeitwächter/in (2 min.), eine/r beschreibt die Figuren mittels mathematischer Fachbegriffe, eine/r baut die Figuren, eine/r überwacht, ob die richtigen mathematischen Fachbegriffe verwendet werden.

Station 8: Aufgaben zu Volumen und Oberfläche

Löse die Aufgaben von mind. 2 Lerntafeln

Abbildung 6.29: Stationenbetrtieb Geometrie - Körper

6.3.4 Teilbarkeitsregeln

Bevor der große Themenbereich der Bruchrechnung in Angriff genommen wurde, entschied ich mich dafür, die Teilbarkeit von Zahlen und im Zuge dessen die Primzahlen zu behandeln da diese in gewisser Weise das Skelett jeder Zahl darstellen und für die Mathematik fundamental sind. Hierfür erhielten die SchülerInnen zunächst den ersten Auftrag, der in Abbildung 6.30 ersichtlich ist. Sie hatten darin Vielfache verschiedener Zahlen aufzuschreiben und mussten ihren Blick auf Regelmäßigkeiten des Erscheinungsbildes dieser Zahlen lenken, wie etwa die Einerstelle, die Ziffernsumme, etc.. In den beiden Folgestunden wurden die Erkenntnisse besprochen und schriftlich im Lerntagebuch festgehalten. Dazwischen gab es passende Hausübungsbeispiele aus dem Lehrbuch.

In den zweiten Auftrag (siehe Abbildung 6.31) verpackte ich die Definition der Primzahlen. Die SchülerInnen sollten die ersten zehn Primzahlen finden. Diese Aufgabe hat ihnen große Freude bereitet, einige arbeiteten sorgfältig, andere vor allem schnell. Waren einzelne SchülerInnen bereits fertig, so sollten sie ihre Ergebnisse vergleichen und bei Unstimmigkeiten Argumente sammeln. Im zweiten Teil der Stunde wurden die Ergebnisse verglichen und vor allem die falschen Resultate genauer unter die Lupe genommen. Erste Primfaktorzerlegungen entstanden hierbei und so knüpfte der dritte Auftrag (siehe Abbildung 6.31) direkt am Wissensstand der SchülerInnen an. Die Zahl 3274425 in ihre Primfaktoren zu zerlegen, war in dieser Aufgabe die Rampe. Bei der Bearbeitung der SchülerInnenbeispiele im Plenum, bot sich spontan die Möglichkeit die Potenzschreibweise, als verkürzte Schreibweise von Multiplikationen gleicher Zahlen, einzuführen. Einige SchülerInnen ließen es sich auch bei der Schularbeit nicht nehmen dieses Wissen einfließen zu lassen.

Auftrag 1: **Teilbarkeitsregeln**

- Schreibe je 10 Vielfache von 2, 5 und 10 auf! Was fällt Dir auf, wenn du dir die Zahlen anschaust? Formuliere Teilbarkeitsregeln:

2:

5:

10:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn
Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn
Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn

- Schreibe 10 Vielfache von 3 und 9 auf. Addiere die Ziffern der Vielfachen! Was fällt dir auf? Welche Regeln könnten gelten?

3:

9:

Eine Zahl ist durch 3 (9) teilbar, wenn

- Wie sieht es bei den Zahlen 4 und 8 aus? Achte hier auf die letzten zwei bzw. drei Ziffern. Findest du eine Gesetzmäßigkeit?

4:

8:

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn
Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn

- Überlege, wann eine Zahl durch 6 teilbar ist! Durch welche Zahlen müssen sie noch teilbar sein?

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie auch durch

Abbildung 6.30: Teilbarkeitsregeln-Auftrag 1

Auftrag 2: **Primzahlen**

In der Mathematik gibt es ganz besondere Zahlen, sie werden Primzahlen genannt. Diese Zahlen sind nur durch sich selbst und durch 1 teilbar!
Finde, die ersten 10 Primzahlen!

Auftrag 3: **Primzahlen**

Das tolle an Primzahlen ist, dass sie die Bausteine der Mathematik sind. Jede Zahl, die nicht eine Primzahl ist, lässt sich als **Produkt** von Primzahlen darstellen. Versuche es mit fünf beliebigen Zahlen. Nun versuche es mit den Zahlen 32, 80, 128, 3274425.

Abbildung 6.31: Teilbarkeitsregeln-Auftrag 2 & 3

Im Unterricht wurde im fragen-entwickelnden Unterrichtsgespräch das Sieb des Eratosthenes erarbeitet. Die SchülerInnen erhielten hierfür bereits eine Hundertertafel. Im Anschluss an diese Unterrichtssequenz sollten die Schülerinnen im Lerntagebuch erklären, wie im Zahlenraum bis Hundert Primzahlen ausfindig gemacht werden. Abbildung 6.32 gibt diesen Vorgang genau wieder. Aber auch folgende Beschreibung begegnete mir:

> *„Zuerst haben wir die nicht Primzahlen weggestrichen. Eine Primzahl ist eine Zahl die nur durch sich selber und durch 1 teilbar ist. Dann haben wir die Primzahlen angemalt."*

Schwierig ist es, die sprachliche Ausdrucksweise nicht übermäßig in die Bewertung einzubeziehen, vor allem, wenn auch noch das Schriftbild schwer zu entziffern ist.

> *„Mann muss alle zahlen unter 10 die nicht durch sich selbst und durch 1 teilbar ist durch streichen. Wir haben 1, 4, 6, 8, 9, 10 durchgestrichen, weil das keine Primzahlen sind. Danach muss man alle Zahlen unter 4 druchstreichen weil, eine zahl ist durch 2 teilbar, wenn bei der Einerstelle 4, 6, 8 vorkommt. Deshalb haben wir auch alle zahlen unter 6, 8, 10 Durchgestrichen. Wir streichen alle Zahlen unter 5 weil alle zahlen wo bei der Einerstelle 5 steht durch 5 teilbar. Wir streiche alle zahlen in der 3er reihe durch weil sie durch 3 teilbar sind und die zahlen der 7er Reihe streichen wir durch."*

Abbildung 6.32: Sieb des Eratosthenes - Schülerlösung

Ein gut gelungenes Beispiel findet sich in obiger Abbildung 6.32. Die einzelnen Schritte wurden chronologisch wiedergegeben und auch begründet. Die gut gelungenen Stellen wurden von mir entsprechend gekennzeichnet. Durch die angegebenen Begründungen erfolgte die Bewertung mittels dreier Häkchen.

Es folgten drei Stunden, in denen das kgV und der ggT an Praxisbeispielen erarbeitet wurden. Abschließend war der Concept Cartoon aus Abbildung 6.33 als Hausübung zu bearbeiten. Dabei bereitete die angegebene Tabelle durchaus Schwierigkeiten. Den meisten gelang es, die Spalten mit „gerade“ und „ungerade“ zu betiteln. Bei den Zeilen waren es nur sehr wenige, die auf die Lösung „durch 9 teilbar“ und „nicht durch 9 teilbar“ gekommen sind. Es war ein interessante Aufgabe, um zu sehen, wer es schafft, systematisch zu arbeiten und durch Anwenden der Teilbarkeitsregeln sukzessive Möglichkeiten auszuschließen. Nebenbei wurden auch die Begriffe „Zeile“ und „Spalte“ wiederholt. Vor allem das Angeben von Gründen, warum die einzelnen Charaktere Recht oder sich geirrt hatten, fiel schwer. Für manche war es eine unüberwindbare Hürde sich auf diese Aufgabe einzulassen und nicht sofort auf die Lösung zu kommen. Viele fielen auf die Aussage „durch 7 teilbar“ und „nicht durch 7 teilbar“ herein und identifizierten nicht die beiden schwarzen Schafe „120“ und „63“. Ein paar wenige probierten selbstständig Zahlen aus und betitelten die Zeilen „durch 3 teilbar“ respektive „nicht durch 3 teilbar“ und übersahen dabei die Zahl „120“.

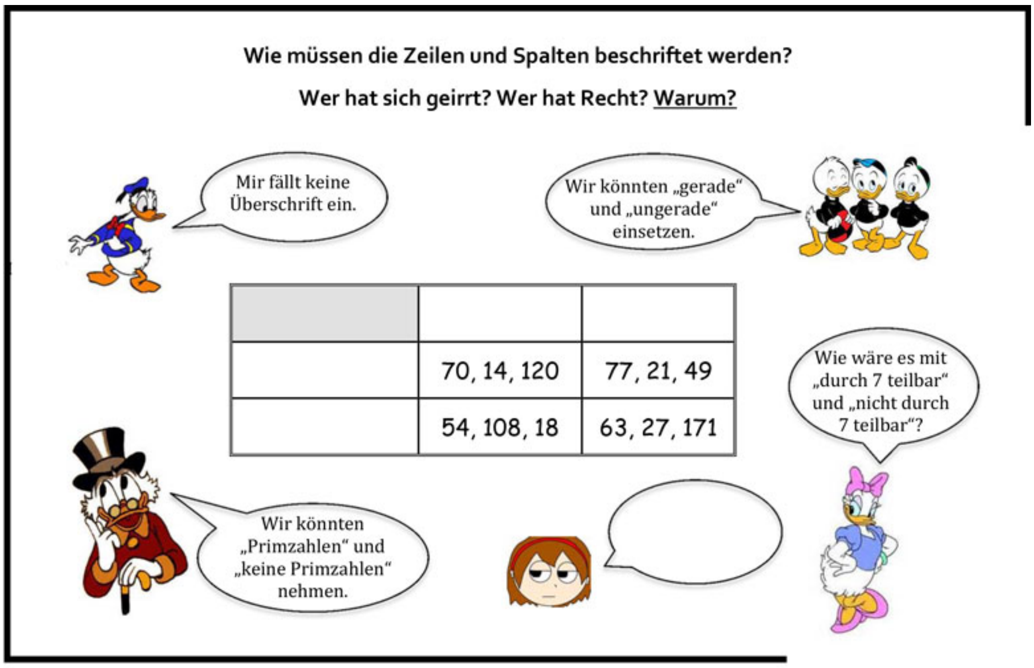


Abbildung 6.33: Cartoon Teilbarkeit (Keogh, Dabell und Naylor, 2008, S. 197)

6.3.5 Brüche

Die nachfolgenden Aufgaben zum Thema Brüche konnte ich, leicht adaptiert, dem Lehrbuch von Ruf und Gallin, 1999c, S. 285-307, entnehmen. Dies erleichterte die Vorbereitung und ich konnte mich ganz auf die Auswertung der SchülerInnenbeiträge konzentrieren.

Brüche im täglichen Leben

Erinnere dich: Zu jedem Bruch gehört ein Bruchstrich
(Geodreieck verwenden!).
Die Zahl über dem Bruchstrich heißt **Zähler**, die Zahl unter dem Bruchstrich heißt **Nenner**. (Manchmal schreibt man Brüche auch so: ¾)

$\frac{3}{4}$ ← ZÄHLER ← BRUCHSTRICH ← NENNER

In der Welt der Brüche steht vieles auf dem Kopf, vieles ist anders, als du es gewohnt bist.

Teilst du zum Beispiel eine Zahl durch den Bruch $\frac{1}{2}$, bekommst du nicht etwa weniger, sondern mehr, nämlich das Doppelte.
Vervielfachst du aber mit $\frac{1}{2}$, bekommst du weniger.

Beim Teilen von Kuchen, Äpfeln oder Schokolade hast du schon mit Brüchen hantiert. Du weißt, was zu tun ist, wenn vier Kinder essen wollen, aber nur eine Pizza da ist. Und es fällt dir auch nicht schwer eine Pizza in vier gleiche Teile aufzuteilen. Wenn du gerecht verteilst, bekommt jedes Kind ein Viertel der Pizza.

✶ Geh auf die Suche nach Brüchen.
Wer spricht von Dritteln, Vierteln und anderen ...teln?
Sammle Bilder oder zeichne.
Schreibe die Brüche in Worten und mit Zahlen dazu.

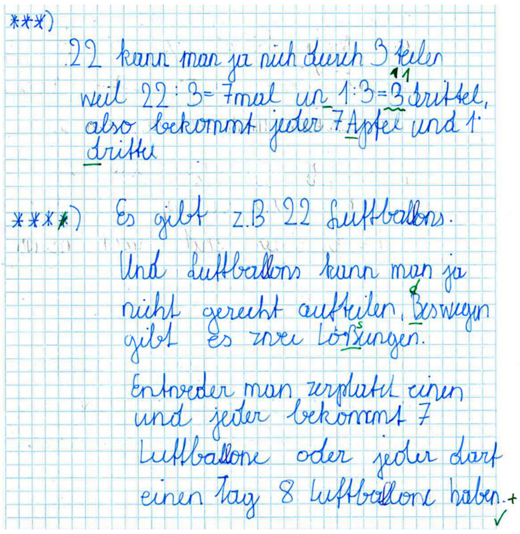
✶✶ Erzähle Geschichten vom Teilen.
Was wird an wie viele Personen verteilt?
Was wird in wie große Stücke aufgeteilt?

✶✶✶ Wie gehst du vor, wenn du 22 Äpfel gerecht an drei Personen verteilen willst?
Wie ist es bei 22 Luftballons?

✶✶✶✶ Erfinde Geschichten,
bei denen man mit Brüchen Gerechtigkeit herstellen kann,
und solche, bei denen man besser einen Rest stehen lässt.

Abbildung 6.34: Brüche im täglichen Leben (Ruf und Gallin, 1999c, 285f)

Da sich die SchülerInnen bereits in der 5. Schulstufe dem Thema Brüche widmeten, diente der erste Auftrag (siehe Abbildung 6.34) der Auffrischung und Wiederholung. Die dritte und vierte Aufgabe dienten hierbei als Rampe. In Abbildung 6.35 legt der Schüler seine Gedanken zur dritten Aufgabe strukturiert dar, vergisst jedoch auf die vierte Aufgabe, das Erfinden weiterer Geschichten.


***)
22 kann man ja nich durch 3 teilen
weil 22:3=7mal un 1:3=3 drittel,
also bekommt jeder 7 Äpfel und 1
drittel

****) Es gibt z.B 22 Luftballons.
Und Luftballons kann man ja
nicht gerecht aufteilen. Deswegen
gibt es zwei Lößungen.
Entweder man zerplatzt einen
und jeder bekommt 7
Luftballone oder jeder darf
einen Tag 8 Luftballone haben. +

Abbildung 6.35: Brüche im täglichen Leben - Schülerlösung

Bei ein paar SchülerInnen hat sich mittlerweile eine Dialogbasis herausgebildet, so dass sie auf meine Anmerkungen, Fragen reagieren, wie etwa das folgende Beispiel in Abbildung 6.36 zeigt:

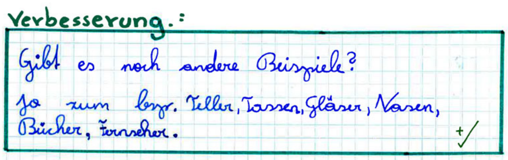

Verbesserung.:
Gibt es noch andere Beispiele?
Ja zum bsp. Teller, Tassen, Gläser, Vasen,
Bücher, Fernseher. +

Abbildung 6.36: Brüche im täglichen Leben - Schülerinnenlösung

Der nächste Auftrag (Abbildung 6.37) führte bei den SchülerInnen zu einer intensiven Beschäftigung und beförderte überraschende SchülerInnenlösungen zu Tage.

Wer verzichtet gibt seinen Teil zum Teilen frei

Teilen ist wirklich keine einfache Sache. Nicht alles, was es gibt, kann man in Stücke schneiden. Und es sind nicht immer alle glücklich darüber, wenn sie ein gleich großes Stück wie alle anderen bekommen.
Was nützt es, wenn ein Brot an 1000 Personen gerecht verteilt wird? Dazu eine kleine Geschichte, die bei der ersten Begegnung mit Brüchen in einer 1. Klasse passiert ist. Ganz unerwartet fingen die Kinder mit Brüchen zu rechnen an, obwohl sie das noch gar nicht gelernt hatten.

> René, Markus und Gabriel bekommen von ihrem Lehrer einen Cookie. Sie sollen ihn so zerschneiden, dass drei gleich große Teile entstehen. Gabriel hat eine Idee, wie man das am besten macht. Erst als die drei Stücke daliegen, kommt ihm in den Sinn, dass ihm Cookies ja gar nicht schmecken. Deshalb verzichtet er auf sein Stück. René und Markus freuen sich, halbieren das Stück von Gabriel und stecken ihren Teil mit Genuss in den Mund. Salih, der eben dazugekommen ist, schüttelt den Kopf und sagt: „Warum habt ihr nicht gleich zu Beginn den Cookie in zwei Hälften aufgeteilt? Das wäre doch viel einfacher gewesen!“

* Lies die Geschichte von René, Markus, Gabriel und Salih.
Was für einen Teil von Gabriels Teil bekommt Markus?
Zeichne und beschreibe diese Art des Teilens.
Erkläre auch wie Salih teilen würde.

** Markus hat in Wirklichkeit zwei Teile vom Cookie bekommen.
Hätte Salih geteilt, hätte er nur einen Teil bekommen.
Wäre das ein Vorteil oder Nachteil für Markus gewesen?
Kannst du mit Brüchen und Zeichnungen begründen, warum die Portion von Markus bei beiden Teilungsarten gleich groß ist?

*** Was passiert, wenn von 5 Kindern 2 verzichten?
Erfinde weitere Beispiele.

Abbildung 6.37: Wer verzichtet gibt seinen Teil zum Teilen frei (vgl. Ruf und Gallin, 1999c, 286f)

Die erste Aufgabe wurde von allen problemlos bearbeitet. Auch den ersten Teil der zweiten Aufgabe schafften alle. Das Begründen mittels Zeichnungen fiel den SchülerInnen hierbei wesentlich leichter als das Aufstellen von Brüchen, das etwa nur der Hälfte aller SchülerInnen gelang. Spannend wurde es bei der dritten Aufgabe, die darin bestand, den Fall zu untersuchen, wenn von 5 Kindern 2 verzichten, und selbst weitere Beispiele zu erfinden. Sie wurde nur von ein paar SchülerInnen, von denen jedoch bravourös, gemeistert. Die Einladung zur Aufstellung weiterer solcher Aufgaben nahmen jedoch gar nur drei SchülerInnen an. Die Abbildungen 6.38 und 6.39 zeigen die Arbeit einer Schülerin. Ergänzungen aus dem Unterricht wurden von ihr entsprechend markiert. Anschaulich stellt sie die Teilung dar und erkennt bereits richtig, dass $\frac{1}{6}$ die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist.

Abbildung 6.38: Wer verzichtet . . . - Schülerinnenlösung Teil 1

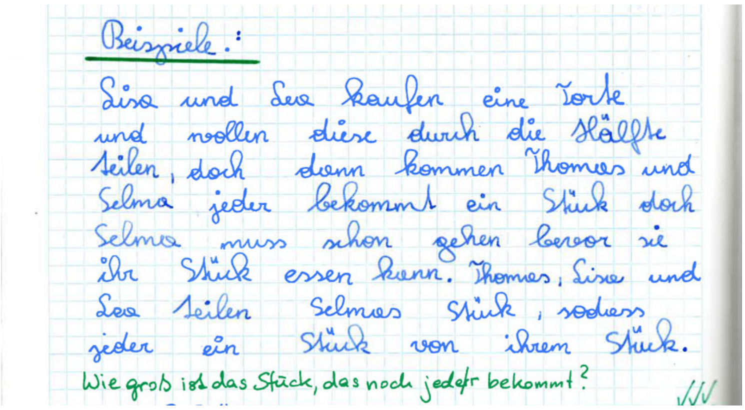


Abbildung 6.39: Wer verzichtet . . . - Schülerinnenlösung Teil 2

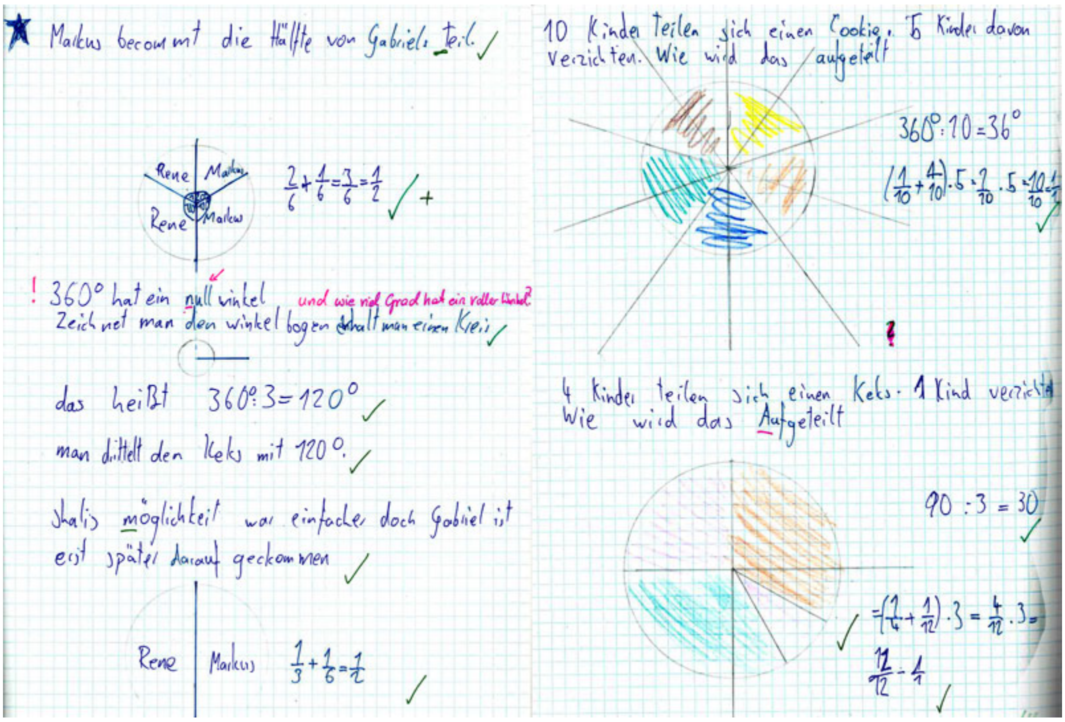


Abbildung 6.40: Wer verzichtet . . . - Schülerlösung

In obiger Ausarbeitung (Abbildung 6.40) hat der Schüler den Cookie mit Hilfe der entsprechenden Winkelgrade ganz genau gedrittelt. Er rechnet auch bereits mit Brüchen, in dem er sie auf den selben Nenner bringt und erkennt ebenfalls, dass $\frac{1}{6}$ die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist. Auch die beiden selbsterfundenen Beispiele wurden sowohl grafisch als auch rechnerisch auf hohem Niveau gelöst, wobei ihm wohl das Rückführen auf Kreissegmente und die entsprechenden Winkelgrößen als sicherer Hafen bei der Aufstellung der Bruchterme diente.

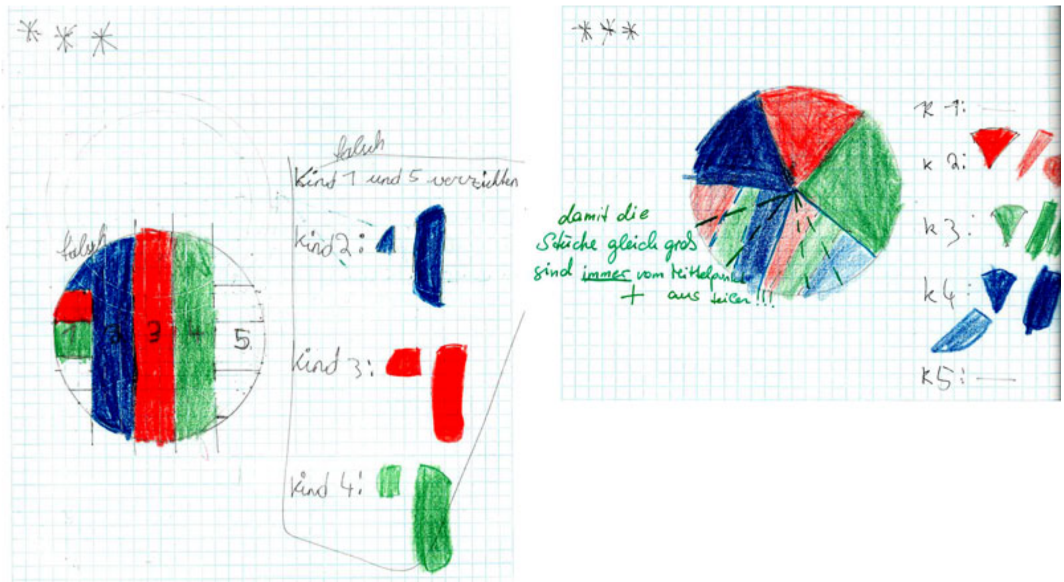


Abbildung 6.41: Wer verzichtet ... - Schülerlösung

Eine spannende Entwicklung lässt sich in der Schülerlösung aus Abbildung 6.41 verfolgen. Die Aufteilung des Cookies wollte im ersten Versuch noch nicht so recht gelingen, ebenso die Aufteilung der beiden Stücke jener, die verzichteten. Außerdem hat sich bei ihm noch nicht die Vorstellung gefestigt, dass gleiche Bruchteile auch gleich groß sind. Seine Einfärbung der aufzuteilenden Stücke, die nicht vom Mittelpunkt aus erfolgt, wird ihm aber auch noch Monate später unterlaufen.

Auf der linken Seite von Abbildung 6.42 ist der Versuch, die Teile, die hinzukommen, zu messen, ersichtlich. Zunächst kommt der Schüler dabei auf $\frac{2}{3}$, im Gespräch am LehrerInnenpult wurde gemeinsam erarbeitet, dass die vermeintlichen $\frac{2}{3}$ nicht vom ganzen Keks zu ermitteln sind, sondern nur von den beiden Fünfteln, derer, die von ihrem Teil zurücktreten sind. Selbstständig kommt er auf den Anteil von $\frac{2}{15}$, der schließlich zu jedem der drei Fünftel hinzukommt.

Auf der rechten Seite findet sich das selbsterfundene „Leibnitz-Keks“-Beispiel einer Schülerin, das sie auch im Unterricht an der Tafel präsentierte. Die übrigen SchülerInnen haben ihre Zeichnung und Rechnung ebenso in ihr Heft übertragen (vgl. Abbildung 6.38) Dabei wurde bereits mit Brüchen addiert und auch schon intuitiv gekürzt.

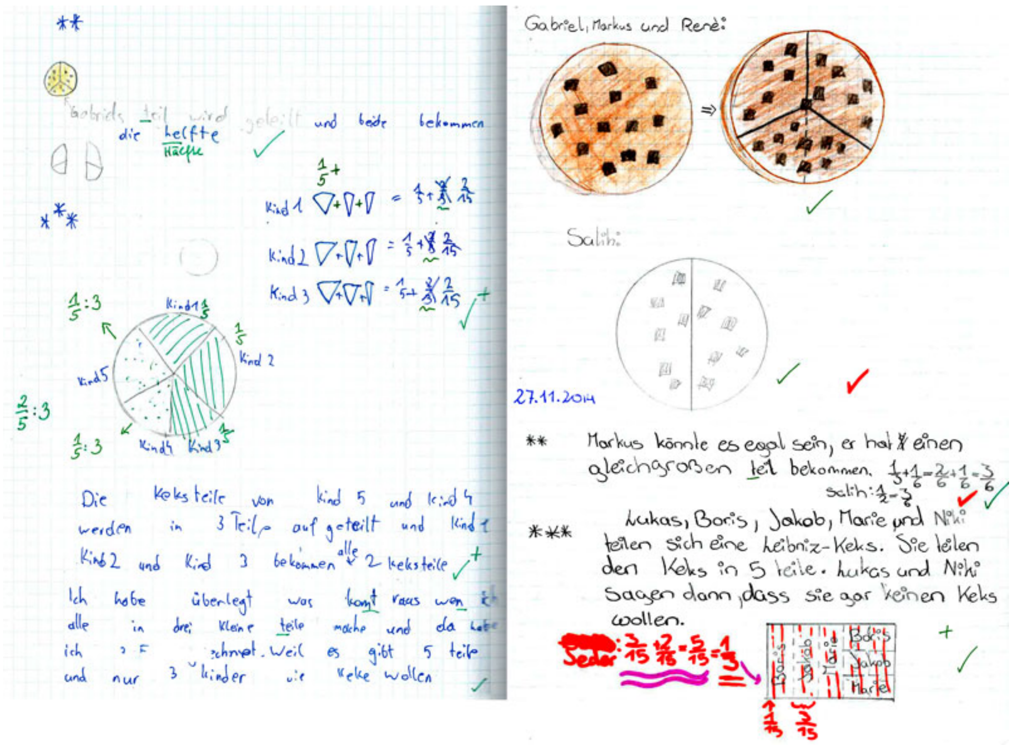
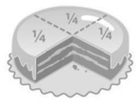


Abbildung 6.42: Wer verzichtet ... - Schülerlösung links; Schülerinnenlösung rechts

Der Fülle an Begriffen, die im Rahmen der Bruchrechnung auf die SchülerInnen zukommt, wird in den nächsten Aufträgen Rechnung getragen. Bruchanteile einer Stunde gilt es im Auftrag „Zähler und Nenner“ (Abbildung 6.43) aufzustellen und zu berechnen, ebenso wie die Begriffe „Zähler“ und „Nenner“ bewusst zu machen. Um unechte und echte Brüche sowie gemischte Zahlen geht es im darauffolgenden Auftrag (Abbildung 6.44). Anschließend sind Bücher, Farbstifte und Kinder zu Teilen eines Ganzen zu machen (Abbildung 6.45). Im Autrag „Brüche - kürzen und erweitern“ werden diese beiden zentralen Begriffe mittels Blattfaltungen und Mosaiken eingehend behandelt.

Zähler und Nenner



Einen Fußball teilen, das bringt nichts. Es gibt natürlich auch Dinge, die man ohne Schaden in zwei, drei, vier oder mehr gleiche Teile aufteilen kann.
Diese Teile nennt man Halbe, Drittel, Viertel.
Aber kannst du dir auch vorstellen,
was die Zahlen im Zähler und im Nenner eines Bruchs bedeuten?
Was bedeuten denn die 1 und die 2 bei $\frac{1}{2}$ Tag?
Was bedeuten die 3 und die 4 bei $\frac{3}{4}$ Stunden?

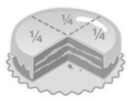
✶ Dass drei Viertelstunden 45 Minuten sind, weißt du.
Aber was genau bedeuten die Zahl Drei und die Zahl Vier,
die im Bruch $\frac{3}{4}$ als Zähler und als Nenner vorkommen?

✶✶ Was ist eine Drittelstunde?
Was sind zwei Drittelstunden?

✶✶✶ Schreibe möglichst viele Bruchteile einer Stunde auf,
die man in eine Anzahl ganzer Minuten umrechnen kann.
Bei welchen Nennern geht das?

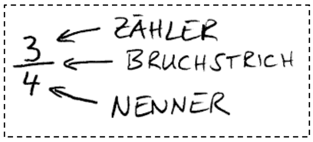
✶✶✶✶ Was sind $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ oder $\frac{6}{4}$ Stunden?
Erkläre, was es bedeutet, wenn der Zähler gleich groß
oder größer ist als der Nenner.

Abbildung 6.43: Zähler und Nenner (vgl. Ruf und Gallin, 1999c, 288f)



Zähler und Nenner

Normalerweise ist ein Bruch nur ein Bruchteil eines **Ganzen**:
Es sind also weniger Stücke vorhanden, als für das Ganze nötig wären.
Ein solcher Bruch ist ein **echter Bruch**:
Sein Zähler ist kleiner als der Nenner.
Natürlich kannst du die Stücke eines Bruchs
auch dann noch zählen, wenn das Ganze schon lange voll ist.
$\frac{4}{4}$ Stunden sind eine ganze Stunde, und wenn du weiterzählst,
kommst du zu $\frac{5}{4}$ Stunden, $\frac{6}{4}$ Stunden, $\frac{7}{4}$ Stunden und so weiter.
So entstehen unechte Brüche,
bei denen der Zähler größer ist als der Nenner.
$\frac{7}{4}$ Stunden sind eine ganze Stunde und drei Viertelstunden.
Das kann man auch so schreiben: $\frac{7}{4}$ Stunden = $1\frac{3}{4}$.
Mischt man ganze Zahlen und Brüche, so spricht man von
gemischten Zahlen.
In der gemischten Zahl $1\frac{3}{4}$ versteckt sich genau genommen
bereits eine Addition, nämlich $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$.

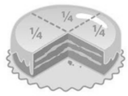


✶ Schreibe $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ und $\frac{13}{4}$ als gemischte Zahlen.

Aber bleiben wir noch eine Weile bei den echten Brüchen,
die man sich so schön als Teile des Zifferblatts vorstellen kann.
Es dauert doch ziemlich lang, bis eine Stunde vorbei ist.
Der große Zeiger muss sich einmal ganz drehen.
Du kannst den Weg des Minutenzeigers in drei, fünf
oder sogar sieben gleiche Teile aufteilen.
Und du kannst dann sagen,
der Minutenzeiger habe bereits zwei der drei gleichen Teile
oder vier der fünf gleichen Teile hinter sich gebracht.
Du kannst die Stunde also auf ganz verschiedene Weise
in Teile von gleicher Größe aufteilen –
in Drittel, Fünftel, Zehntel, Zwölftel, Sechzigstel -,
und du kannst die Teile zählen:
Sind es zwei Drittel, schreibst du $\frac{2}{3}$ Stunden,
Sind es vier Fünftel, schreibst du $\frac{4}{5}$ Stunden.

Jetzt wird klarer, warum die Zahl unter dem Bruchstrich Nenner
und die Zahl über dem Bruchstrich Zähler heißt.
Der **Nenner** ist eine Art Sorte. Er nennt den Namen der Teile.
Steht die Zahl drei im Nenner, dann weißt du,
dass man das Ganze in drei gleiche Teile eingeteilt hat.
Steht die Zahl fünf im Nenner, sind es fünf gleiche Teile.
Wie viele Teiler der gleichen Sorte vorhanden sind,
sagt dir der **Zähler**.
Der Zähler zählt also die Teile.

Abbildung 6.44: Brüche - gemischte Zahlen (Ruf und Gallin, 1999c, 289f)



Wie viele Bruchteile sind es?

✶ Mach dich auf die Suche nach Dingen, die einmal ganz waren.
Kannst du herausfinden, in wie viele gleiche Teile das Ganze aufgeteilt war und wie viele Teile noch vorhanden sind?
Erkläre, wie du vorgehst und wo es schwierig wird.

✶✶ Was alles könnte ein Ganzes sein?
Kannst du Bücher, Farbstifte oder Kinder zu Teilen eines Ganzen machen?
Zeichne und beschreibe die Bruchteile.

In jedem Bruch steckt ein **Vergleich**.
Man hat eine Anzahl gleichartiger Teile
und man vergleicht sie mit dem Ganzen.
Fasst man eine Familie als ein Ganzes auf,
sind die einzelnen Mitglieder der Familie die Teile.
Fasst man einen Wohnblock als Ganzes auf,
sind die einzelnen Wohnungen die Teile.
Spricht man dann von $\frac{5}{7}$ Familie oder $\frac{3}{13}$ Wohnblock,
so denkt man nur an die Zahl der Personen oder der Wohnungen,
nicht aber an ihre Größe oder an ihre Ungleichheiten.
So ist es auch bei den Musiknoten:
Es gibt ganze Noten, halbe Noten, Viertel, Achtel und so weiter.
Dabei denkt man nur an die Dauer eines Tons,
nicht an die Tonhöhe oder die Lautstärke.

Eine ganze Note oder eine ganze Pause füllen einen ganzen Takt.

Zwei halbe Noten tönen Gleich lang wie eine ganze.

Vier Viertel

Acht Achtel

Sechzehn Sechzehntel

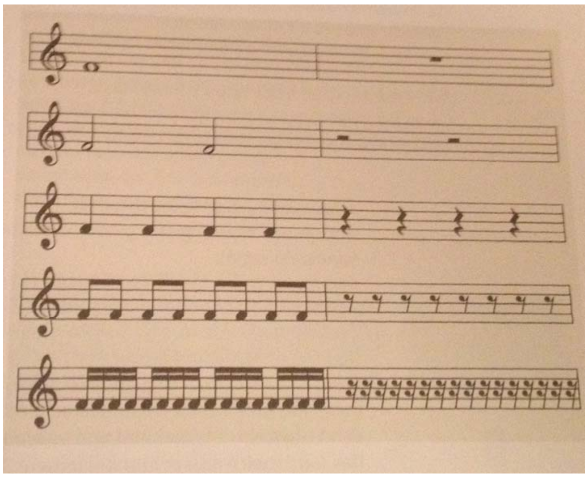
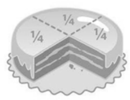


Abbildung 6.45: Bruchteile (Ruf und Gallin, 1999c, 290f)

Farbanteil in Mustern



Jede ganze Zahl kann Nenner eines Bruches sein.
Halbe, Drittel, Viertel, Achtel, Sechzehntel kommen häufig vor.
Hast du auch schon Brüche mit den Nennern 7, 9, 11, 13 oder 18 angetroffen?
Versuch es doch einmal mit einem Blatt Papier.
In was für gleiche Teile kannst du das Blatt
Allein durch Falten einteilen?
Was für Brüche kannst du mit Hilfe von Farben darstellen?

✶ Wie musst du ein Blatt Papier falten,
damit lauter gleich große Bruchteile entstehen?
Wie heißen die Bruchteile?

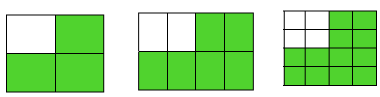
✶✶ Was passiert mit den Bruchteilen, wenn du das Blatt weiter faltest? Erkläre!

✶✶✶ Falte das Blatt sooft, bis du ziemlich kleine, regelmäßige Felder bekommst.
Färbe die Felder je mit einer Farbe so,
dass ein schönes, vielfarbig gemustertes Blatt entsteht.

✶✶✶✶ Jede Farbe hat ihren Anteil Felder auf dem Blatt.
Gib zu jeder Farbe an, wie groß ihr Anteil am Ganzen ist.
Welchen Bruchteil des ganzen Blattes besetzt jede Farbe?

Nur wenn du das Papier so faltest, dass immer wieder
gleich große Teile entstehen, kannst du sagen,
was für einen Bruchteil des Ganzen ein Feld ausmacht.
Zuerst hast du nur zwei gleich große Felder:
Du hast das Ganze in zwei Halbe eingeteilt.
Beim nächsten Falten bekommst du vier gleich große Felder.
Jetzt ist das Ganze in vier Vierteln eingeteilt.
Beim nächsten Falten entstehen acht Achtel,
dann sechzehn Sechzehntel und so weiter.
Das Ganze wird also in immer kleinere Teile aufgegliedert,
und je kleiner die Teile werden, desto mehr hat es davon.
Das ist ja klar.
Von den Vierteln braucht es vier, von den Achteln acht,
bis das Ganze voll ist: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{16}{16} = \cdots$

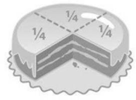
Du kannst natürlich auch nur einen Teil des Ganzen beobachten,
wenn du das Papier weiter faltest.
Schaust du nur drei Viertel des Ganzen an,
so werden daraus beim nächsten Falten sechs Achtel,
dann zwölf Sechzehntel,
dann vierundzwanzig Zweiunddreißigstel.
Kommt man von $\frac{3}{4}$ über $\frac{6}{8}$ zu $\frac{12}{16}$,
so hat man den Bruch **erweitert**.
Geht man umgekehrt von $\frac{12}{16}$ über $\frac{6}{8}$ zu $\frac{3}{4}$,
so hat man den Bruch **gekürzt**.



Der Wert des Bruches ändert sich dadurch NICHT!

Abbildung 6.46: Brüche - kürzen und erweitern (vgl. Ruf und Gallin, 1999c, 292f)

Kürzen und Erweitern



✶ Erkläre genau, was man mit dem Zähler und dem Nenner tut,
wenn man einen Bruch erweitert und wenn man ihn kürzt.
Mach ein paar Zeichnungen dazu.

✶✶ Funktioniert deine Regel auch
bei Brüchen mit den Nennern, 3, 5, 6 oder 7?
Beweise mit Hilfe von Zeichnungen, dass
die erweiterten und gekürzten Brüche den gleichen Wert haben,
obwohl ihre Zähler und Nenner ganz verschieden sind.

Abbildung 6.47: Brüche kürzen und erweitern 2 (Ruf und Gallin, 1999c, S. 294)

Beispielhaft ist in den Abbildungen 6.48 bis 6.50 die Bearbeitung des obigen Auftrags dargestellt. Die Probleme bei der grafischen Veranschaulichung des Erweiterns und Kürzens traten bei vielen SchülerInnen auf, auch wenn sie bereits im Auftrag aus Abbildung 6.46 zu finden war. Zu bemerken gilt es darüber hinaus, dass die schriftlichen Aufträge zwar ein gutes Nachschlagewerk für die SchülerInnen waren und sind, die sprachlichen Anforderungen, die die Texte jedoch stellen, dürfen nicht unterschätzt werden und müssen im Unterricht aufgegriffen werden. Zusammenfassungen in eigenen Worten schreiben zu lassen, wäre etwa eine Möglichkeit.

♦.: Also wenn man einen Bruch erweitert, dann nimmt man sich $\frac{4}{4}$ shaut sich nur $\frac{3}{4}$ an. ✓

Abbildung 6.48: Brüche kürzen und erweitern 2 - Schülerinnenlösung Teil 1

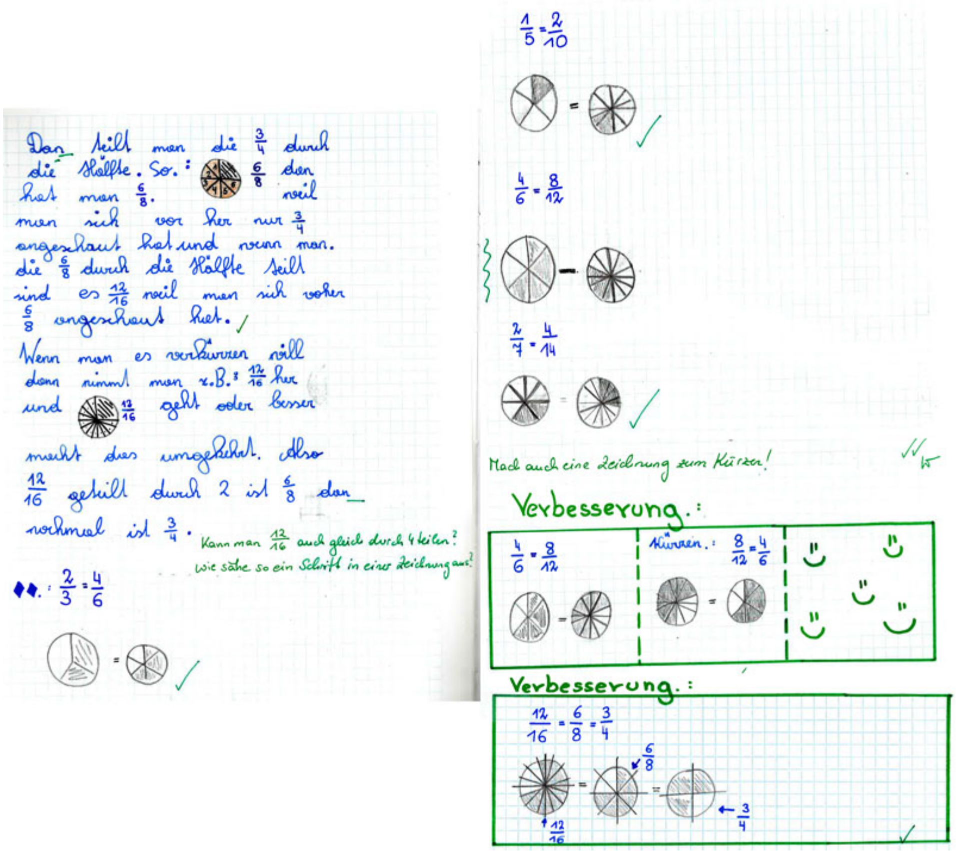


Abbildung 6.49: Brüche kürzen und erweitern 2 - Schülerinnenlösung Teil 2

Wozu die Schülerin in Abbildung 6.48 bis 6.49 knapp eine Seite an Erklärung benötigt, fasst der Schüler in seiner Lösung in Abbildung 6.50 in zwei Zeilen zusammen, die dabei nicht minder zu bewerten sind. In der zweiten Aufgabe geht er im Gegensatz zur Schülerin davor auch auf die gestellte Frage zu den unterschiedlichen Nennern ein und beantwortet sie korrekt. Im weiteren Verlauf veranschaulicht er zwar die Brüche, nicht jedoch den Prozess des Kürzens und Erweiterns. Zum Verhängnis wird ihm dabei abermals (vgl. Abbildung 6.41) die falsche Unterteilung des Kreises.

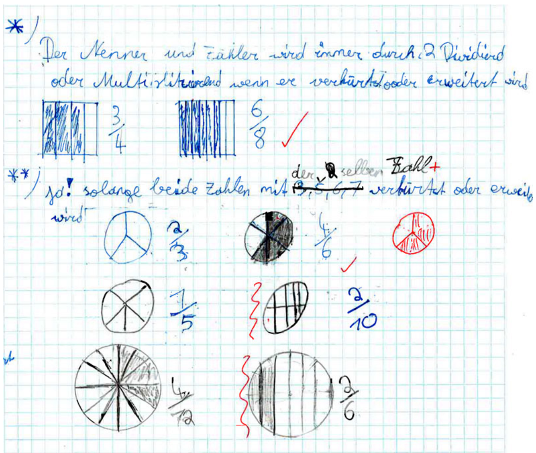
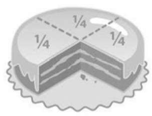


Abbildung 6.50: Brüche kürzen und erweitern 2 - Schülerlösung

Die Anfertigung der entsprechenden Zeichnungen wurde noch einmal im Unterricht thematisiert und eine weitere Übung zur Festigung erteilt. Zu diesem Zeitpunkt bot es sich gut an, die gefundenen Beispiele der Zeichnungen des Kürzens und Erweiterns im Rahmen eines Sesseltanzes (siehe Details in Kap. 4.4.1), auszutauschen. Originelle und/oder von den eigenen Darstellungen abweichende Zeichnungen waren anschließend im Heft nachzuzeichnen.

Weiter gefestigt und trainiert wurde das Kürzen und Erweitern von Brüchen durch die Bearbeitung des in Abbildung 6.51 dargestellten Auftrags. Zur Übung erstellten die SchülerInnen selbst vier Bruchketten mit jeweils acht Gliedern, wobei dabei sowohl zu kürzen als auch zu erweitern und der Kernbruch zu umkreisen war. Die Erstkontrolle dieser Aufgabe erfolgte im Rahmen eines Sesseltanzes. Die SchülerInnen kontrollierten, ob die gestellte Aufgabe erfüllt wurde und verfassten ein Kommentar dazu. Dabei ist zu erkennen, dass sie einander wertschätzend rückmeldeten. Manchen fiel es schwer, Kritik zu äußern oder Falsches zu bemängeln, wie in Abbildung 6.52 ersichtlich ist - selbst, wenn MitschülerInnen dies bereits zuvor getan hatten.

Kürzen und Erweitern



Beim **Erweitern** bist du frei, du kannst, wie man sagt,
mit 2, 3, 4, 10, 20,100 oder jeder beliebigen Zahl *erweitern*.
Dabei unterteilst du die Teile
in 2, 3, 4, 10, 20, 100 oder beliebige feiner Teile.
Beim **Kürzen** ist es heikler:
Du musst aufpassen, dass alles schön aufgeht.
Erweiterst du zum Beispiel die Zahl $\frac{12}{16}$ mit 3, bekommst du $\frac{36}{48}$;
Kürzt du $\frac{36}{48}$ mit 4, bekommst du $\frac{9}{12}$.
Wie Zähler und Nenner aber noch durch drei teilbar sind,
kann man den Bruch mit 3 kürzen und erhält $\frac{3}{4}$.
Den Bruch $\frac{3}{4}$ kann man nicht mehr weiter kürzen:
Er ist die einfachste Schreibweise unserer Zahl $\frac{12}{16}$
und heißt deshalb **Kernbruch**.

Beim Erweitern und Kürzen wird die Bruchzahl nur umgeformt:
Ihr Wert ändert sich nicht.
Erweitern und Kürzen sind also Termumformungen.
Du darfst alle erweiterten und gekürzten Brüche
unserer Zahl $\frac{12}{16}$ mit Gleichheitszeichen zu einer Kette verbinden,
und du darfst die Kette mit weiteren Termen verlängern.

$$\boxed{\frac{12}{16} = \frac{36}{48} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{30}{40} = \frac{210}{280} = \frac{3900}{5200} = \frac{3333}{4444} = \frac{6}{8}}$$

Ein besonderer Teil dieser Kette ist der Kernbruch $\frac{3}{4}$.
Alle anderen Teile sind unnötig aufgeblasen.

Abbildung 6.51: Brüche - Brüche kürzen und erweitern 3 (Ruf und Gallin, 1999c, 290f)

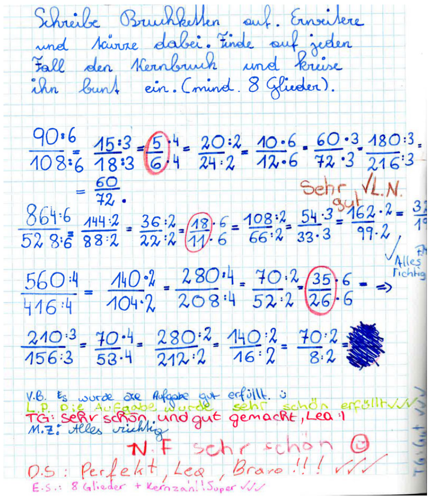


Abbildung 6.52: Brüche - Brüche kürzen und erweitern 3 - Schülerinnenlösung

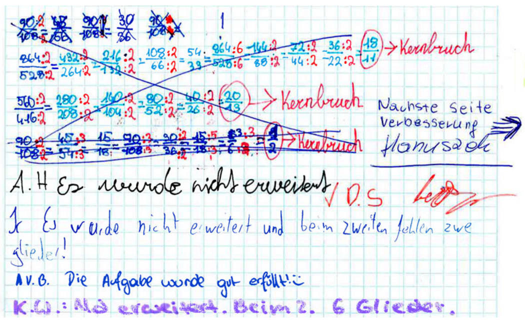


Abbildung 6.53: Brüche - Brüche kürzen und erweitern 3 - Schülerlösung

Dem Themenbereich „Ordnen von Brüchen“ haben sich die SchülerInnen zunächst selbstständig, mittels des Concept Cartoon in Abbildung 6.54, genähert. Das Begründen ihrer Überlegungen funktionierte bereits merklich besser als bei den ersten beiden Cartoons. Die Verwendung der Begriffe „Zähler“ und „Nenner“ erfolgte gekonnt und auch deren Auswirkungen auf den Wert eines Bruchs wurden von den SchülerInnen gut beschrieben. Im Anschluss an diese Ausarbeitung reihte sich eine lehrerInnenzentrierte Einheit, die die Erkenntnisse der SchülerInnnen strukturiert zusammenfasste. Gerade für schwächere SchülerInnen sind diese Phasen wichtig.

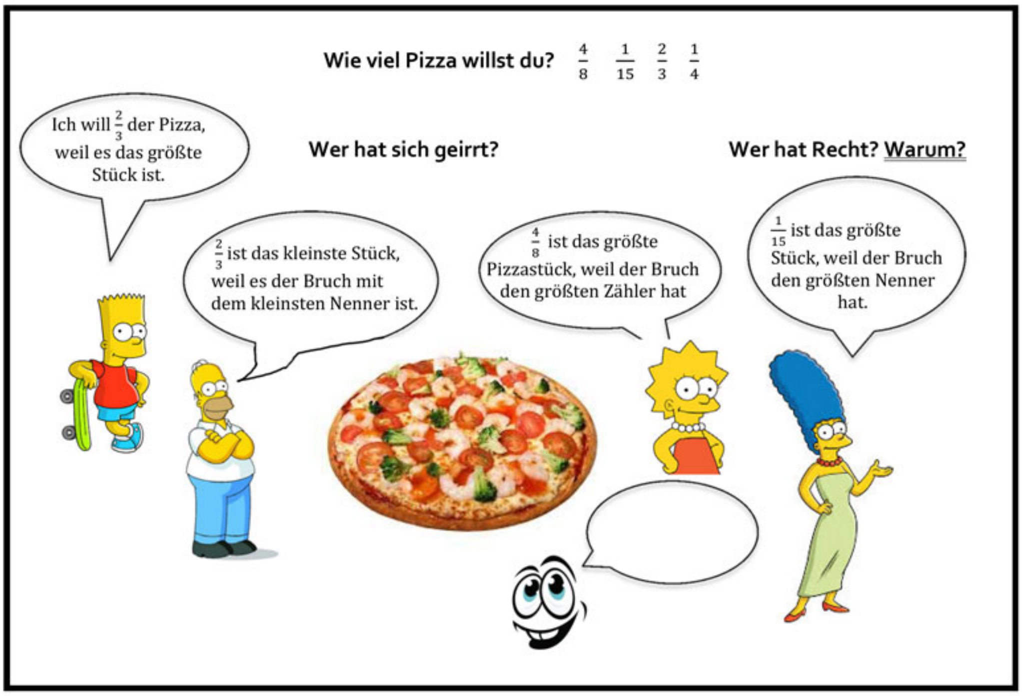


Abbildung 6.54: Brüche - Concept Cartoon (vgl. Keogh, Dabell und Naylor, 2008, S. 95)

In Abbildung 6.55 erfolgte die Begründung der Schülerin zu dem Concept Cartoon ausschließlich schriftlich. Auf jede Aussage wurde dabei Bezug genommen. Im Rahmen der Argumentation wurde richtig gekürzt und auch der Einfluss der Werte von Zähler und Nenner richtig dargestellt (*„ist* *viel kleiner als . . . "*).

$\boxed{\frac{4}{8}}$

Begründung: Bart hat recht, denn $\frac{2}{3}$ ist das größte Stück, weil Lisa sagt $\frac{4}{8}$ ist das größte wobei es nur $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{2}{3}$ ist. ✓
Also hat Lisa unrecht. ✓
Genau so wie Storch den $\frac{1}{15}$ ist viel kleiner als $\frac{2}{3}$. ✓
Homer sagt $\frac{2}{3}$ ist das kleinste Stück, weil es der kleinste Nenner ist,

das stimmt aber nicht. In diesem $\frac{2}{3}$ ist es egal ob es $\frac{2}{3}$ der Nenner kleiner ist als die anderen $(\frac{1}{15}, \frac{4}{8})$ den die sind viel kleiner sie sind von einem Stück so oft geteilt bis halt 8 oder 15 Stücke entstehen. ✓

Abbildung 6.55: Ordnen von Brüchen - Schülerinnenlösung

Ein mittelmäßiger Schüler fertigte zu seinen schriftlichen Aussagen zusätzlich Zeichnungen zum „Vergleich" an (siehe Abbildung 6.56). Auch er hat in seinen Ausführungen richtig gekürzt. Der Schüler bleibt mit den Beschreibungen auf der grafischen Ebene verhaftet. Für ihn ist dies eine gute Leistung, die mit zwei Häkchen gewürdigt wurde.

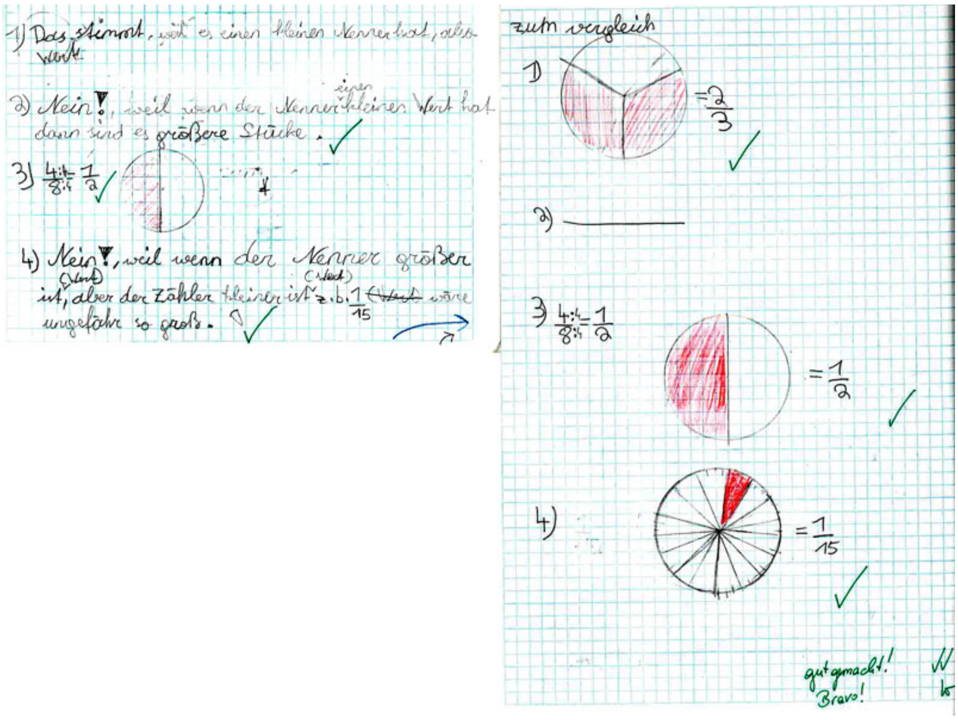
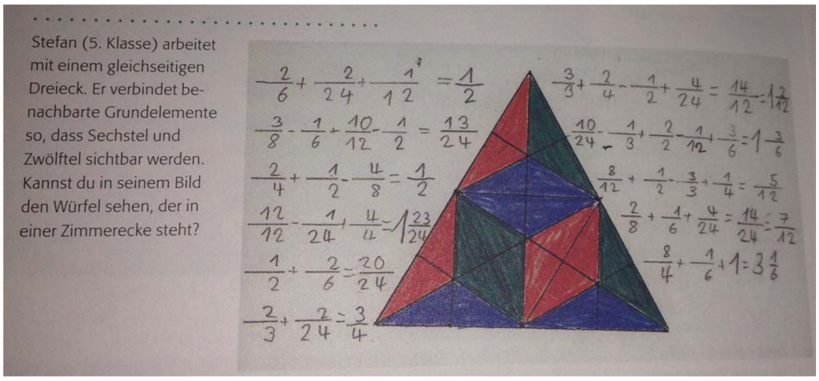
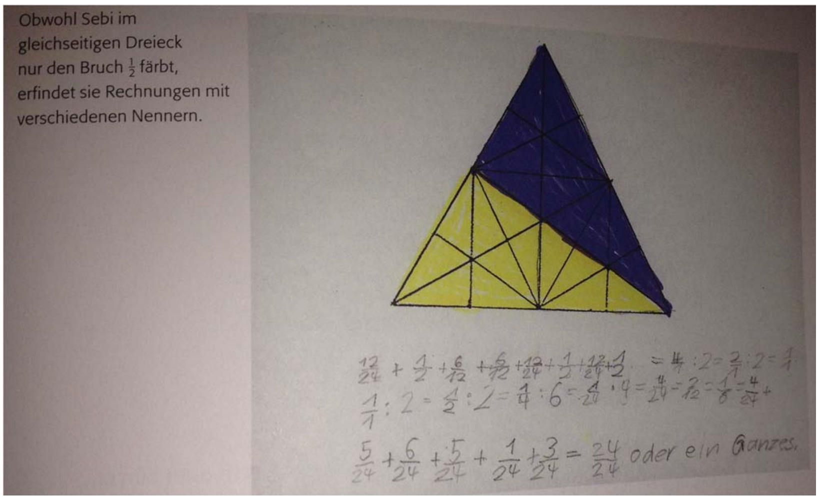


Abbildung 6.56: Ordnen von Brüchen - Schülerlösung

Anhand eines gleichseitigen Dreiecks, das in vierundzwanzig rechtwinkelige Dreiecke unterteilt wurde, eigneten sich die SchülerInnen das Addieren und Subtrahieren von Brüchen an. Anhand der erstellten Zeichnungen und durch das Einfärben der unterschiedlichen Bruchteile, hatten sie jeder Zeit die Möglichkeit ihre Rechnungen selbst zu überprüfen. Obwohl es ihre erste Konstruktion war, erfolgte sie überwiegend sehr sauber, wie in Abbildung 6.59 ersichtlich ist. Das Nachrechnen und Überprüfen der abgebildeten Additionen und Subtraktionen war Teil einer ausgedehnten Übungsphase, die das Bruchrechnen ins Muskelgedächtnis überführen sollte. Die selbsterfundenen Rechnungen wurden schließlich in Partnerarbeit überprüft. Ein beliebter Fehler, der in der Klasse oft vorkommt, nämlich das Gleichheitszeichen zwischen ungleiche Terme zu setzen wurde durch Sebis angegebene Rechnungen aufgegriffen.

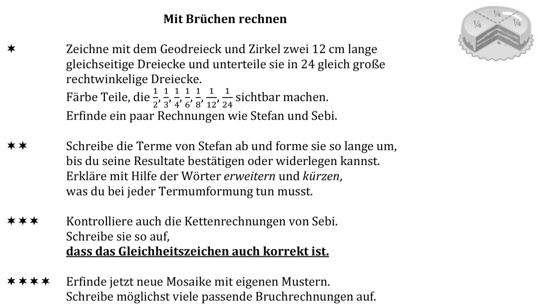


Alle abgebildeten Mosaike stammen aus einer 1. Klasse. Schülerinnen und Schüler haben das ganze Bruchrechnen mit Hilfe eigener Mosaike entdeckt und geübt.
Stefan zum Beispiel hat gemerkt, dass man aus dem Grundelement der Vierundzwanzigstel Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 aufbauen kann (diese Brüche sind wie Lara herausgefunden hat die Teilermenge von 24 = T(24)). Um zu prüfen, ob die Resultate seiner Rechnungen stimmen, muss man alle Brüche **gleichnamig** machen:
Man muss sie so erweitern oder kürzen,
bis alle Brüche einer Rechnung den gleichen Nenner haben.
Willst du zum Beispiel den Term $\frac{2}{6} + \frac{2}{24} + \frac{1}{12}$ ausrechnen, musst du alles in Zwölftel oder in Vierundzwanzigstel umrechnen.



Einen Schritt weiter geht als Stefan geht Sebi.
Sie erfindet sogar Rechnungen mit Mal und Geteilt.
Aus mehreren Rechnungen bildet sie eine Kette,
die bei 1 startet und schließlich wieder auf 1 zurückkehrt.
Schade, dass sie ihre Kettenrechnung falsch aufgeschrieben hat:
Das Gleichheitszeichen steht zwischen ungleichen Termen. (Alptraum einer Mathematikerin!)

Abbildung 6.57: Mit Brüchen rechnen (Ruf und Gallin, 1999c, 296f)



Mit Brüchen rechnen

∗ Zeichne mit dem Geodreieck und Zirkel zwei 12 cm lange gleichseitige Dreiecke und unterteile sie in 24 gleich große rechtwinkelige Dreiecke.
Färbe Teile, die $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ sichtbar machen.
Erfinde ein paar Rechnungen wie Stefan und Sebi.

∗∗ Schreibe die Terme von Stefan ab und forme sie so lange um, bis du seine Resultate bestätigen oder widerlegen kannst.
Erkläre mit Hilfe der Wörter *erweitern* und *kürzen*, was du bei jeder Termumformung tun musst.

∗∗∗ Kontrolliere auch die Kettenrechnungen von Sebi.
Schreibe sie so auf,
dass das Gleichheitszeichen auch korrekt ist.

∗∗∗∗ Erfinde jetzt neue Mosaike mit eigenen Mustern.
Schreibe möglichst viele passende Bruchrechnungen auf.

Abbildung 6.58: Mit Brüchen rechnen 2 (Ruf und Gallin, 1999c, 297f)

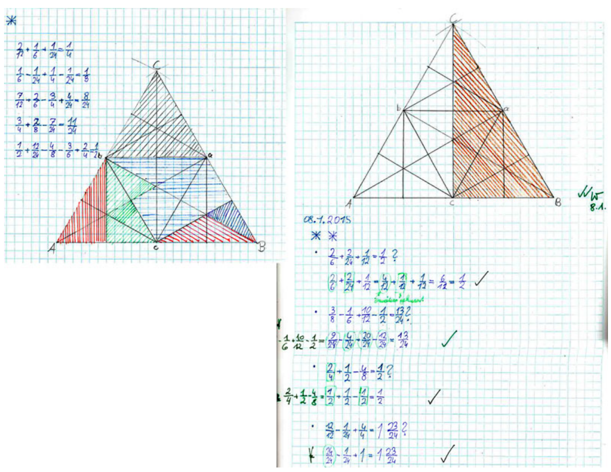


Abbildung 6.59: Mit Brüchen rechnen - Schülerlösung

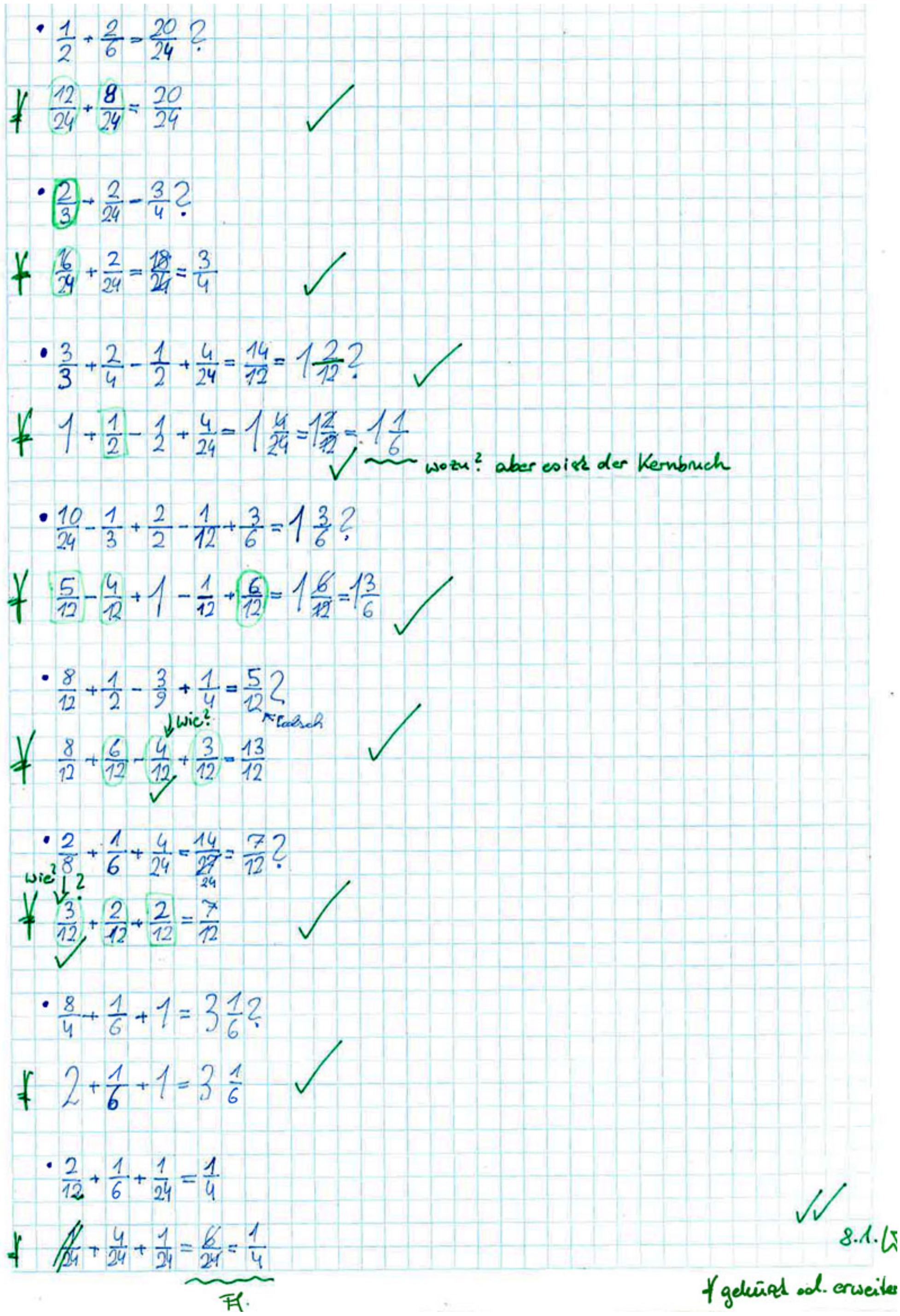
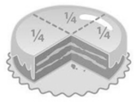


Abbildung 6.60: Mit Brüchen rechnen - Schülerlösung

Du hast jetzt schon viele **Bruchrechnungen** erfunden und gelöst.
Du hast addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert.
Schau dir deine Rechnungen noch einmal an.
Kannst du erklären, wie du gerechnet hast?
Ginge alles auch ohne Zeichnungen und Muster?
Rindest du Regeln für das Bruchrechnen?

Regeln des Bruchrechnens



✶ Erkläre, wie du zwei Bruche addierst oder subtrahierst.
Mach ein paar Beispiele und formuliere eine Regel,
bei der keine Zeichnung mehr benötigt wird.

✶✶ Wie multiplizierst du einen Bruch mit einer Zahl?
Wie dividierst du einen Bruch durch eine ganze Zahl?
Was bedeutet das in den Mosaiken?

Abbildung 6.61: Brüche - Regeln des Bruchrechnens

Im abschließenden Auftrag sind die bisher gewonnen Erkenntnisse zusammenzufassen. Erst jetzt sind die SchülerInnen angehalten, sich von der Sprache des Verstehens zu lösen und ihre Einsichten in die Sprache des Verstandenen überzuführen. Hierzu sollen sie zunächst Rückschau halten und ihre bisherigen Erkenntnisse Revue passieren lassen und nachlesen. Beim Finden einer Regel für die Addition und Subtraktion von Brüchen sollen sie sich dabei von der grafischen Ebene lösen. Bei der Multiplikation respektive Division eines Bruchs mit/durch eine/r Zahl sollen sie sich zum besseren Verständnis explizit auf die grafische Umsetzung beziehen.

7 Fazit

≪ Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n'y a rien à ajouter, mais quand il n'y a plus rien à retrancher. ≫

„Vollkommenheit entsteht nicht dann, wenn man nichts mehr hinzuzufügen hat, sondern wenn man nichts mehr wegnehmen kann."

Antoine de Saint-Exupéry (1931)
Terre des hommes [Wind, Sand und Sterne]

Die vorliegende Arbeit stellt das dialogische Lernprinzip in Theorie und Praxis vor. Rückblickend lässt sich festhalten, dass diese Art des Unterrichtens meinen Blick auf den Konstruktionsprozess des Wissens von SchülerInnen verändert hat. Gerade die Beispiele der beiden Begründer Urs Ruf und Peter Gallin bieten den SchülerInnen die Möglichkeit, an ihrem Wissensnetz anzuknüpfen und beinhalten eine immense Leistungsdifferenzierung. In den Vorstellungen und Überlegungen der SchülerInnen sind bereits viele mathematische Schätze vorhanden, die sie so selbst ans Licht bringen können. Nicht die Lehrkraft erklärt wie es funktioniert, sondern das bisherige Wissen und Können der SchülerInnen wird (heraus)gefordert und befähigt sie dazu, tiefer in die Thematik einzutauchen. Mathematik ist dadurch keine nebulöse, undurchsichtige, rätselhafte Wissenschaft, die Individuen können oder nicht können.

Ein wesentlicher Aspekt dieses Konzeptes ist die hohe Anforderung an die sprachlichen Ausdrucksfähigkeiten und das Leseverständnis der SchülerInnen. Diese müssen im Unterricht thematisiert werden und durch geeignete Strategien unterstützt werden. Für einige SchülerInnen war es zunächst auch ungewohnt, selbstständig mathematische Gedanken zu formulieren und zu Papier zu bringen. Daran müssen sie schrittweise herangeführt werden, die Erwartungen der Lehrkraft dürfen dabei nicht zu groß sein. Die autonomen Arbeitsphasen fallen guten SchülerInnen merklich leichter, führen aber auch bei schwächeren SchülerInnen zu mehr Selbstvertrauen und Eigenständigkeit. In jedem Fall gilt, dass nur Antworten verstanden werden können, denen eine Frage antezediert. Stellen sich diese Fragen nicht, knüpfen auch die Antworten nirgends an. Unabdingbar ist daher eine positive Fehlerkultur.

Als Lehrkraft ist es eine große Umstellung, sich auf die Sprache des Verstehens einzulassen. Immer das Idealbild einer Aufgabe im Kopf, dominiert(e) bei mir häufig die Defizitperspektive. Der Blick auf Qualitäten muss geschult werden und es bedarf hier einiger Zeit alte Muster abzulegen. Das unterschiedliche Arbeitstempo der SchülerInnen kann gut dadurch kompensiert werden, SchülerInnen, die schneller arbeiten, den Auftrag zu erteilen selbst Beispiele zu erfinden und auszutauschen bzw. den nächsten Auftrag zu beginnen. Für schwächere SchülerInnen ist die WIR-Phase essentiell. Hier können sie sich an einer Struktur anhalten und sich notfalls dem Automatismus hingeben.

Literaturverzeichnis

Antoine de Saint-Exupéry (1931). *Terre des hommes [Wind, Sand und Sterne]*. ISBN: 3-7920-0030-X (siehe S. 41, 99).

Antoine de Saint-Exupéry (1942). *Pilote de guerre [Flug nach Arras]*. Karl Rauch-Verlag, Düsseldorf. ISBN: 3-7920-0035-0 (siehe S. 5, 28).

Antoine de Saint-Exupéry (1943). *Le petit prince [Der kleine Prinz]*. Karl Rauch-Verlag, Düsseldorf. ISBN: 3-7920-0018-0 (siehe S. iii, 37).

Antoine de Saint-Exupéry (1948). *Citadelle [Die Stadt in der Wüste]*. Karl Rauch-Verlag, Düsseldorf. ISBN: 3-7920-0037-7 (siehe S. 1, 11, 17, 22, 31, 34).

Bruder, Regina (2003). *Konstruieren - auswählen - begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben.* Jahresheft 2003. Friedrich Verlag. ISBN: 978-3850311311 (siehe S. 25, 27).

Gallin, Peter (1997). *101 Mathematikaufgaben: Übungen zwischen Alltag und Abstraktion*. sabe AG. ISBN: 3-252-06049-3.

Goetz, Nadja Badr (2007). *Das Dialogische Lernmodell*. Martin Meidenbauer Verlagsbuchhandlung. ISBN: 978-3-89975-476-6.

Häring, Philipp (2011). *Modulare Förderung Starterkit Mathematik TERME UND GLEICHUNGEN Jgst. 5*. Hrsg. von Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. URL: `http://www.isb-mittelschule.de/userfiles/Modularisierung/Mathe/Starterkits_Mathe_2011/5.4_Terme-Gleichungen_11-10-10.pdf` (besucht am 14. 03. 2015) (siehe S. 53).

Hußmann, Stefan (2011). *Mathematik entdecken und erforschen*. Cornelsen Verlag. ISBN: 978-3-464-59173-4.

jusline.at (2015). *§14 LBV Beurteilungsstufen (Noten)*. Hrsg. von JUSLINE GmbH. URL: `http://www.jusline.at/14_Beurteilungsstufen_(Noten)_LBV.html` (besucht am 14. 03. 2015) (siehe S. 38).

Keller, Stefan, Felix Winter und Urs Ruf (2008). *Besser lernen im Dialog Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis*. Hrsg. von Stefan Keller und Felix Winter und Urs Ruf. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH. ISBN: 3-7800-4913-9 (siehe S. 17, 23–25, 27, 33, 35).

Keogh, Brenda, John Dabell und Stuart Naylor (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education*. Millgate House Publishers. ISBN: 0955626013 (siehe S. 62, 74, 91).

Kratz, Henrik (2011). *Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht*. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH. ISBN: 978-3-7800-1079-7.

Liebscher, Marlies, Gustav Breyer, Sieglinde Fürst, Helmut Heugl, Michaela Kraker, Christa Preis, Erich Svecnik, Ilse Liegl und Gerhard Plattner (2013). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe*. Hrsg. von BIFIE. 2., aktualisierte Auflage. Bd. 1. Österreichisches Zentrum für Persönlichkeitsentwicklung und soziales Lernen. ISBN: 978-3850311311 (siehe S. 27).

Ruf, Urs und Peter Gallin (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule*. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH (siehe S. 5, 11, 12, 20, 23).

Ruf, Urs und Peter Gallin (1999a). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Austausch unter Ungleichen*. 4. Auflage 2011. Bd. 1/2. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH. ISBN: 3-7800-2008-4 (siehe S. 5–8, 12–14, 17, 21–23, 29, 31, 32, 38, 39).

Ruf, Urs und Peter Gallin (1999b). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Spuren legen, Spuren lesen*. 4. Auflage 2011. Bd. 2/2. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH. ISBN: 3-7800-2007-6 (siehe S. 9, 10, 14, 18–20, 22, 23, 30, 34).

Ruf, Urs und Peter Gallin (1999c). *Ich mache das so!. Sprache und Mathematik. 4.-5. u*. Lehrmittelverlag. ISBN: 3-9067-1942-1 (siehe S. 25, 75, 77, 82–86, 89, 94, 95).

Salner-Gridling, Ingrid (2003). *Querfeldein: individuell lernen - differenziert lehren*. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. ISBN: 978-3850311311 (siehe S. 27).

Stewart, Ian (2014). *Welt-Formeln*. Rowohlt Taschenbuch Verlag. ISBN: 349963029X (siehe S. 51).

Ulm, Volker (2004). *Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen*. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH. ISBN: 3-7800-4939-2 (siehe S. 15).

Wagner, Rosa (2009). *Modulare Förderung Starterkit Mathematik FLÄCHEN Jgst. 5*. Hrsg. von Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. URL: http://www.isb-mittelschule.de/userfiles/Modularisierung/Mathe/Starterkits_Mathe_2011/5.3.3_Flaechen_Ueberarbeitung_11-10-10.pdf (besucht am 14. 03. 2015) (siehe S. 49).

Weber, Christof (2010). *Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht*. Friedrich Verlag. ISBN: 978-3-78000-1047-6 (siehe S. 23).

Abbildungsverzeichnis

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name:	Mag.[a] Elisabeth Wehofschitsch
Geburtsdatum:	15.09.1984
Geburtsort:	Wien
Staatsbürgerschaft:	Österreich

Bildungsweg

2010–2015	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
2003–2009	Studium der Internationalen Betriebswirtschaftslehre
1995–2003	Gymnasium Sacré-Cœur

Wien, 2015