universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Sudoku –
Wie viel Mathematik steckt wirklich drin?“

Verfasserin

Reingard Auer

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von:	ao. Univ.-Prof. Dr. Mag. Christoph Baxa

Inhaltsverzeichnis

So fördert Sudoku die Denkflexibilität und die Kombinationsgabe und ist somit für unser Gehirn effektiver als beispielsweise ein Kreuzworträtsel, bei dem lediglich bereits vorhandenes Halbwissen abgefragt wird.
Dr. Hartmut Fahnenstich [24]

1 Einleitung

Als Rätsel- und Mathematikliebhaberin fragte ich mich eines Tages beim Betrachten eines Sudokus, welche Symmetrien bei einem solchen Gitter auftreten. So entstand die Idee eine Diplomarbeit über die mathematischen Hintergründe von Sudokus zu schreiben. Dabei bin ich auf viele interessante Fakten und mathematische Inhalte gestoßen, die ich im Vorfeld nicht erwartet habe. So etwa die Tatsache, dass das Lösen von Sudokus durch die kombinatorische Denkarbeit viele Neurone beschäftigt, und somit das Gehirn fit hält. [2, S. 101] Der Zusammenhang des Rätsellösens mit der Leistungsfähigkeit des Gehirn war für mich, nicht zuletzt aus persönlicher Erfahrung, schon länger naheliegend. Es schwarz auf weiß zu lesen, war aber trotzdem sehr befriedigend.

Um einen Überblick über das Thema der Arbeit zu vermitteln, wird an dieser Stelle ein kurzer Abriss über den Inhalt formuliert.

Nach einer kurzen Begriffsklärung in Kapitel 2 werden unter 3 die grundlegenden mathematischen Definitionen, Sätze und Lemmata angegeben und bewiesen. Erst Kapitel 4 beginnt mit dem Zusammenhang zwischen Mathematik und Sudokus, wobei hier noch mit dem allgemeineren Fall, den Lateinischen Quadraten, gearbeitet wird. Die Erkenntnis der Ergänzung eines Lateinischen Rechtecks um eine Zeile wird in 4.1 ebenso bewiesen wie die Vervollständigung eines Lateinischen Quadrats der Ordnung n mit maximal $n-1$ gefüllten Zellen. Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem Thema Sudokurätsel. Nach einem kurzen Schwenk in die Geschichte wird auf die Erzeugung dieser beliebten Knobelaufgaben eingegangen, bevor einige verschiedene Lösungsstrategien thematisiert werden. Neben der Elimination und der Vervollständigung, die jeder Sudokurätsellöser und jede Sudokurätsellöserin ständig verwendet, werden auch Spezialfälle und besondere Motive vorgestellt, deren Hilfestellung zum Finden eines Eintrages nicht auf den ersten Blick klar ist. In Kapitel 6 kommt man endlich zum Namensgeber dieser Arbeit, nämlich dem Sudoku im engeren Sinn, womit ein gelöstes Sudokurätsel gemeint ist. Diese werden meist mit Genugtuung des Knoblers oder der Knoblerin zur Seite gelegt, bieten aber für Mathematiker und Mathematikerinnen viele interessante Erkenntnisse. So kann, wie bei den Lateinischen Quadraten bereits erwähnt, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten der Füllung des 9×9 – Gitters, entsprechend den Regeln eines Sudokus, ermittelt werden. Im Anschluss wird die Anzahl der Möglichkeiten gesenkt, indem Symmetrien zugelassen werden. Im Kapitel 6.3 wird noch einmal auf Sudokurätsel eingegangen und deren maximale und minimale Hinweise, die für die eindeutige Lösung eines Sudokus vorhanden sein müssen. Da die Vervollständigung eines Sudokus zur Lösung eines Graphenfärbungsproblems äquivalent ist, wird auch darauf kurz eingegangen. Im Anschluss wird der Zusammenhang zwischen Verknüpfungstabellen und Lateinischen Quadraten thematisiert. Kapitel 8 beschäftigt sich mit den Sudokuverwandten, die in diversen Medien teilweise fälschlich als Sudoku bezeichnet werden. Besonders interessant ist dabei das Positionssudoku, das noch eine weitere Symmetrie liefert. In 9 wird kurz die Bedeutung des Sudokus im Unterricht erwähnt, bevor Kapitel 10 noch einige noch nicht beantwortete Fragen thematisiert.

Falls nach dieser Zusammenschau jemand vermutet, dass dank der vorgestellten Lösungsstrategien so ein Rätsel keine Herausforderung mehr bietet, muss ich ihn leider enttäuschen. Diese Methoden erleichtern das Rätseln vielleicht etwas, wenn sie eingeübt sind, sind aber kein exaktes Rezept zum Lösen. Sie bieten nur einige Motive mehr, die einem bei einem Sudokurätsel eventuell auffallen könnten. Allerdings könnte man als Ziel dieser Arbeit bezeichnen, dass das gelöste Rätsel noch eines Blickes gewürdigt wird, bevor das Sudoku im Papiermüll verschwindet.

2 Nomenklatur

Bevor in das Thema eingestiegen wird, müssen hier kurz die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe erklärt werden, die großteils aus der Arbeit „Sudoku im Mathematikunterricht“ von Christian Elsholtz und Annette Mütze [5, S. 72f] übernommen wurden.

Sudokugitter

Ein Sudokugitter (kurz Gitter) ist ein Quadrat, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist. Es ist in 81 gleichgroße Quadrate unterteilt ist, wovon jeweils neun Felder zu neun größeren Quadraten zusammengefasst werden.

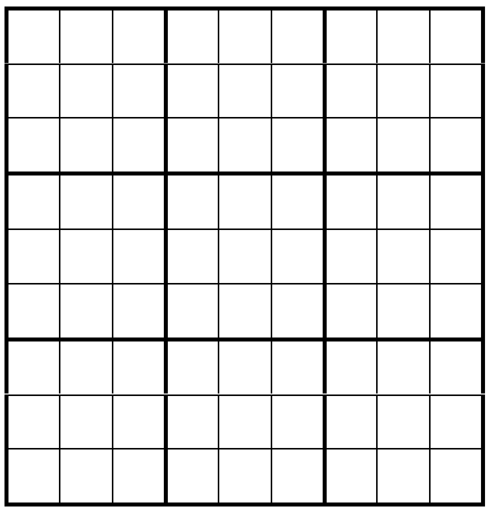

Abbildung 1: Sudokugitter

Reihe

Mit einer Reihe beziehungsweise einer Zeile sind neun Felder gemeint, die nebeneinander liegen. Die Reihen werden von oben nach unten nummeriert. Reihe 1 ist in Abbildung 2 markiert.

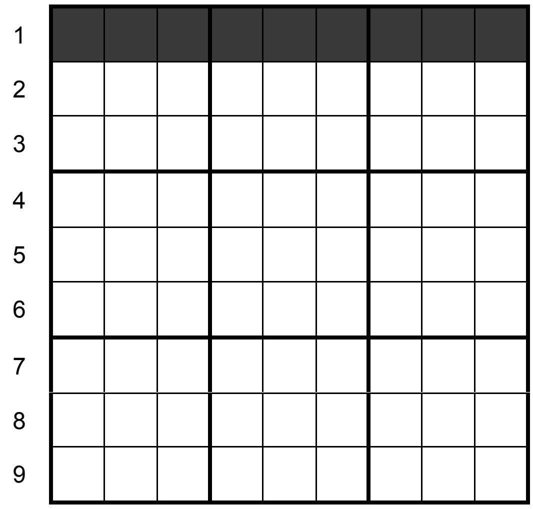

Abbildung 2: Reihe

Die ersten drei Reihen bilden zusammen das erste, die Zeilen vier bis sechs das zweite und die unteren drei Reihen das dritte Band.

Spalte

Von einer Spalte spricht man, wenn die neun Felder, die untereinander liegen, gemeint sind. Sie werden von links nach rechts nummeriert. Spalte 2 ist in Abbildung 3 gefärbt.

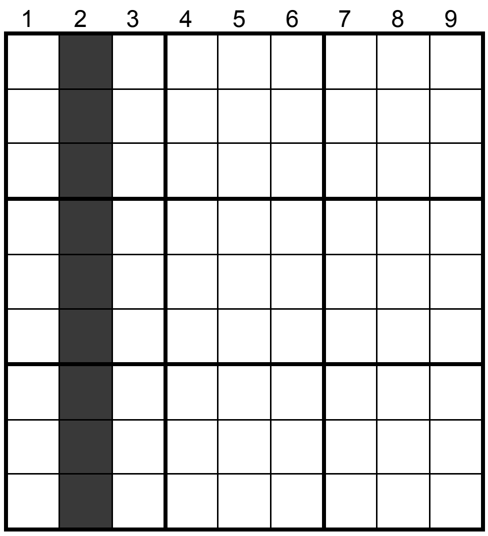

Abbildung 3: Spalte

Die Spalten eins bis drei erzeugen miteinander die erste, vier bis sechs die zweite und sieben bis neun die dritte Säule.

Box

Eine Box oder ein Block ist ein 3×3 Feld, welches durch dicke Linien begrenzt ist. Sie werden von links oben nach rechts unten nummeriert. In Abbildung 4 ist Box 2 markiert. Drei nebeneinander oder untereinander liegende Boxen nennt man einen Abschnitt oder Streifen, beziehungsweise ein Band oder eine Säule.

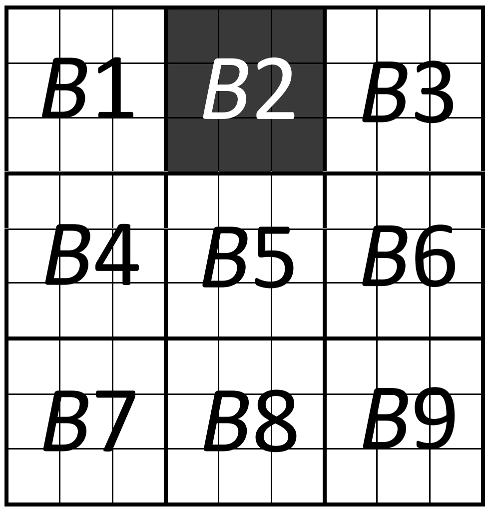

Abbildung 4: Box

Zelle

Eine Zelle ist eines von 81 Feldern im Sudokugitter. Zur Beschriftung einer speziellen Zelle wird zuerst die Reihe und anschließend die Spalte genannt. Zelle (5, 4) entspricht der 4. Zelle in der 5. Reihe, wie in Abbildung 5 visualisiert wird.

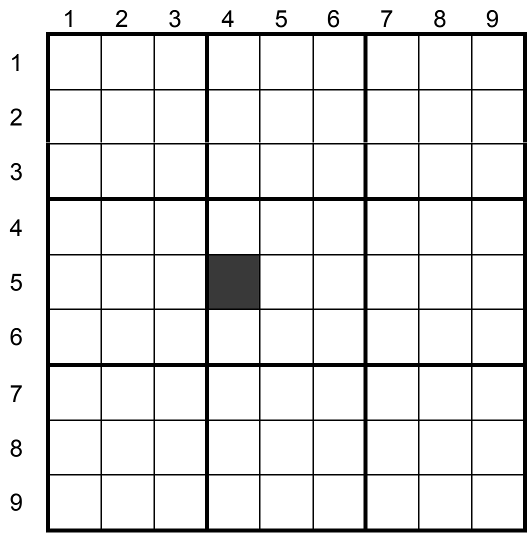

Abbildung 5: Zelle (5,4)

3 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen vorgestellt, welche im weiteren Verlauf Verwendung finden. Die grundlegenden algebraischen Inhalte sind, wenn der Kurzbeleg nicht anderes aussagt, den Büchern „Algebra“ von Thomas W. Hungerford [9] beziehungsweise Jens Carsten Jantzen und Joachim Schwermer [10] entnommen. Bei Interesse können dort weitere Details nachgelesen werden.

3.1 Gruppentheorie

Die wichtigsten Definitionen und Grundbegriffe der Gruppentheorie werden hier angegeben.

Verknüpfung

Definition: Eine Verknüpfung (oder eine binäre Verknüpfung) auf einer nichtleeren Menge M ist eine Abbildung $M \times M \to M$; diese ordnet jedem geordneten Paar (a,b) mit $a,b \in M$ ein Element $a \circ b$ in M zu.

Gruppe

Definition: Eine Gruppe G ist eine nichtleere Menge G versehen mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, so dass gilt:

(1) Die Verknüpfung $\circ$ ist *assoziativ*, d.h., $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ für alle $x, y, z \in G$.

(2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e \circ g = g \circ e = g$ für alle $g \in G$ gilt. [Dieses Element ist eindeutig festgelegt, denn für jedes andere Element e' in G mit $e' \circ g = g \circ e' = g$ für alle $g \in G$ gilt $e' = e' \circ e = e$. Man nennt e das *neutrale Element* von G.]

(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein h, so dass $h \circ g = g \circ h = e$ gilt. [Zu vorgegebenem $g \in G$ ist dieses Element eindeutig bestimmt, denn ist h' irgendein Element in G mit $h' \circ g = e$, so gilt $h' = h' \circ e = h' \circ (g \circ h) = (h' \circ g) \circ h = e \circ h = h$. Man nennt h das *inverse Element* von g in G.]

Ist in einer Gruppe G für alle Elemente $x, y \in G$ die Bedingung

$$x \circ y = y \circ x$$

erfüllt, so heißt G *kommutativ* oder *abelsch*.

Untergruppen

Definition: Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge H von G heißt Untergruppe von G, geschrieben: $H \leq G$, falls $(H, \circ)$ eine Gruppe mit der durch Restriktion von G auf H erhaltenen Verknüpfung $\circ$ ist. Das bedeutet: Es ist $e \in H$; für $h \in H$ ist auch $h^{-1} \in H$, und für $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \circ h_2 \in H$. Eine unmittelbare Folgerung der Definition ist das folgende Kriterium:

Lemma: Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $ab^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

Beweis: Diese Bedingungen sind hinreichend, denn: Es gibt ein $h \in H$, also $e = hh^{-1} \in H$. Sind $a, b \in H$, so gilt $b^{-1} = eb^{-1} \in H$, also auch $a\left(b^{-1}\right)^{-1} = ab \in H$. Die Notwendigkeit ist klar.

Symmetrische Gruppe und Permutationen

Definition: Ist M eine nichtleere Menge, so ist die Menge S_M der bijektiven Abbildungen $M \to M$ eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung (Komposition) von Abbildungen. Sie heißt die symmetrische Gruppe von M; ihre Elemente werden auch Permutationen von M genannt. Die identische Abbildung ist das neutrale Element. Ist $M = \{1, ..., n\}$, so schreibt man S_n anstelle von S_M und nennt S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n. Die Ordnung von S_n ist gleich $n!$.

Transposition

Definition: Eine Permutation, die nur zwei Elemente miteinander vertauscht, wird Transposition genannt.

3.1.1 Satz von Hall oder Heiratssatz

Dieser Satz der endlichen Mengenlehre und sein Beweis wurden größtenteils aus dem „Buch der Beweise“ von Martin Aigner und Günter M. Ziegler [1, S. 174f] übernommen. Er bildet den Ausgangspunkt des Gebietes „Matching-Theorie“, wie

auch der zweite Name des Satzes von Philip Hall vielleicht vermuten lässt. An folgendem Beispiel wird der Ursprung des Namens illustriert.
Es gibt eine Menge $\{1,...,n\}$ von Mädchen und eine Menge X von Jungen. Wenn ein Junge x und ein Mädchen i daran interessiert wären zu heiraten, wird dies mit $x \in A_i$ beschrieben. Somit ist A_i die Menge der Heiratskandidaten des Mädchens i. Eine Folge $x_1,...,x_n$, die als System von verschiedenen Vertretern benannt werden kann, würde dann eine Massenhochzeit ohne Bigamie, wo jedes Mädchen einen Jungen ehelicht, den es mag, bedeuten.

Satz: Sei $A_1, A_2,..., A_n$ eine Familie von [nichtleeren] Teilmengen einer endlichen Menge X. Ein System von verschiedenen Vertretern für diese Folge existiert dann und nur dann, wenn für $1 \le m \le n$ jede Vereinigung von m Mengen A_i mindestens m Elemente enthält.
Diese Bedingung wird im weiteren mit (H) abgekürzt.

Kritische Familie

Definition: Eine kritische Familie ist eine Unterfamilie von ℓ Mengen, wobei $1 \le \ell < n$ ist, deren Vereinigung exakt ℓ Elemente enthält.

Beweis des Heiratssatzes:

notwendig: Wenn die Vereinigung der m Mengen A_i weniger als m Elemente enthält, dann können die m verschiedenen Mengen nicht durch m unterschiedliche Elemente vertreten werden.

hinreichend: Dieser Beweis mittels Induktion von $n-1$ nach n stammt von Thomas E. Easterfield [4] und wurde von Paul R. Halmos und Herbert E. Vaughan [7] wieder entdeckt.

- Induktionsbeginn: $n = 1$:
  Daraus folgt, dass auch $m = 1$ ist. Nur A_1 existiert und darf nach Definition nicht leer sein. Sie enthält also mindestens ein Element und erfüllt die Bedingung H.
- Induktionsvoraussetzung: Die Implikation gilt für $n-1$, das heißt, es existiert ein System aus verschiedenen Vertretern für $A_1, A_2,..., A_{n-1}$
- Induktionsschritt: $n-1 \to n$
  Um dies zu zeigen, müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Fall 1: Es gibt keine kritische Familie

Zu Beginn wird ein beliebiges Element x von A_n aus der Grundmenge X entfernt. Jetzt wird die Familie $A_1', A_2', ..., A_{n-1}'$ betrachtet, wobei $A_i' := A_i \setminus \{x\}$ ist. Aufgrund der Voraussetzung, dass es keine kritische Familie gibt, enthält die Vereinigung von $m \leq n-1$ Mengen A_i' mindestens m Elemente auch ohne x. Laut Induktionsvoraussetzung existiert ein System $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ an verschiedenen Vertretern für $\left\{A_1', A_2', ..., A_{n-1}'\right\}$. Wird nun $x_n = x$ gesetzt, so erhält man ein System für die ganze Familie.

Fall 2: Es gibt eine kritische Familie

Durch Umbenennung kann sichergestellt werden, dass $\{A_1, ..., A_\ell\}$ eine kritische Familie ist. Die Vereinigung X' enthält folglich genau ℓ Elemente. Weil $\ell < n$ ist, existiert nach Induktionsvoraussetzung ein System von verschiedenen Vertretern für $A_1, ..., A_\ell$. Somit gibt es Elemente $x_1, ..., x_\ell$ von X', deren $x_i \in A_i \quad \forall i \leq \ell$.

Aus der restlichen Familie $A_{\ell+1}, ..., A_n$ werden beliebige m Mengen ausgewählt. Die Vereinigung von $A_1, ..., A_\ell$ und diesen m Mengen enthält wegen (H) mindestens $\ell + m$ Elemente. Somit müssen die m Mengen mindestens m Elemente enthalten, die nicht in X' enthalten sind. (H) ist also für die Mengen $A_{\ell+1} \setminus X', ..., A_n \setminus X'$ erfüllt. Wegen der Induktionsvoraussetzung existiert ein System von verschiedenen Vertretern für $A_{\ell+1}, ..., A_n$, das disjunkt zu X' ist. Durch Verknüpfung der Teilergebnisse ergibt sich ein System von verschiedenen Vertretern $x_1, ..., x_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n$ für alle Mengen A_i, was gezeigt werden sollte.

3.1.2 Das Burnside-Lemma

Durch das Lemma von Burnside können Zählprobleme, die im Zusammenhang mit Symmetrien stehen, gelöst werden. [19, S. 1] Bevor es vorgestellt werden kann, müssen noch ein paar Begriffe erläutert werden, deren Definitionen nun folgen.

Partition von G

Definition: Eine Partition einer Menge M ist eine disjunkte Zerlegung von M in nichtleere Teilmengen, die Klassen (der Partition) genannt werden. [17, S. 50]

Nebenklassen

Definition: Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Die Mengen Ha (mit
$a \in G$) werden Rechtsnebenklassen von H in G genannt. Die Mengen aH (mit $a \in G$) werden Linksnebenklassen von H in G genannt.

Die Linksnebenklassen (beziehungsweise die Rechtsnebenklassen) von H in G bilden eine Partition von G. [19, S. 1]

Gruppenordnung

Definition: Die Kardinalität von G, also die Anzahl der Elemente einer Menge G, wird mit $|G|$ bezeichnet und „Ordnung der Gruppe G" genannt.

Fixpunkterzeugende

Definition: G sei eine Untergruppe der Gruppe aller Permutationen auf der Grundmenge X. Die Elemente von G werden G-Permutationen genannt. Man sagt auch, dass G auf X operiert. Die Untergruppe G_x enthält alle G-Permutationen, die $x \in X$ fix lassen, also bei deren Anwendung das Element x der Grundmenge unverändert bleibt.

$$G_x = \{ g \in G \,|\, g(x) = x \} \leq G$$

Ist $e \in G$ das neutrale Element von G, so gilt $e(x) = x \quad \forall x \in X$ und es gilt $g(h(x)) = (g \circ h)(x) \quad \forall g,h \in G \quad \forall x \in X$.

Orbit

Definition: Der Orbit O_x von $x \in X$ ist die Menge aller Elemente $g(x)$, die durch Anwendung einer G-Permutation auf x aus X erhalten werden.

$$O_x = \{ g(x) \,|\, g \in G \}$$

Die Orbits bilden eine Partition von X, da sie die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalentsrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = g(x)$ bilden.

<u>Lemma:</u> Für alle $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ G_x = h \circ G_x \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

Das impliziert den Beitrag eines Elements von jeder Linksnebenklasse zum Orbit O_x.

<u>Beweis:</u> Aus $g \circ G_x = h \circ G_x$ ergeben sich der Reihe nach die folgenden Implikationen:

$$g \circ G_x = h \circ G_x \Rightarrow h \in g \circ G_x \Rightarrow \exists f \in G_x : h = g \circ f \Rightarrow \exists f \in G_x : h(x) = g(f(x)) = g(x)$$

Umgekehrt ergeben sich aus $g(x) = h(x)$ die Implikationen

$$g(x) = h(x) \Rightarrow g^{-1} \circ h \in G_x \Rightarrow h \in g \circ G_x \Rightarrow g \circ G_x = h \circ G_x,$$

da zwei Linksnebenklassen entweder disjunkt oder ident sind. [19, S. 1]

<u>Lemma:</u> Es sei G eine endliche Gruppe, die auf der endlichen Menge X operiert. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$|G| = |O_x| \cdot |G_x|.$$

<u>Beweis:</u> Das doppelte Abzählen der Relation $S = \{(g,y) \in G \times X \mid y = g(x)\}$ findet hier Verwendung. Da es für jedes $g \in G$ exakt ein $y \in X$ mit $y = g(x)$ gibt, ist $|S| = |G|$. Für $y \in O_x$, beispielsweise $y = g_0(x)$ existieren genau $|G_x|$ Elemente h aus G mit $h(x) = y$. Das sind jene Elemente für die $h = g_0 g$ mit $g \in G_x$ gilt. Wenn y nicht im Orbit von x liegt, existiert kein $(g,y) \in S$. Daraus folgt:

$$|S| = |G| = \sum_{y \in O_x} |G_x| = |O_x| \cdot |G_x| \text{ [21, S.1]}$$

Die Menge der Orbits wird mit X/G bezeichnet und ihre Anzahl durch $|X/G|$ angegeben. Die Menge aller Fixpunkte von g ist als $fix(g) = \{x \in X | g(x) = x\}$ definiert. $A \in \{0,1\}^{X \times G}$ sei die $0,1$-Matrix, die an den Stellen wo $g(x) = x$ auftritt, eine Eins enthält und andernfalls eine 0. Die Reihe $A[x,*]$ enthält genau $|G_x|$ Einsen. Die

Spalte $A[*,g]$ besitzt exakt $|fix(g)|$ 1-Einträge. Durch die Methode des doppelten Abzählens folgt

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

Mittels des Burnside-Lemmas werden die Berechnungen von $|X/G|$ auf Fixpunktberechnungen reduziert.

<u>Burnside Lemma:</u> Die Anzahl der Orbits stimmt überein mit der mittleren Anzahl von Fixpunkten. Formal:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

<u>Beweis:</u> Es sei $x_1,...,x_{|X/G|}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Orbits. Die Gleichung ergibt sich aus folgender Rechnung

$$|X/G| = \sum_{i=1}^{|X/G|} 1 = \sum_{i=1}^{|X/G|} \sum_{y \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_{x_i}|} = \sum_{i=1}^{|X/G|} \sum_{y \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_y|} =$$
$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in X} |G_x| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |fix(g)| \qquad \text{[19, S. 2]}$$

Durch geschickte Verwendung der Summation lässt sich zweimal die Summe anstelle der Kardinalität der Menge, über die gezählt wird, schreiben. Um das dritte Gleichheitszeichen zu verstehen, muss auf die unterschiedlichen Definitionen eingegangen werden. So bedeutet $y \in O_x$, dass es ein g aus G gibt, für das gilt, dass $g(x) = y$ ist. Durch Verwendung der Umkehroperation g^{-1} ergibt sich die Gleichheit von $g^{-1}(g(x))$ und $g^{-1}(y)$. Das hat zur Folge, dass $x = g^{-1}(y)$, also ein Element von O_y ist. Deshalb gilt $y \in O_{x_i}$, wenn $x_i \in O_y$ ist. So ist $O_{x_i} = O_y$ und somit $|O_{x_i}| = |O_y|$. Wegen des vollständigen Repräsentantensystems ist die nächste Umformung erlaubt. Zuletzt werden noch die beiden zuvor erwähnten Zusammenhänge $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$ und $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |fix(g)|$ benötigt und das Lemma ist bewiesen.

3.2 Graphentheorie

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq V^2$; die Elemente von E sind also 2-elementige Teilmengen von V. Die Elemente von V nennt man die Ecken (oder Knoten) des Graphen G, die Elemente von E seine Kanten. Bildlich kann man G darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind. [3, S. 2]

Grad einer Ecke

Definition: Die Anzahl der Kanten, die in einer Ecke enden, gibt den Grad einer Ecke an.

Bipartiter Graph

Definition: Ein bipartiter Graph enthält nur Ecken, die in zwei Mengen unterteilbar sind, und Kanten, die ausschließlich zwischen den beiden unterschiedlichen Mengen verlaufen. [12, S. 237f]

4 Lateinische Quadrate

Die Lateinischen Quadrate gehören zu den ältesten kombinatorischen Konfigurationen. [1, S. 203] Ihren Ursprung haben sie im Mittelalter. [2, S. 102] Von Leonard Euler, der sie intensiv studiert, stammt die Bezeichnung „Lateinische Quadrate“, da er für die Symbolmenge das lateinische Alphabet verwendete. [20, S. 4] Im Weiteren wird hauptsächlich das Kapitel „Vervollständigung von Lateinischen Quadraten“ aus dem „Buch der Beweise“ von Martin Aigner und Günter M. Ziegler [1, S. 203-210] herangezogen.

Definition: Das Lateinische Quadrat besitzt n^2 Felder, welche mit n verschiedenen Symbolen gefüllt werden, die in jeder Zeile und jeder Spalte nur einmal gesetzt werden dürfen. [2, S. 102]

Das bedeutet, dass die Zeilen und Spalten jeweils Permutationen der Menge $\{1,2,...,n\}$ sind.

Ordnung des Lateinischen Quadrates

Definition: Als Ordnung eines Lateinischen Quadrates wird die Kardinalität der möglichen Einträge bezeichnet. Bei einem $(n \times n)$-Lateinischen Quadrat beträgt die Ordnung darausfolgend n.

Um es an einem Beispiel zu verdeutlichen, ist in Abbildung 6 ein Lateinisches Quadrat mit Seitenlänge drei dargestellt. Dieses benötigt zur Füllung drei verschiedene Symbole. Der Einfachheit halber wird die Menge $\{1, 2, 3\}$ dazu verwendet. Aufgrund der vorangestellter Definition beträgt die Ordnung dieses Lateinischen Quadrats 3.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Abbildung 6: Lateinisches Quadrat

Partielles Lateinisches Quadrat

Definition: Als partielles Lateinisches Quadrat wird ein $(n \times n)$-Quadrat bezeichnet, dessen Felder nicht vollständig gefüllt sind. Die bestehenden Einträge müssen aber die Vorgabe, dass in jeder Zeile und jeder Spalte die Zahlen der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ maximal einmal auftreten dürfen, erfüllen.

Ein partielles Lateinisches Quadrat ist der Ausgangszustand jedes Sudokurätsels. Darunter versteht man ein nur teilweise ausgefülltes Gitter. Zur Veranschaulichung der Definition ist in Abbildung 7 ein Beispiel angegeben.

	2	
		1
3	1	

Abbildung 7: partielles Lateinisches Quadrat

Anzahl der Lateinischen Quadrate

Wie viele Lateinische Quadrate es gibt, ist von der Seitenlänge abhängig. Bei einem (3×3)-Gitter kann es nur zwölf verschiedene Anordnungen geben. [23]

Abbildung 8 zeigt alle möglichen Lateinischen Quadrate mit neun Zellen. Die erste Zeile enthält drei unterschiedliche Zahlen, was $3! = 6$ Möglichkeiten der Anordnung liefert (grau hinterlegt). Dies könnte auch für die zweite Reihe durchgeführt werden, wobei man dann in vier Fällen den Regeln des Lateinischen Quadrats widerspricht. Jede Zahl kommt an jeder Position der ersten Zeile genau zweimal vor, was man bei Betrachtung der markierten Felder bemerkt. Somit können von den sechs möglichen zweiten Zeilen nur jene verwendet werden, welche zu keiner Überschneidung führen, also keine Zahl in einer Spalte platzieren, in der sie bereits gesetzt ist. Deshalb wird für jede Position eine mögliche mittlere Reihe ausgeschlossen. Außerdem darf die ursprüngliche erste Zeile, die alle drei Zahlen an den entsprechenden Plätzen enthält, nicht verwendet werden. Wenn beispielsweise als erste Zeile $(1,2,3)$ angenommen wird, dann kann an der ersten Stelle der zweiten Reihe keine Eins stehen, da dies den Regeln widersprechen würde. Somit fallen die Möglichkeiten $(1,2,3)$ und $(1,3,2)$ für die zweite Zeile weg. Ebenso verhält es sich mit der 2 an der mittleren Position. Diese eliminiert die Möglichkeiten $(1,2,3)$ und $(3,2,1)$. Wegen der 3 im dritten Feld können $(1,2,3)$ und $(2,1,3)$ ausgeschlossen werden. Da dies für jede beliebige Anordnung gilt, können vier Möglichkeiten ausgeschlossen werden. So bleiben noch zwei mögliche zweite Reihen für jede ausgefüllte erste Zeile. Die letzen drei Ziffern ergeben sich dann aus Ergänzungen der Spalten. So erhält man $6 \cdot 2 = 12$ (3×3)-Lateinische Quadrate.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

3	2	1
1	3	2
2	1	3

Abbildung 8: ($3{\times}3$)-Lateinische Quadrate

Ein (4×4)-Quadrat liefert schon 576 unterschiedliche Möglichkeiten der Vervollständigung. Wie bei 3×3 bringt die erste Zeile so viele Alternativen, wie der Fakultät der Ordnung entsprechen, also in diesem Fall $4! = 24$. Die zweite Reihe liefert 9 Möglichkeiten, da jede Ziffer zum Ausschluss von sechs Alternativen führt. Die erste Position reduziert die 24 möglichen Zeilen auf 18, die zweite senkt die Fälle wegen Überschneidungen mit den ersten Ausschlüssen nur um vier, die dritte um drei und die letzte um zwei Möglichkeiten. Somit erhält man nur noch neun verschiedene zweite Reihen. Diese neun Fälle müssen unterschieden werden, da drei von ihnen durch Vertauschung von jeweils zwei Einträgen entstehen und somit vier Möglichkeiten für die dritte Zeile liefern. Die restlichen sechs Fälle können in keine kleineren Vertauschungen unterteilt werden und führen daraufhin nur zu zwei möglichen dritten Reihen. Gesamt erhält man $24 \cdot 3 \cdot 4 + 24 \cdot 6 \cdot 2 = 576$ verschiedene (4×4)-Lateinische Quadrate. Mit folgendem Beispiel wird dies anschaulicher. Die erste Zeile wird mit $(1\ 2\ 3\ 4)$ angenommen.

1 2 3 4 ✖	2 1 3 4 ✖	3 1 2 4 ✖	4 1 2 3
1 2 4 3 ✖	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2 ✖
1 3 2 4 ✖	2 3 1 4 ✖	3 2 1 4 ✖	4 2 1 3 ✖
1 3 4 2 ✖	2 3 4 1	3 2 4 1 ✖	4 2 3 1 ✖
1 4 2 3 ✖	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2 ✖	2 4 3 1 ✖	3 4 2 1	4 3 2 1

Alle Möglichkeiten, bei denen sich eine 1 an der ersten, eine 2 an der zweiten, eine 3 an der dritten oder eine 4 an der vierten Position befindet, führen zu gleichen Zahlen in einer Spalte und werden mit einem ✖ markiert. Deshalb können als zweite Reihe nur die neun Alternativen ohne ✖ auftreten. Die Unterscheidung liefert nun $2\ 1\ 4\ 3$, $3\ 4\ 2\ 1$ und $4\ 3\ 2\ 1$ als Fall 1 und die restlichen sechs als Fall 2. Da im ersten Fall 3 und 4 in den ersten beiden Positionen und 1 und 2 in den hinteren Plätzen jeweils vertauschbar sind, ergeben sich vier mögliche dritte Zeilen. Fall 2 liefert nur zwei Alternativen, weil bei Auswahl einer der Möglichkeiten für eine Zahl die restliche Reihe eindeutig bestimmt ist, wie Abbildung 9 zeigt.

Fall 1:

1	2	3	4
2	1	4	3
3/4 3 3 4 4	3/4 4 4 3 3	1/2 1 2 1 2	1/2 2 1 2 1

Fall 2:

1	2	3	4
2	3	4	1
3/4 3 4	4/1 4 1	1/2 1 2	2/3 2 3

Abbildung 9: Anzahl der (4×4) – Lateinischen Quadrate

Bei einer Seitenlänge von neun gibt es

5 524 751 496 156 892 842 531 225 600, also rund $5\cdot 10^{27}$ Optionen.

Wenn nun allerdings einfache Operationen wie das Vertauschen von zwei Reihen oder Spalten zugelassen und diese Quadrate als äquivalent angesehen werden, kann die Anzahl auf

377 597 570 964 258 816 ≈ $4\cdot 10^{17}$ reduziert werden,

was Stanley E. Bamel und Jerome Rothstein 1975 beweisen konnten. [2, S. 102]

4.1 Vervollständigung eines partiellen Lateinischen Quadrats

Zu Beginn wird ein trivialer Fall betrachtet, der etwas später Beachtung findet. Ein Lateinisches Quadrat, dessen erste $(n-1)$ Reihen bereits gefüllt sind, erzwingt die restliche Füllung durch Ergänzung der fehlenden Zahl in der jeweiligen Spalte, wie in Abbildung 10 verdeutlicht wird.

1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2

1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2
3	2	4	1

Abbildung 10: Vervollständigung eines Lateinischen Quadrats

Falls nur die erste Reihe gefüllt ist, gibt es hingegen sehr viele Möglichkeiten, das Lateinische Quadrat zu vervollständigen. Beispielsweise bietet eine zyklische Verschiebung des Inhalts in den weiteren Zeilen eine Füllung, wie Abbildung 11 zeigt.

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

Abbildung 11: zyklisches Lateinisches Quadrat

Je weniger Felder eine Ziffer enthalten, desto mehr Möglichkeiten der Ergänzung sind prinzipiell vorhanden. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass ein $(n \times n)$-Lateinisches Quadrat bei n Vorgaben keine Lösung ergibt. Dies tritt beispielsweise auf, wenn die erste Zeile mit den Einträgen 1 bis $n-1$ gefüllt ist und in der noch leeren Spalte n in einer anderen Reihe gesetzt wird. Somit kann die erste Reihe nie vervollständigt werden und das Lateinische Quadrat ist unlösbar, was beispielhaft von Abbildung 12 veranschaulicht wird.

1	2	3	4	5	6	
						7

Abbildung 12: unlösbares Lateinisches Quadrat

Eine alternative Betrachtungsmöglichkeit bietet die Verwendung einer Zeilenmatrix.

Definition: Eine Zeilenmatrix eines Lateinischen Quadrates ist eine $(3 \times n^2)$-Matrix, deren erste Zeile aus dem Zeilenindex i, deren zweite aus dem Spaltenindex j und deren dritte aus den Elementen an der jeweiligen Position (i, j) besteht.

Jede Spalte der Matrix besteht also aus einer Zeilen- und einer Spaltenposition und dem in dieser Zelle befindlichen Element. Das in Abbildung 10 dargestellte Lateinische Quadrat lässt sich folgendermaßen als Zeilenmatrix angeben.

$$\begin{array}{rl} \text{Zeilenindex } i: & 1\;1\;1\;1\;2\;2\;2\;2\;3\;3\;3\;3\;4\;4\;4\;4 \\ \text{Spaltenindex } j: & 1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4 \\ \text{Element in Position } (i,j): & 1\;4\;2\;3\;2\;1\;3\;4\;4\;3\;1\;2\;3\;2\;4\;1 \end{array}$$

Die Bedingungen eines Lateinischen Quadrates sind genau dann erfüllt, wenn in je zwei Zeilen der Zeilenmatrix alle n^2 Kombinationen, vertikal gesehen, auftreten. Trotz beliebiger Permutation ist das Ergebnis dieser Zeilenmatrix immer ein Lateinisches Quadrat.
Auch ein partielles Lateinisches Quadrat kann als partielle Zeilenmatrix dargestellt werden, wie nun anhand von Abbildung 10 gezeigt wird.

$$\begin{array}{rl} \text{Zeilenindex } i: & 1\;1\;1\;1\;2\;2\;2\;2\;3\;3\;3\;3\;4\;4\;4\;4 \\ \text{Spaltenindex } j: & 1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4\;1\;2\;3\;4 \\ \text{Element in Position } (i,j): & 1\;4\;2\;3\;2\;1\;3\;4\;4\;3\;1\;2\;u\;v\;w\;x \end{array}$$

Auch hier ist die Lösung leicht zu ermitteln, da sie der oben genannten Bedingung genügen muss. Die Buchstaben fungieren nur als Platzhalter. So kann ausgedrückt werden, dass in den Zeilen 2 und 3 beispielsweise noch die Kombination $1, 3$ fehlt und deshalb $u = 3$ ist. Weiters gilt $v = 2, w = 4$ und $x = 1$. Dies entspricht genau der zuvor erhaltenen letzten Zeile.

Definition: Zwei Lateinische Quadrate, die sich nur durch Permutation der Zeilen der Zeilenmatrix unterscheiden, werden konjugierte Lateinische Quadrate genannt.

Ein partielles Lateinisches Quadrat kann genau dann vervollständigt werden, wenn irgendein konjugiertes Lateinisches Quadrat vervollständigt werden kann.
Dies bedeutet, dass bei einer gefundenen Ergänzung auch alle Konjugierten eine Lösung besitzen.

Definition: Sei $1 \leq r < n$. Ein partielles Lateinisches Quadrat, dessen erste r Zeilen vollständig gefüllt und die restlichen $(n-r)$ Zeilen leer sind, wird $(r \times n)$-Lateinisches Rechteck genannt.

In Abbildung 10 links ist ein solches (3×4)-Lateinisches Rechteck dargestellt.

Lemma: Jedes $(r \times n)$-Lateinische Rechteck mit $r < n$ kann zu einem $((r+1) \times n)$–Lateinischen Rechteck erweitert werden.

Beweis: Dieser Beweis basiert auf dem Heiratssatz. Es sei $X = \{1,...,n\}$. Die Zahlen, die in Spalte j noch nicht gesetzt sind, werden mit A_j als Menge zusammengefasst. Ein System von verschiedenen Vertretern für die Familie $A_1,...,A_n$ würde dann eine zulässige $r+1$-te Zeile bilden. Nun muss (H) und damit die Verwendbarkeit des Satzes von Hall noch gezeigt werden. Die Mächtigkeit von jedem A_j beträgt folglich $n-r$ und jedes Element ist in $n-r$ Mengen A_j enthalten, weil r Zeilen bereits vollständig ausgefüllt sind. Somit besitzen m dieser Mengen A_j gemeinsam $m \cdot (n-r)$ Elementen, wobei mindestens m unterschiedliche darunter sind, was genau (H) entspricht.

Mittels mehrfacher Anwendung dieses Lemmas kann jedes Lateinische Rechteck zu einem Lateinischen Quadrat vervollständigt werden.

Lemma: Jedes partielle Quadrat der Ordnung n mit höchstens $(n-1)$ gefüllten Feldern und höchstens $\frac{n}{2}$ verschiedenen Elementen kann zu einem Lateinischen Quadrat der Ordnung n vervollständigt werden.

Beweis: Da ein Lateinisches Quadrat ergänzt werden kann, sobald ein konjugiertes dazu vervollständigt ist, bietet eine Zeilenpermutation eine Möglichkeit zur Vereinfachung. Da höchstens $\frac{n}{2}$ verschiedene Elemente auftreten, können diese in maximal $\frac{n}{2}$ Reihen angeordnet werden. Abbildung 13 veranschaulicht die Situation für ein (4×4)-Quadrat, dessen konjugierte Form durch die Permutation $E \to Z \to S \to E$ der Zeilenmatrix entstanden ist.

Z:	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
S:	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
E:	1					2					1					

1			
	2		
		1	

Z:	1					2					1					
S:	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
E:	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

1		3	
	2		

Abbildung 13: Konjugierte Lateinische Quadrate

Die Zeilen des Quadrats können nun beliebig vertauscht werden. Sie werden so angeordnet, dass die Anzahl der Einträge mit der Reihenanzahl abnimmt. Anders ausgedrückt gilt

$$f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_r > 0,$$

wobei f_i der Anzahl der gefüllten Felder in Reihe i und $r \leq \frac{n}{2}$ der Zahl der Zeilen mit Einträgen entspricht. Außerdem gilt weiterhin $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$.

Im Folgenden werden die Zeilen 1 bis r nach und nach vervollständigt und daraufhin findet das vorherige Lemma Anwendung, indem das Lateinische Rechteck zu einem Lateinischen Quadrat ergänzt wird.

Es wird angenommen, dass die Zeilen $1,2,\ldots,\ell-1$ bereits voll ausgefüllt sind. Die Reihe ℓ enthält f_ℓ Einträge, die wegen Spaltenpermutationen am rechten Zeilenende angesiedelt sein können. Um die Reihe ℓ zu vervollständigen, findet erneut der Satz von Hall Verwendung. Die Menge der Elemente, die nicht in der Zeile ℓ liegen, sei X. Somit ist $|X| = n - f_\ell$. A_j sei die Menge aller Elemente aus X, die in Spalte j nicht erscheinen (für $j = 1,\ldots,n-f_\ell$), die also weder oberhalb noch unterhalb der

Reihe ℓ auftreten. Damit die Zeile ℓ vervollständigt werden kann, muss deshalb die Bedingung (H) für $A_1,...,A_{n-f_\ell}$ gezeigt werden.

Behauptung: $n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + ... + f_r$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

<u>Fall 1:</u> $\ell = 1$: $n - f_1 - 1 + 1 > 1 - 1 + f_{1+1} + ... + f_r$

$$\Leftrightarrow \quad n - f_1 > f_2 + ... + f_r$$

$$\Leftrightarrow \quad n > f_1 + f_2 + ... + f_r$$

Für $\ell = 1$ ist die Behauptung wahr, da diese in die Vorgabe, dass die Anzahl aller Einträge kleiner gleich $n-1$, also kleiner als n, sein muss, überführt werden kann.

<u>Fall 2:</u> $\ell \geq 2$ und $f_{\ell-1} = 1$: Weil $f_{\ell-1} = 1$ ist und alle weiteren Zeilen weniger oder gleich viele Einträge haben, muss $f_\ell = f_{\ell+1} = ... = f_r = 1$ gelten.

$$n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + ... + f_r$$

$$\Leftrightarrow n - 1 - \ell + 1 > \ell - 1 + 1 \cdot (r - \ell)$$

$$\Leftrightarrow n - \ell > r - 1$$

$$\Leftrightarrow n > r + \ell - 1$$

Die Behauptung konnte auf $n > r + \ell - 1$ reduziert werden, was wegen $\ell \leq r \leq \frac{n}{2}$ richtig ist, weil $n > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 = n - 1$ gilt.

<u>Fall 3:</u> $\ell \geq 2$ und $f_{\ell-1} \geq 2$: Die Abschätzung $f_1 + ... + f_{\ell-1} \geq (\ell - 1) \cdot f_{\ell-1} \geq 2 \cdot (\ell - 1)$ gilt, da $f_1 \geq f_2 \geq ... \geq f_{\ell-1}$ ist.

Aus $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n - 1$ und der obigen Abschätzung folgt die zuvor aufgestellte Behauptung.

$$n - 1 \geq f_1 + ... + f_{\ell-1} + f_\ell + ... + f_r \geq 2 \cdot (\ell - 1) + f_\ell + f_{\ell+1} + ... + f_r$$

$$\Rightarrow n - 1 - f_\ell - \ell + 1 \geq \ell - 1 + f_{\ell+1} + ... + f_r$$

$$\Rightarrow n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + ... + f_r$$

Nun seien m der Mengen A_j gegeben. Es gilt $1 \leq m \leq n - f_\ell$. Außerdem sei die Vereinigung dieser Mengen gleich B. Durch Spaltenpermutation können diese m Spalten die ersten sein. Somit muss $|B| \geq m$ gezeigt werden. Die Anzahl der Zellen in den ersten m Spalten des Quadrats, in denen sich Elemente aus X befinden, werde mit c bezeichnet. Es sind maximal $(\ell - 1) \cdot m$ solcher Felder über Reihe ℓ und höchstens $f_{\ell+1} + ... + f_r$ unter ihr vorhanden. Daraus folgt:

$$c \leq (\ell - 1) \cdot m + f_{\ell+1} + ... + f_r$$

Alle Elemente x aus $X \setminus B$ finden sich in jeder der ersten m Spalten wieder. Deshalb gilt:

$$c \geq m \cdot \left(|X| - |B|\right)$$

Daraus und mit $|X| = n - f_\ell$ folgt:

$$c \geq m \cdot \left(|X| - |B|\right)$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{m} \cdot c \geq |X| - |B|, \text{ da } m \geq 1$$

$$\Rightarrow |B| \geq |X| - \tfrac{1}{m} \cdot c \geq n - f_\ell - (\ell - 1) - \tfrac{1}{m} \cdot \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right)$$

$$\text{weil } -\tfrac{1}{m} \cdot c \geq -(\ell - 1) - \tfrac{1}{m} \cdot \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right)$$

Wenn $n - f_\ell - (\ell - 1) - \tfrac{1}{m} \cdot \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right) > m - 1$ oder anders ausgedrückt

$$m \cdot \left(n - f_\ell - \ell - m + 2\right) > f_{\ell+1} + \ldots + f_r, \text{ dann ist } |B| \geq m.$$

Durch Einsetzen von $m = 1$ und $m = n - f_\ell - \ell + 1$ erhält man aus den Ungleichungen die zuvor genannte Behauptung.

<u>$m = 1$:</u>

$$n - f_\ell - (\ell - 1) - \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right) > \ell - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad n - f_\ell - \ell + 1 > f_{\ell+1} + \ldots + f_r$$

<u>$m = n - f_\ell - \ell + 1$:</u>

$$m \cdot \left(n - f_\ell - \ell - m + 2\right) = \left(n - f_\ell - \ell + 1\right) \cdot 1 = n - f_\ell - \ell + 1$$

$$\Rightarrow m \cdot \left(n - f_\ell - \ell - m + 2\right) - \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right) = n - f_\ell - \ell + 1 - \left(f_{\ell+1} + \ldots + f_r\right) > 0$$

Da die linke Seite von $m \cdot \left(n - f_\ell - \ell - m + 2\right) > f_{\ell+1} + \ldots + f_r$ ein quadratisches Polynom mit Leitkoeffizienten -1 und daher konkav ist, kann sie für alle m, die zwischen 1 und $n - f_\ell - \ell + 1$ liegen, auf die obige Ungleichung reduziert werden.

<u>$m > n - f_\ell - \ell + 1$:</u> Weil alle x aus X in maximal r Reihen stehen können, treten sie auch in höchstens r Spalten auf. Also gilt:

$$m > n - f_\ell - \ell + 1 = |X| - \ell + 1 > |X| - r, \text{ da } r > \ell - 1$$

In einer der Mengen A_j ist x deshalb enthalten. Somit gilt $B = X$ und folglich $m \leq n - f_\ell = |X| = |B|$, was zu zeigen war.

Nun kann der Satz von Smetaniuk [14] bewiesen werden.

Satz: Jedes partielle Lateinische Quadrat der Ordnung n, in dem höchstens $n-1$ Felder gefüllt sind, kann immer zu einem Lateinischen Quadrat derselben Ordnung vervollständigt werden.

Beweis: Dieser Satz wird mittels Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: Für $\underline{n \le 2}$ ist es trivial, da bei jedem leeren Gitter eine Füllung nach dem Regelwerk gefunden werden kann. Ein (2×2)-Lateinisches Quadrat mit einer ausgefüllten Zelle kann eindeutig ergänzt werden, indem die Diagonalen jeweils die gleichen Ziffern tragen. Weil $n=1$ und $n=2$ sofort zu einer eindeutigen Vervollständigung beziehungsweise zu zwei möglichen Lösungen führen, die immer erzeugt werden können, ist der Satz für sie in jeder Situation richtig.

Induktionsvoraussetzung: Der Satz gilt für die Ordnung $n-1$ und $n-2$ Einträge.

Induktionsschritt: $\underline{n \ge 3}$: Das partielle Lateinische Quadrat hat maximal $n-1$ Einträge, die in $r \le n-1$ unterschiedlichen Reihen $s_1,...,s_r$ stehen, deren Anzahl an gefüllten Zellen wie zuvor mit $f_1,...,f_r > 0$ bezeichnet werden. Die Summe der f_i mit $1 \le i \le r$ ist dabei wieder kleiner als n. Da das zuvor bewiesene Lemma den Fall für höchstens $\frac{n}{2}$ verschiedene Elemente gezeigt hat, wird nun von mehr unterschiedlichen ausgegangen, was zwangsläufig dazu führt, dass mindestens eines nur einmal vorkommt. Durch Umbenennungen und Zeilenpermutationen tritt das Element n in Reihe s_1 nur einmal auf. Mittels Vertauschung von Spalten und Zeilen werden die gefüllten Zellen unterhalb der Diagonale angeordnet. Nur das Kästchen mit dem Eintrag n kommt auf der Diagonale, die aus den Feldern (k,k) mit $1 \le k \le n$ besteht, zu liegen. Dies wird folgendermaßen umgesetzt:

Zu Beginn wird die Reihe s_1 in die Zeile der Anzahl ihrer Einträge (f_1) verschoben. Durch Spaltenpermutation landen die gefüllten Zellen in den ersten Kästchen dieser Reihe und n steht im letzten dieser Felder und somit auf der Diagonale. Im Anschluss wird s_2 auf die Reihe $1+f_1+f_2$ übertragen und es werden erneut die Einträge so weit wie möglich nach links verschoben. Alle Zeilen s_i mit $1 < i \le r$ werden auf diese Weise in die Reihen $1+f_1+...+f_i$ übergeführt, bevor ihre gefüllten Felder möglichst weit an den Anfang dieser verrückt werden. Abbildung 14 illustriert die Situation mit $n=7$. Die teilweise gefüllten Reihen $s_1=2, s_2=3, s_3=5$ und $s_4=7$ mit $f_1=f_2=2$ und $f_3=f_4=1$ Eintragung werden in die Zeilen $2(=f_1), 5(=1+f_1+f_2), 6(=1+f_1+f_2+f_3)$ und $7(=1+f_1+f_2+f_3+f_4)$ übertragen.

Mittels Spaltenpermutation werden sie so weit wie möglich links positioniert, damit alle Ziffern außer $n = 7$ unter der Diagonale, die mit • gekennzeichnet ist, zu liegen kommen.

s_1		2			7		
s_2			5		4		
s_3				5			
s_4		4					

→

•						
2	7					
		•				
			•			
	4	5		•		
			5		•	
4						•

Abbildung 14: Umsortieren der Einträge [1, S. 207]

Der Eintrag n wird gemeinsam mit der ersten Zeile und letzten Spalte, in denen keine Ziffern stehen, entfernt, um eine Induktion durchführen zu können. Somit bleibt ein partielles Lateinisches Quadrat mit der Ordnung $n-1$ und $n-2$ gefüllten Feldern, das laut Induktionsvoraussetzung zu einem Lateinischen Quadrat derselben Ordnung vervollständigt werden kann. Eine mögliche Ergänzung ist in Abbildung 15 dargestellt, wobei die Vorgaben fett gedruckt und die sicheren Einträge grau hinterlegt sind. Die restlichen Ziffern können im Laufe des Beweises noch verändert werden.

2	3	4	1	6	5	
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Abbildung 15: mögliche Ergänzung [1, S. 208]

Nun wird $n = 7$ in den Diagonalpositionen eingetragen und die dort befindliche Zahl in die letzte Spalte verschoben. Da dies bei gleichen Zahlen in der Diagonale zu Problemen führt, wird Reihe für Reihe (beginnend bei Zeile 2) vorgegangen, wie Abbildung 16 zeigt. Die Spalten, in denen die Diagonalzahlen schon eingetragen wurden, werden im weiteren Verlauf nicht mehr verändert, weshalb sie ebenfalls eine graue Hinterlegung bekommen.

2	7	4	1	6	5	3
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	6	5	4	
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Abbildung 16: Lösungsweg [1, S. 208f]

Bis zu Reihe vier geht die Methode gut. In der fünften Zeile ist dies aber nicht mehr möglich, da erneut eine 3 in der letzten Spalte auftreten würde, was dem Regelwerk widerspricht (grün markiert). Deshalb muss, wie in Abbildung 17 verdeutlicht ist, die Zahl, die der neuen gleicht, ihren Platz räumen. Der Eintrag wird durch jenen in der Zeile vertauscht, dessen Spalte gerade den neuen Diagonaleneintrag erhielt (rot hinterlegt). In diesem Fall tauschen in Reihe zwei 6 und 3 in den Spalten sieben und fünf die Plätze. Da die 6 ebenfalls in der letzten Spalte bereits existiert, müssen auch in Zeile vier die Positionen von 6 und 5 in den Spalten fünf und sieben vertauscht werden.

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Abbildung 17: weitere Änderungen [1, S. 209]

Diese Vorgehensweise gilt allgemein und nicht nur in eben gezeigtem Beispiel.

Es können auf die Zeilen bezogen keine Schwierigkeiten auftreten, da innerhalb einer Reihe nur die Positionen der Zahlen getauscht werden. Es wird n in Zelle (k,k) eingetragen und der vorherige Eintrag an dieser Position wird auf (k,n) verschoben. Wenn dies in Spalte n zu gleichen Zahlen führt, wird der obere (Zeile 2 bis $k-1$) Eintrag mit jenem aus Spalte k vertauscht. Solange in Spalte n Zahlen doppelt auftreten, werden die Positionen der zuvor eingetragenen doppelten Zahl und der in dieser Zeile in Spalte k befindlichen gewechselt. In Spalte k kann kein Element zweimal auftreten, da die Zahlen 1 bis $n-1$ in jeder Reihe bereits eingetragen waren. Durch Platzwechsel mit Spalte n können sie zwar dort zweimal auftreten, müssen dann aber in Spalte k abgängig sein. Deshalb ist diese Vertauschung möglich.

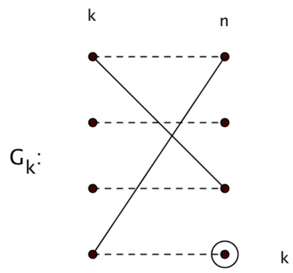

Abbildung 18: bipartiter Graph [1, S. 209]

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Positionswechsel endlich sind. Der folgende bipartite Graph G_k zeigt dies. Die Menge der Ecken besteht aus den Feldern (i,k) und (j,n) mit $2 \le i, j \le k$, die vielleicht ausgetauscht werden. Eine Kante zwischen den beiden Ecken existiert nur, wenn sie in der gleichen Zeile liegen, also $i = j$ gilt oder vor den Vertauschungen mit demselben Element gefüllt sind ($i \ne j$). In Abbildung 18 werden die Kanten $i = j$ des Graphen G_k gestrichelt und jene aufgrund gleicher Füllung durchgezogen skizziert. Jede Ecke ist entweder mit einer oder mit zwei weiteren Ecken durch Kanten verbunden. Sie haben deshalb alle Grad 1 oder 2. Die Zelle (k,n) ist das Ausgangsfeld der Vertauschungen, entspricht einer Ecke mit Grad 1 und ist in Abbildung 18 eingekreist. Der Weg führt über eine gestrichelte Linie, also durch Vertauschung in der Zeile zu einer durchgezogenen, die zwei gleichen Einträgen entspricht. Über weitere horizontale, schräge und horizontale Kanten landet man nach den Ecken vom Grad 2 irgendwann wieder bei einer vom Grad 1. Diese Zelle in Spalte k enthält eine Zahl, die in Spalte n nicht auftritt, und ist somit Endpunkt des Weges. Nach der Vertauschung dieses Eintrages mit jenem in der letzten Spalte in dieser Zeile treten keine Widersprüche mehr auf und es kann mit der nächsten Reihe weitergearbeitet werden. Die Austauschprozesse enden immer mit einem neuen Element in Spalte k, das dann in entsprechende Position gebracht werden kann. Nach diesem Prozedere sind die Einträge in Spalte k endgültig festgelegt.

Die Gesamtlösung des Beispiels lässt sich problemlos finden, indem die sechste Zeile nach vorherigem Schema gefüllt wird. Nun muss nur noch 7 in Position (n,n)

eingetragen werden, bevor durch Spaltenergänzungen das Lateinische Quadrat vervollständigt wird.

7	3	1	6	5	2	4
2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	7	2
4	5	2	3	1	6	7

Abbildung 19: Gesamtlösung [1, S. 209]

Dies gilt allgemein, da durch den Wert n in Zelle (n,n) das partielle Lateinische Quadrat zu einem $(n-1\times n)$-Lateinischen Rechteck ergänzt worden ist, was nach bereits bewiesenem Lemma zu einem $(n\times n)$-Lateinischen Rechteck, also einem Lateinischen Quadrat vervollständigt werden kann.
Um die Lösung des Lateinischen Quadrates, das zu Beginn verwendet wurde, zu erhalten, müssen die durchgeführten Element-, Zeilen- und Spaltenvertauschungen noch rückgängig gemacht werden.

4.2 Gerechte Lateinische Quadrate

Von dem von W. U. Behrens eingeführten Begriff der gerechten Lateinischen Quadrate spricht man, wenn die obige Definition um eine Unterteilung in n Regionen zu je n Zellen ergänzt wird, die alle Zahlen von 1 bis n enthalten müssen. Somit ist ein Sudoku also ein besonderes gerechtes Lateinisches Quadrat, bei dem die Unterteilung in neun 3×3 Blöcke erfolgt. [5, S. 85]
Beispielsweise sind einige heute in Zeitschriften abgebildete Sudokus in Wirklichkeit nur gerechte Lateinische Quadrate, worauf in Kapitel 8 noch eingegangen wird.

5 Spezialfall Sudoku

Kaum eine Tageszeitung lässt sich heute noch finden, in der keine Sudokus abgedruckt sind. Ältere Versionen dieses Rätsels wurden schon vor 1900 in französischen Zeitungen veröffentlicht. Erst um 1979 wurde es als „numberplace“ in Indianapolis und ab 1984 in Japan als Sudoku, was soviel wie „einzelne Ziffern“ bedeutet, wiederbelebt. Seinen Erfolg verdankt das beliebte Rätsel Wayne Gould, der bei einem Japanbesuch 1997 auf Sudokus aufmerksam wurde und die Redaktion der „Londoner Times“ davon überzeugen konnte, diese zu veröffentlichen. Seit dem 12. November 2004 erscheinen täglich Sudokus in dieser Zeitung. Viele andere Redaktionen folgten der „Times“ und die internationale Erfolgsgeschichte war nicht mehr zu stoppen. [5, S. 69f]

5.1 Sudokurätsel

Mit Sudoku ist im engeren Sinn ein vollständig ausgefülltes (9×9)-Gitter gemeint, auch wenn dieser Begriff häufig für die nicht komplett ergänzten Gitter ebenfalls verwendet wird. Ein Sudokurätsel ist hingegen das nur teilweise befüllte Quadrat, dessen Ergänzung vielen Knoblern und Knoblerinnen Freude bereitet. [11, vii]

5.1.1 Die Aufgabe

Das Ziel jedes Sudokurätsels besteht darin, die Zahlen 1 bis 9 so in einem Gitter zu ergänzen, dass in jeder Spalte, jeder Zeile und jedem (3×3)-Quadrat jede Zahl genau einmal vorkommt. [6, S. 1]
Jedes Sudokurätsel beginnt als teilweise ausgefülltes Gitter, das nach der obigen Anleitung vervollständigt werden soll. Dafür gibt es einige bekannte Lösungsverfahren, nach denen bewusst oder unbewusst vorgegangen wird, um das eindeutige Ergebnis zu erhalten.

5.1.2 Erzeugung eines Sudokurätsels

Heutzutage werden Sudokurätsel fast nur noch mit Computerprogrammen erstellt. Es werden zufällig einige Zahlen in ein Gitter gesetzt. Darauf wird dann ein Lösungsalgorithmus angewendet, der meistens mittels „backtracking“ arbeitet. Eine einfache Methode funktioniert folgendermaßen. In das erste freie Feld wird eine 1 gesetzt. Wenn es mit den Regeln vereinbar ist, setzt er dieselbe Ziffer in das nächste leere Feld. Bei einem Widerspruch wird das nächsthöhere Element verwendet. Dies wird so lange praktiziert bis die 9 erreicht ist. Falls diese ebenfalls nicht in dieser Zelle existieren kann, wird die vorhergehende Zahl um eins erhöht. Das Programm läuft so lange, bis das Sudokurätsel vervollständigt ist. Wenn die zufälligen Zahlen zu einem eindeutigen Sudoku führen, ist das Rätsel fertig. Liefert das Programm allerdings keine Lösung beziehungsweise einen Widerspruch, wird eine der ursprünglichen Zahlen entfernt und der Computer beginnt von vorne. Bei zwei oder mehr Lösungen werden so lange Zahlen hinzugefügt, bis das Sudoku eindeutig ist. [2, S.105f]

5.2 Symmetrieeigenschaften

Aufgrund der Geometrie eines Quadrates sind bei einem Sudoku Spalte und Zeile vertauschbar, weshalb im Folgenden die Ausführungen meist nur für Reihe oder Spalte formuliert werden. Diese können aber ident auf das jeweils andere übertragen werden. In Kapitel 6.2. werden noch weitere Symmetrien diskutiert, um essentiell verschiedene Lösungen zu erhalten.

5.3 Lösungsverfahren

In diesem Kapitel werden die wichtigsten und/ oder interessantesten Lösungswege näher beschrieben.

5.3.1 2 Grundprizipien

Die zwei wichtigsten Lösungstechniken sind die Elimination und die Vervollständigung, welche nun näher erklärt werden.

<u>Elimination</u>

Von einer Elimination spricht man, wenn für eine Zahl acht der neun möglichen Plätze in Reihe, Spalte oder Box ausgeschlossen werden können, wie dies beispielsweise in Box 2 in Abbildung 20 der Fall ist. 5 kann nur in Zelle (2, 5) vorkommen. [5, S. 73]

	5							
			1	5				
							5	
					5			

Abbildung 20: Elimination

Man kann zwischen boxbasierter und reihen- und spaltenbasierter Elimination unterscheiden.

Boxbasierte Elimination

Wenn eine Zahl in zwei Boxen eines Abschnitts bereits vorgekommen ist, gibt es nur noch 3 mögliche Zellen, in denen sie in der dritten Box stehen kann. Wenn zwei dieser Möglichkeiten ausgeschlossen werden, hat man die Lösung gefunden. Dieses Verfahren nennt man „boxbasierte Parallelelimination“. Es kann sowohl auf vertikale als auch auf horizontale Abschnitte angewandt werden.

Jede Box liegt in einem Band und in einer Säule, weshalb es auch möglich ist, beide zur Lösung heranzuziehen. Wenn in jedem Abschnitt außerhalb der Box die gesuchte Zahl ein- oder zweimal vorhanden ist, bleiben maximal vier Zellen für diese Ziffer übrig. Durch Ausschließen von drei Möglichkeiten findet man die Lösung. Dieses Verfahren wird „boxbasierte Kreuzelimination“ genannt. [5, S. 74]

Reihen- und spaltenbasierte Elimination

Reihen werden durch Drehung zu Spalten und umgekehrt. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt nur die reihenbasierte Elimination erläutert. Diese kann ebenfalls unterteilt werden.

Von der „reihenbasierte Kreuzelimination“ spricht man, wenn eine Zahl bereits in i Spalten vorhanden ist und somit die Lage in jeder Reihe auf $9-i$ Zellen festgelegt ist. Wenn davon $8-i$ Möglichkeiten ausgeschlossen werden können, ist der Platz gefunden, an den die Ziffer gehört.

Bei der „reihenbasierten Parallelelimination“ werden die Blöcke untersucht. Falls eine Zahl in k Boxen eines horizontalen Abschnitts vorhanden ist, so gibt es für die Zahl in diesem Abschnitt pro Reihe nur noch $9-3k$ mögliche Zellen. Falls in einer Reihe $8-3k$ der verbleibenden Möglichkeiten ausgeschlossen werden können, hat man eine eindeutige Position gefunden.
Die „reihenbasierte gemischte Elimination“ entspricht, wie der Name schon vermuten lässt, einer Mischform der bereits genannten Eliminationsarten. [5; S.76]

<u>Vervollständigung</u>

Von Vervollständigung spricht man, wenn für eine fixe Zelle in Reihe, Spalte oder Box nur eine Zahl möglich ist, beziehungsweise 8 der 9 möglichen Zahlen ausgeschlossen werden können. In Abbildung 21 ist das für die Zelle (2, 3) dargestellt. [5, S. 73]

	4							
	9	6	3			8	1	
2								
		7						
		5						

Abbildung 21: Vervollständigung

Unter „Vervollständigung durch Reihe, Spalte oder Box“ versteht man, dass bei 8 bekannten Einträgen (in einer Reihe, Spalte oder Box) automatisch auch der neunte bekannt ist.

Allgemein:

<u>Satz:</u> Wenn die Kardinalität der Vereinigungsmenge V der in Reihe i, Spalte j und Box k (in der (i,j) liegt) gesetzten Einträge gleich $(|V|=)$ 8 ist, dann kann das Element in Zelle (i,j) eindeutig bestimmt werden. Diese Methode wird Vervollständigung durch Reihe, Spalte und Box genannt. [5; S.78]

Gerade zu Beginn des Lösungsprozesses wird häufig mit Elimination gearbeitet. Vervollständigung wird meist erst später angewandt und zum Eintragen der letzten Zahlen verwendet. Diese beiden Grundtechniken werden auch gemischt gebraucht, vor allem bei etwas schwierigeren Sudokus. Hierfür werden die durch Elimination und Vervollständigung ausgedünnten möglichen Lösungen in die Zellen (mit Bleistift) klein eingetragen (engl. „pencilmarking“) [5, S.73f].

5.3.2 Einsiedler,... / Nur ein,... Zuhause

Wenn die möglichen Zahlen in den entsprechenden Zellen eingetragen werden (die Ziffern, die nicht mit den vorgegebenen Einträgen kollidieren), sind teilweise „Einsiedlerzahlen“ zu erkennen. Das sind Ziffern, die alleine in einer Zelle stehen, was bedeutet, dass für dieses Kästchen kein anderer Eintrag möglich ist. Andererseits ist auch erkennbar, wenn eine Zahl nur einmal in einer Spalte, Zeile oder Box aufscheint und somit sicher auf diesen Platz gehört. Dies kann man als Zahl mit „nur einem Zuhause“ bezeichnen. Für diese beiden Strategien gibt es auch Verallgemeinerungen, die ebenso gelten. [18, S. 9f]

> Die Strategiegruppe Einsiedler, Zweisiedler... sucht in einem Teilfeld (also einer Spalte, Zeile oder einem Unterquadrat) nach einer Teilmenge von k Feldern, für deren Belegung insgesamt nur k Zahlen in Frage kommen (d.h. alle anderen Belegungen würden im Widerspruch zu schon eingetragenen Zahlen im Sudoku stehen). [18, S. 11]

Beispiel: Dreisiedler

6 7	**9**	3 4 ~~5~~ ~~7~~ 8	5 6 7	**1**	5 6 7	3 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~	**2**	3 ~~6~~ 8

Abbildung 22: Dreisiedler

Wenn in drei Zellen nur drei oder zwei Zahlen einer Dreiergruppe vorkommen und keine weitere, spricht man von einem Dreisiedler und kann diese als Möglichkeiten in den anderen Zellen (in Abbildung 22: dieser Zeile) löschen. (Bei einer Zahl der Dreiergruppe wäre es ein Einsiedler und diese würde als Möglichkeit in den beiden anderen Zellen wegfallen. Man hätte einen Zweisiedler.) [18, S. 11]

Die Strategiegruppe „nur ein (zwei...) Zuhause“ sucht in einem Teilfeld nach einer Teilmenge von k Zahlen, für deren Ort insgesamt nur k Felder in Frage kommen (d.h. auf allen anderen Feldern im Teilfeld würde jede der Zahlen mit im Sudoku schon eingetragenen Zahlen im Widerspruch stehen. [18, S. 11]

Beispiel: Zwei Zahlen mit nur zwei Zuhause

2 5 6 7	2 $\boxed{3}$ 4 5 6 $\boxed{8}$	1 4 5 6 7	2 5 6 7	$\boxed{3}$ $\boxed{8}$	1 4 5 6 7
2 5 7 9	2 $\boxed{3}$ 4 5 $\boxed{8}$ 9	4 5 7	2 5 7 9	$\boxed{3}$ $\boxed{8}$	4 5 7
2 5 7 9	2 5 9	1 5 7	2 5 7 9	2 5 9	1 5 7

Abbildung 23: 2 Zahlen, 2 Zuhause [18, S. 11]

Satz: Die Einsiedlerstrategie für k Felder ist mit der nur-n-Zuhause-Strategie für $n = 9 - k$ Zahlen gleichwertig. [18, S.12]

Beweis: Da k Felder Einsiedler sind, also einen festen Platz haben, bleiben für die restlichen Zellen in der Box, Spalte oder Reihe nur noch $9-k$ Kästchen über, in denen sich die $9-k$ Ziffern aufteilen müssen. Das ist genau die nur-n-Zuhause-Strategie für $n = 9 - k$. Umgekehrt gilt es ebenfalls, weil die nur-n-Zuhause-Strategie $n = 9 - k$ Zahlen auf $9-k$ Felder verteilt und die restlichen k Ziffern auf die übrig gebliebenen k Zellen aufgeteilt werden können. Dies entspricht genau der Einsiedlerstrategie für k Felder.

5.3.3 Diverse Muster

Hüte

Unter Hüten versteht man derartige Anordnungen, wie in Abbildung 24 dargestellt. Durch eine 7 in Spalte 5 kann es zu einer solchen Situation kommen. Es zeigt sich, dass die 7 in der dritten Spalte der mittleren Box zuhause sein muss, weshalb alle weiteren Möglichkeiten in dieser Zeile auszuschließen sind. [18, S.13]

Diese Hutform ist natürlich nicht zwingend nötig (beispielsweise ist auch eine Pfeife möglich). Diese Strategie ist bei allen derartigen Situationen, die sich aus Zeilen oder Spalten und Boxen zusammensetzen, anwendbar.

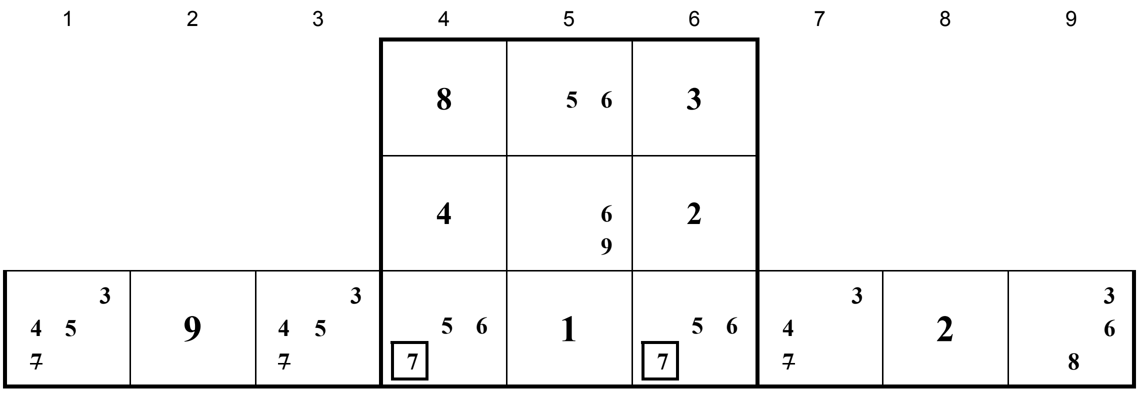

Abbildung 24: 2 Zahlen, 2 Zuhause [18, S. 13]

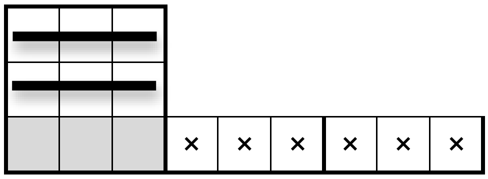

Abbildung 25: Pfeife [18, S. 14]

Kelle und Blockkreuz

Umgekehrt verhält es sich bei Kelle und Blockkreuz. Hier ist eine Zahl nur in den drei Zellen eines Blockes einer Zeile oder Spalte möglich, weshalb in den restlichen sechs Kästchen diese Ziffer kein möglicher Eintrag sein kann. [18, S. 14]

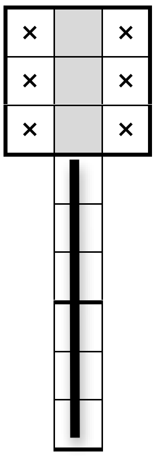

Abbildung 26: Kelle [*18*, S. 14]

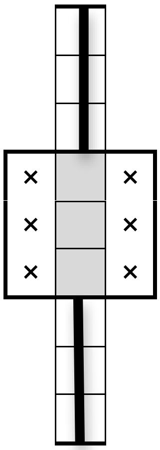

Abbildung 27: Blockkreuz [18, S. 14*]*

Gitter

Ein Gitter kann als Zusammenschluss von zwei „nur zwei Zuhause“ betrachtet werden. Wenn in einer Zeile (oder Spalte) eine Zahl nur an zwei Stellen einen möglichen Platz hat und in einer weiteren Zeile (oder Spalte) ebenfalls, dann können alle anderen Plätze dieser Zahl in den beiden Spalten (oder Zeilen) ausgeschlossen werden. In Abbildung 28 kann die 4 somit nur in den grau hinterlegten Feldern sein und alle anderen Möglichkeiten können ausgeschlossen werden. (Schema: Abbildung 29) [18, S. 16]

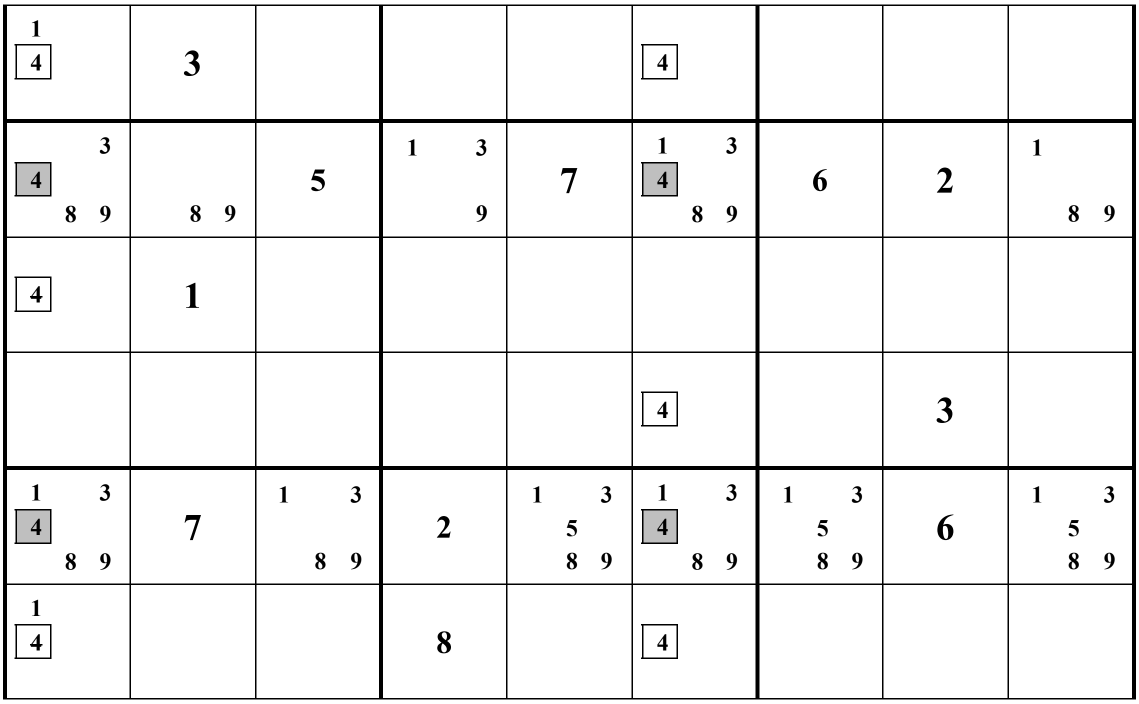

Abbildung 28: Gitter

Diese Lösungsstrategie funktioniert auch, wenn anstelle einer gleichen Zeile (oder Spalte) die Zahl in einer Box „nur zwei Zuhause“ hat. Die Spalten (oder Zeilen) müssen dafür aber identisch sein. [18, S. 17]

Trapeze

Ein etwas umständlicher Fall tritt ein, wenn nur ein Paar in der gleichen Zeile (oder Spalte) liegt und die beiden anderen Möglichkeiten weder eine Spalte (oder Zeile) noch eine Box belegen, aber im gleichen Abschnitt sind. Hier ist es nötig, die beiden möglichen Fälle zu betrachten.

Fall 1 (Abbildung 30: **O**): Die Zahl füllt die Zelle, die die linke obere Ecke des Trapezes bildet. Somit erzeugt sie auch die rechte untere Ecke. In diesem Fall können einige Zellen (Box und Zeile oder Spalte) für diese Zahl ausgeschlossen werden. In Abbildung 30 sind diese gestrichenen Möglichkeiten mit x bezeichnet.

Fall 2 (Abbildung 30: ⊙): Die Zahl füllt die anderen beiden Zellen. Wenn dies auftritt, kann man ebenfalls die restlichen freien Kästchen in der Box und der Zeile oder Spalte zusätzlich ausschließen. Diese Ausschlüsse sind in Abbildung 30 mit X dargestellt. [18, S. 18]

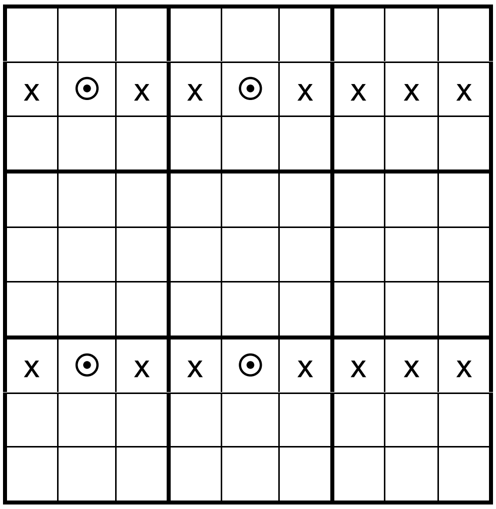

Abbildung 29: Gitter [18, S. 18]

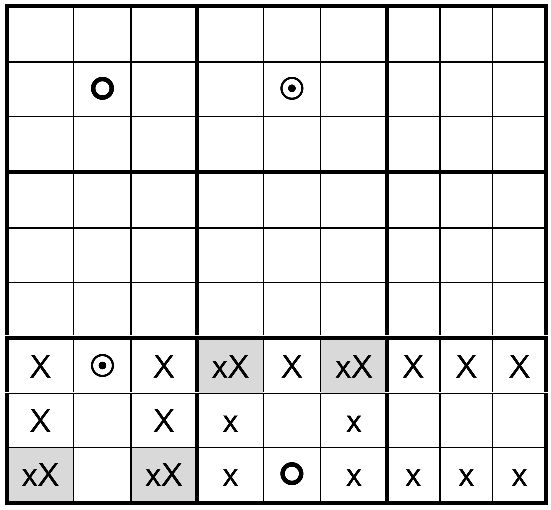

Abbildung 30: Trapez [18, S. 18]

Daraus lässt sich erkennen, dass die Schnittmenge der beiden Fälle nicht leer ist. So hat man (in diesem Beispiel 4 grau hinterlegte) Zellen gefunden, in denen die Zahl auf keinen Fall auftreten kann. [18, S. 18]

Querschläger

Manchmal kommt in einer Box eine Zahl nur in einer Zeile und einer Spalte vor. Wenn zusätzlich in dieser Zeile und Spalte die gesuchte Ziffer nur ein weiteres Mal auftritt und in dieser Spalte und Zeile „nur zwei Zuhause“ hat, dann kann man von einem Querschläger sprechen.

Durch Betrachtung der verschiedenen Fälle können wieder Möglichkeiten vernichtet werden. Zum besseren Verständnis wird der Querschläger anhand von Abbildung 31 erklärt.

In Spalte S gibt es zwei mögliche Plätze für die 7. Diese kann einerseits in der unteren Zelle ihr „Zuhause“ finden, somit steht in Kästchen F keine. Andererseits ist es möglich, dass sie in die obere Zelle gehört. Daraus folgt, dass in Zeile S1 keine 7 stehen kann und sie in Spalte S2 sein muss, um Box Q mit einer 7 zu füllen. Dies führt auch zu einer 7er-freien Zelle F. Die Schnittmenge der beiden Möglichkeiten bringt den Ausschluss von 7 als Möglichkeit in Kästchen F. [18, S. 19]

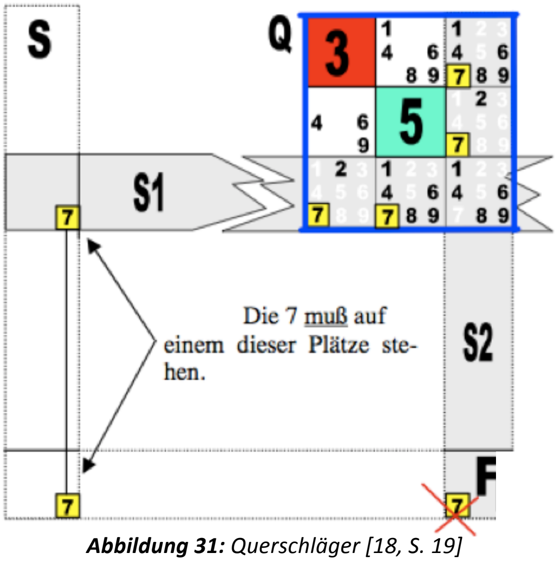

Abbildung 31: *Querschläger [18, S. 19]*

Eine Verallgemeinerung dieser Methode ist das sogenannte „coloring“. Das ist eine gezielte „Backtracking“-Strategie, was einem Ausprobieren entspricht. Beim „coloring“ wird eine Zahl angenommen und alle aus diesem Eintrag folgenden Schlüsse werden farblich markiert. Somit kann bei einem Widerspruch sofort in die Ausgangslage zurückgekehrt werden. Außerdem kann es, wie beim Querschläger, zu gleichen Resultaten durch verschiedene Grundannahmen kommen, was zu einem sicheren Eintrag führen kann. [18, S. 20]

6 Sudoku im engeren Sinn

Neben den Lösungsverfahren bieten Sudokus noch viel mehr Beachtenswertes. Beispielsweise ist auch die Frage interessant, wie viele ausgefüllte Gitter existieren können und ob diese teilweise auf Symmetrien zurückzuführen sind. 6.1 basiert auf „Mathematics of Sudoku I“ von Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis [6], während das 2. Unterkapitel auf dessen Fortsetzung „Mathematics of Sudoku II“ von Ed Russell und Frazer Jarvis [13] beruht.

6.1 Anzahl der möglichen Lösungen

Um die Anzahl der ausgefüllten Sudokus N_0 zu ermitteln, wird zuerst versucht, die Möglichkeiten zu minimieren, indem Symmetrien ausgenützt werden. So kann beispielsweise durch Umbenennung immer eine „Standardbox“ (Abbildung 32) in der linken oberen Ecke stehen, was die Lösungen auf $N_1 = \frac{N_0}{9!}$ verringert.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Abbildung 32: Standardbox

(Es handelt sich dabei um eine Symmetrie, deren Symmetriegruppe die symmetrische Gruppe S_9 ist.)

Durch $9!$ wird dividiert, da für die 1. Ziffer 9 mögliche Plätze vorhanden sind, für die 2. Ziffer nur noch 8 und so weiter. Wenn nun die Möglichkeiten multipliziert werden, erhält man 362880 = $9!$. Da N_1 aber nur eine mögliche Anordnung der Zahlen 1 bis 9 zulässt, eben die „Standardbox“ links oben, wird somit die Anzahl aller Lösungen N_0 durch $9!$ geteilt.

Da Box 1 = B_1 festgelegt ist, wird auf B_2 und B_3, die stark von B_1 abhängen, eingegangen. Zuerst betrachtet man, welche Zahlenkombinationen für diese Boxen möglich sind.

Die erste Reihe in der zweiten Box kann nur aus den Ziffern der zweiten Reihe der ersten Box, der dritten Reihe der ersten Box oder einer Kombination aus diesen bestehen. Somit kann die erste Zeile der Boxen 2 und 3 nur aus folgenden $\binom{6}{3} = 20$ Kombinationen bestehen.

$\{4, 5, 6\}\|\{7, 8, 9\}$	$\{7, 8, 9\}\|\{4, 5, 6\}$
$\{4, 5, 7\}\|\{6, 8, 9\}$	$\{6, 8, 9\}\|\{4, 5, 7\}$
$\{4, 5, 8\}\|\{6, 7, 9\}$	$\{6, 7, 9\}\|\{4, 5, 8\}$
$\{4, 5, 9\}\|\{6, 7, 8\}$	$\{6, 7, 8\}\|\{4, 5, 9\}$
$\{4, 6, 7\}\|\{5, 8, 9\}$	$\{5, 8, 9\}\|\{4, 6, 7\}$
$\{4, 6, 8\}\|\{5, 7, 9\}$	$\{5, 7, 9\}\|\{4, 6, 8\}$
$\{4, 6, 9\}\|\{5, 7, 8\}$	$\{5, 7, 8\}\|\{4, 6, 9\}$
$\{5, 6, 7\}\|\{4, 8, 9\}$	$\{4, 8, 9\}\|\{5, 6, 7\}$
$\{5, 6, 8\}\|\{4, 7, 9\}$	$\{4, 7, 9\}\|\{5, 6, 8\}$
$\{5, 6, 9\}\|\{4, 7, 8\}$	$\{4, 7, 8\}\|\{5, 6, 9\}$

Da die Zahlen als Menge angegeben werden, ist die Reihenfolge beliebig und nicht der Darstellung entsprechend starr zu verstehen.
Die erste Reihe kann also beispielsweise mit $\{4, 5, 6\}|\{7, 8, 9\}$ ergänzt werden.

1	2	3	{4,	5,	6}	{7,	8,	9}
4	5	6	{7,	8,	9}	{1,	2,	3}
7	8	9	{1,	2,	3}	{4,	5,	6}

Abbildung33: Mögliche Lösungsmengen von B_2 und B_3 mit B_1 als „Standardbox" ohne Reihenmischung [6, S. 3]

Daraus ergeben sich $(3!)^6$ mögliche Konfigurationen, da jede dreielementige Menge $3!$ = 6 verschiedene Anordnungen liefert. Das Gleiche gilt auch für $\{7, 8, 9\}|\{4, 5, 6\}$. Die anderen 20 – 2 = 18 Möglichkeiten verhalten sich nicht derart, da die Mengen aus einer Mischung der Reihen der ersten Box bestehen.

1	2	3	{4,	5,	7}	{6,	8,	9}
4	5	6	{8,	9,	a}	{7,	b,	c}
7	8	9	{6,	b,	c}	{4,	5,	a}

Abbildung 34: Mögliche Lösungsmengen von B_2 und B_3 mit B_1 als „Standardbox" mit Reihenmischung[6, S. 3]

Hier stehen a, b und c für 1, 2 und 3 in irgendeiner Anordnung, weshalb $3\cdot(3!)^6$ Konfigurationen (b und c sind untereinander austauschbar) möglich sind.

Insgesamt erhält man somit

$$2\cdot(3!)^6 + 18\cdot 3\cdot(3!)^6 = 56\cdot(3!)^6 = 2612736 \approx 2\cdot 10^6$$

mögliche Vervollständigungen für die ersten drei Reihen.

Somit gibt es $9! \cdot 2612736 = 948109639680 \approx 9{,}5 \cdot 10^{11}$ mögliche Lösungen für das oberste Band.

Da dies doch eine beträchtliche Anzahl von Möglichkeiten ist und selbst ein Computer sehr lange brauchen würde, um all diese Sudokus zu vervollständigen, wird nun versucht, die gefundenen Lösungen zu reduzieren. Dazu werden Konfigurationen, die dieselbe Zahl an Ergänzung des Gitters aufweisen, identifiziert. Das oben durchgeführte Umbenennen arbeitet bereits auf dieser Basis. Es gibt noch mehr Methoden, die so zu einer Vereinfachung führen. Bei Betrachtung des obersten Bandes können beispielsweise die Boxen B_2 und B_3 ausgetauscht werden, was zur gleichen Lösung, nur unter Vertauschung von B_5 mit B_6 und B_8 mit B_9, führt. Dies funktioniert nicht nur bei B_2 und B_3, sondern es können alle 3 Boxen des ersten Bandes permutiert werden. Da B_1 dann nicht mehr in Standardform ist, kann diese durch Umbenennung wieder erzeugt werden.
Außerdem können sowohl die Spalten jeder Box nach Belieben vertauscht werden, wenn auch die restlichen Spalten mitpermutiert werden, als auch die Reihen der Boxen 1 bis 3. B_1 sollte im Anschluss wieder in Standardform gebracht werden.

6.1.1 Lexikographische Reduktion

Zu Beginn werden die 2612736 Möglichkeiten folgendermaßen geordnet:

(1.) Die Spalten von B_2 und B_3 werden so permutiert, dass die oberen Einträge in aufsteigender Reihenfolge angeführt sind.

(2.) Daraufhin wird, wenn nötig, B_2 mit B_3 vertauscht, sodass der obere linke Eintrag von Box 2 kleiner ist als jener von Box 3.

Die 1. Anordnungsvorschrift verringert die Anzahl der Fälle um den Faktor 6 pro Box, also 6^2 für B_2 und B_3. Die erste betrachtete Spalte hatte zuvor drei mögliche Plätze, die zweite zwei und die dritte nur noch einen. Somit ist die Anzahl $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Da dies sowohl für Box 2 als auch für Box 3 gilt, werden die Möglichkeiten multipliziert und die Anzahl der Fälle um den Faktor 36 verkleinert.
Wegen (2.) werden die Fälle halbiert, da es zwei mögliche Anordnungen gibt.
Somit werden die oben angeführten 2612736 Möglichkeiten um einen Faktor von $36 \cdot 2 = 72$ verringert. Nun müssen noch $\frac{2612736}{72} = 36288$ Fälle betrachtet werden.

6.1.2 Permutationsreduktion

Bis jetzt wurden die Möglichkeiten der Permutationen und Umbenennungen noch nicht vollständig ausgeschöpft. Für jeden der 36288 Fälle gibt es $(3!)^4 = 6^4$ mögliche Lösungen, da die drei Boxen und die drei Spalten in diesen jeweils miteinander vertauscht werden können. Da eine Permutation von 3 Elementen gleich der Fakultät von 3, also gleich 6 ist und sowohl die Boxen gesamt als auch die drei Spalten in den einzelnen Blöcken die Plätze wechseln können, erhält man $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Möglichkeiten pro Fall. Aufgrund dieser Vertauschungen wird die erste Box erneut keine Standardform aufweisen, welche durch Umbenennen leicht wiederhergestellt werden kann. Dabei ist darauf zu achten, dass auch B_2 und B_3 umbenannt werden, woraufhin im Anschluss die lexikographische Reduktion wiederholt werden muss. Jede der 1296 Möglichkeiten gibt ein neues B_2-B_3-Paar mit der gleichen Anzahl an Vervollständigungen an. Mittels Computerauswertung wurde die Liste der unterschiedlichen B_2-B_3-Paare auf 2051 beschränkt. (Die große Mehrheit dieser 2051 Fälle stammt von genau $18 = \frac{6^4}{72}$ der 36288 Möglichkeiten.)

Des Weiteren können auch die drei Reihen permutiert werden, woraufhin B_1 aber wieder in Standardform gebracht werden soll. Dies führt zu einer Reduzierung auf 416 Möglichkeiten für B_2 und B_3.

Anhand eines Beispiels wird dies illustriert.

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Abbildung 35: möglicher Streifen [6, S. 4]

Nun werden beispielsweise die Spalten 1 und 2 vertauscht.

2	1	3	4	5	8	6	7	9
5	4	6	1	7	9	2	3	8
8	7	9	2	3	6	1	4	5

Abbildung 36: Vertauschung der ersten beiden Spalten [6, S. 4]

Da Box 1 nicht länger in Standardform vorliegt, werden die Zahlen 1 und 2, 4 und 5, 7 und 8 jeweils vertauscht.

1	2	3	5	4	7	6	8	9
4	5	6	2	8	9	1	3	7
7	8	9	1	3	6	2	5	4

Abbildung 37: Umbenannte Abbildung 36 [6, S. 4]

Weil die erste Reihe von B_2 nicht mehr in aufsteigender Reihenfolge auftritt, werden die ersten beiden Spalten von Box 2 vertauscht, sodass die lexikographische Ordnung wiederhergestellt ist.

1	2	3	4	5	7	6	8	9
4	5	6	8	2	9	1	3	7
7	8	9	3	1	6	2	5	4

Abbildung 38: Geordnete Abbildung 37 [6, S. 5]

Die Anordnung in Abbildung 38 hat dieselbe Anzahl an Vervollständigungen wie jene in Abbildung 35, da alle Operationen, die benutzt wurden, die Zahl der Lösungen invariant lassen, also nicht verändern. Deshalb können diese beiden als äquivalent für den Zweck der Aufzählung angesehen werden.

6.1.3 Spaltenreduzierung

Um die Möglichkeiten weiter einzuschränken, werden nun die Spalten an diesem Beispiel betrachtet.

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Abbildung 39: Beispiel [6, S. 5]

Wenn besonderes Augenmerk auf die Ziffern 8 und 9 gelegt wird, lässt sich leicht erkennen, dass diese Zahlen in den Boxen 2 und 3 ein Rechteck bilden, also nur in zwei Reihen und zwei Spalten liegen. Somit können sie ohne weitere Abänderung vertauscht werden, was die Abbildungen 40 und 41 demonstrieren.

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Abbildung 40: Möglichkeit 1 [6, S. 5]

1	2	3	4	5	9	6	7	8
4	5	6	1	7	8	2	3	9
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Abbildung 41: Möglichkeit 2 [6, S. 5]

Somit unterscheiden sich diese Fälle auch nicht in der Vervollständigung des ganzen Sudokus. Dies trifft ebenfalls auf 1 und 2 in den Spalten 4 und 7, 1 und 4 in den Spalten 1 und 4, 5 und 8 in den Spalten 2 und 9 und 6 und 9 in den Spalten 3 und 6 zu, wobei in diesen Fällen eine Umbenennung nötig ist, um B_1 in die Standardform zu bringen. Dazu werden 2×2 Unterrechtecke im Gitter gesucht, die in beiden Reihen dieselben Einträge in umgekehrter Reihenfolge aufweisen.

Diese Methode kann auch auf $k \times 2$ oder $2 \times k$ angewendet werden, deren Einträge aus 2 Reihen oder 2 Spalten mit den gleichen Zahlen bestehen. Dadurch werden die Möglichkeiten noch einmal gesenkt. Unter Verwendung von nur 2×2 können die 416 möglichen Fälle auf 174 verringert werden. Wenn 2×3, 3×2 und 4×2 Unterrechtecke zugelassen werden, wird die Liste sogar auf nur 71 gesenkt.

Am folgenden Beispiel wird dies demonstriert. Die Abbildungen 42 und 43 haben dieselbe Anzahl an möglichen Lösungen, da keine der durchgeführten Permutationen eine Auswirkung auf die unteren beiden Streifen des Sudokugitters haben kann, da nur innerhalb einer Spalte die Plätze der Ziffern getauscht wurden.

1	2	3	4	6	7	5	8	9
4	5	6	8	1	9	3	2	7
7	8	9	2	5	3	1	4	6

Abbildung 42: Möglichkeit 1 [6, S. 5]

4	5	3	2	6	7	1	8	9
1	2	6	8	5	9	3	4	7
7	8	9	4	1	3	5	2	6

Abbildung 43: Möglichkeit 2 [6, S. 6]

Nach dieser Vertauschung muss wieder umbenannt und lexikographisch geordnet werden, um die zuvor verwendete Anordnung herzustellen.

Durch Vervollständigung der 71 Fälle wurden 44 eindeutige Lösungen gefunden. Somit können die 71 Klassen auf 44 beschränkt werden.

Bis hier wurden die Möglichkeiten für die Boxen 1 bis 3 auf eine Sammlung von 44 eingeschränkt, zu denen jede Lösung äquivalent in der Anzahl der Gesamtlösungen

ist. Das bedeutet, dass jede beliebige Anordnung der Ziffern in B_1, B_2 und B_3, solange sie den Regeln eines Sudokus entspricht, einer der 44 Klassen zugeordnet werden kann. Jedes Element einer dieser Klassen besitzt gleich viele Lösungen des gesamten Gitters wie jedes andere Element seiner Klasse.
Nun müssen nur noch die Anzahl der Elemente einer Klasse mit der jeweiligen Anzahl an Lösungen einer Klasse multipliziert und die jeweiligen Resultate addiert werden, was zu der gesamten Anzahl an möglichen Sudokus führt.

6.1.4 Das Zählen

Die verschiedenen Anzahlen an Lösungen für die 44 B_2-B_3-Klassen wurden durch Zählen herausgefunden. Dabei ist zu beachten, dass alle möglichen Wege berücksichtigt werden, um das Gitter nach den Sudokuregeln zu füllen. Diese Aufgabe kann erneut durch die lexikographische Ordnung vereinfacht werden. Diesmal wird die erste Spalte von B_4 und B_7 nach diesem Verfahren sortiert, was die Anzahl der Lösungen erneut um den Faktor 72 senkt, da jeweils die drei Reihen in den Boxen 4 und 7 und B_4 und B_7 selbst permutiert werden können. Somit erhält man wieder $(3!)^2 \cdot 2! = 36 \cdot 2 = 72$.
Nun sind die ersten drei Reihen und die erste Spalte gefüllt und es werden die ein Sudoku ergebenden Vervollständigungen des Gitters gezählt. Dies wird mithilfe eines „backtracking algorithm“, also eines rückverfolgenden Algorithmus, umgesetzt, welcher durch Versuch und Irrtum herausfindet, ob folgender Schritt möglich ist oder ob von einem früheren Zeitpunkt aus erneut begonnen werden muss. Dies ist eine sehr effiziente Methode, die die Möglichkeiten für eine Konfiguration von B_2 und B_3 in weniger als zwei Minuten angeben kann.
Da die Anwendung der weiteren Vereinfachungen der Boxen 1 bis 3 keinen wesentlichen zeitlichen Vorteil bringt, wurde für die ersten drei Spalten darauf verzichtet.

6.1.5 Das Resultat

Den 44 zuvor erwähnten Klassen kann jede mögliche Anordnung der ersten drei Reihen in der Anzahl der vervollständigten Sudokus zugeordnet werden. Das heißt, dass alle genannten Teillösungen zu bestimmt vielen Gesamtlösungen führen und diese Anzahl entspricht einer von 44 Klassen. Beispielsweise wurde mittels

Computer herausgefunden, dass 178848 der 2612736 Möglichkeiten der ersten drei Reihen in Standardform die gleiche Zahl an vervollständigten Gittern aufweisen wie die in Abbildung 44 beliebig gewählten Boxen 1 bis 3.

1	2	3	4	7	8	5	6	9
4	5	6	1	3	9	2	7	8
7	8	9	2	5	6	1	3	4

Abbildung 44: Beispiel mit 7053225408 möglichen Lösungen [6, S. 6]

Dank eines Computers wurde ebenfalls herausgefunden, dass Abbildung 44 zu $72 \cdot 97961464 = 7053225408$ fertigen Sudokus ergänzt werden kann. Dies wurde für alle 44 Klassen durchgeführt. Im Anschluss wurde die Summe der Faktoren der in den einzelnen Klassen befindenden Elemente mit deren Anzahl an vervollständigten Gittern gebildet. Das Ergebnis liefert die Anzahl der möglichen Sudokus mit B_1 als „Standardbox". Aus diesem Grund muss das Resultat noch mit $9!$ = 362880 multipliziert werden, um die Summe aller möglichen Sudokus zu erhalten.
Die Gesamtanzahl an möglichen Sudokus lautet

$$N_0 = 6670903752021072936960, \text{ also rund } 6{,}671 \times 10^{21}.$$

Dieses Ergebnis wurde schon von einigen Personen verifiziert.

6.1.6 Eine nicht exakte Näherung von Kevin Kilfoil

Um jede Box mit den Zahlen 1 bis 9 zu füllen, gibt es $N = (9!)^9$ verschiedene Möglichkeiten. (Für die erste Ziffer gibt es neun vorhandene Plätze, für die zweite nur noch acht und so weiter. Dies ergibt $9!$ unterschiedliche Anordnungen in jedem Block. Da ein Sudoku aus neun solchen Boxen besteht und für jede von ihnen $9!$ Möglichkeiten zur Füllung vorhanden sind, ergibt dies gesamt $(9!)^9$ verschiedene Anordnungen.) Da die Regeln des Sudokus aber besagen, dass nicht nur jeder Block, sondern auch jede Reihe und jede Spalte die Zahlen 1 bis 9 nur genau einmal enthalten darf, ist N zu groß. Für die korrekte (Boxen und Reihen enthalten 1 bis 9 genau einmal) Füllung von B_1 bis B_3 wurde oben die Anzahl der möglichen Lösungen mit 948109639680 berechnet. Da dasselbe für die Boxen 4 bis 6 und 7 bis 9 gilt, könnte man die Anzahl der Möglichkeiten mit 948109639680^3 annehmen, was zu einer Überschätzung führt, da die Spalten außer Acht gelassen wurden.

Daraus folgt, dass der Proportionalitätsfaktor für die N Möglichkeiten, die die Reihen berücksichtigen gleich $k = \frac{948109639680^3}{(9!)^9}$ beträgt.

Dieser Faktor gilt ebenfalls für die Spalten. Unter der Annahme, dass Spalten und Reihen unabhängig sind, führt dies zu einer Anzahl von

$$Nk^2 = \frac{948109639680^6}{(9!)^9} \approx 6{,}6571 \times 10^{21}$$

verschiedenen Sudokus.

Die Unabhängigkeit der Spalten und Zeilen entspricht nicht der Realität. Diese Abschätzung ist trotzdem gut, da sie nur um 0,2 % von der richtigen Anzahl abweicht.

6.2 Anzahl essentiell verschiedener Lösungen

Im Folgenden wird beschrieben, wie viele verschiede Sudokus unter Berücksichtigung der Symmetrie erstellt werden können. Nun soll etwa eine Drehung des Gitters um 90 Grad, ein Vertauschen von Einsen und Zweien und so weiter nicht mehr als Unterschied angesehen werden. Wenn sich ein Sudoku nicht in ein zweites überführen lässt, werden die beiden essentiell verschieden genannt. Um diese zu finden, wird zuerst ein Wissen über Symmetrien und Operatoren, welche diese nicht verletzen, benötigt, worauf nun eingegangen wird.

Erlaubte Operationen:

(1) Umbenennen, beispielsweise permutieren, der neun Zahlen

(2) Permutieren der drei Säulen

(3) Permutieren der drei Bänder

(4) Permutieren der drei Spalten in einer Säule

(5) Permutieren der drei Reihen in einem Band

(6) Spiegelungen und Drehungen

Wenn ein Sudoku durch eine Sequenz von Transformationen (1) bis (6) in ein anderes Sudoku verwandelt werden kann, werden sie als essentiell gleich bezeichnet.

6.2.1 Die Symmetriegruppe

Die Operationen (2) bis (6) beschäftigen sich mit den Plätzen des Gitters und nicht mit deren Füllung, aus diesem Grund werden sie als „Symmetrien“ bezeichnet. Dies lässt sich mit einem Würfel vergleichen, der etwa durch Rotation oder Ähnliches auf verschiedenen Wegen wieder in seine Ausgangslage zurückversetzt werden kann.

Um dies zu beschreiben, ist Gruppentheorie nötig, worauf nun kurz eingegangen wird. Die Definition einer Gruppe wurde bereits in Kapitel 3, den mathematischen Grundlagen, angeführt.

Im Folgenden wird eine Liste von acht Operationen angegeben, welche gemeinsam eine Gruppe bilden, da sie durch Aneinanderreihung verschiedener Transformationen ein Element der Gruppe erzeugen.

- rot_0 (rotation) : Drehung um 0 Grad
- rot_1 : Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn
- rot_2 : Drehung um 180 Grad
- rot_3 : Drehung um 270 Grad im Uhrzeigersinn beziehungsweise um 90 Grad in entgegen gesetzter Richtung
- ref_0 (reflection) : Spiegelung an der horizontalen Achse
- ref_1 : Spiegelung an der Diagonale von rechts oben nach links unten (entspricht der ersten Mediane in einem Koordinatensystem)
- ref_2 : Spiegelung an der vertikalen Achse
- ref_3 : Spiegelung an der Diagonale von links oben nach rechts unten (entspricht der zweiten Mediane in einem Koordinatensystem)

Um zu zeigen, dass es sich wirklich um eine Gruppe handelt, wird in Tabelle 1 die Verknüpfungstabelle der symmetrischen Gruppe dargestellt, woraus sich erkennen lässt, dass sämtliche Verknüpfungen wieder ein Element der Gruppe ergeben.

Zum Beispiel: $rot_1 = ref_0 \circ ref_1 \neq ref_1 \circ ref_0 = rot_3$

$\circ$	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3	ref_0	ref_1	ref_2	ref_3
rot_0	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3	ref_0	ref_1	ref_2	ref_3
rot_1	rot_1	rot_2	rot_3	rot_0	ref_3	ref_0	ref_1	ref_2
rot_2	rot_2	rot_3	rot_0	rot_1	ref_2	ref_3	ref_0	ref_1
rot_3	rot_3	rot_0	rot_1	rot_2	ref_1	ref_2	ref_3	ref_0
ref_0	ref_0	ref_3	ref_2	ref_1	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3
ref_1	ref_1	ref_0	ref_3	ref_2	rot_3	rot_0	rot_1	rot_2
ref_2	ref_2	ref_1	ref_0	ref_3	rot_2	rot_3	rot_0	rot_1
ref_3	ref_3	ref_2	ref_1	ref_0	rot_1	rot_2	rot_3	rot_0

Tabelle 1: Verknüpfungstabelle der symmetrischen Gruppe

Weiters besitzt diese Gruppe mit rot_0 ein neutrales Element, welches bei Anwendung keine Änderung liefert. Die inversen Elemente werden wie folgt angegeben:

$$(rot_0)^{-1} = rot_0$$
$$(rot_1)^{-1} = rot_3$$
$$(rot_2)^{-1} = rot_2$$
$$(rot_3)^{-1} = rot_1$$
$$(ref_0)^{-1} = ref_0$$
$$(ref_1)^{-1} = ref_1$$
$$(ref_2)^{-1} = ref_2$$
$$(ref_3)^{-1} = ref_3$$

Diese Informationen lassen sich auch aus Tabelle 1 herauslesen (, wurden aber zur besseren Verdeutlichung noch einmal explizit angegeben). Das neutrale Element ist leicht zu erkennen, da es jenes ist, das den zweiten Operator nicht verändert. Die zueinander inversen Elemente müssen nach der Definition gemeinsam das neutrale Element ergeben, was ebenfalls in Tabelle 1 abgelesen werden kann.

Die Assoziativität ist gegeben, da eine Verknüpfung von zwei Abbildungen immer assoziativ ist.

Somit ist gezeigt, dass es sich wirklich um eine Gruppe handelt. Eigentlich dürfte dieser Menge an Transformationen erst ab dieser Stelle der Name Gruppe zuteil werden, was aber in Ermangelung einer besseren Betitelung und des Wissens um das Resultat auch im Vorfeld schon getan wurde. Da die Kommutativität aber nicht gegeben ist, handelt es sich um keine Abelsche Gruppe, was durch folgendes Gegenbeispiel belegt wird.

$$rot_1 = ref_0(ref_1) \neq ref_1(ref_0) = rot_3$$

Es handelt sich bei der oben beschriebenen Gruppe um die Symmetriegruppe des Quadrates, die normalerweise mit D_4 oder D_8 bezeichnet wird.

6.2.2 Anwendung des Burnside-Lemmas

Um die Frage nach den essentiell verschiedenen Sudokus zu klären, wird zunächst das Burnside Lemma mit einem Beispiel erleichtert dargestellt.

Es werden die Kanten eines Vierecks mit zwei verschiedenen Farben – rot oder blau – gefärbt. Wie viele verschiedene Arten der Anfärbung sind möglich, wenn zwei Möglichkeiten , die mittels einer Symmetrie ineinander transformiert werden können, als gleich bezeichnet werden? Zur Beantwortung dieser Frage werden die Symmetrien von vorher erneut betrachtet. Für jede der Transformationen rot_i und ref_i (mit $i \in \{0,1,2,3\}$) werden nun die verschiedenen Möglichkeiten der farblichen Markierung gezählt und im Anschluss der Mittelwert berechnet.

Zur besseren Veranschaulichung dient die Darstellung der verschiedenen Anfärbungsmöglichkeiten in Abbildung 45.

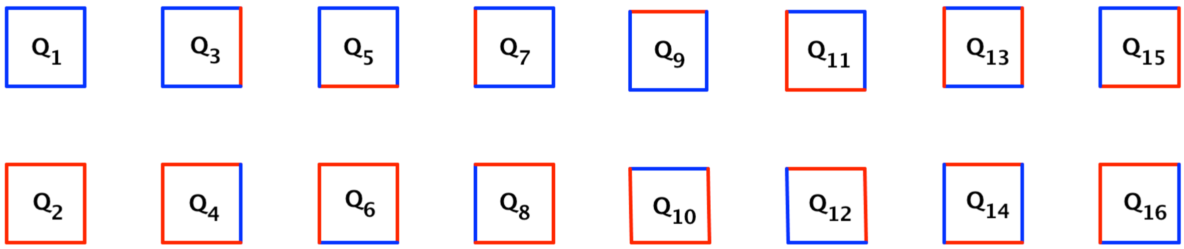

Abbildung45: Kantenfärbung

Da rot_0 zu keinen Veränderungen führt, gibt es $2^4 = 16$ verschiedene Anfärbungen, weil die vier Kanten mit jeweils zwei verschiedenen Farben angemalt werden können. (Q_1 – Q_{16})

Rot_1, die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn, führt hingegen zu nur zwei unterschiedlichen Kolorierungen, da entweder alle Kanten rot oder alle Kanten blau sein müssen. (Q_1, Q_2)

Bei rot_2, der Drehung um 180°, gibt es 4 unterschiedliche Bemalungen, und zwar diejenigen, deren gegenüberliegende Kanten gleich gefärbt sind. Das bedeutet, dass bei den möglichen Färbungen entweder alle Kanten rot, alle blau, links und rechts oder oben und unten rot und die restlichen beiden Kanten blau oder umgekehrt sind. (Q_1, Q_2, Q_{13}, Q_{14})

Rot_3, die Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn, lässt wie rot_1 wieder nur zwei Möglichkeiten zu, nämlich nur rote oder nur blaue Kanten. (Q_1, Q_2)
Acht unterschiedliche Kolorierungen erlaubt hingegen ref_0, die Spiegelung an der horizontalen Achse, da die untere Kante immer der oberen entsprechen muss. (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_7, Q_8, Q_{13}, Q_{14})
Bei ref_1, der Spiegelung an der ersten Mediane, gibt es vier verschiedene Anfärbungen, und zwar jene, wo oben und rechts sowie unten und links die gleichen Farben auftreten. (Q_1, Q_2, Q_{11}, Q_{12})
Für ref_2, die Spiegelung an der vertikalen Achse, müssen die linken und rechten Seiten gleich bemalt sein. Dies liefert acht Färbevarianten. (Q_1, Q_2, Q_5, Q_6, Q_9, Q_{10}, Q_{13}, Q_{14})
Von ref_3, der Spiegelung an der zweiten Mediane, werden vier Kolorierungen fixiert und zwar jene, deren obere und linke sowie untere und rechte Kanten in gleicher Weise markiert sind. (Q_1, Q_2, Q_{15}, Q_{16})
Der Mittelwert dieser Symmetrien liefert

$$\frac{16+2+4+2+8+4+8+4}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Das Burnside Lemma besagt, dass die Antwort auf die oben gestellte Frage tatsächlich 6 ist. Es gibt sechs essentiell verschiedene Färbungen der Kanten eines Rechtecks.

Nun wird zur eigentlichen Frage zurückgekehrt, wie viele essentiell verschiedene Sudokus es gibt. Die Gruppe besteht aus den oben definierten Operationen (2) bis (6). Diese permutieren die 81 Plätze des Gitters. Das Computerprogramm GAP [The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8 http://www.gap-system.org/] wird zur Durchführung verwendet.
Um die Transformation (1) nicht außer Acht zu lassen, werden zwei Gitter auch als äquivalent angesehen, wenn sie durch Umbenennung ineinander übergeführt werden können. Nun wirken alle Operationen auf das Gitter, deren Äquivalente wie zuvor gezählt werden.
Beispielsweise ist folgendes Sudoku durch Drehung um 90° äquivalent zu sich selbst:

1	2	4	5	6	7	8	9	3
3	7	8	2	9	4	5	1	6
6	5	9	8	3	1	7	4	2
9	8	7	1	2	3	4	6	5
2	3	1	4	5	6	9	7	8
5	4	6	7	8	9	3	2	1
8	6	3	9	7	2	1	5	4
4	9	5	6	1	8	2	3	7
7	1	2	3	4	5	6	8	9

Abbildung 46: Beispiel eines zu sich selbst äquivalenten Sudokus

Neben der Drehung ist auch noch eine Umbenennung nötig und zwar: $1 \to 3 \to 9 \to 7 \to 1,\ 2 \to 6 \to 8 \to 4 \to 2$, wobei 5 fix bleibt.

Es zeigt sich, dass die Gruppe, die durch (2) bis (6) erzeugt wird, 3359232 Symmetrien aufweist. Glücklicherweise bilden einige, wie im vorigen Beispiel die Drehungen um 90 und 270 Grad, gleich viele Fixpunkte, woraufhin nur 275 Äquivalenzklassen untersucht werden müssen. Somit müssen nur 275 Gitter auf ihre Fixpunkte überprüft werden.

Für viele Symmetrien wird kein Gitter in ein äquivalentes Gitter übergeführt. Zum Beispiel ist bei Betrachtung der Spiegelung an der horizontalen Achse nachvollziehbar, dass hier kein äquivalentes Sudoku möglich ist, da die fünfte Reihe konstant gehalten wird und so keine Umbenennung durchführbar ist. Somit erhalten bei Spiegelung beispielsweise die Reihen 4 und 6 in der ersten Spalte den gleichen Eintrag, was aber dem Regelwerk widerspricht.

Nur für 27 der 275 Symmetrien kann so ein Widerspruch nicht herbeigeführt werden. Mittels Computern und Backtracking werden diese verbleibenden 27 Symmetrien ausgewertet. Dies führt für die Rotation um 90 Grad beispielsweise zu 13056 äquivalenten Sudokus.

Durch Bildung des Mittelwerts über die 3359232 Gruppenelemente werden

5472730538 essentiell verschiedene Sudokus

gefunden.

Bei Verzicht auf manche Einschränkung liefert das Burnside-Lemma höhere Ergebnisse. Wenn beispielsweise nur Umbenennung, Rotation und Permutation, aber keine Spiegelung erlaubt sind, werden 10945437157 essentiell verschiedene

Lösungen gefunden. Bei zusätzlichem Verzicht auf die Permutation, besteht die Gruppe aus nur vier Elementen, und zwar den Drehungen um 0, 90, 180 und 270 Grad. Dies führt zu 4595805644052864 essentiell unterschiedlichen Gittern. Wenn neben diesen noch die Spiegelung zugelassen wird, besteht die Symmetriegruppe aus acht Elementen und entspricht genau jener, die am obigen Beispiel des Quadrates angewendet wurde. Diese führt zu 2297902829591040 essentiell verschiedenen Sudokus.

6.3 Hinweise im Sudokurätsel

Nun ist die Anzahl an unterschiedlichen ausgefüllten Gittern bekannt. Da diese bei der Rätselfangemeinde meist auf nur sehr geringes Interesse stoßen, werden nun die unvollständigen Sudokus betrachtet.
Es herrscht landläufig die Meinung, dass die Anzahl der Vorgaben über den Schwierigkeitsgrad des Sudokus entscheidet. Auch wenn dies nicht der Wahrheit entspricht, da die Einstufung in leicht, mittel, schwer oder knifflig aufgrund der Komplexität der notwendigen Techniken mittels Computerprogramm ermittelt wird, ist die Frage nach den minimalen und maximalen Vorgaben zur eindeutigen Lösung eines Sudokus interessant. [5, S. 86]

6.3.1 Maximalvorlage

Wie die Abbildungen 40 und 41 in Kapitel 6.1.3. bereits zeigten, kann dieses Rätsel vier Kästchen enthalten, welche in einem Rechteck stehen, wovon jeweils zwei in der gleichen Spalte, Reihe und Box liegen. Die beiden Ziffern, die diese ausfüllen, können dann auf zwei verschiedene Arten eingetragen werden, was der Eindeutigkeit widerspricht. Somit könnte ein Sudoku mit 81 – 4 = 77 Vorgaben immer noch nicht eindeutig lösbar sein. Mit 78, 79 oder 80 Ziffern ist die Vervollständigung eindeutig, falls sie existiert. In der Praxis wird natürlich davon Abstand genommen und solche Fälle werden vermieden, indem beispielsweise eines der vier Kästchen angegeben wird. [2, S. 105]

6.3.2 Minimalvorlage

Im Gegensatz zur maximalen Vorlage ist bei der minimalen mehr zu beachten als die Anzahl der angegebenen Ziffern. Um ein Sudoku lösen zu können, müssen acht der neun Zahlen in der Vorgabe bereits enthalten sein. Die nicht vorhandenen Zeichen können ansonsten vertauscht werden und somit gäbe es keine eindeutige Vervollständigung. Außerdem müssen auch in sechs der neun Spalten und Reihen Hinweise enthalten sein, da sonst zwei leere Spalten oder Reihen eines Abschnitts permutiert werden könnten. Es sind 49151 [22] Sudokus mit 17 Hinweisen bekannt. Mit 16 Vorgaben konnten noch kein Sudokurätsel eindeutig vervollständigt werden. Selbst wenn eine Beschränkung auf die essentiell verschiedenen Sudokus vorgenommen wird, sind die $\binom{81}{16}$ = 33594090947249085 Möglichkeiten, 16 Felder aus einem Sudoku auszuwählen, für die Leistungsfähigkeit der Computer zu viel, da diese für alle Fälle in allen Sudokus Vervollständigungen liefern müssten. [5, S. 89f] Von Gary McGuire wurde zu diesem Zweck das Programm CHECKER entwickelt, das etwa 300000 Jahre Rechenleistung dazu aufwenden müsste. [22]

Für $(n \times n)$-Lateinische Quadrate konnte diese Frage auch nicht eindeutig gelöst werden. Es wurde bisher nur die minimale Größe einer sogenannten „kritischen Menge“, nämlich $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ für $3 \leq n \leq 8$, gefunden. [5, S. 89f]

6.4 Sudoku als Graphenfärbungsproblem

Die Vervollständigung eines Sudokus ist äquivalent zur Lösung eines Graphenfärbungsproblems. Die 81 Zellen können als Knoten eines Graphen verstanden werden. Diese sind durch eine Kante genau dann verbunden, wenn die Felder in derselben Reihe, Spalte oder Box liegen. Pro Knoten ergeben sich daraus 8 + 8 + 4 = 20 Kanten. Acht Kanten entsprechen den zugehörigen Zellen in Zeile und Spalte. Die vier verbliebenen stehen für die Felder im Block, die nicht zur Reihe oder Spalte gehören. Somit hat der Graph insgesamt $\frac{81 \cdot 20}{2} = 810$ Kanten. Dies entspricht der Anzahl an Zellen multipliziert mit der Anzahl an Kanten pro Feld dividiert durch zwei, da jede Kante eine Verbindung von zwei Knoten ist und deshalb doppelt gezählt wird. [2, S.106]

7 Verknüpfungstafeln und Sudokus

Die Ideen dieses Kapitels basieren auf den Internetquellen [25] und [26].

7.1 Lateinische Quadrate aus Verknüpfungstafeln

Jede Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe bildet ein Lateinisches Quadrat. Bei einer einelementigen Gruppe ist dies trivial, auch wenn man sich die Frage stellen kann, ob man dieses (1×1)-Gitter schon ein Lateinisches Quadrat nennen will. Eine binäre Gruppe, die nur aus dem neutralen und einem zu sich selbst inversen Element besteht, erzeugt ein (2×2)-Lateinisches Quadrat. Ein klassisches Beispiel dafür ist die Restklassengruppe modulo 2. Der allgemeine Fall der Erzeugung eines Lateinischen Quadrates mittels Restklassengruppen modulo n ist in Abbildung 47 dargestellt.

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{n}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{n}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$		$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\cdots$	$\overline{1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{n}$	$\overline{n}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\cdots$	$\overline{n-1}$

Abbildung 47: aus Restklassengruppen erzeugtes Lateinisches Quadrat

Um einige Besonderheiten aufzuzeigen, wird nun ein Lateinisches Quadrat, das von der Restklassengruppe modulo 9 erzeugt wird, betrachtet.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Abbildung 48: aus Restklassengruppen erzeugtes Lateinisches Quadrat

Folgendes ist erwähnenswert:

→ Die Diagonale von links oben nach rechts unten ist eine Symmetrieachse, an der das Quadrat gespiegelt werden kann.

→ Jede Parallele zu dieser Diagonale enthält keine zwei gleichen Zahlen.

→ Diese Schrägen ergänzen sich gegenseitig auf eine volle Diagonale, die alle Elemente enthält. Das heißt, dass der fehlende Eintrag der direkt neben der Diagonale verlaufenden Schräge in der Ecke, also der am weitesten entfernten Schräge, zu finden ist, was durch die grau markierten Felder in Abbildung 48 verdeutlicht wird.

Ein Lateinisches Quadrat der Ordnung 4 kann anstelle einer Restklassengruppe auch durch die Kleinsche Vierergruppe ($V_4 = \mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_2$) erzeugt werden.

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Abbildung 49: Lateinisches Quadrat aus der Kleinscher Vierergruppe

Die kleinste nicht Abelsche Gruppe, die ein Lateinisches Quadrat erzeugt, ist die symmetrische Gruppe vom Grad 3 ($D_3 \cong S_3$), die zu den Symmetrien im Dreieck isomorph ist.

	ε	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
ε	ε	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	ε	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	ε	(1 3 2)	(1 2)	(2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 2 3)	ε	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3 2)	ε
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 2)	(1 3)	ε	(1 2 3)

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	4	3
3	5	1	6	2	4
4	6	5	1	3	2
5	3	4	2	6	1
6	4	2	3	1	5

Abbildung 50: aus der kleinsten nicht Abelsches Gruppe erzeugtes Lateinisches Quadrat

7.2 Beweis

Allgemein gilt, dass mit der Verknüpfungstafel jeder endlichen Gruppe ein Lateinisches Quadrat erzeugt werden kann, was im Folgenden kurz bewiesen wird.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	a_1^2	$a_1 a_2$	$\cdots$	$a_1 a_n$
a_2	$a_2 a_1$	a_2^2	$\cdots$	$a_2 a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$a_n a_1$	$a_n a_2$	$\cdots$	a_n^2

Abbildung 51: Erzeugung eines Lateinischen Quadrates durch eine endliche Gruppe

Es ist zu zeigen, dass für alle Elemente aus G ein weiteres Element aus G existiert, mit dem jedes beliebige Element aus G erzeugt werden kann.

$$\forall a,b \in G\ \exists! x,y \in G : a \circ x = b, y \circ a = b$$

<u>Beweis</u>: **Existenz:** Wie bereits gezeigt, hat jedes Element von G ein inverses Element, also gilt: $a,b \in G \Rightarrow a^{-1}, b^{-1} \in G$

Wegen der Abgeschlossenheit gilt weiters: $a^{-1} \circ b \in G, b \circ a^{-1} \in G$

$x = a^{-1} \circ b$ erfüllt $a \circ x = b$

$y = b \circ a^{-1}$ erfüllt $y \circ a = b$

Eindeutigkeit: angenommen, es gibt zwei x und x', y und y' dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ b \\ x' = a^{-1} \circ a \circ x' = a^{-1} \circ b \end{array}\right\} \Rightarrow x = x' \qquad \left.\begin{array}{l} y = y \circ a \circ a^{-1} = b \circ a^{-1} \\ y' = y' \circ a \circ a^{-1} = b \circ a^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow y = y'$$

Die Umkehrung gilt hingegen nicht, da beispielsweise das Lateinische Quadrat aus Abbildung 53 keiner Verknüpfungstabelle einer endlichen Gruppe entspricht. Es gibt nur eine dreielementige Gruppe, nämlich die zyklische. Da diese Gruppe das Lateinische Quadrat in Abbildung 52 erzeugt, ist das zuvor gezeigt Gitter automatisch ein Gegenbeispiel.

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Abbildung 52: Verknüpfungstabelle der zyklischen Gruppe

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Abbildung 53: Gegenbeispiel

Die in Abbildung 54 dargestellte Verknüpfungstabelle der Kleinschen Vierergruppe kann durch Vertauschung der zweiten mit der dritten Zeile in ein gerechtes Lateinisches Quadrat der Ordnung 4 mit 2×2 Untergruppen umgewandelt werden.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Abbildung 54: gerechtes Lateinisches Quadrat

7.3 Aus einer Verknüpfungstafel erzeugtes Sudoku

Wenn dies nun mit der Restklassengruppe modulo 3 ($\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$) umgesetzt wird, kann auf diese Weise ein Sudoku erzeugt werden, wie die Abbildungen 55, 56 und 57 zeigen.

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(2,1)	(2,2)	(2,0)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(2,2)	(2,0)	(2,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(2,1)	(2,2)	(2,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(2,2)	(2,0)	(2,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)
(2,0)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)
(2,2)	(2,2)	(2,0)	(2,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)

Abbildung 55: durch Restklassengruppe modulo 3 erzeugtes Lateinisches Quadrat

Durch Umbenennung der Einträge wird das Lateinische Quadrat in eine angenehmere Form gebracht.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	6	4	5	9	7	8	3	1	2
7	7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	9	7	8	3	1	2	6	4	5

Abbildung 56: umbenanntes Lateinisches Quadrat

Nun werden die Zeilenpermutationen (2 4), (3 7) und (6 8) durchgeführt. Im Anschluss können die Unterteilungen in die (3×3)-Quadrate eingezeichnet werden und das Sudoku ist erzeugt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	9	7	8	3	1	2	6	4	5

Abbildung 57: Sudoku

Da, wie oben gezeigt, nicht jedes Lateinische Quadrat und somit auch nicht jedes Sudoku durch eine Verknüpfungstabelle erzeugt werden kann, ist dies auch keine Möglichkeit, die Anzahl der möglichen eleganter zu berechnen.

8 Sudokuverwandte

Heutzutage kursieren unter dem Namen Sudoku verschiedene Rätsel. Beispielsweise werden häufig gerechte lateinische Quadrate als Sudokus ausgegeben, obwohl sie keine (3×3)-Boxen enthalten, sondern beliebige 9 Zellen verbunden sind, wie Abbildung 58 zeigt.

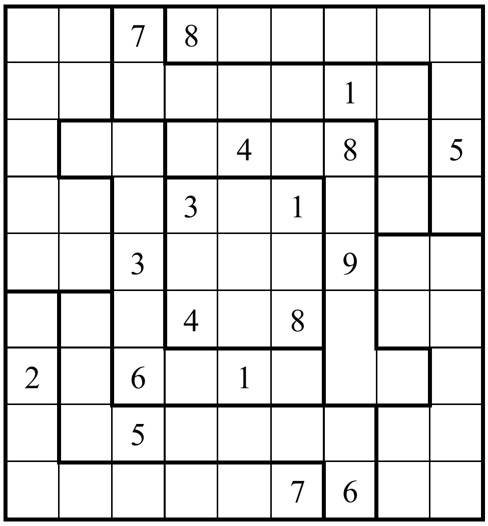

Abbildung 58: Lateinisches Quadrat [22]

Außerdem gibt es Verbindungen von zwei oder fünf Sudokus, die sich in einer 3×3 Box überschneiden, welche ebenfalls dem Regelwerk entsprechend gelöst werden sollen. Des weiteren existieren ähnliche Rätsel, in denen anstelle von Zahlen Buchstaben oder Symbole verwendet werden. [22]

Als einfachere Varianten gibt es auch (6×6)-Gitter, die dann in (2×3)- oder (3×2)-Blöcke unterteilt werden, oder komplexere, größere Versionen wie (16×16) und (25×25). [5, S. 87]

8.1 Positionssudoku

Eine weitere Variation ist das Positionssudoku, das neben den normalen Regeln auch noch dem Platz in jeder Box Bedeutung beimisst. Diese gleichen Felder sind zur besseren Veranschaulichung oft in der gleichen Farbe markiert. Die zusätzliche Aufgabe lautet hier, dass in jeder Farbe jede Zahl genau einmal vorkommt. Es wird die Symmetrie somit erhöht, woraufhin möglicherweise die Zahl der minimalen

Vorgaben sinken könnte. Ein Positionssudoku ist somit nicht nur hinsichtlich der Blöcke, sondern auch in Bezug auf die Position in den einzelnen Boxen gerecht.
Die Auswirkungen dieser neuen Symmetrie werden nun betrachtet. Beim klassischen Sudoku sind die Reihen und Spalten vertauschbar, hier können sogar die Boxen miteinbezogen werden. Nun wird eine Abbildung definiert, die aus der Zeilen-Spalten-Schreibweise (i,j) eine Block-Position in der Box-Notation durchführt.

$$f:(i,j)\mapsto\left(3\left\lfloor\frac{i-1}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{j-1}{3}\right\rfloor+1,3\big((i-1)\bmod 3\big)+\big((j-1)\bmod 3\big)+1\right)_{Box}$$

$\lfloor a\rfloor$ bedeutet ein Abrunden auf die nächstkleinere ganze Zahl, beispielsweise gilt $\lfloor\frac{5}{3}\rfloor=1$. Abbildung f und ihre Umkehrabbildung sind gleich, weshalb (2, 7) zu (3, 4) und (3, 4) zu (2, 7) wird. Das bedeutet, dass der Eintrag von Zeile 2 und Spalte 7 in Box 3 auf Position 4 vorliegt, was offensichtlich ist, da es sich um dasselbe Feld handelt. Für die Umkehrung gilt das gleiche. [5, S. 88]
Wenn das Ergebnis der Abbildung nicht aus Sicht der Box, sondern ebenfalls auf Reihen und Spalten bezogen gelesen wird, erhält man ein weiteres Positionssudoku, wie Abbildung 59 zeigt. [5, S. 88]

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

1	2	3	7	8	9	4	5	6
4	5	6	1	2	3	7	8	9
7	8	9	4	5	6	1	2	3
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Abbildung 59: Positionssudoku [5, S. 88]

Die Einträge der ersten Spalte in Abbildung 59 links sind somit gleich den Füllungen der (rötlichen) linken oberen Felder jeder Box in Abbildung 59 rechts. Dies liefert eine neue Symmetrie. Somit gelten zeilenbasierte Lösungswege auch für Blöcke und umgekehrt, da sie ineinander überführt werden können. Außerdem wird die Anzahl der essentiell verschiedenen Lösungen erneut verringert, wenn die Anwendung von

Abbildung f ein Sudoku in ein äquivalentes überführt. Allerdings ist die Veränderung nicht groß, da es nur wenige Positionssudokus gibt. [5, S. 88]

Es gibt auch Positionssudokus, die einen Fixpunkt bezüglich Abbildung f bilden, wie Abbildung 60 zeigt. In diesem Fall entspricht die Reihe i der Box i und die Spalte j der Position j im Block. [5, S. 88]

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Abbildung 60: Fixpunktsudoku [5, S. 89]

Dieses Gitter, das mithilfe des Greedy-Algorithmus befüllt wurde, enthält entlang der Zeilen immer die kleinstmögliche Ziffer. Außerdem besteht es nur aus Tripeln (i, j, k), die jeweils dreimal pro Band auftreten. Man könnte dies auch für Rätsel nutzen, wo die Vorgaben wieder geringer sein könnten, da bei bekanntem Tripel in den anderen Boxen schon eine Ziffer reichen würde um drei Kästchen zu füllen. [5, S. 89]

8.2 Kenken

Für Mathematikliebhaber und Mathematikliebhaberinnen sind Kenken die neuen Suchtmittel. Dieses Lateinische Quadrat enthält unterschiedlich große Unterteilungen, welche mittels Rechnungen gefüllt werden müssen. Die einzigen Vorgaben sind das Ergebnis und die Rechenoperation.

6+	2÷	108×		20×	
			3	6×	
2÷	120×		4-	2÷	
		2			5-
3÷		1-		7+	
2÷		3+			4

Abbildung61: Kenken [8, S. 46]

8.3 Magische Quadrate

Unter Magischen Quadraten werden Blöcke verstanden, deren Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen jeweils gleich groß sind. Diese können 3×3, wie die Boxen eines Sudokus, aber auch 4×4 oder größer sein. Dabei ist die Summe nur von der Größe des Gitters abhängig, da sie durch Addition aller Einträge und Division durch die entsprechende Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entsteht. So muss jede Reihe, Spalte und Diagonale in Abbildung 62 genau $34 = \frac{1+2+...+16}{4}$ ergeben. [16, S. 1] Allgemein kann man dies mittels $\frac{1+2+...+n^2}{n}$ berechnen. Dank Carl Friedrich Gauß lässt sich das auf $\frac{(n^2+1)n}{2}$ vereinfachen.

34	34	34	34	34
			15	34
	3	9	6	34
	8	14		34
			12	34
				34

Abbildung 62: Magisches Quadrat [16, S. 2]

Auch für Magische Quadrate gelten die in Kapitel 6.2.1 genannten Symmetrien. Es gibt nur eine Anordnung der Zahlen eins bis neun in einem (3×3)-Gitter, wenn die durch Drehungen und Spiegelungen erzeugten Füllungen als äquivalent angesehen werden. Bei (4×4)-Quadraten erhält man schon 880 und bei (5×5)-Gittern sogar 275305334 essentiell verschiedene Magische Quadrate. [16, S. 3]

			15
8	1	6	15
3	5	7	15
4	9	2	15
15	15	15	15

Abbildung 63: Einziges (3×3)-Gitter [16, S. 3]

Magisches Sudoku

Ein Magisches Sudoku ist wie ein Sudoku zu lösen, mit dem einzigen Unterschied, dass die Diagonalen ebenfalls alle neun Elemente enthalten müssen. Es gibt 4752 solcher Sudokus für eine feste Anordnung in der Hauptdiagonale. [15, S. 19]

Da die Hauptdiagonale $9!$ verschiedene Sortierungen aufweisen kann, existieren somit $4752 \cdot 9!$ = 1724405760 unterschiedliche Magische Sudokus.

Die zusätzliche Bedingung könnte auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

Die Felder (k,k) für $1 \le k \le n$ und $(i, n-i+1)$ für $1 \le i \le n$ müssen jeweils jedes Element enthalten, wobei die Einträge bei $k = i = 5$ ident sind, da es sich bei einem Sudoku mit $n = 9$ um dasselbe Feld handelt. Zu diesem Thema könnte noch einiges erarbeitet werden, beispielsweise, ob es ein Sudoku gibt, dessen Parallelen zu den Diagonalen ebenfalls jedes Element nur einmal enthalten.

9 Sudoku im Unterricht

Im Schulalltag treten diese Freizeitknobeleien ebenfalls immer häufiger auf, denn mit Sudokus kann das logische Denken schon ab der ersten Schulstufe geübt werden. Dort wird natürlich noch nicht mit (9×9)-Quadraten, sondern mit 4×4 oder 6×6 gearbeitet. Anstelle des Setzens von Ziffern werden zu Beginn öfters Symbolkärtchen verwendet, welche auf ein teilweise befülltes Gitter gelegt werden. Somit können die Kinder spielerisch die Regeln eines Sudokus erlernen und ihre Kombinationsfähigkeiten steigern. Wenn dies bereits gut funktioniert, können auf diese Weise auch Buchstaben geübt werden, indem anstelle der Symbole die Sudokus mit den zu trainierenden Schriftzeichen ergänzt werden. Dies könnte als fächerübergreifende Übung angesehen werden, da sowohl das Alphabet für Deutsch als auch das logische Denken, was man als Teilbereich der Mathematik ansehen kann, verbessert wird. Bei älteren Schülern und Schülerinnen kann durch Sudokus das abstrakte Denken geübt werden, was gerade im Mathematikunterricht zu Interesse an der reinen Logik führen kann. [2, S. 101] So kann mithilfe dieser häufig schon bekannten Rätsel der Einstieg in das mathematische Denken erleichtert werden, wenn beispielsweise Lernende zuerst einfache Sudokurätsel lösen, verwendete Techniken formulieren und im Anschluss schwierigere Aufgaben bewältigen. Die Quadrate sollen dabei mithilfe von schrittweisem logischem Denken ergänzt werden und nicht mit bloßem Raten, was spätestens bei etwas komplizierteren Versionen zu einem Widerspruch führen wird. Ein systematisches Durchsuchen aller Möglichkeiten kann aber häufig zielführend sein. Durch die Aufgabenstellung, jeden Eintrag zu erklären, werden die Lernenden schnell dazu verleitet, allgemeine Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, anstelle der Erläuterung jedes Spezialfalles. [5, S. 71] Das sind Grundkompetenzen, zu denen Unterricht führen soll. Wenn dabei auch noch Gesetzmäßigkeiten aufgestellt werden können, die im Anschluss Verwendung finden, ist das ein weiterer positiver Schritt.

10 Ausblick

Wie bereits manchmal erwähnt ist das Thema Sudoku noch nicht ausschöpfend erforscht. So muss beispielsweise die Frage, wie viele Sudokurätsel und partielle Lateinische Quadrate existieren, noch geklärt werden. In diesem speziellen Fall können anstelle einer eleganteren Lösungsstrategie auch ein effizienteres Computerprogramm und ein leistungsfähigerer Rechner entwickelt werden. Auch in Bezug auf die gelösten Gitter sind noch nicht alle Details geklärt. Zum Beispiel könnte man darüber nachdenken, ob es neben dem Positionssudoku noch weitere Quadrate mit einer höheren Symmetrie gibt.

Die „Sudokuverwandten" könnten ebenfalls auf Symmetrien überprüft werden, was vielleicht zu interessanten Erkenntnissen führt. Bei Kenken handelt es sich lediglich um speziell ausgefüllte Lateinische Quadrate, die anstelle der Anfangshinweise Ergebnisse, Rechenoperationen und spezielle Unterteilungen enthalten. Das führt zu der Frage, ob die Anzahl der möglichen Anfangsbedingungen berechenbar ist, wenn man gewisse Einschränkungen trifft, wie etwa einer Unterteilung in immer gleich große Untereinheiten, also die Verwendung eines gerechten Lateinischen Quadrates. Die Magischen Sudokus werfen ebenfalls einige Fragen auf. Wie viele Hinweise sind nötig, ein Magisches Sudoku eindeutig zu lösen? Eine Frage, die auch in Bezug auf Positionssudokus noch nicht geklärt ist. Bei wie vielen Sudokus kommen alle Elemente in einer Diagonalen vor? Wie verhält es sich bei den Schrägen, die keine Diagonalen sind. Wie viele von diesen können maximal mit unterschiedlichen Symbolen gefüllt sein?

Diese Fragen zeigen schon, dass das Feld der Sudokus noch lange nicht vollständig erforscht ist und noch einiges darüber in Erfahrung gebracht werden kann.

11 Literaturverzeichnis

[1] Aigner M., Ziegler G. M., *Das BUCH der Beweise*, 2. Auflage, Springer, Berlin etc. (2004).

[2] Delahaye J.-P., *Sudoku oder die einsamen Zahlen* in: Spektrum der Wissenschaft (März 2006) 100-106.

[3] Diestel R., *Graphentheorie*, 3. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer, Berlin etc. (2006).

[4] Easterfield T. E., *A combinatorial algorithm*, J. London Math. Soc. 21 (1946), 219-226.

[5] Elsholtz Ch., Mütze A., *Sudoku im Mathematikunterricht,* Math. Semesterber., Nummer 1 (2007) 69-93.

[6] Felgenhauer B., Jarvis F., *Mathematics of Sudoku I*, Mathematical Spectrum, Nummer 1 (2006) 15-22.

[7] Halmos P. R., Vaughan H.E., *The marriage problem*, Amer. J. Math. 72 (1950), 214-215.

[8] Heine S., *Ganz schön clever! Sudoku • Kenken Str8ts*, Ullstein, Berlin (2015).

[9] Hungerford T. W., *Algebra*, korrigierte 8. Auflage, Springer, New York etc. (1996).

[10] Jantzen J. C., Schwermer J., *Algebra*, Springer, Berlin etc. (2006).

[11] Jehner W., Wingen H., *Eine mathematische Theorie der Sudokus*, De Gruyter, Berlin/Bosten (2013).

[12] Nitzsche M., *Graphen für Einsteiger. Rund um das Haus vom Nikolaus*, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden (2009).

[13] Russell E., Jarvis F., *Mathematics of Sudoku II*, Mathematical Spectrum, Nummer 2 (2006) 54-58.

[14] Smetaniuk B., *A new construction on Latin squares I: A proof of the Evans conjecture*, Ars Combinatoria 11 (1981), 155-172.

Onlinequellen

[15] Davis T., *The Mathematics of Sudoku* (2012) http://www.geometer.org/mathcircles/sudoku.pdf am 26. 08. 2015.

[16] Koth M., *Magische Quadrate*, o.J., http://www.mathe-online.at/materialien/maria.koth/files/Magische_Quadrate_Infotext.pdf am 02.08.2015.

[17] Krause F., *1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen*, Skript Universität Wuppertal http://particle.uni-wuppertal.de/vorkurse/Skript/kap1cr.pdf am 28.08.2015.

[18] Rehlich H., *Sudoku und Mathematik. SuMa 2.2. Strategietrainer und mathematisch orientiertes Programm zum Analysieren, Bearbeiten und Erfinden von Sudoku-Rätseln und neuen Varianten.,* Friedrich-Schiller-Univerität Jena, http://users.minet.uni-jena.de/~hrehlich/Programme/SuMa.pdf am 15.10.2014.

[19] o. A., *Das Lemma von Burnside und seine Anwendungen*, o. J. http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi/lehre/materialien/dm/burnside.pdf am 09.07.2015.

[20] Schmidhofer E., *Vervollständigung Lateinischer Quadrate* (2013) http://www.uni-graz.at/~baurk/lehre/WS2013-Seminar/S12.pdf am 28.08.2015.

[21] Schüler A., *Abzählen von Färbungen – Das Cauchy-Frobenius- oder Burnside-Lemma* (2006) http://lsgm.uni-leipzig.de/lsgm/Bibliothek/burnside.pdf am 12. 08.2015.

[22] Vega O., *The Math of Sudoku*, Department of Mathematics, College of Science and Mathematics Centennial Celebration. California State University, Fresno (2011) http://zimmer.csufresno.edu/~ovega/research/Sudoku.pdf am 30.08.2015.

[23] Weisstein, E. W., *Latin Square*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html am 29.07.2015.

[24] http://www.meine-gesundheit.de/sudoku-halt-gehirn-in-schwung-aber-schutzt-das-zahlenratsel-auch-vor-alzheimer am 22.09.2015.

[25] https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku#Sudokus_from_group_tables am 22.09.2015.

[26] https://en.wikipedia.org/wiki/Latin_square#Examples am 22.09.2015.

12 Anhang

12.1 Abstract

Diese Arbeit handelt von dem Zusammenhang zwischen Mathematik und Sudokus oder deren allgemeinerer Form, den Lateinischen Quadraten. Es wird sich mit der Anzahl der möglichen ausgefüllten Gitter genauso befasst, wie mit den auftretenden Symmetrien. Des Weiteren wird gezeigt, dass jede Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe ein Lateinisches Quadrat bildet, während die Umkehrung nicht gilt. Auf Sudokurätsel, also jene Knobeleien, die in vielen Zeitungen abgedruckt sind, und ergänzt werden müssen, wird kurz eingegangen. Die wichtigsten oder interessantesten Lösungsstrategien werden in diesem Zusammenhang ebenfalls angeführt. Außerdem ist noch ein Kapitel über ähnliche Rätselaufgaben und deren Besonderheiten verfasst, bevor ein kurzer Hinweis auf die Verwendbarkeit im Unterricht gegeben wird.

This thesis examines the connection between Mathematics and Sudoku puzzles, or their underlying basis, the Latin squares, respectively. The number of possible filled squares is taken into account as well as the occurring symmetries. Moreover, every Cayley table of a finite group is proved to produce a Latin square, while the opposite does not apply. Sodoku puzzles, the mathematical riddles included in many newspapers, are investigated as well. To begin with, crucial strategies to solve these riddles are mentioned, as well as especially interesting rules and hints. In addition, one chapter deals with similar puzzles and their respective properties. Finally, the thesis provides suggestions of how to implement Sudokus in Mathematics classrooms.

12.2 Lebenslauf

Name:	Reingard Auer
Geburtsdatum:	22.09.1991
Geburtsort:	Schärding
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Religion:	römisch – katholisch
Familie:	Vater: Christian Auer, Lehrer Mutter: Elfriede Auer, Lehrerin Schwester: Heidrun Auer, Logopädin
Schulische Ausbildung:	1998-2002 Volksschule Brunnenthal 2002-2006 Musikhauptschule Schärding 2006-2010 Bundesoberstufenrealgymnasium Schärding (mit sozial-kommunikativem Schwerpunkt) seit Herbst 2010 Lehramtsstudium Mathematik und Physik an der Universität Wien seit Herbst 2014 Studium der Humanmedizin an der Medizinischen Universität Wien
Schulabschluss:	Matura, 23.06.2010
Praktika:	Ferialarbeit als Sekretärin im Pfarrhof Brunnenthal im Sommer 2009 Leiterin der Jungschargruppe in Brunnenthal 2007-2009 Gruppenleiterin (2012, 2013 und 2015) und Küchenhilfe (2013) am Jungscharlager des Dekanats Schärding Workshopleiterin am Kaleidio (österreichweites Jungscharlager) 2014 Schülerhilfe Schärding seit 2011 Manpower 2013 - 2014