universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Würfelspiele ‚Zehntausend' und ‚Escalero' -

Eine stochastische Betrachtung"

verfasst von / submitted by

Michael Dreo

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 423 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UniStG UF Chemie UniStG 2002W UF Mathematik UniStG
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Ich möchte den Menschen, die mich bei meinem Studium unterstützt haben, herzlich danken.

Allen voran danke ich meinen Eltern Silvia und Christian Dreo und meinen Großeltern Sophie und Franz Primes, ohne deren finanzielle Unterstützung ich nicht hätte studieren können.

Großer Dank gilt auch Professor Peter Raith für die Betreuung der Diplomarbeit. Ich konnte mich immer auf eine rasche und exakte Beantwortung meiner Fragen verlassen.

Für das geduldige und kritische Lesen meiner Arbeit danke ich meinem Bruder Rainer Dreo, meiner Kollegin Sylvia Wurm und meinem Lebensgefährten Peter Vargyas.

Letzterem danke ich besonders dafür, dass er mir stets Rückhalt bereitete. Ohne seine geduldige Unterstützung hätte ich diese Arbeit nicht beenden können.

Zuletzt ein großes Dankeschön an meine gesamte Familie, meine Freunde und meine Studienkolleg/inn/en, mit denen ich viele schöne Momente während des Studiums teilen konnte.

Abstract

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Betrachtung der Würfelspiele „Zehntausend“ und „Escalero“ mithilfe grundlegender Werkzeuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hierbei wird die Frage behandelt, ob und wie sehr eine derartige Betrachtung dieser Spiele dazu geeignet ist, den Spielerinnen und Spielern bei Entscheidungen zu helfen, sodass sie eine höhere Gewinnchance erreichen als Personen, die sich nicht mit den Spielen auf stochastischer Ebene befasst haben.

Nach einer Vorstellung der mathematischen Grundlagen, welche ich großteils aus dem Lehrbuch „Stochastik für Einsteiger“ von Norbert Henze bezog, zeige ich, welche Würfelergebnisse mit welchen Wahrscheinlichkeiten erreicht werden. Dazu und für sämtliche Berechnungen verwendete ich das Tabellenkalkulationsprogramm „Microsoft Office Excel 2007“. Ich stelle Spielsituationen vor, die einer Entscheidung der Spielerin oder des Spielers bedürfen, und verwende berechnete Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und eigens definierte Richtwerte, um zu beurteilen, welche Entscheidungen am sinnvollsten erscheinen.

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit schließe ich, dass die Spielregeln der betrachteten Würfelspiele entscheidend sind, wie hilfreich eine intensive stochastische Betrachtung im Vorfeld ist. Während bei dem Spiel „Escalero“ kaum eindeutige Entscheidungshilfen entdeckt werden, erhalte ich hilfreiche und klare Erkenntnisse bei dem Spiel „Zehntausend“.

Abtract

This thesis examines the games of dice called „Zehntausend“ and „Escalero“ using basic tools of probability calculation. The question is discussed, if and to what extend this examination can help players make beneficial decisions in order to have better chances of winning than players who have not been engaged in these games on a stochastic level.

After the presentation of the mathematical basics, which I obtained in large part from the book „Stochastik für Einsteiger“ from Norbert Henze, I show all possible results of the throw with one to six dice and their likelihood. I used the spreadsheet software „Microsoft Office Excel 2007“ for all calculations. I put forward situations in which a player has to make a decision. I use probabilities, expected values and particularly defined guiding values to evaluate which decision seems to be most likely to be beneficial.

I can conclude from the results of this thesis that the rules to the game of dice have a great impact on how meaningful a stochastic examination is in the forefront. While there is hardly any explicit decision support found for the game „Escalero“, I obtain useful and clear decision support in regards to „Zehntausend“.

1 Einleitung

Manchmal fehlt einem ein kleines bisschen Glück, um ein Spiel zu gewinnen. Vielleicht taucht die eine Karte nicht auf, auf die man seit Beginn der Pokerpartie hofft, oder beim Roulette landet die Kugel auf der falschen Farbe, oder der Würfel zeigt schon wieder nicht das gewünschte Ergebnis. Aber Glück ist nichts anderes, als wenn durch Zufall ein Ereignis eintritt, das man sich wünscht oder das einem gefällt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den zwei verschiedenen Würfelspielen „Zehntausend“ und „Escalero“. Mithilfe der Stochastik werden diese Spiele analysiert, um herauszufinden, welche Auswirkungen die eigenen Entscheidungen auf den Spielausgang, auf das „Glück“, haben.

In Abschnitt 2 werden die mathematischen Grundlagen vorgestellt, mit deren Hilfe die Gewinnchancen in Abhängigkeit von den Entscheidungen der Spielerinnen und Spieler bei beiden Spielen untersucht werden. Dabei werden elementare Definitionen und Sätze der Mengenlehre und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wiederholt. Auch etwas komplexere Inhalte, insbesondere im Bereich der Kombinatorik, werden vorgestellt, folgend dem Lehrbuch „Stochastik für Einsteiger“ von Norbert Henze [2].

In Kapitel 3 werden die im vorhergehenden Abschnitt behandelten Grundlagen verwendet, um Tabellen für die Würfelergebnisse von Würfen mit bis zu sechs Würfeln zu generieren. Diese Tabellen, im Tabellenkalkulationsprogramm „Microsoft Office Excel 2007“ erstellt und dieser Arbeit großteils im Anhang beigefügt, dienen als Fundament für sämtliche Berechnungen in den darauf folgenden beiden Abschnitten.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit dem Würfelspiel „Zehntausend“. Während der Behandlung dieses Themas werden klare Ratschläge zur Verbesserung der Gewinnchancen erhalten. Bei diesem Spiel bringt es scheinbar Erfolg, die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden. Auf das Spiel Escalero trifft das in deutlich geringerem Maße zu, wie diese Arbeit in Kapitel 5 zeigt.

Ein Vergleich der Resultate findet in Abschnitt 6 statt. Dabei werden die Gründe für die unterschiedlich klaren Ergebnisse für beide Spiele kurz angesprochen.

Die größte Herausforderung dieser Arbeit war, den Überblick über die zahlreichen Zwischenergebnisse, großen Tabellen und komplexe Rechenwege zu wahren. Die mathematischen Grundlagen sind in ihrer Anwendung, wenn auch nicht in ihren Herleitungen und Beweisen, recht simpel, sodass Personen, die keine mathematischen Vorlesungen besucht haben, verstehen können, wie die Resultate in den Kapiteln 4 und 5 erreicht werden.

2 Grundlagen

Um Strategien bei Würfelspielen auf ihren Einfluss auf Gewinnwahrscheinlichkeiten vergleichen zu können, bedarf es mathematischer Werkzeuge aus der Stochastik. In diesem Abschnitt werden Definitionen und Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt, die in den Abschnitten 3, 4 und 5 Anwendung finden.

2.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition 1 - *Zufallsexperiment*
Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, welches unter genau definierten Bedingungen durchgeführt wird, beliebig oft wiederholt werden kann und bei dem alle möglichen Versuchsausgänge vor der Durchführung des Experiments bekannt sind.

Bei dem Würfelwurf, der in der vorliegenden Arbeit im Fokus der Betrachtung liegt, handelt es sich um ein derartiges Zufallsexperiment. Ein Würfel kann beliebig oft entsprechend klar definierter Bedingungen geworfen werden. Jedes der möglichen Ergebnisse, die verschiedenen nach oben zeigenden Augenzahlen, ist bekannt.

Definition 2 - *Ereignis*
Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Die Elemente ω_1, ω_2, ω_3... dieser Menge Ω sind mögliche Versuchsergebnisse. Die Teilmengen A, B, C... von Ω heißen Ereignisse. Teilmengen von Ω mit nur einem Element, also $A = \{\omega\}$, heißen Elementarereignisse.

Gilt für ein Ereignis $A = \Omega$, so handelt es sich um ein sicheres Ereignis, ist die Menge A jedoch leer, so spricht man von einem unmöglichen Ereignis.

Betrachten wir als Beispiel für diese Bezeichnungen den einzelnen Wurf eines sechsseitigen Würfels, so gilt, dass $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Steht A für das Ereignis, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird, dann ist $A = \{2, 4, 6\}$.

Anhand der obigen Definitionen wird klar, dass eine Auseinandersetzung mit den Gesetzen der Mengenlehre notwendig für die stochastische Betrachtung ist. Im folgenden Abschnitt werden die Grundlagen, welche für das Verständnis essentiell sind, vorgestellt.

(1) Die Menge A heißt Teilmenge von B, also $A \subseteq B$, wenn jedes ω, das ein Element von A ist, auch Element von B ist. Gilt zusätzlich $A \neq B$, so heißt A echte Teilmenge von B, also $A \subset B$.

(2) Der Durchschnitt der Mengen A und B, also $A \cap B$, sei die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die gilt, dass ω ein Element aus A und ein Element aus B ist.

(3) Die Vereinigung der Mengen A und B, also $A \cup B$ sei die Menge aller ω aus Ω, für die gilt, dass ω ein Element aus A oder ein Element aus B ist.

(4) Die Menge $B \backslash A$ sei die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die gilt, dass ω ein Element aus B und kein Element aus A ist.

(5) Das Kompliment der Menge A, also $\bar{A}$, sei die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die gilt, dass ω kein Element aus A ist.

(6) Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen, also wenn $A \cap B$ gleich der leeren Menge, $\emptyset$, ist.

(7) Mehrere Mengen A_j mit $j \in J$ heißen disjunkt, wenn es kein Element gibt, welches in allen Mengen A_j mit $j \in J$ enthalten ist, also wenn $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$.

(8) Die stärkere Eigenschaft **paarweise disjunkt** ist dann erfüllt, wenn kein Element der betrachteten Mengen in mehr als einer Menge enthalten ist, also wenn für alle Indizes k und l aus J mit $k \neq l$ gilt, dass $A_k \cap A_l = \emptyset$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich primär mit dem Würfelwurf, dessen Ereignismenge endlich ist. Somit ist es sinnvoll den Blick auch auf endliche Wahrscheinlichkeitsräume zu beschränken.

Definition 3 - *Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*
Sei Ω eine nicht leere und endliche Ereignismenge und P eine Abbildung von der Menge der Teilmengen von Ω auf die reellen Zahlen. Gilt für alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$

(A1) $P(\Omega) = 1$

(A2) $P(A) \geq 0$

(A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *wenn* $A \cap B = \emptyset$

so ist die Abbildung P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und (Ω, P) heißt endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Aus diesen Axiomen lassen sich einige Regeln ableiten, die es erlauben, mit Wahrscheinlichkeiten zu rechnen. Diese Regeln werden im Satz 1 aufgelistet.

Satz 1
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, A_1, A_2, ..., $A_n \subset \Omega$ Ereignisse, so gelten folgende Aussagen:

a) $P(\emptyset) = 0$,

b) $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, *für paarweise disjunkte Mengen* $A_1, \ldots, A_n$,

c) $0 \leq P(A) \leq 1$,

d) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

e) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

Beweis

a) $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow P(\Omega \cup \emptyset) = \underbrace{P(\Omega)}_{=1} + P(\emptyset) = 1$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

b) Induktion nach n:

Der Induktionsbeginn folgt aus Axiom (A3).

Induktionsschritt:

$A_i \cap A_k = \emptyset \quad \text{für } i \neq k, \quad i,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j \cap A_n = \emptyset$

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \cup A_n\right)}_{=P\left(\sum_{j=1}^{n}(A_j)\right)} = \underbrace{P\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)}_{=\sum_{j=1}^{n-1} P(A_j)} + P(A_n) = \sum_{j=1}^{n} A_j$$

c) $\Omega = A \cup \bar{A}$

$\underbrace{P(\Omega)}_{=1} = P(A \cup \bar{A}) = \underbrace{P(A)}_{\geq 0} + \underbrace{P(\bar{A})}_{\geq 0}$

$0 \geq P(A) \geq 1$

d)
$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ P(A \cup \bar{A}) &= 1 \\ P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

e) $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, $A \cup (B \backslash A) = B$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cup (B \backslash A) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geq 0} \geq P(A)$

■

Aus Definition 3 ist uns bekannt, wie $P(A \cup B)$ bestimmt werden kann, wenn A und B disjunkt sind. Für den Fall, dass zwei Ereignismengen A und B jedoch nicht disjunkt sind, können wir das Additionsgesetz, welches im folgendem Satz vorgestellt wird, verwenden.

Satz 2
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A \subset \Omega$ und $B \subset \Omega$ Ereignisse, so gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beweis

$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$, A und $\bar{A} \cap B$ sind disjunkt.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$\bar{A} \cap B$ und $A \cap B$ sind disjunkt.

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P\Big(\underbrace{(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)}_{=B}\Big)$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

■

Am Beispiel des Würfelwurfs lässt sich das Additionsgesetz sehr gut erklären. Sei A das Ereignis, dass eine Primzahl gewürfelt wird, also $A = \{2, 3, 5\}$ und B sei das Ereignis, dass eine ungerade Zahl gewürfelt wird, also $B = \{1, 3, 5\}$. Daraus ergibt sich, dass $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ und $A \cap B = \{3, 5\}$. Würde die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, mit der Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, addiert werden, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass 3 oder 5 gewürfelt wird, doppelt gezählt worden. Folglich muss diese Wahrscheinlichkeit abgezogen werden.

Dieses Additionsgesetz gilt für alle Ereignismengen, also auch für disjunkte. Sind die Mengen A und B disjunkt, so ist $A \cap B = \emptyset$. Da $P(\emptyset) = 0$, ergibt sich aus dem Additionsgesetz wieder das Axiom (A3) aus der Definition 3.

Der Würfelwurf mit einem einzelnen Würfel ist einer der Zufallsversuche, bei denen wir annehmen können, dass jedes Elementarereignis mit derselben Wahrscheinlichkeit eintrifft. Anders ausgedrückt, ist jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich. Daher können wir annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses durch die Division von 1 durch die Anzahl aller möglichen Elementarereignisse, kurz $P'(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle ω aus Ω bestimmt werden kann. Dabei sei P' eine Abbildung von der Menge der einelementigen Teilmengen von

$\Omega \neq \emptyset$ auf $\mathbb{R}$. Aus dieser Annahme ergibt sich eine Funktion P auf der Menge aller Teilmengen A von $\Omega \neq \emptyset$, für die gilt, dass $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Diese Funktion P erfüllt die Bedingungen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, wie folgender Beweis zeigt.

Beweis
$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$, da $|\Omega| > 0$ weil $\Omega \neq \emptyset$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0$ für alle $A \subseteq \Omega$, da $|A| \geq 0$ und $|\Omega| > 0$.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$

■

Definition 4 - *Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum*
Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ eine endliche, nicht leere Ereignismenge und P mit der Eigenschaft, dass $P(A) = \frac{|A|}{n}$ für $A \subseteq \Omega$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so heißt (Ω, P) Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum.

Während Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse bei einem Würfelwurf mit einem einzelnen Würfel mit dem oben beschriebenen Wahrscheinlichkeitsmaß sehr einfach sind, müssen etwas mehr Überlegungen angestellt werden, wenn wir den Würfelwurf mit mehreren Würfeln betrachten wollen. Im Kapitel 2.2 wird darauf eingegangen.

Definition 5 - *Zufallsvariable*
Sei Ω eine nicht leere Ereignismenge, so heißt eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Zufallsvariable.

In anderen Worten ausgedrückt, ordnet eine Zufallsvariable jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zu. Wir können für Fragestellungen gezielt bestimmte Zufallsvariable definieren. Beispielsweise kann eine Zufallsvariable X für die Augensumme bei einem Wurf mit zwei Würfeln stehen, oder dafür, wie oft beim sechsmaligen Münzwurf „Kopf" erscheint. Bei diesen Beispielen nimmt die Zufallsvariable endlich viele Werte an.

Definition 6 - *diskrete Zufallsvariable*
Eine Zufallsvariable, die nur endlich viele oder abzählbar viele Werte annehmen kann, heißt diskrete Zufallsvariable.

Es gibt auch Zufallsvariablen, die nicht diskret sind. In der vorliegenden Arbeit sind jedoch nur die diskreten von Interesse. Auch auf die Eigenschaft „abzählbar viele" brauchen wir nicht weiter eingehen.

Definition 7 - *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung*
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und X eine diskrete Zufallsvariable, so heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Potenzmenge von $X(\Omega)$ mit $P(X \in B) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X.

Sind sowohl alle Werte α_j, die eine diskrete Zufallsvariable annehmen kann, als auch alle Wahrscheinlichkeiten $P(X = \alpha_j)$ bekannt, so lässt sich die Verteilung dieser Zufallsvariablen durch einen Wahrscheinlichkeitsvektor darstellen.

Seien α_j die Werte, welche eine diskrete Zufallsvariable annehmen kann und p_j seien die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sie die jeweiligen Werte annimmt, also $p_j = P(X = \alpha_j)$, so hat der Wahrscheinlichkeitsvektor die Form

$$(p_j) = \begin{pmatrix} P(X = \alpha_1) \\ P(X = \alpha_2) \\ \dots \\ P(X = \alpha_j) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_j \\ \dots \end{pmatrix}$$

und hat folgende Eigenschaften:

a) $p_j \geq 0 \forall j$

b) $\sum_j p_j = 1$

Definition 8 - *Erwartungswert*
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable und (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

Erwartungswert von X.

Der Erwartungswert ist eng verknüpft mit dem Begriff des Mittelwerts. Betrachten wir den Wurf mit zwei Würfeln, wobei wir notieren, wie oft welche Augenzahlsumme als Ergebnis erreicht wird, so können wir nach einigen Würfelwürfen den Mittelwert der Augenzahlsumme berechnen, indem wir jede mögliche Augenzahlsumme mit ihrer relativen Häufigkeit multiplizieren und anschließend alle Produkte aufsummieren. Das Ergebnis ist die mittlere Augenzahlsumme pro Versuchsdurchführung.

Der Erwartungswert wird sehr ähnlich berechnet, wie anhand der Definition 8 zu sehen ist. In der Formel werden statt der relativen Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der möglichen Augenzahlsummen verwendet. Während der Mittelwert angibt, wie das durchschnittliche Würfelergebnis pro Wurf war, lässt der Erwartungswert vor Versuchsdurchführung erahnen, welcher Durchschnittswert nach mehrmaligem Wurf zu erwarten ist. Damit ist der Erwartungswert ein nützliches Instrument bei der Aufstellung von Prognosen und Schätzungen. Außerdem kann anhand des Erwartungswertes beurteilt werden, ob ein Ergebnis eines Zufallsversuchs überdurchschnittlich gut war.

Der folgende Satz 3 kann verwendet werden, um einen Erwartungswert von der Summe aus zwei Zufallsvariablen zu bestimmen.

Satz 3

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf Ω, $a \in \mathbb{R}$ und $A \subset \Omega$, so gilt, dass

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

■

Der Erwartungswert der Summe mehrerer Zufallsvariablen ist somit die Summe ihrer Erwartungswerte. Dieser Satz ist besonders dann nützlich, wenn die Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen deutlich einfacher zu bestimmen sind, als der Erwartungswert ihrer Summe.

2.1.1 Mehrstufige Experimente

In der vorliegenden Arbeit sind mehrstufige Experimente, also mehrmals durchgeführte Zufallsversuche, von zentralem Interesse. Beispielsweise soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden können, dass in drei Würfen eine bestimmte Anzahl von Einsern erreicht wird. Dafür wird eine Modellierung mehrstufiger Ereignisse vorgestellt, wie sie Robert Henze in seinem Lehrbuch „Stochastik für Einsteiger“ präsentiert [2, S.91-94].

Besteht ein Experiment aus n Stufen, so hat jedes Elementarereignis ω die Form eines n-Tupels, $\omega = (a_1, \dots, a_n)$. Dabei sei a_j der Ausgang des j-ten Teilexperiments. Es gelte Folgendes für die Grundmenge Ω:

$$\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{\omega = (a_1, \dots, a_n) : a_j \in \Omega_j \textit{ für j=1, } \dots, n\}$$

Weiters sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, $p(\omega) = P(\{\omega\})$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Teilversuch das Ergebnis a_1 mit $a_1 \in \Omega_1$ eintritt, sei $p(a_1)$ und $\sum_{a_1 \in \Omega_1} p(a_1) = 1$. Für jeden möglichen Ausgang a_1 gibt es eine Wahrscheinlichkeit $p(a_2|a_1)$ mit $a_2 \in \Omega_2$ und $\sum_{a_2 \in \Omega_2} p(a_2|a_1) = 1$. Diese Wahrscheinlichkeit $p(a_2|a_1)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Zufallsversuch des mehrstufigen Experiments den Ausgang a_2 aufweist, wenn vorher a_1 eingetreten ist. Allgemein sei die Wahrscheinlichkeit, dass bei der j-ten Stufe des Experiments a_j eintritt, wenn die vorherigen Teilexperiemente die Ergebnisse a_j bis a_{j-1} in dieser Reihenfolge lieferten, gleich $p_j(a_j|a_1, \dots, a_{j-1})$ mit $a_j \in \Omega_j$ und $\sum_{a_j \in \Omega_j} p_j(a_j|a_1, \dots, a_{j-1}) = 1$.

Es wird eine Abbildung vorgestellt, die dabei behilflich sein wird, Wahrscheinlichkeiten von Interesse zu berechnen:

$$p(\omega) := p(a_1) \cdot p(a_2|a_1) \cdot \dots \cdot p_n(a_j|a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \in \Omega$$

In Worten ausgedrückt, behaupten wir, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Elementarereignisses, also einer bestimmten Abfolge von Ausgängen von Teilexperimenten, durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten jedes Einzelergebnisses bestimmt werden kann. Führen mehrere verschiedene Elementarereignisse zu demselben Ergebnis, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die so definierte Abbildung P auch tatsächlich die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß entsprechend der Definition 3 erfüllt. Nach Vorraussetzung sind p_j für $j = 1, \dots, n$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Daraus folgt, dass $p_j(a_j|a_1, \dots, a_{j-1}) \geq 0$ und in weiterer Folge $p(\omega) \geq 0$ und $P(A) \geq 0$. Also erfüllt die Abbildung den Punkt (A2) der Definition. Des Weiteren gilt, dass $P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega)$. Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann lässt sich diese Summe aufspalten in $\sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) = P(A) + P(B)$, folglich ist auch (A3) erfüllt. (A1), also $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, wird über vollständige Induktion bewiesen [2, S. 94].

Beweis
$n = 2$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) &= \textstyle\sum_{a_1 \in \Omega_1} \sum_{a_2 \in \Omega_2} p_1(a_1) \cdot p_2(a_2|a_1) \\
&= \underbrace{\sum_{a_1 \in \Omega_1} p_1(a_1)}_{=1} \cdot \underbrace{\sum_{a_2 \in \Omega_2} p_2(a_2|a_1)}_{=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Induktionsannahme: Die Behauptung sei für $n = k - 1$ gültig.

Induktionsschritt für $n = k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) &= \sum_{a_1 \in \Omega_1} \dots \sum_{a_{k-1} \in \Omega_{k-1}} \sum_{a_k \in \Omega_k} p_1(a_1) \cdot \dots \cdot p_{k-1}(a_k|a_1, \dots a_{k-2}) \cdot p_k(a_k|a_1, \dots a_{k-1}) \\
&= \underbrace{\sum_{a_1 \in \Omega_1} p_1(a_1) \cdot \dots \cdot \sum_{a_k \in \Omega_k} p_{k-1}(a_k|a_1, \dots a_{k-2})}_{=1 \textit{ nach Induktionsvoraussetzung}} \cdot \underbrace{\sum_{a_k \in \Omega_k} p_k(a_k|a_1, \dots a_{k-1})}_{=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

∎

Mit diesem Wahrscheinlichkeitsmaß können wir folglich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Ereignisse von mehrstufigen Zufallsversuchen eintreten, wenn die Wahrscheinlichkeiten für die notwendigen Versuchsausgänge der Einzelexperimente bekannt sind. Dazu müssen diese Wahrscheinlichkeiten einfach miteinander multipliziert werden. Beispielsweise beträgt die Wahrscheinlichkeit bei einem Würfelwurf mit einem Würfel **6** zu würfeln genau $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei drei Würfen dreimal **6** zu würfeln, ist demnach $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem eines anderen Ansatzes der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit, der in Abschnitt 3.3 behandelt wird.

2.2 Kombinatorik

Das Laplace-Modell erlaubt eine simple Berechnung der Wahrscheinlichkeiten verschiedener Versuchsausgänge. Anhand des Münzwurfs, der denselben Regeln wie der Würfelwurf unterliegt, lässt sich dies erläutern. Während beim Wurf einer einzelnen Münze mit Kopf und Zahl auf den gegenüberliegenden Seiten zwei Ereignisse eintreffen können, Kopf oder Zahl, kommt es bei zwei geworfenen Münzen zu drei möglichen Ergebnissen: zweimal Kopf, zweimal Zahl und sowohl Kopf als auch Zahl. Diese drei Ergebnisse als Elemente einer dreielementigen Ereignismenge Ω anzunehmen, wäre jedoch zu kurz gegriffen.

Sollen die beiden Münzwürfe nacheinander ausgeführt werden, so erhält man vier mögliche Ereignisse: zweimal Kopf, zweimal Zahl, zuerst Kopf und dann Zahl und umgekehrt. Es mag also die drei oben genannten Ergebnisse geben, aber sie werden von vier verschiedenen Ereignissen erreicht. Die Ereignisse „erst Kopf, dann Zahl" und „erst Zahl, dann Kopf" liefern beide das Ergebnis, dass Kopf und Zahl erreicht wurden. Somit stellt sich die Aufgabe, die Anzahl der Möglichkeiten für gesuchte Ergebnisse, sowie aller möglichen Versuchsausgänge zu zählen. Die Ergebnisse des mehrmaligen Münzwurfs lassen sich als Tupel darstellen. Für jede einzelne Versuchsdurchführung erhält das Tupel einen Eintrag, entweder Kopf oder Zahl. Wird das Zufallsexperiment k-mal durchgeführt, so hat das Ereignis die Form $(a_1,...,a_k)$, wobei jedes a_i mit $i \in \{1, 2, ..., k\}$ aus der Menge $\{Kopf, Zahl\}$ stammt.

Satz 4 - *Fundamentalprinzip des Zählens*
Werden k-Tupel, $(a_1,...,a_k)$, gebildet, indem jedes a_i mit $i \in \{1, 2, ..., k\}$ aus einer Menge mit n_i Elementen genommen wird, so können

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k = \prod_{j=1}^{k} n_j$$

verschiedene Sequenzen gebildet werden.

Die Menge {*Kopf, Zahl*}, aus der jeder Eintrag des Tupels ausgewählt wird, besitzt zwei Elemente. Beim zweimaligen Münzwurf gibt es folglich $2 \cdot 2 = 4$ verschiedene Tupel, vier verschiedene gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge. Auch wenn die abstraktere Darstellungsweise der Ergebnisse als Tupel für das Zählen der möglichen Ereignisse eines mehrmaligen Münzwurfs nicht erforderlich ist, wird sie sich für komplexere Fragestellungen als nützlich erweisen. Dazu müssen erst einige weitere Grundlagen aus dem Gebiet der Algebra geklärt werden. Definition 9 zeigt vier Mengen von Tupeln, die unterschiedliche Eigenschaften erfüllen.

Definition 9
Sei M eine n-elementige Menge, n und $k \in \mathbb{N}$, so sei

a) $Per_k^n(mW) := \{(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_j \leq n$ *für* $j = 1, ..., k\}$ *die Menge der k-Permutationen aus M mit Wiederholung,*

b) $Per_k^n(oW) := \{(a_1, ..., a_k) : a_i \neq a_j$ *für* $1 \leq i \neq j \leq k\}$ *die Menge der k-Permutationen aus M ohne Wiederholung,*

c) $Kom_k^n(mW) := \{(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_1 \leq ... \leq a_k \leq n\}$ *die Menge der k-Kombinationen aus M mit Wiederholung,*

d) $Kom_k^n(oW) := \{(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_1 < ... < a_k \leq n\}$ *die Menge der k-Kombinationen aus M ohne Wiederholung.*

Definition 10 - ***Binomialkoeffizient***
Seien m und $l \in \mathbb{N}$ *und* $l \leq m$*, so ist der Binomialkoeffizient „m über k“ durch*

$$\binom{m}{l} := \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!}$$

definiert. Für $m < l$ *sei* $\binom{m}{l} := 0$.

Da sich Tupel dafür eignen, Versuchsausgänge darzustellen, können wir die in Definition 9 definierten Mengen dazu verwenden, um geeignete Ereignismengen zu repräsentieren. Dies lässt sich anschaulich anhand des Urnenmodells darstellen, folgend der Darstellung in [2, S. 63-64]. Das Urnenmodell sieht eine Urne vor, in der sich, bis auf ihre Nummerierung von 1 bis n, n identische Kugeln befinden. Aus dieser Urne werden nach bestimmten Regeln einzelne Kugeln gezogen. Nach einer Reihe von Ziehungen wird das Ergebnis bekanntgegeben.

a) Werden gezogene Kugeln sofort wieder zurückgelegt, so kann jede bereits gezogene Kugel erneut gezogen werden und Wiederholungen können auftreten. Wird die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, berücksichtigt, so hat jedes Ergebnis nach k Ziehungen die Form eines k-Tupels $(a_1, ..., a_n)$, wobei jedes a_i aus der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ stammt. Diese Menge besitzt n Elemente, somit erfüllt diese Darstellungsweise die Definition 9 für eine k-Kombination mit Wiederholung. Ein k-maliges Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge hat $|Per_k^n(mw)|$ mögliche Versuchsausgänge.

b) Findet das Urnenexperiment so statt, dass gezogene Kugeln zur Seite gelegt werden, können keine Wiederholungen auftreten. Wird die Reihenfolge weiterhin beachtet, so haben alle Versuchsausgänge die Form $(a_1, ..., a_k)$ mit $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$, was der Definition für eine k-Permutation einer n-elementigen Menge mit $k \leq n$ entspricht. Es gibt somit $|Per_k^n(oW)|$ verschiedene Versuchsausgänge.

c) Wird nach einem Urnenexperiment mit Zurücklegen nur bekannt gegeben, welche Kugel wie oft gezogen wurde, so kann dieses Ergebnis durch einen Tupel der Form $(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq$ dargestellt werden. Daraus ergibt sich, dass $Kom_k^n(mW)$ eine geeignete Ereignismenge mit $|Kom_k^n(mW)|$ Elementen ist.

d) Werden gezogene Kugeln nicht zurückgelegt und damit Wiederholungen vermieden, und wird weiterhin die Reihenfolge nicht beachtet, so hat ein Ergebnis einer derartigen Ziehung die Form $(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n$. Die Ereignismenge hat demnach $|Kom_k^n(oW)|$ Elemente.

Satz 5 - ***Permutationen und Kombinationen mit und ohne Wiederholung*** *[2, S. 54]*

a) $|Per_k^n(mW)| = n^k$,

b) $|Per_k^n(oW)| = n \cdot (n-1) \cdot \; ... \cdot (n-k+1), \qquad k \leq n$

c) $|Kom_k^n(mW)| = \binom{n+k-1}{k}$,

d) $|Kom_k^n(oW)| = \binom{n}{k}, \qquad k \leq n$

Beweis [2, S. 55-56]

a) Diese Behauptung lässt sich aus dem Fundamentalprinzip des Zählens ableiten. Für alle $i \in \{1, 2, ..., k\}$ werden die a_i aus der selben Menge ausgewählt, welche n Elemente besitzt. Somit wird aus $\prod_{i=1}^{k} n_i = n^k$, da alle $n_i = n$ sind.

b) Die Behauptung wird ähnlich bewiesen wie a). Gilt $k \leq n$ und werden alle k Einträge der Tupel aus einer Menge mit n Elementen ausgewählt, wobei kein Element dieser Menge mehrmals ausgewählt werden kann, so gibt es für den i-ten Eintrag des Tupels $n-i+1$ Möglichkeiten. Es wird nun also ein Element aus einer $(n-i+1)$-elementigen Menge gewählt. Da $i \in \{1, 2, ..., k\}$ folgt die Behauptung. Für den Fall $n = k$ erhalten wir das Ergebnis $|Per_k^k(oW)| = k!$, welches wir direkt beim Beweis der Aussage d) verwenden.

d) Die Menge der k-Permutationen ohne Wiederholung lässt sich aus der Menge der k-Kombinationen ohne Wiederholung erzeugen, indem die Eintragungen der k-Kombinationen auf alle möglichen Weisen vertauscht werden. Aus jeder k-Kombination ohne Wiederholung lassen sich nach Behauptung b) somit $k!$ k-Permutationen ohne Wiederholung bilden. Demnach erhalten wir folgende Gleichung, aus der die Behauptung d) folgt:

$$\begin{aligned} k! \cdot |Kom_k^n(oW)| &= |Per_k^n(oW)| \\ |Kom_k^n(oW)| &= \frac{1}{k!} \cdot |Per_k^n(oW)| \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

c) Sei $a = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)$ eine beliebige Kombination aus $Kom_k^n(mW)$. Für alle Eintragungen gilt $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n$. Definieren wir $b_j := a_j + j - 1$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, so gilt für diese b_j die Ungleichungen $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_k \leq n+k-1$. Wir erhalten folglich eine k-Kombination ohne Wiederholung aus der Menge $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n+k-1\}$. Zu dieser Abbildung lässt sich auch eine inverse Abbildung finden, $a_j := b_j - j + 1$. Somit sind die Mengen der k-Kombinationen mit Wiederholung aus $\{1, 2, \ldots, k\}$ und der k-Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n+k-1\}$ gleichmächtig. Aus Behauptung d) folgt Behauptung c).

$$|Kom_k^n(mW)| = |Kom_k^{n+k-1}(oW)| = \binom{n+k-1}{k}$$

■

Satz 5 liefert nützliche Werkzeuge zur Beschreibung und Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsräumen von Zufallsexperimenten, die sich auf die eben beschriebenen Urnenmodelle zurückführen lassen. Der k-malige Würfelwurf eines sechsseitigen Würfels kann als k-malige Ziehung aus einer Urne mit sechs Kugeln interpretiert werden, wobei jede gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird. Somit kann jedes Ergebnis eines Wurfes mit k Würfeln als Tupel aus der Menge der k-Permutationen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit Wiederholung dargestellt werden.

Als Beispiel wird nun der Würfelwurf mit fünf Würfeln betrachtet. Entsprechend des Satzes 5a) besitzt der Ereignisraum $6^5 = 7776$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge. Wenn die Wahrscheinlichkeit gesucht ist, mit der das Ergebnis **1-1-1-2-2** erreicht wird, muss bestimmt werden, bei wie vielen Tupeln der 5-Permutationen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dreimal **1** und zweimal **2** auftritt. Dieses Problem kann mit folgendem Satz gelöst werden.

Satz 6
Sei N die Menge aller k-Tupel $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k) \in Per_k^n(mW)$ *in der die Werte 1* i_1*-mal, 2* i_2*-mal, ..., und n* i_n*-mal vorkommen, so besitzt N*

$$\frac{k!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_n!}$$

viele Elemente.

Beweis
Zur Erstellung eines derartigen Tupels stehen für den ersten Wert, der i_1 mal vorkommen muss, k Plätze zur Verfügung, für den zweiten Wert noch $k-i_1$ Plätze, für den dritten $k-i_1-i_2$ und so weiter. Daraus ergeben sich für den ersten Wert

$$\frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-i_1+1)}{i_1!}=\binom{k}{i_1},$$

für den zweiten Wert

$$\frac{(k-i_1)\cdot(k-i_1-1)\cdot\ldots\cdot(k-i_1-i_2+1)}{i_2!}=\binom{k-i_1}{i_2},$$

$$\vdots$$

und für den n-ten Wert

$$\frac{(k-i_1-\ldots-i_{n-1})\cdot(k-i_1-\ldots-i_{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot 1}{i_n!}=\binom{k-i_1-\ldots-i_{n-1}}{i_n}$$

viele Möglichkeiten. Insgesamt ergibt das

$$\binom{k}{i_1}\cdot\binom{k-i_1}{i_2}\cdot\ldots\cdot\binom{k-i_1-\ldots-i_{n-1}}{i_n}=\frac{k!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_n!}$$

viele verschiedene Möglichkeiten.

■

Wir wenden nun die eben bewiesene Formel auf unser vorhin genanntes Beispiel an. Die Anzahl der 5-Permutationen aus $\{1,2,3,4,5,6\}$, die dreimal **1** und zweimal **2** beinhalten, wird durch folgende Rechnung bestimmt:

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$$

Folgend dem Laplace-Modell erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Wurf mit fünf Würfeln dreimal **1** und zweimal **2** kommt, durch Division der eben berechneten Anzahl durch die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Versuchsausgänge.

$$\frac{10}{7776}\approx 0.00128008$$

Wir können mit diesen Werkzeugen die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Würfelergebnisse mit mehreren Würfeln berechnen.

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.3.1 Binomialverteilung

An späterer Stelle ist für diese Arbeit von Interesse, den Erwartungswert der Häufigkeit eines bestimmten Ereignisses zu berechnen, wenn ein Zufallsversuch unter unveränderten Bedingungen mehrmals durchgeführt wird. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsversuch positiv ausfällt, und sei n die Anzahl der Versuche, so kann die Ereignismenge Ω folgendermaßen definiert werden:

$$\Omega := \{\omega = (a_1, \dots, a_n) : a_j \in \{0,1\} \, \textit{für } 1, \dots, n\}$$

In Worten ausgedrückt handelt es sich bei Ω um die Menge aller n-Tupel, bei deren Eintragungen es sich nur um 0 und 1 handeln kann. Dabei bedeutet $a_j = 0$, dass der j-te Einzelversuch ein negatives Ergebnis liefert, und $a_j = 1$, dass der j-te Einzelversuch ein positives Ergebnis liefert. Alle p_j sind bekannt und gleich, da derselbe Zufallsversuch unter denselben Bedingungen durchgeführt wird. Es handelt sich somit um einen mehrstufigen Zufallsversuch, wie er auf Seite 10 behandelt wird. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Elementarereignisses ω lässt sich demnach durch Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten für jeden Teilversuch bestimmen:

$$P(\{\omega\}) = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(p^{a_j} \cdot (1-p)^{1-a_j}\right)}_{=p \textit{ für } a_j=1 \textit{ und } 1-p \textit{ für } a_j=0} = p^{\sum_{j=1}^{n} a_j} \cdot (1-p)^{n-\sum_{j=1}^{n} a_j}$$

Betrachten wir zur Illustration dieser Gleichung den dreimaligen Würfelwurf, wobei wir es als positiv werten, wenn eine Sechs gewürfelt wird. Ein Elementarereignis eines passenden Grundraums wäre der Tupel $(1, 0, 1)$, welcher das Ereignis beschreibt, dass nur beim zweiten Würfelwurf keine Sechs erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus folgendem Produkt:

$$P\left(\{(1, 0, 1)\}\right) = \left(p^1 \cdot (1-p)^{1-1}\right) \cdot \left(p^0 \cdot (1-p)^{1-0}\right) \cdot \left(p^1 \cdot (1-p)^{1-1}\right) = p^2 \cdot (1-p)^1 \quad .$$

Anhand dieser Formel sehen wir deutlich, dass die Reihenfolge von positiven und negativen Versuchsausgänge keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Elementarereignisses hat. Die Formel liefert dasselbe Ergebnis für das Ereignis $(1, 0, 1)$, wie für das Ereignis $(0, 1, 1)$ oder $(1, 1, 0)$. Allein die Anzahl der positiven Versuchsausgänge bei einer bestimmten Anzahl von Versuchsdurchführungen sind bei dieser Fragestellung von Bedeutung.

Sei die Zufallsvariable X die Anzahl der positiven Versuchsausgänge bei n Versuchen, so ist $\{X = k\} = \{\omega = (a_1, \dots, a_n) : \sum_{j=1}^{n} a_j = k\}$ die Menge aller Elementarergeinisse ω aus dem auf dieser Seite definierten Grundraum Ω mit k positiven Versuchsausfällen. Jedes Elementarereignis in dieser Ereignismenge tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein, wie wir bereits im vorherigen Absatz festgestellt haben. Bei den $\omega \in \{X = k\}$ handelt es sich um Tupel, bei denen k der n Stellen ausgewählt wurden, die Eintragung 1 zu besitzen. Jede Stelle kann nur einmal gewählt werden. Wir interpretieren diesen Sachverhalt als ein Ziehen ohne Zurücklegen gemäß des Urnenmodells. Außerdem wird die Reihenfolge nicht beachtet. Somit wird Satz 5d) folgend die Anzahl der Elemente dieser Ereignismenge durch den Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ bestimmt (siehe Seite 13).

Diese Überlegungen zusammen mit der auf Seite 10 bewiesenen Behauptung bezüglich der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche führen uns zur Binomialverteilung. Diese dient der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass bei einer bestimmten Anzahl an Versuchsdurchführungen ein positives Ergebnis mit einer festgelegten Häufigkeit eintritt.

Definition 11
Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [0,1]$, wenn Folgendes gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Um zu zeigen, dass die eben definierte Abbildung P tatsächlich eine Verteilung ist, bleibt noch zu zeigen, dass die Summe aller $P(X = k)$ gleich 1 ist. Dazu wird der *binomische Lehrsatz* als bekannt vorausgesetzt.

Beweis

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \underbrace{=}_{\textit{binomischer Lehrsatz}} (p + 1 - p)^n = 1^n = 1$$

■

Satz 7
Sei die Zufallsvariable X binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [0,1]$, so gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot p.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)} \quad (Indexverschiebung\ k-1 \mapsto k) \\
&= n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k}}_{=(p+1-p)^{n-1}=1} \\
&= n \cdot p
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Geometrische Verteilung

Bisweilen interessiert es eine Würfelspielerin oder einen Würfelspieler, wie lange sie oder er im Schnitt warten muss, bis bei einem Würfelwurf ein spezielles Ereignis eintritt. Die Antwort auf diese Frage liefert der Erwartungswert einer Zufallsvariable, die die Anzahl der Versuchsdurchführungen bis zum ersten positiven Versuchsausgang annimmt. Bei Zufallsversuchen wie dem Würfelwurf unterliegt jede Versuchsdurchführung denselben Bedingungen, sodass sich die Wahrscheinlichkeit p, mit der das Ereignis von Interesse eintritt, über mehrere Versuchsdurchführungen hinweg nicht ändert. Ebenso bleibt die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis, also $1-p$ konstant. In den ersten $k-1$ Versuchen kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-p)^{k-1}$ zu keinem positiven Versuchsausgang. Somit ergibt sich für die Zufallsvariable X bei einer derartigen Fragestellung, dass sie eine geometrische Verteilung entsprechend der folgenden Definition besitzt.

Definition 12
Eine Zufallsvariable X ist geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, wenn für $k \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Wieder muss gezeigt werden, dass diese Abbildung tatsächlich eine Verteilung ist. Für den kommenden und den nächsten Beweis werden Grundlagen aus dem

Bereich der Analysis vorausgesetzt. Bei den erforderlichen Grundlagen handelt es sich um die Differentialrechnung und um das Konvergenzverhalten der geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Sie besitzt einen Konvergenzradius von 1, für $|x| < 1$ konvergiert sie absolut gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-x}$. Das erlaubt uns, die Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ mehrmals zu differenzieren, ohne dass sich der Konvergenzradius ändert. Von dieser Möglichkeit machen wir an späterer Stelle Gebrauch.

Beweis

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot &\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k}_{=\frac{1}{1-(1-p)}\ (\textit{geom. Reihe})} \\ &= p \cdot \frac{1}{1-1+p} = p \cdot \frac{1}{p} \\ &= 1\end{aligned}$$

■

Satz 8
Sei die Zufallsvariable X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, so gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad .$$

Beweis

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

$$\textit{Differenzieren:} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$$

Beim Differenzieren ändert sich der Konvergenzradius der Reihe nicht. Da gilt, dass $|1-p| < 1$ ist, können wir die eben erhaltene Gleichung zur Bestimmung von

$E(X)$ verwendet.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}}_{=\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{1}{p^2}}$$
$$= p \cdot \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{1}{p}$$

■

In Abschnitt 5 ist die Frage, wie oft ein Versuch durchgeführt werden muss, bis erwartet werden kann, dass ein bestimmtes Erieignis zum dritten Mal eintritt, von besonderem Interesse. Wenn der Erwartungswert der Anzahl der Versuchsdurchführungen bis zum ersten Treffer $\frac{1}{p}$ beträgt, könnte intuitiv geschätzt werden, dass der gesuchte Erwartungswert gleich $\frac{3}{p}$ ist. Um diese Vermutung zu beweisen, muss zunächst eine geeignete Verteilung gefunden werden.

Wenn bei einem mehrstufigen Experiment der k-te Teilversuch zum dritten Erfolg führt, dann kann das Elementarereignis ω als ein k-Tupel angesehen werden. Unter den ersten $k-1$ Eintragungen sind genau zwei gleich 1, alle anderen sind 0. Außerdem ist auch die letzte Eintragung gleich 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Elementarereignis eintritt, wird analog zur Vorgehensweise auf Seite 17 folgendermaßen berechnet:

$$P(\{\omega\}) = p^3 \cdot (1-p)^{k-3}$$

Bei der Binomialverteilung wird die Anzahl der Elementarereignisse, die zum gesuchten Ergebnis führen, mit dem Binomialkoeffizienten bestimmt. Auch hier wird der Binomialkoeffizient benötigt. Die Anzahl der geeigneten k-Tupel ist gleich $\binom{k-1}{2}$. Die letzte Eintragung ist fix, für die restlichen $k-1$ Eintragungen müssen zwei Stellen ausgewählt werden, die die Eintragung 1 bekommen. Das entspricht wieder dem Modell des Ziehens aus einer Urne ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Satz 9
Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die Abbildung P mit

$$P(X=k) = \binom{k-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{k-3}$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und $E(X) = \frac{3}{p}$ *für* $p \in (0,1)$ *und* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis
Aus dem Beweis für den Erwartungswert der geometrischen Verteilung ist bekannt, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$$

Diese Gleichung wird noch zwei weitere Male differenziert, wobei sich der Konvergenzradius nicht verändert.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = 1 \cdot x^0 + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot x^{k-1} \\
\textit{Differenzieren}: \quad & \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} = 2 \cdot x^0 + \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} \\
\textit{Differenzieren}: \quad & \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot x^{k-3}
\end{aligned}$$

Nun können die Grenzwerte der Reihen $\sum_3^\infty P(X=k)$ und $\sum_3^\infty k \cdot P(X=k)$ bestimmt werden. Diese Reihen beginnen mit $k=3$, da frühestens ab der dritten Versuchdurchführung der dritte Erfolg eintreten kann.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\infty} P(X=k) &= \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{k-3} \\
&= p^3 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2} \cdot (1-p)^{k-3} \\
&= p^3 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)!}{2 \cdot (k-3)!} \cdot (1-p)^{k-3} \\
&= \frac{p^3}{2} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} (k-1) \cdot (k-2) \cdot (1-p)^{k-3} \\
(\textit{Indexverschiebung}: k-1 \mapsto k): \quad &= \frac{p^3}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-2}}_{=\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p^3}} \\
&= \frac{p^3}{2} \cdot \frac{2}{p^3} = 1
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Abbildung P tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $E(X)$ tatsächlich $\frac{3}{p}$ ist.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot \binom{k-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{k-3} \\
&= p^3 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{2} \cdot (1-p)^{k-3} \\
&= \frac{p^3}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (1-p)^{k-3}}_{=\frac{6}{(1-(1-p))^4} = \frac{6}{p^4}} \\
&= \frac{p^3}{2} \cdot \frac{6}{p^4} \\
&= \frac{3}{p}
\end{aligned}$$

■

3 Würfelergebnisse

In diesem Kapitel werden die möglichen Ergebnisse für Würfe mit bis zu sechs Würfeln behandelt. Dabei werden wir klären, welche Kombinationen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwürfelt werden können. Die Ergebnisse, welche in diesem Abschnitt vorgestellt werden, dienen als Grundlage für sämtliche Berechnungen in Abschnitt 4 und Abschnitt 5.

3.1 Wurf mit einem Würfel

Bei dem Würfelwurf mit einem sechsseitigen Würfel gibt es sechs verschiedene Versuchsausgänge: Der Würfel kann auf jeder der sechs Seiten zu liegen kommen und somit die gegenüberliegende Seite als Ergebnis anzeigen. Unter der Annahme, dass zum Würfeln ein perfekt ausbalancierter und symmetrischer Würfel verwendet wird, ist jeder Versuchsausgang gleichwahrscheinlich. Folglich lassen sich sämtliche Wahrscheinlichkeiten in einem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum, wie in Kapitel 2 beschrieben, bestimmen. In Tabelle 1 werden die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen jedes Ergebnisses dargestellt.

Tabelle 1: Würfelergebnisse mit einem Würfel

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

3.2 Wurf mit zwei Würfeln

Der Wurf mit zwei Würfeln entspricht dem zweifachen Wurf mit einem Würfel. Jeder einzelne Wurf hat sechs mögliche Versuchsausgänge, folglich hat der Wurf mit zwei Würfeln $6^2 = 36$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge, welches sich aus Satz 5a) ergibt. Die Anzahl der verschiedenen gleichwahrscheinlichen Versuchsausgänge ist gleich der Anzahl der 2-Permutationen mit Wiederholung aus der Menge $\{1, 2, ..., 6\}$. Für das Würfelergebnis ist unerheblich, welcher der beiden Würfel eine gewürfelte Augenzahl zeigt. Von Bedeutung ist nur, dass zwei bestimmte Augenzahlen gewürfelt werden.

Tabelle 2: Würfelergebnisse mit zwei Würfel

1. Würfel	2. Würfel	Wahrscheinlichkeit
1	1	1/36
1	2	2/36
1	3	2/36
1	4	2/36
1	5	2/36
1	6	2/36
2	2	1/36
2	3	2/36
2	4	2/36
2	5	2/36
2	6	2/36
3	3	1/36
3	4	2/36
3	5	2/36
3	6	2/36
4	4	1/36
4	5	2/36
4	6	2/36
5	5	1/36
5	6	2/36
6	6	1/36

In Tabelle 2 sind die Augenzahlen der Größe nach geordnet. Es werden die 21 verschiedenen 2-Kombinationen aus $\{1,2,...,6\}$ dargestellt, denn nach Satz 5c) gilt, dass wir die Anzahl der 2-Kombinationen folgendermaßen berechnen können:

$$|Kom_2^6| = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Diese reduzierte Darstellungsweise wahrt die Übersicht, da die Anzahl der k-Kombinationen mit wachsendem k deutlich geringer steigt, als die Anzahl der k-Permutationen. Diese Reduzierung geht auf Kosten der Einfachheit, denn diese 21 Versuchsausgänge sind nicht mehr gleichwahrscheinlich. Um dennoch im Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum operieren zu können, muss bestimmt werden, wie viele ungeordnete Versuchsausgänge zu jedem einzelnen geordneten Versuchsausgang zusammengefasst werden. Im Fall von einem Würfelwurf mit zwei Würfeln ist dies noch sehr einfach zu bewerkstelligen. Das Würfelergebnis **1**-**2** beispielsweise kann erreicht werden, indem der erste Würfel **1** und der zweite **2** zeigt, oder umgekehrt. Folglich führen zwei Ereignisse zu diesem Ergebnis und die Wahrscheinlichkeit dafür ergibt sich nach Laplace aus $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Demnach haben alle Ergebnisse mit zwei verschiedenen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{18}$. Ergebnisse, bei denen beide Würfel dieselbe Augenzahl aufweisen, haben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$.

3.3 Wurf mit drei Würfeln

Bei den Ergebnissen eines Würfelwurfs mit drei Würfeln gehen wir wie im Abschnitt 3.2 vor. Entsprechend eines dreimaligen Durchführens eines Zufallsversuches mit sechs Versuchsausgängen, ergeben sich $6^3 = 216$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, die sich allerdings in $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$ unterschiedliche Würfelergebnisse zusammenfassen lassen. Diese Ergebnisse und die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Würfelereignisse, die zu diesen Ergebnissen führen, sind im Anhang auf Seite 111 angegeben. Die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Würfelergebnisse stehen in der mit „#“, titulierten Spalte und ergeben mittels Division durch die Anzahl aller möglichen gleichwahrscheinlichen Ereignisse die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

Die Anzahl der verschiedenen Versuchsausgänge, die zu bestimmten Kombinationen führen, werden mit Satz 6 aus Abschnitt 2.2 auf Seite 14 bestimmt. Bei dem Würfelergebnis **1-1-1** beträgt k=3, der Wert 1 kommt dreimal vor, daher ist auch $i_1 = 3$, während i_2 bis i_6 gleich 0 sind. Beim Einsetzen in die Formel aus Satz 6 wird folgendes Ergebnis bestimmt: $\frac{3!}{3!} = 1$. Es gibt genau ein 3-Tupel aus der Menge der 3-Permutationen mit Wiederholung, bei dem jeder Eintrag **1** ist. Somit führt auch genau eines der 216 gleichwahrscheinlichen Würfelergebnisse beim Wurf mit drei Würfeln zu dem Ergebnis **1-1-1**, die Wahrscheinlichkeit dafür ist nach Laplace folglich $\frac{1}{216}$. Das gleiche gilt für jedes Ereignis, bei dem drei gleiche Augenzahlen gewürfelt werden.

Beim Ergebnis **1-1-2** beträgt k erneut 3, allerdings gilt nun, dass $i_1 = 2$ und $i_2 = 1$. Erneutes Einsetzen in die Formel ergibt $\frac{3!}{2!} = 3$. Drei Versuchsausgänge münden in dem Ergebnis **1-1-2**, dasselbe gilt für jede Kombination, die aus zwei gleichen Augenzahlen und einer davon verschiedenen besteht.

Für den Fall, dass drei unterschiedliche Augenzahlen gewürfelt werden, wie zum Beispiel **1-2-3**, liefert die Formel $3! = 6$ verschiedene gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge mit diesem Ergebnis.

3.4 Wurf mit vier Würfeln

Für den Wurf mit vier Würfeln besteht die Grundmenge der Ereignisse aus $6^4 = 1294$ Elementen. Im Anhang auf den Seiten 112 und 113 werden die Kombinationen und die Anzahl der Ereignisse, die zu ihnen führen, dargestellt. Nach dem Satz 5 sind das $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$ an der Zahl. Die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge, die in den jeweiligen Ergebnissen münden, werden analog zu Abschnitt 3.3 dadurch bestimmt, dass die Formel auf Seite 14 verwendet wird. Zur einfacheren Beschreibung der Kombinationen werden in dieser Arbeit zwei Würfel, die den selben Wert zeigen, als Paar bezeichnet, drei Würfel als Drilling, vier Würfel als Vierling und so weiter. Anschließend sind die Rechenwege und

Ergebnisse für die Anzahl der 4-Permutationen, die die sich zu einer Kombination mit bestimmten Aussehen zusammenfassen lassen, aufgelistet.

(1) $\frac{4!}{4!} = 1$

(2) $\frac{4!}{3!} = 4$

(3) $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

(4) $\frac{4!}{2!} = 12$

(5) $4! = 24$

Gleichung (1) zeigt, dass genau ein möglicher Versuchsausgang zu vier bestimmten gleichen Augenzahlen führt, während Gleichung (2) demonstriert, dass das Ergebnis, dass drei Würfel dieselbe bestimmte Augenzahl zeigen, während der vierte Würfel eine gewisse andere aufweist, auf vier Wegen erreicht werden kann. Die dritte Gleichung besagt, dass Ergebnisse wie **1-1-2-2** durch sechs der 1294 gleichwahrscheinlichen Versuchsausgänge erreicht werden können. Für ein bestimmtes Pärchen und zwei Würfel mit sich davon unterscheidenden verschiedenen Augenzahlen erhalten wir nach Gleichung (4) jeweils zwölf mögliche Versuchsausgänge. Ergebnisse wie **1-2-3-4** können, wie in Gleichung (5) berechnet, durch 24 gleichwahrscheinliche Ereignisse erreicht werden.

3.5 Wurf mit fünf Würfeln

Der Wurf mit fünf sechsseitigen Würfeln bestitzt $6^5 = 7776$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge, welche sich in $\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252$ unterschiedliche Ergebnisse zusammenfassen lassen. Im Anhang auf den Seiten 114 bis 116 werden alle möglichen Ergebnisse mit der zu ihnen führenden Anzahl an möglichen Versuchsausgängen aufgelistet. Erneut wird die Anzahl durch die Formel auf Seite 14 berechnet.

(6) $\frac{5!}{5!} = 1$

(7) $\frac{5!}{4!} = 5$

(8) $\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

(9) $\frac{5!}{3!} = 20$

(10) $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$

(11) $\frac{5!}{2!} = 60$

(12) $5! = 120$

Gleichung (6) zeigt, dass erneut genau ein Tupel aus der Menge der 5-Permutationen mit Wiederholung fünf bestimmte gleiche Eintragungen zeigt. Für Ergebnisse wie **1-1-1-1-2** weist Gleichung (7) fünf mögliche Versuchsausgänge auf, Gleichung (8) für Ergebnisse wie **1-1-1-2-2** zehn. Nach Gleichung (9) führen 20 Ereignisse zu Ergebnissen, die aus einem bestimmten Drilling und zwei bestimmten voneinander unterschiedlichen Augenzahlen bestehen. Das Ergebnis **1-1-2-2-3** und alle analog aufgebauten Kombinationen werden nach Gleichung (10) auf 30 gleichwahrscheinliche Wegen erreicht, **1-1-2-3-4** nach Gleichung (11) auf 60 Wegen. Für Ergebnisse mit fünf bestimmten unterschiedlichen Augenzahlen erhalten wir mit Gleichung (12) genau 120 gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge.

3.6 Wurf mit sechs Würfeln

Der Würfelwurf mit sechs Würfeln hat $6^6 = 46656$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge, welche in $\binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} = 462$ unterschiedliche Würfelergebnisse münden. Diese Würfelergebnisse und die Anzahl der Versuchsausgänge, die zu ihnen führen, sind im Anhang auf den Seiten 117 bis 121 angegeben. Die dort notierten Einträge für die Anzahl der Möglichkeiten werden erneut mit Satz 6 bestimmt.

$$\frac{6!}{6!} = 1 \tag{13}$$

$$\frac{6!}{5!} = 6 \tag{14}$$

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \tag{15}$$

$$\frac{6!}{4!} = 30 \tag{16}$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \tag{17}$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60 \tag{18}$$

$$\frac{6!}{3!} = 120 \tag{19}$$

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90 \tag{20}$$

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180 \tag{21}$$

$$\frac{6!}{2!} = 360 \tag{22}$$

$$6! = 720 \tag{23}$$

Gleichung (13) zeigt, dass genau eines der 46656 gleichwahrscheinlichen Ereignisse zu einem bestimmten Sechsling führt. Für einen bestimmten Fünfling mit einer ausgewählten weiteren Augenzahl gibt es nach Gleichung (14) genau sechs Wege. Das Ergebnis **1-1-1-1-2-2** und alle analog aufgebauten Ergebnisse werden durch fünfzehn gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge erreicht, Ergebnisse wie **1-1-1-1-2-3** durch 30, wie die Gleichungen (15) und (16) zeigen. Zwanzig gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge führen zu zwei bestimmten Drillingen, wie an Gleichung (17) zu erkennen ist. Gleichung (18) zeigt, dass Ergebnisse wie **1-1-1-2-2-3** durch 60 gleichwahrscheinliche Ereignisse erreicht werden, Ergebnisse wie **1-1-1-2-3-4** durch 120. Für das Erwürfeln von drei bestimmten Pärchen liefert Gleichung (20) 90 Möglichkeiten, für zwei bestimmte Pärchen und zwei weitere festgelegte Augenzahlen bestimmt Gleichung (21) 180 Möglichkeiten. Gleichung (22) zeigt, dass es 360 der 46656 gleichwahrscheinlichen Versuchsausfälle gibt, die zu **1-1-2-3-4-5** und zu analogen Ergebnissen führen. An Gleichung (23) erkennen wir, dass von den 46656 gleichwahrscheinlichen Versuchsausgängen 720 zu einem Ergebnis führen, das sechs verschiedenen Würfelwerte aufweist.

4 Zehntausend

Das Würfelspiel Zehntausend ist ein Spiel, welches unter verschiedenen Namen bekannt ist, wie Berliner Macke, Teutonenpoker oder Farkle. Es gibt kein einheitliches Regelsystem, auf einem gewissen Kern an Regeln bauen zahlreiche Varianten auf. In dieser Arbeit wird eine Regelvariante behandelt, welche sich aus der „großen Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele“ [3, S.216-217] und den Spielregeln der Berliner Würfelmeisterschaft von 2009 [1] zusammensetzt.

4.1 Spielregeln

4.1.1 Spielprinzip

Dieses Spiel wird mit sechs sechsseitigen Würfeln gespielt. Die Mindestanzahl für Spieler oder Spielerinnen beträgt zwei. In jedem Zug können durch einen oder mehrere Würfelwürfe Punkte erreicht und zum Punktekonto des jeweiligen Spielers oder der jeweiligen Spielerin addiert werden. Die Person, die zuerst mindestens 10000 Punkte erreicht hat, gewinnt das Spiel.

Jeder Spieler oder jede Spielerin würfelt in seinem oder ihrem Zug zunächst mit allen Würfeln, wählt Würfel aus, die Punkte liefern, und legt sie zur Seite. Er oder sie darf mit den übrigen Würfeln erneut würfeln, wieder Punkte zählende Würfel beiseitelegen und abermals entscheiden, den Vorgang zu wiederholen. Wurden alle zur Verfügung stehenden Würfel zur Seite gelegt, steht es der Spielerin oder dem Spieler frei, erneut alle Würfel aufzunehmen und mit ihnen wie eben beschrieben weiterzuverfahren. Dabei verfallen die bereits erworbenen Punkte nicht. Die Punkte jedes einzelnen Wurfes werden zu den bereits erreichten hinzuaddiert, bis der oder die Nächste an der Reihe ist, also der Zug des Spielers oder der Spielerin beendet ist. Dies ist der Fall, wenn der Spieler oder die Spielerin entscheidet, nicht mehr weiter zu würfeln oder wenn bei einem Würfelwurf keine Punkte erreicht werden können. Im ersten Fall werden die gewonnenen Punkte dieses Zuges endgültig dem Punktekonto des Spielers oder der Spielerin gutgeschrieben. Im zweiten Fall gehen sie verloren. Somit sind erreichte Punkte erst dann sicher, wenn der Zug freiwillig beendet worden ist. Wird ein Zug, wie im zweiten Fall beschrieben, durch einen Wurf beendet, der keine Punkte bringt, so wird dies in dieser Arbeit als Patzer bezeichnet. Die Spielanleitung für die Berliner Würfelmeisterschaft verwendet dafür die Bezeichnung „Macke“ [1].

Aus dieser Regelung ergeben sich zahlreiche interessante strategische Fragestellungen, da jeder freiwillige Würfelwurf das Risiko beinhaltet, alle Punkte, die im aktuellen Zug erreicht worden sind, zu verlieren. Außerdem ist es möglich, innerhalb eines Zuges die für den Sieg erforderlichen 10000 Punkte zu erreichen, da es keine Einschränkung gibt, wie oft gewürfelt werden darf.

4.1.2 Punktevergabe

Aus Tabelle 3 kann entnommen werden, wie Punkte bei einem Wurf erreicht werden können, beziehungsweise, wie viel jeder Wurf wert ist. Bei Erstellung dieser Punktetabelle wird eine Spielvariante verwendet, welche bei der Berliner Würfelmeisterschaft als „Verdoppeln“ bezeichnet wird. Nach dem Regelwerk der großen Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele werden Würfel mit **1** mit 100 und **5** mit 50 Punkten belohnt. Drillinge, also drei Würfel mit der selben Augenzahl, sind 100-mal ihre Augenzahl wert, wie in der vierten Spalte der Tabelle 3 festgehalten ist. Die einzige Ausnahme stellt die dreifache **1** dar, die 1000 Punkte beschert. Darin stimmen beide verwendeten Regelwerke noch überein. Die Variante des „Verdoppelns“ sieht jedoch vor, dass für jeden weiteren Würfel mit entsprechender Augenzahl diese Punkte verdoppelt werden, also vier Würfel mit **2** bringen $2 \cdot 200 = 400$ und vier Würfel mit **5** versprechen $2 \cdot 500 = 1000$ Punkte.

Tabelle 3: Punktevergabe für einen Wurf

Würfel	Einzeln	Paar	Drilling	Vierling	Fünfling	Sechsling
1	100	200	1000	2000	4000	8000
2	0	0	200	400	800	1600
3	0	0	300	600	1200	2400
4	0	0	400	800	1600	3200
5	50	100	500	1000	2000	4000
6	0	0	600	1200	2400	4800

Die Regelvariante aus Kastners Enzyklopädie, wonach Drillinge in einem Folgewurf durch eine gewürfelte **1** oder **5** bestätigt werden müssen, wird nicht verwendet. Das „Ergänzen“ aus den Regeln der Berliner Würfelmeisterschaft, welches erlaubt, Würfel, die zu einem zur Seite gelegten Drilling passen, zu werten, sodass man statt eines Drillings einen Vierling erhält, wird ebenfalls nicht verwendet. Der Grund dafür, dass diese Varianten nicht verwendet werden, ist, dass sie sämtliche Berechnungen für Wahrscheinlichkeiten deutlich erschweren würden. Beide Varianten verlangen eine Berücksichtigung der Ergebnisse eines vorhergehenden Wurfes. Dieser Ausschluss an Regeln ist jedoch legitim, da die Variante des „Ergänzens“ im Regelwerk nach Kastner nicht erwähnt wird und die Variante des Bestätigens von Drillingen nicht im Regelwerk der Würfelmeisterschaften. Eine weitere Regel der Berliner Würfelmeisterschaften, die wir in dieser Arbeit nicht berücksichtigen, ist das Bestätigen, wenn alle sechs Würfel zur Seite gelegt werden. In diesem Fall verlangen die Regeln, dass mit allen sechs Würfeln erneut gewürfelt wird. Diese Variante führt jedoch zu einer Reduktion der Entscheidungsfreiheit. Im Abschnitt 4.2.2 werden wir behandeln, ob diese Regelung die Chancen verringern würde, viele Punkte zu Erreichen.

Um Würfelergebnisse einfacher diskutieren zu können, werden sie mit durch Bindestriche getrennte Ziffern von **1** bis **6** dargestellt. Jede Ziffer beschreibt, dass ein Würfel dieses Würfelergebnis zeigt. Weiters werden die Würfelergebnisse geordnet notiert, um die Übersichtlichkeit weiter zu verbessern.

Betreffend die Punktevergabe laut Tabelle 3 muss betont werden, dass die Punkte für das Würfeln mehrerer gleicher Zahlen nur dann dem Spieler oder der Spielerin zugerechnet werden, wenn bei einem einzelnen Wurf ein derartiges Ergebnis erzielt wird. Jeder Wurf wird für sich bewertet.

Beispiele: Spieler A hat bei seinem ersten Wurf das Ergebnis **1 - 1 - 3 - 4 - 6 - 6** erzielt. Er legt die beiden Würfel mit **1** zur Seite. Dieser Wurf ist 200 Punkte wert. Bei seinem darauffolgenden Wurf erreicht er das Ergebnis **1 - 1 - 3 - 4**. Er legt **1 - 1** zur Seite. Der zweite Wurf ist 200 Punkte wert. Obwohl Spieler A in seinem Zug viermal **1** gewürfelt hat, stehen ihm 400 statt 2000 Punkte zu, weil sie nicht im selben Wurf gewürfelt wurden. Er beendet seinen Zug und verbucht 400 Punkte auf sein Punktekonto.

Spielerin B würfelt bei ihrem ersten Wurf **1 - 1 - 1 - 1 - 4 - 6**, legt **1 - 1 - 1 - 1** zur Seite und erhält 2000 Punkte. Ihr stehen die 2000 Punkte aus der Tabelle für das Ergebnis **1 - 1 - 1 - 1** zu, die sie sich mit Beendigung ihres Zuges sichern kann.

Spieler C erwürfelt **1 - 2 - 2 - 2 - 5 - 5**. Der Wurf ist somit 100 Punkte für **1** plus 200 Punkte für den Drilling **2 - 2 - 2** plus 100 Punkte für **5 - 5** wert. Das ergibt in Summe 400 Punkte. Außerdem darf er alle Würfel aufnehmen und erneut würfeln. Sein zweiter Wurf ergibt **2 - 4 - 4 - 5 - 5 - 6**. Er legt **5 - 5** zur Seite, addiert 100 Punkte zu den 400 Punkten des vorherigen Wurfs und hat nun 500 Punkte erreicht. Er beschließt, nicht mehr weiter zu würfeln und schreibt seinem Punktekonto 500 Punkte gut.

Das erstes Würfelergebnis von Spielerin D ist **2 - 2 - 3 - 5 - 5 - 5**, welches ihr 500 Punkte einbringt. Sie entscheidet sich erneut zu würfeln, erreicht aber nur das Ergebnis **4 - 4 - 6**, welches überhaupt keine Punkte liefert. Damit wird ihr Zug beendet, ihre 500 Punkte aus dem ersten Wurf gehen verloren, sie kann keine weiteren Punkte zu ihrem Punktekonto addieren.

4.1.3 Limit

Eine weitere Regel, welche in Kastners Enyklopädie als Variante vermerkt ist und bei der Berliner Würfelmeisterschaft 2009 verwendet wurde, legt fest, dass ein

Spieler oder eine Spielerin eine gewisse Mindestanzahl an Punkten in seinem oder ihrem Zug erspielt haben muss, um freiwillig aufzuhören und die Punkte dem Konto gutzuschreiben. Dieser Mindestwert beträgt 350 Punkte [3] [1].

4.2 Erwartungswert als Entscheidungshilfe

In Kapitel 3 haben wir geklärt, wie alle möglichen Würfelergebnisse beim Wurf mit bis zu sechs Würfeln erreicht werden können. Für jede dieser Kombinationen lässt sich entsprechend der Punktevergabe auf Seite 30 berechnen, wie viele Punkte sie wert ist. Außerdem kann, wie auch schon im Abschnitt 4.3, die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis durch simples Abzählen der möglichen Ereignisse bestimmt werden. Wird als Zufallsvariable die Punktanzahl gewählt, die man in einem Wurf erzielen kann, so lässt sich wie in den Grundlagen auf Seite 7 der Erwartungswert für den Wurf mit einer bestimmten Anzahl an Würfel berechnen. Diese Werte dienen als Schätzung, wie viele Punkte jeder Wurf im Schnitt einbringen wird. Der Erwartungswert für die Anzahl der Punkte mit n Würfeln wird mit $E_n(X)$ für $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ bezeichnet.

4.2.1 Berechnung der Erwartungswerte

Für den Wurf mit einem einzelnen Würfel ist die Berechnung sehr einfach. Die Zufallsvariable X kann drei verschiedene Werte annehmen, 100 Punkte für eine **1**, 50 Punkte für eine **5** oder 0 Punkte für alle weiteren Würfelwerte. Wir berechnen den Erwartungswert $E_1(X)$, indem wir jeden Wert, den die Zufallsvariable annehmen kann, mit der Wahrscheinlichkeit, dass sie ihn einnimmt, multiplizieren und all diese Produkte aufsummieren. Die dafür benötigten Wahrscheinlichkeiten lassen sich aus Tabelle 1 herauslesen. Als Erwartungswert erhalten wir demnach:

$$E_1(X) = 0 \cdot P(X=0) + 50 \cdot P(X=50) + 100 \cdot P(X=100) = 25$$

Dieser Erwartungswert ist nur halb so groß wie das niedrigste Punktequantum, welches gewonnen werden kann. Das verdeutlicht, dass die Wahrscheinlichkeit, keine Punkte zu erreichen, sehr hoch ist. Aus Tabelle 1 ist zu sehen, dass $\frac{2}{3}$ aller Versuchsausgänge keine Punkte bringen und damit einen Patzer verursachen. Andererseits bringt $\frac{1}{3}$ aller Würfelergebnisse nicht nur Punkte über dem Erwartungswert, sondern ermöglicht auch das erneute Aufnehmen aller Würfel. Diese Möglichkeit wurde nicht bei dem Erwartungswert hineingerechnet.

Der Würfelwurf mit zwei Würfeln liefert zu den oben genannten Werten 150 Punkte für **1-5** und 200 Punkte für das Ereignis **1-1**. Mit der Information aus Tabelle 2 können wir den Erwartungswert bestimmen.

$$
\begin{aligned}
E_2(X) = {} & 0 \cdot P(X=0) + 50 \cdot P(X=50) + 100 \cdot P(X=100) + 150 \cdot P(X=150) + \\
& +200 \cdot P(X=200) \\
= {} & 50 \cdot \tfrac{2}{9} + 100 \cdot \tfrac{1}{4} + 150 \cdot \tfrac{1}{18} + 200 \cdot \tfrac{1}{36} \\
= {} & 50
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswert für die Punkte beim Wurf mit zwei Würfeln ist somit doppelt so hoch wie bei dem Wurf mit einem einzelnen Würfel. Dieses Ergebnis ist wenig überraschend. Wir können die Punkte, die beide Würfel liefern, als Summe der Punkte jedes einzelnen betrachten, da bei zwei Würfeln keine Punkte für Drillinge vergeben werden können. Nach Satz 3 ist der Erwartungswert der Summe der Zufallsvariablen gleich der Summe ihrer Erwartungswerte.

Beim Würfelwurf mit drei Würfeln sind nun das erste Mal Drillinge möglich. Drei Würfel können gemeinsam Punkte bescheren. Ohne diesen Punktebonus für Drillinge wäre mit einem Erwartungswert von 75 Punkten zu rechnen. Es gäbe ein lineares Wachstum des Erwartungswertes mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel entsprechend der Formel $E_n(X) = n \cdot 25$. Werden jedoch die Punkte für Drillinge berücksichtigt, beeinflusst das die Berechnung des Erwartungswerts deutlich.

Tabelle 4: Erreichbare Punkte bei einem Wurf mit drei Würfeln

Punkte	Kombinationsanzahl	Punkte	Kombinationsanzahl
0	60	300	1
50	48	400	1
100	60	500	1
150	24	600	1
200	16	1000	1
250	3		

In Tabelle 4 sind die erreichbaren Punkte für den Wurf mit drei Würfeln und die Anzahl der Kombinationen, die zu diesen Punkten führen, aufgelistet. Wie in Abschnitt 3.3 erläutert, erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten, indem wir jede Anzahl durch 216 dividieren. Für die Berechnung des Erwartungswerts erhalten wir Folgendes:

$$
\begin{aligned}
E_3(X) = {} & 0 \cdot P(X=0) + 50 \cdot P(X=50) + 100 \cdot P(X=100) + 150 \cdot P(X=150) + \\
& +200 \cdot P(X=200) + 250 \cdot P(X=250) + 300 \cdot P(X=300) + 400 \cdot P(X=400) + \\
& +500 \cdot P(X=500) + 600 \cdot P(X=600) + 1000 \cdot P(X=1000) \\
= {} & 50 \cdot \tfrac{48}{216} + 100 \cdot \tfrac{60}{216} + 150 \cdot \tfrac{24}{216} + 200 \cdot \tfrac{16}{216} + 250 \cdot \tfrac{3}{216} + 300 \cdot \tfrac{1}{216} + 400 \cdot \tfrac{1}{216} + \\
& +500 \cdot \tfrac{1}{216} + 600 \cdot \tfrac{1}{216} + 1000 \cdot \tfrac{1}{216}
\end{aligned}
$$

Nun können wir $\frac{1}{216}$ herausheben, um die Rechnung zu vereinfachen.

$$
\begin{aligned}
E_3(X) &= \tfrac{1}{216}\cdot\big(50\cdot 48+100\cdot 60+150\cdot 24+200\cdot 16+250\cdot 3+300+400+500+\\
&\quad +600+1000\big)\\
&= 86{,}80555556
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren folglich nach Erstellung der Tabelle 4 die Eintragungen der ersten und dritten Spalte mit den jeweiligen Eintragungen der zweiten und vierten Spalte und dividieren anschließend die Summe durch die Gesamtzahl der möglichen Würfelergebnisse.

Unser Ergebnis von rund 87 weicht um 12 Punkte von dem Wert 75 ab, welcher der Erwartungswert für den Wurf mit drei Würfeln wäre, würde es keine Punkte für Drillinge entsprechend Tabelle 3 geben.

Mit dem vierten Würfel werden auch die Bonuspunkte für Vierlinge möglich, wodurch eine maximale Punktezahl von 2000 bei einem einzigen Würfelwurf erreicht werden kann.

Tabelle 5: Erreichbare Punkte bei einem Wurf mit vier Würfeln

Punktewert	Kombinationsanzahl	Punktewert	Kombinationsanzahl
0	204	450	4
50	252	500	20
100	336	600	21
150	192	700	4
200	144	800	1
250	52	1000	17
300	22	1050	4
350	4	1200	1
400	17	2000	1

Tabelle 5 zeigt in der ersten und der dritten Spalte alle Punktewerte, die beim Wurf mit vier Würfeln erreichbar sind. In zweiter und vierter Spalte sind angegeben, wie viele Kombinationen zu diesen Punkten führen. Analog zur Berechnung von $E_3(X)$ wird $E_4(X)$ aus den Werten der Tabelle 5 bestimmt.

$$
\begin{aligned}
E_4(X) &= 50\cdot\tfrac{252}{1296}+100\cdot\tfrac{336}{1296}+150\cdot\tfrac{192}{1296}+200\cdot\tfrac{144}{1296}+250\cdot\tfrac{52}{1296}+300\cdot\tfrac{22}{1296}+\\
&\quad +350\cdot\tfrac{4}{1296}+400\cdot\tfrac{17}{1296}+450\cdot\tfrac{4}{1296}+500\cdot\tfrac{20}{1296}+600\cdot\tfrac{21}{1296}+700\cdot\tfrac{4}{1296}+\\
&\quad +800\cdot\tfrac{1}{1296}+1000\cdot\tfrac{17}{1296}+1050\cdot\tfrac{4}{1296}+1200\cdot\tfrac{1}{1296}+2000\cdot\tfrac{1}{1296}\\
&= \tfrac{1}{1296}\cdot\big(50\cdot 252+100\cdot 336+150\cdot 192+200\cdot 144+250\cdot 52+300\cdot 22+\\
&\quad 350\cdot 4+400\cdot 17+450\cdot 4+500\cdot 20+600\cdot 21+700\cdot 4+800+1000\cdot 17+\\
&\quad +1050\cdot 4+1200+2000\big)\\
&= 143{,}3641975
\end{aligned}
$$

Der Wert für $E_4(X)$ weicht nun bereits um rund 43 Punkte von dem Erwartungswert ab, den wir erhalten würden, gäbe es keine Bonuspunkte für Drillinge und Vierlinge. Mit dem fünften Würfel rechnen wir mit einer noch stärkeren Abweichung vom linearen Wachstum, da nicht nur die Wahrscheinlichkeiten für Drillinge und Vierlinge steigen, sondern auch Fünflinge erreicht werden können, die mit bis zu 4000 Punkten belohnt werden.

Tabelle 6: Erreichbare Punkte bei einem Wurf mit fünf Würfeln

Punktewert	Kombinationsanzahl	Punktewert	Kombinationsanzahl
0	600	750	20
50	1020	800	26
100	1620	850	5
150	1200	900	5
200	1170	1000	180
250	540	1050	80
300	280	1100	15
350	80	1200	21
400	185	1250	5
450	80	1300	5
500	185	1600	1
550	82	2000	21
600	245	2400	1
650	25	4000	1
700	75		

In Tabelle 6 sind die mit fünf Würfeln erreichbaren Punktewerte und die Anzahl der Kombinationen, die zu ihnen führen, angegeben. Aus diesen Werten kann der Erwartungswert für die Punkte eines Würfelwurfs mit fünf Würfeln berechnet werden.

$$\begin{aligned}
E_5(X) = {} & \tfrac{1}{7776} \cdot \big(50 \cdot 1020 + 100 \cdot 1620 + 150 \cdot 1200 + 200 \cdot 1170 + 250 \cdot 450 + \\
& +300 \cdot 280 + 350 \cdot 80 + 400 \cdot 185 + 450 \cdot 80 + 500 \cdot 185 + 550 \cdot 82 + \\
& +600 \cdot 245 + 650 \cdot 25 + 700 \cdot 75 + 750 \cdot 20 + 800 \cdot 26 + 850 \cdot 5 + 900 \cdot 5 + \\
& +1000 \cdot 180 + 1050 \cdot 80 + 1100 \cdot 15 + 1200 \cdot 21 + 1250 \cdot 5 + 1300 \cdot 5 + 1600 + \\
& +2000 \cdot 21 + 2400 + 4000\big) \\
= {} & 225,4050926
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert für den Punktegewinn beim Würfeln mit fünf Würfeln liegt um mehr als 100 Punkte über dem Erwartungswert ohne Berücksichtigung der Punkte für Drillinge, Vierlinge und Fünflinge. Das zeigt auf, wie wesentlich der Beitrag dieser wertvollen Kombinationen ist. Ein zusätzlicher Würfel beschert die Möglichkeit, 8000 Punkte mit einem einzelnen Wurf zu erreichen. Dies und die höhere Wahrscheinlichkeit für Drillinge und Vierlinge wirken sich deutlich auf den Erwartungswert aus.

Tabelle 7: Erreichbare Punkte bei einem Wurf mit sechs Würfeln

Punktewert	Kombinationsanzahl	Punktewert	Kombinationsanzahl
0	1440	1050	960
50	3600	1100	380
100	6855	1200	278
150	6120	1250	6
200	6960	1300	161
250	3960	1400	35
300	2700	1500	20
350	1020	1600	39
400	1575	1650	6
450	1050	1700	6
500	2225	2000	294
550	450	2050	90
600	2510	2100	21
650	270	2400	19
700	1105	2450	6
750	270	2500	6
800	388	3200	1
850	156	4000	25
900	151	4050	6
950	30	4800	1
1000	1460	8000	1

In Tabelle 7 sind die Punktewerte, die beim Wurf mit sechs Würfeln möglich sind, und die Anzahl der Kombinationen, die zu ihnen führen, dargestellt. Aus diesen Werten kann der Erwartungswert für die Punkte eines Würfelwurfs mit sechs Würfeln berechnet werden.

$$\begin{aligned}
E_6(X) = \tfrac{1}{46656} \cdot \Big(& 50 \cdot 3600 + 100 \cdot 6855 + 150 \cdot 6120 + 200 \cdot 6960 + 250 \cdot 3960 + \\
& + 300 \cdot 2700 + 350 \cdot 1020 + 400 \cdot 1575 + 450 \cdot 1050 + 500 \cdot 2225 + 550 \cdot 450 + \\
& + 600 \cdot 2510 + 650 \cdot 270 + 700 \cdot 1105 + 750 \cdot 270 + 800 \cdot 388 + 850 \cdot 156 + \\
& + 900 \cdot 151 + 950 \cdot 30 + 1000 \cdot 1460 + 1050 \cdot 960 + 1100 \cdot 380 + 1200 \cdot 278 + \\
& + 1250 \cdot 6 + 1300 \cdot 161 + 1400 \cdot 35 + 1500 \cdot 20 + 1600 \cdot 39 + 1650 \cdot 6 + \\
& + 1700 \cdot 6 + 2000 \cdot 294 + 2050 \cdot 90 + 2100 \cdot 21 + 2400 \cdot 19 + 2450 \cdot 6 + \\
& + 2500 \cdot 5 + 3200 + 4000 \cdot 25 + 4050 \cdot 6 + 4800 + 8000 \Big) \\
= {} & 336{,}2911523
\end{aligned}$$

Mit rund 336 Punkten weicht $E_6(X)$ um mehr als die Hälfte vom linearen Wachstum entsprechend der Formel $E_n(X) = n \cdot 25$ ab. Das zeigt uns, dass höherwertige Kombinationen beim Wurf mit sechs Würfeln eine bedeutendere Punktequelle als einzelne oder paarweise auftretende Würfel mit **1** oder **5** sind. Außerdem fällt auf, dass das Punktelimit von 350, welches erreicht werden muss, um Punkte anschreiben zu können, gerade oberhalb des Erwartungswertes für den Wurf mit sechs Würfeln liegt. Rein intuitiv lässt sich folglich sagen, dass in mehr als der Hälfte aller Züge das Punktelimit nach dem ersten Wurf des Zuges nicht erreicht wird.

Tabelle 8: Erwartungwerte für Punkte nach Anzahl der Würfel

E_1	25
E_2	50
E_3	86,80555556
E_4	143,3641975
E_5	225,4050926
E_6	336,2911523

In Tabelle 8 sind Erwartungswerte für die Wertigkeit eines Wurfes mit bis zu sechs Würfeln dargestellt. Die nicht lineare Steigerung des Erwartungswertes mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel macht deutlich, dass ein Würfelwurf mit mehr Würfeln in der Regel zu bevorzugen ist.

Wir können eine deutliche Erhöhung des Erwartungswertes für die Punktewerte jedes Wurfes mit der Würfelanzahl beobachten. Das Wachstum des Erwartungswertes ist annähernd expontentiell, welches darauf zurückzuführen ist, dass die Bonuspunkte von Drillingen zu Vierlingen, weiter zu Fünflingen bis zu Sechslingen um den Faktor 2 steigen.

4.2.2 Abwägen des Risikos

Betrachten wir nun einige Situationen, in denen die Spielerin oder der Spieler entscheiden kann, den Zug zu beenden oder mit den zur Verfügung stehenden Würfeln weiterzuspielen. Bei derartigen Entscheidungen spielt die Anzahl der Punkte, die im aktuellen Zug bereits gewonnen worden sind, eine große Rolle, da sie im Falle eines Patzers verloren gehen. Im Rahmen dieses Abschnittes wird ein neuer Wert E_n^* definiert, welcher sich vom Erwartungswert für den Punktezugewinn ableitet. Dabei werden die Punkte, die beim erneuten Würfeln auf dem Spiel stehen, berücksichtigt. Die Punkte, die bei einem Wurf mit n Würfeln verloren werden können, werden als R_n bezeichnet, wobei $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ebenso werden die Erwartungswerte für mögliche folgende Würfe miteinbezogen.

Bei dem Wurf mit einem einzigen Würfel führen vier von sechs möglichen Ergebnissen zu einem Patzer und somit zum Verlust der bisher gewonnenen Punkte. In zwei von sechs Fällen zeigt der Würfel eine Augenzahl, die zur Seite gelegt werden kann, welches ermöglicht, erneut mit allen Würfeln zu würfeln, wie in den Regeln auf Seite 29 erläutert wird. Werden diese Informationen berücksichtigt, erhalten wir einen Wert E_1^*, welcher als Richtwert für den Punktezugewinn nach zwei weiteren Würfen angesehen werden kann.

$$E_1^* := E_1(X) \qquad \overbrace{+\frac{2}{6}\cdot E_6(X)}^{\text{Zu } \frac{2}{6} \text{ wird ein Zugewinn von } E_6(X) \text{ erwartet.}} \qquad \underbrace{-\frac{4}{6}\cdot R_1}_{\text{Zu } \frac{4}{6} \text{ wird ein Verlust von } R_1 \text{ erwartet.}}$$

Wir erhalten folglich eine Funktion für E_1^* in Abhängigkeit von R_1, in die wir für R_1 verschiedene Werte einsetzen.

$$E_1^*(200) = 3{,}763717433$$
$$E_1^*(250) = -29{,}5696159$$
$$E_1^*(300) = -62{,}90294923$$
$$E_1^*(350) = -96{,}23628257$$

Anhand dieser Werte für den Richtwert E_1^* sehen wir, dass für den niedrigsten Punktestand $R_1 = 250$, den eine Spielerin oder ein Spieler mit fünf zur Seite gelegten Würfeln haben kann, E_1^* negativ ist. Die Funktion ist außerdem streng monoton fallend mit wachsendem R_1. Weiters erkennen wir, dass nur bei einem Punktestand von 200 Punkten oder weniger der Richtwert positiv ist und demnach der Wurf mit einem Würfel zu empfehlen ist. Diese Situation kann allerdings erstens nicht eintreten, zweitens hat man mit weniger als 350 Punkten nicht die Möglichkeit, sich dafür oder dagegen zu entscheiden, weiterzuwürfeln. Daraus lässt sich schließen, dass der Entschluss, mit 350 Punkten oder mehr den Wurf mit einem einzigen Würfel zu riskieren, eher einen Verlust als einen Punktezugewinn beschert. Wann immer ein Spieler oder eine Spielerin vor der Entscheidung steht, die erworbenen Punkte anzuschreiben oder mit einem Würfel weiterzuwürfeln, sollte er oder sie den Zug beenden.

Für einen Wurf mit zwei Würfeln liegen die Chancen, durch einen Patzer alle im aktuellen Zug erworbenen Punkte zu verlieren, bei $\frac{16}{36}$. Vier der 36 möglichen Ergebnisse (siehe Tabelle 2) machen einen Wurf mit abermalig sechs Würfeln erforderlich und stellen damit erneut den Erwartungswert für den Punktezugewinn mit sechs Würfeln, $E_6(X)$, in Aussicht. Von den 36 Fällen ermöglichen 16, dass genau ein Würfel zur Seite gelegt werden kann, sodass ein Würfel für einen nächsten Wurf bleibt. Analog zu den obigen Überlegungen erhalten wir eine

Funktion für den Richtwert E_2^*.

$$E_2^*(R_2) = E_2(X) + \frac{4}{36} \cdot E_6(X) + \frac{16}{36} \cdot E_1(X) - \frac{16}{36} \cdot R_2$$

Wie oben bereits erläutert, ist von einem Wurf mit nur einem Würfel abzuraten, deswegen wird der Richtwert E_2^* dahingehend korrigiert, dass $E_1(X)$ nicht berücksichtigt wird. Wir setzen also

$$E_2^*(R_2) := E_2(X) + \frac{1}{9} \cdot E_6(X) - \frac{4}{9} \cdot R_2.$$

$E_2^*(200) = -1,5232053$
$E_2^*(250) = -23,74542752$
$E_2^*(300) = -45,96764974$
$E_2^*(350) = -68,18987197$

Der von uns definierte Richtwert für den Punktegewinn ist also bei 200 Punkten leicht negativ und sinkt weiter. Sobald 200 Punkte auf dem Spiel stehen, wiegt das Risiko schwerer als der mögliche Gewinn. Bei 350 Punkten ist der Richtwert bereits deutlich negativ, somit sollte man nicht freiwillig mit zwei Würfeln den Zug fortsetzen.

Ein Wurf mit drei Würfeln endet in 60 von 216 Fällen in einem Patzer. In zwölf Fällen können alle drei verwendete Würfel zur Seite gelegt werden, um dann erneut alle sechs Würfel zu verwenden. Da wir bereits gesehen haben, dass sowohl der Wurf mit einem als auch mit zwei Würfeln zu riskant ist, nehmen wir $E_1(X)$ und $E_2(X)$ für die Erstellung des Richtwerts E_3^* aus.

$$E_3^*(R_3) := E_3(X) + \frac{1}{18} \cdot E_6(X) - \frac{5}{18} \cdot R_3$$

$E_3^*(150) = 63,82173069$
$E_3^*(200) = 49,9328418$
$E_3^*(250) = 36,04395291$
$E_3^*(300) = 22,15506402$
$E_3^*(400) = -5,622713757$

Mit nur drei zur Seite gelegten Würfeln können nicht genau 350 Punkte erreicht werden, wie in Tabelle 4 zu sehen ist. Mit 300 Punkten ist der Richtwert zwar positiv, jedoch wirkt sich das nicht darauf aus, ob eine Spielerin oder ein Spieler weiterwürfelt oder nicht. Bei diesem Punktestand muss weitergewürfelt werden. Wir sehen, dass bei einem Punktestand von mehr als 400 der Wurf mit drei Würfeln laut Richtwert E_3^* nicht zu empfehlen ist.

Bei dem Wurf mit vier Würfeln führen 205 der 1296 möglichen Würfelergebnisse zu einen Patzer, während 52 von ihnen die Wertung aller Würfel erlauben und ein erneutes Würfeln mit sechs Würfeln in Aussicht stellen. Analog zu den oben untersuchten Fällen werden die Erwartungswerte $E_1(X)$, $E_2(X)$ und $E_3(X)$ nicht berücksichtigt, da die Richtwerte E_1^*, E_2^* und E_3^* empfehlen, den Zug eher zu beenden, als die gewonnenen Punkte zu riskieren. Wie erhalten demnach beim Wurf mit vier Würfeln den Richtwert

$$E_4^*(R_4) = E_4(X) + \frac{13}{324} \cdot E_6(X) - \frac{17}{108} \cdot R_4.$$

Eine Spielerin oder ein Spieler kann nur dann vor dem Wurf mit vier Würfeln entscheiden, den Zug zu beenden, wenn sie oder er zumindest einmal vorher im Zug alle sechs Würfel zur Seite legen konnte. Daraus ergibt sich, dass die Spielerin oder der Spieler mindestens 400 Punkte haben muss, 300 für sechs paarweise oder einzeln zur Seite gelegte Würfel mit **5** und weitere 100 für weitere zwei Würfel mit **5**.

$E_4^*(400) = 93,89439806$
$E_4^*(600) = 62,41291657$
$E_4^*(800) = 30,93143509$
$E_4^*(900) = 15,19069435$
$E_4^*(950) = 7,320323981$
$E_4^*(1000) = -0,550046389$

An diesen Funktionswerten können wir erkennen, dass ein freiwilliges Beenden des Zuges vor dem Wurf von vier Würfeln vorteilhaft ist, solange 1000 Punkte oder mehr auf dem Spiel stehen.

Der Wurf von fünf Würfeln hat 7776 gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge, von denen 1020 zu einem Patzer und 236 zu fünf zählenden Würfeln führen. Weitere 2040 ermöglichen es, nur einen einzigen Würfel zur Seite zu legen, sodass der Würfelwurf mit vier weiteren Würfeln möglich wird. Dabei werden 50 oder 100 Punkte erreicht. Oben haben wir gezeigt, dass unser Richtwert E_4^* für weniger als 1000 Punkte rät, weiterzuwürfeln. Deswegen definieren wir den Richtwert E_5^* mit Berücksichtigung des Werts $E_4(X)$, falls der Punktestand $R_5 \leq 900$ ist und ohne Berücksichtigung des Werts $E_4(X)$, falls $R_5 > 900$.

$$E_5^*(R_5) := \begin{cases} E_5(X) + \frac{59}{1944} \cdot E_6(X) + \frac{85}{324} \cdot E_4(X) - \frac{85}{648} \cdot R_5, \text{ für } R_5 \leq 900 \\ E_5(X) + \frac{59}{1944} \cdot E_6(X) - \frac{85}{648} \cdot R_5, \text{ für } R_5 > 900 \end{cases}$$

$E_5^*(500) = 207,636017$
$E_5^*(750) = 174,8428071$
$E_5^*(1000) = 104,4386195$
$E_5^*(1250) = 71,6454096$
$E_5^*(1500) = 38,85219973$
$E_5^*(1750) = 6,058989852$
$E_5^*(1800) = -0,499652124$

Aus diesen Werten für die abschnittsweise definierte Funktion E_5^* lässt sich erkennen, dass bis zu einem Punktestand von 1750 das Weiterwürfeln mit fünf Würfeln zu empfehlen ist. Wir können auch sehen, dass die Berücksichtigung von $E_4(X)$ keinen Einfluss auf diese Empfehlung hat.

Der Wurf mit sechs Würfeln kann in 46656 verschiedenen gleichwahrscheinlichen Situationen enden, von denen 1440 zu einem Patzer führen und 1116 dazu, dass alle sechs Würfel zur Seite gelegt und für einen weiteren Wurf wieder aufgenommen werden können. Bei der Betrachtung der Richtwerte E_1^* bis E_5^* können wir erkennen, dass die Punktestände, für die die Richtwerte positiv sind, mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel steigen. Wenn wir E_6^* definieren, brauchen wir also $E_4(X)$ und $E_5(X)$ nicht zu berücksichtigen.

$$E_6^*(R_6) := E_6(X) + \frac{93}{3888} \cdot E_6(X) - R_6 \cdot \frac{5}{162}$$

$E_5^*(2000) = 282,6067586$
$E_5^*(4000) = 220,8783635$
$E_5^*(6000) = 159,1499684$
$E_5^*(8000) = 97,42157338$
$E_5^*(10000) = 35,69317832$

Wir sehen, dass beim Wurf mit sechs Würfeln die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer so gering ist, dass der Richtwert E_6^* nur sehr langsam mit wachsendem R_6 sinkt. Selbst bei einem Punktestand von 10000 ist der Richtwert positiv. Da eine Spielerin oder ein Spieler bei Erreichen dieses Punktestands das Spiel gewinnen kann, ist ein Weiterwürfeln nicht zu raten. Wir erhalten als Ergebnis den Rat, mit sechs Würfeln immer zu würfeln, außer man hat genug Punkte für einen Sieg.

Da ein Spieler oder eine Spielerin sich erst dann entscheiden kann, den Zug zu beenden und Punkte sicher auf dem Punktekonto zu verbuchen, wenn er oder sie mindestens 350 Punkte in dem Zug erworben hat, stellt sich diese Frage frühestens nach dem ersten Wurf des Zuges. Wie oben erläutert wurde, sollten Spielerinnen und Spieler allerdings lieber den Zug beenden, anstatt mit drei oder weniger Würfeln den Zug fortzusetzen. Mit sechs Würfeln sollte fast ausschließlich erneut gewürfelt werden. Der aktuelle Punktestand des Zuges spielt also nur dann eine Rolle bei der Entscheidung, den Zug zu beenden oder weiterzuführen, wenn noch fünf oder vier Würfel für den nächsten Wurf zur Verfügung stehen. Für diese Situationen können die Punktewerte 1750 bei fünf und 1000 bei vier Würfeln als Richtwerte genommen werden. Liegt die Anzahl der im aktuellen Zug gewonnenen Punkte darunter, so ist das Risiko, diese Punkte zu verlieren, nicht so schwerwiegend, wie die Aussicht auf weitere Punkte. Liegt die Punkteanzahl jedoch darüber, sollte der Zug beendet werden.

Hier ist noch anzumerken, dass diese Überlegungen nur den eigenen Punktestand berücksichtigen. Liegen die anderen Mitspielenden in Führung, kann eine riskantere Spielweise eher den Sieg bringen. In diesem Fall sollten die berechneten Richtwerte nach oben korrigiert werden. Das Gegenteil gilt allerdings nicht. Liegt man selbst in Führung, müssen die Richtwerte nicht nach unten korrigiert werden.

4.2.3 Entscheidungen in spezifischen Situationen

Wenn eine Spielerin oder ein Spieler nach einen Wurf mehrere zählende Würfel vor sich liegen hat, so kann sie oder er meist entscheiden, welche dieser Würfel zur Seite gelegt werden. In diesem Abschnitt werden derartige Entscheidungen im Detail betrachtet. Dazu werden erneut die in Abschnitt 4.2.1 bestimmten Erwartungswerte herangezogen.

Tabelle 9: Differenzen der Erwartungswerte

n	$E_6(X)-E_n(X)$	$E_5(X)-E_n(X)$	$E_4(X)-E_n(X)$	$E_3(X)-E_n(X)$	$E_2(X)-E_n(X)$
1	311,2911523	200,4050926	118,3641975	61,80555556	25
2	286,2911523	175,4050926	93,3641975	36,80555556	0
3	249,4855967	138,599537	56,55864194	0	
4	192,9269548	82,0408951	0		
5	110,8860597	0			
6	0				

Tabelle 9 zeigt die nicht negativen Differenzen zwischen den verschiedenen Erwartungswerten. Aus ihr lässt sich ablesen, um wie viel der Erwartungswert sinkt, wenn eine gewisse Anzahl von Würfeln zur Seite gelegt wird. Diese Differenzen werden mit dem Punktewert der Würfel verglichen, um daraus nützliche Strategien abzuleiten. Tabelle 10 dient als weiteres Hilfsmittel zur Bewertung verschiedener möglicher Handlungsweisen. In dieser Tabelle sind die Summen bestimmter Punktewerte mit den Erwartungswerten für die Würfe mit einem bis fünf Würfel angegeben. Höhere Werte versprechen dabei höhere Punktegewinne. Die Punkte in der ersten Spalte beziehen sich auf erreichbare Punkte in einem einzelnen Wurf. Der Wert $E_5(X)$ ist nur dann zu berücksichtigen, wenn ein einziger Würfel zur Seite gelegt wird. Mit einem Würfel sind mehr als 100 Punkte nicht zu erreichen. Deswegen sind die Zellen in der Spalte „$x+E_5(X)$“ für $x \geq 150$ leer. Gleiches gilt für die Zellen der Spalte „$x+E_4(X)$“ für $x \geq 250$, da mit bis zu zwei zählenden Würfeln maximal 200 Punkte zu erreichen sind. Mit maximal drei zählenden Würfeln können keine 350 Punkte erreicht werden, folglich bleibt auch die entsprechende Zelle in Spalte „$x+E_3(X)$“ ohne Eintragung.

Zuerst werden die Situationen am Beginn des Zuges, also wenn man mit sechs Würfeln würfelt, beleuchtet. In weiterer Folge wird ähnlich verfahren mit fünf, vier, drei, zwei und einem Würfel.

Tabelle 10: Summen aus Punktewerten mit Erwartungswerten

x	$x+E_5$	$x+E_4$	$x+E_3$	$x+E_2$	$x+E_1$
50	275	193	137	100	75
100	325	243	187	150	125
150		294	237	200	175
200		343	287	250	225
250			337	300	275
300			387	350	325
350				400	375

Aus Tabelle 9 lässt sich entnehmen, dass der Erwartungswert für die zu erreichenden Punkte beim Wurf mit fünf Würfeln um mehr als 110 Punkte niedriger ist als der entsprechende Erwartungswert für den Wurf mit sechs Würfeln. Wenn nur ein einziger Würfel zur Seite gelegt wird, können dadurch maximal 100 Punkte für eine **1** erreicht werden. Der Erwartungswert nimmt allerdings um etwa 10 Punkte stärker ab, als Punkte erreicht werden. Punkte können nur in Fünfzigerschritten gewonnen werden. Daher lässt sich sagen, dass eine einzelne **1** ein durchschnittliches Ergebnis ist. Dementsprechend ist eine einzelne **5** für 50 Punkte unterdurchschnittlich.

Die zu erwartenden Punkte sinken um weniger als 200, wenn von den sechs Würfeln zwei zur Seite gelegt werden. Wird also zweimal **1** genommen, so bringt dies einen leichten Vorteil. Die Differenz zwischen der Abnahme des Erwartungswerts und der Punkte durch die beiden Würfel mit **1** beträgt rund sieben. Daher ist dieses Ergebnis ebenfalls als durchschnittlich zu betrachten. Zeigt einer der beiden Würfel eine **5**, so gilt dies als unterdurchschnittlich. Werden gar zwei Würfel mit **5** zur Seite gelegt, ist dies noch schlechter.

Untersuchen wir nun den Fall, dass bei einem Wurf von sechs Würfeln nur **1-1** als zählende Würfel erreicht werden. Die Spielerin oder der Spieler kann nun beide Würfel oder nur einen der beiden zur Seite legen. Beide Möglichkeiten bringen, wie bereits dargelegt, eine durchschittliche Punkteanzahl, jedoch zu wenig, um damit freiwillig den Zug zu beenden. Also ist es hilfreich, den folgenden Würfelwurf ebenfalls zu berücksichtigen. Dazu betrachten wir Tabelle 10. Die Werte von Interesse sind 325 für die Wertung einer einzelnen **1** und 343 für die Wertung beider Würfel. Die zweite Möglichkeit verspricht geringfügig mehr Punkte. Die Strategie, eine einzelne **1** zur Seite zu legen, wenn man auch **1-1** nehmen könnte, verringert allerdings die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Würfelwurf einen Patzer zu erleiden, da ein Patzer mit fünf Würfeln weniger wahrscheinlich ist als mit vier Würfeln. In diesem Abschnitt können wir noch keine Entscheidungsempfehlung für diesen Fall finden.

Handelt es sich bei den zählenden Würfeln um **1-5**, so können wir ähnlich vorgehen wie eben. Aus Tabelle 10 vergleichen wir 325 für die **1** und 294, falls **1-5** zur Seite gelegt wird. Hier sehen wir, dass eine Wertung der **5** zusätzlich zur **1** weniger Punkte verspricht und das Risiko eines Patzers erhöht. Somit ist eine derartige Entscheidung nicht zielführend. Lautet das Ergebnis **5-5**, führen analoge Überlegungen zum Vergleich der 275 für **5** und 243 für **5-5**. Auch hier ist von einer Wertung von mehr als einem Würfel abzuraten.

Werden nach dem ersten Würfelwurf einer Runde drei Würfel zur Seite gelegt, sinkt der Erwartungswert der noch zu erreichenden Punkte um fast 250. Zeigen diese drei Würfel das Ergebnis **3-3-3**, so erweist es sich als leicht über dem erwartbaren Durchschnitt. Dieser Drilling liefert 300 Punkte, das sind um 50 Punkte mehr als der gerundete Verlust des Erwartungswerts. Der Drilling 2-2-2 jedoch liefert Punkte unterhalb der Erwartung. Alle weiteren Drillinge sind deutlich mehr wert als $E_6(X)$ und sind somit auf jeden Fall zur Seite zu legen.

Werden als zählende Würfel **1-1-5** gewürfelt, so würde es dem Erwartungswert entsprechen, wenn alle drei Würfel gewertet würden. Die 250 Punkte dieses Ergebnisses entsprechen der Abnahme des Erwartungswerts. Die Spielerin oder der Spieler kann sich allerdings dafür entscheiden, nur **1** oder **1-1** zur Seite zu legen. Die Summe von 250 Punkten für **1-1-5** und $E_3(X)$ ergibt rund 337 Punkte. Dieser Wert ist niedriger als der entsprechende Wert für **1-1** aus Tabelle 10, der 343 beträgt. Da die Patzerwahrscheinlichkeit beim Wurf mit drei Würfeln höher ist als beim Wurf mit vier Würfeln, können wir sagen, dass die zusätzliche Wertung von **5** nicht ratsam ist.

Falls vier der sechs Würfel zur Seite gelegt werden, sinkt der Erwartungswert um rund 286 Punkte. Folglich sollten zumindest diese erreicht werden, damit ein durchschnittliches Ergebnis erzielt werden kann. Die Kombination aus dem Drilling 2-2-2 und einem Würfel, der **1** zeigt, liefert 300 Punkte und scheint damit akzeptabel zu sein. Ebenfalls 300 Punkte werden durch **1-1-5-5** erreicht. Kombinationen aus wertvolleren Drillingen als **2-2-2** sind mindestens 350 Punkte wert und somit überdurchschnittlich. Die Wertung von **2-2-2-5** hingegen würde ein leicht unterdurchschnittliches Ergebnis bringen, da der Punktezugewinn um rund 36 Punkte geringer ist, als der Verlust des Erwartungswertes.

Wenn wir im Fall **1**-2-2-2 die Tabelle 10 zu Rate ziehen, sehen wir, dass die Wertung von allen vier Würfeln den Wert 350 ergibt, wird der Drilling zur Seite gelegt, erhält man 287. Da die Summe aus 100 Punkten für **1** und $E_5(X)$ 325 ergibt und 325 höher ist as 287, können wir sagen, dass eine Bevorzugung des Drillings gegenüber der einzelnen **1** weniger Punkte verspricht und den folgenden Wurf riskanter macht. Die Summe aus den 300 Punkten für **1**-2-2-2 und $E_2(X)$ ist um 25 Punkte höher und entspricht genau dem nötigen Punktelimit, um Punkte sicher anschreiben zu dürfen. Die Gefahr eines Patzers, bevor weitere 50 Punkte erreicht werden, ist jedoch recht hoch. Mit nur zwei zur Verfügung stehenden Würfeln tritt dies zu $\frac{4}{9}$ ein. Auch in diesem Fall kann noch nicht klar entschieden werden, welche Option zu bevorzugen ist.

Für den Fall, dass **1-1-5-5** gewürfelt wird, entnehmen wir Tabelle 10 die Werte 350 für die Wertung aller vier Würfel, 337 für **1-1-5**, 343 für **1-1** und schließlich 325 für eine einzelne **1**. Weiter oben haben wir bereits gezeigt, dass eher **1-1** zur Seite gelegt werden sollte, als **1-1-5**. Eine weitere fragwürdige Entscheidung ist, ob die Wertung aller vier Würfel der Wertung von einem oder von zwei Würfeln mit **1** vorzuziehen ist.

Bei dem Ereignis **2-2-2-5** liefern analoge Überlegungen ein ähnliches Ergebnis. Der Vergleich der Werte 300 für **2-2-2-5**, 287 für **2-2-2** und 275 für **5** zeigt, dass die Entscheidung, mehr Würfel zu werten, zwar mehr Punkte in Aussicht stellt, aber gleichzeitig die Chancen für einen Patzer beim nächsten Wurf erhöht. Anders als im vorher behandelten Fall können wir nicht bestimmen, ob eher der Drilling oder der einzelne Würfel oder gar die gesamte Kombination zur Seite gelegt werden sollte.

Werden fünf Würfel nach dem ersten Wurf zur Seite gelegt, sinkt der Erwartungswert für weitere Punktegewinne um mehr als 310 Punkte. Das Ereignis **2-2-2-5-5** beim Wurf von sechs Würfeln ist das Ereignis mit dem geringsten Punktewert, bei dem fünf Würfel zur Seite gelegt werden dürfen. Die 300 Punkte dafür reichen nicht aus, um das Punktelimit zu übertreffen, liegen aber in der Nähe von $E_6(X)$. Alle anderen möglichen Versuchsausfälle liefern ausreichend Punkte, um das Limit zu überbieten. Werden alle zählenden Würfel genommen, bleibt nur ein einzelner Würfel für den nächsten Wurf. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer bei rund 0,67. Nur zwei der sechs möglichen Augenzahlen liefern Punkte und somit die Möglichkeit erneut mit allen sechs Würfeln zu würfeln. Deswegen sollte vermieden werden, mit nur einem Würfel den Zug fortsetzen zu müssen.

Die Werte 287 (200 für **2-2-2** plus $E_3(X)$) und 275 (50 für **5** plus $E_5(X)$) sind beide niedriger als der entsprechende Wert aus Tabelle 10 für die Wertung von **2-2-2-5-5**, der 325 beträgt. Die Entscheidungen, **2-2-2** oder **5** zu nehmen, führen allerdings mit geringerer Wahrscheinlichkeit beim nächsten Würfelwurf zu einem Patzer und somit zum Verlust aller vorher erreichten Punkte.

Das nächstbeste Würfelergebnis mit fünf zählenden Würfeln ist **1-2-2-2-5** und verspricht 350 Punkte. Dieses Ergebnis liegt rund 16 Punkte über $E_6(X)$ und gilt somit als leicht überdurchschnittlich. Da wir oben bereits geklärt haben, dass eine Wertung eines Würfels mit **5** nicht zu empfehlen ist, bieten sich in dieser Situation drei mögliche Entscheidungswege: Alle fünf Würfel können zur Seite gelegt werden, nur **1** oder **2-2-2**. Wir haben oben bereits geklärt, dass eher **1** als **2-2-2** zu werten ist. Werden alle fünf Würfel zur Seite gelegt, wären das genug Punkte, um den Zug freiwillig zu beenden. Mit dem einzelnen Würfel sollte der Zug nicht fortgesetzt werden. Vergleichen wir also bloß die 350 Punkte des Ergebnisses mit den rund 325 für **1** plus E_5, so sehen wir, dass eine Wertung von **1-2-2-2-5** und Beendigung des Zuges sinnvoll ist.

Das Ereignis, bei dem fünf zählende Würfel am drittwenigsten Punkte bringen, ist **3-3-3-5-5**. Es ist 400 Punkte wert und als solches bereits überdurchschnittlich gut für einen Wurf mit sechs Würfeln. Nur den Drilling zur Seite zu legen und mit den restlichen drei Würfeln weiterzuverfahren, ist nicht uneingeschränkt zu raten, da einerseits die Summe aus den 300 für **3-3-3** und $E_3(X)$ geringer ist als 400 und ein zusätzliches Risiko notwendig wird. Mit 400 Punkten kann der Zug beendet werden. Mit dem Wissen aus Abschnitt 4.2.2 lässt sich somit raten, alle Würfel zu werten und den Zug zu beenden.

In Abschnitt 4.2.2 ist zu sehen, dass ein Wurf mit sechs Würfel fast immer ratsam ist. Daher können wir sagen, dass immer alle Würfel zur Seite gelegt werden sollten, wenn alle sechs Würfel Punkte bringen.

Nun betrachten wir Situationen, die aus dem Wurf mit fünf Würfeln entstehen. Wie in Tabelle 9 zu sehen ist, sinkt der Erwartungswert für den Punktezugewinn um etwa 82 Punkte, wenn bei einem derartigen Wurf ein einzelner Würfel zur Seite gelegt wird. Zeigt dieser Würfel eine **1**, so liegt das im guten Durchschnitt, da 100 Punkte für **1** die 82 Punkte Erwartungswertdifferenz etwas übersteigen. Eine einzelne **5** bringt einen Punktegewinn leicht unter der Erwartung, ist allerdings nicht so stark unterdurchschnittlich wie bei der analogen Situation mit sechs Würfeln.

Werden mit fünf Würfeln zwei punktebringende Augenzahlen erreicht, so kann es sich um **1-1**, **1-5** oder **5-5** handeln. Werden beide Würfel zur Seite gelegt, sinkt der Erwartungswert für weitere Punktegewinne um etwa 139. Daraus kann man erkennen, dass **1-1** überdurchschnittlich , **1-5** durchschnittlich und **5-5** unterdurchschnittlich viele Punkte liefern. Im Fall der doppelten **5** ist zu raten, nur einen der beiden Würfel zur Seite zu legen. Die 100 Punkte für **5-5** plus $E_3(X)$ ergeben rund 187, 50 für **5** plus $E_4(X)$ jedoch 193. Damit verspricht die Strategie, nur einen Würfel zu werten, einen geringen Punktevorteil und ein niedrigeres Risiko, bei dem nächsten Wurf einen Patzer zu erleiden. Beim Ergebnis **1-5** verhält es sich sehr ähnlich. Die Summen aus Punktewert und Erwartungswert für verbliebene Würfel sind nach Tabelle 10 rund 237, wenn beide Würfel zur Seite gelegt werden, und 243, wenn nur **1** gewertet wird. Daher sollte eher die einzelne **1** zur Seite gelegt werden. Bei **1-1** ist der entsprechende Wert gleich 287 und damit deutlich höher als 243. Die Strategie, beide Würfel zur Seite zu legen, verspricht folglich einen höheren Punktegewinn mit höherem Risiko, beim folgenden Wurf einen Patzer zu erleiden. Analog zur Situation beim Wurf mit sechs Würfeln können wir noch nicht entscheiden, welche Handlungsweise erfolgversprechender ist.

Sollten drei Würfel Punkte bringen, ohne dass sie einen Drilling ergeben, so kann es sich um die Kombinationen **1-5-5** und **1-1-5** handeln. Bei dem Ergebnis **1-5-5** können 200 Punkte erreicht werden, welche die 175 Punkte Abnahme des Erwartungswerts, wenn von fünf Würfeln drei gewertet werden, überbieten. Gleichzeitig ist es unmöglich, dadurch beim zweiten Wurf des Zuges ausreichend Punkte zu erwerben, um den Zug zu beenden. Ein riskanter Wurf mit zwei Würfeln wird in diesem Fall notwendig. Bei dem Vergleich der Werte 243 für **1**, 250 für **1-5-5** und 237 für **1-5** aus Tabelle 10 sehen wir allerdings, dass die Entscheidung, alle Würfel zu werten, vorteilhafter ist, als nur einen oder zwei Würfel zu verwenden. Allerdings tritt auch hier die Situation auf, dass die Wertung von mehr Würfeln mehr Punkte aber auch mehr Risiko im nächsten Wurf bringt. Für das Ergebnis **1-1-5** sind die analog bestimmten Werte, wenn einer, zwei oder drei Würfel zur Seite gelegt werden, 243, 287 und 300. Hier sehen wir keinen deutlichen Vorteil für eine der drei Optionen. Auch bei dieser Situation können wir noch nicht entscheiden, welche Strategie vorteilhafter ist.

Bei dem Wurf mit fünf Würfeln sinkt der Erwartungswert für noch zu gewinnende Punkte um rund 200, wenn vier Würfel zur Seite gelegt werden. Bei diesen vier Würfeln kann es sich um die Kombination **1-1-5-5**, einen Vierling oder einen Drilling mit einem weiteren Würfel, der **1** oder **5** zeigt, handeln. Das Ergebnis mit dem geringsten Punktewert ist **2-2-2-5**. Es liegt 50 Punkte über der Abnahme des Erwartungswerts und ist als solches leicht überdurchschnittlich. Folglich sind alle anderen Ergebnisse mit vier zählenden Würfeln deutlich überdurchschnittlich und ermöglichen in dieser Situation in jedem Fall, das Punktelimit zu überbieten. Aus diesem Grund sollten alle Würfel gewertet und der Zug freiwillig beendet werden, wenn der Wurf mit fünf Würfeln vier zählende Würfel ergibt und insgesamt 350 oder mehr Punkte erreicht werden.

Für den Fall, dass **2-2-2-5** gewürfelt wird, nachdem beim vorherigen Wurf eine **5** zur Seite gelegt worden ist, müssen wir uns eine andere Handlungsweise überlegen, da der Zug noch nicht beendet werden kann. Aus Tabelle 10 vergleichen wir die Werte 275 für die Wertung aller zählenden Würfel, 250 für den Drilling und 195 für das Zur-Seite-Legen der einzelnen **5**. Erneut bietet die Wertung von mehr Würfeln einen höheren Wert und gleichzeitig ein höheres Risiko für den folgenden Wurf. Deswegen können wir noch nicht feststellen, welche Strategie zu bevorzugen ist.

Wird nach einem Wurf mit vier Würfeln ein einzelner Würfel zur Seite gelegt, sinkt der Erwartungswert für noch zu gewinnende Punkte um rund 57. Diese Abnahme ist erneut deutlich niedriger als bei der analogen Situation mit fünf oder sechs Würfeln. Während bei dem Wurf mit mehr Würfeln eine einzelne **5** ein eher enttäuschendes Ergebnis ist, handelt es sich bei dem Wurf mit vier Würfeln bereits um ein durchschnittliches. Nur sieben Punkte liegen zwischen der Erwartungswertabnahme und dem Punktezugewinn. Eine einzelne **1** hingegen ist bereits als überdurchschnittlich zu betrachten.

Sind nach einem Wurf zwei der vier Würfel punktebringend, handelt es sich bei dem Ergebnis um **1-1**, **1-5** oder **5-5**. Werden zwei Würfel zur Seite gelegt, sinkt der Erwartungswert für weitere Punktzugewinne laut Tabelle 9 um rund 93. Daher können wir annehmen, dass die beiden Ergebnisse mit zumindest einem Würfel mit **1** vorteilhaft sind, das Ergebnis mit der doppelten **5** ist immerhin durchschnittlich. Für den Fall, dass beide zählende Würfel eine **1** zeigen, erhalten wir aus Tabelle 10 die Werte 187 für die Wertung eines einzelnen Würfels und 250 für beide. Beide Ergebnisse sind überdurchschnittlich, es kann aber erneut nicht eindeutig festgestellt werden, ob eher nur ein Würfel oder beide gewertet werden sollten, da das Risiko für einen Patzer mit weniger Würfeln höher ist. Kann der Zug nach der Wertung jedoch beendet werden, so sollten beide Würfel zur Seite gelegt werden. Analoge Betrachtungen des Falles, dass **1-5** die zählenden Würfel sind, führen zu den Werten 187 und 200. Ähnlich wie in der gerade beschriebenen Situation bringt die Wertung von mehr Würfeln mehr Punkte und eine höhere Chance für einem Patzer beim nächsten Wurf. Auch hier kann keine eindeutige Empfehlung abgegeben werden. Genauso bei dem Fall, dass **5-5** die zählenden Würfel nach einen Wurf mit vier Würfeln sind. Hierbei werden aus Tabelle 10 die Werte 137 für einen, und 150 für zwei Würfel verglichen.

Können drei der vier Würfel nach einem Wurf Punkte bringen, so ist das auf jeden Fall ein überdurchschnittlich gutes Ergebnis. Mindestens 200 Punkte für den Drilling **2-2-2** oder für die Kombination **1-5-5** werden dadurch erreicht. Bei einem Drilling stellt sich nicht die Frage, wie viele der drei Würfel zur Seite gelegt werden, da ein Drilling nur vollständig gewertet werden kann. Die Kombination **1-5-5** ermöglicht dann, das Limit zu überbieten, wenn vor dem letzten Wurf nicht zwei Würfel mit **5** zur Seite gelegt worden sind. Dann würden nach der Wertung der drei weiteren zählenden Würfel nur 300 Punkte erreicht werden. Für diesen Fall sollten wir die Überlegungen, die wir bis jetzt stets getätigt haben, erneut durchführen. Wir entnehmen Tabelle 10 für die Wertung aller drei Würfel den Wert 225, für die Wertung von **1-5** 200 und schließlich 187, wenn nur die **1** zur Seite gelegt werden soll. Erneut können wir aus diesem Vergleich keine eindeutigen Schlüsse ziehen.

Der Wurf mit drei Würfeln bietet nur noch wenige Möglichkeiten Punkte zu ergattern, verglichen mit dem Wurf mit sechs Würfeln. Wird nur ein Würfel zur Seite gelegt, nimmt der Erwartungswert für weitere Punkte um rund 37 ab. Dieser Wert ist 13 Punkte niedriger als der geringste mögliche Punktezugewinn. Selbst wenn nur ein Würfel mit **5** zur Seite gelegt wird, ist das ein Ergebnis im guten Durchschnitt. Aus Abschnitt 4.2.2 wissen wir bereits, dass eine Fortsetzung des Zuges mit drei Würfeln oder weniger nicht sinnvoll ist. Die Empfehlung lautet, dass jeder wertbare Würfel zur Seite gelegt werden und der Zug beendet werden sollte, wenn es sich um ein überdurchschnittliches Ergebnis handelt und anschließend nur noch drei Würfel oder weniger zur Verfügung stehen. Deswegen betrachten wir in in diesem Fall nur die Möglichkeiten, bei denen das Limit nicht erreicht werden kann, und man sich entscheiden kann, einen oder zwei Würfel zu werten. Dies tritt dann ein, wenn bereits dreimal **5** zur Seite gelegt wurde, ohne dass sie als Drilling vorkamen und punktebringende **1-5** oder **5-5** gewürfelt wurden. Eine weitere Möglichkeit besteht, wenn von den drei zur Seite gelegten Würfeln einer eine **1** und die beiden anderen eine **5** zeigen und **5-5** als zählende Würfel nach dem Wurf mit drei Würfeln vor der Spielerin oder dem Spieler liegen. In allen drei Fällen zeigt Tabelle 10, dass mehr erwartete Punkte mit einem höheren Risiko einhergehen.

Für den Wurf mit einem oder mit zwei Würfeln müssen wir uns keine Gedanken darüber machen, welche Würfel gewertet werden sollten. Jeder zählende Würfel wird gewertet. Entweder, weil es nur einen gibt, oder weil die Wertung von allen dazu führt, erneut mit allen sechs Würfeln den Zug weiterzuführen.

Aus den hier gemachten Überlegungen lassen sich einige eindeutige Empfehlungen für spezifische Situationen ableiten:

(1) Werden beim ersten Wurf einer Runde eine Kombination für 350 Punkte oder mehr erreicht, sollten alle Würfel gewertet werden.

(2) Ist dies nicht der Fall, sollten möglichst wenige Würfel mit **5** zur Seite gelegt werden.

(3) Werden beim Wurf mit fünf Würfeln zwei zählende erreicht, so sollten möglichst wenige Würfel mit **5** gewertet werden.

In vielen Fällen können wir mit den bisher verwendeten Mitteln nicht entscheiden, zu welcher Handlungsweise zu raten ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn die von uns als Hilfsmittel verwendeten Werte aus Tabelle 10, welche die Erwartungswerte der Folgewürfe berücksichtigen, mit der Anzahl der zu wertenden Würfel eines Ergebnisses steigt. Die Möglichkeit, im Folgewurf einen Patzer zu erleiden, spielt eine große Rolle. Im folgenden Abschnitt werden diese Möglichkeiten genauer betrachtet.

4.3 Unvermeidbare Patzer

In Abschnitt 4.2.2 haben wir Richtlinien erarbeitet, die uns zeigen, ab welchem Punktestand es ratsam ist, den Zug zu beenden und nicht mehr weiterzuwürfeln. Diese Entscheidung kann nur dann getroffen werden kann, wenn das Punktelimit von 350 erreicht wurde. Zuvor stehen alle Spielerinnen und Spieler in jeder einzelnen Runde vor der Aufgabe, diese Schwelle zu erklimmen. Daher ist eine genaue Betrachtung dieser ersten Phase eines Zuges sinnvoll.

Bedingt durch das Punktelimit kann der Fall eintreten, dass eine Spielerin oder ein Spieler nicht ausreichend Punkte gewinnt, bevor der Zug durch einen Fehlwurf abgebrochen wird. Die Spielerin oder der Spieler kann in diesem Fall nicht selbstgewählt den Zug beenden. In diesem Kapitel werden mit Hilfe von stochastischen Berechnungen verschiedene Strategien verglichen und bewertet, inwiefern sie die Wahrscheinlichkeit beeinflussen, einen Patzer zu erleiden. Die dafür notwendigen Berechnungen fordern zahlreiche Einzelergebnisse für Wahrscheinlichkeiten. Diese werden aus den Tabellen zu den Ergebnissen mit bis zu 6 Würfeln entnommen.

Jeder Patzer kann auf mehreren Wegen eintreten. Der einfachste Fall ist, wenn bereits der erste Wurf fehlschlägt.

Aus Tabelle 7 auf Seite 36 lässt sich erkennen, dass 1440 verschiedene mögliche Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln zu 0 Punkten führen. Entsprechend dem Laplace-Modell wird die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet.

$$1440 : 6^6 \approx 0,030864198$$

Rund 3% aller Würfe mit sechs Würfeln erreichen keine Punkte. Mit sinkender Anzahl an Würfeln steigt die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Patzer zu haben. In Tabelle 11 sind die Wahrscheinlichkeiten für einen Patzer bei dem Wurf mit einem bis sechs Würfel zusammengefasst. Die Werte für die Wahrscheinlichkeiten werden ebenfalls dadurch bestimmt, dass die Möglichkeiten für einen Wurf, der keine Punkte wert ist, zusammengezählt und durch die Gesamtzahl aller Möglichkeiten dividiert werden.

Tabelle 11: Wahrscheinlichkeiten für einen Patzer

Würfelanzahl	WS
6	0,03086420
5	0,07716049
4	0,15740741
3	0,27777778
2	0,44444444
1	0,66666667

Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass ein Patzer eintritt, bevor das Punktelimit von 350 erreicht wurde, wird nun berechnet, mit welchen Wahrscheinlichkeiten zur Seite gelegte Würfel 300 Punkte oder weniger wert sind. Diese Wahrscheinlichkeiten werden anschließend mit der Patzerwahrscheinlichkeit beim Wurf mit den noch verbliebenen Würfeln multipliziert. All diese Ergebnisse werden anschließend aufsummiert.

Während die Wahrscheinlichkeit, mit genau einem zur Seite gelegten Würfel mit dem Ergebnis **5** im Folgewurf einen Patzer zu erleiden, sehr einfach zu berechnen ist, stellt die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass ein Spieler oder eine Spielerin Würfel mit **1, 1, 5, 5** zur Seite gelegt hat, eine größere Herausforderung dar. Alle Möglichkeiten, um vor dem letzten Wurf das

Zwischenergebnis **1, 1, 5, 5** zu erreichen, müssen bedacht werden. Um diese Berechnungen möglichst verständlich zu gestalten, wird eine neue Notation eingeführt.

N1 $P(X_1,...,X_i)$ mit $i \in \{1,2,...,6\}$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass vor einem Wurf Würfel mit den Ergebnissen X_1 bis X_i an der Seite liegen.

N2 Würfelergebnisse, welche durch einen Bindestrich getrennt werden, sind im selben Wurf gewürfelt worden.

N3 $P_n(X_1 - ... - X_i)$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis $X_1 - ... - X_i$ bei einem Wurf mit n Würfeln erreicht wird.

N4 $P_n^*(X_1 - ... - X_i)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass nach einen Wurf mit n Würfeln die Würfel mit den Ergebnissen X_1, ..., X_i zur Seite gelegt werden.

N5 $P_n(0)$ gilt als die Wahrscheinlichkeit, beim Würfelwürf mit n Würfeln einen Patzer zu erwürfeln.

N6 Sämtliche Würfel, die keine Punkte liefern, werden nicht beachtet.

Nach jedem Wurf darf die Spielerin oder der Spieler entscheiden, welche Würfel zur Seite gelegt werden. Damit ergibt sich eine Möglichkeit der Beeinflussung der Wahrscheinlichkeiten für einen Patzer. In der vorliegenden Arbeit werden nun der Reihe nach drei verschiedene Strategien präsentiert und verglichen.

4.3.1 Strategie I

Bei Strategie I werden immer alle zählenden Würfel zur Seite gelegt. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich bei einem einzelnen Ergebnis um **5**, **1** oder **2-2-2-5** handelt. Die sicheren Punkte werden gegenüber der Möglichkeit bevorzugt, höherwertige Kombinationen zu erreichen. Dabei werden auch alle Ratschläge, die in obigen Abschnitten erwähnt werden, ignoriert. Da jeder zählende Würfel gleichbehandelt und kein Unterschied zwischen Würfel verschiedener Wertigkeit gemacht wird, gelten folgende Gleichungen:

$$P_n(1) = P_n(5)$$

$$P_n(1-1) = P_n(5-5)$$

$$P_n(1-1-5) = P_n(1-5-5)$$

$$P_n(1-1-1) = P_n(5-5-5)$$

$$P_n(2-2-2) = P_n(3-3-3)$$

$$P_n(1-2-2-2) = P_n(2-2-2-5)$$

$P_n(1)P_{n-1}(5) = P_n(5)P_{n-1}(1)$

Bei diesen Gleichungen ist eine gewisse Symmetrie zu erkennen, die daher rührt, dass beim Zufallsversuch des einzelnen Würfelwurfs alle sechs verschiedenen Versuchsausgänge gleichwahrscheinlich sind. Diese Symmetrien werden in den unten stehenden Berechnungen verwendet, um die notwendigen Gleichungen zu vereinfachen.

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass nach beliebig vielen Würfen ein bestimmter Wert unter 350 erreicht wird, müssen die Wahrscheinlichkeiten bekannt sein, mit denen gewisse zählende Kombinationen erreicht werden. Dazu werden die Möglichkeiten gezählt, die zu den gesuchten Kombinationen führen. Diese Möglichkeiten können den Tabellen in Kapitel 3, beziehungsweise den Tabellen im Anhang von Seite 111 bis 121 entnommen werden. Die so erhaltene Anzahl wird durch die Mächtigkeit der Menge aller Möglichkeiten dividiert.

Tabelle 12: Wahrscheinlichkeiten ausgesuchter Würfelergebnisse

$P_6(1)$	0,07716049	$P_5(1-5-5)$	0,0617284
$P_6(5)$	0,07716049	$P_5(2-2-2)$	0,01157407
$P_6(1-1)$	0,06558642	$P_5(2-2-2-5)$	0,00771605
$P_6(5-5)$	0,06558642	$P_4(1)$	0,18518519
$P_6(1-5)$	0,13117284	$P_4(5)$	0,18518519
$P_6(1-1-5)$	0,07716049	$P_4(1-1)$	0,07407407
$P_6(1-5-5)$	0,07716049	$P_4(5-5)$	0,07407407
$P_6(2-2-2)$	0,01028807	$P_4(1-5)$	0,14814815
$P_6(3-3-3)$	0,01028807	$P_4(1-5-5)$	0,03703704
$P_6(1-2-2-2)$	0,01157407	$P_4(2-2-2)$	0,00925926
$P_6(2-2-2-5)$	0,01157407	$P_3(1)$	0,22222222
$P_6(1-1-5-5)$	0,02700617	$P_3(5)$	0,22222222
$P_6(2-2-2-5-5)$	0,00385802	$P_3(1-5)$	0,11111111
$P_5(1)$	0,13117284	$P_3(5-5)$	0,05555556
$P_5(5)$	0,13117284	$P_2(1)$	0,22222222
$P_5(1-1)$	0,07716049	$P_2(5)$	0,22222222
$P_5(5-5)$	0,07716049	$P_2(5-5)$	0,02777778
$P_5(1-5)$	0,15432099	$P_1(5)$	0,16666667
$P_5(1-1-5)$	0,0617284		

In Tabelle 12 sind die Wahrscheinlichkeiten $P_n(X_1 - ... - X_i)$ dargestellt, die für die Berechnung der gesuchten Patzerwahrscheinlichkeit benötigt werden. Jene Ergebnisse, die zu 350 Punkten oder mehr verhelfen, werden nicht berücksichtigt. Die nun folgenden Berechnungen beziehen sich auf die Werte, die in der Tabelle 12 aufgelistet sind.

$P(5) = P(1) = P_6(5)$

Folgend der vorher eingeführten Notation zeigt diese Formel, dass die Wahrscheinlichkeit nach einem Wurf genau einen Würfel mit **5** an der Seite liegen zu haben, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, bei einem Wurf mit sechs Würfeln genau einen zählenden Würfel mit **5** zu erwürfeln.

$P(5,5) = P(1,1) = P_6(5-5) + P(5) \cdot P_5(5)$

Zu dem Zwischenergebnis **5, 5** kann man gelangen, wenn man zwei Würfel mit **5** bei einem Wurf mit sechs Würfeln erreicht oder wenn man zu einem bereits herausgelegten Würfel mit **5** einen weiteren erwürfelt. Bei letzterer Möglichkeit werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Versuchsausgänge entsprechend der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von mehrstufigen Experimenten multipliziert, wie auf Seite 10 gezeigt worden ist.

Die folgenden Gleichungen werden alle auf dieselbe Art ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil des Zwischenergebnisses bereits erreicht worden ist, wird mit der Wahrscheinlichkeit, dass das fehlende Würfelergebnis erzielt wird, multipliziert. Die Summe all dieser Produkte ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$P(1,5) = P_6(1-5) + P(1) \cdot P_5(5) + P(5)P_5(1) = P_6(1-5) + 2 \cdot P(5) \cdot P_5(5)$

$$\begin{aligned} P(1,1,5) = P(1,5,5) &= P_6(1-1-5) + P(1,1) \cdot P_4(5) + P(1,5) \cdot P_4(1) + \\ &+ P(1) \cdot P_5(1-5) + P(5) \cdot P_5(1-1) \end{aligned}$$

$P(2,2,2) = P(3,3,3) = P_6(2-2-2)$

$P(1,1,1) = P(5,5,5) = P(1,1) \cdot P_4(1) + P(1) \cdot P_5(1-1)$

$P(5,5,5,5) = P(5,5,5) \cdot P_3(5) + P(5,5) \cdot P_4(5-5)$

$$\begin{aligned} P(1,5,5,5) &= P(1,5,5) \cdot P_3(5) + P(5,5,5) \cdot P_3(1)\big) + P(1,5) \cdot P_4(5-5) + \\ &+ P(5,5) \cdot P_4(1-5) + P(5) \cdot P_5(1-5-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1,1,5,5) &= P_6(1-1-5-5) + P(1,1,5) \cdot P_3(5) + P(1,5,5) \cdot P_3(1) + P(1,1) \cdot P_4(5-5) + \\ &+ P(5,5) \cdot P_4(1,1) + P(1,5) \cdot P_4(1-5) + P(1) \cdot P_5(1-5-5) + \\ &+ P(5) \cdot P_5(1-1-5) \end{aligned}$$

$P(1,2,2,2) = P_6(1-2-2-2) + P(2,2,2) \cdot P_3(1) + P(1) \cdot P_5(2-2-2) = P(2,2,2,5)$

$$P(2,2,2,5,5) = P_6(2-2-2-5-5) + P(2,2,2,5) \cdot P_2(5) + P(2,2,2) \cdot P_3(5-5) + \\ + P(5,5) \cdot P_4(2-2-2) + P(5) \cdot P_5(2-2-2-5)$$

$$P(1,5,5,5,5) = P(1,5,5,5) \cdot P_2(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2(1) + P(1,5,5) \cdot P_3(5-5) + \\ + P(5,5,5) \cdot P_3(1-5) + P(5,5) \cdot P_4(1-5-5)$$

$$P(5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5) \cdot P_2(5) + P(5,5,5) \cdot P_3(5-5)$$

$$P(5,5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5,5) \cdot P_1(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2(5-5)$$

Die berechneten Ergebnisse für diese Wahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 13 dargestellt.

Tabelle 13: Patzerwahrscheinlichkeiten nach Strategie I

	WS	WS × $P_n(0)$
P(0)	1	0,0308642
P(5)	0,07716049	0,005953741
P(1)	0,07716049	0,005953741
P(5, 5)	0,075707781	0,011916966
P(1, 5)	0,151415561	0,023833931
P(1, 1)	0,075707781	0,011916966
P(5, 5, 5)	0,019973701	0,00554825
P(1, 5, 5)	0,137081594	0,038078221
P(1, 1, 5)	0,137081594	0,038078221
P(1, 1, 1)	0,019973701	0,00554825
P(2, 2, 2)	0,01028807	0,002857797
P(3, 3, 3)	0,01028807	0,002857797
P(5, 5, 5, 5)	0,010046584	0,004465148
P(1, 5, 5, 5)	0,062096104	0,027598268
P(1, 1, 5, 5)	0,131105211	0,058268982
P(2, 2, 2, 5)	0,014753369	0,006557053
P(1, 2, 2, 2)	0,014753369	0,006557053
P(5, 5, 5, 5, 5)	0,003342224	0,00222815
P(1, 5, 5, 5, 5)	0,028670645	0,019113764
P(2, 2, 2, 5, 5)	0,009004478	0,006002985
P(5, 5, 5, 5, 5, 5)	0,000836109	0,000026373
Summe		0,31422529

In der zweiten Spalte der Tabelle 13 sind die Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeiten $P(X_1,...,X_i)$ für jene $X_1,...,X_i$ mit $i \in \{1,2,...,6\}$, die weniger als 350 Punkte wert sind, aufgelistet. In der dritten Spalte stehen die Ergebnisse der Multiplikation dieser Wahrscheinlichkeiten mit den jeweiligen Patzerwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 11, also $P(X_1, ..., X_i) \cdot P_{6-i}(0)$ für $i \in \{1, 2, ..., 5\}$ und $P(X_1, ..., X_6) \cdot P_6(0)$. Dabei beträgt P(0) genau 1, da bei Beginn jedes Zugs kein einziger Würfel zur Seite gelegt ist.

Die Summe der Eintragungen der dritten Spalte ergibt die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit 300 oder weniger Punkten unter Verwendung der Strategie I.

$$P(Patzer\ mit\ 300\ Punkten\ oder\ weniger) = 0,31422529$$

Dieses Ergebnis wirkt sehr hoch. Mehr als 31 % aller Runden werden, zumindest bei dieser Strategie, erwartungsgemäß durch einen Patzer unterbrochen, ohne dass der Spieler oder die Spielerin die Möglichkeit hat, dem eigenen Punktekonto Punkte gutzuschreiben.

4.3.2 Strategie II

Strategie II zielt darauf ab, dass möglichst viele Würfel zur Verfügung stehen, wenn erneut gewürfelt wird. So werden die Chancen auf besonders wertvolle Kombinationen gegenüber Strategie I erhöht. Wird zum Beispiel mit vier Würfeln statt mit drei gewürfelt, so besteht die Möglichkeit für alle Vierlinge, welche 400 bis 1200 Punkte wert sind, wie in Tabelle 3 auf Seite 30 zu sehen ist. Gleichzeitig ist die Wahrscheinlichkeit mit vier Würfeln drei gleiche Ergebnisse zu erzielen wesentlich höher als mit drei Würfeln. Im Gegensatz zur Strategie I werden also die Chancen für wertvolle Kombinationen gegenüber sicheren Punkten bevorzugt. Dies bedeutet, dass nur einzelne Würfel zur Seite gelegt werden, wenn in einem Wurf keine Kombinationen erreicht werden, die wertvoller sind als **2-2-2**. Von dieser Regel wird abgegangen, wenn alle verwendeten Würfel zur Seite gelegt werden können. Strategie II widerspricht keinen Empfehlungen, welche in Abschnitt 4.2.3 auf Seite 49 notiert sind.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die unterschiedlichen Ergebnisse bei dem Wurf mit bis zu sechs Würfeln eintreten, ändern sich bei Strategie II nicht. Jedoch führen nun, anders als bei Strategie I, mehrere verschiedene Ergebnisse zur selben Situation.

Beispiel: Spielerin A folgt der zweiten Strategie. Wenn sie **1**, **1-1**, **1-5**,**1-5-5**, **1-1-5-5** oder **1-2-2-2** als zählende Würfel vor sich liegen hat, wird sie nur **1** zur Seite legen.

Bei dieser Strategie münden mehrere Versuchsausfälle in einer bestimmten Situation, daher können die Berechnungen übersichtlicher dargestellt werden als bei Strategie I. Dazu werden die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse, die nach

Befolgung der Strategie II zur selben Handlung der spielenden Person führen, summiert. Es werden folglich die Wahrscheinlichkeiten dafür berechnet, dass bestimmte Würfel zur Seite gelegt werden, also $P_n^*(X_1, \dots X_n)$ nach der Notation auf Seite 51.

Tabelle 14: Wahrscheinlichkeiten, ausgewählte Würfelergebnisse nach Strategie II zur Seite zu legen

$P_6^*(5)$	$P_6(5) + P_6(5-5) + P_6(2-2-2-5) + P_6(2-2-2-5-5)$	0,15817900
$P_6^*(1)$	$P_6(1) + P_6(1-5) + P_6(1-5-5) + P_6(1-1) +$ $+ P_6(1-1-5) + P_6(1-1-5-5) + P_6(1-2-2-2)$	0,46682097
$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)$	0,01028807
$P_6^*(3-3-3)$	$P_6(3-3-3)$	0,01028807
$P_5^*(5)$	$P_5(5) + P_5(5-5) + P_5(2-2-2-5)$	0,21604938
$P_5^*(1)$	$P_5(1) + P_5(1-5) + P_5(1-5-5) + P_5(1-1) + P_5(1-1-5)$	0,48611112
$P_5^*(2-2-2)$	$P_5(2-2-2)$	0,01157407
$P_4^*(5)$	$P_4(5) + P_4(5-5)$	0,25925926
$P_4^*(1)$	$P_4(1) + P_4(1-5) + P_4(1-1) + P_4(1-5-5)$	0,44444445
$P_4^*(2-2-2)$	$P_4(2-2-2)$	0,00925926
$P_3^*(5)$	$P_3(5) + P_3(5-5)$	0,27777778
$P_3^*(1)$	$P_3(1) + P_3(1-5)$	0,33333333
$P_2^*(5)$	$P_2(5)$	0,22222222
$P_2^*(1)$	$P_2(1)$	0,22222222
$P_2^*(5-5)$	$P_2(5-5)$	0,02777778
$P_1^*(5)$	$P_1(5)$	0,16666667

In Tabelle 14 ist dargestellt, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für das Zur-Seite-Legen bestimmter Würfelergebnisse aus den Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ergebnisse zusammensetzen. In der ersten Spalte sind alle positiven Wahrscheinlichkeiten für das Zur-Seite-Legen verschiedener Würfel aufgelistet. In der zweiten Spalte ist notiert, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten aus den Wahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen Würfelergebnisse ergeben. Die Werte für diese Wahrscheinlichkeiten stammen aus Tabelle 12. Die gerundeten Werte der Ergebnisse sind der dritten Spalte zu entnehmen. Diese werden entsprechend der nachstehenden Formeln verwendet.

$$P(5) = P_6^*(5)$$

$$P(1) = P_6^*(1)$$

$$P(5,5) = P(5) \cdot P_5^*(5)$$

$$P(1,5) = P(1) \cdot P_5^*(5) + P(5) \cdot P_5^*(1)$$

$$P(1,1) = P(1) \cdot P_5^*(1)$$

$P(5,5,5) = P(5,5) \cdot P_4^*(5)$

$P(1,5,5) = P(1,5) \cdot P_4^*(5) + P(5,5) \cdot P_4^*(1)$

$P(1,1,5) = P(1,1) \cdot P_4^*(5) + P(1,5) \cdot P_4^*(1)$

$P(1,1,1) = P(1,1) \cdot P_4^*(1)$

$P(2,2,2) = P_6^*(2-2-2)$

$P(3,3,3) = P_6^*(3-3-3)$

$P(5,5,5,5) = P(5,5,5) \cdot P_3^*(5)$

$P(1,5,5,5) = P(1,5,5) \cdot P_3^*(5) + P(5,5,5) \cdot P_3^*(1)$

$P(1,1,5,5) = P(1,1,5) \cdot P_3^*(5) + P(1,5,5) \cdot P_3^*(1)$

$P(2,2,2,5) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(5) + P(5) \cdot P_5^*(2-2-2)$

$P(1,2,2,2) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(2-2-2)$

$P(2,2,2,5,5) = P(2,2,2,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5) \cdot P_4^*(2-2-2)$

$P(5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5)$

$P(1,5,5,5,5) = P(1,5,5,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(1)$

$P(5,5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5,5) \cdot P_1^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5-5)$

Diese Gleichungen für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind etwas kürzer und übersichtlicher als bei Strategie I. Dadurch, dass nicht jede Kombination von zählenden Würfeln zur Seite gelegt wird, reduzieren sich die möglichen Wege, um zu einem bestimmten Ergebnis zu kommen. Alle Schritte, bei denen mehrere Würfel genommen werden, wenn es auch möglich ist, nur einen einzigen zu nehmen, fallen weg.

Tabelle 4.3.2 zeigt analog zur Tabelle 13 die Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen bestimmter Würfelergebnisse und die Wahrscheinlichkeiten, mit diesen Ergebnissen einen Patzer zu haben. Die Summe über die Einträge der dritten Spalte liefert die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten, wenn Strategie II verwendet wird.

$$P(Patzer\ mit\ 300\ Punkten\ oder\ weniger) = 0,255475179$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit 300 Punkten oder weniger beträgt unter Verwendung der Strategie II weniger als 26 %. Dieses Ergebnis ist um rund 0,059 niedriger als das Ergebnis unter Verwendung der Strategie I. Eine Strategie, welche empfiehlt, jeden zählenden Würfel zur Seite zu legen, und somit die Chancen auf wertvollere Würfelergebnisse schmälert, beschert der Spielerin oder dem Spieler folglich mit einer größeren Wahrscheinlichkeit 0 Punkte, als

Tabelle 15: Patzerwahrscheinlichkeiten nach Strategie II

	WS	WS × $P_n(0)$
P(5)	0,15817900	0,012205169
P(1)	0,46682097	0,036020135
P(5,5)	0,034174475	0,005379316
P(1,5)	0,177748952	0,027979002
P(1,1)	0,226926865	0,03571997
P(5,5,5)	0,008860049	0,002461125
P(1,5,5)	0,061271717	0,017019922
P(1,1,5)	0,137832426	0,038286785
P(1,1,1)	0,100856386	0,028015663
P(2,2,2)	0,01028807	0,002857797
P(3,3,3)	0,01028807	0,002857797
P(5,5,5,5)	0,002461125	0,001093833
P(1,5,5,5)	0,019973271	0,008877009
P(1,1,5,5)	0,058710691	0,02609364
P(2,2,2,5)	0,004688572	0,00208381
P(1,2,2,2)	0,008832375	0,0039255
P(2,2,2,5,5)	0,001358335	0,000905557
P(5,5,5,5,5)	0,000546917	0,000364611
P(1,5,5,5,5)	0,004985421	0,003323614
P(5,5,5,5,5,5)	0,000159517	0,000004923
Summe		0,255475179

eine Strategie, die darauf abzielt, dass jeder folgende Wurf mit möglichst vielen Würfeln stattfindet.

4.3.3 Strategie III

Bei Strategie III werden alle zählenden Würfel zur Seite gelegt, die mehr Punkte wert sind, als einzelne oder paarweise Fünfen. Das bedeutet, dass möglichst kein Würfel mit **5** genommen wird. Außerdem wird bei folgenden zählenden Würfeln **1-2-2-2** nur die einzelne **1** aufgenommen. Zwei Würfel mit **5-5** werden nur dann zur Seite gelegt, wenn dieses Ergebnis nach einen Wurf mit zwei Würfeln erzielt wurde, also wenn danach wieder alle Würfel genommen werden können. Bei dieser Strategie werden sichere Punkte mit der Wahrung der Chancen auf höherwertige Kombinationen ausbalanciert.

Tabelle 16 zeigt analog zu Tabelle 14, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für die Wertung bestimmter Kombinationen aus den Wahrscheinlichkeiten zusammensetzen, dass bestimmte Kombinationen erwürfelt werden. Für die Berechnung

Tabelle 16: Wahrscheinlichkeiten, ausgewählte Würfelergebnisse nach Strategie III zur Seite zu legen

$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)$	0,14274691
$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+P_6(1-5-5)+P_6(1-2-2-2)$	0,29706789
$P_6^*(1-1)$	$P_6(1-1)+P_6(1-1-5)+P_6(1-1-5-5)$	0,16975308
$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)+P_6(2-2-2-5)+P_6(2-2-2-5-5)$	0,02572016
$P_6^*(3-3-3)$	$P_6(3-3-3)$	0,01028807
$P_5^*(5)$	$P_5(5)+P_5(5-5)$	0,20833333
$P_5^*(1)$	$P_5(1)+P_5(1-5)+P_5(1-5-5)$	0,34722223
$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1)+P_5(1-1-5)$	0,13888889
$P_5^*(2-2-2)$	$P_5(2-2-2)+P_5(2-2-2-5)$	0,01929012
$P_4^*(5)$	$P_4(5)+P_4(5-5)$	0,25925926
$P_4^*(1)$	$P_4(1)+P_4(1-5)+P_4(1-5-5)$	0,37037038
$P_4^*(1-1)$	$P_4(1-1)$	0,07407407
$P_4^*(2-2-2)$	$P_4(2-2-2)$	0,00925926
$P_3^*(5)$	$P_3(5)+P_3(5-5)$	0,27777778
$P_3^*(1)$	$P_3(1)+P_3(1-5)$	0,33333333
$P_2^*(5)$	$P_2(5)$	0,22222222
$P_2^*(1)$	$P_2(1)$	0,22222222
$P_2^*(5-5)$	$P_2(5-5)$	0,02777778
$P_1^*(5)$	$P_1(5)$	0,16666667

der in der dritten Spalte dargestellten Werte werden die Daten aus Tabelle 12 verwendet.

Die folgenden Gleichungen zeigen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Würfelergebnisse nach mindestens einem Würfelwurf aus den Wahrscheinlichkeiten für das Zur-Seite-Legen bestimmter Würfel aus Tabelle 16 berechnen lassen.

$$P(5) = P_6^*(5)$$

$$P(1) = P_6^*(1)$$

$$P(5,5) = P_6^*(5) \cdot P_5^*(5)$$

$$P(1,5) = P_6^*(1) \cdot P_5^*(5) + P_6^*(5) \cdot P_5^*(1)$$

$$P(1,1) = P_6^*(1-1) + P_6^*(1) \cdot P_5^*(1)$$

$$P(5,5,5) = P(5,5) \cdot P_4^*(5)$$

$$P(1,5,5) = P(1,5) \cdot P_4^*(5) + P(5,5) \cdot P_4^*(1)$$

$$P(1,1,5) = P(1,1) \cdot P_4^*(5) + P(1,5) \cdot P_4^*(1) + P(5) \cdot P_5^*(1-1)$$

$$P(1,1,1) = P(1,1) \cdot P_4^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(1-1)$$

$$P(2,2,2) = P_6^*(2-2-2)$$

$$P(3,3,3) = P_6^*(3-3-3)$$

$$P(5,5,5,5) = P(5,5,5) \cdot P_3^*(5)$$

$$P(1,5,5,5) = P(1,5,5) \cdot P_3^*(5) + P(5,5,5) \cdot P_3^*(1)$$

$$P(1,1,5,5) = P(1,1,5) \cdot P_3^*(5) + P(1,5,5) \cdot P_3^*(1) + P(5,5) \cdot P_4^*(1-1)$$

$$P(2,2,2,5) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(5) + P(5) \cdot P_5^*(2-2-2)$$

$$P(1,2,2,2) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(2-2-2)$$

$$P(2,2,2,5,5) = P(2,2,2,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5) \cdot P_4^*(2-2-2)$$

$$P(5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5)$$

$$P(1,5,5,5,5) = P(1,5,5,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(1)$$

$$P(5,5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5,5) \cdot P_1^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5-5)$$

Tabelle 17: Patzerwahrscheinlichkeiten nach Strategie III

	WS	WS $\times P_n(0)$
P(5)	0,14274691	0,011014422
P(1)	0,29706789	0,022921904
P(5, 5)	0,029738939	0,004681129
P(1, 5)	0,111454043	0,017543692
P(1, 1)	0,272901655	0,042956743
P(5, 5, 5)	0,007710095	0,002141693
P(1, 5, 5)	0,039909915	0,011086088
P(1, 1, 5)	0,131857517	0,036627088
P(1, 1, 1)	0,142334119	0,039537256
P(2, 2, 2)	0,02572016	0,007144489
P(3, 3, 3)	0,01028807	0,002857797
P(5, 5, 5, 5)	0,002141693	0,000951864
P(1, 5, 5, 5)	0,013656119	0,006069386
P(1, 1, 5, 5)	0,052133278	0,023170345
P(2, 2, 2, 5)	0,009898094	0,004399153
P(1, 2, 2, 2)	0,014303862	0,006357272
P(2, 2, 2, 5, 5)	0,002474937	0,001649958
P(5, 5, 5, 5, 5)	0,000475932	0,000317288
P(1, 5, 5, 5, 5)	0,003510625	0,002340417
P(5, 5, 5, 5, 5, 5)	0,000138813	0,000004284
Summe		0,243772268

In Tabelle 17 sind die Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen bestimmter Zusammenstellungen von zur Seite gelegten Würfeln und ihre Produkte mit den entsprechenden Patzerwahrscheinlichkeiten aus der Tabelle 11 aufgelistet. Die Summe der Produkte ergibt die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit 300 oder weniger Punkten.

$$P(Patzer\ mit\ 300\ Punkten\ oder\ weniger) = 0,243772268$$

Unter Anwendung der Strategie III beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punken mehr als 24 %. Dieses Ergebnis ist um 0,01170291 niedriger als die entsprechende Wahrscheinlichkeit bei Strategie II. Im folgenden Abschnitt werden die Unterschiede beider Strategien genauer beleuchtet um festzustellen, welche Entscheidungen in welchen Situationen begünstigend darauf wirken, mit weniger als 350 Punkten einen Patzer zu erwürfeln.

4.3.4 Aufsuchen einer optimalen Strategie

Strategie II und Strategie III sind einander sehr ähnlich, wie bei dem Vergleich der Tabellen 14 und 16 zu erkennen ist. Sie unterscheiden sich in zwei Bereichen. Einerseits erlaubt Strategie III, dass **1-1** zur Seite gelegt werden kann und dadurch weniger wahrscheinlich ein einzelner Würfel mit **1** gewertet wird. Der zweite Unterschied ist, dass nach Strategie II **5** auch dann bevorzugt wird, wenn sogar **2-2-2** genommen werden könnte. Diese Unterschiede führen also zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten, einen Patzer nicht vermeiden zu können. In Abschnitt 4.2.3 haben wir einige Entscheidungsfälle kennen gelernt, die wir nicht eindeutig bewerten konnten. Wenn wir von Strategie III ausgehen und diese jeweils nur um ein Entscheidungsmuster ändern und die Berechnungen wiederholen, können wir feststellen, welche Handlungsweisen einen Patzer begünstigen.

Zuerst untersuchen wir, welchen Einfluss es hat, wenn nach dem Wurf mit sechs Würfeln zwei Würfel die Augenzahl **1** zeigen, aber nur einer dieser Würfel zur Seite gelegt wird. Strategie III empfiehlt, beide Würfel zu werten. Die Berechnungen entsprechend der Formeln für Strategie III aus Abschnitt 4.3.3 werden wiederholt, jedoch verändern sich die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass **1** oder **1-1** zur Seite gelegt wird. Diese Veränderungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

In Tabelle 18 sind fünf unterschiedliche Varianten angeführt. Die ersten drei zeigen Variationen im Entscheidungsmuster bezüglich der Wertung von **1**, wenn auch **1-1** zur Seite gelegt werden könnte. Bei jeder dieser Variationen bewirkt eines der drei Ergebnisse **1-1**, **1-1-5** und **1-1-5-5**, welches bei Strategie III dazu führt, dass **1-1** gewertet wird, dass nur ein einzelner der zählenden Würfel zur Seite gelegt wird. In der letzten Spalte sind die Wahrscheinlichkeiten für einen unvermeidbaren Patzer aufgelistet.

Tabelle 18: Varianten 1 bis 5

1	$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+P_6(1-5-5)+$ $+P_6(1-1-5-5)+P_6(1-2-2-2)$	0,32407406	0,243290162
	$P_6^*(1-1)$	$P_6(1-1)+P_6(1-1-5)$	0,14274691	
2	$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+P_6(1-5-5)+$ $+P_6(1-1)+P_6(1-2-2-2)$	0,36265431	0,242601438
	$P_6^*(1-1)$	$P_6(1-1-5)+P_6(1-1-5-5)$	0,10416666	
3	$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+P_6(1-5-5)+$ $+P_6(1-1-5)+P_6(1-2-2-2)$	0,37422838	0,242394821
	$P_6^*(1-1)$	$P_6(1-1)+P_6(1-1-5-5)$	0,09259259	
4	$P_6^*(1-1)$	$P_6(1-1)+P_6(1-1-5)$	0,14274691	0,245936342
	$P_6^*(1-1-5-5)$	$P_6(1-1-5-5)$	0,02700617	
5	$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+$ $+P_6(1-5-5)+P_6(1-1-5-5)$	0,28549382	0,244906345
	$P_6^*(1-2-2-2)$	$P_6(1-2-2-2)$	0,01157407	

Alle drei dieser Variationen zeigen eine leichte Verbesserung gegenüber Strategie III. Daher können wir sagen, dass nach dem ersten Wurf eines Zuges besser nur ein Würfel mit der Augenzahl **1** gewertet werden sollte, selbst wenn noch eine weitere **1** zur Verfügung steht.

Die Frage, ob gar alle vier Würfel gewertet werden sollte, wenn **1-1-5-5** oder **1-2-2-2** erwürfelt worden ist, können wir dadurch klären, dass wir die vierte und fünfte Variante, die in Tabelle 18 dargestellt werden, auf die gleiche Art untersuchen. Die gesuchte Patzerwahrscheinlichkeiten werden mit den Formeln in Abschnitt 4.3.3 berechnet, jedoch wird dort nicht berücksichtigt, dass auch vier **1-1-5-5** oder **1-2-2-2** nach einem Zug zur Seite gelegt werden kann. Daher müssen wir die verwendeten Formeln um die zwei folgenden erweitern.

$$P(1,1,5,5) = P(1,1,5)\cdot P_3^*(5) + P(1,5,5)\cdot P_3^*(1) + P(5,5)\cdot P_4^*(1-1) + P_6^*(1-1-5-5)$$
$$P(1,2,2,2) = P(2,2,2)\cdot P_3^*(1) + P(1)\cdot P_5^*(2-2-2) + P_6^*(1-2-2-2)$$

Diese Formeln werden dadurch erhalten, dass zu den vorherigen Berechnungen für $P(1,1,5,5)$ und $P(1,2,2,2)$ die Wahrscheinlichkeiten, im ersten Wurf **1-1-5-5** und **1-2-2-2** zu erwürfeln, addiert werden. Beide neue Formeln können für die vierte und fünfte Variante gleichzeitig verwendet werden, da für den Fall, dass **1-1-5-5** nicht zur Gänze gewertet wird, wie bei Variante 5, die entsprechende Wahrscheinlichkeit $P_6^*(1-1-5-5) = 0$ ist. Dasselbe gilt auch für **1-2-2-2** bei Variante 4.

Die dadurch erhaltenen Wahrscheinlichkeiten für einen Patzer vor Überschreitung des Punktelimits sind für diese Varianten höher als bei Strategie III. Wir erhalten folglich das Ergebnis, dass in den Fällen **1-1**, **1-1-5**, **1-1-5-5** und **1**-2-2-2 die Wertung nur eines einzigen Würfels mit **1** nach dem ersten Wurf vorzuziehen ist, wenn man die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer, bevor 350 Punkte erreicht werden konnten, klein halten möchte.

Die nächste Frage, die sich aus den ungewissen Ergebnissen aus Abschnitt 4.2.3 ergibt, befasst sich damit, welche Würfel zu werten sind, wenn **2-2-2-5** oder **2-2-2-5-5** erwürfelt worden ist. Die folgende Tabelle 19 verwenden wir dazu, um festzustellen, ob eher **5** oder **2-2-2** zur Seite gelegt werden sollte.

Tabelle 19: Varianten 6 und 7

6	$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+P_6(2-2-2-5-5)$	0,14660493	0,243141553
	$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)+P_6(2-2-2-5)$	0,02186214	
7	$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+P_6(2-2-2-5)$	0,15432098	0,241880122
	$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)+P_6(2-2-2-5-5)$	0,01414609	

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen unvermeidbaren Patzer sinkt, wenn bei den Ergebnissen **2-2-2-5** und **2-2-2-5-5** nur ein einzelner Würfel gewertet wird. Die folgende Tabelle befasst sich damit, welchen Einfluss eine Wertung aller Würfel in diesen Fällen hat.

Tabelle 20: Varianten 8 bis 10

8	$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+P_6(2-2-2-5)$ $+P_6(2-2-2-5-5)$	0,158179	0,241249408
	$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)$	0,01028807	
9	$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+$ $+P_6(2-2-2-5-5)$	0,14660493	0,243165368
	$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)$	0,01028807	
	$P_6^*(2-2-2-5)$	$P_6(2-2-2-5)$	0,01157407	
10	$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+P_6(2-2-2-5)$	0,15432098	0,242173840
	$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)$	0,01028807	
	$P_6^*(2-2-2-5-5)$	$P_6(2-2-2-5-5)$	0,00385802	

Die in Tabelle 20 angeführte Variante 8 zeigt die Auswirkungen auf die Patzerwahrscheinlichkeit, wenn nur ein einzelner Würfel mit **5** zur Seite gelegt wird, wenn auch **2-2-2** oder weitere Würfel mit **5** gewertet werden könnten. Sie dient als Referenz für die Untersuchungen der Strategien, die es ermöglichen, auch **2-2-2-5** oder **2-2-2-5-5** zu werten. Wie auch bei der Wertung von **1-1-5-5** oder **1**-2-2-2 müssen dazu zwei Formeln aus Abschnitt 4.3.3 angepasst werden.

$$P(2,2,2,5) = P(2,2,2)\cdot P_3^*(5) + P(5)\cdot P_5^*(2-2-2) + P_6^*(2-2-2-5)$$
$$P(2,2,2,5,5) = P(2,2,2,5)\cdot P_2^*(5) + P(5,5)\cdot P_4^*(2-2-2) + P_6^*(2-2-2-5-5)$$

Wie wir in Tabelle 20 sehen, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten bei Variante 8 niedriger, als wenn auch **2-2-2-5** oder **2-2-2-5-5** gewertet werden könnten.

Daher erhalten wir das durchgängige Ergebnis, dass in allen Ausgängen eines Wurfes mit sechs Würfeln, mit denen das Punktelimit nicht erreicht wird, wenn möglich ein einzelner Würfel zu werten ist, um die Wahrscheinlichkeit für einen unvermeidbaren Patzer möglichst gering zu halten. Strategie II schlägt genau diese Verhaltensweise vor, wie in Tabelle 14 auf Seite 56 zu sehen ist. Strategie II ist beim ersten Wurf jeder Runde Strategie III überlegen. Dennoch führen weniger Züge zu einem unvermeidbaren Patzer, wenn Strategie III befolgt wird.

In weiterer Folge gehen wir von Strategie II aus und variieren verschiedene Entscheidungsmuster für die Wertung nach einem Wurf mit fünf Würfeln. Dazu werden die Formeln für Strategie II verwendet, die in Abschnitt 4.3.2 aufgelistet sind. Aus Abschnitt 4.2.3 bleiben Unsicherheiten bezüglich der Bevorzugung der Wertung eines einzelnen Würfels mit **1** oder der Wertung von **1-1**, **1-5-5** und **1-1-5**. Zunächst wollen wir feststellen, ob auch beim Wurf mit fünf Würfeln die Wertung möglichst weniger Würfel vorteilhaft ist. Dazu erstellen wir Variationen der Strategie II. Diese Variationen erlauben allerdings nach dem Wurf mit fünf Würfeln mehr als einen einzelnen Würfel zur Seite zu legen. Daher müssen die Formeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass **1** oder **1-1** gewertet wird, angepasst werden.

$$P(1,1,5) = P(1,1) \cdot P_4^*(5) + P(1,5) \cdot P_4^*(1) + P(5) \cdot P_5^*(1-1)$$
$$P(1,1,1) = P(1,1) \cdot P_4^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(1-1)$$

Tabelle 21: Varianten 11 bis 13

11	$P_5^*(1)$	$P_5(1) + P_5(1-1) + P_5(1-5)+$ $+P_5(1-5-5)$	0,42438272	0,251533332
	$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1-5)$	0,0617284	
12	$P_5^*(1)$	$P_5(1) + P_5(1-1-5) + P_5(1-5)+$ $+P_5(1-5-5)$	0,40895063	0,25054787
	$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1)$	0,07716049	
13	$P_5^*(1)$	$P_5(1) + P_5(1-5) + P_5(1-5-5)$	0,34722223	0,246606023
	$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1) + P_5(1-1-5)$	0,13888889	

Tabelle 21 zeigt drei Variationen der Strategie II, bei denen zunächst je eines der Ergebnisse **1-1** und **1-1-5** und dann beide zur Wertung einer doppelten **1** führen. Wir können sehen, dass Variante 13 dazu führt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten verglichen mit der ursprünglichen

Strategie II sinkt. Daher ist die Wertung von **1-1**, die nach Abschnitt 4.2.3 mehr Punkte verspricht, gegenüber der Wertung eines einzelnen Würfels zu bevorzugen.

Aus Abschnitt 4.2.3 wissen wir, dass eher ein Würfel mit **1** zu werten ist als zwei Würfel mit **1-5**. Wir wissen jedoch noch nicht, ob es sich ähnlich verhält, wenn man auch drei Würfel mit **1-5-5** werten könnte. Damit beschäftigt sich die nächste Variante. Da bei den Formeln, die wir für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit verwendet haben, die Möglichkeit, beim Wurf mit fünf Würfeln **1-5-5** zur Seite zu legen, nicht brücksichtigt haben, müssen wir folgende Erweiterungen der Formeln vornehmen.

$$\begin{aligned} P(1,5,5,5) &= P(1,5,5)\cdot P_3^*(5) + P(5,5,5)\cdot P_3^*(1) + P(5)\cdot P_5^*(1-5-5) \\ P(1,1,5,5) &= P(1,1,5)\cdot P_3^*(5) + P(1,5,5)\cdot P_3^*(1) + P(5,5)\cdot P_4^*(1-1) + \\ &\quad + P(1)\cdot P_5^*(1-5-5) \end{aligned}$$

Tabelle 22: Variante 14

14	$P_5^*(1)$	$P_5(1)+P_5(1-1)+P_5(1-1-5)+$ $+P_5(1-5)$	0,42438272	0,258204462
	$P_5^*(1-5-5)$	$P_5(1-5-5)$	0,0617284	

Die in Tabelle 21 gezeigte Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten wurde entsprechend dieser angepassten Formeln berechnet und ist höher als die entsprechende Wahrscheinlichkeit bei Verwendung der Strategie II. Somit können wir sagen, dass auch dann Würfel mit **5** nicht zu werten sind, wenn auch eine **1** gewürfelt wurde.

Für den Fall, dass beim Wurf mit fünf Würfeln **1-1-5** gewürfelt wird, können wir anhand der vorhin gewonnenen Informationen und den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2.3 sagen, dass die Wertung von **1-1** den Wertungen von **1** und **1-5** vorzuziehen ist. Die nächste Variante sieht vor, in einer derartigen Situation **1-1-5** zu werten.

Tabelle 23: Variante 15

15	$P_5^*(1)$	$P_5(1)+P_5(1-5)+P_5(1-5-5)$	0,34722223	0,239023454
	$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1)$	0,07716049	
	$P_5^*(1-1-5)$	$P_5(1-1-5)$	0,0617284	

Erneut muss für die Variation in Tabelle 23 eine Anpassung der Formel für die Wahrscheinlichkeit $P(1,1,5,5)$ gemacht werden.

$$P(1,1,5,5) = P(1,1,5)\cdot P_3^*(5) + P(1,5,5)\cdot P_3^*(1) + P(5,5)\cdot P_4^*(1-1) + P(5)\cdot P_5^*(1-1-5)$$

Wie wir sehen können, führt diese Variation zur bis jetzt geringsten Wahrscheinlichkeit für einen unvermeidbaren Patzer. Somit ist nach dem Wurf mit fünf Würfeln die Wertung von **1-1-5** der Wertung von **1-1** vorzuziehen.

Die nächste Frage, die sich auch Abschnitt 4.2.3 entwickelt hat, ist, ob **5**, **2-2-2** oder **2-2-2-5** gewertet werden sollte, wenn **2-2-2-5** das Ergebnis beim Wurf mit fünf Würfeln war. Dazu gehen wir wieder von Strategie II aus und verwenden die Formeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass unterschiedliche Würfel zur Seite gelegt wurden, wie in Abschnitt 4.3.2 dargelegt. Wir untersuchen zwei Varianten, dargestellt in Tabelle 24. Variante 17 sieht vor, dass eine Spielerin oder ein Spieler alle zählenden Würfel zur Seite legt, wenn mit fünf Würfeln **2-2-2-5** gewürfelt wird. Diese Möglichkeit wurde bei den Formeln nicht berücksichtigt, die zur Berechnung der Patzerwahrscheinlichkeiten mit weniger als 350 Punkten verwendet werden. Daher brauchen wir auch hier eine Anpassung.

$$P(2,2,2,5,5) = P(2,2,2,5)\cdot P_2^*(5) + P(5,5)\cdot P_4^*(2-2-2) + P(5)\cdot P_5^*(2-2-2-5)$$

Tabelle 24: Varianten 16 und 17

16	$P_5^*(5)$	$P_5(5)+P_5(5-5)$	0,20833333	0,255302874
	$P_5^*(2-2-2)$	$P_5(2-2-2)+P(2-2-2-5)$	0,01929012	
17	$P_5^*(5)$	$P_5(5)+P_5(5-5)$	0,20833333	0,253792388
	$P_5^*(2-2-2)$	$P_5(2-2-2)$	0,01157407	
	$P_5^*(2-2-2-5)$	$P_5(2-2-2-5)$	0,00771605	

Da beide Varianten eine Senkung der in Abschnitt 4.3.2 berechneten Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit 300 Punkten oder weniger bringen, können wir sagen, dass eine Wertung von **5** nachteilig ist, wenn auch **2-2-2** gewürfelt wurde. Wir können sehen, dass alle zählenden Würfel zur Seite gelegt werden sollten, wenn **2-2-2-5** gewürfelt wird. Diese Entscheidung verspricht nach Abschnitt 4.2.3 mehr Punkte und ist gleichzeitig weniger riskant, wie wir gerade gezeigt haben.

Für den Wurf mit fünf Würfeln erhalten wir die Empfehlung, statt **1-5** und **1-5-5** nur einen Würfel mit **1** zu werten, eher **1-1** statt **1** und eher **1-1-5** statt **1-1** zur Seite zu legen. Weiters ist **2-2-2-5** gegenüber **5** oder **2-2-2** den Vorzug zu geben.

Diese Richtlinien unterscheiden sich stark von allen drei ursprünglichen Strategien. Daher wird nun eine Strategie IV vorgestellt, welche die bis jetzt erhaltenen Erkenntnisse für den Wurf mit sechs und mit fünf Würfeln berücksichtigt.

4.3.5 Strategie IV

Tabelle 25 zeigt, wie sich die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass gewisse Würfel zur Seite gelegt werden, aus den Wahrscheinlichkeiten dafür, dass spezielle Kombinationen gewürfelt werden, zusammensetzen.

Tabelle 25: Wahrscheinlichkeiten, ausgewählte Würfelergebnisse nach Strategie IV zur Seite zu legen

$P_6^*(5)$	$P_6(5)+P_6(5-5)+P_6(2-2-2-5)+$ $+P_6(2-2-2-5-5)$	0,158179 00
$P_6^*(1)$	$P_6(1)+P_6(1-5)+P_6(1-5-5)+P_6(1-1)+$ $+P_6(1-1-5)+P_6(1-1-5-5)+P_6(1-2-2-2)$	0,46682097
$P_6^*(2-2-2)$	$P_6(2-2-2)$	0,01028807
$P_6^*(3-3-3)$	$P_6(3-3-3)$	0,01028807
$P_5^*(5)$	$P_5(5)+P_5(5-5)$	0,20833333
$P_5^*(1)$	$P_5(1)+P_5(1-5)+P_5(1-5-5)$	0,34722223
$P_5^*(1-1)$	$P_5(1-1)$	0,07716049
$P_5^*(1-1-5)$	$P_5(1-1-5)$	0,0617284
$P_5^*(2-2-2)$	$P_5(2-2-2)$	0,01157407
$P_5^*(2-2-2-5)$	$P_5(2-2-2-5)$	0,00771605
$P_4^*(5)$	$P_4(5)+P_4(5-5)$	0,25925926
$P_4^*(1)$	$P_4(1)$	0,18518519
$P_4^*(1-5)$	$P_4(1-5))$	0,14814815
$P_4^*(1-5-5)$	$P_4(1-5-5)$	0,03703704
$P_4^*(1-1)$	$P_4(1-1))$	0,07407407
$P_4^*(2-2-2)$	$P_4(2-2-2)$	0,00925926
$P_3^*(5)$	$P_3(5)$	0,22222222
$P_3^*(5-5)$	$P_3(5-5)$	0,05555556
$P_3^*(1)$	$P_3(1-5)$	0,22222222
$P_3^*(1-5)$	$P_3(1-5)$	0,11111111
$P_2^*(5)$	$P_2(5)$	0,22222222
$P_2^*(1)$	$P_2(1)$	0,22222222
$P_2^*(5-5)$	$P_2(5-5)$	0,02777778
$P_1^*(5)$	$P_1(5)$	0,16666667

Für die Würfe mit sechs und fünf Würfeln wurden die eben gewonnenen Erkenntnisse verwendet. Bei den Würfen mit vier oder weniger Würfeln werden die Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2.3 berücksichtigt, dass die Wertung aller möglichen

Würfel mehr Punkte verspricht. Die einzige Ausnahme dabei ist, dass bei dem Wurf mit vier Würfeln nur ein Würfel zur Seite gelegt wird, wenn genau zwei Würfel die Augenzahl **5** zeigen und sonst keine zählenden Würfel erscheinen.

Da Strategie IV zumindest für Würfe mit vier oder weniger Würfeln mehr Möglichkeiten vorsieht, Würfel zur Seite zu legen, sind die Formeln für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten, dass Würfel mit bestimmten Augenzahlen gewertet wurden, etwas komplizierter, wie folgende Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten zeigen.

$$P(5) = P_6^*(5)$$

$$P(1) = P_6^*(1)$$

$$P(5,5) = P(5) \cdot P_5^*(5)$$

$$P(1,5) = P(1) \cdot P_5^*(5) + P(5) \cdot P_5^*(1)$$

$$P(1,1) = P(1) \cdot P_5^*(1)$$

$$P(5,5,5) = P(5,5) \cdot P_4^*(5)$$

$$P(1,5,5) = P(1,5) \cdot P_4^*(5) + P(5,5) \cdot P_4^*(1)$$

$$P(1,1,5) = P(1,1) \cdot P_4^*(5) + P(1,5) \cdot P_4^*(1) + P(5) \cdot P_5^*(1-1)$$

$$P(1,1,1) = P(1,1) \cdot P_4^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(1-1)$$

$$P(2,2,2) = P_6^*(2-2-2)$$

$$P(3,3,3) = P_6^*(3-3-3)$$

$$P(5,5,5,5) = P(5,5,5) \cdot P_3^*(5)$$

$$P(1,5,5,5) = P(1,5,5) \cdot P_3^*(5) + P(5,5,5) \cdot P_3^*(1) + P(5,5) \cdot P_4^*(1-5)$$

$$\begin{aligned} P(1,1,5,5) = {} & P(1,1,5) \cdot P_3^*(5) + P(1,5,5) \cdot P_3^*(1) + P(1,5) \cdot P_4^*(1-5) + \\ & + P(5,5) \cdot P_4^*(1-1) + P(5) \cdot P_5^*(1-1-5) \end{aligned}$$

$$P(2,2,2,5) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(5) + P(5) \cdot P_5^*(2-2-2)$$

$$P(1,2,2,2) = P(2,2,2) \cdot P_3^*(1) + P(1) \cdot P_5^*(2-2-2)$$

$$\begin{aligned} P(2,2,2,5,5) = {} & P(2,2,2,5) \cdot P_2^*(5) + P(2,2,2) \cdot P_3^*(5-5) + P(5,5) \cdot P_4^*(2-2-2) + \\ & + P(5) \cdot P_5^*(2-2-2-5) \end{aligned}$$

$$P(5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5,5) \cdot P_3^*(5-5)$$

$$P(1,5,5,5,5) = P(1,5,5,5) \cdot P_2^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(1) + P(1,5,5) \cdot P_3^*(5-5) + \\ + P(5,5,5) \cdot P_3^*(1-5) + P(5,5) \cdot P_4^*(1-5-5)$$

$$P(5,5,5,5,5,5) = P(5,5,5,5,5) \cdot P_1^*(5) + P(5,5,5,5) \cdot P_2^*(5-5)$$

Die Formeln sind im Großen und Ganzen sehr ähnlich denen der Strategie II und Strategie III. Da allerdings mehr Kombinationen gewertet werden können, ergeben sich neue Wege zur Erreichung bestimmter Zusammensetzungen an zur Seite gelegten Würfeln.

Tabelle 26: Patzerwahrscheinlichkeiten nach Strategie IV

	WS	WS $\times P_n(0)$
P(5)	0,158179	0,012205169
P(1)	0,46682097	0,036020135
P(5, 5)	0,032953958	0,005187197
P(1, 5)	0,152177632	0,023953887
P(1, 1)	0,162090618	0,025514264
P(5, 5, 5)	0,008543619	0,002373227
P(1, 5, 5)	0,045556045	0,012654457
P(1, 1, 5)	0,082409707	0,022891585
P(1, 1, 1)	0,066036917	0,018343588
P(2, 2, 2)	0,01028807	0,002857797
P(3, 3, 3)	0,01028807	0,002857797
P(5, 5, 5, 5)	0,001898582	0,000843814
P(1, 5, 5, 5)	0,016904215	0,007512985
P(1, 1, 5, 5)	0,063186839	0,028083039
P(2, 2, 2, 5)	0,004117013	0,001829783
P(1, 2, 2, 2)	0,007689256	0,003417447
P(2, 2, 2, 5, 5)	0,003012098	0,002008065
P(5, 5, 5, 5, 5)	0,000896553	0,000597702
P(1, 5, 5, 5, 5)	0,008879099	0,005919399
P(5, 5, 5, 5, 5, 5)	0,000202164	0,000006240
Summe		0,215077579

Tabelle 26 zeigt in der zweiten Spalte die Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeiten, dass bestimmte Würfel, die zusammen weniger als 350 Punkte wert sind, zur Seite gelegt wurden. In der dritten Spalte sind die Wahrscheinlichkeiten notiert, dass anschließend ein Patzer eintritt. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten in der letzten Zeile ergibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler oder eine Spielerin einen Patzer mit weniger als 350 Punkten erleidet.

$$P(Patzer\ mit\ 300\ Punkten\ oder\ weniger) = 0,215077579$$

Unter Verwendung der Strategie IV enden weniger als 22 % aller Spielzüge unvermeidlich in einem Patzer. Sie ist damit weniger riskant als die drei anderen im Detail beschriebenen Strategien.

Nun bleibt uns noch die Überprüfung verschiedener Handlungsweisen nach dem Wurf mit weniger als fünf Würfeln, um zu wissen, ob wir bereits die sicherste Strategie gefunden haben. In Abschnitt 4.2.3 erhalten wir keine klaren Strategieempfehlungen für Würfe mit vier Würfeln oder weniger. Die Werte aus Tabelle 10 zeigen, dass die Wertung von mehr Würfeln mehr Punkte verspricht. Dabei wird jedoch das Risiko, alle im aktuellen Zug gewonnenen Punkte durch einen Patzer zu verlieren, ignoriert. Durch Bestimmung des Einflusses bestimmter Handlungsweisen auf die Patzerwahrscheinlichkeit erhalten wir zusätzliche Information.

Die erste Frage beim Wurf mit vier Würfeln ist, ob beide Würfel gewertet werden sollten, wenn zwei Würfel **1** zeigen. Bei der analogen Situation beim ersten Wurf des Zuges erhalten wir das Ergebnis, dass nur ein Würfel gewertet werden sollte, bei einem Wurf mit fünf Würfeln jedoch sollten beide zur Seite gelegt werden. Wir betrachten nun Variante 18, bei der nur eine **1** gewertet wird.

Tabelle 27: Variante 18

18	$P_4^*(1)$	$P_4(1)+P_4(1-1)$	0,25925926	0,222903441
	$P_4^*(1-1)$	-	0	

Wie auch bei der Untersuchung der anderen Varianten sind hier in der vierten Spalte die von Strategie IV abweichenden Wahrscheinlichkeiten für das Zur-Seite-Legen bestimmter Würfel notiert, während die letzte Spalte das Ergebnis für die Patzerwahrscheinlichkeit mit weniger als 350 Punkten zeigt, wenn diese Werte für alle Berechnungen entsprechend der Formeln verwendet werden. Hier ist anzumerken, dass keine Änderung der Formeln notwendig ist, obwohl der Wert für $P_4^*(1-1)$ bei dieser Variante sogar 0 beträgt. Alle Wege zur Erreichung bestimmter Kombinationen an zur Seite gelegten Würfeln, die vorsehen, dass nach dem Wurf mit vier Würfeln **1-1** gewertet wird, fallen einfach weg. Wir erhalten eine etwas höhere Patzerwahrscheinlichkeit mir weniger als 350 Punkten. Somit bringt die Wertung von **1-1** nicht nur Punkte, sie ist auch weniger riskant.

Als Nächstes untersuchen wir, ob neben einem Würfel mit **1** auch weitere Würfel mit **5** gewertet werden sollten. Bei den Würfen mit sechs oder fünf Würfeln ist davon abzuraten, wie oben gezeigt wurde. Variante 19, welche in Tabelle 28 notiert ist, erlaubt keine Wertung von **1-5**, bei Variante 20 können keine drei Würfel, die **1-5-5** zeigen, zusammen zur Seite gelegt werden und bei Variante 21 wird kein Würfel mit **5** gewertet, wenn auch ein Würfel mit **1** gewürfelt wurde.

Tabelle 28: Varianten 19 bis 21

19	$P_4^*(1)$	$P_4(1)+P_4(1-5)$	0,33333334	0,219986109
	$P_4^*(1-5)$	-	0	
20	$P_4^*(1)$	$P_4(1)+P_4(1-5-5)$	0,22222223	0,218719285
	$P_4^*(1-5-5)$	-	0	
21	$P_4^*(1)$	$P_4(1)+P_4(1-5)+P_4(1-5-5)$	0,37037038	0,223627814
	$P_4^*(1-5)$	-	0	
	$P_4^*(1-5-5)$	-	0	

Diese drei Varianten haben alle eine höhere Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten. Somit können wir sagen, dass eine Wertung von mehr Würfeln auch in diesen Fällen sinnvoll ist.

Einige Handlungsweisen, die nach den Würfen mit fünf oder sechs Würfeln das Risiko, einen unvermeidbaren Patzer zu erleiden, gesenkt haben, erhöhen bei dem Wurf mit vier Würfeln dieses Risiko, wie die Wertung von **1**, wenn auch **1-5** gewertet werden könnte. Wir bestimmen nun die Patzerwahrscheinlichkeit mit 300 oder weniger Punkten für eine Variante, die die Wertung von **5-5** nach dem Wurf von vier Würfeln gestattet.

Tabelle 29: Variante 22

22	$P_4^*(5)$	$P_4(5)$	0,18518519	0,216565031
	$P_4^*(5-5)$	$P_4(5-5)$	0,07407407	

Anhand des Ergebnisses, dargestellt in Tabelle 29, sehen wir, dass die Wertung nur eines Würfels, wenn **5-5** gewürfelt wurde, eine geringere Wahrscheinlichkeit für einen unvermeidbaren Patzer liefert.

Als Fazit für den Wurf mit vier Würfeln erhalten wir somit, dass immer alle Würfel gewertet werden sollten, außer wenn genau zwei Würfel die Augenzahl **5** zeigen. Dann sollte nur ein Würfel zur Seite gelegt werden, wenn eine möglichst geringe Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten angestrebt wird.

Für den Wurf mit drei Würfeln sind nur noch zwei Fragen zu beantworten. Sollen beide Würfel gewertet werden, wenn **1-5** oder **5-5** gewürfelt wird? Um eine Antwort darauf zu finden, berechnen wir erneut die Wahrscheinlichkeit für einen unvermeidbaren Patzer unter Verwendung von zwei Varianten der Strategie IV.

Die beiden in Tabelle 30 dargestellten Varianten weisen eine etwas höhere Patzerwahrscheinlichkeit mit weniger als 350 Punkte auf als Strategie IV. Folglich sollte nach dem Wurf mit drei Würfeln jeder zählende Würfel gewertet werden.

Tabelle 30: Varianten 23 und 24

23	$P_3^*(1)$	$P_3(1) + P_3(1-5)$	0,33333333	0,217764995
	$P_3^*(1-5)$	-	0	
24	$P_3^*(5)$	$P_3(5) + P_3(5-5)$	0,27777778	0,216916242
	$P_3^*(5-5)$	-	0	

Wir haben eine Strategie mit einer deutlich geringeren Wahrscheinlichkeit für einen Patzer mit weniger als 350 Punkten als die anfangs vorgestellten Strategien I, II und III gefunden. Die Varianten 18 bis 24 dieser Strategie zeigen eine Erhöhung der Patzerwahrscheinlichkeit mit weniger als 350 Punkten. Somit ist die in Tabelle 25 präsentierte Strategie IV die Strategie mit der geringsten derartigen Patzerwahrscheinlichkeit. Dabei ist interessant, dass für den ersten Wurf Strategie II das beste Ergebnis erzielt, bei dem Wurf mit fünf Würfeln Strategie III sehr ähnliche Entscheidungsmuster besitzt, und für die restlichen Würfe Strategie I, bei der immer alle zählenden Würfel gewertet werden, die bessere Ratgeberin der drei ursprünglich vorgestellten Strategien ist.

5 Escalero

Bei Escalero handelt es sich um ein Würfelspiel, welches, wie auch Zehntausend (siehe Kapitel 4) unter mehreren Namen bekannt ist. In der „großen Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele“ werden als weitere Bezeichnungen für dieses Spiel „General“ oder „Würfelpoker“ erwähnt [3].

Die Spielregeln für Escalero sind in den „Kombiregeln für Würfel- und Kartenpoker“ der „Wiener Spielkartenfabrik Ferd. Piatnik und Söhne“ [4] und in der „großen Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele“ sehr ähnlich. Die vorliegende Arbeit geht von den Regeln nach Kastner aus. Die Unterschiede zwischen beiden Regelvarianten werden später erwähnt.

Für Escalero werden meist spezielle Würfel verwendet, auf deren Seiten nicht die Zahlen von 1 bis 6 dargestellt sind. Auf den sechs Seiten befinden sich Symbole für Ass, König, Dame, Bube, Zehn und Neun, also Kartenwerte aus einem Kartendeck mit 52 Karten. Durch mehrmaliges Würfeln mit fünf Pokerwürfeln können Würfelergebnisse erreicht werden, deren Namen und Aufbau gleich einigen Kombinationen aus dem Kartenspiel „Poker“ sind. Im folgenden Abschnitt 5.1 werden die Spielregeln erläutert, wie sie auch in der „großen Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele“ [3, S. 216] und in dem Regelwerk der Firma „Piatnik“ [4] erklärt werden.

Um die Darstellung zu vereinfachen, werden die Würfelergebnisse nur durch Zahlenkombinationen dargestellt. Das Symbol für **Neun** ist das mit dem niedrigsten Wert und entspricht **1**, **Zehn** entspricht **2** und so weiter bis zum Symbol für **Ass**, welches durch eine **6** repräsentiert wird. Diese Darstellungsweise erleichtert auch die Bestimmung der Werte, wie sie in Abschnitt 5.1.3 behandelt wird.

5.1 Spielregeln

5.1.1 Spielprinzip

Escalero wird meistens von zwei bis sechs Spieler oder Spielerinnen gespielt. Jeder und jede würfelt pro Zug bis zu dreimal mit maximal fünf Pokerwürfeln. Nach dem ersten und dem zweiten Wurf dürfen beliebige Würfel zur Seite gelegt und mit den restlichen erneut gewürfelt werden. Würfel, die nach dem ersten Wurf zur Seite gelegt wurden, dürfen nach dem zweiten Wurf aufgenommen und beim dritten Wurf erneut geworfen werden. Die Spielerinnen und Spieler versuchen auf diese Weise verschiedene Kombinationen zu erwürfeln, für die sie Punkte in eine vorgefertigte Tabelle eintragen können.

5.1.2 Punktetabelle

Alle mitspielenden Personen besitzen eine eigene Punktetabelle, die wie die untenstehende Tabelle 31 aufgebaut ist. Nach jedem Zug muss die Spielerin oder der Spieler eine Eintragung in diese Tabelle vornehmen. Ist es ihm oder ihr nicht möglich, mit dem Würfelergebnis eine Eintragung in einem freien Feld der Tabelle zu machen, so muss ein Feld „geritzt“ werden [3, S. 216]. Das bedeutet, dass in das geritzte Feld nichts mehr eingetragen werden darf. Somit hat jede Spielerin und jeder Spieler eine festgelegte Anzahl an Spielzügen zur Verfügung.

Tabelle 31: Escalero-Punktetabelle

Spieler/in A	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Neuner			
Zehner			
Buben			
Damen			
Könige			
Asse			
Straße			
Full House			
Poker			
Grande			
Gesamtwert			

Am Ende des Spieles werden die Punkte für jede Spalte zusammengezählt. Bei Escalero nach Kastner [3] bekommt die Spielerin oder der Spieler, die in der ersten Spalte den höchsten Gesamtwert hat, einen Punkt. Der Sieg der zweiten Spalte ist zwei Punkte wert, der Sieg der dritten drei Punkte. Bei der Variante nach Piatnik [4] ist die letzte Spalte vier Punkte wert.

5.1.3 Werte der Würfelergebnisse

Möchte die Spielerin oder der Spieler eine Eintragung in ein Feld einer bestimmten der oberen sechs Zeilen machen, so muss sie oder er zählen, wie oft das entsprechende Symbol im Würfelergebnis enthalten ist. Die Anzahl solcher Würfel wird mit dem Wert des Symbols multipliziert und das Ergebnis dieser Rechnung wird in das Feld eingetragen. Es steht der Spielerin oder dem Spieler frei, in welche Spalte der Wert eingetragen wird. Um in die Felder für **Straße**, **Full House**, **Poker** oder **Grande** Eintragungen machen zu dürfen, müssen diese speziellen Kombinationen am Ende des Zuges erwürfelt worden sein. Unten stehen die

Erklärungen dafür, wie diese vier Ergebnisse sich aus den Würfelwerten zusammensetzen.

Grande Alle fünf Würfel zeigen dasselbe Würfelergebnis.

Poker Vier der fünf Würfel zeigen dasselbe Würfelergebnis.

Full House Das Würfelergebnis besteht aus einem Drilling und einem Paar.

Straße Die fünf Würfel zeigen fünf unterschiedliche Ergebnisse von 1 bis 5 oder von 2 bis 6.

Erfüllen die erwürfelten Werte die Bedingungen für diese vier Ergebnisarten, so kann die Spielerin oder der Spieler einen festgelegten Wert in das dazugehörende Feld eintragen. Vier Asse zählen genauso viel wie vier Damen, wenn diese Ergebnisse beide als Poker gewertet werden. Jedes Full House hat denselben Wert. Eine Straße zählt 20, ein Full House 30, ein Poker 40 und ein Grande 50 Punkte. Werden diese vier Ergebnisse jedoch „serviert", das heißt nach einem Wurf mit allen fünf Würfeln auf einmal erreicht, so können noch 5 Punkte als Bonus dazugerechnet werden. Wird jedoch ein Grande serviert, so beträgt der Bonus für das Servieren 50 Punkte. Nach Piatnik [4] beträgt der Bonus nur 30 Punkte. Wird eine Kombination serviert, aber nicht gewertet, weil der Spieler oder die Spielerin mit einigen Würfeln erneut würfelt, um ein besseres Ergebnis zu erreichen, verfällt der Bonus für das Servieren.

Beispiele: Spieler A hat nach dem dritten Würfelwurf das Ergebnis **1 - 2 - 2 - 2 - 6** vor sich und kann in der Zeile für die „Zehner" $3 \times 2 = 6$ Punkte in eine beliebige freie Spalte eintragen, da die „Zehner" hier durch die Ziffer 2 dargestellt werden. Spielerin B erwürfelt **3 - 3 - 3 - 3 - 3** und darf dafür 50 Punkte in eine Spalte für das Grande eintragen. Spieler C serviert beim ersten Wurf das Ergebnis **2 - 2 - 2 - 2 - 6** und kann 45 Punkte in seiner Tabelle für den Poker eintragen, da er den Bonus von fünf Punkten für das Servieren erhält. Würde er jedoch mit dem Würfel, der **6** zeigt, erneut würfeln, um ein Grande zu erreichen, so verfällt dieser Bonus. Erreicht er kein Grande, so kann er nur mehr 40 Punkte eintragen.

5.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt wird geklärt, welche Typen von Ergebnissen mit welcher Wahrscheinlichkeit im Rahmen eines Zuges erreicht werden. Die dafür notwendigen Zahlen stammen aus dem Kapitel 3. Wird die Wahrscheinlichkeit für ein spezifisches Würfelergebnis mit einem oder mehreren Würfeln benötigt, so kann aus den Tabellen in Kapitel 3 und im Anhang auf den Seiten 111 bis 121 die Anzahl der möglichen Kombinationen, die zu diesem Ergebnis führen, ermittelt werden. Die Division dieser Anzahl durch die Anzahl aller möglichen gleichwahrscheinlichen Würfelergebnisse ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Es wird eine Notation eingeführt, mit der die Übersicht und die Verständlichkeit der folgenden Ausführungen verbessert werden soll.

Escaleronotation

E1 Fettgedruckte Zahlen von 1 bis 6 beziehen sich auf Würfelergebnisse einzelner Würfel.

E2 *Typ W* bezieht sich auf eine Ergebnisart, die sich aus den Einzelergebnissen der fünf Würfel zusammen ergibt.

E3 $P_n(X_1 - ... - X_i)$ mit $n \in \{1, 2, ...5\}$ und $i \in \{1, 2, ...5\}$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis $X_1 - ... - X_i$ bei einem Wurf mit n Würfeln erreicht wird.

E4 P_5(*Typ W)* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis von *Typ W* bei einem Wurf mit fünf Würfeln erreicht wird.

E5 $P^*(X_1, ... , X_i)$ mit $i \in \{1, 2, ...4\}$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem ersten Würfelwurf Würfel mit den Werten $X_1, ... , X_i$ zur Seite gelegt werden.

E6 $P^{**}(X_1, ... , X_i)$ mit $i \in \{1, 2, ...4\}$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem zweiten Würfelwurf Würfel mit den Werten $X_1, ... , X_i$ zur Seite gelegt werden.

E7 $\tilde{P}$(*Typ W*) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass die fünf Würfel nach dem zweiten Würfelwurf ein Ergebnis von *Typ W* bilden. Ausgenommen sind die Fälle, dass Grande, Poker, Full House oder Straße beim zweiten Wurf serviert werden.

E8 P^{***}(*Typ W*) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass die fünf Würfel nach dem dritten Würfelwurf ein Ergebnis von *Typ W* bilden. Ausgenommen sind die Fälle, dass Grande, Poker, Full House oder Straße beim dritten Wurf serviert werden.

E9 P^{***}(*Typ W*) *serviert* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis von *Typ W* im Rahmen eines kompletten Zuges serviert und gewertet wird, wenn es sich bei *Typ W* um Grande, Poker, Full House oder Straße handelt.

E10 $P_{X_1 - ... - X_i}(Typ\ W)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis von *Typ W* erreicht wird, wenn vor dem Wurf i Würfel mit den Werten X_1 bis X_i an der Seite liegen.

E11 Großbuchstaben stehen für beliebige einzelne Würfelergebnisse von **1** bis **6**. Unterschiedliche Großbuchstaben kennzeichnen unterschiedliche Ergebnisse.

5.2.1 Der erste Wurf des Zuges

In jeder Spielrunde würfelt die Spielerin oder der Spieler bis zu drei mal. Bei dem ersten Wurf pro Zug kann kein Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten genommen werden, mit denen die unterschiedlichen Ergebnisse erreicht werden. Jeder erste Wurf bringt für alle spielenden Personen mit denselben Wahrscheinlichkeiten günstige oder weniger günstige Ergebnisse. Erst nach dem ersten Wurf können unterschiedliche Strategien die Chancen auf wertvolle Kombinationen beeinflussen. Bis zu zwei mal pro Zug, also nach dem ersten und zweiten Wurf, kommt es zu einer Entscheidung darüber, welche Würfel zur Seite gelegt werden sollen und mit welchen weitergewürfelt werden kann. Diese Entscheidungen sind abhängig von den erzielten Würfelergebnissen.

Auf Seite 76 wird er Begriff *Typ W* als allgemeine Bezeichung für Ergebnisarten genannt. Vier von diesen Ergebnisarten sind bereits auf Seite 75 erklärt worden. Neben den vier besonderen Ergebnisarten Grande, Poker, Full House und Straße, sind zahlreiche weitere Ergebnisse nach dem ersten Wurf möglich, die sich in wenige Ergebnistypen zusammenfassen lassen. Diese Typen werden nun definiert:

Typ 1 Ein Drilling und zwei weitere unterschiedliche Einzelergebnisse.

Typ 2 Zwei unterschiedliche Paare und ein weiteres davon verschiedenes Einzelergebnis.

Typ 3 Ein Paar und drei jeweils unterschiedliche Einzelergebnisse.

- **Typ 3.1** Die vier unterschiedlichen Werte beinhalten **1** und **6**.
- **Typ 3.2** Die vier unterschiedlichen Werte beinhalten entweder **1** oder **6**.
- **Typ 3.3** Die vier unterschiedlichen Werte beinhalten weder **1** noch **6**.

Typ 4 Fünf unterschiedliche Würfelwerte, die keine Straße bilden.

Typ 3 wird in drei Untertypen zerlegt, da er von besonderer Bedeutung ist, wenn eine Straße angestrebt wird. Eine notwendige Bedingung für eine Straße ist, dass fünf unterschiedliche Würfelwerte gewürfelt worden sind. Bei Ergebnissen von Typ 3 werden vier verschiedene Werte erwürfelt, der fünfte Würfel bildet mit einem der vier Werte ein Paar. Diese vier Werte können fast eine Straße bilden, aber nicht, wenn sowohl **1** als auch **6** darunter sind. Die beiden möglichen Straßen sind **1-2-3-4-5** und **2-3-4-5-6**. Bei keinem Ergebnis von Typ 3.1 können die vier Würfel mit den unterschiedlichen Werten zur Seite gelegt werden, um mit dem letzten zur Verfügung stehenden Würfel die vier Werte zu einer Straße zu vervollständigen. Bei den Ergebnissen von Typ 3.2 und Typ 3.3 ist das schon möglich. Diese beiden Typen werden getrennt betrachtet, da sie unterschiedlich gute Ausgangslagen für das Erreichen einer Straße besitzen. Wird von einer Situation des Typs 3.2 ausgegangen und die vier Würfel mit den unterschiedlichen Würfelergebnissen zur Seite gelegt, so gibt es genau einen Wert, der gewürfelt werden muss, um die Straße zu komplettieren. Beispielsweise fehlt bei vier herausgelegten Würfeln mit **1-2-4-5** ein Würfel mit **3**. Bei Situationen des Typs 3.3 können vier Würfel mit **2-3-4-5** herausgelegt werden. Der letzte Würfel kann auf zwei Arten dieses Zwischenergebnis zu einer Straße ergänzen, sowohl mit **1**, als auch mit **6**.

In Tabelle 32 sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die auf Seite 75 und 77 definierten Würfelergebnisse bei einem Wurf mit fünf Würfeln erreicht werden, angeführt. Da bei dem Wurf mit fünf Würfeln gewürfelt wird, werden diese Wahrscheinlichkeiten mit $P_5(\textit{Typ W})$ bezeichnet, wobei *Typ W* allgemein für die möglichen Ergebnisse steht. In der zweiten Spalte steht die Anzahl der 7776 Kombinationen, die zu dem jeweiligen Ergebnis führen. In der dritten Spalte sind die berechneten Werte für die Wahrscheinlichkeiten notiert.

Tabelle 32: Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnistypen beim Wurf mit fünf Würfeln

$P_5(\textit{Grande})$	6	0,000771605
$P_5(\textit{Poker})$	150	0,019290123
$P_5(\textit{Full House})$	300	0,038580247
$P_5(\textit{Straße})$	240	0,030864198
$P_5(\textit{Typ 1})$	1200	0,154320988
$P_5(\textit{Typ 2})$	1800	0,231481481
$P_5(\textit{Typ 3.1})$	1440	0,185185185
$P_5(\textit{Typ 3.2})$	1920	0,246913580
$P_5(\textit{Typ 3.3})$	240	0,030864198
$P_5(\textit{Typ 4})$	480	0,061728395

Diese Würfelergebnisse können auch nach dem zweiten und schließlich nach dem dritten Würfelwurf vorliegen. Die Wahrscheinlichkeiten dafür sind allerdings im höchsten Maße davon abhängig, welche Würfel nach dem ersten, beziehungsweise nach dem zweiten Wurf zur Seite gelegt werden. Im folgenden Abschnitt wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit jede mögliche Ergebnisart erreicht wird, wenn vorher bereits Würfel zur Seite gelegt worden sind.

5.2.2 Die Folgewürfe

Zunächst werden die unterschiedlichen Möglichkeiten, Würfel mit den jeweiligen Würfelergebnissen zur Seite zu legen, vorgestellt. Dabei gilt, dass A, B, C und D für jeweils unterschiedliche Würfelergebnisse von **1** bis **6** stehen.

A-A-A-A stellt vier gleiche Würfelwerte dar, die noch zu einem Grande erweitert werden können.

A-A-A steht für drei gleiche Würfelwerte, also einen Drilling.

A-A ist ein beliebiges Paar.

A-A$_{(1,6)}$ steht für ein Paar bestehend aus **1** oder **6**.

A-A$_{(2,3,4,5)}$ steht für ein Paar bestehend aus weder **1** noch **6**.

A ist ein einzelner zur Seite gelegter Würfel.

A$_{(1,6)}$ ist ein zur Seite gelegter Würfel, der **1** oder **6** zeigt.

A$_{(2,3,4,5)}$ ist ein zur Seite gelegter Würfel, der weder **1** noch **6** zeigt.

A-A-A-B bezeichnet einen Drilling und ein nicht dazupassendes Ergebnis eines weiteren Würfels.

A-A-B-B sind zwei verschiedene Paare.

A-A-B stellt ein Paar und ein weiteres Würfelergebnis dar.

A-B sind zwei Würfel mit unterschiedlichen Würfelergebnissen.

A-B-C-D sind vier Würfel mit jeweils unterschiedlichen Würfelergebnissen, die eine Straße bilden können. Dabei befindet sich unter den vier Würfeln genau einer, der entweder das Ergebnis **1** oder das Ergebnis **6** zeigt. Auf Kombinationen von vier Würfeln mit unterschiedlichen Ergebnissen mit **1** und **6**, wird nicht eingegangen, da keine mit Bedacht spielende Person solche vier Würfel gemeinsam zur Seite legen würde.

2-3-4-5 bezeichnet vier zur Seite gelegte Würfel mit dem Ergebnissen von **2** bis **5**.

A-B-C sind drei Würfel mit voneinander verschiedenen Würfelergebnissen, die zu einer Straße vervollständigt werden können.

In dieser Liste der vorgestellten Möglichkeiten von Würfelergebnissen, die zur Seite gelegten werden können, sind einige Kombinationsarten vorhanden, die die Chancen auf wertvolle Kombinationen zu vermindern scheinen. Ein Beispiel dafür wäre das Zur-Seite-Legen von **A-B**, welches die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Wurf ein Grande zu erreichen, auf 0% reduziert. Im Rahmen dieser Arbeit wird noch gezeigt werden, welche Zusammensetzung von zur Seite gelegten Würfeln die Chancen auf Grande, Poker, Full House und Straße begünstigt und welche nicht.

Nun wird für jede Zusammensetzung von zur Seite gelegten Würfeln bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit welche Ergebnistypen erreicht werden können. Mit Hilfe dieser Berechnungen können in weiterer Folge unterschiedliche Strategien verglichen werden.

Als Erstes wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, vier Würfel mit **A-A-A-A** durch einen Wurf zu einer Grande zu vervollständigen. Dabei kann nur mit einem Würfel gewürfelt werden. Dieser Würfel kann ebenfalls **A** oder eine der fünf anderen Ergebnisse zeigen. In Tabelle 33 sind die Wahrscheinlichkeiten dafür dargestellt.

Tabelle 33: Mögliche Ergebnisse nach **A-A-A-A** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Grande)$	$P_1(A)$	1/6
$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Poker)$	$P_1(X)$	5/6

Mit einem zur Seite gelegten Drilling stehen noch zwei Würfel für den folgenden Würfelwurf zur Verfügung. Dieser Wurf kann den Drilling zu einer Grande, einem Poker oder einem Full House erweitern oder wieder zu einem Ergebnis von Typ 1 führen. Die Ergebnisse der Berechnungen für die Wahrscheinlichkeiten dafür sind in Tabelle 34 zu sehen.

Tabelle 34: Mögliche Ergebnisse nach **A-A-A** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande)$	$P_2(A\text{-}A)$	0,027777778
$P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker)$	$P_2(A\text{-}X)$	0,277777778
$P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House)$	$P_2(X\text{-}X)$	0,138888889
$P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ\ 1)$	$P_2(X\text{-}Y)$	0,555555556

Ein zur Seite gelegtes Paar kann zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisarten führen, je nachdem, was für ein Paar zur Seite gelegt wurde. Bei **1-1** oder **6-6** kann Typ 3.3 nicht erreicht werden, bei allen anderen Paaren jedoch schon. Tabelle 35 zeigt die Wahrscheinlichkeiten zu allen möglichen Ergebnistypen zu gelangen, wenn vor dem Würfeln ein Paar zur Seite gelegt wurde. Für Ergebnisse von Typ 3 muss berücksichtigt werden, was für ein Paar vor dem Folgewurf zur Seite gelegt worden ist. Dies wird durch Fallunterscheidungen bewerkstelligt, die in den unteren Zeilen der Tabelle 35 notiert sind. Unterschieden werden die beiden Fälle, dass es sich bei dem zur Seite gelegten Paar entweder um **1-1** oder **6-6**, gekennzeichnet durch $P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ W)$, oder um **2-2**, **3-3**, **4-4** oder **5-5**, gekennzeichnet durch $P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ W)$, handelt.

Tabelle 35: Mögliche Ergebnisse nach **A-A** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A}(Grande)$	$P_3(A\text{-}A\text{-}A)$	0,004629630
$P_{A\text{-}A}(Poker)$	$P_3(A\text{-}A\text{-}X)$	0,069444444
$P_{A\text{-}A}(Full\ House)$	$P_3(A\text{-}X\text{-}X) + P_3(X\text{-}X\text{-}X)$	0,092592593
$P_{A\text{-}A}(Typ\ 1)$	$P_3(A\text{-}X\text{-}Y)$	0,277777778
$P_{A\text{-}A}(Typ\ 2)$	$P_3(X\text{-}X\text{-}Y)$	0,277777778
$P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ 3.1)$ $P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.1)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\}\cap\{1,6\}\rvert = 2$	0,166666667 0,083333333
$P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ 3.2)$ $P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.2)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\}\cap\{1,6\}\rvert = 1$	0,111111111 0,166666667
$P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ 3.3)$ $P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.3)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\}\cap\{1,6\}\rvert = 0$	0 0,027777778

Wenn nur ein einzelner Würfel zur Seite gelegt worden ist, wird mit vier Würfeln erneut gewürfelt. Dabei sind alle Ergebnisse erreichbar, die auch bei einem Wurf mit fünf Würfeln eintreten können, außer der zur Seite gelegte Würfel zeigt das Ergebnis **1** oder **6**. In diesem Fall kann kein Ergebnis von Typ 3.3 erzielt werden. Die Tabelle 36 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen für die Wahrscheinlichkeiten, zu den möglichen Ergebnistypen zu gelangen, wenn genau ein Würfel herausgelegt worden ist. Analog zu den oberen Überlegungen werden Fallunterscheidungen betreffend Ergebnistyp 3 durchgeführt.

Wir sehen, dass die Chancen auf eine Straße oder ein Ergebnis, welches zu einer Straße führen kann (Typ 3.2 und Typ 3.3), besser sind, wenn der einzelne Würfel einen Wert von **2** bis **5** aufweist. Außerdem ist die Chance in diesem Fall geringer, fünf unterschiedliche Würfelwerte zu erhalten, die keine Straße bilden. Bei Betrachtung der Fallunterscheidungen in Tabelle 36 fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen einer Straße höher sind, wenn genau ein Würfel zur Seite gelegt wird, der **2**, **3**, **4** oder **5** zeigt. Die Wahrscheinlichkeit, ein Grande, einen Poker oder ein Full House zu erwürfeln, bleibt gleich, egal ob mit fünf oder mit vier Würfeln gewürfelt wird, wie der Vergleich der Tabellen 36 und 32 zeigt. Da jedoch bei einem Würfelwurf mit nur vier Würfeln kein Bonus für das Servieren einer wertvollen Kombination erhalten werden kann, scheint es nur in wenigen Fällen ratsam zu sein, einen einzigen Würfel zur Seite zu legen. Diese Fälle wären, wenn einerseits das Erreichen einer Straße die oberste Priorität darstellt, oder wenn andererseits möglichst viele Würfel mit einem speziellen Ergebnis zur Seite gelegt werden sollen, um eine Eintragung im oberen Teil des Wertungsbogens (siehe Tabelle 31 auf Seite 74) zu machen.

Tabelle 36: Mögliche Ergebnisse nach **A** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_A(Typ)$ mit $A \in \{1,6\}$	Rechenweg	WS
$P_A(Grande)$	$P_4(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)$	0,000771605
$P_A(Poker)$	$P_4(A\text{-}A\text{-}A\text{-}X) + P_4(X\text{-}X\text{-}X\text{-}X)$	0,019290123
$P_A(Full\ House)$	$P_4(A\text{-}A\text{-}X\text{-}X) + P_4(A\text{-}X\text{-}X\text{-}X)$	0,038580247
$P_{A_{(1,6)}}(Straße)$ $P_{A_{(2,3,4,5)}}(Straße)$	$P_4(V\text{-}X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,V,X,Y,Z\} \cap \{1,6\}\rvert = 1$	0,018518519 0,037037037
$P_A(Typ\ 1)$	$P_4(A\text{-}A\text{-}X\text{-}Y) + P_4(X\text{-}X\text{-}X\text{-}Y)$	0,154320988
$P_A(Typ\ 2)$	$P_4(A\text{-}X\text{-}X)$	0,231481481
$P_{A_{(1,6)}}(Typ\ 3.1)$ $P_{A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.1)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\} \cap \{1,6\}\rvert = 2$	0,277777778 0,138888889
$P_{A_{(1,6)}}(Typ\ 3.2)$ $P_{A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.2)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\} \cap \{1,6\}\rvert = 1$	0,185185185 0,277777778
$P_{A_{(1,6)}}(Typ\ 3.3)$ $P_{A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.3)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,X,Y,Z\} \cap \{1,6\}\rvert = 0$	0 0,046296296
$P_{A_{(1,6)}}(Typ\ 4)$ $P_{A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 4)$	$P_4(V\text{-}X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{A,V,X,Y,Z\} \cap \{1,6\}\rvert = 2$	0,074074074 0,055555556

Sollte nach einem Wurf das Würfelergebnis bestenfalls einen Drilling beinhalten, können dieser Drilling und ein weiterer Würfel, also **A-A-A-B**, zur Seite gelegt werden. Es bleibt noch ein Würfel übrig, der die Ergebnisse der anderen vier Würfel zu einem Poker oder einem Full House vervollständigen kann. Schlechtestenfalls entspricht das Würfelergebnis erneut Typ 1. Die Wahrscheinlichkeiten für diese drei Möglichkeiten sind in der Tabelle 37 zu sehen.

Tabelle 37: Mögliche Ergebnisse nach **A-A-A-B** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}B}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}B}(Poker)$	$P_1(A)$	1/6
$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}B}(Full\ House)$	$P_1(B)$	1/6
$P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}B}(Typ\ 1)$	$P_1(X)$	2/3

Bei dem Vergleich dieser Wahrscheinlichkeiten mit denen in Tabelle 34 ist erkennbar, dass die Chancen auf ein Grande auf 0 sinken, die Chancen auf einen Poker deutlich sinken und die Chancen auf ein Full House etwas steigen, genauso die Wahrscheinlichkeit zu einem Ergebnis des Typs 1 zu gelangen. Folglich kann nur dann dazu geraten werden, **A-A-A-B** zur Seite zu legen, wenn ein Full House im Wertungsbogen eingetragen werden kann, dies aber weder für Grande noch für Poker möglich ist.

Wird beim ersten oder zweiten Wurf eines Zuges ein Ergebnis des Typs 2 erzielt, so können vier Würfel mit **A-A-B-B** zur Seite gelegt werden. Dann kann mit einem Würfel noch ein Full House erreicht werden. Die Chancen dafür sind in Tabelle 38 notiert.

Tabelle 38: Mögliche Ergebnisse nach **A-A-B-B** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(Full\ House)$	$P_1(A) + P_1(B)$	1/3
$P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(Typ\ 2)$	$P_1(X)$	2/3

Werden vier Würfel mit **A-A-B-B** zur Seite gelegt, so sind die Chancen auf ein Full House mehr als dreimal so hoch, wie wenn nur eines der beiden Paare zur Seite gelegt wird. Dies lässt sich leicht nachvollziehen, wenn die Wahrscheinlichkeit auf ein Full House aus Tabelle 38 mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit aus Tabelle 35 verglichen wird. Das Zur-Seite-Legen von beiden Paaren setzt die Chancen auf ein Grande oder einen Poker im anschließenden Wurf gleich 0. Sollten also Ergebnisse von Typ Grande oder Poker notiert werden können, ist es nicht ratsam, vier Würfel mit **A-A-B-B** zur Seite zu legen.

Werden drei Würfel mit **A-A-B** zur Seite gelegt, so kann mit dem folgenden Wurf keine Straße erreicht werden. Somit werden die Untertypen 3.1 bis 3.3, deren getrennte Betrachtung nur von Interesse ist, wenn eine Straße erreicht werden soll, in der folgenden Tabelle zum Typ 3 zusammengefasst.

Tabelle 39: Mögliche Ergebnisse nach **A-A-B** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Poker)$	$P_2(A\text{-}A)$	0,027777778
$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Full\ House)$	$P_2(A\text{-}B) + P_2(B\text{-}B)$	0,083333333
$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Typ\ 1)$	$P_2(A\text{-}X)$	0,222222222
$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Typ\ 2)$	$P_2(B\text{-}X) + P_2(X\text{-}X)$	0,333333333
$P_{A\text{-}A\text{-}B}(Typ\ 3)$	$P_2(X\text{-}Y)$	0,333333333

Der Vergleich der Werte der Tabellen 35 und 39 zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten für die wertvollen Kombinationen Grande und Poker drastisch sinken, wenn statt zwei Würfel mit **A-A** drei Würfel mit **A-A-B** zur Seite gelegt werden. Die Chancen auf ein Full House steigen nur sehr gering. Erneut ist von einer derartigen Handlungsweise abzuraten, sollten ein Poker oder eine Grande angestrebt werden.

Werden zwei Würfel mit dem Ergebnis **A-B** zur Seite gelegt, wird dadurch automatisch die Chance im nächsten Wurf eine Grande zu erwürfeln, aufgegeben. Alle anderen Zwischenergebnisse sind noch möglich, je nachdem, welche zwei einzelnen Ergebnisse diese Würfel aufweisen. Hier können wir drei Fälle unterscheiden: Unter den Würfelergebnissen **A** und **B** können die Ergebnisse **1** und **6**, **1** oder **6**, oder weder **1** noch **6** sein. Der erste Fall ermöglicht keine Straße, während Poker und Full House, sowie Ergebnisse der Typen 1 und 2 in allen drei Fällen gleich wahrscheinlich erreicht werden. Die Chancen auf eine Straße sind hingegen beim letzten der drei Fälle höher. Deswegen betrachten wir nur den Fall, dass $\{A, B\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$. In Tabelle 40 sind die Rechenwege und die Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeiten, die unterschiedlichen Ergebnisse zu erreichen, dargestellt.

Tabelle 40: Mögliche Ergebnisse nach **A-B** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}B}(Typ)$ mit $\{A, B\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}B}(Poker)$	$P_3(A\text{-}A\text{-}A) + P_3(B\text{-}B\text{-}B)$	0,009259259
$P_{A\text{-}B}(Full\ House)$	$P_3(A\text{-}A\text{-}B) + P_3(A\text{-}B\text{-}B)$	0,027777778
$P_{A\text{-}B}(Straße)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$ mit $\lvert\{X, Y\} \cap \{1, 6\}\rvert = 1$	0,055555556
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 1)$	$P_3(A\text{-}A\text{-}X) + P_3(B\text{-}B\text{-}X) + P_3(X\text{-}X\text{-}X)$	0,129629630
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 2)$	$P_3(A\text{-}B\text{-}X) - P_3(A\text{-}X\text{-}X) + P_3(B\text{-}X\text{-}X)$	0,222222222
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 3.1)$	$P_3(A\text{-}X\text{-}Y) + P_3(B\text{-}X\text{-}Y)$ mit $\lvert\{X, Y\} \cap \{1, 6\}\rvert = 2$	0,083333333
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 3.2)$	$P_3(A\text{-}X\text{-}Y) + P_3(B\text{-}X\text{-}Y)$ mit $\lvert\{A, X, Y, Z\} \cap \{1, 6\}\rvert = 1$	0,333333333
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 3.3)$	$P_3(A\text{-}X\text{-}Y) + P_3(B\text{-}X\text{-}Y)$ mit $\lvert\{A, X, Y, Z\} \cap \{1, 6\}\rvert = 0$	0,083333333
$P_{A\text{-}B}(Typ\ 4)$	$P_3(X\text{-}Y\text{-}Z)$	0,055555556

Nur die Chancen auf eine Straße oder Ergebnisse von Typ 3.2 oder Typ 3.3 sind höher, wenn Würfel mit **A-B** zur Seite gelegt werden und mit drei Würfeln erneut gewürfelt wird, als wenn alle fünf Würfel zu einem Würfelwurf herangezogen werden. Das ist beim Vergleich der Tabelle 40 mit Tabelle 32 auf Seite 78 ersichtlich. Die Chancen auf Grande, Poker oder Full House im Folgewurf werden reduziert, wenn zwei Würfel mit **A-B** zur Seite gelegt werden. Daher ist generell von einem derartigen Vorgehen abzuraten, es sei denn, eine Straße wird angestrebt, während die anderen drei wertvollen Ergebnistypen vernachlässigt werden.

Werden vier Würfel zur Seite gelegt, die unterschiedliche Werte zeigen, unter denen entweder **1** oder **6** sind, so kann beim folgenden Würfelwurf eine Straße erreicht werden, wenn der Wert gewürfelt wird, der das Zwischenergebnis zu einer Straße komplettiert. Andernfalls erreicht man ein Ergebnis von Typ 3.2 oder 4. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 41 eingetragen.

Tabelle 41: Mögliche Ergebnisse nach **A-B-C-D** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Typ)$ mit $\lvert\{A,B,C,D\} \cap \{1,6\}\rvert = 1$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Straße)$	$P_1(X)$ mit $X \notin \{1,6\}$	1/6
$P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Typ\ 3.2)$	$P_1(A) + P_1(B) + P_1(C) + P_1(D)$	2/3
$P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Typ\ 4)$	$P_1(E)$ mit $X \in \{1,6\}$	1/6

Werden jedoch Würfel mit **2-3-4-5** zur Seite gelegt, so sind die Chancen auf eine Straße höher und es kann kein Ergebnis vom Typ 4 erreicht werden, wie in Tabelle 42 zu sehen ist.

Tabelle 42: Mögliche Ergebnisse nach **2-3-4-5** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(Typ)$	Rechenweg	WS
$P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(Straße)$	$P_1(1) + P_1(6)$	1/3
$P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(Typ\ 3.3)$	$P_1(2) + P_1(3) + P_1(4) + P_1(5)$	2/3

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit auf eine Straße deutlich besser ist, wenn bei den vier unterschiedlichen Würfelwerten, die zur Seite gelegt wurden, weder **1** noch **6** sind. Nun betrachten wir, ob das Zur-Seite-Legen von drei Würfeln mit unterschiedlichen Werten ohne **1** und **6** bessere Chancen auf eine Straße verspricht.

Tabelle 43: Mögliche Ergebnisse nach **A-B-C** und ihre Wahrscheinlichkeiten

$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ)$ mit $\lvert\{A,B,C\} \cap \{1,6\}\rvert = 0$	Rechenweg	WS
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Straße)$	$P_2(X\text{-}Y)$ mit $\lvert\lvert\{X,Y\} \cap \{1,6\}\rvert = 1$	0,111111111
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ\ 1)$	$P_2(A\text{-}A) + P_2(B\text{-}B) + P_2(C\text{-}C)$	0,083333333
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ\ 2)$	$P_2(A\text{-}B) + P_2(B\text{-}C) + P_2(A\text{-}C)$	0,166666667
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ\ 3.2)$	$P_2(A\text{-}X) + P_2(B\text{-}X) +$ $+ P_2(C\text{-}X) + P_2(X\text{-}X)$ mit $X \in \{1,6\}$	0,388888889
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ\ 3.3)$	$P_2(A\text{-}X) + P_2(B\text{-}X) +$ $+ P_2(C\text{-}X) + P_2(X\text{-}X)$ mit $X \notin \{1,6\}$	0,194444444
$P_{A\text{-}B\text{-}C}(Typ\ 4)$	$P_1(1\text{-}6)$ mit $X \in \{1,6\}$	0,055555556

Der Vergleich der Tabelle 43 mit Tabelle 41 zeigt, dass die Chancen auf eine Straße im folgenden Wurf niedriger sind, wenn drei Würfel mit **A-B-C** zur Seite gelegt werden, wenn stattdessen auch vier Würfel mit **A-B-C-D** zur Seite gelegt werden könnten. Abgesehen von einer Straße wäre ein Ergebnis von Typ 1 das bestmögliche Resultat, doch die Wahrscheinlichkeit, dieses zu erreichen, ist deutlich höher, wenn mit allen fünf Würfeln gewürfelt wird. Daher ist davon abzuraten, drei Würfel mit jeweils unterschiedlichen Werten zur Seite zu legen.

5.2.3 Erste Bewertungen

Die Berechnungen in Kapitel 5.2.2 legen bereits erste Entscheidungsmuster nahe. Sollten Ergebnisse von Typ Straße oder Full House mit niedrigerer Priorität als Poker und Grande angestrebt werden, so sind stets jene Würfel nach einem Würfelwurf zur Seite zu legen, die dasselbe Ergebnis zeigen. Dabei sind stets alle Würfel mit demselben Ergebnis zur Seite zu legen, um die Chancen auf das wertvollste Ergebnis, das Grande, zu erhöhen. Ebenso sollten keine einzelnen Würfel zur Seite gelegt werden. Da die Chancen auf Poker und Grande niedriger als die Wahrscheinlichkeiten auf Straße und Full House sind und zugleich mehr Punkte liefern, wird dies in den meisten Spielsituationen der Fall sein. Somit ist allen Spielerinnen und Spielern abzuraten, Würfel mit den Ergebnissen **A-A-A-B**, **A-A-B**, **A-B-C**, **A-B** oder **A** zur Seite zu legen.

Dieser Ratschlag verliert an Gültigkeit, sollte die spielende Person sich in der Lage wiederfinden, weder die Punkte für das Erreichen eines Grande, noch für einen Poker nützen zu können, da bereits alle zur Verfügung stehenden Felder der entsprechenden Zeilen in der Punktetabelle ausgefüllt oder geritzt worden sind. Ist in diesem Fall noch mindestens ein Feld für ein Full House frei, so kann geraten werden, Würfel mit **A-A-A-B** oder **A-A-B** zur Seite zu legen. Das gleiche gilt für Würfel mit **A-B-C**, **A-B** oder $\mathbf{A}_{(2,3,4,5)}$, sollte mindestens ein Feld frei sein, um eine Straße zu werten.

5.3 Festlegung einer Strategie

In Abschnitt 5.2.1 ist geklärt worden, mit welcher Wahrscheinlichkeit welcher Ergebnistyp beim ersten Wurf erreicht wird. Weiters wurden die Wahrscheinlichkeiten berechnet, mit denen man bei einem Folgewurf zu den möglichen Ergebnistypen gelangt, wenn nach dem vorangegangenen Wurf Würfel mit bestimmten Einzelergebnissen zur Seite gelegt werden. Um einen Wahrscheinlichkeitsvektor zu erhalten, dessen Eintragungen zeigen, mit welcher Wahrscheinlichkeit jeder möglicher Ergebnistyp am Ende eines vollständigen Zuges erreicht wird, muss ein Entscheidungsmodus fixiert werden, der klar festlegt, mit welchen Würfeln weitergewürfelt wird und welche zur Seite gelegt werden.

In den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 werden zwei unterschiedliche Strategien und ihre Entscheidungsmodi vorgestellt. Ihre Wahrscheinlichkeitsvektoren werden bestimmt und ihre Chancen auf einen Sieg werden verglichen. In Abschnitt 5.3.3 wird überprüft, welche Auswirkungen kleine Änderungen der Strategien haben, damit eine Strategie entwickelt werden kann, die bessere Ergebnisse liefert als die in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 vorgestellten Strategien.

5.3.1 Strategie I

Die erste Strategie zielt darauf ab, möglichst viele Ergebnisse vom Typ Grande, Poker, Full House und Straße zu erreichen. Sie sieht vor, dass jene wertvollen Ergebnisse angestrebt werden, für die möglichst wenige Würfelergebnisse fehlen. Dabei haben höherwertige Ergebnisse allerdings eine höhere Priorität. Wenn also ein Ergebnis von *Typ 1* erreicht wird (siehe Seite 77), müsste ein einziger Würfel einen bestimmten anderen Wert zeigen, damit er mit den anderen vier Würfeln ein Full House bildet. Dasselbe gilt jedoch auch für den Poker. Ein Würfel, der nicht zum Drilling gehört, müsste denselben Wert zeigen, wie die drei Würfel mit dem gleichen Wert. Der Poker ist mehr Punkte wert und genießt somit eine höhere Priorität. Folglich wird nur der Drilling zur Seite gelegt und nicht der Drilling gemeinsam mit einem weiteren Würfel, um die Chancen auf einen Poker zu erhöhen.

Ein Full House, das nach dem zweiten Wurf erreicht wird, wird gewertet, anstatt erneut zu würfeln um einen Poker oder ein Grande zu erreichen. Wird nach dem zweiten Wurf ein Poker erreicht, so wird mit dem Würfel, der nicht zu dem Vierling gehört, gewürfelt, sodass eine Grand erreicht werden kann. Außerdem wird nur mit einem Würfel weitergewürfelt, wenn genau ein Wert fehlt, um eine Straße zu erzielen. Wird eine Grande, ein Poker, ein Full House oder eine Straße serviert, werden die Punkte für das Ergebnis inklusive Servierbonus in der Punktetabelle notiert.

Da Strategie I dazu rät, eine Straße anzustreben, wenn genau ein Würfelwert fehlt, muss beachtet werden, welche Würfelwerte in diesem Fall erwürfelt worden sind. Wenn nach einem Würfelwurf das Ergebnis aus fünf verschiedenen Werten besteht, die keine Straße bilden, so ist klar, mit welchem der fünf Würfel weitergewürfelt werden muss, um die Straße doch noch zu erreichen. Bei allen Ergebnissen von *Typ 3* werden vier verschiedene Werte erreicht. Da aber nicht alle diese Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einer Straße führen, ist eine Aufspaltung von *Typ 3* in die drei Untertypen notwendig. Ein Ergebnis von *Typ 3.2* oder *Typ 3.3* trennt nur ein einziger passender Würfelwert von einer Straße. Dazu muss einer der beiden Würfel, die zu dem Paar gehören, gewürfelt werden. Um von einem Ergebnis entsprechend dem *Typ 3.1* zu einer Straße zu gelangen, muss mit mindestens zwei Würfeln gewürfelt werden. Auch für einen Poker fehlen zwei Würfelergebnisse, folglich wird eher das Paar zur Seite gelegt und ein Poker angestrebt.

Eine getrennte Betrachtung für den Fall, dass ein Paar herausgelegt wird, ist ebenfalls angebracht. Zeigen zwei herausgelegte Würfel **1** oder **6**, so werden im Folgewurf die *Typen 3.1*, *3.2* und *3.3* mit anderer Wahrscheinlichkeit erreicht, als wenn beide Würfel ein von **1** und **6** verschiedenes Ergebnis zeigen, wie aus Tabelle 35 ersichtlich ist. Wenn angenommen wird, dass kein Würfelwert bevorzugt wird, gilt, dass jede Art von Paar mit gleicher Wahrscheinlichkeit zur Seite gelegt wird. Dieser Überlegung wird in den unten stehenden Gleichungen Rechnung getragen. Auch eine Trennung der Ausgangslagen, die zu einer Straße führen können, ist notwendig. In den folgenden Gleichungen steht **A-B-C-D** für vier unterschiedliche Würfelwerte, unter denen sich entweder **1** oder **6** befindet.

Entscheidungsmodus nach dem ersten Wurf der Strategie I

$$P^*(A\text{-}A\text{-}A) = P_5(Typ\ 1)$$

$$P^*(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) = P_5(Typ\ 2)$$

$$P^*(A\text{-}A) = P_5(Typ\ 3.1)$$

$$P^*(A\text{-}A_{(1,6)}) = P^*(A\text{-}A) \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$P^*(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) = P^*(A\text{-}A) \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$P^*(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) = P_5(Typ\ 3.2) + P_5(Typ\ 4)$$

$$P^*(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) = P_5(Typ\ 3.3)$$

Um die Wahrscheinlichkeiten für die Würfelergebnisse nach dem zweiten Wurf analog zu den Werten in Tabelle 32 nach dieser Strategie zu erhalten, muss für jede Ausgangslage nach dem ersten Wurf festgestellt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine besondere Kombination oder ein Ereignis entsprechend der verschiedenen Typen auf Seite 77 erreicht wird. Für die folgenden Berechnungen werden die Werte aus den Tabellen 32, 34, 35, 38, 41 und 42 verwendet. Servierte Kombinationen werden dabei nicht berücksichtigt, daher ergeben die so berechneten Wahrscheinlichkeiten in Summe nicht 1.

Berechnete Wahrscheinlichkeiten nach dem zweiten Wurf der Strategie I

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Grande) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Grande) \\ &\approx 0{,}005144033\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Poker}) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(\textit{Poker}) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(\textit{Poker}) \\ &\approx 0{,}055727023\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Full House}) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(\textit{Full House}) + P^*(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(\textit{Full House}) + \\ &\quad + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(\textit{Full House}) \\ &\approx 0{,}115740741\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Straße}) &= P^*(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(\textit{Straße}) + P^*(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) \cdot P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(\textit{Straße}) \\ &\approx 0{,}061728395\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 1}) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(\textit{Typ 1}) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(\textit{Typ 1}) \\ &\approx 0{,}137174211\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 2}) &= P^*(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) \cdot P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(\textit{Typ 2}) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(\textit{Typ 2}) \\ &\approx 0{,}205761317\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 3.1}) &= P^*(A\text{-}A_{(1,6)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(\textit{Typ 3.1}) + P^*(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(\textit{Typ 3.1}) \\ &\approx 0{,}020576132\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 3.2}) &= P^*(A\text{-}A_{(1,6)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(\textit{Typ 3.2}) + P^*(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(\textit{Typ 3.2}) + \\ &\quad + P^*(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(\textit{Typ 3.2}) \\ &\approx 0{,}233196159\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 3.3}) &= P^*(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(\textit{Typ 3.3}) + P^*(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) \cdot P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(\textit{Typ 3.3}) \\ &\approx 0{,}024005487\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\textit{Typ 4}) &= P^*(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(\textit{Typ 4}) \\ &\approx 0{,}051440329\end{aligned}$$

Die Berechnungen sind sehr simpel. Durch die Notation und die Vorarbeit im Abschnitt 5.2.2 läuft es für jede Ergebnisart auf dasselbe Muster hinaus. Die Wahrscheinlichkeit, dass bestimmte Würfelwerte zur Seite gelegt werden, wird multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass von dieser Ausgangslage der entsprechende Ergebnistyp erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten, die zu demselben Ergebnis führen, werden summiert.

Die folgenden Gleichungen zeigen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für das Zur-Seite-Legen bestimmter Würfel aus den Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen bestimmter Ergebnisse nach dem zweiten Würfelwurf ergeben, wenn Strategie I verfolgt wird. Sie sind fast ident mit den entsprechenden Gleichungen für den Entscheidungsmodus nach dem ersten Wurf. Nur die Situation, dass ein Vierling zur Seite gelegt wird, taucht hier erstmalig auf. Folglich werden für die folgenden Berechnungen auch die Werte aus Tabelle 33 zusätzlich zu den bereits vorher verwendeten Tabellen herangezogen.

Entscheidungsmodus nach dem zweiten Wurf der Strategie I

$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) = \tilde{P}(Poker)$

$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) = \tilde{P}(Typ\ 1)$

$P^{**}(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) = \tilde{P}(Typ\ 2)$

$P^{**}(A\text{-}A) = \tilde{P}(Typ\ 3.1)$

$P^{**}(A\text{-}A_{(1,6)}) = P^{**}(A\text{-}A) \cdot \frac{1}{3}$

$P^{**}(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) = P^{**}(A\text{-}A) \cdot \frac{2}{3}$

$P^{**}(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) = \tilde{P}(Typ\ 3.2) + \tilde{P}(Typ\ 4)$

$P^{**}(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) = \tilde{P}(Typ\ 3.3)$

Bei Strategie I beendet eine spielende Person den Zug nach dem zweiten Wurf, wenn ein Grande, ein Full House oder eine Straße erreicht wurde. Somit ergeben sich die Berechnungen für die Wahrscheinlichkeiten nach dem dritten Wurf eines Zuges zu den unterschiedlichen Ergebnissen zu kommen, wie folgt.

$$\begin{aligned} P^{***}(Grande) &= \tilde{P}(Grande) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + \\ &\quad + P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Grande) \\ &\approx 0,018337525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Poker) &= P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + \\ &\quad + P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Poker) \\ &\approx 0,085972032 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Full\ House) &= \tilde{P}(Full\ House) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House) + \\ &\quad + P^{**}(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(Full\ House) + P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Full\ House) \\ &\approx 0,205285018 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Straße) &= \tilde{P}(Straße) + P^{**}(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Straße) + P^{**}(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) \cdot P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(Straße) \\ &\approx 0,117169639 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Typ\ 1) &= P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 1) \\ &\approx 0,081923487 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Typ\ 2) &= P^{**}(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(Typ\ 2) + P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 2) \\ &\approx 0,142889803 \end{aligned}$$

$$P^{***}(Typ\ 3.1) = P^{**}(A\text{-}A_{(1,6)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ 3.1) + P^{**}(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.1)$$
$$\approx 0,002286237$$

$$P^{***}(Typ\ 3.2) = P^{**}(A\text{-}A_{(1,6)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(1,6)}}(Typ\ 3.2) + P^{**}(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.2) +$$
$$+ P^{**}(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Typ\ 3.2)$$
$$\approx 0,192805975$$

$$P^{***}(Typ\ 3.3) = P^{**}(A\text{-}A_{(2,3,4,5)}) \cdot P_{A\text{-}A_{(2,3,4,5)}}(Typ\ 3.3) + P^{**}(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5) \cdot P_{2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}(Typ\ 3.3)$$
$$\approx 0,016384697$$

$$P^{***}(Typ\ 4) = P^{**}(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \cdot P_{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D}(Typ\ 4)$$
$$\approx 0,047439415$$

Nun ist bekannt, mit welcher Wahrscheinlichkeit alle möglichen Ergebnistypen am Ende eines Spielzuges eintreten, wenn Strategie I angewandt wird. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung kann als Wahrscheinlichkeitsvektor angeschrieben werden. In Tabelle 44 ist dieser Wahrscheinlichkeitsvektor in der zweiten Spalte eingetragen.

Tabelle 44: Ergebnisse für Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte nach Strategie I

$P^{***}(Typ)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,018337525	0,55012575	1
serviert	0,000771605	0,02314815	0
$P^{***}(Poker)$	0,085972032	2,57916096	3
serviert	0,019290123	0,57870369	1
$P^{***}(Full\ House)$	0,205285018	6,15855054	6
serviert	0,038580247	1,15740741	1
$P^{***}(Straße)$	0,117169639	3,51508917	4
serviert	0,030864198	0,92592594	1
$P^{***}(Typ\ 1)$	0,081923487	2,45770461	2
$P^{***}(Typ\ 2)$	0,142889803	4,28669409	4
$P^{***}(Typ\ 3.1)$	0,002286237	0,06858711	0
$P^{***}(Typ\ 3.2)$	0,192805975	5,78417925	6
$P^{***}(Typ\ 3.3)$	0,016384697	0,49154091	0
$P^{***}(Typ\ 4)$	0,047439415	1,42318245	1

Die Spielregeln von Escalero (siehe Seite 74) legen fest, dass jede spielende Person genau 30 Züge zu spielen hat. Unter der Annahme, dass es während des Spiels zu keiner Strategieänderung kommt, gilt die eben bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung für jede der 30 Runden. Sei die Zufallsvariable X gleich die Anzahl des Auftretens eines bestimmten Ergebnistyps W. Diese Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 30$ und $p = P^{***}(W)$. Folglich können wir den Erwartungswert dafür bestimmen, wie oft der Ergebnistyp W in 30 Runden eintritt. Nach der Formel für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen auf Seite 17 erhalten wir alle gesuchten Erwartungswerte durch Multiplikation des Wahrscheinlichkeitsvektors mit der Zahl 30. In Tabelle 44 stehen in der zweiten Spalte die Eintragungen des Wahrscheinlichkeitsvektors, in der dritten Spalte das Ergebnis der Multiplikation dieses Vektors mit 30. Dabei handelt es sich um die Erwartungswerte für die Häufigkeit der verschiedenen Ergebnistypen in einem Spiel über 30 Runden. In der letzten Spalte sind die auf ganze Zahlen gerundeten Werte dieser Erwartungswerte.

Die berechneten Ergebnisse für die zu erwartenden Häufigkeiten von Grande, Poker und Straße sind sehr knapp oberhalb der Rundungsgrenze, sodass die gerundeten Werte ein deutlich positiveres Bild der Ergebnisse suggerieren, als die Werte an sich. Dieser Umstand wird für folgende Überlegungen ignoriert und an späterer Stelle wieder aufgegriffen, wenn die unterschiedlichen Strategien verglichen werden.

Laut der gerundeten Werte für $E(X)$ können eine Grande, drei Poker, drei Full House und drei Straßen eingetragen werden. Bei einem Poker, einem Full House und einer Straße kann zusätzlich der Servierbonus verrechnet werden. Da mit großer Wahrscheinlichkeit nur eines der drei Felder, welche für Granden vorgesehen sind, mit 50 Punkten ausgefüllt werden kann, müssen die beiden anderen Felder geritzt werden. Dies wird durch eine Eintragung der Ziffer 0 dargestellt. Die übrigen Ergebnisse lassen sich zu einem Vierling, sechs Drillingen, zehn Paaren und einem einzelnen Würfel zusammenfassen. Die Anzahl der Drillinge ergibt sich aus den erwarteten Häufigkeiten von Ergebnissen entsprechend Full House und *Typ 1*. Nur insgesamt drei Full House können als solche gewertet werden, da die Punktetabelle genau drei Felder dafür zur Verfügung stellt. Der Rest kann als Drilling gewertet werden. Die Anzahl der Paare ergibt sich aus der Summe der erwarteten Häufigkeiten von Ergebnissen von *Typ 2* und *Typ 3*. Sie alle beinhalten bestenfalls ein Paar.

Die Annahme, dass die Wertigkeit der einzelnen Würfel bei den Entscheidungen, welche Würfel zur Seite gelegt werden, keine Rolle spielt, erlaubt für den Vergleich der Strategien, den erwartbaren durchschnittlichen Wert für einzelne Würfel, Paare, Drillinge und Vierlinge zu verwenden. Aus der Definition 8 für den Erwartungswert lässt sich der Erwartungswert für den Wert eines einzelnen Würfels direkt bestimmen. Sei die Zufallsvariable Y gleich das Ergebnis eines Würfelwurfs mit einem Würfel.

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

Der Erwartungswert des Punktewerts eines Paares ist die Summe der Augenzahlen zweier Würfel, die dasselbe Ergebnis haben, also $E(2 \cdot Y)$. Nach Satz 3 auf Seite

8 gilt, dass $E(2 \cdot Y) = E(Y+Y) = E(Y) + E(Y) = 2 \cdot E(Y)$. Folglich werden für jedes Paar $2 \cdot 3{,}5 = 7$, für jeden Drilling $3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$ und für jeden Vierling $4 \cdot 3{,}5 = 14$ Punkte erwartet. Des Weiteren wird angenommen, dass die dritte Spalte bevorzugt wird, wenn Vierlinge und Drillinge eingetragen werden. Diese Annahmen gestatten die Folgerung, dass in der dritten Spalte ein Vierling und fünf Drillinge eingetragen werden. In der zweiten Spalte werden ein Drilling und fünf Paare eingetragen. Die erste und damit am wenigsten bedeutsame Spalte ist gefüllt mit sechs Paaren.

Tabelle 45 ergibt sich aus der Punktetabelle auf Seite 74, indem die Punkte der Ergebnisse wie eben erklärt eingetragen und die Punkte des oberen Teils der Tabelle spaltenweise summiert werden.

Tabelle 45: Ausgefüllte Punktetabelle nach Strategie I

Strategie I	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Summe der ersten 6 Zeilen	38,5	45,5	66,5
Straße	20	20	25
Full House	30	30	35
Poker	40	40	45
Grande	0	0	50
Gesamtsumme	128,5	135,5	221,5

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die Werte, die in Tabelle 45 notiert sind, nicht so aussagekräftig sind, wie sie zu sein scheinen. Um überhaupt Werte zu erhalten, wurden mehrere Annahmen getätigt, wie dass die Wertigkeit der einzelnen Würfelergebnisse keinen Einfluss darauf habe, welche Würfel zur Seite gelegt werden. Noch schwerwiegender ist, dass an dieser Stelle der Einfluss der Punktetabellen der Kontrahenten ignoriert wird. Bei den später folgenden Vergleichen der Strategien und Varianten werden die Punktetabellen stets nach demselben Prinzip gefüllt. In echten Spielsituationen würden die Eintragungen der anderen Spielerinnen und Spieler die Entscheidung, in welcher Spalte ein Ergebnis eingetragen wird, beeinflussen. Die Erwartungswerte der Häufigkeiten der unterschiedlichen Ergebnisse wurden außerdem gerundet. All dies führt dazu, dass nur große Punkteunterschiede bei den Vergleichen der Punktetabellen Aussagekraft haben.

5.3.2 Strategie II

Strategie II zielt darauf ab, die Wahrscheinlichkeiten für Grande und Poker zu maximieren und dafür das Full House und die Straße zu vernachlässigen. Wenn nach dem ersten Wurf ein Drilling oder ein Paar erreicht wird, so werden diese Würfel zur Seite gelegt. Mit den restlichen Würfeln wird erneut gewürfelt und nur dann wird einer von ihnen zu den anderen gelegt, wenn der Wert gleich mit denen ist, die bereits zur Seite gelegt worden sind. Das bedeutet auch, dass ein Full House, welches nach dem zweiten Wurf gewertet werden könnte, nicht gewertet wird, sondern dass der Drilling zur Seite gelegt wird oder zur Seite gelegt bleibt. Mit den beiden anderen Würfeln wird erneut gewürfelt. Sollte eine der vier speziellen Kombination serviert werden, so sieht Strategie II vor, den Servierbonus zu behalten und eine Eintragung für die gewürfelte Kombination zu machen. Wenn fünf verschiedene Werte erwürfelt worden sind, die keine Straße bilden, so wird mit allen Würfeln erneut gewürfelt. Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden, wie auch bei Strategie I, die Werte aus den Tabellen 32, 33, 34, 35, 38, 41 und 42 von Seite 78 bis Seite 85 verwendet.

Nach dem ersten Wurf sind drei Ausgangslagen für den folgenden Wurf möglich: ein herauslgelegter Drilling, ein herausgelegtes Paar oder erneut ein Wurf mit allen fünf Würfeln. Zunächst werden die Wahrscheinlichkeiten, die zu derselben Ausgangslage führen, addiert.

Entscheidungsmodus nach dem ersten Wurf der Strategie II

$$P^*(A\text{-}A\text{-}A) = P_5(Typ\ 1)$$

$$P^*(A\text{-}A) = P_5(Typ\ 2) + P_5(Typ\ 3)$$

$$P^*(0) = P_5(Typ\ 4)$$

Nun werden analog zu oben die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die verschiedenen Ergebnistypen nach dem zweiten Wurf erreicht werden, bestimmt.

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Grande) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Grande)\\ &\approx 0,007501715\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Poker) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Poker)\\ &\approx 0,09109225\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Full\ House) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Full\ House)\\ &\approx 0,085733882\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Typ\ 1) &= P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^*(0) \cdot P_5(Typ\ 1)\\ &\approx 0,288161103\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Typ\ 2) &= P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 2) + P^*(0) \cdot P_5(Typ\ 2)\\ &\approx 0,207190215\end{aligned}$$

$$\tilde{P}(Typ\ 3) = P^*(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 3) + P^*(0)\cdot P_5(Typ\ 3)$$
$$\approx 0{,}221479195$$

$$\tilde{P}(Typ\ 4) = P^*(0)\cdot P_5(Typ\ 4)$$
$$\approx 0{,}003810395$$

Wird ein Grande beim zweiten Wurf erreicht, oder ein Poker, ein Full House oder eine Straße serviert, so wird der Zug nach dem zweiten Wurf bereits beendet. Andernfalls werden wieder folgend der Strategie II Würfel zur Seite gelegt oder zur Seite gelegte Würfel durch andere ausgetauscht. Die Wahrscheinlichkeiten, dass nach dem zweiten Wurf bestimmte Würfel zur Seite gelegt werden, können durch folgende Gleichungen berechnet werden.

Entscheidungsmodus nach dem zweiten Wurf der Strategie II

$$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) = \tilde{P}(Poker)$$

$$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) = \tilde{P}(Full\ House) + \tilde{P}(Typ\ 1)$$

$$P^{**}(A\text{-}A) = \tilde{P}(Typ\ 2) + \tilde{P}(Typ\ 3)$$

$$P^{**}(0) = \tilde{P}(Typ\ 4)$$

Die Berechnungen, die bereits vorher für die Wahrscheinlichkeiten nach dem zweiten Wurf durchgeführt worden sind, werden hier wiederholt. Nun gibt es jedoch erstmals bei Strategie II die Ausgangslage, dass Würfel mit **A-A-A-A** an der Seite liegen.

$$P^{***}(Grande) = \tilde{P}(Grande) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) +$$
$$+ P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Grande)$$
$$= 0{,}035054309$$

$$P^{***}(Poker) = P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) +$$
$$+ P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Poker)$$
$$= 0{,}209538635$$

$$P^{***}(Full\ House) = P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House) + P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Full\ House)$$
$$= 0{,}091621471$$

$$P^{***}(Typ\ 1) = P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^{**}(0)\cdot P_5(Typ\ 1)$$
$$= 0{,}327382296$$

$$P^{***}(Typ\ 2) = P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 2) + P^{**}(0)\cdot P_5(Typ\ 2)$$
$$= 0{,}119956872$$

$$P^{***}(Typ\ 3) = P^{**}(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 3) + P^{**}(0) \cdot P_5(Typ\ 3)$$
$$= 0{,}120838908$$

$$P^{***}(Typ\ 4) = P^{**}(0) \cdot P_5(Typ\ 4)$$
$$= 0{,}00023521$$

Nun fehlen noch die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Grande, Poker, Full House oder Straße serviert werden. Die Möglichkeit dafür besteht beim ersten Wurf des Zuges oder dann, wenn der vorhergehende Würfelwurf zu Typ 4 geführt hat. In diesem Fall sieht Strategie II vor, mit allen fünf Würfeln erneut zu würfeln. Damit die Nomenklatur einheitlich bleibt, werden die Wahrscheinlichkeiten dafür, in einem Zug eine dieser Ergebnisse zu servieren, mit „$P^{***}(Typ\ W)$ serviert“ bezeichnet.

$$P^{***}(Grande)\text{ serviert} = P_5(Grande) + P^{*}(0) \cdot P_5(Grande) + P^{**}(0) \cdot P_5(Grande)$$
$$\approx 0{,}00082217$$

$$P^{***}(Poker)\text{ serviert} = P_5(Poker) + P^{*}(0) \cdot P_5(Poker) + P^{**}(0) \cdot P_5(Poker)$$
$$\approx 0{,}020554375$$

$$P^{***}(Full\ House)\text{ serviert} = P_5(Full\ House) + P^{*}(0) \cdot P_5(Full\ House) + P^{**}(0) \cdot P_5(Full\ House)$$
$$\approx 0{,}04110875$$

$$P^{***}(Straße)\text{ serviert} = P_5(Straße) + P^{*}(0) \cdot P_5(Straße) + P^{**}(0) \cdot P_5(Straße)$$
$$\approx 0{,}03288700$$

In Tabelle 46 sind die Erwartungswerte für die Häufigkeit der verschiedenen Ergebnistypen aufgelistet. In der letzten Spalte sind sie auf ganze Zahlen gerundet. Die so gerundeten Werte ergeben durch die Rundungsfehler in Summe zwar 31, doch wird diese Ungenauigkeit für die erste Einschätzung ebenso wie bei Strategie I vernachlässigt.

Laut der gerundeten Werte für $E(X)$ liefert ein strenges Befolgen der Strategie II ein Grande, sieben Poker, vier Full House und eine Straße. Entsprechend der Annahme, dass zumindest eine Straße, ein Full House und ein Poker serviert werden, werden die Punkte für diese Ergebnisse inklusive Servierbonus eingetragen. Da Straße und Grande nach dieser Strategie wahrscheinlich nur einmal erreicht werden, die Erwartungswerte dafür sind jeweils rund 1, müssen insgesamt vier Felder geritzt werden. Dies wird erneut durch die eingetragene Ziffer 0 gekennzeichnet. Für die Felder des oberen Teils der Punktetabelle bleiben noch vier Vierlinge, da vier Poker nicht als solche mehr gewertet werden können, elf Drillinge, die sich aus zehn Ergebnissen von Typ 1 und einem Full House zusammensetzen und acht Paare, da Typ 2 und Typ 3 in Summe erwartetermaßen bei

Tabelle 46: Ergebnisse für Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte nach Strategie II

$P^{***}(Typ\ W)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,03505431	1,0516293	1
serviert	0,00082217	0,0246651	0
$P^{***}(Poker)$	0,20953864	6,2861592	6
serviert	0,02055437	0,6166311	1
$P^{***}(Full\ House)$	0,09162147	2,7486441	3
serviert	0,04110875	1,2332625	1
$P^{***}(Straße)$	0	0	0
serviert	0,03288700	0,9866100	1
$P^{***}(Typ\ 1)$	0,3273823	9,821469	10
$P^{***}(Typ\ 2)$	0,11995687	3,5987061	4
$P^{***}(Typ\ 3)$	0,12083891	3,6251673	4
$P^{***}(Typ\ 4)$	0,00023521	0,0070563	0

acht von 30 Zügen eintreten. Da der obere Teil der Tabelle nur Platz für achtzehn Eintragungen bietet, werden alle Vierlinge und Drillinge, aber nur drei der acht Paare berücksichtigt. Analog zur Vorgehensweise auf Seite 93 wird die Escalero-Punktetabelle mit den Punkten für diese zu erwartenden Ergebnisse gefüllt. Die dritte Spalte wird dabei bevorzugt. Tabelle 47 zeigt das Ergebnis dieser Eintragungen.

Tabelle 47: Ausgefüllte Punktetabelle nach Strategie II

Strategie I	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Summe der ersten 6 Zeilen	52,5	63	77
Straße	0	0	25
Full House	30	30	35
Poker	40	40	45
Grande	0	0	50
Gesamtsumme	122,5	133	229

Beim Vergleich dieser Tabelle 47 mit Tabelle 45 ist zu erkennen, dass Strategie I die erste Spalte um 6 Punkte und die zweite Spalte um 2,5 Punkte gewinnt. Strategie II siegt jedoch in der dritten Spalte mit 7,5 Punkten Vorsprung. Gemäß den Regeln nach Kastner [3] bedeutet das Gleichstand, nach den Regeln von Piatnik [4] ein Sieg für Strategie II. Die Punkteunterschiede sind allerdings sehr gering. Schon ein geringfügig verändertes Ergebnis, wie zum Beispiel die Wertung von drei Würfeln mit **6** statt zwei Würfeln mit **6**, kann, wenn mit Bedacht in der Tabelle eingetragen, den Spielausgang deutlich beeinflussen. Somit ist der

Aussagegehalt des Vergleichs der Tabellen 45 und 47 nur begrenzt.

Die Werte in Tabelle 46 für die Wahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen Ergebnisse zeigen eine deutlich bessere Chance auf ein Grande, rund 3,5% statt 1,8%, pro Spielrunde, wenn Strategie II beolgt wird. Ergebnisse von Typ Poker, Full House oder Straße werden mit weniger als 0,3% eher serviert. Granden und servierte Ergebnisse sollten in die Spalte eingetragen werden, in der man auf jeden Fall mehr Punkte haben möchte als die Kontrahenten. Da die Spielregeln nach Piatnik [4] der Person, die die dritte Spalte gewinnt, den Sieg verspricht, kann geraten werden, dass Strategie II der Strategie I vorgezogen werden sollte, wenn die Regeln nach Piatnik angewendet werden.

5.3.3 Variante 1 - Vernachlässigung des Full House

Strategie I verspricht rund sieben Ergebnisse, die einem Full House entsprechen (siehe Tabelle 46, Seite 97). Strategie II eher drei bis vier (siehe Tabelle 44, Seite 91). Da nur maximal drei Ergebnisse als Full House gewertet werden können, ist eine gezielte Verbesserung der Chancen auf ein Full House nicht sinnvoll. Eine Wertung eines Full House, welches nach dem zweiten Würfelwurf erreicht wird, sollte daher vermieden werden. Der letzte Wurf ermöglicht die Chance auf wertvollere und unwahrscheinlicher zu erreichende Ergebnisse. Strategie II beinhaltet dieses Entscheidungsmuster. Nun werden alle oben durchgeführten Berechnungen für Strategie I wiederholt, jedoch mit folgender Änderung:

$$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A) = \tilde{P}(\mathit{Full\ House}) + \tilde{P}(\mathit{Typ\ 1})$$

$$\begin{aligned} P^{***}(\mathit{Full\ House}) = {} & P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(\mathit{Full\ House}) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}B\text{-}B)\cdot P_{A\text{-}A\text{-}B\text{-}B}(\mathit{Full\ House}) + \\ & + P^{**}(A\text{-}A)\cdot P_{A\text{-}A}(\mathit{Full\ House}) \end{aligned}$$

Dieses veränderte Entscheidungsmuster wird nun Variante 1 der Strategie I genannt. Diese Änderungen der Formeln bewirken, dass sich die Wahrscheinlichkeiten auf Grande, Poker und Typ 1 zu Lasten der Chancen auf ein Full House verbessern. Tabelle 48 zeigt, wie sich die Änderungen der Strategie auf die zu erwartende Häufigkeit der Ergebnisse nach 30 Spielrunden auswirken.

Die Wahrscheinlichkeit auf ein Grande wird um rund $0,32\%$ verbessert, die auf einen Poker um rund $3,2\%$. Die Wahrscheinlichkeit auf ein Full House sinkt jedoch um fast 10%. Betrachten wir die gerundeten Werte für die zu erwartende Häufigkeit, so wandeln wir durch Änderung dieses Entscheidungsmusters grob gesprochen drei erwartete Full House-Ergebnisse in einen weiteren Poker und zwei Ergebnisse von Typ 1 um. Diese Umwandlung hat keine negativen Einflüsse auf die Punktevergabe, da ein Full House, wenn es nicht als solches gewertet werden kann, bestenfalls als Drilling Punkte zu bringen vermag, wie auch Ergebnisse von Typ 1. Somit ist diese Änderung als positiv zu werten.

Tabelle 48: Von Strategie I abweichende Ergebnisse der Variante 1

$P^{***}(Typ)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,021552545	0,64657636	1
$P^{***}(Poker)$	0,118122237	3,543667124	4
$P^{***}(Full\ House)$	0,10561938	3,16858139	3
$P^{***}(Typ\ 1)$	0,146223899	4,386716964	4

5.3.4 Variante 2 - Vernachlässigung der Straße

Strategie I führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zu fünf Ergebnissen, die einer Straße entsprechen. Das ist nicht optimal, da eine Straße, die nicht als solche gewertet werden kann, kaum Punkte im oberen Bereich der Punktetabelle liefern kann. Strategie I sieht vor, eine Straße zu verfolgen, wenn vier unterschiedliche Werte gewürfelt wurden, bei denen nicht **1** und **6** vorkommen. Die folgende Änderung verlangt, dass nach dem zweiten Wurf bei Ergebnissen von Typ 3.2 das Paar zur Seite gelegt wird und beim letzten Würfelwurf keine Straße angestrebt wird. Nun werden die Berechnungen für die erwartbare Häufigkeit der Ergebnisse von Strategie I wiederholt, diesmal mit folgenden Änderungen, die als Variante 2 bezeichnet werden:

$$P^{**}(A\text{-}A) = \tilde{P}(Typ\ 3.1) + \tilde{P}(Typ\ 3.2)$$

$$P^{**}(A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) = \tilde{P}(Typ\ 4)$$

Tabelle 49 zeigt die Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeit, am Ende eines Zuges zu den möglichen Ergebnissen zu gelangen, und die zu erwartende Häufigkeit dieser Ergebnisse nach 30 Spielzügen. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Grande, Poker, Straße oder Full House serviert werden, nicht gezeigt, da diese sich durch Variante 2 von Strategie I nicht verändern.

Die Chancen auf eine Grande werden durch diese Änderung nur sehr gering verbessert, aber die Wahrscheinlichkeit auf einen Poker in einem Zug wird um rund $8,4\%$ erhöht, auf ein Full House um $6,5\%$. Dafür sinkt die Wahrscheinlichkeit, eine Straße zu erreichen, um etwa $3,9\%$. Deutlich erhöhen sich die Chancen auf Ergebnisse von Typ 1 und Typ 2, die Chancen auf Typ 3 und Typ 4 sinken. Die Überlegungen bezüglich der Punktevergabe auf Seite 97 werden mit diesen Ergebnissen erneut vorgenommen, da diese Ergebnisse noch nicht genug Aussagekraft darüber haben, ob diese Änderung sinnvoll ist. Die Punktetabelle wird mit den erwarteten Ergebnissen gefüllt.

Tabelle 49: Von Strategie I abweichende Ergebnisse der Variante 2

$P^{***}(Typ)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,019417137	0,582514098	1
$P^{***}(Poker)$	0,102166209	3,064986283	3
$P^{***}(Full\ House)$	0,226877254	6,806317635	7
$P^{***}(Straße)$	0,078303612	2,349108368	2
$P^{***}(Typ\ 1)$	0,146700198	4,401005944	4
$P^{***}(Typ\ 2)$	0,207666514	6,229995428	6
$P^{***}(Typ\ 3.1)$	0,028196921	0,845907636	1
$P^{***}(Typ\ 3.2)$	0,071889448	2,156683432	2
$P^{***}(Typ\ 3.3)$	0,020703145	0,621094345	1
$P^{***}(Typ\ 4)$	0,008573388	0,257201646	0

Tabelle 50 zeigt, dass Variante 2 sich vor allem auf Eintragungen im oberen Teil der Punktetabelle auswirkt. Das häufigere Erreichen von Drillingen und Paaren führt dazu, dass in der ersten und zweiten Spalte mehr Punkte erreicht werden können. Aus dieser Tabelle geht allerdings nicht hervor, dass das Grande mit größerer Sicherheit innerhalb von 30 Runden erreicht wird. Dies kann man in Tabelle 49 an den höheren Werten für die zu erwartende Häufigkeit erkennen. Somit ist diese Änderung wie auch Variante 1 als positiv zu werten. Die zu erwartende Häufigkeit auf eine Straße ist mit dieser Änderung bereits so niedrig, dass es nicht sinnvoll erscheint, eine Strategieänderung zusätzlich zu wählen, die die Chancen auf eine Straße noch mehr senken.

Tabelle 50: Ausgefüllte Punktetabelle nach Variante 2 von Strategie I

Strategie II	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Summe der ersten 6 Zeilen	42	56	66,5
Straße	20	20	25
Full House	30	30	35
Poker	40	40	45
Grande	0	0	50
Gesamtsumme	132	146	221,5

5.3.5 Variante 3 - Servierbonus für Poker

Als Nächstes wird untersucht, ob der Servierbonus bei einem servierten Poker oder einem servierten Full House tatsächlich wichtiger als die Möglichkeit ist, mit dem zweiten oder dritten Würfelwurf ein Grande zu erreichen. Dafür wird zunächst folgende Änderung bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen Ergebnisse nach Strategie I vorgenommen:

$$P^*(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) = P_5(Poker)$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Grande) = {} & P^*(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + \\ & + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Grande)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Poker) = {} & P^*(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^*(A\text{-}A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + \\ & + P^*(A\text{-}A) \cdot P_{A\text{-}A}(Poker)\end{aligned}$$

Diese Variation führt dazu, dass sich die Chancen auf ein Grande und einen regulären Poker vergrößern, wie Tabelle 51 zeigt.

Tabelle 51: Von Strategie I abweichende Ergebnisse der Variante 3

$P^{***}(Typ)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,024231729	0,726951875	1
$P^{***}(Poker)$	0,099367951	2,981038523	3
serviert	0	0	0

Die Chance, während des Zuges ein Grande zu würfeln, wird durch Variante 3 um rund $0,59\%$ vergrößert. Um zu sehen, ob diese Erhöhung über viele Spiele hinweg das Vernachlässigen des Servierbonus rechtfertigt, berechnen wir einen Wert, der ähnlich dem Erwartungswert des Punktegewinns ist. Entsprechend der Definition aus Seite 7 müssten alle berechneten Wahrscheinlichkeiten mit ihrer Wertigkeit und anschließend mit 30 multipliziert werden. Bei einer derartigen Berechnung würde ignoriert werden, dass es Beschränkungen dafür gibt, welche Würfe wie gewertet werden können. Diese deutliche Erhöhung der Komplexität der Berechnung wird umgangen, indem nur die Unterschiede der erwarteten Häufigkeiten von Grande und Poker nach Strategie II und Variante 3 mit den Werten dieser Ergebnisse multipliziert werden. Der so erhaltene Wert ist eine Vereinfachung der Änderung des Erwartungswerts durch die Strategievariation.

$$\underbrace{(0,726951875 - 0,550125743) \cdot 50}_{\text{Punkteänderung bezüglich Grande}} + \underbrace{(2,981038523 - 2,57916096) \cdot 40 - 0,57870369 \cdot 45}_{\text{Punkteänderung bezüglich Poker}} \approx$$

$$\approx -1,12525693$$

Der Wert ist unter 0, somit ist ein Verzicht auf den Servierbonus nicht ratsam, wenn noch ein Poker notiert werden kann.

5.3.6 Variante 4 - Servierbonus für Full House

Variante 4 sieht vor, dass ein serviertes Full House nicht als solches gewertet wird, sondern dass der Drilling zur Seite gelegt wird. Mit den beiden restlichen Würfeln kann ein Poker oder ein Grande erzielt werden. Dazu kommt es bei den Formeln für die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse nach Strategie I zu folgender Änderung:

$$P^{*}(A\text{-}A\text{-}A) = P_5(\mathit{Typ\ 1}) + P_5(\mathit{Full\ House})$$

Diese Änderung beeinflusst die Werte für Grande, Poker, Full House und Typ 1. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 52 notiert.

Tabelle 52: Von Strategie I abweichende Ergebnisse der Variante 4

$P^{***}(Typ)$	WS	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
$P^{***}(Grande)$	0,021790695	0,65372085	1
$P^{***}(Poker)$	0,100856386	3,025691587	3
$P^{***}(Full\ House)$ serviert	0,213620256 0	6,408607682 0	6 0
$P^{***}(Typ\ 1)$	0,093830971	2,814929127	3

Die Chance auf ein Grande in einem Zug wird um rund 0,3 % erhöht. Diese Erhöhung ist geringer als durch Variante 3. Die Wahrscheinlichkeit, einen Poker zu erwürfeln, steigt um $1,5$ %. Alle bisher behandelten Strategien liefern sehr wahrscheinlich drei Ergebnisse des Typs Poker. Deswegen wird für folgende Abschätzung angenommen, dass eine Erhöhung der Chancen auf einen Poker sich eher insofern auf die Punktevergabe auswirkt, als dass ein weiterer Vierling statt eines Drillings angeschrieben werden kann. Die folgende Rechnung zeigt, ob über viele Spiele hinweg ein Verzicht auf ein serviertes Full House und der Verlust von 5 Punkten dadurch gerechtfertigt wird, dass mit größerer Wahrscheinlichkeit ein Grande oder ein Vierling statt eines Drillings angeschrieben werden kann.

$$\underbrace{(0,65372085 - 0,550125743)\cdot 50}_{\textit{Punkteänderung bezüglich Grande}} + \underbrace{(3,025691587 - 2,57916096)\cdot 3,5 - 1,15740741\cdot 5}_{\textit{Punkteänderung bezüglich Full House}} \approx$$

$$\approx 0,95573393$$

Dieser Wert ist positiv, was den Schluss zulässt, dass ein Verlust von 5 Punkten durch das Servieren eines Full House durch die besseren Chancen auf eine Grande und den Punktegewinn durch einen Vierling aufgewogen wird.

Zu Variante 3 und Variante 4 ist abschließend zu sagen, dass beide Varianten keine großen Punkteveränderungen versprechen. Deswegen kann an dieser Stelle auch keine klare Aussage darüber getätigt werden, welche Entscheidung die klügere sei. Wäre der Punktebonus durch das Servieren der Ergebnisse Poker und Full House deutlich höher, so könnte unumwunden geraten werden, den Servierbonus nicht zu riskieren.

5.3.7 Variante 5 - Strategiewechsel während eines Spiels

Während der 30 Spielrunden steht es den Spielerinnen und Spielern natürlich frei, ihre Strategie zu ändern und so an die bereits erreichten Ergebnisse anzupassen. Besonders sinnvoll scheint das in dem Fall zu sein, dass bereits ausreichend viele Straßen erzielt worden sind. Erreichte Straßen, die nicht mehr als solche in der Punktetabelle angeschrieben werden können, sind besonders unpraktisch, da auch im oberen Teil der Punktetabelle nicht einmal ein Paar eingetragen werden kann. Anstatt, wie in den vorangegangenen Strategievariationen, eine Strategie zu wählen, die automatisch ungefähr die richtige Anzahl an Straßen liefert, kann eine Anfangsstrategie mit Fokus auf Straßen verfolgt werden, die geändert werden kann, sollte die dritte Straße eingetragen worden sein. Als Ausgangsstrategie wird die Variante 1 von Strategie I gewählt. Sie liefert hohe Chancen auf eine Straße, berücksichtigt allerdings auch, dass überdurchschnittlich viele Ergebnisse, die einem Full House entsprechen, gewertet werden können. Um berechnen zu können, wie erfolgreich eine Strategieänderung im Laufe des Spiels ist, müssen wir zunächst feststellen, bei wie vielen Runden die Anfangsstrategie Anwendung findet.

Die Wahrscheinlichkeit, in einer Runde eine Straße zu erreichen, wird nun p_S genannt. Ihr Wert ergibt sich aus der Summe von $P^{***}(\mathit{Straße})$ *serviert* und $P^{***}(\mathit{Straße})$ aus Tabelle 46.

$$p_S = 0,030864198 + 0,117169639 = 0,148034437$$

Die auf Seite 20 definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Ereignis bei einer bestimmen Versuchwiederholung zum dritten Mal eintritt. Genau diese Verteilung, beziehungsweise ihren Erwartungswert, können wir hier benützen. Der Erwartungswert liefert eine Schätzung, in welcher Runde die dritte Straße in der Punktetabelle eingetragen werden kann. Dieser Erwartungswert wird berechnet, indem in die Formel für $E(X)$ laut Satz 9 für p der Wert von p_S eingesetzt wird.

$$E(X) = \frac{3}{p_S} \approx 20,26555483 \approx 20$$

Wir erwarten, dass innerhalb von 20 Spielrunden drei Mal eine Straße erwürfelt oder serviert wird.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem Zug ein Full House zu erreichen, benennen wir nun mit p_{FH}, ihr Wert ist die Summe von P^{***}(*Full House*) *serviert* aus Tabelle 46 und P^{***}(*Full House*) aus Tabelle 48. Der Erwartungswert der Anzahl der Runden bis zum dritten Full House wird analog zu oben bestimmt.

$$p_{FH} \approx 0,038580247 + 0,105619380 \approx 0,144199627$$

$$E(X) = \frac{3}{p_{FH}} \approx 20,80449209 \approx 21$$

Die beiden eben berechneten Erwartungswerte liegen sehr nahe beieinander, beide zwischen 20 und 21. Daher ist zu erwarten, dass im Schnitt nach der 21. Spielrunde sowohl drei Straßen, als auch drei Full House in der Punktetabelle notiert worden sein werden. Nun wird bestimmt, dass für 21 Spielrunden Variante 1 von Strategie I befolgt wird. Für die restlichen 9 Runden wird eine Strategie verfolgt, welche alle Ergebnisse, die einer Straße oder einem Full House entsprechen, völlig vernachlässigt. Die Entscheidungsmuster für die Folgestrategie werden hier dargestellt. Dabei werden die Bezeichnungen für die Wahrscheinlichkeiten der Folgestrategie mit einem tiefgestellten F gekenntzeichnet.

Entscheidungsmodus nach dem ersten Wurf der Folgestrategie

$P^*(A\text{-}A\text{-}A)_F = P_5(Typ\ 1) + P_5(Full\ House)$

$P^*(A\text{-}A)_F = P_5(Typ\ 2) + P_5(Typ\ 3)$

$P^*(0)_F = P_5(Typ\ 4) + P_5(Straße)$

Wie auch bei den Berechnungen der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten nach Strategie I und Strategie II werden den Werte aus den Tabellen 32, 33, 34 und 35 auf den Seiten 78 bis 81 verwendet.

Berechnete Wahrscheinlichkeiten nach dem zweiten Wurf der Folgestrategie

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Grande)_F &= P^*(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Grande)\\ &\approx 0,008573388\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Poker)_F &= P^*(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Poker)\\ &\approx 0,101808985\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Full\ House)_F &= P^*(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House) + P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Full\ House) +\\ &\quad + P^*(0)_F \cdot P_5(Full\ House)\\ &\approx 0,094664495\end{aligned}$$

$$\tilde{P}(Straße)_F = P^*(0)_F \cdot P_5(Straße) \approx 0,002857796$$

$$\tilde{P}(Typ\ 1)_F = P^*(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 1) + P^*(0)_F \cdot P_5(Typ\ 1) \approx 0,314357567$$

$$\tilde{P}(Typ\ 2)_F = P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 2) + P^*(0)_F \cdot P_5(Typ\ 2) \approx 0,214334705$$

$$\tilde{P}(Typ\ 3)_F = P^*(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Typ\ 3) + P^*(0)_F \cdot P_5(Typ\ 3) \approx 0,235768176$$

$$\tilde{P}(Typ\ 4)_F = P^*(0)_F \cdot P_5(Typ\ 4) \approx 0,005715592$$

Entscheidungsmodus nach dem zweiten Wurf der Folgestrategie

$$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)_F = \tilde{P}(Poker)_F$$

$$P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)_F = \tilde{P}(Full\ House)_F + \tilde{P}(Typ\ 1)_F$$

$$P^{**}(A\text{-}A)_F = \tilde{P}(Typ\ 2)_F + \tilde{P}(Typ\ 3)_F$$

$$P^{**}(0)_F = \tilde{P}(Typ\ 4)_F + \tilde{P}(Straße)_F$$

Berechnete Wahrscheinlichkeiten nach dem dritten Wurf der Folgestrategie

$$\begin{aligned} P^{***}(Grande)_F &= \tilde{P}(Grande)_F + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + \\ &\quad + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Grande) + P^{**}(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Grande) \\ &\approx 0,038987086 \end{aligned}$$

$$P^{***}(Grande)_F \text{ serviert} = P_5(Grande) + P^*(0)_F \cdot P_5(Grande) + P^{**}(0)_F \cdot P_5(Grande) \approx 0,000849665$$

$$\begin{aligned} P^{***}(Poker)_F &= P^{**}(A\text{-}A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Poker) + \\ &\quad + P^{**}(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Poker) \\ &\approx 0,229715205 \end{aligned}$$

$$P^{***}(Poker)_F \text{ serviert} = P_5(Poker) + P^*(0)_F \cdot P_5(Poker) + P^{**}(0)_F \cdot P_5(Poker) \approx 0,021241628$$

$$P^{***}(Full\ House)_F = P^{**}(A\text{-}A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(Full\ House) + P^{**}(A\text{-}A)_F \cdot P_{A\text{-}A}(Full\ House) \approx 0,098484812$$

$$P^{***}(\mathit{Full\ House})_F \text{ serviert} = P^{**}(0)_F \cdot P_5(\mathit{Full\ House}) \approx 0,000330763$$

$$P^{***}(\mathit{Straße})_F = 0$$

$$P^{***}(\mathit{Straße})_F \text{ serviert} = P^{**}(0)_F \cdot P_5(\mathit{Straße}) \approx 0,000264611$$

$$P^{***}(\mathit{Typ\ 1})_F = P^{**}(\mathit{A\text{-}A\text{-}A})_F \cdot P_{A\text{-}A\text{-}A}(\mathit{Typ\ 1}) + P^{**}(\mathit{A\text{-}A})_F \cdot P_{A\text{-}A}(\mathit{Typ\ 1}) + P^{**}(0)_F \cdot P_5(\mathit{Typ\ 1}) \approx 0,353586111$$

$$P^{***}(\mathit{Typ\ 2})_F = P^{**}(\mathit{A\text{-}A})_F \cdot P_{A\text{-}A}(\mathit{Typ\ 2}) + P^{**}(0)_F \cdot P_5(\mathit{Typ\ 2}) \approx 0,127013159$$

$$P^{***}(\mathit{Typ\ 3})_F = P^{**}(\mathit{A\text{-}A})_F \cdot P_{A\text{-}A}(\mathit{Typ\ 3}) + P^{**}(0)_F \cdot P_5(\mathit{Typ\ 3}) \approx 0,128997739$$

$$P^{***}(\mathit{Typ\ 4})_F = P^{**}(0)_F \cdot P_0(\mathit{Typ\ 4}) \approx 0,000529221$$

Bezeichnet X die Häufigkeit des Auftretens eines Ergebnisses von *Typ W*, so kann $E(X)$, wenn in den ersten 21 Spielrunden Variante 1 von Strategie I und in den restlichen neun Spielrunden die Folgestrategie verwendet wird, mit folgender Formel berechnet werden.

$$E(X{=}\mathit{Anzahl\ der\ Ergebnisse\ von\ Typ\ W}) = 21 \cdot P^{***}(\mathit{Typ\ W}) + 9 \cdot P^{***}(\mathit{Typ\ W})_F$$

In Tabelle 53 sind die Häufigkeiten aller möglichen Ergebnistypen dargestellt. Die gerundeten Werte werden erneut herangezogen, um die Punktetabelle mit den zu erwartenden Ergebnissen zu füllen. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein Grande erreicht wird und zwei Felder für das Grande geritzt werden müssen. Alle Felder für die Ergebnistypen Poker, Full House und Straße können mit Punkten befüllt werden, das Feld der dritten Spalte erhält die Punkte für das Ergebnis inklusive Servierbonus. Für den oberen Teil der Punktetabelle bleiben drei Vierlinge, da nur drei der insgesamt sechs Poker als solche angeschrieben werden können, und sieben Drillinge, die aus den sechs Ergebnissen von Typ 1 und einem nicht als Full House nützbaren Ergebnis resultieren. Die restlichen Felder können mit Paaren gefüllt werden. Erneut wird stets der dritten Spalte der Vorzug gegeben. Durch diese Voraussetzung ergibt sich, dass der obere Teil der dritten Spalte mit drei Vierlingen und drei Drillingen, die zweite Spalte mit vier Drillingen und zwei Paaren und die erste Spalte nur mit Paaren gefüllt wird.

Tabelle 53: Ergebnisse der Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte der gemischten Strategie

Typ W	$21 \cdot P^{***}(Typ\ W)$	$9 \cdot P^{***}(Typ\ W)_F$	$E(X)$	$E(X)$ gerundet
Grande	0,45260345	0,35088377	0,80348722	1
serviert	0,01620370	0,00764699	0,02385069	0
Poker	2,48056699	2,06743684	4,54800383	5
serviert	0,40509259	0,19117465	0,59626724	1
Full House	2,21800697	0,88636331	3,10437028	3
serviert	0,81018519	0,00297687	0,81316206	1
Straße	2,46056241	0	2,46056241	2
serviert	0,64814815	0,00238150	0,65052965	1
Typ 1	3,07070187	3,18227500	6,25297687	6
Typ 2	3,00068587	1,14311843	4,14380430	4
Typ 3	4,44101509	1,16097965	5,60199474	6
Typ 4	0,99622771	0,00476299	1,00099070	1

Tabelle 54: Ausgefüllte Punktetabelle nach gemischter Strategie

Strategie II	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Summe der ersten 6 Zeilen	42	56	73,5
Straße	20	20	25
Full House	30	30	35
Poker	40	40	45
Grande	0	0	50
Gesamtsumme	132	146	228,5

Der Vergleich der Tabelle 54 mit Tabelle 50 zeigt, dass der einzige Unterschied darin liegt, dass der obere Teil der Punktetabelle in der dritten Spalte um 7 Punkte mehr bringt, wenn nach der 21. Runde die Strategie so geändert wird, dass keine Ergebnisse von Typ Straße oder Full House angestrebt werden. Bei Betrachtung der gerundeten Werte für die erwartete Häufigkeit der unterschiedlichen Ergebnisse ist ersichtlich, dass die letzte Variante zwei Vierlinge mehr und zwei Drillinge weniger verspricht. Dies bedeutet einen leichten Vorteil der Variante 5 gegenüber den anderen hier vorgestellten Varianten und Strategien. Gleichzeitig deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass eine Anpassung der Strategie auf die momentane Spielsituation bei dem Spiel Escalero von großer Bedeutung sein kann.

6 Konklusion

Im Zuge dieser Arbeit wurden zwei unterschiedliche Würfelspiele dahingehend untersucht, ob sich mittels stochastischer Berechnungen Strategien finden lassen, welche bessere Gewinnchancen liefern. Für das Spiel Zehntausend haben wir mehrere Entscheidungshilfen bezüglich Risikoverhalten und Patzervermeidung entdeckt, die in jeder Partie sinnvoll sein werden. In Abschnitt 4.2.2 wurde gezeigt, mit wie vielen Punkten ein Würfelwurf mit einer bestimmten Anzahl an Würfeln riskiert werden kann, um über viele Spiele hinweg möglichst viele Punkte zu erreichen. In Abschnitt 4.2.3 wurden zahlreiche Situationen beleuchtet, die eine Entscheidung der Spielerin oder des Spielers verlangen. Dabei konnten für einige konkrete Situationen klare Hinweise bestimmt werden. Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Strategie IV schließlich liefert genaue Verhaltensweisen, deren Befolgung dazu führt, dass man möglichst wenige Patzer erleidet.

Bei Escalero konnten kaum derartige Hinweise gefunden werden, die in den meisten Spielen die Gewinnchancen erhöhen. In Abschnitt 5.2.2 wird gezeigt, dass Würfel, die verschiedene Werte zeigen, aber nicht durch einen einzigen passenden Würfelwert zu einer Straße ergänzt werden können, nicht zur Seite gelegt werden sollten. Eine derartige Handlungsweise widerstrebt zusätzlich der Intention, ein Grande zu erreichen, das selbst dann wahrscheinlich nur einmal innerhalb von 30 Runden erreicht wird, wenn nur es angestrebt wird, wie Tabelle 46 auf Seite 97 zu entnehmen ist. Somit dürfte diese Erkenntnis erfahrene Spielerinnen und Spieler nicht überraschen. Die in Abschnitt 5.3 bestimmten Ergebnisse zeigen kaum deutliche Vorteile einer vorgestellten Strategie gegenüber einer anderen. Um bei der Untersuchung des Spiels Escalero überhaupt Daten erhalten zu können, wurden zahlreiche Annahmen und Vereinfachungen verwendet. So wurden sämtliche Punktetabellen nach demselben Schema gefüllt, obwohl in einer echten Spielsituation die Berücksichtigung der Punkte der Mitspieler und Mitspielerinnen dieses Schema deutlich beeinflussen würde. Die Erkenntnis aus Abschnitt 5.3.7, dass eine Anpassung der Strategie auf die bereits erreichten Würfelergebnisse, hilfreich ist, unterstreicht, dass eine vorgefasste Strategie bei Escalero deutlich weniger hilfreich ist, als bei Zehntausend. Die unterschiedlich hohe Sinnhaftigkeit vorgefasster Strategien bei Zehntausend und Escalero kommt daher, dass bei Zehntausend jede Runde nach genau den gleichen Bedingungen stattfindet und die Person gewinnt, die mehr Punkte erspielen konnte. Bei Escalero verändern sich zwar nicht die Wahrscheinlichkeiten, die unterschiedlichen Ergebnistypen zu erreichen, wohl aber die Möglichkeiten, Punkte in die Punktetabelle einzutragen. Mit jedem ausgefüllten Feld verringern sich die möglichen Entscheidungen für die spielenden Personen. Zusätzlich spielen Überlegungen eine Rolle, in welche Spalte Punkte eingetragen werden sollen. Dabei haben die bereits erzielten Punkte der Kontrahenten große Bedeutung, da die Summe der Punkte in der Tabelle nicht über Sieg und Niederlage entscheiden. Das Gewinnen einzelner Spalten der Tabelle ist siegentscheidend.

Die eben angesprochenen Mängel bei der Untersuchung des Spiels Escalero bedeuten nicht, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Möglichkeiten bietet, die Strategie für dieses Spiel zu verbessern. Viel mehr zeigen sie, dass eine deutlich intensivere Auseinandersetzung mit diesem Thema notwendig wäre, um klare Aussagen, Richtlinien und Ratschläge zu finden, die bei der Verbesserung der Gewinnchancen helfen. Zu einer derartigen Auseinandersetzung könnten eine Berücksichtigung der einzelnen Würfelwerte, sowie zahlreichere Strategievarationen gehören.

Anhang

Abkürzungsverzeichnis

geom.	geometrisch
S.	Seite
usw.	und so weiter
WS	Wahrscheinlichkeit

Tabelle 55: Würfelergebnisse beim Wurf mit drei Würfeln

1. W	2. W	3. W	#
1	1	1	1
1	1	2	3
1	1	3	3
1	1	4	3
1	1	5	3
1	1	6	3
1	2	2	3
1	2	3	6
1	2	4	6
1	2	5	6
1	2	6	6
1	3	3	3
1	3	4	6
1	3	5	6
1	3	6	6
1	4	4	3
1	4	5	6
1	4	6	6
1	5	5	3
1	5	6	6
1	6	6	3
2	2	2	1
2	2	3	3
2	2	4	3
2	2	5	3
2	2	6	3
2	3	3	3
2	3	4	6
2	3	5	6
2	3	6	6
2	4	4	3
2	4	5	6
2	4	6	6
2	5	5	3
2	5	6	6
2	6	6	3
3	3	3	1
3	3	4	3
3	3	5	3
3	3	6	3
3	4	4	3
3	4	5	6
3	4	6	6
3	5	5	3
3	5	6	6
3	6	6	3
4	4	4	1
4	4	5	3
4	4	6	3
4	5	5	3
4	5	6	6
4	6	6	3
5	5	5	1
5	5	6	3
5	6	6	3
6	6	6	1

Tabelle 56: Würfelergebnisse beim Wurf mit vier Würfeln: Teil 1

1. W	2. W	3. W	4. W	#
1	1	1	1	1
1	1	1	2	4
1	1	1	3	4
1	1	1	4	4
1	1	1	5	4
1	1	1	6	4
1	1	2	2	6
1	1	2	3	12
1	1	2	4	12
1	1	2	5	12
1	1	2	6	12
1	1	3	3	6
1	1	3	4	12
1	1	3	5	12
1	1	3	6	12
1	1	4	4	6
1	1	4	5	12
1	1	4	6	12
1	1	5	5	6
1	1	5	6	12
1	1	6	6	6
1	2	2	2	4
1	2	2	3	12
1	2	2	4	12
1	2	2	5	12
1	2	2	6	12
1	2	3	3	12
1	2	3	4	24
1	2	3	5	24
1	2	3	6	24
1	2	4	4	12
1	2	4	5	24
1	2	4	6	24
1	2	5	5	12
1	2	5	6	24
1	2	6	6	12
1	3	3	3	4
1	3	3	4	12
1	3	3	5	12
1	3	3	6	12
1	3	4	4	12
1	3	4	5	24
1	3	4	6	24
1	3	5	5	12
1	3	5	6	24
1	3	6	6	12
1	4	4	4	4
1	4	4	5	12
1	4	4	6	12

1. W	2. W	3. W	4. W	#
1	4	5	5	12
1	4	5	6	24
1	4	6	6	12
1	5	5	5	4
1	5	5	6	12
1	5	6	6	12
1	6	6	6	4
2	2	2	2	1
2	2	2	3	4
2	2	2	4	4
2	2	2	5	4
2	2	2	6	4
2	2	3	3	6
2	2	3	4	12
2	2	3	5	12
2	2	3	6	12
2	2	4	4	6
2	2	4	5	12
2	2	4	6	12
2	2	5	5	6
2	2	5	6	12
2	2	6	6	6
2	3	3	3	4
2	3	3	4	12
2	3	3	5	12
2	3	3	6	12
2	3	4	4	12
2	3	4	5	24
2	3	4	6	24
2	3	5	5	12
2	3	5	6	24
2	3	6	6	12
2	4	4	4	4
2	4	4	5	12
2	4	4	6	12
2	4	5	5	12
2	4	5	6	24
2	4	6	6	12
2	5	5	5	4
2	5	5	6	12
2	5	6	6	12
2	6	6	6	4
3	3	3	3	1
3	3	3	4	4
3	3	3	5	4
3	3	3	6	4
3	3	4	4	6
3	3	4	5	12
3	3	4	6	12

Tabelle 57: Würfelergebnisse beim Wurf mit vier Würfeln: Teil 2

1. W	2. W	3. W	4. W	#
3	3	5	5	6
3	3	5	6	12
3	3	6	6	6
3	4	4	4	4
3	4	4	5	12
3	4	4	6	12
3	4	5	5	12
3	4	5	6	24
3	4	6	6	12
3	5	5	5	4
3	5	5	6	12
3	5	6	6	12
3	6	6	6	4
4	4	4	4	1
4	4	4	5	4
4	4	4	6	4
4	4	5	5	6
4	4	5	6	12
4	4	6	6	6
4	5	5	5	4
4	5	5	6	12
4	5	6	6	12
4	6	6	6	4
5	5	5	5	1
5	5	5	6	4
5	5	6	6	6
5	6	6	6	4
6	6	6	6	1

Tabelle 58: Würfelergebnisse beim Wurf mit fünf Würfeln: Teil 1

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	5
1	1	1	1	3	5
1	1	1	1	4	5
1	1	1	1	5	5
1	1	1	1	6	5
1	1	1	2	2	10
1	1	1	2	3	20
1	1	1	2	4	20
1	1	1	2	5	20
1	1	1	2	6	20
1	1	1	3	3	10
1	1	1	3	4	20
1	1	1	3	5	20
1	1	1	3	6	20
1	1	1	4	4	10
1	1	1	4	5	20
1	1	1	4	6	20
1	1	1	5	5	10
1	1	1	5	6	20
1	1	1	6	6	10
1	1	2	2	2	10
1	1	2	2	3	30
1	1	2	2	4	30
1	1	2	2	5	30
1	1	2	2	6	30
1	1	2	3	3	30
1	1	2	3	4	60
1	1	2	3	5	60
1	1	2	3	6	60
1	1	2	4	4	30
1	1	2	4	5	60
1	1	2	4	6	60
1	1	2	5	5	30
1	1	2	5	6	60
1	1	2	6	6	30
1	1	3	3	3	10
1	1	3	3	4	30
1	1	3	3	5	30
1	1	3	3	6	30
1	1	3	4	4	30
1	1	3	4	5	60
1	1	3	4	6	60
1	1	3	5	5	30
1	1	3	5	6	60
1	1	3	6	6	30
1	1	4	4	4	10
1	1	4	4	5	30
1	1	4	4	6	30

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
1	1	4	5	5	30
1	1	4	5	6	60
1	1	4	6	6	30
1	1	5	5	5	10
1	1	5	5	6	30
1	1	5	6	6	30
1	1	6	6	6	10
1	2	2	2	2	5
1	2	2	2	3	20
1	2	2	2	4	20
1	2	2	2	5	20
1	2	2	2	6	20
1	2	2	3	3	30
1	2	2	3	4	60
1	2	2	3	5	60
1	2	2	3	6	60
1	2	2	4	4	30
1	2	2	4	5	60
1	2	2	4	6	60
1	2	2	5	5	30
1	2	2	5	6	60
1	2	2	6	6	30
1	2	3	3	3	20
1	2	3	3	4	60
1	2	3	3	5	60
1	2	3	3	6	60
1	2	3	4	4	60
1	2	3	4	5	120
1	2	3	4	6	120
1	2	3	5	5	60
1	2	3	5	6	120
1	2	3	6	6	60
1	2	4	4	4	20
1	2	4	4	5	60
1	2	4	4	6	60
1	2	4	5	5	60
1	2	4	5	6	120
1	2	4	6	6	60
1	2	5	5	5	20
1	2	5	5	6	60
1	2	5	6	6	60
1	2	6	6	6	20
1	3	3	3	3	5
1	3	3	3	4	20
1	3	3	3	5	20
1	3	3	3	6	20
1	3	3	4	4	30
1	3	3	4	5	60
1	3	3	4	6	60

Tabelle 59: Würfelergebnisse beim Wurf mit fünf Würfeln: Teil 2

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
1	3	3	5	5	30
1	3	3	5	6	60
1	3	3	6	6	30
1	3	4	4	4	20
1	3	4	4	5	60
1	3	4	4	6	60
1	3	4	5	5	60
1	3	4	5	6	120
1	3	4	6	6	60
1	3	5	5	5	20
1	3	5	5	6	60
1	3	5	6	6	60
1	3	6	6	6	20
1	4	4	4	4	5
1	4	4	4	5	20
1	4	4	4	6	20
1	4	4	5	5	30
1	4	4	5	6	60
1	4	4	6	6	30
1	4	5	5	5	20
1	4	5	5	6	60
1	4	5	6	6	60
1	4	6	6	6	20
1	5	5	5	5	5
1	5	5	5	6	20
1	5	5	6	6	30
1	5	6	6	6	20
1	6	6	6	6	5
2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	3	5
2	2	2	2	4	5
2	2	2	2	5	5
2	2	2	2	6	5
2	2	2	3	3	10
2	2	2	3	4	20
2	2	2	3	5	20
2	2	2	3	6	20
2	2	2	4	4	10
2	2	2	4	5	20
2	2	2	4	6	20
2	2	2	5	5	10
2	2	2	5	6	20
2	2	2	6	6	10
2	2	3	3	3	10
2	2	3	3	4	30
2	2	3	3	5	30
2	2	3	3	6	30
2	2	3	4	4	30
2	2	3	4	5	60

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
2	2	3	4	6	60
2	2	3	5	5	30
2	2	3	5	6	60
2	2	3	6	6	30
2	2	4	4	4	10
2	2	4	4	5	30
2	2	4	4	6	30
2	2	4	5	5	30
2	2	4	5	6	60
2	2	4	6	6	30
2	2	5	5	5	10
2	2	5	5	6	30
2	2	5	6	6	30
2	2	6	6	6	10
2	3	3	3	3	5
2	3	3	3	4	20
2	3	3	3	5	20
2	3	3	3	6	20
2	3	3	4	4	30
2	3	3	4	5	60
2	3	3	4	6	60
2	3	3	5	5	30
2	3	3	5	6	60
2	3	3	6	6	30
2	3	4	4	4	20
2	3	4	4	5	60
2	3	4	4	6	60
2	3	4	5	5	60
2	3	4	5	6	120
2	3	4	6	6	60
2	3	5	5	5	20
2	3	5	5	6	60
2	3	5	6	6	60
2	3	6	6	6	20
2	4	4	4	4	5
2	4	4	4	5	20
2	4	4	4	6	20
2	4	4	5	5	30
2	4	4	5	6	60
2	4	4	6	6	30
2	4	5	5	5	20
2	4	5	5	6	60
2	4	5	6	6	60
2	4	6	6	6	20
2	5	5	5	5	5
2	5	5	5	6	20
2	5	5	6	6	30
2	5	6	6	6	20
2	6	6	6	6	5

Tabelle 60: Würfelergebnisse beim Wurf mit fünf Würfeln: Teil 3

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
3	3	3	3	3	1
3	3	3	3	4	5
3	3	3	3	5	5
3	3	3	3	6	5
3	3	3	4	4	10
3	3	3	4	5	20
3	3	3	4	6	20
3	3	3	5	5	10
3	3	3	5	6	20
3	3	3	6	6	10
3	3	4	4	4	10
3	3	4	4	5	30
3	3	4	4	6	30
3	3	4	5	5	30
3	3	4	5	6	60
3	3	4	6	6	30
3	3	5	5	5	10
3	3	5	5	6	30
3	3	5	6	6	30
3	3	6	6	6	10
3	4	4	4	4	5
3	4	4	4	5	20
3	4	4	4	6	20
3	4	4	5	5	30
3	4	4	5	6	60
3	4	4	6	6	30
3	4	5	5	5	20
3	4	5	5	6	60
3	4	5	6	6	60
3	4	6	6	6	20
3	5	5	5	5	5
3	5	5	5	6	20
3	5	5	6	6	30
3	5	6	6	6	20
3	6	6	6	6	5
4	4	4	4	4	1
4	4	4	4	5	5
4	4	4	4	6	5
4	4	4	5	5	10
4	4	4	5	6	20
4	4	4	6	6	10
4	4	5	5	5	10
4	4	5	5	6	30
4	4	5	6	6	30
4	4	6	6	6	10
4	5	5	5	5	5
4	5	5	5	6	20
4	5	5	6	6	30
4	5	6	6	6	20

1. W	2. W	3. W	4. W	5. W	#
4	6	6	6	6	5
5	5	5	5	5	1
5	5	5	5	6	5
5	5	5	6	6	10
5	5	6	6	6	10
5	6	6	6	6	5
6	6	6	6	6	1

Tabelle 61: Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln: Teil 1

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	6
1	1	1	1	1	3	6
1	1	1	1	1	4	6
1	1	1	1	1	5	6
1	1	1	1	1	6	6
1	1	1	1	2	2	15
1	1	1	1	2	3	30
1	1	1	1	2	4	30
1	1	1	1	2	5	30
1	1	1	1	2	6	30
1	1	1	1	3	3	15
1	1	1	1	3	4	30
1	1	1	1	3	5	30
1	1	1	1	3	6	30
1	1	1	1	4	4	15
1	1	1	1	4	5	30
1	1	1	1	4	6	30
1	1	1	1	5	5	15
1	1	1	1	5	6	30
1	1	1	1	6	6	15
1	1	1	2	2	2	20
1	1	1	2	2	3	60
1	1	1	2	2	4	60
1	1	1	2	2	5	60
1	1	1	2	2	6	60
1	1	1	2	3	3	60
1	1	1	2	3	4	120
1	1	1	2	3	5	120
1	1	1	2	3	6	120
1	1	1	2	4	4	60
1	1	1	2	4	5	120
1	1	1	2	4	6	120
1	1	1	2	5	5	60
1	1	1	2	5	6	120
1	1	1	2	6	6	60
1	1	1	3	3	3	20
1	1	1	3	3	4	60
1	1	1	3	3	5	60
1	1	1	3	3	6	60
1	1	1	3	4	4	60
1	1	1	3	4	5	120
1	1	1	3	4	6	120
1	1	1	3	5	5	60
1	1	1	3	5	6	120
1	1	1	3	6	6	60
1	1	1	4	4	4	20
1	1	1	4	4	5	60
1	1	1	4	4	6	60

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	1	1	4	5	5	60
1	1	1	4	5	6	120
1	1	1	4	6	6	60
1	1	1	5	5	5	20
1	1	1	5	5	6	60
1	1	1	5	6	6	60
1	1	1	6	6	6	20
1	1	2	2	2	2	15
1	1	2	2	2	3	60
1	1	2	2	2	4	60
1	1	2	2	2	5	60
1	1	2	2	2	6	60
1	1	2	2	3	3	90
1	1	2	2	3	4	180
1	1	2	2	3	5	180
1	1	2	2	3	6	180
1	1	2	2	4	4	90
1	1	2	2	4	5	180
1	1	2	2	4	6	180
1	1	2	2	5	5	90
1	1	2	2	5	6	180
1	1	2	2	6	6	90
1	1	2	3	3	3	60
1	1	2	3	3	4	180
1	1	2	3	3	5	180
1	1	2	3	3	6	180
1	1	2	3	4	4	180
1	1	2	3	4	5	360
1	1	2	3	4	6	360
1	1	2	3	5	5	180
1	1	2	3	5	6	360
1	1	2	3	6	6	180
1	1	2	4	4	4	60
1	1	2	4	4	5	180
1	1	2	4	4	6	180
1	1	2	4	5	5	180
1	1	2	4	5	6	360
1	1	2	4	6	6	180
1	1	2	5	5	5	60
1	1	2	5	5	6	180
1	1	2	5	6	6	180
1	1	2	6	6	6	60
1	1	3	3	3	3	15
1	1	3	3	3	4	60
1	1	3	3	3	5	60
1	1	3	3	3	6	60
1	1	3	3	4	4	90
1	1	3	3	4	5	180
1	1	3	3	4	6	180

Tabelle 62: Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln: Teil 2

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	1	3	3	5	5	90
1	1	3	3	5	6	180
1	1	3	3	6	6	90
1	1	3	4	4	4	60
1	1	3	4	4	5	180
1	1	3	4	4	6	180
1	1	3	4	5	5	180
1	1	3	4	5	6	360
1	1	3	4	6	6	180
1	1	3	5	5	5	60
1	1	3	5	5	6	180
1	1	3	5	6	6	180
1	1	3	6	6	6	60
1	1	4	4	4	4	15
1	1	4	4	4	5	60
1	1	4	4	4	6	60
1	1	4	4	5	5	90
1	1	4	4	5	6	180
1	1	4	4	6	6	90
1	1	4	5	5	5	60
1	1	4	5	5	6	180
1	1	4	5	6	6	180
1	1	4	6	6	6	60
1	1	5	5	5	5	15
1	1	5	5	5	6	60
1	1	5	5	6	6	90
1	1	5	6	6	6	60
1	1	6	6	6	6	15
1	2	2	2	2	2	6
1	2	2	2	2	3	30
1	2	2	2	2	4	30
1	2	2	2	2	5	30
1	2	2	2	2	6	30
1	2	2	2	3	3	60
1	2	2	2	3	4	120
1	2	2	2	3	5	120
1	2	2	2	3	6	120
1	2	2	2	4	4	60
1	2	2	2	4	5	120
1	2	2	2	4	6	120
1	2	2	2	5	5	60
1	2	2	2	5	6	120
1	2	2	2	6	6	60
1	2	2	3	3	3	60
1	2	2	3	3	4	180
1	2	2	3	3	5	180
1	2	2	3	3	6	180
1	2	2	3	4	4	180
1	2	2	3	4	5	360

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	2	2	3	4	6	360
1	2	2	3	5	5	180
1	2	2	3	5	6	360
1	2	2	3	6	6	180
1	2	2	4	4	4	60
1	2	2	4	4	5	180
1	2	2	4	4	6	180
1	2	2	4	5	5	180
1	2	2	4	5	6	360
1	2	2	4	6	6	180
1	2	2	5	5	5	60
1	2	2	5	5	6	180
1	2	2	5	6	6	180
1	2	2	6	6	6	60
1	2	3	3	3	3	30
1	2	3	3	3	4	120
1	2	3	3	3	5	120
1	2	3	3	3	6	120
1	2	3	3	4	4	180
1	2	3	3	4	5	360
1	2	3	3	4	6	360
1	2	3	3	5	5	180
1	2	3	3	5	6	360
1	2	3	3	6	6	180
1	2	3	4	4	4	120
1	2	3	4	4	5	360
1	2	3	4	4	6	360
1	2	3	4	5	5	360
1	2	3	4	5	6	720
1	2	3	4	6	6	360
1	2	3	5	5	5	120
1	2	3	5	5	6	360
1	2	3	5	6	6	360
1	2	3	6	6	6	120
1	2	4	4	4	4	30
1	2	4	4	4	5	120
1	2	4	4	4	6	120
1	2	4	4	5	5	180
1	2	4	4	5	6	360
1	2	4	4	6	6	180
1	2	4	5	5	5	120
1	2	4	5	5	6	360
1	2	4	5	6	6	360
1	2	4	6	6	6	120
1	2	5	5	5	5	30
1	2	5	5	5	6	120
1	2	5	5	6	6	180
1	2	5	6	6	6	120
1	2	6	6	6	6	30

Tabelle 63: Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln: Teil 3

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	3	3	3	3	3	6
1	3	3	3	3	4	30
1	3	3	3	3	5	30
1	3	3	3	3	6	30
1	3	3	3	4	4	60
1	3	3	3	4	5	120
1	3	3	3	4	6	120
1	3	3	3	5	5	60
1	3	3	3	5	6	120
1	3	3	3	6	6	60
1	3	3	4	4	4	60
1	3	3	4	4	5	180
1	3	3	4	4	6	180
1	3	3	4	5	5	180
1	3	3	4	5	6	360
1	3	3	4	6	6	180
1	3	3	5	5	5	60
1	3	3	5	5	6	180
1	3	3	5	6	6	180
1	3	3	6	6	6	60
1	3	4	4	4	4	30
1	3	4	4	4	5	120
1	3	4	4	4	6	120
1	3	4	4	5	5	180
1	3	4	4	5	6	360
1	3	4	4	6	6	180
1	3	4	5	5	5	120
1	3	4	5	5	6	360
1	3	4	5	6	6	360
1	3	4	6	6	6	120
1	3	5	5	5	5	30
1	3	5	5	5	6	120
1	3	5	5	6	6	180
1	3	5	6	6	6	120
1	3	6	6	6	6	30
1	4	4	4	4	4	6
1	4	4	4	4	5	30
1	4	4	4	4	6	30
1	4	4	4	5	5	60
1	4	4	4	5	6	120
1	4	4	4	6	6	60
1	4	4	5	5	5	60
1	4	4	5	5	6	180
1	4	4	5	6	6	180
1	4	4	6	6	6	60
1	4	5	5	5	5	30
1	4	5	5	5	6	120
1	4	5	5	6	6	180
1	4	5	6	6	6	120

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
1	4	6	6	6	6	30
1	5	5	5	5	5	6
1	5	5	5	5	6	30
1	5	5	5	6	6	60
1	5	5	6	6	6	60
1	5	6	6	6	6	30
1	6	6	6	6	6	6
2	2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	3	6
2	2	2	2	2	4	6
2	2	2	2	2	5	6
2	2	2	2	2	6	6
2	2	2	2	3	3	15
2	2	2	2	3	4	30
2	2	2	2	3	5	30
2	2	2	2	3	6	30
2	2	2	2	4	4	15
2	2	2	2	4	5	30
2	2	2	2	4	6	30
2	2	2	2	5	5	15
2	2	2	2	5	6	30
2	2	2	2	6	6	15
2	2	2	3	3	3	20
2	2	2	3	3	4	60
2	2	2	3	3	5	60
2	2	2	3	3	6	60
2	2	2	3	4	4	60
2	2	2	3	4	5	120
2	2	2	3	4	6	120
2	2	2	3	5	5	60
2	2	2	3	5	6	120
2	2	2	3	6	6	60
2	2	2	4	4	4	20
2	2	2	4	4	5	60
2	2	2	4	4	6	60
2	2	2	4	5	5	60
2	2	2	4	5	6	120
2	2	2	4	6	6	60
2	2	2	5	5	5	20
2	2	2	5	5	6	60
2	2	2	5	6	6	60
2	2	2	6	6	6	20
2	2	3	3	3	3	15
2	2	3	3	3	4	60
2	2	3	3	3	5	60
2	2	3	3	3	6	60
2	2	3	3	4	4	90
2	2	3	3	4	5	180
2	2	3	3	4	6	180

Tabelle 64: Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln: Teil 4

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
2	2	3	3	5	5	90
2	2	3	3	5	6	180
2	2	3	3	6	6	90
2	2	3	4	4	4	60
2	2	3	4	4	5	180
2	2	3	4	4	6	180
2	2	3	4	5	5	180
2	2	3	4	5	6	360
2	2	3	4	6	6	180
2	2	3	5	5	5	60
2	2	3	5	5	6	180
2	2	3	5	6	6	180
2	2	3	6	6	6	60
2	2	4	4	4	4	15
2	2	4	4	4	5	60
2	2	4	4	4	6	60
2	2	4	4	5	5	90
2	2	4	4	5	6	180
2	2	4	4	6	6	90
2	2	4	5	5	5	60
2	2	4	5	5	6	180
2	2	4	5	6	6	180
2	2	4	6	6	6	60
2	2	5	5	5	5	15
2	2	5	5	5	6	60
2	2	5	5	6	6	90
2	2	5	6	6	6	60
2	2	6	6	6	6	15
2	3	3	3	3	3	6
2	3	3	3	3	4	30
2	3	3	3	3	5	30
2	3	3	3	3	6	30
2	3	3	3	4	4	60
2	3	3	3	4	5	120
2	3	3	3	4	6	120
2	3	3	3	5	5	60
2	3	3	3	5	6	120
2	3	3	3	6	6	60
2	3	3	4	4	4	60
2	3	3	4	4	5	180
2	3	3	4	4	6	180
2	3	3	4	5	5	180
2	3	3	4	5	6	360
2	3	3	4	6	6	180
2	3	3	5	5	5	60
2	3	3	5	5	6	180
2	3	3	5	6	6	180
2	3	3	6	6	6	60
2	3	4	4	4	4	30

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
2	3	4	4	4	5	120
2	3	4	4	4	6	120
2	3	4	4	5	5	180
2	3	4	4	5	6	360
2	3	4	4	6	6	180
2	3	4	5	5	5	120
2	3	4	5	5	6	360
2	3	4	5	6	6	360
2	3	4	6	6	6	120
2	3	5	5	5	5	30
2	3	5	5	5	6	120
2	3	5	5	6	6	180
2	3	5	6	6	6	120
2	3	6	6	6	6	30
2	4	4	4	4	4	6
2	4	4	4	4	5	30
2	4	4	4	4	6	30
2	4	4	4	5	5	60
2	4	4	4	5	6	120
2	4	4	4	6	6	60
2	4	4	5	5	5	60
2	4	4	5	5	6	180
2	4	4	5	6	6	180
2	4	4	6	6	6	60
2	4	5	5	5	5	30
2	4	5	5	5	6	120
2	4	5	5	6	6	180
2	4	5	6	6	6	120
2	4	6	6	6	6	30
2	5	5	5	5	5	6
2	5	5	5	5	6	30
2	5	5	5	6	6	60
2	5	5	6	6	6	60
2	5	6	6	6	6	30
2	6	6	6	6	6	6
3	3	3	3	3	3	1
3	3	3	3	3	4	6
3	3	3	3	3	5	6
3	3	3	3	3	6	6
3	3	3	3	4	4	15
3	3	3	3	4	5	30
3	3	3	3	4	6	30
3	3	3	3	5	5	15
3	3	3	3	5	6	30
3	3	3	3	6	6	15
3	3	3	4	4	4	20
3	3	3	4	4	5	60
3	3	3	4	4	6	60
3	3	3	4	5	5	60

Tabelle 65: Würfelergebnisse beim Wurf mit sechs Würfeln: Teil 5

1.W	2.W	3.W	4.W	5.W	6.W	#
3	3	3	4	5	6	120
3	3	3	4	6	6	60
3	3	3	5	5	5	20
3	3	3	5	5	6	60
3	3	3	5	6	6	60
3	3	3	6	6	6	20
3	3	4	4	4	4	15
3	3	4	4	4	5	60
3	3	4	4	4	6	60
3	3	4	4	5	5	90
3	3	4	4	5	6	180
3	3	4	4	6	6	90
3	3	4	5	5	5	60
3	3	4	5	5	6	180
3	3	4	5	6	6	180
3	3	4	6	6	6	60
3	3	5	5	5	5	15
3	3	5	5	5	6	60
3	3	5	5	6	6	90
3	3	5	6	6	6	60
3	3	6	6	6	6	15
3	4	4	4	4	4	6
3	4	4	4	4	5	30
3	4	4	4	4	6	30
3	4	4	4	5	5	60
3	4	4	4	5	6	120
3	4	4	4	6	6	60
3	4	4	5	5	5	60
3	4	4	5	5	6	180
3	4	4	5	6	6	180
3	4	4	6	6	6	60
3	4	5	5	5	5	30
3	4	5	5	5	6	120
3	4	5	5	6	6	180
3	4	5	6	6	6	120
3	4	6	6	6	6	30
3	5	5	5	5	5	6
3	5	5	5	5	6	30
3	5	5	5	6	6	60
3	5	5	6	6	6	60
3	5	6	6	6	6	30
3	6	6	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	1
4	4	4	4	4	5	6
4	4	4	4	4	6	6
4	4	4	4	5	5	15
4	4	4	4	5	6	30
4	4	4	4	6	6	15
4	4	4	5	5	5	20
4	4	4	5	5	6	60
4	4	4	5	6	6	60
4	4	4	6	6	6	20
4	4	5	5	5	5	15
4	4	5	5	5	6	60
4	4	5	5	6	6	90
4	4	5	6	6	6	60
4	4	6	6	6	6	15
4	5	5	5	5	5	6
4	5	5	5	5	6	30
4	5	5	5	6	6	60
4	5	5	6	6	6	60
4	5	6	6	6	6	30
4	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	1
5	5	5	5	5	6	6
5	5	5	5	6	6	15
5	5	5	6	6	6	20
5	5	6	6	6	6	15
5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	1

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] Berliner Würfelmeisterschaft. (2009). Würfelspiel 10000 - Spielanleitung. Retrieved from http://www.pool-lounge-berlin.de/10000_meisterschaft.pdf, 6.6.2014.

[2] Henze, Norbert. *Stochastik für Einsteiger*. Springer Spektrum, 10. Auflage, 2013.

[3] Kastner, Hugo. *Die große Humboldt Enzyklopädie der Würfelspiele*. Humboldt Verlags GmbH, 2007.

[4] Wiener Spielkartenfabrik Ferd. Piatnik und Söhne. *Kombiregel Würfel- + Kartenpoker*. Piatnik Wien, 1989.