universität wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Ein mathematischer überflüssiger Luxus?

Verschiedene Einstiege in das Themenfeld der Linearen Gleichungssysteme im schulischen Kontext“

Verfasser

Mag. Bernhard Steiner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016

| | |
|---|---|
| Studienkennzahl lt. Studienblatt: | A 190 406 313 |
| Studienrichtung lt. Studienblatt: | Lehramtsstudium Mathematik Geschichte, Sozialkunde, Politische Bildung |
| Betreuer: | ao. Univ.-Prof. Dr. Günter Hanisch |

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Vorwort

*„Wie fang´ ich nach der Regel an?“*[1]

Diese Frage stellt nicht nur der junge Ritter Walther von Franken dem Schustermeister Hans Sachs in Richard Wagners Oper „Die Meistersinger von Nürnberg“. Diese Frage beschäftigt jedem/jeder, der/die darüber nachdenkt, wie er/sie beispielsweise einen Vortrag, ein Buch, eine Unterrichtsstunde oder auch ein Unterrichtsthema beginnen soll, denn soll zum Beispiel mit einer Vorbemerkung, einem systematischen Vorblick auf den Aufbau oder gar mit einem „Sprung ins kalte Wasser“ begonnen werden? Andererseits handelt es sich hierbei aber nicht nur um eine formale darstellungstechnische Frage, denn entscheidend ist unter anderem auch, welche Rollen den jeweiligen betreffenden Personen und der Sache selbst zugewiesen werden. Soll nämlich der/die Zuhörer/in, Leser/in beziehungsweise Schüler/in, wie Hans Aebli[2] fordert, quasi von einem/einer „Bergführer/in“, der/die den sicheren Weg zum Gipfel kennt und somit fürs Herumsuchen nach passenden Möglichkeiten keine Zeit verliert, oder, wie Martin Wagenschein[3] meint, von einer Person, die die *„Fähigkeit zum fremden Blick erhalten hat“*[4], geleitet werden?[5]

Die vorliegende Diplomarbeit widmet sich dieser Frage und stellt nach einer Einführung (vgl. Kapitel 2 und 3), bei der der/die Leser/in einerseits auf die Notwendigkeit verschiedener Einstiege in ein neues Unterrichtsthema sensibilisiert (vgl. Kapitel 2) und andererseits auf die rechtlichen Rahmenbedingungen (vgl. Kapitel 3) hingewiesen werden soll, sowohl bekannte (vgl. Kapitel 4.1. und 4.2.) als auch außergewöhnliche, kreative Vorschläge und Anregungen (vgl.

---

[1] Richard *Wagner*, Libretti. Die Meistersinger von Nürnberg, online unter <http://www.rwagner.net/libretti/meisters/g-meisters-a3s2.html> (14.8.2016).
[2] vgl. Hans *Aebli*, Zwölf Grundformen des Lehrens (Stuttgart [5]1990).
[3] vgl. Martin *Wagenschein*, Erinnerungen für morgen (Basel 1989); Martin Wagenschein, „… zäh am Staunen“ (Seelze-Velber 2002).
[4] Horst *Rumpf*, Aufmerksam machen und aufmerksam werden – Unterrichtsauftakte bei Aebli und Wagenschein, In: Dorit *Bosse*, Peter *Posch* (Hg.), Schule 2020 aus Expertensicht. Zur Zukunft von Schule, Unterricht und Lehrerbildung (Wiesbaden 2009) 233.
Diese Fähigkeit hat zur Folge, dass einerseits die vortragende beziehungsweise schreibende Person, die beispielsweise im Gegensatz zu den Laien und Kindern, die noch nicht darüber Bescheid wissen, dabei genauso ins Staunen versetzt wird und andererseits sowohl die Fragen als auch deren Antworten nicht vorgefertigt und vorentschieden sind (vgl. Horst *Rumpf*, Aufmerksam machen und aufmerksam werden 233.).
[5] Richard *Wagner*, Libretti. Die Meistersinger von Nürnberg; Horst *Rumpf*, Aufmerksam machen und aufmerksam werden 231-236.

Kapitel 4.3., 4.4. und 4.5.) für die 8. Schulstufe[6] vor, mit denen das Themenfeld „Lineare Gleichungssysteme“ „entdeckt“ werden kann. Der Bogen spannt sich hierbei daher über den bekannten algebraischen Weg bis hin zu einem anschaulich-spielerischen Weg. Ein wesentliches Augenmerk beim Erläutern dieser einzelnen Wege ist aber, dass jene Einstiege ideal auf 13- bis 14-jährige Schüler/innen abgestimmt sind, um eine aus Sicht einer Lehrkraft größtmögliche Alltagstauglichkeit gewährleisten zu können. Weil es aber nicht den allgemeingültigen „besten“ Zugang gibt, werden in der anschließenden fachdidaktischen Analyse (vgl. Kapitel 5) unter anderem die jeweiligen fachlichen Kriterien, wie beispielsweise Voraussetzungen an Kenntnissen und Fähigkeiten, Schwierigkeiten, Verallgemeinerbarkeit, Vorteile, Nachteile etc. charakterisiert, um die Eignung des gewählten Einstiegs besser abschätzen zu können.

Ziel dieser Diplomarbeit ist daher neben dem Vorstellen und Analysieren bekannter und deshalb in Mathematikschulbüchern der 8. Schulstufe häufig vorzufindender Einstiege – wie dem algebraischen Weg – auch das Präsentieren alternativer Einstiege. Andererseits soll dem/der Leser/in Lust gemacht werden, eigene kreative Ideen – womöglich auch für andere Themenfelder – zu entwickeln.

Als Grundlage der verschiedenen Einstiege dienen vor allem die Arbeiten von Günter Hanisch, Isabella Benischek, Petra Hauer-Typpelt, Eva Sattlberger, Dagmar Bertalan, Martin Kramer, Johanna Harnischfeger und Heiner Juen. Für die fachdidaktische Analyse waren die Arbeiten von Friedrich Zech, Timo Leuders, Bärbel Barzel, Hans-Joachim Vollrath, Jürgen Roth, Wolfgang Hallet, Sylvia Jahnke-Klein, Markus Hohenwarter, Manfred Kronfellner und Astrid Brinkmann sehr hilfreich. Dennoch darf hier aber bei dieser Vielzahl an Autor/innen nicht übersehen werden, dass deren Arbeiten nur stets Teilaspekte des vorliegenden Themas abdecken. Somit wird mit dieser Arbeit einerseits im Hinblick auf den Einstieg in das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ und andererseits auch hinsichtlich sämtlicher Themen der Sekundarstufe 1 gänzliches Neuland betreten, da keine vergleichbaren Arbeiten vorliegen, die in diesem Facettenreichtum unterschiedliche Einstiege in Themen der Sekundarstufe 1 vorstellen und auch beleuchten.

[6] Diese Arbeit bezieht sich somit auf sämtliche Schultypen.

Zuletzt möchte ich mich an dieser Stelle aber noch bei einigen Personen bedanken. So geht ein großer Dank an meinen Diplomarbeitsbetreuer ao. Univ.-Prof. Dr. Günter Hanisch, der mich nicht nur im Zuge des Verfassens der vorliegenden Arbeit großzügig unterstützt hat, sondern auch in seinen Vorlesungen und Seminaren mir wertvolle und nützliche Anregungen und Ideen für den Lehrberuf sowie den Anstoß für diese vorliegende Arbeit gegeben hat. Weiters möchte ich mich ebenso bei all meinen Schüler/innen bedanken, die mir stets zeigen, wie schön der Lehrberuf trotz der damit verbundenen Herausforderungen tagtäglich sein kann.

Mein ganz besonderer Dank geht an mein familiäres Umfeld, das mich seit jeher bei all meinen Plänen und Ideen verständnisvoll unterstützt und hilft. Danke!

# 2. Verschiedene Einstiege? Wozu? – eine kurze Einführung

„Differenzierung“ und „Individualisierung“ sind heute zwei Begriffe, welche auf Grund der zunehmenden Heterogenität[7] der Gesellschaft und somit auch der Klasse für eine Lehrkraft immer zentraler werden.[8] Allerdings wies aber bereits der erste Pädagogikprofessor von Deutschland, Ernst Christian Trapp, 1780 in seinem Buch „Versuch einer Pädagogik“ darauf hin,[9] dass *„*[a]*ber etwas* […] *aus jedem werden* [kann]*, und dis Etwas muß man aus ihm machen, wenn man gehörig für sein Wohl und für das Wohl der Gesellschaft wozu er gehört sorgen will.“*[10] Außerdem fügte er auch hinzu, dass es für die Lehrperson zwei zu lösende Herausforderungen gibt.

1. *„Diese Quelle*[11] *fließt nicht in jedem einzelnen Menschen gleich stark. Man muß also auch nicht aus Allen Alles machen wollen.“*[12]

2. *„*[D]*ieses erschwert also auch die Erziehung, besonders alsdann, wann viele Kinder gemeinschaftlich erzogen werden.“*[13] Denn *„*[…] *wie hast du alles dis anzufangen bei einem Haufen Kinder, deren Anlagen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Neigungen, Bestimmungen verschieden sind, die aber*

---

[7] Wenning kategorisiert den Begriff „Heterogenität“ in Bezug auf die institutionalisierte Bildung wie folgt: 1) leistungsbedingte Heterogenität, 2) Altersheterogenität und Heterogenität des Entwicklungsstandes, 3) sozialkulturelle Heterogenität, 4) sprachliche Heterogenität, 5) migrationsbedingte Heterogenität, 6) gesundheits- und körperbezogene Heterogenität, 7) geschlechtsbezogene Heterogenität (vgl. Norbert *Wenning*, Heterogenität als Dilemma für Bildungseinrichtungen, In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlunsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 25-26.)

[8] Ingrid *Salner-Gridling*, Querfeldein: individuell lernen – differenziert lehren (Wien 2009), online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/mat_querfeldein_18764.pdf?4dzgm2> (14.8.2015) 13.
Verankert sind diese beiden Begriffe auch in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen des allgemeinen Teil des Lehrplans (vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil, online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2> (14.8.2015) 5.)

[9] Matthias *Trautmann*, Beate *Wischer*, Heterogenität in der Schule. Eine kritische Einführung (Wiesbaden 2011) 7.

[10] Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik (Berlin 1780), online unter <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/fwhb/trapp1780> (14.8.2015) 12.

[11] Darunter versteht der Autor bestimmte Fähigkeiten und Fertigkeiten (vgl. Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik 12.).

[12] Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik 12.

[13] Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik 12-13.

> *doch in einer und eben derselben Stunde von dir erzogen werden sollen?“*[14]

Daher sind aus Sicht des Unterrichtens das bewusste Wahrnehmen von Unterschieden sowie der bewusste Umgang mit der Heterogenität Grundvoraussetzungen pädagogischen Handelns. Gewährleistet kann dies wiederum mit Hilfe des Konzepts der Individualisierung werden.[15]

> *„Unter Individualisierung verstehen wir* [gemeint ist das Bundesministerium] *die Gesamtheit aller unterrichtsmethodischen und lern-/lehrorganisatorischen Maßnahmen, die davon ausgehen, dass das Lernen eine ganz persönliche Eigenaktivität jeder einzelnen Schülerin bzw. jedes einzelnen Schülers selbst ist, und die darauf abzielen, die Schülerinnen und Schüler dabei gemäß ihrer Persönlichkeit, ihrer Lernvoraussetzungen und Potenziale bestmöglich zu fördern und zu fordern. Unser besonderes Augenmerk gilt daher den Bereichen Lernstandsbeobachtung, Unterrichtsplanung, Aufgabengestaltung und Leistungsrückmeldung.*
>
> *Vielfalt („Heterogenität“, „Diversität“) ist in der Schule der Normalfall – sowohl was individuelle Unterschiede betrifft als auch solche zwischen sozialen Gruppierungen. Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich etwa nach Leistungsfähigkeit, Lernstil, Lerntempo oder Motivlage, nach Muttersprache, Geschlecht oder sozialer Herkunft: Die „durchschnittliche“ Schülerin, den „durchschnittlichen“ Schüler gibt es nur in der Statistik!“*[16]

Das heißt, dass die Schüler/innen sich innerhalb einer Klasse beispielsweise durch verschiedene Lernvoraussetzungen und Begabungen, soziale Voraussetzungen, aber auch durch das Geschlecht unterscheiden und dies von Seiten der Lehrkraft berücksichtigt werden muss. Thea Stroot unterstreicht dies, denn „[j]*ede Person setzt sich mit ihren eigenen sozialen Bedingungen zu anderen, zum Lerninhalt und zu den Lernformen in Beziehung. Diese Betrachtungsweise*

[14] Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik 15.
[15] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern. Informationen und Anregungen zur Umsetzung ab der 5. Schulstufe (Wien ³2014) 48.
[16] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Initiative „25+“: Individualisierung des Unterrichts. Persönlichkeit und Lernvoraussetzung der einzelnen Schülerinnen und Schüler in den Mittelpunkt stellen. Rundschreiben Nr. 9/2007, online unter <https://www.bmbf.gv.at/ministerium/rs/2007_09.html> (14.8.2015).

*impliziert, die Mitglieder einer Lerngruppe nicht (nur) als kategoriale Ausprägungen bzw. als Angehörige einer Majorität oder Minorität wahrzunehmen, sondern zielt darauf, das Gegenüber im Kontext seiner gesellschaftlichen Bedingtheit zu erfassen. Jede Person greift mit ihrer eigenen Perspektive auf die Themen zu und geht mit je individuellen* [sic] *Wissensständen, Erfahrungen und Motivationen an die Lernprozesse heran.“*[17]

Zusammenfassend kann daher über den Begriff „Individualisierung“ gesagt werden, dass durch die Individualisierung einerseits jedem Menschen die Möglichkeit offensteht, sein/ihr intellektuelles, soziales, affektives und motorisches Potenzial zu entfalten,[18] und dass andererseits sämtliche Maßnahmen *„aus der Perspektive des Lernens und des Lernenden gedacht“*[19] werden müssen.

Aus Sicht von Klafki hat dies wiederum zur Folge, dass, *„*[w]*enn Unterricht jeden einzelnen Schüler optimal fördern will, wenn er jedem zu einem möglichst hohen Grad von Selbsttätigkeit und Selbständigkeit verhelfen und Schüler zu sozialer Kontakt- und Kooperationsfähigkeit befähigen will,* [er] *dann* […] *im Sinne innerer Differenzierung durchdacht werden* [muss]*.“*[20] Manfred Bönsch verfeinert diese Definition von Differenzierung.

> *„Unter Differenzierung wird einmal das variierende Vorgehen in der Darbietung und Bearbeitung von Lerninhalten verstanden, zum anderen die Einteilung bzw. Zugehörigkeit von Lernenden zu Lerngruppen nach bestimmten Kriterien. Es geht um die Einlösung des Anspruchs, jedem Lernenden auf optimale Weise Lernchancen zu bieten, dabei die Ansprüche*

---

[17] Thea *Stroot*, Vom Diversity-Management zu „Learning Diversity“. Vielfalt in der Organisation Schule. In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlungsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 53.

[18] bifie, Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis (Graz 2011), online unter <https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf> (14.8.2015) 17.

[19] Marlies *Krainz-Dürr*, Individualisierung als pädagogischer Auftrag, In: Schulnews 06/2007 1-2.

[20] Wolfgang *Klafki*, Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik (Weinheim, Basel 1996) 181. Innere Differenzierung lässt sich aus Sicht von Klafki allerdings in zwei Grundformen unterteilen. So lässt sich diese einerseits durch Methoden und Medien und andererseits durch Lernziele und Lerninhalte realisieren (vgl. bifie, Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis 15.).

*und Standards in fachlicher, institutioneller und gesellschaftlicher Hinsicht zu sichern und gleichzeitig lernorientiert aufzuarbeiten.“*[21]

*„Unter Binnendifferenzierung wird eine gruppeninterne Differenzierung verstanden. Die zugrundeliegende Differenzierungskriterien können unterschiedlich sein: Lerngeschwindigkeit, Arbeitsmenge, Leistungshöhe, Lernschwierigkeiten, Arbeitsweisen, Kooperation, Interessen usw. Die Gruppe kann unterschiedlich groß sein: Klasse, Großgruppe, Kleingruppe. Binnendifferenzierung strebt keine Dauerlösung an; sie bleibt in der Regel situations- und lernzielgebunden. Im Extremfall bedeutet Binnendifferenzierung Individualisierung.“*[22]

Für Manfred Bönsch hängen deshalb Differenzierung und Individualisierung eng zusammen und sind für Liane Paradies und Hans Jürgen Linser[23] die Grundlage, dass jede/r Schüler/in *„individuell maximal gefordert und damit optimal gefördert wird.“*[24] Jedoch muss aus Bönsch Sicht auch das Gemeinsame im Unterricht einen zentralen Platz erhalten und bei der Unterrichtsplanung berücksichtigt werden, denn Individualisierung und Kollektivierung müssen *„verantwortungsvoll didaktisch balanciert“*[25] werden. Wichtig dabei ist ihm aber, dass die Schüler/innen an einem gemeinsamen Thema lernen, einen gemeinsamen Unterricht erhalten, bei dem jede/r individuell gefördert wird, und einzelne nicht aus diesem gemeinsamen Unterricht ausgeschlossen werden.[26]

Essenziell sind diese Individualisierung und Differenzierung auch dahingehend, da sie aus Sicht beispielsweise von Hilbert Meyer wesentliche Merkmale guten Unterrichts sind, denn für ihn spielen diese beiden Begriffe eine große Rolle bei den zehn Merkmalen guten Unterrichts.

- *„Klare Strukturierung des Unterrichts (Prozessklarheit; Rollenklarheit, Absprache von Regeln, Ritualen und Freiräumen)*

---

[21] Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? – Maßnahmen der Inneren Differenzierung und Individualisierung als Aufgabe für Sonderpädagogik und Allgemeine (Integrations-) Pädagogik auf dem Weg zu einer inklusiven Didaktik. In: Irmtraud *Schnell*, Alfred *Sander* (Hg.), Inklusive Pädagogik (Bad Heilbrunn 2004) 169-170.
[22] Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? 170.
[23] vgl. Liane *Paradies*, Hans Jürgen *Linser*, Differenzieren im Unterricht (Berlin 2001).
[24] Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? 170.
[25] Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? 171.
[26] Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? 173.

- *Hoher Anteil echter Lernzeit (durch gutes Zeitmanagement, Pünktlichkeit; Auslagerung von Organisationskram)*
- *Lernförderliches Klima (durch gegenseitigen Respekt, verlässlich eingehaltene Regeln, Verantwortungsübernahme, Gerechtigkeit und Fürsorge)*
- *Inhaltliche Klarheit (durch Verständlichkeit der Aufgabenstellung, Plausibilität des thematischen Gangs, Klarheit und Verbindlichkeit der Ergebnissicherung)*
- *Sinnstiftendes Kommunizieren (durch Planungsbeteiligung, Gesprächskultur, Sinnkonferenzen und Schülerfeedback*[)]
- *Methodenvielfalt (Reichtum an Inszenierungstechniken; Vielfalt der Handlungsmuster; Variabilität der Verlaufsformen und Ausbalancierung der methodischen Großformen)*
- *Individuelles Fördern (durch Freiräume, Geduld und Zeit; durch innere Differenzierung; durch individuelle Lernstandsanalysen und abgestimmte Förderpläne; besondere Förderung von Schülern aus Risikogruppen)*
- *Intelligentes Üben (durch Bewusstmachen von Lernstrategien, passgenaue Übungsaufträge und gezielte Hilfestellungen)*
- *Transparente Leistungserwartungen (durch ein an den Richtlinien oder Bildungsstandards orientiertes, dem Leistungsvermögen der Schülerinnen und Schüler entsprechendes Lernangebot und zügige Rückmeldungen zum Lernfortschritt)*
- *Vorbereitete Umgebung (durch gute Ordnung, funktionale Einrichtung und brauchbares Lernwerkzeug)“*[27]

Welche Bedeutung haben nun aber diese Erkenntnisse für einen aus Schüler/innen Sicht „passenden“ Einstieg in ein neues Unterrichtsthema?

Die entscheidendste Folgerung ist, dass das Lernangebot den Schüler/innen nicht einfach zugewiesen wird und sie sich nicht an dieses anpassen müssen, sondern dass das Lernangebot in differenzierter Weise auf die jeweiligen Lern-

[27] Hilbert *Meyer*, Merkmale guten Unterrichts: empirische Befunde und didaktische Ratschläge. Handout zum Vortrag auf dem Klett Symposium „Geographie und Schule“, online unter <http://www2.klett.de/sixcms/media.php/229/Merkmale_guten_Unterrichts.325820.pdf> (17.8.2015) 5.

voraussetzungen der Schüler/innen eingeht.[28] Das heißt, dass die Bedürfnisse und Interessen der Schüler/innen auch bei den Einstiegen stets im Fokus stehen müssen, und jede/r Schüler/in individuell gefördert werden muss. Weiters soll jede/r Schüler/in als ganze Person wahrgenommen wie auch ernst genommen werden, damit die Schule sowohl als Lern- wie auch als Lebensraum von den Schüler/innen erlebt werden kann. Außerdem soll die Heterogenität als Chance zum sozialen Lernen betrachtet werden, denn gemeinsame Erfahrungen können als wichtige Lerngelegenheiten gesehen werden. Allerdings muss deswegen der Unterricht flexibler gestaltet werden, da die Schüler/innen auch Freiräume zugestanden bekommen müssen, in denen sie auch selbstständig an ihren Kompetenzen arbeiten können. Die Lehrperson muss deshalb auch eine andere Rolle einnehmen, da in diesem Unterricht *„mehr gelernt als gelehrt wird“*[29]. Die Lehrkraft nimmt somit die Position des einfühlsamen Unterstützers und Begleiters ein.[30]

Für Ulf Mühlhausen und Wolfgang Wegner[31] verfolgt der Einstieg zusätzlich noch folgende vier Hauptintentionen:

- *„Orientieren*
- *Motivieren*
- *Erwartungshorizont entwerfen, wie das Thema bearbeitet werden soll*
- *Informieren über das Thema“*[32]

Mit Orientieren meinen sie, dass schon beim Einstieg in ein neues Thema die Ziele, Fragen sowie Problemstellungen thematisiert werden müssen, denn einerseits sollten die Schüler/innen sich möglichst rasch im neuen Thema zu-

[28] Matthias *Trautmann*, Beate *Wischer*, Heterogenität in der Schule 119.
[29] Franz Emanuel *Weinert*, Guter Unterricht ist ein Unterricht, in dem mehr gelernt als gelehrt wird, In: Josef *Freund*, Heinz *Gruber*, Walter *Weidinger* (Hg.), Guter Unterricht – Was ist das? Aspekte von Unterrichtsqualität (Wien 1998) 7.
[30] Matthias *Trautmann*, Beate *Wischer*, Heterogenität in der Schule 20-21.
[31] vgl. Ulf *Mühlhausen*, Wolfgang *Wegner*, Erfolgreich Unterrichten?!. Eine erfahrungsfundierte Einführung in die Schulpädagogik mit Videoszenen und Online-Übungen zur Unterrichtsanalyse (Hohengehren 2006).
[32] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen und deren Erarbeitung mit besonderem Augenmerk auf die Methodik. Eine Sammlung geplanter Einstiege und Erarbeitungen zu ausgewählten Themen der AHS – Unterstufe (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2014), online unter <http://othes.univie.ac.at/32752/1/2014-04-03_0609390.pdf> 22.
Der/die Leser/in möge aber bedenken, dass alle vier Hauptintentionen nicht gleichzeitig zu erfüllen sind (vgl. Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 24.)

rechtfinden und andererseits deren Neugier daran geweckt werden.[33] Dies kann wiederum bei den Schüler/innen positive Folgen im Hinblick auf die Motivation haben. Bedauerlicherweise muss dies aber nicht immer der Fall sein, denn, wie Hans Merkens anmerkt, gilt:

> *„Im Unterricht tritt also häufig der Fall ein, dass Schüler sich nicht für die Ziele des Unterrichts bzw. die Inhalte interessieren, die dort vermittelt werden, obwohl sie, um erfolgreich teilnehmen zu können, des Antriebs bedürfen, sich für diese zu interessieren. Hier ist die besondere Aufmerksamkeit der Lehrkräfte gefordert.“*[34]

Daher sollten möglichst viele Komponenten der Motivation, wie beispielsweise Neugiermotiv, Leistungsmotiv, Wettbewerbsmotiv, Anschlussmotiv und Motiv nach Selbstwerterhaltung von Seiten der Lehrperson in den Unterricht integriert werden, um beinahe alle – idealerweise alle – Schüler/innen anzusprechen.[35] Unter der dritten Hauptintension „Erwartungshorizont entwerfen“ verstehen Mühlhausen und Wegner, dass den Schüler/innen mitgeteilt werden soll, wie das Thema bearbeitet werden wird, was sie daraus lernen können und zu welchem Ergebnis man eventuell kommen könnte. Als vierten und letzten wichtigen Punkt wird die Hauptintension „Informieren über das Thema“ angeführt, da die Schüler/innen erfahren sollten, was, wie und vor allem warum sie gerade dieses Thema lernen werden.[36]

Da ein motivierender Einstieg in ein neues Thema eine große Bedeutung hat, seien ergänzend nun auch noch die Sichtweisen von Bärbel Barzel, Lars Holzäpfel, Timo Leuders und Christine Streit angeführt. Für sie sind folgende drei Grundsätze entscheidend:

1. *„Der Einstieg sollte nicht effekthaschender Selbstzweck sein, sondern tatsächlich auf das Thema hinführen.* […]
2. *Die Vielfalt macht´s!*

---

[33] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 23.
[34] Hans *Merkens*, Unterricht. Eine Einführung (Wiesbaden 2010) 122.
Um das Interesse aller Schüler/innen wecken zu können, sollte aus Merkens Sicht die ganze Klasse ähnliche Interessen besitzen und diese Interessen sich gleich lenken lassen. Weiters reicht das Verweisen auf die zukünftige Relevanz des Themas meist nicht aus, da die Schüler/innen sich vor allem für jenes begeistern, welches für ihr jeweiliges Umfeld relevant ist. Schule gibt jedoch zumeist das vor, wofür sich die Schüler/innen interessieren sollten und was sie lernen sollten (vgl. Hans *Merkens*, Unterricht 123.).
[35] Hans *Merkens*, Unterricht 124.
[36] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 24.

3. *Nur das benutzen, von dem man wirklich überzeugt ist und was man selbst ‚mit Leben' füllen kann!"*[37]

So kompakt diese Bedingungen für einen „guten" Einstieg in ein neues Thema dargestellt wurden, so schwierig sind sie aber im Unterricht umzusetzen, da das Unterrichtsgeschehen meist sehr komplex ist.[38] Sichtbar wird dies beispielsweise bereits beim Bewusst machen der anthropogenen und soziokulturellen Bedingungen, wobei die nun folgende Auflistung von Friedrich Zech in keinerlei Weise vollzählig ist.[39]

| ***„anthropogene Bedingungen*** | ***soziokulturelle Bedingungen*** |
|---|---|
| • *Alter der Schüler (u. Lehrer)*<br>• *Entwicklungsstand der Schüler*<br>• *Geschlecht der Schüler*<br>• *allgemeines Interesse der Schüler und Lehrer (u.a. Hobbys)*<br>• *Einstellung von Schülern und Lehrern gegenüber Mathematik (z.B. Begeisterung des Lehrers, Vorlieben, Aversionen der Schüler)*<br>• *Begabungen bzw. Intelligenz der Schüler*<br>• *Leistungsstand und Lernvoraussetzungen der Schüler*<br>• *Lerntempo der Schüler*<br>• *Mitarbeit der Schüler*<br>• *Disziplin der Schüler* | • *Schultyp*<br>• *Stadt- oder Landschule*<br>• *Größe der Schule*<br>• *Größe der Klasse*<br>• *Anzahl der Jungen bzw. Mädchen in Relation zueinander*<br>• *soziale Herkunft der Schüler, Berufe der Eltern*<br>• *häusliches Milieu; familiäre Situation*<br>• *Vorgeschichte der Klasse; frühere Lehrer, ausgefallener Unterricht*<br>• *Lehr- und Unterrichtspläne*<br>• *innerschulische Organisationsform (z.B. Orientierungsstufe; Leistungskurs, Förderkurs)*<br>• *Besonderheiten personeller oder* |

[37] Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren (Berlin 2011) 82.
[38] Kirsten *Heckmann*, Friedhelm *Padberg*, Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (Berlin, Heidelberg 2012) 1.
[39] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik (Weinheim, Basel [10]2002) 35-36.

| | |
|---|---|
| • *fachliche und didaktische Kompetenz des Lehrers*<br>• *Engagement des Lehrers für Schüler und Unterricht*<br>• *Klassenatmosphäre*<br>• *Gruppierungen innerhalb der Klasse*<br>• *Arbeitsstil der Klasse (z.B. Heftführung, Vertrautheit mit Kleingruppenarbeit, Durchführung der Hausaufgaben)* | *materieller Ausstattung (z.B. Lehrbuch, Medien, Vervielfältigungsmöglichkeiten)*<br>• *räumliche Gegebenheiten (z.B. architektonische Gestaltung, Gruppenräume)*<br>• *Sitzordnung (frontal, Hufeisen, Gruppentische)*<br>• *zeitlicher Rahmen (wie viele Stunden für ein Thema?)*<br>• *Stundenplan (die wievielte Stunde?)“*[40] |

Entscheidend für das Gelingen eines Einstieges ist aber auch die Unterrichtsmethode, welche wiederum laut Matthias von Saldern vor allem von der Zusammensetzung der Schulklasse und – was oft übersehen wird – von den Unterrichtszielen abhängig ist. Das heißt nun aber für den Einstieg in ein neues Thema, dass die Ziele bereits in der Planungsphase klar definiert werden müssen. Um sich nun diesen Zusammenhang zwischen der Unterrichtsmethode und den Unterrichtszielen bewusst zu machen, sei hier die Typologie des Lerntransfers basierend auf jene von Weinert angeführt.[41]

| ***„Konzepte*** | ***Lernziel*** | ***Lernform*** | ***Unterrichtsform*** |
|---|---|---|---|
| ***Vertikaler Lerntransfer*** | *Ermöglichung und Erleichterung des* | *Erwerb intelligenten Wissen* | *direkte Instruktion (lehrergesteu-* |

[40] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 36.
[41] Matthias von *Saldern*, Heterogenität und Schulstruktur. Ein Blick auf Restriktionen und Selbstrestriktionen des deutschen Schulsystems, In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlungsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 48.
Die Autor/innen Bärbel Barzel, Andreas Büchter und Timo Leuders gehen nicht von zwei, sondern sogar von sechs Faktoren aus, die die Methodenwahl beeinflussen, da aus ihrer Sicht diese sehr von den Zielen, Aufgaben, Merkmalen und Funktionen der Methode und etwas von den Prinzipien und Philosophien sowie der Unterrichtsforschung abhängt (vgl. Bärbel *Barzel*, Andreas *Büchter*, Timo *Leuders*, Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II (Berlin [6]2011) 25.).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *weiteren Lernens im gleichen Inhaltsgebiet* | | *erter, systematischer, verständnisintensiver Unterricht)* |
| ***Horizontaler Lerntransfer*** | *intelligentes und adaptives Anwenden des Gelernten in sehr unterschiedlichen Situationen* | *situiertes Lernen* | *situiertes Lehren (variables, lebensnahes Üben, Projektunterricht, Gruppenunterricht, Teamarbeit)* |
| ***Lateraler Lerntransfer*** | *Lernen lernen; Erwerb von Schlüsselqualifikationen* | *(angeleitetes) selbstständiges Lernen* | *Vermittlung und Einübung metakognitiver Kompetenzen (Lernkompetenz); Anleitung zu und Ermöglichung von selbstständigem Lernen; Offener Unterricht* |
| ***Handlungsbedingter Lerntransfer*** | *Allgemeinbildung, kognitive Förderung; Persönlichkeitsbildung; Werteorientierung und moralische Erziehung; Verhaltensformung* | *Gewohnheitsbildung; persönliche Erfahrungen; Reflexionen; implizites Lernen* | *Schul- und Klassenkultur; Verhaltensregeln, Anspruchsniveau und Anregungsgehalt des Unterrichts, Lehrervorbild, Reflexionsklima*[42] |

[42] Matthias von *Saldern*, Heterogenität und Schulstruktur 48.

Ein heikler Punkt in der Unterrichtsplanung ist ferner die häufig kritisierte Alltagsfremdheit des schulischen Lernens und somit auch des Lernens im Mathematikunterricht, denn oft fehlen im Mathematikunterricht die sinnstiftenden Kontexte und der interdisziplinäre Bezug. Der angewandte Mathematikunterricht mit seinen Bezügen zu anderen Fachrichtungen ist zwar auf der einen Seite wichtig, allerdings ist es auch auf der anderen Seite sinnvoll, die Mathematik aus ihrer Eigenwelt beispielsweise mit ihrem abstrakten und logischen Denken und den Beweisen heraus zu betrachten, denn auch das Beschäftigen mit der reinen Mathematik ist sowohl aus fachlicher, kultureller wie auch allgemeinbildender Sicht eine wichtige Angelegenheit. Eine reine Ausrichtung des Unterrichts an das Angewandte wäre daher völlig deplatziert. Somit muss die Lehrperson diese beiden Gegensätze – „innerhalb" und „außerhalb" der reinen Mathematik – im Unterricht geschickt ausbalancieren.[43]

Zusammenfassend kann daher schon jetzt gesagt werden, dass bereits bei der Planung des Einstiegs in ein neues Unterrichtsthema eine Vielzahl an Facetten berücksichtigt und zahlreiche Herausforderungen von Seiten der Lehrkraft bewältigt werden müssen, um einen aus Schüler/innen-Sicht „passenden" Einstieg sicherzustellen.

[43] Konrad *Krainer*, Schule und Mathematikunterricht als Inseln?, In: Dorit *Bosse*, Peter *Posch* (Hg.), Schule 2020 aus Expertensicht. Zur Zukunft von Schule, Unterricht und Lehrerbildung (Wiesbaden 2009) 200.

# 3. Die rechtlichen Rahmenbedingungen

Nach diesen soeben gewonnenen Erkenntnissen (vgl. Kapitel 2) stellt sich nun die Frage, wie und vor allem ob diese in irgendeiner Form in den Lehrplänen der Sekundarstufe I verankert sind oder nicht.

Wirft man nur einen kurzen Blick in den allgemeinen Teil des Lehrplans der AHS-Unterstufe[44], so erkennt man bereits, dass sehr viele Parallelen vorhanden sind. So sollen nämlich *„die Schülerinnen und Schüler im Sinne eines lebensbegleitenden Lernens zur selbstständigen, aktiven Aneignung, aber auch zu einer kritisch-prüfenden Auseinandersetzung mit dem verfügbaren Wissen befähigt und ermutigt werden.“*[45] Weiters bedarf es *„Erweiterung und Ergänzung durch Selbst- und Sozialkompetenz. Die Entwicklung der eigenen Begabungen und Möglichkeiten, aber auch das Wissen um die eigenen Stärken und Schwächen sowie die Bereitschaft, sich selbst in neuen Situationen immer wieder kennen zu lernen und zu erproben, ist ebenso Ziel und Aufgabe des Lernens in der Schule wie die Fähigkeit und Bereitschaft, Verantwortung zu übernehmen, mit anderen zu kooperieren* […]*.“*[46] Außerdem ist „[d]*ie Verflochtenheit des Einzelnen in vielfältige Formen von Gemeinschaft* […] *bewusst zu machen; Wertschätzung sich selbst und anderen gegenüber sowie Achtung vor den unterschiedlichen menschlichen Wegen der Sinnfindung sind zu fördern.“*[47] *„Den Schülerinnen und Schülern ist* [auch] *Gelegenheit zu geben, selbst Gestaltungserfahrungen zu machen und über Sinne führende Zugänge mit kognitiven Erkenntnissen zu verbinden. Dabei eröffnet sich für sie die Chance, individuelle Fähigkeiten zu entdecken und zu nutzen und sich mit den Ausdrucksformen ihrer Mitmenschen auseinander zu setzen.“*[48]

---

[44] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil, online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2> (18.8.2015).
[45] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 2.
[46] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 2-3.
[47] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 3.
[48] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 4.

Im Hinblick auf das Planen und Durchführen des Unterrichts sind zusätzlich folgende Grundprinzipien zu berücksichtigen:

> *„Der Unterricht hat an die Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und an die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen."*[49]

Fernerhin soll die Lehrkraft die Schüler/innen durch Differenzierung und Individualisierung fördern.

> *„Die Schülerinnen und Schüler haben vielfältige und unterschiedliche Fähigkeiten, die je nach deren Entwicklungsstand sowie nach Themenstellung und Herangehensweise im Unterricht in unterschiedlicher Weise zum Ausdruck kommen. Aufgabe der Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler zur bestmöglichen Entfaltung ihrer individuellen Leistungspotenziale zu führen. Leistungsfähigkeit und besondere Begabungen sind dabei kontinuierlich zu fördern.*
> *Für den Unterricht ergeben sich daraus folgende mögliche Aufgabenstellungen bzw. pädagogisch-didaktische Konsequenzen:*
> *- Erstellung von differenzierten Lernangeboten, die individuelle Zugänge und auch immer wieder neue Einstiege und Anreize bieten,*
> *- Eingehen auf die individuell notwendige Arbeitszeit, auf unterschiedliche Lerntypen, Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und kulturelles Umfeld,* […]
> *- Bewusstmachen der Stärken und Schwächen im persönlichen Begabungsprofil der Schülerinnen und Schüler, wobei bevorzugt an die Stärken anzuknüpfen ist,* […]
> *- Herstellung eines individuell förderlichen Lernklimas und Vermeidung von Demotivation.*
> *Die methodisch-didaktische Gestaltung soll die Berücksichtigung der jeweils aktuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler gestatten. Unterrichtsformen, durch die sich Differenzierung und Individualisierung verwirklichen lassen, reichen von Einzelarbeit über Partnerarbeit bis zu den zahlreichen Möglichkeiten der Gruppenarbeit. Dazu gehören auch*

[49] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 5.

> *Phasen des offenen Lernens und Wahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler."*[50]

Weiters sollen die Selbsttätigkeit und die Eigenverantwortung der Schüler/innen gestärkt werden.

> *„Auch durch bloße Übernahme von Erfahrungen anderer können das Wissen, Können und Erleben erweitert werden. Im Unterricht ist durch das Schaffen einer entsprechenden Lernatmosphäre – nicht zuletzt auf Grund der wachsenden Bedeutung dynamischer Fähigkeiten – die selbsttätige und selbstständige Form des Lernens besonders zu fördern. Dafür bieten sich auch projektartige und offene Lernformen an.*
> *Den Schülerinnen und Schülern ist Lernen als Prozess verständlich zu machen. Sie sollen die an sie gestellten Anforderungen kennen, sich selbst einschätzen lernen und darin auch Motivation für ihre Arbeit finden."*[51]

Relevant ist aber auch, dass Bezüge zur Lebenswelt der Schüler/innen hergestellt werden.

> *„Im Sinne des exemplarischen Lernens sind möglichst zeit- und lebensnahe Themen zu wählen, durch deren Bearbeitung Einsichten, Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden gewonnen werden, die eigenständig auf andere strukturverwandte Probleme und Aufgaben übertragen werden können. Die Materialien und Medien, die im Unterricht eingesetzt werden, haben möglichst aktuell und anschaulich zu sein, um die Schülerinnen und Schüler zu aktiver Mitarbeit anzuregen."*[52]

Außerdem sollten die Lerninhalte sowie Unterrichtsmethoden von der Lehrkraft so ausgewählt werden, *„dass sie beide Geschlechter gleichermaßen ansprechen"* und der Unterricht sollte so gestaltet werden, *„dass er sozialisationsbedingt unterschiedlichen Vorerfahrungen entgegenzusteuern in der Lage ist. Lehrerinnen und Lehrer sind angehalten, ein (Lern-)Klima der gegenseitigen Ach-*

---

[50] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 5-6.
[51] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 6.
[52] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 7.

*tung zu schaffen, eigene Erwartungshaltungen und Umgangsformen gegenüber Mädchen und Burschen zu reflektieren, sowie sich ein Grundwissen über geschlechtsspezifische Sozialisationsprozesse im Jugendalter anzueignen.“*[53]

Da sich diese Arbeit dem Thema „Lineare Gleichungssysteme“ widmet, stellt sich in diesem Zusammenhang nun gleich auch die Frage, wie dieses Thema im Unterstufenlehrplan der 4. Klasse der Allgemeinbildenden Höheren Schule verankert ist. Im Hinblick auf den Lehrstoff steht nur geschrieben:

> *„Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können“*[54]

Weiters heißt es aber auch im Unterstufenlehrplan, dass die Schüler/innen die Grundtätigkeiten wie *„Kombinieren vertrauter Methoden; Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen, mathematischen Objekten; Anwenden bekannter Verfahren, auch in teilweise neuartigen Situationen; Abstrahieren und Konkretisieren; Verallgemeinern und Spezialisieren“*[55] sowie *„verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten; geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten; Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen; Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte“*[56] entwickeln sollen.

Darüber hinaus soll der Mathematikunterricht versuchen Vielfältiges miteinander zu verknüpfen, um *„Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen* [und] *Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen.“*[57]

Relevant ist aber auch, dass mit *„Hilfe von Problemstellungen aus Themenkreisen, die den Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler ent-*

---

[53] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil 7.

[54] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“, online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2> (19.8.2015) 7.

[55] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 1.

[56] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 1.

[57] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 1-2.

*sprechen,* […] *mathematisches Wissen und Können entwickelt und gefestigt werden* [sollen]*.“*[58]

Zu berücksichtigen ist des Weiteren, dass die *„Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen* […] *zu nutzen* [sind und den] […] *Schülerinnen und Schülern* […] *an geeigneten Themen Einblick in die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden zu geben* [ist]. […] *Die Mathematik soll als dynamische Wissenschaft dargestellt und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden.“*[59]

Überdies sollen laut dem Unterstufenlehrplan „[d]ie *Schülerinnen und Schüler* […] *praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können. Dabei sollen sie von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen. Die Schülerinnen und Schüler sollen ebenso grundlegendes mathematisches Wissen und Können erwerben und abstraktes Denken und formale Fähigkeiten entwickeln. Sie sollen im präzisen Arbeiten und Argumentieren ausgebildet werden und mit mathematischen Darstellungsformen vertraut werden. Sie sollen elektronische Hilfen und (auch selbst erstellte) Formelsammlungen in steigendem Ausmaß ab der 1. Klasse verwenden und wiederholt Gelegenheit haben, ihr Vorstellungsvermögen auch computerunterstützt zu schulen.“*[60]

Zu berücksichtigen sind laut Bundesgesetz obendrein die Bildungsstandards, da „[d]*er Lehrer* […] *bei der Planung und Gestaltung seiner Unterrichtsarbeit die Kompetenzen*[61] *und die darauf bezogenen Bildungsstandards zu berücksichtigen sowie die Leistungen der Schüler in diesen Bereichen zu beobachten, zu*

---

[58] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 3.
[59] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 4.
[60] Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“ 4.
[61] Unter Kompetenzen wird Folgendes verstanden: *„Kompetenzen‘* [sind] *längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die von Lernenden entwickelt werden und die sie befähigen, Aufgaben in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsbewusst zu lösen und die damit verbundene motivationale und soziale Bereitschaft zu zeigen* […]*.“* (vgl. Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen. 2. Jänner 2009, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_II_1.html> (20.8.2015).)

*fördern und bestmöglich zu sichern* [hat].*“*[62] Im Hinblick auf das Lineare Gleichungssystem und die 8. Schulstufe schreibt das Kompetenzmodell für Mathematik Folgendes vor:

> ***„Handlungsbereich „Rechnen, Operieren“ – Inhaltsbereich „Variable, funktionale Abhängigkeiten“***
>
> *Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler können*
>
> *- elementare Rechenoperationen (+, -, •, /, ↑, √) mit Variablen und Termen durchführen, einfache Terme und (Un-)Gleichungen umformen sowie einfache (Un-) Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen,*
>
> *- elementare Rechenoperationen (+, -, •, /, ↑, √) mit Variablen und Termen durchführen, einfache Terme und (Un-)Gleichungen umformen sowie einfache (Un-) Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen, wobei diese (Rechen-)Operationen miteinander, mit anderen mathematischen Inhalten (Begriffen, Sätzen, Darstellungen) oder Tätigkeiten verbunden werden müssen,*
>
> *- Aussagen zur Abfolge, Wirkung, Zulässigkeit und Korrektheit algebraischer Operationen und Lösungswege machen und bewerten sowie Rechenabläufe dokumentieren.“*[63]

[62] Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 117. Bundesgesetz: Änderung des Schulunterrichtsgesetzes. 8. August 2008, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2008_I_117/BGBLA_2008_I_117.html> (20.8.2015).

[63] Bundeskanzleramt, Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 22.08.2015, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166&ShowPrintPreview=True> (22.8.2015).

Im Hinblick auf die 9. Schulstufe AHS würde dies noch etwas präzisiert werden. *„Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können“* (vgl. bifie (Hg.), Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe (Wien² 2013) 9.)

# 4. Lineare Gleichungssysteme – verschiedene Möglichkeiten des Einstiegs

In diesem Kapitel werden nun fünf zum Teil sehr konträre Einstiege in das Thema „Lineare Gleichungssysteme" präsentiert, wobei bei jedem – auch beim algebraischen Weg – stets auf größtmögliche Anschaulichkeit geachtet wurde, um möglichst viele Schüler/innen der 8. Schulstufe für dieses Thema zu gewinnen. Wie bereits aber im Kapitel 1 kurz erwähnt wurde, möge der/die Leser/in jedoch auch bedenken, dass diese Einstiege unter dem Gesichtspunkt „größtmögliche Alltagstauglichkeit aus Sicht der Lehrer/innen" verfasst wurden, um den Lehrer/innen eine bestmögliche Hilfestellung für ihren Berufsalltag zu bieten. Außerdem sollte berücksichtigt werden, dass die einzelnen Wege noch mit passenden Übungsbeispielen ergänzt werden sollen/müssen, um das neu Gelernte besser zu festigen. Zuletzt sei der/die Leser/in noch darauf hingewiesen, dass jeder Weg abgesehen vom historischen Weg mit einer kurzen Wiederholung des Themas „Lineare Gleichungen" begonnen wird, da einerseits das Thema „Lineare Gleichungssysteme" darauf aufbaut und andererseits nicht vorausgesetzt werden kann, dass dieses Thema unmittelbar davor besprochen wurde. Daher können aber auch abhängig unter anderem von der Schulklasse, deren Wissensstand und der Jahresplanung einzelne Teile ausgelassen werden.

## *4.1. Der algebraische Weg – der Klassiker*

### *4.1.1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen – eine kurze Wiederholung*[64]

Als Einstieg wird hier folgendes Beispiel gewählt:

[64] Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 206-209; Günther *Malle*, Helge *Woschitz*, Maria *Koth*, Bernhard *Salzger*, Mathematik verstehen 5. Technologie integriert (Wien 2014) 194-200; Steffen *Beuthan*, Günter *Nordmeier*, Mathematik üben mit Erfolg. 8. Schuljahr Gymnasium (Stuttgart 2007) 66-68.

*Beispiel 4.1.1.1.*

„Hurra! Die letzte Schulwoche hat begonnen! Morgen fahren wir, die 4A und 4B, endlich ins mehrtägige Erlebniscamp!“ Trotz gründlicher Planung ist jedoch eine Sache immer noch nicht geklärt. Wie können nämlich die 24 Schülerinnen und 21 Schüler auf die zur Verfügung stehenden Dreibett- und Vierbettzimmer aufgeteilt werden, denn einerseits soll niemand überbleiben und andererseits soll kein Zimmer unterbelegt sein. Außerdem dürfen Mädchen und Burschen nicht im selben Zimmer schlafen!

Versuche durch Probieren dieses Problem zu lösen und gib sämtliche Möglichkeiten an!

Am geschicktesten lässt sich dies mit Hilfe einer Tabelle darstellen.

| *Mädchen:* | | *Burschen:* | |
|---|---|---|---|
| Dreibettzimmer | Vierbettzimmer | Dreibettzimmer | Vierbettzimmer |
| 8 | 0 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 7 | 0 |
| 0 | 6 | | |

Diese Aufgabe kann relativ rasch gelöst werden. Wären jedoch die Zahlen wesentlich größer und müssten auch andere Zahlen abgesehen von den natürlichen Zahlen verwendet werden, so wäre dies eine wesentlich größere Herausforderung. Daher muss neben dem systematischen Probieren, was bereits eine mathematische Tätigkeit darstellt, auch eine prägnante mathematische Darstellung gefunden werden, damit alle Lösungen gefunden werden können.

Deshalb werden hier die benötigte, aber unbekannte Anzahl der Dreibettzimmer mit der Variable $x$ und die der Vierbettzimmer mit der Variable $y$ bezeichnet. Die Anzahl der Mädchen, die in den Dreibettzimmern untergebracht sind, ist somit $3x$ und die Anzahl der Mädchen, die in den Vierbettzimmern untergebracht sind, $4y$. Somit ergibt sich für die 24 Mädchen folgende Gleichung:

$$3x + 4y = 24$$

Für die Burschen erfolgt dies analog. Deren Gleichung lautet daher:

$$3x + 4y = 21$$

Bezeichnet werden diese Gleichungen als lineare Gleichungen mit zwei Variablen. (Die Variablen sind in diesem Fall die Buchstaben $x$ und $y$.)

Angeschrieben wird die Lösung einer linearen Gleichung als geordnetes Zahlenpaar $(x|y)$. Da im konkreten Fall die 24 Mädchen unter anderem auf 4 Dreibett- und 3 Vierbettzimmer aufgeteilt werden können, kann dies auch als Zahlenpaar $(4|3)$ aufgeschrieben werden. (Setzt man beispielsweise das Zahlenpaar $(4|3)$ in die Gleichung der Mädchen $3x + 4y = 24$ ein, so ergibt dies $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$. Dies ist eine wahre Aussage.)

Die Menge aller Zahlenpaare, die die lineare Gleichung erfüllen, wird als Lösungsmenge $L$ der Gleichung bezeichnet. Da in diesem Beispiel als Grundmenge $G$ nur die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sinnvoll sind, besteht die Lösungsmenge $L$ bei den Mädchen aus den drei Zahlenpaaren $L = \{(8|0); (4|3); (0|6)\}$ und bei den Burschen aus den zwei $L = \{(3|3); (0|7)\}$.

Würde man hingegen als Grundmenge $G$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten, so hat die lineare Gleichung mit zwei Variablen unendlich viele Lösungen, da zu jedem reellen $x$-Wert sich auch ein zugehöriger $y$-Wert angeben lässt. Würde beispielsweise $x = 4{,}5$ in die Gleichung $3x + 4y = 24$ eingesetzt werden, so würde dies $y = 2{,}625$ ergeben, denn

$$3 \cdot 4{,}5 + 4y = 24 \quad |-(3 \cdot 4{,}5)$$
$$4y = 10{,}5 \quad |:4$$
$$y = 2{,}625$$

Verallgemeinert bedeutet dies für jeden beliebigen reellen $x$-Wert

$$3x + 4y = 24 \quad |-3x$$
$$4y = -3x + 24 \quad |:4$$
$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

Die Lösungsmenge $L$ hat daher im verallgemeinerten Fall die Gestalt

$$L = \{(x|y) | y = -\frac{3}{4}x + 6, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Das heißt, dass alle Zahlenpaare $(x|y)$, die die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 6$ erfüllen, in der Lösungsmenge $L$ enthalten sind. $x$ und $y$ sind dabei reelle Zahlen.

Abgerundet wird die Wiederholung des Begriffs „Lineare Gleichung mit zwei Variablen“ mit einer Definition.

*Definition 4.1.1.2.: Lineare Gleichung mit zwei Variablen*

Besitzt eine Gleichung mit zwei Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ die Form

$$ax + by = c \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0,$$

so nennt man sie lineare Gleichung. $a$ und $b$ werden als Koeffizienten von $x$ beziehungsweise $y$ bezeichnet.

### 4.1.2. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen[65]

Durch geschicktes Erweitern des Beispiels 4.1.1.1. kann nun zu folgendem Linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen gelangt werden.

*Beispiel 4.1.2.1.*

Nachdem die Schülerinnen und Schüler der 4A und 4B berechnet und sich auch geeinigt haben, wie viele Zimmer die Mädchen und Buben beim Erlebniscamp letztendlich benötigen (vgl. Beispiel 4.1.1.1.), wollen sie ihrem Lehrer ein Rätsel stellen. Da der Lehrer Knobelaufgaben liebt, ist er davon gleich begeistert. Die positiv überraschten Schülerinnen und Schüler stellen daher dem Lehrer folgendes Rätsel: Die Mädchen benötigen 7 Zimmer, die Burschen hingegen nur 6. Wie viele Dreibett- und Vierbettzimmer müssen nun bestellt werden?

Da der Lehrer dieses Rätsel nicht durch Probieren lösen möchte und die Schüler/innen zuvor bei ihren Berechnungen etwas beobachtet hat, weiß er, dass für die 24 Mädchen die lineare Gleichung $3x + 4y = 24$ und für die 21 Burschen die lineare Gleichung $3x + 4y = 21$ erfüllt sein müssen. Da auf Grund des Rätsels

[65] Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 206-213; Günther *Malle*, Helge *Woschitz*, Maria *Koth*, Bernhard *Salzger*, Mathematik verstehen 5. Technologie integriert (Wien 2014) 194-200; Steffen *Beuthan*, Günter *Nordmeier*, Mathematik üben mit Erfolg. 8. Schuljahr Gymnasium (Stuttgart 2007) 66-68.

die Summe von der unbekannten Anzahl der Dreibettzimmer mit der Variablen $x$ und der unbekannten Anzahl der Vierbettzimmer mit der Variablen $y$ bei den Mädchen 7 Zimmer und bei den Burschen 6 Zimmer ergeben müssen, kommt der Lehrer nun zu folgendem Zwischenergebnis:

Da die Mädchen gerne 7 Zimmer hätten, muss somit auch noch die lineare Gleichung $x + y = 7$ erfüllt sein. Weil sich die Burschen 6 Zimmer wünschen, muss bei ihnen außerdem die lineare Gleichung $x + y = 6$ zutreffen. Somit gelten bei den Mädchen die beiden folgenden linearen Gleichungen

$$\text{I: } 3x + 4y = 24$$

$$\text{II: } x + y = 7$$

und bei den Burschen die linearen Gleichungen

$$\text{I: } 3x + 4y = 21$$

$$\text{II: } x + y = 6.$$

Was heißt dies nun aber? Die richtige Lösung sind jene Zahlenpaare, die beide Gleichungen der Mädchen beziehungsweise Burschen erfüllen, das heißt, dass beim Einsetzen dieser Zahlenpaare in beide Gleichungen eine wahre Aussage entstehen muss.

Wie bezeichnet man jedoch diese beiden zusammengehörenden linearen Gleichungen?

*Definition 4.1.2.2.: Lineares Gleichungssystem*

Zwei zusammengehörende lineare Gleichungen mit zwei Variablen werden als lineares Gleichungssystem bezeichnet:

$$\text{I: } a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{mit } a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$$

$$\text{II: } a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{mit } a_2, b_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$$

Ein Zahlenpaar $(x|y)$ ist genau dann Lösung des Gleichungssystems, falls dieses beide Gleichungen erfüllt.

Da Mathematik eines der Lieblingsfächer vom Lehrer während seiner Schulzeit war, denkt er kurz nach und kombiniert wie folgt, um diese zwei Linearen Gleichungssysteme lösen zu können.

Weil jenes Zahlenpaar $(x|y)$, welches Lösung des Linearen Gleichungssystems ist, sowohl die erste wie auch die zweite lineare Gleichung zu erfüllen hat, muss jener Zusammenhang, der zwischen den Variablen $x$ und $y$ besteht und sich aus einer der beiden Gleichungen ergibt, auch für die jeweils andere Gleichung gelten. Wird dies nun beim Linearen Gleichungssystem der Mädchen beispielsweise auf die Gleichung II angewandt, so folgt:

$$x + y = 7 \text{ bzw. } x = 7 - y.$$

Weil dies für die Gleichung I ebenso gelten muss, kann dieser Term $7 - y$ anstelle von $x$ in der Gleichung I eingesetzt werden. (Achtung: Klammern nicht vergessen!)

$$3 \cdot (7 - y) + 4y = 24$$

Man erhält dadurch eine lineare Gleichung mit einer Variable, die nach den bekannten Verfahren zu lösen ist:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (7 - y) + 4y &= 24 \quad |\text{ Distributivgesetz} \\ 21 - 3y + 4y &= 24 \quad |-21 \\ -3y + 4y &= 3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Um $x$ zu berechnen, setzt der Lehrer $y = 3$ in $x = 7 - y$ ein. Dies ergibt

$$x = 7 - 3 = 4.$$

Somit ist das Zahlenpaar $(3|4)$ die Lösung dieses Linearen Gleichungssystems. Damit der Lehrer sicher gehen kann, dass er sich nicht verrechnet hat, führt er die Probe durch:

$$\text{I: } 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$$

$$\text{II: } 4 + 3 = 7$$

Die Grundlage dieses Lösungswegs ist das Einsetzungsverfahren. Um die einzelnen Durchführungsschritte nochmals deutlicher herauszuarbeiten, sei hier nun in kompakter Form diesmal aber anhand des Linearen Gleichungssystems der Burschen dies erneut zusammengefasst.

*Das Einsetzungsverfahren (= Substitutionsverfahren)*

$$\text{I: } 3x + 4y = 21$$
$$\text{II: } x + y = 6$$

1. Löse eine der beiden linearen Gleichungen nach einer der Variablen auf! (In diesem Fall wird die Gleichung II nach der Variable $x$ aufgelöst.)

$$\text{Gleichung II: } x + y = 6 \quad |-y$$
$$x = 6 - y$$

2. Ersetze in der anderen Gleichung diese Variable durch jenen Term, den du im 1. Schritt erhalten hast! Achtung: Vergiss nicht auf die Klammern! (In diesem Fall wird die nach der Variable $x$ aufgelöste Gleichung II in die Gleichung I eingesetzt.)

$$\text{Gleichung I: } 3x + 4y = 21$$
$$3 \cdot (6 - y) + 4y = 21$$

3. Löse jene Gleichung, die du im 2. Schritt erhalten hast!

$$3 \cdot (6 - y) + 4y = 21 \quad |\text{ Distributivgesetz}$$
$$18 - 3y + 4y = 21 \quad |-18$$
$$-3y + 4y = 3$$
$$y = 3$$

4. Setze die Lösung vom 3. Schritt in jene Gleichung ein, die du im 1. Schritt erhalten hast und berechne den Wert der anderen Variable!

$$x = 6 - y = 6 - 3 = 3$$

5. Führe die Probe durch, um sicher zu gehen, dass du dich nicht verrechnet hast, und gib das Zahlenpaar (x|y) an, welches die Lösung des Linearen Gleichungssystems ist!

$$\text{Probe: I: } 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = 21$$
$$\text{II: } 3 + 3 = 6$$
$$\Rightarrow L = \{(3|3)\}$$

Allerdings können Lineare Gleichungssysteme auch noch auf andere Arten gelöst werden. Zwei dieser Lösungsverfahren werden nun hier noch präsentiert, wobei sie wieder auf demselben Prinzip basieren wie das Einsetzungsverfahren. Das heißt, dass auch bei diesen beiden Lösungsverfahren der Zusammenhang zwischen den beiden Variablen sowohl in der Gleichung I als auch in der Gleichung II gleich sein muss. Veranschaulicht wird dies wieder in dieser kompakten Schreibweise wie zuvor. Als Lineares Gleichungssystem wird einmal das der Mädchen und das andere Mal das der Burschen gewählt.

### *Das Gleichsetzungsverfahren (= Komparationsmethode)*

I: $3x + 4y = 24$

II: $x + y = 7$

1. Löse die beiden Gleichungen nach derselben Variable auf! (In diesem Fall werden die beiden Gleichungen nach $x$ aufgelöst.)

$$\text{I: } 3x + 4y = 24 \quad |-4y$$
$$3x = -4y + 24 \quad |:3$$
$$x = -\frac{4}{3}y + 8$$
$$\text{II: } x + y = 7 \quad |-y$$
$$x = 7 - y$$

2. Setze beide Terme gleich! Du erhältst dadurch eine lineare Gleichung mit einer Variable.

$$-\frac{4}{3}y + 8 = 7 - y$$

3. Löse die im 2. Schritt entstandene Gleichung!

$$-\frac{4}{3}y + 8 = 7 - y \quad |+y$$
$$-\frac{1}{3}y + 8 = 7 \quad |-8$$
$$-\frac{1}{3}y = -1 \quad |\cdot(-3)$$
$$y = 3$$

4. Setze die Lösung, die du im 3. Schritt erhalten hast, in die Gleichung vom 1. Schritt ein und berechne den Wert der anderen Variable.

$$x = 7 - y = 7 - 3 = 4$$

5. Führe die Probe durch, um sicher zu gehen, dass du dich nicht verrechnet hast, und gib das Zahlenpaar $(x|y)$ an, welches die Lösung des Linearen Gleichungssystems ist!

Probe: I: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$

II: $4 + 3 = 7$

$\Rightarrow L = \{(4|3)\}$

## *Das Additionsverfahren (= Gauß'sches Eliminationsverfahren)*

I: $3x + 4y = 21$

II: $x + y = 6$

1. Multipliziere entweder eine oder beide Gleichungen mit geeigneten Faktoren, damit ein Faktor der ersten Gleichung und der entsprechende Faktor der zweiten Gleichung Gegenzahlen sind! (In diesem Fall wird die Gleichung II mit $-4$ multipliziert.)

   I: $3x + 4y = 21$

   II: $x + y = 6 \quad | \cdot (-4)$

   ---

   I: $3x + 4y = 21$

   II: $-4x - 4y = -24$

2. Addiere die im 1. Schritt neu erhaltenen beiden Gleichungen, um eine lineare Gleichung mit einer Variable zu erhalten!

   I: $3x + 4y = 21$

   II: $-4x - 4y = -24 \quad \Big| +$

   ---

   $-x = -3$

3. Löse die im 2. Schritt entstandene Gleichung!

   $-x = -3 \quad | \cdot (-1)$

   $x = 3$

4. Setze das im 3. Schritt erhaltene Ergebnis in eine der beiden linearen Gleichungen ein und berechne den Wert der anderen Variable! (In diesem Fall wird in die Gleichung II eingesetzt.)

   $3 + y = 6 \quad | -3$

   $y = 3$

5. Führe die Probe durch, um sicher zu gehen, dass du dich nicht verrechnet hast, und gib das Zahlenpaar $(x|y)$ an, welches die Lösung des Linearen Gleichungssystems ist!

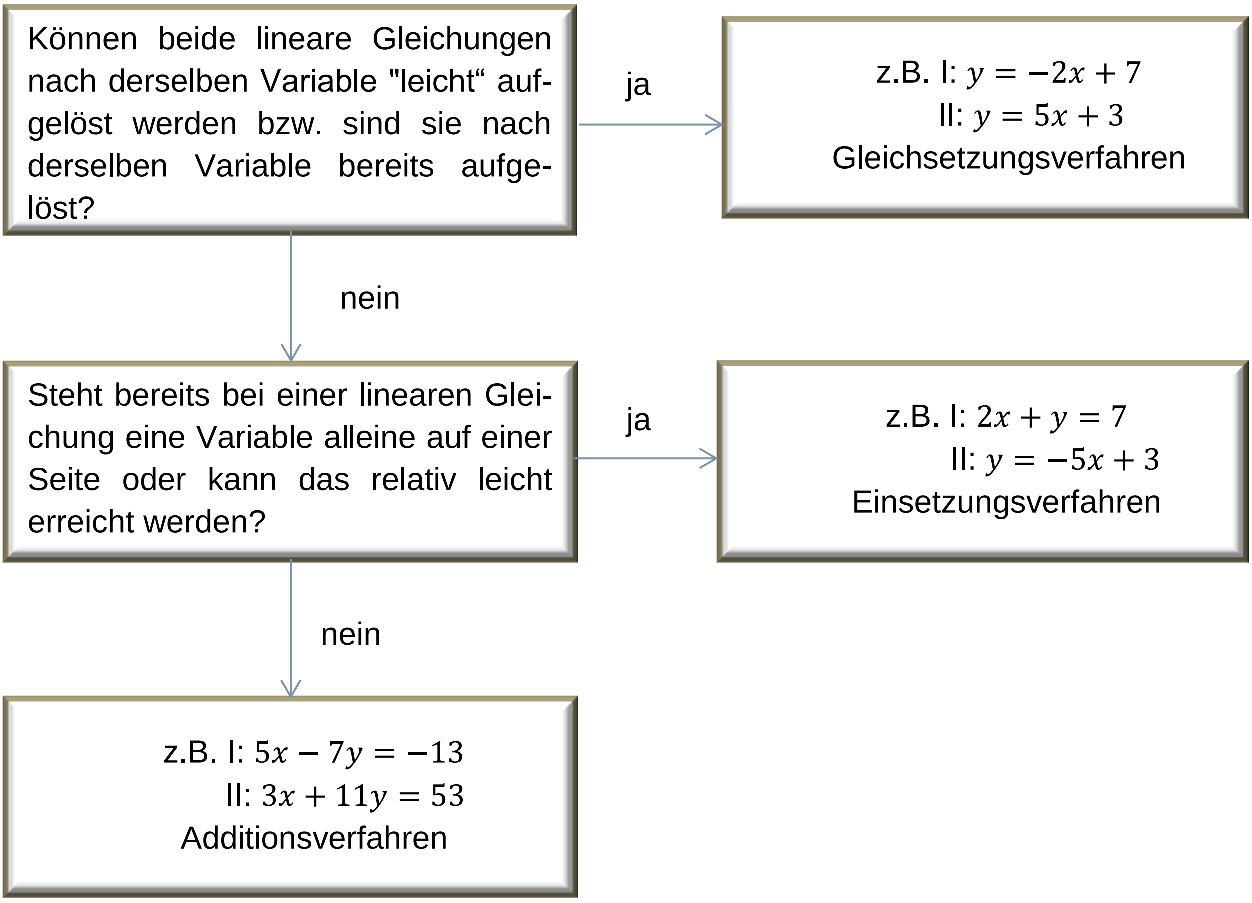
$$\text{Probe: I: } 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = 21$$
$$\text{II: } 3 + 3 = 6$$
$$\Rightarrow L = \{(3|3)\}$$

### 4.1.3. Tipps und Tricks für das Lösen von Linearen Gleichungssystemen für die Schüler/innen und den/die Lehrer/in

*Welches Lösungsverfahren ist das „bessere"?*[66]

Generell kann im Allgemeinen keines dieser drei vorgestellten Verfahren bevorzugt werden, denn falls die beiden linearen Gleichungen keine spezielle Form haben, führen all diese Lösungsverfahren mit ähnlichem Aufwand zum gewünschten Ziel. Deshalb kann folgendes Schema einerseits nur als Entscheidungshilfe für die Schüler/innen dienen und andererseits den Schüler/innen bewusst machen, dass nicht nur ein Lösungsverfahren eintrainiert werden sollte:

[66] Hans-Wolfgang *Henn*, Andreas *Filler*, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden (Berlin, Heidelberg 2015) 28; Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 (Wien 2010) 162; Edith *Arndt-Adam*, Mathe Helfer. Lineare Gleichungssysteme 8. Klasse (München 1996) 26-29; Oliver *Kunst*, Gleichsetzungsverfahren, online unter <http://www.gecco.info/download/pdf/gls/gleichsetzungsverfahren.pdf> (26.8.2015).




Ein kleiner Tipp am Rande:

Da das Auflösen einer Gleichung nach einer Variable unterschiedlich schwierig sein kann, lohnt es sich nicht immer die Gleichung nach derselben Variable aufzulösen, sondern falls möglich jene zu wählen, deren Koeffizient die Zahl 1 ist.

*Welche Umformungen sind beim Gauß´schen Eliminationsverfahren erlaubt?*[67]

Der Grundgedanke bei diesem Lösungsverfahren ist, dass durch äquivalente Umformungen (Äquivalenz = Gleichwertigkeit) die Anzahl der Variablen des Linearen Gleichungssystems verkleinert wird, ohne dabei aber die Lösungsmenge des Gleichungssystems zu verändern. Zu den äquivalenten Umformungen werden folgende gezählt:

- Vertauschen zweier linearer Gleichungen;

[67] Franz *Pauer*, Martina *Scheirer-Weindorfer*, Andreas *Simon*, Mathematik 1 HTL (Wien 2011) 138; Andreas *Filler*, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren (Heidelberg 2011) 11-12; Duden, Abi Mathematik (Mannheim, Zürich 2012) 50.

- Multiplikation einer linearen Gleichung mit einer reellen Zahl ungleich der Null;
- Ersetzen einer linearen Gleichung des Gleichungssystems durch die Summe beziehungsweise Differenz beider linearer Gleichungen.

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass Äquivalenzumformungen linearer Gleichungen auch äquivalente Umformungen von Linearen Gleichungssystemen sind. Die Umkehrung gilt aber wegen des 3. Punkts nicht.

Besitzt ein Lineares Gleichungssystem immer nur eine Lösung?[68]

Nein, denn ein Lineares Gleichungssystem kann eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Um die Lösungsmöglichkeiten zu bestimmen, kann wie folgt vorgegangen werden:

Zur Veranschaulichung dient das Lineare Gleichungssystem der Form:

$$\text{I: } a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{mit } a_1, b_1 \neq 0$$
$$\text{II: } a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{mit } a_2, b_2 \neq 0$$

1. Löse die linearen Gleichungen nach einer Variablen auf! (z.B. nach $y$ auflösen; d.h. hier $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$.)
2. Überprüfe, ob die beiden Koeffizienten jener Variable, nach der nicht aufgelöst wurde, gleich oder unterschiedlich sind. (In diesem Fall müssten die $x$-Koeffizienten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ miteinander verglichen werden.) Sind nämlich diese Koeffizienten verschieden, dann besitzt das Lineare Gleichungssystem genau eine Lösung. Sind allerdings jene Koeffizienten gleich und die Konstanten verschieden, dann besitzt das Lineare Gleichungssystem keine Lösung. (In diesem Fall müssten die $x$-Koeffizienten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ und die Konstanten $\frac{c_1}{b_1}$ und $\frac{c_2}{b_2}$ miteinander verglichen werden.) Sind die linearen Gleichungen aber identisch, dann besitzt das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. (Das heißt, dass $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ und $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ gelten würde.)

[68] Edith *Arndt-Adam*, Mathe Helfer. Lineare Gleichungssysteme 26; Andreas *Filler*, Elementare Lineare Algebra 7-8.

Wie kann eine Textaufgabe, welche mit einem Linearen Gleichungssystem gelöst werden kann, am geschicktesten geknackt werden?[69]

Die Textaufgabe muss zunächst gründlich gelesen werden. Danach muss überlegt werden, was gegeben ist und gesucht wird, wobei für die unbekannten Größen nun „passende" Variablen gewählt werden müssen. (Bewährt hat sich diese „Definition" der Variablen zudem auch aufzuschreiben.) Anschließend werden mathematische Beziehungen, welche aus dem Text herausgelesen werden müssen und die zwischen den gegebenen sowie gesuchten Werten bestehen, gesucht. (Skizzen sind dabei oft sehr hilfreich.) Nun können die Gleichungen aufgestellt und das Lineare Gleichungssystem gelöst werden. Zuletzt sollte die Probe durchgeführt werden, wobei hierfür nicht die Gleichungen sondern der Aufgabentext herangezogen werden sollte.

Gibt es eine Lösungsformel für Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen?[70]

Für jedes Lineare Gleichungssystem, für das es genau eine Lösung gibt, gibt es eine Lösungsformel.

Gegeben sei daher folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\text{I: } a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{mit } a_1, b_1 \neq 0$$
$$\text{II: } a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{mit } a_2, b_2 \neq 0$$

Zur Herleitung dieser Lösungsformel wird hier das Einsetzungsverfahren verwendet.

1. Schritt: Die Gleichung I wird nach $x$ aufgelöst.

$$\text{I: } a_1x + b_1y = c_1 \quad |-b_1y$$
$$a_1x = c_1 - b_1y \quad |:a_1$$
$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y$$

[69] Jürgen *Krah*, Lineare Gleichungssysteme. Grundlagen und Aufgaben mit Lösungen (Freising 2000) 23.
[70] Jürgen *Krah*, Lineare Gleichungssysteme 12-14.

2. Schritt: Die nach $x$ aufgelöste Gleichung I wird in die Gleichung II eingesetzt.

$$a_2\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}y\right)+b_2y=c_2$$

3. Schritt: Diese neue Gleichung wird nach $y$ aufgelöst.

$$\frac{a_2c_1}{a_1}-\frac{a_2b_1}{a_1}y+b_2y=c_2 \qquad |-\frac{a_2c_1}{a_1} \text{ und Brüche erweitern}$$

$$-\frac{a_2b_1}{a_1}y+\frac{a_1b_2}{a_1}y=\frac{a_1c_2}{a_1}-\frac{a_2c_1}{a_1} \quad |\cdot a_1$$

$$-a_2b_1y+a_1b_2y=a_1c_2-a_2c_1 \quad | \text{ herausheben}$$

$$(-a_2b_1+a_1b_2)y=a_1c_2-a_2c_1 \quad |:(a_1b_2-a_2b_1) \quad \neq 0$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

4. Schritt: Dieser Term $\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ wird nun in die in Schritt 1 nach $x$ aufgelöste Gleichung I eingesetzt.

$$x=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad | \text{ auf gemeinsamen Nenner bringen}$$

$$x=\frac{c_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}-\frac{b_1\cdot(a_1c_2-a_2c_1)}{a_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$x=\frac{a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_1b_1c_2+a_2b_1c_1}{a_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$x=\frac{a_1b_2c_1-a_1b_1c_2}{a_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$x=\frac{a_1\cdot(b_2c_1-b_1c_2)}{a_1\cdot(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Die Lösungsformel für Lineare Gleichungssysteme mit einer eindeutigen Lösung lautet daher

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ und } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Wie können Rechenroutinen bei Linearen Gleichungssystemen vermieden werden?[71]

*Beispiel 4.1.3.1. Mitgliedsbeiträge im Sportverein:*
Im Sportverein „Ballkicker“ sind 150 Jugendliche und 200 Erwachsene als Mitglieder eingeschrieben, welche einen Monatsbeitrag von 5 € (Jugendliche) beziehungsweise 7 € (Erwachsene) zu bezahlen haben. Da die Sporthalle im kommenden Jahr aber um etwa 1600 € renoviert werden muss, soll der Monatsbeitrag erhöht werden, wobei die Jugendlichen um einen Euro weniger zu bezahlen haben als die Erwachsenen. Berechne diese neuen Beiträge!

Zunächst sieht dieses Beispiel wie ein gewöhnliches Beispiel für Lineare Gleichungssysteme aus, welches ebenso als Einstiegsbeispiel gewählt werden könnte. Jedoch besitzt dieses Beispiel auch noch weiteres didaktisches Potenzial. Um dies besser herauszuarbeiten, wird dieses Beispiel zunächst wie üblich gelöst.

Zuerst werden folgende Variablen und Zusammenhänge gewählt:
Die Beitragserhöhung pro Jugendlicher sollte $x$ € ausmachen, die pro Erwachsenen $y$ €. Außerdem sollten diese zusätzlichen Einnahmen gerade einmal die Kosten für die Renovierung abdecken.

Daraus ergibt sich daher folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\text{I: } x = y - 1$$
$$\text{II: } 150x + 200y = 1600$$

Da bereits bei einer linearen Gleichung die Variable auf einer Seite alleine steht (vgl. Gleichung I), eignet sich für das Lösen dieses Linearen Gleichungssystems das Einsetzungsverfahren. Daher folgt:

$$150(y-1) + 200y = 1600$$
$$150y - 150 + 200y = 1600$$
$$350y = 1750$$
$$y = 5$$

[71] Hans-Wolfgang *Henn*, Andreas *Filler*, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra 30-31; Arnold *Kirsch*, Formalismen oder Inhalte?. Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr, In: Didaktik der Mathematik, 19. Jahrgang (1991) 294-308.

Setzt man dies jetzt in die Gleichung I ein, so gilt:

$$x = 5 - 1 = 4$$

Die Beitragserhöhung pro Jugendlichen beträgt daher 4 €, die der Erwachsenen 5 €.

Um aber diese Rechenroutinen, die bereits Arnold Kirsch[72] 1991 bezüglich der Linearen Gleichungssysteme kritisierte, zu durchbrechen, könnte diese Aufgabenstellung beispielsweise wie folgt erweitert werden:

Stell dir vor, dass du ein Sprecher in diesem Verein bist und Vorschläge für die neuen und möglichst gerechten Jahresbeiträge vorbringen müsstest.

Zwar lässt sich bei dieser Erweiterung die Gleichung I wieder relativ einfach aufstellen. (Bezeichnet man die neuen Jahresbeiträge für Jugendliche (in €) mit $x$ und die für Erwachsene mit $y$ (in €), so ergibt dies die Gleichung $150x + 200y = 1600$.) Um aber die Gleichung II aufstellen zu können, müssten zunächst Entscheidungen getroffen werden, die wiederum diskutiert und bewertet werden müssten. Hier sind einige angeführt:

- Sowohl bei den Jugendlichen wie auch bei den Erwachsenen soll die absolute Erhöhung gleich ausfallen: $x - 5 = y - 7$.
- Sowohl bei den Jugendlichen wie auch bei den Erwachsenen soll die prozentuale Erhöhung gleich ausfallen: $\frac{x-5}{7} = \frac{y-7}{7}$.
- Nur die Erwachsenen sollen die Erhöhung tragen: $x = 8$.
- Die Ermäßigung für die Jugendlichen soll 50% betragen: $x = \frac{y}{2}$.

Den Schüler/innen kann hierbei verdeutlicht werden, dass nicht mit Hilfe der Mathematik entschieden werden kann, welche dieser Möglichkeiten letztendlich angewandt werden soll. Einzig die außermathematischen Umstände legen dies fest, denn normative Setzungen, wie etwa das subjektive Gefühl bezüglich der Gerechtigkeit, bestimmen letztendlich die Vorgehensweise.

[72] vgl. Arnold *Kirsch*, Formalismen oder Inhalte? 294-308.
*„Das Lösen eines linearen Gleichungssystems wird aber meist, schon ehe die Fragestellung voll erfaßt bzw. bewußt* [sic] *gemacht ist, als reine Rechenaufgabe angegangen, bei dem jeweils behandelten Verfahren in bestimmten genau vorgeschriebenen Schritten zu bearbeiten ist – was dann (getrennt für die verschiedenen Verfahren) ausgiebig eingeübt wird.“* (vgl. Arnold *Kirsch*, Formalismen oder Inhalte? 294-295.)

## 4.2. Der computerunterstützte Weg – der Lebensnahe

In diesem Kapitel wird ein Einstieg in das Themenfeld „Lineare Gleichungssysteme“ vorgestellt, bei dem die Schüler/innen lernen, Lineare Gleichungssysteme mit Hilfe der Unterrichtssoftware GeoGebra 5[73], welche unter <http://www.geogebra.org/download?lang=de> (2.9.2015) kostenlos zu downloaden ist, sowohl grafisch wie auch rechnerisch zu lösen. Damit dies auch für den/die nicht computeraffine/n Leser/in nachvollziehbar ist, werden sämtliche notwendige Schritte mittels Screenshots verdeutlicht.

### 4.2.1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen – eine kurze Wiederholung[74]

Als Einstieg wird hier wieder wie im Kapitel 4.1.1. folgendes Beispiel gewählt:

*Beispiel 4.2.1.1.*
„Hurra! Die letzte Schulwoche hat begonnen! Morgen fahren wir, die 4A und 4B, endlich ins mehrtägige Erlebniscamp!“ Trotz gründlicher Planung ist jedoch eine Sache immer noch nicht geklärt. Wie können nämlich die 24 Schülerinnen und 21 Schüler auf die zur Verfügung stehenden Dreibett- und Vierbettzimmer aufgeteilt werden, denn einerseits soll niemand überbleiben und andererseits soll kein Zimmer unterbelegt sein. Außerdem dürfen Mädchen und Burschen nicht im selben Zimmer schlafen!
Versuche auch mit Hilfe des Computers beziehungsweise Tablets dieses Problem zu lösen und gib sämtliche Möglichkeiten an!

---

[73] GeoGebra wurde gewählt, da es unter anderem dynamische Geometrie, Algebra und Analysis miteinander verbindet. Außerdem ist GeoGebra für sämtliche bekannte Computerbetriebssysteme sowie für Tablets und in naher Zukunft auch für Smartphones kostenlos verfügbar. (Stand 2.9.2015)

[74] Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 206-209; GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015); Günther *Malle*, Helge *Woschitz*, Maria *Koth*, Bernhard *Salzger*, Mathematik verstehen 5. Technologie integriert (Wien 2014) 194-200; Steffen *Beuthan*, Günter *Nordmeier*, Mathematik üben mit Erfolg. 8. Schuljahr Gymnasium (Stuttgart 2007) 66-68; Gertrude *Binder*, Franz *Danninger*, Hildegard Urban-*Woldron*, klar² Mathematik 5 (Wien 2010) 116.

Am geschicktesten lässt sich dies durch Probieren mit Hilfe einer Tabelle darstellen, da nur wenige natürliche Zahlen überprüft werden müssen.

*Mädchen:*

| Dreibettzimmer | Vierbettzimmer |
|---|---|
| 8 | 0 |
| 4 | 3 |
| 0 | 6 |

*Burschen:*

| Dreibettzimmer | Vierbettzimmer |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 7 | 0 |

Diese Aufgabe kann somit relativ rasch gelöst werden. Wären jedoch die Zahlen wesentlich größer und müssten auch andere Zahlen abgesehen von den natürlichen Zahlen verwendet werden, so wäre GeoGebra ein geeignetes Hilfsmittel, um dies zu berechnen. Allerdings muss noch eine prägnante mathematische Darstellung gefunden werden, damit alle Lösungen mit Hilfe des Computers beziehungsweise Tablets gefunden werden können.

Deshalb wird die hier benötigte, aber unbekannte Anzahl der Dreibettzimmer mit der Variable $x$ und die der Vierbettzimmer mit der Variable $y$ bezeichnet. Die Anzahl der Mädchen, die in den Dreibettzimmern untergebracht sind, ist somit $3x$ und die Anzahl der Mädchen, die in den Vierbettzimmern untergebracht sind, $4y$. Somit ergibt sich für die 24 Mädchen folgende Gleichung:

$$3x + 4y = 24$$

Für die Burschen erfolgt dies analog. Deren Gleichung lautet daher:

$$3x + 4y = 21$$

Bezeichnet werden diese Gleichungen als lineare Gleichungen mit zwei Variablen in impliziter Form. (Die Variablen sind in diesem Fall die Buchstaben $x$ und $y$.)

Um dies nun mittels GeoGebra berechnen zu können, müssen die beiden linearen Gleichungen in impliziter Form mit Hilfe von GeoGebra in lineare Gleichungen in expliziter Form umgewandelt werden.

Exemplarisch wird hier mit Hilfe von GeoGebra nur die lineare Gleichung $3x + 4y = 24$ nach $y$ aufgelöst, da der Rest analog erfolgt.

Um diese Gleichung aufzulösen, muss zuerst die CAS-Ansicht aktiviert werden. Dies geschieht, indem jeweils einmal auf die Registrierkarte „**Ansicht**" und anschließend auf „**CAS**" geklickt wird (vgl. Abbildung 1). Anschließend muss der Befehl „**Löse[3x+4y=24, y]**" in der CAS-Ansicht eingegeben und mit „**Enter**" bestätigt werden, um das Ergebnis zu erhalten (vgl. Abbildung 2).

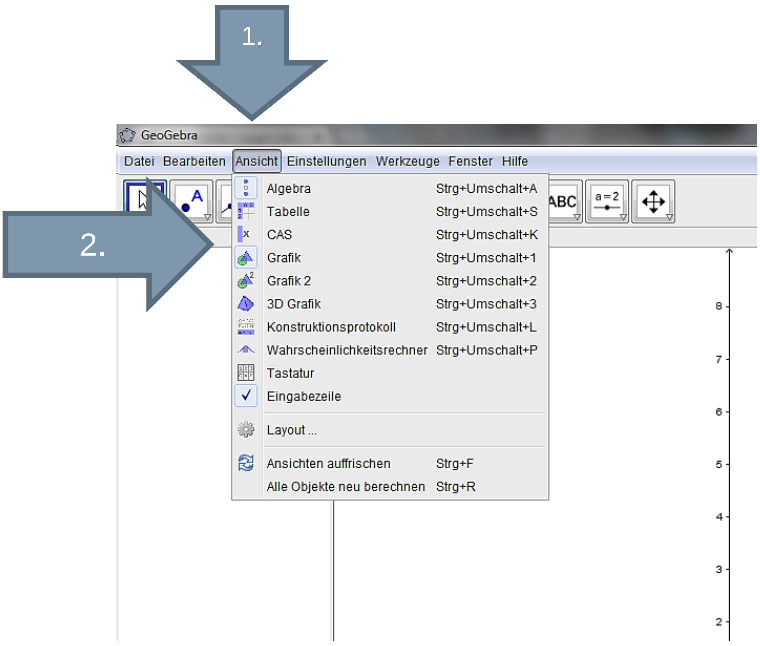



Abbildung 1: Aktivierung der CAS-Ansicht

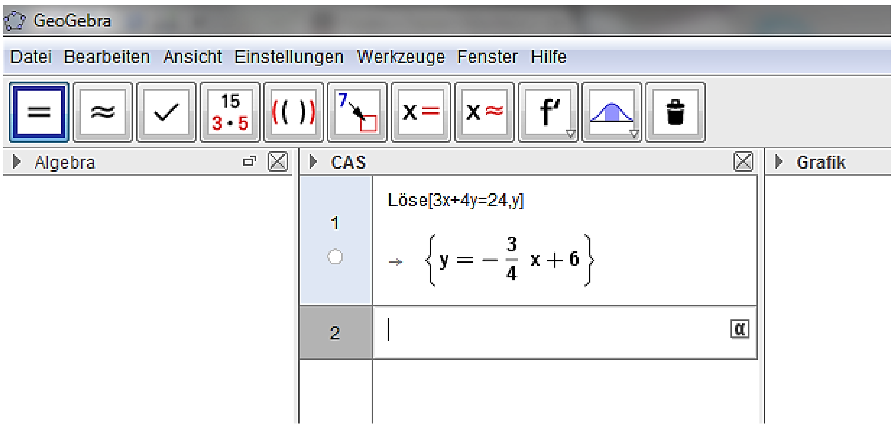



Abbildung 2: Lineare Gleichung $3x + 4y = 24$ wird nach $y$ aufgelöst.

Wird die andere Gleichung in impliziter Form auch nach $y$ aufgelöst, so ergeben sich folgende explizite Geradengleichungen:

| Implizite Geradengleichung | Explizite Geradengleichung |
|---|---|
| $3x + 4y = 24$ | $y = -\frac{3}{4}x + 6$ |
| $3x + 4y = 21$ | $y = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$ |

Da die Definitionsmenge auf Grund der Angabe nur aus den natürlichen Zahlen bestehen kann[75], wird der Befehl „**Folge[<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert a>, <Endwert b>]**" benötigt. Exemplarisch wird hier wieder in der CAS-Ansicht nur die lineare Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 6$ mit der Variable $x$, dem Startwert $0$ [76] und dem Endwert $24$ [77] mit dem Befehl „**Folge[-3/4x+6, x, 0, 24]**" eingegeben (vgl. Abbildung 3).

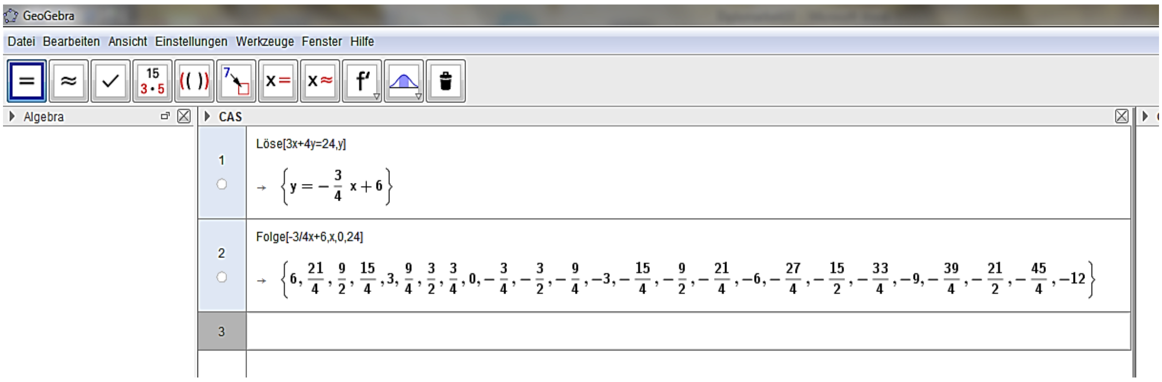



Abbildung 3: Die Folge $-\frac{3}{4}x + 6$ mit Startwert $0$ und Endwert $24$ wird dargestellt.

Da man durch diesen Befehl jedoch nur eine unübersichtliche Liste erhält, könnte folgender Trick angewandt werden, denn dadurch hätte man nicht nur den $y$-Wert (Anzahl der Vierbettzimmer), sondern auch den $x$-Wert (Anzahl der Dreibettzimmer) – somit das geordnete Zahlenpaar $(x|y)$ – angegeben. Der dazugehörige Befehl lautet:

„**Folge[(x,-3/4x+6), x, 0, 24]**"

[75] Es handelt sich nämlich hierbei um Schüler/innen.
[76] Es sind nämlich mindestens $0$ Vierbettzimmer in Verwendung.
[77] Es gibt höchstens 24 Vierbettzimmer, da nur 24 Schülerinnen mitfahren.

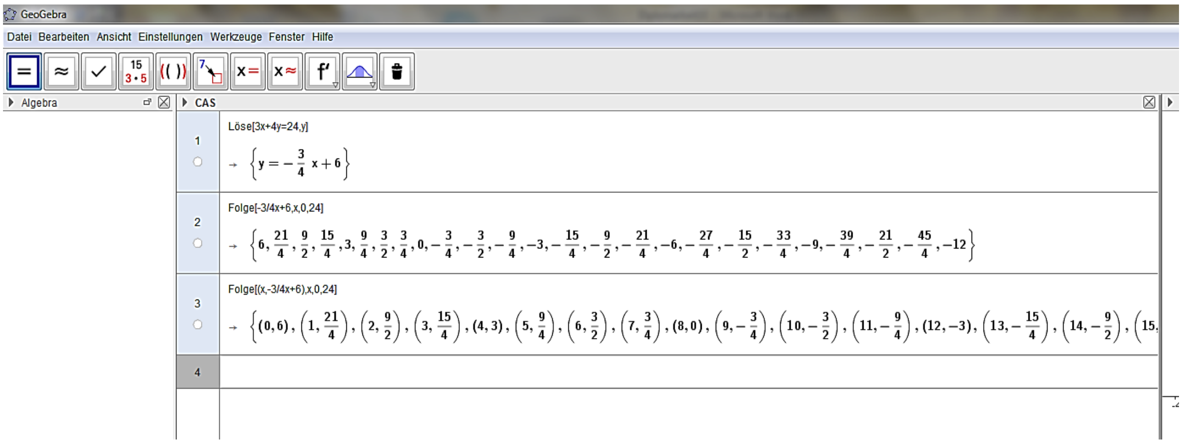
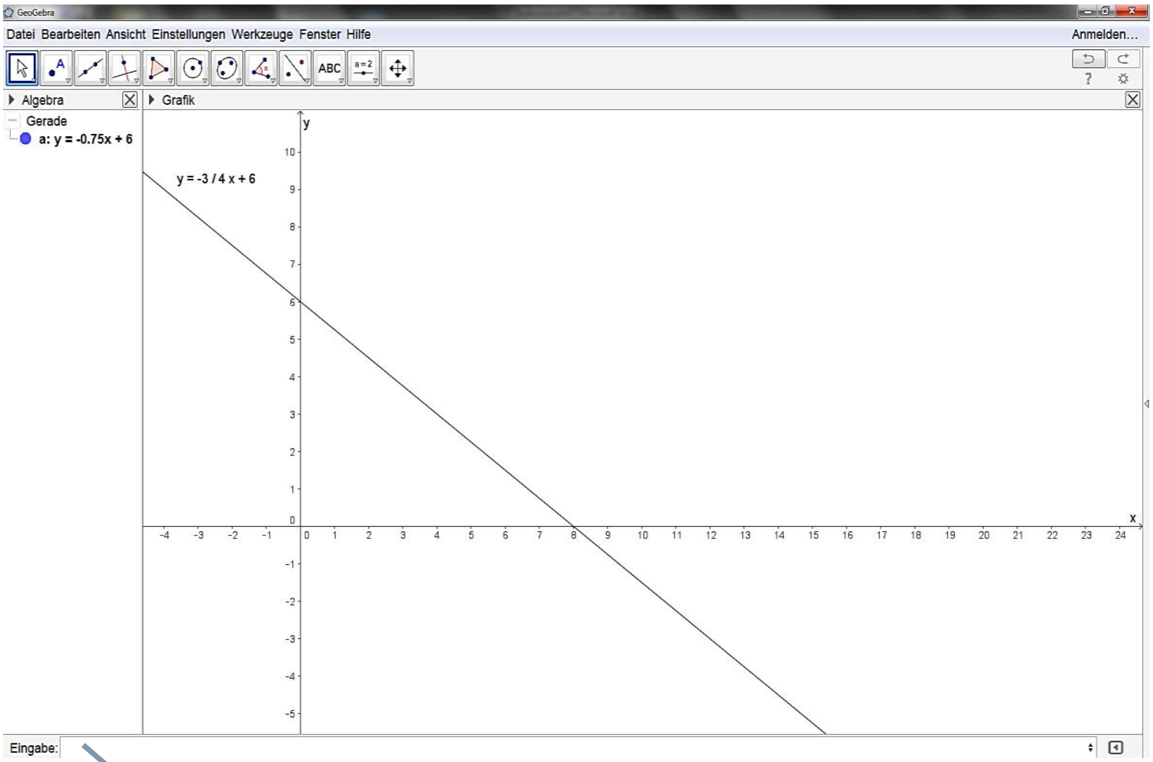



Abbildung 4: Die Folge $-\frac{3}{4}x + 6$ mit Startwert $0$ und Endwert $24$ wird als geordnetes Zahlenpaar $(x|y)$ dargestellt.

Dennoch muss auch diese Liste noch richtig interpretiert werden, da nur einige wenige geordnete Zahlenpaare dieser Liste zur Lösungsmenge zählen, denn in diesem Beispiel sind ausschließlich die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Grundmenge $G$ sinnvoll. Somit besteht die Lösungsmenge $L$ bei den Mädchen aus den drei Zahlenpaaren $L = \{(8|0); (4|3); (0|6)\}$ und bei den Burschen aus den zwei $L = \{(3|3); (0|7)\}$.

Würde man hingegen als Grundmenge $G$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ anstelle der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten, so hat die lineare Gleichung mit zwei Variablen unendlich viele Lösungen, da sich zu jedem reellen $x$-Wert ein zugehöriger $y$-Wert angeben lässt. Weil diese Lösungen nun aber nicht mehr aufgelistet werden können, muss jene Lösungsmenge nun in der Mengenschreibweise notiert werden: $L = \left\{(x|y) \mid y = -\frac{3}{4}x + 6,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\right\}$.
Da die Funktionsgleichung einer linearen Funktion die Form $y = kx + d$ besitzt und deren Graph eine Gerade ist, kann diese Lösungsmenge $L$ mit der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ nun als Gerade und nicht wie bei $G = \mathbb{N}$ als Punkte dargestellt werden.

Veranschaulicht kann dies mittels GeoGebra werden, indem man beispielsweise die Gleichung „**y=-3/4x+6**“ in das Eingabe-Feld eingibt und mit „**Enter**“ bestätigt (vgl. Abbildung 5).




Hier die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 6$ eingeben.

Abbildung 5: Die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 6$ mit Grundmenge $G = \mathbb{R}$ wird dargestellt.

Abgerundet wird die Wiederholung des Begriffs „Lineare Gleichung mit zwei Variablen“ mit einer Definition.

*Definition 4.2.1.2.: Lineare Gleichung mit zwei Variablen*

Besitzt eine Gleichung mit zwei Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ die Form

$$ax + by = c \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0,$$

so nennt man sie lineare Gleichung in impliziter Form. $a$ und $b$ werden als Koeffizienten von $x$ beziehungsweise $y$ bezeichnet.

*Anmerkung 4.2.1.3. zu lineare Gleichung mit zwei Variablen*

Jede lineare Gleichung mit zwei Variablen in impliziter Form kann in die Gestalt

$$y = kx + d \qquad \text{mit } k, d \in \mathbb{R};\ k \neq 0$$

(explizite Form) umgeformt werden.

Der Parameter $d$ steht für den Ordinatenabstand, der Koeffizient $k$ für die Steigung des Graphen der linearen Funktion.

Die Elemente der Lösungsmenge von dieser Gleichung sind jene Zahlenpaare $(x|y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, die diese Gleichung erfüllen. Werden jene Zahlenpaare in einem Koordinatensystem eingetragen, so ergibt sich daraus eine Gerade.

### 4.2.2. *Tipps für den/die Lehrer/in bezüglich der kurzen Wiederholung des Themas „Lineare Gleichungen mit zwei Variablen“*

*Kann im Hinblick auf die linearen Gleichungen mit Hilfe von GeoGebra „experimentiert“ werden?*[78]

Ja, denn mit Hilfe der Schieberegler, die bei GeoGebra verfügbar sind, können sehr einfach diverse Sonderfälle von den Schüler/innen „erforscht“ werden. Exemplarisch sei hier das „Experimentieren“ mit linearen Gleichungen in impliziter Form dargestellt.

Durch das einmalige Anklicken des Feldes „**a = 2**“ (vgl. Abbildung 6) und das anschließende Anklicken eines Quadranten vom Koordinatensystem (vgl. Abbildung 6) öffnet sich das Schiebereglerfenster.

[78] Hans-Christian *Reichel*, Dieter *Litschauer*, Herbert *Groß*, Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemeinbildenden höhern Schule und der Hauptschulen (Wien $^4$1996) 108; GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015).

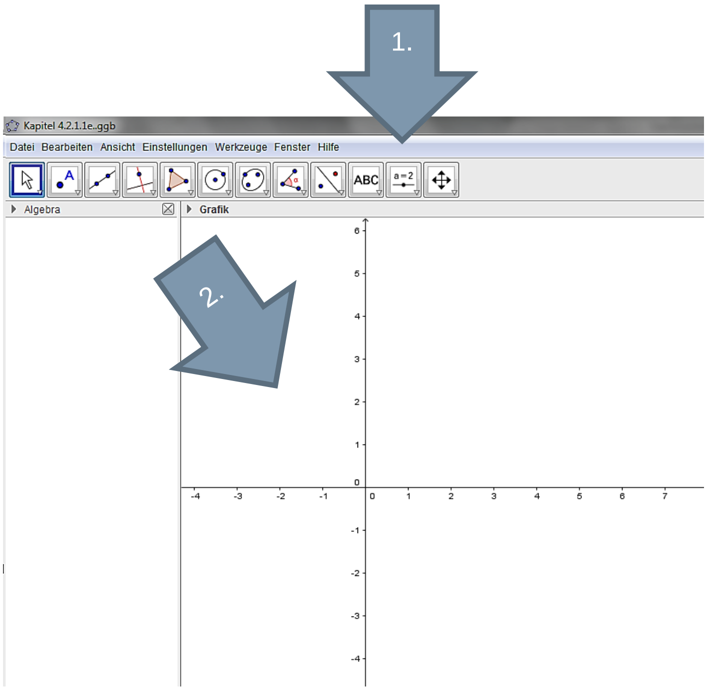



Abbildung 6: Öffnen des Schiebereglerfensters

Im nächsten Schritt müssen die drei Koeffizienten der Gleichung $ax + by = c$ als Schieberegler festgelegt werden. Da drei Schieberegler nicht auf einmal, sondern nur hintereinander erstellt werden können, muss der folgende Vorgang nun drei Mal durchgeführt werden. So müssen der Name des Koeffizienten der Gleichung $ax + by = c$ – in diesem Fall $a$ – sowie das Minimum beziehungsweise Maximum des Intervalls – in diesem Fall $-300$ beziehungsweise $+300$ – festgelegt werden, damit der Wert des Koeffizienten in diesem Intervall später verändert werden kann (vgl. Abbildung 7).

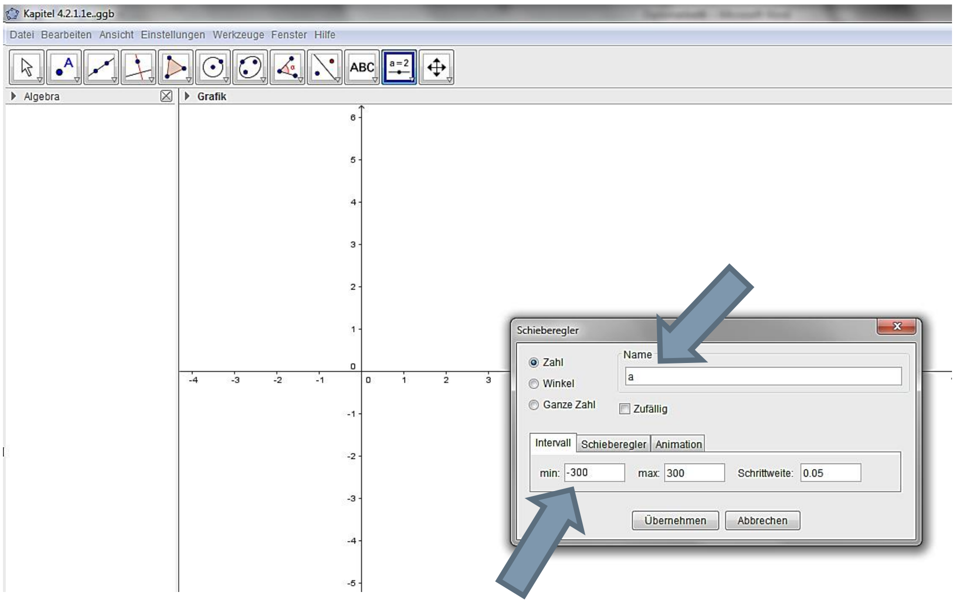



Abbildung 7: Name und Intervall des Schiebereglers werden festgelegt.

Werden diese Eingaben mit „**Übernehmen**" bestätigt, so erscheint der Schieberegler $a$ im Grafikbereich (vgl. Abbildung 8). Analog werden nun die Schieberegler $b$ beziehungsweise $c$ aktiviert.

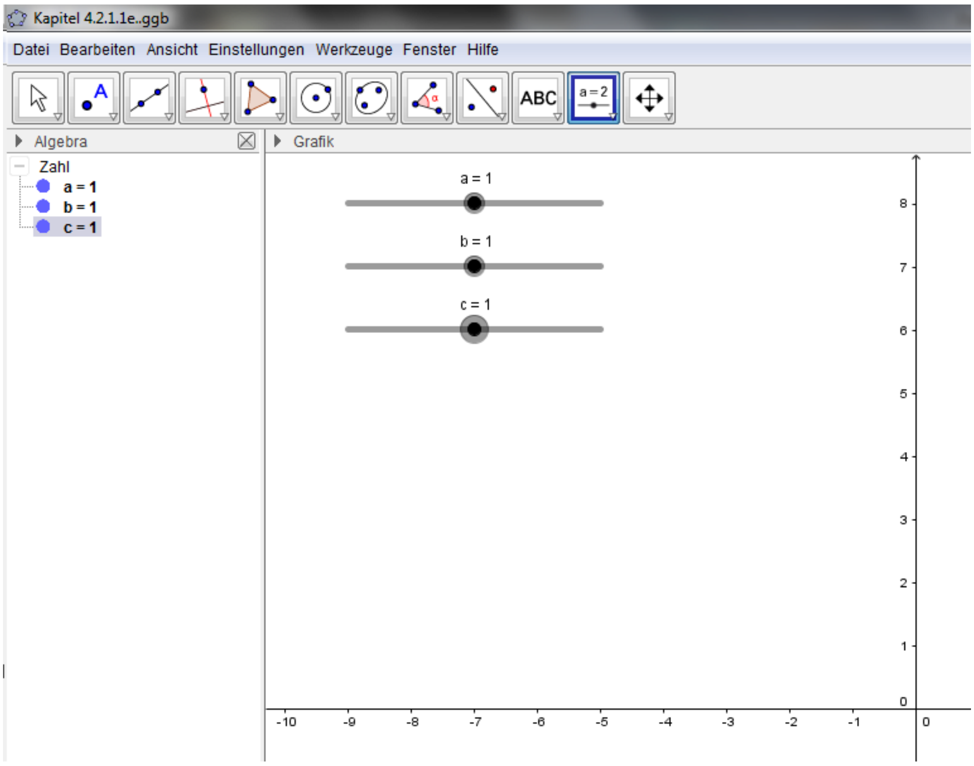



Abbildung 8: Die Schieberegler $a$, $b$ und $c$ wurden bereits festgelegt.

Im letzten Schritt vor dem „Experimentieren" wird noch im Eingabe-Feld die lineare Gleichung in impliziter Form „**a*x+b*y=c**" eingegeben und mit „**Enter**" bestätigt (vgl. Abbildung 9).

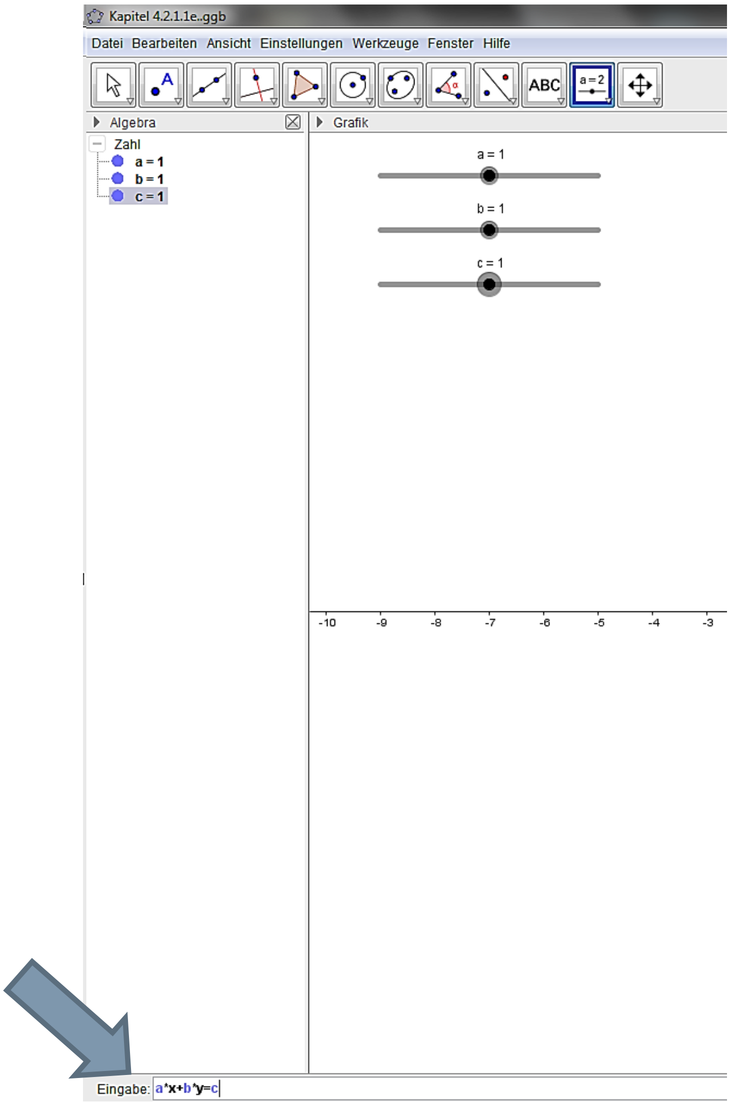



Abbildung 9: Die lineare Gleichung in impliziter Form $ax + by = c$ wird eingegeben.

Durch das Verschieben der Schieberegler kann nun experimentiert (vgl. Abbildung 10) werden. Dabei können folgende Erkenntnisse gewonnen werden:

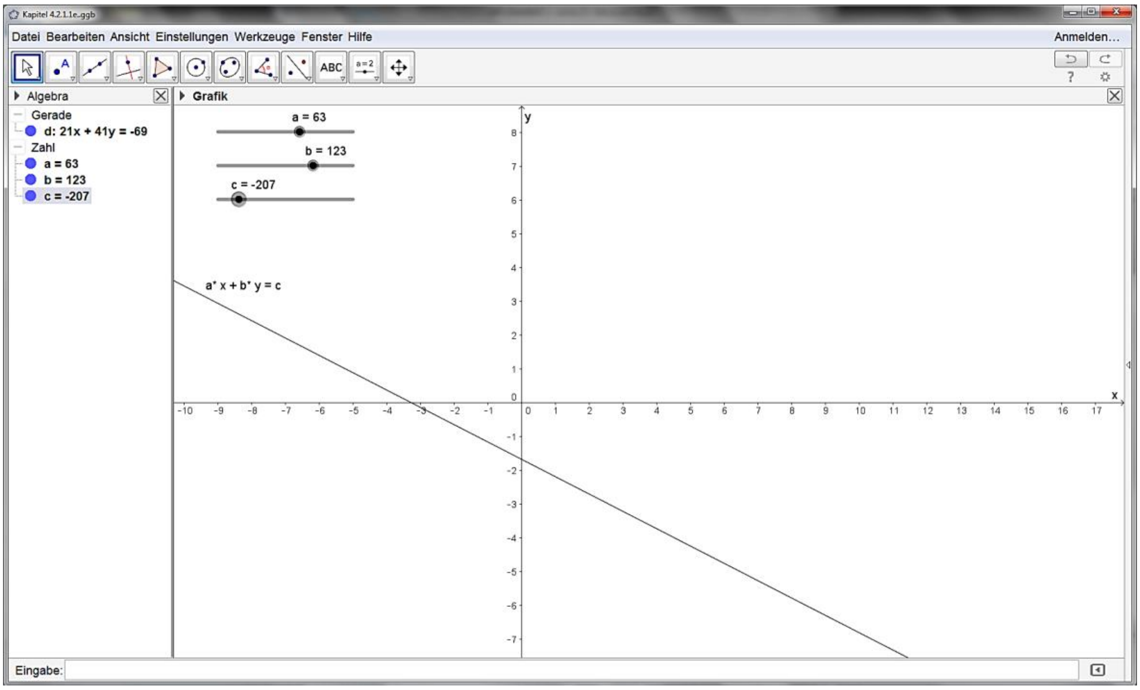



Abbildung 10: Durch das Verschieben der Schieberegler kann „experimentiert“ werden. (Hier: Der Graph der linearen Gleichung ist fallend.)

- Falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gelten, dann ist der Graph der linearen Gleichung entweder fallend oder steigend (vgl. Abbildung 10 und 11).

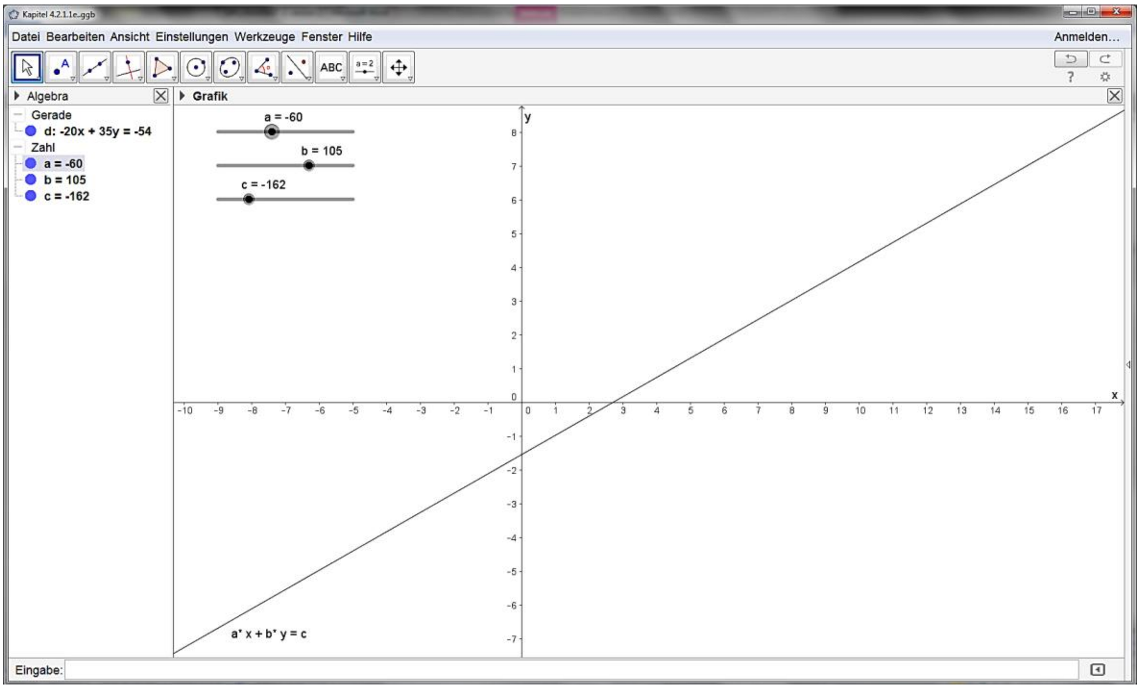



Abbildung 11: Der Graph der linearen Gleichung ist steigend.

- Falls $a = 0$ und $b \neq 0$ gelten, dann ist der Graph parallel zur $x$-Achse (vgl. Abbildung 12).

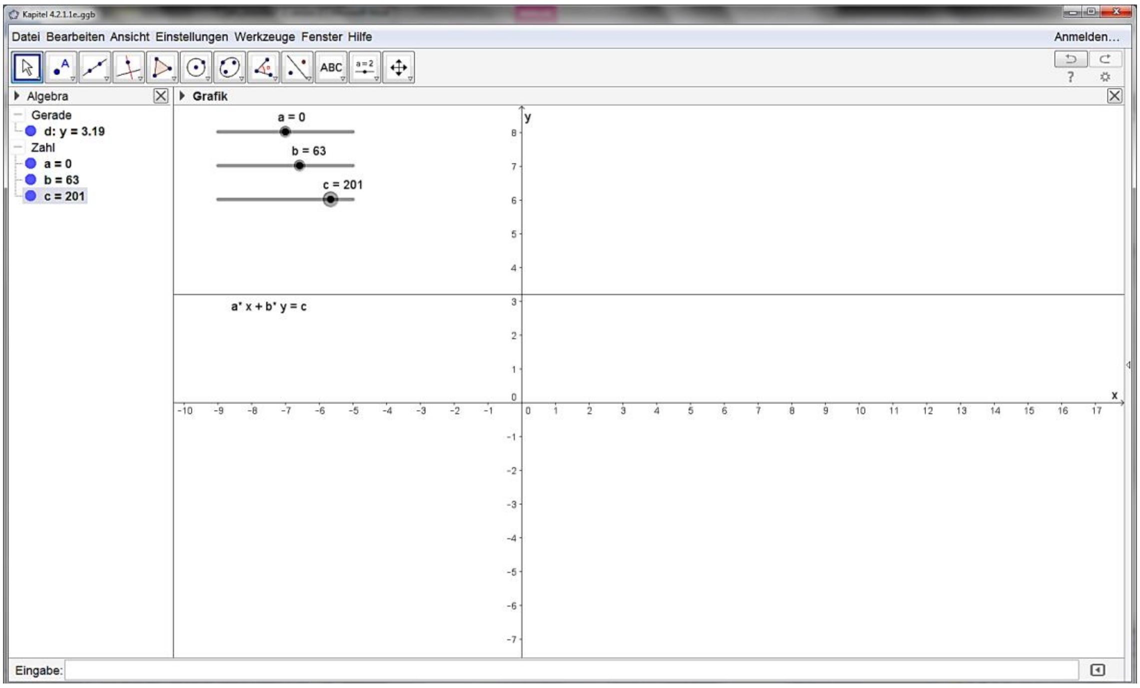



Abbildung 12: Der Graph ist parallel zur $x$-Achse.

- Falls $a \neq 0$ und $b = 0$ gelten, dann ist der Graph parallel zur $y$-Achse (vgl. Abbildung 13).

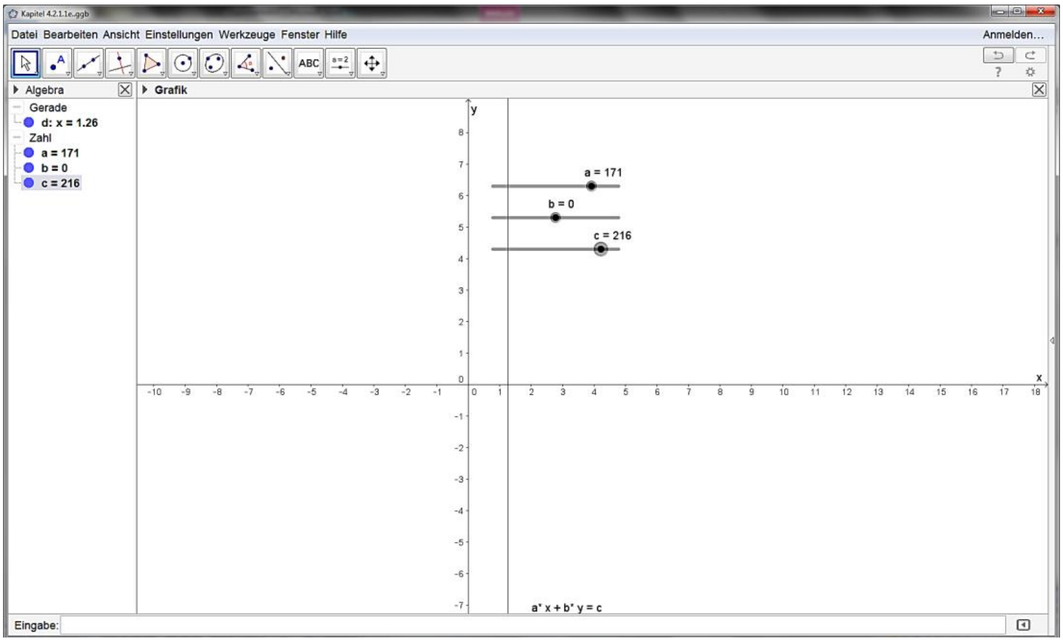



Abbildung 13: Der Graph ist parallel zur $y$-Achse.

Zum „Experimentieren“ kann aber ebenso die lineare Gleichung in expliziter Form $y = kx + d$ herangezogen werden. So empfiehlt es sich auch hier, die Werte der Koeffizienten – hier $k$ und $d$ – mit Hilfe von Schiebereglern zu variieren. Durch die „Experimente“ können die Schüler/innen erkennen, dass der

Wert $k$ die Steigung und der Wert $d$ den Ordinatenabstand beeinflussen. Ist $k = 0$, dann verläuft der Graph parallel zur $x$-Achse. Ist $d = 0$, dann verläuft der Graph durch den Ursprung. Gilt $k < 0$, dann ist der Graph fallend. Gilt jedoch $k > 0$, dann ist der Graph steigend.

### *4.2.3. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen*[79]

Durch geschicktes Erweitern des Beispiels 4.2.1.1. kann dieses wie im Kapitel 4.1.1. wieder zu einem Linearen Gleichungssystem-Beispiel ausgebaut werden.

*Beispiel 4.2.3.1.*

Nachdem die Schülerinnen und Schüler der 4A und 4B berechnet und sich auch geeinigt haben, wie viele Zimmer die Mädchen und Buben beim Erlebnis-camp letztendlich benötigen (vgl. Beispiel 4.2.1.1.), wollen sie ihrer Lehrerin ein Rätsel stellen. Da die Lehrerin Knobelaufgaben liebt, ist sie davon gleich begeistert. Die positiv überraschten Schülerinnen und Schüler stellen daher der Lehrerin folgendes Rätsel: Die Mädchen benötigen 7 Zimmer, die Burschen hingegen nur 6. Wie viele Dreibett- und Vierbettzimmer müssen nun für die Burschen bzw. Mädchen bestellt werden?

Da die Lehrerin dieses Rätsel nicht durch Probieren lösen möchte und die Schüler/innen zuvor bei deren Berechnungen etwas beobachtet hat, weiß sie, dass für die 24 Mädchen die lineare Gleichung $3x + 4y = 24$ und für die 21 Burschen die lineare Gleichung $3x + 4y = 21$ erfüllt sein müssen. Weil auf Grund des Rätsels die Summe von der unbekannten Anzahl der Dreibettzimmer

[79] Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 206-213; Günther *Malle*, Helge *Woschitz*, Maria *Koth*, Bernhard *Salzger*, Mathematik verstehen 5. Technologie integriert (Wien 2014) 194-200; GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015); Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (ungedr. naturwiss. Diss. Salzburg 2006), online unter <http://archive.geogebra.org/static/publications/mhohen_diss.pdf> (2.9.2015); Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 155-156; Stefan *Götz*, Hans-Christian *Reichel*, Robert *Müller*, Günter *Hanisch*, Mathematik 5 (Wien 2010) 178; Anita *Dorfmayr*, Clemens *Brand*, Josef *Lechner*, August *Mistlbacher*, Alfred *Nussbaumer*, thema mathematik. Mathematik mit GeoGebra. Themenheft (Linz ²2011).

(Variable $x$) und der unbekannten Anzahl der Vierbettzimmer (Variable $y$) bei den Mädchen 7 Zimmer und bei den Burschen 6 Zimmer ergeben müssen, kommt die Lehrerin nun zu folgendem Zwischenergebnis:

Die Mädchen hätten gerne 7 Zimmer. Somit muss auch noch die lineare Gleichung $x + y = 7$ erfüllt sein. Weil sich die Burschen 6 Zimmer wünschen, muss bei ihnen außerdem die lineare Gleichung $x + y = 6$ zutreffen. Somit gelten bei den Mädchen die beiden folgenden linearen Gleichungen

I: $3x + 4y = 24$

II: $x + y = 7$

und bei den Burschen die linearen Gleichungen

I: $3x + 4y = 21$

II: $x + y = 6$.

Was heißt dies nun aber? Die richtige Lösung sind jene Zahlenpaare, die beide Gleichungen der Mädchen beziehungsweise Burschen erfüllen. Das heißt, dass beim Einsetzen dieser Zahlenpaare in beide Gleichungen stets eine wahre Aussage entstehen muss.

Da die Lehrerin ein Tablet zur Verfügung hat, auf dem sich die Unterrichtssoftware GeoGebra befindet, benutzt sie diese, um jenes Zahlenpaar zu suchen, welches beim Einsetzen in beide lineare Gleichungen zu einer wahren Aussage führt. Sie könnte nun beispielsweise auf diese drei verschiedenen Arten vorgehen:

*Möglichkeit 1:*

Zuerst werden in der Algebra-Ansicht die linearen Gleichungen definiert. Dies geschieht, indem zuerst der frei gewählte Name der ersten linearen Gleichung und dann die lineare Gleichung selbst im Eingabe-Feld – exemplarisch gezeigt am Linearen Gleichungssystem der Mädchen – mit dem Befehl **„<Name der Gleichung> : <Gleichung>**“ eingegeben und mit „**Enter**“ bestätigt wird. (In diesem Fall muss der Befehl „**g : 3x+4y=24**“ eingegeben werden. Achtung: Hierbei nicht die Leerzeichen übersehen!) Analog wird die zweite lineare Gleichung eingegeben (vgl. Abbildung 14).

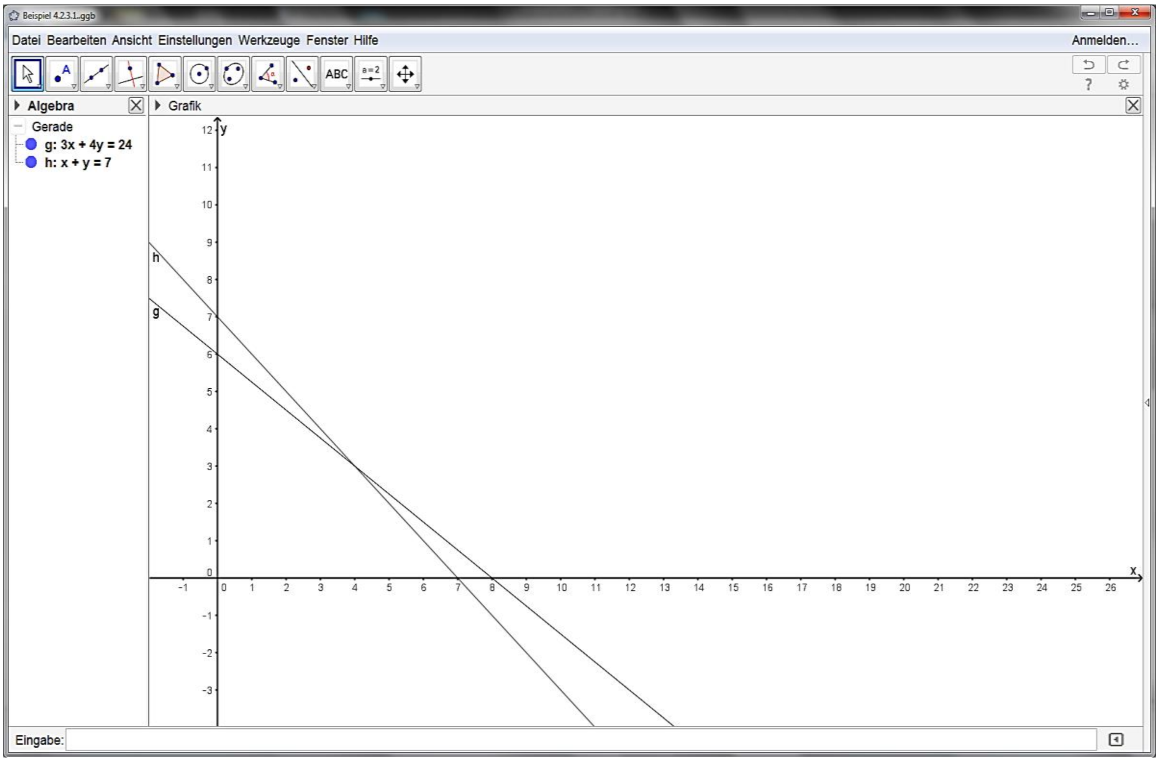



Abbildung 14: Die beiden linearen Gleichungen des Linearen Gleichungssystems werden eingegeben.

Im Anschluss daran werden diese beiden Geraden mit dem Befehl „**Schneide[<Objekt>, <Objekt>]**“ geschnitten. Aus diesem Grund gibt man zuerst den Namen des Schnittpunkts – in diesem Fall der Buchstabe S – und dann den Befehl mit den Namen der Geraden ein – in diesem Fall „**S = Schneide[g, h]**“ (vgl. Abbildung 15).

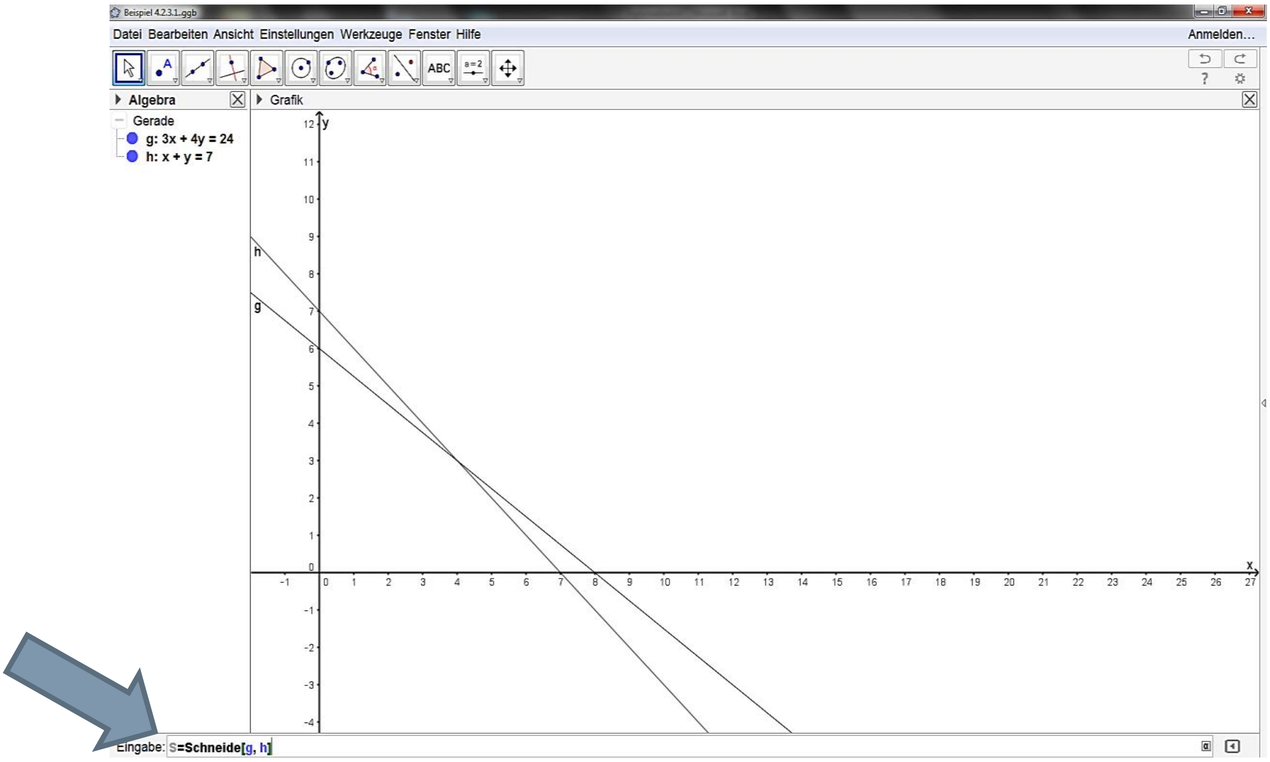



Abbildung 15: Die beiden Geraden werden geschnitten.

Nach dem Bestätigen mit „**Enter**“ erscheint in der Algebra-Ansicht der Schnittpunkt (vgl. Abbildung 16).

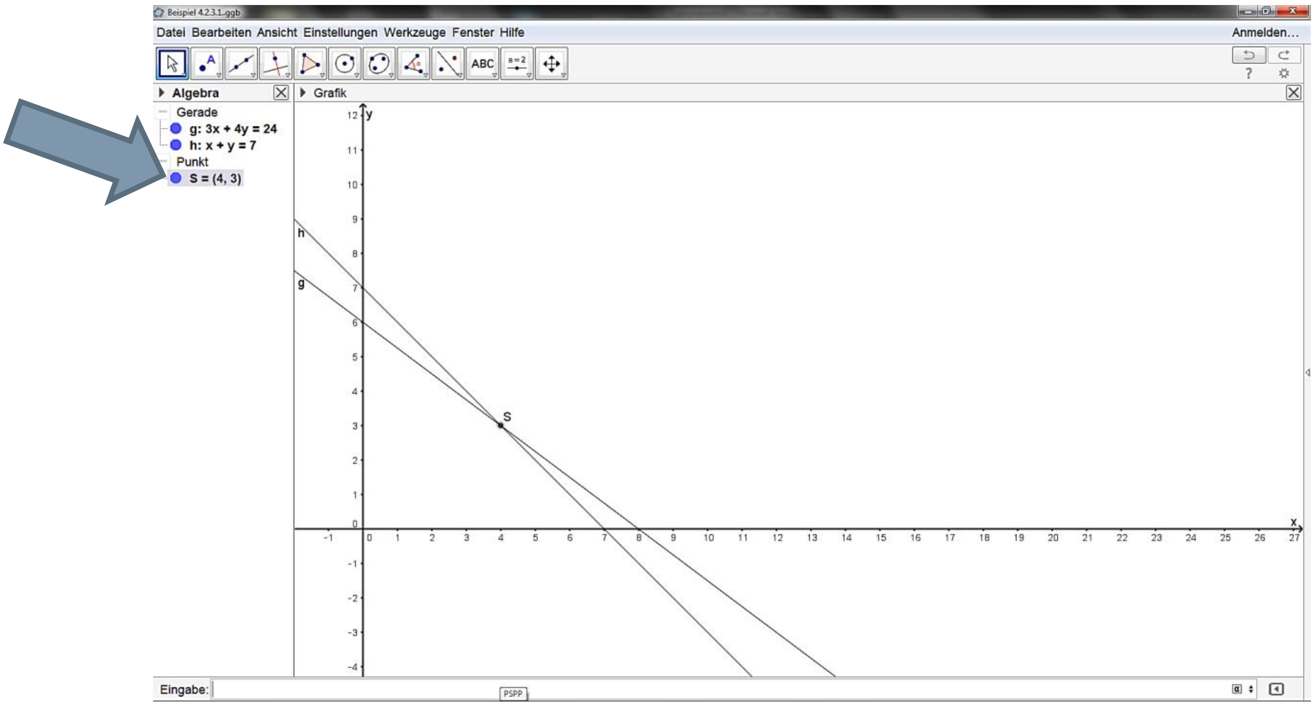



Abbildung 16: Der Schnittpunkt wird berechnet.

*Möglichkeit 2:*

Zuerst werden in der Algebra-Ansicht die linearen Gleichungen definiert. Dies geschieht, indem zuerst der frei gewählte Name der ersten linearen Gleichung und dann die lineare Gleichung selbst im Eingabe-Feld – exemplarisch gezeigt am Linearen Gleichungssystem der Mädchen – mit dem Befehl **„<Name der Gleichung> : <Gleichung>“** eingegeben und mit „**Enter**“ bestätigt wird. (In diesem Fall muss der Befehl „**g : 3x+4y=24**“ eingegeben werden. Achtung: Hierbei nicht die Leerzeichen übersehen!) Analog wird die zweite lineare Gleichung eingegeben (vgl. Abbildung 14). Anschließend muss zuerst auf das Feld „**Punkt**“, dann auf das Feld „**Schneide**“ (vgl. Abbildung 13) und letztendlich auf den Schnittpunkt beider Geraden im Koordinatensystem geklickt werden, damit der Schnittpunkt beider Geraden in der Algebra-Ansicht angezeigt wird (vgl. Abbildung 17).

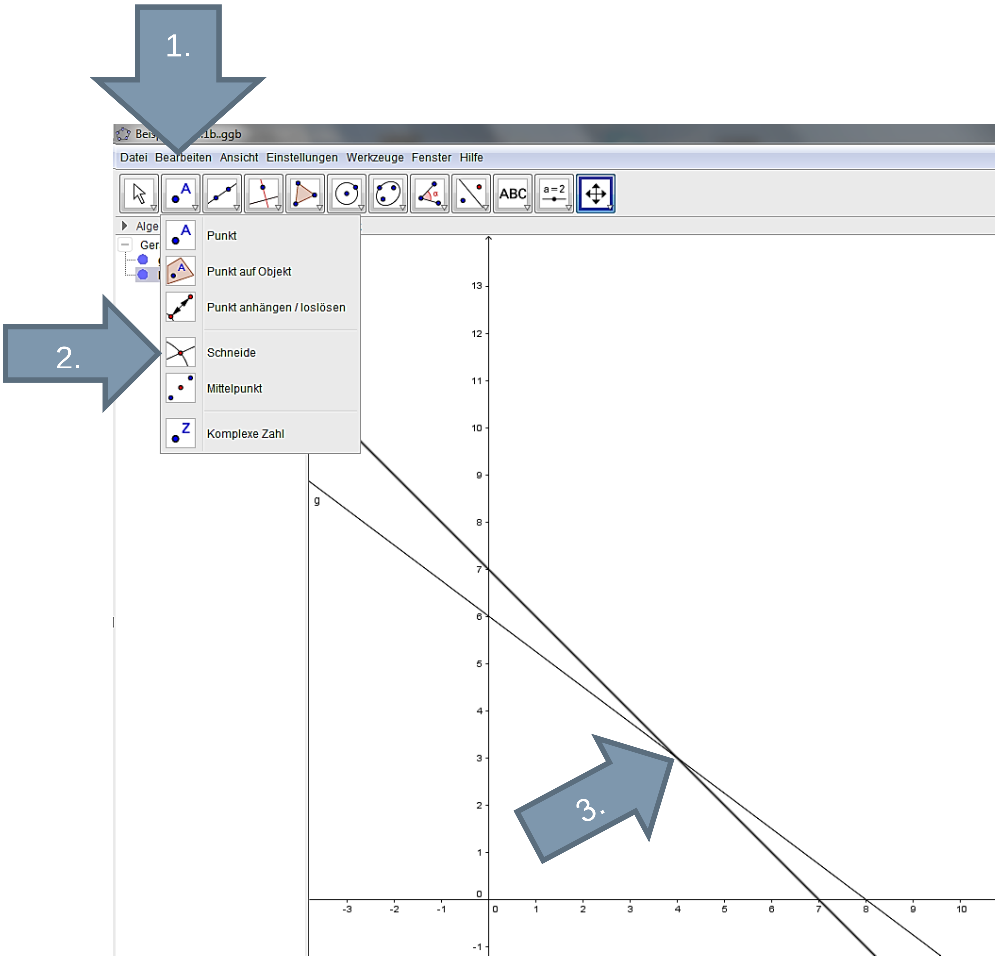



Abbildung 17: Aktivierung des Feldes „Schneide“ und Berechnung des Schnittpunkts

*Möglichkeit 3:*

Falls man aber auf die graphische Visualisierung der linearen Gleichungen verzichtet möchte, so könnte dieses Lineare Gleichungssystem noch wie folgt gelöst werden. Benötigt werden dafür allerdings einerseits die CAS-Ansicht, welche in der Registrierkarte „**Ansicht**“ durch Klicken auf „**CAS**“ aktiviert werden kann, und andererseits der Befehl „**Löse[<Gleichung>, <Variable>]**“. In diesem Beispiel müsste somit in der CAS-Ansicht der Befehl „**Löse[{3x+4y=24, x+y=7}, {x, y}]**“ eingegeben werden. (Achtung: Die geschwungenen Klammern { } müssen gesetzt werden, weil beide Gleichungen berücksichtigt werden müssen und das Lineare Gleichungssystem nach beiden Variablen aufgelöst werden soll. Die Beistriche trennen die linearen Gleichungen beziehungsweise die Variablen voneinander.) Nach Betätigung der „**Enter**“-Taste erscheint die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems (vgl. Abbildung 18).

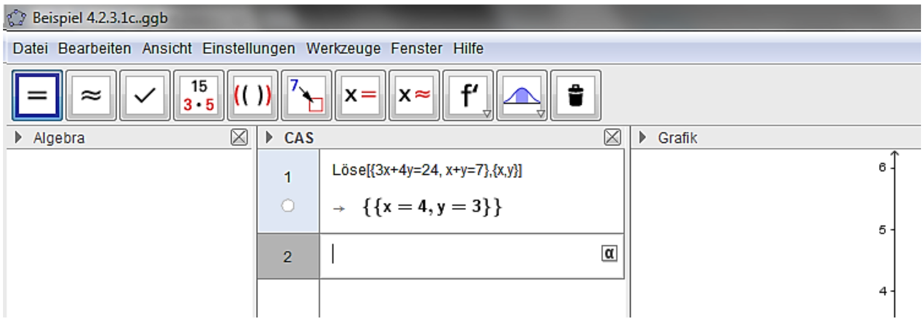



Abbildung 18: Lösen des Linearen Gleichungssystems in der CAS-Ansicht

Auch wenn alle Linearen Gleichungssysteme mit zwei Variablen nach einem dieser drei „Rezepte“ gelöst werden können, sollte zumindest in den beiden ersten Fällen darauf hingewiesen werden, dass die Koordinaten des Schnittpunkts $S\,(x_s|y_s)$ beider Geraden die Lösung des Gleichungssystems sind, da nur jener Punkt beide Gleichungen erfüllt.

Zuletzt wird noch der Begriff „Lineares Gleichungssystem“ definiert, da damit bis zu diesem Zeitpunkt hantiert wurde, ohne diesen erklärt zu haben.

*Definition 4.2.3.2.: Lineares Gleichungssystem*

Zwei zusammengehörende lineare Gleichungen mit zwei Variablen werden als Lineares Gleichungssystem bezeichnet:

$$\text{I: } a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{mit } a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$$

$$\text{II: } a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{mit } a_2, b_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$$

Ein Zahlenpaar $(x|y)$ ist genau dann Lösung des Gleichungssystems, falls dieses beide Gleichungen erfüllt.

### *4.2.4. Tipps und Tricks für das Lösen von Linearen Gleichungssystemen für die Schüler/innen und den/die Lehrer/in*

Besitzt ein Lineares Gleichungssystem immer nur eine Lösung?[80]

Nein, denn ein Lineares Gleichungssystem kann eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Um dies herauszufinden, können die Schüler/innen wie folgt „experimentell“ vorgehen:

Die Schüler/innen sollen zuerst eine lineare Gleichung in expliziter Form ihrer Wahl definieren und diese im Eingabe-Feld eingeben. Hier wird die Gleichung „**g : y=2x+2**“ gewählt und eingegeben (vgl. Abbildung 19).

[80] Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 215; GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015); Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 156; Edith *Arndt-Adam*, Mathe Helfer. Lineare Gleichungssysteme 26.
Aus Zeitgründen kann aber auch auf folgende Arbeitsblätter von GeoGebra zurückgegriffen werden: <http://www.geogebra.org/student/b75514#material/67400>, <http://www.geogebra.org/student/b75514#material/62284> (4.9.2015).

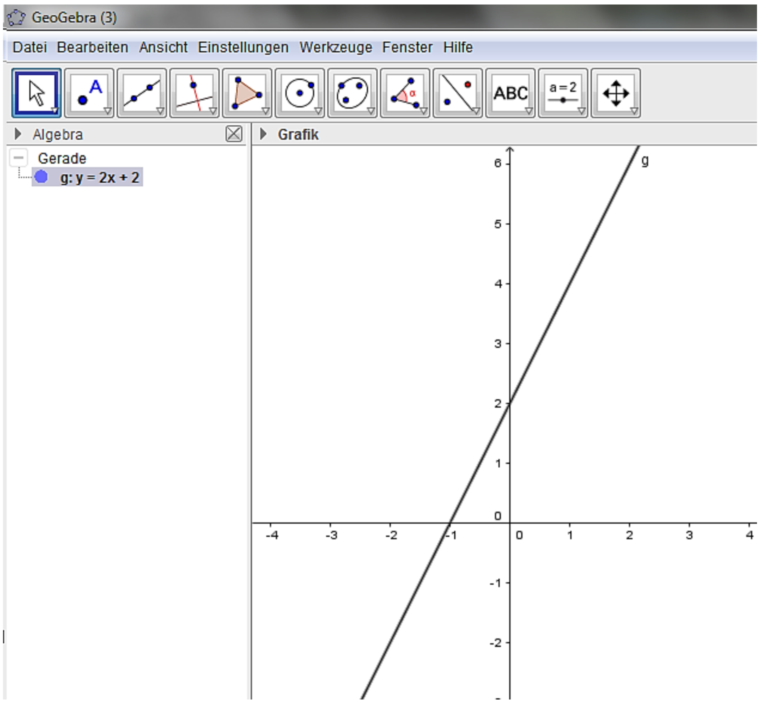



Abbildung 19: Eine lineare Gleichung wird gewählt und eingegeben.

Anschließend werden die Schieberegler $k$ und $d$ im Intervall $[-100; 100]$ definiert (vgl. Abbildung 20). (Hinweis: genaue Anleitung siehe Kapitel 4.2.2. Abbildung 6 bis 8)

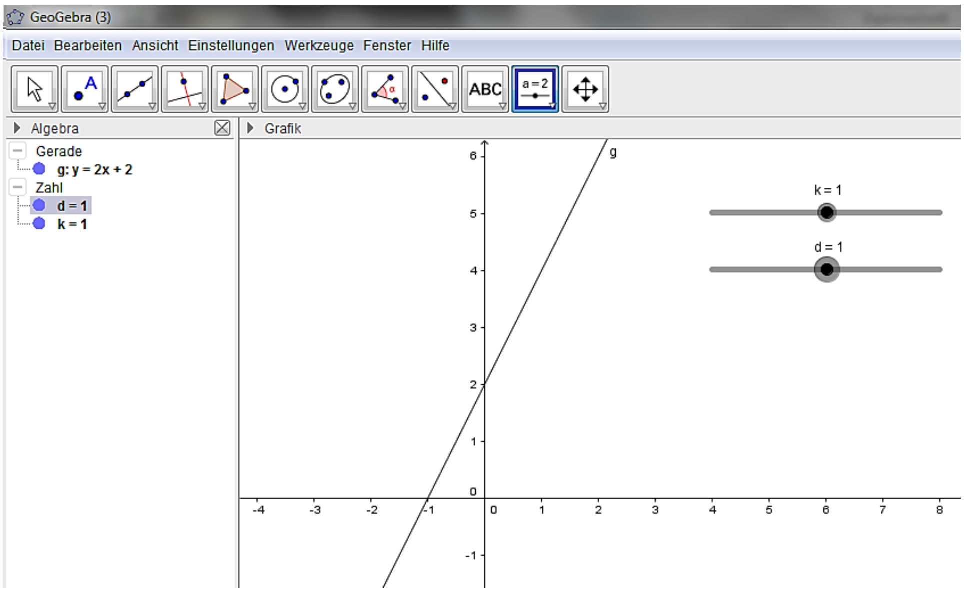



Abbildung 20: Die Schieberegler $k$ und $d$ wurden festgelegt.

Zuletzt wird die explizite Gleichung „**h : y= k*x+d**" im Eingabe-Feld eingegeben, ehe dann mit dem „Experimentieren" begonnen werden kann (vgl. Abbildung 21).

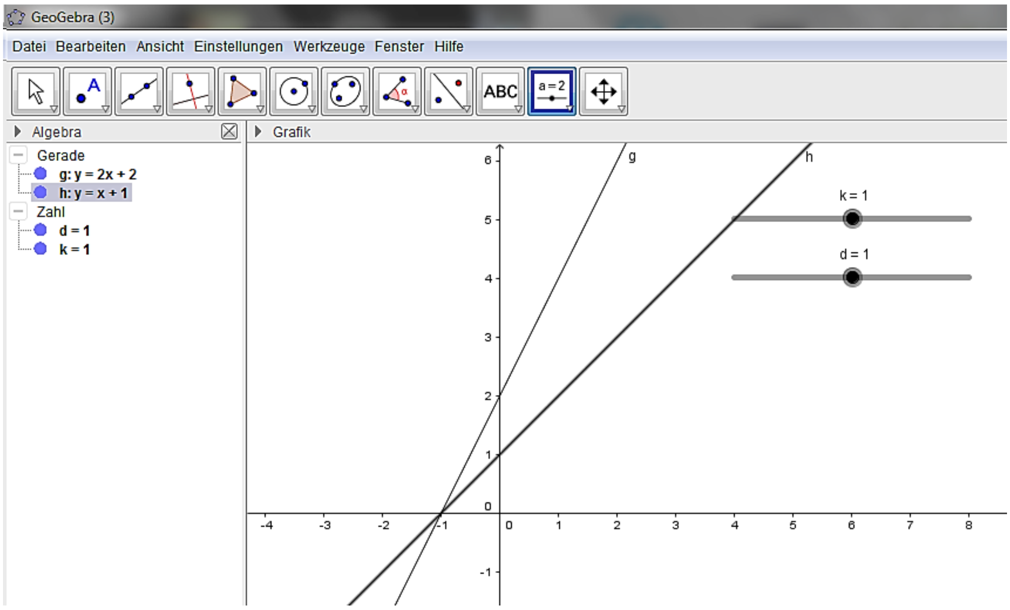



Abbildung 21: Mit dem Linearen Gleichungssystem kann nun „experimentiert“ werden.

Durch das Verschieben der Schieberegler sollten die Schüler/innen folgende Erkenntnisse gewinnen können:

1) Das Lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, falls die beiden Graphen der linearen Gleichungen einander im Punkt $S\ (x_s|y_s)$ schneiden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Steigungen beider Geraden verschieden sind. D.h. die Lösungsmenge $L = \{(x_s|y_s)\}$ (vgl. Abbildung 21).

2) Das Lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, falls beide Graphen der linearen Gleichungen parallel zueinander, aber nicht ident sind. Dies ist genau dann der Fall, falls die Steigungen beider Geraden gleich und die Ordinatenabstände verschieden sind. D.h. die Lösungsmenge $L = \{\,\}$, da beide Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben (vgl. Abbildung 22).

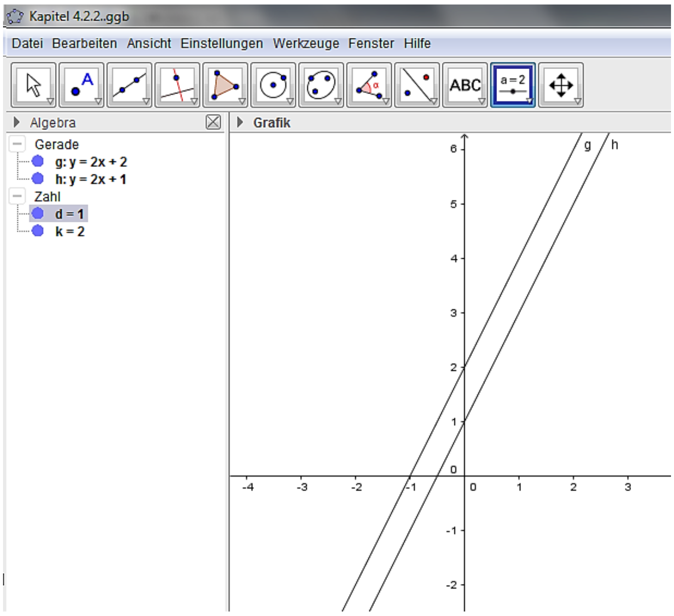



Abbildung 22: Das Lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

3) Das Lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, falls beide Graphen der linearen Gleichungen ident sind. Dies ist genau dann der Fall, falls die Steigungen und Ordinatenabstände beider Geraden gleich sind. D.h. die Lösungsmenge sind jene Punkt, die auf dieser Geraden liegen. Die Lösungsmenge $L$ ist daher beispielsweise $L = \{(x|y)|y = 2x + 2, x, y \in \mathbb{R}\}$ (vgl. Abbildung 23).

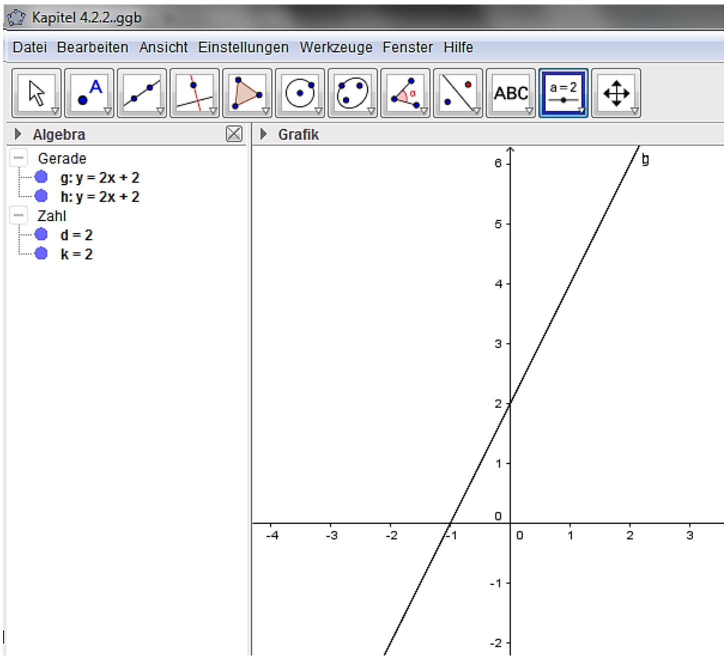



Abbildung 23: Das Lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

Können Additions-, Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren auch bei GeoGebra angewandt werden?[81]

Diese Verfahren lassen sich auch bei GeoGebra anwenden, jedoch sind diese bei der „Programmierung“ etwas aufwendiger als jene Lösungsverfahren, die im Kapitel 4.2.3. vorgestellt wurden. Aus diesem Grund werden hier nicht die einzelnen „Programmierschritte“ wie zuvor genau beschrieben, sondern nur der ganze „Programmcode“ dargelegt. Als Beispiel wird das Beispiel 4.2.3.1. verwendet.

1) Additionsverfahren:

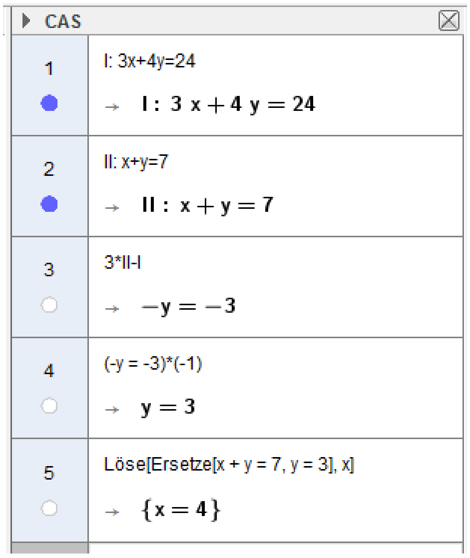



Abbildung 24: Additionsverfahren

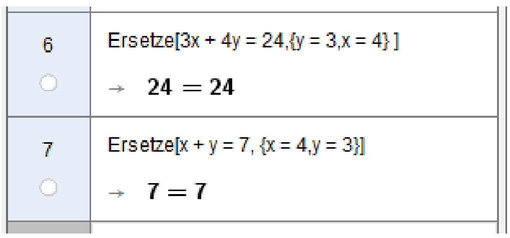



Abbildung 25: Durchführung der Probe

[81] GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015); Matthias *Kitte*, Lösen von linearen Gleichungssystemen mit GeoGebra, online unter <http://www.doc4web.de/doc/1593933655887> (4.9.2015).

2) Gleichsetzungsverfahren:

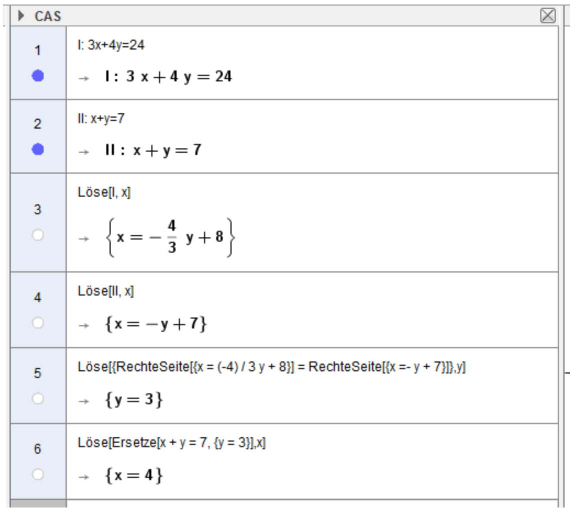



Abbildung 26: Gleichsetzungsverfahren

3) Einsetzungsverfahren:

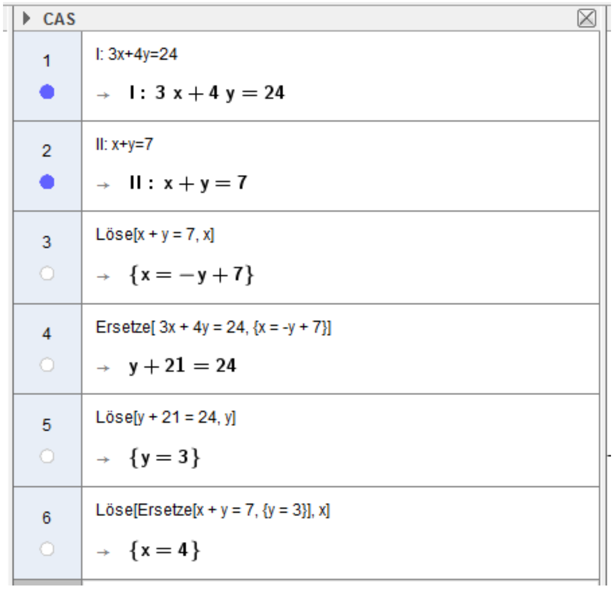



Abbildung 27: Einsetzungsverfahren

## 4.3. Der historische Weg – das sich Entwickelnde

Viele Schüler/innen erleben die Mathematik als ein fertiges Endprodukt. Mathematik ist jedoch ein lebendiges und sich stetig entwickelndes Wissensgebiet, in dem deren Ideen, Begriffe sowie Techniken meist auf konkrete Fragen, welche sich mathematisch lösen lassen, zurückgehen.[82] Dieser Einstieg greift nun diesen Sachverhalt auf und versucht aufzuzeigen, dass die erste Beschäftigung mit Linearen Gleichungssystemen nicht wie viele vermuten auf Carl Friedrich Gauß, sondern nach heutigem Wissensstand auf die Mesopotamier vor 4000 Jahren zurückgeht.[83] Obwohl aus dieser Zeit viele praktische Probleme, die heute mit Linearen Gleichungssystemen gelöst werden könnten, bekannt sind, sind deren Lösungen, die teilweise ebenfalls in den Quellen erhalten geblieben sind, für Schüler/innen der 8. Schulstufe zumeist zu komplex.[84] Daher wird bei diesem Einstieg die Mathematik im alten China im Zeitraum von 200 v.Chr. bis 300 n.Chr. herangezogen.

Angemerkt muss schließlich noch werden, dass es sich hierbei ausschließlich um einen Einstieg in das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ handelt und dass im Anschluss daran – schon aus rechtlichen Gründen – die bekannten Lösungsverfahren der Linearen Gleichungssysteme noch thematisiert werden müssen. Aus diesem Grund beginnt diese Unterrichtssequenz sehr anschaulich und wird im fortschreitenden Verlauf immer abstrakter, umso leichter an die Lösungsverfahren anschließen zu können (vgl. Kapitel 4.2.2. und 4.2.3.).

---

[82] Hans Niels *Jahnke*, Karin *Richter*, Geschichte der Mathematik. Vielfalt der Lebenswelten – Mut zu divergentem Denken, In: mathematiklehren, H. 151 (Dezember 2008) 4-5.

[83] Urs *Kirchgraber*, Marco *Bettinaglio*, Lineare Gleichungssysteme. Ein Leitprogramm in Mathematik, online unter <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/lin_gleich/lingl.pdf> (9.9.2015).
Ein Beispiel aus dieser Zeit: *„Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten.“* (vgl. Urs *Kirchgraber*, Marco *Bettinaglio*, Lineare Gleichungssysteme 6.) Dieses Beispiel könnte aus heutiger Sicht mit Hilfe eines Linearen Gleichungssystems gelöst werden. Damals wurden solche Beispiele jedoch meist durch Nachdenken beziehungsweise Ausprobieren gelöst (vgl. Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 175.).

[84] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kulturen – Menschen (Berlin, Heidelberg ²2014) 32-35.

### 4.3.1. Eine kurze historische Einführung[85]

Das Buch „Jiŭ Zhāng Suànshù“ („Neun Kapitel der Rechenkunst“) ist das älteste und wohl bekannteste Mathematikbuch aus China. Zusammengestellt dürfte es etwa zwischen 200 vor bis 300 nach Christus worden sein, wobei heute nur mehr Abschriften davon erhalten geblieben sind. Die älteste heute bekannte aber nicht vollständig erhaltene Abschrift[86] stammt aus 1213 nach Christus. Jüngere Ausgaben stammen zum Teil aus dem 18. Jahrhundert, wobei diese zumeist auf einer großen Enzyklopädie basieren, die zwischen 1403 bis 1407 entstand. Von dieser großen Enzyklopädie sind heute allerdings wiederum nur mehr Fragmente erhalten geblieben.

Das Buch, das höchstwahrscheinlich den Wissensstand der Mathematik in China im 1. Jahrhundert nach Christus widerspiegelt, stellt jedoch kein theoretisches Werk, sondern eine Aufgabensammlung dar. So werden nämlich darin 246 Probleme aus dem Alltag, wie beispielsweise aus dem Bereich der Bautechnik, der Landvermessung, des Handels, der Steuern und des Geldverleihs, deren Lösungen sowie die Lösungswege behandelt. Interessant ist aber dabei, dass im 8. Kapitel „Fāngchéng“ 18 Aufgaben besprochen werden, die aus heutiger Sicht Lineare Gleichungssysteme-Beispiele darstellen. Gelöst wurden diese Aufgaben durch ein Verfahren, welches dem Gauß´schen-Eliminationsverfahren sehr ähnlich ist. Das Besondere dabei ist aber, dass nicht mit einer algebraischen Notation, sondern mit Tabellen hantiert wurde, was wiederum der Grund für die Namensgebung des Verfahrens ist, denn Fāngchéng (chinesisch 方程) hieß ursprünglich übersetzt so viel wie „rechteckige Tabelle“. Heute bedeutet dieses Wort auf Chinesisch „Gleichung“. (Genauer wird dieses Verfahren im Kapitel 4.3.3. vorgestellt.)

[85] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China. Mit *fangcheng* zu linearen Gleichungssystemen, In: mathematiklehren, H. 151 (Dezember 2008) 8; Roger *Hart*, The Chinese Roots of Linear Algebra (Baltimore 2011) 30-33, 67, 69; Norbert *Herrmann*, Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker (München² 2007) 9; Jean-Claude *Martzloff*, A History of Chinese Mathematics (Berlin, Heidelberg 1997) 128, 131.
[86] Diese Abschrift enthält nur die ersten fünf Kapitel (vgl. Roger *Hart*, The Chinese Roots of Linear Algebra 31.).

### 4.3.2. Die chinesischen Zahlzeichen[87]

Die ersten chinesischen Artefakte, auf denen sich Zahlen befinden, dürften, wie archäologische Funde belegen, Orakelknochen[88] aus der Shang-Dynastie sein. Eingesetzt wurden diese Orakelknochen vor allem bei religiösen Ritualen, welche in erster Linie dazu dienten den Rat und die Hilfe der Geister von den Ahnen zu erbitten. Verzeichnet wurden auf diesen Orakelknochen beispielsweise neben der Bezeichnung des Tages auch die exakte Bezeichnung der Rangfolge jener Ahnen, die mit Hilfe dieser Orakelknochen gerufen werden konnten.

Die bekannten und heute noch verwendeten chinesischen Hieroglyphenziffern sind seit der Han-Dynastie[89] bekannt. Merkmale dieses Zahlensystems sind einerseits das Dezimalsystem und andererseits die Tatsache, dass es sich bei diesen Zahlen um Individualzeichen von 1 bis 9 handelt, mit denen sämtliche Zahlen mit Hilfe eines multiplikativen Prinzips geschrieben werden können. Beachtet muss jedoch bei diesem Dezimalsystem werden, dass es sich hierbei noch nicht um ein vollständiges Positionssystem handelt, da beispielsweise die Einer-, Zehner-, Hunderterstellen nur durch ein Zeichen und nicht wie heute üblich durch ihre Stelle verdeutlicht werden. Um dies nun etwas zu veranschaulichen, sind die chinesischen Zahlzeichen als auch die Zahl 41957 in der die Abbildung 28 dargestellt.

---

[87] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 123; Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 8, 10; Harald *Haarmann*, Weltgeschichte der Zahlen (München 2008) 49-50; Denise *Jäger*, Vom Zählen zur Mathematik- Die Mathematik in den alten Hochkulturen (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2014), online unter <http://othes.univie.ac.at/33659/1/2014-05-13_0806436.pdf> (8.9.2015) 57-58; Wolfgang *Hein*, Mathematik im Altertum. Von Algebra bis Zinseszins (Darmstadt 2012) 43.

[88] Die frühen Orakelknochen mit Zahlen stammen aus dem 12. Jahrhundert v. Chr. (vgl. Harald *Haarmann*, Weltgeschichte der Zahlen 49.).

[89] 206 v.Chr. – 220 n.Chr.

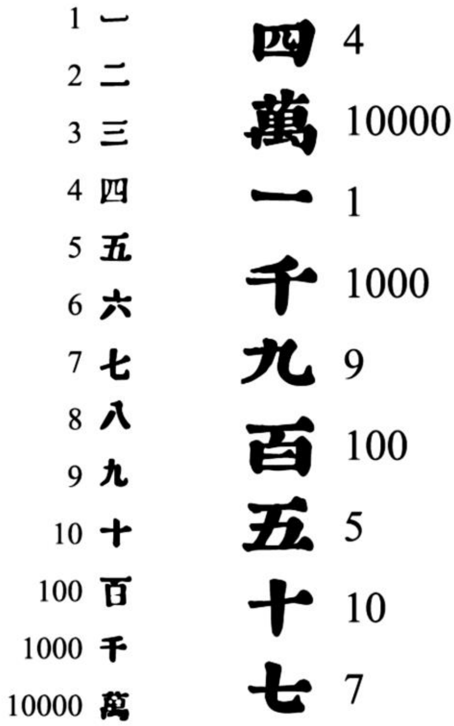



Abbildung 28: Chinesische Zahlzeichen und Darstellung der Zahl 41957 mit Hilfe von chinesischen Zahlzeichen[90]

Weil sich aber diese Hieroglyphenziffern nicht fürs Rechnen eigneten, wurden sie ausschließlich für die Zahlnotation eingesetzt. Um aber geeignete Ziffern für das Rechnen zur Verfügung zu haben, entstanden daher ab dem 4. Jahrhundert vor Christus elementare Zahlzeichen, welche sich ab dem 2. Jahrhundert v.Chr. zu den Rechenstäbchen[91] mit Rechenbrett[92] weiterentwickelten. Interessant dabei ist jedoch, dass diese Rechenstäbchenzahlen im Hinblick auf die Struktur wesentlich einfacher als die traditionellen chinesischen Zahlzeichen darzustellen waren. So wurden nämlich die Zahlen 1 bis 9 sowie deren Potenzen $10^{2n}$ (n = 1, 2, 3, …) mit dem Rechenstäbchenzahlen-Typ 1 (vgl. Abbildung 29) und die Zehnerzahlen 10 bis 90 sowie deren Potenzen $10^{2n+1}$ (n = 1, 2, 3, …) mit dem Rechenstäbchenzahlen-Typ 2 (vgl. Abbildung 30) dargestellt.

[90] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 123.
[91] Die Stäbchen bestanden abhängig vom Vermögen des Besitzers aus Holz, Gusseisen oder Elfenbein (vgl. Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 123.).
[92] Damit leichter gerechnet werden konnte, waren auf diesem Rechenbrett Felder aufgezeichnet (vgl. Denise *Jäger*, Vom Zählen zur Mathematik 58.).


Abbildung 29: Rechenstäbchenzahlen-Typ 1[93]


Abbildung 30: Rechenstäbchenzahlen-Typ 2[94]

Zahlen, die keine Einer- und Zehnerzahlen waren, wurden durch die Kombination beider Rechenstäbchenzahlen-Typen dargestellt. Zur Veranschaulichung sind daher in den nächsten Abbildungen einige dieser Ziffern als Rechenstäbchenzahlen geschrieben (vgl. Abbildung 31, 32).

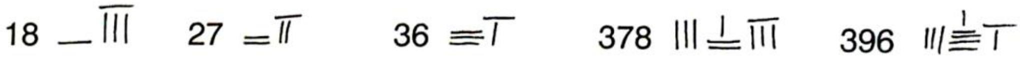



Abbildung 31: Zahlen werden als Rechenstäbchenzahlen dargestellt.[95]

$$7928 = (7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) =$$


Abbildung 32: Eine Zahl wird als Rechenstäbchenzahl dargestellt.[96]

Beachtet muss jedoch werden, dass die Ziffer Null erst ab dem 12. bis 13. Jahrhundert Verwendung fand.[97] Daher wurde statt der Null jedenfalls bis ins 8. Jahrhundert nach Christus zumeist eine Lücke gelassen.[98] Die nachfolgende Abbildung versucht dies wieder zu veranschaulichen (vgl. Abbildung 33).

---

[93] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 123.

[94] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 124.

[95] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 10.

[96] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 124.

[97] Höchstwahrscheinlich wurde diese Ziffer Null – dargestellt durch einen Kreis – damals nicht als eigene Ziffer angesehen. (Dieser Kreis sollte eine leere Mulde, das heißt eine leere Stelle, auf dem Rechenbrett symbolisieren (vgl. Dominic *Olivastro*, Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren (München 1995) 106.).)

[98] Im Jahr 718 n.Chr. wurde in China erstmalig in einer astronomischen Schrift ein Punkt für die Ziffer Null verwendet (vgl. Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folk-*

Abbildung 33: Eine Zahl, in der eine Null vorkommt, wird als Rechenstäbchenzahl dargestellt.[99]

Gerechnet wurde höchstwahrscheinlich mit Hilfe eines Rechenbretts[100], auf dem die Zahlen als Rechenstäbchenzahlen in die dafür vorgesehenen Spalten und Tabellen gelegt wurden, durch Änderung dieser Stäbchenanordnungen.

*Aufgaben für die Schüler/innen:*

1) Worin liegt der grafische Unterschied zwischen den Rechenstäbchenzahlen-Typ 1 und den Rechenstäbchenzahlen-Typ 2?
2) Welche Zahl fehlt aus heutiger Sicht bei den Rechenstäbchenzahlen?
3) Welche Zahlen konnten daher in den Anfängen zunächst nicht voneinander unterschieden werden?
4) Wie könnte dieses Problem im alten China auf dem Rechenbrett höchstwahrscheinlich gelöst worden sein?
5) Schreibe 5 Zahlen in der Rechenstäbchenzahlenschreibweise (vgl. Abbildung 31, 32)![101]

*Antworten:*

1) Die Zahlen 1 bis 5 und die Zehnerzahlen 10 bis 50 werden der Anzahl entsprechend durch nebeneinanderstehende beziehungsweise übereinanderliegende Striche dargestellt. Die Zahlen 6 bis 9 und die Zehnerzahlen 60 bis 90 werden durch einen horizontalen beziehungsweise vertikalen Strich, der die Zahl 5 beziehungsweise 50 darstellt, sowie durch jene Anzahl an vertika-

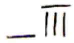
*erts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 124.).

[99] Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 124.

[100] Bis heute gibt es jedoch noch keinen Beweis über die Existenz dieser Rechentafeln. Daher könnte es auch zutreffen, dass sämtliche Oberflächen, die eine bestimmte Struktur aufwiesen, zum Rechnen verwendet wurden (vgl. Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 8).

[101] Selbstverständlich können diese Rechenstäbchenzahlen nicht nur aufgeschrieben, sondern auch beispielsweise mit Streichhölzern gelegt werden.

len beziehungsweise horizontalen Strichen dargestellt, die die noch fehlenden Einer beziehungsweise Zehner symbolisieren. Der Unterschied dieser beiden Rechenstäbchenzahl-Typen liegt somit ausschließlich in der Ausrichtung der einzelnen Striche.

2) Die Zahl Null existiert nicht in dieser Darstellung. Sie wurde erst ab dem 12. bis 13. Jahrhundert nach Christus verwendet.
3) Da es keine Ziffer gab, die die Ziffer Null darstellte, hatten die Zahlen 18, 1800 und 1008 zunächst dieselbe Rechenstäbchenzahl-Darstellung, nämlich  [102].
4) Weil die Rechenstäbchenzahlen zunächst nicht eindeutig dargestellt werden konnten, könnten die Rechenbretter mit ihrer tabellarischen Struktur als Stellenwerttafel in Verwendung gewesen sein, denn das Auslassen einer Spalte beim Legen einer Zahl könnte stellvertretend für eine heutige Null gestanden sein.
5) Hier können 5 Zahlen frei gewählt werden (vgl. Abbildungen 31 bis 33).

### 4.3.3. Die Methode „Fāngchéng“[103]

Im nächsten Schritt werden die Schüler/innen mit Hilfe von zwei Beispielen teilweise in selbstentdeckender Art und Weise in jene Methode eingeführt, mit der im alten China Lineare Gleichungssysteme gelöst wurden.

*Beispiel 4.3.3.1.*

Die 9-jährige Theresa ist ganz in ihre Hunde und Katzen vernarrt und ist daher vom folgenden Beispiel ganz fasziniert, jedoch kommt sie auf Grund ihres noch fehlenden Wissens nur zu dieser Lösung.

---

[102] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 8.

[103] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 9; Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 128-130; Denise *Jäger*, Vom Zählen zur Mathematik 60-61; Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 175.
Weiterentwickelt wurde diese Methode erst durch den Japaner Seki Kōwa im Jahr 1683. Diesem gelang nämlich mit Hilfe von Determinanten Lineare Gleichungssysteme zu lösen (vgl. Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 130.).

Für vier Katzen und drei Hunde müssen 17 Münzen und für eine Katze und einen Hund fünf Münzen bezahlt werden. Wieviel kostet nun eine Katze beziehungsweise ein Hund?[104]

Theresas Lösung:

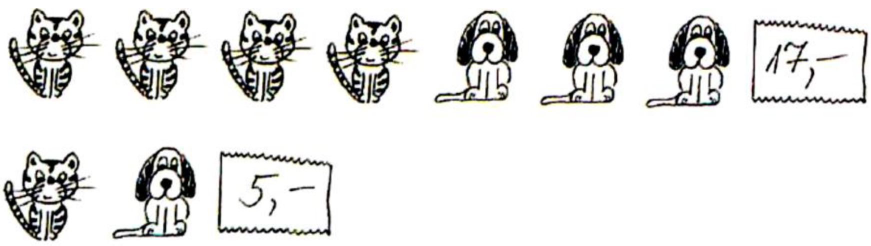



Abbildung 34: Theresas Lösungsversuch[105]

Wie könnte im alten China dies mit Hilfe der Rechenstäbchenzahlen auf dem Rechenbrett dargestellt worden sein?
Versuche diese Aufgabe selber zu lösen und schreibe genau auf, wie du zu dieser Lösung gelangt bist!

*Ein geschickter Lösungsversuch:*
Da das Rechenbrett höchstwahrscheinlich eine tabellarische Struktur aufwies, könnten im alten China beispielsweise die Anzahl der Katzen in die erste Zeile, die Anzahl der Hunde in die zweite Zeile und der Preis der Tiere in die dritte Zeile eingetragen worden sein. Weil aber heute nichts über die Durchführung von Rechenoperationen im alten China bekannt ist, ist es aber etwas ungeschickt die Rechenstäbchenzahlen zum Rechnen heranzuziehen. Somit werden die Striche, die die Rechenstächen darstellen sollen, in den folgenden Tabellen ausschließlich als Zählobjekte verwendet.

[104] Da die Beispiele im Buch „Neun Kapitel der Rechenkunst“ für Schüler/innen der 8. Schulstufe zu komplex wären, kann hier nur ein Beispiel gewählt werden, welches aus inhaltlicher und gestalterischer Sicht den Originalbeispielen ähnelt. Bei den Originalaufgaben kommen nämlich stets drei bis fünf Unbekannte vor. Die „Fāngchéng“-Methode ließe sich nämlich sogar bei beliebig vielen Unbekannten anwenden (vgl. Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra 128.).
[105] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 10.

<table>
<tr><td>Katze</td><td>|</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>Hund</td><td>|</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>Preis</td><td>|||||</td><td>||||| ||||| ||||| ||</td></tr>
</table>

Da die Kosten für eine Katze und einen Hund 5 Münzen betragen, kann nun die dritte Spalte wie folgt strukturiert werden.

<table>
<tr><td>Katze</td><td>|</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Hund</td><td>|</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Preis</td><td>|||||</td><td>||||| ||||| ||||| ||</td></tr>
</table>

Durch dieses geschickte Gruppieren wird die dritte Spalte somit in „vier neue Spalten“ aufgeteilt, wobei in drei dieser „neuen Spalten“ jeweils eine Katze, ein Hund und der Betrag von 5 Münzen und in der „vierten neuen Spalte“ eine Katze und der Betrag von 2 Münzen liegen. Da aber in der „vierten neuen Spalte“ nur eine Katze und der Betrag von 2 Münzen übrig bleiben, folgt daraus, dass eine Katze 2 Münzen kosten muss. Folglich muss ein Hund drei Münzen kosten, denn der Betrag der Katze und des Hundes müssen in Summe laut Angabe 5 Münzen ergeben (Probe: $2 + 3 = 5$).

Nach diesem Experimentieren drängt sich jedoch die Frage auf, wie im alten China solche Probleme gelöst worden waren. Wie im 8. Kapitel des Buches „Jiŭ Zhāng Suànshù“ („Neun Kapitel der Rechenkunst“) wird nun an Hand eines konkreten Beispiels das Lösungsverfahren „Fāngchéng“ erläutert.[106]

*Beispiel 4.3.3.2.*

Der Preis für 3 Reisfässer von mittlerer Qualität und für 4 Reisfässer mit guter Qualität beträgt in Summe 18 Münzen. Der Preis für 2 Reisfässer von mittlerer

[106] Auch in diesem Fall kann wegen der in Fußnote 104 genannten Gründe wieder keine Originalaufgabe herangezogen werden. Falls dennoch die Neugier des/der Lesers/in an einer Originalaufgabe mit Originallösung geweckt worden sein sollte, so kann hier das Kapitel 5 „Fangcheng, Chapter 8 of the Nine Chapters“ im Buch „The Chinese Roots of Linear Algebra“ von Roger Hart (S 67-81) wärmstens empfohlen werden. In diesem Kapitel befindet sich nämlich eine englische Übersetzung der ersten Aufgabe samt Erklärung des Lösungsverfahrens vom 8. Kapitel des Buches „Jiŭ Zhāng Suànshù“ („Neun Kapitel der Rechenkunst“), sowie eine anschauliche zeitgemäße Erläuterung für Mathematik interessierte Leser/innen.

Qualität und für 5 Reisfässer mit guter Qualität beträgt in Summe 19 Münzen. Was kostet jeweils ein Fass von mittlerer bzw. guter Qualität?

*Lösung mit Hilfe der Methode „Fāngchéng“:*[107]

Da das chinesische Rechenbrett eine tabellarische Struktur aufweist, werden die Angaben – demonstriert an dem Beispiel 4.3.3.2. – wie folgt in die Tabellen eingetragen: In der erste Zeile werden die Anzahl der Reisfässer von mittlerer Qualität, in der zweiten Zeile die Anzahl der Reisfässer von guter Qualität und in der dritten Zeile die Preise eingetragen. Zu berücksichtigen ist außerdem noch, dass die Schreibrichtung der traditionellen chinesischen Schreibschrift von rechts nach links ist. Daher muss beim Eintragen der Angaben in die Tabelle mit der rechten Spalte begonnen werden. Im konkreten Beispiel heißt dies:[108]

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 5 | 4 |
| 19 | 18 |

Im nächsten Schritt wird jeder Eintrag der linken Spalte mit dem Eintrag aus der ersten Zeile, rechten Spalte multipliziert. Hier bedeutet dies:

| | |
|---|---|
| 6 | 3 |
| 15 | 4 |
| 57 | 18 |

Anschließend wird in jeder Zeile der Eintrag der rechten Spalte vom Eintrag der linken Spalte subtrahiert. Das heißt:

| | |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 11 | 4 |
| 39 | 18 |

[107] Selbstverständlich können statt der Zahlen auch die Rechenstäbchenzahlen verwendet werden.

[108] In heutiger Schreibweise würde diese Tabelle wie folgt notiert werden: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \end{pmatrix}$

Dieser Vorgang des Subtrahierens wird so lange fortgesetzt, bis der erste Eintrag in der linken Spalte quasi „ausgelöscht“ ist, das heißt aus heutiger Sicht Null ist. In diesem Beispiel muss dieser Vorgang daher noch einmal angewandt werden.

| | |
|---|---|
| | 3 |
| 7 | 4 |
| 21 | 18 |

Da in der linken Spalte ein Eintrag quasi „ausgelöscht“ wurde, kann nun in dieser Spalte der Preis für 7 Reisfässer von guter Qualität abgelesen werden, nämlich 21 Münzen. Somit kostet ein Reisfass von guter Qualität 3 Münzen, denn $21:7 = 3$.

Um den Preis des Reisfasses von mittlerer Qualität zu bestimmen, wird wie folgt vorgegangen:
Der Preis des Reisfasses von guter Qualität wird mit der Anzahl der Reisfässer von guter Qualität in der rechten Spalte multipliziert. Das heißt hier: $3 \cdot 4 = 12$. Dieser Wert wird im Anschluss von dem Gesamtpreis von 3 Reisfässern von mittlerer Qualität und 4 Reisfässern von guter Qualität subtrahiert. Konkret bedeutet dies: $18 - 12 = 6$. Um den Preis für ein Reisfass von mittlerer Qualität zu berechnen, muss dieses Ergebnis nur mehr durch die Anzahl der Reisfässer von mittlerer Qualität dividiert werden, das heißt $6:3 = 2$.

Der Preis eines Reisfasses von mittlerer Qualität beträgt somit 2 Münzen, eines Reisfasses von guter Qualität 3 Münzen.

*Eine Randbemerkung:*
In einigen Beispielen des 8. Kapitels des Buches „Jiŭ Zhāng Suànshù“ („Neun Kapitel der Rechenkunst“) treten in den Zwischenergebnissen auch negative Zahlen auf. Damit aber ein Operieren mit negativen Zahlen damals möglich war, wurden die Plus-Minus-Regeln („Chêng fu“) eingeführt. Eine dieser Regeln ist die folgende: $a + (-b) = a - b$. Negative Lösungen bei Gleichungssystemen wurden hingegen bis ins 13. Jahrhundert nicht zugelassen.

Der Unterschied in der Darstellung zwischen einer positiven und einer negativen Zahl lag in der Färbung der Rechenstäbchen. So wurden für die positiven Zahlen rote und für die negativen Zahlen schwarze Rechenstäbchen verwendet.

*Aufgaben für die Schüler/innen:*

1. Vergleiche deinen Lösungsversuch vom Beispiel 4.3.3.1. mit der Methode „Fāngchéng“!
2. Versuche die beiden Beispiele mit Hilfe der Methode „Fāngchéng“ zu lösen!
   a) Die Last von 81 Steinen kann von 3 starken und 2 schwachen Pferden transportiert werden. Die Last von 70 Steinen kann von 2 starken und 4 schwachen Pferden transportiert werden. Wieviel kann ein starkes bzw. schwaches Pferd transportieren?
   b) 5 Rinder und 2 Schafe kosten 12 Unzen Gold. 2 Rinder und 5 Schafe kosten 9 Unzen Gold. Wieviel kostet ein Rind bzw. Schaf?

*Lösungen:*

1) –
2)

a)

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 4 | 2 |
| 70 | 81 |

| | |
|---|---|
| 6 | 3 |
| 12 | 2 |
| 210 | 81 |

| | |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 10 | 2 |
| 129 | 81 |

| | |
|---|---|
| | 3 |
| 8 | 2 |
| 48 | 81 |

Das schwache Pferd kann 6 Steine, das starke 23 Steine transportieren.

b)

| | |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 5 | 2 |
| 9 | 12 |

| | |
|---|---|
| 10 | 5 |
| 25 | 2 |
| 45 | 12 |

| | |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 23 | 2 |
| 33 | 12 |

| | |
|---|---|
| | 5 |
| 21 | 2 |
| 21 | 12 |

Ein Schaf kostet 1 Unze Gold, ein Rind 2 Unzen Gold.

## 4.4. Der anschaulich-spielerische Weg – der Extravagante[109]

Dieser Einstieg ist unbestritten der außergewöhnlichste, denn hier wird in sehr anschaulicher und spielerischer Art und Weise versucht, mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln in das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ einzuführen.

Da aber nicht vorausgesetzt werden kann, wie Gleichungen mit einer beziehungsweise zwei Variablen mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln gelöst werden können, wird, weil dies essentiell für das Lösen Linearer Gleichungssysteme ist, zuerst das Lösen von linearen Gleichungen mit einer Variable, dann mit zwei Variablen und schließlich von Linearen Gleichungssystemen behandelt. Weil es sich hierbei aber um einen anschaulich-spielerischen Weg handelt, wird dieses Lösen stets an konkreten Beispielen verdeutlich.

Um diesen Einstieg umsetzen zu können, werden jedoch als Materialien Streichhölzer, Streichholzschachteln und Tische, die zusammengeschoben werden müssen, benötigt.

### 4.4.1. Das Lösen von Gleichungen mit einer Variable

*Eine lineare Gleichung mit einer Variable wird mit Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt:*

Die Klasse wird in 4er oder 5er Gruppen eingeteilt. Ein/e Schüler/in – beim ersten Mal unter Anleitung der Lehrkraft – legt nun, während die anderen Gruppenmitglieder nicht zusehen dürfen, gleich viele Streichhölzer auf beide Tischseiten (vgl. Abbildung 35; in diesem Fall werden 8 Streichhölzer auf beide Seiten gelegt.). Im Anschluss daran werden von diesem/r Schüler/in eine beliebige Anzahl an leeren Streichholzschachteln genommen, welche nun wie folgt befüllt

[109] Frieder *Korn*, Wie lassen sich negative Zahlen mit Streichhölzern darstellen?, In: Martin Kramer (Hg.), Algebra und Analysis als Abenteuer. Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung, online unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/Skript%20-%20Algebra%20und%20Analysis.pdf> (11.9.2015) 79-81; Martin *Kramer*, Mathematik als Abenteuer. Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens (Hallbergmoos² 2010) 63-68, 156-165.

werden. Der/die Schüler/in überlegt sich zuerst, wie viele Streichhölzer in jeder dieser Schachteln liegen sollen. (Das heißt in all diesen Schachteln müssen stets gleich viele liegen. In diesem Beispiel sollen nun in jeder Streichholzschachtel[110] zwei Streichhölzer platziert werden (vgl. Abbildung 36).) Der/die Schüler/in entwendet für die Befüllung der ersten Streichholzschachtel von den auf den Tischen liegenden Streichhölzern jene Anzahl an Streichhölzer, die in der Streichholzschachtel liegen soll, und legt diese in die erste Streichholzschachtel. (Zu beachten ist aber noch, dass bei der Befüllung einer Schachtel nur Streichhölzer von derselben Tischseite genommen werden dürfen!) Diese befüllte Streichholzschachtel wird daraufhin wiederum auf jene Seite positioniert, von der man die zur Befüllung verwendeten Streichhölzer entwendet hat. Bei der Befüllung der weiteren Streichholzschachteln wird ähnlich vorgegangen.

So liegen nun in diesem Beispiel nach der Befüllung der Streichholzschachteln auf der linken Seite acht Streichhölzer und auf der rechten vier Streichhölzer und zwei Schachteln (vgl. Abbildung 37).

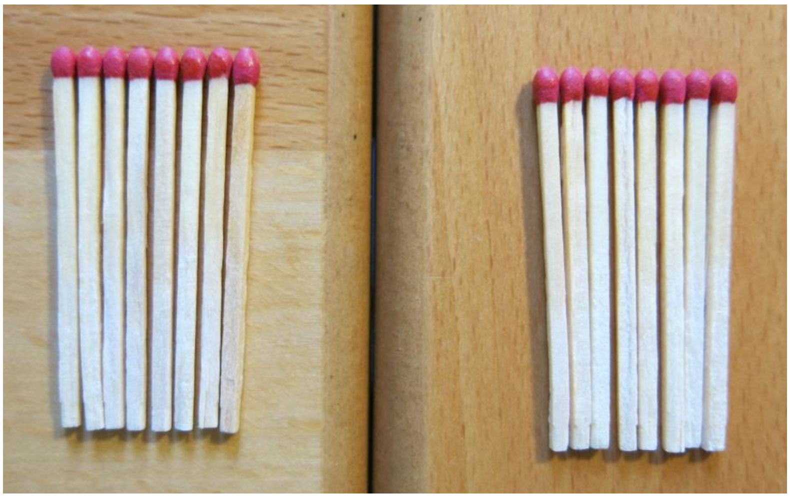


Abbildung 35: 8 Streichhölzer werden auf beiden Tischseiten positioniert.

[110] Aus Gründen der Werbung mussten die Streichholzschachteln hier überklebt werden.

Abbildung 36: Jede verwendete Streichholzschachtel soll mit zwei Streichhölzern befüllt werden.

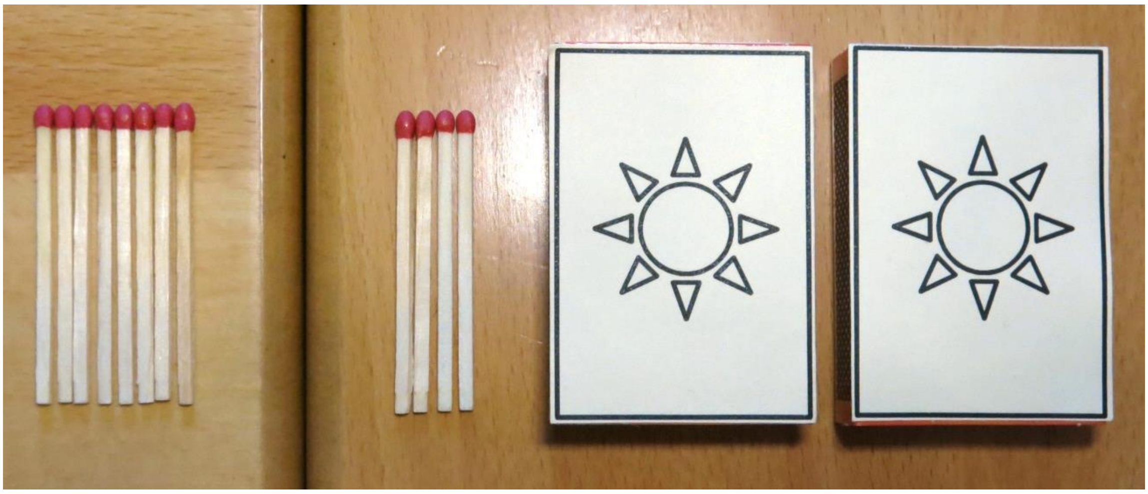


Abbildung 37: Eine lineare Gleichung mit einer Variable wurde mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt.

*Eine lineare Gleichung mit einer Variable wird gelöst:*

Lösen können die Schüler/innen, die nicht zugesehen haben, diese „Gleichung" wie folgt: Zuerst nehmen sie auf beiden Seiten die gleiche Anzahl an Streichhölzern weg oder fügen sie hinzu. (In diesem Beispiel würden die Schüler/innen somit vier Streichhölzer auf beiden Seiten entfernen (vgl. Abbildung 38).) Anschließend müssen die Schüler/innen beide Seiten durch die Anzahl der Streichholzschachteln dividieren. (Im konkreten Fall müssten somit beide Seiten halbiert werden, um auf das Ergebnis „zwei Streichhölzer" zu gelangen (vgl. Abbildung 39).)

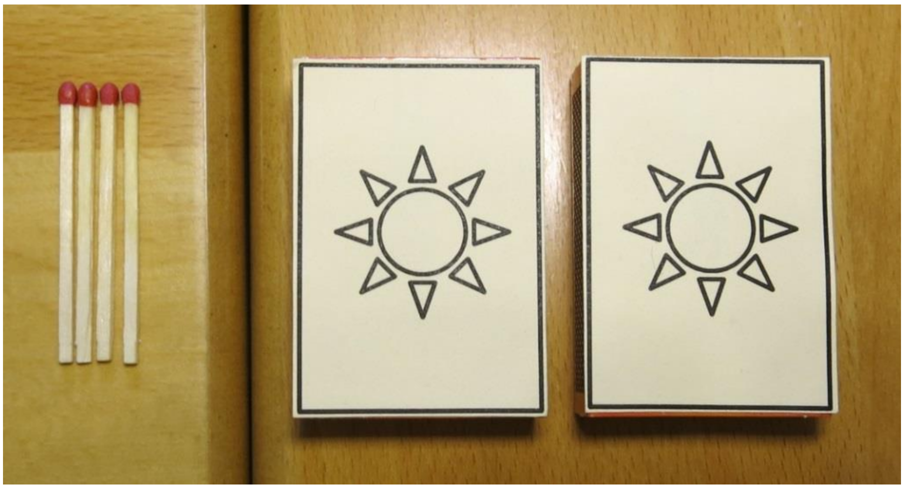


Abbildung 38: Vier Streichhölzer wurden auf beiden Seiten entfernt.

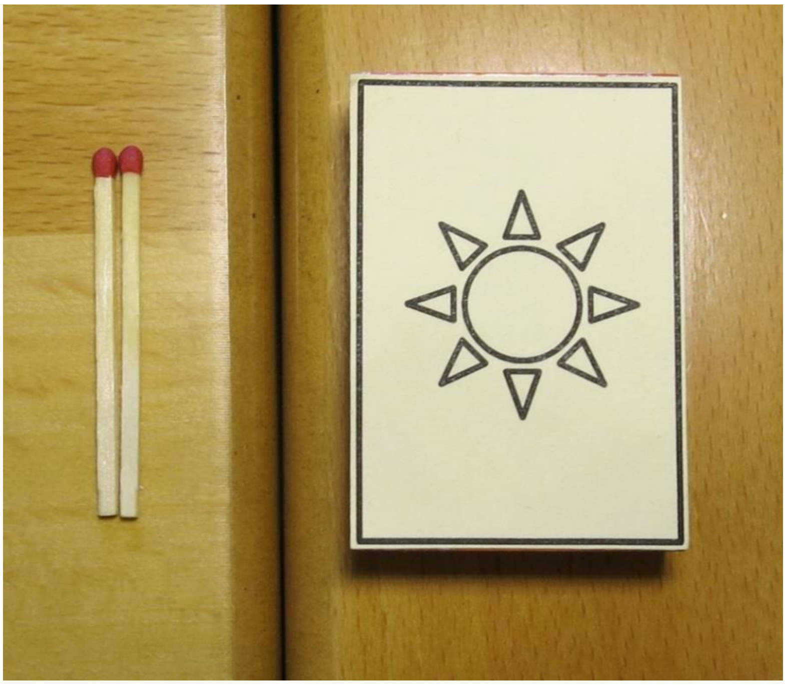


Abbildung 39: Beide Seiten wurden durch 2 geteilt.

Noch einmal tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies:

| **Streichholzrechnung** | **Algebraisch** | **Nachfolgende Aktion** | **Äquivalenz-umformung** |
|---|---|---|---|
| \|\|\|\|\|\|\|\| = \|\|\|\| □ □ | $8 = 4 + x + x$ | Man entfernt \|\|\|\| auf beiden Seiten. | $-4$ |
| \|\|\|\| = □ □ | $4 = x + x$ | Man halbiert die Anzahl. | $:2$ |
| \|\| = □ | $2 = x$ | | |

Eine Randbemerkung, um die ersten Missverständnisse auszuräumen:
Folgende Entsprechungen bestehen zwischen der Gleichung mit Streichhölzern und Streichholzschachteln und der „algebraischen Gleichung“:

| | |
|---|---|
| Streichhölzer | Zahlen |
| Schachtel | Variable |
| Linker Tisch | Linker Term |
| Rechter Tisch | Rechter Term |
| Spalte zwischen den Tischen | Gleichheitszeichen |

### 4.4.2. Das Lösen von linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Im nächsten Schritt werden mit Hilfe dieser „Streichholzmethode“ Gleichungen mit zwei Variablen gelöst. Die Vorgehensweise ist wiederum sehr ähnlich im Vergleich zur vorhergehenden.

*Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen wird mit Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt:*

So werden auch hier wieder Tische zusammengeschoben und auf beide Seiten gleich viele Streichhölzer von einem/einer Schüler/in gelegt, während die anderen Gruppenmitglieder nicht zusehen dürfen. Da es sich hierbei um lineare Gleichungen mit zwei Variablen handeln sollte, werden jedoch zwei verschiedene Streichholzschachteltypen – in diesem Fall eine Streichholzschachtel mit Sonne und gelbem Hintergrund[111] und eine Streichholzschachtel mit Sonne und grünem Hintergrund[112] – benötigt, denn der eine Streichholzschachteltyp steht algebraisch gesprochen für die Variable $x$ und der andere für die Variable $y$. Diese Streichholzschachteln werden wie vorhin wieder mit Streichhölzern befüllt, jedoch müssen in allen Streichholzschachteln desselben Typs die gleiche Anzahl an Streichhölzern sich befinden. Gelöst werden diese Gleichungen ähnlich wie die Gleichungen mit einer Variablen.

Das nachfolgende Beispiel dient zur Veranschaulichung des soeben Beschriebenen:

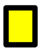
Seien  $:= x = 2$ und  $:= y = 3$ (vgl. Abbildung 40) und es gelte die Gleichung $x + 8 + x + y = y + x + y + 3 + x + x$ (vgl. Abbildung 41).

Abbildung 40: Es wird festgelegt, wie viele Streichhölzer jeweils in den Streichholzschachteln liegen.

[111] Aus Gründen der Einfachheit wird diese mit  bezeichnet.

[112] Aus Gründen der Einfachheit wird sie hier mit  bezeichnet.

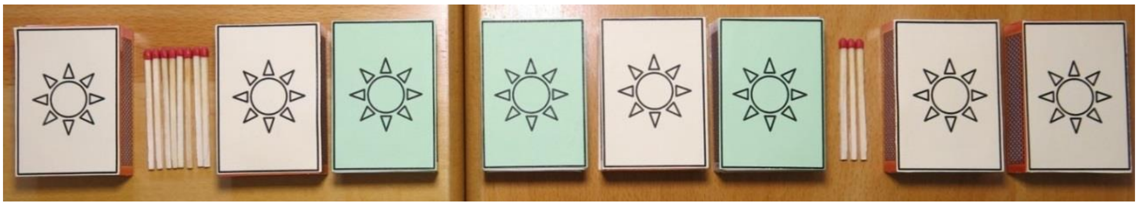
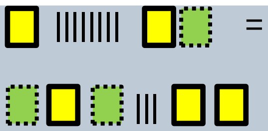


Abbildung 41: Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen wurde mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies:

| Streichholzrechnung | Algebraisch | Nachfolgende Aktion | Äquivalenzumformung |
|---|---|---|---|
|  | $x + 8 + x + y =$ $y + x + y + 3 + x + x$ | Man fasst auf beiden Seiten die Variablen zusammen. | Addition der Variablen auf beiden Seiten |

*Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen wird gelöst:*
Im ersten Schritt werden auf beiden Seiten die Variablen zusammengefasst, denn Streichholzschachteln ein und desselben Typs dürfen auch zu kleinen Türmchen gestapelt werden (vgl. Abbildung 42).

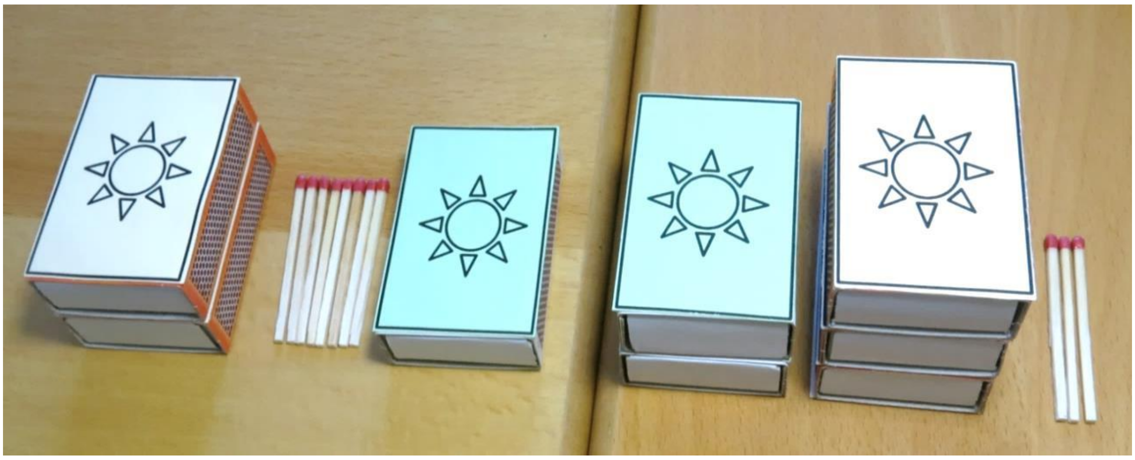


Abbildung 42: Die Streichholzschachteln werden auf beiden Seiten zusammengefasst.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies nun:

| Streichholzrechnung | Algebraisch | Nachfolgende Aktion | Äquivalenzumformung |
|---|---|---|---|
| \|\|\|\|\|\|\|\| 2· = <br> 3· 2· \|\|\| | $8 + 2 \cdot x + y =$ <br> $3 \cdot x + 2 \cdot y + 3$ | Die Variablen werden auf die rechte Seite gebracht. | Subtraktion von Variablen |

Die Variablen werden nun auf eine Seite gebracht. Dies geschieht, indem zwei Streichholzschachteln des Typs und eine Streichholzschachtel des Typs auf beiden Seiten weggenommen werden (vgl. Abbildung 43).

Abbildung 43: Die gleiche Anzahl an Streichholzschachteln wird auf beiden Seiten entfernt.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies nun:

| **Streichholz-rechnung** | **Algebraisch** | **Nachfolgende Aktion** | **Äquivalenzumfor-mung** |
|---|---|---|---|
| \|\|\|\|\|\|\|\| = \|\|\| | $8 = x + y + 3$ | Gleichung nach y auflösen. | Subtraktion von Vari-able und Zahlen |

Im Anschluss wird die Gleichung „nach y aufgelöst“. Das heißt, dass die „Glei-chung“ so umgeformt wird, dass auf einer Seite nur eine Streichholzschachtel liegt (vgl. Abbildung 44).

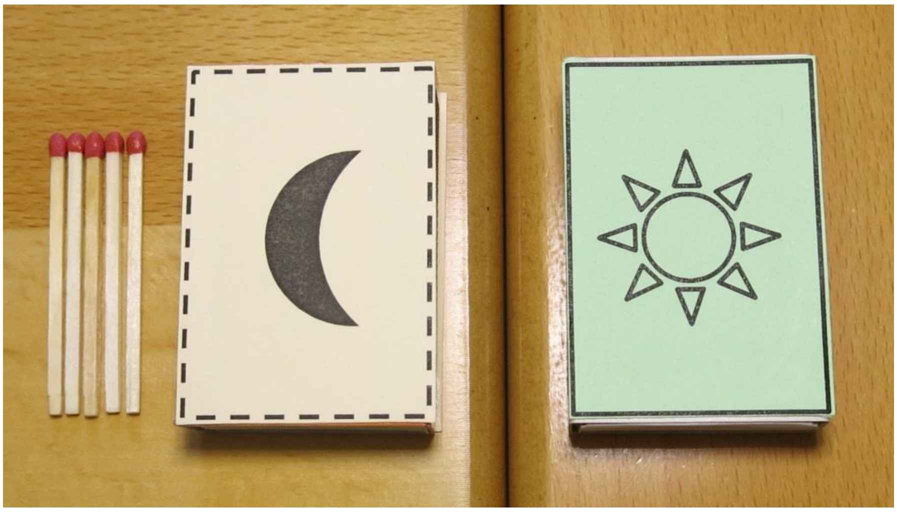


Abbildung 44: Es wird so umgeformt, dass auf einer Seite nur eine Streichholz-schachtel liegt.

| **Streichholz-rechnung** | **Algebraisch** | **Nachfolgende Aktion** | **Äquivalenzumfor-mung** |
|---|---|---|---|
| \|\|\|\|\| - = | $5 - x = y$ | | |

*Ein kleiner Einschub: Wie können Zahlen beziehungsweise Variablen mit negativen Vorzeichen dargestellt werden? – Das „Prinzip der Ortskodierung“:*

Dem/der aufmerksamen Leser/in wird nun vermutlich aufgefallen sein, dass bis jetzt – abgesehen von der letzten Tabellenzeile beziehungsweise Abbildung 44 – ausschließlich positive Zahlen verwendet wurden. Dieses System kann aber auch bei negativen Zahlen beziehungsweise Variablen mit negativen Vorzeichen, wie in Abbildung 44 ersichtlich wird, angewandt werden. Dafür ist jedoch das „Prinzip der Ortskodierung“ notwendig. Dieses Prinzip legt nämlich fest, dass die Lage des Brennkopfes vom Streichholz letztendlich angibt, ob eine Zahl negativ oder positiv ist. Befindet sich der Brennkopf eines Streichholzes beispielsweise „oben“, so ist dieses Streichholz positiv belegt und drückt eine positive Zahl aus. Weist das Streichholz in die andere Richtung – das heißt, dass der Brennkopf des Streichholzes „unten“ liegt –, so steht dieses Streichholz für eine negative Zahl. Ähnlich ist dies bei den Streichholzschachteln. Man legt nämlich auch hier fest, wie eine Variable mit einem positiven beziehungsweise negativen Vorzeichen mittels Streichholzschachtel dargestellt werden kann. So wird die Variable mit positivem Vorzeichen durch die Vorderansicht, die Variable mit negativem Vorzeichen mit der Rückansicht der Streichholzschachtel ausgedrückt. Das heißt, dass die Vorderseite einer Streichholzschachtel eine positive Zahl, im anderen Fall eine negative symbolisiert.

Um dies zu veranschaulichen, sei dieses nun folgende Beispiel, bei dem das „Prinzip der Ortskodierung“ angewandt werden muss, angeführt: $2x - 6 = -x$ (vgl. Abbildung 45).

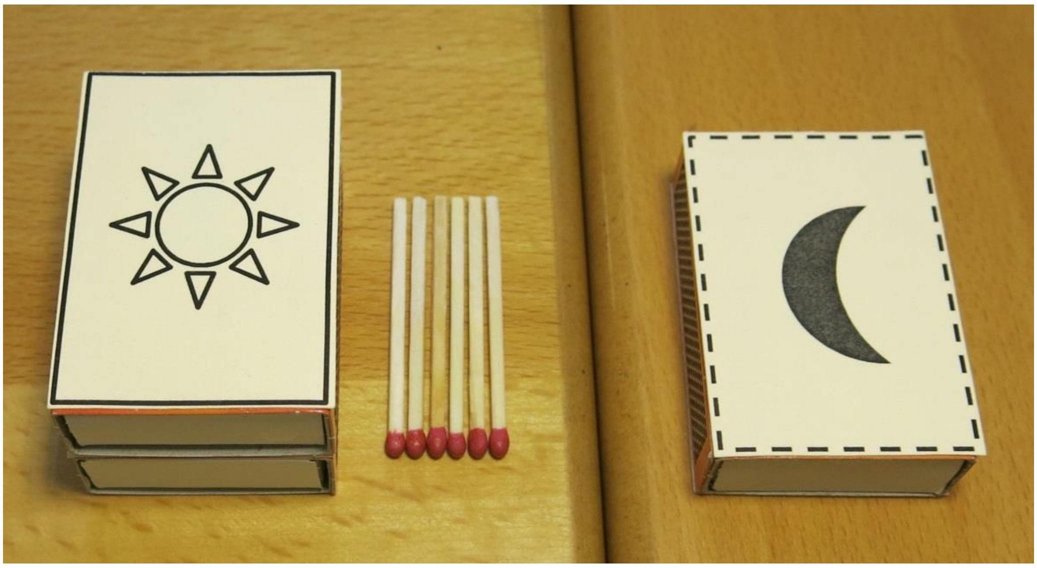


Abbildung 45: Beispiel, bei dem das „Prinzip der Ortskodierung“ angewandt werden muss.

Kehrt man nun zum ursprünglichen Beispiel wieder zurück, so kann jetzt diese Gleichung wie folgt gelöst werden (vgl. Abbildung 44). Ein/eine Schüler/in öffnet die Streichholzschachtel des Typs . Da diese Streichholzschachtel umgedreht war, muss nun der Inhalt der Streichholzschachtel von den 5 auf dieser Seite liegenden Streichhölzern abgezogen werden, um den Inhalt der Streichholzschachtel des Typs zu eruieren. Dies würde in diesem Beispiel drei ergeben, da in der Streichholzschachtel des Typs zwei Streichhölzer liegen.

Möchte man nun aber herausfinden, für welche Zahlenpaare diese Gleichung noch erfüllt ist, so könnte man dies sich mittels eines Graphen veranschaulichen (vgl. Abbildung 46).

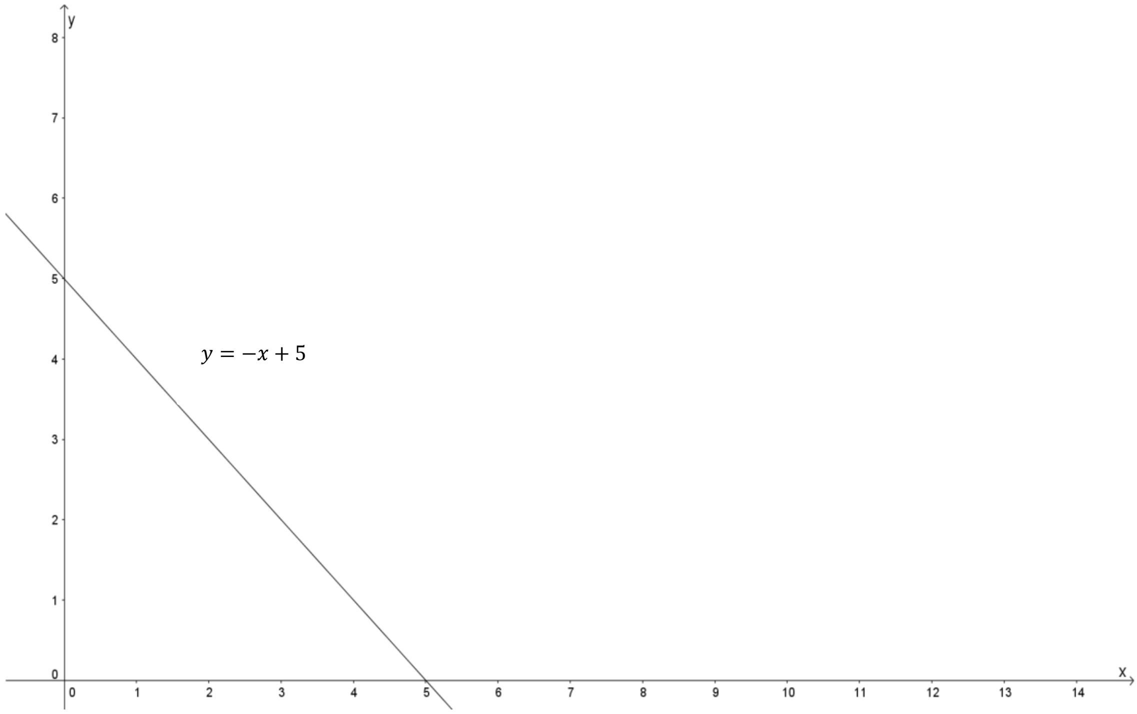



Abbildung 46: Für diese Zahlenpaare ist die Gleichung auch erfüllt.

### 4.4.3. Das Lösen von Linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Im nächsten Schritt soll diese Vorgehensweise so ausgebaut werden, dass Lineare Gleichungssysteme auch gelöst werden können.

*Ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen wird mit Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt:*

Dies geschieht, indem jeweils eine lineare Gleichung auf jedem der zwei Tische aufgebaut wird, wobei nun die Spalte zwischen den Tischen nicht das Gleichheitszeichen darstellt, sondern ein Stift. Das heißt, dass zuerst von einem/einer Schüler/in auf jedem der zwei Tische ein Stift und links und rechts davon dieselbe Anzahl von Streichhölzern hingelegt werden. In diesem Fall liegen auf jeder Seite der ersten Gleichung fünf Streichhölzer und bei der anderen sechs (vgl. Abbildung 47). Anschließend legt jener/jene Schüler/in fest, wie viele

Streichholzschachteln verwendet werden und wie viele Streichhölzer wieder in den einen Streichholzschachteltyp und in den anderen gelangen sollen. In diesem Beispiel werden pro Gleichung nur eine Streichholzschachtel jedes Typs verwendet und in die Streichholzschachtel des Typs fünf Streichhölzer und in die Schachtel des Typs ein Streichholz gelegt (vgl. Abbildung 48). Die Befüllung dieser Streichholzschachteln erfolgt analog dem Befüllen der linearen Gleichungen mit zwei Variablen. In diesem Fall wird nun folgendes Lineare Gleichungssystem gelegt: I) $y + 4 = x$; II) $y + x = 6$ (vgl. Abbildung 49).

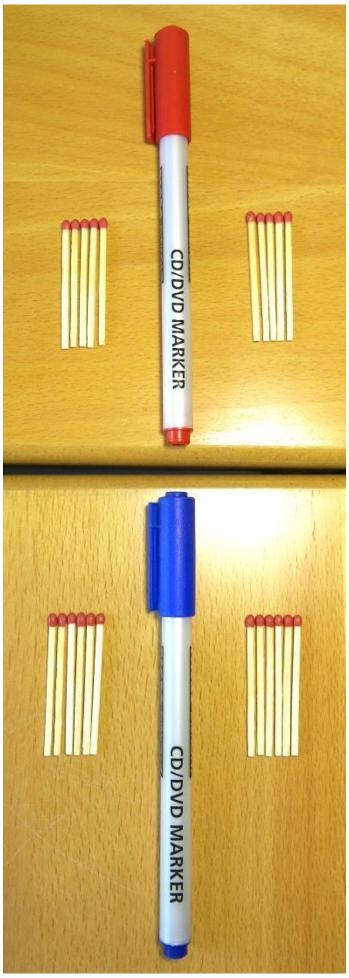



Abbildung 47: Zwei Gleichungen werden gelegt.

Abbildung 48: Es wird festgelegt, wie viele Streichhölzer jeweils in den Streichholzschachteln liegen.

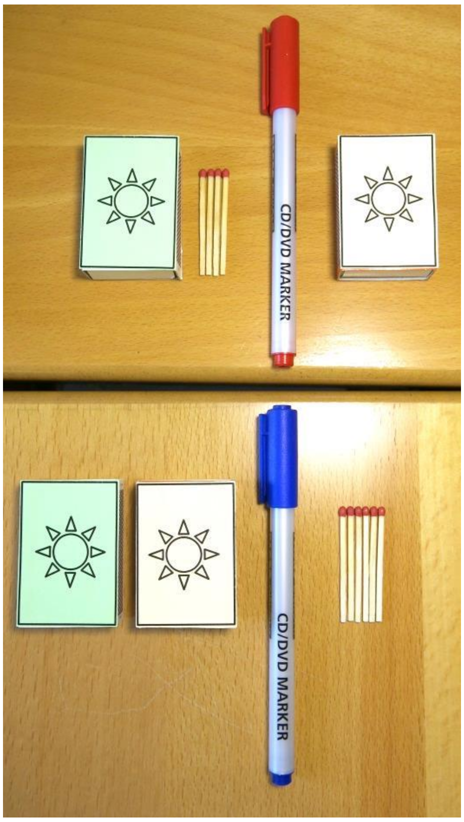



Abbildung 49: Ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen wird mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln gelegt.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies:

<table>
<tr><th>Streichholzrechnung</th><th>Algebraisch</th></tr>
<tr><td> |||| = </td><td>$y + 4 = x$</td></tr>
<tr><td>  = ||||||</td><td>$y + x = 6$</td></tr>
</table>

Dieses Lineare Gleichungssystem kann im Anschluss von den Mitschüler/innen, die nicht zugesehen haben, auf folgende zwei Arten gelöst werden.

*Ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen wird gelöst:*

- *Gleichsetzungsverfahren:*

Im ersten Schritt werden beide Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen „nach $y$ aufgelöst“ (vgl. Abbildung 50). Liegt nämlich auf einer der beiden Seiten des Stifts jeweils nur eine Streichholzschachtel eines Typs, so ist offensichtlich, dass die Gleichungen genau dann gleich sind, wenn die beiden „linken und rechten Terme“ gleich sind (vgl. Abbildung 51).

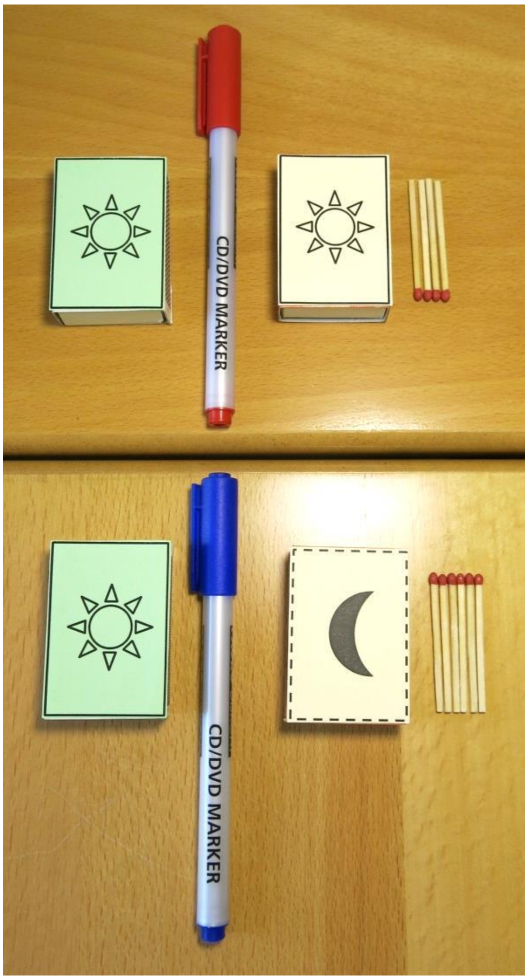



Abbildung 50: Beide Gleichungen werden so umgeformt, dass auf einer Seite jeweils nur eine Streichholzschachtel desselben Typs liegt.

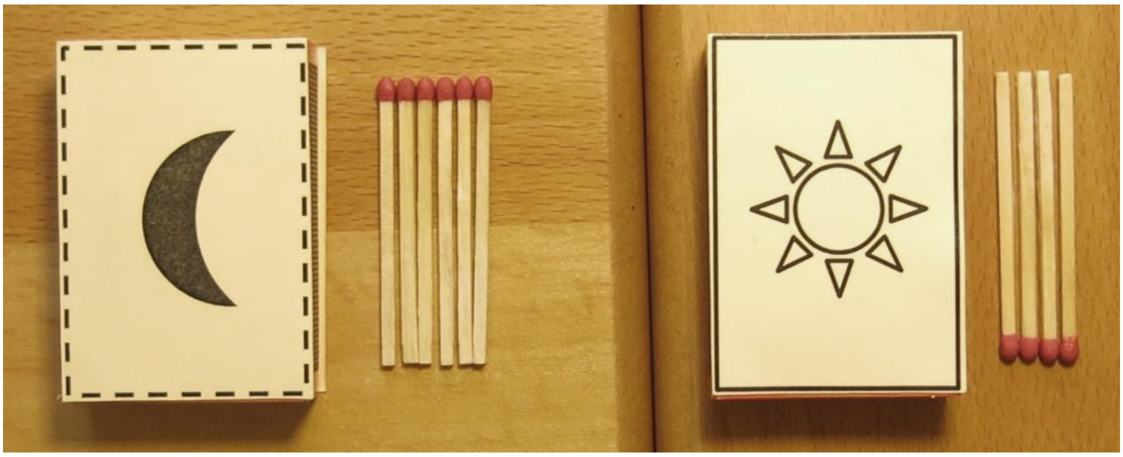
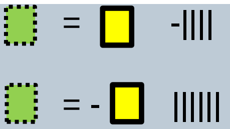
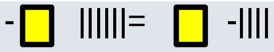


Abbildung 51: Die Gleichungen werden gleichgesetzt.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies:

| Streichholzrechnung | Algebraisch | Nachfolgende Aktion |
|---|---|---|
|  | $y = x - 4$<br>$y = -x + 6$ | Beide lineare Gleichungen werden gleichgesetzt. |
|  | $-x + 6 = x - 4$ | |

Wie diese Gleichung mit einer Variable $-x + 6 = x - 4$ zu lösen ist, wurde bereits im Kapitel 4.4.1. veranschaulicht.

- *Einsetzungsverfahren:*

Kehrt man nun zum konkreten Linearen Gleichungssystem zurück, so könnte dieses auch wie folgt gelöst werden. Zuerst wird die zweite Gleichung so umgeformt, dass nur eine Streichholzschachtel eines Typs auf einer Seite liegt (vgl. Abbildung 52). Anschließend wird diese Gleichung in die erste Gleichung eingesetzt (vgl. Abbildung 53).

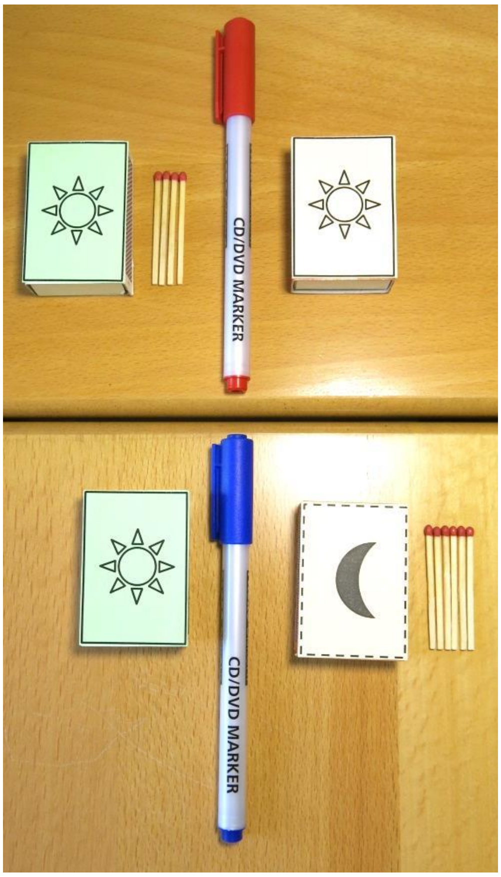



Abbildung 52: Die zweite Gleichung wird so umgeformt, dass nur eine Streichholzschachtel eines Typs auf einer Seite liegt.

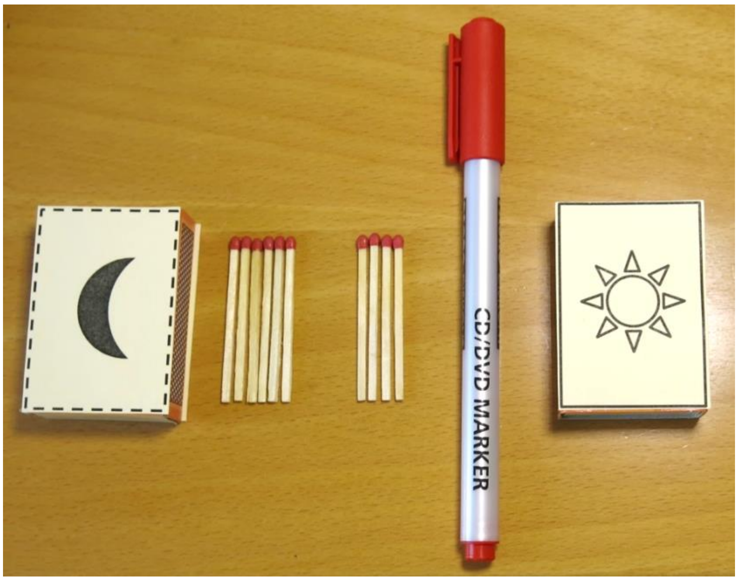
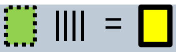
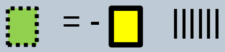



Abbildung 53: Die erste Gleichung wird in die zweite Gleichung eingesetzt.

Tabellarisch veranschaulicht bedeutet dies:

| Streichholzrechnung | Algebraisch | Nachfolgende Aktion |
|---|---|---|
|   | $y + 4 = x$ <br> $y = -x + 6$ | Die zweite Gleichung wird in die erste Gleichung eingesetzt. |
|  | $-x + 6 + 4 = x$ | |

Wie auch diese Gleichung mit einer Variable $-x + 6 + 4 = x$ zu lösen ist, wurde bereits im Kapitel 4.4.1. gezeigt.

*Eine Randbemerkung:*
Die Schüler/innen können bei diesem Beispiel aufmerksam gemacht werden, dass es auch einen alternativen und wohl kürzeren Lösungsweg gegeben hätte. Wäre man nicht nach „Rezept“ vorgegangen, so hätte man nämlich die ursprüngliche erste Gleichung gleich in die zweite einsetzen können. Das heißt, dass auch durch das Rechnen mit Streichhölzern und Streichholzschachteln das „Rechnen mit Hirn“ veranschaulicht werden kann.

## 4.5. Der eigenverantwortliche Weg – die Lernspirale[113]

In diesem Kapitel wird ein Einstieg in das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ vorgestellt, bei dem die Schüler/innen vor allem in Einzelarbeit oder Kleingruppen sich eigenverantwortlich in dieses Themenfeld einarbeiten. Damit dies für den/die Leser/in nachvollziehbar wird, beinhaltet jedes nun folgende Unterkapitel einen klaren Zeitplan, genaue Erläuterungen, sämtliche Arbeitsmaterialien sowie deren Lösungen.

Da nicht vorausgesetzt werden kann, dass die Schüler/innen umfangreiche Erfahrungen im eigenverantwortlichen Arbeiten besitzen, wird hier sehr viel Bekanntes wiederholt, um den Schüler/innen die Möglichkeit zu bieten, sich in eigenverantwortliches Arbeiten einzuarbeiten. Daher können aber auch je nach Wissensstand der Schüler/innen einzelne Kapitel ausgelassen werden.

### 4.5.1. Auffrischung des Themas „Gleichungen“

***Zeitplan:***

| Zeit | Inhalt/Thema | Material | Kompetenzen | Sonstiges |
|---|---|---|---|---|
| **20-25 min** | Da das Thema „Gleichungen“ aufgefrischt werden soll, bereitet jeder/jede mit Partner/in eine kurze Präsentation über das Thema „Gleichungen“ vor. | Mathematikschulbücher und Mathematikhefte, Arbeitsblatt 4.5.1.1. | • Mathematische Fachsprache wird erlernt.<br>• Mathematische Argumentation wird verfeinert.<br>• Vorträge werden genau mitverfolgt und | |
| **10 min** | Zwei Schüler/innen stellen das Thema in | Plakat, auf welchem die wichtigs- | | Die Klasse wird in Vierer- bzw. |

113 Johanna *Harnischfeger*, Heiner *Juen*, Mathematik. > Lineare Gleichungssysteme. > Modellierungsaufgaben (Donauwörth $^{2}$2014) 4-29; Duden, Abi Mathematik 36-37; Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 1. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien $^{2}$2014) 131; Udo *Wennekers* (Hg.), Diagnostizieren und Fördern. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Lineare Funktionen und Gleichungssysteme. Quadratische Funktionen und Gleichungen (Berlin $^{3}$2014) 30; Martin *Kramer*, Lineare Gleichungssysteme. Klasse 9-10 (Buxtehude $^{2}$2009); Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009) 179, 194.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | der Kleingruppe vor, die anderen Gruppenmitglieder schreiben mit und ergänzen diesen Vortrag im Anschluss. | ten Begriffe notiert werden; Stifte | gegebenenfalls korrigiert. | Sechsergruppen eingeteilt. Mittels Los wird entschieden, wer das Thema vorstellen darf. |
| **10 min** | Die Gruppenergebnisse werden im Plenum miteinander verglichen. | Plakate werden auf der Tafel aufgehängt. | | |

***Erläuterungen:***

Ziel dieser Unterrichtssequenz ist das Auffrischen des Themas „Gleichungen“. Realisiert wird dies, indem die Schüler/innen zu zweit mit Hilfe sämtlicher ihnen zur Verfügung stehenden Unterrichtsmaterialien eine Präsentation zum Thema „Gleichungen“ vorbereiten, wobei alle aus ihrer Sicht relevanten Begriffe, die im Referat vorkommen, auch auf dem Arbeitsblatt 4.5.1.1. festgehalten werden müssen. (Mindestens 6 Begriffe müssen auf dem Arbeitsblatt stehen.) Anschließend werden Kleingruppen zu je vier beziehungsweise sechs Schüler/innen gebildet und per Los entschieden, welches Zweierteam vor seiner Kleingruppe referieren darf. Damit im Anschluss über die Präsentation diskutiert werden kann, schreibt von dem referierenden Zweierteam jene Person, die gerade nicht spricht, die relevanten Begriffe auf das Plakat. (Achtung: Die Redezeit sollte im Zweierteam gerecht aufgeteilt werden. Genaue Absprachen sind im Vorfeld daher notwendig.) Die übrigen Mitglieder der Kleingruppe ergänzen diese Begriffe danach. Im abschließenden Plenum werden die Gruppenergebnisse kurz miteinander verglichen und teilweise von der Lehrkraft noch ergänzt.

Folgende Begriffe könnten vorkommen:

- Variable
- umformen
- äquivalent
- Gleichung
- Gleichheitszeichen
- multiplizieren
- addieren
- subtrahieren
- dividieren
- zusammenfassen
- Term
- Unbekannte
- Umformungsstrich
- Grundmenge
- Lösung
- Lösungsmenge

***Arbeitsblatt 4.5.1.1.:***

# Brainstorming – Gleichungen

Damit keine Begriffe verloren gehen, trage diese gleich in der Tabelle ein!

| Meine Begriffe | Begriffe während des Vortrags | Ergänzungen |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Vielleicht kann dir dies beim Suchen nach den Begriffen helfen!

Var zei um ung multi Gleich ren

rm Gleich heits iable ad pli sub

ren tra hieren chen zie for die

strich men sungs menge idie ungs Lö

Um Grund sung div form ren Te

ge zu men men sen Lö sam fas

## 4.5.2. Wiederholung des Themas „Lineare Gleichungen mit einer Variable“

**Zeitplan:**

| Zeit | Inhalt/Thema | Material | Kompetenzen | Sonstiges |
|---|---|---|---|---|
| **10-15 min** | Die Kleingruppen bearbeiten ihr zugewiesenes Thema. D.h., sie bearbeiten gemeinsam das Informationsblatt, schreiben das Wesentliche für sich selbst auf und lösen ihre Aufgabe. | Arbeitsblätter 4.5.2.1. bis 4.5.2.3., Schulheft | • Es wird ein vorgegebenes Problem gelöst.<br>• Ein Lösungsweg wird gesucht.<br>• Mathematische Texte müssen verstanden werden. | Die Klasse wird in sechs Gruppen eingeteilt, wobei immer zwei Gruppen ein und dasselbe Thema bearbeiten. Welche Aufgabe welche Gruppe zu bearbeiten hat, wird von der Lehrkraft bestimmt. |
| **30 min** | In der Expert/innengruppe stellt jeder sein Spezialthema vor. Die anderen Gruppenmitglieder ergänzen dabei ihre Notizen und übertragen auch das Beispiel der anderen beiden Gruppen in ihr Schulheft. Anschließend wird gemeinsam das neue komplexere Beispiel gelöst. | Schulheft; Arbeitsblatt 4.5.2.4. | | Es werden Expert/innengruppen gebildet, in welcher jeweils genau ein/eine Schüler/in pro Thema sitzen soll. |
| **10 min** | Eine Gruppe präsentiert im Plenum ihre Erkenntnisse aus der Expert/innengruppe. | Tafel | | Die Lehrkraft wählt die Gruppe aus, die ihre Erkenntnisse präsentieren sollen. |

***Erläuterungen:***

Da es drei unterschiedliche Gruppenaufgaben gibt, die jeweils von zwei verschiedenen Teams bearbeitet werden sollen, wird die Klasse von der Lehrperson in sechs verschiedene Kleingruppen eingeteilt. Außerdem wird jeder dieser neu gebildeten Kleingruppen von der Lehrkraft eine Gruppenaufgabe zugewiesen, welche aus dem Bearbeiten eines Informationsblattes und dem Lösen einer Rechenaufgabe besteht (Arbeitsblätter 4.5.2.1. bis 4.5.2.3.). Jedes Kleingruppenmitglied arbeitet im Anschluss daran sein Informationsblatt gemeinsam mit seinen Kolleg/innen durch, bespricht es und notiert sich das Wesentliche in seinem Schulheft. Anschließend wird das Beispiel gemeinsam gelöst, welches wiederum ins Schulheft übertragen wird. Nachdem dies erledigt ist, darf das Ergebnis mit dem Lösungsblatt verglichen werden. Danach werden Expert/innengruppen gebildet, wobei in jeder dieser Expert/innengruppen nur ein/e Expert/in von jeder Gruppenaufgabe vertreten sein darf. (D.h. jede Expert/innengruppe hat somit eine Gruppengröße von drei Schüler/innen.) In dieser Expert/innengruppe stellt jede/r ihr/sein Spezialthema vor und demonstriert ihr/sein Rechenbeispiel. Die anderen Expert/innen schreiben während dieses Vortrags mit und übertragen auch das Rechenbeispiel. Danach löst die Expert/innengruppe gemeinsam ihr neues Rechenbeispiel (Arbeitsblatt 4.5.2.4.) und vergleicht das Ergebnis mit dem Lösungsblatt. Per Zufall wird schließlich eine Expert/innengruppe von der Lehrkraft ausgewählt, die ihre Ergebnisse dem Plenum präsentiert. (Die anderen Expert/innengruppen dürfen gegebenenfalls im Anschluss noch ergänzen beziehungsweise korrigieren.)

***Arbeitsblatt 4.5.2.1.:***

# Gruppenaufgabe A – Wie stelle ich eine Gleichung auf?

***Lest euch die folgenden Informationen durch, besprecht sie gemeinsam und notiert euch das Wesentliche!***

In der Mathematik wird als **Term** eine sinnvolle mathematische Zeilenreihe, die aus Zahlen, Variablen, Symbolen wie $+$, $-$, $\cdot$, : und Klammern besteht, verstanden. (Beispiele für Terme sind z.B. $14-3$ oder $3x-3$.) Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen „=“ miteinander verbunden, so bezeichnet man diesen mathematischen Ausdruck als **Gleichung**. (Beispiele für Gleichungen sind z.B. $14-3=3x-3$ oder $3+5=9-1$.) Gleichungen können unter anderem dazu verwendet werden, um **konkrete Sachverhalte** zu beschreiben.

**Rezept zum Aufstellen einer Gleichung:**

1. Lese den Text ganz aufmerksam durch!
2. Bestimme eine Variable für die gesuchte Größe!
3. Übertrage die Angabe mit Hilfe dieser Variable in Terme!
4. Stelle nun die Gleichung auf!

***Beispiel:***

Die beiden Zwillinge Franziska und Charlotte haben zusammen bereits $187$ € gespart. Da Franziska zuletzt aber sparsamer war, besitzt sie heute daher $7$ € mehr als ihre Schwester. Versuche dies nun durch eine Gleichung auszudrücken!

***Lösungsschritte:***

1. Lese den Text ganz aufmerksam durch!
2. Bestimme eine Variable für die gesuchte Größe!

   Sparbetrag von Franziska: $x$
3. Übertrage die Angabe mit Hilfe dieser Variable in Terme!

   Sparbetrag von Charlotte: $x - 7$

   Summe beider Sparbeträge: $x + x - 7$

   ersparter Betrag: $187$ €
4. Stelle nun die Gleichung auf!

   $x + x - 7 = 187$

***Versucht nun gemeinsam bei den folgenden Aufgaben die Gleichungen aufzustellen!***

## Aufgaben:

a) Addiert man zum Zweifachen einer Zahl die Zahl $15$, so erhält man die Zahl $39$.

b) Der Torjäger Richard erzielte bei einem Fußballmatch für seine Fußballmannschaft drei Mal so viele Tore wie der Mittelfeldspieler Patrick und $2$ Tore mehr als Felix, der zweite Torjäger. Insgesamt haben sie $5$ Tore erzielt.

*Bitte hier umknicken!*

---

## Lösungen:

a) 1) Gesuchte Zahl: $x$

2) Das Zweifache einer Zahl: $2x$

$15$ wird addiert: $+15$

Summe: $39$

3) Gleichung: $2x + 15 = 39$

b) 1) Patricks Tore: $x$

2) Richards Tore: $3x$

Tore von Felix: $3x - 2$

3) Gleichung:

$x + 3x + 3x - 2 = 5 \iff$

$7x - 2 = 5$

***Arbeitsblatt 4.5.2.2.:***

# Gruppenaufgabe B – Wie löse ich eine Gleichung?

***Lest euch die folgenden Informationen durch, besprecht sie gemeinsam und notiert euch das Wesentliche!***

Eine Gleichung mit einer Variablen zu lösen bedeutet alle Elemente aus einer **Grundmenge** $\boldsymbol{G}$ zu bestimmen, welche beim Einsetzen in die Gleichung eine **wahre Aussage** ergeben. Alle möglichen Lösungen zusammen bilden die **Lösungsmenge** $\boldsymbol{L}$. Die Lösungsmenge $L$ ist stets **Teilmenge** der Grundmenge $G$.

## Umformungen, mit denen eine Gleichung gelöst werden kann:

Um eine Gleichung zu lösen, können folgende Äquivalenzumformungen angewendet werden:

- Addiere bzw. subtrahiere auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl oder denselben Term!
- Multipliziere bzw. dividiere beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl bzw. einem Term ungleich der Null.
- Stelle beide Seiten der Gleichung mit Hilfe des Distributivgesetzes um.

***Beispiel:***

$$13x + 5 = 44 \quad |-5$$
$$13x = 39 \quad |:13$$
$$x = 3$$
$$L = \{3\}$$

***Löst nun gemeinsam folgende Aufgaben!***

## Aufgaben:

Bestimme die Lösungsmengen beider Gleichungen! Die Grundmenge ist $\mathbb{R}$.

a) $7x + 35 = 77$

b) $3(x - 3) = 7x - 8$

*Bitte hier umknicken!*

## Lösungen:

a) $7x + 35 = 77 \quad |-35$

$7x = 42 \quad |:7$

$x = 7$

$L = \{7\}$

b) $3(x - 3) = 7x - 8$ | Distributivgesetz

$3x - 9 = 7x - 8 \quad |+8$

$3x - 1 = 7x \quad |-3x$

$-1 = 4x \quad |:4$

$-\frac{1}{4} = x$

$L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

***Arbeitsblatt 4.5.2.3.:***

# Gruppenaufgabe C – Welche Lösungsmöglichkeiten besitzt eine Gleichung?

***Lest euch die folgenden Informationen durch, besprecht sie gemeinsam und notiert euch das Wesentliche!***

Welche Zahlen in eine Gleichung eingesetzt werden dürfen, ist von der **Grundmenge $\boldsymbol{G}$** abhängig, denn die Lösungen einer Gleichung sind stets Elemente der Grundmenge $G$. Werden alle Lösungen einer Gleichung zusammengefasst, so ergibt dies die **Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$**.

Ist die Grundmenge $G$ gleich der Lösungsmenge $L$, so bezeichnet man die Gleichung als **allgemeingültig**.

Gibt es keine Zahl aus der Grundmenge $G$, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, so bezeichnet man die Gleichung als **nicht lösbar**.

***Beispiel:***

Die Grundmenge $G$ sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
Für die Gleichung $x + 3 = x$ gibt es keine ganze Zahl, welche in die Gleichung eingesetzt werden kann, so dass sie eine wahre Aussage ergibt.

***Löst nun gemeinsam folgende Aufgaben!***

## Aufgaben:

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen!

a) $G = \mathbb{N};\ x - 3 = -9$

b) $G = \mathbb{Q};\ 2x + 34x + 8 + 5 = 2 \cdot (18x + 6) + 1$

*Bitte hier umknicken!*

## Lösungen:

Die Beispiele können durch Probieren sowie Umformen gelöst werden.

a) $x - 3 = -9 \ \Leftrightarrow x = -6$. Da aber die Grundmenge $G = \mathbb{N}$ die Zahl $-6$ nicht enthält, ist die Lösungsmenge $L$ die leere Menge. D.h. $L = \{\}$.

b) $2x + 34x + 8 + 5 = 2 \cdot (18x + 6) + 1 \ \Leftrightarrow 36x + 13 = 36x + 13$. Da jede Zahl der Grundmenge $G$ auch Lösung dieser Gleichung ist, ist die Lösungsmenge $L$ gleich der Grundmenge $G$. D.h. $L = \mathbb{Q}$.

***Arbeitsblatt 4.5.2.4.:***

# Die Expert/innengruppe

***Präsentiert euch gegenseitig euer Spezialthema! Macht euch während der Vorträge eurer Kolleg/innen Notizen in euer Schulheft! Übertragt dabei auch die Rechenbeispiele in euer Schulheft!***

***Lest anschließend euch das folgende Beispiel durch und versucht es in der Gruppe zu lösen!***

## Rechenaufgabe:

Die Kinder der fünfköpfigen Familie heißen Marie Louise, Elisabeth und Benedikt. Benedikt, das jüngste Kind, ist um $3$ Jahre jünger als Elisabeth, das mittlere. Das älteste Kind, Marie Louise, ist wiederum $4$ Jahre älter als Elisabeth. Zusammen sind die drei Geschwister $22$ Jahre alt. Wie alt ist jedes Kind?

Lösungsschritte:

a) Bestimme die Grundmenge $G$!
b) Versuche eine Gleichung aufzustellen!
c) Löst die Gleichung!
d) Führt die Probe mit Hilfe der Angabe und der Grundmenge durch!

## Lösung der Rechenaufgabe von der Expert/innengruppe:

a) Die Grundmenge $G$ sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. D.h. $G = \mathbb{N}$.

b) Elisabeths Alter: $a$

Benedikts Alter: $a - 3$

Marie Louises Alter: $a + 4$

Alter aller Kinder: $22$

$\Rightarrow a - 3 + a + a + 4 = 22$

c) $a - 3 + a + a + 4 = 22$

$$3a + 1 = 22 \quad |-1$$

$$3a = 21 \quad |:3$$

$$a = 7$$

d) $7 - 3 + 7 + 7 + 4 = 22$

Benedikt ist somit $4$ Jahre, Elisabeth $7$ Jahre und Marie Louise $11$ Jahre alt.

### 4.5.3. Auffrischung des Themas „Funktionen“

**Zeitplan:**

| Zeit | Inhalt/Thema | Material | Kompetenzen | Sonstiges |
|---|---|---|---|---|
| **15 min** | Die Schüler/innen arbeiten einzeln das Arbeitsblatt 4.5.3.1. durch und besprechen es anschließend mit dem/der Sitznachbar/in. | Arbeitsblatt 4.5.3.1. | • Mathematische Fachsprache wird erlernt.<br>• Mathematische Texte werden gelesen und verstanden. | |
| **25 min** | Die Kleingruppen durchlaufen nun drei Stationen, wobei jede Station immer von zwei Kleingruppen getrennt voneinander bearbeitet wird. | Arbeitsblätter 4.5.3.2. bis 4.5.3.4., Schulhefte | • Mathematische Argumentation wird verfeinert.<br>• Lösungsstrategien werden entwickelt. | Die Klasse wird in 6 Gruppen eingeteilt. Die Arbeitsblätter 4.5.3.2. bis 4.5.3.4. müssen doppelt vorhanden sein. |

**Erläuterungen:**

Um das Thema „Funktionen“ wieder ins Gedächtnis jedes/jeder Schülers/in zu rufen, bearbeitet er/sie alleine ein Informationsblatt (Arbeitsblatt 4.5.3.1.). Im Anschluss daran tauscht er/sie sich mit seinem/ihrer Sitznachbar/in darüber aus, wobei hier darauf geachtet werden sollte, dass beide Schüler/innen in eigenen Worten über den Text sprechen. Sprachliche Ungenauigkeiten, die dabei entstehen, sollen aber stets in charmanter Art und Weise von dem/der Gesprächspartner/in ausgebessert werden. Anschließend wird die Klasse in 6 Gruppen eingeteilt, wobei jede dieser Kleingruppen, um sich dem Thema „Funktionen“ auch praktisch zu widmen, drei Stationen (Arbeitsblätter 4.5.3.2. bis 4.5.3.4.) durchläuft. Ob jede dieser Stationen von den Schüler/innen korrekt erledigt wurde, können die Schüler/innen jeweils nach dem Erledigen einer Station mit Hilfe des Lösungsblattes überprüfen (Arbeitsblatt 4.5.3.4.).

***Arbeitsblatt 4.5.3.1.:***

# Funktion? Was ist das?

***Lese den Text aufmerksam durch und besprich ihn mit deinem/deiner Sitznachbar/in.***

Unter dem Begriff „Funktion“ wird in der Mathematik der eindeutige Zusammenhang von einer Größe mit einer anderen Größe verstanden. (Eindeutig bedeutet, dass die eine Größe nur mit einer und beispielsweise nicht mit zwei Größen in Zusammenhang steht.)

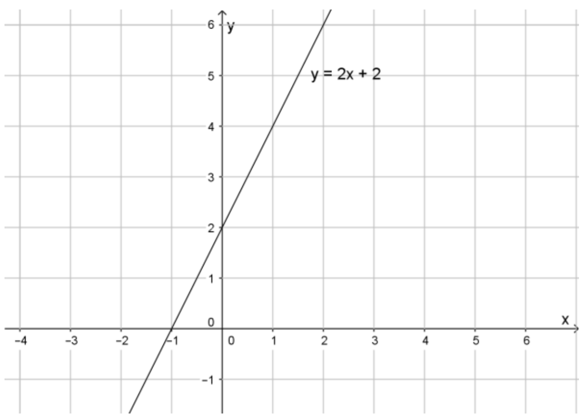
Die Menge der Ausgangselemente wird als Definitionsmenge $D$ bezeichnet, die Menge der zugeordneten Elemente als Wertemenge $W$.

Eine Funktion kann durch eine Gleichung dargestellt werden. Mit dieser Gleichung kann für jedes Element ($x$-Wert) der Definitionsmenge $D$ das zugeordnete Element ($y$-Wert) der Wertemenge $W$ berechnet werden. Der $x$-Wert und der $y$-Wert ergeben zusammen das Wertepaar $(x|y)$.

Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, so nennt man diese Funktion lineare Funktion. Die dazugehörige Funktionsgleichung hat die Form

$$y = kx + d \qquad k, d \in \mathbb{R}.$$

$k$ wird als Proportionalitätsfaktor bezeichnet. $d$ gibt die vertikale Distanz vom Ursprung zum Schnittpunkt des Graphens der linearen Funktion mit der $y$-Achse (Ordinatenabstand) an.



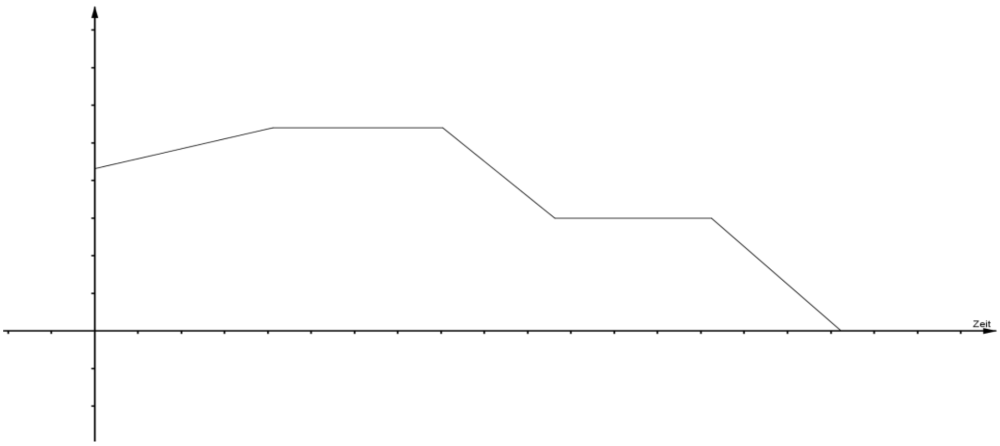
***Arbeitsblatt 4.5.3.2.:***

# Station 1

a) Zeichne den Graphen der folgenden Funktion in einem Koordinatensystem ein!

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

b) Erfinde ein Rechenbeispiel, das zu diesem Graphen passt! Achtung: Die Bezeichnung der $y$-Achse muss noch festgelegt werden.




c) Versuche die Graphik zu lesen! Schreibe 5 Erkenntnisse, die du gewonnen hast, auf!

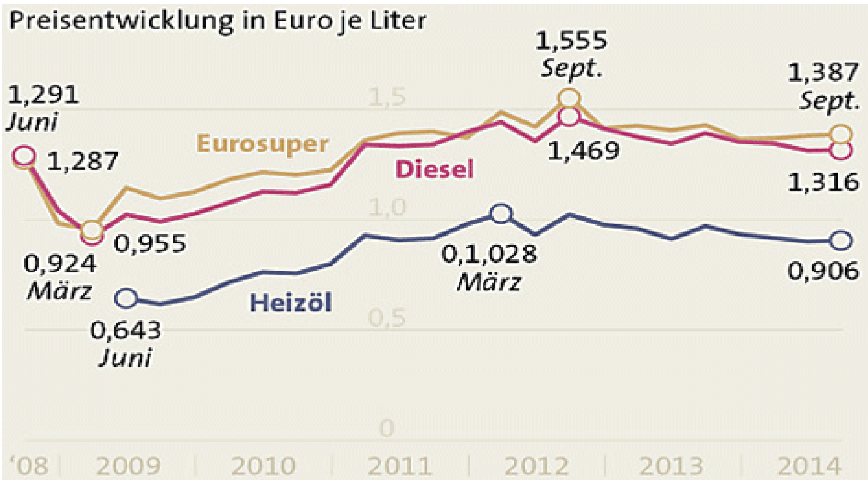



Abbildung 54: Entwicklung der Treibstoff- und Heizölpreise seit 2008 in Österreich[114]

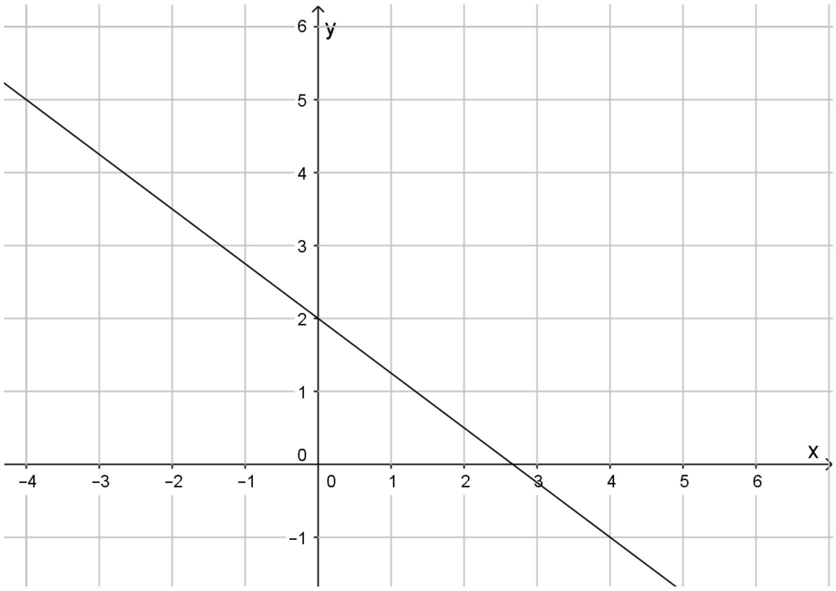
[114] orf, Benzin, Diesel und Heizöl günstiger als 2013, online unter <http://oesterreich.orf.at/stories/2670438/> (1.9.2015).

***Arbeitsblatt 4.5.3.3.:***

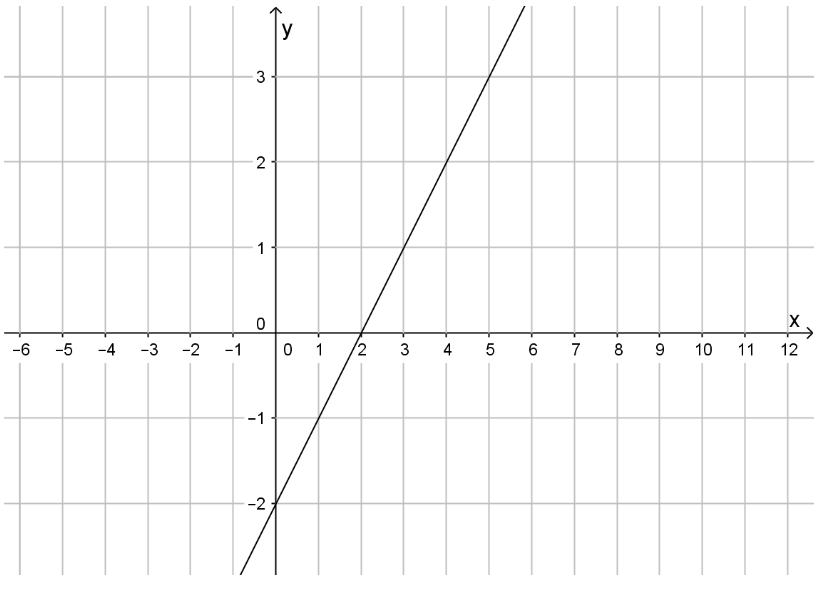
# Station 2

Sind alle Funktionsgraphen richtig gezeichnet? Wenn nein, dann zeichne den richtigen Funktionsgraphen bzw. gib die richtige Funktionsgleichung an!

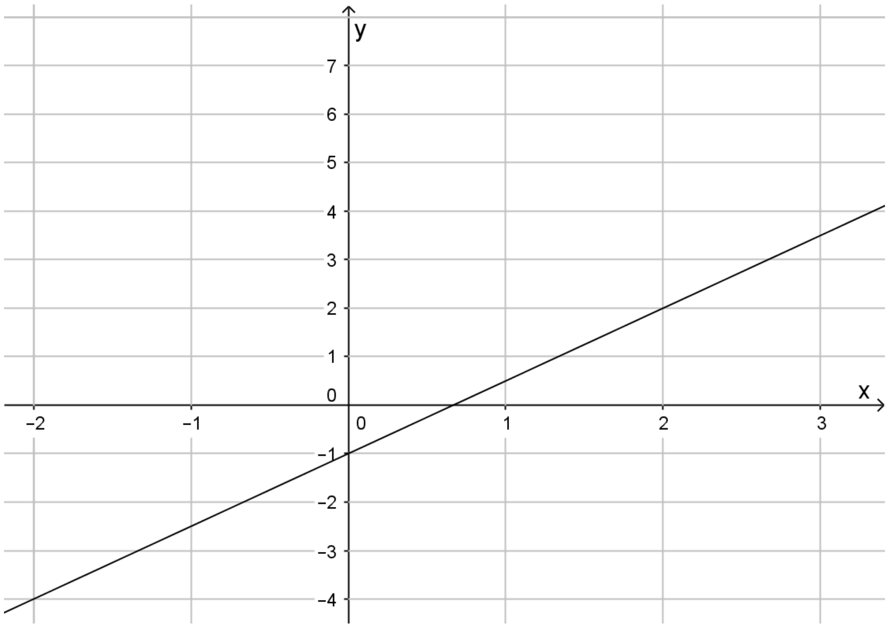
a) $y = -\frac{3}{4}x + 2$




b) $y = -2x + 2$



c) $y = \frac{3}{2}x - 1$



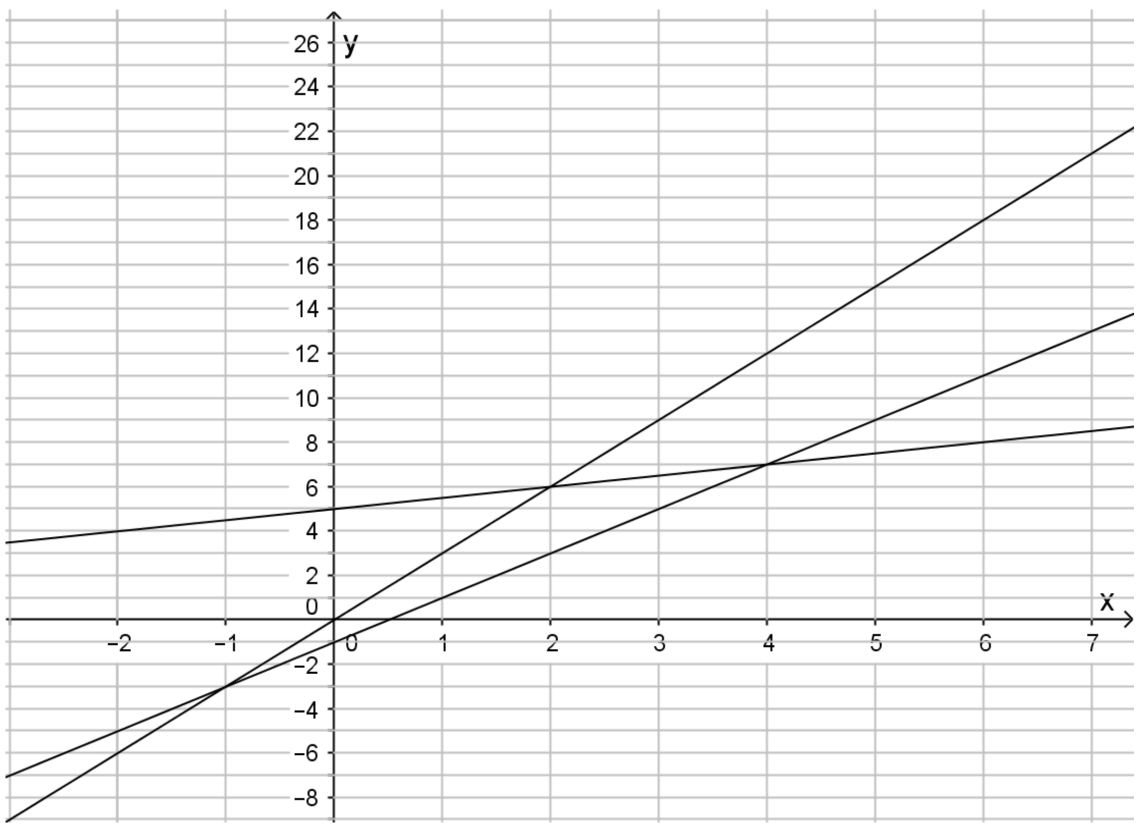
***Arbeitsblatt 4.5.3.4.:***

# Station 3

a) Eine Gemeinde bietet ihren Bürger/innen zu folgenden Bedingungen Wasser an: Die Kosten für ein Kubikmeter Wasser betragen $1{,}40$ € bei einer jährlichen Grundgebühr für Wasserzähler und Bereitstellungsgebühr von $110$ €. Stelle eine Funktionsgleichung auf, mit der man die Kosten in Abhängigkeit vom verbrauchten Wasser berechnen kann.

b) Ein unbeladener LKW mit einem Eigengewicht von $2$ t wird mit Rundkies, der ein Gewicht von rund $1{,}7$ t pro Kubikmeter hat, beladen. Stelle eine Funktionsgleichung auf, mit der man das Gewicht des LKWs in Abhängigkeit von der Beladung berechnen kann.

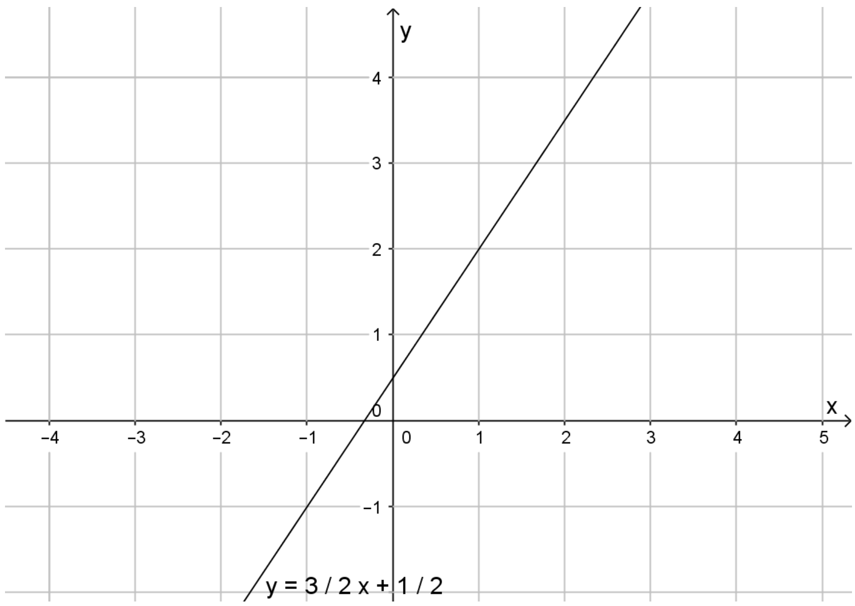
c) Wie lauten die Funktionsgleichungen jener Geraden, die im Koordinatensystem eingezeichnet sind?



***Arbeitsblatt 4.5.3.5.:***

# Station 1 – Lösungen

a)




b) Hier könnten beispielsweise Rechenbeispiele, die vom Befüllen und Entleeren der Badewanne oder von der Entfernung Wohnort-Schule während des Schulwegs handeln, erfunden werden.

c) 1) Heizöl ist stets günstiger als Treibstoff.

2) Tendenziell werden Treibstoffe sowie Heizöl im Zeitraum von 2009 bis 2014 immer teurer.

3) Diesel ist fast immer günstiger als Eurosuper.

4) Der Preis von Diesel lag nur zeitweise in den Jahren 2008 bis 2009 und 2011 bis 2012 über den von Eurosuper.

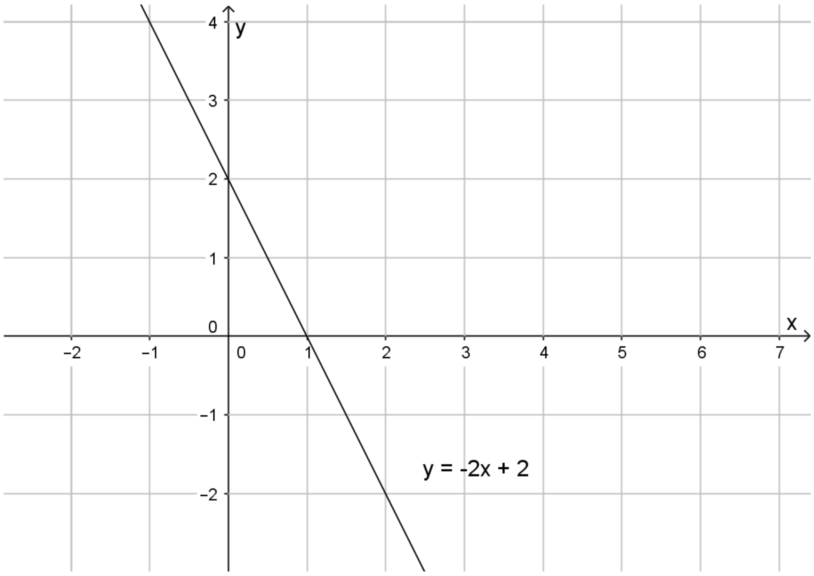
5) Im September 2012 musste für Eurosuper und Diesel am meisten bezahlt werden (Eurosuper $1{,}555$ €; Diesel $1{,}469$ €).

6) Im Juni 2009 musste für Eurosuper und Diesel am wenigsten bezahlt werden (Eurosuper $1{,}287$ €; Diesel $0{,}924$ €).

7) Heizöl war im März 2012 am teuersten.

# Station 2 – Lösungen

Beispiel b ist falsch. Die zum Graphen passende korrekte Funktionsgleichung wäre $y = x \; - 2$. Die zur Funktionsgleichung passende korrekte Graphik wäre:

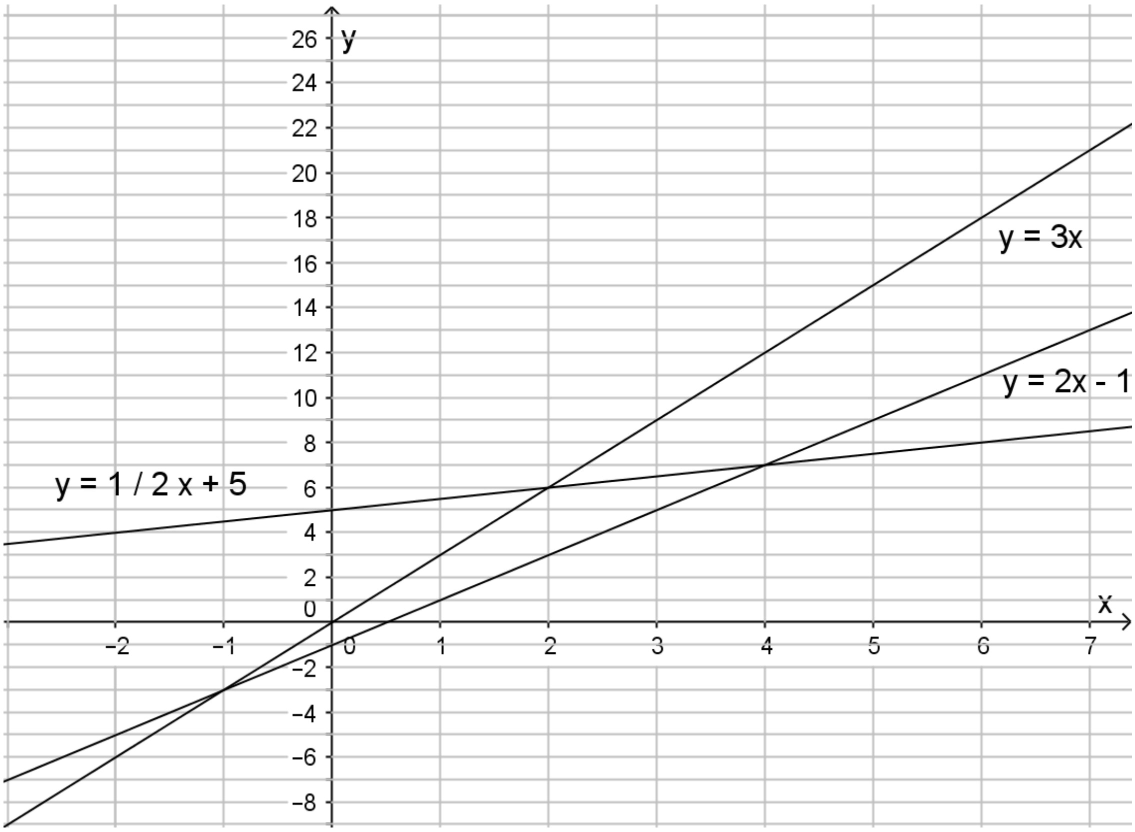


# Station 3 – Lösungen

a) $y = 1{,}40x + 110$

b) $y = 1{,}7x + 2$

c)



### 4.5.4. Erste Erfahrungen mit Linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

**Zeitplan:**

| Zeit | Inhalt/Thema | Material | Kompetenzen | Sonstiges |
|---|---|---|---|---|
| **5-10 min** | Die Schüler/innen lesen ihre Aufgabe aufmerksam durch und versuchen alleine eine dazu passende mathematische Frage zu formulieren. | Arbeitsblatt 4.5.4.1., Schulheft | • Mathematische Fachsprache wird erlernt.<br>• Mathematische Argumentation wird verfeinert.<br>• Vorträge werden genau mitverfolgt und gegebenenfalls korrigiert.<br>• Mathematische Modelle müssen entwickelt werden. | Die Lehrkraft teilt jedem/jeder Schüler/in jeweils eine der 6 verschiedenen Aufgaben zu. |
| **25-30 min** | Die Schüler/innen, die dieselbe Aufgabe bearbeitet haben, bilden jeweils eine Gruppe. Sie diskutieren über ihre Fragestellungen und einigen sich schließlich auf eine gemeinsame Frage, die sie zu lösen versuchen. Aufgabe und Lösung werden letztendlich auf einem Plakat festgehalten. | Arbeitsblatt 4.5.4.1., Plakat, Stifte, Schulheft | | Die Schüler/innen begeben sich in Kleingruppen. |
| **20 min** | Die Schüler/innen präsentieren ihren Mitschüler/innen in Form eines Museumsrundgangs ihre Plakate. | Pinnwand | | Für den Museumsrundgang werden neue Kleingruppen gebildet, in welcher sich jeweils genau ein/eine Schüler/in pro Aufgabe befinden soll. |
| **5 min** | Der/die Lehrer/in | Tafel, Schulheft | | Dies erfolgt im Ple- |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | führt den Begriff „Lineares Gleichungssystem“ ein und erklärt diesen. | | | num. |
| **10 min** | Die Schüler/innen stellen nun im Plenum für jede dieser sechs Aufgaben die dazugehörigen Linearen Gleichungssysteme auf und notieren diese im Schulheft. | Arbeitsblatt 4.5.4.1., Schulheft | | |

***Erläuterungen:***

Da die sechs verschiedenen Aufgaben auf die Schüler/innen möglichst gerecht aufgeteilt werden sollen, werden diese von der Lehrkraft mittels Abzählen auf die Schüler/innen aufgeteilt. Letztendlich erhält jeder/jede Schüler/in jeweils eine Aufgabe. Jeder/jede Schüler/in soll nun die Aufgabe aufmerksam durchlesen und eine Frage formulieren, die einerseits zum Text passt und andererseits auch berechnet werden kann, da die Fragestellung in zwei lineare Gleichungen übertragen werden kann. (Aufgeschrieben wird diese Frage im Schulheft.) Im Anschluss daran bilden diejenigen Schüler/innen Kleingruppen, die dieselbe Aufgabe bearbeitet haben. Jede dieser Kleingruppen soll nun über die unterschiedliche Fragenstellungen der Gruppenmitglieder diskutieren und sich letztendlich auf eine gemeinsame Frage einigen, die sie auch zu lösen versucht. Die Ergebnisse jeder Kleingruppe – das heißt Frage und Lösungsversuch – sollen letztendlich auf einem Plakat festgehalten werden. Für die Präsentation der einzelnen Aufgaben wird die Methode „Museumsrundgang“ gewählt. Für diesen Museumsrundgang werden erneut wieder Kleingruppen gebildet, wobei in jeder Kleingruppe sich jeweils nur ein/eine Schüler/in pro Aufgabe befinden sollte. (Ist ähnlich der Expert/innengruppe.) Diese Kleingruppe wandert nun von Plakat, welches im Klassenraum aufgehängt wurde, zu Plakat und bespricht nun jedes, wobei die Gesprächsleitung stets von jenem Gruppenmitglied übernommen wird, das sich mit der jeweiligen Aufgabe intensiv beschäftigt hat. Die Lehrkraft führt hinterher im Plenum den Begriff „Lineares Gleichungssystem“ ein und erklärt diesen. Zuletzt einigt sich das Plenum bei jeder der sechs Aufgaben auf eine Fragestellung und ein Lineares Gleichungssystem, welches jeder/jede Schüler/in in sein/ihr Schulheft aufschreibt.

***Arbeitsblatt 4.5.4.1.:***

# Lineare Gleichungssysteme

***Die nächsten Aufgaben, die ihr zu bewältigen habt, sind kleine Tüftelaufgaben. Lest euch daher eure Aufgabe durch und versucht eine Frage zu formulieren, die einerseits zum Text passt und andererseits auch berechnet werden kann. Versucht anschließend auch diese Frage zu lösen, indem ihr zwei lineare Gleichungen aufstellt, die für eure Fragestellung sinnvoll erscheinen. Vergesst nicht falls möglich auf euren Antwortsatz!***

## Aufgabe 1 – Shopping:

„Wahnsinn! Bald kommt wieder der Sommer und all meine Klamotten sind mir mittlerweile zu klein!“, meint Veronika, als sie einen Blick in ihren Kasten wirft. Um das zu ändern, ruft sie sofort ihre Freundin Stephanie an, damit sie noch heute shoppen gehen können. Da Stephanie auch Zeit hat und ebenso neues Gewand für den Sommer benötigt, setzen sie dieses Vorhaben gleich in die Tat um. Schon im ersten Geschäft findet Veronika drei Shirts, die ihr gefallen, sowie dazu drei passende Halsketten, welche zusammen $74{,}94$ € kosten. Stephanie findet ein „freches“ Shirt und zwei schicke Halsketten, die zusammen $34{,}97$ € kosten. Da außerdem in diesem Geschäft gerade Aktionstage sind, kosten alle Shirts und Halsketten, die sich die beiden ausgesucht haben, gleich viel.

## Aufgabe 2 – Im Blumengeschäft:

Katharinas Mutter möchte gerne ihre Wohnung mit Pflanzen neu dekorieren und fährt daher in ein Blumengeschäft. Ihr würden vier Nachtfalter Orchideen und eine Kannenpflanze sehr gefallen. Jedoch kosten diese fünf Pflanzen zusammen 53 €, was ihr allerdings zu teuer ist, da sie auch noch Küchenkräuter kaufen muss. Daher nimmt sie nur zwei Nachtfalter Orchideen und eine Kannenpflanze und bezahlt an der Kassa dafür $39$ €. Weil sie in einem Prospekt die

Küchenkräuter in einem anderen Blumengeschäft preiswerter gesehen hat als in diesem Geschäft, wird sie diese dort kaufen.

## Aufgabe 3 – Der Mathematikwettbewerb:

Die Klasse 4B nimmt heute an einem Mathematikwettbewerb teil. Insgesamt müssen bei diesem Mathematikwettbewerb von den Schüler/innen 25 Multiple-Choice-Fragen gelöst werden, wobei die Schüler/innen bei jeder richtigen Antwort entweder zwei oder drei Punkte bekommen können. Im Ganzen könnte jeder/jede Schüler/in maximal 61 Punkte erzielen.

## Aufgabe 4 – Die Sommerparty:

Sebastian hat heute ein paar Freunde und Freundinnen zu seiner Sommerparty eingeladen. Da heute ein extrem heißer Tag ist, überlegt er sich, welche und vor allem wie viele Getränke er kaufen sollte. Er entscheidet sich letztendlich für Eistee und Cola, wobei er vom Eistee 7 Packungen und vom Cola 6 Flaschen kauft. Insgesamt bezahlt er 18,90 €. Da er noch spontan 3 Freunde zusätzlich einlädt, fährt er erneut zum Lebensmittelgeschäft und kauft noch 2 Packungen Eistee und eine Flasche Cola. Dieses Mal bezahlt er aber nur 4,40 €.

## Aufgabe 5 – Der letzte Schultag:

Am letzten Schultag lädt der Klassenvorstand seine 4A in den Eissalon ein. Da aber von den 28 Schüler/innen einige eine Laktoseintoleranz haben, dürfen sie sich entweder eine Tüte um 2,70 € oder ein laktosefreies Sojaeis um 2,60 € kaufen. Insgesamt bezahlt der Lehrer 75,20 €.

## Lösungsvorschläge:

### Aufgabe 1 – Shopping:

Frage: Wieviel kostet ein Shirt und eine Halskette?

Preis des Shirts: $t$
Preis der Halskette: $h$

Gleichungen:
I: $3t + 3h = 74{,}94$
II: $1t + 2h = 34{,}97$

### Aufgabe 2 – Im Blumengeschäft:

Frage: Wie teuer ist die Nachtfalter Orchidee und die Kannenpflanze?

Preis der Nachtfalter Orchidee: $n$
Preis der Kannenpflanze: $k$

Gleichungen:
I: $4n + 1k = 53$
II: $2n + 1k = 31$

### Aufgabe 3 – Der Mathematikwettbewerb:

Frage: Wie viele 2- bzw. 3-Punkte-Fragen gibt es bei diesem Mathematikwettbewerb?

Anzahl der 2-Punkte-Fragen: $x$
Anzahl der 3-Punkte-Fragen: $y$

Gleichungen:
I: $x + y = 25$
II: $2x + 3y = 61$

## Aufgabe 4 – Die Sommerparty:

Frage: Wie teuer ist der Eistee bzw. das Cola?

Preis des Eistees: $e$

Preis des Colas: $c$

Gleichungen:

I: $7e + 6c = 18{,}90$

II: $2e + 1c = 4{,}40$

## Aufgabe 5 – Der letzte Schultag:

Frage: Wie viele Schüler/innen haben keine bzw. eine Laktoseintoleranz?

Anzahl der Schüler/innen mit keiner Laktoseintoleranz: $x$

Anzahl der Schüler/innen mit einer Laktoseintoleranz: $y$

Gleichungen:

I: $x + y = 28$

II: $2{,}70x + 2{,}60y = 75{,}20$

### 4.5.5. Erarbeitung der Lösungsverfahren für Lineare Gleichungssysteme

**Zeitplan:**

| Zeit | Inhalt/Thema | Material | Kompetenzen | Sonstiges |
|---|---|---|---|---|
| **10 min** | Jeder/jede Schüler/in versucht das ihm/ihr zugewiesene Lösungsverfahren zu verstehen. | Arbeitsblätter 4.5.5.1. bis 4.5.5.4., Schulheft | • Mathematische Fachsprache wird erlernt.<br>• Mathematische Argumentation wird verfeinert.<br>• Vorträge werden geplant und gehalten.<br>• Vorträge werden genau mitverfolgt und gegebenenfalls korrigiert.<br>• Lösungsverfahren werden nachvollzogen, beschrieben und begründet. | Die Lehrkraft teilt jedem/jeder Schüler/in jeweils ein Lösungsverfahren zu. |
| **20-25 min** | Die Schüler/innen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben, bilden eine Gruppe. Sie besprechen gemeinsam das Lösungsverfahren, beschreiben die Arbeitsschritte ganz genau und schreiben diese außerdem in ihre Schulhefte. | Arbeitsblätter 4.5.5.1. bis 4.5.5.4., Schulheft | | Die Schüler/innen begeben sich in Kleingruppen. |
| **10 min** | Die Schüler/innen versuchen in dieser Gruppe ein Beispiel gemeinsam mit ihren selbstständig erarbeiteten Lösungsverfahren zu lösen. | Arbeitsblätter 4.5.5.1. bis 4.5.5.4., Schulheft | | Die Kleingruppen bleiben bestehen. |
| **30-40 min** | In der Expert/innengruppe müssen nun neue Rechenbeispiele | Arbeitsblatt 4.5.5.5., Schulheft | | Es werden Expert/innengruppen gebildet, in welcher |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | gelöst werden, wobei sich für jedes dieser Rechenbeispiele jeweils nur ein Lösungsverfahren gut eignet. Die Schüler/innen sollen gemeinsam entscheiden, welches Lösungsverfahren das bessere ist. Der/die jeweilige Lösungsverfahren-expert/in rechnet nun „sein“/“ihr“ Beispiel den Gruppenmitgliedern vor und erklärt währenddessen gleich das jeweilige Lösungsverfahren. Die Gruppenmitglieder schreiben während dieses kurzen Vortrags in ihren Schulheften mit. | | | jeweils genau ein/eine Schüler/in pro Lösungsverfahren sitzen soll. |
| **20 min** | Die Expert/innengruppe arbeitet die Präsentation ihres zugewiesenen Lösungsverfahrens aus. | Arbeitsblätter 4.5.5.1. bis 4.5.5.5., Schulheft, Plakate | | Die Lehrkraft teilt jeder Expert/innengruppe mit, welches Lösungsverfahren sie zu präsentieren hat. |
| **10-15 min** | Die Expert/innengruppen halten ihre Vorträge im Plenum. | Plakate | | |

***Erläuterungen:***

Ziel dieser Unterrichtssequenz ist das selbstständige Einarbeiten der Schüler/innen in die Lösungsverfahren der Linearen Gleichungssysteme. Die Lehrkraft teilt daher jedem/jeder Schüler/in ein Arbeitsblatt (Arbeitsblätter 4.5.5.1. bis 4.5.5.4.) zu, welches ein Lösungsverfahren genauer beschreibt. Die Aufgabe der Schüler/innen besteht nun darin, sich in diese zugewiesenen Arbeitsblätter einzuarbeiten und die jeweiligen Lösungsverfahren zu verstehen. Danach bilden jene Schüler/innen Kleingruppen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben. Die Aufgaben jeder Kleingruppe sind das gemeinsame Besprechen des Lösungsverfahrens, das Verschriftlichen der einzelnen Schritte dieses Lösungsverfahrens sowie das Lösen eines Beispiels mit Hilfe dieses Lösungsverfahrens. Im Anschluss daran dürfen die Schüler/innen ihre Lösung des Rechenbeispiels mit der Lösung vom Lösungsblatt vergleichen. Im nächsten Schritt werden Expert/innengruppen gebildet, wobei in jeder dieser Expert/innengruppen nur ein/e Expert/in von jedem Lösungsverfahren vertreten sein darf. (D.h. die Expert/innengruppe hat somit eine Gruppengröße von vier Schüler/innen.) In der Expert/innengruppe stellt jede/r ihr/sein spezielles Lösungsverfahren vor. Die Gruppekolleg/innen schreiben während dieser Vorträge mit. Danach muss jede Expert/innengruppe vier neue Rechenbeispiele lösen, wobei für jedes Rechenbeispiel sich jeweils nur ein Lösungsverfahren gut eignet. Nachdem sich die Gruppe geeinigt hat, welches Lösungsverfahren bei welchem Beispiel angewandt werden soll, rechnet der/die jeweilige Experte/in des Lösungsverfahrens dieses Beispiel vor. Die anderen Gruppenmitglieder schreiben dabei wieder in ihren Schulheften mit. Im Anschluss daran dürfen die Schüler/innen wieder ihre Rechenbeispiellösungen mit den Lösungen vom Lösungsblatt vergleichen. Zuletzt sollen diese Lösungsverfahren auch präsentiert werden. Die Lehrkraft teilt daher jeder Expert/innengruppe mit, welches Lösungsverfahren sie vor der Klasse demonstrieren sollen. Jede Expert/innengruppe plant daher nun ihren Vortag, verschriftlicht diesen auf einem Plakat und präsentiert diesen letztendlich im Plenum.

***Arbeitsblatt 4.5.5.1.:***

# Graphisches Lösungsverfahren

***Lese den folgenden Text aufmerksam durch und versuche jeden Schritt nachzuvollziehen!***

***Beispiel:***

Simons Klasse benötigt für ein Projekt in Bildnerischer Erziehung neue Textmarker. Das Schreibwarengeschäft neben der Schule verlangt pro Packung Textmarker $2{,}50$ €. Im Online-Versand entdeckt Simon dieselben Packung Textmarker allerdings schon um $2{,}00$ €, wobei hierbei noch $2{,}50$ € Versandkosten pro Bestellung anfallen würden. Ab wie vielen Packungen lohnt sich eine Bestellung beim Online-Versand?

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

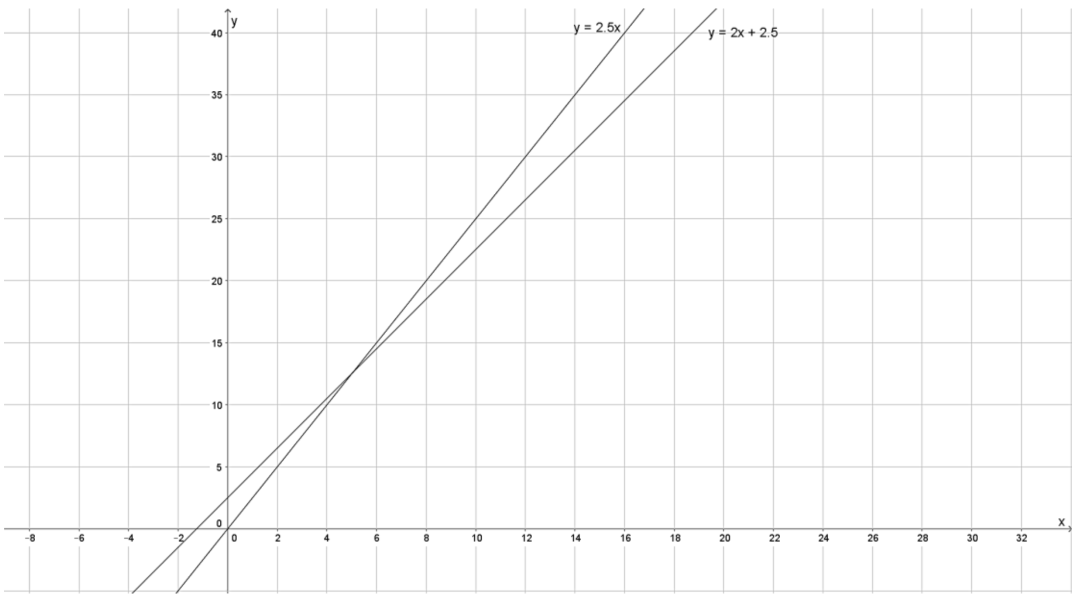
Anzahl der Packungen: $x$

Gesamtpreis: $y$

I: $y = 2{,}50x$

II: $y = 2{,}00x + 2{,}50$

***Schritt 2: Die beiden linearen Gleichungen werden gezeichnet.***



***Schritt 3: Der Schnittpunkt wird abgelesen und gedeutet.***

Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt $S\,(5|12{,}50)$. Das heißt nun, dass $5$ Packungen im Online-Versand genauso viel kosten wie im Schreibwarengeschäft, denn der Preis dafür beträgt jeweils $12{,}50$ €. Würde man jedoch mehr als $5$ Packungen kaufen, so wäre allerdings der Online-Versand günstiger, bei weniger als $5$ Packungen das Schreibwarengeschäft.

***Warum bot sich bei diesem Beispiel das graphische Lösungsverfahren an?***

Das graphische Lösungsverfahren bot sich hier aus zwei Gründen an:

1. Beide Gleichungen sind bereits nach $y$ aufgelöst.
2. Die Anzahl der Packungen, ab wann die Online-Bestellung günstiger ist, ist sicher eine natürliche Zahl. Daher gibt es keine Schwierigkeiten beim Ablesen.

***Besprich nun, nachdem du hoffentlich alles verstanden hast, das Lösungsverfahren mit jenen Klassenkolleg/innen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben. Versucht auch gemeinsam das nachfolgende Beispiel zu lösen!***

## Rechenaufgabe:

Damit sich die Klasse $4$D besser auf die nächste Mathematikschularbeit vorbereiten kann, empfiehlt ihre Mathematiklehrerin ein Mathematikübungsbuch. In der Buchhandlung, die sich am Hauptplatz befindet, kostet das Übungsbuch $12{,}00$ €, im Online-Buchhandel allerdings nur $10{,}00$ €, wobei hier Versandkosten von $10{,}00$ € pro Bestellung noch dazukommen. Wie viele Bücher müssten im Online-Buchhandel bestellt werden, damit eine Bestellung in der Online-Buchhandlung günstiger ist als in der Buchhandlung. Versuche dies graphisch zu lösen!

## Lösung der Rechenaufgabe (Arbeitsblatt 4.5.5.1.):

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

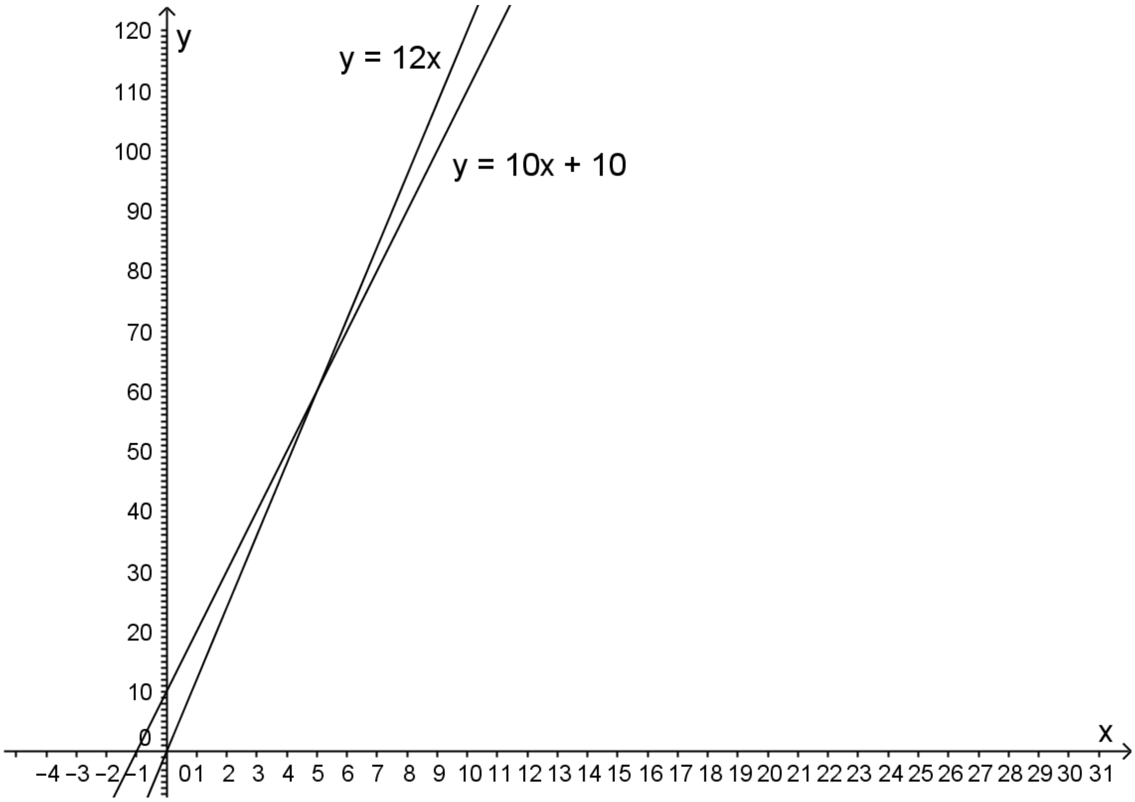
Anzahl der Mathematikübungsbücher: $x$

Gesamtpreis: $y$

I: $y = 12{,}00x$

II: $y = 10{,}00x + 10{,}00$

***Schritt 2: Die beiden linearen Gleichungen werden gezeichnet.***




***Schritt 3: Der Schnittpunkt wird abgelesen und gedeutet.***

Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt $S\ (5|60)$. Das heißt nun, dass $5$ Übungsbücher, die beim Online-Händler bestellt werden, genauso viel kosten wie in der Buchhandlung, denn der Preis beträgt dafür jeweils $60{,}00$ €. Würde man jedoch mehr als $5$ Übungsbücher kaufen, so wäre der Online-Versand günstiger, bei weniger als $5$ Büchern die Buchhandlung.

***Arbeitsblatt 4.5.5.2.:***

# Additionsverfahren

***Lies den folgenden Text aufmerksam durch und versuche jeden Schritt nachzuvollziehen!***

***Beispiel:***

Heute ist der letzte Tag der Sommersportwoche von der $4$E. Da noch etwas Geld in der Klassenkassa übrig ist, schlägt der Sportlehrer vor, Eis essen zu gehen. Die Schüler/innen der $4$E sind gleich von dieser Idee begeistert, allerdings dürfen sie sich nur entweder ein Erdbeer-Vanille-Eis oder ein Wassereis aussuchen. $17$ Schüler/innen würden ein Erdbeer-Vanille-Eis und $7$ Schüler/innen ein Wassereis zwar bevorzugen, allerdings würde dann der Betrag $53{,}30$ € ausmachen. Da sich in der Klassenkassa jedoch nur $44$ € befinden, können sich nur $10$ Schüler/innen für ein Erdbeer-Vanille-Eis und $14$ Schüler/innen für ein Wassereis entscheiden. Der Sportlehrer bezahlt letztendlich $44{,}20$ €. Wieviel kostet ein Erdbeer-Vanille-Eis bzw. ein Wassereis?

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

Preis des Erdbeer-Vanille-Eises: $x$

Preis des Wassereises: $y$

I: $17x + 7y = 53{,}30$

II: $10x + 14y = 44{,}20$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $17x + 7y = 53{,}30 \quad |\cdot(-2)$

II: $10x + 14y = 44{,}20$

I: $-34x - 14y = -106{,}60$

II: $10x + 14y = 44{,}20 \quad | +$

$-24x + 0y = -62{,}40$

$-24x = -62{,}40 \quad |:(-24)$

$x = 2{,}60$

***Um $y$ zu berechnen wird $x$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$$17 \cdot 2{,}60 + 7y = 53{,}30$$

$$44{,}20 + 7y = 53{,}30 \quad |-44{,}20$$

$$7y = 9{,}10 \quad |:7$$

$$y = 1{,}30$$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

$17$ Schüler/innen würden zwar gerne ein Erdbeer-Vanille-Eis (à $2{,}60$ €) und $7$ Schüler/innen ein Wassereis (à $1{,}30$ €) essen. Allerdings würde dies in Summe jedoch $53{,}30$ € betragen, denn $17 \cdot 2{,}60 + 7 \cdot 1{,}30 = 53{,}30$. Da sich in der Klassenkassa weniger Geld befindet, können sich nur $10$ Schüler/innen für ein Erdbeer-Vanille-Eis (à $2{,}60$ €) und $14$ Schüler/innen für ein Wassereis (à $1{,}30$ €) entscheiden, denn $10 \cdot 2{,}60 + 14 \cdot 1{,}30 = 44{,}20$.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $17 \cdot 2{,}60 + 7 \cdot 1{,}30 = 44{,}20 + 9{,}10 = 53{,}30$

II: $10 \cdot 2{,}60 + 14 \cdot 1{,}30 = 26 + 18{,}20 = 44{,}20$

***Warum bot sich bei diesem Beispiel das Additionsverfahren an?***

Weil beide Gleichungen „unterschiedlich“ aussahen, bot sich das Additionsverfahren an.

***Besprich nun, nachdem du hoffentlich alles verstanden hast, das Lösungsverfahren mit jenen Klassenkolleg/innen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben. Versucht auch gemeinsam das nachfolgende Beispiel zu lösen!***

## Rechenaufgabe:

Eva-Maria liebt es am Samstag sich frische Backwaren vom Bäcker, der sich bei ihr um die Ecke befindet, zu holen. Dieses Mal kauft sie 2 Schokocroissants und 2 Kürbiskernweckerl und bezahlt $5{,}30$ €. Ihr Nachbar Erich, der zufällig nach ihr die Bäckerei betreten hat, kauft sich 4 Schokocroissants und 1 Kürbiskernweckerl und bezahlt dafür $7{,}15$ €. Wieviel kostet ein Schokocroissant bzw. ein Kürbiskernweckerl?

# Lösung der Rechenaufgabe (Arbeitsblatt 4.5.5.2.):

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

Preis des Schokocroissants: $s$

Preis des Kürbiskernweckerls: $k$

I: $2s + 2k = 5{,}30$

II: $4s + 1k = 7{,}15$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $2s + 2k = 5{,}30 \quad |\cdot (-2)$

II: $4s + 1k = 7{,}15$

I: $-4s - 4y = -10{,}60$

II: $4s + 1k = 7{,}15$ $\quad | +$

$0s - 3k = -3{,}45$

$-3k = -3{,}45 \quad |: (-3)$

$k = 1{,}15$

***Um $s$ zu berechnen wird $k$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$2s + 2 \cdot 1{,}15 = 5{,}30$

$2s + 2{,}30 = 5{,}30 \quad |-2{,}30$

$2s = 3 \quad |: 2$

$s = 1{,}50$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

Eva-Maria kauft sich 2 Schokocroissants (à $1{,}50$ €) und 2 Kürbiskernweckerl (à $1{,}15$ €) und bezahlt $2 \cdot 1{,}50 + 2 \cdot 1{,}15 = 5{,}30$ €. Erich kauft sich 4 Schokocroissants (à $1{,}50$ €) und 1 Kürbiskernweckerl (à $1{,}15$ €) und bezahlt dafür $4 \cdot 1{,}50 + 1 \cdot 1{,}15 = 7{,}15$ €.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $2 \cdot 1{,}50 + 2 \cdot 1{,}15 = 3{,}00 + 2{,}30 = 5{,}30$

II: $4 \cdot 1{,}50 + 1 \cdot 1{,}15 = 6{,}00 + 1{,}15 = 7{,}15$

***Arbeitsblatt 4.5.5.3.:***

# Einsetzungsverfahren

***Lies den folgenden Text aufmerksam durch und versuche jeden Schritt nachzuvollziehen!***

***Beispiel:***

Tobias und Lea würden gerne ihr rechteckiges Grundstück abgesehen von jener kurzen Seite, auf der sich unter anderem die Einfahrt befindet, mit einer Thujahecke einfassen. Das Problem der beiden ist nun, dass sie sich nur noch an den Umfang ihres Grundstücks ($180$ m) und an die Tatsache, dass die längere Seite vier Mal so lang ist wie die kürzere, erinnern können. Außerdem wissen sie noch, dass die Buchsbäume, um eine schöne Hecke zu erhalten, alle $50$ Zentimeter gepflanzt werden müssen. Da Lea und Tobias zu faul sind, ihr Grundstück noch einmal zu vermessen, versuchen sie dies mathematisch zu lösen, denn nur wenn sie die Länge und Breite ihres Grundstücks kennen, wissen sie auch, wie viele Buchsbäume sie letztendlich kaufen müssen.

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

kurze Seitenlänge des Grundstücks: $x$

lange Seitenlänge des Grundstücks: $y$

I: $2x + 2y = 180$

II: $4x = y$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $2x + 2y = 180$

II: $4x = y$ | Gleichung II wird in Gleichung I eingesetzt.

$$2x + 2 \cdot (4x) = 180$$
$$2x + 8x = 180$$
$$10x = 180$$
$$x = 18$$

***Um $y$ zu berechnen wird $x$ in die Gleichung II eingesetzt.***

$$4 \cdot 18 = y$$
$$72 = y$$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

Die längere Seite des Grundstücks ($72$ m) ist vier Mal so lang wie die kürzere ($18$ m), denn $4 \cdot 18 = 72$. Der Umfang dieses rechteckigen Grundstücks beträgt $180$ m, denn $2 \cdot (72 + 18) = 180$.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $2 \cdot 18 + 2 \cdot 72 = 36 + 144 = 180$

II: $4 \cdot 18 = 72$

***Warum bot sich bei diesem Beispiel das Einsetzungsverfahren an?***

Da eine Gleichung bereits nach einer Variable aufgelöst war, bot sich hier das Einsetzungsverfahren an.

***Besprich nun, nachdem du hoffentlich alles verstanden hast, das Lösungsverfahren mit jenen Klassenkolleg/innen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben. Versucht auch gemeinsam das nachfolgende Beispiel zu lösen!***

## Rechenaufgabe:

Ein rechteckiger Parkplatz hat einen Umfang von $260$ m. Die längere Seite ist um $30$ m länger als die kürzere. Wie lange sind beide Seiten?

## Lösung der Rechenaufgabe (Arbeitsblatt 4.5.5.3.):

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

kürzere Seite des Rechtecks: $b$

längere Seite des Rechtecks: $a$

I: $2a + 2b = 260$

II: $a = b + 30$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $2a + 2b = 260$

II: $a = b + 30$ | Gleichung II wird in Gleichung I eingesetzt.

$$2 \cdot (b + 30) + 2 \cdot b = 260$$

$$2b + 60 + 2b = 260 \quad | -60$$

$$4b = 200 \quad |: 4$$

$$b = 50$$

***Um $a$ zu berechnen wird $b$ in die Gleichung II eingesetzt.***

$a = 50 + 30$

$a = 80$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

Die längere Seite des Parkplatzes ($80$ m) ist um $30$ m länger als die kürzere Seite ($50$ m), denn $80 = 50 + 30$. Der Umfang dieses rechteckigen Parkplatzes beträgt $260$ m, denn $2 \cdot (80 + 50) = 260$.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $2 \cdot 80 + 2 \cdot 50 = 160 + 100 = 260$

II: $80 = 50 + 30$

***Arbeitsblatt 4.5.5.4.:***

# Gleichsetzungsverfahren

***Lies den folgenden Text aufmerksam durch und versuche jeden Schritt nachzuvollziehen!***

***Beispiel:***

Annas Mutter hat demnächst Geburtstag, daher möchte Anna ihrer Mutter gerne deren Lieblingsblumen, die Spraynelken, schenken. Das Problem dabei ist aber, dass Anna zurzeit in Amerika lebt. Daher kann sie die Blumen ihrer Mutter nicht persönlich überreichen, sondern nur schicken. Bei Online-Blumenhändlern findet sie deshalb folgende Angebote:

*Blumenhandel A:*
1 Bund Spraynelken: $7{,}90$ €
Versandkosten: $2{,}70$ €

*Blumenhandel B:*
1 Bund Spraynelken: $6{,}50$ €
Versandkosten: $6{,}90$ €

Bei welcher Anzahl an Bund Spraynelken würde Anna bei beiden Online-Händlern gleich viel bezahlen?

***Schritt 1: Ein Lineares Gleichungssystem wird aufgestellt.***

Anzahl der Bund Spraynelken: $a$

Gesamtpreis für die Spraynelken: $p$

I: $p = 7{,}90a + 2{,}70$

II: $p = 6{,}50a + 6{,}90$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $p = 7{,}90a + 2{,}70$

II: $p = 6{,}50a + 6{,}90$

Die beiden Gleichungen werden nun gleichgesetzt.

$7{,}90a + 2{,}70 = 6{,}50a + 6{,}90 \qquad |-6{,}50a$

$1{,}40a + 2{,}70 = 6{,}90 \qquad |-2{,}70$

$1{,}40a = 4{,}20 \qquad |:1{,}40$

$a = 3$

***Um $p$ zu berechnen wird $a$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$p = 7{,}90 \cdot 3 + 2{,}7$

$p = 26{,}40$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

Die Kosten für $3$ Bund Spraynelken (à $7{,}90$ €) inklusive Versandkosten ($2{,}70$ €) betragen beim Blumenhändler A $26{,}40$ €, denn $3 \cdot 7{,}90 + 2{,}70 = 26{,}40$. $3$ Bund Spraynelken (à $6{,}50$ €) inklusive Versandkosten ($6{,}90$ €) kosten beim Blumenhändler B ebenso $26{,}40$ €, denn $3 \cdot 6{,}50 + 6{,}90 = 26{,}40$.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $26{,}40 = 7{,}90 \cdot 3 + 2{,}70$

II: $26{,}40 = 6{,}50 \cdot 3 + 6{,}90$

***Warum bot sich bei diesem Beispiel das Gleichsetzungsverfahren an?***

Weil beide Gleichungen bereits nach derselben Variable aufgelöst waren, bot sich hier das Gleichsetzungsverfahren an.

***Besprich nun, nachdem du hoffentlich alles verstanden hast, das Lösungsverfahren mit jenen Klassenkolleg/innen, die dasselbe Lösungsverfahren bearbeitet haben. Versucht auch gemeinsam das nachfolgende Beispiel zu lösen!***

## Rechenaufgabe:

Eine Firma, die Bohrmaschinen erzeugt, benötigt für die Produktion ihrer Spezialbohrmaschine einen bestimmten Maschinenteil. Da sie jedoch diesen Maschinenteil nicht selbst erzeugen möchte, greift sie auf Zulieferbetriebe zurück, die für sie diesen Maschinenteil herstellen. Beim Zulieferbetrieb A würden die Kosten dieses Maschinenteiles $1{,}50$ € und dessen Zustellung $0{,}60$ € pro Bestellung betragen. Der Zulieferbetrieb B würde diesen Maschinenteil um $1{,}49$ € verkaufen, allerdings würden die Zustellkosten $3{,}60$ € betragen. Bei welcher Anzahl an Maschinenteile würde die Bohrmaschinenfirma pro Bestellung bei beiden Zulieferbetrieben gleich viel bezahlen?

## Lösung der Rechenaufgabe (Arbeitsblatt 4.5.5.4.):

Anzahl des Maschinenteils: $a$

Gesamtpreis für den Maschinenteil: $p$

I: $p = 1{,}50a + 0{,}60$

II: $p = 1{,}49a + 3{,}60$

***Schritt 2: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $p = 1{,}50a + 0{,}60$

II: $p = 1{,}49a + 3{,}60$

Die beiden Gleichungen werden nun gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} 1{,}50a + 0{,}60 &= 1{,}49a + 3{,}60 && |-1{,}49a \\ 0{,}01a + 0{,}60 &= 3{,}60 && |-0{,}60 \\ 0{,}01a &= 3{,}00 && |:0{,}01 \\ a &= 300 \end{aligned}$$

***Um $p$ zu berechnen wird $a$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$p = 1{,}50 \cdot 300 + 0{,}60$

$p = 450{,}00 + 0{,}60$

$p = 450{,}60$

***Schritt 3: Das Ergebnis wird gedeutet.***

Die Kosten für $300$ Maschinenteile (à $1{,}50$ €) inklusive Zustellkosten ($0{,}60$ €) betragen beim Zulieferbetrieb A pro Bestellung $450{,}60$ €, denn $300 \cdot 1{,}50 + 0{,}60 = 450{,}60$. $300$ Maschinenteile (à $1{,}49$ €) kosten inklusive Zustellkosten ($3{,}60$ €) beim Zulieferbetrieb B ebenso $450{,}60$ €, denn $300 \cdot 1{,}49 + 3{,}60 = 450{,}60$.

***Schritt 4: Die Probe wird rechnerisch durchgeführt.***

I: $450{,}60 = 1{,}50 \cdot 300 + 0{,}60$

II: $450{,}60 = 1{,}49 \cdot 300 + 3{,}60$

***Arbeitsblatt 4.5.5.5.:***

# Expert/innengruppe

***Überlegt euch bei jedem der nächsten vier Beispiele zuerst, welches Lösungsverfahren das geeignetste ist! Der/die Schüler/in, der/die sich mit dem jeweiligen Lösungsverfahren intensiver auseinandergesetzt hat, soll nun seinen/ihren Gruppenkolleg/innen das Beispiel vorrechnen und im Zuge dessen jenes Lösungsverfahren genauer erklären. Jedes Gruppenmitglied sollte letztendlich alle vier Beispiele in seinem Schulheft stehen haben. D.h. schreibt gleich bei jedem Vortrag mit!***

***Beispiele:***

| Beispiele | Lösungsverfahren |
|---|---|
| a) I: $2x + 2y = 24$<br>II: $y = x - 4$ | |
| b) I: $y = \frac{1}{2}x + 2$<br>II: $y = x - 1$ | |
| c) I: $3x - 2y = 11$<br>II: $4x + 6y = 32$ | |
| d) I: $y = 245x + 932$<br>II: $y = 230x + 1022$ | |

## Lösung der Beispiele (Arbeitsblatt 4.5.5.5.):

a) I: $2x + 2y = 24$

II: $y = x - 4$

Einsetzungsverfahren

***Schritt 1: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $2x + 2y = 24$

II: $y = x - 4$ | Gleichung II wird in Gleichung I eingesetzt.

$2x + 2 \cdot (x - 4) = 24$

$2x + 2x - 8 = 24 \quad |+8$

$4x = 32 \quad |:4$

$x = 8$

***Um $y$ zu berechnen wird $x$ in die Gleichung II eingesetzt.***

$y = 8 - 4$

$y = 4$

***Schritt 2: Die Probe wird durchgeführt.***

I: $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 16 + 8 = 24$

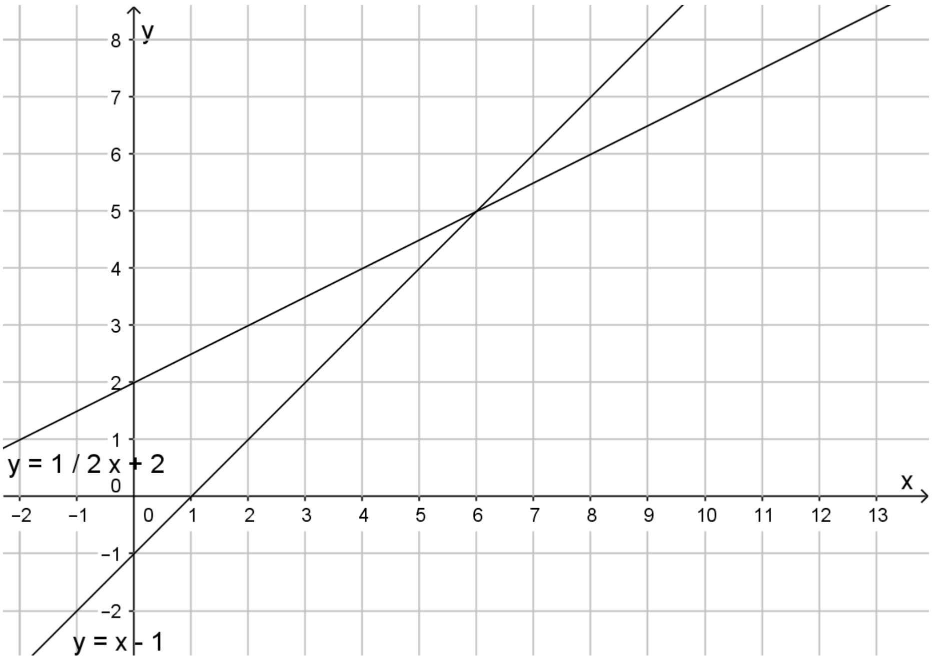
II: $4 = 8 - 4$

b) I: $y = \frac{1}{2}x + 2$

II: $y = x - 1$

graphisches Verfahren

***Schritt 1: Die beiden linearen Gleichungen werden gezeichnet.***




***Schritt 2: Der Schnittpunkt wird abgelesen.***

Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt $S\ (6|5)$.

c) I: $3x - 2y = 11$
II: $4x + 6y = 32$

Additionsverfahren

***Schritt 1: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $3x - 2y = 11 \quad |\cdot 3$

II: $4x + 6y = 32$

I: $9x - 6y = 33$

II: $4x + 6y = 32$ | $+$

$13x + 0y = 65$

$13x = 65 \quad |: 13$

$x = 5$

***Um $y$ zu berechnen wird $x$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$3 \cdot 5 - 2y = 11$

$15 - 2y = 11 \quad |-15$

$-2y = -4 \quad |:(-2)$

$y = 2$

***Schritt 2: Die Probe wird durchgeführt.***

I: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 15 - 4 = 11$

II: $4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 20 + 12 = 32$

d) I: $y = 245x + 932$

II: $y = 230x + 1022$

Gleichsetzungsverfahren

***Schritt 1: Das Lineare Gleichungssystem wird gelöst.***

I: $y = 245x + 932$

II: $y = 230x + 1022$

Die beiden Gleichungen werden nun gleichgesetzt.

$245x + 932 = 230x + 1022 \quad |-230x$

$15x + 932 = 1022 \quad |-932$

$15x = 90 \quad |:15$

$x = 6$

***Um $y$ zu berechnen wird $x$ in die Gleichung I eingesetzt.***

$y = 245 \cdot 6 + 932$

$y = 2402$

***Schritt 2: Die Probe wird durchgeführt.***

I: $y = 245 \cdot 6 + 932 = 2402$

II: $y = 230 \cdot 6 + 1022 = 2402$

# 5. Fachdidaktische Analyse

Diejenige beziehungsweise derjenige, die/der erwartet, dass nun hier der „beste“ Weg zum „Sieger“ ernannt wird, wird unbestritten enttäuscht sein, denn der „beste“ Einstieg kann generell betrachtet niemals verifiziert werden. Den „besten“ Einstieg kann es nämlich stets nur für eine spezielle Situation geben. Der Hauptgrund, wie in der Einführung (Kapitel 2) bereits erläutert wurde, ist nämlich, dass in jeder Unterrichtssituation stets viele verschiedene Komponenten zusammenspielen und diese jeden Unterricht stets zu einem komplexen Ereignis werden lassen. Daher müssen unter anderem die Wege, Methoden aber auch die Ziele ständig neu beschritten beziehungsweise adaptiert werden. So soll beispielsweise bei der Wahl der Unterrichtsmethode[115] bewerkstelligt werden, dass möglichst viele Schüler/innen jene im Unterricht angestrebten Ziele dadurch erreichen, indem sie unter anderem den Unterricht konzentriert folgen, sich an diesen beteiligen und die Unterrichtsinhalte lernen, verstehen und begreifen.[116] Allerdings stützen sich sehr viele Lehrkräfte, wie Henrik Kratz nachwies, in ihren Berufsalltagen bei der Auswahl der Unterrichtsmethoden auf subjektive Theorien sowie ihre persönlichen Überzeugungen.[117]

Deshalb wird in diesem Kapitel der Versuch unternommen, fachliche Kriterien wie beispielsweise Voraussetzungen an Kenntnissen und Fähigkeiten, Schwierigkeiten, Verallgemeinerbarkeit, Vorteile, Nachteile, Ziele etc. zu beleuchten, um einerseits einen wissenschaftlich, „objektiven“ Blick auf die Materie zu erlangen und andererseits Entscheidungshilfen zu geben.[118] In der Praxis muss

[115] Dieser Begriff orientiert sich hier an der Definition von Hilbert Meyer: *„Unterrichtsmethoden sind die Formen und Verfahren, mit denen sich die Lehrerinnen, Lehrer, Schülerinnen und Schüler die sie umgebende natürliche und gesellschaftliche Wirklichkeit unter Beachtung der institutionellen Rahmenbedingung der Schule aneignen.“* (Hilbert *Meyer*, Unterrichtsmethoden, In: Hanna *Kiper*, Hilbert *Meyer*, Wilhelm *Topsch*, Einführung in die Schulpädagogik (Berlin 2002) 109, online unter <http://www.uni-potsdam.de/fileadmin/projects/erziehungswissenschaft/documents/studium/Textboerse/pdf-Dateien/06_meyer_unterrichtsmethoden.pdf> (16.9.2015).)

[116] Hans *Merkens*, Unterricht 53.

[117] Henrik *Kratz*, Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Ein Studien- und Praxisbuch für die Sekundarstufe (Seelze 2011) 57.

[118] Dabei stellt sich jedoch die folgende schwierige Frage: Wie umfassend soll und kann dies überhaupt beleuchtet werden? Da fachdidaktische Analysen relativ schnell den Rahmen sprengen können, werden hier nur jene Facetten beleuchtet, die in direktem Zusammenhang mit dem jeweiligen Einstieg stehen. Möchte der/die Leser/in dennoch dies in einem größeren Zusammenhang gestellt wissen, so kann der/die Leser/in beispielsweise auf das Werk „Didaktische Prinzipien: Eckpfeiler guten Unterrichts“ von Klaus Beyer verwiesen werden.

allerdings noch bedacht werden, dass es sich bei diesen hier präsentierten Einstiegen ausschließlich um Grundkonzepte handelt, die auf der einen Seite zwar einen klaren Weg verfolgen, auf der anderen Seite noch mit zahlreichen Übungsbeispielen, die wiederum auf die Zusammensetzung der Schulklasse sowie die Rahmenbedingungen abgestimmt sein sollten, ergänzt werden müssen, um unter anderem das neu Gelernte besser zu festigen. Daher werden in den einzelnen fachdidaktischen Analysen teilweise Ergänzungen beziehungsweise Alternativvorschläge hinzugefügt, um auch die einzelnen Wege an die individuellen Rahmenbedingungen individueller anpassen zu können. Weiters können – besser sollten – die einzelnen Einstiege, worauf in dieser Arbeit auf Grund der Schwerpunktsetzung nicht näher eingegangen wird, im fortlaufenden Unterrichtsgeschehen auch miteinander vernetzt werden, um so den Schüler/innen einen besseren Gesamtüberblick zu ermöglichen, da diese die verschiedenen Zugänge miteinander verknüpfen können.[119]

Letztendlich entscheidet aber trotz intensiver Auseinandersetzung mit den fachlichen Kriterien das Bauchgefühl sowie die Erfahrung, ob ein Unterrichtsvorhaben erfolgreich umgesetzt werden kann oder nicht, denn obwohl in der Klasse A und der Klasse B gleiche Voraussetzungen herrschen, können die Bahnen trotz identen Einstiegs dennoch sehr unterschiedlich verlaufen, da unter anderem die emotionalen Bereiche sowie die Motivation der Lernenden situationsabhängig sind.[120]

Unterrichten bleibt daher immer eine große Herausforderung!

---

[119] Untersuchungen zeigten, dass die Schüler/innen in dem Themenbereich „Lineare Gleichungssysteme“ zwar fachsystematisch vernetzen konnten. So konnten sie beispielsweise nämlich verschiedene Lösungsverfahren anwenden und wussten Bescheid über einige Fallunterscheidungen. Bezüglich der Modellvernetzung – hier wurde in erster Linie der algebraische und der graphische Zugang untersucht – wiesen die Schüler/innen große Lücken auf, denn Bezüge zwischen der Geometrie und der Algebra konnten sie, obwohl dies bei diesem Thema sehr naheliegt, nur schwer herstellen (vgl. Astrid *Brinkmann*, Transformationen von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen – eine Untersuchung am Beispiel der linearen Gleichungssysteme in der Sek. I, In: Werner *Peschek*(Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt (Hildesheim, Berlin 2002) 129-130.).
vgl. auch Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I (ungedr. naturwiss. Diss. Duisburg 2002), online unter <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/brinkmanndiss.pdf> (16.9.2015).

[120] Petra *Hauer-Typpelt*, Zugänge zur Normalverteilung und ihre fachdidaktische Analyse (ungedr. naturwiss. Diss. Wien 1998) 110.

## 5.1. Der algebraische Weg fachdidaktisch beleuchtet

Ein wesentliches Kriterium für einen gelungenen Unterricht stellt der Einstieg dar (vgl. Kapitel 2), denn wie Ulf Mühlhausen und Wolfgang Wegner meinen, soll dieser orientieren, motivieren, den zu beschreitenden Weg verdeutlichen und auch informieren.[121] Deshalb setzt dieser Weg auf ein Einstiegsbeispiel (Beispiel 4.1.1.1.), welches direkt aus dem Schulalltag jedes/jeder Schülers/in herausgegriffen ist, denn Beispiele aus dem Schulleben sowie der Freizeit wecken beziehungsweise steigern das Interesse und die Motivation der Schüler/innen viel mehr als jene beispielsweise aus dem Berufsleben oder der Politik.[122] Andererseits liefert dieses Beispiel auch eine gewisse Orientierung, da die Schüler/innen auf Grund ihres Vorwissens bezüglich linearer Gleichungen mit zwei Variablen dieses Beispiel bereits lösen können. Diese Orientierung ist jedoch dahingehend relevant, da – im Sinne des „Prinzips des kumulativen Lernens" – eine Vernetzung zwischen den linearen Gleichungen mit zwei Variablen und den Linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen schon auf Grund des Zusammenhangs beider Themen erfolgen muss.[123] Gelöst wird dieses Beispiels

---

[121] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 22.
Der/die Leser/in möge aber bedenken, dass alle vier Hauptintentionen nicht gleichzeitig zu erfüllen sind (vgl. Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 24.)

[122] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 193-194.
Unterstrichen wird dies auch durch eine Studie von Sylvia Jahnke-Klein, denn wie die Untersuchung zeigt, finden Schüler/innen Unterrichtssituationen, in denen das facettenreiche Leben in den Klassenraum geholt wird, äußerst motivierend, wobei zu bedenken ist, dass der Begriff der „Lebensnähe" für Schüler/innen ein sehr umfangreicher ist, da sowohl anwendungsorientierte Aufgaben, fantasievoll eingekleidete Aufgaben sowie Denksportaufgaben dazuzählen (vgl. Sylvia *Jahnke-Klein*, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen (Hohengehren 2001) 186.).
Die Schüler/innen können außerdem bei diesem realen Problem erkennen, über welch nützliche Werkzeuge die Mathematik verfügt und welche Probleme dadurch gelöst werden können. Die OECD unterstrich dies, wie im folgenden Zitat ersichtlich wird, bereits 1999: *„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht."* (vgl. Stephan *Hußmann*, Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II (Berlin 2003) 24.)

[123] Kristina *Reiss*, Christoph *Hammer*, Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe (Basel 2013) 68.
Im Unterschied zum Spiralprinzip, bei dem ein Unterrichtsinhalt auf verschiedenen Niveaustufen beleuchtet wird, versucht das Prinzip des kumulativen Lernens zusätzlich noch Verknüpfungen zu anderen Unterrichtsinhalten herzustellen, welche auch den Schüler/innen bewusst sein sollten. Diese Vernetzungen können einerseits dahingehen, dass Inhalte und Verfahren im Laufe der Schuljahre weiterentwickelt werden, und andererseits, dass Inhalte mit Inhalten anderer Fachrichtungen in Verbindung gebracht werden (vgl. Kristina *Reiss*, Christoph *Hammer*, Grundlagen der Mathematikdidaktik 66, 68.).

– typisch für das problemorientierte Lernen – einerseits durch Probieren und andererseits mit Hilfe einer prägnanten mathematischen Darstellung, wobei der Erkenntniswert primär nicht im Ergebnis, sondern zum Großteil im Lösungsweg liegt. (Dieser kleinschrittige Lösungsweg wurde daher ganz bewusst gewählt, um eine Musterlösung exemplarisch zu präsentieren.) Weil jedoch das Finden einer Lösung nicht ohne Begriffe vonstattengehen kann, werden auch diese im Zuge des Lösungswegs thematisiert.[124] Da es sich hierbei jedoch um eine Wiederholung des im Vorfeld Gelernten handelt, sollte diese „Zusammenfassung" quasi eine Verdichtung des Stoffes – dargestellt an einem Beispiel – sein, um dies auf der einen Seite besser im Gedächtnis verankern zu können und auf der anderen Seite leichter für Zukünftiges verfügbar zu machen.[125]

Sollten sich während dieser Wiederholung bei den Schüler/innen dennoch Unklarheiten ergeben, kann/sollte den Schüler/innen hier die Gelegenheit gegeben werden, ähnliche Beispiele selbstständig oder mit Partner/in zu lösen, wobei die Beispiele im fortschreitenden Verlauf immer mehr vom Lösungsbeispiel abweichen können und auch sollten. Der Vorteil dieser Form des Lernens ist, dass der Lerneffekt, wie empirische Studien zeigen, oft höher ist, wenn Schüler/innen zuerst ein Verfahren an gelösten Problemen nachvollziehen und reflektieren können, als wenn sie das Problem selbstständig lösen müssten.[126] Dieser Reflexionsprozess ist auch dahingehend relevant, da dieser die Grundvorstellungen der Schüler/innen verdeutlicht und bewusst macht und mögliche Fehler, die auf diese Grundvorstellung zurückzuführen sind, aufdeckt.[127] Dennoch muss in dieser Phase bedacht werden, dass die Unterrichtsqualität wesentlich von den Aufgabenbeispielen abhängig ist und diese Beispiele wiederum laut Timo Leuders von folgenden Dimensionen der Aufgabenqualität beeinflusst werden:[128]

---

[124] Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (Heidelberg ²2012) 61-63.

[125] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 183.

[126] Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 38-41. Die Gefahr dabei ist, dass dies auch auf Kosten des Verständnisses und der Sinnhaftigkeit gehen kann. Daher muss dieses Musterbeispiel einfach und von allen nachvollziehbar sein. Dennoch braucht es jedoch auch eine gewisse Komplexität, da alles Wesentliche in ihm enthalten sein muss, denn sonst könnte es nicht Ausgangspunkt für weitere Beispiele sein. Dies ist im konkreten Fall auf Grund des motivierenden Beispiels gegeben (vgl. Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 38-41.).

[127] Rudolf vom *Hofe*, Grundvorstellungen mathematischer Inhalte (Heidelberg, Berlin, Oxford 1995) 104.

[128] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II (Berlin 2001) 95, 99.

- *„Authentizität – Bedeutsamkeit – Relevanz*
- *Offenheit*
- *Aufforderungscharakter:*
    1. *Anwendungsrelevanz*
    2. *Aktueller Bezug*
    3. *Kognitiver Konflikt*
    4. *Bezug zur Wahrnehmungswelt der Schüler*
    5. *Präsentationsform*
    6. *Innermathematische Eigenschaften“*[129]

Abgerundet wird diese Wiederholung mit einer Definition des Begriffs „Lineare Gleichung mit zwei Variablen“, wobei jene aus den besprochenen Beispielen gewonnen und mehr oder weniger nun nur abstrahiert wird. Gewählt wurde hier ganz bewusst eine sehr streng formale Definition, um die Schüler/innen bereits etwas auf die Oberstufe vorzubereiten.[130] Damit aber diese Definition anschaulicher und verständlicher wird, sollte allerdings der graphische Aspekt miteinbezogen werden, denn hier könnten die relevanten Merkmale – z.B. Die Grundmenge $G$ ist hier $\mathbb{R}$. –, aber auch die irrelevanten Merkmale – z.B. $a \neq 0$ – viel leichter an mehreren Beispielen demonstriert werden. Außerdem könnten ebenso Gegenbeispiele – z.B. $G = \mathbb{N}$ – gebracht werden. Jedenfalls zeigen Studien die Sinnhaftigkeit dieses Vorgehens, denn Begriffe – somit auch Definitionen – lassen sich am besten vermitteln, indem Beispiele, Gegenbeispiele sowie eine adäquate Erläuterung zusammenspielen, wobei die Qualität der Verbalisierung die Anzahl jener Beispiele wesentlich beeinflusst, denn bei steigender sprachlicher Qualität kann die Anzahl der Rechenbeispiele deutlich abnehmen.[131]

---

[129] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 99.
[130] Auch wenn dies hier etwas weit hergeholt scheint, sollten aber dennoch, wie Klaus Treumann herausarbeitet, die aus pädagogischer Sicht wichtigen Fähigkeiten der Mathematik – Rechenfertigkeit, Sprachverständnis, Raumvorstellung, schlussfolgerndes Denken und mathematisches Wissen – im Hinterkopf etwas mitschwingen, da die ersten vier Fähigkeiten Intelligenzfaktoren darstellen (vgl. Günter *Hanisch*, Wozu ist der Mathematikunterricht gut?, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft, H. 21 (1995), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1995%20Band%2023/Hanisch1995.pdf> (17.9.2015) 109-110.).
Außerdem helfen Begriffe Übersicht wie auch Struktur in ein Thema hineinzubringen, da sie vereinfachen und standardisieren (vgl. Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 256-257.).
[131] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 165-166, 174, 260.

Nach dieser Wiederholung und erneuten Festigung des Themas „Lineare Gleichung mit zwei Variablen" (vgl. Kapitel 4.1.1.) wird in das neue Thema „Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen" (vgl. Kapitel 4.1.2.) eingestiegen. Da zwischen diesen beiden Themen ein Zusammenhang hergestellt werden sollte, wird direkt an das vorhergehende Einstiegsbeispiel angeknüpft, indem es um eine Facette erweitert wird. Das heißt, dass erneut von einem aus Schüler/innen Sicht lebensnahen und motivierenden Problem ausgegangen wird, wobei in diesem Beispiel sogar ein fiktiver Lehrer herausgefordert wird, dieses Problem zu lösen (Beispiel 4.1.2.1.). Wieder wie zuvor wird auf Grund derselben Argumente in sehr kleinen und nachvollziehbaren Schritten ein Lösungsweg – in diesem Fall das Einsetzungsverfahren – entwickelt, wobei sich erst bei der anschließenden Analyse herauskristallisiert, dass es sich hierbei um ein Verfahren handelt.[132] Bei Verfahren ist generell jedoch zu beachten, dass die einzelnen Schritte, die abgearbeitet werden müssen, klar ersichtlich und begründet sein müssen und auch in ihrer Intention von den Schüler/innen verstanden werden müssen, da diese die Schüler/innen auch lernen müssen. Außerdem muss gewährleistet werden, dass die Schüler/innen beim Erkennen der neuen Verfahren an ihr Vorwissen anknüpfen können. Weiters wird bei der Abarbeitung dieser Verfahren von den Schüler/innen eine gewisse Disziplin verlangt. [133]

Damit nicht allzu lange mit dem noch nicht definierten Begriff „Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen" hantiert werden muss, wird nun im Anschluss daran dieser Begriff definiert, wobei hier nicht wie bei der Definition des Begriffs „Lineare Gleichung mit zwei Variablen" auf die Merkmale genau eingegangen werden muss, weil noch weitere Lösungsverfahren folgen werden.

Bei den zwei weiteren Verfahren, dem Gleich- und Einsetzungsverfahren, sollten einerseits wieder die Wesenszüge dieser Verfahren herausgearbeitet werden, andererseits sollten in einer Reflexionsphase die Schüler/innen aufgefordert werden, über die Eigenschaften, die Beziehung der einzelnen Verfahren

[132] Weitere Schwierigkeiten beziehungsweise Tipps im Hinblick auf die Lösungsverfahren, die sich bei Beobachtungen von Unterrichtssituationen herauskristallisiert haben, können dem Artikel „Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr" von Arnold Kirsch entnommen werden.

[133] Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts 61, 261-263.

zueinander sowie über die Vor- und Nachteile jedes Verfahrens kurz nachzudenken und eventuell auch zu diskutieren.[134]

Anschließend können die Schüler/innen unter Berücksichtigung der bereits angeführten Argumente wieder mit Hilfe dieser Musterbeispiele weitere Rechenaufgaben selbstständig oder mit Partner/in lösen, wobei das neu Gelernte hierbei erneut ausgeführt, reflektiert und mit dem Ziel so gefestigt werden soll, dass sich diese Verfahren auch „einschleifen“ können.[135]

Weil Rechenverfahren dazu neigen, das reflektierende Lernen von Mathematik oft gänzlich zu vernachlässigen, sollten, um dies vorzubeugen, zumindest einzelne Punkte der Tipps und Tricks (Kapitel 4.1.3.) während des Erklärens vom Musterbeispiel „Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen“ oder im Anschluss daran thematisiert werden. Denn diese Reflexion bringt nämlich durchaus ein tieferes Verständnis von jenen Verfahren, falls beispielsweise nachgedacht wird, wie diese Lösungsverfahren genau funktionieren, warum diese Lösungsverfahren überhaupt zu einem Ergebnis führen, welche Lösungsverfahren wann angewendet werden sollten, welche Umformungen beim Additionsverfahren korrekt sind, und ob es eine Lösungsformel dafür gibt.[136] Andererseits helfen diese reflektierenden Diskussionsphasen dazu, die zum Teil lückenhaften oder gar falschen Grundvorstellungen der Schüler/innen herauszuarbeiten, die dadurch entstandenen Fehler aufzudecken und falls notwendig adaptierte beziehungsweise neue Grundvorstellungen aufzubauen,[137] da die Schüler/innen dann nicht nur ein Rezept ohne jegliche Erfahrung und grundlegenden Wissen schnell aufgesogen haben.[138]
Unterstrichen werden diese Erkenntnisse durch eine Studie von Sylvia Jahnke-Klein. So wünschen sich nämlich laut dieser Studie die Schüler/innen – ohne jeglichen Zeitdruck – ausführliche und gründliche Erklärungen und die Möglichkeit nachfragen zu dürfen, da an und für sich alle Schüler/innen bestrebt waren, den Stoff gründlich zu verstehen. Außerdem wünschten sich die Schülerinnen

[134] Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts 62-63.
[135] Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 183.
[136] Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts 49-50, 71-72.
[137] Rudolf vom *Hofe*, Grundvorstellungen mathematischer Inhalte 104-105.
[138] Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hg.), Mathe, ja bitte. Wege zu einem anderen Unterricht (Eichstätt 1998) 69.

zusätzlich noch intensive Übungsphasen im Mathematikunterricht, weil sie sicher gehen wollten, dass sie wirklich alles ganz richtig verstanden haben und keinerlei Fehler machten. Die Schüler hingegen wollten teilweise mehr Abwechslung, ein höheres Unterrichtstempo sowie anspruchsvollere Aufgaben.[139] Das Letztgenannte war wiederum der Auslöser, dass bei den Tipps und Tricks (Kapitel 4.1.3.) auf Grund der höheren Abstraktion die Herleitung der Lösungsformel und wegen des gewünschten höheren Anspruchs das Beispiel 4.1.3.1. „Mitgliedsbeiträge im Sportverein“ hineingenommen wurden.

Aus Sicht der Unterrichtsform dominiert bei diesem algebraischen Weg somit das Prinzip „Verfahren erarbeiten an Lösungsbeispielen“. Der Vorteil dabei ist, dass durch dieses Vorgehen vor allem jene Inhalte anschaulich und nachhaltig vermittelt werden können, die nur schwer durch ein Nichtlenken gefunden werden können.[140] Das heißt jedoch auch, dass sämtliche Informationen allen Schüler/innen gleichzeitig, im selben Tempo und ohne Differenzierung vermittelt werden.[141] Dadurch kann der zu lehrende Stoff aus zeitlicher Sicht sehr effizient und gut geplant den Schüler/innen vermittelt werden, was wiederum zeitlichen Handlungsspielraum für Übungsphasen schafft. Außerdem gilt hier das Prinzip der Gerechtigkeit, da alle Schüler/innen gleich behandelt werden[142], und der Lernökonomie, weil das Thema aus didaktischer Sicht sehr effektiv aufgearbeitet werden kann. Jedoch wird aus Sicht der Schüler/innen dadurch das aktive Lernen sowie das Mitgestalten des Unterrichts sehr beschränkt, weil phasenweise die Schüler/innen nur die Rolle der stillen Mitdenker/innen, die keinerlei Verantwortung für den Lernprozess tragen, einnehmen können. Um diesem Dilemma, wie auch der Gefahr der Verdeckung der Lernschwierigkeiten sowie der durch die Steuerung entstehende Gefahr der Verengung des Themas zu

[139] Sylvia *Jahnke-Klein*, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen 136-137.
[140] Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 36-38. Das Prinzip „Verfahren erarbeiten an Lösungsbeispielen“ ist einerseits mit der Fragend-entwickelnden Unterrichtsform verwandt, stellt aber auf Grund der zentralen Bedeutung des Musterbeispiels eine eigene Unterrichtsform dar (vgl. Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 36-37.).
[141] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 39.
[142] Allerdings wird diese Unterrichtsform von Schülerinnen und Schülern unterschiedlich aufgenommen. So beteiligen sich nämlich die Burschen mit Fragen viel häufiger als Mädchen, die oft in ein zuwartendes Schweigen verfallen. Außerdem empfinden Mädchen bei offenem Unterricht mehr Spaß als bei dieser Unterrichtsform (vgl. Karin Lehner, Das Gender – und – Mathematik – Problem in der Schule (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2005) 88.).

entkommen,[143] sollen diese Phasen immer wieder – wie auch bei diesem algebraischen Weg vorgeschlagen – mit Phasen des selbst gesteuerten Lernens, in denen die Schüler/innen diese Informationen verarbeiten und mit eigenen Ideen bereichern können, abwechseln.[144]

Ein weiterer Grund für die Einbeziehung der Tipps und Tricks und der Reflexionsphasen ist, dass sich dadurch die Sozialformen – in diesem Fall Plenum, Einzel- beziehungsweise Partnerarbeit – ändern, was wiederum laut Elisabeth Berger und Hildegard Fuchs sich positiv auf die Konzentration und Lebendigkeit der Schüler/innen auswirkt. Georg E. Becker fügt unter anderem zu dem noch hinzu, dass aus seiner Sicht der Unterricht dadurch eine humanere Gestalt annimmt, sich der Sprechanteil der Schüler/innen erhöhen lässt und die kommunikative Kompetenz und die Teamfähigkeit der Schüler/innen gefördert werden.[145]
So können durch die Plenumsphasen in sehr geraumer Zeit gemeinsame Ausgangssituationen geschaffen, Interaktionen jedes Einzelnen mit allen Mitschüler/innen ermöglicht sowie Gemeinsamkeiten wie auch Differenzen erkannt werden. Allerdings neigen solche Plenumsphasen auch dazu, das Lernen im Gleichschritt[146] wie auch das Herauskristallisieren von Wortführer/innen und das Degradieren der Schüler/innen zu Reagierenden[147] zu fördern. Folglich sollte dieser Tatsache durch die Lehrkraft etwas entgegengesteuert werden, um so ein gedankliches Aussteigen der Schüler/innen und auch Störungen seitens der Schüler/innen zu vermeiden.[148]
Die Einzelarbeit hingegen ermöglicht den Schüler/innen sich mit den eigenen Kompetenzen und Techniken auseinanderzusetzen, da sie an diese angewiesen sind. Dies fördert wiederum die Selbstständigkeit, die Individualisierung, die Konzentration sowie das Durchhaltevermögen. Außerdem gibt die Einzelarbeit

---

[143] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 143-145
[144] Stephan *Hußmann*, Mathematik entdecken und erforschen 22.
[145] Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 46-47; Georg E. *Becker*, Unterricht planen. Handlungsorientierte Didaktik. Teil 1 (Weinheim, Basel [10]2012)167-169.
[146] Roland Bauer weist darauf hin, dass sich in jeder Klasse zumindest drei Entwicklungsjahrgänge befinden und das durchschnittliche Arbeitstempo der einzelnen Schüler/innen teilweise im Verhältnis 1:4 steht. Somit kann im Plenum kaum eine individuelle Förderung erfolgen (vgl. Roland *Bauer*, Lernen an Stationen in der Sekundarstufe I. Schülergerechtes Arbeiten in der Sekundarstufe I (Berlin 1997) 34.).
[147] Somit können die Schüler/innen ihr selbstständiges Denken, Fühlen und Handeln kaum entfalten (vgl. Hilbert *Meyer*, Unterrichts-Methoden. II: Praxisband (Berlin 2003) 184.).
[148] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen. Lehr- und Lernprozesse erfolgreich gestalten (Stuttgart 2006) 82; Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen im Mathematikunterricht höherer Schulen (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2005) 6-7.

den Lehrkräften die Chance, auf individuelle Schwächen und Stärken der Schüler/innen beispielsweise im Hinblick auf die Beispielswahl einzugehen, wobei das Feedbackgeben sowie das Planen solcher Phasen, bei denen auf jeden/jede Schüler/in größtmöglich Rücksicht genommen wird, sich oft als sehr zeitintensiv herausstellen. Weiters besteht stets die Gefahr der Unter- und Überforderung sowie einer egozentrischen Arbeitshaltung, was aber von Seiten der Lehrkraft durch ein individuelles Eingehen auf die Schüler/innen beziehungsweise durch einen klugen Umgang mit dem Faktor Zeit in den Griff bekommen werden kann.[149]

Die Partnerarbeit fördert im Vergleich zur Einzelarbeit bei jedem/jeder Schüler/in die soziale und kommunikative Kompetenz, das kooperative Lernen und das konzentrierte produkt- und zielorientierte Arbeiten noch viel stärker, weil niemand sich hier zurückziehen kann, und reduziert im Gegensatz zur Gruppenarbeit die Ablenkungsanfälligkeit oft wesentlich. Somit können generell etwas komplexere Aufgaben wie bei der Einzelarbeit auch in äußerst heterogenen Klassen bearbeitet werden, denn in diesem Fall könnten leistungsheterogene Paare ähnlich dem tutoriellen System formiert werden, wobei hierbei dennoch sehr sensibel mit der Wahl des/der Partners/in umgegangen werden muss.[150] Allerdings muss die Lehrkraft bedenken, dass dadurch im Vergleich zum Plenum eine größere Anzahl an Ergebnissen zu vergleichen beziehungsweise zu korrigieren ist und somit die Partnerarbeit zeitaufwändiger als das Plenum wird. Weiters muss darauf geachtet werden, dass die Partnerarbeit nicht auf Lasten eines/einer Schüler/in geht.[151]

Zuletzt sollte allerdings noch kurz thematisiert werden, warum der algebraische Weg zu Recht so oft in den Schulbüchern zu finden ist. Algebra stellt nämlich abgesehen vom elementaren Zahlenrechnen eine wesentliche Grundlage für viele mathematische Tätigkeiten dar, ohne deren Kenntnis keine höhere Schule bewältigt werden kann. Außerdem wird algebraisches Wissen bei vielen Studienrichtungen beispielsweise im Bereich der Naturwissenschaft, der Technik und

[149] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 87; Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 52-53.
[150] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 85-87; Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 53-55.
[151] Daniela *Garhöfer*, Der Wandel des Mathematikunterrichts in den letzten dreißig Jahren in Bezug auf den Einsatz neuer Medien, Gender equality, und die Entwicklung neuer Unterrichtsmethoden (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/14351/1/2011-05-04_0205244.pdf> (18.9.2015) 72-73.

der Wirtschaft vorausgesetzt. Andererseits kann Algebra im Leben oft sehr hilfreich sein und wichtige Beiträge zu allgemeinen Lernzielen wie beispielsweise exaktes Arbeiten, Durchhaltevermögen und Selbstdisziplin liefern, weil die Formelsprache zum Beispiel hilft, seine/ihre mathematischen Gedanken zu präzisieren und über Mathematik zu sprechen und Probleme mit Hilfe der Formelsprache zu beschreiben und lösen.[152]

## *5.2. Der computerunterstützte Weg fachdidaktisch beleuchtet*

Der computerunterstützte Weg ist sehr ähnlich wie der algebraische Weg (vgl. Kapitel 4.1. und 5.1.) gestaltet. Der einzige Unterschied zwischen diesen beiden Einstiegen liegt nämlich nur im Einsatz einer Computersoftware – in diesem Fall die Unterrichtssoftware GeoGebra 5 – für die Berechnung und Veranschaulichung der Lösungsmengen beim computerunterstützten Weg. Dies hat aber nun zur Folge, dass die wesentlichen Begründungen und Anregungen des algebraischen Wegs auch bei diesem Einstieg zum Tragen kommen. Daher werden in diesem Kapitel nur jene Facetten beleuchtet, die den Computereinsatz und die Experimente mit Hilfe von GeoGebra betreffen. Hinsichtlich der anderen relevanten Aspekte wird der/die Leser/in deshalb auf das Kapitel 5.1. „Der algebraische Weg fachdidaktisch beleuchtet“ verwiesen.

Dem/der aufmerksamen Leser/in wird mittlerweile wahrscheinlich aufgefallen sein, dass kein graphischer Weg, der immer wieder in den Schulbüchern zu finden ist, vorgestellt wurde, obwohl Bleistift, Zirkel und auch Lineal im Mathematikunterricht nach wie vor – und das zu Recht – eine sehr wichtige Rolle spielen sollten. Denn wie die Van-Hiele’sche Stufentheorie zeigt, führen intensive und frühzeitige praktische Übungen mit Bleistift, Zirkel und Lineal im Unter-

[152] Günther *Malle*, Didaktische Probleme der elementaren Algebra (Braunschweig 1993) 11; Hans-Joachim *Vollrath*, Hans-Georg *Weigand*, Algebra in der Sekundarstufe (Heidelberg ³2007) 96.

richt zu einer verfrühten Abstraktionsfähigkeit der Schüler/innen.[153] Trotz all dem wurde aber das graphische Lösen von Linearen Gleichungssystemen mit Bleistift und Lineal in dieser Arbeit außen vor gelassen, weil es sich hierbei nur um ein näherungsweises Lösen, auch wenn noch so exakt versucht wird zu zeichnen, handeln kann und somit die graphische Lösung in erster Linie nur, was jedoch auch sehr relevant ist, zur Veranschaulichung dienen kann. Da jedoch der Technologieeinsatz das graphische Darstellen wie auch das exakte Lösen von Linearen Gleichungssystemen gewährleisten kann, wurde hier der Technologie – im speziellen der Unterrichtssoftware GeoGebra 5 – der Vorzug gelassen.[154] GeoGebra wurde aus dem Grund ausgewählt, da es sich hierbei um eine Mathematiksoftware handelt, die Algebra, Geometrie aber auch Tabellenkalkulation miteinander verbindet und somit viele Möglichkeiten für den Unterricht bietet. Außerdem ist GeoGebra ein Open-Source-Programm, welches weltweit weiterentwickelt wird, und kostenlos für die gängigen Betriebssysteme von Computer und Tablets verfügbar ist. Weiters ist GeoGebra sehr nutzerfreundlich.[155]

Jedoch muss die Entscheidung Technologie einzusetzen Änderungen in den didaktischen Zugängen, sowie im Lernprozess aber teilweise auch in den Sozialformen bringen, denn der Einsatz von Neuen Medien verändert alleine per se, wie einige Medien-Vergleichsstudien zeigen, die Unterrichtsqualität noch nicht.[156] So schreibt nämlich bereits Heinrich Winter im Jahr 1988:

---

[153] Wolfgang *Riemer*, Erziehen im Mathematikunterricht, In: Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt* (Hg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn (Wiesbaden ²2014) 37; Maria *Hutsteiner*, Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Geometrieunterricht der AHS und seine Förderung mittels Dynamischer Geometrie-Software (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/17640/1/2011-12-09_0604228.pdf> (19.9.2015) 45-53.

[154] Zu bedenken ist außerdem hierbei noch, dass die Technologie in der heutigen Welt an Bedeutung immer mehr gewinnt, denn ein Erlernen von Computertechniken kann den nachhaltigen Wissenserwerb sowie die technischen Kompetenzen fördern. Weiters ist der Einsatz der höherwertigen Technologie bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung ab dem Schuljahr 2015/16 an der BHS und ab 2017/18 an der AHS verpflichtend vorgeschrieben (vgl. Sieglinde *Fürst*, Technologieeinsatz im Mathematikunterricht, In: bifie, Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe. Band 2 (Graz 2012), online unter <https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_praxishandbuch_band2_2012-12-21.pdf> (19.5.2015) 101-102.).

[155] Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt*, Zu einem tieferen Mathematikverständnis, In: Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt* (Hg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn (Wiesbaden ²2014) 1.

[156] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 15.

> *„Die Medien haben an sich nur eine untergeordnete Bedeutung. Primär wichtig sind die an ihnen ausgeführten Aktivitäten. Medien, die nicht ‚bearbeitet', sondern nur betrachtet werden können, haben daher nur sehr beschränkten Wert."*[157]

Der Technologiebefürworter Helmut Heugl meint aber:

- *„Die Überprüfung von Grundkompetenzen beschränkt sich nicht nur auf Rechenkompetenz. Geprüft werden auch Formelkenntnisse, Visualisierungskompetenz, Kompetenzen der Rechnernutzung, aber auch Begründungskompetenzen, sowie grundlegende Anwendungskompetenzen.* […]
- *Die besonders bei Fach- und Projektarbeiten möglich*[e] *innere Differenzierung erlaubt eine individuellere Anpassung der geforderten Lernziele an das Leistungsniveau der einzelnen Schülerinnen und Schüler.* […]
- *Neben der mathematischen Fachkompetenz, gewinnen die Methodenkompetenz, aber auch die Sozialkompetenz und die Persönlichkeitskompetenz als fundamentaler Bildungsauftrag des Faches Mathematik an Bedeutung.* […]
- *Die CAS-Nutzung erleichtert und fördert die Vernetzung verschiedener Inhalte sowohl innermathematisch als auch die Vernetzung mit anderen Fächern. Mathematik erhält eine neue Rolle als Basiswissenspool und Strukturerkennungsebene für andere Fächer."*[158]

Der Einsatz von GeoGebra schafft aus didaktischer Sicht zusätzlich noch zahlreiche neue Möglichkeiten.

- *„Mathematische Fragestellungen können variiert und veranschaulicht werden,*
- *Mathematische Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten können besser aufbereitet und erklärt werden,*

---

[157] Heinrich Winter, Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik (Braunschweig, Wiesbaden 1988) 79.

[158] Helmut *Heugl*, Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (2001), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2001%20Band%2033/Heugl2001.pdf> (18.9.2015) 98-99.

- *das Zusammenspiel von kognitiver, visueller und akustischer Darbietung (Lehrer) erleichtert das Erkennen und Verstehen mathematischer Zusammenhänge,*
- *durch die Auslagerung rein operativer Handlungen auf das digitale System kann Zeit für weiterführende Erklärungen, Übungen und eine Individualisierung des Unterrichts gewonnen werden,*
- *operative Routinehandlungen (z.B.: Lösen von Gleichungen) können zugunsten der Handlungsdimensionen Modellieren und Reflektieren zurückgedrängt werden,*
- *die Schülerinnen und Schüler werden ermutigt, eigenständig mit mathematischen Objekten und Parametern zu experimentieren,* […]
- *die Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts wird durch den Einsatz von Geogebra gesteigert.“*[159]

Außerdem bedient sich GeoGebra der „operativen Prinzipien“[160] und knüpft somit einerseits an das von Jerome E. Bruner 1974 entwickelte „EIS-Prinzip“[161], welches auf Grund der drei Repräsentationsebenen „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ ermöglicht, Wissen für Schüler/innen vorteilhaft darzustellen beziehungsweise zu erschließen, und andererseits an das „Prinzip der operativen Durcharbeitung“[162] an.[163] Somit bietet GeoGebra aber auch eine Fülle an Mög-

---

[159] Erwin *Höferer*, Evaluierung des Einsatzes von GeoGebra und Excel im Mathematik-Unterricht. Unter Berücksichtigung des Kompetenzmodells der angewandten Mathematik im Hinblick auf die standardisierte Reife- und Diplomprüfung (Klagenfurt 2014), online unter <https://www.imst.ac.at/files/projekte/1375/berichte/1375_Langfassung_Hoeferer.pdf> (18.9.2015) 9.

[160] Da Bruner, Aebli und Lompscher jeweils sehr ähnliche Theorien der Denkentwicklung entwickelt haben, werden diese in der Literatur gerne mit dem Überbegriff „operative Prinzipien“ zusammengefasst (vgl. Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 115.).

[161] Die drei Buchstaben „EIS“ stehen für die Wörter enaktiv, ikonisch und symbolisch und sollen laut Bruner bewusst machen, dass Wissen enaktiv, d.h. handelnd, ikonisch, d.h. bildlich, und symbolisch, d.h. verbal oder formal, sich darstellen beziehungsweise erschließen lässt. Bruner schließt mit seinem Prinzip daher unmittelbar an Piagets Stadientheorie an (vgl. Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 17; Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 89-92, 104-106.).

[162] Aus Sicht des „Prinzips der operativen Durcharbeitung“ sollte eine Operation, die eingeführt wurde, – gilt aber auch für Begriffe oder Verfahren – auf drei Arten beleuchtet werden. *„I. Die anschauliche Bedeutung ist durch wiederholtes Zurückkommen auf die ursprüngliche Situation und deren Veränderung gezielt zu vertiefen. II. Das Wesentliche ist in Zusammenhang mit der Variation unwesentlicher Aspekte hervorzuheben. III. Die Eigenschaften der Operation und deren Beziehung zu anderen Operationen sind, z.B. durch vielfaches Zusammensetzen und Umkehren, herauszuarbeiten.“* (vgl. Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 118.). Das heißt nun, dass die Darstellungsebenen, das Unwesentliche und die Lösungswege variiert, die Ausgangssituation verändert und deren Veränderungen untersucht werden sollen (vgl. Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 119-122.).

[163] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 17; Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik 117-118.

lichkeiten zum Experimentieren und die Chance der gleichzeitigen Darstellung aller drei Repräsentationsebenen an, denn Schüler/innen können mittels Maus oder Tastatur mathematische Modelle erstellen beziehungsweise beeinflussen – enaktive Facette –, das Modell graphisch veranschaulicht wahrnehmen – ikonische Facette – und die Modelle als Koordinaten, Gleichungen und/oder Zahlenwerte in der Algebraansicht ablesen – symbolische Facette.[164] Das heißt, dass GeoGebra ermöglicht, Wissen beziehungsweise Vorstellungen nicht nur durch das Zuschauen sowie Nachahmen, sondern auch durch selbstständiges Experimentieren zu erwerben beziehungsweise zu verfeinern, indem die Schüler/innen der Frage „Was würde sich verändern, wenn …?“ nachgehen. Um dies aber zu bewerkstelligen, muss neben der mathematischen Kompetenz auch eine Werkzeugkompetenz[165], mit der GeoGebra benutzt werden kann, aufgebaut werden, wobei im Mathematikunterricht hierbei dennoch der mathematische Aspekt und nicht der Aspekt der Bedienungsfragen im Vordergrund stehen muss. Obwohl GeoGebra sehr benutzerfreundlich und zum Teil selbsterklärend gestaltet ist, können Handouts mit Screen-shots, die die wesentlichen Schritte zeigen, für Schüler/innen gelegentlich sehr hilfreich sein, um so das Naheverhältnis vor allem der Schülerinnen[166] zum Computer zu fördern.[167] Allerdings zeigt eine Studie, dass Schüler und Schülerinnen gleich motiviert im Umgang mit GeoGebra sind und beide Gruppen ein ähnliches Naheverhältnis zum Computer aufweisen, sobald Technologie im Unterricht oft verwendet wird.[168]

Haben die Schüler/innen sich diese Werkzeugkompetenz aber einmal angeeignet, so kann auf Grund der Auslagerung der algorithmischen Tätigkeiten und

---

[164] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 24-25.
Da Schüler/innen den algebraischen und geometrischen Aspekt der Linearen Gleichungssysteme oft nur schwer miteinander verknüpfen können, hilft dieser computerunterstützte Weg diesem Sachverhalt entgegenzuwirken (vgl. Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht 242, 247.).

[165] Sobald Technologie eingesetzt wird, müssen die Werkzeugfertigkeiten ebenso geübt werden wie die Rechenfertigkeiten. Außerdem zeigen Studien, dass Freude und Interesse am Mathematikunterricht durch Technologieeinsatz gesteigert werden können, falls die Werkzeugkompetenz auch ausgebaut wird. Jedoch wird der Technologieeinsatz von den Burschen und Mädchen unterschiedlich akzeptiert (vgl. Helmut *Heugl*, Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter 95.).

[166] Schüler weisen ein stärkeres Naheverhältnis zu Computer auf als Mädchen (vgl. Helga *Jungwirth*, Genderkompetenz im Mathematikunterricht. Fachdidaktische Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer (Klagenfurt 2012), online unter <https://www.imst.ac.at/app/webroot/files/mathe_fertig-28.11.pdf> (18.8.2015) 52-53.)

[167] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 28, 30; Helga *Jungwirth*, Genderkompetenz im Mathematikunterricht 52-53.

[168] Erwin *Höferer*, Evaluierung des Einsatzes von GeoGebra 26.

der daraus resultierenden Zeitersparnis sich „[d]*er Schüler* […] *von seiner bisherigen Rolle als Rechner* [lösen] *und* […] *die Beförderung zum Anweiser und Planer von Rechnungen* [sowie als Interpret] *von Rechnungen* [erfahren]*.*“[169] Das heißt somit, dass der Unterricht auf der einen Seite algorithmisch einfacher und auf der anderen Seite intellektueller wird.[170] Die Kapitel 4.2.2. und 4.2.4. sollen erste diesbezügliche Anregungen liefern, wobei das Experimentieren mit Linearen Gleichungssystemen aus technologischer Sicht dahingehend vereinfacht werden kann, indem beispielsweise ein konkretes Gleichungssystem vorgegeben wird. Die Schüler/innen sollen zuerst mit Hilfe von GeoGebra dieses Lineare Gleichungssystem lösen. Im Anschluss daran versuchen sie eine der beiden Gleichungen so zu verändern, dass die Lösungsmenge dieses neuen Linearen Gleichungssystems die leere Menge ist. Im nächsten Schritt sollen zwei neue Gleichungen angegeben werden, deren Schnitt wiederum die leere Menge ist. Im letzten Schritt soll eine Vermutung aufgestellt werden, unter welchen Bedingungen beim Linearen Gleichungssystem die leere Menge als Lösungsmenge auftritt.[171]
Selbstverständlich können bei diesem Einstieg aber auch die Tipps und Tricks des algebraischen Wegs (Kapitel 4.1.3.), die eine Fülle an Ideen bezüglich des Experimentierens sowie des selbsttätigen Lernens liefern, herangezogen werden.

Jedenfalls vollzieht sich bei diesen selbsttätigen Lern- und Experimentierphasen der Schüler/innen aus Sicht des/der Lehrers/in ein Paradigmenwechsel, denn der/die Lehrer/in muss nämlich hierbei die Rolle des Lernberaters einnehmen, der anregt und unterstützt.[172] Hans-Georg Weigand kommt daher zum Schluss:

> *„Mit der Zunahme der Phasen des individuellen Arbeitens, der Partner- und Gruppenarbeit wird der Lehrer zum einen zum individuellen Berater für unterschiedlich schnell lernende Arbeitsgruppen und zum anderen*

[169] Thomas *Weth*, Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware, In: Horst *Hischer* (Hg.), Wieviel Termumformung braucht der Mensch? (Hildesheim 1993) 108.
[170] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 31.
[171] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 73-74.
[172] Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen 33.

> *zum Koordinator dafür, dass in der gesamten Klasse auch eine Basis für gemeinsame Gespräche vorhanden bleibt.“*[173]

Trotz dieser vielen Vorteile sollte dennoch nicht ganz der algebraische Aspekt außer Acht gelassen werden, denn dieser ist letztendlich für viele Studienrichtungen beispielsweise im Bereich der Naturwissenschaft, der Technik und der Wirtschaft sehr wichtig.[174] Weiters muss auch bedacht werden, dass die Technik für diesen Weg zumindest über mehrere Unterrichtseinheiten hinweg zur Verfügung stehen muss. Dass dies auch heute noch alles andere als einfach zu bewerkstelligen ist, liegt auf Grund der wenigen Laptopklassen und der zum Teil schlecht ausgestatteten EDV-Sälen auf der Hand.[175]

## *5.3. Der historische Weg fachdidaktisch beleuchtet*

Einige Autor/innen sowie viele Lehrer/innen sehen eine Einbeziehung von historischen Aspekten[176] vor allem als Auflockerung des Mathematikunterrichts und als Motivationsfaktor für Schüler/innen. Jedoch kann diese Berücksichtigung noch wesentlich mehr bezwecken.[177]

So kann nämlich eine Berücksichtigung der historischen Aspekte einerseits zu einem Bewusstmachen der Dynamik der Mathematik führen. Hans-Joachim Vollrath unterstreicht daher diese Notwendigkeit, auch wenn jener diese nicht explizit forciert.

---

[173] Hans-Georg *Weigand*, Computer im Mathematikunterricht (Heidelberg, Berlin 2002) 38.
[174] Günther *Malle*, Didaktische Probleme der elementaren Algebra (Braunschweig 1993) 11.
[175] Daniela *Garhöfer*, Der Wandel des Mathematikunterrichts in den letzten dreißig Jahren 29.
[176] Die Betonung liegt hier auf dem Wort „Aspekt“, denn der Mathematikunterricht kann stets nur punktuelle Episoden und niemals die lückenlose Entwicklung der Mathematik thematisieren (vgl. Hans Niels *Jahnke*, Karin *Richter*, Geschichte der Mathematik 6.).
[177] Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft, (1997), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1997%20Band%2027/Kronfellner1997.pdf> (24.9.2015) 84; Manfred *Kronfellner*, Geschichte der Mathematik im Unterricht. Möglichkeiten und Grenzen, In: Werner *Peschek* (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt (Hildesheim, Berlin 2002) 25.

> *„Mathematikunterricht behandelt Sachverhalte, die zum größten Teil seit langem bekannt sind. Die Schüler lernen ein Kulturgut kennen, von dem sie den Eindruck der Abgeschlossenheit erhalten.* […] *Die Entwicklungsfähigkeit der Mathematik erkennt praktisch kein Schüler."*[178]

Andererseits wird den Schüler/innen dadurch verdeutlicht, dass die Entwicklung der Mathematik oft mit den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen und Bedürfnissen zusammenhängt, die Mathematik einen wesentlichen Teil der Kultur darstellt und es somit berechtigt ist, warum Mathematik in der Schule unterrichtet wird. Weiters kann gezeigt werden, dass mathematische Errungenschaften oft mühsam erkämpft wurden und auch die Mathematiker/innen – und nicht nur viele Schüler/innen – immer wieder vor großen Hindernissen standen. Dieser Tatbestand kann wiederum helfen, dass einige Schüler/innen ihre psychischen Barrieren gegenüber der Mathematik abbauen, weil für viele die Mathematik durch diese Entmystifizierung „menschlicher" wird.[179]

Nichtsdestotrotz gibt es auch kritische Stimmen, die bezweifeln, dass die Einbeziehung des historischen Aspekts bei den Schüler/innen ein besseres mathematisches Verständnis bewirken kann. So meint Hans Freudenthal:

> *„Ich meine, es sei des Menschen würdig, die Vergangenheit seines Geschlechts, der Erde, der Welt differenziert zu begreifen,* […]. *Darin sehe ich den Nutzen der Geschichte der Mathematik und ihrer Nachbargebiete: nicht der Mathematik zu dienen, sondern der Geschichte, nicht den*

[178] Hans-Joachim *Vollrath*, Störungen des „didaktischen Gleichgewichts" im Mathematikunterricht, In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, H. 40/6 (1987) 374.

[179] Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen (Wien 1998) 40-44; Manfred *Kronfellner*, Geschichte der Mathematik im Unterricht 23.
Dies kann obendrein zu einem veränderten Geschichtsbewusstsein der Schüler/innen führen, denn neben den politischen, sozialen, wirtschaftlichen und/oder kulturellen Hintergrundinformationen, die die Schüler/innen bei dieser Beschäftigung erhalten, erkennen sie auch, dass die Mathematik einen ebenso hohen kulturellen Wert wie jene Unterrichtsfächer, deren historische Entwicklung stets im Unterricht nachgezeichnet wird, besitzt (vgl. Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht 41-42.). Der Mathematiker Graham Flegg meint daher: *„Mathematics is an integral part of our culture and to negelect the teaching of its history is to have students with an inadequate concept of what mathematics is. … The history of mathematics needs no more justification than do political history, history of sciences, art history etc."* (vgl. Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse 7.)

*Mathematiksinn, sondern den Geschichtssinn zu fördern. Aber vielleicht hilft es auch der Mathematik ein bisschen.“*[180]

Wendet man die Blicke wieder von der etwas allgemeinen Betrachtungsweise ab und kehrt man zu diesem historischen Weg zurück, so sollten nun zwei zentrale Facetten im Hinblick auf die Konzeption gleich auffallen. Auf der einen Seite wird versucht zu veranschaulichen, dass die Entwicklung der Mathematik nicht geradlinig voranschreitet, denn immerhin wurde das Lösen von Linearen Gleichungssystemen im alten China und von Carl Friedrich Gauß unabhängig voneinander und in einem Zeitabstand von fast 2000 Jahren in sehr ähnlicher Art und Weise „erfunden“.[181] Außerdem kann gezeigt werden, dass mit dem Notieren der Ziffern und dem Operieren in den beiden Kulturen[182] sehr unterschiedlich umgegangen wurde und die beiden Schreibweisen Vor- und Nachteile[183] besitzen.[184] Auf der anderen Seite basiert dieser historische Weg auf historischen mathematischen Problemstellungen und adaptierten Rechenaufgaben[185] aus dem alten China, mit deren Hilfe die Mathematik des alten Chinas teilweise erschlossen werden kann. Der Auslöser für diese Vorgehensweise ist, dass theoretische Überlegungen sehr anschaulich durch aus Schüler/innen-Sicht interessante Problemstellungen beziehungsweise passende Beispiele, die authentisch und nicht konstruiert wirken, dargelegt werden können.[186] Jedoch sollte dies stets, auch wenn das Übungsmaterial kaum vorhanden ist, beispielsweise durch selbstständiges Arbeiten der Schüler/innen zumindest anhand von adaptierten, aber authentisch wirkenden Beispielen vertieft werden,

[180] Hans *Freudenthal*, Soll der Mathematiklehrer etwas von der Geschichte der Mathematik wissen?, In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 2 (1978) 77.
[181] Norbert *Herrmann*, Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker 9.
[182] In diesem Fall lässt sich am einfachsten die Notation im alten China mit der heutigen Schreibweise vergleichen. Es könnte jedoch beispielsweise zusätzlich noch ein Vergleich mit den ägyptischen Zahlen vorgenommen werden (vgl. Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse 90-91.).
[183] Hier sollte bei der Schreibweise im alten China mit Nachdruck auf die Problematik der Eindeutigkeit und auf deren Lösung mittels tabellarischer Darstellungsweise hingewiesen werden. Weiters kann betont werden, dass diese tabellarische Form auch im Lösungsverfahren „Fāngchéng“ angewandt wurde (vgl. Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 10.).
[184] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 10.
[185] Die Gründe, warum diese historischen Rechenaufgaben adaptiert werden mussten, wurden im Kapitel 4.3.2. genau erläutert.
[186] Florian *Mayer*, Spezifische Methoden für historische Aspekte im Mathematikunterricht. Mögliche Ziele und Beispiele (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/14367/1/2011-05-03_0009630.pdf> (26.9.2015) 49.

um einerseits einen tieferen Einblick und somit mehr Verständnis zu erhalten[187] und andererseits die traditionellen und teilweise starren Übungs- und Aufgabenmethoden etwas aufzuweichen.[188]

Als Einstieg wurde daher bei diesem historischen Weg ein kurzer und interessanter Impulsvortrag der Lehrkraft über die chinesischen Zahlzeichen gewählt, bei dem die beiden Darstellungsarten[189] der Zahlzeichen beispielsweise mittels PowerPoint-Präsentation anschaulich erläutert werden (vgl. Kapitel 4.3.2.). Anschließend sollen sich die Schüler/innen mit Hilfe dieser Informationen und vorgegebener Leitfragen in diese Zahlzeichen durch eine Partner- beziehungsweise Kleingruppenarbeit weiter vertiefen.[190] Da unterschiedliche Vorschläge zumindest bei den Aufgaben 3 bis 4 (vgl. Kapitel 4.3.2.) erwartet werden können, sollen diese auch hinterher in einer Plenumsdiskussion besprochen werden. Letztendlich sollten sich alle Beteiligten auf Grund des weiteren Unterrichtsverlaufs auf die Darstellungsweise mit der Stellenwerttafel einigen.

Im nächsten Schritt sollen die Schüler/innen durch forschend-entdeckendes Lernen in die Lösungsmethode „Fāngchéng“ eingeführt werden. Die Lehrkraft präsentiert daher den Schüler/innen das Beispiel 4.3.3.1. und erteilt ihnen den dazugehörigen Arbeitsauftrag (vgl. Kapitel 4.3.3.).[191] Da auch hier wieder unterschiedliche Vorschläge von den Schüler/innen erwartet werden können, sollen auch diese im Anschluss präsentiert und diskutiert werden. Nachher führt die Lehrkraft durch einen kurzen Vortrag den Schüler/innen die Lösungsmethode „Fāngchéng“ anhand des Beispiels 4.3.3.2. (vgl. Kapitel 4.3.3.) vor und ergänzt

[187] Den andersartige Zugang – im Vergleich zu heute – und die historische Sichtweise können die Schüler/innen mit ihrer eigenen Betrachtungsweise in Beziehung setzen und so ihr Verständnis vertiefen (vgl. Hans Niels *Jahnke*, Karin *Richter*, Geschichte der Mathematik 4.).

[188] Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse 49-50.

[189] Der Schwerpunkt liegt hierbei jedoch auf den Rechenstäbchenzahlen. Zu beachten ist weiters, dass die Antworten auf jene Fragen, die die Schüler/innen selbst zu bearbeiten haben, nicht vorweggenommen werden sollten.

[190] Um dem eine spielerische Komponente zu verleihen, können hier für die Rechenstäbchenzahlen beispielsweise Streichhölzer verwendet werden (vgl. Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 11.).

[191] Auch hier könnten die Schüler/innen eventuell die Streichhölzer für ihre Überlegungen benutzen. Die Vorteile wären, dass die Aufgabe dadurch eine spielerische Komponente erhalten und somit anschaulicher werden würde. Aus Gründen der Einfachheit sollten jedoch die Streichhölzer ausschließlich als Zählobjekte verwendet werden. Das heißt zum Beispiel, dass die Zahl 9 durch 9 nebeneinander positionierte Streichhölzer dargestellt werden sollte (vgl. Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 11.).

diese Informationen mit historischen Fakten, damit die Schüler/innen diese Errungenschaft jener frühen Hochkultur historisch besser einordnen können. Außerdem weist sie auf den Umgang mit den negativen Zahlen im alten China hin. Danach sollen die Schüler/innen sich wiederum durch eine Partner- beziehungsweise Kleingruppenarbeit in diese Materie vertiefen, indem sie ihre Lösungsversuche mit der Lösungsmethode „Fāngchéng“[192] vergleichen und Beispiele gemeinsam lösen. Hierbei können auch Strategien überlegt werden, wie beispielsweise mehrfache Subtraktionen vermieden werden können.[193]
Da im Anschluss daran zu den (heutigen) Lösungsverfahren der Linearen Gleichungssysteme übergeleitet werden muss, sollte bereits im fortschreitenden Verlauf des historischen Wegs immer stärker die abstraktere Facette betont und das Hantieren mit den Strichtabellen beziehungsweise Streichhölzern vernachlässigt werden. Nachdem auch diese Lösungsverfahren eingeführt worden sind, können jene mit der Lösungsmethode „Fāngchéng“ verglichen und die Vor- und Nachteile dieser Verfahren anhand von Beispielen, die in unterschiedlichen Verfahren gelöst werden sollen, diskutiert werden.[194]

Aus Sicht der Unterrichtsform dominiert beim historischen Weg daher das „Forschend-entdeckende Lernen“[195]. Die Ziele dabei sind, nachdem die Lehrkraft in das Thema kurz eingeführt hat, dass die Schüler/innen durch Leitfragen in Partner- oder Kleingruppenarbeit selbstständig nach Lösungen der Probleme suchen und sich währenddessen selbstständig mit Begriffen – in diesem Fall mit den chinesischen Zahlzeichen – auseinandersetzen und Verfahren – in diesem Fall die Lösungsmethode „Fāngchéng“ – „entwickeln“. Weil am Ende jeder Erarbeitungsphase zum Teil sehr unterschiedliche Ergebnisse erwartet werden

[192] Obwohl die Schüler/innen bereits lineare Gleichungen mit zwei Variablen kennen und sie somit „Werkzeug“ besitzen, welches den Chinesen damals unbekannt war, kann ihnen der Schritt „zurück“ – das Problem nun tabellarisch zu erfassen – in ihrem Denken helfen, denn der Lösungsprozess wird dadurch anschaulicher als bei heutigen Lösungsverfahren (vgl. Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 10-11.).
[193] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 11.
[194] Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China 11.
[195] Die Grundlage des forschend-entdeckenden Lernens stellt das genetische Prinzip dar. Wesentliches Merkmal dieses Prinzips ist, dass die mathematischen Begriffe und Verfahren den Schüler/innen nicht als fertiges Endprodukt präsentiert werden, sondern von den Schüler/innen durch geschickte Problemstellungen selbstständig erarbeitet werden. Da bei diesem Weg am Ende sich ein neues inhaltliches Ergebnis ergeben sollte, wird hier von problemgenetischen Erkundungen gesprochen (vgl. Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 42, 48.).

können, ist es entscheidend, dass ein Austausch darüber in Form eines Unterrichtsgesprächs[196] erfolgen muss, wobei hier die Lehrperson die Rolle eines/r Moderators/in übernehmen muss, damit die inhaltlichen Ziele erreicht und wenn möglich auch festgehalten werden können.[197]

Die Vorteile dieser Vorgehensweise sind, dass die Schüler/innen mit Hilfe ihres Vorverständnisses sowie ihrer Kreativität das Wissen selbst aktiv konstruieren müssen und so eine größere Sinnhaftigkeit[198] erleben können, welche wiederum wesentlich für die Motivation ist. Außerdem kann dadurch etwas vorgebeugt werden, dass die Schüler/innen die Mathematik als fertiges Endprodukt sehen, da sie selbst quasi am „Forschungsprozess" teilnehmen.

Ein Nachteil ist, dass die Gefahr besteht, dass Schüler/innen nicht zum gewünschten Ziel gelangen können und dadurch etwas demotiviert werden. Entschärft kann dies aber erfahrungsgemäß einerseits durch eine stärkere Unterstützung der Schüler/innen seitens der Lehrkraft und andererseits durch eine kleingliedrigere Gliederung des Forschungswegs werden. Weiters muss das Verhältnis zwischen dem zeitlichen Aufwand und dem Ertrag stets überprüft werden, da die zeitlichen Ressourcen immer begrenzt sind.[199]

Im Hinblick auf die Sozialformen wechseln sich hier Plenum, Partner- beziehungsweise Kleingruppenarbeiten und Plenumsdiskussionen mehrmals ab.[200] Weil das Plenum wie auch die Partnerarbeit bereits im Kapitel 5.1. aus fachdidaktischer Sicht beleuchtet wurden, werden hier, um Analogien zu vermeiden, nur die Kleingruppenarbeiten und Plenumsdiskussionen bezüglich der Sozialform fachdidaktisch betrachtet. (Hinsichtlich des Plenums und der Partnerarbeit wird daher auf das Kapitel 5.1. verwiesen.)

Ein bedeutender Unterschied zur Partnerarbeit – abgesehen von der Anzahl der Personen – ist, dass Gruppenarbeiten[201] gut vorbereitet und auch „trainiert"

---

[196] Die Wahl der Form ist einerseits von den methodischen Überlegungen und andererseits von den zeitlichen Ressourcen abhängig. Falls mehr Zeit vorhanden wäre, könnte dieses Diskussionsgespräch noch durch eine Präsentation oder Ausstellung der einzelnen Ergebnisse auf Plakaten erweitert werden.

[197] Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 40-41.

[198] Die Wichtigkeit wurde bereits in der Fußnote 119 erörtert.

[199] Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten 45.

[200] Die Vorteile vom Wechsel der Sozialformen während des Unterrichtens wurden bereits im Kapitel 5.1. besprochen.

[201] Dass Gruppenarbeiten in Mathematik bei Schüler/innen sehr beliebt sind und von den Schüler/innen gerne massiv eingefordert werden, zeigt eine Studie von Sylvia Jahnke-Klein. Schüler/innen schätzen nämlich die Unabhängigkeit von der Lehrkraft sowie die aus ihrer Sicht angenehmere Unterrichtsatmosphäre. Weiters erhöhen Gruppenarbeiten die Motivation, da aus

werden müssen, da ein gemeinsames Lernen und Arbeiten innerhalb einer Gruppe viel stärker an bestimmte Regeln gebunden ist. So müssen neben einer klaren Arbeitsanweisung beispielsweise die sozialen Rollen, wie Gruppensprecher, aber auch die Positionen, wer welche Aufgabe zu erledigen hat, viel klarer festgelegt sein. Weiters müssen die Schüler/innen Bereitschaft zeigen, sich gegenseitig zu unterstützen, und auch akzeptieren, dass sie voneinander in gewisser Weise abhängig sind und jede/r eine Verantwortung trägt. Aber auch die sozialen Fertigkeiten der Schüler/innen spielen darin eine entscheidende Rolle. Die Vorteile dabei sind jedoch, dass die unterschiedlichen Fähigkeiten und Begabungen der Gruppenmitglieder zum Tragen kommen, das gemeinsame Lernen und Entdecken von den Schüler/innen zum Teil selbst gestaltet werden kann und die Schüler/innen manchmal selbst in die Rolle von Lehrenden schlüpfen können. Somit werden bei diesen Kleingruppenarbeiten die fachlich-kognitiven, sozialen, diskursiv-kommunikativen und interaktionalen Kompetenzen der Schüler/innen gefördert. Die Lehrkraft hingegen muss dabei in die Rolle des Lernberaters schlüpfen, um die Schüler/innen beispielsweise bei fachlichen Unklarheiten oder bei gruppendynamischen Prozessen zu unterstützen.[202]

Die Plenumsdiskussionen sollen nicht nur ziel- und erkenntnisorientiert ausgerichtet sein, sondern auch eine Plattform darstellen, um Ideen und Meinungen aller Schüler/innen kennenzulernen. Somit erfüllen diese Diskussionsrunden sowohl eine bildende wie auch kommunikative Funktion. Damit aber diese vor allem in größeren Klassen zu einem produktiven Ergebnis gelangen, müssen sie erlernt und geübt werden und thematisch sowie zeitlich klar begrenzt sein, damit diese nicht zu einem Geschwätz ausarten.[203] Geleitet werden diese Diskussionen von der Lehrperson, die die Rolle des/der Moderators/in übernehmen muss und somit unter anderem für die Gesprächsführung und die Einhaltung der Gesprächsregeln verantwortlich ist.[204]

---

Sicht der Schüler/innen diese effektiver sind als das Plenum (vgl. Sylvia *Jahnke-Klein*, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen 202.).

[202] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 82-85; Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen 57-58.

[203] Dies betrifft beispielsweise die Diskussionskultur, das aktive Zuhören, die Qualität der Wortmeldungen, das Bezugnehmen wie auch die Vorbereitung der Argumente. Das Letztgenannte bereitet den Schüler/innen oft die größten Schwierigkeiten. Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, indem nach jeder Vorstellung der Gruppenergebnisse zuerst in den Kleingruppen Argumente, die eventuell auch verschriftlicht werden können, gesammelt werden, bevor diese dargeboten werden (Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 136; Heinz Jörg *Claus*, Einführung in die Didaktik der Mathematik (Darmstadt ²1995) 126-127.).

[204] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 136-137.

## 5.4. Der anschaulich-spielerische Weg fachdidaktisch beleuchtet

Obwohl in Studien immer wieder nachgewiesen wurde, wie bedeutsam Spiele für die Bildung sein können, sind sie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe dennoch sehr selten zu finden.[205] Mögliche Gründe dafür sind, dass das Spiel oft nur als amüsante Unterhaltung zur Entspannung und als Ausgleich gesehen wird und somit im Gegensatz zum Lernen, welches klischeehaft oft *„mit den Merkmalen der Mühe, der Arbeit, der Strenge, der Ordnung, des Fleißes* […] [und] *der durchorganisierten Geregeltheit“*[206] beschrieben wird, steht.[207] Sabine Döring vertritt wie einige andere aber die Ansicht, dass *„das Spiel Züge von Arbeit, Anstrengung und geradezu tödlichem Ernst annehmen“*[208] kann. Daher kann ein Spiel, wenn es mit dem nötigen Ernst ausgeführt wird, durchaus auch als Arbeit und als gleichwertig und als Ergänzung gesehen werden, bei dem – wie auch bei der Arbeit – Gefühle, Handlungen sowie soziales Lernen eine wichtige Rolle spielen.[209] Wolfgang Edelstein geht sogar noch einen großen Schritt weiter, indem er auf die Diskrepanz zwischen dem institutionellen Lernen und der menschlichen Lernnatur hinweist, denn „[d]*as Kind sucht und exploriert, es prüft und probiert, es ordnet seine Wahrnehmungen und Handlungen – es lernt – in der komplexen Wechselwirkung von Neugierimpulsen, Umweltreizen und Vorerfahrungen, die von ständig wechselnden Situationen, Reizkonfigurationen und Interaktionen stets neu aktiviert werden. Lernen ist unmittelbar, aktiv und entdeckend.“*[210] Beim institutionellen Lernen sollen die Kinder hingegen „[…] *ihre natürliche, in tausend Fragen belegte Erkenntnislust einem organisierten Angebot unterwerfen, nach dem sie selbst gerade nicht gefragt haben; sie sollen lernen, ihre Aktivität einem Standard zu unterwerfen, der ihnen Erfolg*

[205] Ulrich *Heimlich*, Einführung in die Spielpädagogik. Eine Orientierungshilfe für sozial-, schul- und heilpädagogische Arbeitsfelder (Bad Heilbrunn ²2001) 131; Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 167.
[206] Sabine *Döring*, Lernen durch Spielen. Spielpädagogische Perspektiven institutionellen Lernens (Weinheim 1997) 10.
[207] Sabine *Döring*, Lernen durch Spielen 10.
[208] Sabine *Döring*, Lernen durch Spielen 52.
[209] Svitlana *Aristova*, Zum didaktischen Einsatz von Spielen im Fremdsprachenunterricht (ungedr. geisteswiss. Dipl.arbeit Wien 2015), online unter <http://othes.univie.ac.at/36722/1/2015-03-10_0208903.pdf> (30.9.2015) 16-17; Sabine *Döring*, Lernen durch Spielen 25-26..
[210] Wolfgang *Edelstein*, Produktives Lernen und befreites Spielen, In: Benita *Daublebsky* (Hg.), Spielen in der Schule. Vorschläge und Begründungen für ein Spielcurriculum (Stuttgart 1998) 180.

*und Versagen bestätigt, bis sie schließlich selbst sich nach diesem Maßstab als befähigt oder unfähig, fleißig oder faul, dumm oder begabt wahrnehmen.“*[211] Somit kann die Schule aus Sicht von Wolfgang Edelstein bewirken, dass das „[…] *impulsive*[…], *neugiergeleitete*[…] *und erfahrungsbestimmte*[…] *aktive*[…] *Entdeckungslernen, welches das Kind aus der Vorschulzeit in die Schulzeit mitbringt“*[212] gebremst wird.

Damit das Letztgenannte aber nicht eintritt, sollten spielerische Elemente in das schulische Lernen immer wieder eingebaut werden, wobei diese zusätzlich noch folgende positive Eigenschaften[213] im Hinblick auf das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ mitbringen können:

- *„Spielen* […] [ist stets ein] *lustbetontes, freudvolles Lernen im Schonraum Kindheit“*[214] und fördert die intrinsische Motivation.
- Ein spielerischer Zugang schafft eine entspannte, angenehme, sich wohlfühlende Lernatmosphäre, bei der *„*[d]*er Lernstoff* […] *durch die Hintertür eingeschleust“*[215] wird. Somit werden Versagensängste aber auch Lernhemmungen bei den Schüler/innen abgebaut beziehungsweise gänzlich vermieden.
- Schüler/innen müssen sich bei einem spielerischen Zugang aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen und können diesen auch gestalten. Daher kann hier von einem schülerzentrierten Unterricht gesprochen werden. Die Lehrkraft schlüpft hingegen in die Rolle des Coaches, die unter anderem die Spielregeln erläutert, den Spielverlauf beobachtet und diesen gelegentlich beratend mitgestaltet.
- Durch die Wiederholungsmöglichkeiten des Spiels können die Schüler/innen sich aktiv mit dem Thema in abwechslungsreicher und motivie-

---

[211] Wolfgang *Edelstein*, Produktives Lernen und befreites Spielen 181.
[212] Wolfgang *Edelstein*, Produktives Lernen und befreites Spielen 181.
[213] Diese positiven Eigenschaften können auch dazu benutzt werden, um Kritiker/innen zuvorzukommen. Diese vertreten unter anderem oft die Meinungen, dass durch das Spielen viel wertvolle Unterrichtszeit verloren geht, in der Schule dadurch nur oberflächliches Wissen vermittelt wird, die Schüler/innen ein konzentriertes und hartes Arbeiten verlernen und das Spiel zweckentfremdet wird. Außerdem führen persönliche Gründe der Lehrer/innen wie Ängste, schlechte Erfahrungen, Vorbehalt (z.B. Verlust der Autorität der Lehrkraft, disziplinäre Schwierigkeiten, Unverständnis der Eltern), institutionelle Hindernisse wie 50-Minuten-Schuleinheiten, räumliche Einschränkungen und Schwierigkeiten Fehler zu verbessern zu dieser ablehnenden Haltung (vgl. Svitlana *Aristova*, Zum didaktischen Einsatz von Spielen im Fremdsprachenunterricht 52-53.).
[214] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 167.
[215] Claudia *Grötzebach*, Spielend Wissen festigen: effektiv und nachhaltig. 66 Lern- und Wissensspiele für Training und Unterricht (Weinheim, Basel 2010) 29.

render Art und Weise auseinandersetzen und verschiedene Varianten durchspielen.

- Schüler/innen sind, wie Studien zeigen, im entspannten Zustand aufnahmefähiger und experimentierfreudiger und *„[j]e mehr sie experimentieren, desto stärker verarbeiten sie das Gelernte, loten Möglichkeiten aus und entwickeln viele Wege, das Gelernte zu nutzen."*[216] Somit wird dadurch ebenso die Kreativität gefördert.
- *„Die Qualität des Lernerfolgs bessert sich, da Spiel Aktivität, intrinsische* […] *Motivation, Bestätigung von Kompetenz, Freude am Lernen, Lernen in druck- und folgeentlasteter Situation ermöglicht."*[217]
- Die Schüler/innen können ihre kommunikativen und sozialen Kompetenzen ausbauen, da sie gemeinsam in der Gruppe Lösungsstrategien entwickeln müssen.
- Beim spielerischen Zugang werden unterschiedliche Sinneskanäle der Schüler/innen stimuliert und somit beide Gehirnhälften aktiviert. Dies hat wiederum zur Folge, dass das angeeignete Wissen besser abgespeichert und länger behalten werden kann.
- Ein spielerischer Zugang spricht die drei Repräsentationsebenen „enaktiv – ikonisch – symbolisch" an. Dadurch können die Schüler/innen das neu erworbene Wissen vorteilhafter darstellen beziehungsweise erschließen (vgl. Kapitel 5.2.).[218]

Jetzt stellt sich jedoch die Frage, wie solche Spiele (vgl. Kapitel 4.4.1. bis 4.4.3.) in der Unterrichtssituation gestaltet werden sollten.

- Phase 1: Die Lehrkraft stellt das Spiel und dessen Regeln den Schüler/innen vor, indem sie zusammen mit ihnen ein „Musterbeispiel" spielt. Außerdem achtet die Lehrperson auch darauf, dass möglichst alle Schüler/innen die Spielregeln einigermaßen gut verstanden haben. (Achtung: Hier ist etwas Fingerspitzengefühl seitens der Lehrperson gefragt, da eine zu gründliche Regelerklärung die eigentliche Spielidee in den Schat-

[216] Claudia *Grötzebach*, Spielend Wissen festigen 28.
[217] Jürgen *Steinhilber*, Zur Didaktik des Unterrichtsspiels im Fremdsprachenunterricht (Berlin 1979) 24-25.
[218] Svitlana *Aristova*, Zum didaktischen Einsatz von Spielen im Fremdsprachenunterricht 54-58.

ten stellen kann. Weiters muss bedacht werden, dass jedoch nur einige Schüler/innen die Regeln zumeist in ihrer Gesamtheit erfassen werden und beim Spielen anwenden können. Der Großteil saugt allerdings nur die relevantesten Regeln auf und startet unverzüglich mit dem Spiel, da alles andere während des Spielens im Augenblick erprobt und/oder von den Mitspieler/innen nachgeahmt wird. Aber auch die Option, dass spielerfahrene Schüler/innen, die die Regeln schnell erfassen können, den spielunerfahrenen die Spielregeln im Nachhinein nochmals erklären könnten, könnte angedacht werden.)

Variante: Die Lehrkraft könnte sich überlegen, ob sie alle Spielregeln erklären soll oder nicht. So könnten beispielsweise die Schüler/innen ohne Hilfe der Lehrperson während des Spielverlaufs das „Problem" mit dem „negativen Vorzeichen" (vgl. Kapitel 4.4.2.) selbstständig entdecken und versuchen, dieses nur mit ihnen zur Verfügung stehenden Materialien – d.h. Streichhölzer und Streichholzschachteln – zu lösen.

- Phase 2: Die Schüler/innen sollen jetzt das Spiel in Kleingruppen spielen und verschiedene Varianten dabei ausprobieren. Die Lehrkraft nimmt hierbei nur die Rolle des/der Beobachters/in beziehungsweise des/der Unterstützers/in in ausweglosen Situationen ein.
- Phase 3: Der/die Lehrer/in hebt das Spiel nun auf eine etwas abstraktere Ebene, indem er/sie demonstriert, dass dieses auch mathematisch aufgeschrieben werden könnte. Anhand eines Beispiels zeigt die Lehrkraft vor, wie es auch mit Hilfe von Variablen notiert werden könnte.
- Phase 4: Die Schüler/innen spielen erneut (mehrmals) das Spiel, wobei sie nun das Spiel auch in algebraischer Schreibweise notieren.
- Phase 5 – optional: Die Schüler/innen überlegen sich, wie die Lösungsmenge aussehen würde, wenn als Grundmenge nicht die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, sondern die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gegeben wären.[219]

Wie aus der Gestaltung der fünf Phasen hoffentlich ersichtlich werden konnte, verfolgt das Spiel aber nicht nur die vorhin beschriebenen Ziele – die „äußeren" Ziele –, sondern auch inhaltliche Ziele – die „inneren" Ziele. So werden nämlich

[219] Bärbel *Barzel*, Andreas *Büchter*, Timo *Leuders*, Mathematik Methodik 67-68.

durch dieses Spiel auch mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bezüglich linearer Gleichungen und Linearer Gleichungssysteme erworben, sowie die mathematischen Tätigkeiten in spielerischer Weise reflektiert, da das spielerische Element mit dem algebraischen verknüpft wird.[220]

Weil nicht vorausgesetzt werden kann, dass Schüler/innen das Lösen der Gleichungen mit Hilfe von Streichholzschachteln und Streichhölzern gelernt haben, ist der anschaulich-spielerische Weg so aufgebaut, dass zuerst das Lösen von Gleichungen mit einer, dann mit zwei Variablen und letztendlich von Linearen Gleichungssystemen mit Hilfe von Streichhölzern und Streichholzschachteln behandelt wird. Weitere Gründe für diese Vorgehensweise sind unter anderem, dass einerseits dadurch das Lösen von Gleichungen wiederholt wird und andererseits die Schüler/innen durch das Enaktive einen anderen Blickwinkel[221] auf das Lösen von Gleichungen erhalten. Weitere Argumente können dem Kapitel 5.1. entnommen werden.

Hinsichtlich der Sozialformen wechseln Plenum und Gruppenarbeit ab. Diesbezügliche Vor- wie auch Nachteile können dem Kapitel 5.1. und 5.3. entnommen werden.

## *5.5. Der eigenverantwortliche Weg fachdidaktisch beleuchtet*

Wie schon im Kapitel 2 hoffentlich ersichtlich worden ist, sollte heutzutage der Unterricht offen und schülerorientiert gestaltet werden. Da der „offene Unterricht" jedoch keine konkrete Lehr- und Lernform, sondern ein Prinzip darstellt, welches das Ziel verfolgt, sich den Schüler/innen und ihren Bedürfnissen sowie deren Lebenswelt vermehrt zu widmen, gibt es eine Fülle an Möglichkeiten, wie

---

[220] Barbara *Kaps*, Spiele und Mathematik. Anwendung und Bedeutung für den Mathematikunterricht (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 1989) 45.

[221] Zumeist dominiert der algebraische Blickwinkel.

dies in der Unterrichtssituation umgesetzt werden kann.[222] Aus diesem Grund ist es daher auch schwierig, eine allgemeine und klare Definition für den offenen Unterricht zu finden. Petra Gössinger definiert in ihrer Diplomarbeit diesen Begriff wie folgt:[223]

> *„Offener Unterricht soll primär die Entfaltung der Persönlichkeit des Kindes durch dessen eigenständige, selbstverantwortete, bewußte und gezielte Auseinandersetzung mit der vom Lehrer gestalteten Lernumwelt unterstützen und das Kind zu autonomem, seinem Entwicklungsstand entsprechenden Denken und Handeln sowie zu Sozialfähigkeit anleiten.“*[224]

Dass dieser offene Unterricht bis jetzt im Schulunterricht der Regelschulen – im Speziellen im Mathematikunterricht – jedoch nur ansatzweise umgesetzt wurde,[225] liegt wahrscheinlich daran, dass eine solche Unterrichtsplanung wesentlich anspruchsvoller und aufwendiger ist als andere.[226]

Realisiert wird bei diesem Weg der offene Unterricht durch eine Lernspirale, wobei unter einer Lernspirale das Durchlaufen von Stationen verstanden wird, deren Reihenfolge auf Grund der aufbauenden Thematik festgelegt ist.[227] Die Aufgabe der Schüler/innen besteht nun darin, jede dieser Stationen großteils in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit zu bewältigen. Teilweise sind in einigen Stationen aber auch kurze Plenumsphasen eingebaut, um Präsentations- beziehungsweise Diskussionstechniken vor/in größeren Gruppen einzuüben.[228]

Jetzt drängt sich jedoch wegen des erhöhten Aufwands die Frage auf, welche Vorteile dieser Weg hat.

---

[222] Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen 59.
[223] Diese Definition wird hier deshalb angeführt, da sie die Grundlage des eigenverantwortlichen Weges darstellt.
[224] Petra *Gössinger*, Verbesserungsmöglichkeiten der sozialen Situation im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Die Berücksichtigung methodischer Handlungssituationen und deren Einsatzmöglichkeiten in offenen Unterrichtsphasen (ungedr. geisteswiss. Dipl.arbeit Wien 1993) 153.
[225] In den reformpädagogischen Alternativschulen sieht dies allerdings anders aus (vgl. Waldorfschulen, Montessorischulen).
[226] Kirsten *Heckmann*, Friedhelm *Padberg*, Unterrichtsentwürfe Mathematik 117.
[227] Da die Schüler/innen sich die Themen teilweise erst selbstständig mit Hilfe von präzisen Vorgaben erarbeiten müssen, müssen unter anderem die bei Stationenbetrieben üblichen Freiheiten wie beispielsweise die Wahlfreiheit der Stationen und des Arbeitstempos und zum Teil die Binnendifferenzierung eingeschränkt werden (vgl. Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 187.).
[228] Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts 122-123, 221.

Aus der Lernpsychologie ist bekannt, *„dass wir etwa*

- *10% dessen behalten, was wir lesen,*
- *20% dessen, was wir hören,*
- *30% dessen, was wir hören und sehen,*
- *70% dessen, was wir selbst sprechen und*
- *90% dessen, was wir selbst ausprobieren und ausführen.“*[229]

Die Schüler/innen müssen außerdem selbst für ihr eigenes Lernen Verantwortung bezüglich der Ziele, die sie selbst festsetzen, der Lernzeit, die sie innerhalb eines Rahmens frei wählen können, und der Selbstkontrolle übernehmen. Dies hat wiederum zur Folge, dass sie neben der Förderung zur Selbstständigkeit unter anderem ein tieferes Verständnis von der Materie erlangen, weil sie sich diese selbstständig erarbeiten müssen, und ihre Kommunikations- wie auch Kooperationskompetenz auf Grund der verschiedenen Sozialformen steigern können. Außerdem weisen sie eine erhöhte Motivation auf, können ihre Lese- und Problemlösekompetenzen ausbauen und ihre eigenen Lerndefizite erkennen und abbauen.[230]

Jedoch birgt diese Unterrichtsform auch einige Nachteile in sich. So stellen sich bereits die Planung der einzelnen Stationen als sehr arbeitsintensiv, deren Umsetzung als zeitintensiv, die fixen Schulstrukturen wie etwa die 50 Minuten Einheiten als hinderlich und die Leistungsbeurteilung als Herausforderung heraus.[231] Aber auch das Verhalten einiger Schüler/innen kann zu Schwierigkeiten führen, denn diese können den Umstieg vom frontalen und stark lehrerzentrierten Mathematikunterricht zu einem offenen als Chance sehen, ihre Freiheiten auszunutzen, was wiederum zum Nichtstun der Schüler/innen und/oder zu erhöhten Störungen[232] führen kann. Ebenso können die Selbsteinschätzung der Schüler/innen, die bei den Arbeitsprozessen sichtbar wird[233], sowie die Selbst-

---

[229] Falko von *Ameln*, Ruth *Gerstmann*, Josef *Kramer*, Psychodrama (Berlin, Heidelberg ²2009) 432.

[230] Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 23, 40; Eva *Sattlberger*, College Preparatory Mathematics versus Offenes Lernen. Ein Vergleich zweier Mathematikprogramme hinsichtlich ihrer Eignung zur Vermittlung von Schlüsselqualifikationen basierend auf einer in Kalifornien durchgeführten Fragebogenuntersuchung (ungedr. naturwiss. Diss. Wien 2001) 79.

[231] Karoline *Thaler*, Offenes Lernen im Mathematikunterricht anhand des Themas Variablen in der Unterstufe (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2008) 47-48.

[232] Zu bedenken ist hierbei noch, dass die Ursachen für dieses Verhalten der Schüler/innen auch bei einer Überforderung liegen können (vgl. Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 41.).

[233] So wählen manche Schüler/innen stets den einfachsten Weg, andere wiederum den schwierigsten. Die Ursachen dafür können jedoch sehr vielfältig sein, denn diese reichen von Bequem-

kontrolle[234] Herausforderungen für die Lehrkraft darstellen. Trotzdem sollte sich die Lehrperson vom Letztgenannten nicht allzu sehr entmutigen lassen, da im offenen Unterricht gerade das Übernehmen der Verantwortung über das eigene Lernen, was wiederum eng mit der Selbstdisziplin zusammenhängt, eines der wichtigsten Ziele ist. Daher muss den Schüler/innen die Möglichkeit und auch die Zeit gegeben werden, sich in solche Unterrichtsprinzipien einarbeiten zu können.[235]

Aus Sicht der Lehrkraft ändert sich auch bei diesem Vorgehen einiges, denn so sollte diese den offenen Unterricht nach den Fähigkeiten sowie Interessen der Schüler/innen ausrichten, individuelle Lerndefizite der Schüler/innen erkennen und diesen gegensteuern, die Schüler/innen anleiten und unterstützen, Tipps und Tricks bezüglich Arbeits- und Lerntechniken geben sowie in den Diskussionen die Rolle des/der Moderators/in übernehmen.[236]

Welche Konsequenzen haben nun all diese Erkenntnisse in Bezug auf den Aufbau der einzelnen Stationen? Die einzelnen Stationen wurden einerseits so gebaut, dass die Schüler/innen lernen, Verantwortung für sich selbst wie auch für ihre Gruppe zu übernehmen, ihre Selbstständigkeit zu steigern, sich mit mathematischen Texten auseinanderzusetzen sowie diese zu verstehen und ihre Kommunikations- wie auch Kooperationskompetenz auszubauen. Allerdings wurde auf der anderen Seite versucht, die erwähnten Nachteile so gut wie möglich gering zu halten. Daher wird den Schüler/innen ausreichend Möglichkeit geboten, sich in dieses Arbeits- und Lernprinzip einzuarbeiten, indem zuerst Themen, die hinsichtlich der Linearen Gleichungssysteme relevant sind und die bereits im Unterricht besprochen werden sein sollten, wiederholt werden (vgl. Kapitel 4.5.1. bis 4.5.3.). Außerdem wurde ganz bewusst die Anzahl der verwendeten Methoden sehr beschränkt, um den Schüler/innen die Chance zu

---

lichkeit über Lustlosigkeit und Frustration bis hin zur Überschätzung (vgl. Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 60.).

[234] Manche Schüler/innen neigen dazu auf die Lösung zu blicken, bevor sie sich mit der Aufgabe auseinandergesetzt haben. Die Gründe reichen auch hier von Desinteresse, über Frustration und Lustlosigkeit bis hin zur fehlenden Verantwortung (vgl. Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 60-61.).

[235] Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 40-41.

[236] Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen 22-23.

geben, mit diesen vertraut zu werden[237]. Um der möglichen Bequemlichkeit beziehungsweise Frustration der Schüler/innen entgegenzusteuern, wurden jene Methoden ausgewählt, bei denen Gruppenarbeiten[238] im Zentrum stehen, wobei diese wiederum so gestaltet sind, dass einerseits jedes Gruppenmitglied einen Teil beitragen muss, damit letztendlich die ganze Gruppe zu einem befriedigenden Ergebnis, welches im Plenum präsentiert werden muss, um die Qualität zu sichern, gelangen kann und andererseits sich die einzelnen Gruppenmitglieder gegenseitig helfen können[239].

Daher werden bereits in der ersten Station (vgl. Kapitel 4.5.1.) das Brainstorming[240] sowie die Präsentation als Methode eingesetzt, um die Scheu beziehungsweise die Hemmungen abzubauen und die kommunikative Kompetenz zu fördern. Das Brainstorming dient außerdem noch dazu, um Ideen und Vorwissen zum Thema „Gleichungen" zu sammeln. Damit das Brainstorming jedoch zu einem befriedigenden Ergebnis gelangt, sollte beachtet werden, dass jede Schülerin und jeder Schüler Assoziationen äußern muss und diese/r keinerlei Kritik bezüglich der Äußerungen von Kolleg/innen üben darf. Außerdem sollen „fehlerhafte" Wortmeldungen produktiv genützt werden. Weiters sollten, damit nichts verloren geht, sämtliche Kommentare auf dem Arbeitsblatt notiert werden. Die Lehrkraft sollte jedoch bedenken, dass auch diese Technik gelernt werden muss und vielen Schüler/innen schwer fällt.[241] Um hierbei Frustrationen zu vermeiden, werden deshalb einerseits Hilfestellungen auf dem Arbeitsblatt gegeben und andererseits ermöglicht[242], Arbeitsunterlagen zu benutzen. Um

---

[237] Ein weiterer Aspekt, der nicht zu unterschätzen ist, wäre, dass dadurch Zeit gespart werden kann, da die Lehrkraft die Schüler/innen nur in wenige Methoden einführen muss.

[238] Weiters sind Gruppenarbeiten bei Schüler/innen, wie der Fußnote 201 entnommen werden kann, sehr beliebt (vgl. Sylvia *Jahnke-Klein*, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen 202.).

[239] Dieser Sachverhalt hat jedoch wiederum zur Folge, dass auch einzelne Stationen einfach weggelassen werden können, falls die Schüler/innen bereits Erfahrung im offenen Unterricht besitzen. Die Annahme bei der Konzeption dieser Stationen war nämlich, dass die Schüler/innen bezüglich dieses Unterrichtsprinzips gar keine oder ganz wenig Erfahrung haben.

[240] Um Bequemlichkeiten seitens der Schüler/innen zu vermeiden, kann das Brainstorming auch in Zweierteams erfolgen. Die kleine Gruppengröße trägt nämlich nicht zur Verringerung der Qualität des Brainstormings bei. In der Realität gilt sogar das Gegenteil, denn wie eine Studie zeigt, haben Gruppen oft 20 bis 50 Prozent weniger Ideen als Einzelne, die alleine nachdenken (vgl. Marisa *Schulz*, Brainstorming ist Bullshit, In: Zeit online, 16.10.2012, online unter <http://pdf.zeit.de/campus/2012/06/kreativitaet-ideen-tipps.pdf> (27.9.2015).).
Um Informationen bezüglich der Sozialform „Partnerarbeit" zu erfahren, wird hier aus Gründen der Vermeidung von Doppelgleisigkeiten auf das Kapitel 5.1. verwiesen.

[241] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 175, 178-179.

[242] Diese Option sollte nur dann ermöglicht werden, wenn die Schüler/innen gar keine Erfahrung bezüglich Brainstorming und/oder Referate in Mathematik besitzen. Für die Vorbereitung der Präsentationen sollten allerdings Unterlagen erlaubt sein.

die Qualität dieses Brainstormings zusätzlich zu sichern und die kommunikative Kompetenz sowie Eigenständigkeit in Mathematik zu fördern, werden mit Hilfe der gesammelten Begriffe Präsentationen von den Schüler/innen mit einer maximalen Länge von 4 Minuten vorbereitet. Während dieser Vorbereitungsphase, in der das Referat zumindest stichwortartig skizziert werden sollte[243], sollte die Lehrkraft die einzelnen Konzepte der Schüler/innen kurz sichten und gegebenenfalls Hilfestellungen den Schüler/innen anbieten. Damit das Referat für das „Publikum" verständlicher wird, sollten die relevanten Begriffe auf einem Plakat festgehalten werden[244]. Weil außerdem auch vermieden werden sollte, dass letztendlich immer nur dieselben Schüler/innen präsentieren, kann per Los entschieden werden, welche Schüler/innen in den Kleingruppen vortragen müssen. Da ein Feedback[245] sowie die inhaltlichen Ergänzungen von den Gruppenkolleg/innen für die Referierenden äußerst hilfreich sein kann, sollten diese im Anschluss nicht fehlen. Um den Schüler/innen zum Abschluss auch noch bewusst zu machen, welch kreatives Potenzial und Vielfalt die verschiedenen Präsentationen in sich tragen, sollten die Plakate mit den Begriffen kurz im Plenum verglichen werden. Zusammenfassend kann bezüglich der Präsentationen daher gesagt werden, dass diese die Eigenverantwortung, Selbstständigkeit, kommunikative Kompetenz und Kritikfähigkeit erhöhen und das Selbstbewusstsein stärken.[246]

Da die PISA-Tests[247] immer wieder zeigen, dass die Lesekompetenz der österreichischen Schüler/innen ausbaufähig ist, sollte diese auch beim offenen Lernen gefördert werden, denn gerade mathematische Texte sind zumeist sehr abstrakt und oft alles andere als verständnisfördernd. Nichtsdestotrotz kann die Lesekompetenz nur durch aktiven wie passiven Sprachgebrauch ausgebaut

---

[243] Der Grund für die Verschriftlichung ist, dass das Referat dadurch klarer von den Schüler/innen strukturiert wird.

[244] Das Notieren der Begriffe kann während des Referats oder vorher erfolgen.

[245] Die Feedbackregeln müssen stets beachtet werden!

[246] Bärbel *Barzel*, Andreas *Büchter*, Timo *Leuders*, Mathematik Methodik 166, 168-169; Kersten *Reich*, Referate, online unter <http://methodenpool.uni-koeln.de/download/referate.pdf> (27.9.2015) 21-22.

[247] vgl. Bettina *Toferer*, Lesekompetenz im Ländervergleich, In: Ursula *Schwantner*, Bettina *Toferer*, Claudia *Schreiner* (Hg.), Pisa 2012. Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Erste Ergebnisse. Mathematik, Lesen, Naturwissenschaft (Graz 2013), online unter <https://www.bifie.at/system/files/buch/pdf/pisa12_erste_ergebnisse_2013-12-03.pdf> (29.9.2015) 30-35.

werden.[248] Daher sind in den Kapiteln 4.5.2. bis 4.5.5. immer wieder Teile, die die Schüler/innen selbstständig bearbeiten müssen, eingebaut, welche zur Lesekompetenzförderung beitragen sollen. Um aber hinsichtlich dieser Texte Frustrationen bei den Schüler/innen zu vermeiden und das Textverständnis zu erhöhen, werden die jeweiligen Texte in Kleingruppen mehrmals besprochen[249], nachdem sich die Schüler/innen selbstständig damit auseinandergesetzt haben. Außerdem kann die Lehrkraft gegebenenfalls den Schüler/innen zusätzlich noch Tipps und Tricks für ein leichteres Erschließen der Texte zukommen lassen. So sollte sie die Schüler/innen unter anderem darauf hinweisen, die Texte mehrmals zu lesen[250], das Vorwissen zu aktivieren, die Schlüsselwörter/Begriffe zu erkennen, diese eventuell farblich zu markieren und zu verstehen, die Argumentationen sowie Rechnungen nachzuvollziehen und die Sachverhalte eventuell zu vernetzen.[251] Aber auch das selbstständige Schreiben von mathematischen Texten kann helfen, den mathematischen Sprachgebrauch zu schärfen. Daher müssen die Schüler/innen bei einer Aufgabe aus Kapitel 4.5.4. mathematische Fragen formulieren, die auch in die Sprache der Mathematik übertragen werden können müssen. Das Letztgenannte ist gerade deshalb relevant, weil die Schwierigkeiten bei Textaufgaben weniger beim Verständnis des Textes liegen, sondern viel mehr beim Übertragen dessen Inhalts in die Sprache der Mathematik. Auch hierbei sollte die Lehrkraft falls notwendig helfend unterstützen.[252]

Weil Gruppenarbeitsphasen[253], in denen mathematische Texte bearbeitet beziehungsweise besprochen werden, gelegentlich enttäuschend und ineffizient verlaufen, da einige Schüler/innen sich bequem zurücklehnen und ihre Kolleg/innen arbeiten lassen, sollten diese Phasen klar strukturiert werden. Eine

---

[248] Christoph *Hammer*, Lesen, Schreiben und Sprechen im Mathematikunterricht, online unter <http://www.leseforum.bayern.de/download.asp?DownloadFileID=aac3610723b56bb45e3a4d0b51afdef7> (29.9.2015) 307, 309.

[249] Ein weiterer Vorteil für dieses Vorgehen ist, dass dadurch auch die Sprachkompetenz erweitert wird.

[250] Die Schüler/innen sollen sich hierbei bemühen, alle Informationen aufzunehmen, denn bei mathematischen Texten sind oft auch die „unwichtig“ erscheinenden Worte sehr entscheidend.

[251] Manfred *Bergunde*, Förderung der Lesekompetenz in der Mathematik, In: Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung (Hg.), Lesekompetenz, Unterrichtserfahrungen im Fachunterricht der Sekundarstufe I, online unter <http://li.hamburg.de/contentblob/3845816/data/download-pdf-auszug-aus-der-li-broschuere-foerderung-der-lesekompetenz-in-der-mathematik.pdf> (29.9.2015) 12.

[252] Christoph *Hammer*, Lesen, Schreiben und Sprechen im Mathematikunterricht 308, 312; vgl. PISA-Tests.

[253] Um Informationen bezüglich der Sozialform „Gruppenarbeit“ zu erhalten, wird hier aus Gründen der Vermeidung von Doppelgleisigkeiten auf das Kapitel 5.3. verwiesen.

Möglichkeit, um dem gegenzusteuern, stellt die Methode „Gruppenpuzzle“ (vgl. Kapitel 4.5.2. und 4.5.5.) dar, da sie einerseits die Zusammenarbeit innerhalb der Gruppe und andererseits das Verantwortungsgefühl gegenüber jedem/jeder einzelnen Schüler/in sowie der ganzen Gruppe stärkt.[254] Die Vorzüge für diese Methode sind laut Timo Leuders folgende:

- *„Es ist besser als andere Formen (die etwa Textverständnis oder Sprachfähigkeit voraussetzen) für den Mathematikunterricht geeignet.*
- *Schon durch seine spezifische Organisationsform fördert es sowohl individuelles als auch kooperatives Lernen und führt zu einer hohen Eigenaktivität der Schüler.*
- *Es ist für Schüler und Lehrer als Einstieg in kooperative Arbeitsformen sehr gut geeignet, weil sie stark durchorganisiert ist und dennoch Spielraum für individuelle Variation lässt.*
- *Es erfreut sich einer immer größeren Beliebtheit: „Das Gruppenpuzzle ist die einzige Unterrichtsmethode, die uns in den letzten 30 Jahren begegnet ist, welche nachweislich das Selbstvertrauen der Lernenden stärkt“ (FREY-ELLING/FREY 1999). Mittlerweile findet man viele Schulen, die positive Erfahrungen mit dem Gruppenpuzzle gemacht haben.“*[255]

Aus Sicht der Planung ist das Gruppenpuzzle wie folgt aufgebaut:

- Phase 1: Der Ablauf sowie die Zeitplanung werden erläutert und die Arbeitsaufträge einzelner Teilaspekte – meist drei bis vier – eines großen Themas werden auf die Schüler/innen aufgeteilt, wobei ein Teilaspekt stets an mehreren Schüler/innen vergeben wird.
- Phase 2: Jeder/jede Schüler/in erarbeitet nun selbstständig sein/ihr Spezialthema. Dabei sollten Hilfestellungen seitens der Lehrkraft ermöglicht und Aufgaben zur Selbstkontrolle von den Schüler/innen erledigt werden. In diesem Fall (vgl. Kapitel 4.5.2. bzw. 4.5.5.) sollen die Schüler/innen den Text in eigenen Worten schriftlich wiedergeben beziehungsweise die Arbeitsschritte eines Lösungsverfahrens, das anhand eines Rechenbeispiels demonstriert wird, schriftlich beschreiben können.

---

[254] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 179.
[255] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 179-180.

- Phase 3[256]: Die Schüler/innen, die denselben Teilaspekt bearbeitet haben, setzen sich nun zusammen, um über ihr Thema zu sprechen, damit die letzten Unklarheiten beseitigt sowie Sicherheit gewonnen werden können. Andererseits sollte hier auch erprobt werden, wie dieses Thema anderen Mitschüler/innen, die sich nicht damit auseinandergesetzt haben, vermittelt werden könnte.
- Phase 4: Es werden nun neue Kleingruppen gebildet, wobei in jeder Gruppe jeweils eine Person eines Spezialthemas sitzt. Jeder/jede Experte/in stellt jetzt sein/ihr Thema den Kolleg/innen so vor, dass jede/r davon profitieren und seine/ihre Unterlagen vervollständigen kann. Hierbei sollte die Lehrkraft zwar nicht einschreiten, könnte aber im Nachhinein gegebenenfalls noch etwas ergänzen beziehungsweise korrigieren.
- Phase 5: Im abschließenden Plenum können (stichprobenartig) Ergebnisüberprüfungen erfolgen, indem einzelne Gruppen ihre Ergebnisse vor der ganzen Klasse präsentieren. Andererseits kann diese Plenumsphase auch als Plattform dienen, um beispielsweise letzte Unklarheiten zu klären.[257]

Somit können mit Hilfe dieser Methode folgende Lernziele erreicht werden:

- *„Selbstständigkeit: eigenverantwortliche Steuerung von Lernprozessen*
- *Soziale Fähigkeiten; zuhören, Konflikte austragen, Konsens finden usw.*
- *Arbeitstechniken: Aufzeichnungen machen, Zeitplanung*
- *Erfahren von Kompetenz, Stärkung des Selbstbewusstseins*
- *Vorbereitung auf lebenslanges Lernen und Teamarbeit."*[258]

Nichtsdestotrotz darf bei dieser Methode der enorme Zeitaufwand nicht übersehen werden, allerdings kann dieser durch die erhöhte Aufmerksamkeit und Motivation der Schüler/innen, durch das „Lernen durch Lehren" sowie durch das Übernehmen von Verantwortung entkräftet werden.[259]

---

[256] Ob diese Phase notwendig ist, hängt einerseits vom Umfang der einzelnen Spezialthemen und andererseits vom Schwierigkeitsgrad ab.
[257] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 181-183.
[258] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 185.
[259] Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht 185.

Um den organisatorischen Aufwand zu minimieren, wird im Kapitel 4.5.4. eine ähnliche Methode angewendet, nämlich der Museumsrundgang. Die Unterschiede im Vergleich zum Gruppenpuzzle liegen hierbei nur darin, dass einerseits die Gruppe aus Phase 3 des Gruppenpuzzles beim Museumsrundgang ein Plakat, welches dann im Klassenraum aufgehängt wird, erstellen muss und andererseits die Präsentationen in den Expert/innengruppen nicht im Sitzen, sondern vor den Plakaten erfolgen müssen, wobei vor jedem Plakat nur jeweils eine Gruppe stehen darf. Somit ist der Museumsrundgang im Vergleich zum Gruppenpuzzle bewegungsaktiver und die Präsentationen erhalten dadurch einen besonderen und höheren Stellenwert, was in diesem Zusammenhang auf Grund der Kreativität, die von den Schüler/innen bei diesen Aufgaben abverlangt wird, berechtigt ist.[260]

Aus mathematischer Sicht ist der eigenverantwortliche Weg sehr Algebra lastig. Daher kommen diesbezüglich dieselben Argumente wie beim algebraischen Weg (vgl. Kapitel 5.1.) zum Tragen. Jedoch ist der eigenverantwortliche Weg bereits aus mathematischer Sicht viel komplexer, da er die einzelnen Themenbereiche viel stärker miteinander vernetzt. Dies ist allerdings insofern relevant, weil, wie eine Studie von Astrid Brinkmann zeigt, die Schüler/innen, die einzelnen Themenbereiche kaum miteinander verknüpfen können.[261] Veranschaulicht bedeutet dies daher folgendes:

[260] Bundeszentrale für politische Bildung, Museumsgang, online unter <http://www.bpb.de/lernen/unterrichten/grafstat/148881/museumsgang> (29.9.2015).
[261] Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht 239.

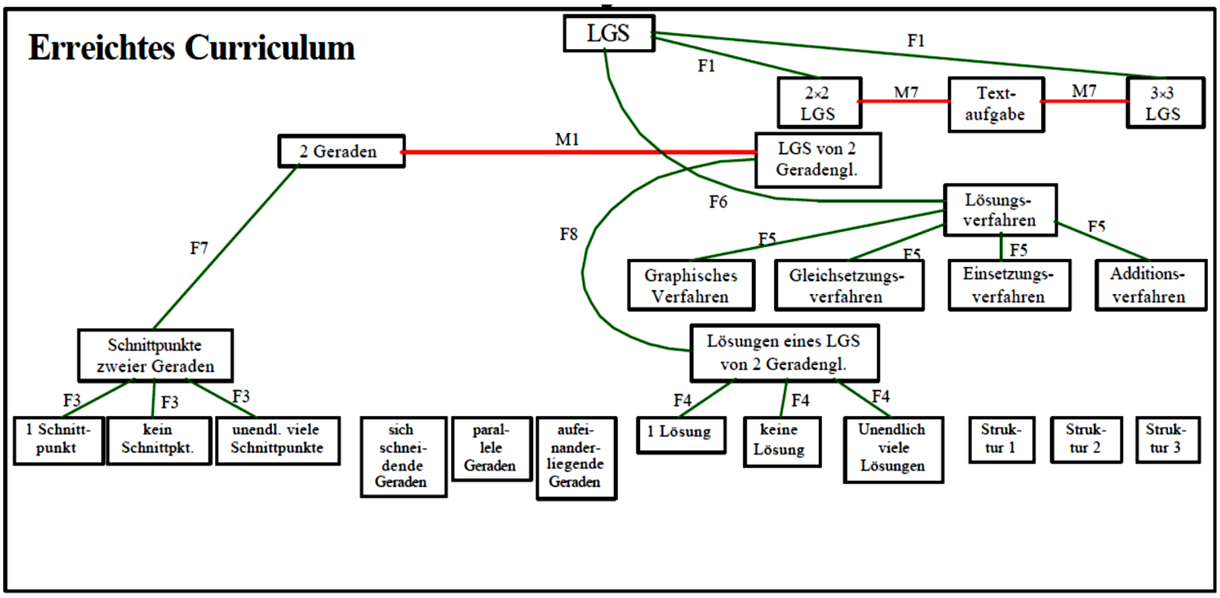



Abbildung 55: Erreichtes Curriculum beim Thema „Lineares Gleichungssystem“[262]

Intendiert wäre allerdings dies:

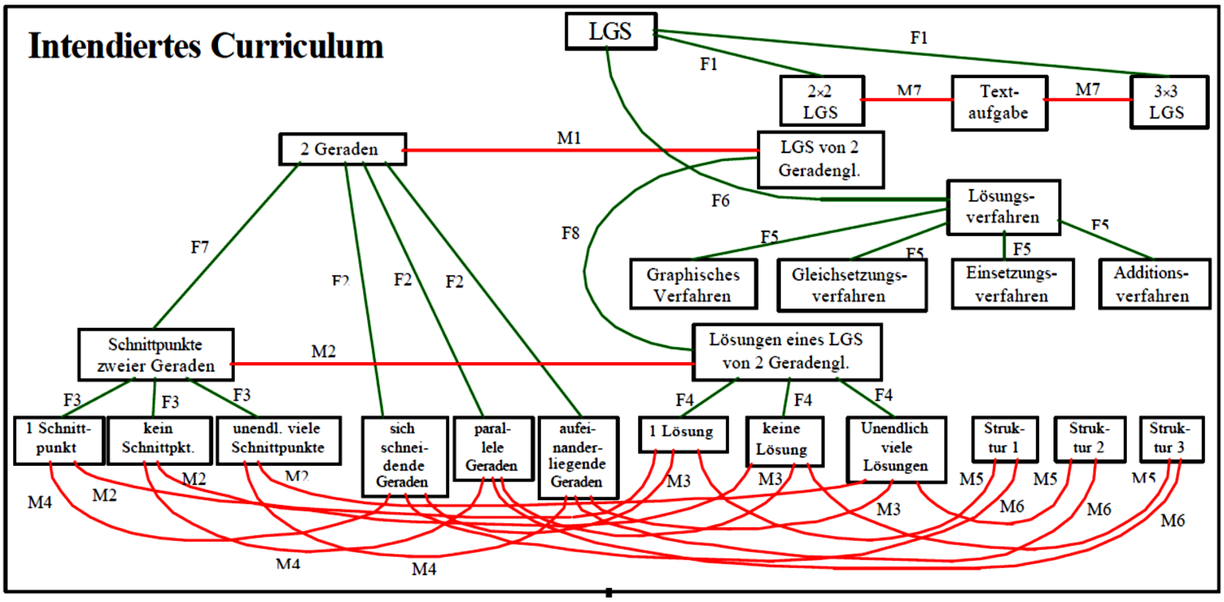



Abbildung 56: Intendiertes Curriculum beim Thema „Lineares Gleichungssystem“[263]

Möchte man sich daher den intendierten Curriculum nähern, so müssen laut Astrid Brinkmann ähnlich wie beim eigenverantwortlichen Weg viel stärker und nachhaltiger verschiedene Modelle zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen herangezogen und vernetzt werden. Unterstützt wird dies auch durch eine

[262] Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht 239.
[263] Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht 239.

geschickte Methodenwahl und durch das Bewusstmachen der Diskrepanz, die zwischen dem Lernen und Behalten besteht.[264]

[264] Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht 245-250.

# 6. Resümee

Auch wenn in dieser Arbeit nicht der ideale Einstieg in das Thema „Lineare Gleichungssysteme“ auf Grund der Komplexität des Unterrichtens verifiziert werden konnte, sollte hier aber dennoch die Vielfalt, die dieses Thema in sich tragen kann, veranschaulicht worden sein. Die Kunst der Lehrkraft besteht nun darin, aus dieser Mannigfaltigkeit den für die jeweilige Klasse passenden Einstieg auszuwählen, wobei vor allem die äußeren Bedingungen, wie beispielsweise der zeitliche Rahmen und die räumlichen Voraussetzungen, sowie die Erkenntnisse aus der Adressat/innenanalyse[265] und der fachdidaktischen Analyse berücksichtigt werden müssen. Aber auch das Bauchgefühl und die Erfahrungen sollen neben den fachlichen Kriterien bei dieser Entscheidung beachtet werden. Die Folgen sind, dass die Schüler/innen den Unterricht konzentrierter folgen, sich stärker in diesen einbringen und die Lerninhalte besser verstehen und begreifen, da jener Unterricht viel stärker differenziert und individualisiert sowie mehr Abwechslung mit sich bringt. Außerdem wird der Mathematikunterricht bei einigen dieser Einstiege, wie beispielsweise beim historischen oder eigenverantwortlichen Weg, zusätzlich noch durch jene Facetten bereichert, die den Schüler/innen unter anderem ermöglichen, über den Tellerrand der Schulmathematik zu blicken und weitere zum Teil auch nicht mathematische aber notwendige Kompetenzen zu erlangen beziehungsweise zu vertiefen, was wiederum bei den Schüler/innen zu höherer Motivation und/oder besserem Verständnis führt.

Trotz dieser zahlreichen Vorteile, die sich durch die Vielfalt der Einstiege ergeben, darf aber nicht vergessen werden, dass diese Arbeit im Hinblick auf die Lehrinhalte der Sekundarstufe 1 in Mathematik ein Novum darstellt. Somit wäre es sehr wünschenswert, wenn weitere Lehrinhalte der besagten Schulstufen in ähnlicher Weise beleuchtet werden würden, da der Unterricht dadurch wesentlich abwechslungsreicher und zielgerichteter gestaltet werden könnte.

[265] Die Adressat/innenanalyse eruiert unter anderem das Vorwissen, das Interesse, die Kompetenzen und die Arbeitshaltung der Schüler/innen und die Gruppenstruktur (vgl. didactics online, Adressatenanalyse, online unter <http://www.didactics.eu/fileadmin/pdf/1511.pdf> (12.2.2016) 3-9.).

# 7. Literaturverzeichnis

Hans *Aebli*, Zwölf Grundformen des Lehrens (Stuttgart [5]1990).

Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kulturen – Menschen (Berlin, Heidelberg [2]2014).

Falko von *Ameln*, Ruth *Gerstmann*, Josef *Kramer*, Psychodrama (Berlin, Heidelberg [2]2009).

Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hg.), Mathe, ja bitte. Wege zu einem anderen Unterricht (Eichstätt 1998).

Svitlana *Aristova*, Zum didaktischen Einsatz von Spielen im Fremdsprachenunterricht (ungedr. geisteswiss. Dipl.arbeit Wien 2015), online unter <http://othes.univie.ac.at/36722/1/2015-03-10_0208903.pdf> (30.9.2015).

Edith *Arndt-Adam*, Mathe Helfer. Lineare Gleichungssysteme 8. Klasse (München 1996).

Andrea *Arzberger*, Einstiege in – für Schüler und Schülerinnen – neue Themen und deren Erarbeitung mit besonderem Augenmerk auf die Methodik. Eine Sammlung geplanter Einstiege und Erarbeitungen zu ausgewählten Themen der AHS – Unterstufe (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2014), online unter <http://othes.univie.ac.at/32752/1/2014-04-03_0609390.pdf>.

Bärbel *Barzel*, Andreas *Büchter*, Timo *Leuders*, Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II (Berlin [6]2011).

Bärbel *Barzel*, Lars *Holzäpfel*, Timo *Leuders*, Christine *Streit*, Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren (Berlin 2011).

Roland *Bauer*, Lernen an Stationen in der Sekundarstufe I. Schülergerechtes Arbeiten in der Sekundarstufe I (Berlin 1997).

Georg E. *Becker*, Unterricht planen. Handlungsorientierte Didaktik. Teil 1 (Weinheim, Basel [10]2012).

Elisabeth *Berger*, Hildegard *Fuchs*, Planen, unterrichten beurteilen. Das Wichtigste für die Praxis (Linz 2007).

Manfred *Bergunde*, Förderung der Lesekompetenz in der Mathematik, In: Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung (Hg.), Lesekompetenz, Unterrichtserfahrungen im Fachunterricht der Sekundarstufe I, online unter <http://li.hamburg.de/contentblob/3845816/data/download-pdf-auszug-aus-der-li-broschuere-foerderung-der-lesekompetenz-in-der-mathematik.pdf> (29.9.2015) 4-16.

Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China. Mit *fangcheng* zu linearen Gleichungssystemen, In: mathematiklehren, H. 151 (Dezember 2008) 8-11.

Steffen *Beuthan*, Günter *Nordmeier*, Mathematik üben mit Erfolg. 8. Schuljahr Gymnasium (Stuttgart 2007).

Klaus *Beyer*, Didaktische Prinzipien: Eckpfeiler guten Unterrichts. Ein theoriebasiertes und praxisorientiertes Handbuch in Tabellen für den Unterricht auf der Sekundarstufe II (Baltmannsweiler 2014).

bifie, Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis (Graz 2011), online unter <https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf> (14.8.2015).

bifie (Hg.), Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe (Wien ²2013).

Gertrude *Binder*, Franz *Danninger*, Hildegard Urban-*Woldron*, klar² Mathematik 5 (Wien 2010).

Manfred *Bönsch*, Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden (Sankt Augustin ⁴2008).

Astrid *Brinkmann*, Transformationen von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen – eine Untersuchung am Beispiel der linearen Gleichungssysteme in der Sek. I, In: Werner *Peschek* (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt (Hildesheim, Berlin 2002) 127-130.

Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I (ungedr. naturwiss. Diss. Duisburg 2002), online unter <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/brinkmanndiss.pdf> (16.9.2015).

Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 117. Bundesgesetz: Änderung des Schulunterrichtsgesetzes. 8. August 2008, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2008_I_117/BGBLA_2008_I_117.html> (20.8.2015).

Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen. 2. Jänner 2009, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_II_1.html> (20.8.2015).

Bundeskanzleramt, Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 22.08.2015, online unter <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166&ShowPrintPreview=True> (22.8.2015).

Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern. Informationen und Anregungen zur Umsetzung ab der 5. Schulstufe (Wien ³2014).

Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Initiative „25+“: Individualisierung des Unterrichts. Persönlichkeit und Lernvoraussetzung der einzelnen Schülerinnen und Schüler in den Mittelpunkt stellen. Rundschreiben Nr. 9/2007, online unter <https://www.bmbf.gv.at/ministerium/rs/2007_09.html> (14.8.2015).

Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Lehrplan der AHS-Unterstufe. Allgemeiner Teil, online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2> (14.8.2015).

Bundesministerium für Bildung und Frauen (Hg.), Allgemeinbildende Höhere Schule. Unterstufe. Lehrplan. „Mathematik“, online unter

<https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2> (19.8.2015).

Bundeszentrale für politische Bildung, Museumsgang, online unter <http://www.bpb.de/lernen/unterrichten/grafstat/148881/museumsgang> (29.9.2015).

Elke *Callies*, Spielen in der Schule – Motivationale Aspekte, In: Benita *Daublebsky* (Hg.), Spielen in der Schule. Vorschläge und Begründungen für ein Spielcurriculum (Stuttgart 1998) 227-251.

Heinz Jörg *Claus*, Einführung in die Didaktik der Mathematik (Darmstadt $^2$1995).

didactics online, Adressatenanalyse, online unter <http://www.didactics.eu/fileadmin/pdf/1511.pdf> (12.2.2016).

Anita *Dorfmayr*, Clemens *Brand*, Josef *Lechner*, August *Mistlbacher*, Alfred *Nussbaumer*, thema mathematik. Mathematik mit GeoGebra. Themenheft (Linz $^2$2011).

Sabine *Döring*, Lernen durch Spielen. Spielpädagogische Perspektiven institutionellen Lernens (Weinheim 1997).

Duden, Abi Mathematik (Mannheim, Zürich 2012).

Wolfgang *Edelstein*, Produktives Lernen und befreites Spielen, In: Benita *Daublebsky* (Hg.), Spielen in der Schule. Vorschläge und Begründungen für ein Spielcurriculum (Stuttgart 1998) 180-189.

Andreas *Filler*, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren (Heidelberg 2011).

Hans *Freudenthal*, Soll der Mathematiklehrer etwas von der Geschichte der Mathematik wissen?, In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 2 (1978) 75-78.

Sieglinde *Fürst*, Technologieeinsatz im Mathematikunterricht, In: bifie, Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe. Band 2 (Graz 2012), online unter <https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_praxishandbuch_band2_2012-12-21.pdf> (19.5.2015) 101-122.

Silke *Fürweger*, Einsetzbarkeit offener Lernformen im Mathematikunterricht höherer Schulen (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2005).

Daniela *Garhöfer*, Der Wandel des Mathematikunterrichts in den letzten dreißig Jahren in Bezug auf den Einsatz neuer Medien, Gender equality, und die Entwicklung neuer Unterrichtsmethoden (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/14351/1/2011-05-04_0205244.pdf> (18.9.2015).

GeoGebra Arbeitsblätter Lineare Gleichungssysteme, online unter <http://www.geogebra.org/student/b75514> (4.9.2015).

GeoGebra Hilfeseiten, online unter <http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite> (2.9.2015).

Petra *Gössinger*, Verbesserungsmöglichkeiten der sozialen Situation im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Die Berücksichtigung methodischer Handlungssituationen und deren Einsatzmöglichkeiten in offenen Unterrichtsphasen (ungedr. geisteswiss. Dipl.arbeit Wien 1993).

Stefan *Götz*, Hans-Christian *Reichel*, Robert *Müller*, Günter *Hanisch*, Mathematik 5 (Wien 2010).

Claudia *Grötzebach*, Spielend Wissen festigen: effektiv und nachhaltig. 66 Lern- und Wissensspiele für Training und Unterricht (Weinheim, Basel 2010).

Harald *Haarmann*, Weltgeschichte der Zahlen (München 2008).

Wolfgang *Hallet*, Didaktische Kompetenzen. Lehr- und Lernprozesse erfolgreich gestalten (Stuttgart 2006).

Christoph *Hammer*, Lesen, Schreiben und Sprechen im Mathematikunterricht, online unter <http://www.leseforum.bayern.de/download.asp?DownloadFileID=aac3610723b56bb45e3a4d0b51afdef7> (29.9.2015).

Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 1. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien $^{2}$2014).

Günter *Hanisch*, Isabella *Benischek*, Petra *Hauer-Typpelt*, Eva *Sattlberger*, MatheFit 4. Lehrer/innen-Ausgabe (Wien 2009).

Günter *Hanisch*, Wozu ist der Mathematikunterricht gut?, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft, H. 21 (1995), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1995%20Band%2023/Hanisch1995.pdf> (17.9.2015) 106-127.

Johanna *Harnischfeger*, Heiner *Juen*, Mathematik. > Lineare Gleichungssysteme. > Modellierungsaufgaben (Donauwörth $^{2}$2014).

Roger *Hart*, The Chinese Roots of Linear Algebra (Baltimore 2011).

Petra *Hauer-Typpelt*, Zugänge zur Normalverteilung und ihre fachdidaktische Analyse (ungedr. naturwiss. Diss. Wien 1998).

Kirsten *Heckmann*, Friedhelm *Padberg*, Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (Berlin, Heidelberg 2012).

Ulrich *Heimlich*, Einführung in die Spielpädagogik. Eine Orientierungshilfe für sozial-, schul- und heilpädagogische Arbeitsfelder (Bad Heilbrunn $^{2}$2001).

Wolfgang *Hein*, Mathematik im Altertum. Von Algebra bis Zinseszins (Darmstadt 2012).

Hans-Wolfgang *Henn*, Andreas *Filler*, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden (Berlin, Heidelberg 2015).

Norbert *Herrmann*, Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker (München$^{2}$ 2007).

Helmut *Heugl*, Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (2001), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2001%20Band%2033/Heugl2001.pdf> (18.9.2015) 86-101.

Rudolf vom *Hofe*, Grundvorstellungen mathematischer Inhalte (Heidelberg, Berlin, Oxford 1995).

Erwin *Höferer*, Evaluierung des Einsatzes von GeoGebra und Excel im Mathematik- Unterricht. Unter Berücksichtigung des Kompetenzmodells der angewandten Mathematik im Hinblick auf die standardisierte Reife- und Diplomprüfung (Klagenfurt 2014), online unter <https://www.imst.ac.at/files/projekte/1375/berichte/1375_Langfassung_Hoeferer.pdf> (18.9.2015).

Markus *Hohenwarter*, GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (ungedr. naturwiss. Diss. Salzburg 2006), online unter <http://archive.geogebra.org/static/publications/mhohen_diss.pdf> (2.9.2015).

Stephan *Hußmann*, Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II (Berlin 2003).

Maria *Hutsteiner*, Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Geometrieunterricht der AHS und seine Förderung mittels Dynamischer Geometrie-Software (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/17640/1/2011-12-09_0604228.pdf> (19.9.2015).

Denise *Jäger*, Vom Zählen zur Mathematik- Die Mathematik in den alten Hochkulturen (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2014), online unter <http://othes.univie.ac.at/33659/1/2014-05-13_0806436.pdf> (8.9.2015)

Hans Niels *Jahnke*, Karin *Richter*, Geschichte der Mathematik. Vielfalt der Lebenswelten – Mut zu divergentem Denken, In: mathematiklehren, H. 151 (Dezember 2008) 4-7.

Sylvia *Jahnke-Klein*, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen (Hohengehren 2001)

Helga *Jungwirth*, Genderkompetenz im Mathematikunterricht. Fachdidaktische Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer (Klagenfurt 2012), online unter <https://www.imst.ac.at/app/webroot/files/mathe_fertig-28.11.pdf> (18.8.2015).

Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt*, Zu einem tieferen Mathematikverständnis, In: Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt* (Hg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn (Wiesbaden ²2014) 1-11.

Barbara *Kaps*, Spiele und Mathematik. Anwendung und Bedeutung für den Mathematikunterricht (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 1989).

Urs *Kirchgraber*, Marco *Bettinaglio*, Lineare Gleichungssysteme. Ein Leitprogramm in Mathematik, online unter <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/lin_gleich/lingl.pdf> (9.9.2015).

Arnold *Kirsch*, Formalismen oder Inhalte?. Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr, In: Didaktik der Mathematik, 19. Jahrgang (1991) 294-308.

Matthias *Kitte*, Lösen von linearen Gleichungssystemen mit GeoGebra, online unter <http://www.doc4web.de/doc/1593933655887> (4.9.2015).

Wolfgang *Klafki*, Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik (Weinheim, Basel 1996).

Sandra *Kofler*, Inklusive Didaktik am Beispiel des Unterrichtsfaches Mathematik. Möglichkeit eines inklusiven Mathematikunterrichts für alle Schüler und Schülerinnen in der Sekundarstufe I (ungedr. geisteswiss. Dipl.arbeit Wien 2012), online unter <http://othes.univie.ac.at/19551/1/2012-01-25_0600655.pdf> (16.8.2015).

Frieder *Korn*, Wie lassen sich negative Zahlen mit Streichhölzern darstellen?, In: Martin Kramer (Hg.), Algebra und Analysis als Abenteuer. Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung, online unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/Skript%20-%20Algebra%20und%20Analysis.pdf> (11.9.2015) 79-81.

Jürgen *Krah*, Lineare Gleichungssysteme. Grundlagen und Aufgaben mit Lösungen (Freising 2000).

Konrad *Krainer*, Schule und Mathematikunterricht als Inseln?, In: Dorit *Bosse*, Peter *Posch* (Hg.), Schule 2020 aus Expertensicht. Zur Zukunft von Schule, Unterricht und Lehrerbildung (Wiesbaden 2009) 197-202.

Marlies *Krainz-Dürr*, Individualisierung als pädagogischer Auftrag, In: Schulnews 06/2007 (2007) 1-2.

Michaela *Kraker*, Gerhard *Plattner*, Christa *Preis*, Expedition Mathematik 4 (Wien 2010).

Martin *Kramer*, Lineare Gleichungssysteme. Klasse 9-10 (Buxtehude ²2009).

Martin *Kramer*, Mathematik als Abenteuer. Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens (Hallbergmoos² 2010).

Henrik *Kratz*, Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Ein Studien- und Praxisbuch für die Sekundarstufe (Seelze 2011).

Manfred *Kronfellner*, Geschichte der Mathematik im Unterricht. Möglichkeiten und Grenzen, In: Werner *Peschek* (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt (Hildesheim, Berlin 2002) 23-30.

Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen (Wien 1998).

Manfred *Kronfellner*, Historische Aspekte im Mathematikunterricht, In: Österreichische Mathematische Gesellschaft, (1997), online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1997%20Band%2027/Kronfellner1997.pdf> (24.9.2015).

Oliver *Kunst*, Gleichsetzungsverfahren, online unter <http://www.gecco.info/download/pdf/gls/gleichsetzungsverfahren.pdf> (26.8.2015).

Bernhard *Kutzler*, Lineare Gleichungssysteme lösen mit DERIVE FOR WINDOWS. Experimentelles Lernen/Visualisieren/Die Gerüstmethode (Hagenberg 1998).

Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II (Berlin 2001).

Günther *Malle*, Didaktische Probleme der elementaren Algebra (Braunschweig 1993).

Günther *Malle*, Helge *Woschitz*, Maria *Koth*, Bernhard *Salzger*, Mathematik verstehen 5. Technologie integriert (Wien 2014).

Reinhard *Markowetz*, Alle Kinder alles lehren! Aber wie? – Maßnahmen der Inneren Differenzierung und Individualisierung als Aufgabe für Sonderpädagogik und Allgemeine (Integrations-)Pädagogik auf dem Weg zu einer inklusiven Didaktik. In: Irmtraud *Schnell*, Alfred *Sander* (Hg.), Inklusive Pädagogik (Bad Heilbrunn 2004) 167-186.

Jean-Claude *Martzloff*, A History of Chinese Mathematics (Berlin, Heidelberg 1997).

Florian *Mayer*, Spezifische Methoden für historische Aspekte im Mathematikunterricht. Mögliche Ziele und Beispiele (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2011), online unter <http://othes.univie.ac.at/14367/1/2011-05-03_0009630.pdf> (26.9.2015).

Hans *Merkens*, Unterricht. Eine Einführung (Wiesbaden 2010).

Hilbert *Meyer*, Unterrichts-Methoden. II: Praxisband (Berlin 2003).

Hilbert *Meyer*, Unterrichtsmethoden, In: Hanna *Kiper*, Hilbert *Meyer*, Wilhelm *Topsch*, Einführung in die Schulpädagogik (Berlin 2002) 109, online unter <http://www.uni-potsdam.de/fileadmin/projects/erziehungswissenschaft/documents/studium/Textboerse/pdf-Dateien/06_meyer_unterrichtsmethoden.pdf> (16.9.2015).

Hilbert *Meyer*, Was ist guter Unterricht? (Berlin 2004).

Hilbert *Meyer*, Merkmale guten Unterrichts: empirische Befunde und didaktische Ratschläge. Handout zum Vortrag auf dem Klett Symposium „Geographie und Schule“, online unter <http://www2.klett.de/sixcms/media.php/229/Merkmale_guten_Unterrichts.325820.pdf> (17.8.2015).

Ulf *Mühlhausen*, Wolfgang *Wegner*, Erfolgreich Unterrichten?!. Eine erfahrungsfundierte Einführung in die Schulpädagogik mit Videoszenen und Online-Übungen zur Unterrichtsanalyse (Hohengehren 2006).

Dominic *Olivastro*, Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren (München 1995).

Liane *Paradies*, Hans Jürgen *Linser*, Differenzieren im Unterricht (Berlin 2001).

Franz *Pauer*, Martina *Scheirer-Weindorfer*, Andreas *Simon*, Mathematik 1 HTL (Wien 2011).

Kersten *Reich*, Referate, online unter <http://methodenpool.uni-koeln.de/download/referate.pdf> (27.9.2015).

Hans-Christian *Reichel*, Dieter *Litschauer*, Herbert *Groß*, Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemeinbildenden höhern Schule und der Hauptschulen (Wien $^{4}$1996).

Kristina *Reiss*, Christoph *Hammer*, Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe (Basel 2013).

Wolfgang *Riemer*, Erziehen im Mathematikunterricht, In: Rainer *Kaenders*, Reinhard *Schmidt* (Hg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn (Wiesbaden $^{2}$2014) 33-40.

Horst *Rumpf*, Aufmerksam machen und aufmerksam werden – Unterrichtsauftakte bei Aebli und Wagenschein, In: Dorit *Bosse*, Peter *Posch* (Hg.), Schule 2020 aus Expertensicht. Zur Zukunft von Schule, Unterricht und Lehrerbildung (Wiesbaden 2009) 231-236.

Matthias von *Saldern*, Heterogenität und Schulstruktur. Ein Blick auf Restriktionen und Selbstrestriktionen des deutschen Schulsystems, In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlungsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 42-51.

Ingrid *Salner-Gridling*, Querfeldein: individuell lernen – differenziert lehren (Wien 2009), online unter <https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/mat_querfeldein_18764.pdf?4dzgm2> (14.8.2015).

Eva *Sattlberger*, College Preparatory Mathematics versus Offenes Lernen. Ein Vergleich zweier Mathematikprogramme hinsichtlich ihrer Eignung zur Vermittlung von Schlüsselqualifikationen basierend auf einer in Kalifornien durchgeführten Fragebogenuntersuchung (ungedr. naturwiss. Diss. Wien 2001).

Marisa *Schulz*, Brainstorming ist Bullshit, In: Zeit online, 16.10.2012, online unter <http://pdf.zeit.de/campus/2012/06/kreativitaet-ideen-tipps.pdf> (27.9.2015).

Jürgen *Steinhilber*, Zur Didaktik des Unterrichtsspiels im Fremdsprachenunterricht (Berlin 1979).

Thea *Stroot*, Vom Diversity-Management zu „Learning Diversity". Vielfalt in der Organisation Schule. In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlungsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 52-64.

Karoline *Thaler*, Offenes Lernen im Mathematikunterricht anhand des Themas Variablen in der Unterstufe (ungedr. naturwiss. Dipl.arbeit Wien 2008).

Bettina *Toferer*, Lesekompetenz im Ländervergleich, In: Ursula *Schwantner*, Bettina *Toferer*, Claudia *Schreiner* (Hg.), Pisa 2012. Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Erste Ergebnisse. Mathematik, Lesen, Naturwissenschaft (Graz 2013), online unter <https://www.bifie.at/system/files/buch/pdf/pisa12_erste_ergebnisse_2013-12-03.pdf> (29.9.2015).

Ernst Christian *Trapp*, Versuch einer Pädagogik (Berlin 1780), online unter <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/fwhb/trapp1780> (14.8.2015).

Matthias *Trautmann*, Beate *Wischer*, Heterogenität in der Schule. Eine kritische Einführung (Wiesbaden 2011).

Hans-Joachim *Vollrath*, Hans-Georg *Weigand*, Algebra in der Sekundarstufe (Heidelberg ³2007).

Hans-Joachim *Vollrath*, Jürgen *Roth*, Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (Heidelberg ²2012).

Hans-Joachim *Vollrath*, Störungen des „didaktischen Gleichgewichts“ im Mathematikunterricht, In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, H. 40/6 (1987) 373-378.

Richard *Wagner*, Libretti. Die Meistersinger von Nürnberg, online unter <http://www.rwagner.net/libretti/meisters/g-meisters-a3s2.html> (14.8.2016).

Hans-Georg *Weigand*, Computer im Mathematikunterricht (Heidelberg, Berlin 2002).

Franz Emanuel *Weinert*, Guter Unterricht ist ein Unterricht, in dem mehr gelernt als gelehrt wird, In: Josef *Freund*, Heinz *Gruber*, Walter *Weidinger* (Hg.), Guter Unterricht – Was ist das? Aspekte von Unterrichtsqualität (Wien 1998) 7-18.

Udo *Wennekers* (Hg.), Diagnostizieren und Fördern. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Lineare Funktionen und Gleichungssysteme. Quadratische Funktionen und Gleichungen (Berlin ³2014).

Norbert *Wenning*, Heterogenität als Dilemma für Bildungseinrichtungen, In: Sebastian *Boller*, Elke *Rosowski*, Thea *Stroot* (Hg.), Heterogenität in Schule und Unterricht. Handlunsansätze zum pädagogischen Umgang mit Vielfalt (Weinheim, Basel 2007) 21-31.

Thomas *Weth*, Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware, In: Horst *Hischer* (Hg.), Wieviel Termumformung braucht der Mensch? (Hildesheim 1993) 106-110.

Friedrich *Zech*, Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik (Weinheim, Basel ¹⁰2002).

# 8. Abbildungsverzeichnis

Heinz-Wilhelm *Alten*, Alireza Djafari *Naini*, Bettina *Eick*, Menso *Folkerts*, Hartmut *Schlosser*, Karl-Heinz *Schlote*, Heiko *Wesenmüller-Kock*, Hans *Wußing*, 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kulturen – Menschen (Berlin, Heidelberg ²2014).

Dagmar *Bertalan*, Mathematik im alten China. Mit *fangcheng* zu linearen Gleichungssystemen, In: mathematiklehren, H. 151 (Dezember 2008) 8-11.

Astrid *Brinkmann*, Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I (ungedr. naturwiss. Diss. Duisburg 2002), online unter <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/brinkmanndiss.pdf> (16.9.2015).

orf, Benzin, Diesel und Heizöl günstiger als 2013, online unter <http://oesterreich.orf.at/stories/2670438/> (1.9.2015).

# 9. Anhang

## *9.1. Curriculum Vitae*

| | |
|---|---|
| seit Oktober 2012 | Lehramtsstudium Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung an der Universität Wien (1. Studienabschnitt beendet am 8.10.2014) |
| 2011-2013 | Finanz- und Versicherungsmathematik-Studium an der Technischen Universität Wien (nicht abgeschlossen) |
| Schuljahr 2007/08 bis Schuljahr 2010/11 | Unterrichtstätigkeit am BG Berndorf als Musikerzieher |
| seit Herbst 2006 | Unterrichtstätigkeit als Klavierlehrer im Musischen Zentrum (Wiener Jugendzentrum) |
| seit Herbst 2006 | Unterrichtstätigkeit als freiberuflicher Klavierlehrer |
| 2003-2006 | Magisterstudium Instrumental(Gesangs)Pädagogik (Klavier); Klavierklassen: H. Fleischmann, ab 2004: K. Harrer-Baranyi; Diplom im Juni 2006 |
| 2001-2003 | Vorbereitungslehrgang Gesang an der Universität für Musik und darstellende Kunst Wien; Gesangsklassen: C. Ranacher, G. Zeilinger |
| 1999-2003 | Instrumental(Gesangs)Pädagogik I (Klavier) an der Universität für Musik und darstellende Kunst Wien mit Schwerpunkt Ensembleleitung (instrumentale Richtung); Klavierklasse: A. Rößler; Diplom im Juni 2003 |
| 1998-1999 | Zivildienst beim Arbeitersamariterbund |
| 1994-1998 | Bundesoberstufenrealgymnasium unter besonderer Berücksichtigung der musischen Ausbildung in Wr. Neustadt |
| ab 1990 | klassischer Klavierunterricht |
| 1990-1994 | Hauptschule in Weissenbach an der Triesting |

| | |
|---|---|
| 1986-1990 | Volksschule in Weissenbach an der Triesting |
| Am 22.4.1980 | in Mödling geboren |

**Zu meiner Person:**

***Hobbys:*** musizieren, lesen, kochen, Kultur, Museum, ...

***Stärken:*** Offenheit, Ehrlichkeit, Zuverlässigkeit, Flexibilität

## 9.2. Abstract

Die vorliegende Arbeit stellt fünf verschiedene Einstiege – einen algebraischen, einen computerunterstützten, einen historischen, einen anschaulich-spielerischen und einen eigenverantwortlichen Weg – für die 8. Schulstufe in das Themenfeld der Linearen Gleichungssysteme vor und beleuchtet diese fachdidaktisch. Dabei wird ersichtlich, dass einerseits der ideale Einstieg auf Grund der Komplexität des Unterrichtens nicht verifiziert werden kann und dass andererseits diese Vielfalt keinen mathematischen überflüssigen Luxus darstellt, weil nur durch diese Mannigfaltigkeit unter anderem die Differenzierung und Individualisierung gewährleistet werden kann, was wiederum bei den Schüler/innen unter anderem zu höherer Motivation und besserem Verständnis führt.

This paper presents five different introductions – one algebraic, one computer-aided, one historic, one so-called hands-on and one independent method – to the topic of linear systems of equations for the 8th grade and examines them from a didactic perspective. On the one hand, it clearly shows that the ideal introduction cannot be verified due to the complexity of the teaching. On the other hand, it shows that this variety is not a mathematically superfluous luxury, because the differentiation and individualisation, among other things, can only be ensured by this variety; which in turn leads to greater motivation and better understanding, among other things, for the students.