DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Forschung und (Ent-)Faltung

Origami als fruchtbarer Ausgangspunkt für forschendes Lernen
im Mathematikunterricht

verfasst von

Melanie Hunger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreut von	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich in meinem Studium und während des Verfassens meiner Diplomarbeit unterstützt haben und in diesem Sinne maßgeblich an der Entstehung derselben teilhaben.

Insbesondere möchte ich mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger bedanken, der das von mir gewählte Thema mit Begeisterung mitgetragen hat und immer ein geduldiger und wohlwollender Ansprechpartner war.

Des Weiteren bedanke ich mich ausdrücklich bei meinen Eltern und meiner Schwester, die mich bei der Entscheidung, einen zweiten Bildungsweg einzuschlagen immer unterstützten.

Ganz besonders danke ich meinem Ehemann Tim, der mir stets liebevoll und mit bedingungslosem Verständnis zur Seite steht.

Plagiatserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angabe der Quelle ausgewiesen. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind. Ferner versichere ich, diese Arbeit nicht bereits andernorts zur Beurteilung vorgelegt zu haben.

Wien, den 06. Juni 2016, Melanie Hunger

Inhalt

Einleitung

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst,
dass man keine Gelegenheit versäumen sollte,
dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.
Blaise Pascal

Diese Worte, die Wolfgang Henn (2009, S. 50) üblicherweise nutzt, um seine Publikationen zu Origami abzuschließen, sollen den Ausgangspunkt dieser Arbeit bilden. Eine der wichtigsten Aufgaben der Mathematikdidaktik muss es sein, Wege und Möglichkeiten zu finden, Kreativität, Freude und Schönheit, die mit diesem Fach untrennbar verbunden sind, im Unterricht aufleben zu lassen. In den folgenden Seiten wird versucht, einen kleinen Beitrag zu dieser großen Aufgabe zu leisten.

Dahinter steht die Überzeugung, dass es in der Mathematik nicht darum geht, was ist, sondern warum etwas ist und was sein könnte. Die Wege und Irrwege der Suche nach einer Lösung stehen im Zentrum des Fachgebietes. Die Lösung selbst scheint im Vergleich dazu beinahe irrelevant zu werden. Mathematikunterricht, soll er dem wissenschaftlichen Fachgebiet gerecht werden, muss also weit über das Memorieren von Formeln und Einüben verschiedener Algorithmen hinausgehen. Er muss Schülerinnen und Schüler in den Prozess des Fragens, Suchens und Entdeckens miteinbeziehen. Oder wie es Paul Lockhart (2009, S. 5) so viel treffender zu formulieren vermag:

> „If you deny students the opportunity to engage in this activity— to pose their own problems, make their own conjectures and discoveries, to be wrong, to be creatively frustrated, to have an inspiration, and to cobble together their own explanations and proofs— you deny them mathematics itself."

Forschendes Lernen ist ein Unterrichtsprinzip, in dem die Aktivität der Schülerinnen und Schüler eine zentrale Rolle spielt. Ihre Fragen, Ideen und Lösungsversuche stehen im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens. Die Grundidee des Konzepts besteht aus der weitgehenden Parallelisierung des Lernens mit dem Forschungsprozess der wissenschaftlichen Disziplin. Die Aufgabe der Lehrperson besteht vor allem im Auffinden geeigneter Lernimpulse, welche die Neugier der Lernenden wecken, zum Fragen anregen und Erkundungen in vielerlei Richtungen und auf unterschiedlichstem Niveau erlauben. Origami – so zumindest die Hypothese dieser Arbeit – liefert als aktuelles Forschungsgebiet der Mathematik durchaus eine breite Palette an Aktivitäten, die sich aufgrund ihrer mathematischen Reichhaltigkeit als Ausgangspunkt für forschendes Lernen anbieten.

In den folgenden Ausarbeitungen soll gezeigt werden, wie der Einsatz von Origami dazu beitragen kann, forschendes Lernen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II sinnstiftend einzusetzen. Dieses Vorhaben wurde in vier Teilziele unterteilt, die auch gleichzeitig die ersten vier Kapitel dieser Arbeit bilden. Zunächst wird der Begriff „forschendes Lernen“ geklärt. Zu diesem Zweck soll auf die Wurzeln des Unterrichtsprinzips eingegangen, verschiedene Definitionen präsentiert und moderne Auffassungen erörtert werden. Im zweiten Kapitel werden die Besonderheiten der Lehrmethode für den Mathematikunterricht ausgearbeitet und ein Vorschlag für ein fachspezifisches Modell für forschendes Lernen vorgelegt. Das dritte Kapitel befasst sich mit den Möglichkeiten, Origami als Lernanstoß für forschungsbasierten Unterricht zu nutzen. Exemplarisch werden darin Fragestellungen, Sätze und Beweise des mathematischen Origami thematisiert, die als Hintergrundwissen für Lehrpersonen sinnvoll erscheinen. Überdies zeigt das Kapitel Chancen und Probleme auf, die sich durch den Einsatz von Origami im Zuge forschenden Lernens im Mathematikunterricht ergeben. Abschließend werden im vierten Kapitel drei Unterrichtsentwürfe präsentiert, die illustrieren sollen, auf welch unterschiedliche Weise Origami in den verschiedensten Schulstufen als Ausgangspunkt forschenden Lernens eingesetzt werden kann. Eines der Unterrichtskonzepte wurde an einer Wiener Mittelschule durchgeführt, wodurch die Ausführungen dazu um einen Erfahrungsbericht und eine Reflexion ergänzt werden konnten.

Die Leserin oder der Leser soll also sowohl theoretische, als auch praxisbezogene Einblicke in die hier vorgeschlagene Symbiose von Origami und forschendem Lernen gewinnen können.

Viel Vergnügen beim Lesen und Falten!

1. Der Begriff „forschendes Lernen“

1.1 Der Ruf nach einer veränderten Unterrichtspraxis: Wozu forschendes Lernen?

In den letzten Jahren wurden die Stimmen, die eine Veränderung in der Unterrichtspraxis forderten, immer lauter. Ein ausschlaggebender Punkt für diese Entwicklung war die im Jahr 2006 veröffentlichte OECD Studie „Evolution of Student Interest in Science and Technology Studies“. Die Studie zeigte, dass das Interesse europäischer Jugendlicher für Wissenschaft und Technik in den Jahren von 1994 bis 2003 kontinuierlich und teilweise stark zurückging. In Mathematik und naturwissenschaftlichen Studien lässt sich sogar ein Abwärtstrend der absoluten Anzahl der Studierenden feststellen. So ist beispielsweise in Deutschland die Zahl der Mathematikstudierenden in diesem Zeitraum um mehr als 20 Prozent gesunken. In den Naturwissenschaften hat sie sich sogar halbiert. (Bonga et al., 2006, S. 14) In Österreich sieht die Lage nicht besser aus. Laut der Eurobarometer-Umfrage „Responsible Research and Innovation (RRI), Science and Technology“ aus dem Jahr 2013 gaben lediglich 45 Prozent der österreichischen Befragten an, sich für Innovationen in den Bereichen Wissenschaft und Technik zu interessieren, was deutlich unter dem EU-Durchschnitt von 53 Prozent liegt. (TNS Opinion & Social, 2013, S. 15) Dies bestätigte auch die PISA-Studie des Jahres 2012 für den Spezialfall Mathematik. Die österreichischen Schülerinnen und Schüler zählen zu denjenigen der OECD-Länder, die am wenigsten Interesse an Mathematik zeigen. Während im Durchschnitt 53 Prozent der Befragten im gesamten OECD-Raum der Aussage „Mich interessiert das, was ich in Mathematik lerne“ zustimmten, waren es in Österreich lediglich 41 Prozent. Besonders gravierend ist diesbezüglich der Unterschied zwischen Mädchen und Jungen. (PISA, 2012, S. 6) Dass diese Ergebnisse als besorgniserregend eingestuft wurden, ist durchaus nachvollziehbar. Immerhin werden die eben genannten Disziplinen oft als das Herzstück jeder nachhaltigen sozio-ökonomischen Entwicklung verstanden.

Im sogenannten Rocard-Report, der von der Europäischen Kommission herausgegeben wurde (2006, S. 8) wird den Gründen dieser Entwicklung zwar hohe Komplexität zugesprochen, trotzdem sehen die Autoren einen der entscheidendsten Faktoren in der Art und Weise, wie Mathematik und Naturwissenschaften unterrichtet werden. Frühe positive oder negative Erfahrungen im naturwissenschaftlichen

Kontext können entscheidend für die Interessensbildung sein. Besonders junge Kinder weisen zwar oft eine natürliche Neugier für die Entdeckung der sie umgebenden Welt auf, diese kann aber durch eindimensional auf reinen Wissenserwerb fokussierten Unterricht nicht nur gehemmt, sondern sogar gänzlich erstickt werden. Aus diesem Grund empfiehlt Michel Rocard (2006, S. 12f), Unterricht vorwiegend auf konzeptionelles Verständnis und Methodenkompetenz auszurichten, statt das punktuelle Reproduktionswissen ins Zentrum pädagogischer Bemühungen zu stellen.

Auf diese Weise soll bei Schülerinnen und Schülern nicht nur das Interesse für Mathematik und Naturwissenschaften geweckt werden, sie sollen außerdem auf das 21. Jahrhundert vorbereitet werden. Ein häufig verwendetes Schlagwort diesbezüglich sind sogenannte „21st Century skills". Jugendliche lernen nicht für die Gegenwart, sondern für die Zukunft, ihre Zukunft. In einer Welt, die von rasanter Veränderung und in weiten Teilen unvorhersehbarem technischen Fortschritt geprägt ist, sind Problemlösekompetenz, Selbstständigkeit, Teamfähigkeit und Kreativität nicht nur von großem Vorteil, sondern sogar unerlässlich. (vgl. Bell, 2010, 40ff) In einer zunehmend technisierten Wissensgesellschaft wird die sogenannte „Scientific Literacy" - ins Deutsche oft als „wissenschaftliche Grundbildung" übersetzt - eine immer größere Rolle spielen. In diesem Zusammenhang wird von den Fähigkeiten gesprochen, Fachwissen anzuwenden, wissenschaftliche Fragen zu erkennen, begründete Schlussfolgerungen zu ziehen, um nicht nur die Welt besser zu verstehen, sondern auch die Veränderungen in ihr, die aus menschlicher Kraft heraus geschehen. (vgl. PISA, 2009, S. 50) Aus diesen Gründen spricht sich Michel Rocard (2006, S. 17f) für die Förderung und Unterstützung der europaweiten Implementierung des forschenden Lernens im schulischen Regelunterricht aus, wird doch dieser Unterrichtsform ein großes Potential zugeschrieben, Jugendliche für Naturwissenschaften, Technik und Mathematik zu begeistern, sowie tiefes konzeptuelles Verständnis und wissenschaftliche Methodenkompetenz zu vermitteln.

Daran kann man bereits beispielhaft erkennen, welche Richtung die Europäische Union im primären und sekundären Bildungsbereich einschlägt. Allein in den letzten Jahren wurden von der Europäischen Union ca. 60 Millionen Euro bereitgestellt, um forschendes Lernen europaweit zu etablieren. (vgl. Schütz, Hossein & Streicher, 2010, S. 43) So entstanden zahlreiche Projekte mit dem Ziel, den Einsatz forschungsorientierter Bildungskonzepte in der Unterrichtspraxis europaweit zu unterstützen. Dazu gehören beispielsweise SAILS (Strategies for Assessment of Inquiry Learning in Sience), PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe), PROFILES (Professional Reflexion Orientated Focus on Inquiry-based Learning and Education) oder S-TEAM (Science-Teacher Education Advanced Methods), um nur einige exemplarisch zu nennen.

Um verstehen zu können, wie es zu diesem überaus großen Engagement in Bezug auf forschendes Lernen gekommen ist, sollen im folgenden Kapitel die Wurzeln moderner Konzeptionen dieser Unterrichtsmethode erläutert werden.

1.2 Theoretische und historische Hintergründe des forschenden Lernens

Wenn im vorangegangenen Kapitel der Eindruck entstand, forschendes Lernen wäre eine Erfindung des 21. Jahrhunderts, so trügt der Schein. Bereits in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wies John Dewey auf die Bedeutung der Aktivität und Individualität des Lernprozesses hin. Jean Piaget und Jerome Bruner verstanden Lernen bereits als einen entdeckenden Prozess, der durch eine anregende Umwelt initiiert wird. In den 1970er Jahren wurde nicht nur die Bundesassistentenschrift „Forschendes Lernen – wissenschaftliches Prüfen“ veröffentlicht, die den Begriff „Forschendes Lernen“ erstmals in den didaktischen Diskurs einführte, zudem entwickelten Heinz Schmidkunz und Helmut Lindemann bereits die lerntheoretischen Grundlagen für das „Forschend-Entwicklende Unterrichtsverfahren“. Ernst von Glaserfeld postulierte Ende des 20. Jahrhunderts, dass sich Wissen nicht durch Sprache übertragen lässt. Es würde vielmehr vom Lernenden aktiv konstruiert. Anfang des 21. Jahrhunderts ergänzte Keith R. Sawyer diesen Ansatz um den kollaborativen Aspekt des Lernens. Er ist somit ein Vertreter des Sozio-Konstruktivismus, der als theoretische Basis für die Entwicklung von Unterrichtsformen des forschenden Lernens dient. Diese theoretischen und historischen Hintergründe sollen in den nächsten Abschnitten genauer erörtert werden.

1.2.1 John Dewey

Bereits Ende des 19. Jahrhunderts setzte sich John Dewey für ein Bild des aktiven, neugierigen Kindes im schulischen Kontext ein. Er will vier grundlegende Impulse erkennen, mit denen jedes Kind in die Schule eintritt: den Impuls zu kommunizieren, zu konstruieren, zu erforschen und sich in gehobener Weise auszudrücken (to communicate, to construct, to inquire and to express in finer form). Für jene Lehrkräfte, die ein tiefes Verständnis für die psychologischen Vorgänge des Phänomens Lernen aufbringen, stellen diese Impulse eine natürliche Ressource dar, auf die, nach Dewey , jede Entwicklung des Kindes basiert. (vgl. Hildebrand, 2008) Für den Philosophen kann sich naturwissenschaftlicher Unterricht nicht im Memorieren von Fakten erschöpfen. Er setzt sich bereits Anfang des 20. Jahrhunderts für einen problemorientierten Ansatz in der Bildung ein und sieht den wissenschaftlichen Denk- und Arbeitsprozess zentral für jede Art der Erkenntnisgewinnung. (vgl. Bell, 2006, S. 3) In der Auseinandersetzung mit Problemsituationen erfahren Lernende, dass die Überwindung von Hindernissen genaue Beobachtung und Hypothesenbildung erfordert. Eine solche Annäherung an die wissenschaftliche Methode fördere, laut Dewey, auf natürliche Art und Weise die Fähigkeit zu analytischem und kritischem Denken und ist somit Voraussetzung für die Ausbildung eines Verantwortungsgefühls für die aktive und selbstständige Entwicklung von Problemlösestrategien. (vgl. Hildebrand, 2008) Dewey schlägt eine Art Spiralmodell des Lehr- und Lernprozesses vor, das sich von einem Punkt aus in vier Schritten erweitert.

1. „Start with interest."
   Um Schülerinnen und Schüler zum Lernen zu motivieren, sollen ihre Interessen, Aktivitäten und ihr Umfeld den Ausgangspunkt für den Unterricht bilden.

2. „Employ cumulative sequences."
   Fachliche Themen sollten auf natürliche Weise aufeinander aufbauen. Aus dem Rückblick auf bereits Gelerntes sollte sich unwillkürlich ein Ausblick auf kommende Projekte und Themen ergeben.

3. „Introduce specialization gradually."
   Lernen sollte nicht getrennt vom alltäglichen Leben stattfinden. Aus diesem Grund schlägt Dewey vor, spezialisierte Themen und Konzepte im Kontext relevanter Problemsituationen einzuführen.

4. „Introduce abstract concepts and symbols when appropriate."
   Formalen Darstellungen sollte ein tiefes Verständnis vorausgehen.

(vgl. Hildebrand,2008)

Einige Jahre nach Deweys Überlegungen gewannen behavioristische Strömungen der Psychologie enorm an Bedeutung, was das Verständnis für Lernprozesse entscheidend beeinflusste. Das 20. Jahrhundert war geprägt von einem ständigen Wandel durch gegenseitiges Ablösen verschiedener psychologischer Richtungen. Diese Entwicklung soll im nächsten Kapitel kurz dargestellt werden, um die Voraussetzungen für moderne Konzeptionen forschenden Lernens nachvollziehen zu können.

1.2.2 Vom Behaviorismus zum Sozio-Konstruktivismus: Ein Paradigmenwechsel

Nach der Gründung des ersten experimentalpsychologischen Labors durch Wilhelm Wundt im Jahre 1879 konnte sich die Psychologie als eigene Wissenschaft etablieren. Im 20. Jahrhundert erblühten daraufhin zahlreiche psychologische Strömungen, welche die heutigen Auffassungen von Lernen entscheidend prägten.

Mit der systematischen Kritik an den anfänglich spekulativen Methoden der Psychologie leitete James Watson bereits im Jahr 1914 die erste Wende der noch so jungen Wissenschaft ein. Tobias Künkler (2008, S. 34) betont, dass die Errungenschaften dieser „behavioristischen Revolution" nicht zu unterschätzen seien. Erst jene kritischen Bemühungen läuteten die Zeiten der Psychologie als empirische Wissenschaft ein. Nach dem Vorbild der Naturwissenschaften sollten die psychologischen Phänomene und somit auch das Lernen ausschließlich auf das Beobachtbare reduziert werden. In letzter Konsequenz führte dieser Ansatz zu einem Ausschluss aller subjektiven Phänomene, wie beispielsweise Bewusstsein, Wille oder Vorstellung. Diese Vorgänge werden von Behavioristen nicht gänzlich negiert, sie verschwinden allerdings in einer „black box", über die keine Aussage getroffen werden kann. Jede psychologische Erklärung sollte sich auf beobachtbares Verhalten stützen. Diese Prinzipien führten im Weiteren vor allem durch die Arbeiten von Watson, Pawlow, Thorndike und Skinner zu lerntheoretischen Ansätzen, bei denen das Phänomen Lernen durch reine Reiz-Reaktions-Muster erklärt wurde. So entwickelte sich die Vorstellung vom Lernen als eine durch Umweltreize determinierte, von jeglicher Subjektivität befreite Verhaltensänderung: „Es ist immer die Umwelt, die das Verhalten erzeugt, (…) auch dann, wenn die Probleme Teil jener von unserer eigenen Haut umschlossenen privaten Welt sind." (Skinner, 1973, zitiert nach Künkler, 2008, S. 34f) Hinter der Folie behavioristischer Auffassungen mutiert das Phänomen Lernen also gänzlich zu einem Produkt erfolgreicher Konditionierung durch die Lehrperson und Unterricht zu einer Art Trainingssituation, in der dieser Konditionierungsprozess stattfindet. Diese beinahe deterministische Degradierung des lernenden Subjekts stieß verständlicherweise auf Kritik, die noch zusätzlich von dem Umstand gestützt wurde, dass behavioristische Lerntheorien vorwiegend mit empirischen Ergebnissen aus Tierversuchen untermauert wurden. Dies bestätigte die gravierenden Vorwürfe gegen behavioristische Theorien, blinde Flecken bezüglich der spezifischen Aspekte menschlichen Lernens aufzuweisen.

Die zunehmende Bedeutung des Computers im wissenschaftlichen Kontext beeinflusste ab den 1960er Jahren auch psychologische Auffassungen des menschlichen Lernprozesses. Die kognitive Lernpsychologie versucht, subjektive Vorgänge sichtbar zu machen, indem sie sich Computermetaphern zu deren Beschreibung bedient, und löste damit den Behaviorismus als vorherrschendes Paradigma der psychologischen Lerntheorien ab. (vgl. Künkler, 2008, S. 35) Lernen wird im Kontext kognitivistischer Ansätze vorwiegend als Informationsverarbeitung verstanden, die Lernenden als rationale User ihres Prozessors. Damit kommt ihnen eine bereits aktivere Rolle zu, als es noch im Zuge behavioristischer Theorien üblich war. Für Jean Piaget spielt die Aktivität des Subjekts im Lernprozess eine besondere Rolle. Das Kind eignet sich die Welt in aktiver Auseinandersetzung mit ihr an und kann die physische Realität in Gedanken sogar überschreiten: „Will man einen angemessenen Lernbegriff darlegen, muss man zuerst erklären, wie es dem Subjekt gelingt, zu konstruieren und zu erfinden, nicht bloß, wie es wiederholt und abbildet.“ (Piaget, 1970/2003, S. 75) Jerome Bruner, ein Name, der in starkem Zusammenhang mit der Unterrichtsmethode des entdeckenden Lernens steht, vertritt eine ähnliche Auffassung von Lernen wie Jean Piaget. Bruner (1996, S. 5) weist allerdings explizit darauf hin, dass die Computermetapher zu kurz greift und die chaotischen, regelwidrigen, und widersprüchlichen Facetten des Verstehens und Begreifens („the messy, ambiguous, and context-sensitive processes of meaning making“) nicht erklären kann. Die kognitive Struktur, der das Lernen folgt, ist nicht inhaltlich, sondern situiert und damit immer prozesshaft zu denken. Er betont ähnlich, wie bereits Piaget vor ihm, die Bedeutung der Lernumgebung. Zusätzlich hebt er die Relevanz der Metakognitionen für die Entwicklung eines konzeptuellen Verständnisses des Inhaltlichen hervor und bereitet damit den Weg zur Entwicklung des forschenden Lernens.

Seit Piaget waren bereits konstruktivistische Überlegungen in den kognitivistischen Theorien präsent. Der sogenannte radikale Konstruktivismus entwickelte sich jedoch erst in der zweiten Hälfte der 1990er Jahre. (vgl. Künkler, 2008, S. 40) Das Fundament aller konstruktivistischer Ansätze besteht aus der Grundvorstellung, dass Wissen nicht einfach durch interpersonelle Übertragung weitergegeben werden kann, sondern von jedem Subjekt in einem aktiven, individuellen Prozess konstruiert werden muss. Glaserfeld (1997, S. 204) rückt die Problematik der Sprache ins Zentrum seiner Überlegungen und postuliert, „daß Wissen in einem Netzwerk begrifflicher Strukturen besteht und als solches nicht einfach mit Hilfe von Wörtern übertragen werden kann, denn begriffliche Strukturen müssen von jedem lernenden Individuum selbst konstruiert werden.“ Wissen selbst ist für ihn keine Repräsentation der Wirklichkeit, es ist vielmehr ein Vorrat an begrifflichen Zusammenhängen, die sich für ein Subjekt als nützlich erwiesen haben. Für die pädagogische Praxis spricht sich Glaserfeld (1997, S. 208f.) dafür aus, die Begriffe Training und Lehren voneinander zu unterscheiden. Die Trainerin und der Trainer kennen immer die richtige Antwort und müssen durch geschicktes Konditionieren ihre Zöglinge dazu bringen, diese bei Bedarf auszuspucken. Das Verstehen bleibt hier laut Glaserfeld vollkommen nebensächlich. Im Gegensatz dazu muss die „Kunst des Lehrens“ darauf abzielen, die Schülerinnen und Schüler „dazu zu bewegen, selbständig Probleme zu formulieren, die die Denkweisen fördern, die sie lernen sollen.“ (Glaserfeld, 1997, S. 209) Er plädiert dafür den Lernenden ein „ungeschminktes Bild der wissenschaftlichen Praxis“ zu vermitteln, statt in ihnen die Fiktion einer beobachterunabhängigen Realität aufrecht zu erhalten. Dies wäre erreichbar, wenn es in der Schule gelingen könnte, ein tiefes Verständnis für wissenschaftliche Methoden der Erkenntnisgewinnung zu vermitteln und Schülerinnen und Schülern somit die Fertigkeiten in die Hand zu geben, ihre eigenen Probleme zu lösen. Zwar spricht Glaserfeld selbst nicht von forschendem Lernen, allerdings lässt sich recht einfach ablesen, dass sein Verständnis von Lernen und die Ansprüche, die er an Unterricht stellt, mit der Grundidee des forschenden Lernens übereinstimmen.

Der sogenannte Sozio-Konstruktivismus wird momentan von der OECD als das vorherrschende Konzept propagiert, aus dem heraus Lernprozesse verstanden werden. (vgl. Dumont & Istance, 2010, S. 3) Er ist eine Weiterentwicklung des Konstruktivismus, bei der ein starker Akzent auf die soziale Komponente des

Lernprozesses gelegt wird. Während im radikalen Konstruktivismus Lernen als eine im hohen Grade individuelle und private Angelegenheit verstanden wird, heben sozio-konstruktivistische Ansätze die Bedeutung des Einflusses durch das Umfeld auf den Lernprozess hervor. Lernen ist demnach immer situiert zu verstehen und wird konsequenterweise oft in sozialer Interaktion und kollaborativ stattfinden. Forschendes Lernen ist eine der vielen Varianten von Unterricht, die momentan basierend auf dieser Sichtweise umgesetzt und weiterentwickelt werden.

1.2.3 Forschendes Lernen: ein hochschuldidaktisches Prinzip?

Der Begriff „forschendes Lernen" entstammt ursprünglich einem hochschuldidaktischen Diskurs und fand erst im Anschluss – und eigentlich im größeren Rahmen erst Jahrzehnte später – Eingang in Debatten im schulischen Bereich. In die Zeit der Studierendenproteste der 1960er Jahre und umfassenden Studienreformbemühungen fiel auch die Veröffentlichung der Bundesassistenten-schrift „Forschendes Lernen, wissenschaftliches Prüfen" (1970), in der forschendes Lernen als allumfassendes Bildungsprinzip aller Hochschulen angestrebt wurde. (vgl. Aepkers, 2002, S. 73f) Die Bundesassistentenkonferenz rückte die Ziele einer wissenschaftlichen Ausbildung ins Zentrum ihrer Überlegungen und stellte fest, dass wenn Wissenschaft als Vollzug gedacht wird, auch die Ausbildung eine Teilnahme an diesem Vollzug sein muss. Nie aber könne sie die „bloße Übernahme vorliegender Ergebnisse sein." (Fischer-Appelt et al., 1970, S. 9) Die Konferenz schreibt dem forschenden Lernen abgrenzend zum entdeckenden Lernen folgende Merkmale zu:

- „die selbstständige Wahl des Themas durch den Forschenden (Lernenden), gleichgültig ob ihm das Problem durch eigene Arbeit, Beratung, Diskussion oder Beobachtung bewußt geworden ist;
- die selbstständige „Strategie", besonders die Entscheidung in der Auswahl möglicher Methoden, Versuchsanordnungen, Recherchen usw.; der Forschende ist beraten, aber nicht vor Fehldispositionen und Umwegen geschützt;
- das entsprechende unbegrenzte Risiko an Irrtümern und Umwegen einerseits, die Chance für Zufallsfunde, „fruchtbare Momente", unerwartete Nebenergebnisse andererseits;
- die Notwendigkeit, dem Anspruch der Wissenschaft zu genügen, d.h. den Forschungsansatz mit Ausdauer und logischer Konsequenz bis zu einem

(positiven oder negativen) Ergebnis durchzuhalten, die vorhandenen Kenntnisse und Instrumente zur Lösung des Problems in zureichendem Maße zu prüfen (also nicht durch ein wenig Umsehen rasch auffindbare Lösungen zum Gegenstand neuen umständlichen Forschens zu machen) usw.;

- Prüfung des Ergebnisses hinsichtlich seiner Abhängigkeit von Hypothesen und Methoden;
- die Aufgabe, das erreichte Resultat so darzustellen, daß seine Bedeutung klar und der Weg zu ihm nachprüfbar wird.“ (Fischer-Appelt et al., 1970, S. 14f)

Die Bundesassistentenkonferenz erhoffte sich, forschendes Lernen als methodische Umsetzung des Postulats der Einheit von Forschung und Lehre an allen Hochschulen und in möglichst vielen Disziplinen implementieren zu können. Dass dies kaum oder nur sehr vereinzelt geschah, ist leicht zu erkennen. Selbstverständlich stellt sich hier konsequenterweise die Frage, wie das Prinzip des forschenden Lernens im schulischen Kontext umgesetzt werden kann, wenn die flächendeckende Etablierung der didaktischen Methode offensichtlich im hochschuldidaktischen Bereich scheiterte.

1.2.4 Ein Vorläufer: das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren

Für den naturwissenschaftlichen Unterricht konzipierten Heinz Schmidkunz und Helmut Lindemann bereits im Jahr 1976 das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren, welches bereits entscheidende Elemente des modernen Verständnisses von forschendem Lernen beinhaltet. Schmidkunz und Lindemann erarbeiteten das Unterrichtsverfahren mit besonderem Augenmerk auf den Chemieunterricht. Fries und Rosenberger entwickelnden das entsprechende Konzept für den Physik- und Mathematikunterricht.

Das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren basiert auf der Aktivität der Schülerinnen und Schüler und auf problemorientierten didaktischen Ansätzen. Interesse der Lernenden, der selbstständige Wissenserwerb, Erfolgserlebnisse, das Lernen aus Problemsituationen, die Einbeziehung aller Fähigkeitsbereiche, die Strukturierung und das genetische Lernen, sowie Individualisierung und exemplarisches Lernen werden als Prinzipien genannt, auf denen das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren basiert. (vgl. Schmidkunz & Lindemann, 1976/1992, S. 13) Charakteristisch für die Ausarbeitung von Schmidkunz und

Lindemann bzw. Fries und Rosenberger ist die genaue Strukturierung des Lernprozesses. Sie erfolgt in fünf zeitlich aufeinander folgenden Denkstufen, welche wiederum in Denkphasen unterteilt sind. „Diese Struktur erlaubt dem Anfänger als auch dem erfahrenen Lehrer jederzeit den Stand des Unterrichtsfortgangs zu erkennen und handelnd zu beeinflussen. Der Lehrende kann sicher steuernd und regelnd in den Unterricht eingreifen, falls dies erforderlich ist oder erwünscht wird.“ (Schmidkunz & Lindemann, 1976/1992, S. 21)

Als erste Denkstufe wird die „Problemgewinnung“ bezeichnet. Sie besteht aus den Denkphasen „Problemgrund“, „Problemerfassung“ und „Problemerkenntnis“. Die Lernenden sollen in diesen Phasen ein Bewusstsein für ein Problem entwickeln, es klar erkennen und schließlich auch formulieren. Wenn die Problemerfassung selbstständig durch Schülerinnen und Schüler erfolgt, wird von „Problemfindung“ gesprochen. Der Begriff „Problemstellung“ wird verwendet, falls das Problem von der Lehrkraft aufgezeigt wird. „Überlegungen zur Problemlösung“ stellen die zweite Denkstufe dar, die in die Denkphasen „Analyse des Problems“, „Lösungsvorschläge“ und „Entscheidung für einen Lösungsvorschlag“ gegliedert ist. In der Phase „Analyse des Problems“ soll einerseits Vorwissen bereitgestellt werden, andererseits aber in einem kreativen Akt Hypothesen entwickelt werden. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler Lösungsansätze erarbeiten, sich für einen entscheiden und ihre Wahl begründen können. Die „Durchführung eines Lösevorschlages“ bildet die dritte Denkstufe, welche wiederum in die Phasen „Planung des Lösevorhabens“, „praktische Durchführung des Lösevorhabens“ und die „Diskussion der Ergebnisse“ unterteilt ist. Bei der Planung wird entschieden, in welcher Sozialform gearbeitet werden soll. Erst daran schließt die tatsächliche Durchführung an. Die Ergebnisse des Experiments sollen übersichtlich protokolliert, zusammengetragen und diskutiert werden. Die vierte Denkstufe heißt „Abstraktion der gewonnenen Erkenntnisse“, welche aus den drei Phasen „ikonische Abstraktion“, „verbale Abstraktion“ und „symbolhafte Abstraktion“ besteht. Wie die Bezeichnungen der Denkphasen bereits vermuten lassen, sollen Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse zuerst bildlich darstellen, was ihnen helfen soll, ihre Erkenntnisse und deren Zusammenhänge anschließend auch verbal präsentieren zu können. Angestrebt wird schlussendlich eine symbolhafte Abstraktion. Hier sollen Sachverhalte mathematisch oder auf andere Weise formal dargestellt werden. Schmidkunz und Lindemann geben in Bezug auf den

Chemieunterricht das Beispiel der Reaktionsgleichungen. Die drei Phasen „Anwendungsbeispiele", „Wiederholung" und „Lernzielkontrolle" bilden die fünfte und letzte Denkstufe der „Wissenssicherung". In dieser Phase sollen Querverbindungen zu Alltagssituationen, anderen Unterrichtsfächern, sowie Natur und Technik hergestellt werden. Die Vorgehensweise und Ergebnisse sollen wiederholt und eventuell durch eine Lernzielkontrolle gesichert werden, die vor allem der Evaluation des Unterrichts dienen kann. Zusammenfassend ist das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren wie folgt aufgebaut:

Denkstufe	Denkphase	Feingliederung
1. Problemgewinnung	a. Problemgrund b. Problemerfassung c. Problemerkenntnis/-formulierung	Problemfindung/-stellung
2. Überlegungen zur Problemlösung	a. Analyse des Problems b. Lösungsvorschläge c. Entscheidung für einen Lösungsvorschlag	i. Bereitstellung des Vorwissen ii. Hypothesenbildung
3. Durchführung eines Lösevorschlages	a. Planung des Lösevorhabens b. Praktische Durchführung des Lösevorhabens c. Diskussion der Ergebnisse	i. Sozialformfestlegung ii. Vorbereitung des Experiments
4. Abstraktion der gewonnenen Erkenntnisse	a. Ikonische Abstraktion b. Verbale Abstraktion c. Symbolhafte Abstraktion	
5. Wissenssicherung	a. Anwendungsbeispiele b. Wiederholung c. Lernzielkontrolle	

Tab. 1: Strukturierung des Lernprozesses im Zuge des forschend-entwickelnden Unterrichtsverfahrens (vgl. Schmidkunz & Lindemann , 1976 / 1992, S. 37)

Diese detaillierte Strukturierung des Unterrichtsverlaufs soll Lehrkräfte dabei unterstützen, forschungsbasierten Unterricht zu planen und durchzuführen. Allerdings entsteht der Eindruck, dass dieses enge Korsett vor allem dazu dient, den Lehrerinnen und Lehrern das Gefühl zu geben, die Zügel nicht allzu sehr aus den

Händen geben zu müssen. Einige Formulierungen der Autoren unterstützen diesen Eindruck. Beispielsweise schreiben Schmidkunz und Lindemann (1976 / 1992, S. 26) bezüglich „Überlegungen zur Problemlösung“: „Der Lehrende muß eine genaue Vorstellung haben, welche Einzelkenntnisse zur Lösung des Problems erforderlich sind, und er muß Sorge dafür tragen, daß die notwendigen Kenntnisse bereitgestellt werden.“ Auf diese Weise bleibt die Lehrkraft nicht nur in der Kontrolle des Lernprozesses, sondern auch der Lernziele. Dies birgt die Gefahr in sich, dass die Lernenden nicht ihre eigenen Lösungswege suchen, sondern die bevorzugten Lösungswege der Lehrkraft erraten, was nicht den moderneren Konzepten forschenden Lernens entsprechen kann. Trotz dieser Bedenken bildet das von Schmidkunz und Lindemann bzw. Fries und Rosenberger entwickelte Unterrichtsverfahren die Basis für den didaktischen Diskurs um forschungsorientierte Lernformen.

1.3 Forschendes Lernen im schulischen Kontext

Durchforstet man die Literatur nach Beispielen für forschendes Lernen, findet man facettenreiche Unterrichtsentwürfe, die oft unterschiedlicher nicht sein könnten. Von Projekten, bei denen Schülerinnen und Schüler gemeinsam mit Lehrlingen und Studierenden monatelang ihren eigenen Roboter entwerfen, der selbstständig Hindernisse erkennen und sie umgehen kann, bis zur Beobachtung von ganz normalen Sanduhren im Unterricht, lässt sich vieles finden. Was ist also forschendes Lernen? Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, um von forschendem Lernen sprechen zu können?

Nach Rudolf Messner (2009a, S. 23) können schulische Arbeitsformen dann als forschendes Lernen bezeichnet werden, „wenn sie dem Suchen und Finden von Erkenntnissen dienen, die für die Lernenden neu sind, und in Haltung und Methode analog den Einstellungen und dem systematischen Vorgehen erfolgen, wie es für wissenschaftliches Arbeiten charakteristisch ist.“ Michael Aepkers (2002, S. 76) definiert forschendes Lernen in Anlehnung an Manfred Bönsch als „aktiver, produktiver und vor allem selbstbestimmter Lernprozess, bei dem der Lernende die Fragen stellt bzw. das Problem selbstständig erörtert und sich dann auf den Weg macht – von Einfallsreichtum und Experimentierfreude gestützt – eine Antwort bzw. Lösung herbeizuführen.“ Für das Science Center Netzwerk steht das Prinzip „Forschendes Lernen“ für eine „ Hands-on und Minds-on Didaktik, in der Lernen als aktiver, konstruktiver, problemorientierter Prozess gesehen wird; die Lernenden werden befähigt, Fragestellungen zu identifizieren, in Kleingruppen individuelle Lösungswege zu entwickeln, diese zu überprüfen und zu interpretieren. Sie erlernen so die Grundprinzipien naturwissenschaftlicher Denkweisen, kooperativen Arbeitens und erfahren Lernen als Erfolgserlebnis. Lehrkräfte und Expert/innen nehmen dabei die Rolle einer wertschätzenden Begleitung für den selbständigen Erkenntnisprozess ein.“ (Schütz, Hossein & Streicher, 2010, S. 1)

Anhand dieser drei exemplarischen aber durchaus repräsentativen Definitionen des forschenden Lernens lässt sich bereits ablesen, dass sich ein tieferes Verständnis jenes Unterrichtsprinzips in der Auseinandersetzung mit drei Hauptaspekten dieses Konzeptes ergeben könnte. Auf der einen Seite stehen der Forschungsbegriff und die Charakteristik des „wissenschaftlichen Arbeitens“, die es einerseits zu erlernen gilt und an der sich andererseits der Lernprozess orientieren soll. Auf der anderen Seite steht der Lernprozess selbst. In der Zusammenführung sollte sich für den didaktischen Diskurs eine Vorstellung einer Unterrichtsmethode ergeben, die sich nicht nur von anderen Methoden abgrenzen und in größere didaktische Prinzipien einordnen lässt, sondern auch Richtlinien für Lehrkräfte zur Verfügung stellt, anhand derer die Umsetzung forschenden Lernens gelingen kann.

1.3.1 Der Forschungsbegriff

Wenn man sich mit forschendem Lernen auseinandersetzten möchte, wird man klären müssen, was unter „Forschung“ zu verstehen ist. Ein Blick in ein gängiges Lexikon verrät Folgendes:

> „Forschung, i. e. S. die planmäßige und zielgerichtete Suche nach neuen Erkenntnissen in einem Wissensgebiet; i. w. S. die Gesamtheit der in allen Bereichen der Wissenschaft erfolgenden methodisch-systematischen und schöpferisch-geistigen Bemühungen, die das Gewinnen neuer allgemein nachprüfbaren Erkenntnisse sowie das Ermitteln ihrer Gesetzmäßigkeiten ermöglichen.“ (Brockhaus in drei Bänden, 2000)

Auch wenn diese Definition viel Raum für Interpretation lässt, was unter anderem der großen Diversität der Forschungsvorgänge der einzelnen Disziplinen und ihrer

Teilbereiche geschuldet ist, so lassen sich trotzdem einzelne Charakteristika ausmachen, die mit Forschung untrennbar verbunden sind. Zielgerichtetheit, Neuheit, Planung und Nachprüfbarkeit können als Grundlage des Forschungsbegriffs herangezogen werden. In der Bundesassistentenschrift zum forschenden Lernen und wissenschaftlichen Prüfen (1970, S. 12f) wird allerdings darauf hingewiesen, dass sich der Begriff „Forschung“ nicht einfach fassen und beispielsweise von „wissenschaftlichem Arbeiten“ kaum oder nur schwer unterscheiden lässt. Grund dafür sehen die Autoren in der Unmöglichkeit, die verschiedenen Begriffe von „Forschung“, wie sie in einzelnen Disziplinen gelten, zu harmonisieren. Sie finden aber als Grundlage für das didaktische Prinzip des forschenden Lernens folgende Kriterien:

> „Entscheidend ist vielmehr die strukturelle Gleichheit der Situation des Forschenden (…), die Aufgabe, ein noch nicht strukturiertes Feld zu erkunden, und für diese Exploration bezeichnende Tätigkeiten: Entdeckung oder Wiederaufnahme eines (verlorenen) Problems und seine immer weiter präzisierte Bestimmung; Hypothesenbildung; Entwurf von Strategien; Versuche in Variationen; Probe auf Alternativen; Umwege, Rückschläge, Zufallsfunde, „fruchtbare Momente“ und kritische Prüfungen der Ergebnisse; Selbstständigkeit in all diesen Schritten und ein je nach Umfang verschiedenes Risiko des Fehlschlags.“ (Fischer-Appelt et al., 1970, S. 13f)

Forschen ist also erkunden und strukturieren. Dazu gehören die oben genannten Tätigkeiten, die für jede einzelne Disziplin im Detail spezifiziert werden müssen, was im nächsten Kapitel für das Fach Mathematik versucht werden soll.

Ob der Forschungsbegriff im schulischen Kontext als sinnvoll erachtet werden kann, hängt stark vom Verständnis des Begriffes selbst ab. Für Messner (2009a, S. 22) stellt Forschen eine „notwendige universelle menschliche Grundfähigkeit“ dar, die nicht abgeschottet vom Großteil der Gesellschaft nur einer kleinen auserwählten Gruppe vorenthalten sein sollte: „Wenn Forschen als Grundhaltung und -fähigkeit verstanden wird, die das ganze menschliche Leben durchzieht, dürfte kein Zweifel sein, dass Zehnjährige ihrer mächtig sind.“ (ebd., S. 24) Christian Vielhaber, Leiter des Fachdidaktikzentrums für Geographie und Wirtschaftskunde der Universität Wien, sieht ein solches Forschungsverständnis kritisch. Im Gespräch mit Carmen Villotti (2010, S. 7f) gibt er zu bedenken, dass ein inflationärer Gebrauch des Begriffs „Forschung“ diesen bis zur Unkenntlichkeit verzerren kann und damit der Komplexität desselben nicht mehr gerecht wird. Dazu gehören für ihn unter anderem das

Bekenntnis zur Widerspruchsfreiheit und Objektivität, zur Nachvollziehbarkeit und ethischem Handeln. Im Zusammenhang mit Lernaktivitäten in der Sekundarstufe I und II von Forschung zu sprechen, stellt für ihn eine Überhöhung der Prozesse dar, die dem Begriff der wissenschaftlichen Forschung schadet. Obwohl die Gültigkeit Vielhabers Argumentation hier in keiner Weise angezweifelt werden soll, wird darauf aufmerksam gemacht, dass eine Parallelisierung des Lernprozesses mit dem Forschungsprozess nicht nur den Effekt haben kann, den Forschungsbegriff herabzusetzten, sondern vor allem jenen, den Lernbegriff aufzuwerten. Lernende als „Forscherinnen und Forscher" zu sehen und zu bezeichnen, kann entscheidende Auswirkungen auf ihr Verhalten haben. Wie Philip Zimbardo im Zuge seines berühmten Stanford-Prison-Experiments zeigen konnte, internalisieren Menschen die ihnen zugeschriebenen Rollen schnell und handeln somit auch danach. Nicht die nachträgliche Bezeichnung einer Lernform als „Forschung", sondern das Hineinschlüpfen der Schülerinnen und Schüler in die Rolle von Forscherinnen und Forschern könnte es ermöglichen, dass sie den von Vielhaber genannten Dimensionen wissenschaftlicher Forschung zumindest näher kommen.

1.3.2 Im Zentrum des Interesses forschungsorientierter Unterrichtsformen: der Lernprozess

Forschendes Lernen zählt zu den sogenannten schülerinnen- und schülerzentrierten Unterrichtsmethoden, d.h. dass die Interessen, Ziele und Aktivitäten der Lehrperson in den Hintergrund treten, während jene der Lernenden ins Zentrum des Unterrichts rücken. Konsequenterweise wird in den meisten fachdidaktischen Arbeiten zum Thema forschendes Lernen dem Lernprozess besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Er wird meistens als konstruktiver, individueller, aktiver, selbst gesteuerter, situativer und sozialer Prozess beschrieben. (vgl. Ulm, 2009, S. 93f) Eine Auseinandersetzung mit diesen Adjektiven scheint im Zuge dieser Arbeit sinnvoll, um vermeiden zu können, dass sich hinter dem wohligen Klang dieser idealisierten Worte nicht nur eine leere Begriffshülle verbirgt, die sich letztendlich über jede Unterrichtssituation überstülpen lässt.

1.3.2.1 Ein konstruktiver und individueller Prozess

Wie bereits weiter oben in den theoretischen Grundlagen angedeutet, basiert das Prinzip des forschenden Lernens auf der Theorie des gemäßigten Konstruktivismus bzw. Sozio-Konstruktivismus. „Wissen kann nicht übertragen werden; es muss im Gehirn eines jeden Lernenden neu geschaffen werden“, beschreibt Gerhard Roth (2009, S. 58) die Einstellung zum Wissenserwerb, die Voraussetzung für die Umsetzung von forschungsorientierter Unterrichtsmethoden ist. Wissenserwerb kann nach konstruktivistischer Vorstellung nicht als Aufnehmen oder Speichern gedacht werden, da die Vorstellungen des Menschen keine Repräsentationen der Wirklichkeit sind. Der Mensch hat keinen direkten Zugang zur Realität, da unsere Wahrnehmung nicht mit ihr übereinstimmen muss. Oder besser gesagt: Vom konstruktivistischen Standpunkt ist es unmöglich vom Subjektiven zum ontologisch Objektiven zu gelangen. Ernst von Glaserfeld (1997, S. 47) unterscheidet aus diesem Grund die Begriffe „Wirklichkeit“ und „Realität“:

> „Ich verstehe unter „Wirklichkeit" ein Netzwerk von Begriffen, die sich in der bisherigen Erfahrung des Erlebenden als angemessen, brauchbar oder „viabel" erwiesen haben, und zwar dadurch, daß sie wiederholt zur erfolgreichen Überwindung von Hindernissen oder zur begrifflichen „Assimilation" von Erfahrungskomplexen gedient haben. „Realität" hingegen ist in der konstruktivistischen Perspektive eine Fiktion und zudem eine gefährliche, denn sie wird von Rednern und Autoren zumeist dazu benützt, dem, was sie behaupten, den Anschein absoluter Gültigkeit zu verleihen.“

Das Gehirn verarbeite lediglich die vermittelten Sinneseindrücke und erschaffe damit ihre Qualität. Sinn und Bedeutung werden also erst in diesem Prozess konstruiert, also aus sich selbst heraus entwickelt. Bei der Frage, wie der Aufbau dieses Begriffsnetzwerks vor sich geht, hält sich Glaserfeld weitgehend an Piaget. Die Fähigkeit der Abstraktion wird induktiv aus der erfolgreichen Koordination und Wiederholung von sensomotorischen Erfahrungen gewonnen. Auf diese Weise entstehen beispielsweise Zahl- und Funktionsbegriffe, logische Verbindungen oder das Verständnis für abstrakte Regeln. (vgl. Glaserfeld, 1997, S. 54) In diesem Sinne versucht forschendes Lernen dem individuellen Weg zur Begriffsbildung Rechnung zu tragen, indem Schülerinnen und Schülern der Raum gegeben wird, explorativ und selbstständig zu Bedeutung und Sinn gelangen zu können.

1.3.2.2 Ein aktiver Prozess

Bereits Schmidkunz und Lindemann (1992, S. 14) erheben die hohe eigene Aktivität der Lernenden zu einem Prinzip ihres forschend-entwickelnden Unterrichtsverfahrens:

> „Dem eigenen Erarbeiten von Erkenntnissen – im Gegensatz zum passiven Aufnehmen von Informationen – kommt eine besondere Bedeutung zu. Nur so werden „frei bewegliche Operationen“ erworben, die verinnerlichte Handlungen bedeuten und einen Ausdruck für die Überführung der Erkenntnisse in das Langzeitgedächtnis darstellen. Das ist wiederum eine gute Basis, langfristige Lernprozesse mit großen Erfolgsaussichten einzuleiten, die vor allem eine ausgezeichnete Denkschulung darstellen und damit entscheidend zur Erlangung allgemein hochwertiger Lernziele und Verhaltensweisen beitragen.“

Die beiden Autoren sprechen der Aktivität der Schülerinnen und Schülern also zwei große Bedeutungen zu. Einerseits soll sie dazu beitragen, das Erlernte besser behalten zu können. Diesen Aspekt unterstreicht auch Gerhard Roth (2009, S. 70) und erklärt dies dadurch, dass sich jene Areale im okzipitalen, temporalen und (prä-)frontalen Kortex, die vor allem beim Lesen, Zuhören und Nachdenken aktiviert werden, durch die Eigenaktivität der Lernenden mit exekutiven Arealen im parietalen Kortex verbunden werden, die vornehmlich für das eigene Handeln zuständig sind. Andererseits wird von Schmidkunz und Lindemann etwas angedeutet, was modern ausgedrückt „Kompetenzorientierung“ genannt werden könnte. Durch die eigene Aktivität sollen junge Menschen also zusätzlich Fähigkeiten und Einstellungen erwerben, die lebenslanges Lernen ermöglichen.

Andreas Müller spricht in seinem Vortrag „Lernen braucht Freude am Widerstand“ (2009, S. 43) noch eine weitere Bedeutung der Eigenaktivität der Lernenden an. Das Verstehen einer Sache sei zwangsweise an Aktivität gekoppelt: „Erst wenn Lernende sich selbst mit Inhalten auseinandersetzen, unmittelbar etwas damit anstellen, sie umsetzen, geben sie ihnen eine eigene Form und machen sie begreifbar.“

Im Zusammenhang mit forschendem Lernen warnt Michael Aepkers (2002, S. 77) allerdings vor „unreflektiertem Aktionismus“. Besonders mit jüngeren Schülerinnen und Schülern werde in der Unterrichtspraxis oft rein um des Forschen willens geforscht. Immerhin erfordert der Forschungsprozess genauso wie der Vollzug des Lernens nicht nur den Willen zur Aktivität, sondern auch Momente des Innehaltens, um die Vorgehensweise zu planen und zu reflektieren.

1.3.2.3 Ein selbstgesteuerter Prozess

Forschendes Lernen legt die Verantwortung des Verlaufs des Lernprozesses zumindest teilweise in die Verantwortung der Schülerinnen und Schüler. Sie sollen selbstständig

Fragen generieren, in Eigenregie Forschungsarbeiten planen und durchführen und die Ergebnisse eigenständig präsentieren und evaluieren. Andreas Müller (2009, S. 38f) versteht Autonomie als Voraussetzung für jegliche Art von Lernen. Dahinter steht ein Bild des Menschen als ein von Natur aus neugieriges, forschendes und aktives Wesen, das den Drang hat, sich seine Umwelt anzueignen. Ryan und Deci (2000, zitiert nach Gerhartz & Schrittesser, 2013, S. 2) drücken es folgendermaßen aus: "From birth onward, humans, in their healthiest states, are active, inquisitive, curious, and playful creatures, displaying a ubiquitous readiness to learn and explore, and they do not require extraneous incentives to do so." Der deutsche Bildungsphilosoph Matthias Burchardt nennt das selbst gesteuerte Lernen allerdings einen „pädagogischen Irrweg". Im Gespräch mit Lisa Nimmervoll (2015) warnt er vor einer Überforderung der Schülerinnen und Schüler durch zu viele Lernorganisationsleistungen, die traditioneller Weise in der Verantwortung der Lehrperson liegen, und der damit einhergehenden Unterforderung der Lernenden bezüglich fachlicher Ansprüche. Einige Untersuchungen, welche die Wirksamkeit selbst gesteuerter Lernprozesse erforschen sollten, zeigten zudem, „dass durch ausschließlich selbstgesteuertes Lernen nicht die erhofften Ergebnisse erzielt werden konnten, dass aber durch Hilfestellungen unterstütztes Lernen (Material, Beratung durch Lehrer), sich als außerordentlich erfolgreich erwies." (Aepkers, 2002, S. 78)

Der Weg zur Selbstbestimmung liegt also nicht einfach in ihrer Voraussetzung, denn dies wäre ja so etwas wie ein pädagogischer Zirkelschluss. Autonomie ist etwas, das sich per definitionem zwar nur durch eigene Anstrengung erreichen lassen kann, was allerdings nicht bedeutet, dass man junge Menschen auf diesem Weg nicht unterstützen und fördern soll. Für Ryan und Deci stellen Tätigkeiten, die aus intrinsischer Motivation heraus geschehen, den Prototyp jeglicher selbstbestimmter Aktivität dar. Die dichotome Unterscheidung zwischen intrinsischer und extrinsischer Motivation greift für die beiden Autoren aber zu kurz. Sie begreifen verschiedene Stufen der extrinsischen Motivation als auf einem Kontinuum angeordnet, das von der Außenregulierung (Abwesenheit von Selbstbestimmung), über die Verinnerlichung extern gesetzter Ziele und der Identifikation mit ihnen bis zu ihrer Integration in das eigene Werte- und Bedürfnissystems reicht. Zwar ist diese Integration selbst noch nicht als intrinsische Motivation zu bezeichnen, der Weg dorthin führt aber über solche Integrationsprozesse. Ryan und Deci finden drei Faktoren, welche die

Selbstbestimmungsfähigkeit und die Bereitschaft zu ihr zu fördern vermögen: „relatedness", „support of competence" und „autonomy support." „Relatedness" also die Bezogenheit, spielt auf die Tatsache an, dass Menschen eher bereit sind, extern gesetzte Ziele zu übernehmen, wenn das erwartete Verhalten von „significant others", also der Familie, Freunden, peer-groups oder der Gesellschaft positiv bewertet wird. „Support of Competence" oder Kompetenzförderung bezieht sich auf den Umstand, dass Lernende extern gesetzte Ziele eher verinnerlichen, wenn sie sich den Anforderungen gewachsen fühlen. Nur „autonomy support" oder Autonomieförderung kann zu einer Integration externer Anforderung in das eigene Wertesystem und schlussendlich zu Selbstbestimmung führen. Deci und Ryan stützen sich dabei auf Studien, die zeigten, dass Kinder, deren Eltern weniger Wert auf Kontrolle in der Erziehung legten, mehr Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten und Bereitschaft zum Lernen entwickelten. Dies könne auch auf die schulische Situation zwischen Lehrkräften und Lernenden übertragen werden.

Im Sinne Ryans und Decis wäre es also für forschendes Lernens essentiell, Lernumgebungen zu schaffen,

- die von der Gesellschaft positiv bewertet werden,
- die eine optimale Herausforderung darstellen, also für Schülerinnen und Schüler als überwindbar wahrgenommen werden und nicht so komplex sind, dass sie bei Lernenden Frustration herbeiführen,
- in denen wertschätzendes Feedback möglich und üblich ist und
- in denen die Kontrolle durch die Lehrkraft ihr notwendiges Maß nicht übersteigt. (vgl. Gerhartz & Schrittesser, 2013, S. 2f)

1.3.2.4 Ein situativer und sozialer Prozess

Entscheidend für ein Verständnis des Lernprozesses im Zuge forschungsorientierter Unterrichtsformen ist, dass Lernen immer maßgeblich von der jeweiligen Lernsituation beeinflusst wird. Klaus Konrad (2014, S. 65f) definiert situiertes Lernen folgendermaßen:

> „Situiertes Lernen" bezeichnet eine lernpsychologische Theorie, nach der Materialien aus dem Alltag der Schüler in den Unterricht einbezogen werden, um die Lernfähigkeit und Motivation der Schüler zu fördern. In Anlehnung an sozial-konstruktivistische Ansätze gehen situierte Ansätze davon aus, dass Wissen nicht nur als abstrakte

> Einheit in den Köpfen, sondern (auch) in der Beziehung zwischen Individuum und sozio-kultureller Umwelt verortet sein kann und sich in Produkten, Werkzeugen oder Ressourcen widerspiegelt."

In Bezug auf konstruktivistische Ansätze bedeutet dies also, dass Wissen immer in einem gewissen Kontext konstruiert wird und niemals losgelöst von sozialen oder physikalischen Lernumgebungen zu denken ist. Außerdem hebt Konrad hervor, dass Wissen nicht ausschließlich in den kognitiven Strukturen eines Individuums existiert. Es ist auch im physikalischen und sozialen Kontext repräsentiert. Individuelle kognitive Vorgänge sind also niemals mit dem Erwerb von Wissen gleichzusetzen, der immer im Diskurs stattfindet. Wissen ist demnach stets sozial geteiltes Wissen, d.h. „es wird von den beteiligten Individuen durch soziale Transaktionen gemeinsam entwickelt (ko-konstruiert) und ausgetauscht – womit der diskursiven Qualität von Lehr-Lerndialogen eine wichtige Bedeutung zukommt." (Reusser, 2005, S. 162) Gerade in Bezug auf schulisches Lernen nehmen diese Überlegungen eine zentrale Rolle ein. Die unterstützende Wirkung der Klassengemeinschaft, sowie jene der Lehrkraft sind nicht zu unterschätzen. Diese gilt es laut Volker Ulm (2009, S. 94) produktiv zu nutzen.

Für sozio-konstruktivistische Theorien spielt die Kontextualisierung des Wissens bereits im Zuge des Wissenserwerbs noch eine zusätzliche Rolle. Sie ermöglicht den Lernenden, die erworbenen Wissensinhalte flexibel auf andere Situationen anzuwenden. Auf diese Weise wird das Entstehen sogenannten „trägen Wissens" vermieden, indem die Wissensinhalte in reichhaltigen, authentischen, also nicht komplexitätsreduzierten Kontexten erworben werden. (vgl. Reusser, 2005, S. 162)

1.3.3 Forschendes Lernen als Unterrichtsmethode

Fügt man nun die beiden Begriffe „Forschung" und „Lernen" zu „forschendem Lernen" zusammen, wird damit schließlich eine Unterrichtsmethode bezeichnet, deren Beschreibung sich nicht in anzustrebenden Zielen und idealisierten Lernsituationen erschöpfen kann, sondern für den didaktischen Diskurs von anderen Lehrmethoden abgegrenzt und ihre Beziehung zu umfangreicheren didaktischen Konzepten geklärt werden soll.

Manfred Bönsch (1991/1995, S. 198) sieht forschendes Lernen im Inhaltsfeld von entdeckendem Lernen, problemorientiertem Lernen, genetischem Lernen, Projektlernen und offenem Unterricht. Diesen Kategorien ist gemeinsam, dass sie „ein

Lernen kennzeichnen wollen, das sich im Gegensatz befindet zu rein rezeptivem Lernen, bei dem dargebotene Inhalte aufgenommen, gespeichert und bei Anforderung wiedergegeben werden können.“ All diese Termini stehen im Zusammenhang mit induktivem Lernen, welches oft auch Bottom-up-Ansatz genannt wird. Dieser steht im Gegensatz zum deduktiven Lernen bzw. dem Top-down-Ansatz, bei dem die Lehrkraft, wissenschaftliche Konzepte und ihre logischen Schlussfolgerungen präsentiert und anschließend Beispiele für ihre Anwendung gibt. (vgl. Rocard et al., 2006, S. 9) Dieser Ansatz weist didaktisch durchaus Vorteile auf. Das Wissenskonstrukt kann auf diese Weise in logisch aufeinander aufbauenden Schritten dargelegt und erarbeitet werden. Der Ausgangspunkt des Lernens ist allerdings ein abstraktes Konzept, das nur in den seltensten Fällen lückenlos an die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler anschließt. Induktive Lernformen gehen von der Erfahrung aus, geben also den Schülerinnen und Schülern Raum, das Wissen ausgehend von ihren Beobachtungen, Experimenten und Schlussfolgerungen selbst aufzubauen. Das Begriffsfeld des entdeckenden Lernens, problemorientierten Lernens, genetischen Lernens, Projektlernens und des offenen Unterrichts, in welches es das forschende Lernen einzuordnen gilt, soll in den folgenden Absätzen näher erkundet werden.

Eine besondere Verbindung zu forschendem Lernen weist das Konzept des entdeckenden Lernens auf. Durch die großflächigen Überschneidungen der beiden Methoden fällt eine klare Abgrenzung offensichtlich schwer. Für Bönsch (1991/1995, S. 198) scheint es Anfang der 1990er Jahre angesichts der „nicht exakten schulpädagogischen Terminologie“ angebracht, die Begriffe „forschendes Lernen“ und „entdeckendes Lernen“ synonym zu verwenden. Michael Aepkers (2002, S. 75), beklagt noch Anfang des Jahrhunderts, dass die wenigen Autoren, die sich forschungsorientierten Unterrichtskonzepten zuwenden, allzu selten eine Abgrenzung zu anderen Lernformen, wie dem entdeckenden Lernen, wagen. In einem Briefwechsel zwischen Aepkers und dem Biologiedidaktiker Franz Radits, der sich intensiv mit forschendem und entdeckendem Lernen auseinandersetzt, beschreibt Radits die Beziehung zwischen den beiden Lernformen wie folgt:

> „Entdeckendes Lernen ist essayistisch: Umherschweifen. Addieren der Fundstücke an die vorhandenen Konzepte. Ein Konzeptwechsel durch Anhäufung neuer Erfahrungen geschieht eher zufällig. Erst hier beginnt die Überschneidung mit Forschendem Lernen.“ (zitiert nach Aepkers, 2002, S. 76)

Im Gegensatz zu forschendem Lernen, dessen Vollzug weitgehend mit dem wissenschaftlichen Forschungsprozess parallelisiert zu verstehen ist, scheint entdeckendes Lernen zwar von ähnlichen Prinzipien, wie Aktivität der Lernenden, Handlungsorientierung oder Individualisierung des Lernprozesses, geleitet, das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler aber weniger zielgerichtet und geplant zu sein. Die Aktivitäten der Lernenden klingen bei entdeckendem und forschendem Lernen zunächst gleich. Sabine Liebig (2002, S. 14) nennt folgende Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Zuge des entdeckenden Lernens: sie probieren aus, sie beobachten genau, sie überlegen, sie ziehen Schlüsse, sie suchen geeignete Literatur, sie suchen Informationen, sie fragen Expertinnen und Experten, sie dokumentieren ihren Lernweg und das Ergebnis, sie sprechen darüber, sie reflektieren ihren Weg und das Ergebnis und sie kooperieren. Im Idealfall des forschenden Lernens widmen sich Schülerinnen und Schüler aber mit aller Kraft und Aufmerksamkeit der Lösung eines Problems oder Beantwortung einer Fragestellung. Sie planen und reflektieren ihre Vorgangsweise, prüfen ihre Ergebnisse und publizieren sie in geeigneter Art und Weise. So ähnlich dürfte auch Rudolf Messner (2009a, S. 24) den Zusammenhang zwischen entdeckendem und forschendem Lernen verstanden haben, wenn er entdeckendes Lernen als „Vorform des forschenden Lernens“ bezeichnet.

Im naturwissenschaftlichen Unterricht wird von forschendem Lernen vor allem dann gesprochen, wenn Schülerinnen und Schüler eigene Experimente durchführen. In der Mathematik wird laut Rocard et al. (2006, S. 9) ein strukturell ähnlicher Ansatz oft „problemorientiertes Lernen“ („problem-based-learning“) genannt, da der Einsatz von Experimenten im engeren Sinne schwierig sein kann. Diese Unterscheidung scheint allerdings problematisch. Das Experiment ist nämlich nur eine von vielen Methoden der Naturwissenschaften. Wenn Schülerinnen und Schüler den Aufbau einer Pflanze erforschen, indem sie diese akribisch mikroskopieren und aufzeichnen, kann durchaus von forschendem Lernen die Rede sein. Ein Experiment hat aber nicht stattgefunden. Nach John R. Savery (2006, S. 12) ist problemorientiertes Lernen eine schülerinnen- und schülerzentrierte Unterrichtsmethode, welche die Lernenden dazu befähigen soll, Untersuchungen durchzuführen, Theorie und Praxis miteinander zu verbinden, ihr Wissen anzuwenden und tragfähige Lösungen zu einem definierten Problem zu finden. Entscheidend für diese Lehrmethode ist für ihn die Wahl der Probleme. Diese sollten eine gewisse Komplexität aufweisen („ill-structured“) und wenn möglich fächerübergreifend sein. Die Lehrkraft begleitet den Lernprozess. Ihre Hauptaufgabe ist die Nachbesprechung und Zusammenfassung der Lernerfahrungen. Auch diese Definition weist wieder zahlreiche Parallelen zum Begriff „forschendes Lernen“ auf, was auch Savery selbst anmerkt. Er sieht den entscheidenden Unterschied der beiden Ansätze in der Rolle der Lehrkraft. Im Zuge des problemorientierten Unterrichts unterstützt die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler zwar in ihrem Lernprozess, stellt ihnen aber keinerlei Informationen zur Verfügung. Im Gegensatz dazu kann sie bei forschungsorientierten Unterrichtsformen eine beratende Position einnehmen und die Lernenden durchaus mit wichtigen Daten versorgen. Rudolf Messner (2009a, S. 24) sieht das Verhältnis von forschendem und problembasiertem Lernen weniger abgrenzend als vielmehr integrativ. Problemorientiertes Lernen zeige für ihn wichtige Aspekte der Unterrichtsorganisation auf, „durch welche sich Lernumgebungen auszeichnen, die forschendes Lernen der Schüler anregen können.“ Problemorientierung lässt sich also einerseits als didaktischer Ansatz verstehen, der als Voraussetzung für die Entwicklung von forschendem Lernen gedacht werden kann, andererseits stellt sie aber auch eine eigene Unterrichtsmethode dar, die sich vor allem in der Rolle der Lehrkraft von jener des forschenden Lernens unterscheidet.

Wie gestaltet sich das Verhältnis zwischen dem Prinzip des forschenden Lernens zum Konzept des genetischen Lernens? Als genetisches Lernen werden laut Bundesassistentenschrift des Jahres 1970 Lernformen bezeichnet,

> „in denen nicht die vorliegenden, formulierten Erkenntnisse in geeigneter Folge verbal-rezeptiv eingeprägt und gespeichert werden, sondern die Genesis dieser Erkenntnisse vom Lernenden nachvollzogen wird, indem er noch einmal vor das Problem gestellt wird, das den tatsächlichen (historischen) oder einen analogen Ausgangspunkt der betreffenden Forschungsarbeit dargestellt, und indem er ferner den Forschungsweg mit den wichtigsten Stationen (Entscheidungspunkten) noch einmal mehr oder weniger frei durchläuft und dabei in ähnlicher Weise tätig ist, wie er es in der originalen Forschungssituation sein müßte.“ (Fischer-Appelt, et al., 1970, S. 22)

Dabei geht es aber nicht um den exakten Nachvollzug der Wissenschaftsgeschichte, sondern um das Hineindenken in den Prozess der Entdeckung gewisser Sachverhalte und das Verstehen der dazugehörigen Bedingungen. (vgl. Brülls, 2002, S. 126) Der Unterschied zu forschungsbasierten Unterrichtskonzepten liegt im Arrangement des Lernprozesses. Die Lehrperson wählt das Problem oder die Fragestellung nach didaktischen Kriterien aus, kennt bereits das Ergebnis, dessen Relevanz für die Wissenschaft und mögliche Methoden für dessen Nachentdeckung. Dadurch wird das Risiko für Umwege und Fehlschläge im Gegensatz zu forschendem Lernen minimiert. In diesem Sinne könnte man bei strukturierteren Formen des forschenden Lernens bereits von genetischem Lernen sprechen. (Fischer-Appelt, et al., 1970, S. 22)

Rudolf Messner (2009a, S. 24) klärt die Beziehung zwischen Projektunterricht und forschendem Lernen durchaus einleuchtend. Er versteht den Projektunterricht als die „umfassende Form", die in einzelnen Fällen zum forschenden Lernen werden kann. Projektunterricht gehe nämlich in seiner methodischen Organisation weit über forschendes Lernen hinaus. Im sogenannten Rocard-Report (2006, S. 13) wird allerdings betont, dass forschendes Lernen nicht zwangsweise im Rahmen großer Projekte unter dem Einsatz komplexer Methoden und komplizierter Instrumente stattfinden muss. Entscheidend sei eher eine Art der Herangehensweise an ein Themenfeld, das in einzelnen Fällen auch in einem beschränkten Rahmen einer Unterrichtsstunde realisiert werden kann. Hier soll beiden Hinweisen Beachtung geschenkt werden. In diesem Sinne kann es also Beispiele forschenden Lernens geben, die im Rahmen von Projektunterricht organisiert werden, sowie konsequenterweise auch für Projektunterricht, der forschendes Lernen beinhaltet. Es gibt aber auch Projektunterricht, der wenig bis kaum Elemente forschungsorientierter Lernprozesse aufgreift, sowie Unterrichtskonzepte des forschenden Lernens, welche nicht den Charakteristiken des Projektunterrichts entsprechen. Es ist also möglich und in manchen Fällen sinnvoll, die Organisation von Projektunterricht und die Struktur des forschenden Lernens zu kombinieren, dies ist aber weder für das eine noch für das andere zwingend notwendig.

Offener Unterricht, der als Grundprinzipien die Schülerinnen- und Schülerzentrierung und das selbstbestimmte Lernen beinhaltet, scheint zwangsweise der Rahmen zu sein, in dem forschendes Lernen stattfindet. Falko Peschel unterscheidet in Bezug auf den offenen Unterricht folgende Dimensionen:

- Organisatorische Offenheit (Raum, Zeit, Sozialform u. ä.)
- methodische Offenheit (Lernweg)
- inhaltliche Offenheit (Lernstoff)
- soziale Offenheit (Klassenführung) und

- persönliche Offenheit (Beziehung zwischen Lehrkraft und Lernenden). (vgl. Juen-Kretschmer, 2007, S. 3)

Für forschendes Lernen spielen vor allem die organisatorische Offenheit, die methodische Offenheit und die inhaltliche Offenheit eine große Rolle. Je nach Form des forschenden Lernens können diese aber in unterschiedlichen Ausprägungen zum Tragen kommen. In der offensten Form des forschenden Lernens, stellen Schülerinnen und Schüler die Fragen, planen den Forschungsprozess und entscheiden selbstständig, wann sie in Gruppen-, Partner- oder Einzelarbeit operieren möchten. In gelenkten oder strukturierteren Formen des forschenden Lernens können einzelne Bereiche durch die Lehrkraft vorgegeben werden, was die Öffnung des Unterrichts einschränkt. Auf die verschiedenen Formen der Offenheit forschungsbasierter Lernprozesse soll im nächsten Kapitel genauer eingegangen werden.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass forschendes Lernen mit all den soeben genannten Begriffen Überschneidungsflächen aufweist, die je nach Form des forschenden Lernens größer oder kleiner ausfallen können. Eine strikte, unnachgiebige Trennung jener Begriffe scheint ohnedies weder möglich noch sinnvoll zu sein. Durch das Aufzeigen des didaktischen Beziehungsnetzes, in dem sich das Prinzip des forschenden Lernens befindet, kann aber wenigstens eine Kommunikationsbasis geschaffen werden, welche die Implementierung und Evaluation forschenden Lernens überhaupt erst möglich macht.

1.3.4 Modelle forschenden Lernens

Offensichtlich angelehnt an das oben beschriebene forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren von Schmidkunz und Lindemann, werden Modelle forschenden Lernens in der Literatur oft in Arbeitsphasen unterteilt, um die Planung und Durchführung einer so offenen Unterrichtssituation für Lehrkräfte zu erleichtern. Allerdings werden diesen Phasen in aktueller Literatur eher grobe Tätigkeiten der Lernenden zugeordnet, anstatt, wie Schmidkunz und Lindemann bzw. Fries und Rosenberg versuchen, einen detaillierten Ablauf- und Methodenplan bereitzustellen. So verzichtet Manfred Bönsch (1991/1995, S. 198) beispielsweise gänzlich auf die Ausformulierung zeitlich aufeinander folgender Phasen und nennt lediglich Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler, welche forschendes Lernen auszeichnen:

„Fragen formulieren, neugierig sein, Vermuten und Bilden von Hypothesen, gedankliches oder tatsächliches Lösen von Problemen, Ergebnisformulierung/ -darstellung." Brigitte Lutz-Westphal (2014b, S. 779f) bezeichnet die strikte Festlegung des Unterrichtsverlaufes im Zuge forschenden Lernens als schiere Unmöglichkeit und beschränkt sich daher auf die Nennung einiger Merkmale, die forschendes Lernen in Bezug auf den Mathematikunterricht aufweisen muss, um sich so nennen zu können. Auf diese Weise bietet die Autorin zusätzliche Möglichkeiten, forschungsbasierten Unterricht von ähnlichen Lehrmethoden abzugrenzen:

- Anregung und Anleitung zum selbstständigen Finden von Fragen,
- der breite Raum für Erkundungen,
- das Öffnen des Unterrichts für fächerübergreifende oder dem Lehrplan vorausgreifende Inhalte,
- das Sichtbarmachen, also „Publizieren" der erarbeiteten Mathematik,
- sowie die kritische Diskussion der Ergebnisse und Vorgehensweisen.

Im Gegensatz dazu halten einige Autoren an einem mehr oder weniger strikten zeitlichen Ablauf von Arbeitsphasen fest. Michael Aepkers (2002, S. 78) nennt beispielsweise folgende:

a) Entwurf eines Forschungsplans
b) Prüfung und Auswahl der Methoden
c) Durchführung der Untersuchung/des Experiments
d) Auswertungsversuch
e) Prozessdokumentation

Für den Spezialfall des Mathematikunterrichts formuliert Volker Ulm (2009, S. 91f) folgende sechs Unterrichtsphasen:

- Konfrontation mit einem mathematischen Phänomen
- Exploration des Themenfeldes
- Einordnung in bestehendes Wissensnetz
- Strukturieren des Themenfeldes
- Schriftliche Fixierung der Ergebnisse
- Präsentation, Publikation, Diskussion

Beide Autoren orientieren sich an typischen wissenschaftlichen Forschungsprozessen. Sie betonen, dass sich die einzelnen Schritte nicht immer klar voneinander abgrenzen lassen und die Möglichkeit besteht, dass der lineare Ablauf unterbrochen wird, Rücksprünge zu vorangegangenen Phasen erfolgen oder Zyklen durchlaufen werden.

Diese Prozesshaftigkeit kommt besonders im Modell von Roth und Weigand (2014, S. 5) zum Tragen. Sie unterscheiden grob vier Phasen, die sich aber immer wieder aufeinander beziehen und ordnen diesen Phasen typische Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu.

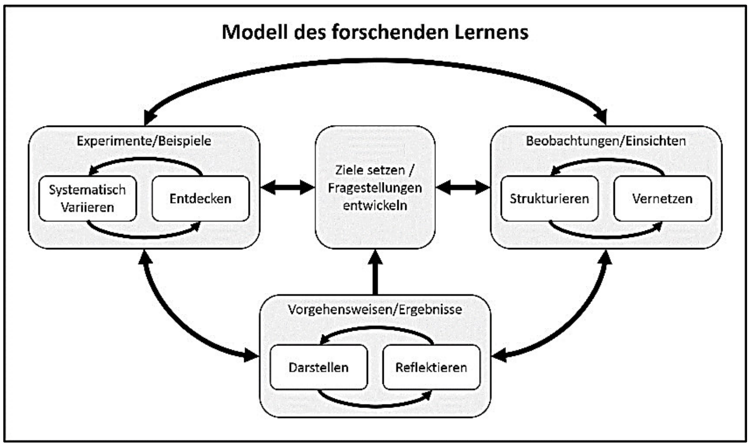


Abb. 1: Modell des forschenden Lernens (Roth & Weigand, 2014, S. 5)

Dieses Modell bietet zwar keinen zeitlichen Ablauf, nach dem Lehrpersonen forschungsorientierten Unterricht entwerfen können, es kann allerdings helfen, ein Verständnis für die Prozesse des forschenden Lernens zu entwickeln.

Eines der Hauptanliegen in der Umsetzung von forschendem Lernen ist die Ermächtigung der Schülerinnen und Schüler, dem Forschungsprozess nicht nur passiv zu begegnen, sondern ihn aktiv und so selbstständig wie möglich, durchzuführen. Anzustreben ist demnach, dass die Lernenden ihre eigenen Fragen formulieren, die Planung und Durchführung des Forschungsprozesses zwar kollaborativ, aber unabhängig einer Autorität eigenständig übernehmen und anschließend Entscheidungen über die Art und Weise der Publikation und der Reflexion treffen. Dass diese Eigenständigkeit aber nicht einfach erwartet werden darf, sondern eine Fähigkeit ist, die erst entwickelt werden muss, bestätigt beispielsweise das Erfolgsmodell der Offenen Schule Waldau, die dem offenen Lernen sogar ein eigenes Schulfach widmet. In der Praxis der Modellschule wird die anfängliche Strukturierung der Lernvorgänge durch Lehrkräfte anhand von Rahmenthemen oder erwarteten Präsentationsformen Schritt für Schritt abgebaut. Außerdem wird der zeitliche Rahmen, in dem offenes Lernen stattfindet, stetig ausgeweitet, mit dem Ziel, die Schülerinnen und Schüler in ihrer Eigenständigkeit zu stärken. „Dahinter steht die Einsicht, dass selbstständiges Lernen sehr wohl des Aufbaus und Trainings bedarf." (Tacke, 2009, S. 218) Auch Jürgen

Roth und Hans-Georg Weigand (2014, S. 6) relativieren die komplette Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler im Prozess des forschenden Lernens: „Forschendes Lernen in der Schule wird stets unterstütztes, angeleitetes und gelegentlich auch gelenktes forschendes Lernen sein.“ Mit diesem Hintergrund hat das europäische Rahmenprogramm Pathway drei Formen des forschenden Lernens für Naturwissenschaften entworfen: offenes, gelenktes und strukturiertes forschendes Lernen. Dieses Konzept soll in folgender Tabelle überblicksmäßig dargestellt werden.

PHASE/FORM	OFFEN	GELENKT	STRUKTURIERT
FRAGE	STELLE EINE NATURWISSEN-SCHAFTLICH ORIENTIERTE FRAGE!	WÄHLE UNTER DEN VORGESCHLAGENEN NATURWISSEN-SCHAFTLICH ORIENTIERETEN FRAGEN AUS!	VORGABE EINER NATURWISSEN-SCHAFTLICH ORIENTIERTEN FRAGE
EVIDENZEN	SAMMLE EVIDENZEN UND DATEN!	TRIFF EINE AUSWAHL AUS VORGESCHLAGENEN EVIDENZEN UND DATEN!	VORLAGE VON EVIDENZEN UND DATEN
ANALYSE	WÄHLE EINE ANALYSEFORM DER BELEGE AUS!	WÄHLE AUS VORGESCHLAGENEN METHODEN ZUR ANALYSE DER BELEGE AUS!	VORGABE EINER METHODE ZUR ANALYSE DER BELEGE
ERKLÄRUNG	WÄHLE EINE FORMULIERUNG FÜR DIE ERLÄRUNGEN!	WÄHLE UNTER DEN VORGESCHLAGENEN ERKLÄRUNGS-METHODEN AUS!	VORGABE EINES WEGES ZUR FORMULIERUNG VON ERKLÄRUNGEN
VERNETZUNG	VERKNÜPFE DIE RESSOURCEN ZU NATURWISSEN-SCHAFTLICHEM WISSEN!	VERKNÜPFE DIE RESSOURCEN ZU NATURWISSEN-SCHAFTLICHEM WISSEN MIT HILFE VON ANLEITUNGEN DER LEHRKRAFT!	BEREITSTELLUNG VON RESSOURCEN UND DARSTELLUNG DER VERNETZUNG MIT NATURWISSEN-SCHAFTLICHEM WISSEN
KOMMUNIKATION	WÄHLE WEGE DER KOMMUNIKATION!	KOMMUNIZIERE UND BEGRÜNDE DEINE ERKLÄRUNGEN MIT HILFE VON ANLEITUNGEN DER LEHRKRAFT!	DARSTELLUNG STRUKTURIERTER SCHRITTE ZUR KOMMUNIKATION UND BEGRÜNDUNG
REFLEXION	STRUKTURIERE DIE REFLEXION ÜBER DEN PROZESS DER ERKENNTNIS-GEWINNUNG!	STRUKTURIERE DIE REFLEXION ÜBER DEN PROZESS DER ERKENNTNIS-GEWINNUNG MIT HILFE VON ANLEITUNGEN DER LEHRKRAFT!	VORLAGE EINES STRUKTURIERTEN RAHMENS ÜBER DEN PROZESS DER ERKENNTNIS-GEWINNUNG

Tab. 2: Formen forschenden Lernens in den Naturwissenschaften (vgl. Pathway, 2012, S. 37ff)

Die soeben beschriebenen Entwürfe bilden die Grundlage für die Entwicklung eines didaktischen Modells für forschendes Lernen im Mathematikunterricht, das nicht nur hilfreich für die Strukturierung von Unterrichtseinheiten in der Praxis sein soll und der Prozesshaftigkeit des Forschungs- und Lerngeschehens gerecht wird, sondern auch unterschiedliche Abstufungen der Öffnung des Unterrichts – und somit eine sukzessive Heranführung an selbstständiges Lernen – ermöglicht. Bevor ein solcher Vorschlag in Kapitel 2.4 erfolgen kann, sollen aber noch einige Überlegungen zur Umsetzung forschenden Lernens, sowie zum Verhältnis des Mathematikunterrichts zur Forschung, angestellt werden.

1.4 Implementierung forschenden Lernens im Unterricht

1.4.1 Herausforderungen und mögliche Hindernisse für die Umsetzung forschenden Lernens

Obwohl viele Lehrkräfte der Methode des forschenden Lernens ein großes Potential zuschreiben, Schülerinnen und Schülern den Erwerb essentieller Kompetenzen zu ermöglichen, werden forschungsbasierte Unterrichtsformen in der Schulpraxis nur selten eingesetzt. Zu erwähnen ist hier, dass sowohl die Einstellung der Lehrenden zu forschendem Lernen, als auch dessen regelmäßige Umsetzung im Unterricht starke kulturelle Unterschiede aufweisen. Während beispielsweise für Mathematiklehrkräfte aus Deutschland, Großbritannien und den Niederlanden weder ein experimenteller Zugang zur Mathematik noch Anwendungsorientierung eine große Rolle spielen, schätzen Lehrerinnen und Lehrer in Ungarn, Rumänien und der Slowakei ihren Unterricht anders ein.[1] (vgl. Engeln, Euler & Maass, 2013, S. 833) Die Bedenken bezüglich des Einsatzes von forschungsorientiertem Unterricht scheinen sich allerdings sowohl in Europa als auch in den USA (vgl. DiBiase & McDonald, 2015, S. 30ff) zu ähneln.

Die Mehrheit der dahingehend befragten Lehrpersonen gibt an, nicht über genügend Hintergrundwissen bezüglich wissenschaftlicher Methoden und Forschungsprozessen

[1] Die Autorinnen und Autoren relativieren diesen Eindruck durch die Vermutung, dass die jeweilige Unterrichtstradition der jeweiligen Länder Einfluss auf die Selbsteinschätzung haben könnte. Während westeuropäische Lehrkräfte das Gefühl haben, den hohen Erwartungen der Politik bezüglich Schülerinnen und Schülerorientierung nicht gerecht werden zu können, stufen osteuropäische Lehrpersonen jede Abweichung von der traditionellen Unterrichtskultur bereits als Umsetzung eines experimentellen Zugangs ein.

ihres Unterrichtsfaches zu verfügen, um forschendes Lernen zielführend im Unterricht einsetzen zu können. (vgl. DiBiase & McDonald, 2015, S. 33) Diese Problematik greift auch Michael Aepkers (2002, S. 84) auf. Er sieht die Lehrerinnen- und Lehrerbildung diesbezüglich gefordert:

> „Wenn ein lehramtsvorbereitendes Studium (…) nicht in der Lage ist, die angehenden Lehrkräfte
> a) an projektbezogenes Arbeiten heranzuführen,
> b) sie beispielsweise mit empirischen Methoden der Sozialforschung zu konfrontieren,
> c) ihnen einen Rahmen für deren Anwendung zu bieten und
> d) den Studierenden Zugang zu Forschungsmethoden und -einrichtungen der Fachwissenschaften zu ermöglichen,
>
> dann kann diesen zukünftigen Lehrkräften nicht etwas abverlangt werden, was sie nie kennen und möglicherweise schätzen gelernt haben.“

Viele amtierende und angehende Lehrpersonen sehen forschungsbasierte Lernmethoden als problematisch hinsichtlich des Drucks, den sie angesichts der Einhaltung des Lehrplans verspüren. Sie fühlen sich mehrheitlich für die Vermittlung von Fakten verantwortlich, die in Form von Tests und Schularbeiten abgefragt werden können. (vgl. Pathway, 2012, S. 13) Bezeichnend sind diesbezüglich Aussagen von Lehramtsstudierenden, wie „Da muss die Lehrkraft alles berücksichtigen und dann auch noch, dass sie zeitlich im Lehrplan bleibt.“ oder „Für Lehrer ist es außerdem schwierig, Leistungen und Kompetenzen abzufragen, die durch das Forschende Lernen erlernt worden sind.“ (Krämer, Nessler, & Schlüter, 2015, S. 28 & 31) Zusätzlich zum hohen zeitlichen Aufwand in der Klasse wird auch die zeitintensive Vorbereitung inklusive Beschaffung von Materialien und Ausstattung für forschungsbasierte Unterrichtsformen erwähnt.

Darüber hinaus wirken die hohen Anforderungen, die forschendes Lernen an Schülerinnen und Schüler stellt, für viele Lehrpersonen besorgniserregend. Sie betonen zwar die Chancen, welche sich für Lernende aus kollaborativer Arbeit ergeben können, sorgen sich aber um das Verhalten der Schülerinnen und Schüler und befürchten Probleme bezüglich der Klassenführung. (vgl. DiBiase & McDonald, 2015, S. 33). Besonders die hohe Autonomie der Lernenden erregt Unsicherheit bei vielen Lehrkräften. Die Effektivität, mit der Schülerinnen und Schüler die Zeit nutzen, wird in Frage gestellt. (vgl. ebd., 2015, S. 33) Zudem erfordert die hohe Selbstständigkeit, die den Lernenden im Zuge forschungsorientierter Unterrichtsmethoden abverlangt wird, großes Vertrauen der Lehrkräfte in die Arbeitsbereitschaft und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler. Es gebe „auch Schüler, die mit einer so offenen Methode überfordert sind und eventuell resignieren“, (Krämer, Nessler, & Schlüter, 2015, S. 30) lautet diesbezüglich die Aussage einer/eines Lehramtsstudierenden.

Für die Umsetzung forschenden Lernens im Unterricht sind also einige Voraussetzungen essentiell. Abgesehen von der Vertrautheit der Lehrkräfte mit den wissenschaftlichen Erkenntnismethoden ihres Faches, ist auch ein Wissen um die Theorie und Umsetzungsmöglichkeiten forschungsorientierter Lehr- und Lernmethoden erforderlich. Zusätzlich kommt den Vorstellungen der Lehrpersonen bezüglich ihres eigenen Rollenverständnisses, genauso wie ihrem Rollenbild bezüglich der Schülerinnen und Schüler große Bedeutung zu.

1.4.2 Voraussetzungen für die Implementierung forschenden Lernens

Andreas Müller (2009, S. 46) bezeichnet das Rollenverständnis als einen der wichtigsten Umgebungsfaktoren für forschendes Lernen in der praktischen Umsetzung: „Rollenerwartungen bestimmen im hohen Ausmaß das Verhalten von Menschen.“ Ein Verständnis von Schülerinnen und Schülern, das auf Rezeptivität, Passivität und Abhängigkeit beruht, bringt Lehrkräfte in ein konzeptionelles Dilemma bezüglich offener Lernformen. Jugendliche können nur dann im Stande sein, weitreichende Autonomie im Lernprozess zu erlangen, wenn ihnen motivationale und organisatorische Eigenständigkeit zugetraut wird. Auch Barbara Buchfeld betont im Gespräch mit Heinfried Tacke (2009, S. 224f) die Bedeutung des Rollenverständnisses für offene Lernformen im Allgemeinen: „Lehrer müssen das Freie Lernen zulassen können und wissen, dass sie damit ein Stück Kontrolle zugunsten der Selbstständigkeit aufgeben.“ Nicht nur die Rolle der Schülerinnen und Schüler verändert sich also im Zuge offener Lernformen, besonders jene der Lehrkräfte nimmt andere Züge an als bei geschlossenen Formen. Lehrkräfte tragen nicht die alleinige Autorität darüber, was oder wie etwas gelernt wird, was allerdings nicht bedeutet, dass ihre Aufgaben einfacher werden. Das Gegenteil scheint der Fall zu sein: „Sie (die Rolle der Lehrkraft) beinhaltet nun eine größere Verantwortung, Umstände zu schaffen und zu erhalten, die dem Erlangen von Verständnis dienlich sind. Die Lehrperson ist sowohl für die Entwicklung der Ideen von Lernenden verantwortlich, als auch für die Erhaltung der Lernumgebung.“ (Pathway, 2012, S. 30)

In den „Richtlinien für Lehrkräfte zu forschungsbasiertem Lehren in den Naturwissenschaften“ der Rahmenorganisation Pathway (2012, S. 13) werden drei Voraussetzungen für die Umsetzung forschenden Lernens im Unterricht genannt:

1. ein besseres Verständnis der Lehrkräfte zu wissenschaftlichen Erkenntnismethoden,
2. ein ausreichendes Verständnis für die Strukturen und Inhalte der Wissenschaften sowie
3. eine Vertrautheit mit den Techniken forschungsorientierter Lehr-Lern-Methoden.

Die Strukturen der Wissenschaften können je nach Disziplin und Fachrichtung aber durchaus sehr unterschiedliche Züge annehmen. Rudolf Messner (2009b, S. 132f) unterscheidet in Anlehnung an Horst Rumpf und Peter Buck fünf Wissensarten, von denen jede Gegenstand forschenden Lernens werden kann:

1. das logisch-mathematische Strukturwissen,
2. das erklärende Wissen der modernen Natur- und Sozialwissenschaften,
3. das verstehend-hermeneutische Wissen der Geisteswissenschaften,
4. das lebenspraktische Umgangswissen sowie
5. das ästhetische Wahrnehmungs- und symbolhafte Gestaltungswissen.

Messner betont, dass für einzelne Schulfächer mehrere der genannten Wissensarten relevant sein können. Die Ausarbeitung des spezifischen Profils des forschenden Lernens in diesen Wissensbereichen für das jeweilige Unterrichtsfach legt er in die Verantwortung der jeweiligen Fachdidaktik. Im folgenden Kapitel soll diesem Anliegen nachgekommen und Überlegungen zu einer Profilbildung des forschenden Lernens im Mathematikunterricht bezüglich des logisch-mathematischen Strukturwissens angestellt werden.

2. Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

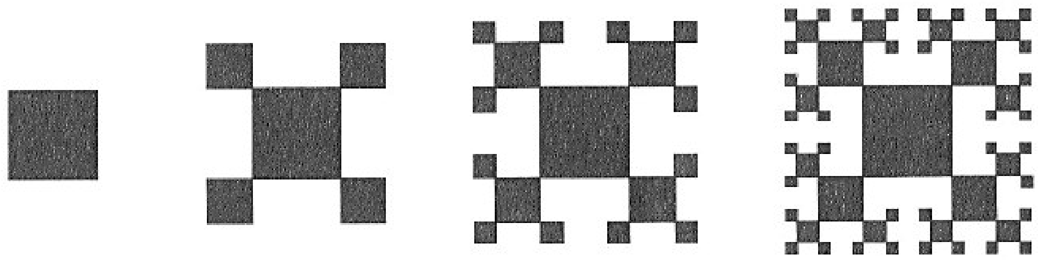
Ein Blick in die Literatur lässt sehr schnell erkennen, wie unterschiedlich der Begriff des forschenden Lernens nicht nur im Allgemeinen, sondern auch im Kontext des Mathematikunterrichts verstanden wird. Anhand einiger ausgewählter Beispiele sollen diese Differenzen aufgezeigt werden bevor auf das Konzept des forschenden Lernens im Mathematikunterricht in einer detaillierteren Analyse eingegangen werden kann.

2.1 Einige Beispiele für forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Volker Ulm (2009, S. 98) schlägt in dem von Rudolf Messner herausgegebenen Sammelband „Schule forscht“ folgende Aufgabe vor:

Muster aus Quadraten

Mit Quadraten wird eine Folge von Mustern erzeugt: Ausgehend von einem großen Quadrat werden jeweils an freie Ecken kleinere Quadrate angesetzt. Von Schritt zu Schritt werden die Seitenlängen der hinzukommenden Quadrate um einen konstanten Faktor kleiner.



a) Überlege dir zu dieser Folge von Figuren möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen und schreibe diese auf.
b) Bearbeite mit deinem Nachbarn gemeinsam einige eurer Fragestellungen.
c) Stellt gemeinsam eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor.

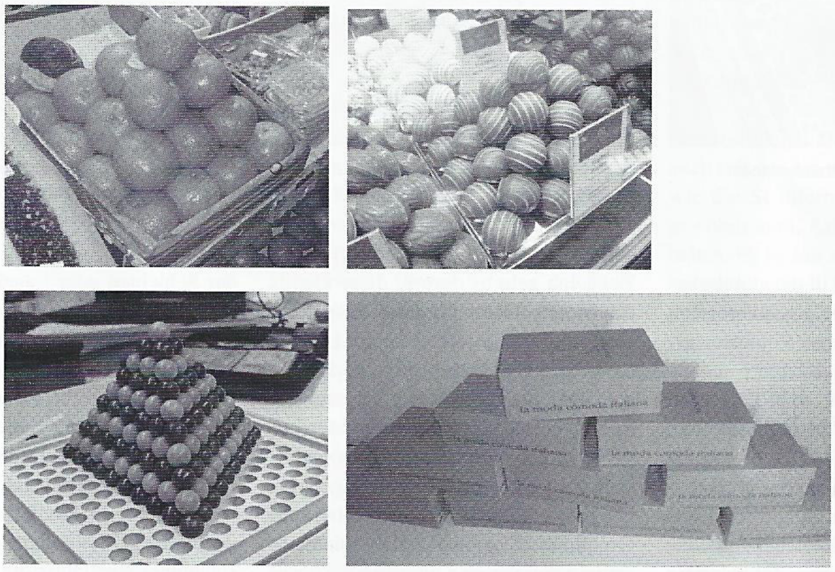
Abb. 2: Muster aus Quadraten (Ulm, 2009, S.98)

In der fachdidaktischen Zeitschrift „Mathematik lehren“, die im Juni 2014 eine ihrer Ausgaben gänzlich dem Prinzip des forschenden Lernens im Mathematikunterricht widmete, veröffentlichte der gleiche Autor einen Artikel mit dem Titel „In der Umfrage steckt viel Arbeit.“ (2014, S. 20ff) Darin präsentiert Volker Ulm ein Unterrichtskonzept, in dem Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Bildschirm-Medien statistisch erforschen. In einem längeren Projekt entwickeln sie selbstständig Forschungsfragen, entwerfen eine Umfrage, erheben die Daten, werten diese aus, präsentieren ihre Ergebnisse und reflektieren anschließend den Forschungsprozess.

In derselben Ausgabe der Zeitschrift präsentiert Rolf Oechsler (2014, S. 25ff) ein Projekt zur Erforschung sogenannter Dreiecks- und Tetraeder-Zahlen:

Schicht über Schicht

Sicherlich habt ihr auch schon einmal im Supermarkt, auf dem Wochenmarkt, in Spielzeugläden oder an anderen Orten Pyramiden gesehen aus übereinander gestapelten Mandarinen, Pralinen, Holzkugeln oder Schuhkartons:



Vielleicht habt ihr euch dabei auch schon einmal gefragt, wie diese Pyramiden zusammengesetzt sind, aus wie vielen Mandarinen, Pralinen, Kugeln oder Schuhkartons sie bestehen und wie man ihre Anzahlen bestimmen kann. Häufig kann man nicht alle Einzelteile sehen, die dazugehören!

Schaut euch die Abbildungen genau an und beantwortet die folgenden Fragen dazu. Tauscht euch in euren Gruppen aus. Haltet eure Überlegungen und Ergebnisse fest:

- *schriftlich,*
- *mit Hilfe von Zeichnungen,*
- *mit Hilfe von Tabellen oder*
- *mit Hilfe von Rechnungen.*

So könnt ihr später euren Mitschülerinnen und Mitschülern erklären, was ihr euch überlegt habt und wie ihr dabei vorgegangen seid.

1. **Baut die Pyramiden nach. Wie kann man diese vergrößern oder verkleinern?**
2. **Wie sehen die Schichten aus, aus denen die Pyramiden bestehen? Aus wie vielen Schichten setzen sie sich zusammen? Wie kann man weitere Schichten hinzufügen? Findet ihr verschiedene Wege dafür?**
3. **Aus wie vielen Mandarinen/Pralinen/Kugeln/Schuhkartons bestehen die Pyramiden insgesamt? Findet ihr sogar eine einfache, direkte Rechnung dafür?**
4. **Erkennt ihr Zusammenhänge zwischen den Pyramiden? Welche?**
5. **Denkt euch weitere Fragen aus und notiert sie. Versucht anschließend, sie zu beantworten!**

Abb. 3: Schicht über Schicht (Oechsler, 2014, S. 27)

Anhand dieser durchaus absichtlich provokativ gewählten Beispiele lassen sich einige Unterschiede in der Umsetzung forschenden Lernens im Mathematikunterricht feststellen. Einerseits weist die Aufgabenstellung von Oechsler im Vergleich zu den zwei Konzepten von Ulm erhebliche Unterschiede in den Kategorien Offenheit, Reichhaltigkeit und differenzierte Erschließbarkeit auf, worauf in Kapitel 2.5 genauer eingegangen werden soll. Andererseits – und dieser Unterschied soll hier deutlich gemacht werden – muss im Zusammenhang mit den oben zitierten Unterrichtsplanungen von Forschung in verschiedenen Disziplinen gesprochen werden. Während das erste Beispiel von Volker Ulm nämlich Fragen der reinen Mathematik zu generieren versucht, orientiert sich sein zweiter Unterrichtsentwurf sowohl in Fragestellung, als auch im Verlauf des Forschungsprozesses an den empirischen Sozialwissenschaften. Hier soll diesem und ähnlichen Konzepten weder der Status des forschenden Lernens noch ihre Sinnhaftigkeit für den Mathematikunterricht abgesprochen werden. Es wird allerdings für die Notwendigkeit eines differenzierteren Umgangs mit diesen Aspekten plädiert. Wenn forschendes Lernen den wissenschaftlichen Forschungsprozess abbilden und imitieren soll, muss sowohl für Lehrende als auch für Lernende klar ersichtlich sein, welcher Disziplin ihre Forschungsarbeit zuzuordnen ist. Dies soll in keinem Sinne gegen fächerübergreifende Modelle forschenden Lernens sprechen. Denn Mathematik ist für die Forschung eben nicht nur in ihrer reinen Form von Bedeutung, sondern vor allem auch in ihren Anwendungen. Trotzdem ist es für den fachdidaktischen Diskurs sinnvoll zu unterscheiden, ob die Lernenden im Unterrichtsszenario vorwiegend als Produzierende oder Konsumierende der Mathematik verstanden werden.

Auch in den mathematikproduzierenden Unterrichtskonzepten lässt sich zwischen eher anwendungsorientierteren Fragestellungen und jenen Fragen, die sich eher der reinen Mathematik zuordnen lassen, differenzieren. Eine dichotome Unterscheidung wird in diesem Bereich vermutlich schwer einzuhalten zu sein. Eine Verortung auf einem Kontinuum, an dessen Enden die anwendungsorientierte und die reine Mathematik stehen, erscheint sinnvoll. Folgende Graphik soll diese Überlegungen verdeutlichen.

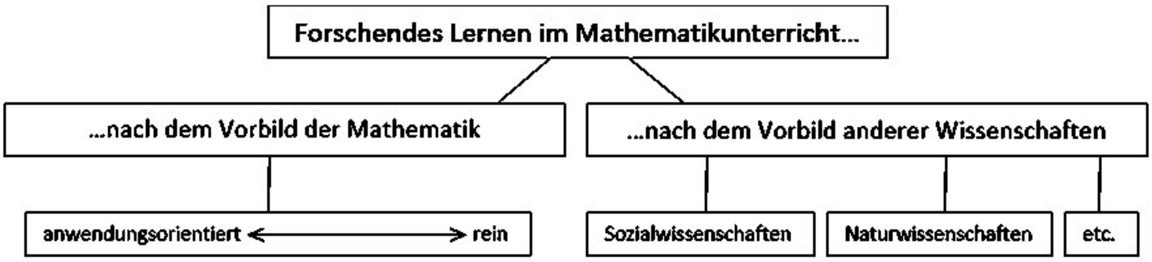


Abb. 4: Wissenschaftliche Disziplinen als Vorbild forschenden Lernens im Mathematikunterricht

Im Folgenden soll die vorliegende Arbeit im Interesse ihrer fachdidaktischen Ziele vor allem den ersten Strang, also forschendes Lernen im Mathematikunterricht nach dem Vorbild der Mathematik, behandeln, ohne den zweiten Strang als in irgendeinem Sinne weniger wichtig oder interessant einzustufen.

2.2 Forschendes Lernen in der Mathematik: schiere Unmöglichkeit oder eine natürliche Beziehung?

Wie oben bereits ausgeführt, soll sich die Unterrichtssituation des forschenden Lernens an der wissenschaftlichen Forschung orientieren. Da der Vollzug der Wissenschaft je nach Disziplin durchaus unterschiedlichen Charakter haben kann, wird im nächsten Abschnitt die spezifische Beziehung zwischen dem Unterrichtsfach Mathematik und dem Prinzip forschungsorientierter Unterrichtsformen, beleuchtet.

Forschendes Lernen in der Mathematik ist für Erich Meyer (1970, S. 35) weder zielführend noch sinnvoll. Für ihn ist das Ziel eines Mathematikstudiums die Erlangung der Fähigkeit, mathematische Methoden zur Lösung mathematischer Modelle zu handhaben. Für Anfängerinnen und Anfänger ist dies lediglich durch genetisches Lernen erreichbar, da sich diese Handhabung im Bereich bekannter Strukturen abspielt. Mathematische Forschung als „Erkennen von (…) Gesetzmäßigkeiten in bekannten bzw. neuen Strukturen" sowie als „Ausformulieren von mathematischen Sachverhalten in neu gebildeten Strukturen" sei nur für einige Studierende am Ende ihrer Ausbildung möglich. Volker Ulm (2009, S. 95f) sieht die Verbindung zwischen Mathematikunterricht und forschendem Lernen im Gegensatz zu Meyer als eine natürliche Beziehung. Wenn sich Mathematikunterricht nicht auf das „Memorieren von Fakten und das Trainieren unverstandener Algorithmen" beschränken soll, sind offenere Formen des Unterrichts für Ulm unerlässlich. Gerade das Prinzip des eigenständigen, selbst organisierten und kooperativen Arbeitens der Schülerinnen und

Schüler im Vollzug des forschenden Lernens sieht er als „notwendige Voraussetzung und zielführendes Mittel für den Aufbau von tragfähigem, vernetztem und flexibel nutzbarem Wissen sowie für die Entwicklung eines strukturellen Verständnisses für Mathematik.“ Beide Autoren machen ihren Standpunkt deutlich. Allerdings sollte beachtet werden, dass Erich Meyer bei Forschung offensichtlich an die Entdeckung von Strukturen denkt, die für das kollektive Wissen über Mathematik neu sind. Volker Ulms Verständnis von Forschung im Kontext von forschendem Lernen beschränkt sich auf das subjektiv Neue. Diese wichtige Unterscheidung hebt auch Thilo Höfer (2014, S. 30) hervor, wenn er schreibt: „Natürlich ist die aktuelle mathematische Forschung der Universitäten im Regelfall viel zu komplex, als dass die Schule hier tätig sein kann.“ Für ihn gilt es, für den Mathematikunterricht Themenfelder auszumachen, die mit einer gewissen Systematik zu lösen sind und die Schülerinnen und Schüler nicht durch ihre Komplexität demotivieren. Außerdem warnt er im Kontext forschenden Lernens vor einer Überbewertung des Endprodukts. Der Prozess des Problemfindens und -lösens müsse bei forschendem Lernen im Mathematikunterricht im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen.

Viele Mathematikerinnen und Mathematiker scheinen die Essenz ihrer Wissenschaft überhaupt ausschließlich in diesem Prozess zu erkennen. Carl Friedrich Gauß bemerkt hinsichtlich der Faszination, die von der Mathematik ausgeht:

> „Merkwürdig ist es immer, daß alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen. Wahrlich, es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Sein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.“ (zitiert nach Karlson, 1954, S. 9)

2.3 Ein Blick in die mathematische Forschung

Um Lernen nach Vorbild der mathematischen Forschung initiieren zu können, ist es natürlich sinnvoll, den Forschungsprozess der Mathematik näher zu beleuchten. Diesen Prozess allgemein zu beschreiben oder gar festlegen zu wollen, scheint allerdings unmöglich, und zwar aus mehreren Gründen. Erstens ist die Mathematik – wie die meisten wissenschaftlichen Disziplinen – ein Feld, das sich je nach Interessensgebiet sowohl in Ziel, Gesinnung und Vorgehensweise sehr voneinander unterscheiden kann. Angewandte Mathematik, anwendungsorientierte Mathematik und reine Mathematik erwecken den Eindruck diesbezüglich unvereinbar zu sein. Zweitens scheint sich mathematische Forschung kaum an ihrer Methodik festmachen zu lassen. Forschen findet dort laut der bereits oben ausführlich beschriebenen Bundesassistentenschrift (1970, S. 4) „in einem unbekannten, kaum eingegrenzten, nicht strukturierten Feld als tastendes Suchen in einer nur geahnten Richtung statt und wird erst durch ein (fast glückhaftes) Finden eines Satzes, Gesetzes oder Prinzips eigentlich als Forschen erwiesen; die Methode ist nicht vorgebbar.“ Ganz ähnlich beschreibt auch Borcherds sein wissenschaftliches Vorgehen:

> „My own research reminds me of someone picking over a large junkyard to find something valuable that has been overlooked by all the other scavengers. Every now and then one finds a new diamond, but most of the time anything one examines closely is yet another piece of junk.“ (zitiert nach Lutz-Westphal, 2014b, S. 779)

Und zu guter Letzt scheint im mathematischen Forschungsprozess der Intuition in vielen Fällen eine große Bedeutung zuzukommen. Dass mathematische Erkenntnisgewinnung eher einem kreativen Prozess gleicht, bestätigt auch folgende Aussage G. H. Hardys: „A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.” (zitiert nach Lockhart, 2009, S. 3) Aus diesen soeben dargestellten Gründen lässt sich der mathematische Forschungsprozess und somit der Vollzug des forschenden Lernens im Mathematikunterricht nicht so einfach in einen festen, linearen Ablauf nach vorgegebenen Phasen zwängen.

Trotz dieser eben beschriebenen Probleme sollen hier die wichtigsten Grundtätigkeiten der mathematischen Forschung erörtert werden, um darauf aufbauend in Kombination mit didaktischen Überlegungen ein Modell für forschendes Lernen im Mathematikunterricht entwerfen zu können. Phillip J. Davis und Reuben Hersh präsentieren eine vereinfachte Version des Modells für die Heuristik mathematischer Entdeckungen nach Imre Lakatos.

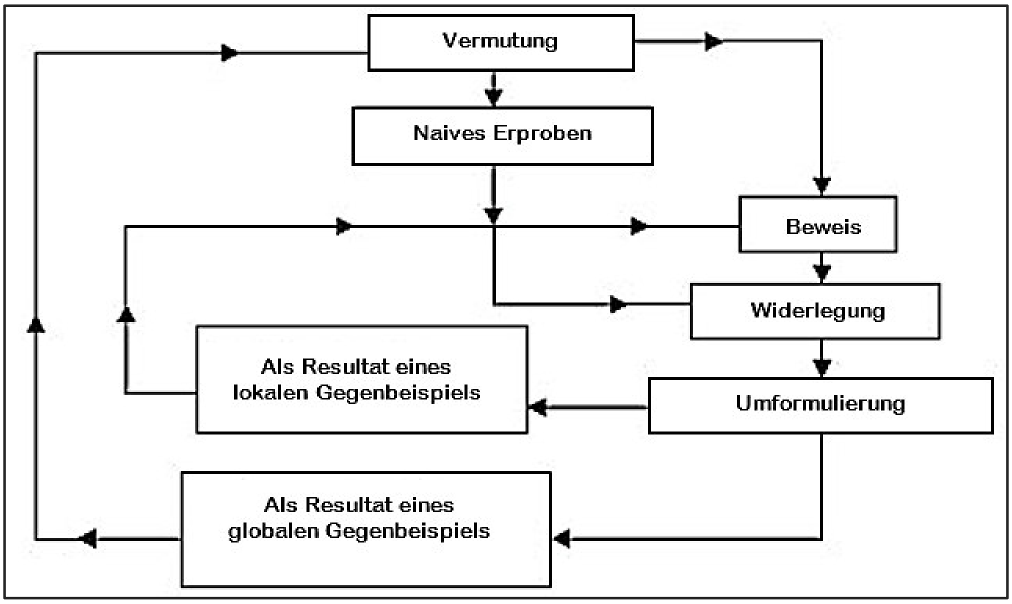


Abb. 5: Vereinfachtes Lakatos-Modell der Heuristik mathematischer Entdeckungen (Davis & Hersh, 1981/1994, S. 306)

Lakatos versteht Mathematik nicht als ein in Stein gehauenes System unfehlbarer Aussagen. Sie entwickelt sich durch Austausch, Kritik und Verbesserungsvorschläge. Beweise erklären Spezialfälle, Beispiele untermauern Vermutungen und neue Gegenbeispiele weichen Beweise auf, die dadurch wiederum präziser und detaillierter werden müssen. Lakatos nennt Spezialfälle, die einen Schritt in der Beweisführung anzweifeln, „lokale Gegenbeispiele“ und solche, welche die Schlussfolgerung in Frage stellen, „globale Gegenbeispiele“. (vgl. Davis & Hersh, 1981/1994, S.366) Das Modell in Abb. 5 hebt das Prozesshafte des mathematischen Erkenntnisgewinns hervor und gibt gleichzeitig grobe Anhaltspunkte, welche Tätigkeiten entscheidend für die Problemlösung sein können.

2.3.1 Exploration: Vermutungen und deren naive Erprobung

Mason, Burton und Stacey versuchen in ihrem Werk „Mathematisch denken“ die Leserinnen und Leser an den heuristischen Prozess der Mathematik heranzuführen. Ihr Konzept basiert auf den Arbeiten George Pólyas, auf die sich auch Imre Lakatos bezieht. Für Mason, Burton und Stacey stehen hinter allen mathematischen Aktivitäten immer die beiden Grundtechniken: Spezialisieren und Verallgemeinern. Durch das Aufsuchen von Spezialfällen wird das Themenfeld erkundet, mögliche Ziele gesteckt und Hilfsmittel ausgelotet. Diese Spezialfälle bereiten den Boden für spätere

Verallgemeinerungen. Aus diesem Spannungsfeld entstehen Vermutungen, die nichts anderes sind, als Aussagen, die zwar vernünftig aussehen, aber noch nicht bewiesen werden konnten. (vgl. Mason, Burton & Stacey, 2012, S. 66) Eine solche Vermutung oder Hypothese kann dann durch – wie es Lakatos nennt – „naives Erproben" an geeigneten Spezialfällen auf ihre Gültigkeit getestet werden. (vgl. ebd., S. 49) Auf diese Weise kommt der Erkundung von Spezialfällen eine doppelte Bedeutung zu. Einerseits dienen sie dazu, bereits bestehende Vermutungen zu überprüfen. Andererseits können in dem Wechselspiel zwischen Spezialfällen und ihrer Verallgemeinerung Vermutungen, also Hypothesen entstehen. Durch das Explorieren des Themenfeldes anhand geeigneter Spezialfälle werden im Idealfall auf diese Art und Weise zugrundeliegende Muster entdeckt. „Das Erkennen von Zusammenhängen ist in letzter Konsequenz natürlich ein kreativer Akt", (ebd., S. 82) der sich nicht erzwingen lässt. Geeignete Spezialfälle zu betrachten, kann allerdings die nötige Vorarbeit dafür leisten. Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel, um diesen Vorgang verständlicher darzustellen.

Angenommen die fiktive Schülerin Eureka untersucht die Teilbarkeit ganzer Zahlen. Sie beschließt zunächst nur Zahlen zu betrachten, die auf 0 enden und stellt durch Probieren fest, dass alle Zahlen, deren Einerstelle eine 0 ist, durch 2 teilbar zu sein scheinen. Sie formuliert die Vermutung: „Alle Zahlen, die auf 0 enden, sind durch 2 teilbar." Eureka testet ihre Hypothese an weiteren Zahlen: $2|30$, $2|40$ und $2|110$. Sie scheint zu stimmen. Diese Zahlen sind aber auch alle durch 5 teilbar. Sie verallgemeinert und stellt die Vermutung auf: „Alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind, sind auch durch 5 teilbar." Bei der Erkundung dieser Vermutung stellt Eureka fest, dass es Zahlen gibt, die zwar durch 2 teilbar sind, nicht aber durch 5 und auch umgekehrt gibt es solche, die durch 5 teilbar sind, nicht aber durch 2. Wieder verallgemeinert sie ihre Überlegung und stellt die Vermutung auf: „Eine Zahl ist nur dann durch 2 und 5 teilbar, wenn sie auf 0 endet." Das Testen einiger Beispiele bestätigt ihre Vermutung.

Selbstverständlich wird in der Mathematik keine Aussage durch das Anführen von Spezialfällen als wahr anerkannt. Als Werkzeug zur Erkundung eines Themenfeldes ist diese Tätigkeit aber zentral. Sie dient nicht nur zur schnellen Widerlegung falscher Vermutungen, die systematische Erkundung geeigneter Spezialfälle bietet auch die Möglichkeit, tiefere Einsichten in die dahinterliegenden Muster zu gewinnen. So könnte sich Eureka in unserem Beispiel fragen: „Wieso können Zahlen, die nicht auf 0 enden, nicht sowohl durch 2, als auch durch 5 teilbar sein?“ Dies setzt unsere fiktive Schülerin unter Druck, eine Begründung für ihre Vermutung zu formulieren, und sie wird damit direkt ins Herz der Mathematik geführt: zum Beweis.

2.3.2 Konstatierung: hinterfragen, begründen und beweisen

Die Auffassung, Mathematik sei vor allem ein Spiel mit Beweisen, ist zwar nicht unumstritten, jedoch weit verbreitet. Die Frage allerdings, was ein Beweis eigentlich ist, lässt sich nicht so einfach beantworten. So lassen Davis und Hersh (1981/1994, S. 36f) ihren fiktiven, stereotypen Mathematiker sagen: „Ein Satz, der nicht bewiesen ist, ist nichts.“ Nach einer genauen Definition gefragt, weiß er allerdings nicht recht weiter und antwortet schließlich: „Also, das ist ein Argument, das den überzeugt, der sich auf dem Gebiet auskennt.“ Der Beweis an sich basiert auf der Grundidee, dass sich eine ursprünglich intuitive, vielleicht sogar etwas mysteriös klingende Vermutung aufgrund des Durchlaufens eines bestimmten Denkprozesses als „strahlende Wahrheit“ entpuppen kann. Für Mason, Burton und Stacey (2012, S. 95) besteht der Beweis im Wesentlichen darin, das Wechselspiel zwischen Behauptung und Voraussetzungen aufzuzeigen. Charakteristisch für die Beweismethode ist der Verweis auf frühere, bereits gezeigte Sätze. Dieser Prozess lässt sich allerdings nicht unendlich weit fortsetzen. Er endet bei den sogenannten Axiomen und Definitionen, die angenommen werden müssen, um die aus ihnen deduktiv, logisch abgeleitete Struktur von Sätzen als gültig anerkennen zu können. (vgl. Davis & Hersh 1981/1994, S. 152)

Doch wieso werden in der Mathematik bereits anerkannte Sätze nicht einfach an Lernende weitergegeben? Aus welchem Grund werden diese in der Unterrichtssituation immer wieder bewiesen? Davis und Hersh (1981/1994, S. 154) finden drei Funktionen, welche die Tätigkeit des Beweisens im Idealfall erfüllen. Die wiederholte Präsentation eines Beweises vor immer wechselndem Publikum sorgt einerseits für einen Prozess der dauernden Überprüfung und Beurteilung seiner Richtigkeit, wodurch Missverständnisse, Unklarheiten oder sogar Irrtümer aufgedeckt werden können. Andererseits kann das Durcharbeiten oder das selbstständige Formulieren eines Beweises zu einem tieferen Verständnis der Materie führen. Im besten Fall stößt der Beweis nämlich zum Kern der Sache vor, was der Satz alleine meistens nicht leisten kann. Letztendlich ist der Beweis auch ein Ritual, „eine Verherrlichung der Kraft der reinen Vernunft.“

Doch wie kommt man von einer Vermutung zum Beweis? Für Mason, Burton und Stacey (2012, S. 99) können drei Schritte für diesen Prozess hilfreich sein: sich selbst überzeugen, einen Freund überzeugen und schließlich einen Feind überzeugen. Denn im letzten Schritt wird man gezwungen, seine Behauptung für jemanden plausibel zu machen, der ihr von vornherein skeptisch gegenüber steht. Darum plädieren die Autoren für die Ausbildung eines „inneren Feindes". Er ist die „niemals abreißende Kette von Fragen und Zweifeln" (2012, S. 101), die genügend Druck aufbaut, um eine Vermutung lückenlos begründen zu können. Der Wille, die eigene Vermutung zu Fall zu bringen, kann also entscheidend dazu beitragen, sie zu bestätigen.

2.4 Vorschlag eines Modells für forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Die vorangegangenen Darstellungen sollten deutlich machen, dass die Übernahme eines allgemeinen, fachunspezifischen Modells des forschenden Lernens für die einzelnen Unterrichtsfächer nicht zielführend sein kann. Vorgehensweisen, Zielsetzungen und Methodik unterschiedlicher wissenschaftlicher Disziplinen unterliegen dafür zu großen Differenzen. Obwohl auch innerhalb der Mathematik diesbezüglich große Unterschiede zu finden sind, wurde im letzten Kapitel versucht, zwar nicht zwingend allgemeingültige, jedoch durchaus typische Abläufe der mathematischen Forschung auszumachen. Darauf aufbauend soll hier ein Modell vorgeschlagen werden, das der Prozesshaftigkeit des forschenden Lernens im Fach Mathematik gerecht wird und trotzdem eine stützende Hilfe für das Verständnis eines möglichen Unterrichtsablaufs, sowie für dessen Planung sein kann. Die Phasen Neugier wecken, Fragestellung, Planung, Durchführung, Kommunikation und Rückblick stützen sich vor allem auf die Richtlinien für Lehrkräfte zu forschungsbasiertem Lehren des europäischen Rahmenprogramms Pathway (2012), den Darstellungen von Michael Aepkers (2002) und Volker Ulm (2009). Die lineare Abfolge der Phasen wurde jedoch abgeändert. Sie sind keineswegs streng getrennt voneinander zu verstehen. Die Übergänge sind fließend und Überschneidungen durchaus möglich.

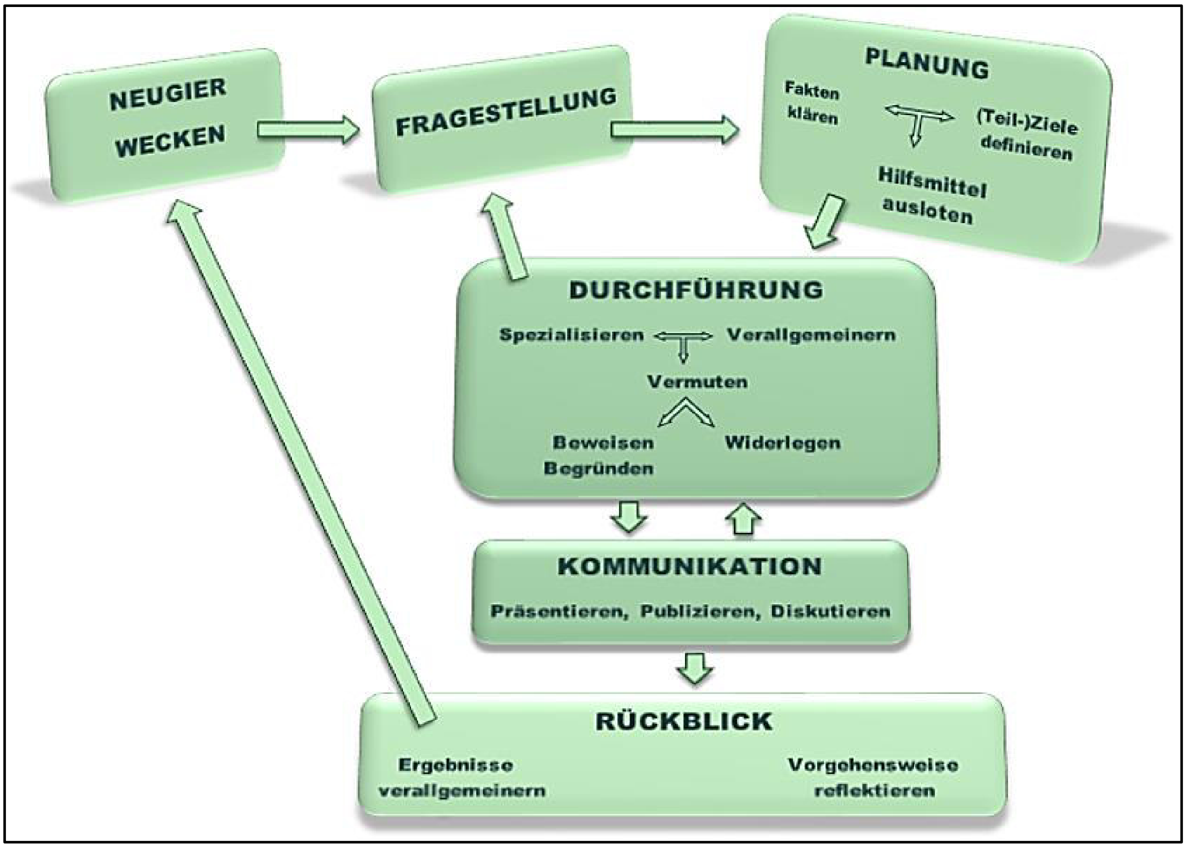


Abb. 6: Modell des forschenden Lernens im Mathematikunterricht

Aufbauend auf den in Kapitel 1.3.4 dargestellten, von der europäischen Rahmenorganisation Pathway entwickelten Formen des forschungsbasierten Unterrichts (offenes, gelenktes und strukturiertes forschendes Lernen) und dem soeben präsentierten Modell soll hier im Folgenden eine Vorlage entwickelt werden, mit der Unterrichtsszenarien des forschenden Lernens im Mathematikunterricht geplant, eingeschätzt und evaluiert werden können. Allerdings wurden die Abgrenzungen zwischen den Formen dahingehend abgeändert, dass es der Lehrperson möglich sein soll, für die einzelnen Phasen mehr oder weniger unabhängig voneinander zu entscheiden, ob sie offen, gelenkt oder strukturiert organisiert sein sollen. Im Sinne eines Heranführens der Schülerinnen und Schüler an den Forschungsprozess ist es beispielsweise durchaus denkbar, dass Lernende von einem geeigneten Impuls aus selbstständig Forschungsfragen generieren, Ideen zu ihrer Lösung sammeln und anhand einiger Spezialfälle Vermutungen aufstellen, der Beweis aber in der nächsten Einheit von der Lehrperson durchgeführt wird, um eine gewisse Beweismethode überhaupt erst in den Unterricht einzuführen. Andererseits wäre es auch möglich, verschiedene Fragestellungen anzubieten, aus denen sich Schülerinnen und Schüler jene auswählen können, die ihrem Interesse am meisten entspricht, um diese dann selbstständig zu erarbeiten. Auf diese Weise ist es der Lehrkraft möglich, Schwerpunkte bezüglich einzelner mathematischer Tätigkeiten zu setzen und diese für jedes Unterrichtskonzept zu variieren. Änderungen in bereits bestehenden Unterrichtsentwürfen können mit Hilfe der Tabelle unkompliziert vorgenommen werden. Außerdem erlaubt die Vorlage eine schnelle Einschätzung darüber, wieviel Selbstständigkeit bereits von Schülerinnen und Schülern verlangt wird, um diese systematisch zu erweitern.

Vorlage für die Planung forschenden Lernens im Mathematikunterricht			
Titel des forschend-lernen Konzepts			
Schulstufe			
Geplanter zeitlicher Rahmen			
Mögliche Einbettung in den Lehrplan			
	strukturiert	**gelenkt**	**offen**
Neugier wecken			
Fragestellung			
Planung			
Durchführung			
Kommunikation			
Rückblick			

Tab. 3: Vorlage für die Planung forschenden Lernens im Mathematikunterricht

Beispiele zur Anwendung der Vorlage sind in Kapitel 4 im Zusammenhang mit Origami zu finden.

Im Folgenden sollen die einzelnen Phasen, die im Modell und in der Planungsvorlage ausgemacht wurden, näher beschrieben und die Möglichkeiten für ihre Umsetzung im Unterricht erörtert werden.

2.4.1 Neugier wecken

„Forschen beginnt damit, daß man neugierig ist, die Welt mit offenen Augen betrachtet, daß man epistemisches Verhalten zeigt“, schreibt Manfred Bönsch. (1991/1995, S. 199) Neugier ist also der Ausgangspunkt jeder Forschungsarbeit und soll demnach auch am Anfang forschenden Lernens stehen. Im Normalfall wird das Wecken der Neugier von der Lehrperson ausgehen müssen. Natürlich lassen sich Unterrichtsszenarien denken, bei denen die bereits vorhandenen und im Unterricht ausgedrückten Interessen der Schülerinnen und Schüler den Anstoß für ein Konzept des forschenden Lernens liefern. Dieser optimale Ausgangspunkt lässt sich aber in einer theoretischen Arbeit abseits einer regelmäßigen Unterrichtspraxis nicht planen, weswegen hier der Fokus auf die Frage gelegt werden soll, mit welchen Mitteln, Lehrkräfte die Neugier ihrer Schülerinnen und Schüler für ein mathematisches Phänomen wecken können, so dass sich daraus das Bedürfnis ergibt, dieses zu ergründen.

Manfred Bönsch (1991/1995, S. 200) plädiert für den Einsatz von Materialien, die zu Lern- und Spielaktivitäten anregen und auf diese Weise die Lernneugier der Schülerinnen und Schüler zu wecken vermögen. Auch Angela Bezold (2014, S. 14) hebt die Bedeutung spielerischer Aktivitäten als Ausgangspunkt für forschendes Lernen im Mathematikunterricht hervor. Sie können Lernende dazu einladen, sich einem mathematischen Phänomen zuerst frei und spielerisch zu nähern, und sind in diesem Sinne eine wichtige Voraussetzung für das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, und schließlich für deren Begründung und Verallgemeinerung. Für viele Schülerinnen und Schüler bilden Kompetenzen, die sich in Handlungen äußern, die Basis, von der aus eine Verbalisierung dieser Fähigkeiten erst ausgehen kann.

Neugier liegt aber weder in der Sache noch im lernenden Subjekt alleine. Sie ist Ausdruck einer persönlichen Verbindung, die der Mensch mit einem Thema, einem Problem oder einem ganzen Gegenstand eingeht. Diese persönliche Komponente bietet für die Lehrkraft zusätzliche Möglichkeiten, das Interesse der Lernenden zu wecken. Horst Rumpf (2008, S. 27) schreibt in seinem Aufsatz „Lernen als Vollzug und als Erledigung“:

> „Wer sich staunend auf befremdliche Züge in den Dingen eingelassen hat, der schaut nicht mehr auf die Uhr, um die Sache hinter sich zu bringen. Der Stachel des Unwahrscheinlichen hält das in Beunruhigung geratende Wissen frisch. Man kann immer aufs Neue darüber nachdenken, weil das Staunen nicht erledigt, sondern in der Sache verweilt.“

Um dieses Staunen bei Schülerinnen und Schülern hervorbringen zu können, spricht sich der Autor für ein Lehren aus, das nicht vom persönlichen Erleben der Lehrkraft abgeschnürt ist. Das eigene Staunen der Lehrperson mit all seinen krisenhaften Aspekten trägt das Potential in sich, die Lernenden mitzureißen und anzustecken. Ähnlich argumentieren auch Urs Ruf und Peter Gallin, (1998, S. 59) wenn sie sich für den Einsatz von Kernideen für gelungenes dialogisches Lernen aussprechen. Unter Kernideen verstehen die beiden Autoren „all das, was unserem Tun Antrieb und Richtung gibt: Hoffnungen, Wünsche, Erfahrungen, die sich zu Fixpunkten unserer persönlichen Orientierung verdichtet haben, aber auch Ängste, Aversionen und Schädigungen, die Abwehrreflexe auslösen und uns den Zugang zu neuen Einsichten versperren.“ Indem die Lehrkraft ihre eigenen fachlichen Kernideen ergründet, um diese mit den Lernenden zu teilen, lädt sie Schülerinnen und Schüler dazu ein, selbst ein persönliches Verhältnis mit der Sache einzugehen, individuelle Lernwege zu beschreiten und in den Dialog mit dem mathematischen Phänomen zu treten. Ruf und Gallin (1998, S. 59) weisen darauf hin, dass diese Herangehensweise der Unterrichtsvorbereitung eine völlig neue Qualität gibt:

> „Anstatt sich zu überlegen, wie man die Lernenden unter Umgehung aller Fallen und Hindernisse Schritt für Schritt durch das Fachgebiet lotst, das sich vor dem inneren Auge des Routiniers als altvertraute und wohlgeordnete Landschaft ausbreitet, gibt man sich Rechenschaft darüber, was einen hier und jetzt an dieser Landschaft fasziniert und persönlich herausfordert.“

Konnte die Neugier der Schülerinnen und Schüler geweckt werden, ergeben sich aus ihr heraus bedeutungsvolle Fragestellungen, welche den nachfolgenden Forschungsprozess leiten.

2.4.2 Fragestellung

„Fragen und Probleme werden die konkreten Anlässe sein, die zu forschenden Aktivitäten führen“, schreibt Manfred Bönsch (1991/1995, S. 199), um sich dem Terminus „forschendes Lernen“ anzunähern. Sei es die Fähigkeit, wissenschaftliche Fragen als solche zu erkennen oder eigene Forschungsfragen zu generieren und zu formulieren: Fragen stehen im Zentrum des Prinzips forschenden Lernens. Auch Brigitte Lutz-Westphal (2014b, S. 780) nennt „Anregung und Anleitung zum selbstständigen Finden von Fragen“ als notwendiges Charakteristikum, um bei Unterrichtsvorgängen von forschendem Lernen sprechen zu können.

Wieso aber wird im Zusammenhang mit dem Formulieren von Fragen von einer Kompetenz gesprochen? Ist das Stellen von Fragen als eine natürliche menschliche Aktivität nicht eher ein Bedürfnis, als eine zu erwerbende Fähigkeit? Mason, Burton und Stacey (2012, S. 151) bedauern, dies verneinen zu müssen, und glauben, dafür eine Erklärung zu haben:

> „Es ist ja nicht nur so, dass viele Leute den Kindern einreden, es schicke sich nicht, Fragen zu stellen. Mehr noch, dadurch, dass wir nicht in der Lage sind, passende Antworten zu geben, schaffen wir eine gespannte Atmosphäre. Damit fördern wir aber eine Haltung der Art: ‚Es ist nicht gut, Fragen zu stellen, die ich nicht beantworten kann.'"

Eine solche Atmosphäre wäre also in hohem Grade schädlich für eine Lernkultur, in der eigenständige Forschungsinteressen und -aktivitäten gefördert werden sollen. Für Lernen im Allgemeinen – aber im Besonderen für die Form des forschenden Lernens – gilt es also, Lernumgebungen zu schaffen, in denen das Finden einer Frage bereits einen Wert hat, noch lange bevor Ansätze zu deren Lösung vorhanden sind. In diesem Sinne wird also beim forschenden Lernen nicht nur der sprichwörtliche Weg zum Ziel, sondern bereits das Auffinden möglicher Reiseziele zum zentralen Maßstab für Erfolg.

Wie kann eine solche Atmosphäre geschaffen werden? Für Brigitte Lutz-Westphal (2014a, S. 18) hat in diesem Zusammenhang die Wertschätzung jeder einzelnen Frage eine besondere Bedeutung. Es sei unerlässlich, alle Fragen ernst zu nehmen. Die Autorin beklagt, dass im herkömmlichen Unterricht den manchmal durchaus banal anmutenden Fragen der Schülerinnen und Schüler zu wenig Raum gegeben wird. „Genau solche Fragen sind es aber" schreibt sie, „die eine forschende Haltung begründen können und den Weg zu einer Kultur des neugierigen und kritischen Hinterfragens bereiten." Dass das Finden mathematischer Fragen Schülerinnen und Schülern nicht immer leicht fällt, betont die Autorin in einem anderen Artikel (2014b, S. 781) Sie schlägt vor, das im vorherigen Kapitel bereits beschriebene Konzept der Kernideen des dialogischen Lernens von Urs Ruf und Peter Gallin als Ausgangspunkt für die Entwicklung eigener Fragen der Lernenden zu nutzen. Kernideen werden von der Lehrperson aus einem subjektiven Blickwinkel heraus formuliert und stellen für sie zentrale und faszinierende Aspekte des Themengebietes dar. Darauf aufbauend können Arbeitsaufträge oder Impulse derart offen konzipiert werden, dass sie Fragestellungen der Schülerinnen und Schüler anregen. Auf diese Weise können Brücken zwischen Lerngegenstand und Lernenden und im besten Fall auch zwischen Bekanntem und Neuem geschaffen werden. In Letzterem sehen Mason, Burton und Stacey (2012, S. 149) besonderes Potential für das Generieren von Forschungsfragen:

„Alte und neue Eindrücke können durch die bewusste Suche nach einer Erklärung in Verbindung gebracht werden. Der neue Eindruck wird so in voller Absicht zu dem alten in Beziehung gesetzt. Dadurch wird eine Spannung aufgebaut, und eine Frage entsteht.“

Zu diesen Fragen sollen Schülerinnen und Schüler im Zuge forschenden Lernens ermutigt werden.

> „Versteht man forschendes Lernen als eine Lernform, bei der die Schülerinnen und Schüler auch selbstständig eine für sie relevante Frage oder Hypothese entwickeln, so sollte die Lehrkraft an dieser Stelle dem latenten Forscherdrang nicht nur nachgeben, sondern ihn explizit unterstützen“,

schreibt Rolf Oechsler. (2014, S. 25) Wie können Schülerinnen und Schüler ermutigt werden, ihre eigenen Fragen zu finden und zu formulieren? Für Brigitte Lutz-Westphal (2014b, S. 781) scheinen diesbezüglich zwei Ansätze sinnvoll: das Führen eines Lerntagebuches und das Festhalten und Strukturieren einer Fragensammlung an einer großen Fragenwand. Als Werkzeug für das Sortieren und Anregen mathematischer Fragen stellt die Autorin folgende Liste zur Verfügung:

- **Quantifizierungsfragen** (Wie viel Hagel fällt bei einem Hagel-schauer? Wie viel Wasser ist in einem Schwimmbad?)
- **Erkundungsfragen** (Wie verändert sich die Zahlenmauer, wenn ...? Gibt es verschiedene Möglichkeiten, diese Pflastersteine zu verlegen?)
- **Kausalfragen** (Warum darf man nicht durch Null teilen? Warum gibt es keine Pflasterung mit regelmäßigen Achtecken?)
- **Strukturfragen** (Nach welcher Regel ist dieses Muster entstanden? Gibt es wiederkehrende Auffälligkeiten? Wie könnte man eine beobachtete Regelmäßigkeit beschreiben?)
- **Werkzeug-/Methodenfragen** (Mit welchem mathematischen Werkzeug kann man hier weiterkommen? Wie wurde das konstruiert?)
- **Anwendungsfragen** (Wo braucht man lineare Funktionen? Wo finden sich ähnliche Strukturen wieder? Kommt der Satz des Pythagoras auch im täglichen Leben vor?)
- **Kontextfragen** (Aus welchem Anlass wurde früher einmal darüber nachgedacht? Wer hatte die Idee? In welchen gesellschaftlichen und historischen Kontexten spielte das Thema eine Rolle?)

Diese Kategorien können dabei helfen, die Vielfältigkeit mathematischer Fragen aufzuzeigen, Beispiele für mögliche Fragestellungen zu liefern und die bereits vorhandenen Fragen zu schematisieren. Auf diese Weise kann eine fragende und forschende Einstellung zur Mathematik gefördert werden, um sich schließlich zu einer immer selbstverständlicheren Grundhaltung zu entwickeln.

Einmal aufgeschrieben, festgehalten und damit ernst genommen kann dann nicht nur planvoll an der Beantwortung der Fragen gearbeitet, sondern auch deren Sinnhaftigkeit geprüft werden, ohne das Fragenstellen an sich zu diskreditieren. Dies stellt Ramona Behrens (2014, S. 30) ins Zentrum ihrer Überlegungen, wenn sie schreibt:

> „Sie sollten auch über das Ziel und die Sinnhaftigkeit ihrer selbst entwickelten Fragen nachdenken und sich ihrer verwendeten Strategien zur Formulierung der Fragen und Variationen bewusst werden, damit sie diese auch in anderen Situationen verwenden können.“

Dem schriftlichen Festhalten von Fragestellungen kommt im Unterrichtsarrangement des forschenden Lernens also eine mehrdimensionale Bedeutung zu.

- Fragestellungen werden auf diese Weise gewürdigt und ernstgenommen.
- Die bereits gestellten Fragen können auf der Fragenwand strukturiert werden und zu neuen Fragestellungen anregen.
- Schülerinnen und Schüler können einen Überblick über die aufgeworfenen Probleme gewinnen, um deren Bearbeitung zu erleichtern.
- Die Sinnhaftigkeit und Wissenschaftlichkeit festgehaltener Fragen können objektiv angezweifelt werden.
- Anhand der Darstellung von Fragestellungen wird der Prozess der Problemgewinnung reflektiert.
- Fragestellungen und Vermutungen können natürlich personalisiert werden. Für die Zeit der Forschungsaktivitäten könnte beispielsweise an der Bestätigung oder Widerlegung von „Sarahs Vermutung“ gearbeitet werden. Dies wirkt zusätzlich motivierend.

2.4.3 Planung

Mason, Burton und Stacey (2012, S. 30ff) heben die besondere Bedeutung einer Planungsphase hervor. Die Autoren bedauern, dass viele Menschen den Eindruck haben, sie müssten bereits nach dem ersten oder zweiten Durchlesen einer

Aufgabenstellung zur endgültigen Lösung des Problems vorgedrungen sein: „Die Arbeit, die in die Planungsphase investiert wird, legt den Grundstock für eine erfolgreiche Lösungsdurchführung. Die hierfür nötige Zeit ist also gut angelegt.“ (ebd., 2012, S. 30) In ihrer Publikation wird eine Strukturierung der Planungsphase nach folgenden drei Gesichtspunkten vorgeschlagen. Diese wurden in das oben präsentierte Modell integriert.

- Was ist bekannt?
  Diese Frage bezieht sich auf zwei Arten von Vorinformationen, die den Lernenden zur Verfügung stehen. Einerseits sollen sie für sich klären, welche Voraussetzungen die Forschungsfrage impliziert. Andererseits wird gefiltert, welche der eigenen Vorkenntnisse für die Lösung der Problemstellung hilfreich sein können.
- Was ist das Ziel?
  Besonders wenn Schülerinnen und Schüler ihre Forschungsfrage selbstständig generieren, können Verständnisprobleme entstehen. Missverständnisse oder unterschiedliche Interpretationen der Problemstellung sollen durch das bewusste Setzen von Zielen und Teilzielen vermieden werden.
- Welche Hilfsmittel sind heranzuziehen?
  In vielen Fällen können Skizzen, Tabellen oder geschickt gewählte Symbole entscheidend für die Lösung eines Problems sein. Manchmal kann aber auch die Erinnerung an frühere Problemlöseprozesse hilfreich sein. Besonders im Unterricht bietet sich das Heranziehen des Schulbuches oder anderer Informationsmaterialien an. Auch das Internet oder die Verwendung einer dynamischen Geometrie-Software können die Durchführung einer Forschungsarbeit unterstützen.

Im hier präsentierten Modell heißen die entsprechenden Tätigkeiten:

- Fakten klären
- (Teil-) Ziele formulieren
- Hilfsmittel ausloten

Je nach Unterrichtsform werden diese drei Tätigkeiten unterschiedlich angeleitet. In einer strukturierten Form übernimmt die Lehrkraft das Klären der Fakten, das Formulieren der Teilziele oder gibt an, welche Hilfsmittel für die Lösung des Problems heranzuziehen sind. Gelenkte Formen des forschenden Lernens legen nahe, dass die Lehrperson Vorschläge für geeignete Hilfsmittel gibt, Materialien zur Verfügung stellt, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler das notwendige Vorwissen erarbeiten können, oder Unterstützung bei der geeigneten Formulierung von Teilzielen anbietet. In offenen Formen des forschenden Lernens übernehmen Schülerinnen und Schüler diese Aufgaben. Sie suchen selbstständig nach hilfreichen Informationen, diskutieren über die Eindeutigkeit ihrer Zielsetzungen und helfen einander.

2.4.4 Durchführung

Nach dem oben vorgeschlagenen Modell forschenden Lernens für den Mathematikunterricht könnte die Phase der Durchführung noch einmal in zwei Teilphasen gegliedert werden. Durch mathematisches Experimentieren werden in der ersten Teilphase Beobachtungen festgehalten und Hypothesen generiert. In der zweiten Teilphase sollen diese in das mathematische Wissensnetz eingegliedert, begründet und bewiesen werden.

„Mathematisches Experimentieren ist eine Aktivität, mit der mathematische Zusammenhänge erkundet, entdeckt, bestätigt und widerlegt werden können," schreiben Frohn und Salle. (2015, S. 14) Die Tätigkeit des Experimentierens wird also in vielen Fällen Ausgangspunkt für die Formulierung mathematischer Vermutungen sein, kann aber auch zu deren Bestätigung oder Widerlegung führen. Axel Goy (2015, S. 27) versteht unter einem Experiment ein Handeln mit mathematischen Objekten, das dem Zweck dient, Hypothesen zu entdecken, zu bekräftigen oder zu verwerfen. Diesen kreativen, erkenntniserzeugenden Akt, bei dem Vermutungen generiert werden, nennt der US-amerikanische Mathematiker und Philosoph Charles Sanders Pierce *Abduktion*. (vgl. ebd., S. 27f) Goy (2015, S. 32) vermutet, dass erst zunehmende Problemlöseerfahrung bewirken kann, dass das Experimentieren der Schülerinnen und Schüler sukzessive planvoller wird. Je nach Form des forschenden Lernens kann die Lehrkraft die Art und Weise des Experimentierens unterstützen. Sie kann Spezialfälle vorgeben, an denen das Themenfeld erkundet werden soll, lediglich Vorschläge oder Tipps dafür bereitstellen oder die Lernenden gänzlich selbstständig experimentieren lassen.

Die mathematische Wissenschaft und damit auch forschendes Lernen im Mathematikunterricht kann sich allerdings nicht im Generieren von Hypothesen und ihrer Bestätigung an einigen Spezialfällen erschöpfen. Das Begründen und Beweisen sind zentrale Bestandteile jeder mathematischen Forschungsarbeit. Frohn und Salle (2015, S. 14) weisen in Anlehnung an Schwarz, Hershkowitz und Prusak darauf hin, dass die Phase des experimentellen Umgangs mit einem mathematischen Phänomen und jene des Beweisens keineswegs fließend ineinander übergehen. Vielmehr sprechen die Autoren von einem kognitiven Bruch zwischen Experimentieren und Beweisen. Esther Brunner (2014, S. 60) begründet dies damit, dass die Aktivität des Beweisens einen „fundamentalen Wechsel vom experimentellen Zugang über Beispiele hin zum Durchschauen eines Zusammenhangs und damit eine Umstrukturierung des empirisch gewonnenen Wissens“ verlangt. Frohn und Salle (2015, S. 14) relativieren diesen Bruch allerdings wieder, indem sie betonen, dass entscheidende Aktivitäten und Erkenntnisse aus der Experimentierphase beim eigentlichen Beweisen durchaus eine wichtige Rolle spielen können. Die Vorgehensweisen, Ergebnisse und Spezialfälle des Experimentierens können einen Beweis also genetisch motivieren. Aus dem Experimentieren sollte sich für Schülerinnen und Schüler ein Beweisbedürfnis ergeben, welches für Brunner (2014, S. 56f) den Ausgangspunkt jedes Beweisprozesses darstellt: „Die Ausgangslage beim Beweisen bildet die fehlende Gewissheit darüber, ob eine Vermutung oder eine Behauptung auch tatsächlich zutrifft oder nicht. Diese Zweifel erzeugen das Bedürfnis, Gewissheit zu erlangen. Und eine solche kann nur durch das Verstehen einer Struktur erreicht werden.“

Frohn und Salle (2015, S. 17) konnten zwei Arten von Aktivitäten identifizieren: solche, die beim Erkunden des mathematischen Phänomens verortet sind, und solche, die in den möglichen Begründungen für Hypothesen weiter verfolgt werden. Besonders in Hinblick auf die zweite Art von Aktivität plädieren die Autoren für eine aktive Unterstützung der Lehrkraft, um allen Schülerinnen und Schülern den Übergang vom Experimentieren zum Begründen und Beweisen zu ermöglichen.

Wurde eine inhaltlich-anschauliche Begründung für eine Vermutung gefunden, folgt der formale Beweis, der üblicherweise der wissenschaftlichen Community durch eine Publikation präsentiert wird. Dieser ist also bereits Teil der Phase „Kommunikation“.

2.4.5 Kommunikation

Davis und Hersh (1981/1994, S. 6) weisen auf die große Bedeutung des gegenseitigen Austausches und der Vernetzung unter Forscherinnen und Forschern für die moderne Wissenschaft hin:

> „Im Gegensatz zur relativen Abgeschiedenheit, in der die Mathematiker der frühen orientalischen und westlichen Kulturen arbeiteten, pflegt die heutige Mathematik rege Kontakte. Es herrscht Informationsfreiheit. Geheimniskrämerei, wie sie von den Mathematikern der Renaissance und des Barock betrieben wurde, ist nicht mehr üblich. Man verfügt über ein riesiges, internationales Kommunikationsnetz; nationale und internationale Tagungen werden abgehalten, es gibt Austauschprogramme, an denen sich Wissenschaftler und Studenten beteiligen."

Nach diesem Vorbild sollten auch im Unterricht die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler mitgeteilt und diskutiert werden. Dafür können mehrere Möglichkeiten in Betracht gezogen werden. Die Lernenden können ihre Erkenntnisse beispielsweise in Form einer schriftlichen Publikation einreichen, die entweder von der Lehrkraft gesichtet und für die Klasse zusammengefasst oder mit den Forschungsberichten aller Schülerinnen und Schüler auf einer Online-Plattform veröffentlicht wird. Des Weiteren bieten sich Kurzpräsentationen mit anschließenden Diskussionen an, um die Forschungsergebnisse für die gesamte Klasse sichtbar machen zu können. Eventuell lassen sich die Resultate der einzelnen Forschungsgruppen auch auf Plakaten oder im Rahmen von Museumsstationen präsentieren, sodass sich alle Schülerinnen und Schüler in einem Rundgang durch die Klasse, den Flur, der Aula, o.ä. über den Forschungsprozess der anderen Gruppen informieren können. Ob bei der Publikation auf die Präsentation eines formalen Beweises Wert gelegt wird oder nicht, wird nach Maßgabe der individuellen Fähigkeiten und Interessen der Schülerinnen und Schüler, sowie nach der Komplexität des Themenfeldes entschieden. In einigen Fällen wird es sinnvoll sein, sich auf die Ausarbeitung und Präsentation einer inhaltlich-anschaulichen Begründung zu beschränken.

Je nach gewählter Form forschenden Lernens kann die Lehrperson auf den Ablauf der Präsentationen unterschiedlich Einfluss nehmen. In offenen Formen forschenden Lernens wird die Wahl der Kommunikation gänzlich den Lernenden überlassen. In gelenkten Formen stellt die Lehrkraft Anleitungen oder Wahlmöglichkeiten für die Darstellung der Forschungsresultate bereit. Strukturierte Formen ermöglichen es den

Lehrenden, einzelne Schritte der Präsentation und der darauf folgenden Diskussion festzulegen, um Schülerinnen und Schüler mit dieser Art des Austausches und den damit verbundenen Anforderungen vertraut zu machen.

2.4.6 Rückblick

In seinem Werk zur Didaktik der Heuristik „Schule des Denkens“ unterteilt George Pólya den Problemlöseprozess in vier Phasen:

- Verstehen der Aufgabe
- Ausdenken eines Plans
- Ausführen des Plans und
- Rückschau

Besonders die letzte Stufe wird im Unterricht oft vernachlässigt. Dadurch wird den Schülerinnen und Schülern aber eine wertvolle Möglichkeit verwehrt, die neu erworbenen Kompetenzen zu festigen. (vgl. Pólya, 1949/1995, S. 28) Der Rückblick auf die vollendete Lösung, aber auch auf den Weg, der dazu geführt hat, kann in hohem Ausmaß dazu beitragen, sich der zentralen Idee bewusst zu werden, die zum Erfolg geführt hat. Wenn sich diese Augenblicke im Gedächtnis verfestigen, werden sie in der Zukunft für die Lösung eines ähnlich gelagerten Problems hilfreich sein. (vgl. Mason, Burton & Stacey, 2012, S. 43) Auf diese Weise können sich die Problemlösefähigkeiten der Schülerinnen und Schüler sukzessiv verbessern. Dieser Aspekt des Lernens wird auch im „Cambridge Handbook of the Learning Sciences“ unterstrichen. R. Keith Sawyer (2005, S. 2f) nennt „the importance of reflexion“ sogar als einen der fünf zentralen Standpunkte, bezüglich welcher die unterschiedlichen Lernwissenschaften zu einem Konsens kommen konnten:

> „Students learn better when they express their developing knowledge – either through conversation or by creating papers, reports, or other artifacts – and then are provided with opportunities to reflectively analyze their state of knowledge.“

Die Rückblickphase dient aber nicht nur der Steigerung der heuristischen Kompetenzen der Lernenden. Sie kann eine mathematische Grundeinstellung vermitteln, nämlich die, dass ein Problem nie gänzlich abgeschlossen ist:

> „Ein guter Lehrer sollte die Ansicht vertreten und sie seinen Schülern einprägen, daß überhaupt niemals eine Aufgabe vollständig erschöpft ist. Es bleibt immer noch etwas zu tun; mit genügend Fleiß und Eindringen in die Aufgabe können wir jede Lösung verbessern, und auf jeden Fall können wir unsere Lösung besser verstehen.“ (Pólya, 1949/1995, S. 28)

Durch das nachträgliche Betrachten der Ergebnisse und des Forschungsprozesses können also nicht nur bessere, elegantere Lösungswege gefunden werden, das Phänomen kann zudem noch tiefgreifender verstanden werden. Der Versuch, die gewonnenen Erkenntnisse zu verallgemeinern, schafft wieder Räume, in denen neue, weiterführende Forschungsfragen entstehen können.

Im Unterricht wird es manchmal vernünftig sein, den Rückblick bereits in die Phase der Kommunikation einzubinden. Sie könnte beispielsweise im Zuge der Präsentation und Diskussion im Plenum oder Kleingruppen stattfinden. In manchen Fällen wird es allerdings sinnvoll sein, der Rückblicksphase mehr Raum zu geben und Schülerinnen und Schüler dazu anzuhalten, individuell über ihre Ergebnisse, Lösungswege und Strategien der Präsentation nachzudenken.

2.5 Geeignete Lernimpulse und -umgebungen

Für den Einsatz forschenden Lernens im Mathematikunterricht gilt es also, Lernanstöße zu finden, welche die Neugier der Schülerinnen und Schüler wecken können. Aufgaben und Impulse sollen dazu einladen, sich spielerisch mit einem Thema auseinanderzusetzen, zu experimentieren und das Bedürfnis hervorrufen, das mathematische Phänomen gänzlich zu ergründen. Volker Ulm (2009, S. 97ff) nennt drei Kriterien für Lernimpulse, welche er für notwendig hält, um von sinnvollen Ansatzpunkten für forschendes Lernen sprechen zu können: Offenheit, mathematische Reichhaltigkeit und differenzierte Erschließbarkeit.

Eine geeignete Aufgabe, die forschendes Lernen im Unterricht initiieren kann, muss eine gewisse Offenheit aufweisen. Sie darf nicht auf die Formulierung einer einzigen „richtigen“ Forschungsfrage oder gar eines „richtigen“ Lösungsweges hinauslaufen. Sinnvolle Lernimpulse laden Schülerinnen und Schüler ein, in vielerlei Richtungen zu fragen, zu probieren und zu experimentieren.

Mathematische Reichhaltigkeit besitzt eine Aufgabe dann, wenn sich eine längerfristige und umfassende Beschäftigung mit ihr lohnt. Ein Forschungsergebnis sollte im Idealfall erneut Neugier wecken können und wiederum der Ausgangspunkt einer neuen sinnvollen Fragestellung werden. Für eine Durchführung forschungsorientierter Unterrichtsformen im zwangsweise heterogenen Klassenverband ist es notwendig, dass Initialaufgaben gefunden werden, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, sich auf unterschiedlichem Niveau mit einem mathematischen Phänomen auseinanderzusetzten. Die differenzierte Erschließbarkeit ist also eine essentielle Anforderung an geeignete Lernumgebungen für forschendes Lernen. Erfolgsmomente der Lernenden sind zentrale Schlüsselereignisse für forschungsbasierten Unterricht. Diese sollten für alle Schülerinnen und Schüler erreichbar sein. Gleichzeitig ist es von großer Bedeutung, dass sie sich gefordert und gefördert fühlen.

Lernanregungen zu finden, welche diesen hohen Anforderungen gerecht werden, stellt Lehrende vor eine schwierige Aufgabe. Im Folgenden soll Origami als eine Möglichkeit vorgeschlagen werden, Lernimpulse hervorzubringen, die genügend Anreize für Schülerinnen und Schüler bieten, Mathematik zu entdecken, zu erforschen und zu verstehen. Die Kunst des Faltens lässt sich auf unterschiedlichste Weise für den Mathematikunterricht nutzen, weist allerdings von sich aus schon viele Eigenschaften auf, die forschendes Lernen, wie es oben beschrieben ist, unterstützen kann. In einem gefalteten Objekt stecken per se bereits viele Möglichkeiten für geometrische Beobachtungen, Vermutungen und Erkundungen, aber auch andere mathematische Themenbereiche können damit in Verbindung gebracht werden. Das Papier ist ein realer, veränderbarer Gegenstand, der sich auf natürliche Weise für eine hands-on und minds-on Didaktik (vgl. Kapitel 1.3) anbietet. Origami kann im Bildungskontext vom Kindergarten bis zur Hochschule eingesetzt werden. Differenzierte Erschließbarkeit ist der Faltkunst also an sich inhärent. Selbstverständlich gilt es, diese im Unterricht optimal zu nutzen. Im folgenden Kapitel soll auf das didaktische Potential der Faltkunst in Bezug auf forschendes Lernen im Mathematikunterricht genauer eingegangen werden.

3. Origami als Ausgangspunkt für forschendes Lernen

Bevor didaktische Aspekte des Origami in Zusammenhang mit forschendem Lernen im Mathematikunterricht eingehend beleuchtet werden können, soll das folgende Kapitel einen kurzen Überblick über die Entwicklung des Origami in Gesellschaft, Mathematik und Technologie geben. Dazu werden die großen, zentralen Probleme des mathematischen Origami dargelegt. Allerdings sollte sich bereits hier das reiche didaktische Potential der Papierfaltkunst erkennen lassen.

3.1 Was ist Origami?

Der Begriff Origami kommt aus dem Japanischen und setzt sich aus den Teilen „oru“, was ins Deutsche übersetzt „falten“ bedeutet und „kami“, das japanische Wort für „Papier“, zusammen. Zwar wurde Origami als japanische Papierfaltkunst bekannt, die Idee, Papier in bestimmter Art und Weise zu falten, geht aber vermutlich weiter zurück und ist zeitlich von der Erfindung und Verbreitung des Papiers kaum abzugrenzen. (vgl. Demaine & O’Rourke, 2007, S. 167f)

Modernes Origami, wie man es aus diversen Faltanleitungen kennt, entstand allerdings erst im Zuge eines internationalen Austausches, der eine Verschmelzung der östlichen und westlichen Papierfaltkunst nach sich zog. Vorreiter dieser Verbreitung des Origami war der deutsche Begründer der Spielpädagogik Friedrich Fröbel. Er integrierte Papierfalten in sein pädagogisches Konzept für Kindergartenerziehung, welches in den 1870er Jahren von Japan übernommen wurde. Auf diese Weise wurde europäisches Origami als Element der Kindergartenausbildung Teil der japanischen Kultur. (vgl. Hatori, 2011, S. 10) Japanisches Origami wiederum verbreitete sich zunehmend über den gesamten Globus. Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelten sich viele parallele Bewegungen mit dem Ziel, Origami weiter bekannt zu machen. Schlüsselrollen für diese Entwicklungen spielten beispielsweise der Engländer Robert Herbin, die US-Amerikanerin Lillian Oppenheimer und der Japaner Akira Yoshizawa. (vgl. Hull, 2005, S. 92) Zwar setzten sich einige Mathematikerinnen und Mathematiker vereinzelt bereits Ende des 19. Jahrhunderts mit der Papierfaltkunst auseinander, die eigentliche Mathematisierung des Origami fand jedoch erst ab ungefähr 1990 statt. Maßgeblich daran beteiligt sind beispielsweise die Wissenschaftler Robert J. Lang, Thomas Hull, Eric Demaine, und Kazuo Haga, auf deren Arbeiten später noch genauer eingegangen werden soll. Letzterer prägte für den Zusammenschluss von Origami und Mathematik sogar einen eigenen Begriff. „Origamics“ soll jenes Gebiet der Mathematik beschreiben, das sich mit der Papierfaltkunst auseinandersetzt. Zwischen 1989 und 2001 führten die Überlegungen von Jacques Justin, Humiaki Huzita und Koshiro Hatori zur eigentlichen Mathematisierung des Papierfaltens, der Origami-Axiomatik. (vgl. Hungerbühler, 2013, S. 22)

3.1.1 Die Huzita-Justin Axiome

Nach dem Vorbild der euklidischen Werkzeuge für die Konstruktion mit Zirkel und Lineal, haben sich Mathematikerinnen und Mathematiker mit der Frage auseinandergesetzt, welche Figuren durch das Falten von Papier konstruiert werden können. Die Linien werden allerdings nicht mehr mit dem Bleistift erzeugt, sondern durch Falten. Um zu bestimmen, welche Faltlinien aus gegebenen oder bereits konstruierten Punkten und Geraden hervorgebracht werden können, wurden folgende sieben Regeln gefunden. (vgl. Hungerbühler, 2013, S. 22f) Punkte und durchgezogene Geraden der folgenden Abbildungen sind bereits vor dem Konstruktionsschritt gegeben. Die gestrichelte Linie symbolisiert jeweils die durch den Konstruktionsschritt erzeugte Faltlinie. Die Pfeile zeigen an, wohin ein Objekt gefaltet wird.

[A1] Zwei Punkte P und Q können durch eine Falte verbunden werden.

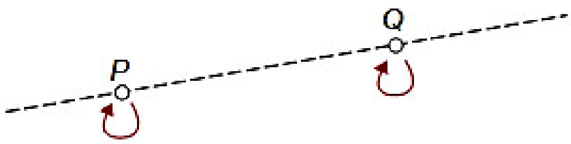


Abb. 7: Erstes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 22)

[A2] Ein Punkt P kann auf einen Punkt Q gefaltet werden.

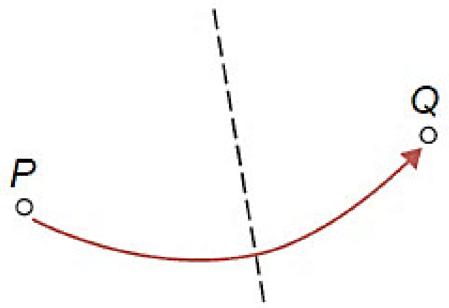


Abb. 8: Zweites Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 22)

[A3] Eine Gerade g kann auf eine Gerade h gefaltet werden.

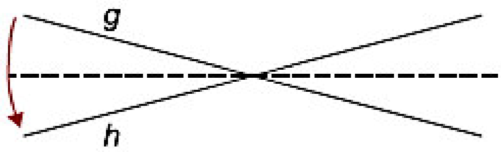


Abb. 9: Drittes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 23)

[A4] Man kann eine Falte durch einen Punkt P so legen, dass sie senkrecht auf eine Gerade g liegt.

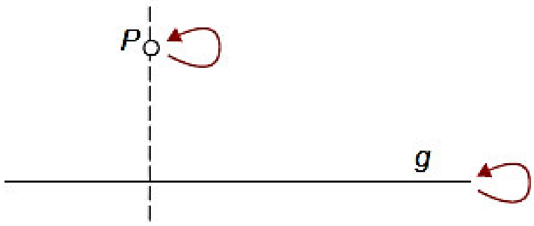


Abb. 10: Viertes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 23)

[A5] Ein Punkt P kann so auf eine Gerade g gefaltet werden, dass die entstandene Faltlinie senkrecht zu einer Geraden h steht.

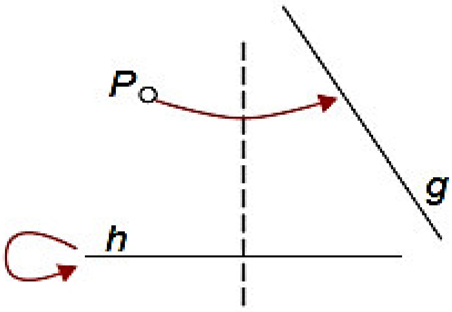


Abb. 11: Fünftes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 23)

[A6] Ein Punkt P kann so auf eine Gerade g gefaltet werden, dass die entstandene Faltlinie durch einen Punkt Q geht.

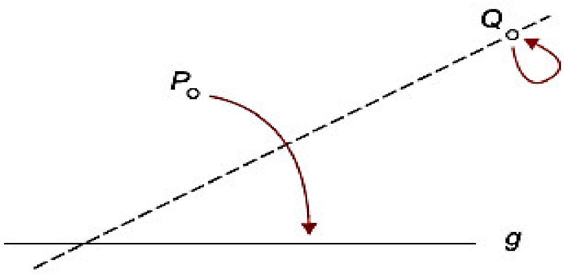


Abb. 12: Sechstes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 23)

[A7] Die Punkte P und Q können auf die Geraden g und h gefaltet werden.

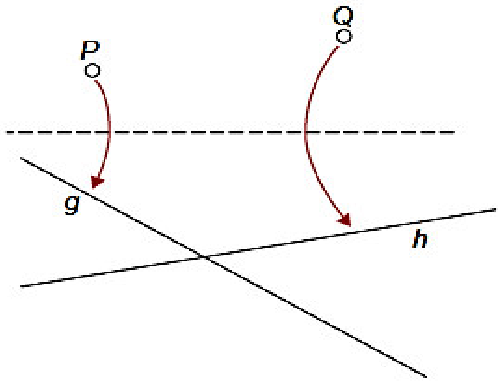


Abb. 13: Siebentes Origami-Axiom (Hungerbühler, 2013, S. 23)

Die Darstellungen beziehen sich auf Fälle, in denen die beschriebene Faltung auch tatsächlich durchführbar ist. Dies gilt allerdings nicht im Allgemeinen für alle sieben Grundfaltungen. Außerdem ist anzumerken, dass die Faltvorgänge [A6] und [A7] nicht zwangsweise eindeutig festgelegt sind. Ebenso erzeugt [A3] zwei mögliche Faltlinien.

3.1.2 Origami als Konstruktionsmittel

Dass die Faltungen [A1]-[A5] mit Zirkel und Lineal immitierbar sind, ist offensichtlich. [A6] entspricht der Konstruktion einer Tangente durch den Punkt Q an jene Parabel, die den Brennpunkt in P hat und deren Leitlinie g ist. Auch dies lässt sich mit Zirkel und Linieal konstruieren. Genauere Beschreibungen und mathematische Hintergründe werden in Kapitel 4.2 im Zuge eines Unterrichtsvorschlages erörtert.

Der Faltvorgang in [A7] bringt nun tatsächlich eine Erweiterung der Konstruktionsmöglichkeiten im Vergleich mit Zirkel und Lineal. Zwei Punkte auf zwei Geraden zu falten, erzeugt entsprechend den Überlegungen zu [A6] eine gemeinsame Tangente an zwei voneinander verschiedene Parabeln. Dies entspricht in der klassischen Geometrie der verbotenen Konstruktion mit dem „Einschiebelineal“. Mit diesem sind alle Konstruktionsaufgaben lösbar, die auf kubische Gleichungen hinauslaufen. (vgl. Alperin, 2000, S. 120f) Origami ist also durchaus ein leistungsstarkes Konstruktionsmittel. Mit Papierfalten lässt sich demnach beispielsweise jeder beliebige Winkel dreiteilen, eines der klassischen Probleme der antiken Mathematik, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Für einen gegebenen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ soll die Konstruktion im Folgenden dargestellt werden. (vgl. Humenberger, 2012, S. 42)

(a) Man nehme ein rechteckiges Stück Papier $ABCD$. Der Winkel $\sphericalangle PBC = \alpha$ sei gegeben.

(b) Durch die Faltung einer beliebigen Parallele zu BC entsteht die Faltlinie EF.

(c) Wird nun B auf E bzw. C auf F gefaltet, erhält man die Faltlinie GH, welche das Rechteck $BCFE$ halbiert.

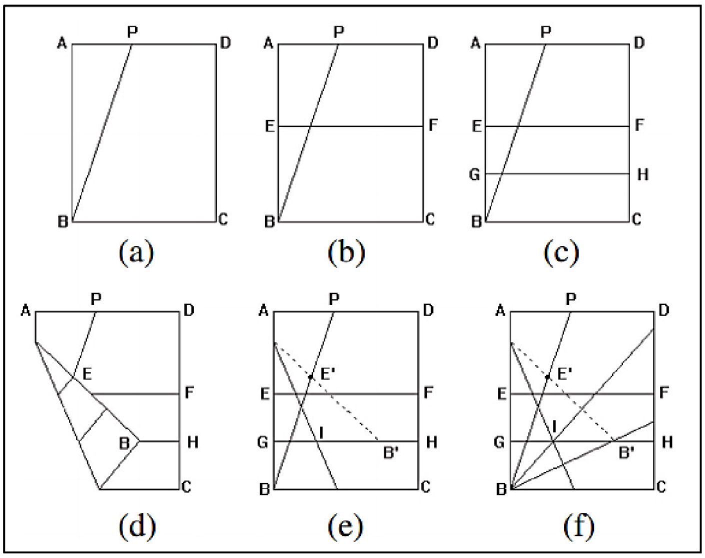


Abb. 14: Dreiteilung des Winkels (Humenberger, 2012, S. 43)

(d) Wird nun Konstruktionsschritt [A7] angewandt, indem E auf BP und gleichzeitig B auf GH gefaltet wird,

(e) entsteht der Schnittpunkt I, sowie der Bildpunk B'.

(f) Die beiden von B ausgehenden Strahlen durch I und B' dritteln den Winkel α.

Für den Beweis werden keine Kenntnisse benötigt, welche über das Niveau der Sekundarstufe I hinausgehen. Daher eignet er sich mit Hilfestellungen durchaus für eine Aufgabe zur Förderung besonders interessierter Schülerinnen und Schüler.

Betrachtet man zunächst das gelb eingefärbte Dreieck LBB' (Abb. 15), so stellt man fest, dass es gleichschenkelig sein muss, da LB' durch die Spiegelung von LB entstanden ist. Es ist leicht einzusehen, dass I der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks ist: Denn einerseits steht GB' normal auf LB und andererseits wurde B in Konstruktionsschritt (d) auf B' gefaltet, woraus geschlossen werden kann, dass die entstandene Faltlinie ebenfalls einen rechten Winkel mit BB' einschließt. BK ist in jenem gleichschenkeligen Dreieck LBB' die Höhe auf den Punkt B, da sie nicht nur den Punkt B, sondern auch den Höhenschnittpunkt I enthält. Sie steht daher normal auf LB'. Aus Symmetriegründen ergibt sich, dass K der Bildpunkt von G ist und wird aus diesem Grund von nun an G' genannt.

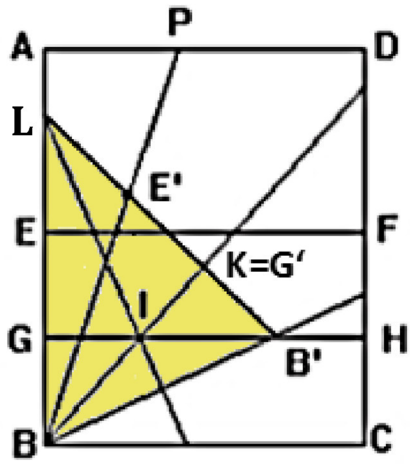


Abb. 15: Gleichschenkeliges Dreieck

Wir betrachten nun die drei eingefärbten Dreiecke $BE'G'$, $BG'B'$ und $BB'J$ (Abb. 16). Letzteres ergibt sich aus der Konstruktion des Lots auf BC durch den Punkt B'. Aus der Betrachtung des Faltvorgangs (d) lässt sich relativ einfach sehen, dass gilt: $\overline{E'G'} = \overline{G'B'} = \overline{B'J}$, weil wegen Faltschritt (c) ja auch gelten muss: $\overline{EG} = \overline{GB} = \overline{B'J}$. Zusammenfassend besitzen also alle drei eingefärbten Dreiecke einen rechten Winkel, sowie eine gleich lange Seite. Es ist offensichtlich, dass sich jeweils zwei Dreiecke noch eine zusätzliche Seite miteinander teilen. Daraus ergibt sich ihre Kongruenz und somit die zu zeigende Aussage. □

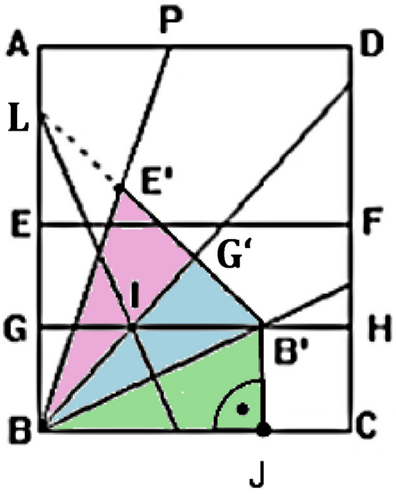


Abb. 16: Drei kongruente Dreiecke

Hans-Wolfgang Henn (2009, S. 43f) präsentiert in seinem Artikel „Gefaltete Mathematik“ in der Fachzeitschrift „Der Mathematikunterricht“ eine elegante Lösung des Deli’schen Problems der Würfelverdopplung mithilfe von Origami.

3.1.3 Origami Design

Origami als Konstruktionswerkzeug zu betrachten, ist relativ weit vom originären Gedanken der Papierfaltkunst entfernt. Das ursprüngliche Bestreben war es, aus einem einfachen Blatt Papier lediglich durch Falten ästhetische Objekte hervorzubringen. Das Problem lässt sich also folgendermaßen beschreiben: Welche Faltungen müssen vorgenommen werden, um ein gewünschtes Endprodukt zu erhalten? In Abb. 17 ist der klassische Origami-Kranich mit zugehörigem Faltmuster abbgebildet.

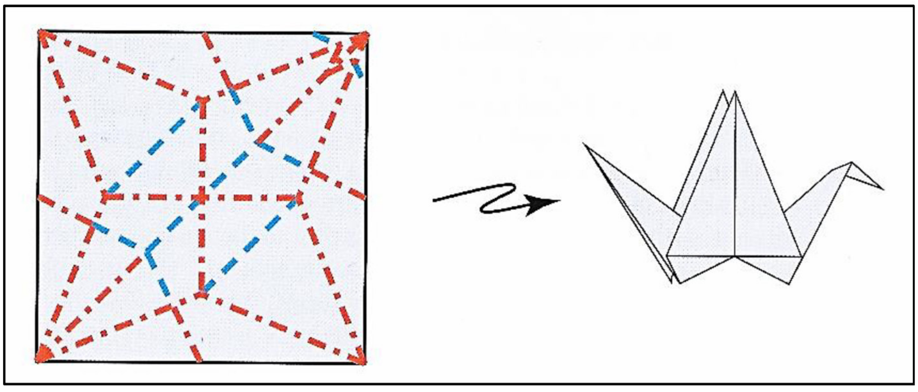


Abb. 17: Klassischer Origami-Kranich mit zugehörigem Berg-Tal-Faltmuster (Demaine & O’Rourke, 2007, S. 170)

Die blauen gestrichelten Linien stellen sogenannte Talfaltungen dar. Sie werden erzeugt, indem man das Papier zu sich faltet, wodurch der Eindruck entsteht, dass die Falte ihrem Namen entsprechend ein Tal bildet. Die roten mit Strich-Punkten dargestellten Linien entsprechen Bergfalten. Diese sind den Talfalten entgegengesetzt, entstehen also, indem man das Papier nach hinten faltet. Selbstverständlich kehrt sich die Notation um, wenn das Papier von der anderen Seite betrachtet wird. Sie dient also lediglich der Unterscheidung dieser zwei Arten von Faltungen.

Die Mathematik – und allen voran die Arbeiten von Robert J. Lang – konnten die Möglichkeiten bezüglich faltbarer Objekte erheblich erweitern. Der Wissenschaftler fasste das Problem im Jahr 2008 in einem Vortrag zur offiziellen TED Konferenz wie in Abb.18 zusammen.

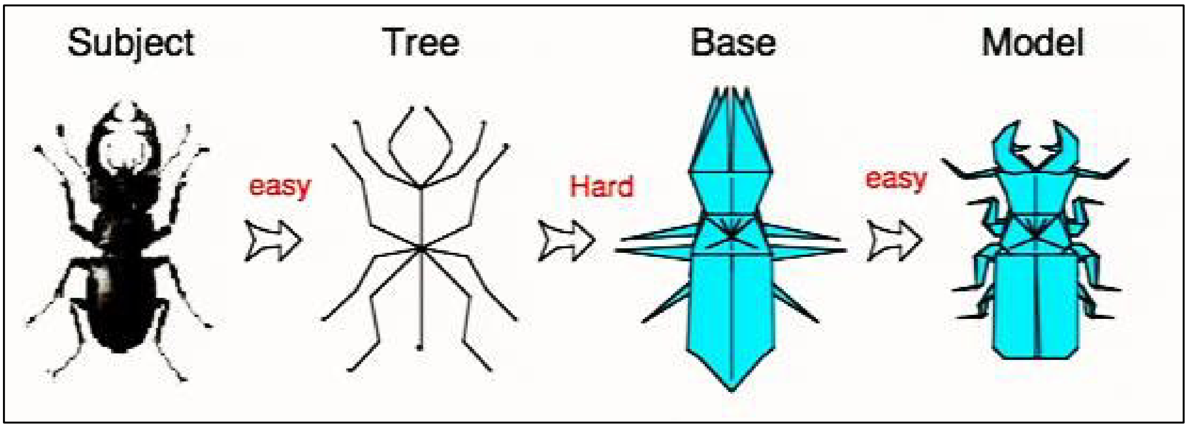


Abb. 18: Von der Idee zum Origamimodell (Lang, 2008, 06:05)

Im ersten Schritt abstrahiert man das Objekt, das gefaltet werden soll. Die einfachste Möglichkeit dies zu tun, ist das Erstellen einer Strichfigur, die im Wesentlichen eine vereinfachte Version einer Projektion des ursprünglichen Objekts ist. Kann daraus eine gefaltete Basis entwickelt werden, ist der letzte Schritt, nämlich das Anpassen und Zurechtbiegen der Extremitäten, keine besonders große Herausforderung mehr. Der zweite Schritt ist allerdings nicht ganz so einfach zu bewerkstelligen. Die Mathematik kann hierzu aber einen erheblichen Beitrag leisten.

Überlegt man, wie eine einzelne Antenne oder Beine zustande kommen können, kommt man schnell zu dem Schluss, dass daran eine annähernd kreisförmige Umgebung beteiligt sein muss. (vgl. Hungerbühler, 2013, S. 30)

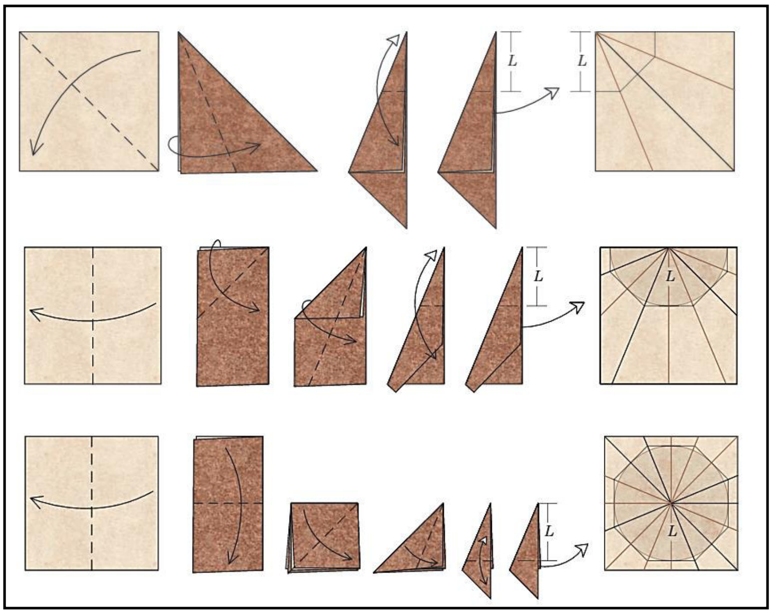


Abb. 19: Faltung von Extremitäten (Lang, 2003, S. 279f)

Je nachdem welcher Teil des Papiers für die notwendige Lasche verwendet wird, (eine Ecke, der Rand oder die Mitte) ist die jeweilige Umgebung lediglich ein Viertelkreis, ein Halbkreis oder ein ganzer Kreis. (siehe Abb. 19) Jede Extremität nimmt auf dem Papier also die Fläche einer mehr oder weniger vollen Kreisscheibe für sich ein. Für die optimale Positionierung von Kreisscheiben in einem Rechteck (Disk-Packing) sind allerdings Algorithmen bekannt. Um aus diesem Kreismuster eine zielführende Faltanleitung zu machen, werden die Mittelpunkte der Kreise noch so mit Linien verbunden, dass diese faltbar sind. Robert J. Lang hat das Computerprogramm „Treemaker" entworfen, das genau diesen Schritt für die Benutzerin oder den Benutzer übernimmt. Aus einer gegebenen Strichfigur generiert es ein Faltmuster, das zu der gewünschten Basis führt. Robert J. Lang stellt das Programm als Freeware für alle bekannten Betriebssysteme zur Verfügung. Momentan ist Version 5 erhältlich.

3.1.4 Flat Foldability

Genau anders herum stellt sich das Problem der Flat Foldability. Bei einem gegebenen Faltmuster soll entschieden werden, ob dieses zu einem flachen Origamiobjekt führen kann oder nicht. Das einfachste Muster, anhand dessen das Problem erläutert werden kann, ist in Abb. 20 zu sehen.

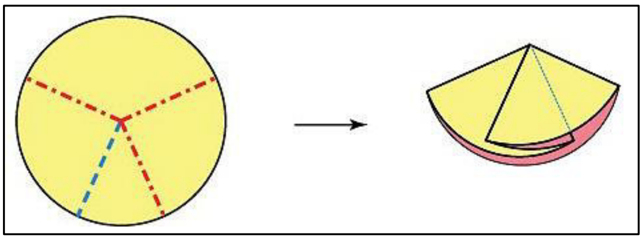


Abb. 20: Faltungen, die von einem einzigen Scheitel ausgehen (Demaine & O'Rourke, 2007, S. 194)

Um sich flach falten zu lassen, können Faltlinien nicht beliebig in einem Punkt zusammentreffen. Wir betrachten also das Problem lokal und greifen ein Faltmuster heraus, das lediglich aus Faltlinien besteht, die von einem einzigen Scheitel ausgehen. Dafür ist die Form des Papiers unerheblich. Man kann sich das Papier also in Form eines Kreises mit dem Radius 1 vorstellen, in dessen Mittelpunkt alle Faltlinien zusammenlaufen.

Das Faltmuster ist somit vollkommen durch eine Folge von Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ festgelegt, wobei diese fortlaufend entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn nummeriert werden. Klarerweise gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2\pi.$$

Der folgende Satz wird oft als Satz von Kawasaki bezeichnet, wurde aber unabhängig davon bereits von Justin formuliert. (vgl. Demaine & O'Rourke, 2007, S. 199f)

Ein Faltmuster, in dem alle Faltlinien von einem einzigen Scheitel ausgehen, und das durch die Winkel $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi$ festgelegt ist, lässt sich genau dann flach falten, wenn n eine gerade ganze Zahl ist und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \alpha_{2i-1} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \alpha_{2j} = \pi,$$

also die Summe der Winkel mit ungeraden Indices, der Summe der Winkel mit geraden Indices entspricht.

Die folgende Beweisführung orientiert sich einerseits an Thomas Hull (2006, S. 173f), der den Satz von Kawasaki in seinem didaktischen Werk „Project Origami" besonders anschaulich präsentiert und andererseits an Erik Demaines Vorlesung „Geometric Folding Algorithms", die er im Jahr 2010 am MIT hielt. (11:50-22:57)

Zunächst zeigen wir, dass die beiden Bedingungen notwendig sind, damit ein Faltmuster, dessen Faltlinien in einem einzigen Scheitel zusammenlaufen, ein flaches Origami-Objekt erzeugt. Sei v also so ein flach faltbares Faltmuster, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die im Uhrzeigersinn fortlaufend nummerierten, von den Faltlinien $l_1, l_2, \ldots, l_n$ eingeschlossenen Winkel sind.

Nun stelle man sich vor, eine Ameise werde auf dem gefalteten Objekt abgesetzt, die den gesamten Rand des Papiers, also einen vollen Kreis, abläuft. Wenn wir im Bogenmaß denken, wandert sie also einen Winkel nach dem nächsten ab. Angenommen, sie beginnt mit α_1, dann muss sie bei l_1 eine 180° Drehung vollbringen, um entlang α_2 in die entgegengesetzte Richtung krabbeln zu können. Dies macht sie solange, bis sie bei ihrem Ausgangspunkt angelangt ist. Betrachtet man jetzt nur den Weg der Ameise, so kann er wie in Abb. 22 dargestellt werden. Die Winkel im Bogenmaß erhalten durch die Bewegung der Ameise eine Richtung und können als Vektoren gedacht werden.

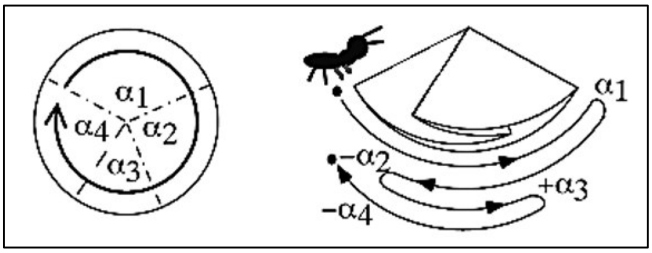


Abb. 21: Flachfaltbare Winkelfolge (vgl. Hull, 2006,S 174)

Die vertikalen Abstände haben in der Graphik keinerlei Bedeutung, da die Papierschichten eigentlich direkt aufeinander liegen. Eigentlich sollte man sich $l_1, l_2, \dots, l_n$ also als Punkte vorstellen, an denen ein Richtungswechsel erfolgt.

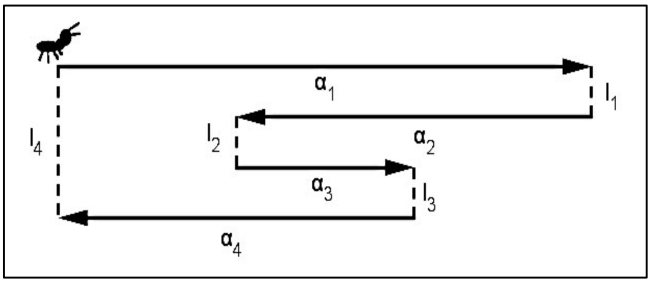


Abb. 22: Weg der Ameise

Dass n eine gerade ganze Zahl sein muss, sieht man nun deutlich. Wäre dies nicht der Fall, würde die Ameise bei l_n keinen Richtungswechsel durchführen, was einen Widerspruch zur Beschaffenheit der Linie l_n als Faltung erzeugt. Außerdem ist klar, dass sie, an ihrem Ausgangspunkt angekommen, ihre Reise wiederholen könnte. Die Spitze des Vektors α_n hat also die gleiche x-Koordinate, wie der Schaft des Vektors α_1. (siehe Abb. 22) Daraus folgt direkt:

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + - \cdots - \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \alpha_{2i-1} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \alpha_{2j}.$$

Da die Winkel einander auf 2π ergänzen, folgt die Gleichheit mit π.

Um zu zeigen, dass die Bedingungen auch hinreichend sind, nehmen wir an, n sei gerade und es gelte $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + - \cdots - \alpha_n = 0$. Zu zeigen bleibt, dass sich aus einem solchen Faltmuster ein flaches Origami-Objekt ergibt. Aufgrund der Voraussetzungen lassen sich die Winkel wieder wie in Abb. 22 darstellen. Im Idealfall sieht die daraus resultierende Graphik auch in etwa so aus. Andernfalls hat das Ergebnis Ähnlichkeit mit Abb. 23 (a) und die Endpunkte können einander nicht treffen, weil die dazwischenliegenden Papierschichten darüber hinausstehen. Dieses Problem lässt sich allerdings recht bequem durch einfaches Umordnen lösen. Man suche einen Winkel bzw. Vektor, dessen Endpunkt in einer derartigen Graphik entweder ganz links oder ganz rechts außen liegt. Dieser rückt in unserer Darstellung ganz nach oben. Alle anderen werden dementsprechend weiter gerückt.

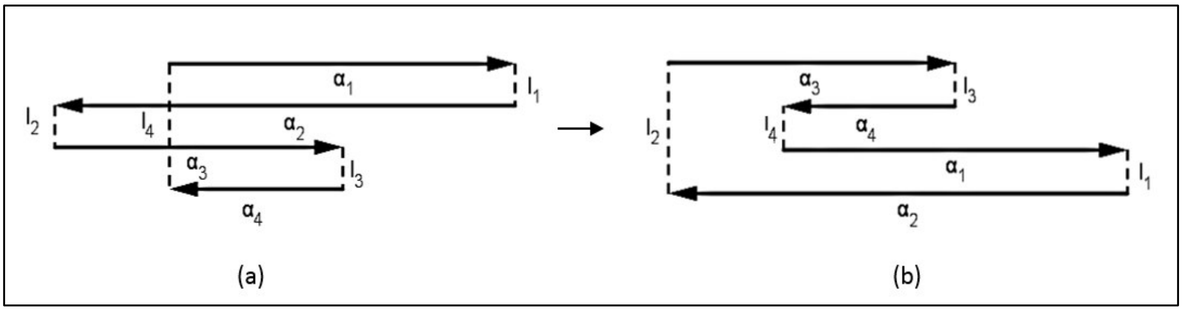


Abb. 23: Umschichtung der Winkelvektoren

Auf diese Weise kann jede gegebene Folge von Winkeln, welche die Bedingungen $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + - \cdots - \alpha_n = 0$ und n gerade erfüllt, in eine Reihenfolge gebracht werden, sodass Anfangs- und Endpunkte einander treffen. Daraus folgt, dass ein solches Faltmuster immer ein flaches Origami Objekt generieren kann. □

Thomas Hull (2006, S. 170f) präsentiert den Satz von Kawasaki als Zusammenschluss einiger Entdeckungen bezüglich Faltmuster, die von einem einzigen Knoten ausgehen, die laut ihm auch von Schülerinnen und Schülern gemacht werden können. Folgende Möglichkeiten für Beobachtungen führt der Autor zusätzlich an.

- Der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Faltlinien ist höchstens 180°.
- Sei B die Anzahl der Bergfaltungen und T die Anzahl der Talfaltungen, so gilt $|B - T| = 2$.
- Seien α_1, α_2 und α_3 drei aufeinanderfolgende Winkel des Faltmusters und es gilt $\alpha_1 > \alpha_2$ und $\alpha_3 > \alpha_2$, so müssen die beiden dazwischenliegenden Faltlinien unterschiedliche Berg-Tal-Vorschriften besitzen.

Durch Betrachtung des Polygons, das durch Falten aus dem kreisförmigen Papierrand entsteht (vgl. Abb. 22), lassen sich diese drei Sätze ohne großen Aufwand beweisen.

Mit Hilfe des Satzes von Kawasaki lässt sich also recht schnell entscheiden, ob sich ein Faltmuster lokal flach falten lässt. Die gleiche Frage für ein komplexeres Faltmuster zu beantworten, ist aber erheblich schwieriger, da die lokale Faltbarkeit eines jeden einzelnen Knoten zwar klarerweise eine notwendige aber leider keine hinreichende Bedingung für die globale Faltbarkeit ist. Bern und Hayes konnten 1996 zeigen, dass dieses Problem als NP-hard einzustufen ist. (vgl. Demaine & O'Rourke, 2007, S. 222)

3.1.5 Anwendungen

Die soeben dargelegten Überlegungen sind Teil eines Gedankengebäudes, das sich rund um das Papierfalten aufgebaut hat und entscheidend dazu beiträgt, dass Origami sich von einer spielerischen Bastelaktivität zu einem festen Bestandteil der Technologie und Wissenschaft entwickeln konnte. Im Folgenden sollen einige Beispiele dargelegt werden, anhand derer das große Anwendungspotential des Origami sichtbar wird.

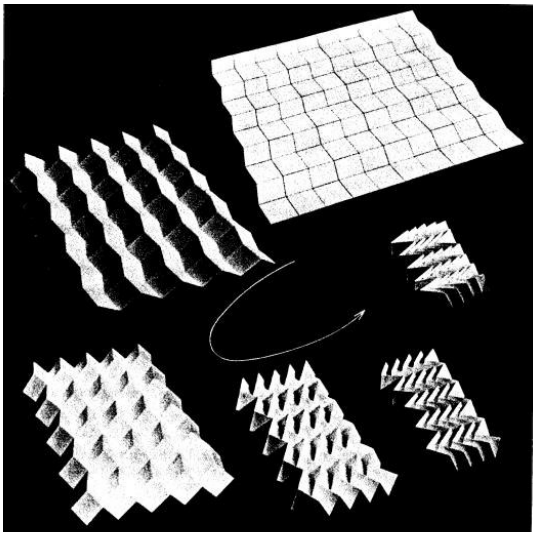


Abb. 24: Miura-Fold (Miura, 1985, S. 6)

Eine der ersten und zugleich imposantesten Ideen der Anwendung stammt von Koryo Miura. Er entwarf bereits im Jahr 1985 eine Methode, um eine große Membrane so zu falten, dass sie sich leicht in den Weltraum befördern lässt und sich dort nur von einer Bewegung angestoßen öffnet. Der sogenannte Miura-Fold ist in Abb. 24 zu sehen. Aus diesen Überlegungen entwickelte der japanische Astrophysiker einen Weltraumsonnenkollektor, der im gefalteten Zustand im Laderaum einer Trägerrakete Platz fand und sich im Jahr 1995 auf dem japanischen Forschungssatelliten Space Flyer Unit entfaltete. (vgl. Landau, 2014)

Miuras Überlegungen inspirierten viele Ingenieurinnen und Ingenieure. Im Jahr 2013 kollaborierten beispielsweise Shannon A. Zirbel und Robert J. Lang, um ein Solarsegel zu entwerfen, das sich im Weltall von einem Objekt mit einem Durchmesser von 2,7 Meter zu einer Konstruktion mit einem Durchmesser von 25 Meter entfalten kann. In Abb. 25 ist ein Modell des Solarsegels im Maßstab 1:20 zu sehen.

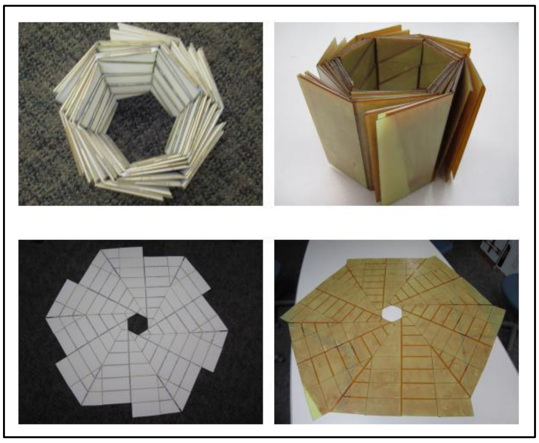


Abb. 25: Modell des Solarsegels im Maßstab 1:20 (Zirbel, Lang et al., 2013, S. 21)

Aber nicht nur in extrem großen Dimensionen kann es nützlich sein, etwas in wesentlich kleinerer Form transportieren zu können. Auch die Medizin kann Vorteile aus den Errungenschaften des modernen Origami ziehen.

In Abb. 26 ist ein Stent von Kuribayashi et al. zu sehen. Er wird in verengte Blutgefäße eingesetzt, um diese von innen zu unterstützen. Die Fotographie zeigt einerseits den zusammengefalteten Stent, wie er in das Gefäß eingeführt werden kann, und andererseits das entfaltete Pendant. Auf diese Weise kann das äußerst kleine Implantat durch den Körper transportiert werden, ohne dass es irgendeinen Schaden anrichtet, und sich erst an Ort und Stelle öffnen. Dies ist allerdings bei weitem nicht die einzige medizinische Anwendung der Papierfaltkunst. Seit einiger Zeit hat sich „scaffolded DNA Origami" als vielversprechende Forschungsrichtung erwiesen. Aufgrund ihres faltbaren Aufbaus eignet sich DNA dazu, andere Strukturen daraus entstehen zu lassen. (vgl. Nangreave et al., 2010, S. 608) Auch bei der Konstruktion von Airbags konnte der Zusammen-schluss von Origami und Technologie bereits Früchte tragen. Aber auch in Design, Architektur und Kunst diente Origami bereits als Inspiration. (vgl. Hungerbühler, 2013, S. 21)

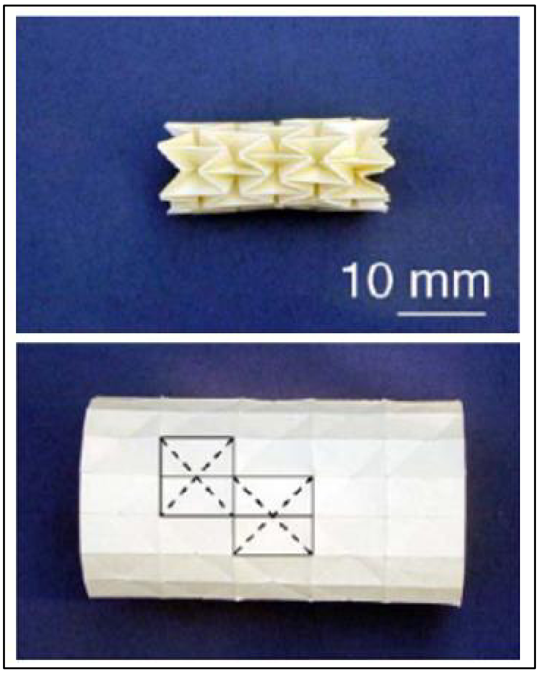


Abb. 26: Zusammen- und aufgefalteter Stent (Kuribayashi et al., 2006, S. 132)

3.2 Allgemeine fachdidaktische Aspekte des Origami

Im letzten Kapitel wurde ein kleiner Einblick in das große Potential des Origami bezüglich wissenschaftlichen und technologischen Fortschritts angeboten. Auch in der Bildung werden die Möglichkeiten, welche die Kunst des Papierfaltens innehat, auf verschiedenste Weise genutzt. Wie bereits erwähnt, fand Origami durch Friedrich Fröbels Kindergartenpädagogik Einzug in das europäische und auch japanische Bildungssystem. Mittlerweile deckt das Falten von Papier eine Spannweite ab, die von einer unterhaltsamen Bastelaktivität für Kleinkinder bis zur Vermittlung gehobener Kommunikationstechniken an Hochschulen (Foreman-Takano, 2002, S. 235ff) reicht. Die folgenden Absätze sollen nun die fachdidaktischen Möglichkeiten und Vorteile des Papierfaltens erörtern, die sich speziell für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II ergeben.

3.2.1 Fachdidaktisches Potential des Papierfaltens

Thomas Gawlick (2009, S. 50f) bemerkt in einem Artikel, den er gemeinsam mit Julia Waschbuch in „Der Mathematikunterricht" veröffentlichte, dass Origami einen Beitrag zu allen drei Grunderfahrungen nach Winter liefern kann. Dieser Gedanke soll hier aufgegriffen werden.

- Origami ist eine Erscheinung der Welt um uns, die den Schülerinnen und Schülern bereits seit dem Kindergarten vertraut ist. Im Mathematikunterricht können sie erfahren, dass den bekannten Objekten sowie der Falttätigkeit an sich mathematische Zusammenhänge inhärent sind, die ihnen zuvor nicht bewusst sein konnten. Origami stellt also einen Ansatzpunkt dar, um begreifen zu können, dass man die Welt, die uns umgibt, auf mathematische Art und Weise wahrnehmen und verstehen kann.
- Für das Falten von Papier steht ein axiomatisches System zur Verfügung, das auch für Schülerinnen und Schüler begreifbar ist und daher im Unterricht durchaus thematisiert werden könnte. Auf diese Weise erfahren Lernende, wie die Mathematik aus intuitiven Zusammenhängen ein deduktives System begründet.

- Faltobjekte aus Papier lassen sich leicht verändern. Sie bieten sich also für eine systematische Betrachtung von Spezialfällen an, was eine wichtige Problemlösestrategie darstellt. Auch das Rückwärtsarbeiten wird im Zusammenhang mit Origami immer eine wichtige Rolle spielen, indem das Objekt auf- und wieder zusammengefaltet wird. Auch dieses Vorgehen zählt zu den grundlegenden heuristischen Vorgehensweisen.

Jürgen Flachsmeyer (2009b, S. 201ff) fasst das Bildungspotential von Origami in elf Punkten zusammen.

1. Das Papier verlangt Sorgfalt.
2. Was in den Kopf gehen soll, geht zuerst durch die Hand.
3. Form- und Farbschönheit wirken unmittelbar.
4. Raumvorstellungsvermögen wird gefördert.
5. Mathematische Sprachkultur wird gepflegt.
6. Aus Fehlern kann offensichtlich ein Gewinn gezogen werden.
7. Eine frühzeitige Entfaltung der eigenen Kreativität ist möglich.
8. Eine experimentelle Seite der Mathematik tut sich auf.
9. Die Freude an der Arbeit mit den eigenen Händen kann auf die Mathematik abfärben.
10. Partnerschaftliches Zusammenarbeiten ist auch über Altersgrenzen hinweg möglich.
11. Durch Erfolgserlebnisse kann der Frust minimiert und die Akzeptanz für Mathematik gesteigert werden.

Besonders das in Punkt 2 angesprochene haptische Lernen scheint einer der größten Vorteile des Origami zu sein. Dass die Verben greifen und begreifen nicht nur etymologisch verwandt sind, sondern auch entwicklungspsychologisch untrennbar ineinander verschlungen sind, wurde bereits von Jean Piaget postuliert. Der Entwicklung des formal-logischen Denkens gehen Vorphasen voraus, in denen sich das Kind die Welt vor allem über die Sinneseindrücke an konkreten Objekten aneignet. Origami bietet die Möglichkeit diese Vorerfahrungen in den Unterricht zu integrieren und auf diese Weise haptische Lernaktivitäten als Basis für ein tiefgreifendes Verständnis zur Verfügung zu stellen. Papierfalten lässt sich im Mathematikunterricht daher im Zuge einer Wiederholung als Anwendungsbeispiel für bereits erarbeitete fachliche Inhalte oder aber auch als motivierenden Einstieg nutzen. So ist beispielsweise das Falten des Höhenschnittpunktes, des Schwerpunktes und des Umkreismittelpunktes eines ausgeschnittenen Dreiecks eine effektive und motivierende Aktivität für die Wiederholung der Euler'schen Gerade.

In den Punkten 3, 6, 7 und 9 kommt die Bedeutung des Origami als Kunstform zum Tragen. Die ansprechenden Formen und Farben laden dazu ein, selbst kreativ zu werden, ohne Angst vor Fehlern haben zu müssen. Diese führen im Zusammenhang mit Origami nämlich oft zu interessanten Effekten und relativieren ihre sonst so negative Konnotation. Der Umgang mit Fehlern ist nach wie vor stark von der Haltung der Lehrkraft abhängig. Origami bietet allerdings die Möglichkeit, Fehler als Chance für Weiterentwicklung zu begreifen und für Schülerinnen und Schüler als solche spürbar zu machen. Wie in Kapitel 2.3.1 bereits erwähnt, ist das entscheidende Moment für mathematische Forschung das Entdecken struktureller Zusammenhänge. Dieses ist in letzter Konsequenz aber ein intuitiver, kreativer Akt. Demnach ist die Förderung der Kreativität nicht nur ein allgemeines, sondern auch speziell mathematisches Bildungsziel, das besonders im Kontext forschenden Lernens eine entscheidende Rolle spielen muss. Origami als Kunstform schlägt per se bereits den Bogen zwischen Kunst und Mathematik und kann auf diese Weise nicht nur die Kreativität der Schülerinnen und Schüler aktivieren. Auch die Motivation für Mathematik könnte aufgrund der künstlerischen Tätigkeit bei einigen Lernenden gesteigert werden.

Die Punkte 8, 10 und 11 sind besonders entscheidend für den Einsatz von Origami für forschungsbasierte Unterrichtskonzepte. Auf diese soll daher erst im nächsten Kapitel eingegangen werden.

3.2.2 Fachliche Möglichkeiten des Einsatzes von Origami im Mathematikunterricht

Selbstverständlich bietet sich der Einsatz von Origami im Besonderen in Zusammenhang mit elementargeometrischen Themengebieten an. Sicherlich ist ersichtlich, wieso sich die Vermittlung von Inhalten, bei denen Symmetrie eine entscheidende Rolle spielt, durch den Einsatz von Origami bereichern lässt. Für beinahe alle Schwierigkeitsgrade lässt sich eine Origamitätigkeit finden. So zeigt beispielsweise Michael Schmitz (2009, S. 22f) wieviel Mathematik bereits in der Aufgabe steckt, ein Quadrat nur durch Falten mit einem Stück Papier zu konstruieren, das eine beliebige Form hat. Dazu müssen sich Schülerinnen und Schüler die Definition eines Quadrates genau in Erinnerung rufen, sie müssen die Eigenschaften eines rechten Winkels kennen und anwenden können, sie müssen die Diagonale als Symmetrieachse des Quadrats auffassen und schlussendlich die Sinnhaftigkeit ihrer Vorgehensweise begründen.

Thomas Hull (2006, S. 193ff) präsentiert eine Übung für Studierende, mit der die Darstellung von Spiegelungen an Geraden durch 2x2-Matrizen erlernt werden soll. Die Aufgabenstellung ist in Abb. 27 zu sehen.

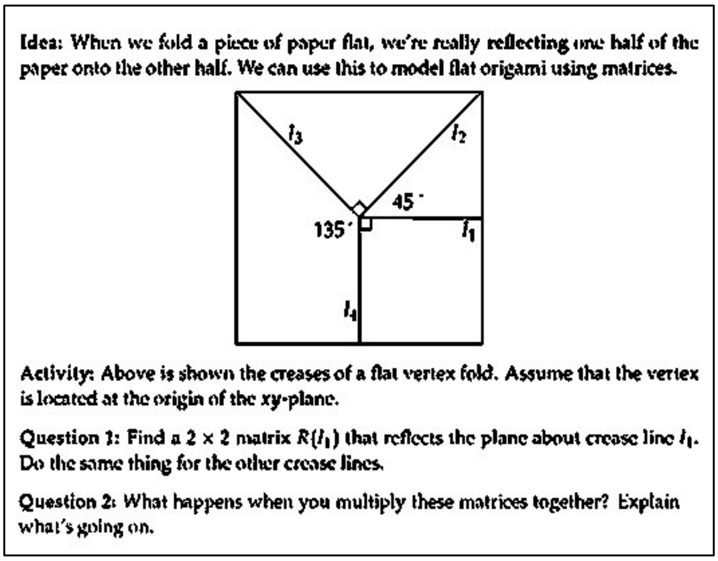


Abb. 27: Matrizen und flachfaltbares Origami (Hull, 2006, S. 194)

Diese zwei Beispiele sollen zeigen, wie variabel der Schwierigkeitsgrad für origami-basierte Aufgaben ist. Die Möglichkeiten gehen aber in beide Richtungen über diese Beispiele hinaus.

Jürgen Flachsmeyer (2009a, S. 6) merkt an, dass sich durch Origami ein intuitives Verständnis der Schülerinnen und Schüler für Ähnlichkeit erarbeiten lässt: „Formgleichheit von Gebilden, die bei gleichem Vorgehen aus unterschiedlichen Blattgrößen entstehen, ist ihnen offensichtlich.“ Faltmuster enthalten auf selbstverständliche Art und Weise trigonometrische Inhalte. Beobachtungen zu Winkelgrößen sowie zu Verhältnissen zwischen Längen einzelner Faltlinien ergeben sich beinahe von selbst.

Aber auch und vielleicht sogar vor allem in der räumlichen Geometrie kann Origami einen entscheidenden Beitrag leisten. Die Möglichkeit dreidimensionale Objekte zu berühren, zu drehen, auseinander zu nehmen und wieder zusammen zu bauen, kann Schülerinnen und Schülern helfen, ihr Raumvorstellungsvermögen zu verbessern, wie im vorangegangenen Kapitel bereits erwähnt wurde.

Aber auch abseits elementargeometrischer Inhalte bietet der Mathematikunterricht Anlässe für den Einsatz von Origami. Jürgen Flachsmeyer stellt beispielsweise kombinatorische Überlegungen zu den Möglichkeiten der Farbanordnung eines Origami-Steckwürfels an. (siehe Abb. 28) Die wiederholte Halbierung eines Papierstreifens könnte zur Einführung der geometrischen Reihe dienen. Michael Schmitz (2009, S. 25f) stellt ein Konzept vor, wie die Irrationalität von $\sqrt{2}$ anhand der Faltung eines A4 Blatts gezeigt werden kann.

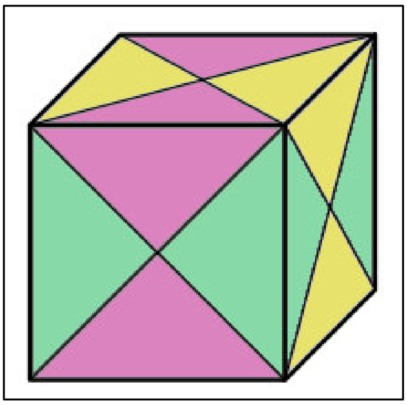


Abb. 28: Origami-Steckwürfel (vgl. Flachsmeyer, 2009b, S. 210)

Die japanische Papierfaltkunst bietet sich zwar für die Erarbeitung geometrischer Inhalte an, ihre Möglichkeiten übersteigen diese aber sichtlich.

3.2.3 Richtlinien für den Unterricht mit Origami: Origametria

Origametria ist eine Wortschöpfung des Israeli Origami Centers und ist eine Zusammenführung der Begriffe Origami und Geometrie. Es ist ein Programm, das ursprünglich für den Geometrieunterricht der Grundschule entworfen wurde, es gibt aber Pläne, die Idee auch für die Sekundarstufe auszubauen. Das Programm schreibt der Faltkunst ähnliche Vorteile zu, wie hier in den vorangegangenen Absätzen beschrieben wurde. Die Ziele der Verantwortlichen sind dementsprechend zuversichtlich.

> „The program was designed to enhance self-esteem and a sense of accomplishment, while developing learning skills such as motor skills, spatial perception, logical and sequential thinking, hand-eye coordination, focusing and concentration, aestetics, 3D perception, and principles of basic geometry." (Golan & Jackson, 2009, S. 459)

Für das Programm wurde eine Lehrmethode entwickelt und im Zuge dessen sechs Prinzipien formuliert, die hier diskutiert werden sollen. (ebd., S. 461f)

1. „The way it is taught: We do not use negative terms during our classes."
   Diese Richtlinie ist entscheidend dafür, dass Schülerinnen und Schüler in Faltaktivitäten den intuitiven Umgang mit Fehlern beibehalten und auch in mathematischen Zusammenhängen umsetzen können. Sie sollen also ihre Fehler als Chance für weitere kreative Fragestellungen oder für ihre eigene

Weiterentwicklung begreifen. Origami bietet die Möglichkeit, Fehler als etwas Konstruktives anzuerkennen, da sie beim Falten von Papier durchaus schöne Objekte hervorbringen können. Die Haltung der Lehrperson zu Fehlern von Schülerinnen und Schülern kann diese Einstellung fördern oder aber zerstören. Daher gilt es im Besonderen beim Einsatz von Origami im Unterricht auf eine positive Formulierung der Korrekturen zu achten.

2. „We never check the accuracy of folding."
   Dazu schreibt Jürgen Flachsmeyer, (2009a, S. 3) dass besonders bei jüngeren Schülerinnen und Schülern auf die Sorgfalt sehr geachtet werden müsse, und nimmt damit die gegenteilige Position ein. Die Genauigkeit, mit der Lernende falten, wirkt sich direkt auf das Objekt und damit auf ihren erlebten Erfolg aus. Demnach ist es unumgänglich, auf die Wichtigkeit eines sorgfältigen Faltvorgehens hinzuweisen. Aber auch Genauigkeit ist eine Eigenschaft, die erst erlernt werden muss. Lernende und Lehrende müssen also akzeptieren, dass sich diese erst sukzessive und in unterschiedlichem Tempo einstellt. Das gefaltete Objekt ist in den meisten Fällen selbstkorrigierend. Es gibt den Schülerinnen und Schülern also direkt Feedback. Eine Zusätzliche Kontrolle durch die Lehrkraft scheint also nicht unbedingt notwendig.

3. „Our teachers never touch a student's model"
   Ob ein absolutes Berührverbot für den Unterricht angebracht ist oder nicht, sei dahingestellt. Entscheidend ist besonders auch in Hinblick auf forschendes Lernen der Respekt, der dem Werk der Lernenden entgegengebracht wird. Sollen Schülerinnen und Schüler Eigenständigkeit in ihren Lernaktivitäten zeigen, müssen diese auch so frei wie möglich von Manipulation durch die Lehrperson gehalten werden. Wird Lernen in Anlehnung an Forschung konzipiert, ist das von den Forschenden gefaltete Objekt als ihr geistiger Besitz anzuerkennen.

4. „We carefully select the models and improve their folding sequences, so that the teachers can explain the folding procedure once and the students should be able to follow easily."

Für den Einsatz von Origami im Mathematikunterricht ist darauf zu achten, dass nicht das Falten an sich zum größten Problem für Schülerinnen und Schüler wird. Das Scheitern an der Faltanleitung kann zu Frustration führen, die jegliche Freude am Origami und den dahinterliegenden mathematischen Zusammenhängen verhindert. Trotzdem muss das Hauptkriterium für die Wahl eines Faltobjektes sein mathematisches Potential und nicht die Einfachheit des Faltvorganges sein. (vgl. Pope & Lam, 2011, S. 207)

5. „Positive reinforcement."
   Lob und Anerkennung sind wichtige Bestandteile eines motivierenden Unterrichts. Diese sollten aber begründet sein und den individuellen Fortschritt der Schülerinnen und Schüler ins Auge fassen.

6. „The model is never named while being folded."
   Dies ist eine Regel, die speziell auf die Bedürfnisse von Schülerinnen und Schüler der Grundschule angepasst ist. Sie soll dazu dienen, dass Lernende ihre Neugier bis zum Ende der Faltaktivität aufrechterhalten können. In diesem Konzept steht das fertige Origami-Objekt im Zentrum des Interesses der Schülerinnen und Schüler. Ihre mathematische Entwicklung ist lediglich im Interesse der Lehrperson und bleibt für die Lernenden Nebensache. Soll der Unterricht aber zu bewussten mathematischen Erkenntnissen führen und gleichzeitig die Basis für das langfristige Interesse am Gegenstand sein, wird diese Regel kaum zielführend sein.

Es scheint also nicht unbedingt angemessen zu sein, ein derart enges Korsett an Richtlinien für den sinnstiftenden Unterricht mit Origami einzuhalten. Allerdings können die soeben ausgeführten Überlegungen als Anstoß für unterrichtsrelevante Reflexionen dienen.

3.2.4 Mögliche Probleme bezüglich Faltausführungen

Sue Pope und Tung Ken Lam (2011, S. 208) haben sieben Probleme ausgemacht, die bei Faltausführungen oft auftreten. Diese betreffen laut ihnen nicht nur Kinder oder Jugendliche, sondern auch Lehrkräfte und Studierende.

1. Soft folding.
   Die meisten geometrischen Faltungen benötigen scharfe Kanten.
2. Inaccurate folding.
   Ungenaue Faltungen entstehen meistens durch ungenaues Aufeinanderlegen von Kanten oder durch eine ungünstige Faltstrategie.
3. Difficulty manipulating paper.
   Ein harter Untergrund kann bei der korrekten Faltausführung helfen, da er zusätzliche Unterstützung bietet. Grundsätzlich ist es einfacher die Faltung in der Nähe des Körpers durchzuführen, als auf der gegenüberliegenden Seite.
4. Halving.
   Während die Halbierung einer Strecke kaum Schwierigkeiten bereitet, stellt die Aufgabe, einen Winkel zu halbieren, für viele Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung dar.
5. Reverse folds.
   Eine Bergfaltung in eine Talfaltung zu verwandeln ist besonders dann schwierig, wenn die anfängliche Falte zu sanft gefertigt wurde. Wiederholtes Hin- und Herbiegen kann dabei zum Erfolg führen.
6. Mirror image modules.
   Modulares Origami besteht oft aus mehreren gleichen Teilen. Lernende übersehen manchmal, dass eine Mischung aus der originalen und der spiegelverkehrten Version eines Moduls nicht für die endgültige Zusammensetzung des Origami-Objektes geeignet ist.
7. Visualization and understanding instructions.
   Diese Problematik kann unter Kontrolle gehalten werden, wenn sich Schülerinnen und Schüler für den Erfolg der ganzen Klasse verantwortlich fühlen. Gegenseitige Hilfe und Unterstützung unter den Lernenden sollte schon alleine aus diesem Grund gefördert werden.

3.3 Origami und forschendes Lernen

Wenige Autorinnen und Autoren greifen die Möglichkeiten auf, die Origami speziell für forschendes Lernen bietet. Einzelne Aspekte werden allerdings in vielen Publikationen genannt.

3.3.1 Origami zwischen individuellem und kollaborativem Lernen

Sowohl die individuelle Ebene, als auch die kollaborative Seite des Lernens, sind zentral für forschungsbasierte Unterrichtsformen. Jürgen Flachsmeyer (2009b, S. 202) beschreibt das Potential des Origami zum gemeinschaftlichen Zusammenarbeiten folgendermaßen: „Durch erlaubtes Abgucken gelangt man zum eigenen Vollzug." Abschauen funktioniert also nicht auf eine passive Weise, es führt trotzdem zu einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Objekt. Die Schwierigkeiten, die bei Faltvorgängen entstehen, können oft nur gemeinsam gelöst werden. Sie laden dazu ein, Hilfe zu erbitten und anzubieten. Der gemeinschaftliche Aspekt der Faltkunst lässt sich im Unterricht zusätzlich durch den Einsatz von modularem Origami verstärken. Modulares Origami besteht aus mehreren Komponenten, die erst zusammengesetzt das gewünschte Objekt ergeben. In Gruppen aufgeteilt können Lernende ihre zunächst individuell gefalteten Teile zu einem großen Ganzen zusammensetzen, das anschließend gemeinsam erforscht wird.

Auch wenn ein reger gegenseitiger Austausch zwischen Lernenden entsteht, so bleibt das Falten doch eine persönliche Angelegenheit. Schülerinnen und Schüler können das kunstvolle Endobjekt als ein von ihnen geschaffenes Werk erleben. Aus diesem Grund können die Fragestellungen, welche anhand von Origami entstehen, sowohl bezüglich ihrer Thematik als auch in Zusammenhang mit dem Schwierigkeitsgrad weit gestreut sein. Zu beinahe jedem Faltvorgang lassen sich mathematische Probleme entwickeln, die von einfachen Symmetriebeobachtungen bis zu komplexen algebraischen Überlegungen reichen. Der Schwierigkeitsgrad einer Fragestellung lässt sich allerdings im Vorfeld nicht immer leicht erkennen. Hier sei an das Problem der Flat Foldability erinnert. Dieses lässt sich zwar für einfache Faltmuster, die nur einen einzigen Knoten aufweisen, leicht lösen, die Verallgemeinerung funktioniert allerdings nicht nach demselben Prinzip. Obwohl Schülerinnen und Schüler ihren Fragen natürlich möglichst frei nachgehen sollen, sei hier trotzdem darauf hingewiesen, dass es in einzelnen Fällen sinnvoll erscheint, dass die Lehrkraft Lernende dabei unterstützt ihre Fragestellungen so zu präzisieren, dass sie diese auch lösen können. Ein Teilproblem zu lösen ist immerhin ein Erfolg, der nicht selten von Mathematikerinnen und Mathematikern angestrebt wird.

3.3.2 Origami und aktives Lernen

Thomas Hull (2006, S. xi) bringt die Beziehung zwischen Origami und aktivem Lernen auf den Punkt, wenn er schreibt:

> „One of the main attractions of using origami to teach math is that it requires hands-on participation. There's no chance of someone hiding in the back of the classroom or falling asleep when everyone is trying to fold a hyperbolic paraboloid. The fact that origami is, by definition, hands-on makes it a natural fit for active learning."

Aus diesem Grund eignet sich Origami, um Lernende anzuregen, ihre eigenen Entdeckungen zu machen, eigene Vermutungen aufzustellen und faltend zu experimentieren. Schülerinnen und Schüler können das Blatt Papier als ihr persönliches Versuchslabor erkennen.

3.3.3 Mit Origami experimentieren

„Eine experimentelle Seite der Mathematik tut sich auf" schreibt Jürgen Flachsmeyer (2009b, S. 202) im Zusammenhang mit dem Einsatz von Origami im Mathematikunterricht. Auch Axel Goy und Michael Kleine (2015, S. 3) erkennen diese Vorteile in „materialbezogenem", mathematischem Experimentieren Für ein sinnstiftendes Experimentieren im Unterricht stellen sie vier Prinzipien auf. (ebd., S. 7)

1. „Das Experiment muss ein schnelles Kompetenzerleben ermöglichen, das durch Arbeitsauftrag und eingesetzte Werkzeuge unterstützt wird.
2. Das Bedürfnis, ein Experiment durchzuführen, muss aus dem Unterrichtsverlauf erkennbar sein.
3. Impulse sollen den Verlauf des Experiments strukturieren, aber nicht einengen. Die Lernenden müssen Möglichkeiten haben, eigene Ideen einzubringen und verschiedene Wege (auch Irrwege) zu erproben.
4. Die Dokumentation und die Reflexion sollen dazu dienen, sowohl mathematische Zusammenhänge zu entdecken als auch die Verzahnung mit dem weiteren Unterricht zu ermöglichen."

Reinhard Schmitt-Hartmann (2015, S. 41ff) präsentiert in seinem Artikel „Experimentieren mit Papier" eine Möglichkeit, wie ein solcher Unterricht in Zusammenhang mit Origami funktionieren könnte. Als Einstiegsfaltung wählt er den

Satz von Haga und lässt seine Schülerinnen und Schüler daraufhin mehr oder weniger frei experimentieren. Sein Konzept soll hier kurz zusammengefasst werden.

Der Satz von Haga ist einer der berühmtesten Sätze des Origami und eignet sich schon allein aufgrund seiner einfachen Strukturierung für den Einsatz im Mathematikunterricht. Für eine Demonstration braucht es nämlich lediglich eine einzige Faltung.

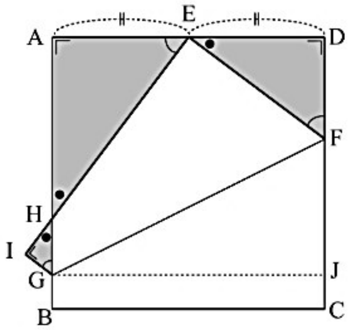


Abb. 29: Der Satz von Haga (Haga, 2008, S. 4)

Satz: Wird die rechte untere Ecke eines quadratischen Papiers $ABCD$ auf den Mittelpunkt der Seite AD gefaltet, so teilt H die Seite AB im Verhältnis 2 : 1.

Beweis: (vgl. Haga, 2008, S. 4f) Die Länge einer Seite des Ausgangsquadrates sei 1.

Betrachten wir zunächst das rechte obere grau eingefärbte Dreieck DEF. Aufgrund der Faltung gilt

$$\overline{EF} = 1 - \overline{DF}$$

Da E die Seite AD halbiert und das Dreieck DEF rechtwinkelig ist, folgt

$$(1 - \overline{DF})^2 = \overline{DF}^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - 2\overline{DF} + \overline{DF}^2 = \overline{DF}^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - 2\overline{DF} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\overline{DF} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\overline{DF} = \frac{3}{8} \; und \; \overline{EF} = \frac{5}{8}.$$

Das Dreieck DEF ist also ein Pythagoreisches Dreieck. Seine Seiten stehen im Verhältnis 5 : 4 : 3.

Die Dreiecke AHE und DEF sind offensichtlich rechtwinkelig. Da sich die Winkel $\sphericalangle AEH$ und $\sphericalangle DEF$ mit einem rechten Winkel auf 180° ergänzen, müssen die Winkel $\sphericalangle AEH$ und $\sphericalangle EFD$ das gleiche Maß haben. Die Dreiecke AHE und DEF sind also ähnlich. Anmerkung: Das Gleiche muss auch für das Dreieck IGH gelten, da der Winkel $\sphericalangle IHG$ dem Winkel $\sphericalangle AHE$ entspricht. Es gilt

$$\overline{ED} : \overline{DF} = 4 : 3 = \overline{AH} : \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{2}{3}.$$

H teilt die Seite AB also im Verhältnis 2 : 1. □

In Schmitt-Hartmanns Unterrichtskonzept ist der Satz von Haga der Ausgangspunkt für eigenständiges Experimentieren der Schülerinnen und Schüler. Er bietet jedoch Impulse an, die vor allem für Lernende hilfreich sein können, die mit dem Experimentieren im Mathematikunterricht noch nicht viel Erfahrung gemacht haben.

Der erste Impuls leitet Schülerinnen und Schüler an, die rechte untere Falte auf andere Punkte der Seite AD zu falten. (vgl. Schmitt-Hartmann, 2015, S. 42)

Folgende Entdeckungen können angeregt werden: (vgl. ebd., S. 42f)

- Faltet man, die rechte untere Ecke auf den Punkt E_2, der die Seite AD im Verhältnis 2 : 1 teilt, so erhält man den Punkt H_2, der die Seite AB halbiert.
- Faltet man, die rechte untere Ecke auf den Punkt E_3, der die Seite AD im Verhältnis 3 : 1 teilt, so erhält man den Punkt H_3, der die Seite AB im Verhältnis 2 : 3 teilt.
- Besonders interessierte Schülerinnen und Schüler können diese Ergebnisse verallgemeinern und untersuchen, welcher Punkt generiert wird, wenn die rechte untere Ecke auf den Punkt E_n gefaltet wird, der die Seite AD im Verhältnis n: 1 teilt. (H_n teilt die Seite AB dann im Verhältnis $2{:}\,n$)

Im zweiten Impuls werden Lernende dazu aufgefordert Faltungen zu untersuchen, in denen wie im Satz von Haga der Mittelpunkt einer Seite eine Rolle spielt. Er ist wesentlich offener formuliert, bietet also auch mehr Möglichkeiten und verlangt eine höhere Selbststeuerung im Experimentieren. Dabei können Schülerinnen und Schüler Faltungen erforschen, die durch den Punkt E gehen, bei denen eine Ecke auf E gefaltet wird oder solche, bei denen eine Seite auf den Punkt E gefaltet wird. (vgl. Schmitt-Hartmann, 2015, S. 43) Die Möglichkeiten der Entdeckungen sind weitgestreut. Die anfängliche Präsentation des Satzes von Haga gibt allerdings unsicheren Schülerinnen und Schülern einen Anhaltspunkt, welche mathematischen Zusammenhänge untersucht werden können.

Im Artikel von Schmitt Hartmann bleibt dies zwar unerwähnt, aber auch die ursprüngliche Faltung von Haga bietet noch mehr Erkundungsmöglichkeiten. Der vollständige erste Satz von Haga lautet nämlich:

Satz: Wird die rechte untere Ecke eines quadratischen Papiers $ABCD$ auf den Mittelpunkt der Seite AD gefaltet, so wird jede Seite des Quadrats in einem festen Verhältnis geteilt.

(a) F teilt die Seite CD im Verhältnis 5 : 3.
(b) H teilt die Seite AB im Verhältnis 2 : 1.
(c) G teilt die Seite AB im Verhältnis 7 : 1.
(d) H teilt die Seite BC im Verhältnis 1 : 5.
(vgl. Haga, 2008, S. 7)

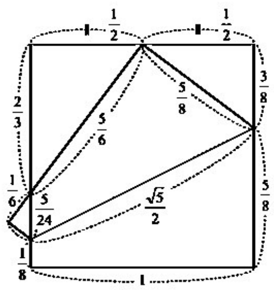


Abb. 30: Interessante Längen der Haga-Faltung (Haga, 2008, S. 7)

Dieses Beispiel sollte demonstrieren, wieviel mathematisches Explorationspotential in einer einzigen Faltung steckt. Volker Ulms Kriterien für forschungsorientierte Lernimpulse Offenheit, mathematische Reichhaltigkeit und differenzierte Erschließbarkeit (vgl. Kapitel 2.5) lassen sich also im Kontext von Origami durchaus erfüllen.

3.3.4 Begründen und Beweisen mit Origami

Neben dem experimentellen Zugang zur Mathematik und dem selbstständigen Aufstellen von Hypothesen gilt vor allem das Finden von Argumenten, Begründungen und Beweisen für diese Vermutungen zu den zentralen Aspekten des forschenden Lernens im Mathematikunterricht. Begründungen und Beweise in der Geometrie zu finden, die über die visuelle Wahrnehmung hinausgehen, fällt Schülerinnen und Schülern aber üblicherweise nicht leicht.

Sue Pope und Tung Ken Lam (S. 213) erkennen das große Potential des Origami, um bei Lernenden Prozesse des Hinterfragens, Begründens und Beweisens in Gang zu setzen. Fragen wie „Funktioniert diese Faltung?“, „Funktioniert sie immer?“ und schließlich „Warum funktioniert sie?“ sind natürliche Ausgangspunkte, aus denen sich ein Beweisbedürfnis ergeben kann. (vgl. Kapitel 2.4.4) Sevil Arici und Fatma Aslan-Tutak (2013) gelang es in einem Experiment nachzuweisen, dass Geometrieunterricht, der auf Origami basiert, zu signifikant besseren Ergebnissen bezüglich geometrischer Argumentationskompetenz führen kann, als traditionelle Unterweisungen. Ihre Forschung basiert auf den theoretischen Arbeiten von Dina und Pierre van Hiele und Raymond Duval, sowie auf der empirischen Untersuchung von Ryan Cummings Smith. Sie alle sprechen sich für den Einsatz manipulierbarer Materialien im Geometrieunterricht aus. Die aktive Beschäftigung mit dem Material regt Schülerinnen und Schüler nicht nur dazu an, sich handwerklich damit auseinanderzusetzen, sondern es auch kognitiv zu ergründen. Papierfalten zählt offensichtlich zu einer derartigen Aktivität.

Der Beweis für mathematische Zusammenhänge bezüglich Origami liegt üblicherweise in den Faltungen selbst. Diese führen Schülerinnen und Schüler selbst aus. Die Fähigkeit, verschiedene Argumente zu einer sinnvollen Begründung zu kombinieren, kann nicht durch einfaches Training entstehen. Sie basiert auf Intuition und Erfahrung. (vgl. Winckler, Wolf & Bock, 2011, S. 227) Aufgrund der soeben dargestellten Eigenschaften des Origami, lässt sich vermuten, dass forschungsbasierter Unterricht mit Papierfalten fruchtbaren Boden für die Entwicklung dieser Voraussetzungen bieten kann.

3.3.5 Origami als Forschungsgebiet

Zu guter Letzt repräsentiert Origami selbst ein aufregendes und modernes Forschungsgebiet der Mathematik. Die Fragestellungen, Sätze und Überlegungen sind auch für Schülerinnen und Schüler verständlich, was für die Mathematik der letzten Jahrzehnte eher selten gilt. Mathematikerinnen und Mathematiker, die sich mit Origami beschäftigen, kooperieren mit Wissenschaftlern aus den unterschiedlichsten Gebieten. Das Zusammenspiel aus Kunst und Mathematik könnte für einige Jugendliche zusätzlich motivierend wirken. Ob all diese Aspekte im Unterricht zur Geltung kommen können, wird von den jeweiligen Unterrichtsbedingungen abhängig sein. Bietet sich allerdings die Gelegenheit, so hat Origami durchaus die Möglichkeit, als Exempel für moderne mathematische Forschung zu fungieren.

4. Unterrichtsvorschläge

Im Folgenden sollen drei Unterrichtsvorschläge vorgestellt werden, bei denen Origami den Ausgangspunkt für forschendes Lernen bildet. Der dritte Unterrichtsentwurf wurde im Rahmen einer Doppelstunde mit einer Klasse der siebten Schulstufe durchgeführt. Daraus ergeben sich der Erfahrungsbericht und die Reflexion.

4.1 Masu Boxen erforschen

Die Idee, Masu Boxen für den Mathematikunterricht zu verwenden stammt ursprünglich von Shi-Pui Kwan. (2011, S. 233ff) Seine Überlegungen wurden für das hier präsentierte Konzept an das Format des forschenden Lernens angepasst und um einige Möglichkeiten erweitert. Der hier präsentierte Unterrichtsvorschlag eignet sich für die zehnte Schulstufe, da Grundkenntnisse im Bereich funktionaler Zusammenhänge sowie trigonometrischer Funktionen die Forschungsarbeiten enorm bereichern können.

In Abb. 31 sind zwei Masu Boxen mit unterschiedlichen Seitenverhältnissen zu sehen, die aus einem flächengleichen quadratischen Papier gefaltet wurden. Wie man bereits an dieser Fotographie erkennen kann, lassen sich Masu Boxen auf verschiedenste Weise falten, was zu einer Reihe interessanter Fragestellungen führen kann. Um das Interesse der Schülerinnen und Schüler zu wecken, können einige Hintergrundinformationen zur Masu Box gegeben werden. Ursprünglich wurden diese Boxen aus Holz gefertigt und dienten dazu, Mengen von Reis zu messen, als dieser noch als gültiges Währungsmittel gehandelt wurde. Mittlerweile wird in diesen Holzboxen oft Sake, ein japanischer Reiswein, serviert. Dazu eignet sich ihr Pendant aus Papier wohl eher nicht.

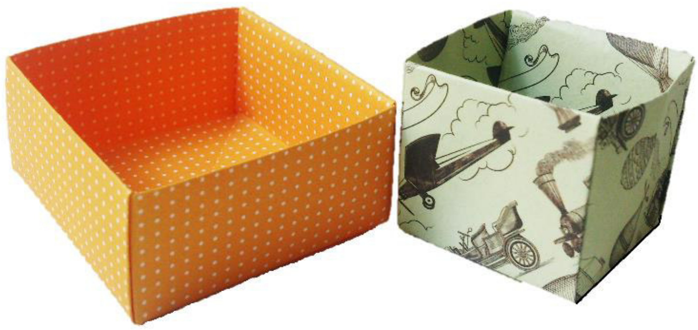


Abb. 31: Masu Boxen

4.1.1 Neugier wecken: Falten der Masu Box

Zunächst falten Schülerinnen und Schüler eine Standard Masu Box nach einer Anleitung. Die folgende Instruktion wird von OrigamiUSA, einer nationalen

Gesellschaft für Origami, online zur Verfügung gestellt. Die Beschreibungen wurden lediglich ins Deutsche übersetzt.

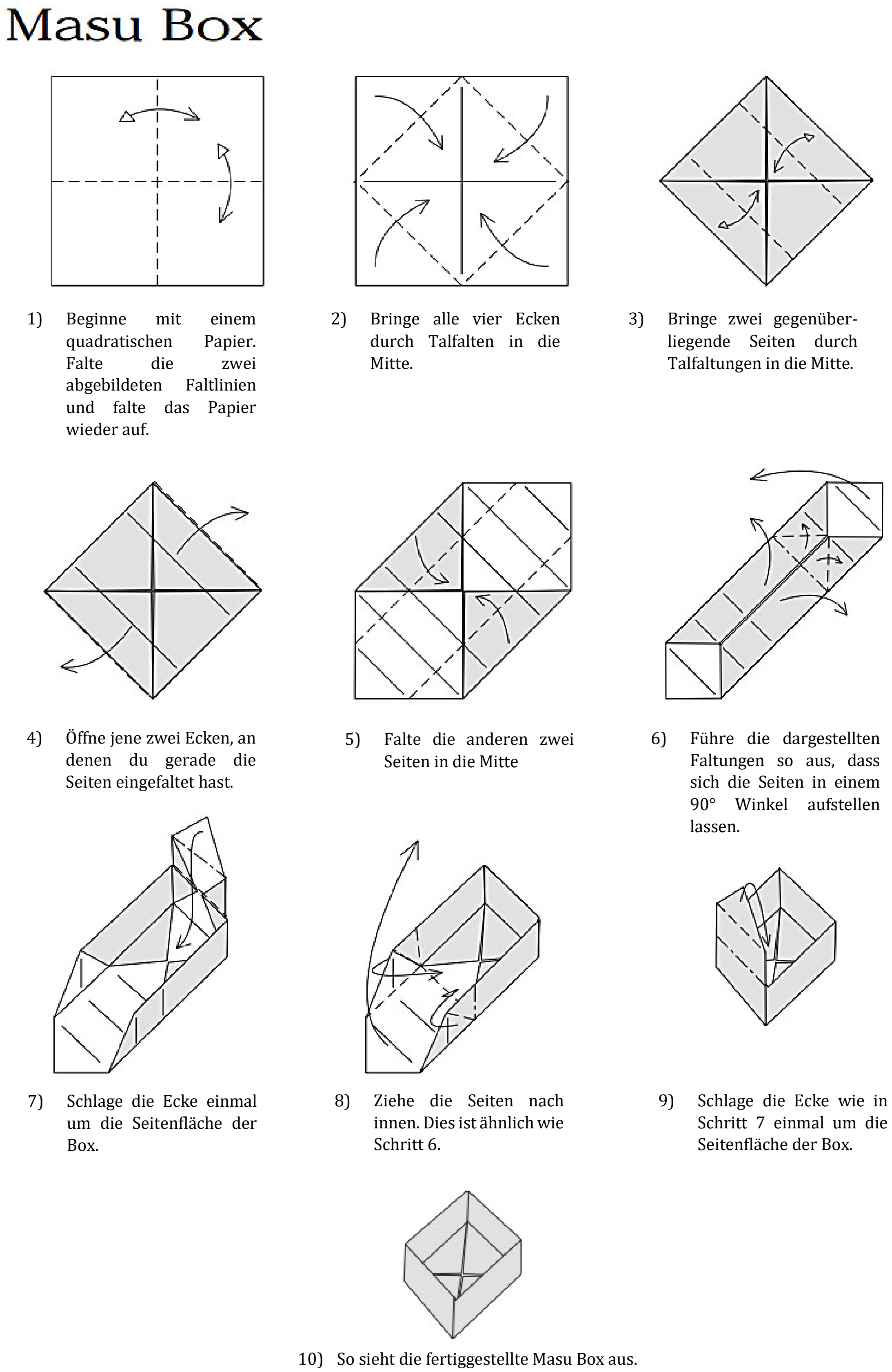


Abb. 32: Faltanleitung für eine Masu Box (vgl. Kirschenbaum, 2005)

4.1.2 Fragestellungen

Schülerinnen und Schüler erarbeiten zunächst in Zweierteams, welche Forschungsfragen bezüglich der Masu Box interessant sein könnten. Anschließend werden die Fragen an der Tafel gesammelt. Sie werden strukturiert und so gruppiert, dass sich jeweils ein Forschungsteam einer Gruppe von Fragestellungen widmen kann.

Durchaus wahrscheinliche Fragestellungen sind die folgenden.

1) Welches Volumen hat die Masu Box?
2) Wie groß ist der Oberflächeninhalt der Masu Box?
3) Wie faltet man eine höhere Masu Box mit gleichem Volumen?
4) Gibt es eine Masu Box mit anderen Seitenverhältnissen aber gleich großem Oberflächeninhalt?
5) Wie faltet man eine Masu Box in Form eines Würfels?
6) Welche Masu Box hat das größte Volumen?
7) Welche Masu Box hat die größte Oberfläche?
8) Welche anderen Polygone eignen sich als Grundfläche für eine Masu Box?
9) Kann eine ähnlich stabile Box aus einem einzigen Quadrat gefaltet werden, die ein größeres Volumen hat als alle Masu Boxen?

Diese Fragestellungen lassen sich beispielsweise in vier sinnvolle Kategorien unterteilen:

a) Fragen zum Volumen (1, 3 und 6)
b) Fragen zum Oberflächeninhalt (2, 4 und 7)
c) Fragen, die auf neue Formen der Masu Box abzielen (5 und 8)
d) Fragen, die andere Arten von Boxen betreffen (9)

4.1.3 Planung

Die Lernenden entscheiden sich zunächst, welche Kategorie sie persönlich erforschen möchten und treffen sich dann ihrem Interesse entsprechend in Gruppen. In diesen wird die weitere Vorgehensweise besprochen. Eventuell bilden sich aus den Gruppen noch einmal kleinere Teams, auf welche Detailfragen aufgeteilt werden. Vielleicht ist es aber auch sinnvoll, als Gruppe alle Fragen abzuarbeiten, falls diese aufeinander aufbauen. Jedes Team wählt eine Person, die für die Protokollierung der

Forschungsarbeit zuständig ist. Sie ist nicht verpflichtet, die Niederschrift selbst zu erledigen, muss aber dafür Sorge tragen, dass der Verlauf der Forschungsarbeit festgehalten wird.

4.1.4 Durchführung und mögliche Ergebnisse

Für die Durchführung ihrer Forschungsarbeiten sind die Schülerinnen und Schüler selbst verantwortlich. Je nach Ausmaß ihrer Erfahrung mit offenen Lernformen oder auch mit dem Einsatz des Computers kann die Lehrkraft als Expertin helfende Angebote machen.

4.1.4.1 Fragen zum Volumen

Sei die Länge der Seite des Ausgangsquadrates a. Eventuell entscheiden sich Schülerinnen und Schüler eher dazu, diese Länge als Einheit zu wählen oder vielleicht sogar mit den realen Längenmaßen in cm zu rechnen. Vor- und Nachteile dieser Wahlmöglichkeiten könnten durchaus Thema einer Abschlussreflexion in Diskussionsform sein.

Um zukünftige Rechnungen zu vereinfachen, soll b die halbe Diagonale des Ausgangsquadrates bezeichnen. Es sei also $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Da alle Ecken dieses Ausgangsquadrates zum Mittelpunkt gefaltet werden, gilt $2h + s = b$, wobei h die Höhe der Masu Box und s die Seitenlänge des Grundflächenquadrates ist. Aus der Betrachtung des Faltschritts (3) folgt $h = \frac{1}{4}b$. Durch Einsetzen in die Gleichung zuvor oder durch ähnliche Betrachtungen des Faltschritts (3) ergibt sich $s = b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$. Für das Volumen unserer Masu Box V gilt also

$$V = s^2 \cdot h = \frac{1}{4}b^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot b = \frac{1}{16}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{64}a^3.$$

Ein quadratisches Origami Papier mit Seitenlänge 10 cm kann mit der obigen Faltanleitung also zu einer Masu Box gefaltet werden, die ein Volumen von ca. 22,097 cm^3 hat.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob Masu Boxen mit anderen Verhältnissen auch andere Volumina haben können. Dies kann zunächst das Formulieren von Vermutungen bewirken. Es ist durchaus denkbar, dass Schülerinnen und Schüler argumentieren, dass alle Boxen, die man nach diesem Vorbild faltet, unabhängig von der Wahl der Höhe dasselbe Volumen besitzen müssen, da sie alle aus einem gleich großen Papier hergestellt werden. Die Betrachtung der Abb. 31 legt allerdings nahe, dass das Verhältnis von Höhe zu Grundflächenseite Einfluss auf den Rauminhalt der Masu Box hat, da die zwei Boxen augenscheinlich unterschiedliche Fassungsvermögen aufweisen. Zunächst kann dies an einzelnen Beispielen getestet werden. Wird Reis und eine Waage für den Unterricht zur Verfügung gestellt, können diese Vermutungen zusätzlich auch mit physikalischen Hilfsmitteln bestätigt oder verworfen werden. Exemplarische mathematische Überlegungen führen zu folgenden Ergebnissen.

h *in Abhängigkeit von* b	$s\ (= b - 2h)$	$V = s^2 \cdot h$
$\frac{1}{8}b$	$\frac{3}{4}b$	$\frac{9}{128}b^3 = \frac{9\sqrt{2}}{512}a^3$
$\frac{1}{6}b$	$\frac{2}{3}b$	$\frac{2}{27}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$
$\frac{1}{2}b$	0	0

Tab. 4: Volumenberechnungen verschiedener Masu Boxen

Es ist also ersichtlich, dass sich das Volumen abhängig von der Wahl der Höhe ändert. Will man nun das Volumen für jede Höhe darstellen, scheint es naheliegend, sich den Term der Funktion V auszudrücken. Aus mathematischer Sicht ist es natürlich wünschenswert, wenn Schülerinnen und Schüler erkennen, dass das Bestimmen einiger Funktionswerte in diesem Fall nicht zur eindeutigen Bestimmung des Maximums führen kann.

Da für alle Masu Boxen $s = b - 2h$ gelten muss, kann man den Funktionsterm der Funktion V leicht angeben.

$$V(h, b) = (b - 2h)^2 \cdot h = hb^2 - 4bh^2 + 4h^3$$

Für Schülerinnen und Schüler, die der Differentialrechnung mächtig sind, wäre die Suche nach der Masu Box mit dem größten Volumen eine mehr oder weniger einfache Extremwertaufgabe. In der 10. Schulstufe stehen den Jugendlichen diese Mittel allerdings noch nicht zur Verfügung, sie müssen andere Lösungsstrategien entwickeln.

Die erste Schwierigkeit entsteht bereits dadurch, dass das Volumen nicht nur von h, sondern auch von b abhängt. Dazu gibt es mehrere Lösungsstrategien. Es wäre möglich b gar nicht als Variable anzuerkennen, indem man mit den Realwerten von a und b in cm rechnet. Dies hat natürlich den Nachteil, dass für andere Papiergrößen eine erneute Berechnung nötig ist. Man könnte auch argumentieren, dass die Papiergröße für die Bestimmung des Maximums unerheblich sein muss. Entscheidend ist nur das Verhältnis $h : b$. Darum kann die Funktion mit $a = 1$ oder $b = 1$ vereinfacht werden. Es wäre auch möglich den Graphen der Funktion V mit $V(h) = (b - 2h)^2 \cdot h = hb^2 - 4bh^2 + 4h^3$ von GeoGebra zeichnen zu lassen. Das Programm schlägt dann vor, für b einen Schieberegler zu erstellen. Auf diese Weise, kann das Maximum schnell für verschiedene Papiergrößen bestimmt werden. Eventuell entdecken Schülerinnen und Schüler erst im Nachhinein, dass lediglich die Wahl des Verhältnisses von h und b entscheidend ist.

Wurde irgendeine dieser Strategien erkannt, liegt es nahe, sich den Funktionsgraphen durch eine Geometriesoftware zeichnen zu lassen. Entscheidend ist hier die Überlegung, welche Werte für h zulässig sind. Offensichtlich kann h nur Werte im Intervall $\left[0, \frac{1}{2} b\right]$ annehmen. Ob die beiden Grenzen in der Definitionsmenge enthalten sind oder nicht, also noch eine Masu Box im eigentlichen Sinne generieren, müssen die Lernenden selbst entscheiden.

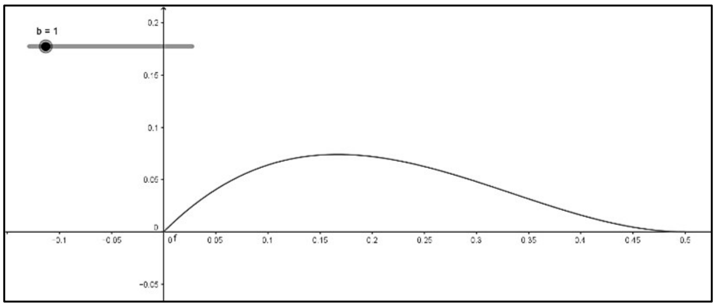


Abb. 33: Das Volumen der Masu Box in Abhängigkeit der Höhe

In den vorgesehenen Altersstufen können Schülerinnen und Schüler bereits Extremwerte einer Funktion ablesen. Überlegungen, wie man bei dieser Funktion den Hochpunkt genau bestimmt, könnten allerdings sehr fruchtbar sein. Im Sinne der angestrebten Technologiekompetenz ist es möglich, mit GeoGebra zu experimentieren. Das Programm hat die Funktion „Extremum“. Diese zeichnet lokale Extrempunkte ein. Kennen oder finden Lernende diese Funktion nicht, könnten sie mit Hilfe eines Schiebereglers einen Punkt entlang des Funktionsgraphen wandern lassen und ablesen, ab wann die Funktionswerte sinken. Die Tabellenkalkulationsfunktion könnte genutzt werden um viele Werte ausrechnen zu lassen. All diese Lösungsstrategien liefern zwar keine genauen Koordinaten des Hochpunktes, Lernende können allerdings vermuten, dass er an der Stelle $\frac{1}{6}b$ liegt.

Wie kann diese Behauptung bewiesen werden? Aus den Betrachtungen der Funktion V mit $V(h) = (b - 2h)^2 \cdot h$ und des Funktionswertes $V\left(\frac{1}{6}b\right) = \frac{2}{27}b^3$, ergibt sich, dass $\left(\frac{1}{6}b\,, \frac{2}{27}b^3\right)$ genau dann ein Hochpunkt ist, wenn der Graph der Funktion V mit der Gerade $g(t) = \frac{2}{27}b^3$ genau zwei Schnittpunkte hat. Das kann händisch berechnet oder mit einem Computeralgebrasystem getestet werden.

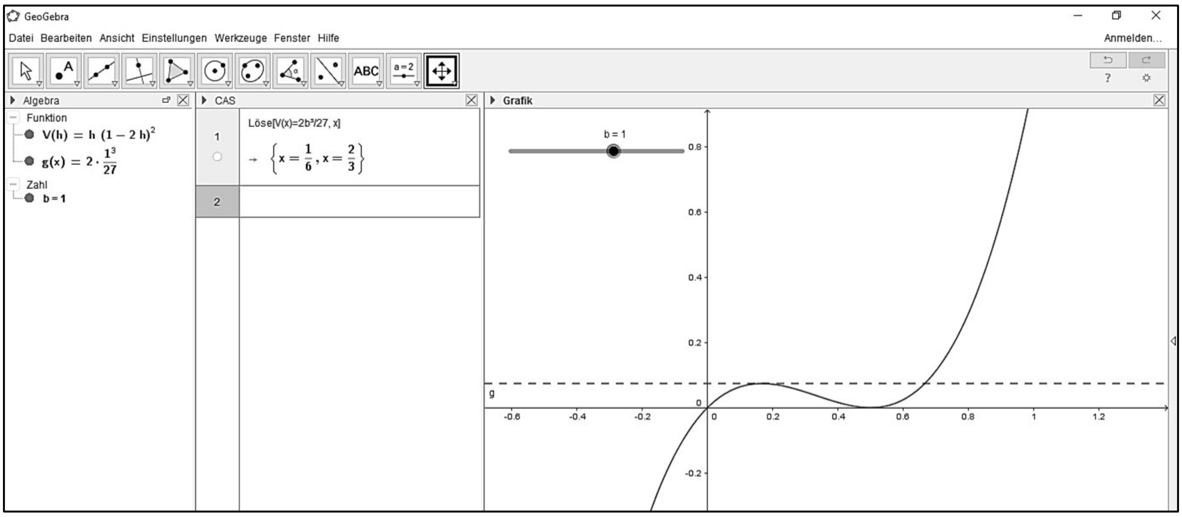


Abb. 34: Möglichkeit für die Suche des lokalen Maximums ohne Differentialrechnung

Auf ähnliche Weise kann auch eine Masu Box gefunden werden, die zwar das gleiche Volumen hat, wie die ursprüngliche Box, aber eine andere Höhe. Das Volumen unserer Ausgangsbox beträgt $\frac{1}{16}b^3$. Die Gleichung $\frac{1}{16}b^3 = (b - 1h)^2 \cdot h$ hat offensichtlich drei Lösungen für h. Da eine davon bereits bekannt ist, nämlich $h_1 = \frac{1}{4}b$, kann die Gleichung händisch gelöst werden. Aber auch eine Lösung durch ein Computerprogramm wäre denkbar. Es gilt $h_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}b$ und $h_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}b$. Da $h_3 > \frac{1}{2}b$, ist diese Lösung nicht relevant. Es existiert also eine Masu Box, die das gleiche Volumen hat wie unsere ursprüngliche Box. Diese kann allerdings nicht höher sein als die Box in der Anleitung. Ihre Höhe beträgt $\frac{3-\sqrt{5}}{8}b$.

4.1.4.2 *Fragen zum Oberflächeninhalt*

Der Oberflächeninhalt der Masu Box setzt sich aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und jenem der vier kongruenten Seitenflächen zusammen. Wir berechnen zunächst den Oberflächeninhalt der gefalteten Box. Sei a wieder die Seitenlänge des Ausgangsquadrates und $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, also die Seitenlänge jenes Quadrates, das in Faltschritt (3) entsteht. Bezeichnet O den Oberflächeninhalt der Masu Box, so gilt $O(b,h) = b^2 - 4h^2$. Denn wie in Abb. 35 deutlich wird, entsteht die Masu Box im Wesentlichen aus dem Quadrat mit der Seitenlänge b, wobei die blau eingefärbten Flächen in den Faltschritten (7) und (9) unter eingeschlagenen Ecken verschwinden. Für die gefaltete Masu Box gilt also

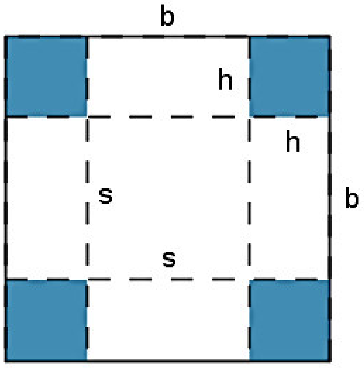


Abb. 35: Oberfläche der Masu Box

$$O = b^2 - 4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}b^2 = \frac{3}{8}a^2$$

Wie verändert sich die Oberfläche der Masu Box, wenn h anders gewählt wird. Wieder stellen wir die Funktion O graphisch mithilfe von GeoGebra dar und müssen uns Gedanken über die Definitionsmenge machen, die selbstverständlich wieder dem Intervall $\left[0, \frac{1}{2}b\right]$ entspricht. Nun stellen wir allerdings fest, dass die Masu Box mit der größten Oberfläche jener entstellte Quader ist, der keine Höhe besitzt. Und auch die Box mit dem geringsten Oberflächeninhalt ist im eigentlichen Sinne kein Quader, da ihre Grundfläche verschwindet. Die Funktion ist im definierten Intervall streng monoton fallend. Daraus ergibt sich, dass zwei Masu Boxen mit unterschiedlichen Höhen, die aus dem gleichen Ausgangsquadrat gefaltet wurden, niemals denselben Oberflächeninhalt besitzen können.

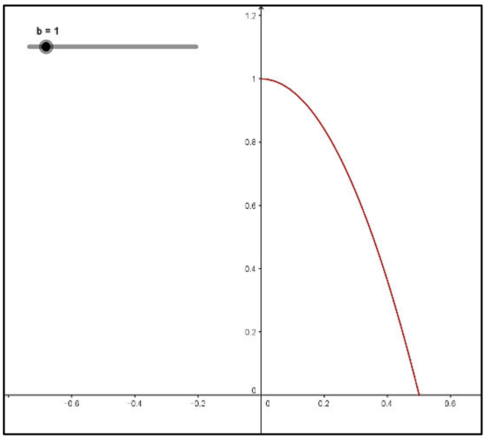


Abb. 36: Oberfläche einer Masu Box in Abhängigkeit der Höhe

4.1.4.3 *Fragen, die auf neue Formen der Masu Box abzielen*

Soll eine Masu Box in Form eines Würfels gefaltet werden, muss das Quadrat mit der Seitenläge b in drei gleich breite Streifen geteilt werden. Die Höhe der Box beträgt dann also $\frac{1}{3}b$. Für eine solche Dreiteilung eines Quadrates stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Abmessen führt zu einem äußerst ungenauen Ergebnis, da b und a inkommensurabel sind. Recherchiert man allerdings im Internet, stolpert man recht schnell über zwei Faltmethoden, mit denen ein Quadrat in drei gleich breite Streifen geteilt werden kann. Eine davon ist der bereits im letzten Kapitel besprochene Satz von Haga. Eine andere Vorgehensweise besteht darin, zunächst zwei einander gegenüber liegende Ecken durch eine Falte zu verbinden, anschließend das Papier so zu halbieren, dass zwei Rechtecke entstehen und schließlich die Diagonale eines dieser beiden Rechtecke zu falten. Die Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen geht und parallel zu einer Seite des Quadrates ist, teilt die Quadratseiten im Verhältnis 1 : 2.

Mithilfe der analytischen Geometrie lässt sich dies besonders schnell und elegant zeigen. Man nehme an, das quadratische Papier $ABCD$ sei so in ein orthogonales Koordinatensystem eingebettet, dass A im Ursprung liegt, B im Punkt $(1,0)$ und D im Punkt $(0,1)$. Die Trägergerade der Strecke BD kann dann durch die Geradengleichung $y = -x + 1$ ausgedrückt werden. Die Gleichung der Trägergerade der Strecke AE lautet $y = 2x$. Daraus ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. (vgl. Hull, 2005, S. 30)

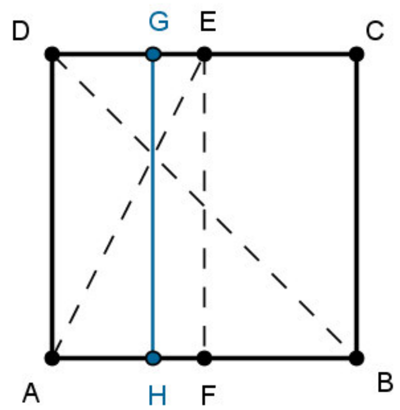


Abb. 37: Dreiteilung eines Quadrates

Sollen Masu Boxen mit anderen Arten von Grundflächen hergestellt werden, gilt es, geeignete Ausgangsformen zu finden. Sinnvoll erscheint die Suche nach Polygonen, die sich ähnlich, wie ein Quadrat, durch das Falten von Ecken zu einem Punkt halbieren lassen.

Hier soll das Beispiel einer Masu Box präsentiert werden, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Ausgehend von der gewünschten Grundfläche erscheint es vernünftig, den Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks als Treffpunkt der Ecken zu wählen. Wird dieser an jeder Seite gespiegelt, entsteht ein Stern, dessen Spitzen sich so auf den Mittelpunkt falten lassen, dass dadurch das gewünschte Sechseck entsteht.

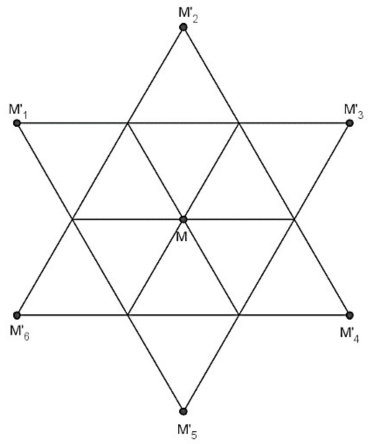


Abb. 38: Ausgangsform einer Masu Box, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist

Der gravierendste Unterschied zu Masu Boxen mit quadratischer Grundfläche ergibt sich bei jenen Stücken des Papiers, die nach den Faltschritten (7) und (9) unter den zur Mitte gefalteten Ecken verschwinden. Diese sind offensichtlich keine Quadrate mehr, sondern Deltoide. Eine Seitenlänge des Deltoids ist ersichtlicher Weise h. Die Länge der anderen Seite g ergibt sich aus dem Zusammenhang $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{g}$.

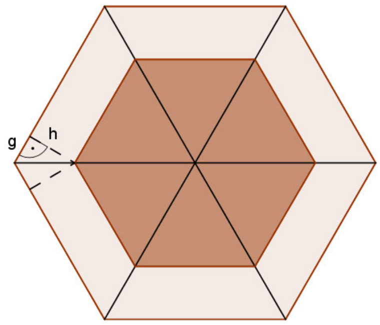


Abb. 39: Unterschied zu quadratischen Masu Boxen

Diese Deltoide bieten leider nicht mehr die gleiche Stabilität, wie die Quadrate der ursprünglichen Masu Box. Das Ergebnis genügt allerdings trotzdem einem gewissen ästhetischen Anspruch. Natürlich können auch bezüglich dieser Boxen ähnliche Überlegungen zu Volumen und Oberfläche angestellt werden, wie in den letzten zwei Kapiteln bereits zur originalen Masu Box ausgeführt wurden.

Abb. 40: Sechseckige Masu Box

4.1.4.4 Fragen, die andere Arten von Boxen betreffen

Wollen Schülerinnen und Schüler andere Arten von Boxen finden, die sich auch aus einem einzigen Stück Papier falten lassen, so wird intuitives Probieren, eine solche Faltung zu finden, in den wenigsten Fällen zum Ziel führen. Allerdings stehen auf der Homepage der oben bereits erwähnten Gesellschaft OrigamiUSA einige

Faltanleitungen für Boxen zur Verfügung. Diese sind allerdings geometrisch anspruchsvoller als die gewöhnliche Masu Box, weshalb vermutlich sanfte Unterstützung durch die Lehrkraft bei der Wahl und der Analyse dieser Boxen nötig sein wird. Beispielhaft soll hier der sogenannte Star Basket präsentiert und sein Volumen mit jenem der Masu Box verglichen werden. Die Anleitung wurde wieder von der Gesellschaft OrigamiUSA übernommen. Sie wurde lediglich ins Deutsche übersetzt.

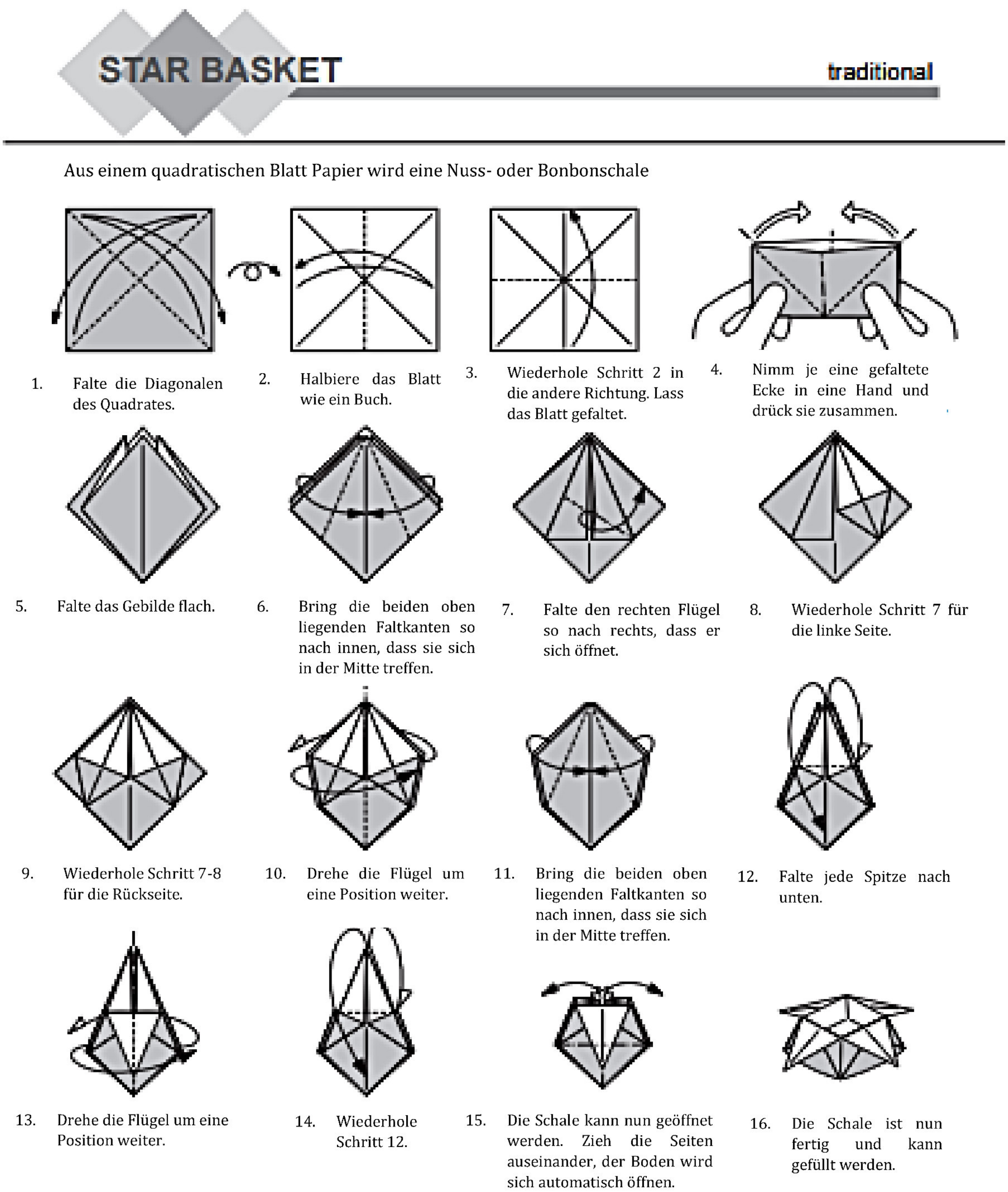


Abb. 41: Faltanleitung für Star Basket (vgl. Tajiri, 2002)

Offensichtlich ist der Star Basket ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche. Das Volumen eines Pyramidenstumpfes kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2\right),$$

wobei A_1 den Flächeninhalt der Grundfläche, A_2 den Flächeninhalt der Deckfläche und h die Höhe des Pyramidenstumpfes bezeichnet.

Sei die Seitenlänge des Ausgangsquadrates 1, dann beträgt die Seitenlänge des Quadrates, das in Faltschritt (5) entsteht, $\frac{1}{2}$.

In Faltschritt (6) wird ein Deltoid gefaltet, dessen Maße wir genauer betrachten müssen. Da der Winkel α durch eine doppelte Halbierung eines rechten Winkel entsteht, gilt $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Daraus folgt

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{l}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

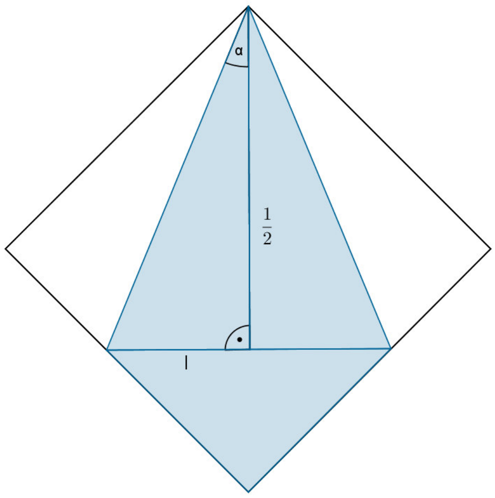


Abb. 42: Analyse des sechsten Faltschritts

In den Faltschritten (7) – (9) entstehen wieder vier Deltoide, die im Folgenden genauer betrachtet werden sollen. Die vorhin berechneten Seiten l und m_2 sind die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks. Verdoppelt man den Winkel δ, so erhält man den Supplementärwinkel zu β. Der Winkel β lässt sich aber leicht berechnen. Wir erhalten

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi \Leftrightarrow$$

$$2\delta = \frac{5}{8}\pi \Leftrightarrow$$

$$\delta = \frac{5}{16}\pi\,.$$

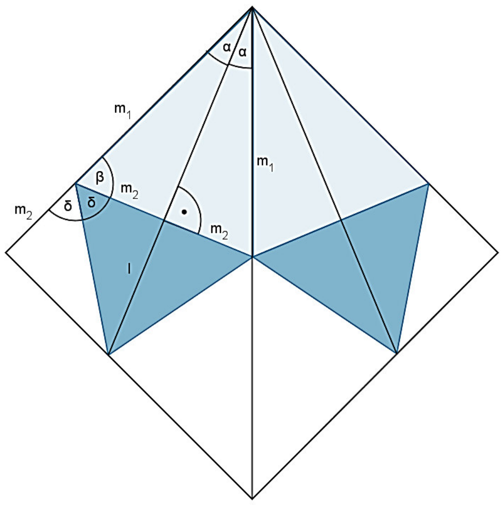


Abb. 43: Analyse der Faltschritte (7)-(9)

Daraus lässt sich m_2 bestimmen.

$$\tan\left(\frac{5}{16}\pi\right) = \frac{l}{m_2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{l}{\tan\left(\frac{5}{16}\pi\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\tan\left(\frac{5}{16}\pi\right)}$$

Da sich m_1 und m_2 auf die volle Seite des Quadrates ergänzen gilt $m_1 + m_2 = \frac{1}{2}$. Es folgt

$$m_1 = \frac{1}{2} - \frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\tan(\frac{5}{16}\pi)}$$

Die Seitenlänge der Deckfläche des Pyramidenstumpfes wird durch die Faltungen (12) bis (14) festgelegt. Sie beträgt $2n$. Für n muss folgende Gleichung gelten

$$\sin(\beta) = \frac{n}{m_2} \Leftrightarrow$$

$$n = m_2 \sin(\beta) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\tan\left(\frac{5}{16}\pi\right)} \sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)$$

Daraus ergibt sich für den Flächeninhalt der Deckfläche

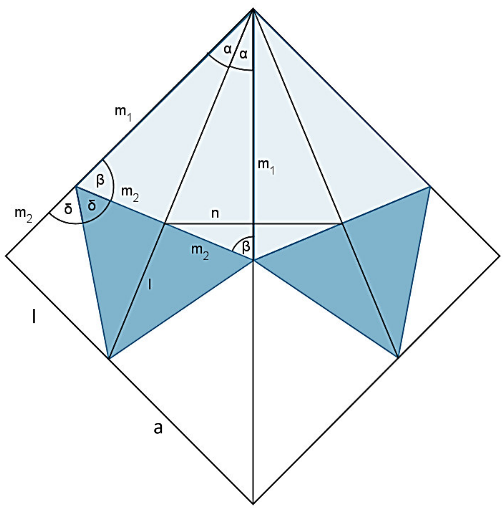


Abb. 44: Analyse der Faltschritte (12)-(14)

$$A_2 = \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin^2\left(\frac{3}{8}\pi\right)}{\tan^2\left(\frac{5}{16}\pi\right)}$$

Die Faltkante a entwickelt sich durch das Auffalten in Schritt (15) zur halben Diagonale der Grundfläche. Für a gilt

$$a = \frac{1}{2} - l = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für den Flächeninhalt der Grundfläche A_1 gilt also

$$A_1 = 2a^2 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Um das Volumen berechnen zu können, muss also nur mehr die Höhe bestimmt werden.

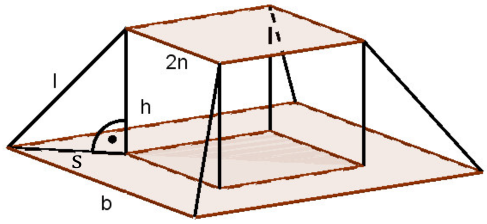


Abb. 45: Pyramidenstumpf

Die Seitenkante des Pyramidenstumpfes entspricht l. Aus l und s lässt sich die Höhe h bestimmen. Um die Länge von s berechnen zu können, muss man sich vor Augen halten, dass s die Diagonale des Quadrates ist, dessen Seiten $\frac{b-2n}{2}$ lang sind. Daraus folgt

$$s = \frac{b-2n}{2}\sqrt{2}\,.$$

Nun kann h folgendermaßen bestimmt werden.

$$h = \sqrt{l^2 - s^2}$$

Nun muss nur mehr in die Formel für das Volumen eingesetzt werden. Gerundet erhält man ein Volumen von 0.0199. Vergleicht man dies mit den Volumina der Masu Boxen, so stellt man fest, dass dies doch deutlich unter dem Maximalwert von $\frac{\sqrt{2}}{54} \approx 0.0262$ liegt. Es ist nicht anzunehmen, dass eine derartige Erarbeitung von allen Schülerinnen und Schülern bewerkstelligt werden kann. Allerdings wird der Rechenweg erheblich vereinfacht, wenn einzelne Längen und Winkel berechnet werden, um mit den gerundeten Werten weiterzuarbeiten. Auf diese Weise können auch Schülerinnen und Schüler auf ein ähnliches Ergebnis kommen.

4.1.5 Kommunikation und Rückblick

Die Veröffentlichungen der einzelnen Forschungsleistungen sollen in kurzen Präsentationen im Plenum erfolgen. Die genaue Art und Abfolge der Präsentationen bleibt den einzelnen Teams selbst überlassen. Anschließend werden Schülerinnen und Schüler dazu angehalten über die entscheidendsten Erkenntnismomente ihrer Arbeit nachzudenken und diese mit der Klasse zu teilen. Die Lehrkraft fasst abschließend die wichtigsten Ergebnisse zusammen, die von den Lernenden in geeigneter Weise festgehalten werden.

4.1.6 Analyse des Unterrichtskonzepts

Es zeigt sich, dass eine simple Papierbox jede Menge mathematisch interessanter Fragen hervorrufen kann. Hauptaugenmerk des ganzen Konzepts liegt augenscheinlich auf dem selbstständigen Finden von Fragen. Der Impuls dafür ist zwar durch das Falten der Box, den historischen Hintergrund und eventuell einer persönlichen Stellungnahme durch die Lehrkraft gegeben, sie lenkt allerdings in keine spezielle Richtung. Aus den präsentierten Lösungen lässt sich allerdings erkennen, dass eher Tätigkeiten des Modellierens und nicht unbedingt Beweis- und Begründungs-aktivitäten im Vordergrund des Forschungsprozesses stehen. Aus diesem Grund könnte man einen anwendungsorientierten Schwerpunkt des Projektes feststellen. In der Planungsvorlage aus Kapitel 2.4 sieht dieses Unterrichtskonzept folgendermaßen aus.

Vorlage für die Planung forschenden Lernens im Mathematikunterricht			
Titel des forschend-lernen Konzepts	MasuBoxen erforschen		
Schulstufe	10		
Geplanter zeitlicher Rahmen	Mindestens 4 Unterrichtseinheiten		
Mögliche Einbettung in den Lehrplan	Volumsberechnungen, Flächenberechnungen, funktionale Zusammenhänge, Anwendung trigonometrischer Funktionen		
	strukturiert	**gelenkt**	**offen**
Neugier wecken	Faltung der Masu-Box, historische Hintergründe, persönliche Stellungnahme		
Fragestellung			Strukturierung an der Tafel
Planung			In Gruppen
Durchführung		Eine verantwortliche Person für das Protokoll	In Gruppen
Kommunikation	Präsentation im Plenum		
Rückblick	Diskussion		

Tab. 5: Unterrichtskonzept „Masu Boxen erforschen“

4.2 Kegelschnitte falten

Ein Unterrichtskonzept, das aufbauend auf Origami forschendes Lernen initiieren soll und dessen Fokus hauptsächlich auf Tätigkeiten des Beweisens und Begründens liegt, soll im Folgenden präsentiert werden. Der Unterrichtsentwurf eignet sich erst für den Einsatz ab der 11. Schulstufe, da die Kenntnis der Definitionen der Parabel, Ellipse und Hyperbel wichtige Voraussetzungen für einen fruchtbaren Umgang mit den Lernimpulsen ist. Der Unterrichtsentwurf ist angelehnt an Thomas Hull (2006, S. 33ff). Die Vorgehensweise wurde allerdings an das Konzept des forschenden Lernens angepasst. Mögliche Fragestellungen, Lösungswege und Überlegungen wurden ergänzt.

4.2.1 Neugier wecken

Zu Beginn der Unterrichtseinheit finden sich Schülerinnen und Schüler in Zweierteams zusammen. Es gibt zwei Aufträge, wobei jeweils eine Person des Teams den ersten, die andere den zweiten Auftrag erhält.

1. Auftrag
   Zeichne einen Punkt relativ mittig auf ein Blatt Papier. Wähle eine Seite des Papiers aus und falte diese immer wieder an verschiedenen Stellen auf den Punkt.
2. Auftrag
   Zeichne einen großen Kreis und schneide ihn aus. Wähle einen Punkt im Kreis und falte die Kreislinie, immer wieder an verschiedenen Stellen auf den Punkt.

Haben beide ihre Aufträge erfüllt, diskutieren sie über folgende Fragen: Was seht ihr? Was fällt euch auf? Was könnte man noch probieren?

4.2.2 Fragestellungen

Anschließend wird die Diskussion ins Plenum verlegt, wo mögliche Hypothesen und Fragestellungen erörtert und festgehalten werden können. Dabei sind Wortmeldungen wahrscheinlich, die den folgenden ähneln.

1. Der erste Auftrag generiert eine Parabel.
2. Der erste Auftrag generiert die Tangenten einer Parabel.
3. Die Leitlinie der Parabel ist die Kante des Papiers.
4. Der Brennpunkt der Parabel ist der gewählte Punkt.
5. Wie bestimmt man die Gleichung einer Tangente an eine Parabel?

6. Wie konstruiert man eine Tangente an eine Parabel mit Zirkel und Lineal?
7. Der zweite Auftrag generiert die Tangenten einer Ellipse.
8. Wieso ist diese nicht mittig?
9. Der gewählte Punkt ist ein Brennpunkt der Ellipse.
10. Ist der Mittelpunkt ein Brennpunkt der Ellipse?
11. Wie bestimmt man die Gleichung einer Tangente an eine Ellipse?
12. Wie konstruiert man eine Tangente an eine Ellipse mit Zirkel und Lineal?
13. Was passiert, wenn man die Kreislinie auf den Mittelpunkt faltet?
14. Was passiert wenn die Kreislinie auf einen Punkt außerhalb des Kreises gefaltet wird?
15. Welche Arten von Linien könnte man noch auf einen Punkt falten?
16. Was passiert, wenn man eine Ellipse ausschneidet und den Rand auf einen Punkt faltet?

4.2.3 Planung

Auch hier bietet es sich an, eine Gruppe zu bilden, die sich mit Fragen zur Parabel beschäftigt, eine, die sich mit der Ellipse auseinandersetzt und eine, die experimentierend neuen Faltungen auf den Grund geht. Die Lehrkraft kann zusätzliche Hilfestellungen geben. So kann eine aufmerksame Betrachtung der Definitionen der Kegelschnitte im Schulbuch oder Internet hilfreich sein. Das ständige händische Ausprobieren neuer Faltungen kann ermüdend sein. Dynamische Geometrieprogramme bieten diesbezüglich die Möglichkeit, die Faltungen durch Streckensymmetralen zu imitieren. In GeoGebra beispielsweise können durch die Funktionen „Spur“ und „Animation“ sehr viele Geraden in kürzester Zeit produziert werden.

4.2.4 Durchführung und mögliche Ergebnisse

Die Art der Durchführung bleibt den Schülerinnen und Schülern überlassen. Sie entscheiden, ob sie in Teams oder alleine arbeiten möchten. Am Ende der Forschungsarbeit soll eine schriftliche Publikation stehen. Dementsprechend sind sie selbst für ihre Notizen verantwortlich.

4.2.4.1 *Fragen zur Parabel – 1. Auftrag*

Um zu zeigen, dass die Faltlinien tatsächlich Tangenten der Parabel sind, deren Brennpunkt der gewählte Punkt und deren Leitlinie die Seite des Papiers ist, scheint es sinnvoll, sich an die Definition der Parabel zu erinnern. Im Schulbuch „Mathematik verstehen" von Malle et al. (2013, S. 159) für die siebte Klasse steht beispielsweise:

> „Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene E, die von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Geraden l gleichen Abstand haben ($F \notin l$)."

Betrachten wir eine einzelne Faltlinie, die dadurch entsteht, dass wir einen auf dem Rand des Papiers liegenden Punkt S auf den gezeichneten Punkt F falten. Die Faltlinie ist dann die Streckensymmetrale der Strecke SF. Dies bedeutet, dass alle Punkte, die von S und F den gleichen Abstand haben, auf der Trägergeraden der Faltlinie liegen. Dies gilt also auch für den Punkt T, dessen Abstand von S dem Abstand zum Papierrand entspricht. T liegt also auf der Parabel mit dem Brennpunkt F und dem Rand des Papiers als Leitlinie l. Alle anderen Punkte auf der Faltlinie, wie beispielsweise der Punkt U in Abb. 46, müssen näher an l liegen als an F, da die Hypotenuse immer die längste Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks ist. Daraus folgt aber sofort, dass die Faltlinie, die Parabel in T lediglich berührt. Sie ist also eine Tangente der Parabel.

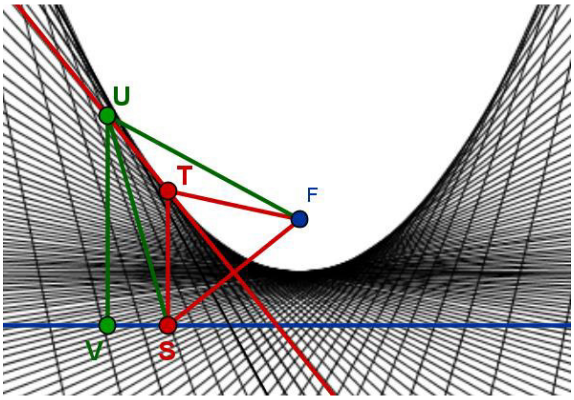


Abb. 46: Gefaltete Tangenten an eine Parabel

Eine weitere Methode, diese Vermutung zu beweisen, besteht darin, die Gleichung der Geradenschar, die durch die Faltungen entsteht, aufzustellen und mit jener der Tangenten zu vergleichen. Um dieses Vorgehen zu vereinfachen, beschränken wir uns auf die Untersuchung von Parabeln in der zweiten Hauptlage. Die Gleichung der Leitlinie l ist also $y = -\frac{p}{2}$ und die Koordinaten des Brennpunktes F sind $(0, \frac{p}{2})$, wobei p eine positive reelle Zahl ist. Dass diese Annahmen die Allgemeinheit der zu beweisenden Aussage nicht beschränken, könnte eventuell in den Gruppen oder im Plenum abschließend diskutiert werden. Ein Punkt S, der auf l liegt, hat also die Koordinaten $(\mathrm{t}, -\frac{p}{2})$, wobei t jede beliebige reelle Zahl sein kann. Durch die Faltung von S auf F entsteht die Faltung der Streckensymmetrale, die in jedem Fall den Punkt

$\frac{1}{2}(S+F)$ enthält und normal auf den Vektor $\overrightarrow{SF}$ steht. Daraus folgt bereits die Gleichung der Geradenschar, die durch die Faltungen entsteht.

$$g_1: tx - py = \frac{t^2}{2}$$

Die Gleichung der Tangentenschar könnte direkt durch die sogenannte Spaltform der Tangentengleichung ermittelt werden, die in vielen Mathematikbüchern thematisiert wird. Liegt $P = (p_1, p_2)$ auf der Parabel, mit dem Brennpunkt F und Leitlinie l, so lautet die Gleichung der Tangente $p_1 x = py + p_2 p$. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P auf der Parabel lauten $\left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$. Setzt man diese in die Tangentengleichung ein, so erhält man die Gleichung für die Tangentenschar:

$$g_2: tx = py + \frac{t^2}{2}$$

Durch eine kleine Umformung erkennt man sofort die Entsprechung von g_1 und g_2. Die Wahl der Parabel in zweiter Hauptlage würde auch eine Auffassung als Funktion erlauben. Schülerinnen und Schüler könnten so auf die Idee kommen, mit Differentialrechnung zu arbeiten. Die Funktionsgleichung der Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie l lautet:

$$f(x) = \frac{x^2}{2p}$$

Durch Differenzieren erhält man die Steigung der Tangenten abhängig von x.

$$f'(x) = \frac{x}{p}$$

Ein beliebiger Punkt auf der Parabel P hat wieder die Koordinaten $\left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$. Die Steigung der Tangente in diesem Punkt ist also $\frac{t}{p}$. Der Vektor $(t, -p)$ steht also normal auf diese Tangente. Setzt man nun P in die Normalform der Gerade ein, erhält man die Gleichung der Tangentenschar.

$$g_3: tx - py = \frac{t^2}{2}$$

Hier lässt sich sofort ablesen, dass g_1 und g_3 einander entsprechen.

Selbst wenn Schülerinnen und Schülern die Spaltform der Tangentengleichung nicht bekannt ist, wird es ihnen durch eine der soeben präsentierten Überlegungen möglich sein, zu begründen, warum die Faltungen wirklich Tangenten an eine Parabel sein müssen. Zusätzlich kann es ihnen gelingen, durch diese Überlegungen Wege zu finden, die Gleichung einer Tangente an eine Parabel zu bestimmen, ohne die Formel dafür auswendig lernen zu müssen.

Will man die Gleichung der Tangente in einem Punkt P auf einer beliebigen Parabel finden, so reicht es, die Leitlinie mit ihrer Normalen durch den Punkt P zu schneiden und die Gleichung der Streckensymmetrale zwischen dem dadurch erhaltenen Punkt und dem Brennpunkt der Parabel aufzustellen.

Auch für das Finden einer Gleichung der Tangente, die durch einen Punkt P geht, der nicht auf der Parabel liegt, kann auf diese Weise eine Methode entdeckt werden. Soll die Tangente durch den Punkt P gehen, so existiert ein Punkt Q auf der Leitlinie, dessen Streckensymmetrale mit dem Brennpunkt F durch den Punkt P geht. Dies bedeutet aber dass die Abstände $\overline{PF}$ und $\overline{PQ}$ gleich sein müssen. Q kann also gefunden werden, indem die Leitlinie mit einem Kreis geschnitten wird, dessen Mittelpunkt in P liegt und F enthält. Da P außerhalb der Parabel liegen muss, gibt es zwei Punkte Q_1 und Q_2, die diese Bedingungen erfüllen. Die Streckensymmetralen von FQ_1 und FQ_2 sind Tangenten an die Parabel und enthalten den Punkt P. Auf gleiche Weise können diese Tangenten auch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

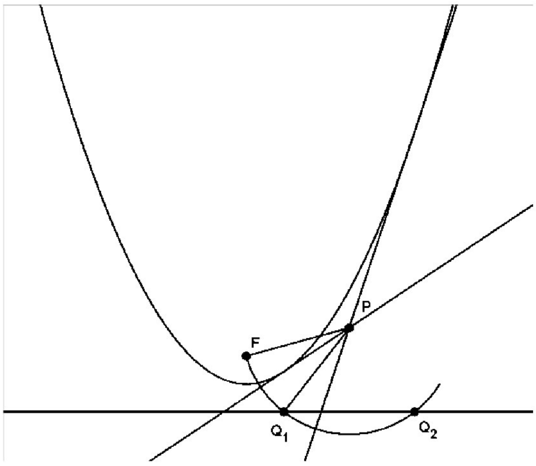


Abb. 47: Konstruktion der Tangenten an eine Parabel von einem Punkt P aus

Besonders aufmerksamen Schülerinnen und Schülern könnte dabei auffallen, dass jene Tangente, die durch die Faltung der Ecke des Papiers auf den Punkt F entsteht, eine gemeinsame Tangente zweier Parabeln mit demselben Brennpunkt generiert. Dies könnte weitere Überlegungen zu gemeinsamen Tangenten zweier Parabeln anstoßen, die allerdings aufgrund ihrer Komplexität hier nicht weiter ausgeführt werden sollen.

4.2.4.2 *Fragen zur Ellipse – 2. Auftrag*

Um zu zeigen, dass die Faltlinien des zweiten Auftrages tatsächlich Tangenten an jene Ellipse sind, deren Brennpunkte M und F sind und deren Hauptachsenlänge dem Radius des Ausgangskreises entspricht, scheint es auch hier sinnvoll zu sein, sich zunächst die Definition der Ellipse in Erinnerung zu rufen. Malle et al. (2013, S. 138) charakterisieren die Ellipse folgendermaßen:

> „Eine Ellipse ell ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F‘ konstant $(= 2a > \overline{FF'})$ ist.“

Betrachten wir zunächst eine einzelne Faltlinie, die dadurch entsteht, dass der Punkt S auf der Kreislinie auf den Punkt F im Inneren des Kreises gefaltet wird. Diese Faltlinie ist die Streckensymmetrale von SF. Das bedeutet, dass auf der Trägergeraden dieser Faltlinie alle Punkte liegen, deren Abstand zu F gleich groß ist, wie jener zu S. Unter anderem enthält diese Gerade auch den Punkt P, der auf der Strecke SM liegt. Dieser Punkt P muss aber auf jener Ellipse liegen, deren Brennpunkte F und M sind und deren Hauptachsenlänge genau dem Radius des Ausgangskreises r entspricht. Denn

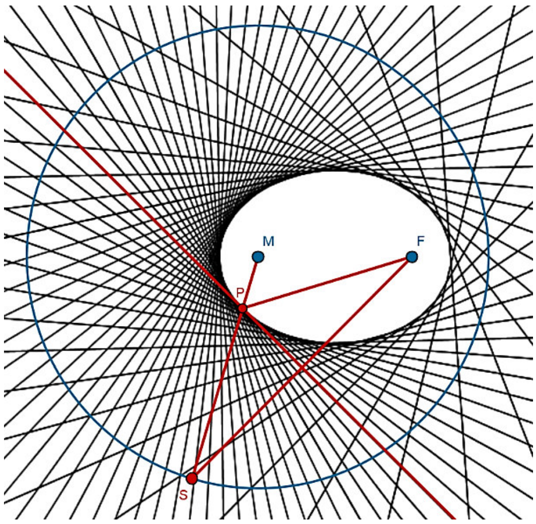


Abb. 48: Gefaltete Tangenten an eine Ellipse

$$\overline{PF} = \overline{PS} \text{ und } \overline{PS} + \overline{PM} = r.$$

Für alle anderen Punkte der Streckensymmetrale P_n gilt allerdings aufgrund der Dreiecksungleichung.

$$\overline{P_nS} + \overline{P_nM} > r.$$

Sie liegen also außerhalb der Ellipse, womit die Behauptung bereits bewiesen ist.

Der Versuch hier mit der Gleichung von Faltlinien- und Tangentenscharen zu argumentieren, kann natürlich zur Stärkung mathematischer Kompetenzen beitragen, scheint allerdings für Schülerinnen und Schüler nicht besonders aussichtsreich.

Aber auch hier können Lernende Wege finden, wie Tangenten an eine Ellipse gelegt werden können, ohne auf das Auswendiglernen von Formeln zurückgreifen zu müssen.

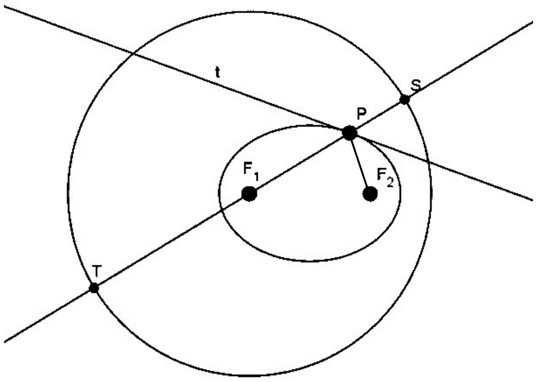


Abb. 49: Konstruktion der Tangente an die Ellipse im Punkt P

Um die Gleichung einer Tangente in einem Punkt der Ellipse aufzustellen, wird zunächst die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in einem der beiden Brennpunkte F_1 und dem Radius der Hauptachsenlänge der Ellipse $2a$ bestimmt. Anschließend wird die Gerade durch die Punkte P und F_1 mit diesem Kreis geschnitten. Jener Schnittpunkt, der den geringeren Abstand zu P aufweist, soll S heißen. Die Streckensymmetrale von SF_2 ist die Tangente an die Ellipse durch den Punkt P. Noch schneller lässt sich die Tangente konstruieren, wenn erkannt wird, dass sie die Winkelsymmetrale der Trägergeraden der Strecken PF_1 und PF_2 ist.

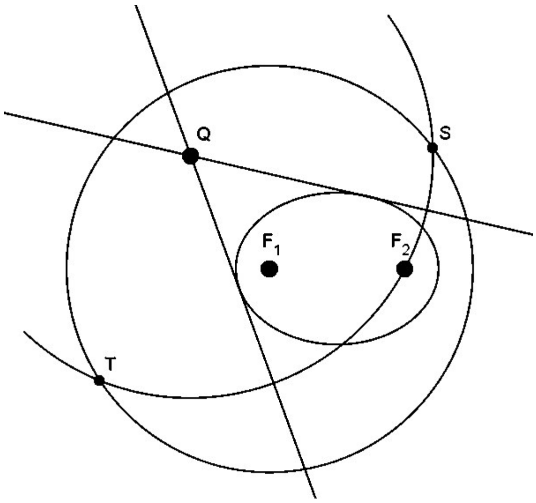


Abb. 50: Konstruktion der Tangenten an eine Ellipse von einem Punkt Q aus

Soll eine Tangente an die Ellipse von einem Punkt außerhalb der Ellipse gelegt werden, so wird auch hier zunächst die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in einem der beiden Brennpunkte F_1 und dem Radius der Hauptachsenlänge der Ellipse $2a$ aufgestellt. Soll Q auf der Tangente liegen, so muss es nach den obigen Überlegungen einen Punkt S auf dem Kreis geben, dessen Streckensymmetrale mit dem Punkt F_2 durch Q geht. Bestimmt man also die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt Q durch den Punkt F_2 und schneidet diesen mit dem ursprünglichen Kreis, so erhält man zwei Punkte S und T, die diese Bedingungen erfüllen. Sowohl die Streckensymmetrale von SF_2 als auch jene von TF_2 sind Tangenten an die Ellipse und enthalten den Punkt Q.

Auf gleiche Weise können diese Tangenten auch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

4.2.4.3 Andere Faltungen

Dass Faltungen einer Kreislinie auf ihren eigenen Mittelpunkt Tangenten eines Kreises mit dem halb so langen Radius generiert, mag einleuchtend erscheinen. Einen formalen Beweis dafür zu finden, kann allerdings für manche Schülerinnen und Schüler bereits eine Herausforderung sein. Außerdem lässt sich so ein Verständnis für den Kreis als Spezialfall der Ellipse begreifen.

Mathematisch interessanter ist jedoch der Versuch eine Kreislinie auf einen Punkt außerhalb des Kreises zu falten. Um dieses Vorgehen mit Papier ausprobieren zu können, wäre es ratsam Papier zur Verfügung zu stellen, das ein wenig durchsichtig ist. Backpapier kann ein geeignetes Material dafür sein. Einfacher ist sicher die Simulation der Faltungen mit einer dynamischen Geometriesoftware.

Dabei kann man schnell die Vermutung aufstellen, dass eine solche Faltung Tangenten einer Hyperbel erzeugt. Dies kann durch Überlegungen bewiesen werden, die mehr oder weniger äquivalent zu jenen bezüglich der Ellipse sind.

Malle et al. (2013, S. 150) definieren die Hyperbel folgendermaßen:

> „Eine Hyperbel *hyp* ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die der Unterschied (Betrag der Differenz) der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F‘ konstant ($= 2a < \overline{FF'}$) ist.“

Wir betrachten wieder eine einzelne Faltlinie, die durch das Falten des Punktes S der Kreislinie auf den Punkt F entsteht. Die Trägergerade dieser Faltlinie enthält alle Punkte, deren Abstände zu S und F gleich groß sind. Unter diesen Punkten findet sich auch der Punkt P, der diese Bedingung erfüllt

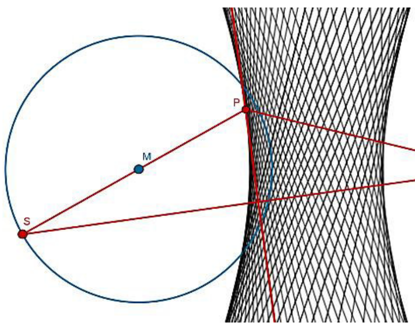


Abb. 51: Gefaltete Tangenten einer Hyperbel

und zusätzlich auf der Trägergeraden der Strecke SM liegt. Dieser Punkt muss auf jener Hyperbel liegen, deren Brennpunkte M und F sind und deren Hauptachsenlänge dem Radius des Ausgangskreises entspricht. Denn $\overline{PS} = \overline{PF}$ und $|\overline{PS} - \overline{PM}| = r$. Für alle anderen Punkte auf der Faltlinie gilt nach der Dreiecksungleichung $r + \overline{PM} > \overline{PS}$ und somit $|\overline{PS} - \overline{PM}| < r$. Daraus folgt die Behauptung.

Um also eine Tangente in einem Punkt an eine Hyperbel zu legen, wird zunächst ein Kreis konstruiert, dessen Mittelpunkt in einem der beiden Brennpunkte F_2 liegt. Die gesuchte Tangente enthält P. Wir suchen daher einen Punkt S auf dem Kreis, der gleich weit von P wie von F_1 entfernt liegt. Dafür zeichnen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt P, der durch F_1 geht. Da P auf der Hyperbel liegt, berühren die zwei Kreise einander. Die Streckensymmetrale ihres Berührpunktes S mit dem Brennpunkt F_1 ist die gesuchte Tangente.

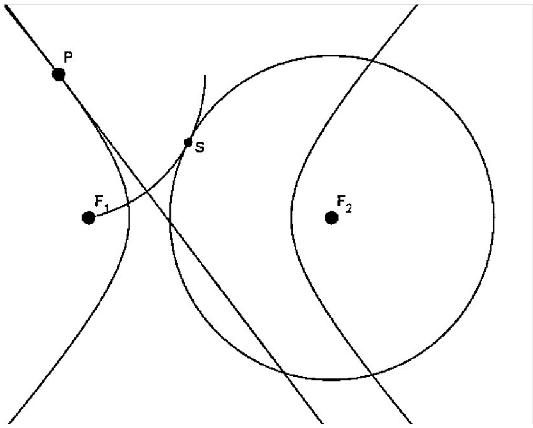


Abb. 52: Konstruktion der Tangente an eine Hyperbel im Punkt P

Die Konstruktion einer Tangente von einem Punkt Q, der nicht auf der Hyperbel liegt, funktioniert im Wesentlichen äquivalent. Die beiden Kreise besitzen nun aber zwei Schnittpunkte S und T und erzeugen dementsprechend auch zwei Tangenten.

Die Berechnung der Tangentengleichungen kann mit der gleichen Methode gemacht werden.

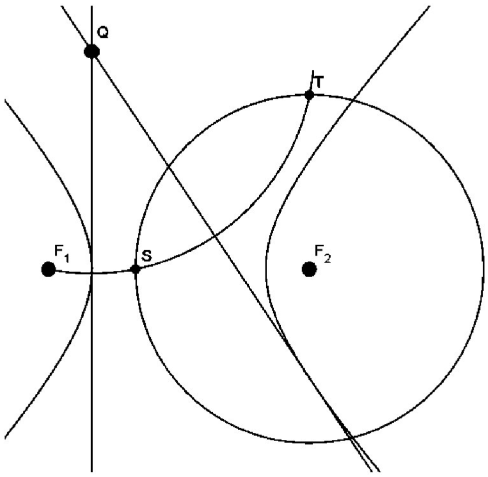


Abb. 53: Konstruktion der Tangenten an eine Hyperbel von einem Punkt Q aus

Rein experimentell könnten natürlich noch weitere Faltungen ausgetestet werden. Der Vollständigkeit halber sind zwei dieser Möglichkeiten in Abb. 54 zu sehen. Eine erfolgreiche mathematische Auseinandersetzung mit diesen Gebilden kann von Schülerinnen und Schülern zwar kaum erwartet werden, allerdings könnte auf diese Weise die Kreativität der Lernenden auch im Mathematikunterricht zum Tragen kommen.

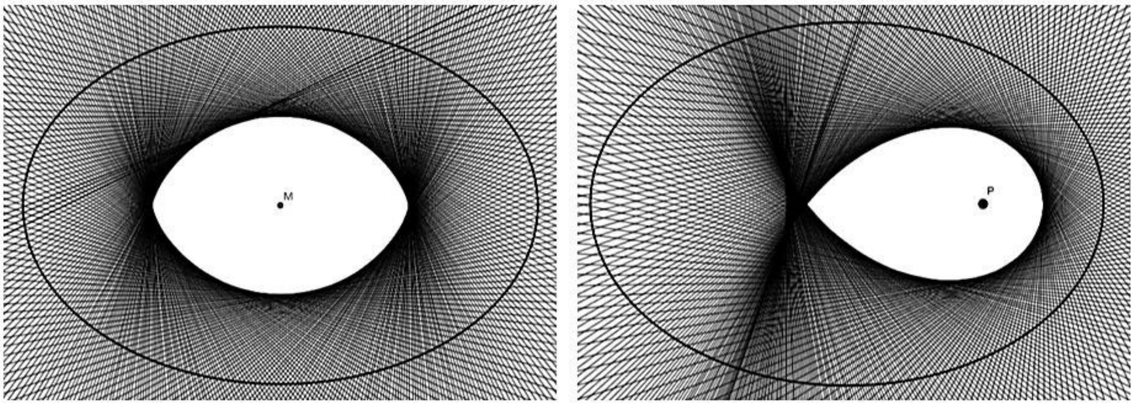


Abb. 54: Ellipse auf ihren eigenen Mittelpunkt M gefaltet und Ellipse auf einen Punkt P gefaltet

4.2.5 Kommunikation und Rückblick

Schülerinnen und Schüler verfassen eine schriftliche Publikation ihrer Ergebnisse. Diese wird von einem Mitglied einer anderen Gruppe begutachtet, bevor sie eingereicht wird. Teil dieser Publikation ist eine kleine Reflexion zur Vorgehensweise und zu den wichtigsten Erfolgsmomenten während der Arbeit. In einer abschließenden Diskussion im Plenum können offengebliebene Fragen geklärt werden.

4.2.6 Analyse des Unterrichtskonzeptes

Der Lernimpuls bietet zwar viele verschiedene Möglichkeiten für Fragestellungen, das Themengebiet ist allerdings mehr oder weniger auf Kegelschnitte begrenzt. Darum eignet es sich für einen eingebetteten Einsatz im laufenden Unterricht, um Tangenten von Kegelschnitten im Allgemeinen zu thematisieren. Durch die hohe Aktivität der Lernenden kann ein konzeptionelles Verständnis für Tangenten von Kegelschnitten entstehen, der bei bloßem Einsetzen in die sogenannte Spaltform nicht erreicht werden kann. Besonderes Augenmerk dieses Konzeptes liegt im Aufstellen und Beweisen von Behauptungen.

In der Planungsvorlage sieht dieser Unterrichtsvorschlag folgendermaßen aus.

Vorlage für die Planung forschenden Lernens im Mathematikunterricht			
Titel des forschend-lernen Konzepts	Kegelschnitte falten		
Schulstufe	11-12		
Geplanter zeitlicher Rahmen	Mindestens 3 Unterrichtseinheiten		
Mögliche Einbettung in den Lehrplan	Kegelschnitte, Tangenten von Kegelschnitten		
	strukturiert	**gelenkt**	**offen**
Neugier wecken	Zwei Faltaufträge, persönliche Stellungnahme		
Fragestellung		Vorschläge der Lehrkraft	Strukturierung an der Tafel
Planung			In Gruppen- oder Einzelarbeit
Durchführung			In Gruppen- oder Einzelarbeit
Kommunikation		Schriftliche Publikation in Teams oder Einzelarbeit Begutachtung durch Kollegin/ Kollegen	
Rückblick	Diskussion	In der Publikation	

Tab. 6: Unterrichtskonzept „Kegelschnitte falten"

4.3 Harry Houdini und die Mathematik

Nimmt man ein Blatt Papier, faltet es wie es einem beliebt und macht einen einzigen geraden Schnitt durch das gefaltete Blatt, dann entstehen zwei oder mehr Papierstücke, die, wenn man sie wieder auffaltet, irgendeine Art eines Polygongebildes formen. Welche Muster auf diese Weise geschaffen werden können, ist ein Problem des mathematischen Origami und nennt sich „one complete straight cut". Martin Gardener war der erste, der dieses Problem der mathematischen Community vorstellte, als er es 1960 im „Scientific American" präsentierte. (Demaine & O'Rourke, 2007, S. 254) Doch bereits vor ihm experimentierte Harry Houdini mit dieser Methode. In seinem Buch „Paper Magic", das 1922 erschien, erläutert der große Zauberer, wie ein regelmäßiger, 5-zackiger Stern mit nur einem geraden Schnitt aus einem Papier getrennt werden kann. (ebd., S. 254) Doch die mathematische Antwort auf dieses Problem ist beinahe noch zauberhafter. Sie ist nämlich überraschend universell. Jede Form, die durch einen planaren Graphen aus ausschließlich geraden Kanten beschrieben werden kann, kann durch Falten und einen geraden Schnitt aus dem Papier getrennt werden. Eine Lösung für dieses Problem nennt sich „the straight skeleton". Sie wurde von Erik Demaine, Martin Demaine und Anna Lubiw 1998 im Zuge der japanischen Konferenz für diskrete und algorithmische Geometrie präsentiert. Die Methode basiert auf der einfachen Idee, dass die Faltung entlang der Winkelsymmetrale zweier Strecken diese genau übereinander bringt. Dies entspricht bereits dem Hauptziel des „one complete straight cut"-Problems. Um nämlich ein Vieleck, oder auch mehrere, mit nur einem geraden Schnitt aus einem Blatt Papier trennen zu können, muss das Papier so gefaltet werden, dass alle zu schneidenden Strecken genau übereinander liegen. Die Methode „straight skeleton" generalisiert diese Idee.

Die Gebiete eines Graphen werden in einer solchen Weise geschrumpft, dass die Kanten parallel zu den Ausgangskanten bleiben und der orthogonale Abstand der so entstandenen Kanten zu ihrem jeweiligen originalen Pendant für alle geschrumpften Kanten jederzeit gleich bleibt. Zieht sich eine Kante *e* allerdings zu einem Punkt zusammen, werden andere Kanten weiter geschrumpft, wobei *e* von da an ignoriert wird. Zieht sich ein ganzes Gebiet zu einem Punkt zusammen, wird dieses Gebiet nicht mehr weiter geschrumpft. Wenn sich ein Gebiet durch den Schrumpfvorgang teilt, so wird jedes der entstandenen Gebiete separat voneinander weiter verkleinert. Die Vereinigung aller Wege, die von den Knoten des Graphen während des Schrumpfprozesses zurückgelegt werden, heißt „straight skeleton". Um entlang all

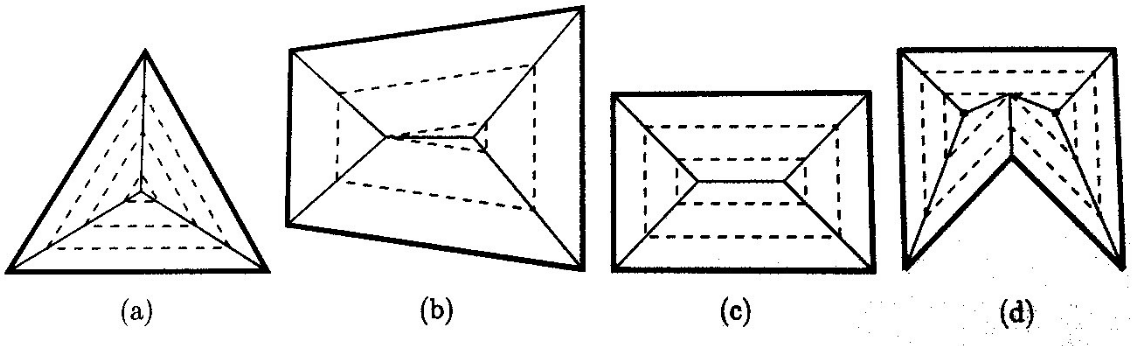


Abb. 55: Straight Skeleton eines Dreiecks (a), eines konvexen Vierecks (b), eines Rechtecks (c) und eines nichtkonvexen Fünfecks (d) (Demaine & O'Rourke, 2007, S. 256)

dieser Linien so falten zu können, dass ein flaches Objekt entsteht, müssen allerdings noch Faltlinien hinzugefügt werden. Denn die Kanten an den einzelnen Knoten müssen die Bedingungen der flat foldability erfüllen. (vgl. Kapitel 3.1.4) Diese zusätzlichen Faltlinien sind in Abb. 56b zu sehen. Sie stehen verständlicherweise normal auf die zu schneidenden Kanten.

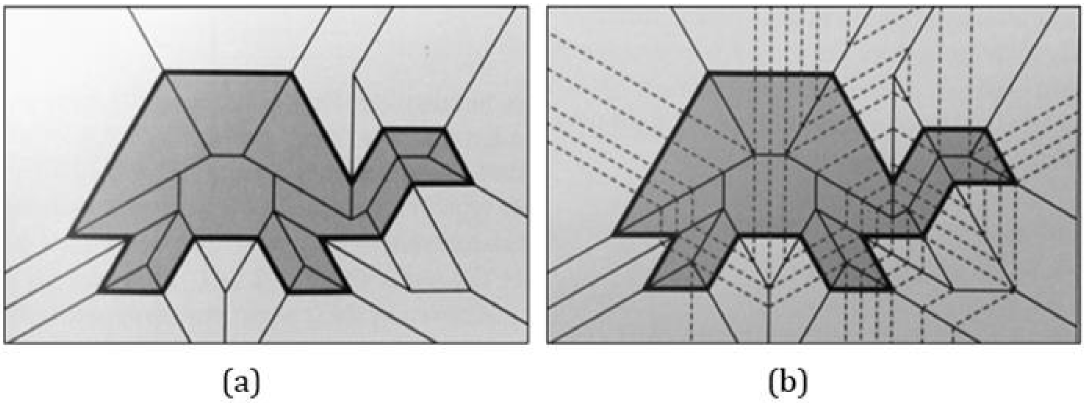


Abb. 56: Straight skeleton einer Schildkröte (a) mit zusätzlichen Faltlinien (b)

Daraus kann schnell gefolgert werden, dass Faltmuster für das Ausschneiden von Vielecken, die einen Inkreis besitzen, besonders einfach aussehen. Sie bestehen nämlich lediglich aus Kanten, die sich im Inkreis treffen. Angelehnt an Houdini ergibt sich daraus eine schöne Möglichkeit, regelmäßige Vielecke im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zu thematisieren. Das folgende Unterrichtskonzept eignet sich für Schülerinnen und Schüler, die über ein Grundwissen zu regelmäßigen Vielecken verfügen und verschiedene Dreiecke bezüglich ihrer Winkel und Seitenlängen charakterisieren können. Der Unterrichtsvorschlag wurde also für Lernende ab der sechsten Schulstufe entworfen.

4.3.1 Neugier wecken

Um die Neugier der Schülerinnen und Schüler zu wecken, wird eine leicht abgewandelte Form des Zaubertricks von Houdini mit der ganzen Klasse durchgeführt. Eine kleine Abstimmung darüber, wie viele gerade Schnitte notwendig wären, um ein regelmäßiges Fünfeck aus der Mitte eines quadratischen Papiers zu trennen, kann zusätzlich motivierend wirken.

Dieser Einstieg hat entscheidende Vorteile. Einerseits bietet er gleich zu Beginn ein potentielles Erfolgserlebnis für Schülerinnen und Schüler, das der Schlüssel zu einer positiven Auseinandersetzung mit dem Thema sein kann. Außerdem bildet das Staunen den Ausgangspunkt für den Lernprozess, das durch eventuelle Fehler bei der Faltung noch zusätzlich angeregt wird. Darüber hinaus kann das ausgeschnittene Fünfeck bereits eine Basis für eigene Forschungsaktivitäten darstellen.

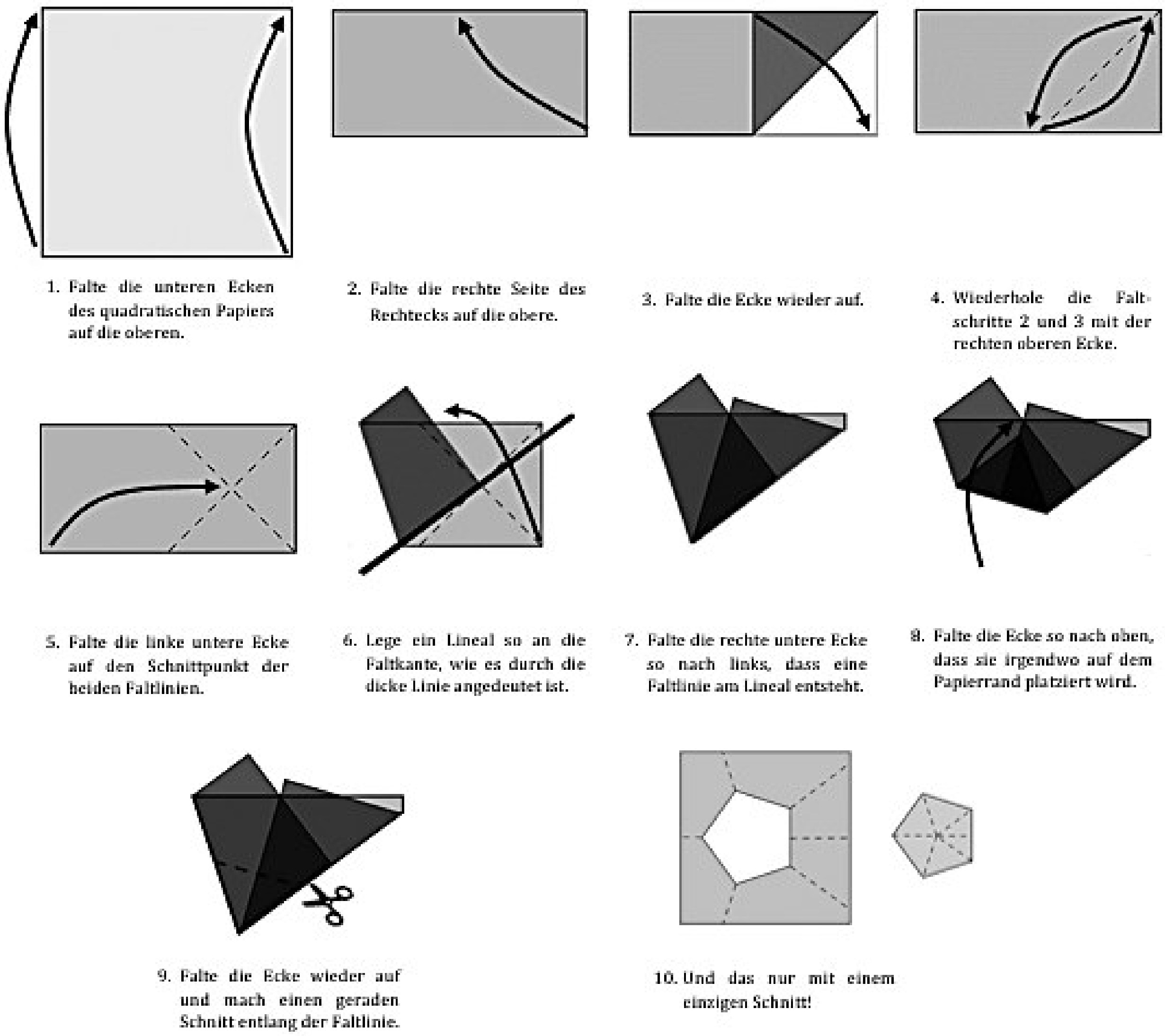


Abb. 57: Anleitung für das Ausschneiden eines regelmäßigen Fünfecks mit nur einem geraden Schnitt

<u>Anmerkung</u>:

Eigentlich ist diese Faltung lediglich eine Näherungslösung. Wir betrachten Faltschritt (5) genauer. Sei die Länge des Ausgangsquadrates 1, so gilt für die Katheten des Dreiecks ACD der Abb. 58 $\overline{DC} = \frac{1}{4}$ und $\overline{AD} = \frac{3}{4}$. Daraus ergibt sich für den Winkel $\sphericalangle CAD$

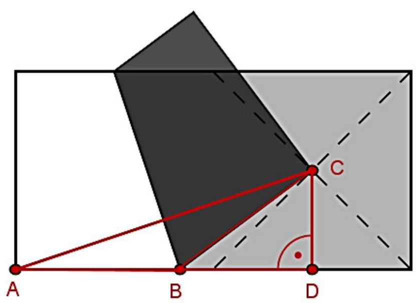


Abb. 58: Faltschritt (5) genauer betrachtet

$$\tan(\sphericalangle CAD) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sphericalangle CAD = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \sphericalangle BAC.$$

Da das Dreieck ABC gleichschenkelig sein muss, folgt daraus

$$\sphericalangle ABC = 180 - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 143{,}13$$

Vier der Zentriwinkel des ausgeschnittenen Fünfecks betragen also ungefähr 71,565° und einer 74,184°. Dies entspricht einem Fehler, der kleiner ist als 0,5° bzw. 2,2°. Das ausgeschnittene Polygon ist also eine recht gute Näherung für ein regelmäßiges Fünfeck. Eine exakte Lösung ist diese Faltung nicht.

Ein gravierender Nachteil dieses Einstieges ist damit bereits thematisiert. Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I verfügen noch nicht über genügend mathematische Fähigkeiten, um dieser Faltung gänzlich auf den Grund zu gehen. Dies lässt sich allerdings dazu nutzen, ihre Aufgabe als Forscherinnen und Forscher genauer zu beleuchten. Im Unterschied zu der durchgeführten Faltung eines Fünfecks, das für Lernende dieser Schulstufen zwangsweise ein Zaubertrick bleiben muss, gilt es in der Forschung die Ergebnisse sichtbar und nachvollziehbar zu machen. Hypothesen werden so lange geprüft, bis sie entweder begründet sind oder verworfen werden müssen.

4.3.2 Fragestellung

Die erste Forschungsfrage wird durch die Lehrperson vorgegeben. Sie lautet: „Wie kann ein Quadrat mit der fold-and-one-straight-cut Methode aus der Mitte eines quadratischen Papiers herausgetrennt werden?“ Während der Bearbeitung dieser Aufgabe, können sich weitere Fragen der Schülerinnen und Schüler ergeben. Nachfolgende Aufträge, die sich auf natürliche Weise aus dieser Aktivität ergeben, wären das Ausschneiden eines regelmäßigen Acht-, Sechs- oder Zwölfecks. Allerdings können sich durch das Experimentieren mit Papier und Schere die Unterschiedlichsten Impulse für Fragestellungen ergeben, die es gilt aufzugreifen und Schülerinnen und Schüler bei ihrer Erforschung zu unterstützen. Haben Lernende die erste Frage zu ihrer Zufriedenheit beantwortet, teilen sie ihre Ergebnisse der Lehrkraft mit. Gemeinsam werden dann anschließende Forschungsfragen erarbeitet.

4.3.3 Planung

Schülerinnen und Schüler entscheiden selbstständig, ob sie alleine oder in Gruppen arbeiten möchten. Als Hilfestellung können Materialien dienen, welche die wichtigsten

Charakteristika verschiedener Vielecke zusammenfassen. Für die Protokollierung der Arbeit ist jede Schülerin und jeder Schüler selbst verantwortlich.

4.3.4 Durchführung und allgemeine Betrachtungen

Allgemein lässt sich über regelmäßige n-Ecke sagen, dass Faltungen entlang der Verbindungslinien von den Ecken zum Mittelpunkt, welche ja auf den Winkelsymmetralen liegen, entscheidend für ein erfolgreiches Ausschneiden mit nur einem einzigen geraden Schnitt ist. Ziel ist es also, alle n kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecke, aus denen das n-Eck zusammengesetzt ist, genau übereinander zu bringen. Dies ist allerdings nur möglich, wenn n gerade ist. Ist n ungerade, muss noch eine zusätzliche Faltlinie hinzugefügt werden, um die Bedingungen der flat foldability im Mittelpunkt zu erfüllen.

Für den Fall, dass n eine gerade natürliche Zahl ist, ergibt sich also allgemein folgendes Vorgehen. Man falte ein quadratisches Papier, wie ein Buch, sodass sich jeweils zwei Ecken berühren, und wähle einen Punkt auf der so entstandenen Faltlinie. Von diesem Punkt aus, welcher der Mittelpunkt des auszuschneidenden Vielecks ist, werden $\frac{n-2}{2}$ Strahlen gezeichnet, die sowohl mit der Faltkante, als auch miteinander paarweise das Maß des Zentriwinkels des gewünschten n-Ecks $\left(=\frac{2\pi}{n}\right)$ einschließen. Faltet man nun entlang dieser Strahlen und schneidet das Papier so durch, dass der Mittelpunkt die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ist, erhält man das gewünschte Polygon. In Abb. 59 ist dieses Vorgehen am Beispiel des regelmäßigen Sechsecks erläutert.

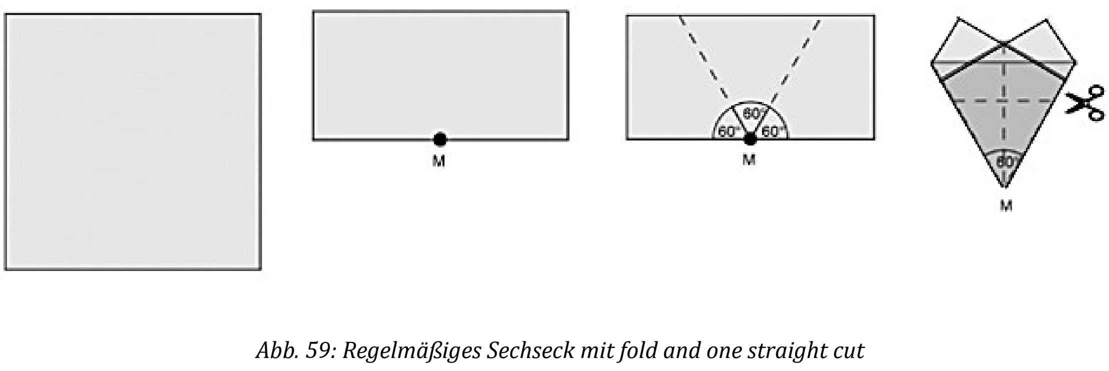


Abb. 59: Regelmäßiges Sechseck mit fold and one straight cut

Im Wesentlichen unterscheidet sich das Vorgehen für ungerade n kaum von jenem für gerade n. Allerdings lässt sich das Maß des Zentriwinkels lediglich $\frac{n-1}{2}$ mal vollständig abtragen. Der Winkel zwischen einem Strahl und einem Abschnitt der Faltkante beträgt lediglich die Hälfte des Winkels $\left(=\frac{\pi}{n}\right)$. Dieser Umstand kann allerdings ignoriert werden, da dieses Vorgehen genau die Faltlinie generiert, die für eine flache Faltung des Musters benötigt wird. Für ein gleichseitiges Dreieck ist dieses Vorgehen in Abb. 60 zu sehen.

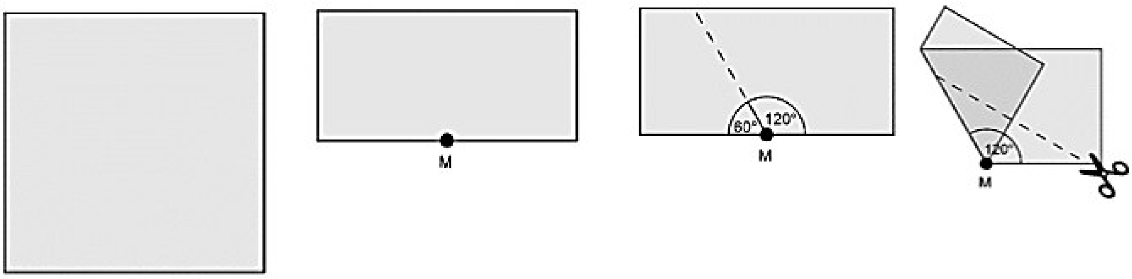


Abb. 60: Gleichseitiges Dreieck mit fold and one cut

Natürlich kann von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I keine Formulierung in einer derartigen Allgemeinheit erwartet werden. Anhand von Beispielen lässt sich dieses Prinzip allerdings durchaus erarbeiten.

Für einige regelmäßige Vielecke können Faltungen gefunden werden, die ohne Winkelmesser auskommen. Ein Winkel von 60° lässt sich in Anlehnung an die Konstruktion mit Zirkel und Lineal falten, indem man sich vor Augen hält, dass er dem Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks entspricht. In Abb. 61 ist eine Möglichkeit dargestellt, durch Falten einen 60° Winkel zu erzeugen. Für diese Überlegungen ist allerdings ein ausgeprägtes Verständnis für Dreiecke und ihre Eigenschaften notwendig.

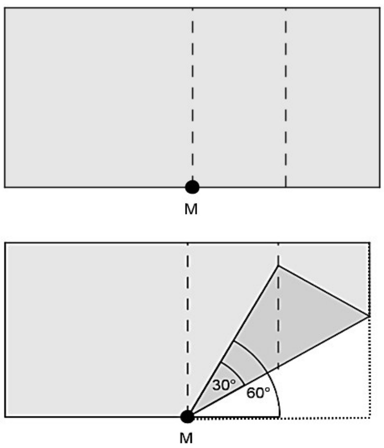


Abb. 61: Einen Winkel von 60° falten

Allgemein ermöglicht dieses Konzept viele kleine Entdeckungen. Beispielsweise können Schülerinnen und Schüler erfahren, dass eine Faltung entlang einer Winkelsymmetrale die winkelbildenden Seiten genau aufeinander bringt oder umgekehrt, dass das Falten zweier Strecken aufeinander, ihre Winkelsymmetrale erzeugt. Beides entspricht einem tiefen konzeptionellen Verständnis für Winkelsymmetralen. Das Wissen, dass regelmäßige Vielecke aus gleichschenkeligen Dreiecken bestehen, wird angewendet und gewinnt auf diese Weise an Bedeutung. Lernende können verschiedene Wege finden, gleichschenkelige Dreiecke zu erzeugen.

Um aus zwei Strahlen ein gleichschenkeliges Dreieck zu bilden, ist es beispielsweise sinnvoll, eine Normale auf die Winkelsymmetrale der zwei Strahlen zu legen. Experimentieren mit Schere und Papier kann Lernende erkennen lassen, dass durch einen Schnitt, der normal auf eine einzelne Faltkante gemacht wird, eine Strecke entsteht, die doppelt so lang ist wie der Schnitt selbst. Ein Schnitt, der mit der Faltkante einen gewissen Winkel α einschließt, erzeugt im Gegensatz dazu zwei gleich lange Strecken, die den Winkel 2α einschließen. Die Faltkante ist ihre Winkelsymmetrale. Auf diese Wiese können Grundideen der Spiegelung an einer Geraden entdeckt und vertieft werden. Lernende werden dazu angeregt zu entdecken, dass die Halbierung des Zentriwinkels ein Vieleck mit doppelt so vielen Ecken erzeugt. Auf diese Weise erfahren sie auf spielerische Art, dass das Halbieren des Divisors eine Verdoppelung des Quotienten bewirkt, denn der halbe Winkel passt doppelt so oft in 360°. Außerdem begegnen sie bereits einer einfachen geometrischen Folge.

4.3.5 Kommunikation und Rückblick

Schülerinnen und Schüler dürfen sich entscheiden, ob sie ihre Ergebnisse vor der Klasse präsentieren oder verschriftlichen. In einer abschließenden Diskussion, werden offene Fragen geklärt, wichtige Erkenntnisse zusammengefasst und der Arbeitsprozess reflektiert.

4.3.6 Analyse des Unterrichtskonzeptes

Der Schwerpunkt dieses Unterrichtsvorschlages liegt eindeutig auf dem experimentellen Zugang, den Lernende zur Mathematik gewinnen können. Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Umgang mit Fehlern. Der Scherenschnitt bietet die Chance, Fehler als eine ästhetisch ansprechende und mathematisch durchaus interessante Möglichkeit zu begreifen, neue Fragestellungen zu entwickeln und spannende Entdeckungen zu machen. Die Planungsvorlage dieses Unterrichtsentwurfes sieht folgendermaßen aus.

Vorlage für die Planung von forschendem Lernen im Mathematikunterricht			
Titel des forschend-lernen Konzepts	Harry Houdini und die Mathematik		
Schulstufe	6-8		
Geplanter zeitlicher Rahmen	Mindestens 2 Unterrichtseinheiten		
Mögliche Einbettung in den Lehrplan	Gleichmäßige Vielecke, Vielecke mit Inkreis, Symmetrie		
	strukturiert	**gelenkt**	**offen**
Neugier wecken	Gemeinsames Falten und Ausschneiden eines regelmäßigen Fünfecks, Harry Houdini		
Fragestellung	Wie kann ein Quadrat mit der fold-and-one-straight-cut Methode aus der Mitte eines quadratischen Papiers herausgetrennt werden?	Individuelle Vorschläge der Lehrkraft	
Planung			In Gruppen- oder Einzelarbeit
Durchführung			In Gruppen- oder Einzelarbeit
Kommunikation		Schriftliche Publikation oder Präsentation vor der Klasse	
Rückblick	Diskussion		

Tab. 7: Unterrichtskonzept „Harry Houdini und die Mathematik“

4.3.7 Erfahrungsbericht und Reflexion zur Unterrichtsdurchführung

Das Unterrichtskonzept „Harry Houdini und die Mathematik“ wurde mit Schülerinnen und Schülern der 7. Schulstufe einer Wiener Mittelschule durchgeführt. Der eigentlichen Einstiegsphase wurde eine kurze, frontal gestaltete Wiederholung der wichtigsten Charakteristika regelmäßiger Vielecke vorangestellt. Verschiedene regelmäßige Polygone aus Karton dienten im Zuge dessen als Anschauungsmaterial. Dabei wurde deutlich, dass sich die Schülerinnen und Schüler gut daran erinnern konnten, dass alle Seiten eines regelmäßigen Vielecks gleich lang sind. Die Gleichheit aller Innen- und Zentriwinkel musste jedoch eingehender thematisiert werden.

Das gemeinsame Falten und Ausschneiden des regelmäßigen 5-Ecks erhöhte schlagartig die Aktivität der Lernenden. Viele Zwischenfragen, wie „Ist das so richtig?" oder „Können Sie das bitte noch einmal zeigen?" deuteten darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler großes Interesse daran hatten, die Aufgabe erfolgreich zu bewältigen. Bereits hier zeigte sich der kollaborative Aspekt des Origami. Schülerinnen und Schüler waren sehr bemüht, einander bei den einzelnen Faltschritten zu unterstützen. Sie fragten ihre Kolleginnen und Kollegen um Hilfe, haben aber auch aktiv Ratschläge angeboten. Der Einstieg über eine gemeinsame Faltaktivität wies einen motivierenden Charakter auf. Alle Schülerinnen und Schüler – bis auf eine Ausnahme – konnten den Faltanleitungen folgen. Einzelne Wortmeldungen zeigten, dass sie dies durchaus als Erfolgsmoment erlebten.

Bei der Erarbeitung einer Charakterisierung des Forschungsbegriffs im Gegensatz zur Zauberei brachten einige Schülerinnen und Schüler verschiedene Aspekte in die Diskussion ein. Die wichtige Eigenschaft der Nachvollziehbarkeit musste allerdings von der Lehrperson angesprochen werden. So konnten Schülerinnen und Schüler bereits einen ersten kleinen Einblick in das Anforderungsprofil wissenschaftlicher Arbeit gewinnen.

Die erste Forschungsfrage, wie ein Quadrat mit der fold-and-one-straight-cut Methode aus der Mitte eines quadratischen Papiers herausgetrennt werden kann, war für Lernende von einem Arbeitsblatt ablesbar. Sie wurde aber zusätzlich im Plenum besprochen. Viele Schülerinnen und Schüler fanden bereits innerhalb der ersten fünf Minuten eine Lösung für das Ausschneiden eines Quadrates. Die anderen ließen sich allerdings auch nicht entmutigen. Eine Schülerin verkündete nach über 40-minütiger Arbeitszeit, dass sie nun eine Lösung für das Ausschneiden eines Quadrates gefunden hätte. Sie konnte zwar nicht wirklich erklären, wieso ihre unorthodoxe Vorgehensweise tatsächlich ein Quadrat produzierte, diese Schwachstelle wurde allerdings angesichts ihrer Freude an der eigenständig gefundenen Lösung nebensächlich. Eine offensichtlich befreundete Schülerin unterstützte dieses Gefühl mit den Worten: „Schau, wie ihre Augen strahlen. Das ist ja schön."

Die individuelle Beschäftigung mit einzelnen Lernenden zeigte ihre Stärken und Schwächen auf. So wurde beispielsweise deutlich, dass einzelne Schülerinnen und Schüler Probleme beim Ablesen und Konstruieren von Winkeln mit dem Winkelmesser haben. Einige konnten kennzeichnende Eigenschaften von Dreiecken nicht erkennen.

Andere verwechselten Winkel mit 90° und 45°. Auf diese Weise kann offener Unterricht als Chance verstanden werden, der Lehrkraft eventuellen fachlichen Nachholbedarf vor Augen zu führen.

Auch charakterliche Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler kommen in einer so hoch individualisierten Lernform auf entscheidende Weise zum Tragen. Ein Schüler arbeitete über 50 Minuten beharrlich daran, eine Methode zu finden, ein gleichseitiges Dreieck mit einem Schnitt aus dem Papier zu trennen. Schritt für Schritt tastete er sich an die richtige Lösung heran. Zuerst nutzte er den Papierrand, um sich eine auszuschneidende Seite zu ersparen. Anschließend schaffte er es bereits ein gleichschenkeliges Dreieck auszuschneiden. Für die endgültige Lösung innerhalb der Doppelstunde war eine Hilfestellung durch die Lehrkraft notwendig. Das Ergebnis präsentierte er stolz am Ende der Einheit.

Die Stärke des Unterrichtskonzepts lag, wie zu erwarten war, darin, dass Fehler zu interessanten neuen Fragestellungen führen konnten. Eine Schülerin erkannte beispielsweise, dass sie beim Versuch, ein Quadrat aus dem Papier auszuschneiden, lediglich ein anderes bekanntes Viereck erzeugte. Im Gespräch mit der Lehrkraft stellte sie die Vermutung auf, dass es sich um eine Raute handeln müsse, überlegte allerdings auch, ob es nicht eventuell ebenso ein Deltoid sein könnte. In ihrer Präsentation wurde deutlich, dass sie bis zum Ende der Doppelstunde keine endgültige Antwort auf diese Frage finden konnte. Offensichtlich war die Vorstellung der Raute als Spezialfall des Deltoids noch nicht genügend ausgeprägt. Diese Unsicherheit konnte aus zeitlichen Gründen leider nicht für eine Diskussion im Klassenverband genutzt werden. Dies hätte in die nächste Einheit verschoben werden müssen.

Eine Schülerin, die anscheinend mit der Offenheit des Arbeitsauftrages zunächst überfordert war, beschäftigte sich nach erfolgreichem Ausschneiden eines Quadrates eher lustlos mit Scherenschnittaktivitäten. In die Kanten des durch doppelte Faltung entstandenen rechtwinkeligen Dreiecks schnitt sie kleine Dreiecke und erhielt auf diese Weise einige ausgeschnittene Deltoide und Dreiecke im aufgefalteten Papier. Die Frage der Lehrperson, wie viele und welche Art von Löchern durch den Scherenschnitt produziert werden, nahm die Schülerin interessiert auf. Nach ungefähr 20-minütiger Arbeitszeit hatte sie sich einen Plan zurechtgelegt. An jeder Seite des gefalteten Papiers wurde ein Dreieck weggeschnitten. Dieses erhielt eine Farbe, mit der anschließend auch die durch diesen Schnitt generierten Löcher umrandet wurden. Auf diese Weise konnte sie jedem Schnitt die genaue Anzahl und Form der von ihm produzierten Löcher zuordnen. Der mathematische Output dieser Aktivität scheint zunächst gering zu sein. Allerdings soll hier betont werden, dass die Schülerin für sich entdecken konnte, dass eine Aufgabe durch geschickte Systematisierung der Problemlage gelöst werden kann. Dies ist eine entscheidende Erkenntnis für die Erweiterung ihrer Problemlösefähigkeiten.

Die Möglichkeit, die eigenen Ergebnisse vor der Klasse zu präsentieren, wurde von sechs Lernenden genutzt. Alle Darstellungen beschränkten sich allerdings auf das Demonstrieren einer Methode für das Ausschneiden einer gewissen geometrischen Figur mit nur einem einzigen Schnitt. Begründungen für die Gültigkeit dieser Methoden wurden von den Schülerinnen und Schülern allerdings nicht thematisiert.

Bei der Durchführung des Unterrichtsentwurfes zeigten sich die Stärken, aber auch die Probleme des Konzeptes. Im Zuge des Unterrichts ist es durchaus gelungen, das Interesse der Jugendlichen zu gewinnen. Das Feedback der Schülerinnen und Schüler war durchwegs positiv und ihre Aktivität während der gesamten Doppelstunde überaus hoch. Es ergaben sich viele Möglichkeiten, individuelle Fragestellungen und Forschungsansätze zu entwickeln, was die jeweiligen Schülerinnen und Schüler motivierte, diese weiter zu erkunden. Große Erfolgsmomente überstrahlten im Allgemeinen die kleineren Phasen der Frustration.

Trotz alledem konnte das mathematische Potential der Unterrichtseinheit von den wenigsten ausgeschöpft werden. Die Spannweite der mathematischen Motivation kann anhand zweier Kommentare zur Unterrichtseinheit deutlich gemacht werden. Auf einem Feedbackbogen steht: „Diese Doppelstunde war lustig, weil sie sehr abwechslungsreich gegenüber anderen Stunden war – basteln statt schreiben.“ Ein anderer verrät: „Diese Doppelstunde war schön, weil man selbst auf die Lösung kommen konnte.“ Einige Schülerinnen und Schüler erkannten den Unterricht also als Möglichkeit, ihre Problemlösekompetenzen zu nutzen und auszubauen, während sich andere damit zufrieden gaben, 100 Minuten einer amüsanten Bastelaktivität nachzugehen. Natürlich könnte hier argumentiert werden, dass sich auch Lernende der letzteren Gruppe intuitiv mit geometrischen Zusammenhängen wie Symmetrie, Eigenschaften von Vielecken und Winkelmaßen auseinandergesetzt haben. Will man allerdings die mathematische Argumentationsfähigkeit der Lernenden als Basis für spätere Beweisformulierungen fördern, müssen hier Wege gefunden werden, wie aus dem Basteln heraus das Bedürfnis entstehen kann, mathematische Zusammenhänge zu artikulieren. Für die gefundenen Methoden und Ergebnisse Begründungen zu finden und diese zu formulieren, fiel Schülerinnen und Schülern äußerst schwer. Abgesehen von einem fehlenden Verständnis für den Begriff „mathematische Begründung“, bereitete auch das graphische Darstellen von Faltvorgängen zusätzliche Schwierigkeiten. Um diesen Problemen entgegenwirken zu können, soll hier vorgeschlagen werden, nach der selbstständigen Erarbeitung der ersten Forschungsfrage, die sich auf das Ausschneiden eines Quadrates bezieht, eine kurze Unterrichtsphase im Plenum abzuhalten, um die Forschungsergebnisse auszutauschen, zu vergleichen und zu reflektieren. Auf diese Weise kann basierend auf Vorschlägen der Lernenden eine einheitliche Notation für Faltungen erarbeitet werden. Zusätzlich lässt sich auch darüber diskutieren, wie genau eine mathematische Begründung sein muss, damit sie von anderen als vernünftig anerkannt wird. Außerdem scheint es sinnvoll, einige mathematische Begriffe einzuführen oder ins Gedächtnis zu rufen, um den Schülerinnen und Schülern das Artikulieren ihrer Überlegungen zu erleichtern. Im Zuge dieses Gesprächs werden Ideen für weitere Forschungsfragen gesammelt, an deren Lösung die Lernenden dann wieder individuell arbeiten.

Aus der Erfahrung mit diesem Unterrichtskonzept in der Praxis ergibt sich die Notwendigkeit, Zeit für die Zusammenführung, Aufzeichnung und Reflexion der Ergebnisse einzuplanen. Die Lehrkraft sollte davor allerdings die Möglichkeit haben, die schriftlichen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler zu analysieren. Das eigene Gefühl, alle Arbeitsprozesse der Klasse überschauen zu können, trügt. Die Aufzeichnungen der Lernenden können durchaus für Überraschungen sorgen. Eine Lerngruppe fand beispielsweise folgende Methode, ein Sechseck mit nur einem Schnitt aus dem quadratischen Papier zu trennen.

Die abgebildete Arbeit der Schülerinnen und Schüler regen zu vielen weiterführenden Überlegungen an. Die dargestellte Faltung generiert ein Sechseck, dessen Zentriwinkel viermal ca. 63,43° und zweimal ca. 53,13° betragen. Aber auch ohne Berechnung lässt sich deutlich erkennen, dass es sich hier um eine Näherungslösung handelt. Dies könnte ein wunderbarer Anlass sein, um mit der Klasse über Näherungslösungen im Allgemeinen zu sprechen und auch die Eingangsfaltung des Fünfecks als solche zu entlarven. Schülerinnen und Schüler können in der Unterstufe zwar die durch die Faltung entstandenen Zentriwinkel noch nicht berechnen. Ab der 8. Schulstufe wäre es aber durchaus möglich, die Seitenlängen des in Abb. 63 blau eingefärbten rechtwinkeligen Dreiecks zu bestimmen und mithilfe eines Geometrieprogramms die dazugehörigen Winkel abzulesen. Auf diese Weise ließe sich klären, wie groß die Abweichung zu einem wirklich regelmäßigen Sechseck ist.

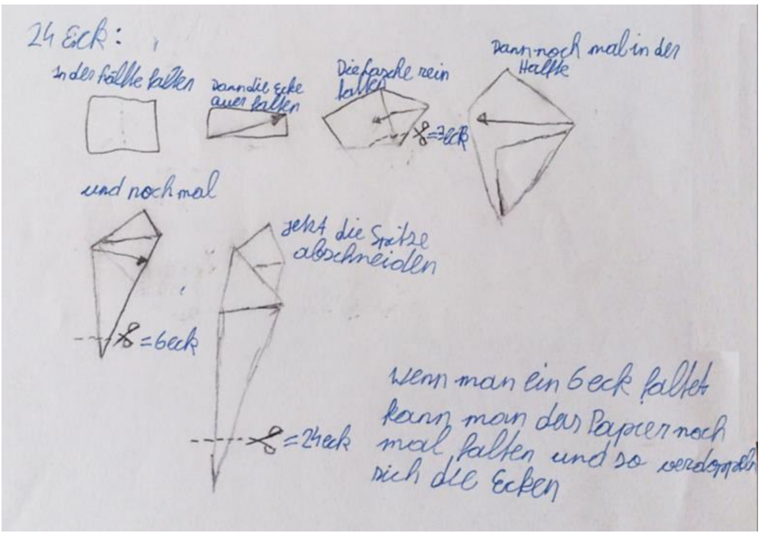


Abb. 62: Protokoll einer Schülerin/ eines Schülers

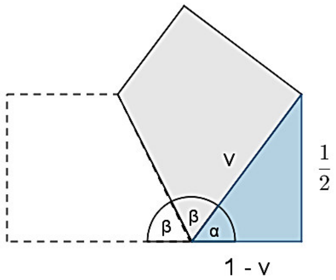


Abb.63: Die entdeckte Näherungslösung genauer betrachtet

Intuitiv platzierten die Schülerinnen und Schüler in ihrer Arbeit den Schnitt so, dass ungefähr ein gleichschenkeliges Dreieck entstand. Die Möglichkeiten, diesen Vorgang zu präzisieren, sollten im Plenum diskutiert werden. Die Entdeckung, dass sich die Anzahl der Ecken bei jeder Faltung verdoppelt, regt natürlich zu Überlegungen an, welche Vielecke auf diese Weise ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck oder einem Quadrat erreicht werden können. Beherrschen die Jugendlichen bereits die Potenzschreibweise, kann dies sogar in allgemeiner Form beschrieben werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es den Unterricht enorm bereichern kann, wenn sich die Lehrperson mögliche Forschungsergebnisse im Vorfeld zwar vor Augen führt, diese aber nicht forciert oder erwartet. Als mögliche Lernimpulse stehen sie auf diese Weise aber jederzeit zur Verfügung. Während des Unterrichts muss der Fokus stets auf den Lernprozess gerichtet sein. Eine zu steife Orientierung auf Lernergebnisse scheint im Zusammenhang mit forschungsbasierten Unterrichtsformen zweckwidrig. Das Potential der Symbiose von forschendem Lernen und Origami im Mathematikunterricht, die Freude an der selbstständigen Beschäftigung mit Geometrie zu wecken, soll abschließend mit folgendem Kommentar zur Unterrichtsstunde untermauert werden: „Diese Doppelstunde war sehr lehrreich, weil ich Spaß hatte und es zugelassen habe."

5. Fazit und Ausblick

Aus den Ergebnissen der Literaturrecherche und Überlegungen der vier Kapitel lässt sich schließen, dass der Einsatz von Faltaktivitäten vielfältige Möglichkeiten eröffnet, forschendes Lernen im Mathematikunterricht zu initiieren. Aufgrund der mathematischen Reichhaltigkeit des Origami ist sein Einsatz auf keine bestimmte Altersstufe oder ein gewisses Leistungsniveau beschränkt. Genau aus diesem Grund eignet sich die Faltkunst, um schülerinnen- und schülerzentrierten Mathematik-unterricht anzuregen. Sie bietet viel Raum für individuelle Fragen, Experimente und Entdeckungen. Die veränderbare Beschaffenheit der Origamiobjekte und des Materials Papier an sich erlaubt Schülerinnen und Schülern eine experimentelle Seite der Mathematik zu entdecken.

Die in dieser Arbeit ergründeten Möglichkeiten können selbstverständlich weiter vertieft werden. Besonders lohnenswert erscheint allerdings eine ausführliche Analyse der vorgelegten Unterrichtsvorschläge basierend auf der Durchführung in der Praxis, ihrer Auswertung und Evaluation. Auf diese Weise können sich aus ihnen gut begründete Unterrichtskonzepte entwickeln, die Lehrende zu ihrer Umsetzung einladen.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Aepkers, M. (2002). Forschendes Lernen – Einem Begriff auf der Spur. In M. Bönsch & A. Kaiser (Hrsg.), *Basiswissen Pädagogik. Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen* (Bd. 4, S. 69-87). Hohengehren: Schneider.

Alperin, R. C. (2000). A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. *New York Journal of Mathematics, 6*, S. 119-133.

Arici, S. & Aslan-Tutak, F. (2013). Using Origami to Enhance Geometric Reasoning and Achievement. Abgerufen am 20. Mai 2016 von http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG4/WG4_Arici.pdf

Behrens, R. (2014). Was wäre wenn…? Lernen, Fragen zu stellen- und der Rechner hilft dabei. *Mathematik lehren, 184*, S. 30-33.

Bell, S. (2010). Project-Based Learning for the 21st Century: Skills for the Future. *The Clearing House, 83*, S. 39–43. Abgerufen am 19. März 2016 von http://www.huso.buu.ac.th/file/2559/ActiveLearning/Document/10.ProjBL%20of%2021st%20cent%20skills.pdf

Bell, T. (2006). *Forschendes Lernen. PIKO-Brief Nr. 6.* Abgerufen am 21. März 2016 von http://www.wl-lang.de/Lernbereich%20SU/Forschendes%20Lernen.pdf

Bezold, A. (2014). Erkunden, Entdecken, Erfinden. An den Stationen „Parkettieren" und „Der Zahlenwinkel". *Mathematik lehren, 184*, S. 10-15.

Bonga, S. W., William, T., Borrey, S., Eisendrath, H. et al (2006). *Evolution of Student Interest in Science and Technology Studies*. (OECD, Hrsg.) Abgerufen am 1. März 2016 von http://www.oecd.org/science/sci-tech/36645825.pdf

Bönsch, M. (1991/1995). *Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden.* Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Brülls, S. (2002). Das genetische Prinzip in der Unterrichtskonzeption von Martin Wagenschein. In M. Bönsch & A. Kaiser (Hrsg.), *Basiswissen Pädagogik. Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen* (Bd. 4, S. 123-138). Hohengehren: Schneider.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education.* Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen.* Berlin (u.a.): Springer.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981/1994). *Erfahrung Mathematik.* (J. Zehnder, Übers.) Basel: Birkhäuser.

Demaine, E. & O'Rourke, J. (2007). *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge: Cambridge University Press.

Demaine, E., Demaine, M. & Lubiw, A. (1998). Folding and Cutting Paper. *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, 1763*, S. 104-117. Abgerufen am 22. 5 2016 von http://erikdemaine.org/papers/

DiBiase, W. & McDonald, J. R. (2015). Science Teacher Attitudes Toward Inquiry-Based Teaching and Learning. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 88, (2)*, S. 29-38.

Dumont, H. & Istance, D. (2010). The Fundamentals of Learning. (OECD, Hrsg.) *The Nature of Learning. Using Research to Inspire Practice.*, S. 3-5. Abgerufen am 25. März 2016 von https://www.oecd.org/edu/ceri/50300814.pdf

Engeln, K., Euler, M. & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 45, (6)*, S. 823-836.

Fischer-Appelt, P. et al. (1970). *Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen. Schriften der Bundesassistentenkonferenz 5.* Bonn.

Flachsmeyer, J. (2009a). Eine kleine mathematische Tour mittels einfacher Origami-Gebilde. *Der Mathematikunterricht, 55 (6)*, S. 3-12.

Flachsmeyer, J. (2009b). Mathematikdidaktische Belange des Origami. *Mathematischer Semesterbericht, 56*, S. 201-214.

Foreman-Takano, D. (2002). Applications of Origami to the Teaching of Sophisticated Communication Techniques. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (S. 235-246). Natick, MA: A K Peters.

Frohn, D. & Salle, A. (2015). Vom Experiment zum Beweis. Beweisen als genetischer Prozess. *Praxis der Mathematik in der Schule, 65/57*, S. 14-18.

Gerhartz, S. & Schrittesser, I. (2013). About Learning: The Discourses on Learning Revisited from an Educational Perspective. Abgerufen am 30. März 2016 von https://www.uibk.ac.at/ils/mitarbeiter/about-learning.pdf

Glaserfeld von, E. (1997). *Wege des Wissens: konstruktivistische Erkundungen durch unser Denken .* Heidelberg: Carl-Auer-Systeme.

Golan, M. & Jackson, J. (2009). Origametria: A program to teach Geometry and to develop learning skills using the art of Origami. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education.* (S. 459–469). Wellesley, MA: A K Peters.

Goy, A. (2015). Experimentieren mit Kreisen und Dreiecken. Problemlösestrategien und -prinzipien erkennen und festigen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 65/57*, S. 27-32.

Goy, A., & Kleine, M. (2015). Experimentieren. Mathematische Zusammenhänge erforschen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 65/57*, S. 2-8.

Haga, K. (2008). *Origamics, Mathematical Explorations through Paper Folding.* Singapur: World Scientific Publishing.

Hatori, K. (2011). History of Origami in the East and the West before Interfusion. In P. Wang-Iverson, R. J. Lang & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education.* Boca Raton, FL (u.a.): CRC Press.

Henn, H. W. (2009). Gefaltete Mathematik. *Der Mathematikunterricht, 55 (2)*, S. 40-50.

Hildebrand, D. L. (2008). *Dewey : A Beginner's Guide.* Oxford: Oneworld Publications. Abgerufen am 20. März 2016 von http://web.a.ebscohost.com/ehost/detail/detail?sid=a7d130dd-afba-4c92-b8e2-c95ed5a30144%40sessionmgr4002&vid=0&hid=4101&bdata=JnNpdGU9ZWhvc3QtbGl2ZQ%3d%3d#db=e000xat&AN=910734

Höfer, T. (2014). Von der Idee zum Beweis. Auf den Spuren von Thales, Ceva und Menelaos. *Mathematik lehren, 184*, S. 39-41.

Hull, T. (2005). Rezession: Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art. *The Mathematical Intelligencer, 27 (2)*, S. 92-95.

Hull, T. (2006). *Project Origami. Activities for Exploring Mathematics.* Wellesley, MA: A K Peters.

Humenberger, H. (2012). Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung. *Internationale Mathematische Nachrichten, 219*, S. 25–43.

Hungerbühler, N. (2013). Origami – von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 46*, S. 19-32.

Juen-Kretschmer, C. (2007). Offenes Lernen – offener Unterricht. Abgerufen am 4. April 2016 von https://www.uibk.ac.at/ils/downloads/lernkulturen/offenes-lernen.pdf

Karlson, P. (1954/1962). *Du und der Zauber der Zahlen. Eine unterhaltsame Mathematik für jedermann.* Berlin: Ullstein.

Kirschenbaum, M. (2005). Diagrams Masu Box. Abgerufen am 21. Mai 2016 von https://origamiusa.org/files/masu.pdf

Konrad, K. (2014). *Lernen lernen – allein und mit anderen. Konzepte, Lösungen, Beispiele.* Wiesbaden: Springer.

Krämer, P., Nessler, S. & Schlüter, K. (2015). Probleme und Schwierigkeiten Lehramtsstudierender mit der Methode des Forschenden Lernens. . In D. Krüger et al. (Hrsg.), *Erkenntnisweg Biologiedidaktik* (11. Ausg., S. 21-35). Kassel: Universitätsdruckerei.

Künkler, T. (2008). „Lernen im Zwischen“. Zum Zusammenhang von Lerntheorien, Subjekt-konzeptionen und dem Vollzug des Lernens. In K. Mitgutsch et al. (Hrsg.), *Dem Lernen auf der Spur. Die pädagogische Perspektive* (S. 33-50). Stuttgart: Klett-Cotta.

Kuribayashi, K. et al. (2006). Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of Ni-rich TiNi shape memory alloy foil. *Materials Science and Engineering: A, 419*, S. 131-137.

Kwan, S. P. (2011). My Favorite Origamics Lesson on the Volume of Solids. In P. Wang-Iverson, R. J. Lang, & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (S. 233-249). Boca Raton, FL (u.a.): CRC Press.

Landau, E. (2014). Solar Power, Origami-Style. Abgerufen am 15. Mai 2016 von http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2014-277

Lang, R. (2003). *Origami design secrets: mathematical methods for an ancient art.* Natick, MA: A.K. Peters/CRC Press.

Lang, R. (2008). Robert Lang faltet vollkommen neues Origami. *Vortrag zur offiziellen TED Konferenz (Video)*. Monterey, CA. Abgerufen am 12. Mai 2016 von https://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami?language=de#t-356529

Liebig, S. (2002). Entdeckendes Lernen – wieder entdeckt? In M. Bönsch & A. Kaiser (Hrsg.), *Basiswissen Pädagogik. Forschendes, Entdeckendes und Genetisches Lernen* (Bd. 4, S. 4-16). Hohengehren: Schneider.

Lockhart, P. (2009). *A Mathematicians' Lament*. Abgerufen am 15. März 2016 von https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf

Lutz-Westphal, B. (2014a). Das forschende Fragen lernen. Pflasterungen: scheinbar Bekanntes neu durchdringen. *Mathematik lehren, 184*, S. 16-19.

Lutz-Westphal, B. (2014b). Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 779-782. Abgerufen am 4. Februar 2016 von https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33250/1/BzMU14-4ES-Lutz-Westphal-222.pdf

Malle, G. et al. (2013). *Mathematik verstehen 7.* Wien: ÖBV.

Mason, J. B. (2012). *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei.* (6. Ausg.). München: Oldenbourg.

Messner, R. (2009a). Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 15-30). Hamburg: Körber.

Messner, R. (2009b). Forschendes Lernen: Impulse zur Klärung fachlicher Schwerpunkte. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen.* (S. 131-142). Hamburg: Körber.

Meyer, E. (1970). Forschendes Lernen in der Mathematik. In *Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen. Schriften der Bundesassistentenkonferenz 5* (S. 35). Bonn.

Miura, K. (1985). Method of Packaging and Deployment of Large Memranes in Space. . *The Institute of Space and Astronautical Science Report, 618*, S. 1-9.

Müller, A. (2009). Lernen braucht Freude am Widerstsand. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 38-47). Hamburg: Körber.

Nangreave, J. (2010). DNA origami: a history and current perspective. *Current Opinion in Chemical Biology, 14*, S. 608–615. .

Nimmervoll, L. (2015). Bildungsphilosoph: „Lernen muss nicht Spaß machen." Interview mit Matthias Burchardt. *derStandard online*. Abgerufen am 30. März 2016 von http://derstandard.at/2000023192424/Bildungsphilosoph-Lernen-muss-nicht-Spass-machen

Oechsler, R. (2014). Forschen an figurierten Zahlen. *Mathematik lehren, 184*, S. 25-29.

PATHWAY. (2012). Richtlinien für Lehrkräfte zu forschungsbasiertem Lehren in Naturwissenschaften. Abgerufen am 1. März 2016 von http://virtuelleschule.bmbf.gv.at/materialien/ibse/D4.3_PATHWAY_Richtlinien_fuer_Lehrkraefte.pdf

Piaget, J. (1970/2003). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung.* Weinheim (u.a.): Beltz.

PISA. (2009). Glossar. (OECD, Hrsg.) *Education at a Glance 2009: OECD Indicators*. Abgerufen am 19. März 2016 von http://www.oecd.org/edu/skills-beyond-school/43642148.pdf

PISA. (2012). *Ländernotiz. Österreich*. (OECD, Hrsg.) Abgerufen am 19. März 2016 von https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-results-austria-DEU.pdf

Pólya, G. (1949/1995). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen (u.a.): Francke.

Pope, S. & Lam, T. K. (2011). Origami and Learning Mathematics. In P. R. Wang-Iverson, & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (S. 205- 218). Boca Raton, FL (u.a.): CRC Press.

Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen – Tiefenstruktur, Gestaltungsformen, Wirkung. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23 (2)*, S. 159-182. Abgerufen am 11. April 2016 von http://www.bzl-online.ch/archivdownload/artikel/BZL_2005_2_159-182.pdf

Rocard, M. et al. (2006). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for a New Europe*. Abgerufen am 18. März 2016 von http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

Roth, G. (2009). Die Bedeutung von Motivation und Emotionen für den Lernerfolg. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen.* (S. 57-74). Hamburg: Körber.

Roth, J. & Weigand, H. (2014). Forschendes Lernen. Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren, 184*, S. 2-9.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. 1. Austausch unter Ungleichen : Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Rumpf, H. (2008). Lernen als Vollzug und als Erledigung. Sich einlassen auf Befremdliches oder: Über Lernvollzüge ohne Erledigungsdruck. In K. Mitgutsch et al. (Hrsg.), *Dem Lernen auf der Spur. Die pädagogische Perspekive* (S. 21-32). Stuttgart: Klett-Cotta.

Savery, J. R. (2006). Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. *Journal of Problem-Based Learning, 1*, S. 9-20. Abgerufen am 4. April 2016 von http://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1002&context=ijpbl

Sawyer, K. R. (Hrsg.). (2006). *The Cambridge Handbook of Learning Sciences.* New York: Cambridge University Press.

Schmidkunz, H. & Lindemann, H. (1976/1992). *Das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren: Problemlösen im naturwissenschaftlichen Unterricht* (3. Ausg.). Essen: Westarp Wissenschaften.

Schmitt-Hartmann, R. (2015). Experimentieren mit Papier. Papierfalten im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 65/57*, S. 41-44.

Schmitz, M. (2009). Quadrate. *Der Mathematikunterricht, 55, (6)*, S. 21-32.

Schütz, O., Hossein, S. & Streicher, B. (2010). Kurzfassung. (BMVIT, Hrsg.) *Forschend lernen: Partnerschaften zwischen Volksschulen und Science Center Einrichtungen. Ein Leuchtturmprojekt der BMVIT-Initiative generation innovation*. Abgerufen am 19. März 2016 von http://www.science-center-net.at/fileadmin/SCN_new/Projekte/ForschendLernen/Forschend_Lernen_EB_1_Allgemeiner_Teil_Final_20100505.pdf

Tacke, H. (2009). Die Probe aufs Experiment. Wie Freies Lernen den Forschungsdrang fördert. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 217-226). Hamburg: Körber.

Tajiri, A. (2002). Diagrams Star Basket. Abgerufen am 22. Mai 2016 von https://origamiusa.org/files/masu.pdf

TNS Opinion, & Social. (2013). *Special Eurobarometer 401. Responsible Research and Innovation (RRI), Science and Technology*. Abgerufen am 18. März 2016 von http://ec.europa.eu/public_opinion/archives/ebs/ebs_401_en.pdf

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung. Forschendes Lernen in der Mathematik. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 89-105). Hamburg: Körber.

Ulm, V. (2014). In der Umfrage steckt viel Arbeit. Den Umgang mit Bildschirm-Medien statistisch erforschen. *Mathematik lehren, 184*, S. 20-24.

Villotti, C. (2010). *Forschendes Lernen. Eine Begriffsklärung und Analyse der Anwendbarkeit für den Mathematikunterricht.* Wien: Diplomarbeit an der Universität Wien.

Waschbusch, J. & Gawlick, T. (2009). Grundfaltungen des Origamis. *Der Mathematikunterricht, 55 (6)*, S. 49-62.

Winckler, M. J., Wolf, K. D. & Bock, H. G. (2011). Hands-On Geometry with Origami. In P. Wang-Iverson, R. J. Lang, & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (S. 219-232). Boca Raton, FL (u.a.): CRC Press.

Zirbel, S. A., Lang, R. J., Thomson, M. W. et al. (2013). Accommodating thickness in origami-based deployable arrays. *Journal of Mechanical Design, 135, (11)*, S. 5-11.

Zusammenfassung

Forschendes Lernen ist eine Lehr- bzw. Lernmethode, die sich weitgehend an den Forschungsprozessen der jeweiligen Fachwissenschaft orientiert. Sie soll Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bieten, Wissenschaft in ihrer Entwicklung zu verstehen und Kompetenzen zu entwickeln, die über das reine Faktenwissen hinausgehen. Sie sollen lernen, wissenschaftliche Fragen zu erkennen und selbst zu formulieren, Fachwissen anzuwenden und sinnvolle Schlussfolgerungen zu ziehen. Die Hauptaufgabe der Lehrenden ist das Bereitstellen geeigneter Lernimpulse, die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, selbstständig Fragen zu formulieren, Hypothesen zu bilden und diese zu erforschen.

Die Diplomarbeit widmet sich den Möglichkeiten, die Origami für den Einsatz im Zuge forschenden Lernens im Mathematikunterricht bietet. Nach einer Einführung in die Grundideen des forschenden Lernens, werden die Spezifika des Unterrichtsprinzips für das Fach Mathematik erarbeitet. Die Prozesshaftigkeit der mathematischen Forschung kommt dabei konsequenterweise auch in der Unterrichtsmethodik zum Tragen. Das Auffinden mathematischer Fragestellungen, das Suchen von Spezialfällen, das Verallgemeinern, das Begründen, Beweisen und Verwerfen aufgestellter Vermutungen sowie das Sichtbarmachen der Ergebnisse und die Reflexion des eigenen Vorgehens stehen im Zentrum forschenden Lernens im Mathematikunterricht.

Origami, als aktuelles Forschungsgebiet der Mathematik, bietet zahlreiche Möglichkeiten, fruchtbare Impulse für diese Tätigkeiten zu liefern. Mit äußerst geringem finanziellem Aufwand lädt Papier dazu ein, aktiv zu werden, Faltungen zu variieren und zu untersuchen. Die Frage, ob und wieso eine Faltung funktioniert, erzeugt im besten Fall ein Beweisbedürfnis bei den Lernenden, was sie dem Kern mathematischer Forschung nahe bringt.

Um zu zeigen, wie Origami eingesetzt werden kann, um forschendes Lernen im Mathematikunterricht zu initiieren, werden drei Unterrichtsvorschläge präsentiert. Der erste Entwurf wurde für die zehnte Schulstufe konzipiert und bietet Schülerinnen und Schülern die Möglichkeiten, sogenannte Masu-Boxen zu erforschen. Die Tangenten von Kegelschnitten lassen sich leicht durch Faltvorgänge konstruieren. Diese können Schülerinnen und Schüler ab der elften Schulstufe im Zuge des zweiten Unterrichtskonzeptes untersuchen. Der dritte Entwurf wurde mit einer Klasse der

siebten Schulstufe einer Wiener Mittelschule durchgeführt. Lernende experimentierten mit Papier und Schere und versuchten, verschiedene Vielecke mit nur einem Schnitt aus der Mitte eines quadratischen Papiers zu trennen. Dabei ergaben sich einerseits hoch individualisierte und aktive Lernprozesse, aber auch die Notwendigkeit, Lernende sukzessive an Begründungs- und Beweisaktivitäten heranzuführen.

Abstract

Inquiry based learning is a teaching method in which learning is mostly aligned to the process of research in the corresponding discipline. It is supposed to provide students with possibilities to understand science in its progression and to develop competences which exceed pure knowledge of facts. Pupils should learn to recognize and ask scientific questions, to apply their knowledge and to draw reasonable conclusions. The main task for teachers is providing students with rich learning impulses, in order to encourage them to ask their own questions, to formulate their own conjectures and investigate them on their own.

The diploma thesis is devoted to the exploration of possibilities to use Origami in inquiry based learning designs for mathematics. After a short introduction to the main ideas of inquiry based learning specific characteristics of this teaching method for mathematics are elaborated. The procedure in class will be largely influenced by the processuality of mathematical research itself and will therefore show similar dynamics. Inquiry based learning in mathematics focuses on activities as finding mathematical questions, searching for special cases, generalizing, making conjectures, reasoning, proving, presenting results and reflecting the own activities.

Origami as a young field of mathematical research provides numerous possibilities for productive impulses to these activities. Paper with minimal financial effort invites students to become active, to modify and investigate folds and crease lines. In the best case scenario the question if and why a folding works engages students to find arguments and proofs. To illustrate how Origami can be used to initiate inquiry based learning three lesson plans are presented. The first teaching concept is designed for tenth grade and invites students to explore traditional masu boxes. Tangents of conic sections can be easily constructed by folding. This can be explored within the second teaching design by students from eleventh grade up. The third lesson plan has been carried out with seventh grade students of a Viennese Mittelschule. They were experimenting with scissors and paper while trying to cut a polygon with just one straight cut. This led to highly individualized and active learning processes but also showed the need to gradually lead students to argumentation and proving.