



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Rekursive Folgen mit besonderem Fokus auf die
Fibonaccifolge

verfasst von / submitted by

Hannah MARTIN

angestrebter akademischer Grad/ in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 347

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Französisch

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Dr. Olivia Constantin

Abstract

Die Fibonaccifolge und der damit eng verbundene goldene Schnitt treten in einer faszinierenden Vielfältigkeit in den unterschiedlichsten Bereichen wie beispielsweise in der Natur, der Botanik, der Genetik, der Kunst oder der Architektur auf. Sie sind ein Beispiel dafür, dass sich die Aussage von Galileo Galilei (1623): „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ bewahrheitet. Die Fibonaccifolge ist ein Spezialfall einer rekursiven Folge. Unter rekursiv definierten Folgen versteht man jene Folgen, die einem speziellen Bildungsgesetz gehorchen: man kann die Glieder jeweils nur nach und nach, ausgehend von vorgegebenen Startwerten und der Bildungsvorschrift, berechnen. Das Thema der rekursiven Folgen wird im Mathematikunterricht in der Schule allerdings oftmals nur oberflächlich behandelt. Es geht häufig nicht viel über die Definition und das Berechnen einfacher Beispiele hinaus. Der in dieser Arbeit präsentierte Stoff, die Sätze und Beweise, gehen in diesem Bereich weiter und etwas tiefgründiger, beschränkt sich allerdings auf lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Der Teil über rekursive Folgen allgemein ist etwas theoretischer und schwieriger. Er findet dann im zweiten Teil seine Anwendung. Dieser Teil ist der oben bereits erwähnten Fibonaccifolge gewidmet. Die Fibonaccifolge ist ein bekanntes Beispiel einer rekursiven Folge zweiter Ordnung. Sie wurde nach ihrem Entdecker, Leonardo da Pisa, der besser unter dem Rufnamen Fibonacci bekannt ist, benannt. Er hat in einem seiner Werke seine berühmte „Kaninchenaufgabe“, die ein Wachstumsmodell für Kaninchen darstellt, beschrieben und mit logischem Denken gelöst. Dieses Beispiel findet sich heute in vielen Mathematik-Schulbüchern und dient dort als Einführung des Themas der rekursiven Folgen. Die Kaninchenaufgabe ist sozusagen ein schönes und anschauliches Beispiel, um mit dem Thema zu Beginnen. Mehr wird im Normalfall in der Schule zur Fibonaccifolge nicht gemacht. Dabei gibt es sehr viele interessante Teilbereiche der Mathematik, in denen die Fibonaccifolge eine Rolle spielt. Ein Ausschnitt aus diesen Teilbereichen wird im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt. Die Reichweite ist so groß, dass es nicht möglich ist, alle Aspekte darzustellen; aber die grundlegenden und wichtigen Bereiche finden ihren Platz. Einige Erkenntnisse aus dem Abschnitt der Fibonaccifolge könnten auch für die Schule, beispielsweise für ein vertiefendes Wahlpflichtfach oder für vorwissenschaftliche Arbeiten interessant sein.

Einleitung

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ behauptet Galileo Galilei in seinem Werk „Il Saggiatore“ (1623). Ein bekanntes Beispiel, das diese Aussage bestätigt, stellt die Fibonaccifolge zusammen mit dem damit eng verbundenen goldenen Schnitt dar. Deren Auftreten in der Natur ist vielfältig und beeindruckend: diese besondere Folge stellt ein Wachstumsmuster in der Natur dar und beschreibt beispielsweise Wachstumsvorgänge der Pflanzen (Phyllotaxis) oder der Bienen. Sie lassen sich aber auch in anderen Bereichen, wie beispielsweise der Kunst, der Architektur oder der Genetik finden. Fibonacci selbst beschrieb ursprünglich mit seiner Folge das Beispiel des Wachstumsmodells für Kaninchen. Die Fibonaccifolge ist ein Spezialfall einer rekursiven Folge. Diesen Begriff haben die meisten wahrscheinlich in ihrer Schulzeit einmal gehört. Es ist eine der möglichen Arten wie Folgen gebildet werden können. Dabei gibt es ein allgemeines Bildungsgesetz und, wenn die Folge eindeutig bestimmt ist, werden die benötigten Startwerte vorgegeben. Auf diese Art und Weise kann Schritt für Schritt ein Folgenglied nach dem anderen berechnet werden. Das ist allerdings nicht immer ganz praktisch, besonders dann nicht, wenn man hohe Folgenglieder berechnen möchte. Einfacher ist es natürlich, wenn man eine Formel angeben kann, mit der man jedes Folgenglied direkt und explizit berechnen kann, unabhängig davon, ob die Glieder davor oder danach schon berechnet wurden. Eine solche Formel, in die man nur das gesuchte $n \in \mathbb{N}$ einsetzt, und sofort die Lösung für das Folgenglied erhält, ist eine allgemeine Formel zur Lösung der Rekursionsgleichung.

Nach ebendieser Formel wird in Kapitel 1 gesucht. Davor wird allerdings noch definiert, was man unter einer Folge und im speziellen unter einer rekursiven Folge versteht. Danach begibt man sich auf die Suche nach einer allgemeinen Formel zur Lösung der Rekursionsgleichung. Um eine solche Formel zu finden, löst man die lineare Rekursionsgleichung - wir beschränken uns in dieser Arbeit auf lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten - im homogenen und inhomogenen Fall. Im Anschluss daran sind Anwendungsbeispiele zu finden, wie beispielsweise ein schöner Beweis der Irrationalität von π .

Das Kapitel 2 ist der Fibonaccifolge, einer besonders bekannten rekursiv definierten Folge zweiter Ordnung, gewidmet. Auf diesem Kapitel liegt der Fokus dieser Arbeit. Zuerst wird die Fibonaccifolge eingeführt, definiert und vorgestellt. Dies geschieht, wie es auch in den Schulbüchern häufig der Fall ist, anhand der berühmten Kaninchenaufgabe. Es werden allerdings auch weitere Anwendungsbeispiele der Fibonaccifolge aufgezählt. Danach werden die ersten einfachen Eigenschaften der Fibonaccifolge, wie beispielsweise Summenformeln, bewiesen.

Da die Fibonaccifolge in so vielen Bereichen der Mathematik eine Rolle spielt, ist das zweite Kapitel in mehrere Unterkapitel gegliedert, die sich alle mit einem gewissen Teilbereich beschäftigen. Im zweiten Unterkapitel des zweiten Kapitels geht es um die Formel von Binet. Dies ist die bereits im ersten Kapitel für den allgemeinen Fall gesuchte und hier für die Fibonaccifolge spezielle Formel, mit deren Hilfe die einzelnen Folgenglieder gleich explizit berechnet werden können. Daran anschließend folgt ein kurzes Unterkapitel über Fibonaccizahlen mit negativen Indizes. Der vierte Teilbereich widmet sich dem Bereich der Linearen Algebra. Hier wird mithilfe der Matrizenrechnung die Formel von Binet hergeleitet und bewiesen. Im Teilbereich fünf geht es um die zahlentheoretischen Eigenschaften der Fibonaccifolge; dabei werden besonders die Teilbarkeitseigenschaften vorgestellt und die Zusammenhänge mit dem Binomialkoeffizienten untersucht. Der Abschnitt 2.6 widmet sich der Analysis. Es werden unter anderem Folgen mit dem Grenzwert Φ betrachtet und die

Zusammenhänge zwischen dem goldenen Schnitt und den Fibonaccizahlen erstmals erwähnt. Ein interessanter Bereich ist auch der letzte, der vorgestellt wird, nämlich der der Geometrie. Auch in diesem Bereich spielen Fibonaccizahlen eine Rolle. Welche das sind, werden im Unterkapitel 7 beschrieben. Dabei kann allerdings nur eine Auswahl (das rechtwinklige Dreieck, der goldene Schnitt und die Fibonaccispirale und die goldene Spirale) präsentiert werden, da dieser Bereich derart vielfältig ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Rekursive Folgen	8
1.1	Allgemeine und grundlegende Definitionen	8
1.2	Allgemeine lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten	9
1.3	Lösen einer linearen Rekursionsgleichung	10
1.3.1	Im homogenen Fall	10
1.3.2	Im inhomogenen Fall	13
1.4	Beispiele	15
1.4.1	Anwendungsbeispiel	15
1.4.2	Lineare Rekursionen und die Irrationalität von π	16
1.4.3	Potenzreihen und Lineare Rekursionen	17
2	Die Fibonaccifolge	20
2.1	Grundlegende Eigenschaften der Fibonaccifolge	20
2.1.1	Einführung, Definition und Beispiele	20
2.1.2	Einfache Summenformeln	27
2.1.3	Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen	29
2.2	Lineare Rekursion und die Formel von Binet	35
2.3	Fibonaccizahlen mit negativen Indizes	39
2.4	Fibonaccizahlen und Lineare Algebra	40
2.4.1	Die Herleitung der Formel von Binet mithilfe der Eigenwertrechnung	40
2.5	Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonaccifolge	44
2.5.1	Teilbarkeitsaussagen für Fibonaccizahlen	44
2.5.2	Fibonaccizahlen und Binomialkoeffizienten	49
2.6	Fibonaccizahlen in der Analysis	52
2.6.1	Folgen mit dem Grenzwert Φ	52
2.6.2	Reihen mit Fibonaccizahlen	55
2.7	Fibonaccizahlen in der Geometrie	59
2.7.1	Rechtwinkelige Dreiecke	59
2.7.2	Der goldene Schnitt	61
2.7.3	Fibonaccispirale und goldene Spirale	67
3	Zusammenfassung und Ausblick	74
4	Literaturverzeichnis	76
5	Abbildungsverzeichnis	78
6	Lebenslauf	80

1 Rekursive Folgen

Die Hauptquelle für den theoretischen Teil dieses Kapitels ist das Buch von Lothar Berg (1986) mit dem Titel „Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur und ihr asymptotisches Verhalten: mit 9 Tabellen“. Werden andere Quellen verwendet, so wird das im Text ausdrücklich angegeben.

1.1 Allgemeine und grundlegende Definitionen

Zu allererst soll geklärt und definiert werden, was man unter einer Folge im mathematischen Sinn versteht. Die formale Definition des Folgenbegriffs lautet folgendermaßen:

Definition 1.1

Eine Folge ist eine Abbildung φ der natürlichen Zahlen ohne null \mathbb{N}^* bzw. der natürlichen mit null \mathbb{N} in eine beliebige Menge X ; dafür schreibt man kurz $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow X$ bzw. $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Das Bild $\varphi(n)$ wird als n -tes Folgenglied bezeichnet und man stellt dies in der Form $\varphi : n \mapsto \varphi(n) =: x_n$ dar. Häufig notiert man Folgen in der aufzählenden Form $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oder kürzer als $\{x_i\}$.

Ein Beispiel einer Folge ist $a_n = n^2$. In aufzählender Form geschrieben, schaut diese Folge so aus: $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$.

Es gibt aber auch Folgen, die sich nicht so einfach darstellen lassen:

Definition 1.2

Eine Folge, deren einzelne Glieder durch einen Term in den vorigen Gliedern erklärt sind, nennt man eine rekursive Folge (von lateinisch *recurrere* – zurücklaufen). Das bedeutet, dass man immer das vorhergehende Glied kennen muss, um das Nachfolgende bestimmen zu können.

Ein Beispiel für eine rekursive Bildungsvorschrift wäre: $u_{n+1} = u_n + 2$.

Die rekursive Folge ist dann eindeutig bestimmt, wenn man die Startwerte, die in der Definition vorkommen, in unserem Beispiel z.B.: $u_n = 3$, vorgibt. Auf diese Weise können die weiteren Werte Glied für Glied berechnet werden.

Definition 1.3 (Markusevic, 1955, S. 5)

Wir schreiben Folgen in der Form $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ oder kürzer $\{u_n\}$. Wenn es eine natürliche Zahl k und (reelle oder komplexe) Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k gibt mit der Eigenschaft, dass von einer beliebigen Stelle n ab für alle Glieder

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n, k \geq 1)$$

gilt, so nennt man die Folge eine rekursive Folge k -ter Ordnung und die Relation Rekursionsgleichung k -ter Ordnung. Somit ist eine rekursive Folge dadurch bestimmt, dass sich jedes ihrer Glieder durch k unmittelbar vorangehende Glieder ausdrücken lässt.

Beispiele für rekursive Folgen sind (Markusevic, 1955, S. 5f.):

- Geometrische Folgen

Gegeben sei eine geometrische Folge $u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots, u_n = aq^{n-1}, \dots$ für welche das rekursive Bildungsgesetz die Form $u_{n+1} = qu_n$ hat. Hier ist $k = 1$ und $a_1 = q$. Daher ist die geometrische Folge eine rekursive Folge erster Ordnung.

- Arithmetische Folgen

Für die oben bereits erwähnte arithmetische Folge lautet die rekursive Beziehung $u_{n+1} = u_n + d$. Wenn wir diese Beziehung für zwei benachbarte Glieder $u_{n+2} = u_{n+1} + d$ und $u_{n+1} = u_n + d$ betrachten, erhalten wir durch Subtraktion $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ oder $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Hier ist $k = 2, a_1 = 2, a_2 = -1$. Daher ist die arithmetische Folge eine rekursive Folge zweiter Ordnung.

- Fibonacci-Folge

Die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge lautet $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Sie ist eine rekursive Folge zweiter Ordnung. Dieser speziellen Folge ist das Kapitel 2 gewidmet, wo weitere Details besprochen werden.

1.2 Allgemeine lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten im weiteren Verlauf dieses Kapitels nur lineare Rekursionsgleichungen, weil es in diesem Fall eine „schöne“ Theorie gibt.

Definition 1.4

Eine lineare Rekursionsgleichung k -ter Ordnung (wobei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl ist) für eine Folge x_n ist eine Gleichung in der Gestalt

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n = f_n, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

wobei die von n unabhängigen Koeffizienten $a_i, i = 0, \dots, k-1$, und die $f_n, n \geq 0$ reelle oder komplexe Zahlen sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a_0 \neq 0$ ist (sonst wäre die Ordnung $< k$).

Die Rekursionsgleichung heißt homogen, wenn die Nullfolge die Gleichung erfüllt, das heißt, falls $f_n = 0 \forall n \geq 0$. Andernfalls heißt die in (1) beschriebene Gleichung inhomogen.

Zu jeder linearen Rekursionsgleichung assoziiert man das sogenannte charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (2)$$

dessen Nullstellen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von (1) spielen werden.

An dieser Stelle werden Überlegungen angestellt, die für den weiteren Verlauf wichtig sind.

Superpositionsprinzip:

Die Differenz von je zwei Lösungen ist eine Lösung der assoziierten homogenen Gleichung. Der Grund dafür ist folgender: Seien y_n und z_n Lösungen der inhomogenen Gleichung.

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = f_n$$

$$z_{n+k} + a_{k-1}z_{n+k-1} + \dots + a_0z_n = f_n$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, erhält man:

$$(y_{n+k} - z_{n+k}) + a_{k-1}(y_{n+k-1} - z_{n+k-1}) + \dots + a_0(y_n - z_n) = 0$$

Die allgemeine Lösung besteht aus den Summen einer festen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer beliebigen Lösung der assoziierten homogenen Gleichung

$$x_{fest} + x_{hom}$$

Es reicht daher eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, um alle Lösungen der (einfacheren) homogenen Gleichung zu bestimmen.

Für eine homogene Gleichung gilt: Die Summe von Lösungen sind immer noch Lösungen. Eine Lösung multipliziert mit einer reellen Konstante ist immer noch eine Lösung. Der Grund dafür ist folgender: Seien y_n, z_n Lösungen und α, β Konstanten. Dann ist $(\alpha y_n + \beta z_n)$ auch eine Lösung, da

$$\begin{aligned} &(\alpha y_{n+k} + \beta z_{n+k}) + \dots + a_0(\alpha y_n + \beta z_n) \\ &= \alpha(y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n) + \beta(z_{n+k} + a_{k-1}z_{n+k-1} + \dots + a_0z_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

1.3 Lösen einer linearen Rekursionsgleichung

1.3.1 Im homogenen Fall

Zuerst werden wir die Struktur der Lösungsmenge von (1) im homogenen Fall finden:

Satz 1

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms (2) mit zugehörigen Multiplizitäten k_1, \dots, k_l , wobei $k_1 + \dots + k_l = k$. Dann besitzt die homogene Gleichung

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n = 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

die Lösung

$$x_n = \sum_{\mu=1}^l \sum_{\gamma=0}^{k_\mu-1} c_{\mu\gamma} \binom{n}{\gamma} \lambda_\mu^n \quad (4)$$

wobei $c_{\mu\gamma}$ beliebige Konstanten sind.

Beweis:

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1) \lambda^m P(\lambda) = \lambda^{k+m} + a_{k-1} \lambda^{k+m-1} + \dots + a_1 \lambda^{m+1} + a_0 \lambda^m$$

Setze $a_k := 1$.

Für $\gamma, n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma < n$ kann man die γ -te Ableitung von λ^n folgendermaßen schreiben

$$2) \frac{d^\gamma}{d\lambda^\gamma} (\lambda^n) = n * \dots * (n - \gamma + 1) \lambda^{n-\gamma} = \frac{n! \lambda^{n-\gamma}}{(n-\gamma)!} = \gamma! \binom{n}{\gamma} \lambda^{n-\gamma}$$

Aus 1) und 2) mit $\gamma < m$ folgt

$$3) \frac{d^\lambda}{d\lambda^\lambda} (\lambda^m P(\lambda)) = \sum_{j=0}^k a_j \frac{d^\gamma}{d\lambda^\gamma} (\lambda^{m+j}) = \sum_{j=0}^k a_j \gamma! \binom{m+j}{\gamma} \lambda^{m+j-\gamma} = \sum_{j=0}^k a_j x_{m+j}^\gamma(\lambda)$$

wobei

$$x_{m+j}^\gamma(\lambda) := \gamma! \binom{m+j}{\gamma} \lambda^{m+j-\gamma}$$

Auf der anderen Seite impliziert die Leibnizsche Produktregel, dass

$$\frac{d^\lambda}{d\lambda^\lambda} (\lambda^m P(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{i} P^{(i)}(\lambda) \frac{d^{\gamma-i}}{d\lambda^{\gamma-i}} (\lambda^m)$$

und somit gilt

$$4) \sum_{j=0}^k a_j x_{m+j}^\gamma(\lambda) = \sum_{i=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{i} P^{(i)}(\lambda) \frac{d^{\gamma-i}}{d\lambda^{\gamma-i}} (\lambda^m).$$

Wenn λ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ mit einer größeren Multiziplicität als γ ist, dann verschwinden alle $P^{(i)}(\lambda)$ in Teil 4).

Sei λ_μ eine beliebige Nullstelle von $P(\lambda)$ mit Multiziplicität k_μ ($\mu = 1, \dots, l$). Dann zeigt die Gleichung 4), dass die Folge

$$x_n^{\mu\gamma} = x_n^\gamma(\lambda_\mu) = \gamma! \binom{n}{\gamma} \lambda_\mu^{n-\gamma}$$

eine Lösung von (3) ist für jede natürliche Zahl γ mit $0 \leq \gamma < k_\mu$.

Jetzt folgt aus dem Superpositionsprinzip für homogene Gleichungen, dass

$$x_n = \sum_{\mu=1}^l \sum_{\gamma=0}^{k_\mu-1} \widetilde{c}_{\mu\gamma} \binom{n}{\gamma} \lambda_\mu^{n-\gamma} = \sum_{\mu=1}^l \sum_{\gamma=0}^{k_\mu-1} c_{\mu\gamma} \binom{n}{\gamma} \lambda_\mu^n$$

auch eine Lösung von (3) ist, wobei $\widetilde{c}_{\mu\gamma}$ und somit auch $c_{\mu\gamma} = \widetilde{c}_{\mu\gamma} \lambda_\mu^{-\gamma}$ beliebige Konstanten sind. \diamond

Satz 2

Außer den in Satz 1 gefundenen Lösungen der homogenen Gleichung gibt es keine weiteren Lösungen. Das bedeutet die in Satz 1 angegebene Formel für x_n (4) stellt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung dar.

Beweis:

Die Gleichung (1) ist eine Rekursionsformel, bei der man k aufeinanderfolgende Werte der Lösung x_n , wie beispielsweise die Anfangswerte

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$$

beliebig vorgeben kann. Alle nachfolgenden Werte x_n mit $n \geq k$ sind dann durch (1) eindeutig bestimmt, solange die zugehörigen f_n definiert sind.

Es seien nun

$$x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(k)}$$

k Lösungen der homogenen Gleichung. Nach dem Superpositionsprinzip für homogene Gleichungen ist dann auch

$$x_n = \sum_{j=1}^k c_j x_n^{(j)} \quad (5)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung. Offenbar ist diese Lösung genau dann die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wenn sich zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten (wie oben definiert) stets Koeffizienten c_j finden lassen, so dass (5) diese Anfangswerte annimmt, da dann jede Lösung in der Form von (5) geschrieben werden kann. Die Koeffizienten c_j lassen sich aber genau dann immer in der angegebenen Weise bestimmen, wenn

$$\det(x_n^{(j)}) \neq 0, \quad n = 0, \dots, k-1; \quad j = 1, \dots, k \quad (6)$$

ist. Damit bleibt zu zeigen, dass diese Ungleichung für die in (4) erhaltenen speziellen Lösungen

$$x_n^{(j)} = \gamma! \binom{n}{\gamma} \lambda_\mu^{n-\gamma}$$

erfüllt ist, wobei zwischen den k Indizes j und den k Indexpaaren (μ, γ) eine bestimmte eindeutige Abbildung $j \leftrightarrow (\mu_j, \gamma_j)$ hergestellt sei.

Um die Ungleichung (6) für diesen Fall zu beweisen, betrachten wir zunächst den Spezialfall der einfachen Nullstellen mit $l = k$ und $k_\mu = 1$ für alle μ . Dann können wir $x_n^{(j)} = \lambda_j^n$ setzen, so dass (4) in

$$x_n = \sum_{\mu=1}^k c_\mu \lambda_\mu^n$$

übergeht, wenn wir bei $c_{\mu 0}$ wie in (5) den zweiten Index weglassen, und die in (6) auftretende Determinante ist gerade die bekannte Vandermondesche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>s} (\lambda_j - \lambda_s) \quad (7)$$

die von null verschieden ist. Im allgemeinen Fall geht die in (6) auftretende Determinante aus der Vandermondeschen Determinante hervor, indem man letztere zunächst nach jedem λ_j genau γ_j -mal differenziert und anschließend jedes λ_j durch $\lambda_{\mu j}$ ersetzt. Die rechte Seite von (7) geht dann in

$$\left(\prod_{\mu=1}^l \prod_{\gamma=0}^{k_{\mu}-1} \gamma! \right) \prod_{\mu>\sigma} (\lambda_{\mu} - \lambda_{\sigma})^{k_{\mu}k_{\sigma}}$$

über und ist damit auch in diesem Fall von null verschieden. \diamond

1.3.2 Im inhomogenen Fall

Wir beschreiben nun ein allgemeines Verfahren zur Behandlung der linearen Rekursionen. Zuerst schreiben wir die Gleichung

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n = f_n$$

in Vektorform um, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} x_{n+1} = x_{n+1} \\ x_{n+2} = x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} = x_{n+k-1} \\ x_{n+k} = -a_{k-1}x_{n+k-1} - a_{k-2}x_{n+k-2} - \dots - a_0x_n + f_n \end{array} \right\} \quad (8)$$

Wir führen die k -dimensionalen Vektoren

$$y_n = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})^t$$

$$g_n = (0, 0, \dots, 0, f_n)^t$$

und die $k \times k$ -dimensionale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

ein.

Mit dieser Notation wird die Gleichung (8) zu

$$y_{n+1} = Ay_n + g_n \quad (9)$$

Im homogenen Fall, d.h. wenn alle $f_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, wird (9) zu

$$y_{n+1} = Ay_n$$

dessen Lösung induktiv als

$$y_n = Ay_{n-1} = A^2y_{n-2} = \dots = A^n y_0$$

gefunden werden kann. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion

$$y_n = A^n c \quad (10)$$

wobei c ein beliebiger k -dimensionaler konstanter Vektor ist.

Jetzt verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten, um aus (10) die allgemeine Lösung im inhomogenen Fall zu finden. Wir ersetzen nämlich in (10) den konstanten Vektor c durch einen von n abhängigen Vektor z_n .

Satz 3

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (9) ist durch

$$y_n = A^n c + \sum_{\gamma=1}^n A^{n-\gamma} g_{\gamma-1} \quad (F)$$

gegeben, wobei c ein beliebiger k -dimensionaler konstanter Vektor ist.

Beweis:

Wir bemerken, dass $\det A = (-1)^k a_0 \neq 0$, also ist A invertierbar. Durch die Substitution $y_n = A^n z_n$ erhalten wir aus (9) die Gleichung

$$A^{n+1} z_{n+1} = A^{n+1} z_n + g_n$$

sodass

$$z_{n+1} - z_n = A^{-n-1} g_n$$

Schreiben wir diese Gleichung für $n = 0, \dots, n-1$

$$z_1 - z_0 = A^{-1} g_0$$

$$z_2 - z_1 = A^{-2} g_1$$

$$\vdots$$

$$z_n - z_{n-1} = A^{-n} g_{n-1}$$

Durch Addition erhalten wir eine Teleskopsumme, die

$$z_n = z_0 + \sum_{\gamma=0}^{n-1} A^{-\gamma-1} g_\gamma$$

ergibt. Jetzt multiplizieren wir diese letzte Gleichung mit A^n und verschieben den Index in der Summe um eins, um (F) zu erhalten. \diamond

Die Nullstellen, die in Satz 1 auftreten, können komplex sein. Dann sind jedoch auch die Konstanten $c_{\mu\gamma}$ im Allgemeinen komplex. Sind die Koeffizienten der Ausgangsgleichung (1) jedoch reell, dann kommen komplexe Nullstellen immer als konjugiert komplexe Paare, wie beispielsweise

$$\lambda_\mu = \vartheta_\mu e^{i\omega_\mu}, \quad \lambda_{\mu+1} = \vartheta_\mu e^{-i\omega_\mu}$$

mit gleicher Vielfachheit vor. In diesem Fall wird die Darstellung der Lösung reell, wenn man in (4) eine Ersetzung für alle komplexen Nullstellen mit

$$c_{\mu\gamma} \lambda_\mu^n + c_{\mu+1,\gamma} \lambda_{\mu+1}^n = \vartheta_\mu^n (d_{\mu\gamma} \cos \omega_\mu n + d_{\mu+1,\gamma} \sin \omega_\mu n)$$

durchführt, wobei die $d_{\mu\gamma}$ neue reelle Konstanten sind.

1.4 Beispiele

1.4.1 Anwendungsbeispiel

Als Beispiel betrachten wir die Differenzengleichung

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 2^n \quad (11)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\pi/3}$, sodass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, wenn man die in (5) benutzen Bezeichnungen für willkürliche Konstanten verwendet, wie folgt lautet:

$$x_n = c_1 \cos \frac{\pi n}{3} + c_2 \sin \frac{\pi n}{3}$$

Zur praktischen Lösung der inhomogenen Gleichung bedient man sich in der Regel nicht der vorhergehenden Überlegungen, sondern man versucht mit geeigneten Ansätzen zum Ziel zu kommen. Bei unserem Anwendungsbeispiel ist der Ansatz $x_n = c 2^n$ naheliegend. Wir erhalten durch Einsetzen in die Gleichung (11) $3c = 1$ und damit die spezielle Lösung $x_n = \frac{1}{3} 2^n$. Nach dem Superpositionsprinzip für inhomogene Gleichungen lautet die allgemeine Lösung der Gleichung (11) dann

$$x_n = \frac{1}{3} 2^n + c_1 \cos \frac{\pi n}{3} + c_2 \sin \frac{\pi n}{3}$$

Die Linearen Rekursionen haben die verschiedensten Anwendungen. Um das zu illustrieren, stellen wir zwei diesbezüglich relevante Beispiele vor:

1.4.2 Lineare Rekursionen und die Irrationalität von π

Behauptung: π ist irrational

Beweis: (Zhou & Markov, 2010)

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen an, dass π rational wäre, d.h.

$$\pi = \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(x) = \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!} = \frac{(\pi - x)^n x^n}{n!}$$

und

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx$$

Es gilt

$$\begin{aligned} b^n I_n &= b^n * \int_0^\pi \frac{(\pi - x)^n x^n}{n!} \sin x \, dx \leq \int_0^\pi \frac{\pi^n * \pi^n}{n!} dx \quad (\text{weil } 0 \leq \sin x \leq 1) \\ &= \frac{\pi^{2n}}{n!} * \pi = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(Potenzen wachsen langsamer als die Fakultät.)

Wir berechnen

$$I_0 = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

und

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \overbrace{(\pi x - x^2)}^f \overbrace{\sin x}^{g'} \, dx = (\pi - x)x(-\cos x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos x \, dx = \\ &= (\pi - 2x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-2) \sin x \, dx = (-2) \cos x \Big|_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt wieder partielle Integration, um eine Rekursionsformel für I_n herzuleiten:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!} \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\quad}^{=0} \\
& = \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!} (-\cos x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} (\pi - 2x) (-\cos x) dx \\
& = \int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} (\pi - 2x) \cos x dx \\
& \overbrace{\quad}^{=0} \\
& = \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} (\pi - 2x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left[\frac{(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!} * (\pi - 2x)^2 - 2 \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \right] * \sin x dx \\
& = - \int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!} (\pi^2 - 4(\pi x - x^2)) \sin x dx + 2 \underbrace{\int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \sin x dx}_{= I_{n-1}} \\
& = -\pi^2 I_{n-2} + 4 \int_0^\pi \frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-2)!} \sin x dx + 2I_{n-1} \\
& = -\pi^2 I_{n-2} + 4(n-1)I_{n-1} + 2I_{n-1} \\
& = (4n-2)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}, \quad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$I_n = (4n-2)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}, \quad \text{für } n \geq 2$$

Es folgt induktiv aus der obigen Rekursionsformel, dass I_n ein Polynom in π mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad höchstens n ist.

Dann ist $b^n I_n$ eine ganze Zahl.

Aber $b^n I_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und das ergibt, dass $b^n I_n \in (0,1)$ für n groß genug.

Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Also ist π eine irrationale Zahl. \diamond

1.4.3 Potenzreihen und Lineare Rekursionen

Wir werden mithilfe dieses Beispiels veranschaulichen, dass man lineare Rekursionen verwenden kann, um Taylorreihenentwicklungen von rationalen Funktionen zu bestimmen.

Wir möchten die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ finden.

Mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat man

$$\begin{aligned}
 1 &= (x^3 - 3x^2 + 4)f(x) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (\text{Indexverschiebung}) \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n - 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= 4a_0 + 4a_1 x + (4a_2 - 3a_0)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-3} - 3a_{n-2} + 4a_n)x^n
 \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a_0 = 1 \\ 4a_1 = 0 \\ 4a_2 - 3a_0 = 0 \\ a_n - \frac{3}{4}a_{n-2} + \frac{1}{4}a_{n-3} = 0 \quad n \geq 3 \end{array} \right.$$

und somit erfüllen die Taylorkoeffizienten a_n die Rekursionsgleichung dritter Ordnung

$$a) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+3} - \frac{3}{4}a_{n+2} + 0 \cdot a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0, \quad n \geq 3 \\ a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{16} \end{array} \right.$$

Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -1 \text{ mit Multiziplicität } 1$$

und

$$\lambda_2 = 2 \text{ mit Multiziplicität } 2$$

Laut Satz 1 und Satz 2 hat a) die allgemeine Lösung

$$b) \quad a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

wobei die Konstanten A, B, C aus den Anfangsbedingungen $a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{16}$ zu finden sind. Setzt man $n = 0, 1, 2$ in b), dann findet man $A = \frac{19}{144}, B = -\frac{5}{96}, C = \frac{17}{144}$.

Also haben die Taylorkoeffizienten von f um 0 die Gestalt

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{19}{144}(-1)^n + \left(-\frac{5}{96}\right) \cdot n \cdot 2^n + \frac{17}{144} \cdot 2^n \\
 &= \frac{19}{144}(-1)^n + \left(-\frac{5}{96} \cdot n + \frac{17}{144}\right) \cdot 2^n, \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

2 Die Fibonaccifolge

Dieses Kapitel ist der Fibonaccifolge, einer speziellen und bekannten rekursiven Folge, gewidmet. Es stellt gewissermaßen einen Spezialfall des ersten Kapitels dar. Die Fibonaccifolge ist, wie bereits erwähnt, eine rekursiv definierte Folge zweiter Ordnung. Das zweite Kapitel kann auch für pädagogische Zwecke verwendet werden. Es enthält daher mehrere Details und Erklärungen. Teile davon können in begabten Klassen oder mit wissbegierigen SchülerInnen in der Schule zum Einsatz kommen.

Die Hauptquelle dieses Kapitels ist das Buch von Huberta Lausch (2009): „Fibonacci und die Folge(n)“. Wird eine andere Quelle herangezogen, so wird das im Text spezifiziert.

2.1 Grundlegende Eigenschaften der Fibonaccifolge

2.1.1 Einführung, Definition und Beispiele

Der Mathematiker Fibonacci trägt eigentlich den Namen Leonardo da Pisa. Er ist aber besser unter dem Namen Fibonacci bekannt. Diese Bezeichnung hat folgenden Ursprung: Leonardo wurde als Sohn von Gulielmo Bonacci geboren, er war der „filius bonacci“, was übersetzt Sohn des Bonacci bedeutet. Im Laufe der Zeit wurde aufgrund der Kontraktion die Bezeichnung Fibonacci daraus. Die Dokumentation des Lebens von Leonardo da Pisa ist, da er bereits im Mittelalter lebte, nicht sehr gut erhalten und daher nicht sehr ausführlich. Auch seine Lebensdaten können nur in etwa angegeben werden: Fibonacci lebte von ungefähr 1170 bis etwa 1240 oder auch 1250 (je nach Quelle) in Pisa. In der Zeit des Mittelalters war dies bereits ein beträchtliches Alter. Mit seinem Vater unternahm er zahlreiche Reisen. Dieser „war ein Kaufmann und Minister der Republik Pisa. 1192 wurde ihm sogar die Leitung der Pisanischen Handelskolonie in Bougia, eine Küstenstadt Algeriens, übertragen“ (Berendt, 1998). Aufgrund der Handelstätigkeit war sein Vater viel unterwegs und nahm Leonardo immer wieder mit. So lernte er nicht nur verschiedene Länder u.a. Algerien, Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und die Provence, sondern auch die dort benutzten Rechentechniken kennen. Für einen Kaufmann durchaus wichtig war eine gute Bildung und Ausbildung in Lesen, Schreiben, Rechnen, sowie detaillierte geographische Kenntnisse und Kenntnisse in den Sprachen der Handelspartner. Daher ließ sein Vater Leonardo in den verschiedensten fremden Ländern in den dort gebräuchlichen Lehren unterrichten. So lernte er unter anderem auch die indisch-arabischen Zahlenzeichen, die wir heute noch verwenden, kennen und schätzen. Er bezeichnet sie in einem seiner Werke, dem „liber abaci“, als die Praktikabelsten und möchte sie publik machen. Ungefähr im Jahre 1200 kehrte Fibonacci wieder nach Pisa zurück und arbeitet dort an mathematischen „Kompositionen“. „Folgende Werke sind von Fibonacci überliefert:

- Liber abaci, "Buch der Rechenkunst" (1202; erhalten in der Überarbeitung von 1228): Einführung der indisch-arabischen Ziffern und Erklärung der arithmetischen Operationen auf der Basis des dezimalen Stellenwertsystems. Praktische Aufgaben und Regeln für den Handel.
- Practica geometriae (1220): Grundbegriffe der euklidischen Geometrie und geometrische Praxis (Vermessung, Flächen- und Volumenformeln für ebene Figuren und Körper).

- Liber quadratorum, "Buch der Quadratzahlen" (1225): Aufgaben mit unbestimmten quadratischen Gleichungen; bedeutendstes Werk der Zahlentheorie zwischen Diophant und Fermat.
- Flos (1225): Lösungen unbestimmter Gleichungen.
- Epistola ad Magistrum Theodorum: Unbestimmte Probleme (d.h. Probleme mit unendlich vielen Lösungen).“ (Biographie Leonardo Pisano ETH Zürich, 2016)

Von diesen Werken ist besonders das „liber abaci“, von dem nur mehr eine Abschrift erhalten ist, bekannt und wird auch im Folgenden in dieser Arbeit noch erwähnt werden. Darin enthalten sind zum einen die berühmte Kaninchenaufgabe, die in Abbildung 1 angeführt wird, Fibonacci selbst aber gar nicht weiter interessierte, aber auch die Einführung der indisch-arabischen Ziffern. Zudem wurde das Buch im Mittelalter verfasst, einer Epoche, die nicht gerade für große Fortschritte in der Mathematik oder für viele herausragende Mathematiker bekannt ist. Vorob'ev drückt es folgendermaßen aus: „Das „Liber abaci“ ist ein umfangreiches Werk, das fast das gesamte arithmetische und algebraische Wissen jener Zeit enthält. Es spielte in der Entwicklung der Mathematik in Westeuropa im Laufe der folgenden Jahrhunderte eine bemerkenswerte Rolle. Insbesondere wurden durch dieses Buch die arabischen Ziffern in Europa bekannt.“ (Vorob'ev, 1971, S. 9). „Das erste Kapitel beginnt folgendermaßen: "Dies sind die neun indischen Ziffern 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Mit diesen neun Zahlen und dem Zeichen 0, welches auf arabisch Zephrium heißt, kann jede beliebige Zahl geschrieben werden." Damit ersetzte Fibonacci die römischen Zahlen“ (Berendt, 1998).

Eine Aufgabe des „liber abaci“ ist besonders bekannt geworden. Sie wird häufig herangezogen, wenn es darum geht die Fibonaccifolge anhand eines Beispiels zu erklären, zu demonstrieren oder einzuführen. Diese Aufgabe ist die oben erwähnte Kaninchenaufgabe und lautet folgendermaßen: „Wie viele Kaninchenpaare werden in einem Jahr von einem Paar erzeugt?“ (Vorob'ev, 1971, S. 9). In der folgenden Abbildung werden die Originalversion der Kaninchenaufgabe und die deutsche Übersetzung davon abgebildet.

DIE KANINCHENAUFGABE

Im Jahre 1202 veröffentlichte Leonardo Fibonacci sein „Liber Abaci“ (Rechenbuch), eines der einflussreichsten Mathematikbücher. Es enthält folgende Aufgabe:

Wieviele Kaninchenpaare erzeugt ein einziges in einem Jahr?

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Jemand setzte ein Kaninchenpärchen in einen gewissen Ort, der allseits mit Wänden umgrenzt war. Man wünscht zu wissen, wieviele Nachkommen dieses Paares in einem Jahr erzeugt werden. Dabei seien sie so beschaffen, dass sie in jedem Monat ein neues Paar erzeugen; und ab dem zweiten Monat nach ihrer Geburt sind auch die jungen fruchtbar.

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.

Abbildung 1: Die Kaninchenaufgabe im "Liber Abaci"; (Becker, 2016)

Diese Aufgabe soll unter der Voraussetzung gelöst werden, dass das Kaninchenpaar in ein Gehege gesperrt wird, jedes Kaninchenpaar jedes Monat ein neues Paar zur Welt bringt, wobei die Kaninchen erst vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären und ewig leben. Betrachtet man diese Aufgabe Schritt für Schritt, dann stellt man fest, dass es im ersten Monat ein Kaninchenpaar gibt, das ein Paar als Nachkommen zur Welt bringt. Es gibt im ersten Monat also zwei Paare. Von diesen kann nur ein Paar, nämlich das Erste, ein weiteres Paar gebären. Somit sind im zweiten Monat drei Paare vorhanden. Von diesen bekommen zwei Paare im folgenden Monat Nachkommen, sodass zwei neue Pärchen geboren werden und dadurch im dritten Monat insgesamt fünf Paare leben. Drei dieser Fünf Paare sind bereits gebärfähig und bekommen im folgenden Monat Nachwuchs. Daher steigt die Gesamtzahl im vierten Monat auf acht Paare an. Fünf Paare können Nachwuchs bekommen und daher gibt es im fünften Monat zu den acht bestehenden Paaren weitere fünf neue Paare, also insgesamt 13 Paare. Nur die neuen fünf Paare können keine Nachkommen bekommen, die alten acht Paare bekommen jeweils ein Paar Nachwuchs. Daher steigt die Gesamtzahl im sechsten Monat auf 21 Paare an. Im siebten Monat werden 13 neue Paare geboren. Zusammen mit den 21 bestehenden Paaren ergeben sich daher im siebten Monat 34 Paare. Im achten Monat kommen 21 neue Paare dazu, es leben also insgesamt 55 Paare. Nur 34 dieser 55 lebenden Paare können Nachwuchs gebären. Im neunten Monat gibt es dann insgesamt 89 Kaninchenpaare. Die Anzahl wächst im zehnten Monat um weitere 55 auf 144 Paare an. Im elften Monat können 89 Paare gebären, somit leben 233 Kaninchenpaare. Schließlich vermehren sich im zwölften Monat 144 Paare, sodass nach zwölf Monaten eine Gesamtzahl von 377 Kaninchenpaaren erreicht wird. Dieses Verfahren kann man schrittweise bis zu einer beliebigen Anzahl von Monaten fortsetzen. Dabei erkennen wir das folgende Prinzip: um die Anzahl im n -ten Monat zu berechnen, addiert man die Anzahl der Kaninchen der beiden vorherigen Monate.

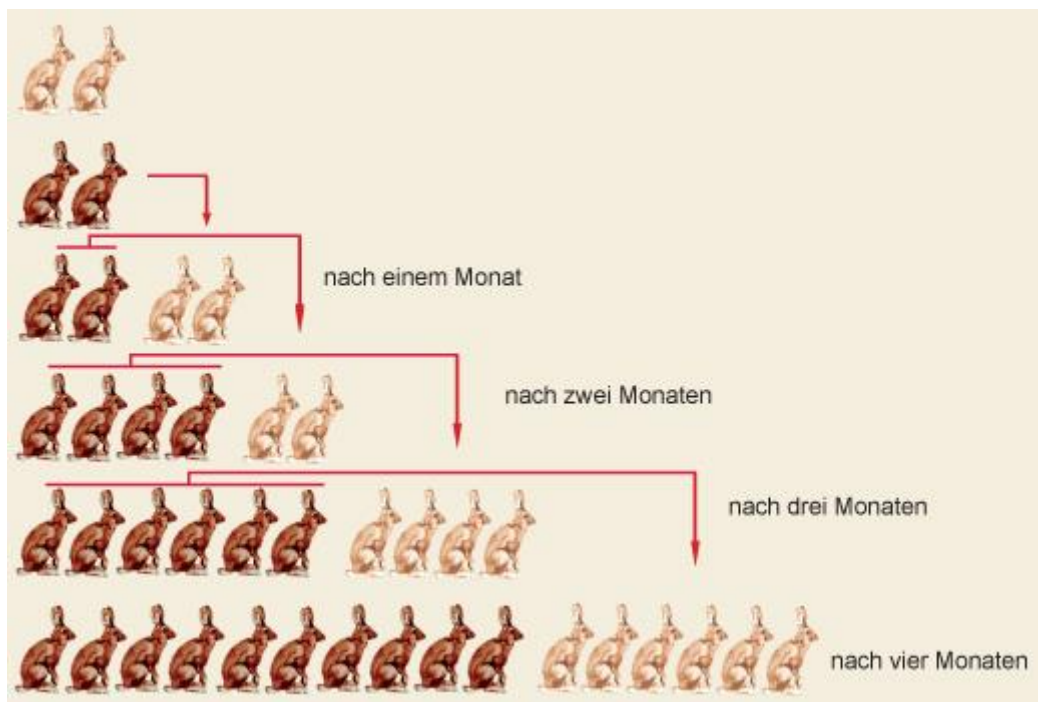


Abbildung 2: Vermehrung der Kaninchen; (Techniker Krankenkasse, 2016)

Auf diese Weise wird die Fibonaccifolge anschaulich in vielen Schulbüchern, beispielsweise bei Hinkelmann, Böhm, Hofbauer, & Metzger-Schuhäker (2006) im Schulbuch „Mathe mit Gewinn: Mathematik für Handelsakademien. 2. Teil für den III. Jg.“ auf Seite 91, bei Sidlo, Puhm, & Steinmair (2011) in „Mathematik mit technischen Anwendungen 3“ auf Seite 8, bei Malle (2010) im Buch „Mathematik verstehen 6“ auf Seite 129 oder bei Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher, & Nussbaumer (2012) im Schulbuch „Thema Mathematik 6“ eingeführt und erklärt.

Die genaue Definition der Fibonaccifolge lautet folgendermaßen:

Definition 2.1 (Walser, 1996, S. 75)

Unter der Fibonacci-Folge verstehen wir die Folge mit dem rekursiven Bildungsgesetz

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

und den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$, also die Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Von der dritten Stelle an ist also jedes Glied der Folge gleich der Summe der beiden vorhergehenden.

Gleichbedeutend mit dieser Definition ist folgende Aussage von Lausch (2009, S. 2), wenn man als Startwerte $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ wählt: „Die Rekursionsformel der Fibonaccifolge lautet also

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (12)“.$$

Vergleicht man die angegebenen Glieder mit den zuvor berechneten Anzahlen von Kaninchenpaaren, so kann festgestellt werden, dass die Zahlen übereinstimmen. Die Anzahl der Kaninchenpaare bildet eine Fibonaccifolge. Legt man die Definition der Fibonaccifolge nochmal auf die Kaninchenaufgabe um, so kann diese anhand des Beispiels kurz und anschaulich erklärt werden, wie bei Beutelspacher & Petri, 1996, auf Seite 88 zu finden ist: „Zum Beweis betrachten wir die Situation im $(n + 1)$ -ten Monat. Zu diesem Zeitpunkt gibt es nach Definition genau f_{n+1} Kaninchenpaare. Von diesen sind genau f_n gebärfähig, nämlich diejenigen, die schon im n -ten Monat gelebt haben (genau diese Paare sind jetzt schon mindestens zwei Monate alt). Im $(n + 2)$ -ten Monat bringen also genau f_n der f_{n+1} Paare ein junges Paar zur Welt. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= \text{Anzahl der Kaninchenpaare im } (n + 1) - \text{ten Monat} + \text{Anzahl der Paare, die im } (n + 2) \\ &\quad - \text{ten Monat geboren werden} \\ &= f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

Die Kaninchenaufgabe ist bei weitem nicht das einzige Beispiel der Fibonaccifolge. Sie findet in den verschiedensten Bereichen unseres Lebens ihre Anwendung. Im Folgenden werden weitere Anwendungsbeispiele der Fibonaccifolge exemplarisch aus der Mathematik und der Natur dargestellt:

➤ Fassade eines Hauses streichen (Stewart, 1997, S. 54ff.)

Wohnhäuser mit n Stockwerken sollen blau und gelb gestrichen werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass zwei benachbarte Stockwerke niemals beide blau sein dürfen. Sie dürfen allerdings beide gelb sein. Die Anzahl der Möglichkeiten ein Haus mit n Stockwerken auf diese Art zu streichen wird mit a_n bezeichnet.

Betrachten wir beispielsweise ein Haus mit fünf Stockwerken, so kann der fünfte Stock entweder gelb oder blau gestrichen sein. Wenn er gelb ist, kann das restliche Teil des Hauses auf alle Arten gestrichen sein, die für ein vierstöckiges Gebäude in Frage kommen. Ist er allerdings blau, so muss der vierte Stock sicherlich gelb sein und der Rest des Gebäudes kann auf alle Arten gestrichen sein, die für ein dreistöckiges Haus möglich sind. Daher ist $a_5 = a_4 + a_3$. Dieses Bildungsgesetz entspricht den Fibonaccizahlen und kann allgemein übertragen werden.

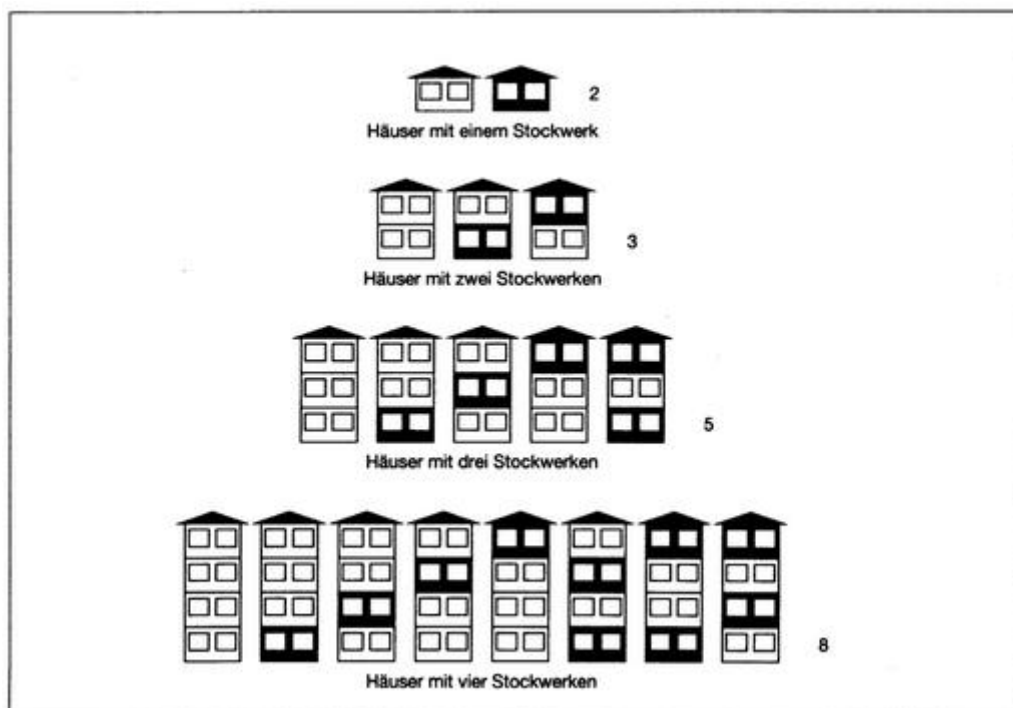


Abbildung 3: Fassade eines Hauses streichen; (Stewart, 1997, S. 54)

➤ Treppenseigen (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 89)

In diesem Beispiel gehen wir davon aus, dass ein Briefträger täglich eine lange Treppe hinaufsteigt und dabei ein besonderes Muster benutzt: Er betritt die erste Stufe auf jeden Fall und von da an kann er sich immer entscheiden, ob er nur eine Stufe nimmt (also auf die nächste Stufe steigt) oder ob er gleich zwei Stufen auf einmal nimmt (er steigt auf die übernächste Stufe). Die Frage lautet: Auf wie viele verschiedene Arten kann der Briefträger die n -te Stufe erreichen?

Die Lösung ist: auf genau f_n viele Arten.

Die Erklärung, warum das so ist, folgt jetzt:

Wie oben beschrieben, gibt es nur eine Möglichkeit auf die erste Stufe zu steigen, nämlich direkt darauf zu steigen. Daher ist $f_1 = 1$. Des Weiteren kann der Briefträger auch die zweite Stufe nur auf eine Art und Weise erreichen, indem er zuerst auf die erste und danach direkt auf die zweite Stufe steigt. Es ist auch $f_2 = 1$.

Betrachten wir jetzt den Fall der $(n + 2)$ -ten Stufe. Um uns zu überlegen, auf welche Arten der Briefträger zu dieser gelangen kann, müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Im ersten Fall kommt der Briefträger direkt von der $(n + 1)$ -ten Stufe. Um auf die $(n + 1)$ -te Stufe zu gelangen, gibt es f_{n+1} Möglichkeiten. Daher gibt es also im ersten Fall genau f_{n+1} viele Arten auf die $n + 2$ -te Stufe zu steigen. Im zweiten Fall kommt der Briefträger von der n -ten Stufe und nimmt also zwei Stufen auf einmal. Hier gibt es nur genau f_n Arten, um von der n -ten auf die $(n + 2)$ -te Stufe zu gelangen.

Insgesamt sind aber beide Fälle möglich, daher muss man die Anzahl der beiden Fälle addieren: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, was genau der Definition der Fibonaccifolge entspricht.

➤ Stammbaum der Drohne (Berendt, 1998)

Bienen haben ein anderes Fortpflanzungssystem als beispielsweise wir Menschen. Das Besondere daran ist, dass nicht alle Bienen zwei Elternteile haben. Der Stammbaum einer Drohne (einer männlichen Biene) ist daher mit den Fibonaccizahlen in Verbindung zu bringen. Bei der Fortpflanzung der Bienen gibt es einige ungewöhnliche Erscheinungen, die erklärt werden sollen, damit der Stammbaum richtig verstanden werden kann:

- In einem Bienenstock gibt es ein bestimmtes Weibchen, das die Königin ist. Sie schlüpft aus einem befruchteten Ei.
- Es gibt viele Arbeiterbienen, die weiblich sind, selbst aber keine Eier produzieren können, jedoch ebenfalls aus befruchteten Eiern stammen.
- Die Männchen, auch Drohnen genannt, entstehen durch die unbefruchteten Eier der Königin. Daher haben Drohnen nur eine Mutter und keinen Vater.

Durch diese Aufzählung lässt sich feststellen, dass weibliche Bienen zwei Elternteile haben, während Männchen nur einen Elternteil, nämlich eine Mutter haben.

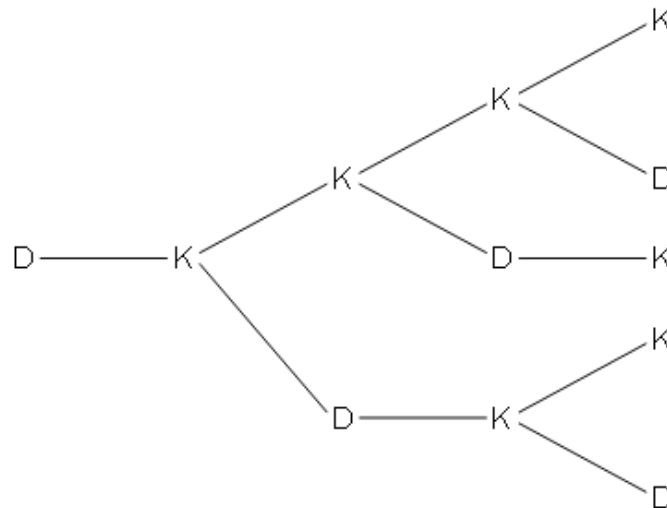


Abbildung 4: Stammbaum einer Drohne; (Kuhn, 1990)

Betrachtet man den Stammbaum einer Drohne genauer, kann man feststellen:

1. Sie hat 1 Elternteil, ein Weibchen.
2. Sie hat 2 Großeltern, ihre Mutter hat 2 Elternteile, ein Männchen und ein Weibchen.
3. Sie hat 3 Urgroßeltern, ihre Großmutter hatte ebenfalls 2 Elternteile, hingegen ihr Großvater nur einen, usw.

Jede Königin der Ebene n erzeugt einen Nachfahren in der Ebene $n - 1$. Jede Drohne des Stammbaums hat eine Königin als Nachkommen. Der Stammbaum zeigt, dass in der n -ten Vorfahren-Generation genau f_n Vorfahren existieren und zwar f_{n-1} weibliche und f_{n-2} männliche.

➤ Sonnenblumen (Was Darwin nicht wusste, 2016)

Schaut man sich die Verteilung der Kerne einer Sonnenblume an, so erkennt man, dass diese nicht zufällig angeordnet sind, sondern jeder Kern zu einer links- und einer rechtsdrehenden Spirale gehört. Dabei ist besonders, dass die Anzahl der Spiralen immer Fibonacci-Zahlen sind. Die Anzahl der links- und rechtsdrehenden Spiralen einer Sonnenblume ist nicht gleich, sondern es handelt sich dabei um zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen. Häufig kommen die Kombinationen 21 und 34 oder 34 und 55 oder 55 und 89 vor. Bei besonders großen Sonnenblumen kann es auch vorkommen, dass die Anzahl an Spiralen 89 und 144 oder 144 und 233 beträgt. Das Verhältnis der jeweiligen Anzahlen nähert sich recht gut dem goldenen Schnitt (siehe Kapitel 2.7.2) an. Die Kernanordnung bei der Sonnenblume ist ein gutes Beispiel für ein Phänomen, das in der Biologie unter dem Begriff Phyllotaxis bezeichnet wird. Dadurch können die Pflanzen die größtmögliche Menge an Licht und Frischluft erhalten.

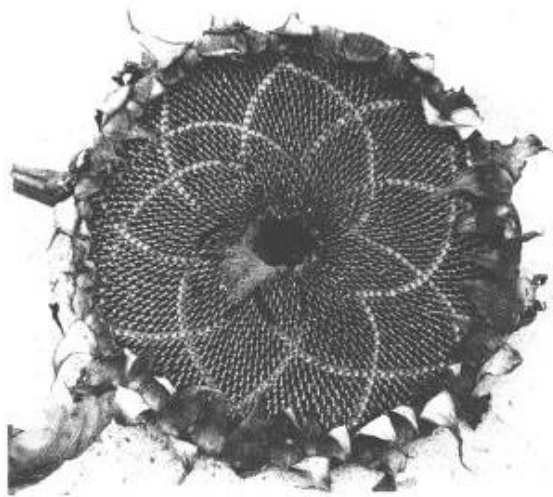


Abbildung 5: Spiralen einer Sonnenblume; (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 127)

Nach der Einführung der Fibonaccifolge, soll im weiteren Teilabschnitt gezeigt werden, dass sie eine ganze Reihe an interessanten Eigenschaften besitzt. Die grundlegenden Eigenschaften werden vorgestellt und bewiesen:

2.1.2 Einfache Summenformeln

Satz 4

Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ erhält man für

- a) die Summe der ersten n Fibonaccizahlen

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

- b) die Summe der ersten n Fibonaccizahlen mit ungeradem Index

$$\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$$

- c) die Summe der ersten n Fibonaccizahlen mit geradem Index

$$\sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1$$

Beweis:

- a) Aufgrund der Rekursionsformel gilt $f_i = f_{i+2} - f_{i+1}, i = 1, \dots, n$. Mithilfe dieser Formel lässt sich die Summe folgendermaßen umschreiben:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=2}^{n+1} (f_{i+1} - f_i) = \sum_{i=2}^{n+1} f_{i+1} - \sum_{i=2}^{n+1} f_i = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$$

was die Behauptung zeigt.

- b) Da $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{2i-1} = f_{2i} - f_{2i-2}$ für $i \geq 2$ gilt, kann man die linke Seite in der Form $f_2 + \sum_{i=2}^n (f_{2i} - f_{2i-2}) = f_{2n}$ darstellen, und dies ist gerade die Behauptung.
- c) Die gesuchte Summe enthält man als Differenz

$$\sum_{i=1}^n f_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} f_i - \sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

wobei a), b) und $f_{2n+1} = f_{2n+2} - f_{2n}$ verwendet wurden. \diamond

Die alternierende Summe der ersten n Fibonaccizahlen kann mithilfe des vorigen Satzes berechnet werden.

Satz 5

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1$$

Beweis:

Wenn n gerade ist, das heißt $n = 2k$, so subtrahiert man die Summe der ersten k Fibonaccizahlen mit geradem Index von der Summe der ersten k Fibonaccizahlen mit ungeradem Index:

$$\sum_{i=1}^k f_{2i-1} - \sum_{i=1}^k f_{2i} = f_{2k} - f_{2k+1} + 1 = f_{2k-1} + 1$$

Für den Fall, dass n ungerade ist, also $n = 2k + 1$ gilt, muss auf beiden Seiten der Gleichung $f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k-1}$ addiert werden:

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} f_i + f_{2k+1} = f_{2k} + 1$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \diamond

Mithilfe der Rekursionsformel ist es möglich nicht nur Summen von Fibonaccizahlen, sondern auch Summen von Quadraten der ersten n Fibonaccizahlen zu berechnen. Dies wird in den folgenden Sätzen gezeigt.

Satz 6

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n f_{n+1}$$

Beweis:

In diesem Beweis wird auf einen Trick zurückgegriffen: f_i^2 soll mithilfe der Rekursionsformel geschickt dargestellt werden. Es gilt nämlich $f_i^2 = f_i f_{i+1} - f_{i-1} f_i$ für $i = 2, \dots, n$. Beachtet man $f_1^2 = f_1 f_2$ und setzt dies in $\sum_{i=1}^n f_i^2$ ein, ergibt sich $f_1 f_2 + \sum_{i=2}^n (f_i f_{i+1} - f_{i-1} f_i) = f_n f_{n+1}$. \diamond

Quadrate von Fibonaccizahlen können als Summe von Produkten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen dargestellt werden. Bei diesem Beweis wird ebenfalls mehrmals auf die Rekursionsformel zurückgegriffen.

Satz 7

$$\sum_{i=1}^n f_i f_{i+1} = \begin{cases} f_{n+1}^2 & \text{für ungerades } n \\ f_{n+1}^2 - 1 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

Beweis:

Zuerst gehen wir davon aus, dass n ungerade ist, also $n = 2m + 1$ gilt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2m+1} f_i f_{i+1} &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i} f_{2i+1} + f_{2i+1} f_{2i+2}) \\ &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m f_{2i+1} (f_{2i} + f_{2i+2}) \\ &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i+2} - f_{2i}) (f_{2i+2} + f_{2i}) \\ &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i+2}^2 - f_{2i}^2) \\ &= f_1 f_2 + f_{2m+2}^2 - f_2^2 = f_{2m+2}^2 = f_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Jetzt sei n gerade, $n = 2m$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2m} f_i f_{i+1} &= \sum_{i=1}^m (f_{2i-1} f_{2i} + f_{2i} f_{2i+1}) = \sum_{i=1}^m f_{2i} (f_{2i+1} + f_{2i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m (f_{2i+1} - f_{2i-1}) (f_{2i+1} + f_{2i-1}) = \sum_{i=1}^m (f_{2i+1}^2 - f_{2i-1}^2) \\ &= f_{2m+1}^2 - f_1^2 = f_{n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Satz für alle natürlichen Zahlen gezeigt. \diamond

2.1.3 Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist es möglich eine große Menge an Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen zu beweisen. Des Weiteren ist es ein Verfahren, das in vielen Beweisen seine Anwendung findet.

An dieser Stelle sei zuerst das Prinzip der vollständigen Induktion erklärt:

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion wird bei vielen Beweisen aus der elementaren Zahlentheorie verwendet. Dabei wird die Tatsache benutzt, dass es zu jeder noch so großen natürlichen Zahl immer einen Nachfolger gibt, man also immer eins dazuzählen kann. Dadurch kann man oftmals die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen nachweisen. Dieses

Prinzip, das bei der vollständigen Induktion ausgenutzt wird, geht auf das fünfte Peano-Axiom (nach Guiseppe Peano, 1858-1932) zurück:

Falls eine Menge M die natürliche Zahl 1 (oder 0) enthält und für jede natürliche Zahl m auch dessen Nachfolger $m + 1$, so ist \mathbb{N}^* (bzw. \mathbb{N}) eine Untermenge von M , d.h. es gilt $\mathbb{N}^* \subset M$ (bzw. $\mathbb{N} \subset M$).

Das Prinzip der vollständigen Induktion nutzt folgende Begebenheit:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (meist ist $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$) und man betrachte für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$. Falls $A(n_0)$ gilt und für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ die Richtigkeit von $A(n + 1)$ aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt, dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Das Beweisverfahren läuft nach den folgenden Schritten ab:

1. Induktionsanfang (Induktionsverankerung): Hier wird gezeigt, dass $A(n_0)$ richtig ist.
2. Induktionsvoraussetzung (Induktionsannahme): Man nimmt $A(n)$ als richtig an.
3. Induktionsschluss (Schluss von n auf $n + 1$): Man weist nach, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ auch die Richtigkeit von $A(n + 1)$ folgt.

Im Falle der Fibonaccifolge muss das Verfahren der vollständigen Induktion etwas abgeändert werden, da hier jedes Folgenglied von den beiden vorhergehenden Folgengliedern abhängt. Die modifizierte Version des Beweisverfahrens schaut so aus:

1. Induktionsanfang: Gezeigt wird, dass $A(n_0)$ und $A(n_0 + 1)$ richtig sind.
2. Induktionsvoraussetzung: Es wird die Annahme getroffen, dass $A(n)$ und $A(n + 1)$ richtig sind.
3. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n + 1$ und $n + 2$): Man zeigt, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ und $A(n + 1)$ die Richtigkeit von $A(n + 2)$ folgt.

Eine mögliche Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion, die sich sofort anbietet, ist die Definition der Fibonaccizahlen. Bei dieser Definition werden die ersten beiden Startwerte $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$, die die ersten zwei Fibonaccizahlen sind, und die bekannte Rekursionsformel $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ angegeben. Indem man immer die beiden vorhergehenden Glieder miteinander addiert, erhält man Schritt für Schritt, das heißt induktiv, das nächste Folgenglied. Aufgrund dieses Prinzips muss jede Folge, deren ersten zwei Startwerte 1 sind und deren Glieder sich durch die Addition der beiden Vorherigen ergeben, die Fibonaccifolge sein. Da besteht keine andere Möglichkeit.

Ein Beispiel dazu ist die „Springer-Aufgabe“ wie sie Vorob'ev (1971) auf Seite 16 beschreibt: Ein Springer soll sich in eine Richtung entlang eines in Felder aufgeteilten Streifens bewegen, und zwar so, dass er bei jedem Sprung entweder in ein benachbartes Feld springt oder über das Feld herüberspringt. Die Frage, die sich jetzt stellt, lautet: Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Springer ins $(n - 1)$ -te Feld oder insbesondere vom ersten zum n -ten Feld zu kommen? Die Sprünge, bei denen der Springer im selben Feld ankommt, werden als gleich betrachtet.

Die gesuchte Zahl wird mit x_n bezeichnet. $x_1 = 1$, da man nur vom ersten Feld ausgehend im Ersten bleibt, indem man gar keinen Sprung macht. $x_2 = 1$, da es nur eine Möglichkeit gibt,

um vom ersten ins zweite Feld zu gelangen, nämlich durch einen Sprung vom ersten ins zweite Feld. Jetzt nehmen wir an, dass der Springer das $(n + 2)$ -te Feld erreichen will. Wie vorher festgestellt, ist die Gesamtanzahl dieser Sprünge gleich x_{n+2} . Die Sprünge, die ausgeführt werden, müssen in zwei Kategorien aufgeteilt werden: die erste Kategorie sind jene Sprünge, bei denen mit einem Sprung ins zweite Feld begonnen wird, bei der zweiten Kategorie zählen wir diese Sprünge, bei der mit einem Sprung ins dritte Feld begonnen wird. Vom zweiten Feld ausgehend, gibt es x_{n+1} Möglichkeiten um das $(n + 2)$ -te Feld zu erreichen. Startet man vom dritten Feld aus, bleiben nur mehr x_n Arten. Die sich ergebende Folge von Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ kann mithilfe der Rekursionsformel $x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$ dargestellt werden. Da die beiden Startwerte 1 sind, muss diese Folge die Fibonaccifolge sein. Daher kann $x_n = f_n$ gesetzt werden.

Im folgenden Satz wird das Beweisverfahren nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gleich angewendet:

Satz 8

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$$

Beweis:

Durch vollständige Induktion nach m . Der Induktionsanfang ist für $m = 1$ und $m = 2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_{n-1}f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} + f_n \\ f_{n+2} &= f_{n-1}f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

Das ist aufgrund der Rekursionsformel der Fibonaccifolge für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$ richtig. Als nächstes zeigen wir den Induktionsschritt (Schluss von m und $m + 1$ auf $m + 2$). Nach Induktionsvoraussetzung gilt für ein $m \in \mathbb{N}^*$ und für $m + 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+m} &= f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} \\ f_{n+m+1} &= f_{n-1}f_{m+1} + f_n f_{m+2}; \end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_{n+m} + f_{n+m+1} &= f_{n+m+2} = f_{n-1}(f_m + f_{m+1}) + f_n(f_{m+1} + f_{m+2}) \\ &= f_{n-1}f_{m+2} + f_n f_{m+3}. \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also auch für f_{n+m+2} und damit für alle natürlichen Zahlen m . \diamond

Diesen Satz kann man auf die vorher erwähnte Springer-Aufgabe anwenden und die Theorie somit auf ein anschauliches Beispiel übertragen, wie Vorob'ev (1971) auf Seite 18 zeigt. Das geht folgendermaßen: Man sagt, dass f_{n+m} die Gesamtzahl der Sprünge vom ersten ins $(n + m)$ -te Feld darstellt. Da unter diesen Sprüngen solche sind, bei denen der Springer über das n -te Feld hinüberspringt, aber auch solche, bei denen er auf das n -te Feld springt, kann man die Sprünge in zwei Klassen aufteilen. Bei den Sprüngen der ersten Klasse, also wenn er über das n -te Feld hinüberspringt, ist der Springer verpflichtet auf das $(n - 1)$ -te Feld zu springen, das kann er auf f_{n-1} Arten machen, dann auf das $(n + 1)$ -te Feld zu springen, und schließlich

auf die weiteren $(n + m) - (n + 1) = (m - 1)$ Felder, was auf f_m Arten möglich ist. Daher gibt es in der ersten Klasse $f_{n-1}f_m$ Möglichkeiten die Sprünge auszuführen. Bei den Sprüngen der zweiten Klasse sind die Überlegungen ähnlich: Der Springer erreicht zwangsweise das n -te Feld, was auf f_n Arten möglich ist, und geht danach auf das $(n + m)$ -te Feld über, auf einer der f_{m+1} Möglichkeiten. Es gibt in der zweiten Klasse also $f_n f_{m+1}$ Möglichkeiten die Sprünge auszuführen. Addiert man die Möglichkeiten der beiden Klassen, so sieht man, dass es genau der Aussage von Satz 8 entspricht.

Wird in Satz 8 $m = n$ gesetzt, so erhält man

$$f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1});$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass f_n ein Teiler von f_{2n} ist. Darüber hinaus sieht man ebenfalls aus obiger Gleichung, dass die Differenz der Quadrate zweier Fibonaccizahlen f_{n-1} und f_{n+1} wieder eine Fibonaccizahl ist, denn es gilt:

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n-1} + f_{n+1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen ist wieder eine Fibonaccizahl. Das erkennt man, wenn man in Satz 8 $m = n + 1$ setzt:

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &= f_{n+(n+1)} = f_{n-1}f_{n+1} + f_n f_{n+2} \\ &= (f_{n+1} - f_n)f_{n+1} + f_n(f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1}^2 - f_n f_{n+1} + f_n^2 + f_n f_{n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Im nächsten Satz wird eine interessante Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen hergestellt:

Satz 9

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$$

Beweis:

Durch vollständige Induktion nach n :

$$n = 1: f_2 f_3 - f_1 f_4 = 1 * 2 - 1 * 3 = (-1)^1$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$ gelte nun die obige Beziehung. Dann erhalten wir für $n + 1$ mithilfe der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+4} &= f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}(f_{n+2} + f_{n+3}) \\ &= f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}f_{n+3} \\ &= (f_{n+2} - f_{n+1})f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} \\ &= f_n f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} \\ &= (-1)(f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3}) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

wie behauptet, wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. \diamond

Im Folgenden wird die Identität von d'Ocagne (nach dem französischen Mathematiker Maurice d'Ocagne, 1862-1938) gezeigt. Sie ist die Verallgemeinerung von Satz 9: Wenn man in Satz 10 nämlich $m = n + 2$ setzt, erhält man die Aussage von Satz 9.

Satz 10

$$f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (-1)^n f_{m-n} \quad (m \geq n)$$

Beweis:

Handelt es sich um den Spezialfall $m = n$, ergibt sich $f_m f_{m+1} - f_m f_{m+1} = 0 = (-1)^0 f_0$ und die Identität ist richtig.

Wir nehmen jetzt $m > n$ an und zeigen die Behauptung durch Induktion nach n .

$$n = 1: f_m f_2 - f_1 f_{m+1} = f_m - f_{m+1} = -f_{m-1} = (-1)^1 f_{m-1}$$

$$n = 2: f_m f_3 - f_2 f_{m+1} = 2f_m - f_{m+1} = f_m + (f_m - f_{m+1}) = f_m - f_{m-1} = f_{m-2} = (-1)^2 f_{m-2}$$

Für passende m und n nehmen wir an, dass die Behauptung für $n - 1$ und n richtig ist, es gelten also

$$f_m f_n - f_{n-1} f_{m+1} = (-1)^{n-1} f_{m-n+1},$$

$$f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (-1)^n f_{m-n}.$$

Damit erhalten wir für $n + 1 < m$:

$$\begin{aligned} f_m f_{n+2} - f_{n+1} f_{m+1} &= f_m (f_{n+1} + f_n) - (f_n + f_{n-1}) f_{m+1} \\ &= f_m f_{n+1} + f_m f_n - f_n f_{m+1} - f_{n-1} f_{m+1} \\ &= (f_m f_n - f_{n-1} f_{m+1}) + (f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1}) \\ &= (-1)^{n-1} f_{m-n+1} + (-1)^n f_{m-n} \\ &= (-1)^n (f_{m-n} - f_{m-n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} f_{m-(n+1)}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. \diamond

Im nächsten Satz wird deutlich, dass sich das Quadrat einer Fibonaccizahl nur um 1 vom Produkt der beiden benachbarten Fibonaccizahlen unterscheidet.

Satz 11

$$f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Beweis:

Durch Induktion nach n : Für $n = 2$ gilt $f_2^2 = f_1 f_3 - 1 = 1$. Nun nehmen wir an, dass Satz 11 für ein beliebiges, aber festes n richtig ist. Auf beiden Seiten der Formel addieren wir für dieses n den Term $f_n f_{n+1}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
f_n^2 + f_n f_{n+1} &= f_{n-1} f_{n+1} + f_n f_{n+1} + (-1)^{n+1} \\
f_n (f_n + f_{n+1}) &= f_{n+1} (f_{n-1} + f_n) + (-1)^{n+1} \\
f_n f_{n+2} - (-1)^{n+1} &= f_{n+1}^2;
\end{aligned}$$

Somit gilt unsere Annahme auch für $n + 1$ und damit für jede natürliche Zahl. \diamond

Im folgenden Satz 12 dient uns Satz 11 als wichtiges Hilfsmittel. Es wird eine Summenformel, bei der erstmals Brüche mit Fibonaccizahlen im Nenner auftreten, bewiesen.

Satz 12

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_i + (-1)^i}{(f_{i+2} - 1)(f_{i+3} - 1)} = 2 - \frac{f_{n+4} - 1}{f_{n+3} - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Beweis:

Durch vollständiges Induktion. Für $n = 1$ ist die linke Seite der obigen Gleichung wegen $f_1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$ gleich null, und für die rechte Seite gilt $2 - \frac{f_5 - 1}{f_4 - 1} = 2 - \frac{5 - 1}{3 - 1} = 2 - \frac{4}{2} = 0$; die Gleichung ist also richtig.

Zum Beweis des Induktionsschritts beachten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i + (-1)^i}{(f_{i+2} - 1)(f_{i+3} - 1)} = (\text{laut Induktionsvoraussetzung}) 2 - \frac{f_{n+4} - 1}{f_{n+3} - 1} + \frac{f_{n+1} + (-1)^{n+1}}{(f_{n+3} - 1)(f_{n+4} - 1)};$$

Die rechte Seite dieser Gleichung soll dann gleich $2 - \frac{f_{n+5} - 1}{f_{n+4} - 1}$ sein. Daher genügt es

$$\frac{f_{n+4} - 1}{f_{n+3} - 1} - \frac{f_{n+5} - 1}{f_{n+4} - 1} = \frac{f_{n+1} + (-1)^{n+1}}{(f_{n+3} - 1)(f_{n+4} - 1)}$$

zu zeigen. Wir bringen die linke Seite dieser Gleichung auf den Hauptnenner und erhalten

$$\frac{(f_{n+4} - 1)^2 - (f_{n+5} - 1)(f_{n+3} - 1)}{(f_{n+3} - 1)(f_{n+4} - 1)} = \frac{f_{n+1} + (-1)^{n+1}}{(f_{n+3} - 1)(f_{n+4} - 1)}$$

Da die Nenner übereinstimmen, ist es ausreichend, die Gleichheit der Zähler nachzuweisen:

$$\begin{aligned}
& (f_{n+4} - 1)^2 - (f_{n+5} - 1)(f_{n+3} - 1) \\
&= (f_{n+4} - 1)(f_{n+4} - 1 - f_{n+3} + 1) - f_{n+3}(f_{n+3} - 1) \\
&= (f_{n+2} + f_{n+3} - 1)f_{n+2} - f_{n+3}(f_{n+1} + f_{n+2} - 1) \\
&= f_{n+2}^2 + f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+2} - f_{n+1}f_{n+3} - f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3} \\
& \quad (\text{Satz 11}) = f_{n+1}f_{n+3} + (-1)^{n+3} - f_{n+1}f_{n+3} + (f_{n+3} - f_{n+2}) \\
& \quad = f_{n+1} + (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

wie erwünscht. Damit ist der Satz bewiesen. \diamond

2.2 Lineare Rekursion und die Formel von Binet

Mithilfe der bisher gezeigten Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen und Formeln lassen sich Ausdrücke zwar vereinfachen, aber die explizite Berechnung der Ausdrücke und Summen gelingt erst, wenn alle vorkommenden Fibonaccizahlen bekannt und Schritt für Schritt berechnet sind. Die Berechnung der einzelnen Glieder durch die Rekursionsformel kann allerdings sehr aufwändig sein, vor allem, wenn man sehr große Folgenglieder angeben möchte. Es ist daher sinnvoll eine Formel angeben zu können, die die n -te Fibonaccizahl direkt, also ohne Zuhilfenahme der vorgehenden Zahlen, darstellt. Diese Formel entdeckte unter anderen der französische Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet im Jahr 1843 und daher wurde sie nach ihm benannt. Die Formel von Binet berechnet die Fibonaccizahl nur in Abhängigkeit von ihrem Index $n \in \mathbb{N}$. Im folgenden Abschnitt wird die Formel von Binet angegeben und bewiesen.

Satz 13

Die Formel von Binet (die explizite Darstellung des n -ten Folgengliedes f_n der Fibonaccifolge)

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (13)$$

Setzt man $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (14) und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (15), so ist $f_n = \frac{\Phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Beweis:

Durch Induktion nach n : Aufgrund von

$$f_0 = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0, f_1 = \frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = 1$$

ist die Formel für $n = 0$ und $n = 1$ richtig. Also nehmen wir an, dass sie für $n - 2$ und $n - 1$ stimmt. Die Rekursionsformel sagt uns, dass $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ gilt. Wir müssen daher

$$\frac{\Phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

zeigen. Da der Nenner gleich ist, genügt es wiederum, $\Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi^n$ und $\psi^{n-1} + \psi^{n-2} = \psi^n$ nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right] = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \Phi^n \end{aligned}$$

Analog geht man für den Beweis von $\psi^{n-1} + \psi^{n-2} = \psi^n$ vor. \diamond

Da wir jetzt die Formel von Binet kennen, mit deren Hilfe man Folgenglieder direkt berechnen kann, lässt sich auch die Abbildungsvorschrift der Fibonaccifolge explizit angeben:

$$n \mapsto f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Im Beweis von Satz 13 war zu erkennen, dass $\Phi^2 = \Phi + 1 = 1 * \Phi + 1$ gilt. Für die nächsthöheren Potenzen von Φ erhält man sukzessive:

$$\Phi^3 = \Phi\Phi^2 = \Phi(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi\Phi^3 = 2\Phi^2 + \Phi = 2\Phi + 2 + \Phi = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi\Phi^4 = \Phi(3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3\Phi + 3 + 2\Phi = 5\Phi + 3$$

Entsprechend gilt für ψ :

$$\psi^2 = \psi + 1 = 1\psi + 1$$

$$\psi^3 = \psi\psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = \psi + 1 + \psi = 2\psi + 1$$

usw.

Dadurch entsteht folgende Vermutung:

Satz 14

$$\Phi^n = f_n \Phi + f_{n-1}, \quad \psi^n = f_n \psi + f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Beweis:

Durch Induktion nach n : Für $n = 1$ gilt $\Phi^1 = f_1 \Phi + f_0 = 1 * \Phi + 0 = \Phi$, für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ ist Satz 14 nach Obigem richtig. Daher bleibt nur der Induktionsschritt zu zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\Phi^k = f_k \Phi + f_{k-1}$, $\Phi^{k+1} = f_{k+1} \Phi + f_k$. Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi^k + \Phi^{k+1} &= (f_k + f_{k+1})\Phi + (f_{k-1} + f_k) \\ \Phi^{k+2} &= \Phi^k(\Phi + 1) = f_{k+2}\Phi + f_{k+1} \end{aligned}$$

Die Formel für ψ zeigt man ebenfalls durch Induktion nach n . \diamond

Bemerkungen:

- Zwischen Φ und ψ bestehen folgende Beziehungen, die häufig benutzt werden:

$$\begin{aligned} \Phi + \psi &= 1 \\ \Phi - \psi &= \sqrt{5} \\ \Phi\psi &= -1 \end{aligned}$$

- $\Phi \approx 1,618033988$ und $\psi \approx -0,618033988$ sind Wurzeln des Polynoms

$$x^2 - x - 1.$$

Lineare Rekursion

Die Fibonaccifolge ist ein Beispiel für eine lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung, wie bereits in Kapitel 1 erklärt wurde. Die Rekursionsgleichung schaut folgendermaßen aus:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad (16)$$

Wir wollen jetzt eine explizite Darstellung für das n -te Folgenglied angeben. Das lässt sich direkt aus den Sätzen 1 und 2 von Kapitel 1 herleiten. Hier aber werden wir für didaktische Zwecke die Beweise dieser Sätze für diesen Spezialfall explizit erläutern. Wie wir schon bemerkt haben, werden die Glieder der Fibonaccifolge rasch sehr groß. Daher kann man vermuten, dass die Folgenglieder exponentiell wachsen. Ist die Folge $\{a_n\}$ eine Lösung der Rekursionsformel (16), so versuchen wir es mit dem Ansatz

$$a_n = \lambda^n \quad (17).$$

Dabei ist λ eine noch zu bestimmende reelle oder komplexe Zahl. Setzen wir (17) in die Rekursionsgleichung ein, so erhalten wir

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1}$$

und nach Division durch λ^{n-1} und Umstellen

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0; \quad (18)$$

Diese quadratische Gleichung heißt charakteristische Gleichung der durch (16) gegebenen Rekursion. Daher erfüllen Folgen, die die Form $\{a_n = \lambda^n\}$ haben, wobei λ eine Lösung der Gleichung (18) ist, die Rekursionsgleichung (16). In unserem Fall hat die charakteristische Gleichung (18) die Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Eine weitere Beobachtung ist wesentlich: Wenn auch $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen sind, die die Rekursionsgleichung (16) erfüllen, so stimmt dies auch für jede Folge $\{c_n\}$ mit

$$c_n = r a_n + s b_n$$

wobei r und s beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind. Diese Beobachtung entspricht genau der Aussage des Superpositionsprinzips, das zu Beginn des ersten Kapitels gezeigt wurde.

Wenn die Anfangswerte a_0 und a_1 gegeben sind, erhält man die Koeffizienten r und s aus $c_n = r a_n + s b_n$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_0 &= r + s \\ a_1 &= r \lambda_1 + s \lambda_2 \end{aligned}$$

Im Fall der Fibonaccifolge ist $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und wir erhalten

$$0 = r + s$$

$$1 = r \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + s \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

also $s = -r$; dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert

$$1 = r \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - r \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

oder

$$1 = r\sqrt{5}$$

also

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}}, s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Damit gilt für die Glieder der Fibonaccifolge

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

wie in Satz 13 gezeigt wurde.

2.3 Fibonaccizahlen mit negativen Indizes

Die Rekursionsformel der Fibonaccifolge (12)

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

kann umgeschrieben werden zu

$$f_{n-2} = f_n - f_{n-1} \quad (19)$$

Wenn wir mit den Startwerten $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ beginnen, können die Fibonaccizahlen mit negativen Indizes „rückwärts“ berechnet werden und wir erhalten $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$, $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1$ und allgemein ausgedrückt

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^*; \quad (20)$$

Das kann man mithilfe einer vollständigen Induktion „nach rückwärts“ zeigen:

Für $n = -1$ und $n = -2$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an es gilt bereits $f_{-(n-1)} = (-1)^n f_{n-1}$ und $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$. Aus der Rekursionsformel (19) ergibt sich dann $f_{-(n+1)} = f_{-(n-1)} - f_{-n} = (-1)^n f_{n-1} - (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+2} (f_{n-1} + f_n) = (-1)^{n+2} f_{n+1}$, wie behauptet.

◇

Durch den Ausdruck (20) konnte die Fibonaccifolge zu einer auf \mathbb{Z} definierten Zahlenfolge $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ erweitert werden.

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, dass die Formel von Binet für negative Exponenten ebenfalls richtig ist. Es gilt also mit den Bezeichnungen von Satz 13 der folgende Satz:

Satz 15

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - \psi^n) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

Im Beweis von Satz 13 haben wir gezeigt, dass $\Phi^{n+2} = \Phi^n + \Phi^{n+1}$ und $\psi^{n+2} = \psi^n + \psi^{n+1}$ ist. Da $\Phi\psi = -1$, gilt $\psi = (-1)\Phi^{-1}$. Daher liefert uns die Formel für ψ , dass $(-1)^{n+2}\Phi^{-(n+2)} = (-1)^n\Phi^{-n} + (-1)^{n+1}\Phi^{-(n+1)}$ und weiter $\Phi^{-(n+2)} = \Phi^{-n} - \Phi^{-(n+1)}$ oder $\Phi^{-n} = \Phi^{-(n+2)} + \Phi^{-(n+1)}$ gilt. Analog zeigt man $\psi^{-(n+2)} = \psi^{-n} - \psi^{-(n+1)}$. Die Rekursionsformel (19) und die vollständige Induktion nach rückwärts zeigen jetzt die Richtigkeit der Behauptung. ◇

Satz 5 liefert uns direkt die Formel für die Summe der ersten n Fibonaccizahlen mit negativen Indizes:

$$\sum_{i=-n}^{-1} f_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1 = -f_{-n+1} + 1$$

Weiters kann man die wichtige Identität aus Satz 8

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_nf_{m+1} \quad \text{für beliebige } m, n \in \mathbb{Z}$$

beweisen, für negative m, n durch Induktion nach rückwärts.

2.4 Fibonaccizahlen und Lineare Algebra

2.4.1 Die Herleitung der Formel von Binet mithilfe der Eigenwertrechnung

Hier werden wir die Ideen vom Beweis von Satz 3 aus dem ersten Kapitel auf den Spezialfall der Fibonaccifolge anwenden und diese Ideen dazu verwenden einen alternativen Beweis für die allgemeine Form von f_n zu präsentieren.

Betrachtet man das Bildungsgesetz der Fibonaccifolge genauer, wissen wir aufgrund der Rekursionsformel, dass $f_{n+2} = 1 * f_n + 1 * f_{n+1}$ gilt. In Worten ausgedrückt bedeutet die Formel, dass jedes Glied der Folge entsteht, indem die Summe der beiden vorhergehenden Glieder gebildet wird. Die Beziehung, die durch die Formel ausgedrückt wird, schaut einer linearen Abbildung in einem zweidimensionalen Vektorraum schon sehr ähnlich. Daher verwenden wir jetzt einmal den folgenden Ansatz: Im zweidimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 wollen wir den Vektor $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}$ abbilden. Das kann erreicht werden, indem man den Vektor $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ (von links) mit der Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

multipliziert, also

$$F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$$

Starten wir mit dem Vektor $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$, erhalten wir

$$F \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 + f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$F^2 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Durch wiederholtes Anwenden von F ergibt sich schließlich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

Im Besonderen gilt für $n = 0$:

$$F^0 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

Dabei stellt $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die 2 x 2 – Einheitsmatrix dar.

Bezogen auf den gesamten Vektorraum \mathbb{R}^2 betrachten wir also die durch

$$\vec{x} \mapsto F\vec{x} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

definierte lineare Abbildung des \mathbb{R}^2 auf sich. Da F invertierbar ist – die Inverse ist $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – ist diese lineare Abbildung sogar ein Isomorphismus des \mathbb{R}^2 .

Durch die Matrix F^{-1} hat man jetzt ebenfalls die Möglichkeit, die Fibonaccifolge auf negative Indizes fortzusetzen:

Aus $F \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0+f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ folgt ja

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \end{pmatrix} &= F^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{-2} \\ f_{-1} \end{pmatrix} &= F^{-1} \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

usw.

Wir möchten jetzt aber nicht nur Folgenglieder mit negativen Indizes berechnen können, sondern es geht uns vorrangig darum eine Formel zu erhalten, die es uns ermöglicht, f_n und f_{n+1} explizit zu berechnen. Eine solche Darstellung würden wir bekommen, wenn es uns gelingt, die Potenzen F^n der Matrix F zu berechnen. Dabei hilft uns ein Satz aus der Linearen Algebra weiter:

Eine Matrix F mit lauter verschiedenen Eigenwerten kann auf Diagonalgestalt D gebracht werden und es gilt $D = T^{-1}FT$. Auf der Diagonalen in der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte von F und die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix T sind die Eigenvektoren von F .

Mit einer solchen Diagonalmatrix D gilt

$$D = T^{-1}FT, \text{ also } F = TDT^{-1}$$

und weiter

$$F^n = (TDT^{-1})^n = TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1} = TD^nT^{-1}$$

Die Diagonalmatrix D^n kann leicht berechnet werden: Auf der Diagonalen stehen nämlich die n -ten Potenzen der Diagonaleinträge von D .

Durch die gewonnenen Erkenntnisse wissen wir, dass jetzt die Berechnung folgendermaßen vor sich gehen wird: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom, sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von F und erhalten dadurch die Diagonalmatrix von D sowie die Transformationsmatrix T .

Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$ ergibt sich zu

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Die Diagonalmatrix D hat also die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$$

Jetzt bestimmen wir den Eigenvektor von F zum Eigenwert Φ :

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x_1 \\ x_1 + x_2 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x_2 \end{aligned}$$

Wenn wir $x_1 = 1$ wählen, ergibt sich $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Der zugehörige Eigenvektor ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ \Phi \end{pmatrix}$.

Auf entsprechende Weise bekommen wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$ zum Eigenwert ψ .

Damit erhalten wir die Transformationsmatrix T und ihre Inverse T^{-1} :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & \psi \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\psi - \Phi} \begin{pmatrix} \psi & -1 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \Phi & -1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$D = T^{-1}FT \Rightarrow F = TDT^{-1}$$

also

$$\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \Phi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & \psi \end{pmatrix}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = (TDT^{-1})^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = TD^nT^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \Phi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi^n & \psi^n \\ \Phi^{n+1} & \psi^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \Phi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi\psi^n - \Phi^n\psi & \Phi^n - \psi^n \\ \Phi\psi^{n+1} - \Phi^{n+1}\psi & \Phi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi^n - \psi^n \\ \Phi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix} \quad (21)
\end{aligned}$$

Wird jeweils die erste Komponente auf der linken und der rechten Seite der obigen Gleichung (21) verglichen, so haben wir wieder die Formel von Binet erhalten:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (22)$$

Als zusätzliches Ergebnis haben wir ganz beiläufig auch die Potenzen der Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet. Es stellt sich heraus, dass die Fibonaccizahlen als Einträge von F^n vorkommen.

Die soeben gezeigte Herleitung der Formel von Binet stellt eine Alternative zu der im Kapitel 2.2 gezeigten Herleitung dar, bei der die Lineare Rekursion verwendet wurde. Es ist möglich, dass die jetzt gezeigte Herleitung einfacher zu verstehen ist. Bedient man sich allerdings der Linearen Rekursion, entspricht die Vorgehensweise der in Kapitel 1 durch Satz 1 und Satz 2 für den allgemeinen Fall gezeigten.

Satz 16

$$F^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

Nach (21) gilt:

$$F^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi\psi^n - \Phi^n\psi & \Phi^n - \psi^n \\ \Phi\psi^{n+1} - \Phi^{n+1}\psi & \Phi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die einzelnen Einträge der Matrix und beachten dabei die Formeln (22) und

$$\Phi + \psi = 1$$

$$\Phi - \psi = \sqrt{5}$$

$$\Phi\psi = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi\psi^n - \Phi^n\psi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi\psi(\psi^{n-1} - \Phi^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n-1} - \psi^{n-1}) = f_{n-1};$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \psi^n) = f_n;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi\psi^{n+1} - \Phi^{n+1}\psi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi\psi(\psi^n - \Phi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \psi^n) = f_n;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \psi^{n+1}) = f_{n+1};$$

somit ist $F^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$, wie behauptet. \diamond

2.5 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonaccifolge

2.5.1 Teilbarkeitsaussagen für Fibonaccizahlen

Der erste Satz dieses Kapitels beschreibt einen Zusammenhang zwischen Teilbarkeitsaussagen der Indizes und Teilbarkeitsaussagen der dazugehörigen Fibonaccizahl. Wie bereits im Abschnitt 2.1.3 Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen festgestellt wurde, ist f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von f_{2n} . Im nächsten Satz wird diese Aussage noch weiter verallgemeinert.

Satz 17

Sind m und n natürliche Zahlen mit $m \mid n$, so ist f_m ein Teiler von f_n .

Beweis:

Aufgrund der Voraussetzung gilt $n = km$ für ein passendes $k \in \mathbb{N}$. Wir führen den Beweis über eine Induktion nach k :

Gilt $k = 1$, so ist $m = n$ und die Aussage des Satzes ist richtig. Wir nehmen jetzt $f_m \mid f_{mk}$ an. Unter der Verwendung des Satzes 8 erhalten wir

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung ist durch f_m teilbar, der zweite ist es aufgrund der Induktionsvoraussetzung $f_m \mid f_{mk}$. Somit ist die rechte Seite der Gleichung durch f_m teilbar und daher ist f_m auch ein Teiler von $f_{m(k+1)}$. \diamond

Im Beweis des folgenden Satzes wird ein Widerspruchsbeweis verwendet. Diese Art einen Beweis zu führen, haben wir bereits im ersten Kapitel verwendet, und zwar, um die Irrationalität von π zu beweisen. Hier wird die Vorgehensweise noch einmal kurz erklärt: Wir nehmen das Gegenteil der Aussage des Satzes an, führen einen Widerspruch herbei und dadurch wird gezeigt, dass die Annahme falsch und somit die Aussage des Satzes richtig sein muss.

Satz 18

Zwei aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen sind teilerfremd.

Beweis:

Angenommen, die Aussage des Satzes ist falsch. Das bedeutet es gibt Fibonaccizahlen f_n und f_{n+1} , die von einem $d > 1$ geteilt werden. Dann ist natürlich auch ihre Differenz $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ durch d teilbar. Nach und nach erhält man dann $d \mid f_1 = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch. Somit gibt es keine zwei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen mit einem Teiler $d > 1$. \diamond

Wir stellen uns jetzt die Frage, ob es zu jeder natürlichen Zahl m eine Fibonaccizahl f_n gibt, für die $m \mid f_n$ gilt. Der folgende Satz bejaht diese Frage nicht nur, sondern hat auch weitreichende Konsequenzen. In diesem Beweis verwenden wir den Begriff der Restklassen.

Satz 19

Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ findet sich unter den ersten $m^2 - 1$ Fibonaccizahlen eine, die m als Teiler hat.

Beweis:

Man betrachte die Folge

$$(\bar{f}_0, \bar{f}_1), (\bar{f}_1, \bar{f}_2), (\bar{f}_2, \bar{f}_3), \dots, (\bar{f}_n, \bar{f}_{n+1}), \dots,$$

die aus Paaren von Restklassen modulo m von aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen besteht. Es gibt jeweils m Restklassen modulo m . Daher kann es maximal m^2 verschiedene Paare von Restklasse geben. Satz 18 zeigt, dass es sogar nur $m^2 - 1$ verschiedene Paare geben kann. Denn aus der Existenz eines Paares $(\bar{0}, \bar{0})$ folgt die Existenz zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen mit gemeinsamem Teiler $m \geq 2$. Das stellt allerdings einen Widerspruch zur Teilerfremdheit dar. Man kann daher unter den ersten m^2 Gliedern der obigen Folge mindestens zwei gleiche finden. Wir wählen $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1})$ aus und sagen, dass es das erste Glied der Folge ist, für das ein Paar $(\bar{f}_l, \bar{f}_{l+1})$ mit $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}) = (\bar{f}_l, \bar{f}_{l+1})$, $l > k$ existiert. Mithilfe eines Widerspruchsbeweises zeigen wir, dass $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}) = (\bar{0}, \bar{1})$, also $k = 0$, gilt:

Angenommen, es gilt $k \geq 0$. Aus $f_{l-1} = f_{l+1} - f_l$, $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$, also $\bar{f}_{l+1} = \bar{f}_{k+1}$, $\bar{f}_l = \bar{f}_k$ folgt $\bar{f}_{l-1} = \bar{f}_{k-1}$. Somit ist $(\bar{f}_{k-1}, \bar{f}_k)$ ein Paar, das zweimal in der Folge und sogar vor $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1})$ vorkommt. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1})$ das erste Paar mit dieser Eigenschaft ist. Daher muss $k = 0$ gelten.

Wir nehmen an, dass das Paar $(\bar{0}, \bar{1})$ in der Folge noch einmal an s -ter Stelle $(\bar{f}_s, \bar{f}_{s+1}) = (\bar{0}, \bar{1})$ mit $1 \leq s \leq m^2$ auftritt. Dann ist f_s wegen $f_s \equiv 0 \pmod{m}$ durch m teilbar und die Behauptung ist gezeigt. \diamond

Bemerkungen:

- Die gerade gezeigte Eigenschaft, dass jede natürliche Zahl als Teiler einer Fibonaccizahl auftritt, stellt eine Besonderheit der Fibonaccifolge dar.
- Satz 19 sagt weiters noch aus, dass sich auch alle Primzahlen als Teiler von Fibonaccizahlen finden lassen.
- Für eine Primzahl p kann man nach der kleinsten Fibonaccizahl suchen, die p als Teiler hat. Umgekehrt kann man sich die Frage stellen, ob jede Fibonaccizahl f_n einen Primteiler besitzt, der keine kleinere Fibonaccizahl f_k mit $k < n$ teilt. Ein solcher Primteiler heißt primitiver Primteiler von f_n . Allgemeiner nennt man eine natürliche Zahl m einen primitiven Teiler von f_n , falls $m \mid f_n$, aber $m \nmid f_k$ für alle $k < n$; $k \in \mathbb{N}$, gelten.
- Es kann gezeigt werden, dass fast alle Fibonaccizahlen primitive Primteiler haben. Ausgenommen davon sind nur die Fibonaccizahlen $f_1 = f_2 = 1$, $f_6 = 8$ und $f_{12} = 144$. Dieses Ergebnis ist aber nicht ganz einfach herzuleiten.

Im folgenden Satz wird ein weiterer Zusammenhang zwischen den Teilbarkeitseigenschaften einer Fibonaccizahl und ihrem Index hergestellt.

Satz 20

Ist die natürliche Zahl n zusammengesetzt (d.h. sie ist keine Primzahl) und von 4 verschieden, so ist auch die n -te Fibonaccizahl f_n zusammengesetzt.

Beweis:

Nach der Voraussetzung kann man n so darstellen:

$$n = n_1 * n_2 \text{ mit } 1 < n_1, n_2 < n \text{ und } n_1 > 2 \text{ oder } n_2 > 2$$

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_1 > 2$ annehmen. Aus Satz 17 folgt, dass $f_{n_1} \mid f_n$ gilt mit $1 < f_{n_1} < f_n$. Daraus folgt, dass auch f_n zusammengesetzt ist. \diamond

Bemerkungen:

- Die Umkehrung von Satz 20 gilt allerdings nicht, da es Fibonaccizahlen gibt, deren Index eine Primzahl ist, die aber selbst keine Primzahlen sind. Beispiele dafür sind $f_{19} = 4181 = 37 * 113$ und $f_{31} = 1346269 = 557 * 2417$.
- Die möglicherweise aufkommende Frage, ob unter den Fibonaccizahlen endlich oder unendlich viele Primzahlen vorkommen, konnte bisher noch nicht geklärt werden.

Mithilfe von Satz 20 kann ein einfacher Zusammenhang zwischen dem ggT zweier Fibonaccizahlen und dem ggT ihrer Indizes hergeleitet werden:

Satz 21

$$ggT(f_m, f_n) = f_{ggT(m,n)} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}$$

Insbesondere ist der ggT zweier Fibonaccizahlen also selbst wieder eine Fibonaccizahl.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $m > n$ annehmen. Dann liefert der euklidische Algorithmus:

$$m = nq_0 + r_1, \quad 0 \leq r_1 \leq n \quad (B_0)$$

$$n = r_1q_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 \leq r_1 \quad (B_1)$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 \leq r_2 \quad (B_2)$$

...

$$r_{t-2} = r_{t-1}q_{t-1} + r_t, \quad 0 \leq r_t \leq r_{t-1} \quad (B_{t-2})$$

$$r_{t-1} = r_tq_t \quad (B_{t-1})$$

Mithilfe von (B_0) können wir $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0+r_1}, f_n)$ schreiben. Satz 8 liefert $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1} + f_{nq_0}f_{r_1+1}, f_n)$. Daraus folgt mit Satz 17 und der Voraussetzung: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Aus $b \mid c$ folgt $ggT(a, b) = ggT(a + c, b)$,

dass $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1}, f_n)$. Aufgrund von $f_n \mid f_{nq_0}$ muss $ggT(f_n, f_{nq_0-1}) = 1$ sein. Denn ansonsten würde es eine Zahl $d > 1$ mit $d \mid f_n$ und $d \mid f_{nq_0-1}$ geben. Damit hätten f_{nq_0} und f_{nq_0-1} wegen $f_n \mid f_{nq_0}$ einen gemeinsame Teiler $d > 1$, was nach Satz 18 ausgeschlossen ist. Folglich können wir die Voraussetzung: Ist $ggT(a, c) = 1$, so gilt $ggT(a, bc) = ggT(a, b)$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ anwenden und erhalten $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{r_1}, f_n)$. Genauso beweisen wir sukzessive

$$ggT(f_{r_1}, f_n) = ggT(f_{r_2}, f_{r_1})$$

$$ggT(f_{r_2}, f_{r_1}) = ggT(f_{r_3}, f_{r_2})$$

...

$$ggT(f_{r_{t-1}}, f_{r_{t-2}}) = ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}})$$

Ein Kombinieren all dieser Gleichungen ergibt $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}})$. Wegen (B_{t-1}) ist $f_{r_{t-1}}$ nach Satz 17 durch f_{r_t} teilbar. Somit gilt $ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}}) = f_{r_t} = f_{ggT(m,n)}$. \diamond

Satz 21 macht es uns möglich auch die Umkehrung von Satz 17 zu beweisen.

Satz 22

Aus $f_m \mid f_n$ folgt $m \mid n$.

Beweis:

Wenn f_m ein Teiler von f_n ist, so gilt $ggT(f_n, f_m) = f_m$. Satz 21 sagt: $ggT(f_m, f_n) = f_{ggT(m,n)}$. Beide Gleichungen zusammen ergeben $f_m = f_{ggT(m,n)}$, also gilt $m = ggT(n, m)$ und insbesondere $m \mid n$. \diamond

Satz 17 und Satz 22 kann man- wie folgt- zu einer einzigen Aussage zusammenfassen:

Satz 23

f_n ist genau dann durch f_m teilbar, wenn n durch m teilbar ist.

Dieser Satz ermöglicht es viele interessante Folgerungen über Teilbarkeitseigenschaften von Fibonaccizahlen herzustellen, wenn wir kleine Fibonaccizahlen betrachten. Beispielsweise wählt man $f_3 = 2$ aus: Nach dem Satz gilt $f_3 \mid f_n$ genau dann, wenn $3 \mid n$. Auf entsprechende Art kann man auch $f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13$ oder $f_8 = 21$ wählen und erhält somit weitere Teilbarkeitsaussagen. Einige davon sind im folgenden Korollar angeführt:

Korollar 24

Eine Fibonaccizahl ist genau dann

- a) gerade, wenn ihr Index durch 3 teilbar ist.
- b) durch 3 teilbar, wenn ihr Index durch 4 teilbar ist.
- c) durch 5 teilbar, wenn ihr Index durch 5 teilbar ist.

- d) durch 8 teilbar, wenn ihr Index durch 6 teilbar ist.
- e) durch 13 teilbar, wenn ihr Index durch 7 teilbar ist.
- f) durch 21 teilbar, wenn ihr Index durch 8 teilbar ist.

Schauen wir uns den Fall d) genauer an, können wir erkennen, dass $f_6 = 8$ die kleinste durch 4 teilbare Fibonaccizahl ist. Es stellt sich jetzt die Frage, ob es eine Fibonaccizahl gibt die durch 4 teilbar, aber nicht durch 8 teilbar ist. Diese Frage wird im folgenden Satz beantwortet.

Satz 25

f_r ist genau dann die kleinste durch m teilbare Fibonaccizahl, wenn jede durch m teilbare Fibonaccizahl f_s auch durch f_r teilbar ist.

Beweis:

Sei jede durch m teilbare Fibonaccizahl f_s auch durch f_r teilbar. Trivialerweise ist dann $f_r \leq f_s$ und daher ist f_r die kleinste durch m teilbare Fibonaccizahl.

Falls nun umgekehrt f_r die kleinste durch m teilbare Fibonaccizahl ist und f_s eine beliebige durch m teilbare Fibonaccizahl, dann ist natürlich $ggT(f_r, f_s) \leq f_r$. Aus Satz 21 folgt $m \mid ggT(f_r, f_s) = f_{ggT(r,s)}$. Dann muss $ggT(f_r, f_s) = f_r$ gelten, denn sonst wäre $f_{ggT(r,s)} < f_r$ eine durch m teilbare Fibonaccizahl im Widerspruch zur Annahme, dass f_r die kleinste derartige Fibonaccizahl ist. \diamond

Aufgrund von Satz 25 gibt es also keine Fibonaccizahl, die durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist, da 8 die kleinste durch 4 teilbare Fibonaccizahl ist. Nach demselben Prinzip folgt, dass jede durch 7 teilbare Fibonaccizahl durch 21 und somit auch durch 3 teilbar ist, weil $f_8 = 21$ die kleinste durch 7 teilbare Fibonaccizahl ist.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wird noch eine Aussage darüber getätigt wie Teiler von Fibonaccizahlen aussehen können.

Satz 26

Alle ungeraden Teiler von Fibonaccizahlen mit ungeraden Indizes haben die Form $4k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann gilt $f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + 1$ nach Satz 11, also $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = f_{n-1}(f_{n-1} + f_n) - f_n^2 = f_{n-1}^2 + f_{n-1}f_n - f_n^2 = -1$ und somit gilt $f_{n-1}^2 + 1 + f_{n-1}f_n - f_n^2 \equiv 0 \pmod{f_n}$ und weiter $f_{n-1}^2 + 1 \equiv 0 \pmod{f_n}$. Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, die f_n teilt. Dann ist $f_{n-1}^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, und daraus folgt $f_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Durch Potenzieren erhält man $(f_{n-1}^2)^{\frac{p-1}{2}} = f_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Nach Satz 18 sind f_{n-1} und f_n teilerfremd. Damit sind die Voraussetzungen des kleinen Satzes von Fermat erfüllt. Andererseits haben wir $f_{n-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Das kann allerdings nur richtig sein, wenn $\frac{p-1}{2}$ gerade ist, also z.B. $\frac{p-1}{2} = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ergibt sich $p - 1 = 4k$, also $p = 4k + 1$, wie behauptet. Alle ungeraden Primteiler von f_n haben daher die Form $4k + 1$. Jeder ungerade Teiler von f_n ist ein Produkt solcher Primzahlen. \diamond

2.5.2 Fibonaccizahlen und Binomialkoeffizienten

Im folgenden Teil werden Zusammenhänge zwischen Fibonaccizahlen mit den Binomialkoeffizienten untersucht. Es werden ebenfalls Summenformeln betrachtet, in denen Binomialkoeffizienten vorkommen.

Zuerst wird allerdings eine Definition benötigt:

Definition 2.2

Für eine reelle Zahl a bedeutet die Gaußklammer $[a]$ („das größte Ganze von a “) die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

Zur Veranschaulichung der Definition folgt ein Beispiel: Für eine natürliche Zahl n ist $\left[\frac{n}{2}\right]$ gleich $\frac{n}{2}$, wenn n gerade ist, und gleich $\frac{n-1}{2}$ für ungerades n .

Die Gaußklammer erfüllt folgenden Zusammenhang, der für den weiteren Verlauf noch hilfreich sein wird:

Lemma 27

Für natürliche Zahlen m, n und r gilt:

$$\left[\frac{m+n}{r}\right] \geq \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right]$$

Beweis:

Es gilt $\left[\frac{m}{r}\right] \leq \frac{m}{r}$ und $\left[\frac{n}{r}\right] \leq \frac{n}{r}$; mit geeigneten $a, b \in [0, 1[$ können wir also $\frac{m}{r} = \left[\frac{m}{r}\right] + a$, $\frac{n}{r} = \left[\frac{n}{r}\right] + b$ schreiben. Dann ist $\frac{m+n}{r} = \left[\frac{m}{r}\right] + a + \left[\frac{n}{r}\right] + b = \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right] + (a+b)$. Wenn $a+b < 1$ ist, gilt $\left[\frac{m+n}{r}\right] = \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right]$. Ist aber $1 \leq a+b \leq 2$, so ist $\left[\frac{m+n}{r}\right] = \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right] + 1$. In beiden Fällen gilt daher $\left[\frac{m+n}{r}\right] \geq \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right]$. \diamond

Nach diesen Vorüberlegungen kann jetzt ein erster Satz formuliert werden, der den Zusammenhang von Fibonaccizahlen und Binomialkoeffizienten beinhaltet:

Satz 28

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}$$

Beweis:

durch vollständige Induktion nach n .

$n = 1$: In diesem Fall ist $\left[\frac{n}{2}\right] = 0$, und die rechte Seite der Gleichung verkürzt sich zu $\binom{n-k}{k} = \binom{1}{0} = 1 = f_2$.

$n = 2$: Hier ist $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 1$; die rechte Seite der Gleichung wird zu $\binom{2-0}{0} + \binom{2-1}{1} = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = f_3$.

Nun sei die Behauptung bereits für $n-1$ und n gezeigt. Für $n+1$ ergibt sich mit der Voraussetzung $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \right] = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k-1}$$

Ist $n+1$ ungerade, so ist $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, also reicht es in diesem Fall weiter zu schreiben

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k-1} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-l-1}{l}$$

Letzteres gilt wegen $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} - 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich für den ersten Summanden f_{n+1} und für den zweiten Summanden f_n , daher insgesamt $f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$, wie es gefordert war.

Für gerades $n+1$ gilt $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, also erhalten wir in diesem Fall

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} \binom{n-k}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + \binom{n - \frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} + \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1} \binom{n-l-1}{l} + \binom{n - \frac{n+1}{2} - 1}{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1} \binom{n-l-1}{l} + \binom{n - \frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} + \binom{n - \frac{n+3}{2}}{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

Da die beiden letzten Summanden nach Definition des Binomialkoeffizienten null sind, erhält man wie im ersten Fall f_{n+2} als Wert der Summe.

Damit ist der Satz vollständig gezeigt. \diamond

Weiters gilt folgende Summenformel:

Satz 29

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k+m} = f_{2n+m}$$

Beweis:

Die Bezeichnungen werden so gewählt, wie es bereits in Satz 13 getan wurde, und die Formel von Binet wird angewendet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k+m} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\Phi^{k+m} - \psi^{k+m}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi^{k+m} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{k+m} \right]\end{aligned}$$

Aus dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$(1 + \Phi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \Phi^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi^k$$

bzw.

$$(1 + \psi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \psi^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^k$$

Somit erhalten wir weiter:

$$\sum_{k=0}^n f_{k+m} \binom{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^m (1 + \Phi)^n - \psi^m (1 + \psi)^n]$$

Nach dem Satz 14 gilt $1 + \Phi = \Phi^2$ und $1 + \psi = \psi^2$; damit ergibt sich

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^m \Phi^{2n} - \psi^m \psi^{2n}] = \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^{2n+m} - \psi^{2n+m}] = f_{2n+m}$$

was zu zeigen war. \diamond

2.6 Fibonaccizahlen in der Analysis

2.6.1 Folgen mit dem Grenzwert Φ

In diesem Teilabschnitt wird es um jene Folgen gehen, deren Grenzwert die bereits bekannte Zahl $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist. Φ wird auch als „goldene Zahl“ bezeichnet. Warum das so ist, wird in einem späteren Kapitel, dem Kapitel 2.7.2 Der goldene Schnitt, in dem die Zahl Φ eine Hauptrolle spielt, genauer beschrieben.

Man betrachte nun die Folge $\{x_n\}$, die gegeben ist durch

$$x_0 := 1, x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n} \quad (23)$$

Diese Folge beschreibt den unendlichen Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (24)$$

Zwischen diesem Kettenbruch bzw. der durch (23) definierten Folge $\{x_n\}$ und der reellen Zahl Φ besteht der folgende Zusammenhang:

Satz 30

Für die Folgenglieder x_n der durch (23) definierten Folge gilt:

$$|x_n - \Phi| \leq \frac{1}{\Phi^{n+1}} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Phi.$$

Beweis:

In Kapitel 2.2 Lineare Rekursion und die Formel von Binet haben wir gesehen, dass Φ die Beziehung $\Phi^2 = \Phi + 1$, oder, wenn durch Φ dividiert wurde, die Beziehung $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ erfüllt. Mit der Rekursionsformel (23) für die Folge $\{x_n\}$ erhält man weiter

$$\begin{aligned} |x_n - \Phi| &= \left| 1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \Phi \right| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{\Phi} \right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{\Phi} \right| \\ &= \left| \frac{\Phi - x_{n-1}}{\Phi x_{n-1}} \right| = \frac{|x_{n-1} - \Phi|}{\Phi x_{n-1}} \end{aligned}$$

Durch wiederholtes Anwenden der Rekursionsformel (23) ergibt schließlich

$$|x_n - \Phi| = \frac{|x_0 - \Phi|}{\Phi^n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0} = \frac{\left| 1 - \left(1 + \frac{1}{\Phi} \right) \right|}{\Phi^n x_{n-1} \dots x_0} = \frac{1}{\Phi^{n+1} x_{n-1} \dots x_0} \quad (25)$$

Der Ausdruck ganz rechts muss jetzt in geeigneter Weise abgeschätzt werden. Dazu zeigen wir durch vollständige Induktion $x_n > 1$ für natürliche Zahlen $n \geq 1$. Nach der Definition sind $x_0 = 1$ und $x_1 = 1 + 1 = 2 > 1$. Ist bereits $x_n > 1$ bekannt, so gilt nach der Rekursionsformel

(23) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$, da aufgrund der Induktionsvoraussetzung $0 < \frac{1}{x_n} < 1$ gilt. Somit ist tatsächlich $x_n > 1$ für $n \geq 1$, wie behauptet.

Daher ist der Term im Nenner des letzten Ausdrucks von (25) auf jeden Fall größer als Φ^{n+1} und der Kehrwert davon kleiner als $\frac{1}{\Phi^{n+1}}$. Es folgt also, wie wir zeigen wollten, $|x_n - \Phi| < \frac{1}{\Phi^{n+1}}$.

Da $\Phi > 1$ ist, gilt $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \Phi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi^{n+1}} = 0$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Phi$. \diamond

Im gerade bewiesenen Satz ist auch die folgende Aussage enthalten:

Korollar 31

Der unendliche Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

stellt die irrationale Zahl Φ dar.

In Satz 30 steckt nicht nur obiges Korollar, sondern er enthält auch eine wichtige und interessante Aussage über den Grenzwert des Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen.

Satz 32

Für den Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen gilt

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi \right| = \frac{1}{f_n} * \frac{1}{\Phi^{n+1}}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi.$$

Beweis:

Nach der Definition der Fibonaccifolge ist $\frac{f_2}{f_1} = 1$ und

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}$$

Die Folge $\left\{ \frac{f_{n+1}}{f_n} \right\}$ (die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen) stimmt also mit der in Satz 30 betrachteten Folge $\{x_n\}$ überein. Daraus lässt sich sofort die Aussage über den Grenzwert ableiten.

Aus Gleichung (25) folgt außerdem sofort

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi \right| = \frac{1}{\Phi^{n+1} \frac{f_n \cdots f_2}{f_{n-1} \cdots f_1}} = \frac{1}{f_n} * \frac{1}{\Phi^{n+1}}$$

wie behauptet. \diamond

Die erste Gleichung des Satzes 32 zeigt, dass sich das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen immer mehr der Zahl Φ annähert. Die beiden vorkommenden Brüche $\frac{1}{\Phi^{n+1}}$ und $\frac{1}{f_n}$ werden nämlich für wachsendes n schnell sehr klein. Betrachtet man den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, dann sieht man, dass dieser gleich Φ ist, was die zweite Gleichung im Satz 32 ausdrückt. Das Verhältnis nähert sich also dem goldenen Schnitt an. Die folgende Abbildung veranschaulicht, wie sich das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen dem Grenzwert Φ annähert: es nähert sich nämlich abwechselnd von oben und unten durch zwei verschiedene Teilfolgen immer mehr der Zahl Φ an.

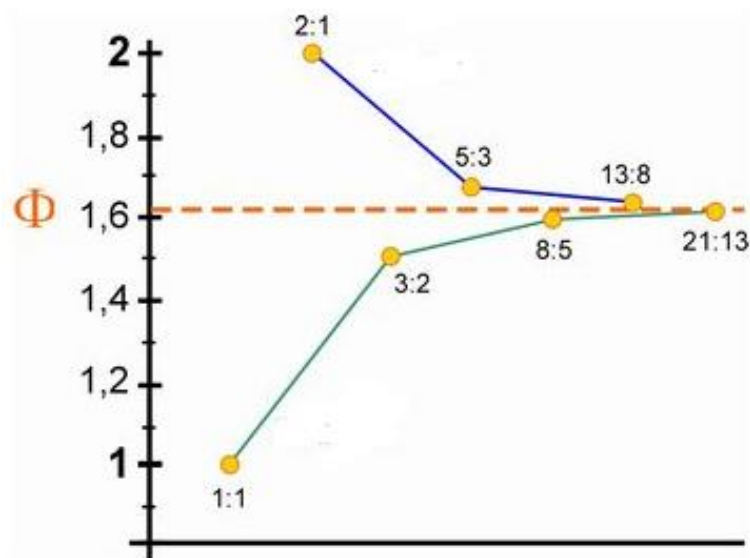


Abbildung 6: Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016)

Auf ähnlicher Weise wie den Kettenbruch bei (24), kann man eine „geschachtelte“ Wurzel durch die Folge $\{y_n\}$ mit

$$y_0 = 1 \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n} \quad (26)$$

definieren.

Satz 33

Für die durch (26) definierte Folge $\{y_n\}$ gilt:

$$|y_n - \Phi| \leq \frac{1}{\Phi^{2n+1}} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \Phi.$$

Beweis:

Durch vollständige Induktion wird zuerst $y_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Nach Definition ist $y_0 = 1$; sei also für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits $y_n \geq 1$ gezeigt. Dann gilt $y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n} \geq \sqrt{2} \approx 1,4142$, also $y_{n+1} \geq 1$ wie behauptet.

Nun können wir – wieder mithilfe der Beziehung $\Phi^2 = \Phi + 1$ – abschätzen. Bei der zweiten Umformung wurde die dritte binomische Formel verwendet.

$$\begin{aligned} |y_n - \Phi| &= \left| \sqrt{1 + y_{n-1}} - \Phi \right| = \left| \frac{1 + y_{n-1} - \Phi^2}{\sqrt{1 + y_{n-1}} + \Phi} \right| \\ &= \left| \frac{1 + y_{n-1} - (\Phi + 1)}{y_n + \Phi} \right| = \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{y_n + \Phi} \\ &\leq \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{1 + \Phi} = \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{\Phi^2} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wenden wir nach und nach auf den letzten Teil der Ungleichungskette an, bis wir schließlich y_0 erreichen. Das bedeutet wir erhalten

$$|y_n - \Phi| \leq \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{\Phi^2} \leq \dots \leq \frac{|y_0 - \Phi|}{\Phi^{2n}} = \frac{1}{\Phi^{2n+1}}$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen wie im letzten Schritt der Gleichungskette (25) umgeformt wurde.

Da $\Phi > 1$ ist, gilt $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \Phi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi^{2n+1}} = 0$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \Phi$. \diamond

Aufgrund der Definition der „geschachtelten“ Wurzel, folgt aus diesem Satz sofort

Korollar 34

Die „geschachtelte“ Wurzel

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

hat den Grenzwert Φ .

2.6.2 Reihen mit Fibonaccizahlen**Definition 2.3**

Sei $\{r_n\}$ eine Folge reeller Zahlen. Durch

$$s_n := \sum_{i=0}^n r_i \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert man eine neue Folge $\{s_n\}$; diese Folge nennt man Reihe und man bezeichnet sie mit $\sum r_i$ oder $\sum_i r_i$. Dabei sind s_n die n -te Partialsumme und r_i der i -te Summand der Reihe $\sum r_i$. Eine Reihe ist also die Folge ihrer Partialsummen.

Eine Reihe $\sum r_i$ konvergiert, wenn die Folge $\{s_n\}$ ihrer Partialsummen konvergiert. In diesem Fall wird die Reihe als konvergent bezeichnet. Der (eindeutig bestimmte) Grenzwert von $\{s_n\}$ wird der Wert der Reihe $\sum_i r_i$ genannt und mit $\sum_{i=0}^{\infty} r_i$ bezeichnet.

Die Sätze, die für Grenzwerte von Folgen gelten, besitzen ihre Gültigkeit auch für Reihen. Daher können wir gleich folgenden Satz formulieren und beweisen:

Satz 35

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}} = 1$$

Beweis:

Es gilt

$$\frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+2} - f_n}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+1}}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{1}{f_n f_{n+2}}$$

Damit erhält man für die n -te Partialsumme

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i f_{i+2}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{f_i f_{i+1}} - \frac{1}{f_{i+1} f_{i+2}} \right) = \frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}$$

Wegen $f_1 = f_2 = 1$ hat der Summand $\frac{1}{f_1 f_2}$ den Wert 1, und der Term $\frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}$ geht für wachsendes n gegen null. Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} \right) = 1$$

und die Behauptung ist gezeigt. \diamond

Wenn wir die Folge der Inversen der Fibonaccizahlen $\left\{ \frac{1}{f_n} \right\}$ für $n \in \mathbb{N}^*$ betrachten, verhält es sich etwas anders. Wir wissen nämlich, dass die Fibonaccizahlen nicht nur beliebig groß werden können, sondern sogar streng monoton wachsen, denn für $m, n \geq 2$ gilt $f_m < f_n$ für $m < n$. Das bedeutet für die Inversen der Fibonaccizahlen folgendes:

- $\frac{1}{f_m} > \frac{1}{f_n}$ für $m < n$, d.h. die Folge $\left\{ \frac{1}{f_n} \right\}$ ist streng monoton fallend;
- $\left\{ \frac{1}{f_n} \right\}$ ist eine Nullfolge.

Durch die letzte Erkenntnis ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ erfüllt. Es ist aber Vorsicht geboten, denn die Folge $\left\{ \frac{1}{f_n} \right\}$ ist eine Teilfolge der Folge $\left\{ \frac{1}{f_n} \right\}$, und die zugehörige Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ – die harmonische Reihe – zählt zu einem der Standardbeispiele nicht konvergenter Reihen. Daher müssen wir jetzt die Folge der Partialsummen genauer betrachten. Dazu setzen wir

$$S_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i}$$

Zunächst einmal gilt $\frac{1}{f_1} = 1$ und für $n \geq 1$ entsteht S_{n+1} dadurch aus S_n , dass ein positiver Summand, nämlich $\frac{1}{f_{n+1}}$, dazuaddiert wird. Somit gilt

$$1 \leq S_n, n \in \mathbb{N}^* \quad (27)$$

Des Weiteren ist die Folge $\{S_n\}$ streng monoton wachsend. Wir wollen die Folge jetzt nach oben abschätzen. Dazu brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 36

Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\Phi^{n-1} < \Phi^n - \Psi^n$$

Beweis:

durch vollständige Induktion.

Für $n = 1$ ist die Behauptung aufgrund von $1 < \Phi - \Psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ richtig.

Für $n = 2$ gilt $\Phi^2 - \Psi^2 = (\Phi - \Psi)(\Phi + \Psi) = \sqrt{5} * 1 = \sqrt{5} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, was die Behauptung ebenfalls zeigt.

Nun nehmen wir an, dass für ein n bereits

$$\Phi^{n-1} < \Phi^n - \Psi^n$$

richtig ist. Wir müssen jetzt die Richtigkeit von

$$\Phi^n < \Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}$$

zeigen. Damit dies möglich ist, schauen wir uns den Term

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi - \Psi * \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n \geq \Phi - \left|\Psi \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n\right|$$

an. Im letzten Schritt wurde benutzt, dass für beliebige reelle Zahlen x und y stets $x - y \geq x - |y|$ gilt. Wegen $\left|\frac{\Psi}{\Phi}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ gilt

$$\Phi - \left|\Psi \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n\right| = \Phi - |\Psi| \left|\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n\right| > \Phi - |\Psi| = 1$$

Durch das Zusammenführen der beiden Abschätzungen erhält man

$$1 < \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\Phi^n}$$

oder, wenn man mit Φ^n multipliziert

$$\Phi^n < \Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}$$

was zu zeigen war. \diamond

Durch Lemma 36 erhalten wir für $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{f_n} = \frac{\sqrt{5}}{\Phi^n - \psi^n} < \frac{\sqrt{5}}{\Phi^{n-1}}$$

Daraus ergibt sich für die n -te Partialsumme die Abschätzung

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} < \sqrt{5} * \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Phi^{i-1}}$$

Schaut man sich die rechte Seite der Ungleichung genauer an, dann erkennt man eine Partialsumme einer geometrischen Reihe. Bei geometrischen Reihen $\sum_{i=0}^n q^i$ mit $|q| < 1$ gilt die Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad (28)$$

Daher gilt in unserem Fall

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i} < \sqrt{5} * \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi * \sqrt{5}}{\Phi - 1} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} < 6$$

Zusammen mit (27) liefert das

$$1 < S_n < 6 \quad (29)$$

In der Sprache der Analysis bedeutet das: Die Folge der Partialsummen S_n ist beschränkt. Oben haben wir schon bemerkt, dass sie auch streng monoton wachsend ist. Wir wissen, dass jede monotone und beschränkte Folge konvergent ist.

Damit ist auf alle Fälle klar:

Satz 37

Die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i}$$

konvergiert gegen einen Grenzwert $S \in \mathbb{R}$.

„Sehr viel mehr kann man jedoch nicht zu diesem Grenzwert S sagen: Man weiß zwar, dass er existiert, aber man kennt seinen genauen Wert nicht. Immerhin ist bekannt, dass S irrational ist, doch bedarf es noch einiger Arbeit, um S explizit zu bestimmen“ (Lausch, 2009, S. 111).

2.7 Fibonaccizahlen in der Geometrie

In diesem Kapitel wird die Bedeutung der Fibonaccizahlen in der Geometrie hervorgehoben. Es gibt in diesem Bereich allerdings sehr vielfältige und verschiedene Anwendungsbereiche. Daher kann hier nur ein Teil davon exemplarisch vorgestellt werden. Ausgewählt wurden rechtwinkelige Dreiecke, der goldene Schnitt – der wahrscheinlich den bekanntesten Zusammenhang mit den Fibonaccizahlen darstellt – und die Fibonaccispirale, wozu auch kurz goldene Rechteck vorgestellt werden.

2.7.1 Rechtwinkelige Dreiecke

Mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit ist jedem und jeder aus seiner Schulzeit der Satz von Pythagoras noch ein Begriff. Dieser stellt einen zentralen Satz im Geometrieunterricht dar und ist auch hier von Bedeutung. Er lautet wie folgt: In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die Quadrate über den beiden Katheten zusammen. Das bedeutet ist gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (30)$$

Die Umkehrung des Satzes ist ebenfalls richtig: Wenn die Seiten eines Dreiecks die Beziehung (30) erfüllen, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C; der rechte Winkel liegt der längsten Seite c gegenüber.

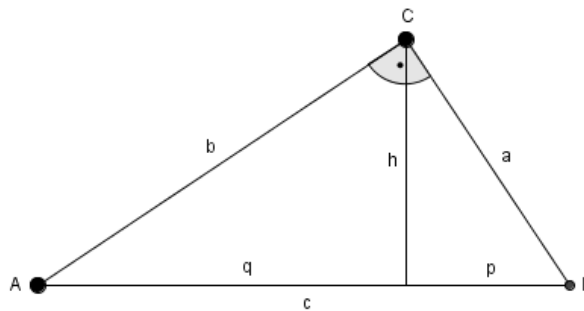


Abbildung 7: Rechtwinkeliges Dreieck; (selbst erstellt)

Es sollen auch die weiteren Sätze, die in einem rechtwinkligen Dreieck gelten, hier ihren Platz finden und angegeben werden:

Kathetensatz:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, dessen Seitenlängen die Länge des anliegenden Hypotenusenabschnitts und die Länge der Hypotenuse sind. Es gilt also:

$$a^2 = p * c, b^2 = q * c.$$

Höhensatz:

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, dessen Seitenlängen die Längen der beiden Hypotenusenabschnitte sind. Ausgedrückt in einer Formel bedeutet das:

$$h^2 = p * q.$$

Schon vor langer Zeit, nämlich bereits im alten Ägypten, kannte man eine Hilfskonstruktion, um rechte Winkel herstellen zu können. Man verwendete dazu eine Knotenschnur mit zwölf, in gleichen Abständen geknüpften, Knoten. Mithilfe dieser Schnur bildete man ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 Knotenabständen. Dieses Dreieck ist aufgrund der Beziehung $3^2 + 4^2 = 5^2$ rechtwinkelig. Von besonderem Interesse sind daher die Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b und c , die (30) erfüllen. Zahlentripel dieser Form bezeichnet man als pythagoreische Tripel. Interessant ist die Tatsache, dass Fibonaccizahlen dazu verwenden werden können, ebendiese pythagoreischen Tripel zu bilden:

Satz 38

Die Zahlen $a_n = 2f_n f_{n-1}$, $b_n = f_n^2 - f_{n-1}^2$ und $c_n = f_{2n-1}$ bilden für $n > 2$ ein pythagoreisches Tripel mit $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$.

Beweis:

Es gilt $a_n^2 + b_n^2 = (2f_n f_{n-1})^2 + (f_n^2 - f_{n-1}^2)^2 = 4f_n^2 f_{n-1}^2 + f_n^4 - 2f_n^2 f_{n-1}^2 + f_{n-1}^4 = f_n^4 + 2f_n^2 f_{n-1}^2 + f_{n-1}^4 = (f_n^2 + f_{n-1}^2)^2$. Nach der Formel $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$ (die mithilfe von Satz 8 auf Seite 32 gezeigt wurde) ist $f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$, woraus sofort die Behauptung folgt. \diamond

Beispiel:

Sei $n = 6$, also $a = 2f_6 f_5 = 2 \cdot 8 \cdot 5 = 80$, $b = f_6^2 - f_5^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$, $c = f_{11} = 89$. Damit erhält man $a^2 + b^2 = 80^2 + 39^2 = 6400 + 1521 = 7921 = 89^2$. Also ist das Tripel $(80; 39; 89)$ ein pythagoreisches Tripel.

Auch mit vier aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen f_n, f_{n+1}, f_{n+2} und f_{n+3} kann ein pythagoreisches Tripel erzeugt werden:

Satz 39

Setzt man $a_n = f_n f_{n+3}$, $b_n = 2f_{n+1} f_{n+2}$ und $c_n = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 = f_{2n+3}$, so bilden (a_n, b_n, c_n) für $n \geq 1$ ein pythagoreisches Tripel mit $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$.

Beweis:

Man hat $a_n^2 + b_n^2 = (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2$. Das Einsetzen von $f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$ und $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$ bringt das Ergebnis $a_n^2 + b_n^2 = [(f_{n+2} - f_{n+1})(f_{n+2} + f_{n+1})]^2 + 4f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 = (f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2)^2 + 4f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 = (f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2)^2 = c_n^2$, was zu zeigen war. Wegen $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$ gilt außerdem $c_n = f_{2n+3}$. \diamond

Beispiel:

Wir wählen wieder $n = 6$, also $f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34$ und setzen $a = 8 \cdot 34 = 272$, $b = 2 \cdot 13 \cdot 21 = 546$ und $c = 13^2 + 21^2 = 169 + 441 = 610$. Damit gilt $a^2 + b^2 = 272^2 + 546^2 = 73984 + 298116 = 372100 = 610^2$, d.h. $(272; 546; 610)$ ist ein pythagoreisches Tripel.

2.7.2 Der goldene Schnitt

Der goldene Schnitt ist wahrscheinlich der bekannteste Zusammenhang mit den Fibonaccizahlen. Auch hier gibt es viele interessante Erkenntnisse, die nicht alle erwähnt werden können. Es geht in diesem Teilabschnitt um die besondere Art der Teilung einer Strecke, die der goldene Schnitt ist. Anhand eines Beispiels wird die Bedeutung des goldenen Schnitts für die Bereiche der Architektur, Kunst und Kultur gezeigt. Diese Teilung wird nämlich als besonders harmonisch und schön empfunden. Weiters wird vorgestellt, wie der goldene Schnitt mithilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Teilung einer Strecke

Zunächst wird der Begriff „Teilverhältnis“ allgemein erklärt. Anschließend wird die besondere Art der Teilung einer Strecke, die man als goldenen Schnitt bezeichnet, untersucht.

Definition 2.4

Wenn man eine Strecke $[AB]$ durch den Punkt T auf der Geraden AB teilt, dann entsteht ein Zahlenverhältnis $\overline{AT}:\overline{TB} = \lambda$. Dieses Verhältnis wird als Teilverhältnis der Streckenlänge \overline{AT} und \overline{TB} bezeichnet. Man kann auch sagen, dass T die Strecke $[AB]$ im Verhältnis λ teilt. Der Punkt T kann entweder innerhalb oder außerhalb der Strecke $[AB]$ liegen. Im ersten Fall ist T ein sogenannter innerer Teilpunkt von $[AB]$, im zweiten Fall spricht man von einem äußeren Teilpunkt.

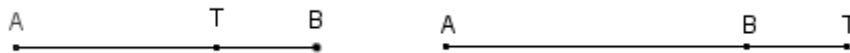


Abbildung 8: Teilung einer Strecke; (selbst erstellt)

Teilt man die Strecke $[AB]$ innen, dann wird diese Teilung als besonders harmonisch angesehen, wenn sich die Länge der größeren der beiden Teilstrecken zur Länge der kleineren so verhält wie die Länge der Gesamtstrecke zur Länge der größeren Strecke. Ausgedrückt durch eine Formel bedeutet das: wenn das Verhältnis

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AT}}$$

gilt, wobei $\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB}$; daraus ergibt sich

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT} + \overline{TB}}{\overline{AT}} \quad (31)$$

In diesem Fall spricht man von einer Teilung im Verhältnis des goldenen Schnitts.

Formt man die Gleichung (31) um, erhält man

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = 1 + \frac{\overline{TB}}{\overline{AT}}$$

Bezeichnet man das Teilverhältnis $\overline{AT}:\overline{TB}$ mit $\Phi = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$, so gilt

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Diese Gleichung ist uns bereits im Kapitel der Formel von Binet begegnet. Sie hat die Lösungen

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

und

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

wobei auch jetzt wieder die Bezeichnungen von Satz 13 verwendet wurden. Φ wird auch goldene Zahl genannt. Für Φ und ψ gelten Satz 13 sowie die Beziehungen

$$\begin{aligned}\Phi + \psi &= 1 \\ \Phi - \psi &= \sqrt{5} \\ \Phi\psi &= -1\end{aligned}$$

Für die Teilung einer Strecke im Verhältnis des goldenen Schnitts findet man manchmal auch die Bezeichnung stetige Teilung. Dieser Name lässt sich durch die folgende Eigenschaft der Teilung im Verhältnis des goldenen Schnitts erklären:

Lemma 40

Verhalten sich die Längen a und b zweier Strecken im Verhältnis des goldenen Schnitts zueinander, so gilt dies auch für die Strecken der Längen b und $a - b$, d.h. $\frac{a}{b} = \Phi = \frac{b}{a-b}$.

Beweis:

Sei $\frac{a}{b} = \Phi$, also $a = \Phi \cdot b$. Dann gilt $\frac{b}{a-b} = \frac{b}{(\Phi-1)b} = \frac{1}{\Phi-1} = \Phi$. \diamond

Beispiel eines Bauwerkes im goldenen Schnitt

Der Parthenon in Athen zählt sicherlich zu einem der bekanntesten klassischen Bauwerke. Dieser berühmte Tempel wurde rund 450 v. Chr. unter Perikles errichtet und krönt die Akropolis. Betrachtet man diesen Tempel genauer, kann man nicht nur Bauteile finden, die im goldenen Schnitt errichtet wurden, sondern auch viele Beispiele für Symmetrie und architektonische Genauigkeit. Die Umsetzung des goldenen Schnitts in der Architektur soll zum einen die Schönheit noch mehr zum Ausdruck bringen, auf der anderen Seite wurde der goldene Schnitt dazu verwendet das göttliche Ideal darzustellen und sich diesem anzunähern.

In den beiden schemenhaften Abbildungen (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016) des Tempels werden die Bauteile, die in ihren Proportionen dem goldenen Schnitt entsprechen, gezeigt und im Folgenden kurz erläutert.



Abbildung 9: Tempel im goldenen Schnitt 1; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016)

Abbildung 9 zeigt das Verhältnis des Unter- zum Überbau des Tempels. Der Tempel wird anhand einer gedachten horizontalen Linie in zwei Abschnitte gegliedert. Als Unterbau bezeichnet man den tragenden Teil des Tempels, also die Säulen und die Stufen. Zum Überbau rechnet man den Bereich des Giebels bis hin zu den tragenden Säulen. Diese beiden Teile stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts. Dabei entspricht der Unterbau der größeren Strecke, wird daher als Major bezeichnet, und der Überbau der kürzeren Strecke, die daher mit dem Begriff Minor in der Abbildung eingezeichnet ist.

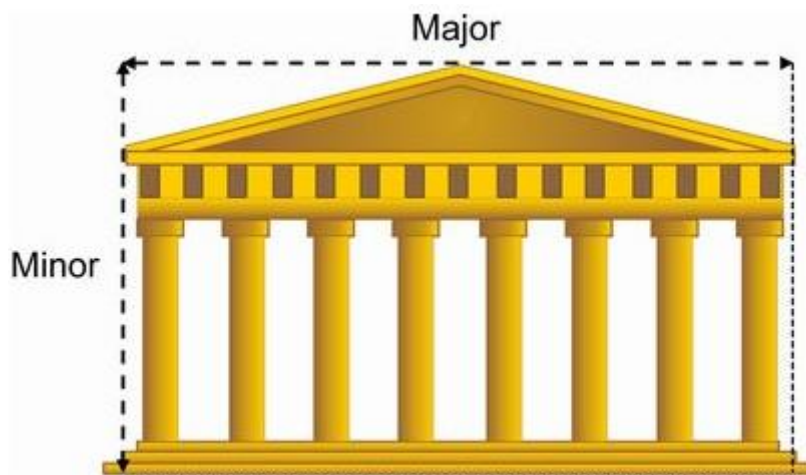


Abbildung 10: Tempel im goldenen Schnitt 2; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016)

In Abbildung 10 wird um den Tempel ein gedachtes Rechteck errichtet. Dabei entspricht die Höhe dem Bereich von der Grundlinie der Treppe bis hin zur Spitze des Giebels. Als Breite bezeichnet man die Breite des Aufbaus. Höhe und Breite stehen zueinander im Verhältnis des goldenen Schnitts. Ein derartiges Rechteck wird als goldenes Rechteck bezeichnet (wie ein Exkurs im Kapitel 2.7.3 Fibonacci spirale und goldene Spirale zeigen wird).

Konstruktionsverfahren für den goldenen Schnitt

Es gibt viele verschiedene Konstruktionsverfahren für den goldenen Schnitt. Im folgenden Teil werden exemplarisch drei verschiedene Konstruktionsverfahren angegeben und bewiesen.

1. Konstruktion

Dies ist ein Verfahren, um den inneren Teilungspunkt zu bestimmen:

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$, gesucht ist ein innerer Punkt T von $[AB]$, der $[AB]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt. Die Konstruktion läuft in folgenden Schritten ab:

1. Schritt: Im Punkt B errichtet man die Senkrechte auf $[AB]$ und wählt darauf den Punkt C so, dass $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.
2. Schritt: Man verbindet die Punkte A und C . Der Kreis um C mit Radius \overline{CB} schneidet $[AC]$ im Punkt D .
3. Schritt: Der Kreis um A mit Radius \overline{AD} schneidet $[AB]$ im Punkt T . Dieser Punkt teilt $[AB]$ im Verhältnis Φ des goldenen Schnitts.

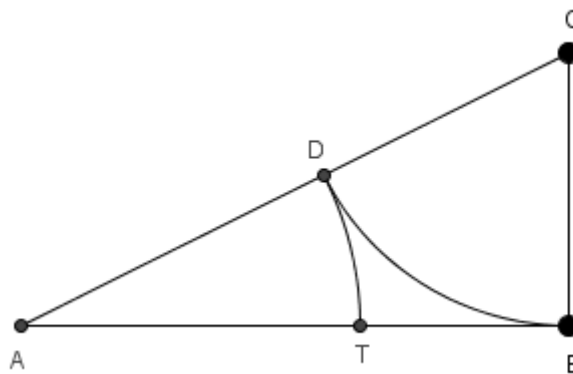


Abbildung 11: Konstruktion 1 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 121)

Dass der innere Teilungspunkt T die Strecke $[AB]$ wirklich im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt, müssen wir erst beweisen. Dazu ist $\overline{AT} = \overline{AD}$ zu berechnen.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

und wegen $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ folgt

$$\overline{AC}^2 = \frac{5}{4}\overline{AB}^2$$

also

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB}.$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{AT} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB}$$

Somit ist

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

und

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

◇

2. Konstruktion

Man sagt, dass dieses Konstruktionsverfahren auf Euklid zurückgeht. Dabei wird wieder der innere Teilungspunkt, diesmal aber auf andere Art und Weise, gesucht. Dazu ist wieder eine Strecke $[AB] = a$ gegeben und der Teilpunkt T im Inneren der Strecke $[AB]$, der $[AB]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt, ist gesucht.

1. Schritt: Im Punkt A wird eine Senkrechte zu $[AB]$ errichtet und darauf die Strecke $[AC]$ mit $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{a}{2}$ abgetragen.

2. Schritt: Der Kreis um C mit Radius \overline{CB} schneidet die Halbgerade $[CA]$ im Punkt D .

3. Schritt: Der Kreis um A mit Radius \overline{AD} schneidet die Strecke $[AB]$ im Punkt T . T teilt $[AB]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts.

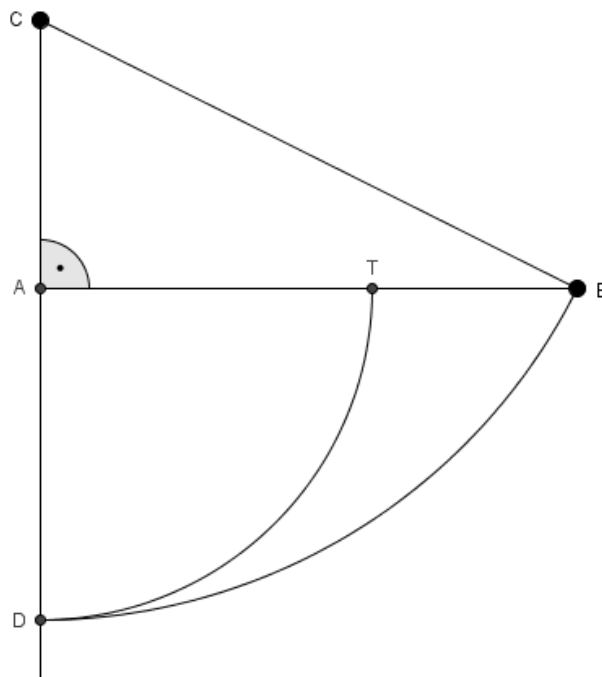


Abbildung 12: Konstruktion 2 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 122)

Die Begründung dazu ist bei Beutelspacher & Petri, 1996, auf der Seite 22 zu finden.

Auch in diesem Fall greifen wir auf den Satz von Pythagoras zurück. Dieser liefert uns folgenden Zusammenhang:

$$\overline{CD} = \overline{CB} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Also haben wir erhalten:

$$\overline{AT} = \overline{DA} = \overline{DC} - \overline{CA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{\Phi}$$

und daher folgt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \Phi$$

◇

3. Konstruktion

Als drittes wird ein Konstruktionsverfahren vorgestellt, bei dem ein äußerer Teilungspunkt, also ein Punkt, der außerhalb der gegebenen Strecke liegt, gesucht ist. Dafür ist eine Strecke $[AT]$ gegeben und jener Punkt B außerhalb von $[AT]$ gesucht, dass $[AB]$ durch T im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt wird.

1. Schritt: Man errichtet die Senkrechte zu $[AT]$ in T und trägt darauf \overline{AT} ab; dadurch erhält man den Punkt C .

2. Schritt: Man konstruiert den Mittelpunkt M von $[AT]$.

3. Schritt: Der Kreis um M mit dem Radius \overline{MC} schneidet die Verlängerung von $[AT]$ über T hinaus im Punkt B . Dann teilt T die Strecke $[AB]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts.

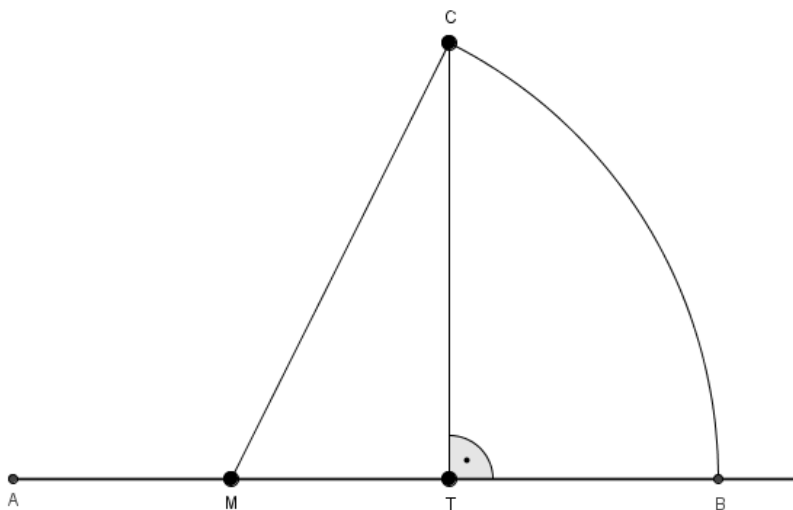


Abbildung 13: Konstruktion 3 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 123)

Dies kann wieder mithilfe des Satzes von Pythagoras gezeigt werden. Es gilt nämlich:

$$\overline{MC}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{TC}^2 = \frac{1}{4}\overline{AT}^2 + \overline{AT}^2 = \frac{5}{4}\overline{AT}^2$$

also

$$\overline{MC} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AT}$$

Nun ist

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AT} + \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AT} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\overline{AT}$$

und

$$\overline{TB} = \overline{AB} - \overline{AT} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\overline{AT}$$

woraus sofort die Behauptung folgt. \diamond

2.7.3 Fibonaccispirale und goldene Spirale

Man kann Quadrate, die Fibonaccizahlen als Seitenlängen haben, derartig anordnen, dass sich eine spiralförmige Folge von Quadraten ergibt. Der Ablauf, er wird in Abbildung 14 bildlich dargestellt, geht folgendermaßen vor sich: Man beginnt mit einem Quadrat der Seitenlänge 1 (dieses ist in der Abbildung grau markiert) und fügt daran ein Quadrat, das ebenfalls die Seitenlänge 1 hat. Daran fügt man ein Quadrat der Seitenlänge 2, daran fügt ein Quadrat der Seitenlänge 3, dann der Seitenlänge 5, 8, 13 usw. wie in Abbildung 14: Fibonaccispirale zu sehen ist. In dieser Darstellung sieht man sehr anschaulich, dass Fibonaccizahlen sehr rasch wachsen. Außerdem zeigt die Abbildung die Formel aus Satz 6 für die Summe der n ersten Quadrate von Fibonaccizahlen: denn alle Quadrate mit den Seitenlängen f_1, \dots, f_n füllen ein Rechteck mit den Seitenlängen f_n und f_{n+1} aus.

Jetzt wird in jedes Quadrat ein Viertelkreis eingezeichnet, wie es Abbildung 14 zeigt. Dadurch entsteht eine Spirale, die Fibonaccispirale genannt wird. Nach jeder 90° -Drehung vergrößert man den Radius des Viertelkreises um einen Faktor, der sich als Verhältnis $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ zweier Fibonaccizahlen darstellen lässt. Aus Satz 32 ist uns bekannt, dass sich der Quotient $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ für immer größer werdendes n der Zahl Φ annähert.

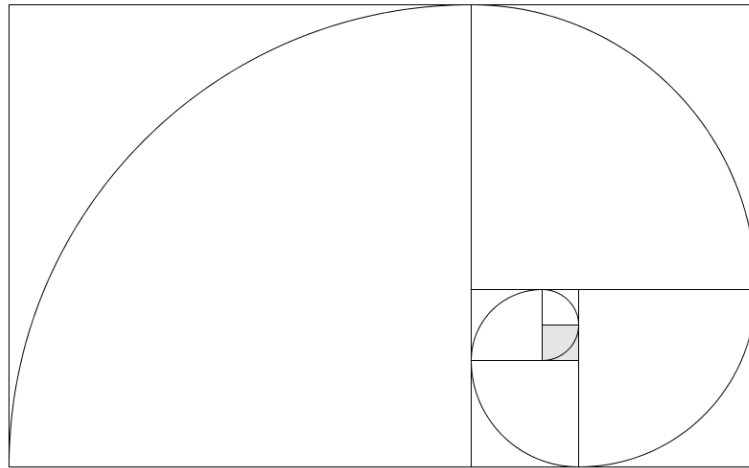


Abbildung 14: Fibonaccispirale; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 133)

Bevor im weiteren Verlauf noch zwei Spiralen vorgestellt werden, folgt ein Exkurs über goldene Rechtecke. Dieses Wissen werden wir später noch benötigen. „Unter dem „Goldenen Rechteck“ verstehen wir das Rechteck mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnittes“ (Walser, 1996, S. 43). Ein derartiges Rechteck konnte man beispielsweise um den im vorhergehenden Unterkapitel vorgestellten Tempel legen.

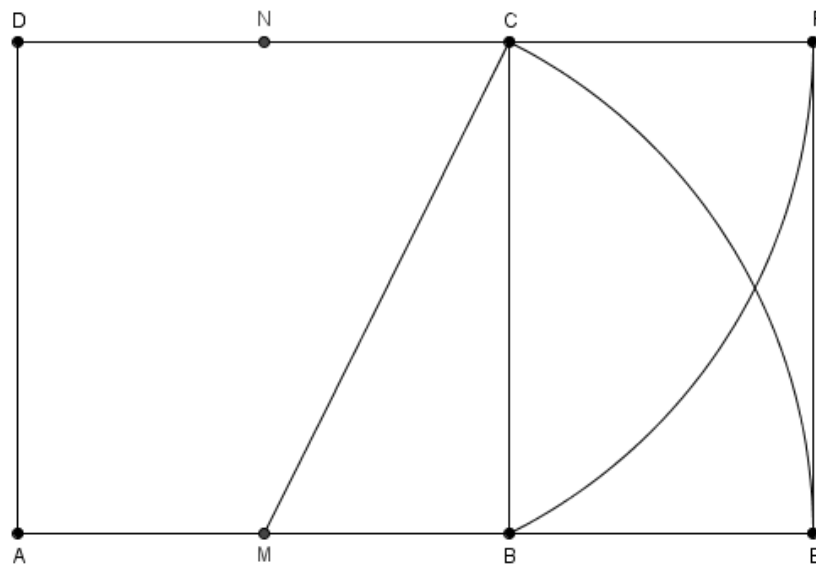


Abbildung 15: Goldenes Rechteck; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 133)

Die Konstruktion eines goldenen Rechtecks, die in Abbildung 15 dargestellt wird, soll im Folgenden erklärt werden:

Man beginnt mit einem Quadrat $ABCD$. Bei diesem Quadrat halbiert man zwei Seiten, beispielsweise $[AB]$ und $[CD]$; die Mittelpunkte dieser Seiten bezeichnet man als M und N . Jetzt zeichnet man je einen Kreis um M und N mit Radius \overline{MC} ; diese beiden Kreise schneiden $[AB]$ im Punkt E und $[DC]$ im Punkt F des Rechtecks. Das entstandene Rechteck ist in der Tat

ein goldenes Rechteck. Insbesondere teilt der Eckpunkt B des Quadrates die Rechteckseite $[AE]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts, also $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$.

In das kleinere Rechteck $BEFC$, das ebenfalls ein goldenes Rechteck ist, schreibt man ein Quadrat der Seitenlänge \overline{BE} ein. Dadurch bleibt wieder ein goldenes Rechteck übrig. Diesen Vorgang kann man beliebig oft fortsetzen: immer, wenn man von einem goldenen Rechteck das größtmögliche Quadrat abschneidet, bleibt wieder ein goldenes Rechteck übrig. Fügt man, wie man es zuvor bereits bei der Fibonaccispirale getan hat, in jedes Quadrat einen Viertelkreis ein, wie in der Abbildung 16: Näherung für die goldene Spirale dargestellt ist, erhält man eine Näherung für die goldene Spirale, die jetzt genauer untersucht wird.

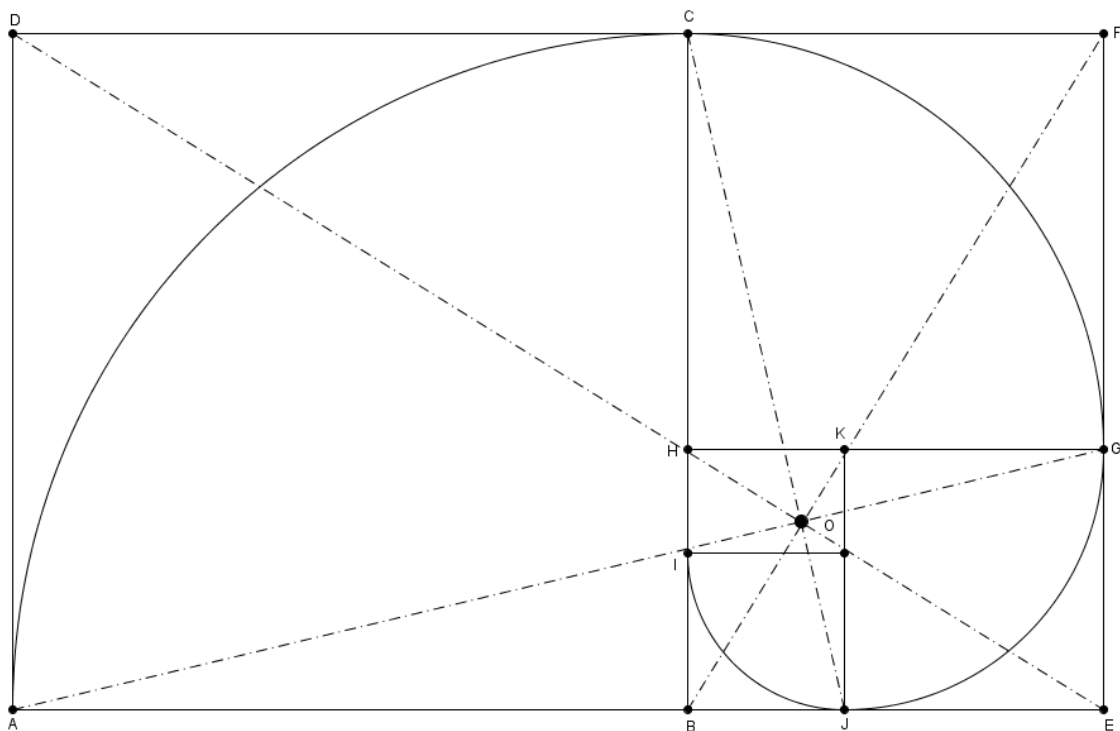


Abbildung 16: Näherung für die goldene Spirale; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 134)

Um dies zu tun, betrachten wir die zuvor beschriebene fortgesetzte Teilung des goldenen Rechtecks in ein Quadrat und in ein kleineres goldenes Rechteck genauer. Dazu ordnen wir das erste goldene Rechteck im Koordinatensystem genau so an, dass es das Ausgangsquadrat $ABCD$ und ein Einheitsquadrat ist. Die Eckpunkte haben dadurch folgende Koordinaten:

$$A(0|0); B(1|0); C(1|1); D(0|1); E(\Phi|0); F(\Phi|1).$$

Um die Koordinaten der übrigen Punkte genau zu bestimmen, müssen wir ein bisschen rechnen:

Es ist $\overline{EF} = 1$; $\frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} = \Phi$, d.h. $\frac{1-\overline{EG}}{\overline{EG}} = \Phi$, also $\overline{EG}(\Phi + 1) = 1$, somit $\overline{EG} = \frac{1}{\Phi+1} = \frac{1}{\Phi^2}$ nach Satz 14. Damit gilt

$$G\left(\Phi \middle| \frac{1}{\Phi^2}\right); H\left(1 \middle| \frac{1}{\Phi^2}\right)$$

Weiters ist $\overline{BE} = \Phi - 1$, $\frac{\overline{JE}}{\overline{BJ}} = \Phi$, also $\frac{\Phi - 1 - \overline{BJ}}{\overline{BJ}} = \Phi$ und $\Phi - 1 = \overline{BJ}(\Phi + 1)$, somit $\overline{BJ} = \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1}$. Also gilt

$$J \left(1 + \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1} \middle| 0 \right); K \left(1 + \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1} \middle| \frac{1}{\Phi^2} \right)$$

Mit $\overline{BH} = \frac{1}{\Phi^2}$, $\frac{\overline{BI}}{\overline{IH}} = \Phi$, also $\frac{\overline{BI}}{\frac{1}{\Phi^2} - \overline{BI}} = \Phi$ und weiter $(1 + \Phi)\overline{BI} = \frac{1}{\Phi}$, also $\overline{BI} = \frac{1}{\Phi^3}$ (wieder mit Satz 14) ergibt sich

$$I \left(1 \middle| \frac{1}{\Phi^3} \right)$$

Wir schauen uns jetzt die Geraden

$$\begin{aligned} AG : y &= \frac{1}{\Phi^3} x, \\ DE : y &= -\frac{1}{\Phi} x + 1, \\ BF : y &= \frac{1}{\Phi - 1} x - \frac{1}{\Phi - 1}, \\ CJ : y &= -\frac{\Phi + 1}{\Phi - 1} x + 2 \frac{\Phi}{\Phi - 1}. \end{aligned}$$

an. Zunächst erkennen wir, dass H auf DE liegt; dabei muss die Beziehung $\Phi^2 = \Phi + 1$, also $\Phi^2 - \Phi = 1$ und, wenn durch Φ^2 dividiert wurde, $1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$ beachtet werden. Des weiteren liegen I auf AG und K auf BF .

Nachdem sich diese Konstruktion bei jedem Schritt immer wieder wiederholt, und zwar nur in einem kleineren Maßstab, bedeutet das:

Lemma 41

Alle Eckpunkte von goldenen Rechtecken, die sich im Lauf der Konstruktion ergeben, liegen auf einer der vier Geraden AG, DE, BF oder CJ .

Lausch (2009, S. 135) gibt für den Schnittpunkt O der Geraden AG und DE folgende Berechnung an:

Für die x -Koordinate dieses Punktes muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi^3} x &= -\frac{1}{\Phi} x + 1 \\ \left(\frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi} \right) x &= 1 \\ \frac{1 + \Phi^2}{\Phi^3} x &= 1 \\ x &= \frac{\Phi^3}{1 + \Phi^2} \end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis in die Gleichung von AG ein, so erhält man die y -Koordinate $y = \frac{1}{1+\Phi^2}$; O hat dementsprechend die Koordinaten

$$O \left(\frac{\Phi^3}{1+\Phi^2} \mid \frac{1}{1+\Phi^2} \right)$$

Setzt man die Koordinaten von O in die Gleichung von BF und CJ ein, kann man eindeutig zeigen, dass O auch auf BF und CJ liegt; dabei behält man wieder die Erkenntnisse von Satz 14 im Kopf. Wir haben also folgendes bekommen:

Lemma 42

Der Punkt $O \left(\frac{\Phi^3}{1+\Phi^2} \mid \frac{1}{1+\Phi^2} \right)$ liegt auf der Geraden AG, BF, CJ und DE .

Jetzt zeigen wir noch:

Lemma 43

Die Geraden AG und CJ sowie die Geraden DE und BF stehen aufeinander senkrecht.

Beweis:

Das Produkt der Steigung von AG und der Steigung von CJ ist

$$\frac{1}{\Phi^3} * \left(\frac{\Phi + 1}{\Phi - 1} \right) = -\frac{\Phi^2}{\Phi^3(\Phi - 1)} = -\frac{1}{\Phi^2 - \Phi} = -\frac{1}{\Phi + 1 - \Phi} = -1$$

daher gilt $AG \perp CJ$.

Das Produkt der Steigung von DE und der Steigung von BF ist

$$-\frac{1}{\Phi} * \frac{1}{\Phi - 1} = -\frac{1}{\Phi^2 - \Phi} = -1$$

d.h. $DE \perp BF$. \diamond

Lemma 43 sagt uns, dass O im rechtwinkligen Dreieck DEF der Höhenfußpunkt ist. Das bedeutet, dass die rechtwinkligen Dreiecke DOF und OEF zueinander ähnlich sind, mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\Phi^{-1} = \frac{EF}{DF}$. Des Weiteren sind auch die Dreiecke AJO und CIO zueinander ähnlich mit dem Faktor Φ^{-1} .

Man kann eine Abbildung finden, die A auf C , C auf G , G auf J usw. abbildet. Diese Abbildung wird durch eine Abbildung σ beschrieben, die aus einer Drehung um 90° nach rechts um das Drehzentrum O und aus einer Stauchung um den Faktor Φ^{-1} besteht. Durch dieselbe Abbildung wird auch D auf F , F auf E , E auf B , B auf H usw. abgebildet. Man kann sagen, dass es sich bei der Abbildung σ um eine sogenannte Drehstauchung um den Punkt O handelt.

Der Punkt O bildet den sogenannten Pol, von dem man ausgeht. Man kann die Umkehrabbildung σ^{-1} der Drehstauchung, eine sogenannte Drehstreckung σ^{-1} finden und

mithilfe von Polarkoordinaten beschreiben. In Polarkoordinaten wird jeder Punkt P mithilfe seines Abstands vom Koordinatenursprung O und des Winkels ϑ zwischen der x -Achse und der Geraden OP beschrieben, d.h. $P = (r; \vartheta)$. Die Abbildung σ^{-1} besteht dann aus einer Drehung nach links um $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, und einer Streckung um den Faktor Φ . Durch σ^{-1} wird der Punkt $P = (r; \vartheta)$ auf den Punkt $\sigma^{-1}P = (\Phi r; \vartheta + \frac{\pi}{2})$ abgebildet.

Jetzt müssen wir ein neues Koordinatensystem mit dem Ursprung O und $\overline{OG} = 1$, also $G = (1; \vartheta)$, wählen. Wenn wir σ^{-1} anwenden, erhalten wir nacheinander

$$C = \left(\Phi; \frac{\pi}{2}\right), A = (\Phi^2; \pi), \dots$$

sowie

$$J = \left(\Phi^{-1}; -\frac{\pi}{2}\right), I = (\Phi^{-2}; -\pi), \dots$$

Daraus erhält man eine unendliche Folge von Punkten $(r; \vartheta)$, für die $r = \Phi^m, \vartheta = m * \frac{\pi}{2}$ für $m \in \mathbb{Z}$ gilt. Die zweite Gleichung liefert $m = \frac{2\vartheta}{\pi}$, wodurch man schreiben kann

$$r = \Phi^{\frac{2\vartheta}{\pi}}$$

Mit dieser Gleichung wird eine Spirale beschrieben, die als goldene Spirale bezeichnet wird. Sie sieht so aus, wie in Abbildung 17 dargestellt. Dabei ist es wirklich so, dass die goldene Spirale die Seiten des goldenen Rechtecks nicht wie eine Tangente berührt, sondern sie diese zweimal in einem kleinen Winkel schneidet.

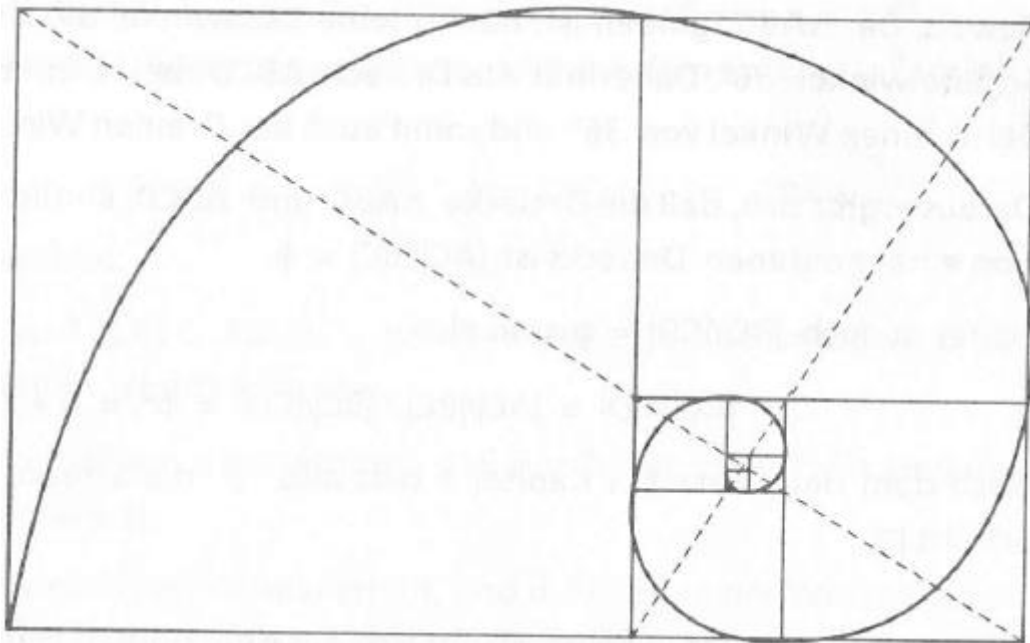


Abbildung 17: Goldene Spirale; (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 61)

3 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass in dieser Arbeit rekursive Folge, dabei allerdings nur lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten, und insbesondere der Spezialfall der Fibonaccifolge, die eine Rekursionsgleichung zweiter Ordnung ist, bearbeitet wurden. Dadurch ergibt sich gleich eine mögliche Erweiterung dieser Arbeit: man könnte sich auch die Eigenschaften nichtlinearer Rekursionsgleichungen anschauen. Wir haben uns hier allerdings auf lineare Rekursionsgleichungen beschränkt, weil es für diesen Fall eine schöne Theorie gibt und die Fibonaccifolge, auf die der Fokus dieser Arbeit gerichtet ist, eine besondere lineare Gleichung zweiter Ordnung darstellt.

Die Theorie, die im ersten Kapitel allgemein für lineare Rekursionsgleichungen erarbeitet wird, findet im zweiten Kapitel anhand des Beispiels der Fibonaccifolge ihre Anwendung. Im ersten Kapitel wird eine allgemeine Formel zur Lösung einer linearen Rekursionsgleichung gesucht. Dazu berechnet man diese im homogenen und inhomogenen Fall. So lässt sich die gesuchte Formel aufstellen.

Im zweiten Kapitel wird die Fibonaccifolge, mit all ihren Eigenschaften und Richtungen, auf die sie einen Einfluss hat, vorgestellt. Dass man nur einen Ausschnitt der möglichen mathematischen Erkenntnisse und Zusammenhänge darstellen kann, ist aufgrund der Fülle der Erkenntnisse klar. Die wichtigsten Sätze und Eigenschaften werden dargestellt. Wenn man bedenkt, dass es ein Journal mit dem Titel „The Fibonacci Quarterly“ gibt, das sich nur mit der Fibonaccifolge beschäftigt und vierteljährlich erscheint, ist erkennbar, dass es über diese Folge wirklich viel zu berichten gibt und nicht alles in einer Arbeit unterzubringen ist.

Ausgehend vom Kapitel 2 könnte man beispielsweise des Weiteren auch noch Unterrichtsmaterialien für die Schule zur Fibonaccifolge erstellen. In den meisten Schulbüchern wird die Fibonaccifolge mithilfe der Kaninchenaufgabe vorgestellt und grob angerissen. Eine Vertiefung findet allerdings meist nicht statt. Das könnte man aber in Spezialkursen, zum Beispiel im Rahmen eines Wahlpflichtgegenstandes Mathematik, durchaus machen. Daher würde es sich anbieten, konkrete Unterrichtssequenzen zum Thema der rekursive Folgen und der Fibonaccifolge zu erarbeiten.

Abschließend möchte ich mich noch bei allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben, bedanken. Besonders erwähnen möchte ich dabei auf der einen Seite meine Familie und Freunde, auf deren Unterstützung ich immer zählen konnte und die ich um Rat fragen konnte.

Auf der anderen Seite gilt mein besonderer Dank meiner Betreuerin, Dr. Olivia Constantin. Nur aufgrund der guten Zusammenarbeit, der großen Unterstützung und der Zeit, die sie sich immer für mich genommen hat, war die Erstellung der Arbeit in dieser Form möglich. Vielen Dank!

4 Literaturverzeichnis

- Becker, J. (9. Juni 2016). *Fibonacci und der goldene Schnitt*. Von Uni Giessen: <http://www.staff.uni-giessen.de/~g013/goldfibo/goldfibo.pdf> abgerufen
- Berendt, S. (2. Februar 1998). *Facharbeit: Die Fibonaccizahlen*. Von <https://jumk.de/fibonaccizahlen/> abgerufen
- Berg, L. (1986). *Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur und ihr asymptotisches Verhalten: mit 9 Tabellen*. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss.
- Beutelspacher, A., & Petri, B. (1996). *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Biographie Leonardo Pisano ETH Zürich*. (31. Mai 2016). Von <http://www.library.ethz.ch/exhibit/fibonacci/fibonacci-01-Biographie.html> abgerufen
- Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A., & Nussbaumer, A. (2012). *Thema Mathematik 6*. Linz: Veritas Verlag.
- Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit*. (08. Juni 2016). Von <http://www.golden-section.eu/kapitel5.html> abgerufen
- Die Fibonacci-Zahlen Uni München*. (3. Juni 2016). Von http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/zth/inzth_01.pdf abgerufen
- Hinkelmann, H.-D., Böhm, J., Hofbauer, P., & Metzger-Schuhäker, H. (2006). *Mathe mit Gewinn: Mathematik für Handelsakademien. 2. Teil für den III. Jg*. Wien: öbv.
- Kuhn, M. (1. Februar 1990). *Facharbeit der Mathematik. Die Fibonacci-Zahlen*. Von <https://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/kuhn-fa.pdf> abgerufen
- Lausch, H. (2009). *Fibonacci und die Folge(n)*. München: Oldenbourg.
- Malle, G. (2010). *Mathematik verstehen 6*. Wien: öbv.
- Markusevic, A. (1955). *Rekursive Folgen*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Sidlo, E.-M., Puhm, U., & Steinmair, C. (2011). *Mathematik mit technischen Anwendungen 3*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Stewart, I. (1997). *Spiel, Satz und Sieg für die Mathematik: vergnügliche Ausflüge in die Welt der Zahlen*. Frankfurt am Main: Insel-Verl.
- Techniker Krankenkasse*. (11. April 2016). Von *Die Kaninchen-Frage*: <https://www.tk.de/tk/wissen/zahlen-und-zeichen/ist-mathematik-die-sprache-der-natur-10002277/538328> abgerufen
- Vorob'ev, N. (1971). *Die Fibonaccischen Zahlen*. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss.
- Walser, H. (1996). *Der Goldene Schnitt*. Stuttgart: Teubner.
- Was Darwin nicht wusste*. (6. Juni 2016). Von <https://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html> abgerufen
- Zhou, L., & Markov, L. (April 2010). Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values. *American Mathematical Monthly*, S. 360-362.

5 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Die Kaninchenaufgabe im "Liber Abaci"; (Becker, 2016).....	21
Abbildung 2: Vermehrung der Kaninchen; (Techniker Krankenkasse, 2016)	22
Abbildung 3: Fassade eines Hauses streichen; (Stewart, 1997, S. 54).....	24
Abbildung 4: Stammbaum einer Drohne; (Kuhn, 1990).....	26
Abbildung 5: Spiralen einer Sonnenblume; (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 127)	27
Abbildung 6: Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016).....	54
Abbildung 7: Rechtwinkeliges Dreieck; (selbst erstellt)	59
Abbildung 8: Teilung einer Strecke; (selbst erstellt)	61
Abbildung 9: Tempel im goldenen Schnitt 1; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016)	63
Abbildung 10: Tempel im goldenen Schnitt 2; (Der goldene Schnitt. Das Mysterium der Schönheit, 2016)	63
Abbildung 11: Konstruktion 1 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 121).....	64
Abbildung 12: Konstruktion 2 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 122).....	65
Abbildung 13: Konstruktion 3 goldener Schnitt; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 123).....	66
Abbildung 14: Fibonaccispirale; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 133)	68
Abbildung 15: Goldenes Rechteck; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 133)	68
Abbildung 16: Näherung für die goldene Spirale; (erstellt nach: Lausch, 2009, S. 134)	69
Abbildung 17: Goldene Spirale; (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 61).....	72

6 Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Hannah MARTIN
Geburtsdatum	15.06.1991
Staatsbürgerschaft	Österreich
Adresse	Berggasse 18/25 1090 Wien
E-Mail	hannah.martin@live.at



Ausbildung

seit 2011	Universität Wien: Lehramtsstudium Bewegung und Sport und Mathematik
seit 2009	Universität Wien: Lehramtsstudium Mathematik und Französisch
Juni 2009	Maturaabschluss mit ausgezeichnetem Erfolg
2001-2009	Bundesgymnasium BG9 Wasagasse, 1090 Wien (mit Schwerpunkt Kommunikation, Präsentation und Rhetorik)

Arbeitserfahrung

seit September 2015	Unterrichtstätigkeit im Fach Bewegung und Sport in der BMHS (VBS Augarten)
WS 2014/15	Fachbezogenes Praktikum in Bewegung und Sport (BAKIP Albertgasse)
SS 2014	Fachbezogenes Praktikum in Französisch (BG Wasagasse)
SS 2013	Fachbezogenes Praktikum in Mathematik (BG/BRG Pichelmayergasse)
August 2009	Praktikum an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen