DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Beweisen im Geometrieunterricht mit Hilfe des Computers“

verfasst von / submitted by

Claudia Langer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, August 16 Claudia Langer

Danksagung

Ein großer Dank gilt meinem Betreuer, Mag. Dr. Andreas Ulovec, der mich bei der Erstellung dieser Arbeit immer unterstützt hat. Durch das rasche und konstruktive Feedback haben Sie wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Vielen Dank für Ihre Zeit und Ihre Mühen!

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung ein rasches Studium erst ermöglicht haben und mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen.

Ein weiterer großer Dank gebührt meinem Freund Christoph Blaha, der mir auch in den schwierigsten Zeiten mit Liebe und Geduld begegnete und es immer schaffte, mich aufzumuntern und mich zu motivieren.

Abschließend gilt mein Dank all jenen, die mich während des Studiums begleitet und unterstützt haben. Ein spezieller Dank an Victoria Kainz, die diese Zeit zu etwas ganz Besonderem machte.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das Beweisen wird meist als typische Tätigkeit in der Mathematik angesehen. Im Mathematikunterricht spielt dieser Teil eine sehr untergeordnete Rolle oder wird oftmals gar nicht behandelt, da sowohl die Schüler und Schülerinnen als auch die Lehrenden eine negative Einstellung demgegenüber besitzen. Ziel dieser Arbeit ist es, das Beweisen im Mathematikunterricht, besonders im Geometrieunterricht, in ein positives Licht zu rücken. Um dies zu erreichen, gliedert sich die Arbeit in fünf Kapitel.

Damit eine neue Sicht auf das Beweisen möglich ist, muss zunächst geklärt werden, was unter dem Begriff „Beweis“ überhaupt verstanden wird und welche Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten es gibt. Mit diesem Aspekt beschäftigt sich das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit.

Im zweiten Kapitel werden die Funktionen des Beweisens in den Fokus gestellt. Die meisten Lehrenden und Lernenden sind der Ansicht, dass ein Beweis einzig die Funktion der Verifikation erfüllt. Das zweite Kapitel soll dieser Überzeugung entgegenwirken.

Da es sich beim Beweisen um eine sehr komplexe Tätigkeit handelt, sollte diese Fähigkeit stufenweise aufgebaut werden. Das dritte Kapitel liefert eine Übersicht über die verschiedensten Niveaustufenansätze und Merkmale zur Einstufung von Beweisaufgaben.

Das Beweisen sollte fixer Bestandteil des Mathematikunterrichts werden. Welche Aspekte dabei beachtet werden müssen und wie die Schüler und Schülerinnen unterstützt und motiviert werden können werden im vierten Kapitel ausführlich thematisiert.

Abschließend werden unter Berücksichtigung der in Kapitel vier erarbeiteten didaktischen Aspekte Beispiele zum Einsatz des Computers gegeben.

2. Begriffsbestimmung

Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften wird die Mathematik oftmals gemeinhin als strenge oder auch als beweisende Disziplin bezeichnet. Diese Bezeichnung rührt daher, dass Beweisen als charakteristische Tätigkeit in der Mathematik gesehen wird (vgl. Weigand u. a., 2014). Dabei werden gerade mit diesem Teil der mathematischen Wissenschaft vor allem negative Assoziationen hergestellt. Sowohl für Schüler und Schülerinnen, Studierende als auch für Lehrer und Lehrerinnen stellt dieser Teilaspekt der Mathematik eine große Hürde dar (vgl. Götz & SATTLBERGER, 2009). Die Abstraktheit von mathematischen Beweisen bereitet den meisten Schülern und Schülerinnen Probleme, aber auch die Tatsache, dass Schüler und Schülerinnen ein anderes Verständnis von Beweisen aufweisen als die Mathematik. Empirische Studien zeigen, dass für viele Schüler und Schülerinnen ein Beispiel oder eine Messung mehr Überzeugungskraft besitzt als ein mathematischer Beweis. (vgl. H. Jahnke, 2007) Jedoch wird diese Art der Überprüfung in der Mathematik nicht als Beweis verstanden.

„Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln.“ (H. N. Jahnke & Ufer, 2015)

Als Axiome bezeichnen Jahnke und Ufer (2015) unbewiesene, wahre Aussagen, die an den Anfang einer Theorie gestellt werden. Denn durch deduktive Beweise wird die Eigenschaft der Axiome wahr zu sein auf die zu beweisende Theorie übertragen (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Aus dieser Definition geht hervor, dass Beweisen von einer streng deduktiven Vorgehensweise geprägt ist.

Andererseits kann der mathematische Beweis auch folgendermaßen definiert werden:

„[...] a proof is just a convincing argument, as judged by

competent judges.“ (Hersh, 1993)

An diesen beiden Definitionen lässt sich bereits erkennen, dass sich selbst die Mathematiker und Mathematikerinnen nicht einig sind, was als Beweis anzusehen ist. Daher setzt sich das nächste Unterkapitel mit den notwendigen Kriterien, die ein Beweis erfüllen muss um akzeptiert zu werden, auseinander.

Weitere empirische Studien zeigen, dass Schüler und Schülerinnen oftmals überzeugt sind, dass eine bereits bewiesene Aussage noch anhand eines Beispiels überprüft werden muss (vgl. Dreyfus, 2002). Auch diese Ansicht der Schüler und Schülerinnen widerspricht der mathematischen Auffassung eines Beweises. Da das Ziel eines mathematischen Beweises ist, die Gültigkeit einer Theorie zu zeigen, ist dieses durch einen einmaligen Beweis erfüllt (vgl. Elschenbroich, 1998).

Da oftmals die Tendenz besteht, die Vorstellungen der Lernenden zu dem Begriff „Beweis" als Fehlvorstellung einzuschätzen, wird dieser Umstand zum Anlass genommen die Begriffe „Argumentieren", „Begründen" und „Beweisen" zu definieren (vgl. H. Jahnke, 2007).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Schüler und Schülerinnen einen beschränkten Beweisbegriff besitzen und keine einheitliche Antwort auf die Frage „Was ist ein Beweis?" gegeben werden kann (vgl. Dreyfus, 2002).

2.1. Wann gilt ein „Beweis" als Beweis?

Trotz der Tatsache, dass es für den Begriff „Beweis" keine einheitliche Definition gibt, existieren Ansprüche, die üblicherweise an einen Beweis gestellt werden. Weigand u. a. (2014) führt drei Kriterien an, die Beweise erfüllen müssen, um als solche akzeptiert zu werden.

- Lückenlosigkeit und Vollständigkeit:
  Wie oben beschrieben wird in der Mathematik ein Beweis unter anderem als die deduktive Herleitung eines Satzes aus Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen nach spezifizierten Schlussregeln verstanden. Der Anspruch der Lückenlosigkeit und Vollständigkeit meint nichts anderes als, dass diese Herleitung mittels logischer Schlussregeln lückenlos und vollständig erfolgt.

- Minimalität:
  In einem Beweis sollten lediglich diejenigen Axiome und bereits bewiesene Aussagen verwendet werden, die unbedingt notwendig sind, um die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage zu zeigen. Weiters wird unter dem Kriterium der Minimalität verstanden, dass die einzelnen Beweisschritte keine Redundanzen enthalten.

- Formalisierung von Struktur, Sprache und Symbolik:
  In diesem Kriterium werden drei wichtige Punkte eines Beweises angesprochen. Erstens wird ein Beweis in einer formalen Struktur aufgeschrieben. Dies geht aus der obigen Definition eines Beweises als deduktive Herleitung bereits hervor. Zweitens bezieht sich dieser Anspruch auf die mathematische Fachsprache, die in einem Beweis verwendet wird. Hierbei wird vor allem auf ein hohes Maß an Präzision geachtet. Zum Beispiel macht es einen großen Unterschied ob man sagt „es existiert ein“ oder „es existiert genau ein“. Als drittes wird die Symbolik angesprochen, da häufig Symbole verwendet werden, wie zum Beispiel Quantoren, um sich kürzer ausdrücken zu können.

Klar ist, dass ein Beweis, der diese Kriterien nicht erfüllt, von der mathematischen Gesellschaft nicht als Beweis akzeptiert wird.

In der mathematischen Gemeinschaft herrscht weitgehend ein Konsens darüber, was als Beweis akzeptiert wird, jedoch gibt es keine absoluten Kriterien (vgl. Weigand u. a., 2014). Ob ein Argument als zulässig eingestuft wird oder nicht, hängt vom Betrachter ab. Welche Argumente vom Betrachter als verständlicher, allgemeingültiger etc. angesehen werden, ist individuell verschieden. Daher liegt die Antwort auf die Frage wann ein Beweis als Beweis gilt einzig und allein beim Betrachter (vgl. Kempen, 2014). Es zeigt sich, dass die Akzeptanz von Beweisen eine entscheidende soziologische Komponente aufweist. Das bedeutet, dass ein Beweis erst zu einem Beweis wird, wenn er von der Community akzeptiert wurde (vgl. Weigand u. a., 2014). Diesen Aspekt des Beweisens wird in der Definition des Begriffs „Beweis“ nach Hersh (1993) berücksichtigt.

Da es keine objektiven Kriterien dafür gibt, wann ein Beweis ein Beweis ist, sondern die Mathematiker und Mathematikerinnen darüber entscheiden, gab es bereits einige

Diskussionen über die Akzeptanz von Beweisen (vgl. Dreyfus, 2002). Lange Zeit wurden nur konstruktive Beweise als korrekte mathematische Beweise akzeptiert. So wurde zum Beispiel ein Beweis von Hilbert von einigen Mathematikern und Mathematikerinnen nicht als ein solcher akzeptiert, da für die Existenz lediglich gezeigt wurde, dass die Annahme einer Nichtexistenz zu Widersprüchen führt (vgl.Reiss, 2002b). Eine weitere heftige Diskussion wurde durch den Beweis von Fermat´s letzten Satz ausgelöst. Es wurde die Frage diskutiert, ob die Existenz eines fehlerfreien Beweises mit Sicherheit zeigt, dass der bewiesene Satz richtig ist (vgl. Dreyfus, 2002). Mit der technologischen Entwicklung hat auch der Computer Einzug in die Beweismethoden gefunden, jedoch gab es zu Beginn heftige Diskussion über computerbasierte Beweise. Ein Beispiel für einen solchen Beweis ist der Beweis des Vierfarbenproblems. Kritik an solchen Beweisen war und ist immer noch erstens, dass aufgrund der Länge nicht mehr die Möglichkeit gegeben war alle Beweisschritte zu publizieren, und zweitens, dass durch die Fehleranfälligkeit von Computerprogrammen nicht mehr alle Schritte kontrolliert werden können (vgl. Reiss, 2002b). Von Fachleuten wird vermutet, dass etwa ein unentdeckter Fehler pro 1000 Rechnungsstunden vorkommt. Mehrere 1000 Rechnungsstunden kann ein computerbasierter Beweis locker in Anspruch nehmen, wodurch ein solcher Beweis wahrscheinlich Fehler enthält. Eine Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit für Fehler zu reduzieren ist den Beweis auf einem zweiten unabhängigen Computer durchzuführen. (vgl. Dreyfus, 2002) In diesen Diskussionen zeigt sich allerdings auch, dass die Mathematiker und Mathematikerinnen sich meist schnell auf neue Regeln einigen können.

Zusammenfassend lässt sich sagen:

„Die Güte eines Beweises richtet sich dabei nicht nach dem Grad seiner ‚formalen' Darstellung, sondern nach seiner Überzeugungskraft innerhalb einer Community und nach den Funktionen, die er im (unterrichtlichen) Kontext erfüllen soll.“ (Kempen, 2014)

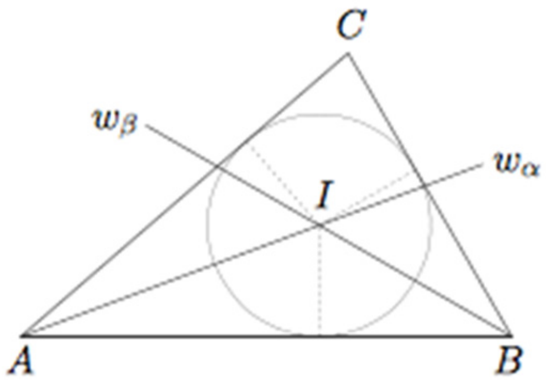
2.2. Beweisstruktur und Beweisdarstellung

Nimmt man ein mathematisches Fachbuch zur Hand und blättert darin, so wird einem auffallen, dass diese Bücher meist gleich aufgebaut sind und zwar nach dem Muster Definition – Satz – Beweis. Diese Darstellungsform entspricht einer deduktiven Schreibweise, in welcher auch die Beweise selbst formuliert werden. Damit ein Beweis als ein solcher akzeptiert werden kann muss dieser schriftlich festgehalten werden. Dabei ist es zweckmäßig den Beweis als eine Sequenz von einzelnen Beweisschritten anzuschreiben (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988). Dies soll am Beispiel des Inkreismittelpunktes demonstriert werden.

Satz: In jedem Dreieck schneiden die drei Winkelsymmetralen der Innenwinkel einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

Beweis:

Voraussetzungen:



1. ABC sei ein Dreieck.
2. ω_α sei die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt A.
3. ω_β sei die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt B.
4. ω_γ sei Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C
5. I sei der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale ω_α durch den Eckpunkt A und der Winkelsymmetralen ω_β durch den Eckpunkt B.

Verwendete Sätze:

6. (S1) Seien g und h Halbgeraden. Jeder Punkt der Winkelsymmetralen w hat von g und h denselben Abstand.
7. (S2) Seien g und h Halbgeraden. Jeder Punkt, der von g und h denselben Abstand hat, liegt auf der Winkelsymmetralen w.

Folgerungen:

8. Da I der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale ω_α und der Winkelsymmetrale ω_β ist, liegt I auf ω_α. (5)

9. Da I der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale ω_α und der Winkelsymmetrale ω_β ist, liegt I auf ω_β. (5)

10. Da I auf der Winkelsymmetralen ω_α liegt, hat I nach Satz 1 denselben Normalabstand von den Dreieckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. (1,2,S1)

11. Da I auf der Winkelsymmetralen ω_β liegt, hat I nach Satz 1 denselben Normalabstand von den Dreieckseiten $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$. (1,3,S1)

12. Daraus folgt, dass I denselben Normalabstand von den Dreieckseiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$. (8,9)

13. Da I von der Dreieckseite $\overline{CA}$ und der Seite $\overline{CB}$ denselben Normalabstand hat folgt nach Satz 2, dass I auf der Winkelsymmetrale ω_γ durch den Eckpunkt C liegt. (4,10, S2)

14. Da I auf allen drei Winkelsymmetralen liegt, schneiden die drei einander in einem Punkt I. (8,9,13)

15. Da I den gleichen Normalabstand ϱ von allen drei Dreieckseiten hat, ist der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius ϱ der Inkreis des Dreiecks. (10,11,12)

Es stellt sich nun jedoch die Frage, wie streng ein Beweis geführt werden muss, um von der mathematischen Gesellschaft als ein solcher akzeptiert zu werden. Ein Beweis gilt dann als vollkommen streng, wenn er nur Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze verwendet und nur Deduktionsschritte vollzieht, die den spezifizierten Schlussregeln entsprechen. Bei dieser Art von Beweis ist jegliche Anschauung als Herleitung untersagt (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Diese Art des Beweisens, ein streng logisches Verfahren, kann als Idealvorstellung eines mathematischen Beweises angesehen werden. Die berühmten Beweise liegen in dieser geforderten Art dar (vgl. Brunner, 2014a). In der Realität beweisen praktizierende Mathematiker und Mathematikerinnen auf einem halbformalen Niveau, da diese Idealvorstellung nicht realisierbar ist. Selbst die einfachste Gleichung

$1 + 1 = 2$ würde mehrere hundert Seiten benötigen, um einer absoluten Strenge zu genügen (vgl. Dreyfus, 2002). Auf dem halbformalen Niveau sind anschauliche Argumente, Rückgriffe auf Diagramme und auch Beweislücken erlaubt (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015).

Einer der Ansprüche, der gewöhnlich an Beweise gestellt wird, lautete Lückenlosigkeit und Vollständigkeit. Nun werden aber auf halbformalen Niveau, also in der Realität, Beweislücken geduldet. Grundsätzlich muss Lückenlosigkeit gefordert werden, wie oben ausgeführt wurde, jedoch kann man in der Realität von einer beabsichtigten Beweislücke sprechen. Das bedeutet, dass absichtlich ein Schritt aus der Beweisfigur herausgenommen wird, da dieser nicht so einfach und rasch zu beweisen ist (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988). „*Das Ideal einer vollständig formalisierten Schlusskette besteht nur dem Anspruch nach, indem der Mathematiker behauptet, auf Nachfrage einen informellen Beweisschritt in vollständig explizierte logische Schlusskette verwandeln zu können.*“ (H. N. Jahnke & Ufer, 2015) In den meisten Fällen hat es sich als unpraktisch erwiesen jeden einzelnen Beweisschritt niederzuschreiben, da sonst die Übersichtlichkeit verloren gehen würde. Eine weitere Möglichkeit besteht die Beweislücke im Nachhinein zu schließen, indem auf einen Hilfssatz verwiesen wird (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988).

Eine weitere Fragestellung im Zusammenhang mit der Beweisdarstellung ist die Frage nach der Ausführlichkeit. Die Ausführlichkeit eines Beweises spiegelt das Exaktheitsniveau wider, auf dem der Beweis geführt wird. Diese Ausführlichkeit wird durch folgende Merkmale gekennzeichnet (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988):

- Wie ausführlich die Voraussetzungen für den Beweis formuliert werden.
- Dichte der Beweisschritte
- Bezugnahme auf die Beweisfigur

Wie oben bereits erwähnt kann es in der Praxis oftmals unpraktisch sein, wenn ein Beweis zu ausführlich schriftlich festgehalten wird, da durch die Ausführlichkeit natürlich auch die Länge anwächst. Umso länger ein Beweis umso geringer wird die Übersichtlichkeit dessen. In der Praxis hat sich das Verfahren eingebürgert mehrere Einzelschritte zu einem Schritt zusammenzufassen. Dadurch kann die Länge eines Beweises reduziert werden. In der Didaktik wird dadurch jedoch noch die Frage aufgeworfen, ob nicht gerade dieses Verfahren eine Verständnisschwierigkeit für die Schüler und Schülerinnen beinhaltet (vgl. Walsch, 1972). Auf diese Frage wird jedoch später genauer eingegangen.

Abschließend lässt sich sagen, dass es auf den Betrachter ankommt, wie streng formal oder ausführlich ein Beweis geführt werden muss.

2.3. Beweis und Beweisfindung

In dem obigen Kapitel wurde bereits beschrieben, dass mathematische Beweise größtenteils in einer deduktiven Darstellung abgefasst werden, die sehr kurz gehalten wird. Diese Art der Darstellungsform spiegelt jedoch nicht den Prozesscharakter des Beweisens wider. Daher sollte zwischen Beweisfindung und Beweis als fertiges Produkt unterschieden werden (vgl. Weigand u. a., 2014). Im weiteren will ich genauer auf den Prozess der Beweisfindung eingehen, um den Prozesscharakter des Beweisens hervorzuheben.

Beweisfindung

Unter diesem Begriff wird ein kreativer und problemlösender, oftmals unregelmäßiger Prozess verstanden. Boero (1999) unterteilte den Prozess des Beweisens bzw. der Beweisfindung in sechs Phasen auf.

1. Entwicklung einer Vermutung: Dies ist die erste Phase mit der Mathematiker und Mathematikerinnen einen Beweis beginnen. Zu dieser Phase gehört auch die Auseinandersetzung mit der Problemsituation. Dies stellt meist einen langwierigen Prozess dar, weil sich eine mathematische Vermutung erst durch intensive Auseinandersetzung ergibt. Ein weiterer Teil dieser Phase stellt das Explorieren möglicher Argumente, die eine Behauptung beweisen können, dar. Während dieser Phase können inhaltsbezogene Informationen gesammelt werden, Gesetzmäßigkeiten oder auch Bedingungen für solche Gesetzmäßigkeiten gefunden werden. In dieser Phase des Beweisprozesses stehen vor allem das empirische Arbeiten und induktive Denkschritte im Vordergrund (vgl. Reiss, 2002a).

2. „*Formulierung einer Behauptung, die den formalen Konventionen entspricht*“ (Reiss, 2002a): Dies ist die zweite Phase des Beweisprozesses eines Mathematikers oder einer Mathematikerin (vgl. Reiss, 2002a). Diese Phase des Prozesses führt zu einem Text, der später auch veröffentlicht werden kann (vgl.Boero, 1999). Die zweite Phase kann vor allem als ordnendes Element im Lösungsprozess gesehen werden. Das bedeutet, dass durch diese Phase Klarheit in den Beweisprozess gebracht wird. Weiters dient die exakte Formulierung einer mathematischen Behauptung dazu, dass die Bedingungen nachvollziehbar sind und welche Ziele im weiteren Lösungsprozess verfolgt werden sollen (vgl. Reiss, 2002a).

3. „*Exploration of the content (and limits of validity) oft he conjecture*“ (Boero, 1999): In der dritten Phase der Beweisfindung geht es um die eigentliche Hypothesenprüfung. Die Inhalte der Hypothese und die Beziehung zwischen Behauptung und Theorie werden mittels semantischer Techniken und Heurisitken geprüft. Während dieser Phase steht vor allem die Interaktion von induktiven und deduktiven Lösungsschritten im Vordergrund, im Gegensatz zur ersten Phase (vgl. Reiss, 2002a).

4. Auswahl von Argumenten und ihre Einordnung in eine deduktive Argumentationskette: In dieser Phase werden die Argumente im Hinblick auf die konkret formulierte Hypothese entweder ausgewählt oder verworfen. In den bisherigen Phasen spielte vor allem die Exploration eine große Rolle, im Gegensatz dazu dient diese und die nachfolgenden Phasen dem konkreten Formulieren des Beweises nach den Regeln der mathematischen Community (vgl. Reiss, 2002a). Während dieser Phase wird das Ergebnis oftmals informell den Kollegen und Kolleginnen präsentiert oder in einem Seminar vorgestellt (vgl.Boero, 1999).

5. Organisation der Argumente in einem Beweis: In dieser Phase des Beweisprozesses geht es um die Formulierung des Beweises, der den mathematischen Publikationsstandards entspricht. Das bedeutet, dass das Ziel dieser Phase ein Text für eine Publikation darstellt. Es geht jedoch nicht nur um die Formulierung einer kohärenten Kette von Argumenten, sondern auch um die Belegung der Voraussetzung (vgl. Reiss, 2002a).

6. „*Annäherung an einen formalen Beweis*“ (Reiss, 2002a): Diese Phase wird nicht immer erreicht bzw. erwünscht, auch nicht von mathematischen Experten und Expertinnen. Wie oben bereits ausgeführt wurde, ist der streng formale Beweis lediglich eine Idealvorstellung, die unmöglich zu erfüllen ist. Deshalb betrifft diese Phase des Beweisprozesses den Beweis gar nicht oder nur einen Teil des Beweises (vgl. Boero, 1999).

Durch diese Anschauung wird mathematisches Beweisen zu einer Form des produktiven Denkens, bei dem allgemeine Heuristiken und induktive Denkschritte gleichwertig wie fachspezifisches Wissen und die Fähigkeit zu logischen korrekten Schlussfolgerungen sind (vgl. Reiss, 2002a).

2.4. Argumentieren – Begründen – Beweisen

Wird in einem fachdidaktischen Buch bzw. Artikel zum Thema „Beweisen“ gelesen, so tauchen häufig die Begriffe „argumentieren“, „begründen“ und natürlich auch „beweisen“ auf. So unterschiedlich die Definitionen des Begriffs „Beweis“ unter Mathematikern und Mathematikerinnen sind, so verschieden sind die Auffassungen und Abgrenzung dieser drei Begriffe in der Fachdidaktik. Im Folgenden soll zwischen vier Unterscheidungsmöglichkeiten unterschieden werden.

Als erstes gibt es die Möglichkeit, dass Autoren das Begründen als übergeordneten Begriff für das Beweisen ansehen. Meyer & Prediger (2009) verstehen Begründen als einen breiteren Begriff als das Beweisen. Dieses wird mit einer axiomatisch-deduktiven Darstellung und mit Strenge verbunden, wohingegen beim Begründen auch inhaltlich-anschauliche Begründungen zugelassen sind. Dem Argumentieren schreiben sie eine soziale Dimension zu, indem sie es als sozialen Prozess sehen, in dem Begründungsbedarf aufgezeigt und befriedigt wird. Bei dieser Sichtweise wird das Argumentieren als eine mathematische Tätigkeit gesehen, die nicht mathematisches Beweisen darstellt. Dadurch stehen Argumentieren und Beweisen logisch auf derselben Ebene (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Bruder & Müller (1983)haben bezüglich des Begründens und Beweisen ein ähnliches Verständnis. Sie sehen das Begründen als einfachste Form des Beweisens, jedoch wird beim Grad der Exaktheit keine Reduzierung vorgenommen. (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988) gehen noch einen Schritt weiter, denn sie verstehen das

Argumentieren als erste Niveaustufe des Beweisens. Auf die verschiedenen Ansichten zu den Niveaustufen wird später noch genauer eingegangen.

Zweitens gibt es Autoren, die wiederum das Argumentieren als übergeordneten Begriff ansehen. Weigand u. a. (2014) sehen Begründen nur als einen Teilaspekt des Argumentierens, da beim Argumentieren nicht nur formale Regeln zugelassen sind, sondern auch auf Modelle, Anschauungen oder Zeichnungen gebaut werden kann. Weiters zählen die Autoren das Beschreiben und Bewerten von verschiedenen Lösungswegen, Einordnen von Beispielen und Gegenbeispielen und das Stellen von Fragen zu der Tätigkeit des Argumentierens. Geht man von dieser Sichtweise aus, so wird der mathematische Beweis aus Sicht des Faches als Spezialfall des Argumentierens angesehen. Das bedeutet, dass das Argumentieren auf einer logisch höheren Hierarchie-Ebene liegt (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Außerdem kann bei dieser Sichtweise das Argumentieren als eine mathematische Kompetenz gesehen werden, die in formales Beweisen übergehen kann. Auch Bruder & Pinkernell (2011) verstehen unter Argumentieren nicht nur das Begründen und Beweisen, sondern *„jegliche Aktivitäten des Suchens, Auswählens, Verwendens und des Beurteilens von Argumenten und deren Verknüpfung in vielfältigen inner- und außermathematischen Zusammenhängen."* Im Gegensatz zur ersten Unterscheidung wird bei dieser zweiten Sichtweise nicht zwischen den Begriffen „Begründen" und „Beweisen" unterschieden. Ein Grund dafür könnten die negative Assoziationen mit dem Begriff „Beweisen" darstellen, wie zum Beispiel Malle (2002) betont. Dieser bevorzugt daher den Begriff „Begründen" und vermeidet den Begriff „Beweisen".

Eine weitere Möglichkeit zwischen den Begriffen „Argumentieren", „Begründen" und „Beweisen" zu unterscheiden ist die Abgrenzung anhand der zulässigen Argumente vorzunehmen. Reiss & Ufer (2009) lassen beim Beweisen, ähnlich wie Meyer & Prediger (2009), ausschließlich deduktive Abduktion zu und fordern einen expliziten Bezug auf eine Rahmentheorie. Beim Argumentieren hingegen sind auch Schlüsse durch Induktion, Abduktion, Metaphern und Analogien zulässig. Das Begründen wird jedoch, bezogen auf eine Hierarchie-Ebene, zwischen dem Beweisen und dem Argumentieren angesiedelt. Darunter wird beispielsweise die Erklärung von induktiv gewonnen Zusammenhängen verstanden.

Die letzte Möglichkeit zur Abgrenzung, die noch erwähnt sei, ist nach der Struktur der Argumente. Im Kompetenzmodel für die 8. Schulstufe findet sich die

Handlungsdimension H4 „Argumentieren und Begründen". Dabei wird Argumentieren als *„Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen."* (Liebscher, Breyer, & Bildungsforschung, 2011) Um erfolgreich argumentieren zu können, wird eine korrekte Verwendung von mathematischen Begriffen, Eigenschaften und Regeln vorausgesetzt. *„Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt*." (Liebscher u. a., 2011)

Aufgrund dieser Uneinigkeit bezüglich der Unterscheidung der Begriffe „Argumentieren", „Begründen" und „Beweisen" werden diese in der vorliegenden Arbeit synonym verwendet.

2.5. Unterschiede in Beweisen

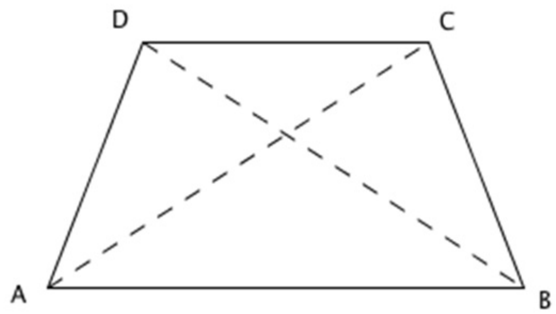
So verschieden die Definitionen des Begriffs „Beweis" sind, so verschieden sind die Beweise selbst. Daher sollen in diesem Abschnitt vor allem die Unterschiede zwischen den verschiedenen Beweisen herausgearbeitet werden. Dazu wird zunächst der Begriff der Argumentationsbasis eingeführt, um die Divergenz von Erklärungen zu berücksichtigen. Anschließend werden einige Arten von Beweisen vorgestellt, die teilweise einander konträr gegenüberstehen und verschiedene Ideen verfolgen.

2.5.1. Die Argumentationsbasis

„Eine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden, soll zusammen mit den Schlußweisen, die als zulässig anerkannt werden, als Argumentationsbasis bezeichnet werden." (Bürger, 1979)

Das bedeutet, dass ein Beweis auf einer Wissensbasis und einer Schlussweise beruht (Budke u. a., 2015). Fischer & Malle (1985) verstehen unter der Wissensbasis all jene Sätze und Aussagen, die im Beweis als bekannt vorausgesetzt werden. Jede Begründung bedarf einer solchen Argumentationsbasis, auf die sie sich stützt. Unter praktizierenden Mathematikern und Mathematikerinnen sind dies meist Definitionen und Sätze, in der Fachdidaktik können dies auch Handlungen, Anschauungen oder Erfahrungen sein (vgl. Malle, 2002). Wie sich Beweise durch unterschiedliche Wahl an Argumentationsbasen ändern können, soll im folgenden Beispiel deutlich werden.

Zu beweisende Behauptung: In jedem gleichschenkeligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang (vgl. Fischer & Malle, 1985).



Lösung 1:

Zählen Messen und induktives Schließen zu den gültigen Regeln, dann genügt es die Behauptung anhand von Beispielen zu zeigen.

Beweis 1: Durch Messen kann die Behauptung anhand der Zeichnung gefolgert werden.

Zur Argumentationsbasis gehört das Ergebnis der Messung, denn auf dieses wird berufen, und die zulässige Schlussweise ist das induktive Schließen (vgl. Fischer & Malle, 1985).

In der Fachmathematik wäre ein Vorgehen wie in Lösung 1 nicht zulässig, um die allgemeine Gültigkeit der Aussage zu beweisen. Nach der Definition von H. N. Jahnke & Ufer (2015) muss der Beweis durch eine deduktive Herleitung aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen erfolgen.

Lösung 2:

Beweis 2: Schneidet man gedanklich ein gleichschenkeliges Trapez aus, dreht es um und setzt es zurück an die gleiche Stelle, so zeigt sich, dass die Diagonalen gleich lang sind.

Bei dieser Beweisführung besteht die Argumentationsbasis aus der Annahme, dass zwei Strecken gleich lang sind, wenn man diese durch eine Bewegung ineinander überführen kann. Im Gegensatz zu der ersten Lösung ist nun deduktives Schließen die zulässige Schlussweise (vgl. Fischer & Malle, 1985).

Lösung 3:

Beweis 3: Die Seitensymmetrale der Seite $\overline{AB}$ ist in einem gleichschenkeligen Trapez auch eine Symmetrale der Seite $\overline{CD}$. Die Diagonale $\overline{AC}$ geht aufgrund dessen bei einer Spiegelung an dieser Symmetrale in die Diagonale $\overline{BD}$ über. Da die beiden Diagonalen durch eine Spiegelung ineinander überführt werden können, sind diese gleich lang.

Auch bei der dritten Beweisführung wird wie bei der zweiten Möglichkeit das deduktive Schließen als zulässige Schlussweise betrachtet. Zur Argumentationsbasis gehört weiters, dass die Symmetrale von $\overline{AB}$ ist eine Symmetrale von $\overline{CD}$. Strecken werden bei einer Spiegelung in Strecken mit gleicher Länge überführt. Die hier verwendete Argumentationsbasis ist eine präzisierte Version der Basis in Lösung 2 (vgl. Fischer & Malle, 1985).

	Lösung 1	**Lösung 2**	**Lösung 3**
Zulässige Schlussweise	Induktives Schließen	Deduktives Schließen	Deduktives Schließen
Verwendete Aussagen	• Ergebnis der Messung	• Strecken sind gleich lang, wenn diese durch eine Bewegung ineinander überführt werden können.	• Die Symmetrale von $\overline{AB}$ ist eine Symmetrale von $\overline{CD}$. • Bei einer Spiegelung werden Strecken in Strecken gleicher Länge überführt.

Jede dieser drei Lösungen verwendet eine andere Argumentationsbasis, um den Satz zu beweisen. Je nachdem welche Argumente und Schlussweisen zugelassen und vorausgesetzt werden, ändert sich die Begründung. Ob ein Beweis nun akzeptiert wird oder nicht, hängt, wie bereits oben erwähnt, von dem Betrachter ab.

Je nachdem welche Argumentationsbasis als verständlicher oder allgemeingültiger angesehen wird, wird der Beweis akzeptiert oder nicht. Diese Einschätzung der Argumentationsbasis ist jedoch individuell unterschiedlich (vgl. Kempen, 2014). Daher muss der Betrachter neben einem ähnlichen Wissensstand auch über eine annähernd gleiche Argumentationsbasis verfügen, um den Beweis zu verstehen und anzuerkennen (vgl. Bürger, 1979).

In der Fachmathematik herrscht meist Konsens darüber, welche Argumentationsbasis den Beweisen zugrunde liegen soll. Anders verhält es sich jedoch in der Schule. In diesem Fall ist meist kein klares Fundament bekannt, wodurch die Schüler und Schülerinnen häufig nicht wissen, worauf sie sich berufen dürfen und worauf nicht (vgl. Malle, 2002). Weiters besteht in der Schule das Problem, dass die kognitiven Strukturen von Lehrperson und Lernende stark voneinander abweichen. Dadurch sind auch die Argumentationsbasen der Lehrkraft und der Schüler und Schülerinnen unterschiedlich, da die Argumentationsbasis von der kognitiven Struktur abhängt. Dies geht aus dem oben geführten Beispiel hervor. Schüler und Schülerinnen werden von sich aus vor allem eine Argumentation ähnlich Lösung 1 oder auch Lösung 2 verwenden. Um eine Argumentationskette wie in Lösung 3 benutzen zu können, müssen sie zunächst eine entsprechende geistige Entwicklung durchlaufen haben (vgl. Fischer & Malle, 1985). Da die kognitiven Strukturen von Lehrperson und Lernende stark divergieren, empfiehlt Bürger (1979) sich an der Argumentationsbasis der Schüler und Schülerinnen zu orientieren.

Die Argumentationsbasis ist keineswegs starr festgelegt, sondern anpassungsfähig. Im Laufe der Schulzeit soll und kann sich das Fundament verändern und erweitern. Dies stellt ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichts und des Beweisens dar (vgl. Bürger, 1979). Möglichkeiten zur Erweiterung stellt das Hinzufügen weiterer Sätze und Definitionen dar. Um Die Argumentationsbasis zu verändern, können undefinierte Begriffe präzisiert werden, zum Beispiel Umfang eines Kreises oder Schwerpunkt eines Dreiecks (vgl. Götz & SATTLBERGER, 2009). Diese Art der Änderung liegt auch bei dem obigen Beispiel zu den verschiedenen Argumentationsbasen vor, denn die Basis von Lösung 3 ist eine Präzisierung der Basis von Lösung 2. Weitere Möglichkeiten sind die Falsifizierung von Aussagen, die fälschlicherweise als richtig angesehen werden oder das Aufzeigen von Unzulänglichkeiten von unerlaubten Schlussweisen(vgl. Bürger, 1979).

2.5.2. Beweistypen

Bei der Kategorisierung von Beweisen kann je nach Sichtweise ein anderer Fokus gelegt werden. Aus Sicht des Faches werden Beweise nach anderen Kriterien unterschieden als aus der Sicht der Mathematikdidaktik. Deshalb wird zunächst eine Klassifizierung aus der Perspektive der Mathematik behandelt, anschließend wird ein didaktischer Ansatz vorgestellt.

Verschiedene Typen von Beweisen aus Sicht der Mathematik:

Zunächst lassen sich Beweise anhand der Beweisführung charakterisieren. Nach dieser Unterscheidung gibt es drei verschiedene Arten, wobei zwei davon auch in der Schulmathematik eine Rolle spielen. (vgl. Weigand u. a., 2014) Die erste Möglichkeit ist der direkte Beweis, bei dem die Behauptung durch Anwendung bereits bewiesener Aussagen oder durch logische Folgerung gezeigt wird (vgl. Brunner, 2014a). Die zweite Variante stellt der indirekte Beweis, oder auch Widerspruchsbeweis genannt, dar. Bei dieser Art von Beweis wird die Behauptung gezeigt, indem die Verneinung der Aussage angenommen wird. Ziel ist es zu zeigen, dass diese Annahme in einem Widerspruch endet (vgl. Weigand u. a., 2014). Die dritte und letzte Möglichkeit nach dieser Unterscheidung ist die vollständige Induktion, welche selbst ein Axiom darstellt. Der Beweis wird in zwei Teilen geführt, der Induktionsvoraussetzung und dem Induktionsschritt. Die vollständige Induktion zeigt, dass etwas, das für n gilt, auch für n+1 gilt (vgl. Brunner, 2014a).

Weiters können v.a. geometrische Beweise aufgrund der verwendeten Hilfsmittel unterschieden werden (vgl. Weigand u. a., 2014).

- Berechnungsbeweis: Bei dieser Art von Beweis wird die Behauptung durch algebraische Gleichungsumformungen gezeigt (vgl. Weigand u. a., 2014).
- Kongruenzbeweis: Bei diesem Beweistyp werden die Kongruenzsätze für Dreiecke als Hilfsmittel herangezogen. Dabei werden in einer Figur Paare von Teildreiecken gesucht und anschließend deren Kongruenz gezeigt (vgl. Weigand u. a., 2014).
- Ähnlichkeitsbeweis: Dabei stützt sich die Begründung auf die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke. Die Vorgehensweise ist ähnlich der bei einem

Kongruenzbeweis, jedoch wird nun die Ähnlichkeit der Teildreiecke gezeigt (vgl. Weigand u. a., 2014).

- Abbildungsbeweis: Hierbei werden Kongruenz- oder Ähnlichkeitsabbildung auf eine Figur oder eine Teilfigur angewendet. Die Behauptung wird anschließend durch die Eigenschaften einer solchen Abbildung belegt (vgl. Weigand u. a., 2014).

Zuletzt lassen sich aus Sicht der Mathematik die Beweise nach der Struktur der Behauptung unterscheiden (vgl. Weigand u. a., 2014).

- Existenzbeweis: Dabei wird gezeigt, dass ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften unter gegebenen Voraussetzungen existiert (vgl. Weigand u. a., 2014).

- Eindeutigkeitsbeweis: Der Unterschied zwischen Existenzbeweis und Eindeutigkeitsbeweis ist, dass nun gezeigt wird, dass höchstens ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften unter gegebenen Voraussetzungen existiert (vgl. Weigand u. a., 2014).

- Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis: Dies stellt die Verschmelzung der beiden zuvor genannten Arten dar. Ziel ist es nun zu zeigen, dass genau ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften unter gegebenen Voraussetzungen existiert (vgl. Weigand u. a., 2014).

Verschiedene Typen von Beweisen aus Sicht der Fachdidaktik:

Viele Lehrer und Lehrerinnen sind der Ansicht, dass Beweisen im Unterricht nicht behandelt werden sollte, da sie die Beweise aus dem Studium als Standards ansehen. Schüler und Schülerinnen können jedoch aufgrund ihrer kognitiven Entwicklung derartige Beweise nicht führen bzw. nachvollziehen (vgl. Malle, 2002). Deshalb führten Wittmann und Müller drei Beweistypen ein, um den Aspekt des Verstehens in den Fokus zu rücken (vgl. Elschenbroich, 1998).

- Experimentelle Beweise
- Inhaltlich-anschauliche Beweise
- Formale Beweise

In diesem Konzept stellt der experimentelle Beweis die einfachste Form des Beweisens dar. Unter dieser Beweisart wird das Experimentieren an konkreten Beispielen verstanden, woraus keine Allgemeingültigkeit der zu beweisenden Aussage folgt. Vor allem erste Aktivitäten im Bereich des Beweisens folgen dieser Beweismethode (vgl. Brunner, 2014b). Der zweite Beweistyp findet sich auch unter den Bezeichnungen „*Handlungsbeweis*“ (Fischer & Malle, 1985), „*Siehe-Beweis*“ (Winter, 1983) oder auch „*prämathematischer Beweis*“ (Kirsch, 1979). All diese Bezeichnungen meinen Beweise, bei denen enaktive oder ikonische Darstellungen eine wichtige Rolle spielen (vgl. Weigand u. a., 2014). Entscheidend bei dieser Art von Beweis ist, dass sich der Beweis auf Konstruktionen und Operationen stützt, von denen bereits die Übertragbarkeit auf andere Beispiele und somit Allgemeingültigkeit erkennbar ist (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). In der Handlung oder der Figur ist der Beweisgedanke enthalten (vgl. Elschenbroich, 2009). Blum & Kirsch (1991) verfolgen diesen Ansatz weiter und weiten dieses Konzept aus. Unter den inhaltlich-anschaulichen Beweis, den sie als präformalen Beweis bezeichnen, verstehen die Autoren „*a chain of correct, but not formally represented conclusions which refer to valid, non-formal premises*“ (Blum & Kirsch, 1991). Nicht-formale Prämissen sind beispielsweise inhaltlich anwendungsbezogene Grundideen oder intuitiv evidente, „allgemein geteilt“, „psychologisch offenkundige“ Aussagen. Sowohl induktive Argumente („usw.“) als auch indirekte Argumente („Was wäre wenn,...“) sind in einem prämathematischen Beweis erlaubt (vgl. Elschenbroich, 1998). Die Autoren Blum und Kirsch (1991) unterscheiden drei Typen von präformalen Beweisen: „action proof“, „geometric intuitive proof“ und „reality-oriented proof“. Nicht nur für formale Beweise, sondern auch für prämathematische Beweise sind Grundsätze für irrtumsfreies anschauliches Schließen. (vgl. Blum & Kirsch, 1991) wichtig. Kann ein anschaulicher Beweis nicht durch rationale Argumentation erschüttert werden, so ist dieser als korrekt anzusehen.

Das erweiterte Konzept kann folgendermaßen zusammengefasst und dargestellt werden (vgl. Elschenbroich, 1998):

- Experimentelle Beweise
- Präformale Beweise
    - Inhaltich – anschauliche Beweise
    - Handlungsbezogene Beweise

- Formale Beweise

Da ein präformaler Beweis lediglich aus einer Zeichnung bestehen kann, stellt sich nun die Frage: Was beweist eine Zeichnung?

> *„Daß die Zeichnung an und für sich nichts beweis, wußten die Griechen natürlich auch schon vor Euklid. [...] Ungenaue Zeichnungen können natürlich alles und nichts beweisen. Die ideale Zeichnung wäre dagegen wohl beweiskräftig.“*
>
> (Freudenthal, 1986)

Dies wirft jedoch die Frage auf was eine ideale Zeichnung ist. Das Ziel eines Beweises ist es, die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu zeigen. Wie soll dies jedoch mit einer einzelnen Zeichnung zu realisieren sein. Eine Zeichnung stellt nicht die Visualisierung der Texte oder algebraischen Umformungen dar, sondern hält die an der Figur durchgeführten Handlungen und Überlegungen fest (vgl. Elschenbroich, 1998). Wird ein Bild nun als Handlungsprotokoll gesehen, so stellt die Zeichnung nicht mehr nur eine einzelne Figur dar, sondern vielmehr einen Repräsentant einer Klasse von Figuren (vgl. Elschenbroich, 1998).

Elschenbroich (1998) erweitert die oben ausgeführte Unterteilung nochmals um zwei weitere Beweistypen, die speziell mit dem Computer zu realisieren sind. Zunächst führt der Autor den sogenannten dynamischen Invarianz-Beweis ein. DGS bietet die Möglichkeit des Zugmodus, wodurch Schüler und Schülerinnen Invarianzen entdecken können. Diese Art von Beweis ist auf der Stufe der experimentellen Beweise anzusiedeln, da sie noch keine Beweisidee liefern. Zusammengefasst werden der dynamische Invarianz-Beweis und der experimentelle Beweis unter dem Begriff Evidenz-Beweis. Auf der Stufe der inhaltlich-anschaulichen und handlungsbezogenen Beweise führt der Autor den Visuell-dynamischen Beweis ein. Dieser stellt einen vollgültigen Beweis in dem Sinne dar, dass er durch rationale Argumentation nicht zu erschüttern ist und die Frage nach dem Warum klärt. Zur Beweisführung wird eine Zeichnung eines DGS herangezogen, die im oben ausgeführten Sinne allgemeingültig ist. Entscheidend ist, dass es sich nicht um eine einzelne, starre Zeichnung handelt, sondern um eine dynamisch veränderbare ideale Zeichnung, die eine ganze Klasse repräsentiert. (vgl. Elschenbroich, 1998)

Zusammengefasst lässt sich das von Elschenbroich (1998) erweiterte Konzept folgendermaßen darstellen:

- Evidenz-Beweise
    - Experimentelle Beweise
    - Dynamische Invarianz-Beweise
- Präformale Beweise
    - Inhaltich – anschauliche Beweise
    - Handlungsbezogene Beweise
    - Visuell-dynamische Beweise
- Formale Beweise

Abschließend lässt sich betonen, dass auch bei anschaulichen Beweisen ein Grundsatz von großer Bedeutung ist. Weiters ist auch wichtig, stets die Frage im Kopf zu haben, warum dieser Handlungsschritt möglich ist.

2.6. Grundtypen von Begründungen

Durch die vorangegangen Abschnitte wurde verdeutlicht, wie unterschiedlich Beweise sein können. Diese Vielfalt erschwert es den gemeinsamen Kern zu erkennen. Im Folgenden werden fünf Grundtypen für das Begründen nach Bruder & Müller (1983) vorgestellt, welche die Grundlage für komplexere Beweise bildet. In der Schule ist es von Bedeutung, diese Grundbausteine zu legen, damit später auf ihnen aufgebaut werden kann.

2.6.1. Grundtyp 1: Identifizieren eines Begriffs

Ziel einer derartigen Begründungsaufgabe ist es, zu zeigen, dass ein gegebenes mathematisches Objekt einer Definition zugeordnet werden kann. Damit Schüler und Schülerinnen eine derartige Aufgabe lösen können, müssen sie bereits im Vorfeld mit der jeweiligen Definition vertraut sein und sie verstanden haben. Vollrath (1984) beschreibt fünf Lernziele, deren Erfüllung eine Voraussetzung für das Verständnis eines Begriffes darstellt.

- Die Schüler und Schülerinnen können eine Beschreibung des Begriffs angeben (vgl. Franke, 2000).

- Die Lernenden können Beispiele angeben, welche den Begriff repräsentieren (vgl. Vollrath, 1984).

- Die Schülerinnen und Schüler sind im Stande zu entscheiden, ob ein gegebenes Objekt den Begriff repräsentiert oder nicht (vgl. Vollrath, 1984).
- Die Lernenden kennen alle Eigenschaften des Begriffs (vgl. Franke, 2000).
- Die Schüler und Schülerinnen können den Begriff und dessen Eigenschaften zum Problemlösen nutzen (vgl. Franke, 2000).
- Die Lernenden kennen Unter- und Oberbegriffe und sind sich der Beziehungen zwischen ihnen bewusst (vgl. Franke, 2000).

Folgend soll ein Beispiel für diesen Grundtyp gegeben werden.

Aufgabenstellung (Reichel & Humenberger, 2012)

Welche der dargestellten Vierecke sind Deltoide? Gib eine Begründung an!

Damit die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe bewältigen können, müssen diese den Begriff Deltoid und dessen Eigenschaften kennen und anwenden können.

2.6.2. Grundtyp 2: Anwenden eines Satzes

Oftmals wird in einem Beweis nicht auf eine Definition zur Begründung zurückgegriffen, sondern auf bereits bewiesene Sätze. Bei einer Grundaufgabe dieser Form ist eine Aussage in Form einer Objektsituation gegeben. Es gibt zwei mögliche Situationen. Der zu verwendende Satz kann bereits bekannt sein, dann müssen lediglich die Erfüllung der Voraussetzungen überprüft werden, oder ist noch zu suchen, dann müssen zunächst die Voraussetzungen für diesen Satz hergestellt werden. (z.B. durch Hilfslinien, -größen, - variablen) (vgl. Bruder & Müller, 1983). Bei beiden Möglichkeiten stellt das Schließen auf die Behauptung des Satzes den zweiten Schritt dar (vgl. Müller, 1995).

Nachfolgend ein Beispiel für eine derartige Grundaufgabe.

Aufgabenstellung (Bruder & Müller, 1983):

Ein Kreis, der die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks als Durmesser besitzt, ist der Umkreis dieses Dreiecks. Begründe mit Hilfe der Umkehrung des Thalessatzes!

Bei dieser Aufgabe wird den Lernenden bereits in der Aufgabenstellung der Hinweis gegeben, welcher Satz verwendet werden muss. Das bedeutet, dass lediglich die Voraussetzungen für die Umkehrung des Thalessatzes überprüft werden müssen und abschließend durch Anwenden des Satzes auf die Behauptung geschlossen werden kann.

2.6.3. Grundtyp 3: Anwenden der Kontraposition eines Satzes

Ausgangssituation ist wieder eine gegebene Objektsituation, wie in Grundtyp zwei. (vgl. Bruder & Müller, 1983). Bei dieser Art von Grundtyp besteht der erste Schritt aus dem Identifizieren der Negation der gegebenen Behauptung. Im zweiten Schritt folgt der Schluss auf die Negation der Voraussetzung des Satzes (vgl. Müller, 1995). Das bedeutet, dass die mathematische Aussage die Gestalt Voraussetzung ⇒ Resultat besitzt. Die Vorgehensweise ist indirekt die Negation des Resultates anzunehmen und so zu einem Widerspruch zu führen. Dies funktioniert, da gilt $(p \Longrightarrow q) = (\neg q \Longrightarrow \neg p)$ (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012). Gerade diese Gleichheit ist für viele Schüler und Schülerinnen nicht trivial. Grund dafür sind die Alltagserfahrungen der Lernenden. Beispielsweise werden beim Kauf eines Autos die Aussage „*Wenn ich 10% Rabatt bekomme, dann kaufe ich das Auto.*“ (Bruder & Pinkernell, 2011) und die Äußerung „*Wenn ich das Auto nicht kaufe, bekomme ich auch keine 10% Rabatt.*“ (Bruder & Pinkernell, 2011) im Allgemeinen nicht auf den ersten Blick als gleichwertig empfunden. (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011) Schüler und Schülerinnen würden eher die Aussage „*Wenn ich keine 10% Rabatt bekomme, dann kaufe ich das Auto auch nicht.*“ (Bruder & Pinkernell, 2011) als gleichbedeutend ansehen.

Auch hier sei ein Beispiel für diesen Grundtyp vorgestellt.

Satz: Eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, ist Lot zum Kreisradius in diesem Punkt.

Beweis:

Wir nehmen indirekt an, dass die Gerade g mit dem Kreis k nur den Punkt P gemeinsam haben und dass $\overline{MP}$ nicht normal auf g steht. Sei Q der Fußpunkt des Lotes durch M und sei P ≠ Q. Im rechtwinkeligen Dreieck ΔPQM gilt $|QM| < |PQ| = r$, da dem größten Winkel die längste Seite gegenüberliegt. Da $|QM| < r$ gilt, liegt Q ∈ g innerhalb des Kreises. Daher schneidet g den Kreis k in zwei Punkten. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass g und k einander nur im Punkt P schneiden.

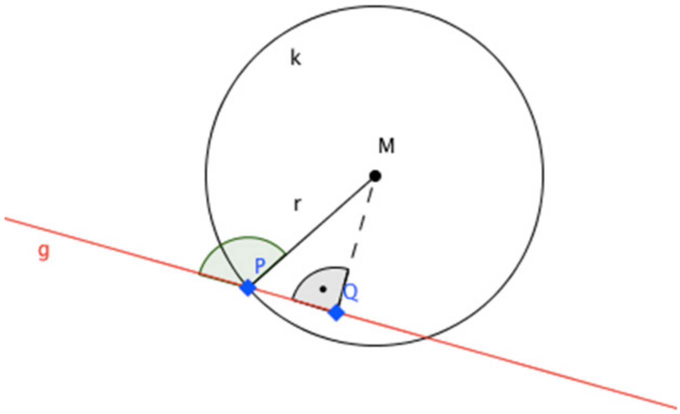


Abbildung 2.1: Beweisskizze

2.6.4. Grundtyp 4: Anwendung eines Verfahrens

Bei Begründungsaufgaben von Grundtyp vier ist wieder eine Objektsituation gegeben, wie bereits bei Grundtyp zwei und drei. Ziel ist es nun, die Behauptung durch Anwendung eines mathematischen Verfahrens zu belegen (vgl. Bruder & Müller, 1983).

Fälschlicherweise drängt sich beim ersten Blick die Vermutung auf, dass derartige Beweise wesentlich leichter sind als andere Grundtypen. Um einen Beweis dieser Art zu führen, ist eine anschauliche Interpretation nicht notwendig (vgl. Hohenwarter & Lindner, 2008). Besonders durch die technischen Begründungen verbinden Schüler und Schülerinnen diesen Beweistyp eher mit Rechenübungen als mit einer überzeugenden Erklärung. Weiters stellt sich das Problem, dass die eigentliche Grundidee durch das alleinige Umformen aus den Augen gerät. Meist wird durch diesen Beweistyp das Einsehen in die Gültigkeit der Behauptung nicht gefördert (vgl. Hohenwarter & Lindner, 2008).

Um Begründungen dieser Art für die Lernenden zugänglicher zu machen, schlagen Hohenwarter & Lindner (2008) den Einsatz dynamischer Geoemtriesoftware, wie zum Beispiel Geogebra, DynaGeo, GeoProof, Euklid oder Cabri, vor. Besonders durch den Einsatz sogenannter Schieberegler, soll den Schülern und Schülerinnen die Beweisidee verständlich gemacht werden. Die digitalen Medien dienen hierbei der Vermittlung zwischen den algebraischen Beweisen und den geometrischen Grundideen. Jedoch sollte der Fokus bei der Verknüpfung geometrischer und algebraischer Beweise stets auf der Grundidee liegen, da nicht jeder Umformungsschritt sinnvoll und verständnisfördernd geometrisch gedeutet werden kann (vgl. Hohenwarter & Lindner, 2008).

Nachfolgend wird ein Beispiel einer derartigen Grundaufgabe vorgestellt.

<u>Aufgabenstellung</u> (Hohenwarter & Lindner, 2008):

Konstruiere ein Dreieck mit den Schwerlinien s_A, s_B und s_C und dem Schwerpunkt S. Was fällt dir bezüglich der Schwerlinien und ihres Schnittpunktes auf? Formuliere deine Behauptung. Ist das immer so? Begründe.

Die Schüler und Schülerinnen können nun das geforderte Dreieck mit Schwerlinien und Schwerpunkt eigenständig in Geogebra konstruieren. Falls der Umgang mit diesem Programm noch nicht so geübt ist, kann die Lehrkraft ein zuvor gefertigtes dynamisches Arbeitsblatt zur Verfügung stellen. (s. Abbildung 2.2). Anhand der Geogebra-Konstruktion können die Lernenden durch Vergleich der Streckenlängen an verschiedenen Beispielen die Vermutung aufstellen: Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt dessen Schwerlinien im Verhältnis 2:1 (vgl. Hohenwarter & Lindner, 2008).

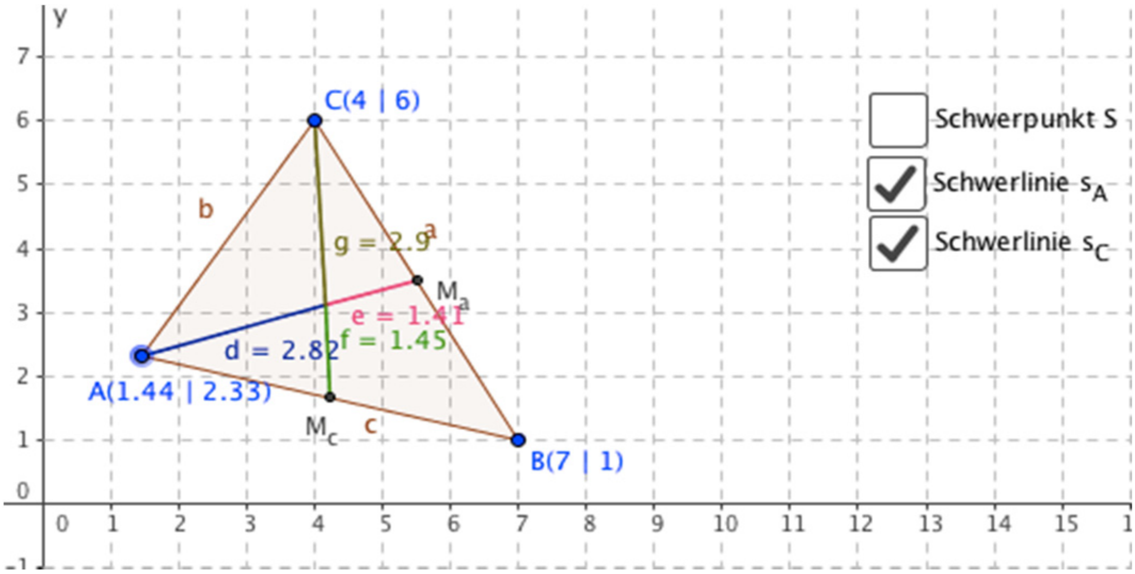


Abbildung 2.2: Dynamisches Arbeitsblatt für die Erarbeitung der Vermutung (vgl.Hohenwarter & Lindner, 2008)

Der Beweis mithilfe eines mathematischen Verfahrens kann folgendermaßen geführt werden (vgl. Hohenwarter & Lindner, 2008):

Grundidee des Beweises ist, den Schnittpunkt zweier Schwerlinien zu betrachten und dabei entsprechende Punktabstände zu vergleichen. Werden die Schwerlinien s_A und s_C gleich gesetzt, so kann die der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien allgemein gefunden werden.

$$M_c + \lambda \cdot \overrightarrow{M_cC} = M_a + \mu \cdot \overrightarrow{M_aA}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (A+B) + \lambda \left(C - \frac{1}{2} \cdot (A+B) \right) = \frac{1}{2} \cdot (B+C) + \mu \left(A - \frac{1}{2} \cdot (B+C) \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + \lambda \cdot C - \frac{\lambda}{2} \cdot A - \frac{\lambda}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot B + \frac{1}{2} \cdot C + \mu \cdot A - \frac{\mu}{2} \cdot B - \frac{\mu}{2} \cdot C$$

$$\frac{1}{2} \cdot A + \lambda \cdot C - \frac{\lambda}{2} \cdot A - \frac{\lambda}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot C + \mu \cdot A - \frac{\mu}{2} \cdot B - \frac{\mu}{2} \cdot C$$

Die letzte Gleichung muss für alle beliebigen Punkt A, B und C erfüllt sein, weshalb folgende drei Gleichungen gelten.

$$\frac{1}{2} \cdot A - \frac{\lambda}{2} \cdot A = \mu \cdot A$$

$$-\frac{\lambda}{2} \cdot B = -\frac{\mu}{2} \cdot B$$

$$\lambda \cdot C = \frac{1}{2} \cdot C - \frac{\mu}{2} \cdot C$$

Durch Umformen der zweiten Gleichung folgt $\lambda = \mu$. Wird dies in eine der anderen Gleichungen eingesetzt, so ergibt sich $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$.

Diese Beweisführung ist sehr technisch, weshalb die Grundidee leicht aus den Augen gerät. Daher schlagen Hohenwarter & Lindner (2008) vor, den algebraischen Beweis durch ein mediengestütztes Experiment zu unterstützen. Die grundlegende Beweisidee (Werte für die Parameter μ und λ zu finden, sodass sich ein Punkt ergibt, welcher auf beiden Schwerlinien liegt) wird mit Hilfe eines dynamischen Arbeitsblatts visualisiert.

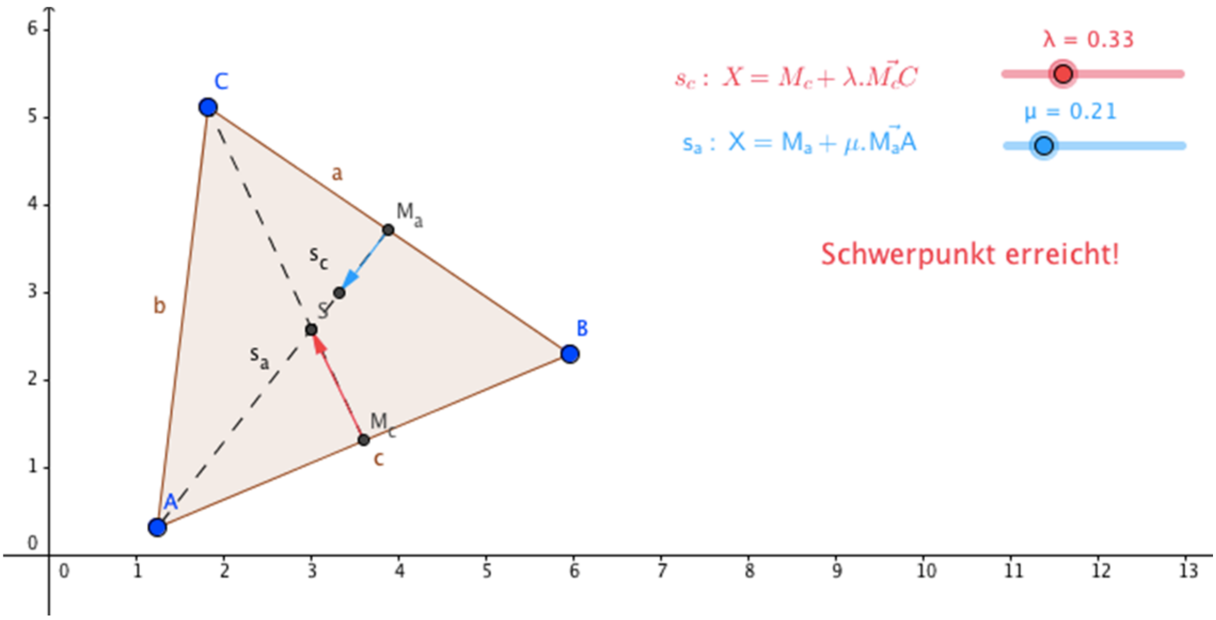


Abbildung 2.3: Visualisierung des algebraischen Beweis

2.6.5. Grundtyp 5: Widerlegen durch ein Gegenbeispiel

Oftmals gilt die zu beweisende Aussage nicht für eine Situation, sondern für alle Objekte einer Menge und wird daher Allaussage genannt (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012). Ziel bei einer derartige Beweisaufgabe ist es, die Allaussage zu widerlegen (vgl. Bruder & Müller, 1983). Um dies zu erreichen, müssen die Bedingungen der Negation realisiert werden (vgl. Müller, 1995).

Beispiel einer solchen Grundaufgabe soll die nachfolgende Aufgabe darstellen.

<u>Aufgabenstellung</u> (Malle u. a., 2014):

Gilt für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ das Assoziativgesetz $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$? Beweise es oder widerlege es durch ein Gegenbeispiel oder eine geeignete Argumentation!

Schüler und Schülerinnen weisen jedoch große Unsicherheiten bei der Verwendung von Beispielen und Gegenbeispielen auf (vgl. Goldberg, 2002). Schüler und Schülerinnen versuchen meist so viele Beispiele wie möglich zu sammeln, um die Aussage zu beweisen (vgl. Buchbinder & Zaslavsky, 2007). Finden sie trotzdem ein Gegenbeispiel, so überzeugt dieses sie nicht von der Falschheit der Aussage, sondern sie sehen dieses als Sonderfall an (vgl. Goldberg, 2002). Diese Probleme gründen oftmals in Alltagserfahren. Beispielsweise wird im Alltag aus einem Einzelfall auf die Allgemeinheit geschlossen oder eben ein Gegenbeispiel als Sonderfall betrachtet. Wenn jemand einmal zu spät kommt, wird daraus nicht geschlossen, dass derjenige unpünktlich ist, sondern, dass es sich um eine Ausnahme handelt (Bruder & Pinkernell, 2011).

Oftmals fällt es den Schülern und Schülerinnen schwer ein Gegenbeispiel zu finden, besonders wenn sie intuitiv davon ausgehen, dass die Aussage wahr ist (vgl. Buchbinder & Zaslavsky, 2007). Um die Lernenden bei dieser Problematik zu unterstützen bietet sich auch bei diesem Grundtyp der Einsatz von digitalen Medien an. Die erste Möglichkeit dies zu realisieren ist, dass die Schüler und Schülerinnen selbst die Figur konstruieren, bis sie zu der Feststellung gelangen, dass die Allgemeingültigkeit nicht gilt. Hierbei besteht der Nachteil, dass durch die (möglicherweise) lange Konstruktion das eigentliche Ziel aus den Augen verloren wird. Deshalb bietet sich die zweite Möglichkeit an, die sogenannte Black Boxes

Variante. Dabei wird die Figur bereits im Vorhinein von der Lehrkraft angefertigt, die von den Lernenden durch Ziehen verändert werden kann. Dadurch kann rasch und spielerisch ein Gegenbeispiel gefunden werden (vgl. Haug, 2011).

3. Wozu Beweisen?

Eines der größten Probleme für Schüler und Schülerinnen im Umgang mit Beweisen stellt der Aufbau eines Beweisbedürfnisses dar. Sowohl die Lernenden, als auch die Lehrenden haben die Frage „Wozu müssen wir das überhaupt beweisen?“ mehr als nur einmal gehört (vgl. De Villiers, 1999). In dieser Frage zeigt sich, dass viele Schüler und Schülerinnen das Beweisen als ein „notwendiges Übel mit wenig Bedeutung“ (Reiss, 2009) ansehen.

Für Schüler und Schülerinnen sind primitive Begründungen, wie beispielsweise Messen oder Überprüfung an einem Einzelfall, überzeugender als ein formaler Beweis (Malle, 2002). Die schulüblichen Vorgehensweisen, um den Lernenden die Notwendigkeit eines Beweises aufzuzeigen, waren negativ argumentierende Vorgehensweisen. Diese bestanden darin, das Vertrauen der Lernenden in die Wahrnehmung, zum Beispiel durch optische Täuschungen, zu erschüttern, das Messen und Argumentieren anhand von Einzelfällen zu unterbinden (H. N. Jahnke & Ufer, 2015).

Ein didaktischer Ansatz, zur Motivation des Beweisens, ist, den Schülern und Schülerinnen die Funktionen des Beweisens näher zu bringen, denn das Problem besteht nicht nur darin, dass das Thema Beweisen noch zu komplex für deren kognitive Struktur ist, sondern auch darin, dass sie die verschiedenen Funktionen des Beweisens nicht sehen (vgl. De Villiers, 1999). Deshalb soll im folgenden Kapitel näher auf die Funktionen eingegangen werden. Der Aufbau orientiert sich an den fünf Funktionen von Beweisen nach De Villiers: Verifizierung bzw. Überzeugung, Erklärung, Systematisierung, Entdecken von neuen Resultaten und Kommunikation (vgl. De Villiers, 1990). Weiters wird auf die Weiterentwicklung dieser Unterscheidung durch Hanna (2000) und Kuntze (2005) eingegangen. Hanna ist der Ansicht, dass alle Funktionen im Unterricht vorkommen, jedoch unterschiedlich stark gewichtet. (vgl. Hanna, 2000)

3.1. Überzeugungsfunktion bzw. Verifikationsfunktion

Traditionell werden wissenschaftliche mathematische Publikationen und Lehrbücher in der Form „Definition – Satz – Beweis“ aufgebaut. Dies zeigt den fundamentalen Charakter der Mathematik (vgl. Weigand u. a., 2014). Zunächst werden Hypothesen in Form von Sätzen formuliert, die einer Begründung bedürfen, um als wahr zu gelten. Der geführte Beweis hat zwei Aufgaben: einerseits müssen andere von der Richtigkeit überzeugt werden, andererseits auch diejenige Person, die den Beweis führt. Alibert & Thomas (2002) bezeichnen dies als „dualen Charakter“. Tall (1989, zit. nach Kuntze, 2005) teilt diesen in drei Phasen: „convincing oneself“, „convincing of a friend“ und „convincing of an enemy“. De Villiers (1990) fasst dies jedoch unter der Verifikationsfunktion zusammen.

Ein Beweis stellt keine notwendige Vorbedingung für Überzeugung dar. In manchen Fällen ist eher die persönliche Überzeugung eine Notwendigkeit für den Beweis. Oftmals ist der Sachverhalt, beispielsweise durch quasi – empirische Verifikation oder durch Existenz einer logisch nachvollziehbaren Beweisidee, bereits im Vorhinein klar (vgl. De Villiers, 1999). Aufgrund der Überzeugung besitzt der Beweisende die Motivation sich dem Problem zu stellen und über längere Zeit sich damit zu beschäftigen. In manchen Fällen kann sogar ohne Beweis ein hohes Maß an Überzeugung und Vertrauen entstehen. Beispielsweise wurde die berühmte Riemannsche Behauptung niemals formal bewiesen, jedoch sind die heuristischen Argumente so überzeugend, dass in der mathematischen Gesellschaft trotzdem von deren Wahrheitsgehalt ausgegangen wird (vgl. De Villiers, 1990). Anhand dieses Beispiels wird auch deutlich, dass hier die Überzeugungsfunktion keine Rolle spielt, wodurch es noch mehr geben muss.

Die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit einer Aussage wird gerade durch diese im Vorhinein bestehende Überzeugung behindert. Insbesondere in der Geometrie stellt dies ein Problem dar. Hier werden vor allem Behauptungen anhand von Überlegungsfiguren formuliert, wodurch der Sachverhalt ohnehin offensichtlich ist und von den Schülern und Schülerinnen nicht angezweifelt wird (vgl. Kuntze, 2009a). Beispielsweise wird kein Lernender die Tatsache in Frage stellen, dass in einem Dreieck aus der Gleichheit der Schenkellängen die Gleichheit der Basiswinkel folgt (vgl. Malle, 2002). Auch hier muss ein Beweis keine Überzeugung leisten.

Eine weitverbreitete Ansicht ist, dass die einzige Funktion eines Beweises die Überprüfung der Wahrheit einer Hypothese ist. Oftmals wird die Verifikationsfunktion als einzig legitime Aufgabe im Unterricht angesehen, wie zum Beispiel bei Goldberg (2002). Hersh (1993) beispielsweise definiert den Begriff „Beweis" ausschließlich durch seine Überzeugungsfunktion:

„[...] a proof is just a convincing argument, as judged by

competent judges." (Hersh, 1993)

Studien zufolge ist die Mehrheit der Schüler und Schülerinnen der Meinung, dass die Funktion eines Beweises darin besteht, zu zeigen, dass eine Aussage wahr ist (vgl.Kuntze, 2005). Dies lässt sich durch die enge Verbindung mit dem alltäglichen Argumentieren erklären (vgl. Meyer & Prediger, 2009)

Abbildung 3.1: Beweisen vor Gericht (Goldberg, 2002)

Beispielsweise dient das Beweisen vor Gericht der Überzeugung des Richters von dem Vorliegen einer Tatsache (s. Abb. 3.1) (vgl. Kuntze, 2009a). Zusätzlich spielen alltägliche Redewendungen eine Rolle, wie zum Beispiel „sein Können unter Beweis stellen".

Im Unterricht sollte unbedingt Abstand davon genommen werden, die Überzeugung als alleiniges Ziel eines Beweises zu deklarieren. Lehrer und Lehrerinnen versuchen Zweifel in den Köpfen der Schüler und Schülerinnen zu säen, da sie der Auffassung sind, dass die einzige Funktion eines Beweises die Beseitigung dieser Zweifel darstellt (vgl. De Villiers, 1990). Die Erschütterung der Wahrnehmung, beispielsweise durch optische Täuschungen, soll Zweifel in den Lernenden hervorrufen und somit die Einsicht in einen deduktiven Beweis initiieren (De Villiers, 1998).

„Wenn man die vorgegebene Figur zeichnet, sieht man meistens sofort, dass die Behauptung wahr oder falsch ist, doch das zählt leider nicht. Also muss das Ganze bewiesen werden.“ (Reiss, 2009)

Ein weiteres Argument, das der Überzeugungsfunktion als alleinige Funktion im Unterricht widerspricht, ist die Tatsache, dass Schüler und Schülerinnen oftmals durch primitive Begründungen einen höheren Grad an Überzeugung als durch einen formal deduktiven Beweis (vgl. Malle, 2002). Besitzen sie diese Überzeugung, so werden sie nicht mehr nach einem Beweis verlangen. In der fachdidaktischen Literatur besteht die Tendenz dieses Vertrauen der Schüler und Schülerinnen in empirische Argumente als „Fehlvorstellung“ anzusehen (vgl. H. Jahnke, 2007). Dabei wird offensichtlich übersehen, dass eine derartige Vorgehensweise auch in der mathematischen Wissenschaft eine große Rolle spielt, vor allem zu Beginn eines Beweisprozesses. Henn (2002) bedauert, dass der induktive Schritt, der zu dem Satz geführt hat, traditionell im Vergleich zu dem deduktiven Schritt gering geschätzt wird. Dabei stellt meist gerade dieser Teil den schwierigsten Teil mathematischer Forschung dar, unbekannte Strukturen und Eigenschaften zu entdecken (vgl. Henn, 2002). Der Autor ist der Ansicht, dass das Wechselspiel „induktiv – deduktiv“ die Mathematik als Wissenschaft charakterisiert.

Im Gegensatz zu De Villiers (1990) unterscheidet Kuntze (2005) zwischen der Verifizierungs- und der Überzeugungsfunktion von Beweisen. Unter der Überzeugungsfunktion wird jedoch nicht die Überzeugung der Beweis führenden Person verstanden, sondern die Überzeugung anderer Menschen von der Wahrheit oder Falschheit der Aussage. Ziel dieser Funktion ist es, dass der Beweis anerkannt und der Beweisende sich erfolgreich gerechtfertigt hat (vgl. Kuntze, 2005). Die Intention hinter dieser Unterscheidung ist die Berücksichtigung des Beweisprozesses, denn Überzeugungs- und Verifizierungsfunktion treten in keiner

Phase des Beweisprozesses gleichzeitig auf (vgl. Kuntze, 2005). Kuntze (2005) ist außerdem der Ansicht, dass die Betonung des Beweisprozesses in Zusammenhang mit den Funktionen den Schülern und Schülerinnen beim Lernen hilfreich sein kann. Beispielsweise kann die Aufgabenstellung „Begründe so genau, dass du auch deinen schärfsten Kritiker überzeugst“ (Kuntze, 2005). ein Beweisbedürfnis in den Lernenden wecken.

Für Schüler und Schülerinnen stellt die offengebliebene Frage nach dem Warum die plausibelste Motivation für die Einsicht in die Notwendigkeit eines deduktiven Beweises dar (vgl. Ufer & Heinze, 2009). Diese Tatsache deutet bereits auf die zweite Funktion des Beweisens hin.

3.2. Erklärungsfunktion

Beweise stehen nicht isoliert für sich, sondern in Verbindung mit mathematischen Aktivitäten (vgl. Weigand u. a., 2014). Wie bereits in Kapitel 1.3 beschrieben wurde, sollte zwischen dem Beweis als fertiges Produkt und dem Beweisprozess unterschieden werden. Aufgrund des Prozesscharakters zeigt ein Beweis nicht nur, dass eine Behauptung wahr oder falsch ist, sondern erklärt insbesondere, warum die Behauptung wahr oder falsch ist und fördert so das Verständnis (Reiss & Hammer, 2012). Manin (1981, zit. nach De Villiers, 1990) sah die Erklärungsfunktion als Kriterium für einen guten Beweis. Denn auch in der Wissenschaft geht es nicht nur um die Frage der Gültigkeit, sondern auch um das Warum (vgl. Hersh, 1993). Beispielsweise lehnen einige Mathematiker und Mathematikerinnen den computergeführten Beweis des Vierfarbensatzes ab, da dieser nicht erklärt, wieso dieser Satz gilt (vgl. Hersh, 1993). Ist die beweisführende Person überzeugt von der Gültigkeit der Aussage, so besteht trotzdem ein Bedürfnis nach einem Beweis, da die Frage nach dem Warum noch nicht geklärt wurde (vgl. De Villiers, 1990). Für die Mathematik ist somit nicht entscheidend, ob ein Beweis gefunden wird, sondern vielmehr wie er gefunden wird (vgl. Reiss, 2009).

Als Beispiel für einen Beweis, dessen Hauptfunktion die Erklärung darstellt, ist folgend der Beweis zum Satz über Winkelhalbierende im Dreieck vorgeführt (vgl. Weigand u. a., 2014).

Satz: Die Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt; dieser ist der Mittelpunkt des Inkreises.

Beweis: Die Winkelhalbierenden schneiden sich paarweise. Denn hätten zwei der Mittelsenkrechten keinen Schnittpunkt, so wären sie parallel und damit auch die zugehörigen Dreiecksseiten, es gäbe also kein Dreieck. Jeder beliebige Punkt P der Wineklhalbierenden ω_α gleich weit von b und c entfernt. Der Schnittpunkt S von ω_α und ω_β ist deshalb gleich weit von a und b entfernt, gehört also zu ω_γ. Das bedeutet, dass auch ω_γ durch S läuft. Folglich schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in S, und S ist von allen drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt, so dass sich durch S ein Kreis konstruieren lässt, der alle drei Seiten berührt, der Inkreis des Dreiecks.

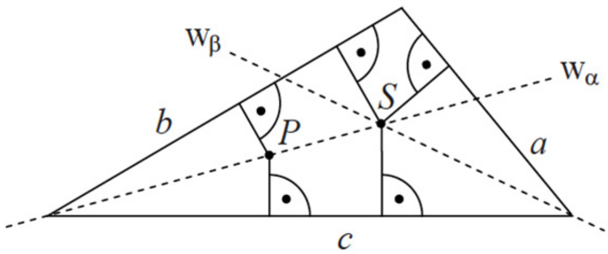


Abbildung 3.2: Beweisskizze (Weigand u.a., 2014)

Dieser Beweis zeigt nicht nur die Gültigkeit der Aussage, sondern auch warum die Aussage gilt. Das besondere ist, dass dabei vor allem die Abstandseigenschaft der Winkelhalbierenden betont wird. Diese Zusatzinformation ist oft wichtiger, als die alleinige Bestätigung. Weiters wird durch diesen Beweis ein Verfahren zur Konstruktion des Inkreises aufgezeigt und weshalb der Begriff Inkreis überhaupt definiert werden sollte. (vgl. Weigand u. a., 2014).

Damit ein Beweis seiner Erklärungsfunktion gerecht werden kann, muss er auch dementsprechend dargestellt werden. Beutelspacher (2009) beispielsweise vertritt die Ansicht, dass ein Beweis so dargestellt werden muss, dass der Leser bzw. die Leserin den Beweis zu jedem Zeitpunkt nachvollziehen kann. Entscheidend bei der Darstellung ist die Organisation des Beweises. Für den Leser bzw. die Leserin muss klar ersichtlich sein was zu beweisen ist, wie vorgegangen wird, beispielsweise durch Kennzeichnung anhand Schritt 1, Schritt 2 usw., und wann der Beweis zu Ende ist. Außerdem erweist sich das Unterscheiden von Fällen und das Einfügen von Kommentaren oftmals als zweckdienlich (vgl. Beutelspacher, 2009). Alibert & Thomas (2002) hingegen schlagen die Anlehnung an das Top – Down – Design, wie es in der Softwaretechnik verwendet wird, vor. Bei dieser Variante wird zunächst ein Überblick über den Beweis gegeben und die Kernidee erläutert. Anschließend wird der Beweis in kleine Abschnitte zerlegt, wobei jedem dieser Teile eine kurze Erklärung vorangeht (vgl. Alibert & Thomas, 2002).

Bereits im Kapitel 1.2 wurde erwähnt, dass zur Erhaltung der Übersichtlichkeit oftmals einzelne Beweisschritte ausgelassen werden, wodurch es zu einer beabsichtigten Beweislücke kommt (vgl. Holland, Knoche, & Scheid, 1988). In mathematischen Publikationen werden meist routinierte Berechnungen und Umformungsschritte ausgespart (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011). Beutelspacher (2009) legt dem Verfasser bzw. der Verfasserin eines Beweises nahe, nicht nur einen Fall genau zu behandeln, sondern jeden. Entgegen dieser Empfehlung ist es in mathematischen Fachzeitschriften üblich derartige analoge Fälle und triviale Begründungen auszulassen (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011). Durch diese Aussparungen stellen derartige Beweise ihre Erklärungsfunktion in den Hintergrund, die Verifizierungsfunktion rückt in den Vordergrund.

Die essentielle Tätigkeit der Mathematik ist das Finden eines Beweises (vgl. Hersh, 1993). Diese Phase des Beweisprozesses ist geprägt von Exploration. Besonders das empirische Arbeiten und induktive Denkschritte stehen im Vordergrund (vgl. Reiss, 2002a). Die Ideen, die in dieser ersten Explorationsphase gesammelt wurden, müssen in der nächsten Phase in Form gebracht werden. Argumente müssen geordnet, Zusammenhänge aufgezeigt, fehlende Begründungen identifiziert und neue Bezeichnungen eingeführt werden (vgl. Beutelspacher, 2009). Dieser Prozess wird durch die Verschriftlichung ausgespart. Dabei sind es oftmals gerade die „Sackgassen“, die wichtige Erkenntnisse liefern könnten (Ufer & Heinze, 2009). Dabei kann der Hinweis für die zündende Idee, durch die nachträgliche „Glättung“ der eigenen Überlegungen verloren gehen (vgl. Hölzl & Sander, 2002). Dadurch wird deutlich, dass ein Beweis nicht auf das fertige Produkt reduziert werden darf. Vor allem im Unterricht darf es nicht vorrangig um das Ergebnis gehen, sondern um den Weg dorthin (vgl. Reiss, 2009). Wird nicht der Prozesscharakter gesehen, sondern nur das fertige deduktive Produkt, so kann bei den Schülern und Schülerinnen ein verzerrtes Bild der Mathematik entstehen, wodurch der Aufbau adäquater Problemlösestrategien verhindert (vgl. Reiss & Ufer, 2009).

3.3. Entdeckungsfunktion

In der fachdidaktischen Literatur wird diese Funktion unterschiedlich verstanden. Meyer & Prediger (2009) beispielsweise sehen bereits im Finden von Ansatzpunkten einen Akt des Entdeckens. De Villiers (1990) hingegen ist der Ansicht, dass durch den Beweisprozess neue mathematische Resultate entdeckt werden, die intuitiv nicht erfasst werden können, wie das folgende Beispiel zeigen soll (vgl. De Villiers, 1999).

<u>Satz:</u>

Verbindet man die Mittelpunkte eines Deltoids, so entsteht ein Rechteck.

<u>Empirischer Beweis:</u>

In Geogebra wird ein beliebiges Deltoid gezeichnet. Anschließend werden die Mittelpunkte konstruiert und verbunden. Visuell ist klar, dass sich bei dem Seitenmittenviereck um ein Rechteck handelt, dies kann zusätzlich durch messen der Winkel überprüft werden. Wird nun der Punkt A derart verschoben, dass es sich weiterhin um ein Deltoid handelt, so zeigt sich, dass EFGH weiterhin ein Rechteck bleibt. Punkt A kann sogar so weit nach unten gezogen werden, dass ein konkaves Deltoid entsteht, ohne etwas an dieser Tatsache zu ändern (s. Abb. 3.3 rechts)

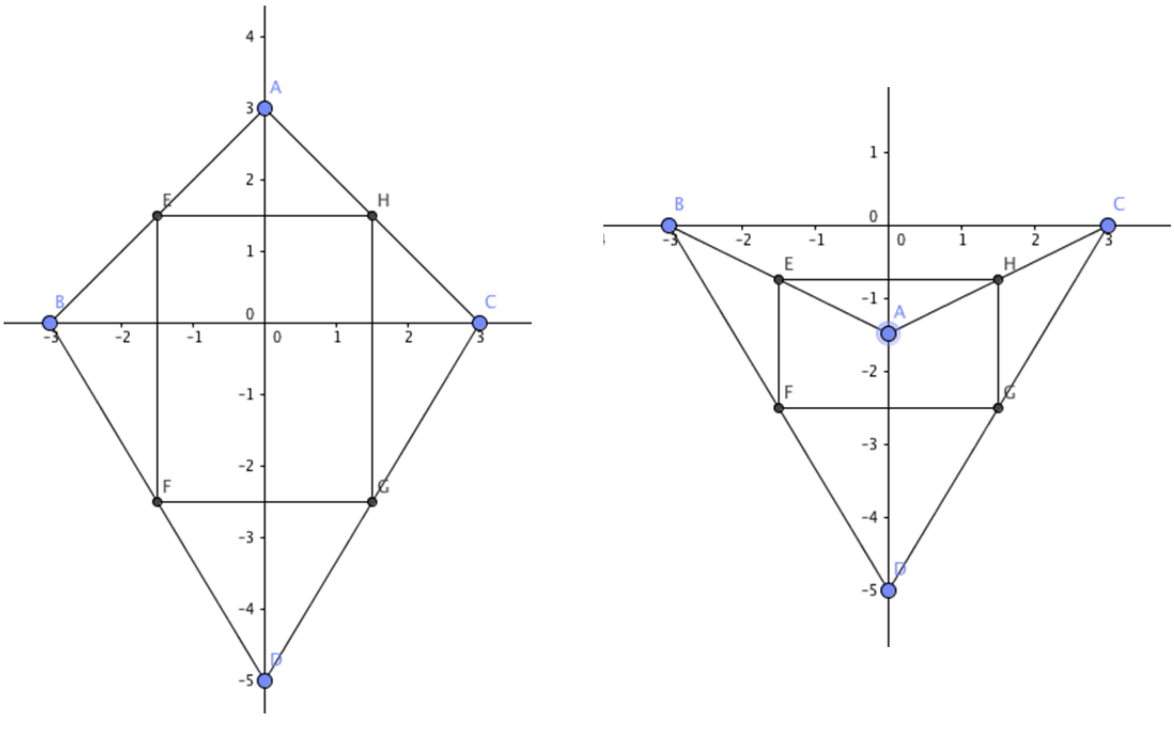


Abbildung 3.3: empirischer Beweis

Durch diesen Beweis wird zwar ein Vertrauen in die Gültigkeit der Aussage aufgebaut, jedoch liefert dieser keine Erklärung warum dies gilt.

<u>Formaler Beweis:</u>

Für den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ gilt die Beziehung $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ und für den Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ gilt $M_{AD} = \frac{1}{2} \cdot (A + D)$. Daher ist der Vektor $\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}}$ gegeben durch $\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}} = \frac{1}{2} \cdot (D - B) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Aufgrund der Beziehung $M_{BC} = \frac{1}{2} \cdot (B + C)$ und $M_{CD} = \frac{1}{2} \cdot (C + D)$ gilt für die übrigen Seitenvektoren

$$\overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} = \frac{1}{2} \cdot (D - B) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \frac{1}{2} \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = \frac{1}{2} \cdot (D - B) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Die Seiten des Mittenvierecks sind paarweise parallel, da $\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}} \parallel \overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} \parallel \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} \parallel \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} \parallel \overrightarrow{AC}$. Schlussendlich folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass die Diagonalen in einem Deltoid aufeinander normal stehen.

Im Gegensatz zu dem empirischen Beweis liefert dieser eine befriedigende Antwort auf die Frage, warum dieser Satz gilt. Durch diesen Beweis lassen sich neue Resultate entdecken, die intuitiv aus dem nicht greifbar sind. Da erst im letzten Schritt die Eigenschaft des Deltoids, die Diagonalen stehen normal aufeinander, benutzt wurde, gelten die Ergebnisse vorher für jedes beliebige Viereck. Das bedeutet, dass für jedes beliebige Viereck das Mittenviereck paarweise parallele Seiten besitzt. Somit wurde folgender Satz entdeckt:

<u>Satz von Varignon:</u> Die Mittelpunkte eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.

Weiters kann durch den formalen Beweis die Behauptung verallgemeinert werden (vgl. De Villiers, 1999). Um zu beweisen, dass es sich um ein Rechteck handelt, wurde einzig die Eigenschaft des Deltoids, die Orthogonalität der Diagonalen, genutzt. Somit kann der Satz auf eine ganze Gruppe von Vierecken mit dieser Eigenschaft verallgemeinert werden.

Satz: Mittelpunkte eines beliebigen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander normalstehen, bilden ein Rechteck.

Weiters lässt sich aus dem formalen Beweis schließen, dass die Seiten des Rechtecks halb so lang sind wie die Diagonalen des Deltoids. Diese Tatsache bedeutet, dass der Flächeninhalt des Rechtecks halb so groß ist wie der des Vierecks. Dies lässt sich empirisch wieder mit Hilfe von Geogebra überprüfen (s. Abb.), jedoch stellt sich die Frage, ob dies auch für beliebige Vierecke mit aufeinander normal stehenden Diagonalen gilt.

Satz: Die Mittelpunkte eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Vierecks.

Der empirische Beweis wird analog zu oben geführt, jedoch könnte zusätzlich der Fall untersucht werden, wenn der Punkt A an eine beliebige Stelle gezogen wird (s. Abb. 3.4). Trotzdem wird wieder nur ein Vertrauen in die Behauptung geliefert, aber keine Antwort auf die Frage nach dem Warum.

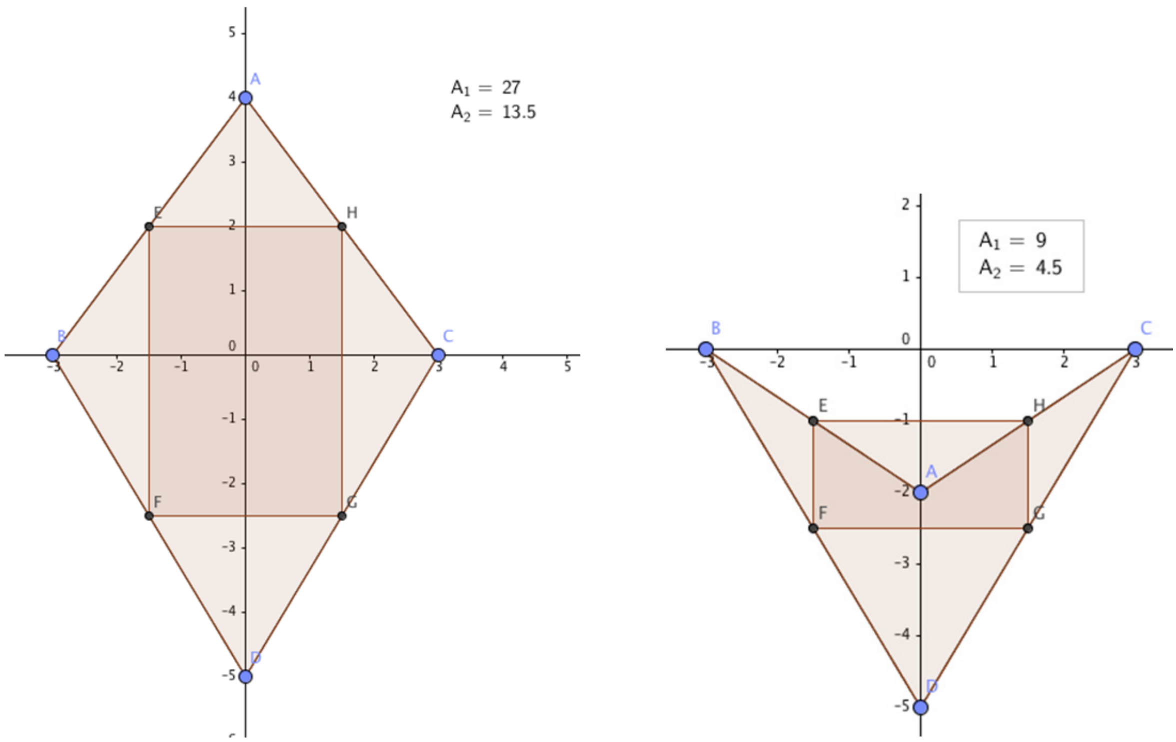


Abbildung 3.4: empirischer Beweis

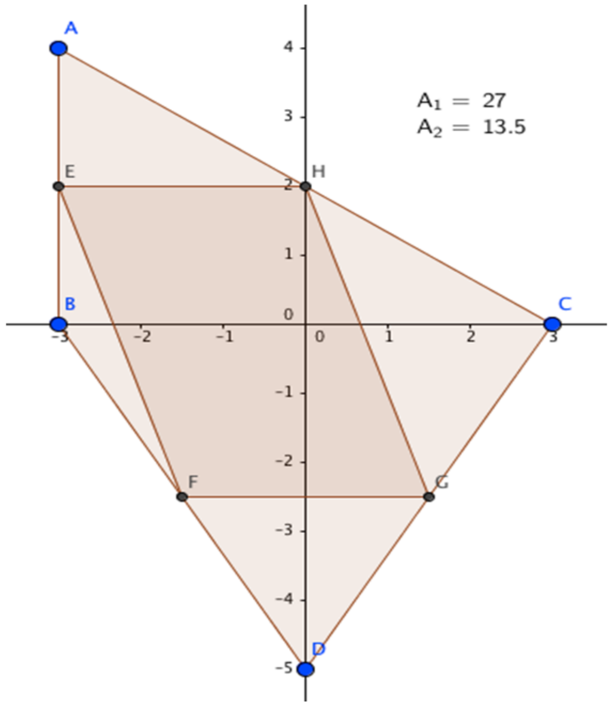


Abbildung 3.5: empirischer Beweis für allgemeines Viereck, dessen Diagonalen normal aufeinander stehen

<u>Formaler Beweis:</u>

Aus dem vorhergehenden Beweis wissen wir bereits, dass die Seiten des Mittenparallelogramms halb so lang sind wie die Diagonalen des Vierecks und paarweise parallel zueinander liegen. Nun kann der Strahlensatz angewendet werden:

$$\overline{EH}:\overline{AC} = h_1 : h_2$$

$$1:2 = h_1 : h_2$$

$$h_1 = \frac{1}{2} h_2$$

Dies folgt analog für alle Höhen der markierten Dreiecke in Abb. . Daher gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks RDS, dass

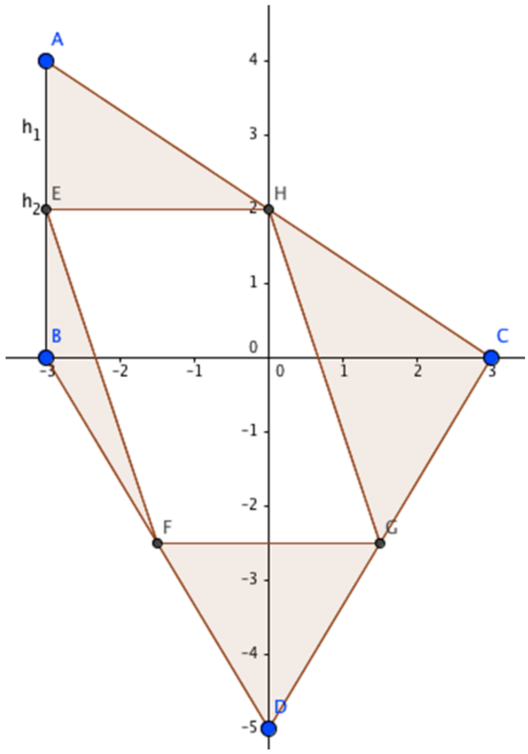


Abbildung 3.6: Beweisskizze des formalen Beweises

$$A_{RDS} = \frac{1}{2}\overline{BC} * \frac{1}{2}h_2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A_{ABC}$$

Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - \frac{1}{4}A_{RDS} - \frac{1}{4}A_{BEF} - \frac{1}{4}A_{DFG} - \frac{1}{4}A_{CHG}$$

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - \frac{1}{4}A_{ABC} - \frac{1}{4}A_{BAD} - \frac{1}{4}A_{DBC} - \frac{1}{4}A_{ACD}$$

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - \frac{1}{4}A_{ABCD} - \frac{1}{4}A_{ABCD}$$

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$$

Dies bedeutet, dass durch den Beweis des ursprünglichen Satzes drei neue Informationen entdeckt wurden.

Meyer & Voigt (2009) sehen in der Explorationsfunktion des Beweisens eine Möglichkeit, um das Beweisbedürfnis der Schüler und Schülerinnen zu wecken. Die Einsicht in die Notwendigkeit eines Beweises wird gesteigert, wenn die Lernenden selbst eine mathematische Vermutung aufstellen, „mit anderen Worten, eine mathematische Entdeckung machen“ (Meyer & Voigt, 2009). Für das obige Beispiel bedeutet diese Ansicht, dass bereits das Probieren in Geogebra ein Akt des Entdeckens darstellt. Durch das Verschieben des Punktes A, können die Schüler und Schülerinnen die Vermutung aufstellen, dass für beliebige Vierecke ein Parallelogramm entsteht oder dessen Flächeninhalt immer halb so groß wie der des Vierecks ist.

3.4. Kommunikationsfunktion

Heutzutage gibt es weltweit etwa 6500 Sprachen. (vgl. Die Sprachen der Welt) Beweise sind ein Mittel, um mathematisches Wissen in einer weltweit verständlichen Sprache zu vermitteln (vgl. Kuntze, 2009a). Sie dienen der Darstellung und Verbreitung mathematischen Wissens (vgl. Weigand u. a., 2014). Dies zeigt, dass Beweise neben den bereits erwähnten Komponenten auch eine soziale hat (vgl. Alibert & Thomas, 2002). Diese Komponente klingt bereits bei der

Überzeugungsfunktion an, da De Villiers (1990) darunter auch die Überzeugung anderer versteht.

Weiters wurde dieser soziologische Aspekt bereits in Kapitel 1.1 erwähnt, da ein Argument erst als zulässig gilt, wenn es von der mathematischen Community als solches akzeptiert wurde (vgl. Weigand u. a., 2014). Die Frage nach Akzeptanz eines Beweises kann zwischen Wissenschaftlern und Wissenschaftlerinnen eine Diskussion entfachen. De Villiers (1990) betont jedoch, dass ein derartiger Diskurs auch im Unterricht auftritt. Für Goldberg (2002) stellt der sprachliche Aspekt des Beweisens ebenso eine wichtige Funktion des Beweisens dar. Im Unterricht sollten die Schüler und Schülerinnen dazu angehalten werden, Argumente zu suchen, die sie selbst und andere überzeugen (vgl. Goldberg, 2002). Den Lernenden muss zunächst klar gemacht werden, dass Fehler im Mathematikunterricht nützlich sind und nicht verurteilt werden. Ein Unterrichtsvorschlag sieht vor, dass Schüler und Schülerinnen, die sich bei der gefundenen Lösung einer Aufgabe während des Unterrichts nicht sicher sind, ihre Lösung an der Tafel präsentieren können. Im Plenum diskutiert die Klasse anschließend über den Lösungsweg. Dabei werden Fehler identifiziert, wobei darauf zu achten ist, dass die Lernenden begründen warum es sich um einen Fehler handelt, Ursachen werden aufgezeigt und eventuelle Unklarheiten geklärt. Durch diese Vorgehensweise kann eine positive Einstellung gegenüber kritischen Fragen entwickelt werden (vgl. Goldberg, 2002).

3.5. Systematisierungsfunktion

Beweise stellen in der Mathematik ein unverzichtbares Mittel dar, um Sätze, Definitionen und Propositionen in ein deduktives System aus Axiomen, Definitionen und Theoremen einzuordnen. (vgl. De Villiers) Begriffe werden miteinander in Verbindung gebracht und in ein größeres Ganzes eingeordnet (vgl. Weigand u. a., 2014). Folgend wird ein zweiter Beweis des Satzes über die Winkelhalbierende im Dreieck (s. Kapitel 2.2) gegeben, der die Thematik in den Kontext der Kongruenzsätze einbindet (vgl. Weigand u. a., 2014).

<u>Beweis:</u> Zunächst wird wiederum gezeigt, dass sich die Winkelhalbierenden schneiden, denn würden sie dies nicht tun, so wären sie parallel und damit auch die zugehörigen Dreiecksseiten, wodurch es kein Dreieck mehr gäbe. Vom

gemeinsamen Schnittpunkt S der beiden Winkelhalbierenden ω_α und ω_β wird das Lot auf die drei Dreiecksseiten a, b und c gezeichnet. Die Lotfußpunkte werden mit den Buchstaben D, E und F bezeichnet.

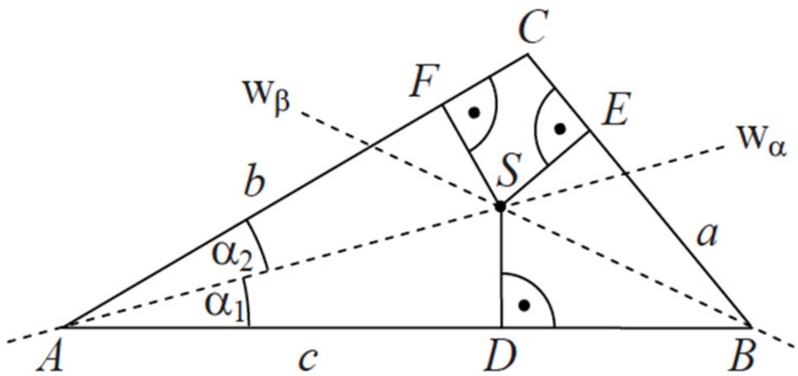


Abbildung 3.7: Beweisskizze (Weigand u. a., 2014)

Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke ADS und ASF sind wegen

- $\alpha_1 = \alpha_2$ (Eigenschaft der Winkelhalbierenden ω_α)
- $\overline{AS} = \overline{AS}$ (gemeinsame Seite beider Dreiecke)
- $|\angle ASD| = |\angle ASF|$ (Winkelsumme im Dreieck und rechter Winkel)

kongruent nach dem WSW – Satz und es gilt $\overline{SF} = \overline{SD}$. Analog wird gezeigt, dass die beiden Dreiecke DBS und SBE kongruent sind, und es gilt $\overline{SD} = \overline{SE}$. Somit ist der Punkt S von allen drei Dreiecksseiten gleich weit entfernt, und es kann ein Kreis konstruiert werden, der alle drei Seiten berührt.

Schüler und Schülerinnen sehen diese Funktion des Beweisens nicht, da diese im alltäglichen Argumentieren kaum eine Rolle spielt (vgl. Meyer & Prediger, 2009). Dabei bietet diese Dimension jede Menge positive Auswirkungen (vgl. De Villiers, 1999):

- Zirkelschlüsse, Inkonsistenzen und versteckte Annahmen können leichter identifiziert werden (vgl. De Villiers, 1999). Folgend ein Beispiel, das einen derartigen Zirkelschluss zeigt (Reiss, 2002a):
  Satz: C sei ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke AB. Dann ist das ΔABC stets gleichschenkelig.

Beweis von Sylvia:

Da C auf einer senkrechten Linie liegt, gilt $\angle ADC = 90°$ und $\angle BDC = 90°$.

Weil die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks immer gleich groß sind, gilt

$$\angle CAB = \angle CBA.$$

Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Somit ist die Behauptung wahr.

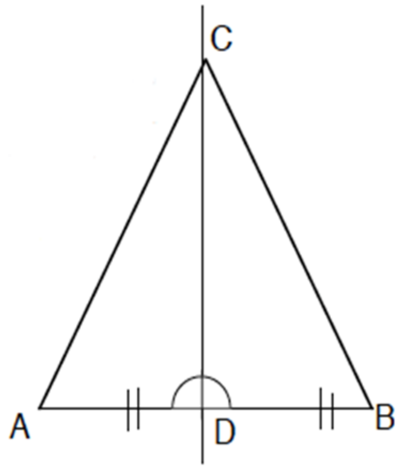


Abbildung 3.8: Beweisskizze (Riess, 2002a)

- Durch diese Funktion werden mathematische Theorien vereinfacht und vereinigt. Dies geschieht durch Integration einzelner Aussagen und Argumente in ein großes Ganzes (vgl. De Villiers, 1999). Dadurch wird das Verständnis der Lernenden unterstützt. Es fällt ihnen leichter neue Probleme zu lösen und ihnen wird vor Augen geführt, wie die Mathematik zusammenhängt (vgl. Reiss, 2009). Dieser positive Effekt auf das Lernen von Mathematik konnte durch eine Studie von Thaller & Frühmann (2014) gezeigt werden. Das Ziel dieser Studie war es zu zeigen, dass der begründungsorientierte Unterricht bessere Resultate erzielt als der traditionelle faktenzentrierte Unterricht. Beim begründungsorientierten Unterricht werden bei der Einführung neuer mathematischer Inhalte Begründungen durch die Lehrperson gegeben, jedoch werden die Lernenden in den Herleitungsprozess miteinbezogen. Im späteren Verlauf des Unterrichts wird immer wieder Bezug zu den Beweisen genommen. Im Gegensatz dazu steht der faktenzentrierte Unterricht, der die fertigen Resultate präsentiert ohne Begründungen auf die Fragen Warum zu liefern (vgl. Thaller & Frühmann, 2014). Für die Studie wurden zwei Klassen von dem gleichen Lehrer unterrichtet. Eine der beiden wurde begründungsorientiert, die andere faktenzentriert unterrichtet. Die Ergebnisse zeigten, dass jeweils die Klasse, die begründungsorientiert unterrichtet wurde, bei Schularbeiten bessere Resultate erzielte als die zweite Klasse (vgl. Thaller & Frühmann, 2014).

- Weiters liefert diese Funktion einen globalen Überblick über ein Thema, indem die zugrunde liegende axiomatische Struktur offen gelegt wird (vgl. De Villiers, 1999).
- Diese Funktion des Beweisens führt häufig zu einem neuen deduktiven System, das eine neue Perspektive mit sich bringt (vgl. De Villiers, 1999).

Hanna (2000) erweitert die Gedanken von De Villiers (1990) um drei weitere Komponenten:

- Aufbaufunktion: Beweise liefern die Grundlage, auf der andere Theorieelemente aufgebaut werden können (vgl. Hanna, 2000).
- Explorationsfunktion: Das Erkunden, beispielsweise der Bedeutung von Definitionen oder eventueller Folgerungen, steht im Fokus (vgl. Hanna, 2000).
- Eingliederungsfunktion: Hierbei geht es um die Integration einer bekannten Tatsache in einen neuen Rahmenzusammenhang. Weiters steht der dadurch angeregte Perspektivenwechsel im Mittelpunkt. (vgl. Hanna, 2000)

Kuntze (2005) hingegen unterteilte das System von De Villiers (1990), um dem Prozesscharakter des Beweisens gerecht zu werden. Beispielsweise unterteilt der Autor die Systematisierungsfunktion in drei Unterfunktionen (vgl. Kuntze, 2005):

- Ordnung mathematischen Wissens erkunden
- Eine systematische Ordnung mathematischen Wissens herstellen
- Mathematisches Wissen neu ordnen, um neue Perspektiven zu gewinnen

Zusammenfassend lässt sich betonen, dass Beweise viel mehr liefern, als reine Verifikation einer Aussage. Dies sollte den Schülern und Schülerinnen im Unterricht verständlich gemacht werden, um dadurch einen positiven Zugang zum Beweisen zu fördern.

4. Niveaustufen des Beweisens

Wie bereits in Kapitel 1.3 herausgearbeitet wurde, handelt es sich beim Beweisen um eine komplexe Tätigkeit, die nicht auf das Produkt Beweis reduziert werden darf, sondern als Prozess zu verstehen ist (vgl. Reiss & Renkl, 2002). Besonders beim selbstständigen Finden von Beweisen haben Schüler und Schülerinnen so ihre liebe Not. Dadurch finden sich in den meisten fachdidaktischen Publikationen Ratschläge, wie beispielsweise unnötige Anforderungssprünge oder Abstraktion zu vermeiden, Schüler und Schülerinnen allmählich an das Beweisen heranführen und altersgemäß vorzugehen (vgl. Müller, 1995). Diese Ratschläge zeigen, dass in der Fachdidaktik von einer allmählichen Entwicklung der Beweisfähigkeit ausgegangen wird. Aufgrund dessen bedarf es einer „*Orientierung an Stufenmodellen, die sich auf verschiedene Aspekte der an die Schüler zu stellenden Anforderungen oder des Lernprozesses beziehen können*“ (Müller, 1995). In der fachdidaktischen Literatur findet sich eine Vielzahl an Vorschlägen für Niveaustufen des Beweisens, jedoch wird die Anforderung einer Niveaustufe bei keinem dieser Ansätze durch das Erreichen der nächsten aufgehoben. Müller (1995) ordnete diese zahlreichen Denkansätze drei Grundrichtungen zu. Im Folgenden werden diese drei Grundrichtungen vorgestellt und verschiedene Ansätze der jeweiligen Grundrichtung zugeordnet und näher beschrieben.

4.1. Erkenntnistheoretische Ansätze

Vorschläge zu Niveaustufen des Beweisens, die diesem Ansatz entsprechen, rücken den Grad der Formalisierung und die geforderte logische Strenge in das Zentrum. Diesen Ansatz verfolgt auch das Konzept der „*prämathematischen Beweise*“ (Kirsch, 1979). Bei dieser Form von Beweis spielen enaktive oder ikonische Darstellungen eine wichtige Rolle, wodurch sie diesem Ansatz zugeordnet werden können (vgl. Weigand u. a., 2014).

4.1.1. Niveaustufen nach Holland (1988)

Der Autor formuliert drei Stufen:

1. **<u>Stufe des Argumentierens:</u>**

   Auf dieser Stufe des Beweisens ist das Ziel die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Aussage. Ist diese nicht unmittelbar ersichtlich, so wird ein Beweis benötigt, dieser muss jedoch nicht die formale Strenge erfüllen. Außerdem muss dieser nicht lückenlos sein oder auf eine Beweisfigur verzichten, sondern vielmehr sind Veranschaulichungen sogar erwünscht. Der benötigte Beweis muss nicht in schriftlicher Form gegeben werden, es reicht lediglich eine mündliche Argumentation. Als unterstützende Argumente können veranschaulichende Hilfsmitteln, wie Folien oder Modelle, herangezogen werden. Der Beweis sollte so kurz wie möglich gehalten werden, aber so ausführlich wie nötig sein. Ziel dieser Stufe ist es, den Schülern und Schülerinnen den Unterschied zwischen einer Vermutung und der Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung näherzubringen. (vgl. Holland u.a., 1988)

   Beispiel: Kongruenzsatz SSS (Holland u.a., 1988)

   Behauptung: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller drei Seiten übereinstimmen.

   Beweis: Zunächst wird ein Dreieck ABC mit gegebenen

   Seitenlängen a, b und c konstruiert. Durch Spiegelung an der Geraden g(A,B) gehen die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 ineinander über und

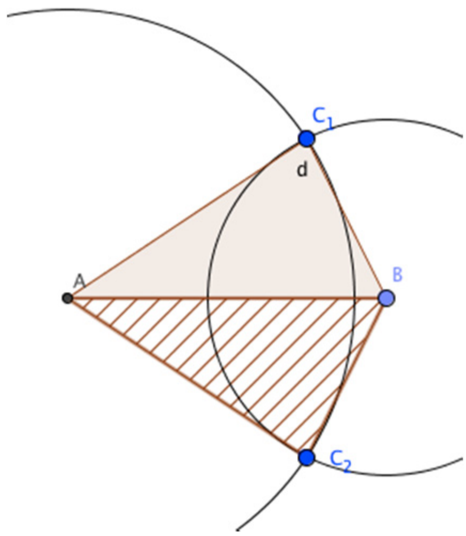
   

   Abbildung 4.1: Beweisskizze

   sind daher kongruent. Da die Strecke AB an jeder beliebigen Stelle gezeichnet werden kann, sind alle Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c zueinander kongruent.

   Durch dieses Beispiel zeigt sich, dass diese Stufe des Beweisens einen großen Handlungsbezug aufweist. Außerdem kann die zugrunde liegende Beweisidee weiter ausgebaut und präzisiert werden, so dass er zu einem Beweis der höheren Niveaustufen wird. Durch bestimmte Aktivitäten, wie Argumente für die

Allgemeingültigkeit angeben oder einen Beweisgedanken in eigenen Worten wiedergeben, kann zu den Prozesszielen des Beweisens beigetragen werden. (vgl. Holland u. a., 1988)

2. **Stufe des inhaltlichen Schließens:**

Auf dieser Stufe des Beweisens ist eine Notation als Sequenz einzelner Beweisschritte möglich, jedoch nicht zwingend notwendig. Ein Beweis wird eher eine umgangssprachliche Beschreibung der Schüler- und Schülerinnenaktivität wiedergeben. Das Ziel ist die Sicherung der Allgemeingültigkeit einer Aussage, weshalb Lückenlosigkeit auch auf dieser Stufe nicht erstrebenswert ist. Weiters ist der Bezug auf die Beweisfigur erlaubt, jedoch wird dieser Bezug nicht reflektiert. (vgl. Holland u. a., 1988)

Beispiel: Thalessatz (Holland u. a., 1988)

Behauptung: Liegt der Punkt C des Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke AB, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.

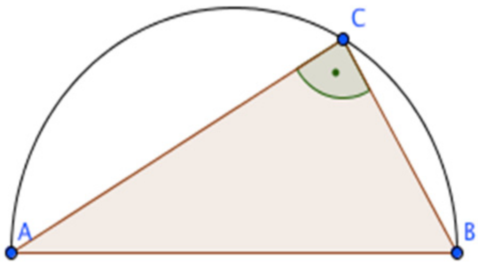


Abbildung 4.2: Beweisskizze

Beweis: Zuerst wird die Strecke MC gezeichnet. Die entstandenen Dreiecke ACM und BCM sind gleichschenkelig, da MA = MB = MC ist. Aus dem Basiswinkelsatz folgt:

- $\alpha = \gamma_1$
- $\beta = \gamma_2$

Daher ergeben α und β zusammen den Winkel γ. Da in einem Dreieck alle drei Winkel zusammen 180° ergeben, folgt $\gamma = 90°$.

Zu den Prozesszielen können Aktivitäten, wie das Angeben der benutzten Sätze, Fallunterscheidungen und einfache Beweise selbst zu finden, beitragen. (vgl. Holland u. a., 1988)

3. **Stufe des formalen Schließens**:

Ziel dieser Stufe ist ein schriftlicher Beweis, dargestellt als eine Kette von deduktiven Beweisschritten. Auf diesem Niveau ist die Bezugnahme auf die Beweisfigur nur gestattet, wenn es sich um „*Aussagen der Anordnungsgeometrie*“ (Holland u. a., 1988) handelt. Ein Beispiel für einen Beweis auf dieser Niveaustufe ist der Beweis des Inkreismittelpunktes in Kapitel 1.2. (vgl. Holland u. a., 1988)

Im Unterricht ist es nicht wünschenswert und auch nicht notwendig, dass immer die höchste Niveaustufe erreicht wird (vgl. Holland u. a., 1988).

4.2. Lerntheoretische Ansätze

Bei diesen Ansätzen steht die *„Ausbildung entsprechender Schülertätigkeiten (Können)“* (Müller, 1995) im Zentrum. Besonders der Aspekt der Erweiterung der Argumentationsbasis wird berücksichtigt (vgl. Müller, 1995).

4.2.1. Niveaustufen nach Bürger (1979)

Der Autor formuliert drei Stufen des Beweisens, bei denen das Üben einzelner Fähigkeiten im Vordergrund steht:

1. **<u>Vorübungen zum Beweisen und lokales Beweisen:</u>**
   Auf dieser Stufe des Beweisens geht es vor allem darum, ein Verständnis für Beweise zu generieren. Pracht (1978) unterteilt das Beweisverständnis nochmals in drei Stufen, je nachdem welche Fähigkeiten angesprochen werden:
   1. Stufe: In diese Stufe fallen all jene Fähigkeit, bei denen das Abrufen von Wissen aus dem Gedächtnis gefordert ist, beispielsweise Semantik, Logik oder das Zitieren genannter Sätze. (vgl. Pracht, 1978)
   2. Stufe: Unter dieser werden alle Fähigkeiten zusammengefasst, die als selbstständige *„denkerische Leistung“* (Pracht, 1978) angesehen werden. Derartige Fähigkeiten sind beispielsweise das Finden benötigter Sätze, ohne deren Namen zu kennen oder Diskussion der Voraussetzungen und der Vorgehensweise.
   3. Stufe: Darunter wird die Fähigkeit verstanden, darüberhinaus zu denken. Beispiel für eine derartige Fähigkeit ist das Schaffen von Querverbindungen zwischen mathematischen Disziplinen oder durch den geführten Beweis Ideen für andere Sätze und deren Beweis zu gewinnen.

   Wie bereits in der Einleitung erwähnt handelt es sich beim Beweisen um eine komplexe Tätigkeit, die sich aus einzelnen Aktivitäten zusammensetzt. Bürger (1979) schlägt daher vor, auf der ersten Stufe zum Beweisen jene Einzelaktivtäten gezielt zu üben. Folgende Übungen schlägt der Autor vor:

Unterschied zwischen Sätze und Definitionen:

Damit die Schüler und Schülerinnen ein Verständnis von Beweisen entwickeln können, müssen sie mathematische Behauptungen erkennen können, die einen Beweis benötigen (vgl. Bürger, 1979). Eine Definition wird postuliert und benötigt keiner Begründung, ganz im Gegensatz zu einem Satz, Lemma oder Behauptung. Um diese Entwicklung zu unterstützen, ist es zweckmäßig bereits frühzeitig zwischen Sätzen und Definitionen zu unterscheiden (vgl. Bürger, 1979).

Einzelschritte beim Lösen von Aufgaben begründen:

Um die Schüler und Schülerinnen an das Begründen heranzuführen ist es zielführend, bereits im Unterricht Begründungen für Vorgehensweise bzw. Schritte beim Lösen von Aufgaben einzufordern. Beispielsweise können Begründungen für einzelne Umformungsschritte bei Gleichungen verlangt werden. (vgl. Fischer & Malle, 1985)

Logische Schlussweise an mathematischen und außermathematischen Inhalten üben:

Durch Übungen, die logische Aussagen, wie beispielsweise „wenn...dann“ oder „genau dann... wenn“, Konjunktionen, Disjunktionen, Verneinungen oder „für alle....“, enthalten kann der Umgang bereits geübt werden, ohne auf strenge Formulierungen zu achten. Auch der Wahrheitsgehalt derartiger Aussagen kann durch die Wahrheitswerte der Teilaufgaben bewusst gemacht werden. (vgl. Bürger, 1979) Ein Beispiel für eine solche Aufgabe wäre: *„Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann ist es auch ein Rhombus.“* (Bürger, 1979)

Lösungen von Aufgaben in einer Zusammenfassung darstellen:

Damit die Schüler und Schülerinnen lernen einen Überblick über Sequenzen von Beweisschritten zu geben, kann bei Aufgabe bereits gefordert werden, den Zweck der Lösungsschritte anzugeben und in einer logisch geordneten Form aufzuschreiben. (vgl. Fischer & Malle, 1985)

Sachverhalte durch Variablen beschreiben, verallgemeinern und begründen:

Um den Umgang mit abstrakten Konstruktionen zu üben, sollten bereits zu Beginn Aufgaben gegeben werden, bei denen ein Sachverhalt mit Variablen dargestellt und anschließend gelöst werden muss. (vgl. Bürger, 1979)

2. **<u>Arbeiten mit bereits gegebenen Beweisen:</u>**

Eine der größten Schwierigkeiten beim Beweisen für Schüler und Schülerinnen ist das selbstständige Finden von Beweisen. Um die Lernenden nicht sofort mit diesem Problem zu konfrontieren wird auf dieser Stufe zunächst mit bereits vorliegenden Beweisen gearbeitet und so das Anforderungsniveau herabgesetzt. Durch diese Vorgehensweise wird zusätzlich ein Verständnis der vorgegebenen Beweise und Beweistypen erzeugt. (vgl. Bürger, 1979) Es gibt viele methodische Möglichkeiten mit bereits gegebenen Beweisen zu arbeiten:

<u>Wiedergeben von Beweisen:</u>

Darunter kann das Auswendiglernen von Beweisen verstanden werden, jedoch würden dies nur sehr wenige Schüler und Schülerinnen mit Freuden tun. Ein Beweis kann hingegen auch durch die Führung eines Sonderfalles oder anhand einer veränderten Zeichnung wiedergegeben werden. (vgl. Fischer & Malle, 1985) Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Lernenden einen ungeordneten Beweis vorzulegen. Die Aufgabe ist es nun diesen in eine logisch geordnete Reihenfolge zu bringen. (vgl. Bürger, 1979) Derartige Beweise werden auch als „Puzzlebeweise" (Heske, 2002) bezeichnet.

Beispiel: Thalessatz (Heske, 2002)

Satz des Thales: Wenn bei einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt, dann handelt es sich um ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.

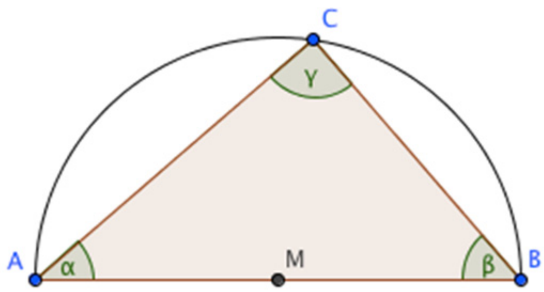


Abbildung 4.3: Thalessatz

Beweis:

Nach dem Innenwinkelsatz gilt für die Winkelsumme im Dreieck ABC: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Folglich sind die beiden Dreiecke AMC und CMB gleichschenkelig.

Die Strecken MA, MC und MB sind Radien des Kreises um M und daher gleich

---

lang.

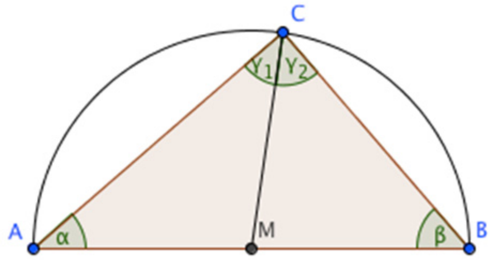
Somit gilt schließlich: $\gamma = 90°$

Durch Einsetzen erhalten wir: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180°$. Daraus folgt $\gamma + \gamma = 180°$, also

$2\gamma = 180°$.

Da in jedem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich groß sind, gilt: $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$.

Mit der Hilfslinie MC zerlegen wir das Dreieck in die beiden Dreiecke AMC und CMB mit den Winkeln γ_1 und γ_2.



Analyse eines Beweises oder von Teilen:

Durch eine genaue Betrachtung bereits gegebener Beweise können Schüler und Schülerinnen typische Vorgehensweise bestimmter Beweistypen verinnerlichen, indem die Beweismethode und die schematische Darstellung in den Vordergrund der Aufgabe treten. Weiters kann beispielsweise die Struktur eines Beweises genauer analysiert werden, indem Voraussetzung, Aussage und Beweisschritte in logischer Reihenfolge angeordnet werden. (vgl. Fischer & Malle, 1985)

Kritische Betrachtung:

Sinn einer solchen Betrachtung ist es, dass die Lernenden Fehler sachlicher und logischer Art erkennen und präzisieren können. (vgl. Bürger, 1979) Eine Möglichkeit besteht darin den Schülern und Schülerinnen unvollständige Beweise vorzulegen, indem einzelne Terme bzw. Zeilen entfernt wurden. Die Aufgabe der Lernenden ist es nun diese Beweislücken auszufüllen. (vgl. Heske, 2002)

Beispiel: Satz des Pythagoras

$$A_{Trapez} = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2} + A_{\Delta 3} =$$

$$= \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ =$$

$$= ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2}h = \frac{\_\_\_\_}{2}(\_\_\_\_\_\_)$$

$$= \frac{1}{2}(\_\_\_\_\_\_)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)$$

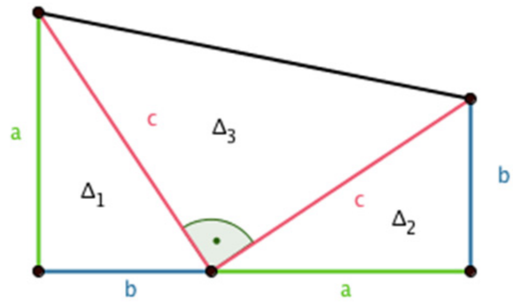


Abbildung 4.4: Beweisskizze

Gleichsetzen der beiden Terme zur Berechnung des Flächeninhaltes des Trapezes:

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \frac{1}{2}c^2 \quad | \cdot 2$$

$$a^2 + \_\_\_\_\_ + b^2 = \_\_\_\_ + c^2 \quad | -2ab$$

$$\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_ = c^2$$

3. **<u>Finden von Beweisen:</u>**

Diese Stufe des Beweisens stellt für die Schüler und Schülerinnen die größte Hürde dar, da das Beweisen großes mathematisches Wissen, mathematische Fähigkeiten, Erfahrung sowie Kreativität erfordert. (vgl. Bürger, 1979) Fischer & Malle (1985) sind der Ansicht, dass den meisten Lernenden nur dann das selbstständige Führen eines Beweises gelingt, wenn sie die wesentlichen Elemente bereits kennen. Im Unterricht wird daher nicht das Finden eines Beweises durch die Schüler und Schülerinnen im Zentrum stehen, sondern vielmehr das gemeinsame Erarbeiten mit der Lehrperson. Folgend einige Methoden, durch welche die Lernenden möglichst selbstständig Beweise führen können.

<u>Analogiebeweise:</u>

Aus einem bereits vorgestellten Beweis kennen die Schüler und Schülerinnen die entscheidende Beweisidee und können diese auf einen analogen Beweis anwenden. (vgl. Heske, 2002) Wichtig bei derartigen Beweisen ist, dass die Beweisstruktur unverändert bleibt. (vgl. Fischer & Malle, 1985)

<u>Beweise mit Fallunterscheidungen, wobei ein Fall bereits bewiesen wurde:</u>

Dies ist sehr ähnlich zu einem Analogiebeweis, jedoch wird nun ein Beweis mit mehreren Fällen aufgeteilt, sodass die aufgezeigte Beweisidee auf die weiteren Fälle angewendet werden kann. (vgl. Bürger, 1979)

Beweise mit Hilfe von Aufgaben erarbeiten:

Bei dieser Methode wird ein Beweis in einer Aufgabe verpackt, so dass für die Lösung der Aufgabe ein Beweis notwendig ist. Durch die umgebende Aufgabe werden die Schüler und Schülerinnen motivierter den Beweis durchzuführen. (vgl. Fischer & Malle, 1985)

Beispiel: Herleitung Sinussatz anhand eines Beispiels: (Fischer & Malle, 1985)

Von einem Dreieck kennt man a=10, $\alpha = 48°$ und $\beta = 63°$. Berechne b und gib eine allgemeine Formel zur Berechnung von b an!

Durch Einzeichnen der Höhe h_c wird das Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke unterteilt. Aus Abbildung 4.5 erkennt man:

$\sin\alpha = \frac{h}{b}, \sin\beta = \frac{h}{a}$

$$\rightarrow b\sin\alpha = a\sin\beta$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\rightarrow b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$$

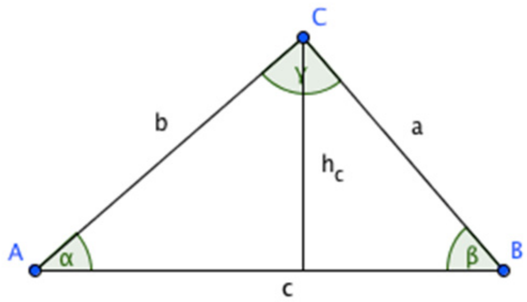


Abbildung 4.5: Beweisskizze

4.2.2. Niveaustufen nach Bruder & Pinkernell (2011)

Eine weitere mögliche Einteilung in Niveaustufen nach den geforderten Fähigkeiten liefern Bruder & Pinkernell (2011) durch eine Unterteilung in eine intuitive und eine bewusste Phase. In der intuitiven Phase sollen die Schüler und Schülerinnen schrittweise an *„sprachlich-logisch und fach-inhaltlich korrekte Argumentationen"* (Bruder & Pinkernell, 2011) herangeführt werden. Die bewusste Phase wird von den Autoren in vier Kompetenzstufen unterteilt:

1. **Stufe:**

   Auf dieser Stufe wird die Fähigkeit, Begründungen nach den fünf Grundtypen von Begründungen (wie in Kapitel 1.6 beschrieben), trainiert.

2. **Stufe:**

   Diese Stufe stellt das einschrittige Argumentieren und Begründen dar. (vgl.Reiss & Renkl, 2002) Darunter wird das Erkennen, Nachvollziehen, Wiedergeben und Verstehen mathematischer Argumentationsketten verstanden. (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011)

3. **Stufe:**
   Dies ist die nächsthöhere Stufe des Argumentierens, das bedeutet, dass nun bereits mehrschrittige Begründungen verlangt werden. (vgl.Reiss & Renkl, 2002) Dazu gehört, mehrschrittige Argumentationen zu verstehen, zu prüfen und zu vervollständige, im Sinne eines Lückenbeweis. (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011)

4. **Stufe:**
   Das höchste Komplexitätsniveau verlangt das eigenständige Finden bzw. Aufbauen mehrschrittiger Begründungen, weshalb dies die letzte Kompetenzstufe darstellt. (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011)

Sowohl in der intuitiven als auch in der bewussten Phase steht die Fähigkeit des Argumentierens im Vordergrund. In der bewussten Phase jedoch, wird zwischen einschrittigen und mehrschrittigen Begründungen unterschieden. Das bedeutet, dass der Umfang der Beweisschritte als Kriterium zur Einteilung in Niveaustufen eine Rolle spielen kann, wie in der dritten Art von Ansätzen deutlich wird.

4.3. Komplexitätsansätze

Wie bereits aus dem Namen dieser Ansätze hervorgeht, steht nun die Komplexität von Beweisen im Zentrum. Diese Komplexität wird anhand des Umfanges an Beweisschritten festgelegt. Ein weiteres Kriterium für die Komplexität sind die verwendeten Beweismittel, insbesondere auch die Vielzahl derer. Zwar kann das Erlernen von Beweismustern und –techniken den lerntheoretischen Ansätzen zugeordnet werden, jedoch muss deren Komplexität beachtet werden, weshalb dies auch den Komplexitätsansätzen zugeschrieben werden kann. (vgl. Müller, 1995) Daran lässt sich bereits erkennen, dass manche Stufenansätze Aspekte unterschiedlicher Ansätze einbeziehen und daher Überschneidungen entstehen.

4.3.1. Niveaustufen nach Hayen (1981)

Dieser Autor unterscheidet bereits fünf verschiedene Anforderungsniveaus. Nicht jede Stufe kann nur dem Komplexitätsniveau zugeordnet werden, sondern bei dieser Unterteilung handelt es sich vielmehr um eine Mischung aus allen drei Niveaustufenansätzen.

1. **Durch konkrete Handlungen Einsichten gewinnen:**

   Auf dieser Stufe geht es darum, Eigenschaften mathematischer Figuren und Relationen zu erfassen und durch konkrete Handlungen verständlich zu machen. In der Geometrie bedeutet dies, dass Eigenschaften beispielsweise von Rechteck, Parallelogramm, Quadrat und Kreis, aber auch von geometrische Relationen, wie zum Beispiel parallel zueinander, zu erkennen und plausibel zu machen. Weiters wird auf dieser Stufe bereits ein Basiswissen für die später geforderte Argumentationsbasis aufgebaut. (vgl. Hayen, 1981) Ohne die Eigenschaften von Abbildungen zu kennen, kann kein abbildungsgeometrischer Beweis geführt werden. Aus diesem Grund muss bereits auf der ersten Stufe anhand konkreter Handlung ein Grundwissen über Eigenschaften von Abbildungen generiert werden, beispielsweise durch das Verschieben eines Pappdreiecks entlang eines Geodreieckes. (siehe Abbildung 4.6)

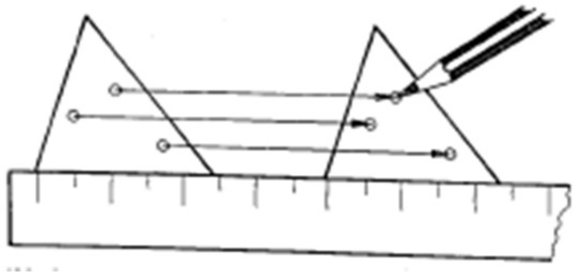


Abbildung 4.6: Verschiebung eines Pappdreiecks (Hayen, 1981)

   Diese erste Stufe des Beweisens kann den erkenntnistheoretischen Ansätzen zugeordnet werden, da hier das enaktive Arbeiten eine Rolle spielt. (vgl. Müller, 1995)

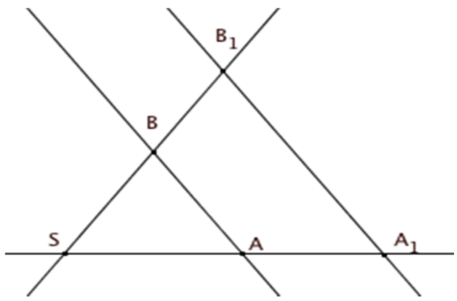
2. **Benützen der gewonnen Einsichten als Argumente:**

   Ähnlich wie bei Bruder & Pinkernell (2011) werden zunächst Begründungen gefordert, die nicht über mehrere Schritte verfügen. Für die Schüler und Schülerinnen bedeutet dies, dass sie angeleitet werden einfache Begründungen zu mathematischen Sachverhalten innerhalb lokal begrenzter Argumentationen zu geben. (vgl. Hayen, 1981) In der Abbildungsgeometrie würde auf diese Stufe die Erschließung neuer Eigenschaften von Figuren durch die grundlegenden Eigenschaften von Abbildungen erfolgen. (vgl. Hayen, 1981)

3. **Begründungen zu bereits vorstrukturierten Argumentationsketten ausbauen:**

Auf dieser Stufe des Beweisens steht der Beweis als Kette von Argumentationen im Zentrum. Um die Begründungen der Schüler und Schülerinnen auszubauen, wird ein Beweis in seine einzelnen Beweisschritte zerlegt und anschließend wird jeder Schritt von den Lernenden begründet. Dadurch kann der Umgang mit Beweisen trainiert und der Beweis als Kette von Argumentationen den Schülern und Schülerinnen näher gebracht werden. Wichtig dabei ist, dass die einzelnen Schritte noch nicht in einer formallogischen Reihenfolge aufgeschrieben werden müssen. (vgl. Hayen, 1981)

Beispiel: Satz: Strahlensatz: Die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten Strahl: $\overline{SA}:\overline{SA_1} = \overline{SB}:\overline{SB_1}$



Begründe der Reihe nach:

1. $A_{\Delta SAB1} = A_{\Delta SAB} + A_{\Delta ABB1} = A_{\Delta SAB} + A_{\Delta ABA1} = A_{\Delta SBA1}$
2. $\frac{A_{\Delta SA1B}}{A_{\Delta SAB}} = \frac{\overline{SA1}\cdot h_b}{\overline{SA}\cdot h_b} = \frac{\overline{SA1}}{\overline{SA}}$
3. $\frac{A_{\Delta SAB1}}{A_{\Delta SAB}} = \frac{\overline{SB1}\cdot h_b}{\overline{SB}\cdot h_b} = \frac{\overline{SB1}}{\overline{SB}}$
4. $\overline{SA}:\overline{SA_1} = \overline{SB}:\overline{SB_1}$

Diese beiden Stufen können sowohl den lerntheoretischen Ansätzen als auch den Komplexitätsansätzen zugeordnet werden. (vgl. Müller, 1995) Es werden Fähigkeiten, wie das Benützen von Argumenten und das Begründen einzelner Beweisschritte, gefestigt. Jedoch wird nicht nur auf die Fähigkeiten eingegangen, sondern auch zwischen einfachen Begründungen und Argumentationsketten unterschieden. Das bedeutet, dass außerdem auf den Umfang der Beweisschritte Rücksicht genommen wird.

4. **Reflektieren über die Struktur von Aussagen:**

Bisher war das Zentrum der Stufen immer das Begründen, nun rückt jedoch die Struktur der zu beweisenden Aussage und der Argumentationen in den Vordergrund. (vgl. Hayen, 1981) Die Schüler und Schülerinnen setzen sich mit dieser Struktur auseinander, indem über diese reflektiert wird. Um das Ziel dieser Niveaustufe zu erreichen, gibt es eine Vielzahl an Aktivitäten:

- Verständnis des mathematischen Satzes als Deduktion, der anhand bereits bewiesener Aussagen bewiesen wird (vgl. Hayen, 1981)
- Übersetzung umgangssprachlicher Formulierungen in eine formalisierte Gestalt, damit Voraussetzungen und Behauptungen besser erkennbar sind (vgl. Hayen, 1981)
- Erzeugung von Kehrsätzen durch die Umkehrung der Folgerichtung (vgl. Hayen, 1981)
- Übung des Widerlegens von Allaussagen mit Hilfe eines Gegenbeispiels (vgl. Hayen, 1981)

5. **Fähigkeit, selbständig Beweise zu führen:**
   Durch die bisherigen Stufen sollten die Schüler und Schülerinnen einen Beweis als eine Schlusskette betrachten, die sich auf bereits bewiesene Sätze und Ergebnisse stützt. Auf dieser Stufe geht es darum, dass die Fähigkeit selbständig Beweise finden zu können geschult wird, da dieses Niveau nur von einer geringen Anzahl erreicht wird. Den Lernenden sollte klar werden, dass sie für einen Beweis vorgelagerte Beweise heranziehen müssen und ein Beweis von den zugrundeliegenden Definitionen abhängt. Eines der wichtigsten Ziele dieser Stufe ist das Training heuristischer Strategien zur Beweisfindung. (vgl. Hayen, 1981) Dadurch wird bereits für die erste Phase des Beweisprozesses geübt, denn in dieser stehen besonders das empirische Arbeiten und induktive Denkschritte im Vordergrund. (vgl. Reiss, 2002a).

Die letzten beiden Niveaustufen können wieder den lerntheoretischen Ansätzen zugesprochen werden. Auf diesen beiden Stufen dreht sich alles um das Erlernen gewisser Fähigkeiten. Die Reflexion über die Struktur von Aussagen ist die beherrschende Fähigkeit auf der vierten Niveaustufe, wohingegen die Fähigkeit selbständig Beweise zu führen und heuristische Strategien anzuwenden den Mittelpunkt der fünften Stufe bildet.

4.3.2. Niveaustufen nach Müller (1995)

Dieses Stufenmodell ist auch den Komplexitätsansätzen zuzuordnen. Der Autor unterscheidet zwischen vier verschiedenen Komplexitätsniveaus.

1. **Einfache Begründungen:**

   In diesem Modell bilden die fünf Grundtypen von Begründungen, wie in Kapitel 1.6 beschrieben, die unterste Stufe. Dabei wird unter dem Begriff „Begründung“ einschrittige Beweise verstanden und somit Begründen als einfachste Form des Beweisens angesehen. Auf dieser Stufe werden Beweise nicht aufgrund ihrer formalen Strenge und Stichhaltigkeit unterschieden, sondern aufgrund ihrer Komplexität. (vgl. Müller, 1995)

2. **Ausbau der Grundtypen:**

   Treten zu der Grundstruktur eines Grundtyps weitere Anforderungen hinzu, so wird dies als Erweiterung der Grundformen verstanden. Solche zusätzlichen Anforderungen werden anhand der geistigen Handlungen, die zur Bewältigung notwendig sind, charakterisiert. (vgl. Müller, 1995)

   Finden geeigneter Sätze und Reaktivierung der benötigten Merkmale eines Begriffes:

   Durch geeignete Fragestellungen, können die Schüler und Schülerinnen bei der Suche nach den passenden Sätzen unterstützt werden. Beispiel für eine derartige „*Hilfsmittelfrage*“ (Müller, 1995):

   „*Welcher Satz enthält diese (eine dieser) Voraussetzung(en)?*“ (Müller, 1995)

   Wird in der Angabe zu einem Beweis kein Hinweis auf die benötigten Sätze gegeben, entspricht dies einer Aufgabe, die diese Handlung abruft. (vgl. Müller, 1995)

   Formalisierung der Aufgabensituation:

   Zusätzlich zu der Begründung entsprechend einer der fünf Grundtypen wird eine Analyse der logischen Struktur, eine Formalisierung oder eine ikonische Darstellung der Aufgabensituation gefordert. (vgl. Müller, 1995)

   Beispiel: Begründe: Jedes Quadrat ist eine Raute. (vgl. Müller, 1995)

   Such- und Realisierungshandlung:

   Hierbei werden zwei Handlungen miteinander kombiniert, eine Such- und eine Realisierungshandlung. Um einen geeigneten Satz zu finden oder die Voraussetzung für diesen zu überprüfen, empfiehlt sich eine Realisierungshandlung, wie beispielsweise das Einzeichnen von Hilfslinien. (vgl. Müller, 1995)

   Beispiel: Um mit Hilfe eines Kongruenzsatzes zu beweisen, dass ein Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln gleichschenkelig ist, wird das Einzeichnen einer geeigneten Höhe, Winkelhalbierenden bzw. Seitenhalbierenden benötigt. (vgl. Müller, 1995)

3. **<u>Einfach zusammengesetzte Begründungen:</u>**

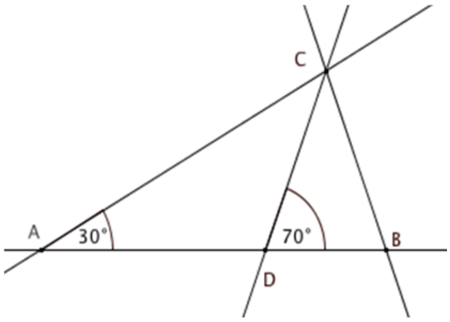
Werden bei einem Beweis mehrere Grundtypen verlangt, so erhöht sich die Komplexität. Unter einfach zusammengesetzten Begründungen werden Beweise verstanden, bei denen zwei oder maximal drei Beweisschritte notwendig sind. (vgl. Müller, 1995) Es gibt eine Vielzahl derartiger Begründungen:

<u>Einfache Aussagenkette:</u>

Die Lösung beschreibt einen linearen Lösungsweg, bestehend aus wenigen Schritten (zwei oder drei). (vgl. Müller, 1995)

Beispiel: Begründe, dass $\overline{BC} = \overline{CD}$!

(Für die Lösung wird die Eigenschaft eines Nebenwinkels, die Winkelsumme im Dreieck und die Eigenschaften eines gleichschenkeligen Dreiecks.)



<u>Einfache lineare Herleitungen:</u>

Liegt eine einfache lineare Herleitung vor, so kann direkt aus den Voraussetzungen mit Hilfe von Sätzen oder Umformungen die Behauptung erzielt werden. (vgl. Müller, 1995)

Ein weiteres Beispiel für zusammengesetzte Begründungen wäre der Rückschluss. Dabei wird durch eine Schlusskette eine hinreichende Bedingung für die Behauptung gewonnen, indem zunächst der Wahrheitsgehalt überprüft wird und anschließend ob diese hinreichend ist. Besteht ein Beweis aus der Aufgabe ein Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen, so fällt dies auch in die dritte Stufe der Komplexitätsniveaus. Tritt innerhalb eines Beweises eine einfache Fallunterscheidung auf mit endlich vielen Möglichkeiten oder Gruppen, so kann auch dieser Beweis dieser Stufe zugeordnet werden. Wird in einem Beweis die Kontraposition eines Satzes als Beweismittel herangezogen, so kann es auftreten, dass um diese Kontraposition zu belegen ein weiterer Satz notwendig ist. Ist dies der Fall so spricht man von einem erweiterten Kontrapositionsschluss und sieht diesen Beweis wiederum als einfache zusammengesetzte Begründung an. Ein Beispiel für einen derartigen erweiterten Kontrapositionsschluss wäre folgende Aufgabe: (vgl. Müller, 1995)

Begründe, dass es sich bei einem Dreieck mit den Winkeln $\alpha = 60°$ und $\beta = 50°$ nicht um ein gleichschenkeliges handeln kann!

Um dies zu begründen, muss die Kontraposition des Basiswinkelsatzes (Ein Dreieck ist gleichschenkelig, wenn zwei Winkel gleich groß sind) gezeigt werden. Dies kann mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck geschen: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 70°$. Da keiner der Winkel gleich groß ist, ist das Dreieck nicht gleichschenkelig.

Zu guter Letzt können auch all jene Beweise dieser Stufe zugeordnet werden, die auf heuristischen Prinzipien beruhen. (vgl. Müller, 1995)

4. **Einfache Beweise:**

   Im Unterschied zu den einfach zusammengesetzten Begründungen enthalten einfache Beweise bereits eine größere Anzahl an Beweisschritten, wodurch das Komplexitätsniveau erhöht wird. Dies bedeutet, dass einfache Beweise oft die gleichen Beweismuster enthalten wie Begründungen der dritten Stufe, jedoch einen größeren Umfang an Beweismitteln umfassen, auf jeden Fall mehr als drei. Aber auch Beweise, die durch einen Strategiewechsel gefunden werden können oder eine verzweigte Struktur aufweisen gehören in diese Stufe des Beweisens. (vgl. Müller, 1995)

Der Großteil der Schüler und Schülerinnen wird das höchste Niveau des Beweisens im Mathematikunterricht nicht erreichen, lediglich ein kleiner Teil wird auf dieser Stufe operieren. (vgl. Müller, 1995)

4.4. Merkmale zur Bestimmung der Niveaustufen

Für die Lehrperson ist es unerlässlich Aufgaben zum Beweisen in die Niveaustufen einzuordnen, da eine falsche Auswahl verheerende Auswirkungen zur Folge hat. Werden zu Beginn des Lernprozesses zu schwierige Aufgaben gestellt, so führt dies zu einer Überforderung der Schüler und Schülerinnen. Durch diese Überforderung stellen sich bei den Lernenden Misserfolgserlebnisse ein, wodurch das Beweisen mit negativen Gefühlen assoziiert wird und eine Abkehr des Lehrers bzw. Lehrerin von Beweisaufgaben erfolgt. Das Gegenteil wiederum ist ebenfalls nicht erwünscht, da dadurch die Schüler und Schülerinnen eine Unterforderung erfahren. (vgl. Walsch, 1972) Dadurch wird deutlich, weshalb die Einteilung in Niveaustufen so wichtig für den Unterricht ist. Bruder & Müller (1983) haben aus diesem Grund Kriterien formuliert, anhand derer die Schwierigkeit von Aufgaben eingestuft werden kann.

Komplexitätsgrad

Wie bereits bei dem Niveaustufenansatz von Müller (1995) erkenntlich wird, hängt die Schwierigkeit eines Beweises von der Anzahl der Beweisschritte ab. Auch Bruder & Müller (1983) sind dieser Ansicht und postulieren mit der Anzahl an benötigten Sätzen und Definitionen ein quantitatives Merkmal zur Bestimmung des Komplexitätsgrades einer Beweisaufgabe. Einem Schüler bzw. einer Schülerin wird ein Beweis, bei dem lediglich ein Beweisschritt, wie eine Bezugnahme auf einen Satz oder eine Definition, notwendig ist, einfacher fallen als ein Beweis, bei dem mehrere Grundtypen miteinander verknüpft werden müssen. Folgend soll dies durch zwei Beispiele verdeutlicht werden.

1. ABCD sei ein Parallelogramm. Begründe mittels des Kongruenzsatzes SSS, dass die Dreiecke ABC und ACD kongruent sind! (Bruder & Müller, 1983)

Um diese Aufgabe zu lösen müssen lediglich die Voraussetzungen des bereits vorgegebenen Satzes überprüft werden.

2. Es seien α, β und γ, δ Paare von Nebenwinkeln und es gelte $\alpha = \gamma$. Zeige, dass auch $\beta = \delta$ gilt. (Bruder & Müller, 1983)

Für die Lösung dieser Aufgabe ist bereits eine Kombination von Grundtyp 2 und 4 erforderlich. Die Schüler und Schülerinnen müssen durch die Information Nebenwinkel auf den Nebenwinkelsatz gelangen und anschließend ein algorithmisches Verfahren anwenden, um die Behauptung zu beweisen.

Als weiteres Kriterium für die Komplexität einer Aufgabe erachteten Bruder & Müller (1983) das Informationsangebot in der Formulierung der Aufgabe. Wird bereits in der Aufgabenstellung der zu verwendende Satz explizit genannt, wie im ersten Beispiel, so fällt das Finden eines Beweises wesentlich einfacher. Selbst ein Hinweis auf die zugrunde liegende Argumentationsbasis, wie im zweiten Beispiel, kann zur Erleichterung der Aufgabe führen. Durch die vollständige Angabe des Beweises kann das Niveau weiter reduziert werden.

Bekanntheitsgrad der Beweismittel

Neben dem Umfang an Beweisschritte gibt auch der Bekanntheitsgrad der Beweismittel Aufschluss über die Komplexität einer Beweisaufgabe. (vgl. Bruder & Müller, 1983) Wurde bereits im Vorhinein gemeinsam im Unterricht ein indirekter Beweis geführt, so wird es den Schülern und Schülerinnen einfacher fallen selbstständig einen derartigen Beweis zu finden.

„Und wenn man einmal gesehen hat, wie ein Problem zu lösen ist, dann wird man es nie wieder als ein Problem sehen.“ (Reiss & Hammer, 2012)

Es wird nicht nur das Wissen um die Beweismethode unter dem Bekanntheitsgrad verstanden, sondern auch die Kenntnis der benötigten Sätze fällt unter dieses Merkmal (vgl. Bruder & Müller, 1983). Ist der Nebenwinkelsatz den Schülern und Schülerinnen bei der Bearbeitung der zweiten Beweisaufgabe noch nicht bekannt, so wäre diese Aufgabe weitaus komplexer, da erst dieser Satz gefunden und bewiesen werden muss.

Strukturparameter

In der Mathematik gibt es nicht nur eine einzige Möglichkeit eine Behauptung zu formulieren, sondern mehrere. Je nachdem wie die zu beweisende Aussage aufgestellt wird, ändert sich die Schwierigkeit der Beweisaufgabe (vgl. Bruder & Müller, 1983).

Eine weitere Möglichkeit durch die Struktur der Aufgabe die Komplexität zu reduzieren besteht durch die Wahl geeigneter Anschauungen (vgl. Bruder & Müller, 1983).

Beispiel: Begründe, dass $\cot\varphi$ als Streckenlänge, wie in Abb. 4.7 angegeben, ermittelt werden kann. (Götz, Reichel, Hanisch, & Müller, 2004)

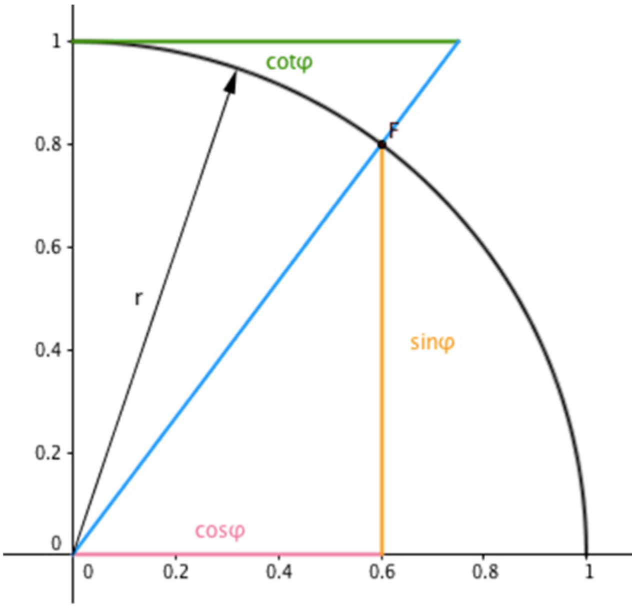


Abbildung 4.7: Veranschaulichung

Durch die zusätzlich angegebene Veranschaulichung der Situation wird erst klar, was genau mit Streckenlänge gemeint ist und wo diese liegt. Ohne diese Skizze wäre der Beweis für die Schüler und Schülerinnen erheblich schwerer, da sie selbst erkennen müssten, welche Streckenlänge gemeint ist.

Ausführungsparameter

Beweise können nicht nur durch die Art der Formulierung und Umfang der Beweisschritte komplexer gestaltet werden, sondern auch der Operationsaufwand beim Anwenden verschiedener Sätze kann stark variieren. Es kann beispielsweise vorkommen, dass zwar bei zwei verschiedenen Beweisen jeweils nur eine Anwendung eines einzelnen Satzes von Nöten ist, die Überprüfung der Voraussetzungen dieser Sätze jedoch unterschiedlich aufwendig ist. (vgl. Bruder & Müller, 1983) Um dies zu verdeutlichen folgend zwei Beispiele:

1. ABCD sei ein Parallelogramm. Begründe mittels des Kongruenzsatzes SSS, dass die Dreiecke ABC und ACD kongruent sind! (Bruder & Müller, 1983)

2. Begründe, dass gilt $\alpha + \beta = 180°$!

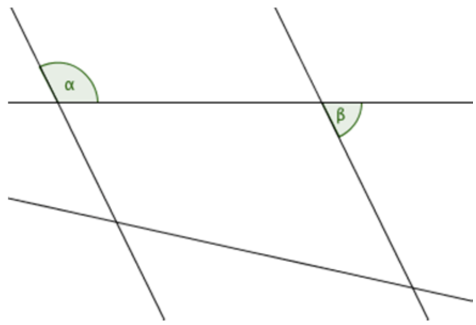


Abbildung 4.8: Veranschaulichung

Im ersten Beispiel muss der Kongruenzsatz SSS angewendet werden, um die Behauptung zu beweisen. Um diesen Satz anwenden zu können müssen drei Voraussetzungen überprüft werden. Beim zweiten Beispiel hingegen müssen die beiden Winkel lediglich als Paar von Nebenwinkeln identifiziert werden. Dies stellt einen viel geringen Operationsaufwand dar als im ersten Beispiel.

Der Lehrer bzw. die Lehrerin kann bei der Aufgabenstellung die Schwierigkeitsparameter variieren, wodurch unterschiedliche Bereiche bei der Entwicklung angesprochen werden. Beispielsweise kann durch eine Schwerpunktsetzung auf den Strukturparameter die sprachlichen und logischen Fähigkeiten geschult werden. Wird hingegen ein Beitrag zur allgemeinen Denkentwicklung und zur Entwicklungslinie der jeweiligen Maximalanforderungen angestrebt, so sollte der Komplexitätsparameter im Vordergrund stehen. Soll die Beweisaufgabe die Wiederholung oder Vertiefung des Stoffes als Ziel haben, so ist der Schwerpunkt auf den Bekanntheitsgrad zu legen. Liegt er jedoch auf dem Ausführungsparameter, kann dadurch der Umgang mit Beweismustern, das Arbeiten mit Variablen und die Darstellung von Erkenntnissen trainiert werden. (vgl. Bruder & Müller, 1983)

Abschließend lässt sich nochmals betonen, dass es vor allem für die Schüler und Schülerinnen von größter Wichtigkeit ist, Beweisaufgaben in Niveaustufen einzuteilen und nach diesen ausgewählt wird. Durch die richtige Auswahl an Aufgaben können die Lernenden beim Lernen des Beweisens unterstützt werden, ohne sofort überfordert zu werden. Welche Mittel der Lehrperson sonst noch zur Verfügung stehen, um die Schüler und Schülerinnen zu unterstützen, und worauf geachtet werden muss, wird im folgenden Kapitel behandelt.

5. Didaktische Aspekte des Beweisens

Schüler und Schülerinnen müssen beim Beweisen lernen durch die Lehrperson und die Unterrichtsgestaltung unterstützt und motiviert werden (vgl. Brunner, 2014a) In Kapitel 3 wurde bereits verdeutlicht, wie wichtig die Einteilung in Niveaustufen für das Erlenen des Beweisens ist. Neben der Komplexität von Beweisen muss die Lehrkraft weitere Voraussetzungen berücksichtigen, die erfüllt sein müssen, damit Schüler und Schülerinnen mathematische Beweise verstehen oder gegebenenfalls selbstständig Beweise führen können (vgl. Walsch, 1972). Im folgenden Kapitel wird zunächst thematisiert, weshalb Lehrkräfte mit psychologischen Bedingungen, die bei Beweisführungen eine wichtige Rolle spielen, vertraut sein sollten und wie diese im Unterricht zu berücksichtigen sind. Zu den psychologischen Voraussetzungen zählt bereits der erste Schritt des Beweisens, der Aufbau eines Beweisbedürfnisses. Zu guter Letzt wird die Rolle der Beweiskompetenz der Lernenden beim Beweisen diskutiert und wie die unterschiedlichen Aspekte gefördert werden können.

5.1. Beweisbedürfnis

Eines der größten Problem für die Lehrperson stellt die Motivation der Lernenden zum Beweisen lernen dar. Nicht selten wird die Frage „Wozu muss das bewiesen werden?“ gestellt (vgl. De Villiers, 1999). Die Motivation der Schüler und Schülerinnen zum Beweisen ist kein einfaches methodisches Problem (vgl. Holland u. a., 1988). Gelingt diese Anregung der Schüler und Schülerinnen zum Beweisen nicht, so entsteht bei den Lernenden das Gefühl, dass das Beweisen auf Normen basieren, die für sie persönlich nicht nachvollziehbar sind (Aner, Bendrien, Brode, & Kraft, 1979). Das Beweisbedürfnis beeinflusst nicht nur die Einstellung der Schüler und Schülerinnen gegenüber dem Beweisen, sondern beeinflusst auch den Lernerfolg. Ein Lernertrag kann nur dann stattfinden und gesichert werden, wenn die Lernenden zu einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Beweisen bewegt werden können (vgl. Walsch, 1972).

Aus diesen Gründen spielt das Beweisbedürfnis im Beweisprozess und beim Beweisen lernen eine bedeutende Rolle, weshalb die Lehrkraft jede Möglichkeit nutzen sollte, dieses zu unterstützen und auszuprägen. Im folgenden Kapitel werden Aspekte des Beweisbedürfnisses näher beleuchtete und unterschiedliche Ansätze vorgestellt, diese auszubilden.

5.1.1. Anschauung und Denken

Schüler und Schülerinnen besitzen meist eine negative Haltung gegenüber dem Beweisen, da für sie die Notwendigkeit dieser Tätigkeit nicht offensichtlich erscheint, wenn nicht geradezu paradox. Ziel des Unterrichts sollte es sein, dass die Lernenden von sich aus nach einem Beweis verlangen, das heißt ein Beweisbedürfnis zu besitzen.

Damit ein Denkprozess stattfinden kann und somit ein Lernerfolg erzielt werden kann, muss eine Problemsituation vorhanden sein und diese den Lernenden bewusst sein (vgl. Walsch, 1972). Das bedeutet, dass die Lehrkraft vor der schwierigen Aufgabe steht, den Schülern und Schülerinnen bewusst zu machen, dass eine gegebene Behauptung eine Problemsituation darstellt und eines Beweises bedarf (vgl. Winter, 1983). Aufgrund dessen kann ein Beweisbedürfnis nur entstehen, wenn die Aussage für die Lernenden nicht von vornherein evident erscheint. Beispielsweise wird durch die Behauptung „Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt liegen alle auf einer Geraden, der eulerschen Geraden." keine Überraschung bei Schülern und Schülerinnen der Sekundarstufe II hervorgerufen. Durch das mehrmalige Zeichnen in der Unterstufe ist den Lernenden dieser Sachverhalt klar und bedarf ihrer Ansicht nach keiner weiteren Sicherung. Diese Aussage ist lediglich bei der ersten Beschäftigung mit den merkwürdigen Punkten in einem Dreieck nicht evident.

Ein weiteres Hindernis beim Wecken des Beweisbedürfnis stellen induktive Formen der Erkenntnisgewinnung dar, weil diese den Schülern und Schülerinnen oftmals überzeugender wirken als der Beweis selbst (vgl. Walsch, 1972). Um dieses Problem zu vermeiden werden vor allem Methoden vorgeschlagen, die Unsicherheit und Überraschung zur Folge haben (vgl. Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000). Derartige Vorgangsweisen sollten, laut Walsch (1972), vor allem bei der Einführung in das Beweisen zum Einsatz kommen. Um diese Unsicherheit zu erzeugen, werden oftmals Wege vorgeschlagen, die das Vertrauen in die eigene Wahrnehmung erschüttern und induktive Vorgehensweisen diskreditieren, wodurch die Weckung des Beweisbedürfnisses negativ verknüpft wird. Diese Vorgehensweise erscheint den Schülern und Schülerinnen paradox, da sie sich beim Lesen beispielsweise auch auf ihre Wahrnehmung verlassen. Weiters wird im Mathematikunterricht stets von der Anwendbarkeit auf die reale Welt gesprochen, wird jedoch das Messen als Beweismittel vollständig abgelehnt, so führt dies zu Unverständnis bei den Lernenden. Außerdem kann die Herabwürdigung intuitiver Beweisführungen zur Folge haben, dass sich die Schüler und Schülerinnen nicht so sehr um das Verstehen der Aussage bemüht sind, da dazu vor allem induktive Formen genutzt werden. Wird die wesentliche Grundidee der Behauptung nicht verstanden, so wird das Anwenden des Wissens und auch die Weiterentwicklung erschwert. Daher sollten Wege gewählt werden, die eine positive Einstellung gegenüber empirischer Methoden fördern. Beispielsweise sollten optische Täuschungen nicht zur Erschütterung des Vertrauens in die Wahrnehmung genutzt werden sondern sollten vielmehr als Herausforderung das eigene Sehen argumentativ zu strukturieren gesehen werden. (vgl. Winter, 1983) Eine weitere Möglichkeit über Skepsis und Unsicherheit ein Beweisbedürfnis zu erzeugen, ohne die Diskreditierung intuitiver Beweisführungen, stellen Beispiele dar, bei denen die Allgemeingültigkeit angezweifelt wird (vgl. Buchbinder & Zaslavsky, 2011).

Beispiel: rechtwinkeliges Dreieck Aufgabe (Buchbinder & Zaslavsky, 2011)

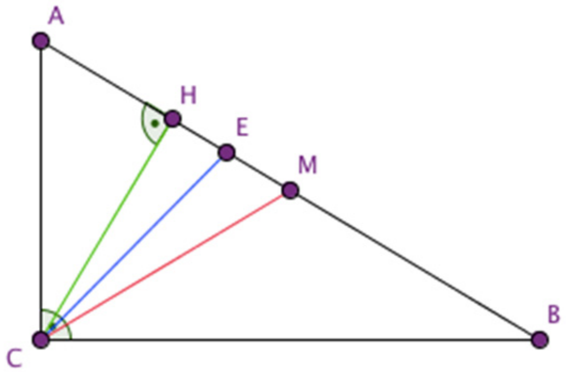


Abbildung 5.1: Veranschaulichung

Ein Schüler bzw. Schülerin zeichnete in einem ungleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck ΔABC ($\sphericalangle C = 90°$) den Median zur Hypotenuse (CM), die Höhe zur Hypotenuse (CH) und die Winkelhalbierende des rechten Winkels (CE) ein. Dabei stelle er bzw. sie fest, dass CE zwischen CM und CH liegt. Außerdem maß er bzw. sie die Winkel des Dreiecks ΔHCM und merkte dabei, dass CE auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle HCM$ ist. – Ist das Zufall? Begründe deine Vermutung!

Beweis:

Sei α der Winkel beim Punkt B, das heißt der Winkel $\sphericalangle ABC$. Da CM der Median der Hypotenuse ist, gilt CM = AM = MB. Dadurch handelt es sich bei den Dreiecken ΔCMA und ΔCMB um gleichschenkelige Dreiecke. Da das Dreieck ΔCMB gleichschenkelig ist, ist auch der Winkel $\sphericalangle BCM$ = α. Das Dreieck ΔHCA ist ebenfalls ein rechtwinkeliges Dreieck, wodurch gilt $\sphericalangle HCA = \alpha$. Aufgrund der Tatsache, dass CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist, folgt $\sphericalangle ECA = \sphericalangle BCE = \frac{90°}{2} = 45°$. Daraus und aus $\sphericalangle BCM = \sphericalangle HCA = \alpha$ folgt

$$\sphericalangle HCE = \sphericalangle ECM = 45° - \alpha$$

Dadurch ist die Behauptung, CE ist auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle HCM$, bewiesen.

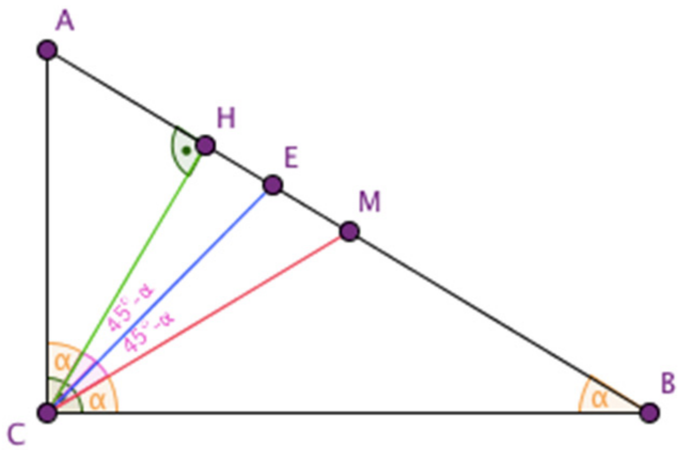


Abbildung 5.2: Beweisskizze

Für die befragten Schüler und Schülerinnen löste diese Aufgabe eine starke Ungewissheit aus, da sie nicht sicher waren, ob es sich bei dieser Behauptung nur um einen Zufall handelt oder nicht. Die ersten Versuche bestanden aus empirischen Vorgehensweisen, wie die beschriebene Situation zu zeichnen und verschiedene

Winkel bei den Punkten A und B auszuprobieren. Viele verschiedene Fälle wurden ausprobiert, jedoch lieferte diese Methode keine Befriedigende Antwort auf die Frage warum dies im Allgemeinen gilt. Damit das Bedürfnis nach Gewissheit gestillt werden konnte, gingen die Schüler und Schülerinnen zu allgemeinen Argumenten über, da ihnen die Grenzen der Beispiele bewusst waren. Aus den Beobachtungen bei einem spezifischen Beispiel konnte dir Verbindung zu einem allgemeinen Beispiel gezogen werden. (vgl. Buchbinder & Zaslavsky, 2011) Diese Aufgabe zeigt, dass überraschende Tatsachen, die eine Unsicherheit bei den Lernenden erzeugen, bei der Weckung des Beweisbedürfnis helfen können ohne intuitive Formen der Beweisführung zu diskreditieren.

5.1.2. Thematisierung

Schüler und Schülerinnen schreiben dem Beweisen innerhalb der Mathematik eine wichtige Rolle zu, aber sehen es nur als ein Instrument zur Wissenssicherung an (vgl. Aner u. a., 1979). Dies stellt ein weiteres Problem bei der Weckung des Beweisbedürfnisses dar, denn viele Sätze sind für die Lernenden von vornherein klar und benötigen keinen Beweis. Dabei kann eine Beweisaufgabe viele verschiedene Ziele verfolgen, welche in Kapitel 2 ausführlich beschrieben wurden. Bürger (1979) ist daher der Ansicht, dass die Reflexion über den Nutzen des Beweisens eine wichtige Rolle bei der Motivation der Schüler und Schülerinnen spielt. Vor allem sollte den Lernenden bewusst gemacht werden, dass durch Beweise auch neues Wissen generiert werden kann und es zu einem tieferen Verständnis mathematischer Begriffe und Strukturen kommen kann (vgl. Winter, 1983). Malle (2002) betont weiters, dass die Funktion einer Beweisaufgabe den Schülern und Schülerinnen unbedingt klar sein muss, da es sonst zu Ratlosigkeit kommt. Gehen die Lernenden unausgesprochen von einer Überzeugungsfunktion einer leicht einsehbaren Beweisaufgabe aus, die Lehrperson aber möchte die Behauptung mit bereits bekannten Sätzen in Verbindung bringen, so wird durch die dadurch entstehende Verwirrung, die Motivation zum Beweisen herabgesetzt (vgl. Malle, 2002).

Um den Schülern und Schülerinnen das Wissen über Beweise näher zu bringen und über den Nutzen zu reflektieren, gibt es verschiedene didaktische Methoden. Eine Möglichkeit stellt die Themenstudienarbeit dar. Bei dieser Methode tritt die Lehrperson in den Hintergrund und die Lernenden werden zum selbständigen Arbeiten angeregt. Durch ausgewählte Materialien und Arbeitsaufträge erarbeiten sich die Schüler und Schülerinnen eigenständig das Wissen. Hilfestellungen können Zitate von Mathematikern und Mathematikerinnen, Anwendungen aus dem Alltag, beispielsweise juristische Kommentare oder Indizien in einem polizeilichen Fall, teilweise fehlerhafte Argumentationen oder auch verschiedene Beweisversuche zu ein und demselben Satz. Eine weitere Möglichkeit besteht in sogenannten Rückblick-Aufgaben. Diese eignen sich besonders zur Sicherung und Vertiefung des bestehenden Wissens über das Beweisen. (vgl. Kuntze, 2009a) Dabei kann beispielsweise die Aufgabenstellung *„Stell dir vor, eine Mitschülerin hat gefehlt und will nun wissen, was Beweisen ist und was man dabei tut. Schreibe auf, wie du es ihr erklären würdest."* (Kuntze, 2009a) einen Anlass bieten über das gelernte Wissen schriftlich zu reflektieren, wodurch die Lehrkraft gleichzeitig ein Feedback erhält.

Neben den verschiedenen Funktionen von Beweisen, sollte auch der Beweis als Prozess im Unterricht thematisiert werden. Wird der Beweis meist als fertiges Produkt angesehen anstelle als Prozess begriffen, so kommt es dadurch auch zu einer Diskreditierung intuitiver Beweisführungen und der Exploration. Im Unterricht sollte jedoch nicht das ausführliche Beweismodell von Boero (1999), welches in Kapitel 1.3 vorgestellt wurde, sondern ein auf drei Phasen reduziertes Modell verwendet werden. Die Teile des Beweisprozesses lauten: Finden einer Vermutung, Entwicklung einer Beweisidee und Entwurf eines Beweises. Wichtig dabei ist, dass die Schüler und Schülerinnen dies nicht als linearen Verlauf ansehen. Irrwege und Rückkehr zu früheren Phasen sind nicht verboten, sondern erwünscht, da gerade durch Fehler und Sackgassen wichtige Erkenntnisse gewonnen werden können. (vgl.Ufer & Heinze, 2009) Eine Möglichkeit, um im Unterricht die Explorationsphase zu thematisieren, ist es, die Schüler und Schülerinnen mit Ergebnissen des Explorierens und dem Verknüpfen von Argumenten zu einer Beweisaufgabe zu konfrontieren. Dabei müssen die Lernenden die Ideen, Denkwege und die Bedeutung für den weiteren Beweis beschreiben. (vgl. Kuntze, 2009a)

Damit diese Thematisierung des Beweisens auch fruchtet, sollte auch eine gewisse Einstellung seitens der Lehrkraft im Unterricht vorgelebt werden. Der Lehrer bzw. die Lehrerin besitzt eine Vorbildfunktion für die Schüler und Schülerinnen. Diese sehen die Aussagen der Lehrperson als nahezu unerschütterlich ein, wodurch sie sich bei Unverständnis nicht trauen Fragen zu stellen (vgl. Aner u. a., 1979). Aussagen wie *„der Lehrer wird uns schon keinen Mist erzählen"* (Aner u. a., 1979) und *„das, was im*

Buch steht, wird schon richtig sein" (Aner u. a., 1979) sind die Folge. Um dies zu vermeiden, sollte ein Klima geschaffen werden, in dem Fragen erwünscht sind, und der Lehrer bzw. die Lehrerin sollte ihre Behauptungen im Unterricht klar belegen. Wird im Mathematikunterricht über die Bedeutung des Beweisens gesprochen, so muss das Begründen auch regelmäßig im Unterricht thematisiert und eingefordert werden. Vor allem darf Beweisen nicht auf ein Thema oder eine Klassenstufe begrenzt werden, sondern sollten in der gesamten Schulzeit in das Unterrichtsgeschehen einbezogen werden. (vgl. Reiss, 2009) Das Beweisen muss für die Schüler und Schülerinnen zu einer Grundhaltung im Mathematikunterricht werden (vgl. Reiss & Hammer, 2012).

5.1.3. Neugier und Interesse

Ein weiterer Weg, um Schüler und Schülerinnen zum Beweisen zu motivieren, führt über Neugier und Interesse. Das Beweisbedürfnis besitzt dadurch nicht nur eine kognitive Komponente, sondern auch eine emotionale. Die Weckung der Neugier sollte nicht über Methoden der Werbepsychologie führen, wie beispielsweise der Gebrauch von Halbwahrheiten, besser wäre es die Selbsttätigkeit durch das entdeckende Lernen und Heuristik zu fördern. Denn durch das selbstständige Erkunden der Mathematik kann Neugier geweckt werden. Das bedeutet aber, dass das Beweisen im Unterricht als eine Form des Problemlösens gestaltet werden muss. Dabei ist es Aufgabe der Lehrkraft interessensweckende Situationen anzubieten, aus deren Analyse sich ein Beweisproblem ergibt. (vgl. Winter, 1983)

Eine Möglichkeit um das Interesse der Schüler und Schülerinnen zu wecken und sie selbst die Mathematik erkunden zu lassen, bietet der Einsatz dynamischer Geometriesoftware. Durch das selbständige Experimentieren am Computer wird ein viel tiefergehender Eindruck vermittelt, als es der bloße Hinweis oder Erklärungen anhand einer statischen Skizze je kann. Gerade durch die Beweglichkeit der Zeichnungen können die Schüler und Schülerinnen neue Sachverhalte entdecken, daraus Vermutungen aufstellen und Beweisideen entwickeln. (vgl. Weigand & Weth, 2010) Daher kann der Computer nicht nur für die Verifizierung eines gegebenen Sachverhaltes genutzt werden, sondern bietet großartige Möglichkeiten des selbstständigen Entdeckens. Dabei kann insbesondere der sogenannte Zugmodus hilfreich sein. Mit Hilfe dessen können geometrische Zusammenhänge erkundet werden, da dieser durch das Ziehen an Basispunkten eine kontinuierliche Abfolge von Abbildern der Konstruktionen liefert. Weiters können durch die Variation der Zeichnung mittels des Zugmodus Invarianten aufgespürt werden. Dies liefert außerdem einen Beitrag zur Entwicklung grundlegender Problemlösestrategien. (vgl.Haug, 2011) Neben dem Zugmodus können auch Ortslinien (oder auch Spur genannt) in der heuristischen Phase unterstützend wirken. Durch das Zeichnen von Hilfslinien können Konstruktionsprobleme gelöst und auch Kurven und Abbildungen untersucht werden. (vgl. Hölzl, 1999) In Kapitel 5 werden Beispiele zum Einsatz von DGS beim Beweisen vorgestellt. Bei all diesen Bemühungen das Beweisbedürfnis durch Entdecken und Einsatz des Computers zu wecken, darf nicht außer Acht gelassen werden, dass die angestellten Überlegungen so überzeugend sein können, dass die Schüler und Schülerinnen die Notwendigkeit eines formalen Beweises nicht einsehen (vgl. Weigand & Weth, 2010).

Neben interessensweckenden Aufgaben kann die Neugier der Lernenden auch durch die Thematisierung der geschichtlichen Entwicklung geweckt werden. Beispielsweise können historische Anekdoten in den Unterricht eingebunden werden, wodurch das Interesse geweckt werden kann und der Beweis in ein historisches Umfeld eingebettet wird. (vgl. Bürger, 1979) Weiters sollten auch die verschiedenen Beweismethoden außermathematischer Bereiche im Unterricht thematisiert werden. Beispielsweise könnten für die Beweisführung auch Argumente aus der Physik herangezogen werden (vgl. Winter, 1983).

Bei allen Ansätzen, um die Neugier und das Interesse der Schüler und Schülerinnen zu wecken, muss auf die richtige Balance zwischen Anforderungshöhe und dem derzeitigen Leistungsvermögen geachtet werden. Weder bei einer zu schwierigen noch bei einer zu leichten Aufgabe werden die Lernenden eine Motivation für das Beweisen entwickeln. (vgl. Winter, 1983)

5.1.4. Diskussionsanlässe

Für die Lernenden wird das Beweisen häufig zu einer Suche nach Argumenten, um den Lehrer bzw. die Lehrerin damit zu überzeugen. Dies bewirkt einen Zustand der Verwirrung bei den Schülern und Schülerinnen, da die Lehrkraft im Allgemeinen die richtige Antwort bereits kennt und somit nicht mehr überzeugt werden muss. (vgl. Goldberg, 2002) Daher sollte die Lehrperson bei Beweissprechakten in den Hintergrund treten. Die Lehrkraft lenkt die Gespräche, aber die Schüler und

Schülerinnen sollten die Hauptakteure sein und miteinander sprechen. Die Lernenden sollen Argumente suchen, die nicht nur die Lehrkraft überzeugen, sondern die sie selbst und die Mitschüler und Mitschülerinnen überzeugen (vgl. Goldberg, 2002). Damit dies gelingt, muss eine entsprechende *„Streitkultur“* (Goldberg, 2002) im Unterricht entwickelt werden. Dazu gehören auch festgelegte Regeln für die Gesprächsführung, diese können auch gemeinsam mit den Lernenden im Plenum erarbeitet werden. Winter (1983) schlögt folgende Regelungen vor:

- Toleranzregel: Jeder Schüler bzw. jede Schülerin darf ihre Vermutungen und Begründungen zu der gegebenen Aussage äußern.
- Regel der Kritikverpflichtung: Die vorgebrachten Argumente müssen stets kritisch hinterfragt und auf ihre Stichhaltigkeit untersucht werden.
- Aufrichtigkeitsregel: Wird ein Sachverhalt oder eine Argumentation nicht verstanden, so sind die Lernenden dazu berechtigt und verpflichtet ihre Probleme zu äußern.
- Regel zur Autonomie: Die Teilnehmer und Teilnehmerinnen sind sich im Klaren darüber, dass sie im Verlauf der Diskussion Argumente finden werden und auch müssen.
- Entscheidungsregel: Letztlich erkennen die Schüler und Schülerinnen immer mehr an, dass ein Beweis nur eine logische Schlusskette sein kann.

Zu diesen Regeln gilt es noch zu beachten, den Schülern und Schülerinnen klar zu machen, dass sie mit ihren Worten keinen Gesprächspartner und keine Gesprächspartnerin verletzen oder persönlich angreifen dürfen. (vgl. Goldberg, 2002)

Nicht nur Regeln müssen entwickelt werden, um derartige Diskussionen zu ermöglichen, sondern auch die Atmosphäre ist entscheidend. In dieser muss es den Schülern und Schülerinnen möglich sein, ihre Erkenntnisse verteidigen zu wollen. Ein Aspekt dieser Atmosphäre besteht in einer positiven Einstellung gegenüber Fehlern. Für die Lernenden sollten Fehler zu etwas Nützlichem werden, aus dem sie lernen können. Dabei kann beispielsweise eingeführt werden, dass bei Unsicherheiten bezüglich einer Aufgabe, die Lösung von demjenigen bzw. derjenigen an der Tafel entwickelt und im Plenum diskutiert. Ein anderer Teil besteht darin, dass vor allem die Schüler und Schülerinnen selbst Fragen stellen und auch selbst beantworten sollen. Die Lehrkraft sollte erst im Anschluss an die Diskussion notwendige Korrekturen oder Ergänzungen durchführen. Zuletzt sollten nach eigenständigen

Arbeiten von Schülern und Schülerinnen die Ergebnisse gesichert werden. Meist wird dies lediglich durch einen Vergleich der Ergebnisse erledigt. Will man die Lernenden jedoch zum Beweisen motivieren, so sollte von ihnen eingefordert werden, ihre Ergebnisse zu verteidigen und die Mitschüler und Mitschülerinnen von deren Richtigkeit überzeugen. Dieses Vorgehen fordert jedoch, dass die Schüler und Schülerinnen selbst darüber entscheiden, ob ein Ergebnis richtig ist oder falsch. Dadurch können die typischen Fehler diskutiert und entkräftet werden. Sollte eine Aufgabe von allen Lernenden richtig gelöst worden sein, so kann die Lehrkraft trotzdem eine Diskussion und Verteidigung der Ergebnisse anregen, indem sie das Ergebnis der Schüler und Schülerinnen anzweifelt. (vgl. Goldberg, 2002)

5.2. Beweiskompetenz

Um eine Beweisaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können, benötigt es neben der entsprechenden Motivation auch spezifische Handlungs-, Operations- und Begriffsschemata. Diese bestimmten Schemata, die notwendig sind um in der Anforderungssituation des Beweisens Probleme zu lösen, werden unter dem Begriff „Beweiskompetenz" zusammengefasst. (vgl. Brunner, 2013) Zu diesen Prädikatoren, das heißt Voraussetzungen und Teilfähigkeiten zur Bewältigung von Begründungsaufgaben, gehören das Wissen über mathematische Begriffe, Wissen über Akzeptanzkriterien von Beweisen und Wissen über Problemlösestrategien. Im Folgenden werden die genannten Prädikatoren näher beleuchtet und deren Einfluss auf das Beweisen lernen thematisiert.

5.2.1. Mathematisches Basiswissen

Um mathematisch Argumentieren zu können, wird ein grundlegendes Wissen über Konzepte, Fakten und Begriffe benötigt. Damit der Höhensatz bewiesen werden kann oder der Beweis nachvollzogen werden kann, muss das nötige geometrische Wissen vorhanden sein. (vgl. Reiss, 2009) Dabei spielt vor allem deklaratives Wissen über grundlegende Begriffe, Definitionen und Sätze eine wichtige Rolle. Dieses Wissen wird jedoch erst bei der endgültigen Formulierung einer Schlusskette von großer Bedeutung sein. In der Explorationsphase und bei der Entwicklung einer Beweisidee, ist das genaue Detailwissen wenig ausschlaggebend. Während dieser Zeit wird vor allem ein Überblickswissen über Beziehungen und mögliche hilfreiche

Kombinationen mathematischer Konzepte benötigt. (vgl. Reiss & Ufer, 2009) Mathematisches Basiswissen kann nicht nur als Werkzeug gesehen werden, sondern ein breites fachliches Wissen kann den Schülern und Schülerinnen auch Sicherheit bei der Argumentation vermitteln. Durch dieses Gefühl wird ein eigenständiges Explorieren und Beweisen erst möglich. (vgl. Reiss, 2009)

5.2.2. Methodenwissen

Damit Schüler und Schülerinnen Beweisaufgaben erfolgreich lösen können, reicht mathematisches Fachwissen nicht aus. Zusätzlich zu dem Basiswissen wird auch sogenanntes Methodenwissen benötigt. (vgl. Heinze & Reiss, 2003) Darunter wird im weiten Sinne das Wissen über die Natur und Funktion von Beweisen verstanden. In erster Linie gehört das Wissen darüber, was unter einem Beweis verstanden wird und welche Akzeptanzkriterien dieser erfüllen muss. (vgl. Reiss & Ufer, 2009) Das Verständnis und Wissen über korrekte mathematische Beweise umfasst drei verschiedene Aspekte, welche unabhängig von einander sind (vgl. Heinze & Reiss, 2003).

Beweisschema

Bei diesem Teilaspekt des Methodenwissens liegt der Fokus auf den Argumenten, die für die einzelnen Schritte eines Beweises zugelassen sind. In einem mathematischen Beweis, der von Mathematikern und Mathematikerinnen akzeptiert wird, sind lediglich allgemeingültige deduktive Schlüsse zulässig (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze, & Rudolph-Albert, 2009). Dies bedeutet, dass jeder Teilschluss deduktiv aus gesicherten Aussagen gefolgert werden muss (vgl. Reiss & Ufer, 2009). Nicht zulässige Argumente wären empirisch-induktive Argumentationen und eine Berufung auf eine höhere Autorität oder auf die Anschauung (vgl. Heinze & Reiss, 2003). In der Schule setzt sich das Repertoire an verwendbaren Sätzen und Aussagen aus bereits bewiesenen und aufgrund der Anschauung als wahr angenommene Behauptungen zusammen (Ufer u. a., 2009).

Die Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen stimmen nur teilweise mit der oben dargestellten Definition des Beweisschemas überein (vgl. Reiss & Ufer, 2009). Es wird zwischen drei verschiedenen Schülervorstellungen unterschieden. Die erste Klasse derartiger Beweisschemata beruht auf externer Überzeugung. Darunter werden Vorstellungen verstanden, die vor allem durch äußere Merkmale geprägt und unabhängig vom Inhalt des Beweises sind. Zu dieser Art der Beweisschemata gehört ein starker Fokus auf Symbolik, wie beispielsweise Formulierung wie „es sei“ oder „quod erat demonstrandum“, die Benennung einer Aussage als Satz oder Theorem. (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015) Weiters zählt dazu auch die Berufung auf eine Autorität (vgl. Heinze & Reiss, 2003). Ein Grund für die Entstehung derartiger Vorstellungen könnte eine verfrühte Betonung formaler Kriterien darstellen (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Diese Klasse von Beweisschemata äußert sich darin, dass sich Schüler und Schülerinnen von einem algebraischen Beweis, auch wenn er nicht korrekt ist, eine gute Note versprechen (vgl. Dreyfus, 2002). Außerdem zeigt sich, dass für die Lernenden die Mathematik vor allem durch Exaktheit und Formalismus geprägt ist, wohingegen ihnen der Aspekt der Anwendbarkeit und der Prozesscharakter weniger bestimmend erschienen (vgl.Hellmich, Hartmann, & Reiss, 2002). Die zweite Klasse stellen empirische Beweisschemata dar (vgl. Heinze & Reiss, 2003). Dabei stützen sich die Argumentationen auf empirische Argumente, wie induktive Schlussfolgerungen oder Beispiele (vgl. Ufer u. a., 2009). Schüler und Schülerinnen machen sich durch Beispiele, Nachrechnen, Nachmessen im Kopf oder durch den optischen Eindruck die Gültigkeit einer Allaussage plausibel. Derartige Argumente sind aus mathematischer Sicht nicht adäquat, um die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu beweisen. Derartige Vorgehensweisen eignen sich sehr gut, um eine Beweisidee zu generieren, aber entsprechen als Beweisschema nicht den mathematischen Normen eines Beweises. (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015) Im Gegensatz zu den Beweisen, von denen sich Lernende eine gute Note versprechen, werden numerisch induktive Beweise, die einen erklärenden Charakter aufweisen, bevorzugt (Dreyfus, 2002). Ein Grund für die Entwicklung dieser Klasse besteht möglicherweise darin, dass es Schülern und Schülerinnen an alternativen tragfähigen mathematischen Vorstellungen fehlt, da diese im Alltag eine eher untergeordnete Rolle spielen oder bisher im Unterricht nicht behandelt wurden (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Die letzte Klasse an Beweisschemata wird als analytisch bezeichnet. Diese beruht auf deduktiven Schlüssen und wird als mathematisch tragfähig angesehen. (vgl. Ufer u. a., 2009) Verfügen Lernende über ein derartiges Beweisschema, wird Beweisen als eine Kette deduktiver Argumente verstanden. Das Konzept des inhaltlich-anschaulichen Beweis von Blum & Kirsch (1991), wie in Kapitel 1.5.2 vorgestellt wurde, entspricht ebenfalls dieser Vorstellung, auch wenn induktive Argumente zulässig sind. (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015)

Ein wichtiger Aspekt der Klassifizierung ist, dass sich die einzelnen Beweisschemata gegenseitig nicht ausschließen. Dies bedeutet, dass Schüler und Schülerinnen mehrere Beweisschemata besitzen können und gleichzeitig induktive und deduktive Argumente akzeptiert werden können. (vgl. Ufer u. a., 2009)

Beweisstruktur

Ein Beweis besteht aus deduktiven Schlüssen, die so angeordnet sein müssen, dass sie bei den Voraussetzungen beginnen und bei der Behauptung enden (vgl. H. N. Jahnke & Ufer, 2015). Dabei müssen die Aussagen, welche zur Stützung von Argumenten verwendet werden, bei der Verwendung bereits gesichert sein. Dies bedeutet, dass bewiesen wird, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt. Dadurch werden insbesondere Zirkelschlüsse als Argument ausgeschlossen. (vgl. Ufer u. a., 2009) Studien zeigten, dass sowohl Schüler und Schülerinnen als auch Studierende bei der Erfassung und Beschreibung der logischen Struktur einer mathematischen Aussage große Schwierigkeiten hatten. Aus diesen Ergebnissen kann auf Probleme beim Aufbau einer Beweisstruktur geschlossen werden.

Beweiskette

Jeder einzelne deduktive Beweisschritt muss aus dem vorhergehenden Schritt gefolgert werden, wodurch aufeinanderfolgende Schritte zu einer Beweiskette geformt werden (vgl. Heinze & Reiss, 2003). Das bedeutet, dass Teilschritte auf immer auf Prämissen beruhen müssen, die entweder Voraussetzungen der Behauptung sind oder im Beweis bereits gezeigt wurden. Damit Schüler und Schülerinnen deduktive Schlüsse in Form einer Beweiskette anordnen können oder eine derartige erkennen können, stellt die Erfassung und Trennung von Behauptung und Voraussetzung eine notwendige Fähigkeit dar. (vgl. Ufer u. a., 2009) Daher ist es von Bedeutung, dass dies im Unterricht thematisiert wird.

Diese drei Aspekte des Methodenwissens sind voneinander unabhängig. Dies bedeutet, dass es möglich ist, dass ein Schülerbeweis zwei Kriterien berücksichtigt, aber die dritte Forderung verletzt. (vgl. Ufer u. a., 2009) Ein Beispiel für einen derartigen Beweis wäre ein Zirkelschluss, wie im folgenden Schülerbeispiel gezeigt wird.

Aufgabe (Reiss, 2002a): Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhen HE und BF im Punkt S. ∠FSA misst 40° und ∠SAB misst 20°. Notiere einen Beweis für die Behauptung „ΔABC ist gleichschenkelig.“ Für die einzelnen Schritte des Beweises gib geometrische Begründungen an.

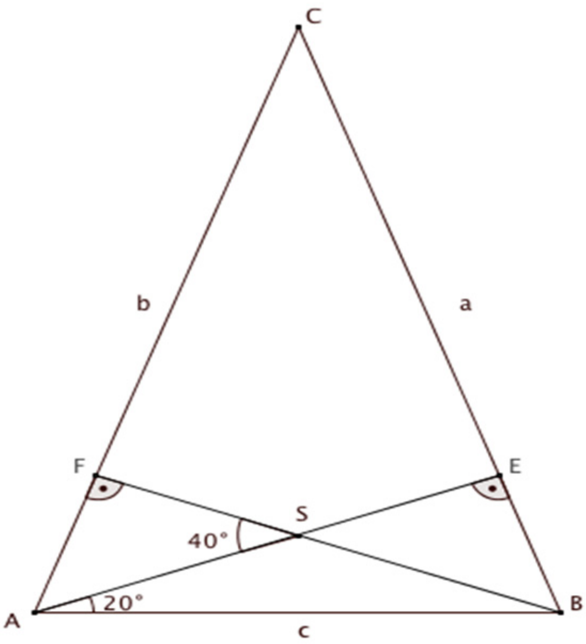


Abbildung 5.3: gegebene Skizze zur der Aufgabenstellung

Schülerbeweis:

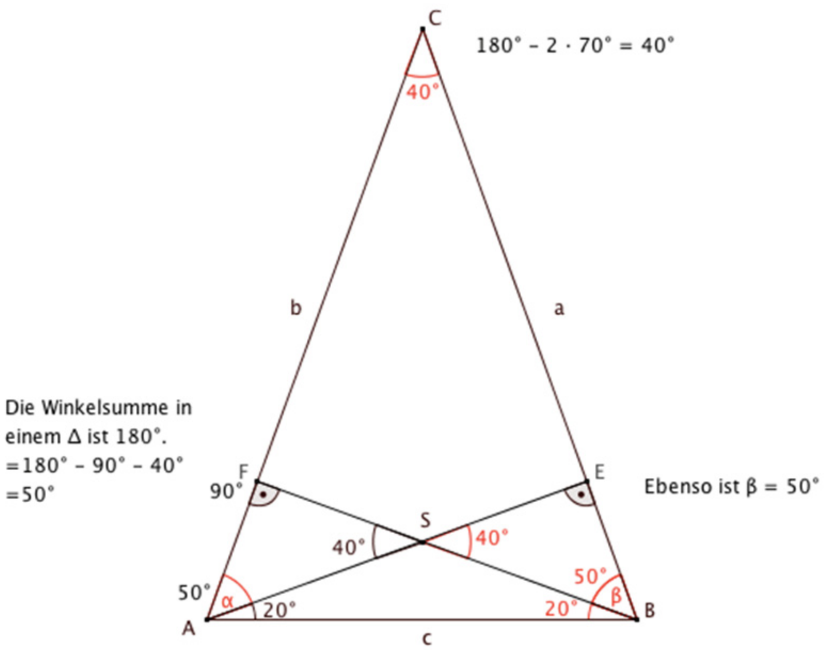


Abbildung 5.4: Schülerüberlegungen anhand der gegebenen Skizze

Da behauptet wird, dass das ΔABC gleichschenkelig ist wird diese Behauptung als Voraussetzung. ⇒ Der Winkel SEB = 40°. Da der Winkel in A (= 70°) gleich ist mit dem Winkel in B (= 70°), ist der Abstand von $\overline{AC}$ gleich dem Abstand von $\overline{BC}$. Das Dreieck ist gleichschenkelig.

Dieser Schülerbeweis zeigt einen typischen Zirkelschluss. Dabei folgt zwar jeder Beweisschritt aus dem vorhergehenden, das bedeutet das Kriterium der Beweiskette ist erfüllt, und die einzelnen Argumente sind deduktiver Natur, wodurch auch der Aspekt des Beweisschemas nicht verletzt wird. Jedoch ist in diesem Beispiel das Kriterium der Beweisstruktur missachtet, da nicht bei den Voraussetzungen begonnen wird, sondern bei der Behauptung. Es sind aber auch Beweise möglich, bei denen die Beweisstruktur und Beweiskette korrekt gegeben sind, das Beweisschema aber verletzt wird, beispielsweise durch Verwendung empirisch-induktiver Argumente. Schließlich treten auch Argumentationen auf, die ein korrektes Beweisschema und richtige Beweisstruktur aufweisen, jedoch durch eine Beweislücke, den Aspekt der Beweiskette nicht erfüllen. (vgl. Ufer u. a., 2009)

Das Methodenwissen sollte im Mathematikunterricht behandelt werden, da es notwendig ist, um Beweise entsprechend diesen Kriterien zu beurteilen und zu konstruieren (vgl. Ufer u. a., 2009). Jedoch zeigte sich, dass es einen signifikanten, aber schwachen Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, geometrische Beweise auf Akzeptanzkriterien hin zu überprüfen und geometrischer Beweiskompetenz. Deshalb handelt es sich beim Methodenwissen um einen relevanten Prädikator für geometrische Beweiskompetenz, aber durch das Wissen können die Schwierigkeiten der Lernenden beim Beweisen nicht vollständig gelöst werden. (Reiss & Ufer, 2009) Eine Möglichkeit dieses Wissen im Unterricht zu vermitteln stellt die Themenstudienarbeit, welche bereits in Kapitel 4.2.1 vorgestellt wurde, dar (vgl.Kuntze, 2009b).

5.2.3. Problemlösestrategien

Verfügen Schüler und Schülerinnen über ein ausreichendes mathematisches Fachwissen und Methodenwissen, so werden dadurch die Schwierigkeiten beim Beweisen nicht verschwunden sein. Damit eine Beweisaufgabe erfolgreich bearbeitet werden kann, benötigt es neben fachlichen Basiswissen und dem Wissen über Beweise zusätzlich noch die Kenntnis von Problemlösestrategien (vgl. Ufer & Heinze, 2009). Lernende müssen sich im Beweisprozess Sätze und Definitionen in Erinnerung rufen, sozusagen ihr Wissen mobilisieren, und anschließend die gesammelten Tatsachen organisieren (vgl. Polya, 1949). Diese psychischen Prozesse, welche beim Lösen eines Problems ablaufen, werden als Verlauf bezeichnet und durch fünf Verlaufsqualitäten beschreiben. (vgl. Perels, Schmitz, & Bruder, 2005)

- Planmäßigkeit: Darunter wird die Fähigkeit verstanden, eine Aufgabenstellung in Teilkomponenten zu zerlegen und dabei den Gesamtzusammenhang nicht aus den Augen zu verlieren.
- Exaktheit: Dies bezeichnet die Fähigkeit, die Komponenten einer Aufgabe genau zu erfassen und zu verstehen. Dazu gehört auch wesentliche Informationen herausfiltern zu können.
- Selbstständigkeit: Unter diesem Begriff wird die Fähigkeit eigenständig ein Problem zu formulieren, zu evaluieren und zu lösen verstanden.
- Aktivität: Damit wird der Grad der Auseinandersetzung mit einer Aufgabenstellung sowie ihrer Lösung gemeint.
- Beweglichkeit: Darunter fallen die Fähigkeiten zwischen verschiedenen Aspekten der Betrachtung wechseln zu können und auch eine Komponente in verschiedene mathematische Zusammenhänge einbetten zu können. Weiters gehört die Fähigkeit sich mit mehreren Dingen gleichzeitig beschäftigen zu können und Problemlöseschritte umzukehren zu diesem Qualitätsmerkmal.

Durch Defizite in diesen fünf Verlaufsqualität wird das Problemlösen, und somit das Beweisen, merklich erschwert. Deshalb müssen diese Merkmale im Unterricht näher betrachtet und gefördert werden. Im folgenden wird auf drei Qualitäten, Exaktheit, Selbstständigkeit und Beweglichkeit, genauer eingegangen.

Exaktheit

Bevor die Schüler und Schülerinnen überhaupt mit dem Lösen einer Begründungsaufgabe beginnen können müssen sie die Aufgabe zunächst einmal genau verstanden haben.

„Es ist töricht, eine Frage zu beantworten, die man nicht versteht.“ (Polya, 1949)

Es ist nutzlos Rechnungen oder Konstruktionen durchzuführen ohne den Hauptzusammenhang erkannt zu haben oder einen Plan gemacht zu haben. Beim Beweisen in der Schule kommt jedoch gerade diesen ersten Schritten meist eine unzureichende Beachtung zu. (vgl. Polya, 1949)

Der erste Schritt, um eine Aufgabe genau zu verstehen, stellt das Verstehen des Wortlautes der Aufgabenstellung dar. Um Verständnisschwierigkeiten aufzudecken, kann der Lehrer bzw. die Lehrerin die Lernenden auffordern, die Aufgabe nochmals in eigenen Worten wiederzugeben. Hat ein Schüler bzw. eine Schülerin die Aufgabe vollständig erfasst, so sollte er auch Imstande sein die Hauptbestandteile der Aufgabenstellung zu benennen. Um dies zu überprüfen, eignen sich Fragestellungen nach der gesuchten Unbekannten, nach dem Bekannten und den Voraussetzungen. (vgl. Polya, 1949)

Im Gegensatz zu dem Beweisprozess bei Experten und Expertinnen weist der Prozess bei den Lernenden meist nur eine sehr kurze oder gar keine Planungs- und Überblicksphase auf. Schüler und Schülerinnen wählen schnell einen Weg, den sie sehr lange verfolgen, auch wenn diese keinen Fortschritt erbbringt. Bei ihnen ist so gut wie keine Reflexion über den Beweisprozess zu beobachten, wodurch ein Strategiewechsel erschwert wird. Bisher wurde im Unterricht dem Beweisen als Prozess zu wenig Beachtung geschenkt, wodurch die Lernenden das Beweisen nur als fertiges Produkt verstehen. (vgl. Reiss & Ufer, 2009) Daher sollte der Prozesscharakter in den Mittelpunkt des Unterrichts gerückt werden. Wie das Wissen dazu vermittelt werden kann wurde bereits in Kapitel 4.1.2 beschrieben. Jedoch sollte das Wissen nicht nur erarbeitet, sondern die Beweise nach dem dreistufigen Prozessmodel aus Kapitel 4.1.2 erarbeitet werden. Dies bedeutet, dass auch die zu beweisenden Aussagen nicht in fertiger Form vorliegen sollten. Diese sollten induktiv anhand von Beispielen gewonnen werden und anschließend auf deren Wahrheitsgehalt getestet werden. Dazu werden zunächst Einzelfälle betrachtet, um aus Gemeinsamkeiten eine Vermutung aufzustellen. Dabei können folgende Strategien bei der Generierung unterstützend wirken: (vgl. Ufer & Heinze, 2009)

- Betrachtung vor allem von unterschiedlichen Beispielen
- Schriftliche Festhalten der gewonnen Ergebnisse
- Suche nach Gemeinsamkeiten in den einzelnen Beispielen

Durch die Vermittlung dieser Strategien kann den Schülern und Schülerinnen bei der Bewältigung ihrer Schwierigkeiten geholfen werden. Unbekannte Strukturen und Eigenschaften stellt den schwierigsten Teil mathematischer Forschung dar (vgl. Henn, 2002).

Die Untersuchung der Einzelfälle stellt oftmals ein sehr aufwendiges Unternehmen dar, wodurch sich der Einsatz von DGS anbietet. Nachdem die Vermutung gefunden wurde, folgt die Formulierung und anschließend wird diese weiter belastet. Auch bei diesem Schritt kann die Einbindung von DGS unterstützend wirken, denn wird lediglich Stift und Papier genutzt, so können entsprechend weniger Beispiele betrachtet werden. (vgl. Ufer & Heinze, 2009) In Kapitel 5 werden Beispiele zum Einsatz von dynamischer Geometriesoftware gegeben, die bei der Aufstellung und Belastung von Vermutungen unterstützend wirken und die erste Phase des Beweisprozesses betonen.

Selbstständigkeit

Im typischen Mathematikunterricht wird zumeist ein Beweis, sofern dies im Unterricht überhaupt behandelt wird, in einem Lehrervortrag, Frontalunterricht oder einem Lehrer-Schüler-Gespräch vorgestellt. Dabei nehmen die Schüler und Schülerinnen meist eine sehr passive Rolle ein. (vgl. Lorbeer & Reiss, 2009) Lehrpersonen sehen in dieser Herangehensweise eine „einfache Chance auf einen erfolgreichen und ungestörten Unterricht“ (Lorbeer & Reiss, 2009). Dies muss an sich nicht schlecht sein, denn diese Form des Unterrichts bietet den Vorteil, dass die Lernenden eine Orientierung bekommen, wie ein Beweis auszusehen hat (vgl. Kuntze, 2009a). Jedoch sollten die Nachteile dieser Unterrichtsformen vor allem beim Beweisen nicht außer Acht gelassen werden.

- Unverständnis der Lernenden: Die Uneinsichtigkeit der Schüler und Schülerinnen wird durch eine zu frühe Verallgemeinerung erzeugt. Oftmals wird für ein einzelnes Beispiel, welches als Ausgangspunkt dient, direkt eine allgemeine Lösung gesucht. Durch diese frühe Abstraktion bleibt den Lernenden die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit verwehrt. (vgl. Heske, 2002) Außerdem wird durch diese Unterrichtsform ein falsches Bild vom Beweisen vermittelt. Die Schüler und Schülerinnen sehen das Endergebnis als Folge einer eindeutigen Schlussfolgerungskette mit einem Anfangszustand und Endzustand. Dadurch entsteht ein falsches Modell des Beweisens in den Köpfen der Lernenden. (vgl. Lorbeer & Reiss, 2009)

- Passivität der Schüler und Schülerinnen: Durch die genannten Unterrichtsformen werden die Lernenden direkt zu der von der Lehrkraft gewünschten Lösung geführt. Es werden keine Gelegenheiten für selbstständiges Problemlösen und Irrwege geboten, wodurch es teilweise zum Ratespiel nach der richtigen Antwort, welche die Lehrperson hören will, verkommt. Durch diese Passivität wird die Motivation zum Beweisen gesenkt, wodurch sich oftmals einige Schüler und Schülerinnen zurücklehnen und abschalten bis die gewünschte Formel an der Tafel steht. (vgl. Heske, 2002)

Aufgrund dieser Nachteile der üblichen Unterrichtsformen, muss die Aktivität der Lernenden in den Mittelpunkt des Unterrichtes gerückt werden. Der Fokus sollte vor allem auf die selbständige Wissenskonstruktion gelegt werden (vgl. Lorbeer & Reiss, 2009).

Bei der Verlaufsqualität der Exaktheit wurde bereits angesprochen, dass die Lernenden selbstständig die zu beweisenden Sätze und Behauptung durch Untersuchung von Einzelfällen zu erarbeiten. Dies stellt eine Förderung der Selbstständigkeit in der ersten Phase des Beweisprozesses dar, aber auch in den anderen Phasen sollte Eigenständigkeit gefördert werden. Dabei sollte darauf geachtet werden, die Schüler und Schülerinnen nicht zu Beginn zu überfordern, weshalb die Niveaustufen des Beweisens aus Kapitel 3 berücksichtigt werden müssen. Mögliche didaktische Methoden zur Förderung der Selbsttätigkeit sind das in Kapitel 3.2.1 vorgestellte Beweispuzzle und Lückenfüller. Eine weitere Möglichkeit bietet die Fehlersuche. Dabei werden den Schülern und Schülerinnen fertige Beweise vorgelegt, in den ein oder mehrere Fehler eingebaut sind. Diesen gilt es zu finden und außerdem zu begründen, ob der Beweis irreparabel ist oder behoben werden kann. Kann der Fehler beseitigt werden, so ist dies durchzuführen und zu notieren. (vgl. Heske, 2002) In Kapitel 3.2.1 wurde weiters thematisiert, dass die Lernenden bei der selbstständigen Beweisführung durch das Führen von Analogiebeweisen unterstützt werden können.

Bei all diesen methodischen Überlegungen schlüpft der Lehrer bzw. die Lehrerin in die Rolle des Beraters. In den Vordergrund treten die Schüler und Schülerinnen, wohingegen die Lehrperson eher eine zurückhaltende Position einnimmt. Die

Lehrkraft sollte sich selbst nicht mehr als Vermittler des Wissens ansehen, sondern den Lernenden bei Bedarf unterstützend zu Seite stehen. (vgl. Lorbeer & Reiss, 2009)

Beweglichkeit

Geistige Beweglichkeit im mathematischen Kontext zeichnet sich durch Vereinfachung der Aufgabenstellung (Reduktion), Umkehr von Gedankengängen und Problemlöseschritten (Reversibilität), gleichzeitige Beachtung mehrerer Aspekte oder Erkennung der Abhängigkeit von Dingen (Aspektbeachtung) und Umstrukturierung eines Sachverhaltes (Aspektwechsel) aus (vgl. Perels u. a., 2005).

Gute Problemlöser besitzen ein hohes Maß an geistiger Beweglichkeit. Sie können sich gut fokussieren und intuitiv die gestellte Aufgabe auf das Wesentliche reduzieren, weisen also die Fähigkeit zur Reduktion auf. Weiters besitzen sie die Fähigkeit der Reversibilität, das heißt diese Schüler und Schülerinnen können Gedankengänge rückwärtsnachvollziehen und wenden dies in geeigneten Situationen an. Auch die Merkmale Aspektbeachtung und Aspektwechsel der geistigen Beweglichkeit weisen gute Problemlöser auf. Sie können mehrere Aspekte einer Problemstellung gleichzeitig beachten oder erkennen die Abhängigkeit von Dingen und variieren diese. Sie betrachteten intuitiv verschiedene Aspekte des Problems und wechseln, wenn notwendig, getätigte Annahmen, um die Lösung zu finden. Außerdem können gute Problemlöser ein bereits bekanntes Vorgehen auf einen anderen Kontext übertragen. (vgl. Bruder, 2003)

Derartige Schüler bzw. Schülerinnen, welche gute Problemlöser sind, wenden intuitive Strategien auf Probleme an, wodurch sie oftmals nicht erklären können wie sie die Aufgabenstellung gelöst haben. Wird nun dieses Vorgehen analysiert, so können heuristische Strategien, Prinzipien, Regeln und Hilfsmittel gefunden werden. (vgl. Bruder, 2003) Weisen daher leistungsschwächere Lernende Defizite in der geistigen Beweglichkeit auf, so kann die Kenntnis dieser heuristischen Strategien, die geistig bewegliche Schüler und Schülerinnen intuitiv anwenden, diese Mängel teilweise kompensieren (vgl. Perels u. a., 2005). In der nachfolgenden Tabelle ist zusammengefasst welche heuristische Vorgehensweise welches Merkmal der geistigen Beweglichkeit kompensieren kann.

Merkmal geistiger Beweglichkeit	Heuristische Vorgehensweise
Reduktion	Informative Figur Tabellen Gleichungen
Reversibilität	Rückwärtsarbeiten
Aspektbeachtung	Invarianzprinzip Extremalprinzip Zerlegungsprinzip Symmetrieprinzip Fallunterscheidung Systematisches Probieren
Aspektwechsel	Kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten Transformationsprinzip

Aus dieser Tabelle lässt sich ablesen, dass zur Förderung der Reduktion heuristische Hilfsmittel, wie Skizzen, Tabellen und Gleichungen, eingesetzt werden können. Derartige Hilfsmittel werden in der Sekundarstufe I leicht gelernt und können auch bei leistungsstärkeren Schülern und Schülerinnen eingesetzt werden, um die intuitiven Denkabläufe zu dokumentieren (vgl. Bruder, 2003). Wird eine Skizze in einer Beweisaufgabe eingesetzt, so ist darauf zu achten, dass diese keine Spezialisierung enthält. Beispielsweise, wenn sich eine Behauptung auf allgemeine Dreiecke bezieht, so sollte als Skizze kein rechtwinkeliges, gleichschenkeliges oder gleichseitiges Dreieck gewählt werden, um falsche Schlüsse aufgrund spezifischer Eigenschaften auszuschließen. (vgl. Polya, 1949) Durch den Einsatz dieser heuristischen Hilfsmittel kann eine höhere Übersichtlichkeit erzeugt werden und so die Aufgabe auf das Wesentliche reduzieren (vgl. Perels u. a., 2005).

Um fehlende Defizite der Fähigkeit zur Reversibilität auszugleichen, eignet sich die Vermittlung der heuristischen Strategie des Rückwärtsarbeitens. Normalerweise geht man bei einer Aufgabe von den gegebenen Variablen aus. Beim Rückwärtsarbeiten wird hingegen vom Zielzustand ausgegangen und nach den gesuchten Variablen gefragt. (vgl. Perels u. a., 2005) Um dies zu fördern eignen sich vor allem Umkehraufgaben, bei denen danach gefragt wird, was gegeben sein muss, um die gesuchte Größe zu bestimmen (vgl. Bruder, 2003).

Die Kenntnis heuristischer Prinzipien, wie beispielsweise das Invarianzprinzip, Extremalprinzip, Symmetrieprinzip oder Zerlegungsprinzip, kann für die Förderung der Fähigkeit der Aspektbeachtung genutzt werden. Oftmals lässt sich eine Begründungsaufgabe recht schnell lösen, wenn nach Invarianten gesucht wird. Um diese zu erkennen, sollte unterschiedliche Beispiele auf Gemeinsamkeiten untersucht werden. (vgl. Bruder, 2003) Gerade dabei kann der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware von Vorteil sein. Durch die quasistetige Verformung der Konstruktion können Konstanten leichter ins Auge springen. Das Erkennen von Invarianten stellt gleichzeitig eine heuristische Vorgehensweise für den Umgang mit DGS zur Wahrnehmung und Strukturierung der Aufgabe. (vgl. Haug, 2011) Neben dem Betrachten von Invarianten kann auch die Vermittlung des Extremalprinzip zur Förderung beitragen. (vgl. Perels u. a., 2005) Dabei werden Objekte mit extremalen Eigenschaften untersucht, um besondere Objekte zu finden oder ihre Existenz zu beweisen. Außerdem kann dieses Prinzip genutzt werden, um in unübersichtliche Situationen das gesuchte Objekt zu finden. (vgl. Grieser, 2012) Das Symmetrieprinzip ist dem Invarianzprinzip sehr ähnlich. Vorher wurden konstante Objekte gesucht, diesmal wird die Konstruktion auf Symmetrien untersucht (vgl. Bruder, 2003). Um diese Symmetrien zu erkennen, kann das Einzeichnen von Hilfslinien von großer Bedeutung sein. Diese Konstruktionstätigkeit stellt außerdem eine weitere grundlegende Problemlösestrategie im Umgang mit dynamischer Geometriesoftware dar (vgl. Haug, 2011). Das letzte Prinzip, das für die Förderung der Aspektbetrachtung genutzt werden kann, ist das Zerlegungsprinzip. Dabei geht es darum, wie die Aufgabenstellung oder das mathematische Objekt geschickt zerlegen oder teilen kann. Nicht nur beim Invarianz- und Symmetrieprinzip kann der Einsatz von DGS von Nutzen sein, sondern auch beim systematischen Probieren. Durch die Einbindung des Computers können viele verschiedene Beispiele betrachtet werden und die Konstruktion kann gezielt variiert werden. Dadurch können die Schüler und Schülerinnen verschiedene Aspekte gleichzeitig betrachten und so Vermutungen aufstellen, wodurch die Fähigkeit der Aspektbetrachtung gefördert wird.

Schüler und Schülerinnen verfolgen oftmals einen gewählten Weg sehr lange, auch wenn dieser keinen Fortschritt bringt (vgl. Reiss & Ufer, 2009). Ein Grund dafür sind Defizite in der Fähigkeit unterschiedliche Aspekte des Problems zu betrachten und die Sichtweise zu wechseln. Um das Merkmal des Aspektwechsels zu fördern eignet sich eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten. (vgl. Perels u. a., 2005) Im Gegensatz zum Rückwärtsarbeiten wird beim Vorwärtsarbeiten von den Voraussetzungen ausgegangen. Aus diesen Voraussetzungen werden deduktiv Folgerungen gezogen, solange bis die Behauptung gefolgert werden kann. (vgl. Holland u. a., 1988) Eine Kombination aus beiden Tätigkeiten erlaubt es den Schülern und Schülerinnen das Problem aus zwei Perspektiven zu betrachten, wodurch die Lösung leichter gefunden werden kann (vgl. Perels u. a., 2005). Eine weitere Möglichkeit, um die Fähigkeit zum Apsektwechsel zu fördern, stellt das Transformationsprinzip dar. Bei dieser Prinzip geht es um die Übersetzung der Aufgabenstellung in andere mathematische Modell und Darstellungsweisen. Dabei wird vor allem die Vernetzung der Wissensinhalte in den Mittelpunkt gestellt.

Alle diese heuristischen Vorgehensweisen können Defizite geistiger Beweglichkeit kompensieren. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass das Erlenen dieser Strategien über einen längeren Zeitraum und in vier Etappen erfolgt (vgl. Bruder, 2003).

- 1. Etappe: In dieser ersten Phase werden die Lernenden an bestimmte heuristische Vorgehensweisen und Fragestellungen gewöhnt. Dies geschieht, indem die Fragestrategien von der Lehrkraft in den Unterricht eingebaut werden, ohne sie zum Thema zu machen. (vgl. Bruder, 2003)
- 2. Etappe: Die heuristische Strategie, die gerade vermittelt werden will, wird anhand von Musteraufgaben vorgestellt. Dabei wird diese mit einem Namen bezeichnet und typische Fragestellungen zugeordnet. Anschließend werden Aufgaben gesucht, bei denen diese Strategie bereits intuitiv angewendet wurde. Dabei fungiert die Musteraufgabe als Eselsbrücke. (vgl. Bruder, 2003)
- 3. Etappe: Nachdem die Strategie in der zweiten Phase bewusst gemacht wurde geht es in der dritten Etappe um die gezielte Übung der kennengelernten Strategie. Dazu werden Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit und verschiedenem Kontext gestellt. Weiters werden die

individuellen Vorlieben und die Anwendungsvielfalt thematisiert. (vgl. Bruder, 2003)

- 4. Etappe: Die vierte Phase besteht aus weiteren Übungsphasen, die eine unterbewusste flexible Strategieverwendung anstreben (vgl. Bruder, 2003).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es wie in jedem anderen Gegenstand von größter Bedeutung ist das Interesse der Schüler und Schülerinnen zu wecken und ihre Vorstellungen zu thematisieren. Deshalb ist es so wichtig Strategien zu kennen, das Beweisbedürfnis zu wecken und die Beweiskompetenz zu fördern.

6. Beispiele für den Einsatz des Computers

Im nachfolgenden Kapitel werden einige Beispiele gegeben, wie der Computer bei dieser Förderung eingesetzt werden kann. Es werden elektronische Arbeitsblätter vorgestellt, welche die Schüler und Schülerinnen selbständig oder zu zweit bearbeiten können. Die gegebenen Beispiele folgen immer demselben Aufbau. Zunächst wird das Lernziel vorgestellt, das die Lernenden am Ende der Bearbeitung erreichen sollten. Anschließend werden eventuelle Voraussetzungen für die erfolgreiche Bewältigung thematisiert. Danach folgt die eigentliche Aufgabenstellung zusammen mit einem Bild des dynamischen Arbeitsblattes. Den Abschluss bilden Informationen darüber, was die Schüler und Schülerinnen bei der Bearbeitung beobachten und lernen können. Erstellt wurden alle dynamischen Arbeitsblätter mit der dynamischen Geometriesoftware Geogebra erstellt.

6.1. Winkel am Kreis

6.1.1. Satz des Thales

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen experimentell den Satz des Thales entdecken und verstehen.

Voraussetzungen: Keine

Aufgabenstellung: (Ufer & Heinze, 2009)

1. Verschiebe den Punkt C! Wie verändert sich dadurch der Innenwinkel in diesem Punkt? Wann wird der Winkel kleiner, wann größer?
2. Markiere die Stellen, an denen der Innenwinkel 90° beträgt.
3. An welchem geometrischen Ort liegen die markierten Stellen? Stelle eine mathematische Vermutung auf.
4. Teste deine Vermutung.

5. Gibt es weitere Stellen, an denen der Innenwinkel 90° beträgt?
6. Überprüfe deine Vermutung für einen kürzeren oder längeren Abstand von A zu B.

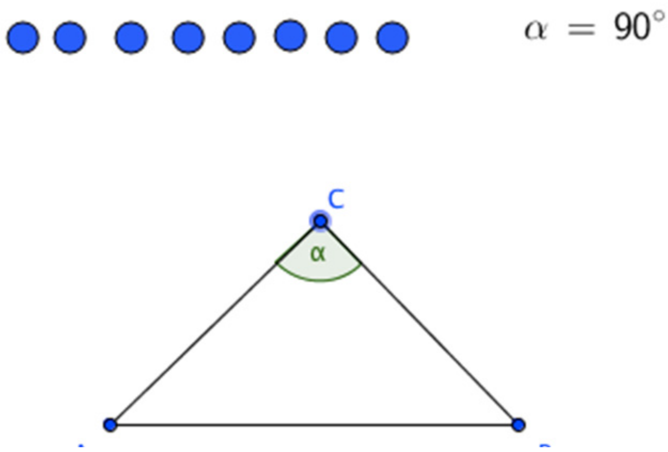


Abbildung 6.1: Satz des Thales Aufgabe 1 (vgl. Ufer & Heinze, 2009)

Was dabei beobachtet werden kann:

- Der Punkt C muss auf einem Halbkreis mit dem Durchmessen $\overline{AB}$ liegen, damit der Innenwinkel 90° beträgt.
- Dies gilt auch für einen kürzeren oder längeren Abstand.
- Wird der Punkt C von der Strecke $\overline{AB}$ entfernt, so wird der Winkel kleiner, wird er der Strecke angenähert, so wird er größer.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen einen Beweis für den Satz des Thales finden.

Voraussetzungen: Konstruktion einer Strecke, Winkelmessung, Winkelsummensatz, Eigenschaften des gleichschenkeligen Dreiecks

Aufgabenstellung: (Ufer & Heinze, 2009)

Satz des Thales: Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann beträgt der Winkel bei C 90°.

Wie kann dieser Satz bewiesen werden? Zur Unterstützung dienen folgende Anregungen:

1. Welche Strecken und Winkel sind gleich groß? Kennzeichne jeweils gleich große mit derselben Farbe. Überprüfe deine Vermutung durch Messen!
2. Verändere das Dreieck durch Ziehen an den Eckpunkten. Was fällt dir bezüglich den Winkeln und Strecken auf?
3. Begründe weshalb die Strecken gleich lang sind. Überlege dazu, um welchen Punkt es sich bei M handelt.
4. Argumentiere wieso die gekennzeichneten Winkel gleich groß sind. Mache dir dazu klar, um welche Art von Dreiecken es sich bei ACM und CBM handelt.
5. Wie groß muss nun der Winkel bei C sein? Begründe! Überlege dazu, wie du den gesuchten Winkel durch die beiden anderen ausdrücken kannst.

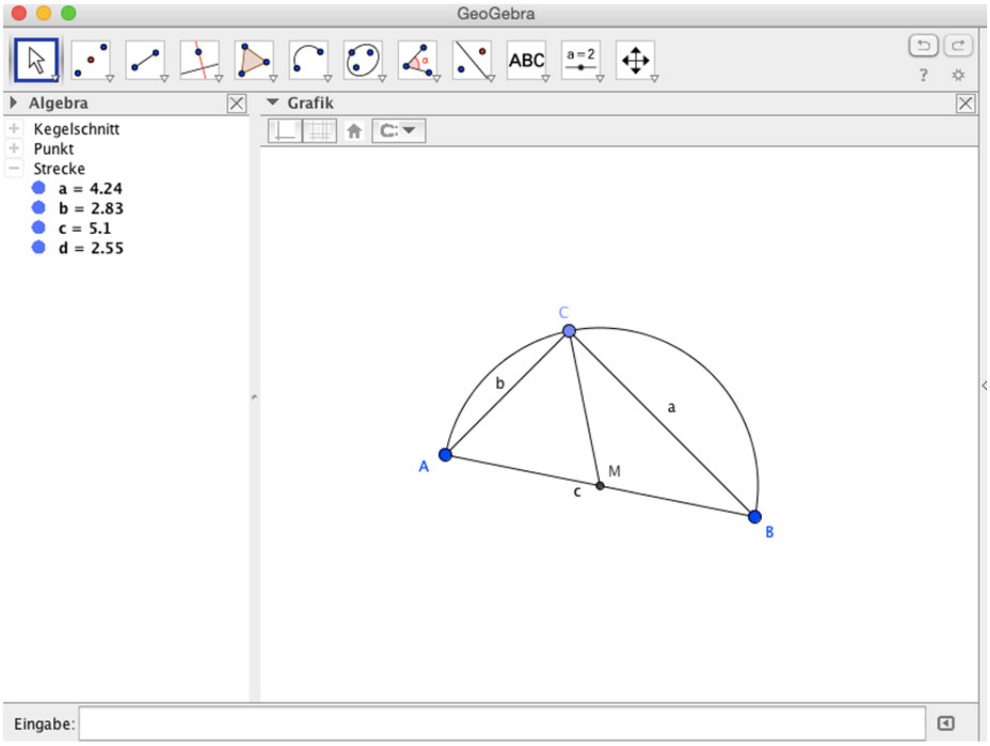


Abbildung 6.2: Satz des Thales Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ sind gleich lang und die Winkel $\sphericalangle MAC$ und $\sphericalangle ACM$ sind gleich groß, so wie die Winkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle CBM$ gleich groß sind.
- Wird das Dreieck verändert, so sind die Strecken und Winkel immer noch gleich groß.
- Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Halbkreises und der Halbierungspunkt der Strecke AB. Daher sind die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ Radien des Halbkreises und somit gleich lang.
- Da A,B und C von M gleichen Abstand haben, handelt es sich bei den beiden Dreiecken um gleichschenkelige Dreiecke. Daher müssen die Basiswinkel der Dreiecke gleich groß sein.
- Der Winkel bei C muss immer ein rechter Winkel sein. Der Winkel kann als Summe der beiden anderen dargestellt werden. Im Dreieck ABC gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$
$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180° \qquad /:2$$
$$(\alpha + \beta) = \gamma = 90°$$

6.1.2. Peripheriewinkelsatz

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen experimentell den Peripheriewinkelsatz entdecken und verstehen.

Voraussetzungen: Keine (vgl. Elschenbroich & Seebach, 2002)

Aufgabenstellung: (Elschenbroich & Seebach, 2002)

In der Abbildung liegen die Punkt A,B und C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und bilden die Dreiecke ABC und ABM.

1. Verschiebe den Punkt C auf dem Kreis so, dass er sich immer auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegt wie M. Was fällt dir bezüglich der eingezeichneten Winkel auf?

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden eingezeichneten Winkeln?
3. Prüfe deine Vermutung durch Verändern der Strecke $\overline{AB}$. Überprüfe auch den Spezialfall, bei dem ε am größten ist.
4. Verschiebe den Punkt C weiter, so dass C und M auf verschiedenen Seiten der Strecke $\overline{AB}$ liegen. Was fällt dir nun bezüglich γ auf?
5. Prüfe deine Vermutung wieder für verschiedene Dreiecke.

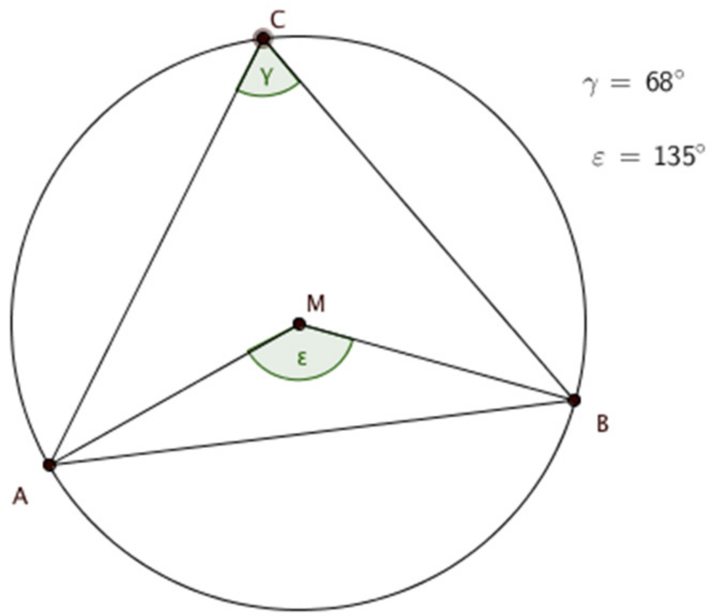


Abbildung 6.3: Peripheriewinkelsatz Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann: (Elschenbroich & Seebach, 2002)

- Wird der Punkt C auf der Kreislinie verschoben, so ändert sich der Peripherie- und Mittelpunktswinkel nicht.
- Der Peripheriewinkel ist immer halb so groß wie der Mittelpunktswinkel bei M.

- Wird A oder B verschoben und anschließend C wieder variiert, so ändern sich auch bei einer längeren oder kürzeren Sehne die beiden Winkel nicht. ε kann maximal 180° sein. In diesem Fall fällt die Strecke $\overline{AB}$ mit dem Radius zusammen und der Peripheriewinkel beträgt 90°, wieder die Hälfte des Mittelpunktswinkel. Dieser Spezialfall wird durch den Satz des Thales beschrieben.
- Der Peripheriewinkel besitzt nun einen anderen Wert bleibt aber bei Veränderung konstant.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen eine Beweisidee entwickeln.

Voraussetzungen: Eigenschaften gleichschenkeliger Dreiecke, Peripheriewinkel, Zentriwinkel

Aufgabenstellung:

Peripheriewinkelsatz: Alle Peripheriewinkel auf derselben Seite einer Kreissehne sind gleich groß und halb so groß wie der Zentriwinkel.

Wie kann dieser Satz bewiesen werden? Zur Unterstützung dienen folgende Anregungen:

1. Verschiebe den Punkt C auf der Kreislinie und beobachte dabei die Lage des Mittelpunktes M zum Dreieck ABC. Welche drei Möglichkeiten gibt es?
2. Bringe den Punkt C wieder in die Ausgangslage zurück! Für die Entwicklung der Beweisidee reicht die Betrachtung eines Falles.
3. Kennzeichne gleich lange Strecken mit derselben Farbe. Um welche Art von Dreiecken handelt es sich bei den Dreiecken ACM und BCM? Begründe!
4. Zeichne in der Skizze all jene Winkel ein, über die du etwas aussagen kannst.
5. Wie groß muss die Winkelsumme der beiden Dreiecke sein? Drücke diese durch den Peripherie- und Zentriwinkel aus.

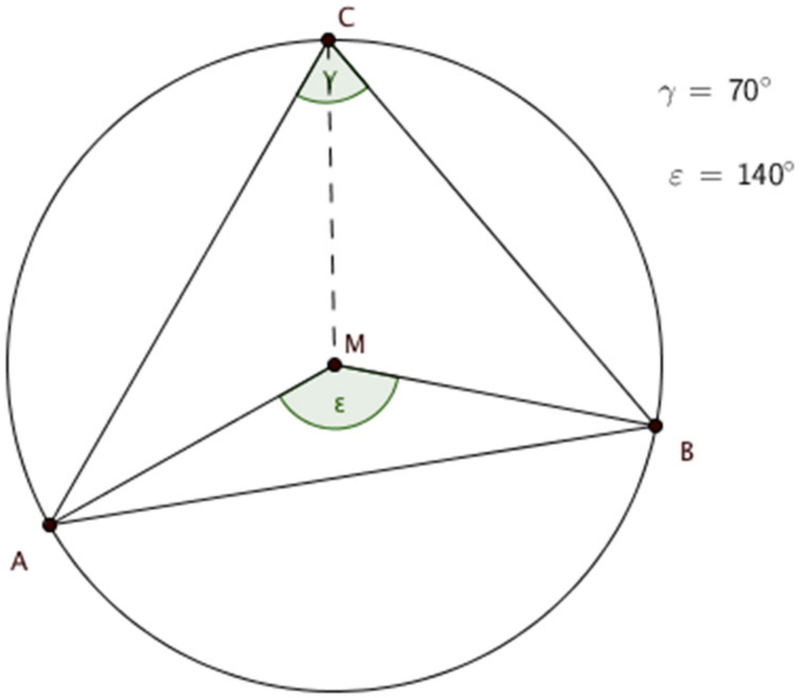


Abbildung 6.4: Peripheriewinkelsatz Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Der Mittelpunkt kann innerhalb des Dreiecks liegen, auf einer Dreiecksseite oder außerhalb.
- Da die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ Radien sind handelt es sich bei den beiden Dreiecken um gleichschenkelige.
- Da die Dreiecke gleichschenkelig sind, müssen die Basiswinkel gleich groß sein.
- In einem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180°, daher ist die Winkelsumme beider Dreiecke zusammen 360°. Je ein Basiswinkel der beiden Dreiecke ergibt zusammen mit dem anderen den Winkel γ. Die Summe der Winkel bei M beträgt $360° - \varepsilon$. Daher gilt für die Summe der beiden Dreiecke:

$$360° = \gamma + \gamma + (360° - \varepsilon) \quad /-360° \quad /+\varepsilon$$
$$\varepsilon = 2\gamma$$

6.2. Besondere Punkte und Linien im Dreieck

6.2.1. Höhenschnittpunkt

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Höhenschnittpunkt als Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks erkennen und Spezialfälle bezüglich der Lage entdecken.

Voraussetzungen: Höhen eines Dreiecks

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Höhen bereits eingezeichnet wurden.

1. Betrachte die Höhen des Dreiecks. Was kannst du feststellen? Prüfe deine Vermutung durch Variation des Dreiecks!
2. Kann das Dreieck so verändert werden, dass der Höhenschnittpunkt außerhalb liegt? Unter welcher Bedingung ist das möglich? Wie muss das Dreieck gewählt werden, dass der Schnittpunkt möglichst weit außerhalb liegt?
3. Gelingt es dir, dass der Höhenschnittpunkt auf einer der Dreiecksseiten liegt? Für welchen Spezialfall ist dies möglich?
4. Unter welcher Bedingung fällt der Höhenschnittpunkt mit einem Eckpunkt zusammen? Begründe deine Vermutung!

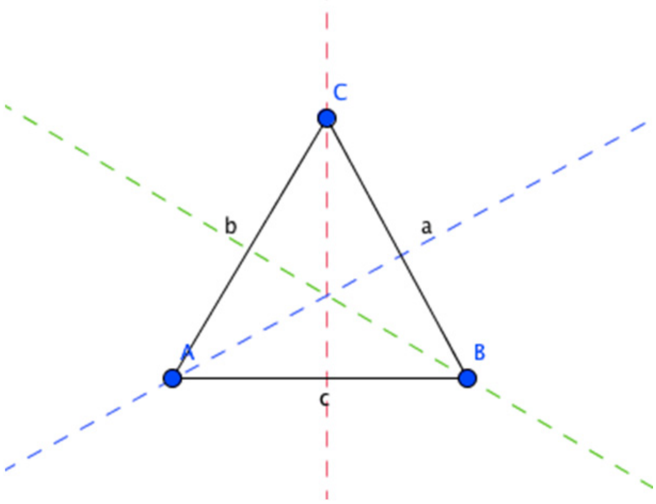


Abbildung 6.5: Höhenschnittpunkt

Was dabei beobachtet werden kann:

- Die Höhen schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.
- Handelt es sich bei dem Dreieck um ein stumpfwinkeliges, so liegt der Schnittpunkt außerhalb, ist es jedoch ein spitzwinkeliges, so liegt er innerhalb. Wird der stumpfe Winkel möglichst groß gewählt, wandert der Höhenschnittpunkt immer weiter weg.
- Es ist nicht möglich dass der Höhenschnittpunkt auf der Dreiecksseite liegt, er kann lediglich mit einem Eckpunkt zusammenfallen.
- In einem rechtwinkeligen Dreieck fällt der Höhenschnittpunkt mit dem Eckpunkt zusammen, bei dem sich der rechte Winkel befindet. Grund dafür ist, dass in einem rechtwinkeligen Dreieck die Höhen auf die Katheten mit der jeweils anderen Kathete zusammen fallen. Daher muss der Schnittpunkt immer in dem Eckpunkt mit dem rechten Winkel liegen.

6.2.2. Umkreismittelpunkt

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Seitensymmetralen entdecken und dessen Existenz begründen.

Voraussetzungen: Seitensymmetralen, Streckenmessung, Punkte einzeichnen, Kreis zeichnen

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seitensymmetralen bereits eingezeichnet sind.

1. Betrachte die Seitensymmetralen des Dreiecks. Was kannst du feststellen? Prüfe deine Vermutung durch Variation des Dreiecks!
2. Betrachte zunächst die Seitensymmetrale auf die Seite c. Zeichne einen Punkt ein, der auf dieser Symmetrale liegt. Miss die Abstände dieses Punktes zu den Eckpunkten A und B. Was stellst du fest? Prüfe deine Vermutung durch Verschieben des Punktes.
3. Nun betrachte die Seitensymmetrale auf die Seite b. Gilt für diese Seitensymmetrale dieselbe Vermutung? Um dies zu überprüfen, wähle einen

Punkt auf der Seitensymmetralen und miss die Abstände zu den Eckpunkten A und C.

4. Der Punkt U ist der Schnittpunkt der Seitensymmetralen m_c und m_b. Weshalb muss dieser Punkt auch auf m_a liegen? Tipp: Überlege was für Punkte, die auf m_a liegen, gelten muss und weshalb dies erfüllt ist.
5. Weshalb wird der Schnittpunkt mit Umkreismittelpunkt bezeichnet?

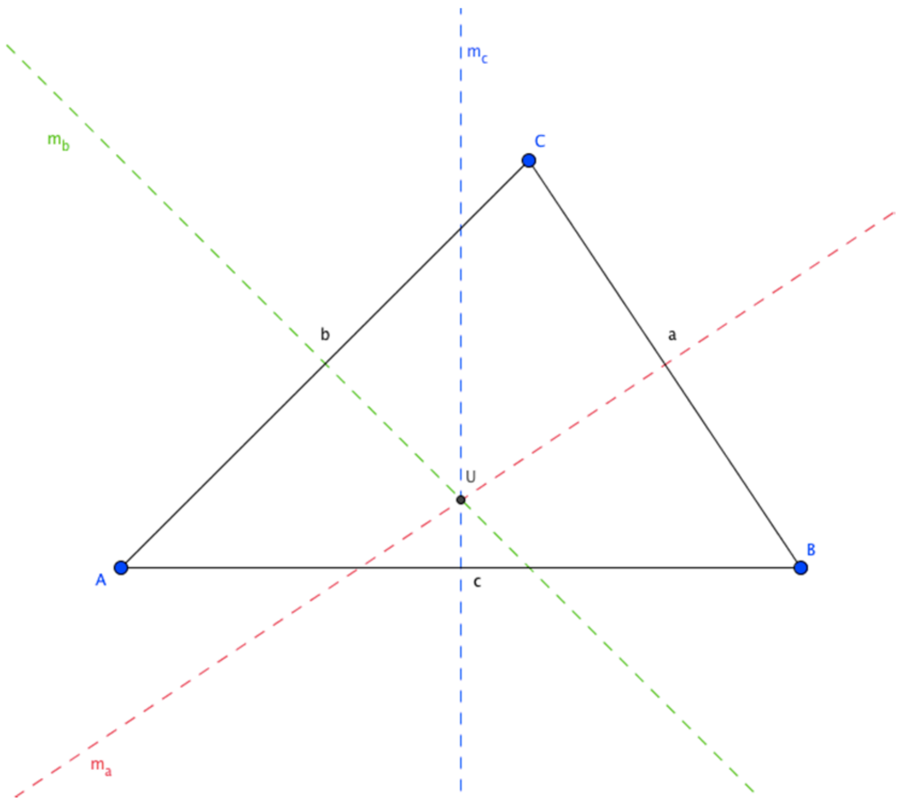


Abbildung 6.6: Umkreismittelpunkt Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Die Seitensymmetralen schneiden einander in einem Punkt U, dem Umkreismittelpunkt.
- Der Punkt hat sowohl von A als auch von B den gleichen Abstand. Diese Eigenschaft ändert sich nicht, wenn der Punkt auf der Seitensymmetralen verschoben wird. Alle Punkte die auf der Seitensymmetrale m_c liegen haben von A und B den gleichen Abstand.

- Der Punkt hat sowohl von B als auch von C den gleichen Abstand. Diese Eigenschaft ändert sich nicht, wenn der Punkt auf der Seitensymmetralen verschoben wird. Alle Punkte die auf der Seitensymmetrale m_b liegen haben von B und C den gleichen Abstand.
- Damit U auch auf m_a liegt, muss U von A und C den gleichen Abstand haben. Da U auf der Seitensymmetrale m_c und m_b liegt gilt UA = UB und UC = UB. Daraus folgt UA = UC, weshalb der Schnittpunkt auch auf der Seitensymmetrale der Seite a liegt.
- Da U auf allen Seitensymmetralen liegt, hat er von allen Eckpunkten den gleichen Abstand. Daher kann ein Kreis gezeichnet werden, der durch alle Eckpunkte verläuft.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Lage des Umkreismittelpunktes untersuchen.

Voraussetzungen: Arten von Dreiecken, Seitensymmetralen, Umkreismittelpunkt

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seitensymmetralen bereits eingezeichnet sind.

1. Kann das Dreieck so verändert werden, dass der Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt?
2. Gelingt es dir das Dreieck so zu verändern, dass der Umkreismittelpunkt genau auf einer Dreiecksseite liegt?
3. Kann der Umkreismittelpunkt mit einem Eckpunkt zusammenfallen? Begründe deine Antwort!

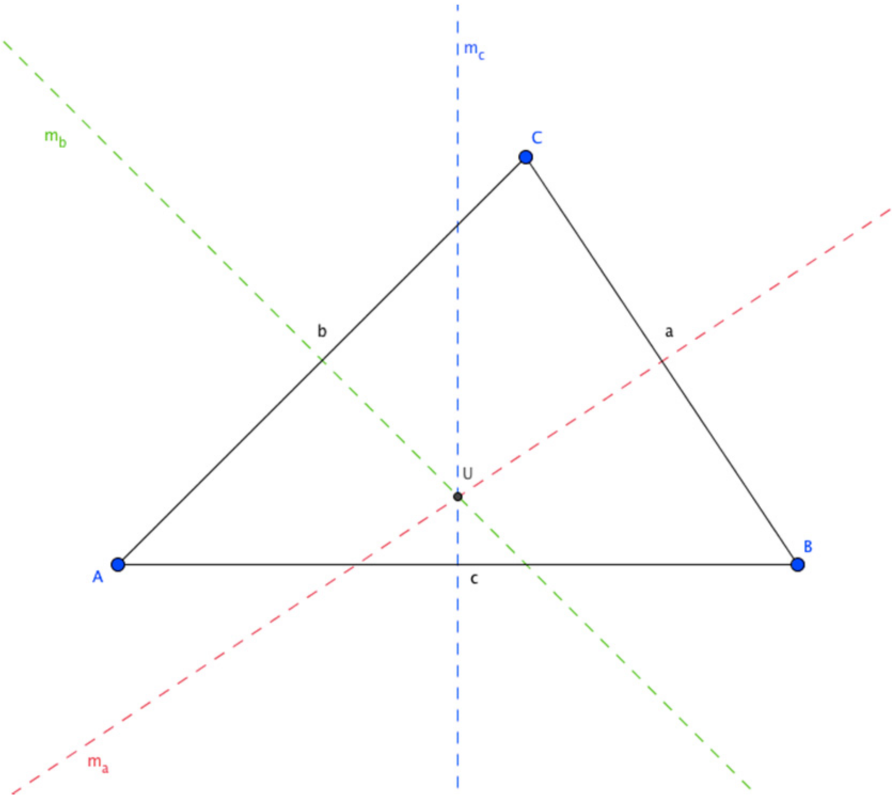


Abbildung 6.7: Umkreismittelpunkt Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Handelt es sich bei dem Dreieck um ein stumpfwinkeliges, so liegt der Schnittpunkt außerhalb, ist es jedoch ein spitzwinkeliges, so liegt er innerhalb.
- Das Dreieck kann so verändert werden, dass der Umkreismittelpunkt auf einer Dreiecksseite liegt. Dies ist nur bei einem rechtwinkeligen Dreieck möglich und er kann nur auf der Hypotenuse liegen.
- Nein der Umkreismittelpunkt kann nie mit einem Eckpunkt zusammenfallen, da dieser den Mittelpunkt eines Kreises durch die Eckpunkte beschreibt.

6.2.3. Inkreismittelpunkt

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen entdecken und dessen Existenz begründen.

Voraussetzungen: Winkelsymmetralen, Streckenmessung, Punkte einzeichnen, Kreis zeichnen

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Winkelsymmetralen bereits eingezeichnet sind.

1. Betrachte die Winkelsymmetralen des Dreiecks. Was kannst du feststellen? Prüfe deine Vermutung durch Variation des Dreiecks!
2. Betrachte zunächst die Winkelsymmetrale ω_α des Winkels α. Zeichne einen Punkt ein, der auf dieser Symmetrale liegt. Miss die Normalabstände dieses Punktes zu den Seiten b und c. Was stellst du fest? Prüfe deine Vermutung durch Verschieben des Punktes.
3. Nun betrachte die Winkelsymmetrale ω_β des Winkels β. Gilt für diese Winkelsymmetrale dieselbe Vermutung? Um dies zu überprüfen, wähle einen Punkt auf der Winkelsymmetralen und miss die Normalabstände zu den Seiten a und c.
4. Der Punkt I ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen ω_α und ω_β. Weshalb muss dieser Punkt auch auf ω_γ liegen? Tipp: Überlege was für Punkte, die auf ω_γ liegen, gelten muss und weshalb dies erfüllt ist.
5. Weshalb wird der Schnittpunkt mit Inkreismittelpunkt bezeichnet?

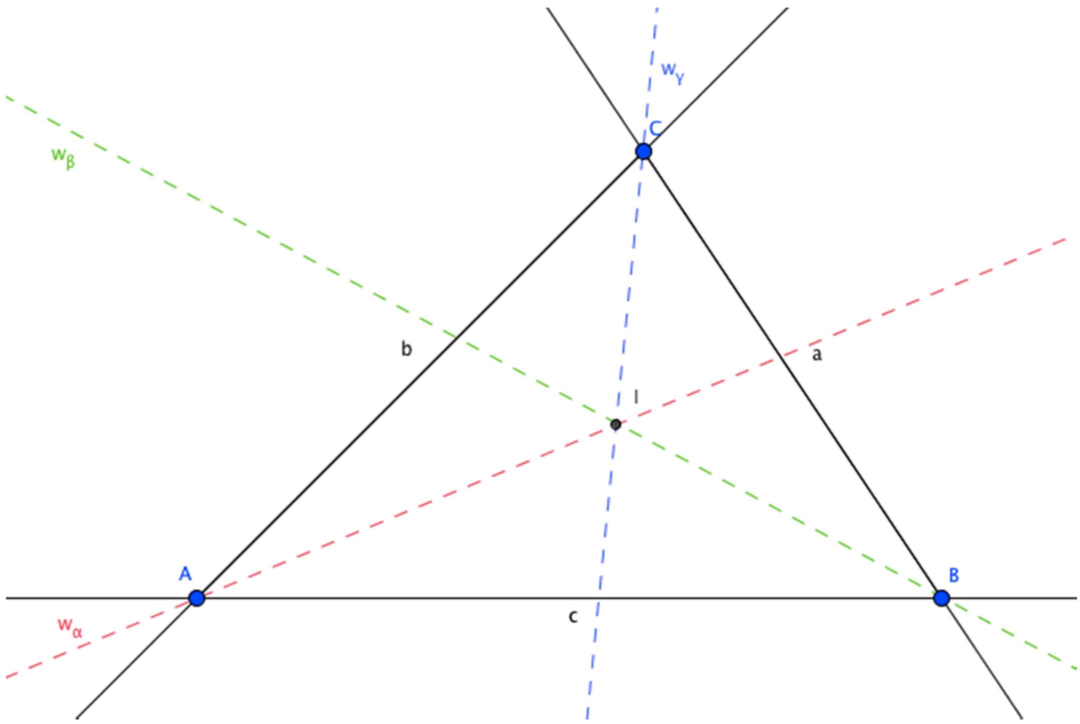


Abbildung 6.8: Inkreismittelpunkt Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Die Winkelsymmetralen schneiden einander in einem Punkt I, dem Inkreismittelpunkt.
- Der Punkt hat sowohl von b als auch von c den gleichen Normalabstand. Diese Eigenschaft ändert sich nicht, wenn der Punkt auf der Winkelsymmetralen verschoben wird. Alle Punkte die auf der Winkelsymmetralen ω_α liegen haben von b und c den gleichen Normalabstand.
- Der Punkt hat sowohl von a als auch von c den gleichen Normalabstand. Diese Eigenschaft ändert sich nicht, wenn der Punkt auf der Winkelsymmetralen verschoben wird. Alle Punkte die auf der Winkelsymmetralen ω_β liegen haben von a und c den gleichen Normalabstand.
- Damit I auch auf ω_γ liegt, muss I von a und b den gleichen Normalabstand haben. Da I auf der Winkelsymmetralen ω_α und ω_β liegt gilt Normalabstand I zu b = Normalabstand I zu c und Normalabstand I zu a = Normalabstand I zu c. Daraus folgt Normalabstand I zu a = Normalabstand I zu b, weshalb der Schnittpunkt auch auf der Winkelsymmetrale des Winkels γ liegt.
- Da I auf allen Winkelsymmetralen liegt, hat er von allen Seiten den gleichen Normalabstand. Daher kann ein Kreis gezeichnet werden, der durch alle Eckpunkte verläuft.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Lage des Inkreismittelpunkt untersuchen.

Voraussetzungen: Arten von Dreiecken, Winkelsymmetralen, Inkreismittelpunkt

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Winkelsymmetralen bereits eingezeichnet sind.

1. Kann das Dreieck so verändert werden, dass der Inkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt?

2. Gelingt es dir das Dreieck so zu verändern, dass der Inkreismittelpunkt genau auf einer Dreiecksseite liegt?
3. Kann der Inkreismittelpunkt mit einem Eckpunkt zusammenfallen? Begründe deine Antwort!

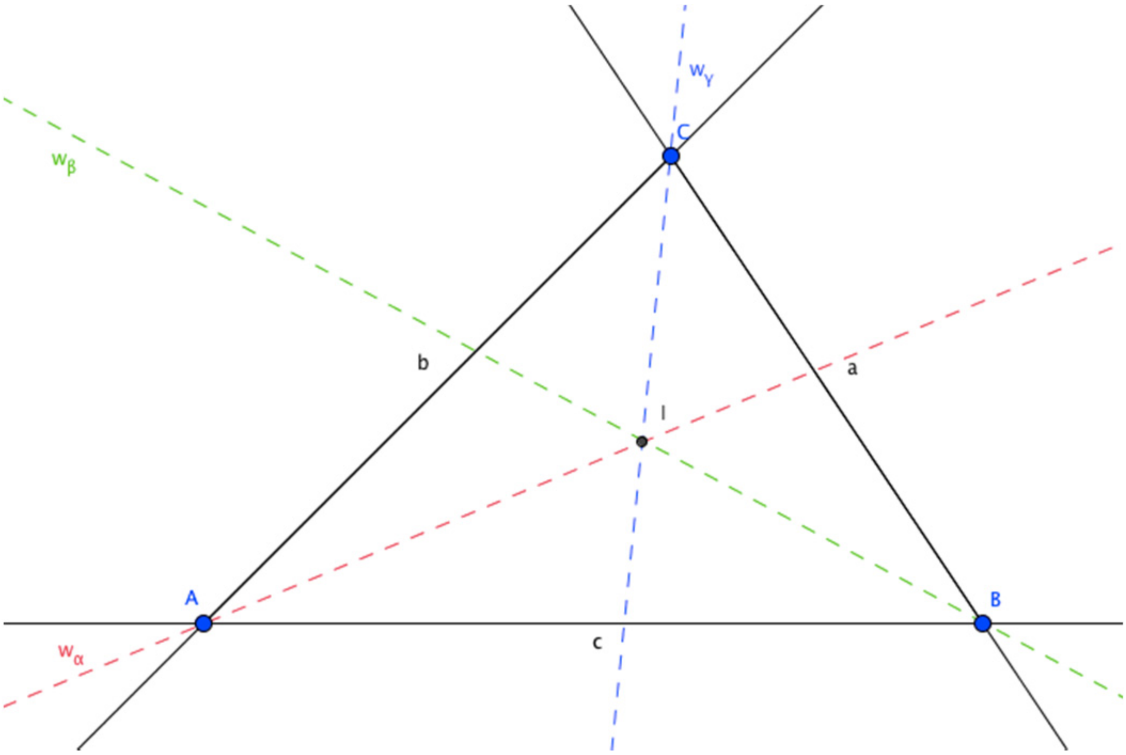


Abbildung 6.9: Inkreismittelpunkt Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Der Inkreismittelpunkt kann nicht außerhalb des Dreiecks liegen, da er sonst zu einer Seite einen geringeren Abstand hätte.
- Der Inkreismittelpunkt kann weder auf einer Dreiecksseite liegen noch mit einem Eckpunkt zusammenfallen, da sonst der Abstand zu dieser Seite gleich null wäre und ungleich dem Abstand der anderen Seiten.

6.2.4. Schwerpunkt

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Schwerpunkt als Schnittpunkt der Schwerlinien entdecken und seine Lage untersuchen.

Voraussetzungen: Schwerlinien

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Schwerlinien bereits eingezeichnet sind.

1. Betrachte die Schwerlinien des Dreiecks. Was kannst du feststellen? Prüfe deine Vermutung durch Variation des Dreiecks!
2. Kann das Dreieck so verändert werden, dass der Schwerpunkt außerhalb l

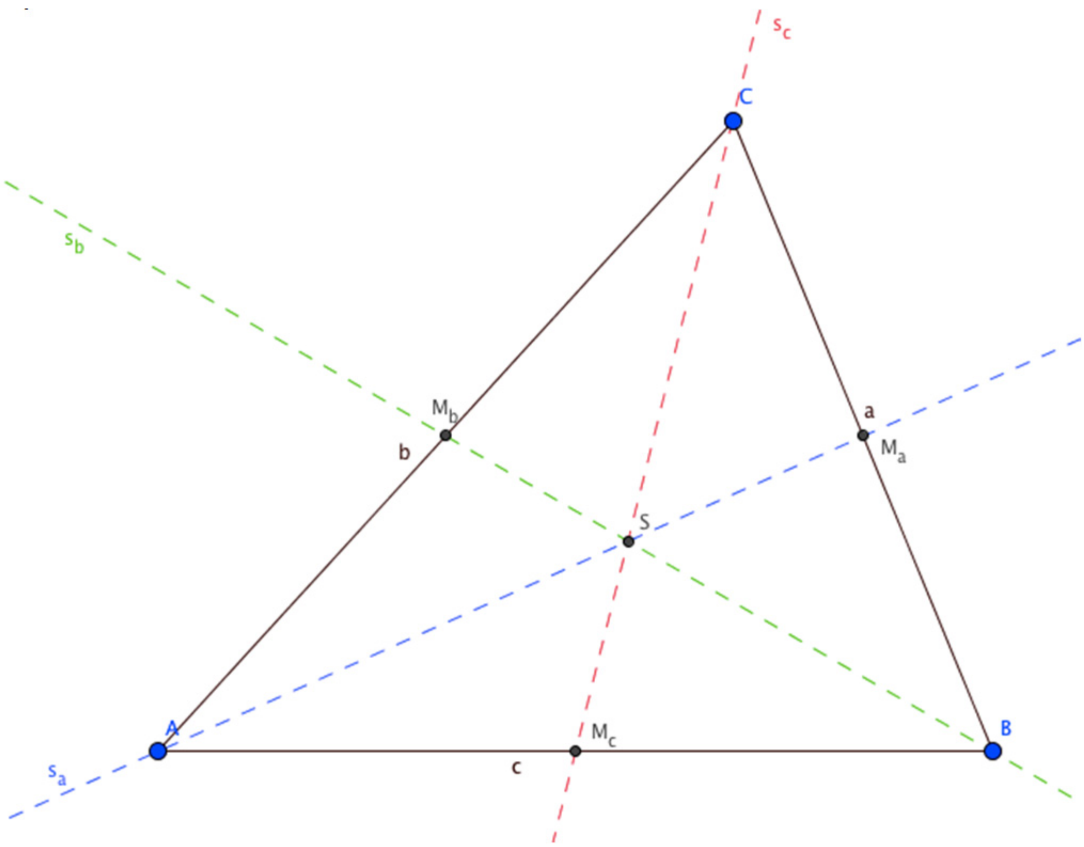


Abbildung 6.10: Schwerpunkt

Was dabei beobachtet werden kann:

- Die drei Schwerlinien schneiden einander in einem Punkt S, dem Schwerpunkt.
- Der Schwerpunkt kann nur innerhalb des Dreiecks liegen.

6.2.5. Euler'sche Gerade

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die euler'sche Gerade entdecken und die Verhältnisse der Teilstrecken SH und US erkennen.

Voraussetzungen: Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt bereits eingezeichnet sind.

1. Betrachte zunächst die Lage der Punkte U, H und S. Was kannst du feststellen? Zeichne deine Vermutung in die Skizze ein.
2. Miss die Abstände der Punkte U und H zu S. Kannst du einen Zusammenhang feststellen?
3. Kann das Dreieck so verändert werden, dass alle Punkte in einem Punkt zusammenfallen?
4. Unter welcher Bedingung liegt I auch auf der euler'schen Geraden?

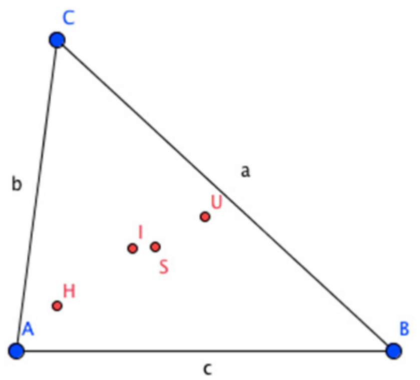


Abbildung 6.11: euler'sche Gerade Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Alle drei genannten Punkte liegen immer auf einer Geraden, der sogenannten euler'schen Geraden.
- Der Abstand SH ist doppelt so lang wie der Abstand US.
- Handelt es sich bei dem Dreieck um ein gleichseitiges, dann fallen alle Punkte in einem Punkt zusammen.
- In einem gleichschenkeligen Dreieck liegt auch I auf der euler'schen Geraden.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen selbst entdecken, welche Punkte auf der euler'schen Gerade liegen.

Voraussetzungen: Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt bereits eingezeichnet sind.

Zeichne durch zwei der Punkte eine Gerade. Was kannst du für die Lage des dritten Punktes feststellen? Prüfe deine Vermutung durch Variieren des Dreiecks!

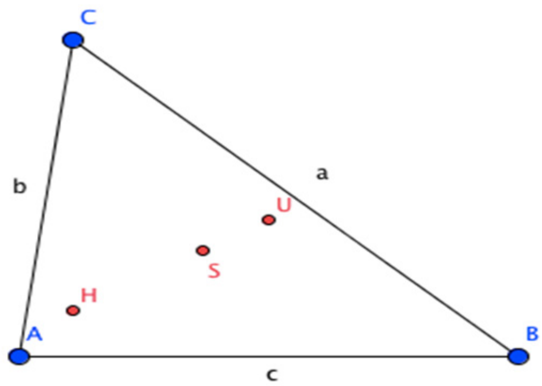


Abbildung 6.12: euler'sche Gerade Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Der dritte Punkt liegt ebenfalls auf dieser Geraden, auch wenn das Dreieck verändert wird.

6.3. Flächenberechnung

6.3.1. Parallelogramm

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächenformel für das Parallelogramm entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt Rechteck

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. Die Höhe h_a ist bereits eingezeichnet. Wie kann nun der Flächeninhalt berechnet werden? Um eine Formel zu finden dienen folgenden Anregungen:

1. Welche Figur entsteht durch das Einzeichnen der Höhe? Begründe!
2. Verschiebe die entstandene Figur entlang der verlängerten Seite a durch Ziehen an Punkt F. Welche Figur kannst du dadurch herstellen, dessen Flächeninhalt du bereits kennst?
3. Hat die verschobene Figur die gleiche Fläche, wie das ursprüngliche? Prüfe deine Vermutung! (Durch das Kontrollkästchen kannst du dir den Flächeninhalt anzeigen lassen)
4. Was bedeutet dies für den Flächeninhalt des Parallelogramms?

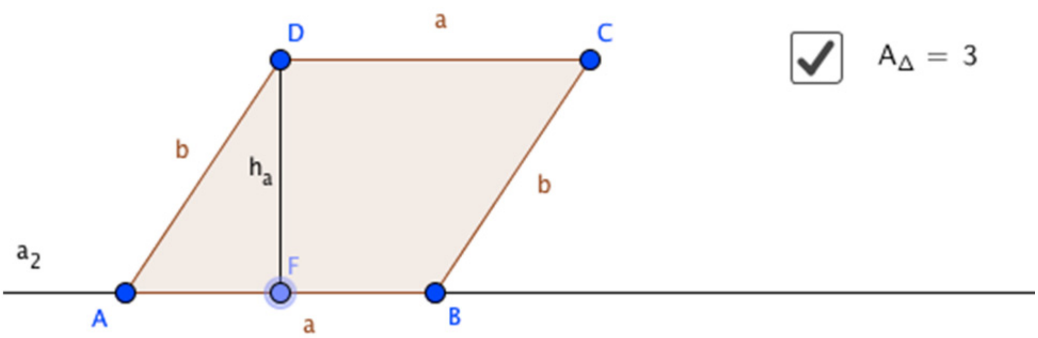


Abbildung 6.13: Parallelogramm

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch das Einzeichnen der Höhe entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck.
- Das Dreieck kann soweit verschoben werden, dass ein Rechteck entsteht.
- Durch die Verschiebung wird der Flächeninhalt des Dreiecks nicht verändert.

6.3.2. Dreieck

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächeninhaltsformel des allgemeinen Dreiecks entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks, Termumformungen und Herausheben (vgl. Elschenbroich, 1996)

Aufgabenstellung: (Elschenbroich, 1996)

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Höhe h_c bereits eingezeichnet ist.

1. In welche Art von Dreieck wird das Dreieck ABC durch die eingezeichnete Höhe zerlegt? Überprüfe deine Vermutung? Gilt dies für verschiedene Dreiecke?
2. Wie kannst du den Flächeninhalt der beiden Teildreiecke berechnen? Gib eine Formel an. Wie groß ist dann der Gesamtflächeninhalt des Dreiecks ABC?
3. Wie kann die obige Formel vereinfacht werden? Tipp: Drücke c durch die beiden Teilabschnitte aus.

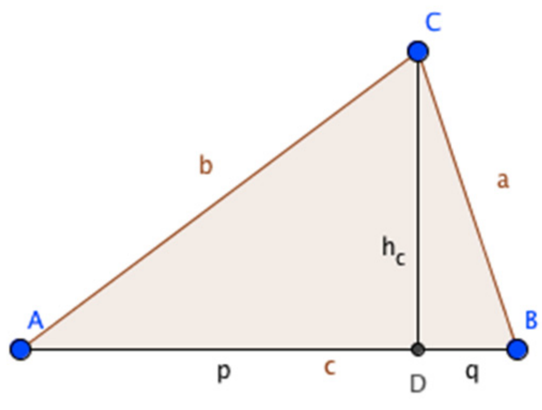


Abbildung 6.14: Dreieck Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann: (Elschenbroich, 1996)

- Durch die Höhe wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinkelige Teildreiecke unterteilt. Dies kann beispielsweise durch Messung der rechten Winkel überprüft werden. An dieser Eigenschaft ändert sich durch Variation des Dreiecks nichts.
- Der Flächeninhalt kann durch die Flächenformel für rechtwinkelige Dreiecke berechnet werden. $\frac{p \cdot h_c}{2} + \frac{q \cdot h_c}{2} = A$
- c = p + q. Daher gilt: $\frac{p \cdot h_c + q \cdot h_c}{2} = \frac{(p+q) \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = A$

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächeninhaltsformel des allgemeinen Dreiecks entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt eines Rechtecks

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Höhe h_c bereits eingezeichnet ist.

1. In welche Art von Dreieck wird das Dreieck ABC durch die eingezeichnete Höhe zerlegt? Überprüfe deine Vermutung? Gilt dies für verschiedene Dreiecke?
2. Die beiden Teildreiecke wurden verdoppelt. Drehe die verdoppelten Teildreiecke um die Punkte E und F durch Betätigen des Schiebereglers. Welche Figur, dessen Flächeninhalt du berechnen kannst, entsteht? Prüfe deine Vermutung!
3. Wird der Flächeninhalt durch die Drehung verändert? Prüfe deine Vermutung!
4. Was bedeutet dies für den Flächeninhalt des Dreiecks?

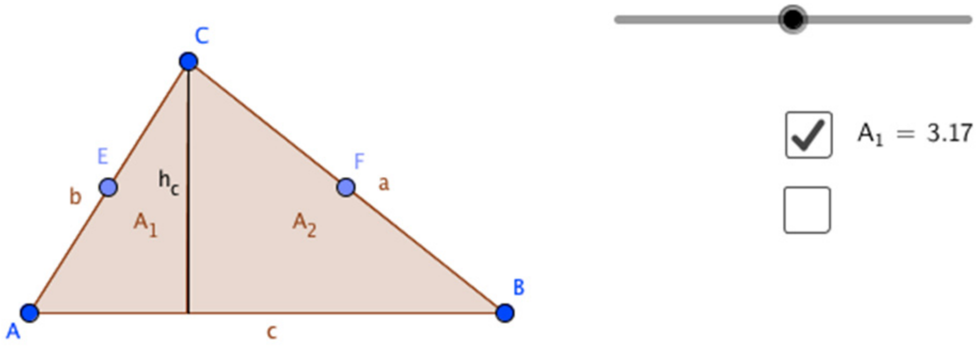


Abbildung 6.15: Dreieck Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch die Höhe wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinkelige Teildreiecke unterteilt. Dies kann beispielsweise durch Messung der rechten Winkel überprüft werden. An dieser Eigenschaft ändert sich durch Variation des Dreiecks nichts.
- Durch das Drehen der Teildreiecke entsteht ein Rechteck.
- Die Drehung ändert nichts am Flächeninhalt der Teildreiecke.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Flächeninhalt des erhaltenen Rechtecks. $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

Aufgabe 3

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächeninhaltsformel des allgemeinen Dreiecks entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt eines Parallelogramms

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC.

1. Das Dreieck wurde verdoppelt. Drehe das verdoppelte Dreieck durch Betätigen des Schiebereglers. Welche Figur entsteht?
2. Wird die Fläche des Dreiecks durch die Drehung beeinflusst?
3. Wie kann nun der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden?

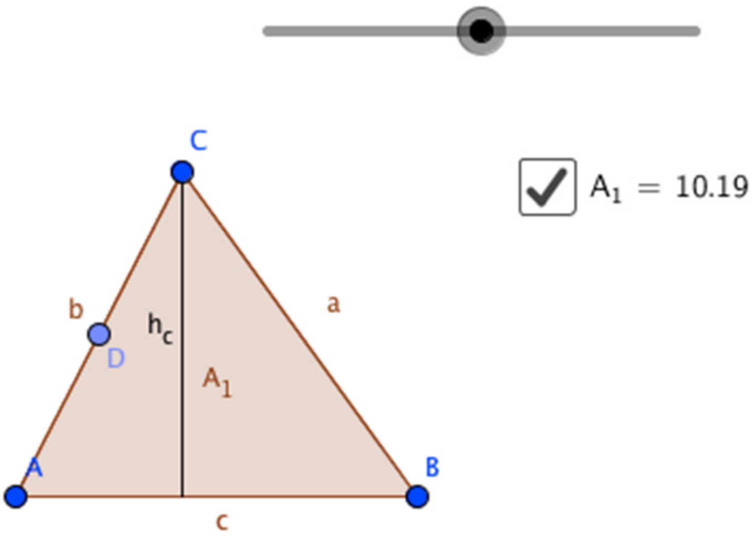


Abbildung 6.16: Dreieck Aufgabe 3

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch die Drehung des zweiten Dreiecks entsteht ein Parallelogramm.
- Die Drehung hat keinen Einfluss auf den Flächeninhalt des Dreiecks.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Flächeninhalt des erhaltenen Parallelogramms. $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

6.3.3. Deltoid

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächenformel für das Parallelogramm selbst entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt des allgemeinen Dreiecks, Winkelmessung, Einzeichnen und Messen von Strecken

Aufgabenstellung: (Elschenbroich, 1996)

Gegeben ist das Deltoid ABCD.

1. Was weißt du über die Eigenschaften der Diagonalen eines Deltoids? Überprüfe dein Wissen durch Messung des Winkels, den die Diagonalen einschließen, der Strecken BM und MD und durch Variation des Deltoids.

2. In welche Figuren wird das Deltoid durch die Diagonale e geteilt? Wie groß sind die Flächeninhalte dieser beiden Figuren? Wie groß ist daher der Flächeninhalt des Deltoids?

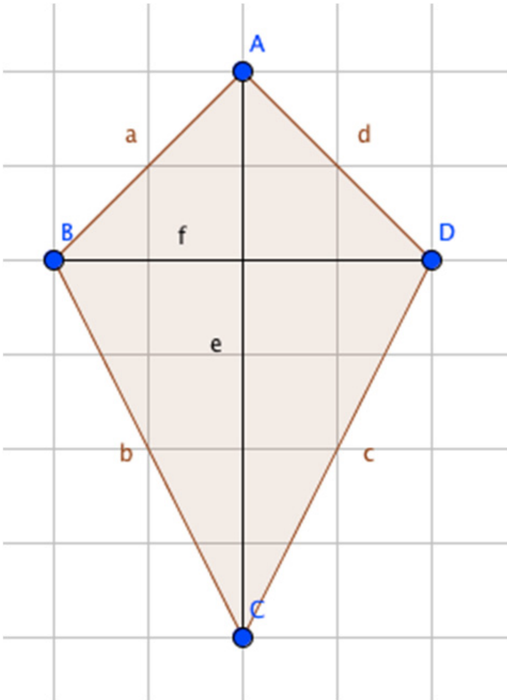


Abbildung 6.17: Deltoid Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann: (Elschenbroich, 1996)

- Die beiden Diagonalen stehen aufeinander normal und e teilt f in der Hälfte.
- Durch die Diagonale wird das Deltoid in zwei flächengleiche Dreiecke geteilt. Für deren Flächeninhalt gilt $\frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{f}{2} = A_1 = A_2$. Da es sich um zwei flächengleiche Dreiecke handelt kann dies einfach verdoppelt werden. Daher gilt für den Flächeninhalt des Deltoids $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{f}{2} + \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$. Das heißt der Flächeninhalt eines Deltoids ist gleich der Hälfte des Produkts der Diagonalen.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächenformel für das Parallelogramm selbst entdecken und begründen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt des Rechtecks

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Deltoid ABCD, dessen Diagonalen e und f bereits eingezeichnet sind.

1. In welche Art von Dreiecken wird das Dreieck ABC durch die eingezeichneten Diagonalen zerlegt? Überprüfe deine Vermutung? Gilt dies für verschiedene Deltoide?
2. Die vier Teildreiecke wurden verdoppelt. Drehe die verdoppelten Teildreiecke um die Punkte E, F, G und H durch Betätigen des Schiebereglers. Welche Figur, dessen Flächeninhalt du berechnen kannst, entsteht? Prüfe deine Vermutung!
3. Wird der Flächeninhalt durch die Drehung verändert? Prüfe deine Vermutung!
4. Was bedeutet dies für den Flächeninhalt des Deltoids?

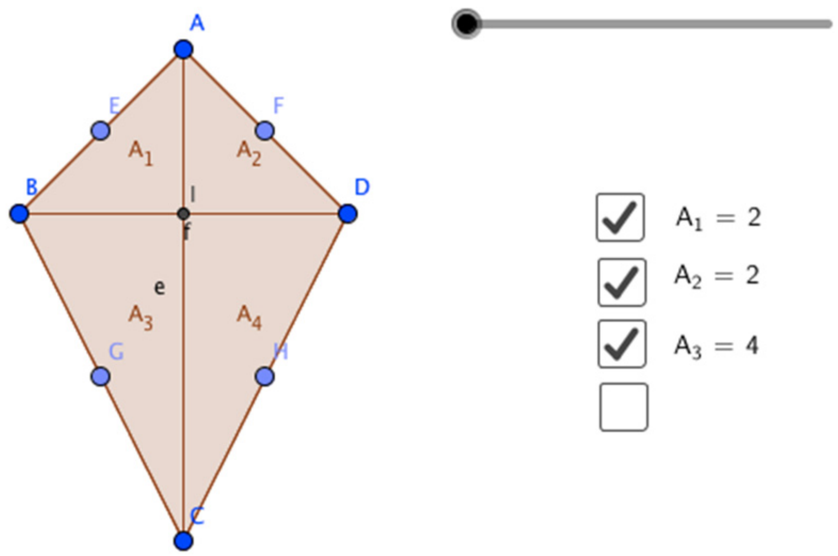


Abbildung 6.18: Deltoid Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch die Diagonalen wird das Deltoid ABCD in vier rechtwinkelige Teildreiecke unterteilt. Dies kann beispielsweise durch Messung der rechten Winkel überprüft werden. An dieser Eigenschaft ändert sich durch Variation des Deltoids nichts. Dies muss außerdem durch die Eigenschaft der Diagonalen erhalten bleiben. Diese stehen nämlich normal aufeinander.
- Durch das Drehen der Teildreiecke entsteht ein Rechteck.
- Die Drehung ändert nichts am Flächeninhalt der Teildreiecke.
- Der Flächeninhalt eines Deltoids ist gleich dem halben Flächeninhalt des erhaltenen Rechtecks. $A = \frac{e \cdot f}{2}$

6.3.4. Trapez

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächenformel des Trapezes selbst entdecken und beweisen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks, Termumformungen und Herausheben (vgl. Elschenbroich, 1996)

Aufgabenstellung: (Elschenbroich, 1996)

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Höhe h_c bereits eingezeichnet ist.

1. In welche Figuren wird das Trapez ABCD durch die eingezeichnete Höhen zerlegt? Überprüfe deine Vermutung? Gilt dies für verschiedene Dreiecke?
2. Wie kannst du den Flächeninhalt der drei Figuren berechnen? Gib eine Formel an. Wie groß ist dann der Gesamtflächeninhalt des Trapezes ABCD?
3. Wie kann die obige Formel vereinfacht werden? Tipp: Berücksichtige den Zusammenhang zwischen a, c, p und q.

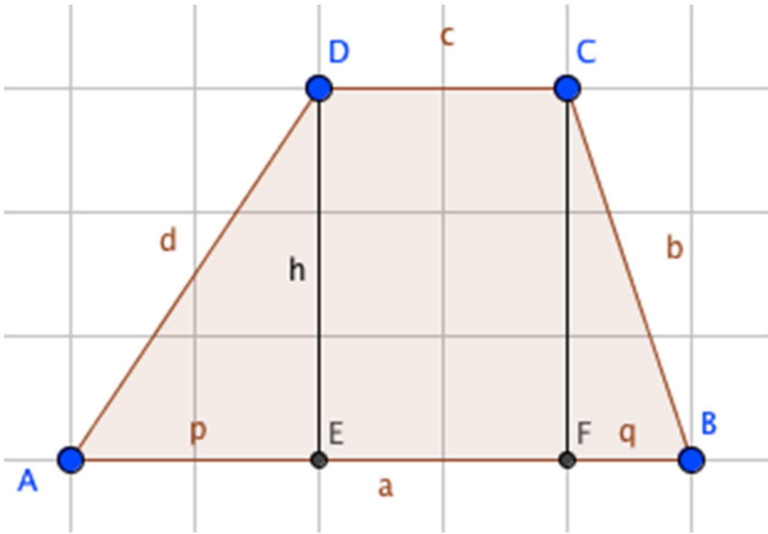


Abbildung 6.19: Trapez Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann: (Elschenbroich, 1996)

- Durch die Höhen wird das Trapez ABCD in zwei rechtwinkelige Teildreiecke und ein Rechteck unterteilt. Dies kann beispielsweise durch Messung der rechten Winkel überprüft werden. An dieser Eigenschaft ändert sich durch Variation des Trapezes nichts.
- Der Flächeninhalt des Dreiecks ADE ist $\frac{p \cdot h}{2}$, der des Dreiecks BCF ist $\frac{q \cdot h}{2}$ und der des Rechtecks CDEF ist $c \cdot h$. Der Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich durch Addition der Flächeninhalte der Teilfiguren und ist daher $\frac{p \cdot h}{2} + \frac{q \cdot h}{2} + c \cdot h = A$.
- Da a = c + p + q gilt, kann die oben gefundene Formel vereinfacht werden. Durch Umformung erhält man

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Flächenformel des Trapezes selbst entdecken und beweisen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt von Parallelogramm

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein Dreieck ABC.

1. Das Trapez wurde verdoppelt. Drehe das verdoppelte Trapez durch Betätigen des Schiebereglers. Welche Figur entsteht?
2. Wird die Fläche des Trapezes durch die Drehung beeinflusst?
3. Wie kann nun der Flächeninhalt des Trapezes berechnet werden?

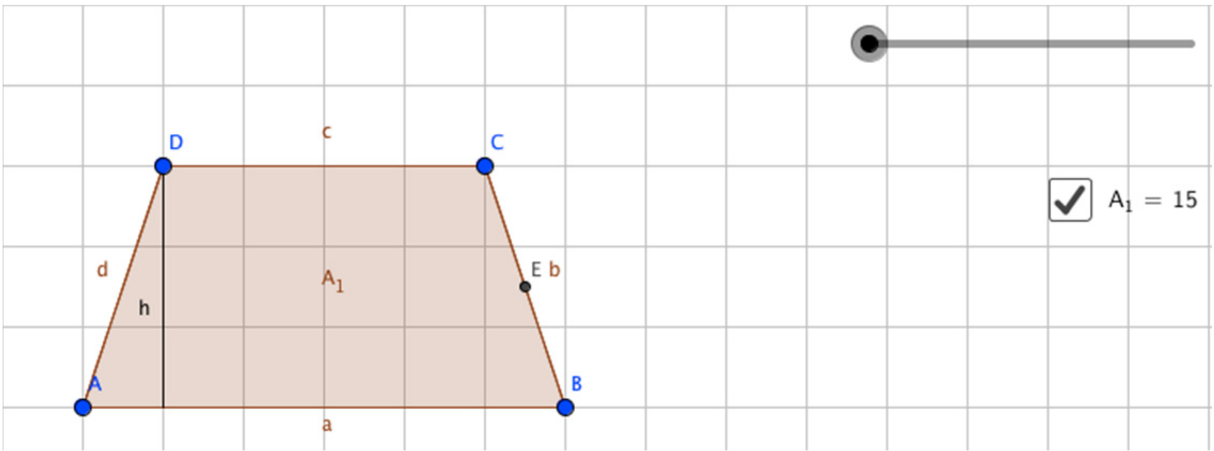


Abbildung 6.20: Trapez Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch die Drehung des zweiten Trapezes entsteht ein Parallelogramm.
- Die Drehung hat keinen Einfluss auf den Flächeninhalt des Trapezes.
- Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Flächeninhalt des erhaltenen Parallelogramms. $A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$

6.4. Winkel an Dreiecken

6.4.1. Innenwinkelsumme von Dreiecken

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Konstanz der Innenwinkelsumme entdecken.

Voraussetzungen: Konstruktion von Dreiecken, Winkelmessung

Aufgabenstellung: (Weigand & Weth, 2010)

Zeichne ein Dreieck mit möglichst großer und möglichst kleiner Innenwinkelsumme!

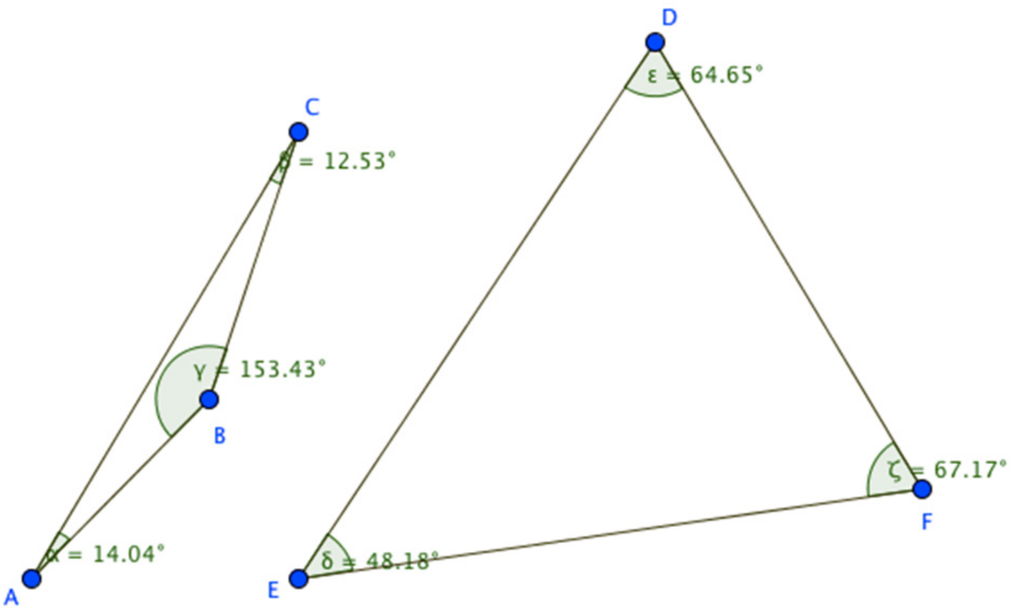


Abbildung 6.21: Innenwinkelsumme Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Egal wie schief oder groß das Dreieck gezeichnet wird, die gezeichneten Dreiecke haben immer die gleiche Innenwinkelsumme von 180°.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Konstanz der Innenwinkelsumme entdecken und beweisen.

Voraussetzungen: Winkelmessung, Parallelwinkel

Aufgabenstellung: (Elschenbroich, 2000)

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Dazu ist eine Parallele zu AC durch B eingezeichnet.

1. Verschiebe den Punkt C. Was kannst du für die Winkel feststellen? Warum muss das so sein?
2. Was heißt dies für die Summe der Innenwinkel des Dreiecks ABC?

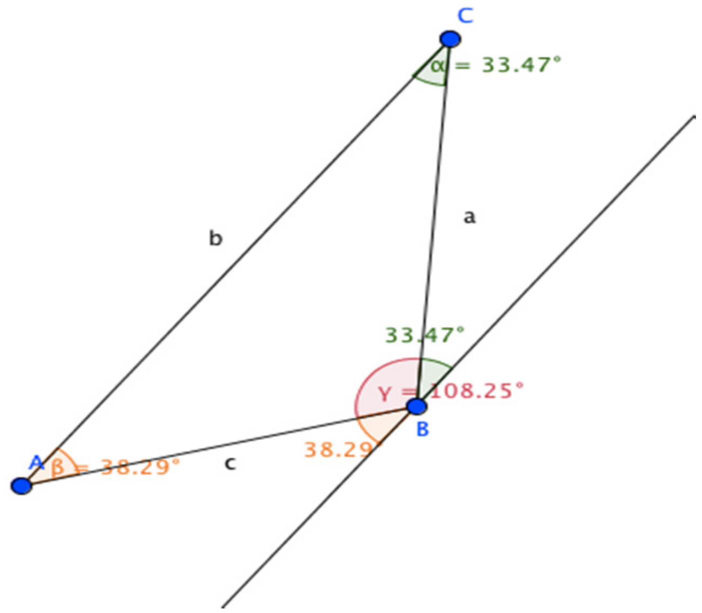


Abbildung 6.22: Innenwinkelsumme Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Wird der Punkt C verschoben, so verändern sich die eingezeichneten Winkel. Jedoch bleiben die jeweils gleichfarbigen Winkel weiterhin gleich groß. Grund dafür ist, dass sie jeweils Parallelwinkel sind.
- Die Winkel ergeben zusammen 180°. Da Parallelwinkel immer gleich groß sind und diese Eigenschaft durch das Ziehen erhalten bleibt, beträgt die Innenwinkelsumme immer 180°.

6.4.2. Außenwinkelsumme von Dreiecken

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Konstanz der Außenwinkelsumme entdecken.

Voraussetzungen: Konstruktion von Dreiecken mittels Geraden, Winkelmessung

Aufgabenstellung: (Weigand & Weth, 2010)

Zeichne ein Dreieck mit möglichst großer und möglichst kleiner Außenwinkelsumme!

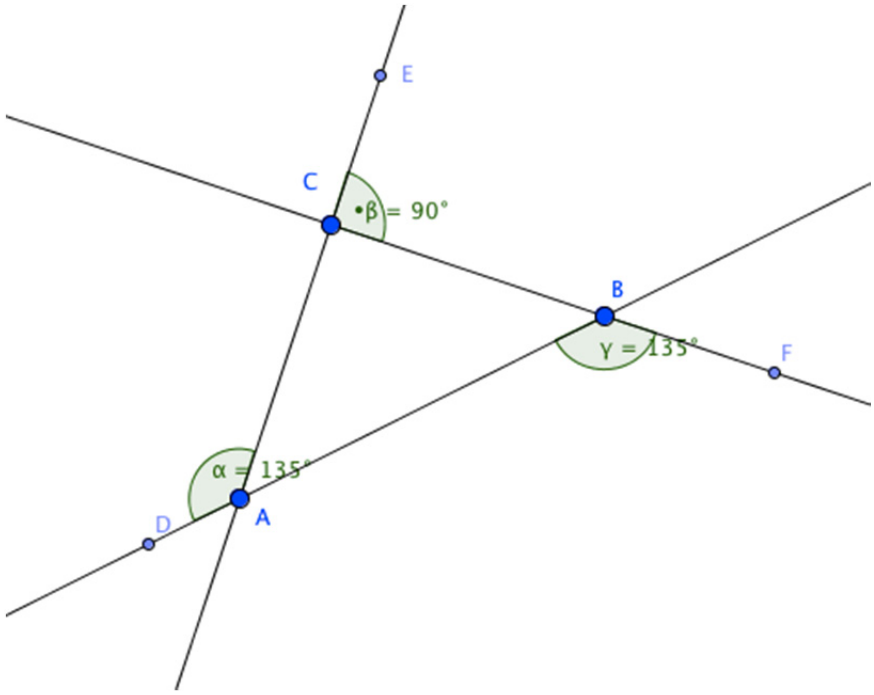


Abbildung 6.23: Außenwinkelsumme Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Egal wie schief oder groß das Dreieck gezeichnet wird, die gezeichneten Dreiecke haben immer die gleiche Außenwinkelsumme von 360°.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Satz über die Außenwinkelsumme eines Dreiecks begründen.

Voraussetzungen: eine Umdrehung = 360°

Aufgabenstellung:

Die Außenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt immer 360°.

Wie kann diese Behauptung begründet werden?

1. Betätige die beiden Schieberegler! Was kannst du dabei beobachten?
2. Prüfe deine Vermutung! Gilt dies auch für spezielle Dreiecke?

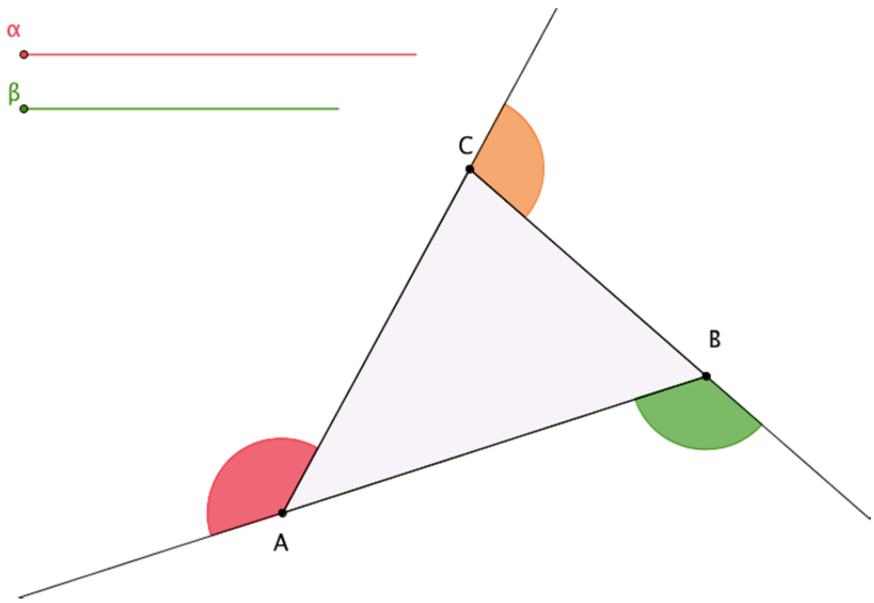


Abbildung 6.24: Außenwinkelsumme Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch das Betätigen der Schieberegler werden die Winkel entlang der Dreiecksseiten verschoben. Dadurch kann beobachtet werden, dass die drei Außenwinkel zusammen eine komplette Umdrehung ergeben. Daher beträgt die Summe 360°.
- Durch Verschieben der Eckpunkte kann beobachtet werden, dass dies für verschiedene Dreiecke, insbesondere auch für rechtwinkelige, gleichschenkelige und gleichseitige.

6.5. Lehrsatz des Pythagoras

6.5.1. Satz des Pythagoras

Aufgabe 1

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Satz des Pythagoras entdecken.

Voraussetzungen: Flächeninhalt Dreieck und Quadrat

Aufgabenstellung:

Gezeichnet ist ein rechtwinkeliges Dreieck. Über den Katheten wurden die Kathetenquadrate eingezeichnet und über der Hypotenuse das Hypotenusenquadrat.

Kannst du einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten dieser drei Quadrate feststellen? Prüfe deine Vermutung!

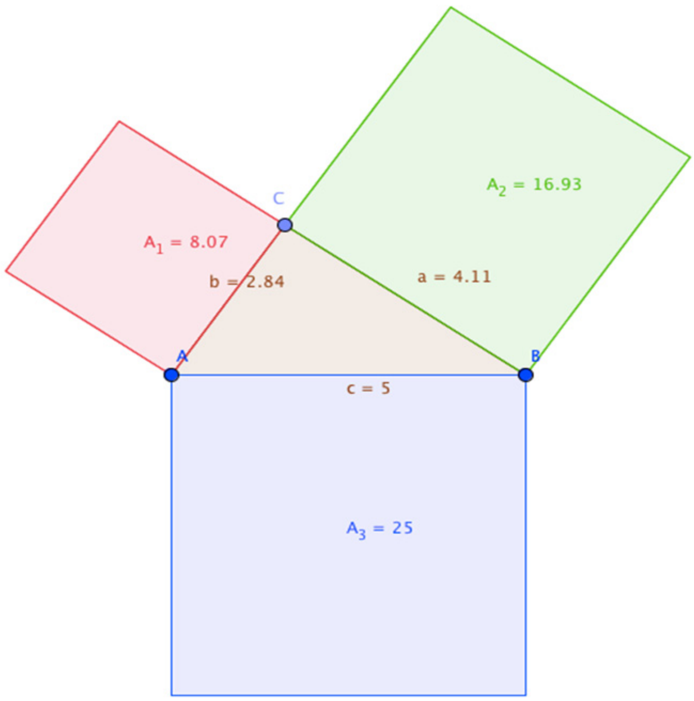


Abbildung 6.25: Pythagoras Aufgabe 1

Was dabei beobachtet werden kann:

- Zwischen den Flächeninhalten besteht ein Zusammenhang. Werden die beide Kathetenquadrate addiert, so erhält man das Hypotenusenquadrat.

Aufgabe 2

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Satz des Pythagoras beweisen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt Dreieck und Quadrat

Aufgabenstellung: (vgl. Elschenbroich, 2004)

Gegeben ist sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b. Die Strecke AB wird durch den Punkt H geteilt. Wird der Punkt H mit den Eckpunkten E und F verbunden, so entstehen zwei rechtwinkelige Dreiecke die mit dem Schieberegler gedreht werden können.

1. Ist es möglich den Punkt H so zu wählen, dass die gedrehten Teildreiecke mit dem Rest der beiden Quadrate ein großes neues Quadrat ergeben?
2. Was kannst du über die Flächeninhalte der Dreiecke und Quadrate a

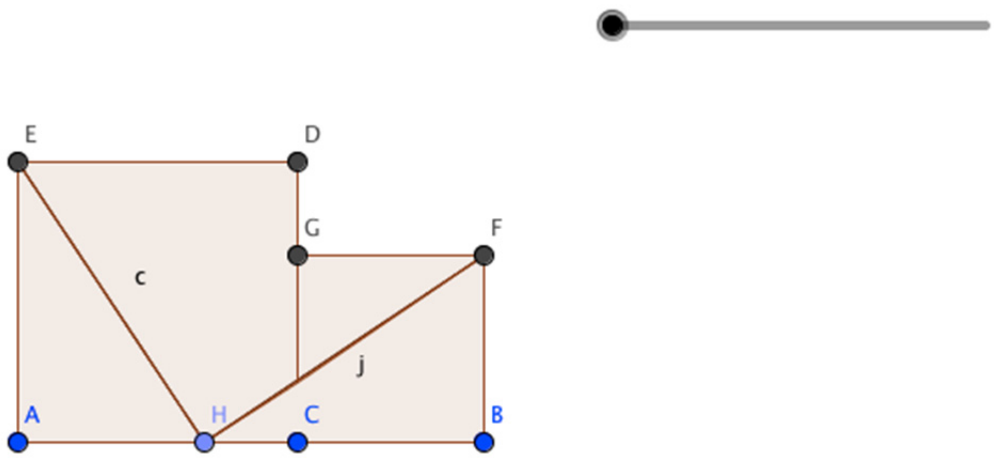


Abbildung 6.26: Pythagoras Aufgabe 2

Was dabei beobachtet werden kann:

- Dies ist möglich, wenn der Punkt H die Strecke AB so teilt, dass die Hypotenusen der entstandenen Dreiecke gleich lang sind.
- Durch die Drehung wird der Flächeninhalt der Dreiecke nicht geändert. Daher gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Aufgabe 3

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Satz des Pythagoras beweisen.

Voraussetzungen: Flächeninhalt Dreieck und Quadrat

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit Hypotenusenlänge c. Darunter wurde ein Quadrat mit der Seitenlänge c gezeichnet. In dieses wurde das gegebene rechtwinkelige Dreieck viermal eingezeichnet.

1. Gib eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes A_2.
2. Wie kann der Flächeninhalt A_1 berechnet werden?
3. Wie hängt dies mit dem Satz des Pythagoras zusammen? Tipp: Überlege wie der Flächeninhalt des großen Quadrates berechnet werden kann.
4. Prüfe deine Vermutung durch Variieren des Dreiecks.

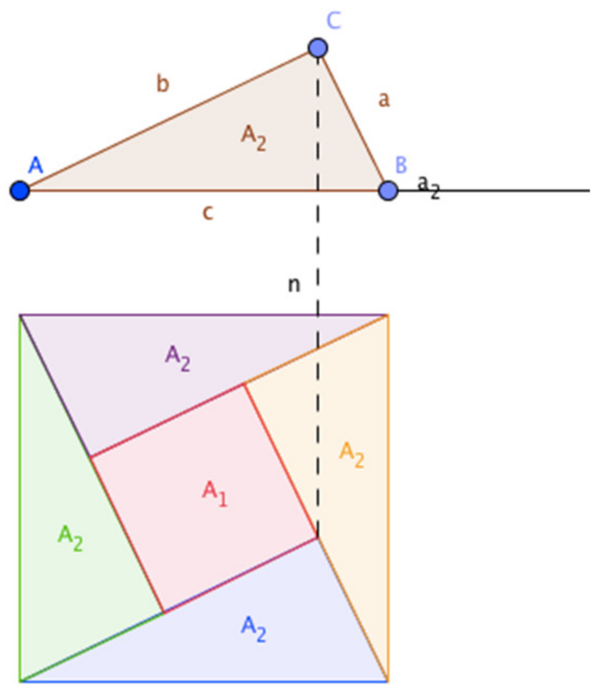


Abbildung 6.27: Pythagoras Aufgabe 3

Was dabei beobachtet werden kann:

- Es gilt die Formel $A_2 = \frac{a \cdot b}{2}$.
- Die Seitenlänge des kleinen Quadrates ist die Differenz der Seitenlängen a und b. Daher gilt für den Flächeninhalt $A_1 = (a - b)^2$.
- Der große Flächeninhalt setzt sich aus dem Flächeninhalt des kleinen Quadrates und viermal dem Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks zusammen, $A_3 = A_1 + 4 \cdot A_2$. Durch Einsetzen ergibt sich $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a - b)^2 = c^2$. Durch Umformen folgt der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$.

6.5.2. Kathetensatz

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Kathetensatz entdecken und beweisen.

Voraussetzungen: Dreieck, Parallelogramm, Rechteck

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck. Über einer Kathete wurde das Kathetenquadrat eingezeichnet und über der Hypotenuse das Hypotenusenquadrat.

1. Verschiebe nun den Punkt E. Welche Figur ist dadurch entstanden? Vergleiche ihren Flächeninhalt mit dem des ursprünglichen Kathetenquadrat.
2. Lässt sich der Punkt nicht mehr weiter in Richtung B verschieben, so erscheint ein neuer Punkt F auf einem Viertelkreis. Verschiebe diesen Punkt. Was geschieht dadurch? Wird der Flächeninhalt durch diesen Prozess beeinflusst?
3. Abschließend verschiebe den Punkt G nach unten. Welche Figur entsteht dadurch? Wie kann dessen Flächeninhalt berechnet werden? Vergleiche dessen Flächeninhalt mit dem des ursprünglichen Kathetenquadrat.

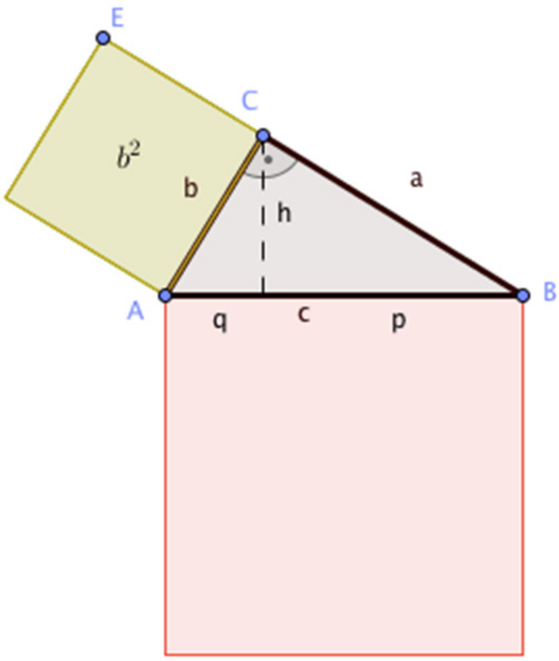


Abbildung 6.28: Kathetensatz

Was dabei beobachtet werden kann:

- Durch die Verschiebung des Punktes E entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt gleich dem des Kathetenquadrates ist, da die Höhe gleich der Kathete ist.
- Durch Verschieben des Punktes F wird das entstandene Parallelogramm gedreht. Bei diesem Vorgang ändert sich der Flächeninhalt nicht.
- Bei der Verschiebung des Punktes G entsteht ein Rechteck, dessen Flächeninhalt gleich $q \cdot c$ ist. Da dieser Flächeninhalt gleich dem des Kathetenquadrates sein muss gilt $b^2 = q \cdot c$.

6.5.3. Höhensatz

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen sollen den Höhensatz entdecken.

Voraussetzungen: Flächeninhalte Quadrat und Rechteck

Aufgabenstellung:

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck, bei dem das Quadrat über der Höhe eingezeichnet ist. Außerdem ist ein Rechteck mit den Seitenlängen p und q eingezeichnet.

1. Was kannst du über die Flächeninhalte des Quadrats und des Rechtecks aussagen? Prüfe deine Vermutung!
2. Finde eine Formel für deine Vermutung.

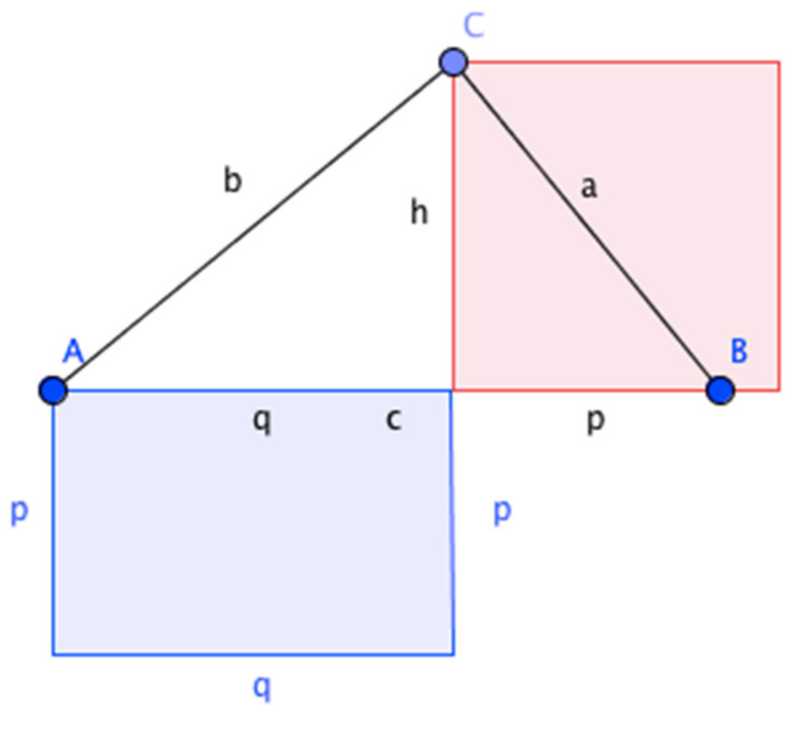


Abbildung 6.29: Höhensatz

Was dabei beobachtet werden kann:

- Der Flächeninhalt des Quadrats ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks. Dies ändert sich bei Variation des Dreiecks nicht.
- Der Flächeninhalt des Quadrats ist gleich h^2 und der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich $p \cdot q$. Da diese beiden Flächeninhalte anscheinend immer gleich groß gilt, können diese beiden Formeln gleichgesetzt werden und es gilt: $h^2 = p \cdot q$

7. Anhang

7.1. Literaturverzeichnis

Alibert, D., & Thomas, M. (2002). Research on mathematical proof. In *Advanced mathematical thinking* (S. 215–230). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Aner, B., Bendrien, M., Brode, R., & Kraft, E. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht - nur ein kognitives Problem? In *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik "von* (Bd. 2, S. 19–27).

Beutelspacher, A. (2009). *„ Das ist o. B. d. A. trivial!": Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 183–203.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, *7*(8).

Bruder, R. (2003). Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. *Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus "zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts ". Kiel: IPN*.

Bruder, R., & Müller, H. (1983). Zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Begründungs- und Beweisaufgaben. *Mathematik in der Schule*, *21*, 886–894.

Bruder, R., & Pinkernell, G. (2011). Die richtigen Argumente finden. *mathematik lehren*, *168*, 2–7.

Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I: mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Waxmann Verlag.

Brunner, E. (2014a). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Brunner, E. (2014b). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *35*(2), 229–249.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 561–570).

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *43*, 269–281.

Budke, A., Kuckuck, M., Meyer, M., Schäbitz, F., Schlüter, K., & Weiss, G. (2015). *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern*. Waxmann Verlag.

Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht–Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums zur Didaktik der Mathematik* (Bd. 2, S. 103–134).

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (S. 369–393). Routledge.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking Proof with Sketchpad*, 3–10.

Dreyfus, T. (2002). Was gilt im Mathematikunterricht als Beweis? In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt* (S. 15–22). Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Elschenbroich, H.-J. (1996). Geometrie beweglich mit EUKLID. *Arbeitsblätter für computerunterstützten Geometrieunterricht. Dümmler*.

Elschenbroich, H.-J. (1998). Anschaulich (er) Beweisen mit dem Computer–Neue Möglichkeiten für visuelle Beweise. In G. Kadunz & E. Schneider (Hrsg.), *Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik* (Bd. 8, S. 61–68).

Elschenbroich, H.-J. (2000). Computergestützter Geometrie-Unterricht mit elektronischen Arbeitsblättern. *Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Hildesheim: Franzbecker*.

Elschenbroich, H.-J. (2004). Dynamische Visualisierung durch neue Medien. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 7–14.

Elschenbroich, H.-J. (2009). Visuell-dynamische Puzzle-Beweise. *Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht*, 155.

Elschenbroich, H.-J., & Seebach, G. (2002). *Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter für Euklid DynaGeo. Klasse 7-10*. coTec Verlag.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik: eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln; aus einem Projekt des Interuniversitären Forschungsinstituts für Fernstudien österreichischer Universitäten*. BI-Wiss.-Verlag.

Franke, M. (2000). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag,.

Freudenthal, H. (1986). Was beweist die Zeichnung. *mathematik lehren*, *17*, 50–51.

Goldberg, E. (2002). Streitend das Begründen lernen. *mathematik lehren*, *110*, 9–11.

Götz, S., Reichel, H.-C., Hanisch, G., & Müller, R. (2004). *Mathematik Lehrbuch 5*. Wien: öbv hpt.

Götz, S., & SATTLBERGER, E. (2009). „Warum?“–Einsichten, Argumente und Begründungen im Standards-Modell. *Mathematik im Unterricht*, *3*, 96–121.

Grieser, D. (2012). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127–150.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*, 5–23.

Haug, R. (2011). *Problemlösen lernen mit digitalen Medien: Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Hayen. (1981). Zum Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. *MNU*, *34*(1), 11–15.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. *International Newsletter of Proof*, *4*, 6.

Hellmich, F., Hartmann, J., & Reiss, K. (2002). Bedingungen für das Argumentieren und Begründen im Geometrieunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Henn, H.-W. (2002). Strukturiertes Üben mit einem Computer Algebra System. *mathematik lehren*, *115*, 50–53.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. In *Educational Studies in mathematics*, 24, S. 389–399.

Heske, H. (2002). Methodische Überlegungen zum Umgang mit Beweisen. *mathematik lehren*, *110*, 52–55.

Hohenwarter, M., & Lindner, A. (2008). Beweisen und Visualisieren mit Vektoren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *50*, 28–33.

Holland, G., Knoche, N., & Scheid, H. (1988). *Geometrie in der Sekundarstufe*. BI Wissenschaftsverl.

Hölzl, R. (1999). Aspekte des heuristischen Einsatzes von dynamischer Geometriesoftware. *Mathematikunterricht*, *45*(1), 52–60.

Hölzl, R., & Sander, H.-J. (2002). Ein Problem des Blickwinkels. *mathematik lehren*, *115*, 54–56.

Jahnke, H. (2007). Proofs and hypotheses. *ZDM*, *39*(1-2), 79–86.

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Kempen, L. (2014). Sind das jetzt schon „richtige “Beweise? In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz*. Münster: WTM.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums zur Didaktik der Mathematik* (S. 261–274).

Kuntze, S. (2005). Wozu muss man denn das beweisen?": Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. *mathematica didactica*, *28*(2), 48–70.

Kuntze, S. (2009a). Beweisen-was ist das?: Gesprächs-„ Rahmen“ und Reflexionsanlässe schaffen. *mathematik lehren*, *155*, 12–17.

Kuntze, S. (2009b). Geometrische Beweiskompetenz fördern durch Reflexions-und Schreibanlässe zu beweisbezogenem Metawissen. *Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht*, 219.

Liebscher, M., Breyer, G., & Bildungsforschung, I. und E. des Ö. S. B. für. (2011). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe: auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung;[Information für Lehrer/innen der AHS]. 1*. Leykam.

Lorbeer, W., & Reiss, K. (2009). Probleme lösen und Begründungen finden: Wie viele Steine hat die 2009-te Pyramide? *mathematik lehren*, *55*, 22–26.

Malle, G. (2002). Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, *110*, 4–8.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2014). *Mathematik verstehen 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.

Meyer, M., & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *30*, 1–7.

Meyer, M., & Voigt, J. (2009). Beweisen durch Entdecken (5.-13. Klasse). *Praxis der Mathematik in der Schule*, *30*, 14–20.

Müller, H. (1995). Zur Komplexität von Beweisen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *16*(1-2), 47–77.

Perels, F., Schmitz, B., & Bruder, R. (2005). Lernstrategien zur Förderung von mathematischer Problemlösekompetenz. In *Lernstrategien und Metakognition. Implikationen für Forschung und Praxis* (S. 155–175).

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens* (Bd. 2). Francke Bern.

Pracht, E. (1978). Beweisverständnis und dessen Überprüfbarkeit. In *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums zur Didaktik der Mathematik* (Bd. 2, S. 349–356).

Reichel, H.-C., & Humenberger, H. (2012). *Das ist Mathematik 2*. Wien: öbv.

Reiss, K. (2002a). Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. *Projektserver SINUS. Bayreuth: Universität*.

Reiss, K. (2002b). Beweisen, Begründen und Argumentieren. Wege zu einem diskursiven Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen: einen„ Habit of Mind“ im Mathematikunterricht etablieren. *mathematik lehren*, *155*, 4–9.

Reiss, K., & Hammer, C. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht JB DMV*, *111*(4), 155–177.

Schichl, H., & Steinbauer, R. (2012). *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Thaller, B., & Frühmann, P.-M. (2014). Begründungsorientierter vs. faktenpräsentierender Unterrichtsstil-eine empirische Vergleichsstudie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz*. Münster: WTM.

Ufer, S., & Heinze, A. (2009). ... mehr als nur die Lösung formulieren: Phasen des geometrischen Beweisprozesses aufzeigen. *mathematik lehren*, *155*, 43–49.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30–54.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett.

Walsch, W. (1972). *Zum Beweisen im Mathematikunterricht* (1. Aufl.). Berlin: Volk und Wissen.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., … Wittmann, G. (2014). Beweisen und Argumentieren. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 35–54). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Weigand, H.-G., & Weth, T. (2010). *Computer im Mathematikunterricht: neue Wege zu alten Zielen* (Nachdr). Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *4*(1), 59–95.

7.2. Zusammenfassung

Im Mathematikstudium und in der Wissenschaft wird man ständig mit Beweisen konfrontiert. Im Gegensatz dazu steht der Mathematikunterricht, in dem das Thema „Beweisen“ fast totgeschwiegen wird. Die vorliegende Diplomarbeit hat daher das Beweisen, fokussiert auf den Geometrieunterricht, zum Thema.

Zunächst werden vor allem die theoretischen Aspekte dieser Thematik behandelt. Zu diesem Theorieteil gehört sowohl das erste Kapitel, welches sich mit dem Verständnis des Begriffs „Beweis“ auseinandersetzt, als auch das zweite Kapitel, welches die verschiedenen Funktionen des Beweisens thematisiert. Anschließend wird der Fokus mehr auf die Didaktik gelegt. Den Lesern und Leserinnen wird nicht nur eine Übersicht der unterschiedlichen Niveaustufenansätze und Merkmale der Einstufung präsentiert, sondern auch didaktische Aspekte nähergebracht, welche bei der Behandlung des Themas „Beweisen“ beachtet werden müssen. Den Abschluss bildet eine Sammlung an Beweisaufgaben, welche allesamt mit Geogebra erstellt wurden und die im vorhergehenden Kapitel thematisierten Aspekte berücksichtigen.

7.3. Abstract

The main aspect of studying mathematics is proving theorems and assumptions. However, in the mathematics lessons this subject is not treated. Therefore, the subject of the present work is the proof in geometry.

First of all the theoretical parts of this subject are discussed. This theoretical part includes the first chapter of the present work, which deals with the interpretation of the word „proof“. The second chapter, which disusses the different functions of proof, belongs to this part too. Subsequently, the focus lies on the didactics. In the following chapters the readers can find an overview of different learning models and characteristics for the classification of examples. Furthermore, didactical aspects of learning to proof are discussed. This work includes a collection of exercises. These were created with Geogebra and take the didactical methodes into account.