



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Beugung an dünnen Gittern“

verfasst von / submitted by

Georg Heuberger

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 Studienkennzahl lt. Studienblatt /
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramt UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Dr. Martin Fally

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Theorie	6
2.1	Die Gittergeometrie	8
2.2	Rigorous Coupled-Wave Analysis	11
2.3	Näherungsmethoden für die Rigorous Coupled-Wave Analysis	12
2.3.1	Two Wave First-Order Coupled-Wave Theory	13
2.3.2	Raman-Nath Theorie	15
2.4	Die Bragg-Bedingung	16
2.5	Die von-Laue Bedingung	17
2.6	Die Ewaldkugel	18
2.7	Schiefer Einfall	20
2.8	Dicke und dünne Gitter	22
3	Durchführung der Versuche	26
3.1	Einleitung	26
3.2	Bestimmung der Positionen der Beugungsmaxima	27
3.2.1	Aufbau	27
3.2.2	Messung	31
3.3	Messung der Beugungsintensitäten	32
4	Numerik	34
5	Ergebnisse	38
5.1	Positionen	38
5.1.1	S1a	43
5.1.2	S1b	47
5.1.3	Z1d	51
5.1.4	Z1e	55
5.2	Intensität	58

6	Fazit	62
7	Anhang	66
7.1	Programme	66
7.1.1	Programm zur Anpassung unseres Modells an die Ergebnisse der Messungen	66
7.1.2	Programm zur Auswertung der Positionen der Ordnungen auf den Fotos	75
7.1.3	Programm zur Anpassung der RCWA an die Beugungseffizienz	81
7.2	Zusammenfassung	91
7.3	Abstract	91

1 Einführung

Beugung beschreibt das Eintreten einer Welle, im speziellen von Licht, in den geometrischen Schatten eines Hindernisses. Nach dem Huygens-Fresnel'schen Prinzip kann jeder Punkt, welcher von einer Wellenfront getroffen wird, als Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle betrachtet werden [22]. Die einzelnen Elementarwellen interferieren hinter dem Hindernis konstruktiv oder destruktiv miteinander, wodurch Beugungsmaxima und Beugungsminima entstehen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Beugung an eindimensionalen Gittern. Darunter verstehen wir Objekte, die durch eine periodisch modulierte Permittivität ϵ charakterisiert sind. In unserem Fall wird ϵ angegeben durch [19]

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet ϵ_0 die mittlere relative Permittivität und ϵ_1 die Modulation des Gitters.

In der Abbildung 1.1 befinden sich im Bereich *I* der einfallende Strahl und die zurück gebeugten Ordnungen, während im Bereich *III* die transmittierten Beugungsordnungen zu sehen sind. [3]

Innerhalb des Gitters wird der Winkel φ des einfallenden Lichts nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz zu φ' .

Die Beugungswinkel sind von der Wellenlänge des Lichtes λ , der Orientierung des Oberflächenvektors des Gitters \hat{n} zum Wellenvektor \vec{k} des Lichtes und der Richtung sowie der Länge des Gittervektors \vec{K} abhängig.

Für die Länge des Gittervektors $|\vec{K}|$ im reziproken Raum und den Abstand der Gitterebenen Λ im direkten Raum gilt [19]:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|\vec{K}|} \quad (1.2)$$

Die Anzahl der auftretenden Beugungsordnungen j ist vom Gitterebenenabstand Λ und der Wellenlänge des Lichtes λ abhängig und wird durch die Gittergleichung angegeben

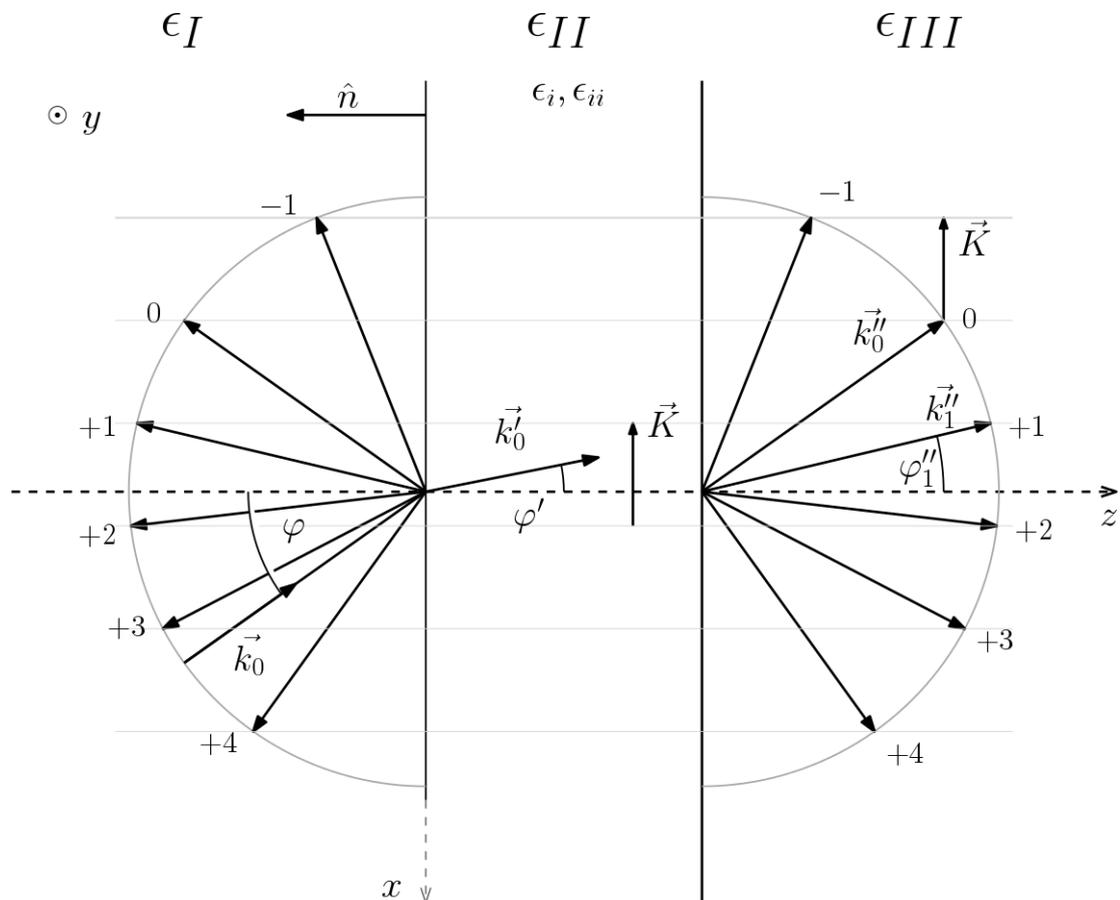


Abbildung 1.1: Beugung an einem Gitter:

Wir differenzieren zwischen drei räumlichen Bereichen, welche sich durch ihre Permittivität unterscheiden. Die Bereiche ϵ_I und ϵ_{III} haben die gleiche Permittivität $\epsilon_I = \epsilon_{III} = 1$. Der Bereich ϵ_1 stellt das eigentliche Gitter dar und die Permittivität wird durch die Gleichung 1.1 beschrieben. Der Vektor \vec{k}_0 ist der Wellenvektor des einfallenden Strahls, während \vec{k}_j , \vec{k}'_j und \vec{k}''_j die Wellenvektoren der einzelnen Beugungsordnungen in den jeweiligen Bereichen angeben. φ ist der Einfallswinkel in der x - z -Ebene und φ'_j und φ''_j sind die Winkel der Beugungsordnungen in den Ebenen II und III in der x - z -Ebene.

[9]:

$$\cos \theta (\sin \varphi + \sin \varphi'') = j \frac{\lambda}{\Lambda} \quad (1.3)$$

Durch die Variation des Einfallswinkels ändert sich allerdings die effektive Dicke des Gitters und die Bedingungen für konstruktive Interferenz werden schärfer.

Dabei werden grundsätzlich zwei Regime unterschieden. Treten nur zwei Beugungsordnungen, $j \in \{0; 1\}$, auf, handelt es sich um das Bragg-Regime. Dies ist der Fall, wenn ein dickes Gitter (siehe Kapitel 2.8), verwendet wird. Für diese Situation wurde das Verhalten der Beugungsordnungen bei Rotation des Gitters bereits untersucht.[2][18][17] Im Vergleich dazu entspricht das Beugungsbild bei dünnen Gittern dem Raman-Nath-Regime. Für diesen Fall können mehrere Beugungsordnungen gleichzeitig auftreten, $j \in \mathbb{Z}$. Die Bezeichnung dieser beiden Regime stammt von der jeweiligen Theorie, mit der die Intensitätsverteilung beschrieben werden kann.

In dieser Arbeit wird das Beugungsverhalten von Licht hinter einem dünnen Gitter untersucht. Dafür werden die Positionen der Beugungsordnungen für verschiedene Stellungen des Gitters analysiert. Die betrachteten Proben wurden zunächst um die x -Achse im Kippwinkel θ gedreht und anschließend um die y -Achse um den Winkel φ rotiert (siehe Kapitel 2.1). Wir betrachten also in erster Linie den Fall $j \in \mathbb{Z}$. Das Ziel dieser Arbeit ist, eine Vorhersage für die Position der Beugungsordnungen auf einem Schirm in Abhängigkeit von θ und φ (siehe Kapitel 2.1) zu finden.

2 Theorie

Wir betrachten Licht als elektromagnetische Welle und beschränken uns auf die Betrachtung ebener Wellen. Dabei handelt es sich um Wellen deren Flächen konstanter Phase Ebenen sind, die stets normal auf deren Ausbreitungsrichtung, gegeben durch den Wellenvektor \vec{k} , stehen [22].

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \hat{k} \quad |\hat{k}| = 1 \quad (2.1)$$

Es ist ausreichend harmonische ebene Wellen zu diskutieren, da sich die Ergebnisse, aufgrund des linearen Superpositionsprinzips, auf beliebige Wellen erweitern lassen. Mathematisch wird eine ebene Welle mit Hilfe einer komplexen Exponentialfunktion dargestellt:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.2)$$

Dabei ist i die imaginäre Zahl, \vec{k} der Wellenvektor, \vec{r} der Ortsvektor und ω die Kreisfrequenz der Welle. $|\vec{E}_0|$ ist die Amplitude des elektrischen Feldes.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen kann durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben werden [19]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.8)$$

Wobei \vec{J} die elektrische Stromdichte und ρ die Dichte der freien Ladungen darstellen. \vec{D} ist die dielektrische Verschiebung und \vec{H} die magnetische Feldstärke.

Die Gleichungen 2.7 und 2.8 werden als Materialgleichungen bezeichnet und beschreiben die Wirkung von \vec{E} und \vec{H} innerhalb eines Materials.

μ_0 und ϵ_0 sind die magnetische und die elektrische Feldkonstanten, während μ_r und ϵ_r materialabhängige Konstanten darstellen. Diese werden in weiterer Folge zusammengefasst zu:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.9)$$

und

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2.10)$$

Da wir uns auf die Betrachtung verlustfreier Materialien, also Isolatoren, beschränken, gilt:

$$\rho = 0 \quad (2.11)$$

$$\vec{J} = \vec{0} \quad (2.12)$$

Dadurch vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

Aus den Maxwell-Gleichungen kann die Wellengleichung hergeleitet werden. Die Wellengleichung ist ein Differentialgleichungssystem in \vec{E} innerhalb des betrachteten Materials. [4][19]

Zunächst wird auf Gleichung 2.14 der Rotationsoperator angewandt, und anschließend Gleichung 2.8 eingesetzt.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (2.17)$$

Da wir uns nur für Materialien interessieren, in denen sich die Permeabilität räumlich

2 Theorie

und zeitlich nicht ändert, können wir μ als konstant annehmen und herausheben.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

Hier können wir den Satz von Schwarz anwenden und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (2.19)$$

Für $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ kann nun Gleichung 2.13 eingesetzt werden:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Für \vec{D} wird die Gleichung 2.7 eingesetzt. Da sich in unseren Materialien ϵ nicht mit der Zeit ändert, kann es ebenfalls heraus gehoben werden.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Das elektrische Feld \vec{E} haben wir als zeitlich harmonische Funktion angenommen und erhalten damit [19]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} \quad (2.22)$$

2.1 Die Gittergeometrie

Die Geometrie der Beugung am planaren Gitter lässt sich an Hand der nachfolgenden Abbildung erkennen. Wir betrachten nur die Situation, dass sich das Gitter in einem Vakuum (oder Luft) befindet, also $\epsilon_I = \epsilon_{III} \approx 1$. Das Gitter selbst wird durch die beiden Werte ϵ_0 und ϵ_1 beschrieben. Dabei beschreibt ϵ_0 die mittlere relative Permittivität und ϵ_1 die Modulation des Gitters. Die relative Permittivität des Gitters wird beschrieben durch: [3]

$$\epsilon_1 = \epsilon(x, z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \quad (2.23)$$

Wir betrachten das einfallende Licht als harmonische ebene Welle, die sich in der x - z -Ebene ausbreitet.

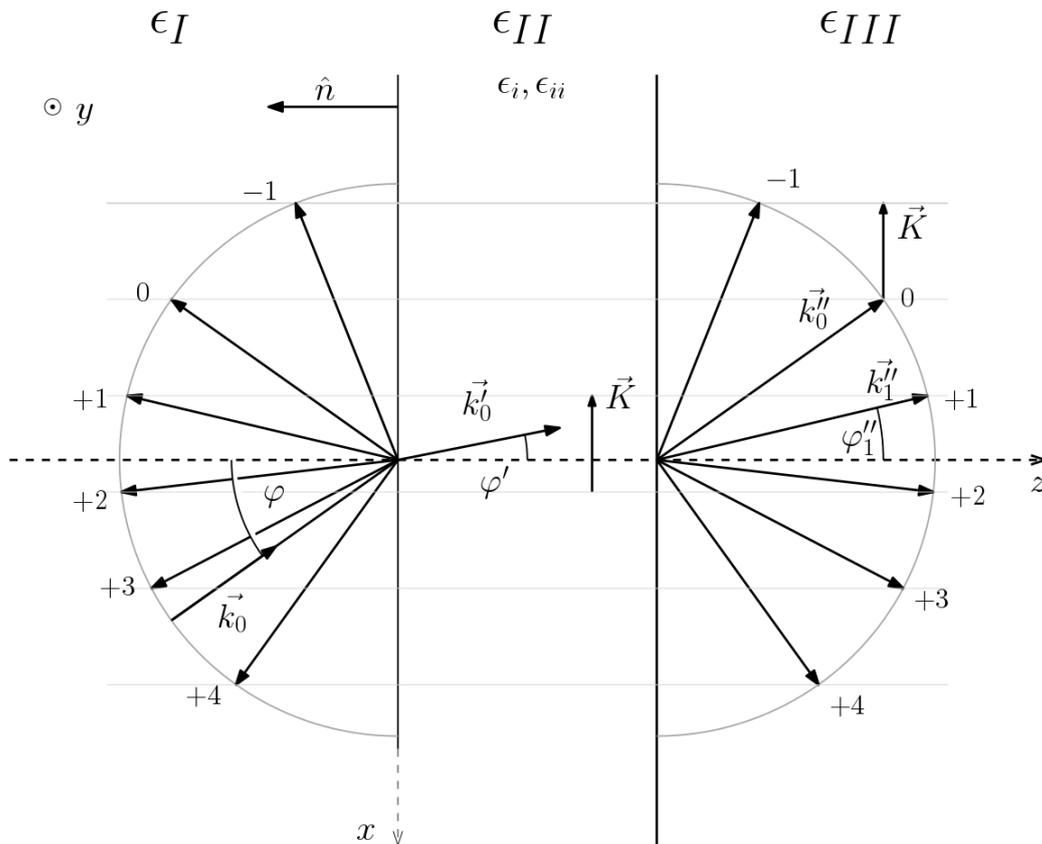


Abbildung 2.1: Beugung an einem Gitter. Im von der Lichtquelle abgewandten Bereich sind die transmittierten Beugungsmaxima und im der Lichtquelle zugewandten Bereich die zurück gebeugten Strahlen zu sehen. Die Ausbreitungsrichtung der gebeugten Strahlen wird von λ , \vec{K} und φ bestimmt.

\vec{K} ist der reziproke Gittervektor und steht normal auf die Gitterebenen.

$$\vec{K} = \frac{2\pi}{\Lambda} \cdot \hat{K} = G \cdot \hat{K} \quad |\hat{K}| = 1 \quad (2.24)$$

Die Konstante G ist die Raumfrequenz. Der Winkel φ' ergibt sich aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz [22]:

$$k \sin \varphi = k' \sin \varphi' \quad (2.25)$$

Wobei k' der Betrag des Wellenvektors im inneren des Gitters ist. Uns interessiert nur die Situation in der \hat{n} und \vec{K} aufeinander normal stehen. Da der Gittervektor \vec{K} in den

2 Theorie

von uns betrachteten Fällen nur eine Komponente in x -Richtung besitzt erhalten wir:

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right) \quad (2.26)$$

Für die Beschreibung der Rotation werden die beiden Winkel φ und θ verwendet. Die Versuche wurden mit einer Probenhalterung durchgeführt, welche auf einem Drehtisch montiert wurde. Der Drehtisch ermöglicht die Kippung des Gitters um die x -Achse im Winkel θ . Mit Hilfe des Drehtisches kann die Probe anschließend um die y -Achse im Winkel φ rotiert werden (siehe Abb. 2.3)



Abbildung 2.2: Die Probenhalterung wurde auf dem Rotationstisch befestigt. Die Probe wurde am inneren Ring befestigt, mit welchem der Winkel θ eingestellt wurde. Mit Hilfe des Rotationstisches wurde der Winkel φ eingestellt.

Die Winkel des Lichtes im Inneren des Gitters bezeichnen wir in Folge mit φ'_j und θ'_j . Die Beugungswinkel im Bereich III werden als φ''_j und θ''_j bezeichnet, wobei j wieder die Ordnung der Beugungsmaxima angibt.

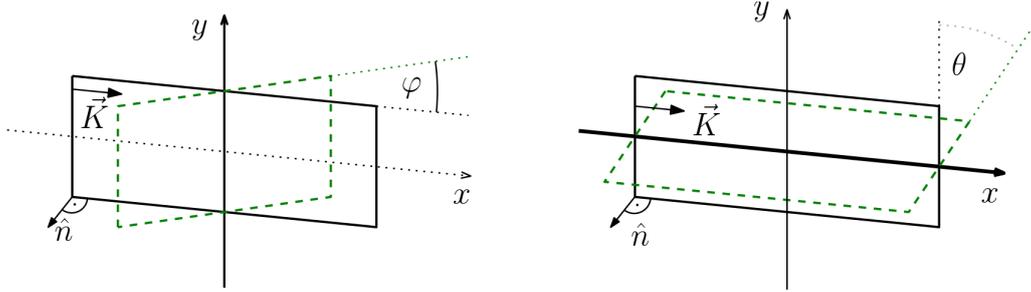


Abbildung 2.3: Die zwei Rotationsachsen des Gitters.

O.B.d.A. wurden die Ausgangspositionen so gewählt, dass \hat{n} parallel zur z -Achse liegt.

2.2 Rigorous Coupled-Wave Analysis

Eine exakte Methode um das Beugungsverhalten an einem Gitter vorherzusagen liefert die Rigorous Coupled-Wave Analysis von Moharam und Gaylord [14]. Bei dieser Methode werden Lösungen der Wellengleichung für die drei Bereiche I, II und III gesucht. Zusätzlich müssen die Randbedingungen an den Grenzflächen angepasst werden.[3]

In der Coupled-Wave Theorie wird angenommen, dass das elektrische Feld innerhalb des Gitters in seine Raum-Harmonischen zerlegt werden kann. Diese können als gebeugte Wellen gesehen werden, welche untereinander Energie austauschen.[3]

Die erlaubten Ausbreitungsrichtungen innerhalb einer periodischen Struktur werden durch die Floquet-Bedingung eingeschränkt. Demnach ergeben sich die erlaubten Wellenvektoren \vec{k}'_j aus der Summe des einfallenden Wellenvektors innerhalb des Gitters \vec{k}'_0 und dem ganzzahligen Vielfachen von \vec{K} [3]

$$\vec{k}'_j = \vec{k}'_0 + j\vec{K} \quad (2.27)$$

Diese Bedingung liefert uns die Grundlage für die Bestimmung der erlaubten Wellenvektoren.

Für die Bereiche I und III sind die Lösungen der Wellengleichung ebene Wellen. Für die Beugung am Gitter betrachten wir σ -polarisiertes Licht, das heißt, dass das E-Feld nur eine Komponente in die y -Richtung besitzt. Das gesamte elektrische Feld

innerhalb des Gitters wird daher beschrieben durch [3]:

$$E_y(x, z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j(z) \exp(-i\vec{k}'_j \cdot \vec{r}) \quad (2.28)$$

Dabei ist j der Index der Raum-Harmonischen und $S_j(z)$ sind deren Amplituden. \vec{k}'_j bezeichnet den Wellenvektor der j -ten Raumharmonischen innerhalb des Gitters. Einsetzen von Gleichung 2.28 in die Wellengleichung 2.22 liefert ein System aus unendlich vielen gekoppelten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Amplituden $S_j(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \frac{d^2 S_j(z)}{dz^2} - i \frac{2(\epsilon_0)^{1/2} \cos \varphi'}{\pi \lambda} \frac{dS_j(z)}{dz} \\ + \frac{2j(m-j)}{\Lambda^2} S_j(z) + \frac{\epsilon_1}{\lambda^2} [S_{j+1}(z) + S_{j-1}(z)] = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Variable m wird in der RCWA definiert als:

$$m = \frac{2\Lambda(\epsilon_0)^{1/2}}{\lambda} \cos(\varphi') \quad (2.30)$$

In dieser Gleichung findet sich die Bragg-Bedingung wieder (siehe Kapitel 2.4):

$$m \frac{\lambda}{(\epsilon_0)^{1/2}} = 2\Lambda \sin \varphi' \quad (2.31)$$

Für den Fall, dass $m \in \mathbb{Z}$ gilt, erfüllt die m -te Beugungsordnung die Bragg Bedingung. Die RCWA basiert allerdings nicht auf der Bragg Bedingung und gilt auch für beliebige Winkel.

2.3 Näherungsmethoden für die Rigorous Coupled-Wave Analysis

Vor der Etablierung der RCWA gab es bereits mehrere Theorien zur Beschreibung der Beugung von Licht, die jeweils aber nur bestimmte Fälle abdeckten.[3]

Aufgrund der Komplexität der RCWA werden diese Theorien allerdings noch als Näherungsverfahren verwendet. Dabei werden in den unterschiedlichen Verfahren verschiedene Aspekte vernachlässigt.

In Abbildung 2.4 werden die Zusammenhänge einiger dieser Verfahren aufgezeigt.

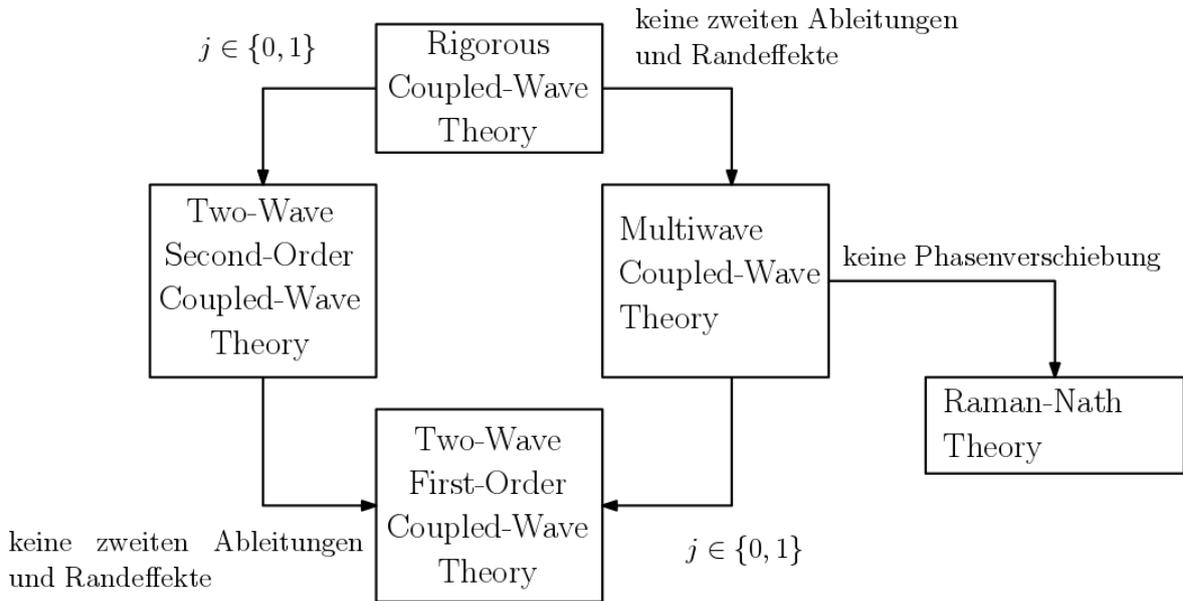


Abbildung 2.4: Der Zusammenhang der unterschiedlichen Beugungstheorien für ebene Gitter in Bezug auf grundlegende Näherungen [3]

2.3.1 Two Wave First-Order Coupled-Wave Theory

In der Two Wave First-Order Coupled-Wave Theory wird monochromatisches Licht betrachtet, welches im Bragg-Winkel, oder seiner Nähe, auf das Gitter auftrifft. Dabei wird angenommen, dass nur zwei relevante Wellen im Gitter vorhanden sind: die einfallende Referenzwelle und das austretende Signal. Nur diese beiden Wellen entsprechen der Bragg-Bedingung zumindest ungefähr, während sämtliche anderen Ordnungen die Bragg-Bedingung stark verletzen und deshalb ignoriert werden. [8]

Außerdem wird ebenfalls angenommen, dass der Energieaustausch zwischen der Referenz- und der Signalwelle sehr langsam oder gar nicht stattfindet. Daher können die zweiten Ableitungen der Feldamplitude beider Wellen vernachlässigt werden. [8]

Diese Theorie wird dabei oft auch als die Kogelnik-Theorie, nach Herwig Kogelnik, bezeichnet, da er als erstes die Two Wave First-Order Coupled-Wave Theory auf die Holografie angewendet hat. [3]

$$\cos \varphi' \frac{dS_0(z)}{dz} + i \frac{\pi \epsilon_1}{2(\epsilon_0)^{1/2} \lambda} S_1(z) = 0 \quad (2.32)$$

2 Theorie

$$\cos \varphi' \frac{dS_1(z)}{dz} + i \frac{\pi \lambda (m-1)}{\Lambda^2 (\epsilon_0)^{1/2}} S_1(z) + i \frac{\pi \epsilon_1}{2 (\epsilon_0)^{1/2} \lambda} S_0(z) = 0 \quad (2.33)$$

für $m=1$ ergeben sich die Lösungen für die Amplituden S_0 und S_1 des transmittierten und des abgebeugten Strahls [3][13]:

$$S_0(z) = \cos \gamma z \quad (2.34)$$

$$S_1(z) = -i \sin \gamma z \quad (2.35)$$

γ gibt den Modulationsparameter des Gitters an:

$$\gamma = \frac{\pi \epsilon_1 d}{2 (\epsilon_0)^{1/2} \lambda \cos \varphi'} \quad (2.36)$$

Dabei ist d die Dicke des Gitters. Eine andere Interpretation der Two Wave First-Order Coupled-Wave Theory stellt die Beta-Value Methode dar. Dabei wird angenommen, dass das betrachtete Gitter nur eine Periodizität entlang der x -Achse besitzt. Für diesen Fall wird nur die x -Komponente der Floquet-Bedingung benötigt. [3]

$$\vec{k}'_j \cdot \hat{x} = (\vec{k}'_0 + j\vec{K}) \cdot \hat{x} \quad (2.37)$$

Die Gleichung 2.37 gibt die x -Koordinate des Vektors \vec{k}'_j an. Da die Energie des einfallenden Strahls erhalten sein muss, wird die z -Komponente um ein entsprechendes Vielfaches von \hat{n} erweitert (siehe Abb. 2.5). Es gilt also:

$$|\vec{k}'_j + j\vec{K} + \Delta k \hat{n}| = |\vec{k}'_0| \quad (2.38)$$

Damit wird in der BVM der Vektor \vec{k}'_j bestimmt durch [2]:

$$\vec{k}'_j = \vec{k}'_0 + j\vec{K} + \Delta k \hat{n} \quad (2.39)$$

Für den Fall, dass ein auf ein Gitter einfallender Strahl die Bragg-Bedingung erfüllt, kommen beide Theorien zum selben Ergebnis, da $\Delta k = 0$ ist.

In der Praxis zeigt sich aber, dass der gebeugte Strahl nicht sofort verschwindet, wenn der Einfallswinkel um einen Betrag $\Delta \varphi'$ verändert wird. In diesem Fall wird von der Off-Bragg Wiedergabe gesprochen und die Ergebnisse der BVM und der KVCM beginnen voneinander abzuweichen. Für diesen Fall zeigt sich, dass die Ergebnisse der BVM, insbesondere hinsichtlich der Richtung des gebeugten Strahls, empirische Messungen

besser beschreiben [2].

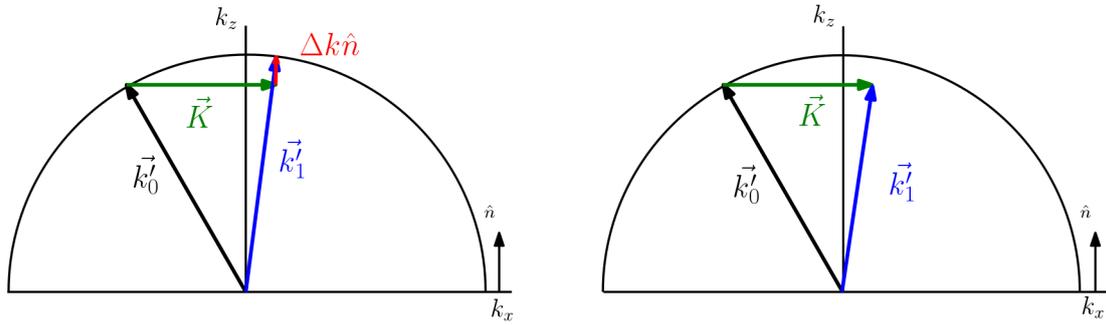


Abbildung 2.5: Konstruktion des Vektors \vec{k}'_1 für den Off-Bragg Fall nach der BVM (links) und der KVCM (rechts). [2] Durch den Vektor $\Delta k \hat{n}$ kommt es zu einer Differenz zwischen $\varphi'_{j,BVM}$ und $\varphi'_{j,KVCM}$.

An der Abbildung 2.5 ist zu erkennen, dass die zwei Theorien zu unterschiedlichen Winkeln für \vec{k}'_1 kommen. Es zeigt sich auch, dass der Vektor \vec{k}'_1 in der KVCM nicht nur einen anderen Winkel hat, sondern auch kürzer ist. Das würde bedeuten, dass sich die Wellenlänge des gebeugten Strahls vergrößert hätte, was in der Praxis nicht der Fall ist.

Wird die Beugung an einem Gitter mit Hilfe der Two-Wave Näherung beschrieben, wird oft vom Bragg-Regime gesprochen.

2.3.2 Raman-Nath Theorie

Bei der Raman-Nath Theorie werden die zweiten Ableitungen der Feldamplitude und die Abhängigkeit vom Einfallswinkel vernachlässigt. Die Gleichungen der RCWA vereinfachen sich damit zu:[3]

$$-i \frac{2}{\pi} \frac{(\epsilon_0)^{1/2} \cos \varphi'}{\lambda} \frac{dS_j(z)}{dz} - \frac{\epsilon_1}{\lambda^2} [S_{j+1}(z) - S_{j-1}(z)] = 0 \quad (2.40)$$

Der Term

$$\frac{2j(m-j)}{\Lambda^2} S_j(z) \quad (2.41)$$

aus Gleichung 2.29 ist für die j -te Ordnung, bei dem m -ten Bragg-Einfall null, wenn $j=m$ gilt. Für alle anderen Fälle kommt es zu einem Phasenunterschied, der zu einer geringeren Intensität für die jeweilige Ordnung führt. In der Raman-Nath Theorie wird dieser Term vernachlässigt und sämtliche Ordnungen werden so behandelt, als ob die Bragg Bedingung für alle gleichzeitig erfüllt sei.

Die Lösungen der Gleichung 2.40 sind Bessel Funktionen erster Art und j -ter Ordnung.
[3]

$$S_j(z) = (-i)^j J_j(\gamma) \quad (2.42)$$

2.4 Die Bragg-Bedingung

Diese Theorie wurde vom Physiker William Lawrence Bragg entwickelt. Bragg entwickelte seine Theorie, als er die Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen untersuchte. Die Bragg-Bedingung dient der Vorhersage des Bragg-Winkels, bei dem konstruktive Interferenz auftritt.

Dafür nahm er an, dass sich der Kristall in mehrere Gitterebenen mit einem Abstand Λ unterteilen lässt. Desweiteren verwendete er die Annahme, dass die einfallende Welle an jeder dieser Ebenen zu einem kleinen Teil reflektiert und der Rest transmittiert wird.[5][6][23][10]

Die Maxima lassen sich also nur dann finden, wenn der Einfallswinkel so gewählt wird, dass die reflektierten Wellen von allen Ebenen konstruktiv miteinander interferieren. Treffen zwei Strahlen auf benachbarte Gitterebenen, kann der Phasenunterschied der reflektierten Strahlen durch geometrische Überlegungen bestimmt werden.

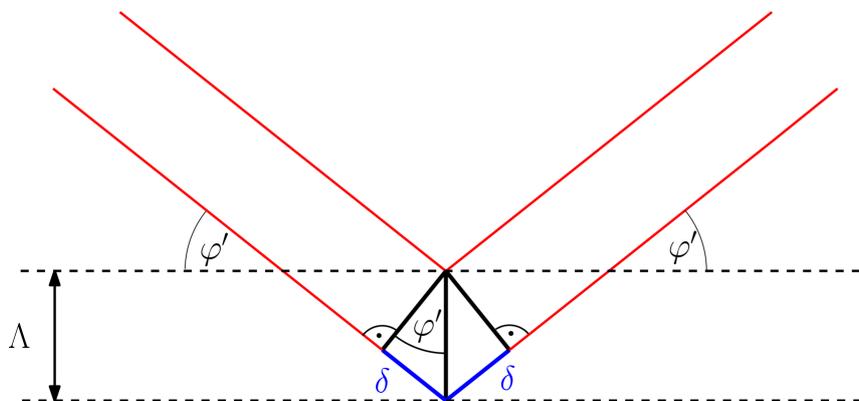


Abbildung 2.6: Bragg-Bedingung: das einfallende Licht wird an zwei benachbarten Gitterebenen reflektiert. Nur wenn die Differenz der zurückgelegten Wege einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht, kann konstruktive Interferenz auftreten.

Der von der benachbarten Ebene reflektierte Strahl hat demnach einen um 2δ längeren Weg, den er zurücklegen muss. Konstruktive Interferenz tritt nur dann auf,

wenn der Gangunterschied einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge im Medium λ' entspricht, also $j\lambda'$ mit $j \in \mathbb{Z}$.

In der Abbildung lässt sich erkennen, dass δ dargestellt werden kann als:

$$\delta = \Lambda \sin \varphi' \quad (2.43)$$

Damit lässt sich die Bragg-Bedingung anschreiben als:

$$j \frac{\lambda}{(\epsilon_0)^{1/2}} = 2\Lambda \sin \varphi' \quad (2.44)$$

Für ϵ_0 gilt $(\epsilon_0)^{1/2} =: n_0$, wobei n_0 der Brechwert des Materials ist. Daraus folgt, dass $\lambda/(\epsilon_0)^{1/2} = \lambda'$, also die Wellenlänge innerhalb des Mediums ist.

Nur wenn diese Gleichung erfüllt ist, interferieren die beiden Strahlen konstruktiv und ein Beugungsmaximum ist wahrnehmbar.

2.5 Die von-Laue Bedingung

Eine äquivalente Beschreibung der Beugung an Kristallen liefert die von-Laue Bedingung. Hier wird der Kristall als Bravais-Gitter betrachtet an dessen Gitterpunkten punktförmige Streuer sitzen.[6] Bravais-Gitter beschreiben mathematische periodische Strukturen, mit unendlicher Ausdehnung.

Trifft eine ebene Welle auf einen Kristall, gehen von jedem Streuer des Gitters Kugelwellen aus, die miteinander interferieren. Dadurch ergibt sich die folgende Bedingung für konstruktive Interferenz:[5]

$$\vec{k}'_0 - \vec{k}'_j = j\vec{K} \quad (2.45)$$

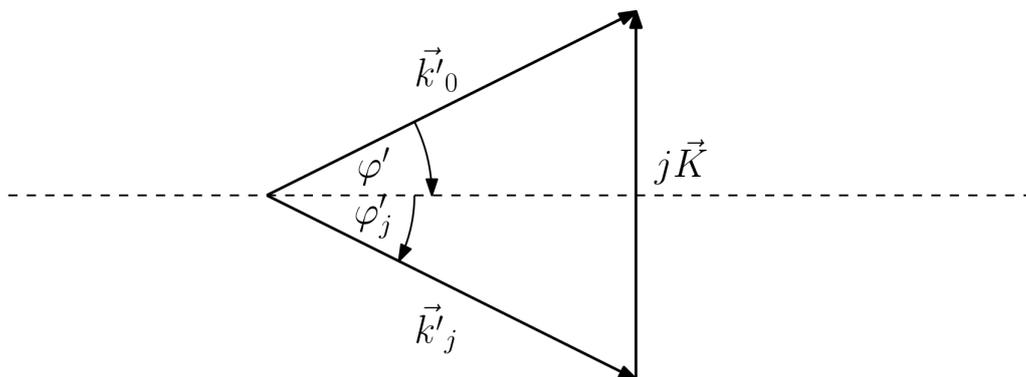


Abbildung 2.7: Grafische Darstellung der von-Laue Bedingung

2 Theorie

Durch Umformen der von-Laue Bedingung lässt sich die Äquivalenz zur Bragg Bedingung einfach zeigen. Da wir nur elastische Prozesse betrachten gilt zunächst:

$$|\vec{k}'_0| = |\vec{k}'_j| = \frac{2\pi n}{\lambda} \quad (2.46)$$

und damit:

$$\varphi' = -\varphi'_j \quad (2.47)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches von \vec{k}'_0 und $\vec{K}/2$ aufgespannt wird, ergibt sich:

$$k'_0 \cdot \sin \varphi' = j \frac{|\vec{K}|}{2} \quad (2.48)$$

und daher:

$$\frac{2\pi(\epsilon_0)^{1/2}}{\lambda} \sin \varphi' = j \frac{\pi}{\Lambda} \quad (2.49)$$

Damit steht die Bragg-Bedingung bereits:

$$j \frac{\lambda}{(\epsilon_0)^{1/2}} = 2\Lambda \sin \varphi' \quad (2.50)$$

2.6 Die Ewaldkugel

Die Ewald Kugel ist eine grafische Darstellungsweise der Impuls- und Energieerhaltung und wird im reziproken Raum (k_x, k_y, k_z) konstruiert. [5][10][3]

Da wir nur eindimensionale Gitter betrachten beschränkt sich die Darstellung des Gitters auf die Gitterebenen, welche um den Vektor \vec{K} parallel verschoben sind.

Ausgehend von einem beliebigen Punkt im Gitter wird der einfallende Vektor \vec{k}'_0 so gelegt, dass er auf einer Gitterebene landet.

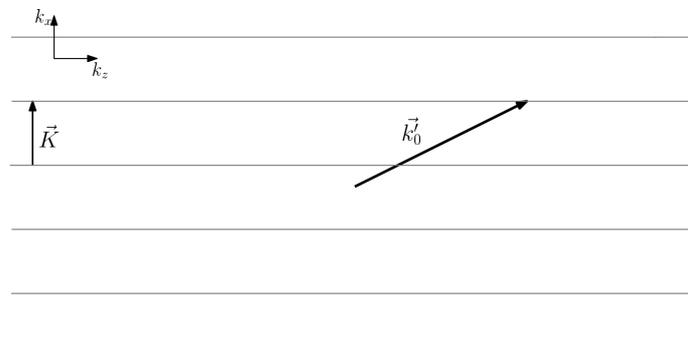


Abbildung 2.8: Der Einfallsvektor \vec{k}'_0 auf eine beliebige Gitterebene

Da wir nur elastische Streuung betrachten, müssen alle möglichen Wellenvektoren auf einer Kugel um den Ausgangspunkt von \vec{k}'_0 liegen.

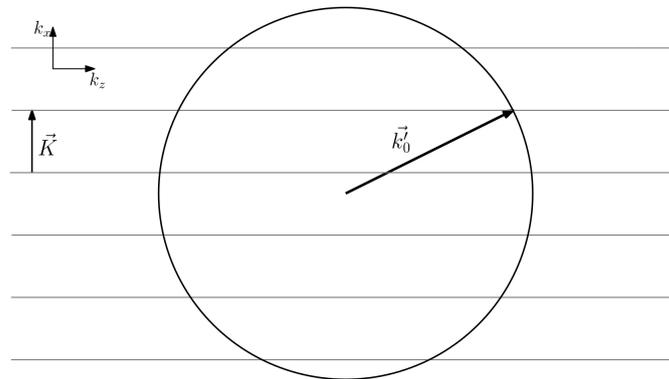


Abbildung 2.9: Die Ewaldkugel um den Wellenvektor \vec{k}'_0

Daraus ergibt sich, dass die gebeugten Wellenvektoren an den Punkten anliegen, an denen sich die Gitterebenen und die Ewaldkugel schneiden.

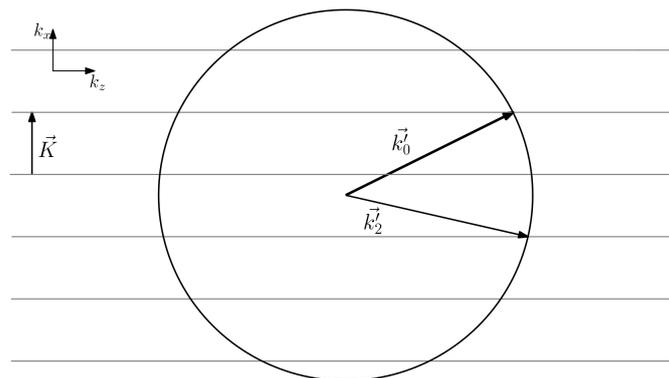


Abbildung 2.10: Die Konstruktion des Wellenvektors der zweiten Beugungsordnung \vec{k}'_2 (off-Bragg).

Zusätzlich fällt in der Skizze auf, dass die von-Laue- Bedingung, beziehungsweise die Bragg-Bedingung für keine Beugungsordnung erfüllt ist. Dies ist nur möglich, wenn der Ausgangspunkt von \vec{k}'_0 in der Mitte zwischen zwei Gitterebenen liegt. Daraus lässt sich ableiten, dass auch bei dünnen Gittern nur maximal eine Ordnung die Bragg-Bedingung erfüllen kann.

Würden wir ein dickes Gitter betrachten, wäre der Gittervektor \vec{K} im Vergleich zu \vec{k}'_0 lange genug, dass nur eine zusätzliche Gitterebene innerhalb der Ewaldkugel liegen würde.

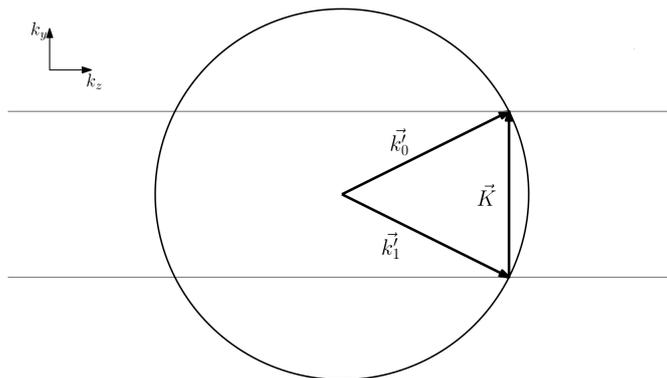


Abbildung 2.11: Die Ewaldkugel für ein dickes Gitter. Ein gebeugter Strahl tritt nur auf, wenn die von-Laue Bedingung erfüllt ist (in-Bragg).

2.7 Schiefer Einfall

Stehen die Spalte eines Gitters normal auf den einfallenden Strahl, $\vec{K} \times \hat{n} \perp \vec{k}_0$, liegen die Maxima auf einer Geraden. Dabei können wir die Richtung der gebeugten Strahlen allein mit dem Winkel φ_j'' beschreiben. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Situation $\theta \neq 0$. Für diese Fälle liegen die Beugungsmaxima auf dem Schirm nicht mehr auf einer Geraden und wir benötigen einen zweiten Winkel θ_j'' um die Richtung der gebeugten Strahlen zu beschreiben [16].

Diese Fälle wurden von Laxman G. Phadke und Jim Allen [16], beziehungsweise später von Ninad R. Jetty und Akash Suman [7], untersucht. Jetty und Suman liefern die Gleichung der Ortskurve auf der die Beugungsmaxima auf dem Schirm im Abstand L liegen. Dafür betrachten sie ein Gitter dessen Spalte eine Länge von $2l$ und eine Breite von $2b$ besitzen. [7]:

$$\begin{aligned} \{[x - l \cos \theta]^2 + [y - l \sin \theta \sin \varphi]^2 + [L - l \sin \theta \cos \varphi]^2\}^{1/2} + 2l \sin \theta \cos \varphi = \\ (2.51) \\ \{[x + l \cos \theta]^2 + [y + l \sin \theta \sin \varphi]^2 + [L + l \sin \theta \cos \varphi]^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

Dabei fällt auf, dass die Gleichung der Ortskurve 2.51 nur von der Länge des Spaltes l , dem Abstand zwischen Spalt und Schirm L und den Winkeln φ und θ abhängt. Die Spaltweite b hat keinen Einfluss auf die Ortskurve.

Zur Bestimmung der Beugungsintensität wurde mit Hilfe der Fresnel-Kirchhoffschen

Beugungsintegral Methode [1] zunächst die Beugung am Einzelspalt betrachtet. Als Lösung erhielten Phadke und Allen eine Gleichung für die komplexe Amplitude der gebeugten Welle in Richtung des Vektors $(\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z)$, wobei α_x , α_y und α_z die Winkel zu den jeweiligen Koordinatenachsen bezeichnen [16][7]:

$$U = C' \left(\frac{\sin \beta_b}{\beta_b} \right) \left(\frac{\sin \beta_l}{\beta_l} \right) \quad (2.52)$$

mit

$$\beta_l = k'l[\sin \theta(1 - \cos \alpha_z) - \cos \theta \cos \alpha_x] \quad (2.53)$$

$$\beta_b = k'b \cos \alpha_y \quad (2.54)$$

$$C' = C(2l)(2b) \quad (2.55)$$

wobei $C = \text{constant}$ gilt.

$U(r)$ beschreibt die komplexe Amplitude der harmonischen Welle. Diese beinhaltet die Information über die Amplitude und die Phase der Welle[1]:

$$E(\vec{r}, t) = \Re(U(\vec{r})e^{-i\omega t}) \quad (2.56)$$

Gleichung 2.52 gilt für einen Einzelspalt. Um eine allgemeinere Gleichung zu erhalten, erweiterten Allen und Phadke den Fall auf N beleuchtete Spalte. Dadurch ergibt sich eine Gleichung für die Intensitätsverteilung hinter einem Gitter mit Spaltlänge $2L$, Spaltbreite $2b$ und einer Gitterkonstanten Λ [16]:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta_b}{\beta_b} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta_l}{\beta_l} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\beta_c)}{N\beta_c} \right)^2 \quad (2.57)$$

mit

$$\beta_c = k'\Lambda \cos \alpha_y \quad (2.58)$$

Die Gleichungen 2.52 und 2.57 beschreiben nur eine Variation von θ . Eine umfangreichere Analyse lieferten nachträglich Jetty und Suman [7], indem sie die Gleichungen 2.52 und 2.57 auf beliebige Rotationen im Raum und deren Kombinationen erweiterten. Dafür bestimmten sie für die unterschiedlichen Orientierungen die Werte β_l und β_b . In dem für uns interessanten Fall erhalten wir [7]:

$$\beta_l = k'l\{\sin \theta[\cos \varphi(1 - \cos \alpha_z) + \sin \varphi \cos \alpha_y] - \cos \theta \cos \alpha_x\} \quad (2.59)$$

$$\beta_b = k'b[\sin \varphi(1 - \cos \alpha_z) - \cos \varphi \cos \varphi] \quad (2.60)$$

2.8 Dicke und dünne Gitter

Generell wird bei Beugungsexperimenten zwischen dicken und dünnen Gittern unterschieden. Das Problem dabei ist, dass es nicht eindeutig ist, wann von einem dicken, beziehungsweise von einem dünnen, Gitter gesprochen wird.

Es werden dabei zwei Ansätze unterschieden:

- die Dicke bezieht sich auf das Beugungsregime (Raman-Nath oder Bragg)
- die Dicke bezieht sich auf die Selektivität der Einfallswinkel und der Wellenlänge

Betrachten wir zunächst die erste Definition. Demnach wird ein betrachtetes Gitter anhand der Beugungseffizienz seiner Ordnungen klassifiziert. Die Beugungseffizienz gibt das Verhältnis der Leistung entlang eines Raumwinkels zur Leistung, die auf das Gitter trifft, an [19]:

$$\eta_j = S_j S_j^* \frac{k'_{0z}}{k'_{jz}} = I_j / I_{in} \quad (2.61)$$

I_{in} ist die Intensität des einfallenden Lichtes, während I_j die Intensität der j -ten Beugungsordnung angibt. k'_{0z} und k'_{jz} sind die z -Koordinaten von \vec{k}'_0 und \vec{k}'_j .

Befinden wir uns im Raman-Nath Regime muss die Beugungseffizienz der j -ten Ordnung hinter einem dünnen Gitter der Gleichung 2.8 entsprechen. [4]

$$\eta_j = J_j^2(2\gamma) \quad (2.62)$$

In der Praxis ist die Dicke der Gitter allerdings endlich, weswegen die Lösungen der Gleichung der Realität nur näherungsweise entsprechen. Je nachdem welche Ordnungen relevant sind werden dementsprechend unterschiedliche Kriterien verwendet. [12] Stimmt die Vorhersage der Beugungseffizienz der nullten Ordnung nach Gleichung 2.8, mit einem beliebigen Fehler χ , mit der Beugungseffizienz des transmittierten Strahls überein, gilt das Raman-Nath-Regime nach dem *Kriterium der nullten Ordnung* [12]:

$$|\eta_0 - J_0^2(2\gamma)| \leq \chi \quad (2.63)$$

Entspricht die Vorhersage der Beugungseffizienz der ersten Ordnung, gilt das Raman-

Nath-Regime aufgrund des *Kriterium der ersten Ordnung* [12]:

$$|\eta_1 - J_1^2(2\gamma)| \leq \chi \quad (2.64)$$

Das schärfste Kriterium für das Raman-Nath-Regime ist das *zusammengesetzte Kriterium*. Demnach müssen die Abweichungen sämtlicher Ordnungen von Gleichung 2.8 kleiner sein als ein beliebiger Fehler χ [12]:

$$\dots, |\eta_{-1} - J_{-1}^2(2\gamma)|, |\eta_0 - J_0^2(2\gamma)|, |\eta_1 - J_1^2(2\gamma)|, \dots \leq \chi \quad (2.65)$$

Im Vergleich zum Raman-Nath-Regime treten im Bragg Regime nur zwei Ordnungen auf, die einfallende Referenzwelle und das austretende Signal. Die Beugungseffizienzen der beiden Ordnungen lassen sich angeben durch: [4]

$$\eta_1 = \sin^2 \gamma \quad (2.66)$$

$$\eta_0 = \cos^2 \gamma \quad (2.67)$$

Dabei unterscheiden wir wieder verschiedene Kriterien für die Existenz des Bragg-Regimes. [11] Entspricht die Beugungseffizienz des transmittierten Strahls der Angabe aus Gleichung 2.67, gilt das Bragg-Regime nach dem *Kriterium des transmittierten Strahls* [11]:

$$|S_0 S_0^* - \cos^2 \gamma| \leq \chi \quad (2.68)$$

Stimmt die Beugungseffizienz des abgebeugten Strahls mit Gleichung 2.66, mit einem beliebigen Fehler, überein, gilt das Bragg-Regime nach dem *Kriterium des abgebeugten Strahls* [11]:

$$|S_1 S_1^* - \sin^2 \gamma| \leq \chi \quad (2.69)$$

Des Weiteren können wir die Gültigkeit des Bragg-Regimes annehmen, sofern nur zwei Wellen aus dem Gitter austreten. In diesem Fall sprechen wir vom *zwei Wellen Kriterium* [11]:

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq 0, 1}} |S_i S_i^*| \leq \chi \quad (2.70)$$

Zudem gilt das Bragg-Regime, wenn alle drei Bedingungen erfüllt sind. Dieses Kriterium ist das strikteste und wird als das *zusammengesetzte Kriterium* bezeichnet

2 Theorie

[11]:

$$|S_0 S_0^* - \cos^2 \gamma|, |S_1 S_1^* - \sin^2 \gamma|, \sum_{i \neq 0,1} |S_i S_i^*| \leq \chi \quad (2.71)$$

Alternativ kann ein Gitter auch als dünn bezeichnet werden, wenn die Selektivität des Einfallswinkels und der Wellenlänge gering ist. Es ist also eine größere Abweichung vom Braggwinkel, beziehungsweise generell von der Bragg-Bedingung erlaubt. Im Gegensatz dazu sind bei dicken Gittern die erlaubten Abweichungen vom Bragg-Winkel und der Wellenlänge gering.

Zusammengefasst unterscheiden wir also zwei Betrachtungsweisen für die Dicke eines Gitters. Wir können Gitter anhand der Selektivität des Einfallswinkels und der Wellenlänge, oder durch das passende Regime einteilen.

Interessieren wir uns für die Selektivität gilt ein Gitter als

- dünn, wenn:

$$\frac{d}{\Lambda} < 10 \quad (2.72)$$

- dick, wenn:

$$\frac{d}{\Lambda} > 10 \quad (2.73)$$

Ob ein Gitter sich mit dem Bragg- oder Raman-Nath-Regime beschreiben lässt hängt von den beiden Größen Q' und γ ab:

- Die Beugungseffizienz entspricht dem Raman-Nath-Regime und nicht dem Bragg-Regime, für

$$Q' \gamma \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{Q'}{2\gamma} < 10 \quad (2.74)$$

- Das Bragg-Regime ist dagegen erfüllt, während das Raman-Nath-Regime nicht erfüllt ist, wenn:

$$\frac{Q'}{2\gamma} \geq 10 \quad \wedge \quad Q' \gamma > 1 \quad (2.75)$$

Q' ist definiert als:

$$Q' = \frac{2\pi\lambda d}{(\epsilon_0)^{1/2}\Lambda^2 \cos \varphi'} \quad (2.76)$$

Ist für beide Fälle jeweils nur eine Ungleichung erfüllt, dann ist das Gitter weder dick noch dünn und eine Bestimmung des Beugungsverhaltens mit Hilfe von Näherungsverfahren ist nicht möglich. Das heißt die Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA) ist notwendig um das Beugungsverhalten korrekt zu berechnen.

Die Mengen der Zahlenpaare (Q', γ) die die Bedingungen 2.75 und 2.74 erfüllen, können im Parameterraum $(\ln Q', \ln \gamma)$ anschaulich dargestellt werden. Dabei wird der Raum durch die Gleichungen 2.77 und 2.78 in vier Bereiche unterteilt. Diese lassen sich aus den Bedingungen 2.74 und 2.75 herleiten.

$$\ln Q' + \ln \gamma = 0 \quad (2.77)$$

$$\ln Q' - \ln \gamma = 1 + \ln 2 \quad (2.78)$$

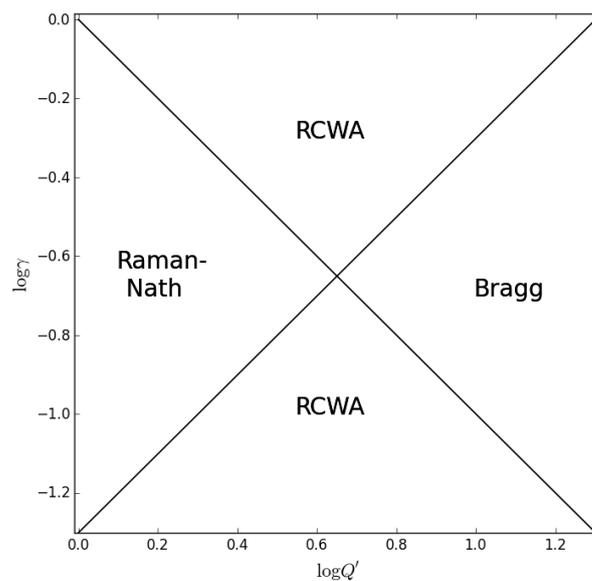


Abbildung 2.12: Die vier Bereiche geben an, welches Regime bei Beugung an einem Gitter vorliegt. Einzelne Gitter werden über die Werte von Q' und γ klassifiziert. Befindet sich das Zahlenpaar $(\ln Q', \ln \gamma)$ innerhalb des mit Raman-Nath bezeichneten Bereichs, sind die Ungleichungen aus 2.74 erfüllt. Befinden sich die Koordinaten im Bragg-Bereich, sind die Bedingungen aus 2.75 erfüllt. In den beiden mittleren Bereichen sind die Bedingungen aus 2.74 und 2.75 teilweise oder gar nicht erfüllt.

3 Durchführung der Versuche

3.1 Einleitung

Ziel der Arbeit ist es, das Beugungsverhalten an dünnen Gittern bezüglich des Beugungswinkels und der Intensität zu analysieren und zu deuten. Dafür werden zwei unterschiedliche Geometrien verwendet. Im ersten Fall liegen die Vektoren \vec{k}_j'' in der Einfallsebene, im zweiten Fall wird das Gitter gekippt, so dass es einen Winkel θ zwischen der Oberflächennormalen \hat{n} und der y -Achse gibt. Dabei treten die Vektoren \vec{k}_j'' aus der Einfallsebene heraus. In beiden Fällen wird der Winkel φ variiert und die Positionen der Beugungsordnungen werden aufgezeichnet.

Außerdem wird die Intensität bei $\theta = 0$ gemessen um ϵ_1 und die Dicke des Gitters zu bestimmen.

Schließlich wird aus der Floquet Bedingung abgeleitet, welche Beugungswinkel und damit welche Positionen (H, V) am Schirm erwartet werden.

3.2 Bestimmung der Positionen der Beugungsmaxima

3.2.1 Aufbau

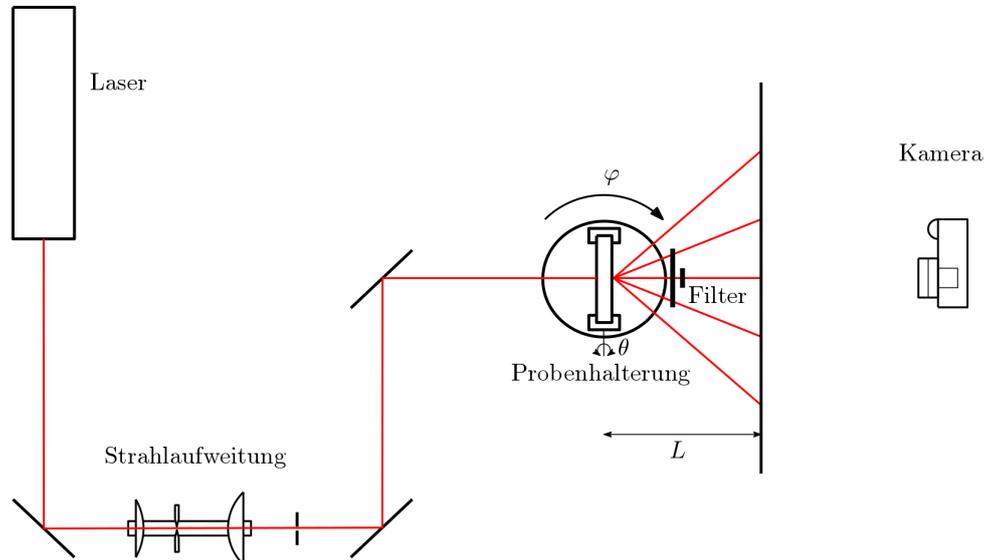


Abbildung 3.1: Skizze des verwendeten Aufbaus: Der monochromatische Laserstrahl, mit einer Wellenlänge von $632,8\text{nm}$, tritt durch die Strahlaufweitung und wird am Gitter gebeugt. Die gebeugten Strahlen treffen auf einen 30cm entfernten Schirm. Auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich eine Kamera, die den beleuchteten Schirm fotografiert. Diese Aufnahmen werden verwendet um die Position der Beugungsmaxima zu bestimmen.

Der gesamte Aufbau steht auf einem schwingungs isolierten Lochtisch mit einer Fläche von $240 \times 120\text{cm}$. Als Lichtquelle für den Aufbau dient ein HeNe-Laser von Thorlabs mit einer Wellenlänge von $\lambda = 632,8\text{nm}$, einer nominellen Leistung von 17mW und einem $1/e^2$ Strahldurchmesser von $0,98\text{mm}$.

Auf die Lichtquelle folgt eine Strahlaufweitung. Durch die Plan-Konvexlinse wird der Strahl im Brennpunkt fokussiert, während alle Anteile des Strahls, die nicht parallel zur Ausbreitungsrichtung liegen, auf einen Ring um den Brennpunkt abgebildet werden (siehe Abb. 3.2). Dadurch können die Wellen, deren Wellenvektoren nicht parallel zur optischen Achse liegen, mit Hilfe eines Pinholes abgeschnitten werden. Dadurch erhalten wir ein annähernd ideales Gauß'sches Strahlprofil. [15]

Für die Strahlaufweitung wird ein 5-fach Mikroskop Objektiv von Newport, M-5x mit

3 Durchführung der Versuche

einer Brennweite von 25,4mm, verwendet. Daraus ergibt sich ein notwendiger Pinholedurchmesser von mindestens $46\mu\text{m}$ (siehe Gleichung 3.1). [15]

$$D = \frac{F_1 \cdot \lambda}{a} \approx 46\mu\text{m} \quad (3.1)$$

F_1 gibt die Brennweite des Objektivs und a den Strahldurchmesser an. D ist der Durchmesser des Pinholes.

Als zweite Linse wird eine plan-konvexe Linse mit einem Durchmesser von 31,5mm und einer Brennweite von 15cm verwendet. Diese wurde ebenfalls so platziert, dass sich das Pinhole in deren Brennpunkt befindet. Die Strahlaufweitung selbst befindet sich auf einem optischen Reiter.

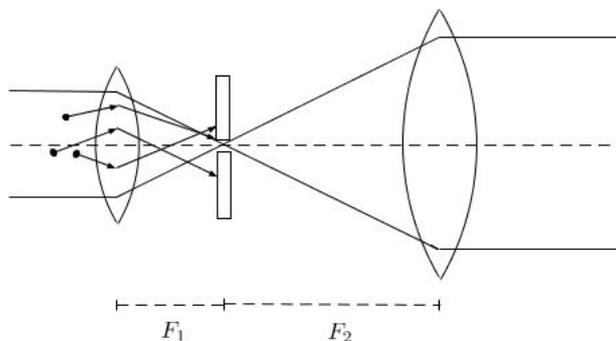


Abbildung 3.2: Funktionsprinzip einer Strahlaufweitung. Die parallelen Strahlenbündel werden im Brennpunkt fokussiert, während auftretendes Streulicht durch das Pinhole abgeschirmt wird. Das vom Brennpunkt austretende Licht wird in der zweiten Linse erneut gebrochen und breitet sich danach parallel aus.

Zur Feinjustierung der Strahlaufweitung wird das Pinhole zunächst ungefähr in den Brennpunkt des Objektivs platziert und dahinter ein Schirm aufgestellt. Dadurch werden die Beugungsringe des Pinholes am Schirm sichtbar. Mit Hilfe der Mikrometerschraube der Objektivhalterung wird die Position des Pinholes möglichst genau in den Brennpunkt gesetzt, wodurch die Beugungsringe nahe am Mittelpunkt konzentriert werden. Zusätzlich wird das Pinhole in der Ebene normal zur Ausbreitungsrichtung mit Hilfe zweier Mikrometerschrauben am Pinhole um den Strahl herum zentriert. Die schließlich durchtretende Leistung ergibt sich durch [15]:

3.2 Bestimmung der Positionen der Beugungsmaxima

$$\frac{P(D)}{P_{tot}} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi a D}{\lambda F_1}\right)^2\right) \quad (3.2)$$

Damit überprüft werden kann, ob der austretende Strahl weder konvergent noch divergent ist, wird der Strahl über einen möglichst langen Weg an eine Stelle der Wand geleitet. So kann der Durchmesser des Strahles unmittelbar hinter der Strahlaufweitung mit dem Durchmesser des Strahles an der Wand verglichen werden. Dadurch wird überprüft, ob der sichtbare Durchmesser gleich bleibt und das Strahlenbündel näherungsweise parallel ist.

Der aufgeweitete Strahl wird mit Hilfe einer Irisblende auf den gewünschten Durchmesser reduziert. Dies dient der besseren Sichtbarkeit der Maxima auf den Fotos, die zur Auswertung dienen.

Die Gitter befinden sich, wie bereits erwähnt, in einer Probenhalterung, die es ermöglicht das Gitter um den Winkel θ zu kippen (siehe Abb. 2.2) Die Probenhalterung befindet sich auf einem Rotationstisch von Feinmess Dresden mit einer Auflösung von $1/100^\circ$. Dieser besitzt eine serielle Schnittstelle, die es ermöglicht den Rotationswinkel φ über den Computer zu steuern.

Um den Winkel θ einzustellen wird ein "Winkellineal" verwendet. Dafür wird die Rückreflexion des einfallenden Lichtes von der Probenoberfläche genutzt. Die Positionen auf denen das reflektierte Licht, bei den jeweiligen Winkeln, auftreffen sollte, wurden auf einem fixierten Papierstreifen markiert. Die Abstände der Markierungen wurden über das Reflexionsgesetz [22] bestimmt. Der Kippwinkel θ kann dadurch mit Hilfe der Rückreflexion des einfallenden Lichtes eingestellt werden. Für die Versuche werden Kippwinkel von $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ und 60° verwendet.

Die verwendeten Gitter wurden von Professor Yasuo Tomita, aus der University of Electro-Communications in Tokyo, zur Verfügung gestellt. Dabei handelt es sich um Gitter aus einem lichtinduzierten Nanopartikel Polymer Komposit mit einer sinusoidalen Brechwertmodulation.

Das Komposit besteht aus einem Monomer und darin eingebrachten Nanopartikeln. [21][20] In unserem Fall wurden für die Proben Z1d und Z1e ein Acrylmonomer und

3 Durchführung der Versuche

Zirkoniumoxid (ZrO_2) und für S1a und S1b Methacryl und Siliziumoxid (SiO_2) verwendet.

Für die Herstellung werden die Materialien auf eine Glasplatte aufgetragen. Die Dicke der Gitter wird mit Hilfe von Distanzhaltern vorgegeben. Wird die Probe mit einem holografischen Interferenzmuster belichtet, kommt es zur Diffusion der beiden Materialien. Dabei wandert das reaktionsfreudigere Monomer aus den dunkleren Regionen in die stärker belichtete Bereiche, während sich die Nanopartikel in den schwächer belichteten Gebieten sammeln. Das Monomer polymerisiert und das Interferenzmuster wird in die Brechwertmodulation des Gitters transferiert. Abschließend werden die Gitter getrocknet und mit einer zweiten Glasplatte bedeckt.[21][20]

Die Gitterkonstante Λ beträgt bei allen Proben $5\mu m$. Die mechanische Dicke der Proben wurden mit $2,3\mu m$ bis $8,6\mu m$ angegeben. Die Proben wurden mit einem sinusförmigen Interferenzmuster bei $532nm$ und einer Intensität von $50mW/cm^2$ belichtet.

Probe	Z1d	Z1e	S1a	S1b
mech. Dicke (μm)	2,3	3,5	6,9	8,6
n_0	1,59	1,59	1,54	1,54
d/Λ	0,46	0,7	1,38	1,72

Zwischen der Probenhalterung und dem Schirm befinden sich zwei Graufilter. Diese dienen der Abschwächung der Intensität der -1. bis +1. Ordnung. Ohne die Graufilter sind die beleuchteten Stellen der drei Maxima am Schirm weit ausgedehnt, so dass die äußersten Bereiche zum Teil ineinander liegen, oder die -1., oder +1. Ordnung überdeckt werden. Dies hätte dadurch verbessert werden können, dass der Schirm in einem größeren Abstand von der Probe aufgestellt worden wäre. Dadurch wären die äußeren Beugungsordnungen aber, bei größeren Einfallswinkeln, unter Umständen nicht mehr auf dem Schirm zu sehen gewesen.

Der erste Graufilter ist breit genug, dass er die -1., 0. und +1. Ordnung bei fast jeder Winkeleinstellung erfasst. Dieser schwächt die Intensität der Strahlen auf ca. 10% ab. Der zweite Filter ist so positioniert, dass die Intensität der 0. Ordnung auf insgesamt circa 2,6% der einfallenden Intensität abgeschwächt wird. Die Filter wurden so nahe wie möglich an der Probenhalterung aufgestellt, ohne diese bei der Drehung zu blockieren.

3.2 Bestimmung der Positionen der Beugungsmaxima

Der Schirm wurde aus Millimeterpapier gefertigt, welches auf einem Rahmen aus Metallstützen befestigt wurde. Der Metallrahmen ist mit zwei Magnetfüßen am Tisch befestigt worden. Diese stehen an zwei Schrauben an, die in der gleichen Lochreihe am Tisch hinein gedreht wurden. Dadurch ist gewährleistet, dass der Schirm parallel, beziehungsweise vertikal, zu den Tischkanten steht.

Der Schirm wird von der, der Probe abgewandten, Seite mit einer Canon EOS 450D abgelichtet. Diese wurde an der Kante des Lochtisches aufgestellt (siehe Abb. 3.1). Der Zoom ist so eingestellt, dass die Bilder den gesamten Schirm erfassen. Die Fotos werden mit einer Belichtungszeit von 1s und bei ISO-800 gemacht. Die Auflösung beträgt 4727x2848 Pixel.

3.2.2 Messung

Die Messungen mit Kippwinkeln von $\theta = 0^\circ$ bis $\theta = 45^\circ$ werden für Rotationswinkeln zwischen $\varphi = -50^\circ$ und $+50^\circ$ durchgeführt. Für die Messreihen bei $\theta = 60^\circ$ musste ein kleinerer Winkelbereich gewählt werden, da aufgrund des großen Kippwinkels, die Probenhalterung den Strahl außerhalb von $\pm 45^\circ$ blockiert. Dementsprechend werden diese Messungen im Bereich $\varphi = -45^\circ$ bis $\varphi = +45^\circ$ durchgeführt.

Nach einem ersten Versuch, die Messung manuell durchzuführen, was mehrere Stunden in Anspruch genommen hatte, wurde der Ablauf mithilfe eines Pythonskriptes automatisiert. Dieses übernimmt die Steuerung des Rotationstisches und des Auslösers der Kamera. Dabei wird das Gitter auf den jeweiligen Ausgangswert gedreht und in $0,1^\circ$ Schritten rotiert. In jeder Position wird ein Foto des Schirms aufgenommen. Der Kippwinkel θ wird vor jedem Messdurchgang manuell eingestellt.

3.3 Messung der Beugungsintensitäten

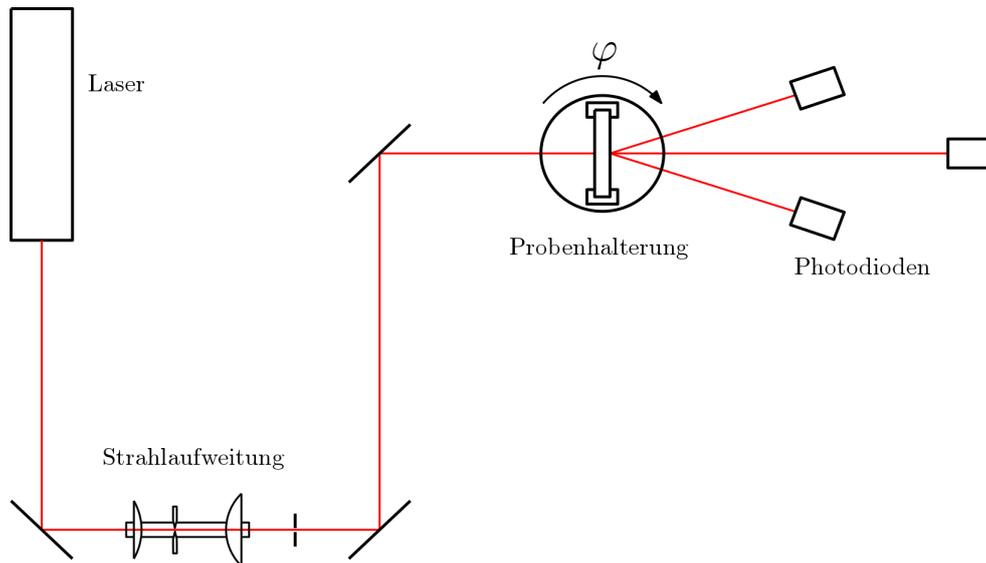


Abbildung 3.3: Aufbau der Intensitätsmessung: Der Lichtstrahl tritt durch die Strahlaufweitung durch und wird am Gitter gebeugt. Die -1., 0. und +1. Ordnung treffen auf Photodioden, die den, von den einfallenden Strahlen erzeugten, Strom messen. Dieser ist proportional zur einfallenden Leistung des jeweiligen Strahls.

Der Aufbau entspricht dem in Kapitel 3.2.1 beschriebenen Aufbau größtenteils. Ziel dieser Messung war es, die Beugungsintensität als Funktion des Rotationswinkels φ bei $\theta = 0$ zu bestimmen. Diese Messung wurde nur für die Probe S1b durchgeführt, da die anderen Gitter zu dünn sind um eine Winkelabhängigkeit zu sehen.

Anstelle des Schirms befinden sich nur drei, gleich kalibrierte, Photodioden mit einer Oberfläche von $6 \times 6 \text{ mm}^2$. Die Photodiode, welche die 0. Ordnung misst, wird zentral positioniert. Durch die Rückreflexion kann diese normal zum einfallenden Strahl ausgerichtet werden. Dabei wird sie allerdings etwas gekippt, damit der Strahl nicht in sich selbst zurück reflektiert wird. Wird darauf nicht geachtet, können Interferenzen zwischen dem einfallenden und dem zurück reflektierten Strahl auftreten. Diese Diode wird in weiterer Folge nicht mehr bewegt.

Zusätzlich zur 0. Ordnung sollen auch die +1. und die -1. Ordnung gemessen werden. Dafür werden zwei weitere Dioden verwendet, welche so ausgerichtet werden, dass sie die beiden Ordnungen möglichst für den gesamten Winkelbereich detektieren können. Der Abstand der Dioden zum Schirm wurde so klein wie möglich gewählt, ohne die 0. Ordnung zu beeinflussen.

3.3 Messung der Beugungsintensitäten

Die Distanz, entlang derer sich die Maxima auf der Diodenoberfläche bewegen können, soll möglichst groß sein. Dafür werden die beiden Dioden um 45° um ihre Oberflächennormale gedreht, wodurch sich die Beugungsmaxima längs der Diagonalen der Dioden bewegen können. Dabei nimmt die jeweilige Ordnung den geringsten Abstand zur 0. Ordnung ein, wenn die Bragg-Bedingung für sie erfüllt ist. Dies wurde verwendet um die Dioden so zu platzieren, dass der Strahl gerade noch vollständig auf der Diode liegt, wenn die Ordnung in-Bragg ist. Wird der Rotationswinkel φ variiert, wandert der Strahl die Diode entlang nach außen. Die Ausrichtung der Dioden wird ebenfalls mit Hilfe ihrer Rückreflexion angepasst. Die Dioden hängen an einem Messverstärker, welcher über eine serielle Schnittstelle mit dem Computer verbunden ist. Dabei handelt es sich um ein Eigenbaugerät der Universität Osnabrück.

Die Messung wird automatisiert von einem Pythonskript vorgenommen. Dabei werden die Rotationswinkel im Bereich $\varphi = -50^\circ$ bis $\varphi = +50^\circ$ in $0,5^\circ$ Schritten angefahren. Für jeden eingestellten Winkel, liest das Skript die Leistungen vom Messverstärker aus. Dabei werden für jede Diode über 10 Messungen durchgeführt und die Werte gemittelt. Die Ergebnisse werden in einer Datei gespeichert.

4 Numerik

Ziel unserer Überlegungen ist es eine analytische Darstellung der Position des j -ten Beugungsmaximums auf einem Schirm anzugeben. Die gesuchte Position wird mit den Koordinaten (H, V) angegeben und der betrachtete Schirm befindet sich in einem Abstand L von der Probe. Als Ansatz verwenden wir die Floquet-Bedingung im Bereich III (siehe Abb. 2.1). Dafür wird das Gitter wie in der Durchführung zuerst um den Winkel θ um die x -Achse gekippt. Anschließend wird das Gitter um den Winkel φ um die y -Achse rotiert, so dass $\vec{K} = \vec{K}(\varphi)$ gilt. Wir gehen davon aus, dass der einfallende Wellenvektor \vec{k}_0 parallel zur z -Achse, mit den Koordinaten $(0, 0, k_0)$, liegt.

Für den Fall, dass der Einfallswinkel φ dem Braggwinkel $\varphi_{B,j}$ für die j -te Ordnung entspricht, liegt $\vec{k}_0 + j\vec{K}$ auf der Ewaldkugel und es ergeben sich die beiden Winkel $\varphi_j'' = 2\varphi_{B,j}$ und $\theta_j'' = 0$.

Falls $\varphi \neq \varphi_B$ gilt, ist dies nicht der Fall und es benötigt einen zusätzlichen Vektor, damit die Impuls- und Energieerhaltung gewährleistet sind. Dieser Vektor ist parallel zu \hat{n} und hat die Länge Δk (siehe Abb. 4.1).

Wir können \vec{k}_j'' also anschreiben als:

$$\vec{k}_j'' = \vec{k}_0 - j\vec{K}(\varphi) - \Delta k \cdot \hat{n}(\varphi, \theta) \quad (4.1)$$

Der Gittervektor $\vec{K}(\varphi)$ bleibt dabei stets in der x - z -Ebene. Der einfallende Strahl, und damit die 0. Ordnung, verläuft längs der z -Achse.

$$\vec{k}_j'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} jG \cos \varphi \\ 0 \\ -jG \sin \varphi \end{pmatrix} - \Delta k \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

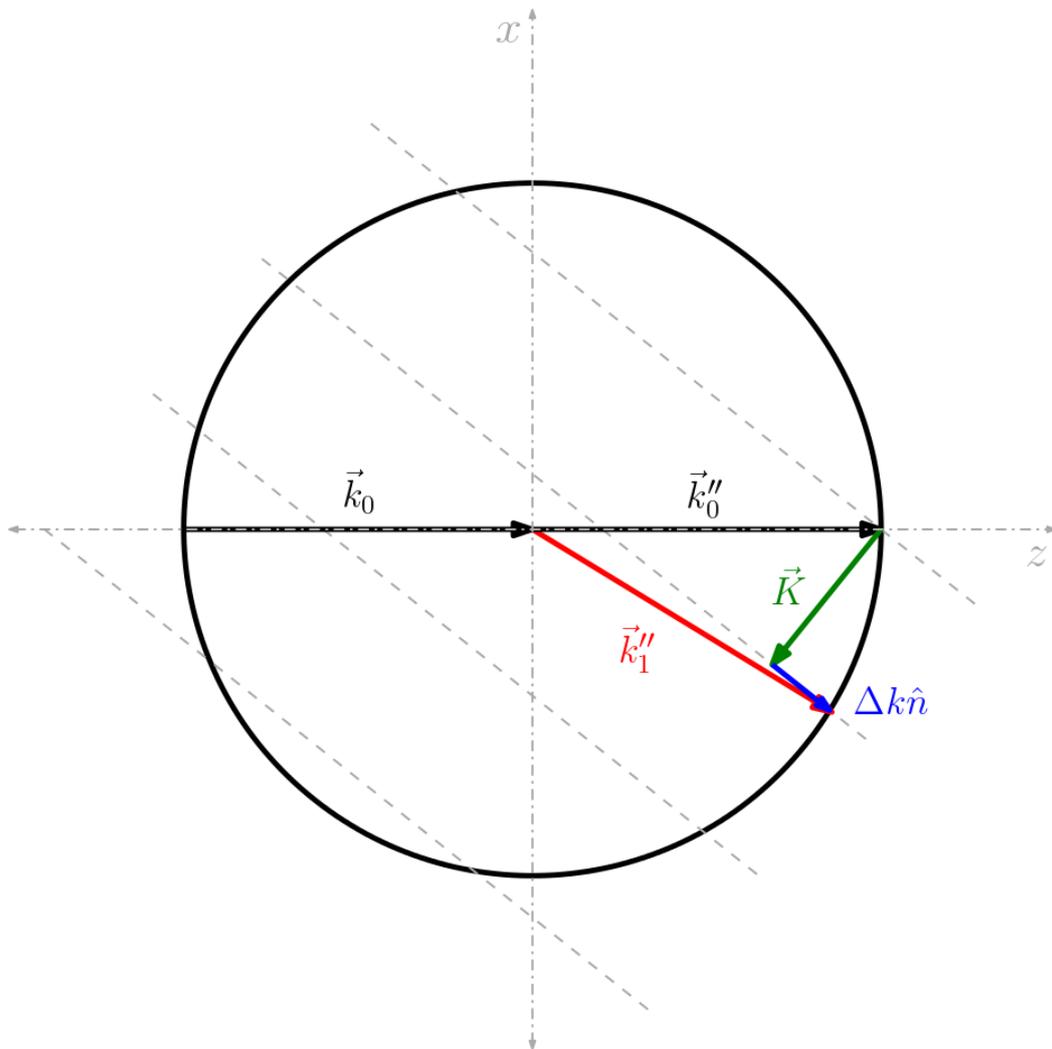


Abbildung 4.1: Schnitt der Ewaldkugel entlang der Einfallsebene für $\theta = 0$. Dabei gilt $\vec{k}_0 = \vec{k}_0''$. Der Vektor \vec{k}_0'' ergibt sich aus der Summe des einfallenden Wellenvektors \vec{k}_0 , dem Gittervektor \vec{K} und dem Vektor $\Delta k \hat{n}$.

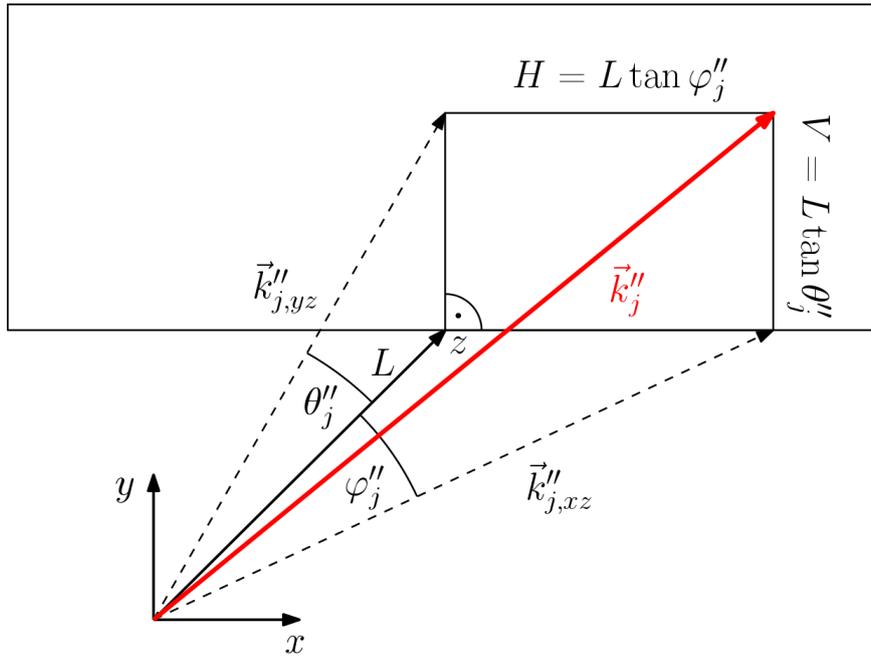


Abbildung 4.2: Die Darstellung der Position des j -ten Maximums auf einem Schirm. Die Winkel θ_j'' und φ_j'' ergeben sich aus dem Skalarprodukt des Einheitsvektors der z -Achse \hat{z} mit der jeweiligen Projektion von \vec{k}_j'' . Die Werte H und V geben die Koordinaten des Maximums am Schirm (H, V), und damit den horizontalen und vertikalen Abstand zur 0. Ordnung, an.

$$\Rightarrow |\vec{k}_j''| = \left| \begin{pmatrix} -jG \cos \varphi + \Delta k \sin \varphi \cos \theta \\ -\Delta k \sin \theta \\ k_0 + jG \sin \varphi + \Delta k \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \right| = k_0 \quad (4.3)$$

Aus Gleichung 4.3 lässt sich Δk herleiten:

$$\Delta k = k_0 \cos \varphi \cos \theta \pm \sqrt{k_0^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - 4K^2 - 8k_0 K \sin \varphi} \quad (4.4)$$

Damit können wir die Winkel φ_j'' und θ_j'' bestimmen, indem wir die Projektionen von \vec{k}_j'' auf die x - z -Ebene $\vec{k}_{j,xz}''$ und auf die y - z -Ebene $\vec{k}_{j,yz}''$ verwenden.

In Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass die Winkel φ_j'' und θ_j'' mit Hilfe des Skalar-

produktes bestimmt werden können:

$$\varphi_j'' = \arccos \left(\frac{\vec{k}_{j,xz}'' \cdot \hat{z}}{|\vec{k}_{j,xz}''|} \right) = \arccos \left(\frac{k_{j,z}''}{|\vec{k}_{j,xz}''|} \right) \quad (4.5)$$

$$\theta_j'' = \arccos \left(\frac{\vec{k}_{j,yz}'' \cdot \hat{z}}{|\vec{k}_{j,yz}''|} \right) = \arccos \left(\frac{k_{j,z}''}{|\vec{k}_{j,yz}''|} \right) \quad (4.6)$$

Um die Koordinaten (H, V) zu bestimmen können wir den Tangens auf die beiden Winkel anwenden:

$$L \tan \varphi_j'' = H \quad (4.7)$$

$$L \tan \theta_j'' = V \quad (4.8)$$

Zudem verwenden wir:

$$\tan(\arccos(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \quad (4.9)$$

Dadurch erhalten wir:

$$H = L \tan \varphi_j'' = L \sqrt{\left(\frac{|\vec{k}_{j,xz}''|}{k_{j,z}''} \right)^2 - 1} = L \frac{k_{j,x}''}{k_{j,z}''} \quad (4.10)$$

$$V = L \tan \theta_j'' = L \sqrt{\left(\frac{|\vec{k}_{j,yz}''|}{k_{j,z}''} \right)^2 - 1} = L \frac{k_{j,y}''}{k_{j,z}''} \quad (4.11)$$

Setzen wir die Koordinaten von \vec{k}_j'' ein, erhalten wir schließlich:

$$H = L \frac{\Delta k \sin \varphi \cos \theta - jG \cos \varphi}{k_0 + jG \sin \varphi + \Delta k \cos \varphi \cos \theta} \quad (4.12)$$

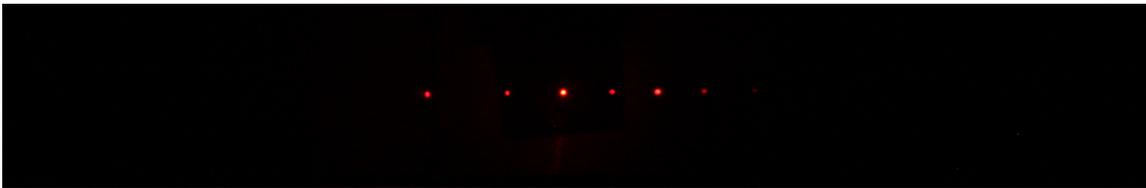
$$V = -L \frac{\Delta k \sin \theta}{k_0 + jG \sin \varphi + \Delta k \cos \varphi \cos \theta} \quad (4.13)$$

Die Gleichungen 4.12 und 4.13 für die Positionen am Schirm werden zum Anpassen an die gemessenen Beugungsmaxima im Python-Programm, siehe 7.1.2 im Kapitel 7 Anhang, benutzt.

5 Ergebnisse

5.1 Positionen

Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, wurden Fotos der Beugungsmaxima am Schirm bei verschiedenen Einfallswinkeln φ und θ aufgenommen. Aus diesen Aufnahmen konnten die Koordinaten der Maxima mit Hilfe eines Programms (siehe Programm 7.1.2 im Anhang, Kapitel 7) herausgelesen werden.



(a) Z1d, $\theta = 0^\circ$, $\varphi = -40^\circ$



(b) Z1d, $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 28^\circ$

Abbildung 5.1: Zwei Aufnahmen für die Probe Z1d. Bei der Abbildung (b) ist der Bogen auf dem die Maxima, im Vergleich zur Abbildung (a), liegen leicht zu erkennen. Der dunklere Bereich um die -1., 0. und +1. Ordnung ergibt sich durch die Graufilter zwischen der Probe und dem Schirm. An den beiden Abbildungen ist zu erkennen, dass die Helligkeit der mittleren drei Ordnungen durch die Filter ungefähr an die anderen Ordnungen angepasst worden ist.

Die Farbfotos wurden für die Auswertung in 256 Graustufen konvertiert. Wir gehen davon aus, dass die Graustufe eines Pixels proportional zur einfallenden Leistung an diesem Punkt ist.

Bei der Auswertung wurden die Werte der Graustufen in den einzelnen Zeilen und

Spalten der Pixel aufsummiert um die hellsten Stellen am Schirm zu finden. Innerhalb dieser Gebiete wurden die Helligkeitsschwerpunkte gesucht und die Position in Pixeln ausgegeben. Die Schwerpunkte am Schirm betrachteten wir als die gesuchten Beugungsmaxima. Es werden aber nur Punkte ausgelesen, deren Intensität über einer bestimmten Schwelle liegen. Diese wurde mit 3% der Intensität der 0. Ordnung angegeben. Die herausgelesenen Positionen wurden in eine Tabelle eingefügt, welche die Beugungsordnung, beginnend mit der -4. bis zur +4. Ordnung, den Einfallswinkel und die zugehörigen H - und V -Positionen am Schirm enthält.

Die Gleichungen 4.12 und 4.13 wurden schließlich an die Ergebnisse aus dieser Tabelle, mit Hilfe der Parameter L und θ , angepasst.

Die gemessenen Werte wurden zusammen mit den gefitteten Ergebnisse in den Abbildungen 5.8 bis 5.22 eingetragen. Für die Darstellungen nahmen wir nur jeden 50-ten Wert heran um die Grafiken übersichtlich zu halten. Die grünen Flächen markieren die Koordinaten der Messwerte, während die Kreuze die Ergebnisse der Fits angeben. Die Durchmesser der einzelnen Maxima betragen zwischen 15 und 30px, wobei die Durchmesser zur Mitte hin zunehmen und den jeweils kleinsten Wert annehmen bevor sie am Schirm erscheinen oder verschwinden.



Abbildung 5.2: Eine Aufnahme des Schirms für die Probe S1b. Das Foto wurde in Graustufen konvertiert und auf den Bereich, in dem sich die Maxima befinden, zugeschnitten. Für die -1. Ordnung wurde der Durchmesser von 20px eingezeichnet.

Zusätzlich dazu wurde die von Jetty, Suman und Khyparde beschriebene Kurve, entlang derer sich die Maxima für einen bestimmten Winkel befinden sollten, für jeweils einen Winkel eingezeichnet [7]. Für gewisse x -Werte wurden die Punkte auf der Kurve berechnet und mit roten Kreisen auf der Kurve eingezeichnet. Die entsprechenden Messpunkte wurden ebenfalls, mit olivfarbenen Scheiben, eingezeichnet.

Bei den Messungen an der Probe S1b für $\theta = 15^\circ$ und $\theta = 30^\circ$ treten verhältnismäßig große Abweichungen auf. Diese lassen sich dadurch erklären, dass die Probe für diese beiden Durchgängen nicht parallel zum Tisch ausgerichtet wurde. Dadurch gibt es

5 Ergebnisse

einen Winkel ξ zwischen dem Vektor \vec{K} und der Tischplatte. Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen die Aufnahmen des Schirms für $\varphi = 0^\circ$ bei $\theta = 15^\circ$ und $\theta = 30^\circ$. Dabei ist eine deutliche Abweichung in der y -Koordinate der beiden Maxima zu erkennen.

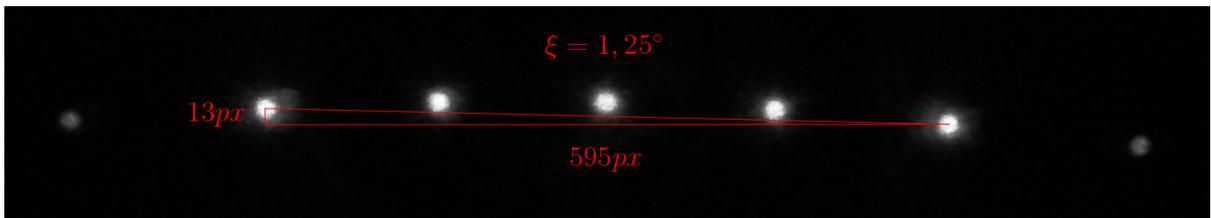


Abbildung 5.3: Eine Aufnahme des Schirms für die Probe S1b bei $\varphi = 0^\circ$ und $\theta = 15^\circ$. Dabei kann eine Drehung der Probe, abhängig von den betrachteten Maxima, um einen Winkel ξ zwischen $1,175^\circ$ und $1,352^\circ$ festgestellt werden. Die Positionen für $\varphi = 0^\circ$ sollten im Normalfall symmetrisch um die 0. Ordnung sein.

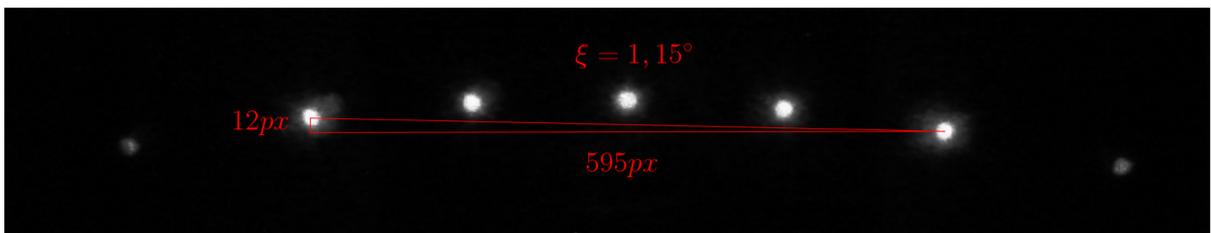


Abbildung 5.4: Eine Aufnahme des Schirms für die Probe S1b bei $\varphi = 0^\circ$ und $\theta = 30^\circ$. Dabei kann eine Drehung der Probe, abhängig von den betrachteten Maxima, um einen Winkel ξ zwischen $1,105^\circ$ und $1,169^\circ$ festgestellt werden. Die Positionen für $\varphi = 0$ sollten im Normalfall symmetrisch um die 0. Ordnung sein.

Die meisten Abweichungen der Messpunkte von den angepassten Werten entstehen dadurch, dass die genaue Position der Maxima nicht richtig von den Bildern abgelesen wurde. Die meisten dieser Fälle basieren auf einer von vier Ursachen.

Die Position einer Ordnung wird teilweise nicht genau detektiert, wenn ihre Intensität zu schwach ist. Dies ist der Fall für die Winkeleinstellungen in denen eine Ordnung am Schirm sichtbar wird, oder die wenn ihre Intensität zu gering wird. In diesen Fällen kann leichtes Streulicht, oder eine andere Ordnung die Position des Schwerpunktes verschieben.

Der Graufilter, welcher die +1. und -1. Ordnung abschwächt, hat sich ebenfalls als Fehlerquelle herausgestellt, da die beiden Ordnungen für große Werte von φ hinter

dem Filter hervortreten. In diesem Bereich kommt es ebenfalls zu falschen Werten, da die Maxima am Rand abgeschnitten und teilweise verzerrt werden.

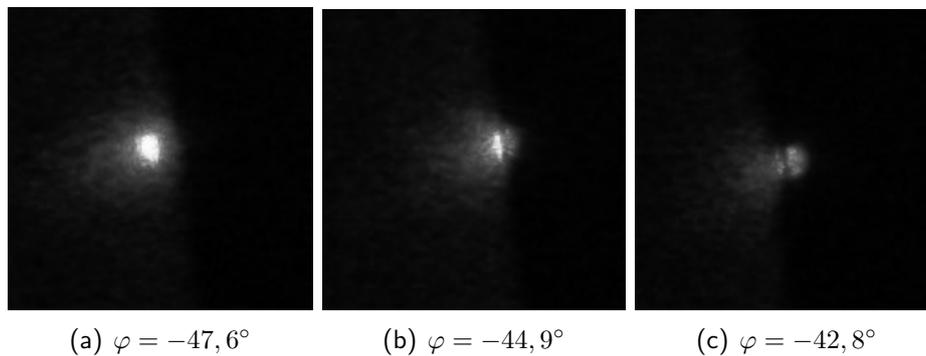


Abbildung 5.5: Vergrößerte Aufnahmen der -1. Ordnung an Hand der Probe Z1e bei $\theta = 15^\circ$. Dabei ist zu erkennen, wie der Lichtpunkt den Rand des verwendeten Graufilters passiert und das Maximum am Schirm dadurch beeinträchtigt wird.

In manchen Fällen werden Maxima am Schirm in die Länge gezogen und bilden elliptische Lichtpunkte am Schirm, was die Identifikation der genauen Koordinaten verfälschen kann.



Abbildung 5.6: Eine vergrößerte Aufnahme der -3. Ordnung bei der Probe S1b bei $\theta = 60^\circ$ und $\varphi = 10^\circ$. Die beleuchtete Fläche ist nicht kreisförmig, sondern ist in die Länge gezogen. Dies verfälscht die Koordinaten des Helligkeitsschwerpunktes.

Bei den Messungen mit Kippwinkel $\theta = 45^\circ$ und $\theta = 60^\circ$ wandern die Maxima am Schirm teilweise über den unteren Rand des Schirms hinaus. Ähnlich wie beim Übergang am Rand des Graufilters werden die Messwerte für diese Helligkeitsschwerpunkte mit einem größeren Fehler ausgelesen.

5 Ergebnisse

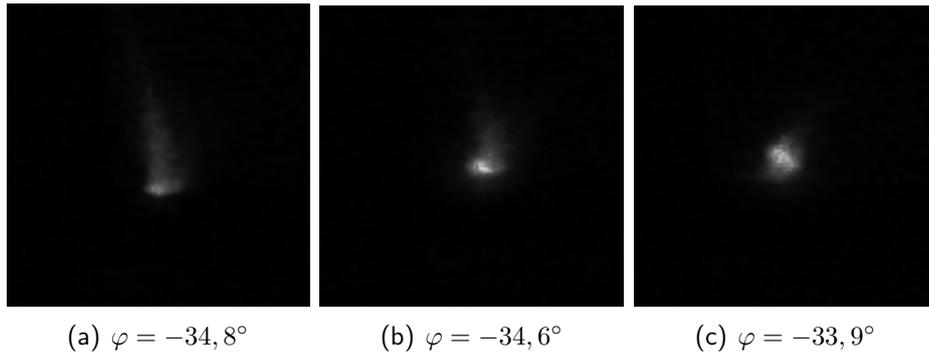


Abbildung 5.7: Vergrößerte Aufnahmen der -1. Ordnung an Hand der Probe Z1d bei $\theta = 60^\circ$. Dabei ist zu erkennen, wie der Lichtpunkt den Rand des Schirms passiert und das Maximum am Schirm dadurch beeinträchtigt wird.

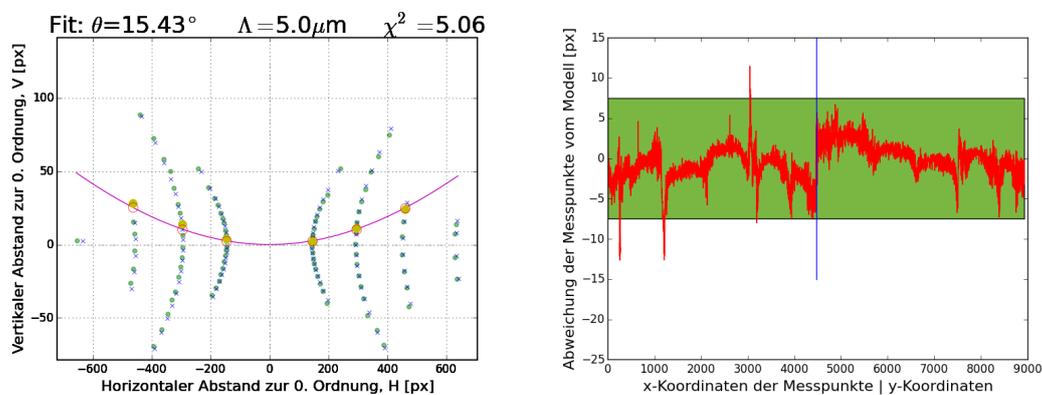
Bei den Messungen selbst kam es teilweise zu Problemen, da sich die Notbeleuchtung, aufgrund von Bauarbeiten im Gebäude, während der Durchführung im Labor vereinzelt einschaltete. Dadurch gibt es bei manchen Messungen Lücken in den Ergebnissen, da es nicht möglich war diese Aufnahmen auszuwerten.

Der Wert χ^2 wurde für die einzelnen Messreihen berechnet über:

$$\chi^2 = \frac{1}{2s - 2} \left(\sum_{k=1}^s (x_k - H_k)^2 + \sum_{k=1}^s (y_k - V_k)^2 \right) \quad (5.1)$$

Der Parameter s gibt die Anzahl der Messpunkte der betrachteten Messung an.

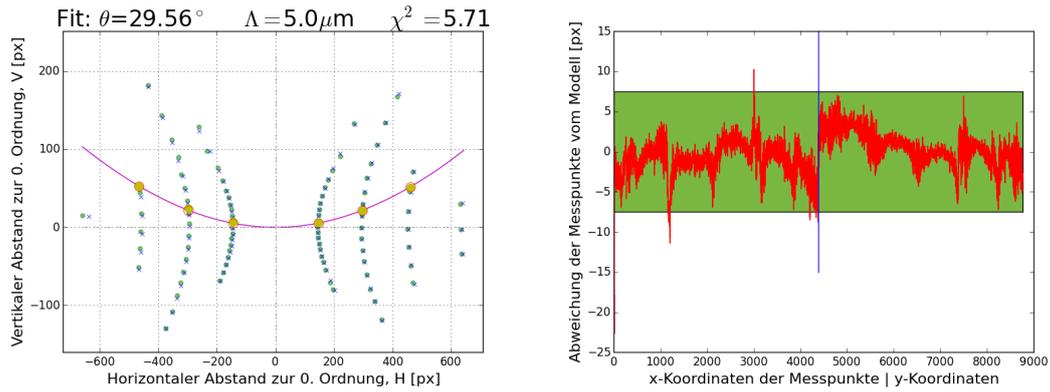
5.1.1 S1a



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 0^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve bei $\phi = 0^\circ$, ● die Messpunkte bei $\phi = 0^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.8: S1a, $\theta = 15^\circ$: Die Abweichungen der Messpunkte vom Modell liegen fast ausschließlich im Fehlerbereich $\pm 7,5\text{px}$. Die erste Spitze (252-270) betrifft die Messpunkte der -2. Ordnung, als diese am Schirm sichtbar wird. Durch die niedrige Intensität und die großen Winkel können bei der Auswertung der Bilder Fehler aufgetreten sein. Die zweite (1185-1225) und dritte Spitze (3047-3060) betreffen jeweils die -1. und +1. Ordnung beim Hervortreten hinter dem Graufilter. Dabei kommt es zu Störungen am Schirm, was zu den Abweichungen führt. Dennoch würden die Abweichungen mit $\pm 12\text{px}$ noch innerhalb, oder knapp außerhalb der Maxima liegen.

5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 0^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 0^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.9: S1a, $\theta = 30^\circ$: Die x -Koordinaten der -4. Ordnung (0-14) weisen eine bemerkbare Abweichung auf. Die Werte entsprechen allerdings den Maxima am Schirm. Ansonsten liegen nur die Werte der -1. und +1. Ordnung beim Passieren des Randes des Filters außerhalb des Fehlerbereichs (1168-1211 und 3002-3010).

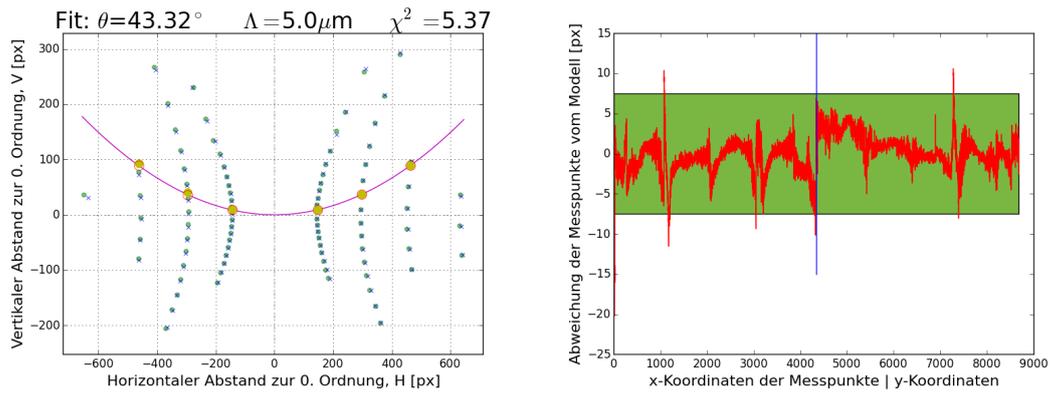
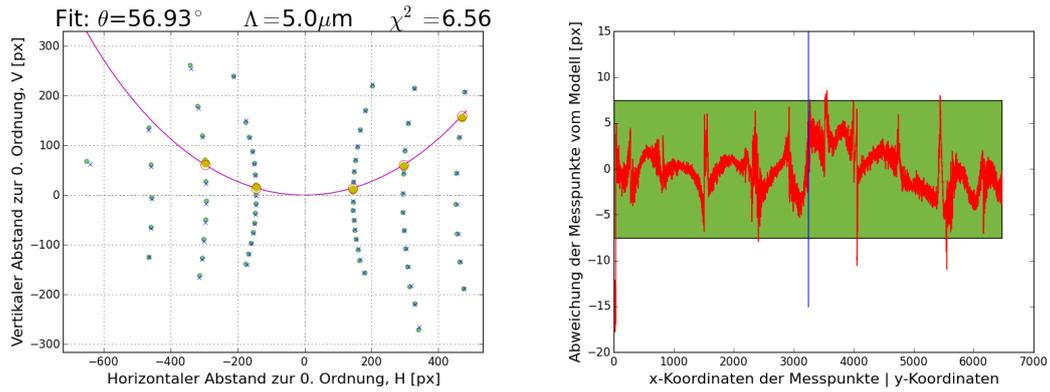


Abbildung 5.10: S1a, $\theta = 45^\circ$: Die x -Koordinaten der -4. Ordnung weichen erneut merklich vom Modell ab (0-24). Die Abweichungen im Bereich 1078-1203 ergeben sich dadurch, dass die -1. Ordnung am Schirm stark in die Länge gezogen ist. Die zweite Spitze (7279-7289) ergibt sich wieder durch den Übergang der +1. Ordnung am Rand des Filters.

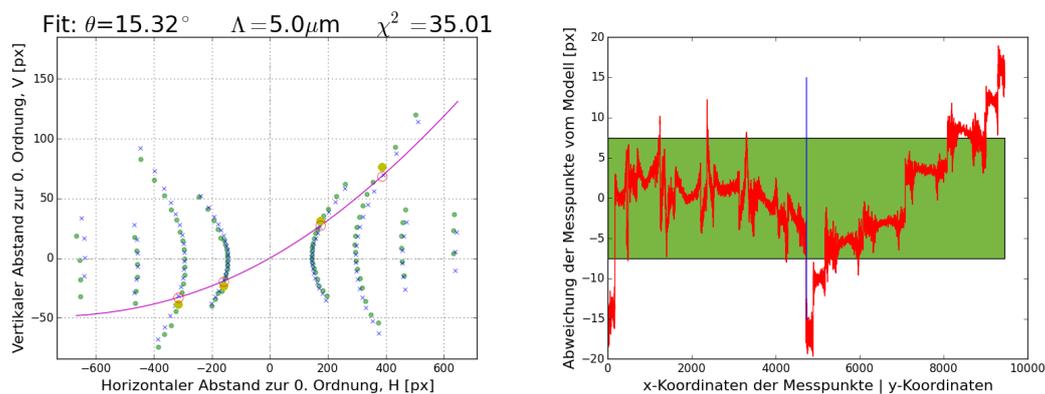
5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 0^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 0^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.11: S1a, $\theta = 60^\circ$: Im Bereich 0-33 ist eine Abweichung der x -Koordinaten der -4. Ordnung sichtbar. Die Spitzen bei 4056-4062 und bei 5458-5463 werden durch den Übergang der -1. beziehungsweise der +1. Ordnung am Filter verursacht. Die Spitze bei 5559-5571 ergibt sich dadurch, dass die +1. Ordnung über den Rand des Schirms wandert.

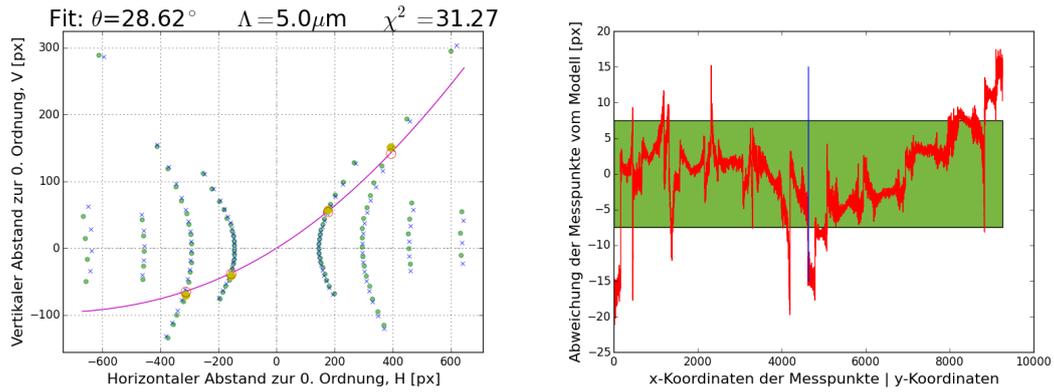
5.1.2 S1b



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 30^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 30^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

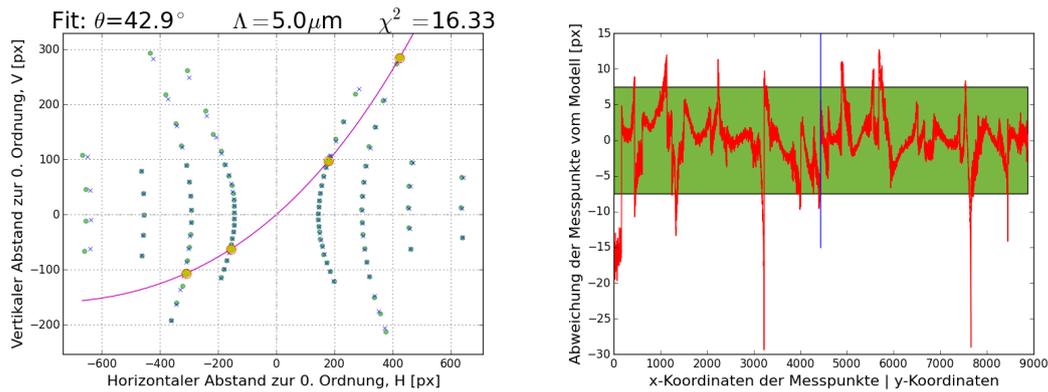
Abbildung 5.12: S1b, $\theta = 15^\circ$: Wie bereits oben beschrieben gibt es bei dieser Messung stärkere Abweichungen, da die Probe nicht passend zur Tischoberfläche ausgerichtet wurde. Dies ist vor allem gut anhand der Abweichungen der y -Koordinaten zu erkennen.

5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 30^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 30^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

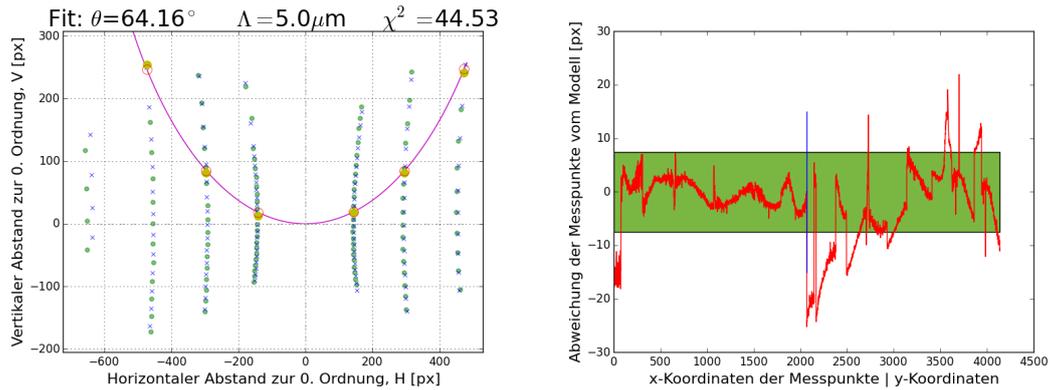
Abbildung 5.13: S1b, $\theta = 30^\circ$: Wie bereits oben beschrieben gibt es bei dieser Messung stärkere Abweichungen, da die Probe nicht passend zur Tischoberfläche ausgerichtet wurde. Dies ist vor allem gut anhand der Abweichungen der y -Koordinaten zu erkennen.



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 30^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 30^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.14: S1b, $\theta = 45^\circ$: Im Bereich 0-167 kann eine Abweichung der x -Koordinate der -4. Ordnung vom Modell beobachtet werden. Bei 440-446 verschwindet die -3. Ordnung, weswegen die Positionen aufgrund der niedrigen Intensität vermutlich nicht richtig ausgelesen wurden. Die Spitzen bei 447-471 und 4881-4927 lassen sich damit begründen, dass die -2. Ordnung auf den Schirm wandert. Beim Übertritt wird das Maxima nicht vollständig am Schirm abgebildet und verzerrt, was eine ungenaue Auswertung zur Folge hat. In den Bereichen 2234-2249 und 7538-7543 wandert die +1. Ordnung über den Rand des Filter. Die +1. Ordnung ist in den Bereichen 3171-3225 und 7627-7659 am Schirm in die Länge gezogen und wandert über den Rand des Schirms hinaus. Im Bereich 3226-3240 erscheint die +2. Ordnung am Schirm. Bei 4392-4432 verschwindet die +4. Ordnung. Die Abweichung bei 5542-5573 ergibt sich durch eine Verzerrung der -2. Ordnung am Schirm. Die Spitze bei 5681-5771 entsteht dadurch, dass die -1. Ordnung über den Rand des Schirms und den Rand des Filters wandert.

5 Ergebnisse

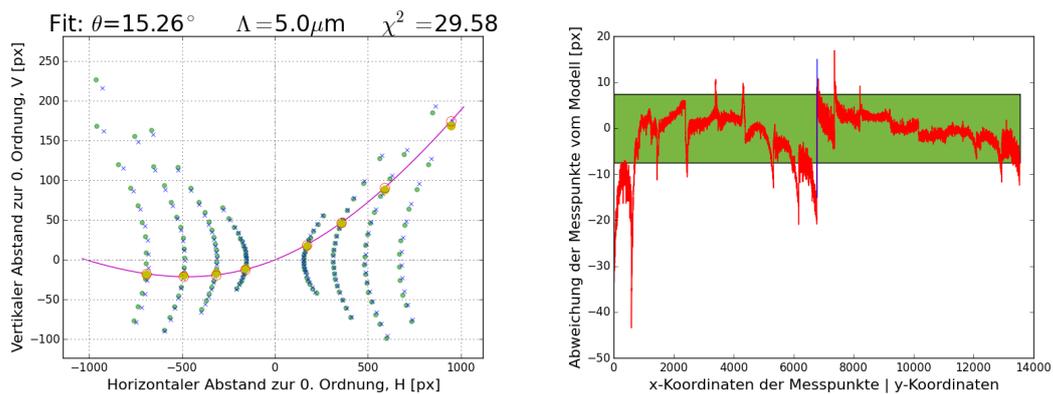


- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 0^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 0^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.15: S1b, $\theta = 60^\circ$: Während der Messung ging die Notbeleuchtung im Labor für eine längere Zeit an weswegen die Bilder von $\varphi = 14^\circ$ bis 45° nicht auswertbar sind. Da deswegen weniger Messwerte zur Verfügung standen wurde in (a) jeder 20. Wert, anstelle jedes 50. Wertes eingezeichnet.

Für die x -Koordinaten der -4. Ordnung ist eine Abweichung vom Modell zu sehen. In der zweiten Hälfte der Grafik sind starke Abweichungen der Messwerte erkennbar. Allerdings scheint es für diesen Messdurchgang Probleme beim Auslesen der y -Koordinaten aus den Aufnahmen zu geben. Die ausgelesenen Werte für die y -Koordinate weichen in fast allen Fällen merklich von den Positionen auf den Fotos ab.

5.1.3 Z1d

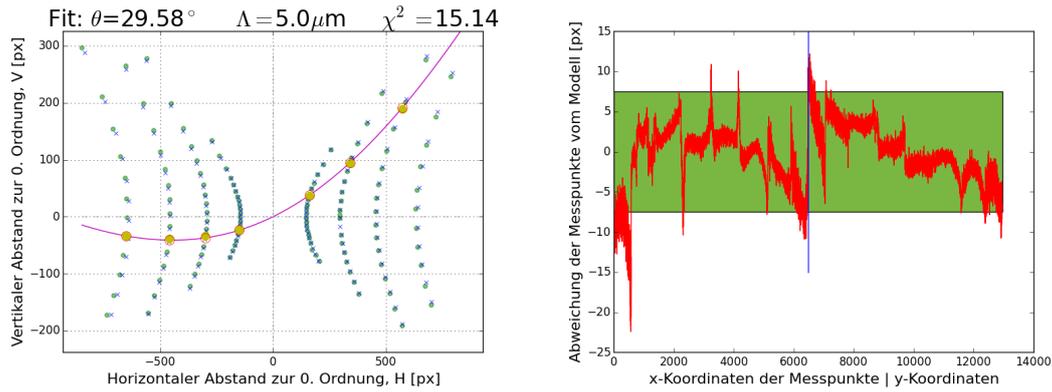


(a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 20^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 20^\circ$

(b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

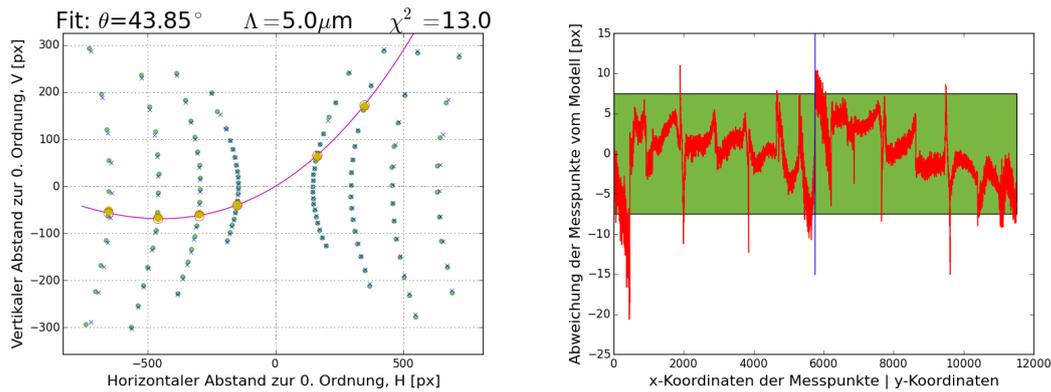
Abbildung 5.16: Z1d, $\theta = 15^\circ$: Die Abweichungen der Messwerte vom Modell in den Bereichen 2426-2452 (-1. Ordnung), 3389-3413 und 4316-4336 (+1. Ordnung) lassen sich durch den Übergang am Rand des Filters erklären. Auffällig ist, dass es vor allem bei der -4. bis -3. und +3. bis +4. Ordnung starke Abweichungen in den x -Koordinaten gibt, obwohl diese richtig ausgelesen wurden.

5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 20^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 20^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

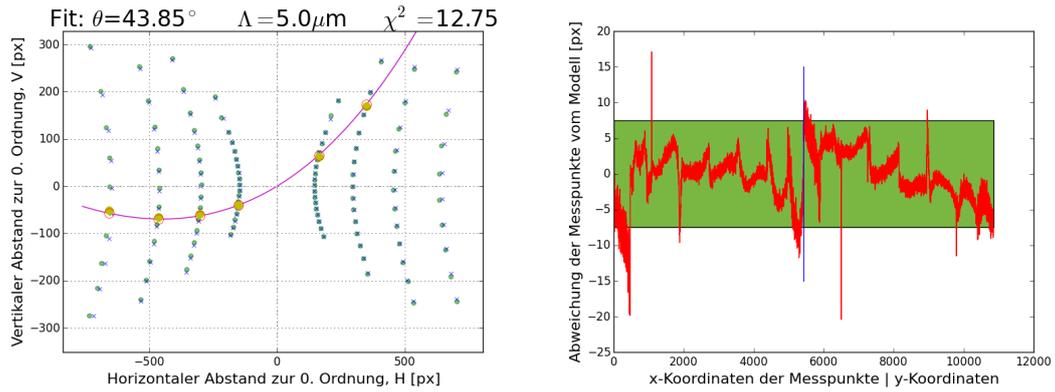
Abbildung 5.17: Z1d, $\theta = 30^\circ$: In den Bereichen 2297-2317 (-1. Ordnung), 3237-3257 und 4151-4168 (+1. Ordnung) wandern die -1. und +1. Ordnung über den Rand des Filters. Bei 5110-5114 ist die +2. Ordnung am Schirm ausgedehnt, was die Bestimmung der genauen Position beeinträchtigt. Die +3. Ordnung bewegt sich bei 12799-12952 über den Rand des Schirms hinaus. Die Abweichungen der -4. und +4. Ordnung ergeben sich nicht durch Ungenauigkeiten beim Auslesen der Positionen von den Aufnahmen.



(a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 20^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 20^\circ$ (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.18: Z1d, $\theta = 45^\circ$: zwischen 0 und 462 und 5761 und 5977 ist wieder eine Abweichung der -4. Ordnung zu sehen. Die Spitzen bei 1901-1912 und 1986-2004 entstehen durch den Übergang der -1. Ordnung am Rande des Schirms und anschließend am Rande des Filters. In den Bereichen 3858-3860 und 9617-9624 wandert die +1. Ordnung über den Rand des Schirms. Bei 5523-5677 und 11433-11505 ist wieder eine Abweichung der +4. Ordnung zu sehen. Die Spitze bei 9501-9512 folgt aus dem Übergang der +1. Ordnung über den Rand des Filters. Bei 10414-10462 und 11066-11142 treten die +2. und +3. Ordnung über den Rand des Schirms.

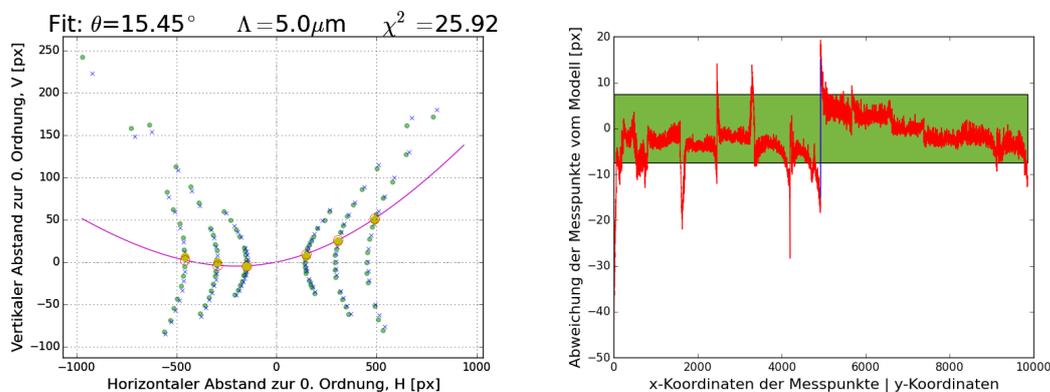
5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 20^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 20^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.19: Z1d, $\theta = 60^\circ$: Vor dem Start dieses Messdurchgangs wurde der Winkel θ falsch eingestellt. Die Messung wurde dadurch erneut bei $\theta = 45^\circ$ durchgeführt.

5.1.4 Z1e

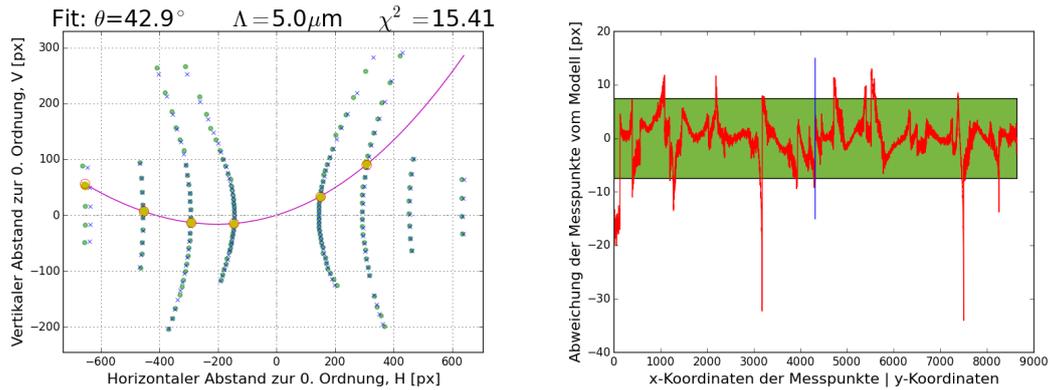


- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 10^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\phi = 10^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.20: Z1e, $\theta = 15^\circ$: Auffallend ist, dass bei dieser Messreihe weder eine +4. noch eine -4. Ordnung auftreten. Die Helligkeit dieser beiden Ordnungen war auf den Fotos verhältnismäßig schwach, weswegen sie vermutlich vom Skript (siehe Kapitel 7 Programm 7.1.2) nicht berücksichtigt wurden.

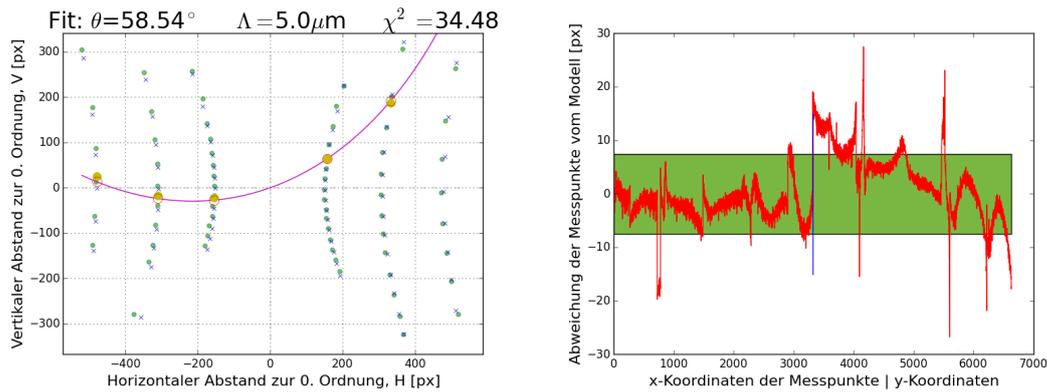
In den Bereichen 0-62 und 4927-5080 ist eine Abweichung der -3. Ordnung zu sehen. Bei 4648-4926 und 9785-9854 kann eine merkbare Differenz der +3. Ordnung vom Modell erkannt werden. Bei 528-801 wird die Abweichung der -3. Ordnung dadurch verursacht, dass das Maximum am Schirm eine Stelle passiert, bei der sich zwei Blätter, aus denen der Schirm besteht, überlappen. Die Spitze bei 1591-1700 wird durch den Übertritt der -1. Ordnung über den Rand des Filters verursacht. Im Bereich 2425-2458 wird die Position des Schwerpunktes vermutlich durch das Streulicht um den Rand des Filters beeinflusst. Die Spitzen bei 2459-2467 und 3273-3325 lassen sich durch den Übergang der +1. Ordnung über den Rand des Filters erklären. Die Spitze bei 4089-4202 und der Übertritt bei 9113-9128 entstehen dadurch, dass die +2. Ordnung weit nach außen wandert und dann am Schirm, vermutlich durch die Probenhalterung, abgeschnitten wird.

5 Ergebnisse



- (a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 10^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 10^\circ$
- (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.21: Z1e, $\theta = 45^\circ$: Auf dem Schirm ist ein größerer Bereich um den Rand des Filters herum erhellt. Dies scheint dazu zu führen, dass ein großer Teil der Koordinaten nicht richtig ausgelesen werden konnte. Im Bereich 1270-1321 wandert das Maximum der -1. Ordnung über den Rand des Filters. Die Spitze bei 3138-3183 wird dadurch verursacht, dass die +1. Ordnung stark in die Länge gezogen ist und schließlich über den Rand des Schirms tritt. Für die restlichen Spitzen konnten die Koordinaten vom verwendeten Programm (siehe Kapitel 7 Programm 7.1.2) nicht richtig ausgelesen werden.



(a) ● Messpunkte, × angepasste Werte, — die Ortskurve bei $\phi = 10^\circ$ (Gl. 2.51), ○ die berechneten Positionen auf der Kurve, ● die Messpunkte bei $\varphi = 10^\circ$ (b) Abweichungen der x - und y -Koordinaten der Messpunkte zu den berechneten Werten. Links von der blauen Linie handelt es sich um die x -Koordinaten, rechts davon um die y -Koordinaten. Das grüne Rechteck hat eine Höhe von 15px und gibt den minimalen Durchmesser der Maxima am Schirm an.

Abbildung 5.22: Z1e, $\theta = 60^\circ$: Bei diesem Messdurchgang gab es ähnliche Probleme wie bei $\theta = 45^\circ$, allerdings nicht so stark ausgeprägt.

Für die -2. Ordnung wurden bei 727-779 zu große Werte ausgelesen, was vermutlich durch das Streulicht am Schirm verursacht wurde. Im Bereich 2284-2288 wandert die +1. Ordnung vom Schirm. Die Koordinaten des Maximums der +3. Ordnung bei 2908-2970 und 3139-3206 wurden vermutlich ebenfalls durch die allgemeine Helligkeit am Schirm verfälscht. Die Positionen der -3. Ordnung bei 3310-3588 wurden richtig ausgelesen, trotzdem ist erneut für die äußerste Ordnung eine starke Abweichung zu sehen. Im darauf folgenden Bereich 3589-4043 ist das Maximum der -2. Ordnung stark in die Länge gezogen. Die Drei Spitzen zwischen 4096 und 4803 begründen sich darauf, dass die -1. Ordnung zunächst über den Rand des Schirms und anschließend über den Rand des Filters wandert. Zwischen 4804 und 5604 können die Spitzen ebenfalls durch den Übertritt der +1. Ordnung über den Rand des Filters und anschließend über den Schirm hinaus erklärt werden. Im Bereich 6186-6313 wandert die +2. Ordnung über den Rand des Schirms. Die Positionen der 3. Ordnung bei 6529-6631 wurden richtig ausgelesen.

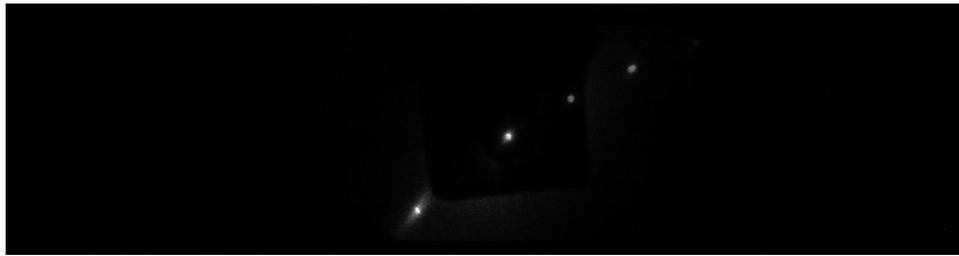


Abbildung 5.23: Eine Aufnahme des Schirms für die Probe Z1e bei $\theta = 45^\circ$ und $\varphi = -45,6^\circ$. Auf dem Foto ist zu erkennen, wie der Schirm um den Graufilter herum deutlich erhellt ist. Dies reicht aus um die genauen Positionen der Maxima zu verfälschen.

An Hand der obigen Abbildungen ist zu erkennen, dass die Positionen der Maxima am Schirm mit unseren Vorhersagen näherungsweise übereinstimmen. Die meisten größeren Abweichungen lassen sich einfach erklären. Auffällig ist allerdings, dass die Vorhersagen für die inneren Ordnungen besser mit den Messungen zusammen passen, als die äußeren. Zusätzlich ist es interessant, dass sich die x -Koordinaten der -4. Ordnung deutlich von unserem Modell unterscheiden. Da diese Abweichungen kontinuierlich auftreten und bei die Abweichungen der +4. Ordnung deutlich geringer ausgeprägt sind, liegt die Vermutung nahe, dass die Ursache für diese Fehler im Aufbau selbst liegt und nicht auf einem Fehler in unserem Modell basiert. Möglicherweise war der Schirm in diesem Bereich nach außen gewölbt, was die zu großen x -Koordinaten erklären könnte.

5.2 Intensität

Die Intensitätsmessung wurde, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, nur an der Probe S1b für die -1. bis +1. Ordnung durchgeführt. Aus den gemessenen Leistungen wurde die Beugungseffizienz η für die -1. und +1. Ordnung in Abhängigkeit von φ bestimmt. Mit Hilfe der RCWA wurden die Dicke der Probe d und die Modulation der Permittivität des Gitters ϵ_1 an η angepasst (siehe Kapitel 7 Programm 7.1.3):

- $\epsilon_1 = 7,71 \cdot 10^{-3} \pm 3 \cdot 10^{-5}$
- $d = 12,83\mu m \pm 0,05\mu m$

Dabei wird ersichtlich, dass die eigentliche Dicke des Gitters deutlich von dem angegebenen Wert von $8,6\mu m$ abweicht. Die angepassten Werte für ϵ_1 und d wurden

verwendet um die Beugungseffizienz des Gitters zu zeichnen und mit den Messwerten zu vergleichen:

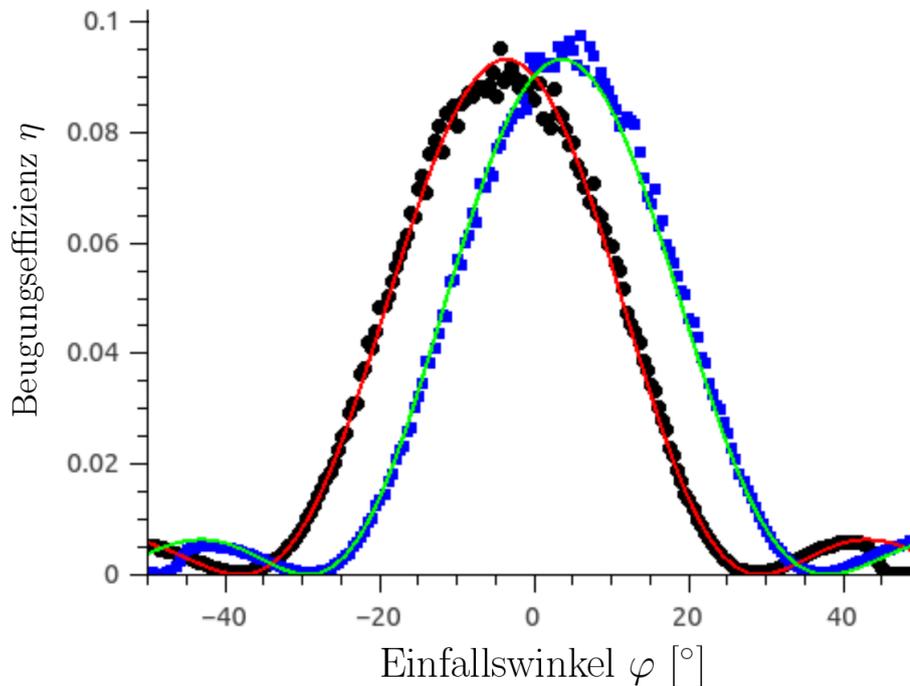


Abbildung 5.24: Die einzelnen Punkte geben die Beugungseffizienz η an, welche aus den Messwerten berechnet wurde. Die Beugungseffizienz der -1. Ordnung wird durch die schwarzen Kreise angegeben, während die blauen Quadrate der Beugungseffizienz der +1. Ordnung entsprechen. Dabei ist bei -45° und bei $+43^\circ$ ein Sprung in den Kurven wahrnehmbar. Bei diesen Werten wanderte der Strahl der jeweiligen Ordnung über den Rand der Photodiode hinaus. Die beiden Graphen in den Messpunkten wurden mit den angepassten Werten für d und ϵ_1 gezeichnet.

Die gezeichneten Kurven passen gut zu den gemessenen Werten mit einer Güte von $\chi^2 = 3,72 \cdot 10^{-6}$. Allerdings ist zu erwähnen, dass die Minima der Winkelabhängigkeit für den Fit und die Messwerte nicht ganz einander entsprechen. Dies lässt sich gut an der Abbildung 5.25 erkennen:

5 Ergebnisse

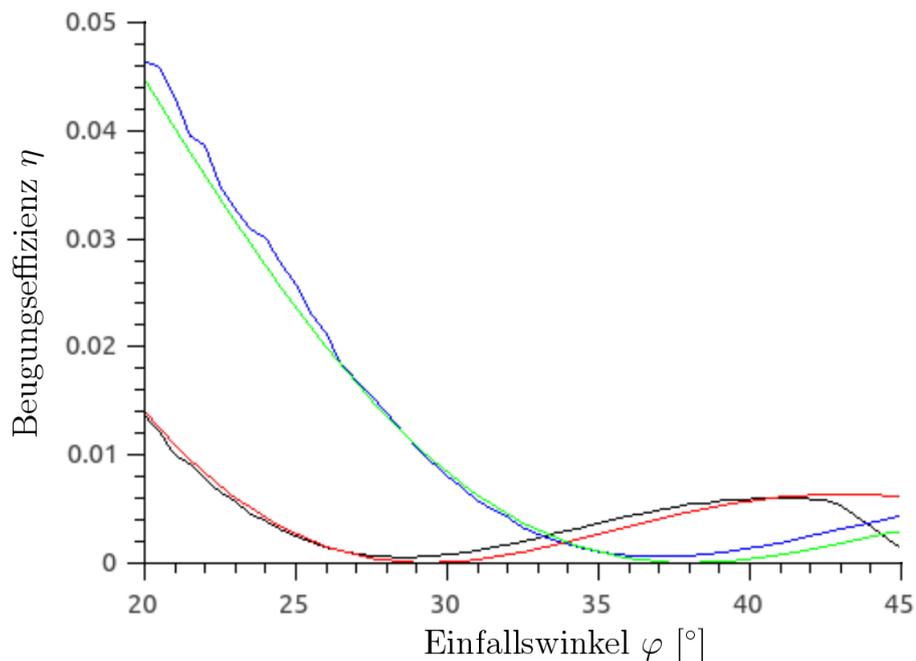


Abbildung 5.25: Beugungseffizienz η für die -1. und +1. Ordnung mit den geploteten Funktionen für die Werte ϵ_1 und d im Bereich von 10° bis 45° . Die schwarze Kurve entspricht den Messwerten der -1. Ordnung, während die angepasste Beugungseffizienz in rot eingezeichnet wurde. Die Messwerte der +1. Ordnung werden durch die blaue Kurve beschrieben, während die angepassten Werte in grün dargestellt wurden.

Dabei ist ersichtlich, dass es eine merkliche Abweichung der Minima der gemessenen und berechneten Kurven gibt.

Mit den Werten für ϵ_1 und d können wir γ und Q' bestimmen (siehe Gleichungen 2.36 und 2.76). Damit lässt sich überprüfen, ob es sich bei dem Gitter tatsächlich um ein dünnes Gitter handelt.

- $Q' = 1,325 \pm 0,005$
- $\gamma = 0.159 \pm 0,01$

Für das Gitter gilt:

- $Q'\gamma = 0.211 \pm 0.014 < 1$
- $\frac{Q'}{2\gamma} = 4.17 \pm 0.27 < 10$

Damit sind beide Bedingungen erfüllt, dass das Raman-Nath-Regime für das Gitter gilt (siehe Gleichung 2.74), und dass es sich um ein dünnes Gitter handelt.

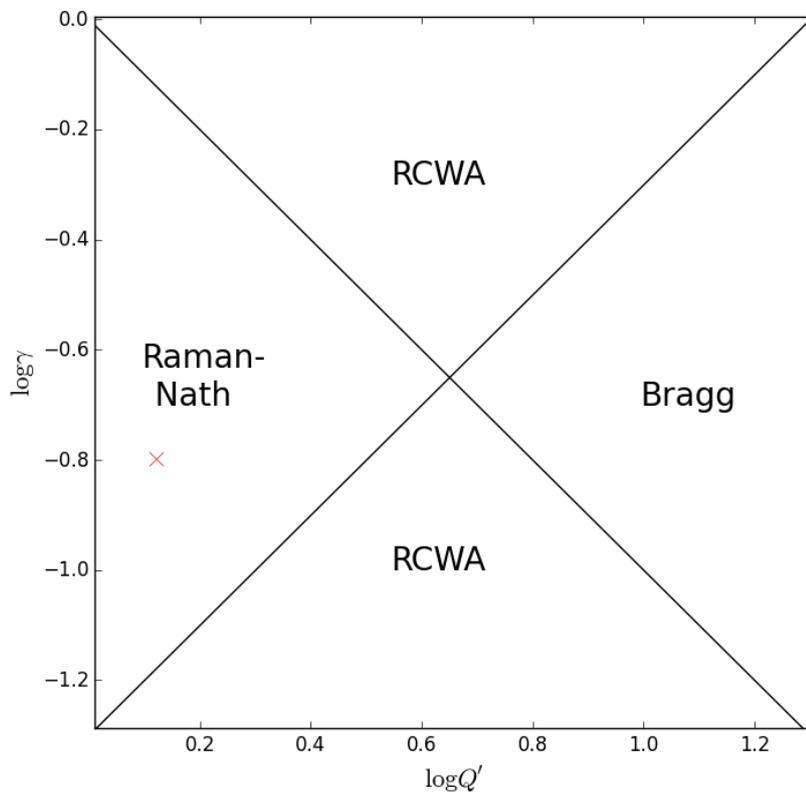


Abbildung 5.26: Die zwei Geraden in der Grafik stellen die Grenzen der Bedingungen für dünne und dicke Gitter dar (siehe Gleichungen 2.77 und 2.78). Die Werte Q' und γ der Probe S1b wurden logarithmiert und ebenfalls eingetragen. Das Gitter liegt eindeutig in dem Bereich, in dem die Beugungseffizienz durch das Raman-Nath Modell beschrieben werden kann. Es handelt sich also um ein dünnes Gitter.

6 Fazit

In dieser Arbeit wurde die Beugung von Licht an dünnen Gittern untersucht, mit dem Ziel genaue Vorhersagen über die Positionen der Maxima auf einem Schirm, in Abhängigkeit des Einfallswinkels, treffen zu können.

In der Ausgangsposition waren der Oberflächenvektor des Gitters \hat{n} und der Wellenvektor des einfallenden Lichtes \vec{k}_0 parallel zur z -Achse, während der Gittervektor \vec{K} parallel zur x -Achse lag. Zunächst wurde in unseren Messungen das Gitter um den Winkel θ um die x -Achse gekippt und anschließend der Rotationswinkel φ um die y -Achse im gewünschten Bereich variiert. Für die Messungen wurden vier Gitter mit gleicher Gitterkonstanten Λ und unterschiedlichen Dicken d verwendet. Die gebeugten Strahlen beleuchteten einen Schirm, welcher zur Auswertung abfotografiert wurde.

In bisherigen Arbeiten [7][16] wurde nur die Ortskurve bestimmt, entlang derer die Beugungsmaxima am Schirm liegen. Im Vergleich dazu, suchten wir eine Methode um die genauen Koordinaten der Maxima auf einem Schirm angeben zu können. Als Grundlage dafür nutzten wir die Floquet-Bedingung, welche wir umformten um uns die Koordinaten (H,V) der einzelnen Positionen am Schirm auszudrücken. Unsere Ergebnisse wurden schließlich mit den durchgeführten Messungen überprüft.

Es zeigt sich, dass der Großteil unserer Messergebnisse das festgelegte Fehlerintervall nicht überschritten. Die meisten Abweichungen können durch konkrete Fehler bei der Durchführung oder Auswertung erklärt werden. Ein Teil der Werte, welche merklich von unseren Vorhersagen abweichen, kann allerdings nicht eindeutig erklärt werden. Diese Werte beschränken sich aber interessanterweise vor allem auf die -4. Ordnung, was die Vermutung nahe liegen lässt, dass der Fehler im Versuchsaufbau verursacht wurde. Ansonsten würden, aufgrund der Symmetrie, die gleichen Abweichungen ebenfalls bei der +4. Ordnung auftreten. Obwohl diese Ordnung tendenziell größere Abweichungen von unserem Modell aufweist, als die inneren Ordnungen, sind diese deutlich schwächer ausgeprägt als für die -4. Ordnung.

Ebenfalls wurde die Beugungseffizienz η_j für die -1. bis +1. Ordnung an einem Gitter bestimmt. Das verwendete Gitter wurde ausgewählt, da die Winkelabhängigkeit von

η_j , aufgrund der Dicke der Probe, am stärksten ausgeprägt war. Mit Hilfe von Photodioden wurden die Leistungen der drei Ordnungen, in Abhängigkeit vom Einfallswinkel, bestimmt. Aus den Ergebnissen konnte die Beugungseffizienz η_j bestimmt werden. Die Rigorous Coupled Wave Theory wurde an die Ergebnisse angepasst und damit konnten die Dicke d und der Modulationsparameter ϵ_1 bestimmt werden. Diese Werte wurden verwendet um die Werte Q' und γ zu bestimmen. Damit konnte schließlich gezeigt werden, dass die beiden Ungleichungen, durch die dünne Gitter klassifiziert werden, erfüllt sind.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 2003.
- [2] M. Fally, J. Klepp, and Y. Tomita. An experimental study on the validity of diffraction theories for off-bragg replay of volume holographic gratings. *Appl. Phys. B*, 108:89–96, 2012.
- [3] T. Gaylord and M. G. Moharam. Planar dielectric grating diffraction theories. *Appl. Phys. B*, 28:1–14, 1982.
- [4] T. K. Gaylord and M. G. Moharam. Thin and thick gratings: terminology clarification. *Appl Opt*, 20(19):3271–3273, Oct 1981.
- [5] R. Gross and A. Marx. *Festkörperphysik*. De Gruyter Oldenbourg, 2014.
- [6] S. Hunklinger. *Festkörperphysik.*, volume 4th ed. De Gruyter Oldenbourg, 2014.
- [7] N. R. Jetty, A. Suman, and R. B. Khaparde. Novel cases of diffraction of light from a grating: Theory and experiment. *Am. J. Phys*, 80(11):972–979, 2012.
- [8] H. Kogelnik. Coupled wave theory for thick hologram gratings. *Bell System Technical Journal*, 48:2909–2947, 1969.
- [9] E. Loewen and C. Palmer. *Diffraction Grating Handbook*. 6. edition edition, 2005.
- [10] K. D. Möller. *Optics*. University Science Books, 1988.
- [11] M. Moharam, T. Gaylord, and R. Magnusson. Criteria for bragg regime diffraction by phase gratings. *Opt. Commun.*, 32(1):14–18, 1979.
- [12] M. Moharam, T. Gaylord, and R. Magnusson. Criteria for raman-nath regime diffraction by phase gratings. *Opt. Commun.*, 32(1):19–23, 1979.

- [13] M. Moharam, T. Gaylord, and R. Magnusson. Criteria for bragg regime diffraction by phase gratings. *Opt. Commun.*, 32:14–18, 1980.
- [14] M. G. Moharam and T. Gaylord. Rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction - e-mode polarization and losses. *Optical Society of America*, 73:451–455, 1983.
- [15] Newport. Spatial filters. URL: <https://www.newport.com/spatial-filters>.
- [16] L. G. Phadke and J. Allen. Diffraction patterns for the oblique incidence gratings. *Am. J. Phys*, 55:562–565, Juni 1987.
- [17] M. Prijatelj, J. Klepp, Y. Tomita, and M. Fally. Far-off-bragg reconstruction of volume holographic gratings: A comparison of experiment and theories. *Phys. Rev. A*, 87:1–8, Jun 2013.
- [18] J. Sheridan. A comparison of diffraction theories for off-bragg replay. *J. Mod. Opt.*, 39:1709–1718, 1992.
- [19] L. Solymar and D. J. Cooke. *Volume Holography and Volume Gratings*. Academic Press, 1981.
- [20] Y. Tomita, E. Hata, K. Momose, S. Takayama, X. Liu, K. Chikama, J. Klepp, C. Pruner, and M. Fally. Photopolymerizable nanocomposite photonic materials and their holographic applications in light and neutron optics. *J. Mod. Opt.*, 63:1–31, 2016.
- [21] Y. Tomita and H. Nishibiraki. Improvement of holographic recording sensitivities in the green in SiO_2 nanoparticle-dispersed methacrylate photopolymers doped with pyrromethene dyes. *Appl. Phys. Lett.*, 83:410–412, 2003.
- [22] P. Wagner, G. Reischl, and G. Steiner. *Einführung in die Physik*. facultas, 1 edition, 2010.
- [23] W. Zinth and U. Zinth. *Optik*. Oldenbourg, 2005.

7 Anhang

7.1 Programme

7.1.1 Programm zur Anpassung unseres Modells an die Ergebnisse der Messungen

```
#Fit Thin grating diffraction order positions for tilt
    ↔ angles and off-Bragg positions
#FIT angular OFFSET and compare to the JETTY formulae!
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import math
import sys
import socket
if socket.gethostname()=='UX31A':
    sys.path.append('/home/fallym4/Python/functions ')
else:
    sys.path.append('/home/fallym4/Python-Remote-Control-
        ↔ Experiments/Linux/functions ')
from scipy.optimize import leastsq
#useful values
pi=math.pi
deg=pi/180
#####
#Set the parameters
#####
wl=0.6328
k0=2*pi/wl#beta in free space
```

```

gs=5.0# Grating spacing in micron
phib=np.arcsin(wl/(2*gs))
sfq=2*pi/gs#spatial frequency
#####
#Import file: Diff-Order, Angle, X-pos, Y-pos
#####
if socket.gethostname()=='UX31A':
    filename="/media/86DCA366DCA34EED/Users/fallym4/ucloud/
        ↪ Heuberger_Georg/GeorgsFolder/Ergebnisse-S1a/
        ↪ data15_01a.dat"
else:
    filename = 'C:/Users/Georg/Dropbox/Uni/Physik/
        ↪ Diplomarbeit/Fit/Data/Z1e/data45_01a_Z1e.dat'
#####
#FIRST ESTIMATE FITPAR (STARTPAR)
#####
w_estim=45.0# tilt in degree
dist_estim=-1131.0#dist in px?
gs_estim=gs#grating spacing in micron
sampling=1#evaluate every sampling-th point only
plotfac=10#sampling-number of points to plot: 1/plotfac
    ↪ point
mphi=20#for plot at constant rotation angle
#####
mydata=np.loadtxt(filename)
data0=mydata#
###FIND first positive order
ts=[]
for i in range(len(data0)):
    if data0[i,0]<0:
        pass
    else:
#         print i
        ts.append(i)
start=ts[0]

```

7 Anhang

```
print start
#####CHOOSE POSITIVE, NEGATIVE OR ALL#####
#data0=mydata[start:]###POSITIVE ORDERS ONLY
#data0=mydata[:start]###NEGATIVE ORDERS ONLY
data=np.transpose(data0[:,sampling])#EVERY sampling-th
    ↪ point
#####
#define funcs: Delta k, Vertical position, Horizontal
    ↪ position
def dk(Q,Z,s):
    'Mismatch function Q=phi, Z=theta, s=difforder'
    return np.real(-k0*np.cos(Q)*np.cos(Z) + 0.5*np.sqrt(k0
        ↪ **2-(2*sfq*s)**2+k0*(k0*np.cos(2*Q)+2*k0*np.cos
        ↪ (2*Z)*np.cos(Q)**2-8*sfq*s*np.sin(Q)))
def hpos(Q,Z,s,l):
    'Horizontal position'
    return l*(dk(Q,Z,s)*np.cos(Z)*np.sin(Q)-sfq*s*np.cos(Q)
        ↪ )/(dk(Q,Z,s)*np.cos(Z)*np.cos(Q)+sfq*s*np.sin(Q)+
        ↪ k0)
def vpos(Q,Z,s,l):
    'Vertical position'
    return l*(dk(Q,Z,s)*np.sin(Z))/(dk(Q,Z,s)*np.cos(Z)*np.
        ↪ cos(Q)+sfq*s*np.sin(Q)+k0)
def thetamax(phi,s):
    'theta-value for total reflection'
    return np.arccos(2*np.sqrt(s*wl/(2*gs))*(s*wl/(2*gs)-np.
        ↪ sin(phi)))/np.cos(phi))
###PLOT CIRCLE WITH defined SIZE
def my_circle_scatter(axes, x_array, y_array, radius=0.5,
    ↪ **kwargs):
    for x, y in zip(x_array, y_array):
        circle = pylab.Circle((x,y), radius=radius, **
            ↪ kwargs)
        axes.add_patch(circle)
    return True
```

```

#####KEEP FIXED IN FIT
ll=1.0#grating spacing factor
os=0.0#rotational offset in Degree
av=0.0#zero vertical position offset
ah=0.0#zero horizontal position offset
#####
def residual_two_functions(pars, x, y1, y2):
    w = pars[0]# Tilt angle
    dist = pars[1]# distance sample-screen
#    ll=pars[2]# Grating spacing
#    av = pars[3]# central vertical position#subtracted from
    ↪ zero order!
#    ah = pars[4]# central horizontal position#subtracted
    ↪ from zero order!
#    os=pars[5]# Offset Angle
    diff1 = y1 - (hpos((x-os)*deg, w*deg, do/ll, dist)+ah)
    diff2 = y2 - (vpos((x-os)*deg, w*deg, do/ll, dist)+av)
    return np.concatenate((diff1, diff2))
#####Data and variables#####
do=data[0]# Diffraction order
x= data[1]# phi external
y1= data[2]# horizontal position
y2= data[3]# vertical position
erry= 10*np.ones(len(y1))
#####
### FIT the (X,Y) positions with free parameters
#####
par_init = np.array([w_estim, dist_estim])#initial values,
    ↪ dist=Distance Sample-Screen in pixels
###FIT NOW###
best, cov, info, message, ier = leastsq(
    ↪ residual_two_functions,
                                par_init, args=(x,
                                ↪ y1, y2),
                                full_output=1)

```

7 Anhang

```
print(" Best-Fit Parameters1: ", best)
[w,dist]=best#return fitted values back to the variables
info=['theta ', ' distance ']
#####CALC chisquare#####
chi2 = np.sum((residual_two_functions(best,x,y1,y2)/1)**2)
    ↪ / (len(residual_two_functions(best,x,y1,y2))-len(best
    ↪ ))
for i in range(len(best)):
    xix=str(info[i])+str(":")+str(best[i])+str('+/-')+str(
        ↪ np.sqrt(chi2*cov[i,i]))#+'\n'
    print xix
print str('ChiSquare:'),str(chi2)
#####READSPECVALS#####
###FIND first index with positive order
pp=[]
for i in range(len(mydata)):
    if mydata[i,1]!=mphi+np.round(os,1):
        pass
    else:
#        print i
        pp.append(i)
print pp
#####The same for the sampled
rr=[]
for i in range(len(data)):
    if data[i,1]!=mphi+np.round(os,1):
        pass
    else:
#        print i
        rr.append(i)
print rr
#####
l=0.01
def Xx(y,t,z,d,l):
    'vertical position as a function of horizontal from
```

```

↪ JETTY-ajp12 '
return (-4*np.sin(2*z)*(d*np.cos(t)+y*np.sin(t))+np.
↪ sqrt(np.cos(t)**2*np.sin(z)**2*(32*d**2+21*l
↪ **2+32*y**2+7*l**2*np.cos(4*z)+4*np.cos(2*z)*(8*d
↪ **2+9*l**2+8*y**2-8*l**2*np.cos(2*t)*np.sin(z)
↪ **2)+8*np.sin(z)**2*(-4*(l**2+2*y**2)*np.cos(2*t
↪ )+l**2*np.cos(4*t)*np.sin(z)**2+8*d*y*np.sin(2*t
↪ )))))/(2+6*np.cos(2*z)-4*np.cos(2*t)*np.sin(z)**2)
#####
def X(par2 , x , y2):
    t = par2[0]
    z = par2[1]
    d = par2[2]
    return y2 - Xx(y1 , (x-t)*deg , -z*deg , d , l)
#####
#####FIT the X function: knowing the horizontal spot
↪ position → vertical spot position
#####
### initial values
#####
par2_init = np.array([mphi , w , dist])
best2 , cov , info , message , ier = leastsq(X,
                                             par2_init , args=(x ,
↪ y2) ,
                                             full_output=1)
#best = leastsq(residual_tzo_functions , par_init , args=(x ,
↪ y1 , y2) , full_output=1)
print(" Best-Fit Parameters2: " , best2)
[t , z , d]=best2
info2=['Angle Offset ' , 'theta ' , 'distance ']
#####
chisq = np.sum((X(best2 , x , y2)/ 1)**2) / (len(X(best2 , x , y2))
↪ -len(best2))
print chi2
for i in range(len(best2)):

```

7 Anhang

```
xix=str(info2[i])+':'+str(best2[i])+str('+/-')+str(np.
    ↪ sqrt(chisq*cov[i,i]))
print xix
print str(" ChiSquare:") +str(chisq)
#####
####SHOW the fits!#####
#####
myst=" Fit:  $\theta$ " +str(np.round(w,2)) + " $\circ$ " + "\t
    ↪ " + " $\lambda$ " +str(np.round(gs*ll,2)) + " $\mu$ " +str("
    ↪ m") + "\t" + " $\chi^2$ " + " $=$ " +str(np.round(chi2,2))
#cmxv=[-13.7,-23.1,-34.65,-50.36,50.36,34.65,23.1,13.7]
xv=np.arange(-50,5.1,1)
clist=['g','r','b','y','0.5','0.9','c','0.3','g']
dv=np.arange(-4,5,.1)#Make step 1 to have only the value at
    ↪ the correct order
l=0.01
d=np.abs(dist)
yy=np.arange(np.min(y1),np.max(y1),1)
#plt.close("all")
yfig, ax1 = plt.subplots(1, 1, sharex=True,sharey=True,num
    ↪ =1)
#yfig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, sharex=True,sharey=
    ↪ True,num=1)
#ax2.cla()
ax1.cla()
plt.title(str(myst),{'fontname':'Ubuntu', 'size':42})
ax1.set_title(str(myst),{'fontname':'Ubuntu', 'size':24})
ax1.set_xlim(1.1*min(y1),1.1*max(y1))
ax1.set_ylim(1.1*min(y2),1.1*max(y2))
ax1.set_xlabel("Horizontaler Abstand zur 0. Ordnung, H [px
    ↪ ]",{'size':16})
ax1.set_ylabel("Vertikaler Abstand zur 0. Ordnung, V [px
    ↪ ]",{'size':16})
#axes=pylab.axes()
#my_circle_scatter(axes, y1, y2, radius=1.0, alpha=.1,color
```

```

↪ =(1,0.8,0)
ax1.scatter(y1[:, : plotfac], y2[:, : plotfac], alpha=0.5, color='g
↪ ', label='Messung')
#ax1.scatter(y1[:, : plotfac], y2[:, : plotfac], s=550, facecolor='
↪ none', alpha=0.15, color='r', label='Durchmesser 20px')
ax1.plot(yy, Xx(yy, -mphi*deg, w*deg, d, l), color='m', label=str(
↪ mphi)+str("$^\circ$"))#Indian line
ax1.plot(hpos((x[:, : plotfac]-os)*deg, w*deg, do[:, : plotfac]/ll,
↪ dist)+ah, vpos((x[:, : plotfac]-os)*deg, w*deg, do[:, :
↪ plotfac]/ll, dist)+av, marker='x', markersize=5,
↪ linestyle='none', label='Modell')
ax1.plot([1*min(y1), 1.0*max(y1)], [av, av], color='0.8',
↪ linestyle='--')
ax1.plot([ah, ah], [1.0*min(y2), 1.0*max(y2)], color='0.8',
↪ linestyle='--')
#ax1.legend(loc='best')
ax1.grid()
#ax.set_xlim(-800,800)
#ax.set_ylim(-400,400)
#####
#myst2="Fit: $\theta$="+str(np.round(z,2))+"^\circ$"+"\t
↪ "+"$\Delta\phi$="+str(np.round(t,3))+"^\circ$"+"\t
↪ "+"$\chi$"+"$_2$="+str(np.round(chisq,2))
#ax2.set_title(str(myst2), {'fontname': 'Ubuntu', 'size': 24, '
↪ color': clist[4]})
#ax2.scatter(y1, y2, alpha=0.3, color='g')
#ax2.plot(y1, Xx(y1, -(x-t)*deg, z*deg, d, l), mfc='None', marker
↪ ='o', linestyle='None', mec=clist[1], color=clist[3])
#ax2.plot(hpos((x-t)*deg, -z*deg, do/ll, d)+ah, vpos((x-t)*deg
↪ , -z*deg, do/ll, d)+av, marker='x', markersize=5, linestyle
↪ ='none')
#ax2.plot([1*min(y1), 1.0*max(y1)], [av, av], color='r',
↪ linestyle='--')
#ax2.plot([ah, ah], [1.0*min(y2), 1.0*max(y2)], color='r',
↪ linestyle='--')

```

7 Anhang

```
#ax2.grid()
plt.show()
if socket.gethostname()=='UX31A':
    plt.show(block="True")
else:
    pass
for j in range(len(pp)):
    ax1.plot(mydata[pp,2],mydata[pp,3],markersize=8,marker
    ↪ ='o',linestyle='None',mec='y',color=clist[3])

ax1.plot(mydata[pp,2],Xx(mydata[pp,2],-mphi*deg,w*deg,d,l),
    ↪ markersize=10,mfc='None',marker='o',linestyle='None',
    ↪ mec=clist[1],color=clist[3])
#####
#####PLOT ERROR
plt.figure(3)

plt.title("Error=residual per point in pixel, horizontal -
    ↪ vertical")
plt.clf()
plt.plot(range(len(residual_two_functions(best,x,y1,y2))),
    ↪ residual_two_functions(best,x,y1,y2),color='r')
plt.plot([len(y1),len(y1)],[15,-15])
    #[np.min(residual_two_functions(best,x,y1,y2)),
    ↪ np.max(residual_two_functions(best,x,y1,y2)
    ↪ )])

plt.draw()
someX, someY = 0, 0

currentAxis = plt.gca()
#currentAxis.axes.get_xaxis().set_ticks([])
currentAxis.add_patch(Rectangle((someX, someY-7.5), 2*len(
    ↪ y1), 15, facecolor=(0.478,0.718,0.259)))
currentAxis.set_ylabel("Abweichung der Messpunkte vom
```

```

    ↪ Modell [px]" , { 'size ':16})
currentAxis.set_xlabel("x-Koordinaten der Messpunkte | y-
    ↪ Koordinaten" , { 'size ':16})
plt.draw()
#####
#plt.figure()
#f, axarr = plt.subplots(1,2,num=7)
#f.subplots_adjust(hspace=0)
#axarr[0].set_title('x-pos (angle)')
#axarr[0].scatter(x,y1,marker='o',c='r')
#axarr[0].plot(x,hpos(x*deg,w*deg,do*ll,dist)+ah,marker='x
    ↪ ',markersize=5,linestyle='none')
#axarr[0].grid()
#axarr[1].set_title('z-pos (angle)')
#axarr[1].scatter(x,y2,marker='o',c='b')
#axarr[1].plot(x,vpos(x*deg,w*deg,do*ll,dist)+av,marker='x
    ↪ ',markersize=5,linestyle='none')
#axarr[1].grid()
#plt.draw()
#mydata0=np.loadtxt("/home/fallym4/uCloud/Heuberger_Georg/
    ↪ GeorgsFolder/Ergebnisse-Z1d/alle/data45_01_zero.dat")
#pata=np.transpose(mydata0)
#plt.scatter(pata[2],pata[3],alpha=0.5,color='r')

```

7.1.2 Programm zur Auswertung der Positionen der Ordnungen auf den Fotos

```

#####
#Find Position and relative values of Diffraction spots
#for multiple Files
#Calculate the position as 1) max. (hx,hy) 2) center of
    ↪ gravity
#mF 2014-04-14
#####
import os,sys
import Image

```

7 Anhang

```
import time
import itertools
from Tkinter import Tk
from tkFileDialog import askopenfilename
import smoothfunc
import numpy as np
from scipy import ndimage
import matplotlib.pyplot as plt
#####
Tk().withdraw() # we don't want a full GUI, so keep the
    ↪ root window from appearing
filename = askopenfilename(defaultextension='.jpg',
    ↪ filetype=[('Photos', '*.jpg')]) # show an "Open"
    ↪ dialog box and return the path to the selected file
print str(filename[-11:-7]), 'max file '
filemax=int(filename[-11:-7])#Last filename; ending with:
    ↪ ...xxx.mpa=>xxx
folder=str(filename[:-11])#folder-number[:-15]# Directory
##filemax=int(filename[-11:-7])#Last filename; ending with
    ↪ : ...xxx.mpa=>xxx
##print str(filename)
print str(folder)+str(filemax)
##par=int(filename[-11:-7])
##nnn=np.zeros((128,128))#array define from zeros 128x128
#####ENTER YOUR PREFS#####
numbdat=10#number of files to process/keep it!
ph=51#half of stripheight (vertical strip width)
pw=51#half of stripwidth (horizontal strip width)
smoothpoints=1#how many points for convolution
threshold=0.03#threshold for the relative height
maxnpeak=7#Maximal number of peaks
hoch=1650#max px-value to start with (to reduce reflection
    ↪ from table)
tief=1250#min px-value to start with
#####
```

```

jetzt=time.time()
for par in range(int(filemax)-numbdat+1,int(filemax)+1,1):
    pass
    if len(str(par))==1:
        spar="000"+str(par)
    elif len(str(par))==2:
        spar="00"+str(par)
    elif len(str(par))==3:
        spar="0"+str(par)
    else:
        spar=str(par)
    try:
        jpgfile=Image.open(str(folder)+str(spar)+str('_nf.
        ↪ jpg'))
        matr1=np.asarray(jpgfile)
    except IOError as e:
        pass
#####
print 'ACHTUNG:'+str(folder)+str(spar)+str('_nf.jpg')
## print folder,spar,jpgfile.size
fs=jpgfile.size
matr=matr1[tief:hoch,0:fs[0]-3*pw]#remove the noise-
    ↪ reflection from the table
fs=matr.shape#[0]
mxpos=[]
mvals=[]
plt.close('all')
print 'Datei:', par#, matr[2000][3000]
#####
colsum=np.sum(matr,axis=0)
rowsum=np.sum(matr,axis=1)
tvmin=np.argmax(colsum)
thmin=np.argmax(rowsum)#gibt zentrale pixel zeile
jj=range(len(colsum))
ii=range(len(rowsum))

```

7 Anhang

```
## plt.figure('2D')
## plt.xlim(0, fs[1])
## plt.title(par)
## plt.plot(jj, (colsum-np.ones(len(colsum))*min(colsum))
↪ /
## float((max(colsum)-min(colsum))), marker='x',
↪ c='r')
## plt.plot([0, fs[1]], [threshold, threshold], c='g')
## plt.grid()
## plt.show()
print tvmin, thmin
#NOW plot the sum
print 'Zero order position (maxInt)', tvmin, thmin
ud=thmin
dox=matr[ud-ph:ud+ph]
cs=np.sum(dox, axis=0)
tx=[]
for i in range(len(cs)-2*pw):
    tx.append(np.sum(cs[i:i+2*pw]/float(max(cs))/float(
↪ pw)))
gradorg=np.diff(tx)
secderorg=np.diff(gradorg)
ss=range(len(gradorg))
pp=range(len(tx))
myvec=[]
zero_crossings = np.where(np.diff(np.sign(gradorg)))[0]
## print zero_crossings
for i in range(len(gradorg))[:-2]:
    if ((tx[i]/float(max(tx))>=threshold) &
        (i in zero_crossings) &
        (secderorg[i]/np.max(secderorg)<0)):
        myvec.append([i, tx[i]/float(np.sum(tx))])
    else:
        pass
while len(myvec)<maxnpeak:
```

```

myvec.append([fs[0]-3.0*pw,0.0])
mxpos=np.transpose(myvec)[0]+pw+1#corrected position
mypos=ud*np.ones(len(mxpos))
mvals=np.transpose(myvec)[1]
###print mxpos,mypos
#print mxpos
fyvec=np.transpose([mxpos,mvals])#correct vector
###print fyvec
#####CALCULATE THE Center of gravity!#####
gx=[]
gy=[]
gi=[]
hx=[]
hy=[]
for k in range(len(mxpos)):
    p0=matr[ud-ph:ud+ph,int(mxpos[k]-pw):int(mxpos[k]+
        ↪ pw)]#minimatrix
    p1=list(itertools.chain.from_iterable(p0))#p0 as a
        ↪ single list
    maxvalpos=p1.index(np.max(p1))
    maxx=np.floor(float(maxvalpos)/float(p0.shape[1]))#
        ↪ trivial
    maxy=maxvalpos-float(maxx)*float(p0.shape[1])
    hx.append(maxx+(ud-ph))
    hy.append(maxy+mxpos[k]-pw)
    p2=matr[hx[k]-ph:hx[k]+ph,int(hy[k]-pw):int(hy[k]+
        ↪ pw)]
    tots=float(np.sum(p2))
    ccx=ndimage.measurements.center_of_mass(p2)[0]
    ccy=ndimage.measurements.center_of_mass(p2)[1]
    gx.append(ccx)
    gy.append(ccy)
    gi.append(float(tots))
cogx=map(sum,itertools.izip(gx,hx))-np.ones(len(gx))*
    ↪ float(ph)+np.ones(len(gx))*float(tief)#check here

```

7 Anhang

```
cogy=map(sum, itertools.izip(gy,hy))-np.ones(len(gy))*
    ↪ float(pw)#check here
gyvec=np.transpose([cogx,cogy,gi])
hyvec=np.transpose([hx,hy])
##    print gyvec
#####WRITE OUT TO FILE#####
##    v2file=str(spar)+'\t'+'\t'.join(map(str,list(
    ↪ itertools.chain.from_iterable(fyvec))))+'\r'
##    outfile = open(str(folder)+str('fs004-mean_')+str
    ↪ (time.localtime()[0])+'-'+str(time.localtime()
    ↪ [1])+'-'+str(time.localtime()[2])+'-'+str(ph)+str
    ↪ ('.dat'),'a')
##    outfile.write(v2file)
##    outfile.close()
v3file=str(spar)+'\t'+'\t'.join(map(str,list(itertools.
    ↪ chain.from_iterable(gyvec))))+'\r'
##    print str(v3file)
outfile = open(str(folder[:-4])+str('files-cog_')+str(
    ↪ time.localtime()[0])+'-'+str(time.localtime()[1])
    ↪ +'-'+str(time.localtime()[2])+'-'+str(ph)+str('.
    ↪ dat'),'a')
outfile.write(v3file)
outfile.close()
##v4file=str(spar)+'\t'+'\t'.join(map(str,list(
    ↪ itertools.chain.from_iterable(hyvec))))+'\r'
##outfile = open(str(folder)+str('fs004-maxi_')+str(
    ↪ spar)+str(time.localtime()[0])+'-'+str(time.
    ↪ localtime()[1])+'-'+str(time.localtime()[2])+'-'+
    ↪ str(ph)+str('.dat'),'a')
##outfile.write(v4file)
##outfile.close()
dann=time.time()
print str(dann-jetzt)
####ONLY FOR TESTING LAST FILE
plt.ion()
```

```

plt.figure('Contour')
plt.title(filename)
pax=plt.imshow(matr)
plt.plot(jj,(colsum-np.ones(len(colsum))*min(colsum))*matr.
    ↪ shape[0]/
        float((max(colsum)-min(colsum))),c='y',linewidth
            ↪ =4)#c=(0.9,0.2,0.3))
plt.xlim(0,fs[1])
plt.ylim(0,fs[0])
plt.scatter(cogy,cogx-np.ones(len(cogx))-tief,s=50,marker='
    ↪ o',c='w',label='cog')
plt.scatter(mxpos,cogx-np.ones(len(cogx))-tief,s=30,marker
    ↪ ='x',c='w',label='box_c')
plt.scatter(hy,hx,s=50,marker='x',c='y',label='max_box')
for k in range(len(mxpos)):
    plt.plot([int(hy[k]-pw),int(hy[k]-pw),int(hy[k]+pw),
        int(hy[k]+pw),int(hy[k]-pw)],
        [hx[k]-ph,hx[k]+ph,hx[k]+ph,hx[k]-ph,hx[k]-ph
            ↪ ],c='y')
plt.colorbar(pax,ticks=np.arange(0,251,50),orientation='
    ↪ horizontal')
plt.legend()
plt.draw()
#sum extra
kk=range(len(cs))
plt.figure('Line')
plt.plot(kk,np.log10(cs),c='y',linewidth=2)#c=(0.9,0.2,0.3)
    ↪ )
plt.grid()
##plt.plot(kk,np.log10(np.ones(len(kk))*threshold),c='r')
plt.draw()

```

7.1.3 Programm zur Anpassung der RCWA an die Beugungseffizienz

```
#####
```

7 Anhang

```
#Calculate the diffraction efficiencies (+/-3,2,1;0)
#for non-sinusoidal grating (epsilon0-epsilon3)
##!Arbitrary ODD number of waves can be retained!!
#as a function of the angle of incidence (TE-mode)
# ROCKING CURVE
#####
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time,os
import matplotlib.gridspec as gridspec
#derivates
pi=np.pi
deg=pi/180
def l10(x):
    return np.log(10,x)
#Set the parameters
##filename='eta2.dat'
#wavelength in micrometres
wavelength=0.633#wavelength in micron#OTHER FIGURE
k0=2*pi/wavelength
#grating spacing LAMBDA
gspacing=5.0#(111)
tbe=np.arcsin(wavelength/2.0/gspacing)#external Bragg angle
#Thickness in micrometres, estimate
thick=12.4368221
#####
##theta SET: Rocking curve angles
theta=np.arange(-50*deg,50*deg,1.0*deg)
#susceptibility modulation (epsilon0,1,2,3...)
nzero=1.506208#refractive index in region 1, might be 1
e0=(nzero)**2
e1=0.00770758912312##!2*e1 corresponds to Delta epsilon!!
    ↔ thus n1=e1 for neutrons
e2=0*0.68*e1/4
e3=0.0*e1/4
```

```

e4=0
e5=0
def grat(x):
    return e0+e1*np.sin(2*pi*x)+e2*np.sin(2*2*pi*x)+e3*np.
        ↪ sin(3*2*pi*x)+e4*np.sin(4*2*pi*x)+e5*np.sin(5*2*
        ↪ pi*x)
#####
##Number of waves to retain in analysis is given by length
    ↪ of ee0
##IF even number of modes, please, only [e0,e1] or [e1,e0,
    ↪ e1,e2]...
##NOT [e2,e2,e0,1]!
#####!!!!!!!#####
ee0=[e5,e4,e3,e2,e1,e0,e1,e2,e3,e4,e5]#11waves
#ee0=[e3,e2,e1,e0,e1,e2,e3]#7waves
##ee0=[e2,e1,e0,e1,e2,e3]#6waves
##ee0=[e2,e1,e0,e1,e2]#5waves
##ee0=[e1,e0,e1,e2]#4waves
#ee0=[e1,e0,e1]#3waves
##ee0=[e0,e1]#2waves
##ee0=[e0]#refractive phase
#####!!!!!!!#####
#####FILENAME
#####FOLDER
dayfolder=str(time.localtime()[-2])
if not os.path.exists(dayfolder):
    os.makedirs(dayfolder)
filename=str(dayfolder)+str('/')+str('hM')+str('C')+str(len
    ↪ (ee0))+'_'+'-'.join(map(str,time.localtime()[:3]))
if np.floor(len(ee0)/2.0)==np.ceil(len(ee0)/2.0):# if even
    ↪ number of waves
    N0=len(ee0)
    N=int(np.floor((N0-1)/2))
    n0=np.arange(-N,N+2,1)
    jj=np.arange(0,N0,1)

```

7 Anhang

```
ee0=ee0[-1:]+ee0
aeps=[]
beps=[]
epsmat=[]
mdu=[ee0[x] for x in range(N0+1)]
for j in range(N+1):
    aeps=mdu[N+1-j:]
    beps=aeps+[0]*(N0-len(aeps))
    epsmat.append(beps)
    aeps=[]
##print ceps
for j in range(N+1):
    aeps=mdu[:-(j+1)]
    beps=[0]*(N0-len(aeps))+aeps
    epsmat.append(beps)
    aeps=[]

tv=1
else:# if odd number of waves
    N0=len(ee0)
    N=int(np.floor((N0-1)/2))
    n0=np.arange(-N,N+1,1)
    jj=np.arange(0,N0,1)
    aeps=[]
    beps=[]
    epsmat=[]
    mdu=[ee0[x] for x in range(N0)]
    ##print N, N0
    for j in range(N+1):
        aeps=mdu[N-j:]
        beps=aeps+[0]*(N0-len(aeps))
        epsmat.append(beps)
        aeps=[]
    ##print ceps
    for j in range(N):
        aeps=mdu[:-(j+1)]
```

```

        beps=[0]*(N0-len(aeps))+aeps
        epsmat.append(beps)
        aeps=[]

    tv=0
    ##print epsmat,'xxx'
    ##ang=[0]#np.arange(-4*deg,4*deg,1*deg)
    hiaz=time.time()
    #plt.close('all')
    ###Open file
    try:
        with open(str(filename)+str('e')) as f: os.remove(str(
            ↪ filename)+str('e'))
        with open(str(filename)+str('p')) as f: os.remove(str(
            ↪ filename)+str('p'))
        with open(str(filename)+str('t')) as f: os.remove(str(
            ↪ filename)+str('t'))
    except IOError as e:
        print 'New file!'
        pass
    #####
    outfile = open(str(filename)+str('e'),'a')
    ofilet = open(str(filename)+str('p'),'a')
    ofile = open(str(filename)+str('t'),'a')
    #####
    ##epsmat=[[e0,e1,e2,e3,0,0,0],[e1,e0,e1,e2,e3,0,0],[e2,e1,
    ↪ e0,e1,e2,e3,0],
    ##
    [e3,e2,e1,e0,e1,e2,e3],[0,e3,e2,e1,e0,e1,e2
    ↪ ],[0,0,e3,e2,e1,e0,e1],[0,0,0,e3,e2,e1,e0]]
    ##print epsmat,'xx'
    #####
    #theta=np.arange(-11*deg,+11*deg,12*deg)
    k0vec=k0*np.ones(N0)
    print 'Be patient - calculating ...'
    #single value test
    for x in theta:##This is the angular range

```

7 Anhang

```

now=time.time()
kxvec=k0*(nzero*np.sin(x)-n0*wavelength/gspacing)*np.
    ↪ ones(N0)
##    k0vec=k0*np.ones(N0)
for i in jj:
    if k0vec[i]>kxvec[i]:
        kzvec=np.sqrt((nzero*k0)**2-kxvec**2+0j)
    else:
        kzvec=+1j*np.sqrt(kxvec**2-(k0*nzero)**2+0j)
Kxmat=(kxvec/k0)*np.identity(N0)+0j
##    Bmat=np.dot(np.dot(Kxmat,np.inverse(epsmat)),Kxmat)-
    ↪ np.identity(N0)+0j
Amat=Kxmat**2-epsmat
eigenValues,eigenVectors=np.linalg.eig(Amat)
idx=eigenValues.argsort()
eigenValues=eigenValues[idx]
eigenVectors=eigenVectors[:,idx]
q=np.sqrt(eigenValues)
W=eigenVectors
Q=q*np.identity(N0)
V=np.dot(W,Q)
F=np.identity(N0)*0j
G=np.identity(N0)*0j
for i in range(N0):
    for m in range(N0):
        F[i,m]=V[i,m]+1j*kzvec[i]/k0*W[i,m]
        G[i,m]=(1j*kzvec[i]/k0*W[i,m]-V[i,m])*np.exp(-
            ↪ k0*thick*q[m])
S=np.vstack([np.hstack([F,G]),np.hstack([-G,-F])])
if tv==1:#even
    sv=[0]*N+[1j*(nzero*np.cos(x)+kzvec[N]/k0)]+[0]*int
        ↪ (N0/2.0)+[0]*N0
else:#odd
    sv=[0]*N+[1j*(nzero*np.cos(x)+kzvec[N]/k0)]+[0]*(3*
        ↪ N+1)

```

```

cs=np.dot(np.linalg.inv(S),sv)
tmat=np.identity(N0)*0j
for m in range(N0):
    for i in range(N0):
        tmat[i,m]=W[i,m]*(cs[m]*np.exp(-k0*thick*q[m]))+
            ↪ cs[m+N0])
t=np.sum(tmat,axis=1)
phase=np.arctan2(np.imag(t*np.exp(1j*k0*np.cos(x)*thick
    ↪ )),np.real(t*np.exp(1j*k0*np.cos(x)*thick)))
abst=np.absolute(t)
eta=np.absolute(t)**2*np.real(kzvec/(k0*nzero*np.cos(x)
    ↪ ))
stime=time.time()
#Rocking curve
hi=str(x/deg)+'\t'+'\t'.join(map(str,eta))+'\r'#writes
    ↪ out the eta for any number of waves
ho=str(x/deg)+'\t'+'\t'.join(map(str,phase))+'\r'
ha=str(x/deg)+'\t'+'\t'.join(map(str,abst))+'\r'
outfile.write(hi)
ofile.write(ha)
ofilet.write(ho)
itzund=time.time()
# print eta
outfile.close()
ofilet.close()
ofile.close()
#print "Total time:"+str(hiaz-time.time())+"secs"
###PLOT
thetabint=np.arcsin(wavelength/(2*gspacing*nzero))#internal
    ↪ bragg angle
nu=e1*pi*thick/(nzero*wavelength*np.cos(thetabint))
iii=np.sin(nu)**2
#print iii ,str(" eta_1 for Kogelnik")
ll=[]
dd=[]

```

7 Anhang

```
cc=[]
###Diffraction efficiency
schnips=str(filename)+str('e')
dd=np.loadtxt(str(schnips))
cc=np.transpose(dd)
ll=np.ones(len(cc[0]))
markerlist=["x","o","p","v","^","*","$\leftarrow$
↔ ","+","$\updownarrow$","^"]
clist=['r','g','b','k','y',(0.4,0.5,0.2)]
#data##
#filename="/home/fallym4/uCloud/Heuberger_Georg/
↔ GeorgsFolder/Intensity/S1b_4orders_aug.dat"#
↔ S1b_final_july.dat"
filename="E:/Downloads/S1b_final_july.dat"
#"/media/86DCA366DCA34EED/Users/fallym4/ucloud/
↔ Heuberger_Georg/GeorgsFolder/Python/RCWA/
↔ S1b_final_july.dat"
mdax=np.loadtxt(filename)
mdat=np.transpose(mdax)
tfac=1
x0e=mdat[0][:tfac]##extern
x0=np.arcsin(np.sin(x0e*deg)/nzero)/deg#internal angles
#####Plot#####
try:
    plt.close('Diffraction efficiency')
except:
    pass
fig = plt.figure('Diffraction efficiency')
#plt.title('$\eta$', fontsize=36, backgroundcolor='w')
#plt.axis("None")
gs = gridspec.GridSpec(2,2)
gs.update(left=0.05, right=0.95, hspace=0.0, bottom=0.1)
ax1 = fig.add_subplot(gs[0:,0])
ax2 = fig.add_subplot(gs[0:,1])
ax1.set_xlabel('$\theta_{\text{internal}}$/degree', fontsize=24,
```

```

    ↪ color='b')
ax1.set_ylabel('$\\eta_{s}$', fontsize=24)
ax1.set_xlim([-30.0,0.0])#[min(cc[0]),max(cc[0])]
#ax1.set_ylim([min(cc[N0]),max(cc[N0])])
ax1.set_ylim([0.0,1.0])
ax2.set_xlabel('$\\theta_{external}$ / degree', fontsize=24,
    ↪ color='g')
ax2.set_ylabel('$\\eta_{s}$', fontsize=24)
mtxt=str('$\\epsilon_0=$')+str(np.round(e0,3))+ '\\n'+str(
    '$\\epsilon_1=$')+str(np.round(e1,8))+ '\\n'+str(
    '$\\epsilon_2=$')+str(np.round(e2,8))+ '\\n'+str(
    '$\\epsilon_3=$')+str(np.round(e3,8))+ '\\n'+str('$\\eta_{
    ↪ {2wc}=$')+str(np.round(iii,2))
ax1.text(0,0.5,mtxt,fontsize=24)
#####PLOT CALCULATED LINE
for jo in np.arange(1,N0+1,1):
    ax1.plot(cc[0],cc[jo],lw=2,
            label=str(jo-N-1)+'DE-order')
#####PLOT THE DATA
for i in np.arange(1,len(mdat),1):
    ax1.plot(x0,mdat[i],label=str(i-2), marker=markerlist[i
    ↪ ], color=clist[i], markersize=3,linestyle='None',
    ↪ alpha=0.5)
ax1.legend(loc=2)
ax2.set_xlim([min(np.arcsin(np.sin(cc[0]*deg)*nzero)/deg),
    ↪ max(np.arcsin(np.sin(cc[0]*deg)*nzero)/deg)])
ax1.grid()
#####EXTERNAL
#####PLOT CALCULATED LINE
for jo in np.arange(1,N0+1,1):
    ax2.plot(np.arcsin(np.sin(cc[0]*deg)*nzero)/deg,cc[jo],
    ↪ lw=2,
            label=str(jo-N-1)+'DE-order')
#####PLOT THE DATA
for i in np.arange(1,len(mdat),1):

```

7 Anhang

```
ax2.plot(np.arcsin(np.sin(x0*deg)*nzero)/deg, mdat[i],
        ↪ label=str(i-2), marker=markerlist[i], color=clist
        ↪ [i], markersize=3, linestyle='None', alpha=0.5)
ax2.grid()
ax2.legend(loc=7)
plt.show()
```

7.2 Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Beugung von Licht an dünnen Gittern. Dabei interessieren wir uns vorwiegend für die Situation, in der der Einfallsvektor nicht normal auf die Gitterebenen steht. Für diesen Fall liegen die Beugungsmaxima auf einem Schirm nicht mehr wie gewohnt auf einer Geraden, sondern bilden eine Kurve zweiten Grades. Diese Fälle wurden von uns bei unterschiedlichen Einfallswinkeln überprüft und die Positionen der Maxima ausgewertet. Dafür verwendeten wir vier Gitter mit der selben Gitterkonstanten, aber unterschiedlicher Dicke, die mit Hilfe einer Probenhalterung in zwei Winkeln rotiert werden konnten. Die Gitter wurden von einem Laser beleuchtet, und der Schirm, auf dem die Maxima zu sehen waren, wurde von einer Kamera fotografiert. Ausgehend von der Floquet-Bedingung leiteten wir uns eine analytische Darstellung der Positionen am Schirm her, die wir an unsere Ergebnisse anpassten.

7.3 Abstract

In this diploma thesis, we discuss diffraction of light from thin gratings. We concentrate our work on the situation, that the incident wave vector isn't perpendicular to the direction of the rulings. In this case, the diffraction maxima form an arc on a screen, instead of the common straight line, known from cases of normal incidence. We examined the positions of the diffraction maxima on a screen for different angles of incidence. For our measurements we used four different gratings, which have the same grating spacing, but a varying thickness. The gratings were held by a mount which could be rotated along two different axes. As a light source we used a laser and we photographed the screen with a camera. We also derived formulas for the coordinates of the diffraction maxima on the screen based on the Floquet theorem and used them to fit our measuring results.

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. M. Fally, der mir stets mit viel Geduld zur Seite stand und mich in allen Belangen unterstützt hat. Ich bedanke mich ebenfalls für die unzähligen und hilfreichen Diskussionen und Hinweise.

Bei Prof. Ph.D. Y. Tomita bedanke ich mich für die Proben, welche unsere Messungen ermöglicht haben.

Außerdem bedanke ich mich bei allen Mitgliedern der Gruppe Physik Funktioneller Materialien, die mich im Laufe meiner Arbeit mit Diskussionen und Hilfestellungen unterstützt haben.

Erklärung

Ich erkläre, diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.