



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Knotentheorie und Spoke Diagrams
- eine neue Sichtweise der Knoten nach E. Harasko“

verfasst von / submitted by

Manuel Wellisch

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the
degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /

degree programme code as it appears on the student record sheet: A 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt /

degree programme as it appears on the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik

UF Informatik und Informatikmanagement

Betreuer / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Dr. Joachim Mahnkopf

Inhaltsverzeichnis

1	Danksagung	1
2	Einleitung	3
3	Grundlagen der Knotentheorie	5
3.1	Einleitung	5
3.2	Definitionen zu Knoten	6
3.2.1	Definiton: Raumkurve	6
3.2.2	Definiton: ambiente Isotopie	6
3.2.3	Definition: Knoten	6
3.2.4	Definition: Knotenprojektionen	7
3.2.5	Beispiele: Knoten	7
3.2.6	Definition: Äquivalenz von Knotenprojektionen	7
3.2.7	Definition: Orientierung von Knotenprojektionen	7
3.2.8	Definition: Kreuzungen einer Knotenprojektion	8
3.2.9	Definition: Link	8
3.2.10	Definition: Verformung von Knotenprojektionen	9
3.3	Reidemeister Bewegungen	10
3.3.1	Einleitung	10
3.3.2	Beispiel: Verformungen von Knotenprojektionen	11
3.3.3	Definition: triviale Verformungen	11
3.3.4	Definition: Reidemeister Bewegungen	12
3.3.5	Satz: Der Satz von Reidemeister	13
3.3.6	Zur Bedeutung des Satzes	13
3.4	Klassifikation von Knoten	14
3.4.1	Einleitung	14
3.4.2	Korollar: Äquivalenz von Knoten	15
3.4.3	Zur Bedeutung des Korollars	15
3.4.4	Klassifikation über Invarianten	15
3.5	Knoteninvarianten	16
3.5.1	Einleitung	16
3.5.2	Definition: Entknotungszahl	16

3.5.3	Beispiel: Entknotungszahl	16
3.5.4	Definition: Kreuzungszahl	17
3.5.5	Kreuzungszahl bestimmen	17
3.6	Knotenpolynome	18
3.6.1	Einleitung	18
3.6.2	Definition: Klammern-Polynom	19
3.6.3	Beispiel: Klammern-Polynom des Kleeblattknoten	20
3.6.4	Die Unzulänglichkeit des Klammern-Polynoms	21
3.6.5	Beispiel Veränderung des Klammern-Polynoms durch eine Reidemeister-Bewegung	21
3.6.6	Louis Kauffmans Trick	22
3.6.7	Definition: Windungszahl	22
3.6.8	Definition: Das Jones Polynom	22
3.6.9	Beispiel: Das Jones Polynom	22
3.6.10	Zur Vollständigkeit des Jones-Polynoms	23
3.7	Ungelöste Probleme	24
3.7.1	Einleitung	24
3.7.2	Ungelöstes Problem: Den Unknoten entlarven	24
3.7.3	Ungelöstes Problem: Äquivalenz von Knoten	24
3.7.4	Ungelöste Frage: Minimale Knotenprojektion	24
3.7.5	Ungelöstes Problem: Vollständige Knoteninvariante	25
4	Spoke Diagrams	27
4.1	Einleitung	27
4.2	Definitionen: Spoke Diagrams	28
4.2.1	Definition: Spoke Diagram	28
4.2.2	Definition: Funktion f_S von Knotenprojektionen zu Spoke Diagrams	29
4.2.3	Lemma: Eigenschaften von f_S	30
4.2.4	Beispiel: Spoke Diagram des Kleeblattknotens	31
4.2.5	Definition: konzentrisches Spoke Diagram	32
4.2.6	Definition: Orientierung von Spoke Diagrams	32
4.2.7	Lemma: Orientierung von Spoke Diagrams	33
4.3	Bearbeitung von Spoke Diagrams	34
4.3.1	Spoke Diagrams und Reidemeister Bewegungen	34
4.3.2	Definition: Reidemeister Bewegungen von Spoke Diagrams	39
4.3.3	Definition: Äquivalenz von Spoke Diagrams	41
4.3.4	Satz von Reidemeister für Spoke Diagrams	41
4.3.5	Die Äquivalenzbewegung P für bi-konzentrische Spoke Diagrams	42
4.4	Beispiele für die Bearbeitung von Spoke Diagrams	43
4.4.1	Entknoten eines Unknoten	43
4.4.2	Äquivalenz des Perko Paars	44

4.5	Zentrierungsalgorithmus - Die +R2b Methode	45
4.5.1	Einleitung	45
4.5.2	Satz: Zentrierungsalgorithmus - Die +R2b Methode	45
4.5.3	Zur Bedeutung des Satzes	51
4.5.4	Vergleich mit dem Vogel Algorithmus	52
4.6	System zum Vereinfachen von Spoke Diagrams	53
4.6.1	Einleitung	53
4.6.2	Beispiel: Vereinfachen von Spoke Diagrams	54
4.6.3	Algorithmus zum Vereinfachen von Spoke Diagrams	56
4.6.4	Definition: Baum eines Spoke Diagrams	57
4.6.5	Definition: Minimales Spoke Diagram	57
4.6.6	Satz: Der Algorithmus terminiert	57
4.6.7	Satz: Eigenschaften von minimalen Spoke Diagrams	58
4.6.8	Vermutung: weitere Eigenschaften von minimal Spoke Diagrams	59
4.6.9	Liefert das eine Klassifizierung der Knoten?	59
4.6.10	Exkurs: Spoke Diagrams und Zöpfe	60
5	Zusammenfassung und Conclusio	61
	Literaturverzeichnis	63

1 Danksagung

Ich möchte mich zuallererst ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Joachim Mahnkopf bedanken für seine hilfreiche Unterstützung und Geduld, für seine freundliche und kompetente Art und für seine Bereitschaft mein doch eher exotisches Thema zu betreuen. Auch meinem Zweitprüfer Dr. Andreas Ulovec danke ich für seine unkomplizierte und freundliche Unterstützung.

An der Universität Wien haben mich viele Professoren und Professorinnen begleitet, ich möchte mich bei allen bedanken, ganz besondere Vorbilder bzw. Mentoren waren für mich: Prof. Roland Steinbauer, Prof. Hermann Schichl, Dr. Stefan Haller und Prof. Michael Eichmair.

Meinen Studienkollegen und Kolleginnen möchte ich dafür danken dass sie mir sowohl fachlich als auch freundschaftlich immer zur Seite gestanden sind und mit mir die zeitweise sehr herausfordernden Hürden des Studiums gemeinsam bewältigt haben, vielen lieben Dank an Carina Aschauer, Lisa Bieler, Max Brinnich, Rene Cutura, Lisa Hameseder, Martin Jank, Andreas Kinzl, Matthias Köck, Max Koller, Lydia Renner-Martin und Thomas Stadler. Besonders bedanke ich mich auch bei meiner Frau Ruth Bittner und meiner Tochter Annika Bittner für die mentale und emotionale Unterstützung, dafür dass sie immer für mich da sind und dafür dass sie mir die Zeit gegeben haben mich intensiv mit meinem Studium zu beschäftigen.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei der Familie Harasko für die Arbeit die sie sich gemacht haben den mathematischen Nachlass von Erich Harasko zu durchsuchen und für die bereitwillige Kooperation.

Vielen Dank an Euch alle! Ohne Euch hätte ich es nicht geschafft!

2 Einleitung

Knoten sind uns aus dem Alltag eine vertraute Erscheinung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der mathematischen Knotentheorie. Die mathematische Knotentheorie hat ein großes Anwendungsgebiet. Neben den innermathematischen Anwendungen (Topologie, Algebra, Differentialgeometrie) beispielsweise auch in der Biologie und Chemie (DNA Forschung) sowie in der Physik (statistische Mechanik). Die mathematische Auseinandersetzung mit Knoten ist allerdings eher Spezialisten vorbehalten. So werden an den wenigsten Universitäten Lehrveranstaltungen angeboten welche dieses Thema behandeln würden obwohl eine Einführung mit relativ simplen mathematischen Methoden auskommt. Diesem Umstand möchte diese Arbeit entgegenwirken. Studierende und Interessierte sollen eine Einführung in die Theorie der Knoten erhalten. Die wichtigsten Begriffe und Resultate werden behandelt und grafisch anschaulich mittels Beispielen illustriert. Neben Reidemeister-Bewegungen wird ein Schwerpunkt auf die Klassifizierung von Knoten gelegt. Dabei spielen Knoteninvarianten eine wichtige Rolle.

Aufbauend auf diesen Grundlagen wird in dieser Arbeit ein neues Konzept für die Darstellung und Bearbeitung von Knotenprojektionen vorgestellt, die Spoke Diagrams. Diese sind eine Erfindung meines Großonkels Erich Harasko, welcher sich bis zu seinem plötzlichen Tod im Jahr 2010, jahrzehntelang mit Knotentheorie auseinandersetzte. Diese Arbeit mündete in der Entdeckung der Spoke Diagrams mit welchen er einen neuen Beitrag zur mathematischen Knotentheorie liefern wollte. Ich würdige seine Arbeit zur Knotentheorie indem ich versuche das Konzept der Spoke Diagrams einerseits mathematisch korrekt und andererseits so einfach verständlich wie möglich darzustellen. Die Spoke Diagrams sollen in die bestehende Knotentheorie eingegliedert werden und es wird versucht deren Anwendbarkeit zur Vereinfachung von Knotenprojektionen und zur Klassifikation von Knoten deutlich zu machen. Diese Arbeit soll Studierende und Interessierte auch dazu motivieren sich mit exotischeren mathematischen Gebieten auseinanderzusetzen und bestehende Ideen und Theorien fortzusetzen oder diese aus einem anderem Blickwinkel zu betrachten. Nachdem ich selbst Lehramts Student bin, möchte ich diese Gelegenheit auch dazu nutzen mich das erste mal seriös mit einem innermathematischen Thema näher auseinanderzusetzen und tiefer in die entsprechende Materie einzutauchen. Dies war im bisherigen Studium nicht möglich und ich denke in meiner Tätigkeit als Lehrer wird es für mich immer weniger möglich sein mich mit universitärer Mathematik auseinanderzusetzen.

3 Grundlagen der Knotentheorie

3.1 Einleitung

Man nehme eine Schnur, verknote sie und klebe dann die Enden zusammen. Man erhält eine verknotete Schnur ohne Enden. Diese kann man dann ohne Gewalteinwirkung (wie beispielsweise die Anwendung einer Schere) nicht mehr entknoten. Mit solch einem Knoten könnte man sich nun weiter spielen, ihn drehen, weitere Verschlingungen hinzufügen, etc. Solange man aber keinen Schnitt mit der Schere durchführt, würde man weiterhin von dem selben Knoten sprechen. Dies liefert uns die Idee für die mathematische Definition eines Knotens.

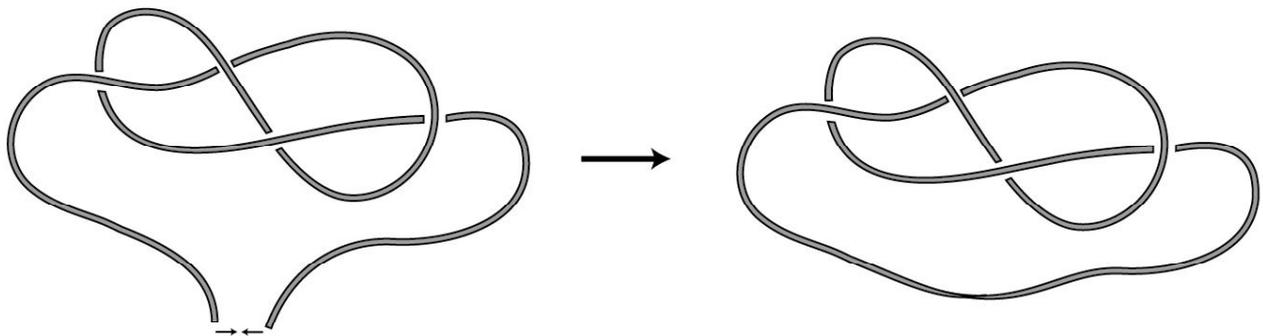


Abbildung 3.1.1: Schnur wird verknotet und zusammengeklebt

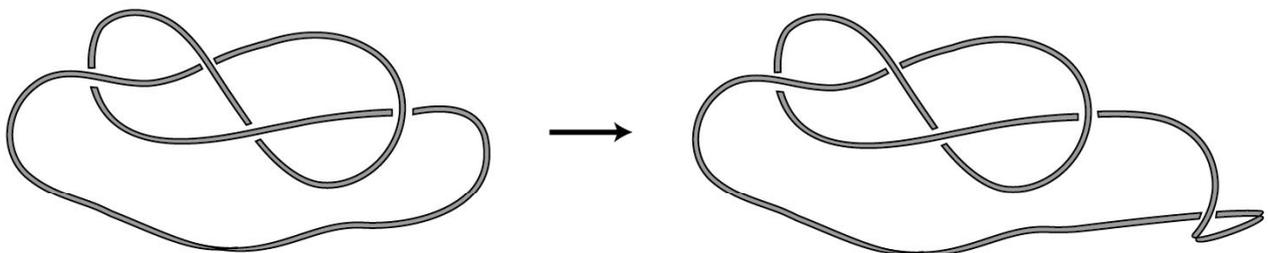


Abbildung 3.1.2: Knoten wird verformt

Präzisieren wir diese Vorstellung nun mit folgenden Definitionen.

3.2 Definitionen zu Knoten

3.2.1 Definiton: Raumkurve

Eine **Raumkurve** ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Eine Raumkurve heißt **geschlossen** falls $c(0) = c(1)$, und **einfach geschlossen**, wenn c zusätzlich auf $[0, 1)$ injektiv ist; vgl.[Bae10, S.26].

3.2.2 Definiton: ambiente Isotopie

Ein **Isotopie** des \mathbb{R}^3 ist eine stetige Abbildung $\Phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sodass für jedes feste $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus ist.

Zwei einfach geschlossene Raumkurven c_0 und c_1 im \mathbb{R}^3 heißen **ambient isotop** falls es eine Isotopie Φ des \mathbb{R}^3 gibt mit $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $\Phi(1, Spur(c_0)) = Spur(c_1)$; [Bae10, S. 87].

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Diagramm.

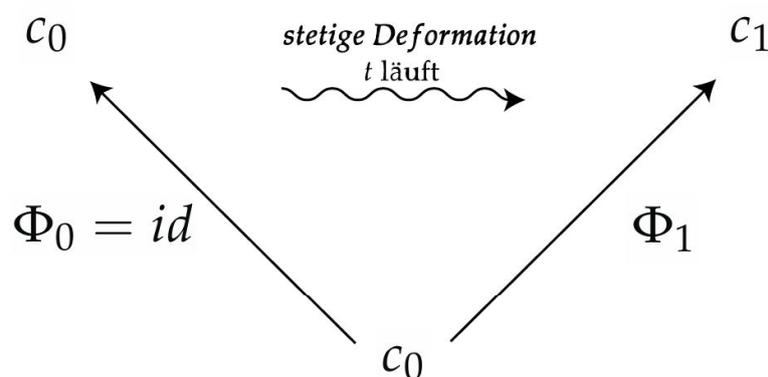


Abbildung 3.2.1: ambiente Isotopie Φ

Bemerkung: Diese Definition zu Beginn ist etwas sperrig und ist auch nicht unbedingt der Vorstellung dienlich. Anschaulich ist die ambiente Isotopie einfach das Verformen der Raumkurve c_0 in die Raumkurve c_1 so wie wir es beim Spielen mit unserer Schnur gemacht haben. Statt c_0, c_1 sind isotop sagen wir auch c_1 entsteht aus c_0 durch anwenden der Isotopie.

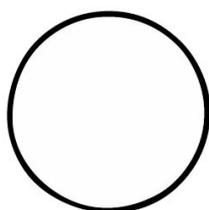
3.2.3 Definition: Knoten

Ein **Knoten** ist eine ambiente Isotopieklasse von einfach geschlossenen Raumkurven. [Bae10, S. 87]

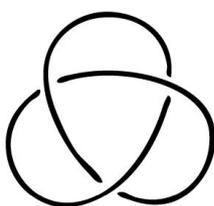
3.2.4 Definition: Knotenprojektionen

- (i) Die Elemente der zum Knoten zugehörigen Isotopieklasse nennen wir die **Vertreter des Knoten**.
- (ii) Wir fixieren nun eine Projektion, und zwar die Orthogonalprojektion $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die Projektion solch eines Vertreters in die Ebene nennen wir Projektion des Knotens oder allgemeiner eine **Knotenprojektion** des Knotens. Bei einer Knotenprojektion bleibt allerdings die Information ob eine Kreuzung oben oder unten verläuft erhalten, denn sie wird grafisch kenntlich gemacht wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden.

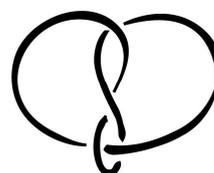
3.2.5 Beispiele: Knoten



(a) der Unknoten



(b) der Kleeblattknoten



(c) der Knoten 4_1

Abbildung 3.2.2: Beispiele für Projektionen von drei einfache Knoten

3.2.6 Definition: Äquivalenz von Knotenprojektionen

Wir nennen zwei Knotenprojektionen **äquivalent** wenn zugehörige Knotenvertreter ambient isotop sind, also denselben Knoten repräsentieren.

3.2.7 Definition: Orientierung von Knotenprojektionen

Durchlaufen wir eine Knotenprojektion mit einer gewählten Orientierung (siehe Abbildung 3.2.3), so nennen wir die Knotenprojektion **orientiert**.

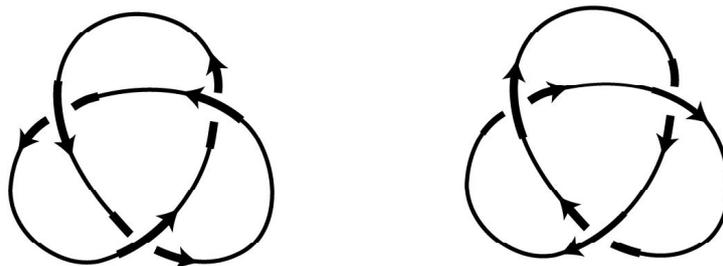
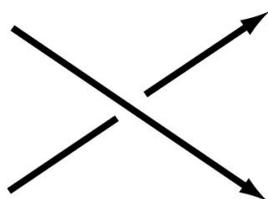


Abbildung 3.2.3: Zwei gegensätzlich orientierte Knotenprojektionen

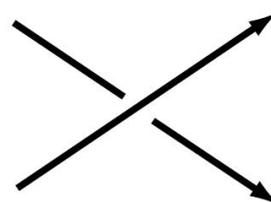
3.2.8 Definition: Kreuzungen einer Knotenprojektion

Projizieren wir einen Knotenvertreter in die Ebene so ergeben sich Schnittpunkte der Kurve mit sich selbst. Diese Schnittpunkte nennen wir die **Kreuzungen der Knotenprojektion**. In Zusammenhang mit dem repräsentierten Knoten sprechen wir auch manchmal ungenauer von den Kreuzungen des Knoten.

Das **Vorzeichen der Kreuzung** ergibt sich folgendermaßen: Wir wählen für die Knotenprojektion eine Orientierung in dem wir sie in einer Richtung durchlaufen. Es ergeben sich so an den Kreuzungen zwei übereinanderliegende Pfeile wie in folgender Abbildung. Drehen wir die unten liegende Linie im Uhrzeigersinn bis beide Linien parallel sind, so haben wir zwei Fälle.



(a) Die Pfeile zeigen nach Drehung des unteren Pfeils im Uhrzeigersinn in die selbe Richtung: In diesen Fall nennen wir die **Kreuzung positiv**.



(b) Die Pfeile zeigen nach Drehung des unteren Pfeils im Uhrzeigersinn in entgegengesetzte Richtungen: In diesem Fall nennen wir die **Kreuzung negativ**.

Abbildung 3.2.4: Positive und negative Kreuzungen.

3.2.9 Definition: Link

Ein **Link** ist eine Verschlingung mehrerer Knoten. Genauer handelt es sich um eine Menge von n Knoten, $n \in \mathbb{N}$, die sich nicht schneiden aber ineinander verschlungen sind.

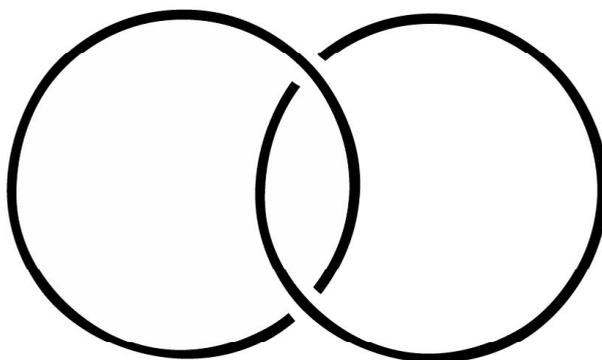


Abbildung 3.2.5: Der Hopf-Link - eine Verschlingung zweier Unknoten

Bemerkung: Es sei hierbei erwähnt dass mit $n = 1$ Knoten nach obiger Definition ebenfalls spezielle Links sind.

3.2.10 Definition: Verformung von Knotenprojektionen

Aus einer Verformung eines Knotenvertreterers mittels einer Isotopie entsteht wieder ein Knotenvertreter desselben Knoten. Das liefert analoge Operationen auf Knotenprojektionen die der Verformung der Knotenvertreter mittels isotopie entsprechen. Wir nennen diese Operationen **Verformungen der Knotenprojektionen**.

3.3 Reidemeister Bewegungen

3.3.1 Einleitung

Wir wollen uns nun die in 3.2.10 definierten Verformungen von Knotenprojektionen genauer ansehen. Es stellt sich die Frage ob es fundamentale Verformungen von Knotenprojektionen gibt. Dieser Frage ist Kurt Reidemeister auf den Grund gegangen. Kurt Reidemeister (1903-1971) war ein deutscher Mathematiker und Sohn eines braunschweigischen Regierungsrats. Er entwickelte mit seinen Reidemeister Bewegungen einen Grundstein der Knotentheorie. Er war lange Zeit an der Universität Wien als Professor tätig und begann dort, sich mit der Knotentheorie zu beschäftigen. Unter anderem war er auch als Philosoph und Dichter aktiv.



Abbildung 3.3.1: Kurt Reidemeister ¹

¹ Bildquelle: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

3.3.2 Beispiel: Verformungen von Knotenprojektionen

Wenn man eine Knotenprojektion verformt entsteht eine neue Knotenprojektion desselben Knotens, welche man oftmals nicht mehr einfach mit der ursprünglichen Variante in Beziehung setzen kann. Es gibt zudem Verformungen die "mehr verändern" als andere.

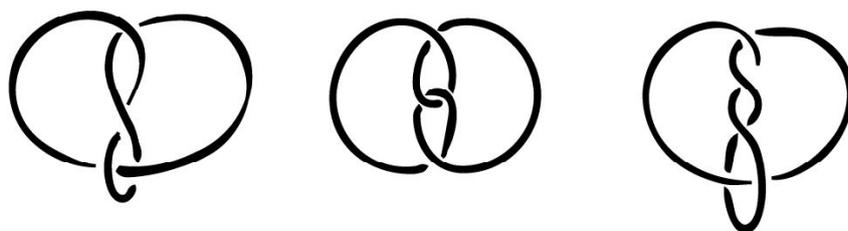


Abbildung 3.3.2: Drei Knotenprojektionen desselben Knotens

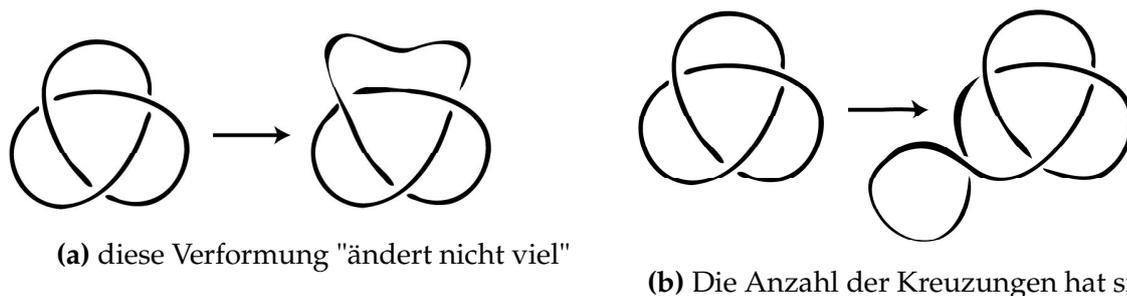


Abbildung 3.3.3: Es gibt Verformungen die mehr verändern als andere.

3.3.3 Definition: triviale Verformungen

Triviale Verformungen sind Verformungen welche die Anzahl und relative Lage der Kreuzungen der Knotenprojektion nicht verändern. vgl. [Sos00, S.61] Beispiel siehe Abbildung 3.3.3a

3.3.4 Definition: Reidemeister Bewegungen

Eine **Reidemeister Bewegung** ist eine der folgenden drei Möglichkeiten eine Knotenprojektion zu verformen. Diese Verformungen sind im Sinne von Def. 3.2.10 zu verstehen. Im Gegensatz zu den trivialen Verformungen ändert sich bei Reidemeister Bewegungen die Anzahl oder Art der Kreuzungen; vgl.[Ada04, S.13].

(i) Typ R1 Reidemeister Bewegung:

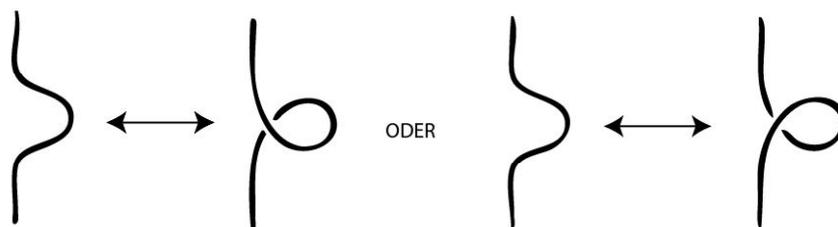


Abbildung 3.3.4: Reidemeister Bewegung R1

(ii) Typ R2 Reidemeister Bewegung:

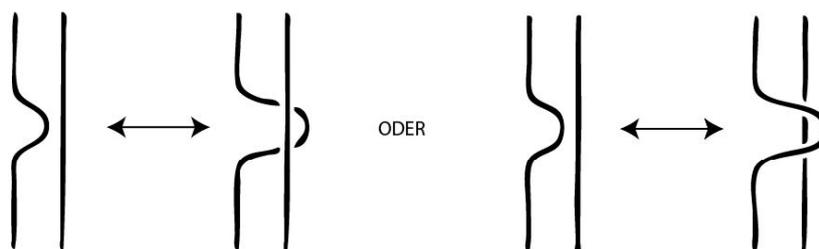


Abbildung 3.3.5: Reidemeister Bewegung R2

(iii) Typ R3 Reidemeister Bewegung:

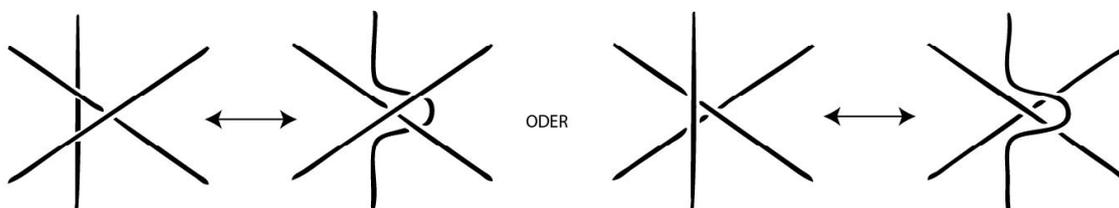


Abbildung 3.3.6: Reidemeister Bewegung R3

Bemerkung: Die obigen Bewegungen zeigen jeweils nur den Ausschnitt der Knotenprojektion bei dem eine Veränderung vorgenommen wird. Der Rest der Knotenprojektion bleibt bei den Bewegungen unverändert.

3.3.5 Satz: Der Satz von Reidemeister

Eine Knotenprojektion \mathcal{K} kann immer durch eine Serie von Reidemeister-Bewegungen und trivialen ebenen Verformungen in eine beliebige andere Knotenprojektion \mathcal{K}' desselben Knoten überführt werden; vgl.[Ada04, S.14].

Bemerkung: Die trivialen ebenen Verformungen spielen beim Satz von Reidemeister nur eine nebensächliche Rolle, da sie die Anzahl und relative Lage der Knotenprojektion nicht verändern. Die Reidemeisterbewegungen R1, R2 und R3 sind keine trivialen ebenen Verformungen. Der Beweis des Satzes von Kurt Reidemeister findet sich in [BZ86, S.116].

3.3.6 Zur Bedeutung des Satzes

Der Satz stellt klar, haben wir zwei Knotenprojektionen desselben Knoten, so muss es einen Weg in Form von Reidemeister-Bewegungen von der einen Projektion zur anderen geben welchen man angeben kann. Diesen Weg zu finden kann allerdings sehr langwierig und kompliziert sein. Reidemeister hat jedenfalls mit seinem Satz das Problem der räumlichen Manipulation von Knotenprojektionen auf ein zweidimensionales und viel konkreteres Problem zurückgeführt.

3.4 Klassifikation von Knoten

3.4.1 Einleitung

Erste Auflistungsversuche

Die ersten intuitiven Verfahren zur Klassifikation von Knoten bestanden zunächst darin für kleine $n \in \mathbb{N}$ eine Liste von allen ebenen geschlossenen Kurven anzulegen die n Kreuzungen haben. Beispielsweise gibt es nur wenige Knoten die eine Knotenprojektion mit 2 Kreuzungen besitzen. Leider steigt die Anzahl der Möglichkeiten mit der Anzahl der Kreuzungen schnell an, sodass es bei 10 Kreuzungen bereits $2^{10} = 1024$ Möglichkeiten gibt einen Knoten zu bilden. Zur Klassifikation der Knoten auf diese Weise ist es nötig unter all diesen Möglichkeiten alle Äquivalenzen zu finden was wiederum eine enorme Herausforderung ist. Trotzdem gelang es dem Amerikaner C.N. Little 1899 alle Knoten mit 10 Kreuzungen oder weniger auf diese Art zu klassifizieren.

Zu prüfen ob zwei Knotenprojektionen den selben Knoten repräsentieren dürfte für Little und seine Zeitgenossen nicht so einfach gewesen sein. Seine Klassifikation der Knoten mit 10 Kreuzungen enthielt nämlich zwei Knotenprojektionen die dem selben Knoten entsprechen. Dieser Fehler wurde erst nach 75 Jahren von dem Anwalt und Hobbymathematiker Kenneth A. Perko entlarvt. Diese zwei Projektionen heißen seitdem das Perko-Paar.

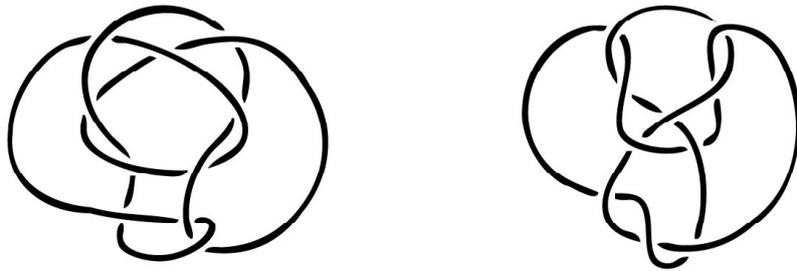


Abbildung 3.4.1: Das Perko Paar: zwei Projektionen desselben Knoten

Klassifikation mit Hilfe von Reidemeister

Die erste bahnbrechende Idee zur Vereinfachung der Knotenklassifikation lieferte Kurt Reidemeister mit seinen Reidemeister-Bewegungen wie wir im folgenden sehen werden.

3.4.2 Korollar: Äquivalenz von Knoten

Aus Satz 3.3.5 und Definition 3.2.6 folgt sofort folgendes Korollar:

Zwei Knotenprojektionen sind genau dann äquivalent wenn sie nach einer endlichen Anzahl von Reidemeister-Bewegungen (auf eine der beiden Knotenprojektionen) die gleiche Anzahl an Kreuzungen haben und diese Kreuzungen sich jeweils in ihrem Vorzeichen sowie ihrer relativen Position nicht unterscheiden; vgl.[Sos00, S.68].

3.4.3 Zur Bedeutung des Korollars

Das bedeutet wenn wir neue Knoten mit beispielsweise 11 Kreuzungen finden wollen brauchen wir nur eine beliebige Knotenprojektion mit 11 Kreuzungen erzeugen, diese mittels Reidemeister-Bewegungen bearbeiten und jeweils mit den bereits klassifizierten Knoten vergleichen. Wenn es keine Übereinstimmung gibt, so haben wir einen neuen Knoten gefunden. Diese Prüfung können seit längerem Computer durchführen aber leider kann man bei zwei nicht äquivalenten Knoten nur mutmaßen dass diese einander nicht entsprechen, da es ja sein könnte dass der Algorithmus einfach nur sehr lange dauert. Wenn es jedoch eine Übereinstimmung mit einem bereits klassifiziertem Knoten gibt, wissen wir jedenfalls sicher dass wir keinen neuen Knoten gefunden haben.

3.4.4 Klassifikation über Invarianten

Die nächste revolutionäre Idee zur Klassifikation von Knoten waren die sogenannten Knoteninvarianten mit denen wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen wollen. Die Idee ist einfach: Wenn wir eine Invariante finden die einen Knoten so gut charakterisiert dass wir für jede Knotenprojektion des Knoten die selbe Invariante erhalten, jedoch für eine Knotenprojektion die dem Knoten nicht entspricht eine andere Invariante gewinnen, dann könnte man die Knoten über diese Invariante klassifizieren.

3.5 Knoteninvarianten

3.5.1 Einleitung

Eine Invariante besitzt bekanntlich die Eigenschaft dass sie sich unter gewissen Operationen auf den betrachteten Objekten nicht verändert. So ist es im Fall der Knoteninvarianten so, dass solche für verschiedene Projektionen desselben Knoten immer gleich sind. Es gibt eine Vielzahl von Knoteninvarianten mit denen man Knoten gut analysieren kann. Beispielsweise die Entknotungszahl, die Brückenzahl oder die Kreuzungszahl. Die interessantesten Invarianten sind aber Knotenpolynome, weil sie die Knoten aktuell am besten charakterisieren. Eine vollständige Knoteninvariante, also eine die für verschiedene Knoten verschiedene Werte annimmt hat man aber auch mit den Knotenpolynomen noch nicht gefunden.

3.5.2 Definition: Entknotungszahl

Wir sagen ein Knoten hat die **Entknotungszahl** n falls eine Projektion des Knoten existiert sodass die Änderung des Vorzeichens von n Kreuzungen in der Projektion den Knoten in den Unknoten (3.2.5) verwandelt und es keine Projektion des Knoten gibt, bei der weniger Kreuzungsänderungen zu gleichem Ergebnis führen würden; vgl.[Ada04, S.57].

3.5.3 Beispiel: Entknotungszahl

Es reicht zwei Kreuzungen dieser Knotenprojektion zu ändern um eine Projektion des Unknoten zu erhalten. Somit ist die Entknotungszahl 2.



Abbildung 3.5.1: Diese Knotenprojektion hat Entknotungszahl 2

Bemerkung: Es ist generell sehr schwer die Entknotungszahl eines Knoten zu finden. So findet man z.B. nicht allzu schwer die zwei Kreuzungsänderungen die obigen Knoten in den Unknoten verwandeln, aber woher weiß man ob nicht vielleicht eine Möglichkeit mit nur einer Kreuzungsänderung besteht? Es hat Jahrzehnte gedauert dies nur für den obigen Knoten zu beweisen; vgl. [Ada04, S.60].

Bemerkenswert ist auch, dass die Knotenprojektion welche die Entknotungszahl liefert nicht immer die mit den wenigsten Kreuzungen ist; [Ada04, S.62].

3.5.4 Definition: Kreuzungszahl

Die **Kreuzungszahl** eines Knoten K ist das Minimum der Menge \mathcal{Z}_K . Wobei \mathcal{Z}_K genau die Anzahlen der Kreuzungen aller Knotenprojektionen des Knoten K enthält; vgl.[Ada04, S.67].

3.5.5 Kreuzungszahl bestimmen

Wie finden wir die Kreuzungszahl eines Knoten?

Zuerst nehmen wir eine beliebige Projektion des Knoten und notieren deren Anzahl an Kreuzungen n . Wir wissen nun die Kreuzungszahl ist $\leq n$.

Wenn alle Knoten mit weniger als n Kreuzungen bekannt sind und unser Knoten nicht einem davon entspricht, dann muss der Knoten die Kreuzungszahl n haben. vgl.[Ada04, S.67f]

Bemerkung: Man kann sich vorstellen dass es sehr schwierig ist die Kreuzungszahl zu bestimmen falls diese größer ist weil die Knoten mit mehr als 10 Kreuzungen noch nicht klassifiziert werden konnten. Es läuft also alles darauf hinaus eine Invariante zu finden welche es ermöglicht Knoten bestmöglich zu unterscheiden. Hier kommen die Knotenpolynome ins Spiel.

3.6 Knotenpolynome

3.6.1 Einleitung

Knotenpolynome sind die interessantesten Knoteninvarianten weil man verschiedene Knoten mit ihnen aktuell am besten unterscheiden kann. Berechnet man die Knotenpolynome zweier Knoten und erhält unterschiedliche Polynome, so kann man mit Sicherheit sagen, dass es sich um zwei unterschiedliche Knoten handelt. Leider ist umgekehrt das Übereinstimmen der Knotenpolynom zweier Knoten zwar notwendig aber nicht hinreichend für die Gleichheit dieser Knoten.

Die Geschichte der Knotenpolynome

Die Geschichte der Knotenpolynome (vgl.[Ada04, S.148]) begann ca. 1928 mit dem Alexander-Polynom, welches bereits damals recht erfolgreich angewandt wurde um Knoten auseinander zu halten. 1969 fand John Conway einen Weg das Alexander Polynom auf einem sehr einfachen Weg über die sogenannte Skein-Relation zu berechnen. 1984 fand Vaughan Jones, ein Neuseeländischer Mathematiker, den Zusammenhang zwischen der Skein-Relation und gewissen Relationen in Operator-Algebren, was ihn zur Erfindung eines neuen Knotenpolynoms, des Jones-Polynoms führte. Das Jones-Polynom war besser imstande Knoten zu unterscheiden als das Alexander-Polynom und dessen Erfindung führte zu einer Euphorie unter Knoten-Theoretikern weil man glaubte eine vollständige Knoteninvariante gefunden zu haben. Es dauerte weniger als 1 Jahr und weitere, verbesserte Varianten des Jones-Polynoms wurden von verschiedenen Mathematikern der ganzen Welt gefunden. Sechs dieser Mathematiker schafften es zeitgleich das Jones-Polynom zu verallgemeinern. Die Verallgemeinerung des Jones- und auch Alexander-Polynoms wurde dann das HOMFLY-Polynom genannt. HOMFLY steht dabei für die Anfangsbuchstaben der Nachnamen dieser sechs Mathematiker.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Jones-Polynom und verwenden dazu das Kaufmannsche Klammern-Polynom.

3.6.2 Definition: Klammern-Polynom

Das **Klammern-Polynom** $\langle L \rangle$ eines Links L ist ein Laurent-Polynom der Variable A , das wie folgt definiert ist; vgl.[Ada04, S.149f].

(I)

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

Bemerkung: Das Klammernpolynom des Unknotens ist 1

(II)

$$\langle \left. \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = A \langle \left. \begin{array}{c}) \\ (\end{array} \right\rangle + A^{-1} \langle \left. \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \right\rangle \quad (\text{a})$$

$$\langle \left. \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle = A \langle \left. \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \right\rangle + A^{-1} \langle \left. \begin{array}{c}) \\ (\end{array} \right\rangle \quad (\text{b})$$

Bemerkung: Für die obige Bedingungen verwenden wir die folgende Skein-Relation: Haben wir eine Knotenprojektion mit Kreuzungen, so splitten wir die Kreuzungen nacheinander horizontal und vertikal, sodass wir neue Projektionen mit jeweils einer Kreuzung weniger erhalten. Dabei entstehen obige Koeffizienten.

(III)

$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

Bemerkung: In der Bedingung (III) steht L allgemein für einen Link, also einen Knoten oder eine Verschlingung mehrerer Knoten wie wir in folgendem Beispiel sehen werden.

3.6.3 Beispiel: Klammern-Polynom des Kleeblattknoten

Der Einfachheit halber berechnen wir vorerst die Klammern-Polynome von drei sehr üblichen Verschlingungen.

$$\begin{aligned}
 \langle \infty \rangle &\stackrel{\text{triviale Verformung}}{=} \langle \text{trivial knot} \rangle \stackrel{II}{=} A \langle \text{trivial knot} \rangle + A^{-1} \langle \text{trivial knot} \rangle \\
 &\stackrel{III}{=} A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \left(-A^2 - A^{-2} \right) \langle \bigcirc \rangle \\
 &= -A^{-3} \langle \bigcirc \rangle \stackrel{I}{=} -A^{-3} \tag{i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trefoil} \rangle &\stackrel{II}{=} A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &\stackrel{II,i}{=} A \left(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \right) + A^{-1} \left(-A^{-3} \right) \\
 &\stackrel{III}{=} A \left(A \left(-A^2 - A^{-2} \right) + A^{-1} \right) - A^{-4} \\
 &= A \left(-A^3 \right) + A^{-4} = -A^4 - A^{-4} \tag{ii}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \text{figure-eight} \rangle &\stackrel{II}{=} A \langle \text{figure-eight} \rangle + A^{-1} \langle \text{figure-eight} \rangle \\
 &\stackrel{III}{=} A \left(-A^2 - A^{-2} \right) \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \infty \rangle \\
 &\stackrel{i}{=} \left(A \left(-A^2 - A^{-2} \right) + A^{-1} \right) \left(-A^{-3} \right) = A^6 \tag{iii}
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Kleeblattknoten unter Verwendung von (i), (ii) und (iii):

$$\begin{aligned}
 \langle \text{cloverleaf} \rangle &= A \langle \text{cloverleaf} \rangle + A^{-1} \langle \text{cloverleaf} \rangle \\
 &\stackrel{i,iii}{=} A \left(A^6 \right) + A^{-1} \left(-A^4 - A^{-4} \right) = A^7 - A^3 - A^{-5}.
 \end{aligned}$$

3.6.4 Die Unzulänglichkeit des Klammern-Polynoms

Um zu zeigen dass das Klammernpolynom eine Knoteninvariante ist, müsste sichergestellt werden dass die Anwendungen von Reidemeister-Bewegungen auf die gewählte Knotenprojektion deren Klammernpolynom unverändert lässt. Das ist bei Reidemeister Bewegungen (siehe 3.3.4) vom Typ R2 und Typ R3 der Fall (Beweis: [Ada04, S.150]), aber eine simple Typ R1 Bewegung verändert leider das Klammern-Polynom was dessen Anwendung als Knoteninvariante zunichte macht.

3.6.5 Beispiel Veränderung des Klammern-Polynoms durch eine Reidemeister-Bewegung

$$\begin{aligned}\langle \text{⌚} \rangle &= A \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= A \left(-A^2 - A^{-2} \right) \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= -A^3 \langle \text{○} \rangle = -A^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \text{⌚} \rangle &= A \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= A \langle \text{○} \rangle + A^{-1} \left(-A^2 - A^{-2} \right) \langle \text{○} \rangle \\ &= -A^{-3} \langle \text{○} \rangle = -A^{-3}\end{aligned}$$

Wäre das Klammernpolynom invariant bezüglich Reidemeister-Bewegungen hätten wir bei beiden Berechnungen dasselbe Resultat herausbekommen müssen. Leider unterscheiden sich die Exponenten im Vorzeichen und somit ist die Invarianz ausgeschlossen - eine Tragödie ;).

3.6.6 Louis Kauffmans Trick

Um dieser Tragödie zu entgehen bediente sich Louis Kaufmann, ein bedeutender Knotentheoretiker aus Illinois USA, der sogenannten Windungszahl. Mit dem folgenden Trick können wir das Klammernpolynom zu einer echten Knoteninvariante vervollständigen. Es ist allerdings so, dass Jones das resultierende Polynom bereits vor Kauffman auf einem komplizierterem Weg über Operator-Algebren gefunden hatte, weswegen es den Namen Jones-Polynom trägt.

3.6.7 Definition: Windungszahl

Sei \mathcal{L} die Projektion eines Links. So ist die **Windungszahl** $W(\mathcal{L})$ definiert als die Differenz der Anzahlen aller positiven und negativen Kreuzungen (siehe Abbildung 3.2.4) von \mathcal{L} ; (vgl. [Ada04, S.152]).

3.6.8 Definition: Das Jones Polynom

Sei L ein Link. Das **Jones Polynom** $X(L)$ ist ein Laurentpolynom das wie folgt definiert ist

$$X(L) = (-A^3)^{-W(\mathcal{L})} \langle L \rangle$$

Bemerkung: Oft wird auch die Notation von Jones verwendet wobei die Variable A durch $t^{-1/4}$ ersetzt wird.

3.6.9 Beispiel: Das Jones Polynom

Versuchen wir nun ob das Jones Polynom die für Aufgabe aus 3.6.5 besser geeignet ist. Da wir es in beiden Fällen mit Knotenprojektionen des Unknoten zu tun haben, sollten wir in beiden Fällen für das Jones Polynom das Ergebnis 1 erhalten.

$$\begin{aligned} X\left(\textcircled{\cup}\right) &= (-A^3)^{-W(\mathcal{L})} \left(A \langle \textcircled{\cup} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cup} \rangle \right) \\ &= (-A^3)^{-1} \left(A \left(-A^2 - A^{-2} \right) \langle \textcircled{\cup} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cup} \rangle \right) \\ &= (-A^{-3}) \left(-A^3 \langle \textcircled{\cup} \rangle \right) = (-A^{-3})(-A^3) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X\left(\textcircled{\cup}\right) &= (-A^3)^{-W(\mathcal{L})} \left(A \left\langle \textcircled{\cup} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \textcircled{\cup} \right\rangle \right) \\
&= (-A^3)^1 \left(A \left\langle \bigcirc \right\rangle + A^{-1} \left(-A^2 - A^{-2} \right) \left\langle \bigcirc \right\rangle \right) \\
&= (-A^3) \left(-A^{-3} \left\langle \bigcirc \right\rangle \right) = (-A^3)(-A^{-3}) = 1
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dieses erfolgreiche Beispiel ist natürlich kein Beweis für die Invarianz des Jones Polynoms unter Reidemeister Typ I Bewegungen. Ein vollständiger Beweis dieser Invarianz findet sich in [Ada04, S.153].

3.6.10 Zur Vollständigkeit des Jones-Polynoms

Das Jones-Polynom ist eine der besten Knoteninvarianten und es wurde durch das erwähnte HOMFLY Polynom noch weiter verbessert bzw. verallgemeinert. Man kann mit ihm Knoten gut auseinanderhalten oder einen Knoten als Unknoten identifizieren. Auch ist momentan noch kein Knoten bekannt dessen Jones-Polynom gleich 1 ist welcher nicht dem Unknoten entspricht. Aber leider ist es - trotz anfänglicher Euphorie unter Mathematikern - keine vollständige Knoteninvariante wie folgendes Beispiel zeigt.

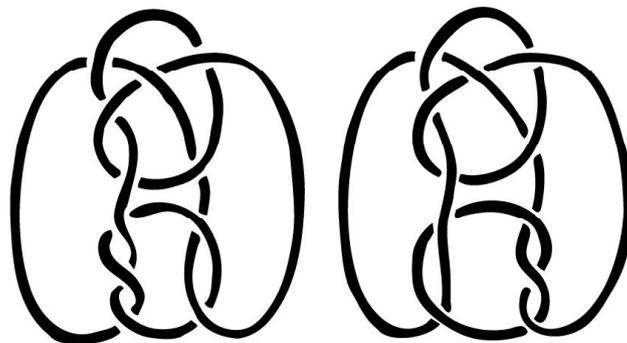


Abbildung 3.6.1: Zwei verschiedene Knoten mit demselben Jones bzw. HOMFLY-Polynom.

3.7 Ungelöste Probleme

3.7.1 Einleitung

Die Knotentheorie ist trotz vielversprechender Klassifizierungsversuche und Knoteninvarianten noch lange nicht vollständig erforscht. So gibt es viele ungelöste Probleme und Fragen von denen einige sehr grundlegend sind. Ein paar von ihnen möchte ich hier kurz festhalten.

3.7.2 Ungelöstes Problem: Den Unknoten entlarven

Wie kann man feststellen ob eine gegebene Knotenprojektion dem Unknoten entspricht oder nicht?

Wenn das Jones-Polynom gleich 1 ist, dann handelt es sich gewiss um einen guten Kandidaten für den Unknoten, aber es konnte noch nicht bewiesen werden ob diese Eigenschaft hinreichend ist.

3.7.3 Ungelöstes Problem: Äquivalenz von Knoten

Wie kann man feststellen ob zwei gegebene Knotenprojektionen denselben Knoten darstellen oder nicht?

Haben zwei Knoten dasselbe Jones- oder HOMFLY-Polynom ist dies ein guter Hinweis dass es sich um den selben Knoten handelt, aber diese Eigenschaft ist leider nicht hinreichend. (siehe 3.6.10)

3.7.4 Ungelöste Frage: Minimale Knotenprojektion

Gibt es für jeden Knoten eine ausgezeichnete Projektion mit minimaler Anzahl an Kreuzungen?

Wie könnte man diese auf effiziente Weise finden und welche Eigenschaften zeichnen diese aus?

3.7.5 Ungelöstes Problem: Vollständige Knoteninvariante

Finde eine vollständige Knoteninvariante welche verschiedene Knoten unterscheidet.

Mit solch einer Invariante könnte man die Knoten klassifizieren.

4 Spoke Diagrams

4.1 Einleitung

Spoke Diagrams wurden von Erich Harasko, einem begeisterten Hobbymathematiker aus Niederösterreich erfunden. Harasko (1931-2010) studierte Physik an der TU Wien und arbeitete als Dienststellenleiter und wissenschaftlicher Referent im Bereich Programm und Systementwicklung bei der Siemens AG. Er beschäftigte sich mehrere Jahre lang in seiner Freizeit mit Knotentheorie. Wir beschäftigen uns hier mit seiner Arbeit [Har08] in welcher er eine neue Repräsentationsform von Knoten, sogenannte Spoke Diagrams vorstellt. Jede Knotenprojektion kann auch als Spoke Diagram dargestellt werden. Wir werden sehen dass auch umgekehrt jedem Spoke Diagram eine Knotenprojektion entspricht. Mit den Spoke Diagrams können ebenfalls Reidemeister-Bewegungen durchgeführt werden. Nachdem Spoke Diagrams Kreise in der Ebene sind welche mit "Speichen" (engl. Spokes) verbunden sind, lassen sich diese im Gegensatz zu den Knotenprojektionen einfacher und übersichtlicher bearbeiten.

Da jeder Knoten unendlich viele Vertreter mit zugehörigen Knotenprojektionen hat, versuchen wir mit Spoke Diagrams und Reidemeister-Bewegungen im folgenden für jede Knotenprojektion eine besonders überschaubare Menge an Repräsentanten zu finden.

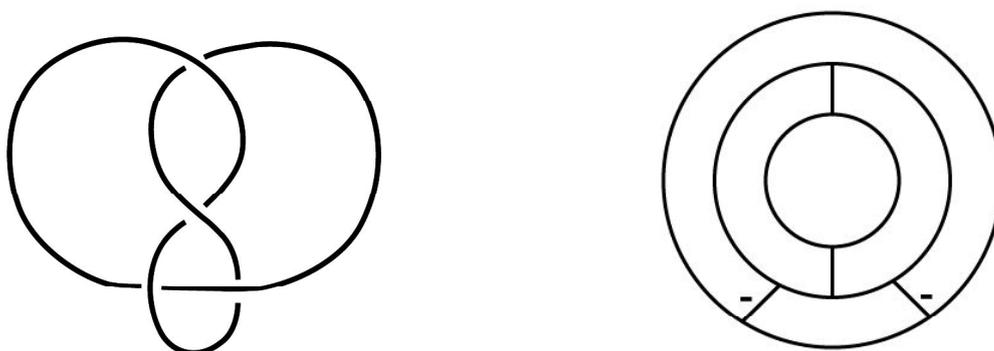
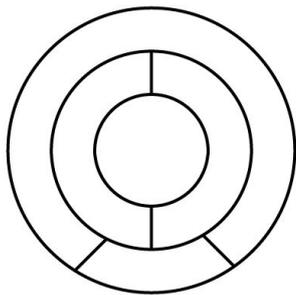


Abbildung 4.1.1: Eine Knotenprojektion und ein Spoke Diagram desselben Knoten

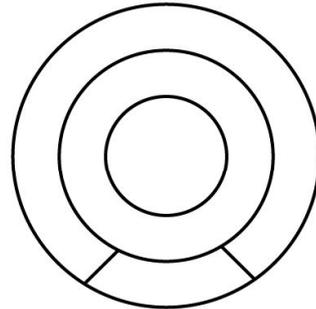
4.2 Definitionen: Spoke Diagrams

4.2.1 Definition: Spoke Diagram

Ein **Spoke Diagram** ist ein System disjunkter Kreise in der Ebene welche mit Linien (sogenannten Spokes) verbunden sind sodass die dadurch gegebene Teilmenge des \mathbb{R}^2 zusammenhängend ist.



(a) die gegebene Menge ist zusammenhängend, es handelt sich um ein Spoke Diagram



(b) die gegebene Menge ist nicht zusammenhängend, es handelt sich um kein Spoke Diagram

Abbildung 4.2.1

4.2.2 Definition: Funktion f_S von Knotenprojektionen zu Spoke Diagrams

Wie kommen wir aber nun von einer Knotenprojektion K zum zugehörigen Spoke-Diagramm?

Sei P die Menge der Knotenprojektionen aller Knoten im \mathbb{R}^3 bezüglich einer festen Projektion $p_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und sei S_D die Menge der Spoke Diagrams im \mathbb{R}^2 . Wir definieren die Abbildung $f_S : P \rightarrow S_D$ mit folgender Abbildungsvorschrift:

- (i) Durchlaufe K einmal in einer beliebigen Richtung. Es ergibt sich eine Orientierung wie in Abbildung 4.2.2a.
- (ii) Bei jeder Kreuzung: Ziehe den Kreuzungsmittelpunkt wie in Abbildung 4.2.2b auseinander (man folgt dabei der Orientierung).
- (iii) Verbinde die gewonnenen Kreise an den ehemaligen Kreuzungsstellen mit einer Linie - dem sogenannten **Spoke**. (siehe Abbildung 4.2.2c). War die Kreuzung negativ (siehe Abbildung 3.2.4), so erhält der Spoke ein negatives Vorzeichen.
- (iv) Die so entstandenen Kurven (Seifert-Kreise) werden zu gewöhnlichen Kreisen geformt (siehe Abbildung 4.2.2d).

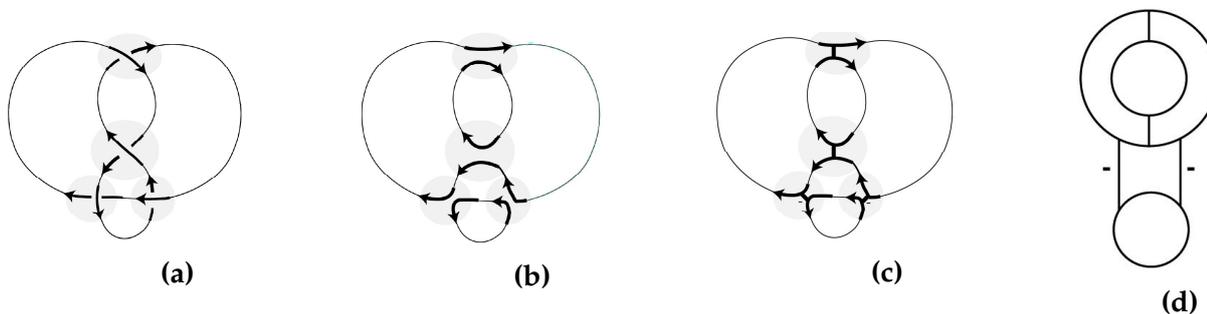


Abbildung 4.2.2: Knotenprojektion wird zum Spoke Diagramm

Bemerkung: Beachtenswert ist dabei, dass wir dasselbe Spoke Diagramm erhalten unabhängig davon in welche Richtung wir den Knoten durchlaufen haben. Das liegt daran, dass sich das Vorzeichen der Kreuzung bei umgekehrter Durchlaufrichtung nicht ändert (siehe Abbildung 3.2.4).

Eine etwas andere Darstellung derselben Durchlaufregel zum Erzeugen von Spoke Diagrams findet sich in [Har08, S.2]. Ich habe aber aus Gründen der Übersichtlichkeit obige Darstellung gewählt.

4.2.3 Lemma: Eigenschaften von f_S

f_S hat eine Umkehrfunktion f_S^{-1} , diese wandelt Spoke Diagrams in Knotenprojektionen um. Insbesondere ist f_S somit bijektiv.

Beweis.

Machen wir die Punkte der Abbildungsvorschrift in Def: 4.2.2 schrittweise rückgängig so landen wir per Definition wieder bei der ausgehenden Knotenprojektion. Somit ergibt sich die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion $f_S^{-1} : S_D \rightarrow P$ indem wir jeden Spoke durch eine Kreuzung mit dem entsprechendem Vorzeichen ersetzen (siehe Abbildung 4.2.3).

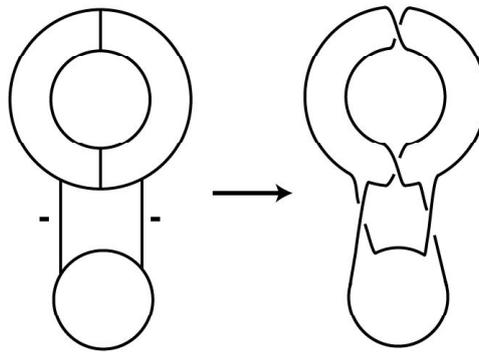


Abbildung 4.2.3: Umwandlung eines Spoke Diagrams in eine Knotenprojektion

□

Bemerkung: Für jedes Spoke Diagram S gibt es also genau eine passende Knotenprojektion K mit $f_S(K) = S$. Diese kann man durch Anwendung von f_S^{-1} erhalten.

4.2.4 Beispiel: Spoke Diagram des Kleeblattknotens

Wir wandeln nun eine Knotenprojektion des Kleeblattknoten mittels Funktion f_S in ein Spoke Diagram um. Danach wandeln wir dieses dann mittels f_S^{-1} wieder zurück in die ursprüngliche Knotenprojektion.

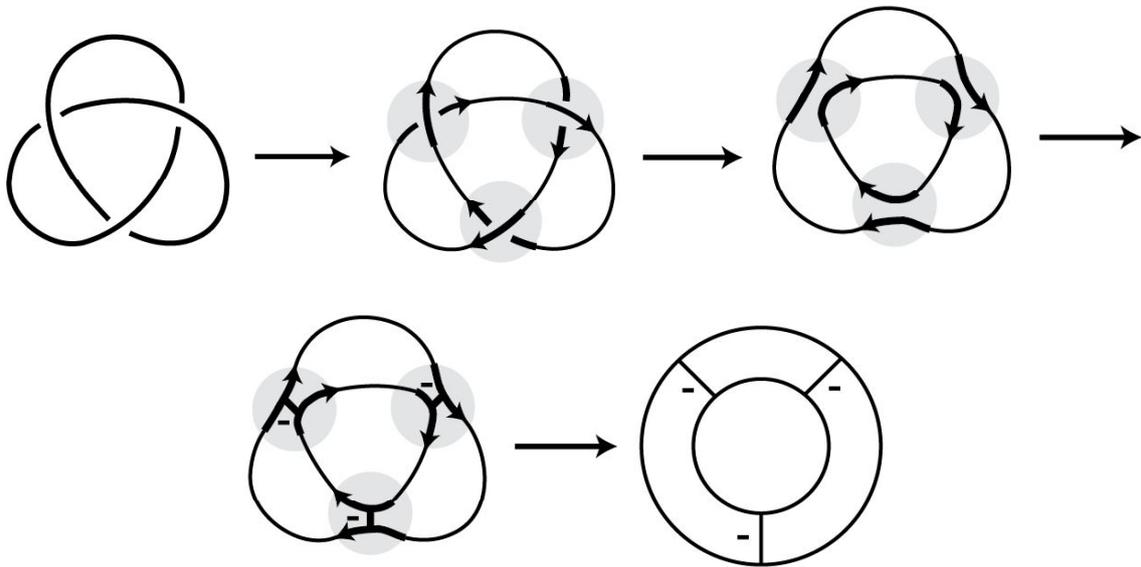


Abbildung 4.2.4: Knotenprojektion des Kleeblattknoten wird zum Spoke Diagram

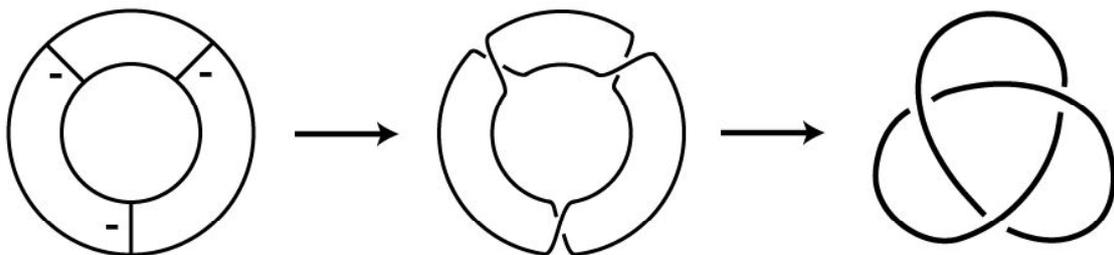


Abbildung 4.2.5: Spoke Diagramm wird wieder zur Knotenprojektion

4.2.5 Definition: konzentrisches Spoke Diagram

Ein **konzentrisches Spoke Diagram** ist ein Spoke Diagram bei dem alle Kreise den selben Mittelpunkt besitzen. Sind zwei solche konzentrischen Diagramme jeweils am äußerstem Kreis miteinander durch Spokes verbunden, so sprechen wir von einem **bi-konzentrischen Spoke Diagram**. Bei konzentrischen und bi-konzentrischen Spoke Diagrams nennen wir zwei Kreise welche mit Spokes verbunden sind und den selben Mittelpunkt haben einen **Ring**.

4.2.6 Definition: Orientierung von Spoke Diagrams

Ähnlich wie bei Knotenprojektionen (siehe 3.2.7) können wir auch einem Spoke Diagram eine Orientierung geben. Durchlaufen wir das Spoke Diagram so biegen wir beim Erreichen eines Spoke in dessen Richtung ab und beim verlassen des Spokes biegen wir in die entgegengesetzte Richtung ab. In dieser Weise wird das Spoke Diagram durchlaufen bis der Anfangspunkt erreicht ist. Die Spokes werden bei solch einem Durchlauf immer genau zweimal durchlaufen. Am Ende erhalten wir ein **orientiertes Spoke Diagram**

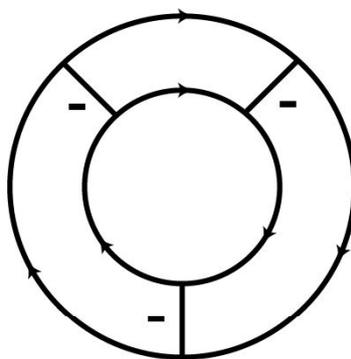


Abbildung 4.2.6: Ein orientiertes Spoke Diagram

Bemerkung: Die in Def: 4.2.6 aufgestellte Behauptung dass man beim Durchlaufen des Spoke Diagrams immer zum Ausgangspunkt zurückkehrt und jeder Spoke genau zweimal durchlaufen wurde stammt aus [Har08, S.2] und wird dort nicht näher begründet. Sie kann aber durch die analoge Aussage für Knotenprojektionen begründet werden; (vgl. [Ada04, S.35]).

4.2.7 Lemma: Orientierung von Spoke Diagrams

In einem beliebigen orientierem Spoke Diagram folgt unmittelbar aus Definition 4.2.6:

- (i) *Zwei nebeneinanderliegende Kreise welche mit Spokes verbunden sind haben immer eine unterschiedliche Orientierung.*
- (ii) *Sind zwei Kreise in der Art sodass ein Kreis im anderen liegt und sie mit Spokes verbunden sind, so haben sie immer die gleiche Orientierung.*

4.3 Bearbeitung von Spoke Diagrams

4.3.1 Spoke Diagrams und Reidemeister Bewegungen

Wir untersuchen nun, wie sich ein Spoke Diagram verändert wenn sich die zugehörige Knotenprojektion durch Reidemeister Bewegungen (siehe 3.3.4) verändert. Dazu betrachten wir nur den Teil der Knotenprojektion bzw. des Spoke Diagrams, welcher durch die Reidemeister Bewegung verändert wird. In den Darstellungen von Spoke Diagramm Ausschnitten werden anstatt Kreisbögen fallweise gerade Linien verwendet.

Im folgenden sehen wir immer zuerst den Teil der Knotenprojektion vor und nach der Reidemeister Bewegung und danach dieselbe Bewegung mit Spoke Diagrams.

Reidemeister Bewegung Typ **R1**:

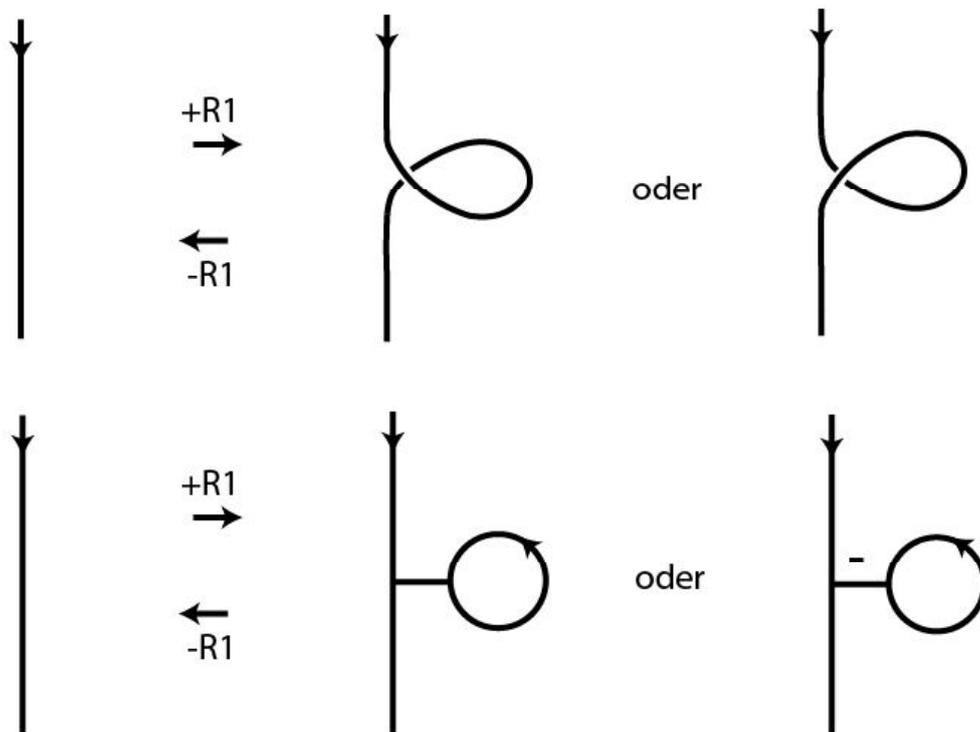


Abbildung 4.3.1: Reidemeister Bewegung Typ R1

Bemerkung: Nachdem das Vorzeichen der Kreuzung unabhängig von der Orientierung der Knotenprojektion ist, haben wir auch wenn die Knotenprojektion gegensätzlich orientiert ist dasselbe Ergebnis nach der Durchführung einer R1 Bewegung.

Anschauliche Interpretation: +R1 fügt einen Kreis im Spoke Diagram hinzu, -R1 entfernt einen Kreis im Spoke Diagram.

Reidemeister Bewegung Typ **R2a**: (gleiche Orientierung $\uparrow \uparrow$)

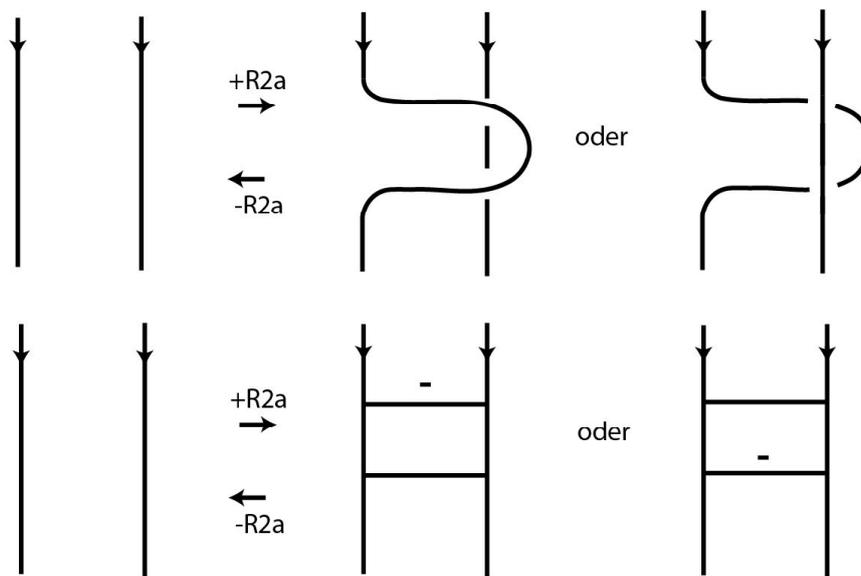


Abbildung 4.3.2: Reidemeister Bewegung Typ R2a

Anschauliche Interpretation: +R2a fügt zwei Spokes mit unterschiedlichen Vorzeichen hinzu, -R2a entfernt zwei Spokes wenn diese unterschiedliche Vorzeichen haben und nebeneinander liegen.

Reidemeister Bewegung Typ **R2b**: (unterschiedliche Orientierung $\uparrow \downarrow$)

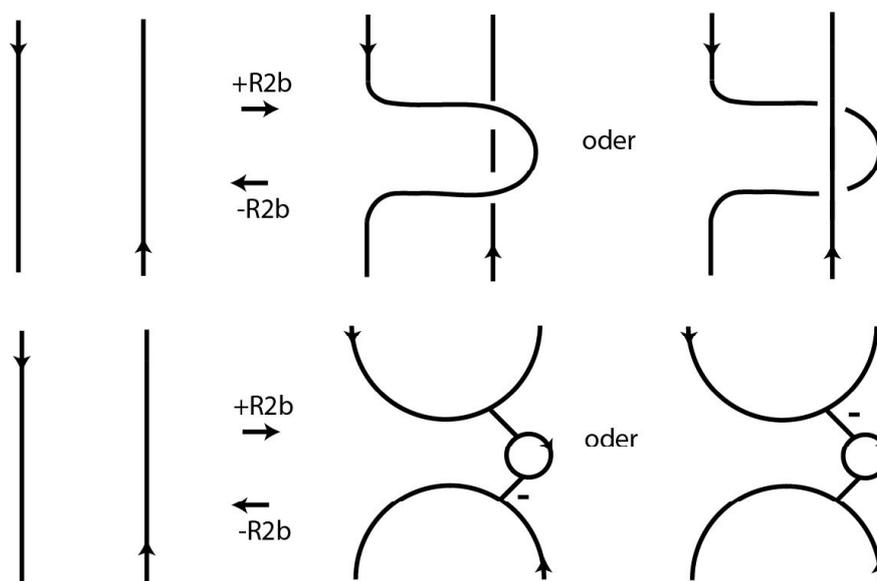


Abbildung 4.3.3: Reidemeister Bewegung Typ R2b

Anschauliche Interpretation: +R2b fügt einen Kreis zwischen zwei Kreissegmenten hinzu, dieser ist mit zwei Spokes verbunden welche unterschiedliche Vorzeichen haben. -R2b entfernt einen Kreis der mit zwei Spokes an Kreissegmenten verbunden ist, die zwei Spokes müssen dazu unterschiedliche Vorzeichen haben.

Reidemeister Bewegung Typ **R3a** (Fall 1): (die freie Kreuzung  hat dasselbe Vorzeichen der beiden anderen Kreuzungen)

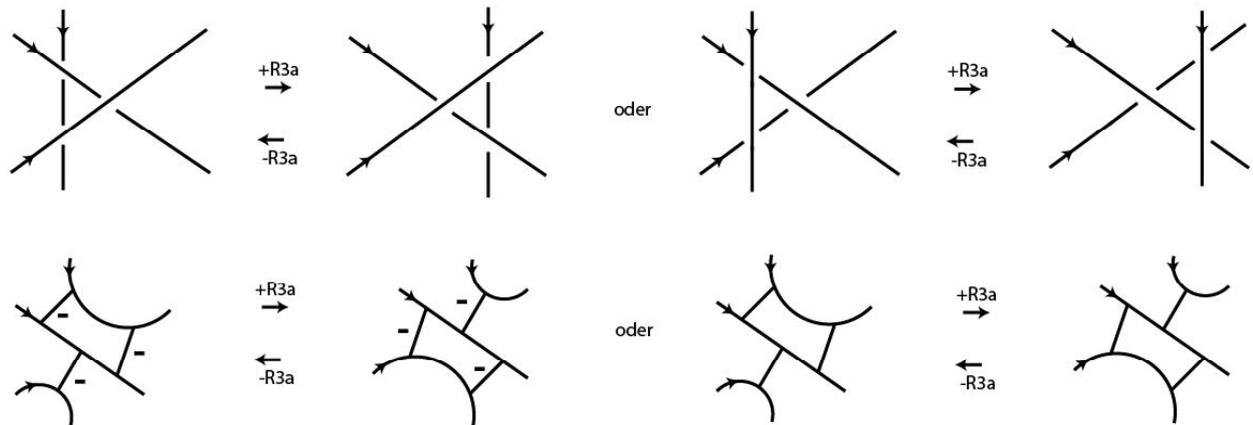


Abbildung 4.3.4: Reidemeister Bewegung Typ R3a (Fall 1)

Reidemeister Bewegung Typ **R3a** (Fall 2): (die freie Kreuzung  hat das den anderen beiden Kreuzungen entgegengesetzte Vorzeichen)

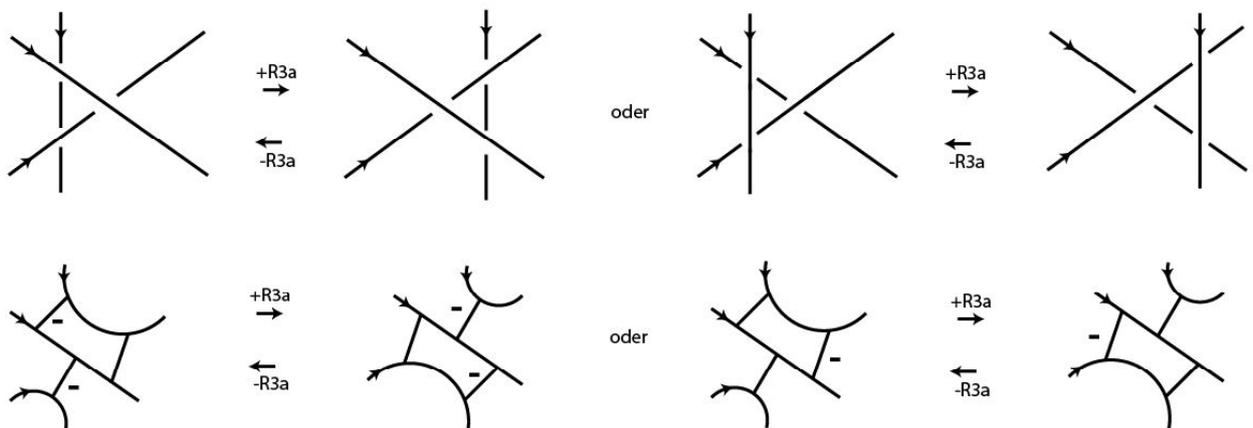


Abbildung 4.3.5: Reidemeister Bewegung Typ R3a (Fall 2)

Anschauliche Interpretation: Spokes werden zwischen zwei Ringen vertauscht, wobei die Vorzeichen zu beachten sind.

Bemerkung: Wir ändern von Fall 1 zu Fall 2 immer nur das Vorzeichen der freien Kreuzung , d.h. jener Kreuzung deren Vorzeichen beliebig gewählt werden kann ohne die R3 Bewegung zu verbieten. Daher nennen wir die Kreuzung mit frei wählbarem Vorzeichen auch die *freie Kreuzung*.

Bemerkung: Wir hatten bei R3a Bewegungen die Orientierung immer so gegeben dass die drei einander kreuzenden Linien ein Dreieck bilden welches keinem Umlaufsinn folgt wenn man der Orientierung nachgeht (siehe Abbildung 4.3.6a). Nun werden wir den Fall der R3 Bewegungen betrachten, bei welchem die Orientierung so gegeben ist dass die drei einander kreuzenden Linien ein Dreieck bilden welches einem Umlaufsinn folgt (siehe Abbildung 4.3.6b). Diesen Fall nennen wir **R3b**.



(a) Orientierung bei R3a



(b) Orientierung bei R3b

Abbildung 4.3.6

Reidemeister Bewegung Typ **R3b** (Fall 1): (die freie Kreuzung  ist positiv)

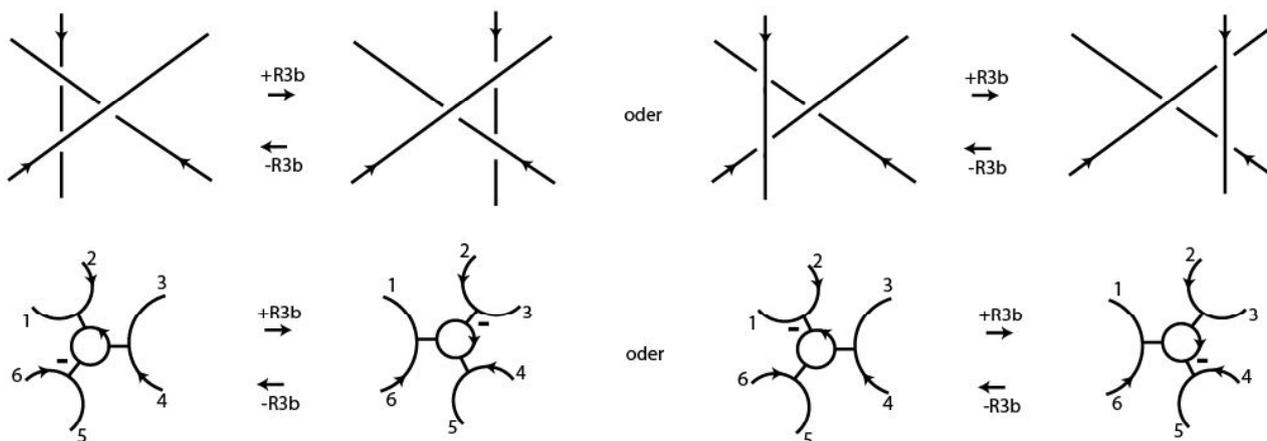


Abbildung 4.3.7: Reidemeister Bewegung Typ R3b (Fall 1)

Anschauliche Interpretation: Die Kreisbögen (1,2), (3,4), (5,6) werden aufgelöst und die neuen Kreisbögen (2,3), (4,5), (6,1) werden gebildet. Der innere Kreis samt Spokes rotiert um 180° im Uhrzeigersinn.

Wir betrachten nun einen weiteren Fall von R3b mit unterschiedlicher Orientierung:

Reidemeister Bewegung Typ **R3b** (Fall 2): (die freie Kreuzung  ist negativ)

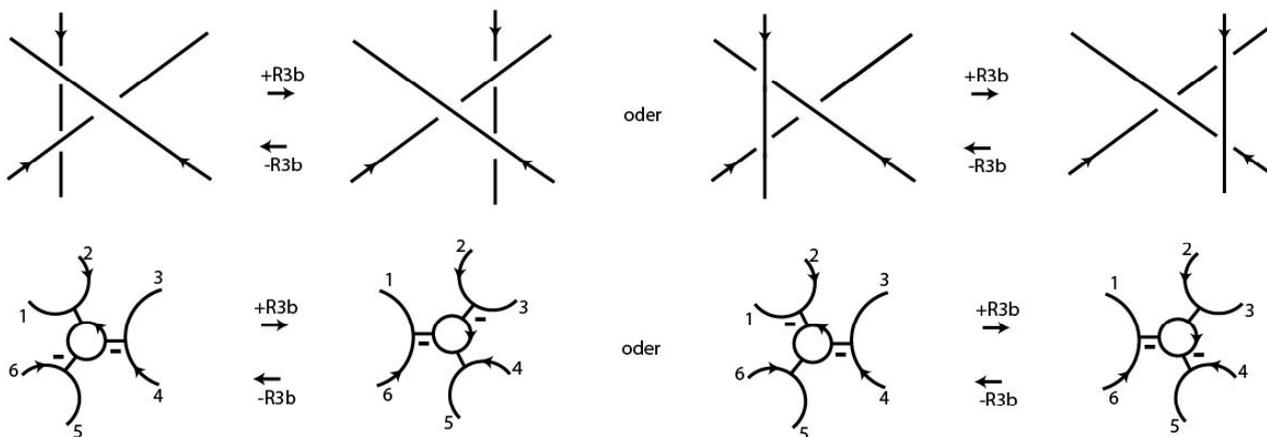
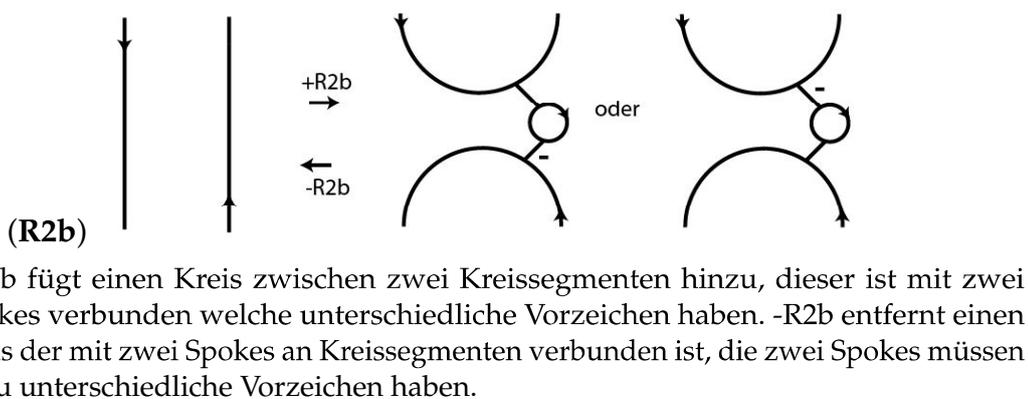
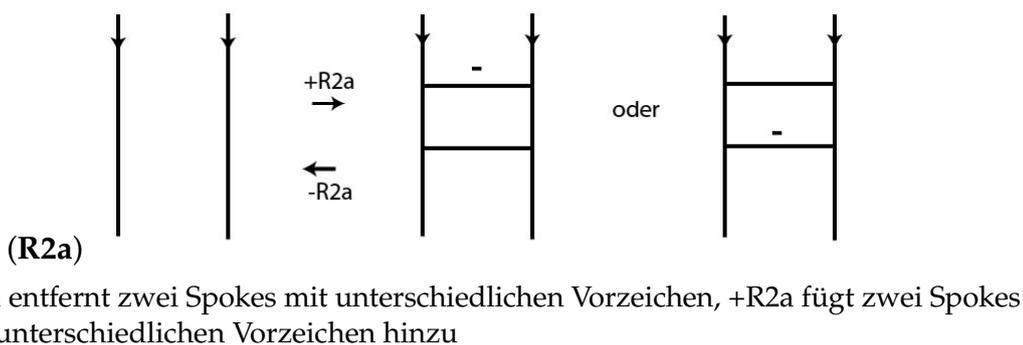
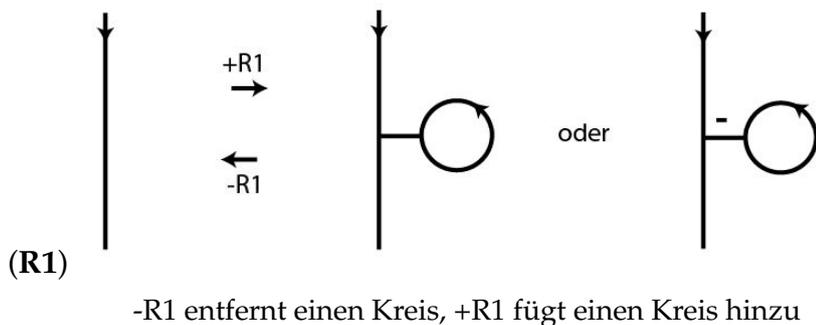


Abbildung 4.3.8: Reidemeister Bewegung Typ R3b (Fall 2)

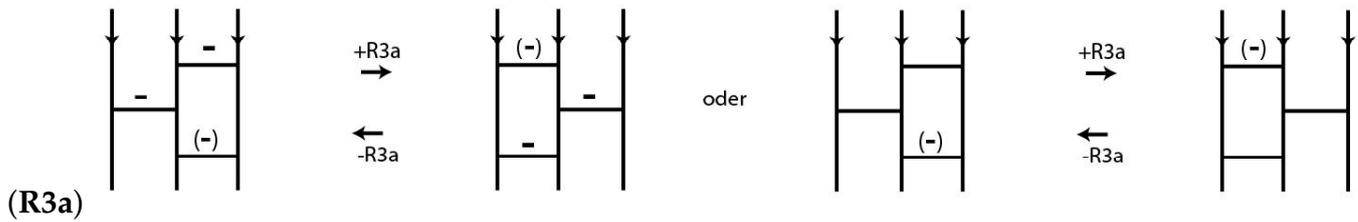
Bemerkung: Wenn man alle möglichen Orientierungen der drei kreuzenden Linien berücksichtigt, gibt es für die Reidemeister-Bewegung vom Typ R3 noch weitere Fälle zu analysieren. Nachdem diese Fälle allerdings alle entweder zum Ergebnis von R3a oder R3b (siehe Abbildung 4.3.4 bzw. Abbildung 4.3.7) führen, gehen wir nicht weiter darauf ein. Eine ausführliche Behandlung der weiteren Fälle findet sich in [Har08, S.4ff]

4.3.2 Definition: Reidemeister Bewegungen von Spoke Diagramms

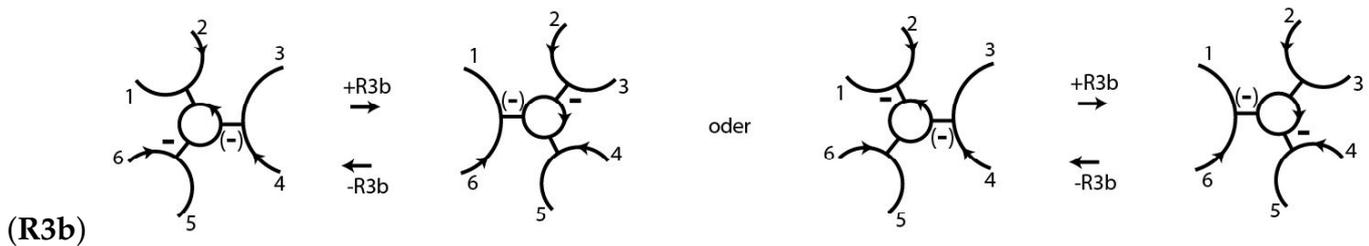
Wir fassen nun die Reidemeister-Bewegungen bezüglich Spoke Diagramms in folgender Definition zusammen. Folgende Veränderungen von Spoke Diagramms nennen wir analog zu den Knotenprojektionen (vgl. 3.3.4) **Reidemeister Bewegungen** von Spoke Diagramms.



Fortsetzung Definition 4.3.2



Spokes werden zwischen zwei Ringen vertauscht, wobei die Vorzeichen zu beachten sind.



Die Kreisbögen (1,2), (3,4), (5,6) werden aufgelöst und die neuen Kreisbögen (2,3), (4,5), (6,1) werden gebildet. Der innere Kreis samt Spokes rotiert um 180° im Uhrzeigersinn.

Bemerkung: Bei der Reidemeister Bewegung R3 hatten wir von Fall 1 zu Fall 2 jeweils das Vorzeichen der freien Kreuzung geändert (siehe Abbildung 4.3.5, Abbildung 4.3.8). Diese beiden Fälle fassen wir oben mit dem Symbol (-) zusammen: Das Symbol bedeutet dass der Spoke an dieser Stelle entweder negativ oder positiv gewählt werden kann, nach der Reidemeister-Bewegung bleibt das Vorzeichen erhalten.

4.3.3 Definition: Äquivalenz von Spoke Diagrams

Wir nennen zwei Spoke Diagrams S_1 und S_2 **äquivalent** wenn $f_S^{-1}(S_1)$ und $f_S^{-1}(S_2)$ äquivalent sind d.h. die zu $f_S^{-1}(S_1)$ und $f_S^{-1}(S_2)$ zugehörigen Knotenvertreter sind ambient isotop.)

Werden auf eine Knotenprojektion Reidemeister Bewegungen angewendet, dann ist die resultierende Knotenprojektion äquivalent zur ursprünglichen Knotenprojektion weil zugehörige Knotenvertreter ambient isotop sind (siehe 3.2.6). Weil wir die Reidemeister Bewegungen für Spoke Diagrams genau so gewählt haben sodass sie bezüglich der Bijektion f_S den Reidemeister Bewegungen für Knotenprojektionen entsprechen, gilt der Satz von Reidemeister auch für Spoke Diagrams:

4.3.4 Satz von Reidemeister für Spoke Diagrams

Zwei Spoke Diagrams S_1 und S_2 sind genau dann **äquivalent** wenn S_2 durch eine Serie von Reidemeister Bewegungen aus S_1 hervorgegangen ist.

Zur Begründung des Satzes präzisieren wir die obige Überlegung mit folgendem Beweis.

Beweis.

Für zwei Spoke Diagrams S_1, S_2 welche durch f_S aus den Knotenprojektionen K_1, K_2 hervorgegangen sind gilt:

S_1 und S_2 sind äquivalent

$\Leftrightarrow K_1$ und K_2 sind äquivalent

$\Leftrightarrow K_1 \xrightarrow{\text{durch R. Bewegungen}} K_2$ (Satz von Reidemeister: 3.3.5)

$\Leftrightarrow S_1 \xrightarrow{\text{durch R. Bewegungen}} S_2$ (Definition: 4.3.2)

□

4.3.5 Die Äquivalenzbewegung P für bi-konzentrische Spoke Diagrams

Die folgende Bewegung auf Spoke Diagrams entspricht im Raum der Knotenprojektionen trivialen ebenen Verformungen. Aus diesem Grund liefert sie nach 4.3.3 eine Äquivalenzbewegung für Spoke Diagrams.

Bewegung P :

Haben wir ein bi-konzentrisches Spoke Diagramm können wir eines der beiden konzentrischen Diagramme über das andere stülpen und erhalten somit ein konzentrisches Spoke Diagramm (siehe Abbildung 4.3.14 und Abbildung 4.3.15). Diese Bewegung kann auch in umgekehrter Weise aus konzentrischen Spoke Diagramms bi-konzentrische Diagramme erzeugen; vgl. [Har08, S.9].

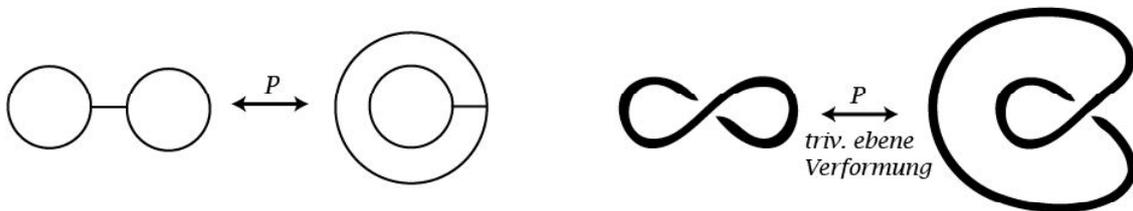


Abbildung 4.3.14: Bewegung Typ P auf einem Spoke Diagramm entspricht auf der zugehörigen Knotenprojektion einer trivialen ebenen Verformung

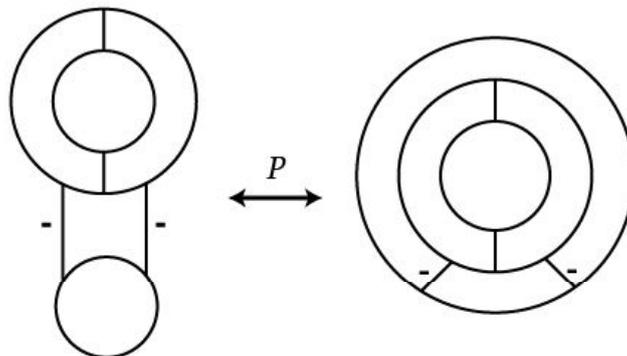


Abbildung 4.3.15: Bewegung Typ P auf einem Spoke Diagramm mit Ring

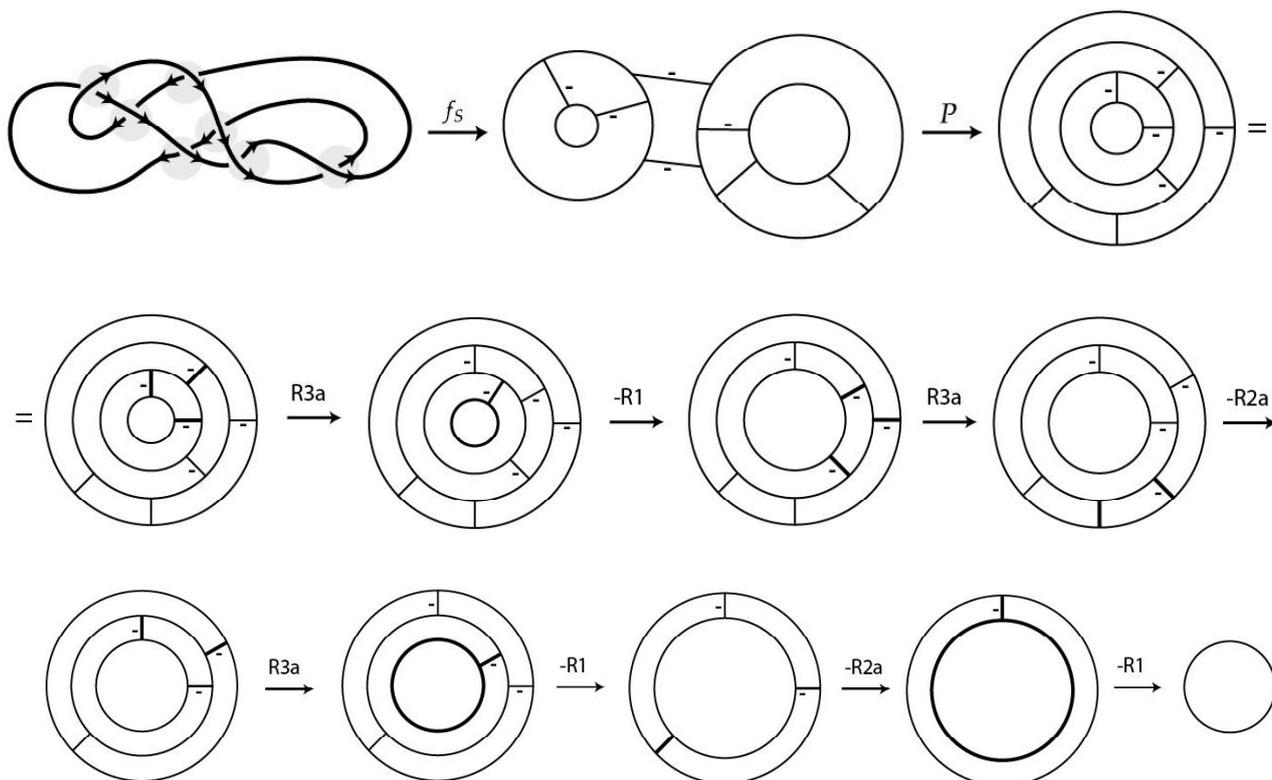
4.4 Beispiele für die Bearbeitung von Spoke Diagrams

4.4.1 Entknoten eines Unknoten

Wir werden nun die untenstehende Knotenprojektion als eine Projektion des Unknoten entlarven indem wir sie in ein Spoke Diagramm überführen und dieses mit Reidemeister Bewegungen vereinfachen. Wir gehen dazu folgendermaßen vor:

Strategie:

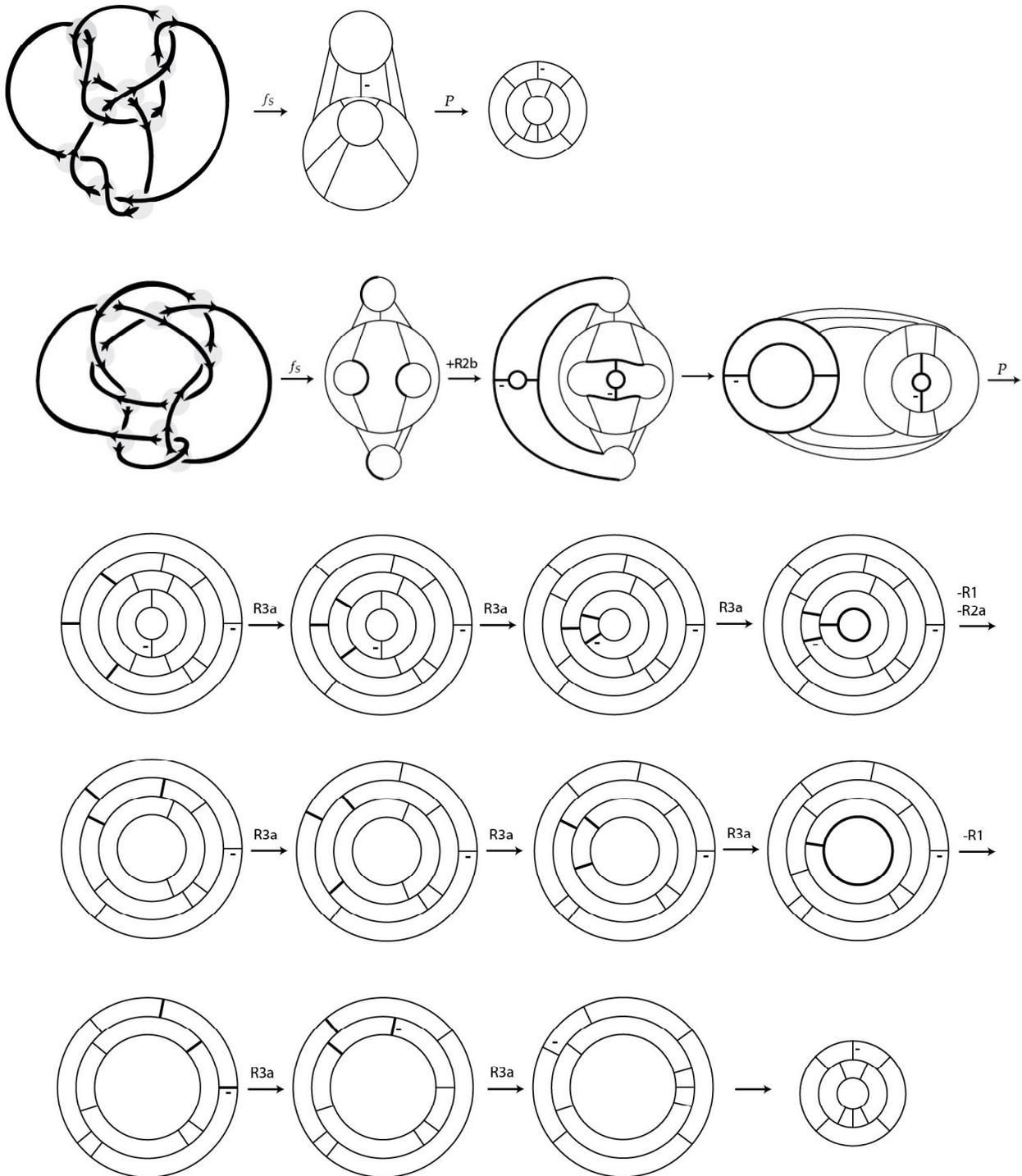
- (i) erzeuge ein konzentrisches Spoke Diagramm
- (ii) wende R3a immer in der Weise an, dass die Anzahl der Spokes im äußerem Ring erhöht wird.
- (iii) wann immer es möglich ist Spokes oder Kreise mit R1 oder R2a Bewegungen zu entfernen führe diese durch.



Bemerkung: Die Spokes bzw. Kreissegmente bei denen die nächste Reidemeister Bewegung stattfindet sind immer fett markiert.

4.4.2 Äquivalenz des Perko Paares

Wir Zeigen nun die Äquivalenz des Perko Paares (siehe 3.4.1) mittels Spoke Diagrams. Dazu vereinfachen wir beide Projektionen. Die $+R2b$ Bewegung wird in zwei Schritten durchgeführt damit besser ersichtlicher ist, was bei der Bewegung passiert.



4.5 Zentrierungsalgorithmus - Die +R2b Methode

4.5.1 Einleitung

In den vorangegangenen Beispielen (4.4.1 und 4.4.2) haben wir gesehen dass eine konzentrische Form eines Spoke Diagrams am übersichtlichsten ist. Wir hatten entweder Glück und es ergab sich gleich nach der Anwendung von f_S ein konzentrisches bzw. bi-konzentrisches Diagramm oder wir fanden nach einer wiederholten Anwendung von +R2b Bewegungen zu dieser Form. Diesem Umstand wollen wir nun genauer auf den Grund gehen und dazu prüfen ob die gewählte Methode allgemeingültig ist, d.h. ob wir stets aus jeder Knotenprojektion ein konzentrisches Spoke Diagramm erzeugen können.

4.5.2 Satz: Zentrierungsalgorithmus - Die +R2b Methode

Jedes Spoke Diagramm S wird nach der Ausführung von endlich vielen +R2b Bewegungen zu einem bi-konzentrischen oder konzentrischen Spoke Diagramm.

Um obigen Satz zu beweisen (vgl. [Har08, S.15ff]) werden wir zuerst kurz die **Beweisidee** skizzieren:

- wir werden sehen dass es nur genau zwei mögliche Anwendungssituationen für den +R2b Move gibt:
 - (i) Zwei Kreise liegen nebeneinander und haben die selbe Orientierung.
 - (ii) Zwei Kreise liegen einer im anderen und ihre Orientierungen unterscheiden sich.

In beiden Fällen können die Kreise jeweils nicht durch Spokes miteinander verbunden sein. Außerdem werden wir erkennen dass konzentrische und bi-konzentrische Spoke Diagrams die einzigen Spoke Diagrams sind bei welchen kein weiterer +R2b Move möglich ist.

- Wir definieren die Verdichtungszahl z_S eines Spoke Diagrams S als

$$z_S := \sum_i r(R_i) - \sum_i l(R_i) + \sum_j l(L_j) - \sum_j r(L_j)$$

wobei $r(R_i)$ die Anzahl der rechtsorientierten Kreise ist welche den rechtsorientierten Kreis R_i umgeben, $r(L_j)$ ist die Anzahl der rechtsorientierten Kreise die den linksorientierten Kreis L_j umgeben. Analog dazu ist $l(R_i)$ die Anzahl der linksorientierten Kreise welche den rechtsorientierten Kreis R_i umgeben und $l(L_j)$ ist die Anzahl der linksorientierten Kreise die den linksorientierten Kreis L_j umgeben. In den Summen läuft i über alle rechtsorientierten Kreise und j über alle linksorientierten Kreise.

- Seien $r, l \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Menge

$$S(r, l)$$

aller Spokediagrams mit r rechtsorientierten und l linksorientierten Kreisen. Wir werden sehen dass die Verdichtungszahl z_S auf $S(r, l)$ ein Maximum $z_{r, l}$ annimmt und dies geschieht genau dann wenn S ein konzentrisches oder bi-konzentrisches Spoke-Diagramm ist. Wir können also für gegebene Anzahlen von linksorientierten und rechtsorientierten Kreisen Spoke Diagrams S mit maximaler Verdichtungszahl $z_S = z_{r, l}$ konstruieren. Das sind dann entweder konzentrische oder bi-konzentrische Spoke Diagrams. Insbesondere können wir deshalb die maximale Verdichtungszahl $z_{r, l}$ einfach berechnen wie wir sehen werden.

- Wenn wir zeigen können dass für ein gegebenes Spoke Diagramm S ein +R2b Move die Verdichtungszahl z_S immer um 1 erhöht und gleichzeitig aber die Anzahl der rechtsorientierten und linksorientierten Kreise immer gleich bleibt, dann ergibt sich folgendes: Jede Knotenprojektion hat ein zugehöriges Spoke Diagramm $S \in S(r, l)$ für gewisse $r, l \in \mathbb{N}_0$ mit Verdichtungszahl z_S und nachdem ein +R2b Move z_S immer genau um 1 erhöht, so erhöht sich z_S je mehr +R2b Bewegungen wir anwenden. Wir können nun so lange +R2b Bewegungen anwenden bis $z_S = z_{r, l}$ maximal ist und wir deshalb bei einem konzentrischen bzw bi-konzentrischen Diagramm S angelangt sind. Dies muss nach $z_{r, l} - z_S$ Schritten der Fall sein und dann ist kein weiterer +R2b Move mehr möglich denn sonst könnte sich z_S noch weiter erhöhen. Dies ist aber nicht möglich da $z_{r, l}$ die maximale Verdichtungszahl des Spoke Diagrams ist.
- Es ergibt sich durch die Differenz $z_{r, l} - z_S$ nun die Anzahl der +R2b Moves die notwendig und hinreichend sind um die gegebene Knotenprojektion in eine konzentrisches bzw. bi-konzentrisches Spoke Diagramm zu verwandeln.
- Nachdem wir also die Anzahl der Schritte berechnen können die zu unserem gewünschten bi-konzentrischen Diagramm führen, handelt es sich um einen endlichen Prozess der immer zum gewünschten Ziel führt.

Beweis des Satzes:

Wenn wir die +R2b Bewegung (siehe Def 4.3.2) betrachten, sehen wir dass es wegen der notwendigen Orientierung nur genau zwei Situationen gibt in denen der +R2b Move anwendbar ist, denn die Kreissegmente welche bearbeitet werden (fett markiert) müssen unterschiedliche Orientierung aufweisen damit der +R2b Move anwendbar ist.

(1.) K_1 und K_2 liegen nebeneinander und haben die selbe Orientierung.

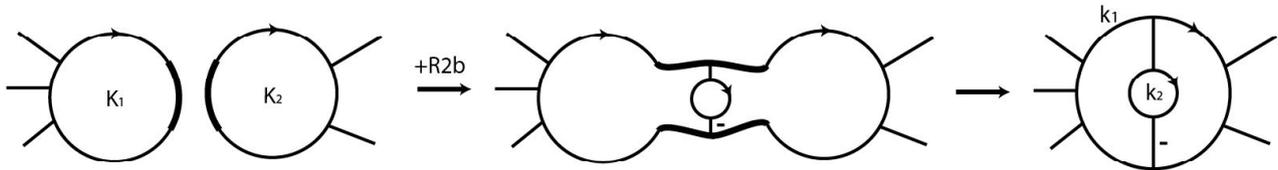


Abbildung 4.5.1: Verdichtung von K_1 und K_2

(2.) K_2 liegt in K_1 und die Orientierung ist verschieden.

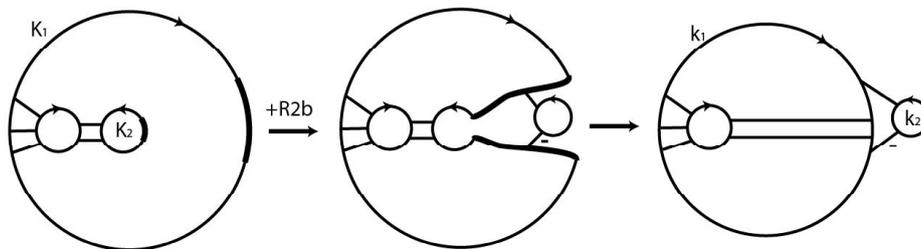


Abbildung 4.5.2: Außentransfer von K_1 und K_2

Unter Berücksichtigung von Def 4.3.2 und Lemma 4.2.7 erkennen wir dass konzentrische und bi-konzentrische Spoke Diagrams die einzigen Spoke Diagrams sind bei welchen kein weiterer +R2b Move möglich ist denn diese haben keine angrenzenden Kreise mit Kreissegmenten unterschiedlicher Orientierung sodass ein +R2b Move möglich wäre.

Dass die Anzahl der rechtsorientierten Kreise und die Anzahl der linksorientierten Kreise nach der Ausführung von +R2b gleich bleibt sehen wir sofort, da dies bei den zwei einzigen Anwendungsmöglichkeiten (siehe Abbildung 4.5.1 bzw. Abbildung 4.5.2) der Fall ist.

Die Verdichtungszahl z_S eines Spoke Diagrams S ist definiert durch:

$$z_S := \sum_i r(R_i) - \sum_i l(R_i) + \sum_j l(L_j) - \sum_j r(L_j) \quad (4.1)$$

wobei $r(R_i)$ die Anzahl der rechtsorientierten Kreise ist welche den rechtsorientierten Kreis R_i umgeben. $r(L_j)$ ist die Anzahl der rechtsorientierten Kreise die den linksorientierten Kreis L_j umgeben. Analog dazu ist $l(R_i)$ die Anzahl der linksorientierten Kreise welche den rechtsorientierten Kreis R_i umgeben und $l(L_j)$ ist die Anzahl der linksorientierten Kreise die den linksorientierten Kreis L_j umgeben. In den Summen läuft i über alle rechtsorientierten Kreise und j über alle linksorientierten Kreise.

Für die Fortführung des Beweises benötigen wir folgende Lemmata:

4.5.2 a Lemma: Maximale Verdichtungszahl.

Die Verdichtungszahl z_S eines Spokediagramms $S \in S(r, l)$ ist genau dann maximal unter allen Verdichtungszahlen $z_{S'}$ wobei $S' \in S(r, l)$ wenn S konzentrisch oder bi-konzentrisch ist, d.h.

$$z_S = z_{r,l} := \max\{z_{S'} : S' \in S(r, l)\} \Leftrightarrow S \text{ ist konzentrisch oder bi-konzentrisch.}$$

Für die maximale Verdichtungszahl gilt

$$z_{r,l} = \frac{r(r-1) + l(l-1)}{2}.$$

Beweis. Wegen der Definition der Verdichtungszahl (Gleichung 4.1) gilt ganz allgemein: Ein Spokediagramm S mit gegebener Anzahl von rechts und linksorientierten Kreisen hat genau dann maximale Verdichtungszahl unter allen solchen Spokediagramms wenn gilt : Jeder Kreis von S mit einer bestimmten Orientierung ist von so vielen Kreisen derselben Orientierung wie möglich umgeben und es umgibt ihn kein Kreis anderer Orientierung. Ein Spoke Diagramm $S \in S(r, l)$ ist also genau dann ein Spoke Diagramm mit maximaler Verdichtungszahl wenn gilt:

- S ist ein bi-konzentrisches Spoke Diagramm (wenn $r \neq 0$ sowie $l \neq 0$).
- S ist ein konzentrisches Spoke Diagramm (wenn entweder $r = 0$ oder $l = 0$).

Die maximale Verdichtungszahl ist $z_{r,l}$ kann nun einfach berechnet werden: In einem bi-konzentrischen oder konzentrischen Spoke Diagram sind alle Kreise nur von Kreisen derselben Orientierung umgeben und die Anzahl der rechtsorientieren Kreise r sowie die Anzahl der linksorientierten Kreise l ist gegeben. Somit können wir einfach in die Definition von z_S (Gleichung 4.1) einsetzen und erhalten die maximale Verdichtungszahl $z_{r,l}$:

$$\begin{aligned} z_{r,l} &= \sum_i r(R_i) - 0 + \sum_j l(L_j) - 0 \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} i + \sum_{j=1}^{l-1} j \\ &= \frac{r(r-1) + l(l-1)}{2}. \end{aligned}$$

□

4.5.2b Lemma: Erhöhung der Verdichtungszahl.

Ein +R2b Move erhöht die Verdichtungszahl z_S eines Spoke Diagrams S immer genau um +1.

Beweis. Für die Veränderung der Verdichtungszahl betrachten wir die allgemeinen Fälle einer +R2b Bewegung, also einer Verdichtung und eines Außentransfers (siehe Abbildung 4.5.3 und Abbildung 4.5.4). Die Felder x , y und u enthalten dabei eine beliebige Anzahl von rechtsorientierten und linksorientierten Kreisen.

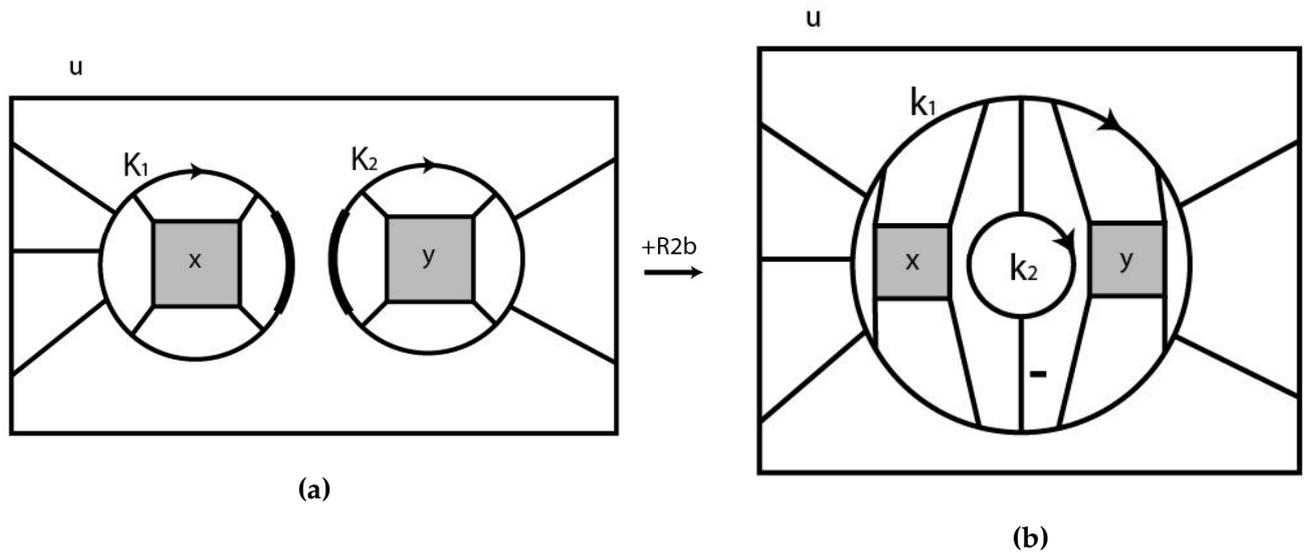


Abbildung 4.5.3: allgemeine Verdichtung von K_1 und K_2

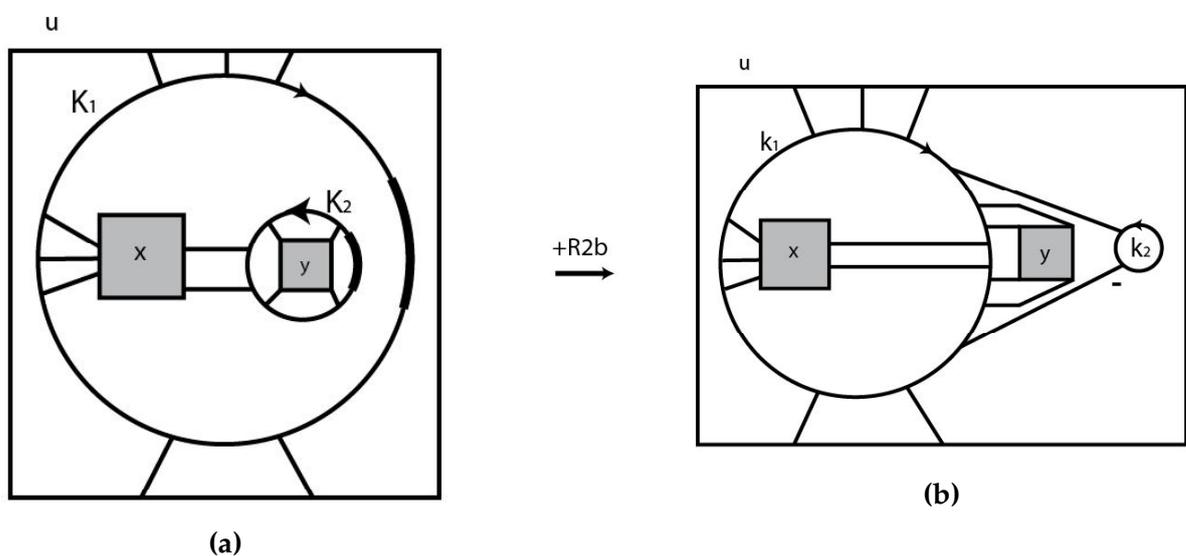


Abbildung 4.5.4: allgemeiner Außentransfer von K_1 und K_2

Die Veränderung von z_S durch einen +R2b Move nennen wir $z_\Delta = z_b - z_a$. Wobei z_a die Verdichtungszahl vor der +R2b Bewegung ist und z_b die Verdichtungszahl danach. Rechtsorientierte Kreise nennen wir R-Kreise, linksorientierte Kreise L-Kreise. Die Beiträge der Felder x , y und u zu z_a bzw. z_b nennen wir z_{a_i} und z_{b_i} mit $i \in \{x, y, u\}$. Die Beiträge der Felder x , y und u zu z_Δ definieren wir als $z_{\Delta_i} := z_{b_i} - z_{a_i}$ mit $i \in \{x, y, u\}$.

Betrachten wir die allgemeine Verdichtung in Abbildung 4.5.3 , so sehen wir dass die Anzahl der umgebenden R-Kreise und L-Kreise für das Feld x, das Feld y und das Feld u in Fig. b gleich sind wie in Fig. a. Das bedeutet dass diese Felder für z_{Δ} bei einer Verdichtung nicht berücksichtigt werden müssen.

Betrachten wir den allgemeinen Außentransfer in Abbildung 4.5.4 , so sehen wir dass die Anzahl der umgebenden R-Kreise und L-Kreise für das Feld x und u gleichbleibend sind, also erhalten wir $z_{\Delta_x}=0$ und $z_{\Delta_u}=0$. Das Feld y in Fig. b ist von einem L-Kreis und einem R-Kreis weniger umgeben als in Fig. a. Setzen wir nun für z_{ay} und z_{by} in Gleichung 4.1 ein

erhalten wir folgendes: $z_{\Delta_y} = z_{by} - z_{ay} = -r_y + r_y - l_y + l_y = 0$

Wobei r_y und l_y die Anzahlen der rechtsorientierten und linksorientierten Kreise innerhalb des Feldes y sind. Also auch bei einem Außentransfer können wir für z_{Δ} die Felder x, y und u vernachlässigen. Wir müssen also für z_{Δ} in beiden Fällen nur die Kreise K_1, K_2 und k_1, k_2 berücksichtigen.

Für eine **Verdichtung** (siehe Abbildung 4.5.3) ist per Definition von z_S gültig:

$$\begin{aligned} z_b &= r(k_1) + r(k_2) - (l(k_1) + l(k_2)) + z_{bx} + z_{by} + z_{bu} \\ &= r(k_1) + r(k_2) - l(k_1) - l(k_2) + z_{bx} + z_{by} + z_{bu} \\ z_a &= r(K_1) + r(K_2) - (l(K_1) + l(K_2)) + z_{ax} + z_{ay} + z_{au} \\ &= r(K_1) + r(K_2) - l(K_1) - l(K_2) + z_{ax} + z_{ay} + z_{au} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} z_{\Delta} &= z_b - z_a \\ &= (r(k_1) - r(K_1)) + (r(k_2) - r(K_2)) + (l(K_1) - l(k_1)) + (l(K_2) - l(k_2)) \\ &= 0 + 1 + 0 + 0 \quad \text{(betrachte Abbildung 4.5.3)} \\ &= +1 \end{aligned}$$

Für einen **Außentransfer** (siehe Abbildung 4.5.4) ist per Definition von z_S gültig:

$$\begin{aligned} z_b &= r(k_1) - l(k_1) + l(k_2) - r(k_2) + z_{bx} + z_{by} + z_{bu} \\ z_a &= r(K_1) - l(K_1) + l(K_2) - r(K_2) + z_{ax} + z_{ay} + z_{au} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} z_{\Delta} &= z_b - z_a \\ &= (r(k_1) - r(K_1)) + (l(K_1) - l(k_1)) + (l(k_2) - l(K_2)) + (r(K_2) - r(k_2)) \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 \quad \text{(betrachte Abbildung 4.5.4)} \\ &= +1 \end{aligned}$$

□

Somit ergibt sich nun wie Eingangs erwähnt folgendes: Jede Knotenprojektion K hat ein zugehöriges Spoke Diagram $S \in S(r, l)$ für gewisse $r, l \in \mathbb{N}_0$ mit Verdichtungszahl z_S und nachdem ein +R2b Move z_S immer genau um 1 erhöht, so erhöht sich z_S je mehr +R2b Bewegungen wir anwenden. Wir können nun so lange +R2b Bewegungen anwenden bis wir bei einem Spoke Diagram S mit maximaler Verdichtungszahl $z_S = z_{r,l}$ angekommen sind. Nach Lemma 4.5.2 a muss S dann konzentrisch bzw bi-konzentrisch sein. Nach $z_{r,l} - z_S$ Schritten ist also kein weiterer +R2b Move mehr möglich denn sonst könnte sich z_S noch weiter erhöhen. Dies ist aber nicht möglich da $z_{r,l}$ die maximale Verdichtungszahl des Spoke Diagrams ist.

Es ergibt sich also durch die Differenz $z_{r,l} - z_S$ die Anzahl der +R2b Moves die notwendig und hinreichend sind um die gegebene Knotenprojektion zu einem konzentrischen oder bi-konzentrischen Spoke Diagram zu verwandeln.

Der Algorithmus ist daher endlich und terminiert immer mit einem konzentrischen oder bi-konzentrischen Spoke Diagram. \square

4.5.3 Zur Bedeutung des Satzes

Wir haben durch die Zentrierungsmethode eine einfache Möglichkeit gefunden aus jeder gegebenen Knotenprojektion ein konzentrisches bzw. bi-konzentrisches Spoke Diagramm zu erzeugen. Falls wir ein bi-konzentrisches Diagramm erhalten, können wir durch die einmalige Anwendung von P (siehe 4.3.3) ein konzentrisches Diagramm erzeugen. Ausserdem können wir durch die Berechnung von $z_{r,l}$ und z_S sofort sagen wie viele Schritte (+R2b Moves) bei einem gegebenem Spoke Diagram nötig sind um es zu einem konzentrischen bzw. bi-konzentrischen Spoke Diagram zu machen.

In den vorangegangenen Beispielen haben wir gesehen dass wir konzentrische Spoke Diagrams dafür verwenden können um Knoten auf einfache Art zu unterscheiden.

Es ist auch möglich aus konzentrischen Spoke Diagrams zugehörige Zöpfe zu generieren wie wir in 4.6.10 sehen werden. Das wäre ebenfalls ein Ansatz Knoten zu klassifizieren, weil sich Zöpfe durch ihre klare algebraische Struktur klassifizieren lassen. (siehe [Sos00, S.42,57])

4.5.4 Vergleich mit dem Vogel Algorithmus

An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben dass bereits ein Algorithmus zum zentrieren von Knotenprojektionen existiert. Es handelt sich um den **Algorithmus von Vogel** welcher in [Sos00, S.44-51] ausführlich erklärt ist. Der Algorithmus ist allerdings etwas komplex und benötigt eine Vielzahl an neuen Definitionen. Es werden Knotenprojektionen in Seifert Kreise umgewandelt, diese werden in Länder unterteilt und falls ungleichartige Länder existieren werden bei der ausgehenden Knotenprojektion Operationen durchgeführt. Danach erfolgt eine neue Umwandlung in Seifert Kreise usw. Es ist also nötig ständig zwischen Knotenprojektionen und Seifert Kreisen umzuwandeln und verschiedene Operationen anzuwenden. Dies ist bei der +R2b Zentrierungsmethode (siehe 4.5) nicht der Fall weil dabei einfach nur +R2b Bewegungen auf Spoke Diagrams angewendet werden. Außerdem ist der Beweis des Satzes von Vogel nur mit dem Einsatz höchst komplizierter Methoden aus dem Gebiet der algebraischen Topologie möglich ([Sos00, S.50]).

Der Zentrierungsalgorithmus von Harasko könnte also einen innovativen Fortschritt gegenüber dem Vogel-Algorithmus bedeuten weil es nicht mehr nötig ist ständig zwischen Knotenprojektionen und Seifert Kreisen zu wechseln und dort jeweils verschiedene Operationen durchzuführen. Weiters können wir durch die Berechnung von $z_{r,l}$ und z_s sofort bestimmen wie viele Schritte (+R2b Moves) bei einem gegebenem Spoke Diagram nötig sind um es zu einem konzentrischen bzw. bi-konzentrischen Spoke Diagram zu machen. Außerdem ist der Beweis des Satzes 4.5.2 sehr elementar im Vergleich zum Beweis des Satzes von Vogel da keine algebraische Topologie nötig ist.

4.6 System zum Vereinfachen von Spoke Diagrams

4.6.1 Einleitung

Wir haben im vorigem Abschnitt eine Methode gefunden aus gegebenen Kontenprojektionen konzentrische Spoke Diagrams zu erzeugen. In den vorangegangenen Beispielen haben wir die konzentrischen Spoke Diagrams allerdings immer noch weiter vereinfacht indem wir versucht haben die Anzahl der Spokes und der Kreise zu reduzieren. Diese Methode stammt aus [Har08, S.11]. Wir möchten nun versuchen ob wir aus der verwendeten Methode ein generelles System zum Vereinfachen von Spoke Diagrams gewinnen können sodass wir diese bestmöglich vergleichen können.

In 4.4 sind wir folgendermaßen vorgegangen um Spoke Diagrams zu vereinfachen:

- (i) erzeuge ein konzentrisches Spoke Diagram
- (ii) wende R3a immer in der Weise an, dass die Anzahl der Spokes im äußerem Ring erhöht wird solange dies möglich ist. (Wir nennen eine solche Bewegung eine R3a Bewegung *nach außen*.)
- (iii) wann immer es möglich ist Spokes oder Kreise mit R1 oder R2a Bewegungen zu entfernen, führe diese durch.

Bemerkung: Die Bewegung R3b ist zur Vereinfachung eines Spoke Diagrams also gar nicht nötig.

Untersuchen wir die Güte dieser Methode nun anhand eines weiteren Beispiels.

4.6.2 Beispiel: Vereinfachen von Spoke Diagrams

Betrachten wir folgende zwei Spoke Diagrams. Es sind beides Spoke Diagrams des Perko Paares (siehe 4.4.2) und somit äquivalent.

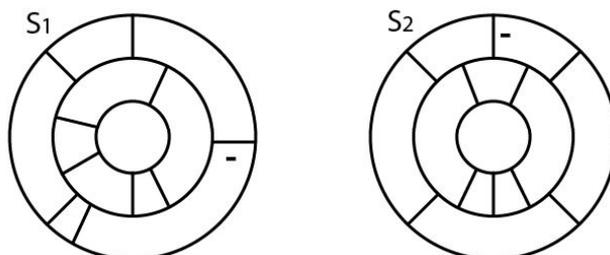
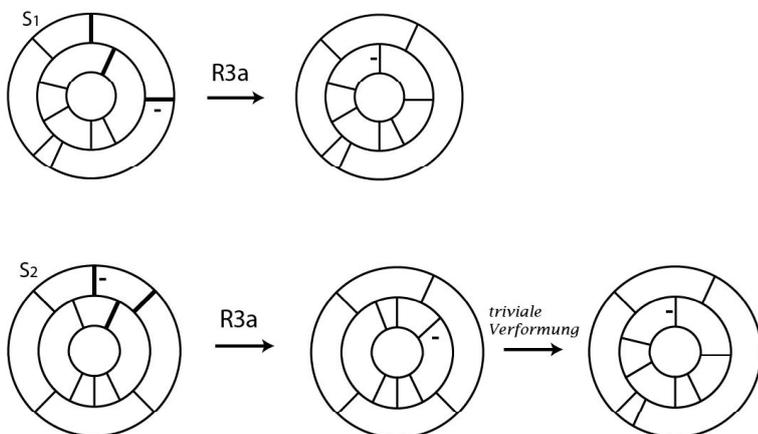


Abbildung 4.6.1: zwei äquivalente Spoke Diagrams S_1 und S_2

Die Spoke Diagrams sind bereits konzentrisch und wir haben den Fall, dass bei beiden Spoke Diagrams keine weitere R3a Bewegung möglich ist sodass sich die Anzahl der Spokes im äußeren Ring erhöhen würde.

Wir haben also zwei Spoke Diagrams deren Äquivalenz wir mit unserer Methode in diesem Fall nicht erkennen können. Für gewisse Fälle versagt also die Methode aus 4.4.

Versuchen wir in dem Fall, wenn keine weiteren R3a Bewegungen nach außen hin möglich sind, umgekehrt R3a Bewegungen *nach innen* (also sodass sich die Anzahl der Spokes im inneren Ring erhöht) durchzuführen solange dies möglich ist.



Nun haben wir die selben Spoke Diagrams erhalten und können somit sagen dass es sich um äquivalente Spoke Diagrams bzw. Knoten handelt. Man hat also mehr Erfolg wenn man nicht nur R3a Bewegungen nach außen, sondern anschließend auch R3a Bewegungen nach innen betrachtet.

Wir müssen allerdings zugeben, dass bei S_2 eine R3a Bewegung auch an einer anderen Stelle des Spoke Diagrams möglich gewesen wäre. Wenn wir das berücksichtigen und alle Möglichkeiten für eine R3a Bewegung in die jeweilige Richtung durchführen erhalten wir für jedes Spoke Diagramm einen Baum¹.

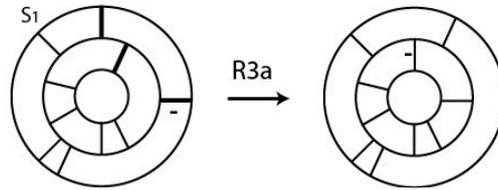


Abbildung 4.6.3: Baum von S_1

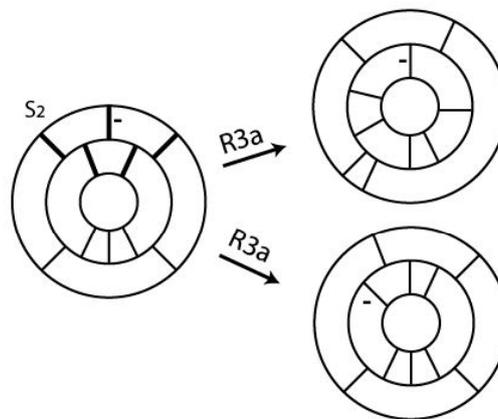


Abbildung 4.6.4: Baum von S_2

Wir sehen dass die beiden Bäume ein gleiches Blatt¹ (Blätter eines Baumes sind Spoke Diagrams ohne ausgehende Pfeile) haben. Die Schnittmenge der Blätter von beiden Bäumen ist also nicht leer.

¹ vgl. Baumdiagramm eines Entscheidungsbaumes: <https://de.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsbaum>

4.6.3 Algorithmus zum Vereinfachen von Spoke Diagrams

Wir fassen nun die in 4.6.2 entwickelte Vereinfachungsmethode zu einem Algorithmus zusammen:

- (i) Erzeuge mittels +R2b Methode (und ggf. P) ein konzentrisches Spoke Diagram.
- (ii) An jeder möglichen Stelle des Spoke Diagrams: wende R3a Bewegungen nach außen an solange dies möglich ist.
- (iii) An jeder möglichen Stelle des Spoke Diagrams: wende R3a Bewegungen nach innen an solange dies möglich ist.
 - o wann immer es bei ii) und iii) möglich ist Spokes oder Kreise mit R1 oder R2a Bewegungen zu entfernen, führe diese durch.

Folgendes Flussdiagramm zeigt den detaillierten Ablauf des Algorithmus:

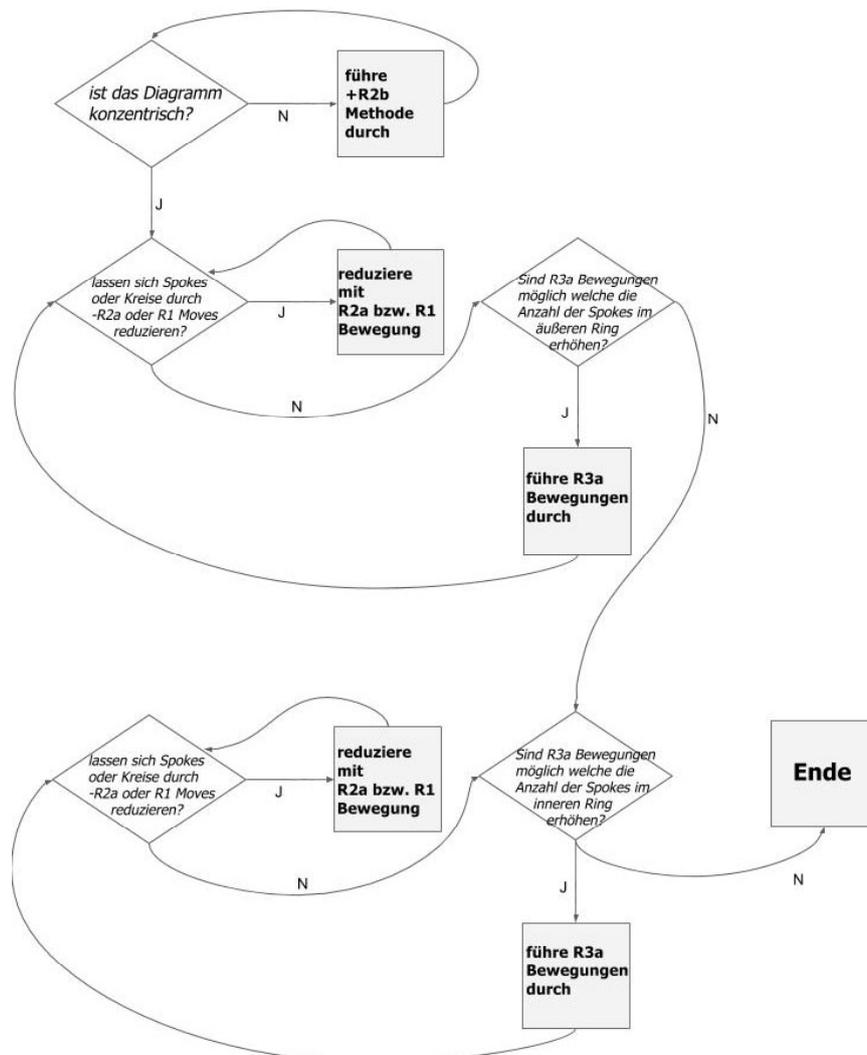


Abbildung 4.6.5: Flussdiagramm des Algorithmus.

Weil der Algorithmus immer alle möglichen R3a Bewegungen durchführt liefert er am Ende einen Baum.

Bemerkung: Harasko verwendet diesen Algorithmus (siehe [Har08, S.23]) ohne alle möglichen R3a Bewegungen zu berücksichtigen und auch ohne R3a Bewegungen nach innen durchzuführen. Die R3a Bewegung wird bei ihm nur in der Form verwendet sodass sich die Anzahl der Spokes im äußeren Ring erhöht, also nach außen. Es wird in jedem Schritt immer nur eine (beliebige, von mehreren möglichen) R3a Bewegungen durchgeführt. Dies liefert ihm ein einzelnes Spoke Diagram anstelle eines Baumes. Der von Harasko beschriebene Algorithmus würde bei Beispiel 4.6.2 keine Äquivalenz der beiden Diagrammen finden. Dazu ist anzumerken dass Harasko die Klassifikation der Knoten mittels Spoke Diagrams auf dem Wege versucht, mit den konzentrischen Spoke Diagrams Polynome zu erzeugen (siehe [Har08, S.23]). Das Hauptaugenmerk wird bei Harasko nicht darauf gelegt eine Menge von konzentrischen Spoke Diagrams für eine Klassifizierung zu suchen, was aber unsere Intention ist.

4.6.4 Definition: Baum eines Spoke Diagrams

Wenden wir den Algorithmus 4.6.3 auf ein Spoke Diagram S an, so erhalten wir einen Baum. Diesen nennen wir den **Baum B_S des Spoke Diagrams S** .

4.6.5 Definition: Minimales Spoke Diagram

Jedes Mal wenn beim Durchführen des Algorithmus keine weitere -R3a Bewegung (nach außen) oder keine weitere +R3a Bewegung (nach innen) möglich ist, so sind wir bei einem speziellen Spoke Diagramm angelangt. Ein Spoke Diagramm welches diese Eigenschaft erfüllt nennen wir ein **minimales Spoke Diagramm**. Insbesondere sind alle Blätter eines Baumes B_S minimale Spoke Diagramme, denn bei den Blättern ist keine +R3a Bewegung (nach innen) mehr möglich.

Die Menge aller minimalen Spoke Diagramme des zu einem Spoke Diagramm S zugehörigen Baumes B_S bezeichnen wir mit M_S .

4.6.6 Satz: Der Algorithmus terminiert

Sei S ein Spoke Diagramm. Der Algorithmus zum Vereinfachen von Spoke Diagrammen (4.6.3) terminiert nach einer endlichen Anzahl an Schritten und erzeugt eine endliche Anzahl minimaler Spoke Diagramme die alle zu S äquivalent sind.

Beweis.

Die (endliche) Anzahl an Schritten zur Ausführung von i) haben wir bereits durch den Satz 4.5.2 gezeigt.

Zu ii): Nachdem R3a Bewegungen die Anzahl der Spokes nicht verändern und es nur endlich viele Spokes in einem Spoke Diagram gibt, können R3a Bewegungen in jedem Schritt nur an endlich vielen Stellen vorgenommen werden. An jeder dieser Stellen erhöht die R3a Bewegung die Anzahl der Spokes im äußeren Ring wobei die insgesamt Anzahl an Spokes gleich bleibt. Da jedes Spoke Diagram nur endlich viele Ringe und Spokes hat, so findet Schritt ii) des Algorithmus nach einer bestimmten Anzahl an Schritten sein Ende. Die Anzahl der Schritte kann grob durch (Anzahl der Spokes \cdot Anzahl der Kreise) nach oben abgeschätzt werden.

Analoges gilt für iii) mit inneren Ringen.

R1 und R2a werden jeweils im Algorithmus nur angewendet um die Anzahl der Spokes oder Kreise zu reduzieren, dies kann trivialerweise bei einer endlicher Anzahl von Spokes und Kreisen nur endlich oft passieren.

Nachdem i), ii) und iii) endliche Schritte des Algorithmus sind, terminiert der Algorithmus nach einer bestimmten Anzahl von Schritten und liefert uns eine bestimmte Anzahl minimaler Spoke Diagrams. \square

Bemerkung: Die Menge der minimalen Spoke Diagrams eines Spoke Diagrams S welche der Algorithmus liefert enthält im Regelfall nicht alle minimalen Spoke Diagrams die zu S äquivalent sind (siehe Bsp: 4.6.2) und ist daher keine Invariante. Jedoch ist die Menge aller minimalen Spoke Diagrams welche äquivalent zu S sind sogar eine vollständige Invariante.

4.6.7 Satz: Eigenschaften von minimalen Spoke Diagrams

Seien zwei Spoke Diagrams S_1 und S_2 gegeben. Ist die Schnittmenge der minimalen Spoke Diagrams von B_{S_1} und B_{S_2} nicht leer, also $M_{S_1} \cap M_{S_2} \neq \emptyset$, so repräsentieren S_1 und S_2 den gleichen Knoten.

Beweis.

Der Algorithmus 4.6.3 verwendet nur Reidemeister Bewegungen für Spoke Diagrams. Enthält die Schnittmenge $M_{S_1} \cap M_{S_2}$ zweier Spoke Diagrams S_1, S_2 mindestens ein Spoke Diagram $S_\theta \in M_{S_1} \cap M_{S_2}$, so sind S_1 und S_2 nach Satz 4.3.3 äquivalent da eine Abfolge von Reidemeister Bewegungen von S_1 zu S_2 durch die Äste der Bäume welche zu S_θ führen angegeben werden kann. Weil wir zwei Spoke Diagrams als äquivalent definiert haben wenn deren Knotenvertreter ambient isotop sind (Def: 4.3.3) repräsentieren sie daher den gleichen Knoten. \square

4.6.8 Vermutung: weitere Eigenschaften von minimal Spoke Diagrams

Die Anzahl sowohl an Spokes als auch an Kreisen ist bei einem minimalen Spoke Diagramm minimal. D.h. es gibt es kein äquivalentes Spoke Diagramm mit kleinerer Anzahl an Spokes oder Kreisen.

Bemerkung: Das würde bedeuten dass wir im Algorithmus 4.6.3, wenn keine R3a Bewegungen nach außen mehr möglich sind, bereits die minimale Anzahl an Spokes als auch Kreisen erreicht haben. Wir führen aber dann trotzdem R3a Bewegungen nach innen aus weil wir dadurch weitere minimale Spoke Diagrams erhalten.

4.6.9 Liefert das eine Klassifizierung der Knoten?

Für eine Klassifizierung mittels dieser Methode müssen wir uns die Frage stellen ob für den Satz 4.6.7 die Umkehrung gilt. Erstellen wir Bäume von Spoke Diagrams so haben wir durch die Menge der minimalen Spoke Diagrams dieser Bäume auch die Menge der minimalen Spoke Diagrams der zugehörigen Knoten. Es stellt sich die Frage ob diese Menge repräsentativ für die jeweiligen Knoten ist. Die Menge enthält jedenfalls nur endlich viele Elemente wie wir in 4.6.6 gesehen haben und vielleicht könnte sie uns helfen den Knoten zu klassifizieren. Jedenfalls können wir mittels Satz 4.6.7 äquivalente Knotenprojektionen identifizieren falls die Schnittmenge ihrer minimalen Spoke Diagrams nicht leer ist.

In meinen Untersuchungen war für zwei äquivalente Spoke Diagrams S_1 und S_2 auch immer $M_{S_1} \cap M_{S_2} \neq \emptyset$. Ob dies tatsächlich allgemein gilt ist jedoch nur eine Vermutung. Es besteht die Möglichkeit dass bei zwei äquivalenten Spoke Diagramms S_1 und S_2 (desselben Knotens) die Menge $M_{S_1} \cap M_{S_2}$ leer ist. In diesem Fall hilft uns die genannte Methode zur Klassifizierung nicht weiter, weil wir dann möglicherweise gleiche Knoten als verschieden identifizieren würden. Wir hätten dann noch immer die Möglichkeit das HOMFLY bzw. Jones Polynom zur Hilfe zu nehmen und so die Äquivalenz genauer zu prüfen. Ist allerdings das HOMFLY sowie Jones Polynom zweier Knotenprojektionen gleich aber $M_{S_1} \cap M_{S_2} = \emptyset$ so kann keine Aussage über die Äquivalenz getroffen werden. Die Frage nach der Klassifizierung von Knoten mittels Spoke Diagrams bleibt also vorerst offen.

4.6.10 Exkurs: Spoke Diagrams und Zöpfe

(vgl. [Har08, S.19f]) Zöpfe sind den Knoten verwandte topologische Objekte welche algebraisch besser strukturiert sind und daher klassifizierbar sind. Jeder Knoten lässt sich durch die Schließung eines bestimmten Zopfes gewinnen. Detaillierteres über Zöpfe findet sich in [Sos00, S.39] wir wollen hier nur den Zusammenhang zu Spoke Diagrams behandeln. Wir können konzentrische Spoke Diagrams zu Zöpfen umwandeln und umgekehrt aus Zöpfen konzentrische Spoke Diagrams bilden. Die Methode ist einfach: Wir wandeln zuerst mittels f_S^{-1} das konzentrische Spoke Diagramm zu einer Knotenprojektion um. Diese hat, wie konzentrischen Spoke Diagrams, die Eigenschaft dass sie einen bestimmten Mittelpunkt immer in gleicher Richtung umläuft. Diese Knotenprojektion können wir nun entlang eines Strahls aufschneiden der vom Mittelpunkt ausgeht (siehe Abbildung 4.6.6) um sie dann zum Zopf auszurollen. Schließen wir einen Zopf an den Enden in umgekehrter Weise und wenden wir dann f_S an, so gelangen wir zu einem konzentrischen Spoke Diagramm.

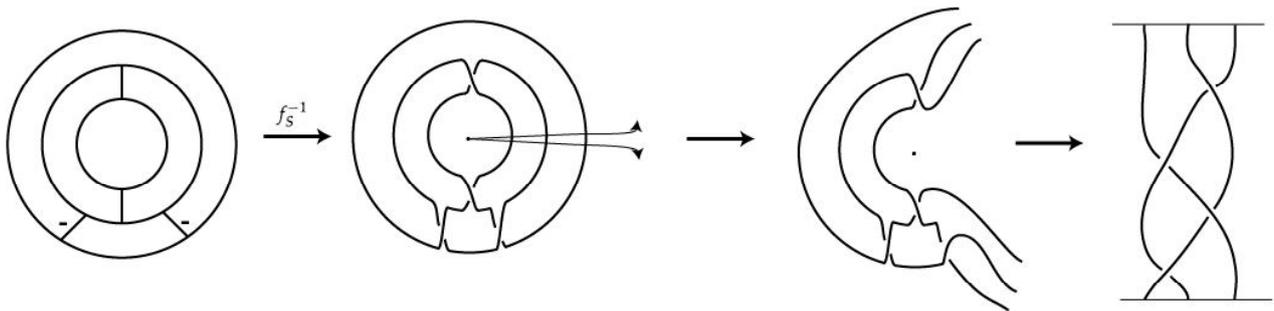


Abbildung 4.6.6: konzentrisches Spoke Diagramm wird zu Zopf

5 Zusammenfassung und Conclusio

Es wurde eine Einführung in die wichtigsten Begriffe und Resultate der Knotentheorie gegeben. Nach den wichtigsten Definitionen haben wir die Reidemeister-Bewegungen näher untersucht. Die Klassifikationsversuche von Knoten mittels Knoteninvarianten, insbesondere Knotenpolynomen und deren Probleme wurden besprochen.

Danach wurde eine neue Repräsentationsform für Knoten - die Spoke Diagrams nach E. Harasko - vorgestellt und deren Verbindung zu Knoten und Knotenprojektionen beschrieben. Die Reidemeister-Bewegungen wurden für Spoke Diagrams definiert und Beispiele wurden gezeigt wie man Spoke Diagrams damit vereinfachen kann. Es wurde ein Knoten als Unknoten entlarvt und die Äquivalenz des Perko-Paars mittels Spoke Diagrams gezeigt.

Danach wurde mit dem Zentrierungsalgorithmus 4.5.2 eine Methode beschrieben mit der man jede Knotenprojektion in ein konzentrisches Spoke Diagramm umwandeln kann. Konzentrische Spoke Diagrams wurden als besonders übersichtliche Darstellungen von Knoten erkannt welche auch in Zöpfe umgewandelt werden können. Weiters wurde in 4.6.3 ein Algorithmus vorgestellt welcher beliebige Spoke Diagrams noch weiter vereinfacht. Dazu wird ein Baum eines Spoke Diagrams erzeugt welcher endlich viele *minimale* Spoke Diagrams enthält. Die Menge dieser minimalen Spoke Diagrams wird für eine Klassifizierung der zugehörigen Knoten vorgeschlagen.

E. Harasko hat mit der Einführung der Spoke Diagrams und den Reidemeister-Bewegungen für Spoke Diagrams eine neue und effektive Methode geschaffen Knoten zu vereinfachen (siehe Beispiel 4.4.2). Der Zentrierungsalgorithmus 4.5.2 von Harasko könnte einen innovativen Fortschritt gegenüber dem Vogel-Algorithmus bedeuten weil es nicht mehr nötig ist ständig zwischen Knotenprojektionen und Seifert Kreisen zu wechseln und dort jeweils verschiedene Operationen durchzuführen. Außerdem ist der Beweis des Satzes 4.5.2 sehr elementar im Vergleich zum Beweis des Satzes von Vogel da keine algebraische Topologie nötig ist.

Weiter hat Harasko in seiner Arbeit [Har08, S.23] einen Algorithmus zum Vereinfachen von Spoke Diagrams vorgestellt der am Ende ein minimales Spoke Diagramm äquivalent zum ausgehenden Spoke Diagramm liefert. Dies bietet eine Möglichkeit um Knoten auf Äquivalenz

zu testen. Es reicht allerdings nicht immer aus um die Äquivalenz zweier Knoten bzw. derer Spoke Diagrams zu zeigen wie wir in Beispiel 4.6.2 gesehen haben.

In dieser Arbeit wurde der Algorithmus von Harasko weiterentwickelt sodass er weitere minimale Spoke Diagrams liefert und somit die Äquivalenz von Spoke Diagrams für eine größere Menge an Spoke Diagrams zeigen kann. Der Algorithmus zum Vereinfachen von Spoke Diagrams 4.6.3 liefert eine Menge an minimalen Spoke Diagrams zugehörig zu einem Spoke Diagrams S . Diese Menge enthält aber im Regelfall nicht alle minimalen Spoke Diagrams die zu S äquivalent sind (siehe Bsp: 4.6.2) und ist daher keine Invariante. Es bleibt offen ob der Algorithmus allgemein die Äquivalenz zweier Spoke Diagrams zeigen kann. Die Vermutung 4.6.8, dass die Anzahl sowohl an Spokes als auch an Kreisen bei einem minimalen Spoke Diagram minimal ist, entstand aus dem Experimentieren mit Spoke Diagrams im Zuge dieser Arbeit.

Zusammenfassend wird vermutet das Spoke Diagrams neben Knotenpolynomen einen weiteren Schritt zur Klassifizierung der Knoten liefern könnten. Allerdings ist eine vollständige Klassifizierung dadurch vorerst nicht möglich. Eine weitere Untersuchung der minimalen Spoke Diagrams könnte sich allerdings lohnen. Dazu würde es sich anbieten den Algorithmus 4.6.3 in einem Computerprogramm zu implementieren.

Literaturverzeichnis

- [Ada04] Adams, Colin: *The Knot Book*. American Mathematical Society, 2004
- [Bae10] Baer, Christian: *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter, 2010
- [BZ86] Burde, Gerhard; Zieschang, Heiner: *Knots*. De Gruyter, 1986
- [Har08] Harasko, Erich: *Spoke Diagrams - A New View of the Knots and Links*.
http://www.erich.harasko.eu/Harasko_Spoke_Diagrams_2008.pdf, 2008
- [Sos00] Sossinsky, Alexei: *Mathematik der Knoten*. Rowohlt, 2000