DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Lösungswege und Vorkommen univariater polynomialer Gleichungen im Mathematikunterricht“

verfasst von / submitted by

Stephan Wastyn

angestrebter akademischer Grad/ in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Assoz. Prof. Doz. Dr. Michael Schlosser

Danksagung

Zu Beginn bedanke ich mich bei Herrn Assoz. Prof. Doz. Dr. Michael Schlosser für die Betreuung und Unterstützung dieser Diplomarbeit. In mehreren seiner Vorlesungen konnte ich meine mathematischen Fertigkeiten aufbauen und verbessern und nun gab er mir auch für die Diplomarbeit zahlreiche Hinweise, nützliches Feedback und gute Ratschläge.

Ein großer Dank gilt meinen Eltern Elisabeth und Mag. Dr. Marnik Wastyn sowie meiner Familie für die Ermöglichung eines Universitätsstudiums. Nur wenige Menschen kommen in den Genuss einer Hochschulausbildung und daher bin ich sehr froh und sehr stolz, dass ich mit dieser Diplomarbeit und der anschließenden Diplomprüfung das Studium mit dem Magister-Titel beenden kann. Ich danke meiner Mutter Elisabeth, dass sie mir insbesondere in der Volksschule und zu Beginn der AHS beim Lernen half, wodurch ich eine gute Basis im Lesen, Schreiben und Rechnen erlangen konnte und ich danke ihr ebenfalls für die Korrektur des englischsprachigen Abstracts.

Ich möchte meinen Dank an alle meine Lehrerinnen und Lehrer auf meiner Schullaufbahn von der Volksschule bis hin zur Universität aussprechen. Stellvertretend für den akademischen Bereich möchte ich mich neben bei Herrn Assoz. Prof. Doz. Dr. Michael Schlosser auch bei Herrn Doz. Dr. Franz Embacher bedanken. Auch bei ihm konnte ich meine mathematisch-physikalischen Fertigkeiten in mehreren Vorlesungen aufbauen und verbessern und dies weckte bei mir ein großes Interesse an der theoretischen Physik. Stellvertretend für den AHS-Bereich möchte ich mich insbesondere bei meinem langjährigen Klassenvorstand und Mathematiklehrer Herrn Mag. Peter Koch und bei meinem Physiklehrer Herrn Mag. Richard Kralicek bedanken, die ich seit September 2016 auch als Kollegen schätzen darf und mir im ersten Lehrer-Schuljahr unterstützend zur Seite standen. Sie trugen einen großen Teil zu meiner mathematischen und physikalischen Vorbildung bei, unterstützten mich stets und weckten bei mir das Interesse an der Mathematik und der Physik, und damit an den Wissenschaften, die ich schließlich studierte. Auch stellvertretend für den AHS-Bereich möchte ich mich bei Herrn Mag. Georg Furtner für die Hilfe bei meinen ersten Schritten im wissenschaftlichen Arbeiten im Rahmen der Fachbereichsarbeit im Unterrichtsfach Deutsch sowie bei Frau Mag. Sabine Gogola, die mir eine solide Ausbildung im Unterrichtsfach Englisch ermöglichte, bedanken.

Abschließend möchte ich mich bei allen Studienkolleginnen und Studienkollegen und Klassenkameraden bedanken, die mich im Laufe meiner Ausbildung unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit bestätige ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst zu haben. Alle Inhalte, die wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken übernommen wurden, sind mit der Angabe der jeweiligen Quelle gekennzeichnet. Auch für die Ressourcen aus dem Internet sind der Link und der Zugriffszeitpunkt aufgezählt. Diese Arbeit ist die erste dieser Art und liegt nicht in ähnlicher oder gleicher Form bei einer anderen Prüfungsstelle auf.

Schwechat, Juli 2017

Stephan Wastyn

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Bekanntlich sind alle Bemühungen der größten Geometer, die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, [...], bisher stets vergeblich gewesen, und es bleibt kaum zweifelhaft, dass dieses Problem nicht sowohl die Kräfte der heutigen Analysis übersteigt, als vielmehr etwas Unmögliches erreichen will.“

Der „Fürst der Mathematiker“, Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), schrieb diese Zeilen in seinem Werk „Disquisitiones Arithmeticae“ („Arithmetische Untersuchungen“), das 1801 veröffentlicht wurde, und war der Lösung eines großen Problems der Mathematik auf der Spur (vgl. [16], S. 433). Die Mathematikerinnen und Mathematiker beschäftigten sich insbesondere vom 16. bis 19. Jahrhundert unter anderem mit der Frage, inwiefern sich *univariate polynomiale Gleichungen*, die manchmal auch salopp als *algebraische Gleichungen* bezeichnet werden, lösen lassen. Eine solche Gleichung ist beispielsweise

$$4x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - 5 = 0$$

und man möchte wissen, welche Zahlen x diese Gleichung erfüllen. Dabei galt es einerseits zu zeigen, wie viele Lösungen eine solche Gleichung grundsätzlich hat und andererseits wollten die Mathematikerinnen und Mathematiker Lösungsformeln erarbeiten, sodass jede beliebige Gleichung gelöst werden konnte. Gauß konnte die erste Frage durch den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra entscheiden, Gerolamo Cardano und sein Schüler Ludovico Ferrari leiteten Lösungsformeln für univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 3 und 4 her (der Grad entspricht der Höhe des größten Exponenten der Unbekannten x). Gauß konnte seine eingangs zitierte Behauptung über Grad 5 und höher nicht beweisen. Dies schafften getrennt voneinander Paolo Ruffini und Niels Hendrik Abel und bestätigten somit die Annahme von Gauß, dass Lösungsformeln für univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 5 und höher im Allgemeinen zumindest mithilfe von Radikalen, d. h. durch Wurzeln gebildete Ausdrücke, nicht hergeleitet werden können.

Schülerinnen und Schüler werden im Mathematikunterricht der allgemein bildenden höheren Schule (AHS) mit solchen Gleichungen konfrontiert und vor die Aufgabe gestellt, diese zu lösen. Hierbei lernen die Schülerinnen und Schüler händische Lösungsschemata, aber auch die Verwendung von Computer-Algebra-Systemen (CAS) wird im Informations- und Computerzeitalter immer bedeutender. In dieser Diplomarbeit soll daher zwei Kernfragen nachgegangen werden:

1. Was kann vom Standpunkt der Hochschulmathematik aus über die Lösbarkeit allgemeiner univariater polynomialer Gleichungen beliebigen Grades gesagt werden und welche Lösungsmethoden sind bekannt?

2. In welchen Themenbereichen im Mathematikunterricht der AHS treten univariate polynomiale Gleichungen auf und wie werden sie gelöst?

Der erste Teil der Diplomarbeit fasst unter Verwendung diverser wissenschaftlicher Werke den aktuellen Stand der Mathematik zur Frage der Lösbarkeit allgemeiner univariater polynomialer Gleichungen zusammen und bietet unter anderem neben einem zweifachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra sowie der vollständigen Herleitung der Lösungsformeln für Grad 3 und 4, auch den Beweis des Satzes von Abel-Ruffini mit elementaren Methoden. Im zweiten Teil soll der Mathematikunterricht unter die Lupe genommen werden. Um hierfür relativ objektive Ergebnisse zu erhalten, werden ausgehend vom „alten“ Lehrplan (verwendet vor der Einführung der neuen modularen Oberstufe) die Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“ für die Sekundarstufe 1 und „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 2 analysiert. Selbstverständlich kann nicht ausgeschlossen werden, dass andere Schulbuchreihen teilweise anders an die Thematik herangehen und Schwerpunkte woanders setzen. So werden die Cardano’schen Lösungsformeln vielleicht in der einen Schulbuchreihe behandelt, in einer anderen gar ausgearbeitet und einer dritten gar nicht erwähnt. Jedenfalls stehen sie nicht explizit im Lehrplan. Wegen der Fülle von unterschiedlichen Schulbuchreihen muss auf eine ausführlichere Analyse im Rahmen dieser Diplomarbeit jedoch verzichtet werden. Den Abschluss der Arbeit bildet eine Zusammenfassung und eine Analyse der Ergebnisse der Kernfragen dieser Diplomarbeit.

2 Lösbarkeit univariater polynomialer Gleichungen

2.1 Definition einer univariaten polynomialen Gleichung

Um eine univariate polynomiale Gleichung aufzustellen, muss zunächst eine algebraische Struktur gewählt werden, damit Menge, Verknüpfungen und Rechenregeln festgelegt sind. Da in einer univariaten polynomialen Gleichung sowohl Addition, als auch Multiplikation, auftreten, ist ein Ring oder ein Körper notwendig. Vollständigkeitshalber sollen die benötigten algebraischen Strukturen definiert werden.

Definition 1 (Gruppe). Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt *Gruppe*, wenn folgendes gilt:

G1 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$ (*Assoziativgesetz*).

G2 Es gibt ein $e \in G$ (*neutrales Element*) mit den folgenden Eigenschaften:

i. $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.

ii. Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ (*inverses Element* von a) mit $a' \circ a = a' \circ a = e$.

Die Gruppe heißt *abelsch* (oder *kommutativ*), falls außerdem $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ (vgl. [6], S. 43).

Definition 2 (Ring). Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+: R \times R \to R, \qquad (a, b) \longmapsto a + b, \qquad \text{und}$$
$$\cdot: R \times R \to R, \qquad (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

heißt $Ring$, wenn folgendes gilt:

R1 R zusammen mit der *Addition* $+$ ist eine abelsche Gruppe.

R2 Die *Multiplikation* $\cdot$ ist assoziativ.

R3 Es gelten die Distributivgesetze, d. h. für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\ .$$

Ein Ring heißt *kommutativ*, wenn $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$. Ein Element $1 \in R$ heißt *Einselement*, wenn $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$ (vgl. [6], S. 54).

Definition 3 (Körper). Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+: K \times K \to K, \qquad (a, b) \longmapsto a + b, \qquad \text{und}$$
$$\cdot: K \times K \to K, \qquad (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

heißt $Körper$, wenn folgendes gilt:

K1 K zusammen mit der Addition $+$ ist eine abelsche Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 0, das zu $a \in K$ inverse Element mit $-a$ bezeichnet.

K2 Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ ist $a \cdot b \in K \setminus \{0\}$ und $K \setminus \{0\}$ ist mit der so erhaltenen Multiplikation eine abelsche Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 1 und das zu $a \in K \setminus \{0\}$ inverse Element mit a^{-1} oder ${}^{1}/_{a}$ bezeichnet.

K3 Es gelten die Distributivgesetze, d. h. für alle $a, b, c \in K$ ist

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

K4 Das Einselement und das Nullelement sollen verschieden sein, d. h. $1 \neq 0$.

(vgl. [6], S. 56).

Ein Körper ist also ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem außerdem jedes Element ungleich Null ein multiplikativ Inverses besitzt.

Definition 4 (Univariate polynomiale Gleichung). Eine univariate polynomiale Gleichung vom Grad n über einem Ring R oder einem Körper K ist eine Gleichung der Form

$$P_n(x) = 0 \tag{1}$$

mit einem Polynom $P_n(x)$ n-ten Grades über R bzw. K. (1) nimmt dann die Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

mit Koeffizienten $a_i \in R$ bzw. $a_i \in K$ und $a_n \neq 0$ an. (vgl. [4], S. 17).

Die Bezeichnung *univariat* bringt dabei zum Ausdruck, dass die Gleichung nur von einer einzigen Variablen abhängt. Im Gegensatz dazu gibt es auch *multivariate* polynomiale Gleichungen, die von mehreren Variablen abhängen. Beispielsweise hängt die allgemeine Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt (m_1, m_2) und Radius r,

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2 ,$$

von den beiden Variablen x und y ab. Das allgemeine Lösungsverhalten solcher Gleichungen wird in dieser Diplomarbeit nicht studiert. Jedoch können multivariate polynomiale Gleichungen durch Zusatzbedingungen zu univariaten polynomialen Gleichungen führen, die wiederum Thema dieser Diplomarbeit sind. Bei der Analyse der Inhalte des Mathematikunterrichts werden deshalb auch Kreis, Ellipse etc. eine Rolle spielen. Weiterhin werden im Rahmen der symmetrischen Polynome einmal in dieser Diplomarbeit auch Polynome in mehreren Variablen betrachtet.

Im Mathematikunterricht gilt fast immer $K \equiv \mathbb{R}$ oder $K \equiv \mathbb{C}$. Ein Beispiel für eine univariate polynomiale Gleichung über $\mathbb{R}$ wäre demnach etwa

$$2x^3 + 5x^2 - 3x + 8 = 0 \tag{2}$$

Es stellt sich die Frage, ob Gleichung (2) in $\mathbb{R}$ Lösungen besitzt und wenn ja, wie viele Lösungen. Diese Frage soll im Folgenden bzgl. einer allgemeinen univariaten polynomialen Gleichung analysiert werden. Üblicherweise betrachtet man univariate polynomiale Gleichungen über $\mathbb{C}$, um den Fundamentalsatz der Algebra anwenden zu können.

Das Lösen von univariaten polynomialen Gleichungen ist praktisch ident mit dem Suchen von Nullstellen von Polynomen. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, den Polynomring einzuführen.

Definition 5 (Polynomring). Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement (kurz *KRE*). Dann bezeichnet $R[x]$ die Menge aller Polynome, d. h. die Menge aller

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,,\ \ n \in \mathbb{N}, a_i \in R, a_n \neq 0\,.$$

Man kann ein Polynom auch als formale unendliche Summe $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ schreiben, indem man alle a_i mit $i > n$ gleich 0 setzt. Seien $p(x) = \sum a_i x^i$ und $q(x) = \sum b_i x^i$ zwei Elemente aus $R[x]$. Es ist $p(x) = q(x)$ genau dann, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, d. h. $a_i = b_i$ für alle $i \geq 0$. Die Addition und die Multiplikation zweier Polynome ist definiert durch

$$p(x) + q(x) := \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i) x^i \qquad \text{und}$$

$$p(x)q(x) := \sum_{n\geq o} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i} \right) x^n$$

(vgl. [4], S. 41). Anstelle vom KRE R kann man auch einen Körper K wählen, da jeder Körper automatisch ein KRE ist.

Satz 1 (Polynomring). $R[x]$ bildet einen kommutativen Ring mit Einselement (KRE).
Beweis: Der Satz folgt direkt aus den Ringaxiomen $R1, R2$ und $R3$, denn für eine bestimmte Potenz von x ist der Koeffizient stets eine Summe oder ein Produkt von Elementen aus R und damit klarerweise wieder in R. Daher gelten auch alle Rechenregeln (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) in $R[x]$, weil sie bereits in R gelten. Das neutrale Polynom bzgl. der Addition ist das Nullpolynom $p(x) = 0$. Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist $p(x) = 1$. □

Dieser Satz gilt auch für einen Polynomring über einen Körper K. Einen ausführlichen Beweis vom vorherigen Satz liefert Schichl H. und Steinbauer R. (vgl. [22]).

2.2 Lösbarkeit einer univariaten polynomialen Gleichung

Nachdem im vorigen Kapitel das nötige Rüstzeug beschafft wurde, soll nun der zuvor erwähnten Frage nachgegangen werden, ob und wie viele Lösungen eine allgemeine univariate polynomiale Gleichung hat. Hierfür ist folgender Satz unerlässlich.

Satz 2. Sei R ein KRE, $f(x) \in R[x]$ mit $\deg f \geq 1$ und $\alpha \in R$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $g(x) \in R[x]$, sodass

$$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x)$$

gilt. Es ist: $\deg g = \deg f - 1$.

Beweis: Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Dann ist

$$f(x) - f(\alpha) = (a_0 - a_0) + a_1(x - \alpha) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + a_n(x^n - \alpha^n)\,. \qquad (3)$$

Der Ausdruck $x^k - \alpha^k$ lässt sich aufspalten durch

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\left(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}\right).$$

Damit lässt sich aus jedem Summanden der rechten Seite von (3) der Faktor $(x - \alpha)$ herausheben und es folgt

$$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x)\,.$$

Angenommen es gäbe noch ein weiteres Polynom $h(x) \neq g(x)$ mit $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)h(x)$. Dann wäre

$$0 = (x - \alpha)\big(g(x) - h(x)\big) = (x - \alpha)(c_k x^k + \cdots + c_0)$$

mit einem $c_k \neq 0$ $(0 \leq k \leq n - 1)$. Auf der rechten Seite bleibt in jedem Fall der Ausdruck $c_k x^{k+1} \neq 0$ über, ein Widerspruch (vgl. [4], S. 44). □

Dieser Satz ist speziell für $f(\alpha) = 0$ sehr interessant, denn dann gilt $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ wobei α eine Nullstelle des Polynomes $f(x)$ ist. Der Satz hat demnach die Konsequenz, dass man jedes Polynom, das eine Nullstelle hat, zumindest teilweise faktorisieren kann.

Satz 3 (Fundamentalsatz der Algebra). Jede nicht konstante Polynomfunktion $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

Der hier gezeigte Beweis benutzt Mittel aus der reellen Analysis. Möchte man den Fundamentalsatz der Algebra lieber mit algebraischen Methoden beweisen, so ist im Anschluss ein alternativer zweiter Beweis dargelegt.

Beweis (analytisch): Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(z)$, d. h. gilt $p(\alpha) = 0$, so gilt dies auch für den Betrag des Polynoms, d. h. $|p(\alpha)| = 0$. Anstelle der komplexwertigen Funktion $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto p(z)$ kann man daher die reellwertige Funktion $|p|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |p(x + iy)|$ betrachten, da der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ definiert ist als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und immer in $\mathbb{R}$ liegt (vgl. [7], S. 100). Jede reelle Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ nimmt auf einer kompakten Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Minimum (und Maximum) an (vgl. [8], S. 34). Man wählt für M die Kreisscheibe $M = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\}$. Dabei soll $r \in \mathbb{R}^+$ so groß gewählt werden, dass für $|z| > r$ sicher $|p(z)| >$

$|p(0)| = |a_0|$ erfüllt ist. So ein r kann tatsächlich bestimmt werden, weil $\lim\limits_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, denn

$$|p(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_n||z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}\right|.$$

Für $|z| \to \infty$ geht der rechte Term gegen 1 und $|z|^n$ geht gegen unendlich. Falls nun $a_0 = 0$ ist, dann wäre $z = 0$ die gesuchte Nullstelle von $p(z)$. Falls $a_0 \neq 0$ und somit $|a_0| > 0$, dann gibt es auf $\mathbb{C} \setminus M$ keine Nullstellen, weil dort $|p(z)| > |a_0| \neq 0$ ist. $|p(z)|$ nimmt das Minimum also auf M an. Sei nun $z = a \in M$ ein Punkt, an dem das Minimum angenommen wird. Ist $|p(a)| = 0$, dann gilt auch $p(a) = 0$ und $z = a$ wäre die Nullstelle von $p(z)$. Für $p(a) \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Betrachte dazu die Polynomfunktion $h \to \frac{p(a+h)}{p(a)}$. Es gilt dann

$$\frac{p(a+h)}{p(a)} = 1 + bh^k + \text{Terme höheren Grades in h}$$

wobei h^k $(1 \leq k \leq n)$ die kleinste Potenz von h ist, deren Koeffizient $b \neq 0$. Man ersetzt $h \in \mathbb{C}$ nun durch ch mit $h \in \mathbb{R}$ und und $c \in \mathbb{C}$ derart, dass $bc^k = -1$ gilt. Das ist möglich, weil aus der Gleichung $x^k = -\frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$ die Lösung $x = c$ folgt. Dann gilt

$$\frac{p(a+ch)}{p(a)} = 1 - h^k + h^{k+1}q(h)$$

mit einem passenden Polynom q. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann auch

$$\left|\frac{p(a+ch)}{p(a)}\right| \leq \left|1 - h^k\right| + \left|h^{k+1}q(h)\right|.$$

Ist $h > 0$ und genügend klein, sodass $1 > h^k$, dann folgt

$$\left|\frac{p(a+ch)}{p(a)}\right| \leq 1 - h^k + h^{k+1}|q(h)| = 1 - h^k(1 - h|q(h)|).$$

$q(h)$ ist auf der kompakten Menge M beschränkt. Es existiert also ein $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $|q(h)| < \beta$ für $h \in M$. Ist h aber genügend klein, dann folgt $h|q(h)| < 1$ und damit

$$1 - h^k(1 - h|q(h)|) < 1$$

und schließlich $|p(a+ch)| < |p(a)|$. $p(a)$ ist dann kein Minimum mehr, weil $p(a+ch)$ noch kleiner ist (vgl. [4], S. 26f). $\square$

Bevor der algebraische Beweis begonnen werden kann, sind einige Vorbemerkungen nötig. Betrachtet man allgemein ein Polynom $p \in K[x]$, wobei K ein allgemeiner Körper ist, so muss p in K nicht zwingend eine Nullstelle besitzen. Beispielsweise hat $p(x) = x^2 - 2$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$, denn diese wären ja $\pm\sqrt{2}$. Erweitert man den Körper jedoch passend, so liegt die Nullstelle in dieser Körpererweiterung. In diesem Beispiel müsste man $\mathbb{Q}$ eben um $\sqrt{2}$ erweitern, man schreibt den erweiterten Körper als $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Man kann zeigen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tatsächlich ein Körper ist und $\mathbb{Q}$ echt umfasst (vgl. [4], S. 3f). Man kann auch mehrere Körperweiterungen hintereinander durchführen. Betrachtet man beispielsweise das Polynom $q(x) =$

$x^2 - 3$ über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, so müsste man nun mit $\sqrt{3}$ erweitern. Es ist dann $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$ bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$ (vgl. [4], S. 4). Jedenfalls kann man so festhalten:

Für jedes Polynom $p \in K[x]$ existiert eine Körpererweiterung $L \supseteq K$, über die das Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, d. h.

$$p(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) .$$

Dabei ist n der Grad des Polynoms, $c \in K$ und alle $\alpha_i \in L$ (vgl. [24], S.187).

Wenn man sich diese Aussage ansieht, dann besagt der Fundamentalsatz der Algebra nichts anderes, dass im Falle von $K = \mathbb{C}$ auch alle $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sind. Für den algebraischen Beweis des Fundamentalsatzes ist die Analyse des Spezialfalles $n = 2$ nötig. Sei also

$$p(x) = x^2 + ax + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$. Es soll gezeigt werden, dass alle Nullstellen von $p(x)$ in $\mathbb{C}$ liegen. Wendet man die (im nächsten Kapitel bewiesene) Lösungsformel an, so folgt

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} .$$

Der Ausdruck unter der Wurzel wird im Allgemeinen jedoch eine echt komplexe Zahl sein. Man kann jedoch auch aus einer echt komplexen Zahl die Wurzel ziehen, im Allgemeinen in Polarform und im quadratischen Fall auch in kartesischen Koordinaten. Beides wird im nächsten Kapitel gezeigt. Da die Wurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ergibt, folgt daraus, dass beide α_i komplexe Zahlen sind (vgl. [24], S. 188).

Beweis (algebraisch): Es reicht, den Satz für ein reelles Polynom $p(x)$ zu zeigen, d. h. $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Denn ist $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, so betrachte das konjugierte Polynom $\bar{p}$. Es entsteht aus p, indem alle Koeffizienten komplex konjugiert werden. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$p(x) \cdot \bar{p}(x) = p(x) \cdot \bar{p}(\bar{x}) = p(x) \cdot \overline{p(x)} = |p(x)|^2 .$$

Das Polynom $p\bar{p}$ hat demnach auf allen reellen Zahlen auch reelle Werte. Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von $p\bar{p}$ gleich Null ist, hat $p\bar{p}$ nur reelle Koeffizienten. Angenommen, es ist bereits gezeigt, dass jedes reelle Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle α besitzt, so folgt aus $p(\alpha) \cdot \bar{p}(\alpha) = 0$, dass $p(\alpha) = 0$ oder $\bar{p}(\alpha) = 0$, d. h., dass auch das komplexe Polynom eine komplexe Nullstelle besitzt. Für $\bar{p}(\alpha) = 0$, gilt auch $p(\bar{\alpha}) = \overline{\bar{p}(\alpha)} = \bar{0} = 0$. Es verbleibt also zu zeigen, dass jedes reelle Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle α besitzt, wobei diese natürlich auch reell sein darf, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Betrachte hierzu ein reelles Polynom p mit dem Grad n. Faktorisiert man alle geraden Bestandteile aus n heraus, so ergibt sich

$$\deg p = n = 2^l \cdot m$$

mit einem ungeraden $m \in \mathbb{N}$. Die zu zeigende Aussage soll mit Induktion nach l bewiesen werden. Für $l = 0$ ist $\deg p = m$ und somit ungerade. Für Polynome eines ungeraden Grades gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty\,.$$

Insbesondere gibt es dadurch zwei reelle Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_1) < 0$ und $p(x_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz der Analysis existiert damit ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$. Natürlich ist auch $x_0 \in \mathbb{C}$. Man kann daher annehmen, dass die Behauptung bereits für $l - 1$ bewiesen ist. Wie vor Beginn des Beweises erläutert, gibt es für p eine Körpererweiterung $L \supseteq \mathbb{C}$, sodass $p(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$, wobei $\alpha_i \in L$. Seien nun in L für $1 \leq r, s \leq n$ und jedes reelle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Werte

$$\beta_{rs}(\lambda) \coloneqq \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s\,.$$

Sei außerdem

$$p_\lambda(x) = \prod_{1\leq r\leq s\leq n} (x - \beta_{rs}(\lambda))$$

und damit $p_\lambda(x) \in L[x]$. Um die Höhe des Grades von $p_\lambda(x)$ zu bestimmen, muss man lediglich alle Indexpaare (r, s) mit $r \leq s$ abzählen. Für $r = 1$ gibt es für s insgesamt n Möglichkeiten, für $r = 2$ gibt es $n - 1$ Möglichkeiten usw. Insgesamt

$$\deg p_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2^l m(n+1)}{2} = 2^{l-1}m(n+1)\,.$$

Da $n = 2^l m$ für $l > 0$ gerade ist, muss $n + 1$ ungerade sein und damit auch $m(n + 1)$. Anders geschrieben ergibt sich daraus

$$\deg p_\lambda(x) = 2^{l-1}k$$

mit einem ungeraden k. Wenn $p_\lambda(x)$ nur reelle Koeffizienten hat, dann hat $p_\lambda(x)$ nach Induktionsvoraussetzung mindestens eine komplexe Nullstelle. Nach Konstruktion muss diese Nullstelle identisch mit einem der $\beta_{rs}(\lambda)$ sein, d. h. es gilt für ein $\beta_{rs}(\lambda)$

$$\beta_{rs}(\lambda) = \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s \in \mathbb{C}\,.$$

Für die weiteren Überlegungen ist das Schubfachprinzip notwendig: Wenn man n Objekte auf m Schubfächer verteilt und $n > m$ ist, so enthält am Ende wenigstens ein Schubfach mindestens zwei Objekte. Es gibt nun $\frac{n(n+1)}{2}$ Indexpaare (r, s), die Schubfächer. Auf diese werden die unendlich vielen λ verteilt. Für jedes λ gibt es nach dem Bisherigen ein $\beta_{rs}(\lambda) \in \mathbb{C}$. Für die ersten $\frac{n(n+1)}{2}$ λ können die $\beta_{rs}(\lambda)$ allesamt zu unterschiedlichen Indexpaare gehören, doch ab dem nächsten λ muss ein bisher bereits gewähltes Indexpaar gewählt werden. Es existieren somit zumindest $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\beta_{rs}(\lambda_1) = \alpha_r + \alpha_s + \lambda_1\alpha_r\alpha_s \in \mathbb{C} \quad \text{und}$$
$$\beta_{rs}(\lambda_2) = \alpha_r + \alpha_s + \lambda_2\alpha_r\alpha_s \in \mathbb{C}\,.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu $\alpha_r\alpha_s \in \mathbb{C}$ und damit auch zu $\alpha_r + \alpha_s \in \mathbb{C}$. Betrachte nun

$$q(x) = (x + \alpha_r)(x + \alpha_s) = x^2 + (\alpha_r + \alpha_s)x + \alpha_r\alpha_s\,.$$

$q(x)$ hat komplexe Koeffizienten und den Grad 2. Vor Beginn des Beweises wurde dieser Spezialfall bereits behandelt und garantiert zwei komplexe Nullstellen, die nach Konstruktion $-\alpha_r$ und $-\alpha_s$ sind. Damit ist nun $\alpha_r \in \mathbb{C}$ und $\alpha_s \in \mathbb{C}$. Abschließend muss noch gezeigt werden, dass $p_\lambda(x)$ nur reelle Koeffizienten hat. Um dies zu tun sind Kenntnisse über symmetrische Polynome (siehe Anhang) nötig. Vertauscht man die α_i im Polynom $p_\lambda(x)$ untereinander aus, so gilt jedenfalls

$$\beta_{rs}(\lambda) = \beta_{sr}(\lambda)\,.$$

Damit besteht das Tupel $\Omega = \left(\beta_{rs}(\lambda)\right)_{1\le r,s\le n}$ aus $n \cdot n = n^2$ Elementen, von denen im Fall $r \ne s$ stets die zwei Elemente $\beta_{rs}(\lambda)$ und $\beta_{sr}(\lambda)$ zu einem Pärchen gleicher Elemente zusammengefasst werden können. In dem Produkt $p_\lambda(x)$ kommen einerseits die Einzelgänger $\beta_{rr}(\lambda)$ und andererseits immer ein Vertreter der Pärchen, nämlich der mit $r < s$. Vertauschung der α_i führt zwar zu einem anderen Tupel $\Omega' = \left(\beta'_{rs}(\lambda)\right)_{1\le r,s\le n}$, doch dieses unterscheidet sich von Ω nur durch die Reihenfolge seiner Elemente. Auch alle Pärchen sind wieder zu finden. Insgesamt kann man daraus folgern, dass sich in $p_\lambda(x)$ nur die Reihenfolge der Faktoren ändert, aber das Polynom als solches unverändert bleibt. $p_\lambda(x)$ ist damit ein symmetrisches Polynom in den $\beta_{rs}(\lambda)$ und auch in den α_i. Nach dem Hauptsatz über symmetrische Polynome (siehe Anhang) lässt sich $p_\lambda(x)$ also durch die elementarsymmetrischen Polynome in den α_i ausdrücken. Da $p(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$ gilt, sind die elementarsymmetrischen Polynome in den α_i (bis auf das Vorzeichen) identisch mit den Koeffizienten von $p(x)$. Und da $p(x)$ nach Voraussetzung nur reelle Koeffizienten hat, gilt dies nun auch für $p_\lambda(x)$ (vgl. [24], S.186ff). □

Da $\mathbb{C}$ ein KRE ist folgt aus Satz 2 und Satz 3 sofort das

Korollar 1 (Zerlegung in Linearfaktoren). Jede Polynomfunktion n-ten Grades $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ hat genau n komplexe Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Es gilt

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = a_n(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)\,.$$

Beweis: Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle. Satz 2 besagt dann, dass man den Linearfaktor herausheben kann und es verbleibt ein Restpolynom $q(z)$ mit einem um 1 kleineren Grad als das Ausgangspolynom. Auf dieses kann man den Fundamentalsatz der Algebra erneut anwenden und dann wieder Satz 2. Dies kann man insgesamt n-mal durchführen, da der Grad von q bei jedem Schritt um 1 kleiner wird (vgl. [4], S. 27). □

Die Auflösung univariater polynomialer Gleichungen kann man demnach auch als Zerlegung eines Polynoms in unzerlegbare Faktoren deuten. Dies sieht recht ähnlich wie die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen aus (*Fundamentalsatz der Arithmetik*) und tatsächlich lässt sich zeigen, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Polynomring $K[x]$ viele Gemeinsamkeiten haben (vgl. [4], S. 62ff).

Im Falle von $\mathbb{C}$ hat also jede univariate polynomiale Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen. Wie sieht es jedoch in den reellen Zahlen und allgemein in einem Körper aus? Betrachtet man die univariate polynomiale Gleichung

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \tag{4}$$

über $\mathbb{R}$, so liegen die Lösungen $x_1 = 1 + 2i$ und $x_2 = 1 - 2i$ nicht in $\mathbb{R}$. Würde man Gleichung (4) über $\mathbb{C}$ betrachten, so ließe sich das Polynom auf der linken Seite aufspalten und tatsächlich gilt

$$(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = x^2 - x - 2xi - x + 1 + 2i + 2xi - 2i + 4 = x^2 - 2x + 5$$

Obwohl die Lösungen komplexe Zahlen sind, führt die Multiplikation der Linearfaktoren auf ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dies lässt sich allgemein zeigen.

Satz 4. Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ eine komplexwertige Polynomfunktion mit reellen Koeffizienten. Gilt für ein $\alpha \in \mathbb{C}$, dass $p(\alpha) = 0$, so ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\alpha}$ eine Nullstelle von $p(z)$, d. h. $p(\bar{\alpha}) = 0$. $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$ ergibt eine Polynomfunktion mit reellen Koeffizienten.

Beweis: Es ist

$$\overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_n \overline{z^n} = p(\bar{z}),$$

da $\overline{a_k} = a_k$ ist. Aus $p(\alpha) = 0$ folgt also auch $p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2Re(\alpha)z + |\alpha|^2$$

(vgl. [4], S. 28). □

Korollar 2. Jede Polynomfunktion mit reellen Koeffizienten lässt sich als Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten darstellen, d. h.

$$p(x) = c \prod_{j=1}^{k} (x - a_j) \prod_{l=1}^{\frac{n-k}{2}} (x^2 + \beta_l x + \gamma_l),$$

wobei $\deg p = n$ und $c, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{n-k}{2}}, \gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{n-k}{2}} \in \mathbb{R}$ und $x^2 + \beta_l x + \gamma_l$ besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 4. Überprüfung des Grades: $k + 2\frac{n-k}{2} = k + n - k = n$ (vgl. [4], S. 28). □

Gemäß Korollar 2 lassen sich also auch Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$ zerlegen, jedoch muss man eventuell in Kauf nehmen, dass quadratische Terme verbleiben, die man zumindest in $\mathbb{R}$ nicht weiter auflösen kann. In $\mathbb{Q}$ bekommt man noch mehr Schwierigkeiten, wie folgendes Beispiel zeigt, obwohl $\mathbb{Q}$ ein Körper ist.

Beispiel 1. Gegeben sei das Polynom x^4+1 über $\mathbb{C}$. Um die Nullstellen des Polynoms zu finden kann man schreiben

$$(x^2)^2 = -1\,.$$

Daraus folgen die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{-i}$. Mit folgendem Trick lassen sich die Lösungen auch anders darstellen:

$$\sqrt{i} = \sqrt{\frac{2i}{2}} = \sqrt{\frac{1+2i-1}{2}} = \sqrt{\frac{1+2i+i^2}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ bzw.}$$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{-2i}{2}} = \sqrt{\frac{1-2i-1}{2}} = \sqrt{\frac{1-2i+i^2}{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,.$$

Es gilt also

$$x^4+1 = \left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

als Zerlegung in unzerlegbare Faktoren im Komplexen. Gemäß Satz 4 kann man je zwei konjugiert-komplexe Faktoren zusammenziehen, um eine Zerlegung in $\mathbb{R}$ zu erhalten, denn es gilt

$$\left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = x^2-\sqrt{2}x+1 \text{ und}$$

$$\left(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = x^2+\sqrt{2}x+1\,.$$

Man kann also in $\mathbb{R}$ schreiben:

$$x^4+1 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Über den Körper $\mathbb{Q}$ ist das Polynom x^4+1 jedoch unzerlegbar, denn $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (vgl. [4], S. 28f).

Um die bisherigen Resultate über die Zerlegung in Faktoren verallzugemeinern sind neue Definitionen nötig.

Definition 6 (Einheit). Sei R ein Ring. Ein Element $u \in R$ heißt *invertierbar* oder eine *Einheit*, wenn es ein $v \in R$ gibt mit $uv = 1$ (vgl. [4], S. 67).

In $\mathbb{Z}$ sind die einzigen Einheiten ± 1. In $R = K[x]$ sind die einzigen Einheiten die konstanten Polynome $p(x) = c$ mit $c \in K \setminus \{0\}$, denn gilt für zwei Polynome $r(x), s(x) \in K[x]$, dass $r(x) \cdot s(x) = 1$, dann gilt für den Grad $\deg r + \deg s = \deg 1 = 0$. Da ein Polynom nur einen Grad ≥ 0 haben kann, folgt daraus, dass $\deg r = \deg s = 0$ gelten muss, $r(x)$ und $s(x)$ also konstante

Polynome sein müssen (vgl. [4], S. 67).

Definition 7 (Irreduzibel). Ein Element $p \neq 0$ eines $KRE\ R$, das keine Einheit ist, heißt *irreduzibel* bzw. *unzerlegbar*, wenn in jeder Darstellung $p = ab$ mit $a, b \in R$, ein Faktor eine Einheit ist (vgl. [4], S. 67).

In $\mathbb{Z}$ sind beispielsweise alle Primzahlen und ihre additiven Inversen unzerlegbar, d. h. irreduzible Faktoren, also zum Beispiel $+5$ und -5. Da sich alle anderen Zahlen (ausgenommen der Einheiten) zerlegen lassen, gewinnt man daraus sofort den Fundamentalsatz der Arithmetik (Zerlegung in Primfaktoren) (vgl. [4], S. 67f). Wie bereits gezeigt, lassen sich auch Polynome zerlegen, jedoch muss man berücksichtigen, inwiefern sich das Polynom über dem Körper K zerlegen lässt. In $\mathbb{Q}$ ist beispielsweise $\sqrt{2}$ nicht erlaubt, in $\mathbb{R}$ ist die komplexe Zahl $1 + i$ zum Beispiel nicht erlaubt. In $\mathbb{C}$ sind jedoch alle Zerlegungen möglich, wie bereits gezeigt. Um Beispiel 1 aufzugreifen, ist also $x^4 + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$, aber nicht über $\mathbb{R}$. Dafür ist $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{R}$, aber nicht über $\mathbb{C}$. Erst $x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ist irreduzibel über $\mathbb{C}$. Es ist nun möglich einen allgemeinen Fundamentalsatz der Algebra zu formulieren.

Satz 5 (Allgemeiner Fundamentalsatz der Algebra). Sei K ein Körper. Jedes Polynom $f(x) \neq 0$ in $K[x]$ kann als Produkt

$$f(x) = cp_1(x) \dots p_l(x), l \geq 0$$

geschrieben werden, wobei $c \in K$ und die p_i normierte irreduzible Polynome aus $K[x]$ sind. Die Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der $p_i(x)$.

Beweis: Mit Induktion nach $degf = n$. O.B.d.A. sei $f(x)$ normiert. Falls $f(x)$ irreduzibel ist, ist alles gezeigt. Ansonsten existieren $r(x), s(x) \in K[x]$ mit $f(x) = r(x)s(x)$ und $\deg f = \deg r + \deg s$ $(\deg r < \deg f, \deg s < \deg f)$. Sind $r(x)$ und $s(x)$ irreduzibel, so ist alles gezeigt. Ansonsten lässt sich $r(x)$ und/oder $s(x)$ wieder zerlegen bis irgendwann nur noch irreduzible Faktoren übrigbleiben. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Resultate der Polynomdivison (d. h. euklidischer Algorithmus in $K[x]$, vgl. [4], S. 62)) (vgl. [4], S. 70). $\square$

Es ist hier wichtig, dass man den Polynomring über einen Körper K betrachtet, da es in K garantiert multiplikative Inverse gibt, die man beim euklidischen Algorithmus benötigt (vgl. [4], S. 63). Betrachtet man einen Polynomring über einen allgemeinen Ring, ist der Fundamentalsatz der Algebra nicht mehr gültig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2. Betrachte $R[x]$ mit $R = \mathbb{Z}_6$. Zunächst soll gezeigt werden, dass $\mathbb{Z}_6$ kein Körper ist. Wäre $\mathbb{Z}_6$ ein Körper, dann müsste jedes Element von $\mathbb{Z}_6$ ein eindeutig bestimmtes Inverses bzgl. der

Multiplikation besitzen. Jedoch hat $4 \in \mathbb{Z}_6$ ein solches nicht, denn $4 \cdot 5 = 2$, $4 \cdot 4 = 4$, $4 \cdot 3 = 0$, $4 \cdot 2 = 2$, $4 \cdot 1 = 4$. Wie man hier sieht, gibt es in $\mathbb{Z}_6$ Nullteiler, aber jeder Körper ist nullteilerfrei (vgl. [23], S. 269). Sei nun $p(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$ mit $p(x) = x^2 + 5x$. Dieses Polynom hat in $\mathbb{Z}_6[x]$ die vier Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1 \equiv -5 \bmod (6)$, $x_3 = 4 \equiv -2 \bmod (6)$ und $x_4 = 3 \equiv -3 \bmod (6)$. Es gilt daher $x^2 + 5x = x(x+5) = (x+2)(x+3)$. Die Zerlegung ist nicht eindeutig, der Fundamentalsatz der Algebra und seine Konsequenzen verlieren ihre Gültigkeit.

3 Lösungsmöglichkeiten einer univariaten polynomialen Gleichung

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, dass sich ein Polynom eines Polynomringes über einem Körper K in irreduzible Faktoren zerlegen lässt. Handelt es sich bei dem Körper um die komplexen Zahlen, so hat das Polynom ungleich Null genauso viele Nullstellen, wie der Höhe seines Grades entspricht und das Polynom lässt sich eindeutig in Linearfaktoren zerlegen. In diesem Kapitel soll nun der Frage nachgegangen werden, wie man die Nullstellen eines Polynoms bzw. die Lösungen einer univariaten polynomialen Gleichung findet. Im Wesentlichen kann man zwischen exakten und numerischen Möglichkeiten unterscheiden. Im heutigen Mathematikunterricht spielt auch der Computereinsatz eine immer wichtigere Rolle, weshalb auch diese Möglichkeit in Betracht gezogen werden soll. Um alle Lösungen einer univariaten polynomialen Gleichung zu finden, wird der Fundamentalsatz der Algebra benötigt, weshalb, wenn nicht anders angegeben, immer univariate polynomiale Gleichungen über $\mathbb{C}$ betrachtet werden.

3.1 Exakte Lösungsmöglichkeiten

3.1.1 Lösungsformel Grad 1

Eine univariate polynomiale Gleichung vom Grad 1 hat die Form $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Eine solche Gleichung lässt sich sofort lösen und die eine Lösung ist

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Beispiel 3. Gegeben ist die univariate polynomiale Gleichung $\sqrt{7}x + \frac{2+i}{5} = 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung ist daher $x = -\frac{2+i}{5\sqrt{7}}$.

3.1.2 Lösungsformel Grad 2

Eine univariate polynomiale Gleichung vom Grad 2 hat allgemein die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Indem man die gesamte Gleichung durch a dividiert kommt man stets auf die normierte Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$. Da die univariate polynomiale Gleichung vom Grad 2 im Mathematikunterricht recht häufig vorkommt, sollen beide Fälle analysiert werden.

Spezieller Fall $x^2 + px + q = 0$

Man kann die Gleichung durch quadratische Ergänzung lösen, d. h. man versucht die Gleichung so umzustellen, dass auf beiden Seiten ein vollständiges Quadrat steht. Dann kann man die Wurzel ziehen (vgl. [4], S. 29).

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \mid -q \\
x^2 + px &= -q && \mid +\left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \text{Binomische Formel} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \mid \pm\sqrt{} \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && \mid -\frac{p}{2} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4. Gegeben ist die univariate polynomiale Gleichung $x^2 + 2x + 4 = 0$. Einsetzen in die Lösungsformel ergibt sofort

$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 4} = -1 \pm i\sqrt{3}\,.$$

Damit gilt auch

$$x^2 + 2x + 4 = \left(x + 1 - i\sqrt{3}\right)\left(x + 1 + i\sqrt{3}\right).$$

Allgemeiner Fall $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

Die Herleitung der Lösungsformel erfolgt ebenfalls durch quadratische Ergänzung (vgl. [12], S. 70).

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid -c \\
ax^2 + bx &= -c && \mid \cdot 4a \\
4ax^2 + 4abx &= -4ac && \mid + b^2 \\
4ax^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac && \text{Binomische Formel} \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \mid \pm\sqrt{} \\
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} && \mid -b \\
2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} && \mid : (2a) \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Beispiel 5. Gegeben ist die univariate polynomiale Gleichung $2x^2 + x - 3 = 0$. Einsetzen in die Lösungsformel ergibt sofort

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}\,.$$

Damit gilt auch

$$2x^2 + 2 - 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)\,.$$

3.1.3 Lösungsformel Grad 3

Schon die Babylonier waren vor ca. viertausend Jahren in der Lage, quadratische Gleichungen zu lösen. Der Formalismus war damals noch nicht vorhanden und so formulierten die Babylonier die mathematischen Probleme in Worten. Daher konnten sie noch nicht die allgemeine Lösung einer univariaten polynomialen Gleichung vom Grad 2 finden (vgl. [17], S. 24 und [1], S. 2). Girolamo Cardano nimmt in seinem Buch „Ars magna sive de regulis algebaicis“ („Die große Kunst oder über algebraische Regeln“) aus dem Jahre 1545 an, dass univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 2 bereits gelöst seien und verweist auf den Araber Muhammed ibn-Musa al-Khwarimi (9. Jahrhundert) und auf Fibonacci (Leonardo von Pisa; 12. und 13. Jahrhundert) (vgl. [17], S. 30). Die allgemeine Lösung der univariaten polynomialen Gleichung dritten Grades führte zu einem Streit. Niccolo Fontana, genannt Tartaglia, behauptete, als erster die Lösung gefunden zu haben. Tatsächlich versuchte er das Problem erst zu lösen, nachdem er gehört hatte, dass Scipione del Ferro die Lösung gefunden, aber nicht veröffentlichen hatte. Er gab sie stattdessen einem seiner Studenten weiter. Tartaglia gelang ein Durchbruch und forderte del Ferros Student in einem öffentlichen Wettbewerb heraus und gewann. Vermutlich hatte del Ferros Student nicht die allgemeine Lösung, sondern nur die Lösung eines Spezialfalles. Cardano bekam davon Wind und versuchte Tartaglia das Geheimnis zu entlocken. 1539 weihte Tartaglia Cardano gegen finanzielle Entschädigung ein, aber Cardano musste schwören, das Geheimnis nicht zu verraten. Tartaglia veröffentlichte seine Lösung nicht und ein paar Jahre passierte nichts mehr. 1543 erhielt Cardano Einsicht in die Papiere von del Ferro und erkannte, dass del Ferro das Problem tatsächlich vor Tartaglia gelöst hatte. Cardano untersuchte das Problem weiter und kam voran. Daraufhin veröffentlichte Cardano in seiner „Großen Kunst“ die nun allgemeine Lösung und gab del Ferro und Tartaglia als Referenz an. Er rechtfertigte seine Veröffentlichung damit, dass Tartaglia nicht als erster die Lösung gefunden hatte und daher nicht das Urheberrecht hatte. Außerdem kannte Tartaglia nicht die Lösung aller Varianten der kubischen Gleichung, Cardano aber schon. Jedenfalls bezichtigte Tartaglia Cardano des Plagiats. Cardanos Student Ludovico Ferrari verteidigte seinen Lehrer und forderte Tartaglia zu einem mathematischen Duell heraus, dass Ferrari gewann. Cardano setzte sich also durch (vgl. [17], S. 32ff).

Um auf die allgemeine Lösung einer univariaten polynomialen Gleichung dritten Grades zu kommen, sind die sogenannten *Einheitswurzeln* notwendig. Der Ausgangspunkt davon ist die Fragestellung, wie die Lösungen der speziellen univariaten polynomialen Gleichung n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^n = 1 \tag{5}$$

lauten. Eine triviale Lösung ist selbstverständlich $x_1 = 1$. Aus den bisherigen Sätzen ist jedoch bekannt, dass Gleichung (5) über $\mathbb{C}$ genau n Lösungen haben muss. Das Polynom $x^n - 1$ hat demnach die Nullstelle $x_1 = 1$, jedoch kann die Vielfachheit dieser Nullstelle nicht n sein, denn würde man $x^n - 1$ in seine Linearfaktoren zerlegen, dann ist $(x-1)^n \neq x^n - 1$. Da es offensichtlich keine weiteren Lösungen in $\mathbb{R}$ gibt, müssen sich die weiteren Lösungen in $\mathbb{C}$ verstecken.

Der nächste Schritt besteht darin die komplexe Exponentialfunktion ins Spiel zu bringen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \, .$$

Für $x = 2\pi$ ergibt sich

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1 \, .$$

Betrachtet man nun für $1 \leq k \leq n$ den Ausdruck $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ und setzt diesen in Gleichung (5) ein, so ergibt sich

$$\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}}\right)^n = e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1 \, .$$

Damit sind alle $x_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ für $1 \leq k \leq n$ Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$. Man bezeichnet sie als Einheitswurzeln und schreibt $\zeta_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$. Die ζ_k sind alle verschieden, denn aus $e^{\frac{2\pi ik}{n}} = e^{\frac{2\pi il}{n}}$ $(1 \leq k, l \leq n)$ folgt durch Division der rechten Seite $e^{\frac{2\pi i(k-l)}{n}} = 1$. Da $\frac{k-l}{n}$ nicht gleich eins sein kann, muss also $k - l = 0$ gelten, damit die Gleichung erfüllt ist. Es kann demnach also auch keine weiteren Lösungen mehr geben, weil alle Einheitswurzeln zusammen bereits n Lösungen sind. Einheitswurzeln $\zeta_k \neq 1$ mit $\mathrm{ggT}(k,n) = 1$ nennt man *primitiv* (vgl. [4], S. 24).

Hiermit ergibt sich also

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\zeta_1)(1-\zeta_2) \dots (1-\zeta_{n-1}) \, .$$

Faktorisiert man $x - 1$ aus $x^n - 1$ heraus, so ergibt sich

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots x^2 + x + 1) \, ,$$

wie man durch Ausmultiplizieren leicht überprüfen kann, denn es ergibt sich eine Teleskopsumme. Sucht man die Nullstellen von $x^n - 1$, dann folgt aus

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots x^2 + x + 1) = 0$$

für eine primitive Einheitswurzel ζ_k, dass

$$\zeta_k{}^{n-1} + \zeta_k{}^{n-2} + \cdots + \zeta_k{}^2 + \zeta_k + 1 = 0 \, . \tag{6}$$

Da $\zeta_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ gilt, lassen sich alle Einheitswurzeln für ein fixes n auch als Potenzen einer beliebigen primitiven Einheitswurzel darstellen. Wählt man beispielsweise $\zeta_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so ist $\zeta_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = \zeta_1{}^k$.

Die zweiten Einheitswurzeln

Für die zweiten Einheitswurzeln betrachtet man die Gleichung $x^2 = 1$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $\zeta_1 = 1$ und $\zeta_2 = -1$. Man kann die beiden Lösungen in der komplexen Zahlenebene eintragen. Es ergibt sich das Bild in Abbildung 1.

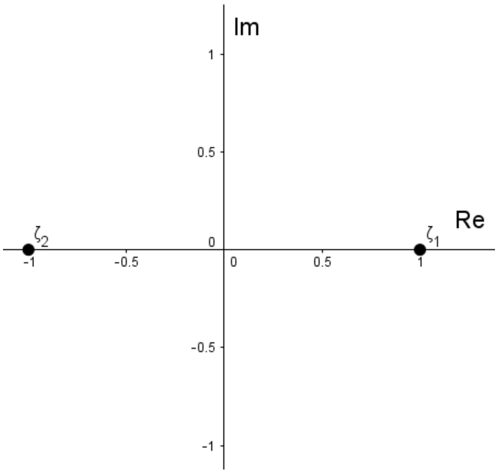

Abbildung 1: Die zweiten Einheitswurzeln

Die dritten Einheitswurzeln

Für die dritten Einheitswurzeln betrachtet man die Gleichung $x^3 = 1$. Eine Lösung ist wieder $\zeta_1 = 1$. Man kann faktorisieren und es folgt $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Die beiden anderen Einheitswurzeln sind demnach die Nullstellen des Polynoms $x^2 + x + 1$. Die Lösungsformel für Grad 2 ergibt $\zeta_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Zeichnet man diese drei Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein und verbindet man die drei Punkte miteinander, so ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck. Siehe Abbildung 2.

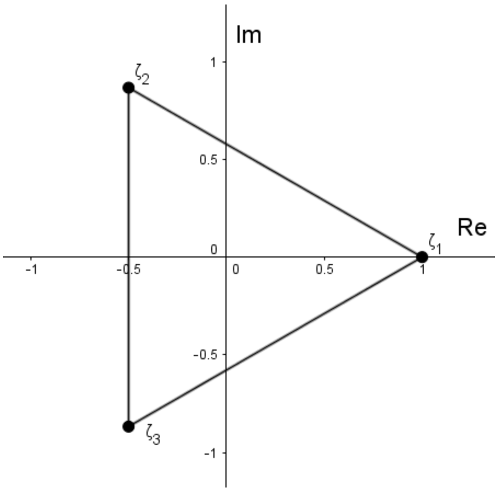

Abbildung 2: Die dritten Einheitswurzeln

Die vierten Einheitswurzeln

Für die vierten Einheitswurzeln betrachtet man die Gleichung $x^4 = 1$. Wie man überprüfen kann sind die Lösungen $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = -1$, $\zeta_3 = i$ und $\zeta_4 = -i$. Zeichnet man diese vier Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein und verbindet man die vier Punkte miteinander, so ergibt sich ein Quadrat. Siehe Abbildung 3.

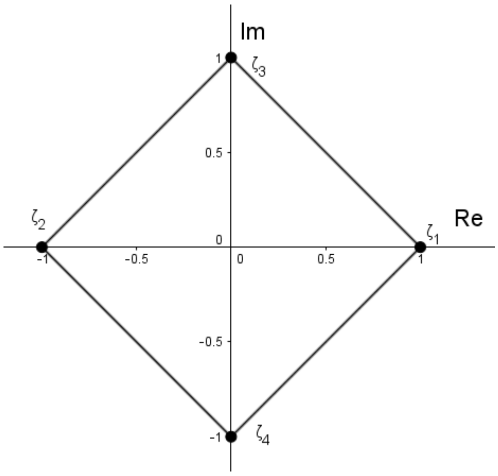

Abbildung 3: Die vierten Einheitswurzeln

Die fünften Einheitswurzeln

Für die fünften Einheitswurzeln betrachtet man die Gleichung $x^5 = 1$. Eine Lösung ist wieder $\zeta_1 = 1$. Um die anderen Lösungen zu finden muss man wieder faktorisieren und es folgt $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Nun kann man den rechten Ausdruck auf der rechten Seite umschreiben:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$$
$$= \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right).$$

Beide Klammerausdrücke lassen sich nun mit der Lösungsformel für Grad 2 lösen und es ergibt sich $\zeta_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\zeta_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\zeta_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ und $\zeta_5 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Zeichnet man diese fünf Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein und verbindet man die fünf Punkte miteinander, so ergibt sich ein regelmäßiges Fünfeck. Siehe Abbildung 4. Betrachtet man demnach die Gleichung $x^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, so kann man mithilfe der Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein regelmäßiges n-Eck konstruieren.

Auch für Gleichungen der Form $x^n - c = 0$ mit $c \neq 0$ kann man die Lösungen mithilfe der Einheitswurzeln berechnen. Setzt man $a = \sqrt[n]{c}$, so erfüllen für $1 \leq k \leq n$ die $\zeta_k a$ die Gleichung $x^n - c = 0$ und sie sind alle verschieden, da die ζ_k verschieden sind (vgl. [4], S. 25).

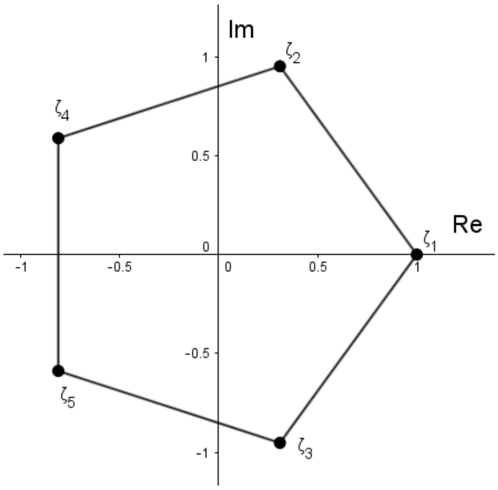

Abbildung 4: Die fünften Einheitswurzeln

Formel von Cardano

Es sollen nun alle Lösungen der allgemeinen normierten univariaten polynomialen Gleichung $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ vom Grad 3 mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ gefunden werden. Für echt komplexe Koeffizienten sind Polarkoordinaten nötig, um Wurzeln ziehen zu können. Die Überlegungen und Formeln sind jedoch dieselben. Für die nachfolgenden Überlegungen siehe [4], S. 30f. Sollte die Gleichung nicht normiert vorliegen, so kann man stets durch den führenden Koeffizienten dividieren, da dieser ungleich Null sein muss. Der erste Schritt besteht darin, den quadratischen Term durch eine Substitution zu eliminieren. Wählt man $x \mapsto x - \frac{\alpha}{3}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(x-\frac{\alpha}{3}\right)^2 + \beta\left(x-\frac{\alpha}{3}\right) + \gamma \\ &= \left(x^3 - \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x}{3} - \frac{\alpha^3}{27}\right) + \left(\alpha x^2 - \frac{2\alpha^2 x}{3} + \frac{\alpha^3}{9}\right) + \beta x - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma \\ &= x^3 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right)x + \left(\gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3}\right).\end{aligned}$$

Durch die Einführung neuer Koeffizienten $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$ und $q = \gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3}$ nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$x^3 + px + q = 0\,. \tag{7}$$

Man sucht nun Lösungen der Form $x = a + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Setzt man dies in (7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}(a+b)^3 + p(a+b) + q &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + ap + bp + q \\ &= a^3 + b^3 + (a+b)(3ab+p) + q = 0\,.\end{aligned}$$

Damit dies erfüllt ist, muss also gelten

$$a^3 + b^3 + q = 0 \text{ und}$$

$$3ab + p = 0\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$ab = -\frac{p}{3} \text{ und}$$

$$a^3 + b^3 = -q\,.$$

Um a oder b zu finden, betrachtet man das Polynom

$$(z - a^3)(z - b^3) = z^2 - (a^3 + b^3)z + (ab)^3 = z^2 + qz - \frac{p^3}{27}\,.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen wird die Lösungsformel für Grad 2 angewendet:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,.$$

Andererseits ist auch a^3 eine Nullstelle, d. h. man kann a bestimmen, denn a ist eine Lösung der Gleichung

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,. \tag{8}$$

Dies gilt auch für b, nur mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel. Jedoch reicht es a zu bestimmen, da man aus $ab = -\frac{p}{3}$ zu jedem Wert von a das entsprechende b eindeutig zuordnen kann. Gleichung (8) hat drei Lösungen und setzt man $a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, dann lauten diese unter Verwendung der dritten Einheitswurzel $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$$a_1 = a, a_2 = \zeta^2 a \text{ und } a_3 = \zeta a\,.$$

Aus $ab = -\frac{p}{3}$ lässt sich nun für jedes a das entsprechende b ermitteln. Hier wird verwendet, dass $\frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2}\frac{\zeta}{\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta^3} = \frac{\zeta}{1} = \zeta$ und analog $\frac{1}{\zeta} = \zeta^2$. Damit ergibt sich

$$b_1 = b = -\frac{p}{3a}, b_2 = \zeta b \text{ und } b_3 = \zeta^2 b\,.$$

Die Lösungen von (7) sind demnach

$$x_1 = a + b, x_2 = \zeta^2 a + \zeta b \text{ und } x_3 = \zeta a + \zeta^2 b\,.$$

Um zu den Lösungen der Ausgangsgleichung zu kommen, muss rücksubstituiert werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen:

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat die drei Lösungen

$$x_1 = a + b\,,$$
$$x_2 = \zeta^2 a + \zeta b \text{ und}$$
$$x_3 = \zeta a + \zeta^2 b\,,$$

wobei a eine Lösung der Gleichung

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ist und weiterhin

$$b = -\frac{p}{3a} \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ bzw. } \zeta^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

sind.

Das Lösungsverhalten von $x^3 + px + q = 0$ hängt entscheidend von der Diskriminante

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

ab. Für $p, q \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. [11], S.4f).

- Fall $\Delta > 0$: Es gibt genau eine reelle Lösung und zwei echt komplexe Lösungen.
- Fall $\Delta = 0$: Es gibt entweder eine doppelte reelle Lösung und eine einfache reelle Lösung oder eine dreifache reelle Lösung.
- Fall $\Delta < 0$: Es gibt drei verschiedene reelle Lösungen.

Der letzte Fall ist besonders interessant, da zwar alle Lösungen reell sind, aber aufgrund der negativen Diskriminante die Hilfsgrößen a und b echt komplexe Zahlen sind. Möchte man demnach die Lösungen einer allgemeinen univariaten polynomialen Gleichung dritten Grades mithilfe von Wurzelausdrücken, sogenannten *Radikalen*, finden, dann bleibt einem die Benutzung echt komplexer Zahlen nicht erspart. Dies ist der sogenannte *casus irreducibilis*. Historisch gesehen hat sich hier zum ersten Mal die wirkliche Notwendigkeit der komplexen Zahlen gezeigt. Bei den quadratischen Gleichungen hätte man echt komplexe Lösungen noch als sinnlos sehen können, doch bei den kubischen Gleichungen kommt man ohne echt komplexe Zahlen nicht weiter (vgl. [4], S. 3). Letzterer Fall soll anhand eines Beispiels demonstriert werden. Zuvor müssen jedoch noch die Polarform komplexer Zahlen sowie Winkelminuten und Winkelsekunden eingeführt werden.

Polarform komplexer Zahlen

Bei einer komplexen Zahl $z = a + ib$ bezeichnet man a als den Realteil und b als den Imaginärteil. Sie stellen kartesische Koordinaten dar. Man kann eine komplexe Zahl jedoch auch durch ihren

Betrag r und den (gegen den Uhrzeigersinn gemessenen) Winkel φ, den sie mit der reellen Achse einschließt, charakterisieren. Wie aus Abbildung 5 ersichtlich, lassen sich kartesische und Polarkoordinaten wie folgt umrechnen. Sind a und b bekannt, so ist

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}$$

Sind andererseits r und φ bekannt, so ist

$$a = r \cos \varphi \text{ und}$$

$$b = r \sin \varphi .$$

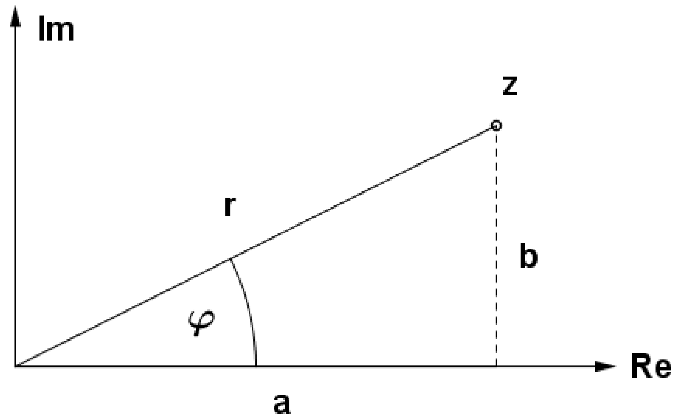

Abbildung 5: Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ lässt sich also auch schreiben als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} .$$

Möchte man aus z die n-te Wurzel ziehen, so muss man die Polarform heranziehen und dann eventuell in kartesische Koordinaten zurückrechnen. Es gilt nämlich

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a+ib} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}) .$$

Wie aus den vorherigen Überlegungen zu den Einheitswurzeln ersichtlich, muss es jedoch genau n Lösungen der Gleichung $x^n = z$ geben. Man erhält diese, indem man die Periodizität von Cosinus und Sinus berücksichtigt und schreibt

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}e^{2\pi ik}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{(\varphi+2k\pi)i}{n}} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$$

für $1 \leq k \leq n$ (vgl. [5], S. 25ff).

Zumindest für quadratische Wurzeln kann man auch in kartesischen Koordinaten arbeiten. Sucht man $\pm\sqrt{a+ib}$, so kann man den Ansatz $a + ib = (c + id)^2$ wählen. Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt das Gleichungssystem

$$a = c^2 - d^2$$

$$b = 2cd .$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich für $d \neq 0$, dass $c = \frac{b}{2d}$. Einsetzen in die erste Gleichung und Multiplikation mit d^2 ergibt $ad^2 = \frac{b^2}{4} - d^4$. Dies lässt sich auch schreiben als $d^4 + ad^2 - \frac{b^2}{4} = 0$ und bringt die Lösungen $d^2{}_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$. Da $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} \geq \frac{a}{2}$ gilt, führt das Minus vor der Wurzel zu keiner reellen Lösung und es kann weggelassen werden. Ob d gleich oder ungleich Null ist, hängt nur von b ab. Ist $b = 0$, so kann entweder c oder d Null sein. Wäre $c = 0$, dann folgt aus der ersten Gleichung $d^2 = -a$, was nicht sein kann, da a und d reelle Zahlen sind. Damit muss $d = 0$ sein. Ist $b \neq 0$, dann muss auch $c \neq 0$ und $d \neq 0$. Damit ergeben sich als Lösungen

$$d_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}} \text{ und } c = \frac{b}{2d} \text{ für } b \neq 0 \text{ oder}$$

$$d = 0 \text{ und } c = \pm\sqrt{a} \text{ für } b = 0\,.$$

Grad, Winkelminuten und Winkelsekunden

Wenn man aus einer komplexen Zahl z die n-te Wurzel ziehen möchte, dann muss man den Winkel φ durch n dividieren. Hat man z in kartesischen Koordinaten vorliegen, so ist $\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$. Um $\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}$ exakt anzugeben, kann man den Winkel φ in Winkelsekunden angeben und diese durch n dividieren und dann in Grad zurückrechnen. Hierbei gilt: Der Vollwinkel wird in $360°$ (Grad) unterteilt. Ein Grad wird in $60'$ (Winkelminuten) unterteilt und eine Winkelminute wird in $60''$ (Winkelsekunden) unterteilt.

Beispiel 6. Gegeben ist die univariate polynomiale Gleichung $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$ dritten Grades. Zunächst muss der quadratische Termin eliminiert werden. Durch die Substitution $x \mapsto x + \frac{11}{3}$ erhält man die neuen Koeffizienten $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3} = 36 - \frac{11^2}{3} = -\frac{13}{3}$ und $q = \gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} = -36 + \frac{2\cdot(-11)^3}{27} + \frac{11\cdot 36}{3} = -\frac{70}{27}$. Damit ergibt sich die reduzierte Gleichung als

$$x^3 - \frac{13}{3}x - \frac{70}{27} = 0\,.$$

Die Diskriminante $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{35}{27}\right)^2 + \left(-\frac{13}{9}\right)^3 = -\frac{4}{3}$ ist negativ. Damit gilt nun für die Hilfsgröße a, dass

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{35}{27} + \sqrt{-\frac{4}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{35}{27} + i\,\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

ist. Um die dritte Wurzel ziehen zu können ist einiges an Aufwand nötig. Zunächst muss die komplexe Zahl $\frac{35}{27}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ in Polarkoordinaten angegeben werden. Für den Betrag r gilt:

$$r=\sqrt{\left(\frac{35}{27}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2197}{729}}=\sqrt{\frac{13\cdot 13\cdot 13}{27\cdot 27}}=\frac{13\sqrt{13}}{27}.$$

Für den Winkel φ gilt:

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}/3}{35/27}=\tan^{-1}\frac{18\sqrt{3}}{35}=41°\,41'\,37{,}2''=150097{,}2''.$$

Damit ist $z=\frac{13\sqrt{13}}{27}(\cos 41°\,41'\,37{,}2''+i\sin 41°\,41'\,37{,}2'')$. Um $\sqrt[3]{z}$ zu bestimmen, muss die dritte Wurzel aus r gezogen werden:

$$\sqrt[3]{r}=\sqrt[3]{\frac{13\sqrt{13}}{27}}=\frac{\sqrt[3]{13\sqrt{13}}}{3}.$$

Man könnte nun aus der Gleichung $x^3=z$ sofort alle drei Lösungen für a bestimmen. Um der Formel von Cardano aber weiter zu folgen, wird nur eine Lösung benötigt. Es wird die Lösung für $k=n$ gewählt. Der Winkel φ muss dazu durch 3 dividiert werden. Es ist

$$\frac{150097{,}2''}{3}=50032{,}4''=13°\,53'\,52{,}4''.$$

Damit ist $\sqrt[3]{z}=\frac{\sqrt[3]{13\sqrt{13}}}{3}(\cos 13°\,53'\,52{,}4''+i\sin 13°\,53'\,52{,}4'')$. Nun muss diese komplexe Zahl in kartesische Koordinaten zurückgerechnet werden. Es ist

$$\vartheta=\frac{\sqrt[3]{13\sqrt{13}}}{3}\cos 13°\,53'\,52{,}4''=\frac{7}{6}\quad\text{und}$$

$$\eta=\frac{\sqrt[3]{13\sqrt{13}}}{3}\sin 13°\,53'\,52{,}4''=0{,}288\ldots$$

Will man auch η durch Radikale ausgedrückt haben, so kann man mithilfe der Kenntnis von $\vartheta=\frac{7}{6}$ in kartesischen Koordinaten arbeiten und den folgenden Ansatz wählen:

$$\frac{35}{27}-\frac{2\sqrt{3}}{3}i=(\vartheta+i\eta)^3=(\vartheta^3-3\vartheta\eta^2)+(3\vartheta^2\eta-\eta^3)i\,.$$

Der Vergleich der Realteile liefert

$$\frac{35}{27}=\vartheta^3-3\vartheta\eta^2\iff$$

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{35}{81\vartheta}+\frac{\vartheta^2}{3}}=\pm\sqrt{-\frac{10}{27}+\frac{49}{108}}=\pm\sqrt{\frac{1}{12}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Da $\eta=0{,}288\ldots$ ist die positive Wurzel die gesuchte Lösung.

Insgesamt ergibt sich damit $\left(\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)^3=\frac{35}{27}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ und a ist gefunden:

$$a=\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\,.$$

b kann nun aus $b = -\frac{p}{3a}$ bestimmt werden. Es ist

$$b = -\frac{p}{3a} = \frac{13}{9\left(\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)} = \frac{13}{\frac{21}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i} \cdot \frac{\frac{21}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{\frac{21}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\frac{273}{2} - \frac{39\sqrt{3}}{2}i}{117} = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\,.$$

Somit folgt für die drei Lösungen

$$x_1 = a + b = \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{7}{3},$$

$$x_2 = \zeta^2 a + \zeta b = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7 + i\sqrt{3}}{6} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7 - i\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{-7 - 7i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3 - 7 + 7i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \text{ und}$$

$$x_3 = \zeta a + \zeta^2 b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7 + i\sqrt{3}}{6} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7 - i\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{-7 + 7i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3 - 7 - 7i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3}{12} = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}\,.$$

Abschließend müssen die Lösungen noch durch $x \mapsto x + \frac{11}{3}$ rücksubstituiert werden, was die finalen Lösungen

$$x_1 = 6\,,$$
$$x_2 = 3 \text{ und}$$
$$x_3 = 2$$

ergibt. Tatsächlich gilt

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = (x - 6)(x - 3)(x - 2).$$

Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass zwar alle Lösungen reelle und hier sogar natürliche Zahlen sind, aber die Auflösung durch Radikale ohne komplexe Zahlen nicht möglich gewesen wäre.

3.1.4 Lösungsformel Grad 4

Die allgemeine Lösungsformel für univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 4 wurde gemeinsam mit der allgemeinen Lösung für univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 3 in Cardanos Werk „Ars magna sive de regulis algebaicis“ im Jahr 1545 veröffentlicht. Allerdings stammt die Lösung nicht von Cardano selbst, sondern von seinem Schüler Ludovico Ferrari, der unter Cardanos Anleitung diesen Fall studierte und löste. Damals dachten die Mathematikerinnen und Mathematiker, dass es nur eine Frage der Zeit sei, bis auch univariate polynomiale Gleichungen höheren Grades durch Radikale vollständig aufgelöst worden seien. Dies erwies sich als Irrtum, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird (vgl. [17], S. 36f).

Der Trick bei der univariaten polynomialen Gleichung vierten Grades, auch quartische Gleichung genannt, besteht darin, das Problem auf Gleichungen niedrigeren Grades zurückzuführen, von denen es Lösungsformeln gibt. Da diese Methode hervorragend funktioniert, käme man schnell auf die Idee einen ähnlichen Ansatz auch für Gleichungen fünften oder höheren Grades zu verwenden. Es wird sich jedoch zeigen, dass sich dann keine Gleichungen eines niedrigeren Grades mehr ergeben. Zur Herleitung der Lösungsformel wird [4], S. 35f gefolgt.

Gegeben sei die normierte univariate polynomiale Gleichung $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ vom Grad 4 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Sollte die Gleichung nicht normiert vorliegen, so kann man stets durch den führenden Koeffizienten dividieren, da dieser ungleich Null sein muss. Der erste Schritt besteht darin, den Term x^3 zu eliminieren. Man wählt die Substitution $x \longmapsto x - \frac{\alpha}{4}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma\left(x-\frac{\alpha}{4}\right) + \delta \\
&\qquad = \left(x^4 - \alpha x^3 + \frac{3\alpha^2 x^2}{8} - \frac{\alpha^3 x}{16} + \frac{\alpha^4}{256}\right) + \left(\alpha x^3 - \frac{3\alpha^2 x^2}{4} + \frac{3\alpha^3 x}{16} - \frac{\alpha^4}{64}\right) \\
&\qquad + \left(\beta x^2 - \frac{2\alpha\beta x}{4} + \frac{\alpha^2\beta}{16}\right) + \gamma x - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta \\
&\qquad = x^4 + \left(-\frac{3\alpha^2}{8} + \beta\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma\right)x + \left(-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right).
\end{aligned}$$

Durch die Einführung neuer Koeffizienten $p = -\frac{3\alpha^2}{8} + \beta,\ q = \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma$ und $r = -\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta$ nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0\,.$$

Man sucht nun eine Hilfsgröße $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$(x^2 + a)^2 = x^4 + 2ax^2 + a^2 = x^4 + px^2 + qx + r\,.$$

Dies ist durch Umformen äquivalent zu

$$(x^2 + a)^2 = (-p + 2a)x^2 - qx + (-r + a^2)\,. \tag{9}$$

Die Hilfsgröße a soll nun so gewählt werden, dass sich auf der rechten Seite von (9) ein vollständiges Quadrat ergibt, d.h.

$$(-p + 2a)x^2 - qx + (-r + a^2) = A(x + B)^2 \tag{10}$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$. Dies ist nur dann möglich, wenn das Polynom $P(x) = (-p + 2a)x^2 - qx + (-r + a^2)$ eine zweifache Nullstelle besitzt, denn man kann die rechte Seite von (10) auch schreiben also $A(x + B)(x + B)$ und dann entspricht diese Darstellung der Zerlegung in Linearfaktoren vom Polynom $P(x)$. Wendet man auf $P(x)$ die Lösungsformel vom Grad 2 an, so ergibt sich

$$x_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4(-p + 2a)(-r + a^2)}}{2(-p + 2a)}\,.$$

Die Bedingung, dass $P(x)$ eine zweifache Nullstelle besitzt, ist gleichbedeutend damit, dass die Diskriminante gleich Null ist und das bedeutet

$$q^2 - 4(-p + 2a)(-r + a^2) = 0 \iff$$

$$-8a^3 + (4p^2 + 8r)a + (q^2 - 4pr) = 0 \iff$$
$$a^3 - \frac{a^2 p}{2} - ar + \left(\frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right) = 0\,.$$

Dies ist eine kubische Gleichung vom Grad 3. Sie kann sofort durch die Cardanosche Lösungsformel aufgelöst werden. Dabei muss beachtet werden, dass $a \in \mathbb{R}$ gewählt wurde. Ist a bekannt, so kann man aus

$$(x^2 + a)^2 = A(x + B)^2$$

die Wurzel ziehen und erhält

$$x^2 + a = \pm\sqrt{A}(x + B)\,.$$

Dies sind zwei quadratische Gleichung und ergeben somit die vier gesuchten Lösungen. Der Koeffizientenvergleich in (10) liefert dabei $A = 2a - p$ und $B = \sqrt{\frac{a^2 - r}{A}}$.

Für $x^2 + a = \sqrt{A}(x + B) \iff x^2 - \sqrt{A}x + a - \sqrt{A}B = 0$ folgt

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} - a + \sqrt{A}B}$$

und für $x^2 + a = -\sqrt{A}(x + B) \iff x^2 + \sqrt{A}x + a + \sqrt{A}B = 0$ folgt

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} - a - \sqrt{A}B}\,.$$

Zusammenfassend lässt sich sagen:

Die univariate polynomiale Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ mit $p, q, r \in \mathbb{C}$ hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} - a + \sqrt{A}B} \text{ und} \tag{11}$$

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} - a - \sqrt{A}B}\,, \tag{12}$$

wobei

$$A = 2a - p\,,$$
$$B = \sqrt{\frac{a^2 - r}{A}} \text{ und}$$

a eine reelle Lösung der Gleichung

$$a^3 - \frac{a^2 p}{2} - ar + \left(\frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right) = 0$$

ist.

Sind $p, q, r \in \mathbb{R}$, so gilt nach Satz 4, dass für jede komplexe Lösung auch die konjugiert komplexe Zahl eine Lösung ist. Damit kann eine quartische Gleichung mit reellen Koeffizienten entweder vier, zwei oder gar keine reellen Lösungen haben. Dies entspricht der Situation, dass die Wurzeln in (11) und (12) entweder beide reell sind, nur eine reell oder gar keine reell ist (vgl. [11], S. 8).

Beispiel 7. Die univariate polynomiale Gleichung $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0$ vom Grad 4 soll gelöst werden. Der erste Schritt besteht darin, die Variable durch $x \longmapsto x + \frac{3}{4}$ zu substituieren. Man erhält die neuen Koeffizienten $p = -\frac{3\alpha^2}{8} + \beta = -\frac{3\cdot(-3)^2}{8} - 2 = -\frac{43}{8}$, $q = \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma = \frac{(-3)^3}{8} - \frac{(-3)\cdot(-2)}{2} + 2 = -\frac{35}{8}$ und $r = -\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta = -\frac{3\cdot(-3)^4}{256} + \frac{(-3)^2\cdot(-2)}{16} - \frac{(-3)\cdot 2}{4} + 12 = \frac{2925}{256}$. Damit ergibt sich die reduzierte Gleichung

$$x^4 - \frac{43}{8}x^2 - \frac{35}{8}x + \frac{2925}{256} = 0\,. \tag{13}$$

Die benötigte kubische Gleichung $a^3 - \frac{a^2 p}{2} - ar + \left(\frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right)$ nimmt dann die Form

$$a^3 + \frac{43}{16}a^2 - \frac{2925}{256}a - \frac{135575}{4096} = 0 \tag{14}$$

an. Es muss eine reelle Lösung dieser Gleichung gefunden werden. Dazu muss die Variable zunächst durch $a \mapsto a - \frac{43}{48}$ substituiert werden. Es ergeben sich die neuen Koeffizienten $\rho = \beta - \frac{\alpha^2}{3} = -\frac{2925}{256} - \frac{\left(\frac{43}{48}\right)^2}{3} = -\frac{83}{6}$ und $\sigma = \gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} = -\frac{135575}{4096} + \frac{2\cdot\left(\frac{43}{48}\right)^3}{27} + \frac{\frac{43}{16}\cdot\frac{2925}{256}}{3} = -\frac{1157}{54}$ und damit die reduzierte Gleichung

$$a^3 - \frac{83}{6}a - \frac{1157}{54} = 0\,. \tag{15}$$

Nun muss die Hilfsgröße μ aus der Gleichung $\mu^3 = -\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3}$ gefunden werden. Es ist

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1157}{108} + \sqrt{\left(-\frac{1157}{108}\right)^2 + \left(-\frac{83}{18}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{1157}{108} + \frac{85\sqrt{3}}{36}} = \frac{13 + \sqrt{3}}{6}.$$

ϑ kann nun aus $\vartheta = -\frac{\rho}{3\mu}$ bestimmt werden. Es ist:

$$\vartheta = -\frac{\rho}{3\mu} = \frac{83/6}{\left(13 + \sqrt{3}\right)/2} = \frac{83}{3(13 + \sqrt{3})} \cdot \frac{13 - \sqrt{3}}{13 - \sqrt{3}} = \frac{1079 - 83\sqrt{3}}{498} = \frac{13 - \sqrt{3}}{6}\,.$$

Damit ist eine reelle Lösung von (15) gegeben durch

$$a = \mu + \vartheta = \frac{13 + \sqrt{3}}{6} + \frac{13 - \sqrt{3}}{6} = \frac{13}{3}\,.$$

Um zu einer reellen Lösung von (14) zu kommen, muss noch durch $a \longmapsto a - \frac{43}{48}$ zurücksubstituiert werden. Es ist dann

$$a = \frac{13}{3} - \frac{43}{48} = \frac{55}{16}.$$

Als nächstes müssen die Hilfsgrößen A und B bestimmt werden:

$$A = 2a - p = \frac{55}{8} + \frac{43}{8} = \frac{49}{4} \text{ und}$$

$$B = \sqrt{\frac{a^2 - r}{A}} = \sqrt{\frac{25/64}{49/4}} = \frac{5}{28}.$$

Die Lösungen von (13) sind damit

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} - a + \sqrt{A}B} = \frac{\sqrt{\frac{49}{4}}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{49}{4}}{4} - \frac{55}{16} + \sqrt{\frac{49}{4}}\frac{5}{28}} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{2} \text{ und}$$

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{\frac{49}{4}}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{49}{4}}{4} - \frac{55}{16} - \sqrt{\frac{49}{4}}\frac{5}{28}} = -\frac{7}{4} \pm i\,.$$

Um den zu Lösungen der Ausgangsgleichung zu kommen, muss noch durch $x \longmapsto x + \frac{3}{4}$ rücksubstituiert werden. Es ist dann

$$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 3\,,$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 2\,,$$

$$x_3 = -\frac{7}{4} + i + \frac{3}{4} = -1 + i \text{ und}$$

$$x_4 = -\frac{7}{4} - i + \frac{3}{4} = -1 - i\,.$$

Tatsächlich gilt $(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12) = (x-3)(x-2)(x+1-i)(x+1+i)$.

3.1.5 Univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 5 und höher

Cardano und Ferrari hatten zur Lösung der kubischen und quartischen Gleichung noch nicht den modernen Formalismus zur Verfügung, sondern formulierten die mathematischen Probleme in Worten. Erst zur Wende zum 17. Jahrhundert entwickelte der französische Rechtsanwalt und Geheimschriften-Entschlüssler Francois Viete die moderne mathematische Schreibweise. Er benutzte Symbole (Variablen) und arbeitete mit diesen so, als ob die Symbole selbst Zahlen wären. Damit konnte er versuchen, univariate polynomiale Gleichungen durch Manipulation dieser Symbole zu lösen. Viete kam auch auf die Idee Koeffizienten einzuführen, die für alle möglichen Werte stehen können und war so in der Lage eine allgemeine univariate polynomiale Gleichung aufzustellen. Mit seiner neuen Notation dachte Viete, dass er jede beliebige univariate polynomiale Gleichung auflösen könne und nahm eine Herausforderung des belgischen Mathematikers Adriaan van Roomen im Jahr 1593 an. Dieser forderte Mathematikerinnen und Mathematiker aus der ganzen Welt heraus, eine spezielle univariate polynomiale Gleichung fünfundvierzigsten Grades zu lösen. Viete erkannte, dass diese spezielle Gleichung einem trigonometrischen Zusammenhang entsprach und konnte sie zum Erstaunen van Roomens, der denselben Zusammenhang kannte, lösen. Jedoch war Viete nicht in der Lage eine allgemeine Gleichung eines beliebigen Grades zu lösen, sondern hatte nur Glück, dass die Gleichung von van Roomen diese spezielle Form hatte. Vietes Nachfolger Rene Descartes teilte die Meinung, dass alle univariaten polynomialen Gleichungen beliebigen Grades auflösbar wären. Er führte die Begriffe von reellen und imaginären Zahlen im heutigen Sinn ein und verhalf den imaginären Zahlen so zu einer gewissen Legitimität. Weiterhin behauptete Descartes, dass jede Gleichung vom Grad n genau n Lösungen besitzt, wenn man komplexe Zahlen erlaubt. Er bewies diese Aussage, den Fundamentalsatz der Algebra, jedoch nicht. Descartes fand sogar Lösungen einer Gleichung sechsten Grades mithilfe von Kegelschnitten, jedoch waren die Koeffizienten dieser Gleichung nicht allgemein, sondern unterlagen gewissen Einschränkungen. Um Lösungen weiterer univariater polynomialer Gleichungen bemühte sich Descartes nicht und überließ es dem Leser, diese als Übung zu finden. Er meinte, dass man mit denselben Methoden, die bei den quadratischen, kubischen und quartischen Gleichungen eingesetzt wurden, auch alle anderen Gleichungen lösen könne (vgl. [1], S. 4f und [17], S. 40ff).

Isaac Newton beschäftigte sich unter anderem auch mit univariaten polynomialen Gleichungen und erkannte Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten einer Gleichung und ihren Lösungen. Man nennt diese Zusammenhänge *Newton-Relationen* oder *Newton-Identitäten*. Beispielsweise ist der Koeffizient des Terms vom zweithöchsten Grad der normierten polynomialen Gleichung immer gleich der negativen Summe aller Lösungen. Weiterhin ist der konstante Term stets das Produkt aller negativen Lösungen, was es möglich macht eine Lösung als Teiler des konstanten Gliedes zu „erraten“ und dann einen Linearfaktor abzuspalten. Für quadratische Gleichungen nennt man diese Zusammenhänge den *Satz von Vieta*, der später in dieser Arbeit noch behandelt wird. Newton konnte für die Lösungen einer univariaten polynomialen Gleichung in Abhängigkeit der Koeffizienten auch Schranken bestimmen und wusste zumindest, in welchem Bereich er die Lösungen suchen musste. Er entwickelte schließlich einen Algorithmus, mithilfe dessen man Nullstellen jedes reellen Polynoms näherungsweise berechnen kann (*Newton-Verfahren*). Er veröffentlichte diesen in seinem Werk „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“ („Von der Methode der Fluxionen und unendlichen Folgen“), an dem er zwischen 1664 und 1671 arbeitete. Dem sächsischen Graf Ehrenfried Walter von Tschirnhaus gelang es 1683 zu zeigen, dass in jeder univariaten polynomialen Gleichung vom Grad n die Terme mit x^{n-1} und x^{n-2} durch eine komplizierte Transformation eliminiert werden können. Ein Jahrhundert später zeigte der schwedische Mathematiker E. S. Bring, dass man in der univariaten polynomialen Gleichung fünften Grades (*quintische Gleichung*) auch den x^2-Term eliminieren kann. Somit lässt sich jede univariate polynomiale Gleichung fünften Grades in die Form $x^5 + px + q = 0$ bringen. Es verblüffte die Mathematikerinnen und

Mathematiker dieser Zeit, dass diese einfach aussehende Gleichung nicht gelöst werden konnte. Gottfried Wilhelm Leibniz fragte sich, ob man die Gleichung nicht auf die Form $x^5 = q$ herunterbrechen könnte, jedoch müsste man hierzu eine Hilfsgleichung höheren Grades als 5 lösen, wodurch das Problem nur noch komplizierter wurde (vgl. [17], S. 59ff).

Joseph-Louis Lagrange veröffentlichte 1771 einen Artikel, in dem er analysierte, warum die Lösungsmethoden für kubische und quartische Gleichungen funktionierten und folgerte daraus, dass dieselben Methoden für quintische Gleichungen nicht zum Erfolg führen können, was aber noch nicht bedeutet hatte, dass es nicht eine andere Methode geben könnte. Seine Überlegungen waren wie folgt: Wenn x_1, x_2 und x_3 die Lösungen einer allgemeinen kubischen Gleichung sind, dann wählte Lagrange eine beliebige dritte Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ und bildete den Ausdruck

$$R \coloneqq (x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)^3 ,$$

die sogenannte *Lagrange-Resolvente*. Da die Nummerierung der Lösungen willkürlich ist, untersuchte Lagrange alle Möglichkeiten (es sind $3! = 6$ Möglichkeiten), die Lösungen x_1, x_2 und x_3 untereinander zu vertauschen und beobachtete, wie sich R veränderte. Dabei stieß er darauf, dass es zwar 6 Möglichkeiten für R gibt, aber R nur zwei verschiedene Werte annimmt. Die anderen vier Werte stimmen mit einem der beiden R-Werte überein. Es gilt

$$R_1 = (x_2 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_1)^3 \text{ und}$$
$$R_2 = (x_1 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_2)^3 .$$

Wenn sich R_1 und R_2 aus den Koeffizienten der kubischen Gleichung berechnen lassen, dann ließen sich mit der Zusatzbedingung, dass die negative Summe aller Lösungen dem Koeffizienten von x^2 entspricht, alle Lösungen der kubischen Gleichung durch Lösen des Gleichungssystems finden. Betrachtet man x_1, x_2 und x_3 von der Cardano'schen Lösungsformel, so ergibt sich

$$R_1 = (x_2 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_1)^3 = (\zeta^2 a + \zeta b + \zeta^2 a + \zeta^3 b + \zeta^2 a + \zeta^2 b)^3 = 27\zeta^6 a^3 = 27a^3 \quad \text{und}$$
$$R_2 = (x_1 + \zeta x_3 + \zeta^2 x_2)^3 = (a + b + \zeta^2 a + \zeta^3 b + \zeta a + b)^3 = 27b^3 .$$

Die Hilfsgrößen a^3 und b^3 lassen sich aber gerade durch die Koeffizienten der kubischen Gleichung bestimmen und damit auch R_1 und R_2. R_1 und R_2 können somit auch als Lösungen der quadratischen *Resolventengleichung*

$$(x - R_1)(x - R_2) = x^2 - (R_1 + R_2)x + R_1 R_2 = 0$$

angesehen werden. Und die Koeffizienten dieser Resolventengleichung lassen sich durch die Koeffizienten der kubischen Gleichung ausdrücken. Man führt das Problem der Lösung der kubischen Gleichung also auf den quadratischen Fall zurück. Ähnliche Überlegungen machte Lagrange zu der quartischen Gleichung mit Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4. Er betrachtete hier die Resolvente

$$R = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 .$$

Vertauschung der x_i führt zu insgesamt $4! = 24$ Möglichkeiten, aber Lagrange zeigte, dass R nur drei Werte annimmt, nämlich

$$R_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2\,,$$
$$R_2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 \text{ und}$$
$$R_3 = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2\,.$$

Wiederum lässt sich zeigen, dass die R_i $(1 \leq i \leq 3)$ aus den Koeffizienten der quartischen Gleichung bestimmt werden können. Betrachtet man x_1, x_2, x_3 und x_4 von der Lösungsformel für Grad 4, so ergibt sich

$$R_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = \left(\sqrt{A} + \sqrt{A}\right)^2 = 4A\,,$$

$$R_2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 = \left(2\sqrt{\frac{A}{4} - a + \sqrt{A}B} + 2\sqrt{\frac{A}{4} - a - \sqrt{A}B}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$R_3 = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2 = \left(2\sqrt{\frac{A}{4} - a + \sqrt{A}B} - 2\sqrt{\frac{A}{4} - a - \sqrt{A}B}\right)^2\,.$$

Die Hilfsgrößen a, A und B lassen sich aus den Koeffizienten der quartischen Gleichung bestimmen und damit auch die R_i $(1 \leq i \leq 3)$. Mit der Zusatzbedingung, dass die negative Summe aller Lösungen gleich dem Koeffizienten von x^3 ist, kann man durch Lösen des Gleichungssystems x_1, x_2, x_3 und x_4 finden. Die R_i $(1 \leq i \leq 3)$ können somit auch als Lösung der kubischen Resolventengleichung

$$(x - R_1)(x - R_2)(x - R_3) = x^3 - (R_1 + R_2 + R_3)x^2 + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)x - R_1R_2R_3 = 0$$

angesehen werden. Es lassen sich die Koeffizienten der Resolventengleichung durch die Koeffizienten der quartischen Gleichung ausdrücken und damit wird das Problem der Lösung der quartischen Gleichung auf den kubischen Fall zurückgeführt. Bei der quintischen Gleichung funktioniert diese Methode nicht mehr, denn hier ergeben sich unter den $5! = 120$ Möglichkeiten insgesamt sechs verschiedene Werte für R. Man müsste demnach eine Resolventengleichung sechsten Grades als Hilfe lösen und damit wird das Problem nur verkompliziert. Lagrange war jedoch optimistisch, dass neue Methoden zum Ziel führen könnten. Carl Friedrich Gauß konnte 1799 zum ersten Mal den Fundamentalsatz der Algebra beweisen, womit auch bewiesen wurde, dass jede univariate polynomiale Gleichung fünften Grades über $\mathbb{C}$ genau fünf Lösungen haben muss. Gauß war aber anderer Meinung als Lagrange und meinte in einer Arbeit von 1801, dass die quintische Gleichung unauflösbar sei. Eine Begründung gab er jedoch nicht an. (vgl. [17], S.73ff).

Der italienische Arzt und Mathematiker Paolo Ruffini unternahm den ersten seriösen Versuch die Unauflösbarkeit zu zeigen. Er veröffentlichte zwischen 1799 und 1813 sechs verschiedene Versionen seines Beweises, da die Mathematikerinnen und Mathematiker seiner Zeit mit dem Beweis nie ganz zufrieden waren und Ruffini versuchte, die Lücken zu schließen. Unglücklicherweise ist es schwierig, Ruffinis Beweis zu folgen, da sein Beweis umständlich und teilweise unverständlich ist. Lagrange war Mitglied des Ausschusses, der Ruffinis Beweis bewerten sollte und fand „wenig darin, das beachtenswert wäre“. Es stellte sich später heraus, dass Lagrange Schwierigkeiten hatte dem Beweis zu folgen und sah einige Lücken. Der französische Mathematiker Augustin Cauchy anerkannte Ruffinis Arbeit, aber trotz dieser Unterstützung erlangte Ruffinis Arbeit nur wenig Aufmerksamkeit unter den Mathematikerinnen und Mathematikern seiner Zeit. Tatsächlich war Ruffinis Beweis nicht vollständig. Erst der Norweger Niels Hendrik Abel konnte den Beweis vervollständigen. Dabei kannte er Ruffinis Arbeit gar nicht, kam aber auf denselben Schluss. Zuvor versuchte Abel noch die Lösungen der quintischen Gleichung zu finden, bemerkte aber, dass seine Methode nur unzureichend funktionierte und arbeitete dann daran, die Unauflösbarkeit zu zeigen. Abel veröffentlichte seinen Beweis 1824 und zwei Jahre später fiel ihm Ruffinis Arbeit in die Hände. Er anerkannte seine Leistung, aber meinte „Sein Artikel ist so kompliziert, dass es sehr schwierig zu entscheiden ist, ob seine Schlussweise korrekt ist oder nicht. Mir scheint es, als sei seine Beweisführung nicht immer befriedigend“ (vgl. [17], S.79ff). Zu Ehren der beiden Mathematiker wird der Satz über die Unauflösbarkeit allgemeiner univariater polynomialer Gleichungen fünften Grades als **Satz von Abel-Ruffini** bezeichnet. Abel benutzt in seinem Beweis elementare Mathematik. Man kann den Satz aber auch im Rahmen der Galoistheorie beweisen. Ist man als LeserIn an den technischen Details des Beweises nicht interessiert, so ist im Anschluss an den Beweis vom Satz von Abel-Ruffini eine Zusammenfassung des Beweises bzw. eine Beweisskizze gegeben. Man kann die nachfolgenden Überlegungen beim Lesen auslassen und direkt zu dieser Zusammenfassung springen.

Abel verwendet in seinem Beweis sogenannte *algebraische Funktionen*. Er versteht darunter Funktionen, die sich durch rationale Funktionen ausdrücken lassen, wobei man noch zusätzlich beliebige Wurzeln ziehen darf. Abel ordnet diese Funktionen. Er sagt, dass eine algebraische Funktion „nullter Ordnung“ eine rationale Funktion der Koeffizienten ist. Betrachtet man die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so wäre eine algebraische Funktion nullter Ordnung beispielsweise $f_0(a, b, c) = \frac{a^2+4b}{a^4+b-9c^3}$. Eine algebraische Funktion „erster Ordnung“ ist von der Form $f_1(f_0^{\frac{1}{m}})$, wobei f_0 eine algebraische Funktion nullter Ordnung, $m \in \mathbb{N}$ und f eine rationale Funktion ist. Ein Beispiel wäre etwa $f_1(a, b, c) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ mit $f_0 = b^2 - 4ac$ und $m = 2$. Diese Funktion entspricht einer der beiden Lösungen einer allgemeinen (nicht normierten) quadratischen Gleichung. Allgemein ist eine algebraische Funktion der Ordnung k ($k \in \mathbb{N}$) eine Funktion $f_k(f_{k-1}^{\frac{1}{m_k}})$, wobei f_{k-1} eine algebraische Funktion der Ordnung $k - 1$, $m \in \mathbb{N}$ und f_k eine rationale Funktion der Koeffizienten ist (vgl. [1], S. 2 und [17], S.171f). Bevor Abel seinen Beweis durchführen kann, braucht er noch einen Hilfssatz.

Satz 6. Sei $a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$ eine univariate polynomiale Gleichung vom Grad m und m eine Primzahl. Alle algebraischen Funktionen y, die diese Gleichung lösen, können in der Form

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

geschrieben werden., wobei $R^{\frac{1}{m}}$ eine im allgemeinen irrationale Funktion (Wurzelfunktion) in den Koeffizienten $a_0, \dots, a_m$ der Gleichung ist, keine höhere als m-te Wurzeln in y vorkommen und $p, p_2, \dots, p_{m-1}$ endliche Summen von Wurzelausdrücken und Polynomen in den Koeffizienten $a_0, \dots, a_m$ mit geringerer Schachtelungsstiefe der Wurzeln als $R^{\frac{1}{m}}$ sind.

Beweis: Dem Beweis von [1], S.7f und [17], S.171ff wird gefolgt. Sei v eine algebraische Funktion. Nach Definition kann man $v = \frac{T}{V}$ schreiben, wobei V allgemein von der Form

$$V = v_0 + v_1 R^{\frac{1}{m}} + v_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + v_n R^{\frac{n}{m}}$$

ist mit $n \in \mathbb{N}$ und für T ebenso. Betrachte für die m-te Einheitswurzel $\xi \neq 1$ die Substitutionen $R^{\frac{1}{m}} \mapsto \xi R^{\frac{1}{m}}, R^{\frac{1}{m}} \mapsto \xi^2 R^{\frac{1}{m}}, \dots, R^{\frac{1}{m}} \mapsto \xi^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$. Diese $m-1$ Substitutionen werden im Allgemeinen zu $m-1$ verschiedenen Werten für V führen, nämlich $V_1, \dots V_{m-1}$, die alle ungleich null sind. Betrachte den Ausdruck

$$v = \frac{T}{V} = \frac{T V_1 V_2 \dots V_{m-1}}{V V_1 V_2 \dots V_{m-1}}.$$

Man kann den Nenner nun als algebraische Funktion nullter Ordnung schreiben, denn

$$\begin{aligned} V V_1 V_2 \dots V_{m-1} &= \left(v_0 + v_1 R^{\frac{1}{m}} + v_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + v_n R^{\frac{n}{m}}\right) \\ &\quad \times \left(v_0 + v_1 \xi R^{\frac{1}{m}} + v_2 \xi^2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + v_n \xi^n R^{\frac{n}{m}}\right) \times \dots \\ &\quad \times \left(v_0 + v_1 \xi^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + v_2 \xi^{2(m-1)} R^{\frac{2}{m}} + \cdots + v_n \xi^{n(m-1)} R^{\frac{n}{m}}\right) \\ &= \text{etwas ohne } R^{\frac{i}{m}} \text{ mit } 0 < i < m \end{aligned}$$

da einerseits $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{m-1} = 0$ ist und andererseits ist für jedes Polynom $p(z)$ der Ausdruck $f(z) \coloneqq p(z) \cdot p(\xi z) \cdot \dots \cdot p(\xi^{m-1} z)$ ein Polynom in z^m, da jede Vertauschung $z \longmapsto \xi z$ den Ausdruck $f(z)$ invariant lässt. Beispielsweise gilt für den quadratischen Fall $V V_1 = {v_0}^2 - R {v_1}^2$ und im kubischen Fall $V V_1 V_2 = {v_0}^3 + {v_1}^3 R + {v_2}^3 R^2 - 3 v_0 v_1 v_2 R$. Ähnliche Gruppierungen der Potenzen sind für alle höheren Grade möglich, sodass man annehmen kann, dass der Nenner ein Polynom ist. Mit demselben Argument kann man annehmen, dass der Zähler ein Polynom in $R^{\frac{1}{m}}$ ist. Man kann $V V_1 V_2 \dots V_{m-1}$ in den Zähler integrieren und kann schreiben

$$v = \frac{T}{V} = \frac{TV_1V_2 \dots V_{m-1}}{VV_1V_2 \dots V_{m-1}} = p_0 + p_1R^{\frac{1}{m}} + p_2R^{\frac{2}{m}} + \dots + p_nR^{\frac{n}{m}}$$

als eine algebraische Funktion der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ und p_i und R sind algebraische Funktionen der Ordnung $k-1$. Man kann $n < m$ annehmen. Dies lässt sich in jedem Fall erreichen, denn ist $n > m$, dann existieren $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b < m$, sodass $n = am + b$ und $R^{\frac{n}{m}} = R^a R^{\frac{b}{m}}$. Man kann dann R^a in den Koeffizienten hineinziehen. Damit bleibt als höchste Potenz von $R^{\frac{1}{m}}$ eine Potenz kleiner als m, größtenfalls $R^{\frac{m-1}{m}}$. Man kann stets $p_1 = 1$ annehmen, da man dies durch die Substitution $R^{\frac{1}{m}} \mapsto \left(\frac{R}{p_1{}^m}\right)^{\frac{1}{m}}$ erreichen kann. □

Man kann diesen Satz auch für quadratische und kubische Gleichungen anwenden. In der quadratischen Gleichung $y^2 - a_1y + a_0 = 0$ macht man gemäß dem gezeigten Satz 6 den Ansatz $y = p + R^{\frac{1}{2}}$. Durch Einsetzen folgt dann

$$(p^2 + R - a_1p + a_0) + (2p - a_1)R^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Damit dies erfüllt ist, muss jeder Klammerausdruck gleich Null sein (dies wird beim Satz von Abel-Ruffini allgemein bewiesen). Also gilt

$$p = \frac{a_1}{2} \text{ und}$$

$$R = -a_0 + \frac{a_1{}^2}{4}\,.$$

Für y gilt damit $y = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1{}^2}{4} - a_0}$. Dies entspricht der bekannten Lösungsformel (vgl. [17], S. 91).

Für die kubische Gleichung $y^3 - a_1y - a_0 = 0$ ist Cardanos Lösungsformel gegeben durch

$$y = \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{a_0{}^2}{4} + \frac{a_1{}^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{a_0{}^2}{4} + \frac{a_1{}^3}{27}}}\,.$$

Man wählt nun gemäß Satz 6 den Ansatz $y = p + R^{\frac{1}{3}} + p_2R^{\frac{2}{3}}$. Da die kubische Gleichung keinen y^2-Term aufweist, ist die Summe der Lösungen gleich Null. Andererseits ist die Summe der Lösungen auch

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3p + R^{\frac{1}{3}}(1 + \xi + \xi^2) + p_2R^{\frac{2}{3}}(1 + \xi + \xi^2) = 3p$$

da $1 + \xi + \xi^2 = 0$. Also ist $p = 0$. Setzt man $y = R^{\frac{1}{3}} + p_2R^{\frac{2}{3}}$ in die kubische Gleichung ein und klammert die verschiedenen Potenzen von R aus, so erhält man

$$(R + p_2{}^3R^2 - a_0) + R^{\frac{1}{3}}(3p_2R + a_1) + R^{\frac{2}{3}}(3Rp_2{}^2 + a_1p_2) = 0\,.$$

Wieder müssen alle Klammerausdrücke gleich Null sein, damit die Gleichung erfüllt ist. Damit folgt

$$p_2 = -\frac{a_1}{3R}$$

und dies eingesetzt in die erste Klammer führt auf $R^2 - a_0 R - \frac{{a_1}^3}{27} = 0$. Die Lösungen davon sind

$$R_+ = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{{a_0}^2}{4} + \frac{{a_1}^3}{27}} \text{ und}$$

$$R_- = \frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{{a_0}^2}{4} + \frac{{a_1}^3}{27}}$$

mit der Eigenschaft $R_+^{\frac{1}{3}} R_-^{\frac{1}{3}} = -\frac{a_1}{3}$. Es folgt

$$y = R_+^{\frac{1}{3}} + p_2 R_+^{\frac{2}{3}} = R_+^{\frac{1}{3}} - \frac{a_1}{3} R_+^{-\frac{1}{3}} = R_+^{\frac{1}{3}} + R_-^{\frac{1}{3}},$$

was genau der Cardano‘schen Lösungsformel entspricht (vgl. [17], S. 173f).

Satz 7 (Satz von Abel-Ruffini). Die allgemeine normierte univariate polynomiale Gleichung fünften Grades

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \tag{16}$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ ist nicht durch Radikale, d. h. durch Wurzeln gebildete Funktionen der Größen a, b, c, d und e, auflösbar.

Bemerkung: Die Vorzeichen der Koeffizienten sind so gewählt, sodass a gleich der Summe der Lösungen entspricht, b der Summe der paarweisen Produkte, c der Summe der Dreierprodukte usw. (siehe Vietascher Wurzelsatz).

Beweis: Dem Beweis von [1], S. 8ff und [17], S. 155ff wird gefolgt. Indirekt. Angenommen (16) wäre durch Radikale auflösbar, dann existiert nach Satz 6 eine Lösung y der Form

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{17}$$

wobei m eine Primzahl ist und $R, p, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ algebraische Funktionen einer niedrigeren Ordnung als y sind. Man kann annehmen, dass $R^{\frac{1}{m}}$ nicht als rationale Funktion der Größen $a, b, c, d, e, p, p_1, \ldots p_{m-1}$ und R ausgedrückt werden kann. Setzt man (17) in (16) ein, so erhält man ein Ergebnis der Form

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0, \tag{18}$$

wobei $q, q_1, \ldots q_{m-1}$ nun rationale und ganze Funktionen (Polynomfunktionen) der Größen $a, b, c, d, e, p, p_1, \ldots p_{m-1}$ und R sind.

Behauptung 1: Gleichung (18) kann nur dann erfüllt sein, wenn $q = 0, q_1 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$ gilt.

Um das zu sehen, substituiert man zunächst $z = R^{\frac{1}{m}}$. Dann erhält man zwei simultane Gleichungen, nämlich:

$$z^m - R = 0 \ \text{ und } \ q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0\,.$$

Sind $q, q_1, \dots, q_{m-1}$ nicht alle gleich Null, dann haben diese beiden Gleichungen eine oder mehrere gemeinsame Lösungen. Sei k die Anzahl der gemeinsamen Lösungen. Man kann eine Gleichung k-ter Ordnung finden, deren Lösungen mit den Lösungen der simultanen Gleichungen übereinstimmen, nämlich

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots r_k z^k = 0\,, \tag{19}$$

wobei r_i rationale Funktionen von $q, q_1, \dots q_{m-1}$ und R sind. Diese Gleichung hat nun gemeinsame Lösungen mit der Gleichung $z^m - R = 0$. Daher müssen die k Lösungen von der Form $\zeta_\mu z$ sein, wobei ζ_μ eine Lösung der Gleichung ${\zeta_\mu}^m - 1 = 0$ ist, denn ersetzt man z durch $\zeta_\mu z$ in $z^m - R = 0$, so folgt ${\zeta_\mu}^m z^m - R = 0 \Leftrightarrow {\zeta_\mu}^m R - R = 0 \Leftrightarrow {\zeta_\mu}^m - 1 = 0$, da $R \neq 0$. ζ_μ steht für die k Werte $1, \zeta, \zeta, \dots \zeta_{k-2}$. Setzt man die so erhaltenen k Werte $z, \zeta z, \zeta_1 z, \dots, \zeta_{k-2} z$ für die Unbekannte z in (19) ein, so folgen die k Gleichungen

$$\begin{gathered} r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots r_k z^k = 0\,, \\ r + \zeta r_1 z + \zeta^2 r_2 z^2 + \cdots \zeta^k r_k z^k = 0\,, \\ \vdots \\ r + \zeta_{k-2} r_1 z + {\zeta_{k-2}}^2 r_2 z^2 + \cdots {\zeta_{k-2}}^k r_k z^k = 0\,. \end{gathered}$$

Fasst man jede Potenz von z als eigene Unbekannte auf, so hat man k verschiedene Unbekannte, aber gleichzeitig k Gleichungen. Daher lässt sich z als rationale Funktion von $r, r_1, \dots r_k$ und ζ finden. Da die r_i selber rationale Funktionen von $q, q_1, \dots q_{m-1}$ und R sind, erlaubt dies aus der Gleichung $z = R^{\frac{1}{m}}$ auch $R^{\frac{1}{m}}$ als ebensolche rationale Funktion auszurücken. Wir haben jedoch angenommen, dass dies nicht möglich ist. Daher muss $q = 0, q_1 = 0, \dots, q_{m-1} = 0$ gelten und die Behauptung 1 ist gezeigt.

$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ ist eine Lösung von (16). Man erhält jedoch noch weitere Lösungen von (16), indem man die Substitutionen $R^{\frac{1}{m}} \longmapsto \zeta^i R^{\frac{1}{m}}$ für $1 \leq i \leq m-1$ durchführt. Um das zu sehen, betrachtet man das Einsetzen von (17) in (16) um (18) zu erhalten. Es entstehen dabei Ausdrücke wie

$$(\text{ein Produkt von } p, p_2, \dots) \times \left(R^{\frac{1}{m}}\right)^a \left(R^{\frac{2}{m}}\right)^b \dots$$

Zusammenfassen der Potenzen ergibt dann

$$(\text{ein Produkt von } p, p_2, \dots) \times \left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{a+2b+\cdots}.$$

Der Exponent $a + 2b + \cdots$ kann stets in der Form $mi + j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $j \leq m - 1$ geschrieben werden. Damit können die ganzzahligen Potenzen von $\left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{mi+j}$ ausgeklammert werden, denn

$$\left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{mi+j} = \left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{mi}\left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{j} = R^i R^{\frac{j}{m}}$$

und die R^i können zu den Produkten von $p, p_2, \dots$ gesteckt werden, welche die $q, q_1, \dots q_{m-1}$ bilden. Wie eben gezeigt ist $q = 0, q_1 = 0, \dots, q_{m-1} = 0$. Für $R^{\frac{1}{m}} \longmapsto \zeta R^{\frac{1}{m}}$ gilt alles analog, nur dass eine Potenz von ζ zu den Produkten von $p, p_2, \dots$ und R^i hinzukommt. Da aber wieder $q = 0, q_1 = 0, \dots, q_{m-1} = 0$ gelten muss, ist die Summe links in (18) stets Null und $P = 0$ erfüllt. Dasselbe Argument gilt für alle Substitutionen $R^{\frac{1}{m}} \longmapsto \zeta^i R^{\frac{1}{m}}$. Damit ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1 &= p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \\ y_2 &= p + \zeta R^{\frac{1}{m}} + \zeta^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + \zeta^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \\ &\vdots \\ y_m &= p + \zeta^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \zeta^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots + \zeta p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Diese sind alle verschieden, denn eine Gleichheit zweier Gleichungen würde der Bedingung $\zeta^{m-1} + \zeta^{m-2} + \dots + \zeta + 1 = 0$ für die Einheitswurzeln widersprechen. Ist beispielsweise $y_1 = y_2$, so wäre $\zeta - 1 = 0 = \zeta^2 - 1 = \zeta^3 - 1 = \cdots$, was ein Widerspruch ist. Es muss also $m \leq 5$ sein, da (16) genau fünf Lösungen besitzen muss. m kann auch kleiner als fünf sein, da es Lösungen geben kann, die durch die obigen Ausdrücke nicht erfasst wurden.

Bemerkung: Es gibt spezielle univariate polynomiale Gleichungen fünften Grades mit doppelten, dreifachen usw. Lösungen. Man kann jedoch zeigen, dass diese durch Wurzeln auflösbar sind.

Addiert man alle Lösungen, so folgt

$$\begin{aligned} &y_1 + y_2 + \dots + y_m \\ &\quad = mp + (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) R^{\frac{1}{m}} + p_2 (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) R^{\frac{2}{m}} + \cdots \\ &\quad + p_{m-1} (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned}$$

Wegen $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1} = 0$ ist also

$$p = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \dots + y_m).$$

Um auch $R^{\frac{1}{m}}$ durch die Lösungen auszudrücken, wird y_1 mit 1 multipliziert, y_2 mit ζ^{m-1}, y_3 mit ζ^{m-2} usw. und nun werden die neuen Lösungen addiert. Es folgt

$$\begin{aligned} &y_1 + \zeta^{m-1} y_2 + \zeta^{m-2} y_3 + \dots + \zeta y_m \\ &\quad = (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) p + m \zeta^m R^{\frac{1}{m}} + p_2 \zeta^m (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) R^{\frac{2}{m}} \\ &\quad + \dots + p_{m-1} \zeta^m (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\zeta^m = 1$ verbleibt

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \zeta^{m-1} y_2 + \zeta^{m-2} y_3 + \dots + \zeta y_m). \tag{21}$$

Mit ähnlichen Überlegungen folgen auch

$$p_2 R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \zeta^{m-2} y_2 + \cdots + \zeta^2 y_m) ,$$

$$\vdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \zeta y_2 + \cdots + \zeta^{m-1} y_m) .$$

Damit sind $p, p_1, \dots, p_{m-1}, R$ und $R^{\frac{1}{m}}$ rationale Funktion von Lösungen von (16). Betrachtet man eine dieser Größen, zum Beispiel R, dann lässt sich R schreiben als

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + S_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}} .$$

Wie zuvor führt man die Substitutionen $S^{\frac{1}{n}} \mapsto \xi^i S^{\frac{1}{n}}$ durch mit der Einheitswurzel ξ und $\xi^{n-1} + \cdots + \xi + 1 = 0$. Mit denselben Argumenten wie zuvor ergeben sich $v, v_1, \dots, v_{n-1}, S$ und $S^{\frac{1}{n}}$ als rationale Funktionen der verschiedenen Werte der Funktion R. Diese sind jedoch rationale Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_m$ und daher müssen auch $v, v_1, \dots, v_{n-1}, S$ und $S^{\frac{1}{n}}$ rationale Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_m$ sein. Führt man diese Argumentation weiter, so folgt, dass alle im Ausdruck für y enthaltenen irrationalen Funktionen rationale Funktionen in den Lösungen von (16) sind.

Folgendes Beispiel illustriert diesen Sachverhalt: Betrachtet man die quadratische Gleichung $y^2 + a_1 y + a_0 = 0$, so ist $y = p + R^{\frac{1}{2}}$ und wie bereits gezeigt ist $R = -a_0 + \frac{{a_1}^2}{4}$. Also ist $R^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a_0 + \frac{{a_1}^2}{4}}$ eine irrationale Funktion der Koeffizienten. Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind $y_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2 - 4a_0}$ und $y_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2 - 4a_0}$. Dann ist $(y_1 - y_2) = \sqrt{{a_1}^2 - 4a_0}$ und $(y_1 - y_2)^2 = {a_1}^2 - 4a_0 = 4R$. Damit ist $y_1 - y_2 = \sqrt{4R} = 2R^{\frac{1}{2}}$ und $R^{\frac{1}{2}}$ ist tatsächlich gleich einer rationalen Funktion der Lösungen, nämlich $\frac{y_1 - y_2}{2}$ (vgl. [17], S. 91f).

Betrachte nun die irrationalen Funktionen der Form $R^{\frac{1}{m}}$, wobei R eine rationale Funktion der Koeffizienten ist (d.h. eine algebraische Funktion nullter Ordnung). Setzt man $r = R^{\frac{1}{m}}$, so ist nach dem bisher Gezeigtem r eine rationale Funktion der Lösungen $y_1, \dots, y_5$. Da R eine rationale Funktion der Koeffizienten ist, kann man annehmen, dass R eine symmetrische Funktion der Lösungen $y_1, \dots, y_5$ ist, d. h. der Wert von R verändert sich nicht, wenn $y_1, \dots, y_5$ untereinander vertauscht (*permutiert*) werden. Da die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades untersucht wird, kann man weiters annehmen, dass die Lösungen $y_1, \dots, y_5$ unabhängig sind. Vertauscht man nun $y_1, \dots, y_5$ in der Gleichung $r = R^{\frac{1}{m}}$, so werden sich im Allgemeinen m verschiedene Werte ergeben.

Behauptung 2: Es gilt $m = 5$ oder $m = 2$.

r ist eine Funktion, die von fünf Variablen abhängt. Betrachte allgemein eine Funktion

$$f \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\,.$$

Werden die x_i untereinander vertauscht, so gibt es dafür $5! = 120$ Möglichkeiten. D. h. die Funktion f nimmt im Allgemeinen bei dieser Permutation 120 verschiedene Werte an. Es kann sein, dass manche Werte übereinstimmen, jedoch kann es keinesfalls mehr Werte geben. Man bezeichne diese Werte für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ mit $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_{n!})$, wobei $A_1, A_2, \dots, A_{n!}$ alle Permutationen der ursprünglichen Reihenfolge x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind. Angenommen die Funktion nimmt p verschiedene Werte an mit $p < n!$. Dann müssen manche Werte gleich sein. Durch Umnummerierung kann man annehmen, dass dies die ersten m sind, also $f(A_1) = f(A_2) = \cdots = f(A_m)$ und dass alle anderen Werte verschieden davon sind. Führt man die Permutationen $A_1 \to A_{m+1}, A_2 \to A_{m+2}, \dots A_m \to A_{2m}$ aus, so erhaltet man wieder m gleiche Werte $f(A_{m+1}) = \cdots = f(A_{2m})$. Dies kann man wiederholen bis alle Permutationen aufgebraucht sind und unterteilen die $n!$ Möglichkeiten in p Mengen der Größe m. Es ist also $mp = n!$ und damit p ein Teiler von $n!$. Diese Tatsache bezeichnet man auch als den „Satz von Lagrange“ (vgl. [17], S. 175f). Aus der Primfaktorzerlegung folgt $120 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Da m eine Primzahl sein muss, sind die einzigen Teiler, die in Frage kommen 2,3 und 5. Die 1 scheidet deshalb aus, weil dann alle fünf Lösungen gleich wären, was bei der allgemeinen quartischen Gleichung nicht sein kann.

Es soll nun gezeigt werden, dass eine Funktion, die von n Variablen abhängt, unter Permutation der Variablen $1, 2, p,\ p+1, \dots,\ n$ Werte annehmen kann wobei p die größte Primzahl ist, für die $p \leq n$ gilt („Satz von Cauchy“). Im quartischen Fall ist $p = n = 5$. Damit würde dann die 3 (und 4) ausscheiden. Sei hierzu A_m eine Permutation der Ordnung p, d. h. die p-malige Anwendung der Permutation A_m führt wieder auf die Ausgangsreihenfolge zurück. Dies kann man als $f(A_m)^p = f(A_m)$ schreiben. Nimmt die Funktion dabei weniger als p Werte an, so müssen zumindest zwei Werte gleich sein, etwa

$$f(A_m)^r = f(A_m)^{r'}$$

mit $0 < r < r' < p - 1$. Anwenden der Permutation A_m auf beiden Seiten $(p - r)$ mal führt zu

$$f(A_m)^{r+p-r} = f(A_m)^{r'+p-r}\,.$$

Dabei ist $f(A_m)^{r+p-r} = f(A_m)^p = f(A_m)$. Für $j = r' + p - r$ ist also

$$f(A_m) = f(A_m)^j\,.$$

Auch für jede natürliche Zahl b gilt

$$f(A_m) = f(A_m)^{bj}\,,$$

denn wendet man die Permutation A_m j-mal an, so gelangt man zum Ausgangswert zurück. Wendet man A_m erneut j-mal, so gelangt man wieder zum Ausgangswert zurück. Macht man dies b-mal, so gelangt man stets zum Ausgangswert zurück. Da p eine Primzahl ist, lassen sich stets natürliche Zahlen a und b finden mit $bj = pa + 1$. Damit ergibt sich $f(A_m)^{pa+1} = f(A_m)^{bj} = f(A_m)$. Andererseits ist auch $f(A_m)^{pa} = f(A_m)$ gezeigt. Daraus folgt $f(A_m)^{pa+1} = f(A_m)^{pa}$, d. h. zwei aufeinanderfolgende Werte sind gleich, was bedeutet, dass die Permutation A_m den Wert der Funktion gar nicht ändert. Wähle nun eine Funktion, die weniger als p Werte annimmt und sei $p > 3$. Nach dem zuvor Gezeigtem ändert die Funktion sich unter Permutationen der Ordnung $p > 3$ nicht. Betrachte nun zwei spezielle Permutation der Ordnung p, zwei p-Zykel. In der ersten sei $x_a \longrightarrow x_b, x_b \longrightarrow x_c, \dots, x_p \longrightarrow x_a$, d. h. jede Variable geht in die nächste in der Liste über. Man kann diese Permutation auch als $(abcd \dots p)$ schreiben. Die zweite Permutation ist gegeben durch $x_b \longrightarrow x_c, x_c \longrightarrow x_a, x_d \longrightarrow x_b, x_e \longrightarrow x_d, \dots, x_a \longrightarrow x_p$ bzw. $(ap \dots edbc)$. Wendet man zunächst die erste und dann die zweite Permutation an, so entspricht dies $x_a \longrightarrow x_b \longrightarrow x_c, x_b \longrightarrow x_c \longrightarrow x_a, x_c \longrightarrow x_d \longrightarrow x_b, x_e \longrightarrow x_f \longrightarrow x_e, x_f \longrightarrow x_g \longrightarrow x_f, \dots, x_p \longrightarrow x_a \longrightarrow x_p$ bzw. $(abcd \dots p)(ap \dots edbc) = (acb)$. Dies bedeutet, dass sich die ersten drei Variablen ändern, der Rest bleibt unverändert. Die beiden Permutationen scheinen willkürlich gewählt, jedoch muss jeder p-Zykel von dieser Form sein, denn man könnte für $x_a \longrightarrow x_c, x_b \longrightarrow x_a, x_c \longrightarrow x_b$ geeignete Variable wählen. Jedenfalls gibt es für jeden 3-Zykel genau zwei Permutationen der Ordnung p, deren Produkt dieser 3-Zykel ist. Keine Permutation der Ordnung p kann den Wert der Funktion verändern und damit auch nicht die Hintereinanderausführung der beiden, also auch kein 3-Zykel. Es lässt sich zeigen, dass sich jeder 3-Zykel als Produkt zweier Transpositionen (Vertauschung zweier Variablen) schreiben lässt. Der 3-Zykel (acb) lässt sich schreiben als $x_a \leftrightarrow x_b$, gefolgt von $x_b \leftrightarrow x_c$, denn dann ist $x_a \longrightarrow x_b \longrightarrow x_c, x_b \longrightarrow x_a, x_c \longrightarrow x_b$ bzw. $(ab)(bc) = (acb)$. Da a, b, c beliebig waren, ist somit jeder 3-Zykel. ein Produkt zweier Transpositionen. Auch das Produkt zweier disjunkter Transpositionen lässt sich als Produkt von 3-Zykeln schreiben. Betrachte dazu $x_a \leftrightarrow x_b$, gefolgt von $x_c \leftrightarrow x_d$. Dies ist äquivalent zu $x_a \longrightarrow x_b \longrightarrow x_c$, gefolgt von $x_c \longrightarrow x_a \longrightarrow x_d$, was nichts anders bedeutet als $(ab)(cd) = (abc)(cad)$. Doch wie bereits gezeigt, ändert die Funktion ihren Wert unter einem 3-Zykel nicht und damit auch nicht unter Produkten von zwei Transpositionen und somit auch nicht unter jedem Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen. Ist die Funktion nicht symmetrisch, muss jede Transposition das Vorzeichen wechseln. Zwei Transpositionen wechseln zweimal das Vorzeichen, was das ursprüngliche Vorzeichen wiederherstellt. Die Funktion ist dann antisymmetrisch. In jedem Fall kann die Funktion nur einen Wert (wenn symmetrisch) oder zwei Werte (wenn antisymmetrisch) annehmen, sofern sie bei der Permutation der n Variablen weniger als p Werte annimmt. Nimmt sie jedoch p oder mehr Werte an, so lässt sich darüber zunächst nichts Genaues sagen, weshalb diese Fälle gesondert berücksichtigt werden müssen (vgl. [17], S. 177ff). Damit ist die Behauptung 2 gezeigt.

Es verbleiben $m = 2$ und $m = 5$, da diese Fälle bisher nicht ausgeschlossen werden konnten. Der

Fall $m = 1$ ist wegen der Gleichheit der Lösungen nicht möglich, die Fälle $m = 3$ und $m = 4$ sind nach dem zuvor Gezeigtem nicht möglich bzw. ist 4 auch keine Primzahl wie gefordert.

Fall $\boldsymbol{m = 5}$. Hierzu betrachtet man zunächst eine allgemeine rationale Funktion v, die von y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 abhängt und in vieren davon, etwa y_2, y_3, y_4, y_5 symmetrisch ist. Denn nur eine solche Funktion nimmt unter Permutation der fünf Variablen auch fünf verschiedene Werte an. Tauscht man y_1 mit y_2, y_3, y_4 oder y_5 aus, so ändert sich der Wert der Funktion. Tauscht man jedoch die y_i für $2 \leq i \leq 5$ untereinander aus, so ändert sich der Wert der Funktion nicht. Es ist dann möglich v durch y_1 und die Koeffizienten einer Gleichung auszudrücken, deren Lösungen y_2, y_3, y_4, y_5 sind. Betrachte dazu

$$(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4)(y - y_5) = y^4 - s_1 y^3 + s_2 y^2 - s_3 y + s_4 \, .$$

Die Lösungen y_2, y_3, y_4, y_5 können durch die Koeffizienten s_1, s_2, s_3, s_4 ausgedrückt werden, da es sich um eine Gleichung vierten Grades handelt und diese ist durch Radikale auflösbar. Da y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 die Lösungen der allgemeinen Gleichung fünften Grades sind, folgt

$$\begin{aligned} y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy + e &= (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4)(y - y_5) \\ &= (y - y_1)(y^4 - s_1 y^3 + s_2 y^2 - s_3 y + s_4) \, . \end{aligned}$$

Dies erlaubt es s_1, s_2, s_3, s_4 durch die Lösung y_1 und die ursprünglichen Koeffizienten a, b, c, d auszudrücken. Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned} &(y - y_1)(y^4 - s_1 y^3 + s_2 y^2 - s_3 y + s_4) \\ &\qquad = y^5 - (s_1 + y_1)y^4 + (s_2 + s_1 y_1)y^3 - (s_3 + s_2 y_1)y^2 + (s_4 + s_3 y_1)y - s_4 y_1 \end{aligned}$$

und somit ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} s_1 &= a - y_1 \, , \\ s_2 &= b - ay_1 + {y_1}^2 \, , \\ s_3 &= c - by_1 + a{y_1}^2 - {y_1}^3 \text{ und} \\ s_4 &= d - cy_1 + b{y_1}^2 - a{y_1}^3 + {y_1}^4 \, . \end{aligned}$$

v ist damit eine rationale Funktion in y_1, a, b, c, d. v kann nun als

$$v = p_0 + p_1 y_1 + p_2 {y_1}^2 + \cdots + p_m {y_1}^m$$

geschrieben werden, wobei $p_0, p_1, \ldots, p_m$ Polynome in a, b, c, d, e sind und die Abhängigkeit von y_1 jeweils herausfaktorisiert wurde. Da ${y_1}^5 = a{y_1}^4 - b{y_1}^3 + c{y_1}^2 - dy_1 + e$ gilt, lassen sich alle Potenzen von y_1, die gleich oder größer 5 sind durch $y_1, {y_1}^2, {y_1}^3, {y_1}^4$ ausdrücken und es verbleibt nach Anpassung der p_i

$$v = p_0 + p_1 y_1 + p_2 {y_1}^2 + p_3 {y_1}^3 + p_4 {y_1}^4 \, .$$

Damit lässt sich jede Funktion, die in y_2, y_3, y_4, y_5 symmetrisch ist, insbesondere $r = R^{\frac{1}{5}}$, in diese Form bringen. Ist die Funktion auch in y_1 symmetrisch, so nimmt sie nur einen Wert an, nämlich

$$v = p_0 + p_1 y_1 + p_2 {y_1}^2 + p_3 {y_1}^3 + p_4 {y_1}^4 \, .$$

Dies ist jedoch nicht möglich, da $r = R^{\frac{1}{5}}$ nach Voraussetzung fünf verschiedene Werte annimmt. Ist sie jedoch in y_1 antisymmetrisch, so nimmt sie fünf verschiedene Werte, nämlich

$$v = p_0 + p_1 y_i + p_2 {y_i}^2 + p_3 {y_i}^3 + p_4 {y_i}^4$$

für $1 \leq i \leq 5$. In einem vorherigen Teil dieses Beweises wurde verwendet, dass die fünften Wurzeln von R durch eine fünfte Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ zusammenhängen, sie sind $R^{\frac{1}{5}}$, $\zeta R^{\frac{1}{5}}$, $\zeta^2 R^{\frac{1}{5}}$, $\zeta^3 R^{\frac{1}{5}}$ und $\zeta^4 R^{\frac{1}{5}}$. Da $r = R^{\frac{1}{5}}$ symmetrisch in y_2, y_3, y_4, y_5 sein muss, da sie fünf Werte annimmt, kann man sie nach dem eben Gezeigtem schreiben als

$$r = R^{\frac{1}{5}} = p_0 + p_1 y_1 + p_2 {y_1}^2 + p_3 {y_1}^3 + p_4 {y_1}^4 \,.$$

Multipliziert man beide Seiten mit ζ, was der Ersetzung $R^{\frac{1}{5}} \longrightarrow \zeta R^{\frac{1}{5}}$ bzw. $y_1 \longrightarrow y_2$ entspricht, so erhält man

$$\zeta(p_0 + p_1 y_1 + p_2 {y_1}^2 + p_3 {y_1}^3 + p_4 {y_1}^4) = p_0 + p_1 y_2 + p_2 {y_2}^2 + p_3 {y_2}^3 + p_4 {y_2}^4 \,.$$

Dies kann aber nur dann gelten, wenn $\zeta = 1$ bzw. $y_1 = y_2$ ist. Dies ist jedoch nicht erlaubt, da die Lösungen y_i nach Voraussetzung alle verschieden sind. Somit scheidet der Fall $m = 5$ aus.

Fall $\boldsymbol{m = 2}$. Da alle anderen Möglichkeiten ausgeschieden sind, muss also $r = R^{\frac{1}{2}}$ gelten. Daraus folgt sofort, dass r zwei verschiedene Werte annehmen muss, die sich nur durch das Vorzeichen, aber nicht im Absolutbetrag unterscheiden. Betrachte die Funktion S mit

$$\sqrt{S} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3) \ldots (x_4 - x_5) \,.$$

Vertauscht man in $\sqrt{S}$ zwei Variablen, etwa $x_1 \leftrightarrow x_2$, so ändert die Funktion $\sqrt{S}$ ihr Vorzeichen, aber nicht den Absolutbetrag. $\sqrt{S}$ ist in ihren fünf Variablen daher antisymmetrisch (vgl. [17], S. 177). Auch $r = R^{\frac{1}{2}}$ ist antisymmetrisch und lässt sich daher als ein Produkt einer symmetrischen Funktion v und einer antisymmetrischen Funktion $\sqrt{S}$ schreiben, d. h.

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_2 - y_3) \ldots (y_4 - y_5) = vS^{\frac{1}{2}} \,.$$

Betrachte nun irrationale Funktionen der Form

$$\left(p + p_1 R^{\frac{1}{n_1}} + p_2 {R_1}^{\frac{1}{n_2}} + \cdots\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{22}$$

wobei $p, p_1, p_2, \ldots, R, R_1, \ldots$ rationale Funktionen von a, b, c, d, e und damit symmetrische Funktionen in y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sind. Aus dem bisher Gezeigtem muss $n_1 = n_2 = \cdots = 2$ und damit $R = v^2 S, R_1 = {v_1}^2 S$ usw. mit symmetrischen Funktionen $v, v_1, \ldots$ sein. Die Funktion in (22) lässt sich damit schreiben als

$$\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} .$$

Sei

$$r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ und}$$

$$r_1 = \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

dann ergibt sich

$$rr_1 = (p^2 - p_1{}^2 S)^{\frac{1}{m}}.$$

Angenommen rr_1 wäre keine symmetrische Funktion. Nach dem Satz von Cauchy in Behauptung 2 müsste dann $m = 2$ sein. Dies ist jedoch nicht möglich, da r durch seine Definition $r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ insgesamt vier Werte annehmen würde, da es sich um eine Quadratwurzel eines Ausdrucks handelt, der ebenfalls eine Quadratwurzel enthält. Erlaubt ist aber nur $m = 2$ oder $m = 5$. Somit muss rr_1 eine symmetrische Funktion sein. Sei $v = rr_1$ diese symmetrische Funktion und

$$z = r + r_1 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}},$$

wobei verwendet wurde, dass $r_1 = \frac{v}{r} = v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}}$. Da $m = 2$ nicht möglich ist, muss also $m = 5$ sein. Da z fünf verschiedene Werte annimmt, kann man wie im vorherigen Fall schreiben

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 , \tag{23}$$

wobei $q, q_1, \ldots$ symmetrische Funktionen von $y_1, y_2, \ldots$ und folglich rationale Funktionen von a, b, c, d, e sind. In (23) kann man nun y durch $q, q_1, \ldots$ und z ausdrücken und damit durch a, b, c, d, e, z, da es sich um eine quartische Gleichung handelt, die durch Radikale auflösbar ist. y kann wie in (20) geschrieben werden und somit als

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}} , \tag{24}$$

wobei alle Funktionen P, R ... gemäß der Argumentation nach (22) in der Form $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$ geschrieben werden können. Mit diesem Ausdruck für y folgt nun aus (21), dass

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \zeta^4 y_2 + \zeta^3 y_3 + \zeta^2 y_4 + \zeta y_5) .$$

Andererseits ist auch

$$R^{\frac{1}{5}} = r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

und damit

$$\frac{1}{5}(y_1 + \zeta^4 y_2 + \zeta^3 y_3 + \zeta^2 y_4 + \zeta y_5) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} . \tag{25}$$

Die linke Seite in (25) hat unter Berücksichtigung der Permutation der Lösungen 120 mögliche Werte, aber die rechte Seite hat nur zehn mögliche Werte, nämlich die beiden Werte der

Quadratwurzel multipliziert mit den fünf Werten der fünften Wurzel. Damit kann y nicht die Form in (24) haben, aber es wurde gezeigt, dass y diese Form haben muss, wenn die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades durch Radikale auflösbar ist. Somit kann diese Gleichung nicht durch Radikale auflösbar sein. Die Grundannahme ist falsch. $\square$

Zusammenfassung des Beweises / Beweisskizze.
Abel möchte beweisen, dass die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades

$$y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ nicht durch Radikale, d. h. durch Wurzeln gebildete Funktionen der Größen a, b, c, d und e, auflösbar sind. Er nimmt hierzu an, dass sich die Lösungen y genau durch solche Funktionen, sogenannte *algebraische Funktionen*, schreiben lassen und führt dies auf einen Widerspruch. Wenn man aus einer Annahme ein falsches Resultat ableitet, so muss die Annahme selber falsch sein, wenn bei der Ableitung kein Fehler gemacht wurde. Das ist die Idee eines *indirekten Beweises* in der Mathematik. Der erste Schritt in seinem Beweis besteht darin, dass er behauptet und zeigt, dass alle algebraische Funktionen y (und damit alle Lösungen y) geschrieben werden können als

$$y = p + R^{\frac{1}{5}} + p_2 R^{\frac{2}{5}} + \cdots + p_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

$R^{\frac{i}{5}}$ ist eine im Allgemeinen irrationale Funktion in den Koeffizienten a, b, c, d, e, d. h. rationale Funktionen in a, b, c, d, e, wobei auch noch Wurzeln erlaubt sind, z. B. $\frac{\sqrt[3]{a+\sqrt{abc+d^2}}}{4e-b}$ und p, p_2, p_3, p_4 sind von ähnlicher Art, nur, dass die Schachtelungstiefe der Wurzeln geringer als bei $R^{\frac{i}{5}}$ ist. Anstatt aber y als irrationale Funktion der Koeffizienten a, b, c, d, e darzustellen, gelingt es Abel zu zeigen, dass man die oben auftretenden Funktionen, z. B. $R^{\frac{1}{5}}$ als eine rationale Funktion der Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 schreiben kann, also z. B. $\frac{y_1+y_4{}^3-2y_2y_3}{2y_1y_5}$. Hier kommen keine Wurzeln mehr vor. Abel kann zeigen, dass die Funktion $R^{\frac{1}{5}}$ folgende Form hat:

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \zeta^4 y_2 + \zeta^3 y_3 + \zeta^2 y_4 + \zeta y_5),$$

wobei $\zeta \neq 1$ eine fünfte Einheitswurzel ist. Abel überlegt nun, wenn er die y_i untereinander vertauscht (*permutiert*), so wird sich der Wert von $R^{\frac{1}{5}}$ im Allgemeinen ändern. Insgesamt gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten für solche Vertauschungen, und nach dem „Satz von Lagrange“ muss die Anzahl der angenommen Werte m ein Teiler von 120 sein. Abel behauptet zudem, dass m eine Primzahl sein muss und da $120 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ gilt, sind die einzigen Teiler, die in Frage kommen $2, 3$ und 5. Abel benutzt ein Ergebnis von Cauchy („Satz von Cauchy“), wonach auch $m = 3$ ausscheidet. Dann führt Abel die beiden übrigen Fälle $m = 2$ und $m = 5$ auf Widersprüche. Da alle Möglichkeiten ausscheiden, bleibt nur noch $m = 1$ über, jedoch kann auch dies nicht sein, da sonst alle Lösungen gleich wären, was man bei der allgemeinen univariaten polynomialen Gleichung fünften Grades nicht erwarten kann. Insgesamt führt die Annahme, dass die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades durch Radikale auflösbar sei, zu Widersprüchen und muss daher falsch sein (vgl. [17], S. 90ff).

Korollar 3 (Unauflösbarkeit univariater polynomialer Gleichungen sechsten und höheren Grades).
Eine allgemeine univariate polynomiale Gleichung sechsten oder höheren Grades über $\mathbb{C}$ ist nicht durch Radikale auflösbar.
Beweis: Ein allgemeines Polynom vom Grad 6 hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra sechs Lösungen und lässt sich als Produkt eines Polynoms vom Grad 1 und eines Polynoms vom Grad 5 schreiben. Da die Nullstellen des Polynoms vom Grad 5 allgemein nicht durch Radikale gefunden werden können, können es somit auch nicht alle Nullstellen des allgemeinen Polynoms sechsten Grades. Für höhere Grade gilt dies analog (vgl. [17], S. 169). ☐

Bemerkung: Der Satz von Abel-Ruffini beweist, dass die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades nicht durch Radikale auflösbar ist. Selbstverständlich kann es Spezialfälle geben, die durch Radikale auflösbar sind. Man kann diese leicht konstruieren. Betrachte zum Beispiel das Polynom

$$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)(x+1)(x+2)=x^5+2x^4-3x^3-6x^2+2x+4\,.$$

Seine Nullstellen sind nach Konstruktion $\pm\sqrt{2}, \pm 1$ und 2.

3.1.6 Weitere Lösungsmethoden

In den vorherigen Kapiteln wurden explizite Lösungsformeln für univariate polynomiale Gleichungen ersten bis vierten Grades hergeleitet und gezeigt, dass es keine Lösungsformeln für höhere Gleichungen gibt. Während die Lösungsformeln für Grad 1 und 2 recht mühelos einsetzbar sind, führen, wie in den Beispielen ersichtlich, die Lösungsformeln für Grad 3 und 4 schon zu komplizierteren Berechnungen und Umformungen. Meistens ist es einfacher, eine Lösung zu finden und einen Linearfaktor abzuspalten, um dann eine univariate polynomiale Gleichung niedrigeren Grades zu lösen. Dies erlaubt es auch, manche univariate polynomiale Gleichungen fünften und höheren Grades zu lösen.

Rationale Nullstellen finden

Anstatt eine univariate polynomiale Gleichung dritten Grades mit der Lösungsformel von Cardano zu lösen, kann man versuchen eine Lösung zu finden und einen Linearfaktor abzuspalten um dann die wesentlich einfachere quadratische Lösungsformel anzuwenden. Man kann sich beim „Erraten von Nullstellen“ auf folgenden Satz beziehen.

Satz 8. Sei $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad n mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Besitzt das Polynom eine rationale Nullstelle $x_0 = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $s \neq 0$, so ist r ein Teiler von a_0 und s ein Teiler von a_n.

Beweis: Setzt man $x_0 = \frac{r}{s}$ in $p(x) = 0$ ein, so folgt

$$a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n + \cdots + a_1 \left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n r^n s^{-n} + \cdots + a_1 r s^{-1} + a_0 = 0\,.$$

Multipliziert man mit s^n, so ergibt sich

$$a_n r^n + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0\,.$$

Damit ergeben sich durch Umformen und Herausheben nun zwei Gleichungen

$$a_n r^n = -s(a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}) \text{ und}$$
$$a_0 s^n = -r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} s + \cdots + a_2 r s^{n-2} + a_1 s^{n-1})\,.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $s | a_n r^n$, aber da r, s teilerfremd sind, sind auch r^n, s teilerfremd und daher muss $s | a_n$ gelten. Aus der zweiten Gleichung folgt analog $r | a_0 s^n$ und damit $r | a_0$. □

Bemerkung: Satz 8 gibt eine notwendige Bedingung, aber keine hinreichende, d. h. es kann Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ geben, die keine rationalen Nullstellen haben, beispielsweise $\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = x^2 - 2$.

Betrachtet man die Zerlegung des Polynoms in seine Linearfaktoren, d. h.

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)\,,$$

so ist Satz 8 ganz klar. Für $a_n = 1$ gilt durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und durch einen Koeffizientenvergleich

$$a_0 = (-x_1)(-x_2) \dots (-x_n)\,.$$

Da a_0 das Produkt der negativen Lösungen ist, teilt jede Lösung a_0 automatisch. Ist $a_n \neq 1$ und $a_n \neq 0$, so kann man die gesamte Gleichung durch a_n dividieren und erhält

$$\frac{a_0}{a_n} = (-x_1)(-x_2) \dots (-x_n)\,.$$

Nun müssen die Lösungen $\frac{a_0}{a_n}$ teilen und damit muss der Nenner von x_i auch a_n teilen.

Beispiel 8. Gegeben ist das Polynom $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$. Verwendet man die Notation von Satz 8, so sind $s = \pm 2$ und $r = \pm 1$. Alle möglichen rationalen Nullstellen sind also ± 1 und $\pm \frac{1}{2}$. Einsetzen liefert nur für $x_0 = -\frac{1}{2}$ eine wahre Aussage. Damit ist eine rationale Nullstelle gefunden.

Für quadratische Gleichungen führen die vorigen Überlegungen zum **Satz von Vieta**.

Satz 9 (Satz von Vieta). Sind x_1 und x_2 die beiden nicht notwendigerweise verschiedenen Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

(vgl. [12], S. 74).

Beweis: Die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich aus

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2 \,. \qquad \square$$

Der Satz von Vieta kann helfen, um die Nullstellen eines quadratischen Polynoms zu finden.

Beispiel 9. Gegeben sei $x^2 - 7x + 10 = 0$. Nach dem Satz von Vieta ist $x_1 + x_2 = -(-7) = 7$ und $x_1 x_2 = 10$. Die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ erfüllen diese beiden Bedingungen und sind somit die gesuchten Nullstellen.

Polynomdivision

Für gewöhnlich ist man an allen Nullstellen eines Polynoms interessiert. Hat man eine Lösung durch den Satz über rationale Nullstellen gefunden, so lässt sich ein Linearfaktor abspalten und man muss die Nullstellen eines Polynoms mit einem um 1 niedrigeren Grad finden. Hierbei muss man eine sogenannte *Polynomdivision* durchführen. Sie ist nichts anderes als der *euklidische Algorithmus* im Polynomring $K[x]$.

Man benötigt dazu die *Division mit Rest* in $K[x]$, d. h. $\forall m(x), n(x) \in K[x]$ und $n(x) \neq 0$ gilt $m(x) = q(x)n(x) + r(x)$ mit entweder $r(x) = 0$ oder $0 \leq \deg r(x) < \deg n(x)$ (vgl. [4], S.62).

Die Polynomdivision wird anhand eines Beispiel deutlich. Man möchte etwa

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

berechnen. Zunächst wird der Summand höchsten Grades von $p(x)$ eliminiert. Dazu wird dieser Summand durch den höchsten Summanden von $q(x)$ dividiert. Im konkreten Beispiel ist dies $\frac{4x^5}{x^2} = 4x^3$. Anschließend wird das Ergebnis mit $q(x)$ multipliziert und von $p(x)$ abgezogen. Im Allgemeinen bleibt nun ein Rest übrig. Man wiederholt den Vorgang, sodass jedes Mal der Summand höchsten Grades vom Rest eliminiert wird, bis dies nicht mehr möglich ist oder kein Rest mehr verbleibt. Führt man das gegebene Beispiel aus, so ergibt sich in einer übersichtlichen Darstellung das Folgende.

$$
\begin{array}{cccccccl}
(4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & -1) & : & & (x^2+1) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{-4x^5} & \underline{-0} & \underline{-4x^3} & & & & & \\
0 & -x^4 & -2x^3 & & & & & \\
 & \underline{+x^4} & \underline{-0} & \underline{+x^2} & & & & \\
 & 0 & -2x^3 & +2x^2 & & & & \\
 & & \underline{+2x^3} & \underline{-0} & \underline{+2x} & & & \\
 & & 0 & 2x^2 & +2x & -1 & & \\
 & & & \underline{-2x^2} & \underline{-0} & \underline{-2} & & \\
 & & & 0 & 2x & -3 & \text{Rest} &
\end{array}
$$

Hat man eine Nullstelle x_1 von einem Polynom $p(x)$ gefunden, so ergibt sich bei einer Polynomdivsion durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ stets der Rest Null.

Beispiel 10. Gesucht sind die Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 36$. Es handelt sich dabei um dasselbe Polynom wie in Beispiel 6. Dort wurden die Nullstellen des Polynoms durch die Lösungsformel von Cardano gefunden. Als Alternative wird jetzt eine rationale Nullstelle als Teiler des konstanten Gliedes gesucht und durch Polynomdivision verbleibt nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen. Da der führende Koeffizient 1 ist, muss man nur nach den Teilern des konsanten Gliedes 36 suchen. Diese sind mit $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$ sehr zahlreich. Man benötigt jedoch nur eine Nullstelle und beginnt bei ± 1. Daher ist rasch $x_1 = +2$ als rationale Nullstelle gefunden. In diesem speziellen Beispiel könnte man auf diese Weise alle Nullstellen finden, aber diese Tatsache soll außer Acht gelassen werden. Der Linearfaktor $(x - 2)$ muss nun abgespalten werden.

$$
\begin{array}{ccccccl}
(x^3 & -11x^2 & +36x & -36) & : & & (x-2) = x^2 - 9x + 18 \\
\underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & & & & & \\
0 & -9x^2 & +36x & & & & \\
 & \underline{+9x^2} & \underline{-18x} & & & & \\
 & 0 & +18x & -36 & & & \\
 & & \underline{-18x} & \underline{+36} & & & \\
 & & 0 & 0 & \text{Rest} & &
\end{array}
$$

Damit ist also $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = (x-2)(x^2 - 9x + 18)$. Die restlichen beiden Lösungen können zum Beispiel über die quadratische Lösungsformel gefunden werden. Es ist

$$
x_{2,3} = +\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}
$$

und somit $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$. Ein Vergleich mit dem Lösungsweg in Beispiel 6 zeigt die Effizienz und Einfachheit der jetzt vorgestellten Methode, welche freilich nur möglich ist, wenn man zuvor eine Nullstelle „erraten" hat.

Lösung durch Herausheben

Manchmal lässt sich eine Nullstelle eines Polynoms finden, indem man die Variable heraushebt. Sucht man z. B. die Nullstellen von $p(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$, dann kann man $p(x)$ auch schreiben als $p(x) = x(x^2 - 4x - 5)$. Damit ist eine Nullstelle $x_1 = 0$, die anderen beiden ergeben sich zum Beispiel über die quadratische Lösungsformel. Man sollte jedoch darauf achten – insbesondere im Mathematikunterricht – dass man die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$ nicht einfach durch x dividiert, sodass eine quadratische Gleichung verbleibt, denn so würde man eine Lösung „verlieren". Die Division ist nur für $x \neq 0$ erlaubt, aber $x = 0$ ist gerade eine der gesuchten Lösungen (vgl. [14], S. 6).

Lösung durch Substitution

Manche univariate polynomiale Gleichungen lassen sich durch Substitution der Variable lösen. Dies soll anhand eines Beispiels demonstriert werden. Bei Substitutionen ist oft die **Regel von Horner** hilfreich: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Diese ist durch Ausmultiplizieren der rechten Seite ersichtlich (vgl. [14], S. 7f).

Beispiel 11. Gesucht sind alle Lösungen der univariaten polynomialen Gleichung $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ sechsten Grades. Es existiert keine allgemeine Lösungsformel, jedoch hilft einem der Ansatz $x^3 = u$ weiter. Dieser liefert die neue univariate polynomiale Gleichung $u^2 + 19u - 216 = 0$ zweiten Grades. Diese kann mit der quadratischen Lösungsformel aufgelöst werden und es ist

$$u_{1,2} = -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{19^2}{4} + 216} = -\frac{19}{2} \pm \frac{35}{2}$$

und damit $u_1 = 8$ und $u_2 = -27$. Nun muss noch rücksubstituiert werden. Betrachte zunächst $x^3 = 8$. Eine Lösung ist $x_1 = 2$. Mit der Regel von Horner ist $(x^3 - 8) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ und die weiteren Lösungen folgen aus der quadratischen Lösungsformel:

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}\,.$$

Betrachte nun die zweite Substitution $x^3 = -27$. Es ist $x_4 = -3$. Nach der Regel von Horner gilt $(x + 27) = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$ und aus der quadratischen Lösungsformel folgt

$$x_{5,6} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 9} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}\,.$$

3.2 Numerische Lösungsmöglichkeiten

Anstatt die reellen Nullstellen eines Polynoms exakt zu berechnen, kann man Näherungslösungen durch Approximationsverfahren finden. Hat ein höhergradiges Polynom beispielsweise keine rationale Nullstelle und lassen sich auch Methoden des Heraushebens oder der Substitution nicht anwenden, so kann man versuchen eine Nullstelle näherungsweise zu bestimmen und dann eine Polynomdivision durchzuführen. Durch Approximationsverfahren lassen sich im Prinzip alle reellen Nullstellen finden, man muss jedoch wissen, wo man suchen muss. In diesem Abschnitt sollen die beiden prominenten Verfahren „Newton-Verfahren“ und „Regula falsi“ vorgestellt werden. Es gibt noch weitere Verfahren. Durch das „Bairstow-Verfahren“, das „Weierstraß-(Dochev-Durand-Kerner-Presic)-Verfahren“, das „Aberth-Ehrlich-Verfahren“ oder das „Trennkreisverfahren“ können auch echt komplexe Nullstellen bestimmt werden.

3.2.1 Das Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren geht, wie der Name schon andeutet, auf Sir Isaac Newton zurück. Der Ausgangspunkt des Verfahrens besteht darin ein Intervall $[a, b]$ zu bestimmen, indem eine reelle Nullstelle liegen muss, da z. B. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt eine stetige Funktion im Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an und es muss daher ein x aus $[a, b]$ geben, sodass $f(x) = 0$ ist (vgl. [7], S. 223). Die Idee des Verfahrens besteht darin, die Funktion f in einem Punkt des Intervalls durch eine Tangente zu approximieren und die Nullstelle der Tangente als bessere Näherung zu verwenden. Man wiederholt dies, bis die Änderung der Näherungslösung eine festgesetzte Schranke unterschritten hat (z. B. die ersten vier signifikanten Stellen ändern sich nicht mehr bei einem weiteren Iterationsschritt). Insgesamt ist die Anforderung an die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass sie stetig differenzierbar ist.

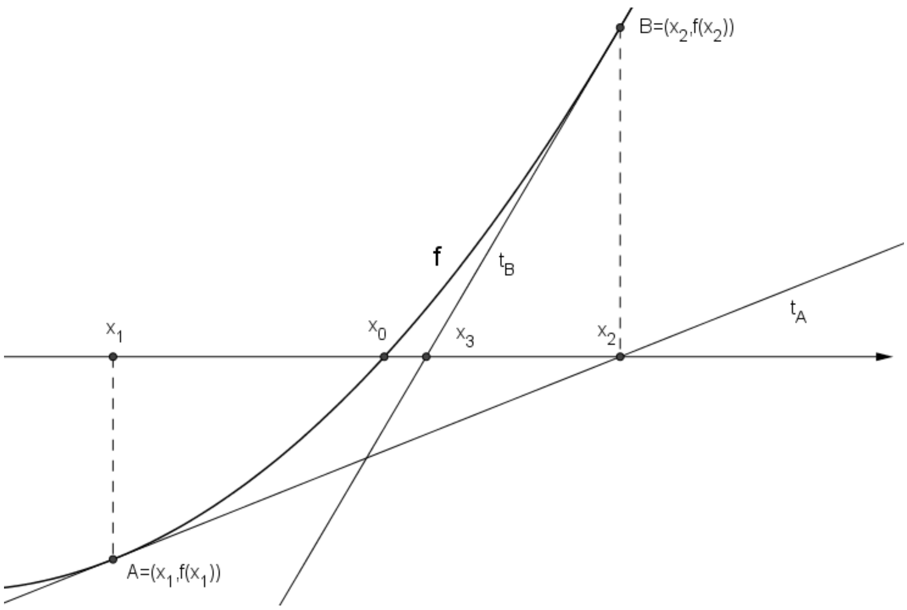

Abbildung 6: Skizze zur Herleitung des Newton-Verfahrens

Die Herleitung des Verfahrens ist in Abbildung 6 deutlich. Zunächst wird der Startwert x_1 im Intervall $[a, b]$ gewählt. Man legt eine Tangente in den Punkt $A = (x_1, f(x_1))$ und schneidet die Tangente mit der x-Achse. Damit hat man einen neuen Startwert x_2 gefunden, der eine bessere Näherung für die gesuchte Nullstelle x_0 ist als x_1. Man legt eine Tangente in den Punkt $B = (x_2, f(x_2))$ und schneidet diese erneut mit der x-Achse um einen neuen Startwert x_3 zu erhalten. Dies wiederholt man bis die gewünschte Genauigkeit der Näherung erreicht ist.

Da die Tangente eine Gerade ist, wird sie durch die Gleichung $y = kx + d$ beschrieben. Die Steigung k der Tangente im Punkt $A = (x_n, f(x_n))$ ist identisch mit der Steigung der Funktion an der Stelle x_n. Nun liegen die Punkte $A = (x_n, f(x_n))$ und $B = (x_{n+1}, 0)$ auf der Tangente. Einsetzen ergibt

$$f(x_n) = f'(x_n) \cdot x_n + d \text{ und}$$

$$0 = f'(x_n) \cdot x_{n+1} + d\,.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

Umgeformt ergibt das

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(vgl. [10], S. 11f).

Beispiel 12. Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3}$. Der Satz über rationale Nullstellen ist nicht anwendbar. Anstatt Cardanos Lösungsformel zu bemühen, wird das Newton-Verfahren benutzt. Zunächst muss ein Intervall bestimmt werden, in dem garantiert eine Nullstelle vorhanden ist. Beispielsweise ist $f(0) = -3{,}46$ ... und $f(2) = 7{,}46$ .... Es existiert damit eine Nullstelle in [0,2]. Als Startwert wird die Mitte gewählt, d. h. $x_1 = 1$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$.

$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_n)}$	$\boldsymbol{f'(x_n)}$	$\boldsymbol{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$	$\boldsymbol{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$
1	−2,7231	4,4641	−0,6120	1,6120
1,6120	2,0016	11,3798	0,1759	1,4361
1,4361	0,1978	9,1621	0,0216	1,4145
1,4145	0,0028	8,9027	0,0003	1,4142
1,4142	0,0000			1,4142

Eine Nullstelle ist somit bei $x_1 = 1{,}4142$ ... gefunden. Dieser Wert sieht $\sqrt{2}$ recht ähnlich und tatsächlich ist $f(\sqrt{2}) = 0$. Um die beiden anderen Nullstellen zu finden, kann man nun eine Polynomdivision durchführen.

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +\sqrt{3}x^2 & -2x & -2\sqrt{3}) & : \quad \left(x-\sqrt{2}\right) = x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}\\
\underline{-x^3} & \underline{+\sqrt{2}x^2} & & & \\
0 & (\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2 & -2x & & \\
 & \underline{-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2} & \underline{+\left(\sqrt{6}+2\right)x} & & \\
 & 0 & +\sqrt{6}x & -2\sqrt{3}) & \\
 & & \underline{-\sqrt{6}x} & \underline{+2\sqrt{3}} & \\
 & & 0 & 0 & \text{Rest}
\end{array}$$

Durch den Satz von Vieta sieht man, dass $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}$. Damit sind die beiden anderen Nullstellen $x_2 = -\sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{3}$.

Das Newton-Verfahren bietet keine Garantie für Konvergenz. Es ist ein lokal konvergentes Verfahren, d. h. der Startwert muss im Allgemeinen schon recht nahe an der Nullstelle sein. Daher ist sinnvoll, ein möglichst kleines Ausgangsintervall zu wählen. Probleme kann man eventuell auch dann bekommen, wenn sich in der Nähe ein Extremum befindet, denn dort ist die Tangente waagrecht und man erhält keinen neuen Startwert. Weiterhin kann es zu einem oszillierendem Verhalten kommen, bei dem sich zwei x-Werte ständig abwechseln. Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann quadratisch, d.h. die Anzahl der gültigen Stellen verdoppelt sich in jedem Schritt (vgl. [10], S. 13ff).

Beispiel 13. Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Die Ableitungsfunktion ist $f'(x) = 3x^2 - 2$. Da $f(1) = 1$ und $f(-2) = -2$ sind, muss es im Intervall $[-2,1]$ eine reelle Nullstelle geben. Man benutzt das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_1 = 0$.

$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_n)}$	$\boldsymbol{f'(x_n)}$	$\boldsymbol{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$	$\boldsymbol{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$
0	2	-2	-1	1
1	1	1	1	0
0	2	-2	-1	1
1	1	1	1	0
0	2	-2	-1	1

Das Newton-Verfahren konvergiert in diesem Beispiel nicht, die x-Werte 0 und 1 wechseln sich periodisch ab.

3.2.2 Das Regula-falsi-Verfahren

Das Regula-falsi-Verfahren (lateinisch: „Regel des Falschen“) ist ein weiteres numerisches

Verfahren. Ist es beispielsweise nicht möglich oder nicht erwünscht, die erste Ableitung einer Funktion zu berechnen, so kann das Newton-Verfahren nicht angewendet werden. Als Alternative bietet sich das Regula-falsi-Verfahren an. Hierbei wird anstatt mit Tangenten mit Sekanten gearbeitet. Die Idee des Verfahrens besteht darin, zunächst ein Intervall $[a, b]$ zu suchen, indem eine Nullstelle liegen muss, da z. B. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt eine stetige Funktion im Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an und es muss daher ein x aus $[a, b]$ geben, sodass $f(x) = 0$ ist (vgl. [7], S. 223). Nun bildet man die Sekante, die durch $f(a)$ und $f(b)$ läuft. Diese schneidet die x-Achse. Aus dem so erhaltenen x-Wert und einem der Intervallgrenzen a oder b lässt sich nun ein kleineres Intervall bestimmen, in dem die gesuchte Nullstelle liegen muss. Man wendet das Verfahren solange an, bis die Änderung der Näherungslösung eine festgesetzte Schranke unterschritten hat (z. B. die ersten vier signifikanten Stellen ändern sich nicht mehr bei einem weiteren Iterationsschritt). Insgesamt ist die Anforderung an die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass sie stetig ist (vgl. [10], S. 9f).

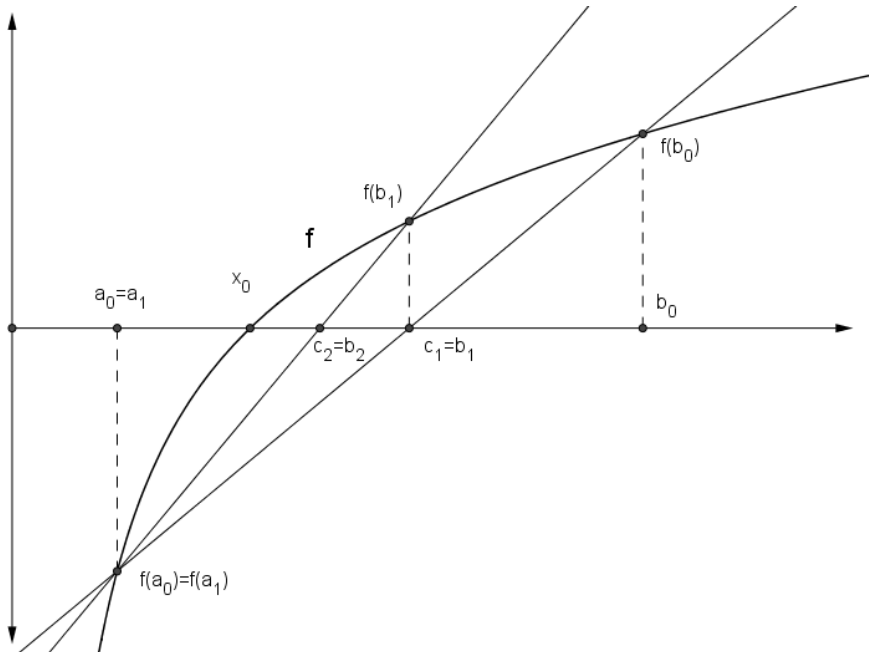

Abbildung 7: Skizze zur Herleitung des Regula-falsi-Verfahrens

Die Schritte zur Herleitung einer Iterationsvorschrift beim Regula-falsi-Verfahren (vgl. [10], S. 9f) sind in Abbildung 7 ersichtlich. Die Sekante ist als Gerade in der Form $g(x) = kx + d$ darstellbar. Die Bedingung ist, dass die Punkte $(a_n, f(a_n))$ und $(b_n, f(b_n))$ auf der Sekante liegen. Eingesetzt ergibt das

$$f(a_n) = k \cdot a_n + d \text{ und}$$
$$f(b_n) = k \cdot b_n + d.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$k = \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}.$$

Um d zu finden, setzt man k ein und es folgt

$$d = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{a_n - b_n}.$$

Es muss nun das c_{n+1} gefunden werden, bei dem die Sekante die x-Achse schneidet, d. h. $g(c_{n+1}) = 0$. Dies ergibt

$$0 = \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} \cdot c_{n+1} + \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{a_n - b_n}.$$

Umformen nach c_{n+1} ergibt

$$c_{n+1} = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

c_{n+1} teilt das Intervall $[a, b]$ in zwei Teilintervalle. Man muss nun entscheiden, in welchem man weiter verfährt, indem man überprüft, in welchem der beiden Intervalle die gesuchte Nullstelle liegt. Daraus ergibt sich folgende Regel:

$$a_{n+1} = c_{n+1} \text{ und } b_{n+1} = b_n \text{ falls } f(a_n) \text{ und } f(c_{n+1}) \text{ dasselbe Vorzeichen haben}$$
$$a_{n+1} = a_n \text{ und } b_{n+1} = c_{n+1} \text{ falls } f(b_n) \text{ und } f(c_{n+1}) \text{ dasselbe Vorzeichen haben}$$

Das Regula-falsi-Verfahren konvergiert langsamer als das Newton-Verfahren. Es konvergiert besonders langsam, wenn sich die Funktion in der Nähe der Nullstelle sehr schnell ändert, d. h. sehr stark wachsend oder sehr stark fallend ist (vgl. [10], S. 9ff).

Beispiel 14. Um die Konvergenzgeschwindigkeit der beiden vorgestellten numerischen Verfahren zu vergleichen wird dieselbe Funktion wie in Beispiel 12 betrachtet. Man sucht also die Nullstellen von $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3}$. Es ist $f(0) = -3{,}46\ldots$ und $f(2) = 7{,}46\ldots$. Es existiert damit eine Nullstelle in [0,2].

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{b_n}$	$\boldsymbol{f(a_n)}$	$\boldsymbol{f(b_n)}$	$\boldsymbol{\frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}}$
0	0	2	$-3{,}4641$	7,6461	0,6340
1	0	0,6340	$-3{,}4641$	$-3{,}7811$	$-6{,}9282$
2	$-6{,}9282$	0,6340	$-239{,}0230$	$-3{,}7811$	0,7555
3	$-6{,}9282$	0,7555	$-239{,}0230$	$-3{,}5552$	0,8715
4	$-6{,}9282$	0,8715	$-239{,}0230$	$-3{,}2230$	0,9784
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	$-6{,}9282$	1,4141	$-239{,}0230$	$-0{,}0006$	1,4142

Erst im 31. Schritt erreicht das Regula-falsi-Verfahren dieselbe Genauigkeit wie das Newton-Verfahren in demselben Beispiel.

3.3 Lösung mithilfe von Computereinsatz

Im 21. Jahrhundert und damit im Informations- bzw. Computerzeitalter lassen sich univariate polynomiale Gleichungen fast beliebigen Grades mithilfe von *Computer-Algebra-Systemen* (kurz *CAS*) mit Leichtigkeit lösen. Selbstverständlich können diese CAS die Lösungen nicht einfach aus dem Hut zaubern, sondern müssen auf die eine oder andere Weise mit Lösungsformeln bzw. im Allgemeinen mit Approximationsverfahren arbeiten. Die Kunst der Mathematikerinnen und Mathematiker liegt darin, solche Verfahren zu finden und in CAS zu programmieren.

Ein sehr mächtiges Programm ist *Mathematica* von der Firma Wolfram Research. Es wurde 1988 zum ersten Mal veröffentlicht und ist kostenpflichtig. Seit 2009 bietet die Firma auch eine kostenlose Online-Version mit dem Namen *Wolfram|Alpha* an (vgl. [25]). Mathematica bietet sowohl eine exakte Lösung durch den Befehl *Solve*, als auch eine numerische Lösung durch den Befehl *NSolve* von Gleichungen an.

Beispiel 15. Gesucht sind alle Nullstellen von $f(x) = 4ix^5 + 3x^4 - \sqrt{2}x^2 - \pi x + 9i$. Es gibt keine Lösungsformel, die weiterhelfen kann und auch das Newton-Verfahren oder das Regula-falsi-Verfahren ist nicht anwendbar. Mathematica spuckt das Ergebnis auf Knopfdruck aus. Die numerischen Ergebnisse (es sind fünf echt komplexe Zahlen) sind in Abbildung 8 ersichtlich.

```
In[4]:= NSolve[4 I * x^5 + 3 x^4 - Sqrt[2] x^2 - Pi x + 9 I == 0, x, WorkingPrecision → 3]

Out[4]= {{x → -1.144 + 0.188 i}, {x → -0.425 - 1.030 i},
         {x → -0.225 + 1.278 i}, {x → 0.742 + 0.857 i}, {x → 1.052 - 0.543 i}}
```

Abbildung 8: Lösung von Beispiel 15

Mathematica kann auch exakte Lösungen höherer univariater polynomialer Gleichungen bestimmen.

Beispiel 16. Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^5 - 3x^4 + \frac{23x^3}{7} - \frac{69x^2}{7} - \frac{20x}{7} + \frac{60}{7}$. Die Lösungen (3 reelle und 2 echt komplexe) sind in Abbildung 9 ersichtlich.

```
In[2]:= Solve[x^5 - 3 x^4 + (23 x^3) / 7 - (69 x^2) / 7 - (20 x) / 7 + 60 / 7 == 0, x]
```

$$\text{Out[2]=}\ \left\{\{x \to -2\,i\}, \{x \to 2\,i\}, \{x \to 3\}, \left\{x \to -\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}, \left\{x \to \sqrt{\frac{5}{7}}\right\}\right\}$$

Abbildung 9: Lösung von Beispiel 16

Auch von sehr viel höheren univariaten polynomialen Gleichungen macht Mathematica nicht halt, jedoch kann man nicht jeden beliebigen Grad lösen, da die Rechenleistung des Programms und des Computers begrenzt sind.

Beispiel 17. Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^{30} - x^{27} + x^{22} - x^{17} + x^{15} - x^{11} + x^9 - x^5 + x^3 - x - 99$. Mathematica löst diese Aufgabe numerisch mit Knopfdruck. Die Lösungen (2 reelle, 28 echt komplexe) sind in Abbildung 10 ersichtlich.

```
In[3]:= NSolve[x^30 - x^27 + x^22 - x^17 + x^15 - x^11 + x^9 - x^5 + x^3 - x - 99 == 0,
          x, WorkingPrecision → 3]

Out[3]= {{x → -1.14}, {x → -1.118 - 0.258 i}, {x → -1.118 + 0.258 i}, {x → -1.057 - 0.490 i},
          {x → -1.057 + 0.490 i}, {x → -0.932 - 0.697 i}, {x → -0.932 + 0.697 i}, {x → -0.774 - 0.891 i},
          {x → -0.774 + 0.891 i}, {x → -0.572 - 1.047 i}, {x → -0.572 + 1.047 i},
          {x → -0.420 - 1.128 i}, {x → -0.420 + 1.128 i}, {x → -0.146 - 1.142 i},
          {x → -0.146 + 1.142 i}, {x → 0.110 - 1.151 i}, {x → 0.110 + 1.151 i}, {x → 0.344 - 1.097 i},
          {x → 0.344 + 1.097 i}, {x → 0.577 - 1.005 i}, {x → 0.577 + 1.005 i}, {x → 0.763 - 0.842 i},
          {x → 0.763 + 0.842 i}, {x → 0.947 - 0.652 i}, {x → 0.947 + 0.652 i}, {x → 1.089 - 0.452 i},
          {x → 1.089 + 0.452 i}, {x → 1.165 - 0.238 i}, {x → 1.165 + 0.238 i}, {x → 1.19}}
```

Abbildung 10: Lösung von Beispiel 17

Ist man an den echt komplexen Lösungen nicht interessiert, kann man von Mathematica auch nur die reellen Lösungen anfordern.

Beispiel 18. Gesucht sind die reellen Nullstellen von $f(x) = x^{500} - x^{401} + x^{299} - x^{78} + x^{12} - x^6 + x^2 - 1001$. Die beiden Lösungen sind in Abbildung 11 ersichtlich.

```
In[6]:= NSolve[x^500 - x^401 + x^299 - x^78 + x^12 - x^6 + x^2 - 1001 == 0,
          x, Reals, WorkingPrecision → 3]

Out[6]= {{x → -1.01}, {x → 1.01}}
```

Abbildung 11: Lösung von Beispiel 18

Im Gegensatz zu Mathematica ist *GeoGebra* kostenlos verfügbar (ein open-source-Projekt) und findet heutzutage in Schulen große Anwendung. Dies ist vor allem dadurch erklärt, dass GeoGebra mit Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis eine vielfältige und übersichtliche Nutzung bietet (vgl. [9]). GeoGebra besitzt eine eigene CAS-Software, mit der man univariate polynomiale Gleichungen lösen kann. GeoGebra besitzt den Vorteil, dass das Lösen von Gleichungen sowohl numerisch als auch geometrisch in einer übersichtlichen Darstellung erfolgen kann. In GeoGebra kann man die Nullstellen durch den Befehl *Löse* suchen. Hier werden aber nur die reellen Lösungen erfasst. Möchte man auch die komplexen Lösungen einbeziehen, so muss man den Befehl *KLöse* verwenden. Mit dem Befehl *NLöse* werden numerische Ergebnisse angezeigt.

Beispiel 19. Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x + 2$. In Abbildung 12 sind die Nullstellen durch die CAS-Software angegeben.

```
KLöse[x^5-3x^4+2x^3-7x^2+x+2=0, x]
→ {x = −0.43, x = 0.627, x = 3.04, x = −0.119 + 1.557 ί, x = −0.119 − 1.557 ί}
```

Abbildung 12: Lösung von Beispiel 19

Alternativ kann man die Funktion im Geometrie-Fenster zeichnen und mit der x-Achse schneiden lassen. Allerdings werden dadurch nur die reellen Lösungen dargestellt. Das Ergebnis ist in Abbildung 13 ersichtlich.

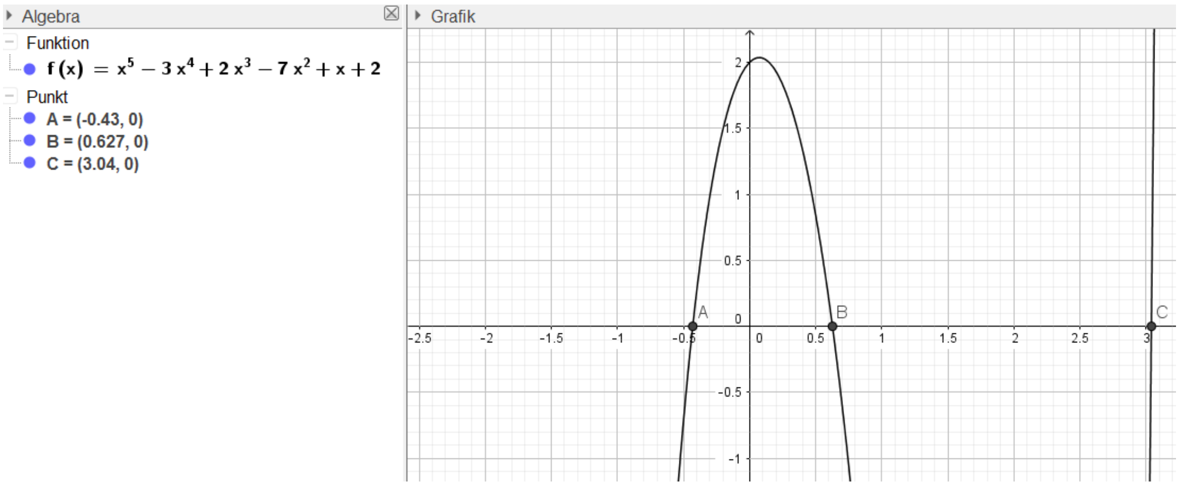

Abbildung 13: Geometrische Lösung von Beispiel 19

GeoGebra kann auch höhere univariate polynomiale Gleichungen lösen, jedoch ist das Programm nicht so leistungsfähig wie Mathematica.

Beispiel 20. Gesucht sind die reellen Nullstellen von $f(x) = x^{401} - x^{200} - x^{99} + x^{33} - x^{11} + x^2 - x + 889$. GeoGebra kann auch diese Aufgabe nach wenigen Augenblicken meistern. Das Ergebnis ist in Abbildung 14 ersichtlich.

Löse[x^401-x^200-x^99+x^33-x^11-x+889=0, x]

$\rightarrow \ \{\mathbf{x = -1.017}\}$

Abbildung 14: Lösung von Beispiel 20

4 Univariate polynomiale Gleichungen im Mathematikunterricht

In den bisherigen Kapiteln wurden univariate polynomiale Gleichungen eingeführt, das nötige Theoriewissen zur Lösbarkeit eben solcher aufgebaut und diverse Lösungsmöglichkeiten herausgearbeitet. In diesem Kapitel soll nun der Frage nachgegangen werden, wie univariate polynomiale Gleichungen thematisch im Mathematikunterricht der allgemein bildenden höheren Schule (AHS) eingebettet sind und wie die Lösung eben solcher bewerkstelligt wird. Zu diesem Zweck werden die beiden Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“ von H.-C. Reichel u. a. für die 5. bis 8. Schulstufe und „Mathematik verstehen“ von G. Malle für die 9. bis 12. Schulstufe analysiert.

4.1 Schulstufe 5 – 1. Klasse

In der 5. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten Grades zu tun. Diese Kapitel sind „Arbeiten mit Variablen“ und „Arbeiten mit Figuren und Körpern“. Bei „Arbeiten mit Variablen“ betrifft dies den Unterpunkt „Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können“. Bei „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ betrifft dies die Unterpunkte „Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren)“ sowie „Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren)“ (vgl. [2], S. 5).

Im Kapitel „Arbeiten mit Variablen“ werden zunächst Gleichungen und Ungleichungen eingeführt. Die Lösung eben solcher wird durch Probieren oder Umformen vorgeschlagen.

Aufgabe 1. Es wird die Gleichung $2 \cdot z + 5 = 15$ zur Lösung vorgestellt. Dann wird sie auch in Worten beschrieben: „Wenn man eine unbekannte Zahl z verdoppelt und dann 5 addiert, so erhält man 15“. Es wird dann versucht die Lösung durch Probieren zu finden. $z = 2$ ist dabei zu klein, denn $2 \cdot 2 + 5 = 9$ und $9 < 15$. Man könnte dann $z = 3$ probieren usw. oder vor dem nächsten Probieren überlegen. Da die Zahl um 6 zu klein war, sollte man für z einen um 3 größeren Wert wählen, da der Wert ja stets mit 2 multipliziert wird. Damit findet man $z = 5$ als Lösung, denn $2 \cdot 5 + 5 = 15$ (vgl. [18], S. 84).

Solche Gleichungen können auch aus Formeln entstehen.

Aufgabe 2. Es gilt

$$\text{Nettolohn} = \text{Bruttolohn} - \text{Abzüge}, \quad \text{kurz:} \quad N = B - A\,.$$

Dies ist eine polynomiale Gleichung ersten Grades in drei Unbestimmten. Sind zwei Unbestimmte festgelegt, so bleibt nur noch eine über. Ist etwa der Nettolohn 1560 € und die Abzüge 850 €, so kann man sich durch Umformen den Bruttolohn ausrechnen. Es ist

$$N = B - A$$

$$1560 = B - 850$$

$$B = 1560 + 850 = 2410\ €$$

(vgl. [18], S. 84).

Aufgabe 3. Gleichungen der Form $a = b + c$ lassen sich auch grafisch darstellen (vgl. [18], S. 85f). Siehe Abbildung 15.

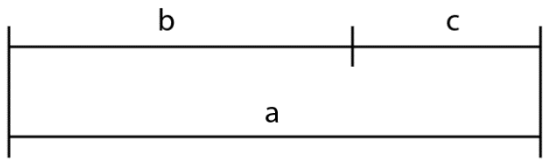

Abbildung 15: Grafische Darstellung von $a = b + c$

Gleichungen können auch aus Textaufgaben entstehen.

Aufgabe 4. „Lisa hat im letzten Monat einen Teil ihres Taschengeldes gespart, denn sie will sich ein Handy kaufen. Wenn sie 3-mal so viel Geld hätte, müsste noch ein Euro dazugegeben werden, damit sie dasselbe Gerät wie Martin um $40\ €$ kaufen könnte. Wie viel Euro hat Lisa nun eigentlich von ihrem Taschengeld gespart?“ Ausführlich aufgeschrieben entsteht daraus eine univariate polynomiale Gleichung ersten Grades.

3-mal so viel Geld	$3 \cdot x$
1 € dazugeben	$3 \cdot x + 1$
Gerät um 40 € kaufen	$3 \cdot x + 1 = 40$
Gleichung:	$3 \cdot x + 1 = 40$
Lösung:	$x = 13$

(vgl. [18], S. 88).

Im Kapitel „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ treten univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades bei Umfang, Flächen-, und Rauminhalt auf.

Aufgabe 5. „Von einem Rechteck kennt man den Umfang $u = 210\ mm$ und die Seite $a = 81\ mm$. Man soll die Länge der Seite b berechnen.“ Die Formel für den Umfang u eines Rechtecks lautet

$$u = 2 \cdot (a + b)\,.$$

Setzt man die bekannten Werte ein, so folgt

$$210 = 2 \cdot (81 + b)$$

$$b = \frac{210}{2} - 81 = 24\ mm$$

(vgl. [18], S. 221).

Aufgabe 6. „Von einem Rechteck kennt man den Flächeninhalt $A = 1036\ cm^2$ und die Länge der Seite $a = 37\ cm$. Man soll die Länge der Seite b berechnen.“ Die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks lautet

$$A = a \cdot b\,.$$

Setzt man die bekannten Werte ein, so folgt

$$1036 = 37 \cdot b$$

$$b = \frac{1036}{37} = 28\ cm$$

(vgl. [18], S. 230).

Aufgabe 7. „Von einem Quader sind der Rauminhalt $V = 324\ dm^3$ und die Grundfläche $G = 27\ dm^2$ gegeben. Man soll die Höhe des Quaders berechnen.“. Die Formel für den Rauminhalt eines Quaders lautet

$$V = G \cdot h\,.$$

Setzt man die bekannten Werte ein, so folgt

$$324 = 27 \cdot h$$

$$h = \frac{324}{27} = 12\ dm$$

(vgl. [18], S. 261).

4.2 Schulstufe 6 – 2. Klasse

In der 6. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten Grades zu tun. Dies betrifft alle vier Kapitel „Arbeiten mit Variablen“, „Arbeiten mit Modellen, Statistik“, „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ und „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sind . Bei „Arbeiten mit Variablen“ betrifft dies die Unterpunkte „Gleichungen und Formeln aufstellen, insbesondere auch in Sachsituationen“ sowie „unter Verwendung von Umkehroperationen einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen und Formeln umformen“. Bei „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ betrifft dies den Unterpunkt „charakteristische Kennzeichen von indirekten und direkten Proportionalitäten an Beispielen angeben können“. Bei „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ betrifft dies den Unterpunkt „Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen“. Bei „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ betrifft dies die Unterpunkte „Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen“ sowie „Volumina von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgaben“ (vgl. [2], S. 6).

Im Kapitel „Arbeiten mit Variablen“ werden ausgehend vom Wissen der 5. Schulstufe einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten durch Anwendung der entsprechenden Umkehroperation gelöst:

$$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$$
$$x - a = b \Leftrightarrow x = b + a$$
$$x \cdot a = b \Leftrightarrow x = b : a \quad (a \neq 0)$$
$$x : a = b \Leftrightarrow x = b \cdot a \quad (a \neq 0)$$

(vgl. [19], S. 84).

Aufgabe 8. Eine mit einem Plus gekennzeichnete Aufgabe (d. h. schwierige oder umfangreiche Aufgabe) lautet: „Der Wasserspiegel der Nordsee liegt um $8\,m$ höher als der Wasserspiegel des Mittelmeeres. In Österreich sind sämtliche Höhenangaben auf das Mittelmeer bezogen. (a) Gib eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen der Seehöhe bezogen auf das Mittelmeer (m) und der Seehöhe bezogen auf die Nordsee (n) wiedergibt! (b) Welche absolute Seehöhe hätte 1) Wien $171\,m$, 2) der Dachstein $2996\,m$, 3) der Großglockner $3798\,m$, wenn die Höhenangabe auf die Nordsee bezogen wären?“. Der gesuchte Zusammenhang ist

$$n = m - 8\,.$$

Für die einzelnen Seehöhen muss man nur für m einsetzen und es folgt Wien $171 - 8 = 163\,m$, der Dachstein $2\,996 - 8 = 2\,988\,m$ und der Großglockner $3\,798 - 8 = 3\,790\,m$ (vgl. [19], S. 87).

Es werden auch Gleichungen mit mehreren nötigen Rechenoperationen behandelt.

Aufgabe 9. Löse

$$(4 \cdot v + 1) \cdot 4 = 20$$
$$v = \left(\frac{20}{4} - 1\right) : 4 = 1$$

(vgl. [19], S. 91).

Schließlich sollen auch Gleichungen aus Textaufgabe konstruiert und gelöst werden.

Aufgabe 10. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „In der $2B$-Klasse ist die Anzahl der Kinder, die auf die Mathematikschularbeit die Note 1 bekommen haben, um 1 größer als die Anzahl der Kinder, die auf die letzte Englischschularbeit die Note 1 bekommen haben. Zusammen haben 17 Kinder die Note 1 auf eine der beiden Schularbeiten bekommen. (Kein Kind hat auf beide Schularbeiten die Note $1.$) Wie viele Kinder haben auf die Mathematikschularbeit und wie viele auf die Englischschularbeit die Note 1 bekommen?“ Aus der Angabe folgt das lineare Gleichungssystem (mit m ... Anzahl der Kinder mit Note 1 auf die Mathematikschularbeit und e ... Anzahl der Kinder mit Note 1 auf die Englischschularbeit)

$$m = e + 1$$

$$m + e = 17\,.$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so folgt

$$2e + 1 = 17\,.$$

Dies ist nun eine univariate polynomiale Gleichung ersten Grades, die Lösung ist $e = 8$ und daraus folgt $m = 9$ (vgl. [19], S. 95).

Im Kapitel „Modelle, Statistik“ kommen univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades im Rahmen der direkten und indirekten Proportionalitäten vor.

Aufgabe 11. Eine Aufgabe zu direkten Proportionalitäten lautet „In einer Fabrik werden in einer Woche mit 5 Arbeitstagen 7 250 Paar Schuhe erzeugt. (a) Wie viele Paar Schuhe können in der Fabrik in einem Monat mit 22 Arbeitstagen produziert werden? (b) Wie viele Arbeitstage werden für einen Großauftrag von 40 000 Paar Schuhen gebraucht?“ Zur Lösung der Aufgabenstellung rechnet man die Anzahl der Paar Schuhe pro Arbeitstag. Diese sind $7\,250 : 5 = 1\,450$. Mit a ... Anzahl der Arbeitstage und b ... Anzahl der Paar Schuhe gilt daher folgender Zusammenhang

$$1\,450 \cdot a = b\,.$$

Für (a) setzt man $a = 22$, woraus sofort $b = 31\,900$ folgt und für (b) setzt man $b = 40\,000$, woraus nach Anwendung der Umkehroperation $a \approx 27{,}59$, also 28 Arbeitstage, folgt (vgl. [19], S. 104).

Aufgabe 12. Eine Aufgabe zu indirekten Proportionalitäten lautet „Mit der in einem Behälter befindlichen Apfelsaftmenge kann man 126 Flaschen zu je $0{,}75\,l$ füllen. Berechne, wie viele Flaschen zu je $0{,}5\,l$ man mit dieser Menge füllen könnte!“. Zur Lösung der Aufgabenstellung rechnet man die Anzahl der Liter für eine Flasche. Diese sind $0{,}75 \cdot 126 = 94{,}5\,l$. Mit a ... Anzahl der Flaschen und b ... Anzahl der Liter pro Flasche gilt daher folgender Zusammenhang

$$a \cdot b = 94{,}5\,.$$

Für $b = 0{,}5\,l$ folgt daraus nach Anwendung der Umkehroperation $a = 189$ Flaschen (vgl. [19], S. 108).

Als Anwendungsaufgabe für Proportionalitäten wird die Formel für die mittlere Geschwindigkeit, $v \cdot t = s$, betrachtet.

Aufgabe 13. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „Ein Tennisspieler „serviert“ mit rund $200\,km/h$. Der Ball schlägt nach $20\,m$ Flugbahn auf dem Boden auf. Wie viel Sekunden ist er bis dahin in der Luft?“. Zunächst muss die Geschwindigkeit in eine passende Einheit umgerechnet werden:

$$200\ \frac{km}{h} = \frac{500}{9}\ \frac{m}{s}\,.$$

Eingesetzt in $v \cdot t = s$ ergibt

$$\frac{500}{9} \cdot t = 20\,,$$

woraus nach Anwendung der Umkehroperation $t = 0{,}36\ s$ folgt (vgl. [19], S. 111).

Im Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ kommen univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades im Zusammenhang mit der Prozentrechnung vor.

Aufgabe 14. „Familie Schmied möchte eine Haushaltsversicherung abschließen. Versicherung A verrechnet bei einer Versicherungssumme von $65\,000$ € einen Betrag von $162{,}50$ €. Versicherung B verrechnet bei einer Versicherungssumme von $40\,000$ € einen Betrag von 76 €. Welche Versicherung ist günstiger?“ In dieser Aufgabe ist also der Prozentsatz gesucht. Es ist

$$A = G \cdot \frac{p}{100}$$

mit A ... Anteil, G ... Grundwert und p ... Prozentsatz. Setzt man die Angabe ein, so folgt

$$162{,}50 = 65000 \cdot \frac{p_1}{100} \Longrightarrow p_1 = 0{,}25\ \% \quad \text{und}$$

$$76 = 40000 \cdot \frac{p_2}{100} \Longrightarrow p_2 = 0{,}19\ \%\,.$$

Bei Versicherung B dauert es länger bis die eingezahlten Beiträge die Versicherungssumme erreichen und ist daher aus den in der Angabe vermerkten Informationen zu bevorzugen (vgl. [19], S. 133).

In anderen Aufgaben ist der Grundwert gesucht.

Aufgabe 15. „Ein neuer, nicht gebrauchter Motor wird nach einem Jahr mit einem Verlust von 15 % des Anschaffungspreises um $637{,}50$ € verkauft. Wie hoch war der Anschaffungspreis?“ Eingesetzt ergibt das

$$637{,}50 = G \cdot \frac{85}{100} \Longrightarrow G = 750\ €$$

(vgl. [19], S. 135)

Im Kapitel „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ treten univariate polynomiale Gleichungen erstes Grades wieder im Zusammenhang mit Flächen- und Rauminhalten auf.

Aufgabe 16. „Ein rechtwinkliges Dreieck hat den gegebenen Flächeninhalt A. Die Länge einer Kathete ist bekannt. Berechne die Länge der zweiten Kathete!“. Zum Beispiel $A = 108\ mm^2$ und $a = 27\ mm$. Die Formel für den Flächeninhalt A eines rechtwinkligen Dreiecks ist

$$A = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Eingesetzt folgt damit

$$108 = \frac{27 \cdot b}{2}$$

und damit $b = 8\ mm$ (vgl. [19], S. 223).

Aufgabe 17. „Ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche ($a = 5\ cm$) hat $100\ cm^3$ Volumen. Berechne die Höhe des Prismas!“ Die Formel für den Rauminhalt V eines Prismas lautet

$$V = G \cdot h\,.$$

Die Grundfläche G ist

$$G = a \cdot a = 5 \cdot 5 = 25\ cm^2\,.$$

Damit folgt

$$100 = 25 \cdot h$$

und somit $h = 4\ cm$ (vgl. [19], S. 262).

4.3 Schulstufe 7 – 3. Klasse

In der 8. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten Grades zu tun. Außerdem werden durch den Lehrsatz des Pythagoras auch einfache univariate polynomiale Gleichungen zweiten Grades durch Aufsuchen von Quadratwurzeln behandelt. Die betroffenen Kapitel sind „Arbeiten mit Variablen“, „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ und „Arbeiten mit Figuren und Körpern“. Bei „Arbeiten mit Variablen“ betrifft dies die Unterpunkte „Aufgaben aus Anwendungsbereichen und aus der Geometrie durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können“ sowie „Lösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten“. Bei „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ betrifft dies den Unterpunkt „lineare Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können (zB Zinssätze)“. Bei „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ betrifft dies die Unterpunkte „Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken begründen und damit Flächeninhalte berechnen können“, „Umkehraufgaben lösen können“, „Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können“ sowie „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können“ (vgl. [2], S. 6f).

Auch in der dritten Klasse werden im Kapitel „Arbeiten mit Variablen“ univariate polynomiale

Gleichungen ersten Grades gelöst. Es wird nun verstärkt auf Äquivalenzumformungen einer Gleichung eingegangen und die Gleichungen sind ein bisschen komplizierter.

Aufgabe 18. Berechne die Unbekannte aus

$$3(2x-8)-2(4-3x)=20x$$
$$6x-24-8+6x=20x$$
$$12x-32=20x$$
$$-32=8x$$
$$x=-4$$

(vgl. [20], S. 102).

Durch Kenntnisse der Potenzen in der 3. Klasse können auch diese ins Spiel gebracht werden, jedoch fallen die Terme höherer Potenzen stets weg, da es laut Lehrplan nur um lineare Gleichungen gehen soll.

Aufgabe 19. Berechne die Unbekannte aus

$$(4-3z)^2-(5z^2+7)=(2z+3)^2$$
$$16-24z+9z^2-5z^2-7=4z^2+12z+9$$
$$4z^2-24z+9=4z^2+12z+9$$
$$0=36z$$
$$z=0$$

(vgl. [20], S. 102).

Schließlich werden Gleichungen auch wieder aus Textaufgaben konstruiert und gelöst, nur sind auch diese einen Tick schwieriger.

Aufgabe 20. „Eine 20 cm hohe Kerze brennt in einer Stunde 1 cm nieder. Eine dickere, 16 cm hohe Kerze, brennt in einer Stunde 5 mm nieder. Beide Kerzen werden zur gleichen Zeit angezündet. Nach welcher Zeit sind die Kerzen gleich hoch?“. Mit h ... Anzahl der vergangenen Stunden ist die gesuchte Gleichung

$$20-h=16-\frac{h}{2}$$
$$4=\frac{h}{2}$$
$$h=8\text{ Stunden}$$

(vgl. [20], S. 108).

Aufgabe 21. Eine mit einem Plus gekennzeichnete Aufgabe aus der Geometrie lautet: „In einem Rechteck ist die Breite um 3 cm kürzer als die Länge. Vergrößert man die Länge um 2 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks um $10\ cm^2$ größer als der des ersten Rechtecks. Wie groß sind die Seitenlängen des ersten und des zweiten Rechtecks?“. Es sei l ... Länge des ersten Rechtecks und b ... Länge des ersten Rechtecks. Aus der Angabe folgt nun

$$l = b + 3 \quad \text{und} \quad (l + 2) \cdot b = l \cdot b + 10\,.$$

Setzt man die erste in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&(l + 2) \cdot (l - 3) = l \cdot (l - 3) + 10\\
&l^2 - l - 6 = l^2 - 3l + 10\\
&2l = 16\\
&l = 8\ cm\,,
\end{aligned}$$

woraus $b = 5\ cm$ folgt. Für das zweite Rechteck ist die Länge dann $10\ cm$ und die Breite ebenfalls $5\ cm$ (vgl. [20], S. 107).

Univariate polynomiale Gleichungen erster Ordnung kommen auch bei Verhältnisgleichungen vor.

Aufgabe 22. „Eine Karte ist im Maßstab $1 : 1\,000$ gezeichnet. 1) Welche Länge in der Wirklichkeit entspricht einer Länge von $3\ cm$ im Plan? 2) Welche Länge im Plan entspricht einer Länge von $500\ m$ in der Wirklichkeit?“. Die Lösung zu 1) lautet

$$\frac{1}{1\,000} = \frac{3}{x} \Longrightarrow \frac{1\,000}{1} = \frac{x}{3} \Longrightarrow x = 3\,000\ cm = 30\ m\,.$$

Die Lösung zu 2) lautet

$$\frac{1}{1\,000} = \frac{x}{50\,000} \Longrightarrow x = 50\ cm$$

(vgl. [20], S. 121).

Verhältnisgleichungen lassen sich auch aus Textaufgaben konstruieren und lösen.

Aufgabe 23. „In einer Kiste sind $3\,000$ Glühbirnen. 100 Glühbirnen werden zufällig herausgenommen und getestet. 5 davon sind defekt. Wie viele defekte Glühbirnen sind vermutlich in der Kiste?“ Die zugehörige Verhältnisgleichung lautet

$$\frac{5}{100} = \frac{x}{3\,000} \Longrightarrow x = 150$$

(vgl. [20], S. 125).

Auch direkte und indirekte Proportionen werden in der 3. Klasse wieder behandelt und diesmal die allgemeinen Formeln eingeführt.

Aufgabe 24. „Sabine möchte für amerikanische Freunde einen Apfelstrudel backen. Wenn sie kleine Äpfel mit durchschnittlich $75\ g$ verwendet, braucht sie 10 Stück. Ihre Mutter rät ihr: „Nimm größere Äpfel, das ist praktischer!“ und gibt ihr welche mit durchschnittlich $125\ g$. Wie viele der großen Äpfel braucht Sabine?“ Da 10 Äpfel zu je $75\ g$ benötigt werden, braucht man insgesamt $10 \cdot 75 = 750\ g$ Apfelmasse. Mit n ... Anzahl der Äpfel und m ... durchschnittliche Masse eines Apfels folgt der Zusammenhang

$$m \cdot n = 750\,.$$

Für $m = 125\ g$ folgt $n = 6$ (vgl. [20], S. 132).

Im Kapitel „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ wird die Prozentrechnung wiederholt und ausgehend davon Mehrwertsteuer, Preisgestaltung und Zinsenrechnung behandelt.

Aufgabe 25. „Eine Ware“ kostet inkl. MWSt. $52{,}80$ €. Wie viel Euro beträgt 1) die Mehrwertsteuer, 2) der Gesamtpreis der Ware exkl. MWSt.?“. Setzt man in die Prozentformel ein, so folgt

$$52{,}80 = G \cdot \frac{120}{100} \Rightarrow G = 44\ €\,,$$

was die Antwort zu 2) darstellt. Die MWSt. beträgt demnach $52{,}80 - 44 = 8{,}8$ € (vgl. [20], S. 139).

Aufgabe 26. „Ein Einkommen von 1 075 € wird auf 1 139,50 € erhöht. Wie viel Prozent Erhöhung sind das?“. In die Prozentformel eingesetzt ergibt

$$1\,139{,}50 = 1\,075 \cdot \frac{p}{100} \Rightarrow p = 106\,,$$

also 6 % Erhöhung (vgl. [20], S. 142).

Aufgabe 27. „Welches Kapital bringt bei 4 % p. a. Verzinsung in 1 Jahr ungefähr 100 € Zinsen?“. Die Zinsformel mit Z ... Zinsen, K_0 ... Kapital und p ... Zinssatz lautet

$$Z = K_0 \cdot \frac{p}{100}\,.$$

Eingesetzt ergibt das

$$100 = K_0 \cdot \frac{4}{100} \Rightarrow K_0 = 2\,500\ €$$

(vgl. [20], S. 147).

Zinsen kann man auch für Teile eines Jahres berechnen.

Aufgabe 28. „In wie viel Tagen bringen $21\,000$ € bei 3,5 % p. a. Verzinsung die Zinsen $306{,}25$ €?“. Nun gilt (t ... Anzahl der verzinsten Tage)

$$Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}.$$

Setzt man ein, so folgt

$$306{,}25 = 21\,000 \cdot \frac{3{,}5}{100} \cdot \frac{t}{360} \Longrightarrow t = 150 \text{ Tage}$$

(vgl. [20], S. 147).

Aufgabe 29. „Welches Kapital bringt bei 4,25 % p. a. vereinbarter Verzinsung in einem Jahr ungefähr 525 € tatsächlich anfallende Zinsen?“. Bei dieser Aufgabe wird berücksichtigt, dass 25 % der Zinsen als Kapitalertragssteuer (KEST) dem Staat überwiesen werden müssen. Für den Nettoprozentsatz gilt also

$$p_{netto} = p \cdot 0{,}75 = 4{,}25 \cdot 0{,}75 = 3{,}1875\,\%\,.$$

Für die tatsächlich anfallenden Zinsen gilt daher

$$Z_{netto} = K_0 \cdot \frac{p_{netto}}{100}$$

$$525 = K_0 \cdot \frac{3{,}1875}{100} \Longrightarrow K_0 \approx 16\,471\ €$$

(vgl. [20], S. 150).

Zur Zinsenrechnung gehört auch die Zinseszinsrechnung.

Aufgabe 30. „Wie viel Euro betrug ein Kapital K_0, das zu einem vereinbarten Zinssatz von 5 % p. a. angelegt wurde und nach 2 Jahren einen Guthabenstand von 2 518,79 € erreicht hat?“. Zunächst muss die KEST abgezogen werden:

$$p_{netto} = p \cdot 0{,}75 = 5 \cdot 0{,}75 = 3{,}75\,\%\,.$$

Die Formel für den Guthabenstand K_n nach n Jahren lautet

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{netto}}{100}\right)^n.$$

Eingesetzt ergibt das

$$2518{,}79 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{3{,}75}{100}\right)^2 \Longrightarrow K_0 \approx 2\,340\ €$$

(vgl. [20], S. 152).

Ausgehend von der Zinseszinsrechnung werden erste Erfahrungen mit Wachstums- und Zerfallsprozessen gemacht.

Aufgabe 31. „Die Bevölkerungszahl von Wien ist von 2007 bis 2008 von 1,670 $Mio.$ auf 1,679 $Mio.$ gestiegen. 1) Wie groß wird die Bevölkerungszahl Wiens vermutlich im Jahr 2038 sein, wenn man annimmt, dass die jährliche Zunahme der Bevölkerung annähernd konstant bleibt? 2) Um wie viel Prozent ist die Bevölkerungszahl in diesem Zeitraum insgesamt gewachsen?". Von 2007 bis 2008 ist die Bevölkerung um $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ % gewachsen:

$$1{,}679 = 1{,}670 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \implies p \approx 0{,}54\ \%\,.$$

Die allgemeine Wachstums- bzw. Zerfallsprozessformel mit dem Endwert E, dem Anfangswert A und dem Wachstumsfaktor q lautet

$$E = A \cdot q^n\,,$$

wobei hier $q = 1+\frac{p}{100}$ und $n = 2038 - 2007 = 31$ gilt. Damit ist

$$E = 1{,}670 \cdot \left(1+\frac{0{,}54}{100}\right)^{31} \approx 1{,}973\ Mio.$$

Die Bevölkerung ist also um

$$1{,}973 = 1{,}670 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) \implies r \approx 18\ \%$$

gewachsen (vgl. [20], S. 154).

Im Kapitel „Arbeiten mit Figuren und Körpern" treten univariate polynomiale Gleichungen wieder im Zusammenhang mit Flächen- und Rauminhaltsproblemen auf, aber auch im Zusammenhang mit dem Strahlensatz. Mit dem Lehrsatz des Pythagoras kommen zum ersten Mal auch univariate polynomiale Gleichungen zweiten Grades vor.

Aufgabe 32. „Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man jeweils den Flächeninhalt und eine Seitenlänge bzw. eine Höhe. Berechne die zugehörige Höhe bzw. Seitenlänge!" Etwa $A = 1360\ mm^2$ und $a = 68\ mm$. Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms mit einer Seite a und der entsprechenden Höhe h_a ist gegeben durch

$$A = a \cdot h_a\,.$$

Eingesetzt folgt

$$1360 = 68 \cdot h_a \implies h_a = 20\ mm$$

(vgl. [20], S. 184).

Aufgabe 33. „Von einem Dreieck ABC kennt man den Flächeninhalt und die Länge einer Seite bzw. einer Höhe. Berechne die Länge der zugehörigen Höhe bzw. der zugehörigen Seite!" Etwa $A = 432\ cm^2$ und $c = 36\ cm$. Der Flächeninhalt A eines allgemeinen Dreiecks mit einer Seite c und der entsprechenden Höhe h_c ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c\,.$$

Eingesetzt folgt

$$432 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot h_c \implies h_c = 24\ cm$$

(vgl. [20], S. 187).

Aufgabe 34. „Von einem Deltoid kennt man den Flächeninhalt und die Länge einer Diagonale. Wie lang ist die andere Diagonale?“ Etwa $A = 1872\,m^2$ und $e = 39\,m$. Der Flächeninhalt A eines Deltoids mit Diagonalen e und f ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f\,.$$

Eingesetzt folgt

$$1872 = \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot f \Longrightarrow f = 96\,m$$

(vgl. [20], S. 192).

Aufgabe 35. „Niklas baut ein Vogelhäuschen mit trapezförmiger Vorderseite. Er hat aber leider einen Fleck auf der Anleitung und kann nur noch erkennen, dass die Vorderseite oben 5 cm, unten $15\,cm$ breit ist und einen Flächeninhalt von $150\,cm^2$ haben soll. Wie hoch soll die Vorderseite sein?“ Der Flächeninhalt A eines Trapezes mit den parallelen Kanten a und c sowie der Höhe h ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h\,.$$

Eingesetzt folgt

$$150 = \frac{1}{2} \cdot (5 + 15) \cdot h \Longrightarrow h = 15\,cm$$

(vgl. [20], S. 195).

Aufgabe 36. Zum Strahlensatz findet sich folgende Aufgabe: „Teile die Strecke AB im angegebene Verhältnis mit $\overline{AB} = 8\,cm$ und $4 : 7$. Es muss also ein Teilungspunkt T gefunden werden, für den gilt

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{4}{7}$$

und außerdem ist $\overline{AT} + \overline{TB} = 8$. Setzt man diese Bedingung oben ein, so folgt

$$\begin{aligned} &7 \cdot (8 - \overline{TB}) = 4 \cdot \overline{TB} \\ &56 - 7 \cdot \overline{TB} = 4 \cdot \overline{TB} \\ &56 = 11 \cdot \overline{TB} \\ &\overline{TB} = \frac{56}{11} = 5,\overline{09}\,cm \end{aligned}$$

und damit $AT = \frac{32}{11} = 2,\overline{90}\,cm$ (vgl. [20], S. 210).

Aufgabe 37. Eine mit einem Plus gekennzeichnete Aufgabe zum Kapitel der Ähnlichkeit lautet:

„Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Längen der beiden Katheten. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks verhält sich zum Flächeninhalt eines ähnlichen Dreiecks wie $1 : 25$. 1) Berechne die Längen der Kathete des ähnlichen Dreiecks! 2) Berechne die Flächeninhalte der beiden ähnlichen Dreiecke!“. Es ist $a = 2{,}4\ cm$ und $b = 5{,}1\ cm$. Der Flächeninhalt A_1 vom angegebenen Dreieck ist

$$A_1 = a \cdot b = 2{,}4 \cdot 5{,}1 = 12{,}24\ cm^2 .$$

Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke stehen im Verhältnis $1 : 25$, also

$$\frac{1}{25} = \frac{12{,}24}{A_2} \Longrightarrow A_2 = 306\ cm^2 .$$

Wenn die Flächeninhalte im Verhältnis $1 : 25 = 1 : 5^2$ stehen, so stehen die entsprechenden Katheten im Verhältnis $1 : 5$. Es ist daher

$$\frac{1}{5} = \frac{2{,}4}{a_2} \Longrightarrow a_2 = 12\ cm \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{5{,}1}{b_2} \Longrightarrow b_2 = 25{,}5\ cm$$

(vgl. [20], S. 213).

Mit dem Lehrsatz des Pythagoras kommen zum ersten Mal auch univariate polynomiale Gleichungen zweiten Grades vor.

Aufgabe 38. „Eine s Meter lange Leiter wird an eine lotrechte Wand gelehnt. Ihr unteres Ende hat von der Wand r Meter Abstand. Bis zu welcher Höhe h reicht die Leiter?“ Mit $s = 7{,}4\ m$ und $r = 2{,}4\ m$ folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$s^2 = h^2 + r^2 ,$$

dass

$$7{,}4^2 = h^2 + 2{,}4^2 \Longrightarrow h = \pm\sqrt{7{,}4^2 - 2{,}4^2} = \pm 7\ m .$$

Nur die positive Lösung macht Sinn (vgl. [20], S. 229).

Aufgabe 39. „Das gleichschenklige Giebeldreieck einer Hausfront hat eine $8{,}4\ m$ lange Basis. Die schrägen Kanten sind jeweils $5{,}8\ m$ lang. Wie groß ist der Flächeninhalt des Giebeldreiecks?“. Aus dem Satz des Pythagoras lässt sich die Höhe h_c auf die Basiskante c bestimmen, wobei a die Länge der schrägen Kanten darstellt:

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + {h_c}^2$$

und eingesetzt

$$5{,}8^2 = \left(\frac{8{,}4}{2}\right)^2 + {h_c}^2 \Longrightarrow h_c = \pm 4 ,$$

wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Nun kann der Flächeninhalt A bestimmt werden. Es ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4 \cdot 4 = 16{,}8\ m^2$$

(vgl. [20], S. 232).

Quadratwurzeln kommen auch in dem mit einem Plus gekennzeichneten kurzen Kapitel „Raumdiagonalen“ vor.

Aufgabe 40. „Wie lang sind 1) die Flächendiagonalen, 2) die Raumdiagonalen eines Quaders mit den gegebenen Kantenlängen a, b und c?“. Für $a = 4{,}5\ cm, b = 2{,}4\ cm$ und $c = 10{,}8\ cm$ folgen für die Flächendiagonalen

$$d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = 5{,}1\ cm\,,$$

$$d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 10{,}8^2} = 11{,}7\ cm \text{ und}$$

$$d_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 10{,}8^2} \approx 11{,}06\ cm\,.$$

Für die Raumdiagonalen gilt

$$d_{abc} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2 + 10{,}8^2} \approx 11{,}94\ cm$$

(vgl. [20], S. 241).

Beim Prisma treten univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades im Zusammenhang mit Oberfläche und Volumen auf.

Aufgabe 41. „Die Mantelfläche eines 3 cm hohen, geraden quadratischen Prismas beträgt 18 cm^2. Wie groß ist 1) die Länge der Grundkante, 2) die Oberfläche, 3) das Volumen des Prismas?“. Für den Mantel M, der Grundkante a und der Höhe h des Prismas gilt

$$M = 4 \cdot a \cdot h\,.$$

Setzt man die bekannten Werte ein, so folgt

$$18 = 4 \cdot a \cdot 3 \Longrightarrow a = \frac{3}{2} = 1{,}5\ cm\,.$$

Die Oberfläche O ist dann

$$O = 2 \cdot a^2 + M = 2 \cdot 1{,}5^2 + 18 = 22{,}5\ cm^2\,.$$

Und das Volumen V ist

$$V = a^2 \cdot h = 1{,}5^2 \cdot 3 = 6{,}75\ cm^3$$

(vgl. [20], S. 243).

In der dritten Klasse wird auch die Dichte behandelt.

Aufgabe 42. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „Ein Messstab aus Holz ($\rho = 600\ \frac{kg}{m^3}$) hat als Querschnittsfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 4 cm und 5 cm. Wie lang ist dieser Messstab, wenn er eine Masse von 48 dag hat?“. Zunächst muss der Querschnitt berechnet werden. Der Flächeninhalt A vom rechtwinkligen Dreieck ist mit den Kathetenlängen a, b

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10\ cm^2\ .$$

Aus der Dichte ρ und der Masse m lässt sich das Volumen V bestimmen:

$$\rho = \frac{m}{V}\ .$$

Es ist $\rho = 600\ \frac{kg}{m^3} = 0{,}6 \frac{g}{cm^3}$. Eingesetzt folgt

$$0{,}6 = \frac{480}{V} \Longrightarrow V = 800\ cm^3\ .$$

Die Länge l des Stabes kann nun aus

$$V = A \cdot l$$

bestimmt werden:

$$800 = 10 \cdot l \Longrightarrow l = 80\ cm$$

(vgl. [20], S. 249).

Auch bei der Pyramide kommen univariate polynomiale Gleichungen vor:

Aufgabe 43. „Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide kennt man das Volumen und die Länge der Grundkante a. Berechne die Körperhöhe h!“ Mit $V = 54\ cm^3$ und $a = 6\ cm$ folgt aus der Formel für das Volumen V der Pyramide,

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h\ ,$$

dass

$$54 = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot h$$

und damit $h = 4{,}5\ cm$ (vgl. [20], S. 256).

4.4 Schulstufe 8 – 4. Klasse

In der 8. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten, zweiten und dritten Grades zu tun. Dabei sind die Gleichungen zweiten und dritten Grades einfach, d. h. von der Form $x^2 = a$ bzw. $x^3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und beschränken sich auf das Wurzelziehen. Alle vier Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“, „Arbeiten mit Variablen“, „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ und „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sind betroffen. Bei „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ betrifft dies den Unterpunkt „anhand einfacher Beispiele erkennen, dass es Rechensituationen gibt, die nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen lösbar sind“. Bei „Arbeiten mit Variablen“ betrifft dies die Unterpunkte „Arbeiten mit einfachen Bruchtermen“, „lineare Gleichungen mit zwei Variablen graphisch darstellen und Lösungen angeben können“ sowie „Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können“. Bei „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ betrifft dies den Unterpunkt „Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können“. Bei „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ betrifft dies die Unterpunkte „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können“, „Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können“, „Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können“ sowie „Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für Kugeln erarbeiten und nutzen können“ (vgl. [2], S. 7f).

In 4. Klasse wird zunächst im Kapitel „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ die Zinsenrechnung wiederholt und vertieft um den entsprechenden Punkt im Lehrplan zu erfüllen.

Aufgabe 44. „Karin möchte in 5 Jahren 500 € auf dem Sparbuch haben. Wie viel Euro müsste sie zu Beginn des Jahres bei einem vereinbarten Zinssatz von 3,5 % p. a. in einer Bank ungefähr einlegen?“. Die Verzinsung findet jährlich statt, $n = 5$ Jahre und $K_5 = 500$ €. Der tatsächliche Zinssatz ist wegen der KEST $p_{netto} = p \cdot 0{,}75 = 3{,}5 \cdot 0{,}75 = 2{,}625$ %. Damit folgt

$$K_5 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{netto}}{100}\right)^n$$

$$500 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{2{,}625}{100}\right)^5 ,$$

woraus $K_0 \approx 439$ € folgt (vgl. [21], S. 10).

Dann werden Quadrat- und Kubikwurzeln eingeführt.

Aufgabe 45. „Berechne die Seitenlänge x eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt wie ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 7{,}7\ cm$ und $b = 4{,}4\ cm$ hat!“ Der gesuchte Flächeninhalt A vom rechtwinkligen Dreieck ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 7{,}7 \cdot 4{,}4 = 16{,}94\ cm^2 .$$

Der Flächeninhalt des gesuchten Quadrats ist $A = x^2$. Gesucht ist also die positive Lösung der Gleichung

$$16{,}94 = x^2 \ ,$$

was $x = \sqrt{16{,}94} \approx 4{,}1\ cm$ ergibt (vgl. [21], S. 21).

Aufgabe 46. „Ralph besuchte in den Ferien ein Schaubergwerk in Thüringen (Deutschland) und bewunderte dort große, würfelförmige Steinsalzkristalle. Einer dieser Kristalle wiegt rund $1604\ kg$. Wie groß ist die Kantenlänge dieses Kristalls?“ Zur Lösung der Aufgabe ist die Dichte von Steinsalz nötig: $\rho = 2\ 200 \frac{kg}{m^3}$. Aus $\rho = \frac{m}{V}$ lässt sich nun das Volumen V bestimmen:

$$2\ 200 = \frac{1\ 604}{V} \Longrightarrow V \approx 0{,}729\ m^3 = 729\ dm^3 \ .$$

Mit der Kantenlänge x ergibt sich das Volumen des Würfels als $V = x^3$. Gesucht ist also eine positive Lösung der Gleichung

$$729 = x^3 \ ,$$

was zu $x = 27\ dm$ führt (vgl. [21], S. 26).

Im Rahmen der Terme werden Polynome in einer und auch mehreren Variablen erwähnt, jedoch bleibt es dabei, Terme vereinzufachen, auszumultiplizieren oder zusammenzufassen. Bei Bruchtermen wird jedoch verlangt anzugeben, wann der Nenner gleich null ist. Dies führt auf univariate polynomiale Gleichungen (vgl. [21], S. 34ff).

Aufgabe 47. „Welche Bedingungen müssen für die Variablen erfüllt sein, damit im Nenner der folgenden Terme nicht null steht? Für

$$\frac{5y - 1}{y(y + 7)}$$

ist der Nenner für $y = 0$ oder $y = -7$ gleich null. Für

$$\frac{5z - 4}{z - 3z^2}$$

ist der Nenner für $z = 0$ oder $z = \frac{1}{3}$ gleich null. Für

$$\frac{v(5v + 3)}{(2v + 1)(4v - 3)}$$

ist der Nenner für $v = -\frac{1}{2}$ oder $v = \frac{3}{4}$ gleich null (vgl. [21], S. 44).

Auch die Polynomdivision wird erklärt und an mehreren Beispielen gefestigt.

Aufgabe 48. „Führe die Division durch! Welche Bedingungen müssen die Variablen erfüllen?“ Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet:

$$\begin{array}{llllcl}
(9c^3 & +9c^2 & +8c & +2) & : & (3c^2+2c+2) = 3c+1 \\
\underline{9c^3} & \underline{-6c^2} & \underline{-6c} & & & \\
0 & 3c^2 & 2c & +2 & & \\
 & \underline{-3c^2} & \underline{-2c} & \underline{-2} & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & \text{Rest}
\end{array}$$

Abschließend muss noch überprüft werden, ob es bei der Division durch $3c^2 + 2c + 2$ irgendwelche Einschränkungen gibt. Für $c > 0$ ergeben sich stets positive Werte. Für $c < -1$ dominiert der quadratische Term und die Werte bleiben positiv. Auch für $0 \geq c \geq -1$ ergeben sich nur positive Werte, das Minimum wird bei $c = -\frac{1}{3}$ angenommen. Es gibt daher keine Einschränkungen. Anders gesagt besitzt das Polynom $3c^2 + 2c + 2$ keine reellen Nullstellen (vgl. [21], S. 53).

Es werden wieder lineare Gleichungen in einer Variable gelöst. Dabei wird zunächst auf die zur Lösung nötigen Äquivalenzumformungen eingegangen und auch erklärt, dass eine solche Gleichung gar keine oder unendlich viele Lösungen besitzen kann.

Aufgabe 49. Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
&4y + 5 - y = 6 + 3y - 1 \\
&3y + 5 = 3y + 5 \\
&3y = 3y\,.
\end{aligned}$$

Jede beliebige Zahl ist Lösung der gegebenen Gleichung (vgl. [21], S. 54).

Aufgabe 50. Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
&4z + 5 - z = 6 + 3z - 2 \\
&3z + 5 = 3z + 4 \\
&3z + 1 = 3z\,.
\end{aligned}$$

Es gibt keine Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt (vgl. [21], S. 54).

Aufgabe 51. Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
&(2x - 5)^2 = 4 + (2x + 3)(2x - 3) \\
&4x^2 - 20x + 25 = 4 + 4x^2 - 9 \\
&30 = 20x \\
&x = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(vgl. [21], S. 55).

Aufgabe 52. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „12 % einer Zahl vermehrt um ein

Viertel dieser Zahl sind um 33 größer als 4 % der Zahl. Berechne die Zahl!“. Man sucht also die Lösung der Gleichung

$$\frac{12}{100} \cdot x + \frac{x}{4} - 33 = \frac{4}{100} \cdot x$$
$$12x + 25x - 3300 = 4x$$
$$33x = 3300$$
$$x = 100$$

(vgl. [21], S. 58).

Aufgabe 53. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „Ein Großhändler kauft 500 kg Bananen, davon verderben im Lager 80 kg. Nach Verkauf des Restes um 1,65 € je Kilogramm beträgt der Gewinn 5 %. Berechne den Selbstkostenpreis für 1 kg!“. Mit dem Selbstkostenpreis x für 1 kg sucht man die Lösung der Gleichung

$$(500 - 80) \cdot 1{,}65 = (500 \cdot x) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right),$$

woraus $x = 1{,}32$ € folgt (vgl. [21], S. 60).

Aufgabe 54. „Zur Gründung eines Geschäftes sind $290\,000$ € erforderlich. Von den drei Geschäftsteilhabern A, B, C soll sich B mit $\frac{3}{4}$ des Anteils von A, C mit $\frac{2}{3}$ des Anteils von A beteiligen. Berechne, wie viel Euro jeder der drei Teilhaber bereitstellen soll!“. Ist x ... der Anteil von A, so sucht man die Lösung der Gleichung

$$290\,000 = x + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x$$
$$3\,480\,000 = 12x + 9x + 8x$$
$$3\,480\,000 = 29x$$
$$x = 120\,000\text{ €}.$$

A muss demnach 120 000 €, B 90 000 € und C 80 000 € zahlen (vgl. [21], S. 61).

Aufgabe 55. Diese Aufgabe ist mit einem Plus gekennzeichnet: „Verlängert man die Seiten eines Quadrats um je 3 cm, so vergrößert sich sein Flächeninhalt um 21 cm^2. Berechne die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats!“. Ist a die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats, so sucht man die Lösung der Gleichung

$$(a + 3)^2 - 21 = a^2$$
$$a^2 + 6a + 9 - 21 = a^2$$
$$6a = 12$$
$$a = 2\ cm$$

(vgl. [21], S. 62).

Auch beim Aufstellen einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ muss man eine univariate polynomiale Gleichung ersten Grades lösen.

Aufgabe 56. „Von einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ kennt man einen Punkt $P = (3|1)$ und die Steigung $k = 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?“. Setzt man die bekannten Werte ein, so folgt

$$1 = 2 \cdot 3 + d\,,$$

woraus sich $d = -5$ und damit $y = 2 \cdot x - 5$ ergibt (vgl. [21], S. 93).

Aufgabe 57. „In einem Badebecken sind $9\,000\ l$ Wasser. Das Becken fasst insgesamt $15\,000\ l$. In jeder Minute fließen $300\ l$ Wasser zu. 1) Nach welcher Zeit ist das Becken voll? 2) Stelle eine entsprechende Formel auf!“. Der Sachverhalt wird durch die lineare Funktion

$$y = 300 \cdot x + 9\,000$$

beschrieben, wobei y ... Wasserstand nach x Minuten darstellt. Um 1) zu beantworten setzt man

$$15\,000 = 300 \cdot x + 9\,000\,,$$

woraus $x = 20\ min$ folgt (vgl. [21], S. 95).

Bei der Lösung eines Systems zweier linearer Gleichungen mit zwei Variablen treten ebenfalls univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades auf.

Aufgabe 58. Zu lösen ist

$$I\colon 4x - 3y = 23$$
$$II\colon -2x + y = 1\,.$$

Setzt man $y = 1 + 2x$ aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so folgt

$$4x - 3(1 + 2x) = 23$$
$$4x - 3 - 6x = 23$$
$$2x = -26$$
$$x = -13$$

und damit $y = -25$ (vgl. [21], S. 108).

Solche Gleichungssysteme können auch aus Textaufgaben entstehen.

Aufgabe 59. „Susanne kauft Briefmarken zu 0,55 € und 0,65 €. Wie viele Marken jeder Sorte kauft sie, wenn sie für 26 Marken 15,50 € bezahlt?“. Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$I\colon x + y = 26$$
$$II\colon 0{,}55 \cdot x + 0{,}65 \cdot y = 15{,}50\,.$$

Setzt man $y = 26 - x$ aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$0{,}55 \cdot x + 0{,}65 \cdot (26 - x) = 15{,}50$$
$$0{,}55 \cdot x + 16{,}90 - 0{,}65 \cdot x = 15{,}50$$
$$1{,}40 = 0{,}10 \cdot x$$
$$x = 14$$

und damit $y = 12$ (vgl. [21], S. 111).

In „Das ist Mathematik 4“ werden auch einige Aufgaben zur Anwendung in Naturwissenschaft und Technik gestellt. Diese stehen aber nicht direkt im Lehrplan und können dem Erweiterungsbereich zugeordnet werden.

Aufgabe 60. „Ein Auto ($G = 10\,000\ N$) fährt von Ferleiten aus die Großglockner-Hochalpenstraße zum Fuscher-Törl (rund $1\,200\ m$ Höhenunterschied, etwa $20\ km$ Länge) hinauf. Um wie viel Newton ist die vom Auto aufzuwendende Kraft F kleiner als das Gewicht G?“. Die aufzuwendende Kraft F hängt vom Gewicht G, der Länge l und der Höhe h ab:

$$F = G \cdot \frac{h}{l}.$$

Setzt man ein, so folgt

$$F = 10\,000 \cdot \frac{1\,200}{20\,000} = 600\ N$$

(vgl. [21], S. 115).

Aufgabe 61. „Wie viel Liter destilliertes Wasser muss man 80 Liter 96 %igem Alkohol zusetzen, um 64 %igen Alkohol zu erhalten?“. In den 80 Litern befinden sich $80 \cdot 0{,}96 = 76{,}8$ l Alkohol. Man sucht demnach eine Lösung der Gleichung

$$(80 + y) \cdot 0{,}64 = 76{,}8\,,$$

was zu $y = 40\ l$ führt.

Das Kapitel „Arbeiten in Figuren und Körpern“ wird mit der Wiederholung des Satzes von Pythagoras und Anwendungen im rechtwinkligen Dreieck begonnen.

Aufgabe 62. „Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius r den Zentralabstand z. Berechne die Länge x der Tangentenstrecke für $r = 24\ mm$ und $z = 74\ mm$“. Gemäß dem Satz von Pythagoras gilt

$$z^2 = x^2 + r^2$$
$$74^2 = x^2 + 24^2\,,$$

woraus $x = \pm 70\ mm$ folgt. Jedoch ist nur die positive Lösung sinnvoll (vgl. [21], S. 160).

Der Katheten- und der Höhensatz sowie der Umkreis- und Inkreisradius führen zu univariaten polynomialen Gleichungen ersten oder zweiten Grades.

Aufgabe 63. „Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man $c = 33{,}8\ cm$ und $q = 22{,}8\ cm$. Berechne a, b, p, h, A, r und ρ!“. Der Kathetensatz

$$b^2 = c \cdot q$$

liefert $b = \pm\sqrt{33{,}8 \cdot 22{,}8} \approx \pm 27{,}8\ cm$, wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$a = \pm\sqrt{c^2 - b^2} = \pm\sqrt{33{,}8^2 - (27{,}8\ldots)^2} \approx \pm 19{,}3\ cm\,,$$

wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Aus dem zweiten Kathetensatz

$$a^2 = c \cdot p$$

folgt $p = \frac{a^2}{c} = \frac{(19{,}3\ldots)^2}{33{,}8} = 11\ cm$. Dies hätte man auch aus $c = p + q$ erhalten. Die Höhe h ergibt sich nun aus dem Höhensatz

$$h^2 = p \cdot q = 11 \cdot 22{,}8 = 250{,}8\,,$$

also $h = \pm\sqrt{250{,}8} \approx \pm 15{,}8\ cm$, wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Der Flächeninhalt A folgt aus

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (19{,}3\ldots) \cdot (27{,}8\ldots) \approx 267{,}6\ cm^2\,.$$

Für den Umkreisradius r gilt

$$r = \frac{c}{2} = \frac{33{,}8}{2} = 16{,}9\ cm$$

und für den Inkreisradius ρ gilt

$$\rho = \frac{a \cdot b}{a + b + c} = \frac{(19{,}3\ldots) \cdot (27{,}8\ldots)}{(19{,}3\ldots) + (27{,}8\ldots) + 33{,}8} \approx 6{,}6\ cm$$

(vgl. [21], S. 159).

Der Lehrsatz des Pythagoras kann in ebenen Figuren benutzt werden um fehlende Größen zu bestimmen.

Aufgabe 64. „Von einem Quadrat $ABCD$ ist die Länge der Diagonale $d = 6{,}7\ cm$ gegeben. Berechne 1) die Länge der Seite, 2) den Flächeninhalt, 3) den Radius des Inkreises, 4) den Radius des Umkreises!“. Zwischen Diagonale d und Seite a herrscht folgender Zusammenhang

$$d = a \cdot \sqrt{2}\,.$$

Damit ist $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}7}{\sqrt{2}} \approx 4{,}7\ cm$. Der Flächeninhalt A folgt aus

$$A = a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{6{,}7^2}{2} = 22{,}445\ cm^3\ ,$$

der Radius ρ des Inkreises ist

$$\rho = \frac{a}{2} = \frac{(4{,}7\ \ldots)}{2} = 2{,}4\ cm$$

und der Radius r des Umreises ist

$$r = \frac{d}{2} = \frac{6{,}7}{2} = 3{,}35\ cm$$

(vgl. [21], S. 167).

Aufgabe 65. „Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man die Höhe $h = 64\ mm$. Berechne 1) die Länge der Seite a, 2) den Flächeninhalt A.“. Es gilt

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\ ,$$

woraus $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 64}{\sqrt{3}} \approx 73{,}9\ mm$ folgt. Für den Flächeninhalt A gilt

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{(73{,}9\ \ldots)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 2\ 364{,}8\ mm^2$$

(vgl. [21], S. 169).

Aufgabe 66. „Von einem Rhombus $ABCD$ sind die Längen der Seite $a = 37\ mm$ und einer Diagonale $e = 70\ mm$ gegeben. Berechne 1) die Länge der anderen Diagonale, 2) den Flächeninhalt, 3) den Inkreisradius $\rho = \frac{h}{2}$.“. Die andere Diagonale folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$37^2 = \left(\frac{70}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$f = \pm 2 \cdot \sqrt{37^2 - \left(\frac{70}{2}\right)^2} = \pm 24\ mm\ ,$$

wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Der Flächeninhalt A ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 24 = 840\ mm^2$$

und somit folgt die Höhe h_a aus

$$A = a \cdot h_a$$

$$840 = 37 \cdot h_a\ ,$$

was zu $h_a \approx 22{,}7\ mm$ führt und damit ergibt sich der Inkreisradius ρ als

$$\rho = \frac{h}{2} = \frac{(22{,}7\ \ldots)}{2} \approx 11{,}4\ mm$$

(vgl. [21], S. 173).

Aufgabe 67. „Ein Eisenbahndamm hat eine 9,0 m breite Dammkrone. Die Böschungslänge beträgt jeweils 13 m, die Höhe 5,0 m. Welche Breite hat die Dammsohle? Wie groß ist die Querschnittsfläche des Dammes?".

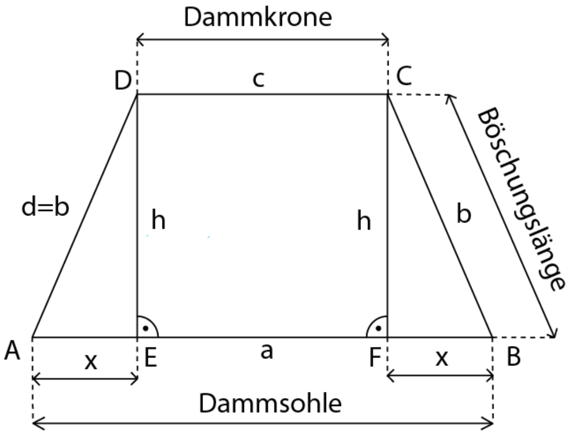

Abbildung 16: Skizze zu Aufgabe 67, angelehnt an *[21]*, S. 174

Die Skizze zur Aufgabe ist in Abbildung 16 ersichtlich. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich

$$x^2 = b^2 - h^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

und damit ist $x = 12\ m$ die gesuchte Lösung. Die gesamte Dammsohle hat demnach eine Länge von

$$c + 2x = 9 + 2 \cdot 12 = 33\ m\,.$$

Die Querschnittsfläche A ergibt sich aus

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} = \frac{(33 + 9) \cdot 5}{2} = 105\ m^2$$

(vgl. [21], S. 174).

Aufgabe 68. „Berechne den Umfang des Deltoids $ABCD$ mit $A = 624\ mm^2, e = 52\ mm$ und $a = 25\ mm$!".

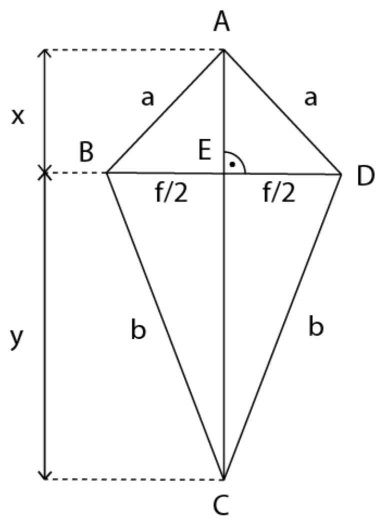

Abbildung 17: Skizze zu Aufgabe 68, angelehnt an *[21]*, S. 177

Die Skizze zur dieser Aufgabe ist in Abbildung 17 ersichtlich. Die Länge der zweiten Diagonale f bekommt man aus

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \ ,$$

woraus $f = \frac{2A}{e} = \frac{2 \cdot 624}{52} = 24\ mm$ folgt. Laut Skizze gilt

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 25^2 - 12^2 = 481 \ ,$$

woraus $x \approx 21{,}9\ mm$ folgt. Damit ist $y = e - x = 52 - (21{,}9\ \ldots) \approx 30{,}1\ mm$ und b folgt aus

$$b^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + (e - x)^2 = 12^2 + (30{,}1\ \ldots)^2 \approx 1048{,}1 \ ,$$

woraus sich $b \approx 32{,}4\ mm$ ergibt. Schließlich ist der Umfang u gleich

$$u = 2a + 2b = 2 \cdot 25 + 2 \cdot (32{,}4\ \ldots) \approx 114{,}7\ mm$$

(vgl. [21], S. 177).

Aufgabe 69. „Von einem Würfel kennt man die Masse $m = 5{,}40\ kg$ und die Dichte $\rho = 2\,500 \frac{kg}{m^3}$ seines Materials. Berechne 1) das Volumen V, 2) die Länge der Seitenkante a, 3) die Länge der Flächendiagonale d_1, 4) die Länge der Raumdiagonale d!“. Das Volumen bestimmt man aus

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{5{,}40}{2\,500} = 2{,}16\ dm^3 \ .$$

Die Seitenlänge a bestimmt man aus

$$a^3 = V = 2{,}16 \ ,$$

woraus $a \approx 1{,}29\ dm$ folgt. Die Flächendiagonale d_1 bestimmt man aus

$$d_1 = a \cdot \sqrt{2} = (1{,}29\ \ldots) \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}83\ dm \ .$$

Die Raumdiagonale d ergibt sich aus

$$d = a \cdot \sqrt{3} = (1{,}29\ \ldots) \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}24\ dm$$

(vgl. [21], S. 182).

Aufgabe 70. „Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide kennt man das Volumen $V = 1{,}2\ m^3$ und die Körperhöhe $h = 1{,}2\ m$. Berechne die 1) Länge der Grundkante, 2) die Mantelfläche, 3) Länge der Seitenkante!“. Die Länge der Grundkante bestimmt man aus

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$1{,}2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 1{,}2 \ ,$$

woraus $a = \sqrt{3} \approx 1{,}73\ m$ folgt. Für die Mantelfläche gilt

$$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1{,}2 \approx 4{,}16\ m^2 \ .$$

Für die Seitenkante s wird zunächst die Flächendiagonale benötigt:

$$d = a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45\ m\,.$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1{,}2^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2{,}94\,,$$

woraus $s \approx 1{,}71\ m$ folgt (vgl. [21], S. 185).

Auch bei Berechnungen am Kreis hat man es mit univariaten polynomialen Gleichungen zu tun.

Aufgabe 71. „Berechne den Radius r des Kreises, wenn der Umfang $u = 24{,}7\ cm$ gegeben ist!“. Der Umfang u eines Kreises ist gegeben durch

$$u = 2r \cdot \pi$$
$$24{,}7 = 2r \cdot \pi\,,$$

was auf $r \approx 3{,}93\ cm$ führt (vgl. [21], S. 194).

Aufgabe 72. „Von einem Kreisbogen kennt man die Länge $b = 53\ mm$ und $\alpha = 65\ °$. Berechne den Radius r!“. Für die Länge b des Kreisbogens gilt

$$b = \frac{r \cdot \alpha \cdot \pi}{180}$$
$$53 = \frac{r \cdot 65 \cdot \pi}{180}\,,$$

woraus $r \approx 47\ mm$ folgt (vgl. [21], S. 197).

Aufgabe 73. „Gegeben ist der Flächeninhalt $A = 425\ cm^2$ einer Kreisfläche. Berechne den Radius r!“. Für den Flächeninhalt A gilt

$$A = r^2 \cdot \pi$$
$$425 = r^2 \cdot \pi\,,$$

woraus $r \approx \pm 11{,}6\ cm$ folgt, wobei nur die positive Lösung Sinn macht (vgl. [21], S. 201).

Aufgabe 74. „Berechne die fehlenden Größen des Kreissektors, wenn $r = 25\ mm$ und $A = 320\ mm^2$!“. Für den Kreissektor gilt

$$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$
$$320 = \frac{25^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}\,,$$

woraus $\alpha \approx 58{,}67\ °$ folgt. Außerdem ist

$$A = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$320 = \frac{b \cdot 25}{2} \ ,$$

woraus $b = 25{,}6\ mm$ folgt (vgl. [21], S. 205).

Aufgabe 75. „Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 4{,}0\ cm$ und $r_2 = 2{,}0\ cm$. Berechne, wie viel Prozent der Kreisfläche A_1 1) auf die Kreisfläche A_2, 2) auf die Kreisringfläche A entfallen!“. Es ist

$$A_1 = {r_1}^2 \cdot \pi = 4{,}0^2 \cdot \pi \approx 50{,}3\ cm^2 \quad \text{und}$$

$$A_2 = {r_2}^2 \cdot \pi = 2{,}0^2 \cdot \pi \approx 12{,}6\ cm^2 \ .$$

Die Fläche A des Kreisringes ist

$$A = ({r_1}^2 - {r_2}^2) \cdot \pi = (4{,}0^2 - 2{,}0^2) \cdot \pi \approx 37{,}7 cm^2 \ .$$

Der Prozentanzahl p_1 für Aufgabe 1) ergibt sich aus

$$(12{,}6 \ldots) = (50{,}3 \ldots) \cdot \frac{p_1}{100},$$

woraus $p_1 = 25\ \%$ folgt. Die Prozentanzahl p_2 für Aufgabe 2) ergibt sich aus

$$(37{,}7 \ldots) = (50{,}3 \ldots) \cdot \frac{p_2}{100},$$

woraus $p_2 = 75\ \%$ folgt (vgl. [21], S. 206).

Auch bei Berechnungen an Zylinder, Kegel und Kugel kommen univariate polynomiale Gleichungen vor.

Aufgabe 76. „Von einem Drehzylinder kennt man $V = 4\,056\pi\ cm^3$ und $h = 24\ cm$. Berechne r und O!“. Für den Drehzylinder gilt

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$4\,056\pi = r^2 \cdot \pi \cdot 24 \ ,$$

woraus $r = \pm 13\ cm$ folgt, wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Die Oberfläche O berechnet sich dann zu

$$O = 2r \cdot \pi \cdot (r + h) = 2 \cdot 13 \cdot \pi \cdot (13 + 24) \approx 3\,022\ cm^2$$

(vgl. [21], S. 216).

Aufgabe 77. „Von einem Drehkegel kennt man das Volumen $V = 1\,183\pi\ cm^3$ und die Höhe $h = 21\ cm$. Berechne 1) den Basiskreisradius, 2) die Länge der Erzeugenden, 3) die Oberfläche des Kegels!“. Den Bahnkreisradius r bekommt man durch

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

$$1\,183\pi = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 21}{3} \ ,$$

woraus $r = \pm 13\ cm$ folgt, wobei nur die positive Lösung Sinn macht. Die Länge s der Erzeugenden ermittelt man aus

$$s^2 = r^2 + h^2 = 13^2 + 21^2\ ,$$

woraus $s \approx 25\ cm$ folgt. Die Oberfläche O ergibt sich schließlich aus

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s) = 13 \cdot \pi \cdot \big(13 + (25,\ldots)\big) \approx 1540\ cm^2$$

(vgl. [21], S. 222).

Aufgabe 78. „Berechne 1) den Radius, 2) die Oberfläche einer Kugel, deren Rauminhalt $V = 82{,}45\ cm^3$ gegeben ist!". Der Radius r folgt aus

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$82{,}45 = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}\ ,$$

woraus $r \approx 2{,}70\ cm$ folgt. Die Oberfläche O folgt aus

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot (2{,}70\ldots)^2 \cdot \pi \approx 91{,}61\ cm^2$$

(vgl. [21], S. 225).

4.5 Schulstufe 9 – 5. Klasse

In der 9. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten und zweiten Grades zu tun. Zum ersten Mal in der AHS werden allgemeine quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ behandelt und mithilfe der Lösungsformeln gelöst. Die betroffenen Kapitel sind „Gleichungen und Gleichungssysteme", „Funktionen" und „Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene". Bei „Gleichungen und Gleichungssysteme" betrifft dies die Unterpunkte „Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen", „Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation" und „Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme". Bei „Funktionen" betrifft dies die Unterpunkte „Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen", „Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB $a/x\,, a/x^2, ax^2 + bx + c$, abschnittsweise definierte Funktionen", und „Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen". Bei „Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene" betrifft dies die Unterpunkte „Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden" und „Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie" (vgl. [3], S. 3f).

In der 5. Klasse werden zum ersten Mal in der AHS allgemeine quadratische Gleichungen behandelt. Zunächst wird auf die Spezialfälle $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$ und $ax^2 + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ eingegangen und dabei der Satz „Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$“ bewiesen.

Aufgabe 79. Löse

$$(3x+7)^2 + (3x-7)^2 = 134$$
$$9x^2 + 42x + 49 + 9x^2 - 42x + 49 = 134$$
$$18x^2 + 98 = 134$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

(vgl. [12], S. 67).

Aufgabe 80. Löse

$$\frac{25}{3}x^2 = \frac{49}{2}x$$
$$50x^2 - 147x = 0$$
$$x(50x - 147) = 0$$
$$x = 0 \ \vee x = \frac{147}{50}$$

(vgl. [12], S. 67).

Anschließend werden die beiden Lösungsformeln für den allgemeinen Fall präsentiert und an einigen Beispielen geübt.

Aufgabe 81. Löse

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$
$$x = \frac{11}{2} + \sqrt{\frac{11^2}{2^2} - 24}$$
$$x = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} \Longrightarrow x = 8 \vee x = 3$$

(vgl. [12], S. 69).

Aufgabe 82. Löse

$$9{,}1x^2 - 8{,}4x - 0{,}7 = 0$$
$$x = \frac{8{,}4 \pm \sqrt{8{,}4^2 + 4 \cdot 9{,}1 \cdot 0{,}7}}{2 \cdot 9{,}1}$$

$$x = \frac{8{,}4 \pm 9{,}8}{18{,}2} \Rightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{13}$$

(vgl. [12], S. 71).

Quadratische Gleichungen ergeben sich auch aus Textaufgaben.

Aufgabe 83. „Eine $60\,cm$ lange Strecke soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden und diese Teilstrecken sollen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $250\,cm^2$ bilden. Wie lang müssen die Teilstrecken gewählt werden?“. Sind a und b die gesuchten Teilstrecken, so übersetzt man die Angabe in

$$a + b = 60 \quad \text{und}$$

$$\frac{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}}{2} = 250\,.$$

Man setzt die erste Gleichung in die zweite Gleichung ein und es folgt

$$a \cdot (60 - a) = 2 \cdot 250$$

$$a^2 - 60a + 500 = 0$$

$$a = 30 \pm \sqrt{30^2 - 500} = 30 \pm 20 \Rightarrow x = 10 \vee x = 50\,.$$

Die beiden Teilstrecken sind also 10 cm und 50 cm lang (vgl. [12], S. 72).

Quadratische Gleichungen ergeben sich auch aus Bruchgleichungen.

Aufgabe 84. Löse

$$\frac{x-1}{3-x} = \frac{1}{x-1} \quad \text{mit } x \neq 3 \wedge x \neq 1$$

$$(x-1)^2 = 3 - x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3 - x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2 \vee x = -1$$

(vgl. [12], S. 73).

Danach wird der Satz von Vieta durchgenommen und bewiesen.

Aufgabe 85. „Von der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kennt man $p = -10$ und $x_1 = 4$. Berechne die zweite Lösung x_2, falls es eine solche gibt!“. Nach dem Satz von Vieta gilt

$$-p = x_1 + x_2$$

$$10 = 4 + x_2\,,$$

woraus $x_2 = 6$ folgt. Die quadratische Gleichung lautet damit

$$(x-4)(x-6) = x^2 - 10x + 24\,.$$

Tatsächlich gilt auch

$$q = x_1 \cdot x_2$$
$$24 = 4 \cdot 6$$

(vgl. [12], S. 74).

Das Kapitel der quadratischen Gleichungen wird mit einem Abschnitt über Parametern abgeschlossen.

Aufgabe 86. Löse die Gleichung $(x+a)^2 - b - 3 = 0$ nach x! a) Wie muss man $b \in \mathbb{R}$ wählen, damit diese Gleichung nur eine Lösung hat? b) Wie muss man die reellen Zahlen a, b wählen, damit die Gleichung die Lösungen 1 und 3 hat?“. Auflösung der Gleichung führt zu

$$(x+a)^2 - b - 3 = 0$$
$$x^2 + 2ax + a^2 - b - 3$$
$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + b + 3}\,.$$

Für $b = -3$ gibt es die Doppellösung $x = -a$. Dies hätte man auch schon in der ersten Zeile sehen können. Die Lösungen 1 und 3 ergeben sich, wenn $a = -2$ und $b = -2$ sind (vgl. [12], S. 79).

Auch in der 5. Klasse kommen univariate polynomiale Gleichungen erster Ordnung im Rahmen linearer Funktionen vor.

Aufgabe 87. „Vom Graphen einer linearen Funktion f kennt man die folgenden beiden Punkte $(2|-3)$ und $(7|7)$. Gib eine Termdarstellung von f an!“. Setzt man $f\colon y = kx + d$ an, so folgt

$$I\colon -3 = 2k + d \quad \text{und}$$
$$II\colon 7 = 7k + d\,.$$

Subtraktion führt auf

$$-3 - 7 = -5k\,,$$

woraus $k = 2$ und damit $d = -7$ folgt. Demnach ist $f\colon y = 2k - 7$ (vgl. [12], S. 151).

Solche Aufgaben können auch in Anwendungssituationen entstehen.

Aufgabe 88. „Eine lineare Kostenfunktion K ist wie folgt gegeben: Werden 150 Einheiten produziert, betragen die Gesamtkosten 525 €; werden 400 Einheiten produziert, so betragen die Gesamtkosten 700 €. Gib eine Termdarstellung der Funktion K an, die x Einheiten die Gesamtkosten $K(x)$ zuordnet! Wie groß sind die fixen Kosten? Wie groß sind die variablen Kosten pro Einheit?“. Setzt man $K: y = kx + d$ an, wobei k ... variable Kosten pro Einheit und d ... fixe Kosten sind, so folgt aus der Angabe

$$I: 525 = 150k + d \quad \text{und}$$
$$II: 700 = 400k + d\,.$$

Subtraktion führt auf

$$-175 = -250k\,,$$

woraus $k = 0{,}7$ € und damit $d = 420$ € folgt. Demnach ist $K: K(x) = 0{,}7x + 420$ (vgl. [12], S. 155).

Univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades treten auch beim Vergleich von linearen Funktionen auf.

Aufgabe 89. „Zwei Flugzeuge fliegen einander aus einer Entfernung von 3 500 km entgegen. Das eine Flugzeug fliegt mit 700 km/h, das andere mit 800 km/h. Ermittle rechnerisch und grafisch, wann und wo die beiden Flugzeuge ungefähr aneinander vorbeifliegen!“. Der grafische Teil wird ausgelassen. Rechnerisch müssen die Zeit-Ort-Funktionen der beiden Flugzeuge aufgestellt und gleichgesetzt werden. Es ist

$$I: s(t) = 700t + 0 \quad \text{und}$$
$$II: s(t) = -800t + 3\,500\,,$$

wobei t ...vergangene Zeit in Stunden darstellt. Subtraktion führt auf

$$0 = 1\,500t - 3\,500\,,$$

woraus $t = \frac{7}{3}h = 2\ h\ 20\ min$ und damit $s(t) \approx 1633\ km$ folgt (vgl. [12], S. 163).

Neben den linearen Funktionen werden in der 5. Klasse auch quadratische Funktionen behandelt.

Aufgabe 90. „Berechne den Scheitel des Graphen von $f: f(x) = x^2 - 2x + 2$! Stelle fest, ob die Parabel nach oben oder nach unten offen ist! Gib an, ob f Nullstellen besitzt oder nicht! Wenn ja, gib die Nullstellen an!“. Gesucht sind Lösungen von

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} \notin \mathbb{R}\,.$$

Der Scheitel des Graphen ist im Punkt

$$S = \left(-\frac{b}{2a}\middle|c - \frac{b^2}{4a}\right) = (1|1)\,.$$

Die Parabel ist nach oben offen, weil der Koeffizient von x^2 positiv ist. Da der Scheitel („der niedrigste Punkt“) oberhalb der x-Achse liegt, ist auch klar, dass es keine Nullstellen geben kann (vgl. [12], S. 175).

Auch bei Modellbildungsaufgaben hat man es mit linearen und quadratischen Funktionen zu tun.

Aufgabe 91. „Ein Verlag gibt ein neues Buch heraus. Zu Beginn werden 2 110 Stück verkauft, ein Jahr später 2 530 Stück und zwei Jahre später 3 520 Stück. Welche Verkaufszahl ist im darauffolgenden Jahr zu erwarten, wenn man 1) ein lineares Modell (basierend auf den Werten zu Beginn und zwei Jahre später), 2) ein quadratisches Modell zugrunde legt?“. Für 1) muss man das Gleichungssystem

$$I{:}\ 2\,110 = 1k + d$$
$$II{:}\ 3\,520 = 3k + d$$

lösen. Subtraktion führt auf

$$-1\,410 = -2k\,,$$

woraus $k = 705$ und $d = 1\,405$ folgt. Damit ist

$$f_{linear}{:}\ f(x) = 705x + 1405$$

und $f(4) = 4\,225$. Für 2) muss man das Gleichungssystem

$$I{:}\ 2\,110 = a + b + c$$
$$II{:}\ 2\,530 = 4a + 2b + c$$
$$III{:}\ 3\,520 = 9a + 4b + c$$

lösen. $I - II$ ergibt

$$IV{:} -420 = -3a - b\,.$$

$I - III$ ergibt

$$V{:} -1\,410 = -8a - 3b\,.$$

$3IV - V$ ergibt $a = -150$ und damit $b = 870$ und $c = 1\,390$. Damit ist

$$f_{quadratisch}{:}\ f(x) = -150x^2 + 870x + 1\,390$$

und $f(4) = 2\,470$ (vgl. [12], S. 178).

Nach dem Kapitel über Funktionen und Modelle werden wie in der 4. Klasse lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen untersucht.

Aufgabe 92. „Eine Computerfirma verschickt 64 Notebooks an ein Gymnasium. Der Firma stehen zwei Paketgrößen zur Verfügung: In einem Paket vom Typ A passen 8 Notebooks, in ein Paket vom Typ B passen 12 Notebooks. Welche Möglichkeiten der Aufteilung in die Pakettypen A und B hat die Firma, wenn nur volle Pakete verschickt werden sollen?“. Beschreibt x ... Anzahl der Pakete vom Typ A und y ... Anzahl der Pakete vom Typ B so folgt aus der Angabe

$$8x + 12y = 64\,.$$

Setzt man $x = 8$, so folgt $8 \cdot 8 + 12y = 64$, woraus sich $y =$ ergibt. Eine Lösung ist damit $(x, y) = (8{,}0)$. Zwei weitere Lösungen sind (2,5) und (5,2) (vgl. [12], S. 197).

Aufgabe 93. „Eine alte chinesische Aufgabe: In einem Stall sind Hühner und Kaninchen. Es sind insgesamt 35 Tiere mit zusammen 94 Beinen. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?“. Ist x ... Anzahl der Hühner im Stall und y ... Anzahl der Kaninchen im Stall, so folgt aus der Angabe

$$I: x + y = 35 \quad \text{und}$$
$$II: 2x + 4y = 94\,.$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so folgt

$$2(35 - y) + 4y = 94$$
$$70 - 2y + 4y = 94$$
$$2y = 24$$
$$y = 12$$

und damit $x = 23$ (vgl. [12], S. 202).

Das letzte Kapitel der 5. Klasse, in dem univariate polynomiale Gleichungen vorkommen, sind Geraden in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 94. „Gegeben ist die Gerade $g: X = (2|1) + t \cdot (2|-1)$. Ermittle die unbekannten Koordinaten der Punkte $A = (7|a_2)$ und $B = (b_1| - 1)$ auf g!“. Für $A \in g$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt $t = \frac{5}{2}$ und damit ist $a_2 = -\frac{3}{2}$. Für $B \in g$ ist

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt $t = 2$ und damit ist $b_1 = 6$ (vgl. [12], S. 249).

Aufgabe 95. „Zeige, dass die Geraden $g: X = (2|-1) + t \cdot (-1|1)$ und $h: X = (-1|2) + u \cdot (1|2)$ einander schneiden und bestimme den Schnittpunkt!“. Die Geraden müssen sich schneiden, weil die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind und die Geraden daher nicht parallel oder ident sein können. Um den Schnittpunkt zu bestimmen, muss man das Gleichungssystem

$$I: 2 - t = -1 + u$$
$$II: -1 + t = 2 + 2u$$

lösen. Aus I folgt $u = 3 - t$ und eingesetzt in II ergibt

$$-3 + t = 6 - 2t$$
$$t = 3$$

und damit ist der Schnittpunkt

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(vgl. [12], S. 154).

Kann man zwei Geraden in Parameterform schneiden, so kann man auch Punkte an Geraden spiegeln.

Aufgabe 96. „Spiegle den Punkt $Q = (1|4)$ an der Geraden $g: X = (2|1) + t \cdot (1|2)$ und gib die Koordinaten des Bildpunktes an!“. Zunächst muss von $\vec{g} = (1|2)$ der Normalvektor $\vec{n} = (2| - 1)$ bestimmt werden. Dann lässt sich eine Hilfsgerade n aufstellen, die normal zu g ist und durch den Punkt Q geht: $n: X = (1|4) + s \cdot (2|-1)$. Nun müssen g und n geschnitten werden.

$$I: 2 + t = 1 + 2s$$
$$II: 1 + 2t = 4 - s\,.$$

I ergibt $t = 2s - 1$ und setzt man dies in II ein, so folgt

$$4s - 2 = 3 - s$$
$$s = 1$$

und damit

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\overrightarrow{QS} = (2| - 1)$ und somit

$$Q' = S + \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(vgl. [12], S. 255).

Geraden können auch in Normalvektorform miteinander geschnitten werden.

Aufgabe 97. „Bestimme die gegenseitige Lage und gegebenenfalls den Schnittpunkt der Geraden $g: X = 2x - 3y = -17$ und $h: X = 5x + 2y = 24$!“. Die beiden Geraden müssen sich schneiden, weil die Normalvektoren nicht parallel sind. Zu lösen ist also

$$I: 2x - 3y = -17$$
$$II: 5x + 2y = 24\,.$$

Aus I folgt $x = \frac{3y-17}{2}$. Eingesetzt in $2II$ ergibt

$$5(3y - 17) + 4y = 48$$
$$15y - 85 + 4y = 48$$
$$y = 7$$

und damit $x = 2$. Der Schnittpunkt ist also $S = (2|7)$ (vgl. [12], S. 260).

Aufgabe 98. „Berechne den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC mit $A = (-8|-1), B = (7|-4), C = (4|7)$!“. Die Seitenvektoren sind

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man zwei der drei Höhenlinien durch Geraden darstellen. h_c geht durch C und hat den Normalvektor $\overrightarrow{AB}$:

$$h_c: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$h_c: 5x - y = 13\,.$$

h_b geht durch B und hat den Normalvektor $\overrightarrow{AC}$:

$$h_b: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$h_b: 3x + 2y = 13\,.$$

Nun müssen h_b und h_c miteinander geschnitten werden. Dies führt auf

$$I: 5x - y = 13$$

$$II: 3x + 2y = 13\,.$$

Setzt man $y = 5x - 13$ aus I in II ein, so folgt

$$3x + 10x - 26 = 13$$

$$x = 3$$

und damit $y = 2$. Der Höhenschnittpunkt hat also die Koordinaten $H = (3|2)$ (vgl. [12], S. 262).

4.6 Schulstufe 10 – 6. Klasse

In der 10. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten und zweiten Grades zu tun. Zum ersten Mal in der AHS werden beliebige ganzzahlige Wurzeln $\sqrt[n]{k}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die betroffenen Kapitel sind „Potenzen, Wurzeln, Logarithmen“, „Folgen“, „Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme“, „Reelle Funktionen“ und „Analytische Geometrie des Raumes“. Bei „Potenzen, Wurzeln, Logarithmen“ betrifft dies die Unterpunkte „Definieren von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten, Definieren von Wurzeln und Logarithmen“ und „Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme“. Bei „Folgen“ betrifft dies den Unterpunkt „Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)“. Bei „Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen“ betrifft dies den Unterpunkt „Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen“. Bei „Reelle Funktionen“ betrifft dies den Unterpunkt „Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und von Beziehungen zwischen Funktionen

(Umkehrfunktionen)". „Bei „Analytische Geometrie des Raumes" betrifft dies die Unterpunkte „Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen", „Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen" und „Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie" (vgl. [3], S. 4f).

In der 6. Klasse werden im Rahmen des Kapitels „Potenzen, Wurzeln und Logarithmen" zum ersten Mal in der AHS beliebige ganzzahlige Wurzeln betrachtet.

Aufgabe 99. „Gib die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^5 = 27$ näherungsweise (mit Hilfe des Taschenrechners) an!". Da die Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt nur quadratische Gleichungen exakt auflösen können, muss hier Technologieeinsatz ran. Der Taschenrechner liefert

$$x = \sqrt[5]{27} \approx 1{,}93$$

(vgl. [13], S. 17).

Univariate polynomiale Gleichungen können auch aus Wurzelgleichungen entstehen.

Aufgabe 100. „Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&2 + \sqrt{a^2 + a + 4} = a + 3 \\
&\sqrt{a^2 + a + 4} = a + 1 \\
&a^2 + a + 4 = a^2 + 2a + 1 \\
&a = 3\,,
\end{aligned}$$

was durch Probe tatsächlich eine Lösung ist. Da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist, muss die vermutete Lösung durch eine Probe verifiziert werden. Man könnte aber auch fordern, dass beide Seiten nicht negativ sind und daher $a \geq -1$ verlangen (vgl. [13], S. 23).

Im Kapitel über reelle Funktionen werden Monotonie, Nullstellen und Extremstellen behandelt, jedoch aufgrund fehlender Differentialrechnung hauptsächlich grafisch.

Aufgabe 101. „Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen, so beträgt seine Höhe h in Metern nach t Sekunden $h(t) = v_0 t - 5t^2$. Wann schlägt der Körper wieder auf dem Boden auf, wann erreicht er seine größte Höhe und wie groß ist diese?". Die Antwort auf den Bodenkontakt lässt sich durch Ermittlung der Nullstellen beantworten. Es ist

$$v_0 t - 5t^2 = t(v_0 - 5t)\,,$$

woraus $t_1 = 0\ s$ und $t_2 = \frac{v_0}{5}\ s$ folgt. Die größte Höhe findet man durch den Scheitelpunkt. Es ist

$$S=\left(-\frac{v_0}{-10}\middle|h\left(\frac{v_0}{10}\right)\right)=\left(\frac{v_0}{10}\middle|\frac{{v_0}^2}{10}-\frac{{v_0}^2}{20}\right)=\left(\frac{v_0}{10}\middle|\frac{{v_0}^2}{20}\right).$$

Der Körper erreicht damit nach $\frac{v_0}{10}$ s seine größte Höhe, die $\frac{{v_0}^2}{20}$ m beträgt (vgl. [13], S. 43).

Durch die Kenntnis von Folgen, Reihen und dem Logarithmus wird in der 6. Klasse noch einmal das Kapitel „Sparen, Renten und Kredite" aufgerollt.

Aufgabe 102. „Welches Kapital muss man zu Jahresbeginn anlegen, um bei einem jährlichen effektiven Zinssatz von $1\ \%$ am Ende des 5. Jahres $5\ 000$ € angespart zu haben?". Es sei K_n der Kapitalstand nach n Jahren und p der effektive Zinssatz. Dann gilt

$$K_n=K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

$$5\ 000=K\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)^5$$

$$K\approx 4\ 757\ €$$

(vgl. [13], S. 143).

Aufgabe 103. „Wie hoch müsste ein Einmalerlag K sein, aus dem man bei $4\ \%$ Jahreszinssatz 25 Jahre lang eine monatliche Rente von $1\ 000$ € beziehen kann, wenn diese Rente erstmals 15 Jahre nach der Veranlagung von K ausbezahlt wird?". Bei den Renten gilt das Äquivalenzprinzip: Zu jedem beliebigen Zeitpunkt muss die Summe der Leistungen des Kunden gleich groß sein wie die Summe der Gegenleistungen der Bank. Die Leistungen des Kunden sind

$$K\cdot 1{,}04^{40}\ ,$$

da das Kapital 40 Jahre lang verzinst wird. Die Leistungen der Bank sind

$$1\ 000\cdot 1{,}04^{\frac{300}{12}}+1\ 000\cdot 1{,}04^{\frac{299}{12}}+\cdots+1\ 000\cdot 1{,}04^{\frac{1}{12}}=1\ 000\cdot 1{,}04^{\frac{1}{12}}\cdot\frac{\left(1{,}04^{\frac{1}{12}}\right)^{300}-1}{1{,}04^{\frac{1}{12}}-1}$$

$$\approx 510\ 514\ €\ .$$

Damit gilt es nun

$$K\cdot 1{,}04^{40}=510\ 514$$

zu lösen, woraus $K\approx 106\ 334$ € folgt (vgl. [13], S. 149).

Aufgabe 104. „Eine Kreditsumme $K=10\ 000$ € soll bei einem Jahreszinssatz von $7\ \%$ durch 60 gleichbleibende Monatsraten getilgt werden, wobei die erste Rate einen Monat nach Kreditauszahlung fällig ist. Ermittle näherungsweise die monatliche Rate R!". Es wird wieder nach dem Äquivalenzprinzip vorgegangen. Dabei ist der näherungsweise Quartalszinssatz q gegeben durch

$$q = \frac{p}{4} \cdot \frac{365}{360} = \frac{7}{4} \cdot \frac{365}{360} \approx 1{,}77\,.$$

Die Leistungen der Bank sind

$$K \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{n}{3}} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{\frac{60}{3}} \approx 14\,215{,}53\,€\,,$$

da der Kredit vierteljährlich verzinst wird. Die Leistungen des Kreditnehmers sind

$$R \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{n-1}{3}} + R \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{n-2}{3}} + \cdots + R \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{1}{3}} + R = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{n}{3}} - 1}{\left(1 + \frac{q}{100}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$$\approx 71{,}70 \cdot R\,.$$

Damit gilt es die Gleichung

$$14\,215{,}53 = 71{,}70 \cdot R$$

zu lösen, was auf $R \approx 198{,}27$ € führt (vgl. [13], S. 154).

In der 6. Klasse wird auf Geraden und Ebenen im Raum eingegangen, diese miteinander geschnitten und Abstände im Raum berechnet. Daraus ergeben sich univariate polynomiale Gleichungen.

Aufgabe 105. „Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden $g{:}\,X = (1|3|-5) + t \cdot (2|1|8)$ und $h{:}\,X = (2|3|5) + u \cdot (1|1|-2)$ und gegebenenfalls den Schnittpunkt!“ Die Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind nicht parallel, weshalb die Geraden entweder windschief und schneidend sind. Setzt man die Geraden gleich, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &I{:}\ 1 + 2t = 2 + u \\ &II{:}\ 3 + t = 3 + u \\ &III{:}\ -5 + 8t = 5 - 2u\,. \end{aligned}$$

Aus II folgt $t = u$ und damit folgt aus I, dass $t = u = 1$. Dies führt in III zu einer wahren Aussage. Der Schnittpunkt ergibt sich damit zu

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(vgl. [13], S. 177f).

Aufgabe 106. „Untersuche, ob der Punkt $X = (11|8|-4)$ in der Ebene durch die Punkt $P = (5|-7|2), Q = (9|-1|-1)$ und $R = (3|-4|2)$ liegt!“. Der Punkt X liegt genau dann in der Ebene E, wenn es reelle Zahlen u und v gibt, sodass $\overrightarrow{PX} = u \cdot \overrightarrow{PQ} + v \cdot \overrightarrow{PR}$ gilt. Mit $\overrightarrow{PX} = (6|15|-6)$, $\overrightarrow{PQ} = (4|6|-3)$ und $\overrightarrow{PR} = (-2|3|0)$ führt dies auf das lineare Gleichungssystem

$$I: 6 = 4u - 2v$$
$$II: 15 = 6u + 3v$$
$$III: -6 = -3u\,.$$

Aus III folgt $u = 2$ und damit aus I, dass $v = 1$. Dies wird in II bestätigt. Es ist somit $\overrightarrow{PX} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ} + 1 \cdot \overrightarrow{PR}$ und damit liegt X in der Ebene E (vgl. [13], S. 179).

Aufgabe 107. „Berechne die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen mit der Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 | 4x - y + z = 8\}$, sofern vorhanden!“. Die Achsen werden im $\mathbb{R}^3$ in Parameterform durch

$$x_{Achse}: X = (0|0|0) + t \cdot (1|0|0)\,,$$
$$y_{Achse}: X = (0|0|0) + u \cdot (0|1|0) \quad \text{und}$$
$$z_{Achse}: X = (0|0|0) + v \cdot (0|0|1)$$

beschrieben. Setzt man $X = (t|0|0) \in E$, so ergibt sich $4t = 8$, d. h. $t = 2$ und der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $X = (2|0|0)$. Setzt man $Y = (0|t|0) \in E$, so ergibt sich $t = -8$ und der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $Y = (0|-8|0)$. Setzt man $Z = (0|0|t) \in E$, so ergibt sich $t = 8$ und der Schnittpunkt mit der z-Achse ist $Z = (0|0|8)$ (vgl. [13], S. 185).

Aufgabe 108. „Bestimme die gegenseitige Lage und gegebenenfalls den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g! $E: 2x - y + 5z = -3$, $g = AB$ mit $A = (0|2|7), B = (1|1|10)$“. Eine Parameterdarstellung von g ist

$$g: X = (0|2|7) + t \cdot (1|-1|3)\,.$$

Da

$$\vec{g} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 18 \neq 0$$

ist, müssen sich E und g schneiden. Da $S \in g$, gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass $S = (0 + t|2 - t|7 + 3t)$. Da auch $S \in E$ gilt

$$2t - (2 - t) + 5(7 + 3t) = -3$$
$$2t - 2 + t + 35 + 15t = -3$$
$$18t = -36$$
$$t = -2\,.$$

Damit ist

$$S = \begin{pmatrix} t \\ 2 - t \\ 7 + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. [13], S. 185).

Aufgabe 109. „Berechne den Abstand der windschiefen Geraden $g: X = (5|-2|8) + s \cdot (1|-1|4)$ und $h: X = (2|3|7) + t \cdot (-2|1|0)$!“. Der erste Schritt besteht darin, eine zu h parallele Ebene E zu bestimmen, die g enthält. Die beiden Richtungsvektoren der Ebene sind daher $\vec{g}$ und $\vec{h}$ und der Normalvektor ergibt sich durch

$$\vec{n} = \vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und weiterhin ist

$$\vec{n} \cdot G = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = -20 + 16 - 8 = -12$$

und damit ist die gesuchte Ebenengleichung

$$E: -4x + 8y - z = -12 \,.$$

Als nächstes benötigt man eine Hilfsgerade k, die senkrecht zur Ebene E ist und die Gerade h schneidet. Eine solche Gerade ist

$$k: X = (2|3|7) + u \cdot (-4|-8| - 1) \,.$$

Nun wird k mit E geschnitten, was den Schnittpunkt $S = (2 - 4u|3 - 8u|7 - u)$ ergibt. u bestimmt man aus $S \in E$ und somit

$$\begin{aligned}
&-4(2 - 4u) - 8(3 - 8u) - (7 - u) = -12 \\
&-8 + 16u - 24 + 64u - 7 + u = -12 \\
&81u = 27 \\
&u = \frac{27}{81} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

was auf

$$S = \left(\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|\frac{20}{3}\right)$$

führt. Schließlich muss man noch $d = |\overrightarrow{SH}|$ berechnen:

$$d = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(7 - \frac{20}{3}\right)^2} = 3 \text{ Längeneinheiten}$$

(vgl. [13], S. 192).

Aufgabe 110. „Ermittle die Lösungsmenge L des folgenden Gleichungssystems!“

$$\begin{aligned}
&I: 2x - y - 2z = 1 \\
&II: x + y - 4z = 8 \\
&III: \ -x + y - z = 3
\end{aligned}$$

$I + II$ ergibt

$$IV: 3x - 6z = 9$$

und $I + III$ ergibt

$$V: x - 3z = 4 \,.$$

$IV - 3V$ ergibt nun

$$3z = -3$$
$$z = -1\,,$$
woraus sofort $x = 1$ und $y = 3$ folgt. Die Lösungsmenge $L = \{(1|3| - 1)\}$ ist also nur ein Punkt (vgl. [13], S. 196).

4.7 Schulstufe 11 – 7. Klasse

In der 11. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten und auch höheren Grades zu tun. Zu Beginn werden allgemein Polynomfunktionen behandelt und neue Lösungsmethoden auch für einen höheren Grad als 2 vorgestellt. Gegen Ende werden dann auch komplexe Zahlen eingeführt und der Fundamentalsatz der Algebra formuliert. Die Cardano'sche Lösungsformel wird am Rande erwähnt. Die betroffenen Kapitel sind „Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen", „Differentialrechnung" und „Nichtlineare analytische Geometrie". Bei „Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen" betrifft dies die Unterpunkte „Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen", „Rechnen mit komplexen Zahlen" und „Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra". Bei „Differentialrechnung" betrifft dies die Unterpunkte „Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen" und „Lösen von Extremwertaufgaben". Bei „Nichtlineare analytische Geometrie" betrifft dies die Unterpunkte „Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen" und „Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten" (vgl. [3], S. 5).

In der 7. Klasse werden zum ersten Mal allgemeine Polynomfunktionen in einer Variablen behandelt und Polynome höheren Grades durch die Methoden „Lösen durch Herausheben", „Lösen durch Zerlegen von Binomen", „Lösen durch Substitution" und „Lösen durch Abspalten eines Linearfaktors" gelöst.

Aufgabe 111. „Löse die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$". Man kann die Gleichung durch Herausheben lösen:
$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$
$$x(x^2 - 6x + 8) = 0\,.$$
Damit sind die Lösungen $x_1 = 0$ sowie $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$ (vgl. [14], S. 7).

Aufgabe 112. „Ermittle alle Lösungen der Gleichung $x(x^4 - 16) = 0$". Die Gleichung kann durch Zerlegen von Binomen gelöst werden. Es ist:
$$x(x^4 - 16) = x(x^2 - 4)(x^2 + 4),$$

was zu den reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$ führt (vgl. [14], S. 7).

Aufgabe 113. „Ermittle alle Lösungen der Gleichung $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$“. Man kann die Gleichung durch Substitution lösen. Setzt man $x^2 = u$, so ergibt sich die Gleichung

$$u^2 - 13u + 36 = 0\,.$$

Daraus folgen die Lösungen $u = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} \Longrightarrow u = 9 \vee u = 4$. Rücksubstitution führt zu $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$ (vgl. [14], S. 7).

Mit der Regel von Horner bzw. der Polynomdivision lassen sich Linearfaktoren abspalten. In diesem Zusammenhang erklären die Autoren, dass man vom einem Polynom n-ten Grades höchstens n Linearfaktoren abspalten kann und daher eine Gleichung vom Grad n höchstens n Lösungen hat. Da zu diesem Zeitpunkt noch keine komplexen Zahlen zur Verfügung stehen, kann der Fundamentalsatz der Algebra noch nicht formuliert werden. In der nächsten Aufgabe soll eine Lösung durch Probieren gefunden werden. Im Schulbuch wird jedoch nicht auf den Satz über das Finden rationaler Nullstellen eingegangen.

Aufgabe 114. „Finde eine Lösung α der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ durch Probieren und ermittle anschließend alle weiteren Lösungen der Gleichung durch Abspalten von $x - \alpha$“. Es ist rasch verifiziert, dass $x = 1$ die Gleichung erfüllt. Nun kann die Regel von Horner oder eine Polynomdivsion durchgeführt werden. Es wird die Polynomdivision gewählt:

$$\begin{array}{ccccccl}
(x^3 & -6x^2 & +11x & -6) & : & (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-x^3} & \underline{+x^2} & & & & \\
0 & -5x^2 & +11x & & & \\
 & \underline{+5x^2} & \underline{-5x} & & & \\
 & 0 & 6x & -6 & & \\
 & & \underline{-6} & \underline{+6} & & \\
 & & 0 & 0 & & \text{Rest}
\end{array}$$

Die anderen beiden Lösungen sind durch Anwenden der Lösungsformel $x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, also $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$ (vgl. [14], S. 9).

Die neu gewonnenen Erkenntnisse sind beim Untersuchen von Polynomfunktionen notwendig. Hier werden zunächst lokale Extremstellen von Polynomfunktionen gesucht.

Aufgabe 115. „Ermittle die Monotonieintervalle und lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon f(x) = x^2 + x - 6$ und skizziere den Graphen der Funktion!“. Auf eine Skizze wird verzichtet. Um die lokalen Extremstellen zu finden, setzt man die Ableitung $f'(x)$ gleich null. Es ist

$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Es handelt sich um eine nach oben offene Parabel, deshalb ist die Funktion in $\left[-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ streng monoton fallend und in $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right]$ streng monoton steigend (vgl. [14], S. 46).

Man kann diese Untersuchung auch in abgeschlossenen Intervallen tätigen.

Aufgabe 116. „Ermittle die Monotoniebereiche sowie die Extremstellen der Funktion $f: f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 53$ im Intervall $[1; 6]$! Gib allenfalls Hoch- und Tiefpunkte an! Skizziere den Graphen von f!“. Auf die Skizze wird verzichtet. Es werden wieder lokale Extremstellen gesucht:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0\,,$$

was zu $x_{1,2} = 4 \pm 1$, also $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$ führt. Beide Stellen liegen im angegebenen Intervall. Da die Funktion für $x \to \infty$ gegen ∞ strebt bzw. für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ strebt, muss bei $x_2 = 3$ ein Hochpunkt und bei $x_1 = 5$ ein Tiefpunkt sein. Damit ist die Funktion in $[1; 3]$ streng monoton steigend, in $[3; 5]$ streng monoton fallend und in $[5; 6]$ streng monoton steigend (vgl. [14], S. 48).

Lokale Extremstellen können auch durch die hinreichende Bedingung, dass die zweite Ableitung positiv oder negativ ist, als Hoch- oder Tiefpunkte charakterisiert werden.

Aufgabe 117. „Ermittle mit Hilfe des obigen Satzes die lokalen Extremstellen der Funktion $f: f(x) = x^3 - 27x$“. Wiederum setzt man

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$$
$$x^2 - 9 = 0\,,$$

was zu $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$ führt. Mit $f''(x) = 6x$ ist nun $f''(3) = 18 > 0$ und damit ist an der Stelle $x_1 = 3$ ein Tiefpunkt. Da $f''(-3) = -18 < 0$, ist an der Stelle $x_2 = -3$ ein Hochpunkt (vgl. [14], S. 51).

Eine ähnliche Bedingung gibt es auch für Wendestellen.

Aufgabe 118. „Ermittle die Krümmungsbereiche und Wendestellen der Funktion $f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$ und gib die Koordinaten der Wendepunkte sowie Gleichungen der Wendetangenten an!“. Damit an der Stelle x_0 eine Wendestelle sein kann, muss zunächst $f''(x_0) = 0$ sein. Es ist

$$f''(x) = 6x - 2 = 0\,,$$

was zu $x = \frac{1}{3}$ führt. Um zu überprüfen, ob $x = \frac{1}{3}$ tatsächlich eine Wendestelle ist, muss $f'''(\frac{1}{3}) \neq 0$ sein. Es ist

$$f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$$

und damit ist $W = (\frac{1}{3} | \frac{52}{27})$ tatsächlich ein Wendepunkt. Die Steigung der Tangente in W ist

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1\,.$$

Der Achsenabstand d lässt sich aus der Bedingung $W \in t_W$ bestimmen:

$$\frac{52}{27} = 1 \cdot \frac{1}{3} + d \Longrightarrow d = \frac{52}{9}\,.$$

Damit ist

$$t_W\colon y = x + \frac{52}{9}\,.$$

Zu den Krümmungsbereichen: Die Funktion ist in $\left[-\infty; \frac{1}{3}\right]$ rechts gekrümmt, da z. B. $f''(0) = -2 < 0$ und in $\left[\frac{1}{3}; \infty\right]$ links gekrümmt, da z. B. $f''(1) = 4 > 0$ (vgl. [14], S. 53).

Das Aufsuchen von Polynomfunktionen führt zu Gleichungssystemen, die wiederum zu univariaten polynomialen Gleichungen erster Ordnung führen können. Hier eignet es sich beispielsweise sehr gut, das Gleichungssystem zwar per Hand aufzustellen, die Lösung aber einem CAS zu überlassen, da Gleichungssysteme bereits in den vorigen Klassen hinreichend behandelt worden sind.

Aufgabe 119. „Der Graph einer Polynomfunktion f mit $f(x) = ax^4 + bx + c$ geht durch den Punkt $P = (1|2)$ und besitzt den Tiefpunkt $T = (\frac{1}{2} | \frac{5}{8})$. Ermittle eine Termdarstellung der Funktion f!".
Die erste Ableitung $f'(x) = 4ax^3 + b$ wird benötigt. Die drei notwendigen Bedingungen sind

$$I\colon P \in \text{Graph}(f) \Longrightarrow 2 = a + b + c$$

$$II\colon T \in \text{Graph}(f) \Longrightarrow \frac{5}{8} = \frac{a}{16} + \frac{b}{2} + c$$

$$III\colon f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{a}{2} + b\,.$$

CAS liefert $a = 2, b = -1$ und $c = 1$ und damit $f\colon f(x) = 2x^4 - x + 1$ (vgl. [14], S. 62).

Das Suchen nach lokalen Extrema tritt auch in Extremwertaufgaben auf.

Aufgabe 120. „Einer Kugel vom Radius R ist ein Kegel von größtem Volumen einzuschreiben. Berechne den Radius r und die Höhe h dieses Kegels". Das Volumen eines Kegels ist

$$V_{Kegel}(r,h) = \frac{r^2\pi h}{3}\,.$$

Als Zusatzbedingung kann man nach Abbildung 18

$$h = R + y \quad \text{mit}$$

$$y^2 = R^2 - r^2$$

fordern.

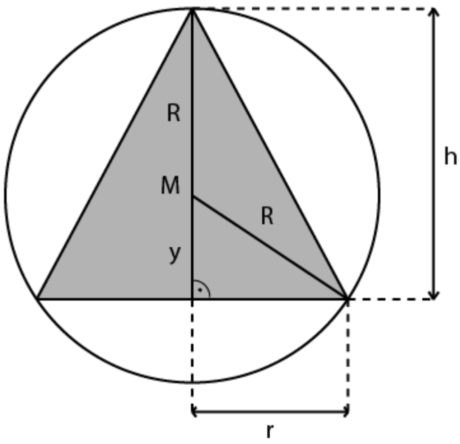

Abbildung 18: Skizze zu Aufgabe 120

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y^2 = h^2 - 2hR + R^2$$

und durch Vergleich mit der zweiten Gleichung folgt damit

$$r^2 = 2hR - h^2 \,.$$

Setzt man dies in V_{Kegel} ein, so ergibt sich

$$V_{Kegel}(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (2h^2R - h^3) \,.$$

Die Ableitung führt zu

$$\begin{aligned} &V'_{Kegel}(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (4hR - 3h^2) = 0 \\ &4hR = 3h^2 \\ &h = \frac{4R}{3} \,, \end{aligned}$$

wobei die Lösung $h = 0$ nicht beachtet wurde. Diese fällt jedoch ohnehin aus. Damit folgt für den Radius r des Kegels

$$r = \sqrt{\frac{8R^2}{3} - \frac{16R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$$

(vgl. [14], S. 71).

In diesem Beispiel sind die Fälle $r = 0$ bzw. $h = 0$ offenbar sinnlos. Jedoch können die „Ränder“ bei Extremwertaufgaben durchaus zu den gewünschten Lösungen führen.

Aufgabe 121. „$100\ m$ eines geraden Zauns stehen schon. Es sollen $200\ m$ so hinzugefügt werden, dass ein möglichst großes rechteckiges Areal entsteht. Wie sind die Maße des Areals zu wählen?“
Nach Abbildung 19 ist der Flächeninhalt des Rechtecks durch

$$A(x, y) = (100 + x) \cdot y$$

gegeben.

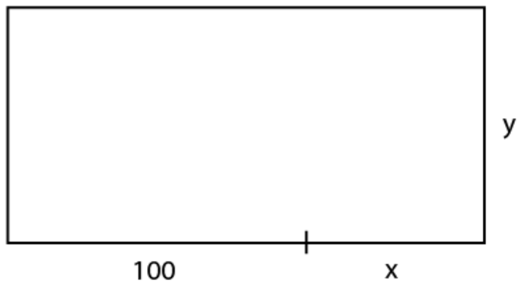

Abbildung 19: Skizze zu Aufgabe 121

Eine Zusatzbedingung ist, dass

$$100 + 2x + 2y = 200$$
$$y = 50 - x\,.$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$A(x) = (100 + x) \cdot (50 - x) = 5000 - 50x - x^2$$

wobei $0 \leq x \leq 50$ gilt, da sonst y negativ sein würde, was bei einer Länge nicht sein kann. Ableiten führt zu

$$A'(x) = -50 - 2x = 0$$
$$x = -25\,.$$

Obwohl $x = -25$ von der Funktion $A(x)$ eine lokale Extremstelle ist, kann sie in der Sachsituation keine Lösung sein, da die Länge negativ wäre. Man müsste $25\,m$ des schon bestehenden Zauns einreißen und ein Quadrat mit der Länge $75\,m$ bauen. Da dies nicht in Frage kommt, müssen die beiden Randstellen untersucht werden. Es ist

$$A(0) = 5000\,m^2 \quad \text{und}$$
$$A(50) = 0\,m^2.$$

Daher ist $x = 0\,m$ und $y = 50\,m$ die gesuchte Lösung (vgl. [14], S. 74).

Neben der Differentialrechnung gibt es in der 7. Klasse auch einen umfassenden Abschnitt über analytische Geometrie. Den Anfang macht Kreis und Kugel.

Aufgabe 122. „Ermittle eine Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M = (-8|3)$, der die erste Achse berührt!“. Die allgemeine Kreisgleichung ist

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2\,,$$

wobei $M = (x_m|y_m)$ ist. Setzt man den Mittelpunkt ein, so folgt

$$(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = r^2\,.$$

Der Kreis soll die erste Achse berühren. Dazu muss er zunächst die erste Achse $y = 0$ schneiden. Dies führt zu

$$(x+8)^2 + (0-3)^2 = r^2$$
$$x^2 + 16x + 64 + 9 = r^2$$
$$x^2 + 16x + 73 - r^2$$
$$x = -8 \pm \sqrt{64 - 73 + r^2}\,.$$

Da der Kreis die erste Achse nur berühren soll, muss der Wert unter der Wurzel gleich Null sein, was direkt auf $r = 3$ führt. Damit ist

$$k: (x+8)^2 + (y-3)^2 = 9$$

(vgl. [14], S. 119).

Aufgabe 123. „Bestimme die gegenseitige Lage des Kreises $k: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 50$ und der gegebenen Geraden $g: x + y = 12$!“. Die drei Möglichkeiten sind Sekante (zwei Schnittpunkte), Tangente (ein Berührpunkt) oder Passante (keine Schnittpunkte). Man setzt $x = 12 - y$ in k ein und erhält

$$(14-y)^2 + (y-2)^2 = 50$$
$$196 - 28y + y^2 + y^2 - 4y + 4 = 50$$
$$y^2 - 16y + 150 = 0$$
$$y = 8 \pm \sqrt{64 - 150}\,.$$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es keine reelle Lösung und damit auch keine reellen Schnittpunkte. Es handelt sich um eine Passante (vgl. [14], S. 123).

Aufgabe 124. „Vom Punkt $Q = (-7|4)$ aus sind Tangenten an den Kreis k zu legen, der den Mittelpunkt $M = (3|-6)$ und den Radius $r = \sqrt{20}$ hat. Berechne die Koordinaten der Berührpunkte!“. Die Kreisgleichung lautet also

$$k: (x-3)^2 + (y+6)^2 = 20\,.$$

Die Tangente von Q aus schneide den Kreis im Punkt $P = (p_1|p_2)$. Es ist also $P \in k$ bzw.

$$(p_1 - 3)^2 + (p_2 + 6)^2 = 20\,.$$

Weiterhin steht die Tangente normal auf den Radius, d. h. $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{QP}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} p_1 - 3 \\ p_2 + 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 + 7 \\ p_2 - 4 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Insgesamt folgt daraus das Gleichungssystem

$$I: {p_1}^2 - 6p_1 + 9 + {p_2}^2 + 12p_2 + 36 = 20$$
$$II: {p_1}^2 + 4p_1 - 21 + {p_2}^2 + 2p_2 - 24 = 0\,.$$

Aus $I - II$ folgt

$$III: -10p_1 + 10p_2 + 70 = 0 \Longrightarrow p_2 = p_1 - 7\,.$$

Setzt man dies in I ein, so erhält man die quadratische Gleichung

$${p_1}^2 + (p_1 - 7)^2 - 6p_1 + 12(p_1 - 7) + 25 = 0$$

$$p_1{}^2 + p_1{}^2 - 14p_1 + 49 - 6p_1 + 12p_1 - 84 + 25 = 0$$
$$p_1{}^2 - 4p_1 - 5 = 0$$
$$p_1 = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$
und damit $p_1 = 5$ und $p_2 = -2$ oder $p_1 = -1$ und $p_2 = -8$ (vgl. [14], S. 128).

Aufgabe 125. „Ermittle Gleichungen der Tangenten an den Kreis $k: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 45$, die den Richtungsvektor $\vec{g} = (1|2)$ haben und gib die Berührpunkte an!“. Da die Tangenten normal auf den Radius stehen, kann man eine Hilfsgerade n aufstellen, die durch M geht und normal auf die Tangenten steht. Der Normalvektor von n ist gerade $\vec{g}$ und damit
$$n: x + 2y = 3\,.$$
Nun muss man n mit k schneiden und setzt $x = 3 - 2y$ in k ein:
$$(3 - 2y + 1)^2 + (y-2)^2 = 45$$
$$4y^2 - 16y + 16 + y^2 - 4y + 4 = 45$$
$$y^2 - 4y - 5 = 0$$
$$y = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$
und damit $y = 5$ und $x = -7$ oder $y = -1$ und $x = 5$, also $P = (5|-1)$ und $P' = (-7|5)$. Mit dem Vektor $\vec{n} = (2|-1)$ können nun die Tangentengleichungen aufgestellt werden und es ist
$$t_1: 2x - y = 11 \quad \text{und}$$
$$t_2: 2x - y = -19$$
(vgl. [14], S. 129).

Aufgabe 126. „Berechne die Schnittpunkte der Kreise $k_1: (x+1)^2 + (y-8)^2 = 65$ und $k_2: (x-9)^2 + (y-3)^2 = 40$!“. Man muss hier also das Gleichungssystem
$$I: x^2 + 2x + y^2 - 16y = 0$$
$$II: x^2 - 18x + y^2 - 6y + 50 = 0$$
lösen. $I - II$ führt auf
$$III: 20x - 10y - 50 = 0 \Longrightarrow y = 2x - 5\,.$$
Eingesetzt in I ergibt
$$x^2 + 2x + 4x^2 - 20x + 25 - 32x + 80 = 0$$
$$x^2 - 10x + 21 = 0$$
$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2\,.$$
Die Schnittpunkte sind also $P = (7|9)$ und $P' = (3|1)$ (vgl. [14], S. 131).

Aufgabe 127. „Ermittle eine Gleichung der Kugel, die den Mittelpunkt $M = (-6|5|1)$ hat und die Ebene $E: 4x - y + 2z = 15$ berührt“. Die allgemeine Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt $M = (x_m|y_m|z_m)$ und Radius r ist

$$k: (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2 \,.$$

Mit $M = (-6|5|1)$ nimmt die Kugel also folgende Gestalt an:

$$k: (x + 6)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = r^2 \,.$$

Die Ebene E ist eine Tangentialebene an die Kugel und daher steht der Normalvektor $\vec{n} = (4|-1|2)$ normal auf den Radius. Damit lässt sich nun eine Hilfsgerade n aufstellen, die den Vektor $\vec{n}$ hat und durch M geht:

$$n: X = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

n wird mit E geschnitten, um den Berührpunkt zu erhalten:

$$4(-6 + 4t) - (5 - t) + 2(1 + 2t) = 15$$

$$-24 + 16t - 5 + t + 2 + 4t = 15$$

$$21t = 42$$

$$t = 2 \,.$$

Damit ergibt sich der Berührpunkt zu

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Radius r ist nun der Abstand $|\overrightarrow{PM}|$:

$$r = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{84} \,.$$

Somit ist

$$k: (x + 6)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = 84$$

(vgl. [14], S. 135).

Im Rahmen der analytischen Geometrie werden auch die Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel untersucht.

Aufgabe 128. „Ermittle eine Gleichung der Ellipse in 1. Hauptlage, die durch $P = (2|2)$ und $Q = (-4|1)$ geht!“. Die allgemeine Form einer Ellipse in 1. Hauptlage ist

$$ell: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \,,$$

wobei a und b die Halbachsen sind. Es gilt nun ein Gleichungssystem zu lösen:

$$P \in ell \Longrightarrow I: 4b^2 + 4a^2 = a^2b^2$$

$$Q \in ell \Longrightarrow II: 16b^2 + a^2 = a^2b^2 \,.$$

$I - II$ führt auf

$$III: -12b^2 + 3a^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = 4b^2 \,.$$

Setzt man III in I ein, so folgt

$$4b^2 + 16b^2 = 4b^4$$

$$b^2 = 5\,,$$

wobei $b \neq 0$ angenommen wurde. Damit ist

$$a^2 = 20$$

und die Ellipse ergibt sich zu

$$ell\colon 5x^2 + 20y^2 = 100$$

$$ell\colon x^2 + 4y^2 = 20$$

(vgl. [14], S. 142).

Aufgabe 129. „Ermittle die Schnittpunkte der Geraden $g\colon 2x + y = 10$ und der Ellipse $ell\colon 4x^2 + 9y^2 = 340$!“. Die beiden Objekte müssen miteinander geschnitten werden. Man setzt $y = 10 - 2x$ in die Ellipse ein und erhält

$$4x^2 + 9(10 - 2x)^2 = 340$$

$$4x^2 + 900 - 360x + 36x^2 = 340$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}\,.$$

Damit ergeben sich die Schnittpunkte zu $P(7|-4)$ und $P' = (2|6)$ (vgl. [14], S. 145).

Aufgabe 130. „Von einer Ellipse in 1. Hauptlage sind eine Gleichung der Tangente $t\colon x + 4y = 18$ sowie der Berührungspunkt $P = (2|p_2)$ gegeben. Ermittle eine Gleichung der Ellipse!“ Die zweite Koordinate von P erhält man durch $P \in t$:

$$2 + 4y = 18$$

$$y = 4$$

und damit $P(2|4)$. Die Tangentengleichung gehorcht der Spaltform

$$b^2 p_1 x + a^2 p_2 y = a^2 b^2$$

$$2b^2 x + 4a^2 y = a^2 b^2$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{4y}{b^2} = 1\,.$$

Auf der anderen Seite ist die Tangentengleichung

$$x + 4y = 18$$

$$\frac{2x}{36} + \frac{4y}{18} = 1\,.$$

Durch Vergleich folgt $a^2 = 36$ und $b^2 = 18$ und damit ergibt sich die Ellipse zu

$$ell\colon \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$$

(vgl. [14], S. 148).

Aufgabe 131. „Ermittle Gleichungen der Tangenten vom Punkt $Q = (12|6)$ aus an die Ellipse $ell: x^2 + 5y^2 = 54$!". Für den Berührpunkt $P = (p_1|p_2)$ lautet die Tangentengleichung

$$t: p_1 x + 5p_2 y = 54\,.$$

Nun lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen:

$$Q \in t \Longrightarrow I: 12p_1 + 30p_2 = 54$$
$$P \in t \Longrightarrow II: {p_1}^2 + 5{p_2}^2 = 54\,.$$

Aus I folgt $p_1 = \frac{9}{2} - \frac{5p_2}{2}$ und eingesetzt in II ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{81}{4} - \frac{45p_2}{2} + \frac{25{p_2}^2}{4} + 5{p_2}^2 = 54\\
&45{p_2}^2 - 90p_2 - 135 = 0\\
&{p_2}^2 - 2p_2 - 3 = 0\\
&p_2 = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2\,.
\end{aligned}$$

Damit sind die Berührpunkte $P = (-3|3)$ und $P' = (7|-1)$ und die Tangentengleichungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
&t_1: -3x + 15y = 54 \quad \text{und}\\
&t_2: 7x - 5y = 54
\end{aligned}$$

(vgl. [14], S. 149).

Aufgabe 132. „Ermittle Gleichungen jener Tangenten an die Ellipse $ell: x^2 + 4y^2 = 116$, die den Richtungsvektor $\vec{g} = (5|-1)$ haben und gib die Berührpunkte an!". Die Tangenten haben die Form

$$t: x + 5y = c\,,$$

wobei noch $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen ist. Man schneidet die Tangenten mit der Ellipse und ermittelt c aus der Bedingung, dass es nur einen einzigen Schnittpunkt geben darf. Setzt man somit $x = c - 5y$ in ell ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&(c - 5y)^2 + 4y^2 = 116\\
&c^2 - 10cy + 25y^2 + 4y^2 = 116\\
&29y^2 - 10cy - 116 + c^2 = 0\\
&y = \frac{10c \pm \sqrt{100c^2 - 4 \cdot 29 \cdot (c^2 - 116)}}{2 \cdot 29}\,.
\end{aligned}$$

Nun soll sein:

$$\begin{aligned}
&100c^2 - 116c^2 + 116^2 = 0\\
&16c^2 = 116^2\\
&c = \pm 29\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Tangentengleichungen sind daher

$$\begin{aligned}
&t_1: x + 5y = 29 \quad \text{und}\\
&t_2: x + 5y = -29\,.
\end{aligned}$$

Für die y-Koordinate der Berührpunkte gilt

$$y = \pm\frac{10}{2} = \pm 5\,,$$

womit die Berührpunkte $P = (4|5)$ und $P' = (-4|-5)$ sind (vgl. [14], S. 149).

Aufgabe 133. „Ermittle eine Gleichung der Hyperbel in 1. Hauptlage, die durch die Punkte $P = (5|3)$ und $Q = (3|1)$ geht!". Die allgemeine Form einer Hyperbel mit Halbachsenlängen a und b in 1. Hauptlage ist

$$hyp\colon b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Setzt man die beiden Punkte ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$I\colon 25b^2 - 9a^2 = a^2b^2$$
$$II\colon 9b^2 - a^2 = a^2b^2\,.$$

$I - II$ führt auf

$$16b^2 - 8a^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = 2b^2\,.$$

Setzt man dies in I ein, so folgt

$$25b^2 - 18b^2 = 2b^4$$
$$b^2 = \frac{7}{2},$$

wobei $b \neq 0$ angenommen wurde. Damit folgt $a^2 = 7$ und eine Gleichung der Hyperbel ist

$$hyp\colon \frac{7x^2}{2} - 7y^2 = \frac{49}{2}$$

(vgl. [14], S. 152).

Aufgabe 134. „Von einer Hyperbel in 1. Hauptlage kennt man den Punkt $P = (3\sqrt{10}|2)$ und eine Asymptote $u\colon 2x - 3y = 0$. Stelle eine Gleichung der Hyperbel auf!". Für eine Hyperbel in 1. Hauptlage sind die Asymptoten

$$y = \pm\frac{b}{a}\cdot x\,.$$

Formt man die Gleichung von u um, so erhält man

$$y = \frac{2}{3}\cdot x\,.$$

Da $a, b \in \mathbb{R}^+$, ist die Asymptote mit dem positiven Vorzeichen gegeben. Man weiß nun

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Longrightarrow b = \frac{2}{3}\cdot a\,.$$

Diese Bedingung kann man gemeinsam mit $P \in hyp$ in die Hyperbelgleichung einsetzen und es folgt

$$\frac{4}{9}a^2\cdot 9\cdot 10 - 4a^2 = \frac{2}{3}\cdot a^4$$
$$36a^2 = \frac{2}{3}\cdot a^4$$

$$a^2 = 54\,,$$

wobei $a \neq 0$ angenommen wurde. Damit ist $b^2 = 24$ und eine Gleichung der Hyperbel ist

$$hyp\colon 24x^2 - 54y^2 = 1\,296$$

(vgl. [14], S. 155).

Aufgabe 135. „Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gerade $g\colon ax + 2y = 12$ mit der Hyperbel $hyp\colon 3x^2 - 4y^2 = 72$ zwei Punkte, genau einen Punkt bzw. keinen Punkt gemeinsam? Falls g mit hyp genau einen Punkt gemeinsam hat, gib diesen Punkt an!". Setzt man $y = 6 - \frac{ax}{2}$ in die Hypergleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&3x^2 - 144 + 24ax - a^2x^2 = 72\\
&(3 - a^2)x^2 + 24ax - 216 = 0\\
&x = \frac{-24a \pm \sqrt{576a^2 + 4 \cdot 216 \cdot (3 - a^2)}}{6 - 2a^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit es nur einen Schnittpunkt gibt, muss die Diskriminante gleich Null sein:

$$\begin{aligned}
&576a^2 + 4 \cdot 216 \cdot (3 - a^2) = 0\\
&288a^2 = 2592\\
&a = \pm 3\,.
\end{aligned}$$

Die so erhaltenen Punkte sind $P = (6| - 3)$ und $P' = (-6| - 3)$. Analog sucht man für keinen reellen Schnittpunkt

$$a^2 > 9\,,$$

was auf das Intervall $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ führt. Für zwei Schnittpunkte sucht man

$$a^2 < 9\,,$$

was auf das Intervall $(-3; 3)$ führt (vgl. [14], S. 156).

Aufgabe 136. „Von einer Hyperbel in 1. Hauptlage sind die Gleichung einer Tangente $t\colon x - y = 3$ sowie der Berührpunkt $P = (4|p_2)$ gegeben. Ermittle eine Gleichung der Hyperbel!". Die zweite Koordinate von P erhält man durch $P \in t$:

$$\begin{aligned}
&4 - y = 3\\
&y = 1
\end{aligned}$$

und damit $P(4|1)$. Die Tangentengleichung gehorcht der Spaltform

$$\begin{aligned}
&b^2p_1x - a^2p_2y = a^2b^2\\
&4b^2x - a^2y = a^2b^2\\
&\frac{4x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist die Tangentengleichung

$$x - y = 3$$

$$\frac{4x}{12} - \frac{y}{3} = 1\,.$$

Durch Vergleich folgt $a^2 = 12$ und $b^2 = 3$ und damit ergibt sich die Hyperbel zu

$$hyp\colon \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

(vgl. [14], S. 157).

Aufgabe 137. „Ermittle Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $hyp\colon 4x^2 - 3y^2 = 24$ aus dem Punkt $Q = (4|4)$!“. Für den Berührpunkt $P = (p_1|p_2)$ lautet die Tangentengleichung

$$t\colon 4p_1x - 3p_2y = 24\,.$$

Nun lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen:

$$Q \in t \Longrightarrow I\colon 16p_1 - 12p_2 = 24$$
$$P \in t \Longrightarrow II\colon 4{p_1}^2 - 3{p_2}^2 = 24\,.$$

Aus I folgt $p_2 = \frac{4p_1}{3} - 2$ und eingesetzt in II ergibt

$$4{p_1}^2 - \frac{16{p_1}^2}{3} + 16p_1 - 12 = 24$$
$$-4{p_1}^2 + 48p_1 - 108 = 0$$
$${p_1}^2 - 12p_1 + 27 = 0$$
$$p_1 = 6 \pm \sqrt{36 - 27} = 6 \pm 3\,.$$

Damit sind die Berührpunkte $P = (3|2)$ und $P' = (9|10)$ und die Tangentengleichungen ergeben sich zu

$$t_1\colon 12x - 6y = 24 \quad \text{und}$$
$$t_2\colon 36x - 30y = 24$$

bzw. in gekürzter Fassung

$$t_1\colon 2x - y = 4 \quad \text{und}$$
$$t_2\colon 6x - 5y = 4$$

(vgl. [14], S. 158).

Aufgabe 138. „Ermittle Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $hyp\colon 8x^2 - 5y^2 = 120$, die zur Gerade $g\colon 2x - y = 3$ parallel sind!“. Es sind also Tangenten der Form

$$t\colon 2x - y = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ gesucht. Setzt man $y = 2x - c$ in die Hyperbelgleichung ein, so folgt

$$8x^2 - 20x^2 + 20cx - 5c^2 = 120$$
$$12x^2 - 20cx + 120 + 5c^2 = 0$$
$$x = \frac{20c \pm \sqrt{400c^2 - 48 \cdot (120 + 5c^2)}}{24}\,.$$

Um c zu bestimmen, muss nun die Diskriminante gleich Null sein, da es sich um Tangenten handelt.

Es ist also

$$400c^2 - 48 \cdot (120 + 5c^2) = 0$$
$$160c^2 = 5760$$
$$c = \pm 6$$

und damit sind die gesuchten Tangenten

$$t_1\colon 2x - y = 6 \quad \text{und}$$
$$t_2\colon 2x - y = -6$$

(vgl. [14], S. 158).

Aufgabe 139. „Die Parabel par in 1. Hauptlage schneidet eine Parabel par' in 2. Hauptlage im Punkt $P = (5|2)$. Stelle Gleichungen von par und par' auf!“. Die entsprechenden allgemeinen Gleichungen sind

$$par\colon y^2 = 2px \quad und$$
$$par'\colon x^2 = 2qy\,.$$

Man muss lediglich P einsetzen um die Parameter p und q zu bestimmen. Es ist

$$P \in par \Longrightarrow 4 = 10p \Longrightarrow p = \frac{2}{5} \quad \text{und}$$
$$P \in par' \Longrightarrow 25 = 4q \Longrightarrow q = \frac{25}{4}\,.$$

Damit sind die gesuchten Gleichungen

$$par\colon y^2 = \frac{4x}{5} \quad und$$
$$par'\colon x^2 = \frac{25y}{2}$$

(vgl. [14], S. 161).

Aufgabe 140. „Ermittle die Schnittpunkte der Geraden $g\colon 3x - 2y = 24$ mit der Parabel $par\colon y^2 = 9x$!“. Hierzu muss man wie üblich $x = \frac{2y}{3} + 8$ in die Parabelgleichung einsetzen. Es folgt

$$y^2 = 6y + 72$$
$$y^2 - 6y - 72 = 0$$
$$y = 3 \pm \sqrt{9 + 72} = 3 \pm 9$$

und als Schnittpunkte ergeben sich $P = (16|12)$ und $P' = (4|-6)$ (vgl. [14], S. 162).

Aufgabe 141. „Von einer Parabel in 1. Hauptlage kennt man den Punkt $P = (6|6)$. Gib eine Gleichung der Tangente der Parabel im Punkt P an! Berechne die Schnittpunkte dieser Tangente mit der 2. Achse und der Leitlinie der Parabel!“. Eine Gleichung der Parabel ist durch $P \in par$ gegeben als

$$par: y^2 = 6x$$

mit $p = 3$. Die Tangente im Punkt $P = (p_1|p_2)$ lässt sich durch die Spaltform

$$p_2 y = p \cdot (x + p_1)$$

finden. Es ist daher

$$t: 6y = 3x + 18\,.$$

Die Tangente wird mit der 2. Achse $x = 0$ geschnitten. Daraus ergibt sich

$$y = 6$$

und der Schnittpunkt $S = (0|6)$. Schließlich wird die Tangente mit der Leitlinie $x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$ geschnitten. Daraus folgt

$$6y = -\frac{9}{2} + 18$$

$$y = \frac{9}{4}$$

und der Schnittpunkt $S' = (-\frac{3}{2}|\frac{9}{4})$ (vgl. [14], S. 163).

Aufgabe 142. „Gib Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $Q = (0|2)$ an die Parabel $par: y^2 = 8x$ an!“. Für den Berührpunkt $P = (p_1|p_2)$ lautet die Tangentengleichung

$$t: p_2 y = 4 \cdot (x + p_1)\,.$$

Nun lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen:

$$Q \in t \Longrightarrow I: 2p_2 = 4p_1$$

$$P \in t \Longrightarrow II: {p_2}^2 = 8p_1\,.$$

Aus I folgt $p_2 = 2p_1$ und eingesetzt in II ergibt

$$4{p_1}^2 = 8p_1\,.$$

Eine Lösung ist also $p_1 = 0$ und die andere Lösung ist nach Division von p_1 gleich $p_1 = 2$. Damit sind die Berührpunkte $P = (0|0)$ und $P' = (2|4)$ und die Tangentengleichungen ergeben sich zu

$$t_1: x = 0 \quad \text{und}$$

$$t_2: 4y = 4x + 8 \quad \text{bzw.} \quad t_2: y = x + 2$$

(vgl. [14], S. 164).

Aufgabe 143. „Gib eine Gleichung der Tangente an die Parabel $par: y^2 = \frac{3}{2}x$ an, die den Richtungsvektor $\vec{g} = (12|1)$ hat!“. Man sucht also eine Tangente der Form

$$x - 12y = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Man setzt nun $x = 12y + c$ in par ein und erhält

$$y^2 = 18y + \frac{3}{2}c$$

$$y = 9 \pm \sqrt{81 + \frac{3}{2}c}\,.$$

Damit eine Tangente vorliegt, muss der Wert unter der Wurzel gleich Null sein. Es ist daher

$$\frac{3}{2}c = -81$$
$$c = -54$$

und die gesuchte Gleichung der Tangente ergibt sich zu

$$t\colon x - 12y = -54$$

(vgl. [14], S. 164).

In der 7. Klasse werden zum ersten Mal die komplexen Zahlen behandelt. Der Ausgangspunkt ist eine Aufgabe von Cardano, in der Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten. Cardano hatte Bedenken Ausdrücke wie $5 + \sqrt{-5}$ als Lösung der Aufgabe zu sehen, erkannte jedoch, dass sich mit komplexen Zahlen wie mit reellen Zahlen rechnen lässt und die Probe zu einem korrekten Ergebnis führt (vgl. [14], S. 230).

Aufgabe 144. „Die Zahl 16 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt 70 ist. Führe die Probe durch!“. Ein Summand sei x, der andere $16 - x$. Damit ist also

$$x \cdot (16 - x) = 70$$
$$x^2 - 16x + 70 = 0$$
$$x = 8 \pm \sqrt{64 - 70} = 8 \pm \sqrt{-6}\,.$$

Die Probe ergibt

$$\left(8 + \sqrt{-6}\right) \cdot \left(8 - \sqrt{-6}\right) = 64 - (-6) = 70$$

(vgl. [14], S. 231).

Nach einem Abschnitt über die Rechenregeln mit komplexen Zahlen, werden nochmal die Lösungen quadratischer Gleichungen aufgerollt. Hierbei kann nun ausgehend von der Diskriminante eindeutig charakterisiert werden, welche Lösungen eine allgemeine quadratische Gleichung besitzt. Darüber hinaus wird eine Lösungsformel für die reduzierte kubische Gleichung vorgestellt (ohne Beweis), jedoch wird verschwiegen, dass sich jede kubische Gleichung auf die reduzierte Form bringen lässt und auch die beiden anderen Lösungen werden nicht erwähnt.

„Eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ lautet

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}}$$

In diesem Zusammenhang wird auf den (aber nicht als solchen bezeichneten) „casus irreducibilis“ verwiesen. Schließlich wird der Fundamentalsatz der Algebra vorgestellt als

„Jede algebraische Gleichung vom Grad n hat mindestens eine komplexe Lösung“.

Dazu wird erwähnt, dass jede algebraische Gleichung vom Grad n (genauer jede univariate polynomiale Gleichung) mit reellen Koeffizienten höchstens n reelle Lösungen besitzt und die Frage gestellt, ob sie mindestens eine reelle Lösung besitzt. Das kann durch ein Gegenbeispiel leicht geklärt werden. Dass jede univariate polynomiale Gleichung vom Grad n sogar genau n komplexe Lösungen hat, wird jedoch verschwiegen (vgl. [14], S. 234f).

Aufgabe 145. „Ermittle alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + 4x + 5$ und mache die Probe!“. Anwenden der quadratischen Lösungsformel liefert

$$x = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i\,.$$

Die Probe ergibt

$$(-2-i)^2 + 4\cdot(-2-i) + 5 = 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0 \quad \text{und}$$
$$(-2+i)^2 + 4\cdot(-2+i) + 5 = 4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 = 0$$

(vgl. [14], S. 236).

Aufgabe 146. „Ermittle mit der Cardano’schen Formel eine Lösung der Gleichung $x^3 - 15x + 4 = 0$! Hinweis: Zeige $(2+i)^3 = 2 + 11i$ und $(-2+i) = -2 + 11i$!“. Setzt man in die Lösungsformel ein, so folgt

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{(-5)^3 + 2^2} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{(-5)^3 + 2^2} + 2} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} \\ &= \sqrt[3]{-2 + 11i} - \sqrt[3]{2 + 11i}\,. \end{aligned}$$

Nun wird der Hinweis überprüft:

$$(2+i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i \quad \text{und}$$
$$(-2+i)^3 = -8 + 12i - 6i^2 + i^3 = -8 + 12i + 6 - i = -2 + 11i\,.$$

Damit folgt nun

$$x = (-2+i) - (2+i) = -4$$

(vgl. [14], S. 236).

Nach einem Abschnitt über die geometrische Darstellung sowie Polar- und Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, werden noch algebraische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten behandelt.

Hierbei werden analoge quadratische Lösungsformeln vorgestellt, nur muss man eventuell die Wurzel aus einer echt komplexen Zahl ziehen. Der Fundamentalsatz der Algebra wird analog für den Fall mit komplexen Koeffizienten formuliert (vgl. [14], S. 245).

Aufgabe 147. „Ermittle alle komplexen Lösungen der Gleichung $ix^2 - 2x + i = 0$ und mache die Probe!". Setzt man in die Lösungsformel ein, so folgt

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4i^2}}{2i} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -i \mp i\sqrt{2}\,.$$

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned} i\left(-i - i\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(-i - i\sqrt{2}\right) + i &= i\left(i^2 + 2i^2\sqrt{2} + 2i^2\right) + 2i + 2i\sqrt{2} + i \\ &= -i - 2i\sqrt{2} - 2i + 2i + 2i\sqrt{2} + i = 0 \quad \text{und} \\ i\left(-i + i\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(-i + i\sqrt{2}\right) + i &= i\left(i^2 - 2i^2\sqrt{2} + 2i^2\right) + 2i - 2i\sqrt{2} + i \\ &= -i + 2i\sqrt{2} - 2i + 2i - 2i\sqrt{2} + i = 0 \end{aligned}$$

(vgl. [14], S. 245).

4.8 Schulstufe 12 – 8. Klasse

In der 12. Schulstufe hat man es in manchen Kapiteln des Lehrplans mit univariaten polynomialen Gleichungen ersten und zweiten Grades zu tun. Dabei werden keine neuen Lösungsmethoden mehr behandelt, sondern das Wissen aus der 7. Klasse im Rahmen der Integralrechnung und Wirtschaftsmathematik angewendet. Das betroffene Kapitel ist „Integralrechnung" und hier die Unterpunkte „Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln" und „Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)" (vgl. [3], S. 5f).

In der Integralrechnung hat man es teilweise mit univariaten polynomialen Gleichungen zu tun, insbesondere bei der Berechnung von Flächeninhalten und Volumina.

Aufgabe 148. „Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f\colon f(x) = x^2 - 2x - 15$ und der x-Achse eingeschlossen wird!". Gesucht sind also die Nullstellen von f. Es ist

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$

und damit $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$. Man sucht also das Integral von f auf $[-3; 5]$. Da der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse ist, muss ein Minus vor das Integral gesetzt werden. Somit ist

$$A = -\int_{-3}^{5} x^2 - 2x - 15\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 15x\,|_{-3}^{5}\right) = -\left(-\frac{175}{3} - 27\right) = \frac{256}{3}$$

(vgl. [15], S. 25).

Aufgabe 149. „Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das von den Parabeln mit den Gleichungen $y^2 = 3x$ und $y^2 = \frac{9}{2} \cdot (x - 1)$ begrenzt wird!“. Zunächst muss ermittelt werden, wo sich die beiden Parabeln schneiden. Es ist

$$3x = \frac{9}{2} \cdot (x-1)$$

$$x \cdot \left(3 - \frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$x = 3\,.$$

Für die y-Koordinaten gilt

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

und damit sind die Schnittpunkt $(3|3)$ und $(3|-3)$. Die Situation ist in Abbildung 20 dargestellt.

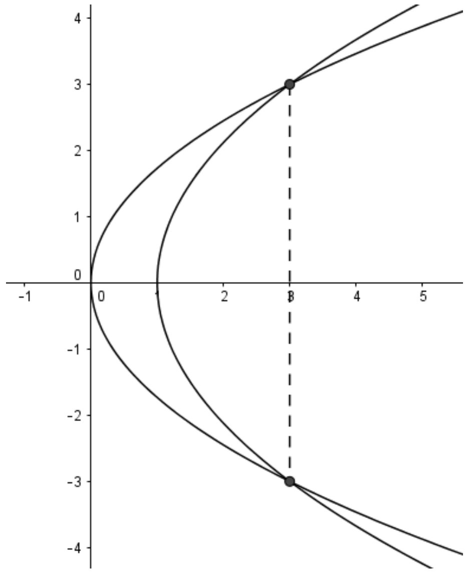

Abbildung 20: Plot zu Aufgabe 149

Es reicht den oberen Flächeninhalt zu berechnen und dann mit 2 zu multiplizieren. Es ist daher

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^3 3x\, dx - \int_1^3 \frac{9}{2} \cdot (x-1)\, dx \right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} x^2 \,|_0^3 - \left(\frac{9}{4} x^2 - \frac{9}{2} x \,|_1^3 \right) \right) = 2 \cdot \left(\frac{27}{2} - \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{4} \right) \right)$$

$$= 9$$

(vgl. [15], S. 29).

Aufgabe 150. „Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der Graph der Funktion $f: f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ zwischen den beiden Nullstellen von f um die x-Achse rotiert!“. Zunächst müssen die Nullstellen bestimmt werden. Es ist

$$\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$x = \pm 2 .$$

Das Volumen ist das Integral der Querschnittsflächenfunktion nach der Höhe x, also

$$V(K) = \int_{-2}^{2} A(x)\, dx .$$

Die Querschnittsfläche ist ein Kreis mit Radius $f(x)$ und daher ist $A(x) = f(x)^2\pi$ und somit

$$V(K) = \pi \int_{-2}^{2} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{2} 4 - x^2\, dx = \pi \cdot \left(4x - \frac{x^3}{3}\ |_{-2}^{2}\right) = \pi \cdot \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

(vgl. [15], S. 40).

Als Anwendung der Differential- und Integralrechnung werden Kostenfunktionen betrachtet.

Aufgabe 151. „Zeige, dass die Kostenfunktion $K\colon K(x) = 3x^2 + 50x + 2\,700$ das Betriebsoptimum $x_{opt} = 30$ besitzt, und berechne die langfristige Preisuntergrenze der Produktion!“. Die Produktionsmenge x_{opt} heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K, wenn die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ minimal ist. Die Stückkostenfunktion ist definiert durch $\overline{K} \coloneqq \frac{K(x)}{x}$ mit $x \neq 0$ und gibt die Kosten pro Einheit an. Das Betriebsoptimum lässt sich durch die Beziehung

$$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$$

finden. Dabei ist K' die Grenzkostenfunktion und gibt den Kostenzuwachs bei Steigerung der Produktion um eine Einheit an. Man sucht also Lösungen von

$$\begin{aligned}
&3x + 50 + \frac{2\,700}{x} = 6x + 50\\
&3x^2 + 50x + 2\,700 = 6x^2 + 50x\\
&3x^2 = 2700\\
&x = 30 .
\end{aligned}$$

Die langfristige Preisuntergrenze wird durch die minimalen Stückkosten $\overline{K}(x_{opt})$ angegeben, da der Betrieb die gesamte Produktionsmenge zumindest zu jenem Stückpreis verkaufen muss, der die Stückkosten abdeckt. Es ist

$$\overline{K}(30) = 3 \cdot 30 + 50 + \frac{2\,700}{30} = 230\ €$$

(vgl. [15], S. 67).

Aufgabe 152. „Berechne für die Kostenfunktion $K\colon K(x) = 0{,}001x^2 + 2{,}6x + 9\,000$ mit $x \in [0; 7\,500]$ und den Verkaufspreis $p = 13{,}5$ bei vollständiger Marktkonkurrenz die Gewinnzone und den maximalen Gewinn!“. Vollständige Marktkonkurrenz drückt aus, dass der Anbieter keinen Einfluss auf den Produktpreis p hat, weil es sehr viele unabhängige Anbieter gibt (im Gegensatz zum Monopol). Zunächst muss die Gewinnfunktion aufgestellt werden. Es ist

$$Gewinn = \text{Erlös minus Kosten}$$
$$G(x) = E(x) - K(x) \quad \text{mit} \quad E(x) = p \cdot x$$

und somit

$$G(x) = -0{,}001x^2 + 10{,}9x - 9\,000 \quad \text{für} \quad x \in [0; 7\,500]\,.$$

Für die Gewinnzone müssen die Nullstellen von $G(x)$ ermittelt werden. Es ist

$$-0{,}001x^2 + 10{,}9x - 9\,000 = 0$$
$$x = \frac{-10{,}9 \pm \sqrt{10{,}9^2 - 4 \cdot 0{,}001 \cdot 9\,000}}{-0{,}002} = \frac{-10{,}9 \pm 9{,}1}{-0{,}002} \Longrightarrow x = 900 \lor x = 10\,000\,.$$

$G(x)$ ist daher für $x \in [900; 10\,000]$ positiv. Da aber nur maximal 7 500 Stück produziert werden können, ist die Gewinnzone $x \in [900; 7\,500]$. Für den maximalen Gewinn muss $G'(x) = 0$ berechnet werden. Es ist

$$-0{,}002x + 10{,}9 = 0$$
$$x = 5\,450\,,$$

womit also bei 5 450 Stück der maximale Gewinn erreicht wird (vgl. [15], S. 69).

Aufgabe 153. „Ein Monopolbetrieb produziert x Mengeneinheiten eines Produkts mit den variablen Kosten $K_v(x) = 0{,}1x^2 + x$. Bei der Herstellung fallen Fixkosten von $150\,GE$ an. Im Planungszeitraum können höchstens 60 Mengeneinheiten erzeugt werden. Aufgrund von Marktanalysen geht man von einer Nachfragefunktion mit $p(x) = -0{,}2x + 19$ aus. 1) Wie viele Mengeneinheiten des Produkts muss der Betrieb erzeugen und zu welchem Preis muss er sein Produkt verkaufen, um mit positivem Gewinn zu arbeiten? 2) Für welche Produktionsmenge x und welchen Verkaufspreis p erzielt der Betrieb den größten Gewinn? 3) Gib den Cournot'schen Punkt C des Monopolbetriebes an! 4) Zeige, dass das Erlösmaximum nicht für die Cournot'sche Menge x_c angenommen wird!“. Nun liegt ein Monopol vor. Der Anbieter möchte wissen, wie viele Mengeneinheiten er zu welchem Preis verkaufen soll, um den Gewinn zu maximieren. Für 1) sucht man wieder die Gewinngrenzen. Es ist

$$G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K_v(x) - 150 = -0{,}2x^2 + 19x - 0{,}1x^2 - x - 150$$
$$= -0{,}3x^2 + 18x - 150\,.$$

Die Gewinngrenzen ergeben sich aus

$$G(x) = 0$$
$$0{,}3x^2 - 18x + 150 = 0$$
$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 0{,}3 \cdot 150}}{0{,}6} = \frac{18 \pm 12}{0{,}6} \Longrightarrow x = 10 \lor x = 50\,.$$

Für $x \in [10; 50]$ macht der Anbieter Gewinn. Der Preis bei 10 Mengengeneinheiten ist

$$p(10) = 17\,GE/ME$$

und der Preis bei 50 Mengeneinheiten ist

$$p(50) = 9\ GE/ME\ .$$

Bei 2) geht es um den größten Gewinn. Hierzu ermittelt man die Mengeneinheiten, für die $G'(x) = 0$ gilt, also

$$-0{,}6x + 18 = 0$$

$$x = 30\ ,$$

womit der Anbieter bei 30 produzierten und verkauften Mengeneinheiten den größten Gewinn macht. Der entsprechende Preis ist

$$p(30) = 13\ GE/ME.$$

Zu 3): Die Cournot'sche Menge x_c ist die gewinnmaximale Produktionsmenge eines Monopolisten und damit ist

$$x_c = 30\ .$$

Den zugehörigen gewinnmaximalen Produktpreis entsprechend der gegebenen Nachfragefunktion nennt man Cournot'schen Preis p_c und es ist

$$p_c = 13\ .$$

Der Cournot'sche Punkt ist nun der Punkt $C = (x_c|p_c)$ auf dem Graphen der Nachfragefunktion $x \longmapsto p(x)$ und somit

$$C = (30|13)\ .$$

Für 4) muss das Maximum der Erlösfunktion ermittelt werden. Es ist

$$E'(x) = 0$$

$$-0{,}4x + 19 = 0$$

$$x = 47{,}5 \neq 30\ .$$

Bei 47,5 Mengeneinheiten macht der Anbieter zwar den größten Erlös, aber da die Kosten hierfür auch höher sind, macht er nicht den größten Gewinn (vgl. [15], S. 71f).

5 Resümee

Die Arbeit gliedert sich in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitt wurden die Lösbarkeit und Lösungsmethoden allgemeiner univariater polynomialer Gleichungen mit unterschiedlichen hohen Graden untersucht. Die zentrale Erkenntnis bildete zunächst der auf zwei Arten bewiesene Fundamentalsatz der Algebra. Aus diesem folgt, dass jedes Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad n genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt und sich daher eindeutig als Produkt von Linearfaktoren schreiben lässt. Betrachtet man statt $\mathbb{C}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder allgemein einen Körper K, so lässt sich das Polynom zumindest eindeutig als Produkt von irreduziblen Faktoren schreiben. Anhand eines Gegenbeispiels wurde auch demonstriert, dass die im Mathematikunterricht herrschende Selbstverständlichkeit, dass ein Polynom vom Grad n genau (bzw. höchstens in $\mathbb{R}$) n Nullstellen besitzt und sich eindeutig als Produkt von Linearfaktoren schreiben lässt, nicht gilt, wenn man dem Polynomring $R[x]$ keinem Körper K, sondern eine „niedrigere“ algebraische Struktur R zugrunde legt (z. B. $\mathbb{Z}_6$). Ein solches Beispiel hat in der Schule aufgrund fehlender Kenntnis algebraischer Strukturen jedoch keinen Platz. Nach diesen allgemeinen und theoretischen Überlegungen wurden konkrete Lösungsformeln für mehrere Grade erarbeitet. Während die Lösungsformeln für Grad 1 und 2 ohne viel Mühe hergeleitet werden können, muss man für die Lösungsformeln vom Grad 3 und 4 deutlich weiter ausholen und echt komplexe Zahlen ins Spiel bringen. Selbst wenn eine univariate polynomiale Gleichung vom Grad 3 genau drei reelle Lösungen besitzt, muss man bei der Anwendung der Cardano'schen Lösungsformeln mit echt komplexen Zahlen arbeiten. Dieser „casus irreducibilis“ legitimiert die Verwendung der imaginären Einheit i und damit die von $\mathbb{C}$. Für die exakte Berechnung der Lösungen kommt man eventuell nicht darum herum, Wurzeln aus echt komplexen Zahlen zu ziehen. Dies macht man am geschicktesten in Polarkoordinaten. Für die Lösungsformel vom Grad 4 kommen keine neuen Komplikationen hinzu. Man muss lediglich eine Hilfsgleichung vom Grad 3 lösen und dann in die Lösungsformel einsetzen und eventuell wieder eine quadratische Wurzel aus einer echt komplexen Zahl ziehen. Dies ist jedoch auch in kartesischen Koordinaten ohne weiters möglich. Da sich das Ausgangsproblem bei der Erarbeitung der Lösungsformeln für Grad 3 und 4 auf eine Gleichung niedrigeren Grades zurückführen lässt, waren die damaligen Mathematikerinnen und Mathematiker optimistisch, dass ähnliche Überlegungen auch für höhere Grade zum Ziel führen würden. Lagrange konnte zeigen, dass dies jedoch nicht möglich war, aber konnte nicht ausschließen, dass es andere Möglichkeiten geben könnte. Schließlich zeigten Ruffini und Abel getrennt voneinander, dass sich die allgemeine univariate polynomiale Gleichung fünften Grades nicht durch Radikale, d. h. durch Wurzeln gebildete Ausdrücke, auflösen lässt. So klar die Aussage des Satzes von Abel-Ruffini ist, so schwierig ist sein Beweis mit elementaren Methoden. Der Satz lässt sich jedoch auch im Rahmen der Galoistheorie beweisen. Mit dem Satz von Abel-Ruffini lässt sich nun sagen, dass auch jede univariate polynomiale Gleichung sechsten und höheren Grades nicht durch

Radikale auflösbar ist, da sich jedes Polynom vom Grad 6 und höher stets als Produkt eines Polynoms vom Grad 5 und eines dazu passenden Polynoms schreiben lässt. Da die Nullstellen des Polynoms vom Grad 5 allgemein nicht durch Radikale gefunden werden können, können es somit auch nicht alle Nullstellen des allgemeinen Polynoms sechsten Grades und höher. Mit einer möglicherweisen kleinen oder großen Enttäuschung über dieses Resultat kann man jedoch versuchen andere Lösungsmethoden zu suchen. Oft lässt sich eine Nullstelle durch gezieltes Probieren (z. B. über den Satz rationaler Nullstellen) finden und dann ein Linearfaktoren abspalten, sodass der Grad des zu untersuchenden Polynoms um eins reduziert wird. Manchmal kann man die Variable herausheben oder substituieren. Helfen auch solche Methoden nicht weiter, ist man eventuell mit einer Näherungslösung zufrieden. Das Newton-Verfahren oder das Regula-falsi-Verfahren kann Näherungen von reellen Nullstellen reeller Polynome finden. Raffinierte und komplizierte numerische Verfahren können auch komplexe Nullstellen von komplexen Polynomen näherungsweise angeben. Dies wird mitunter in Computer-Algebra-Systemen (CAS) ausgenutzt, um Nullstellen von Polynomen fast beliebigen Grades zu ermitteln. Im Informations- und Computerzeitalter sind die Lösungsformeln insbesondere für Grad 3 und 4 mehr intellektuelle Errungenschaften, als tatsächliche Anwendungsapparate. Die an Beispielen demonstrierten Berechnungen gestalten sich zwar nicht schwierig, jedoch langwierig und sind wegen ihrer Länge stark fehleranfällig. Im Gegensatz dazu spuckt jedes CAS die Lösung auf Knopfdruck aus. Man sollte sich im Klaren darüber sein, dass es solche Lösungsformeln gibt und sie auf Aufforderung zumindest für den quadratischen Fall auch anwenden können, jedoch können CAS die konkreten Rechenoperationen übernehmen um Zeit zu sparen, die man bei theoretischen Überlegungen und der Interpretation der Ergebnisse verwenden kann. In der Schule ist es freilich unerlässlich gewisse Rechenfertigkeiten aufzubauen. Sind diese in solider Form vorhanden, ist es lohnenswert bei weiterführenden Aufgaben Technologie ins Spiel zu bringen. Hervorragende Beispiele hierfür stellen lineare Gleichungssysteme und eben univariate polynomiale Gleichungen dar.

Mit dem theoretischen Rüstzeug wurde im zweiten Abschnitt das Vorkommen univariater polynomialer Gleichungen im Mathematikunterricht der AHS untersucht. Um hierfür relativ objektive Ergebnisse zu erhalten, wurden ausgehend vom „alten“ Lehrplan (vor der modularen Oberstufe) die Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“ für die Sekundarstufe 1 und „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 2 analysiert. In der fünften und der sechsten Schulstufe treten lediglich univariate polynomiale Gleichungen vom Grad 1 auf. In der 1. Klasse ist es zunächst das Ziel, einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten durch entsprechende Anwendung der Grundrechenarten aufzulösen. Dies kommt auch bei geometrischen Aufgaben (meist Umkehraufgaben) für das Rechteck und dem Quader vor. In der 2. Klasse geht man schon systematischer durch Anwenden der Grundrechenarten beim Auflösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten vor. Gleichungen müssen hier teilweise selbst aus einer Textaufgabe aufgestellt und gelöst werden. Dies wird im Rahmen der direkten und indirekten Proportionalitäten sowie bei der Prozentrechnung weiter geübt und gefestigt. Auch in der Geometrie ist man bei rechtwinkligen Dreiecken und geraden Prismen mit solchen Gleichungen konfrontiert. In der 7. Schulstufe treten zunächst wieder nur univariate polynomiale Gleichungen ersten Grades auf. Es wird verstärkt auf Äquivalenzumformungen einer Gleichung eingegangen und die Gleichungen sind komplizierter. Solche Gleichungen treten bei Textaufgaben, Verhältnisgleichungen, direkten und indirekten Proportionalitäten, Prozentrechnung, Zinsenrechnung und Wachstums- sowie Zerfallsprozessen auf. Auch in der Geometrie hat man es im Zusammenhang mit Flächen- und Rauminhaltsproblemen bei Parallelogrammen, Dreiecken, Deltoiden, Trapezen, Prismen und Pyramiden mit solchen Gleichungen zu tun. Weitere Einsatzgebiete sind der Strahlensatz und die Formel der Dichte. Durch den Lehrsatz des Pythagoras kommen zum ersten Mal auch einfache univariate polynomiale Gleichungen zweiten Grades vor. Diese beschränken sich jedoch auf einfaches Wurzelziehen. In der achten Schulstufe wird zunächst die Zinsenrechnung wiederholt, ehe Quadrat- und Kubikwurzeln eingeführt werden. Die Schülerin bzw. der Schüler sollte daher bereits Gleichungen der Form $x^3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ auflösen können. Im Rahmen der Terme werden Polynome zum ersten Mal erwähnt, aber nicht explizit behandelt. Bei Bruchtermen muss man entscheiden, wann der Nenner gleich null ist, was zu univariaten polynomialen Gleichungen ersten Grades führt. Sogar die Polynomdivision wird an dieser Stelle durchgenommen. Danach werden erneut lineare Gleichungen mit einer Unbekannten aufgelöst. Hierzu wird nochmals auf die nötigen Äquivalenzumformungen eingegangen und auch die Möglichkeit in Betracht gezogen, dass eine solche Gleichung gar keine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Die Erkenntnisse werden beim Aufstellen linearer Funktionen, dem Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten sowie weiterführenden Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik eingesetzt. Schließlich gibt es eine Fülle von Geometrie-Aufgaben, die sich auch mit dem Lösen univariater polynomialer Gleichungen beschäftigen. Dabei wird zunächst der Lehrsatz des Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken, Quadraten, gleichseitigen Dreiecken, Rhomben, Trapezen und Deltoiden angewendet, was oft Wurzelziehen nach sich zieht. Quadrat- und Kubikwurzeln werden auch bei Berechnungen an Würfeln und Pyramiden benötigt. Schließlich werden Kreis, Drehzylinder, Drehkegel und Kugel untersucht. Damit treten univariate polynomiale Gleichungen in allen vier Lehrplan-Kapiteln der 4. Klasse auf und sind ein wesentlicher Bestandteil dieser Schulstufe. In der 9. Schulstufe werden zum ersten Mal allgemeine quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten behandelt. Nach der Analyse von Spezialfällen werden die beiden Lösungsformeln präsentiert und an Beispielen geübt, unter anderem auch in Textaufgaben, Bruchgleichungen und Parameter-Aufgaben. Auch der Satz von Vieta wird vorgestellt und bewiesen. Die neu gewonnenen Erkenntnisse werden bei linearen und quadratischen Funktionen gefestigt. Wie in der 4. Klasse werden Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten durchgenommen. Schließlich treten univariate polynomiale Gleichungen erster Ordnung bei der Vektorrechnung im

$\mathbb{R}^2$ im Rahmen von Schnitt- und Spiegelungsaufgaben mit Geraden auf. In der 10. Schulstufe werden am Beginn beliebige ganzzahlige Wurzeln mit dem Taschenrechner berechnet und dann Wurzelgleichungen analysiert. Anschließend werden Funktionen auf Monotonie etc. untersucht, jedoch aufgrund fehlender Differentialrechnung hauptsächlich grafisch. Trotzdem lassen sich auch hier teilweise univariate polynomiale Gleichungen finden. So auch beim Kapitel „Sparen, Renten und Kredite“ und bei der Raumgeometrie (Lagebeziehung von Geraden und Ebenen sowie Abstandsberechnungen). In der 11. Schulstufe werden schließlich Polynomfunktionen behandelt und univariate polynomiale Gleichungen höheren Grades durch Herausheben, Zerlegung von Binomen, Substitution und Abspalten eines Linearfaktors gelöst. Die so gewonnenen Techniken sind beim Untersuchen von Polynomfunktionen nützlich. Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie und Krümmung lassen sich nun analytisch untersuchen. In der Differentialrechnung hat man es weiterhin mit einigen Extremwertaufgaben zu tun. Ein zweites und sehr umfangreiches Anwendungsgebiet ist die analytische Geometrie. Hier hat man es bei Kreis, Kugel, Ellipse, Hyperbel und Parabel ständig damit zu tun, Gleichungen aufzustellen, Lagebeziehungen zu überprüfen oder Tangenten zu bestimmen. Schließlich werden im letzten Kapitel die komplexen Zahlen eingeführt. Hiermit lassen sich nun für jede quadratische Gleichung genau zwei Lösungen angeben. Im Buch wird sogar kurz auf die reduzierte Gleichung vom Grad 3 eingegangen und eine Lösungsformel präsentiert (ohne Herleitung). In diesem Zusammenhang wird der Fundamentalsatz der Algebra für reelle und echt komplexe Polynome formuliert, jedoch wird verschwiegen, dass jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt. Es werden sogar Beispiele mit echt komplexen Polynomen durchgenommen. In der 12. Schulstufe gibt es kein neues Werkzeug mehr. Die bisherigen Erkenntnisse werden bei der Integralrechnung im Zusammenhang mit Flächeninhalts- und Volumsberechnungen und bei der Wirtschaftsmathematik genutzt.

Die Analyse lässt sich auch so zusammenfassen:

- 1. Klasse: lineare Gleichungen mit einer Variable werden eingeführt
- 2. Klasse: lineare Gleichungen mit einer Variable werden systematisch durch Anwendung der Grundrechenarten gelöst
- 3. Klasse: Durch den Satz von Pythagoras werden Quadratwurzeln berechnet
- 4. Klasse: Quadrat- und Kubikwurzeln werden eingeführt
- 5. Klasse: Allgemeine quadratische Gleichungen werden durch Lösungsformeln gelöst und der Satz von Vieta wird vorgestellt
- 6. Klasse: Beliebige ganzzahlige Wurzeln werden numerisch mit dem Taschenrechner gelöst
- 7. Klasse: Polynomfunktionen höheren Grades werden durch Herausheben, Zerlegen von Binomen, Substitution und Abspalten von Linearfaktoren gelöst. Außerdem werden die komplexen Zahlen eingeführt, die Cardano’sche Lösungsformel (nicht vollständig) erwähnt

und der Fundamentalsatz der Algebra präsentiert

- 8. Klasse: Kein neuer Input, nur Üben in Integralrechnung und Wirtschaftsmathematik

Bei der Analyse fällt auf, dass die Lösungsformel von Cardano nur am Rande erwähnt wird und auch nur eine der drei Lösungen vorgestellt wird. Die Lösungsformel für Grad 4 bleibt ebenso unerwähnt wie die Tatsache, dass es keine Lösungsformeln mehr für höhere Grade gibt. Auch der Satz von rationalen Nullstellen wird nicht behandelt, obwohl man öfters eine Lösung „erraten" muss um einen Linearfaktor abzuspalten. Die numerischen Lösungsmethoden fallen überhaupt raus und der Computer-Einsatz ist kaum vorhanden. Es gibt zwar Aufgaben, die auf Technologie-Einsatz hinweisen, jedoch reicht hier meist ein Taschenrechner aus. Die notwendigen Befehle in GeoGebra oder einem anderen CAS werden jedenfalls nicht erwähnt und es gibt dafür auch keine separaten Aufgaben. Dies wird in der neueren Auflage von „Mathematik verstehen" korrigiert. Da der Computer-Einsatz bei der standardisierten und kompetenzorientierten Reifeprüfung ab dem Schuljahr 2018/19 verpflichtend wird, legt man bei der neuesten Ausgabe mehr Wert auf entsprechende Aufgaben. Es handelt sich dabei aber auch nur um eine Seite pro Kapitel.

Die Analyse zeigt in jedem Fall, dass das Lösen von univariaten polynomialen Gleichungen ein und vielleicht sogar *das* Kerngeschäft des Mathematikunterrichts ist. In allen Schulstufen und in sehr, sehr vielen Themengebieten treten diese auf und lassen sich gemäß eines Spiralprinzips in immer größer werdender Komplexität behandeln. Der einzig große Themenbereich, der sich univariaten polynomialen Gleichungen komplett entzieht, ist die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aber auch zum Beispiel Ungleichungen (Analysis) und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Geometrie) kommen ohne diese aus. Auch die Logik und Mengenlehre fällt heraus, jedoch spielt diese im Mathematikunterricht nur eine kleine Rolle.

In einem persönlichen Abschlusskommentar möchte ich sagen, dass ich mit den konkreten Ausführungen der beiden Schulbuchreihen, was das Thema der Diplomarbeit betrifft, sehr zufrieden bin. Man könnte in der 7. Klasse in einem Satz erwähnen, dass es auch eine Lösungsformel für Grad 4 gibt, aber nicht mehr für höhere Grade. Die Berechnungen mit der Cardano'schen Lösungsformel sind meiner Meinung nach nicht notwendig, wie bereits in diesem Resümee dargelegt. Das Newton'sche Näherungsverfahren könnte man in der 7. Klasse behandeln, da numerische Lösungen und Näherungslösungen ohnehin sehr spärlich im Mathematikunterricht vorkommen, man aber in der Praxis (z. B. Maße) immer mit Näherungswerten arbeitet. Außerdem ist es eine hervorragende Anwendung der Differentialrechnung, da es die Berechnung von reellen Nullstellen reeller Polynome ermöglicht. Mit dem Einsatz von CAS bin ich in der in dieser Diplomarbeit untersuchten Ausgabe nicht zufrieden, da er praktisch nicht vorhanden ist. In der neuen Ausgabe von „Mathematik verstehen" ist dies jedoch bereits gut umgesetzt.

6 Anhang

6.1 Symmetrische Polynome

Für den algebraischen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra wurde in dieser Arbeit auf symmetrische Polynome zurückgegriffen. Nachfolgend sind die für diesen Beweis relevante Eigenschaften über symmetrische Polynome ersichtlich.

Definition 8 (Symmetrisches Polynom). Sei R ein KRE und $f(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom, das von n Variablen $x_1, \dots x_n$ abhängt. Das Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt *symmetrisch*, wenn es bei jeder Permutation der Variablen in sich übergeht (vgl. [4], S. 48).

Beispiel 21. Das Polynom $f(x_1, \dots, x_n) = {x_1}^3 + {x_2}^3 + \cdots + {x_n}^3$ ist offensichtlich symmetrisch, da eine beliebige Vertauschung zweier Elemente, etwa $x_1 \leftrightarrow x_2$ das Polynom nicht ändert. Auch das Polynom $g(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 + {x_1}^2 x_3 + {x_2}^2 x_1 + {x_2}^2 x_3 + {x_3}^2 x_1 + {x_3}^2 x_2$ ist symmetrisch (vgl. [4], S. 48).

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich jedes Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$ eindeutig in seine Linearfaktoren zerlegen. Es gilt daher $f(x) = (x + \alpha_1) \dots (x + \alpha_n)$, wobei die α_i $(1 \leq i \leq n)$ die negativen Nullstellen des Polynoms $f(x)$ sind. Ausmultiplizieren der Linearfaktoren führt auf

$$f(x) = (x + \alpha_1) \dots (x + \alpha_n) = x^n + s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \cdots + s_n \,.$$

Die Koeffizienten s_i $(1 \leq i \leq n)$ hängen dabei von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ab und fasst man die α_i $(1 \leq i \leq n)$ als Variablen auf, so bilden die s_i $(1 \leq i \leq n)$ selbst symmetrische Polynome. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\
s_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \\
s_3(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{i<j<k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\
s_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n
\end{aligned}$$

(vgl. [4], S. 48).

Definition 9 (elementarsymmetrische Polynome). Die Polynome $(k = 1,2, \dots, n)$

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

heißen die elementarsymmetrischen Polynome (oder Funktionen) in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Für $k > n$ setzt man $s_k = 0$ (vgl. [4], S. 49).

Satz 10 (Hauptsatz über symmetrische Polynome). Für jedes symmetrische Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ über einem KRE R existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $h(y_1, \dots, y_n) \in R[y_1, \dots, y_n]$, sodass

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n))$$

gilt, d. h. jedes symmetrische Polynom lässt sich als Polynom der elementarsymmetrischen Polynome darstellen. Dabei enthält $h(y_1, \dots, y_n)$ nur Terme $y_1{}^{i_1} \dots y_n{}^{i_n}$ mit einem „Gewicht" $i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n \leq \deg f$. Ist f homogen (d. h. jedes Monom des Polynoms hat denselben Grad), so hat h nur Terme vom Gewicht $\deg f$.

Beweis: Es gilt $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$, wobei $\deg f = m$ und jedes f_i symmetrisch und homogen vom Grad i ist. Daher reicht es aus, den Satz für homogene symmetrische Polynome zu zeigen. Zunächst soll gezeigt werden, dass jedes homogene symmetrische Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ vom Grad m eine Darstellung der Form $h(s_1, \dots, s_n)$ besitzt, in welcher nur Terme vom Gewicht m auftreten. Dies wird mit Induktion nach der Anzahl n der Variablen und bei festem n nach dem Grad m des Polynoms getan.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da $s_1(x) = x$ ist. Der Satz sei also für weniger als n Variablen und beliebigem Grade m bereits bewiesen. Betrachte nun ein homogenes symmetrisches Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ vom Grad m. Ist $m = 0$, so ist der Satz richtig. Der Satz sei also für einen Grad kleiner gleich $m - 1$ bereits bewiesen. Für jedes Monom $x_1{}^{i_1} \dots x_n{}^{i_n}$ gibt es ein maximales k, sodass es durch $s_n{}^k = x_1{}^k \dots x_n{}^k$ teilbar ist. Dieses k is nichts anderes, als das kleinste i_j. Man kann $f(x_1, \dots, x_n)$ daher in der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = r_0 + r_1 s_n + r_2 s_n{}^2 + \cdots$$

schreiben, wobei kein Monom in $r_i(x_1, \dots, x_n)$ durch s_n teilbar ist. Da für $i \geq 1$ $\deg r_i < m$ ist, ist der Satz für diese r_i bereits bewiesen. Insbesondere enthält $r_i s_n{}^i$ nur Terme vom Gewicht m. Nun muss noch das Polynom $r_0(x_1, \dots, x_n)$ betrachtet werden. Es ist symmetrisch und homogen vom Grad m. Da es nicht durch s_n teilbar ist, müssen die Monome, die x_n nicht enthalten, ebenfalls vom Grad m sein. Damit ist $r_0(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ homogen vom Grad m und symmetrisch in $x_1, \dots, x_{n-1}$. Gemäß Induktionsannahme besitzt $r_0(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ eine Darstellung der Form $g(t_1, \dots, t_{n-1})$, wobei $t_i = s_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ die elementarsymmetrischen Polynome in $n - 1$ Variablen sind und nur Terme vom Gewicht m auftreten. Betrachte den Ausdruck

$$r_0(x_1, \dots, x_n) - g(s_1, \dots, s_{n-1}) .$$

Für $x_n = 0$ reduziert sich dieser auf Null. Er ist daher durch x_n und weil er symmetrisch ist sogar durch $s_n = x_1 \dots x_n$ teilbar. Somit gilt

$$r_0(x_1, \dots, x_n) = g(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n g_1(x_1, \dots, x_n) .$$

Der Satz ist nach Induktionsvoraussetzung für g_1 bereits gezeigt und damit gilt er auch für r_0 und somit auch für f.

Es verbleibt zu zeigen, dass $h(y_1, \dots, y_n)$ eindeutig bestimmt ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass das einzige Polynom $g(y_1, \dots, y_n)$ mit $g(s_1, \dots, s_n) = 0$ das Nullpolynom ist. Sei also $g\big(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n)\big) = 0$. Wenn man $x_n = 0$ setzt, so bleibt es Null. Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich daraus, dass $g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = 0$ ist. Daher ist $g(y_1, \dots, y_n)$ durch y_n teilbar und somit $g(y_1, \dots, y_n) = y_n p(y_1, \dots, y_n)$, d. h. $0 = g(s_1, \dots, s_n) = s_n p(s_1, \dots, s_n)$ mit einem geeigneten Polynom p. Damit muss nun auch $p(s_1, \dots, s_n) = 0$ sein. Nach Induktion folgt daraus $p(y_1, \dots, y_n) = 0$ und somit auch $g(y_1, \dots, y_n) = 0$ (vgl. [4], S. 54f). □

Beispiel 22. Gegeben sei das symmetrische Polynom

$$g(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 + {x_1}^2 x_3 + {x_2}^2 x_1 + {x_2}^2 x_3 + {x_3}^2 x_1 + {x_3}^2 x_2 \,.$$

Die elementarsymmetrischen Polynome für $n = 3$ sind

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ s_3 &= x_1 x_2 x_3 \,. \end{aligned}$$

Wie man durch Nachrechnen überprüfen kann, ist $g(s_1, s_2, s_3) = s_1 s_2 - 3 s_3$.

6.2 Abstract (Deutsch)

Eine der Kernaufgaben im Mathematikunterricht der allgemein bildenden höheren Schule (AHS) ist die Suche nach der Unbekannten x. Meist führen solche Aufgaben auf univariate polynomiale Gleichungen, die salopp auch als algebraische Gleichungen bezeichnet werden. In dieser Diplomarbeit soll daher zwei Kernfragen nachgegangen werden. Erstens: Was kann vom Standpunkt der Hochschulmathematik aus über die Lösbarkeit allgemeiner univariater polynomialer Gleichungen beliebigen Grades gesagt werden und welche Lösungsmethoden sind bekannt? Zweitens: In welchen Themenbereichen im Mathematikunterricht der AHS treten univariate polynomiale Gleichungen auf und wie werden sie gelöst? Für die zweite Frage werden ausgehend vom „alten" Lehrplan (verwendet vor der Einführung der neuen modularen Oberstufe) die Schulbuchreihen „Das ist Mathematik" für die Sekundarstufe 1 und „Mathematik verstehen" für die Sekundarstufe 2 analysiert. Den Abschluss der Arbeit bildet eine Zusammenfassung und eine Analyse der Ergebnisse der Kernfragen dieser Diplomarbeit.

6.3 Abstract (Englisch)

One of the main tasks in mathematics in highschool is the search of the unknown x. Mostly, such exercises leed to univariate polynomial equations, which are often referred to as algebraic equations. Thus, in this diploma thesis, two main questions will be explored. Firstly, from academic point of view what can be said about the solvability of general univariate polynomial equations of any degree and which technique to solve them are known? Secondly, in which subject areas of mathematics in highschool do univariate polynomial equations occur and how are they solved? To answer the second

question, an analysis, based on the „old“ curriculum (used before the implementation of the new modular senior highschool), of the schoolbooks „Das ist Mathematik“ für junior highschool and „Mathematik verstehen“ for senior highschool are made. The diploma thesis concludes with a summary and a final analysis of the two main questions.

Literaturverzeichnis

[1] J. Brown, Abel and the Insolvability of the Quintic, Columbus: Ohio State University.

[2] Bundesministerium für Bildung (Hrsg.), „AHS Lehrplan Mathematik Unterstufe,“ [Online]. Available: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5te5fx. [Zugriff am 29. April 2017].

[3] Bundesministerium für Bildung (Hrsg.), „AHS Lehrplan Mathematik Oberstufe,“ [Online]. Available: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?5te97p. [Zugriff am 2. Mai 2017].

[4] J. Cigler, Körper - Ringe - Gleichungen: Eine Einführung in die Denkweise der Algebra, Wien: Spektrum, 1995.

[5] F. Embacher, Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.

[6] G. Fischer, Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2010.

[7] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.

[8] H. Heuser, Lehrbuch der Analyses Teil 2, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

[9] Institute-International-GeoGebra (Hrsg.), „Was ist GeoGebra?,“ GeoGebra, [Online]. Available: https://www.geogebra.org/about. [Zugriff am 22. März 2017].

[10] W. Kley, „Kapitel 2: Nullstellen von algebraischen Gleichungen,“ [Online]. Available: www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/numerik/script/kap2.pdf. [Zugriff am 20. März 2017].

[11] D. Logashenko, „Analytische Lösung algebraischer Gleichungen dritten und vierten Grades,“ [Online]. Available: atlas.gcsc.uni-frankfurt.de/~dlogashenko/dload/de_equat34.pdf. [Zugriff am 12. März 2017].

[12] G. Malle, H. Woschitz, M. Koth und B. Salzger, Mathematik verstehen 5, Wien: Österreichischer Verlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2014.

[13] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger und A. Ulovec, Mathematik verstehen 6, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2015.

[14] G. Malle, H. Woschitz, M. Koth und B. Salzger, Mathematik verstehen 7, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.

[15] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger und A. Ulovec, Mathematik verstehen 8, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.

[16] H. Maser, Untersuchungen über höhere Arithmetik von Carl Friedrich Gauß, New York: Chelsea Publishing Company, 1981.

[17] P. Pesic, Abels Beweis, Heidelberg: Springer Verlag, 2005.

[18] H.-C. Reichel, H. Humenberger, D. Litschauer, H. Groß und V. Aue, Das ist Mathematik 1, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2007.

[19] H.-C. Reichel, H. Humenberger, D. Litschauer, H. Groß und V. Aue, Das ist Mathematik 2, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2011.

[20] H.-C. Reichel, H. Humenberger, D. Litschauer, H. Groß, V. Aue und E. Neuwirth, Das ist Mathematik 3, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2012.

[21] H.-C. Reichel, H. Humenberger, D. Litschauer, H. Groß, V. Aue und E. Neuwirth, Das ist Mathematik 4, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2012.

[22] H. Schichl und R. Steinbauer, „Einführung in das mathematische Arbeiten," 2009. [Online]. Available: http://www.mat.univie.ac.at/~einfbuch/Beispiele/Kapitel5/Abschnitt5_3/loes5_3_15_0.html. [Zugriff am 5. März 2017].

[23] H. Schichl und R. Steinbauer, Einführung in das mathematische Arbeiten, Heidelberg: Springer Spektrum, 2012.

[24] F. Toenniessen, Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2010.

[25] Wolfram Research (Hrsg.), „Über Wolfram Research," Wolfram Research, [Online]. Available: http://www.wolfram.com/company/background.html?source=nav. [Zugriff am 22. März 2017].

Abbildungsverzeichnis