DIPLOMARBEIT/ DIPLOM THESIS

Titel der Diplomarbeit

„Unendliche Weiten - Mathematische und philosophische Betrachtungen von verschiedenen Unendlichkeitsbegriffen“

verfasst von/ submitted by

Tayyibe Ulu

Angestrebter akademischer Grad/ in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. Nat.)

Wien, 2017/ Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt/ degree programme code as it appears on the student record sheet:	A190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt/ Degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium: UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie
Betreut von/ Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

Vorwort: 4

1.) Einleitung 5

Teil 1 : 6

Der Zahlbegriff aus verschiedenen philosophischen Sichten 6

Pythagoras und die Pythagoreer: 7

Platon: 8

  Tabelle der Gegenstandsklassen bei Platon (Abb.1): 9

Immanuel Kant: 10

2.Teil: die Unendlichkeit (ganz kurz gefasst) 16

Nikolaus von Kues: 17

Carl Friedrich Gauß: 19

Georg Cantor: 19

Teil 3: 30

Mengenlehre 30

Cantor-Menge: 31

Der Universalienstreit: 37

  Radikaler Realismus: 37

    Das Höhengleichnis: 37

  Gemäßigter Realismus: 38

  Konzeptualismus: 38

  Nominalismus: 39

Tabelle der Axiome nach ZF-Mengenlehre: 42

Tabelle der Axiome der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel: 49

  Vorteile von der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel: 52

Teil 4: 56

Infinitesimal denken und rechnen 56

Beispiele für die Infinitesimalrechnung: 70

1) Stetigkeit: 70

2) Differentialquotient und Ableitung einer Funktion: 70

3) Bestimmtes Integral: 77

4) Differenzialgleichungen: 78

Quellen: 83

Abbildungsverzeichnis: 85

Tabellenverzeichnis: 87

Abstract- Deutsch 88

Abstract – English 89

Eidesstattliche Erklärung 90

Vorwort:

Zunächst einmal möchte ich sagen, dass ich meine Diplomarbeit immer in Mathematik schreiben wollte, aber ich wollte auch einen philosophischen Ansatz dabeihaben. Da ich ziemlich schnell die Themen in Mathematik verstand, entwickelte ich eine große Liebe zu diesem Fach. Dies bemerkte ich auch während meines Studiums und bin jetzt sehr glücklich darüber, dass ich Mathematik studiert habe. Da ich nun am Ende meines Studiums angelangt bin, habe ich mir lange den Kopf zerbrochen, worüber ich bei meiner Diplomarbeit schreiben sollte. Nach langer Überlegungen kam ich zu dem Entschluss, dass ich auch die Philosophie in meiner Arbeit betrachten wollen würde. Deswegen überlegte ich mir ein Thema, wobei ich das Ziel hatte, beide Fächer zu kombinieren und sowohl meine Leidenschaft zu Mathematik, als auch zu Philosophie zum Ausdruck bringen könnte.

So kam ich zu meinem Thema und bin sehr zufrieden, dass ich das Thema behandelt habe. Außerdem möchte ich mich beim Herrn Univ. Prof. Peter Raith herzlichst bedanken, dass er mich immer unterstützt hat und dass er mir immer Ratschläge gegeben hat, wie ich diese Arbeit besser gestalten könnte.

Des Weiteren schulde ich meiner Familie ein riesiges Dankeschön, weil sie mich immer, während meines Studiums, motiviert haben und mir das Gefühl gaben, alles im Leben erreichen könne, wenn ich mich sehr dafür einsetzen würde.

Zuletzt möchte ich mich auch bei meinen besten Freundinnen Sema Özer, Manar Ebrahim und Nida Eroglu bedanken, dass sie immer hinter mir standen und mich so gut unterstützt haben, wie eine Freundin unterstützen kann.

1.) Einleitung

Die Zahlen kommen im Alltag ununterbrochen vor. Die Menschen begegnen den Zahlen zum Beispiel beim Arbeiten, beim Einkaufen, beim Studieren, beim Reisen, beim Rechnen,.. durchgehend und es ist uns überhaupt nicht bewusst, wie der Zahlbegriff überhaupt entstanden ist. Wie kamen die Menschen überhaupt zu den Zahlen, wie entwickelte sich der Zahlbegriff im Laufe der Zeit. Denn heutzutage können wir von Mengen, Teilmengen und vieles weitere reden und sind uns automatisch bewusst, dass wir mit Zahlen arbeiten.

Nun die Diplomarbeit wird aus mehreren Teilen bestehen, der erste Teil wird eine Einleitung darüber geben, wie die verschiedenen Philosophen, beginnend von den Pythagoreern, Platon, Aristoteles bis zu dem Philosophen Gauß und Cantor, die Mathematik, besonders den Zahlbegriff betrachteten.

Der zweite Teil wird über die Problematik des Unendlichen sein, welchen ich ganz kurz halten werde, aber bevor ich dieses Thema behandeln werde, werde ich zunächst einmal die verschiedenen Positionen der Philosophen erklären, um die Denkrichtungen dieser Philosophen verstehen zu können und um im späteren Verlauf darauf zurückgreifen zu können.

Der dritte und viel umfangreichere Teil wird über die Mengen und Mengenlehre sein, wobei ich unbedingt die Mengenlehre nach Zermelo und Fränkel, und die Mengenlehre nach Neumann, Bernays und Gödel betrachten möchte.

Der letzte Teil, den ich in meiner Arbeit behandeln werde, wird das Infinitesimale denken und rechnen sein.

Wie Sie sehen können, wird meine Diplomarbeit mehrere Teile haben und das Ziel, das ich dabei verfolge ist, dass ich dadurch eine umfangreiche Philosophie der Mathematik anbieten kann. Denn ich möchte unbedingt die Mathematik aus philosophischer Sicht betrachten und dabei auch möglichst viele Bereiche überdecken.

Teil 1 :

Der Zahlbegriff aus verschiedenen philosophischen Sichten

Wie ich schon bei der Einleitung vorgekündigt habe, werde ich in diesem Teil die Mathematik, genauer die Bedeutung der Zahlen besprechen. Als Erstes werde ich die Sichtweise von Pythagoras und der Pythagoreer analysieren.

Pythagoras und die Pythagoreer:

Pythagoras von Samos lebte ca. 570- ca. 500 v. Chr. und war ein griechischer Philosoph, der eine Schule in Kroton gegründete, die sehr schnell zum wissenschaftlichen Zentrum der Stadt wurde. Die Pythagoreer galten als wissenschaftliche Pioniere auf mathematischem Gebiet und Pythagoras war der Gründer dieser religiös-philosophischen Bewegung. Sie waren für vieles berühmt, besonders für ihre Resultate in der Arithmetik, in der Zahlentheorie und besonders in der Geometrie. Die pythagoreische Schule fand die Zahlen als Wesen aller Dinge und versuchte deswegen diese im Zentrum ihrer Forschung zu bringen.[1]

Für sie hatten die Zahlen mehrere Bedeutungen, einerseits waren die Zahlen Maßzahlen, die sie verwendet haben, um astronomische Verhältnisse und Zeichen, die verschiedene Bedeutung in der Astrologie hatten, bestimmen zu können. Andererseits hatte sie eine ganz andere Weltanschauung, wobei die Zahl „ALLES" bedeutete. Damit meinten sie, dass die Zahlen eine höhere, geistige Welt darstellten, der die irdische Welt nachgebildet war, was bedeuten würde, dass also nur das Geformte erkennbar sei und die Form auf Zahlen beruhe. Diese höhere Welt war sehr wichtig für die Pythagoreer, weil sie dadurch die materielle Welt verstehen wollten und um dies zu erreichen, begannen sie eine Begründung für diese Theorie zu suchen. Aber diese Begründung könnte man laut den Pythagoreern nur innerhalb der Zahlenwelt finden und dadurch entstand schlussendlich die Zahlentheorie.[2]

Bei den Pythagoreern wurden den Zahlen Eigenschaften zugeordnet. Unter einer weiblichen Zahl verstand man eine gerade Zahl und eine ungerade Zahl war dementsprechend männlich. So wurde zum Beispiel eine Ehe als eine Zusammensetzung von positiver und negativer Zahlen betrachtet. Zum Beispiel: die Zahl 5=2+3. Die Zahl 10 wurde von den Pythagoreern als die göttliche Zahl bezeichnet, weil diese aus der Summe der ersten vier Zahlen zusammengesetzt wurde. Des Weiteren gab es die vollkommenen und die befreundeten Zahlen. Die befreundeten Zahlen sind Zahlen, bei denen die eine Zahl durch die Summe ihrer echten Teiler und der Zahl

[1] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.30

[2] Vgl. ebd., 31

1 die andere Zahl ergibt. Ein Beispiel für befreundete Zahlen wäre zum Beispiel das Paar 220 und 284. Wenn man also die echten Teiler der Zahl 220 und die 1 addiert bekommt man die Zahl 284 : 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284. / Teiler von 284: 1+2+4+71+142=220.[3]

Neben den befreundeten Zahlen gibt es noch die vollkommenen Zahlen, die aus der Summe ihrer Teiler entstehen. Pythagoreer waren der Überzeugung, dass man eine Gesetzmäßigkeit für die vollkommenen Zahlen finden müsse und dass diese Aufgabe der Zahlentheorie sei. Bei Betrachtung der Zahlen bei den Pythagoreern bemerkt man, dass die Zahl eins die wichtigste Zahl darstelle, nämlich die geometrische Einheit. Diese Einheit kommt auch heutzutage in unserer Darstellung von Zahlen vor, denn diese Einheit wird als die Bezugsgröße hergenommen. Nun wissen wir, dass die Eins die geometrische Einheit darstellt, die Zwei stellt bei den Pythagoreern die Linie, die Drei die Fläche und die Vier den Körper dar. Die Zahl war das wichtigste Prinzip alles Seienden, das bedeutet, dass die reale Welt, die wir wahrnehmen, ein Abbild der geistigen, höheren Welt darstellt.[4]

Was man also eindeutig sagen kann, ist, dass die Zahlen bei den Pythagoreern aus der Einheit erzeugt wurden und dass sie Elemente einer höheren Welt sind.

Ganz am Anfang wurde erwähnt, dass die Pythagoreer Idealisten wären und als nächstes schauen wir einen weiteren Idealisten an, nämlich Platon.

Platon:

Platon war ein antiker griechischer Philosoph, der ca. 427 v.Chr.-347 v.Chr. lebte und war der Gründer der philosophischen Schule Akademie. Er ist der Entwickler der berühmten Ideenlehre, welche sein Leben ausmachte. Denn er war der Ansicht, dass es ein wichtiges, philosophisches Problem gäbe, nämlich die Unterscheidung zwischen dem Wirklichem und dem Schein. Also er unterschied zwischen dem Reich der Wahrnehmung, was für sie die Sinneswelt darstellte und dem Reich der Ideen. Platon sagte, dass man keine allgemeinen Aussagen über die Welt machen kann, weil die Welt durch fünf Sinne wahrgenommen wird. Wenn man eine Aussage treffe, diese könne nicht allgemein sein, weil die Dinge im Leben verändern und nicht so bleiben wie sie waren. Das was aber wirklich ist, ist laut Kant das Reich

[3] Vgl. Bölte(2005), S.1 (online)
[4] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.31

der Ideen. Denn man könne über die Ideenwelt ein sicheres Wissen durch Verwendung der Vernunft erlangen.[5]

Wie bei den Pythagoreern bilden die Ideen bei Kant eine höhere, geistige Welt, die wahre Welt, die die materielle Welt, in der wir leben durchdringt. Was also zur Folge haben würde, dass die Ideen eine eigene Existenz haben würden und dass sie die Existenz der für uns realen Dinge bestimmen würde. Für Kant gibt es zwei Arten des Seins: Das eine bildet die unveränderliche, gleichbleibende Welt und das andere bildet die veränderliche, materielle Welt dar. Die Idee hängt eng mit Tugenden wie die Schönheit, Kreisförmigkeit, dem Guten zusammen und Beispiele für die materielle Welt wären zum Beispiel kreisförmig. Dies bedeutet, dass die materielle Welt ihre Existenz aus der Ideenwelt hat. Angewendet auf unser Beispiel heißt das, dass physische Dinge beispielweise kreisförmig sind, falls sie an der Idee der Kreisförmigkeit teilhaben können.[6]

Tabelle der Gegenstandsklassen bei Platon (Abb.1)[7]:

immateriell	Ideen	Einheit, Schönheit, Gerechtigkeit, Kreisförmigkeit,...
	Mathematische Gegenstände	Kreis, Zahl, Proportion,...
materiell	Physische Gegenstände	Rad, Tisch, Haus, Baum,..
	Bilder physischer Gegenstände	Bild eines Rades, Bild eines Baumes,...

Was man also zu Platon und seiner Ideenlehre sagen kann, ist, dass er der Meinung war, dass man mathematische Begriffe nicht erfinde, sondern diese liegen den Mathematikern schon vor. Denn der Mathematiker besitzt laut Platon schon dieses Wissen und Ideen in seinem Verstand, aber er müsse sich nur noch an diese erinnern. Denn diese Ideen sind Elemente einer höheren Welt und der Mathematiker erinnert sich an die Ideen, die er im Leben der Seele in dieser Ideenwelt gesehen hat. Platon vergleicht die Zahlen mit den Ideen, denn er ist der Ansicht, dass

[5] Vgl. Berl, S.5-6 (online)
[6] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.34
[7] Vgl. ebd., S.34

sie sich sehr ähnlich sind. Denn er sieht die Zahlen als immaterielle Vermittler, welche zwischen den zwei Welten- Ideenwelt und materielle Wirklichkeit-fungieren. Das Tor zur Ideenwelt bilden für Platon die Zahlen! Also könnte man sagen, dass die Zahlen jederzeit existieren, auch wenn es keine Mathematiker mehr gäbe und dass sie zur Beschreibung der Ideenwelt genutzt werden.[8]

Immanuel Kant:

Er lebte als das vierte Kind einer Handwerkerfamilie ca. im 18. Jahrhundert und wurde eines der wichtigsten Philosophen. Sein wichtigstes und für uns noch so schwer zu verstehendes Werk „Die Kritik der reinen Vernunft" zielte darauf ab, wichtige Fragen wie „Ob die Vernunft eine entscheidende Rolle für unser Erkenntnis spielt", oder „Wie könne man die Grenzen der Vernunft eigentlich ziehen?", zu beantworten. Kant versuchte den Rationalismus und den Empirismus zu kombinieren.[9]

Dies bedeutet, dass auch Kant die Unterscheidung von Leibnitz der Vernunftwahrheit und Tatsachenwahrheit kennen musste. Was ist denn eigentlich die Tatsachenwahrheit bzw. die Vernunftwahrheit?

Die Vernunftwahrheiten werden durch den Widerspruch definiert, denn sie sind notwendig und ihr Gegenteil ist unmöglich. Die Tatsachenwahrheiten hingegen sind Kontingent und dadurch kann man auch folglich sagen, dass ihr Gegenteil möglich ist.[10]

Kant machte eine Zuordnung zwischen Vernunft- und Tatsachenwahrheiten. Gesetze der Mathematik und Axiome waren Beispiele für die Vernunftwahrheit, was bedeutet, dass diese Wahrheiten notwendig sind und dass diese sich zugleich auf konkrete Tatsachen stützen. Diese Wahrheiten wären somit laut Kants Sicht gültige Wahrheiten.

Des Weiteren war er der Überzeugung, dass Sätze und Aussagen Urteile sind und machte auch dabei eine Unterscheidung. Er unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urteilen, wobei analytische Urteile, wie der Name auch sagt, analysierende Aussagen sind, welche man mit Vernunftwahrheiten vergleichen könnte. Die synthetischen Urteile hingegen sind Aussagen, die Begriffe zusammenfügen und diese kann man mit den Tatsachenwahrheiten

[8] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.35
[9] Vgl. O.V., (online) [http://philosophie.podspot.de/post/untitled/]
[10] Vgl.O.V.(2008), (online), S.9 [http://www.philosophie.phil.uni-erlangen.de/qualitaet/arbeitsmittel/HABsp3_Leibniz.pdf]

vergleichen. Diese Unterscheidung wurde von Kant erweitert. Denn er unterschied noch zwischen zwei Typen von Urteilen, den ersten Typen bezeichnete er als „a posteriori“, was gleichbedeutend mit der Aussage „ aus der Erfahrung aus gewonnen“ war und den zweiten als a priori, welche unabhängig von der Erfahrung gewonnene empirische Urteile kennzeichnete.[11]

Nun werde ich versuchen den Zahlbegriff aus Kants Sicht zu erklären. Kant sagte, dass die Zahl die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung sei, also die Zusammensetzung von Einheiten zu einem Ganzen.[12]

Jetzt stellt sich aber die Frage, was die Synthesis sei. Die Synthesis wird von Kant als die Verbindung, die nicht im Material der Erfahrung liege, sondern aus dem Bewusstsein entspringe, beschrieben. Dies bedeutet, dass die empfundenen Daten durch die Einbildungskraft zu Anschauungsbildern zusammengesetzt werden, um später dieses Material durch den Intellekt zu Urteilen und Begriffen verknüpfen zu können.[13]

Daraus können wir schließen, dass die Zahl ein Schema des Verstandesbegriffs der Quantität ist, die eine Vorstellung ist, die die sukzessive Addition von Einem zum Einem zusammenfasst.[14]

Kant macht dabei auch eine Unterscheidung zwischen reiner und angewandter Mathematik. Denn als reine Mathematik sieht er die synthetischen Sätze a priori, die wir oben schon besprochen haben und die Sätze der angewandten Mathematik nimmt er entweder als synthetische Sätze a posteriori oder als a priori wahr. Denn er erklärt dies so, indem er sagt, dass die reine Mathematik über Zeit und Raum unabhängig von empirischen Voraussetzungen handelt, aber die angewandte Mathematik hingegen bezieht sich empirische Tatbestände, was heißt, dass es abhängig von Zeit und Raum ist.[15]

Nachdem wir den Zahlbegriff aus Sicht der verschiedenen Philosophen betrachtet haben, wäre es nicht schlecht den Zahlbegriff durch zwei Untersuchungen anzuschauen, welche genau die Entwicklung des Zahlbegriffs untersucht haben. Die zwei Untersuchungen wurden aus der Psychologie und der Kulturanthropologie durchgeführt. Es geht vielmehr darum, dass wir in der Evolution Hinweise auf die Entwicklung des Zahlbegriffs finden wollen. Wenn wir es anthropologisch betrachten, dann sollte unsere Suche schon ganz früh im Verhalten des

[11] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.57
[12] Vgl. Eisler: Zahl (2006), (online)
[13] Vgl. Eisler: Synthesis (2006), (online)
[14] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.60
[15] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.61

Menschen beginnen, welcher mit der Suche nach optimalen Lebensbedingungen beginnt, beispielweise sie sind auf der Suche nach Nahrung oder einer Unterkunft. Mit der Zeit kommt es dazu, dass man Verhaltensstrukturen bildet, danach könnten sich Module bilden und so weiter. Schließlich könnten sich selbst regulierende Systeme von Modulen bilden, welche eine besondere Rolle erfüllen, nämlich sie ermöglichen Aktionen. In diesem Bereich fallen auch die konkreten Handlungen und hier beginnt das eigentliche Spiel. Denn genau diese Handlungen werden als der Ausgangspunkt der Bildung des Zahlbegriffs gesehen. Dabei untersucht man eigentlich im Grunde genommen die uns bekannten Kardinalzahlen.[16]

Nun beginnen wir als Erstes mit der kulturanthropologischen Studie:

Die Studie wurde von Peter Damerow durchgeführt und dieser versucht die Zahlbegriffsentwicklung auf die Entwicklung des Menschen zurückzuführen. Das Wechselspiel zwischen Historiogenese und Ontogenese macht uns laut dieser Studie den Weg zu den Zahlen frei. Damit ist eigentlich gemeint, dass man zu den Zahlen über den Weg der konkreten Handlungen übergehen muss, weil dieser Weg uns über innere Operationen und Abstraktionen schließlich zu den Zahlen führt, aber nur als Kardinalzahlen.[17]

Die Grundannahmen dieser Studie[18] :

1. Mathematische Begriffe sind abstrahierte Invariante von Transformationen.

2. Sie werden nur durch Handlungen wahr.

3. Piagets konnte die Entwicklung des Zahlbegriffs, in der Ontogenese, rekonstruieren und dabei diesen Prozess wiedergeben.

4. In Vergleichs-, Vereinigungs-, und Wiederholungshandlungen entwickelt sich der Zahlbegriff weiter.

5. Es gibt verschiedene Stufen, in der die Entwicklung des Zahlbegriffs stattfindet.

6. Die Null-te Stufe ist die präarithmetische Stufe und in dieser Stufe sind die Handlungen an bestimmte Situationen gebunden.

7. Die erste Stufe ist die protoarithmetische Stufe, welche ermöglicht Zählobjekte als gegenständliche Symbole für Einzelgegenstände anzugeben.

[16] Vgl. ebd., S.138
[17] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.138
[18] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.138-139

8. Die zweite Stufe ist die symbolische Stufe, welche abstrakte Symbole beinhaltet und zum Rechnen hilfreich sind.

9. Die letzte Stufe ist die Stufe der theoretischen Arithmetik und in der befinden sich Aussagen über abstrakte Zahlen, welche ausschließlich durch das mentale Operieren erreicht werden.

Peter Damerow ging es eigentlich darum die Frage der historischen Natur des logisch-mathematischen Denkens eine Antwort geben zu können.

Der Zahlbegriff wurde bei der Untersuchung von Damerow durch die Bindung an Piaget umfassend geprägt, aber dieser Zahlbegriff wird überwiegend als Kardinalzahl aufgegriffen. Aufgrund dessen definiert er die Zahlen als Anzahlen, welche aus seiner Sicht Konstruktionen und Rekonstruktionen sind, welche sich in der Entwicklung des Menschen und der Gesellschaft ausbilden. Wie man weiß, benötigt man für den Zahlbegriff Reihen-oder Zählstrukturen, aber Damerow macht es nicht zum Gegenstand seiner Untersuchung. Für ihn gehört es zu den logisch-mathematischen Universalien des Denkens, wobei wir den Begriff der Universalie im Universalienstreit genauer untersuchen werden.[19]

Psychologische Sichtweise:

Wenn wir es aus der Psychologie betrachten, dann müssen wir den berühmten Psychologen Jean Piaget hernehmen, denn dieser war der Gründer der Entwicklungspsychologie des Kindes. Piaget ist dadurch berühmt, dass er immer wieder Experimente gemacht hat, um seine Theorie bestätigen zu können. Er war der Meinung, dass die Begriffsentwicklung ein konstruktiver Prozess ist, welches für ihn zwischen der menschlichem Individuum und der Welt stattfindet. Er geht bei seiner Untersuchung bis zum Anfang, was bedeutet, dass die Untersuchung der Entwicklung im Säuglingsalter beginnt. Indem das Individuum sein Objekt konstruiert, wird es selbst später zum Subjekt. Um dies zu ermöglichen, muss das Individuum kognitiv denken und die Konstruktion, die hier die Rede ist, ist ein Axiom. Piaget versteht den Aufbau der Objekte, welche sich kognitiv entwickeln, psychologisch.[20]

[19] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.139-140
[20] Vgl. ebd., S. 141

Piagets Zahlen:

Für die Entwicklung des Zahlbegriffs sind eigentlich Gruppierungen notwendig, aber Piaget berücksichtigt dabei das reine Zählen nicht, weil er meint, dass das reine Zählen nicht an äußere Handlungen gebunden ist. Man muss aber bedenken, dass für die Reihenbildung dieses reine Zählen notwendig ist. Normalerweise wird das Zählen als ein inneres begriffsbildendes Schema aufgefasst, welches für Piagets Zahlenbegriff nicht bedeutsam ist, denn für ihn spielen die Reihenbildungen eine Rolle. Dabei entstehen innere Operationen, welche er mit Mengenklassifizierungen verbindet. Leider ist der Zahlbegriff bei Piaget sehr ungenau, deswegen weiß man nicht genau wie sich die Begriffe bilden. Man weiß nur, dass die Klassenbildung bei seinem Zahlbegriff zentrale Rolle spielt.[21]

Durch Piaget veränderte sich mit Ausschluss der Bedeutung des Zählens die psychologische Einschätzung mit. Denn wir betrachten das Zählen als die wichtigste Bedingung für den Zahlbegriff, aber wir ordnen dem Zählen keine Eigenständigkeit als reines Zählen zu. Denn wir verwenden eigentlich das Zählen, um die Anzahl der Elemente einer Menge bestimmen wollen.[22]

Einige Untersuchungen untersuchten, ob Kinder in den ersten Lebensmonaten kardinale Fähigkeiten haben, damit meint man, ob Kinder Mengen, welche zwei oder drei Elemente besitzen, unterscheiden können. Da dies nicht leicht zu erfassen war, erfassten sie dies anhand der Aufmerksamkeitszeiten, die entstanden, wenn Elemente einer Menge verändert wurden. Die Untersuchung zeigt, dass die Kinder die Anzahl der Elemente simultan erfassen konnten und dies schafften sie ohne ein Vergleich der Mengen vorzunehmen oder diese auszuzählen. Hier entstand eine neue Frage für die Untersuchenden, nämlich ob die Kinder Mengen mit zwei, drei, etc. Elementen als ein einheitliches Objekt erfassen konnten. Die Untersuchenden wollten dies verneinen, denn sie waren der Auffassung, dass es kardinale Mengenauffassungen wären, aber die Untersuchenden taten dies nur mit indirekten Schlüssen und deswegen sind die Ergebnisse nur hypothetisch. In der Phase der Ausbildung des Zählens wurden auch kleine Mengen von den Kindern gezählt, wobei dies als ein eigenes Objekt wahrgenommen wird. Des Weiteren konnten sie auch kleine Mengen als neu gebildete Objekte auffassen, indem sie spielerisch zählten. Dadurch entstand das „Zählen“, welches als ein neues Instrument

---

[21] Vgl. ebd., S. 143

[22] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.144

wahrgenommen wurde, welches sich im Bereich zwischen Mengen- und der Objektauffassung aufhielt. Dadurch konnte man über die kardinale Bedeutung der Zahlworte etwas erfahren.[23]

Die Kinder besaßen später auch die Fähigkeit neues Ganzes zu bilden, indem sie aus beliebigen Elementen einer Menge unterschiedliche Anzahl der Elemente hernahmen. Des Weiteren erfasste man die Details, welche eigentlich durch die Differenzierung der Umwelt und der Eigenschaften der Elemente ein Thema wurden. Wir wissen, dass Details Teile von einem Ganzen sind, zum Beispiel wenn man an die Wörter in einem Buch denkt. Wenn aber etwas ein Teil von einem Gegenstand ist, dann wissen wir, dass dieser an diesen Gegenstand gebunden ist, aber in der Mathematik betrachtet man Teile eines Gegenstandes separat, das heißt, diese haben sich vom Gegenstand völlig getrennt. Außerdem trennt man auch die Teile untereinander völlig, sie sind völlig abstrakt. [24]

Also wenn wir zum Zahlbegriff zurückkehren und nun wissen, dass dieser durch sukzessive Addition von Einem zum Einem entsteht, kommen wir zugleich zum Problem der Unendlichkeit. Denn man könne ununterbrochen dieses Verfahren fortsetzen und man gelangt nie einem Ende.

[23] Vgl. ebd., S. 144
[24] Vgl. ebd., S. 145

2.Teil: die Unendlichkeit (ganz kurz gefasst)

Hier spielt der Unendlichkeitsbegriff eine Rolle. Wie auch viele andere Philosophen unterschied auch Platon zwischen potentielle und aktuale Unendlichkeit. Die potentielle Unendlichkeit kann man sehr leicht mit unserem Beispiel erklären. Denn durch das Zählen von Zahlen kann man immer den Nachfolger einer Zahl bestimmen, aber dies ist sehr mühsam, wenn wir sehr große Zahlen hätten. Natürlich kann man jederzeit die nächste Zahl bestimmen, aber es wird auch schwierig für uns diese Zahl auszusprechen. Diese Unendlichkeit wurde auch als die mögliche Unendlichkeit bezeichnet und findet nur in unserem Verstand, aber nicht in der materiellen Natur einen Ausdruck. Die aktuale Unendlichkeit wird hingegen bei Aristoteles als eine Unmöglichkeit angesehen. [25]

Kant war aber anderer Ansicht, denn er war der Meinung, dass man auch die aktuale Unendlichkeit vorstellen kann. Nämlich er sieht diese Unendlichkeit als die Idee der Vernunft und da jeder Mensch ein Vernunftwesen ist, können die Menschen diese Unendlichkeit sich vorstellen. Kant sagt damit, dass die aktuale Unendlichkeit nicht die empirischen Erfahrungen betrifft, weil man die Realisierungen weder beobachten noch konstruieren könne. Also die Menschen wären in der Lage zum Beispiel 20^15 mit den Sinnen wahrzunehmen und diese vielleicht zu konstruieren, aber sie können die Unendlichkeit auf keinen Fall wahrnehmen oder konstruieren.[26] (Ende 2.Teil)

Nikolaus von Kues:

Nikolaus von Kues war ein Bischof von Brixen, Kardinal und Philosoph, der im 15. Jahrhundert lebte. Er studierte Mathematik, Theologie und später das Kirchenrecht, um den Dienst des Trierer Erzbischofs antreten zu können. Während seiner Dienstzeit begann er mit dem Philosophie-Studium und lehrte auch als Dozent des Kanonischen Rechts.[27]

Gott ist bei ihm der Vertreter der geistigen Welt und Schöpfer dieser Welt, welche er laut Nikolaus von Kues nach mathematischen Gesetze erschaffen hat. Die Zahlen und Ideen gehen von ihm aus und stehen im Zentrum seiner Vorstellung. Er unterscheidet zwischen zwei Arten von Zahlen, einerseits sind sie Gegenstände der Mathematik und entstehen durch die Menschen durch Anwendung des Verstandes. Andererseits sieht er die Zahlen als Dinge, die aus dem Geist

[25] Vgl. Herold (2016), S.7
[26] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.62
[27] Vgl. Schäfer (2015), (online)

des Gottes hervorkommt. Dies bedeutet, dass also die mathematischen Zahlen, die die Menschen hervorbringen, Abbilder der göttlichen Zahlen sind. Die Menschen können mathematische Zahlen im Denken erschaffen.[28]

Nikolaus von Kues orientiert sich also nicht nur an einer einzigen philosophischen Position, sondern man kann sehen, dass er sowohl idealistisch, rationalistisch als auch empirisch denkt. Denn allein die Aussage, dass die Zahlen ihren Ursprung in Gott haben, zeigt uns seine idealistische Seite, aber er gibt auch zu, dass die Zahl Sache der Dinge ist, was bedeuten würde, dass er empiristisch denkt. Zuletzt kann man auch seine rationalistische Seite daran erkennen, dass er der Meinung ist, dass die schöpferische Wiederherstellung der Zahlen im menschlichen Geist stattfindet.[29]

Die philosophische Position von Kues kann man mithilfe eines Dreiecks sehr gut darstellen. Seine Position befindet sich mitten im Dreieck, welches seine Denkrichtung besser darstellen soll.

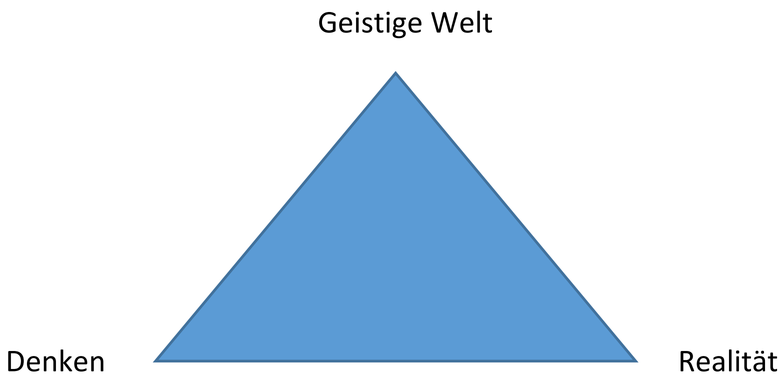


Abbildung 1. 1:Das Dreieck der philosophischen Positionen

Dieses Dreieck dient zur Veranschaulichung der klassischen philosophischen Grundpositionen, die eine zentrale Frage in der Philosophie beantworten möchte. Nämlich sie untersuchen die

[28] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.45
[29] Vgl. ebd., S.46

Quellen der Erkenntnis und alle Positionen haben eine andere Meinung darüber, wie Erkenntnis gewonnen wird. Die idealistische Position ist der Ansicht, dass die Erkenntnis in der geistigen Welt gewonnen wird. Die rationalistische Position hingegen glaubt, dass die Erkenntnis in den Strukturen des Denkens hervorkommt und zuletzt die empiristische Position teilt uns mit, dass wir in der Realität durch Erfahrungen zu den Erkenntnissen gelangen. [30]

Nikolaus' Position befindet sich in der Mitte dieses Dreiecks, weil man in seiner Position Teile von allen drei Positionen findet.

Carl Friedrich Gauß:

Er wurde am 30.April 1777 in Braunschweig geboren und starb im Jahr 1855.[31] Carl Friedrich Gauß ist fast jedem Schüler durch seine Normalverteilung bekannt. Die berühmte Gauß´sche Glockenkurve bei der Normalverteilung verdanken wir ihm.

Gauß hatte eine andere Vorstellung vom Zahlbegriff, denn diesen setzt er den geometrischen Größenbegriff vor. Diesen Größenbegriff erklärt er mit den „extensiven Größen", die für ihn zum Beispiel die geometrischen Größen, wie Flächen, Linien, Winkel, etc. und den Raum darstellt. Er ist strikt der Meinung, dass die Relationen der Größen den tatsächlichen Gegenstand der Mathematik darstellen. Nun für ihn kann man die Aufgabe der Zahlen sehr leicht erklären, nämlich sie sollen den Menschen zeigen, wie oft man sich die unmittelbar gegebene Größe wiederholt vorstellen kann. Was man noch zu Gauß sagen sollte, ist, dass er an den rein arithmetischen Aufbau der Zahlbereiche glaubt, obwohl er die Definition des Zahlbegriffs an den Größenbegriff orientiert.[32]

Georg Cantor:

Georg Cantor kam am 3. März 1845 in Peterburg auf die Welt und begann im Jahr 1862 mit seinem Mathematik-, Philosophie-, und Physikstudium. Er gewann in seinem Leben sehr viele wichtige Erkenntnisse. Denn er forschte im Bereich der Zahlentheorie, im Bereich der

[30] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.29
[31] Vgl. Wunderlich, Dieter (2013), (online)
[32] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.70

Funktionstheorie und im Bereich der Theorie der trigonometrischen Reihen, aber zu den wichtigsten Ergebnissen kam er in der Mengenlehre, welche zu seiner Zeit ein sehr unbekanntes Gebiet war.[33]

Wie auch beim Philosophen Nikolaus von Kues findet man bei Georg Cantors Philosophie Elemente aus allen drei philosophischen Grundpositionen, welche die idealistische, rationalistische und die empiristische Position war. Cantor war aber der Ansicht, dass die mathematischen Ideen auf verschiedene Arten wahrgenommen werden, einerseits als intrasubjektive oder immanente Realitäten und andererseits als transsubjektive oder transiente Realitäten. Er war davon überzeugt, dass mathematische Begriffe sowohl subjektive Elemente der Kognition sind, als auch Realitäten besaß, die den Bereich des Subjektiven überschreiten.[34]

Wie gesagt, man kann ihn als den Gründer der Mengenlehre nennen, weil er den Begriffen der Mengenlehre auch reale Existenz zugeordnet hat, dies bedeutet, dass sie für ihn nicht nur in der Ideenwelt existieren würden, sondern auch in der physischen Welt. Wovon er noch überzeugt war, ist, dass Mengen der Mächtigkeit N_0 - diese wären zum Beispiel Mengen der natürlichen Zahlen- welche unendlich sind, oder das Kontinuum, welches laut Cantor in der materiellen und wirklichen Welt existieren. Was wir über Cantor noch wissen, ist, dass er die Begriffe Kardinalzahl und Ordinalzahl eingeführt hat. Da er aber sowohl diese Begriffe als auch den Mengenbegriff intuitiv eingeführt hat, führte dies schnell zu Widersprüchen in der Mengenlehre.[35]

Es stellt sich aber die Frage, was überhaupt Kardinal-und Ordinalzahlen sind. Die Kardinalzahlen geben die Anzahl der Elemente an, sie sind Repräsentanten für viele gleichmächtige Mengen und Ordinalzahlen gibt uns die Stellung eines Elements in einer durchnummerierten Menge an.

Um den Paradoxien, die er in der Mengenlehre entdeckt hatte, als er die Begriffe Kardinal- und Ordinalzahl intuitiv eingeführt hatte, eine Lösung zu finden, unterschied er zwischen Klassen und Mengen. Die Antinomien, die er entdeckt hatte, waren die Antinomien der Gesamtheit aller Ordinalzahlen und die Antinomien der Menge aller Mengen.[36]

„Eine Klasse ist eine solche Vielheit, die nicht als „Eines", als „Ganzes" oder als „ein fertiger Gegenstand" und damit nicht als Element neuer Vielheiten betrachtet werden kann. Solche

[33] Vgl. O.V. (2004-2007), (online) [http://www.henked.de/mathematiker/cantor.htm]
[34] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.71
[35] Vgl. ebd., S.72
[36] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.72

Vielheiten nannte Cantor „absolut unendliche" oder „inkonsistente Vielheiten". Eine Menge dagegen ist eine Vielheit, die als „bestimmter wohlunterschiedener" Gegenstand und damit als Element von Klassen oder Mengen gedacht werden kann. Cantor nannte sie „konsistente Vielheiten" oder wie gesagt „Mengen"." (Bedürftig und Murawski 2014:72-73).

Cantor war aufgrund seiner Beiträge über unendliche Mengen sehr berühmt, denn er war der Auffassung, dass es nicht nur eine Art der Unendlichkeit gäbe, sondern dass es Formen der Unendlichkeit gibt. Die erste Unterscheidung, die er traf, war dieselbe wie bei Aristoteles und Kant, nämlich die Unterscheidung zwischen aktualer und potentieller Unendlichkeit. Er bezeichnete die potentielle Unendlichkeit als eine unechte Unendlichkeit und unter aktualer Unendlichkeit verstand er eine Größe. Des Weiteren sagte er, dass die aktuale Unendlichkeit mehrere Formen hätte: Als Erstes kam er zum Entschluss, dass die aktuale Unendlichkeit auch absolut wär, weil diese Unendlichkeit sich allein in Gott realisiert, als nächstes entdeckt er die Unendlichkeit, die in der erschaffenen und vom Gott abhängigen Welt existiert und als letztes sagt er, dass es noch eine Unendlichkeit gibt, die in den Gedanken des Menschen hervorkommt und als mathematische Größe auffasst.[37]

Er meint, dass es unendlich große Größen gibt und man kann diese aktual unendlichen Sachen darstellen, aber auch miteinander vergleichen.[38] Heutzutage ist dies uns als die Mächtigkeit der Mengen bekannt, wobei wir darunter verstehen, dass Mengen abzählbar oder nicht abzählbar sind. Zur Gleichmächtigkeit der Mengen werden im weiteren Verlauf meiner Diplomarbeit noch kommen.

Wenn wir den Zahlbegriff Cantors zusammenfassen sollten, dann kann man sagen, dass er unter Zahlen endliche Kardinalzahlen vorstellt, welche als ideelle Realitäten existieren, wobei sie unabhängig vom menschlichen Denken dies schaffen, aber auch durch Abstraktionen und als Projektionen von Mengen, die im Denken stattfinden, geschaffen werden können.

Als nächstes werde ich den Zahlbegriff bei den Philosophen, die ich in meiner Diplomarbeit behandelt habe, nochmals auf den Punkt bringen.

Also die Pythagoreer fassten die Zahlen als Elemente einer höheren, geistigen Welt, wobei diese Welt auf die physische Welt, in der die Menschen leben, wirkten und die Dinge nach Zahl, Maß und Form erschufen. Platon entwickelte diese Sichtweite weiter und kam zu der

[37] Vgl. ebd., S.73

[38] Vgl. O.V. (2004-2007), (online) [http://www.henked.de/mathematiker/cantor.htm]

Meinung, dass es zwei Welten gäbe, die Welt der Ideen und die Welt der materiellen Wirklichkeit und den Zahlen ordnete er einen eigenen, reinen Bereich, in dem sie ihre Eigenschaften aus sich heraus begründen konnten. Also kann man die Zahlen bei Platon als Kräfte bezeichnen, die die Kraft besaßen, Dinge zu formen und diesen Dingen Eigenschaften zuzuordnen. Platon teilte mit, dass die Mengen durch Wirkungen der Zahlen entstanden und durch die Maßzahlen entstanden die Größen. Bei Nikolaus von Kues waren die mathematischen Zahlen, eine Rekonstruktion der göttlichen Zahlen und bei Kant dagegen entstanden die Zahlen im Verstand des Menschen und bedeuteten quantitativ Anzahl und Größe. Cantor war der letzte Philosoph, dessen Zahlbegriff ich angeschaut habe und er besagte, dass die Zahlen sowohl reale Ideen als auch Projektionen realer Mengen waren, die im Verstand des Menschen erzeugt werden, indem sie als Kardinalzahl abstrahiert werden.[39]

Nun kann man festhalten, dass der Zahlbegriff in den verschiedenen Epochen ganz verschieden war. Der Zahlbegriff entwickelte sich mit der Zeit und wir konnten festhalten, dass den Zahlen nicht nur eine einzige fixe Definition zugeordnet wurde. Denn die Vorstellung des Zahlbegriffs veränderte sich mit der Veränderung der Sichtweisen des Menschen und ihrer philosophischen Positionen mit.

Ich habe mit dem Zahlbegriff begonnen, weil ich im weiteren Verlauf die Problematik des Unendlichen ansprechen möchte, um dann zum Mengenbegriff und zu den Mengenlehren kommen zu können.

Der Begriff des Unendlichen kommt öfter vor, als wir es uns vorstellen. Denn der Unendlichkeitsbegriff kommt in der Reihe der natürlichen Zahlen, bei den rationalen Zahlen,.. vor und wir arbeiten mit diesem Begriff ohne irgendeine Schwierigkeit, als ob es etwas Bestimmtes wäre.

Wieso können wir eigentlich Zahlen wie $\sqrt{2}$ bestimmen und damit rechnen? Wissen wir überhaupt, welche Zahl $\sqrt{2}$ darstellt und wie rechnen wir mit dieser Zahl? Man versucht die Zahl mit einem Näherungsverfahren anzunähern. Ein berühmtes Beispiel dafür ist das Heron´sche Verfahren und die Intervallverschachtelung. Diesbezüglich schauen wir ein Beispiel an, nämlich wir werden versuchen das Quadrat über die Diagonale d mit dem

[39] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.161-163

Flächeninhalt 2 anzunähern, indem wir diesen Flächeninhalt durch Rechtecke desselben Flächeninhaltes anzunähern.[40]

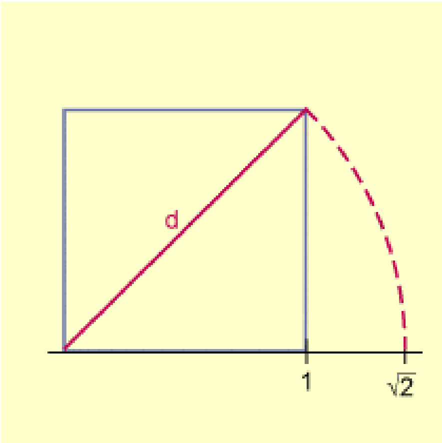


Abbildung 2. 1: Quadrat über die Diagonale d mit dem Flächeninhalt 2 annähern

Als Erstes hat man ein Rechteck R_1, wobei dieses Rechteck Seitenlängen $a_1=2$ und $b_1=1$ hat. Anschließend bildet man das zweite Rechteck, wobei die Seitenlängen dieses Rechtecks mithilfe des arithmetischen Mittels von $a_1=2$ und $b_1=1$ gebildet werden. Also ist $a2 = \frac{a1+b1}{2}$ und $b2 = \frac{2}{a2}$. Diese Methode wendet man immer wieder und wieder an.[41]

[40] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.14
[41] Vgl. ebd., S.14

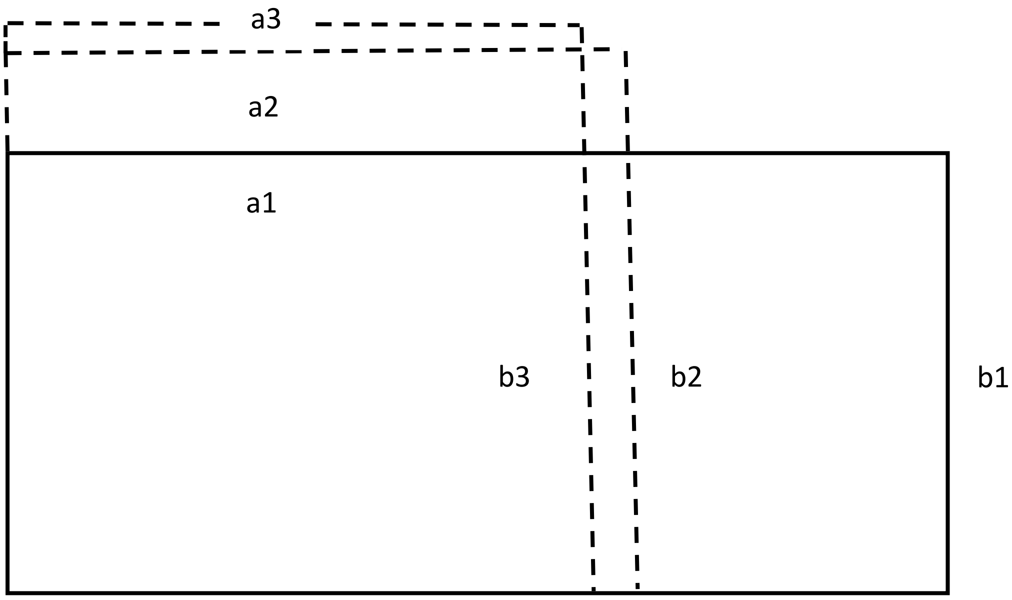


Abbildung 3. 1: Seitenlängen der Rechtecke

Also wenn man die Seitenlängen des n-ten Rechtecks berechnen möchte, müsste man $an = \frac{an-1+bn-1}{2}$ $und\ bn = \frac{2}{an}$ rechnen. Erwähnenswert ist, dass die alle Maßzahlen zu diesen Seiten rationale Zahlen sind und den Rechtecken kann man entnehmen, dass die ai immer kleiner werden, also sie fallen, wobei die bi steigen. Wenn man die Folge der Seiten $ai\ und\ bi$ auf einem Geraden vorstellen würde, wobei der Anfangswert 0 ist und die Werte für $ai\ und\ bi$ als Punkte dargestellt werden.[42] Man könnte dies wie folgt geometrisch darstellen: Bei unserem Anwendungsbeispiel haben wir ganz am Anfang eine Zahlengerade die bei 0 beginnt und unendlich lang ist. Da man aber weiß, dass $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen muss, weil 1<2<4 ist und daraus folgt, wenn man die Wurzel zieht, dass $1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$ ist. Nun haben wir unser erstes Intervall, nämlich [1; 2]. Anschließend rechnen wir unsere weiteren Intervalle mit dem Verfahren, welches oben beschrieben wurde, aus. $a1 = 2,\ b1 = 1$

$$a2 = \frac{a1 + b1}{2} = \frac{2+1}{2} = 1{,}5 \quad b2 = \frac{2}{a2} = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}33..$$

$$a3 = \frac{a2 + b2}{2} = \frac{1{,}5 + 1{,}33..}{2} \approx 1{,}4167 \quad b3 = \frac{2}{a3} = \frac{2}{1{,}4167} \approx 1{,}4117$$

[42] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.15

Dies geht so weiter…..

Nun haben wir gezeigt, dass $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegt und wir wissen auch, dass √2 zwischen 1 und 1,5 liegen muss, weil $1{,}5^2$=2,25>2 ist. Des Weiteren wissen wir, dass √2 zwischen 1,5 und 1,4117 liegen muss, weil $1{,}4167^2$>2 ist. Dieses Verfahren setzt man immer wieder fort und nähert sich somit der Zahl √2 an.

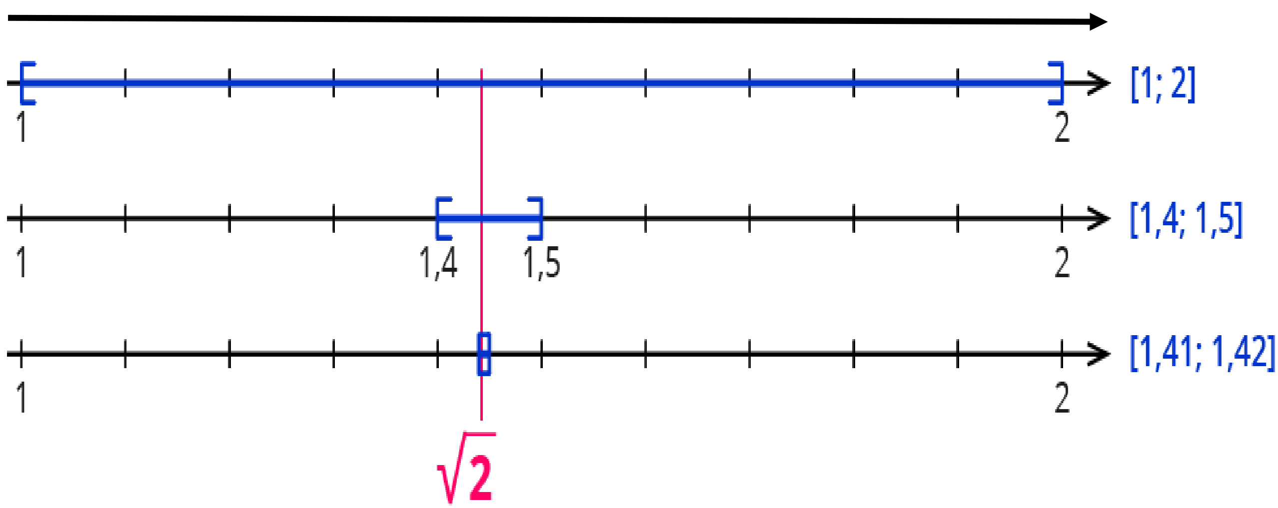


Abbildung 4. 1: Intervallverschachtelung, um die Zahl Wurzel 2 anzunähern

Dieses Verfahren nennt man auch Schachtelung von Intervallen, man versucht durch Wählen immer kleinerer Intervalle, die Zahl $\sqrt{2}$ anzunähern. Die Endpunkte $ai\ und\ bi$ der Intervalle sind zugleich die Endpunkte der Rechteckseiten.

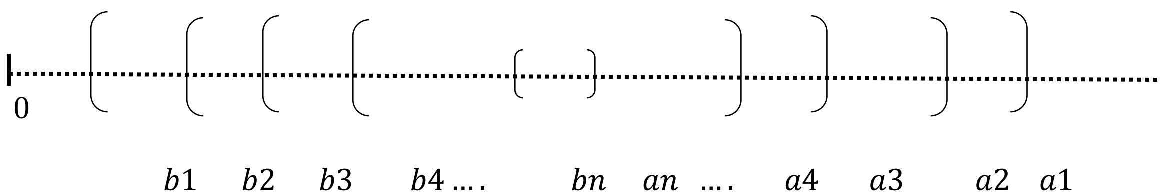


Abbildung 4. 2: Intervallschachtelung (Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.16)

Dies heißt, wenn man immer weitere Intervalle bildet und das Verfahren fortsetzt, dann rückt es bei jedem Schritt um den Punkt für d.

Hier kommen die Probleme mit der Unendlichkeit ins Spiel, denn man muss bei der Intervallverschachtelung mit dem Unendlichen umgehen können. Denn bei der Intervallschachtelung haben wir eigentlich eine Folge von Intervallen, die unendlich ist.

Die Intervalle würden wie folgt ausschauen: [b1; a1], [b2; a2], [b3; a3],…. Und man könnte diese Folge mit den natürlichen Zahlen vergleichen, welche auch ein offener Prozess ist, welches nie endet. Die Punkte, die wir bei den Intervallen gesetzt haben, zeigt uns, dass die Folge weitergeht, dass man noch weitere Intervalle bilden könne. Man versucht, um die Zahl $\sqrt{2}$ bestimmen zu können, diesen unendlichen Prozess abgeschlossen zu sehen, indem man diese Folge als aktual unendlich wahrnimmt. Also man nimmt die Folge so wahr, als ob sie etwas klar bestimmtes Ganzes sei. Man fasst die Folgen $a1, a2, a3, a4, \ldots.\, und\ b1, b2, b3, b4, \ldots.\, zu$ „(an)" und zu „(bn)“ zusammen und die Folge der Intervalle stellt man wie folgt dar: „$[bn, an]$“. Dies hat aber zur Folge, dass die Intervalle als fertige Objekte betrachtet werden.[43]

Mit dieser Methode, die wir oben beschrieben haben, konnten wir die Zahl $\sqrt{2}$ annähern und stellen sie nun in der folgenden Tabelle dar.

Untere Grenze	Obere Grenze	Intervallmitte	Quadrat der Intervallmitte	Prüfergebnis
1	2	1,5	2,25	Zu groß
1	1,5	1,25	1,5625	Zu klein
1,25	1,5	1,375	1,890625	Zu klein
1.375	1,5	1,4375	2,06640625	Zu groß
1.375	1,4375	1,40625	1,97753906	Zu klein
1,40625	1.4375	1,421875	2,02172852	Zu groß
1,40625	1,421875	1,4140626	1,9995729	Zu klein
1,4140626	1,421875	1,4179688	2,01063552	Zu gr0ß
1,4140626	1,4179688	…..	……	……
……	……	…..	…….	…….

Tabelle 2: Intervallverschachtelung

[43] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.16,22-23.

Wir können diese Tabelle immer fortsetzen und kommen zu weiteren Annäherungen. $\sqrt{2} = 1{,}41421356 \ldots \ldots$ Die Punkte, die wir gesetzt haben, zeigen uns, dass wir eigentlich wüssten, wie die Zahl weitergehe. Wir wissen natürlich, wie man es weiterberechnen könnte, aber wissen wir zugleich wie die Zahl wirklich weitergeht, wenn man diese nicht ausgerechnet hat? Denn diese Punkte behaupten es!

Es ist schon gewagt einen unendlichen Prozess als abgeschlossen zu denken. Oder wie kann man überhaupt einer Zahlreihe 1, 2, 3, 4,…. Grenzen setzen? Man versucht mithilfe dessen diese als ein abgeschlossenes Ganzes zu sehen, aber wie soll das möglich sein? Man sammelt zunächst einmal die gezählten Zahlen und versucht mithilfe von Mengenklammern zu symbolisieren. Man kann sich dies so vorstellen, als ob man eine Tasche hätte, welche man öffnet und die Zahlen hineinwirft, wobei linke Mengenklammer uns zeigt, dass die Tasche offen ist. Nach einer Weile behauptet man, dass man schon sehr viele Zahlen gesammelt hätte und versucht die Mengenklammer zuzumachen. {1,2,3,4,5,……..}[44]

Dies ist eigentlich widersprüchlich, weil die Punkte bedeuten, dass die Reihe noch weitergeht, aber die Mengenklammer besagt, dass es zu Ende geht. Cantor versucht dies mit seiner Mengendefinition zu erklären:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen." (Ebbinghaus 2003:1)

Er erklärt dies mithilfe des Gesetzes der Zählung, welche wir bei Cantor schon behandelt haben. Dieses besagte, dass man jederzeit die Nachfolger einer Zahl immer bestimmen könne und genau diese Eigenschaft ermöglicht ihm, die Zusammenfassung, aber dabei muss man bedenken, dass er das Problem bei Verwendung der Mengenklammer, welche darauf hinweist, dass die Menge endet, ein Problem ist. Denn es ist das Problem unendlicher Mengen und die Notwendigkeit des Unendlichkeitsaxioms, welche zu einer anderen Fragestellung führt, nämlich zur Kontinuum-Frage. [45]

Was ist denn eigentlich das Kontinuum?

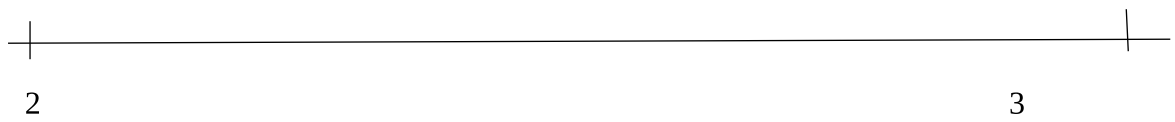
---

[44] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.172
[45] Vgl. ebd., S.172

Cantor sieht das Kontinuum als eine Menge, welches ein Überbegriff für mehrere kontinua ist. Zum Beispiel sieht er die Zahlengerade als das lineare Kontinuum, welche mit der Menge der reellen Zahlen aufgefasst wird.[46] Cantor meinte, dass das Kontinuum der Raum ist, in der wir uns befinden und bewegen. Wir bezeichnen heute das Kontinuum als etwas Kontinuierliches und sind der Auffassung, dass das Kontinuum zum Beispiel eine Menge beschreibt. Wenn wir als Beispiel die Elemente dieser Menge anschauen, dann können wir uns von einem Element dieser Menge sich in unendlich kleinen Schritten entfernen.

Ein konkretes Beispiel:

Man hat eine Zahlengerade und sucht sich zwei Punkte auf dieser Geraden aus, welche wir dann mit 2 und 3 bezeichnen.



Nun haben wir ein Intervall, nämlich das Intervall [2; 3] und schauen alle Punkte zwischen 2 und 3 an. Wir haben nun eine Menge, welche überabzählbar unendlich ist und können diese auch sehen. Das Problem liegt genau darin, dass wir sagen, dass wir diese Menge sehen können. Denn man hat nur eine stetige Menge, von der man voraussetzt, dass bei dieser Menge die Punkte, die wir angeblich sehen, schon gesetzt sind. Wir sehen sie nicht, wir denken, dass es so ist![47]

Wenn man als ein anderes Beispiel eine Größe vorstellen würde, welche kontinuierlich ist, bedeutet dies, dass sie in ihren Grenzen unendlich viele Werte annehmen kann. Früher bezeichnete man auch Flächen, Körper, etc. als ein Kontinuum.

Wir haben einige Informationen gesammelt und können uns zur Mengentheorie von Cantor hinarbeiten. Denn Cantor entwarf seine Mengentheorie als er sich mit dem Kontinuum beschäftigte und darunter verstand er im Großen und Ganzen die reellen Zahlen. Heutzutage wissen wir, dass die Cantor-Menge eine bestimmte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ist.

---

[46] Vgl. ebd., S. 182

[47] Vgl. Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.172

Teil 3:

Mengenlehre

Wir wissen, dass Cantor derjenige war, der die Begriffe Kardinalzahlen, Durschnitt von Mengen, Mächtigkeit von Mengen einführte und er bewies auch, dass natürlichen Zahlen und rationalen Zahlen gleichmächtig sind. Diese bezeichnete er als abzählbar unendlich und die reellen Zahlen waren aus seiner Sicht überabzählbar.[48]

Was bedeutet eigentlich abzählbar oder überabzählbar?

„Eine Menge M ist abzählbar (unendlich), wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen N. D.h. es gibt eine Bijektion zwischen M und der Menge der natürlichen Zahlen. Unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, nennen wir überabzählbar."(Florian, 2009:6)

Cantors Menge ist laut Cantor überabzählbar, aber bevor wir zeigen warum diese Menge überabzählbar sein muss, werden wir zunächst einmal die Cantor-Menge erklären.

Cantor-Menge:

Sie wurde als Gegenbeispiel für das Kontinuum entworfen, welche aber nicht so dicht wie das Kontinuum ist, wird von Cantor wie folgt definiert:

„Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_v}{3^v} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten c_v nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann."(Florian, 2009:3)

Was sollte man sich nun darunter vorstellen? Geometrisch kann man die Cantor-Menge in wenigen Schritten darstellen. Dafür benötigt man ein Intervall, beispielweise das Intervall [0; 1]. Anschließend teilt man dieses Intervall in drei gleich große Intervalle und erhält $[0;\frac{1}{3}]$,

[48] Vgl. Florian (2009), S.2

$(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ und $[\frac{2}{3};1]$. Man nimmt das mittlere Intervall weg und erhält $\left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};1\right]$. Danach setzt man dasselbe Verfahren nochmal ein. Man teilt die entstandenen Intervalle jeweils wieder in drei gleich große Intervalle und streicht die mittleren Intervalle weg. Man erhält danach: $\left[0;\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9};1\right]$. Natürlich kann man diesen Prozess unendlich oft wiederholen. Also die Cantor-Menge besteht dann genau aus den Punkten des Intervalls [0; 1], die nicht weggelassen wurden![49]

Folgende Abbildung soll dies veranschaulichen:

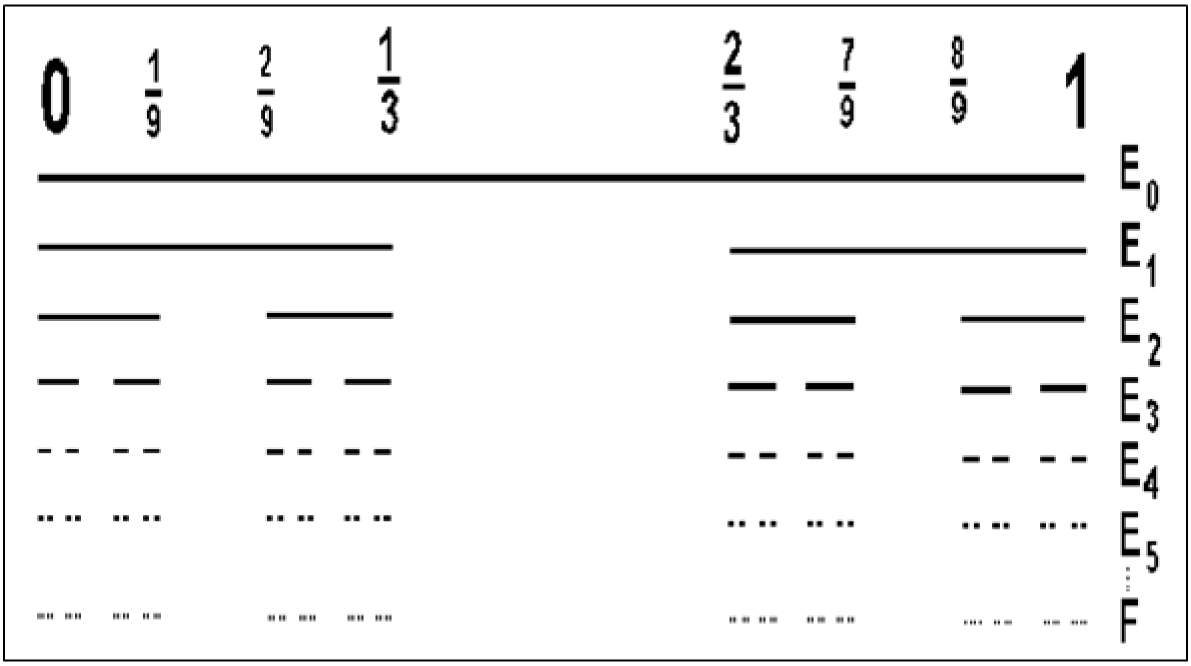


Abbildung 5. 1: Cantor-Menge

Also kann man allgemein die Cantor-Menge mit n-ten Iteration so definieren: $C_n := \frac{C_{n-1}}{3} \cup (\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3})$ und wissen, dass die Division komponentenweise erfolgen muss.[50]

[49] Vgl. Florian (2009), S.4
[50] Vgl. ebd., S.4

Nun kommen wir zu dem Punkt, wo wir zeigen wollen, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist. Oben haben wir definiert, was überabzählbar bedeutet, nämlich wir wollen zeigen, dass es keine Bijektion zwischen der Cantor-Menge und der Menge der natürlichen Zahlen gibt.

Es wäre nicht schlecht zu erklären, was eine Bijektion ist.

Eine Funktion, die von X nach Y abbildet. ist bijektiv, wenn sie zugleich injekttiv und surjektiv ist. Dies bedeutet, wenn für $\forall y \in Y\ genau\ ein\ x \in X\ mit\ f(x) = y$ existiert. Ganz einfach ausgedrückt bedeutet es, dass jeder Punkt in der Zielmenge Y genau einmal getroffen wird.

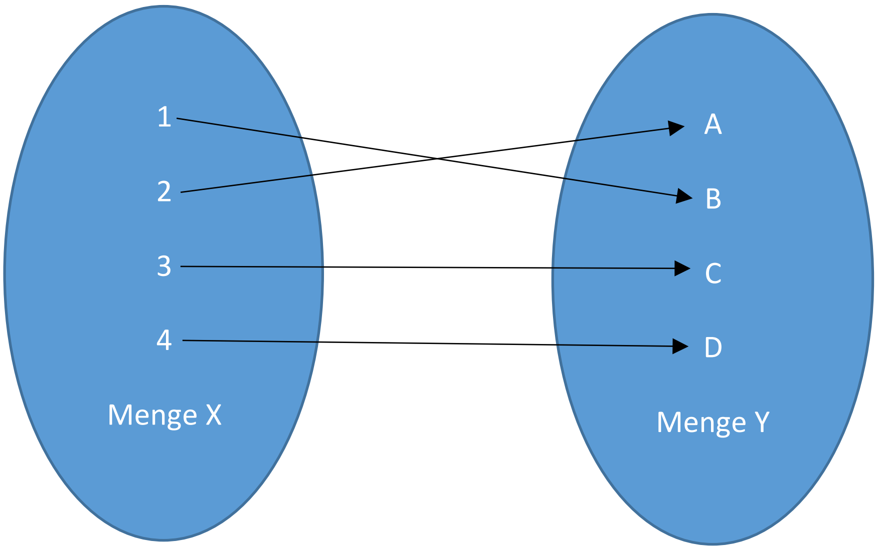


Abbildung 5. 2: Bijektion

Nachdem wir auch geklärt haben, was eine bijektive Funktion ist, können wir mithilfe Cantors Diagonalargument zeigen, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist. Man versucht es zu zeigen, indem man es indirekt angeht, also indem man annimmt, dass die Cantor-Menge abzählbar ist und gelangt am Ende zu einem Widerspruch. Bevor wir beginnen, definieren wir die Cantor-Menge als C:=C_∞.[51]

Also wenn man annimmt, dass die Cantor-Menge abzählbar ist, dann muss es eine Bijektion von C nach ℕ geben. Als nächstes bilden wir beliebige Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$, die in C enthalten ist und eine bijektive Funktion ist: f:C→ ℕ, $a_n \rightarrow n$. Somit können wir für jede beliebige Folge ein weiteres Element dieser Menge finden. Also wir bilden eine neue Folge, indem wir die erste Zahl nach dem Komma der ersten Folge nehmen, die zweite Zahl (nach dem Komma) der zweiten Folge, die dritte Zahl der dritten Folge und so weiter. Also mit einem Beispiel würde dies wie folgt ausschauen:

$$a_1 \coloneqq 0{,}34582682 \ldots\ldots$$

$$a_2 \coloneqq 0{,}00253735 \ldots\ldots$$

$$a_3 \coloneqq 0{,}13245508 \ldots\ldots$$

$$a_4 \coloneqq 0{,}68003445 \ldots\ldots$$

$$a_5 \coloneqq 0{,}52348990 \ldots\ldots$$

:

:

Also die entstandene Folge schaut dann so aus, welche ich mit b definiere:

b:=0,30208… Anschließend wird zu jeder unendlich vielen Dezimalstellen 1 hinzugefügt und es entsteht eine neue Zahl. b(neu):=0,41319… und wir wissen, dass diese Zahl in der Liste mit keiner anderen Zahl übereinstimmt, weil sie sich mindestens einer Stelle von jeder Zahl,

[51] Vgl. Florian (2009), S.6

die in der Liste vorkommt unterscheidet. Somit konnte Cantor zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen, welche er als seine Cantor-Menge sieht, überabzählbar ist.[52]

Des Weiteren besitzt die Cantor-Menge topologische, maßtheoretische, geometrische und mengentheoretische Eigenschaften. Also die Cantor-Menge ist kompakt, nicht dicht in [0; 1], weil es auch abgeschlossene Teilmengen des Intervalls [0; 1] außer [0; 1] gibt, die die Cantor-Menge enthält. Dann ist die Cantor-Menge total unzusammenhängend, dies wissen wir, weil C keine zusammenhängende Teilmenge mit mehr als einem Punkt besitzt. Außerdem ist die Menge perfekt, was bedeutet, dass sie eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist, welche abgeschlossen ist und alle ihrer Punkte ein Häufungspunkt ist. Ganz einfach erklärt bedeutet ein Häufungspunkt ein Punkt, wobei unendlich viele Punkte der Menge sich in der Nähe dieses Punktes befinden. Die letzte Eigenschaft, welche ich noch nicht erwähnt habe, ist, dass die Cantor-Menge keine isolierten Punkte hat.[53]

„Ein Element a einer Menge X ist ein isolierter Punkt, wenn es eine Umgebung von a gibt, in der außer a keine weiteren Elemente von X liegen. Ein Punkt $a \in X$ ist also genau dann isoliert, wenn a kein Häufungspunkt von X ist.“ (Florian, 2009:S.8)

Wir wissen, was die Cantor-Menge ist, welche Eigenschaften diese besitzt und dass Cantor derjenige war, der die Mengenlehre eingeführt hat, aber wie entwickelte sich der Mengenbegriff und welche anderen Mengenlehren gibt es noch?

Den Mengenbegriff kann man unterschiedlich definieren, einerseits kann man diesen entweder kollektiv oder distributiv erklären. In der heutigen Mathematik und im Alltag wird derzeit die distributive Variante verwendet. Wenn man den Mengenbegriff kollektiv betrachtet, dann ist eine Menge eine Kollektion von Objekten, welche durch Zusammensetzung der Objekte zu einer Ganzheit gebildet wird. Das heißt, man kann die Objekte sinnlich wahrnehmen und die

[52] Vgl. Herold (2016), S.41
[53] Vgl. Florian (2009), S-7-10

Menge wird in dem Zusammenhang auch als sinnlich wahrnehmbares Objekt gesehen. Bei dem Mengenbegriff, welchen wir eigentlich verwenden, werden die Teile von der Ganzheit total getrennt und diese Teile sind auch untereinander völlig unabhängig. Als ein Beispiel kann man die Zahl 5 hernehmen, welche ein Element aller natürlichen Zahlen ist, gleichbedeutend mit der Aussage „5 ist eine natürliche Zahl".[54] Diese Definition der Mengen von Cantor ermöglicht uns, den Schritt zur aktualen Unendlichkeit zu wagen!

Um überhaupt verstehen zu können, wie die Mengen, welche wir distributiv erklären, existieren, müssen wir das Universalienproblem unter die Lupe nehmen.

Vielen Philosophiestudenten ist dieses Problem als der Universalienstreit bekannt, wobei es darum ging, herausfinden zu wollen, was den Allgemeinbegriffen wie Schönheit, Zahl, Mensch, etc. entsprechen würde.

Bei diesem Universalienstreit gab es 4 große Positionen, welche ich gleich erklären werde und dabei werde ich die Position, welche Cantor hatte, ein bisschen genauer betrachten.

[54] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.273

Der Universalienstreit:

Wie es schon gesagt wurde, gab es bei diesem Streit 4 Positionen, nämlich der radikale Realismus, der gemäßigte Radikalismus, der Konzeptualismus und der Nominalismus.

Radikaler Realismus:

Platon war einer der berühmtesten Vertreter dieses Streites. Wir haben schon Platons Ideenlehre kennengelernt, welche besagt, dass Ideen nicht einfache Produkte der Gedanken sind, sondern sie sind dem Bereich der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet, was bedeutet, dass diese Ideen eine andere Seienskategorie besitzen. Die Ideen an sich existieren bei Platon und genau diese Ideen, welche Jenseits existieren und wir nicht sinnlich wahrnehmen können, stellen die Wirklichkeit dar. Diese Ideen, die wir mit den Sinnen nicht wahrnehmen können, existieren unabhängig menschlicher Gedankenleistung und die Universalien haben eine ontologische Existenz. [„Ontologie ist die Lehre vom Sein, bzw. von den grundsätzlichsten, allgemeinsten, elementarsten, fundamentalen Eigenschaften, den Prinzipien, den grundsätzlichsten Wesens-, Ordnungs- und Begriffsbestimmungen des Seins“. (Möller, online, siehe Literaturverzeichnis)]

Platon erklärt auch, warum die Ideen den Menschen mit den Sinnen nicht wahrnehmbar ist und dies macht er mit seinem sehr berühmten Höhengleichnisses.

Das Höhengleichnis:

Also laut Platon sind die Menschen nur Abbilder der wirklichen Realität und dies argumentiert er mit folgendem Beispiel: Man soll sich nun vorstellen, dass ein Mensch in einer Höhle gefesselt ist und dass dieser Mensch in seinem Leben nur eine weiße Wand gesehen hat, auf diese Schatten von Dingen geworfen werden. Die Schatten, die der gefesselte Mensch sieht, sind die Schatten von Dingen, welche Menschen außerhalb der Höhle tragen und jedes Mal, wenn sie vorbeigehen, werfen die Dinge, die sie tragen, Schatten. Diese Menschen befinden sich hinter einer Mauer und zugleich außerhalb der Höhle, wo die Sonne strahlt und die Dinge bestrahlt. Nur die Schatten der Dinge sind für den Gefesselten sichtbar, weil die Menschen, die die Dinge halten, hinter der Mauer gehen und die Mauer schirmt Sonnenlicht ab. Da der gefesselte Mensch nur die Schatten wahrnimmt und nur die Stimmen der Menschen hören kann, ist für ihn dies die Wirklichkeit, weil er nichts anderes kennt. Platon meint, dass der gefesselte Mensch nur dann die Wahrheit erfahren könne, wenn er es sich von seinen Fesseln lösen kann und die Höhle verlassen kann. Aber wenn wir diesen Menschen von seinen Fesseln befreien würden, dann würde er sich nicht trauen, die Höhle zu verlassen, weil sie auch Angst vor der Wahrheit haben.

Also sind die Universalien bei den Vertretern des radikalen Realismus eigenständige Realitäten und existieren unabhängig von äußeren Einflüssen.[55]

Gemäßigter Realismus:

Diese Position ist ein bisschen weniger radikal und geht auf Aristoteles zurück. Trotzdem wird auch bei dieser Position den Universalien eigene Existenz zugeordnet, aber sie existieren nicht unabhängig von Objekten und Subjekten. Als ein Beispiel wird der Mensch selbst hergenommen, welcher nicht eigenständig existiert, sondern der Mensch wird durch seine wesentlichen Eigenschaften zusammengefasst, welche bei jeden Menschen anders sein kann.[56]

Konzeptualismus:

Johannes Roscelin gründete die Position „Konzeptualismus“, welche der Ansicht ist, dass die Universalien nur Begriffe wären, also sie kommen nur in menschlichem Verstand vor, was man sich schon denken kann, weil die Position seinen Namen aus dem lateinischen hat und gleichbedeutend mit dem Wort „Begriff“ ist. Für sie sind Begriffe wie „Gerade“, „Schönheit“,

[55] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.274
[56] Vgl. ebd., S.275

„Zahl“, „Mensch“ nur Konstrukte des Verstandes und deswegen können sie nicht selbstständig existieren.[57]

Nominalismus:

Der Gründer dieser Position war Wilhelm Ockham, welcher sowohl den Realismus als auch den Konzeptualismus verneinte, weil für ihn die Universalien nicht existierten. Was existieren kann, sind nur die einzelnen konkreten Objekte. Man kann aus dieser Position die Universalien auch als Fiktionen interpretieren.

Warum haben wir nur diese Positionen angeschaut?

Weil heutzutage alle mathematischen Begriffe auf irgendeiner Weise mengentheoretisch definiert werden können, kann man sie auch auf den Begriff der Menge zurückführen.

„Damit ist die ontologische Frage nach den mathematischen Objekten auf die Frage nach den Mengen und der mathematische Universalienstreit auf die Universalie „Menge“ reduziert.“(Bedürftig und Murawski, 2004: 275)

Wir wissen heute, dass der Platonismus, der Neukonzeptualismus und der Neonominalismus Entsprechungen haben, welche das Problem der Mengenexistenzweise betreffen. Denn der Platonismus besagt ja, dass alles existiert, was nicht widersprüchlich ist, aber wenn wir dies auf die Mengen anwenden, bedeutet es, dass es die Menge aller Objekte zu jeder Eigenschaft gibt, welche richtig formuliert wurde und widerspruchsfrei ist. Die Menge dieser Objekte existiert selbstständig und die Objekte dieser Menge tun dies auch. Erwähnenswert ist auch, dass die Menge unabhängig von der Existenz der Elemente existieren kann und dass man Eigenschaften

[57] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.275

notwendigerweise mithilfe des Aussonderungsaxiom von Zermelo-Fraenkel, welches wir dann genauer anschauen werden, eingeschränkt, falls es zu Widersprüchen führen sollte.[58]

Platons Position haben wir am genauesten durchgemacht und möchte den Unterschied zwischen Platons Position und den neuen Platonismus verdeutlichen. Platon hielt die Mengen für Ideen, aber beim neuen Platonismus entspricht die Existenzweise der Mengen nicht derer ihrer Elemente. Die Mengen existieren eigenständig, aber sie existieren als Mengen dieser Elemente, was bedeutet, dass die Menge der ganzen Zahlen unabhängig von ihren Elementen existiert. Diese Position vertrat Georg Cantor, welcher uns auch ermöglicht hat, den Schritt in die aktuale Unendlichkeit zu wagen, indem er fest daran überzeugt war, dass das Unendliche eigenständig existieren würde.[59]

Nun wissen wir die Position Cantors und haben einen Einblick in seine Mengenlehre bekommen, aber welche Mengenlehren gibt es noch?

Also wir werden jetzt die Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel betrachten. Cantors Mengenlehre erlaubte Elemente durch ein Gesetz zu einem Ganzen zusammenzufassen, welches das allgemeine Prinzip der Abstraktion ist und ihnen erlaubt, Mengen ohne Probleme zu bilden. Dieses Prinzip der Abstraktion setzte sich bei Cantor wie folgt zusammen:

„ ϕ *bezeichne eine Eigenschaft* (*die das Gesetz der Zusammenfassung bestimmt*).

$$\textit{Dann gibt es die Menge } x \textit{ der Elemente } y, \textit{für die } \phi(y) \textit{gilt}.$$

$$\textit{Formal}: \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow \phi(y)].$$

$$\textit{In dieser Art der Mengenbidung sehen die zugehörigen Mengenterme so aus}:$$

$$x = \{y |\ \phi(y)\}.\text{"}(\textit{Bedürftig und Murawski}, 2014: 280)$$

[58] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.276
[59] Vgl., ebd., S.276

Nun kommen wir zum Ernst Zermelo, welcher eine wichtige Rolle bei der Mengenlehre gespielt hat, weil er der Meinung war, dass genau diese Zusammensetzung, die wir oben definiert haben, der Grund für die Antinomien sind. Er war derjenige, der eine Lösung dafür anbot, nämlich indem er die Mengenbildung einschränkte, was aber zur Folge hatte, dass die Größen der Mengen eingeschränkt wurden. Das Prinzip der Abstraktion ersetzte er durch das Aussonderungsaxiom: $\forall z \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow y \in z \wedge \phi(y)]$. In diesem Fall ist ϕ eine Eigenschaft und wenn eine Menge z vorgegeben ist, dann gibt es eine Menge x mit y-Elementen aus z, für diese die Eigenschaft $\phi(y)$ gilt. Genau hier kann man die Einschränkung von Zermelo sehen, weil die Mengen x nur in Mengen z, welche vorgegeben wurden, gebildet werden, wobei in diesen Mengen y-Elemente ausgesondert werden. Somit erhalten wir die Menge: $x = \{y \in z | \phi(z)\}$.[60]

Da das System von Ernst Zermelo von Abraham H. Fraenkel weiterentwickelt wurde, nannte man dieses System als Zermelo-Fraenkel´sches System (ZF). Dieses System besitzt folgende Axiome, welche wir als nächstes auflisten werden.[61]

[60] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 280

[61] Vgl. ebd., S.280

Tabelle der Axiome nach ZF-Mengenlehre:

Axiome	Mengenschreibweise	Bedeutung
1) Extensionalitätsaxiom	$\forall x \forall y \left[\forall z \begin{pmatrix} z \in y \\ \leftrightarrow \\ z \in y \end{pmatrix} \rightarrow x = y \right]$	Bestimmung des Grundprinzips des mengentheoretischen Denkens, das extensional und quantitativ ist und nicht intentional, weil sonst die Mengen nicht durch die Elemente zu unterscheiden wären, sondern die Bedeutung der Elemente würden auch eine Rolle spielen. Z.b.: Menge der Teiler 27 und Menge der Potenzen von 3 kleiner als 80 müsste man unterscheiden, obwohl beide Mengen dieselben Elemente besitzen.[62]
2) Axiom der Paarmenge	$\forall x \forall y \exists z \forall u \begin{pmatrix} u \in z \\ \leftrightarrow \\ u = x \vee u = y \end{pmatrix}.$	Dieses Axiom ermöglicht uns aus zwei Gegenständen eine einzige Menge zu machen, indem wir diese zu einem neuen Gegenstand zusammenfassen, welcher abstrakt ist und als Paarmenge bezeichnet wird.[63]

[62] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 281-282
[63] Vgl. ebd., S.282

3) Axiom der Vereinigungsmenge	$\forall x \forall \exists y \forall z \begin{bmatrix} z \in y \\ \leftrightarrow \\ \exists u (z \in u \wedge u \in x) \end{bmatrix}$. $Falls\ x = \{a, b\}, dann\ schreibt\ man = a \cup b.$	Wenn man zwei oder mehrere Mengen hat, können wir mithilfe dieses Axioms eine neue Menge y bilden, welche alle Elemente der Mengen beinhaltet.[64]
4) Axiom der Potenzmenge	$\forall x \exists y \forall z \begin{bmatrix} z \in y \\ \leftrightarrow \\ \forall u (u \in z \rightarrow u \in x) \end{bmatrix}$. $y = Potenzmenge$ $\mathrm{P}(x) \coloneqq \{z \mid z \subseteq x\}.$	Die Teilmengen von einer Menge x kann man wiederum zu einer Menge $\mathrm{P}(x)$ zusammenfassen und wenn die Anzahl der Elemente der Menge x n ist, dann wissen wir, dass die entstandene Menge $\mathrm{P}(x)$ 2^n Elemente besitzt. Wenn x unendlich wäre, dann haben wir wieder das Problem der aktualen Unendlichkeit vor Augen.[65]
5) Schema der Aussonderung	$\forall x_1 \forall x_2 \dots . \forall x_n \forall y \exists z \forall u \Big(u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \phi(u, x_{1,} x_2, \dots, x_n)\Big).$	Dieses Axiom haben wir oben schon besprochen, aber was wir noch nicht erwähnt haben, ist, dass dieses Aussonderungsaxiom ein Schema von Axiomen ist, also dass jede Eigenschaft,

[64] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 282-283
[65] Vgl. ebd., S.283

	$\phi =$ $Ausdruck\ der\ Sprache\ der\ Mengenlehre$; z nicht frei; $x_{1,}x_2, \dots, x_n$ sind frei und verschieden von u.	welches durch ϕ gegeben ist, ein eigenes Axiom hat. Da Eigenschaften in Zusammenhang mit Relationen meistens entstehen, wollen wir dieses Axiom ganz allgemein für n+1 Ausdrücke ϕ angeben.[66]
6) Unendlichkeitsaxiom	$\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \cup \{u\} \in x)]$ Diese Eigenschaft sagt, dass sie induktiv ist, also, dass die leere Menge auch existiert und als nächstes Element die leere Menge vereinigt mit der Menge, die die leere Menge enthält. Also:1.Element: $\emptyset$, 2.Element: $\emptyset \cup \{\emptyset\}$=$\{\emptyset\}$,	Unendlichkeitsaxiom bedeutet auch Existenzaxiom, das heißt man erfordert die Existenz einer Menge x, wobei zwei Bedingungen gelten müssen: 1) Das 1.Element soll die leere Menge y sein, welches durch ψ bestimmt ist. $\psi(y) \leftrightarrow := y = \emptyset$ 2) Es muss ein mengentheoretischer Zählprozess geben, das heißt, wenn u$\in x$, dann muss der Nachfolger

[66] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 283

	3.Element: $\{\emptyset\}\cup\{\{\emptyset\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ldots$. Wir sehen, dass diese Menge eigentlich gleich wie die Menge der natürlichen Zahlen verläuft, weil wenn man für $0=\emptyset$ setzt, für $1=\{\emptyset\}=\{0\}$, für $2=\{0,1\},\ldots$, $n+1=n\cup\{n\},\ldots$! Somit ist diese Menge genau die Menge $\mathbb{N}$.[67]	$u\cup\{u\}\mathit{wieder\ in\ x}$ sein![68]
7) Schema der Ersetzung	$\forall u\left[\forall x\forall y\forall z\begin{pmatrix}x\in u\\ \wedge\\ \varphi(x,y)\\ \wedge\\ \varphi(x,z)\\ \rightarrow\\ y=z\end{pmatrix}\rightarrow\exists w\forall v\left(v\in w\leftrightarrow\exists x\left(x\in u\wedge\varphi(x,v)\right)\right)\right].$ Um es einfacher zu veranschaulichen, ersetzen wir nun die Operationen φ durch F	Falls man von einer Menge u zu einer neuen Menge w übergeht, wird dies mithilfe dieser Ersetzungsaxiome beschrieben. Diese kommen also zum Ausdruck, wenn mengentheoretische Operationen F auf die Elemente $x\in u$ anwendet und gleichzeitig die Bilder (F(x)) zusammengefasst werden. Einfach ausgedrückt sind diese Operationen Zuordnungen, welche

[67] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 284
[68] Vgl. ebd., S. 284

	und schreiben mithilfe der Mengenterme. $\forall u \exists w(w = \{F(x) \mid x \in u\})$. Wir sehen also den Übergang von der Menge u zur Menge w, welche Bilder von Elementen aus u sind, indem wir beim Übergehen u durch w ersetzen.[69]	Mengen anderen Mengen zuordnet.[70]
8) Fundierungsaxiom	$\forall x \begin{bmatrix} x \neq \emptyset \rightarrow \\ \exists y(y \in x \land y \cap x = \emptyset) \end{bmatrix}$ In diesem Zusammenhang fassen wir das Elementzeichen $\in$ als eine eingeschränkte Relation zusammen und dies führt dazu, dass jede Menge, welche nicht leer ist, ein $\in$-minimales Element besitzt,	Wir konnten sehen, dass eine Menge auch eine Menge als Elemente oder Verkettungen von Mengen als Elemente haben kann und das Fundierungsaxiom besagt, dass falls wir eine Menge x haben, die nicht leer ist, gibt es Elemente y derart, welche keine Elemente von x sind.[72]

[69] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 285

[70] Vgl. ebd., S.284

[72] Vgl. ebd., 285-286

	weil Mengen eigentlich Mengen von Elemente sind, welche wiederum Mengen sind.[71]	
9) Auswahlaxiom	$\forall x[\forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \neq \emptyset \wedge z \neq \emptyset \wedge (y = z \vee y \cap z = \emptyset)) \rightarrow \exists w \forall v(v \in x \rightarrow \exists u(w \cap v = \{u\}))]$	Dieses Axiom hat eine besondere Bedeutung, denn sie besagt, dass zu jeder Menge, welche aus nichtleeren Mengen besteht, eine Auswahlfunktion existiert, was bedeutet, dass also eine Funktion, die jeder dieser nichtleeren Mengen ein Element derselben zuordnet und zuletzt diese auch auswählt. Dieses Axiom ist eigentlich nur für unendliche Folgen bedeutsam, weil bei endlichen Mengen dieses Axiom trivialerweise gilt.[73]

Als nächstes schauen wir uns die Mengenlehre nach von Neumann, Bernays und Gödel an und können die Unterschiede mithilfe dieser Tabellen leichter erkennen. Auch bei von Neumann, Bernays und Gödel ging es darum, dass man die Antinomien vermeidet, aber sie waren der Meinung im Gegensatz zu Zermelo, dass die Ursache der Antinomien nicht in der Existenz von

[71] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 286
[73] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 287

großen Mengen sahen, sondern daran, dass man diese sehr großen Mengen wie ganz normale Mengen behandelt hat. Außerdem wollten Neumann, Bernays und Gödel nicht die Mengenbildung einschränken, sondern sie wollten all die entstehenden Gesamtheiten ordnen und sortieren. Der Grundgedanke bei dieser Mengenlehre ist, dass man Mengen von Klassen unterscheiden muss, denn die Gegenstände dieser Mengenlehre sind die Klassen. Mengen können in einer Elementbeziehung zu anderen Klassen haben und die Unmengen, welche man auch als Klassen bezeichnet, können keine Elemente anderer Klassen sein.[74]

Da man bei dieser Mengenlehre Mengen als Klassen sieht, wäre es hilfreich die Menge zu definieren, weil wir immer wieder auf die Definition zurückgreifen werden.

Also eine „Klasse x heißt Menge, wenn es eine Klasse K gibt mit x$\in K$.-Wir notieren dies als „mg(x)".- Klasse K heißt echte Klasse, wenn K keine Menge ist." (Bedürftig und Murawski, 2014: 288).

Bei den Axiomen dieser Mengenlehre, welche wir in der Tabelle vorstellen werden, werden wir kleine lateinische Buchstaben für Mengenvariablen und Großbuchstaben für Klassen verwenden. Auch bei der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel gab es ein Axiom, welches die Einschränkung der Eigenschaften auf Mengen erkennbar machte, nämlich das Axiom „Schema der Komprehension":$\exists Z \forall u \big(u \in Z \leftrightarrow mg(u) \wedge \varphi(u)\big)$. Z beschreibt die Klasse und wird mit einem Klassenterm erkennbar: Z=$\{u|\varphi(u)\}$, aber man sollte auf die Klammern achten, welche wir als Mengenklammern kennen, aber in den Klassentermen werden diese Klammern als Klassenklammern gesehen.[75]

Obwohl es inhaltlich nicht wirklich Unterschiede zwischen diesen zwei Mengenlehren gibt, unterscheiden sie sich ziemlich in der Schreibweise.

[74] Vgl. ebd., S.288
[75] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 289

Tabelle der Axiome der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel:

Axiome	Mengenschreibweise	Bedeutung
1) Extensionalitätsaxiom	$\forall X \forall Y[\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y]$	Die Bedeutung dieses Axioms ist gleich wie in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, nur hier wird über die Gleichheit von Klassen geredet.[76]
2) Axiom der Paarmenge	$\forall x \forall y\big[mg(x) \wedge mg(y) \rightarrow \exists z\big(mg(z) \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)\big)\big].$	Wie man auch der Mengenschreibweise entnehmen können, können nur Mengen zu einer Paarmenge zusammengefasst werden, aber man kann ohne Probleme auch Klassen {x; y} bilden, wenn x und y Mengen sind, aber es muss gefordert werden, dass {x; y} eine Menge ist![77]
		Man braucht überhaupt kein Axiom, um Klassen zu vereinigen. Denn wenn beispielsweise zwei Klassen hat und diese vereinigen

[76] Vgl. ebd., S.290
[77] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 290-291

3) Axiom der Vereinigungsmenge	$\forall x[mg(x) \rightarrow \exists y[mg(y) \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))]$ Zusammengefasst bedeutet dies: $\forall x(mg(x) \rightarrow mg(\cup x))$.	möchte, dann kann man dies wie folgt tun: $A \cup B := \{u \mid u \in A \vee u \in B\}$. Wenn a und b Mengen sind, dann ist die Vereinigung wieder eine Menge und dieses Axiom ist ident mit dem Axiom in der ZF-Mengenlehre.[78]
4) Aussonderungsaxiom	$\forall z \forall v(mg(v) \wedge z \subseteq v \rightarrow mg(z))$.	„Das Schema der Komprehensionsaxiome sichert zu jeder auf Mengen eingeschränkten Eigenschaft φ die Klasse Z der Elemente u mit dieser Eigenschaft. Stammen die u aus einer vorgegebenen Menge v, aus der wir die u aussondern, so soll diese Klasse eine Menge sein. […].“(Bedürftig und Murawski, 2014: 291) Mit der Eigenschaft φ bilden die Elemente $u \in v$ eine Teilklasse Z von v.[79]

[78] Vgl. ebd., S.291
[79] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 291

5) Axiom der Potenzmenge	$\forall x[mg(x) \rightarrow \exists y(mg(y) \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \rightarrow u \in x)))]$	Dieses Axiom setzt Potenzklassen von Mengen als Mengen.[80]
6) Unendlichkeitsaxiom	$\forall x[mg(x) \wedge \emptyset \in x \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \cup \{u\} \in x)]$	Auch das Unendlichkeitsaxiom ist gleich wie bei der ZF-Mengenlehre, nur hier müssen wir Eigenschaft mg(x) in die Forderung einer induktiven Klasse einfügen.[81]
7) Ersetzungsaxiom	$\forall F[\text{Funktion}F \rightarrow \forall x(mg(x) \rightarrow \exists v(v = \{F(y) \mid \in x\} \wedge mg(v)))]$	Hierbei handelt es sich um Operationen F, konkrete Objekte dieser Mengenlehre sind. Das Ersetzungsaxiom möchte dafür sorgen, dass für Funktionen F folgender Satz gilt: Wenn x eine Menge ist, dann sollen die Bilder von Elementen, welche aus x sind, wieder Mengen bilden.[82]
8) Fundierungsaxiom	$\forall X[X \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in X \wedge y \cap X = \emptyset)]$	Dieses Axiom wird gleich von ZF-Mengenlehre übernommen, aber hier wird es in Zusammenhang mit Klassen verstanden.

[80] Vgl. ebd., S.291
[81] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 292
[82] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 292

9) Auswahlaxiom	$\forall X[\forall y \forall z(y \in X \wedge z \in X \rightarrow y \neq \emptyset \wedge z \neq \emptyset \wedge (y=z \vee y \cap z = \emptyset)) \rightarrow \exists E \forall v(v \in X \rightarrow \exists u(W \cap v = \{u\}))]$	Zu jeder Klasse, welche aus nicht leeren und disjunktiven Mengen y besteht, gibt es eine Klasse W, welche aus allen Mengen v$\in X$ nur ein einziges Element hat.[83]

Wir können mithilfe dieser Tabellen die Unterschiede sehen, aber obwohl die Grundgedanken bei beiden Mengenlehren unterschiedlich sind, sind sie auch gleichwertig anzusehen, weil wenn ein Satz über Mengen in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel gilt, dann muss dieses automatisch auch für die Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel gelten. Oder eine Mengenlehre ist genau dann widerspruchsfrei, wenn die andere dies auch ist.[84]

Vorteile von der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel:

Man kann über Klassen reden, welche nicht Elemente der ZF-Mengenlehre sind. Des Weiteren ist der Ausdrucksumgang im mathematischen Alltag viel einfacher. Für die Theorie der Kategorien und Funktionen bietet diese Mengenlehre eine Basis an, welche partiell ist. Also wir können g$\in G$ schreiben, wenn wir zeigen wollen, dass g eine Gruppe ist, aber bei der ZF-Mengenlehre müsste man es umschreiben. Man könnte außerdem das Unendlichkeitsaxiom auslassen und man könnte trotzdem Aussagen über das Unendliche treffen, weil dadurch das

[83] Vgl. ebd., S.293
[84] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 293

Unendliche nicht ausgeschlossen wird, aber wenn man dies bei der ZF-Mengenlehre machen würde, dann würde es bedeuten, dass es keine unendlichen Objekte gäbe![85]

Nun wir haben den Mengenbegriff von Cantor und verschiedene Mengenlehren, welche unterschiedliche Axiomatik hatten, angeschaut. Wir haben beim Universalienproblem Auffassungen über die Existenzweise von mathematischen Begriffen angeschaut, aber können wir jetzt mit diesen Informationen sagen, was Mengen sind oder welche Natur sie haben?[86]

Wenn man aus Cantors Sicht es betrachtet, sind Mengen Gegenstände, welche aus Einzelgegenstände durch Zusammenfassen ein neues Ganzes gebildet wird. Dieser Vorgang, wie wir oben bei Cantor detailliert besprochen haben, vollzieht sich im Gedanken, aber dadurch wird ihre Natur als unabhängig von den Gegenständen betrachtet. Man sagt, dass man sich an die Auffassungen der mathematischen Gegenstände orientieren soll, wenn man wissen möchte, was Mengen sind. Aber dies ist widersprüchlich, weil wir mithilfe des Mengenbegriffes Auskünfte über mathematische Gegenstände erhalten wollten. Man betrachtete auch Mengen als Mengen von Mengen, aber wie soll dies uns helfen, die Bedeutung und Natur vom Mengenbegriff zu bestimmen? Man könnte eigentlich nur mithilfe der Axiomatik Auskünfte über die Natur der Mengen geben. Also wie man auch sehen kann, ist es überhaupt nicht einfach die Natur der Mengen zu bestimmen.[87]

Leider kann man wie beim Zahlbegriff nicht auf die alten philosophischen Aussagen zurückgreifen, weil der Mengenbegriff, außer bei der Unendlichkeit und bei den Paradoxien, kaum vorkommt. Was man also weiß, ist, dass die Axiome die Natur der Mengen charakterisieren. Deswegen fassen wir die Axiome mit ihrer Bedeutung nochmal kurz

[85] Vgl. ebd., S.293-294
[86] Vgl. ebd., S.309
[87] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 309-310

zusammen. Das Extensionalitätsaxiom besagt, dass die Größe, welche zugleich als die Konsequenz des Unendlichkeitsaxioms gesehen wird, eine Menge charakterisiert. Diese Größe überschreitet alle Vorstellung und man kann mithilfe dessen entscheiden, ob eine Menge übersichtlich ist oder nicht. Übersichtliche Mengen sind abzählbare Mengen und das Arbeiten mit solchen Mengen bereitet keine Probleme. Erst Arbeiten mit überabzählbar großen Mengen bereitet das Problem, weil man nicht weiß, um wieviel eine solche überabzählbare Menge größer als eine abzählbare Menge ist.[88]

Da viele Mengen aufgrund ihrer Größe nicht charakterisierbar sind, wurden sie mithilfe des Aussonderungsaxioms eingeschränkt. Dadurch konnte man zwischen Mengen und Unmengen unterscheiden, weil man eine Eingrenzung von dem Bereich jeweiliger Mengen hatte. Des Weiteren haben wir das Potenzmengenaxiom kennengelernt, welches auf die Größen der Mengen mit transfiniten Exponenten wirkt, was wieder das Problem der Kontinuumshypothese (eine Hypothese über die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen[89]) hervorbringt. Außerdem gab es das Ersetzungsaxiom, welches die Mengenvorstellungen der Menschen im „Universum“ sicherte.[90]

Ein weiteres Axiom, welches wir kennengelernt haben, war das Fundierungsaxiom und dieses ist für den Aufbau der Mengen zuständig, indem er für den Aufbau und der Struktur dieser Mengen sorgt. [91]

Zuletzt gab es noch das Auswahlaxiom und dieses „sichert die Existenz einer Auswahlfunktion für eine beliebige Familie von nicht leeren Mengen. Diese wählt aus jeder Menge ein Element aus.

[88] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 310
[89] Vgl. O.V. (2017), [http://unglauben.net/german/index.htm?khypothese.htm]
[90] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 311
[91] Vgl. ebd., S.311

Genauer:

Sei I eine beliebige Indexmenge und A_i eine Familie von nichtleeren Mengen ($A_i \neq \emptyset$),dann existiert eine Abbildung f: $I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i \ mit \ f(I) \in A_i$.“(Steinfeld, 2016:1)

Obwohl diese Aussage für Mathematiker logisch vorkommt, wissen wir, wenn wir diese Aussage für unendliche Menge anwenden wollen würden, alles andere ist als logisch und einfach.

Mathematisch denken bedeutet, dass man mengentheoretisch denken muss, das heißt, man führt irgendwie alles auf die Mengen zurück. Da die natürlichen Zahlen und generell der Zahlbegriff fundamentale Elemente dafür sind, habe ich meine Diplomarbeit mit dem Zahlbegriff begonnen und bis zur Mengenlehre weiterentwickelt. Da die Mengendefinitionen von Cantor wegen des Umganges mit der Unendlichkeit eingeführt wurden, wurde in dieser Arbeit George Cantor ein großer Teil gewidmet.

Teil 4:

Infinitesimal denken und rechnen

Unter dem Infinitesimalen versteht man das unendliche Kleine und in diesem Kapitel wird das Unendliche wieder eine Rolle spielen. Im dritten Kapitel haben wir die Mengenlehren von verschiedenen Philosophen angeschaut und wenn man dies auf das Infinitesimale Denken projiziert, stellt sich die Frage, ob unendliche Mengen in der Realität existieren. Man muss wieder eine Unterscheidung zwischen aktualer und potentieller Unendlichkeit machen, weil diese Frage haben wir schon versucht zu beantworten und kamen zum Ergebnis, dass es potentiell möglich wäre. Nämlich es kommt im Zählprozess im Denken vor. Man stellt sich oft auch die Frage, ob es schon vorgekommen ist, dass ein Moment, in dem das Infinitesimale auftritt, zuerst potentiell erscheint, aber sich im weiteren Verlauf ins Aktuale weiterentwickelt hat.[92]

Welche Beispiele kommen eigentlich dabei vor?

Man denkt an Prozesse wie 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ... und wissen, dass diese Prozesse von den Mathematikern als aktual unendlich angesehen wurde, weil man solche Prozesse als Folge ($\frac{1}{n}$) auffassen konnte. Man muss auch erwähnen, dass eine unendlich keine Zahl nach dieser Folge ($\frac{1}{n}$) abgelehnt hat, weil man sich an die Erfahrungen des Messens gehalten hat.[93]

Bevor wir zu den Problemen des Infinitesimalen Denkens kommen, wäre es sinnvoll, das Infinitesimale genauer anzuschauen.

Das Infinitesimale kann man sehr gut mit einem Beispiel veranschaulichen. Denn die Berechnung des Flächeninhaltes unter einer Kurve mithilfe der Integration ermöglicht uns einen Blick auf das Infinitesimale zu werfen.

---

[92] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 387
[93] Vgl. ebd., S.387

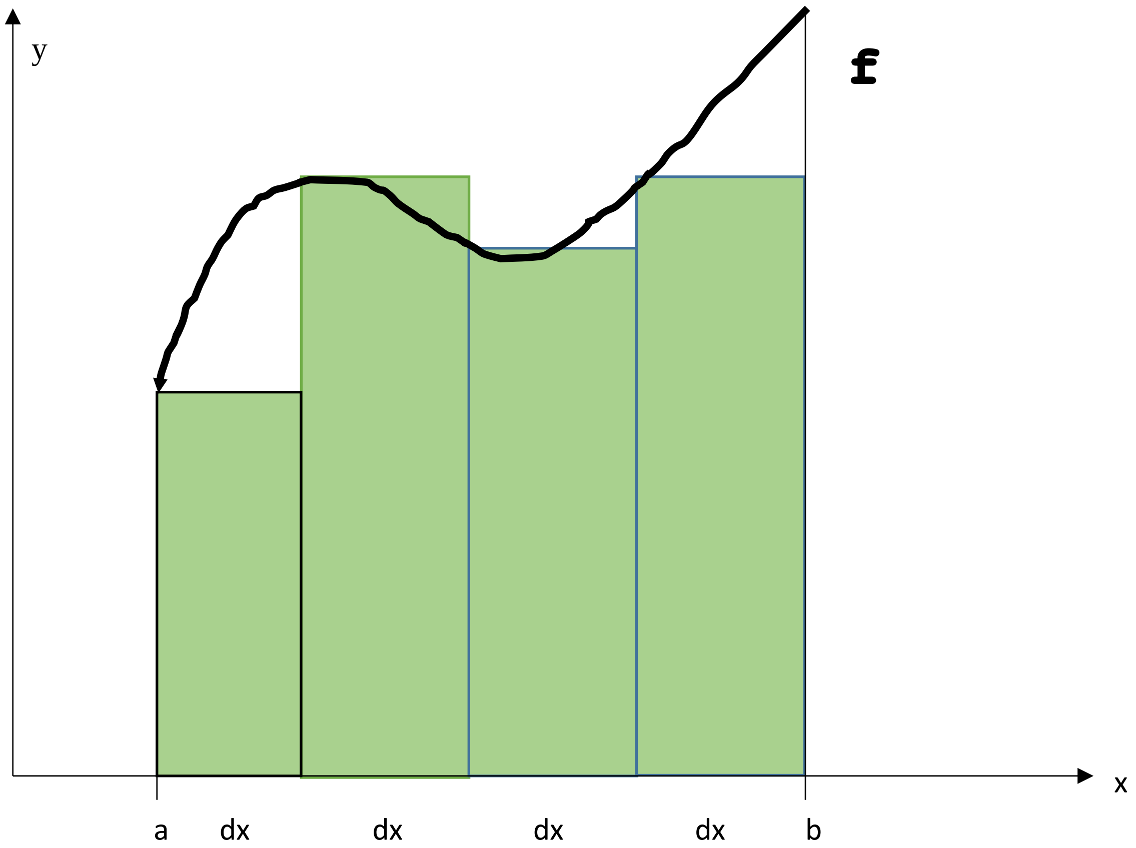


Abbildung 6. 1: Berechnung der Fläche unter einer Kurve

Man weiß, dass das Integral einer Funktion f über einem Intervall dasselbe wie der Flächeninhalt unter einem Graphen dieser Funktion ist. Des Weiteren ist die Erkenntnis des Inhaltes des Hauptsatzes der Differenzial-und Integralrechnung sehr hilfreich für die Mathematiker, weil dieser besagt, dass falls f:[a,b]→ℝ eine stetige Funktion ist, dann ist für $\forall x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion: $F(x) := \int_{x0}^{x} f(t)\, dt$ differenzierbar und an jeder Stelle

$x \epsilon [a, b]$ gilt $F'(x) = f(x)$. Und den Wert des Integrals kann wie folgt berechnen: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.[94]

Wir werden die Bestimmung des Flächeninhalts unter Kurven verwenden, um den Begriff des Infinitesimalen zu erklären. Man wird bei diesem Thema zwei Begriffe immer wieder lesen, nämlich den Begriff des Indivisiblen und Infinitesimalen. Bei der obigen Abbildung nennt man die Streifen der Breite dx Infinitesimale. Bei unserem Beispiel der Integration ist es die infinitesimale Fläche dx, welche die Breite des Flächenstreifens ist, ist eine unbegrenzt kleine Größe, welche natürlich von Null verschieden sein muss. Man erhält infinitesimale Streifen, wenn man das Intervall [0, 1] in sehr viele Teilintervalle der Länge dx zerlegt. Dies bedeutet, wenn man das Intervall in 10 Tausend Teile zerlegt, dann ist dx=0,0001. Man sieht also, je größer die Intervalle werden, desto kleiner wird dx und wenn man annimmt, dass man immer kleinere Intervalle wählt, dann wird dx irgendwann unbegrenzt klein.[95]

Aristoteles befand sich auch mit dem Infinitesimalen und seiner Auffassung nach bestand eine Strecke nicht aus Strecken, sondern aus Infinitesimalen. Bei ihm wird die Strecke als Kontinuum bezeichnet und meint, dass diese unendlich oft teilbar ist. Denn egal wie oft man dieses Kontinuum teilt, dann werden die Ergebnisse trotzdem kontinua sein, egal wie klein die Teile werden.[96]

Das Indivisible wurde von dem Philosophen Demokrit behandelt und bedeutet das Unteilbare. Die Strecken bestand nicht wie bei Aristoteles aus Infinitesimalen, sondern aus unendlich vielen Atomen, aber da diese nicht ausdehnbar sind, waren sie unteilbar. Wenn wir das auf unser Beispiel anwenden, dann bedeutet dies, dass man sich unendlich viele parallele Linien der Breite 0 vorstellen muss, weil sie die Fläche, die wir berechnen wollen, überdecken müssen,

[94] Vgl. Sonar (2016), S.13
[95] Vgl. Sonar (2016), S.14
[96] Vgl. ebd., S. 14

aber dies ist nicht möglich, weil eine Linie mit einer Breite von Null nichts überdecken kann. Euklid meint, wenn man die Summe von allen Indivisiblen bilden würde, würde genau die Fläche ausmachen, die wir oben berechnen wollten.[97]

An das Infinitesimale muss man eigentlich immer denken, weil die Schüler und Schülerinnen sich mit diesem Thema befassen, obwohl es ihnen nicht bewusst ist. Denn das Infinitesimale kommt zum Beispiel bei der Frage: Ob 0,9999..... kleiner oder gleich 1 ist, vor. Wir werden uns in diesem Abschnitt mit dieser Frage beschäftigen.

Wir werden zunächst einmal anschauen, was die SchülerInnen von dieser Frage halten und deswegen betrachten wir die Umfrage von Ludwig Bauer, welcher genau diese Frage für seine Umfrage verwendet hat. Bei der Umfrage nahmen 256 bayrische Gymnasiasten und 50 Mathematikstudenten teil.[98]

Gymnasium:

(a) 0,999...< 1	(b) 0,999... =1	Entfaltung	ungültig
72,2%	31,6%	3,1%	4,3%

Studierende:

(a) 0,999... < 1	(b) 0,999... =1	Entfaltung	ungültig
50%	50%	0%	0%

Abbildung 6. 2: Umfrage

[97] Vgl. Sonar (2016), S.14

[98] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 388

Des Weiteren hat man einige Stichproben mit kleinen Gruppen von Lehrern und Studierenden, welche die Vorlesung zu Analysis I und II schon besucht haben, durchgeführt. Bei der Stichprobe von Lehrern waren 47,1% für 0,999...<1 und bei der Stichprobe der Studierenden nach der Vorlesung waren 90,2% für 0,999...<1, was sehr wunderlich ist. Aus dieser Umfrage und der Stichproben kann man daraus schließen, dass die Teilnehmer der Stichproben sehr unsicher sind. Wie man es auch bei den Lehrern sehen konnte, sind sie sich auch nicht sicher, was diese Frage betrifft, obwohl man annimmt, dass Lehrer es wissen sollten und dass sie sich immer sicher sein müssen. [99]

Wie kommen sie denn zu diesen Antworten, was sind ihre Begründungen?

Zunächst einmal muss man erwähnen, dass das Problem dabei anfängt, als man die unendliche Zahl 0,9999999999..... durch Punkte ... verniedlicht, indem man einfach stattdessen 0,9 Periodisch sagt, denn eigentlich kann man diese Zahl sich kaum vorstellen, wie groß diese ist, weil es unvorstellbar unendlich lang weitergeht. Viele Schüler und Schülerinnen argumentieren ihre Antworten bei der Umfrage mit folgenden Argumenten: 1) Sie sagen, dass sie einst mal gelernt haben, dass die Zahl 0,999... =1 ist. 2) Oder sie sagen, dass die Zahl fast 1 ist. 3) Ein weiteres Argument der Schüler und Schülerinnen war, dass die Zahl 1 sein müsse, weil die fehlende Zahl so klein ist, dass man sie weglassen könne. Wie man auch bei diesen Argumenten sehen kann, sind diese Argumente nicht überzeugend, weil man es nur behauptet und nicht gewiss weiß. [100]

Einige der SchülerInnen haben versucht diese Frage mit Beweisen zu beantworten, welche wir nun anschauen werden.

[99] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 389
[100] Vgl. ebd., S. 390

1.Beweis für 0,999..=1:

Bei diesem Beweis ging man von einem Drittel aus, welches in der Dezimalschreibweise mit 0,333.... geschrieben wird. Wenn $\frac{1}{3}$ =0,33.... ist, dann ist 3 x $\frac{1}{3}$ =0,999,... und da man weiß, dass 3 x $\frac{1}{3}$ nichts anderes als 1 ist, folgt man daraus, dass 1=0,999.... ist.[101]

2. Beweis:

Beim zweiten Beweis verwendeten die Schüler und Schülerinnen das arithmetische Mittel. Nämlich wenn man das arithmetische Mittel der Zahlen 1 und 0,999... berechnet, dann erhält man $\frac{1+0.999\ldots}{2} = 0{,}999\ldots$ wieder die Zahl 0,999...! Da dies nicht möglich ist, außer wenn zwischen 0.999... und der Zahl 1 keine weiteren Zahlen vorkommen, dann müssten beide Zahlen ident sein.[102]

3. Beweis:

Bei diesem Beweis greift man auf die Regeln der Dezimalbrüche und dieser ist algebraisch. Ein Mathematiklehrer versuchte mithilfe dieses Beweises einer Schülerin zu erklären, warum 0.999...=1 sein könnte. Man geht von der Zahl 0.999... aus und multipliziert diese mit der Zahl und erhält somit 9.999... Wenn man von dem Ergebnis einmal die Zahl 0,999... abzieht, dann erhält man 9 x 0.999...=9. Zuletzt müsste man nur noch durch 9 dividieren und man erhält, dass 0.999...=1 ist.[103]

4. Beweis:

Beim letzten Beweis versuchen Studierende mithilfe ihrer Analysis I-Kenntnisse zu erklären, warum die Zahl 0.999...= 1 sein muss.

[101] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 390
[102] Vgl. ebd., S. 391
[103] Vgl. ebd., S. 391

In der Analysis I versucht man mit folgender Summe: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$ diese Behauptung zu beweisen. Denn 0.9+0.09+0,009,...= : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$=1, weil sie dies mit den Partialsummen a_1=0,9 ; a_2=0,99 ; $a_3 = 0{,}999$; a_4=0,9999 ; ... erklären, denn für diese Partialsummen muss $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N (|1 - a_n| < \varepsilon)$ gelten.[104]

Nun haben wir einige Beweise für die Behauptung gesehen, aber man muss auch bedenken, dass bei den ersten 3 Beweisen die Schreibweisen und Rechenregeln aus dem Bereich der endlichen Dezimalbrüche einfach in den Bereich der unendlichen Dezimalbrüche übernommen wurden, aber dies bereitet uns Probleme, welche wir als nächstes betrachten werden. Das Problem wird mithilfe des 3.Beweises veranschaulicht:[105]

Wenn man die Reihenbedeutung von den Zahlen 0.999... und 9,999... anschaut, dann sehen wir, dass das Zwischenergebnis eine Summe ist, welche unendlich weitergeht. 9,999...= (9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...) und 0,999...= (0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ..)

Wenn man die eine Zahl von der anderen abzieht, dann erhält man eigentlich für 9-0,9=8,1; für 0,9-0,09=0,81; 0,09-0,009=0,081;... Also man erhält bei der Rechnung 9,999...-0,999...= 8,1 + 0,81 + 0,081 +... Mit einer Nebenrechnung wurde das Endergebnis berechnet, nämlich man hat die Folge der Partialsummen berechnet und diese ist (8,91; 9,991; 8,9991;...). Das Endergebnis müsste also in der Dezimalbruchschreibweise 8,999... sein. Am Ende von jeder Zwischensumme verschwindet die erste Stelle, weil es angeblich im Jenseits des Unendlichen verschwinden würde. Wie man auch den Argumentationen entnehmen kann, ist es immer fragwürdig mit unendlich vielen Stellen zu rechnen. Falls man das Ergebnis, welches wir bekommen haben, akzeptiert, könnten wir den Beweis erneut durchführen.[106]

[104] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 391
[105] Vgl. ebd., S. 391-392
[106] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 392

„Beweis 3 neu:“ (Bedürftig und Murawski (2014), S. 392)

$$
\begin{array}{rl}
10 \times 0{,}999... &= 9{,}999 ... \\
- \quad 1 \times 0{,}999... &= 0{,}999... \\
\hline
9 \times 0{,}999... &= 8{,}999... \\
0{,}999... &= 0{,}999...
\end{array}
$$

Abbildung 6. 3: Der Beweis für 0,999...=1

Man hat also bei diesem Beweis nichts gewonnen, es sagt nichts Bedeutsames aus! Wir können auch bei dem zweiten Beweis sehen, dass das Ende der Partialsummen im Unendlichen verschwinden. Beim zweiten Beweis versucht man mithilfe der Aussage $0{,}333...=\frac{1}{3}$ den Satz $0{,}999...=1$ zu beweisen, aber entspricht 0,333... wirklich $\frac{1}{3}$, weil man die Zahl durch immer wieder Dividieren der Zahl 1 durch 3 erhält. Der Prozess des Dividierens endet nie, aber wieso kann man dann 0,333...mit $\frac{1}{3}$ gleichsetzen.[107]

Es stellt sich auch die Frage, ob der Grenzwert wirklich erreicht wird.

Bei dem 3.Beweis konnte man sehen, dass die Partialsummen, welche 0,999... ergab mit der Zahl 1 gleichzusetzen versuchte. Also man hat eigentlich versucht eine Folge und eine Zahl gleichzusetzen. Dies klingt für viele unmöglich und falsch, aber sie wissen nicht, dass dieser Ansatz (Zahl=Folge) der Ansatz der Konstruktion der reellen Zahlen ist, aber man muss auch bedenken, dass genau dieser Ansatz gegen die Regel: 1-Folgen, welche von 1 in den Folgengliedern unterscheiden muss, widerspricht.[108]

[107] Vgl. ebd., S. 393

[108] Vgl. ebd., S. 393

Dies beantwortet aber nicht unsere Frage, ob der Grenzwert erreicht wird oder nicht, weil man für beide Ansichten Argumente findet. Die einen sagen, dass der Grenzwert nicht erreicht wird, weil die unendliche Folge der Partialsummen nicht durchläuft und deswegen der Grenzwert nicht erreicht werden kann. Trotzdem nimmt man in der Mathematik an, dass der Grenzwert erreicht wird, weil man 0,999..=1 setzt. Obwohl man 0,999...=1 gesetzt hat, sind viele der Meinung, dass man diese Gleichsetzung machen kann, weil diese unendliche Folge potentiell unendlich aufgefasst wird, was bedeutet, dass diese offen und abgeschlossen ist. Da das Thema zu komplex ist und viele Fragen aufwirft, wurde es von manchen Lehrplänen sogar rausgenommen.[109]

Man hat den dritten Beweis kritisiert, aber man muss auch dazusagen, dass es an der vorgebrachten Kritik gleichviel auszusetzen ist, wie diese Kritik am Beweis!

Die aktuale Unendlichkeit, wie wir schon öfter besprochen haben, behandelt unendliche Mengen als ob sie endlich wären, das heißt, dass die unendlichen Folgen und Folge der Partialsummen als abgeschlossen gesehen werden und genau dabei liegt das Problem! Es gibt auch unendliche Zahlenfolgen wie die Menge der natürlichen Zahlen, die man als abgeschlossen betrachtet, obwohl diese unendlich weitergeht. Dies funktioniert bei der Menge der natürlichen Zahlen, weil diese durch das Gesetz des Zählens entstehen, das heißt diese Zahlen sind für uns sichtbar und vorstellbar. Die natürlichen Zahlen stellen für uns eine Reihenfolge dar, aber bei anderen unendlichen Folgen wie zum Beispiel der reellen Zahlen geht es darum, dass das Folgen der Folgenglieder im Vordergrund steht. Die unendliche Menge der reellen Zahlen kann man nicht als abgeschlossen sehen, weil die Folgenglieder sich von der Reihenfolge abstrahieren und deswegen auch den Charakter der Folge verlieren. Deswegen kann man die beiden unendlichen Mengen nicht vergleichen![110]

[109] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 394
[110] Vgl. ebd., S. 394

Wir haben die Aussage 0,999...=1 unter die Lupe genommen und nun wenden wir uns der Aussage 0,999...<1.

Beginnen wir wieder mit den Begründungen der Schüler und Schülerinnen: Wir wissen aus der Mathematik, dass die Aussage 0,999...=$\frac{9}{9} = 1$ ist, aber die Schüler und Schülerinnen meinen, dass diese Zahl nie die Zahl 1 erreichen wird, weil man unendlich viele 9er dranhängen kann und dadurch wird die Zahl immer kleiner als 1 sein. Oder man sagt, dass dieser Zahl eine, auch so eine kleine Zahl es sein mag, eine Zahl fehlen würde, um 1 erreichen zu können. Ein weiteres Argument wäre, dass die Zahl 1 ein Ganzes darstellt, aber die Zahl 0,999... nie ein Ganzes erreichen könne, weil sie mit Null Komma beginnt![111]

Als nächstes wenden wir uns den Beweisen, die diese Behauptung bestätigen wollen.

1.Beweis:

Bei diesem Beweis versucht man 0,999... mit 1 zu vergleichen, aber um dies zu verstehen, betrachten wir zunächst ein ähnliches Beispiel. Man versucht 0,333... mit einem Drittel zu vergleichen, was bedeuten würde, dass 0,3 mit $\frac{1}{3}$ verglichen wird. Anschließend würde man 0,33 mit $\frac{1}{3}$ vergleichen, dann 0,333 mit $\frac{1}{3}$, dann 0,3333 mit $\frac{1}{3}$, und so weiter. Man könnte dies auch so veranschaulichen, indem man sagt, dass man die Folge (0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; ...) mit der Folge ($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$;...) vergleichen möchte. Da wir aber wissen, dass die einzelnen Folgenglieder kleiner als $\frac{1}{3}$ sind, folgt (0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; ...)< ($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$;...) und man nimmt an, dass also 0,333....< $\frac{1}{3}$ ist.[112]

---

[111] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 395
[112] Vgl. ebd., S.396

Dieselbe Methode kann man auch für die Zahl 0,999... anwenden. Also man vergleicht 0,9 mit 1; 0,99 mit 1; 0,999 mit 1; 0,9999 mit 1 und der Prozess setzt sich fort. Wie wir oben die Vergleiche als unendliche Folge dargestellt haben, können wir dies auch hier machen. Also man möchte die Folge (0,9; 0,99; 0,999; 0,9999;...) mit der Folge (1; 1; 1; 1; 1;.....) vergleichen. Da auch hier die einzelnen Glieder kleiner als 1 sind, kann man sagen, dass die eine Folge kleiner als die andere sei. Wenn man die Partialsumme der ersten Folge bilden würde, dann erhält man 0,999.... und wenn man weiß, dass die zweite Folge nur eine andere Schreibweise für die Zahl 1 ist, dann kann man daraus schließen, dass 0,999...<1 ist.[113]

Man konnte für beide Aussagen gute Ansätze sehen, aber welcher der beiden Ansätze stimmt eigentlich? Beide der Aussagen stimmen eigentlich, weil in der Grenzwertmathematik ist die Aussage 0,999...=1 richtig und in der Infinitesimalrechnung ist 0,999...<1 richtig.[114]

Wir haben uns mit dem Infinitesimalen beschäftigt und wollen uns anschauen, wo wir in der Praxis mit dem Infinitesimalen rechnen. Um überhaupt infinitesimal rechnen zu können, muss man naiv annehmen, dass es unendlich kleine und große Zahlen gibt. Unsere Bezugsgröße sind die reellen Zahlen und die unendlich kleinen Zahlen werden kleiner als alle reellen Zahlen angenommen, die unendlich großen hingegen als größer als diese. Man könnte neue Zahlen bilden, indem man zu beliebigen reellen Zahlen entweder unendlich kleine oder unendlich große Zahlen dazugibt. Um die neuen Zahlen von den alten unterscheiden zu können, geben wir ihnen Bezeichnungen. Die alten werden Standardzahlen und neuen Nichtstandardzahlen heißen. Wenn man beide zusammengeben würden, dann würden sie einen Körper bilden, welchen wir als Körper der hyperreellen Zahlen nennen.[115]

[113] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 396
[114] Vgl. ebd., S.397
[115] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 404-405

Da in diesem Abschnitt auch mit hyperreellen Zahlen gerechnet wird, werden wir die algebraischen Verhältnisse zwischen hyperreellen Zahlen und reellen Zahlen anschauen. Dafür müssen wir für diese neu entstandenen Zahlen Bezeichnungen einführen, um mit ihnen rechnen zu können. Dabei verwenden wir die griechischen Buchstaben und falls zum Beispiel eine Zahl μ unendlich groß ist, dann wird sie durch $\mu \gg 1$ gekennzeichnet und wird positiv infinit genannt. Falls aber eine Zahl zum Beispiel $\alpha \approx 0$ ist, dann bedeutet dies, dass sie infinitesimal ist. Falls wir zwei Zahlen haben, zum Beispiel 0,999... und 1, also wo die Differenz dieser zwei Zahlen ≈ 0 ist, dann sind die Zahlen circa gleich groß und schreiben $\alpha \approx \beta$. Es gibt natürlich sehr viele Beispiele für hyperreelle Zahlen, wie zum Beispiel 0,333...$\approx \frac{1}{3}$, oder $\alpha = 1 - 0{,}999 \ldots \approx 0$, oder $\omega = \left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right) \approx 0,$ oder

$$\Omega = (1; 2; 3; 4; \ldots.) \gg 1.$$ [116]

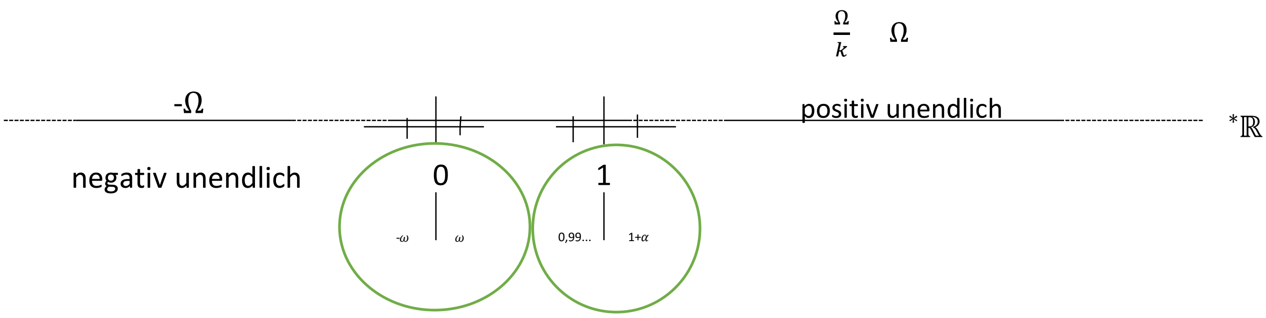


Abbildung 7. 1: Veranschaulichung von hyperreellen Zahlen

Falls μ positiv infinit ist, dann muss $\mu > r$ *sein*, wobei r$\in \mathbb{R}$ sein muss. Falls $\beta \approx 0$ und positiv ist, dann ist r$> \beta$, wobei dies nur für alle positiven r gilt. Wenn wir eine natürliche Zahl haben, die endlich ist mit der Eigenschaft$|\gamma| \leq n$, dann ist γ beschränkt und diese wird als endlich bezeichnet, wenn sie neben der Eigenschaft Beschränktheit die Eigenschaft nicht infinitesimal

[116] Vgl. ebd., S.405

zu sein, besitzt. Diese beschränkte Zahl γ besitzt einen Standardteil und dieser ist die reelle Zahl r mit r$\approx \gamma$.[117]

Es wäre auch nicht schlecht die Rechenregeln für hyperreelle Zahlen zu nennen:

1) „Für alle positiven reellen Zahlen r gibt es eine natürliche Zahl n mit r<n.“ (Bedürftig und Murawski, 2014: 406)
2) „(a) Zu jeder Infinitiven Zahl gibt es ein Inverses, das infinitesimal ist, und umgekehrt. (b) Sind $\alpha \approx 0$ und $\beta \approx 0$, so sind $\alpha + \beta \approx 0$ und $\alpha \times \beta \approx 0$. (c) Sind $\alpha \approx \beta$ und $\beta \approx \gamma$, so ist $\alpha \approx \gamma$. (d) Ist $\alpha \approx 0$ und γ beschränkt, dann ist $\alpha \times \gamma \approx 0$, also infinitesimal. (e) Sind $\gamma \gg 1, \delta > \gamma$ und η endlich, dann sind $\delta \gg 1, \gamma + \eta \gg 1$ und $\gamma - \eta \gg 1$.“ (Bedürftig und Murawski, 20014: 406).

Leibnitz war derjenige, der die Bezeichnungen dx, dy.. für unendlich kleine Zahlen, Größen, etc. eingeführt hatte und als nächstes wollen wir solche Beispiele anschauen.[118]

[117] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 405
[118] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 407

Beispiele für die Infinitesimalrechnung:

1) Stetigkeit:

Wir versuchen reelle Funktionen auf ${}^*\mathbb{R}$ fortgesetzt zu denken. Nun man hat eine reelle Funktion f, und möchte es betrachten, wenn die Funktion f in x stetig ist. Das bedeutet, dass sich f(x) mitverändert, wenn x sich verändert. Wenn zum Beispiel x sich nur ganz wenig verändert hat, dann muss sich f(x) auch nur wenig verändern. Wenn also jetzt f stetig in x ist und x sich nur infinitesimal verändert, dann verändert sich auch f(x), also die Funktionswerte auch nur infinitesimal. Dadurch kann man eine stetige Funktion mithilfe des Infinitesimalen definieren, denn eine Funktion f ist stetig, wenn $f(x) \approx f(x+dx)$ ist, wobei dx infinitesimal ist.[119]

2) Differentialquotient und Ableitung einer Funktion:

Den Differenzenquotienten kann man mithilfe eines Beispiels gut erklären. Wenn wir uns auf einer Straße befinden, welche steil ist, kann man die Steilheit zwischen zwei Punkten angeben. Nämlich das Verhältnis vom Höhenunterschied zu Horizontalentfernung wird angeschaut. Wir betrachten eine Straße im x,y-Koordinatensystem und können den Anstieg der Straße zwischen zwei Punkten berechnen, also wir berechnen den Anstieg der Sekante und deswegen wird dieser Anstieg als mittlerer Anstieg von der Straße gesehen.[120]

[119] Vgl. ebd., S. 407

[120] Vgl. Georg, Carl, Leupold, Conrad, Najuch, Fucke, Nickel, Hösel, Mende und Heller (1990), S.231

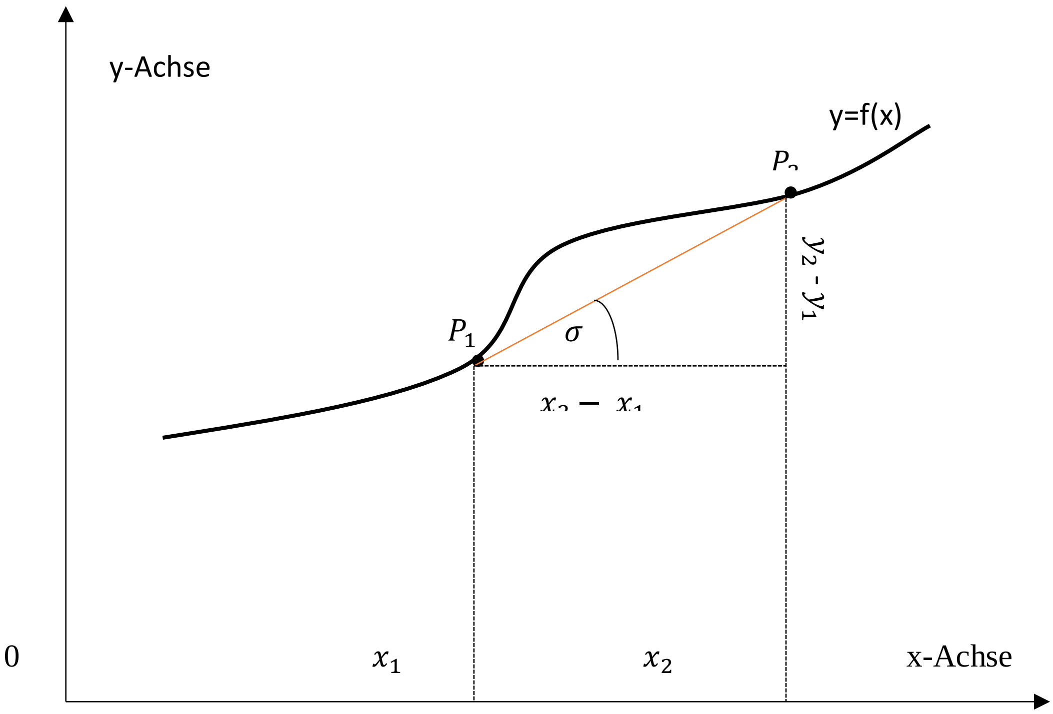


Abbildung 7. 2: Differenzenquotient

Den Differenzenquotienten kann man durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen, wobei $\Delta y = \ y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - \ x_1$ ist. Das Zeichen Δ $delta$ soll die Differenz darstellen, die gebildet wird. Bei der Abbildung 12 sehen wir, dass die Funktion y=f(x) an der Stelle x den Funktionswert f(x) hat und wenn x durch Δx verändert wird, dann wir der Funktionswert mit Δy verändert. Also kann man sagen, dass Δx die Änderung von x und Δy die Änderung von y=f(x) darstellt. Nun können wir dies mithilfe einer Formel ausdrücken: $f(x + \Delta x) = \Delta y + f(x) \ \leftrightarrow \ \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. [121]

Als nächstes wollen wir den mittleren Anstieg mithilfe des Tangens-Satzes ausdrücken. Denn in rechtwinkeligen Dreiecken gilt: $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. [122] Mit einem konkreten Beispiel kann man dies gut veranschaulichen.

[121] Vgl. Georg, Carl, Leupold, Conrad, Najuch, Fucke, Nickel, Hösel, Mende und Heller (1990), S.232
[122] Vgl. ebd., S.232

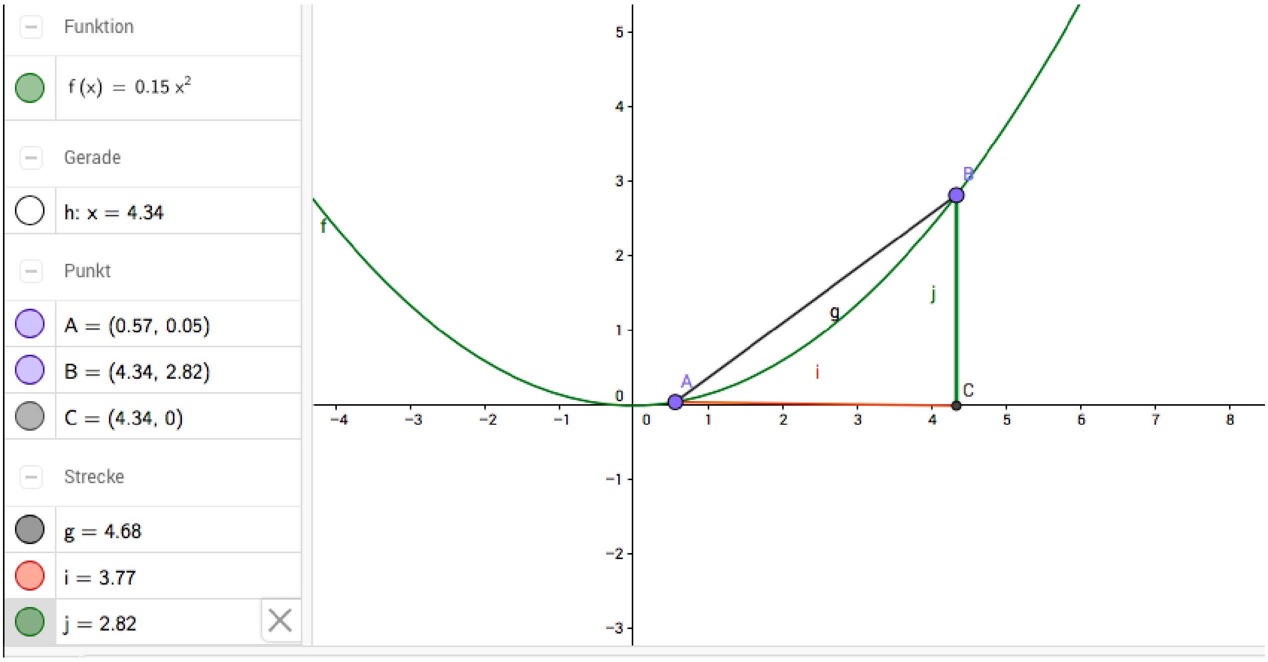


Abbildung 7. 3: Veranschaulichung des Differenzenquotienten anhand eines konkreten Beispiels

Also bei unserem Beispiel, das ich selbst erstellt habe, ist die Funktion y=f(x)=$0{,}15x^2$ und wir wollen für x=0,57 und für i=$\Delta x = 3{,}77$ den Differenzenquotienten bilden und verwenden dabei die Formel, welche wir oben behandelt haben.

Da y=f(x) ist, ist $\Delta y + f(x) = f(x + \Delta x) = \Delta y + y = f(x + \Delta x) = 0{,}15(x + \Delta x)^2 = 0{,}15(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)$.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0{,}15(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 0{,}15x^2 = 0{,}15(2x\Delta x + \Delta x^2)$.

Nun können wir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}15(2x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} = \frac{0{,}15\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 0{,}15(2x + \Delta x)$.

Zuletzt müssen mir nur noch unsere Werte für x und Delta x einsetzen und wissen wie groß der mittlere Anstieg der zur Funktion y=$0{,}15x^2$ gehörenden Kurve ist.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}15(2x0{,}57 + 3{,}77) = 0{,}7365$

Der Differenzenquotient wird in der Mathematik in vielen verschiedenen Sachverhalten verwendet, zum Beispiel bei der Berechnung von der mittleren Geschwindigkeit eines Körpers in einem bestimmten Intervall, oder für die Berechnung der mittleren Beschleunigung in einem bestimmten Zeitintervall, etc.[123]

Den Differenzenquotienten haben wir durchgemacht, um den Differentialquotienten und die Ableitung besprechen zu können, weil wir bei der Erklärung auf den Differenzenquotienten zurückgreifen werden.

Also wir betrachten eine lineare Funktion g und die Steigung dieser Geraden wird durch das Verhältnis von $\Delta y \; und \; \Delta x$ beschrieben.

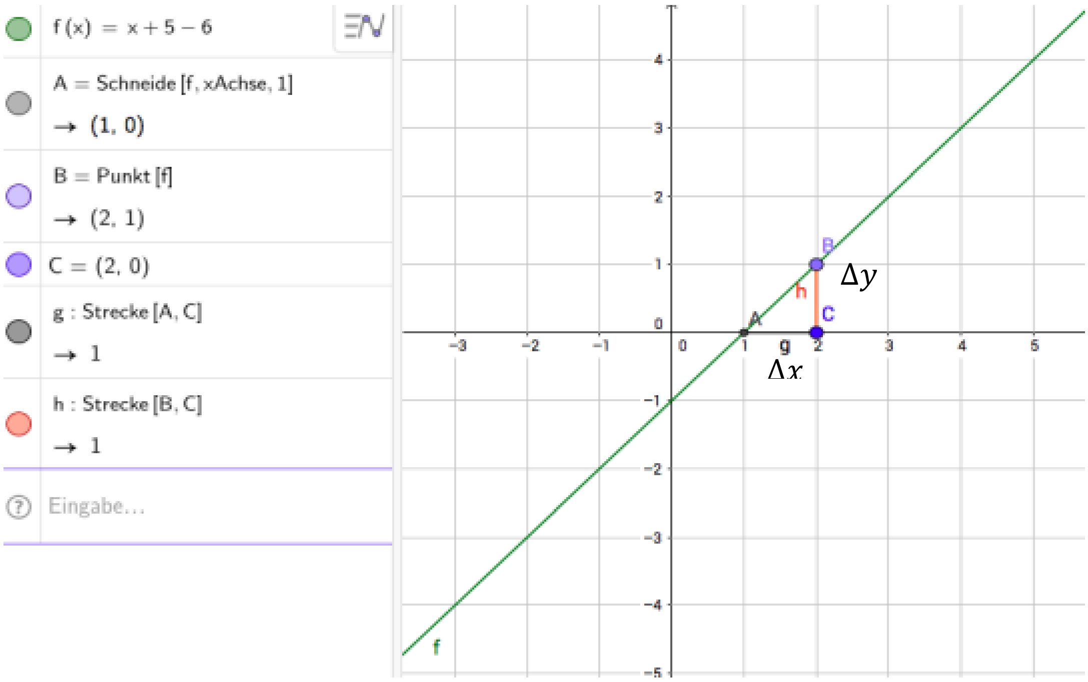


Abbildung 7. 4: Gerade

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist also die Steigung der linearen Funktion und genau diese Vorstellung wollen wir übertragen. Denn wir wollen die Steigung von Funktionen berechnen, wobei diese Kurven sind. Wie wir bei dem Differenzenquotienten schon gesehen haben, haben wir die Steigung der

[123] Vgl. Georg, Carl, Leupold, Conrad, Najuch, Fucke, Nickel, Hösel, Mende und Heller (1990), S.233

Sekanten berechnet, aber nun wollen wir die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$berechnen und dabei möchten wir den Differenzenquotienten verwenden, wobei die „Nenner und Zähler in einem Grenzwertprozess von Sekanten an die Tangente verschwinden“ (Bedürftig und Murawski, 2014: 408) soll.[124]

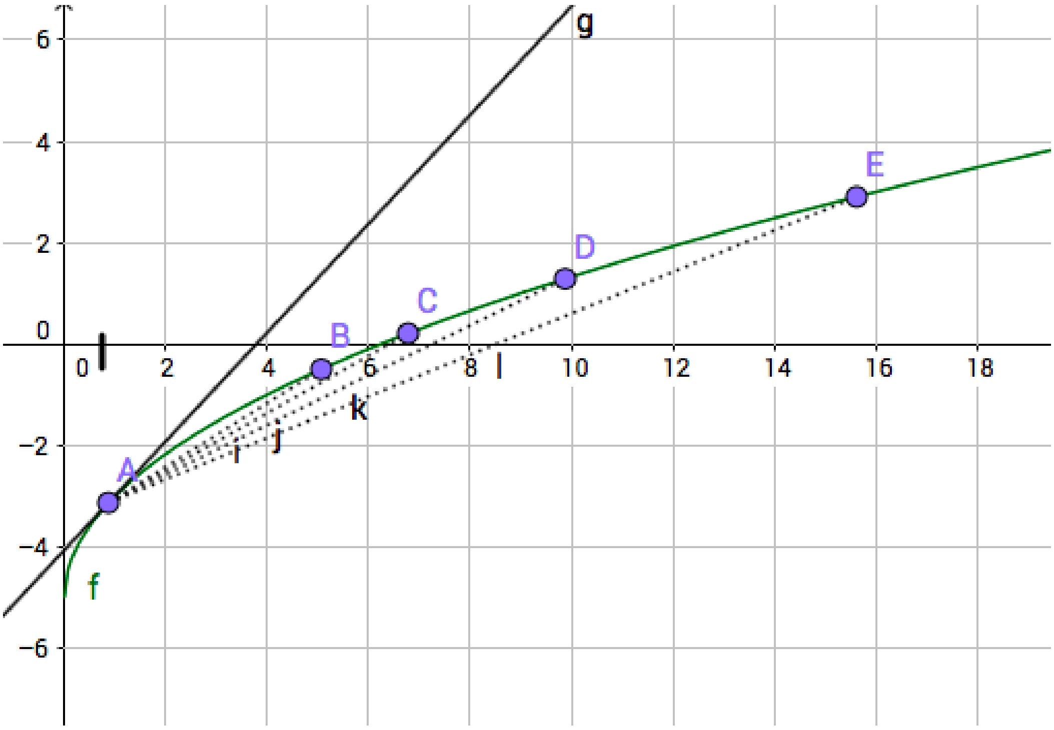


Abbildung 7. 5: Differentialquotient

[124] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 408

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ stellet keinen wirklichen Quotienten dar, weil wir unendliche kleine Differenzen, welche wir mit dx, dy bezeichnen, finden können. Mit diesen unendlich kleinen Differenzen können wir den Differentialquotienten definieren: Wenn wir eine reelle Funktion haben und dy= $f(x_0 + dx) - f(x_0)\ für\ dx \neq 0$ gilt, wobei dx infinitesimal ist, dann nennt man $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Differentialquotienten. Man sollte auf die reelle Ableitung aufpassen, weil dieser ist von dem Differentialquotienten zu unterscheiden, dabei könnte ein konkretes Beispiel sehr hilfreich sein. Dafür nehmen wir gleich unser Beispiel beim Differenzenquotienten her: y=f(x)=$0{,}15x^2$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0{,}15(2xdx+dx^2)}{dx} = \frac{0{,}15dx(2x+dx)}{dx} = 0{,}15(2x + dx)$. Wie wir also sehen können, ist 0,15 x 2x, welcher der Standardteil von $\frac{dy}{dx}$ ist, zugleich die erste Ableitung der Funktion ist. Deswegen müssen wir unsere obige Definition erweitern.[125]

„ Ist f eine reelle Funktion, dy= $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ für infinitesimal dx≠ 0 und gibt es ein reelles a mit $\frac{dy}{dx} \approx a$ für alle dy, so heißt a Ableitung von f an der Stelle x_0 und f differenzierbar in x_0. Die Ableitung a bei x_0 wird mit $f^{\prime}(x_0)$ bezeichnet.“(Bedürftig und Murawski, 2014: 409).

Fassen wir nun die Infinitesimalrechnung kurz zusammen, was konnten wir mithilfe dieses Beispiels, was wir zuletzt gerechnet haben, erreicht.

Zunächst einmal wäre es nicht schlecht zu erwähnen, dass infinitesimal „unendlich klein“ bedeutet und dass Zeichen wie dx und $\frac{d}{dx}$ das Integrieren oder das Ableiten symbolisiert. Das Differential wird durch das Symbol dy gekennzeichnet und wird mithilfe des Grenzwertes

[125] Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 408

definiert. Denn beim Grenzwert nähert sich eine Zahl einer anderen Zahl unendlich nah, aber wir wissen, dass sie sie nicht erreicht.[126]

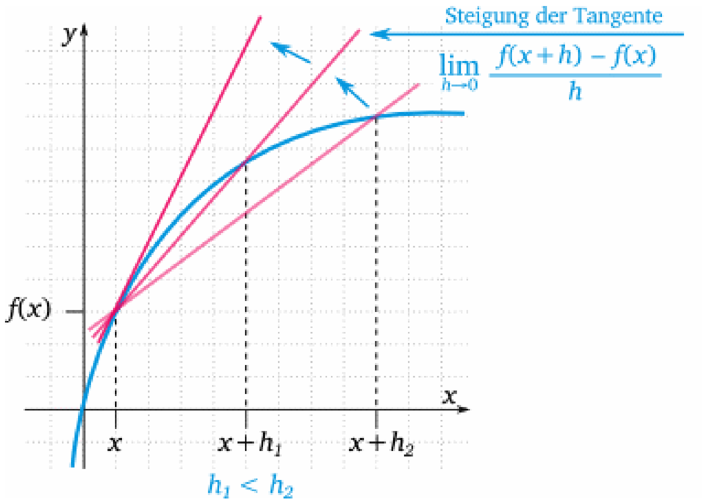


Abbildung 7. 6: Das Differential

Die Geraden, welche den Graphen in zwei Punkten schneiden, kann man als die Ableitung betrachten und wir wollen über den Grenzwert h immer kleiner werden lassen, was zur Folge hat, dass auch der Abstand der beiden Punkte kleiner wird. Wenn dieser Abstand gleich Null ist, dann schneidet die Linie den Graphen nur noch in einem einzigen Punkt. Wenn dieser Fall eintritt wird die Gerade als Tangente bezeichnet und die Steigung dieser Tangente kann man dann mithilfe des Differentialquotienten berechnen. Also damit wir eine Tangente haben konnten, haben wir den Abstand **infinitesimal klein** werden lassen![127]

[126] Hemmerich 2011-2017, online unter [http://matheguru.com/allgemein/125-infinitesimal.html]
[127] Vgl. Hemmerich 2011-2017, online unter [http://matheguru.com/allgemein/125-infinitesimal.html]

3) Bestimmtes Integral:

Ein weiteres Beispiel wäre das bestimmte Integral, denn dabei rechnen wir auch mit infinitesimalen und infiniten Zahlen, als ob sie normale Zahlen wären. Dazu möchte ich ein Beispiel aus der Lehrveranstaltung Analysis in einer Variable für Lehramtskandidatinnen und- kandidaten herausnehmen und dieses vorrechnen.

Wir möchten nun das bestimmte Integral von der Funktion f(x):= $\frac{8}{x^2+4}$ bilden, welche wie folgt ausschaut:

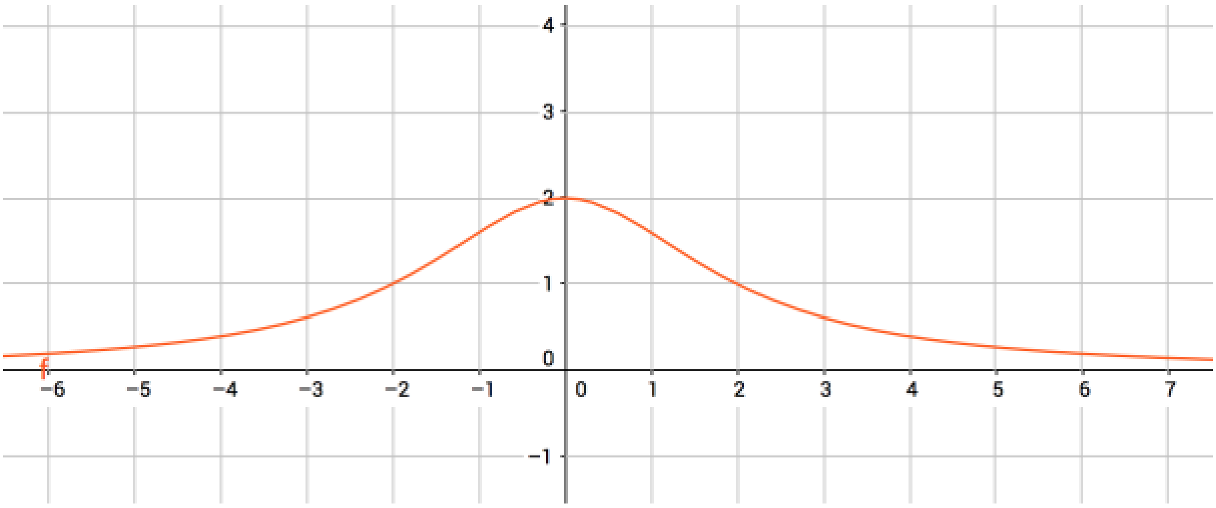


Abbildung 7. 7: Funktion

Also wir möchten das Integral von 0 bis 2 berechnen, was bedeutet, wir möchten die Fläche unterhalb der Funktion berechnen, welche von 0 bis 2 läuft und mit der x-Achse begrenzt wird.

$\int_0^2 \frac{8}{x^2+4} dx$ soll also berechnet werden!

$\int_0^2 \frac{8}{x^2+4} dx$ $=\int_0^2 \frac{8}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2+1)} dx$ =Subtitution (u=$\frac{x}{2}$; $du = \frac{1}{2}dx; 2du = dx$)=

$= \int \frac{8}{4(\mathrm{u}^2+1)} * 2\mathrm{du} = \int \frac{4}{\mathrm{u}^2+1} \mathrm{du} = 4 \arctan(\mathrm{u}) = 4\arctan(\frac{\mathrm{x}}{2})\Big|_0^2 = 4 \arctan(1) -$

$4 \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = 4 * \frac{\pi}{4} = \pi.$

4) Differenzialgleichungen:

Wir wissen, dass Leibniz der Gründer der Infinitesimalrechnung war, er vertrat eine außergewöhnliche philosophische Position, denn er war der Meinung, dass Gott die Differentialgleichung für mögliche Welten zusammendachte und er entschied sich für die Kurve, weil Gott laut ihm die vollkommenste aussuchen wollte. Denn dies soll die einfachste an Prinzipien sein und zugleich sehr reichhaltig an Erscheinungen sein. Deswegen dachte er sich, was könnte es besser darstellen als eine geometrische Linie, weil eine geometrische Linie für ihn leicht zu konstruieren sei, deren Eigentümlichkeiten nur zu bewundern sei und diese geometrische Linie wäre des Weiteren sehr weitreichend. Leibniz war aber auch derjenige der meinte, dass einige Differentialrechnungen nicht zu lösen sind, weil diese nur mithilfe von Näherungsverfahren der Lösung näherkommen, aber nie gewiss sagen können, was die Lösung sei.[128]

Beispiel für Differentialgleichung:

Wir möchten nun die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung berechnen: (Angabe von der LV: Differenzialgleichungen für Lehramtskandidatinnen und-kandidaten)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * x + e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[128] Pflaum (2016), [online unter http://www.feinschwarz.net/infinitesimalrechnung-und-theodizee/]

Als Erstes bilden wir den homogenen Teil:

p(x)=det$\begin{pmatrix} 3-x & -6 & 4 \\ 1 & 4-x & -4 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$=(3-x)(4-x)(-x) + (-6 * -4 * 1) – ((4-x)*4) – (-x *1 *(-6))=

=12-7x+x^2(-x) +24 – 16 +4x – 6x= -$x^3 + 7x^2 - 14x + 8$

Mithilfe des Horner-Schema können wir uns die Nullstellen berechnen:

	1 -7 14 -8
+1	1 -6 8 0

Das Horner-Schema

Also ist 1 eine Nullstelle und wir können uns mithilfe der kleinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen die restlichen zwei Nullstellen berechnen.

$x_{2,3} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8} = 3 \pm 1 \quad x_2 = 4; x_3 = 2$

Als Nächstes ist die Berechnung der Eigenvektoren an der Reihe:

Zu x_1=1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ -\mathrm{III} \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$3v_{1,2} = 3v_{1,3} \leftrightarrow v_{1,2} = v_{1,3}$. Nun wählen wir $v_{1,2}$ frei und erhalten $v_{1,2} = v_{1,3} = 1$.

$v_{1,1} - v_{1,3} = 0 \rightarrow v_{1,1} = 1$ Der Eigenvektor zu x_1=1 ist also: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die anderen Eigenvektoren berechnen wir analog wie bei x_1=1.

Zu $x_2 = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad v_{2,1} = 4v_{2,3}.$$ Wir wählen $v_{2,3}$ frei und $v_{2,3} = 1 \rightarrow v_{2,1} = 4$.

$-v_{2,1} - 6v_{2,2} + 4v_{2,3} = 0 \rightarrow v_{2,2} = 0$ Somit ist $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu $x_3 = 2$:

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} :-8 \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ +2\mathrm{I} \end{array} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ -8$v_{3,2} = -8v_{3,3} \quad \leftrightarrow \quad v_{3,2} = v_{3,3}$ Wir wählen $v_{3,3}$ frei und erhalten $v_{3,2} = v_{3,3} = 1$. $\quad v_{3,1} + 2v_{3,2} - 4v_{3,3} = 0 \quad \rightarrow v_{3,1} = 2$ Der Eigenvektor zu $x_3 = 2$ ist also$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den homogenen Teil können wir nun aufstellen:

$$x_n(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir die Störfunktion: $e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unser $\varphi(t)$ ist und dieser ist ein Polynom vom Grad ≤ 0. Dies würde bedeuten, dass 3 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und wir den Grad der Funktion nicht erhöhen müssen.

Unser Ansatz lautet somit: $x_s(t) = \alpha e^{3t}$ und A:= $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

	e^{3t}
x	α
$\dot{x}$	3α
A*x+ $e^{3t}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$	A*α+ $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

Berechnung des Ansatzes der Störfunktion

A*α+ $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$=3$\alpha$

$$\left(\begin{pmatrix}3 & -6 & 4\\1 & 4 & -4\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\right) *\propto= \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & 4 & -2\\1 & 1 & -4 & 0\\1 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}:-2\\ \\ -\mathrm{II}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 3 & -2 & 1\\1 & 1 & -4 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}+3\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & -4 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$\alpha_3 = 1$

-$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ Also ist$\alpha_2 = 1$.

$\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 3$ Somit ist$\alpha = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

Die Störfunktion lautet$x_s(t) = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$.

Nun können wir die allgemeine Lösung für die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}3 & -6 & 4\\1 & 4 & -4\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} * x + e^{3t}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$ aufschreiben:

$$x(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t} .$$

Mit diesem Beispiel möchte ich meine Diplomarbeit beenden und möchte nochmals bei allen Menschen, welche mich beim Schreiben dieser Arbeit und in meinem Leben unterstützt haben, bedanken. Denn ohne ihre Hilfen wäre ich nicht der Mensch, den ich heute bin.

Danke

Quellen:

- Bölte, Horst: Pythagoreer, S.1, online unter http://www.boelte.homepage.t-online.de/seiten/pythagoreer.html [abgerufen am 9.Juni 2017].
- Berl, Daniela: PS Geschichte der Philosophie: Philosophie der Achsenzeit, *Platon Dialektik und Ideenlehre*, online unter http://sammelpunkt.philo.at:8080/863/1/ps02arbberl.pdf [abgerufen am 10. Juni 2017].
- Wunderlich, Dieter: Carl Friedrich Gauß, 1777-1855/ Biografie, 2013, online unter http://www.dieterwunderlich.de/Carl_Friedrich_Gauss.htm [abgerufen am 12. Juni 2017].
- O.V.: Kapitel 11 - Die Aufklärung, Teil 5: Kants Erkenntnistheorie, 2010, online unter http://philosophie.podspot.de/post/untitled/ [abgerufen am 12. Juni 2017].
- O.V.: Gottesbeweise in der Monadologie, 2008, S.9, online unter http://www.philosophie.phil.uni-erlangen.de/qualitaet/arbeitsmittel/HABsp3_Leibniz.pdf [abgerufen am 12.Juni 2017].
- Eisler, Rudolf: Zahl, 2006, online unter http://www.textlog.de/32776.html [abgerufen am 14. Juni.2017].
- Eisler, Rudolf: Synthesis, 2006, online unter http://www.textlog.de/33327.html [abgerufen am 14. Juni.2017].
- Herold, Natalie: Der Unendlichkeitsbegriff im Mathematik- und Philosophieunterricht – Fächerübergreifender Unterricht, 2016, S.7-8, online unter https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/Diplomarbeiten/DIPLOMARBEIT_Natalie_Herold.pdf [abgerufen am 14.06.2017].
- Schäfer, Joachim: Artikel Nikolaus von Kues, aus dem Ökumenischen Heiligenlexikon, https://www.heiligenlexikon.de/BiographienN/Nikolaus_von_Kues.html, [abgerufen am 14. 6. 2017].
- O.V.: Georg Cantor, 2004-2007, online unter http://www.henked.de/mathematiker/cantor.htm [abgerufen am 16.Juni 2017].
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter: Einführung in die Mengenlehre, 4.Auflage, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag GmbH 2003, S.1
- Rössler, Florian: Die Cantor-Menge, Ausarbeitungen zum Vortrag im Proseminar Überraschungen und Gegenbeispiele in der Analysis (Sommersemester 2009, Leitung PD Dr. Gudrun Thäther), 2009, S.1-10, online unter https://www.mathi.uni-

heidelberg.de/~thaeter/surprises/Ausarbeitung_Cantor-Menge_final.pdf [abgerufen am 24.06.2017].

- Möller, Peter: Ontologie, Berlin, online unter http://www.philolex.de/ontologi.htm [abgerufen am 27.06.2017].
- O.V.: Kontinuumshypothese, 2017, online unter http://unglauben.net/german/index.htm?khypothese.htm [abgerufen am 30.06.2017]
- Steinfeld, Thomas: Auswahlaxiom, 2016, online unter http://www.mathepedia.de/Auswahlaxiom.aspx [abgerufen am 30.06.2017].
- Sonar, Thomas: Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibnitz und Newton, Heidelberg: Springer Verlag 2016, S.13-16
- Georgi, Herbert; Carl, Johannes; Leupold, Wilhelm; Conrad, Rudolf; Najuch, Herbert; Fucke, Rudolf; Nickel, Heinz; Hösel, Siegfried; Mende, Horst und Haller, Armin: Lehr- und Übungsbuch Mathematik Band III, Analytische Geometrie, Vektorrechnung und Infinitesimalrechnung, 20.Auflage, Thun und Frankfurt/ Main: Verlag Harri Deutsch, 1990, S.231-285
- Pflaum, Michael: Infinitesimalrechnung und Theodizee. Zum Gedanken an Gottfried Wilhelm Leibniz, 2016, online unter http://www.feinschwarz.net/infinitesimalrechnung-und-theodizee/ [abgerufen am 5.Juli 2017].

Abbildungsverzeichnis:

Abbildung 1. 1:Das Dreieck der philosophischen Positionen 18

(Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.29)

Abbildung 2. 1: Quadrat über die Diagonale d mit dem Flächeninhalt 2 annähern 23

(online unter [https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/reelle-zahlen]

Abbildung 3. 1: Seitenlängen der Rechtecke 24

Abbildung 4. 1: Intervallverschachtelung, um die Zahl Wurzel 2 anzunähern 25

Abbildung 4. 2: Intervallschachtelung (Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.16) 25

(Zu 4.1.: online unter [https://www.kapiert.de/mathematik/klasse-7-8/irrationale-zahlen-untersuchen/rationale-und-irrationale-zahlen-unterscheiden/])

Abbildung 5. 1: Cantor-Menge 32

Abbildung 5. 2: Bijektion 33

(Zu 5.1: online unter [http://slideplayer.org/slide/787907/], zu 5.2: Eigene Kenntnisse aus der Analysis)

Abbildung 6. 1: Berechnung der Fläche unter einer Kurve 58

Abbildung 6. 2: Umfrage 60

Abbildung 6. 3: Der Beweis für 0,999...=1 64

(Zu 6.1.: online unter [https:/books.google.at/books?id=F_1SCwAAQBAJ&pg=PA13&lpg=PA13&dq=infinitesimale+newton&source=bl&ots=TcmCndBpD_&sig=3ro-gok-laTeu519MDctKx-UwC4&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwi1mOCo2efUAhWDbVAKHfZtDvkQ6AEISjAF#v=onepage&q&f=false], Zu 6.2: Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.388, Zu 6.3: Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.392)

Abbildung 7. 1: Veranschaulichung von hyperreellen Zahlen 68

Abbildung 7. 2: Differenzenquotient 71

Abbildung 7. 3: Veranschaulichung des Differenzenquotienten anhand eines konkreten Beispiels 72

Abbildung 7. 4: Gerade 73

Abbildung 7. 5: Differentialquotient 74

Abbildung 7. 6: Das Differential 76

Abbildung 7. 7: Funktion 77

(Zu 7.1: Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.405, Zu 7.2: Vgl. Georgi, Carl, Leupold, Conrad, Najuch, Fucke, Nickel, Hösel, Mende und Haller(1990), S.232, Zu 7.3: Datei selbst bei Geogebra erstellt, Zu 7.4: Datei selbst bei Geogebra erstellt und ist vergleichbar mit Bedürftig und Murawski (2014), S.408, Zu 7.5: Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S. 408, Zu 7.6: Hemmerich, W.A., 2011-2017, online unter [http://matheguru.com/allgemein/125-infinitesimal.html, (abgerufen am 3.Juli 2017)).

Tabellenverzeichnis:

Tabelle 1: Tabelle der Gegenstandsklassen bei Platon (Vgl. Bedürftig und Murawski (2014), S.34)……………………………………………………………………………………………9

Tabelle 2: Intervallverschachtelung (selbst erstellt)……………………………………………..26

Tabelle 3: Tabelle der Axiome nach ZF-Mengenlehre……………………………………42-47

Tabelle 4: Tabelle der Axiome der Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel:…………………………………………………………………………………..49-52

Tabelle 6: Das Hornerschema………………………...79

Tabelle7: Berechnung des Ansatzes der Störfunktion ……………………………………..…81

Abstract- Deutsch

Die Mathematik ist sehr umfassend und hat zu jeder Zeit eine zentrale Rolle gespielt. Die Grundlage der Mathematik ist der Zahlbegriff, welcher von verschiedenen Philosophen ganz verschieden aufgefasst wird. Das Ziel dieser Diplomarbeit ist, wichtige Begriffe der Mathematik anzusprechen und diese mit den Menschen vertraut zu machen, um den Umgang mit Mathematik zu erleichtern. Beginnend mit dem Zahlbegriff, wird der Mengenbegriff, der Unendlichkeitsbegriff und zuletzt der Begriff des Infinitesimalen die Diplomarbeit ausmachen. Da die Mathematik aus der Sicht der verschiedenen Philosophen betrachtet wird, wird auch der Zusammenhang der Philosophie und Mathematik sichtbar.

Abstract – English

Mathematics has been a comprehensive science with regards to covering different disciplines and has played a key role at any point in time. The foundation of Mathematics is based on the number concept that has a varying definition among philosophers. The aim of this thesis is to approach and describe significant terms of Mathematics and familiarize them with individuals keen on dealing with the philosophy of Mathematics in order to facilitate their dealings with Mathematics. Beginning with the concept of the number, the terms of quantity and infinity and the infinitesimal concept will be discussed in the following thesis. Since Mathematics will be taken into consideration of distinct philosophers, the connection of Mathematics with philosophy will become visible.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine fremde Hilfe in Anspruch genommen habe. Des Weiteren bestätige ich, dass ich keine weiteren Literaturen verwendet habe, außer die ich angegeben habe. Die verwendeten Literaturen wurden durch eine ziemlich genaue Quellenangabe kenntlich gemacht.

Wien, am 11.07.2017

Tayyibe Ulu