

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„DER SATZ VON STOKES ÜBER UNTERMANNIGFALTIGKEITEN“

Eine Aufbereitung für das Lehramtsstudium

verfasst von / submitted by

Michael Schifrer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018 /

Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt/
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 423 406

Studienrichtung lt. Studienblatt/
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramt Chemie und Mathematik

betreut von / Supervisor:

a.o.Univ.-Prof.Mag.Dr. Günther Hörmann

Danksagung

Ich möchte mich bei meiner Familie, insbesondere Norbert Haagen, Thomas Merker und meinen Schwiegereltern Doris und Hans Staffenberger bedanken, die mir in Belangen rund um das Studium tatkräftig zur Seite standen. Ein großer Dank gilt Andreas Wielander, der mich besonders in der Endphase meines Studiums unterstützt hat.

Zusammenfasseng

In dieser Arbeit widmen wir uns dem allgemeinen Stokes'schen Integralsatz, der eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung darstellt. Mit *wir* sei in dieser Arbeit der *Leser* und *ich* der Verfasser gemeint, da mir diese Geste der Miteinbeziehung in der mathematischen Literatur immer sehr gut gefallen hat. Im Wesentlichen folgen wir dem dritten Band der Analysisreihe von Otto Forster¹ mit einem Fokus auf Differentialformen. Im ersten Abschnitt bedienen wir uns zur Beschreibung des Integrationsgebietes dem Konzept der Untermannigfaltigkeiten. Damit können allgemeine Objekte in \mathbb{R}^n mit den notwendigen Eigenschaften erfasst werden. Im zweiten Abschnitt werden die Integranden auf eine einheitliche und umfassende Weise durch Differentialformen beschrieben. Dabei versuchen wir, die Anschauungsebene nicht aus den Augen zu verlieren. Schließlich wird im dritten Abschnitt der allgemeine Satz von Stokes vorgestellt und bewiesen. Im vierten Abschnitt sehen wir, dass die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis im allgemeinen Satz enthalten sind.

Abstract

This work addresses Stokes' integral theorem, which is a generalization of the law of integral and differential calculus. The first section introduces the concept of submanifolds to describe the area of integration. This can be used to capture general objects in \mathbb{R}^n with the necessary properties. In the second section, integrands are described in a consistent and comprehensive way through differential forms. Finally, in the third section, Stokes' general proposition is presented and proved. In the fourth section the classical integral theorems of vector analysis are obtained from the general theorem.

¹7.

Inhaltsverzeichnis

1	Integrationsgebiete in \mathbb{R}^n	3
1.1	Untermannigfaltigkeiten	3
1.2	Tangentialraum	7
1.3	Parametertransformation	10
1.4	Abgeschlossene Hülle und offener Kern	11
1.5	Kompakter Träger	15
1.6	Orientierung	16
1.7	Orientierung von Hyperflächen	18
1.8	Halbraum	21
1.9	Untermannigfaltigkeiten mit Rand	22
1.10	Kompakta mit glattem Rand auf Untermannigfaltigkeiten	23
2	Die Integranden in \mathbb{R}^n	24
2.1	Differentialoperatoren zwischen Feldern	24
2.2	Cotangentialvektor	25
2.3	Pfaff'sche Form	28
2.4	Koordinatendarstellung Pfaff'scher Formen	30
2.5	Differentialformen höherer Ordnung	31
2.6	Die Determinante als n-Form	33
2.7	Differentialformen k.Ordnung	37
2.8	Koordinatendarstellung von Differentialformen k.Ordnung	38
2.9	Ableitung von Differentialformen	38
2.10	Rücktransport	41
3	Satz von Stokes	44
3.1	Integration von Differentialformen	44
3.2	Der Stokes'sche Integralsatz für Halbräume	45
3.3	Teilung der Eins	48
3.4	Der Integralsatz von Stokes	49

4 Die klassischen Integralsätze in \mathbb{R}^3	51
4.1 Das Volumenelement	52
4.1.1 Das Längenelement	53
4.1.2 Das Flächenelement	54
4.2 Die Integranden in der klassischen Vektoranalysis	56
4.3 Satz von Green	60
4.4 Satz von Gauß	61
4.5 Der klassische Integralsatz von Stokes	62
5 Anhang	62
5.1 Differentialoperatoren	62
5.2 Laplace'scher Entwicklungssatz	63
5.3 Das Kreuzprodukt	65
5.4 Projektion durch das Skalarprodukt	66
5.5 Duale Basis	66
5.6 Borel'sche Teilmengen	66
Literatur	69

1 Integrationsgebiete in \mathbb{R}^n

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung² lautet für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und für eine Stammfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von f

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Das 1-dimensionale Integrationsgebiet ist also ein reelles Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erlaubt der Satz von Stokes auch eine Verallgemeinerung des Integrationsgebietes. Als Beispiel kann hier eine Kugel ohne Nord- und Südpol (siehe Beispiel 1.1) oder ein Torus in \mathbb{R}^3 dienen. Diese Objekte werden in geeigneter Weise durch k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in

²vgl. 11, S.623.

\mathbb{R}^n beschrieben. In diesem Abschnitt werden wir den Begriff präzisieren und notwendige Eigenschaften erläutern.

1.1 Untermannigfaltigkeiten

Der \mathbb{R}^3 als euklidischer Vektorraum zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass auf ihm das Skalarprodukt definiert ist. Das gilt auch für Untervektorräume des \mathbb{R}^3 , wie allen 2-dimensionalen Ebenen und 1-dimensionalen Geraden durch den Nullpunkt.

Verschiebt man einen Untervektorraum des \mathbb{R}^3 um einen Vektor, so gelangt man zum Konzept des *affinen Teilraumes*. Betrachten wir zum Beispiel die xy -Ebene als Untervektorraum U des \mathbb{R}^3 . Verschiebt man U um den Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, so erhalten wir den affinen Teilraum $a + U := \{a + u : u \in U\}$ (vgl. Abbildung 1). Nun können affine Teilräume als *lineare* Untermannigfaltigkeiten aufgefasst werden.³

Untermannigfaltigkeiten sind k -dimensionale, im Allgemeinen gekrümmte Flächen in \mathbb{R}^n , von denen man sich je nach Anwendung gewisse Eigenschaften wie Differenzierbarkeit wünscht. Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit erfüllt dann nur noch *lokal* die Eigenschaften eines k -dimensionalen euklidischen Raumes.

Definition 1.1 (Parameterdefiniert). ⁴ Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k -dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn es für jeden Punkt in M eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ gibt und eine Funktion $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

(i) φ ist injektiv,

(ii) sowohl φ als auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(T) = (M \cap U) \rightarrow T$ ist stetig,

(iii) φ ist stetig differenzierbar und der Rang der Jacobimatrix ist

$$\text{Rang}(D\varphi) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} = k.$$

³vgl. 11, S.241.

⁴vgl. 6, S.106.

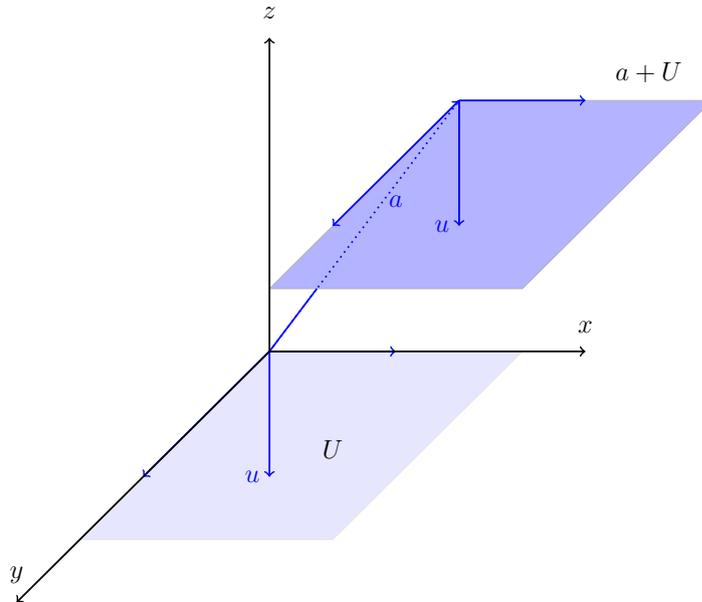


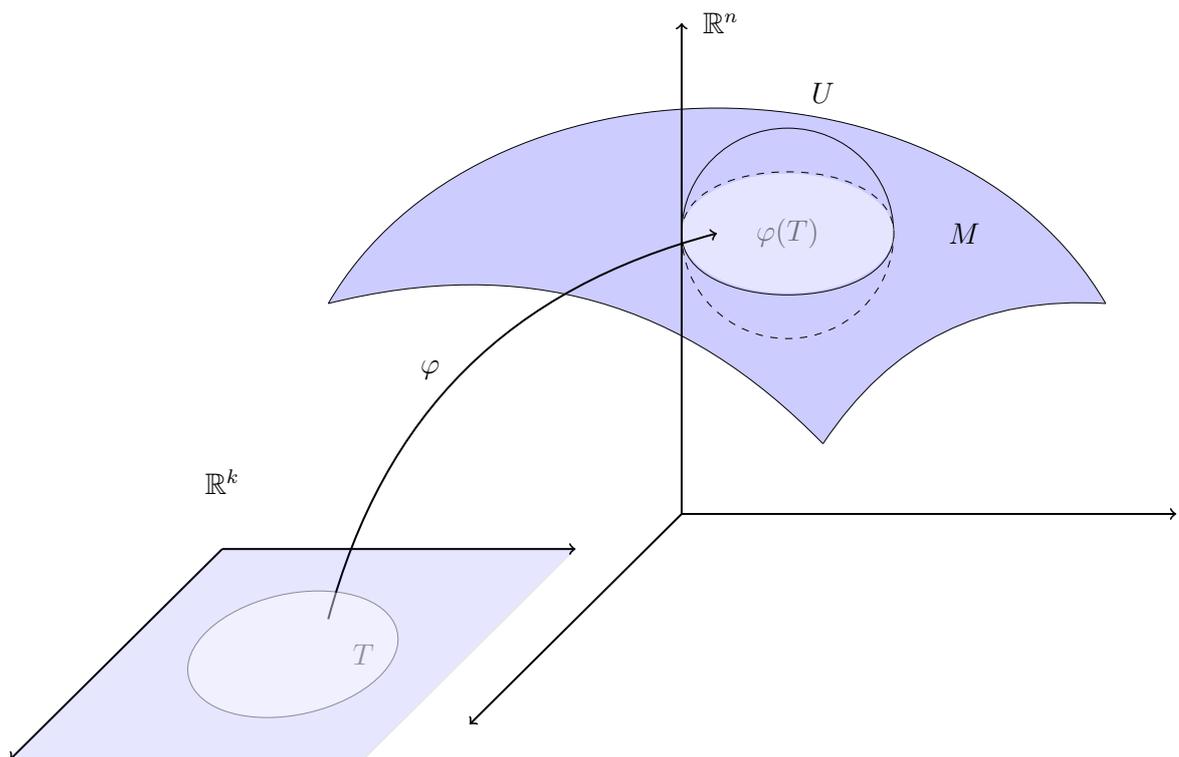
Abbildung 1: Ein affiner Teilraum (eine lineare Untermannigfaltigkeit)

Die Abbildung $\varphi : T \xrightarrow{\sim} (M \cap U)$ heißt *lokale Parameterdarstellung* oder *lokales Koordinatensystem* von $M \cap U$. Die Bezeichnung deutet schon an, dass die Untermannigfaltigkeit lokal wie der k -dimensionale euklidische Raum aussieht, mit den lokalen Koordinaten $(t_1, \dots, t_k) \in T$. Man integriert dann über Untermannigfaltigkeiten, indem man (mit Hilfe des Rücktransports, den wir im zweiten Abschnitt erklären werden) über diese lokalen Koordinaten integriert. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : (M \cap U) \xrightarrow{\sim} T$ nennt man *Karte*, passend dazu nennt man $M \cap U$ *Kartengebiet* und U *Kartenumgebung*.⁵

Die erste Bedingung garantiert, dass es (eingeschränkt auf das Bild von φ) eine Umkehrabbildung geben kann, also dass $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T)$ bijektiv ist (Die Tilde über dem Pfeil steht für eine bijektive Abbildung). Der Rang der Jacobimatrix $D\varphi \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ soll k sein, also wird verlangt, dass die k Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Das ist der Fall, wenn eine Unterdeterminante der Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

⁵vgl. 3, S.266.

Abbildung 2: Parameterdefinierte Untermannigfaltigkeit

$\in M_k(\mathbb{R})$ mit k Komponentenfunktionen $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}$ und Indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ nicht verschwindet. Da die Determinante eine stetige Funktion ist, gilt die lineare Unabhängigkeit auch in einer hinreichend kleinen Umgebung.⁶

Beispiel 1.1. ⁷

Die Parameterdarstellung einer Kugelsphäre in \mathbb{R}^3 mit Radius 1, welche durch Rotation der Kreislinie

$$\theta \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

in der xz -Ebene um die z -Achse entsteht, ist durch

$$(\theta, \varphi) \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

⁶vgl. 6, S.104f.

⁷vgl. 6, S.107f.

gegeben. Wir wählen den Rotationswinkel φ um die z Achse aus dem offenen Intervall $]0, 2\pi[$. Den Poldistanzwinkel θ beschränken wir auf den Intervall $]0, \pi[$, da die Jacobimatrix der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\theta \neq 0, \pi, 2\pi, \dots$ in zweiter Spalte keinen Nullvektor aufweist und damit maximalen Rang hat. Das macht die Kugelsphäre ohne die Punkte $(0,0,1)$ und $(0,0,-1)$ zu einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit im 3-dimensionalen Raum.

1.2 Tangentialraum

Betrachten wir die parameterdefinierte Untermannigfaltigkeit M aus Definition 1.1. Die k Spaltenvektoren der Jacobimatrix spannen einen k -dimensionalen Raum auf, den *Tangentialraum* $T_p(M)$ im Punkt p an der Untermannigfaltigkeit M . Man erhält einen Tangentialvektor v auch an einer beliebigen stetig differenzierbaren Kurve $\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M \cap U$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, indem man die Ableitung von α an der Stelle $t=0$ bildet. Es gilt

$$\alpha'(0) = v$$

für $\alpha(0) = p$ und $\varepsilon > 0$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an Kurven durch den Punkt p ist in $T_p(M)$ enthalten, was ihn isomorph zu \mathbb{R}^k macht. Abbildung 3 zeigt zwei Tangentialvektoren einer parameterdefinierten 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Sie spannen im Punkt $p = \varphi(t)$ die 2-dimensionale Tangentialebene auf.⁸

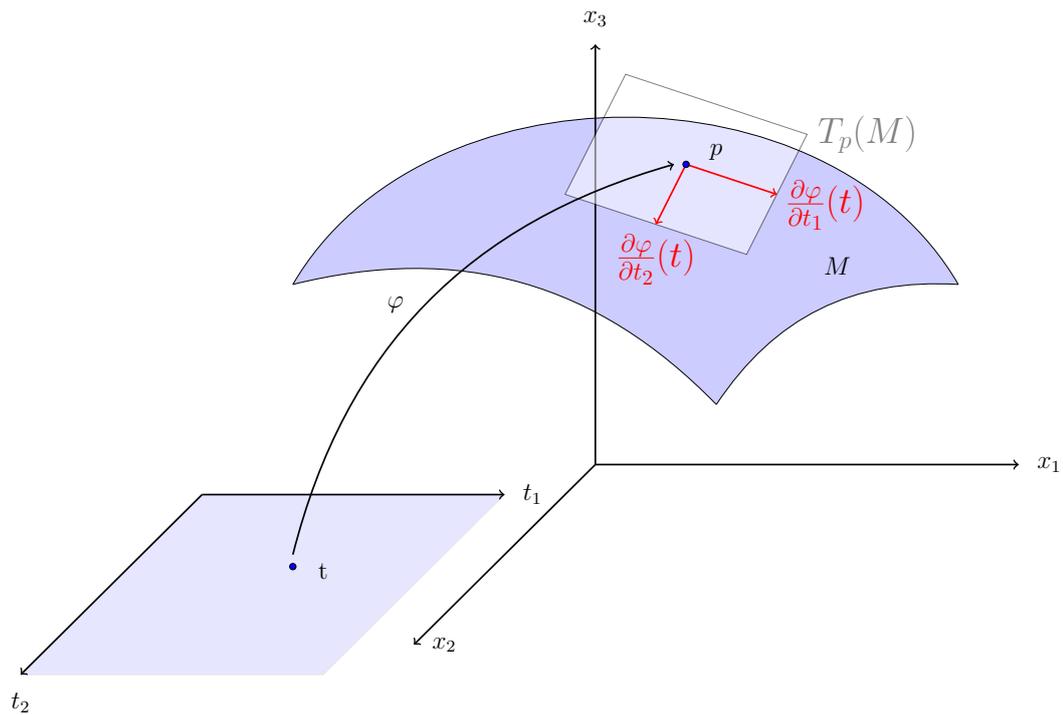
Untermannigfaltigkeiten können auch als Nullstellengebilde von $(n-k)$ stetig differenzierbaren Funktionen oder mit Graphen definiert werden:

Satz 1.1. ⁹ *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:*

⁸vgl. 7, S.224.

⁹vgl. 6, S.108f.

Abbildung 3: Tangentialraum an einer parameterdefinierten Untermannigfaltigkeit



- (i) (Gleichungsdefiniert) Zu jedem Punkt in M gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$(f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k},$$

sodass

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

und

$$\text{Rang}(Df) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = n - k$$

für jeden Punkt in $M \cap U$.

- (ii) (Graphendefiniert) Zu jedem Punkt in M gibt es nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^k$ mit $x' := (x_1, \dots, x_k) \in U'$ und

$U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ mit $x'' := (x_{k+1}, \dots, x_n) \in U''$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$g : U' \rightarrow U'',$$

sodass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in (U' \times U'') : x'' = g(x')\}.$$

Für einen Beweis siehe [6, S.108]. Wählen wir eine graphendefinierte Untermannigfaltigkeit mit $U' \subset \mathbb{R}^2$ und $U'' \subset \mathbb{R}$, liegt der Gradient $\nabla g(x')$ in \mathbb{R}^2 und zeigt dabei die Richtung der größten Änderung des Funktionswertes $g(x')$ an (vgl. Abschnitt 5.1). Weiter spannt der Vektor $(-\nabla g(p'), 1)$ den Normalenraum $N_p(M)$ auf, mit $U = U' \times U''$ und $p = (p', g(p')) \in M \cap U$. Abbildung 4 soll das illustrieren. Ein Normalvektor aus $N_p(M)$ steht orthogonal auf der Tangentialebene $T_p(M)$. Auf einer orientierbaren Untermannigfaltigkeit bilden die äußeren Normalvektoren normiert auf die Länge 1 ein *äußeres Einheitsnormalenfeld* auf der Untermannigfaltigkeit (mehr dazu in Abschnitt 1.6).¹⁰

Wird hingegen eine Untermannigfaltigkeit *gleichungsdefiniert* durch $n-k$ stetig differenzierbare Funktionen beschrieben, entspricht der transponierte j -te Zeilenvektor der Jacobimatrix

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)^T = \nabla f_j$$

gerade dem Gradienten der j -ten Komponentenfunktion mit $1 \leq j \leq n - k$. Da die Gradienten linear unabhängig sind, spannen sie einen $(n-k)$ -dimensionalen Raum auf, den Normalenvektorraum in $p \in M$. Abbildung 5 zeigt das für $k=2$ und $n=3$.¹¹

1.3 Parametertransformation

Gegeben seien zwei Parameterdarstellungen einer Untermannigfaltigkeit mit den Eigenschaften aus Definition 1.1, deren Bilder sich auf der Untermannigfaltigkeit treffen (vgl. Abbildung 6). Ein Wechsel zwischen diesen Abbildungen (eine Parametertransformation) ist dann nach Satz 1.2 zulässig, da dieser durch eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion beschrieben wird, dessen Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist.

¹⁰vgl. 1, S.96.

¹¹vgl. 7, S.179.

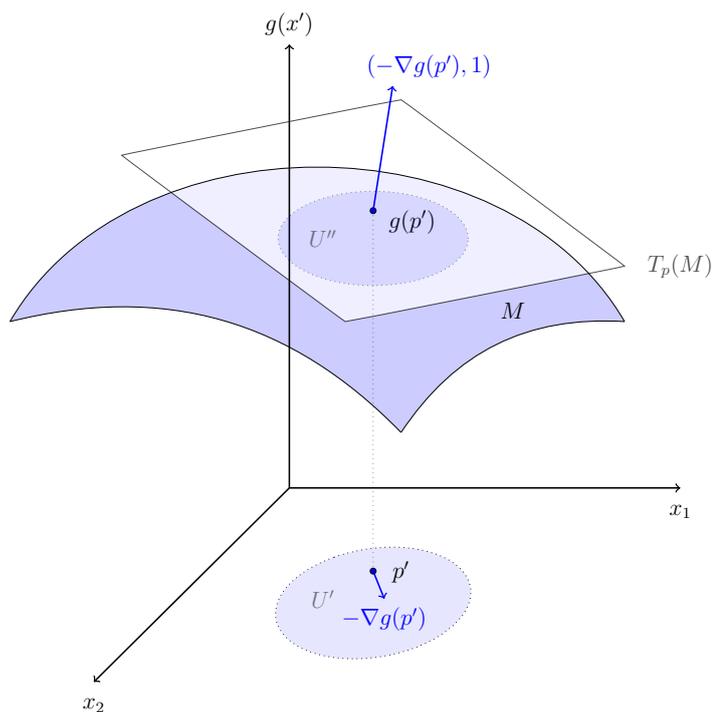


Abbildung 4: Normalvektor an einer graphendefinierten Untermannigfaltigkeit

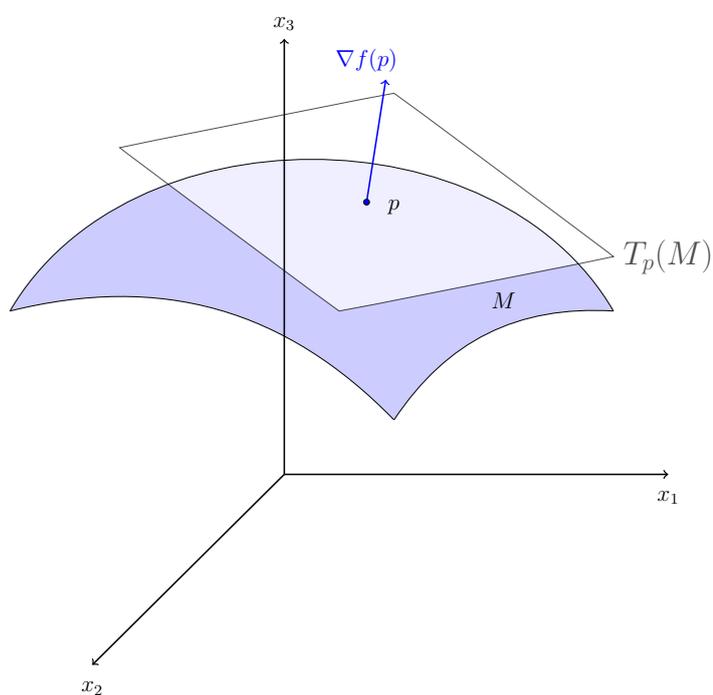


Abbildung 5: Normalvektor an einer gleichungsdefinierten Untermannigfaltigkeit

Es ist also unerheblich, welche Abbildung man für die Darstellung der Bildschnittmenge auf M wählt. Notwendig wird dieser Wechsel, wenn eine Untermannigfaltigkeit von mehr als nur einer Parameterdarstellung überdeckt wird, was im Allgemeinen der Fall ist. Zu Überschneidungen kommt es bei einer offenen Überdeckung zwangsläufig.

Satz 1.2 (Parametertransformation). ¹² Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit wie in Definition 1.1 und seien

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M, j = 1, 2$$

zwei Parameterdarstellungen, wobei sich die Bildmengen V_1 und V_2 überlappen sollen. Dann sind $W_j := \varphi_j^{-1}(V_1 \cap V_2)$, die Urbilder von $V_1 \cap V_2$, offene Teilmengen von $T_j \subset \mathbb{R}^k$ und

$$\tau = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) : W_1 \rightarrow W_2$$

ist

- (i) bijektiv und
- (ii) stetig differenzierbar, wobei auch die Umkehrabbildung
- (iii) τ^{-1} stetig differenzierbar ist.

Für einen Beweis sei auf [7, S.164] verwiesen.

1.4 Abgeschlossene Hülle und offener Kern

Wir präzisieren noch einmal die Umgebung eines Punktes: Es sei p ein Punkt in \mathbb{R}^n mit $p \in B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge (zum Beispiel ein offener n -dimensionaler „Ball“ mit Radius > 0 und p im Mittelpunkt). Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Dann ist U eine Umgebung von p , wenn es ein B gibt, das ganz in U enthalten ist. Die Existenz einer solchen offenen Menge B macht U also erst zu einer Umgebung. Abbildung 7 soll das zeigen. Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $i, r \in A$. Man sagt,

- (i) i ist ein innerer Punkt von A , wenn eine Umgebung von i ganz in A liegt und

¹²vgl. 7, S.164.

Abbildung 6: Verhalten beim Wechsel der Parameterdarstellung

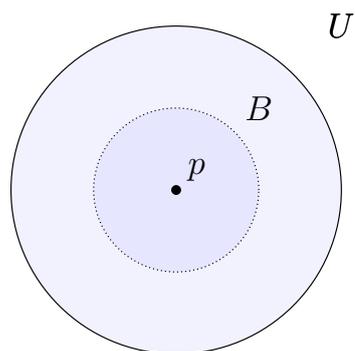
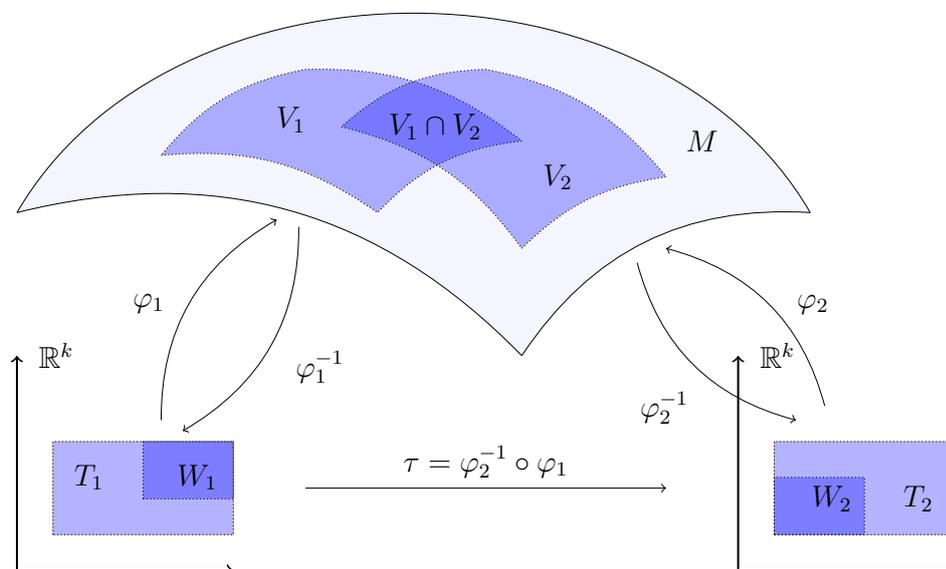


Abbildung 7: Offene Menge B in der Umgebung eines Punktes

- (ii) r ist ein Randpunkt von A , wenn jede Umgebung von r sowohl A , als auch $\mathbb{R}^n \setminus A$ trifft.

Wo sich ein Punkt befindet, lässt sich also mit Hilfe von Umgebungen festlegen. Den Punkten im Inneren einer Menge und jenen am Rand werden unterschiedliche Rollen zukommen. Wir fassen die inneren Punkte von A zu einer Menge zusammen und bezeichnen sie mit $\overset{\circ}{A}$, den *offenen Kern* von A . Mit ∂A meint man dann die Menge aller Randpunkte (vgl. Abbildung 8). Es gilt:

$$\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A.$$

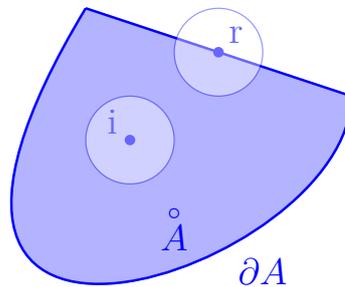
Die Vereinigung einer Menge A mit seinem Rand werden wir als *abgeschlossenen Hülle* oder *Abschluss*

$$\bar{A} = A \cup \partial A$$

bezeichnen.¹³

Der Kern wird im nachstehenden Lemma und der Abschluss in der nächsten Definition

Abbildung 8: Innerer Kern und Rand



Verwendung finden: Sei $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung einer kompakten Menge A , wie es zum Beispiel Abbildung 9 zeigt. Dann kann man in jedem U_i mit $i \in \{1, 2\}$ kompakte Teilmengen A_i finden, sodass deren Kerne $\overset{\circ}{A}_i$ ebenfalls eine offene Überdeckung von A bilden.

¹³vgl. 1, S.11.

Lemma 1.1. ¹⁴ Sei $(U_i)_{i \in I}$ die offene Überdeckung einer kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es kompakte Mengen $A_i \subset U_i$, deren Kerne ebenfalls eine offene Überdeckung von A bilden.

Beweis. Da A kompakt ist, hat jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, sei also die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ endlich. Wir zeigen die Behauptung induktiv: Man setze $K_1 := A \setminus \bigcup_{k=2}^n U_k$. Eine abgeschlossene Menge abzüglich einer Vereinigung offener Mengen ist wieder abgeschlossen, also ist K_1 abgeschlossen und überdies kompakt, da K_1 in A enthalten, also beschränkt ist. Die offene Menge U_1 ist eine Umgebung der kompakten Menge K_1 . Um jeden Punkt aus K_1 gibt es also nach Definition der Umgebung einen offenen Ball, der ganz in U_1 enthalten ist. Alle diese Bälle bilden eine Überdeckung der kompakten Menge K_1 , also ist K_1 in einer endlichen Vereinigung dieser Bälle enthalten, die wir als B_1 bezeichnen wollen.

Wir wählen eine kompakte Menge A_1 mit $K_1 \subset \overset{\circ}{A}_1 \subseteq B_1$, dann ist die kompakte Menge A_1 jedenfalls in U_1 enthalten und $\overset{\circ}{A}_1 \cup \bigcup_{k=2}^n U_k$ bildet eine offene Überdeckung von A . Angenommen, $\bigcup_{k=1}^{i-1} \overset{\circ}{A}_k \cup \bigcup_{k=i}^n U_k$ ist bereits eine offene Überdeckung von A , wobei $i-1$ offene Mengen U_k sukzessive durch Kerne kompakter Mengen A_k ersetzt wurden. Man bilde $K_i := A \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \overset{\circ}{A}_k \cup \bigcup_{k=i+1}^n U_k$, dann ist K_i kompakt in U_i . Es muss dann wieder eine kompakte Menge A_i geben, sodass $K_i \subset \overset{\circ}{A}_i \subset A_i \subset U_i$ gilt, also ist auch $\bigcup_{k=1}^i \overset{\circ}{A}_k \cup \bigcup_{k=i+1}^n U_k$ eine offene Überdeckung von A . \square

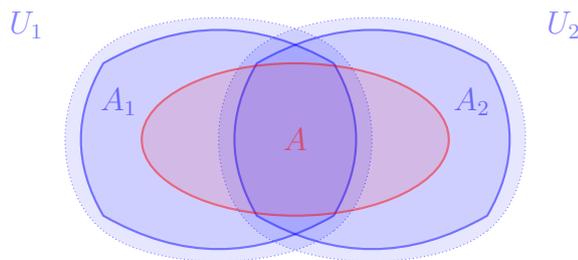


Abbildung 9: Überdeckung einer kompakten Menge A mit kompakten Teilmengen

Bemerkung 1.1. ¹⁵ Auf Untermannigfaltigkeiten bezogen werden Ränder in abgeschwächter Form verstanden. In \mathbb{R}^2 ist zum Beispiel der Rand einer Kreisscheibe K eine

¹⁴vgl. 12, S.49.

¹⁵vgl. 7, S.161,S.294.

Kreislinie. Eingebettet in die x_1x_2 -Ebene des \mathbb{R}^3 ist der topologische Rand von K jedoch die Kreisscheibe selbst. Dass dennoch von der Kreislinie die Rede ist, können wir mit der Relativ-Topologie ausdrücken. Bezeichnen wir mit E die x_1x_2 -Ebene, dann ist mit dem Rand von K relativ E wieder die Kreislinie gemeint. Sei also M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und $V, A \subset M$ Teilmengen, dann halten wir fest:

(i) Es ist V relativ M offen genau dann, wenn es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $V := M \cap U$ gilt (und im Allgemeinen muss V nicht offen in \mathbb{R}^n sein).

(ii) Man kann dann zeigen: Es ist A relativ M kompakt genau dann, wenn A in \mathbb{R}^n kompakt ist.

(iii) Der Rand von A relativ M wird mit $\partial_M A$ bezeichnet und ist die Menge aller Punkte, dessen Umgebungen sowohl Punkte aus A , als auch Punkte aus $M \setminus A$ enthalten (und entspricht im Allgemeinen nicht dem topologischen Rand).

(iv) Der Kern von A relativ M ist $A \setminus \partial_M A$.

(v) Der Abschluss von A relativ M ist $A \cup \partial_M A$.

Des Weiteren wollen wir auf die exakte Bezeichnung $\partial_M A$ verzichten, aber den Rand ∂A einer Menge A auf einer Untermannigfaltigkeit M als solchen verstanden wissen.

1.5 Kompakter Träger

Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion auf M , dann nennt man die abgeschlossene Hülle der Nichtnullstellenmenge den *Träger* der Funktion.

Definition 1.2 (Träger). ¹⁶ Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Menge

$$Tr(f) := \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f . Dabei wollen wir den Abschluss relativ M verstehen.

¹⁶vgl. 8, S.322.

Bemerkung 1.2. *Es kann passieren, dass der Träger von f nicht im Definitionsbereich enthalten ist, wenn der topologische Abschluss (relativ \mathbb{R}^n) betrachtet wird. Sei zum Beispiel ein offenes reelles Intervall $M :=]a, b[$ und eine Funktion gegeben, die auf M konstant 1 und sonst identisch 0 ist. Dann ist die Nichtnullstellenmenge $]a, b[$ und der topologische Abschluss (relativ \mathbb{R}) ist $[a, b]$, also nicht in M enthalten. Der Abschluss relativ M ist jedoch $]a, b[$. Wir werden später verlangen, dass der Träger ganz im Bild einer jeden Parameterdarstellung enthalten ist.*

Beispiel 1.2.

Abbildung 10 zeigt den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot x.$$

Die Nichtnullstellenmenge von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$. Die abgeschlossene Hülle der Nichtnullstellenmenge und damit der Träger von f ist ganz \mathbb{R} .

Bemerkung 1.3.

Der Träger in Beispiel 1.2 ist nicht kompakt, weil nicht beschränkt. Im dritten Abschnitt werden wir uns aber besonders für Funktionen mit *kompaktem Träger* interessieren. Das Integral dieser Funktionen verschwindet dann, wenn man das Integrationsgebiet nur genügend ausdehnt, denn außerhalb des kompakten Trägers nehmen die Funktionswerte den Wert Null an. Der kompakte Träger ist ein zentraler Aspekt in der Beweisführung des Stokes'schen Integralsatzes.

1.6 Orientierung

Die Orientierung eines reellen Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$ ist bereits durch die Ordnung auf der Zahlengeraden festgelegt. In \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ gibt es keine natürliche Ordnung wie auf der Zahlengeraden, dennoch kann man die Orientierung einer Basis des \mathbb{R}^n definieren.

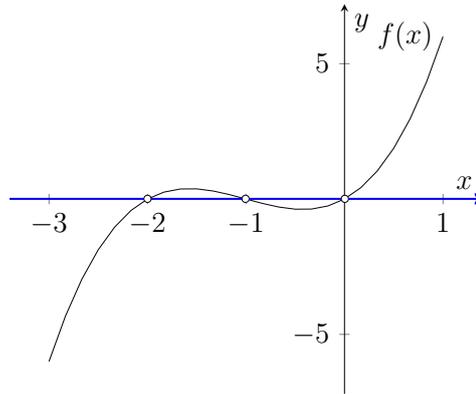


Abbildung 10: Nichtnullstellenmenge einer Funktion

Eine Basis heißt dann *positiv orientiert*, wenn deren Determinante ein positives Vorzeichen trägt. Durch die kanonische Basis (e_1, \dots, e_n) erhält der \mathbb{R}^n auf natürliche Weise eine Orientierung mit $\det(e_1, \dots, e_n) = +1 > 0$. Das Vorzeichen ist von der gewählten Reihenfolge der Basisvektoren abhängig, da sich beispielsweise durch Vertauschung zweier Spalten das Vorzeichen umkehrt. Verallgemeinern wir die eingangs erwähnte lineare Funktion zu einer *linearen Transformation*. Das ist für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen eine lineare Abbildung $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche anstelle reeller Zahlen Punkte aus U abbildet, indem der Punkt mit einer $n \times n$ Matrix multipliziert wird. Ist die Determinante dieser Matrix positiv, nennt man die lineare Transformation *orientierungstreu*. Betrachten wir nun eine Fläche in \mathbb{R}^3 und die Normalvektoren an einem Punkt dieser Fläche. Davon gibt es immer zwei, einen auf jeder Seite. Es stellt sich die Frage, welcher der beiden Normalvektoren die *positive Orientierung* trägt. Hierfür bildet man die Determinante eines Normalvektors mit den Tangentialvektoren an der Ebene (in einer festgelegten Reihenfolge). Diese Vektoren bilden eine Basis für den \mathbb{R}^3 , dessen Orientierung bestimmt werden kann. Der Normalvektor ist dann positiv orientiert, wenn die Determinante dieser Basis positiv ist. Ziehen wir noch einmal den Begriff der Parametertransformation aus Definition 1.2 heran. Je zwei Parameterdarstellungen φ_1 und φ_2 mit $\varphi_1|_{W_1} = \varphi_2 \circ \tau$ heißen dann gleich orientiert, wenn die Parametertransformation τ *orientierungstreu* ist. Eine Untermannigfaltigkeit M heißt *orientiert*, wenn alle Parametertransformationen von M orientierungstreu sind.¹⁷

¹⁷vgl. 12, S.72.

Definition 1.3 (Orientierung). Sei (e_1, \dots, e_n) und (v_1, \dots, v_n) jeweils eine Basis eines n -dimensionalen Vektorraumes und $1 \leq i \leq n$.

(i) (Gleiche Orientierung.)¹⁸ Man nennt die Basen gleich orientiert, wenn die Determinante der linearen Transformation $\tau \in M_n(\mathbb{R})$ mit

$$\tau(e_i) = v_i$$

ein positives Vorzeichen trägt.

(ii) (Positive Orientierung.)¹⁹ Die Basis heißt positiv orientiert bezüglich der kanonischen Orientierung des \mathbb{R}^n , falls

$$\det(v_1, \dots, v_n) > 0$$

ist.

(iii) (Orientierungstreue.)²⁰ Sei

$$\tau : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$$

eine stetig differenzierbare Parametertransformation wie in Satz 1.2. Dann nennt man τ orientierungstreu, wenn die Determinante der Jacobimatrix von τ

$$\det(D\tau) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tau_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

ein positives Vorzeichen trägt und orientierungsumkehrend im Falle eines negativen Vorzeichens.

¹⁸vgl. 12, S.73.

¹⁹vgl. 7, S.271.

²⁰vgl. 7, S.265.

1.7 Orientierung von Hyperflächen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Orientierung der sogenannten *Hyperfläche* kann durch äußere Normalvektoren beschrieben werden. Diese werden normiert auf die Länge 1 zu einem äußeren *Einheitsnormalenfeld* von M zusammengefasst, das durch eine stetige Abbildung

$$n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$n(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

festgelegt ist, wobei f eine gleichungsdefinierte Darstellung einer Untermannigfaltigkeit wie in Definition 1.1 ist. Ist (v_1, \dots, v_{n-1}) eine positiv orientierte Basis einer Tangentialebene $T_p(M)$, dann heißt das Einheitsnormalenfeld n positiv orientiert, wenn

$$\det(n(p), v_1, \dots, v_{n-1}) > 0$$

gilt. Konkret heißt das für die Parameterdarstellung

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

einer Untermannigfaltigkeit M mit $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, dass man mit

$$\det \left(n(\varphi(t)), \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_{n-1}} \right) > 0$$

eine positive Orientierung erhält, wobei $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in T$ und $\varphi(t) = p \in V$ gilt.

Dabei kann man mit

$$v_i(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

die Tangentialvektoren an M identifizieren.²¹

Beispiel 1.3.²²

²¹vgl. 7, S.272.

²²vgl. 7, S.274.

1 INTEGRATIONSGBIETE IN \mathbb{R}^n

Eine Kreisfläche

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius $r > 0$ hat den Rand

$$\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^2,$$

eine 1-dimensionale Hyperfläche oder 1-Sphäre S_1 in \mathbb{R}^2 . Für $T =]0, \pi[$ sei

$$\varphi : T \rightarrow S_1$$

eine Parameterdarstellung mit

$$\varphi(t) = r \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

Wir wählen ein normiertes äußeres Einheitsnormalenfeld

$$n : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$n(p) = p \frac{1}{r}$$

für einen Punkt $p \in \varphi(T) \subset S_1$, wie Abbildung 11 zeigt. Es ist

$$\det \left(n(\varphi(t)), \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) = \det \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 > 0,$$

also ist der Rand positiv orientiert. Durch weitere solcher Parameterdarstellungen - zum Beispiel eine einzige weitere auf $T' =]\pi/2, (2\pi + \pi/2)[$ - kann die 1-Sphäre vollständig überdeckt werden. Den Normalvektor erhält man auch, indem von der gleichungsdefinierten Darstellung

$$f(x) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

der Gradient

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \cdot p$$

gebildet wird und der Gradient von f durch dessen Länge

$$\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{2^2(x^2 + y^2)} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$$

dividiert wird.

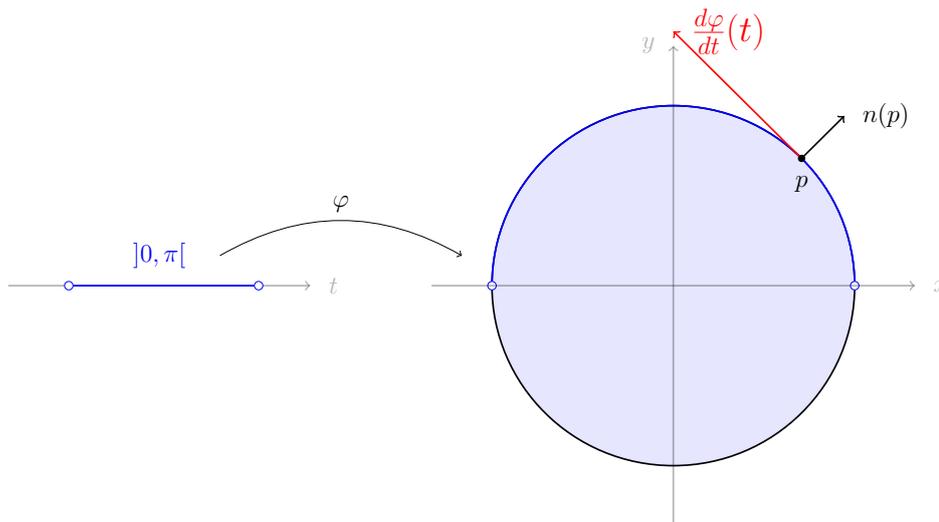


Abbildung 11: Orientierung einer 1-Sphäre

1.8 Halbraum

Wir interessieren uns auch für den Rand von Untermannigfaltigkeiten bzw. für berandete Mengen auf Untermannigfaltigkeiten. Die Ränder erhält man, indem man Parameterdarstellungen auf Mengen mit Rand definiert, zum Beispiel einem *Halbraum*:

Definition 1.4 (Halbraum). ²³ Ein k -dimensionaler Halbraum ist die Menge

$$H_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$$

²³vgl. 7, S.291.

mit dem durch die $(k-1)$ -dimensionale Hyperebene beschriebenen Rand

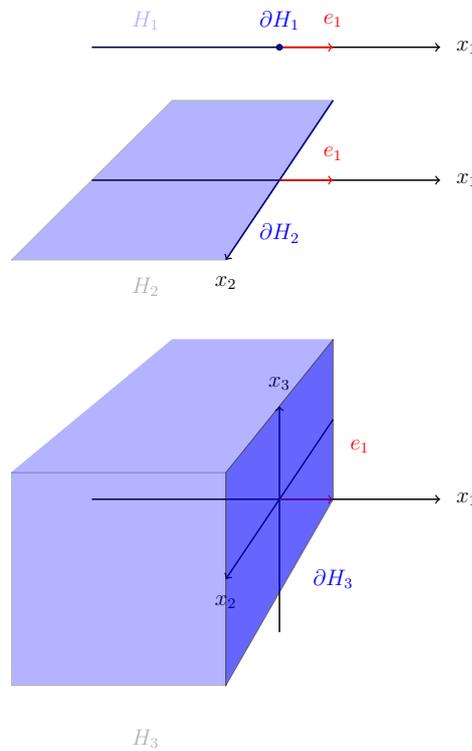
$$\partial H_k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 = 0\}.$$

Für $k = 1$ ist der Halbraum H_1 das Intervall $] -\infty, 0]$ und der Rand $\partial H_1 = \{0\}$. Der Halbraum H_1 liegt also auf einer Geraden und der Rand ∂H_1 ist die 0-dimensionale Hyperebene, ein Punkt auf der Zahlengeraden.

Für $k = 2$ ist der Halbraum H_2 die Halbebene $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}$ und der Rand ist als 1-dimensionale Hyperebene die Gerade $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$.

Für $k = 3$ ist die 2-dimensionale Randhyperebene des Halbraums H_3 die x_2x_3 -Ebene. Die Normalvektoren des Randes

Abbildung 12: 1-, 2- und 3-dimensionale Halbräume



$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

lassen sich zu einem äußeren Einheitsnormalenfeld zusammenfassen. Mit den Tangenti-

alvektoren e_2, \dots, e_k sind die Einheitsnormalvektoren e_1 in \mathbb{R}^k positiv orientiert, denn

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_k) = 1.$$

Abbildung 12 zeigt 1-, 2- und 3-dimensionale Halbräume.

1.9 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Da uns jetzt das Konzept des Halbraumes

$$H_k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^k$$

bekannt ist, wollen wir nun auch eine Untermannigfaltigkeit mit Rand definieren:

Definition 1.5 (Rand einer Untermannigfaltigkeit). ²⁴ Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, wenn jeder Punkt in M ein lokales Koordinatensystem

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V$$

(mit den Eigenschaften aus Definition 1.1) in H_k besitzt. Dabei enthält

- (i) $T \cap H_k = T$ lokale Koordinaten nur für innere Punkte von $M \cap V$ relativ M und
- (ii) $T \cap \partial H_k \neq \emptyset$ stellt lokale Koordinaten nur für Randpunkte in $\partial M \cap V$ relativ M bereit.

1.10 Kompakta mit glattem Rand auf Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun eine kompakte Teilmenge auf einer Untermannigfaltigkeit M und dessen Rand relativ M betrachten, der lokal wie der Rand eines Halbraumes aussieht. Dabei werden glatte Ränder durch unendlich oft differenzierbare Parameterdarstellungen beschrieben.

²⁴vgl. 12, S.98.

Definition 1.6. ²⁵ Sei $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Wir sagen, A habe glatten Rand, falls es für jeden Randpunkt in ∂A ein lokales Koordinatensystem

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

mit folgenden Eigenschaften gibt (vgl. Abbildung 13):

- (i) $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$
- (ii) $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap V$.

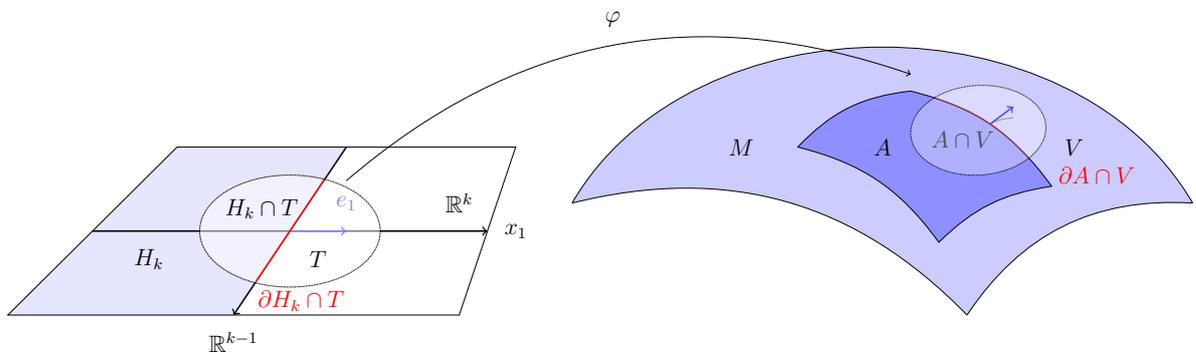


Abbildung 13: Kompaktum mit Rand auf einer Untermannigfaltigkeit

2 Die Integranden in \mathbb{R}^n

In diesem Abschnitt werden wir die Integranden des Integrals über Untermannigfaltigkeiten besprechen. Differentialformen liefern einen einheitlichen Zugang für eine allgemeine Formulierung des Stokes'schen Integralsatzes. Da es sich dabei um ein recht abstraktes Konzept handelt, erläutern wir zuerst Vertrautes, um dann Pfaff'sche Formen einzuführen, welche durch das Dachprodukt zu Differentialformen k -Ordnung fortgesetzt werden können.

²⁵vgl. 7, S.294.

2.1 Differentialoperatoren zwischen Feldern

Als Einstieg wollen wir sehen, wie der *Gradient* und die *Divergenz* (die Begriffe werden in Abschnitt 5.1 vorgestellt) einen Zusammenhang zwischen einem *Skalarfeld* und einem *Vektorfeld* herstellen (siehe Abbildung 14).

Beispiel 2.1.

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Die stetig differenzierbare Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

definiere ein skalares Feld, das jedem Punkt $p \in U$ eine reelle Zahl (einen Skalar) zuordnet. Man kann sich den Wert $f(p)$ an den Punkt p angeheftet vorstellen. Weiter sei

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ein Vektorfeld, das jedem Punkt p in U einen Vektor anheftet. Wählen wir für

$$F := \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$$

den Gradienten von f , dann sieht man folgenden Zusammenhang: Der Gradient macht aus einem skalaren Feld ein Vektorfeld und die Divergenz macht aus einem Vektorfeld ein skalares Feld. Abbildung 14 soll das für einige Punkte und Vektoren verdeutlichen. Zum Beispiel trägt der Punkt $(1,2)$ den skalaren Wert $1+2=3$, der Gradient von f ist an jedem Punkt der Vektor $(1,1)$ und die Divergenz ist (als Spezialfall) in jedem Punkt Null.

2.2 Cotangentialvektor

Betrachten wir zuerst den physikalischen Hintergrund des Skalarprodukts.

Beispiel 2.2.

2 DIE INTEGRANDEN IN \mathbb{R}^n

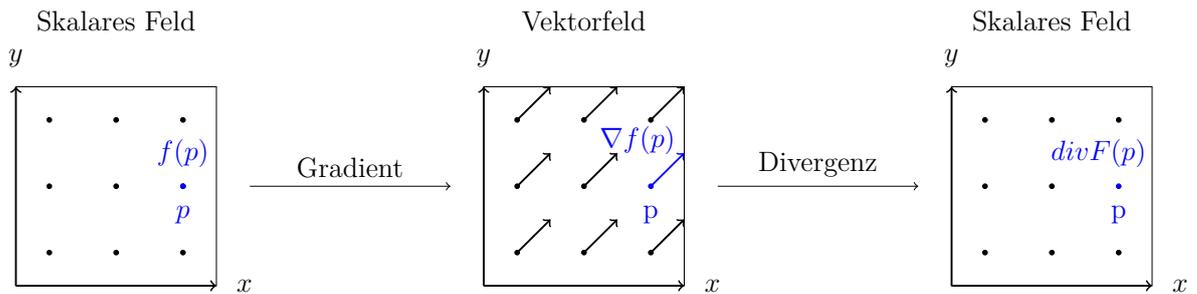


Abbildung 14: Differentialoperatoren zwischen Feldern

Sei $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit

$$s = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_n^2}$$

der Länge des Vektors und $\vec{F} \in \mathbb{R}^n$ eine Kraft mit

$$F = \sqrt{F_1^2 + \dots + F_n^2}$$

der Länge des Vektors \vec{F} . Angenommen, die Vektoren liegen auf einer gemeinsamen Geraden, dann berechnet sich die Arbeit entlang des Vektors \vec{s} durch $W = F \cdot s$. Andernfalls wirkt nur ein Teil von \vec{F} in Richtung von \vec{s} , nämlich die auf \vec{s} projizierte



Abbildung 15: Arbeit im 1-dimensionalen Fall

Kraft \vec{F}_{pr} (vgl. Abschnitt 5.4). Die Arbeit entlang der Verschiebung ergibt sich dann mit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \underbrace{F_1 \cdot s_1}_{W_1} + \dots + \underbrace{F_n \cdot s_n}_{W_n}$$

dem Skalarprodukt der Vektoren $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ und $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$, wobei W_i die Arbeit in Koordinatenrichtung x_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ darstellt. Abbildung 16 zeigt das in \mathbb{R}^3 . Die Arbeit $W_i \in \mathbb{R}$ berechnet sich dann durch $F_i \cdot s_i$ und die „Koordinatenvektoren“ \vec{F}_i und \vec{s}_i liegen auf einer gemeinsamen Verlängerung. Die Länge F_{pr} der projizierten

Kraft berechnet sich durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \vec{F}, \vec{s} \cdot \frac{1}{s} \right\rangle = F_{pr}$$

von \vec{F} mit dem *normierten* Vektor $\vec{s} \cdot \frac{1}{s}$. Die Arbeit W ergibt sich andererseits wieder aus dem Produkt der Länge F_{pr} der projizierten Kraft und s der Länge des Vektors \vec{s} :

$$F_{pr} \cdot s = \left\langle \vec{F}, \vec{s} \cdot \frac{1}{s} \right\rangle \cdot s = \left\langle \vec{F}, \vec{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot s \right\rangle = \left\langle \vec{F}, \vec{s} \right\rangle,$$

da diese auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Nun betrachten wir diesen Zusammenhang in einem ganz anderen Licht: Wir wollen,

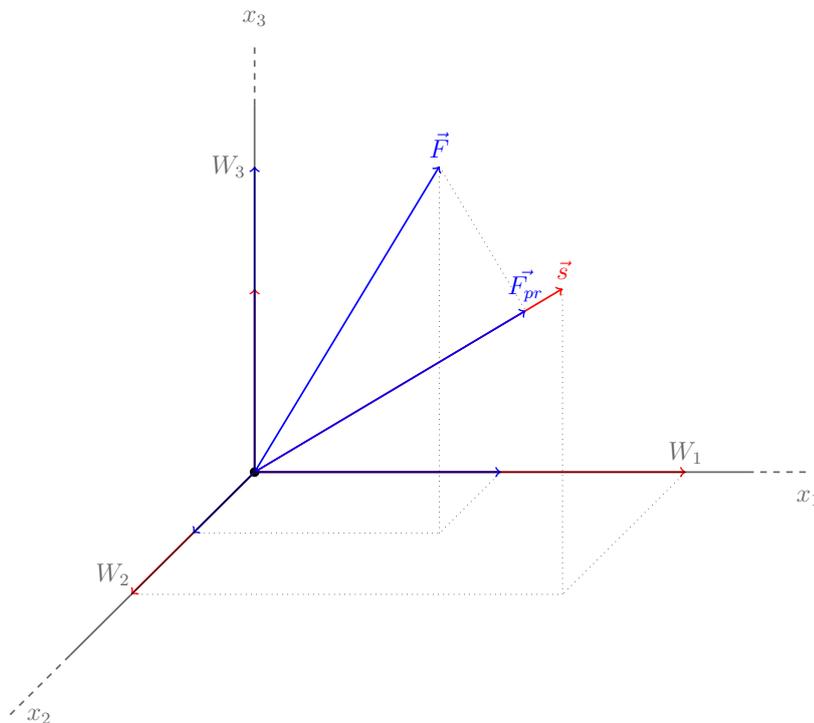


Abbildung 16: Physikalische Interpretation des Skalarproduktes als Arbeit

dass die Kraft in einem Punkt p als Funktion auftritt (Da die Kraft in einem Kraftfeld vom Punkt p abhängt, müssen wir $\vec{F}(p)$ schreiben). Dann könnte $\vec{F}(p)$ am Vektor \vec{s} mit Hilfe des Skalarproduktes durch $\vec{F}(p)(\vec{s}) := \left\langle \vec{F}(p), \vec{s} \right\rangle$ ausgewertet werden.

Dann steht $\vec{F}(p)$ zugleich für eine Funktion $\vec{F}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und für einen ‘Covektor’ von \vec{s} , da er zusammen mit \vec{s} im Skalarprodukt auftritt. Ist zudem $\vec{v} \in T_p(U)$ ein

Tangentialvektor an eine Kurve α im Punkt $p \in U$, macht das $\vec{F}(p)$ zu einem Element des dualen Vektorraumes $T_p^*(U)$ (aller linearen Funktionen $T_p(U) \rightarrow \mathbb{R}$) von $T_p(U)$, also zu einem *Cotangentialvektor* von \vec{v} . Wenn aber $\vec{F}(p)$ ein Cotangentialvektor ist, dann würden wir wie im nächsten Abschnitt die Funktion \vec{F} , welche einem Punkt p einen Cotangentialvektor zuordnet, als *Pfaff'sche Form* bezeichnen. Mit dem Wert des Cotangentialvektors berechnet sich die Arbeit im Punkt p . Über die Kurve integriert erhält man die Arbeit der Verschiebung eines Massepunktes entlang der Kurve durch das Kraftfeld²⁶:

$$\int_{\alpha} \langle \vec{F}(p), \vec{v} \rangle = \int_{\alpha} \vec{F}.$$

Gemäß diesem Schema

$$\begin{array}{ccc} & \vec{F} & \\ p & \longrightarrow & \vec{F}(p) \\ & \vec{v} & \longrightarrow \vec{F}(p)(\vec{v}) = \langle \vec{F}(p), \vec{v} \rangle \end{array}$$

hat sich die Bezeichnung \vec{F} von Rechts nach Links durchgezogen und als Pfaff'sche Form offenbart. Im Folgenden werden wir den Weg in üblicher Weise von Links nach Rechts beschreiten, wodurch sich die Bezeichnung für ω einer Pfaff'schen Form von Links nach

$$\begin{array}{ccc} & \omega & \\ p & \longrightarrow & \omega(p) \\ & \vec{v} & \longrightarrow \omega(p)(\vec{v}) = \langle \omega(p), \vec{v} \rangle \end{array}$$

Rechts überträgt. Im nächsten Teil präzisieren wir diese Überlegungen. So wie bisher werden wir einen Vektor v nicht immer mit einem Pfeil \vec{v} kennzeichnen.

2.3 Pfaff'sche Form

Definition 2.1 (Pfaff'sche Form). ²⁷ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Pfaff'sche Form oder Differentialform 1.Ordnung ist eine Abbildung ω , welche jedem Punkt p in U

²⁶vgl. 6, S.132.

²⁷vgl. 7, S.224.

einen Cotangentialvektor $\omega(p) \in T_p^*(U)$ für alle $p \in U$ zuordnet (vgl. Abbildung 17):

$$\omega : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_p^*(U),$$

$$p \mapsto (v \mapsto \langle \omega(p), v \rangle).$$

Der Cotangentialvektor ordnet seinerseits jedem Tangentialvektor $v \in T_p(U)$ eines fixen Tangentialraums eine reelle Zahl $\omega(p)(v) = \langle \omega(p), v \rangle$ zu.

Eine Differentialform 1.Ordnung ordnet also jedem Punkt eine Funktion (eine Linearform $\phi : T_p(U) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \in T_p^*(U)$) zu. Das *totale Differential* ist ein konkretes Beispiel für eine Pfaff'sche Form:

Beispiel 2.3. ²⁸

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist das totale Differential df eine Differentialform 1.Ordnung, welche jedem Punkt p in U die Linearform $df(p)$ zuordnet. Der Wert der Linearform an einem Vektor v ist dann $df(p)(v) = \langle df(p), v \rangle =$

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i$$

für $p \in U$ und $v \in T_p(U)$.

Bemerkung 2.1. ^{29,30}

Bei dem gerade definierten Differential handelt es sich um die Richtungsableitung von f in Richtung v , wenn v die Länge 1 hat. Das sieht man so: Die Richtungsableitung $D_v f(p)$ im Punkt p in Richtung v ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t}$$

²⁸vgl. 7, S.225.

²⁹vgl. 6, S.72.

³⁰vgl. 7, S.225.

(Die Richtungsableitungen existieren, weil f als stetig (total) differenzierbar vorausgesetzt wurde). Fasst man $p + t \cdot v$ als lineare Funktion $g(t)$ auf, kann man in die gewöhnliche Ableitung von $f \circ g$ in einer Variablen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t - 0} = (f \circ g)'(0)$$

an der Stelle 0 umformen. Nach der mehrdimensionalen Kettenregel ist aber weiter

$$(f \circ g)'(0) = Df(g(0)) \cdot g'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und das ist gerade das Skalarprodukt

$$\langle \nabla f(p), v \rangle$$

mit $g(0) = p$ und $g'(0) = v$. Betrachten wir den Punkt p als Wert an einer Kurve $\alpha :] - \varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow U$ an der Stelle 0 und $\alpha'(0) = v$ als Tangentialvektor an der Kurve im Punkt p für $\varepsilon > 0$. Dann ist unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(\alpha(t)) \cdot \alpha'_i(t).$$

Für $t = 0$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(\alpha(0)) \cdot \alpha'_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(p) \cdot v_i = \langle df(p), v \rangle.$$

Fasst man den negativen Gradienten eines Potentialfeldes als Kraftfeld auf, berechnet sich durch das Kurvenintegral von df die Arbeit entlang der Kurve.³¹

³¹vgl. 6, S.132.

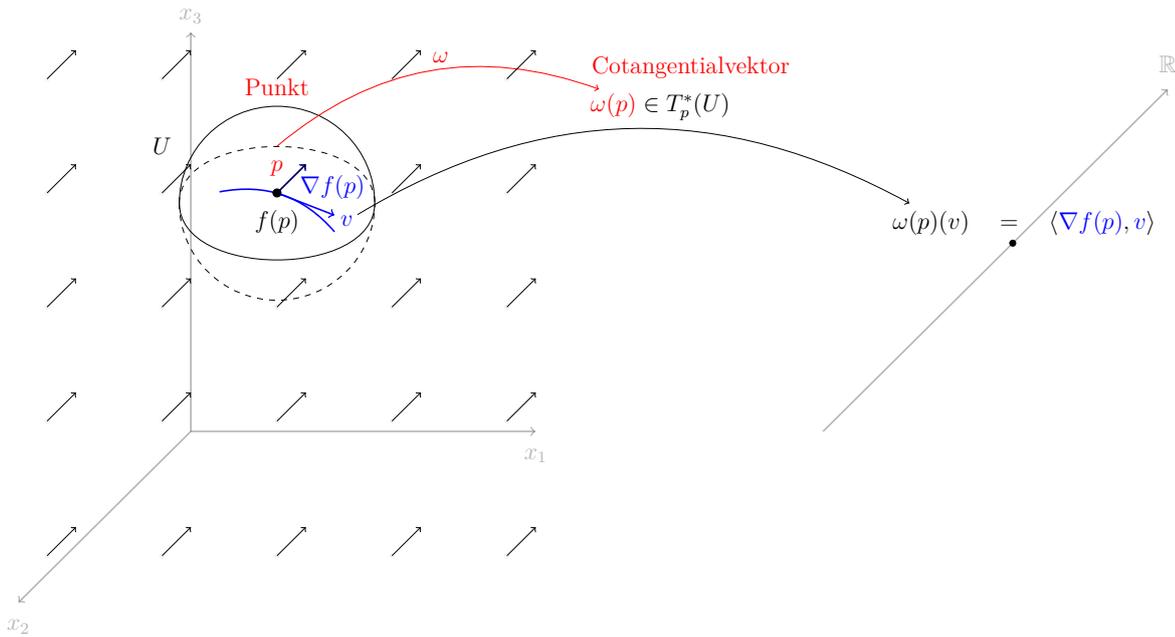


Abbildung 17: Pfaff'sche Form auf einer Kurve in einem Gradientenfeld von f

2.4 Koordinatendarstellung Pfaff'scher Formen

Wir suchen eine Basis für die Pfaff'schen Formen. Hierfür betrachten wir die kanonischen Koordinatenfunktionen $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, welche jedem Punkt in \mathbb{R}^n seine i -te Koordinate zuordnet (also eine Projektion des Punktes x auf die Koordinate x_i)³².

Demnach ist für $p \in \mathbb{R}^n$

$$x_i(p) = x_i \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = p_i.$$

Der Gradient der i -ten Projektion ist

$$\nabla x_i(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}(p_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_i}(p_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n}(p_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i.$$

³²vgl. 7, S.225.

Dann ist das totale Differential dx_i im Punkt p ausgewertet am j -ten Einheitsvektor e_j nach Definition 2.1

$$\langle \nabla x_i(p), e_j \rangle = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

oder anders in Hinblick auf die Richtungsableitung

$$\langle dx_i(p), e_j \rangle = \frac{d}{dt}(x_i(p + t \cdot e_j))|_{t=0} = \frac{d}{dt}((p_i + t \cdot \delta_{ij}))|_{t=0} = \delta_{ij},$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Deshalb sind nach Definition 5.1 die $dx_i(p)$ die dualen Basiselemente von $T_p^*(U)$. Als Richtungsableitung von x_i in Richtung e_j handelt es sich hier um die partielle Ableitung nach der j -ten Koordinate³³.

2.5 Differentialformen höherer Ordnung

Nun verallgemeinern wir den Integranden zu einer Differentialformen ω der Ordnung k mit $1 \leq k \leq n$. Die Verallgemeinerung des Cotangentialvektors $\omega(p)$ ist dann eine *Multilinearform*, welche k Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Dabei heißt die Multilinearform *alternierend*, wenn der Wert der Funktion bei Vertauschung zweier Argumente das Vorzeichen ändert und *symmetrisch*, wenn das Vorzeichen unverändert bleibt (wir betrachten aber nur alternierende Multilinearformen).

Definition 2.2. ³⁴ Eine alternierende k -Form auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\phi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} = V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) *Linearität in jedem Argument*

$$\phi(\dots, \lambda u + v, \dots) = \lambda \phi(\dots, u, \dots) + \phi(\dots, v, \dots)$$

³³vgl. 7, S.225.

³⁴vgl. 7, S.248.

(ii) Vorzeichenwechsel bei vertauschten Argumenten

$$\phi(\dots, u, \dots, v, \dots) = -\phi(\dots, v, \dots, u, \dots)$$

(iii) Verschwindet bei gleichen Argumenten

$$\phi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 2.2. ³⁵

(ii) und (iii) sind unter Voraussetzung der Linearität äquivalent, denn (iii) \Rightarrow (ii) :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(\dots, v+w, \dots, v+w, \dots) = \underbrace{\phi(\dots, v, \dots, v, \dots)}_0 \\ &\quad + \phi(\dots, w, \dots, v, \dots) \\ &\quad + \phi(\dots, v, \dots, w, \dots) \\ &\quad + \underbrace{\phi(\dots, w, \dots, w, \dots)}_0 \\ &= \phi(\dots, w, \dots, v, \dots) + \phi(\dots, v, \dots, w, \dots) \end{aligned}$$

und (ii) \Rightarrow (iii) :

$$\phi(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\phi(\dots, v, \dots, v, \dots),$$

also

$$\phi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

Allgemeiner gilt für eine beliebige Permutation $\pi(1, \dots, k)$

$$\phi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \phi(v_1, \dots, v_k)$$

mit $\text{sign}(\pi) = (-1)^r$ dem Vorzeichen der Permutation und r der Anzahl der Vertauschungen. Die alternierende k -Form ist dann ein Element des Vektorraums, den man

³⁵vgl. 7, S.248f.

mit $\wedge^k V^*$ bezeichnet. Man setzt $\wedge^1 V^* = V^*$ für den Vektorraum der 1-Formen und $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ für den Vektorraum der 0-Formen.

2.6 Die Determinante als n-Form

Die Determinante ist eine alternierende Multilinearform, denn sie ist linear in jeder Spalte, ändert das Vorzeichen bei vertauschten Spalten und verschwindet bei zwei gleichen Spalten (analoges gilt für Zeilen). Für eine 2×2 -Matrix mit reellen Einträgen sieht man die Linearität zum Beispiel in erster Spalte, weil

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda v_1 + w_1 & u_1 \\ \lambda v_2 + w_2 & u_2 \end{pmatrix} &= (\lambda v_1 + w_1) \cdot u_2 - (\lambda v_2 + w_2) \cdot u_1 \\ &= (\lambda v_1 \cdot u_2 - \lambda v_2 \cdot u_1) + (w_1 \cdot u_2 - w_2 \cdot u_1) \\ &= \lambda(v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1) + (w_1 \cdot u_2 - w_2 \cdot u_1) \\ &= \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei gleichen Spalten gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 = 0$$

und wenn zwei Spalten vertauscht werden, gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1 = -(v_2 \cdot u_1 - v_1 \cdot u_2) = -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.3. ³⁶

Die Determinante einer $n \times n$ Matrix stellt das Volumen des von den n Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepipeds (auch Spat genannt) dar. Wir zeigen das für $n = 3$ (vgl.

³⁶vgl. 2, S.78.

Abbildung 18): Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte, dann erhält man

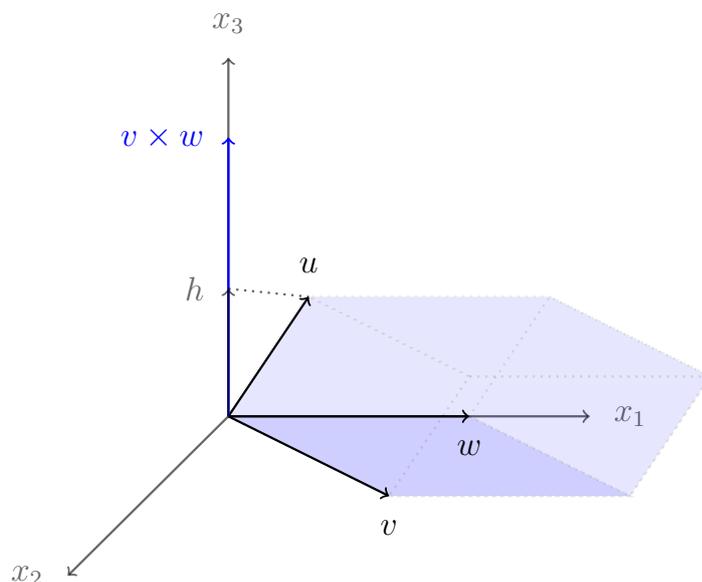


Abbildung 18: 3-Spat oder Parallelepiped

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ - u_2 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ + u_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

und das ist das Skalarprodukt

$$\langle u, v \times w \rangle$$

von $u = (u_1, u_2, u_3)$ mit dem Kreuzprodukt der Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$, das man auch *Spatprodukt* nennt. Es berechnet das Volumen des von

den Vektoren u , v und w aufgespannten Spats. Normieren wir den Vektor $v \times w$ (der bekanntlich rechtwinkelig auf v und w steht, vgl. Abschnitt 5.3), ist das Skalarprodukt

$$\frac{v \times w}{\|v \times w\|} \cdot u = h$$

die Höhe des Parallelepipeds, das durch Projektion von u auf den Normalvektor entsteht. Da die Norm des Kreuzprodukts $\|v \times w\| = A$ die Grundfläche des von den Vektoren v und w aufgespannten Parallelogramms darstellt, gilt

$$(v \times w) \cdot u = h \cdot A$$

das Volumen des Parallelepipeds. Legen wir zudem den Vektor w in den Ursprung eines 3-dimensionalen Koordinatensystems mit w auf der x_1 -Achse und den Vektor v in die x_1x_2 -Ebene wie in Abbildung 18, dann ist $v_3 = w_3 = 0$ und $w_2 = 0$. Damit verschwinden die ersten zwei Untermatrizen und der letzte Summand ist wegen $w_2 = 0$ gleich

$$u_3 \cdot w_1 \cdot v_2$$

dem besagten Volumen. Die Fläche des Rechtecks mit den Seiten w_1 und v_2 entspricht der Grundfläche des Parallelepipeds und u_3 ist dessen Höhe h . So sieht man erneut, dass sich auf diese Weise das Volumen des Körpers berechnen lässt.

Definition 2.3. ³⁷ Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ Linearformen mit $k \leq n$. Dann ist die Abbildung

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

das Dachprodukt und definiert durch

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \langle \phi_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \phi_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \phi_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

³⁷vgl. 7, S.249.

für $v_1, \dots, v_k \in V$.

Das Dachprodukt hat wieder die Eigenschaften einer alternierenden Multilinearform, das heißt linear in jedem Argument bei sonst festgehaltenen Einträgen und die Funktionswerte bleiben unter einer beliebigen Permutation der Vektoren gleich bis auf ein Vorzeichen, das sich wieder durch $\text{sign}(\pi)$ berechnen lässt.³⁸

Bilden die linearen Funktionale $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ eine Basis von V^* , so ist $dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) =: (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p)$ eine Basis von $\wedge^k V^*$ mit einer Auswahl von Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Es gilt also nach Definition 2.3

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \langle dx_{i_1}(p), v_1 \rangle & \dots & \langle dx_{i_1}(p), v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle dx_{i_k}(p), v_1 \rangle & \dots & \langle dx_{i_k}(p), v_k \rangle \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\langle dx_j(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) v_i = v_j$$

für $1 \leq j \leq n$ und damit wird die Determinante zu

$$\det \begin{pmatrix} v_{i_1 1} & \dots & v_{i_1 k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i_k 1} & \dots & v_{i_k k} \end{pmatrix},$$

wobei mit $v_{i_j l}$ die i_j -te Koordinate des Vektors v_l gemeint ist mit $1 \leq i_j \leq n$ und $1 \leq j, l \leq k$. Letztendlich wird also in jeder Zeile ein Tangentialvektor v_l auf seine i_j -te Koordinate projiziert. Bei der Determinante handelt es sich dann um den Flächeninhalt eines k -dimensionalen Spates, der durch Projektion eines (von den Vektoren v_1, \dots, v_n aufgespannten) n -dimensionalen Spates in die $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ Ebene entsteht (bei positiv orientierten Tangentialvektoren). So wie sich in Beispiel 2.2 die Teilarbeit W_i in Koordinatenrichtung x_i durch $W_i = F_i \cdot s_i$ berechnen lässt, erhält man nun auch im n -dimensionalen Fall den Fluss einer Komponentenfunktion $F_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ eines Vektorfeldes durch den von den projizierten Vektoren aufgespannten Spat, indem man

³⁸vgl. 7, S.249.

$F_{i_1 \dots i_k}$ mit dieser Determinante multipliziert (Wem das Produkt aus Fläche und Kraft Unbehagen bereitet, bedenke, dass auch die Länge eines Normalvektors zweier linear unabhängiger Vektoren in \mathbb{R}^3 der Fläche des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogramms entspricht). In Summe kann man also den Fluss („die Arbeit“) eines Vektorfeldes F an der k -dimensionalen Tangentialfläche einer Untermannigfaltigkeit im Punkt p berechnen.

2.7 Differentialformen k.Ordnung

Definition 2.4. ³⁹ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist

$$\omega : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} \wedge^k T_p^*(U)$$

mit der Zusatzforderung $\omega(p) \in \wedge^k T_p^*(U)$ eine Differentialform k .Ordnung.

Eine Differentialform k .Ordnung ordnet also jedem Punkt in U eine k -Form zu.

2.8 Koordinatendarstellung von Differentialformen k.Ordnung

Die $\binom{n}{k}$ k -Formen $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p)$ bilden eine Basis von $\wedge^k T_p^*(U)$ mit $p \in U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich eine Differentialformen k .Ordnung in U als Linearkombination der $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen $f_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Es ist ω stetig differenzierbar, wenn die $f_{i_1 \dots i_k}$ stetig differenzierbar sind.⁴⁰

Bemerkung 2.4.

Die $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ bilden keine Vektorraumbasis, da zur Darstellung einer Differentialform nicht konstante Koeffizientenfunktionen nötig sind, der Vektorraum der Differentialformen ist also unendlichdimensional. Allerdings bilden die $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

³⁹vgl. 7, S.252.

⁴⁰vgl. 7, S.252.

ein Erzeugendensystem und jede Differentialform k -Ordnung lässt sich durch eindeutig bestimmte Koeffizientenfunktionen darstellen.

2.9 Ableitung von Differentialformen

Definition 2.5. ⁴¹ Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

eine stetig differenzierbare Differentialform k -Ordnung. Dann nennt man die Differentialform $(k+1)$ -Ordnung

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

die äußere Ableitung von ω .

Beispiel 2.4. ⁴²

Betrachten wir jetzt die äußere Ableitung einer Differentialform $(n-1)$ -Ordnung. Sei

$$F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und

$$F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$$

die i -te Komponentenfunktion. Das totale Differential der i -ten Komponentenfunktion ist

$$dF_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i.$$

Wir wählen Basiselemente

$$(-1)^{i-1} (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n)(p),$$

⁴¹vgl. 7, S.253.

⁴²vgl. 7, S.254.

um $\omega(p)$ darzustellen. Dabei bedeutet \widehat{dx}_i , dass diese Differentialform auszulassen ist. So gibt es $\binom{n}{n-1} = n$ verschiedene Möglichkeiten eine Basis zusammenzustellen und n ist auch die Dimension des von den Basiselementen aufgespannten Vektorraumes $\wedge^{n-1}T_p^*(U)$. Dann sei

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine Differentialform $(n-1)$ -Ordnung. Die *äußere Ableitung* von ω ist dann gegeben durch

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dF_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Betrachten wir nur den i -ten Summanden. Setzt man für das totale Differential dF_i ein, erhält man

$$(-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Das Dachprodukt von Linearformen verschwindet, wenn zwei Linearformen übereinstimmen (siehe Definition 2.3). Für $j \neq i$ kommen jeweils zwei Differentialformen doppelt vor, also verschwinden diese Summanden. Es bleibt nur der i -te Summand

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und im Dachprodukt wird die „Lücke“ an i -ter Stelle durch die Differentialform dx_i aufgefüllt. Das Vorzeichen der Permutation $(-1)^{i-1}$ hebt sich auf. Setzt man die Summanden wieder zusammen, erhält man für die äußere Ableitung

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Satz 2.1. ⁴³ Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\phi_i \in V^*$ mit $1 \leq i \leq k$. Es sei eine Abbildung

$$\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \phi_j$$

⁴³vgl. 7, S.250.

mit $(a_{ij}) \in M_k(\mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det(a_{ij}) \cdot \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k.$$

Beweis. Wir setzen für ψ_i ein und erhalten

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \left(\sum_{j_1=1}^k a_{1j_1} \phi_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^k a_{kj_k} \phi_{j_k} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^k a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{kj_k} \phi_{j_1} \wedge \dots \wedge \phi_{j_k}. \end{aligned}$$

Das Dachprodukt der k Differentialformen ϕ_{j_l} mit $1 \leq l \leq k$ ist 0 für jeden mehrfach auftretenden Index j_l . Es bleiben nur Summanden, deren Indices j_1, \dots, j_k genau einmal vorkommen und deren Dachprodukte unterscheiden sich höchstens bis auf ein Vorzeichen $\text{sign}(\pi)$ einer Permutation $\pi \in \text{Per}_k$ mit $\pi(j_l) = l$ (Dabei ist Per_k die Menge aller Permutationen der k Indices j_1, \dots, j_k). Dadurch werden auch die im Produkt genau einmal vorkommenden Matrixeinträge a_{ij_l} durchpermutiert. Es folgt

$$\sum_{\pi \in \text{Per}_k} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{k\pi(k)} \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k,$$

wobei man die Summe mit der Determinante der Matrix (a_{ij}) identifizieren kann, also erhält man

$$\det(a_{ij}) \cdot \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k.$$

□

2.10 Rücktransport

Definition 2.6. ⁴⁴ Es seien $T \in \mathbb{R}^k$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Des Weiteren sei ein lokales Koordinatensystem

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : T \xrightarrow{\sim} V$$

⁴⁴vgl. 7, S.256.

und eine k -Form

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

in V gegeben. Dann ist der Rücktransport von ω in das lokale Koordinatensystem von φ gegeben durch

$$\varphi^* \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Dabei handelt es sich um eine Transformation der Koordinaten, wodurch die zurückgeholte Differentialform über T integriert werden kann. Für den Rücktransport einer Basisdifferentialform dx_i muss dann

$$\varphi^* dx_i = d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$$

gelten, da x_i die lokale Parametrisierung φ auf die i -te Komponentenfunktion φ_i projiziert.

Bemerkung 2.5. ⁴⁵

Man schreibt auch einfacher für den Rücktransport von ω

$$\varphi^* \omega = \sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi_I$$

mit Multiindices $I = (i_1, \dots, i_k)$, wobei $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ gilt und man für $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ setzt.

Satz 2.2 (Rechenregeln für den Rücktransport). ⁴⁶ Seien $T \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$ offen,

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V$$

eine zweimal stetig differenzierbare lokale Parameterdarstellung und

$$\psi : W \xrightarrow{\sim} T$$

⁴⁵vgl. 7, S.259.

⁴⁶vgl. 7, S.258f.

eine stetig differenzierbare lokale Parameterdarstellung. Es seien ω und ω' Differentialformen k -Ordnung und σ eine Differentialform l -Ordnung in V , sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(i) \quad \varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*\omega$$

$$(ii) \quad \varphi^*(\omega + \omega') = \varphi^*\omega + \varphi^*\omega'$$

$$(iii) \quad \varphi^*(\omega \wedge \sigma) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\sigma)$$

$$(iv) \quad d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$$

$$(v) \quad \psi^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi)^*\omega$$

Beweis. Wir zeigen (iv). Da die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ stetig differenzierbar ist, gilt nach Definition 2.5 der äußeren Ableitung sowie Punkt (iii) und (ii)

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= d\left(\sum_{|I|=k} (f_I \circ \varphi) d\varphi_I\right) \\ &= \sum_{|I|=k} d(f_I \circ \varphi) \wedge d\varphi_I \\ &= \sum_{|I|=k} \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx_I) \\ &= \sum_{|I|=k} \varphi^*(df_I \wedge dx_I) \\ &= \varphi^*\left(\sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I\right) \\ &= \varphi^*(d\omega). \end{aligned}$$

Wir zeigen (v). Es sei φ_i eine Komponentenfunktion von $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Es ist nach (iv) $d(\varphi_i \circ \psi) = d(\psi^*\varphi_i) = \psi^*(d\varphi_i)$ und weil $d\varphi_I$ sich aus dem Dachprodukt der $d\varphi_i$

2 DIE INTEGRANDEN IN \mathbb{R}^n

zusammensetzt, gilt nach (iii) $d(\varphi_I \circ \psi) = \psi^*(d\varphi_I)$. Man erhält mit $d\varphi_I = d(x_I \circ \varphi)$

$$\begin{aligned}
 \psi^*(\varphi^*\omega) &= \psi^* \sum_{|I|=k} (f_I \circ \varphi) d(x_I \circ \varphi) \\
 &= \sum_{|I|=k} \psi^*(f_I \circ \varphi) \psi^* d(x_I \circ \varphi) \\
 &= \sum_{|I|=k} (f_I \circ \varphi \circ \psi) d(x_I \circ \varphi \circ \psi) \\
 &= \sum_{|I|=k} (\varphi \circ \psi)^*(f_I dx_I) \\
 &= (\varphi \circ \psi)^* \sum_{|I|=k} f_I dx_I \\
 &= (\varphi \circ \psi)^* \omega
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.6. ⁴⁷

Betrachtet man das totale Differential der Komponentenfunktion φ_i

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j$$

mit $(t_1, \dots, t_k) \in T$ und $1 \leq i \leq n$, dann gilt nach Satz 2.1 mit $a_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_k} \end{pmatrix} \cdot dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k,$$

⁴⁷vgl. 7, S.257.

also ist der Rücktransport für eine k-Form ω auch durch

$$\varphi^*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$$

gegeben.

3 Satz von Stokes

Nachdem wir das Integral einer Differentialform erklärt haben, können wir bereits einen Teil des Stokes'schen Integralsatzes beweisen.

3.1 Integration von Differentialformen

Definition 3.1 (Integration von Differentialformen n.Ordnung). ⁴⁸ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine Differentialform n.Ordnung in U . Es heißt ω integrierbar über eine Borel'sche Teilmenge (siehe Abschnitt 5.6) $A \subset U$, wenn $f|_A$ integrierbar ist und setzt

$$\int_A \omega = \int_A f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Insbesondere ist die Differentialform integrierbar, wenn ω stetig und $A \subset U$ kompakt ist.

Definition 3.2 (Integration von Differentialformen k.Ordnung). ⁴⁹ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine Differentialform k.Ordnung in U . Es sei $M \subset U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n wie in Definition 1.1 mit einer positiven Orientierung. Dann ist für eine positiv orientierte lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$ mit $A \subset V$ das Integral von ω über A definiert als

$$\int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

⁴⁸vgl. 7, S.265.

⁴⁹vgl. 7, S.269.

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung.⁵⁰ Ist A nicht ganz im Bild von φ enthalten, bedient man sich der *Teilung der 1* (siehe Abschnitt 3.3).

3.2 Der Stokes'sche Integralsatz für Halbräume

Lemma 3.1. ⁵¹ *Es sei ω eine stetig differenzierbare Differentialform $(k-1)$. Ordnung in \mathbb{R}^k mit kompaktem Träger und H_k ein Halbraum. Dann gilt*

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Beweis. Behandeln wir zuerst die rechte Seite der Gleichung. Der Rand ∂H_k besitzt eine Parameterdarstellung

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow H_k$$

mit

$$(t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1})$$

mit einem positiv orientierten Einheitsnormalenfeld. Die Differentialform $(k-1)$. Ordnung kann wie in Beispiel 2.4 als

$$\omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

geschrieben werden. Mit dem Rücktransport in das lokale Koordinatensystem von β erhält man nach Abschnitt 2.10

$$\beta^* \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (f_i \circ \beta) d\beta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\beta_i} \wedge \dots \wedge d\beta_k$$

oder

$$\beta^* \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (f_i \circ \beta) \det \frac{\partial(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{k-1}})}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}$$

nach Bemerkung 2.6. Die Jacobimatrizen verschwinden bis auf $\frac{\partial(\beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial(t_2, \dots, t_k)}$, da in allen

⁵⁰vgl. 7, S.269f.

⁵¹vgl. 7, S.292.

3.2 DER STOKES'SCHE INTEGRALSATZ FÜR HALBRÄUME

anderen Matrizen eine Nullzeile auftaucht, denn

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial t_i} = \frac{\partial 0}{\partial t_i} = 0$$

für alle $1 \leq i \leq k-1$. Deshalb bleibt nur der erste Summand mit $i = 1$ übrig und die zurückgezogene Differentialform vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \beta^* \omega &= (f_1 \circ \beta) \det \frac{\partial(\beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \\ &= (f_1 \circ \beta) \det(e_1, \dots, e_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \\ &= (f_1 \circ \beta) \cdot 1 \cdot dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich das Integral der Differentialform (k-1).Ordnung über den Rand des Halbraumes schreiben als

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}$$

mit $(f_1 \circ \beta)(t) = f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1})$. Jetzt kommen wir zur linken Seite der Gleichung. Die äußere Ableitung von ω ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k,$$

welche über den Halbraum $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$ integriert wird. Hält man die Koordinaten x_2, \dots, x_k fest, kann man nach x_1 integrieren und erhält für das Integral des ersten Summanden

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) dx_1 &= \left[f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \right]_{-\infty}^0 \\ &= f_1(0, x_2, \dots, x_k) - \lim_{r \rightarrow -\infty} f_1(r, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_1(0, x_2, \dots, x_k) - 0 \\
&= f_1(0, x_2, \dots, x_k),
\end{aligned}$$

da auch $d\omega$ einen kompakten Träger hat, also mit $r \rightarrow -\infty$ sicher verschwindet. Das Integral der restlichen Summanden verschwindet jedoch für Indizes $2 \leq i \leq k$, denn für feste $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) dx_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[f_i(x_1, \dots, r, \dots, x_k) \right]_{-r}^r = 0,$$

da die Komponentenfunktionen f_i außerhalb des kompakten Trägers Null werden. Also erhält man in Summe

$$\int_{H_k} \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k,$$

was den Satz mit

$$\int_{H_k} \partial\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k = \int_{\partial H_k} \omega$$

beweist. □

3.3 Teilung der Eins

Untermannigfaltigkeiten ermöglichen es über Objekte zu integrieren, welche durch mehr als eine Parameterdarstellung beschrieben werden. Die Synonyme *Karte* für die Umkehrabbildung einer lokalen Parameterdarstellung und *Atlas* für die Menge aller Karten deuten schon an, dass man die Erdoberfläche als Untermannigfaltigkeit betrachten kann.⁵² Eine Karte ist dann eine lokale Darstellung und es ist ein ganzer Atlas nötig, um die Erdoberfläche zu überdecken. Das aber über mehr als einem Parametergebiet integriert wird, macht ein technisches Hilfsmittel notwendig, das zwei Aufgaben erfüllen muss: Einerseits muss eine Differentialform so zerlegt werden, dass sie nur über jeweils einem Parametergebiet betrachtet werden kann und sonst verschwindet. Andererseits

⁵²vgl. 7, S.267.

müssen sich die Integranden über Schnittmengen der Integrationsgebiete so ergänzen, dass sie in Summe wieder die ursprüngliche Differentialform ergeben. Das erreicht man mit der *Teilung der Eins*.

Definition 3.3 (Teilung der Eins). ^{53,54} Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Teilmenge. Eine Familie $(\alpha_i)_{i \in I}$ glatter Funktionen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Teilung der Eins*, wenn gilt:

- (i) $0 \leq \alpha_i(p) \leq 1$ für alle $i \in I$ und $p \in \mathbb{R}^n$
- (ii) $\sum_{i \in I} \alpha_i(p) = 1$ für alle $p \in A$
- (iii) Für jedes $i \in I$ gibt es eine abgeschlossene Menge A_i , sodass auf $\mathbb{R}^n \setminus A_i$ gilt:
 $\alpha_i \equiv 0$.

Für eine Konstruktion sei zum Beispiel auf [7, S.114f] oder [8, S.322f.] verwiesen. Abbildung 19 zeigt die Träger A_1 und A_2 einer Teilung der Eins. Über der Schnittmenge müssen die Werte der Teilungsfunktionen α_1 und α_2 abnehmen, sodass sie in Summe wieder den Wert 1 annehmen. Nachstehendes Lemma garantiert, dass die Familie $(\alpha_i)_{i \in \{1,2\}}$ auch mit jeder Parameterdarstellung φ_i einer Untermannigfaltigkeit M verträglich ist, indem jedes A_i in einem $V_i := \text{Im}(\varphi_i)$ enthalten ist und deren Kerne ebenfalls eine offene Überdeckung von A bilden.

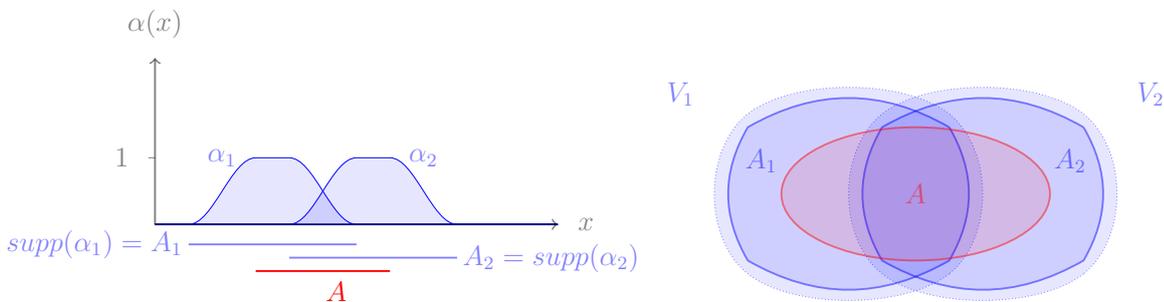


Abbildung 19: Träger einer Teilung der Eins

Lemma 3.2 (Untergeordnete Teilung der Eins). ⁵⁵ Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Dann gibt es eine Teilung der Eins $(\alpha_i)_{i \in I}$ auf A , welche der Überdeckung untergeordnet ist, das heißt

⁵³vgl. 8, S.324.

⁵⁴vgl. 12, S.45.

⁵⁵vgl. 12, S.47.

- (i) $\text{supp}(\alpha_i) \subset V_i$ für alle $i \in I$ und
(ii) die Familie $(\text{supp}(\alpha_i))_{i \in I}$ bildet eine Überdeckung von A .

Für einen Beweis siehe [12, S.47].

3.4 Der Integralsatz von Stokes

Satz 3.1 (Integralsatz von Stokes). ⁵⁶ Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und ω eine stetig differenzierbare Differentialform $(k-1)$ -Ordnung auf M . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $A \subset M$ mit glattem Rand ∂A

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wobei der Rand ∂A die induzierte Orientierung trägt (und relativ M zu verstehen ist).

Beweis. Da die Teilmenge A der Untermannigfaltigkeit einen glatten Rand hat, sieht dieser lokal wie der Rand ∂H_k eines k -dimensionalen Halbraumes aus. Wir wollen die Integration auf der Untermannigfaltigkeit auf eine über den Halbraum zurückzuführen. Es sei für $i \in I = \{1, \dots, n\}$ mit I eine endliche Indexmenge $T_i \subset \mathbb{R}^k$ und $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir wählen bezüglich des Randes positiv orientierte Parameterdarstellungen $\varphi_i : T_i \xrightarrow{\sim} V_i$ mit $V_i := M \cap U_i$. Dabei sind die U_i Kartenumgebungen und die Kartengebiete V_i bilden eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von A . Wir halten fest, dass $A = \bigcup_{i=1}^N A \cap V_i$ gilt. Außerdem sei eine der Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ untergeordnete Teilung der Eins $(\alpha_i)_{i \in I}$ auf A gegeben. Mit

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \cdot \omega = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \omega$$

hat auch jedes $\alpha_i \cdot \omega$ kompakten Träger in V_i . Da I endlich ist, müssen wir den Satz also nur für jedes $\alpha_i \cdot \omega =: \omega_i$ beweisen. Wir setzen die Differentialform $\varphi_i^* \omega_i$ auf ganz \mathbb{R}^k fort. Es sei $p := \varphi_i(t)$ und $\varphi_i^* \omega_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigcup_{p \in A} \wedge^k T_p^*(V_i)$ ordne durch

$$\varphi_i^* \omega_i = \begin{cases} \varphi_i^* \omega_i(t) & t \in T_i \\ 0 & t \in \mathbb{R}^k \setminus T_i \end{cases}$$

⁵⁶vgl. 7, S.297.

jedem Punkt aus $\mathbb{R}^k \setminus T_i$ eine Null-Multilinearform zu. Wir taufen $\varphi_i^* \omega_i =: \tilde{\omega}_i$. Dabei bleibt $\tilde{\omega}_i$ eine stetig differenzierbare Differentialform (k-1).Ordnung mit kompaktem Träger. Trifft ein V_i den Rand von A nicht (also $A \cap V_i = V_i$ und $\partial A \cap V_i = \emptyset$), ist einerseits das Randintegral über eine leere Menge Null, andererseits ist der kompakte Träger $\text{supp}(d\omega_i) \subset V_i$ in der offenen Menge der Überdeckung enthalten, wodurch auch das Integral über V_i verschwindet. Für diese Integrale gilt also Gleichheit. Sei deshalb o.B.d.A. $\partial A \cap V_i$ nicht leer. Da nach Abschnitt 2.10 die äußere Ableitung mit dem Rücktransport vertauscht, gilt

$$\int_{A \cap V_i} d\omega_i = \int_{H_k \cap T_i} \varphi_i^*(d\omega_i) = \int_{H_k \cap T_i} d(\varphi_i^* \omega_i) = \int_{H_k} d\tilde{\omega}_i.$$

Betrachten wir nun das Randintegral. Wir setzen $\partial H_k \cap T_i =: T'_i$ für einen Teilrand des Halbraumes im lokalen Parametergebiet T_i und $V'_i = \partial A \cap V_i$ für einen Teil des Randes von A im Bild der Parameterdarstellung φ_i . Es sei $\varphi_i \circ \beta : T'_i \xrightarrow{\sim} V'_i$ die durch φ_i induzierte lokale Parameterdarstellung von einem Teil des Randes von A , mit

$$\beta(t_1, \dots, t_{k-1}) = (0, t_1, \dots, t_{k-1}).$$

Weiter ist

$$\int_{\partial A \cap V_i} \omega_i = \int_{T'_i} (\varphi_i \circ \beta)^* \omega_i = \int_{T'_i} \beta^* \varphi_i^* \omega_i = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^* \tilde{\omega}_i = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}_i,$$

also kann man

$$\int_{A \cap V_i} d\omega_i = \int_{H_k} d\tilde{\omega}_i = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}_i = \int_{\partial A \cap V_i} \omega_i$$

setzen. Weil die Gleichheit aber für jedes i gilt, ist mit

$$\int_A d\omega = \int_{\bigcup_{i \in I} A \cap V_i} \sum_{i \in I} d\omega_i \stackrel{*}{=} \sum_{i \in I} \int_{A \cap V_i} d\omega_i = \sum_{i \in I} \int_{\partial A \cap V_i} \omega_i \stackrel{**}{=} \int_{\bigcup_{i \in I} \partial A \cap V_i} \sum_{i \in I} \omega_i = \int_{\partial A} \omega$$

der Satz bewiesen. Dabei gilt * und ** nur dank der Teilung der Eins. □

4 Die klassischen Integralsätze in \mathbb{R}^3

Nun werden wir sehen, dass sich die klassischen Sätze aus dem allgemeinen Satz von Stokes gewinnen lassen. Vorher erklären wir aber noch, wie das Dachprodukt der Basisdifferentialformen dx_i das *Volumenelement* zusammensetzt. Es sei für den gesamten Abschnitt, wenn nicht anders vereinbart, $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F = (F_1, F_2, F_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für das Skalarprodukt verwenden wir die Schreibweisen $\langle a, b \rangle$ oder $a \cdot b$ für Vektoren a und b , wobei wir nur vereinzelt durch \vec{a} einen Vektor a hervorheben wollen.

4.1 Das Volumenelement

Es sei ein Punkt $p \in U$ gegeben. Betrachten wir noch einmal die Projektion $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf die i -te Koordinate. Die Differentialformen $dx_i : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$ ordnen jedem Punkt p einen Cotangentialvektor $dx_i(p)$ zu. Der Cotangentialvektor $dx_i(p)$ führt seinerseits einem Tangentialvektor $v \in T_p(U)$ seine i -te Koordinate zu, denn der Wert von $dx_i(p)$ ist

$$dx_i(p)(v) = \langle dx_i(p), v \rangle = v_i.$$

Wir definieren das Volumenelement

$$dV = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wenn $U \subset \mathbb{R}^n$. Der Name ist berechtigt, denn wir haben bereits in Abschnitt 2.6 gesehen, dass das Dachprodukt der $dx_i(p)$ als Determinante definiert ist, die im Betrag bzw. für positiv orientierte Vektoren das Volumen des von den Vektoren aufgespannten Spates

darstellt. Also gilt zum Beispiel für die Basisvektoren des \mathbb{R}^3

$$dV(p)(e_1, e_2, e_3) = 1,$$

das Volumen des von den Einheitsvektoren aufgespannten Würfels. Für eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$|M| = \int_M dV = \int_M 1$$

der Inhalt von M . Zur Erinnerung: Der Ausdruck dV im Integral ist kein infinitesimales Volumen, sondern eine Funktion, welche jedem Punkt in U eine Multilinearform $dV(p)$ zuordnet. Für eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 ist für linear unabhängige, positiv orientierte Vektoren u, v und w der Wert dieser Multilinearform

$$\begin{aligned} dV(p)(u, v, w) &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(p)(u, v, w) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle dx_1(p), u \rangle & \langle dx_1(p), v \rangle & \langle dx_1(p), w \rangle \\ \langle dx_2(p), u \rangle & \langle dx_2(p), v \rangle & \langle dx_2(p), w \rangle \\ \langle dx_3(p), u \rangle & \langle dx_3(p), v \rangle & \langle dx_3(p), w \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das Volumen des von den Vektoren aufgespannten Spates.⁵⁷

4.1.1 Das Längenelement

Beschränken wir uns weiter auf den \mathbb{R}^3 und betrachten eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir wählen in einem Punkt der 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (einer Kurve) einen Tangentialvektor v und zwei Einheitsnormalvektoren n und m ,

⁵⁷vgl. 7, S.116.

welche jeweils orthogonal aufeinander stehen sollen. Dadurch wird ein Quader mit zwei Kanten der Länge 1 aufgespannt, wodurch das Volumen des Quaders $V = 1 \cdot 1 \cdot v = v$ zahlenmäßig der Länge des Vektors v entspricht:

$$\begin{aligned} dV(p)(m, n, v) &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(p)(m, n, v) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle dx_1(p), m \rangle & \langle dx_1(p), n \rangle & \langle dx_1(p), v \rangle \\ \langle dx_2(p), m \rangle & \langle dx_2(p), n \rangle & \langle dx_2(p), v \rangle \\ \langle dx_3(p), m \rangle & \langle dx_3(p), n \rangle & \langle dx_3(p), v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ m_2 & n_2 & v_2 \\ m_3 & n_3 & v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und nach der dritten Spalte entwickelt

$$= \langle m \times n, v \rangle.$$

Für positiv orientierte Vektoren ist $m \times n$ aber ein Einheitstangentialvektor in Richtung v , also ist für $m \times n = t = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{aligned} \langle m \times n, v \rangle &= t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + t_3 \cdot v_3 \\ &= t_1 \cdot \langle dx_1(p), v \rangle + t_2 \cdot \langle dx_2(p), v \rangle + t_3 \cdot \langle dx_3(p), v \rangle \\ &= (t_1 \cdot dx_1 + t_2 \cdot dx_2 + t_3 \cdot dx_3)(p)(v) = ds(p)(v) \end{aligned}$$

der Wert der Linearform des Längenelements. Demnach ist $ds(p)(v) = \|v\|$ die Länge des Vektors v . Betrachtet man die letzte Zeile, kann man das Längenelement auch als

$$ds = t_1 \cdot dx_1 + t_2 \cdot dx_2 + t_3 \cdot dx_3 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = t \cdot d\vec{s}$$

schreiben, mit $d\vec{s}$ dem *vektoriellen* Längenelement.⁵⁸

4.1.2 Das Flächenelement

Wir betrachten eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 und wählen für einen Punkt der Mannigfaltigkeit (eine Fläche) zwei linear unabhängige Tangentialvektoren v und w und einen auf diese Vektoren senkrechten Einheitsnormalvektor n . Dann ist der Wert der Multilinearform

$$\begin{aligned} dV(p)(n, v, w) &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(p)(n, v, w) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle dx_1(p), n \rangle & \langle dx_1(p), v \rangle & \langle dx_1(p), w \rangle \\ \langle dx_2(p), n \rangle & \langle dx_2(p), v \rangle & \langle dx_2(p), w \rangle \\ \langle dx_3(p), n \rangle & \langle dx_3(p), v \rangle & \langle dx_3(p), w \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} n_1 & v_1 & w_1 \\ n_2 & v_2 & w_2 \\ n_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und nach der ersten Spalte entwickelt

$$= \langle n, v \times w \rangle = \|v \times w\|$$

die Fläche des von den Tangentialvektoren aufgespannten Parallelogrammes. Weiter ist

$$\begin{aligned} \langle n, v \times w \rangle &= n_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &+ n_2 \cdot \det \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{pmatrix} \\ &+ n_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁵⁸vgl. 7, S.116.

$$\begin{aligned}
 &= n_1 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle dx_2(p), v \rangle & \langle dx_2(p), w \rangle \\ \langle dx_3(p), v \rangle & \langle dx_3(p), w \rangle \end{pmatrix} \\
 &+ n_2 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle dx_3(p), v \rangle & \langle dx_3(p), w \rangle \\ \langle dx_1(p), v \rangle & \langle dx_1(p), w \rangle \end{pmatrix} \\
 &+ n_3 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle dx_1(p), v \rangle & \langle dx_1(p), w \rangle \\ \langle dx_2(p), v \rangle & \langle dx_2(p), w \rangle \end{pmatrix} \\
 &= n_1(dx_2 \wedge dx_3)(p)(v, w) + n_2(dx_3 \wedge dx_1)(p)(v, w) + n_3(dx_1 \wedge dx_2)(p)(v, w) \\
 &= (n_1 dx_2 \wedge dx_3 + n_2 dx_3 \wedge dx_1 + n_3 dx_1 \wedge dx_2)(p)(v, w) \\
 &= dS(p)(v, w)
 \end{aligned}$$

der Wert der vom Flächenelement dS zugeordneten Bilinearform $dS(p)$. Demnach ist $dS(p)(v, w) = \|v \times w\|$ die Fläche des von den Vektoren v und w aufgespannten Parallelogrammes. Man schreibt für das Flächenelement auch

$$dS = n_1 dx_2 \wedge dx_3 + n_2 dx_3 \wedge dx_1 + n_3 dx_1 \wedge dx_2 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} = n \cdot d\vec{S},$$

mit $d\vec{S}$ dem *vektoriellen* Flächenelement.⁵⁹

4.2 Die Integranden in der klassischen Vektoranalysis

Nun lassen sich die Integranden über k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten für $k \leq 3$ in \mathbb{R}^3 klassisch beschreiben. Es seien für Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 3$ die Differentialformen

$$\omega_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

⁵⁹vgl. 7, S.117.

k . Ordnung für $k = 0, 1, 2$ gegeben, wobei wir für jede Funktion $f_{i_1 \dots i_k}$ eine geeignete Komponentenfunktion F_j mit $1 \leq j \leq 3$ wählen werden. Dann ist eine Differentialform 0. Ordnung gegeben durch

$$\omega_0 = f.$$

Eine Differentialform erster Ordnung lässt sich schreiben als

$$\omega_1 = \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = F \cdot d\vec{s} = \langle F, t \rangle \cdot ds.$$

Die letzte Identität stimmt tatsächlich (für Einheitstangentialvektoren), da nicht nur $ds = t \cdot d\vec{s}$ (siehe Abschnitt 4.1.1), sondern auch $d\vec{s} = t \cdot ds$ gilt. Das sieht man so: Wir wollen zeigen, dass

$$dx_i = t_i \cdot ds$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt und tatsächlich erhält man für einen Einheitstangentialvektor t

$$t_i \cdot ds(t) = t_i \cdot 1 = dx_i.$$

Für eine Differentialform zweiter Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \sum_{i_1 < i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\ &= F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= F \cdot d\vec{S} = \langle F, n \rangle \cdot dS. \end{aligned}$$

Wieder gilt die letzte Identität (zumindest für Tangentialvektoren): Aus der Behauptung $d\vec{S} = n \cdot dS$ folgt wieder

$$dx_2 \wedge dx_3 = n_1 dS$$

4 DIE KLASSISCHEN INTEGRALSÄTZE IN \mathbb{R}^3

und ebenfalls für deren zyklischen Permutationen. Es gilt für Tangentialvektoren v und w

$$\begin{aligned}(dx_2 \wedge dx_3)(p)(v, w) &= \langle e_1, v \times w \rangle \\ &= \langle e_1, n \rangle \cdot \|v \times w\| \\ &= n_1 \cdot \|v \times w\| \\ &= n_1 \cdot dS(p)(v, w),\end{aligned}$$

wobei n der Einheitsnormalenvektor auf v und w ist. Kommen wir nun zu den äußeren Ableitungen, die für Differentialformen k.Ordnung durch

$$d\omega_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

gegeben sind. Im Grunde ist also nur von jedem $f_{i_1 \dots i_k} =: f_I$ das totale Differential

$$df_I = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j$$

zu bilden. Für $\omega_0 = f$ ist die äußere Ableitung

$$d\omega_0 = df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i$$

das totale Differential von f . Mit Hilfe des vektoriellen Längenelements gilt weiter

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \nabla f \cdot d\vec{s}.$$

Für die Pfaff'sche Form

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$$

ist für die äußere Ableitung das totale Differential von jedem F_i zu bilden. Da aber jeder Summand mit $j = i$ wegfällt, ist

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &+ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &+ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Weiter gibt es drei Paare von Dachprodukten, welche sich bis auf ein Vorzeichen nicht unterscheiden, da $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ gilt, also ist

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \text{rot}(F) \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Für die äußere Ableitung einer Differentialform 2.Ordnung

$$\omega_2 = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$$

ist wieder das totale Differential von jedem F_i zu bilden. Dann erhält man für den ersten Summanden

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Nun fallen aufgrund identischer Differentialformen gleich zwei Summanden weg und man erhält insgesamt

$$\begin{aligned}
 d\omega_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &+ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\
 &+ \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
 &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= \operatorname{div}(F) \cdot dV,
 \end{aligned}$$

da sich bei geraden Vertauschungen von Differentialformen die Vorzeichen nicht ändern.⁶⁰
Zusammenfassend gilt:⁶¹

$$\begin{array}{lll}
 \omega_0 = f & d\omega_0 = \nabla f \cdot d\vec{s} & = \operatorname{grad}(f) \cdot d\vec{s} \\
 \omega_1 = F \cdot d\vec{s} & d\omega_1 = \nabla \times F \cdot d\vec{S} & = \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S} \\
 \omega_2 = F \cdot d\vec{S} & d\omega_2 = \nabla \cdot F \cdot dV & = \operatorname{div}(F) \cdot dV.
 \end{array}$$

4.3 Satz von Green

Satz 4.1 (Satz von Green).⁶² *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $A \subset U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Der Rand sei so orientiert, dass A immer links vom Rand liegt. Weiter*

⁶⁰vgl. 12, S.116-119.

⁶¹vgl. 7, S.262.

⁶²vgl. 7, S.285.

sei $F = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial A} F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

Beweis. Der Rand ∂A ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir wählen einen Integranden

$$\omega_1 = F \cdot d\vec{s} = F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

und die äußere Ableitung der Differentialform ist

$$d\omega_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

Daraus folgt der Satz mit

$$\int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_A d\omega_1 = \int_{\partial A} \omega_1 = \int_{\partial A} F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

□

4.4 Satz von Gauß

Der Gaußsche Integralsatz lässt sich jetzt aus dem allgemeinen Satz von Stokes erhalten.

Satz 4.2 (Gaußscher Integralsatz). ⁶³ Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand mit der von \mathbb{R}^3 induzierten Orientierung. Es sei $n : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und eine Obermenge von A . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2, F_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\int_A \operatorname{div}(F) dV = \int_{\partial A} \langle F, n \rangle dS.$$

⁶³vgl. 7, S.185.

Beweis. Wir betrachten die Differentialform 2.Ordnung

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^3 F_i \underbrace{(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_3}_{dS_i} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{pmatrix} = F \cdot d\vec{S} = \langle F, d\vec{S} \rangle = \langle F, n \rangle \cdot dS$$

Andererseits ist die äußere Ableitung nach Beispiel 2.4

$$d\omega_2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \operatorname{div}(F) dV.$$

Deshalb gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_A \operatorname{div}(F) dV = \int_A d\omega_2 = \int_{\partial A} \omega_2 = \int_{\partial A} \langle F, n \rangle dS.$$

□

4.5 Der klassische Integralsatz von Stokes

Satz 4.3 (Der klassische Integralsatz von Stokes). ⁶⁴Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Gegeben sei eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset U$ und $A \subseteq M$ eine kompakte Menge mit glattem Rand ∂A . Die Untermannigfaltigkeit sei im Besitz eines äußeren Einheitsnormalenfeldes $n : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ und der Rand von A habe ein Einheitstangentenfeld $\tau : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^3$, das durch M orientiert ist. Dann gilt

$$\int_A \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial A} F \cdot d\vec{s}$$

Beweis. Man betrachte eine Differentialform 1.Ordnung

$$\omega_1 := \sum_{i=1}^3 F_i dx_i = F \cdot d\vec{s}.$$

Es ist

$$d\omega_1 := \sum_{i < j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S}.$$

⁶⁴vgl. 7, S.300.

Also lautet der Stokes'sche Integralsatz

$$\int_A \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S} = \int_A d\omega_1 = \int_{\partial A} \omega_1 = \int_{\partial A} F \cdot d\vec{s}.$$

□

5 Anhang

Nachfolgend seien noch einige Ergänzungen, Definitionen und Sätze angeführt.

5.1 Differentialoperatoren

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist der *Gradient* der Funktion f

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix},$$

welches die Richtung der größten (momentanen) Änderung der Funktion anzeigt, denn jede Komponentenfunktion des Gradienten zeigt die größte Änderung in eine Koordinatenrichtung an. Die Länge des Gradienten ist sogar ein Maß für die Steigung. Die *Divergenz* des Vektorfeldes F

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

ist ein Maß für das „Auseinanderstreben“ des Vektorfeldes. Für $n=3$ ist die *Rotation* des Vektorfeldes F durch

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

gegeben, dessen Betrag ein Maß für die Rotation oder „Verwirbelung“ in einem Punkt des Vektorfeldes ist.⁶⁵

5.2 Laplace'scher Entwicklungssatz

Sei A eine $n \times n$ Matrix und $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jene $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix A'_{ij} , dessen i -te Zeile und j -te Spalte gestrichen wird, heißt *Untermatrix* und dessen Determinante *Unterdeterminante* oder *Minor*. Abbildung 20 zeigt das Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte einer 3×3 Matrix. Die Berechnung der Determinante einer $n \times n$ Matrix

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Abbildung 20: Unterdeterminante einer 3×3 Matrix

kann nun auf eine Linearkombination von Unterdeterminanten zurückgeführt werden. Die *Entwicklung* für die Determinante von A nach der i -ten Zeile lautet dann

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

und die Entwicklung nach der j -ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}).$$

Beispiel 5.1.⁶⁶

⁶⁵vgl. 8, S.126,S.334.

⁶⁶vgl. 5, S.313.

Der Faktor $(-1)^{i+j}$ für das Vorzeichen ergibt ein einprägsames Muster, zB. für eine 3×3 -Matrix

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln die Determinante einer 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

nach der ersten Spalte. Dazu betrachten wir die Matrix mit gestrichener erster Zeile und erster Spalte

$$A'_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

in zweiter Zeile und erster Spalte

$$A'_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sowie in dritter Zeile und erster Spalte

$$A'_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot A'_{i1} \\ &= +a_{11} \cdot A'_{11} - a_{21} \cdot A'_{21} + a_{31} \cdot A'_{31}. \end{aligned}$$

5.3 Das Kreuzprodukt

Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ Vektoren, dann steht das Kreuzprodukt $v \times w$ normal auf v und w , denn das Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} + & \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2) \cdot v_1 - (v_1w_3 - v_3w_1) \cdot v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1) \cdot v_3 = 0,$$

wobei jeder Eintrag des ersten Vektors die Determinante der 2×2 Matrizen meint. Gleiches sieht man für das Skalarprodukt von $v \times w$ mit dem Vektor w .

5.4 Projektion durch das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von einem Vektor u mit einem normierten Vektor v entspricht der Länge des auf v projizierten Vektors u . Das sieht man zum Beispiel für einen Vektor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und einem Vektor $v = (1, 0) = e_1$ dem Einheitsvektor, denn

$$\langle u, e_1 \rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1$$

ist gerade die Länge des auf e_1 projizierten Vektors u . Ist v hingegen ein beliebiger Vektor der Länge 1, lässt sich eine Drehmatrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ finden, sodass $A \cdot v = e_1$ gilt. Mit $A \cdot u = u'$ erhält man einen Vektor, sodass $\langle u', e_1 \rangle = \langle u, v \rangle$ gelten muss, da Drehungen längentreue Abbildungen sind, also haben wir diesen Fall auf den ersten zurückgeführt.

5.5 Duale Basis

Definition 5.1. ⁶⁷ Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum und $B = (b_1, \dots, b_n) \in V$ eine geordnete Basis von V .

Es seien

$$b_i^* : V \rightarrow \mathbb{R}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ lineare Funktionale mit $b_i^*(b_j) = 0$ für alle $i \neq j$ und $b_i^*(b_j) = 1$ nur für $i = j$. Dann heißt $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ die zu B duale Basis.

5.6 Borel'sche Teilmengen

Sei Ω eine Menge. Betrachten wir ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ als Teilmenge der Potenzmenge von Ω . Man nennt \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω , wenn darin die leere Menge enthalten ist und \mathfrak{A} abgeschlossen bezüglich Komplementbildung sowie abzählbar unendlicher Vereinigung ist:

$$(i) \quad \emptyset \in \mathfrak{A}$$

$$(ii) \quad A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}$$

$$(iii) \quad A_i \in \mathfrak{A} \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$$

mit $A^C := \Omega \setminus A$ und I eine abzählbar unendliche Indexmenge. Wegen (ii) ist dann auch $\emptyset^C = \Omega$ in \mathfrak{A} enthalten und aufgrund der de Morgan'schen Regeln $(A_i \cup A_j)^C = A_i^C \cap A_j^C$ und $(A_i \cap A_j)^C = A_i^C \cup A_j^C$ mit $i, j \in I$ kann man (iii) auch durch

$$(iii)' \quad A_i \in \mathfrak{A} \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$$

ersetzen. Einfache Beispiele für σ -Algebren sind $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\{\emptyset, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^C, \Omega\}$. Der Durchschnitt aller σ -Algebren der Potenzmenge von Ω , welche ein Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten, nennt man die von \mathfrak{E} erzeugte σ -Algebra von Ω . Ist \mathcal{O} das Mengensystem aller offenen Mengen von Ω , dann nennt man die von \mathcal{O} erzeugte σ -Algebra die *Borel'sche σ -Algebra* $\mathcal{B}(\Omega)$ von Ω oder *Borel-Algebra*. Teilmengen der Borel-Algebra nennt man

⁶⁷vgl. 13, S.174.

Borel'sche Teilmengen oder *Borelmengen*.⁶⁸

Wir wollen einige Teilmengen der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$. Wir definieren abgeschlossene Quader

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

und analog halboffene und offene Quader. Die für unsere Zwecke interessante Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ enthält - erzeugt vom Mengensystem aller offenen Teilmengen - offene Mengen, also auch offene Quader der Form $]a, b[\subset \mathbb{R}^n$. Die Borel-Algebra enthält aber auch alle abgeschlossenen Quader, da wegen (iii)

$$[a, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left] a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k} \right[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

gilt (dabei ist $\frac{1}{k} = (1/k_1, \dots, 1/k_n) \in \mathbb{R}^n$ und die Laufvariable $k = (k_1, \dots, k_n)$ des Durchschnittsoperators als Multiindex mit identischen Einträgen zu verstehen). Gleiches sieht man für halboffene Quader. Es ist also leicht einzusehen, dass man die Borel-Algebra auch durch andere Erzeuger, wie dem Mengensystem aller abgeschlossenen Mengen, erhält. Über Borel'sche Teilmengen kann ein Integral sinnvoll definiert werden, ohne dabei pathologische Situationen ausschließen zu müssen.^{69,70}

⁶⁸vgl. 7, S.2, S.6-8.

⁶⁹vgl. 4, S.19.

⁷⁰vgl. 10, S.9.

Literatur

- [1] Martin Barner und Friedrich Flohr. *Analysis II*. Berlin: Walter de Gruyter, 1996. ISBN: 3-11-015034-4.
- [2] Klemens Burg u. a. *Vektoranalysis: Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012. ISBN: 978-3-8348-8346-9.
- [3] Tammo tom Dieck. *Topologie*. Berlin: Walter de Gruyter, 1996. ISBN: 3-11-016236-9.
- [4] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2009. ISBN: 978-3-540-89728-6.
- [5] Gerd Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-658-18191-8.
- [6] Otto Forster. *Analysis 2: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-658-02356-0.
- [7] Otto Forster. *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-658-16746-2.
- [8] Klaus Fritzsche. *Grundkurs Analysis 2: Differentiation und Integration in mehreren Veränderlichen*. Heidelberg: Elsevier, 2013. ISBN: 978-3-642-37495-1.
- [9] Norbert Herrmann. *Mathematik für Naturwissenschaftler: Was Sie im Bachelor wirklich brauchen und in der Schule nicht lernen*. Heidelberg: Spektrum, 2012. ISBN: 978-3-8274-2866-0.
- [10] David Meintrup und Stefan Schäffler. *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Berlin: Springer, 2005. ISBN: 978-3-540-21676-6.
- [11] Wilhelm Merz und Peter Knebnner. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Lineare Algebra und Analysis in \mathbb{R}* . Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-642-29980-3.

LITERATUR

- [12] Jürgen Pöschel. *Noch mehr Analysis: Mehrdimensionale Integration, Fouriertheorie, Funktionentheorie*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-658-05854-8.
- [13] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-662-49914-6.

Abbildungsverzeichnis

1	Ein affiner Teilraum (eine lineare Untermannigfaltigkeit)	4
2	Parameterdefinierte Untermannigfaltigkeit	5
3	Tangentialraum an einer parameterdefinierten Untermannigfaltigkeit . .	7
4	Normalvektor an einer graphendefinierten Untermannigfaltigkeit	9
5	Normalvektor an einer gleichungsdefinierten Untermannigfaltigkeit . . .	10
6	Verhalten beim Wechsel der Parameterdarstellung	11
7	Offene Menge B in der Umgebung eines Punktes	12
8	Innerer Kern und Rand	13
9	Überdeckung einer kompakten Menge A mit kompakten Teilmengen . .	14
10	Nichtnullstellenmenge einer Funktion	16
11	Orientierung einer 1-Sphäre	20
12	1-, 2- und 3-dimensionale Halbräume	22
13	Kompaktum mit Rand auf einer Untermannigfaltigkeit	23
14	Differentialoperatoren zwischen Feldern	25
15	Arbeit im 1-dimensionalen Fall	25
16	Physikalische Interpretation des Skalarproduktes als Arbeit	27
17	Pfaff'sche Form auf einer Kurve in einem Gradientenfeld von f	30
18	3-Spat oder Parallelepipid	34
19	Träger einer Teilung der Eins	49
20	Unterdeterminante einer 3×3 Matrix	64