DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Die historische Entwicklung des Grenzwertbegriffs und die damit verbundenen Probleme

verfasst von / submitted by

Johanna Jauschowetz

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 313
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik und UF Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Personen bedanken, die mich während meines Studiums und vor allem bei der Ausfertigung dieser Diplomarbeit tatkräftigst begleitet, unterstützt und auch motiviert haben.

Allen voran möchte ich meinen Eltern danken, die mir dieses Studium überhaupt ermöglicht und bestärkt haben, sowie bei wichtigen Entscheidungen immer beiseite gestanden sind. Sie hatten stets ein offenes Ohr für meine Anliegen und Sorgen und nur durch ihre Unterstützung konnte ich mein Studium erfolgreich abschließen. Danke Mama, danke Papa!

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen FreundInnen, aber auch bei meinen StudienkollegInnen bedanken, die mir mit viel Geduld, Interesse und Hilfsbereitschaft in dieser nicht immer leichten Zeit zur Seite gestanden sind und durch die meine Studienzeit stets in schöner Erinnerung bleiben wird.

Abschließend gebührt auch ein großer Dank meinem Diplomarbeitsbetreuer, Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, welcher mich schon seit Beginn meines Studiums unterstützt hat und auch jetzt in der Endphase vertrauensvoll hinter mir gestanden ist. Schließlich waren es seine entscheidenden Tipps und Hinweise, die zur Fertigstellung dieser Arbeit geführt haben.

Danke für alles!

Abstract

This diploma thesis deals with the historical consideration of the development of the limiting value concept and related problems that have arisen over time. Since its creation, Analysis has always been an active field of research. Especially the connection with its developed applications is essential for our lives today. The focus of this paper is on giving answers to the following questions: What has led to the development of the limit? What is the limiting value, what is its function and which mathematical concepts and methods have originated from this?

In doing so, a wide period of time is taken into consideration starting at the origins of mathematical thinking in the advanced civilizations around 4000 BC leading up to the present. The roots of the limiting value can be found in fragments of pre-Socratic' times as well as their reflections on the continuum of time and space. The decisive breakthrough for analysis, as an independent sub-discipline of mathematics, finally came with the 17th century. A new unvarying method and a symbolic notation were introduced. The success story of differential and integral calculus has now begun.

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der historischen Betrachtung zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs und die damit verbundenen Probleme, die sich über die Geschichte hinweg ergeben haben. Im Fokus steht dabei die Auseinandersetzung mit den Fragen, wie sich denn ein solcher überhaupt entwickeln konnte, was er bezweckt, wozu er dient, wofür man ihn brauchen kann und welche mathematischen Errungenschaften sich daraus weiterentwickeln konnten. Immer im Bewusstsein, dass die Analysis seit ihrer Entstehung ein aktives Forschungsgebiet und im Zusammenhang mit ihren Anwendungen für unser heutiges Leben kaum mehr wegzudenken ist.

Im Anschluss an die Einleitung wird ein kurzer Abriss zur allgemeinen Entstehung der Mathematik angeführt, um einen Grundstein für die weiterführenden Untersuchungen darzustellen. Dabei wird eine weite Zeitspanne in Augenschein genommen, die von den Ursprüngen mathematischen Denkens in den Hochkulturen um ca. 4000 v.Chr. bis hin zum entscheidenden 17. Jahrhundert reicht, welche als Wegbereiter unter anderem für den Reifungsprozess der Algebra, der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Analysis angesehen werden kann. Schlussendlich bauen darauf moderne Methoden und Lösungsansätze für die Gegenwart auf.

Ein solcher Zeitraum wird auch in Verbindung mit der Untersuchung des Grenzwertbegriffs und der Entwicklung der Analysis im Zentrum dieser Arbeit liegen. So werden mit den Paradoxien des Zenon und der griechischen Antike erste Vermutungen zum Grenzwertbegriff aufgezeigt. Anfangs noch etwas unsicher im Umgang mit dem Unendlichen, erhöht sich das Bedürfnis, aufgrund dessen neue Strategien und Lösungen zu erforschen. Erste dabei auftauchende Probleme werden nun beseitigt und anhand propädeutischer Ansätze hervorragende Ergebnisse erzielt. Die Grundlagen der Analysis sind geschaffen und Genauigkeit und eine präzise Vorgehensweise stehen nun im Vordergrund.

Der entscheidende Durchbruch für die Differential- und Integralrechnung kommt somit schließlich mit dem 17. Jahrhundert. Newton und Leibniz gelten als die Genies ihrer Zeit und durch ihre mathematischen Kenntnisse konnte die Umkehrung von Integration und Differentiation aufgedeckt werden. Aber auch Fermat und Descartes sind hier zu erwähnen, da ihnen gewinnbringende Ergebnisse auf diesem Gebiet zu verdanken sind und erst Leibniz´ und Newtons Verdienst und Ruhm in der Welt der Mathematik ermöglicht haben. Eine neue

einheitliche Methode bildet sich heraus, sowie eine symbolhafte Schreibweise wird eingeführt. Die Erfolgsgeschichte der Infinitesimalgeschichte hat nun ihren Anfang genommen.

Kritisch überprüft wird diese dann in der neueren Analysis des 19. Jahrhunderts. Die wichtigsten Grundbegriffe wie *Grenzwert, Integral, Stetigkeit, Konvergenz,* usw., erfahren endlich eine endgültige Festigung und moderne Teilbereiche der Analysis entstehen. In voller Strenge kommt es schließlich zu einer Verbreitung einer Lehre, die für den gebildeten Menschen als ein bedeutendes Hilfsmittel im alltäglichen Leben dient und kaum mehr wegzudenken ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Zweifelsohne ist die Mathematik eine Wissenschaft, die zahlreiche interessante Errungenschaften und Begriffe hervorgebracht und vor allem entwickelt hat. Sowohl in kultur- und wissenschaftshistorischer, wie auch in anwendungs- und kontextbezogener Hinsicht, fallen mathematischen Begriffen ein enormer Stellenwert zu, da sie dynamisch und vielfältig sind. Dies führt schließlich dazu, dass das Bilden von Begriffen und Definitionen ein immerzu kreativer Prozess ist, der in der Regel mit viel Probieren und daraus folgenden Problemen und Irrtümern in Verbindung steht. So ist es selbsterklärlich, dass in der Mathematik verwendete Methoden und Werkzeuge durchaus kritisch reflektiert und beleuchtet werden müssen, wodurch ein berechtigter Blick in die historische Entwicklung der Begriffe, Ideen, Schwierigkeiten und Strategien geworfen werden muss, um diese entsprechend würdigen und verstehen zu können.[1]

Mit diesem Hintergrund, der auch als Motivation zum Erstellen dieser Diplomarbeit diente, möchte ich meine Konzentration auf das Teilgebiet der Analysis lenken. Dazu soll die Auseinandersetzung mit der Geschichte und Genese zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs und die damit verbundenen Probleme im Fokus liegen. Besonders interessant dabei ist die Erkenntnis, dass die Analysis als eigenständige Teildisziplin der Mathematik erst im 17. Jahrhundert ihren Durchbruch verzeichnen konnte, obwohl deren Wurzeln bereits in Fragmenten der Vorsokratiker und deren Überlegungen zum Kontinuum von Zeit und Raum liegen.[2] Der Kern dabei vollstreckt sich in der Untersuchung des Unendlichen, aus diesem sich letztlich eine Beschäftigung mit dem Streben gegen Null oder Unendlich, mit Grenzwerten, Differentialen und Integralen, mit Infinitesimalen und Indivisiblen, mit Stetigkeit und mit dem Kontinuum reeller, irrationaler, transzendenter, transfiniter und sogar hyperreeller Zahlen entwickelt hat.[3] Neben innermathematischen Missständen, die vor allem mit der Berechnung von Inhalten und Schwerpunkten krummliniger Flächen und Körper zu tun haben, gehören ebenso Aufgabenstellungen aus der Mechanik, Optik und Astronomie, sowie die Analyse verwickelter Kurven zu den Hauptuntersuchungen in diesem Forschungsfeld.[4] Dabei geht es im Prinzip um die stetige Veränderung, aus der sich Tangenten- und Quadraturprobleme

[1] Vgl. Horst *Hirscher*; Grundlegende Begriffe der Mathematik. Entstehung und Entwicklung: Struktur-Funktion-Zahl (Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2012), S.6.
[2] Vgl. Thomas *Sonar*; 3000 Jahre Analysis (Springer, Berlin/ Heidelberg 2011), S.X; Vgl. Hans Niels *Jahnke*; Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999), S.1.
[3] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.XIV.
[4] Vgl. *Jahnke;* Geschichte der Analysis, S.1.

ergeben und schließlich zur Entstehung und zum Höhepunkt der Differential- und Integralrechnung bei Newton und Leibniz geführt haben.[5] Mit ihrem Studium der *Abhängigkeiten veränderlicher Größen* konnten sie einen Meilenstein im wissenschaftlichen Weltbild erzielen, welches sich über die Mathematik und der Physik hinaus fundamental erstreckt und unsere Auffassung von Kausalität formuliert hat.[6]

So habe ich es mir zur Aufgabe gemacht, diese durchaus dynamische Entwicklung der Geschichte der Analysis, mit besonderem Augenmerk auf den Grenzwertbegriff, in ihrer Breite und Tiefe kompakt zum Ausdruck zu bringen und vor allem deren wichtige Bedeutung in den unterschiedlichsten Epochen der Geschichte für die weitere Entwicklung hervorzuheben. Dazu muss aber immer im Hinterkopf behalten werden, dass bei allen übergreifenden Errungenschaften wissenschaftlicher Fortschritt wesentlich für die Lösung konkreter Probleme war, um daraus letztlich ein realistisches und zugleich adäquates Bild gewinnen zu können.[7] Ziel ist es, eine prägnante Übersicht dessen von der Antike bis zur Gegenwart den LeserInnen mit dieser Arbeit zu gewähren. Geographisch beschränke ich mich dabei aber eher auf den europäischen Raum, um meine Untersuchung etwas einzuschränken, da es sonst den Rahmen sprengen würde.

Zu der Thematik der Geschichte der Analysis bzw. zur Entstehung des Grenzwertbegriffs gibt es reichlich Literatur, die herangezogen werden kann, da diese schon sehr gut von zahlreichen WissenschaftlerInnen in diesem Forschungsgebiet aufgearbeitet worden ist. Als sehr hilfreich für meine Studie haben sich das Werk von Jeanne PEIFFER und Amy DAHAN-DALMEDICO *„Wege und Irrwege. Eine Geschichte der Mathematik“* und die beiden Untersuchungen von Hans WUßING „6000 Jahre Mathematik“ erwiesen. Weitere Literatur, die ich herangezogen habe, kann aus dem Literaturverzeichnis im Anschluss entnommen werden und soll zudem ein Ansporn für eine eigenständige und vertiefende Untersuchung bei gewecktem Interesse liefern.

---

[5] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.4.
[6] Vgl. *Jahnke;* Geschichte der Analysis, S.1.
[7] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.2.

2. Historischer Überblick zur Entwicklung der Mathematik

Uns MathematikerInnen sind der Begriff und die Definition verschiedenster mathematischer Gebilde durchaus geläufig und werden oftmals, ohne viel darüber nachzudenken, angewendet. Dennoch sollte es uns bewusst sein, dass sich hinter einer solchen Wortzusammensetzung eine oft lange und komplexe Entwicklung verbirgt. Denn die Wissenschaft der Mathematik, die schon selbstverständlich zu unserer Kultur gehört, hat ihre berechtigte Geschichte, auf die ich nun in diesem Kapitel kurz und oberflächlich eingehen werde, um einen Grundstein für darauffolgende Untersuchungen zu bilden.[8]

Die Ursprünge eigentlich mathematischen Denkens, also sozusagen die Bildung abstrakter mathematischer Begriffe und die Herstellung von Beziehungen zwischen ihnen, reichen kaum mehr als 6000 Jahre zurück. Bereits in den Hochkulturen um ca. 4000 v. Chr. finden sich erste Materialien mit mathematischen Inhalten.[9] Vor allem aus der Zeit zwischen 1800-1500 v. Chr. konnten hunderte gut erhaltene Tontafeln mit Keilschrifttexten und beschrifteten Papyri ausführlich übersetzt und analysiert werden.[10] Erst ein solcher Fundus ermöglichte es ForscherInnen unserer Zeit, einen atemberaubenden Einblick in damalige mathematische Kenntnisse dieser Kulturen zu gewährleisten.[11]

Besondere Bedeutung für die Entwicklung der westlichen Mathematik in der Antike muss den GriechInnen zugeschrieben werden, obwohl wir im Verständnis der griechisch-hellenistischen Mathematik mit einem Quellenproblem zu kämpfen haben, da nur wenige Originalmanuskripte und somit im Eigentlichen nur Überlieferungen von Kopien erhalten sind. Diese sind uns entweder in Form von Kommentaren oder auch in arabischen bzw. lateinischen Übersetzungen zugänglich. Trotzdem sind zahlreiche dieser Ausgaben in Sorgfalt editiert und stimmen fast vollständig mit ihren Originalen überein. Den GriechInnen kommt deswegen eine solche enorme Bedeutung zu, da sie die Mathematik zu einer abstrakten und deduktiven Wissenschaft umgestaltet haben, indem sie sich in der Auseinandersetzung mit Kenntnissen nur von Völkern des Vorderen Orients, Babyloniens und Ägyptens nicht zufrieden gestellt haben. Außerdem ließen es sich berühmte Denker dieser Zeit, wie Archimedes, Ptolemaios, Heron und Diophant,

---

[8] Vgl. Jeanne *Peiffer*, Amy *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege. Eine Geschichte der Mathematik (Birkhäuser, Basel/ Boston/ Berlin 1994), S.IX-X.

[9] Vgl. Hans *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1 (Springer, Berlin/ Heidelberg 2009), S.6; Vgl. *Peiffer*, *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.1.

[10] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.1, 4; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.125.

[11] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.7.

auch nicht nehmen, mathematische Kenntnisse auf die Gebiete der Mechanik, Astronomie und Trigonometrie auszuweiten.[12]

Neben den GriechInnen zählten aber auch die AraberInnen über einen Zeitraum von sieben- bis achthundert Jahren hinweg, zu den Förderern der mathematischen Wissenschaft. Sie bewahrten das antike Wissen, indem sie deren Prinzipien von Neuem durchdachten und das Wissen teilweise neu organisierten. Ihr Bestreben lag schließlich darin, eine bemerkenswerte enzyklopädische Vollständigkeit der Mathematik zu gewährleisten. Dafür bot sich ihre Sprache sehr gut an, da sie einerseits flexibel einsetzbar war und andererseits eine Vielfalt an Vokabeln für Begriffe und konkrete Objekte angeboten hat. Trotzdem tauchte damit ein terminologisches Problem auf, welches auch für die Begriffsbestimmung Folgen hatte.[13]

Schließlich folgten aus der antiken Hochblüte der Mathematik zehn Jahrhunderte Ignoranz und ein Vergessen der theoretischen Gebilde des hellenistischen Denkens. Das Zeitalter des Mittelalters war viel zu sehr unter der Obhut der katholischen Kirche, um an eine Weiterentwicklung in diesem Gebiet überhaupt denken zu können. Erst durch die Humanisten in der Renaissance konnte die Wissenschaft endlich wiederentdeckt werden, welche überhaupt den Beginn der modernen Wissenschaft kennzeichnet. Dank einiger weniger in Latein schreibender Autoren des 5. und 6. Jahrhunderts, wie Boethius (480-524), Isidor von Sevilla (um 560-636) oder Beda Venerabilis (um 673-735), sind uns Texte mathematischer Natur aus dieser Zeit erhalten, die wiederum auf griechischen Quellen beruhten und ihren Schwerpunkt auf die Kunst des Rechnens und der Zahlenmystik legten.[14]

Mit dem 17. Jahrhundert erfuhr die Mathematik schließlich ihren wohlverdienten Aufschwung. Im Zusammenhang mit diesem Zeitalter wird in der Forschung auch häufig von einer Mathematisierung der Wissenschaft gesprochen, da zum einen der lang andauernde Reifungsprozess der Algebra durch Viéte zum Ende kam, die Zahlentheorie durch Fermats Einsatz wieder entstand und zum anderen die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hilfe von Pascal und Fermat geschaffen wurde. Darauf aufbauend entwickelten sich dann die analytische Geometrie bei Descartes und, für meine anschließende Betrachtung besonders interessant, die Infinitesimalrechnung bei Leibniz und Newton. Auf diesem Grundstein konnte sich letztlich im 18. Jahrhundert das Gebiet der Analysis ausbreiten, bis dann durch die Einführung der

[12] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.7-8.
[13] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.12-13.
[14] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.16.

komplexen Variablen mit Cauchy, Riemann und Weierstraß dem Aufstieg der Funktionsanalysis im 19. Jahrhundert nichts mehr im Wege stand.[15]

3. Vom Undenkbaren zum Begriff - Fachliche Klärung des Grenzwertbegriffs

3.1. Die griechische Antike

Mit dem 8. bzw. 7. Jahrhundert v. Chr. bildete sich zunächst in den ionisch-griechischen Stadtstaaten Kleinasiens, die in Berührung mit der Tradition Mesopotamiens und der persischen Ideologie standen, eine geistige Atmosphäre heraus, die für die Entstehung wissenschaftlichen Denkens besonders günstig war. Unter neuen Voraussetzungen, wie den ökonomisch-politischen Bedingungen, sowie den vorteilhaften geographischen und klimatischen Umständen, vollbrachten die GriechInnen die große Leistung, aus einer nahezu empirisch entstandenen und oft nach Rezept betriebenen Mathematik, eine systematisch, logisch-deduktiv dargelegte, eigenständige Wissenschaft mit spezifischen Zielsetzungen und Methoden zu konstruieren. Das von ihnen ausgeprägte System der Geometrie hatte für zwei Jahrhunderte vorbildhaften Charakter und sollte sogar später in der Neuzeit noch immer die Entwicklung der Mathematik in Stil und Methode prägen.[16] Mit dieser neuen geometrischen Methode mussten die GriechInnen aber einige Grundprobleme der Analysis bewältigen. Dabei beschäftigten sie sich unter anderem mit der Frage, Tangenten an Kurven zu legen, aber auch mit den Problemen zur Bestimmung von Längen, Flächen, Volumina und Schwerpunkten, die vor allem Betrachtungen über das Unendliche und die damit verbundenen Paradoxien voraussetzten.[17]

Die griechische Antike war unter anderem von dem Weltbild der Pythagoräer geprägt, welches die Auffassung vertrat, die Welt ließe sich durch Zahlen bzw. ganzzahlige Verhältnisse beschreiben.[18] Die Zahl war fortan Mittelpunkt und Gegenstand allen Denkens, kenntlich durch die einfache Unterscheidung von geraden und ungeraden natürlichen Zahlen. Daraus resultierte, dass nun generell Aussagen über Zahlen möglich waren, doch stellte sich auch das Problem einer korrekten Definition dieser.[19] Schließlich stand der Zahlbegriff, insbesondere derjenige

[15] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.29, 32, 36.
[16] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.147.
[17] Vgl. Rüdiger *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.5.
[18] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.175.
[19] Vgl. *Thiele;* Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.8-9.

der Reellen, vor einer langwierigen Entwicklungsperiode. Die Pythagoräer haben den Zahlen geometrische Punktmuster zugeordnet, zum Beispiel der Einheit einen Punkt und einer Zahl eine Gruppe von Punkten, die letztlich eine geometrische Figur ergaben. Sie schafften es, alle kontinuierlichen Größen, also Linien, Flächen und Körper, mit einer Zahl, dem sogenannten *Quantum,* zu belegen, die eine Bestimmung der Länge, des Flächeninhalts bzw. des Volumens ermöglichte. Somit wurde jede Größe mit einer natürlichen Zahl identifiziert, die angab, aus wie vielen Einheiten sie zusammengesetzt war. Somit startete man den Versuch, natürliche Zahlen und kontinuierliche Größen miteinander zu verschmelzen d.h., das Kontinuierliche mit diskreten Begriffen zu interpretieren. Wichtig war vor allem herauszufinden, wie oft die eine Größe B in einer Größe A enthalten ist. So lässt sich dann nämlich *A* an *B* messen und *B* ist ein Maß für *A,* welches sich als $A = qB$ mit dem *Quotienten q* schreiben lässt. In dem Fall, dass unter zwei vergleichbaren Größen *A, B* keine in der anderen „aufgeht“, so musste es, laut pythagoräischer Überzeugung ein *gemeinsames Maß E* geben. So gibt es Zahlen m, n mit der Eigenschaft, dass

$$A = mE, B = nE$$

gilt. Da

$$NA = n(mE) = m(nE) = mB$$

so gilt

$$nA = mB.$$

Somit seien A und B in unmittelbarer Beziehung und wenn A, B einen gemeinsamen Teiler haben, so haben sie auch ein *gemeinsames Vielfaches* und sind kommensurabel.[20]

Für alle praktischen Zwecke, die mit Messen zu tun hatten, reichten die rationalen Zahlen vollkommen aus, denn vom theoretischen Standpunkt aus könnte man meinen, dass jede beliebige Strecke mit der Einheit kommensurabel wäre, da alle Punkte der Achse rationale Punkte sind. Doch dass diese Sachlage keineswegs so einfach ist, konnte durch überraschendste Entdeckungen der frühen griechischen MathematikerInnen gezeigt werden.[21] Denn mit der

[20] Vgl. Hans-Heinrich *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute (Oldenbourg Verlag, München 2009), S.7; Vgl. Richard *Courant*, Herbert *Robbins*; Was ist Mathematik (Springer, Heidelberg [u.a.] 1967), S.47; Vgl. *Hirscher*; Grundlegende Begriffe der Mathematik, S.109; Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175.
[21] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.182.

Entdeckung der irrationalen Zahlen war diese Idee zum Scheitern verurteilt.[22] Die Einsicht, dass Strecken durchaus inkommensurabel sein könnten, war ein wissenschaftliches Ereignis von höchster Bedeutung und zählt noch heutzutage zu den entscheidendsten, typischen und vielleicht sogar zu den wichtigsten Beiträgen zur Schaffung einer wirklich wissenschaftlichen Betrachtungsweise in dieser Zeit, die auch einen wesentlichen Einfluss auf die Philosophie ausgeübt hatte.[23]

Eines der bekanntesten Beispiele zu dieser Thematik ist die Untersuchung des Verhältnisses der Kantenlänge eines Einheitsquadrates und der dazugehörigen Diagonale $\sqrt{2}$. Diese lässt sich nämlich nicht in natürlichen Zahlen ausdrücken, was darauf schließen lässt, dass die Kante und die Diagonale kein gemeinsames Maß besitzen und somit inkommensurabel sind.[24] So beschäftigten sich die GriechInnen mit der Frage, welche Zahl man nun solchen Größen zuordnen sollte, wenn jede Zahl immer noch einer Größe entspricht?[25] Die Babylonier wussten sehr genau, dass die Diagonale eines Quadrates das $\sqrt{2}$-fache der Seitenlänge ist und verfügten über hervorragende Näherungen für diesen Wert. So gab es bereits bei ihnen erste Überlegungen zum Grenzwertbegriff, die im Zusammenhang mit der Approximation von irrationalen Größen standen. Bewundernswerterweise sind uns aus dieser Zeit zum Beispiel der Näherungswert $1;24;51;10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41421296$ für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler $< 6 \cdot 10^{-7}$ überliefert.[26] Bereits hier können wir erkennen, dass Wurzeln bzw. die ersten Gedanken einer Infinitesimalrechnung in intuitiven Vorstellungen von Begriffen, wie *Kontinuum*, *mathematisches Unendliches* und *Grenzwer*t, liegen, sowie in den Schwierigkeiten, diese explizit zu formulieren.[27] Weitere Hinweise auf ein tieferes Verständnis von irrationalen Zahlen im mesopotamischen Kulturraum sind leider nicht überliefert. Dies ist aber auch nicht wirklich verwunderlich, denn eine echte Klarheit vom Aufbau der reellen Zahlen wurde erst im ausgehenden 19. Jahrhundert erarbeitet.[28]

Andere klassische Probleme, welche die MathematikerInnen in dieser Zeit beschäftigten, waren einerseits die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfelvolumens und die

---

[22] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175.
[23] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.182; Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.47.
[24] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.9; Vgl. *Hirscher*; Grundlegende Begriffe der Mathematik, S.114.
[25] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175.
[26] Vgl. Wolfgang *Walter*; Analysis 1, S.52; Vgl. Sonar; 3000 Jahre Analysis, S.13, 179; Vgl. Ernst *Hairer*, Gerhard *Wanner;* Analysis in historischer Entwicklung (Springer, Berlin/ Heidelberg 2011), S.77.
[27] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175.
[28] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.14; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.179.

Winkeldreiteilung, wobei insbesondere Ersteres und die daraus entstandene Exhaustionsmethode für unsere Bezugnahme auf den Grenzwertbegriff wichtig ist. In diesem Zusammenhang ist das von Euklid verfasste Werk *Elemente* bedeutend, welches ohne Zweifel als eines der einflussreichsten mathematischen Lehrbücher bezeichnet werden darf und bereits griechische Lehrstücke aus der Antike bemerkenswert aufgearbeitet hat.[29]

3.1.1 Die Paradoxien des Zenon

Wie nun schon kurz erwähnt, drang die Auffassung des Unendlichen in der griechischen Mathematik mit der Entdeckung der Irrationalität ein. Vor allem bei der Suche nach einem, allen Größen gemeinsamen Maß, hätten die griechischen GeometerInnen durchaus unendlich oft teilbare Größen betrachten können, doch die Vorstellung an das Unendliche sorgte für tiefe Verwirrung. Stur versuchten sie in ihren mathematischen Theorien Spekulationen über das Unendliche zu umgehen, da sich Schwierigkeiten mit der Erklärung der abstrakten Begriffe *Unendlichkeit* und *Kontinuum* häuften. Dies soll im Folgenden beispielhaft an den Paradoxien des Zenon von Elea (ca. 490-430 v. Chr.) widergespiegelt werden.[30]

Erwähnenswert sei aber noch, dass zu Lebzeiten des Zenons sich zwei Denkmodelle gegenüberstanden, die im Nachhinein wohl oder übel in eine Sackgasse geführt hatten. Die Konzeption des Kontinuierlichen ging davon aus, dass die Zahlen, der Raum, die Zeit und die Materie unbeschränkt teilbar seien. Andererseits unterstellte aber die atomische Denkweise, dass es erst unteilbare Elemente geben müsse, also umwandelbare Atome und weiter nichts.[31] Lediglich durch Form, Lage und Bewegung können diese in ihren Erscheinungen unterschieden werden.[32] Die Meinungen der AtomistInnen und der KontinuumsanhängerInnen im Umgang mit dem Unendlichen konnten nicht noch mehr voneinander abweichen. So standen sich Demokrit und die Atomisten mit der Sichtweise des „Aktualunendlichen“, also dass eine Gerade bzw. eine Strecke aus aktual unendlich vielen Punkten bestehe, einer durch Aristoteles vertretenen „potentiellen Unendlichkeit“, in dem ein Prozess beliebig wiederholt und fortgesetzt werden kann, gegenüber.[33] Diese Anschauungen, mit denen der Wandel bzw. der

[29] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.9; Vgl. *Hairer, Wanner;* Analysis in historischer Entwicklung, S.8.
[30] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.175-176.
[31] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.176.
[32] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.40.
[33] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.51.

Schein begründet und dargestellt werden sollte, führten dazu, dass NaturphilosophInnen aus dieser Zeit versuchten, Verständnis in den Aufbau der Welt zu bringen, welcher als ein beständiges Werden und Vergehen wahrgenommen wurde. Alles jenseits der Mondbahn galt als unwandelbar und Werden und Vergehen waren sowieso nur im irdischen Bereich möglich. Genau in diesem Spannungsfeld der philosophischen und physikalischen Sein-Ebene sind die im folgenden beschriebenen Paradoxien des Zenon anzusiedeln, die vor allem auch den Gegensatz von Diskretem und Kontinuierlichem aufzeigen sollen. Mit diesen versuchte er nämlich den Begriff der *Bewegung* zu problematisieren, da diese zwar durchaus physikalisch wahrgenommen aber nicht mathematisch gedacht wurde. Zu dieser Sachlage besonders zutreffend sagte 1971 der Mathematiker Courant in seinen Vorlesungen:[34]

> *„Die intuitive Idee eines Kontinuums und eines stetigen Fließens ist völlig natürlich. Aber man kann sich nicht auf sie berufen, wenn man eine mathematische Situation aufklären will; zwischen der intuitiven Idee und der mathematischen Formulierung, welche die wissenschaftlich wichtigen Elemente unserer Intuition in präzisen Ausdrücken beschreiben soll, wird immer eine Lücke bleiben. Zenons Paradoxien weisen auf diese Lücken hin.“*[35]

Achilles und die Schildkröte

Das Argument vom Wettlauf des Achilles gegen die Schildkröte richtet sich gegen die Auffassung einer unbeschränkten Teilbarkeit von Raum und Zeit, wobei Zenon behauptet, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen wird. Als fairer Gegner gesteht Achilles der Schildkröte einen Vorsprung zu, doch, obwohl Achilles die Strecke durchläuft und der Abstand zwischen ihm und der Schildkröte stets kleiner wird, behält diese ihren Vorsprung, da sie ihrerseits ein Stück vorangekommen ist. So muss Achilles den neuerlichen Abstand wiederum überwinden, währenddessen aber die Schildkröte ein Stück vorrückt. Zur Illustration soll der Schildkröte ein Vorsprung von $10\ m$ gegeben werden, wobei Achilles 10 mal so schnell wie diese laufen kann und die 10 Meter in einer Sekunde überwindet. So ist festgelegt, dass die Schildkröte einen Meter pro Sekunde läuft. Dies bedeutet nun für das Rennen, dass nach $10\ m$ Achilles bereits die Ausgangsposition seines Gegners erreicht hat, jedoch ist diese in der einen Sekunde schon einen Meter weitergelaufen und somit einen Meter vor Achilles. Überwindet

[34] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.40-41.
[35] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.40-41.

Achilles diesen einen Meter in einer Zeit von $\frac{1}{10}$ Sekunde, dann ist die Schildkröte in der Zwischenzeit aber um $10\,cm$ weitergekommen. Hat Achilles wiederum diesen Vorsprung eingeholt, ist die Schildkröte um $1\,mm$ vor ihm. Somit kann dieses Problem unendlich oft weitergeführt werden und scheinbar holt Achilles die Schildkröte niemals ein.[36]

Bei dieser Paradoxie wird zum einen die Schwierigkeit aufgezeigt unendlich viele, immer kleiner werdende Größen zu summieren, und zum anderen das Problem der Veranschaulichung, dass eine Summe eine endliche Größe sein kann. Für heutige MathematikerInnen wäre dies kein Problem, denn die von Achilles im ganzen gelaufene Strecke in Metern ist im Prinzip nichts anderes als

$$10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

und die unendliche Reihe ist eine konvergente geometrische Reihe mit dem Wert $\frac{10}{9}$. Die Strecke $10 + \frac{10}{9} = 11{,}11111\ldots$ ist also genau diejenige Strecke, nach der Achilles die Schildkröte überholen würde. Doch dies verweist auf ein Wissen des 19. Jahrhunderts hin und Zenon hat sich eigentlich bei diesem Paradoxon mit der Frage nach der Struktur von Raum und Zeit beschäftigt.[37]

Dichotomie

Zenon zeigt hier das Argument noch deutlicher, indem er sagt, dass eine Strecke erst dann ganz durchlaufen werden kann, wenn zuerst deren Hälfte hinter sich gebracht wird, davor aber die Hälfte dieser Hälfte und immer so weiter. Dabei konstruiert er im Geiste die Reihe

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots,$$

deren Summe 1 beträgt. Allerdings gelingt es ihm nicht, diese Tatsache intuitiv zu erfassen, denn erst mit der Verwendung der modernen Begriffe von *Grenzwert* und *Konvergenz* einer Reihe würde klar werden, dass ab einer bestimmten Stelle der Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte kleiner wird als jede Zahl $\varepsilon > 0$, die man beliebig klein wählen kann.[38]

---

[36] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.176; Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.54.
[37] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.56; Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.176.
[38] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177.

Definition des Grenzwertbegriffes einer Folge bzw. einer Reihe[39]

Eine Folge $(a_n), n \in \mathbb{N}$ reeller Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

besitzt den Grenzwert a, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle n größer als $N(\varepsilon)$ die Differenz $a - a_n$ ihrem Betrag nach kleiner als ε ist.

Eine Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \ldots$$

Heißt konvergent gegen die Summe s, wenn die Folge s_n der Partialsummen

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

gegen den Grenzwert s konvergiert.

Pfeilparadoxie

Hier wird davon ausgegangen, dass Raum und Zeit aus unteilbaren Partikeln, den Punkten und Augenblicken, zusammengesetzt seien. Jeder Pfeil nimmt somit während eines bestimmen Augenblickes einen bestimmten Punkt im Raum ein, in dem er ruht. Dies gilt auch in jedem Augenblick seines Fluges, was aber dazu führt, dass der Pfeil sich nicht bewegen kann. In diesem Zusammenhang spielt der Begriff der *Momentangeschwindigkeit* eine entscheidende Rolle. Außerdem muss man sich mit der Frage beschäftigen, welcher Wert dem Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ zugeschrieben werden soll, wenn dem Δx der, während dem Zeitraum Δt durchlaufenen Strecke entspricht, die Größe Δt aber dabei sehr klein wird. Aufgrund der Unmöglichkeit, dass sich die GriechInnen sich ein Minimum ungleich Null vorstellen konnten, schrieben sie dieser Größe den Wert $Null$ zu. Heute würde uns der Grenzwertbegriff umgehend die richtige Antwort liefern, nämlich dass die Momentangeschwindigkeit der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ist, wenn Δt gegen Null strebt. Aber auch dieses Wissen war zu damaliger Zeit noch nicht vorhanden.[40]

Unter dem Blickwinkel der Problematik von Atomismus gegen Kontinuum, können die Paradoxien in zwei Gruppen eingeteilt werden. So richten sich Achilles und die Dichotomie offenbar gegen eine Annahme des Kontinuums, da sie aufzeigen, welche Schwierigkeiten bei

[39] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177.
[40] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177.

beliebiger Teilbarkeit auftauchen können. Der Fliegende Pfeil jedoch richtet sich gegen die Annahme des Atomismus, weil bei der Vorstellung, dass Zeit atomistisch ist, also als Sammlung von Zeitpunkten betrachtet werden kann, der Pfeil nach Zenon, in einem dieser Zeitpunkte stillsteht, was aber ziemlich konträr in der eigentlichen Bewegung eines Pfeiles ist. Wenn man andererseits im Fall von Achilles und der Schildkröte annimmt, dass die Laufstrecke ein Kontinuum ist, dann muss der Läufer unendlich viele, immer kleiner werdende Stücke dieses Kontinuums durchlaufen und das, so Zenon, kann nicht in endlicher Zeit ausgeführt werden.[41] Schnell wird uns erkenntlich, dass sich hinter den oben zitierten Paradoxien der Begriff des *Grenzwertes* verbirgt, der tatsächlich in der späteren Infinitesimalrechnung eine zentrale Stellung einnehmen wird, aber in der Antike noch nicht wirklich gelöst werden konnte.[42] Bereits Aristoteles hat in seinen Physikvorlesungen diese aufgegriffen und heftig kritisiert.[43] Dabei ist sein Kontinuum in keiner Weise auch nur irgendwie mit der heutigen mengentheoretischen Auffassung in Einklang zu bringen und eng mit dem Problem der Bewegung verknüpft. Dieses Nachdenken über die Natur der Bewegung war wegweisend für die Frage des Kontinuums in der christlichen Scholastik. Zenon hatte ohne Zweifel den Nerv der Analysis freigelegt, der unter anderem mit dem Kontinuums-Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und der atomischen Vorstellung unter Isaac Newton (1643-1727) weitergeführt wurde und somit Auswirkungen auf unsere heutige Zeit erzielen konnte.[44] Immerhin haben diese Paradoxien zur Entwicklung der Logik beigetragen, Diskussionen zum Grenzwertbegriff und zur Konvergenz unendlicher Reihen in der Analysis ausgelöst und die Problematik des Kontinuums in der Mengenlehre aufgeworfen.[45]

3.1.2 Aus der Proportionalehre des Eudoxos zur Exhaustionslehre

Im Zusammenhang mit der Inkommensurabilität und der darauf aufbauenden Weiterbeschäftigung mit solchen Größen, findet sich der besondere Stellenwert der Proportionslehre des Eudoxos von Knidos (ca.408-355 v.Chr.) wieder, welche im fünften Buch

[41] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.57.
[42] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177; Vgl. *Thiele;* Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.41.
[43] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177.
[44] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.13; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.57-58.
[45] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.163.

der *Elemente* von Euklid festgehalten wird.[46] Sie belegt, dass inkommensurable Größen in gewisser Weise bereits in der griechischen Mathematik zugelassen waren und liefert die Grundlage für die daraus entstandene Exhaustionsmethode, mit welcher Probleme behandelt werden konnten, die später zur Berechnung von durch gekrümmte Kurven begrenzten Flächen, gekrümmten Flächen begrenzten Volumina, sowie zur Ermittlung von Schwerpunkten oder der Konstruktion von Tangenten helfen sollte, um nur einige Beispiele dazu zu erwähnen.[47] Damit schuf Eudoxos eine Größenlehre, die zwar irrationale Größen einbezog, allerdings ohne den Begriff *Irrationalität* zu verwenden, obwohl Proportion eigentlich an die Voraussetzung gebunden war, dass die im Verhältnis stehenden Zahlen ein gemeinsames Maß besitzen mussten. Eine Leistung, die eine Herstellung der Verbindung zwischen der geometrischen Algebra, der Proportions- und Ähnlichkeitslehre, sowie der Inkommensurabilität gewährleistete. Somit kann in unmittelbarem Zusammenhang Eudoxos Pionierarbeit als Grundlegung, einer Art Vorstufe, der späteren Integralrechnung zugeschrieben werden. Der Terminus *Exhaustionsverfahren* für seine Beweismethode tritt jedoch zum ersten Mal im 17. Jahrhundert auf und soll bildlich ausdrücken, dass die zu messende Figur durch Polygone „ausgeschöpft“ wird.[48]

Mit diesen Ansätzen zur Behandlung von geometrisch existierenden Grenzwerten war es Eudoxos gelungen, bereits in der folgenden Periode, insbesondere bei Archimedes, ihre Fruchtbarkeit zu offenbaren, welche noch bis weit in die Mathematik der Neuzeit hinaufreichen sollte.[49] Kennzeichnend ist außerdem die dabei verwendete Methode des axiomatischen Zugangs, nämlich dem uns wohl bekannten *Archimedischen Axiom.* Dies ermöglicht es, an und für sich geometrische Größen und Zahlen miteinander zu identifizieren, und das sogar auch noch nach der Entdeckung der irrationalen Zahlen.[50] Das Axiom bietet die entscheidende Antwort auf Fragen nach der Unendlichkeit in der griechischen Antike, da dadurch sichergestellt wurde, dass es keine unendlich kleinen Zahlen gibt. Somit wären alle Probleme weitgehend gelöst, doch natürlich hat das unendlich Kleine zu stark das Interesse geweckt, um sich nicht damit zu beschäftigen.[51]

[46] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177-178; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.10.
[47] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177-178.
[48] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.52-53; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.185.
[49] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.186.
[50] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.177-178.
[51] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.30.

Euklid beschreibt das Archimedische Axiom im X. Buch der *Elemente* so:

> *„Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer wieder, dann muß einmal eine Größe übrigbleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist."*[52]

Anders gesagt bedeutet dies, dass zu jeder noch so kleinen positiven reellen Zahl ε es eine natürliche Zahl n gibt, so dass gilt:

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dieses Axiom, welches heute häufig als Folge des Supremumprinzips hergeleitet wird, gibt eine entscheidende Einsicht in den Aufbau der reellen Zahlen, z.B., kann es nach diesem Axiom keine kleinste positive Zahl geben. Denn wäre $\delta > 0$ diese kleinste positive Zahl, dann würde man eine natürliche Zahl n finden, so dass $\frac{1}{n}$ noch zwischen 0 und δ passt. Also wäre $\frac{1}{n}$ noch kleiner als δ.[53]

Die Bedeutung vom Begriff des *Messens* war für die griechischen GeometerInnen entscheidend. Da sie kein gemeinsames Maß für die inkommensurablen Größen finden konnten, maßen die GriechInnen die geometrischen Größen nicht, sondern verglichen diese vielmehr untereinander, indem sie ihre Verhältnisse berechneten.[54] So konnten bereits seit dem 5. Jahrhundert v. Chr. Flächeninhalte beliebiger gradlinig begrenzter Figuren, sogenannte Polygone, bestimmt werden. Die dafür benötigte Bezeichnung *Quadratur* im Sinne der griechischen Mathematik ergab sich schließlich daraus, dass ein Flächeninhalt bekannt wurde, wenn ein flächengleiches Quadrat mit Zirkel und Lineal konstruiert werden konnte.[55] Dies führte dazu, dass sie die Länge gekrümmter Kurven mit denen von Geradenstücken und so die Kurven- und die Flächeninhalte krummlinig begrenzter Figuren mit denen von Rechtecken in Beziehung setzten.[56] Als Beispiel soll hier die Vorgehensweise zur Berechnung des Flächeninhaltes vom Kreis damaliger Zeit angeschnitten werden, welcher mittels zweckmäßiger Exhaustion von unbegrenzt wachsenden regelmäßigen Vielecken zustande kam. So soll der Sophist Antiphon im regelmäßigen Unendlicheck nicht nur „praktisch" die

---

[52] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.178.
[53] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.27.
[54] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.178.
[55] Vgl. *Thiele;* Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.19.
[56] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.178.

Quadratur des Kreises vollzogen, sondern auch mit seinen Konstruktionsschritten den Anstoß zu Eudoxos´ Methode gegeben haben.[57] Schließlich beschäftigten sich daraufhin antike MathematikerInnen mit der Kreisquadratur, indem einem Kreis regelmäßige $n - Ecke$ eingeschrieben und somit mit einer hinreichend großen Zahl von Ecken die Kreisfläche durch das Polygon ausgeschöpft wurde.[58]

Diese vagen Vorstellungen versuchte Bryson von Herakleia (450-370 v. Chr.) etwas zu präzisieren, wobei er den Kreis zwischen um- und eingeschriebene $n - Ecken$ einschließt, deren Flächen jeweils größer bzw. kleiner als die des Kreises sind. Schließlich gibt es ein Zwischenpolygon, welches dem Kreis flächengleich ist, da der Kreis K und das Zwischenpolygon P^* beide kleiner als das umschriebene, aber auch größer als das eingeschriebene Polygon sind. Folglich schließt Bryson daraus, dass $K = P^*$ gelten muss, aufgrund des arithmetischen Grundsatzes, dass der Übergang einer Größe vom Größeren zum Kleineren sich durch das Gleiche vollziehe. Das Problem bei Bryson war allerdings, dass er vor dem Unendlichen gewissermaßen stehenblieb und seine Überlegungen einer atomischen Vorstellung zugrunde lagen, nach der es nur möglich war, für hinreichend große n ein $n - Eck$ und einen Kreis zu identifizieren.[59]

Das Problem mit der Quadratur des Kreises hat Generationen von MathematikerInnen über die Geschichte hinweg beschäftigt und sich eigentlich erst im 19. Jahrhundert in Luft aufgelöst, als Ferdinand Lindemann (1852-1939) zeigen konnte, dass die Zahl π eine transzendente irrationale Zahl ist und somit nicht Lösung einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sein kann. Dadurch wurde wohl oder übel festgehalten, dass eine Quadratur des Kreises ein immerzu unlösbares Problem bleiben wird.[60]

Diese oben angeführten Überlegungen von Bryson wurden schließlich ausgebaut und weitergeführt, was zu Eudoxos´ Exhautionsbeweis führte. Seine Methode erlaubte es, den Inhalt einer Fläche A, zum Beispiel der eines Parabelsegmentes, mit dem bekannten Inhalt S einer anderen Fläche, wie eines Dreiecks, zu vergleichen. Diese Anschauung beruht auf der Konstruktion zweier Flächen U und V, die sowohl die gesuchte Fläche A als auch die bekannte

[57] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.16-17.
[58] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.22; Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.81.
[59] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.22.
[60] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.21.

Fläche S von außen und von innen annähert, so dass die Differenz $V - U$ beliebig klein gemacht werden kann.[61] Im zweiten Schritt wird die Trichotomie der reellen Zahlen benutzt und es wird gezeigt, dass weder $A > B$ noch $A < B$ möglich sein kann.[62] Anschließend beweist man durch Widerspruch, das A gleich S ist. Obwohl diese Beweisführung unhandlich und streng erfolgt, kommt sie ohne Verwendung von unendlichen Folgen und Grenzwertbetrachtungen aus.[63] Es wird stets nach endlichen Schritten abgebrochen und der beliebig kleine Rest wird nicht vernachlässigt, sondern in den Widerspruchbeweis einbezogen. Der Name *Exhaustion* (lat. Ausschöpfung) ist daher etwas irreführend, besser wäre wahrscheinlich ihn mit dem Begriff *Exklusion* (lat. Ausschließung) gleichzusetzen.[64] Auch unser heutiger Grenzwertbegriff ist in der Exhaustionsmethode des Eudoxos in aller Klarheit vorhanden, denn die Polygone P_n, welche einer krummlinig begrenzten Fläche nach dieser Methode einbeschrieben werden, „konvergieren" gegen die Fläche in dem Sinne, dass die Differenz für großes n kleiner gemacht werden kann als ein willkürlich vorgegebenes Flächenstück.[65]

Archimedes (287-212 v.Chr.)

Archimedes galt als der größte Mathematiker in der antiken Epoche und als einer der größten Mathematiker seiner Zeit überhaupt.[66] Er ist ohne Übertreibung der größte Ingenieur und Physiker des Altertums gewesen, aber vor allem auf dem Gebiet der Mathematik und insbesondere der Analysis ein Gigant.[67] Mathematisch wirkte er zwar nicht so schöpferisch wie Eudoxos, doch ebenso professionell, wodurch er als Allroundgenie auf eine Stufe mit Newton gestellt werden kann. Beide Mathematiker bewältigten die Infinitesimalen, wobei sie sich allerdings in ihrer Einstellung zur Strenge gehörig unterschieden.[68] In den Überlieferungen seiner Schriften konnte man seine Genialität bewundern, in denen er auf ungewöhnliche Weise Theorie und Praxis in Einklang brachte, insbesondere im Bereich der Physik und Technik.[69] Ihm ist es gelungen, sein physikalisches Wissen in die Fertigung viel bestaunter mechanischer

[61] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.178-179.
[62] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.23.
[63] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.178-179.
[64] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.23.
[65] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.54.
[66] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.26; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik-Teil 1, S.194.
[67] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analyis, S.66.
[68] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.18-19.
[69] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analyis, S.69; Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.26.

Maschinen umzusetzen, wie zum Beispiel Wasserschnecken, Kräne, Flaschenzüge, Schiffe und Kriegsmaschinen. Seine beeindruckende Vielseitigkeit war sein besonderes Markenzeichen, wobei viele seiner Gedanken erst in der Neuzeit wieder zur Geltung kamen. Gemäß der rationalen Auffassung der GriechInnen von der Natur, die den Kosmos durch mathematische Gesetze geordnet sahen, behandelt Archimedes physikalische Aufgaben mit mathematischen Methoden und begründet derartig die Statik und Hydrostatik im Sinne der euklidischen Axiomatik, weshalb seine Arbeiten als die Wurzeln der mathematischen Physik angesehen werden können. Auch seine umgekehrte Perspektive, mit der er physikalische Sachverhalte zur Gewinnung neuer mathematischer Sätze ausnützt, zeichnen Archimedes aus.[70] Zudem sind seine Behandlungen von Flächen- und Körperinhalten typisch für die sich in „Integration" erschöpfende griechische Infinitesimal-Mathematik, der in neuerer Zeit das Tangentenproblem gegenübersteht.[71]

Mit Archimedes und den großen MathematikerInnen bis Gauss können wir eine „naive" Einstellung annehmen, dass der Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Gebietes eine anschauliche Gegebenheit ist, und dass es nicht darauf ankommt, eine exakte Definition zu finden, sondern diesen zu berechnen. Dabei wird ein eingeschriebenes Gebiet mit polygonaler Grenzlinie einem anderen Gebiet angenähert, welches eine wohldefinierte Fläche ist. Danach wird ein zweites polygonales Gebiet gewählt, welches das vorherige umschließt. Schließlich erfolgt dadurch eine bessere Annäherung an das Gegebene. Durch eine solche Herangehensweise kann allmählich die gesamte Fläche „ausgeschöpft" werden und man erhält die Fläche des gegebenen Gebiets als Grenzwert der Flächen einer geeignet gewählten Folge von einbeschriebenen polygonalen Gebieten mit zunehmender Seitenzahl. Mithilfe dieser Überlegungen kann die Fläche eines Kreises mit Radius 1 berechnet werden, dessen numerischer Wert durch das Symbol π bezeichnet wird. Archimedes führte dieses allgemeine Schema aber nicht nur für den Kreis ein, sondern wagte sich auch an den Parabelschnitt.[72]

Zur näheren Illustration möchte ich hier mit dem Beweis der Quadratur der Parabel von Archimedes an das oben angeführte Beispiel von Eudoxos anknüpfen, womit aufgezeigt wird, dass

[70] Vgl. *Thiele;* Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.26, 28.
[71] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.18.
[72] Vgl. *Courant, Robbins;* Was ist Mathematik, S.304.

„jedes Parabelsegment um den dritten Teil größer ist als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.“[73]

Archimedes ging folgendermaßen vor:

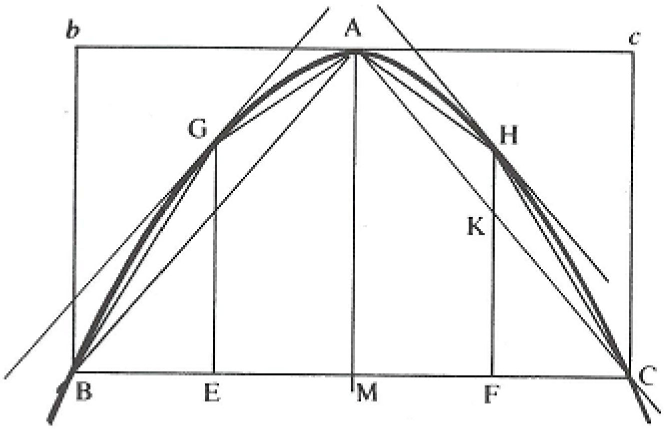


Abb. 1

Sei BAC das vorgegebene Parabelsegment. Weiter sei A der Punkt, an dem die Tangente parallel zur Sekante BC ist. Außerdem seien Bb und Cc Parallelen zum Durchmesser AM, welcher alle zu BC parallelen Sehnen in deren Mitte schneidet und somit M der Mittelpunkt von BC ist. Archimedes zeigte nun, dass die Fläche des Dreiecks ABC halb so groß wie die Fläche des Parallelogramms $bBCc$ ist. Deshalb übertrifft das Dreieck die halbe Fläche des Parabelsegmentes. In diesem, welches von der Sekante AC abgeschnitten wird und dessen Durchmesser HK ist, konstruierte er dann erneut ein Dreieck. Mithilfe von einfachen geometrischen Überlegungen kann nun gezeigt werden, dass die Fläche des Dreiecks AHC gleich ein Achtel der Fläche des Dreiecks ABC ist und dass die Summe der Dreiecksflächen BGA und AHC gleich ein Viertel der Fläche des Dreiecks ABC ist. Weiter nehmen die beiden Dreiecke mehr als die Hälfte der Parabelsegmente ein, in die sie einzubeschreiben sind. Durch die Anwendung des Archimedischen Axioms folgt schließlich, dass ein Polygon konstruiert werden kann, welches sich dem Parabelsegment beliebig genau annähert. Durch diesen Beweis wird verdeutlicht, dass es durchaus möglich ist, einem Parabelsegment ein Vieleck dermaßen einzuschreiben, dass die Summe der Restsegmente kleiner als jede vorgeschriebene Fläche ist. Denn nimmt man von einer fortgesetzten Größe mehr als die Hälfte weg, wird ersichtlich, dass

[73] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.179.

die Reihe der Reste in stärkerem Maße abnimmt als durch die fortgesetzte Halbierung, wodurch also der Rest kleiner werden muss als jede beliebige Größe.[74]

Zur Berechnung der Fläche des eingeschriebenen Polygons, summierte Archimedes die Flächen der eingeschriebenen Dreiecke. Folglich musste er die Summe einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ ermitteln, deren erstes Glied die Fläche des Dreiecks ABC ist. Um zu vermeiden die Summe der unendlichen Reihe explizit zu berechnen, bestimmte Archimedes stattdessen die Summe der ersten n Glieder, zu der er den Rest $\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}A$ hinzufügte. Anschließend benutzte er die Identität:

$$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}\ A + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\ A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\ A = \frac{4}{3}\ A.$$

Wächst die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen Polygons und damit die Zahl der Summanden in der Reihe, so wird der Rest $\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}A$ beliebig klein. Deshalb ist die gesuchte Fläche S gleich $\frac{4}{3}A$. Durch einen doppelten Widerspruchbeweis zeigte Archimedes schlussendlich, dass die Fläche des Parabelsegments weder kleiner noch größer als $\frac{4}{3}A$ sein kann. Hierzu setzte er zunächst voraus, dass die Fläche S des Parabelsegmentes größer als $\frac{4}{3}A$ sei. Dann gibt es n Dreiecke mit der Eigenschaft, dass die Summe ihrer Flächen

$$U = A\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

kleiner als S und größer als $\frac{4}{3}A$ ist. Da U gleich der Differenz $\frac{4}{3}A - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$ entspricht, muss auch U kleiner als $\frac{4}{3}A$ sein. Das ist ein Widerspruch, weswegen die Annahme $S > \frac{4}{3}A$ zu verwerfen ist. Des Weiteren nahm Archimedes an, S sei kleiner als $\frac{4}{3}A$, wodurch er somit die Differenz $D = \frac{4}{3}A - S$ setzte. Folglich muss es nach dem Archimedischen Axiom eine natürliche Zahl m geben, so dass die Fläche $A_m = \frac{1}{4^{m-1}}A$ kleiner als die vorgegebene Größe D wird. Ansonsten würde gelten:

$$A_m > \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A - A\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

und

[74] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.179.

$$\frac{4}{3}A - S > A_m > \frac{4}{3}A - A\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

woraus folgt, dass

$$S < A\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right).$$

Dies würde aber der geometrischen Evidenz widersprechen, weil

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

gleich der Fläche des Polygones ist, welches dem Parabelsegment eingeschrieben wurde.[75]

Mit der Quadratur der Parabel gelang es Archimedes, die exakte Flächenberechnung eines Parabelsegments durchzuführen, indem er eine unendlich geometrische Reihe summierte. So zählt nach Ergebnis und Methode diese Quadratur zu den Vorstufen der Integralrechnung.[76] Bewusst erkennt man aber, dass Archimedes in der konkreten Anwendung seiner Methode Begriffe wie *Polygon mit unendlich vielen Seiten* vermieden hat. Letzteres würde mit dem Parabelstück zusammenfallen. Er vergrößerte die Seitenzahl des Polygons, bis die Restfläche so klein war, wie man sie braucht, dennoch blieb immer ein Rest übrig, weshalb die Näherungsflächen die gesuchte Fläche nicht „ausschöpften". Bei abgeleiteten antiken Methoden im 17. Jahrhundert, war dies durchaus anders, woraus die *Beziehungsweise Exhaustionsmethode* von Gregorius a San Vincento (1647) entstand.[77]

Durch diesen doppelten Widerspruchbeweis mögen wohl geschickt alle infinitesimalen Betrachtungen umgangen werden, obwohl der Hintergedanke durchaus auf solchen Untersuchungen beruht. Es wäre nicht richtig zu sagen, dass zu dieser Zeit der Gedanke eines Grenzwertprozesses nicht vorhanden war. Dennoch hatte man darauf verzichtet, einen solchen zu verwenden, da eine strenge Definition desselben eine allgemeine Theorie der irrationalen Zahlen erfordert hätte. Obwohl die GriechInnen mit der Exhaustionsmethode zeigten, dass die gesuchte Größe A von dem Näherungswert U beliebig wenig abweicht, also modern gesagt, dass A der Grenzwert der Größe U ist, wiederholten sie dasselbe Beweisverfahren in jedem

[75] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.180-181.
[76] Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.196.
[77] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.181.

Einzelfall und kümmerten sich nicht um die Analogien zwischen all diesen Problemen, was letztlich dazu führte, dass sich keine allgemeine Methode entwickeln konnte.[78]

Archimedes brachte jenes heroische Zeitalter zum krönenden Abschluss. Was folgte, war eine sehr lange Epoche ohne vergleichbare Entdeckungen und eine lange, mangelnde Beweiskultur. Aufgrund des Verlustes vieler von ihm verfasster Schriften und dem Mangel an der mündlichen Weitergabe, kam es vor allem im Bereich der Analysis zum Stillstand, in dem nur selten jemand in den kommenden Jahrhunderten einen Zugang gefunden hatte.[79]

3.1.3 Die arabische Wiederaufnahme in der Welt des Hellenismus

Im Weltreich der AraberInnen waren die verschiedensten Kulturen und Völker vereinigt, die durch eine gemeinsame Sprache, dem Arabischen, verbunden waren. Nach Osten erstreckte sich das Reich bis hin nach Indien und im Westen gelang es sogar, große Teile Spaniens unter die Kontrolle des Kalifen zu bringen. Die daraufhin verstreuten wissenschaftlichen Schriften dieser Völker, insbesondere auch die umfangreichen Manuskripte griechischer, persischer und indischer MathematikerInnen, wurden im 8. bzw. 9. Jahrhundert im Osten des riesigen Reiches gesammelt und ins Arabische übersetzt.[80] Bereits im 10. Jahrhundert lagen dann Werke von Euklid, Archimedes, Apollonios, Diophant, Heron und vieler anderer in arabischer Übersetzung vor.[81] Schließlich waren sie es, die am Ende das griechische Erbe verwalteten und bereicherten.[82]

Unter dem Einfluss griechischer Quellen zeichneten sich viele Werke arabischer GelehrtInnen durch das Bemühen aus, behandelte Probleme systematisch und vollständig darzulegen, sowie gemäß dem Vorbild hellenistischer Mathematik, Sätze zu beweisen.[83] Zu Beginn des 9. Jahrhunderts fingen die arabischen WissenschaftlerInnen an, sich für infinitesimale Verfahren zu interessieren.[84] In der Analysis kennzeichneten sich diese durch eine Fortführung der archimedischen Ideen zur Quadratur und Kubatur. Zudem beschäftigen sie sich auch mit der

[78] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.181.
[79] Vgl. Körle; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.19-20.
[80] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.95-96, 111; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.231.
[81] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.97.
[82] Vgl. *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis, S.21.
[83] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.231.
[84] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.182.

Philosophie des Aristoteles und seiner Physik, weshalb sie Auswirkungen bis weit in die scholastische Philosophie des europäischen Mittelalters hinein verzeichnen konnten.[85] Einer der größten Gelehrten dieser Zeit war Beda Venerabilis (672 oder 673-734), der sich seinen Platz in der Geschichte der Mathematik verdiente, indem er das Gefühl für die Bedeutung mathematischer Aktivitäten in die Klöster getragen hat. Schließlich wurde mit ihm die Urstunde der Mathematik im christlichen Abendland eingeläutet.[86]

In der islamischen Literatur wurde die Exhaustionsmethode erstmals von den Brüdern $Ban\bar{u}\ M\bar{u}s\bar{a}$ verwendet. Deren Schüler $\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$ (836-901) übersetzte die Abhandlung *Über Sphären und Zylinder* des Archimedes ins Arabische und bewies in seinem *Buch über die Messung des parabolisch genannten Kegelschnittes* eine wahre Meisterschaft in der Methode der GriechInnen.[87] Damit löste er nämlich das Problem der Quadratur des Parabelsegmentes mithilfe von Potenzsummen, die bereits Archimedes bei der Quadratur der Spirale und zu Kubatur eines Rotationsparaboloids zum Einsatz brachte, jedoch bei der Quadratur der Parabel nicht benutzt hatte. $\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$ startete somit, die Summen der ersten n ungeraden Zahlen zu berechnen:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Weiters ermittelte er die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{2}{3}\cdot 2n\sum_{k=1}^{n}(2k-1) - \frac{n}{3}.$$

Diese Formel wandte er dann auf die Segmente $a_k = (2k-1)\ a$ und $b_k = 2k \cdot b$ an, die den ungeraden bzw. den geraden Zahlen proportional sind. Schließlich zeigte er, dass für eine genügend große natürliche Zahl n das Verhältnis n: $[\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)] \cdot 2n$ kleiner wird als jedes vorgegebene Verhältnis A/B, welches äquivalent zur Aussage: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ ist. Dieses Resultat wurde letztlich verwendet, um die Parabelsegmente der Fläche S zu quadrieren. Dabei ist die Parabel durch diejenige Eigenschaft definiert, die wird als $y^2 = px$ kennen.[88]

---

[85] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.98; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.21.
[86] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.113-114.
[87] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.182; Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.260.
[88] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.182-183.

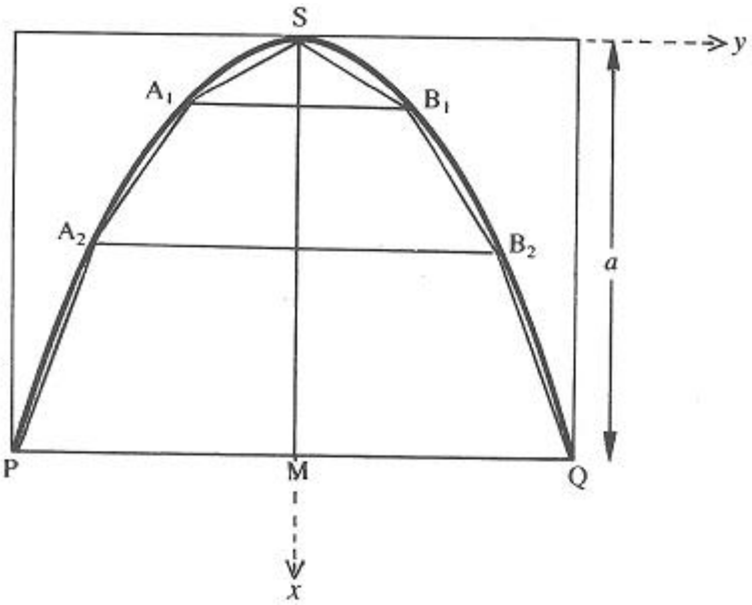


Abb. 2

$\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$ teilte die Achse des Segmentes in n Teile, die den ungeraden Zahlen $q, 3q, 5q, \dots, (2n-1)\,q$ proportional sind. Dabei ist $q = \frac{a}{n^2}$, wobei a die Länge des Achsenstückes bezeichnet. Außerdem sind die Sehnen, die durch die Unterteilungspunkte gehen, proportional zu den geraden Zahlen $2\sqrt{pq}, 4\sqrt{pq}, 6\sqrt{pq}, \dots, 2n\sqrt{pq}$. Zur Berechnung der Fläche des eingeschriebenen Polygons S_n, dessen Ecken die Schnittpunkte der Parabel mit den Sehnen sind, werden zur Fläche des Dreiecks $\Delta_n = A_1SB_1$ die Flächen der Trapeze $A_2A_1B_1B_2, \dots$ addiert:

$$S_n = \frac{1}{2}\sqrt{pq} + \frac{1}{2}3q(2\sqrt{pq} + 4\sqrt{pq} + \cdots + \frac{1}{2}(2n-1)q\left[(2n-2)\sqrt{pq} + 2n\sqrt{pq}\,\right].$$

Mithilfe der zu Anfang berechneten Summen zeigte $\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$ ferner, dass S_n um $\frac{n}{3}\Delta_n$ kleiner ist als $\frac{2}{3}$ des dem Segment umbeschriebenen Rechtecks R. Durch die Verwendung des Archimedischen Axioms zeigte er letztlich, dass man die Differenz $S - S_n$ kleiner als jede vorgegebene Fläche machen kann, indem die Zahl der Unterteilungen genügend groß gewählt wird. So lässt sich auch $\frac{2}{3}R - S_n$ kleiner als jede vorgegebene Fläche machen, wenn n nur genügend groß ist. Zu guter Letzt zeigte $\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$, dass $S = \frac{2}{3}R$ gilt, weil in Anbetracht der obigen Ungleichungen die Annahmen

$$S > \frac{2}{3}R \; und \; S < \frac{2}{3}R$$

beide widersprüchlich sind.[89]

Heute wissen wir, dass seine Rechnung äquivalent zur Bestimmung des Integrals

$$\int_0^a \sqrt{px}dx$$

ist und das Integral der Form

$$\int_0^a x^n dx,$$

wobei der Exponent zum ersten Mal gebrochen ist, nämlich mit $n = \frac{1}{2}$ berechnet werden kann. $\underline{T}\bar{a}bit\ b. Qurra$ gehörte also zu den führenden Vertretern, die die infinitesimalen Methoden des Archimedes wiederbelebten. Diese wurden unter anderem auch zur Volumsberechnung des Rotationspraboloids angewandt, bis schließlich gegen Ende des 10. Jahrhunderts neue, unter griechischem Einfluss entwickelte Methoden zur Kubatur eingeführt wurden. Zur gleichen Zeit gelang es auch, ungleichförmige Bewegungen zu untersuchen, die schließlich zur Begriffsbestimmung von *Momentangeschwindigkeit* und *-beschleunigung* gelangte.[90]

3.2 Das Mittelalter

Mit dem Jahr 529, als auf dem Monte Cassino das Mutterkloster des abendländischen Mönchtums gegründet wurde, läutete der Historiker Carl Boyer das mathematische Mittelalter ein. Für ein Jahrtausend wird kirchliche Hegemonie die europäische Kultur prägen, doch der eigentliche Aufschwung zu eigenständigen Leistungen in der Mathematik waren kausal an die Bekanntschaft mit der islamischen Mathematik gebunden.[91] Die Geschichte dieser Tradierung ist von SpezialistInnen der Mathematikgeschichte, die über ausgezeichnete Sprachkenntnisse in Arabisch, Latein, Griechisch und Hebräisch verfügen mussten, erforscht und dargestellt worden, ebenso wie die weitreichenden positiven Folgen für die Entwicklung der Mathematik

---

[89] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.183- 184.
[90] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.184.
[91] Vgl. *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis, S.20; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.276.

während der Renaissance. Auswirkungen gab es sogar bis weit in die Neuzeit, wie zum Beispiel beim Aufkommen der Infinitesimalrechnung im 17. Jahrhundert.[92]

3.2.1 Die Scholastik

Mathematisch gesehen passierte nach der Antike bis ins 12. bzw. 13. Jahrhundert relativ wenig. Im europäischen Sprachraum war die Mathematik der HellenInnen aufgrund mangelnder Tradition bzw. der wenigen Innovation, nicht mehr lebendig. Nur von denen, die im Besitz griechischer Schriften waren, konnte mehr oder weniger ein Wandel vollzogen werden.[93] Insbesondere die Antagonisten Platon und Aristoteles sind von großem Interesse, weil sie die Auffassung von der Natur mathematischer Gegenstände bis in die Gegenwart polarisierten, denn mit ihren Überzeugungen steht und fällt der Glaube an die Unfehlbarkeit von Mathematik.[94] Doch bevor es so weit kommen konnte, stellte die Sprache, die einerseits Arabisch und bestenfalls im restlichen Europa Kirchenlatein war, ein großes Problem dar. Erst mit dem Aufschwung lateinischer Übersetzungen, konnte sich Latein als die Amtssprache etablieren und wurde schließlich universell.[95] Eine wissenschaftliche Lehre fand jedoch bis zum Ende des 11. Jahrhunderts ausschließlich an Einrichtungen der Kirche statt und erst im 13. Jahrhundert mit den Bildungen von Universitäten, im Sinne der *universitas magistrorum et scholarium,* lösten sich Kooperationen mit der Kirche.[96] Endlich waren die Voraussetzungen geschaffen, die Wissenschaft der Mathematik weiter zu entwickeln und mit Diskussionen über das Kontinuum sogar eine Basis für die Analysis zu legen.[97] Mittelalterliche MathematikerInnen haben immer mehr Gefallen an den infinitesimalen Betrachtungsweisen aus der Antike gefunden, die schließlich zu scholastischen Spekulationen über das Unendliche anregten. So lösten sie sich vom archimedischen Modell und wagten den Versuch, endlich einen Ersatz für die Exhaustionsmethode zu finden. Letztlich belebten Untersuchungen über das Unendliche, das unendlich Kleine und das Wesen des Kontinuums das Interesse an diesen

---

[92] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.276-277.
[93] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.22.
[94] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.22; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.281.
[95] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.22.
[96] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.119; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.281.
[97] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.126.

Problemen wieder und bereiteten die Annahme infinitesimaler Betrachtungsweisen im 17. Jahrhundert vor.[98]

Als Vater der Frühscholastik galt der Benediktinermönch Anselm von Canterbury (ca.1033-1109), der als Erster zwingende logische Begründungen für theologische Aussagen finden wollte. Auf ihn geht der berühmt gewordene ontologische Gottesbeweis zurück, der zu den meistdiskutierten Problemen der Philosophiegeschichte zählt:

> *„Prämisse 1: Gott ist das vollkommenste Wesen („worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann“)*
>
> *Prämisse 2: Zur Vollkommenheit gehört die Existenz.*
>
> *Konklusion: Gott existiert.*“[99]

In dieser Zeit wurde das Anliegen verfolgt, gleiche mathematische Strategien bzw. Methoden griechischer MathematikerInnen zu verwenden, um eine Wahrheit zu finden, komplizierte auf einfachere Sachverhalte zurückzuführen, bis sie auf unwiderlegbare Axiome stoßen.[100] Allerdings hatte die Scholastik keineswegs die Definition oder Einführung mathematischer Begriffe im Sinn. Vielmehr konzentrierte sie sich auf die metaphysische Frage der realen Existenz der Indivisiblen und des Unendlichen. Dennoch hat sie eine große Bedeutung für die Mathematikgeschichte, da sie das Interesse für die Probleme des Unendlichen wachhielt und infinitesimale Methoden akzeptabel machte.[101] Der größte theoretische Fortschritt war die quantitative Untersuchung des Phänomens der Variabilität, sowie die Einführung der Funktionalität und deren graphische Darstellung.[102]

Nikolaus von Oresme (ca. 1323-1382) zählt zu den bedeutendsten Naturwissenschaftlern und Philosophen des 14. Jahrhunderts. Er hat die analytische Geometrie von Descartes vorbereitet, soll Strukturtheorien organischer Moleküle weit vor dem 19. Jahrhundert angegeben haben, den freien Fall und die Rotation der Erde vor Galilei analysiert bzw. postuliert haben. Obwohl sich alle seine Einschätzungen als falsch herausgestellt haben, war Oresme ein ausgesprochen tiefer Denker auf vielen Gebieten, der sich außerdem intensiv mit unendlichen Reihen beschäftigte.[103]

---

[98] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.184-185.
[99] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.127-128.
[100] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.128.
[101] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.184.
[102] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.142.
[103] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.142; Vgl. *Hirscher;* Grundlegende Begriffe der Mathematik, S.132.

Zu folgendem Satz von Swineshead (gest. 1354) gibt es daher von ihm einen geschickten geometrischen Beweis.[104]

> *„Bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit durch die erste Hälfte eines bestimmten Zeitintervalls, durch das nächste Viertel des Intervalls mit doppelter Geschwindigkeit, durch das folgende Achtel mit dreifacher Geschwindigkeit und so weiter ad infinitum, dann ist die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Zeitintervall genau doppelt so groß wie die Anfangsgeschwindigkeit.“*[105]

Die Lösung gelang Richard Swineshead durch die Summation der uns bekannten unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2.$$

Oresme beweist dies folgendermaßen:

Er legt Rechtecke der Höhe n und der Breite $\frac{1}{2^n}, n = 1,2,3 \ldots,$ aneinander, die die Flächen A_1, A_2, A_3 ... definieren.

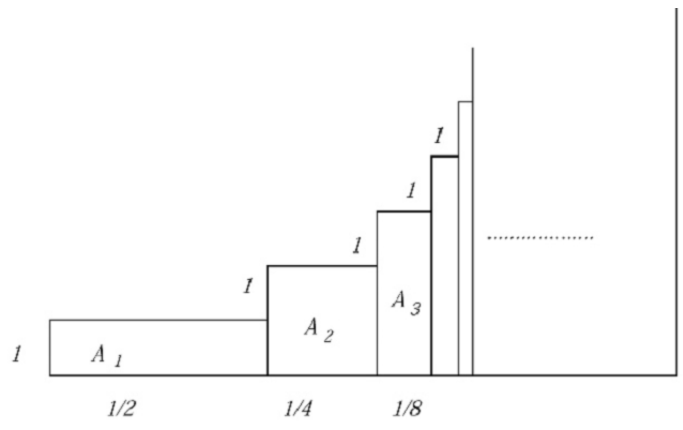


Abb.3

[104] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.142; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.295.
[105] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.142.

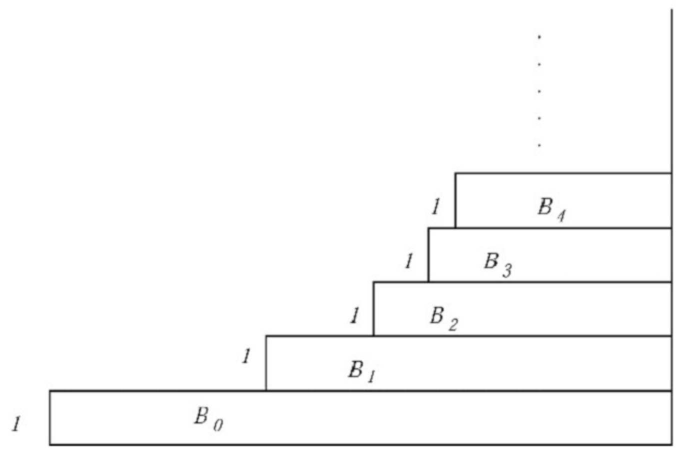


Abb.4

Eine zeilenweise Summation der Rechteckinhalte liefert

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2.$$

Dafür werden aber keine Kenntnisse über geometrische Reihen benötigt, weil die bereits vorhandene Fläche, also der Grenzwert, nur zerlegt wurde. Durch spaltenweise Summation der Rechteckinhalte gelangt man schließlich zu

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots,$$

und dies muss ebenfalls den Wert 2 haben.[106]

Oresme war zudem der Erste, der die Divergenz der harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

bewies, und zwar genau so, wie wir es heutzutage immer noch tun. Er ersetzte die Reihe durch eine, die in der Summe kleiner sein muss, aber bereits divergent ist, also keinen endlichen Wert hat, weshalb die harmonische Reihe ebenfalls keinen endlichen Wert haben kann.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

[106] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.143-145.

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

usw.

Er findet also immer wieder Terme, die zusammen echt größer als $\frac{1}{2}$ sind. Damit gilt aber

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Womit die harmonische Reihe keinen endlichen Wert haben kann.[107]

Bei seinen weiteren Forschungen nahm er an, dass messbare Größen durch Punkte, Strecken und Flächen dargestellt werden können und untersuchte auf graphischem Wege die Veränderung der Geschwindigkeit im Zusammenhang mit der Zeit.[108] Die daraus gefundene Beziehung zwischen Weg und Zeit war schließlich grundlegend für den Calculus Newtons, dessen Visualisierung in Hinblick auf die Latitude der von Oresme nicht abweicht. Mit seinen Skizzen zur flächigen Darstellung von Formen wird erkenntlich, wie er sich Bewegung im Allgemeinen vorstellt. Neben kurvigen Bewegungsdiagrammen lässt sich eine treppenförmige Weg-Zunahme auffinden. So liegt die Annahme nahe, dass er die scholastische *velocitas instantanea* überwindet und diese mit den Durchschnittsgeschwindigkeiten in seinen Diagrammen in Verbindung bringt, die dazu einladen den „Grenzübergang" nachzuvollziehen.[109]

3.3 Die frühe Neuzeit – Das Zeitalter der Entdeckungen

3.3.1 Erste propädeutische Ansätze zur Grenzwertbegriffsentwicklung durch Valerio und Stevin

In der Mathematik richtete sich der Blick zurück in die Antike. Für die Analysis wurden nun die Schwerpunktberechnungen des Archimedes aufgegriffen und darüberhinausgehende Überlegungen angestellt. Derartige Berechnungen haben in der Tat eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung gespielt, was man der Arbeit *Analysis*

---

[107] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.143-145.
[108] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.185; Vgl. *Hirscher*; Grundlegende Begriffe der Mathematik, S.140.
[109] Vgl. *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis, S.25.

tetragonistica ex centrobarycis von Gottfried Wilhelm Leibniz entnehmen kann, die im Oktober 1675 entstand.[110]

Mit Luca Valerio (1552-1618) und Simon Stevin (1548-1629) lässt sich schon ein wenig die Idee des Grenzwertbegriffs für Folgen erahnen, wodurch ihnen die ersten propädeutischen Ansätze zu Entwicklung dieses Begriffes zugeschrieben werden. Dazu nutzen sie die Archimedische Methode intelligent aus, um Schwerpunkte von krummlinig begrenzten ebenen Figuren zu bestimmen. Dazu wurde der Prozess der sukzessiven Zerlegung in Polygone, die eingeschrieben bzw. umschrieben wurden, angewendet, welcher schließlich zu geometrischen Reihen führte und Ähnlichkeiten zu Archimedes Quadratur der Parabel aufzeigte. Während aber Archimedes die Reihe nach dem n-ten Glied abbrach, um einen Rest hinzuzufügen, betrachtete Stevin unendliche Reihen im Sinne der Scholastik als gedankliches Erbe des potentiell Unendlichen von Aristoteles. Dies bedeutet, dass die Reihe so weit fortgeführt werden kann, bis die Differenz zwischen der Ausgangsfigur und den approximierenden Polygonen beliebig klein geworden ist.[111]

Zur näheren Illustration lässt sich ihr Prinzip so aufzeigen, dass einer Figur mit gesuchtem Flächeninhalt G_F andere mit bekannten Flächeninhalt eingeschrieben bzw. umschrieben werden. Folglich wird die Summe der Flächeninhalte der eingeschriebenen Figuren E_F und die der umschriebenen U_F in Beziehung gesetzt, damit die Differenz D_F der beiden bekannten Flächeninhalte abhängig von der Anzahl n der verwendeten Figuren ist ($U_F - E_F = D_F$). Durch geschicktes Ansetzen gelingt es aus dieser Differenz den Term $\frac{1}{n}$ herauszuheben was D_{neu} liefert. Unter Verwendung des Archimedischen Axioms wird die Gleichung durch

$$U_F - E_F = \frac{1}{n} \cdot D_{neu} < \varepsilon$$

abgeschätzt, bei der ε eine beliebig kleine positive reelle Zahl angibt. Letztendlich wird dadurch erkenntlich, dass sich die Summen um weniger als eine endliche Größe und eigentlich gar nicht voneinander unterscheiden. Außerdem bot dies Valerio und Stevin die Möglichkeit, eine Formel für den gesuchten Flächeninhalt mit Hilfe der Bekannten anzugeben.[112]

---

110 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.162.

111 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.185; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.326.

112 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.185; Vgl. Wußing; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.326.

3.3.2 Infinitesimale Betrachtungen bei Kepler und die Indivisiblenmethode

Johannes Kepler (1571-1630) war von allen Wegbereitern der Infinitesimalrechnung der wohl Kreativste. Sein Lebenswerk ist gekennzeichnet durch eine faszinierende Mischung an Phantasie und naturwissenschaftlicher Exaktheit, von Mystizismus und rationalem Denken, Neoplatonismus und Naturbeobachtung geprägt.[113] Durch sein Schaffen brachte er eine neue Methodologie in die Mathematik ein, die von bisherigen klassischen Verfahren abweichen. Bei seinen Berechnungen des Flächeninhaltes des Kreises setzte er diesen mit einem unendlichseitigen Polygon gleich und summierte anschließend die entsprechenden infinitesimalen Dreiecksflächen. Dabei bildeten die Polygonseiten die Basen der Dreiecke und der Mittelpunkt des Kreises deren Spitze. Mangelhaft sind an seinen Erkenntnissen, dass er seine Vorstellungen kaum erklärte und auch die Sprache der Indivisiblen benutzte. Leider unterschied er aber weder zwischen einer infinitesimalen Fläche und einer Strecke, noch zwischen einem Kreis und einem unendlichseitigen Polygon.[114] Dennoch konnten seine Berechnungen auch auf Rotationskörper, wie etwa der Kugel, dem Kegel, dem Zylinder, usw. angewendet werden, doch erst mit seiner *Nova stereometria dolorium vinariorum* (Stereometrie der Weinfässer) aus dem Jahre 1615, in der er seine Methode zur Volumsberechnung von Weinfässern angab, wurde sein enormer Einfluss auf die Mathematik sichtbar, und wirkte zudem fast ein halbes Jahrhundert vorbildhaft auf viele MathematikerInnen. Darin tauchen nämlich Extremwertaufgaben auf, die mit Hilfe von numerischen Überlegungen gelöst wurden. Dadurch gelang es ihm zu zeigen, dass der Würfel der größte der Kugel eingeschrieben Quader mit quadratischer Grundfläche ist und dass unter allen geraden Zylindern gleichlanger Diagonalen derjenige das größte Volumen besitzt, dessen Höhe und Durchmesser im Verhältnis $1 / \sqrt{2}$ stehen. Kepler konnte somit durch seine Studien die Einsicht gewinnen, dass in der Nähe des maximalen Volumens dessen Änderungsrate in Abhängigkeit von der Änderung der Abmessungen sehr gering ist. Diese Idee sollte mit Pierre de Fermat und seinen Arbeiten im 17. Jahrhundert ein entscheidendes Argument bilden.[115] Doch auch auf andere MathematikerInnen wirkte er mit seinem ungriechischen Stil sehr ansteckend und beeinflusste

[113] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.437.
[114] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.186.
[115] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.186; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.438-439.

diejenigen, die in Sachen Indivisiblen kreativ hervortraten, wie Cavalieri, Torricelli und Roberval, auf die im Folgenden noch kurz eingegangen werden soll.[116]

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Cavalieri war ein Schüler Galileis und durchaus mit den Spekulationen der Scholastik über die Bewegung, das Infinitesimale und das Wesen des Kontinuums, vertraut. Dies verhalf ihm letztendlich dazu, die Arbeiten seines Lehrers zu perfektionieren. So betrachtete er eine ebene Figur als Gesamtheit der in ihr enthaltenen Strecken, wodurch also ein Körper aus einer unbestimmten Anzahl von parallelen Ebenen bestehen musste. Weiterführend erklärte er, dass eine Linie aus Punkten, ähnlich einer Kette aus Perlen, eine Fläche aus Strecken, ähnlich einem Tuch aus Fäden und ein Körper aus Ebenen, ähnlich einem Buch aus Blättern, bestehe.[117] Über die damit verbundene Schwierigkeit, dass sich dabei eine Summation von unendlich vielen Elementen ergibt, war Cavalieri sehr wohl bewusst. Doch im Unterschied zu seinem Lehrer vermied er es, die gesuchte Fläche als aller in ihr enthaltenen Indivisiblen zu berechnen, sondern bestimmte vielmehr das Verhältnis der Flächeninhalte von Figuren.[118] Zu Beginn haben seine Indivisiblen noch eine kleinere Dimension als die Figur selbst und kommen zustande, indem sie im Fall einer Ebene ein Kontinuum durch eine „Spur" einer parallel geführten Gerade, der sogenannten *regula*, strukturiert, so dass eine Gesamtheit von Schnittstrecken entsteht. Bei diesem Konstrukt versucht Cavalieri den Begriff *Fläche* grundsätzlich zu unterscheiden und probiert die eudoxsche Proportionslehre darauf zu übertragen, was in diesem Stadium der Theorie etwas anderes als die Summe von Indivisiblen sein sollte.[119]

Cavalieri baute seine Theorie der Indivisiblen auf zwei Grundprinzipien auf, nämlich dem „kollektiven" und dem „distributiven" Prinzip. Beim kollektiven Prinzip zum Beispiel werden Indivisiblen zweier Flächen, also Körper, zusammengefasst und dann ins Verhältnis gesetzt. Sind also zwei Flächen F_1 und F_2 gegeben, so zerlegt Cavalieri beide in äquidistante Indivisible (=Linien) $l_i^1\ bzw.\ l_i^2$, wobei i aus einer beliebigen Indexmenge stammt. Obwohl die Zusammenfassung der Indivisblen natürlich keine gewöhnliche Summe ist, soll aber trotzdem

[116] Hans-Heinrich Körle; Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute (Oldenbourg Verlag, München 2009), S.36
[117] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.186.
[118] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.187; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.440.
[119] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.36-37.

das Symbol $\sum$ verwendet werden, wodurch die Gesamtheit der Indivisiblen für F_1 bzw. für F_2 als

$$\sum_i l_i^1 \ bzw. \sum_i l_i^2$$

dargestellt wird. Gilt dann mit zwei Zahlen $\alpha, \beta > 0$

$$\frac{\sum_i l_i^1}{\sum_i l_i^2} = \frac{\propto}{\beta},$$

so folgt nach Cavalieri für die Flächeninhalte

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\propto}{\beta}.$$ [120]

Cavalieris Methode hatte sowohl Kritik wie auch Begeisterung bei anderen MathematikerInnen hervorgerufen, weshalb sein Einfluss noch bis heute spürbar ist.[121] Denn obwohl sich schnell eine Opposition gegen seine Indivisiblenmethode gebildet hatte, konnte er nicht nur die Korrektheit seiner Ergebnisse festigen, sondern hat damit auch eine konkrete Methode angegeben, mit der sich Quadraturen und analog Volumenberechnungen, also Kubaturen durchführen lassen.[122] So wurden Cavalieris Parabelquadraturen mit Delikatesse von Fermat und Pascal fortgesetzt, die die Formel zunächst für alle Exponenten bestätigten. Für gebrochen Rationale taten es dann weiterführend Fermat und Torricelli.[123]

Evangelista Torricelli (1608-1647)

Torricelli, ein weiterer Schüler Galileis und enger Freund von Cavalieri, gelang es, dessen Prinzip erfolgreich zu erweitern, indem er gekrümmte Flächen als Indivisible einführte.[124] Bekanntheit unter den MathematikerInnen seiner Zeit erlangte er allerdings im Jahr 1641, als er damit eine scheinbar paradoxe Entdeckung machte.[125] So benutzte dieser, wie etwa zum Beweis des Satzes, die Endlichkeit des Volumens des sich ins Unendliche erstreckenden Rotationskörpers, das daraus entsteht, wenn eine gleichseitige Hyperbel um eine ihrer

---

[120] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.212.
[121] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.37; Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.187-188.
[122] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S,218.
[123] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.39.
[124] Vgl. *Peiffer*, *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.187-188; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.221.
[125] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.221.

Asymptoten rotiert. Dazu betrachtete Torricelli zylindrische Indivisiblen, während Cavalieri noch Ebenen in Augenschein nahm.[126] Torricelli nahm an, der Erste gewesen zu sein, der das endliche Volumen eines unendlichen Körpers berechnet hat. Doch wie oben schon erwähnt, war diese Erkenntnis bereits im 14. Jahrhundert mit Nicole Oresme gezeigt worden. Trotzdem gehörte auch er zu den entscheidendsten MathematikerInnen seiner Zeit und galt zudem auch als Wegbereiter für viele weitere Auseinandersetzungen zu dieser Thematik.[127]

Roberval (1602-1675) und Vincentio (1584-1667)

Während die Indivisblenmethode Cavalieris das archimedische Vorbild mit den mittelalterlichen Einflüssen in Einklang brachte, bezogen sich die Methoden und Anregungen von Roberval und vor allem von Vincentio auf die Veränderungen, die Stevin und Valerio an der Exhaustionsmethode vorgenommen hatten. Vincentios Vorstellung zu unendlich vielen geradlinig begrenzten Figuren war nämlich so, dass sie von vorgegebenen krummlinig begrenzten Figuren exhaustiv ausgefüllt werden. Der Unterschied zu seinen VorgängerInnen lag lediglich darin, dass diese die Anzahl der Seiten des in- oder umschriebenen Polygons so lange erhöhten, bis die Differenz zwischen dem Polygon und der vorgegebenen Figur beliebig klein wurde. Des Weiteren wird ihm zugesprochen, einer der Ersten überhaupt gewesen zu sein, der den Terminus, dass eine unendliche Reihe sich einer Größe stark nähert und diese bei unbeschränkter Fortführung aber nicht erreiche, sodass der Unterschied unterschritten werde, bewiesen hat.[128]

3.4 Das entscheidende 17. Jahrhundert

Man kann nicht von Zufall sprechen, dass die Untersuchungen in der Infinitesimalrechnung gerade im 17. Jahrhundert ihren Höhepunkt erreichten. Gerade diese, auf unendlich kleinen Größen beruhenden Techniken hatten eine enorme Bedeutung, da sie vor allem dafür entwickelt wurden, damalige aktuelle Probleme zu lösen.[129] Die Mathematik war bis zu Beginn der Neuzeit in allen Kulturen vorwiegend statischer Natur, die von konstanten Größen und

[126] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.187-188.
[127] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.221.
[128] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.189.
[129] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.189-190.

unveränderlichen geometrischen Figuren handelte. Äußere Anregungen erhielt sie von der Landmessung, von Aufgaben beim Bau von Bewässerungsanlagen, Dämmen, Straßen, Befestigungen, von Tempel- und Palastbauten, aus den Notwendigkeiten des Handels und des Münzwesens, der Steuer- und Zinslast. Unter dem Diktat starrer Regeln stand selbst die Astronomie, die von ihrem Wesen her dazu berufen gewesen wäre, dynamisches Denken in die Wissenschaft der Mathematik einzuführen. Im Zuge dessen nimmt im 17. Jahrhundert die Mathematik eine neue Gestalt an, die unter anderem dynamischer wird. So steht fortan das Studium von Bewegungen und Veränderungen, von Größen in Abhängigkeit voneinander, vermehrt im Vordergrund, bis sich schließlich der Funktionsbegriff herausbildet. Angetrieben wird das Ganze durch die neuerwachte Naturwissenschaft, die nun Naturvorgänge mit Hilfe von mathematischen Gesetzen, welche einfache funktionale Beziehungen zwischen verschiedenen messbaren physikalischen Größen aufstellen, beschreibt und erklärt.[130]

Das aus dem Mittelalter begonnene Studium der Bewegung erforderte den Begriff der *Momentangeschwindigkeit*, um beispielsweise diejenige Geschwindigkeit berechnen zu können, die ein Geschoß in einem bestimmten Moment auf seiner Flugbahn erreicht. Dafür kann aber nicht die durchlaufende Strecke durch die hierfür gebrauchte Zeit dividiert werden, weil beide Größen in diesem Fall Null ergeben und der Quotient von Null durch Null keinen Sinn ergeben würde. Aber genau derartige Divisionen spielen bei der Ermittlung der Durchschnittsgeschwindigkeit eine entscheidende Rolle. Des Weiteren braucht man den Begriff der *Tangenten,* um die Richtung, die ein bewegter Körper in einem Punkt seiner Bahn besitzt, bestimmen zu können. Aber nicht nur das Studium von Geschoßbahnen, sondern auch andere Interessensgebiete wurden verstärkt untersucht. So erforschte man zudem die Planetenbewegung bzw. die Berechnung der Länge von Planetenbahnen, bei denen Kurven rektifiziert wurden. Im Bereich der Optik wurde die Kenntnis des Einfallswinkels benötigt, also jenes Winkels zwischen dem Lichtstrahl und der Normalen der Kurve, um den Durchgang von Licht durch Linsen näher betrachten zu können. Genau solche Untersuchungen führten schließlich auch zu Extremwertproblemen, die in Abhängigkeit mit den Begriffen *Momentangeschwindigkeit, Tangente, Maxima* und *Minima*, *Längen von Kurven* und *Normale* stehen. So war ein großer Schritt in die Beherrschung der Infinitesimalrechnung, also der Differential- und Integralrechnung, gemacht worden, deren zentrale Konzepte in Ableitung und Integral bestehen.[131]

[130] Vgl. *Walter*; Analysis, S.110-111.
[131] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.189-190.

Wie oben schon näher beschrieben, war die griechische Exhaustionsmethode eine Art Vorwegnahme der Integralrechnung, mit deren Hilfe man Quadraturen durchführen und Rotationsvolumina und Schwerpunkte berechnen konnte. Im 17. Jahrhundert bezog man sich bei solchen Verfahren durchaus auch auf Anregungen aus der antiken Methode, ließ allerdings den doppelten Widerspruchbeweis weg und vereinfachte somit den zu zeigenden Beweis, dass die zu bestimmende Fläche wirklich gleich der Näherungsfläche ist. Außerdem ersetzen einige GeometerInnen die krummlinig begrenzten Figuren, die sich durch beliebige Polygone annäherten, durch eine systematisierte Einschreibung von Rechtecken.[132]

3.4.1 Das Quadratur- und Tangentenproblem bei Fermat und Descartes

Die entscheidendsten Schriften zur analytischen Geometrie stammten von Pierre Fermat (1601-1665) und René Descartes (1596-1650). Ihre Arbeiten zeichneten sich durch eine historisch notwendig gewordene Verschmelzung von Algebra und Geometrie aus und bildeten einen Meilenstein in der Entwicklung des Funktionsbegriffs.[133] Nicht nur die Erkenntnis, dass nun geometrische Sätze, etwa über Kegelschnitte, algebraisch ableitbar werden, sondern überhaupt Descartes Behauptung, dass eine Kurve durch eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ eine funktionale Abhängigkeit der variablen Größen x und y definiert und damit eine unübersehbare Fülle neuer Funktionen geschaffen werden kann, ist von enormer Bedeutung, denn erst durch ihn wird die Mathematik in eine neue Richtung gelenkt.[134] Allerdings erst mit der Diskussion um das allgemeine Tangentenproblem sowie der Hinwendung zu einfachen Extremwertaufgaben kann gesagt werden, dass die Differential- und Integralrechnung kurz vor ihrem Durchbruch stand. Auch Fermat beschäftigte sich mit diesem Problemkomplex und fand dazu um das Jahr 1628/29 eine Methode zur Berechnung von Extremwerten in einfachen Fällen. Anfangs war sein Verfahren jedoch nur für ganzrationale Funktionen gültig, jedoch folgte eine Aussprache für die Allgemeinheit, der es zwar an einer strengen Begründung fehlt, aber durch ihren Erfolg gerechtfertigt wird. Aus dieser Methode zur Bestimmung von Maxima und Minima schuf Fermat schließlich ein Verfahren, welches es erleichterte, Kurventangenten zu

[132] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.190.
[133] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.399; Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.111.
[134] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.111.

konstruieren. Des Weiteren sind aber auch seine Überlegungen zur Quadratur höherer Parabeln interessant, die nun etwas näher in Augenschein genommen werden sollen.[135]

Das Quadraturproblem

Fermats einheitliche und unveränderliche Methode erlaubte es ihm, unter der Verwendung von geometrischen Folgen, alle Parabeln und Hyperbeln, außer der gewöhnlichen Hyperbeln, zu quadrieren. Seine Methode stellte im Vergleich zu seinen VorgängerInnen einen beträchtlichen Fortschritt dar, weil er die von ihm und Descartes geschaffene Sichtweise der analytischen Geometrie anwandte. Bereits Cavalieri, Torricelli und Roberval hatten seit dem ersten Drittel des 17. Jahrhunderts das Ergebnis

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

(n eine rationale Zahl ungleich 1) bewiesen, wozu die geometrische Sprache der Indivisiblen herangezogen wurde. Für $n = 1$ und 2 war schon Archimedes und für $n = \frac{1}{2}$ und 4 den Arabern bekannt. Im Falle $n = 1$ lautete das Resultat, dass die Summe der Linien eines Dreiecks gleich der Hälfte des Quadrates der längsten Linie ist.[136]

Fermat führte letztendlich den Begriff des *Koordinatensystems* ein und verband mit jeder Kurve eine Gleichung, die deren Eigenschaften widerspiegelt. Aufgrund von der von Viéte geschaffenen Buchstabenrechnung versuchte er die Quadraturprobleme in eine algebraische Form zu bringen, welches seiner Vorgehensweise einen allgemeineren Charakter verlieh. Schließlich konnte durch diese Übertragung die Entwicklung der algorithmischen Seite der Infinitesimalrechnung ermöglicht werden, weswegen seine Methode wesentliche Elemente der Definition des bestimmten Integrals stetiger Funktionen widerspiegelt, obwohl die Operation *Integration* von Fermat nicht erkannt wird.[137]

---

[135] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil, S.399, 448-449.
[136] Vgl. *Peiffer*, *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.190, 193-194.
[137] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.193-194.

Das bestimmte Integral[138]

Es sei f eine stetige reelle Funktion, die auf dem Intervall $[0, a]$ definiert ist. Das bestimmte Integral von f, das als

$$\int_0^a f(x)dx$$

geschrieben wird, ist definiert als der Grenzwert der Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)f(t_i) \ wo\ x_i \leq t_i \leq x_{i+1}.$$

Dabei bilden die x_i $(i = 0,1,2, \dots, n + 1)$ eine Zerlegung

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = a$$

des Intervalles $[0, a]$. Geht n gegen unendlich, so soll auch die größte unter den reellen Zahlen $x_{i+1} - x_i$ (und damit alle anderen) gegen Null gehen.

Mit dieser Herangehensweise berechnete Fermat nur eine spezielle Fläche und dachte im Eigentlichen nicht explizit an Grenzwerte, obwohl die Summation von unendlich vielen Rechtecksflächen Grenzübergange implizierte.[139]

Das Tangentenproblem

Während die Quadraturprobleme sehr alten Ursprungs waren, wurden Tangenten erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts intensiver studiert. Dabei war die antike Definition, dass eine Tangente eine Gerade ist, welche eine Kurve nur in einem Punkt berührt, von geringer praktischer Tragweite. Abgesehen von einigen vereinzelten Konstruktionen, wie zum Beispiel derjenigen von Archimedes und Apollonios, die einerseits Tangenten an die Spirale und an Kegelschnitte legten, führte dieser Begriff zu keiner allgemeinen Theorie.[140]

Torricelli und Roberval führten in ihren Arbeiten über Großbahnen, die von Archimedes zur Konstruktion der Tangenten an die Spirale ausgearbeitete Methode aus. Laut seiner Definition wird die Spirale nämlich als der Ort eines Punktes gesehen, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Strahl durchläuft und sich seinerseits mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seinen Anfangspunkt dreht. Angelehnt an dieses Vorbild,

[138] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.193.
[139] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.193-194.
[140] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.196.

betrachteten nun die beiden Mathematiker die erzeugten Kurven, die durch die Überlagerung zweier Begegnungen mit bekannter Geschwindigkeit zustande kommen. Dies führt zum Resultat, dass sich eine Geschwindigkeit ergibt, die sich als Diagonale in dem Parallelogramm, welches die die beiden Kurven erzeugenden Geschwindigkeiten definiert. Diejenige Gerade, deren Richtung mit der Diagonalen zusammenfällt, ist die Tangente an die Kurve im Punkt P.[141]

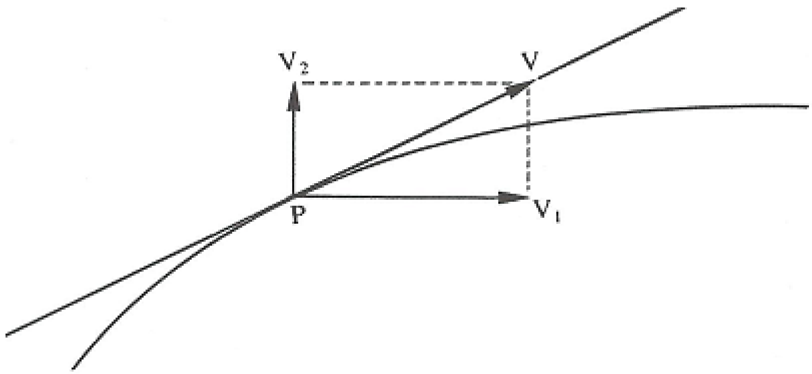


Abb. 5

Mit dieser dynamischen Methode gelingt es zwar Tangenten vieler Kurven zu bestimmen, allerdings beruhte die Definition auf physikalischen Begriffen, die auf alle nicht anwendbar waren. So wurde seit Mitte des 17. Jahrhunderts hartnäckig daran gefeilt eine geeignete allgemeine Tangentenmethode zu finden.[142]

Als Beispiel soll die Bestimmung der Länge der Subtangenten TQ angeführt werden, bei der die charakteristische Eigenschaft der Kurve als Hilfsmittel dienen soll.[143]

[141] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.196.
[142] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.196.
[143] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.196.

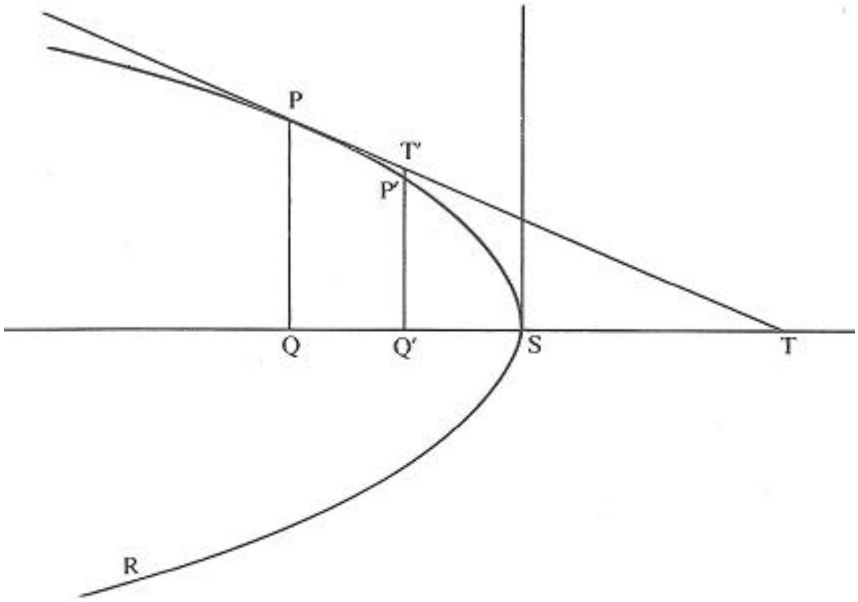


Abb. 6

Es sei PSR eine Parabel mit dem Scheitel S und dem Durchmesser SQ. Außerdem sei P der Punkt, durch den die Tangente PT an die Parabel gelegt wird und die den Durchmesser in T schneidet. So lässt sich die charakteristische Eigenschaft der Parabel, also ihre Gleichung schreiben als

$$\frac{QS}{Q'S} = \frac{PQ^2}{P'Q^2}$$

bzw. als $y^2 = 2px$.

Weil der Punkt T aber außerhalb der Parabel liegt, gilt

$$P'Q' < T'Q' \; und \; \frac{QS}{Q'S} > \frac{PQ^2}{T'Q'^2}.$$

Des Weiteren gilt, weil die Dreiecke PTQ und $T'TQ$ ähnlich sind, dass

$$\frac{PQ}{T'Q'} = \frac{QT}{Q'T}$$

und damit

$$\frac{QS}{Q'S} > \frac{QT^2}{Q'T^2}.$$

Da der Punkt P gegeben sein soll, sind auch die Ordinate PQ, der Punkt Q und die Abszisse QS bekannt. So sei schließlich $QS = d$ gegeben. Setzt man die gesuchte Größe $QT = a$ und den Zuwachs $QQ' = e$, so erhält man:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 - 2ae + e^2}\ .$$

Durch Überkreuzmultiplizieren und Streichen gemeinsamer Terme kommt man auf

$$-2aed + e^2 d > -ea^2.$$

Nachdem durch e dividiert wurde ergibt sich

$$-2ad + ed > -a^2$$

und damit

$$de + a^2 > 2ad.$$

Vernachlässigt man jetzt die Terme, die die Größe e enthalten, so wird aus der Ungleichung eine Gleichung. Das gesuchte Resultat lautet somit $a = 2d$ und da a bekannt ist, kann man T ermitteln und dann die Tangente PT ziehen.[144]

Die dieser Methode zugrundeliegende Definition fasst die Tangente als Grenzlage der Sekanten auf, wenn sich die Schnittpunkte mit der Kurve immer mehr einander annähern. Diese ist die heutzutage geläufige Definition, um Tangenten an eine Kurve zu legen. Denn um eine Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkte P zu ermitteln, muss der Variablen x ein Zuwachs Δx gegeben werden, der in der Folge gegen Null wandert. Dabei dachte Fermat aber allerdings nicht in Begriffen wie *Funktion* und *Grenzwert*, sondern stellte sich vielmehr Gleichungen und unendlich kleine Größen vor, die er von vorne herein gleich Null setzt.[145]

Fermat sagt zu seiner Methode:

> *„Die Methode* [zur Tangentenbestimmung] *versagt nie; sie kann sogar auf eine große Anzahl sehr schöner Aufgaben ausgedehnt werden; mit ihrer Hilfe finden wir die Schwerpunkte von Figuren, die von Kurven und Geraden begrenzt sind, sowie auch von Körpern und noch vieles andere, worüber wir vielleicht noch ein andermal berichten werden, wenn wir dazu Muse finden."*[146]

[144] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.196-197.
[145] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.197-198.
[146] Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.450.

Descartes hat Fermats Gebrauch von unendlich kleinen Größen hart kritisiert, was schließlich zu einem herben Streit zwischen den beiden Konkurrenten führte. Dabei trat allerdings Fermat mehr oder weniger als erster Gewinner hervor, da es dadurch zur Klärung und Erweiterung seiner Methode kam, indem er es für gerechtfertigt hielt, Ordinaten der Kurven durch diejenigen ihrer Tangenten zu ersetzen. Außerdem stellte er um 1660 die Äquivalenz des Bogenelements mit dem entsprechenden Stück der Tangenten auf, die beide unendlich klein sind.[147]

Descartes Herangehensweise sah so aus, dass er im Jahre 1637 über ein Verfahren verfügte, welches nur auf algebraische Kurven anwendbar war. Im darauffolgenden Jahr bestimmte er die Tangente an die Zykloide mit Hilfe eines Verfahrens, die den Begriff *Momentanes Drehzentrum* verwendete, ohne aber von infinitesimalen Größen zu sprechen.[148] Der Stil von Descartes fällt etwas aus dem Rahmen, wenn man die Verwendung von Indivisiblen oder Infinitesimalen studiert, denn er war stolz darauf, ohne die Benutzung unendlich kleiner Größen bei der Berechnung von Tangenten auszukommen. Trotzdem beherrschte Descartes zweifellos die Indivisblenmethode und den Umgang mit Infinitesimalen. So konnte gerade mit dieser Methode ein großer Einfluss auf die Entwicklung der Analysis verzeichnet werden.[149]

Descartes möchte an einem Punkt x_0 die Steigung der Tangente an eine Funktion $x \to f(x)$ berechnen. Dazu denkt er sich einen Kreis K mit dem Radius r und Mittelpunkt v auf der Abszisse.

[147] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.198.
[148] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.198.
[149] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.245.

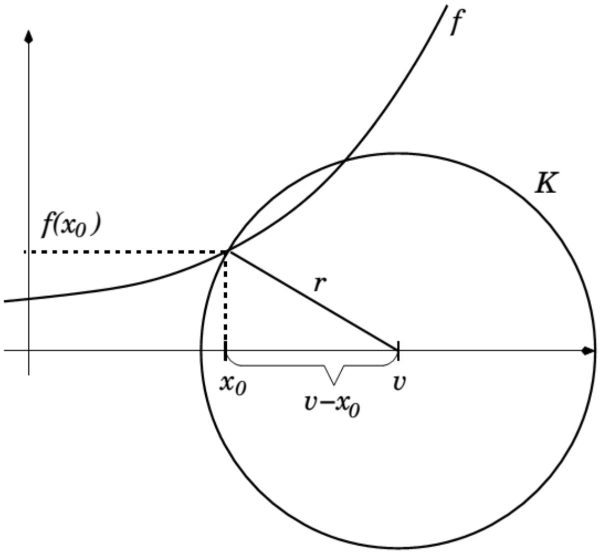


Abb.7

Ein Kreis mit Mittelpunkt $(v, 0)$ und Radius r wird dargestellt durch

$$y^2 + (x - v)^2 = r^2.$$

Schneidet der Kreis die Kurve der Funktion f in mindestens einem Punkt, dann kann in obiger Gleichung y durch $f(x)$ ersetzt werden, wodurch

$$\left(f(x)\right)^2 + (x - v)^2 = r^2.$$

Bei Descartes wird nun angenommen, dass die Funktion f ein Polynom ist, weshalb auch f^2 ein Polynom ist. Dies war zu seiner Zeit ein enormer Fortschritt, da nicht polynomiale (transzendente) Funktionen zum Teil noch gar nicht entdeckt waren. Wenn der Kreis die Kurve in zwei Punkten schneidet, wie oben abgebildet, dann wäre die Gleichung von der Form

$$\left(f(x)\right)^2 + (x - v)^2 = r^2$$

und hätte zwei verschiedene Lösungen x_0. Im Fall, dass der Radius r so klein ist, sodass Kurve und Kreis sich gar nicht schneiden, gibt es gar keine Lösung. Bei genau einem Schnittpunkt, würde der Kreis K tangential an f im Punkt x_0 liegen, was bedeutet, dass der Radius zwischen den beiden Punkten $(x_0, f(x_0)$ und $(v, 0)$ die Richtung der Normalen an f im Punkt x_0 angibt. Hat man die Normale, dann kann man leicht die Tangente berechnen, denn Tangente und Normale stehen senkrecht aufeinander.[150]

[150] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.245-246.

3.4.2 Die Beziehung zwischen Quadraturen und Tangentenkonstruktionen

Um die Mitte des 17. Jahrhunderts forcierten viele MathematikerInnen ihren Umgang mit denjenigen Begriffen, die für die Infinitesimalrechnung grundlegend waren. So wurden nicht nur neue Techniken eingeführt, sondern es folgte auch eine stetige Verbesserung dieser, wodurch zunehmend ein algorithmischer Charakter erzielt werden konnte. Schließlich führte die Berechnung krummlinig begrenzter Flächen zur Quadraturmethode, die alle Elemente der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe enthielt. Aber auch Untersuchungen von Bewegungen und die damit verbundene Berechnung der Momentangeschwindigkeit, sowie die Ermittlung von Kurventangenten benötigten Begriffe wie *Maß der Änderung* und *Ableitung.* Diese ermöglichten es außerdem, Extremwertaufgaben zu lösen und die Rektifikation von Kurven in Angriff zu nehmen.[151]

Der englische Mathematiker Barrow (1630-1677) galt als erster, der erkannt hatte, dass das Tangentenproblem invers und von bedeutender Wichtigkeit für den heutigen Gegenstand des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist. Denn dadurch können Integrale im Sinne von Grenzwerten von Summen unter Verwendung von Stammfunktionen berechnet werden.[152] Edwards nennt diese Erkenntnis, die auch schon bereits bei Torricellis Betrachtungen auftauchte,

> *„embryonic formulation of the fundamental theorem of calculus."*[153]

Des Weiteren ist es ihm durchaus gelungen, während Fermat die analytischen Methoden besaß, die äquivalent zu Differentiation und zur Integration waren, die fundamentale Beziehung zwischen diesen beiden Problemen zu erkennen.[154]

Obwohl die unterschiedlichen Vorwegnahmen des Grenzwertbegriffes im 17. Jahrhunderts schwerfällig und konfus waren, führten sie zu zahlreichen Ergebnissen im Bereich der Differential- und Integralrechnung, die vor allem bei Newton und Leibniz ihren Höhepunkt erreichten.[155] So stellte Maanen 1999 zusammenfassend fest:

---

[151] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.199.
[152] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.201.
[153] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.329.
[154] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.201.
[155] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.201; Vgl. *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis, S.44; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.453.

„Die Erkenntnis über die inverse Beziehung zwischen Quadratur und Tangente *ist also vorhanden. Ein Algorithmus zur Nutzung dieser Erkenntnis und die angemessenen Symbole fehlen noch. Sie kamen in den Arbeiten von Newton und Leibniz, und Newton hatte sie sogar schon handschriftlich niedergelegt, als Barrow seine „Lectiones“ 1670 veröffentlichte.“*[156]

3.4.3 Newton und Leibniz – Die Entstehung und Begründung der Infinitesimalrechnung

Natürlich wäre es falsch und ahistorisch zu behaupten, Gottfried W. Leibniz (1646-1716) und Isaac Newton (1643-1727) hätten aus dem Nichts die Differential- und Integralrechnung einfach so erfunden. Ganz im Gegenteil, denn neben einer langen Reihe von WegbereiterInnen, gab es ebenso eine Fülle an Versuchen, die beim Umgang mit Variablen und Grenzwerten auftretende Probleme bewältigten und in eine kalkülmäßige Form brachten. Eine solche Herausbildung setzte aber nicht nur eine genaue Kenntnis der antiken und der von Kepler und Cavalieri stammenden geometrischen Ansätze voraus, sondern auch eine Akzeptanz und Übernahme der algebraischen Kalküle von Vieta, Descartes und Fermat. Historisch gesehen folgten die Etappen des Ausbaues der antiken Verfahren der Exhaustionsrechnung, die Theorie der Indivisiblen und schließlich deren Arithmetisierung aufeinander. Zudem darf aber nicht die Behandlung der Tangenten, die Quadratur der allgemeinen Parabel, sowie die Hinwendung zu Extremwertaufgaben vergessen werden, da genau dies alles zu den logisch-historischen Voraussetzungen für den didaktischen Umschlag in die Ausbildung kalkülmäßig beherrschbarer infinitesimaler Methoden zählt.[157]

Die systematische Begründung der Differential- und Integralrechnung erfolgte durch den englischen Naturwissenschaftler Newton und dem deutschen Philosophen, Juristen, Naturforscher und Staatsmann Leibniz. Sie sahen ihre Aufgabe darin, alle bereits vorhandenen infinitesimalen Methoden und Ergebnisse zu sammeln und in eine geordnete Form zu bringen. Unabhängig voneinander versuchten die beiden ihr Glück alleine, entwickelten jeweils effiziente, algorithmische Verfahren und befassten sich mit den Beziehungen zwischen

[156] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.453.
[157] Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.427, 452.

scheinbar isolierten Problemen.[158] Sie waren es, die bemerkten, dass eine ganze Reihe von Problemen im Zusammenhang mit der Berechnung von Schwerpunkten, Flächen, Rauminhalten, Tangenten, Bogenlängen, Krümmungsradien, Oberflächen usw. standen. Außerdem war ihnen klar, wie oben schon kurz erwähnt, dass die Probleme der Tangentenbestimmung und der Flächenberechnung invers zueinander waren, was sie dazu anregte, sich mit der Begründung des uns bekannten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auseinanderzusetzen. In den 60er bis 80er Jahren ist es ihnen schließlich gelungen das zu schaffen, was heutzutage als Infinitesimalrechnung bezeichnet werden kann und entwickelten somit eine von der Geometrie unabhängig autonome Disziplin.[159]

Erwähnenswert ist aber auch, dass die eigentlichen Grundlagen des „Kalküls" lange verdunkelt wurden und eine verbreitete Abneigung gegenüber des Grenzwertbegriffs, diesen nämlich allein als wahre Quelle der neuen Methoden anzuwenden, herrschte. So gelang es weder Newton noch Leibniz eine unmissverständliche Auffassung dieses Begriffes auszusprechen, so dass mehr als ein Jahrhundert lang dieser durch Formulierungen wie *unendlich kleine Größen, Differentiale, letzte Verhältnisse* usw. verschleiert wurde. Solche Vorstellungen konnten erst aufgegeben werden durch die philosophische Einstellung der damaligen Zeit und durch das Wesen des menschlichen Geistes überhaupt.[160]

Isaac Newton (1643-1727)

Newton studierte am Trinity College in Cambridge und beschäftigte sich im Zuge seiner Ausbildung intensiv mit Werken von Descartes, Galilei, Wallis und Barrow.[161] Einige der größten wissenschaftlichen Entdeckungen seinerseits erfolgten in den Jahren 1664 bis 1666. Während dieser Periode führte Newton Experimente anhand von Prismen durch, überzeugte sich vom zusammengesetzten Charakter des weißen Lichts, formulierte den binomischen Lehrsatz für gebrochene Potenzen und stellte Hypothesen über die Bewegungen des Mondes auf.[162] Zu seinen Schriften zur Infinitesimalrechnung können drei wichtige Fassungen gezählt

---

[158] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.201; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.44.
[159] Vgl. *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.89; Vgl. Peiffer, Dahan-Dalmédico; Wege und Irrwege, S.201; Vgl. *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis, S.44.
[160] Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.329.
[161] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.202.
[162] Vgl. Niccoló *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999), S.91.

werden, die erst Anfang des 18. Jahrhunderts publiziert wurden und somit folglich einen eher eingeschränkten Einfluss erzielen konnten.[163]

Newtons erste systematische mathematische Abhandlung trägt den Titel *De analysi per aequationes infinitas,* worin er eine kurze Zusammenfassung seiner Entdeckungen im Eigentlichen mit der Darlegung dreier Regeln zum Ausdruck bringt:

> 1) Wenn $y = ax^{\frac{m}{n}}$, dann ist $\frac{an}{n+m}x^{\frac{m}{n}+1}$ die Fläche unter y.
>
> 2) Wenn y als Summe von mehreren, auch von unendlich vielen, Termen gegeben ist mit
>
> $$y = y_1 + y_2 + \cdots$$
>
> dann ist die Fläche unter y gleich der Summe der Flächen unter den entsprechenden Termen.
>
> 3) Um die Fläche unter einer Kurve $f(x, y) = 0$ zu berechnen, muss man y als eine Summe von Termen der Form $ax^{\frac{m}{n}}$ entwickeln und Regel 1 und 2 anwenden.

Bahnbrechend war außerdem Newtons Entdeckung 1665, welche das allgemeinste Ergebnis zur Quadratur von Kurven, also ihrer Integration, aufzeigte. Dabei bezieht sich seine Argumentation auf die zwei speziellen Kurven $z = \frac{x^3}{a}$ und $y = \frac{3x^2}{a}$, die aber vollkommen allgemein gültig sind.[164] So sei y gleich der Steigung von z und definiert als $bg = dh\frac{m\beta}{\Omega\beta}$, wobei bg eine Ordinate der Kurve y und $m\beta$, sowie $\Omega\beta$ unendlich kleine Zuwächse von z und x sind, während dh eine Strecke der Länge 1 darstellt.[165]

---

[163] Vgl. *Peiffer*, *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.202.

[164] Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.94-95; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.458.

[165] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.95-96.

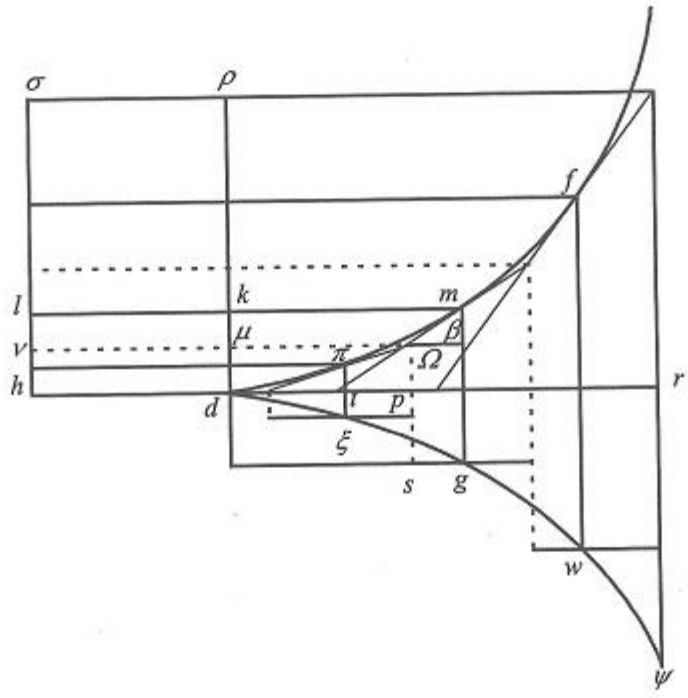


Abb. 8

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Fläche $bpsg$ ($= \Omega\beta \cdot bg$) und die Fläche $\mu K \lambda v$ ($= m\beta \cdot dh$) gleich sind. Angemessen dieser Zeit war es allgemein üblich, die Fläche unter einer Kurve als gleich der Summe unendlich vieler infinitesimaler Streifen wie $bpsg$ zu betrachten. Daraus ergibt sich letztlich, dass die von y berandete Kurvenfläche, das heißt $d\Psi n$, gleich der rechteckigen Fläche $dh\sigma p$ ist. Anschließend ermöglicht die Kenntnis von z die Quadratur von y, da *„die Fläche unter y (der abgeleiteten Kurve) proportional zur Differenz zwischen den entsprechenden Ordinaten von z“* ist.[166]

Eine weitere Errungenschaft Newtons war seine Fluxionsrechnung, die er im Jahre 1687 in seinem Werk *Philosophiae naturalis principia mathematica* beschrieb und erstmalig eine nachhaltige Wirkung erzielen konnte, da darin seine, in geometrischer Sprache formulierten Sätze über Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Tangenten und Krümmungen ein wichtiges Motiv für seine Forschungen zur Infinitesimalrechnung lieferten. Diese regten schließlich für mindestens ein Jahrhundert dazu an, neue analytische Verfahren zu entwickeln, um die darin gestellten allgemeinen Probleme zu behandeln und zu lösen. Newtons ursprüngliche infinitesimale Auffassung war sehr von Barrow und Wallis beeinflusst, was sich darin zeigte,

[166] Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.95-96.

dass er mit unendlich kleinen Größen operierte, die als *Momente* bezeichnet wurden und den infinitesimalen Zuwächsen bei Fermat äquivalent sind. Des Weiteren beruhte seine Quadraturmethode auf Momente von Flächen, wobei er dabei von der Fläche unter dem Graphen einer Funktion f ausging, die einerseits von den Koordinatenachsen und andererseits von der Ordinate y begrenzt wird, welche zu einer gegebenen Abszisse x gehört. Folglich betrachtete Newton dann den Zuwachs oy, welcher die Fläche erfährt, wenn die Abszisse x um eine infinitesimale Größe o wächst.[167]

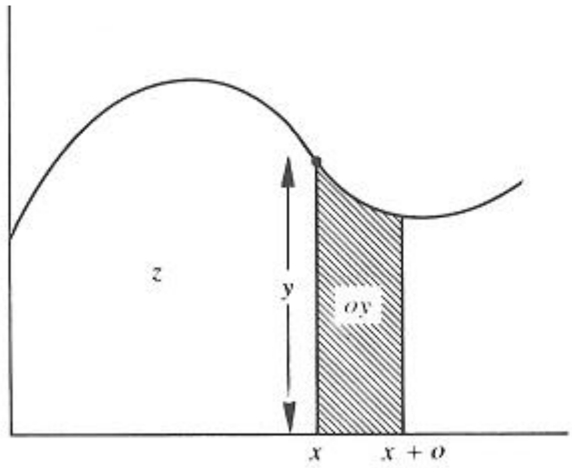


Abb. 9

Sodann berechnete er das Maß der momentanen Änderung der Fläche zur Abszisse x, das heißt, modern gesprochen, die dortige Ableitung, um festzustellen, dass diese gleich der Ordinaten g des Kurvenpunktes mit der Abszisse x ist. Ist beispielsweise die Fläche durch

$$z = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$$

gegeben, so ist ihre Änderungsrate

$$y = ax^{\frac{m}{n}}.$$

Im Gegenzug dazu bestimmte Newton die Fläche einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, indem er die Differentiation umkehrte, also das bestimmte Integral von f berechnete. Der Unterschied zu seinen VorgängerInnen zeigte sich so, dass er dabei aber nicht mehr infinitesimale Flächen summierte, sondern vielmehr die Ableitung ins Zentrum seiner

[167] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico;* Wege und Irrwege, S.202-203.

Betrachtungen stellte. Deshalb bevorzugte er das unbestimmte Integral und vernachlässigte somit die Berechnung von bestimmten Integralen. So konnte bereits seit dem Jahre 1669 die Beziehung zwischen Quadraturen und Ableitungen durch Newton klar hergestellt werden, obwohl man bei ihm vergebens nach einer klaren Definition der Begriffe *Integral, Ableitung, Momente* oder *infinitesimale Zuwächse* sucht.[168]

In dem Werk *Method of fluxions and infinite series*, führte er seine berühmteste Methode ein, die Fluxionsmethode. Darin geht Newton davon aus, dass die mathematischen Größen durch einen kontinuierlichen Zuwachs nach der Art des Raumes, den ein bewegter Körper durchquert, erzeugt werden.[169] Die durch diesen „Fluss" erzeugten Größen werden als *Fluenten* und die daraus erzeugten momentanen Geschwindigkeiten als *Fluxionen* bezeichnet. In diesem Sinne führte er die Zeit als universelle Variable in alle funktionalen Abhängigkeiten ein, interessierte sich allerdings nicht für die Zeit an sich, sondern nur für ihr kontinuierliches Verstreichen.[170] Man betrachte zum Beispiel einen Punkt, der mit variabler Geschwindigkeit entlang einer Geraden fließt. So sei die Fluente die seit t zurückgelegte Entfernung, die Fluxion die momentane Geschwindigkeit und das Moment der unendlich oder unbestimmt kleine Zuwachs in einem unendlich kleinen Zeitabschnitt. Newton bemerkte ferner, dass die Momente

> *„sich wie die Geschwindigkeiten des Fließens verhalten"*,[171]

d.h. wie die Fluxionen, wodurch seine Argumentation auf dem Gedanken liegt, dass die Fluxion während einer unendlich kleinen Zeitspanne konstant bleibt und somit dazu das Moment proportional ist.[172] Diese Begriffe führte er folgendermaßen in seinem Werk ein:

> *„Ich nenne diejenigen Größen fließende Größen oder einfach Fluenten, die ich als graduell und unbestimmt vergrößert betrachte; ich werde diese durch die letzten Buchstaben des Alphabets $v, x, y,$ und z wiedergeben. ... Durch die gleichen letzten Buchstaben, versehen mit einem Punkt: $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ und $\dot{z}$, stelle ich die Geschwindigkeiten*

168 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.202-203.
169 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.203.
170 Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.96-97.
171 Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.96-97.
172 Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.96-97.

dar, durch die die Fluenten von der sie hervorbringenden Bewegung vergrößert werden. Folglich kann man diese Fluxionen nennen.“[173]

Des Weiteren gelang es Newton das Grundproblem der Differential- und Integralrechnung zu benennen indem er sagte, dass, wenn die Beziehung zwischen den Fluenten gegeben ist, man die Beziehung zwischen den Fluxionen sucht und umgekehrt.[174] Daraus lassen sich aber zwei wesentliche Probleme herauskristallisieren: Zum einen, dass, wenn ein stetiger Weg zu jedem Zeitpunkt gegeben ist, die Bewegungsgeschwindigkeit i in einem gegebenen Zeitpunkt zu finden ist, womit aber Schwierigkeiten zum Auffinden von Tangenten, Extremstellen und Krümmungen zusammenhängen, und zum anderen, dass man bei gegebener stetiger Bewegungsgeschwindigkeit die zurückgelegte Strecke in einem gegebenen Zeitpunkt suchen muss, obwohl dies Probleme mit dem Auffinden von Flächen und Bogenlängen hervorruft.[175] Newton erklärte seine Lösung des ersten Problems anhand einiger Beispiele. Im Falle von $y = x^n$ etwa sieht dies so aus:

Bezeichnet o ein unendlich kleines Intervall der Zeit, so sind $\dot{x}o \text{ und } \dot{y}o$ die unendlich kleinen Zuwächse von x und y. Durch ein Ersetzen der Größe x in der Gleichung $y = x^n$ mit $x + \dot{x}o$, ergibt sich schließlich:

$$y + y^{\cdot}o = (x + x^{\cdot}o)^n.$$ [176]

Schon mit Newtons Abhandlung *Quadratura curvarum* aus dem Jahre 1704 versuchte er alle Spuren des Unendlichkleinen auszumerzen, indem er nur noch deren Verhältnisse betrachtete.[177] Bei dieser Niederschrift handelt es sich um die am stärksten mathematiktechnisch geprägte Arbeit Newtons in dem Versuch, seine Fluxions- und Fluentenrechnung zu fundieren. Darin werden unter anderem zahlreiche Probleme gestellt und gelöst, sowie eine große Anzahl an Theoremen formuliert.[178] Bei dieser *Methode der ersten und letzten Verhältnisse* ging er wie oben vor, bezeichnete jetzt allerdings mit o das zuvor als $\dot{x}o$ geschriebene Moment. Anstatt aber die Terme, die noch o enthielten, zu vernachlässigen, bildete Newton jetzt das Verhältnis der Änderung von x zu derjenigen von y, um dann o in

---

[173] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.203-205; Vgl. *Hairer, Wanner;* Analysis in historischer Entwicklung, S.90.

[174] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.205.

[175] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.97-98.

[176] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.205.

[177] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.205.

[178] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.385.

diesem Verhältnis verschwinden zu lassen. Das Resultat, also das Verhältnis 1 zu nx^{n-1} im Beispiel $y = n^n$, nannte Newton dann als das *letzte Verhältnis der verschwindenden Änderungen.* Er setzte dieses gleich dem ersten Verhältnis der entstehenden Änderungen, was letztlich das Verhältnis der Fluxionen ergab. Um diese letzten Verhältnisse zu erklären, die im Eigentlichen den Grenzwerten entsprachen, griff er auf eine mechanische Analogie zurück und benutzte das Bild der Endgeschwindigkeit, die ein Körper bei der Ankunft in einer bestimmten Position erreicht. Darunter verstand er exakt die Geschwindigkeit, mit der der Körper die Endposition erreicht und mit der die Bewegung aufhört.[179]

In Newtons Vorgehensweise können ziemlich gut die Etappen zur schrittweisen Bildung der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

aufgezeigt werden.[180] So steht geschrieben:

> *„Die letzten Verhältnisse, in denen die verschwindenden Größen stehen, sind in Wirklichkeit nicht die Verhältnisse der letzten Größen. Vielmehr sind sie die Grenzen, denen sich die unbegrenzt abnehmenden Größen immer mehr nähern und denen sie beliebig nahekommen, ohne daß sie diese jemals übertreffen oder erreichen, bevor die Größen unbegrenzt verkleinert wurden.“*[181]

[179] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.205-206.
[180] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.206.
[181] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.206.

Parallelen der Fluxionsmethode Newtons und der Differentialrechnung[182]	
Newton	**Differentialrechnung**
$y = x^n$	$y = f(x)$
x verändert sich und wird zu $x + o$	Ist h ein Zuwachs der Variablen x, so ist $f(x+h)$ der neue Funktionswert.
$y = x^n$ wird zu $(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$ nach dem binomischen Lehrsatz.	Die Änderung der Funktion f ist $f(x+h) - f(x)$.
Der Zuwachs o von x verhält sich zum Zuwachs $nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$ von y wie 1 zu $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} onx^{n-1} + \cdots$	Der Differenzenquotient ist $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
Verschwinden die Zuwächse, so wird ihr Verhältnis gleich $1{:}\, nx^{n-1}$.	$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Durch die einzigartige Art und Weise, in der er unendliche Reihen verwendete, führte Newton eine neue und allgemeine Methode, sowie eine neue Integrationstechnik ein. Ihm ist es gelungen, die zu integrierende Funktion in eine unendliche Reihe zu entwickeln, um diese anschließend Glied für Glied zu integrieren. Dabei dehnte er die gliedweise Integration, deren Zulässigkeit er im Falle endlich vieler Glieder nachgewiesen hatte, auf unendliche Summen aus. Dennoch sucht man bei ihm vergeblich nach Konvergenzbetrachtungen. Trotzdem muss aber darauf hingewiesen werden, dass Newton auf diesem Gebiet eine bemerkenswerte Intuition an den Tag legte. So gebrauchte er die Entwicklung

$$y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

für genügend kleine x und

$$y = \frac{1}{x^2+1} = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \cdots$$

für hinreichend große x.[183]

[182] Vgl. Peiffer, Dahan-Dalmédico; Wege und Irrwege, S.207.
[183] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.206.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Neben Newton war der Beitrag von Leibniz ebenso für die Entstehung der Infinitesimalrechnung von enormer Bedeutung, obwohl er einen anderen Zugang zu dieser Thematik verfolgte.[184] Newtons Erfolg auf dem Gebiet der Fluxionsrechnung konnte bereits zehn Jahre vor Leibniz erkennbar werden und darf somit als erster Begründer der Differential- und Integralrechnung gelten.[185] So wurde Leibniz von seinem Konkurrenten selbst und den britischen Mitgliedern der Royal Society des Plagiats beschuldigt, hatte aber in den Jahren von 1672 bis 1676 doch eigenständig seinen Beitrag zur Differential- und Integralrechnung geleistet. Newton und Leibniz bekämpften sich in vielen Themenbereichen, da sie einerseits verschiedene Kosmologien, unterschiedliche Ansichten über das Verhältnis von Gott und Natur und andererseits vielerlei Betrachtungsweisen zu Raum und Zeit, sowie zu den für die Physik grundlegenden Erhaltungsgesetzen hatten. Schließlich führte dieser Prioritätsstreit auch zu einer Spaltung bei VertreterInnen in der Mathematik.[186]

Aufgrund seiner Verstrickung in die deutsche Politik fand Leibniz leider nie die Muse, große mathematische Lehrbücher zu verfassen und veröffentlichte seine Betrachtungsweisen lediglich fragmentarisch in einer Reihe von kurzen Artikeln in der wissenschaftlichen Zeitschrift mit dem Namen *Acta eruditorum.* Obwohl er zwar der Mitbegründer dieser Zeitung war, wurden viele seiner Resultate nie publiziert und lassen sich nur in Bergen von Papieren unvollständig auffinden. Da seine Aufzeichnungen zudem noch konfus und oft unverständlich waren, war es extrem schwierig seine genialen Gedanken zur Entwicklung der Differentialrechnung nachzuvollziehen.[187] Mit den Gebrüdern Johann und Jakob Bernoulli gelang es aber um die Jahrhundertwende diese zu erweitern und auf die Dynamik anzuwenden.[188]

Mit Hilfe seiner Manuskripte versuchte Leibniz eine Emanzipation einer *characteristica universalis* zu entwickeln.[189] Eine solche universale Sprache oder Zeichenkunst sollte es nämlich ermöglichen, komplizierte Begriffe in einfache zu zerlegen, die durch bedacht

[184] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.207.
[185] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.398.
[186] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.91.
[187] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.208.
[188] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.107.
[189] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.96-107.

gewählte Symbole gekennzeichnet sind. Aus dieser Sprechweise könne sich nämlich sozusagen ein Weg zur *ars inviendi,* also der Kunst des Erfindens, öffnen.[190] Problematisch dabei ist jedoch, dass es eine solche umfassende Ausdrucksweise, mit der auch Poesie, Politik, Theologie, Mathematik und vieles mehr in Einklang gebracht werden soll, praktisch nicht geben kann. Trotzdem ist es Leibniz im Bereich der Analysis gelungen, durch eine kluge Wahl von Symbolen einen Zustand zu erreichen, sodass diese sogar bis heute in unterschiedlichsten Ausbildungsstätten Verwendung findet und das Rechnen mit Symbolen fast von selbst funktioniert.[191] Beispielsweise sei hier angeführt, dass die Steigung der Sekante an eine Funktion $y = f(x)$ durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ angegeben werden kann. Wird Δx unendlich klein, dann auch Δy und wir erhalten für die Steigung der Funktion an der betrachteten Stelle $\frac{dy}{dx}$, mit infinitesimalen Größen dx und dy. Heute schreiben wir ohne Weiteres

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und haben eine klare Vorstellung vom Grenzübergang.[192]

Als *annus mirabilis* kann bei Leibniz wohl das Jahr 1673 gesehen werden, da er zu diesem Zeitpunkt seine Grundlagen zur Differential- und Integralrechnung gelegt hatte.[193] Dabei spielen insbesondere sein Interesse an Zahlenfolgen eine wichtige Rolle.[194] Denn bereits 1666 in seiner Dissertation *De arte combinatoria* konzentrierte er sich auf die Folge der Quadratzahlen, sowie deren erste und zweite Differenzenfolge:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36.$$
$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$
$$2, 2, 2, 2, 2.$$

Dabei bemerkte Leibniz, dass die Summe der n ersten Differenzen der $(n+1)ten$ Quadratzahl entspricht. Die Beziehung zur Infinitesimalrechnung hat Leibniz dadurch hergestellt, als er die Zahlenfolge als Folge von Werten einer Funktion interpretierte und die Differenzen zwischen zwei Zahlen als Differenz zwischen zwei benachbarten Werten der Funktion deutete. So lässt sich die oben erwähnte Eigenschaft als $omn.\, l = y$ schreiben. Alsbald wurde diese aber durch

[190] Vgl. Sonar; 3000 Jahre Analysis, S.405.
[191] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.406; Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.210.
[192] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.406.
[193] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.392.
[194] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.107.

die Schreibweise dy $für\ l\ und\ \int$ ersetzt, wobei für $omn. = Summe$ gilt. Schließlich ist es diese bequeme Bezeichnung ($\int dy = y$), die es Leibniz ermöglichte, eine formale Methode zur Berechnung von Summen und Differenzen von Infinitesimalen aufzustellen.[195]

Wie eindrucksvoll und selbständig die Leibniz´schen Symbole arbeiten, kann beispielsweise auch an der Integration demonstriert werden. Substituiert man nämlich im

$$\int f(x)\, dx$$

die Funktion $x = g(z)$, dann ist $\frac{dx}{dz} = g´(z)$. Folglich ist $dx = g´(z)\, dz$, woraus sich die Regel für die Substitution in Integralen ergibt mit

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(g(z)\big) \cdot g´(z) dz.$$

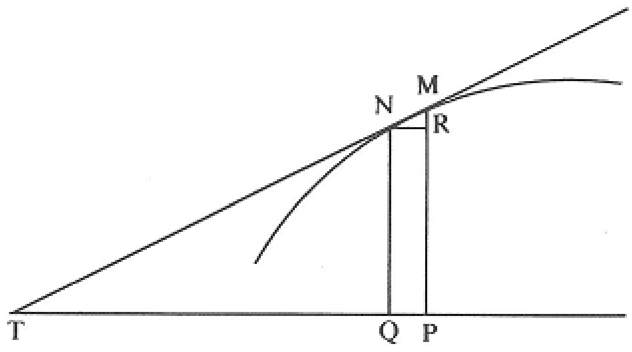
Durch die kluge Benennung durch d für Differenz und $\int$ für Summe, lässt sich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Darstellung

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = f(x)$$

als ganz natürlich erscheinen. Daraus wird außerdem mehr als erkenntlich, dass Differentiation und Integration zueinander inverse Operationen sind.[196]

Erwähnenswert sei ebenso Leibniz´ erste Veröffentlichung zur Differentialrechnung im Jahre 1684 unter dem Titel *Nova Methodus pro maximus et minimus, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, e singualre pro illis calculi genus,* mit welcher er jene Untersuchung des Tangentenproblems zur Betrachtung des Dreiecks anleitete, welches von einem unendlich kleinen Stück der Tangenten und unendlich kleinen Abschnitten gebildet wird, die sich hieraus auf den Parallelen zur Abszissen und zur Ordinatenachse ergeben. Leibniz berücksichtigte daneben dieses Dreieck als ein charakteristisches Element der Kurve.[197]

[195] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.209.
[196] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.408.
[197] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.209; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.394.



NMR ist das sogenannte *charakteristische Dreieck.*

Abb. 10

Die drei unendlich kleinen Seiten sind vollständig bestimmt durch die Ähnlichkeit, die zwischen dem infinitesimalen Dreieck NRM und dem Dreieck TNQ, welches aus den Subtangenten TQ, der Ordinate QN und dem Tangentenabschnitt TN gegeben sind. Selbst wenn dy und dx beliebig kleine Größen sind, besitzt ihr Verhältnis $dy: dx$ einen endlichen Wert, nämlich denjenigen des Verhältnisses $QN: QT$ von Ordinate zu Subtangente. Schließlich liefert diese Herangehensweise eine Definition des Differentials, so dass wenn dx eine beliebige Größe darstellt, das Differential dy durch die Gleichung $dy: dx = y$, also der Subtangente festgelegt wird.[198]

Bei der Suche nach Tangenten, Maxima und Minima, sowie nach Wendepunkten, wandte Leibniz seine Regeln für $d(x + y), d(xy), d\frac{x}{y}$ und $d(x^n)$ an. Daraufhin war es ihm gelungen Differentiale der Logarithmus- und der Exponentialfunktion zu liefern, sowie das Krümmungsverhalten einer Kurve unter Anwendung des Krümmungskreises zu untersuchen. Des Weiteren führte er Differentiale höherer Ordnung an, wie $d^n x$, wobei er in seinen Rechnungen alle Differentiale der Ordnungen größer als Eins vernachlässigte, welches den charakteristischer Zug seiner Methode repräsentiert.[199] Dabei muss aber zudem hervorgehoben werden, dass das Leibniz´sche Kalkül weder etwas mit Funktionen noch mit Ableitungen zu tun hat, sondern sich eher mit Progressionen variabler Größen und ihren Differenzen beschäftigt. Daher sollten wir zum Beispiel nicht $\frac{dy}{dx}$ als die Ableitung von $y(x)$ in Abhängigkeit von x lesen, sondern als eine natürliche algebraische Behandlung der Differentiale sehen.[200]

---

[198] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.209.
[199] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.209-210.
[200] Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.114.

Eine Methode zur Aufhebung von Differentialen höherer Ordnung sei beispielsweise, wenn man eine Summe $A + \alpha$ hat und α im Vergleich zu A unendlich klein ist, so kann behauptet werden, dass $A + \alpha = A$ ist. Demnach lässt sich diese Kürzungsregel für unendlich kleine Größen durch

$$d^n x + d^{n+1} x = d^n x$$

ausdrücken. Außerdem berechnete Leibniz das Differential von xy und x^n mit

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy = xdy + ydx,$$

während

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + dx^2(\dots) = nx^{n-1}dx.$$

Genaugenommen nahm er an, dass $dxdy$ sich gegenüber $xdy + ydx$ und dx^2 sich gegenüber dx aufhebt. Des Weiteren können Differentiale von Wurzeln gebildet werden wie $y = \sqrt[b]{x^a}$, indem man sie in $y^b = x^a$ umformt, das Differential

$$by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$$

berechnet und so umordnet, dass sich

$$d\sqrt[b]{x^a} = \left(\frac{a}{b}\right) dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$$

ergibt. Ein ähnlicher Vorgang führt auch zu

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right) = \frac{-adx}{x^{a+1}}.$$ [201]

Vor der Differentialrechnung waren Wurzeln und Brüche enorm schwer handzuhaben, wodurch durch Leibniz´ neue Rechnungsart auch die Grundlage seines Kalküls charakterisiert wird.[202] So stellte er sich nicht nur Flächen, sondern auch Volumina als Summen infinitesimaler Elemente vor, berechnete den Wert solcher aber durch Umkehrung der Differentiation. Im Unterschied zu Newton, der das unbestimmte Integral betrachtete, führte Leibniz schlussendlich das bestimmte Integral ein.[203] Wie nun gezeigt, besteht absolut kein Zweifel daran, Leibniz als Infinitesimal- und nicht als Indivisiblen-Mathematiker zu sehen. Er lehnte

[201] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.114.
[202] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.210; Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.115.
[203] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.210.

das Aktual-Unendliche strikt ab und spricht in seinem Kontinuitätsprinzip die Akzeptanz eines Kontinuums im klassisch griechischen Sinne aus.[204] Die Überzeugungskraft seiner Methode liegt vor allem in der Einfachheit ihrer Rechnungen, der eleganten Schreibweisen und im kalkülhaften Charakter ihres Formalismus. Aber auch Leibniz war in seinen Überlegungen noch nicht vollkommen, denn angesichts einer fehlenden exakten Definition, interpretierte auch er, wie schon Newton zuvor, die unendlich kleinen Größen als momentane Änderungen. So arbeitete er in einem Größenbereich, der aus den reellen zusammen mit unendlich kleinen Größen bestand und zudem nichtarchimedisch war. Wie Newton neigte auch Leibniz dazu, nicht die unendlich kleinen Größen selbst zu betrachten, sondern deren Verhältnisse. Da aber die Identifikation derer mit Zahlen noch nicht vollständig abgeschlossen war und es immer noch eine restriktive Auffassung des Zahlbegriffes gab, wurden diese Probleme größtenteils dafür verantwortlich gemacht, dass sich der Grenzwertbegriff weder aus den Newtonschen noch den Leibniz´schen Theorien herausschälen konnte. Dies gelang erst nach der Konstruktion der reellen Zahlen, die Differentiale als Grenzwerte von Zahlenfolgen definierten.[205]

Zusammenfassend möchte ich sagen, dass sowohl Newton wie auch Leibniz den Begriff der Kontinuität zur Legalisierung des Grenzwertbeweises benutzten. Dabei beschäftigte sich jedoch Newton mit der Anschauung des stetigen Fließens, während Leibniz sich eher auf ein philosophisches Kontinuitätsprinzip bezog und Differentiale als unvergleichbare Größen, die gegen Null gehen, auffasst. Jahre später revidierte er aber seine Betrachtungsweise, da er sich doch davon überzeugte, dass Differentiale wohlbegründet sind, da sie bildhafte Abkürzungen für Grenzverfahren seien. Daraufhin wäre also die Differentialrechnung eine Kurzfassung eines Kalküls endlicher Größen und Grenzwerte, die ebenwürdig dem archimedischen Exhaustionsverfahren seien. In ähnlicher Weise beschäftigt sich Newton mit der Frage nach der Existenz von Infinitesimalen. So sind für ihn Infinitesimale Momente oder unendlich kleine Größen, als Kurzform für längere und strengere Grenzwertbeweise, benutzbar. Demnach spricht auch er von Infinitesimalen als „verschwindende" Größen, welche zwischen Null und dem Endlichen liegen und durch Grenzübergänge ersetzt werden können. Aus diesen beiden Herangehensweisen wird ersichtlich, dass es im Eigentlichen keinen ausgeprägten begrifflichen Gegensatz zwischen Leibniz und Newton gab, denn beide sind sich einig, dass die Grenzargumente eine strenge Begründung des Kalküls erlauben. Für Leibniz war dies jedoch

[204] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.412.
[205] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.210-211.

mehr ein rhetorischer Schachzug zur Verteidigung der Legitimität des Differentialalgorithmus, während es für Newton ein auszuführendes Programm war. Der Unterschied lässt sich nämlich darin aufzeigen, dass Newton explizit eine Grenzwerttheorie entwickelte und im Gegenzug dazu Leibniz lediglich auf die Möglichkeit anspielte, den Kalkül über einer solchen Theorie aufzubauen. Außerdem bezieht er sich häufig auf den heuristischen Charakter dessen, um den Einsatz von Differentialen zu rechtfertigen. Für ihn sollte es also keine Vermischung der metaphysischen Frage der Begründung mit der Anerkennung des Kalküls zur Verwendung von Differentialen geben.[206]

Bei der Frage zur Berechtigung von Beweisen, die auf Grenzargumenten beruhen, möchte Newton mit Hilfe der Anschauung von stetiger Bewegung, das Vorhandensein von Grenzen nachweisen.[207] Leibniz bezog sich dabei viel mehr auf ein metaphysisches Prinzip der Kontinuität und bezieht sich für die allgemeine Erläuterung auf die Geometrie der Kegelschnitte. So sagte er

> „*Eine Ellipse könne sich einer Parabel so weit nähern, wie es beliebt, so daß der Unterschied zwischen der Ellipse und der Parabel (das, was „abhängig" ist) „unter jede beliebig kleine Größe sinkt,"* vorausgesetzt daß einer der Brennpunkte (das, was „gegeben" ist) weit genug vom anderen entfernt ist.*"*[208]

Demnach lässt sich die Ellipse, deren Brennpunkt unendlich weit entfernt ist, als eine Figur, deren Unterschied von der Ellipse um jeden beliebig kleinen Wert vermindert werden kann, ansehen. Schlussendlich ist es die stetige Abhängigkeit zwischen dem Gegebenen und dem Abhängigen, welche ein Folgern auf der Basis von Grenzübergängen gestattet, indem auf der Parabel jenes verwendet wird, was bereits für die Ellipse bewiesen wurde.[209]

Abschließend wird erkenntlich, dass es keinem der beiden so wirklich gelang, die von ihnen verwendeten Begriffe und die Grundlage explizit zu erklären. Dennoch waren es die Richtigkeit ihrer Ergebnisse und die erfolgreiche Anwendung, solche unvollkommenen Ausdrücke

---

[206] Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.125-126.
[207] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.126.
[208] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.127.
[209] Vgl. *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.127.

bestehen zu lassen. Dazu brauchte man weiterführende MathematikerInnen im 19. Jahrhundert, die sich an eine Lösung des Problems heranarbeiteten.[210]

3.5 Die Flucht nach vorne und die damit verbundene Weiterentwicklung

Im 18. Jahrhundert verfolgten die MathematikerInnen den weiteren Ausbau infinitesimaler Methoden, die volle Herausbildung des Funktionsbegriffes und die höheren Gebilde der Analysis. Dazu zählten unter anderem die Theorie der Differentialgleichungen und die Variationsrechnung, sowie der Zusammenhang mit ideologischen und methodologischen Auseinandersetzungen um das Wesen des Unendlich-Kleinen.[211] Weitere Untersuchungen bezogen sich auf Bewegungsabläufe, die von der anschaulichen Vorstellung einer sich stetig veränderlichen Variable x ausgehen, die sich stetig gegen einen Grenzwert x_1 bewegen. Zudem betrachtete man eine zweite davon abhängige Größe mit $u = f(x)$. Dabei ergab sich jedoch das Problem der präzisen mathematischen Ausdrucksweise, was mit der Aussage gemeint ist, dass $f(x)$ sich einem festen Wert a „nähert" oder „gegen ihn strebt", wenn x sich gegen x_1 bewegt.[212]

Anwendung fanden die Methoden der Differential- und Integralrechnung vor allem bei der Lösung von komplizierten Funktionen schwieriger physikalischer Probleme, die vor allem im der Bereich der Mechanik, der Optik und der Astronomie auftauchten.[213] Einige Beispiele dazu waren Probleme, die häufig auf neue Kurven zurückgeführt wurden, wie etwa Querschnittskurven bei vom Wind aufgeblähtem Segel, die Gestalt elastischer Stäbe unter Druck oder gestörte Planetenbahnen.[214] Folglich entstanden mit der fortschreitenden Mathematisierung der Physik neue Zweige in der Mathematik:

a) Die Auseinandersetzung von, in Differentialgleichungen ausgedrückten, mechanischen bzw. physikalischen Phänomenen, deren Integration ein Gegenstand der neuen Analysis wurde.

[210] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.426.
[211] Vgl. Hans *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2 (Springer, Berlin/ Heidelberg 2009), S.1-2, 452
[212] Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.232.
[213] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.211-212.
[214] Vgl. Hans Niels *Jahnke*; Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999), S.131.

b) Die Anwendung der Mathematik in der Mechanik, Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie als Basis bei der Entwicklung der Variationsrechnung.

c) Die Differentialgeometrie, die durch Untersuchungen von Kurven und Flächen entstanden ist.[215]

Aufgrund der wachsenden Vielfalt in ihren Anwendungen vergrößerte sich der Bereich der Analysis gewaltig, wodurch auch eine Lösung der geometrischen Sprache Newtons und eine neue Formulierung in der Sprache der Differentialgleichungen erzielt werden konnte. Dennoch kämpften auch die MathematikerInnen des 18. Jahrhunderts vergeblich mit den Schwierigkeiten der Definition der Grundbegriffe *Differential, Funktion* und *Potenzreihe*.[216] Zum Fortschritt der Analysis im 18. Jahrhundert trug aber nur eine kleine Gruppe von MathematikerInnen bei. Darunter können Jakob und Johann Bernoulli, Brook Taylor, James Stirling, Leonhard Euler, Colin Maclaurin, Alexis Clairaut, Jean le Rond d´Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph- Louis Lagrange, Gaspar Monge, Pierre Simon Laplace und Adrien Marie Legendre gezählt werden. Eine Periodisierung der Infinitesimalrechnung zu dieser Zeit lässt sich allerdings nur schwer vornehmen. So könnte eventuell gesagt werden, dass bis in die 30er Jahre sie als Teil bzw. Methode der Geometrie gesehen wird, wobei die zweite Periode um die Mitte des Jahrhunderts auf einer algebraischen Auffassung gestützt war.[217]

Wie oben schon ausführlich angeführt, entstand durch den Prioritätsstreit zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung eine Spaltung unter den zeitgenössischen MathematikerInnen, wobei sich auf der einen Seite die englische und auf der anderen Seite die kontinentale Schule gegenüberstanden. VertreterInnen der englischen Schule probierten sich in der Klärung der Grundbegriffe der Fluxionsrechnung und beschäftigten sich mit der Lösung philosophischer Schwierigkeiten, die mit der Zweideutigkeit der infinitesimalen Elemente verbunden waren, da diese gelegentlich Null bzw. unendlich klein waren. Des Weiteren wurden sie auch oft mit Fluxionen identifiziert oder galten unvereinbar mit der geometrischen Anschauung, die schließlich den englischen AnalytikerInnen den Vorrang gaben. Bei den VertreterInnen der kontinentalen Schule zeichnete sich die Tendenz aus, dass eine Verbindung zwischen der Differentialrechnung und dem Funktionsbegriff aufgestellt wurde. Mit Eulers daraus entwickeltem Grundbegriff der Mathematik und dem Anstoß seines formalistischen

[215] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.212; Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.131.
[216] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.212; Vgl. *Guicciardini;* Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.131.
[217] Vgl. *Jahnke;* Geschichte der Analysis, S.131-133.

Standpunktes sollte die Kompaktheit der Notation von Leibniz und dessen effizienten Algorithmen eine Begünstigung zur nahezu automatischen Entwicklung der Differentialrechnung liefern, auch wenn MathermatikerInnen immer noch die Philosophie heranzogen, um den Begriff des unendlich Kleinen zu rechtfertigen.[218]

Die Bernoulli Brüder

Durch die umfangreiche Korrespondenz zwischen Leibniz und den Gebrüdern Bernoulli, fand eine rasche Verbreitung der Differentialrechnung statt. Diesen beiden beeindruckenden Mathematikern gelang es schließlich, eine weiterführende Entwicklung der neuen Rechnungsart zu gewährleisten, indem sie originelle Ideen beisteuerten und neue Schreibweisen einführten.[219] Nicht ohne Grund können sie daher als eine der größten Propagandisten der Leibniz´schen Analysis gezählt werden, da unter anderem der Begriff *Integral* für Leibniz´ Symbol $\int$ daraus fruchtete.[220]

Vor allem Jakob Bernoulli (1654-1705) verdanken wir zahlreiche Ergebnisse der Mathematik, wie die nach ihm benannte Bernoullische Un- bzw. Differentialgleichung, die Bernoulli-Verteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Bernoullischen Annahmen in der Balkentheorie. Seine bedeutendsten Entdeckungen kamen jedoch aus dem Streit mit seinem Bruder Johann Bernoulli (1667-1748), nämlich der zur Variationsrechnung.[221] Aber auch dem Bruder kann eine große Bedeutung zugeschrieben werden. Er war nicht nur der Privatlehrer von de l´Hospital, sondern trug auch dessen mathematischen Resultate, wie z.B. die „Regeln von de l´Hospital" über Terme der Gestalt $0/0$" oder "∞/∞" weiter.[222] Diese besagen, dass für einen Quotienten, der für $x \to x_0$ geht, der

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

gilt. So kann der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen betrachtet werden, falls f und g differenzierbare Funktionen sind. Dies würde somit bedeuten, dass

[218] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.211.
[219] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.211.
[220] Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.90; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.439; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.58; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.27.
[221] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.439.
[222] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.440-441; Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.28.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn $g'(x_0) \neq 0$ ist.[223]

Auch nach Leibniz´ Tod war Johann Bernoulli die anerkannteste Autorität der Analysis, welcher bereits zu dessen Lebzeiten seine gesammelten Werke in vier Bänden herausgab und in seinen Vorlesungen eine Theorie der Trajektoren entwickelte, in der die historischen Wurzeln für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen lagen.[224] Dennoch waren die Differentiale bei ihm noch aktual unendlich kleine Größen und erst mit seinem Zeitgenossen Leonhard Euler änderte sich dies. Somit wird ihm und Euler der Höhepunkt des 18. Jahrhunderts zugesprochen.[225]

Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler zählt zu den überragendsten und produktivsten MathematikerInnen des 18. Jahrhunderts und wird auch gerne in der Forschungsliteratur als „fleischgewordene Analysis“ und „Sonne aller MathematikerInnen“ gefeiert.[226] So könnte es Laplace den StudentInnen nicht zutreffender in seinen Vorlesungen formuliert haben:

> *„Lest Euler, lest Euler, er ist unser aller Meister!“*[227]

Eulers Schaffensweise liegt in der Bearbeitung von Problemen aus allen Bereichen der Mathematik. Dazu führte er in der Physik die Analysis in die Mechanik ein und verfasste Arbeiten zur Hydromechanik, zum Schiffbau und zur Astronomie. Zusätzlich löst er zahlentheoretische Schwierigkeiten, begründet die Graphentheorie mit Hilfe des berühmten „Königsberger Brückenproblems“ und findet für jedes konvexe Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten die Beziehung

$$e + f - k = 2.$$ [228]

[223] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.440-441.

[224] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.31.

[225] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.442.

[226] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.132; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.59; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.446; Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.45.

[227] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.446.

[228] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.449-450.

Als Hauptwerk kann sein zweibändiges Lehrbuch *Mechanica sive motus scientia analytice* aus dem Jahr 1736 angeführt werden. Darin forciert er die vollständige Durchdringung der Mechanik mit der Leibniz´schen Analysis, worin Euler als absoluter Meister galt.[229] Trotz all dem muss aber erwähnt werden, dass Euler Leibniz´ Verständnis zum Calculus nicht teilte.[230] Da er die Metaphysik und die Geometrie als Basis für die Infinitesimalrechnung verwarf, richtete er seinen Blickwinkel der unendlich kleinen Größen auf den damit verbundenen Formalismus und versuchte sich darin, sich eher auf die Regeln zu konzentrieren, als auf die Natur der Objekte, mit denen operiert wurde. So war für ihn das Unendlich-Kleine eine Größe, die nach ihrem Verschwinden aktual gleich Null wird.[231] Im Differentialkalkül gehe es also nicht um die Differentiale selbst, sondern um deren Verhältnisse. [232] Schließlich bildet eine solche Bestimmung der Verhältnisse bzw. die Suche nach den Werten der Ausdrücke $0:0$ den Gegenstand der Differentialrechnung.[233]

Aus der Eigenschaft, dass $n \cdot 0 = 0$ für alle n gilt, leitete Euler daraufhin die Gleichung $n = \frac{0}{0}$ her. Um dann das Verhältnis der Zuwächse der Funktion $f(x) = x^2$ und der unabhängigen Variablen zu erhalten, ging Euler folgendermaßen vor:

Wenn x und w wachsen, so erhält y einen Zuwachs von

$$(x+w)^2 - x^2 = 2xw + w^2.$$

Dementsprechend ist das Verhältnis der Zuwächse dann gleich

$$2x + w.$$

Wenn also der Zuwachs von x verschwindet, so folgt daraus, dass auch diese von x^2 wegkommen. Das Verhältnis dieser beiden gleich Null gewordenen Größen hat aber dennoch einen endlichen Wert, nämlich $2x$.[234]

Bahnbrechend ist Eulers Lösungsstrategie allgemein homogener linearer Differentialgleichungen $n - ter$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

---

229 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.450.

230 Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.59.

231 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.212.

232 Vgl. *Jahnke;* Geschichte der Analysis, S.134.

233 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.214.

234 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.212-214.

durch den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$.

Die Gleichungen

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$$

mit der nach ihm benannten „Eulerschen Zahl“ e und

$$\sin x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),\ \cos x = \frac{1}{2}(\,e^{ix} - e^{-ix})$$

können auch weiterentwickelt werden, wobei $i \coloneqq \sqrt{-1}$ die „imaginäre Einheit“ darstellt. Im Prinzip beginnt mit Euler, was wir heutzutage als komplexe Analysis verstehen, nämlich die Analysis von Funktionen mit komplexen Zahlen der Form $z = a + ib$.[235]

Für Euler und seine ZeitgenossInnen nahm die höhere Analysis genau dort ihren Anfang, wo der Begriff des *Differentials* ins Spiel kommt. Obwohl sein *Introductio* in diesem Zusammenhang oftmals Erwähnung findet und das Operieren mit unendlichen Reihen, Produkten und Kettenbrüchen beinhaltet, ist es aber kein eigentliches Lehrbuch der Infinitesimalrechnung.[236] Schließlich sollen die zwei Bände zur Differentialrechnung unter dem Titel *Institutiones calculi differentialis* aus dem Jahr 1755 und die dreiteiligen *Institutiones calculi integralis* zur Integralrechnung, die im Zeitraum von 1768 bis 1770 entstanden waren, Erwähnung finden.[237]

Mit Euler zieht auch erstmals der gigantische Begriff der *Funktion* ein, welcher das Zentrum seiner Betrachtungsweise der Analysis darstellt. Dafür benutzte er konsequent die Schreibweise $f(x)$, die sich bis heute gehalten hat. Auch im Umgang mit unendlichen Reihen galt der Mathematiker als unschlagbarer Meister, denn unter seiner Verwendung wird die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

[235] Vgl. *Son*ar; 3000 Jahre Analysis, S.451-452; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.54.

[236] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.142-143.

[237] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.455.

als unendliches Polynom verstanden und zum eigentlichen Arbeitspferd im Teilgebiet der Analysis.[238] So setzte sich langsam die Auffassung durch, nicht mehr mit variablen Größen und ihren Differentialen, sondern mit Funktionen und ihren „Ableitungen“ zu rechnen.[239]

Jean le Rond d´Alembert (1717-1738)

Unter d´Alembert kam es definitiv zu einer Verwerfung der These von der Existenz unendlich kleiner statischer Größen. Er interpretierte nämlich das Differential als

> „*unendlich kleine Größe, das heißt als eine Größe, die kleiner ist als jede angebbare Größe*“[240]

und als

> „*unendlich kleine Differenz zweier endlicher Größen, von denen die eine die andere nur wenig übertrifft.*“[241]

Gegenstand der Differentialrechnung sei daher mehr oder weniger die Art und Weise, wie Größen differenziert werden, was eigentlich so viel bedeutet wie die unendlich kleine Differenz einer variablen Größe zu finden. Somit machte sich d´Alembert zur Aufgabe, die Differentialrechnung auf die Grenzwertmethode zu begründen. In diesem Sinne legte er die Methode der ersten und letzten Verhältnisse Newtons folgendermaßen aus:

> „*Weiter gilt, daß dieser berühmte Autor niemals Größen, sondern immer nur Gleichungen differenziert hat; dies deshalb, weil jede Gleichung ein Verhältnis zweier Variablen einschließt und die Differentiation von Gleichungen nur darin besteht, die Grenzwerte der Verhältnisse der endlichen Differenzen der beiden Variablen zu ermitteln, die in der Gleichung eingeschlossen sind.*“[242]

So wird die Ableitung nicht mehr als Verhältnis unendlich kleiner Größen gesehen, sondern als Grenzwert des Verhältnisses zweier nicht verschwindender Größen. Mit einer solchen Herangehensweise gelang es d´Alembert einen wichtigen Schritt in Richtung des Grenzwertbegriffs zu machen, da nach ihm ein solcher die wahre Metaphysik der

---

[238] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.454.
[239] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.135.
[240] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.214.
[241] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.214.
[242] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.214.

Differentialrechnung liefert. Folglich definierte er den Grenzwert als eine Größe einer anderen Größe, wenn die zweite der ersten beliebig nah kommen kann.[243]

Joseph- Louis Lagrange (1736-1813)

Auch Lagrange machte sich zur Aufgabe, die wahre Metaphysik der Prinzipien der Differential- und Integralrechnung aufzudecken. Er kritisierte und verwarf die Methode der unendlich kleinen Größen von Leibniz, die Fluxionsmethode bei Newton, die der Verhältnisse von Null zu Null von Euler, sowie die Grenzwertmethode von d´Alembert. Sein Schwerpunkt lag lediglich darin, die Infinitesimalrechnung auf die Algebra zu reduzieren.[244]

Bei ihm zu findende Grundbegriffe sind auf der einen Seite derjenige des Funktionsbegriffes, der sich wesentlich an die stetige Funktion im Sinne Eulers anlehnt, und auf der anderen Seite der des Reihenbegriffes.[245] Denn auch bei Lagrange sind die unendlichen Reihen wie bei Euler der Dreh- und Angelpunkt in der Analysis, allerdings überholt er seinen Zeitgenossen mit der Verwendung der Reihen für alle Funktionen.[246] So gelang es ihm, mit Hilfe seiner Reihenentwicklung, ausgehend von einer gegebenen Funktion, andere Funktionen auf rein algebraisch formale Art und Weise zu konstruieren. Dies wurde mit dem Ausdruck *Ableitung* bezeichnet und konnte sich durchaus, wie die Symbole f', f'' usw., für die abgeleiteten Funktionen der Funktion f in der mathematischen Literatur festigen.[247]

Folglich kann jede Funktion $f(x)$ einer beliebigen Variablen x in eine Reihe der Form

$$F(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots$$

gebracht werden, wobei man $x + i$ an Stelle von x mit einer unbestimmten Größe i gesetzt hat. Hierfür seien die Koeffizienten $p, q, r, \ldots$ der Potenzen von i die neuen Funktionen von x, die von der Ausgangsfunktion $f(x)$ abgeleitet werden und zudem unabhängig von der Größe i

[243] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.214-215; Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.91.
[244] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.215.
[245] Jeanne Peiffer, Amy Dahan-Dalmédico; Wege und Irrwege. Eine Geschichte der Mathematik (Birkhäuser, Basel/ Boston/ Berlin 1994), S.215; Hans Wußing; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2 (Springer, Berlin/ Heidelberg 2009), S.234
[246] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.470; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.62; Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.234-235.
[247] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.216; Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.91.

sind.[248] Letztlich ist in dieser Entwicklung die abgeleitete Funktion $f'(x)$ definiert als der Koeffizient $p = p(x)$ des linearen Gliedes.[249]

Aufgrund unzureichend vorgebrachter Argumente gelang es Lagrange nicht, die Existenz dieser Entwicklung für Funktionen im Allgemeinen abzusichern. Mehr oder weniger musste er sich damit begnügen, diejenigen Fälle auszuschließen, in denen eine der Ableitungen in einem isolierten Punkt unendlich wird, sowie die, in denen Funktion und Ableitung unendlich sind.[250] Auch bei der Konvergenz der Reihen irrte sich Lagrange, wenn er schrieb:

> „*Man kann i immer so klein wählen, daß ein beliebiger Term größer wird als die Summe aller nachfolgenden Terme.*“[251]

und dass, die im Allgemeinen aufgefasste Differentialgleichung darin besteht,

> „*auf direktem Wege mit einfachen und leichten Methoden die abgeleiteten Funktionen $p, q, r, \ldots$ der Funktion f zu ermitteln. Die Integralrechnung will mit Hilfe der letztgenannten Funktionen die Funktion f zurückgewinnen.*“[252]

Lagrange versucht mit seinem rein formalen Standpunkt die Begriffe *unendlich klein* und *Grenzwert* zu vermeiden und steht somit in der geradlinigen Tradition der Eulerschen Strenge.[253] Wie Euler sah nämlich auch er einen fundamentalen Unterschied zwischen den unendlichen Prozessen bei der Bildung von Reihen, Produkten und Kettenbrüchen sowie der Annahme unendlich kleiner Größen, wie den Leibniz-Bernoullischen Differentialen.[254] Trotzdem war es erforderlich, den Grenzwertbegriff hineinzunehmen, vor allem dann, wenn der Sprung von der formalen Ebene auf die numerische, von der formalen Potenzreiche zu konvergenten Reihen vollzogen werden sollte.[255] So wurden Lagranges Grundlegungen der Zirkelhaftigkeit beschuldigt, da er die Analysis rein algebraisch, unter Vermeidung des Unendlichen, begründen hätte wollen und nicht bemerkt hatte, dass die obige Potenzreihe eben dieses ins Spiel bringe und den Grenzwertbegriff voraussetzte.[256]

---

[248] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.216.
[249] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.165.
[250] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.216-217.
[251] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.216-217.
[252] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.216-217.
[253] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.217.
[254] Vgl. *Jahnke;* Geschichte der Analysis, S.167.
[255] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.217.
[256] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.167.

Für einen Zeitraum von zwei Jahrzehnten nahm Lagranges Herangehensweise zur Begründung der Analysis einen wichtigen Standpunkt ein und repräsentierte unter anderem die Sichtweise einer großen Anzahl von MathematikerInnen seiner/ihrer Zeit. Denn auch diese vertraten die Annahme, betrachtete Funktionen in Potenzreihen entwickeln zu können und versuchten sich darin, einen einheitlichen, formal eleganten Kalkül herauszukristallisieren. Leider konnten diese Ansätze keine lange Erfolgsserie verbuchen. Dennoch legten sie eine Vorstufe in der Herausbildung eines allgemeinen Operatorkalküls dar, an der nachfolgende Theorien verschiedenster MathematikerInnen des 19. Jahrhunderts angelehnt waren.[257]

3.6 Der Beginn der Strenge in der Analysis im 19. Jahrhundert

Die Neubegründung der Analysis im 19. Jahrhundert war ein langwieriger und schwerwiegender Prozess, der von einer Fülle unterschiedlicher und teilweise gegensätzlicher Ursachen und Tendenzen geprägt wurde. Dazu gab es im Wesentlichen keine zwingenden innermathematischen Gründe, warum ein solcher Vorhergang überhaupt ein ganzes Jahrhundert andauerte, geschweige denn, verursacht wurde.[258] Die Ernte der Ergebnisse im 19. Jahrhundert übertrafen alle bisher erbrachte Quantität und Qualität in diesem Bereich, wodurch es durchaus als das Goldene Zeitalter der Mathematik angesehen werden kann.[259] Denn genau hier wurde verstärkt der Wunsch laut, die Mathematik auf einem festen Fundament zu errichten und endlich eine exakte Klärung der Grundbegriffe der Analysis bereitzustellen.[260] Schließlich wurden mit diskreten Definitionen für *Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit* usw. die Grundlagen der unwiderruflichen Analysis gelegt.[261]

Aufgrund einer daraus resultierenden zufriedenstellenden Begründung der Analysis wird in der Literatur auch oftmals vom Zeitalter der Strenge gesprochen, denn es ging um weitaus mehr als um die Klärung von Begriffen und die Präzisierung von Beweisen. So stand eine Erstreckung einer neuen Begründung auf fast jedem Teilgebiet der Analysis und eine Verwandlung zu jener Disziplin im Vordergrund, die uns heute wohlbekannt ist. Dahingehend kann die Strenge als ein schöpferischer Prozess gesehen werden, der neue Gebiete der Mathematik schuf und diese

[257] Vgl. *Jahnke*; Geschichte der Analysis, S.167-168.
[258] Vgl. Hans Niels *Jahnke*; Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts- Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm (Springer, 1987), S.102.
[259] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.63.
[260] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218.
[261] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1, S.464.

sogar in Beziehung setzte. Außerdem entstanden auch neue Begriffe, wie *punktweise* und *gleichmäßige Stetigkeit, Kompaktheit, Vollständigkeit* usw., um nur einige Beispiele zu nennen.[262] Vor allem die Funktion, die einerseits bereits von Lehrbüchern des Lagrange und andererseits von denjenigen Eulers gefestigt wurde, wurde zu dem zentralen Begriff der Analysis auserkoren.[263]

In erster Linie stand in der Analysis nun eine durchaus notwendige Arithmetisierung im Mittelpunkt. Außerdem musste der Begriff der *Konvergenz* dem Zeitlichen abschwören und eine Antwort darauf gefunden werden, was denn eigentlich darunter zu verstehen sei und wogegen generell etwas konvergiere. Auch die strengere Betrachtung des Grenzwertes, der ohne einen Zahlenbegriff nicht wirklich von Bedeutung war, verkörperte die enorme Weiterentwicklung bisheriger Erkenntnisse von MathematikerInnen der damaligen Zeit. Es war nun mehr als notwendig, auf liebgewordene Anschauungen und Überzeugungen zu verzichten, denn der Drang nach Klar- und Exaktheit konnte fast nicht mehr im Zaum gehalten werden, welcher aber nur mit einer ausnahmslosen und gewissenhaften Bereitschaft von VertreterInnen dieser Zeitepoche gewährleistet werden konnte, wenn sie ein neues mathematisches Gewissen an den Tag legten.[264] Die Ideen zur konsequenten Aufarbeitung der Grundlagen der Analysis veranlasste die unterschiedlichste MathematikerInnen, unabhängig voneinander, an denselben Problemen zu arbeiten.[265]

Die Analysis im 19. Jahrhundert war besonders eng mit der theoretischen Physik verbunden, wodurch eine Existenz von Lösungen für Differentialgleichung von Summen oder von Reihen abgeleitet wurde. Zeitgleich kam es zu einer Trennung der Analysis von der Geometrie des Euklids, da dessen Beweise unvollkommen und sehr lückenhaft waren. Daher war eine Konstruktion alternativer Geometrien vonnöten, sowie eine neue Basis für anzugehende Beweise. Insbesondere sei hier als Beispiel der Zwischenwertsatz angeführt, der von vielen MathematikerInnen zu beweisen versucht wurde. Dieser besagt nichts anderes, als dass eine stetige Funktion, die auf einem Intervall sowohl positive als auch negative Werte hat, dort irgendwo auch den Wert Null annehmen kann. Letztlich mit der Konstruktion der reellen und komplexen Zahlen aus den rationalen und den wiederum daraus entwickelten natürlichen Zahlen, konnte eine Neubegründung der Analysis stattfinden, weil damit die Geometrie

[262] Vgl. Jesper *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999), S.191.
[263] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218.
[264] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.64.
[265] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.497, Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.253.

vollständig umgangen werden konnte. Diese Verhaltensweise lässt sich folglich in zwei Phasen unterteilen, in die von Cauchy dominierende französische und in jene von Weierstraß beherrschte deutsche. Denn bis Mitte des 19. Jahrhundert war Frankreich die dominierende mathematische Nation, zeitlich gefolgt von Deutschland.[266]

Bernard Bolzano (1781-1848)

Der Theologe, Logiker und Mathematiker Bernard Bolzano hatte eine klare Vorstellung von den Grundbegriffen der Analysis bezüglich *Stetigkeit, Ableitung* und der Beziehung der beiden zueinander. Dennoch blieben seine dazu verfassten Arbeiten fast ein halbes Jahrhundert unbeachtet und ohne große Wirkung, da er seine Forschungen im Eigentlichen nur als reines Hobby sah.[267] Auch aufgrund seiner isolierten Position in Europa konnte Bolzano nicht viel mit seinen mathematischen Kenntnissen anrichten, kann aber mit seinen Entdeckungen aus heutiger Sicht auf eine Stufe mit seinen Zeitgenossen Cauchy und Weierstraß gestellt werden.[268]

Insbesondere seine Arbeit *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, die im Jahr 1817 publiziert wurde, ist in der präzisen Darstellung der Grundlagen ihrer Zeit bei weitem voraus.[269] Darin beweist Bolzano nämlich nicht nur streng den Zwischenwertsatz, sondern gibt auch noch eine präzise Definition von Stetigkeit, die sogar vor der Definition Cauchys erschienen ist.[270] Außerdem wird bei ihm zum ersten Mal das „Cauchysche“ Konvergenzkriterium aufgestellt:

> *„Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+1}(x)$, von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem n-ten Gliede $F_n(x)$ und jedem späteren $F_{n+r}(x)$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser*

[266] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.192-193.
[267] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege., S.218, Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.495.
[268] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.497; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.253.
[269] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.55
[270] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.498; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.255.

Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.[271]

Dass er dabei Folgen von Funktionen und nicht von Zahlen betrachtet, ist von nicht so großer Bedeutung. Mit diesem Lehrsatz stellt Bolzano indirekt den Grenzwert als eine Größe auf, dessen Folgeglieder sich beliebig nah kommen können, wenn man nur weit genug voranschreitet. Unter einem ähnlichen Zugang drückt sich kurze Zeit später auch Cauchy in seinem Werk *Cours d´analyse* im Zusammenhang mit Reihen aus. Das von Bolzano stammende Cauchy-Kriterium ist das eigentliche Fundament des modernen Konvergenzbegriffs und das wesentliche Charakteristikum der reellen Zahlen. Für die Konvergenz war eine Bedingung des Kriteriums notwendig, welches unmittelbar aus der Definition des Grenzwertes zustande kam. Des Weiteren zeugt es von der gedanklichen Schärfe Bolzanos, dass er das Cauchy-Kriterium als einen zu zeigenden Lehrsatz sah, jedoch mangelte es ihm an einem klaren Begriff der irrationalen Zahl. Erst mit Cantor und Dedekind konnten derartige Lücken beseitigt werden.[272]

Im Zusammenhang mit der Funktion, die sich inner- und außerhalb von Grenzen nach dem Gesetzte der Stetigkeit ändert, bedeutet dies für Bolzano, dass

> *„wenn x irgendein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.“*[273]

Für den dazugehörigen Beweis führte er Fundamental- bzw. sogenannte Cauchy-Folgen ein und zeigte, dass eine Konvergenz gegen eine beständige Größe existiert. Da dies aber für ihn nicht genügend war, versuchte er weiter eine Begründung dafür zu finden, dass der Grenzwert konstant und eindeutig ist, sowie so genau wie gewünscht bestimmt werden kann.[274]

Erst nach Bolzanos Tod 1851 wurde wohl seine bedeutendste Arbeit über die *Paradoxien des Unendlichen* veröffentlicht. Verfasst wurde sie etwa nur ein Jahr vor seinem Ableben und erfuhr anfangs wenig Interesse, bis sein Zeitgenosse Hermann Hankel darauf hinwies, dass das Buch

> *„treffliche Bemerkungen über den Begriff des Unendlichen enthält.“*[275]

---

[271] Vgl. *Walter;* Analysis 1, S.55.
[272] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.55.
[273] Vgl. *Lützen;* Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.219.
[274] Vgl. *Lützen;* Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke (*Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.220.
[275] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.500; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.256.

In den darin angeführten 70 Paragraphen wird alles dargelegt, was es an Paradoxien beim Umgang mit der Unendlichkeit gibt. Bolzano konnte damit wohl seinen wichtigen Stellenwert in der Geschichte der Analysis darlegen und erweist sich mit seiner intensiven Auseinandersetzung mit den Problemen der Unendlichkeit, sowie seinem tiefen Eindringen in diese Materie, als der Denker seiner Zeit. Der Teppich für den Mächtigkeitsbegriff der Cantorschen Mengenlehre war somit ausgelegt, mit dessen Hilfe zum ersten Mal scheinbar selbstverständliche Behauptungen über stetige Funktionen gezeigt werden konnten und auch mussten. Denn nur so fand eine Anwendung in voller Allgemeinheit statt.[276]

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Neben Euler gehörte Cauchy zu den produktivsten MathematikerInnen seiner/ihrer Zeit. In seiner Schaffensperiode gelang es ihm, fünf Lehrbücher und mehr als 800 Aufsätze zu veröffentlichen, die seinen enormen Beitrag auf dem Gebiet der komplexen Funktionstheorie, der Algebra, der Fehlertheorie, der Himmelsmechanik und der mathematischen Physik, sowie der Elastizitätstheorie und der Optik bis weit über sein Land hinaus untermauerten.[277] Trotz seinem darin dargelegten genialen Wissen, lassen sich seine Publikationen extrem schwer lesen und präsentieren eine gewisse Unbestimmtheit, sowie Probleme in auftauchenden Definitionen und Beweisen, die erst viel später durch eine Entwicklung seiner Ideen gelöst werden konnten.[278] Wie schon bei einigen MathematikerInnen davor, wurde auch hier im wissenschaftlichen Fortschritt der Weg durch eine Abkehr von metaphysischen Bestrebungen gebahnt, sowie mit dem Entschluss, nur mit Begriffen zu arbeiten, die grundsätzlich „beobachtbaren“ Erscheinungen entsprechen.[279] Kurzum kann über Cauchy gesagt werden, dass er bekannte Sätze des 18. Jahrhunderts heranzog, um sie dann in Definitionen wichtiger Begriffe der Analysis des 19. Jahrhunderts umzuwandeln, sowie ein Operieren mit diesen neue Bekanntheiten erlaubte.[280]

---

[276] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.500; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.256; Vgl. *Courant, Robbins;* Was ist Mathematik, S.238.
[277] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.198; Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.495.
[278] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.199.
[279] Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.233.
[280] Vgl. *Jahnke;* Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, S.102.

Mit Recht darf Cauchy als einer der Hauptakteure bei der Verschärfung der Grundlagen der Analysis gesehen werden, auf die er sich auch in seinen Vorlesungen bezogen hatte.[281] Schließlich kommt es bei ihm zu einer sauberen Begriffsbildung des Grenzwertes und einer besonderen Auslegung auf äußerste Genauigkeit, was anfangs etwas abschreckend bei seinen StudentInnen wirkte. Trotzdem entwickelte sich aus seinen Vorträgen an der Universität sein bekanntestes Lehrbuch *Cours d´Analyse*, welches schließlich das Zeitalter der Strenge mit dem Grenzwertbegriff als Grundlage einleitete.[282] Zudem brachte Cauchy noch den grundlegenden Gedanken, die Forderung nach Existenzbeweisen, ins Gebiet der Analysis ein, was eine überaus wichtige Forderung für die Theorie der Differentialgleichungen darstellte.[283]

Wie oben schon erwähnt, etablierte Cauchy 1821 neue Maßstäbe an die Strenge in seinem *Cours d´Analyse.* Darin wichtige Fragen, die letztlich eine Definition des Grenzwertes erforderten, lauteten unter anderem:

> *„Was ist eine Ableitung in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert.*
>
> *Was ist ein Integral in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert.*
>
> *Was ist eine unendliche Reihe* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert."*[284]

Weiterführend brauchte es dafür aber:

> *„Was ist ein Grenzwert? Antwort: Eine Zahl.*
>
> *Und schließlich die letzte Frage:*
>
> *Was ist eine Zahl?"*[285]

Also musste ohne Zweifel bei Cauchy eine exakte Definition des Grenzwertes her, der dazu einerseits die Ideen seines Vorgängers d´Alembert aufgriff und auf der anderen Seite aus der bisherigen geometrischen Vorstellung austrat, um eine Arithmetisierung des Begriffs vorzunehmen. So definierte er:

---

[281] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.247.

[282] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218; Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.193; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.504; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.65.

[283] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.249.

[284] Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.186.

[285] Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.186.

„Wenn sich die Werte, die man ein und derselben Variablen nacheinander gibt, unbeschränkt einem festen Wert nähern, so daß die Diferenz schließlich beliebig klein wird, heißt dieser letztere Grenzwert der andern Werte.“[286]

Wenn der Grenzwert auf die Folgen s_n also angewendet wird, wird bei Cauchy immer angenommen, dass n gegen unendlich geht. Außerdem hatte er bei anderen Fällen, die immer zwei Variablen im Spiel hatten, von denen eine einer Funktion der anderen entspricht, im Sinn, dass $f(x) \to a$ für $x \to b$ beschreibt.[287]

Zur näheren Erklärung seines Grenzwertbegriffs soll nun folgender Satz beweisen werden:

„Wenn das Verhältnis $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ sich der Grenze k nähert, während x beliebig zunimmt, und $f(x)$ für sehr große Werte von x positiv ist, so wird der Ausdruck $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ sich gleichzeitig derselben Grenze nähern.“[288]

Im ersten Schritt wird dafür die Voraussetzung aufgestellt, dass die notwendig positive Zahlgröße k einen endlichen Wert habe. Des Weiteren soll ε eine beliebig kleine Zahl bezeichnen. Da nun für wachsende Werte von x sich das Verhältnis $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ der Grenze k nähert, so kann immer der Zahl h ein so großer Wert beigelegt werden, so dass, wenn x gleich oder größer als h ist, das Verhältnis, um welches es sich hier handelt, beständig zwischen den Grenzen $k - \varepsilon, k + \varepsilon$ liegt.[289]

Mit diesem Beweis hat Cauchy seine Bedeutung der Definition mit allen Quantoren $\varepsilon{'}s, N{'}s$ und Ungleichungen zum Ausdruck gebracht und zeigt damit, dass sie genau hier unserem heutigen Grenzwertbegriff entspricht, lediglich dadurch, dass er bisher einer Variablen oder Folge mehr als einen Grenzwert zu haben gestattete, zeigt den Unterschied.[290]

Auch der Begriff *„unendlich kleine Größe“* wird bei Cauchy als Variable definiert, nämlich als diejenige die unbeschränkt gegen $\pm\infty$ wächst.

„Wenn die aufeinanderfolgenden numerischen Werte derselben Variablen unbegrenzt abnehmen, so dass sie unter jede gegebene Zahl fallen, dann wird die Variable zu einer

[286] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218.
[287] Vgl. *Lützen;* Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.201.
[288] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.202.
[289] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.202.
[290] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.202.

Infinitesimalen oder eine infinitesimale Größe. Eine Variable dieser Art hat den Grenzwert Null.“ [291]

Anschließend charakterisierte er Funktionen als Variablen, die von anderen Variablen abhängen:

„Wenn veränderliche Zahlgrößen in solcher Weise untereinander zusammenhängen, daß man aus dem gegebenen Wert von einer Veränderlichen die Werte aller übrigen herleiten kann, so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Zahlgrößen vermittelst jener einer ausgedrückt. Jene eine nimmt dann den Namen: unabhängige Veränderliche an, während die übrigen, die mittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Zahlgrößen, sogenannte Funktionen jener einer Veränderlichen sind.“[292]

Ebenfalls im *Cours d´analyse* ist der Konvergenzbegriff zu finden, wobei sich Cauchy mit den Grenzwerten gewisser Funktionswerte für die Fälle $x \to \pm\infty$ und $x \to 0$ beschäftigt.[293]

„Man nennt „Reihe“ eine unbegrenzte Folge von Zahlgrößen u_0, u_1, u_2, u_3 usw. welche nach einem bestimmten Gesetze auseinander entstehen. Diese Zahlgrößen an und für sich bilden die verschiedenen Glieder der betrachteten Reihe. Es sei nun $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$ die aus den n ersten Gliedern gebildete Summe, wobei n eine beliebige ganze Zahl bezeichnen möge. Wenn alsdann für stets zunehmende Werte von n die Summe s_n sich einer gewissen Grenze s beliebig nähert, so werden wir die Reihe convergent nennen, und die in Rede stehende Grenze heißt die Summe der Reihe. Nähert sich dagegen, wenn n ohne Ende zunimmt, die Summe s_n keiner gegebenen Grenze, so wird die Reihe divergent genannt, und sie wird nicht mehr eine Summe haben.“[294]

Die Ableitung einer stetigen Funktion $y = f(x)$ wird auch als Grenzwert definiert, im Fall einer Existenz als jener der Differenzenquotienten $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, wenn i gegen den Grenzwert Null strebt. Nach dieser Feststellung stellte Cauchy zudem eine Beziehung zu den Differentialen des Leibniz´ her:

Wenn dx eine beliebige endliche Größe darstellt, so ist das Differential dy einer Funktion

---

[291] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.506; Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218.

[292] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.193.

[293] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.507.

[294] Vgl. *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.197.

$y = f(x)$ nichts anderes als $f'(x)dx$. Mit dieser Erkenntnis sind somit die Größen dx und dy einzig und allein durch die Eigenschaft definiert, dass ihr Quotient gleich der Ableitung $f'(x)$ ist. Zur absoluten Klärung der Beziehung zwischen dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ und der Ableitung $f'(x)$ bewies Cauchy den Mittelwertsatz

$$y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

wobei $0 < \theta < 1$.[295]

Auch bei der Integration machte Cauchy als Anhänger der Sichtweise von Leibniz mit seiner Definition des Integrals einen wichtigen Schritt nach vorne. Ganz anders wie seine VorgängerInnen, die das Integral einerseits als das, durch die Umkehrung der Ableitung gewonnene *unbestimmte* und andererseits als das daraus durch Einsetzen der Grenzen gewonnene *bestimmte* Integral interpretierten, entwickelte er einen davon ganz unabhängigen Integralbegriff für das bestimmte Integral.[296] Euler hatte nämlich diesbezüglich Flächen und Volumina als Summen von Rechtecken bzw. Zylindern analysiert und war auf diesem Wege zum bestimmten Integral gelangt. So war es für Cauchy von großer Bedeutung, zuerst die Existenz von Integralen zu beweisen, bevor man ihre verschiedenen Eigenschaften zeigt.[297]

Ausgangspunkt dieser Erkenntnis bildete eine reelle Funktion f, die im Intervall $[x_0, X]$ stetig ist. Dieses Intervall wird durch die Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = X$ in n Teilintervalle zerlegt. Schließlich bildet Cauchy die Summe

$$S = (x - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Wenn man nun die Länge des größten Teilintervalls gegen Null gehen lässt, kann gezeigt werden, dass der Grenzwert von S existiert, vorausgesetzt f ist stetig. Dieser Grenzwert hängt nur von der Funktion f und den äußersten Werten x_0 und X, die man der Variablen x gibt, ab und ist das, was folglich als bestimmtes Integral bezeichnet wird. Um diesen Grenzwert zu benennen, verwendete Cauchy das von Herrn Fourier erdachte Zeichen

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Anschließend definierte Cauchy die Funktion

[295] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.218-219.
[296] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.511.
[297] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.219.

$$F(x) = \int_{x_0}^{X} f(t)dt,$$

wobei x zum Intervall $[x_0, X]$ gehören soll. Er zeigte mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass im Intervall $[x_0, X]$

$$F'(x) = f(x)$$

gilt und stellte damit die Beziehung zwischen Integration und Differentiation her, womit man bei Cauchy erstmals einen strengen Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung findet.[298]

Cauchys Integralbegriff lässt sich auf stückweise stetige Funktionen erweitern, welche beschränkte Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Integrationsintervall sind. Sei f eine im Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion, die an der Stelle c aus $[a, b]$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt, so definierte er einen verallgemeinerten Integralbegriff folgendermaßen:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Als eine Anwendung des bestimmten Integrals bewies Cauchy die Taylor- Formel, bei der er die Reihe mit den Gliedern

$$f(x), \frac{h}{1!} f'(x), \ldots, \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x), \ldots$$

näher betrachtete und die Konvergenz dieser zeigte, sowie dass ihre Summe die Funktion

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + ..$$

ist. Dabei muss aber angenommen werden, dass das Integral

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+z)dz = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

für alle Werte der wachsenden Variablen n gegen Null konvergiert.[299]

[298] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.219-220.

[299] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.220.

Mit Cauchys Ausarbeitung des Integralbegriffes konnte zwar schon vieles ausgebaut werden, jedoch war es immer noch nicht ausreichend genug, um Probleme des 19. Jahrhundert erfolgreich zu beseitigen. Noch im selben Jahrhundert sollte es von Riemanns Definition ersetzt werden. Allerdings war auch dieses Integral nicht in der Lage, Missstände der Integrationstheorie befriedigend zu lösen, weshalb am Anfang des 20. Jahrhundert das Lebesgue-Integral ausnahmslos zu dem bis heute herrschenden Integralbegriff wurde.[300]

Karl Weierstraß (1815-1897)

Der Gymnasiallehrer und spätere Mathematikprofessor Karl Weierstraß war die treibende Kraft hinter der Präzisierung der Grundlagen der Analysis im Deutschland des 19. Jahrhunderts.[301] Durch ihn erfährt die Analysis nämlich die langersehnte und endgültige Transformation in eine strenge mathematische Theorie.[302] Er hat Zeit seines Lebens auf zahlreichen Gebieten bahnbrechende Arbeiten geleistet, wie unter anderem in der Funktionentheorie, also der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, der Variationsrechnung, der Differentialgeometrie und der Theorie der elliptischen Funktionen. Vor allem mit dem Verschwinden des Unendlich-Kleinen aus der klassischen Analysis, schaffte er den echten Durchbruch.[303] Des Weiteren wird er als Vater der Epsilontik, jenes für die exakte Behandlung von Grenzwerten typische Beweisverfahren, bezeichnet, da er die Bemühungen von Bolzano und Cauchy nochmals um eine Strenge weiterführte. Bei ihm wird der Grenzwertbegriff vollständig arithmetisiert und zudem endgültig von der geometrischen Anschauung entkleidet.[304] Eine weitere Reduzierung der Anschauung erfolgte schließlich, als auch er Begriffe exakt definierte. Hierfür beschäftigte sich Weierstraß im Zusammenhang mit der Frage, welchen Sinn die mit Vorstellungen von Zeit und Bewegung verbundene Aussage:

> „*Eine Variable nähert sich unbegrenzt einem festen Wert.*“[305]

hat. Mit dieser Herangehensweise gelang es ihm schließlich, die $\varepsilon - \delta - Definition$ für die unendlich kleine Änderung der Variablen und der Funktion aufzustellen:

---

[300] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.511; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.249.
[301] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.495.
[302] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.519; Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.255.
[303] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.522.
[304] Vgl. *Walter*; Analysis 1, S.56; Vgl. *Hairer, Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung, S.186.
[305] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.221.

„Ist es möglich, eine Grenze δ so zu bestimmen, daß für alle Werte von h, die betragsmäßig kleiner als δ sind, $f(x+h) - f(x)$ kleiner als eine Größe ε ist, die man beliebig klein wählen kann, so sagt man, eine unendlich kleine Änderung der Variablen führe zu einer unendlich kleinen Änderung der Funktion."[306]

Anschließend ergaben sich daraus direkt die modernen Definitionen von Grenzwert und Stetigkeit, die einen präzisen arithmetischen Formalismus brauchten. Somit hat Weierstraß die Analysis in die uns heute bekannte Form gebracht.[307]

Weierstraß´ Aufgabe bestand darin, die gesamte Analysis auf die Arithmetik, also auf den Begriff der natürlichen Zahl, zurückzuführen. Allerdings fehlte es auch noch in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts an einer Theorie über die reellen Zahlen. Da aber er als einer der ersten das Fehlen logischer Grundlagen in diesem Gebiet der Mathematik entdeckte, arbeitete er schließlich seine Theorie der reellen Zahlen um das Jahr 1863 aus. Dabei nahm er die Menge der natürlichen Zahlen unter Einschluss der Null als Grundlage und setzte deren Existenz voraus. Des Weiteren betrachtete er die *exakten Teile der Einheit* $\frac{1}{n}$, was ihm erlaubte, die positiven rationalen Zahlen als endliche Linearkombinationen der exakten Teile der Einheit mit natürlichzahligen Koeffizienten zu definieren. So stellt beispielweise $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ die Zahl Eins dar, $\left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right\}$ ist gleich $\frac{2}{7}$ und $\left\{\frac{3}{10}, \frac{1}{10,}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$ ist gleich $\frac{3}{5}$. Diesbezüglich muss allerdings eine Gleichheitsrelation definiert werden.[308]

Im nächsten Schritt nahm Weierstraß dafür Aggregate mit unendlich vielen Elementen in Augenschein, für die er eine Gleichheitsrelation auf Basis der Inklusionsbeziehung definierte. So ist eine reelle Zahl nach ihm eine Äquivalentklasse, nach der eben angeführten Äquivalenzrelation von Aggregaten, die aber eine Bedingung erfüllen muss:

„Man sagt, eine Zahl a habe einen endlichen Wert, wenn es eine Zahl gibt, die größer als a ist und aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt ist."[309]

Folglich zeigte er, dass sich die elementaren Operationen der Arithmetik auf neue Zahlen übertragen lassen, die den Bereich $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen bilden.[310] Nur auf diese Art

---

[306] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.221.
[307] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.221.
[308] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.221, 223.
[309] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.223.
[310] Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.223.

und Weise wurde es ihm möglich, den Begriff der unendlich kleinen Größe zu ersetzen. Diesbezüglich sagte er:

> *„Eine unendlich kleine Größe ist eine Funktion φ der Variablen h derart, daß man zu gegebenem ε immer ein δ mit der Eigenschaft finden kann, daß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε ist."*[311]

Darauf aufbauend wurden noch zwei weitere Theorien der reellen Zahlen im Jahr 1872 publiziert. Eine von Georg Cantor und Eduard Heine, die andere von Richard Dedekind.[312]

Ein wichtiges Werkzeug der Analysis im 19. Jahrhundert war außerdem der „Satz von Bolzano-Weierstraß":

> *„Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine konvergente Teilfolge."*[313]

Um die eindeutig bestimmten Grenzwerte einer Zahlenfolge zu unterscheiden, bezeichnet man die Grenzwerte der Teilfolgen als *Häufungspunkte* der Folge. So ist die Folge

$$s_n = (-1)^n$$

ohne Zweifel beschränkt, aber nicht konvergent und besitzt somit keinen Grenzwert. Da man sie aber in zwei konvergente Teilfolgen

$$1,1,1,1,1 \dots \text{ und } -1,-1,-1,-1,\dots$$

zerlegen kann, hat die Folge demnach die Häufungspunkte $+1$ und -1.[314]

Bei Weierstraß taucht auch erstmal eine Unterscheidung zwischen *punktweiser* und *gleichmäßiger* Konvergenz auf. Nachdem durch Dedekind und Cantor die reellen Zahlen explizit konstruiert werden konnten, gelang es ihm ein für alle Mal den Begriff der *Konvergenz* in algebraische Art zu fassen:

> *„Eine reelle Zahlenfolge s_n besitzt einen Grenzwert s, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass für alle weiteren Indizes $n > N$ $|s_n - s| < \varepsilon$ gilt."*[315]

---

311 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.522.

312 Vgl. *Peiffer, Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege, S.223.

313 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.523.

314 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.523.

315 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.524.

Schließlich gebührt ihm der Verdienst, die Bedeutung des Gleichmäßigkeitsbegriffes voll erkannt zu haben. Denn nur durch ihn konnte dieser erfolgreich in die Analysis eingeführt werden, wobei er immer von der „Konvergenz in gleichem Grade“ sprach:

> *„Wenn eine unendliche Reihe stetiger Funktionen auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, dann darf man gliedweise integrieren, um das Integral über die Summe der Reihe zu erhalten.“*[316]

Auch der Grenzwert von Funktionen wurde von Weierstraß klar formuliert, was für $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ demnach bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, wenn nur $|x - x_0| < \delta$ ist.[317]

Bernhard Riemann (1826-1866)

Mit Bernhard Riemann und seinem im Jahr 1854 gehaltenen Habilitationsvortrag *Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, begann die moderne Differentialgeometrie, welche im klassischen Sinne das Studium von Kurven und Flächen als Elemente des umgebenen zwei- oder dreidimensionalen Raumes bezeichnet. Mit der Loslösung dieser Kurven und Flächen aus dem sie umgebenen Raum entwickelte schließlich Riemann später Ansätze einer intrinsischen Analysis solcher Objekte und schuf den Begriff der *Mannigfaltigkeit.*[318]

Riemann klärte den Integralbegriff und definierte das, was wir heute das *Riemann-Integral* nennen, welches auf die von Fourier und Dirichlet untersuchte Entwicklung „willkürlicher“ Funktionen in sogenannten Fourier-Reihen basiert.[319] So beginnt die Darstellung der Vorgeschichte mit dem Blick auf Jean Baptiste Fourier (1767-1830). Dieser beschäftigte sich nämlich mit auftauchenden Fragen bei der Untersuchung der Wärmeleitung in festen Körpern, die bereits bei Diskussionen um die schwingende Saite eine bedeutende Rolle gespielt hatten:

---

[316] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.526.
[317] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.524.
[318] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.584.
[319] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.495; Vgl. Thomas *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999), S.329.

„Wann lässt sich eine „willkürliche“ Funktion f im Intervall $[-\pi, +\pi]$ durch eine trigonometrische Reihe $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, cos(nx) + b_n\, sin(nx)), x \in [-\pi, +\pi]$ darstellen?“[320]

„Wie lassen sich die Koeffizienten a_n und b_n dieser Reihe bestimmen?“[321]

Die erste Frage wurde bereits mit den Arbeiten von Cauchy beantwortet, zumindest für stetige Funktionen, und zwar unabhängig von der Existenz einer definierenden Gleichung. Fouriers Ideen dazu behandeln aber vielmehr eine allgemeinere Frage:

„Lässt sich $\int_a^b f(x)dx$ für jede beliebige Funktion definieren bzw., was hat man darunter zu verstehen?“[322]

Riemann betrachtet wie Cauchy Partitionen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$, definiert aber dann mit

$$\delta_i = x_i - x_{i-1}(i = 1, \dots, n)$$

und „positiven echten Brüchen“ ε_i mit $\varepsilon_i \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, unterschiedliche Summen

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot f(x_{i-1} + \delta_i \varepsilon_i),$$

die von der Wahl der Intervalle δ und der Größen ε abhängen, woraus sich schließlich Riemanns Zugang zur Definition des Integrals aufzeigen lässt:

„*Haben obige Summen die Eigenschaft, „wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern sobald sämtliche δ unendlich klein werden“, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)dx$.“*[323]

[320] Vgl. *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.330.
[321] Vgl. *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.330.
[322] Vgl. *Hochkirchen;* Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.331.
[323] Vgl. *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.333; Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.264.

Mit dieser Formulierung übertrifft Riemann seinen Zeitgenossen Cauchy, da dieser lediglich Integrale für stetige Funktionen definierte, indem er integrierbare Funktionen einführte.[324] So gelingt es ihm, einen neuen Blick auf eine moderne Entwicklung der Analysis zu richten, nämlich auf die der Maßtheorie. Diese bildet bis heute die Grundlage der Integrationstheorie, wie auch die der Stochastik.[325] So wurde sein Integral sofort als bestimmtes Integral gebildet und kehrt in gewisser Weise den von Newton vorgeführten Weg um. Schließlich gelingt es Riemann, die Beziehung zwischen Integral und Stammfunktion aufzuklären.[326]

Weil Riemanns Theorien auf Dirichletsche Prinzipien begründeten, tauchten diesbezüglich später aber einige Schwierigkeiten auf, denn

$$D(x) \coloneqq \begin{cases} c\,; x \in \mathbb{Q} \\ d\,; x \epsilon \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar. Des Weiteren muss der Grenzwert einer Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen nicht notwendig Riemann-integrierbar sein, was sich als sehr unschön erwiesen hat.[327]

Im Schulunterricht findet das Riemannsche Integral im Allgemeinen seine Anwendung in Rechenaufgaben zur Bestimmung vom Flächeninhalt unter einer Kurve, indem durch $y = f(x)$ zunächst beschriebene Kurven mit einer im $[a, b]$ nicht-negativen, stetigen Funktion f betrachtet werden. Deren Graph wird dabei durch obere und untere Treppenfunktionen und der Flächeninhalt durch die Summen der Inhalte, der zu den Treppenstufen gehörenden Rechtecke, angepasst. Es kommt schließlich zu einer Bildung von Über- und Untersummen, meistens mit Stufen bzw. Rechtecken gleicher Breite, was im Wesentlichen nichts anderes bedeutet, als dass eine Zerlegung des Integrationsintervalls in gleichlange Teilintervalle vonstattengeht. Dabei wird dann der bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegung in diesem Falle vorhandene gemeinsame Grenzwert der Folgen von Über- und Untersumme folglich als bestimmtes Riemann-Integral bezeichnet, sowie auch als Flächeninhalt unter der Kurve interpretiert.[328]

---

[324] Vgl. *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.333.
[325] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.515; Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.190.
[326] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.194.
[327] Vgl. *Courant, Robbins;* Was ist Mathematik, S.278; Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.516-517.
[328] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.264.

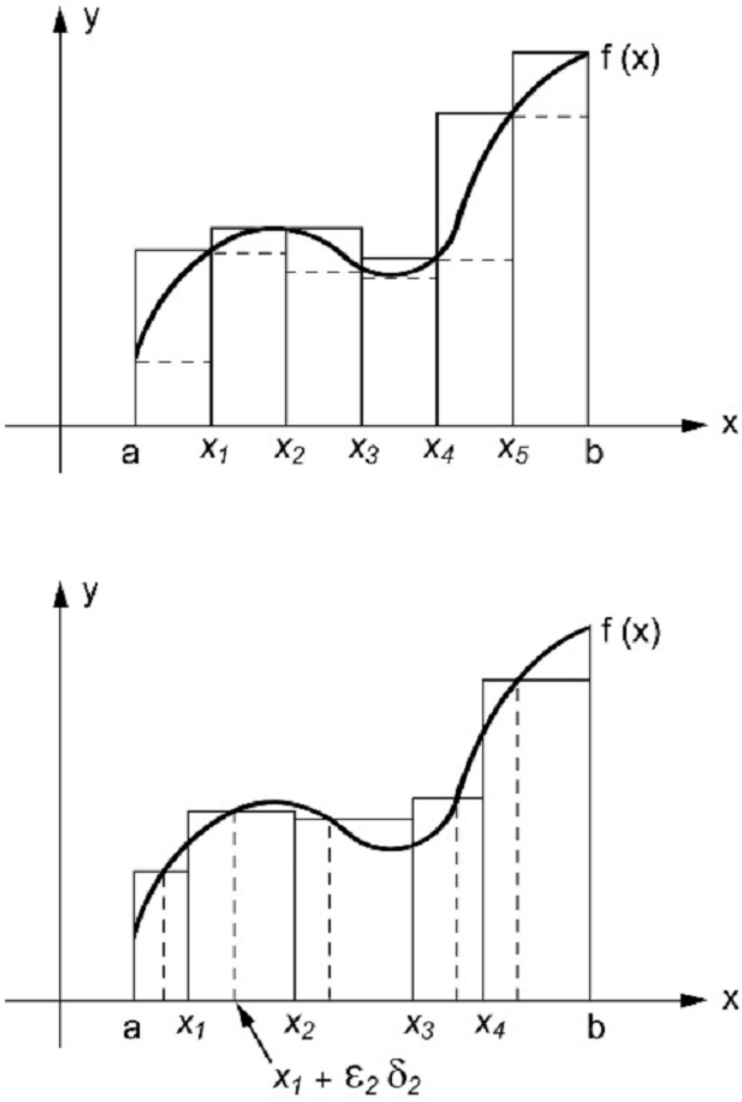


Abb.11

Diese aber nun beschriebene Originaldefinition von Riemann enthält jedoch keinerlei Voraussetzungen über die Funktion f. Bei ihr kommt es nämlich nicht zu einer Beschränkung auf gleichmäßige Einteilungen des Integrationsintervalls und gestattet darüber hinaus, dass Funktionswerte $f(x)$ an Abzissen im jeweiligen Teilintervall gebildet werden, die der jeweiligen Funktion angepasst sind. Zudem erfasst seine Bestimmung des Integrals insbesondere Klassen von Funktionen als integrierbar, die größer als die Klasse der stetigen Funktionen sind, wie in etwa die Klasse der beschränkt monotonen und die der, bis auf Sprungstellen beschränkten, stetigen Funktionen. Dementsprechend ist es nicht verwunderlich, dass damit einige Unruhe und Verwirrung bei Versuchen zur Bestimmung von maximalen Mengen von Abszissen im Intervall $[a, b]$ ausgelöst wurden. An denen ist nämlich die Funktion entweder unstetig oder sogar nicht beschränkt, dennoch aber im Riemannschen Sinne integrierbar. Dennoch war bis zum Ende des 19. Jahrhunderts der Integralbegriff im Allgemeinen auf die Riemannsche Bestimmung festgelegt worden und bekam mit der Zeit immer mehr Zuspruch.[329]

3.7 Das 20. Jahrhundert und der Blick in die Gegenwart

Am Anfang des 20. Jahrhunderts legte Henri Lebesgue (1875-1941) den Grundstein für die moderne Integrationstheorie. Sein neu eingeführtes Integral lebte von einer fruchtbaren Nutzung der Maßtheorie, um die zuvor entdeckten Schwächen des Riemann-Integrals auszubügeln. Dazu wichtig war vor allem die Neufassung des Funktionsbegriffes.[330] So gelang es ihm schließlich, zu einer noch größeren Klasse integrierbarer Funktionen durchzudringen. Dies zeigte er mit seiner 1901 veröffentlichten Arbeit *Sur une généralisation de l´intégrale définie* (Über die Verallgemeinerung des bestimmten Integrals), worin er die zentrale Idee formulierte, nicht etwa die Abszisse in Teilintervalle auseinanderzubauen, sondern die Ordinate darzulegen. Wird die Ordinate zwischen $y = y_0$ und $y = Y$ durch

$$y = y_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n = Y$$

also geteilt, dann können damit Mengen

$$S_i \coloneqq \{x | l_i \leq f(x) < l_{i+1}\}$$

betrachten und das Integral durch

$$\sum_{i=0}^{n-1} l_i \cdot |S_i| \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} l_{i+1} \cdot |S_i|,$$

eingeschlossen werden, wobei $|S_i|$ die „Größe“ der Menge S_i und im einfachsten Fall die Länge eines Intervalls bezeichnet. Dabei muss aber vorausgesetzt werden, dass die Mengen S_i messbar sind. Folglich entwickelte Lebesgue die dazugehörige Maßtheorie gleich mit.[331]

Seine Definition des Integrals konnte über eine Klasse von Funktionen angegeben werden, die über Riemann-integrierbare Funktionen hinausgehen und so also Lebesgue-integrierbar sind.

[329] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.265-267.
[330] Vgl. *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis, S.329.
[331] Vgl. *Sonar;* 3000 Jahre Analysis, S.516-517.

Zur Charakterisierung der Klasse von Riemann-integrierbaren Funktionen sagte Lebesgue mit seinem Maßbegriff:

> *„Eine in einem Intervall [a.b] beschränkte Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Maß Null hat."*[332]

Besonders das Jahr 1904 ist bei ihm erwähnenswert, da ihm der Beweis des folgenden Satzes gelungen war:

> *„Ist eine Funktion f differenzierbar in einem abgeschlossenen Intervall [a,b] und ist die Ableitung f' beschränkt, dann ist f' Lebesgue-integrierbar und es gilt*
>
> $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$"[333]

Das Lebesgue-Integral ist heutzutage das wohl gebräuchlichste Integral in der Mathematik. Allerdings haben sich auch weitere MathematikerInnen mit der Integrationstheorie beschäftigt. Hierfür kann zum Beispiel das *Kurzweil-Henstock Integral* erwähnt werden, welches der Tscheche Jaroslav Kurzweil (geboren 1926) und der Engländer Ralph Henstock (1923-2007) etwa um 1957 entwickelt haben. Dieses kann aber eher im Sinne des Integrals bei Riemann gedeutet werden und wird demnach in einigen bestimmten Situationen durchaus dem Lebesgue-Integral bevorzugt.[334] Heutzutage geht die Integration in einer Maßtheorie auf und ist mittlerweile auch unverzichtbar für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Außerdem kam es zu einer Ummünzung einer optimalen Linearisierbarkeit des anfänglichen Begriffs der *Differenzierbarkeit*, wodurch er in höherdimensionalen Zahlenräumen heimisch wurde.[335]

Die Analysis hatte sich nun endlich im Laufe der 30er Jahren zu einer selbstständigen mathematischen Disziplin herauskristallisiert. Nicht nur mit der Ausdehnung in Umfang und Tiefe behandelnder Gebiete der klassischen Analysis wurde ihr Rang verteidigt, sondern insbesondere auch mit der Funktionsanalysis als neuer Zweig. Diese hat, wie wir gesehen haben, verschiedenste Wurzeln in der Geschichte der Mathematik und entwickelte sich einerseits aus dem Streben nach Vereinheitlichung und andererseits aus Ansätzen von Lösungsversuchen konkreter Probleme. Nichtsdestotrotz war die Anerkennung der Funktionsanalysis ein durchaus mühsamer Weg, weshalb sich deren Anfänge aufgrund zu abstrakter Begriffsbildungen wenig entfalten konnte. Erst mit der Ermittlung ergebnisreicher

---

[332] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.408.
[333] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.408.
[334] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.519.
[335] Vgl. *Körle*; Die phantastische Geschichte der Analysis, S.194-195.

Anwendungen änderte sich die Sachlage schlagartig. Vor allem die Quantenmechanik, in der beobachtbare Größen eines atomaren Systems mit Hilfe linearer Operatoren im Hilbert-Raum beschrieben werden, profitierte enorm davon. Außerdem ergab sich in der Hinwendung zu einer allgemeineren Akzeptanz mit Hausdorff und dessen *Grundzüge der Mengenlehre* die Definition des topologischen Raumes. Dieser Meilenstein repräsentiert in der Historiographie den Beginn der modernen mengentheoretischen Funktionsanalysis.[336]

Auch in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wurden viele neue Errungenschaften erzielt. Zum Beispiel beschäftigt sich das Gebiet des Dynamischen Systems mit dem Langzeitverhalten von Lösungen, und die Bifurkationstheorie erlaubt Untersuchungen über Verzweigungen bei Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. Da eine exakte Lösung aber nur bei wenigen Differentialgleichungen erfolgen kann, gewann auch die Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen im 20. Jahrhundert an enormen Stellenwert. Das jeweilige Problem sollte nun durch eine Linearisierung und Diskretisierung in gewaltige Systeme linearer Gleichungen überführt werden. Schließlich erhält man dementsprechend approximierte Werte für die Lösung in benachbarten Punkten. Hierfür zu erwähnen sei die Theorie der sogenannten Sobolew-Räume, die von dem gleichnamigen Mathematiker Sobolew (1908-1989) entwickelt wurden. Diese beinhalten im schwachen Sinne differenzierbare Funktionen, wie zum Beispiel Funktionen mit einem Knick. Insbesondere in der Theorie partieller Differentialgleichungen nehmen diese Räume in der heutigen Mathematik eine herausragende Rolle ein. Da dieses Gebiet sowieso zu einem der aktivsten innerhalb der Mathematik zählt, aufgrund ihrer Verwendung in der Natur- und Ingenieurwissenschaft, hat sich auch die Numerische Analysis zu einem großen Forschungsgebiet entwickelt. Unterstützung erhält sie dabei von modernen Computern, die immer schneller, mit ständig wachsenden und kaum noch vorstellbaren Rechenkapazitäten, arbeiten.[337]

[336] Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.411-414.
[337] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.588-590, 611.

4. Resümee

Seit den Anfängen in den antiken Hochkulturen hat sich die Analysis zu einem der mächtigsten Bereiche innerhalb der Mathematik entwickelt, welche vielschichtige Zweige und mit anderen Thematiken der Mathematik fruchtbare Verbindungen eingegangen ist. Diese aufregende Geschichte kann aber mit dieser Arbeit nur anhand ihrer Wurzeln dargestellt werden, da die Analysis sehr umfangreich ist und auch heute noch als äußerst aktives Forschungsgebiet gilt. Vor allem was die Analysis soll, wozu sie dient, wofür man sie braucht und wo sie uns im täglichen Leben begegnet, sind in diesem Zusammenhang auftauchende Fragen, mit denen sich MathematikerInnen Zeit ihres Lebens beschäftigen. Nicht verwunderlich ist daher die einfache Antwort darauf: Die Analysis und ihre Anwendungen verfolgen uns auf Schritt und Tritt.[338]

Wie so eine Entstehung möglich sein konnte bzw. welche ersten Schritte dafür überhaupt getan werden mussten, können ziemlich gut mit den Paradoxien des Zenon eingeleitet werden. Denn bereits antike MathematikerInnen hatten anscheinend schon zu dieser Zeit eine Vermutung vom Begriff des Grenzwerts, gingen aber einem anderen Ziel nach, weil ihnen der Umgang mit dem Unendlichen ungeheuerlich erschienen war. Obwohl sie sich damit aber beschäftigten und auch gerne darüber nachdachten, war ihr Unwohlsein doch größer, weshalb sie in erster Instanz viel lieber ihre Lösungen auf sicherem Terrain wissen wollten. Dies ist den GriechInnen schließlich mit dem doppelten Widerspruchbeweis mehr als nur gelungen. Dennoch erhöhte sich das Bedürfnis zur Klärung des Unendlichkeitsgedankens, woraufhin sich auch aus der vermehrten Auseinandersetzung mit diesem, neue Strategien und Lösungen entwickeln konnten. Anfängliche Probleme wurden somit beseitigt, sowie im Zusammenhang mit propädeutischen Ansätzen überragende Ergebnisse erzielt. Genauigkeit und eine präzise Vorgehensweise stellten sich als zu verfolgende Priorität heraus, was schließlich zu besseren Grundlagen in der Analysis und zu unserer heutigen Auffassung des Grenzwertbegriffs führte.

Besonders die Entwicklung der Analysis im 18. Jahrhundert stellte einen enorm wichtigen Stellenwert in der Theorie der Differentialgleichungen dar. Aufgrund derer konnte sich nämlich eine Fülle an technischen Fortschritten entfachen und das alltägliche Leben sicherer bzw. angenehmer machen. Stahlkonstruktionen wie Brücken, größere Schiffe und sogar der Eiffelturm sind auf greifende Ideen aus der Analysis angewiesen und forderten die mathematischen Kenntnisse von IngenieurInnen. Stationäre Dampfmaschinen zur Zeit der Industriellen Revolution zum Beispiel wurden in der Regel mit einem Fliehkraftregler

[338] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.590, 634.

gesteuert. Wenn aber die Dampfzufuhr zu groß war, erhöhte sich auch dementsprechend die Drehzahl der Maschine. Mit Hilfe zweier Metallkugeln, die durch die Fliehkraft nach außen gedrückt wurden, erfolgt eine Reduzierung der Zufuhr des Dampfes. So blieb im Mittel die gewünschte Drehzahl konstant und der Erhalt der Maschine war gesichert. Mathematisch gesehen, lassen sich derartige Regelungen auf gekoppelte Systeme von Differentialgleichungen modellieren, wofür zur Berechnung die Analysis gebraucht wird. Heutzutage basiert die gesamte Regelungstechnik auf analytischen Methoden, aus denen außerdem neue Entwicklungen hervorgebracht wurden.[339]

Das 17. Jahrhundert kann, wie oben schon näher beschrieben, ohne Übertreibung den beiden Mathematikern Newton und Leibniz zugeschrieben werden. Dennoch wäre es eine absurde Vereinfachung, nur sie als einzige Erfinder der Infinitesimalrechnung in den Mittelpunkt zu stellen. Auch der Infinitesimalrechnung liegt eine wahrhaft lange Schaffensperiode zu Grunde, die weder von Newton noch von Leibniz eingeleitet oder abgeschlossen wurde, in der aber beide eine vorbildhafte Funktion eingenommen haben. Über ganz Europa waren Gruppen von MathematikerInnen verstreut, die es sich zur Aufgabe machten, das mathematische Werk Galileis und Keplers auszubauen. Aufgrund der engen Korrespondenz untereinander wurden auf diese Weise Probleme und Missstände tatkräftigst diskutiert. Dabei spielten die Schwierigkeiten bei den uns wohl bekannten Quadratur- und Tangentenkonstruktionen eine entscheidende Rolle. Schließlich bildete das Tangentenproblem, also zu einer gegebenen Kurve die berührende Gerade zu finden, sowie das Quadraturproblem, also die Suche nach dem Flächeninhalt innerhalb einer gegebenen Kurve, das Fundamentalproblem der Differential- bzw. Integralrechnung. Erst Leibniz´ und Newtons Verdienste machten es möglich, den inneren Zusammenhang dieser beiden Missstände zu erkennen. Mit ihren darauf entstandenen Ansätzen konnte eine neue einheitliche Methode herausgebildet werden, was die Infinitesimalrechnung als ein mächtiges neues Werkzeug für die Wissenschaft, die durch die geniale symbolhafte Schreibweise nur noch erfolgreicher wurde, machte. Ein unkritischer Glaube an die Zauberhaftigkeit neuartiger Methoden herrschte in dieser Zeit vor, weshalb das griechische Ideal der klaren und strengen Schlussfolgerungen mehr und mehr vernachlässigt wurde. Außerdem hielt man eine klare Darstellung der Ergebnisse der Infinitesimalrechnung nicht nur für unnötig, sondern ebenso für unmöglich. Zu verdanken haben wir diese ganzen Erkenntnisse

[339] Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.634, 636.

einer kleinen Gruppe außerordentlich fähiger MathematikerInnen auf diesem Gebiet, die sich oft durch ein instinktives, aber sicheres Gefühl leiten ließen, nicht zu weit in die Irre zu gehen.[340]

Eine kritische Überprüfung erfolgte dann in der neueren Analysis des 19. Jahrhunderts. Erfolgreich festigten sich die wichtigsten Grundbegriffe wie *Grenzwert, Integral, Stetigkeit, Konvergenz*, usw. zu dieser Zeit und moderne Teilbereiche konnten entstehen. Ohne jegliche Spur von Mystik und in voller Strenge wurde eine Lehre verbreitet, die für den gebildeten Menschen als eines der wichtigsten Hilfsmittel der Wissenschaft zugänglich gemacht wurde.[341] In fast allen Bereichen unseres Lebens steckt Mathematik.[342] Sei es in unseren unterschiedlichsten Fortbewegungsmitteln, der Nachrichtenübermittlung, der Wiedergabe von Musik, der drahtlosen Telefonie oder in der Medizintechnik, um nur einige Beispiele zu nennen.[343] Die Mathematik ist ein unsichtbarer Wegbegleiter, dessen Errungenschaften der Analysis unser ganzes Leben neben der Wissenschaft und Forschung prägen. Kaum vorstellbar, wie unsere Welt ohne die Anstrengungen und Ergebnisse vieler Generationen mathematischer Denker, über die gesamte Geschichte hinweg, heute aussehen würde.[344]

---

340 Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.302-303.
341 Vgl. *Courant, Robbins*; Was ist Mathematik, S.303.
342 Vgl. *Wußing;* 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.1.
343 Vgl. *Sonar*; 3000 Jahre Analysis, S.643.
344 Vgl. *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2, S.1.

6. Literaturverzeichnis

Richard *Courant*, Herbert *Robbins;* Was ist Mathematik (Springer, Heidelberg [u.a.] 1967)

Niccoló *Guicciardini*; Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999)

Ernst *Hairer*, Gerhard *Wanner*; Analysis in historischer Entwicklung (Springer, Berlin/ Heidelberg 2011)

Harro *Heuser;* Lehrbuch der Analysis 1 (Teubner, Stuttgart 2009)

Harro *Heuser;* Lehrbuch der Analysis 2 (Teubner, Stuttgart 2008)

Horst *Hirscher*; Grundlegende Begriffe der Mathematik. Entstehung und Entwicklung: Struktur-Funktion-Zahl (Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2012)

Thomas *Hochkirchen*; Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesque, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999)

Rudolf *vom Hofe;* Probleme mit dem Grenzwert- Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse, Journal für Mathematik Didaktik, 19 (98) 4, S.257-291

Hans Niels *Jahnke;* Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999)

Hans Niels *Jahnke*; Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts- Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm (Springer, 1987)

Hans-Heinrich *Körle;* Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute (Oldenbourg Verlag, München 2009)

Jesper *Lützen*; Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Anaylsis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin 1999)

Jeanne *Peiffer,* Amy *Dahan-Dalmédico*; Wege und Irrwege. Eine Geschichte der Mathematik (Birkhäuser, Basel/ Boston/ Berlin 1994)

Thomas *Sonar*; 3000 Jahre Analysis (Spektrum, Berlin/ Heidelberg 2011)

Rüdiger *Thiele*; Antike, In: *Jahnke* (Hrsg.); Geschichte der Analysis (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg / Berlin 1999)

Wolfgang *Walter*; Analysis 1 (Springer, Berlin 2001)

Wolfgang *Walter*; Analysis 2 (Springer, Berlin 2002)

Hans *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 1 (Springer, Berlin/ Heidelberg 2009)

Hans *Wußing*; 6000 Jahre Mathematik- Teil 2 (Springer, Berlin/ Heidelberg 2009)

7. Abbildungsverzeichnis