



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Eine Anwendungsorientierung von homogenen Markov-Ketten in Verbindung mit schulischem Unterricht an der AHS“

verfasst von / submitted by

Georg Stachelberger

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Mathematik Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Im Zuge meines Studiums und der Entstehung dieser Diplomarbeit begleiteten mich viele Menschen. Ich möchte an dieser Stelle die Möglichkeit nutzen, mich herzlich bei folgenden Personen zu bedanken:

Ich bedanke mich bei meinen Eltern Regina und Franz Stachelberger. Sowohl ihre tatkräftige Unterstützung abseits des Studiums, als auch ihre finanzielle Unterstützung während des Studiums machten es mir erst möglich, mich voll und ganz meiner Ausbildung zu widmen.

Mein zweiter Dank geht an meine Kommilitonen, die ich im Laufe meines Studiums kennen lernen durfte. Besonders möchte ich mich bei meinen Studienkollegen Christian Desbalmes, Ronny Fischer, Lukas Hobel und Benjamin Nemecek bedanken. Die gemeinsamen Vorlesungen, Übungen, Seminare und Praktika, sowie die jeweiligen Lerneinheiten waren stets eine große Freude.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith bedanken. Erst durch seine hervorragende und zuverlässige Betreuung war es mir möglich, diese Diplomarbeit zu schreiben.

Inhaltsverzeichnis

1. GRUNDLAGEN MARKOV-KETTEN	1
1.1. STOCHASTISCHE GRUNDBEGRIFFE	2
1.2. MARKOV-KETTE	8
1.3. ANFANGSVERTEILUNG UND ZEITLICHE ENTWICKLUNG	15
1.4. KLASSIFIZIERUNG VON ZUSTÄNDEN	21
1.5. ZEITSPANNEN BEI ABSORBIERENDEN ZUSTÄNDEN	26
1.6. ZEITSPANNEN BEI ALLGEMEINEN ZUSTÄNDEN	39
1.7. STATIONÄRE VERTEILUNG	48
2. MARKOV-KETTEN IN VERBINDUNG MIT SCHULISCHEM UNTERRICHT	53
2.1. (Wo) FINDEN MARKOV-KETTEN EINEN PLATZ IM UNTERRICHT?	53
2.2. STUNDENPLANUNG 1	59
2.3. STUNDENPLANUNG 2	65
2.4. STUNDENPLANUNG 3	75
2.5. STUNDENPLANUNG 4	85
3. ANWENDUNGSGEBIETE UND BEISPIELE VON MARKOV-KETTEN	90
3.1 PHYSIK – BROWN’SCHES BEWEGUNG UND EHRENFEST-MODELL	90
3.2. SPIELTHEORIE – DER RUIN EINES SPIELERS	93
3.3. METEOROLOGIE – WETTERVORHERSAGE	98
3.4. INFORMATIK – PAGE RANK	101
3.5. LOGISTIK – WARTESCHLANGEN	105
4. QUELLENVERZEICHNIS	110
4.1. LITERATUR	110
4.2. ONLINE QUELLEN	112
4.3. ABBILDUNGEN	113
5. ANHANG	116
5.1. DOMINO	116
5.2. QUIZ	130
5.3. ABSTRACT	133

1. Grundlagen Markov-Ketten

In diesem Kapitel wird das mathematische Modell der Markov-Kette zur Beschreibung stochastischer Vorgänge behandelt. Bei den aufgelisteten Definitionen und Sätzen wurde vor allem auf einen anwendungsorientierten Bezug geachtet, da dieser den relevantesten Teil für eine spätere schulische Nutzung darstellt.

Zunächst werden in Abschnitt 1.1. die notwendigen Grundbegriffe σ -Algebra, Wahrscheinlichkeitsraum und stochastischer Prozess wiederholt, ehe in Abschnitt 1.2. die allgemeine Definition einer Markov-Kette erfolgt. Im Anschluss werden die Begriffe Übergangswahrscheinlichkeit, homogene Markov-Kette und Übergangsgraph näher erläutert. Zur Förderung des Verständnisses der mathematischen Definitionen und Sätze wird ein Beispiel eingeführt, welches auch in den nachfolgenden Abschnitten Bezug findet. Abschnitt 1.3. behandelt die zeitliche Entwicklung von homogenen Markov-Ketten, hier werden u.a. die zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs notwendigen Größen Anfangsverteilung und Übergangsmatrix definiert. Mit Hilfe dieser Größen erfolgt im Anschluss eine schrittweise Erklärung, wie man die Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Zustände berechnen kann. Abschnitt 1.4. befasst sich mit den unterschiedlichen Klassifizierungen von Zuständen. Die Begriffe Irreduzibel, Absorbierend, sowie Rekurrenz und Transienz werden definiert und anhand von Beispielen erläutert. Die Abschnitte 1.5. und 1.6. behandeln bestimmte Zeitspannen, wie z.B. die Dauer bis zum erstmaligen Eintritt eines Zustandes einer homogenen Markov-Kette. Im Zusammenhang damit werden die Verweilzeit und die Periodizität von Zuständen genauer untersucht. In dem letzten Abschnitt 1.7. wird der Begriff der stationären Verteilung behandelt. Ein anschließendes Beispiel zeigt, wie die Eintrittswahrscheinlichkeiten von zukünftigen Zuständen auf lange Sicht berechnet werden.

1.1. Stochastische Grundbegriffe

1.1.1. Definition: Mengensystem

Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Unter einem Mengensystem versteht man eine Menge, deren Elemente Teilmengen von Ω sind. [2]

Ein derartiges Mengensystem wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Es gilt zu beachten, dass Ω im Allgemeinen überabzählbar sein kann.

Beispiel

Gegeben sei die endliche Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Zwei mögliche Mengensysteme von Ω lauten

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}.\end{aligned}$$

Bei stochastischen Vorgängen wird häufig die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω als Mengensystem herangezogen.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge, welche alle Teilmengen von Ω enthält. [1]

Aus Definition (1.1.1.) folgt demnach die Beziehung

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega).^1$$

Beispiel

Die Potenzmenge der endlichen Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) &= \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \\ &\quad \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}.\end{aligned}$$

¹ „ $\subseteq$ “ bezeichnet eine Teilmenge, „ $\subset$ “ bezeichnet eine echte Teilmenge

1.1.2. Definition: σ -Algebra

Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Ein System von Teilmengen $\mathcal{A}$ von Ω heißt σ -Algebra, wenn gilt

- i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
- ii) Falls $A \in \mathcal{A}$, dann gilt: $A^c \in \mathcal{A}$,²
- iii) Falls $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann gilt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.³ [2]

Beispiel

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Mengensysteme

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$$

und

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$$

bilden jeweils eine σ -Algebra auf Ω . [4]

1.1.3. Definition: Allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum

Seien Ω eine beliebige nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf Ω und $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit den folgenden Eigenschaften

- „i) $P(A) \geq 0$ für $A \in \mathcal{A}$,
 - ii) $P(\Omega) = 1$,
 - iii) $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ falls $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ sind.“
- [2, S. 283]

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum. Die Funktion P wird auch als Wahrscheinlichkeitsmaß oder Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{A}$ bezeichnet. Weiters nennt man jede Menge M aus $\mathcal{A}$ Ereignis. [2]

Aus den Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes P lassen sich folgende Sätze ableiten.

² A^c bezeichnet die Komplementärmenge von A

³ Gilt nur für abzählbar viele Vereinigungen

1.1.4. Satz

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Wenn $A \subseteq B$, dann gilt: $P(A) \leq P(B)$. [9]

Beweis

Sei $M \in \mathcal{A}$ mit $M := B \setminus A$ und $A \cup M = B$, dann gilt: $A \cap M = \emptyset$. Aus Definition (1.1.3. i) und iii)) folgt

$$P(B) = P(A \cup M) \stackrel{(1.1.3. iii))}{=} P(A) + \underbrace{P(M)}_{\geq 0 \text{ nach (1.1.3. i))}} \geq P(A).$$

q. e. d. [5]

1.1.5. Satz

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt: $0 \leq P(A) \leq 1 \forall A \in \mathcal{A}$. [9]

Beweis

Es gilt $A \subseteq \Omega$. Aus Definition (1.1.3. i) und ii)) und Satz (1.1.4.) ergibt sich

$$0 \stackrel{(1.1.3. i))}{\leq} P(A) \stackrel{(1.1.4.)}{\leq} P(\Omega) \stackrel{(1.1.3. ii))}{=} 1.$$

q. e. d. [9]

Das folgende Beispiel soll das Konzept eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ verdeutlichen. Hierfür wird als Ergebnismenge ⁴ die endliche Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ herangezogen.

Beispiel

Ein Glücksrad bietet vier mögliche Bereiche, an denen ein Zeiger stehen bleiben kann.

⁴ Die Ergebnismenge Ω bezeichnet die Menge aller möglichen Ergebnisse eines idealen Zufallsexperimentes [2]

Die einzelnen Bereiche nehmen folgenden Gesamtflächenanteil des Glücksrades ein

Bereich	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Flächenanteil	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Abbildung 1 illustriert das Zufallsexperiment, sowie die Funktion P auf der σ -Algebra $\mathcal{A}$.

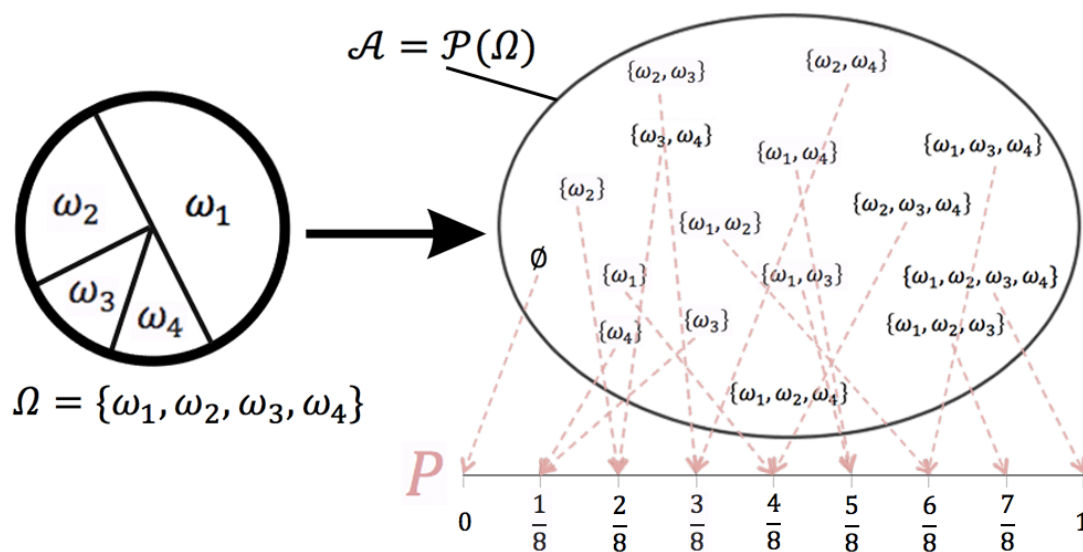


Abbildung 1 – Illustration eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes

Man erkennt in Abbildung 1, dass die gewählte σ -Algebra $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ entspricht. Diese Annahme ist bei endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismengen Ω möglich.

Bei überabzählbaren Ergebnismengen zeigt sich jedoch, dass eine Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes P nicht mehr auf allen Teilmengen von Ω zielführend ist. [2]
Hier muss gelten

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega).$$

1.1.6. Definition: Messraum

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra auf Ω . Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt Messraum. [6]

1.1.7. Definition: Messbare Abbildung (Messbarkeitseigenschaft)

Gegeben seien zwei Messräume $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(I, \mathcal{I})$. Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow I$ heißt messbar (oder $\mathcal{A} - \mathcal{I}$ messbar), wenn $\forall M \in \mathcal{I}$ gilt: $f^{-1}(M) \in \mathcal{A}$.⁵

1.1.8. Definition: Zufallsvariable

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum und $(I, \mathcal{I})$ ein Messraum. Eine messbare Abbildung $X: \Omega \rightarrow I$ heißt Zufallsvariable. Im Fall $I = \mathbb{R}$ nennt man X eine reelle Zufallsvariable. [7]

Das Konzept einer (reellen) Zufallsvariablen kann oftmals zu Verständnisschwierigkeiten führen, allen voran, wenn man endliche Wahrscheinlichkeitsräume mit bereits konkreten Zahlen betrachtet. Das folgende Beispiel soll die Sinnhaftigkeit von Zufallsvariablen verdeutlichen.

Beispiel

Betrachten wir einen 6-seitigen Würfel, dessen Würfelflächen anstelle der Zahlen 1 bis 6 mit den Farben Rot, Blau, Grün, Orange, Violett bzw. Weiß versehen sind. Die Ergebnismenge eines Würfelwurfs lautet somit $\Omega = \{R, B, G, O, V, W\}$.

Angenommen man möchte wie mit einem „klassischen“ Würfel zwei Mal würfeln, die Ergebnisse addieren, und die Person mit dem höchsten Gesamtergebnis gewinnt. Im Fall von Farben ist die Addition zweier Würfelergebnisse nur schwer zu interpretieren. Das Problem kann jedoch durch die Anwendung einer Zufallsvariablen gelöst werden, indem man jeder Farbe einen bestimmten Wert zuordnet.

⁵ <https://www.math.tugraz.at/~ganster/teaching.html>; SS 2013: Maß- und Integrationstheorie; Unterlagen: Meßbare Funktionen [Stand: 05. 05. 2018]

Die nachfolgende Tabelle zeigt eine mögliche Zuordnung

Würfelergebnis	Rot	Blau	Grün	Orange	Violett	Weiß
Zufallsvariable X	$X(R) = 1$	$X(B) = 2$	$X(G) = 3$	$X(O) = 4$	$X(V) = 5$	$X(W) = 6$

Mit Hilfe der Abbildung $X: \Omega \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ kann man wie bei einem „klassischen“ Würfel mit den erwürfelten Farben Rechenoperationen vollziehen.

Die bislang wiederholten Grundbegriffe ermöglichen abschließend eine allgemeine Definition eines stochastischen Prozesses.

1.1.9. Definition: Stochastischer Prozess

Gegeben seien ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Messraum $(I, \mathcal{I})$ und eine Indexmenge $T \subset [0, \infty[$.

Eine Familie $X = (X_t)_{t \in T}$ mit $X_t: \Omega \rightarrow I$, $t \in T$ mit der Messbarkeitseigenschaft aus Definition (1.1.7.) heißt stochastischer Prozess. Die Menge I wird auch als Zustandsraum bezeichnet. [7]

Stochastische Prozesse können abhängig von der Indexmenge T und dem Zustandsraum I in unterschiedliche Klassen eingeteilt werden. Im Weiteren Verlauf dieser Arbeit werden stochastische Prozesse mit einer diskreten Indexmenge $T \subseteq \mathbb{N}_0$ betrachtet. Die Elemente dieser Indexmenge stehen für einzelne Zeitpunkte, in denen ein System betrachtet wird. Man spricht infolgedessen bei diesen Prozessen von zeit-diskreten stochastischen Prozessen. [7]

1.2. Markov-Kette

1.2.1. Definition: Markov-Kette

„Ein zeit-diskreter stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit abzählbarem Zustandsraum I heißt Markov-Kette, wenn für alle Zeitpunkte $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Zustände $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1} \in I$ die folgende Eigenschaft

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

erfüllt ist.“ [3, S. 11]

Die eben genannte Eigenschaft wird auch als Markov-Eigenschaft bezeichnet. Sie besagt, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Zustandes $i_{n+1} \in I$ zum Zeitpunkt $n + 1$ nur vom vorherigen Zustand i_n zum Zeitpunkt n abhängt. Alle davor angenommenen Zustände haben keine Auswirkung auf den Zustand i_{n+1} . Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines zukünftigen Zustandes hängt somit lediglich vom gegenwärtigen Zustand ab. Man bezeichnet derartige stochastische Vorgänge auch als gedächtnislose Prozesse. [3]

Die in Definition (1.2.1.) genannte bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$ wird auch als Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnet. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, ausgehend vom Zustand i_n den Zustand i_{n+1} zu erreichen. [3]

Zum besseren Verständnis verwendet man im Zusammenhang mit Markov-Ketten häufig sogenannte Übergangsgraphen. In diesen werden alle möglichen Zustände eines stochastischen Vorganges, sowie deren Übergangswahrscheinlichkeiten eingezeichnet. [3]

Beispiel

Eine Labormaus wird in ein Röhrenlabyrinth gesetzt. Das Röhrenlabyrinth besteht aus 5 Aufenthaltsräumen (A, B, C, D, E) , welche durch Röhren auf unterschiedliche Art und Weise miteinander verbunden sind. Ausgehend von einem willkürlich festgelegten Startraum wählt die Maus einmal pro Minute nach dem Zufallsprinzip eine Röhre aus

und durchläuft diese. Abbildung 2 fasst in einem Übergangsgraphen den eben beschriebenen stochastischen Vorgang zusammen.

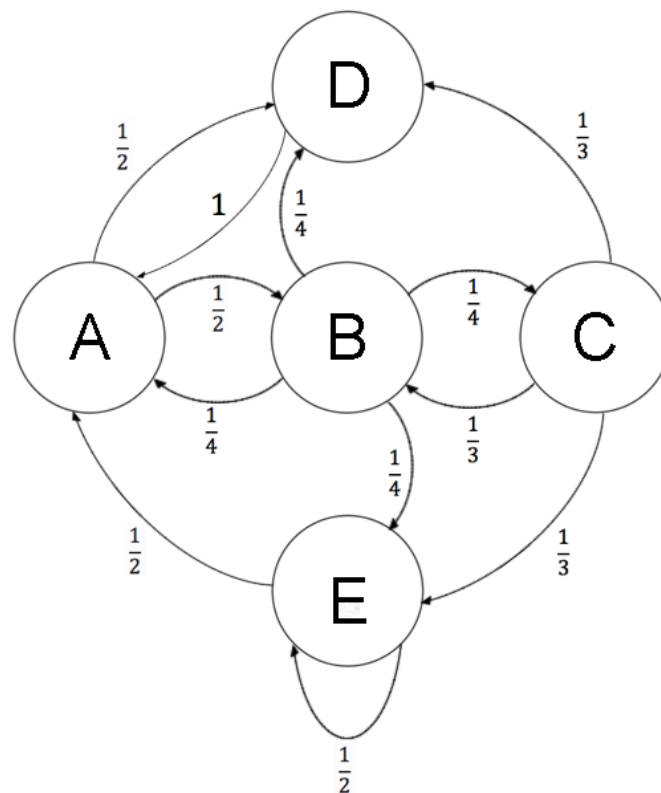


Abbildung 2 – Übergangsgraph Labormausexperiment I

Die einzelnen Räume entsprechen in diesem Beispiel den möglichen Zuständen i , es gilt somit $i \in \{A, B, C, D, E\} = I$. Nach dem Passieren einer „alten“ Röhre entscheidet sich die Labormaus nach dem Zufallsprinzip für eine „neue“ Röhre. Die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des nächsten Raumes hängt somit einzig und allein von der momentanen Position der Maus ab. Dies entspricht der in Definition (1.2.1.) erwähnten Markov-Eigenschaft.

Die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Zeitpunkten 0 und 1 wird häufig abgekürzt mit $p_{ij} := P(X_1 = j \mid X_0 = i)$, so lautet beispielsweise die Übergangswahrscheinlichkeit von Raum A in Raum D $p_{AD} = P(X_1 = D \mid X_0 = A) = \frac{1}{2}$. Übergangswahrscheinlichkeiten mit $p_{ij} = 0$ werden in Übergangsgraphen im Allgemeinen nicht eingezeichnet. In dem eben dargestellten Labormausexperiment I wurde angenommen, dass sich das Röhrenlabyrinth im Laufe der Zeit nicht verändert, es

gilt somit $p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} einer Markov-Kette für alle Zeitpunkte $n \in \mathbb{N}_0$ gleich, so bezeichnet man die Markov-Kette homogen, andernfalls inhomogen. [3]
Im Weiteren Verlauf dieser Arbeit werden nur homogene Markov-Ketten betrachtet.

Ausgehend von den bisherigen Definitionen lässt sich folgender Satz ableiten.

1.2.2. Satz

„i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \in I$ gilt

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $A_0, \dots, A_{n-1}, A_n \subseteq I$ gilt

$$\begin{aligned} P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) &= \\ &= \sum_{i_0 \in A_0} \dots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in I$ gilt

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \\ &= \sum_{i_0 \in I} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in I} \dots \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

[3, S. 13]

Beweis

i) Der Ausdruck $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$ lautet in Mengenschreibweise

$$P(\underbrace{(X_0 = i_0) \cap (X_1 = i_1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = i_{n-1})}_{:=B} \cap \underbrace{(X_n = i_n)}_{:=A}).$$

Mit Hilfe der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten ⁶ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A | B) \cdot P(B) = \\
 &= P((X_n = i_n) | (X_0 = i_0) \cap (X_1 = i_1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = i_{n-1})) \cdot \\
 &\quad \cdot P((X_0 = i_0) \cap (X_1 = i_1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = i_{n-1})) = \\
 &= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Aus der Markov-Eigenschaft folgt

$$\begin{aligned}
 P(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) &= \\
 = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Wiederholt man diese Rechnung für $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$ und alle daraus resultierenden Ausdrücke, so erhält man schließlich

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot P(X_0 = i_0).$$

ii) Folgt unmittelbar aus i). Während bei i) alle Zustände X_n ($n \in \mathbb{N}_0$) einen festen Wert annehmen, sind bei ii) für die Zufallsvariablen $X_0, \dots, X_n$ jeweils mehrere Ergebnisse möglich.

Aus dem Ausdruck

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

ergibt sich darum

⁶ $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ für die Ereignisse A und B [2]

$$\begin{aligned}
& P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \\
&= \sum_{i_0 \in A_0} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in A_1} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot \sum_{i_n \in A_n} P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
&= \sum_{i_0 \in A_0} \sum_{i_1 \in A_1} \dots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).
\end{aligned}$$

iii) Folgt aus ii). Für $A_0 = I, \dots, A_{n-1} = I, A_n = \{j\}$ gilt

$$\begin{aligned}
& P(X_n = j) = P(X_0 \in I, X_1 \in I, \dots, X_{n-1} \in I, X_n \in \{j\}) = \\
&= \sum_{i_0 \in I} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in I} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot \\
&\cdot \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot \sum_{i_n \in \{j\}} P(X_n = i_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
&= \sum_{i_0 \in I} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in I} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot \\
&\cdot \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot P(X_n = i_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
&= \sum_{i_0 \in I} \sum_{i_1 \in I} \dots \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot \\
&\cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).
\end{aligned}$$

q.e.d. [3]

Hinsichtlich des obigen Beispiels lässt sich Satz (1.2.2.) folgendermaßen deuten.

Beispiel

i) Der Ausdruck $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Maus entlang eines bestimmten Weges läuft.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass sich die Maus zum Zeitpunkt 0 in Raum A befindet. Die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten sind aus Abbildung 2 zu entnehmen. Die Wahrscheinlichkeit für den Weg $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ergibt sich somit aus

$$P(A, B, C, D) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0,0417$$

wohingegen die Wahrscheinlichkeit des Weges $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ gegeben ist durch

$$P(A, C, B, D) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Dies wird verständlich wenn man Abbildung 2 betrachtet. Es gibt keine direkte Verknüpfung zwischen den Zuständen A und C .

ii) Der Ausdruck $P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich die Maus zum Zeitpunkt 0 in einem der möglichen Räume aus A_0 , zum Zeitpunkt 1 in einem der möglichen Räume aus A_1 , und zum Zeitpunkt n in einem der möglichen Räume aus A_n für $n \in \mathbb{N}$ befindet.

Angenommen $A_0 = \{A\}$, $A_1 = \{B, D\}$ und $A_2 = \{C, E\}$. Zur Vereinfachung wird also wie zuvor Raum A als Startraum zum Zeitpunkt 0 festgelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Maus zum Zeitpunkt 0 in Raum A , zum Zeitpunkt 1 in Raum B oder D und zum Zeitpunkt 2 in Raum C oder E aufhält, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(X_0 \in \{A\}, X_1 \in \{B, D\}, X_2 \in \{C, E\}) = \\ = \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow C}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow E}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow C}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow E}{\underbrace{0}} \right) = 0,25. \end{aligned}$$

iii) $P(X_n = j)$ gibt Wahrscheinlichkeit an, mit der sich die Maus zum Zeitpunkt n in einem bestimmten Raum $j \in \{A, B, C, D, E\}$ aufhält.

Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit der sich die Maus zum Zeitpunkt $n = 3$ in Raum B befindet. Es wird erneut vorausgesetzt, dass sich die Maus zum Zeitpunkt 0 in Raum A befindet.

$$\begin{aligned}
 P(X_3 = B) &= \sum_{i_0 \in \{A\}} \sum_{i_1 \in I} \sum_{i_2 \in I} P(X_0 = A) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = A) \cdot P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) \cdot P(X_3 = B | X_2 = i_2) = \\
 &= \left[\left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) \right] + \\
 &+ \left[\left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow A}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow C}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow E}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) \right] + \\
 &+ \left[\left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow A}{\underbrace{0}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow E}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) \right] + \\
 &+ \left[\left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow A}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow C}{\underbrace{0}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow D}{\underbrace{0}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) \right] + \\
 &+ \left[\left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow A}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \cdot \underset{B \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow C}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow D}{\underbrace{0}} \cdot \underset{D \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow E}{\underbrace{0}} \cdot \underset{E \rightarrow E}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{E \rightarrow B}{\underbrace{0}} \right) \right] = \\
 &= \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow A}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{B \rightarrow C}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{C \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\underset{A}{\underbrace{1}} \cdot \underset{A \rightarrow D}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \cdot \underset{D \rightarrow A}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \cdot \underset{A \rightarrow B}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = 0,3542
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Maus zum Zeitpunkt 3 in Raum C befindet, ergibt sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Wege, welche in A beginnen und in C enden.

1.3. Anfangsverteilung und zeitliche Entwicklung

In den bisher angeführten Beispielen wurde immer ein bestimmter Raum zum Zeitpunkt 0 festgelegt, es galt somit $P(X_0 = i) = 1$ für $i \in I$. Im Allgemeinen kann der Zustand zu Beginn einer Markov-Kette mit folgender Definition beschrieben werden.

1.3.1. Definition: Anfangsverteilung

Sei $\pi_i(0) := P(X_0 = i)$ für $i \in I = \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ die Anfangswahrscheinlichkeit, mit der sich ein System zum Zeitpunkt 0 im Zustand i befindet. Der Zeilenvektor $\pi(0) := (\pi_1(0) \ \dots \ \pi_k(0))$ wird Anfangsverteilung genannt und gibt die Anfangswahrscheinlichkeiten für alle Zustände $i \in I$ an. Es gilt $\sum_{i=1}^k \pi_i(0) = 1$. [3]

Beispiel

Erneut wird das Labormausexperiment I betrachtet. Erfolgt die Auswahl des Startraumes nach dem Zufallsprinzip, so lautet die Anfangsverteilung

$$\pi(0) = \left(\frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \right).$$

Neben den Anfangswahrscheinlichkeiten lassen sich auch die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten zu einer Matrix zusammenfassen.

1.3.2. Definition: Übergangsmatrix

Sei $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Zeitpunkten n und $n + 1$ von Zustand i in den Zustand j zu gelangen. Die Matrix $P = (p_{ij})$ wird Übergangsmatrix genannt. Sie beinhaltet alle Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zeitpunkten n und $n + 1$. [3]

Beispiel

Die Übergangsmatrix für das Labormausexperiment I lautet

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Das Labormausexperiment I ist wie in Abschnitt 1.2. erwähnt ein Beispiel einer homogenen Markov-Kette, was wiederum bedeutet, dass auch die Übergangsmatrizen zu allen Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}_0$ gleich sind.

Bei der in Definition (1.3.2.) erwähnten Übergangsmatrix handelt es sich um eine stochastische Matrix.

1.3.3. Definition: Stochastische Matrix

Eine reelle $N \times N$ Matrix heißt stochastische Matrix, wenn

- i) alle Einträge der Matrix größer oder gleich 0 sind, ($p_{ij} \geq 0 \forall i, j \in I$),
- ii) die Summe aller Zeilenwerte 1 ergibt ($\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$). [3]

Sind sowohl die Anfangsverteilung, als auch die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette bekannt, so ist die zeitliche Entwicklung eines stochastischen Vorganges vollständig beschreibbar. Betrachtet man den Ausdruck

$$\pi(0) \cdot P = \pi(0) \cdot (p_{ij}) = (\pi_1(0) \quad \dots \quad \pi_k(0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\underbrace{\pi_1(0) \cdot p_{11}}_{1 \rightarrow 1} + \dots + \underbrace{\pi_k(0) \cdot p_{k1}}_{k \rightarrow 1} \right) \cdots \left(\underbrace{\pi_1(0) \cdot p_{1k}}_{1 \rightarrow k} + \dots + \underbrace{\pi_k(0) \cdot p_{kk}}_{k \rightarrow k} \right) \right) = \\
&= (\pi_1(1) \quad \cdots \quad \pi_k(1)) =: \pi(1)
\end{aligned}$$

erkennt man, dass die einzelnen Elemente des Zeilenvektors $\pi(1)$ die Wahrscheinlichkeit angeben, sich zum Zeitpunkt 1 im Zustand $i \in \{1, \dots, k\}$ aufzuhalten. Eine erneute Multiplikation des Vektors $\pi(1)$ mit der Matrix P ergibt einen Zeilenvektor $\pi(2)$, dessen Elemente die Wahrscheinlichkeit angeben, sich zum Zeitpunkt 2 im Zustand $i \in \{1, \dots, k\}$ aufzuhalten. Die n -malige Multiplikation

$$(((\pi(0) \cdot P) \cdot P \cdot \dots \cdot P) \underbrace{\dots \cdot P}_{n\text{-mal}}) = \pi(0) \cdot P^n =: \pi(n)$$

ergibt einen Zeilenvektor $\pi(n) := (\pi_1(n) \quad \cdots \quad \pi_k(n))$, dessen Element die Wahrscheinlichkeit angeben, sich zum Zeitpunkt n im Zustand $i \in \{1, \dots, k\}$ aufzuhalten.

Die eben beschriebene zeitliche Entwicklung einer homogenen Markov-Kette kann man folgendermaßen verdeutlichen. Die Multiplikation zweier allgemeiner Übergangsmatrizen ergibt

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_{11}p_{11} + \dots + p_{1k}p_{k1}) & \cdot & \cdot & \cdot & (p_{11}p_{1k} + \dots + p_{1k}p_{kk}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (p_{k1}p_{11} + \dots + p_{kk}p_{k1}) & \cdot & \cdot & \cdot & (p_{k1}p_{1k} + \dots + p_{kk}p_{kk}) \end{pmatrix}.$$

Eine erneute Multiplikation mit P führt zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
P^3 = P^2 \cdot P &= \begin{pmatrix} (p_{11}p_{11} + \dots + p_{1k}p_{k1}) & \cdot & \cdot & \cdot & (p_{11}p_{1k} + \dots + p_{1k}p_{kk}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (p_{k1}p_{11} + \dots + p_{kk}p_{k1}) & \cdot & \cdot & \cdot & (p_{k1}p_{1k} + \dots + p_{kk}p_{kk}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} [(p_{11}p_{11} + \dots + p_{1k}p_{k1}) \cdot p_{11} + \dots + (p_{11}p_{1k} + \dots + p_{1k}p_{kk}) \cdot p_{k1}] & \cdot & \cdot & \cdot & [(p_{11}p_{11} + \dots + p_{1k}p_{k1}) \cdot p_{1k} + \dots + (p_{11}p_{1k} + \dots + p_{1k}p_{kk}) \cdot p_{kk}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [(p_{k1}p_{11} + \dots + p_{kk}p_{k1}) \cdot p_{11} + \dots + (p_{k1}p_{1k} + \dots + p_{kk}p_{kk}) \cdot p_{k1}] & \cdot & \cdot & \cdot & [(p_{k1}p_{11} + \dots + p_{kk}p_{k1}) \cdot p_{1k} + \dots + (p_{k1}p_{1k} + \dots + p_{kk}p_{kk}) \cdot p_{kk}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} [(p_{11}p_{11}p_{11} + \dots + p_{1k}p_{k1}p_{11}) + \dots + (p_{11}p_{1k}p_{k1} + \dots + p_{1k}p_{kk}p_{k1})] & \cdot & \cdot & \cdot & [(p_{11}p_{11}p_{1k} + \dots + p_{1k}p_{k1}p_{1k}) + \dots + (p_{11}p_{1k}p_{kk} + \dots + p_{1k}p_{kk}p_{kk})] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [(p_{k1}p_{11}p_{11} + \dots + p_{kk}p_{k1}p_{11}) + \dots + (p_{k1}p_{1k}p_{k1} + \dots + p_{kk}p_{kk}p_{k1})] & \cdot & \cdot & \cdot & [(p_{k1}p_{11}p_{1k} + \dots + p_{kk}p_{k1}p_{1k}) + \dots + (p_{k1}p_{1k}p_{kk} + \dots + p_{kk}p_{kk}p_{kk})] \end{pmatrix}.$$

Im Allgemeinen können die Matrixelemente $p_{ij}^{(n)}$ der Matrix P^n berechnet werden durch

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in I} \dots \sum_{i_{n-1} \in I} p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} j}.$$

Zum besseren Verständnis dieser Behauptung dient folgendes Beispiel. Seien die Matrizen A, B, C gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Für die Elemente $x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)}$ und $x_{13}^{(2)}$ der Matrix $A \cdot B$ gilt

$$x_{11}^{(2)} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$x_{12}^{(2)} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$

$$x_{13}^{(2)} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33}$$

Für das Element $y_{13}^{(3)}$ der Matrix $(A \cdot B) \cdot C$ gilt

$$\begin{aligned} y_{13}^{(3)} &= \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) \cdot c_{11} + \\ &\quad + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \cdot c_{21} + \\ &\quad + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}) \cdot c_{31} = \\ &= (a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{13}b_{31}c_{11}) + \\ &\quad + (a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} + a_{13}b_{32}c_{21}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (a_{11}b_{13}c_{31} + a_{12}b_{23}c_{31} + a_{13}b_{33}c_{31}) = \\
 &= \sum_{i_1 \in \{1,2,3\}} \sum_{i_2 \in \{1,2,3\}} a_{1i_1} \cdot b_{i_1 i_2} \cdot c_{i_2 3} .
 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(n)} &= \\
 &= \sum_{i_1 \in I} \dots \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
 &\stackrel{(1.2.2. \text{ iii})}{=} P(X_n = j \mid X_0 = i).
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Größe $P(X_n = j)$

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in I} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{i \in I} \pi_i(0) \cdot p_{ij}^{(n)} = \pi_j(n).$$

$P(X_n = j)$ gibt für $j \in \{1, \dots, k\}$ die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System zum Zeitpunkt n im Zustand j befindet. [3]

Beispiel

Ausgehend von der Übergangsmatrix des Labormausexperimentes I lautet die Matrix P^3

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,1875 & 0,3542 & 0 & 0,3542 & 0,1042 \\ 0,3646 & 0,1875 & 0,0521 & 0,2396 & 0,1563 \\ 0,2083 & 0,3194 & 0 & 0,3194 & 0,1528 \\ 0,6250 & 0 & 0,1250 & 0,1250 & 0,1250 \\ 0,4375 & 0,1250 & 0,0625 & 0,1875 & 0,1875 \end{pmatrix}.$$

Angenommen die Auswahl des Startraumes zum Zeitpunkt 0 erfolgt zufällig. Die Verteilung zum Zeitpunkt 3 wird berechnet durch

$$\begin{aligned} \pi(3) &= \pi(0) \cdot P^3 = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1875 & 0,3542 & 0 & 0,3542 & 0,1042 \\ 0,3646 & 0,1875 & 0,0521 & 0,2396 & 0,1563 \\ 0,2083 & 0,3194 & 0 & 0,3194 & 0,1528 \\ 0,6250 & 0 & 0,1250 & 0,1250 & 0,1250 \\ 0,4375 & 0,1250 & 0,0625 & 0,1875 & 0,1875 \end{pmatrix} = \\ &= (0,3646 \quad 0,1972 \quad 0,0497 \quad 0,2451 \quad 0,1452). \end{aligned}$$

Legt man hingegen Raum A als Startraum fest, so ergibt sich die Verteilung zum Zeitpunkt 3 durch

$$\begin{aligned} \pi(3) &= \pi(0) \cdot P^3 = \\ &= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,1875 & 0,3542 & 0 & 0,3542 & 0,1042 \\ 0,3646 & 0,1875 & 0,0521 & 0,2396 & 0,1563 \\ 0,2083 & 0,3194 & 0 & 0,3194 & 0,1528 \\ 0,6250 & 0 & 0,1250 & 0,1250 & 0,1250 \\ 0,4375 & 0,1250 & 0,0625 & 0,1875 & 0,1875 \end{pmatrix} = \\ &= (0,1875 \quad 0,3542 \quad 0 \quad 0,3542 \quad 0,1042). \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Größe $\pi_B(3) = 0,3542$ wurde bereits in dem Beispiel zu Satz (1.2.2. iii)) berechnet.

1.4. Klassifizierung von Zuständen

Abhängig von den Übergangswahrscheinlichkeiten kann man die Zustände $i \in I$ einer Markov-Kette in unterschiedliche Kategorien einteilen. Zum besseren Verständnis der nun folgenden Definitionen wird das bisher bestehende Röhrensystem des Labormausexperimentes I verändert. Der neue Übergangsgraph ist in Abbildung 3 dargestellt.

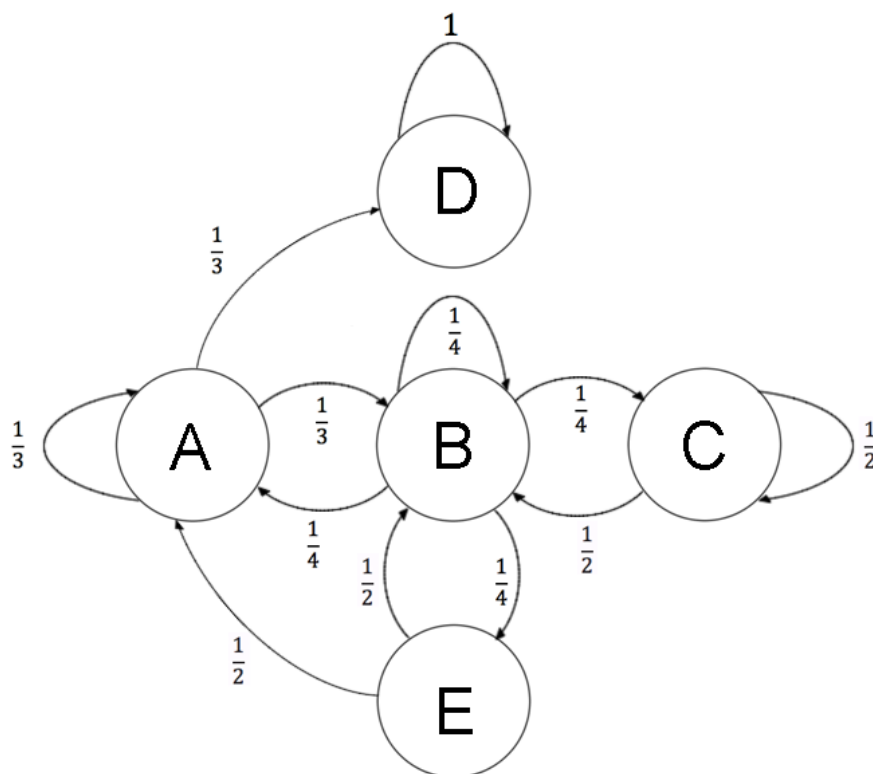


Abbildung 3 – Übergangsgraph Labormausexperiment II

1.4.1. Definition: Erreichbar

Seien $i, j \in I$ Zustände. Der Zustand j heißt erreichbar von Zustand i , wenn ein $n \geq 0$ existiert, für das gilt: $p_{ij}^{(n)} > 0$. Man schreibt $i \rightarrow j$. [8]

Zwei wechselseitig erreichbare Zustände $i, j \in I$ nennt man kommunizierend. Man schreibt $i \leftrightarrow j$. [8]

Für zwei kommunizierende Zustände $i, j \in I$ gilt, dass $n, m \geq 0$ existieren, sodass gilt: $p_{ij}^{(n)} > 0$ und $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Sind zwei Zustände erreichbar oder kommunizierend, bedeutet das nicht, dass sie eine direkte Verbindung $p_{ij}^{(1)}$ aufweisen müssen.

Beispiel

Raum D ist in dem Labormausexperiment II von Raum C aus erreichbar ($C \rightarrow D$). Die Räume A und C sind miteinander kommunizierend ($A \leftrightarrow C$).

Man kann die Erreichbarkeit oder die Kommunikation zweier Räume entweder direkt aus dem zugehörigen Übergangsgraphen ablesen, oder mit Hilfe der Matrix $(p_{ij})^3$ überprüfen. Die Übergangsmatrix P für das Labormausexperiment II lautet

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (p_{ij})^3 &= (P \cdot P) \cdot P = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0,1944 & 0,1944 & 0,0833 & 0,4444 & 0,0833 \\ 0,2708 & 0,3958 & 0,1875 & 0,0833 & 0,0625 \\ 0,125 & 0,375 & 0,375 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2917 & 0,2917 & 0,125 & 0,1667 & 0,125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0,1551 & 0,1968 & 0,0903 & 0,5093 & 0,0486 \\ 0,2205 & 0,3142 & 0,1927 & 0,1736 & 0,0990 \\ 0,1979 & 0,3854 & 0,2813 & 0,0417 & 0,0938 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2326 & 0,2951 & 0,1354 & 0,2639 & 0,0729 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass sowohl $p_{CD}^{(3)} > 0$, also auch $p_{AC}^{(3)} > 0$ und $p_{CA}^{(3)} > 0$ sind.

1.4.2. Definition: Irreduzibel und maximal Irreduzibel

Sei $J \subseteq \Omega$. Die Menge J heißt irreduzibel, wenn $\forall j_1, j_2 \in J$ gilt: $j_1 \leftrightarrow j_2$. [8]

Die Menge J heißt maximal irreduzibel, wenn J irreduzibel ist, und $\forall J' \subseteq \Omega$ folgende Implikation gilt: $J \subset J' \subseteq \Omega \Rightarrow J'$ ist nicht irreduzibel. [9]

Eine maximal irreduzible Menge ist somit die größte irreduzible Menge auf Ω .

Sind alle Zustände einer Markov-Kette irreduzibel, so spricht man von einer irreduziblen Markov-Kette.

Beispiel

Die Menge $\{B, C, E\}$ ist in dem Labormausexperiment II irreduzibel, denn man gelangt von jedem dieser Räume in jeden anderen Raum. Die Menge $\{A, B, C, E\}$ ist hingegen maximal irreduzibel, da hier im Gegensatz zur Menge $\{A, B, C, D, E\}$ noch alle Räume miteinander kommunizieren. Die Irreduzibilität oder maximale Irreduzibilität kann man wie im vorherigen Beispiel entweder direkt mit Hilfe des Übergangsgraphen, oder durch Berechnen der Matrix $(p_{ij})^3$ überprüfen. Die Matrix $(p_{ij})^3$ ist bereits aus dem vorherigen Beispiel gegeben. Für $i, j \in \{A, B, C, E\}$ gilt: $p_{ij}^{(n)} > 0$ und $p_{ij}^{(m)} > 0 \forall n, m \geq 3$.

1.4.3. Definition: Absorbierend

Man nennt einen Zustand $i \in I$ absorbierend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p_{ii}^{(n)} = 1$. [8]

Beispiel

In dem Labormausexperiment II ist Raum D ein absorbierender Zustand. Informationen über absorbierende Zustände erhält man entweder direkt aus dem Übergangsgraphen der Markov-Kette, oder durch die zugehörige Übergangsmatrix P . Die Übergangsmatrix für das Labormausexperiment II wurde bereits in dem Beispiel zu Definition (1.4.1.) angegeben. Es gilt: $p_{DD}^{(n)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Für die nachfolgende Klassifizierung muss zunächst die Rückkehrwahrscheinlichkeit f_{ii} eingeführt werden. Diese wird in Abschnitt 1.6. noch genauer behandelt. Sei $f_{ii}^{(n)} := P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i \mid X_0 = i)$ die Wahrscheinlichkeit der erstmaligen Rückkehr in den Zustand $i \in I$ nach n Zeitpunkten. Summiert man über alle $f_{ii}^{(n)}$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit f_{ii} , ausgehend vom Zustand i in den Zustand i zurückzukehren. Es gilt: $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$. [8]

1.4.4. Definition: Rekurrent und Transient

Man nennt einen Zustand $i \in I$ rekurrent, wenn gilt

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$$

[8]

Man nennt einen Zustand $i \in I$ transient, wenn gilt

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$$

[8]

Ein rekurrenter Zustand tritt im zeitlichen Verlauf fast sicher unendlich oft ein. Ein transienter Zustand tritt im zeitlichen Verlauf fast sicher endlich oft ein. [3]

Beispiel

Betritt die Labormaus Raum D , so kann sie diesen nicht mehr verlassen, woraus folgt, dass die Räume A, B, C und E nur endlich oft angenommen werden können. Die Räume A, B, C und E aus obigen Labormausexperiment II sind somit transient, der Raum D ist rekurrent.

Ein rekurrenter Zustand muss im Allgemeinen nicht absorbierend sein, wie der Übergangsgraph des folgenden Labormausexperimentes III verdeutlicht.

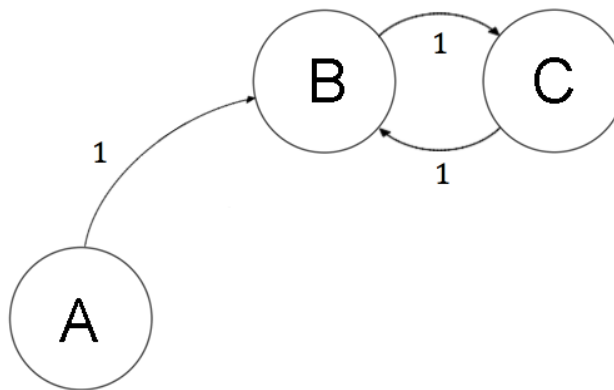


Abbildung 4 – Übergangsgraph Labormausexperiment III

Für das Arbeiten mit Markov-Ketten ist es häufig notwendig, den Begriff der Rekurrenz zu unterteilen. Ist ein Zustand $i \in I$ rekurrent, so kehrt die Markov-Kette nach Definition (1.4.4.) fast sicher nach i zurück. Für die Rückkehrzeit T_i vom Zustand i in den Zustand i gilt:

Ist die mittlere Rückkehrzeit $E(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$ endlich, so spricht man von positiver Rekurrenz. Ist ein Zustand rekurrent, aber nicht positiv-rekurrent, so nennt man den Zustand null-rekurrent. [8]

1.5. Zeitspannen bei absorbierenden Zuständen

Sei $J \subset I$ eine Menge, deren Zustände absorbierend sind. Mit $T_J = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in J\}$ wird die Zufallsvariable bezeichnet, welche dem Zeitpunkt bzw. der Zeitspanne entspricht, bis ein Zustand $j \in J$ zum ersten Mal eintritt. Es gilt $T_J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. [3]

Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens in J zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch $P_i(T_J = t)$. Die Größe $P_i(T_J > t)$, $t \in \mathbb{N}_0$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Eintritt in J erst nach dem Zeitpunkt t stattfindet. Ob ein Erreichen von J noch in endlicher Zeit erfolgt, wird durch die Wahrscheinlichkeit $P_i(T_J < \infty)$ angegeben. Sowohl $P_i(T_J = t)$, als auch $P_i(T_J > t)$ und $P_i(T_J < \infty)$ hängen von der Wahl des Anfangszustandes $i \notin J$ ab. [3]

Die im Mittel verstrichene Zeit bis zum Eintritt in J kann mit Hilfe des Erwartungswertes ${}^7E_i(T_J) = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot P_i(T_J = t)$ berechnet werden. Auch $E_i(T_J)$ hängt von dem zu Beginn gewählten Anfangszustand $i \notin J$ ab. [3]

Grundsätzlich müssen Zustände der Menge J nicht absorbierend sein, die eben beschriebenen Größen $P_i(T_J > t)$, $P_i(T_J < \infty)$ und $E_i(T_J)$ sind infolgedessen auch für allgemeine Zustände einer Menge J gültig. Absorbierende Zustände eines Systems sind jedoch in den meisten Fällen auch kritische Zustände, das bedeutet, dass das Erreichen dieser Zustände den vorliegenden stochastischen Vorgang beendet. Aus diesem Grund interessiert man sich vorrangig dafür, ob und wann absorbierende Zustände eintreten.

Der folgende Satz gibt an, wie man die Größen $P_i(T_J > t)$, $P_i(T_J < \infty)$ und $E_i(T_J)$ berechnet.

⁷ $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$, wobei x_i die Realisierung der Zufallsvariablen X und p_i die Wahrscheinlichkeit, mit der x_i eintritt, bezeichnet [2]

1.5.1. Satz

„Sei J eine Menge von absorbierenden Zuständen und $i \notin J$. Dann gilt

i) Ausgehend von $P_i(T_J > 0) = 1$ für alle $i \notin J$ lässt sich $P_i(T_J > t)$ für alle $i \notin J$ und alle $t \in \mathbb{N}$ rekursiv berechnen gemäß

$$P_i(T_J > t) = \sum_{k \notin J} p_{ik} P_k(T_J > t - 1).$$

ii) $P_i(T_J < \infty)$ ist die kleinste Lösung $u_i \in [0, 1]$, $i \in I$, des Gleichungssystems

$$u_i = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k.$$

iii) $E_i(T_J)$ ist (im Falle $P_k(T_J < \infty) = 1, k \notin J$) die kleinste Lösung $u_i \geq 0$, $i \in I$, des Gleichungssystems

$$u_i = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k."$$

[3, S. 19-20]

Beweis

i) Unter der Voraussetzung $i \notin J$ kann die Wahrscheinlichkeit $P_i(T_J > t)$, $t \in \mathbb{N}$, mit der ein Eintritt in J erst nach dem Zeitpunkt t stattfindet, angeschrieben werden als

$$P_i(T_J > t) = P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_0 = i).$$

Bei einem festen Anfangszustand i bezeichnet p_{ik} die Übergangswahrscheinlichkeit von dem Zustand i in den Zustand k für $k \in I$. Im Weiteren Verlauf gilt $k \notin J$. Der Ausdruck $P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_1 = k)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ausgehend von dem

Zustand k kein Eintritt in J zwischen den Zeitpunkten 1 und t stattfindet. Für ein festes k bezeichnet $p_{ik} \cdot P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_1 = k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eintritt in J erst nach dem Zeitpunkt t stattfindet, wobei zum Zeitpunkt 0 der Zustand $i \notin J$ und zum Zeitpunkt 1 der Zustand $k \notin J$ angenommen werden. Die Summation über alle Zustände $k \in I \setminus J$, ergibt infolgedessen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eintritt in J erst nach dem Zeitpunkt t stattfindet. Es gilt

$$P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_0 = i) = \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_1 = k)$$

und auf Grund von $k \notin J$

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_1 = k) &= \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P(X_2 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_1 = k) = \\ &= \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_J > t - 1). \end{aligned}$$

ii) Die Wahrscheinlichkeit $P_i(T_J > t) = P(X_1 \notin J, \dots, X_t \notin J \mid X_0 = i)$ ist $\forall i \in I, i \notin J$ mit zunehmenden t monoton fallend, da für $X_{t+1} \notin J, t \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $P_i(T_J > t)$ mit einer Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ multipliziert wird. Da $P_i(T_J > t)$ auch nach unten beschränkt ist, konvergiert $P_i(T_J > t)$ für $t \rightarrow \infty$. Es gilt somit, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(T_J > t)$ und insbesondere $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(T_J > t - 1) \forall i, k \in I, i, k \notin J$ existieren.

Sei $P_i(T_J = \infty)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eintritt in den Zustand J nicht in endlicher Zeit erreicht wird. Es gilt

$$P_i(T_J < \infty) = 1 - P_i(T_J = \infty) = 1 - \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(T_J > t)}_{=u_i} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_J > t - 1).$$

Nach Definition (1.3.3. ii)) und den Rechenregeln für Summen und Limiten gilt

$$\begin{aligned}
 \underbrace{1}_{(1.3.3.ii))} - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_J > t - 1) &= \left(\sum_{k \in I} p_{ik} \right) - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(T_J > t - 1) = \\
 &= \left(\sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \right) - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(T_J > t - 1) = \\
 &= \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} - p_{ik} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(T_J > t - 1) = \\
 &= \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \underbrace{\left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(T_J > t - 1) \right)}_{=u_k}.
 \end{aligned}$$

Die Größe $u_i = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(T_J > t) \in [0, 1]$ ist somit eine Lösung des Gleichungssystems $\sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot u_k$.

Im Folgenden wird mit vollständiger Induktion nach t gezeigt, dass es sich bei u_i um die kleinste Lösung des Gleichungssystems $\sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot u_k$ handelt. Angenommen v_i sei eine beliebige Lösung des Gleichungssystems $\sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k$.

$$\text{z. z.: } P_i(T_J > t) \geq 1 - v_i$$

Induktionsanfang (I.A.)

Sei $t = 0$. Dann gilt $\forall i \notin J$

$$P_i(T_J > 0) = 1 \geq 1 - v_i.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.)

Es gilt

$$P_i(T_J > t - 1) \geq 1 - v_i.$$

Induktionsschritt (I.S.)

Für t gilt nach den Rechenregeln für Summen und Definition (1.3.3. ii))

$$\begin{aligned}
 P_i(T_J > t) &= \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \underbrace{P_k(T_J > t-1)}_{I.V.} \geq \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot (1 - v_k) = \\
 &= \sum_{k \notin J} p_{ik} - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k = \left(\sum_{k \notin J} p_{ik} \right) - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k = \\
 &= \left(\sum_{k \in I} p_{ik} - \sum_{k \in J} p_{ik} \right) - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k \stackrel{(1.3.3. ii))}{=} \underbrace{1}_{\text{I.V.}} - \sum_{k \in J} p_{ik} - \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k = \\
 &= 1 - \left(\sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k \right) = 1 - v_i.
 \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhält man somit für $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(T_J > t) &\geq 1 - v_i \\
 \Leftrightarrow 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(T_J > t) &\leq v_i.
 \end{aligned}$$

iii) Unter der Bedingung, dass man einen Zeitpunkt l auch anschreiben kann als

$$l = \sum_{t=0}^{l-1} 1$$

und der Gleichung

$$\sum_{l=t+1}^{\infty} P_i(T_J = l) = P_i(T_J > t)$$

gilt für den Erwartungswert $E_i(T_J)$ nach den Rechenregeln für Summen

$$\begin{aligned}
 E_i(T_J) &= \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot P_i(T_J = l) = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot P_i(T_J = l) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{l-1} 1 \right) \cdot P_i(T_J = l) = \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{l-1} P_i(T_J = l) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{l=t+1}^{\infty} P_i(T_J = l) = \sum_{t=0}^{\infty} \underbrace{P_i(T_J > t)}_{=u_i} = \\
 &= P_i(T_J > 0) + \sum_{t=1}^{\infty} P_i(T_J > t) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_J > t-1) = \\
 &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_J > t-1) = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} P_k(T_J > t-1)}_{=u_k}.
 \end{aligned}$$

Die Größe $u_i = \sum_{t=0}^{\infty} P_i(T_J > t) \geq 0$ ist somit eine Lösung des Gleichungssystems $1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot u_k$.

Im Folgenden wird mit vollständiger Induktion nach n gezeigt, dass es sich bei u_i um die kleinste Lösung des Gleichungssystems $1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot u_k$ handelt. Angenommen v_i sei eine beliebige Lösung des Gleichungssystems $1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k$.

$$\text{z.z.:} \quad \sum_{t=0}^n P_i(T_J > t) \leq v_i$$

Induktionsanfang (I.A.)

Sei $n = 0$. Dann gilt $\forall i \notin J$, dass

$$\sum_{t=0}^0 P_i(T_J > t) = P_i(T_J > 0) = 1 \leq v_i = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.)

Es gilt

$$\sum_{t=0}^{n-1} P_i(T_j > t) \leq v_i.$$

Induktionsschritt (I.S.)

Für n gilt auf Grund von $P_i(T_j > 0) = 1$, Satz (1.5.1. i)) und den Rechenregeln für Summen

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^n P_i(T_j > t) &= \\ &= P_i(T_j > 0) + \sum_{t=1}^n P_i(T_j > t) = 1 + \sum_{t=0}^{n-1} P_i(T_j > t+1) \stackrel{(1.5.1. i))}{=} \\ &= 1 + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot P_k(T_j > t) = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} P_k(T_j > t) \stackrel{(I.V.)}{\leq} \\ &1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \cdot v_k = v_i. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhält man somit für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^n P(T_j > t) \leq v_i.$$

q.e.d. [3]

Beispiel

i) Angenommen die Maus aus dem Labormausexperiment II startet zum Zeitpunkt 0 in Raum A, dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus erst nach 4-maligen Raumwechsel in Raum D gelangt berechnet durch

$$\begin{aligned}
 P_A(T_{\{D\}} > 4) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 3) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 3) = \\
 &= p_{AA} P_A(T_{\{D\}} > 3) + p_{AB} P_B(T_{\{D\}} > 3) + p_{AC} P_C(T_{\{D\}} > 3) + p_{AE} P_E(T_{\{D\}} > 3) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{53}{108} + \frac{1}{3} \cdot \frac{119}{144} + 0 \cdot \frac{23}{24} + 0 \cdot \frac{53}{72} = 0,4390.
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 P_A(T_{\{D\}} > 1) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \\
 &= p_{AA} \underbrace{P_A(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{AB} \underbrace{P_B(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{AC} \underbrace{P_C(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{AE} \underbrace{P_E(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} = p_{AA} + p_{AB} + p_{AC} + p_{AE} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_B(T_{\{D\}} > 1) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \\
 &= p_{BA} \underbrace{P_A(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{BB} \underbrace{P_B(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{BC} \underbrace{P_C(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{BE} \underbrace{P_E(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} = p_{BA} + p_{BB} + p_{BC} + p_{BE} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_C(T_{\{D\}} > 1) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \\
 &= p_{CA} \underbrace{P_A(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{CB} \underbrace{P_B(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{CC} \underbrace{P_C(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{CE} \underbrace{P_E(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} = p_{CA} + p_{CB} + p_{CC} + p_{CE} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_E(T_{\{D\}} > 1) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 0) = \\
 &= p_{EA} \underbrace{P_A(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{EB} \underbrace{P_B(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{EC} \underbrace{P_C(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} + p_{EE} \underbrace{P_E(T_{\{D\}} > 0)}_{=1} = p_{EA} + p_{EB} + p_{EC} + p_{EE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_A(T_{\{D\}} > 2) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \\
&= p_{AA} P_A(T_{\{D\}} > 1) + p_{AB} P_B(T_{\{D\}} > 1) + p_{AC} P_C(T_{\{D\}} > 1) + p_{AE} P_E(T_{\{D\}} > 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = \\
&= \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_B(T_{\{D\}} > 2) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \\
&= p_{BA} P_A(T_{\{D\}} > 1) + p_{BB} P_B(T_{\{D\}} > 1) + p_{BC} P_C(T_{\{D\}} > 1) + p_{BE} P_E(T_{\{D\}} > 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \\
&= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_C(T_{\{D\}} > 2) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \\
&= p_{CA} P_A(T_{\{D\}} > 1) + p_{CB} P_B(T_{\{D\}} > 1) + p_{CC} P_C(T_{\{D\}} > 1) + p_{CE} P_E(T_{\{D\}} > 1) = 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_E(T_{\{D\}} > 2) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 1) = \\
&= p_{EA} P_A(T_{\{D\}} > 1) + p_{EB} P_B(T_{\{D\}} > 1) + p_{EC} P_C(T_{\{D\}} > 1) + p_{EE} P_E(T_{\{D\}} > 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_A(T_{\{D\}} > 3) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Ak} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \\
&= p_{AA} P_A(T_{\{D\}} > 2) + p_{AB} P_B(T_{\{D\}} > 2) + p_{AC} P_C(T_{\{D\}} > 2) + p_{AE} P_E(T_{\{D\}} > 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{12} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{5}{6} = \\
&= \frac{5}{27} + \frac{11}{36} = \frac{20+33}{108} = \frac{53}{108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_B(T_{\{D\}} > 3) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \sum_{k \in \{A, B, C, E\}} p_{Bk} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \\
&= p_{BA} P_A(T_{\{D\}} > 2) + p_{BB} P_B(T_{\{D\}} > 2) + p_{BC} P_C(T_{\{D\}} > 2) + p_{BE} P_E(T_{\{D\}} > 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{12} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \\
&= \frac{5}{36} + \frac{11}{48} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{20+33+36+30}{144} = \frac{119}{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_C(T_{\{D\}} > 3) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ck} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \\
&= p_{CA} P_A(T_{\{D\}} > 2) + p_{CB} P_B(T_{\{D\}} > 2) + p_{CC} P_C(T_{\{D\}} > 2) + p_{CE} P_E(T_{\{D\}} > 2) = 0 \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{5}{6} = \\
&= \frac{11}{24} + \frac{1}{2} = \frac{11+12}{24} = \frac{23}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_E(T_{\{D\}} > 3) &= \sum_{k \notin \{D\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ek} P_k(T_{\{D\}} > 2) = \\
&= p_{EA} P_A(T_{\{D\}} > 2) + p_{EB} P_B(T_{\{D\}} > 2) + p_{EC} P_C(T_{\{D\}} > 2) + p_{EE} P_E(T_{\{D\}} > 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{5}{6} = \\
&= \frac{5}{18} + \frac{11}{24} = \frac{20+33}{72} = \frac{53}{72}
\end{aligned}$$

ii) Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der die Maus aus dem Labormausexperiment II Raum D in endlicher Zeit erreicht, wird nach Satz (1.5.1. ii)) folgendes Gleichungssystem aufgestellt

$$u_i = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{ik} u_k$$

mit $i \in \{A, B, C, E\}$ und $J = \{D\}$.

$$I: u_A = \sum_{k \in \{D\}} p_{Ak} + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ak} u_k = p_{AD} + [p_{AA} u_A + p_{AB} u_B + p_{AC} u_C + p_{AE} u_E]$$

$$II: u_B = \sum_{k \in \{D\}} p_{Bk} + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Bk} u_k = p_{BD} + [p_{BA} u_A + p_{BB} u_B + p_{BC} u_C + p_{BE} u_E]$$

$$III: u_C = \sum_{k \in \{D\}} p_{Ck} + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ck} u_k = p_{CD} + [p_{CA} u_A + p_{CB} u_B + p_{CC} u_C + p_{CE} u_E]$$

$$IV: u_E = \sum_{k \in \{D\}} p_{Ek} + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ek} u_k = p_{ED} + [p_{EA} u_A + p_{EB} u_B + p_{EC} u_C + p_{EE} u_E]$$

$$\begin{aligned}
I: u_A &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot u_A + \frac{1}{3} \cdot u_B + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u_E = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot u_A + \frac{1}{3} \cdot u_B \\
II: u_B &= 0 + \frac{1}{4} \cdot u_A + \frac{1}{4} \cdot u_B + \frac{1}{4} \cdot u_C + \frac{1}{4} \cdot u_E = \frac{1}{4} \cdot u_A + \frac{1}{4} \cdot u_B + \frac{1}{4} \cdot u_C + \frac{1}{4} \cdot u_E \\
III: u_C &= 0 + 0 \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B + \frac{1}{2} \cdot u_C + 0 \cdot u_E = \frac{1}{2} \cdot u_B + \frac{1}{2} \cdot u_C \\
IV: u_E &= 0 + \frac{1}{2} \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u_E = \frac{1}{2} \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B
\end{aligned}$$

Nach wenigen Äquivalenzumformungen ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
I: 2u_A &= 1 + u_B \\
II: 3u_B &= u_A + u_C + u_E \\
III: u_C &= u_B \\
IV: 2u_E &= u_A + u_B
\end{aligned}$$

welches mittels dem Computerprogramm GeoGebra gelöst wurde und folgende Lösungen ergibt

$$u_A = u_B = u_C = u_E = 1.$$

Das Ergebnis ist so zu deuten, dass egal von welchem Raum aus die Maus startet, sie nach ausreichend langer Zeit immer in Raum D gelangt.

Bemerkung: In Kombination mit mehreren absorbierenden Zuständen müssen die Lösungen $u_i = P_i(T_j < \infty)$ nicht alle gleich 1 sein. In Abschnitt 3.2. wird ein derartiger Fall behandelt.

iii) Um die mittlere Dauer zu berechnen, bis sich die Maus aus dem Labormausexperiment II in Raum D befindet, wird nach Satz (1.5.1. iii)) folgendes Gleichungssystem aufgestellt

$$u_i = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k = 1 + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{ik} u_k$$

mit $i \in \{A, B, C, E\}$ und $J = \{D\}$.

$$I: u_A = 1 + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ak} u_k = 1 + [p_{AA}u_A + p_{AB}u_B + p_{AC}u_C + p_{AE}u_E]$$

$$II: u_B = 1 + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Bk} u_k = 1 + [p_{BA}u_A + p_{BB}u_B + p_{BC}u_C + p_{BE}u_E]$$

$$III: u_C = 1 + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ck} u_k = 1 + [p_{CA}u_A + p_{CB}u_B + p_{CC}u_C + p_{CE}u_E]$$

$$IV: u_E = 1 + \sum_{k \in \{A,B,C,E\}} p_{Ek} u_k = 1 + [p_{EA}u_A + p_{EB}u_B + p_{EC}u_C + p_{EE}u_E]$$

$$I: u_A = 1 + \frac{1}{3} \cdot u_A + \frac{1}{3} \cdot u_B + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u_E = 1 + \frac{1}{3} \cdot u_A + \frac{1}{3} \cdot u_B$$

$$II: u_B = 1 + \frac{1}{4} \cdot u_A + \frac{1}{4} \cdot u_B + \frac{1}{4} \cdot u_C + \frac{1}{4} \cdot u_E = 1 + \frac{1}{4} \cdot u_A + \frac{1}{4} \cdot u_B + \frac{1}{4} \cdot u_C + \frac{1}{4} \cdot u_E$$

$$III: u_C = 1 + 0 \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B + \frac{1}{2} \cdot u_C + 0 \cdot u_E = 1 + \frac{1}{2} \cdot u_B + \frac{1}{2} \cdot u_C$$

$$IV: u_E = 1 + \frac{1}{2} \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u_E = 1 + \frac{1}{2} \cdot u_A + \frac{1}{2} \cdot u_B$$

Nach wenigen Äquivalenzumformungen ergibt sich das Gleichungssystem

$$I: 2u_A = 3 + u_B$$

$$II: 3u_B = 4 + u_A + u_C + u_E$$

$$III: u_C = 2 + u_B$$

$$IV: 2u_E = 2 + u_A + u_B$$

welches mittels dem Computerprogramm GeoGebra gelöst wurde und folgende Lösungen ergibt

$$u_A = \frac{23}{3}, u_B = \frac{37}{3}, u_C = \frac{43}{3}, u_E = 11.$$

Die Labormaus vollzieht im Durchschnitt beginnend in Raum $A \frac{23}{3}$, beginnend in Raum $B \frac{37}{3}$, beginnenden in Raum $C \frac{43}{3}$ und beginnend in Raum E 11 Raumwechsel, bevor sie in Raum D gelangt. Die unterschiedlichen Lösungen werden verständlicher, wenn man den zugehörigen Übergangsgraphen aus Abbildung 3 betrachtet. Es gibt nur eine Möglichkeit in Raum D zu gelangen, diese Möglichkeit führt über Raum A . Mit dem Startraum A benötigt man somit im Mittel am wenigsten Züge, um in Raum D zu gelangen. Die Maus benötigt hingegen beginnend in Raum C die meisten Raumwechsel, um – schnellsten Falls direkt – in Raum D zu gelangen. Weiters führt ein Weg mit Startraum C nur über Raum B , in dem die Wahrscheinlichkeit mit nur $\frac{1}{4}$ gegeben ist, in Raum A zu gelangen.

1.6. Zeitspannen bei allgemeinen Zuständen

Wie bereits zu Beginn des Abschnittes 1.5. erwähnt, muss zur Berechnung der Größen T_j , $P_i(T_j = t)$, $P_i(T_j > t)$, $P_i(T_j < \infty)$ und $E_i(T_j)$ die Menge $J \subset I$ im Allgemeinen keine Menge absorbierender Zustände sein.

Im Folgenden sei $T_j = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = j\}$ die Zufallsvariable, welche dem Zeitpunkt bzw. der Zeitspanne entspricht, bis ein Zustand $j \in J$ zum ersten Mal eintritt. Es gilt $T_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit $f_{ij} := P_i(T_j < \infty)$ wird die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines Zustandes $j \in J$ in endlicher Zeit (ausgehend vom Anfangszustand $i \in I$) bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr in einen Zustand $i \in I$ ist gegeben durch $f_{ii} := P_i(T_i < \infty)$. [3]

Von weiterer Interesse ist die Häufigkeit, mit der ein Zustand $j \in J$ angenommen wird. Hierfür wird die Indikatorfunktion angewendet.

1.6.1. Definition: Indikatorfunktion

Sei $A \subseteq \Omega$. Die Funktion

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Indikatorfunktion von A . [2]

Die Häufigkeit N_j , mit der ein Zustand $j \in J$ angenommen wird, ergibt sich aus der Summe aller Zeitpunkte, in denen j eintritt. Es gilt: $N_j = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand j öfter als m -mal eintritt, ist, in Abhängigkeit vom Anfangszustand i , gegeben durch $P_i(N_j > m)$. [3]

Der Erwartungswert $E_i(N_j) = \sum_{m=0}^{\infty} P_i(N_j > m)$ gibt an, wie oft ein Zustand j im Durchschnitt eintritt. [3]

1.6.2. Satz

„Für alle $i, j \in I$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$i) P_i(N_j > m) = f_{ij}(f_{jj})^m$$

$$ii) E_i(N_j) = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \text{ [3, S. 27]}$$

Um Satz (1.6.2. i)) zu beweisen, wird die sogenannte starke Markov-Eigenschaft verwendet. Diese mathematische Größe wird im Folgenden eingeführt, wobei auf einen zugehörigen Beweis verzichtet wurde.

1.6.3. Definition: Filtrierung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man definiert für

„ $n \in \mathbb{N}_0$ die σ -Algebra $\mathcal{F}_n$ auf Ω als die Menge der Teilmengen von Ω , die sich als (notwendigerweise abzählbare) Vereinigung von Mengen der Form $\{\omega: X_0(\omega) = i_0, \dots, X_n(\omega) = i_n\}$ [...] schreiben lassen. [...]. Weiters gilt $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ für $m < n$.“ [10, S. 16] ⁸

1.6.4. Definition: Stoppzeit

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Markov-Kette mit Anfangsverteilung $\pi(0)$ heißt die Abbildung $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ Stoppzeit, wenn gilt: $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$. [10] ⁸

„Zur Formulierung der starken Markoveigenschaft ist es nützlich, die σ -Algebra $\mathcal{F}_\tau$ – die sogenannte τ -Vergangenheit – als natürliche Verallgemeinerung von $\mathcal{F}_n$ im Spezialfall $\tau = n$ zu definieren. Dabei soll ein Ereignis F in $\mathcal{F}_\tau$ liegen genau dann, wenn das Eintreffen oder Nichteintreffen von F aufgrund der Beobachtung $X_0, \dots, X_\tau$ erkennbar ist. Wir definieren $\mathcal{F}_\tau$ als die Menge der Teilmengen von Ω , die sich als (notwendigerweise abzählbare)

⁸ <http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen; WS11/; StoMo; Literatur: Skript von Prof. Dr. Scheutzow> [Stand: 05. 05. 2018]

Vereinigung von Mengen der Form $\{\omega: \tau(\omega) = n, X_0(\omega) = i_0, \dots, X_n(\omega) = i_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ [...] und einer Teilmenge von $\{\omega: \tau(\omega) = \infty\}$ in $\mathcal{F}$ schreiben lassen.“ [10, S. 22-23] ⁸

1.6.5. Satz

Gegeben seien eine Markov-Kette mit der Übergangsmatrix P und der Anfangsverteilung $\pi(0)$. Weiters sei τ eine Stoppzeit auf der Markov-Kette.

„Dann gilt die starke Markoveigenschaft, d.h.

$$P(X_{\tau+1} = i_1, \dots, X_{\tau+k} = i_k \mid \{X_\tau = i_0\} \cap F \cap \{\tau < \infty\}) = p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k}$$

für alle $F \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}$ [...] für die $P(\{X_\tau = i_0\} \cap F \cap \{\tau < \infty\}) > 0$.“ [10, S. 23] ⁸

Beweis (Satz 1.6.2.)

$$\text{z.z.: } P_i(N_j > m + 1) = f_{ij}(f_{jj})^{m+1}$$

i) Induktionsanfang (I.A.)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $j \in J$ öfter als 0-mal eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Ersteintrittszeit T_j des Zustandes $j \in J$ endlich ist. Es gilt somit

$$P_i(N_j > 0) = P_i(T_j < \infty) = f_{ij} = f_{ij}(f_{jj})^0.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.)

Sei $T_j^{(m)} = \inf\{n > T_j^{(m-1)} \mid X_n = j\}$ für $m > 0$ die Zufallsvariable, welche dem Zeitpunkt entspricht, in dem ein Zustand $j \in J$ zum m -ten Mal eintritt. Es gilt

$$P_i(N_j > m) \underset{a}{=} P_i(T_j^{(m+1)} < \infty) \underset{b}{=} f_{ij}(f_{jj})^m$$

da a) die Wahrscheinlichkeit, dass die Häufigkeit des Eintretens eines Zustandes $j \in J$ größer als m ist, gleich der Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen $T_j^{(m+1)} < \infty$ ist, die den Zeitpunkt des $m + 1$ Eintritts in $j \in J$ angibt, und b) eben diese Wahrscheinlichkeit gleich ist der Multiplikation der Wahrscheinlichkeit f_{ij} , die dem Übergang von dem Zustand i in den Zustand j entspricht, mit der m -maligen Multiplikation der Rückkehrwahrscheinlichkeit f_{jj} .

Induktionsschritt (I.S.)

Der Ausdruck $P_i(T_j^{(m+2)} - T_j^{(m+1)} = k \mid T_j^{(m+1)} = n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für eine endliche Dauer k zwischen den Zeitpunkten $T_j^{(m+1)}$ und $T_j^{(m+2)}$ an, unter der Bedingung, dass auch die Dauer $T_j^{(m+1)}$ endlich ist. $P_i(T_j^{(m+1)} = n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Dauer bis zum $m + 1$ Eintrittszeitpunkt endlich ist.

Da k und n beliebig groß sein können, ergibt die Summation darüber

$$\begin{aligned} P_i(N_j > m + 1) &= P_i(T_j^{(m+2)} < \infty) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(T_j^{(m+2)} - T_j^{(m+1)} = k \mid T_j^{(m+1)} = n) \cdot P_i(T_j^{(m+1)} = n). \end{aligned}$$

Im folgenden Schritt wird die starke Markov-Eigenschaft angewendet, wodurch der Zeitpunkt der letzten Beobachtung ebenfalls als Zufallsvariable angeschrieben werden kann. Es gilt

$$P_i(N_j > m + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = k \mid X_0 = j) \cdot P_i(T_j^{(m+1)} = n).$$

Nach den Rechenregeln für Summen ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = k \mid X_0 = j) \cdot P_i(T_j^{(m+1)} = n) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_j(T_j = k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_i(T_j^{(m+1)} = n) = \\ &= P_j(T_j < \infty) \cdot \underbrace{P_i(T_j^{(m+1)} < \infty)}_{I.V.} = f_{jj} \cdot f_{ij}(f_{jj})^m = f_{ij}(f_{jj})^{m+1}. \end{aligned}$$

ii) Der Erwartungswert von N_j in Abhängigkeit vom Zustand i lautet nach Satz (1.6.2. i)) und den Rechenregeln für geometrische Reihen

$$E_i(N_j) = \sum_{m=0}^{\infty} P_i(N_j > m) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}(f_{jj})^m = f_{ij} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (f_{jj})^m = f_{ij} \cdot \frac{1}{1 - f_{jj}}.$$

Weiters folgt aus den Rechenregeln für Erwartungswerte ⁹

$$E_i(N_j) = E_i\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_i(1_{\{X_n=j\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

q.e.d. [3]

Interessiert man sich für die Dauer des Aufenthaltes in einem Zustand, so wird diese durch die Zufallsvariable $H_i = \inf\{n \geq 0: X_n \neq i\}$ für $i \in I$ beschrieben. Man nennt H_i die Verweilzeit eines Zustandes $i \in I$. [8]

Für die Verweilzeit eines Zustandes gilt folgender Satz.

⁹ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, wobei X und Y Zufallsvariablen sind und $E(1_{X_i}) = P(X_i)$ [2]

1.6.6. Satz

Sei $i \in I$.

„Die Verweilzeit H_i ist in jedem Zustand [...] geometrisch verteilt“. [8, S. 5]

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt somit: $P(H_i = n \mid X_0 = i) = (p_{ii})^n (1 - p_{ii})$.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} P(H_i = n \mid X_0 = i) &= P(X_1 = i, \dots, X_{H_i} = i, X_{H_i+1} \neq i \mid X_0 = i) = \\ &= P(X_0 = i, X_1 = i, \dots, X_{H_i} = i, X_{H_i+1} \neq i). \end{aligned}$$

Aus Satz (1.2.2. i)) folgt

$$\begin{aligned} P(X_0 = i, X_1 = i, \dots, X_{H_i} = i, X_{H_i+1} \neq i) &= \\ = [P(X_0 = i) \cdot P(X_1 = i \mid X_0 = i) \cdot \dots \cdot P(X_{H_i} = i \mid X_{H_i-1} = i)] \cdot P(X_{H_i+1} \neq i \mid X_{H_i} = i) \end{aligned}$$

das bedeutet, dass sich $P(H_i = n \mid X_0 = i)$ als Multiplikation von Übergangswahrscheinlichkeiten anschreiben lässt. Es gilt somit

$$\begin{aligned} P(H_i = n \mid X_0 = i) &= \\ = \underbrace{[P(X_0 = i) \cdot P(X_1 = i \mid X_0 = i) \cdot \dots \cdot P(X_{H_i} = i \mid X_{H_i-1} = i)]}_{n\text{-mal}} \cdot P(X_{H_i+1} \neq i \mid X_{H_i} = i) &= \\ = \underbrace{p_{ii} \cdot \dots \cdot p_{ii}}_{n\text{-mal}} \cdot (1 - p_{ii}) = (p_{ii})^n \cdot (1 - p_{ii}) \end{aligned}$$

wobei p_{ii} die Übergangswahrscheinlichkeit angibt, von dem Zustand i in den Zustand i zu gelangen, und $(1 - p_{ii})$ die Wahrscheinlichkeit angibt, von dem Zustand i in einen anderen Zustand ungleich i zu gelangen.

q.e.d. [8]

Beispiel

Für das Labormausexperiment II gilt, dass die Wahrscheinlichkeit ausgehend von Raum B für 5 Minuten in Raum B zu bleiben, berechnet wird durch

$$P(H_B = 5 \mid X_0 = B) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1024} \cdot \frac{3}{4} = 0,0007342$$

Zur Erklärung der folgenden Definition wird das Labormausexperiment erneut verändert. Der zugehörige Übergangsgraph ist in Abbildung 5 dargestellt.

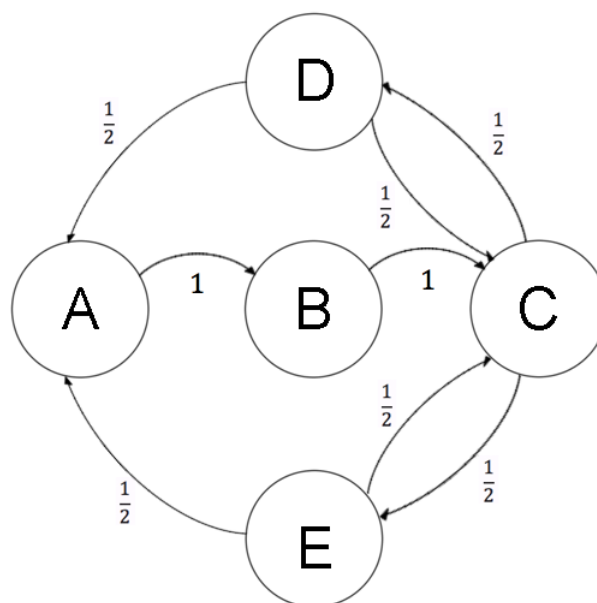


Abbildung 5 – Übergangsgraph Labormausexperiment IV

1.6.7. Definition: Periode

Sei $i \in I$ ein Zustand. Den größten gemeinsamen Teiler aller $n \in \mathbb{N}$ mit $P(X_n = i \mid X_0 = i)$ nennt man Periode d_i . [3]

Es gilt somit $d_i := \text{ggT}(\{n \in \mathbb{N} \mid P(X_n = i \mid X_0 = i)\})$.

Beispiel

Befindet sich die Maus aus obigen Labormausexperiment IV zum Zeitpunkt 0 in Raum A so kann sie nur zu den Zeitpunkten 4, 6, 8, 10, 12, ... wieder in selbigen Raum zurückkehren. Ist der Startraum hingegen mit Raum C festgelegt, so kann die Labormaus nur zu den Zeitpunkten 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... wieder in diesen Raum zurückkehren. In dem Labormausexperiment IV haben alle Räume eine Periode $d_i = 2$ für $i \in \{A, B, C, D, E\}$, woraus sich schließen lässt, dass eine Rückkehr in den jeweiligen Startraum nur nach einer geraden Anzahl an Zeitpunkten möglich ist.

Kennt man die Periodizität eines Zustandes, so kann man im Fall $d_i \neq 1$ Vorhersagen über mögliche Eintrittszeitpunkte treffen.

Gilt $d_i = 1$ für einen Zustand $i \in I$, so nennt man diesen Zustand aperiodisch. [3]

Ein Zustand $i \in I$ ist genau dann aperiodisch, wenn gilt: $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass $p_{ii}^{(n)} > 0$. [9]

Sind alle Zustände einer Markov-Kette aperiodisch, so spricht man von einer aperiodischen Markov-Kette.

Beispiel

In dem Labormausexperiment I ist jeder Raum aperiodisch. Dies lässt sich mit Hilfe der Übergangsmatrix $(p_{ij})^5$ überprüfen. Aus der ursprünglichen Übergangsmatrix

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

folgt

$$P^5 = (p_{ij})^5 = \begin{pmatrix} 0,2760 & 0,2769 & 0,0234 & 0,3004 & 0,1233 \\ 0,3676 & 0,1979 & 0,0499 & 0,2478 & 0,1367 \\ 0,2882 & 0,2675 & 0,0260 & 0,2905 & 0,1308 \\ 0,4948 & 0,0938 & 0,0885 & 0,1823 & 0,1406 \\ 0,4037 & 0,1667 & 0,0599 & 0,2266 & 0,1432 \end{pmatrix}.$$

Da $p_{ii}^{(5)} > 0 \forall i \in \{A, B, C, D, E\}$ gilt, sind alle Räume des Labormausexperimentes I aperiodisch.

Bemerkung: Da $p_{ij}^{(5)} > 0 \forall i, j \in \{A, B, C, D, E\}$ gilt, handelt es sich bei dem Labormausexperiment I um eine irreduzible Markov-Kette.

Ist die Wahrscheinlichkeit einer Markov-Kette gleich 0, wieder in den Anfangszustand $i \in I$ zurück zu gelangen, so ist die Periode dieses Zustandes gegeben mit $d_i = \infty$. [3]

Beispiel

In dem Labormausexperiment III ist die Periode d_A gleich ∞ .

1.7. Stationäre Verteilung

In Abschnitt 1.3. wurde bereits die zeitliche Entwicklung von homogenen Markov-Ketten behandelt. Mit Hilfe der Anfangsverteilung $\pi(0) = (\pi_1(0) \ \cdots \ \pi_k(0))$ für $i \in I = \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ und der stochastischen Matrix $P = (p_{ij})$ kann man die Verteilung $\pi(n) = (\pi_1(n) \ \cdots \ \pi_k(n))$ zu beliebigen Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen. Stellt man sich nun die Frage, welche Verteilung sich bei einem stochastischen Vorgang nach langfristiger Betrachtung einstellt, so führt dies zum Begriff der stationären Verteilung.

1.7.1. Definition: Stationäre Verteilung

Sei P eine stochastische Matrix. Man nennt eine Verteilung π_0 stationär, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\pi_0 \cdot P^n = \pi_0$. [9]

Eine stationäre Verteilung muss nicht immer existieren, beispielsweise wenn es sich bei dem stochastischen Vorgang um eine transiente Markov-Kette handelt. Außerdem muss eine stationäre Verteilung im Allgemeinen nicht eindeutig sein. Setzt man P gleich der Einheitsmatrix, so kann man beliebig viele Verteilungen π_0 angeben, welche die Bedingung aus Definition (1.7.1.) erfüllen. [9]

Für irreduzible Markov-Ketten mit endlichen Zustandsräumen bzw. irreduzible Markov-Ketten mit abzählbaren Zustandsräumen und positiv-rekurrenten Zuständen existieren hingegen immer eindeutige stationäre Verteilungen. [3]

Weiters gilt für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen π einer endlichen irreduziblen und aperiodischen Markov-Kette, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot P^n = \pi_0$, wobei π_0 die stationäre Verteilung bezeichnet. [9]

Existiert eine eindeutig stationäre Verteilung, so kann diese mit dem folgenden Satz berechnet werden.

1.7.2. Satz

„Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π_0 folgt aus $\pi(0) = \pi_0$ die Beziehung $\pi(n) = \pi_0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn $\pi_0 P = \pi_0$ gilt (also π_0 linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist).“ [9 S. 4 – Endliche Markovketten]

Beweis

($\Rightarrow$) Wegen $\pi_0 = \pi(n) \forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\pi_0 = \pi(1) = \pi(0) \cdot P = \pi_0 \cdot P$.

($\Leftarrow$) Induktionsanfang (I.A.)

Sei $n = 0$. Es gilt

$$\pi_0 \cdot P = \pi_0 = \pi(0) = \pi(n = 0).$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.)

Es gilt

$$\pi(n) = \pi_0.$$

Induktionsschritt (I.S.)

Für $n + 1$ gilt

$$\pi(n + 1) = \underbrace{\pi(n)}_{I.V.} \cdot P = \pi_0 \cdot P = \pi_0.$$

q.e.d. [9]

Beispiel

Um herauszufinden, in welchem Raum sich die Maus aus dem Labormausexperiment I nach langer Zeit aufhält, muss die stationäre Verteilung π_0 berechnet werden. Diese existiert und ist eindeutig, da es sich bei dem Labormausexperiment I um eine endliche irreduzible und aperiodische Markov-Kette handelt. Die Irreduzibilität und Aperiodizität der Markov-Kette wurden bereits durch die Matrix $(p_{ij})^5$ in dem Beispiel zu aperiodischen Markov-Ketten (S. 46-47) gezeigt.

Nach Satz (1.7.2.) ist die stationäre Verteilung der linke Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ bei vorgegebener Übergangsmatrix P . Die Übergangsmatrix für das Labormausexperiment I lautet

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Formel zur Berechnung eines Eigenvektors $\vec{v}$ zum Eigenwert λ ist gegeben durch $[A - \lambda E] \cdot \vec{v} = \vec{0}$, wobei A eine quadratische Matrix, E die Einheitsmatrix und $\vec{v}$ einen Spaltenvektor bezeichnen. Da die stationäre Verteilung π_0 als Zeilenvektor angeschrieben wird, müssen die Übergangsmatrix P und der Zeilenvektor π_0 zunächst transponiert werden, das ergibt

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\pi_0^t = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Formel zur Eigenvektorberechnung ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$[P^t - \lambda_1 E] \cdot \pi_0^t = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I: -\pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2 + 0 \cdot \pi_3 + \pi_4 + \frac{1}{2} \cdot \pi_5 = 0$$

$$II: \frac{1}{2} \cdot \pi_1 - \pi_2 + \frac{1}{3} \cdot \pi_3 + 0 \cdot \pi_4 + 0 \cdot \pi_5 = 0$$

$$III: 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2 - \pi_3 + 0 \cdot \pi_4 + 0 \cdot \pi_5 = 0$$

$$IV: \frac{1}{2} \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2 + \frac{1}{3} \cdot \pi_3 - \pi_4 + 0 \cdot \pi_5 = 0$$

$$V: 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2 + \frac{1}{3} \cdot \pi_3 + 0 \cdot \pi_4 - \frac{1}{2} \cdot \pi_5 = 0$$

Nach wenigen Äquivalenzumformungen ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$I: 4\pi_1 = \pi_2 + 4\pi_4 + 2\pi_5$$

$$II: 6\pi_2 = 3\pi_1 + 2\pi_3$$

$$III: 4\pi_3 = \pi_2$$

$$IV: 12\pi_4 = 6\pi_1 + 3\pi_2 + 4\pi_3$$

$$V: 6\pi_5 = 3\pi_2 + 4\pi_3$$

welches mittels dem Computerprogramm GeoGebra gelöst wurde und folgende Lösungen ergibt

$$\pi_1 = \frac{11}{4} \pi_5, \pi_2 = \frac{3}{2} \pi_5, \pi_3 = \frac{3}{8} \pi_5, \pi_4 = \frac{15}{8} \pi_5, \pi_5 = \pi_5.$$

Da die Summe der Komponenten eines Verteilungsvektors 1 ergeben muss, wird der Zeilenvektor π_0 mit dem Faktor

$$\frac{11}{4}\pi_5 + \frac{3}{2}\pi_5 + \frac{3}{8}\pi_5 + \frac{15}{8}\pi_5 + \pi_5 = 7,5\pi_5$$

normiert. Das ergibt

$$\pi_0 = \left(\frac{\frac{11}{4}\pi_5}{7,5\pi_5} \quad \frac{\frac{3}{2}\pi_5}{7,5\pi_5} \quad \frac{\frac{3}{8}\pi_5}{7,5\pi_5} \quad \frac{\frac{15}{8}\pi_5}{7,5\pi_5} \quad \frac{\pi_5}{7,5\pi_5} \right) \approx (0,37 \quad 0,2 \quad 0,05 \quad 0,25 \quad 0,13)$$

Bemerkung: Die Bedingung $\pi_5 \neq 0$ darf angenommen werden, da im Fall $\pi_5 = 0$ die Summe der Komponenten des Zeilenvektors π nicht 1 ergeben würde.

Nach langer Zeit hält sich die Labormaus mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 37 % in Raum A, 20 % in Raum B, 5 % in Raum C, 25 % in Raum D und rund 13 % in Raum E auf. Am wahrscheinlichsten ist es somit, dass man nach langer Zeit die Labormaus in Raum A antrifft, wohingegen es am unwahrscheinlichsten ist, die Labormaus in Raum C anzutreffen. Dieses Ergebnis ist nachvollziehbar, wenn man den Übergangsgraphen in Abbildung 2 betrachtet. Raum A ist von 3 Räumen aus erreichbar, wobei hinzukommt, dass die Übergangswahrscheinlichkeit von Raum D in Raum A mit 1 gegeben ist. Raum C ist hingegen nur von Raum B aus mit einer Übergangswahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ erreichbar.

2. Markov-Ketten in Verbindung mit schulischem Unterricht

2.1. (Wo) Finden Markov-Ketten einen Platz im Unterricht?

Im Zuge meines Lehramtsstudiums an der Universität Wien wurde der Begriff Markov-Kette nur am Rande eines unverbindlichen Seminars erwähnt. Des Weiteren waren Markov-Ketten auch in Gesprächen mit meinen Kommilitonen immer eine große Unbekannte. Diese Erfahrungen sind nur subjektiv, dennoch stellt sich zunächst folgende Frage:

„Ist es überhaupt sinnvoll, Markov-Ketten im Schulunterricht zu behandeln?“

Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, wurden folgende Kriterien herangezogen:

- Der Lehrplan der Neuen Modularen Oberstufe der AHS. ¹⁰
- Der Grundkompetenzenkatalog für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. ¹¹
- Eine Handreichung zum Lehrplan Mathematik für die Oberstufe AHS. ¹²

Bemerkung: Die in diesem Abschnitt 2.1. zitierten Punkte wurden als solche erkenntlich gemacht. Auf einen expliziten Verweis wurde auf Grund der Übersicht verzichtet.

Aus Kapitel 1 geht hervor, dass Markov-Ketten nicht nur auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränkt sind, sondern Wissen verschiedenster mathematischer Teilgebiete voraussetzen.

Neben dem Rechnen mit (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, und der Bedeutung von Zufallsvariablen und Erwartungswerten, ist vor allem ein fundiertes Grundwissen aus dem Bereich der linearen Algebra notwendig. Um die zeitliche Entwicklung von Markov-

¹⁰ https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html; Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen [Stand: 05. 05. 2018]

¹¹ <https://www.srdp.at>; Schriftliche Prüfungen; Mathematik: Allgemeine Informationen; Grundkompetenzenkatalog; Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (gültig am Maturatermin 2018) [Stand: 05. 05. 2018]

¹² https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/Publikationen/Handreichung_Lehrplan_Mathematik_2016_BMB.pdf [Stand: 05. 05. 2018]

Ketten zu beschreiben, sind die Begriffe Vektor und Matrix, sowie die jeweiligen Operationen untereinander unerlässlich. Die Fähigkeit des Aufstellens und Lösens linearer Gleichungssysteme ist sowohl für das Rechnen mit Zeitspannen, als auch für die Berechnung der stationären Verteilung notwendig.

Im Zusammenhang mit stationären Verteilungen spielt auch der Begriff des Grenzwertes eine zentrale Rolle. Markov-Ketten eignen sich im schulischen Unterricht gut zur Wiederholung des Grenzwertbegriffes, da dieser an Hand eines praxisorientierten Beispiels verdeutlicht werden kann.

Zwar sind die Binomialverteilung und die Normalverteilung in Hinblick auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung die zwei essentiellsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen, dennoch sollten nach dem Lehrplan der Neuen modularen Oberstufe der AHS auch noch weitere diskrete Verteilungen behandelt werden. Das Arbeiten mit Verweilzeiten bietet sich hierfür gut an, um den Schülerinnen und Schülern die geometrische Verteilung näher zu bringen.

Die im Lehrplan der Neuen Modularen Oberstufe der AHS aufgelisteten und zu unterrichtenden Themengebiete wurden mit den für das Rechnen mit Markov-Ketten notwendigen Kompetenzen verglichen und sind im Folgenden nachzulesen.

- 5. Klasse (1. und 2. Semester)

- Gleichungen und Gleichungssysteme

- „-) Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen lösen und deren Lösungsfälle untersuchen und geometrisch interpretieren können*

-) Die oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme anwenden können“*

- 6. Klasse

- 3. Semester – Kompetenzmodul 3

- Folgen

- „-) Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)“*

4. Semester – Kompetenzmodul 4

Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$; Vektoren in $\mathbb{R}^n$

- „-) *Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen lösen können*
-) *Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und deren Rechenoperationen kennen, in Anwendungskontexten interpretieren und verständig einsetzen können“*

Beschreibende Statistik; Wahrscheinlichkeit

- „-) *Mit Wahrscheinlichkeiten rechnen können (Baumdiagramme; Additions- und Multiplikationsregel)*
-) *Bedingte Wahrscheinlichkeiten und (stochastische) Unabhängigkeit von Ereignissen kennen“*

• 7. Klasse

6. Semester – Kompetenzmodul 6

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- „-) *Die Begriffe „diskrete Zufallsvariable“ und „diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung“ kennen*
-) *Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen (Wahrscheinlichkeitsverteilung) kennen und deuten können*
-) *Mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten können“*

• 8. Klasse – Kompetenzmodul 7

8. Semester

Sicherung der Nachhaltigkeit

- „-) *Wiederholen, Vertiefen von Fähigkeiten und Vernetzen von Inhalten, um einen umfassenden Überblick über die Zusammenhänge unterschiedlicher mathematischer Gebiete zu gewinnen.“*

Um die Eingangs erwähnte Frage zu beantworten, wurden neben dem Lehrplan der Neuen Modularen Oberstufe der AHS auch der Grundkompetenzenkatalog für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung, sowie ein erweiterter Grundkompetenzenkatalog einer Handreichung zum Lehrplan 2016 Mathematik auf

Zusammenhänge mit dem Thema Markov-Ketten untersucht. Es zeigt sich, dass das Thema Markov-Ketten mit einigen Grundkompetenzen und erweiterten Grundkompetenzen übereinstimmt.

Im Lehrplan der Neuen Modularen Oberstufe der AHS zielt das Thema Vektorrechnung zum Großteil auf eine geometrische Darstellung ab. Die algebraische Deutung eines Vektors, nämlich die Zusammenfassung von Zahlen zu einem n -Tupel, findet kaum Beachtung. Mit Hilfe der Anfangsverteilung bzw. der stationären Verteilung können die Schülerinnen und Schüler eine Anwendung von Vektoren außerhalb der geometrischen Darstellung mittels Markov-Ketten kennen lernen.

Wie bereits erwähnt, geht mit dem Thema Markov-Ketten vielfach das Lösen von Gleichungssystem mit mehreren Variablen einher. Im Zuge dessen bietet sich die Möglichkeit an, komplexere Gleichungssysteme mit Hilfe von elektronischen Hilfsmitteln zu lösen. Generell ist es beim Arbeiten mit Markov-Ketten von Vorteil, mit Hilfe von Computerunterstützung an die vorliegenden Aufgabenstellungen heranzutreten, da diese oftmals eine Vielzahl von Berechnungen erfordern. Schon für die Berechnung des Wahrscheinlichkeitsvektors $\pi(1)$ sind bei einem Zustandsraum der Kardinalität 5 25 Multiplikationen und 20 Additionen notwendig.

Im Folgenden sind die für das Thema Markov-Ketten notwendigen Kompetenzen aus dem Grundkompetenzenkatalog, sowie dem erweiterten Grundkompetenzenkatalog aufgelistet.

Grundkompetenzenkatalog:

- Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

„AG 2.5 *lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können*

Anmerkungen:

[...]

Mit dem Einsatz elektronischer Hilfsmittel können auch komplexe Umformungen von Termen, Formeln und Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen durchgeführt werden.“

Vektoren

„AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

[...]

Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen.“

- Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

„WS 3.1 die Begriffe Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung verständig deuten und einsetzen können“

Erweiterter Grundkompetenzenkatalog:

- Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

„AG-L 2.7 Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen lösen können“

- Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (FA)

Reihen

„FA-I 8.4 Folgen und Reihen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können“

- Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe

„WS-L 2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten kennen, berechnen und interpretieren können“

Summa summarum liefert die Behandlung von Markov-Ketten im Unterricht eine gute Möglichkeit zur Verknüpfung unterschiedlicher mathematischer Teilgebiete. Mit Blick auf die Schülerinnen und Schüler wird nicht nur der Zusammenhang verschiedenster mathematischer Teilgebiete verdeutlicht, zusätzlich ist eine Wiederholung des bisher erlangten Wissens gegeben. Aus diesem Grund bietet es sich an, das Thema Markov-Ketten am Ende der 7. Klasse oder im Verlauf des 8. Semesters zu behandeln.

In den anschließenden Abschnitten 2.2. bis 2.5. werden mögliche Stundenplanungen zur Behandlung des Themas Markov-Ketten im Unterricht gegeben. Die geplanten Unterrichtsstunden können im Rahmen einer Projektwoche am Ende der 7. oder 8. Klasse gehalten werden. Es wurde von 45-minütigen Unterrichtseinheiten ausgegangen. Für die geplanten Unterrichtseinheiten wäre es von Vorteil, wenn der Unterricht in einem Computerraum stattfindet, da die Schülerinnen und Schüler ein Computeralgebrasystem (z.B. GeoGebra) zur Lösung linearer Gleichungssysteme benötigen. Steht kein Computerraum zur Verfügung, so sollten die Schülerinnen und Schüler die linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Taschenrechners lösen. In diesem Fall sollte die Lehrkraft jedoch die notwendigen Rechenschritte über den Klassencomputer und den Beamer präsentieren.

2.2. Stundenplanung 1

Ziele für die Unterrichtsstunde

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- die zur Behandlung des Themas Markov-Ketten notwendigen Grundbegriffe wiederholen.
- wissen, was man unter einem Zustandsraum und einem stochastischen Prozess versteht.
- einen Übergangsgraphen lesen und interpretieren können.

Verlauf

- Grundbegriffe wiederholen. (20 Min.)
- Übungszettel 1 bis 4 austeilen und die Schülerinnen und Schüler bearbeiten lassen. (15 Min.)
- Übungszettel 1 bis 4 vergleichen. (10 Min.)

Allgemeines

Zur Wiederholung der Grundbegriffe wird als Unterrichtsmethode das von Josef Leisen vorgeschlagene Domino (siehe Abschnitt 5.1.) verwendet. Hierfür werden jeder Schülerin bzw. jedem Schüler mindestens ein Dominostein samt einem Haftmagneten ausgeteilt. Die Lehrkraft heftet den „Start-Stein“ an die Tafel, und liest die danebenstehende Frage vor. Die Schülerin bzw. der Schüler, die bzw. der den dazu passenden Stein hat, geht an die Tafel, beantwortet die Frage, und liest ihre bzw. seine Frage vor. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis alle Dominosteine aufgebraucht sind. Es empfehlen sich folgende Punkte:

- Der „Ende-Stein“ sollte bei genügend Steinen einer Schülerin bzw. einem Schüler gegeben werden, die oder der bereits einen Stein besitzt.
- Die Steine sollten zur besseren Handhabung einfoliert werden.
- Man kann schwierigere Fragen eher leistungsstärkeren und leichtere Fragen eher leistungsschwächeren Schülerinnen bzw. Schülern geben.

- Bei Dominosteinen mit Bildern (siehe Anhang 5.1. Ende) sollten diese über den Beamer hergezeigt und kurz von der Lehrkraft erläutert werden.
- Bei Dominosteinen mit Formeln sollten diese von den Schülerinnen bzw. Schülern an der Tafel aufgeschrieben werden.

Mit Hilfe des Dominos werden vorwiegend folgende Grundkompetenzen bzw. Grundbegriffe behandelt: Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, Bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Lineare Gleichungssysteme, Vektor und Grenzwert.

Bemerkung: Bei der Erstellung des Dominos wurden die für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, sowie den Begriff des Erwartungswertes notwendigen Informationen aus [5] herangezogen. Diese sind im Abschnitt 5.1. nicht extra angeführt.

Nach dem Domino sollen die Schülerinnen und Schüler die Übungsblätter 1 bis 4 in Einzelarbeit behandeln. Übungsblatt 1 dient dazu, die Schülerinnen und Schüler mit den Begriffen „System“ und „Zustandsraum“ vertraut zu machen. Die Übungsblätter 2 und 3 behandeln den Begriff des stochastischen Prozesses. Ein zugehöriges Beispiel soll den Schülerinnen und Schüler verdeutlichen, wie man die zeitliche Betrachtung eines Systems mathematisch darstellt. Übungsblatt 4 befasst sich mit dem Übergangsgraphen eines stochastischen Vorganges.

Im Anschluss werden die Übungsblätter in der Klasse gemeinsam mit der Lehrkraft besprochen. Hierbei werden vorrangig die Aufgaben verglichen. Bei dem Übungsblatt 4 sollte darauf aufmerksam gemacht werden, dass Übergangswahrscheinlichkeiten gleich 0 wichtig für die Betrachtung eines Systems sind, jedoch im Übergangsgraphen nicht eingezeichnet werden.

Projektwoche – Markov-Ketten

Mit Hilfe von Markov-Ketten kann man Voraussagen über bestimmte zukünftige Ereignisse treffen. Um zu verstehen, was eine Markov-Kette genau ist, muss man zunächst ein paar mathematische Definitionen einführen.

Zustandsraum

Ein Zustandsraum E ist eine Menge, deren Elemente allen möglichen Zuständen eines Systems entsprechen.

Zum besseren Verständnis betrachten wir als Beispiel das System „Verkehrsampel“. In einem vereinfachten Modell zeigt eine Straßenverkehrsampel zeigt entweder Rot, oder Gelb oder Grün an, die Zustände des Systems „Verkehrsampel“ sind somit ROT, GELB und GRÜN. In der nachfolgenden Tabelle sind die möglichen Ampelzustände nochmals aufgelistet, und mit entsprechenden Abkürzungen notiert.

Zustand	ROT	GELB	GRÜN
Abkürzung	e_1	e_2	e_3

Der Zustandsraum des Systems „Verkehrsampel“ ist somit gegeben durch

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} = \{ROT, GELB, GRÜN\}$$

Aufgabe:

In der nachfolgenden Tabelle sind mögliche Transportmittel mit zugehörigen Abkürzungen aufgelistet. Ergänze die Tabelle mit weiteren möglichen Transportmitteln und gib den entsprechenden Zustandsraum E an.

Zustand	Auto	Flugzeug	Fahrrad	Zug			
Abkürzung	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} = \{ \quad \quad \quad \}$$

Betrachtet man ein System über einen längeren Zeitraum, kann man die Zustände eines Systems mit einem Zeitparameter X_n ($n \in \mathbb{N}$) versehen.

Als Beispiel betrachten wir das System „Tims Frühstück“. Tim frühstückt täglich, wobei er immer zufällig zwischen einer der folgenden Speisen auswählt:

Zustand	Käsesemmel	Ham and Eggs	Kornspitz mit Schinken	Zuckerkipferl	Marmeladebrot	Pfannkuchen
Abkürzung	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6

Angenommen Tim speist an ungeraden Tagen im Monat sauer, und an geraden Tagen im Monat süß. Diesen Fall kann man mathematisch folgendermaßen anschreiben.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= e_1 \text{ oder } X_1 = e_2 \text{ oder } X_1 = e_3 \\
 X_2 &= e_4 \text{ oder } X_2 = e_5 \text{ oder } X_2 = e_6 \\
 X_3 &= e_1 \text{ oder } X_3 = e_2 \text{ oder } X_3 = e_3 \\
 X_4 &= e_4 \text{ oder } X_4 = e_5 \text{ oder } X_4 = e_6 \\
 X_5 &= e_4 \text{ oder } X_5 = e_5 \text{ oder } X_5 = e_6 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Aufgabe:

Welches Frühstück konsumiert Tim nächste Woche dienstags bzw. mittwochs?

$$\text{Dienstag: } X = e_1 \text{ oder } X = e_2 \text{ oder } X = e_3$$

$$\text{Mittwoch: } X = e_4 \text{ oder } X = e_5 \text{ oder } X = e_6$$

Stochastischer Prozess

Unter einem stochastischen Prozess versteht man die mathematische Beschreibung von zeitlich geordneten, zufälligen Vorgängen.

Man kann stochastische Prozesse auch graphisch darstellen. Das folgende Diagramm zeigt drei mögliche Varianten von Tims Frühstück über eine Woche gesehen dar. Es wird davon ausgegangen, dass die Zählung am ersten Tag im Monat, und somit an einem ungeraden Tag beginnt.

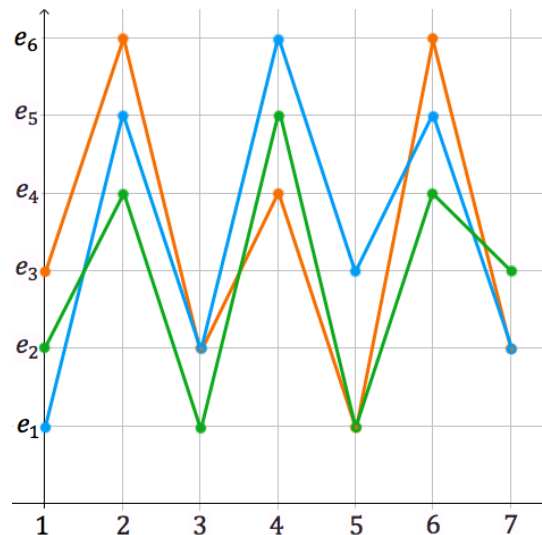


Abbildung 6 – Drei Möglichkeiten für Tims Wochenfrühstück

Aufgabe:

- a) Betrachte den orangenen Wochenverlauf. Welches Frühstück isst Tim täglich? Nimm dir hierfür die Tabelle von Blatt 2 zur Hilfe.
- b) Zeichne im unten nachfolgenden Diagramm zwei weitere mögliche Wochenverläufe von Tims Frühstück ein. Bedenke dabei, dass Tim an ungeraden Wochentagen sauer, und an geraden Wochentagen süß speist.

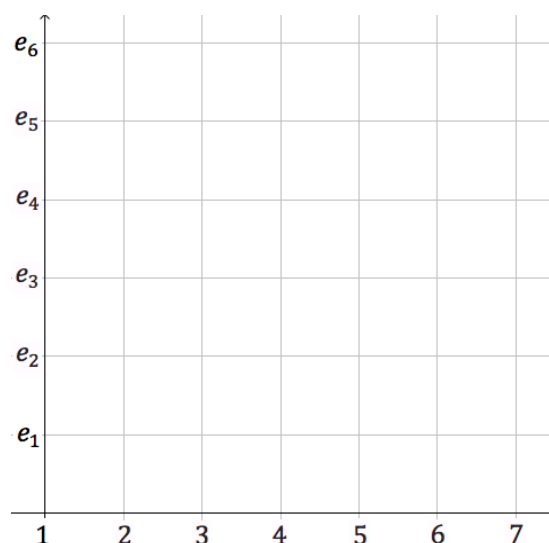


Abbildung 7 – Zwei Möglichkeiten für Tims Wochenfrühstück

Bringt man den Wahrscheinlichkeitsaspekt in einen stochastischen Vorgang ein, so führt dies zur Definition einer Markov-Kette. Die genaue mathematische Definition einer Markov-Kette erfolgt später, zunächst betrachten wir noch einmal Tims Frühstück mit einem Wahrscheinlichkeitsaspekt. Es gelten folgende Annahmen, die in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst sind.

Heute	e_1		e_2		e_3		e_4		e_5		e_6	
Übergangs- wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Morgen	e_4	e_5	e_4	e_6	e_5	e_6	e_1	e_2	e_1	e_3	e_2	e_3

Aufgabe:

- a) Tim isst heute einen Kornspitz mit Schinken. Welches Frühstück kann Tim morgen essen?
- b) Wenn Tim heute ein Marmeladebrot isst, welches Frühstück wird er morgen (mit Ausnahme der süßen Gerichte) mit Sicherheit nicht essen?

Das eben beschriebene System kann man mit Hilfe eines sogenannten Übergangsgraphen veranschaulichen.

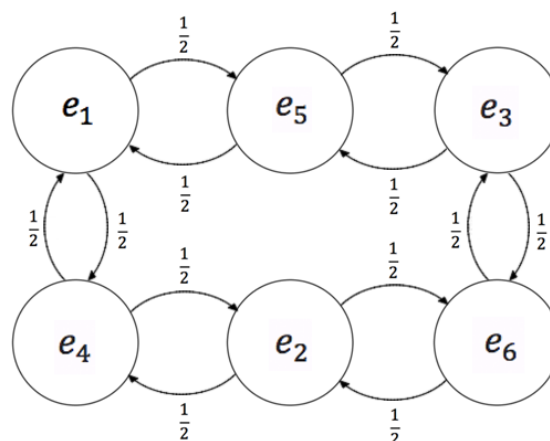


Abbildung 8 – Übergangsgraph Tims Frühstück

Übergangsgraph

Ein Übergangsgraph ist eine Übersicht, die sowohl die Zustände, als auch die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Systems darstellt.

2.3. Stundenplanung 2

Ziele für die Unterrichtsstunde

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- wissen, was man unter einer Markov-Kette versteht.
- die Vorteile der Matrixschreibweise kennen lernen, sowie die Matrixmultiplikation ausführen können.
- erkennen, dass man den zeitlichen Verlauf einer homogenen Markov-Kette mit Hilfe der Anfangsverteilung und der Übergangsmatrix beschreiben kann.

Verlauf

- Übungszettel 5 bis 11 austeilen und die Schülerinnen und Schüler bearbeiten lassen. (20 Min.)
- Übungszettel 5 bis 11 vergleichen. (15 Min.)
- Übungszettel 12 austeilen und gemeinsam besprechen. (10 Min.)

Allgemeines

Zunächst sollen die Schülerinnen und Schüler die Übungsblätter 5 und 6 in Einzelarbeit behandeln. Diese befassen sich mit der Definition einer Markov-Kette. Anhand zweier Beispiele sollen die Schülerinnen und Schüler selbstständig erkennen, was man unter der Markov-Eigenschaft versteht. Bei der anschließenden Besprechung der Arbeitsblätter 5 und 6 sollte die Lehrkraft noch einmal explizit auf die Begriffe Markov-Eigenschaft und homogene Markov-Kette eingehen.

Die Übungsblätter 7 bis 11 werden ebenfalls in Einzelarbeit behandelt. Die Übungsblätter 7 und 8 führen einerseits den Begriff der Anfangsverteilung ein, und dienen andererseits als Vorübung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(1)$. Übungsblatt 9 soll den Schülerinnen und Schülern verdeutlichen, dass es Abseits von Baumdiagrammen noch weitere Möglichkeiten gibt, stochastische Vorgänge anzuschreiben. Es wird darauf abgezielt, die Matrixschreibweise bzw. Matrixmultiplikation als neues und hilfreiches Instrument zur Berechnung von Eintrittswahrscheinlichkeiten zu verstehen. Die Übungsblätter 10 und 11 führen den

Begriff der Übergangsmatrix ein. Hier wird auch die Matrixmultiplikation an Hand eines Beispiels genau erklärt. Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verbindung mit Übungsblatt 8 erkennen, dass man mit Hilfe der Vektor-Matrix-Multiplikation zukünftige Eintrittswahrscheinlichkeiten berechnen kann.

Übungsblatt 12 wird gemeinsam mit der Lehrkraft bearbeitet. Diese zeigt die hierfür notwendigen Rechenschritte mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B. GeoGebra) her. Findet die Unterrichtsstunde in einem Computerraum statt, so sollten die Schülerinnen und Schüler die jeweiligen Befehle unter Anleitung der Lehrkraft ausführen.

Projektwoche – Markov-Ketten

Aufgabe:

Betrachte die Tabelle auf Blatt 2 und den Übergangsgraphen „Tims Frühstück“ auf Blatt 4. Welche der folgenden drei Aussagen ist korrekt?

- ☐ Wenn Tim heute eine Käsesemmel isst, dann isst er mit Sicherheit morgen ein Zuckerkipferl.
- ☐ Wenn Tim heute Ham and Eggs isst, dann dauert es mindestens 4 Tage, bis er ein Marmeladebrot isst.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit, mit der Tim ein bestimmtes Frühstück isst, hängt nur vom Frühstück des Vortages ab.

Markov-Kette

Sei E ein endlicher Zustandsraum mit den Zuständen $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e_n, e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Ein zeit-diskreter stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt Markov-Kette, genau dann wenn gilt:

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_0 = e_0, X_1 = e_1, \dots, X_{n-1} = e_{n-1}, X_n = e_n) = P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein beliebiger Zustand zum Zeitpunkt $n + 1$ eintritt, hängt bei einer Markov-Kette somit nur vom Zustand zum Zeitpunkt n ab. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass das Eintreten eines zukünftigen Zustandes nur vom aktuellen Zustand abhängig ist. Bleiben für alle Zeitpunkte die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen gleich, so spricht man von einer homogenen Markov-Kette. In den kommenden Beispielen werden immer homogene Markov-Ketten behandelt.

Betrachten wir als Beispiel einen einfachen Fahrkartenautomaten. Es gelten folgende Bedingungen:

- Wenn der Fahrkartenautomat heute funktionsfähig ist, dann wird er auch am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{95}{100}$ funktionieren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{100}$ wird der Fahrkartenautomat am nächsten Tag hingegen defekt sein.
- Wenn der Fahrkartenautomat heute defekt ist, dann wird er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ bis zum nächsten Tag repariert werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ wird er allerdings auch noch am nächsten Tag defekt sein.

Ob der Fahrkartenautomat am nächsten Tag funktioniert, oder defekt ist, hängt nur vom Zustand des Fahrkartenautomaten am heutigen Tag ab. Es liegt somit eine (homogene) Markov-Kette vor. Es gilt

Zustand	Funktioniert	Defekt
Abkürzung	e_1	e_2

Aufgabe:

Trage die Übergangswahrscheinlichkeiten in den unten dargestellten Übergangsgraphen ein.

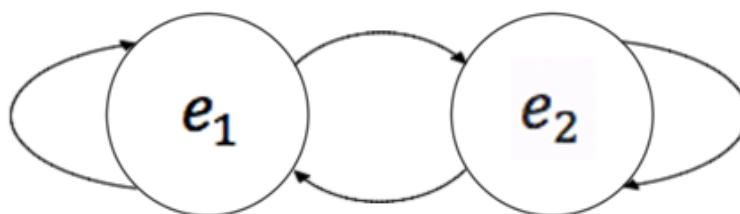


Abbildung 9 – Übergangsgraph Fahrkartenautomat

Mit Hilfe von Markov-Ketten kann man einfach und schnell Eintrittswahrscheinlichkeiten zukünftiger Zustände berechnen. Hierfür ist es jedoch notwendig, eine sogenannte Anfangsverteilung anzugeben.

Anfangsverteilung

Die Anfangsverteilung eines Systems gibt an, in welchem Zustand sich ein System mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zum Anfangszeitpunkt 0 befindet. Sie ist durch einen Zeilenvektor $\pi(0) = (\pi_0(0) \cdots \pi_n(0))$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gegeben. Die Elemente des Zeilenvektors $\pi(0)$ entsprechen den Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Zustände zum Anfangszeitpunkt 0.

Angenommen der Fahrkartenautomat wird neu in Betrieb genommen und funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 1, dann ist die Anfangsverteilung des Fahrkartenautomaten gegeben durch

$$\pi(0) = (1 \ 0)$$

Angenommen der Fahrkartenautomat wird neu in Betrieb genommen und funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5, dann ist die Anfangsverteilung des Fahrkartenautomaten gegeben durch

$$\pi(0) = (0,5 \ 0,5)$$

Aufgabe:

Die Summe aller Elemente einer Anfangsverteilung ergibt immer 1. Wie kann man dieses Ergebnis begründen? Gib außerdem eine weitere Anfangsverteilung für das System „Fahrkartenautomat“ an.

Angenommen der Fahrkartenautomat funktioniert zu Beginn mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$, oder ist defekt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Weiters gelten die Übergangswahrscheinlichkeiten von Blatt 6 aus Abbildung 9. In Abbildung 10 ist das entsprechende Baumdiagramm dargestellt.

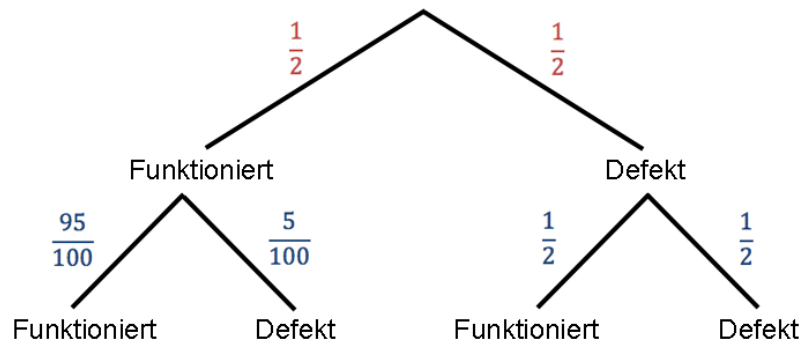


Abbildung 10 – Baumdiagramm I Fahrkartenautomat

Aufgabe:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrkartenautomat nach einem Tag funktioniert?

Rechnung: $P(\text{Automat funktioniert nach 1. Tag}) =$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrkartenautomat nach einem Tag defekt ist?

Rechnung: $P(\text{Automat ist defekt nach 1. Tag}) =$

Nachdem die Anfangsverteilung $\pi(0)$ die Wahrscheinlichkeiten der Zustände zu Beginn beinhaltet, kann man auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(1)$ angeben, welche die Wahrscheinlichkeiten der Zustände nach dem 1. Tag beinhaltet.

Aufgabe:

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(1)$ für das System „Fahrkartenautomat“ an.

$$\pi(1) = (\quad)$$

Möchte man die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit denen der Fahrkartenautomat beispielsweise nach drei Tagen funktioniert bzw. defekt ist (also $\pi(3)$), so würde das entsprechende Baumdiagramm folgendermaßen aussehen.

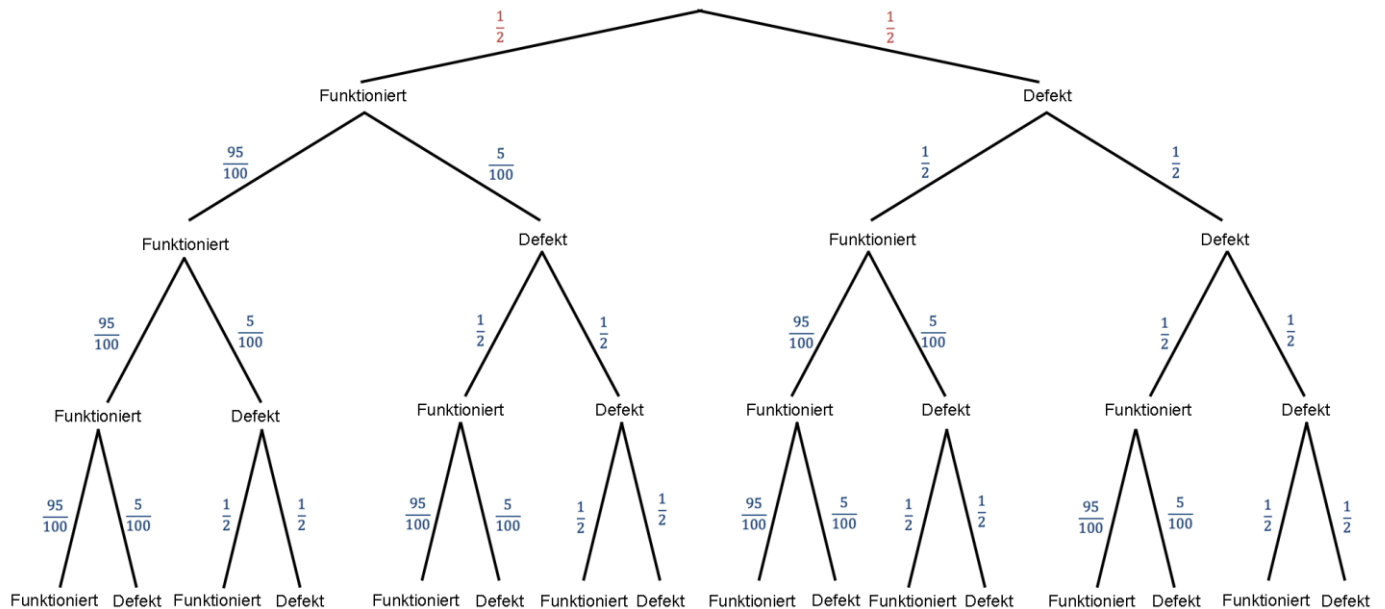


Abbildung 11 – Baumdiagramm II Fahrkartenautomat

Um die Wahrscheinlichkeit, ob der Fahrkartenautomat nach drei Tagen funktioniert, zu berechnen, sind schon 24 Multiplikationen und 8 Summationen notwendig. Möchte man also weitere zukünftige Wahrscheinlichkeiten berechnen, benötigt man eine effektivere Strategie. Es empfehlen sich daher folgende drei Schritte:

- 1) Das jeweilige System sollte mit Hilfe eines Übergangsgraphen dargestellt werden.
- 2) Die Wahrscheinlichkeiten sollten in Matrixschreibweise angegeben werden.
- 3) Die anschließenden Berechnungen sollten mit Hilfe eines Computeralgebrasystems durchgeführt werden.

Das System „Fahrkartenautomat“ wurde bereits auf Blatt 6 in Form eines Übergangsgraphen aufgezeichnet.

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen.

Übergangsmatrix

Eine Übergangsmatrix ist eine Matrix, deren geordnete Elemente alle Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markov-Kette sind.

Als Beispiel betrachten wir die Übergangsmatrix P des Systems „Fahrkartenautomat“. Diese wird folgendermaßen angeschrieben

$$P = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt, wie die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten angeordnet werden.

	Funktioniert morgen	Defekt morgen
Funktioniert heute	$\frac{95}{100}$	$\frac{5}{100}$
Defekt heute	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die Reihenfolge der Zustände in den Zeilen muss gleich der Reihenfolge der Zustände in den Spalten sein (1. Zeile: „Funktioniert“, 2. Zeile: „Defekt“; 1. Spalte: „Funktioniert“, 2. Spalte: „Defekt“). Weiters ergibt die Zeilensumme einer Übergangsmatrix immer 1.

Aufgabe:

Betrachte erneut das System „Fahrkartenautomat“. Warum ist die Matrix P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{100} & \frac{95}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

keine Übergangsmatrix?

Man kann Vektoren und Matrizen miteinander multiplizieren. Im Fall von Anfangsverteilungen und Übergangsmatrizen ist es dabei notwendig, dass die Reihenfolge der Zustände der Anfangsverteilung mit der Reihenfolge der Zeilen-/ bzw. Spaltenzustände übereinstimmt. Die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix ergibt erneut einen Zeilenvektor. Zur Veranschaulichung der Vektor-Matrix-Multiplikation wird die Anfangsverteilung $\pi(0)$ mit der Übergangsmatrix P multipliziert:

$$\begin{aligned}\pi(0) \cdot P &= (0,5 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \left(0,5 \cdot \frac{95}{100} + 0,5 \cdot \frac{1}{2} \quad 0,5 \cdot \frac{5}{100} + 0,5 \cdot \frac{1}{2} \right) = (0,725 \quad 0,275)\end{aligned}$$

Bei der Vektor-Matrix-Multiplikation wird die Zeile des Vektors mit den einzelnen Spalten der Matrix multipliziert, wobei man Produkte der jeweiligen Elemente miteinander summiert.

Ergänzung:

- Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Spaltenvektor $\vec{v}$ funktioniert wie folgt

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{pmatrix}$$

- Die Berechnung der Multiplikation zweier Matrizen lautet

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Folgender Merksatz ist bei der Multiplikation von Vektoren und Matrizen hilfreich:

„Zeile zuerst – Spalte später“

Aufgabe:

Vergleiche das Ergebnis der Vektor-Matrix-Multiplikation $\pi(0) \cdot P$ mit dem Vektor $\pi(1)$ auf Blatt 8. Was fällt dir auf?

Die Multiplikation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(n)$ zum Zeitpunkt n mit der zugehörigen Übergangsmatrix P liefert die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(n + 1)$ zum Zeitpunkt $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Möchte man wie auf Blatt 9 dargestellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach dem 3. Tag für das System „Fahrkartenautomat“ berechnen, so geht man folgendermaßen vor

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{(\pi(0) \cdot P)}_{=\pi(1)} \cdot P \right)}_{=\pi(2)} \cdot P \right)}_{=\pi(3)} = \pi(3)$$

Andererseits kann man auch rechnen

$$\pi(0) \cdot P \cdot P \cdot P = \pi(0) \cdot P^3 = \pi(3)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(n)$ zum Zeitpunkt n ($n \in \mathbb{N}$) ergibt sich aus der Multiplikation der Anfangsverteilung $\pi(0)$ mit der Matrix P^n , wobei P die Übergangsmatrix des Systems bezeichnet.

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems lässt sich die Matrix P^3 schnell berechnen. Es gilt

$$P^3 = P \cdot P \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{92}{100} & \frac{8}{100} \\ \frac{83}{100} & \frac{17}{100} \end{pmatrix}$$

und

$$\pi(0) \cdot P^3 = (0,5 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} \frac{92}{100} & \frac{8}{100} \\ \frac{83}{100} & \frac{17}{100} \end{pmatrix} = (0,875 \quad 0,125)$$

Aufgabe:

Woran könnte es liegen, dass man nach 3 Tagen „nur“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,5 % einen funktionierenden Fahrkartenautomaten vorfindet?

2.4. Stundenplanung 3

Ziele für die Unterrichtsstunde

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- wissen, was man unter der Verweilzeit eines Zustandes versteht.
- die geometrische Verteilung als weitere diskrete Verteilung neben der Binomialverteilung kennen lernen.
- an Hand eines Versuchs erkennen, dass vorab einfach wirkende Aufgabenstellungen nicht zwingend triviale Ergebnisse zur Folge haben.
- wissen, wie man den Erwartungswert für die mittlere Eintrittszeit eines Zustandes berechnet.

Verlauf

- Übungszettel 13 austeilen und gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern bearbeiten. (5 Min.)
- Übungszettel 14 austeilen und Vermutungen erheben. (2 Min.)
- den Münzwurfversuch erklären und die Schülerinnen und Schüler durchführen lassen. (10 Min.)
- Ergebnisse vergleichen und Daten erheben. (3 Min.)
- Übungszettel 15 bis 20 austeilen und die Schülerinnen und Schüler bearbeiten lassen. (20 Min.)
- Übungszettel 15 bis 20 vergleichen. (5 Min.)

Allgemeines

Zu Beginn der Einheit wird das Übungsblatt 13 gemeinsam mit der Lehrkraft bearbeitet. Die Lernenden sollen an Hand eines Beispiels die Verweilzeit eines Zustandes deuten können, sowie von selbst auf die geometrische Verteilung als weitere diskrete Verteilung schließen.

Mit Hilfe des Übungsblattes 14 wird ein Klassenversuch durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen an Hand eines Münzwurfversuchs herausfinden, ob das Ergebnis Kopf-Kopf-Kopf-Kopf bzw. das Ergebnis Zahl-Zahl-Kopf-Kopf häufiger auftritt, oder ob

beide Ergebnisse ungefähr gleich häufig eintreten. Hierfür werden zunächst die Vermutungen der möglichen Fälle von der Lehrkraft eruiert, und an der Tafel notiert. Im Anschluss sollen die Schülerinnen und Schüler das Experiment in Partnerarbeit ausführen. Schlussendlich werden die Einzelergebnisse in der Klasse besprochen und von der Lehrkraft an der Tafel zusammengefasst. Die Übungsblätter 15 und 16 dienen als Vorbereitung zur Berechnung des Erwartungswertes für die mittlere Eintrittszeit eines Zustandes. Die Erwartungswerte für die Eintrittszeiten der Zustände Kopf-Kopf-Kopf-Kopf und Zahl-Zahl-Kopf-Kopf werden mit Hilfe der Übungsblätter 17 bis 20 berechnet. Um die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit Summenzeichen zu unterstützen, ist auf den Übungsblättern 17 bis 20 eine detaillierte Schrittanleitung gegeben. Im Anschluss werden die jeweiligen Ergebnisse in der Klasse mit der Lehrkraft besprochen.

Sollte noch genügend Zeit vorhanden sein, kann als Ergänzung in dieser Unterrichtseinheit der Ruin eines Spielers aus Abschnitt 3.2. über den Beamer präsentiert werden.

Bemerkung: Die Idee für das Münzwurfexperiment stammt aus [15] und würde auf den Übungsblättern nicht extra vermerkt.

Projektwoche – Markov-Ketten

Aufgabe:

Betrachte den Übergangsgraphen zum System „Fahrkartenautomat“ auf Blatt 6. Angenommen man findet den Fahrkartenautomaten in einem funktionierenden Zustand (also e_1) vor, was könnten die Rechnungen

$$\frac{95}{100} \cdot \frac{5}{100} =$$

$$\frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{100} =$$

$$\frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{100} =$$

bedeuten? Berechne die jeweiligen Ergebnisse.

Verweilzeit und deren Wahrscheinlichkeit

Die Verweilzeit H_e eines Zustandes e ist die Zeit, bis der Zustand erstmals verlassen wird. Die Wahrscheinlichkeit der Verweilzeit ist geometrisch verteilt, das bedeutet, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(H_e = n \mid X_0 = e) &= \\ &= P(X_1 = e \mid X_0 = e) \cdot P(X_2 = e \mid X_1 = e) \cdot \dots \cdot P(X_n = e \mid X_{n-1} = e) \cdot P(X_n \neq e \mid X_{n-1} = e). \end{aligned}$$

Aufgabe:

Wirf eine Münze so lange, bis sie entweder viermal hintereinander Kopf (KKKK) oder zweimal hintereinander Zahl und anschließend zweimal hintereinander Kopf (ZZKK) anzeigt. Nutze zur Unterstützung die unten angeführte Tabelle.

Durchgang	Ergebnisreihe	KKKK	ZZKK	Anzahl Münzwürfe
Beispiel	K-Z-Z-K-Z-K-K-Z-Z-Z-K-Z-K-K-K-Z-Z-		X	32
	K-Z-K-K-Z-K-Z-K-Z-Z-K-Z-Z-K-K			
1				
		Summe		

Der Übergangsgraph für den Münzwurfversuch sieht folgendermaßen aus

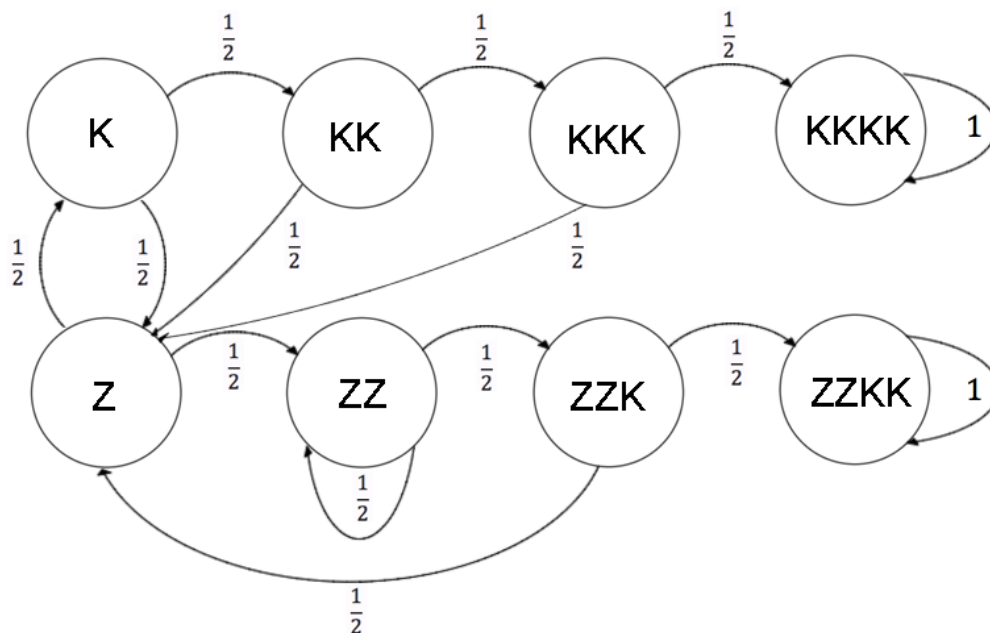


Abbildung 12 – Übergangsgraph Münzwurfversuch gesamt

Aufgabe:

Woran kann man an Hand des Übergangsgraphen feststellen, dass das Ergebnis ZZKK öfter als das Ergebnis KKKK eintreten wird?

In dem Übergangsgraphen kann man erkennen, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Zustände ZZKK bzw. KKKK nur in sich selbst wieder zurückführen. Solche Zustände nennt man bei Markov-Ketten auch absorbierende Zustände

Absorbierende Zustände

Absorbierende Zustände sind Zustände eines Systems, die nicht wieder verlassen werden können.

Man kann den im Durchschnitt zu erwartenden Wert, wie häufig man eine Münze werfen muss, bis das Ergebnis ZZKK bzw. das Ergebnis KKKK eintritt, berechnen. Dieser Wert ist davon abhängig, in welchem Zustand man sich momentan befindet. Hat man beispielsweise schon drei Mal hintereinander Kopf geworfen, so benötigt man nur noch ein weiteres Mal „Kopf“, um das Spiel mit KKKK zu beenden. Hat man hingegen zuletzt „Zahl“ geworfen, so benötigt man mindestens vier weitere Würfe, um das Spiel mit KKKK zu beenden.

Um den Erwartungswert für die mittlere Anzahl an Würfeln zu berechnen, schreibt man zunächst die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen in Kurzform an.

Die Übergangswahrscheinlichkeit, zu irgendeinem Zeitpunkt n ausgehend vom Zustand „Kopf“ in den Zustand „Zahl“ zu gelangen, ist gegeben durch $P(X_{n+1} = Z \mid X_n = K) = \frac{1}{2}$.

Man schreibt auch $p_{K,Z} = \frac{1}{2}$.

Andererseits ist die Übergangswahrscheinlichkeit, zu irgendeinem Zeitpunkt n ausgehend vom Zustand „Kopf-Kopf“ in den Zustand „Kopf-Kopf-Kopf“ zu gelangen, gegeben durch $P(X_{n+1} = KKK \mid X_n = KK) = p_{KK,KKK} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe: Schreibe die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = K \mid X_n = Z) =$$

$$P(X_{n+1} = ZZKK \mid X_n = ZZK) =$$

in Kurzform an. Was bedeuten sie?

Ausgehend vom Zustand $e \in E$ berechnet sich der Erwartungswert E_e als kleinste Lösung u_e des Gleichungssystems

$$u_e = 1 + \sum_{i \notin J} p_{e,i} u_i$$

wobei J die Menge der absorbierenden Zustände bezeichnet.

Im Folgenden werden die Erwartungswerte $E_e = u_e$ ($e \in E$), bis man den Zustand KKKK erreicht, berechnet. Der zugehörige Übergangsgraph ist in Abbildung 13 dargestellt. Dieser enthält im Vergleich zum Übergangsgraphen aus Abbildung 12 weniger Zustände. Da man sich jedoch für den Zustand KKKK interessiert, können die Zustände ZZ, ZZK und ZZKK weggelassen werden.

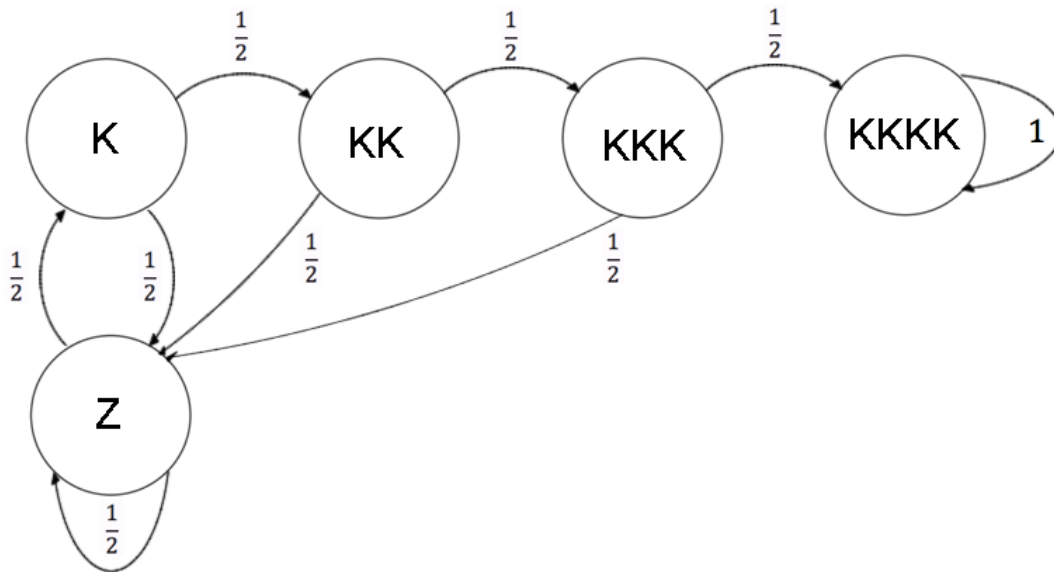


Abbildung 13 – Übergangsgraph für das Ergebnis KKKK

In diesem Übergangsgraphen ist $J = \{KKKK\}$ die absorbierende Menge.

Mit Hilfe der Gleichung

$$u_e = 1 + \sum_{i \notin J} p_{e,i} u_i = 1 + \sum_{i \in \{Z, K, KK, KKK\}} p_{e,i} u_i$$

wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt.

$$I: u_Z = 1 + \sum_{i \in \{Z, K, KK, KKK\}} p_{Z,i} u_i = 1 + [p_{Z,Z} u_Z + p_{Z,K} u_K + p_{Z,KK} u_{KK} + p_{Z,KKK} u_{KKK}]$$

$$II: u_K = 1 + \sum_{k \in \{Z, K, KK, KKK\}} p_{K,k} u_k = 1 + [p_{K,Z} u_Z + p_{K,K} u_K + p_{K,KK} u_{KK} + p_{K,KKK} u_{KKK}]$$

$$III: u_{KK} = 1 + \sum_{k \in \{Z, K, KK, KKK\}} p_{KK,k} u_k = 1 + [p_{KK,Z} u_Z + p_{KK,K} u_K + p_{KK,KK} u_{KK} + p_{KK,KKK} u_{KKK}]$$

$$IV: u_{KKK} = 1 + \sum_{k \in \{Z, K, KK, KKK\}} p_{KKK,k} u_k = 1 + [p_{KKK,Z} u_Z + p_{KKK,K} u_K + p_{KKK,KK} u_{KK} + p_{KKK,KKK} u_{KKK}]$$

Aufgabe:

Vervollständige das Gleichungssystem mit den zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten aus Abbildung 13 und löse es händisch nach den Unbekannten u_Z , u_K , u_{KK} und u_{KKK} auf.

$$I: u_Z = 1 + \quad \cdot u_Z + \quad \cdot u_K + \quad \cdot u_{KK} + \quad \cdot u_{KKK}$$

$$II: u_K = 1 + \quad \cdot u_Z + \quad \cdot u_K + \quad \cdot u_{KK} + \quad \cdot u_{KKK}$$

$$III: u_{KK} = 1 + \quad \cdot u_Z + \quad \cdot u_K + \quad \cdot u_{KK} + \quad \cdot u_{KKK}$$

$$IV: u_{KKK} = 1 + \quad \cdot u_Z + \quad \cdot u_K + \quad \cdot u_{KK} + \quad \cdot u_{KKK}$$

Rechnung:

Ergebnis:

$u_Z =$

$u_K =$

$u_{KK} =$

$u_{KKK} =$

Im Mittel benötig man ausgehend von Z ____ Würfe, ausgehend von K ____ Würfe, ausgehend von KK ____ Würfe und ausgehend von KKK ____ Würfe, um das Ergebnis KKKK zu erhalten.

Aufgabe:

Berechne die Erwartungswerte für die Zustände K, Z, ZZ und ZZK mit Hilfe des in Abbildung 14 dargestellten Übergangsgraphen.

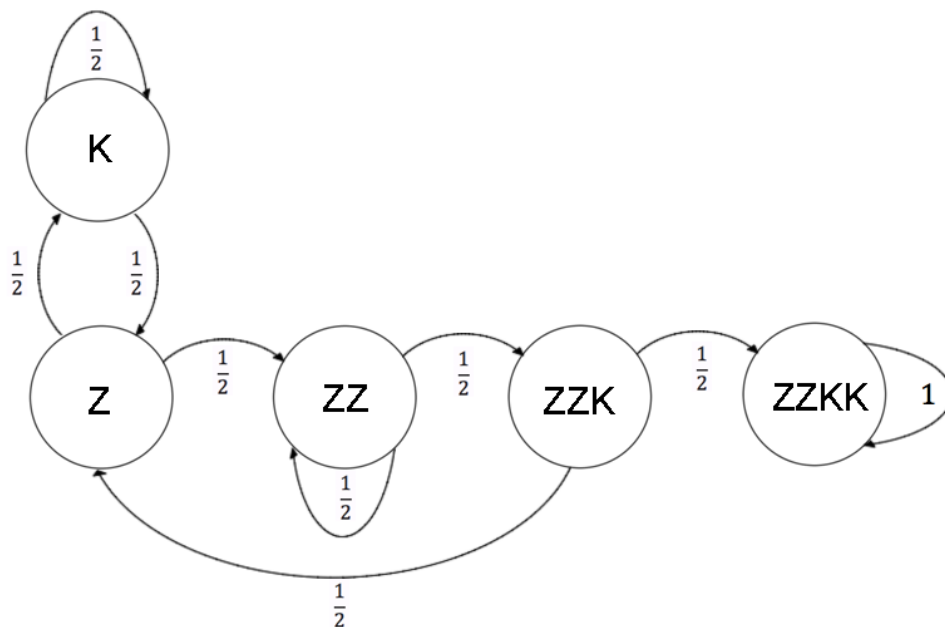


Abbildung 14 – Übergangsgraph für das Ergebnis ZZKK

Gehe hierfür folgende Schritte durch:

1) Schreibe die absorbierende Menge an.

2) Stelle das allgemeine Gleichungssystem

$$u_e = 1 + \sum_{i \notin J} p_{e,i} u_i = 1 + \sum_{i \in \{K, Z, ZZ, ZZK\}} p_{e,i} u_i$$

auf.*I:**II:**III:**IV:*3) Setze die Werte aus Abbildung 14 für die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten ein.*I:**II:**III:**IV:*4) Berechne das Gleichungssystem mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (Taschenrechner, GeoGebra).5) Gib die Lösungen für u_K , u_Z , u_{ZZ} und u_{ZZK} an

2.5. Stundenplanung 4

Ziele für die Unterrichtsstunde

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- wissen, was man unter einer stationären Verteilung versteht, und wie diese berechnet wird.
- die mit dem Thema Markov-Ketten verbundenen Grundbegriffe wiederholen.

Verlauf

- Übungszettel 21 bis 24 austeilen und die Schülerinnen und Schüler bearbeiten lassen. (30 Min.)
- Übungszettel 21 bis 24 vergleichen. (5 Min.)
- Wiederholen der Grundbegriffe. (10 Min.)

Allgemeines

Die Übungszettel 21 bis 24 sollen von den Schülerinnen und Schülern in Einzelarbeit behandelt werden. An Hand eines Beispiels wird erklärt, was die stationäre Verteilung angibt, und wofür man die stationäre Verteilung nutzen kann. Da die Berechnung der stationären Verteilung einige Elemente der linearen Algebra benötigt, wurde wie bereits bei der vorherigen Stundenplanung 3 eine detaillierte Schrittanleitung in den Übungszetteln angegeben. Im Anschluss an die Einzelarbeit werden die Übungszettel 21 bis 24 in der Klasse mit der Lehrkraft besprochen. Für die Wiederholung der Grundbegriffe wird ein Quiz herangezogen. Hierfür bietet sich die immer häufiger im schulischen Unterricht verwendete Lernplattform „Kahoot!“ an. In Abschnitt 5.2. ist eine entsprechende Vorlage gegeben.

Projektwoche – Markov-Ketten

Ein Restaurant bietet hauptsächlich folgende fünf Gerichte an

Zustand	Burger	Salat	Flammkuchen	Fisch	Steak
Abkürzung	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

Um den Zubereitungsablauf zu optimieren – z.B. benötigen unterschiedliche Gerichte unterschiedliche Beilagen – möchte der Restaurantinhaber feststellen, welche der fünf Speisen am häufigsten, und welche der Speisen am wenigsten konsumiert wird. Dafür erhebt er folgende Statistik

Gericht dieses Mal	e_1			e_2			e_3			
Übergangswahrscheinlichkeit	0,1	0,4	0,5	0,35	0,15	0,5	0,3	0,2	0,1	0,4
Gericht nächstes Mal	e_1	e_4	e_5	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4

Gericht dieses Mal	e_4			e_5		
Übergangswahrscheinlichkeit	0,8	0,1	0,1	0,4	0,1	0,5
Gericht nächstes Mal	e_1	e_3	e_5	e_1	e_4	e_5

Aufgabe:

Gib den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix P für das System „Restaurant“ an.

Übergangsgraph

Übergangsmatrix

Um festzustellen, welche Gerichte mit welcher Wahrscheinlichkeit konsumiert werden, müssen die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Zustände auf lange Sicht berechnet werden. Diese werden in der Wahrscheinlichkeitsverteilung π zusammengefasst. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung π nennt man auch stationäre Verteilung, da sie für große Zeitpunkte n und $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) unverändert bleibt. Eine stationäre Verteilung ist also eine Verteilung, die sich im Laufe der Zeit nicht ändert.

Stationäre Verteilung

Sei P eine Übergangsmatrix. Man nennt eine Verteilung π stationär, wenn gilt:

$$\pi \cdot P^n = \pi$$

für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe:

Berechne die stationäre Verteilung des Systems „Restaurant“. Gehe hierfür folgende Schritte durch:

1) Schreibe die Matrix P^t für das System „Restaurant“ an. Die Matrix P^t erhält man, indem man die Übergangsmatrix P entlang ihrer Hauptdiagonale spiegelt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,35 & 0,35 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,35 \\ 0,1 & 0,6 & 0,35 \end{pmatrix}$$

$$P^t =$$

2) Ziehe jeweils 1 von der Hauptdiagonale der Matrix P^t ab.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,35 & 0,35 \end{pmatrix}$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & -1 & 0,6 \\ 0,3 & 0,35 & -0,65 \end{pmatrix}$$

2) Stelle folgendes Gleichungssystem auf

$$P_{-1}^t \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I:

II:

III:

IV:

V:

3) Löse das Gleichungssystem nach den Unbekannten $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ und π_5 auf. Benutze hierfür ein Computeralgebrasystem (Taschenrechner, GeoGebra).

$\pi_1 =$

$\pi_2 =$

$\pi_3 =$

$\pi_4 =$

$\pi_5 =$

4) Berechne die Summe aus

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 =$$

und dividiere jeden Wert ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ und π_5) durch diese Summe.

5) Die jeweiligen dividierten Werte aus 4) sind die Komponenten des Zeilenvektors π .
Schreibe den Vektor π an.

$$\pi = (\quad \quad \quad)$$

Welches Gericht wird am häufigsten und welches Gericht wird am wenigsten bestellt?

Aus dem Übergangsgraphen kann man erkennen, dass egal von welchem Zustand man ausgeht, jeder andere Zustand erreicht werden kann. Beispielsweise ist der Zustand „Flammkuchen“ vom Zustand „Burger“ ausgehend erreichbar, und umgekehrt. Derartige wechselseitig erreichbare Zustände nennt man kommunizierend. Jede endliche homogene Markov-Kette, deren Zustände alle miteinander kommunizieren, besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung.

3. Anwendungsgebiete und Beispiele von Markov-Ketten

3.1 Physik – Brown'sche Bewegung und Ehrenfest-Modell

Markov-Ketten werden vor allem in der statistischen Physik zur Modellbeschreibung herangezogen. 1827 beobachtete der Botaniker Robert Brown unter einem Mikroskop, dass auf einem Wassertropfen verteilte Blütenpollen unregelmäßige Zitterbewegungen vollziehen. Diese Brown'sche Molekularbewegung ist auf die Bewegung der Wassermoleküle in dem Tropfen zurückzuführen. Je höher die Temperatur des Wassers ist, desto größer ist die kinetische Energie der Wassermoleküle, und desto größere Zitterbewegungen können festgestellt werden. [11]

Die Zitterbewegung der Teilchen unterliegt der Markov-Eigenschaft aus Abschnitt 1.2..

In der Schule kann die Brown'sche Bewegung mit Hilfe des Teebeutelexperimentes verdeutlicht werden. Hierfür benötigt man zwei Gläser, zwei Teebeutel, Wasser und einen Wasserkocher. In ein Glas wird kaltes Wasser gegossen, in das andere Glas wird mit Hilfe des Wasserkochers erwärmtes Wasser gegossen. Gibt man nun gleichzeitig je einen Teebeutel in die Gläser, so kann man erkennen, dass sich das warme Wasser viel schneller verfärbt, als das kalte Wasser. Der Grund hierfür liegt in der Brown'schen Bewegung. Die stärkeren Zitterbewegungen der Wassermoleküle im warmen Wasser verteilen die einzelnen Bestandteile und Farbstoffe des Tees schneller als die Wassermoleküle des Wasserglases mit kaltem Wasser.

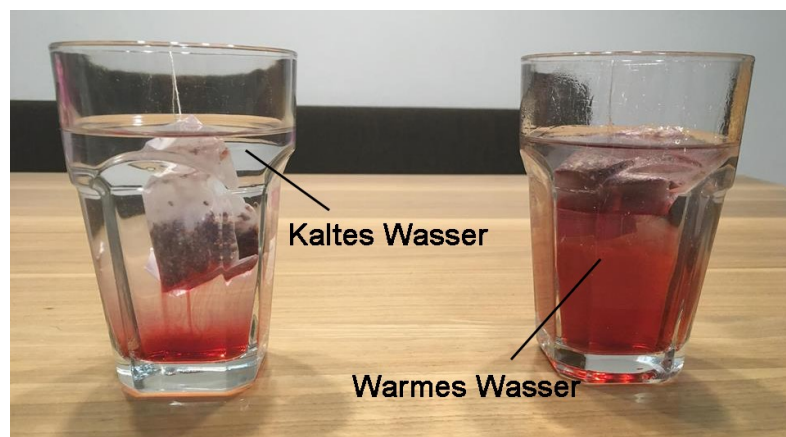


Abbildung 15 – Teebeutelexperiment zur Brown'schen Bewegung

Eine weitere Anwendung finden Markov-Ketten im sogenannten Ehrenfest-Modell. Hierbei betrachtet man ein abgeschlossenes System¹³ mit zwei Räumen, welche durch eine Trennwand voneinander getrennt sind. In Raum 1 befindet sich ein Gas mit der Teilchenanzahl N_1 , der Temperatur T_1 , dem Druck p_1 und dem Volumen V_1 , in Raum 2 befindet sich ein Gas mit der Teilchenanzahl N_2 , der Temperatur T_2 , dem Druck p_2 und dem Volumen V_2 . Abbildung 16 illustriert die eben beschriebene Situation.

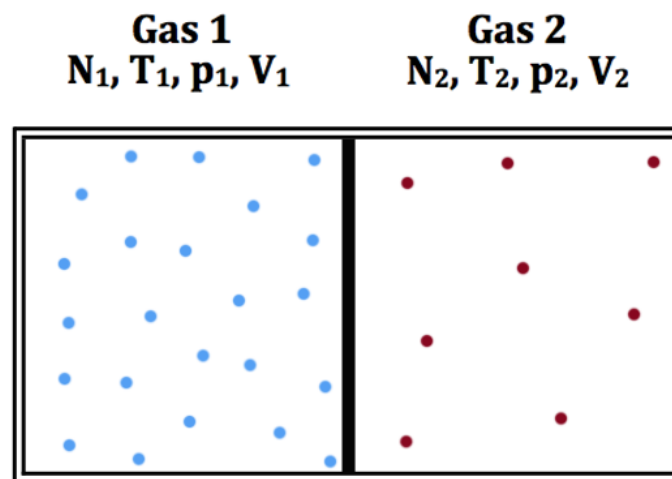
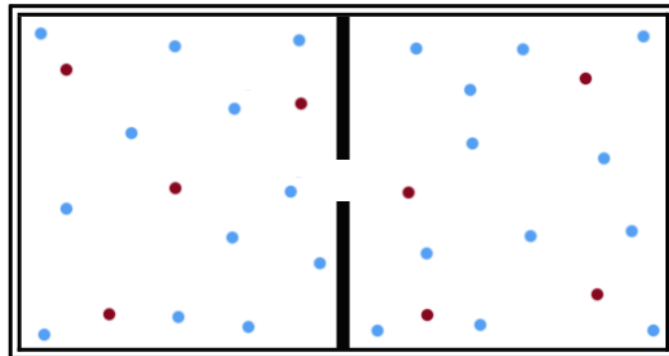


Abbildung 16 – Zwei Gase in getrennten Räumen

Bei einer vollständig isolierenden Trennwand bleiben die Zustände (Teilchenzahl, Temperatur, Druck und Volumen) in den jeweiligen Räumen erhalten. Sobald man jedoch einen Teil der Trennwand entfernt, z.B. durch ein Loch in der Wandmitte, stellt sich mit der Zeit eine gleiche Temperatur (thermisches Gleichgewicht) und ein gleicher Druck (mechanisches Gleichgewicht) im gesamten System ein. Man sagt, dass sich das System in einem Gleichgewichtszustand befindet. Im Gleichgewichtszustand sind neben dem Druck und der Temperatur auch die Teilchen der Gase 1 und 2 nahezu gleichmäßig auf den gesamten Raum verteilt. Abbildung 17 illustriert ein System im Gleichgewichtszustand. [12]

¹³ Ein System ist abgeschlossen (oder isoliert), wenn kein Materie-/ oder Energieaustausch mit der Umgebung stattfindet [12]

Gas gesamt
N, T, p, V



**Abbildung 17 – Vermischung zweier im Vorhinein
getrennter Gase nach langer Zeit**

Der Austausch von Gasteilchen zwischen den Räumen 1 und 2 kann ebenfalls mit Hilfe einer Markov-Kette dargestellt werden. Paul Ehrenfest beschrieb in seinem Modell den Teilchenaustausch zwischen zwei getrennten Räumen. Dabei wird jedes Teilchen gleich wahrscheinlich ausgewählt und in den jeweils anderen Raum befördert. Es zeigt sich nach ausreichend langer Zeit, dass man bei realen Versuchen mit großen Teilchenanzahlen mit hoher Sicherheit ungefähr gleich viele Teilchen in Raum 1 und Raum 2 vorfindet. Zwar ist es nicht unmöglich, dass die Raumverteilung einen stark ungleichverteilten Zustand erreicht – selbst das Wandern aller Teilchen in einen Raum ist nicht unmöglich – jedoch müsste man das System hierfür über einen sehr langen Zeitraum betrachten, sodass dieser Fall praktisch nie eintritt. [13]

3.2. Spieltheorie – Der Ruin eines Spielers

Beim französischen Roulette gibt es insgesamt 37 mögliche Zahlen (0 bis 36), wobei 18 Zahlen die Farbe Rot und 18 Zahlen die Farbe Schwarz annehmen. Die 0 besitzt unter allen Zahlen einen Sonderstatus und ist grün gefärbt. Es gibt beim Roulettespiel die Möglichkeit, den Einsatz auf Rot oder Schwarz zu setzen. Hat man die richtige Farbe vorhergesagt, so erhält man einen Gewinn in Höhe des Einsatzes, und den gesetzten Betrag zurück. Fällt die Kugel jedoch auf die jeweils andere Farbe, so verliert man den Einsatz zur Gänze. Tritt bei der Wahl von Rot oder Schwarz die Null auf, so wird der Einsatz gesperrt. Auf die genauen Zéro-Regeln wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine im Vorhinein ausgewählte Farbe tatsächlich eintritt, liegt somit bei

$$P(X = \text{Rot}) = P(X = \text{Schwarz}) = \frac{18}{37}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorher ausgewählte Farbe nicht eintritt bei

$$P(X = \text{Nicht Rot}) = P(X = \text{Nicht Schwarz}) = 1 - \frac{18}{37} = \frac{19}{37}.$$

Angenommen ein Spieler benötigt 100,- € und besitzt derzeit 20,- €. Er geht ins Casino, um beim Roulette sein Glück zu versuchen, dabei verfolgt er folgende Strategie: Der Spieler setzt mit jedem Zug 10,- € auf die Farbe Rot, bis er entweder bankrott geht, oder 100,- € besitzt. Tritt einer dieser zwei Fälle ein, so ist das Spiel beendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Casino mit 100,- € verlässt? Zur Vereinfachung dieses Beispiels wird angenommen, dass, unabhängig von der Farbwahl, der Einsatz beim Eintreten der 0 immer verloren geht.

Die vorliegende Situation ist ein Beispiel einer endlichen homogenen Markov-Kette, da die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines zukünftigen Zustandes nur vom momentanen Zustand abhängt. Die Beträge 0, 10, 20, ..., 90, 100 sind die möglichen annehmbaren Zustände. Der zugehörige Übergangsgraph ist nachfolgender Abbildung 18 illustriert.

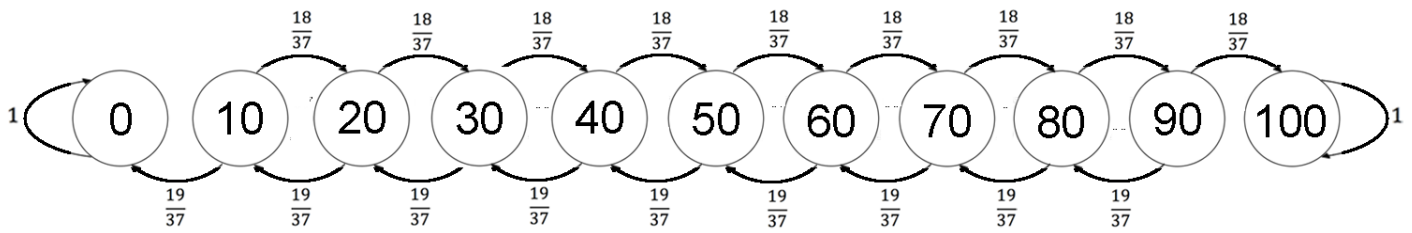


Abbildung 18 – Übergangsgraph Glücksspiel

Die Übergangsmatrix P lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz (1.5.1. ii)) lässt sich die Wahrscheinlichkeit P_i , ausgehend vom Zustand $i \in \{0, 10, \dots, 90\}$ den Zustand $j \in J = \{100\}$ zu erreichen durch folgendes Gleichungssystem berechnen

$$u_i = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \in \{0, 10, \dots, 90\}} p_{ik} u_k$$

mit $i \in \{0, 10, \dots, 90\}$ und $J = \{100\}$.

$$\begin{aligned}
I: u_0 &= \sum_{k \in \{100\}} p_{0,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{0,k} u_k = \\
&= p_{0,100} + [p_{0,0}u_0 + p_{0,10}u_{10} + p_{0,20}u_{20} + p_{0,30}u_{30} + p_{0,40}u_{40} + p_{0,50}u_{50} + p_{0,60}u_{60} + p_{0,70}u_{70} + p_{0,80}u_{80} + p_{0,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II: u_{10} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{10,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{10,k} u_k = \\
&= p_{10,100} + [p_{10,0}u_0 + p_{10,10}u_{10} + p_{10,20}u_{20} + p_{10,30}u_{30} + p_{10,40}u_{40} + p_{10,50}u_{50} + p_{10,60}u_{60} + p_{10,70}u_{70} + p_{10,80}u_{80} + p_{10,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III: u_{20} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{20,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{20,k} u_k = \\
&= p_{20,100} + [p_{20,0}u_0 + p_{20,10}u_{10} + p_{20,20}u_{20} + p_{20,30}u_{30} + p_{20,40}u_{40} + p_{20,50}u_{50} + p_{20,60}u_{60} + p_{20,70}u_{70} + p_{20,80}u_{80} + p_{20,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IV: u_{30} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{30,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{30,k} u_k = \\
&= p_{30,100} + [p_{30,0}u_0 + p_{30,10}u_{10} + p_{30,20}u_{20} + p_{30,30}u_{30} + p_{30,40}u_{40} + p_{30,50}u_{50} + p_{30,60}u_{60} + p_{30,70}u_{70} + p_{30,80}u_{80} + p_{30,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V: u_{40} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{40,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{40,k} u_k = \\
&= p_{40,100} + [p_{40,0}u_0 + p_{40,10}u_{10} + p_{40,20}u_{20} + p_{40,30}u_{30} + p_{40,40}u_{40} + p_{40,50}u_{50} + p_{40,60}u_{60} + p_{40,70}u_{70} + p_{40,80}u_{80} + p_{40,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VI: u_{50} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{50,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{50,k} u_k = \\
&= p_{50,100} + [p_{50,0}u_0 + p_{50,10}u_{10} + p_{50,20}u_{20} + p_{50,30}u_{30} + p_{50,40}u_{40} + p_{50,50}u_{50} + p_{50,60}u_{60} + p_{50,70}u_{70} + p_{50,80}u_{80} + p_{50,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VII: u_{60} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{60,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{60,k} u_k = \\
&= p_{60,100} + [p_{60,0}u_0 + p_{60,10}u_{10} + p_{60,20}u_{20} + p_{60,30}u_{30} + p_{60,40}u_{40} + p_{60,50}u_{50} + p_{60,60}u_{60} + p_{60,70}u_{70} + p_{60,80}u_{80} + p_{60,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VIII: u_{70} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{70,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{70,k} u_k = \\
&= p_{70,100} + [p_{70,0}u_0 + p_{70,10}u_{10} + p_{70,20}u_{20} + p_{70,30}u_{30} + p_{70,40}u_{40} + p_{70,50}u_{50} + p_{70,60}u_{60} + p_{70,70}u_{70} + p_{70,80}u_{80} + p_{70,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IX: u_{80} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{80,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{80,k} u_k = \\
&= p_{80,100} + [p_{80,0}u_0 + p_{80,10}u_{10} + p_{80,20}u_{20} + p_{80,30}u_{30} + p_{80,40}u_{40} + p_{80,50}u_{50} + p_{80,60}u_{60} + p_{80,70}u_{70} + p_{80,80}u_{80} + p_{80,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X: u_{90} &= \sum_{k \in \{100\}} p_{90,k} + \sum_{k \in \{0,10,\dots,90\}} p_{90,k} u_k = \\
&= p_{90,100} + [p_{90,0}u_0 + p_{90,10}u_{10} + p_{90,20}u_{20} + p_{90,30}u_{30} + p_{90,40}u_{40} + p_{90,50}u_{50} + p_{90,60}u_{60} + p_{90,70}u_{70} + p_{90,80}u_{80} + p_{90,90}u_{90}]
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
I: & u_0 & = & u_0 \\
II: & u_{10} & = & \frac{19}{37} \cdot u_0 + \frac{18}{37} \cdot u_{20} \\
III: & u_{20} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{10} + \frac{18}{37} \cdot u_{30} \\
IV: & u_{30} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{20} + \frac{18}{37} \cdot u_{40} \\
V: & u_{40} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{30} + \frac{18}{37} \cdot u_{50} \\
VI: & u_{50} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{40} + \frac{18}{37} \cdot u_{60} \\
VII: & u_{60} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{50} + \frac{18}{37} \cdot u_{70} \\
VIII: & u_{70} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{60} + \frac{18}{37} \cdot u_{80} \\
IX: & u_{80} & = & \frac{19}{37} \cdot u_{70} + \frac{18}{37} \cdot u_{90} \\
X: & u_{90} & = & \frac{18}{37} + \frac{19}{37} \cdot u_{80}
\end{array}$$

Da u_0 die kleinste Lösung aus $u_0 \in [0, 1]$ ist, gilt

$$u_0 = 0.$$

Die Lösung $u_0 = 0$ ist auch nachvollziehbar, wenn man bedenkt, dass es sich bei dem Zustand 0 um einen absorbierenden Zustand handelt, und man dadurch – sobald man einmal in 0 angekommen ist – nicht mehr in den Zustand 100 kommen kann. Dies gilt insbesondere für den Startzustand 0.

Das Gleichungssystem wurde mittels dem Computerprogramm GeoGebra gelöst. Es ergeben sich folgende Lösungen.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0 & u_{50} &= \frac{1889568}{4365667} \\
 u_{10} &= \frac{198359290368}{2560599031177} & u_{60} &= \frac{36978950736}{69205379221} \\
 u_{20} &= \frac{11019960576}{69205379221} & u_{70} &= \frac{1642592755224}{2560599031177} \\
 u_{30} &= \frac{628749972864}{2560599031177} & u_{80} &= \frac{52221816180}{69205379221} \\
 u_{40} &= \frac{23298373440}{69205379221} & u_{90} &= \frac{2237911333398}{2560599031177}
 \end{aligned}$$

Die nachfolgenden Tabellen geben die Wahrscheinlichkeiten an, ausgehend vom Zustand $i \in \{0, 10, \dots, 90\}$ in den Zustand 100 zu gelangen.

Startzustand	0	10	20	30	40
Wahrscheinlichkeit für den Zustand 100	0	0,0775	0,1592	0,2455	0,3367

Startzustand	50	60	70	80	90
Wahrscheinlichkeit für den Zustand 100	0,4328	0,5343	0,6415	0,7546	0,8740

Es zeigt sich, dass der Spieler mit einem Startkapital von 20,- € mit einer Wahrscheinlichkeit von 15,92 % 100,- € gewinnt. Weiters kann man folgenden Zusammenhang erkennen: Je höher das Startkapital des Spielers ist, desto wahrscheinlicher ist es für ihn, den angestrebten Zustand zu erreichen.

3.3. Meteorologie – Wettervorhersage

Angenommen, das Wetter innerhalb einer Region lässt sich tageweise durch folgendes vereinfachtes Modell (S: Sonnig, B: Bewölkt, R: Regen) beschreiben.¹⁴

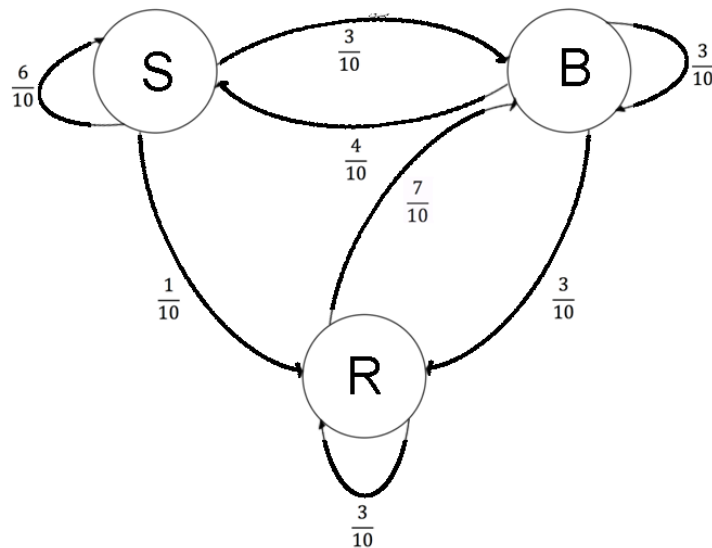


Abbildung 19 – Übergangsgraph Wettermodell

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag zwei weitere Sonnentage folgen?
- Wie lautet die langfristige Erwartung der Wetterlage in dieser Region?

a) Nach Satz (1.2.2. i)) lässt sich die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Weg berechnen durch

$$P(S, S, S) = 1 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0,36$$

¹⁴ <http://www.math.kit.edu/stoch/lehre/stochproz2009s>; Übungsblatt 01 [Stand: 05. 05. 2018]

b) Um die langfristige Wettersituation innerhalb der Region zu festzustellen, muss die stationäre Verteilung π_0 berechnet werden. Nach Satz (1.7.2.) wird die stationäre Verteilung durch den linken Eigenvektor zum Eigenwert 1 angegeben. Die Übergangsmatrix P lautet für dieses Wettermodell

$$P = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix P^t und der transponierte Zeilenvektor π_0^t sind gegeben durch

$$P^t = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{4}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

und

$$\pi_0^t = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Formel zur Eigenvektorberechnung ergibt sich für den Eigenvektor $\lambda_1 = 1$ folgendes Gleichungssystem

$$[P^t - \lambda_1 E] \cdot \pi_0^t = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{10} & \frac{4}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 I: & -\frac{4}{10} \cdot \pi_1 + \frac{4}{10} \cdot \pi_2 + 0 \cdot \pi_3 = 0 \\
 II: & \frac{3}{10} \cdot \pi_1 - \frac{7}{10} \cdot \pi_2 + \frac{7}{10} \cdot \pi_3 = 0 \\
 III: & \frac{1}{10} \cdot \pi_1 + \frac{3}{10} \cdot \pi_2 - \frac{7}{10} \pi_3 = 0
 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wurde mittels dem Computerprogramm GeoGebra gelöst und ergibt folgende Lösungen

$$\pi_1 = \frac{7}{4} \pi_3, \pi_2 = \frac{7}{4} \pi_3, \pi_3 = \pi_3.$$

Die Normierung mit dem Faktor

$$\frac{7}{4} \pi_3 + \frac{7}{4} \pi_3 + \pi_3 = 4,5 \pi_3$$

ergibt die stationäre Verteilung

$$\pi_0 = \left(\frac{\frac{7}{4} \pi_3}{4,5 \pi_3} \quad \frac{\frac{7}{4} \pi_3}{4,5 \pi_3} \quad \frac{\pi_3}{4,5 \pi_3} \right) \approx (0,39 \quad 0,39 \quad 0,22)$$

Bemerkung: Die Bedingung $\pi_3 \neq 0$ darf angenommen werden, da im Fall $\pi_3 = 0$ die Summe der Komponenten des Zeilenvektors π nicht 1 ergeben würde.

Es zeigt sich, dass es auf lange Sicht gesehen mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 39 % sonnig oder bewölkt, und mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 22 % regnerisch in der Region ist.

3.4. Informatik – Page Rank

Bei Google handelt es sich um die größte Suchmaschine weltweit. Gibt man einen Begriff in die Google ein, so wird sofort ein Vorschlag an möglichen Webseiten chronologisch aufgelistet. Es stellt sich jedoch die Frage, nach welchen Kriterien die Reihenfolge der Auflistung, und damit gleichzeitig die Bewertung der Webseiten durch die Suchmaschine, stattfindet? 1998 entwickelten Sergey Brin und Lawrence Page hierfür einen Algorithmus, welcher die „Wichtigkeit“ bzw. „Bedeutung“ einzelner Webseiten festlegt. Der sogenannte Page Rank einer Seite ist ein skaliertes, dimensionsloser Wert zwischen 0 und 10 und spielt eine große Rolle bei der Bewertung von Webseiten. An dieser Stelle sei vorweggenommen, dass Google neben dem Page Rank Algorithmus noch eine Vielzahl weiterer Bewertungskriterien zur Webseitenbewertung heranzieht.¹⁵

Grundsätzlich setzt sich die Bewertung einer Webseite i aus der Anzahl an Links, die auf diese Seite verlinken, zusammen. Einen von einer Webseite auf eine andere Webseite aus verweisenden Link bezeichnet man auch als Backlink. Stammt ein Backlink von einer stark besuchten Webseite ab, so nimmt dieser einen größeren Einfluss auf den Page Rank der Seite i , als der Backlink einer weniger häufig besuchten Webseite. Die Formel zur Berechnung des Page Ranks PR_i einer Webseite i lautet

$$PR_i = 1 - d + d \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} \frac{PR_j}{c_j}.^{16}$$

Mit PR_j bezeichnet man den Page Rank einer Webseite $j \in \{1, \dots, n\}$, welche auf die Webseite i verlinkt. Da eine Webseite j auf mehrere Seiten verlinken kann, muss der Page Rank PR_j durch die Anzahl an wegweisenden Links c_j verhältnismäßig aufgeteilt werden. Die Größe d entspricht einem Dämpfungsfaktor und wird üblicherweise $d = 0,85$ gesetzt.

¹⁵ <http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/>; Lehrtätigkeit; Online-Skriptum: Von Graphen, Genen und dem WWW; Bewertung von Webseiten durch Google [Stand: 05. 05. 2018]

¹⁶ <http://pr.efactory.de/d-pagerank-algorithmus.shtml> [Stand: 05. 05. 2018]

Um die Funktionsweise des Page Rank Algorithmus zu verdeutlichen, zieht man das sogenannte Random Surfer Model (dt. Zufallssurfer-Modell) heran. Das Random Surfer Model kann man mit dem in Kapitel 1 eingeführten Labormausexperiment vergleichen. Ein Internetbesucher startet nach dem Zufallsprinzip auf einer Website und springt mit Hilfe der Backlinks zwischen den Webseiten umher. Die einzelnen Webseiten entsprechen den möglichen Zuständen einer homogenen Markov-Kette. Jene Webseiten, welche nach langer Zeit die größten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Besuchers haben, erhalten einen dementsprechend hohen Page Rank. Im Gegensatz dazu werden Webseiten mit geringer Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit einem verhältnismäßig niedrigeren Page Rank dotiert. Um die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Besuchers auf lange Zeit zu berechnen, muss die stationäre Verteilung angegeben werden. Der Faktor d aus obiger Formel gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Besucher die Backlinks auf einer Webseite verwendet. Analog dazu kann man den Faktor $1 - d$ als jene Wahrscheinlichkeit interpretieren, mit der eine Person eine beliebige Webseite ohne eine direkte Verlinkung besucht, z.B. durch manuelles Aufrufen. Webseiten ohne Backlinks (absorbierende Webseiten) und Webseiten, auf die kein Backlink verweist, werden im Rahmen des Random Surfer Model nicht berücksichtigt. [14]¹⁵

Der Zusammenhang zwischen dem Page Rank und Markov-Ketten wird im folgenden Beispiel verdeutlicht. Angenommen es gäbe n Webseiten deren Übergangswahrscheinlichkeiten in der Matrix P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & p_{n-1,n} \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

zusammengefasst sind. Die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ entsprechen der gewichteten Anzahl an Backlinks einer Webseite. Gibt es beispielsweise von Webseite 1 fünf Backlinks auf Webseite 2 und nur einen Backlink auf die Webseite 3, dann gilt $p_{12} = 5 \cdot p_{13}$. Um die oben erwähnte Page Rank Formel vollständig in Matrixschreibweise darzustellen, muss noch der Dämpfungsfaktor d

berücksichtigt werden. Sei S eine Matrix, deren Elemente s_{ij} $i, j \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$ berechnet werden durch

$$s_{ij} = \frac{1-d}{n}.$$

Es gilt somit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \end{pmatrix}.$$

Weiters sei P_S eine Matrix, die sich zusammensetzt aus

$$P_S = S + d \cdot P.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} P_S &= \begin{pmatrix} \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & p_{n-1,n} \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \cdot p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d \cdot p_{1n} \\ d \cdot p_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d \cdot p_{n-1,n} \\ d \cdot p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & d \cdot p_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-d}{n} & \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{1n} \\ \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{21} & \frac{1-d}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} & \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{n-1,n} \\ \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-d}{n} + d \cdot p_{n,n-1} & \frac{1-d}{n} \end{pmatrix}. \quad [14]$$

Man erkennt, dass die Matrix P_S im Random Surfer Model die Formel zur Berechnung des Page Ranks in Matrixschreibweise darstellt. Summiert man beispielsweise über die erste Spalte von P_S , so erhält man

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1-d}{n} + \left(\frac{1-d}{n} + d \cdot p_{21}\right) + \cdots + \left(\frac{1-d}{n} + d \cdot p_{n1}\right)}_{n\text{-mal}} = \\ & = n \cdot \left(\frac{1-d}{n}\right) + (d \cdot p_{21} + \cdots + d \cdot p_{n1}) = \\ & = 1 - d + d \cdot (p_{21} + \cdots + p_{n1}). \end{aligned}$$

Durch Berechnen der stationären Verteilung der stochastischen Matrix P_S kann man den Page Rank der Webseiten $i, i \in \{1, \dots, n\}$ ermitteln. Im Allgemeinen wird das dabei aufgestellte Gleichungssystem durch ein Näherungsverfahren berechnet.

3.5. Logistik – Warteschlangen

In diesem Beispiel geht es darum, den Erwartungswert $E(X)$ für die aktuelle Anzahl an wartenden Personen in einer Warteschlange mit einem Bedienschalter zu berechnen. Wie in dem vorher beschriebenen Beispiel zur Wettervorhersage (Abschnitt 3.3.) wird auch in diesem Beispiel ein vereinfachtes Modell herangezogen.

Die Anzahl der wartenden Personen entspricht in diesem Modell den möglichen Zuständen $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ einer homogenen Markov-Kette. Für die Ankunftsrate (z.B. 3 Personen pro Minute) bzw. fertige Bedienrate (z.B. 5 Personen pro Minute) innerhalb einer Warteschlange werden die Parameter α bzw. β festgelegt. In diesem Modell wird die Warteschlange in der Zeiteinheit m betrachtet, wobei gilt, dass pro Zeiteinheit maximal eine Person zur Warteschlange hinzukommt bzw. fertig bedient wird. In der nachfolgenden Abbildung 20 ist der zugehörige Übergangsgraph illustriert. Mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\frac{\alpha}{m}$ bzw. $\frac{\beta}{m}$ wird die Anzahl an Personen in der Warteschlange pro Zeiteinheit um 1 erhöht bzw. verringert.¹⁷

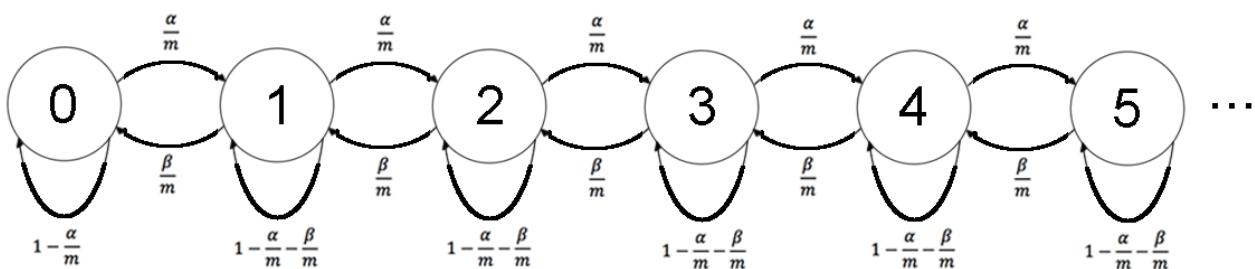


Abbildung 20 – Übergangsgraph Warteschlangenmodell

Die Elemente π_i $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ der stationären Verteilung $\pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \dots \ \pi_N)$ geben die prozentuellen Wahrscheinlichkeiten für die Zustände $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ an. Zwischen zwei benachbarten Elementen π_i gilt die Gleichgewichtsbeziehung

¹⁷ <http://www.nibis.de/~lbs-gym/>; 14, Verschiedenes, bis auf Unter- und Mittelstufe überwiegend keine schulischen Inhalte; Stochastik: Warteschlangentheorie [Stand: 05. 05. 2018]

$$\pi_i \cdot \frac{\alpha}{m} = \pi_{i+1} \cdot \frac{\beta}{m}$$

bzw.

$$\pi_i \cdot \alpha = \pi_{i+1} \cdot \beta \quad {}^{17}$$

Diese Beziehung kann man folgendermaßen verdeutlichen. Angenommen in $x\%$ der Fälle stehen $i-1$ Personen, in $y\%$ der Fälle stehen i Personen und in $z\%$ der Fälle stehen $i+1$ Personen in der Warteschlange. Es gilt also $\pi_{i-1} = x\%$, $\pi_i = y\%$ und $\pi_{i+1} = z\%$. Auf lange Sicht dürfen sich die Wahrscheinlichkeiten π_i nicht verändern. Eine Zuwanderung von π_i nach π_{i+1} mit $y\% \cdot \frac{\alpha}{m}$ muss somit einer Abwanderung von π_{i+1} nach π_i mit $z\% \cdot \frac{\beta}{m}$ entsprechen. Andererseits muss eine Abwanderung von π_i nach π_{i-1} mit $y\% \cdot \frac{\beta}{m}$ gleich einer Zuwanderung von π_{i-1} nach π_i mit $x\% \cdot \frac{\alpha}{m}$ sein. ¹⁸

Die eben genannte Gleichgewichtsbeziehung liefert somit folgende Rekursionsdarstellung

$$\pi_0 \cdot \alpha = \pi_1 \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi_0$$

$$\pi_1 \cdot \alpha = \pi_2 \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi_1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cdot \pi_0$$

$$\pi_2 \cdot \alpha = \pi_3 \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \pi_3 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi_2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cdot \pi_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \pi_0$$

⋮

¹⁸ <https://www.youtube.com/watch?v=X7w5A1QFpG8> [Stand: 05. 05. 2018]

$$\pi_{n-1} \cdot \alpha = \pi_n \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \pi_n = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi_{n-1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \pi_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \pi_0$$

Für die Elemente π_i $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \pi_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cdot \pi_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \pi_0 + \dots = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_0 \cdot \underbrace{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 + \dots\right]}_{=\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k} = 1 \quad 18$$

Nach den Rechenregeln für geometrische Reihen gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Die hierfür notwendige Bedingung $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ darf angenommen werden, da $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 1$ dem Fall, dass sich der Bedienschalter und die hinzukommenden Personen in Waage halten, und $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| > 1$ dem Fall, dass die Warteschlange ins Unendliche wächst, entsprechen.

Man erhält somit

$$\pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_0 = 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

bzw. nach obiger Rekursionsdarstellung

$$\pi_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \pi_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right).$$

Um Erwartungswert $E(X)$ für die aktuelle Anzahl an wartenden Personen für dieses Modell zu berechnen, wendet man die zugehörige Formel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$ an. Es gilt

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \right] = \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n.$$

Durch die Substitution von $\frac{\alpha}{\beta} = x$ kann nach den Summenregeln für Ableitungen die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$ auch angeschrieben werden als

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x \cdot \frac{d}{dx} (x^n) \right) = x \cdot \frac{d}{dx} (x^0) + x \cdot \frac{d}{dx} (x^1) + x \cdot \frac{d}{dx} (x^2) + \dots = \\ &= x \cdot \left[\frac{d}{dx} \underbrace{(1 + x + x^2 + \dots)}_{=\sum_{j=0}^{\infty} x^j} \right].^{18} \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für die geometrische Reihe erhält man mittels der Kettenregel

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \right) = x \cdot \left(\frac{d}{dx} ((1-x)^{-1}) \right) = x \cdot (-(1-x)^{-2} \cdot (-1)) = \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Nach der Rücksubstitution von $x = \frac{\alpha}{\beta}$ erhält man für den Erwartungswert

$$E(X) = \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

und aus $\pi_0 = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$ folgt

$$E(X) = \frac{1 - \pi_0}{\pi_0}.^{17}$$

4. Quellenverzeichnis

4.1. Literatur

- [1] **Schichl, Hermann; Steinbauer, Roland.** *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Spektrum, 2. Auflage.
- [2] **Henze, Norbert.** *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls.* Springer Spektrum, 10. Auflage.
- [3] **Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M..** *Stochastische Modelle. Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer, 2. Auflage.
- [4] **Behrends, Ehrhard.** *Elementare Stochastik. Ein Lernbuch von Studierenden mitentwickelt.* Springer Spektrum.
- [5] **Humenberger, Hans.** *Skript zur Lehrveranstaltung Schulmathematik Stochastik.* Sommersemester 2017.
- [6] **Henze, Norbert; Last, Günther.** *Mathematik für Wirtschaftsingenieure und naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2.* Springer-Verlag.
- [7] **Meintrup, David; Schäffler, Stefan.** *Stochastik. Theorie und Anwendungen.* Springer-Verlag.
- [8] **Efrosinin, Dimitry.** *Skript zur Lehrveranstaltung Markov Ketten. Sequentielle Entscheidungsprozesse.* Sommersemester 2013.
- [9] **Raith, Peter.** *Skript zur Lehrveranstaltung Seminar für LAK (Stochastik).* Wintersemester 2015/2016.
- [10] **Scheutzwow, Michael.** *Skript zur Lehrveranstaltung Stochastische Modelle.* Wintersemester 2015/16.

-
- [11] **Wagner, Paul; Reischl, Georg; Steiner, Gerhard.** *Einführung in die Physik.* Facultas Verlags- und Buchhandels AG, 2., neu bearbeitete Auflage.
- [12] **Christoph Dellago.** *Skript zur Lehrveranstaltung Theoretische Physik für das Lehramt L2 (Quantenmechanik und Statistische Physik).* Wintersemester 2014/15.
- [13] **Georgii, Hans-Otto.** *Stochastik, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Verlag Walter de Gruyter. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage.
- [14] **Schulz, Daniel.** *Eine Einführung in zeit-diskrete homogene Markov-Ketten.* Forschungsarbeit. GRIN Verlag.
- [15] **Dieter Küntzer.** *Mathematik Abiturthemen, VII Markow-Ketten.* Verlag: Dieter Küntzer.

4.2. Online Quellen

<https://www.springer.com/de/book/9783834819390>

https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_masstheorie_ss_13/07_messbare_funktionen.pdf

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>

https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuaufgabe_2018_2015-10-19.pdf

https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/Publikationen/Handreichung_Lehrplan_Mathematik_2016_BMB.pdf

<http://www.math.kit.edu/stoch/lehre/stochproz2009s/media/stochproz01.pdf>

<http://www.nibis.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Warteschlange.pdf>

<https://www.youtube.com/watch?v=X7w5A1QFpG8>

<http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Lehre/aussermathAnw/Google.html#d>

<http://pr.efactory.de/d-pagerank-algorithmus.shtml>

4.3. Abbildungen

Abbildung 1:	Illustration eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes	5
[Quelle:	Der Verfasser; in Anlehnung an:	
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Probability-measure.svg ;		
Autor: Ziggystar]		
Abbildung 2:	Übergangsgraph Labormausexperiment I	9
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 3:	Übergangsgraph Labormausexperiment II	21
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 4:	Übergangsgraph Labormausexperiment III	25
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 5:	Übergangsgraph Labormausexperiment IV	45
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 6:	Drei Möglichkeiten für Tims Wochenfrühstück	63
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 7:	Zwei Möglichkeiten für Tims Wochenfrühstück	63
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 8:	Übergangsgraph Tims Frühstück	64
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 9:	Übergangsgraph Fahrkartenautomat	68
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 10:	Baumdiagramm I Fahrkartenautomat	70
[Quelle: Der Verfasser]		

Abbildung 11:	Baumdiagramm II Fahrkartenautomat	71
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 12:	Übergangsgraph Münzwurfversuch gesamt	79
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 13:	Übergangsgraph für das Ergebnis KKKK	81
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 14:	Übergangsgraph für das Ergebnis ZZKK	83
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 15:	Teebeutelexperiment zur Brown'schen Bewegung	90
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 16:	Zwei Gase in getrennten Räumen	91
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 17:	Vermischung zweier im Vorhinein getrennter Gase nach langer Zeit	92
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 18:	Übergangsgraph Glücksspiel	94
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 19:	Übergangsgraph Wettermodell	98
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 20:	Übergangsgraph Warteschlangenmodell	105
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 21:	Zweistufiges Baumdiagramm	126
[Quelle: Der Verfasser]		

Abbildung 22:	Wahrscheinlichkeitsverteilung Würfelwurf	126
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 23:	Allgemeines lineares Gleichungssystem	127
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 24:	Konvergente nicht monotone Folge	128
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 25:	Konvergente streng monoton fallende Folge	128
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 26:	Divergente nicht monotone Folge	129
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 27 :	Divergente streng monoton steigende Folge	129
[Quelle: Der Verfasser]		
Abbildung 28:	Übergangsgraph Quiz	132
[Quelle: Der Verfasser]		

5. Anhang

5.1. Domino

Start	Mit Hilfe eines _____ kann man das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen.
---	--

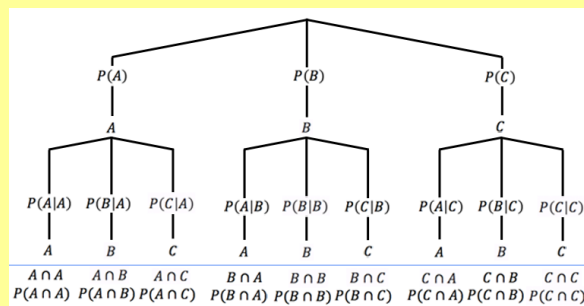
Baumdiagrammes	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze 2x hintereinander Zahl zu werfen?
---	---

$\frac{1}{4}$	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze zuerst Kopf, und danach Zahl oder zuerst Zahl, und danach Kopf zu werfen?
---	---

$\frac{1}{2}$	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 1 oder eine 6 zu werfen?
$\frac{2}{6}$	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl oder eine 1 zu werfen?
$\frac{4}{6}$	Wenn man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A berechnen möchte, das vom vorher eingetretenen Ereignis B abhängig ist, dann ist diese Wahrscheinlichkeit gesucht.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Dieses Bild zeigt ein zweistufiges Baumdiagramm mit den Ereignissen A, B und C.



Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ergibt sich als _____ der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

Produkt

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich als _____ der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die dieses Ereignis darstellen.

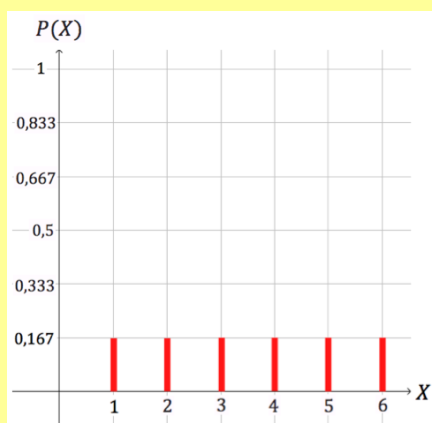
Summe	Wie lautet die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse A und B.
$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Welcher Wert sagt den Durchschnittswert auf lange Sicht voraus?
Erwartungswert	Wie lautet die Formel für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X ?

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

So nennt man eine Funktion, die nur endlich viele Werte annehmen kann.

Diskret

Dieses Bild zeigt die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Würfelwurfs.



Welche Form hat ein allgemeines lineares Gleichungssystem?

$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$	Ein lineares Gleichungssystem hat _____, _____ oder _____ Lösungen.
keine genau eine unendlich viele	Hat ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen keine Lösung, dann bedeutet das im geometrischen Fall, dass zwei Geraden einander _____.
nicht berühren	Hat ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen genau eine Lösung, dann bedeutet das im geometrischen Fall, dass zwei Geraden einander _____.

schneiden	Hat ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen unendlich viele Lösungen, dann bedeutet das im geometrischen Fall, dass zwei Geraden einander _____ sind.
ident	Wie nennt man in der Mathematik ein Tupel von Zahlen?
Vektor	Ein Vektor kann in diesen Formen angeschrieben werden.

Zeilenform z.B. $(2 \quad 3)$ und Spaltenform z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Wenn eine Zahlenfolge a_n für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Wert b strebt, dann bezeichnet man b als _____ der Folge a_n.
--	--

Grenzwert	So nennt man eine Zahlenfolge a_n, die einen Grenzwert besitzt.
------------------	---

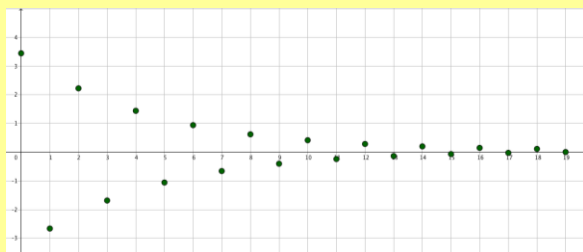
Konvergent	So nennt man eine Zahlenfolge a_n, die keinen Grenzwert besitzt.
-------------------	--

Divergent

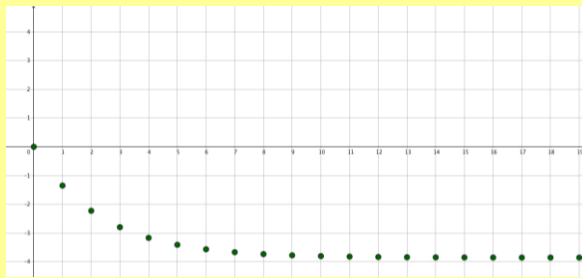
Welche Eigenschaft kann eine Zahlenfolge besitzen?

Monotonie

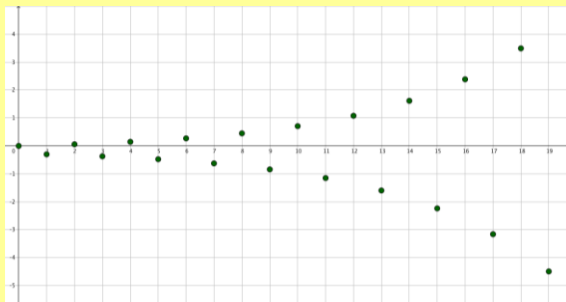
Dieses Bild zeigt eine konvergente nicht monotone Zahlenfolge.



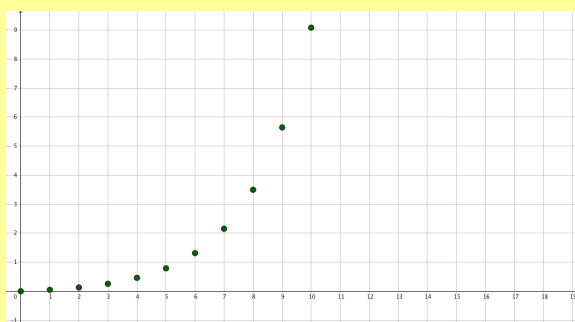
Dieses Bild zeigt eine konvergente streng monoton fallende Zahlenfolge.



Dieses Bild zeigt eine divergente nicht monotone Zahlenfolge.



Dieses Bild zeigt eine divergente streng monoton steigende Zahlenfolge.



Ende

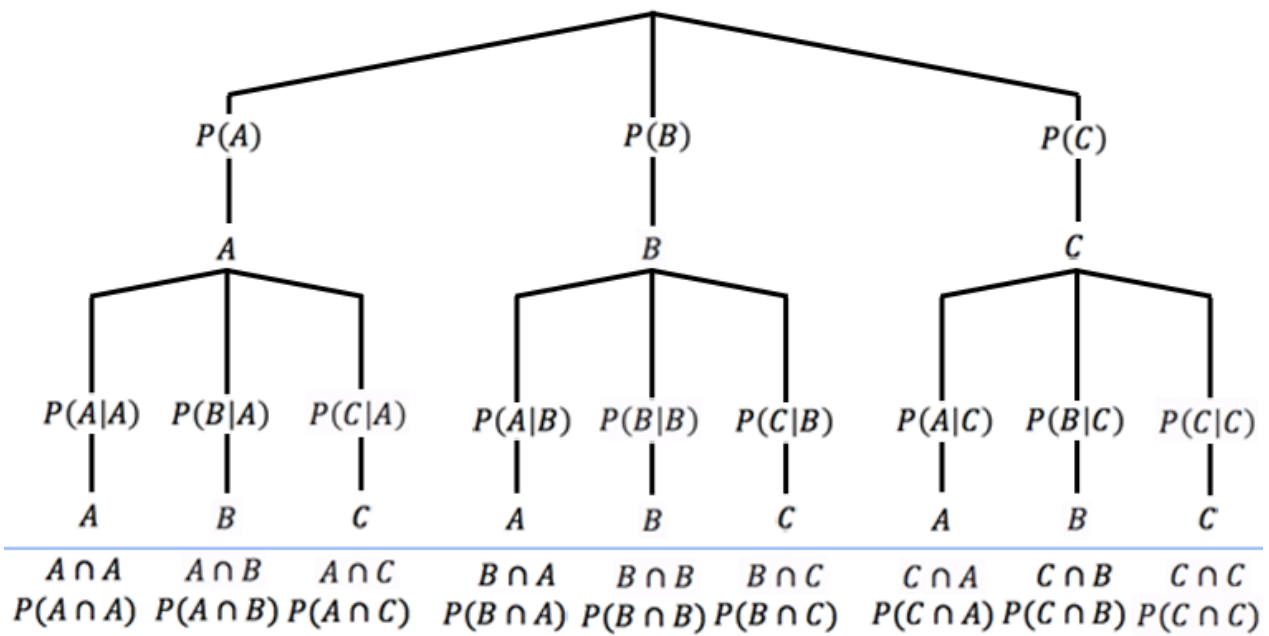


Abbildung 21 – Zweistufiges Baumdiagramm

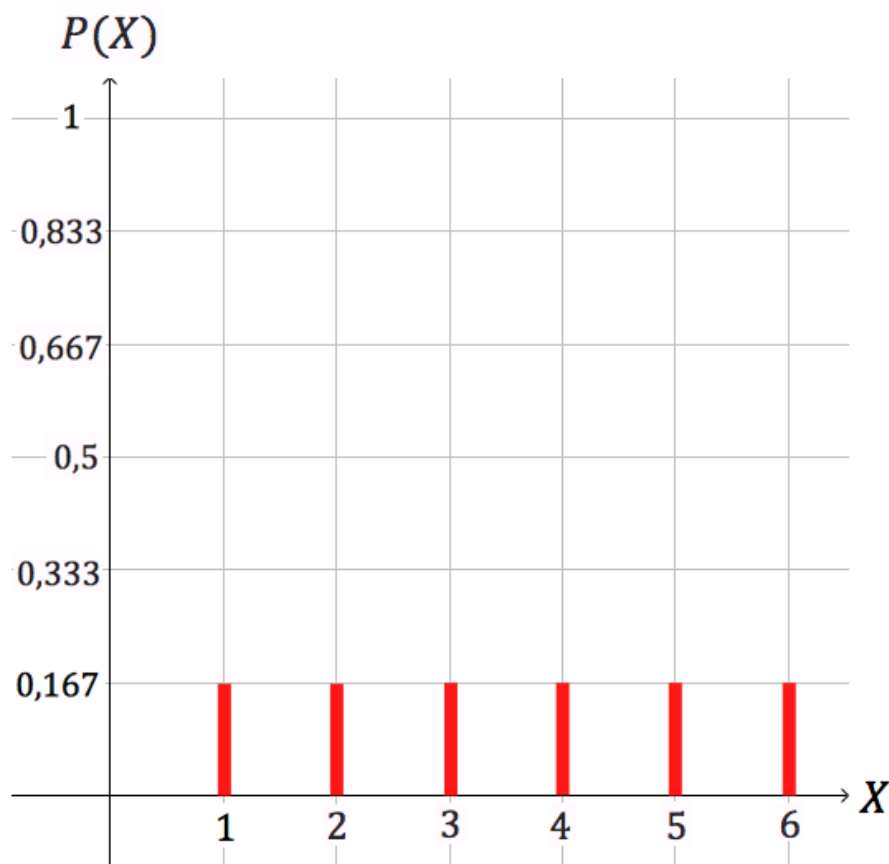


Abbildung 22 – Wahrscheinlichkeitsverteilung Würfelfurf

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Abbildung 23 – Allgemeines lineares Gleichungssystem

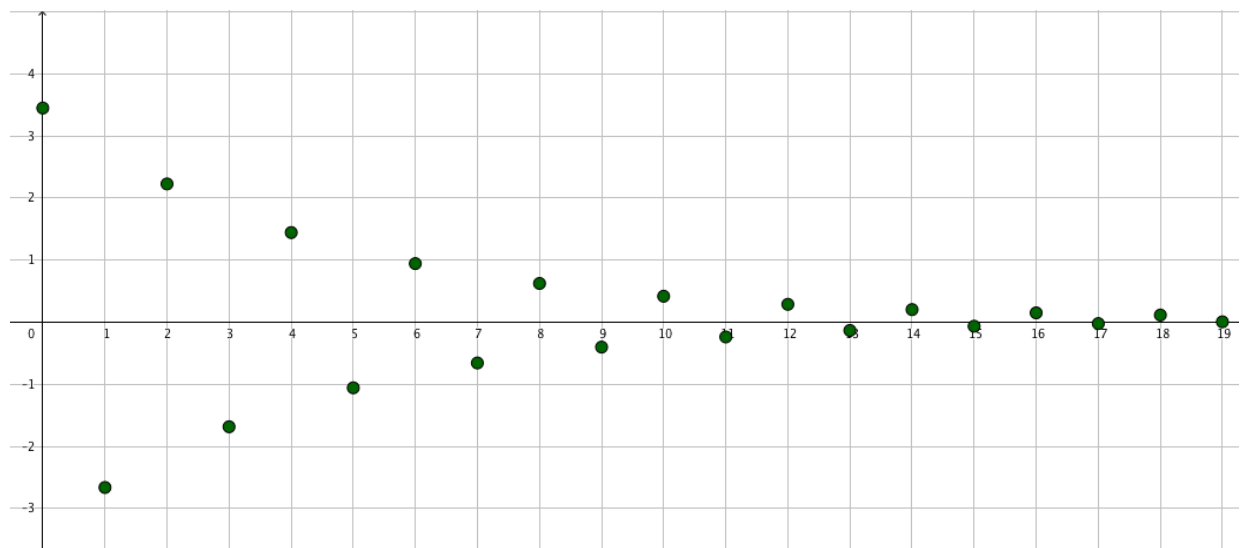


Abbildung 24 – Konvergente nicht monotone Folge

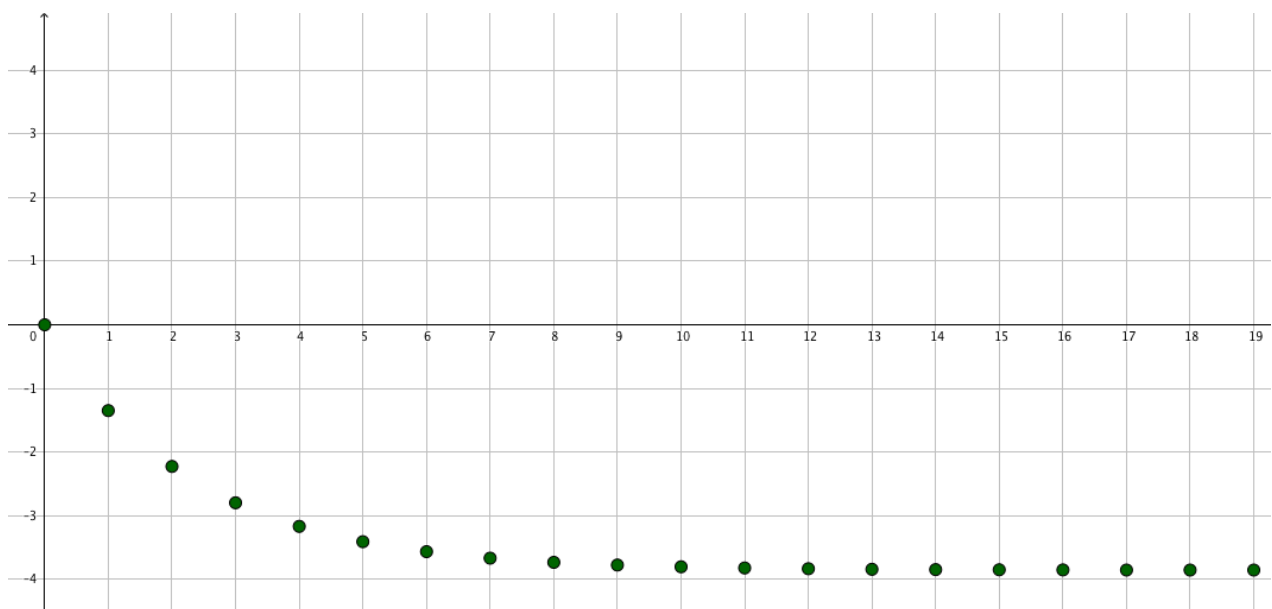


Abbildung 25 – Konvergente streng monoton fallende Folge

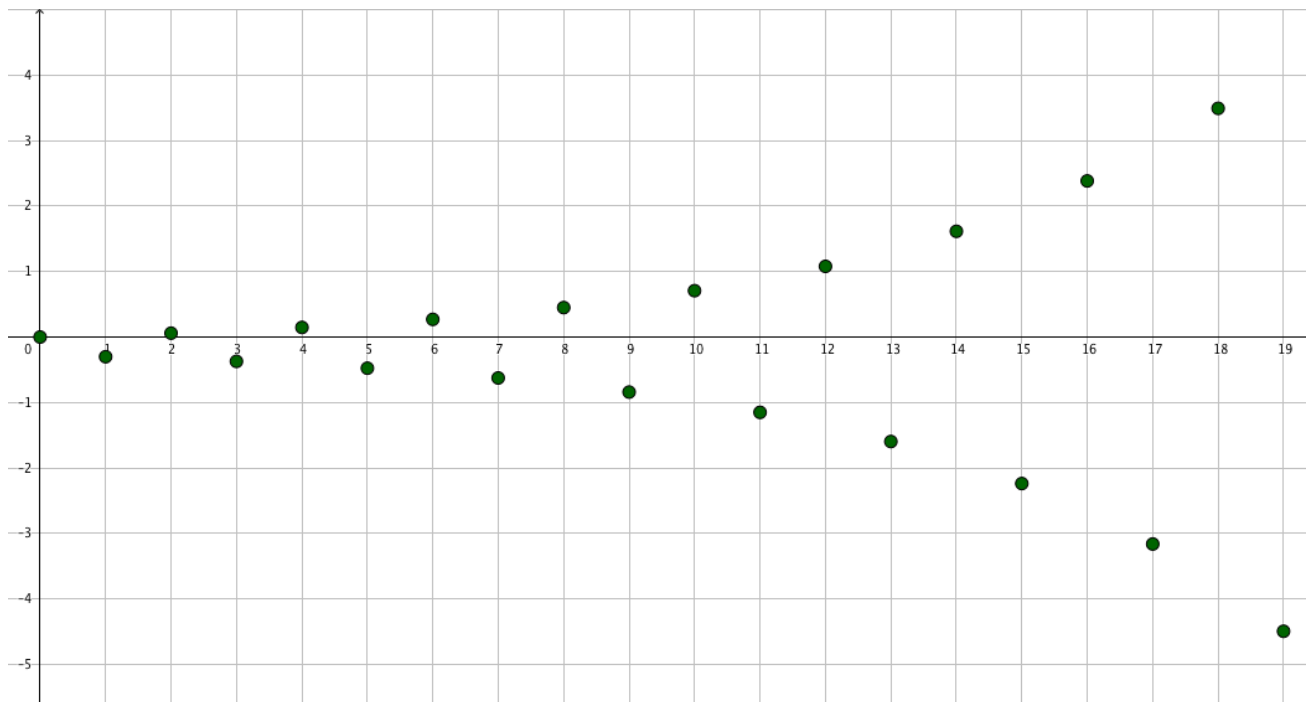


Abbildung 26 – Divergente nicht monotone Folge

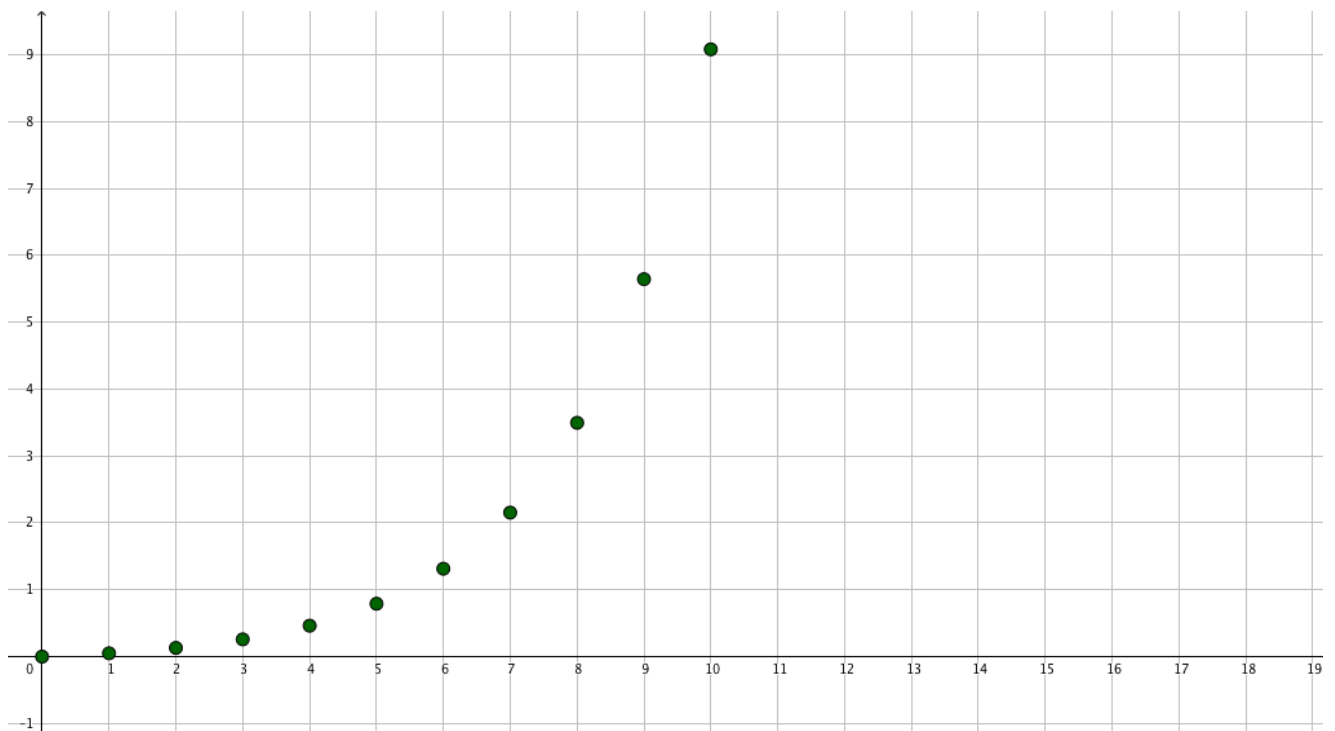


Abbildung 27 – Divergente streng monoton steigende Folge

5.2. Quiz

1) Wie bezeichnet man die Menge, welche alle Zustände eines Systems beinhaltet?

- a) Zustandsraum
- b) Erwartungsraum
- c) Zufallsraum
- d) Wahrscheinlichkeitsraum

2) Unter welchem Begriff fasst man zeitlich geordnete, zufällige Vorgänge in der Mathematik zusammen?

- a) Statistischer Prozess
- b) Wahrscheinlichkeits-Prozess
- c) Stochastischer Prozess
- d) Zufallsprozess

3) Welche Aussage trifft auf Markov-Ketten zu?

- a) Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des zukünftigen Zustandes hängt nur vom gegenwärtigen Zustand ab.
- b) Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des zukünftigen Zustandes hängt von allen vergangenen Zuständen ab.

4) Warum ist die Matrix P

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

keine Übergangsmatrix?

- a) Eine Übergangsmatrix darf keine Nullen enthalten.
- b) Nicht alle Zeilensummen der Übergangsmatrix sind gleich 1.
- c) Nicht alle Spaltensummen der Übergangsmatrix sind gleich 1.
- d) Die Matrix enthält negative Einträge.

5) Was gibt die Anfangsverteilung an?

- a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Zustände zu Beginn.
- b) Die Eintrittswahrscheinlichkeiten aller Zustände auf lange Zeit gesehen.

6) Was gibt der Ausdruck

$$\pi(0) \cdot P^5$$

an? ($\pi(0)$...Anfangsverteilung, P ...Übergangsmatrix)

- a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt 1.
- b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt 4.
- c) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt 5.
- d) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt 6.

7) Welche Zustände dieses Übergangsgraphen sind absorbierend?

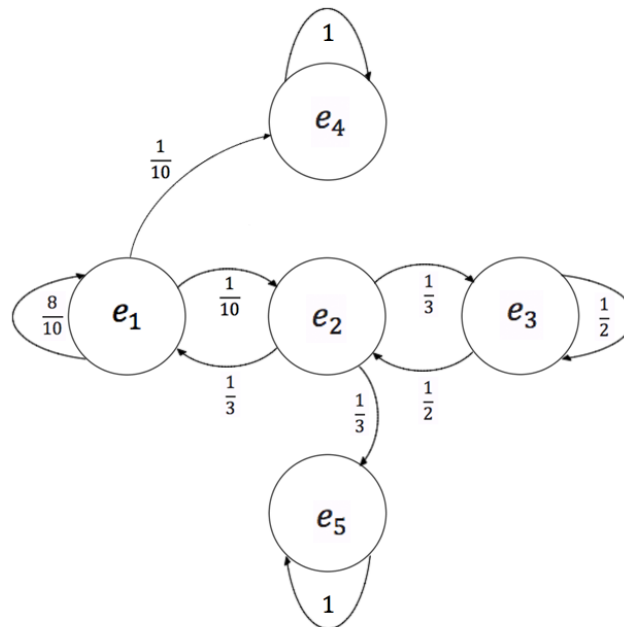


Abbildung 28 – Übergangsgraph Quiz

- a) e_1 und e_3
- b) e_1 und e_4
- c) e_3 und e_5
- d) e_4 und e_5

8) Was gibt die stationäre Verteilung an?

- a) Die Eintrittswahrscheinlichkeiten aller Zustände auf lange Zeit gesehen.
- b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Zustände zu Beginn.

5.3. Abstract

Abstract in Deutsch:

Diese Diplomarbeit liefert einen Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten von homogenen Markov-Ketten, inklusive deren Nutzung im schulischen Unterricht. In Kapitel 1 werden die mathematischen Grundlagen zu homogenen Markov-Ketten behandelt. Die darin vorkommenden Sätze und Beweise zielen hauptsächlich auf eine Anwendungsorientierung ab. Kapitel 2 behandelt den schulischen Teil dieser Diplomarbeit. Hier wird eine Verbindung des Neuen Lehrplans der Modularen Oberstufe, sowie den Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung im Zusammenhang mit dem Thema Markov-Ketten aufgezeigt. Weiters wird eine Stundenplanung über vier Unterrichtseinheiten angegeben. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf den Übungszetteln. Diese können Großteils von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden. Kapitel 3 beschreibt die unterschiedlichen Anwendungsgebiete von Markov-Ketten. Es werden Beispiele zu fünf unterschiedlichen Themenbereichen angegeben, um die vielfältige Anwendung von Markov-Ketten aufzuzeigen.

Abstract in English:

This diploma thesis is an overview for the possible application from homogenous Markov chains together with their using in the classroom. Chapter 1 describes the mathematic basics from homogenous Markov chains. The theorems and proofs in this chapter aim mainly on an application orientation. Chapter 2 discusses the school-based part of this diploma thesis. Here will be shown a connection between the new curriculum of the modular upper school plus the basic skills for the standardized school leavin examination in relating to the topic Markov chains. Furthermore there is given an lesson planning for four teaching units. The focus here is on the exercise sheets. The students can handle the exercise sheets mostly alone. Chapter 3 describes the different areas of application in connection to Markov Chains. There are five examples given, which show the numerous applications from Markov Chains.