DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Auf der Suche nach Lösungsformeln – ein historischer Abriss über die Entwicklung der Algebra“

verfasst von / submitted by

Johanna Baldauf

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 299 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramt UF Psychologie und Philosophie UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abstract

Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, wann, in welchen Kulturen und auf welche Art und Weise Gleichungen gelöst wurden. Auch damit verbundene Themen wie, ab wann man überhaupt von Gleichungslösung oder Algebra sprechen kann und auch die Rolle und Entstehung eines operativen Symbolismus werden thematisiert. Dabei liegt der Fokus aber weniger auf numerischen Methoden zur Gleichungsauflösung, sondern zeichnet vor allem die Suche nach Lösungsalgorithmen - bzw. Lösungsformeln nach. Diese Suche beginnt bereits 2000 v. Chr. in Mesopotamien und findet mit der Galois-Theorie im 19. Jahrhundert einen Abschluss. Es können deshalb nicht alle der in diesem Zeitraum stattgefundenen Entwicklungen Platz finden. Exemplarisch wurden also wichtige Stationen ausgewählt, wobei besonders in den ersten Kapiteln auch ein kurzer Überblick zum historischen Entstehungskontext gegeben wird.

English

The present diploma thesis deals with the question when and how different cultures solved polynomial equations. Linked with this topic are questions of when it is reasonable to talk about „solving equations“ or to speak of „algebra“. Further, the role and the development of an operative symbolism are discussed. The focus rests on the formulaic approach of solving equations rather than on numeric ones. The history of solving equations starts at about 2000 BC in Mesopotamia and ends with the Galois-Theory in the 19th century. Due to the length of the considered time period, not all steps of the development are explained in detail. The most important stages were selected and a summary of the historical context from which the mathematical ideas arose is given in the first chapters.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen, die mich während des Studiums begleitet und beim Verfassen dieser Arbeit unterstützt haben, danken.

Besonderer Dank gilt meinem Diplomarbeitsbetreuer Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Raith. Er hat mir stets hilfreiche Tipps gegeben und ist mir mit seiner Erfahrung und Kompetenz zur Seite gestanden.

Großer Dank gebührt auch meinen lieben Eltern Elmar und Lisi, die mir ermöglicht haben, dieses Studium zu verfolgen. Sie sind mir große Vorbilder, haben mich immer gefördert, in allen Belangen unterstützt und motiviert.

Des weiteren möchte ich meinen Geschwistern, meinen StudienkollegInnen und meinen FreundInnen danken für die schöne gemeinsam verbrachte Zeit während des Studiums. Sie haben mich auch zum Lachen gebracht und mich ermutigt, wenn mir einmal die Motivation gefehlt hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Schule lernt man Algebra vor allem als das Lösen von (Systemen von) Gleichungen kennen. Man lernt unter anderem wie Gleichungen umgeformt werden können, wie Lösungsformeln anzuwenden sind und wie Lösungen näherungsweise berechnet werden können. Die abstrakte Algebra, die man später im Studium kennenlernt, beschäftigt sich mit algebraischen Strukturen wie zum Beispiel Körpern, Ringen oder Gruppen. Da stellt sich die Frage, wie solche Theorien entstehen. Nun war im historischen Verlauf, das Lösen von Gleichungen lange Zeit zentraler Inhalt der Algebra. Vor etwa 4000 Jahren nahm die Geschichte des Lösens von Gleichungen bzw. die Suche nach Zahlen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen, ihren Anfang. Lösungen von Gleichungen lassen sich (näherungsweise) numerisch bestimmen, oder aber man kann versuchen eine Formel für die Lösung, bestehend nur aus Koeffizienten, den arithmetischen Operationen und der Wurzeloperation anzugeben. Die vorliegende Arbeit zeichnet vor allem die Suche nach solchen Formeln nach, man spricht auch von einer Lösung in Radikalen. Denn die Methoden und Werkzeuge, die geschaffen wurden um letzte Fragen wie „Welche Gleichungen sind in Radikalen lösbar?“ zu beantworten, werden zu einem eigenen Forschungsgegenstand und sind die Grundlage der modernen Algebra.

Da diese Geschichte einen sehr langen Zeitraum und sehr viele Entwicklungen umfasst, können in dieser Arbeit nur einzelne wichtige Etappen Platz finden. In einem ersten Kapitel findet sich eine Klärung des Begriffs Algebra und einige Definitionen, die im letzten Kapitel nützlich sein werden. Dann werden die Beiträge einzelner Mathematiker aus Mesopotamien, Ägypten, China, Indien, der islamischen Welt thematisiert. Zwischen diesen Kulturen kam es vereinzelt zum Austausch und zur Übernahme von Ideen. Es war schon sehr früh implizit eine Formel für quadratische Gleichungen vorhanden. Über einen langen Zeitraum geschieht dann recht wenig im Bereich der Auflösung von Gleichungen in Radikalen. Für die Lösungsformel für Gleichungen vom Grad drei wurden wichtige Ansätze im Mittelalter gefunden. Das Auffinden von Formeln für die Gleichungen vom Grad drei und vier gelang in der Renaissance. In der Neuzeit zeigt Abel dann, dass für Gleichungen vom Grad größer als vier im Allgemeinen keine Lösung in Radikalen möglich ist. Galois beantwortet schließlich die Frage für welche Gleichungen n-ten Grades eine Lösung in Radikalen möglich ist. Das sind die ganz großen Schritte auf der Suche nach Lösungsformeln. Aber auch „kleinere“ Schritte, wie die Entstehung einer Symbolik und mit der Suche nach Lösungen verbundene Fragestellungen wie, ob jede Gleichung eine Lösung hat, werden in der vorliegenden Arbeit Platz finden.

2 Was ist (klassische) Algebra?

Formale Definitionen

Die Algebra ist ein riesiges Gebiet mit vielen Teilgebieten. Stark vereinfacht kann sie beschrieben werden als Theorie von Verknüpfungen auf einer Menge. Wobei eine Verknüpfung folgendermaßen definiert ist:

> Eine (zweistellige) Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung
> $\circ : M \times M \to M \quad (x, y) \mapsto x \circ y,$
> für die weitere Eigenschaften vorausgesetzt werden. [67, S. 40]

Eine Menge mit einer Verknüpfung $(M, \circ)$ bezeichnet man als algebraische Struktur. Falls es zu jedem Element der Menge ein neutrales Element und ein inverses Element gibt und außerdem das Assoziativitätsgesetz erfüllt ist, so handelt es sich bei der Struktur um eine Gruppe. Und falls die Verknüpfung zusätzlich noch kommutativ ist, spricht man von einer abelschen Gruppe.

> Eine (abelsche) Gruppe ist eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : M \times M \to M, \quad (x, y) \mapsto x \circ y$, falls die Verknüpfung die folgenden Axiome erfüllt:
>
> - Assoziativität: Für alle Gruppenelemente x, y und z gilt: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
> - Es gibt ein neutrales Element $e \in M$, mit dem für alle Gruppenelemente $x \in M$ gilt: $x \circ e = e \circ x = x$
> - Zu jedem Gruppenelement $x \in M$ existiert ein inverses Element $x^{-1} \in M$ mit $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$
> - (Kommutativität: Für alle Gruppenelemente x und y gilt $x \circ y = y \circ x$)

Nun kann man aber auch Mengen mit mehr als einer Verknüpfung betrachten. In diesem Fall kann man für die Verknüfungen noch zusätzlich eine Verträglichkeitsrelation, die sogenannten Distributivgesetze, fordern und die so erhaltene Struktur wird als Körper bezeichnet:

> Ein Körper K ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen + und $\cdot$, wobei $+\colon K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$, wenn:
>
> - (K,+) eine abelsche Gruppe ist.
> - $(K \setminus 0, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.
> - Distributivgesetze gelten:
>
> $a \cdot (b + c) = ab + bc$ für alle a,b,c $\in$ K
>
> $(a + b) \cdot c = ac + bc$ für alle a,b,c $\in$ K

Besonders wichtig sind auch algebraische Strukturen bestehend aus mehreren Mengen, wobei Verknüpfungen innerhalb der Mengen und zwischen den Mengen definiert sind. Solche Strukturen heißen Vektorraum V über einem Körper K.
Je nach behandelten Strukturen und Gesetzen, ergeben sich verschiedene Teilbereiche der Algebra:

> Die Lineare Algebra ist die Theorie der Vektorräume über Körpern oder allgemeiner der Moduln über Ringe. Sie beinhaltet speziell die Lösungstheorie der linearen Gleichungssysteme.
> Die Körpertheorie beschäftigt sich mit Körpern und Körpererweiterungen. In ihrem Rahmen wird die Lösungstheorie algebraischer Gleichungen behandelt.
> Die Gruppentheorie untersucht Gruppen. Sie macht via Galois-Theorie ebenfalls Aussagen über die Lösungstheorie algebraischer Gleichungen.
> Weitere wichtige Teilbereiche sind die Ringtheorie, die Theorie der Algebren über einem Ring, die kommutative Algebra [...] und die homologische Algebra. [67, S. 40–41]

Dieser Lexikonauszug, soll als ein kleiner Überblick dafür dienen, welche Teilbereiche der Algebra sich historisch, zu einem großen Teil auch durch die Beschäftigung mit der Auflösung von Gleichungen, entwickelt haben.

Klassische Algebra

Das mathematische Teilgebiet der Algebra hat sich, wie im Lexikonauszug angedeutet, im Laufe der Geschichte zu einem großen komplexen Theoriegebäude mit vielen Teilbereichen entwickelt, sodass es gar nicht leicht ist, eine knappe Definition zu geben. Aber über einen langen Zeitraum war das Lösen von Gleichungen zentraler

Inhalt. Aus den Methoden und Inhalten, die durch die Beschäftigung mit Gleichungen entstanden sind, hat sich dann in der Neuzeit die moderne Algebra entwickelt. Die klassische Algebra, verstanden als die Theorie des Lösens von Gleichungen, findet mit der Galois-Theorie ihren Abschluss. In dieser Arbeit findet vor allem die Geschichte der klassischen Algebra bis zur Galois-Theorie Platz. Wobei keinesfalls ein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird, sondern nur ausgewählte einzelne Etappen aufgegriffen werden.

Wenn hier die Rede vom Lösen von Gleichungen ist, so sind meist Polynomgleichungen in einer Unbekannten gemeint, auch wenn vereinzelt auch (lineare) Gleichungssysteme oder Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten angesprochen werden. Das Lösen einer Gleichung bedeutet das Aufsuchen von Nullstellen. Bei Polynomgleichungen werden die Nullstellen oft auch als Wurzeln bezeichnet.

Numerische Lösungsverfahren vs. allgemeine Lösungsformeln

Grundsätzlich kann man zwei unterschiedliche Ansätze beim Lösen von Polynomgleichungen unterscheiden. Die erste Herangehensweise ist die Numerische. Numerische Verfahren arbeiten meist iterativ und liefern in der Regel Näherungswerte. Wobei der erste Schritt meist eine grobe Näherung liefert und das Verfahren aber beliebig lange, bis zur gewünschten Genauigkeit angewendet werden kann. Bei der Anwendung numerischer Verfahren bleibt jedoch einiges im Dunkeln. Wenn mit ihrer Hilfe eine Lösung gefunden wird, so weiß man nicht, ob es sich dabei um die einzige Lösung handelt bzw. falls das Verfahren keine Lösung liefert, muss überlegt werden, ob tatsächlich keine (reelle) Lösung existiert. Diese Verfahren sind allerdings nicht Thema dieser Arbeit.

Hier wird vor allem die Suche nach allgemeinen Lösungsformeln nachgezeichnet. Solche Lösungsformeln sind Ausdrücke bestehend aus den Koeffizienten der Gleichung, die durch die vier Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und die Wurzeloperation, verknüpft sind.[1] Mit den Lösungsformeln lassen sich die Lösungen von Gleichungen exakt angeben.

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen war implizit schon sehr früh vorhanden. Bereits in Mesopotamien wurden quadratische Gleichungen mit einem Ver-

[1] Endliche Wurzelausdrücke, die die Lösung einer Polynomgleichung beschreiben, werden auch als Radikale bezeichnet.

fahren gelöst, das sich in die heutige Lösungsformel für quadratische Gleichungen übersetzen lässt. In der Renaissance fanden schließlich Cardano, Tartaglia und Ferrari Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades. Die Suche nach Lösungsformeln für Gleichungen höheren Grades ging weiter und erst 1824 bewies Niels Henrik Abel für Polynome vom Grad größer als vier, dass die Angabe einer Lösungsformel im Allgemeinen nicht möglich ist. Lediglich für spezielle Gleichungen lässt sich eine Formel finden.

Ab wann kann man von Algebra sprechen

Wie aus den obigen Absätzen hervorgeht, ist die moderene Algebra erst sehr spät entstanden. Für die Entwicklungen vor 1600 ist eine Diskussion notwendig, inwiefern diese Inhalte als algebraisch bezeichnet werden können. Speziell in Bezug auf die mathematischen Inhalte aus Mesopotamien und Griechenland ist v. a. im 20. Jahrhundert eine mitunter hitzige Diskussion entbrannt, ob man in diesen Epochen von Algebra sprechen kann oder nicht. In den Kapiteln 3.1 und 4.2 wird diese Diskussion nur sehr kurz aufgegriffen. Da eine Darlegung der Diskussion über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde, erfolgt hier nur der Verweis auf einige Quellen, die die Diskussion sehr gut zusammenfassen. Einen großen Teil der Debatte im griechischen Fall der „geometrischen Algebra" zeichnen Nikos Kastanis und Yannis Thomaidis in ihrem Artikel „The term Geometrical Algebra , target of a contemporary epistemological debate" [37, vgl.] nach. Und auch Michalis Sialaros und Jean Christianidis legen in „Situating the Debate on ‚Geometrical Algebra' within the Framework of Premodern Algebra" [57, vgl.] den historischen Verlauf und Argumente der Debatte dar. Die Diskussionen reichen bis ins 21. Jahrhundert, denn im Jahr 2015 schreibt Viktor Blåsjö im Artikel „In defence of geometrical algebra":

> The geometrical algebra hypothesis was once the received interpretation of Greek mathematics. In recent decades, however, it has become anathema to many. I give a critical review of all arguments against it and offer a consistent rebuttal case against the modern consensus. Consequently, I find that the geometrical algebra interpretation should be reinstated as a viable historical hypothesis. [10, S. 325]

Für den mesopotamischen Bereich findet sich eine gute Übersicht über das Verständnis und die Interpretation mesopotamischer Mathematik im 20. Jahrhundert in „Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics: An Insider's View" [33, vgl.]

Aber, und das ist speziell für diese Arbeit und für die Klärung der Frage, was charakteristisch algebraisch ist, relevant, es wurden im erweiterten Rahmen dieser Diskussion Kriterien aufgezählt, die beschreiben, was eine Denkweise algebraisch macht. Michael S. Mahoney [45, vgl.] zählt drei Charakteristika algebraischen Denkens auf:

- Die Verwendung eines **Symbolismus**, der nicht nur rein abkürzend ist, sondern operativ.
- Der Fokus liegt vor allem auf **Relationen** und weniger auf Objekten.
- Es gibt **keine ontologische Anbindung**. D. h. Begriffe wie Dimension oder Raum sind auf einer abstrakt mathematischen Ebene ohne Bezug zur physikalischen Welt zu verstehen.
- Als vierten Punkt fügt Jens Hørup hinzu, dass Algebra **analytisch** sein sollte. Und zwar analytisch im vietaschen[2] Sinn. [vgl. 34, S. 279]

Michalis Sialaros und Jean Christianidis stellen fest, dass in der Debatte um den Begriff der „geometrischen Algebra" zu wenig auf den Unterschied zwischen vormoderner und moderner (post Viète) Algebra eingegangen wurde. Sie formulieren ihr Vorhaben als „we will make an effort to contextualize the debate within the framework of ‚premodern algebra'." [57, S. 132] und nennen als Charakteristika vormoderner Algebra:

> (a) it was a method of solving problems; (b) it was following a specific pattern; (c) it was employing a technical vocabulary; and (d) it was carried out within a conceptual framework which is remarkably different compared to modern algebra (especially regarding the key notions of „polynomial" and „equation"). [57, S. 145]

Sie folgern weiter, dass wenn man nun die vormoderne Algebra als numerische Problemlösungsmethode versteht, dann ist es notwendig sie von anderen Problemlösungsmethoden zu unterscheiden. Als ein wichtigstes Unterscheidungsmerkmal gilt, dass bei vormoderner Algebra die Unbekannte eine Bezeichnung erhält und dann mit ihr operiert wird. [vgl. 57, S. 145–146]

Eine weiter gefasste Definition von Algebra oder eine Differenzierung zwischen vormoderner Algebra und moderner Algebra, ist durchaus sehr nützlich bzw. macht

[2]Vgl. Kapitel 10.1.1 für Viètes Verständnis von „Analysis"

es möglich mathematische Inhalte vor Viète (als algebraisch) zu beurteilen. Eine solche Erweiterung basiert auf der Auffassung, dass Algebra eher angesehen werden sollte als „ein breites Spektrum von Ideen, statt einer einzigen wohldefinierte Kategorie“ [eigene Übersetzung 57, S. 147]

Eine weitere Herangehensweise bei der Beschäftigung mit historischen mathematischen Inhalten ist die Unterscheidung zwischen *Geschichte* und *Erbe*. Die Geschichte eines mathematischen Inhalts zu erfassen, bedeutet deskriptiv vorzugehen und die originäre Auffassung nachzuvollziehen ohne spätere Entwicklungen/Entdeckungen hineinzuinterpretieren. Während beim „Erbe“ durchaus in Betracht gezogen wird, welche Auswirkungen dieser mathematische Gegenstand bzw. Inhalt auf spätere Entwicklungen hatte. Laut Ivor Grattan-Guinness sind beide Ansätze, sofern sie klar getrennt und nicht vermischt werden, legitime Herangehensweisen bei der Beschäftigung mit historischen Inhalten in der Mathematik. [vgl. 26, S. 1]

Die im folgenden Teil der Arbeit getroffene Auswahl der historischen Stationen ist vor allem auf Basis des „Erbe-Ansatzes“ erfolgt, d. h. es wurde versucht, den Weg zur Auffindung allgemeiner Lösungsformeln für Gleichungen und die Entwicklung von Algebra im Allgemeinen nachzuzeichnen. Wobei in diesem Fall unter *Weg* nicht kausal aufeinander folgende Entwicklungen, sondern eher einzelne wichtige Stationen verstanden werden müssen. Allerdings wird auch vereinzelt versucht, durch Wiedergabe der Originaltexte bzw. deren Übersetzungen, diese möglichst originalgetreu abzubilden und die Inhalte nicht direkt durch den modernen Symbolismus zu verfälschen, der ja erst zu einem viel späteren Zeitpunkt entstanden ist.

3 Vorgriechische Algebra

Weder in Mesopotamien oder Ägypten noch später in Griechenland war Algebra eine eigenständige Teildisziplin. Es gab in diesen Kulturen nicht einmal eine Bezeichnung für diesen Bereich. Die in diesen Kapiteln praktizierte Übertragung in moderne Symbolik soll nicht als direkte Übersetzung der Inhalte verstanden werden, sondern eher als Gegenüberstellung zur Verdeutlichung, wie wir heute eine solche Fragestellung lösen würden. Eine algebraische Symbolik, die nicht rein abkürzend, sondern auch operativ ist, entsteht erst viel später. So gesehen ist es unhistorisch bzw. anachronistisch so zu tun, als ob die mathematischen Inhalte der damaligen Zeit sich durch den modernen Symbolismus darstellen lassen.

Neuere Forschungen betonen auch die Wichtigkeit den sozialen und kulturellen Kontext, in dem die Texte entstanden sind, für das Verständnis derselben in Betracht zu ziehen. [vgl. 36, S. 7] Diese Arbeit versucht dem Rechenschaft zu tragen, indem vor allem für die Kulturen, deren Geschichte dem durchschnittlichen Europäer nicht so geläufig sind, ein kurzer historischer Überblick angegeben wird.

3.1 Algebra in Mespotamien

Thematisiert wird in diesem Kapitel vor allem die sogenannte altbabylonische Periode von etwa 1900 - 1600 v. Chr. bzw. die zweite Hälfte davon. Denn dieser Periode entstammen die meisten Zeugnisse mesopotamischer bzw. babylonischer Algebra. [vgl. 32, S. 17]

3.1.1 Geschichtlicher Hintergrund

Im 3. Jahrtausend v. Chr. entstand in Mesopotamien im Bereich der Ströme Euphrat und Tigris eine blühende Hochkultur. Die Verwaltung der entstandenen Stadtstaaten oblag den Priestern der Tempel, die somit zugleich auch weltliche Herrscher waren. Sie entwickelten und kultivierten die Schrift und die Rechentechniken für administrative Zwecke. Im Kontext von Handel, Astronomie, Tempelbau und anderen wirtschaftlichen Überlegungen sind erste anwendungsorientierte Schriften mathematischen Inhalts entstanden. Getragen wurde die mathematische Entwicklung später von den Schreibern, die ab 2500 die Verwaltungsaufgaben der Priester übernahmen und infolge die Schreiberprofession von Notwendigkeit und Anwendung lösten und Mathematik um ihrer selbst willen betrieben. [vgl. 32, S. 16]

Die älteste überlieferte Tontafel mit mathematischen Zahlzeichen stammt aus Uruk und ist dort um 2900 v. Chr. in sumerischer Keilschrift verfasst worden. Der Großteil der überlieferten Schriften aus Mesopotamien stammt jedoch aus der Zeit des Alt- und Neubabylonischen Reichs, weshalb sich die Bezeichnung „Babylonische Mathematik“ für diesen Bereich durchgesetzt hat. [vgl. 3, S.22-24].

In den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts übersetzte und bearbeitete Otto Neugebauer einen großen Umfang an mathematischen Keilschrifttexten. Dass einige der Inhalte zu diesem Zeitpunkt bald als algebraisch identifiziert wurden, ist unter anderem in der im Zuge dieser Arbeit stattgefundenen unmittelbaren Umformulierung in neuzeitliche Symbolik begründet. [vgl. 52, S.9] In den Texten findet sich jedoch keine Spur einer Terminologie oder eines Symbolismus zur Auflösung der Aufgaben. [vgl. 3, S.29] In den rhetorisch formulierten und mit konkreten Zahlen arbeitenden Texten fanden weder Variablen noch Symbole für Rechenoperationen Anwendung, deshalb wurde die altbabylonische Algebra nach ihrer Entdeckung in den 30-er Jahren als arithmetisch eingeschätzt. [vgl. 32, S.17]

3.1.2 Beispiele babylonischer „Algebra“

Diese Ansicht hielt sich über mehrere Jahrzehnte. Erst Jens Hoyrup thematisierte die Problematik, die sich durch eine rasche Übersetzung in moderne Symbolik ergibt und entwickelte in den 80er Jahren einen neuen Übersetzungsstil, den er selbst als „conformal translation“ bezeichnet. Dabei ist wichtig, dass im Aufgabentext vorkommende Worte möglichst in ihrer ursprünglichen Bedeutung erfasst und grammatikalische und terminologische Feinheiten in der Übersetzung abgebildet werden. [1] Bei seiner sorgfältigen Wort-für-Wort-Analyse stellt er unter anderem fest, dass die Babylonier z.B. mehrere additive bzw. subtraktive Operationen kannten und diese voneinander abgrenzten, also nicht synonym verwendeten. [vgl. 32, S. 17–18] Rein arithmetisch gesehen kann es aber nur eine Addition bzw. Subtraktion geben. Hinter dieser Kategorisierung der Operationen steckt somit ein erster Hinweis darauf, dass

[1] Eine genauere Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [30, S. 60–62]

der Gedankengang oder die Konzeptualisierung der Aufgabe eine geometrische ist. [30]

Auch andere Details in der Formulierung der Aufgaben wie zum Beispiel der Begriff „Herausragende“ der auch in Schritt 2 der Tabelle 3.1 verwendet wird, ergibt erst dann Sinn, wenn man sich den Lösungsvorgang wie in Abbildung 3.1.1 geometrisch vorstellt: Für die geometrische Addition der Fläche mit der Seite (das Entgegengestellte) wird die Seite durch Angliederung der Breite 1 (das Herausragende) zu einem Rechteck gemacht, wie in Schritt a) ersichtlich ist. Es gilt $x^2+x = x^2+1\cdot x = \frac{3}{4}$. Das Rechteck wird halbiert und eine Hälfte wird wie in b) abgebildet so angelegt, dass ein Winkelhaken entsteht. In c) kann nun die Fläche des kleinen Quadrates berechnet werden, da dessen Seite der Hälfte der Rechteckseite entspricht: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Die Fläche des großen Quadrates ist somit $\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$ und $\sqrt{1} = 1$ entspricht seiner Seitenlänge. In einem letzten Schritt kann nun die bekannte halbe Seite des Rechtecks von der Seite des großen Quadrates subtrahiert werden und man erhält die gesuchte Größe $x = \frac{1}{2}$. Wobei hier angemerkt werden muss, dass wir über die Beschaffenheit dieser geometrischen Repräsentation, auf die der Text begrifflich verweist, keine Zeugnisse haben und nicht klar ist, ob diese in Sand gezeichnet oder nur mitgedacht wurde bzw. ob unsere modernen geometrischen Zeichnungen dem entsprechen. [vgl. 31, S. 266–275]

wörtliche Übersetzung [32, S.18]	moderner Symbolismus, Dezimalsystem	allgemeines Schema
1. Die Fläche und das *Entgegengestellte* habe ich *zusammengelegt*: 0;45 ist es.	$x^2+x=\frac{3}{4}$	$x^2+px=q$
2. 1, das *Herausragende, setzt* Du.	1	p
3. Den halben Teil von 1 *brichst Du entzwei*, 0;30 und 0;30 *lässt Du einander* [wie zusammenstoßende Seiten eines Rechtecks] *halten*,	$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{p}{2}$ $(\frac{p}{2})^2$
4. 0;15 *fügst Du zu* 0;45 *hinzu*: 1 *macht* 1 *gleichseitig*.	$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=1$ $\sqrt{1}=1$	$(\frac{p}{2})^2+q=D$ $\sqrt{D}$
5. 0;30, das Du [ein Rechteck] hast halten lassen, *reißt Du* vom Leibe von 1 *heraus*: 0;30 ist das *Entgegengestellte*.	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{2}$	$\sqrt{D}-\frac{p}{2}$ $x=\sqrt{D}-\frac{p}{2}$

Tabelle 3.1: Übersetzung des Textes BM 13901 Nr. 1

Das Beispiel aus Tabelle 3.1 zeigt in moderner Formulierung ein einfaches Problem

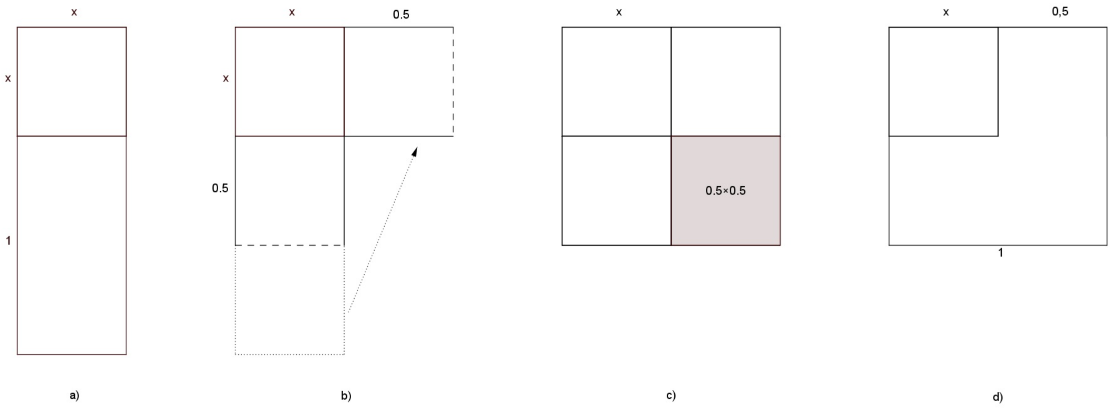


Abbildung 3.1.1: geometrischer Gedankengang bei der Lösung von BM 13901 Nr. 1 [vgl. 32, S. 21]

zweiten Grades. In Abbildung 3.1.2 ist unter anderem diese Aufgabe als Originaltext zu sehen. Von der Struktur her sind viele der Aufgaben ähnlich aufgebaut: Das Problem wird zuerst in der ersten Person singular geschildert und das Lösungsverfahren dann in der zweiten Person anweisungsartig geschildert.

Es finden sich aber unter den altbabylonischen Texten auch weit kompliziertere Angaben als die oben angeführte. Auf der Tafel VAT 7535 zum Beispiel ist die Fläche eines trapezförmigen Feldes gegeben, dessen Seiten von einem Ich-Erzähler mit einem Rohr, dessen Länge gesucht ist, abgemessen werden. Während des Messvorgangs brechen Teile des Rohres ab und abgebrochene Teile werden wieder angestückelt. [vgl. 32, S. 24] Hier wird deutlich, dass ein solches Problem wohl nicht der feldmesserischen Praxis entspringt. Die Aufgabentexte lösen eben nicht bisher noch ungelöste Probleme, sondern sind konstruiert und auf die Methode, mit der sie gelöst werden, zugeschnitten - ein Indiz dafür, dass es sich um Lehrtexte handelt. [vgl. 32, S. 22]

Die Lösung von Problemen zweiten Grades war weitgehend standardisiert, sobald die Gleichung in Normalform, sprich $x^2+bx=c$, umgeformt war. Gleichungen ersten Grades wurden ohne fixes Schema, meist mit Hilfe des einfachen falschen Ansatzes gelöst. [vgl. 32, S. 30] Der einfache falsche Ansatz ist jedoch keine algebraische Methode, sondern folgt dem Prinzip „trial and error". Er wurde von den Babyloniern und Ägyptern verwendet um Gleichungen der Form $ax = b$ zu lösen. [vgl. 3, S. 30] Man wählt einen beliebigen Wert x' und berechnet $ax' = b'$. Den gesuchten Wert x erhält man dann über eine Proportionalitätsberechnung: $\frac{x}{x'} = \frac{b}{b'}$. Unsereiner hätte die obige Gleichung wohl einfach durch a dividiert. Die mesopotamischen Rechner

Abbildung 3.1.2: Text 13901 des Britischen Museums [14]

kannten allerdings keine Division. Stattdessen multiplizierten sie mit dem Inversen (reziproken Wert) der Zahl. Als Hilfmittel dienten ihnen Reziprokentafeln. Solche Tabellen wurden auch für reine Quadratzahlen und deren Quadratwurzeln angefertigt. War eine Zahl/Wurzel nicht auf der Tabelle zu finden, so wurde der gesuchete Wert angenähert. [vgl. 3, S. 39]

3.1.3 Gleichungen bzw. Algebra?

Høyrup stellt weiters auch fest, dass Zahlen zum Teil nicht ihren numerischen Wert verkörpern, sondern teilweise Platzhaltefunktionen, ähnlich der modernen Variablen, erfüllen. [vgl. 32, S. 21–22] Eine Gleichung im Kontext babylonischer Mathematik kann folgendermaßen charakterisiert werden:

> Eine mehr oder weniger komplizierte konkrete Größe wird konstruiert und ihre Maßzahl dann angegeben; zuweilen wird gesagt, daß eine Größe „wie“ eine andere ist, das heißt, daß die Maßzahlen dieselben sind. Wenn wir das Nichtunterscheiden zwischen Größe und „Zahlenwert“ so verstehen, daß Wörter wie „Länge“, „Breite“ usw. als „Repräsentanten“ sowohl für Größen, als auch für ihre unbekannten Werte aufzufassen sind, wird daraus in beiden Fällen eine Gleichung im fast modernen Sinn. [32, S. 22]

3.2 Algebra in Ägypten

Auch in Ägypten gab es schon sehr früh mathematisches Wissen. Unter anderem waren es immer wiederkehrende Überflutungen im Bereich des Nils, die erforderten, dass das Land stets neu vermessen werden musste. Der damit einhergehende Berufsstand des Landvermessers bedurfte verschiedener mathematischer Kenntnisse und auch in der Staatsverwaltung war mathematisches Wissen gefragt.

3.2.1 Entstehungskontext und Rahmenbedingungen ägyptischer Mathematik

Ähnlich wie in Mesopotamien entstammen auch die ägyptischen Schriften mathematischen Inhalts den Federn von Schreibern. Das waren in der Verwaltung tätige Beamte die von Berufs wegen auch über verschiedene Rechentechniken verfügen mussten. Ein weiteres Anwendungsgebiet von Mathematik neben der Administration war die Architektur. Das lässt die Komplexität damaliger Bauwerke vermuten, obgleich nichts genaueres bezüglich der Methoden bekannt ist. [vgl. 36, 7f] Der Großteil der überlieferten Schriften in hieratischer Schrift verfasst und stammt aus der Zeit des Mittleren Reichs (ca. 2040 - 1788 v. Chr). Für die Mathematik relevant sind vor allem der Papyrus Rhind (vergleiche Abb.3.2.1), der Papyrus Moskau und die Londoner Schriftrolle. Verglichen mit der großen Anzahl an mesopotamischen Tontafeln, ist die Menge an überlieferten Schriften aus Ägypten eher gering. [vgl. 3, S.6-8]

Zahlbereich der Ägypter war $\mathbb{Q}$. Brüche der Form $\frac{m}{n}$ stellten die Ägypter als Summe von Brüchen der Form $\frac{1}{q}$ dar - mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. Ein großer Teil des Papyrus Rhind befasst sich mit solchen Zerlegungen. Basierend darauf, dass sich jede Zahl b in Dualdarstellung ausdrücken lässt als $b = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i$, $a_i = 0$ oder 1, $n \in \mathbb{N}_0$ folgen sowohl das ägyptische Multiplikations- als auch das Divisionsverfahren eigenen Regeln. So kann man die ägyptische Multiplikation als schrittweise Verdoppelung verstehen. [vgl. 3, S.13-14]

3.2.2 Beispiel einer ägyptischen Aufgabe

Grundsätzlich kann man bei den überlieferten mathematischen Texten zwischen Tabellen-Texten, wie zum Beispiel die oben genannte Zerlegungstabelle, und Aufgabentexten unterscheiden. Aufgabentexte beginnen meist mit der Nennung eines Problems, für das dann ein Algorithmus zur Lösung angegeben wird. Den Aufgabentexten gemeinsam ist, dass sie numerisch, rhetorisch und algorithmisch sind. Ersteres, weil die Aufgaben nur mit konkreten Zahlen arbeiten und ohne Variablen auskommen. Rhetorisch, weil ähnlich wie die mesopotamischen Texte jeglichen Symbolismus entbehren, also Operationen rein sprachlich formuliert sind. Beim Papyrus Rhind handelt es sich um eine Zusammenstellung von Aufgaben und Tabellen, die vermutlich zu Lehrzwecken angefertigt wurde. Einige der auf den Papyri enthaltenen Aufgaben, wurden als sogenannte Hau-Rechnungen kategorisiert. Diese Bezeichnung leitet sich von dem Wort „aha“, das Haufen, Menge oder Quantität bedeutet, ab und im Titel dieser Aufgaben vorkommt. Wenn man nun die Frage nach dem algebraischen Charakter ägyptischer Mathematik stellt, sind speziell solche Hau-Rechnungen interessant. Die folgende Aufgabe Nummer 26 des Papyrus Rhind ist eine solche Aufgabe. [vgl. 36, S. 9–25]

> ***A quantity, its $\bar{4}$ (is added) to it*** *so that 15 results*
> Calculate with 4.
> You shall calculate its $\bar{4}$ as 1. Total 5.

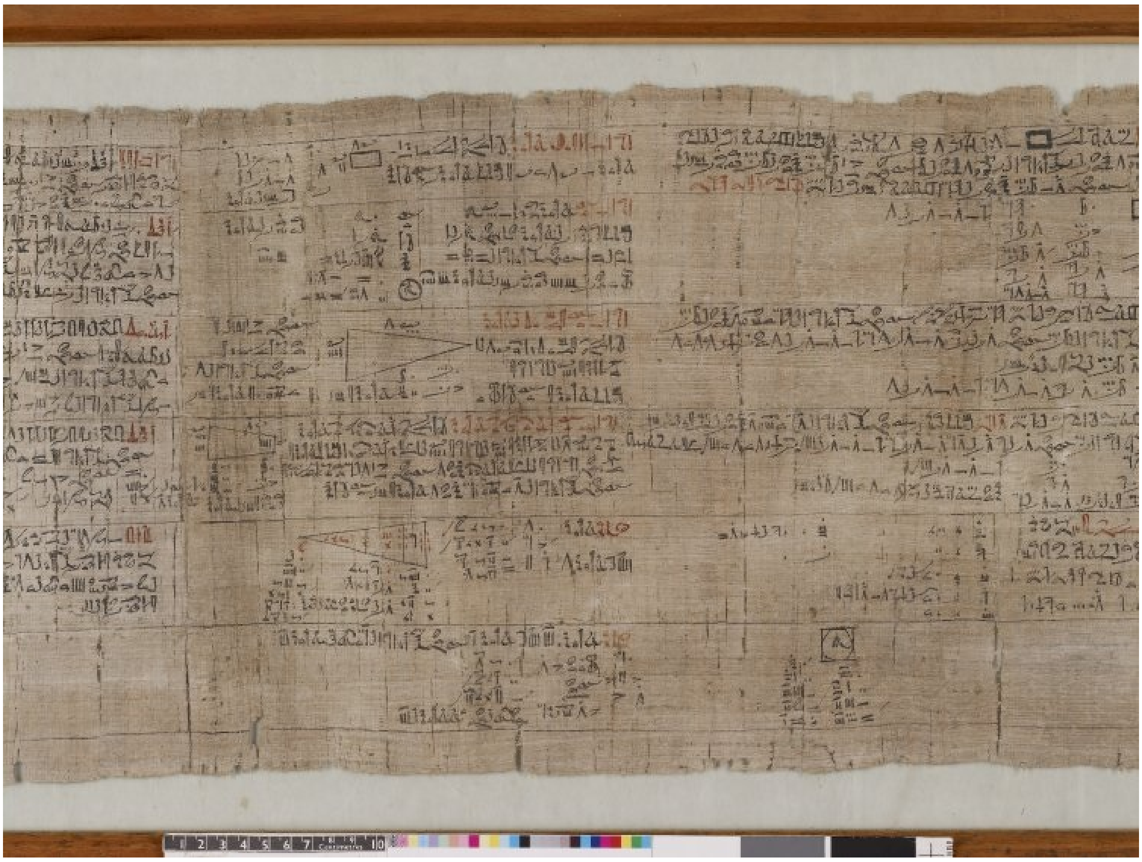


Abbildung 3.2.1: Eine Fotografie des Papyrus Rhind [61]

Divide 15 by 5.

\\.	5
\\2	10

3 shall result.

Multiply 3 times 4.

.	3
2	6
\\4	12

12 shall result.

.	12
$\bar{4}$	3 Total 15

The quantity 12

its $\bar{4}$ 3, **total 15.** [36, S. 26]

In der Übersetzung sind jene Passagen, die im Originaltext rot geschrieben sind, hier fettgedruckt wiedergegeben. Die Notation $\bar{n}$ beschreibt einen Stammbruch der Form $\frac{1}{n}$. Zur Lösung wird ein falscher Ansatz gemacht und 4 als (falsche) Lösung in die Gleichung eingesetzt: $4 + \frac{4}{4} = 5$. Das eigentliche (richtige) Ergebnis 15 verhält sich zu der falschen Lösung 5 wie die gesuchte (richtige) Lösung zur falschen Lösung 4. Im nächsten Schritt wird 15 durch 5 dividiert: Dazu wird der Divisor in die zweite Spalte geschrieben und schrittweise verdoppelt. Dann werden in der ersten Spalte jene Zeilen addiert, die in der zweiten Spalte aufsummiert den Dividend ergeben. Diese Zeilen werden mit einem Häkchen markiert. Die Division ergibt 3. Das bedeutet, dass das richtige Ergebnis drei mal so groß ist wie das falsche Ergebnis. Deshalb wird nun die falsche Lösung 4 mit 3 multipliziert: Es wird der Faktor 3 in die zweite Spalte geschrieben und wieder schrittweise verdoppelt. Es werden wieder jene Zeilen markiert, die in der ersten Spalte aufaddiert den zweiten Faktor, in diesem Fall vier, ergeben. Das Ergebnis der Multiplikation erhält man, indem man die markierten Zeilen hernimmt und dort die Zahlen der zweiten Spalte addiert. 12 ist das Ergebnis. Es folgt noch eine Verifikation des Ergebnisses.

Übersetzte man diese Aufgabe in moderne Notation, sähe die Fragestellung folgendermaßen aus: $x + \frac{x}{4} = 15$.

3.2.3 Algebra?

Grundsätzlich sei hier noch erwähnt, dass in vielen Büchern zur Geschichte der Algebra Ägypten gar nicht oder nur sehr kurz erwähnt wird. Auch Annette Imhausen gibt in „Egyptian Mathematics“ kein Urteil darüber ab, ob manche der Aufgaben oder Denkweisen als algebraisch angesehen werden können. Hoyrup hält jedenfalls fest, dass man die ägyptischen mathematischen Inhalte mit weniger Recht als algebraisch bezeichnen kann, als jene aus der Zeit des altbabylonischen Reichs, da hauptsächlich lineare und nur vereinzelt homogene Probleme zweiten Grades behandelt wurden. Und die für die Lösung verwendete Methode des doppelten falschen Ansatzes ist per se unalgebraisch und als ein fixierter Algorithmus erfordert sie eher Auswendiglernen als analytisches Denken. [vgl. 32, S. 42]

4 Griechenland

In Griechenland entsteht im 8. bis 6. Jahrhundert v. Chr. die Mathematik als systematische wissenschaftliche Disziplin. Viele der dort entwickelten Inhalte sind der Geometrie zuzuordnen. Nach einem historischen Überblick wird auf einzelne Aspekte von Euklids und Diophants Werk eingegangen.

4.1 Historischer Überblick

Um ca. 1300 v. Chr. fand der Übergang von der Eisenzeit zur Bronzezeit statt. Die neue Art Metall zu verarbeiten führte in vielen Handwerks- und Produktionsbereichen zu Verbesserungen und die resultierende Überproduktion verstärkte den Handel. Zusammen mit dem Bestehen des Sklaventums führte das zum Reichtum einer breiteren Gesellschaftsschicht, bestehend vor allem aus Händlern und Kaufleuten. Diese freien Bürger konnten, da sie lediglich die Wertschöpfung zu verwalten brauchten, ihre Zeit der politischen Mitbestimmung, den Wissenschaften und der Kunst widmen. Unter anderem auch topographisch bedingt, entstanden viele kleinere Stadtstaaten (keine zentralistische Regierung!) und Kolonien im Mittelmeerraum. Die Handelsbeziehungen erstreckten sich z. B. bis nach Mesopotamien. Die Frage nach dem Warum, nach der Ursache und dem Ursprung rückte in den Mittelpunkt. In diesem geistigen Klima entstanden Philosophie und Mathematik als systematische Wissenschaft. Man kann die griechische Mathematik in 4 Perioden einteilen [vgl. 3, S. 48–59]:

- Die **ionische Periode** von ca. 600 - 450 v. Chr. benannt nach den Ioniern, die ab dem 7. Jh. v. Chr in kulturellen und wirtschaftlichen Belangen den Ton angaben. Der Naturphilosoph und Mathematiker Thales aus der ionischen Stadt Milet führte als Urstoff aller Dinge das Wasser an. In dem etwas später entstandenen Lehr- und Glaubensgebäude der Phytagoreer waren Askese, Disziplin und auch Mathematik wichtige Elemente. So sah Pythagoras den Urgrund aller Dinge in der Harmonie der Zahlen und das damit einhergehende arithmetische Interesse führte zur Entwicklung der Mathematik als exakte Wissenschaft mit der Verwendung von Sätzen, Postulaten, etc. Doch das auf natürlichen Zahlen beruhende Theoriegebäude geriet ins Wanken, als vermutlich Hippasos 450 v. Chr. auf inkommensurable Strecken[1] stieß.

- In der darauffolgenden **athenischen Periode** von 450 - 300 v. Chr. verlagerte sich der kulturelle und wissenschaftliche Mittelpunkt nach Athen, das nach den Perserkriegen zum Machtzentrum wurde. Die Sophisten verdienten sich mit dem Verkauf von Wissen ihren Lebensunterhalt und beschäftigten sich, neben verschiedenen anderen Dingen, mit den klassischen Problemen der Antike. Grundsätzlich strebten sie exakte Lösungen an und begnügten sich nicht mit Annährungen. Platon und Aristoteles standen diesem Geschäft mit dem Wissen kritisch gegenüber. Dennoch haben die Sophisten auf dem Weg der Herausbildung der exakten und logischen Wissenschaft wichtige Schritte gesetzt. Platon, ein Schüler Sokrates' gründete 377 v. Chr., zu einer Zeit in der sich die Demokratie und Athen in einer Krise befanden, die Akademie, eine Philosophenschule in der sich Gelehrte wissenschaftlich betätigen konnten. Im Höhlengleichnis formulierte er die Theorie, dass die Welt, wie sie wirklich ist, aus Ideen besteht, die uns durch Wahrnehmung aber nicht bzw. nur unvollständig zugänglich sind. Mathematik könne jedoch als Werkzeug zur Erkenntnis der idealen Welt dienen. Von Platon selbst ist kein mathematisches Werk überliefert. Es fanden jedoch einige Theorien und Werke von „Akademikern“ in Euklids „Elemente“ Eingang. Aristoteles, der bei Platon studierte und Erzieher von Alexander dem Großen war, ist ein weiterer wichtiger Denker der Antike. Wichtige Beiträge von ihm betreffen die Logik. Auch andere Thematiken wie der logischer Formalismus, Aussagenkalkül und indirekte Beweise spielen in seinem Werk eine Rolle. Ein weiterer zentraler Mathematiker dieser Periode ist Euklid. Er lebte um ca. 300 v. Chr. in Alexandria und sein Werk die „Elemente“ bestehend aus 13 Büchern war über Jahrhunderte *das* Mathematikbuch. Bahnbrechend ist der axiomatische und deduktive Aufbau der „Elemente“: Ausgehend von Definitionen, Postulaten und Axiomen wurden Aussagen bewiesen. Das Buch enthält wichtige Ausführungen im Bereich der elementaren Zahlentheorie, der Ebenengeometrie, aber auch der Raumgeometrie der Körper. Speziell im Bezug auf Buch II ist im späten 19. Jahrhundert eine Diskussion entbrannt, ob es sich dabei um Algebra handelt oder nicht.

- Die **hellenistische Periode** dauerte von ca. 300 v. Chr. - ca. 150 n. Chr. Nach der Regentschaft von Philipp II kam Alexander der Große an die Macht und

[1] Zwei Strecken nennt man inkommensurabel, wenn sie kein gemeinsames Maß haben, sprich sich ihr Verhältnis nicht als Bruch mit natürlichen Zahlen anschreiben lässt.

herrschte über ein Weltreich, dessen kulturelles Zentrum in der neu gegründeten Stadt Alexandria in Ägypten lag. Dort errichtete er das Museion eine Forschungsstädte, die Gelehrte aus aller Welt anzog. Unter anderem sollen Archimedes, Eratosthenes und Apollonius dort gewesen sein. Das gesellschaftliche Klima war von Toleranz und Offenheit geprägt.

- In der **Spätantike** die von ca. 300 - 500 n. Chr. dauert, entkoppelte Diophant, der vermutlich in Alexandria gelebt hat, in seinem Werk „Arithmetika" erstmals die Algebra und die Arithmetik von der Geometrie. Die „Arithmetika" ist das wichtigste Werk im Bereich der Algebra aus der Antike. Unter der römischen Herrschaft ab 30 v. Chr. häuften sich soziale und religiöse Unruhen und das Museion wurde mehr zu praktischen Zwecken genutzt, so war man zu dieser Zeit weniger bestrebt neue Erkenntnisse zu gewinnen, sondern hatte eher die Sammlung, Organisation und Strukturierung von Wissen zum Ziel.

4.2 Algebra in Griechenland

Thales von Milet (ca. 624 - 547) scheint damit begonnen zu haben für seine Aussagen eine Art Beweis anzugeben. Die von ihm getätigten Aussagen waren jedoch rein geometrischer Natur. Darauffolgend, im 4. und 5. Jahrhundert vor Christus, haben auch andere Mathematiker wie Pythagoras, Theaetetus, Hippocrates oder Eudoxus einzelne Aussagen bewiesen. Aristoteles (ca. 384 - 322) hat der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin Vorschub geleistet, indem er logische Argumentationsprinzipien aufgestellt hat und verlangt hat, dass die Erarbeitung eines neuen Wissensbereichs immer mit der Definition der Termini und der Nennung von Axiomen beginnen müsse. Das erste (überlieferte) diesen Prinzipien folgende Werk mit axiomatischem, deduktivem und logischem Aufbau sind die „Elemente" des Euklid. Das Buch II und einzelne Propositionen aus Buch I und VI wurden Ende des 19. Jahrhunderts als „geometrische Algebra" interpretiert. Rund um dieses Buch und diese Charakterisierung ist eine hitzige Diskussion entbrannt, die eigentlich bis heute andauert. Darauf wird im Abschnitt 4.2.1 genauer eingegangen. Neben Euklid ist Diophant ein weiterer wichtiger Mathematiker, wenn es um die Geschichte der Algebra geht. Inwiefern seine Inhalte als algebraisch charakterisiert werden können, wird im Kapitel 4.2.1 thematisiert.

4.2.1 (Geometrische) Algebra bei Euklid

Der Begriff bzw. die Hypothese der Existenz geometrischer Algebra, besteht in der Annahme, dass die Ausdrucksform der entsprechenden Propositionen oder Beweise zwar geometrisch ist, dass aber die zugrunde liegende Idee oder die Konzeptualisierung algebraisch ist. Dazu wollen wir uns exemplarisch eine Proposition ansehen, die mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen und geometrischer Algebra in Zusammenhang gebracht werden kann:

> Prop. II.11.: To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment. [27, S. 402]

Wie in 4.2.1 dargestellt, geht es bei der Prop. 11 des zweiten Buches darum, eine bekannte Strecke so aufzuteilen, dass die Fläche des Quadrats über dem einen Abschnitt gleich ist der Fläche des Rechtecks bestehend aus der gesamten Strecke und dem anderen Abschnitt. Es wird nicht, wie zumeist in Mesopotamien, nach einer unbekannten Zahl gefragt, sondern es ist ein unbekannter Streckenabschnitt gesucht. Ziel ist es, einen Punkt H auf der Strecke AB zu finden, sodass gewisse geometrische Bedingungen erfüllt sind. Die Proposition und auch deren Lösung/Beweis sind ganz klar geometrischer Natur, wenn man diese mithilfe Ungurus Charakterisierung geometrischen Denkens beurteilt, der zu Folge geometrisches Denken mit Raum und dessen Eigenschaften umgeht und dabei verknüpft ist mit einer figurativen, schematischen Darstellung. [vgl. 62, S. 76]

Schreibt man in 4.2.1 der Strecke AB die Länge a zu und bezeichnet den gesuchten Abschnitt mit x und setzt die Fläche des Rechtecks gleich der Fläche des Quadrates, so erhält man leicht die Gleichung $a(a-x) = x^2$ oder $a^2 = x^2 + ax$.

Wie nun aber der gesuchte Punkt H aus 4.2.1 konstruiert werden kann, zeigt die Abbildung 4.2.2. Auf der gegebenen und aufzuteilenden Strecke AB wird durch anlegen von $AC(= AB)$ ein Quadrat errichtet. Anschließend wird die Strecke AC halbiert. Der Halbierungspunkt E wird mit B verbunden. Die Strecke EB wird nun von E aus in Verlängerung der Quadratseite abgetragen. AF ist die gesuchte Strecke, die noch auf AB von A aus abgetragen wird. Euklid liefert jedoch keine Erklärung mit, wie er auf diesen Lösungsweg gekommen ist. Wenn man der Strecke AB in 4.2.2 die Länge a zuschreibt, lässt sich die Länge der Strecke EB, die ja die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, durch $\sqrt{((\frac{a}{2})^2 + a^2)}$ berechnen. Die gesuchte Strecke $AH = AF$ erhält man indem man von der Länge der Hypotenuse $\frac{a}{2}$ subtrahiert, d.h. $AH = \sqrt{((\frac{a}{2})^2 + a^2)} - \frac{a}{2}$. Diese Formel sieht der Lösungsformel für quadratische Gleichungen verblüffend ähnlich. Man darf jedoch nicht vergessen, dass sich bei Euklid an keiner Stelle ein solcher Symbolismus findet und dass er wahrscheinlich auch nicht auf der Suche nach einer allgemeinen Formel war.

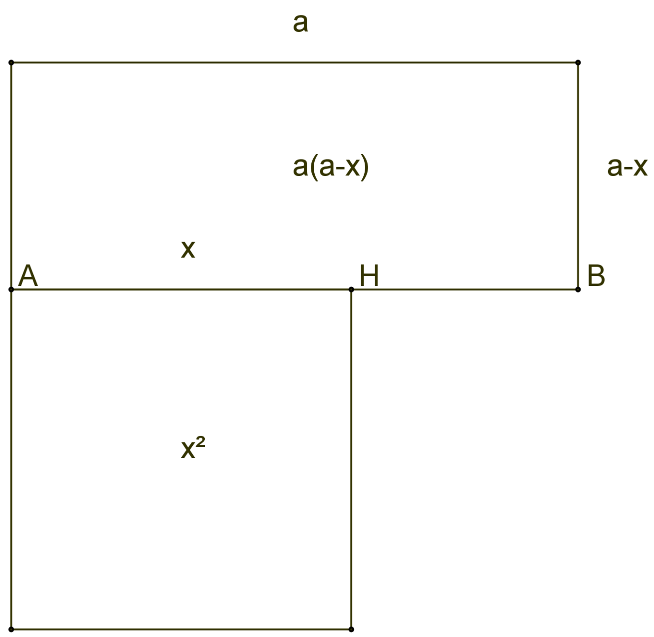


Abbildung 4.2.1: graphische Darstellung von Euklid Buch II Prop. 11
[vgl. 38, S. 37]

4.2.2 Diophant

Von Diophant sind wenig Lebensdaten bekannt. Vermutlich hat er um etwa 250 n. Chr. in Alexandria gelebt. [vgl. 53, S. 31]. Er wird manchmal als „Vater" der Algebra bezeichnet. Das hängt vermutlich damit zusammen, dass seine mathematischen Texte erstmals nicht mehr rein rhetorisch verfasst sind und sich Ansätze einer algebraischen Symbolik finden. Jedoch ist nach Diophant bis ins 15. Jahrhundert keine algebraische Symbolik mehr in Verwendung. [vgl. 53, S. 32] Dieses Stadium wird als „synkopierte Algebra" bezeichnet. Von einer rein symbolischen Stufe kann man erst im 17. Jahrhundert sprechen. [vgl. 49, S. 74] Diophant führt Symbole für Minus und Gleichheit, wie auch Buchstabensymbole für unbekannte Potenzen bis zum Grad sechs ein. Im Zulassen von Exponenten größer als drei wird eine Loslösung von der Geometrie sichtbar. [vgl. 38, S. 61] Auch sind die Aufgabenstellungen nicht mehr in einem geometrischen Kontext formuliert wie etwa bei Euklid. Diophants Hauptwerk „Arithmetika" wurde vermutlich ähnlich wie Euklids Elemente zwar von einem Autor verfasst, wobei aber der Inhalt eine kollektive Leistung mehrerer Gelehrter darstellt.

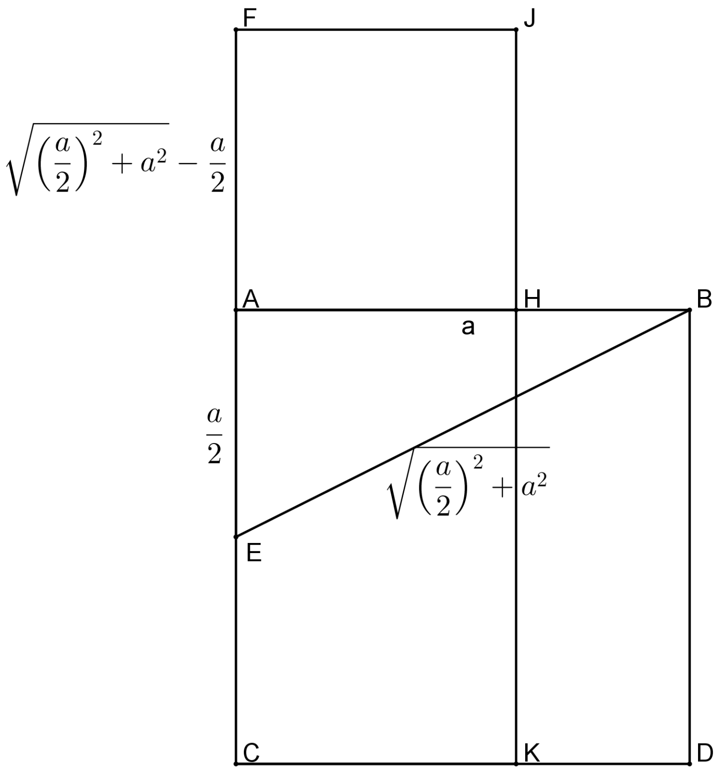


Abbildung 4.2.2: konstruktive Lösung von Euklid II Prop. 11
[vgl. 38, S. 39]

[vgl. 49, S. 73]. Im Gegensatz zu den Elementen Euklids ist die Arithmetika kein deduktiv und axiomatisch aufgebautes Lehrbuch, sondern eine Sammlung von etwa 260 Aufgaben.

Diophants Aufgaben beginnen immer mit der *Fragestellung*, in der allgemein ohne Nennung konkreter Zahlenwerte, angeführt wird welche Größen bekannt sind und welche gesucht werden. Dann folgt, falls notwendig, eine *Lösungsbedingung*, da Diophant nur rationale positive Lösungen zugelassen hat. Anschließend erfolgt die *Angabe* konkreter Zahlen für die gegebenen Größen. Bei der *Auflösung* wird die gesuchte Größe durch die Unbekannte ausgedrückt und die Aufgabe gelöst. [vgl. 53, S. 33]

Gerade die Lösungsbedingungen lassen oft Rückschlüsse auf die theoretischen Kenntnisse Diophants zu. Aber auch in der Einleitung von Buch I finden sich Hinweise auf sein theoretisches Wissen und seine Methodik. Er beschreibt zwei Operationen um eine Gleichung zu vereinfachen: Es sollen gleichartige Terme zusammengefasst und negative Terme sollen auf beiden Seiten der Gleichung addiert werden. [vgl. 38, S. 62]. Diese zwei Operationen wurden von islamischen Gelehrten später als „al-jabr“

und als „al-muqābala“ bezeichnet. [vgl. 38, S. 62]

Aber nicht nur von islamischen Mathematikern wurde das Werk aufgegriffen. Auch auf Fermat und dessen zahlentheoretischen Erkenntnisse, hatte es eine anregende Wirkung. Selbst ind der *Algebra* Eulers 1170 finden sich noch bestimmte Eigenheiten, die sich auf Diophant zurückführen lassen. [vgl. 55, S. 81–82] Diophant behandelt die Lösung bestimmter und unbestimmter linearer Gleichungen und auch Gleichungen höheren Grades. [vgl. 3, S. 102].

Zur Lösung der Aufgaben bedient sich Diophant oft außerordentlich geschickter Ansätze, die die Lösung zum Teil überhaupt erst möglich machen. [vgl. 55, S. 94] Das wirkt auf den ersten Blick sehr sonderbar und man könnte zu dem Urteil gelangen, dass es sich hierbei mehr um Geschicklichkeit als Mathematik handelt. Aber nichtsdestotrotz verwendet Diophant einige allgemeine Grundverfahren, nachdem er durch einen passenden Ansatz die Aufgabenstellung vereinfacht hat. [vgl. 55, S. 94]

Exemplarisch wollen wir uns die Lösungsverfahren für gewisse unbestimmte, quadratische Gleichungen ansehen. Die allgemeine Form der unbestimmten quadratischen Gleichung lautet: $ax^2 + bx + c = \square$, wobei a,b,c rational und gegeben sind. Gesucht wird ein rationaler Wert für x, der die linke Seite zu einem numerischen Quadrat macht. [vgl. 53, S. 35] und [vgl. 55, S. 87–88]

1. Falls a=0 führt das zu einer linearen Gleichung $bx+c = \square$. Setzt man $\square = m^2$, ergibt sich $x = \frac{m^2-c}{b}$. Die Lösung ist jedenfalls rational und auch positiv bei geeigneter Wahl des Parameters m.

2. Falls c=0 reduziert sich die Gleichung zu $ax^2 + bx = \square$. Setzt man $\square = m^2x^2$, erhält man $x = \frac{b}{m^2-a}$. Auch hier ist die Lösung wieder rational und bei passender Wahl von m positiv.

3. Sind entweder a oder c Quadratzahlen, so erreicht man eine rationale Lösung indem sich durch eine geeignete Wahl der rechten Seite der quadratische Term wegkürzt. Für $A^2+bx+c = \square$ setzt man $\square = (Ax+m)^2$ und erhält $x = \frac{m^2-c}{b-2mA}$. Ähnlich verfährt man, wenn c quadratisch ist und in beiden Fällen ist die Lösung wieder positiv bei entsprechend gewähltem m.

Die Frage, ob Diophants Werk als algebraisch bezeichnet werden kann, muss großteils verneint werden. Im Kern geht es bei Diophant eher um Eigenschaften von Zahlen als um das Lösen von Gleichungen, respektive Algebra. Die Entdeckung und Wiederaufnahme des Werkes im 15. Jahrhundert hatte durchaus Einfluss auf die Entwicklung symbolischen Algebra und auch auf die Zahlentheorie - aber für das ursprüngliche Werk ist eine Interpretation als frühe Algebra und auch als symbolische

Algebra fraglich. Es sind zwar Bombellis Bearbeitung der Probleme aus der Arithmetika algebraisch und somit kann man durchaus sagen, dass das Erbe Diophants algebraisch ist. Das Diophant mit dem Titel „Vater der Algebra“ versehen wurde, hängt auch mit der Tendenz im Mittelalter, den arabischen Einfluss zu negieren und die These zu vertreten, dass die Araber die Algebra von Diophant übernommen haben, zusammen. [vgl. 28, S. 92–94]

5 China

Chinesische Mathematiker vollbrachten speziell im Bereich der numerischen Auflösung von Gleichungen große Leistungen. Hilfreich war ihnen dabei die Verwendung von Rechenbrettern. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit aber weniger auf numerischen Methoden und vor allem auch der europäischen Entwicklungsgeschichte der Algebra gewidmet ist, werden die in China entwickelten Methoden nicht im Detail dargestellt.

5.1 Historischer Überblick

Bereits ab 3000 v. Chr. existiert im Bereich der Flüsse Huangho und Jangtsekiang eine Bauernkultur, die Getreide anbaute, Tierzucht betrieb und auch schon Keramik herstellte. Die Shang-Dynastie (1500 - 1030 v. Chr.) war die erste von vielen aufeinander folgenden Dynastien. Aus dieser Zeit stammen die ersten Zeugnisse von Schrift und Zahl. In der darauffolgenden Chou-Dynastie (1030 - 481 v. Chr) prosperierten der Handel, Handwerk und Wissenschaft. Speziell im Bereich der Astronomie wurden neue Erkenntnisse gewonnen. Auf eine Phase der kämpfenden Reiche (481 - 221 v. Chr) folgte die Chin-Dynastie (221 - 206 v. Chr.). Kaiser Cheng veranlasste in dieser Zeit die Abschaffung des Lehnswesens. Die zuvor feudalen Strukturen ersetzt er durch einen Beamtenapparat. Unter seiner Regentschaft wurde auch der Bau der chinesischen Mauer begonnen. In der Han-Dynastie (206 v. Chr. - 220 n. Chr.) wurde eine Akademie zur Beamtenausbildung errichtet. Mathematik, Philosophie und Astronomie waren Teil der Ausbildung und es kam zu einem Ausbau des Wissens in diesen Bereichen. Das von Liu Hui 263 n. Chr. kommentierte Rechenbuch Jiuzhang suanshu (Neun Bücher arithmetischer Technik) war integraler Bestandteil der Beamtenausbildung. Es besteht aus 246 Aufgaben, die sich mit praktischen Problemen wie z. B. Vermessungsangelegenheiten oder Steuern auseinandersetzen. Der Inhalt dieses Buches wird im folgenden Abschnitt noch genauer thematisiert. Auf die Tang-Dynastie (618 - 906 n. Chr.), in der ein weiterer wirtschaftlich und wissenschaftlicher Aufschwung stattfand, folgte die Sung-Dynastie (960 - 1278 n. Chr.). Diese Epoche ist für die Geschichte der Algebra besonders interessant. Errungenschaften der Beamten Qin Jiushao und Li Ye sowie jene des Mathematikers Zhu Shijie werden im folgenden Abschnitt noch näher behandelt. 1211 kam es zum Einfall der Mongolen und der anschließenden Herrschaft Dschingis-Khans (1155 - 1227). Dessen Enkel vergrößerte das große Reich noch weiter und über Handelswege und Handelsbeziehungen konnte so ein Austausch mit Gelehrten islamischer Länder stattfinden. Das 13. Jahrhundert gilt als Höhepunkt chinesischer Mathematik und Algebra. Aus der Ming-Dynastie (1368 - 1644) gibt es keine Zeugnisse bedeutender mathematischer Leistungen. Während der Herrschaft der Mandschu-Kaiser von 1644 - 1912 war China sehr von der Außenwelt abgegrenzt, weshalb die chinesischen Mathematiker erst sehr spät von den Erkenntnissen europäischer Mathematiker erfuhren. [vgl. 3, S. 106–116]

Das chinesische Zahlsystem war ein Dezimalsystem, das aber nicht positionell war und auch ohne Null auskam. Es gab Symbole für die Zahlen 1,...,9,10,100,1000, usw. Die Zahl 400 zum Beispiel wurde multiplikativ dargestellt, indem dem Symbol für 100 das Symbol für 4 vorangestellt wurde.

Vielleicht führte gerade die rege Verwendung von Rechenbrettern dazu, dass der Schritt zu einem Positionssystem nicht vollzogen wurde, da auf einem solchen Brett einfach die verschiedenen Spalten oder Zeilen dazu verwendet werden konnten verschiedene Potenzen von 10 darzustellen. Aber vermutlich war es gerade diese Einsicht, dass die Spalten und Zeilen verschiedene Objekte oder Potenzen einer Unbekannten bezeichnen können, die der Algebra in China Vorschub leistete. [vgl 16, S. 46–47]

5.2 Lineare Gleichungen und Systeme linearer Gleichungen

Sowohl in dem Buch Suan shu shu, das sich auf etwa 200 v. Chr datieren lässt, als auch in dem vermutlich 200 Jahre später entstandenen Jiuzhang Suanshu („Neun Bücher arithmetischer Technik“) findet sich eine Methode, die als „Überschuss und Fehlbetrag“ bezeichnet wird und heute als doppelter falscher Ansatz bekannt ist. [vgl. 38, S. 81–84] Mithilfe dieser Methode lassen sich lineare Gleichungen der Form $ax = b$ lösen. Dazu werden willkürlich zwei Versuchszahlen x_1 und x_2 gewählt. Falls man nicht gerade den richtigen Wert für x errät, ist der Wert von ax entweder größer oder kleiner als b. Wir wollen hier nur den Fall besprechen, bei dem die gewählten

Versuchszahlen einen Überschuss d_1 und einen Fehlbetrag d_2 ergeben:

$$ax_1 = b + d_1$$
$$ax_2 = b - d_2$$

Für die Lösung werden die Zahlen folgendermaßen auf das Rechenbrett gelegt: $\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ d_1 & d_2 \end{matrix}$
Es wird dann kreuzweise multipliziert und daraus die Summe gebildet: $x_1d_2 + x_2d_1$. In einem nächsten Schritt wird die Summe $d_1 + d_2$ der beiden unteren Elemente gebildet. Anschließend wird das erste Ergebnis durch das zweite dividiert und man erhält:

$$x = \frac{x_1d_2 + x_2d_1}{d_1 + d_2}$$

Diese Methode taucht zum ersten Mal in China auf und ist später bei islamischen Mathematikern als „Regula Elchatayn" (Regel der beiden Waagschalen) bekannt. Im Abendland findet sie sich bei Leonardo von Pisa. [vgl. 66, S. 128] Über einen sehr langen Zeitraum wurden mit der Hilfe dieses Algorithmus Aufgaben gelöst. Noch 1884 lernten Schüler diese Methode in österreichischen Gymnasien. [vgl. 3, S. 121]

Buch VIII der „Neun Bücher arithmetischer Technik" beinhaltet die Beschreibung des Verfahrens „Fangcheng" zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Es entspricht dem Gaußschen Algorithmus, wobei beim chinesischen Verfahren die Matrix um 90° gedreht ist und die Koeffizienten mit Stäbchen auf ein Rechenbrett gelegt wurden. Da bei den Umformungen auch negative Zahlen auftreten können, führten die Chinesen Regeln ein, um mit negativen Größen formal rechnen zu können. Als Lösung ließen sie negative Zahlen jedoch noch nicht zu. [vgl. 3, S. 124]

5.3 Polynomgleichungen

Aus China ist keine Methode für quadratische Gleichungen überliefert, die sich wie jene aus Mesopotamien, Griechenland oder Indien in die quadratische Lösungsformel übersetzen lässt. Jedoch entwickelten die Chinesen schon sehr früh ausgefeilte numerische Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen höheren Grades. [vgl. 38, S. 90] Eine Beschreibung des Verfahrens findet sich in dem Buch Shushu jiuzhang (Mathematische Abhandlung in neun Büchern) von Qin Jiushao (1202 - 1261), wenngleich solche Gleichungen auch in früher entstanden Werken bereits gelöst wurden, wobei dort meist die Erklärung, wie man zur Lösung gekommen ist, fehlt. [vgl. 38, S. 92]. Das Verfahren entspricht der Horner-Methode. Es gibt jedoch keinen Hinweis darauf, dass im alten China Überlegungen über Zusammenhänge wie Grad einer

Gleichung und der Anzahl der Lösungen oder Koeffizienten und Lösung angestellt wurden. [vgl. 69, S. 119–120]

6 Indien

Diese Arbeit geht v. a. der europäischen Entwicklungs(vor)geschichte der Algebra nach. Die frühe indische Astronomie lässt zwar auf eine Beeinflussung durch griechisches Wissen schließen, für eine Beeinflussung im mathematischen Bereich gibt es jedoch keine Nachweise. Es lassen sich auch Beziehungen und ein Wissensaustausch mit der islamischen Welt nachweisen, jedoch ist nicht klar, ob und inwiefern dieser Austausch den Bereich der Algebra betrifft. [vgl. 56, S. 99–100].

Es wird in diesem Abschnitt in erster Linie das Lösen quadratischer Gleichungen thematisiert, auch wenn in Indien andere algebraische Inhalte auftauchen, wie z. B. Näherungs- und Iterationsverfahren zur Berechnung von Wurzeln, unbestimmte Gleichungen (Pellsche Gleichung) oder auch Gleichungen höheren Grades.

6.1 Historischer Überblick

Im 3. Jahrtausend v. Chr. entwickelt sich im Industal eine Stadtkultur. Mit dem vordringen der Indoarier um 2000 v. Chr. verbreitet sich Sanskrit als Sprache. Die meisten überlieferten mathematischen Werke aus Indien sind auf Sanskrit verfasst, oft auch in Versform um das (Auswendig-)Lernen zu erleichtern. Um 1500 v. Chr. beginnt die vedische Periode und es entsteht das Kastensystem. Im wissenschaftlichen Bereich werden aber keine nennenswerten Erkenntnisse gewonnen. Diese Epoche endet mit der Expansion des Buddhismus im 6. Jahrhundert v. Chr. 327 v. Chr. erobert Alexander der Große Teile Indiens. Der Herrschaftsbereich der darauffolgenden Seleukiden-Monarchien erstreckt sich über Bereiche Mittelasiens, Syrien und Mesopotamien. Dadurch findet ein Austausch mit diesen Kulturen statt. Auf die Zeit Kaiser Ashokas (271 - 231) lassen sich erste schriftliche Zeugnisse indischer Zahlsymbole datieren. In der darauffolgenden Zeit kommt es zu verschiedenen Invasionen. In der Gupta-Dynastie (320 - 480) werden Universitäten gegründet und Kunst und Wissenschaft blühen auf. In der Zeit von 450 - 1400 n. Chr. kommt es laufend zu Invasionen und wechselnden Herrschaftsverhältnissen. In dieser Phase wirken drei Mathematiker, die speziell auch für die Geschichte der Algebra interessant sind: [vgl. 3, S. 130–134]

6.1.1 Indische Mathematiker und ihre Leistungen

- Āryabhaṭa (geb. 476) behandelt in seinem mathematischen und astronomischen Werk „Āryabhaṭīya“ unter anderem Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen.

- Im Werk „Brāhmasphuṭasiddhānṭa“ von Brahmagupta (geb. 598) taucht erstmals eine allgemeine Form für quadratische Gleichungen auf. Aber er gibt, obwohl er mit negativen Zahlen rechnet, nur positive Lösungen an.

- Bhāskara II (geb. 1114) entwickelt in „Siddhānṭa-Siromani“ entwickelt die vorhandenen Erkenntnisse weiter. Er gibt zwei Wurzeln als Lösung einer quadratischen Gleichung an. Nach Bhāskara II gibt es in Indien keine nennenswerten Fortschritte mehr in diesem Bereich.

Die Inder entwickelten ein dezimales Positionssystem [vgl. 3, S. 136] und auch einen algebraischen Symbolismus, bei dem die Symbole für die Operationen, Unbekannte und deren Potenzen auf Wortabkürzungen beruhen. [vgl. 3, S. 137–138] Die Schreibweise ist ähnlich wie jene von Diophant. [vgl. 56, S. 98]

Āryabhaṭa gibt für die Summe S_n einer arithmetischen Reihe mit Anfangsglied a und Differenz d einen Lösungsalgorithmus in Versform an. In moderner algebraischer Symbolik lautet dieser: [vgl. 3, S. 141–142]

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8Sd + (2a-d)^2} - 2a}{d} + 1\right) \tag{6.1}$$

wobei man ja aus

$$S_n = n\left[a + \frac{n-1}{2}d\right] \tag{6.2}$$

eine quadratische Gleichung in n erhält:

$$dn^2 + (2a-d)\,n = 2S \tag{6.3}$$

Brahmagupta behandelt quadratische Gleichungen in der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx = c \tag{6.4}$$

mit a>0 und b,c positiv oder negativ. Sowohl die Babylonier, als auch Diophant und später islamische Mathematiker unterscheiden hingegen drei Fälle mit positiven

Koeffizenten. [vgl. 3, S. 142] Alten et al. in [3, S. 142] zufolge löst Brahmagupta die Gleichung durch quadratische Ergänzung und multipliziert dazu (6.4) mit $4a$ (bzw. a) und addiert b^2 (bzw. $\left(\frac{b}{2}\right)^2$). Die linke Seite der Gleichung ersetzt er durch das Quadrat eines Binoms:

$$(2ax+b)^2 = b^2 + 4ac \qquad \left(\text{bzw. } \left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac\right)$$

Die negative Lösung erwähnt er nicht, als positive Wurzel gibt er an:

$$x = \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a} \qquad \left(\text{bzw. } x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}-\frac{b}{2}}{a}\right)$$

Victor J. Katz und Karen Hunger Parshall berichten in [38, S. 112–113], dass Brahmagupta wie auch Āryabhaṭa einen allgemeinen Algorithmus zur Lösung quadratischer Gleichungen angegeben haben, dass es bei ihnen aber keinen Hinweis darauf gibt, wie der Algorithmus entwickelt wurde, sprich ob geometrische oder doch rein algebraische Überlegungen zu Grunde liegen.

Bhāskara II gibt etwa 500 Jahre später für quadratische Gleichungen zwei Lösungen an, falls sie positiv sind. Er gibt jedenfalls nicht mehr nur einen Algorithmus an, sondern beschreibt eine Methode basierend auf quadratischer Ergänzung. [vgl. 38, S. 113–114]

7 Arabisch islamische Länder

Beginnend im 7. Jahrhundert bis zum 15. Jahrhundert kam es zu einer Ausbreitung des Islams ausgehend von der arabischen Halbinsel bis nach Indien und Spanien. Erfordernisse des Handels beflügelten die Entwicklung von Algebra und Arithmetik. Die Algebra löste sich immer weiter von der Geometrie ab und wurde eine eigenständige Teildisziplin. Etwas ausführlicher wird in folgenden Kapitel auf das Werk von Muḥammad al-Khwārizmī eingegangen. Dieses war durch Übersetzung bereits im 12. Jahrhundert in Europa verfügbar und genoss großes Ansehen. Auch Abū Kāmils Werk hatte auf europäische Mathematiker Einfluss. So finden sich beispielsweise Aufgaben aus seinem Werk bei Leonardo von Pisa wieder. Den späteren islamischen Mathematikern gelangen zwar außerordentliche Leistungen, sie werden jedoch nur kurz erwähnt, da ihr Wissen weder vor noch während der Renaissance nach Europa gelangte und somit ihr Einfluss auf die Entwicklungen in Europa begrenzt ist. [vgl. 38, S. 173]

7.1 Historischer Überblick

Der Islam entstand im 7. Jahrhundert n. Chr. auf der arabischen Halbinsel. Muḥammed (596 - 632), der im Islam als letzter und wichtigster Prophet angesehen wird, soll als 40-jähriger durch den Erzengel Gabriel die Offenbarungen empfangen haben. Er verkündet die Botschaft zunächst im engeren Kreis in Mekka. 622 musste er nach Yathrib (heute Medina) auswandern. Die Auswanderung wird als Hidschra bezeichnet und markiert den Beginn der islamischen Zeitrechnung. Von Mekka aus gelang es ihm sich mit bestimmten Stämmen zu verbinden und andere zu vertreiben bzw. zu unterwerfen. Bei seinem Tod 632 erstreckte sich der politische und militärische Machtbereich beinahe über die gesamte arabische Halbinsel. Oft wurde in den eroberten Gebieten auch der islamische Glaube angenommen. Infolge des Todes Muḥammeds kam es zu einer Abfallbewegung (ridda) einiger Stämme, da sich viele nur dem Propheten direkt verpflichtet fühlten. In den Auseinandersetzungen über die Frage der Nachfolge Muḥammeds setzte sich sein Stiefvater Abu Bakr als erster Kalif durch. Ihm gelang es die abtrünnigen Stämme zu unterwerfen und so die Grundlage zu schaffen für die im Anschluss stattgefundene islamische Expansion über die arabische Halbinsel hinaus. Die Frage der Nachfolge war damit aber nicht endgültig geklärt. Auf Abu Bakr folgten drei weitere sogenannte „rechtgeleitete“ Kalifen. Der letzte dieser vier rechtgeleiteten Kalifen war Ali (656 - 661). Er wurde aber nur von einem Teil, den Schiiten, als rechtmäßig angesehen. Es kam zur Aufspaltung der muslimischen Gemeinschaft in Schiiten und Sunniten. Unter den ersten vier Kalifen konnten Teile des Byzantinischen Reiches und des Sassanidenreichs erobert werden. Ägypten, Syrien und Mesopotamien gehörten 661 bereits zum islamischen Territorium. Während des darauffolgenden Umayyadenkalifats kam es zu einer weiteren Expansion. So erstreckte sich das Reich, wie in Abbildung 7.1.1 ersichtlich, um 750 von der iberischen Halbinsel bis nach Indien. Auf die Umayyaden folgten Abbasiden. Sie verlegten die Hauptstadt von Damaskus nach Baghdad. Dort errichteten sie in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts das Haus der Weisheit, ein wissenschaftliches Zentrum in dem u. a. viele antike Werke ins Arabische übersetzt wurden. 1258 wurde der letzte Abbasiden-Kalif durch die Mongolen ermordet. Aber schon davor begannen sich Teile des riesigen Reiches abzuspalten. So entstand zum Beispiel in Spanien ein eigenständiges Königreich unter den Ummayaden. Die Hauptstadt dieses Reiches war Cordoba, in der Wissenschaft und Kultur zur Blüte kamen. Cordoba und auch Toledo spielen, durch die dort stattgefundene Übersetzung arabischer Werke ins Lateinische, eine zentrale Rolle im Wissenstransfer nach Europa. [vgl. 3, S. 148–156]

Durch die Ausdehnung des islamischen Reiches über ein riesiges Gebiet, kamen die islamischen Mathematiker in Kontakt mit den mathematischen Errungenschaften verschiedener bereits hoch entwickelter Kulturen. Die Entwicklung der Wissenschaften bzw. der Mathematik lässt sich wie in [2, S. 230–231] beschrieben grob in zwei Phasen unterteilen: zuerst fand eine Sammlung, Strukturierung und Übersetzung bereits vorhandenen Wissens verschiedener Kulturen statt und später, etwa ab Mitte 9. Jahrhundert, kam es zur Emanzipation und es entstand auf dem Nährboden der Kommentierung der alten Werke eine eigenständige mathematische Tradition.

In der anfänglichen Sammlungs- und Übersetzungsphase während der Abbasidenherrschaft konnten die islamischen Mathematiker laut Jacques Sesiano in [53, S. 53–54] auf die Errungenschaften dreier Kulturen zurückgreifen. Mesopotamische Wissenschaft war den Arabern v. a. indirekt über die Eingliederung in griechisches Wissen zugänglich. Zu Indien hingegen gab es direkte Kontakte, so weiß man z. B. von der Einladung indischer Gelehrter nach Baghdad. Indischer Einfluss lässt sich im Bereich der Trigonometrie nachweisen und auch das heute gebräuchliche arabi-

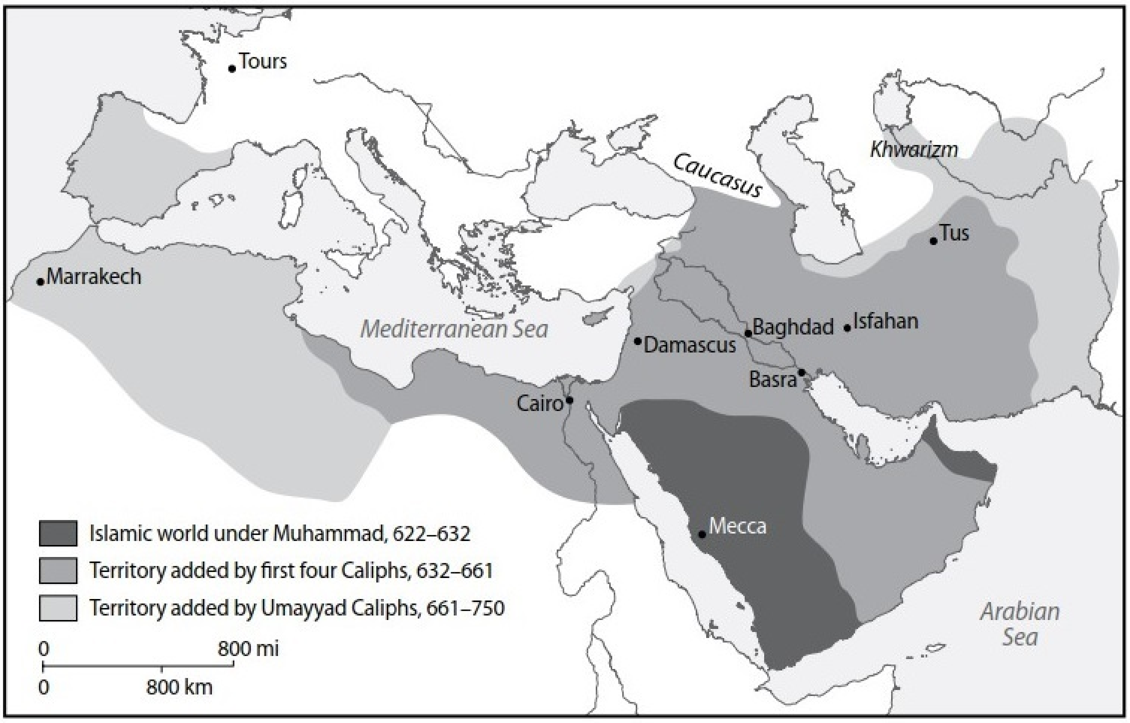


Abbildung 7.1.1: Ausbreitung des Islam bis 750 n. Chr.
[38, S. 133]

sche Ziffernsystem gelangte aus Indien in die arabische Welt. Das Ziffernsystem erleichtert praktisches Rechnen und so scheint das Aufblühen anwendungsorientierter Mathematik für Handelszwecke ebenfalls auf indischen Einfluss zurückzuführen. Die griechische Wissenschaft eigneten sich die arabischen Gelehrten durch engagierte[1] Übersetzungstätigkeit vorhandener Manuskripte an. [2] Bedeutsam war die in Griechenland entwickelte deduktive wissenschaftliche Struktur mit Sätzen und Beweisen. Für den Bereich der Algebra sind zwei griechische Erbschaften relevant: einerseits die Geometrie, in Form von geometrischen Zeichnungen bei Beweisen und andererseits die unbestimmte Algebra, die durch Diophantübersetzungen oder Übersetzungen anderer unbekannter Autoren zugänglich war. [vgl. 53, S. 53–54]

Høyrup hingegen ist der Meinung, dass der Einfluss Griechenlands und eine gewisse Kontinuität in Bereichen wie der Geometrie durchaus gegeben ist, aber für den Bereich der Algebra, der griechische Einfluss jedoch nur sehr gering ist. So sei z. B. bei al-Khwārizmī lediglich die Beschriftung der Grafiken griechischen Ursprungs und auch gebe es einzelne direkte Verweise Abū Kāmils auf Euklid, aber dennoch

[1] Man darf nicht übersehen, dass für gute Übersetungen, ein inhaltliches Verständnis der zu übersetzenden Schriften wichtig ist.

[2] Bermerkenswert ist das Ausmaß des Transfers. Es gab wohl auch zuvor um das Mittelmeer einen gewissen Austausch zwischen den Völkern, aber nie war ein solches Bestreben, sich die komplette Sammlung einer Kultur anzueignen, vorhanden.

sei das Werk in seiner Gesamtheit nicht als griechisch zu charakterisieren. [vgl. 29, S. 14]

7.2 Islamische Mathematiker

Muḥammad al-Khwārizmī (ca. 780 - 850 n. Chr.) gilt als einer der ersten Algebraiker. Er lebte in Baghdad und verfasste ein Lehrbuch der Algebra. Im arabischen Titel dieses Werkes kommen die Wörter al-jabr und al-muqābala vor. Aus al-jabr ist die Bezeichnung Algebra hervorgegangen. Al-jabr und al-muqābala bedeuten „wiederherstellen“ und „gegenüberstellen“ und bezeichnen zwei Operationen um eine Gleichung zu vereinfachen. Al-Khwārizmī beschreibt sechs Standardtypen linearer und quadratischer Gleichungen, die man nach Anwendung dieser und zweier anderer Operationen erhält. Er führt jedoch nur positive Lösungen an.[3] Nicht nur für das Werk al-Khwārizmīs, sondern auch für die anderen muslimischen Schriften ist charakteristisch, dass sie jeglicher Symbolik entbehrten. Alles, selbst die Zahlen, wurde rein rhetorisch ausgedrückt. Die Unbekannte und deren Potenzen erhielten spezielle Bezeichnungen: „shay’“ (Ding) stand für x, „māl“ (Vermögen) repräsentiert x^2 und die dritte Potenz wurde durch das Wort „ka’b“(Würfel) bezeichnet. Der Inhalt von al-Khwārizmīs Algebrabuch rechtfertigt eigentlich nicht den großen Bekanntheitsgrad, den dieses Buch erfährt, denn wie solche Gleichungen gelöst werden, war durch die alten Kulturen bereits bekannt. Sein Ruhm geht viel mehr darauf zurück, dass es sich um das erste algebraische *Lehrbuch* handelt. [vgl. 56, S. 101]

Bei einer Gleichung die wir mit moderner Symbolik als $x^2 + 21 = 10x$ anschreiben würden, geht al-Khwārizmī folgendermaßen vor:

Das in der dritten Phase in Tabelle 7.1 rezeptartig angegebene Verfahren lässt sich leicht in die Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen übersetzen:

$$x_{1,2}5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2$$

Wie solche quadratischen Gleichungen gelöst werden, war schon lange Zeit bekannt, neu ist die Angabe von geometrischen Beweisen für das verwendete Verfahren. Der Beweis selbst ist, abgesehen von einer Skizze (siehe dazu Abbildung 7.2.1), rein rhetorisch verfasst.

[3] Irrationale Lösungen wurden unter islamischen Mathematikern zunehmend akzeptiert, solange sie reell und verschieden von Null waren. Es findet sich z. B. die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ deshalb nicht unter den sechs Standardtypen, da für positive Koeffizenten a, b und c keine positive Lösung möglich ist.

Übersetzung nach F. Rosen [39, S. 41–42]	Übertragung in Symbolik	Phasen [vgl. 47, S. 174–175]
If a person puts such a question to you as: „I have divided ten into two parts, and multiplying one of these by the other, the result was twenty one;“		Fragestellung
then you know that one of the two parts is thing, and the other ten minus thing. Multiply, therefore, thing by ten minus thing; then you have ten things minus a square, which is equal to twenty-one.	$(10-x)x = 21$ $10x - x^2 = 21$	1. Aufstellen der Gleichung
Separate the square from ten things, and add it to the twenty-one. Then you have ten things, which are equal to twenty-one dirhems and a square.	$10x = 21 + x^2$	2. Vereinfachung zu einem der sechs Standardtypen
Take away the moiety of the roots, and multiply the remaining five by itself; it is twenty-five. Subtract from this the twenty-one which are connected with the square; the remainder is four. Extract its root, it is two. Subtract this from the moiety of the roots, namely, five; there remain three, which is one of two parts. Or if you please, you may add the root of four to the moiety of the roots; the sum is seven, which is likewise one of the parts	$10 : 2 = 5$ $5 \cdot 5 = 25$ $25 - 21 = 4$ $\sqrt{4} = 2$ $5 - 2 = 3$ $5 + 2 = 7$	3. Anwendung der geeigneten Methode

Tabelle 7.1: Beispiel aus al-Khwārizmīs Algebralehrbuch

Etwas verkürzt und um Ziffern und Symbolschreibweise für die Unbekannte ergänzt, sieht der Beweis folgendermaßen aus:
Das Quadrat AD repräsentiere x^2. An dieses Quadrat wird ein Rechteck HB angehängt, wobei die Länge von HC gleich 10 ist. HC wird halbiert durch den Punkt G. An die Strecke GT wird das Stück $CG - GT$ angehängt und man errichtet das große Quadrat MT mit Seitenlänge $KT = MK$. Nun wisse man, dass KT gleich 5 sei.[4] Und die Fläche des großen Quadrates MT ergibt folglich 25. Das Rechteck HB repräsentiert 21.[5] Wird nun von KM das Stück KL, das gleich GK ist, abgezogen,

[4]KT setzt sich zusammen aus $GT = x$ und der Differenz $CG - GT = \frac{10}{2} - x$

[5]Das große Rechteck HD ist aus den Seitenlängen 10 und x zusammengesetzt und seine Fläche beträgt somit $10x$. Es besteht aus dem Quadrat AD und dem Rechteck HB. Da die Fläche von AD x^2 beträgt, folgt aus $x^2 + 21 = 10x$, dass HB gleich 21 ist.

dann folgt, dass $GT = LM$. Es gilt $KL = KG$. Die Rechtecke MR und TA sind also gleich groß. Es folgt, dass das Rechteck HT zusammen mit dem Rechteck MR gleich dem Rechteck HB (das ja 21 repräsentiert) ist. Zieht man nun vom großen Quadrat MT mit der Fläche 25 die Rechtecke HT und MR, die zusammen eine Fläche von 21 haben, ab, so bleibt ein kleines Quadrat KR mit Flächeninhalt 4 übrig. Durch Wurzelziehen erhält man die Länge 5 der Seite $RG = GA$. Zieht man dieses Ergebnis nun von GC ab, so erhält man als Ergebnis 3 für die Seitenlänge AC, die ja der gesuchten Wurzel entspricht. Wenn man nun aber 2 zu CG addiert, erhält man CR und dabei handelt es sich um die Wurzel/Seite eines größeren Quadrats. [vgl. 39, S. 16–18]

Den geometrischen Beweis für den zweiten Fall, wenn $x > \frac{p}{2} = \frac{10}{2}$ bleibt al-Khwārizmī aber schuldig. Er hat einfach angenommen, dass G auf AH liegt, also $x < \frac{p}{2}$.

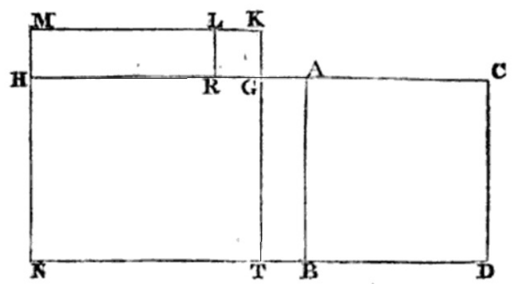


Abbildung 7.2.1: geometrische Skizze zum Beweis von $x^2 + 21 = 10x$
[39, S. 18]

Trotz des geometrischen Beweises der Methoden lässt sich eine klare Abwendung von der Geometrie feststellen.[6] So geht es nicht mehr darum Seiten bzw. Flächen in einem geometrischen Sachverhalt zu bestimmen, sondern darum Zahlen zu finden, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Das geometrische Verfahren dient nur der Rechtfertigung des Algorithmus und wird dann infolge bei der Lösung von Aufgaben außen vor gelassen. [vgl. 38, S. 143]

Abū Kāmil (ca. 850 - 930 n. Chr.) baute auf das Werk al-Khwārizmīs auf. Auch seine Beweise sind geometrischer Natur, mit dem Unterschied jedoch, dass er auf Euklid beim Beweis des Algorithmus zur Lösung quadratischer Gleichungen verweist. Er beschäftigt sich auch eingehend mit der Lösung unbestimmter Gleichungen und Systeme.

[6] Es erinnert der Beweis auch mehr an das „cut and paste“-Verfahren aus Mesopotamien, als an einen griechischen Beweis. [vgl. 38, S. 143]

al-Karajī (953 - 1029 n. Chr.) beschäftigt sich eingehend mit unbestimmten Gleichungen. Er legt viele Beispiele aus Diophants *Arithmetica* und auch einzelne von Abū Kāmil vor. Er beschreibt es als Ziel der Algbra ausgehend von bekannten Größen die unbekannten zu bestimmen. Äquivalent zu den Rechenregeln der Arithmetik entwickelt er Regeln, um mit Unbekannten bzw. Polynomen zu rechnen und begreift Algebra somit als verallgemeinerte Arithmetik. Dieser Prozess wird auch als Arithmetisierung der Algebra bezeichnet. Viele seiner entwickelten Regeln und Verfahren, wie z. B. Regeln für das Rechnen mit Exponenten, Polynomdivision oder das Wurzelziehen aus Polynomen unterlagen aber Beschränkungen, da er diese ohne Einbeziehung negativer Zahlen entwickelte. [vgl 38, S. 158–159] und [vgl. 50, S. 124]

al-Samaw'al lebte etwa 100 Jahre nach al-Karajī. Er formuliert (natürlich rein verbal) das Potenzgesetz $x^m x^n = x^{n+m}$ für beliebiges n bzw. m. Auch für die Division von Polynomen entwickelte er eine Methode. [vgl. 38, S. 161]

al-Khayyamī gelingt die geometrische Lösung kubischer Gleichungen mit Hilfe von Kegelschnitten. Er betrachtet jedoch nur nur positive Lösungen.

Sharaf al-Dīn al-Tūsī liefert aufbauend auf das Wissen von al-Khayyamī eine numerische Methode zur Annäherung der Wurzeln kubischer Gleichungen.

8 Algebra im europäischen Mittelalter

Die Datierung des Mittelalters ist nach wie vor Gegenstand wissenschaftlicher Diskussion. Man kann den Beginn im 5. Jahrhundert n. Chr. und das Ende mit dem Beginn der Renaissance um 1450 festlegen. [vgl. 2, S. 264] Mit dem Zusammenbruch des weströmischen Reichs um etwa 500 kam es zu einem Verlust an Stabilität und wirtschaftlichem Zerfall. Das Frühmittelalter war gekennzeichnet durch rückläufige Bevölkerungszahlen und Abwanderung aus den Städten. Ab etwa 800 entstand eine Feudalgesellschaft und es kam zu einem kulturellen und technologischen Aufschwung. [vgl. 3, S. 200] Anfänglich stand die Kirche der Wissenschaft, die sie als heidnisch ansah, sehr kritisch gegenüber. [vgl. 2, S. 265] Aber durch die von Kaiser Karl dem Großen veranlassten kirchlichen Reformen wurden die Klöster zu Trägern kultureller und ökonomischer Entwicklungen, und so trugen sie neben den Übersetzerschulen zum Beispiel viel zur Aufnahme und Kultivierung überlieferter Schriften bei. [vgl. 3, S. 200]

Das mittelalterliche Europa kam erst infolge der Reconquista in Spanien im 12. Jahrhundert mit den Errungenschaften des Altertums und der islamischen Welt in Kontakt. [vgl. 54, S. 129] Dieser Kontakt kann als ursächlich für das darauffolgende Emporkommen der Mathematik in Europa angesehen werden. [vgl. 2, S. 276] Von al-Khwārizmī, Abū Kāmil und vielen anderen wurden die Werke ins Lateinische übersetzt.

H.-W. Alten et al. nennen als Faktoren, die die Algebra vom Hochmittelalter bis zur Renaissance maßgeblich voranbrachten, einerseits die Aufnahme griechischen und islamischen Wissens und andererseits die Auswirkungen des Frühkapitalismus in Form von verstärktem Handelsaufkommen und Geldwirtschaft anstelle von Naturalwirtschaft. Die Anforderungen der erstarkenden Geldwirtschaft führte zur Entstehung des Berufes des Rechenmeisters. Diese lehrten die für den Handel wichtigen mathematischen Fertigkeiten gegen Bezahlung. Neben der Praxisorientierung interessierten sich viele von ihnen auch für Theorie - zum Beispiel beim Behandeln von

Gleichungen. Diese Paarung von praxisorientiertem Rechnen und der Behandlung theoretischer Fragen finden sich auch im „Liber abbaci“ von Leonardo Fibonacci von Pisa wieder. [vgl. 3, S. 203–204]

8.1 Leonardo Fibonacci von Pisa

Fibonacci lebte ca. 1170 - 1240 und ist ein Beispiel dafür, dass im 12. Jahrhundert neben dem indirekten Kontakt mit der islamischen Mathematik durch die Übersetzung von Schriften, auch direkte Beziehungen zum Morgenland bestanden. Handelsangelgenheiten hatten seinen Vater und sodann auch ihn nach Nordafrika geführt. Er bereiste viele Länder im Mittelmeerraum und im Nahen Osten und erhielt dort eine umfangreiche kaufmännische Ausbildung. Als er nach Pisa zurückkehrte, verschriftlichte er sein gesammeltes mathematisches Wissen. Eines seiner Werke ist das „liber abbaci“. Die ersten Kapitel haben verschiedene arithmetische rechnerische Themen zum Inhalt wie Verwendung der indisch arabischen Ziffern, die Grundrechnungsarten oder römische Zahlen. Dem kaufmännischen Rechnen ist ebenfalls ein großer Teil des Buches gewidmet. Dort finden sich beispielsweise Zinsberechnungen und Umrechnung von Maßen oder Währungen. Die meisten der Fragestellungen der ersten Kapitel führen auf lineare Gleichungen oder Systeme linearer Gleichungen. Erst das 15. Kapitel ist der Algebra gewidmet. Die Klassifizierung quadratischer Gleichungen hat Fibonacci von al-Khwārizmī übernommen und wie die islamischen Mathematiker kommt auch Fibonacci ohne Symbole aus und formuliert die Aufgaben und Gleichungen rein rhetorisch. Lediglich die Unbekannte und ihre Potenzen erhalten spezielle Bezeichnungen: res steht für x, census für x^2 und cubus für x^3. Für die quadratische Gleichung $x^2 + c = bx$ gibt er als Bedingung für die Lösbarkeit an, dass $c \leqslant \left(\frac{b}{2}\right)^2$.[1] Fibonacci formuliert den allgemeinen Lösungsalgorithmus sprachlich und ähnlich wie al-Khwārizmī gibt auch er eine geometrische Rechtfertigung des Verfahrens an. Viele der Aufgaben aus dem 15. Kapitel hat er von arabischen Mathematikern übernommen. Auch wenn in einigen Aufgaben Potenzen bis zum Grad 8 vorkommen, lassen sich die Gleichungen eigentlich immer auf quadratische Gleichungen zurückführen und mit dem bekannten Algorithmus lösen. [vgl. 2, S. 313–314] und [vgl. 38, S. 178–183]

Die folgende Aufgabe ist ein Beispiel dafür. Gesucht sind drei verschieden große Größen x, y, z mit $x < y < z$ und $xz = y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $xy = 10$. Aus der letzten Gleichung erhält er $y = \frac{10}{x}$. Quadrieren und Einsetzen in die erste Gleichung und

[1] Um den Inhalt kürzer darzustellen wurde der Inhalt hier und auch weiter unten in diesem Kapitel in moderne Symbolik übersetzt.

eine anschließende Division durch x liefern

$$z = \frac{100}{x^3}$$

Einsetzen von z in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{10000}{x^6} = x^2 + \frac{100}{x^2} \qquad \text{bzw.} \quad 10000 = x^8 + 100x^4$$

Fibonacci fasst die Gleichung richtigerweise als quadratisch in x^4 auf und löst sie mit dem bekannten Algorithmus. Er erhält $x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}$, $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} + 50}}$ und $z = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50} + \sqrt{\sqrt{12500} + 50}}$. [vgl. 38, S. 183–184]

Das *liber abacci* hatte großen Einfluss, zunächst in Italien durch die Verwendung italienischer Fassungen des Werkes in Rechenschulen (Abbakus-Schulen), aber auch später finden sich Aufgaben und Methoden Fibonaccis in Büchern deutscher, französischer und englischer Sprache wieder. [vgl 2, S. 317]
In Italien sind im 13. und 14. Jahrhundert eine ganze Reihe Abbakus-Schulen für die Bedürfnisse von Händlern und Kaufleuten errichtet worden. Die dort zum Einsatz gekommenen Abbakus-Schriften vermitteln vor allem praktisches Wissen, das über eine Ausbildung an der Universität nicht zugänglich gewesen wäre, wie der Umgang mit indisch-arabischen Ziffern oder arithmetischen Operationen, aber auch algebraische und geometrische Kenntnisse.[vgl. 3, S. 214]

8.2 Paolo Gerardi und Dardi von Pisa

sind zwei Mathmatiker die im 14. Jahrhundert Versuche unternahmen auch kubische und quartische (biquadratische) Gleichungen algebraisch zu lösen. Gerardi führt kubische Gleichungen willkürlich auf quadratische Gleichungen zurück. So wird bei ihm aus $x^3 = bx + c$ kurzerhand $x^2 = bx + c$. Die angegebenen Lösungen sind natürlich falsch. [vgl. 54, S. 146–147]

Die von Dardi von Pisa angegebenen Lösungsmethoden führen zwar zur korrekten Beantwortung der Fragestellung, sind jedoch nicht allgemein anwendbar. Die Koeffizienten sind nämlich so gewählt, dass kubische bzw. quadratische und lineare Terme wegfallen und eine reine Gleichung dritten bzw. vierten Grades zu lösen bleibt. Seine Methode soll hier anhand der kubischen Gleichung[2] erläutert werden. Die allgemeine kubische Gleichung lautet $ax^3 + bx^2 + cx = n$. Die Substitution $x = y - \frac{b}{3a}$ führt

[2]Das Beispiel stammt aus [22, S. 418]

zum Wegfall des quadratischen Terms und man erhält

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right) y + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} = n$$

Wenn nun, wie bei Dardi $c = \frac{b^2}{3a}$ dann fällt auch der lineare Term weg und es ergibt sich

$$ay^3 - \frac{b^3}{27a^2} = n \quad bzw. \quad y = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{n}{a}}$$

Für x ergibt sich somit

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{n}{a}} - \frac{b}{3a} \quad bzw. \quad x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{n}{a}} - \frac{c}{b}$$

Dardis Lösungen sind aus zwei Gründen erwähnenswert. Einerseits handelt es sich um die erste korrekte Lösung kubischer bzw. quartischer Gleichungen in Europa, andererseits wird hier sichtbar, dass Dardi ein gewisses Verständnis oder Bewusstsein für den Zusammenhang zwischen Lösbarkeit und den Koeffizienten einer Gleichung hatte. [vgl. 22, S. 418]

Vom Ende des 14. Jahrhunderts sind zwei anonyme Manuskripte überliefert, bei denen sich bedeutsame Schritte auf dem Weg zur allgemeinen Auflösbarkeit der kubischen Gleichung erkennen lassen. Eine wichtige Idee ist die Substitution $x = y - \frac{\text{Koeffizient des quadrat. Terms}}{3}$ bei einer kubischen Gleichung mit quadratischem Glied um letzteres zu eliminieren. Außerdem wurde ein Verfahren beschrieben, um eine kubische Gleichung aufzustellen, wenn der konstante Term gegeben ist. [vgl. 54, S. 148–149]

Auf den ersten Blick scheint es, als ob im Mittelalter nicht sehr viel neue Erkenntnisse gewonnen wurden. Aber die Erfolge im 16. Jahrhundert im Bereich der allgemeinen Lösung kubischer Gleichungen wären wohl nicht möglich gewesen, wenn nicht im Mittelalter schon Voraussetzungen dafür geschaffen worden wären. Zum einen sind das die ersten Versuche der Auflösung kubischer Gleichungen, zum anderen ist das die Erweiterung des Zahlbereichs. Während zuvor fast ausschließlich mit positiven, rationalen Zahlen hantiert wurde, kam es immer mehr zur Verwendung irrationaler Größen und auch zur (eingeschränkten) Akzeptanz negativer Zahlen. [vgl. 54, S. 149–150]

9 Renaissance

Auch in der Renaissance fand weiter eine Aufnahme antiken und islamischen Wissens statt. [vgl. 4, S. 157] Es kam zur Entwicklung einer (abkürzenden) Symbolik und schließlich wurden am Ende der Renaissance in Italien algebraische Lösungen von kubischen und quartischen Gleichungen vorgestellt.

9.1 Die Rechenmeister und notationelle Neuerungen

In Italien florierte, begründet durch die Nachfrage in reichen Handelsstädten, ab Ende des 14. Jahrhunderts der Berufsstand der Rechenmeister. Sogenannte Abakkus-Schriften, die kaufmännisches mathematisches Wissen vermittelten, wurden in großer Zahl von ihnen erzeugt. Bis 1500 lassen sich in etwa 200 solcher Schriften auf italienisch nachweisen. [vgl. 3, S. 214] Von Italien ausgehend breitete sich diese Praktikerbewegung der Rechenmeister auch nach Frankreich, in die Niederlande und nach (Süd)Deutschland aus. [vgl. 4, S. 157] Alten et al. zufolge „[...] waren es bis zum 16. Jahrhundert in Westeuropa fast ausschließlich Rechenmeister, die die Algebra weiterentwickelten." [3, S. 214–215]

Namensgebend für die Renaissance-Algebraiker waren deren Abkürzungen für die Unbekannte bzw. ihre Potenzen: in lateinischen Schriften wurde die Unbekannte als *res* oder *radix* bezeichnet, in Italien nannte man sie *cosa*, während sie auf deutsch die Bezeichnung *Coß* oder *Dingk* erhielt. Die Cossisten, wie zum Beispiel Luca Pacioli mit seiner *summa arithmetica*, verbreiteten algebraisches Wissen im 15. Jahrhundert, aber inhaltlich kam in dieser Zeit nichts Nennenswertes hinzu. [vgl. 4, S. 158]

Eine abkürzende Schreibweise taucht Ende des 14. Jahrhunderts in Frankreich und Italien auf. [vgl. 3, S. 229] Luca Pacioli zum Beispiel schreibt $\sqrt[3]{29+\sqrt{9}}$ als R3 V29 p R9. [vgl. 4, S. 159]. In weiterer Folge entsteht eine große Anzahl von solchen abkürzenden Schreibweisen, die im Vergleich zur verbalen Beschreibung von

Termumformungen mehr Übersichtlichkeit bieten. In Deutschland[1] und in den Niederlanden wurden nicht nur Abkürzungen, sondern auch neue Zeichen eingeführt. So werden die heute noch gebräuchlichen Zeichen + und − für Addition und Subtraktion in Johannes Widmanns 1489 veröffentlichtem Rechenbuch erstmals abgedruckt. [vgl. 3, S. 231] Auch der Wurzelhaken und der Multiplikationspunkt gehen auf deutsche Cossisten zurück. Gleichheit drückten sie meist durch einen waagrechten Strich aus. Das heute übliche Zeichen für Gleichheit führt der Engländer Robert Recorde ein. [vgl. 4, S. 160]

Die neu entwickelte Notation kann als abkürzend bzw. halbsymbolisch charakterisiert werden. Ihr Einfluss auf die Entwicklung der Symbolik bei Viète und Descartes bleibt unklar. [vgl. 4, S. 161]

9.2 Die algebraische Lösung der kubischen und quartischen Gleichung

Ein großer Durchbruch am Ende der Renaissance ist die algebraische Lösung der kubischen und der quartischen Gleichung. Die Geschichte der Entdeckung und des Bekanntwerdens der Lösung für kubische Gleichungen ist turbulent und offenbart auch Eigentümlichkeiten der damaligen akademischen Welt.

9.2.1 Vorgeschichte

Der an der Universität von Bologna tätige Scipione del Ferro (1456 - 1526) fand eine algebraische Lösung der Gleichung

$$x^3 + ax = b, \qquad a, b > 0 \tag{9.1}$$

Seine Entdeckung hielt er geheim. Akademische Reputation erlangte man nämlich nicht über Publikationen, sondern im Triumphieren bei mathematischen Duellen, bei denen man seinen Kollegen Aufgaben vorlegt. Und dort ist es sehr nützlich eine, den anderen unbekannte, Methode in der Hinterhand zu haben. Nach del Ferros Tod waren sein Schwiegersohn Annibale della Nave und sein Schüler Fiore in Besitz der Lösungsmethode gekommen. Fiore forderte Niccolo Tartaglia, der seinen Unterhalt mit Lesungen und Rechenunterricht bestritt, 1535 zu einem mathematischen Duell

[1] Für eine detailliertere Beschreibung der deutschen Cossisten siehe [3, S. 227–242]. Da viele von ihnen nicht direkt zur algebraischen Lösung von (kubischen) Gleichungen beigetragen haben, bleiben sie unerwähnt.

heraus. Die von Fiore gestellten Aufgaben ließen sich alle auf die Form (9.1) zurückführen. Kurz vor Ablauf der Frist entdeckte Tartaglia ebenfalls die allgemeine Lösung der Gleichung und gewann das Duell. Cardano, Arzt und Mathematiker, hörte davon und trat an Tartaglia heran mit der Bitte, er möge ihm die Lösungsformel mitteilen. Cardano erhielt die Methode ohne Beweis von Tartaglia und versprach ihm, diese neue Entdeckung nicht zu publizieren. Er hielt sich aber nicht an die Abmachung und veröffentlichte die Formel mit einem von ihm entdeckten Beweis 1545 in seiner *„Ars magna sive de regulis algebraicis“* (Die große Kunst oder über die algebraischen Regeln). Möglicherweise dachte er, eine Veröffentlichung sei legitim, da der Beweis seine eigene Leistung war oder vielleicht dachte er, dass del Ferro der eigentliche Urheber sei. Die Folge war ein lange andauerner Urheberrechtsstreit. [vgl. 3, S. 253–256] und [vgl. 4, S. 166–167]

Cardano und sein Schüler Lodovico Ferrari (1522 - 1565) haben noch andere Typen kubischer und quartischer Gleichungen gelöst. Auf diese Resultate wird im folgenden Abschnitt etwas genauer eingegangen.

9.2.2 Die Lösung der kubischen Gleichung

Wie in der Renaissance-Mathematik üblich drückte auch Cardano Gleichungen sprachlich aus. Die Gleichung (9.1) bezeichnet er als *cubus et res aequales numero*. Cardano ist v. a. auf der Suche nach positiven reellen Lösungen, die er *wahre* Lösungen nennt. Negative Lösungen erwähnt er gelegentlich und bezeichnet sie als *falsch* bzw. *fiktiv*. Die Koeffizienten sind positiv, meistens auch natürlich oder rational bzw. in seltenen Fällen irrational. Die Forderung nach positiven Koeffizienten macht eine Fallunterscheidung, ähnlich wie bei al-Khwārizmī, notwendig. Er unterscheidet 13 verschiedene Gleichungstypen. Jedem Gleichungstyp ist ein eigenes Kapitel (XI - XXIII) in der *Ars Magna* gewidmet. Für jeden Gleichungstyp gibt Cardano zuerst einen Beweis und anschließend eine Schritt für Schritt Vorschrift, wie mit den Koeffizienten zu verfahren ist, um zu einer Lösung zu gelangen, an. [vgl. 15, S. 259–262]

Im Grunde wird die Lösung der verschiedenen Gleichungstypen auf die Lösung von zwei Typen von Gleichungen reduziert: Neben dem von del Ferro bereits gelösten Gleichungstyp (9.1) ist der zweite Typ von der Form:

$$x^3 = ax + b \quad a, b > 0 \tag{9.2}$$

In den anderen Fällen ist meist noch eine Substitution notwendig. So wird zum Beispiel der Gleichungstyp $x^3 = ax^2 + b$ in Kapitel XIV durch die Substitution[2] $x =$

[2]Cardano führt diese Substitution auf geometrischem Wege durch. Für eine genauere Beschreibung

$y+\frac{a}{3}$, die wir bereits aus Kapitel 8 kennen, auf einen der zwei Gleichungsgrundtypen - in diesem Fall der Form (9.2) - zurückgeführt. Für diesen Gleichungstyp gibt Cardano folgende Lösungsregel an:

> When the cube of one-third the coefficient of x is not greater than the square of one-half the constant of the equation, subtract the former from the latter and add the square root of the remainder to one-half the constant of the equation and, again, subtract it from the same half, and you will have, as was said, a *binomium* and its *apotome*, the sum of the cube roots of which constitutes the value of x. [13, S. 103]

In moderne Symbolik übertragen bedeutet das, dass für die Gleichung (9.2) unter der Bedingung, dass $\left(\frac{a}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$ gilt

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \tag{9.3}$$

Die Bedingung verhindert, dass sich unter der Quadratwurzel ein negativer Ausdruck ergibt.

Auch für die Gleichung (9.1) $x^3 + ax = b$ gibt Cardano in Kapitel XI eine Lösungsregel an:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}} \tag{9.4}$$

Noch vor der Angabe der Lösungsregel gibt er einen Beweis[3] für die selbige an. Dieser Beweis ist geometrischer Natur. Grund für den Rückgriff auf die Geometrie ist das Fehlen einer allgemeinen Theorie irrationaler Zahlen, auch wenn sich in der Renaissance bereits ein „implizites, operatives Verständnis irrationaler Zahlen“ [4, S. 163] herausgebildet hat. Neben dem Beweis findet sich lediglich eine zweidimensionale Skizze (siehe Abb. 9.2.1).

Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, dass das Verhältnis Algebra - Geometrie durchaus spannungsreich ist und dass zum Beispiel die Übertragung eines geometrischen Sachverhalts in algebraische Symbolik/Beziehungen nicht eindeutig ist, denn aus einem einzigen geometrischen Sachverhalt können unterschiedliche algebraische Beziehungen hergeleitet werden. [vgl. 4, S. 161–162]

von Cardanos Verfahren vergleiche [15, S. 266–267]

[3] Für die englische Übersetzung des Beweises siehe [13, S. 96–98]

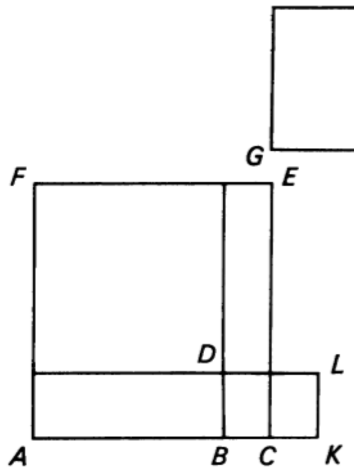


Abbildung 9.2.1: Cardanos Skizze zum geometrischem Beweis der Lösungsregel von $x^3 + x = b$ [13, S. 96]

Erst durch Viète und Descartes im 17. Jahrhundert werden Algebra und Geometrie klarer voneinander abgegrenzt. [vgl. 4, S. 163]

Cardanos Beweis der Lösungsformel für $x^3 + ax = b$

[vgl. 13, S. 96–98]

Der Beweis beginnt mit den folgenden Worten:

> For example, let GH^3 plus six times its side GH equal 20, and let AE and CL be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of AC, the side [of one], and CK the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x]. [13, S. 96]

Für GH gilt also die Gleichung $GH^3 + 6GH = 20$. Die Idee ist nun $AB = GH$ (die gesuchte Zahl/Länge) zu konstruieren. Dabei soll folgendes Gleichungssystem erfüllt sein.

$$AC^3 - CK^3 = 20 \quad \text{und} \quad AC \times CK(= BC) = 2 \tag{9.5}$$

Dann sollen außerdem die Körper DA, DC, DE und DF vervollständigt werden, wobei $DC = BC^3$ und $DF = AB^3$ durch den kleinen und den großen Würfel in Abb. 9.2.2 a) repräsentiert werden. $DE = 3\,(AB \times BC^2)$ wird durch den grauen Körper in

Abb. 9.2.2 b) dargestellt und $DA = 3\,(BC \times AB^2)$ ist der graue Körper in Abb. 9.2.2 c). (Es sei noch angemerkt, dass Cardanos Beweis keine solche dreidimensionalen Skizzen beinhaltet.)

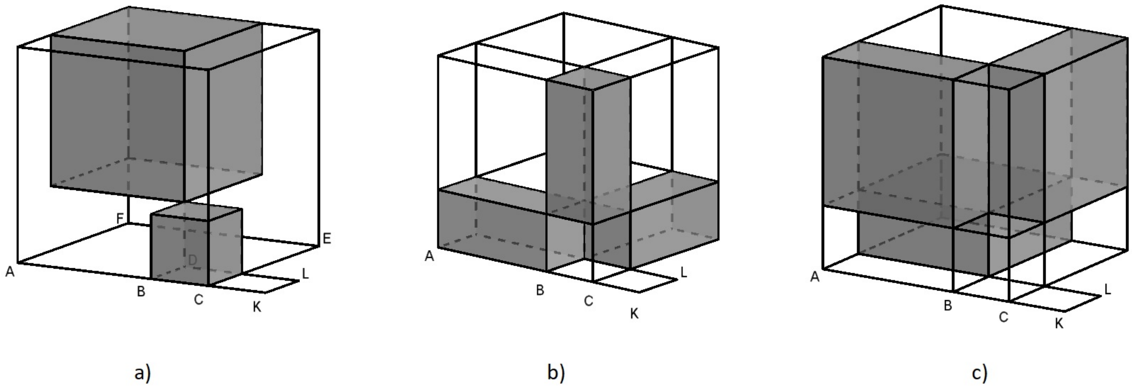


Abbildung 9.2.2: Vervollständigung der Quader bzw. Zerlegung des Würfels

Da (9.5) zufolge $AC \times CK = 2$ gilt, ist $AC \times 3CK = 6$ (6 ist der Koeffizient von x) also gilt

$$AB \times (3AC \times CK) = 3\,(AB \times AC \times BC) = 6AB \tag{9.6}$$

Cardano schreibt weiter

> Now the difference between AC^3 and CK^3 - manifesting itself as BC^3, which is equal to this by supposition - is 20, and from the first proposition of the sixth chapter is the sum of the bodies DA, DE, and DF. Therefore these three bodies equal 20. [13, S. 97]

$$\begin{aligned} AC^3 - CK^3 &= AC^3 - BC^3 = DA + DE + DF \\ &= 3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2) + AB^3 = 20 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Cardano verweist auf die erste Prop.[4] aus Kapitel VI und folgert, dass wenn BC negativ ist, gilt dass

[4]Die Proposition entspricht in algebraischer Symbolik ausgedrückt der kubischen Binomialformel: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$

$$
\begin{aligned}
AB^3 &= (AC + (-BC))^3 \\
&= AC^3 + 3\left(AC \times CB^2\right) + 3\left(-BC \times AC^2\right) + \left(-BC^3\right)
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

Und[5] wenn man nun in (9.7) für AB^3 (9.8) substituiert und zeigt, dass $3(BC \times AB^2) + 3(AB \times BC^2)$ gleich (9.6) ist, erhält man[6]

$$
\begin{aligned}
&AC^3 - BC^3 = \qquad (9.9)\\
&= AC^3 + 3\left(AC \times CB^2\right) + 3\left(-CB \times AC^2\right) + \left(-BC^3\right) + 6AB = 20
\end{aligned}
$$

Addiert man nun $6AB$ auf beiden Seiten von (9.8) erhält man

$$
\begin{aligned}
&AB^3 + 6AB = \qquad (9.10)\\
&= AC^3 + 3\left(AC \times CB^2\right) + 3\left(-BC \times AC^2\right) + \left(-BC^3\right) + 6AB
\end{aligned}
$$

Nach (9.9) ist die rechte Seite von (9.10) gleich 20 und somit ist AB gleich GH.

Analyse von Cardanos Beweis in moderner Schreibweise

Es soll eine Gleichung der Form $x^3 + bx = c$ gelöst werden. Die erste wichtige Idee ist x als Differenz zweier Größen zu schreiben

$$x = u - v \quad u > v \tag{9.11}$$

Auch Cardano fasst AB (entspricht hier dem x) als Differenz von AC und BC (bzw. CK) auf.
Setzt man (9.11) in die zu lösende Gleichung ein, erhält man

$$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + b(u - v) = c \tag{9.12}$$

$$u^3 - v^3 + b(u - v) = c + 3uv(u - v) \tag{9.13}$$

[5] Ab hier wird die Beweisführung von Cardano etwas verkürzt dargestellt.
[6] Algebraisch kann man das leicht verifizieren indem man $3BC \times AB$ heraushebt und $AB + BC$ durch AC ersetzt.

Daraus lässt sich leicht ablesen, dass wenn nun gleichzeitig

$$u^3 - v^3 = c \quad \text{und} \quad 3uv = b \tag{9.14}$$

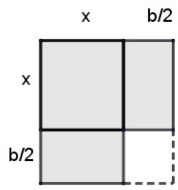
dann ist $x = u - v$ eine Lösung der Gleichung.
Auch Cardano hat mit diesem Gleichungssystem (siehe (9.5)) gearbeitet.

Dabei handelt es sich, wenn man so will, um den zweiten wichtigen Clou auf dem Weg zur Lösung der kubischen Gleichung und es stellt sich die Frage, wie Cardano dieses System gefunden hat. Er selbst hinterlässt keine Erklärung, wie er auf dieses System gekommen ist.

Möglich wäre es, dass er sein Verfahren analog zum zweidimensionalen Fall der quadratischen Gleichung entwickelt hat (zur Erinnerung siehe den Kasten am rechten Rand). Aber im Fall der kubischen Gleichung sind es nicht Rechtecke die an ein Quadrat, sondern Quader, die an einen Würfel angelegt werden. Ziel ist es, durch Anlegen von (nach Möglichkeit drei) Quadern eine Figur F zu erhalten, die sich leicht, nämlich durch Anlegen eines Würfels, zu einem großen Würfel ergänzen lässt. Man kann sich die Figur F, die durch Anlegen dreier Quader an den Würfel x^3 entsteht, als einen großen Würfel vorstellen, dem an einer Ecke ein kleinerer Würfel fehlt. Durch Skizzieren und Überlegen ist es nicht schwer drei solche Quader zu finden (siehe die drei grauen Quader in Abb. 9.2.3)

geometrische Lösung von $x^2 + bx = c$

An x² werden zwei Quadrate mit Seitenlänge x und b/2, die zusammen bx entsprechen, angelegt. Die dadurch entstehende graue Figur hat also Flächeninhalt c. Ergänzt man die graue Figur durch einen kleinen Würfel mit Seitenlänge b/2, erhält man die Fläche des großen Wüfels. Durch Wurzelziehen lässt sich seine Seitenlänge bestimmen. Zieht man von dieser b/2 ab, erhält man x.



$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Das Volumen eines einzelnen Quaders ist $x \cdot u \cdot v$. Und wenn der Ausdruck bx gleich den drei Quadern sein soll, ergibt sich $b = 3uv$. Und andererseits setzt sich der große Würfel u^3 aus der Figur F, deren Volumen gleich c ist und dem kleinen Würfel v^3 zusammen. Daraus ergibt sich $u^3 = v^3 + c$.

Jetzt hat man das Gleichungssystem (9.14). Die Lösung dieses Systems reduziert sich auf das Lösen einer quadratischen Gleichung in u^3 bzw. v^3 und quadratische Gleichungen konnten schon seit geraumer Zeit gelöst werden. Mit den Mitteln der modernen Algebra kann dieses System sehr leicht gelöst werden. Wir stellen in der ersten Gleichung (9.14) u^3 frei und setzen $u^3 = c + v^3$ in die zu $u^3v^3 = \left(\frac{b}{3}\right)^3$ umgeformte zweite Gleichung ein und erhalten eine quadratische Gleichung in v^3

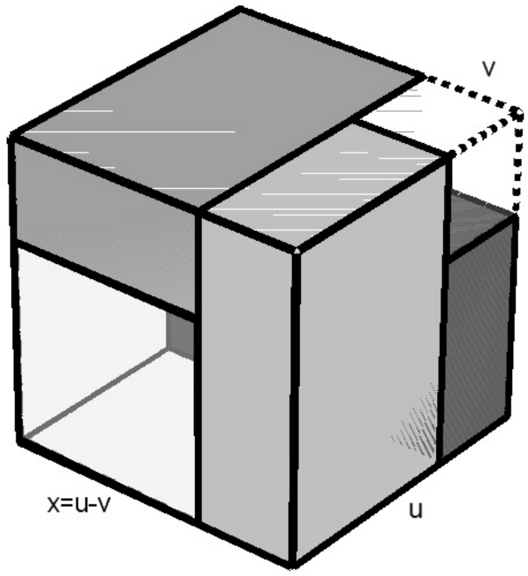


Abbildung 9.2.3: Anlegung dreier Quader an x^3

$$\left(c+v^3\right)v^3 = \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

$$\left(v^3\right)^2 + cv^3 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0 \tag{9.15}$$

Die Lösungsformel für die quadratische Gleichung liefert

$$v^3 = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} \tag{9.16}$$

wobei aber nur die positive Lösung beachtet wird. Einsetzen von v^3 in $u^3 = c + v^3$ ergibt

$$u^3 = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} \tag{9.17}$$

Mit (9.11) erhält man

$$x=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}} \tag{9.18}$$

Dabei handelt es sich um die Lösungsregel, die Cardano im Kapitel XI der *Ars Magna* für Gleichungen der Form $x^3+bx=c$ angibt. Wie man an der Formel leicht ablesen kann, findet man für diesen Gleichungstyp immer genau eine reelle Lösung, die auch immer positiv ist. Bei dem anderen Grundgleichungstyp $x^3=ax+b$ macht man den Ansatz $x=u+v$ und findet die Formel auf analogem Weg (Für die Formel siehe (9.3)). Auch diese Gleichung hat immer eine positive reelle Lösung. In Kapitel I der *Ars Magna* führt Cardano an, unter welchen Bedingungen diese Gleichung zusätzlich auch noch eine bzw. zwei *falsche* (sprich negative) Lösungen hat und stellt die Überlegung an, dass die falsche Lösung einer Gleichung in x, die wahre Lösung einer anderen Gleichung in -x ist. [vgl. 4, S. 171] und [vgl. 13, S. 13–14] Cardano schreibt:

> For example, in
>
> $$x^3=12x+16, \tag{9.19}$$
>
> the true solution is 4 and the fictitious one is -2, since if
>
> $$x^3+16=12x \tag{9.20}$$
>
> the true solution is 2 and the fictitious one -4. [13, S. 14]

Das ist eine wichtige Entwicklung, die mit Cardano stattfindet bzw. in der Ars Magna sichtbar wird: die zunehmende Offenheit gegenüber negativen Lösungen. Er macht zwar noch eine Fallunterscheidung bei den Gleichungstypen, die bei vollständiger Integration negativer Zahlen nicht mehr notwendig wäre. Aber dennoch werden negative Zahlen nicht mehr nur als Zwischenergebnisse, sondern auch als Endergebnisse akzeptiert/angeführt. Eine zweite wichtige Entwicklung ist eine erste Annährung an komplexe Zahlen. Diese wird durch den sogenannten *casus irreduzibilis* angestoßen, der im folgenden Abschnitt behandelt werden soll.

casus irreduzibilis

Wir holen zuerst noch ein wenig aus und überlegen uns wie die Lösungen der beiden Grundgleichungstypen von Cardano aussehen können. Ganz allgemein wissen wir, dass wenn die Funktionswerte einer kubischen Gleichung mit positivem Koeffizienten vor der dritten Potenz[7] von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, x den Wertebereich von $-\infty$ bis $+\infty$ der reellen Zahlen durchläuft. Und wenn die Funktion stetig ist, dann muss der Graph der Funktion die reelle Achse mindestens einmal an irgendeiner Stelle schneiden. Diese reellen Lösungen konnte Cardano angeben. Nun kann der Graph einer kubischen Funktion, abhängig von den Werten der Koeffizienten, die reelle Achse bis zu drei mal schneiden, sprich drei reelle Lösungen haben.[8]

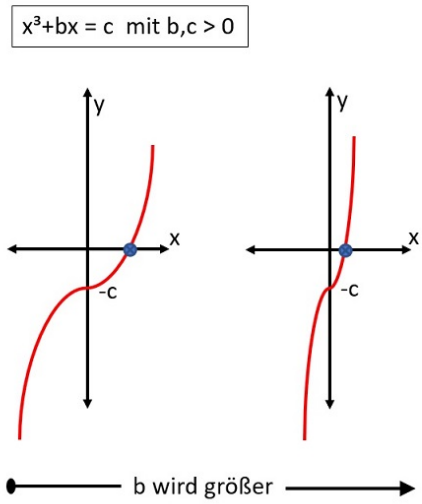


Abbildung 9.2.4: Skizze des Graphen zur Gleichung $x^3 + bx = c$

Cardanos Grundgleichungstyp (9.2) $x^3 = bx + c$ hat immer genau eine reelle Lösung und die ist auf jeden Fall positiv. Bei größer werdendem b wird der Graph der Funktion steiler, bei größer werdendem c kommt es zu einer Verschiebung nach unten. Vgl. dazu die Skizzen in Abb. 9.2.4.

Bei Cardanos Gleichungstyp $x^3 = bx + c$ ergeben sich drei reelle Lösungen, wenn in der entsprechenden Lösungsformel der Ausdruck unter der Quadratwurzel, die Diskriminante D, kleiner Null ist (siehe Abb. 9.2.5). Das bedeutet aber, dass, obwohl die Lösung schlussendlich reell ist, in der Formel eine negative Zahl unter der Wurzel auftaucht, also mit imaginären Größen umgegangen werden muss, um die reelle Lösung zu erhalten. Das stellte zu Cardanos Zeiten allerdings ein Problem dar und dieser Fall wurde als *casus irreduzibilis* bezeichnet. Bei Gleichungen der Form $x^3 = bx + c$ kann, wie bereits erwähnt, dieser Fall gar nicht eintreten, da der Ausdruck unter der Wurzel in der Lösungsformel für beliebige positive b, c immer positiv ist. Im Fall des Gleichungstyps $x^3 = bx + c$ versucht Cardano, das Problem zu umschiffen, indem er als Bedingung $\left(\frac{b}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2$ angibt, die verhindert, dass sich ein

[7]Das ist in allen von Cardanos Gleichungstypen der Fall

[8]Der Fundamentalsatz der Algebra, der später noch Thema sein wird, besagt, dass eine kubische Gleichung drei Lösungen in $\mathbb{C}$ hat.

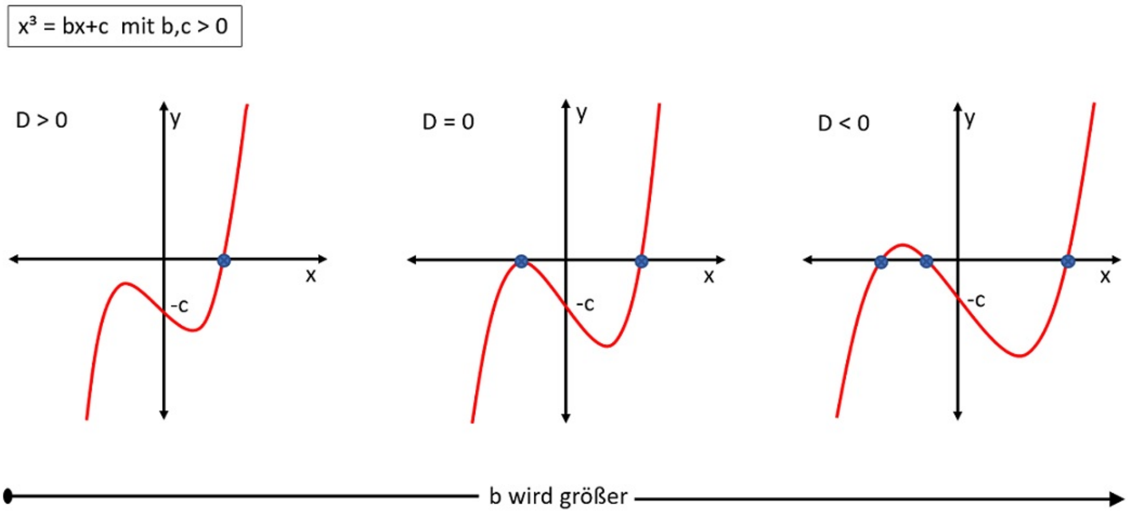


Abbildung 9.2.5: Skizze des Graphen zur Gleichung $x^3 = bx + c$

negativer Ausdruck unter der Wurzel ergibt. An einer Stelle im Kapitel XIII der *Ars Magna* löst Cardano einen *casus irreduzibilis* und gibt 3 als Lösung der Gleichung $y^3 = 8y + 3$ an. Auch an anderen Stellen in der *Ars Magna*, wenn Gleichungen auf eine irreduzible Lösungsformel führen, gibt er direkt das Ergebnis an, geht nicht auf die Problematik der negativen Wurzel ein und beschreibt auch nicht, wie er zu dem Ergebnis kommt. Der Fall des casus irreduzibilis war in der folgenden Zeit beliebter Forschungsgegenstand und hat die Einführung komplexer Zahlen motiviert. [vgl. 4, S. 173]

9.2.3 Die Lösung von Gleichungen vierten Grades

Die Auflösung der quartischen Gleichung gelang Ludovico Ferrari (1522 - 1565), der ein Schüler von Cardano war. Die entscheidende Idee ist durch Einführung einer Hilfsgröße (im folgenden z) eine Gleichheit zwischen zwei Quadraten herzustellen. Das führt auf eine kubische Hilfsgleichung, die mit Cardanos Formel gelöst werden kann.

Die Methode Ferraris sieht folgendermaßen aus.[9] Man geht von einer quartischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{9.21}$$

aus und beseitigt das kubische Glied mit einer Variablentransformation durch die

[9]Für den Lösungsweg [20, vgl.]

Substitution $x = y - \frac{a}{4}$ und erhält so

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{9.22}$$

mit

$$p = -\frac{3}{8}a^2 + b$$
$$q = \frac{1}{8}a^3 - \frac{ab}{2} + c$$
$$r = \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d$$

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax^2 + Bx + C = \\ &\quad = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x\right) + C = \\ &\quad = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A^2}\right] + C = \\ &\quad = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A} = \\ &\quad = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{\text{Diskriminante}}{4a} \end{aligned}}$$

(9.22) wird umgeformt zu

$$y^4 + py^2 = -qy - r \tag{9.23}$$

dann wird quadratisch ergänzt und dazu $py^2 + p^2$ auf beiden Seiten der Gleichung addiert

$$\begin{aligned} y^4 + 2py^2 + p^2 &= py^2 - qy - r + p^2 \\ \left(y^2 + p\right)^2 &= py^2 - qy - r + p^2 \end{aligned} \tag{9.24}$$

Falls die rechte Seite dieser Gleichung ein (vollständiges) Quadrat ist, dann ist man fertig. Denn dann erhält man durch Wurzelziehen eine quadratische Gleichung in y, die gelöst werden kann. Da hier die rechte Seite kein Quadrat ist, wird eine Hilfsgröße z eingeführt, wobei aber das Quadrat auf der linken Seite erhalten bleibt.

$$\begin{aligned} \left(y^2 + p + z\right)^2 &= \left(y^2 + p\right)^2 + 2z\left(y^2 + p\right) + z^2 = \\ &= py^2 - qy - r + p^2 + 2z\left(y^2 + p\right) + z^2 = \\ &= \underbrace{(p + 2z)}_{A} y^2 \underbrace{-q}_{B} y + \underbrace{p^2 - r + 2pz + z^2}_{C} \end{aligned} \tag{9.25}$$

Damit die rechte Seite ein Quadrat wird, muss die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich Null sein (Vgl. dazu den Kasten auf der rechten Seite). Es muss also

$$\left(-q^2\right) - 4\left(p+2z\right)\left(p^2 - r + 2pz + z^2\right) = 0 \tag{9.26}$$

Löst man die Klammern auf so erhält man eine kubische Gleichung in z:

$$8z^3 + 20pz^2 + \left[\left(16p^2 - 8r\right)z + \left(4p^3 - 4pr - q^2\right)\right] = 0 \tag{9.27}$$

Mit der cardanischen Lösungsformel kann eine Lösung z_0 der Gleichung (9.27) berechnet werden. Dann wird (9.25) unter Verwendung der letzten Zeile aus dem Kasten auf der rechen Seite (wobei durch (9.26) sichergestellt wurde, dass die Diskriminante D gleich Null ist.) zu:

$$\begin{aligned}\left(y^2 + p + z_0\right)^2 &= \left(p + 2z_0\right)\left(y - \frac{q}{2\left(p+2z_0\right)}\right)^2 \\ &= \left[\sqrt{p+2z_0}\left(y - \frac{q}{2\left(p+2z_0\right)}\right)\right]^2\end{aligned} \tag{9.28}$$

Durch Ziehen der Wurzel erhält man zwei quadratische Gleichungen in y

$$y^2 - \sqrt{p+2z_0}\,y + \frac{q}{2\sqrt{p+2z_0}} + p + z_0 = 0 \quad \text{und} \tag{9.29}$$

$$y^2 + \sqrt{p+2z_0}\,y - \frac{q}{2\sqrt{p+2z_0}} + p + z_0 = 0 \tag{9.30}$$

Nun können mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen 4 Lösungen für y berechnet werden und x kann berechnet werden durch $x = y - \frac{a}{4}$.

9.2.4 Bombelli

Rafael Bombelli (ca. 1526 - 1572) war der Meinung, dass der Inhalt Cardanos *Ars Magna* systematischer dargelegt werden könnte und verfasste zu diesem Zweck das Werk *L'algebra*. Bombelli steht einerseits in der Tradition, die von al-Khwārizmī über die *maestri d'abacco* bis zu Cardano reicht, andererseits greift er auch sehr stark auf Diophant zurück. Auch wenn er im Bereich des Lösens von Gleichungen keine wirklich neuen Erkenntnisse gewann, so finden sich bei ihm doch zwei spannende Impulse: er führt eine neue relativ modern anmutende Schreibweise ein und setzt erste Schritte zur Anerkennung komplexer Zahlen. [vgl. 4, S. 179]

Diese Entwicklungen werden hier anhand der Gleichung

$$x^3 = 15x + 4 \tag{9.31}$$

erläutert. Bombelli schreibt diese Gleichung in der Form 1 $\overset{3}{\smile}$ .Eguale à 15. $\overset{1}{\smile}$ *p.* 4. an. Die Cardanische Lösungsformel ergibt für diese Gleichung

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{9.32}$$

wobei Cardano den ersten kubischen Wurzelausdruck schreiben würde als: $R.c.\lfloor 2\,pi\,di\,meno\,R.q.\,121\rfloor$. Es handelt sich bei der Gleichung (9.32) um einen casus irreducibilis. Aber anders als Cardano versucht Bombelli zu erklären, wie man hier auf die reelle Lösung kommt. Dazu bezeichnet er $+\sqrt{-1}$ als *p. di m.* (più di meno) und $-\sqrt{-1}$ als *m. di m.* (meno di meno). Und gibt Regeln an wie mit solchen „Zahlen" zu rechnen ist. Im konkreten Beispiel gibt er an, dass (in moderner Notation) $\pm\sqrt{-121}=\pm 11\sqrt{-1}$. Damit erhält man für (9.32) zwar $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$. Bleibt noch die Frage zu klären, wie diese 3. Wurzeln zu berechnen sind. Bombelli führt dazu an, dass

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} \tag{9.33}$$

und findet somit die reelle Wurzel 4. Wie genau er aber die Relation (9.33) eingesehen hat, bleibt unklar.[10]

[10] Für Überlegungen wie Bombelli diese Beziehung herausgefunden hat [vgl. 35, S. 38–39] und [vgl. 38, S. 232]

10 Frühe Neuzeit

Nur etwa 50 Jahre nach der Veröffentlichung von Bombellis Werk beginnt ein neues Kapitel in der Geschichte der Algebra. Während bis 1600 „Algebra“ ein Sammelsurium verschiedener Techniken und umständlich verbal formulierter Regeln war und vornehmlich mit konkreten Zahlen operiert wurde, entsteht ab 1650 eine allgemeine Theorie von Gleichungen. Algebra wird zur eigenständigen Disziplin und löst sich fast gänzlich von der Geometrie. [vgl. 11, S. 183] und [vgl. 3, S. 266] Im 16. Jahrhundert bzw. v. a. im 17. Jahrhundert entwickelt sich eine für die moderne Mathematik unverzichtbare einheitliche Symbolik. Wichtige Protagonisten dieser Entwicklung sind Viète und Descartes.

10.1 Entstehung einer Theorie von Gleichungen

Im 16. und frühen 17. Jahrhundert wird die für die moderne Mathematik unverzichtbare Symbolik eingeführt und perfektioniert. Dadurch wird es möglich über Gleichungen im Allgemeinen zu sprechen.

10.1.1 Viète

François Viète (latinisiert Franciscus Vieta) wurde 1540 in Frankreich geboren. Er studierte Rechtswissenschaften und arbeitete eine Zeit lang als Hauslehrer, bevor er sich während der Religionskriege in die Dienste der französischen Könige Heinrich III und Heinrich IV begab, um für diese unter anderem Dechiffriertätigkeiten zu erledigen. Nebenbei forschte er und verfasste einige mathematische Schriften. Das erste für die Algebra bedeutende Werk von ihm trägt den Titel „In artem analyticem Isagoge“. Dort führt er das Rechnen mit Buchstaben ein und legt die Grundlage für algebraisches Rechnen. Viète baut nicht nur auf die Abbakus-Tradition, Cardano und Humanisten wie Gosselin oder Ramus auf, sondern greift auch zurück auf die antiken Werke von Diophant und Pappus von Alexandria. [vgl. 38, S. 237] Wobei aber K. Reich vermerkt, dass Viète lediglich auf die griechischen Autoren verweist und die späteren Quellen verschweigt. [vgl. 11, S. 186]

Die analytische Kunst

Unter der analytischen Kunst, die im Titel des Werkes „In artem analyticem Isagoge“[1] vorkommt, versteht Vièta eine Technik, bestehend aus drei Schritten, mithilfe derer man im Stande sei, sämtliche Probleme zu lösen. Den Weg der Analysis beschreibt Viète als „ [...] die Annahme des Gesuchten als bekannt < und der Weg von dort > durch Folgerungen zu etwas als wahr Bekanntem.“ [63, S. 37]. Die drei einzelnen Schritte sind

- **Zetetike**: Hier geht es um das Aufstellen einer Gleichung. Vièta bezeichnet dazu die bekannten (unbestimmten) Größen mit Konsonanten (B, G, D,...) und die gesuchten Größen mit Vokalen (A, E, I,...). Die so entstehenden allgemeinen Ausdrücke gehören zur Domäne der *logistica speciosa*, bei der Größen[2] verglichen werden - im Gegensatz zur *logistica numerosa*, bei der Zahlen verglichen werden und z. B. Koeffizienten spezielle gegebene Zahlen sind. [vgl. 11, S. 187] Diese Neuerung wirkt recht banal, ist aber von großer Wichtigkeit. Das reine Buchstabenrechnen (logistica speciosa) ermöglicht es viel allgemeinere Aussagen zu treffen und so wird es auch erstmals möglich, Formeln und Gleichungen in allgemeiner Form anzugeben. Die Größen sind bei Viète dimensioniert. Und es können nur homogene Ausdrücke , d. h. Ausdrücke gleicher Dimension verglichen werden.

- **Poristike**: Ist „diejenige durch welche die Richtigkeit eines aufgestellten Satzes über eine Gleichung oder Proportion nachgeprüft wird.“ [63, S. 37] oder wie H. W. Winter es formuliert findet hier das „Einbeziehen von Beweisen für Hilfssätze die benötigt werden“ [68, S. 111], statt.

- **Rhetike bzw. Exegetike** ist schließlich das Berechnen der Lösung.

Schreibweise

Wie bereits erwähnt, führt Viète konsequent Buchstaben, sowohl für die Unbekannten (Vokale) als auch für (bekannte) unbestimmte Größen (Konsonanten) ein. Für die zweite Potenz der Unbekannten A schreibt Viète *A quadratum* (Quadrat), für die dritte *A cubus* (Würfel), für die vierte *A quadrato-quadratum* usw. Und was aus

[1] Alten et al. vermerken, dass „Einführung in die Algebra“ angesichts des Inhaltes des Werkes eine angemessene Übersetzung des Titels sei. [vgl. 3, S. 267]

[2] Hinter Größen können sich Flächen, Gewichte, Volumina,... etc. verbergen. Größe ist also allgemeiner. Für eine detailliertere Beschreibung des Zahlen- bzw. Größenbegriffs [vgl. 11, S. 224–225]

heutiger Sicht etwas ungewöhnlich erscheint - auch bei den Buchstaben die Koeffizienten repräsentieren, wurde die Dimension mitnotiert: Er spricht von *B planum* (Fläche), *B solidum* (Körper), *B plano- planum* usw.[3] Für eine kubische Gleichung schreibt Vièta also:

$$\text{A cubus} + \text{B in A quad. æquetur Z solido [64, S. 100]}$$

das entspricht in moderner Schreibweise $x^3 + bx^2 = z$, wobei in diesem Beispiel bei Viète die einzelnen Terme alle Dimension 3 haben, da sie sonst nicht verglichen werden könnten. Dem Gesetz der Homogenität folgend, müssen für die Addition und Subtraktion die Größen die selbe Dimension haben, sprich homogen sein - das Ergebnis (die Summe und die Differenz) ist dann auch homogen, also von der selben Dimension wie die Summanden bzw. Minuend und Subtrahend. Bei der Multiplikation und bei der Division lässt Viète Größen ungleicher Dimension zu. Multipliziert bzw. Dividiert man Größen mit Dimension r und s, so hat Ergebnis der Multiplikation bzw. Division die Dimension $r + s$ bzw. $r - s$. Die Multiplikation wird durch das Wort *in* symbolisiert. Division kennzeichnet er durch das Wort *applicare*. Für Addition verwendet er $+$ und als Subtraktionszeichen verwendete er ein längeres $=$. Da Vièta keine negativen Zahlen betrachtete, wurde bei der Subtraktion immer die kleinere von der größeren Größe abgezogen, sodass $B = C$ auch $C - B$ bedeuten kann. Er gibt auch Regeln zum Auflösen von Klammern an. [vgl. 11, S. 189–190] und [vgl. 6, S. 261]

Inhaltliche Aspekte

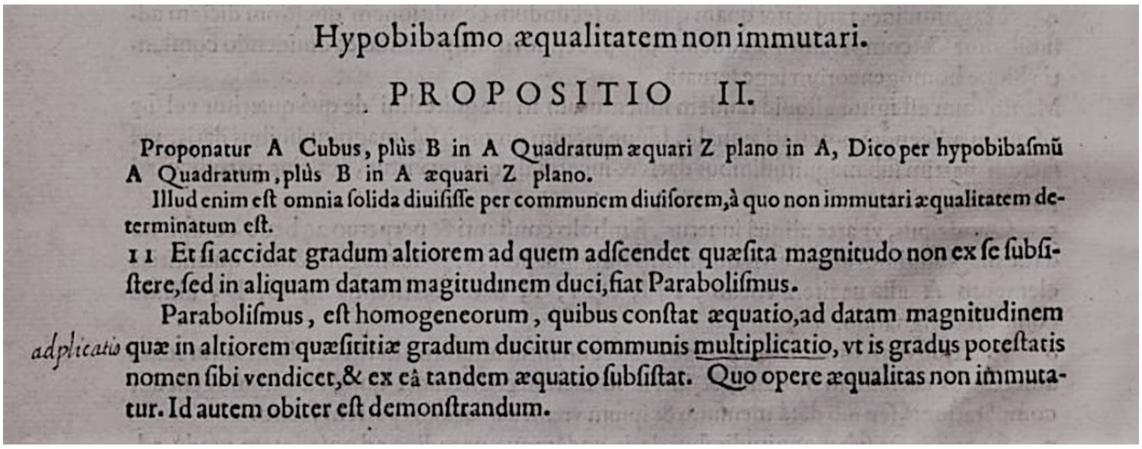
Ebenfalls in der „Isagoge" beschreibt Viète drei Operationen zur Herstellung der Normalform einer Gleichung:

$$A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}C^2 + \ldots + AF^{n-1} = G^n \text{ [3, S. 272]}$$

Die Operationen lauten:

- Antithesis: Negative Terme/Ausdrücke werden auf die andere Seite der Gleichung verschoben und wechseln dabei das Vorzeichen.
- Hypobibasmus: Durch Division (durch die Unbekannte) wird die Dimension verringert. Die Abb. 10.1.1 zeigt den entsprechenden Abschnitt in der *Isagoge*.

[3] Viète gibt die dimensionale Notation bis zur neunten Dimension an, sagt aber, dass man sie beliebig weiterführen könnte [vgl. 11, S. 188]



Hypobibaſmo æqualitatem non immutari.

PROPOSITIO II.

Proponatur A Cubus, plùs B in A Quadratum æquari Z plano in A, Dico per hypobibaſmū A Quadratum, plùs B in A æquari Z plano.

Illud enim eſt omnia ſolida diuiſiſſe per communem diuiſorem, à quo non immutari æqualitatem determinatum eſt.

11 Et ſi accidat gradum altiorem ad quem adſcendet quæſita magnitudo non ex ſe ſubſiſtere, ſed in aliquam datam magitudinem duci, fiat Paraboliſmus.

Paraboliſmus, eſt homogeneorum, quibus conſtat æquatio, ad datam magnitudinem adplicatio quæ in altiorem quæſititiæ gradum ducitur communis multiplicatio, vt is gradus poteſtatis nomen ſibi vendicet, & ex eâ tandem æquatio ſubſiſtat. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter eſt demonſtrandum.

Abbildung 10.1.1: Ausschnitt aus Viètes *In artem analyticem Isagoge* [65, S. 7]

- Parabolismus: Falls die höchste Potenz der Unbekannten in der Gleichung mit einer bekannten Größe multipliziert vorkommt, wird durch die bekannte Größe dividiert oder anders formuliert: Der Koeffizient des führenden Gliedes wird eliminiert.

Diese ganzen theoretischen Grundlegungen finden sich v. a. in der *Isagoge*. Bei dem im Jahre 1593 veröffentlichten Werk *zeteticorum libri quinque* handelt es sich um eine Sammlung von Aufgaben, die mit der neu eingeführten Theorie gelöst werden.

Das Werk *De recognitione et emendatione aequationum Tractatus duo* (Zwei Abhandlungen über die Untersuchung und Verbesserung von Gleichungen) konnte Viète nicht mehr abschließen. Es wurde posthum im Jahr 1615 veröffentlicht. Dort beschreibt er verschiedene Verfahren zum Umformen von Gleichungen. Er beschreibt: [vgl. 11, S. 194–195]

- Das Entfernen des zweithöchsten Gliedes durch Variablentransformation.
- Ein Substitutionsverfahren bei dem eine Gleichung, in der negative Koeffizienten vorkommen, in eine Gleichung mit positiven Koeffizienten umgewandelt wird.
- Das Dividieren durch eine Lösung, um eine neue Gleichung zu erhalten, deren Dimension um ein Grad verringert ist.
- Das Ganzzahligmachen von gebrochenen Koeffizienten.
- Das Rationalmachen gebrochener Koeffizienten.

Trotz dieser vieler herausragender Neuerungen, hat die Theorie von Viète einige Schönheitsfehler: Zum einen ist seine Notationsweise nicht vollständig symbolisch, zum anderen beinhaltet seine Theorie die auf die Griechen zurückgehende Forderung nach Homogenität in algebraischen Ausdrücken. Auch greift Viète in den Begründungen seiner Resultate oft auf die Geometrie zurück. Ein weiteres Manko ist das Ausschließen von negativen und komplexen Zahlen als Wurzeln von Gleichungen. [vgl. 42, S. 9–10]

Diese Punkte werden zu einem großen Teil von Descartes bereinigt. Er veröffentlicht seinen Ansatz 1637. Eine Zeitlang existierten die Ansätze von Viète und Descartes parallel, bis sich schließlich gegen Ende des 17. Jahrhunderts ein auf Descartes zurückgehender Ansatz durchsetzte. [vgl. 11, S. 184]

Bevor wir uns dem Cartesischen Ansatz zuwenden, sei noch einmal betont, dass Viète an einer allgemeinen Theorie von Gleichungen interessiert war und weniger wie meist zuvor daran konkrete Zahlenbeispiele zu lösen. Das wird auch daran sichtbar, dass er die Beziehung zwischen Koeffizienten und Wurzel untersucht und für eine quadratische Gleichung $bx + x^2 = c$ und gibt an, dass für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung gilt, dass $x_1 + x_2 = b$ und $x_1 x_2 = c$. [vgl. 38, S. 244–245] und [vgl. 64, S. 158]

Pierre de Fermat (ca. 1601 - 1665) und Thomas Harriot (1560 - 1621) haben an Viète angeschlossen und seine Theorie in vielerlei Hinsicht verbessert und ausgebaut. Deren Werk war allerdings nicht veröffentlicht und war deshalb lange nur in einem kleineren Kreis bekannt [vgl. 38, S. 248] und hat möglicherweise auch deshalb historisch nicht eine solche Wirkung entfalten können, wie die im folgenden Kapitel thematisierte Schrift Descartes.

10.1.2 Descartes

René Descartes (1596 - 1650) wurde im französischen La Haye geboren. In einem Jesuitenkolleg erhielt er eine sehr umfassende Bildung und studierte im Anschluss in Poitiers Rechtswissenschaften. Zwei Auslandseinsätze als Beobachter im 30-jährigen Krieg führen ihn in die Republik Niederlande und nach Zentraleuropa. Auf diesen Reisen kommt er mit verschiedenen Mathematikern und Wissenschaftlern wie z. B. Stevin oder Faulhaber in Kontakt. Für ein paar Jahre lebt Descartes dann in Paris, bevor er sich in Holland niederlässt, wo er sich ein geistig freieres Klima als in Frankreich erhofft. [vgl. 38, S. 261] und [vgl. 3, S. 274]

Das große philosophische Werk Descartes trägt den Titel *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* (Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen). Aber selbst diese Veröffentlichung, des nach Descartes Ansicht unproblematischeren Teils seiner Methodenlehre, brachte ihn in Bredouille und so landete sein Werk später auch auf dem päpstlichen Index. [vgl. 3, S. 275]

An den *Discours* angegliedert sind drei Essays, die die Anwendung oder Probe seiner philosophischen Methode darstellen. [vgl. 3, S. 276] *La Géométrie* ist einer dieser Essays und für die Mathematik bzw. insbesondere für die Algebra von großer Bedeutung. Er ist Ausgangspunkt der Entstehung der analytischen Geometrie. In diesem Werk führt der den heute gebräuchlichen Symbolismus ein und algebraisiert die Geometrie oder anders formuliert, verbindet er Geometrie mit Algebra.[4]

Auch das Werk Fermats ist für die analytische Geometrie von Bedeutung. Aber Fermat wählt einen etwas anderen Ansatz als Descartes. Er geht von einer Gleichung aus und interpretiert diese dann als Kurve[5] , während Descartes von einer geometrischen Fragestellung ausgeht und diese dann algebraisch erfasst. [vgl. 38, S. 262–263]

Am Beginn seiner *Géométrie* schreibt Descartes: „ANY problem in geometry can be easily reduced to such terms that a knowledge of the lengths of certain straight lines is sufficient for its construction“ [18, S. 2] Descartes Absicht ist es geometrische Fragestellungen zu lösen. Und zur Lösung geometrischer Probleme soll die Algebra verwendet werden und nicht umgekehrt. Sein Programm dazu sieht vor, den geometrischen Sachverhalt als Gleichung(en), sprich algebraisch, darzustellen. Diese Gleichungen manipuliert er dann algebraisch, sodass schlussendlich alle bis auf eine Unbekannte eliminiert sind und er eine Gleichung in einer Unbekannten erhält. Falls die Fragestellung mehr Unbekannte als Gleichungen liefert, dann hat das Problem unendlich viele Lösungen. Für den Spezialfall, dass sich am Ende eine Gleichung in zwei Unbekannten ergibt, kann Descartes eine Kurve oder Gerade als Lösung angeben. Jedenfalls ist eine geometrische Rückinterpretation, sprich geometrische Konstruktion, dieser (algebraischen) Gleichung notwendig. Und da Descartes nur für eine gewisse Anzahl von Standardgleichungen die geometrische Konstruktion der Wurzeln angeben konnte, war es notwendig die Gleichungen umzuformen, sodass sie einer dieser Standardformen entsprachen. [vgl. 11, S. 205–206]

[4] Für eine detaillierte Analyse des Verhältnisses von Algebra und Geometrie unter Einbezug von Descartes Philosophie, im speziellen seiner metaphysischen und erkenntnistheoretischen Ansichten [43, vgl.]

[5] Fermat zeigt u. a., dass jede quadratische Gleichung in zwei Unbekannten einen Kegelschnitt darstellt. [vgl. 3, S. 274]

Diese letzten Gleichungen, die Ausgangspunkt für die Konstruktion der Wurzel(n) sind, mussten so einfach wie möglich, genauer gesagt, irreduzibel sein. Dazu musste Descartes feststellen können, ob eine Gleichung weiter reduzierbar ist und gegebenenfalls die Gleichung mit einer geeigneten Methode reduzieren. Oder auch verschiedene Transformationen durchführen um die Gleichung auf eine bestimmte Form zu bringen. Für die Grade 3 bis 6 sind das die folgenden Standardformen: [vgl. 11, S. 206–213]

$$\begin{aligned} x^3 \pm a_1 x \pm a_2 &= 0 \\ x^4 \pm a_1 x^2 \pm a_2 x \pm a_3 &= 0 \\ x^5 - a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_3 x^2 + a_4 x - a_5 &= 0 \\ x^6 - a_1 x^5 + a_2 x^4 - a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x + a_6 &= 0 \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit Fragen nach der Reduzibilität und Transformationsmethoden gewann Descartes einige theoretische Einsichten im Bezug auf Polynomgleichungen, die im Folgenden genauer erläutert werden. [vgl. 11, S. 214]

Diese speziellen theoretischen Einsichten in Bezug auf Gleichungen sind ein wichtiger Beitrag zur Algebra. Der zweite Beitrag ist von grundlegenderer Natur. Damit nämlich zwischen Algebra und Geometrie eine Beziehung hergestellt werden kann, also eine Übersetzung vom einen zum anderen möglich ist, muss geklärt werden, wie die arithmetischen Operationen geometrisch interpretiert werden können. [vgl. 11, S. 199]

Und diesem Programm folgend, erklärt Descartes gleich am Beginn der *Géométrie* wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen geometrisch (unter Einbeziehung einer Einheitslänge) verstanden werden können.

Hier wird exemplarisch die Multiplikation genauer erläutert. Dazu schreibt Descartes:

> Es sei zum Beispiel AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multiplicieren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Produkt der Multiplication. [19, S. 2] zit. nach [3, S. 278]

Mit dem Strahlensatz lässt sich das leicht überprüfen: Denn aus $BE : BD = BC : AB$ folgt $BE \times AB = BD \times BC$ und da die Einheitsstrecke AB eine Längeneinheit repräsentiert ergibt sich $BE = BC \times AB$. Das Ergebnis der Multiplikation der

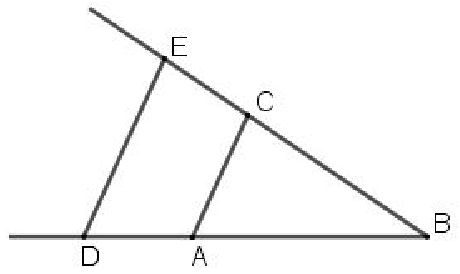


Abbildung 10.1.2: Multiplikation bei Descartes

Strecken BD mit BC ergibt also wieder eine Strecke und nicht etwa eine Fläche. Die Ergebnisse der Operationen sind immer Strecken und damit erteilt Descartes dem Homogenitätsgesetz eine Absage. Daraus folgt auch, dass höhere Potenzen kein Problem mehr darstellen bzw. sich nicht mehr die Frage stellt, wie diese interpretiert werden können. Es ist z. B. a^4 einfach eine Strecke und auch Ausdrücke wie $ab + c$ sind möglich, wenn die Forderung der Homogenität nicht mehr besteht. Aber ein kleines Zugeständnis an die Homogenität macht Descartes, wenn er schreibt: „thus, if it be required to extract the cube root of $a^2b^2 - b$. we must consider the quantity a^2b^2 divided once by the unity, and the quantity b multiplied twice by the unity.“ [18, S. 6] Descartes interpretiert den Ausdruck unter der Wurzel als $\frac{a^2b^2}{\text{Länge } 1} - b \cdot (\text{Länge } 1)$, wodurch die einzelnen Ausdrücke Dimension 3 haben. Nach dem Motto, wenn man die Einheit hinzufügen kann ohne den Wert des Ausdrucks zu verändern, dann kann man sie genauso gut weglassen, addiert Descartes aber de facto algebraische Ausdrücke ohne ihre Dimension zu beachten.

Diese Definition der arithmetischen Operationen sind ein wichtiger Beitrag, denn so wird die Verwendung von Algebra bei geometrischen Aufgaben überhaupt möglich.

Descartes Beiträge im Bereich von Polynomgleichungen

Wie oben bereits angedeutet sind es auch Erkenntnisse zu Polynomgleichungen, die Descartes für die Geschichte der Algebra so wichtig machen. Diese finden sich im 3. Buch der *Géométrie* und beinhalten folgende Aussagen.

- Descartes beschreibt die kanonische Form von Polynomgleichungen. Er sagt, man schreibt Gleichungen am besten in der Form an, dass die einzelnen Terme Null ergeben. [vgl. 18, S. 156]

- Er formuliert auch eine schwache Version des Fundamentalsatzes der Algebra: „Every equation can have as many distinct roots (values of the unknown quantity) as the number of dimensions of the unknown quantity in the equation.“ [18, S. 159] Er beweist diese Aussage jedoch nicht. Auch komplexe Lösungen und die Vielfachheit von Wurzeln beachtet er nicht und verwendet in der Formulierung deshalb „kann haben“ („peut-il y avoir“). [vgl. 38, S. 168] Er erwähnt lediglich ein paar Seiten später, dass Wurzeln auch imaginär (vorgestellt) sein können. [vgl. 18, S. 175]

Descartes zeigt wie man Gleichungen mit Hilfe ihrer Lösung finden bzw. aufstellen kann. Er beschreibt das Vorgehen anhand konkreter Zahlenbeispiele: Wenn man zwei Lösungen $x = 2$ und $x = 3$ hat, so erhält man $x^2 - 5x + 6 = 0$ durch Multiplikation der Faktoren $(x - 2)$ und $(x - 3)$ und die erhaltene Gleichung hat dann 2 und 3 als Wurzeln. Diese Gleichung kann man dann weiter multiplizieren mit $(x + 5)$, dann hat die so erhaltene Gleichung zusätzlich noch -5 als Lösung[6]. Und im Umkehrschluss folgert er daraus, dass ein Polynom immer teilbar ist durch ein Binom der Form (x-Wurzel) und dass auf diese Weise der Grad verringert werden kann. Und falls das Polynom nicht teilbar ist durch ein Binom, bestehend aus Unbekannter Größe und einer Zahl, dann ist diese Zahl auch keine Wurzel. [vgl. 18, S. 159]

- Ohne Beweis formulierte Descartes eine Regel, die heute als *Cartesische Vorzeichenregel* bekannt ist. Sie dient dazu, die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln zu bestimmen. Eine Gleichung könne so viele positive Wurzeln haben wie Vorzeichenwechsel (von + zu - oder von - zu +) vorhanden sind. Und die Anzahl der negativen Wurzeln bestimmt sich über die Anzahl je zweier aufeinanderfolgender + bzw. - Zeichen. [vgl. 18, S. 160]

- Descartes hält fest, dass wenn man die Vorzeichen des zweiten, vierten, sechsten, usw. Terms ändert, dann werden alle negativen Wurzeln positiv und die ursprünglich positiven Wurzeln negativ. [vgl. 18, S. 163]

- Er untersucht auch das Verhalten von Gleichungen bei linearen Substitutionen wie $x = y - a$ oder $x = ay$. Wenn man beispielsweise eine Wurzel um 3 vergrößern wolle, dann soll man $x = y - 3$ substituieren. [vgl. 18, S. 163–164] Durch die Substitution $x = ay$ lassen sich die Koeffizienten vereinfachen. Descartes formt die Gleichung $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}}$ mit der Substitution $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$ um zu $y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9}$. [7] Auch die bereits von Cardano beschriebene

[6] Descartes bezeichnet negative Lösungen als „falsche“ Lösungen

[7] Descartes formuliert diese Substitution und die Umformungsschritte anders, als wir es heute tun

Substitution um den zweithöchsten Term eines Polynoms zu eliminieren, benötigt Descartes um Gleichungen in die Standardformen umzuwandeln. [vgl. 18, S. 168] Gleichungen vom Grad 5 und 6, durften bei Descartes, damit die Standardkonstruktionen möglich waren, nur positive Wurzeln haben. [vgl. 11, S. 217] Das gelingt mit der Substitution $x = y - a$, wobei a größer sein muss als der Absolutbetrag der negativen Wurzeln.

Descartes führt auch neben Cardanos Methode für kubische Gleichung eine alternative Methode an, falls die Koeffizienten der Gleichung ganzzahlig sind. In diesem Fall solle man alle Faktoren a des konstanten Terms aufschreiben und versuchen das Polynom durch $(x \pm a)$ zu dividieren. Teilt ein Binom $(x \pm a)$ das Polynom, so ist a eine Lösung und man erhält eine quadratische Gleichung, die sich leicht lösen lässt. [vgl. 38, S. 169]

Für Gleichungen vom Grad vier beschreibt Descartes ein Verfahren, wie die quartische Gleichung als Produkt zweier quadratischer Gleichungen geschrieben werden kann. Dann müssen nur mehr zwei quadratische Gleichungen gelöst werden und für die Konstruktion der Lösungen benötigt man dann nur mehr Kreise und gerade Linien. [vgl. 38, S. 270] und [vgl. 18, S. 184]

Für Polynome höheren Grades schlägt Descartes vor, zu versuchen, sie durch Multiplikation zweier Polynome niedrigeren Grades zu erhalten. Wenn das nicht geht, dann ist das Polynom nicht reduzierbar und dann muss die Lösung geometrisch konstruiert werden. Für Gleichungen dritten und vierten Grades erfolgt die Konstruktion durch das Schneiden von Kreis und Parabel. Für die Konstruktion von Lösungen von Gleichungen vom Grad größer als vier skizziert Descartes lediglich eine Methode, die darin besteht, Kreise mit Kurven (vom Grad größer als 3) zu schneiden. Islamische Mathematiker konstruierten auch auf geometrischem Weg Lösungen von Gleichungen, aber im Gegensatz zu Descartes erwähnten sie weder die Möglichkeit negativer noch imaginärer Wurzeln. [vgl. 38, S. 270]

Besonders die Ausdehnung des Anwendungsbereichs von Algebra von Zahlen auf Größen ist ein wichtiger Schritt in der Geschichte der Algebra, den Descartes (und auch Viète) setzt. [vgl. 11, S. 230] Descartes Werk hat außerdem nachfolgende Mathematiker angestiftet, Gleichungen algebraisch zu lösen. [vgl. 38, S. 271]

würden: „Let $y = \sqrt{3}$ and multiply the second term by $\sqrt{3}$, the third by 3, and the last by $3\sqrt{3}$“ [18, S. 172]

10.2 Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra war eine zentrale Fragestellung im 17. und 18. Jahrhundert. Der Fundamentalsatz besagt, dass ein Polynom vom Grad $n > 0$ mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle hat. Es gibt verschiedene Formulierungen des Fundamentalsatzes. Eine äquivalente Formulierung ist, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten als Produkt linearer und quadratischer Faktoren geschrieben werden kann. Über $\mathbb{C}$ kann das Polynom in n lineare Faktoren zerlegt werden.

10.2.1 Vorgeschichte

Im 17. Jahrhundert formulierten verschiedene Mathematiker Aussagen, die Annäherungen an den Fundamentalsatz der Algebra darstellen. Anfang des 17. Jahrhunderts formuliert Peter Roth (gest. 1617), dass eine Gleichung vom Grad n höchstens n Wurzeln haben kann. Dabei handelt es sich aber um eine Aussage ohne Beweis über die Anzahl von Wurzeln und nicht wie beim eigentlichen Fundamentalsatz um eine Existenzaussage. Auch Thomas Harriot (ca. 1560 - 1595) hat die Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren beschrieben. Im Jahr 1629 formuliert Albert Girard (1595 - 1632) schließlich, dass eine Gleichung vom Grad n auch n Lösungen hat. Er ist der erste der komplexe („unmögliche“) und negative Lösungen mitzählt. Er schreibt:

> Every algebraic equation ... admits of as many solutions as the denomination of the highest quantity indicates. And the first faction of the solution is equal to the [coefficient of the second highest] quantity, the second faction of them is equal to the [coefficient of the third highest] quantity, the third to the [fourth], and so on, so that the last faction is equal to the [constant term] - all this according to the signs that can be noted in the alternating order. [23, S. 139] zit. nach [38, S. 260]

Die von Girard beschriebenen „Factions“ sind symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Gleichung. Die erste Faction ist der Koeffizient der zweithöchsten Potenz und berechnet sich aus der Summe aller Wurzeln der Gleichung. Die zweite Faction entspricht dem Koeffizienten der dritthöchsten Potenz und berechnet sich als die Summe der Produkte zweier Wurzeln, usw. Die letzte Faction ist der konstante Term und berechnet sich als Produkt aller Wurzeln. [vgl. 38, S. 259–261]

Dieser zweite Teil der Aussage Girards ist zwar nicht relevant für die (Vor-)Geschichte des Fundamentalsatzes, aber die in ihm enthaltene Erkenntnis ermöglicht es durch

Untersuchen von Teilern des konstanten Terms und Ausprobieren, Lösungen der Gleichung zu finden. Des weiteren sind solche Symmetrieüberlegungen auch bei der Galoistheorie wichtig.

Eine Triebfeder für das Streben nach einem Beweis für den Fundamentalsatz stellen auch die Arbeiten von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) und Johann Bernoulli (1667 - 1748) dar. Sie entwickeln die Methode der Partialbruchzerlegung, bei der das im Nenner stehende Polynom in Faktoren vom Grad 1 und 2 zerlegt wird, damit eine Integration der gebrochen rationalen Funktion möglich ist. Diese Methode ist aber nur dann allgemein gültig, wenn diese Zerlegung des Nenners immer möglich ist, d. h. wenn der Fundamentalsatz der Algebra gilt. [vgl. 3, S. 285]

Ein erster sinnvoller Beweisansatz stammt von Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). Die Beweisführung ist rein analytisch, hat aber Lücken und genügt nicht einmal den Gütekriterien der damaligen Zeit. [vgl. 7, S. 95] Klein zufolge wird der Beweis von Gauß kritisiert, da der Unterschied zwischen Maximum und oberer Schranke einer Funktion nicht berücksichtigt wird und da einfach angenommen wird, dass die Funktion in $\mathbb{C}$ ihre obere Grenze erreicht. [vgl. 41, S. 111]. Alten et al. schreiben, dass d'Alembert nicht bewies, dass das Polynom im Betrag ein Minimum hat. [vgl. 3, S. 286]

Zahlreiche bekannte Mathematiker haben in Folge Beweise für den Fundamentalsatz aufgestellt. Der Beweis Eulers ist großteils algebraisch, jedoch unvollständig. Er versucht die nicht-algebraischen Annahmen zu minimieren. [8] Er verwendet die nicht-algebraischen Annahmen, dass ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle hat und dass ein Polynom geraden Grades mit reellen Koeffizienten und negativem konstanten Term mindestens zwei Nullstellen hat. [vgl. 7, S. 95]

Daviet de Foncenex (1759) und Joseph-Louis Lagrange (1772) versuchten den Beweis Eulers zu vervollständigen, aber konnten Grundlegende Lücken nicht eliminieren. Auch Pierre-Simon Laplace versucht Ende des 18. Jahrhunderts einen algebraischen Beweis zu geben. Dieser ist allerdings ebenso nicht vollständig. [vgl. 3, S. 288–289]

Alle diese frühen algebraischen Beweise beinhalten die Annahme, dass ein Poly-

[8] Es gibt keinen rein algebraischen Beweis des Fundamentalsatzes. Es wird stets das Resultat aus der Analysis, dass ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten eine reelle Nullstelle hat, verwendet. [vgl. 42, S. 12]

nom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten eine reelle Nullstelle hat. [vgl. 5, S. 415]

10.2.2 Ein erster Beweis des Fundamentalsatzes durch Gauß

Gauß veröffentlicht 1799 in seiner Dissertation einen Beweis. Dieser basiert ebenso wie der von d'Alembert auf geometrischen Eigenschaften komplexer Zahlen und dem Konzept der Stetigkeit. Aber wie auch d'Alembert hatte Gauß noch zu ungenaue Vorstellungen von Stetigkeit. Und auch die geometrische Vorstellung einer komplexen Zahl als Punkt in einer Ebene etablierte sich erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts. [vgl. 59, S. 286]

Gauß beweist den Fundamentalsatz 1799 für ein Polynom mit reellen Koeffizienten, aber es lässt sich leicht zeigen, dass er auch im Fall von komplexen Koeffizienten gilt. [vgl. 8, S. 1–2]

Der folgende Abschnitt ist eine Skizze des ersten Beweises von Gauß. Vergleiche dazu [3, S. 331–332], [12, S. 2–4] und [60, S. 115–122]. Für ein Polynom der Form

$$P(x) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Kx^2 + Lx + M \tag{10.1}$$

erhält man durch die Substitution $x = r(cos\phi + isin\phi)$ zwei Hilfsgleichungen T und U, die dem Imaginär bzw. dem Realteil des Ausgangspolynoms entsprechen. T und U sind Gleichungen in ϕ und r. Gauß zeigt[9] dann, dass für Werte ϕ und r, die die beiden Gleichungen $U = 0$ und $T = 0$ erfüllen, das Ausgangspolynom teilbar durch einen linearen bzw. einen quadratischen Faktor ist. Und dividiert man das Polynom durch diesen Faktor, erhält man ein Polynom von niedrigerem Grad und kann dann dieses Verfahren so oft wiederholen, bis das Polynom vollständig faktorisiert ist.

Gauß interpretiert die Gleichungen U=0 und T=0 als algebraische Kurven und möchte zeigen, dass ein Schnittpunkt der Kurven existiert. Wenn ein solcher Schnittpunkt existiert, folgt aus einem früheren Lemma, dass dieser Schnittpunkt eine Wurzel des Ausgangspolynoms ist.

Dazu untersucht er die Kurven zusammen mit einem Kreis vom Radius R und zeigt, dass für einen ausreichend großen Radius R, die Kurven 4m Schnittpunkte mit dem Kreis haben. Die Schnittpunkte von U mit dem Kreis und jene von T mit dem Kreis wechseln sich ab und diese 4m Schnittpunkte sind die einzigen Punkte

[9] Für mehr Informationen zu diesem Beweis [vgl. 60, S. 116]

auf dem Kreis für die T bzw. U gleich Null ist.

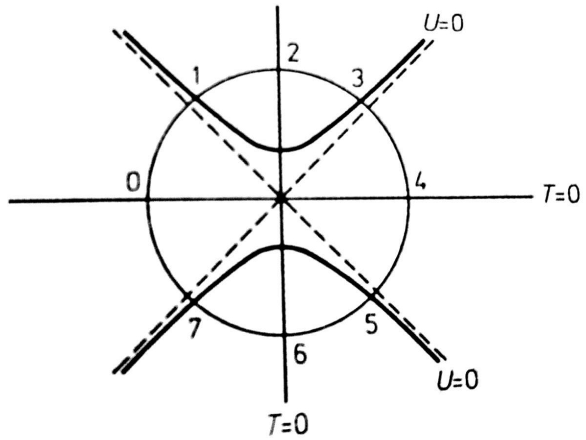


Abbildung 10.2.1: Skizze zu dem Beispiel $P(x) = x^2 + 1 = 0$
[3, S. 333]

Dass es innerhalb des Kreises Schnittpunkte der Kurven geben muss, argumentiert er zuerst eher anschaulich und gibt dann einen indirekten Beweis. Die anschauliche Argumentation lautet in etwa wie folgt: Man soll die Schnittpunkte der Kurven mit dem Kreis beginnend mit 0 bis $4m - 1$ durchnummerieren wie exemplarisch in Abb. 10.2.1 ersichtlich. Bei den mit geraden Nummern gekennzeichneten Punkten tritt die erste Kurve und bei den mit ungeraden Zahlen gekennzeichneten Punkten die zweite Kurve in den Kreis ein. Und er argumentiert

> Now it is known from higher geometry that every algebraic curve (or the single parts of an algebraic curve when it happens to consist of several parts) either runs into itself or runs out to infinity in both directions and that therefore, if a branch of an algebraic curve enters into a limited space, it necessarily has to leave it again. [60, S. 121]

In einer Fußnote bemerkt er dazu, dass es erwiesen sei, dass eine algebraische Kurve weder plötzlich endet, noch nach einer gewissen Anzahl an Drehungen auf einen Punkt zuläuft. Nachdem er indirekt bewiesen hat, dass ein Schnittpunkt der Kurven existiert, folgt also, dass das Ausgangspolynom zerlegbar ist in Faktoren ersten und zweiten Grades.

Gauß publiziert in Folge noch drei weitere Beweise. Der zweite und dritte Beweis von Gauß sind im Wesentlichen algebraisch. 1806 veröffentlicht Jean-Robert Argand einen analytischen Beiweis, aufbauend auf der Beweisidee von d'Alembert. Er geht von der Existenz eines kleinsten Wertes (Minimum) einer stetigen Funktion auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe aus. [vgl. 5, S. 415]

Auch andere Mathematiker haben in der Folgen noch zahlreiche Beweise veröffentlicht. Selbst im 21. Jahrhundert werden noch Beweise des Fundamentalsatzes veröffentlicht oder Aufarbeitungen historischer Beweise publiziert. [vgl. 42, S. 12] Ein Beispiel dafür ist der Artikel „D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra“ von Christopher Balthus. [5, vgl.]

Der Fundamentalsatz und sein Beweis sind auch insofern speziell in der Geschichte der Mathematik, als es sich bei ihnen um eine Existenzaussage bzw. einen Existenzbeweis handelt. Es wird nicht ein bestimmter Lösungsweg oder eine Konstruktion, um eine Wurzel zu erhalten, vorgeführt, sondern gezeigt, dass eine Wurzel rein theoretisch existiert. Das war im 18. und 19. Jahrhundert etwas Neuartiges und wurde somit auch kontrovers diskutiert. [vgl. 42, S. 12]

10.3 Auflösbarkeit von Gleichungen vom Grad größer vier in Radikalen

Nachdem es Cardano und Ferrari in der Renaissance gelungen war für Polynomgleichungen vom Grad drei und vier eine allgemeine Formel anzugeben, versuchten infolge zahlreiche Mathematiker eine solche allgemeine Lösung für Polynome höheren Grades als vier zu finden. Man spricht von einer Lösung in Radikalen, wenn es möglich ist, für Nullstellen eines Polynoms einen Ausdruck bzw. eine Formel, bestehend nur aus den Koeffizienten, den arithmetischen Operationen (Addition, Subraktion, Multiplikation und Division) und (gegebenenfalls verschachtelten) Wurzelausdrücken, anzugeben. Es sei schon vorweggenommen, dass die Suche nach Formeln für Gleichungen vom Grad 5 mit Abel 1824 endgültig endet, indem er zeigt, dass dies für eine allgemeine[10] Gleichung fünften Grades nicht möglich ist. Dem vorangegangen sind wichtige Überlegungen von Lagrange, Vandermonde, ect. Es bleibt noch die Frage offen, für welche speziellen Gleichungen höheren Grades eine Lösung in Radikalen möglich ist. Diese Antwort liefert Galois, dessen Arbeit eine Art Abschluss der Auflösungsfrage darstellt.

[10] Für spezielle Gleichungen ist eine Lösung in Radikalen möglich.

10.3.1 Die Beiträge von Tschirnhaus, Lagrange, Vandermonde, Gauß und Ruffini

Eine erste Annäherung stammt von Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651 - 1708). Seine Absicht war es, bei den zu lösenden Gleichungen eine geeignete Substitution durchzuführen und so eine Gleichung der Form $x^n - c = 0$ zu erhalten. Für solche Gleichungen gab es zu der Zeit nämlich schon eine Lösungsmethode. Bei Gleichungen vom Grad drei funktioniert das Verfahren von Tschirnhaus recht gut, will man damit allerdings eine Gleichung vom Grad 5 lösen, so müsste man auf dem Weg zur Lösung eine Gleichung vom Grad 24 lösen. [vgl. 48, S. 113] Später gelingt es Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) zu zeigen, dass mit diesem Verfahren zur Auflösung einer Gleichung n-ten Grades eine Gleichung vom Grad n! gelöst werden muss. [vgl. 44, S. xvii]

Auch Lagrange veröffentlich 1771/1772 Schriften zur algebraischen Gleichungsauflösung. Er stellt fest, dass sämtliche Versuche Gleichungen höheren als vierten Grades zu lösen bisher erfolglos waren und lediglich auf neue Methoden zur Gleichungsauflösung von Gleichungen vom Grad 3 und 4 geführt haben, die jedoch nicht übertragbar sind auf Gleichungen von höherem Grad. Sein Programm ist nun die Struktur der bisherigen Methoden zu untersuchen und diese genau zu analysieren um herauszufinden, ob bzw. warum keine Übertragung der Methoden auf höhere Grade möglich ist. Er beschäftigt sich im Detail mit den Verfahren von Cardano, Tschirnhaus, Euler und Bezout. Er ist mit seinem Vorhaben nicht erfolgreich, dennoch macht er einige wichtige grundlegende Feststellungen, von denen einige im Folgenden aufgelistet werden. [vgl. 58, S. 163–165]

Lagrange stellt fest, dass das Auflösen von Gleichungen immer auf das Finden einer Funktion der Wurzeln führt, die folgende Eigenschaften hat:

> (1) that it satisfies a reduced or resolvent equation with degree lower than that of the original; (2) that the roots of the original equation can be easily recovered from it. The art of solving equations, then, is to discover such functions. [58, S. 179]

Lagrange formuliert seine Erkenntnisse für die allgemeine Gleichung vom Grad n bzw. für allgemeine Funktionen der Wurzeln. Dazu betrachtet er zunächst eine Funktion $f(x_1, ..., x_n)$, wobei $x_1, ..., x_n$ Wurzeln der Ausgangsgleichung sind. Die Funktion f nimmt bei allen möglichen Vertauschungen der $x_1, ..., x_n$ im allgemeinen n! Werte an. Und diese n! verschiedenen Werte, wir wollen sie mit $t_{1,...,n!}$ bezeichnen sind wiederum die Wurzeln einer Gleichung ϕ, die den Grad n! hat und folgendermaßen aussieht:

$$\phi = t^{n!} - Mt^{n!-1} + Nt^{n!-2} - P^{n!-3} + ... = 0^{11} \tag{10.2}$$

Das wirkt auf den ersten Blick als wäre man damit vom Regen in die Traufe gekommen - ursprünglich gilt es ja eine Gleichung vom Grad n zu lösen und nun hat man plötzlich eine Gleichung vom Grad n! vor sich. Aber, und davon ist auch die Rede bei Lagrange, es kommt zu einer Gradreduktion dieser Hilfsgleichung, wenn die Hilfsfunktion f nicht immer verschiedene Werte annimmt bei der Permutation der $x_{1,...,n}$. „Bleibt die Funktion f bei der Permutation von k Variablen (k<n) ungeändert - man sagt auch f ist in k Variablen symmetrisch - so läßt sich der Grad der Lagrangeschen Resolvente auf n!/k! reduzieren.“ [3, S. 320] Auch wenn Lagrange die Auflösbarkeitsfrage zwar nicht beantworten konnte, so kann man dennoch sagen, dass seine Idee, dass die Auflösbarkeit in Radikalen von der Gruppe der Permutationen der Wurzeln bzw. der Untergruppe dieser Gruppe abhängt, sehr wichtig war.

Auch Vandermonde stellt ähnlich wie Lagrange im Zusammenhang mit der Auflösbarkeit von Gleichungen Überlegungen an, die Vertauschungen von Wurzeln zum Inhalt haben. Auch Ansätze mit der heutigen Bezeichnungsweise als Zerfällungskörper charakterisiert werden, sind Inhalt seiner Theorie. [vgl. 3, S. 321–322] Es wird sich herausstellen, dass diese Idee, Wurzeln zu adjungieren, aussichtsreich ist. [vgl. 48, S. 116] Sein Werk ist jedoch sehr schwer verständlich und verworren und mehr als in die richtige Richtung weisende Gedanken finden sich bei ihm nicht. [vgl. 3, S. 322]

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) kann für eine bestimmte Gattung von Gleichungen, den sogenannten Kreisteilungsgleichungen, zeigen, dass sie in Radikalen auflösbar sind. Kreisteilungsgleichungen sind Gleichungen der Form

$$x^n - 1 = 0 \qquad n \in \mathbb{N} \tag{10.3}$$

Viele Mathematiker dieser Zeit haben sich mit Gleichungen von dieser Form beschäftigt, u. a auch Tschirnhaus, Euler, Lagrange und Vandermonde, aber erst Gauß gelingt der, wenn auch nicht ganz vollständige, Beweis, dass diese Gleichungen im Allgemeinen in Radikalen lösbar sind. Bei Gauß taucht die Kreisteilungstheorie in der „Disquisitiones artithmeticae“ auf, bei der Konstruierbarkeit eines regelmäßigen 17- bzw. n-Ecks[12] mit Zirkel und Lineal. [vgl. 3, S. 326–328] Die komplexen Lösungen der Gleichung (10.3.1) sind die n-ten Einheitswurzeln $\zeta_n = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

[11]Wobei sich die Koeffizienten dieser Gleichung sich aus den Koeffizienten der ursprünglichen

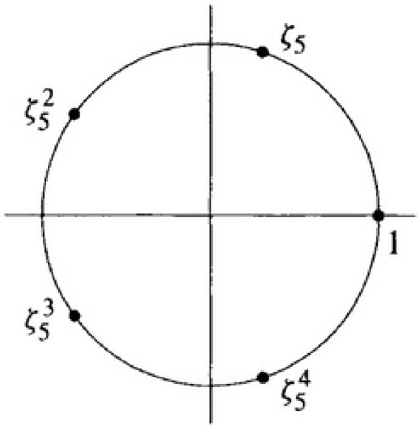


Abbildung 10.3.1: Einheitswurzeln der Kreisteilungsgleichung für n=5
[17, S. 458]

Die Bezeichnung Kreisteilungsgleichung rührt daher, dass die n Einheitswurzeln die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf der Einheitskreislinie sind. Vergleiche dazu Abb. 10.3.1. Diese Theorie von Gauß im Zusammenhang mit der Kreisteilungsgleichung kann als rudimentär gruppen- bzw. körpertheoretisch[13] bezeichnet werden und verdient es erwähnt zu werden, da sie die Auflösungstheorie von Abel und Gauß beeinflusst hat. [vgl. 3, S. 328]

Auch Paolo Ruffini stellt zukunftsweisende Überlegungen an. Er vermerkt, dass es einen Zusammenhang zwischen Permutationen, bei denen rationale Funktionen invariant sind, und der Auflösbarkeit gibt. Er definiert ansatzweise, worum es sich bei einer Permutationsgruppe handelt, wobei er natürlich nicht diese moderne Bezeichnung verwendet. Auch die, modern gesprochen, symmetrischen Gruppe S_5 behandelt er und bestimmt auch deren Untergruppen. Er behauptet die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung vom Grad fünf und versucht diese mit dem oben genannten Ansatz auch zu zeigen, jedoch gelingt ihm das nicht vollständig. [vgl. 3, S. 323–325] und [44, S. xvii]

Gleichung berechnen lassen.

[12] Gauß stellt fest, dass ein regelmäßiges n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn $n = 2^r p_1 p_2, ..., p_k$ und die $p_1, ..., p_k$ Primzahlen der Form 2^{2^v} sind.

[13] Für mehr Details zu diesen Ansätzen [vgl. 3, S. 327] und [vgl. 7, S. 109–114]

10.3.2 Abel beweist die Nichtauflösbarkeit von allgemeinen Gleichungen vom Grad ≥ 5

Niels Henrik Abel (1802 - 1829) gelingt der nächste große Schritt. Er zeigt 1824, dass die allgemeine Gleichung vom Grad 5 nicht in Radikalen lösbar ist. Ursprünglich glaubte er eine Lösungsformel für die Gleichung vom Grad 5 gefunden zu haben, entdeckt dann aber den Fehler in seinen Überlegungen und überarbeitet seine Ideen zu einem Beweis für die Nichtauflösbarkeit. Zwei Jahre später verallgemeinert er dieses Resultat und zeigt, dass Gleichungen vom Grad größer als vier im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar sind. Abel zeigt zunächst, dass die letzte Resolvente (Hilfsgleichung), die die Wurzel(n) der allgemeinen Gleichung $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ ausdrückt folgende Form hat:

$$x = q_0 + \sqrt[n]{p} + q_2\sqrt[n]{p^2} + ... + q_{n-1}\sqrt[n]{p^{n-1}} \tag{10.4}$$

wobei n eine Primzahl ist und $p, q_0, q_2, ..., q_{n-1}$ sich rational aus den Koeffizienten der Ausgangsgleichung zusammensetzen, aber $\sqrt[n]{p}$ sich nicht rational durch $q_0, q_2, ..., q_{n-1}$ ausdrücken lässt. Und Abel folgert weiter, dass wenn die Ausgangsgleichung in Radikalen lösbar ist, dann muss jede Wurzel der Ausgangsgleichung sich rational ausdrücken lassen durch die Wurzeln (und die Einheitswurzeln), also die Summanden aus (10.3.2) sich rational aus den Wurzeln zusammensetzen. [vgl. 40, S. 67–68] Er verwendet dann unter anderem auch das Ergebnis von Cauchy, dass es nicht möglich ist, einen rationalen Ausdruck in 5 unabhängingen Variablen zu finden, der genau drei oder vier Werte annimmt. [vgl. 40, S. 68]

Den Beweis[14], dass die allgemeine Gleichung fünten Grades nicht in Radikalen auflösbar ist, führt Abel indirekt, d. h. er nimmt an, dass eine Lösung in Radikalen existiert und leitet daraus einen Widerspruch ab. Nun kann eine Wurzel der allgemeinen Gleichung vom Grad n nicht rein rational in den Koeffizienten ausgedrückt werden. In dem Ausdruck, der die Wurzel beschreibt, kommt zumindest ein Wurzelausdruck $u = A^{1/m}$ vor, wobei m eine Primzahl ist und A sich rational aus den Koeffizienten zusammensetzt. Die einzig möglichen Werte die m annehmen kann, sind 2 und 5 - das hat z. B auch schon Cauchy herausgefunden. Aber sowohl $m = 5$ als auch $m = 2$ führen zu Widersprüchen. Er behauptet die Verallgemeinerung auf Gleichungen vom Grad größer als vier, aber er gibt keine genauere Erklärung. Eine (weitere) Lücke im Beweis Abels ist, dass er die Annahme nicht trifft, dass die Einheitswurzeln entweder im Koeffizientenkörper enthalten sind oder diesem hinzu-

[14] Abels Rechnungen sind sehr lang und recht kompliziert, deshalb folgt nur eine sehr oberflächliche Skizze des Beweises

gefügt/ajungiert wurden. [vgl. 40, S. 69–70]

Abel setzt sich auch mit speziellen Gleichungen höheren Grades auseinander um festzustellen, ob sie in Radikalen lösbar sind oder nicht. Ein allgemeines Kriterium, mit dem sich feststellen lässt, ob eine Gleichung in Radikalen lösbar ist, wird aber erst von Évariste Galois entdeckt. Mit seiner Theorie lässt sich auch der Beweis von Abel stark verkürzen[15].

10.3.3 Èvariste Galois

Évariste Galois (1811 - 1832) wurde in einem Ort südlich von Paris geboren und interessierte sich bereits im Alter von 15 Jahren für die Schriften von Gauß, Lagrange, Cauchy u. a. Doch sein sehr kurzes Leben beinhaltet einige unglückliche Wendungen und so wurde sein Werk erst posthum gewürdigt. Die Aufnahme in die École Polytechnique gelang ihm nicht und mehrere seiner Manuskripte, die er an die Pariser Akademie sendete, gingen verloren oder wurden abgelehnt. Sein politisches Engagement bescherte ihm auch zwei Gefängnisaufenthalte. Im Alter von nur 21 Jahren verstarb er an den Verletzungen, die er sich bei einem Duell zugezogen hatte. In der Vornacht des Duells hat er noch eine Art mathematisches Testament verfasst, um es seinem Freund Auguste Chevalier zukommen zu lassen. Die zwei entscheidenden Schriften wurden 1846 veröffentlicht und tragen die Titel „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ und „Des équations primitives qui sont solubles par radicaux“.

Die Schrift „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ (Abhandlung über die Bedingung der Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzelgrößen) ist der Grundstock dessen, was wir heute als Galois-Theorie bezeichnen. Die Schrift selbst wurde von Galois auch als „Premier Mémoire“ bezeichnet. Ursprünglich war sie sein dritter Anlauf, die Akademie von seinen Ideen zu überzeugen. Sie wurde aber von Lacroix und Poisson, die mit der Beurteilung beauftragt waren, als zu ungenau und unverständlich abgelehnt. In der Nacht vor dem Duell bessert er noch einige Details aus, bevor er sein Vermächtnis an Chevalier adressiert. Die Abb. 10.3.3 zeigt die erste Seite einer Kopie des Manuskripts durch Chevalier.

[15] Da nämlich die Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung 5-ten Grades der symmetrischen Gruppe S_5 entspricht und diese nicht auflösbar ist, ist die Gleichung 5-ten Grades im Allgemeinen nicht in Radikalen lösbar

Abbildung 10.3.2: Portrait von Èvariste Galois
[21, S. 201]

Der Originaltext ist auch mit heutigem Wissensstand nicht sehr leicht verständlich, da er sich einer zum Teil anderen Terminologie bediente und nicht alle Details ausformuliert sind. Deshalb wird im Folgenden die Grundidee von Galois skizziert, allerdings nicht in seiner eigenen sondern mit moderner Terminologie. In dieser Schrift führt er verschiedene, heute nicht mehr wegzudenkende Konzepte, wie zum Beispiel Körper, Körperadjunktionen, Gruppen, etc. ein. Die Begriffe „Körper" oder „Gruppe" stammen jedoch nicht von Galois selbst, sondern etablierten sich später. Ganz allgemein kann der Ansatz von Galois als neuartig für die damalige Zeit, wenn nicht sogar als revolutionär, bezeichnet werden.

In einem ersten Absatz wird nun die grundlegende Idee umrissen, wie mit Hilfe Galois' Theorie herausgefunden werden kann, ob eine Gleichung in Radikalen lösbar ist. Dabei wird zuerst auch noch kurz auf den Inhalt des „Premier Mémoire" eingegangen und anschließend werden verschiedene Grundideen noch genauer erläutert.

Ganz allgemein sei vorweggenommen, dass man die Lösbarkeit anhand einer mit der Gleichung assozierten Struktur erkennen kann. Hat man also ein Polynom gegeben mit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0 \tag{10.5}$$

mit Koeffizienten[16] $a_1, ..., a_{n-1}$ die bekannt sind und $x_1, ..., x_n$ als Nullstellen. Es sei nun $K = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$ der kleinstmögliche Körper, der alle Nullstellen enthält. Diesem Körper wird eine Gruppe G zugeordnet, die sogenannte Galois-Gruppe. Und über die Eigenschaften dieser Gruppe erfährt man, ob f in Radikalen auflösbar ist oder nicht. Dazu muss man die Nullstellen von f gar nicht kennen.

Am Beginn der Schrift „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ definiert Galois, wann eine Gleichung als reduzibel bezeichnet wird: nämlich dann, wenn sie einen rationalen Teiler hat. Er gibt auch an, was unter „rationalen Größen“ zu verstehen ist und er beschreibt auch die Adjunktion[17] von Elementen zum Grundköper.

> Man kann festsetzen, dass man als rationale Function jede rationale Function einer gewissen Anzahl von gegebenen Grössen, die von vornherein als bekannt vorausgesetzt werden, betrachten solle. Z. B. kann man eine gewisse Wurzel aus einer ganzen Zahl wählen und als rationeal jede rationale Function dieser Wurzelgrösse betrachten. Sobald wir festsetzen, dass wir gewisse Grössen in dieser Weise als bekannt ansehen wollen, so werden wir sagen: Wir adjungieren sie der Gleichung, welche aufgelöst werden soll. Wir werden diese Grössen der Gleichung adjungiert nennen. Dies vorausgesetzt, werden wir rational jede Grösse nennen, welche sich als rationale Function der Coefficienten der Gleichung und einer gewissen Anzahl von Grössen darstellt, welche der Gleichung adjungiert und nach Belieben angenommen sind. [1, S. 117]

Auch den Zusammenhang zwischen der (Ir)Reduzibilität eines Polynoms und der Adjunktion von Elementen zum Grundkörper erkennt er, denn er schreibt, dass durch die Adjunktion einer Größe eine irreduzible Gleichung reduzibel werden kann, d. h. also, dass die Adjunktion von Größen zum Grundkörper Einfluss auf die Eigenschaften der Gleichung hat.

Weiter definiert er, was eine Permutationsgruppe[18] ist.

> Sobald wir die Substitutionen in Gruppen einteilen wollen, werden wir sie alle aus einer und derselben Permutation hervorgehen lassen. Da

[16] Galois Grundkörper ist $\mathbb{Q}(a_1, ..., a_n)$ [vgl. 51, S. 381]

[17] $\mathbb{Q}$ kann durch Adjunktion von $\sqrt{2}$ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ erweitert werden und dieser Erweiterungskörper enthält dann alle rationalen Zahlen und Zahlen der Form $b + c\sqrt{2}$ mit b,c $\in \mathbb{Q}$.

[18] In moderner Terminologie kann man von einer Permutationsgruppe sprechen. Galois verwendet für Permutationen den Begriff „Substitution“ und das was wir heute als Anordnung bezeichnen würden, nennt er „Permutation“.

> es sich stets um Untersuchungen handelt, bei denen die ursprüngliche Stellung der Buchstaben durchaus keinen Einfluss auf die betrachteten Gruppen hat, so wird man dieselben Substitutionen haben müssen, welches auch die Permutation sein möge, von der man ausgegangen ist. So ist man z. B., wenn man in einer solchen Gruppe die Substitutionen S und T hat, sicher, auch die Substitution ST zu haben. [1, S. 118]

Es verbleibt die Frage, welche Permutationen der Wurzeln die „zulässigen“ sind bzw. in Frage kommen. Dazu formuliert er Hilfssätze in denen es um die, wie wir sie heute bezeichnen, Galois-Resolvente geht und definiert infolge auch die Galois-Gruppe einer Gleichung. Ebenso führt er das Konzept des Normalteilers und einer Quotientengruppe ein, auch wenn er dafür noch nicht diese Bezeichungungen verwendet. Gute Zusammenfassungen des Manuskripts „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ finden sich in [7, S. 116–120] oder [51, S. 378–385].

Wir verlassen nun den historischen Pfad und formulieren die Grundidee in möglichst einfacher Form, auch wenn die folgende Auflistung ein paar Unschärfen enthält.

- Die Gleichung (10.5) hat nach dem Fundamentalsatz n Nullstellen und kann in n Linearfaktoren zerlegt werden. Multipliziert man diese Faktoren aus und führt einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + ... + x_n) \\ a_2 &= x_1x_2 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n \\ &\cdots \\ a_n &= (-1)^n(x_1x_2...x_n) \end{aligned} \tag{10.6}$$

  Die Ausdrücke rechts bezeichnet man als elementarsymmetrische Polynome. Man kann leicht erkennen, dass durch beliebiges Vertauschen der Lösungen x_i die Werte a_i unverändert bleiben. Man kann also die Koeffizienten a_i als vollständig symmetrische Ausdrücke verstehen. Nun ist es ja so, dass man beim Lösen einer Gleichung versucht über die Koeffizienten zu den x_i zu gelangen, die alle für sich vollkommen unsymmetrisch sind. Das Lösen einer Gleichung kann man so gesehen als Symmetriereduktion auffassen. [24]

- Man kann auch noch andere vollkommen symmetrische Ausdrücke in den Lösungen finden: Zum Beispiel $(x_1 - x_2)^2$ für $n = 2$. Jedenfalls müssen die Lösungen x_i gewisse algebraische Beziehungen erfüllen. Es gibt n! Anordnungsmöglichkeiten für n Nullstellen. Davon gehören aber nicht alle zur Galois-Gruppe. Jene Permutationen, die die Gültigkeit aller algebraischen Gleichungen in den x_i mit (rationalen) Koeffizienten[19] erhalten, gehören zur Galois-Gruppe, die bezeichnet wird mit Gal(f).

- Man kann das Lösen von Gleichungen auch aus folgendem Blickwinkel betrachten. Man startet zuerst mit einem Zahlenkörper und dieser wird dann beim Lösungsvorgang Schritt für Schritt durch das Adjungieren von Wurzeln erweitert bis zu einem Körper, der als Zerfällungskörper Z bezeichnet wird und der kleinstmögliche Körper ist über dem die zu lösende Gleichung in Linearfaktoren zerfällt. Es stellt sich also die Frage, ob Z durch eine endliche Kette von Erweiterungen aus $\mathbb{Q}_0$[20] gewonnen werden kann. Also ob eine Körperkette

$$\mathbb{Q}_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_R = Z$$

mit

$$\begin{aligned}
&L_1 \subseteq \mathbb{Q}_0(\sqrt[p_1]{m}) \qquad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Q}_0, \\
&L_2 \subseteq L_1(\sqrt[p_2]{m_1}) \qquad \text{mit} \quad m_1 \in L_1, \\
&Z \subseteq L_R = L_{R-1}(\sqrt[p_R]{m_{R-1}}), \qquad \text{mit} \quad m_{R-1} \in L_{R-1}
\end{aligned}$$

konstruiert werden kann. Um die Frage der Auflösbarkeit zu beantworten, muss dann Z untersucht werden. [vgl. 7, S. 118–119]

- Galois stellt dann fest, dass so ein Zwischenschritt wie im Punkt oben identifiziert/assoziiert werden kann mit einer Untergruppe H von Gal(f). [25, vgl.] Das heißt es ergibt sich auch eine Art Kette von Untergruppen. Diese Untergruppen sind sogenannte Normalteiler.

- Und schließlich nennt man eine Galois-Gruppe auflösbar, wenn es eine Kette von Untergruppen gibt (die aber noch bestimmte Eigenschaften erfüllen muss):

$$id = H_R \subset ... \subset H_2 \subset H_1 \subset Gal(f) \tag{10.7}$$

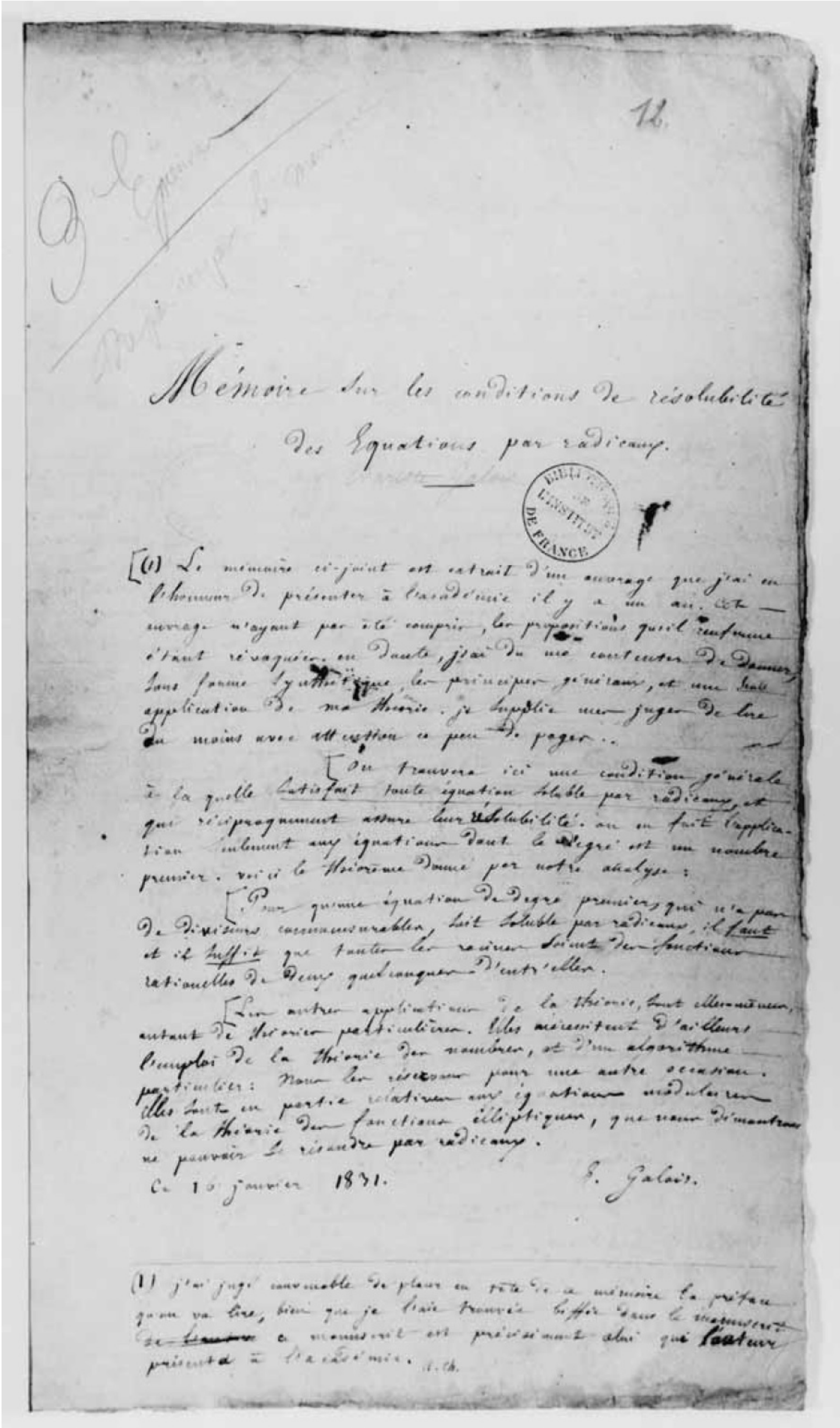
- Und schließlich ist f genau dann in Radikalen auflösbar, wenn die Galois-Gruppe auflösbar ist.

[19] Je nach dem was für Koeffizienten zugelassen sind, ergeben sich verschiedene Galois-Gruppen

[20] Bei Galois ist $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}(a_1, ..., a_n)$ und üblicherweise sind bei ihm auch die benötigten Einheitswurzeln zu $\mathbb{Q}_0$ hinzugefügt.

Bei Gleichungen, die auflösbar sind, findet eine Auslese bzw. ein Reduktionsprozess innerhalb der Galois-Gruppe statt. Es kann mithilfe dieser Theorie aber nicht nur beantwortet werden, ob bzw. welche Gleichungen in Radikalen auflösbar sind, sondern man erhält auch die Wurzelausdrücke, dem Auflöseprozess folgend. [9, vgl.]

Wie man an diesem Umriss von Galois Ideen anhand der oben angeführten Punkte erkennen kann, handelt es sich bei Galois Weg nicht um einen rechnerischen Algorithmus, sondern man kann eher von einem „Algorithmus von Konzepten"[vgl. 7, S. 120] sprechen. Aus Galois-Theorie ist dann die moderne Gruppentheorie und Körpertheorie entstanden und sie markiert auf eine Art den Beginn der Algebra, deren Axiomatisierung erst in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts abgeschlossen ist.



12

Mémoire sur les conditions de résolubilité
des Équations par radicaux.

[(1) Le mémoire ci-joint est extrait d'un ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'académie il y a un an. Cet ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme étant révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner sous forme synthétique les principes généraux, et une seule application de ma théorie. Je supplie mes juges de lire du moins avec attention ce peu de pages.

[On trouvera ici une condition générale à laquelle satisfait toute équation soluble par radicaux, et qui réciproquement assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux équations dont le degré est un nombre premier. Voici le théorème donné par notre analyse :

[Pour qu'une équation de degré premier, qui n'a pas de diviseurs commensurables, soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles.

[Les autres applications de la théorie, sont elles-mêmes autant de théories particulières. Elles nécessitent d'ailleurs l'emploi de la théorie des nombres, et d'un algorithme particulier : nous les réservons pour une autre occasion. Elles sont en partie relatives aux équations modulaires de la théorie des fonctions elliptiques, que nous démontrons ne pouvoir se résoudre par radicaux.

Ce 16 janvier 1831. E. Galois.

(1) J'ai jugé convenable de placer en tête de ce mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit ~~de l'auteur~~ ce manuscrit est précisément celui que l'auteur présenta à l'académie. A. Ch.

Abbildung 10.3.3: Erste Seite einer Abschrift von „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ durch Chevalier [46, S. 137]

Literatur

[1] Niels Henrik Abel und Evariste Galois. *Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.* Berlin: Springer, 1889.

[2] H.W. Alten, H. Wußing und H. Wesemüller-Kock. *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Vom Zählstein zum Computer. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[3] Heinz-Wilhelm Alten u. a., Hrsg. *4000 Jahre Algebra.* Korrigierter Nachdruck 2005. Berlin, Heidelberg und New York: Springer-Verlag, 2003.

[4] Kristi Andersen. „Algebraische Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades in der Renaissance“. In: *Geschichte der Algebra.* Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 6, S. 157–181.

[5] Christopher Baltus. „D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra“. In: *Historia Mathematica* 31.4 (2004), S. 414–428. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086003001083`.

[6] I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova und Abe Shenitzer. „The Literal Calculus of Viete and Descartes“. In: *The American Mathematical Monthly, 1 March 1999, Vol.106(3), pp.260-263* ().

[7] Izabella G. Bashmakova und Galina S. Smirnova. *The Beginnings and Evolution of Algebra.* The Dolciani mathematical expositions ; 23. Math. Assoc. of America, 2000.

[8] Soham Basu und Daniel J. Velleman. *On Gauss's first proof of the fundamental theorem of algebra.* eprint arXiv. Apr. 2017. URL: `https://arxiv.org/pdf/1704.06585.pdf`.

[9] J. Bewersdorff. *Die Ideen der Galois-Theorie.* URL: `http://www.galois-theorie.de/galois.pdf` (besucht am 21. 05. 2018).

[10] Viktor Blåsjö. „In defence of geometrical algebra“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 70.3 (2016), S. 325–359.

[11] Henk J. M. Bos und Karin Reich. „Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes“. In: *Geschichte der Algebra.* Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 7, S. 183–234.

[12] Harel Cain. *C. F. Gauss's Proofs of the Fundamental Theorem of Algebra.* URL: `http://math.huji.ac.il/~ehud/MH/Gauss-HarelCain.pdf` (besucht am 03. 05. 2018).

[13] G. Cardano, T.R. Witmer und O. Ore. *The Rules of Algebra: Ars Magna.* Alianza Universidad. Dover Publications, 2007. URL: `https://books.google.at/books?id=ZMZY79bvOPgC`.

[14] *Clay tablet. Old Babylonian mathematical text about equations of the second degree; 4 cols. Museum Number 13901.* URL: `www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=836701001&objectid=798589` (besucht am 09. 11. 2016).

[15] Sara Confalonieri. „The casus irreducibilis in Cardano's Ars Magna and De Regula Aliza“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 69.3 (Mai 2015), S. 257–289. URL: `https://doi.org/10.1007/s00407-015-0149-9`.

[16] Roger Cooke. *Classical Algebra. Its Nature, Origins, and Uses.* Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2008. New Jersey.

[17] D.A. Cox. *Galois Theory.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2011.

[18] R. Descartes. *The Geometry of René Descartes: Transl. from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham.* Dover Publications, Incorporated, 1954.

[19] René Descartes. *La Géométrie.* Deutsch von L. Schlesinger. Berlin, 1894.

[20] *Die Lösung der Gleichung 4. Grades.* URL: `http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/viertergrad.pdf` (besucht am 01. 03. 2018).

[21] P. Dupuy. „La vie d'Évariste Galois“. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 13 (1896), S. 197–266.

[22] Warren Van Egmond. „The algebra of master Dardi of Pisa“. In: *Historia Mathematica* 10.4 (1983), S. 399–421. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086083900034`.

[23] Black Ellen. *The Early Theory of Equations: On Their Nature and Constitution.* Annapolis: Golden Hind Press, 1986.

[24] Daniel Gieser. *Grundideen der Galoistheorie.* 2007. URL: http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwpapers/Grundideen_Galois.pdf (besucht am 20. 05. 2018).

[25] Wolfgang Globke. *Historisches zur Gruppentheorie.* URL: http://www.math.kit.edu/iag2/~globke/media/gruppen.pdf (besucht am 20. 05. 2018).

[26] Ivor Grattan-Guinness. „History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education“. In: *The American Mathematical Monthly* 111.1 (Jan. 2004), S. 1–12.

[27] T.L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover classics of science and mathematics. Dover Publ., 1956. URL: https://books.google.at/books?id=mvBIAwAAQBAJ.

[28] Albrecht Heeffer. „Learning Concepts Through the History of Mathematics“. In: *Philosophical Dimensions in Mathematics Education.* Hrsg. von Karen François und Jean Paul Van Bendegem. Boston, MA: Springer US, 2007, S. 83–103. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-71575-9_5.

[29] Jens Hørup. „A new art in ancient clothes. Itineraries chosen between scholasticism and baroque in order to make algebra appear legitimate, and their impact on the substance of the disciplinetua“. In: *Physis* 35 (1998), S. 11–50.

[30] Jens Høyrup. „Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I“. In: *Altorientalische Forschungen* 17 (1990), S. 27–96.

[31] Jens Høyrup. „Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought II“. In: *Altorientalische Forschungen* 17 (1990), S. 262–354.

[32] Jens Høyrup. „‚Algebraische‘ Prozeduren in der vorgriechischen Mathematik“. In: *Geschichte der Algebra.* Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 1, S. 13–44.

[33] Jens Høyrup. „Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics: An Insider's View“. In: *History of Science* Vol.34(1), pp.1-32.1 (1996), S. 1–32.

[34] Jens Høyrup. *Lengths, widths, surfaces.* Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences. New York, NY [u.a.]: Springer, 2002.

[35] Hans Hummenberger. „Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel". In: *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Hrsg. von Herbert Henning. Bd. 17. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker, 2011, S. 31–45.

[36] Annette Imhausen. „Egyptian Mathematics". In: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook.* Hrsg. von Victor Katz. Princeton und Oxford: Princton University Press, 2007.

[37] Nikos Kastanis und Yannis Thomaidis. *The term Geometrical Algebra , target of a contemporary epistemological debate.* URL: `http://users.auth.gr/~nioka/Files/GEOMALGE.pdf` (besucht am 24. 03. 2018).

[38] Victor J. Katz und Karen Hunger Parshall. *Taming the Unknown. A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century.* Princeton und Oxford: Princton University Press, 2014.

[39] M.M. al-Khwarizmi, F. Rosen und Biblioteca Provinciale. *The Algebra of Mohammed Ben Musa Edited and Translated by Frederic Rosen.* Oriental translation fund, 1831. URL: `https://books.google.at/books?id=q6VNe%5C_t8-GMC`.

[40] B. Melvin Kiernan. „The development of Galois theory from Lagrange to Artin". In: *Archive for History of Exact Sciences* 8.1 (Jan. 1971), S. 40–154.

[41] F. Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Geometrie.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. B. G. Teubner, 1914. URL: `https://books.google.at/books?id=6DJOAAAAYAAJ`.

[42] I. Kleiner. *A History of Abstract Algebra.* Birkhäuser Boston, 2007. URL: `https://books.google.at/books?id=udj-1UuaOiIC`.

[43] Cathay Liu. „Re-Examining Descartes' Algebra and Geometry: An Account Based on the Reguale". In: *Analytic Philosophy* Vol.58.1 (März 2017), S. 29–57.

[44] Heinz Lüneburg. *Von Zahlen und Größen; Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis.* Basel: Birkhäuser Basel: Basel, 2008.

[45] Michael S. Mahoney. *The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century.* Dieser online veröffentlichte Artikel ist im Wesentlichen eine Übersetzung von: "Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert", RETE: Strukturgeschichte der Naturwissenschaften 1(1971), 15-31. URL: `www.`

princeton.edu/~hos/Mahoney/articles/beginnings/beginnings.htm#7. (besucht am 24. 04. 2018).

[46] Peter M. Neumann. *The Mathematical Writings of Evariste Galois*. Heritage of European Mathematics. Zuerich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, Zuerich, Switzerland, 2011.

[47] Jeffrey A. Oaks. „Polynomials and equations in arabic algebra“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 63.2 (März 2009), S. 169–203. URL: https://doi.org/10.1007/s00407-008-0037-7.

[48] Jeanne [VerfasserIn] Peiffer und Amy [VerfasserIn] Dahan-Dalmédico. *Wege und Irrwege*. Basel [u.a.]: Birkhäuser, 1994.

[49] Jeanne Peiffer und Amy Dahan-Dalmedico. *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1994. Schweiz.

[50] P.G. Schmidl und J.L. Berggren. *Mathematik im mittelalterlichen Islam*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. URL: https://books.google.at/books?id=VkhA6Tm9H78C.

[51] Erhard Scholz. „Die Entstehung der Galoistheorie“. In: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 14, S. 365–398.

[52] „Vorbemerkungen“. In: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990.

[53] Jacques Sesiano. *An Introduction to the History of Algebra: Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance*. Mathematical world. American Mathematical Society, 2009.

[54] Jacques Sesiano. „Aufnahme und Fortführung der arabischen Algebra im europäischen Mittelalter“. In: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 5, S. 129–150.

[55] Jacques Sesiano. „Frühalgebraische Aspekte in der ‚Arithmetica‘ Diophants“. In: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 3, S. 81–96.

[56] Jacques Sesiano. „Rhetorische Algebra in der arabisch-islamischen Welt“. In: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Hrsg. von Erhard Scholz. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1990. Kap. 4, S. 97–128.

[57] Michalis Sialaros und Jean Christianidis. „Situating the Debate on "Geometrical Algebra" within the Framework of Premodern Algebra“. In: *Science in Context* Vol.29.2 (2016), S. 129–150.

[58] Jacqueline A. Stedall. *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra*. Heritage of European Mathematics. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, Zuerich, Switzerland, 2011.

[59] J. Stillwell. *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2010.

[60] D.J. Struik. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Neuauflage 2014. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 1986.

[61] *The Rhind Mathematical Papyrus*. URL: `http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=766114001&objectid=117389#more-views` (besucht am 02. 05. 2018).

[62] Sabetai Unguru. „On the need to rewrite the history of Greek mathematics“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 15.1 (1975), S. 67–114.

[63] F. Viète. *Einführung in die neue Algebra*. Historiae scientiarum elementa. W. Fritsch, 1973.

[64] F. Viète und F. van Schooten. *Francisci Vietae Opera mathematica in vnum volumen congesta ac recognita, Opera atque studio Francisci a Schooten ...* Diapositivas (Biblioteca Histórica UCM). ex Officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646. URL: `https://books.google.at/books?id=fTze9nSv0ucC`.

[65] F. Viète u. a. *Francisci Vietae In artem analyticem isagoge seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu Algebra noua*. apud Iametium Mettayer typographum regium, 1591. URL: `https://books.google.at/books?id=BWTyywN39KEC`.

[66] K. Vogel. *Chiu Chang Suan Shu / Neun Bücher Arithmetischer Technik: Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v.Chr. bis 9 n.Chr.)* Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften. Vieweg+Teubner Verlag, 2013. URL: `https://books.google.at/books?id=nPzMBgAAQBAJ`.

[67] Guido Walz. *Lexikon der Mathematik: Band 1: A bis Eif*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[68] H.W. Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. URL: `https://books.google.at/books?id=XXaBCgAAQBAJ`.

[69] K. Zhao. *Wissenschaft und Technik im alten China*. Birkhäuser Basel, 2013. URL: `https://books.google.at/books?id=JLCbBgAAQBAJ`.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis