universität wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Einige Integralbegriffe in ihrer historischen Entwicklung“

verfasst von / submitted by

Sarah Waisnix, BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

| | |
|---|---|
| Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet: | A 190 299 406 |
| Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet: | Lehramtsstudium UF Psychologie und Philosophie UF Mathematik |
| Betreut von / Supervisor: | Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann |

**Zusammenfassung**

Die vorliegende Diplomarbeit widmet sich der Entstehungsgeschichte der Integrationstheorie, einem Teilgebiet der Analysis. Das Messen von Längen, Flächen und Volumina bilden das Grundkonzept der Mathematik, die Ursprünge dieser Theorie sind schon in der Antike zu finden. Das erste Kapitel erläutert wie mit Archimedes' mechanischer Methode Flächen von Parabelsegmenten berechnet werden konnten.
Danach folgt ein großer Zeitsprung ins 19. Jahrhundert und der Integralbegriff von Cauchy wird eingeführt. Mit ihm bricht auch ein neues Zeitalter der mathematischen Beweisführung an. Auf das Riemann-Integral und dessen Unzulänglichkeiten wird ebenso eingegangen.
Den Hauptteil der Arbeit stellt jedoch die Entwicklung der Maßtheorie zu Beginn des 20. Jahrhunderts, insbesondere die Einführung des Lebesgue-Maßes und die Definition des Lebesgue-Integrals, dar. Lebesgues' Vorgehensweise unterschied sich fundamental von jener seiner Kolleginnen und Kollegen zuvor, da sie auf der Mengenlehre aufbaut. Anhand der Eigenschaften und Grenzwertsätze des Lebesgue'schen Integralbegriffs wird im Laufe der Arbeit deutlich, wie wichtig er für die moderne Analysis und andere Teilgebiete der Mathematik ist.

**Abstract**

The diploma thesis at hand describes the development of the theory of integration, a subarea of analysis. Measuring lengths, areas and volumes are the basis of mathematics, hence the origins of the theory go back to the ancient world. In the first chapter, it is investigated how Archimedes' method to compute the area of a segment of a parabola works.
After a leap forward in time, the integral of Cauchy is defined and with it a new era of mathematics began. The Riemann-integral and its shortcomings are also discussed.
But the main part of the thesis is the development of measure theory at the beginning of the 20th century. Especially the Lebesgue measure and the integral of Lebesgue are being considered, since his approach was completely different from the ones of his collegues before. The new approach is based on set theory. Finally, the properties and convergence theorems show the importance of the work of Lebesgue for modern mathematics.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um allen Personen, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt haben, zu danken.

Besonderer Dank gilt meinem Diplomarbeitsbetreuer, Mag. Dr. Günther Hörmann, für die Annahme des Diplomarbeitsthemas, für seine Unterstützung während des Schreibprozesses und all die Stunden, in denen er sich Zeit nahm, meine Entwürfe Korrektur zu lesen und mit wertvollen Anmerkungen zu versehen.

Ich danke auch meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, meiner Tante und meiner Schwester, die stets an mich glauben und mich während meines Studiums immer unterstützt haben.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Freundinnen und Freunden, Studienkolleginnen und Studienkollegen, Mitbewohnerinnen und Mitbewohnern und all den tollen Menschen bedanken, die meine Studienzeit unvergesslich gemacht haben.
Danke für eure Hilfsbereitschaft, Freundschaft und all die schönen Erinnerungen!

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

> Ich glaube, dass dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird, den mathematisch gebildeten Menschen, die über die Abstände und die Größenverhältnisse der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls nachgedacht haben, aber keineswegs.
>
> Archimedes

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung der Integrationstheorie. Ihre Ursprünge finden sich bereits in der Antike, denn Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen sind womöglich so alt wie die Mathematik selbst. Von der Quadratur der Parabel bis zur ersten formalen Definition eines Integralbegriffs sollte es aber bis ins 18. Jahrhundert dauern. Cauchy läutete damals ein neues Zeitalter der Mathematik ein - das Zeitalter der Strenge, in dem sich ein neuer Formalismus etablierte und präsentierte im Zuge dessen seinen Integralbegriff.

Mathematikerinnnen und Mathematiker stießen aber immer wieder auf Probleme in den Anwendungen, etwa in Bezug auf Vertauschung von Summen und Integralen oder den Zusammenhang der Differential- und Integralrechnung, was dazu führte, dass die bestehenden Integralbegriffe ständig weiterentwickelt und neue, verbesserte Integrationskonzepte vorgestellt wurden.
In dieser Arbeit wird anhand des Riemann'schen Integralbegriffs erklärt, welche Probleme auftreten können und schließlich die Entwicklung der Maßtheorie skizziert und der Integralbegriff von Lebesgue, der den Kern der Arbeit bildet, eingeführt.

Die Entwicklung der Maßtheorie wurde hauptsächlich vorangetrieben, da die bisherigen Integralbegriffe praktische Anwendungen mit der bestehenden Theorie nicht lösen konnten. Das betraf die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen, komplexwertige Funktionen, verallgemeinerte Flächen- und Volumskonzepte, Konvergenz von Fourierreihen und die Wahrscheinlichkeitstheorie. Lebesgue lieferte mit seinem Integralbegriff sogar eine konkrete Antwort, wann die Fourierreihe einer Funktion punktweise gegen sie konvergiert. In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt aber nicht in den Anwendungen sondern das Ziel ist es, das Lebesgue-Integral einzuführen und einige Eigenschaften anzuführen, um zu verdeutlichen, dass dieser weitaus nützlichere Eigenschaften als die zuvor dagewesenen besitzt.

Im letzten Teil der Arbeit werden drei Grezwertsätze formuliert, die den Integralbegriff von Lebesgue so bedeutend machen. Sie liefern verbesserte Resultate in der Analysis und werden in verschiedensten Teilgebieten der modernen Mathematik angewandt. Die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Funktionalanalysis oder die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen würde nicht mehr ohne Maßtheorie auskommen.

Im Ausblick wird eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung formuliert. Er stellt den Zusammenhang der Differentialrechnung mit der Integrationstheorie her und ist mit dem Lebesgue'schen Integral viel mächtiger als mit den Integralbegriffen davor.

# Kapitel 2

# Von den Anfängen der Integrationstheorie

Das Zählen und in weiterer Folge das Messen von Längen, Flächen und Volumina bilden das Grundgerüst der Mathematik. Es finden sich bereits in Schriften von Mathematikern der Antike erstaunliche Arbeiten, die wesentliche Vorarbeiten für die Entwicklung der Analysis und insbesondere der Integralrechnung geleistet hatten.

Der nächste Abschnitt veranschaulicht anhand eines Beispiels, wie Archimedes bereits die Fläche zwischen der $x$-Achse und der Funktion $f(x) = 1 - x^2$ berechnen konnte und diese Idee dann verallgemeinert hatte, um schließlich die Fläche eines beliebigen Parabelsegments zu berechnen.

Wenn wir heute die Fläche, die eine Parabel mit der x-Achse in einem bestimmten Intervall einschließt, berechnen wollen, können wir die Funktion innerhalb bestimmter Grenzen integrieren und kommen so zum gewünschten Ergebnis. Im obigen Beispiel wäre dieser Flächeninhalt:

$$\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

## 2.1 Archimedes von Syrakus

> Einiges von dem, was mir auf 'mechanische' Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser 'mechanischen' Art der (strengen) Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgreifend durch die 'mechanische' Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne derartige Vorkenntnis.
>
> Archimedes

Als Quellen wurden in diesem Absatz [7, Kapitel 1.4] und [3, Kapitel 2] verwendet.

Um Archimedes von Syrakus ranken sich viele Geschichten. Bei einigen lässt sich heute nur mehr schwer feststellen, ob sie einen wahren Kern haben. Jedoch steht außer Frage, dass Archimedes einen bedeutsamen wissenschaftlichen Beitrag in der Mathematik geleistet hat. Von ihm sind mehr Schriften - hauptsächlich in Form von Briefen - überliefert, als von anderen griechischen Mathematikern, was uns erlaubt, seine mathematischen Erkenntnisse genauer zu studieren.
Neben seinen mathematischen Forschungen, war Archimedes als Physiker tätig und man kann ihm technische Errungenschaften wie Seilzüge, Kräne und Kriegsmaschinen zuschreiben. Zu seinen bekanntesten Errungenschaften zählen diverse Volumina- und Flächenberechnungen, wie die des Kreises, der Kugel sowie die Berechnung des Kreisumfangs, eine Näherung von $\pi$, aber auch arithmetische Aufgaben, wie das Rinderproblem[1], bei dem es darum geht, den Sonnenrinderanteil einer Herde, die aus verschiedenen Kuhrassen besteht, nur mithilfe von Nebenbedingungen zu bestimmen.

Archimedes gelang es außerdem zu zeigen, wie man den Flächeninhalt eines beliebigen Parabelsegments bestimmt. Seine dafür verwendete Methode heißt Quadratur eines Parabelsegments.

Um zu verstehen, wie man mit Archimedes diese Flächeninhalte berechnen konnte, betrachten wir die Funktion $f(x) = 1-x^2$ und interessieren uns für den Flächeninhalt, den $f$ mit der x-Achse einschließt.

Zunächst schreiben wir dem Parabelsegment ein Dreieck mit den Eckpunkten $(\pm 1|0)$ und $(0|1)$ ein. Die Fläche $A_D$ dieses Dreiecks beträgt 1 FE. Dann schreiben wir zwei weitere Dreiecke mit den Eckpunkten $(-1|0)$, $(0|1)$ und $(-\frac{1}{2}|\frac{3}{4})$ beziehungsweise $(1|0)$, $(0|1)$ und $(\frac{1}{2}|\frac{3}{4})$. Diese Dreiecke haben jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{8}$ FE, gemeinsam also $A_{D1} = \frac{1}{4}$. Diesen Prozess kann man fortführen und vier weitere Dreiecke über den bereits bestehenden zu konstruieren. Dazu fügen wir die Punkte $(\frac{1}{4}|\frac{15}{16})$ als Eckpunkte hinzu. Die Fläche dieser vier Dreiecke beträgt gesamt dann $\frac{1}{16}$ FE. Nachstehende Figur illustriert diesen Vorgang.

[1]für eine genauere Formulierung siehe etwa F. Schwarz *Wie viele Rinder hat der Sonnengott?*. DMV-Mitteilungen 2/97, 1997, S. 13-18

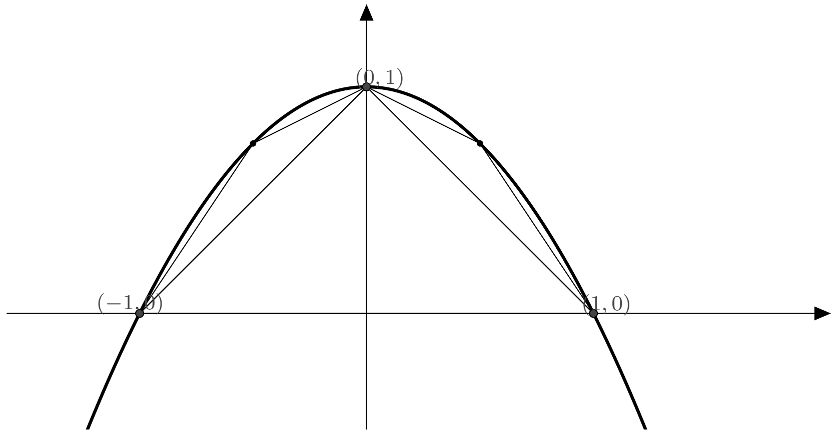


Abbildung 2.1: Eingeschriebene Dreiecke

Wir können also den von $f$ und der $x$-Achse begrenzten Flächeninhalt annähern, indem wir immer mehr Dreiecke hinzufügen und die Flächeninhalte dieser addieren:

$$1 \qquad 1+\tfrac{1}{4} \qquad 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16} \qquad 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64} \qquad 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256} \qquad \cdots$$

Archimedes beobachtete folgendes:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\
1 + \frac{1}{4} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \\
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 16} \\
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 64} \\
&\vdots \\
1 + \cdots + \frac{1}{4^k} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}
\end{aligned}$$

Heute würden wir sofort eine geometrische Reihe erkennen und wären versucht, deren Grenzwert zu berechnen und diesen als Flächeninhalt zu bezeichnen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

In der Antike hütete man sich aber noch davor, unendliche Summen zu berechnen und daher bewies Archimedes, dass die Fläche von $f$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche $\frac{4}{3}$ sein muss nur mit geometrischen Mitteln und bereits bekannten Eigenschaften der Parabel.

Nachstende Behauptungen werden von nun an für allgemeine Parabelsegmente formuliert.

**Satz 2.1.1.** *Die Fläche des gesuchten Parabelsegments, wir schreiben $A_P$, ist das $\frac{4}{3}$-fache der Fläche des größten eingeschriebenen Dreiecks, wir schreiben hierfür $A_D$. Das ist jenes Dreieck, das die gleiche Basis und Höhe wie das Parabelsegment hat.*

Wir benötigen zuerst folgende Lemmata, um Archimedes' Beweis zu führen.

**Lemma 2.1.2.** *Sei $C$ der Scheitel über dem Parabelsegment $AB$.*
*Dann gilt $A_{ABC} > \frac{1}{2}A_P$*

*Beweis.* Sei $M$ der Mittelpunkt der Seite $AB$ und die Strecken $AD$, $MC$ und $BE$ seien parallel. Man überlegt sich leicht, dass die Fläche des Parallelogramms $ABED$ doppelt so groß ist, wie die des Dreiecks $ABC$.

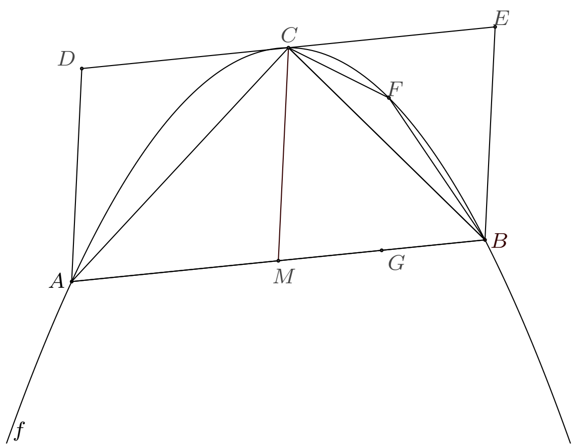


Abbildung 2.2: Parabelsegment

□

**Lemma 2.1.3** (Ohne Beweis.). *Sei nun $F$ der Scheitel über dem Segment $BC$.*
*Dann gilt: $A_{BCF} = \frac{1}{8}A_{ABC}$*

*Beweis von Satz 2.1.1 nach Archimedes.* Archimedes führt im Prinzip zwei indirekte Beweise. Einerseits zeigt er, dass $A_P$ nicht größer als $\frac{4}{3}A_D$ ist und andererseits, dass die gesuchte Fläche $A_P$ auch nicht kleiner als $\frac{4}{3}A_D$ sein kann.

- Gehen wir zunächst davon aus, dass $A_P > \frac{4}{3}A_D$ ist.
  Dann ist $M := A_P - \frac{4}{3}A_D > 0$ und für die Summe der Flächen der eingeschriebenen Dreiecke haben wir

  $$A_P = A_D + A_{D1} + A_{D2} + \cdots + \epsilon_n = \frac{4}{3}A_D + M,$$

  wobei $\epsilon_n$ die Fläche unseres Parabelsegments beschreibt, die noch nicht von Dreiecken bedeckt ist. Aufgrund unseres Lemmas wird $\epsilon_n$ in jedem Schritt um mehr als den Faktor 2 verringert, also gilt für ein $n$, das genügend groß ist, dass $\epsilon_n < M$. Das würde bedeuten, dass $A_D + A_{D1} + A_{D2} + \cdots + A_{Dn}$ größer als $\frac{4}{3}A_D$ ist. $\lightning$

  Ein Widerspruch zu Archimedes' Beobachtungen in Bezug auf die geometrische Reihe.

- Sei $A_P < \frac{4}{3}A_D$. Analog erhalten wir für genügend großes $n$, dass

  $$\begin{aligned} &\frac{1}{3}A_{Dn} < \frac{4}{3}A_D - A_P \\ \Rightarrow &\frac{4}{3}A_D < A_D + A_{D1} + \cdots + A_{Dn} + \frac{4}{3}A_D - A_P \\ &\Rightarrow A_P < A_D + A_{D1} + \cdots + A_{Dn}. \quad \lightning \end{aligned}$$

  Ein Widerspruch zur Tatsache, dass die Dreiecke im Parabelsegment enthalten sind.

$\square$

Wir sehen, dass Archimedes Methode ein Grenzprozess zugrunde liegt, der zum gewünschten Ergebnis führt - allerdings nur, wenn wir den Wert der Fläche schon im Vorhinein kennen - was in der Praxis aber nicht oft der Fall ist und große Probleme mit sich bringt. Außerdem nutzt Archimedes Eigenschaften der Parabel aus, was ihm nicht erlaubt seine Methode auf andere Funktionen zu übertragen und Flächen unter der Kurve von beispielsweise $f(x) = x^a$ für beliebige $a > 0$ zu berechnen.
Nichts desto trotz verwendeten die Mathematikerinnen und Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert die von Archimedes entwickelte 'mechanische Methode', wenn sie Grenzwerte von unendlichen Reihen berechnen wollten und schon 'erraten' konnten, welchen Wert dieser Grenzwert haben wird. Dann bewiesen sie, dass der Wert der Reihe nicht kleiner und auch nicht größer, als der 'erratene' Wert sein kann. Unter anderem verwendete auch Cauchy, dessen Integralbegriff im nächsten Kapitel behandelt wird, diese Methode.

# Kapitel 3

# Cauchy und das Zeitalter der Strenge

> Lassen Sie dieses Kind vor dem siebzehnten Lebensjahr kein mathematisches Buch anrühren. [...] Wenn Sie sich nicht beeilen Augustin eine gründliche literarische Erziehung zu geben, so wird ihn seine Neigung fortreißen. Er wird ein großer Mathematiker werden, aber kaum seine Muttersprache schreiben können.
>
> Joseph-Louis Lagrange

> Es war der 1821 erschienene Cours d'Analyse von Cauchy, mit dem der Weg in die moderne Analysis begann, und zwar ebenso wegen der Strenge als wegen der Klarheit und der Eleganz des mathematischen Stils seines Autors.
>
> Dugac in Dieudonné 1978

Bereits aus den oben angeführten Zitaten kann man erahnen, dass Cauchys Lehrer[1] sein Talent schon im Jugendalter erahnten. Sie hatten Recht und Augustin Cauchy stellte die im 19. Jahrhundert gelehrte Mathematik, insbesondere die Analysis, auf den Kopf. Er publizierte über 800 Artikel und insgesamt 5 Lehrbücher, was ihn - nach Euler - zum produktivsten Mathematiker, der je gelebt hat, macht.

Cauchy war vorwiegend in dem Forschungsfeld der Analysis tätig. In der damaligen Zeit war es für viele Vortragenden an den Universitäten nicht mehr so leicht Einführungsvorlesungen zu halten und einige Professoren weigerten sich sogar. Die Analysis war damals eng an die theoretische Physik gebunden und man überprüfte

[1] Damals waren das wohl tatsächlich ausschließlich Männer.

viele Behauptungen ausschließlich anhand ihrer Anwendungen. Beispielsweise wurde die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen direkt aus der Physik abgleitet und für viele Grundbegriffe gab es noch keine Definitionen, wie wir sie heute kennen. Hinzu kam noch, dass sich die reine Mathematik im Laufe des 19. Jahrhunderts zu einem eigenständigen Gebiet formte, die an den Hochschulen auch unabhängig ihrer Anwendungen gelehrt werden sollte[2].
Heute mag es eine Mathematikerin bzw. einen Mathematiker nicht verwundern, dass dieser Umstand immer mehr zu einem Problem wurde und der Wunsch nach klaren Definitionen, Sätzen und Beweisen immer lauter wurde.

Cauchy begann grundlgende Definitionen zu formulieren, Beweise modern zu notieren und lehrte seinen theoretischen Aufbau, für den er wenig Lob erntete, an der École Polytechnique.

## 3.1 Der Cauchy'sche Integralbegriff

Der folgende Abschnitt orientiert sich an den Darstellungen in [1, Kapitel 2] und [3, Kapitel 6].

Cauchy konzentrierte sich, wie sein Vorgänger Fourier, vorwiegend auf das bestimmte Integral. Fouriers Ansatz, das bestimmte Integral über den Inhalt einer Fläche zwischen eines Funktionsgraphen und der x-Achse zu beschreiben, führte zu der Frage: Was meinen wir mit "Fläche"? Cauchy führte die Idee Fouriers weiter aus und definierte das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe, die diese Fläche annähern sollte. Es gelang ihm einen konstruktiven Algorithmus zu entwickeln, mit dem man bestimmte Integrale berechnen kann und er formulierte Kriterien, für die dieser Algorithmus funktioniert. Cauchy bewies so, dass stetige Funktionen integrierbar sind und es gelang ihm, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu beweisen.

Im folgenden sei $f$ eine Funktion, die auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert ist. Wir nennen $[x_{k-1}, x_k]$ eine endliche Partition des Intervalls $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Die Subintervalle, die dadurch entstehen, müssen nicht unbedingt gleich lang sein.

**Definition 3.1.1.** *Eine Menge von Punktintervallen* $(x_0, [x_0, x_1])$*,* $(x_1, [x_1, x_2])$*,... ,*$(x_{n-1}, [x_{n-1}, x_n])$ *heißt Cauchypartition von* $[a, b]$*. Wir bezeichnen sie mit* $P_C$*.*
*Die Punkte* $x_0, x_1, ..., x_n$ *werden Teilungspunkte von* $P_C$ *genannt.*

[2]vgl. Jahnke 1999, S.191 ff.

**Definition 3.1.2.** *Die Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{P_C} f\Delta x$$

*heißt Cauchy-Summe ausgewertet an* $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$

Wir wollen voraussetzen, dass der Grenzwert dieser Summen existiert und nennen ihn Cauchy-Integral: $C\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$. Im Hinblick auf unsere Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche handelt es sich hier um eine Approximation durch Rechtecke. Das $k$-te Rechteck liegt über dem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ und hat somit die Breite $x_k - x_{k-1}$. Die Höhe entspricht dem Wert der Funktion am linken Ende des Intervalls: $f(x_{k-1})$.
In der berühmten Epsilon-Delta Schreibweise erhalten wir folgende formale Definition des Cauchy-Integrals:

**Definition 3.1.3.** *Seien* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion und* $A \in \mathbb{R}$*.*

*Dann heißt f cauchy-integrierbar auf* $[a, b]$ *und das Integral hat den Wert A, genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.*
*Für jedes* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$ *sodass für jede Cauchy Partition* $P_C$ *von* $[a, b]$ *mit Subintervalllänge kleiner als* $\delta$

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta \qquad \text{für alle } k$$

*gilt:*

$$\left|\sum_{P_C} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - A\right| < \epsilon$$

*Wir schreiben* $C\int_a^b f(x)dx = A$ *für das Cauchy-Integral.*

**Beispiel 3.1.4.** *Wir berechnen das Integral*

$$\int_1^4 xdx = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

*mit der obigen Definition. Zu einer gegebenen Fehlerschranke* $\epsilon$ *müssen wir ein* $\delta$ *angeben, sodass die approximierende Summe*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{j-1}(x_j - x_{j-1})$$

*für eine Partition, deren Subintervalllänge kleiner als $\delta$ ist, in einer $\epsilon$-Umgebung von $\frac{15}{2}$ liegt.*

*Wir können die Fläche, die die Funktion $f(x) = x$ mit der $x$-Achse einschließt, mit Rechtecken approximieren. Diese Rechtecke sind jeweils $x_j - x_{j-1}$ lang und $x_{j-1}$ hoch.*
*Die tatsächliche Fläche jedes Trapezes, das durch diese Partitionierung entsteht, ist aber $\frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2}$.*
*Das heißt, unsere Approximation unterscheidet sich vom tatsächlichen Wert um*

$$\frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} - x_{j-1}(x_j - x_{j-1}) = \frac{x_j^2 - 2x_j x_{j-1} + x_{j-1}^2}{2} = \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2}$$

*Wir passen unsere approximierende Summe an:*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{j-1}(x_j - x_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} - \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} \\
&= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} \\
&= \frac{4^2 - 1^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} \\
&= \frac{15}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2}
\end{aligned}$$

*Wenn die Länge $x_j - x_{j-1}$ von jedem Subintervall kleiner als $\delta$ ist, so gilt für den gesamten Fehler*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} < \frac{\delta}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})}_{4-1=3} = \frac{3\delta}{2}$$

*Wenn wir $\delta := \frac{2\epsilon}{3}$ wählen, ist sichergestellt, dass der Fehler stets kleiner als $\epsilon$ ist.*

Die Definition ist etwas umständlich. Daher wollen wir weiter unten ein Kriterium formulieren, mit dem wir festlegen können, welche Funktionen cauchy-integrierbar sind. Zunächst zeigen wir folgendes Theorem.

**Theorem 3.1.5.** *Sei $f$ stetig auf $[a, b]$. Dann ist $f$ cauchy-integrierbar auf $[a, b]$.*

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass zu einer gegebenen Fehlerschranke $\epsilon$ ein $\delta$ gefunden werden kann, sodass folgendes gilt:
Wenn wir eine Partition $P_C$ des Intervalls $[a, b]$ mit den Teilungspunkten $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ betrachten, deren Subintervalllängen stets kleiner als $\delta$ sind, und eine zweite Partition $\hat{P}_C$ mit Teilungspunkten $y_{k_j}$ in der Art

$$\begin{aligned}
x_0 &= y_{10}, y_{11}, y_{12}, ..., y_{1i_1} = x_1 \\
x_1 &= y_{20}, y_{21}, y_{22}, ..., y_{2i_2} = x_2 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= y_{n0}, y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{ni_n} = x_n,
\end{aligned}$$

die eine Verfeinerung von $P_C$ darstellt (das heißt $P_C \subseteq \hat{P}_C$), dann ist die Differenz der korrespondierenden Cauchy-Summen kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$.
Die zweite Partition $\hat{P}_C$ ist die Vereinigung der Partitionen der Subintervalle:

$$\hat{P}_C = \bigcup_{k=1}^{n} P_{Ck}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1}) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Wir betrachten im obigen Ausdruck jetzt das $k$-te Subintervall der Partition $P_C$ und die dazugehörige Differenz

$$f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1})$$

Sei $M_k$ das Maximum von $f$ im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ und $m_k$ das Minimum im selbigen Intervall. Da jedes $y_{kj-1}$ in diesem Intervall enthalten ist, gilt

$$m_k \leq f(y_{kj-1}) \leq M_k$$

Daraus schließen wir, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1}) &\leq M_k \sum_{j=1}^{i_k} (y_{kj} - y_{kj-1}) \\
&= M_k(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1}) \geq m_k \sum_{j=1}^{i_k} (y_{kj} - y_{kj-1})$$
$$= m_k(x_k - x_{k-1})$$

Mithilfe des Zwischenwertsatzes wissen wir, dass

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

eine Konstante zwischen dem Maximum und Minimum von $f$ im besagten Intervall ist. Genauer gesagt, haben wir gezeigt, dass für ein $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

gilt.

Diese Tatsache verwenden wir um den Ausdruck des $k$-ten Subintervalls von $P_C$ zu vereinfachen:

$$\left| f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1}) \right| = \left| f(x_{k-1}) - f(c_k) \right| (x_k - x_{k-1})$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass sowohl $x_{k-1}$ als auch $c_k$ im gleichen Subintervall der Partition $P_C$ liegen und da $f$ stetig ist, können wir $\delta$ so wählen, dass für $|x_{k-1} - c_k| < \delta$ stets

$$|f(x_{k-1}) - f(c_k)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

folgt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass nun die Differenz der beiden Summen kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1}) - f(c_k)|(x_k - x_{k-1}) \\
&< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

□

**Bemerkung 3.1.6.** *Dieser Beweis verwendet den Satz, dass stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig stetig sind. Heine und Borel bewiesen diesen Satz nach Erscheinen dieses Beweises von Cauchy. Demnach verstand Cauchy Stetigkeit wohl immer als gleichmäßige Stetigkeit. Wir benötigen die gleichmäßige Stetigkeit bei der Wahl von $\delta$.*

Ein genauer Blick auf den obigen Beweis liefert eine Bedingung für die Cauchy-Integrabilität.

**Satz 3.1.7.** ***Cauchy - Integrabilitätskriterium***
*Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.*
*$f$ ist cauchy-integrierbar genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass für zwei Partitionen $P_{C_1}$ und $P_{C_2}$, deren Subintervalllängen kleiner als $\delta$ sind, die dazugehörigen Cauchy-Summen nicht mehr als $\epsilon$ voneinander abweichen:*

$$\left|\sum_{P_{C_1}} f\Delta x - \sum_{P_{C_2}} f\Delta y\right| < \epsilon$$

**Bemerkung 3.1.8.** *Wenn $f$ stetig auf $[a, b]$ ist, dann ist $|f|$ ebenfalls stetig auf $[a, b]$. Das bedeutet:*

*$f$ ist stetig und cauchy-integrierbar $\Rightarrow$ $|f|$ ist cauchy-integrierbar.*

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Umkehrung nicht stimmt.

**Beispiel 3.1.9.** *Betrachte die Funktion auf dem Intervall* $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

*Dann ist $f$ nicht cauchy-integrierbar. Um dies zu zeigen, wählen wir eine Partition $P_{C_1}$ mit rationalen Teilungspunkten und eine zweite Partition $P_{C_2}$ mit irrationalen Teilungspunkten. Die dazugehörigen Cauchy-Summen haben dann jeweils Wert $1$ beziehungsweise $-1$. Die Anwendung von Satz 3.1.7 liefert, dass $f$ nicht cauchy-integrierbar ist.*

*Aber $|f|$ ist konstant und somit stetig. Das Cauchy-Integral hat den Wert $C\int_0^1 |f|\, dx = 1$.*

## 3.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Cauchy-Integral

Mit den vorangegangenen Definitionen und Sätzen ist es möglich zwei Versionen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (HDI) für das Cauchy-Integral zu formulieren.

**Satz 3.2.1.** ***HDI1 für das Cauchy-Integral***
*Sei $F$ differenzierbar auf $[a,b]$ und $F'$ stetig auf $[a,b]$. Dann gilt:*

1. *$F'$ ist cauchy-integrierbar auf $[a,b]$*
2. *$C\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)\ \forall x \in [a,b]$*

*Beweis.*

1. folgt aus Theorem 3.1.5.
2. In diesem Beweis werden der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und die gleichmäßige Stetigkeit von F verwendet.

   Wir wissen schon, dass $F'$ cauchy-integreierbar ist. Nun wählen wir eine Cauchy-Partition $P_C$ auf dem Intervall $[a,x]$, deren Subintervalllängen kleiner als $\delta_1$ sind.

   Sei $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1})$ für $x_{k-1} < c_k < x_k$ und weiters sei $\epsilon > 0$.

   Es gilt:

$$\left|\sum_{P_C} F'\Delta x - C\int_a^x F'(t)dt\right| < \epsilon.$$

Da $F'$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ ist, gibt es ein $\delta_2 > 0$, sodass $|F'(c) - F'(d)| < \epsilon$ für $c, d \in [a,b]$ mit $|c-d| < \delta_2$ ist. Wenn $\delta$ die kleinere Zahl von $\delta_1$ und $\delta_2$ bezeichnet, kann man für alle Partitionen $P_C$ mit Subintervallängen, die kleiner als $\delta$ sind, folgern dass

$$\left|F(x) - F(a) - C\int_a^x F'(t)dt\right| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{n}\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) - \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - C\int_a^x F'(t)dt|$$

$$= |\sum_{k=1}^{n} F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - C\int_a^x F'(t)dt|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |F'(c_k) - F'(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) + \left|\sum_{P_C} F'\Delta x - C\int_a^x F'(t)dt\right|$$
$$< \epsilon(b-a) + \epsilon$$

□

**Satz 3.2.2.** ***HDI2 für das Cauchy-Integral***
*Sei $f$ stetig auf $[a,b]$ und sei $F$ die Funktion, die auf $[a,b]$ durch $F(x) = C\int_a^x f(t)dt$ definiert ist. Dann gilt:*

1. *$F$ ist differenzierbar auf $[a,b]$*
2. *$F' = f$ auf $[a,b]$ und*
3. *$F$ ist absolut stetig[3] auf $[a,b]$*

[3] siehe Definition A.1.2

*Beweis.* Da das Cauchy-Integral einer stetigen Funktion wohldefiniert ist, können wir F in der obigen Art bestimmen.

Um die Differenzierbarkeit von $F$ und die Tatsache, dass $F' = f$ ist, zu zeigen, schätzen wir den untenstehenden Ausdruck ab. Dabei ist $h$ so klein, dass $x+h$ noch in $(a,b)$ liegt.

Da $f$ per Annahme an der Stelle $x$ stetig ist, existiert ein $\exists\delta > 0$ und $t \in [a,b]$, sodass für $|t-x| < \delta$ auch $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ ist.
Wenn wir außerdem noch die Additivität des Integrals verwenden, erhalten wir:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h} \cdot C\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt\right| < \epsilon \quad \text{für } h < \delta$$

Das bedeutet: $[C\int_a^x f(t)dt]' = f(x)$.

Um die absolute Stetigkeit zu zeigen, verwenden wir, dass $F'$ stetig und damit beschränkt auf $[a,b]$ ist und wir können Theorem A.1.4 anwenden.

$\square$

**Beispiel 3.2.3.** *Sei*

$$F(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{\pi}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

*Dann ist $F$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$,*

$$F'(x) = \begin{cases} -\pi x \cos(\frac{\pi}{x}) + 3x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

*und ist stetig auf dem Intervall $[0,1]$. Wir können das Cauchy-Integral berechnen:*

$$C\int_0^1 F'(x)dx = F(1) - F(0) = 0$$

# Kapitel 4

# Riemann und Darboux

> Man darf wohl annehmen, daß dieser Begriff, wäre er nicht mit einem so klangvollen Namen verknüpft, schon viel früher übergangen worden wäre; denn bei allem schuldigen Respekt vor dem Genius Berhard Riemanns ist sich jeder aktive Mathematiker völlig darüber im klaren, daß diese 'Theorie' heutzutage in der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie bestenfalls die Bedeutung einer halbwegs interessanten Übungsaufgabe besitzt.
>
> J. Dieudonné

Dem Integralbegriff von Bernhard Riemann wird im Mathematikstudium ungeheure Bedeutung zugeschrieben. In den Analysis-Vorlesungen wird größtenteils nur dieser Integralbegriff eingeführt, obwohl wir heute all die Unzulänglichkeiten, die das Riemann-Integral aufweist, mit dem Lebesgue'schen Integralbegriff gut in den Griff bekommen haben. Daher wird in der vorliegenden Arbeit das Riemann-Integral nur kurz behandelt und dann wenden wir uns dem weitaus mächtigeren und dadurch spannenderen Integralbegriff von Henri Lebesgue zu.

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das heißt, es existieren $m, M \in \mathbb{R}$, sodass $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

**Definition 4.0.4.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in [a, b]$ mit $i = 0, 1, \ldots, n$ gegeben.*
*Wir nennen die Menge $P_R = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ist.*
*Für die Feinheit dieser Zerlegung schreiben wir $|P_R| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.*

**Definition 4.0.5.** *In jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ wählen wir eine Zwischenstelle $\xi_i$ mit $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ aus, wobei $i = 0, 1, \cdots n - 1$ ist. Jede Summe der Form*

$$R(P_R, \xi) = R(f; P_R, \xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

*heißt Riemann-Summe mit Partition $P_R$.*

Nun werden die Darboux'schen[1] Summen eingeführt. Sie sind Riemann-Summen, wenn $\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \in f([x_i, x_{i+1}])$ und $\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \in f([x_i, x_{i+1}])$ und werden verwendet, um das Riemann-Integral zu definieren. Darboux lieferte also keinen anderen Integralbegriff als den Riemann'schen, sondern brachte lediglich eine neue Betrachtungsweise desselbigen.[2]

**Definition 4.0.6.** *Da $f$ beschränkt ist, sind sowohl $m_i := \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ als auch $M_i := \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ endlich.*
*Die Darboux'sche Untersumme ist*

$$U(P_R) = U(f; P_R) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

*und die Darboux'sche Obersumme*

$$O(P_R) = O(f; P_R) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Es gilt immer, dass $U(P_R) \leq R(P_R, \xi) \leq O(P_R)$ ist und wenn $P'_R$ eine Verfeinerung von $P_R$ ist, gilt stets

$$U(P_R) \leq U(P_R \cup P'_R) \leq O(P_R \cup P'_R) \leq O(P'_R).$$

Insbesondere ist jede Obersumme größer oder gleich jeder Untersumme. Wir können nun das Riemann-Integral definieren:

**Definition 4.0.7.** *Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die Menge aller Partitionen $P_R$. Seien*

$$R_* := \sup_{P_R\in\mathcal{P}} U(P_R) \qquad \textit{und} \qquad R^* := \inf_{P_R\in\mathcal{P}} O(P_R)$$

*Die beiden Werte $R_*$ und $R^*$ sind aufgrund der Beschränktheit von $f$ endlich und es gilt $R_* \leq R^*$.*
*Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt riemann-integrierbar und hat den Wert $R$, falls $R_* = R^*$ gilt. Wir schreiben*

$$R = R(f) := R\int_a^b f(x)dx.$$

[1]Gaston Darboux (1842 - 1917) war ein französischer Mathematiker, der im Bereich Differentialgeometrie forschte.

[2]In [11] Satz 83.1 wird gezeigt, dass die Darboux- und Riemann-Integrale äquivalent sind.

Um mit dieser Definition ein Integral berechnen zu können, müsste man eigentlich sehr viele Ober- und Untersummen in Betracht ziehen. Man kann sich aber auf eine bestimmte Partition $P_R$ konzentrieren, die man immer feiner macht - man bildet also eine Partitionsnullfolge $(P_{R_n})$ mit $\lim_{n\to\infty} |P_{R_n}| = 0$.

Sei $(P_{R_{n+1}})$ feiner als $(P_{R_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt in Bezug auf unsere Darboux'schen Ober- und Untersummen:

$$\lim_{n\to\infty} U(P_{R_n}) = R_* \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \lim_{n\to\infty} O(P_{R_n}) = R^*$$

Für eine riemann-integrierbare Funktion $f$ konvergieren alle Folgen $O(P_{R_n})$ und $U(P_{R_n})$ gegen $R = R\int_a^b f(x)dx$.
Damit können wir Integrale berechnen.

Für den Riemann'schen Integralbegriff kann ebenso, wie für das Cauchy-Integral, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert werden, es können Eigenschaften, wie Monotonie und Linearität des Integrals nachgewiesen werden.

**Bemerkung 4.0.8.** *Es gilt, dass jede cauchy-integrierbare Funktion auch riemann-integrierbar ist und beide Integrale liefern den selben Wert.*

**Beispiel 4.0.9.** *Wir schauen uns die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ , $f(x) = x^i$ mit $i \in \mathbb{N}$ an. Wir wollen das bestimmte Integral $R\int_a^b f(x)dx$ mit positiven Grenzen a und b berechnen.*
*Wegen Theorem 3.1.5 und Bemerkung 4.0.8 könnten wir einfach den HDI für das Cauchy-Integral anwenden. Wir wollen uns aber die eben erarbeitete Definition zuhilfe nehmen, um das Integral zu berechnen.*
*Dazu brauchen wir zunächst eine Partitionsfolge $P_{R_n} = \{a, aq, aq^2, \cdots, aq^n = b\}$, wobei $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.*

*Wir erinnern uns, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$. Deshalb ist die Feinheit der Partitionsfolge*

$$|P_R| = \max_{k=0,\dots,n-1}\{x_{k+1} - x_k\} = \max_k\{aq^{k+1}(1-\frac{1}{q})\} = b(1-\frac{1}{q}) = b(1-1/\sqrt[n]{\frac{b}{a}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

*Die Darboux'sche Ober- und Untersumme ist dann*

$$O(P_R) = \sum_{k=0}^{n-1}(aq^{k+1})^i(aq^{k+1} - aq^k) \quad \text{beziehungsweise} \quad U(P_R) = \sum_{k=0}^{n-1}(aq^k)^i(aq^{k+1} - aq^k)$$

*Nun berechnen wir die Obersumme. (Die Untersumme wird analog berechnet.)*

$$
\begin{aligned}
O(P_R) &= \sum_{k=0}^{n-1}(aq^{k+1})^i(aq^{k+1}-aq^k) = \sum_{k=0}^{n-1}(aq^{k+1})^i aq^k(q-1)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{i+1}q^{i(k+1)}q^k(q-1) = a^{i+1}(q-1)q^i\sum_{k=0}^{n-1} q^{(i+1)^k}\\
&= a^{i+1}(q-1)q^i\frac{1-q^{(i+1)n}}{1-q^{i+1}} = a^{i+1}(q-1)q^i\frac{1-(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}(i+1)n}}{1-q^{i+1}}\\
&= (b^{i+1}-a^{i+1})q^i\frac{1-q}{1-q^{i+1}} = (b^{i+1}-a^{i+1})q^i\frac{1}{q^i+q^{i-1}+\cdots+1}
\end{aligned}
$$

*Nun lassen wir $q \to 1$ gehen (das ist das gleiche, wie wenn wir $n \to \infty$ gehen lassen) und berechnen den Limes.*

$$
\begin{aligned}
&(b^{i+1}-a^{i+1})\lim_{q\to 1} q^i\frac{1}{q^i+q^{i+1}+\cdots+1}\\
&= (b^{i+1}-a^{i+1})\lim_{q\to 1} q^i\lim_{q\to 1}\frac{1}{q^i+q^{i-1}+\cdots+1} = (b^{i+1}-a^{i+1})\frac{1}{i+1}
\end{aligned}
$$

*Schlussendlich erhalten wir das wohlbekannte Resultat*

$$
R\int_a^b x^i dx = \frac{1}{i+1}(b^{i+1}-a^{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}
$$

**Beispiel 4.0.10.** *Die Dirichlet-Funktion*

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}\\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}
$$

*ist auf dem Intervall $[a,b]$ nicht riemann-integrierbar. Man überlegt sich leicht, dass für jede beliebige Partition des Intervalls $[a,b]$ die Untersumme $R_*$ immer den Wert $0$, die Obersumme $R^*$ aber stets den Wert $b-a$ liefert.*

**Satz 4.0.11.** *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann riemann-integrierbar über $[a,b]$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition $P_R$ mit*

$$
0 \leq O(P_R) - U(P_R) < \epsilon
$$

*gibt.*

Für das Cauchy-Integral hatten wir den Satz, dass stetige Funktionen cauchy-integrierbar sind. Für das Riemann-Integral gilt zusätzlich:

**Satz 4.0.12.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, monotone Funktion. Dann ist $f$ riemann-integrierbar.*

*Beweis.* Sei $f$ eine monoton wachsende Funktion und $P_R$ eine Partition von $[a,b]$ mit Teilungspunkten $x_i := a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i \in \mathbb{N}$. Das Supremum von $f$ in $[x_i, x_{i+1}]$ ist $M_i = f(x_{i+1})$, das Infimum $m_i = f(x_i)$. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} O(P_R) - U(P_R) &= \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)(x_{i+1} - x_i) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon \quad \text{für } n \text{ genügend groß} \end{aligned}$$

Somit ist $f$ riemann-integrierbar. Der Beweis für monoton fallende Funktionen geht analog.

□

## 4.1 Schwächen des Riemann-Integrals

Der Riemann'sche Integralbegriff weist zahlreiche Unzulänglichkeiten auf, die Probleme bereiten. Das macht es um so erstaunlicher, dass besonders dem Riemann-Integral nach wie vor eine so große Bedeutung (im Studium) zugeschrieben wird und das Lebesgue-Integral erst sehr spät behandelt wird. In den folgenden Punkten meint integrierbar immer integrierbar im Riemann'schen Sinne.

1. **Vertauschung von Integral und Limes**
   Die Gleichung
   $$\lim_{n\to\infty} [\int_a^b f_n(x) dx] = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)] dx$$
   bereitet Probleme. Wenn wir das Integral im Sinne von Riemann verstehen, so kann man den Limes und das Integral nur vertauschen, wenn eine (für jedes $n \in \mathbb{N}$) riemann-integrierbare Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f$ konvergiert. Punktweise Konvergenz reicht nicht aus, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist zum Beispiel die Funktion $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit
   $$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} 0 \quad \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

riemann-integrierbar und die Funktionenfolge $(f_n)$ konvergiert für $0 \leq x \leq 2$ punktweise gegen $f(x) = 0$.

Es ist aber

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx \neq \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

2. **Grenzwerte von Funktionenfolgen**
   Grenzwerte einer beschränkten, integrierbaren Funktionenfolge $f_n$ sind nicht notwendigerweise integrierbar. Betrachte die BAIRE'S FOLGE:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x = \frac{p}{q}, q \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Jedes $f_n$ hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist somit integrierbar. Die Grenzfunktion $f$ ist die Dirichletfunktion, die bekanntlich an jeder Stelle unstetig und nicht integrierbar ist.

3. **Zusammenhang von Differential- und Integralrechnung 1**
   Es gibt Beispiele, in denen der HDI nicht erfüllt ist. Z.B. hat die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   die Ableitung

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   aber $F'$ ist nicht beschränkt und damit nicht integrierbar.
   Selbst bei beschränkten Ableitungen gibt es Probleme:

4. **Zusammenhang von Differential- und Integralrechnung 2**
   Wenn $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare (stetige) Ableitung $f$ hat, gilt zwar $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, jedoch muss die Integrierbarkeit von $f$ explizit gefordert werden. Sie folgt nicht bereits aus der Differenzierbarkeit von $F$.

   VITO VOLTERRA hat 1881 eine differenzierbare nicht-konstante Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ konstruiert, die eine beschränkte Ableitung $f$ besitzt. Die Ableitung $f$ ist aber nicht integrierbar. Leserinnen und Leser können Volterras Funktion z.B. in [2, Kapitel 4.2] finden.

5. **Charakterisierung des Riemann-Integrals**
   Mit der Riemann'schen Theorie ist es nicht möglich auf praktikable Art zu entscheiden, ob eine Funktion $f$ integrierbar ist oder nicht. Erst Lebesgues Theorie ermöglicht eine vollständige Charakterisierung der Integrationstheorie von Riemann, wie wir im Verlauf der Arbeit noch sehen werden.

# Kapitel 5

# Lebesgue

> I have to pay a certain sum, which I have collected in my pocket. I take the bills and coins out of my pocket and give them to the creditor in the order I find them until I have reached the total sum. This is the Riemann integral. But I can proceed differently. After I have taken all the money out of my pocket I order the bills and coins according to identical values and then I pay the several heaps one after the other to the creditor. This is my integral.
>
> Lebesgue in einem Brief an Paul Montel

Als Quellen wurden vor allem [1, Kapitel 5 und 6], [2, Kapitel 5 und 6] und [9, Kapitel 2] verwendet. Außerdem wurde auf [4] und [10] zurückgegriffen.

Henri Lebesgue war ein französischer Mathematiker, der Anfang des 20. Jahrhunderts an der Sorbonne und am Collège de France lehrte. Bevor er einen Lehrstuhl an der Universität bekam, war er Lehrer an einem Lyzeum. In dieser Zeit arbeitete er auch an seiner Dissertation, in der er beschreibt, dass es nicht möglich ist, zu gewissen Ableitungen von differenzierbaren Funktionen, Stammfunktionen im Riemann'schen Sinne zu finden.
An der Hochschule beschäftigte er sich außerdem noch mit der Geschichte der Mathematik und fachdidaktischen Themen.
Für Lebesgues Integrationstheorie haben Publikationen von seinen französischen Kollegen Camille Jordan und Èmile Borel wichtige Vorarbeit geleistet.
Womöglich saß Lebesgue sogar in einer von Borels Vorlesungen. Jordans Resultate in der Gruppentheorie und insbesondere die Jordan'sche Inhaltstheorie und Borels Forschungen in der Funktionen- und Wahrscheinlichkeitstheorie waren es, die von Lebesgue zusammengefasst und weiterentwickelt, zu einem Integralbegriff führten, der es schafft, die Schwächen des Riemann-Integrals zu überwinden.[1]

[1] vgl. Jahnke 1999, S. 362 f.

## 5.1 Lebesgue's Idee - Motivation

Die Herangehensweise von Lebesgue unterschied sich fundamental von jener seiner Vorgänger. Um Integrale zu berechnen partitionierte er nicht den Definitionsbereich einer Funktion, sondern stattdessen den Wertebereich.

Sei $f$ eine Funktion, die auf $[a, b]$ definiert ist und im Wertebereich durch $\alpha$ und $\beta$ beschränkt ist. Dann unterteilen wir das Intervall $[\alpha, \beta]$ in

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta.$$

Jetzt bezeichnen wir mit $E_k$ jene Punkte von $[a, b]$, für die $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ ist: $E_k = \{x \in [a, b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\} = f^{-1}([y_{k-1}, y_k))$. Damit ist das Intervall $[a, b]$ in disjunkte Mengen $E_k$ unterteilt und es gilt $\bigcup_k E_k = [a, b]$.

Die Mengen $E_k$ können für einige $k$ auch leer sein, sollte $f$ Sprungstellen haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir aber die $y_k$'s unserer Partition so wählen, dass jedes $E_k \neq \emptyset$ ist. Dann können wir aus jeder nichtleeren Menge $E_k$ einen Punkt $c_k$ auswählen und die Summe $\sum f(c_k) \cdot (\text{Länge von } E_k)$ bilden. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\sum y_{k-1} \cdot (\text{Länge von } E_k) &\leq \sum f(c_k) \cdot (\text{Länge von } E_k)\\ &\leq \sum y_k \cdot (\text{Länge von } E_k)\end{aligned}$$

Die Differenz zweier solcher Summen ist beschränkt:

$$\left|\sum f(c_k) \cdot (\text{Länge von } E_k) - \sum f(\hat{c}_k) \cdot (\text{Länge von } E_k)\right| \leq \max_{k=1,\ldots,n} (y_k - y_{k-1}) \cdot (b - a)$$

Jetzt ist aber noch unklar, was genau die Länge von $E_k$ sein soll. Wenn es sich bei $E_k$ um ein Intervall handelt, soll die Länge von $E_k$ die Länge des Intervalls sein. Bei einer endlichen Vereinigung von disjunkten Intervallen soll die Länge von $E_k$ der Summe der einzelnen Intervalllängen entsprechen.
Aber die $E_k$'s können viel komplizierter sein. Man braucht nur an die Dirichlet-Funktion auf $[0, 1]$ zu denken, die den Wert 1 für rationale Zahlen und den Wert 0 für irrationale Zahlen annimmt. Hier müsste man die "Längen" der rationalen beziehungsweise irrationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ berechnen.

Wenn der Integralbegriff von Lebesgue nun Sinn machen und mächtiger als das Riemann-Integral sein soll, dann braucht man ein geeignetes Konzept für das Messen von "Längen" für eine möglichst große Familie von Mengen, was uns in die Maßtheorie führt.

## 5.2 Maße

Die Maßtheorie widmet sich grundsätzlich der Frage, welchen Mengen man in konsistenter Weise ein Maß beziehungsweise ein Integral zuordnen kann. Lebesgues Ziel war es, möglichst vielen, auch sehr komplizierten, Mengen, einen Inhalt zuordnen zu können, wobei wir im Ein-, Zwei- und Dreidimensionalen weiterhin (geometrische) Längen, Flächen und Volumina meinen.

Die wichtigsten Mengensysteme der Maßtheorie sind $\sigma$-Algebren. Diese dienen als Definitionsbereiche von Maßen.

**Definition 5.2.1.** *Sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von $X$. Man nennt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine $\sigma$-Algebra (über $X$), wenn gilt:*

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^{\mathsf{c}} \in \mathcal{E}$
3. *Für jede Folge $(E_n)$ von Mengen in $\mathcal{E}$ gilt, dass die abzählbare Vereinigung der Folgenglieder wieder in $\mathcal{E}$ liegt: $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{E}$.*

*Das Paar $(X, \mathcal{E})$ wird dann messbarer Raum genannt und Elemente von $\mathcal{E}$ heißen messbare Teilmengen von $X$.*

$\sigma$-Algebren sind insbesondere abgeschlossen unter allen endlichen Mengenoperationen. Das heißt, wenn $E_1$ und $E_2$ in $\mathcal{E}$ liegen, dann liegen auch $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = (E_1^{\mathsf{c}} \cup E_2^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$, $E_1 \setminus E_2$ und die symmetrische Mengendifferenz $E_1 \triangle E_2 := (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ in $\mathcal{E}$.

**Beispiel 5.2.2.**

1. *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind $\sigma$-Algebren über $X$.*
2. *Sei $X \neq \emptyset$ und $E \subset X$ eine beliebige Menge. Dann ist $\sigma(\{E\}) = \{\emptyset, X, E, E^{\mathsf{c}}\}$ eine $\sigma$-Algebra.*
3. *Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Die fünf möglichen $\sigma$-Algebren, die man auf $X$ bilden kann, sind: $\mathcal{E}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset, X, \{3\}\{1, 2\}, \}$, $\mathcal{E}_4 = \{\emptyset, X\{2\}, \{1, 3\}$ und $\mathcal{E}_5 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$. Das sind bereits alle $\sigma$-Algebren, denn würde eine $\sigma$-Algebra zwei zweielementige Teilmengen von $X$ enthalten, wäre sie gleich $\mathcal{P}(X)$.*
4. *Die Spur-$\sigma$-Algebra*
   *Sei $\emptyset \neq A \subset X$ und $\mathcal{E}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Die Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$, die durch*
   $$\mathcal{E} \cap A := \{E \cap A | E \in \mathcal{E}\}$$
   *definiert ist, ist eine $\sigma$-Algebra auf $A$.*
   *Wir überprüfen die drei Eigenschaften der Definition für die Spur-$\sigma$-Algebra:*

- *Es gilt, dass* $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{E} \cap A$.
- *Sei* $B \in \mathcal{E} \cap A$. *Dann existiert ein* $E \in \mathcal{E}$, *sodass* $B = E \cap A$. *Weiters gilt dann* $A \setminus B = A \setminus (E \cap A) = E^{\mathsf{c}} \cap A \in \mathcal{E} \cap A$.
- *Sei* $(B_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge in* $\mathcal{E} \cap A$. *Das heißt, es existiert eine Folge* $(E_n)_{n\geq 1}$ *in* $\mathcal{E}$, *sodass wir* $E_n \cap A = B_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *haben. Es folgt*

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} (E_n \cap A) = (\bigcup_{n\geq 1} E_n) \cap A \in \mathcal{E} \cap A.$$

Es gibt nur recht einfache $\sigma$-Algebren, die man direkt wie im obigen Beispiel aufschreiben kann. Vor allem, wenn wir unendliche Mengen betrachten, auf denen wir eine $\sigma$-Algebra angeben wollen, ist das im Allgemeinen nicht mehr explizit möglich. Dann gibt man meist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ an, die die $\sigma$-Algebra erzeugt.

**Satz 5.2.3.** *Sei* $I$ *eine Indexmenge und sei* $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{P}(X)$ *eine* $\sigma$*-Algebra auf* $X$ *für alle* $i \in I$. *Dann ist auch* $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ *eine* $\sigma$*-Algebra auf* $X$.

*Beweis.* Wir überprüfen wieder die drei Eigenschaften der Definition einer $\sigma$-Algebra:

- Da $\mathcal{E}_i$ für jedes $i \in I$ eine $\sigma$-Algebra ist, gilt, dass die leere Menge in jedem $\mathcal{E}_i$ enthalten ist: $\emptyset \in \mathcal{E}_i$. Es folgt $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- Wir betrachten ein $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt $F \in \mathcal{E}_i$ für alle $i \in I$. Für jedes $\mathcal{E}_i$ gilt auch $F^{\mathsf{c}} \in \mathcal{E}_i$ (da die $\mathcal{E}_i$'s alle $\sigma$-Algebren sind) und damit $F^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$.
- Sei $(F_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Dann folgt $F_n \in \mathcal{E}_i$ für $n \geq 1$ und für alle $i \in I$. Und da die $\mathcal{E}_i$'s alle $\sigma$-Algebren sind, haben wir $\bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{E}_i$ für alle $i \in I$ und somit auch $\bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{F}$.

□

Nun können wir die von einer Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ erzeugte $\sigma$-Algebra definieren.

**Definition 5.2.4.** *Sei* $\mathcal{A}$ *eine Teilmenge von* $\mathcal{P}(X)$. *Dann heißt die kleinste* $\sigma$*-Algebra auf* $X$, *die* $\mathcal{A}$ *enthält, die von* $\mathcal{A}$ *erzeugte* $\sigma$*-Algebra. Wir bezeichnen sie mit* $\sigma(\mathcal{A})$ *und wir nennen* $\mathcal{A}$ *einen Erzeuger der* $\sigma$*-Algebra.*

Was jetzt noch fehlt, ist zu zeigen, dass die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, auch existiert. Dazu bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_i$ $(i \in I)$ alle $\sigma$-Algebren auf $X$, die $\mathcal{A}$ enthalten. Dann haben wir zumindest $\mathcal{P}(X)$. Sei jetzt $\mathcal{C} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{B}_i$. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{C}$ dann eine $\sigma$-Algebra definiert und wegen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_i$ für alle $i \in I$ ist $\mathcal{C}$ eine $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.
Weil $\mathcal{C}$ Teilmenge aller $\sigma$-Algebren ist, die $\mathcal{A}$ enthalten, ist $\mathcal{C}$ die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

**Beispiel 5.2.5.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Die kleinste $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$, die alle offenen Teilmengen von $X$ enthält, heißt* ***Borel'sche $\sigma$-Algebra****. Die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ nennt man Borelmengen.*
*Maße, die auf $\mathcal{B}(X)$ definiert werden, heißen Borelmaße.*

*Besonders interessant sind $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Man kann zeigen, dass jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine Borelmenge ist, alle Intervalle in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind und für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ und $\mathcal{B} := \{\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k) : -\infty < a_k < b_k < \infty\}$ ist $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Außerdem sind abzählbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Borelmengen.*

Nun definieren wir den Maßbegriff.

**Definition 5.2.6.** *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ heißt Maß[2], falls gilt:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *$\sigma$- Additivität: Für jede Folge $(E_n)_{n\geq 1}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{E}$ gilt:*
$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$$

*Das Tripel $(X, \mathcal{E}, \mu)$ nennt man dann Maßraum. Maßräume sind die zentralen Objekte der Maß- und Integrationstheorie.*
*Weiters heißt $\mu$ endlich, falls $\mu(E) < \infty$ und $E \in \mathcal{E}$ gilt. $\mu$ heißt $\sigma$-endlich, falls es messbare Mengen $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ gibt, sodass $\bigcup_{n\geq 1} E_n = X$ und $\mu(E_n) < \infty \; \forall n$ gilt.*

Die wichtigste Eigenschaft des elementargeometrischen Volumenbegriffs soll die Additivität sein. Das heißt, das Volumen einer disjunkten, abzählbaren Vereinigung von Mengen soll die Summe der Volumina ihrer Teilmengen sein.

Von besonderer Bedeutung sind Mengen, deren Maß 0 ist. Sie sind in Bezug auf ihr Maß nicht von der leeren Menge zu unterscheiden. Sie sind deshalb so wichtig, weil für viele Sätze reicht, dass eine Eigenschaft **fast überall**, d.h. außer auf einer Nullmenge, gilt.

**Definition 5.2.7.** *Sei $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty)$ ein Maß auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{E})$. Dann nennt man $E \subset X$ eine $\mu$-Nullmenge, wenn $E \in \mathcal{E}$ und $\mu(E) = 0$ gilt.*

Man bezeichnet einen Maßraum als vollständig, wenn jede Teilmenge einer $\mu$-Nullmenge messbar ist und damit wieder eine $\mu$-Nullmenge ist. Folgende Definition beschreibt dies:

[2] Der Wert $\infty$ kann tatsächlich auch angenommen werden.

**Definition 5.2.8.** *Ein Maßraum $(X, \mathcal{E}, \mu)$ heißt vollständig, wenn aus $F \subset E \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E) = 0$ stets $F \in \mathcal{E}$ (auch mit $\mu(F) = 0$) folgt.*

Es gilt, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

**Beispiel 5.2.9.** *Das Dirac-Maß $\delta_x$ im Punkt $x \in X$ eines messbaren Raumes ist definiert als*

$$\delta_x(E) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \\ 0, & \text{falls } x \notin E \end{cases}$$

*Beim Dirac-Maß handelt es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß*[3]*, bei dem die Gesamtmasse in einem einzigen Punkt konzentriert ist. Dieses Maß entscheidet also, ob ein Punkt $x$ in der Menge $E$ liegt oder nicht. Es ist ein vollständiges, $\sigma$-endliches Maß.*

**Bemerkung 5.2.10.** *Für das Rechnen in $[0, \infty]$ gelten folgende Konventionen:*

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x/(\pm\infty) = 0$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty & x \in (0, +\infty] \\ 0 & x = 0 \\ \mp\infty & x \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

*Die Operationen $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$ und $\infty/\infty$ sind nicht definiert.*

### 5.2.1 Eigenschaften von Maßen

In diesem kurzen Absatz werden erste Eigenschaften von Maßen erwähnt.

**Satz 5.2.11.** *Sei $\mu$ ein Maß und seien $E, E_1, E_2, \ldots$ beliebige messbare Mengen in $\mathcal{E}$. Dann gilt:*

1. *Monotonie: Wenn $E_1 \subset E_2$, dann $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.*

2. *Wenn $E_1 \subset E_2$ und $\mu(E_1) < \infty$, dann gilt $\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1)$.*

[3]Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathcal{E})$, wenn $\mathbb{P}(X) = 1$ gilt und $\mathbb{P}$ $\sigma$-additiv ist.

*Beweis.* 1. Wenn $E_1$ Teilmenge von $E_2$ ist, so kann man $E_2$ als disjunkte Vereinigung von $E_1$ und $E_2 \setminus E_1$ schreiben: $E_2 = E_1 \dot\cup (E_2 \setminus E_1)$. Wir schließen nun $\mu(E_1) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2\ E_1) = \mu(E_2)$

2. Folgt wegen $\mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1)$ aus Punkt 1.

□

**Satz 5.2.12.** ***Stetigkeitseigenschaft in Bezug auf monotone Folgen***
*Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten:*

1. *Wenn $E_n$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{E}$ ist und $E_n \uparrow E$ gilt, dann folgt, dass auch $E \in \mathcal{E}$ und $\mu(E_n) \uparrow \mu(E)$.*

2. *Sei $E_n$ eine monoton fallende Folge in $\mathcal{E}$ mit $E_n \downarrow E$ und $\mu(E_1) < \infty$. Dann gilt, dass $\mu(E) \in \mathcal{E}$ und $\mu(E_n) \downarrow \mu(E)$.*

*Beweis.* 1. Wir definieren

$$E'_1 = E_1 \quad \text{und} \quad E'_n = E_n \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n-1}) = E_n \setminus E_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Die Mengen $E'_n$ sind dann paarweise disjunkt und wir haben

$$\bigcup_{n\geq 1} E'_n = \bigcup_{n\geq 1} E_n.$$

Dann liegt $E'_n$ in $\mathcal{E}$. Wir verwenden auch noch, dass $\bigcup_{k=1}^n E'_k = E_n$ ist, und es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\mu(E) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} E'_n) &= \sum_{k\geq 1} \mu(E'_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E'_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E'_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

2. Aus $E_n \downarrow E$ folgt, dass $(E_1 \setminus E_n) \uparrow (E_1 \setminus E)$ und aus Punkt 1. wissen wir, dass

$$\mu(E_1 \setminus E_n) \to \mu(E_1 \setminus E).$$

Da wir $E_n \subset E_1$, $E \subset E_1$ und $\mu(E_1) < \infty$ haben, gilt

$$\mu(E_1) - \mu(E_n) \to \mu(E_1) - \mu(E).$$

□

## 5.3 Das Lebesgue-Maß

Das Lebesgue-Maß verallgemeinert den Begriff des n-dimensionalen Volumens. Das heißt in $\mathbb{R}$ sprechen wir weiterhin von Längen, im $\mathbb{R}^2$ von Flächen, in $\mathbb{R}^3$ von Volumina und im $\mathbb{R}^n$ schließlich vom n-dimensionalen Volumen. Für $n \geq 2$ sprechen wir nicht von Intervallen sondern von Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$, die als kartesisches Produkt von beschränkten Intervallen $I_1, \dots, I_n$ definiert sind und berechnen deren Fläche beziehungsweise Volumen mit $\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Intervalle offen, halboffen oder abgeschlossen sind.

Wir wollen uns daran erinnern, dass jede Menge $E \subseteq \mathbb{R}$ von einer abzählbaren Familie von offenen Intervallen überdeckt werden kann, beziehungsweise, dass es viele solche Überdeckungen gibt. Die Längen davon können ganz einfach berechnet werden, indem man die einzelnen Intervalllängen addiert. Das Infimum davon ist das äußere Lebesgue-Maß.
Im folgenden bezeichnet $l(I)$ die Länge des Intervalls $I$.

**Definition 5.3.1.** *Sei $E \subseteq [a, b]$. Das äußere Lebesgue-Maß von $E$ ist definiert als*

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) : I_i \text{ offene Intervalle}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

Die Intervalle $I_i$ bilden eine offene Überdeckung von $E$ und $\lambda^*(E)$ ist das Infimum (des Volumens) aller möglichen Überdeckungen.

**Satz 5.3.2.** *Das äußere Lebesgue-Maß ist $\sigma$-subadditiv - aber nicht $\sigma$-additiv. Das heißt: Für abzählbare Folgen $(E_k)$ gilt:*

$$\lambda^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k)$$

*Beweis.* Angenommen die rechte Seite konvergiert. (Sonst ist nichts zu zeigen).
Sei $E_k$ beliebig und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für jedes $E_k$ offene Überdeckungen $E_k \in \bigcup_i I_{ik}$ mit der Infimumseigenschaft $\lambda^*(E_k) \leq \sum_i l(I_{ik}) < \lambda^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$.
Die Familie offener Intervalle $I_{ik}$ ist für $i = 1, 2, \cdots$ eine Überdeckung von $\bigcup E_k$ und es gilt

$$\lambda^*(\bigcup E_k) \leq \sum_k \sum_i l(I_{ik}) < \sum_k \lambda^*(E_k) + \epsilon$$

und somit folgt die Subadditivität.

$$\lambda^*(\bigcup E_k) \leq \sum \lambda^*(E_k)$$

□

Man könnte nun versucht sein, dass innere Lebesgue-Maß zu definieren, indem man einfach den Prozess umkehrt und das Supremum über alle abzählbaren Überdeckungen von $E$ betrachtet. Das führt aber nicht zum Ziel. Lebesgue definierte das innere Lebesgue-Maß wie folgt:

**Definition 5.3.3.** *Sei $E \subseteq [a,b]$. Das innere Lebesgue-Maß ist definiert als*

$$\lambda_*(E) := (b-a) - \lambda^*([a,b] \setminus E)$$

Schlussendlich definierte Lebesgue Messbarkeit einer Menge.

**Definition 5.3.4.** ***Das Lebesgue-Maß*** *Sei $E \subseteq [a,b]$. Wir sagen $E$ ist lebesgue-messbar, falls $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$ gilt und bezeichnen mit*

$$\lambda(E) = \lambda_*(E) = \lambda^*(E)$$

*das Lebesgue-Maß.*

Dass dies tatsächlich ein Maß ergibt kann in [2][Kapitel 5] nachgelesen werden. Lebesgue führte seinen Maßbegriff für beschränkte Mengen genau so ein. Es stellte sich aber heraus, dass es noch einen anderen - womöglich einfacheren - Weg gibt, da Lebesgue-Maß einzuführen, der uns auch erlaubt, zu entscheiden, wann eine unbeschränkte Menge lebesgue-messbar ist. Constantin Carathéodory[4] formulierte die Definition der Messbarkeit einer Menge um.

**Definition 5.3.5.** ***Carathéodorys Bedingung***
*Eine Menge $E$ ist genau dann lebesgue-messbar, wenn für jede Menge $X$ mit endlichem äußeren Maß gilt, dass*

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \setminus E) + \lambda^*(X \cap E)$$

*Wenn $E$ messbar ist, dann bezeichnen wir das Maß von $E$ mit $\lambda(E) = \lambda^*(E)$.*

Die Menge $E$ wird also in zwei Teile geteilt. In die Menge der Punkte, die zu $X$ gehören, aber nicht zu $E$: $X \setminus E$ und $X \cap E$, die gemeinsamen Punkte und wir sagen, $E$ ist messbar, wenn $E$ eine Menge $X$ in diese zwei Teilmengen additiv 'zerschneidet'. Für weiter Details siehe auch [2, Kapitel 5.3].

Das Lebesgue-Maß hat einige nützliche Eigenschaften. Es ist translationsinvariant und alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind lebesgue-messbar. Ist eine Menge $E$ lebesgue-messbar, so ist auch ihr Komplement $E^c$ lebesgue-messbar. Ebenso sind abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte messbarer Mengen wieder messbar.

[4] Carathéodory (1873 - 1950) war ein Mathematiker mit griechischen Wurzeln, der in Berlin und Göttingen studierte. Sein mathematisches Forschen ist geprägt durch Vielseitigkeit. Er widmete sich hauptsächlich der Maßtheorie, Variationsrechnung und reellen Funktionen.

Auch die Mengendifferenz zweier lebesgue-messbarer Mengen ist wieder lebesgue-messbar und abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben Lebesgue-Maß 0.

Im $\mathbb{R}^n$ sind fast alle Mengen messbar. Man muss sich schon besonders anstrengen, um etwas nicht Lebesgue-messbares zu bekommen, da sich nicht lebesgue-messbare Mengen nur mit Hilfe des Auswahlaxioms konstruieren lassen.

**Beispiel 5.3.6.** *Um eine nicht lebesgue-messbare Menge zu konstruieren, müssen wir das Auswahlaxiom*[5] *akzeptieren.*
*Wir betrachten das Intervall* $[0, 1]$ *auf dem wir folgende Äquivalenzrelation definieren*

$$x \sim y \quad \text{falls} \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

*Nun konstruieren wir eine Menge* $A$*, indem wir aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten zu* $A$ *hinzufügen. Die so definierte Menge* $A \subset [0, 1]$ *ist nicht lebesgue-messbar.*

*Wir zeigen dies indirekt.*
*Angenommen* $A$ *wäre lebesgue-messbar und hat Lebesgue-Maß* $\lambda(A) = a$*.*
*Für* $r \in \mathbb{Q}$ *definieren wir die Menge*

$$S_r = \{x + r : x \in A\}.$$

*Da das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, ist auch* $\lambda(S_r) = a$*.*

*Außerdem gilt, dass*

$$S_r \cap S_{r'} = \emptyset \qquad \text{falls} \;\; r \neq r'.$$

*Denn wäre* $\underbrace{x + r}_{\in S_r} = \underbrace{y + r'}_{\in S_{r'}}$*, würde folgen, dass* $x - y = r' - r \in \mathbb{Q}$*. Das ist ein Widerspruch, da sonst* $x$ *in Relation mit* $y$ *wäre.*

*Jetzt unterscheiden wir noch 2 Fälle für die Werte von* $a$*:*
*Wenn* $a = 0$ *ist, dann folgt*

$$\lambda([0, 1]) = 0 \quad \lightning$$

*Wenn* $a > 0$ *ist, dann folgt*

$$2 = \lambda([0, 2]) \geq \lambda(\bigcup_{r \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])} S_r) = \sum_{r \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])} \lambda(S_r) = \infty \quad \lightning$$

*Somit ist* $A$ *nicht lebesgue-messbar.*

[5] Es handelt sich hierbei um ein Axiom aus der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es sagt im Grunde aus, dass zu jeder Familie von nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion existiert. Diese Funktion ordnet jeder diesen nichtleeren Mengen eines ihrer Element zu - ein Element wird also ausgewählt. Das Auswahlaxiom ist für unendliche Mengen spannend, da man die Aussage für endliche Mengen auch ohne das Axiom zeigen kann. Für nähere Informationen siehe zum Beispiel Per Martin-Löf *100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?*

## 5.4 Lebesgue-Messbare Funktionen

In diesem Abschnitt übertragen wir den Maßbegriff von Mengen auf Funktionen. Die messbaren Funktionen werden dann unsere Kandidaten für die Lebesgue-integrierbaren Funktionen sein.

**Definition 5.4.1.** *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt messbar, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X : f(x) > c\}$ messbar ist.*

**Bemerkung 5.4.2.** *Ebenso gut hätte man fordern können, dass die Mengen*

$$\{x \in X : f(x) \geq c\}$$
$$\{x \in X : f(x) \geq c\}$$
$$\{x \in X : f(x) \leq c\}$$

*für alle $c \in \mathbb{R}$ messbar sein sollen. Denn wir haben*

$$\{x : f(x) \geq c\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x : f(x) > c - 1/n\} \quad \{x : f(x) < c\} = X \setminus \{x : f(x) \geq c\}$$
$$\{x : f(x) \leq c\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x : f(x) < c + 1/n\} \quad \{x : f(x) > c\} = X \setminus \{x : f(x) \leq c\}$$

Die Urbilder von Funktionen haben zeigen oft ein 'angenehmeres' Verhalten, als die Bilder. Zum Beispiel gilt für alle Teilmengen $E, F \subset \mathbb{R}$

$$f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$$

und für $(E_i)_{i \in I}$, wobei $I$ eine Indexmenge darstellt, haben wir

$$f^{-1}(\bigcap_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(E_i)$$

und

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(E_i).$$

Die Beweise können in [4, Chapter I] nachgelesen werden.

**Satz 5.4.3.** *Messbare Funktionen sind abgeschlossen unter $+, -, \cdot . \div$ und Grenzwerte (sofern sie existieren) einer messbaren Funktionenfolge sind wieder messbar. Außerdem sind stetige Funktionen messbar.*

Für einen Beweis des Satzes sei wieder an [4, Chapter III. § 11] verwiesen.

**Lemma 5.4.4.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die auf $[a,b]$ fast überall gegen $f$ konvergiert:* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Dann ist $f$ messbar auf $[a,b]$.*

*Beweis.* Sei $N = \{x | \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ die Menge aller Punkte, für die $f_n$ nicht gegen $f$ konvergiert. Diese Menge hat Lebesgue-Maß $\lambda(N) = 0$. Dann betrachten wir die messbare Funktion

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{auf } N^{\mathsf{c}} \\ 0 & \text{auf } N. \end{cases}$$

Außerdem sei

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{auf } N^{\mathsf{c}} \\ 0 & \text{auf } N. \end{cases}$$

Jetzt haben wir, dass $F(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$ und da $F$ messbar ist, folgt, dass auch $f$ messbar ist und es gilt $F = f$ fast überall. $\square$

## 5.5 Das Lebesgue-Integral

Wir sind jetzt so weit, dass wir das Lebesgue-Integral definieren können. Zuerst wird es für einfache Funktionen eingeführt, dann für messbare Funktionen.

### 5.5.1 Das Lebesgue-Integral von Treppenfunktionen

**Definition 5.5.1.** *Eine Funktion $s : (X, \mathcal{E}, \lambda) \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion (oder einfache Funktion), falls sie endlich viele Werte annimmt. Jede Treppenfunktion hat eine Darstellung der Form*

$$s(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{E_k}(x)$$

*wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $E_k$ beliebige Mengen sind.*
*Eine Treppenfunktion $s$ ist genau dann messbar, wenn die Mengen $E_k$ messbar sind.*

*Die Funktion $\mathbb{1}_{E_k}(x)$ bezeichnet die Indikatorfunktion (oder charakteristische Funktion) und ist definiert durch*

$$\mathbb{1}_{E_k}(x) \begin{cases} 1, & \textit{falls} \;\; x \in E_k \\ 0, & \textit{falls} \;\; x \notin E_k \end{cases}$$

Die Darstellung von $s$ ist nicht eindeutig. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) + \mathbb{1}_{[1,3]}(x) &= \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + 2 \cdot \mathbb{1}_{[1,2]}(x) + \mathbb{1}_{(2,3]}(x) \\ &= 0 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)\cup(3,\infty)}(x) + \mathbb{1}_{[0,1)\cup(2,3]}(x) + 2 \cdot \mathbb{1}_{[1,2]}(x) \end{aligned}$$

Es gibt aber immer eine eindeutige Darstellung der Form

$$s(x) := \sum_{k=1}^{n} l_k \mathbb{1}_{E_k}(x),$$

mit $l_k \neq l_j$ für $k \neq j$ und paarweise disjunkten, messbaren Mengen $E_k$ und der zusätzlichen Bedingung, dass die Vereinigung der Mengen $E_k$ der Definitionsbereich von $f$ ist. Man nennt sie Normaldarstellung und verwenden diese ab jetzt.

Jetzt können wir das Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen definieren.
Dafür sei $l = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = L$ eine Zerlegung der $y$-Achse. Für jeden horizontalen Streifen $l_k \leq f(x) \leq l_{k+1}$ betrachten wir die Punkte, die im Definitionsbereich von $f(x)$ liegen:

$$E_k = \{x | l_k \leq f(x) \leq l_{k+1}\}$$

.

**Definition 5.5.2.** ***Das Lebesgue-Integral***
*Sei*

$$s = \sum_{k=1}^{n} l_k \mathbb{1}_{E_k}$$

*eine Treppenfunktion. Wir definieren das Lebesgue-Integral von s über einer messbaren Menge E*

$$L\int_E s(x)d\lambda(x) = L\int_E s(x)d\lambda = \sum_{k=1}^{n} l_k \lambda(E_k \cap E)$$

**Satz 5.5.3.** *Monotone Konvergenz für Treppenfunktionen*
*Sei $s_n(x)$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Treppenfunktionen. Wenn es eine Zahl a gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ $L\int_E s_n(x)d\lambda < a$ gilt, dann konvergiert $s_n$ fast überall gegen eine Funktion $f$, die nur endliche Werte annimmt.*

*Beweis.* Jede beschränkte, monotone Folge konvergiert. Daher betrachten wir die Mengen $U = \{x \in E | (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ist unbeschränkt}\}$ und wollen zeigen, dass $U$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei $\epsilon > 0$ und

$$E_n = \{x \in E | s_n(x) > \frac{a}{\epsilon}\}$$

Da $s_n$ nichtnegativ ist, haben wir

$$\frac{a}{\epsilon}\lambda(E_n) \leq L\int_{E_n} s_n(x)d\lambda \leq L\int_E s_n(x)d\lambda < a,$$

also $\lambda(E_n) < \epsilon$. Da $(s_n)$ monoton wächst, liegt $E_1$ in $E_2$, ... und $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Außerdem gilt

$$\lambda(U) \leq \lambda\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) \leq \epsilon,$$

wobei die Gleichheit aus Theorem A.2.1 folgt. und da die Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ stimmt, haben wir $\lambda(U) = 0$. □

### 5.5.2 Das Lebesgue-Integral von nichtnegativen, messbaren Funktionen

Wir definieren das Lebesgue-Integral zunächst nur nichtnegative Funktionen. Wenn wir Funktionen integrieren wollen, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen, dann können wir diese Funktionen als Differenz zweier nichtnegativer Funktionen schreiben:

$$
\begin{aligned}
f &= f^+ - f^- \quad \text{mit} \\
f^+(x) &= \max(0, f(x)) \\
f^-(x) &= \max(-f(x), 0)
\end{aligned}
$$

Der nächste Satz ist besonders wichtig um das Lebesgue-Integrals für nichtnegative, messbare Funktionen einführen zu können. Man kann eine Funktion $f : X \to [0, \infty)$ durch Treppenfunktionen approximieren.

**Satz 5.5.4.** *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $s_n : X \to [0, \infty)$, die punktweise gegen $f$ konvergiert, das heißt*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

*Beweis.* Wir approximieren $f$ im $n$-ten Schritt durch eine Treppenfunktion $s_n$. Die Werte von $s_n$ sind rationale Zahlen der Form $\frac{k}{2^n}$ mit $0 \leq k \leq n2^n$. Das sind nur endlich viele Zahlen.
Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ gilt entweder $c \geq n$ oder es existiert ein eindeutiges $k$ zwischen 0 und $n2^n - 1$ mit

$$\frac{k}{2^n} \leq c < \frac{k+1}{2^n}$$

Die Funktion $s_n$,

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \quad \text{mit } 2 \leq n2^n - 1 \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist somit wohldefiniert und messbar, da die Mengen $\{x \in X | \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$ messbar sind und strebt monoton gegen $f$. □

Das Lebesgue-Integral ist dann folgendermaßen definiert.

**Definition 5.5.5.** *Sei $E$ eine messbare Menge und $f$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Das Lebesgue-Integral von $f$ über $E$ ist*

$$L \int_E f(x) d\lambda := \sup_{s \leq f} L \int_E s(x) d\lambda,$$

*wobei $s$ das Supremum aller Treppenfunktionen, für die $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in E$ ist.*

*Nimmt $f$ auch negative Werte an, so sagt man, $f$ ist integrierbar wenn $f$ messbar ist und*

$$L \int_E f^+(x) d\lambda \qquad \textit{und} \qquad L \int_E f^-(x) d\lambda$$

*endlich sind.*

*Ist* $L\int_E f^+(x)d\lambda$ *oder* $L\int_E f^-(x)d\lambda$ *endlich, so definiert man*

$$L\int_E f(d)d\lambda = L\int_E f^+(x)d\lambda - L\int_E f^-(x)d\lambda$$

*Das heißt, ein Integral kann den Wert* $\pm\infty$ *annehmen, wenn die Funktion selbst nicht integrierbar ist - das kennen wir auch von divergenten Folgen, die sich* $\pm\infty$ *annähern. Diese Folgen konvergieren nicht, aber die Information, dass die Folgenglieder beliebig groß beziehungsweise klein werden ist oft nützlich.*

*Sind* $L\int_E f^+(x)d\lambda$ *und* $L\int_E f^-(x)d\lambda$ *nicht endlich, so ist das Lebesgue-Integral nicht definiert.*

### 5.5.3 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

In diesem Abschnitt wird verdeutlicht, welche Stärken der Integralbegriff von Lebesgue aufweist.

**Theorem 5.5.6.** *Seien* $s_1$ *und* $s_2$ *Treppenfunktionen,* $c \in \mathbb{R}$ *und* $E = E_1 \cup E_2$ *eine messbare Menge, wobei* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*. Dann gelten*

1. $L\int_E cs_1(x)d\lambda = c\int_E s_1(x)d\lambda$
2. $L\int_E (s_1(x) + s_2(x))d\lambda = L\int_E s_1(x)d\lambda + L\int_E s_2(x)d\lambda$
3. *Wenn* $s_1(x) \leq s_2(x)$ *für alle* $x \in E$ *gilt, dann ist auch* $L\int_E s_1(x)d\lambda \leq L\int_E s_2(x)d\lambda$
4. $L\int_E s_1(x)d\lambda = L\int_{E_1} s_1(x)d\lambda + L\int_{E_2} s_1(x)d\lambda$

*Beweis.* Wir zeigen den zweiten Punkt.
Sei

$$s_1 + s_2 = \sum_{i,j}(l_i + k_j)\mathbb{1}_{E_i \cap F_j}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} L\int_E (s_1(x) + s_2(x))d\lambda &= \sum_{i,j}(l_i + k_j)\lambda(E_i \cap F_j \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{m} \lambda(E_i \cap F_j \cap E) + \sum_{j=1}^{m} k_j \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i \cap F_j \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i\lambda(E_i \cap E) + \sum_{j=1}^{m} k_j\lambda(F_j \cap E) \\ &= L\int_E s_1(x)d\lambda + L\int_E s_2(x)d\lambda. \end{aligned}$$

Die restlichen Punkte können ebenfalls durch Nachrechnen gezeigt werden beziehungsweise in [3, Kapitel 6.2] nachgelesen werden. □

Eine Äquivalenz, die wir für das Riemann-Integral nicht hatten, die aber für das Lebesgue-Integral gilt, ist folgende.

**Lemma 5.5.7.** *Eine Funktion $f$ ist genau dann lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ lebesgue-integrierbar ist.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$): Da wir davon ausgehen, dass $f$ integrierbar ist, haben wir

$$L\int_E f^+(x)d\lambda < \infty \qquad \text{und} \qquad L\int f^-(x)d\lambda < \infty.$$

und wir schließen

$$L\int_E |f(x)|d\lambda = L\int_E f^+(x)d\lambda + L\int_E f^-(x)d\lambda < \infty.$$

Somit ist $|f|$ lebesgue-integrierbar.

($\Leftarrow$): Da $L\int_E |f(x)|d\lambda < \infty$ ist und

$$L\int_E |f(x)|d\lambda = L\int_E f^+(x)d\lambda + L\int f^-(x)d\lambda.$$

sind sowohl $L\int_E f^+(x)d\lambda$ und $L\int_E f^-(x)d\lambda$ endlich und $f$ ist lebesgue-integrierbar. □

**Lemma 5.5.8.** *Sei $f$ lebesgue-integrierbar und $E$ eine messbare Menge. Dann gilt*

$$\left|L\int_E f(x)d\lambda\right| \leq L\int_E |f(x)|d\lambda$$

*Beweis.* Da $f$ integrierbar ist und $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned}\left|L\int_E f(x)d\lambda\right| &= \left|\int_E f^+(x)d\lambda - \int_E f^-(x)d\lambda\right| \leq \\ &\leq L\int_E f^+(x)d\lambda + \int_E f^-(x)d\lambda = L\int_E |f(x)|d\lambda\end{aligned}$$

□

**Satz 5.5.9.** *Seien $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f = g$ fast überall*[6]*. Dann gelten:*

[6] siehe Definition 5.2.7

- *$f$ ist messbar, genau dann, wenn $g$ messbar ist.*
- *$L\int f(x)d\lambda)$ existiert genau dann, wenn $L\int g(x)d\lambda$ existiert.*
- *Existiert eines der beiden Integrale, so ist für jede messbare Menge $E$*

$$L\int_E f(x)d\lambda = L\int_E g(x)d\lambda$$

*Beweis.*
- Die Mengen $\{x \in X | f(x) > c\}$ und $\{x \in X | g(x) > c\}$ unterscheiden sich höchstens um eine Nullmenge: $N = \{x\ X | f(x) \neq g(x)\}$ mit $\lambda(N) = 0$.

  Das heißt, wir haben

  $$\{x \in X | g(x) > c\} = \underbrace{(\{x \in X | f(x) > c\} \cap \{N^c\})}_{f=g} \cup \underbrace{(\{x \in X | g(x) > c\} \cap N)}_{f\neq g}$$

  und es gilt

  $$\lambda(\{x \in X | g(x) > c\} \cap N) = 0,$$

  weil $\{x \in X | g(x) > c\} \cap N \subseteq N$ und $\lambda(N) = 0$.
- Das Integral von $f$ existiert, falls $\int f^+(x)d\lambda < \infty$ oder $\int f^-(x)d\lambda < \infty$ ist und f ist integrierbar, falls beide endlich sind. Der Rest folgt, weil

  $$\begin{aligned} L\int g^\pm(x)d\lambda &= L\int_{\{x\in X|f(x)=g(x)\}} g^\pm(x)d\lambda + L\int_{\{x\in X|f(x)\neq g(x)} g^\pm(x)d\lambda \\ &= L\int_{\{x\in X|f(x)=g(x)} f^\pm(x)d\lambda + 0 \\ &= L\int f^\pm(x)d\lambda \end{aligned}$$

- Man betrachte nun noch $f\mathbb{1}_E$ und $g\mathbb{1}_E$, dann folgt auch der letzte Punkt.

□

**Lemma 5.5.10.** *Sei $E$ eine messbare Menge und $f$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann gilt: $L\int_E |f(x)|d\lambda = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.*

*Beweis.* Wir nehmen zuerst an, dass $L\int_E f(x)d\lambda = 0$. Wir definieren

$$E_n = \{x \in E | f(x) > \frac{1}{n}\}$$

Da $f$ nichtnegativ ist, haben wir

$$0 = L\int_E f(x)d\lambda = L\int_{E_n} f(x)d\lambda \geq \frac{1}{n}\lambda(E_n)$$

und daher $\lambda(E_n) = 0$. Wir wenden nun Satz A.2.1 an, um

$$\lambda(\{x \in E | f(x) > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0$$

zu erhalten.

Die andere Richtung folgt aus Satz 5.5.9. □

**Beispiel 5.5.11.** *Das einfachste Beispiel einer nicht riemann-integrierbaren Funktion, die aber lebesgue-integrierbar ist, ist die Dirichletfunktion.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

*Der Wert des Integrals über $[a, b]$ ist*

$$L\int_a^b f(x)\ d\lambda = 1 \cdot \underbrace{\lambda([a, b] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + 0 \cdot \lambda([a, b] \cap \mathbb{Q}^c) = 0.$$

**Satz 5.5.12.** *Stetige Funktionen, die auf messbaren Mengen definiert sind, sind lebesgue-messbar.*[7]

*Beweis.* Sei $f$ eine stetige Funktion. Die Urbilder von offenen Mengen sind dann wieder offen. Alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ lassen sich als abzählbare Vereinigung von disjunkten, offenen Intervallen schreiben und diese sind lebesgue-messbar.

Wir betrachten also

$$A = f^{-1}((c, \infty)) = \{x \in E : f(x) > c\}.$$

Ist $A = \emptyset$ sind wir fertig.
Sei also $A \neq \emptyset$. Weiters sei $\delta(x) > 0$ und wir schauen uns für jedes $x \in A$ das Intervall $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ an. Wenn $z$ in diesem Intervall liegt und $f(z) > c$ ist, dann gilt

$$A = \bigcup_{x\in A} \big((x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap E\big) = \Big(\bigcup_{x\in A} (x - \delta(x), x + \delta(x))\Big) \cap E$$

und haben gezeigt, dass stetige Funktionen lebesgue-integrierbar sind. □

[7] vgl. Satz 3.1.5

**Satz 5.5.13.** *Alle riemann-integrierbaren Funktionen sind auch lebesgue-integrierbar und beide Integrale liefern den selben Wert.*

$$R\int_a^b f(x)dx = L\int_a^b f(x)d\lambda$$

*Beweis.* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ riemann-integrierbar. Wir wählen nun Folgen von Treppenfunktionen $(s_n)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $x \in [a,b]$

$$s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$$

und

$$R\int_a^b s_n(x)dx \uparrow R\int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad R\int_a^b t_n(x)dx \downarrow R\int_a^b f(x)dx$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Funktionen $s_n$ und $t_n$ monoton wachsend beziehungsweise fallend mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ sind. Außerdem haben wir $s_1 \leq s \leq f \leq t \leq t_1$.
Die Riemann-Integrale von Treppenfunktionen stimmen mit den Lebesgue-Integralen von Treppenfunktionen überein, da

$$L\int_a^b |t_n(x) - s_n(x)|d\lambda = R\int_a^b t_n(x) - s_n(x)dx \to R\int_a^b f(x)dx - R\int_a^b f(x)dx = 0$$

für $n \to \infty$.
Nun verwenden wir einen Grenzwertsatz, der erst später formuliert und bewiesen wird, den Satz über Dominierte Konvergenz 5.7.3:

$$L\int_a^b |t_n(x) - s_n(x)|d\lambda \to L\int_a^b |t - s|d\lambda$$

Von der obigen Gleichung erhalten wir $L\int_a^b |t(x) - s(x)|d\lambda = 0$ und damit $s = t$ fast überall. Da $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ haben wir $f(x) = s(x) = t(x)$ fast überall, was bedeutet, dass $f$ lebesgue-messbar ist und

$$L\int_a^b f(x)d\lambda = L\int_a^b t(x)d\lambda = \lim_{n\to\infty} L\int_a^b t_n(x)d\lambda = \lim_{n\to\infty} R\int_a^b t_n(x)dx = R\int_a^b f(x)dx$$

□

**Bemerkung 5.5.14.** *Vorsicht bei obigen Satz ist geboten, wenn man uneigentliche Riemann-Integrale betrachtet. Zum Beispiel ist*

$$R\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{a\downarrow 0, b\uparrow\infty} R\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

*keinesfalls als Lebesgue-Integral zu interpretieren, da*

$$L\int_0^\infty (\frac{\sin(x)}{x})^{\pm}d\lambda = \infty$$

*und daher nicht definiert ist. Wenn das uneigentliche Integral also im Riemann'schen Sinne exisitiert, braucht dies nicht notwendigerweise auch ein Lebesgue-Integral zu sein.*

## 5.6 Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit

Mit der Integrationstheorie von Lebesgue ist es nun möglich, ein Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit anzugeben.

**Satz 5.6.1.** *Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesgue-Nullmenge ist.*

*Das sind zum Beispiel monotone Funktionen.*

*Beweis.* Sei $f$ beschränkt mit $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$.
Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [a,b]$ definieren wir die Oszillation von $f$ in einer $\epsilon$-Umgebung von $x_0$:

$$\mathcal{O}(f, x_0, \epsilon) = \sup_{x,y \in [a,b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} |f(x) - f(y)| \geq 0$$

Dann ist $\epsilon \mapsto \mathcal{O}(f, x_0, \epsilon)$ eine monoton wachsende Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ und damit definieren wir die Oszillation von $f$ an der Stelle $x_0 \in [a,b]$ mit

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(f, x_0, \epsilon) = \mathcal{O}(f, x_0) \geq 0.$$

$f$ ist stetig in $x_0$ genau dann, wenn $\mathcal{O}(f, x_0) = 0$.
Wir definieren nun die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ (die ziemlich kompliziert werden kann). Für $\epsilon > 0$ sei

$$A_\epsilon := \{x_0 \in [a,b] : \mathcal{O}(f, x_0) \geq \epsilon\}.$$

Wir zeigen im nächsten Lemma, dass $A_\epsilon$ kompakt ist.
Die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ bezeichnen wir mit

$$D_f := \{x_0 \in [a,b] : \mathcal{O}(f, x_0) > 0\}$$

Die Mengen $A_\epsilon$ sind geschachtelt. Also können wir $D_f$ umschreiben

$$D_f = \bigcup_{\epsilon > 0} A_\epsilon = \bigcup_{n \geq 1} A_{\frac{1}{n}}$$

Das funktioniert, weil wir $A_\epsilon \supseteq A_{\epsilon'}$ für $0 < \epsilon < \epsilon'$ haben.
Jetzt nehmen wir an, $f$ wäre riemann-integrierbar. Wenn $\lambda(A_{\frac{1}{n}}) = 0$ für jedes $n \geq 1$ gilt, dann haben wir auch $\lambda(D_f) = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda(D_f) &= \lambda(A_1 \cup (A_{\frac{1}{2}} \setminus A_1) \cup (A_{\frac{1}{3}} \setminus A_{\frac{1}{2}}) \cup \dots) \\ &= \lambda(A_1) + \sum_{n \geq 1} \underbrace{\lambda(A_{\frac{1}{n+1}} - A_{\frac{1}{n}})}_{\leq \lambda(A_{\frac{1}{n+1}})} = 0\end{aligned}$$

Nun sei $\epsilon > 0$ beliebig und wir wählen eine Partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b$ mit $O(f) - U(f) < \frac{\epsilon}{n}$.
Wir wollen die Menge $A_{\frac{1}{n}}$ mithilfe der Partition überdecken.

Wenn $(x_{k-1}, x_k) \cap A_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$, dann folgt

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq \frac{1}{n}$$

und

$$\frac{1}{n} \sum (x_k - x_{k-1}) \leq O(f) - U(f) \leq \frac{\epsilon}{n}.$$

Das bedeutet, dass $A_{\frac{1}{n}}$ mit Länge $\epsilon$ überdeckt werden kann. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda(A_{\frac{1}{n}}) = 0$.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $\lambda(D_f) = 0$ ist. Wir wählen $\epsilon > 0$. Da $A_\epsilon \subset D_f$ ist, folgt $\lambda(A_\epsilon) = 0$. Das bedeutet, dass man $A_\epsilon$ mit einer abzählbaren Familie von offenen Intervallen überdecken kann, wobei die Summe der Längen kleiner als $\epsilon$ ist.

Da $A_\epsilon$ kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung von Intervallen $I_1, \ldots, I_p$ von $A_\epsilon$, deren Längen aufsummiert auch kleiner als $\epsilon$ sind.

Denn die Menge $J = [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ hat die folgende Eigenschaft: Wenn $y \in J$, dann folgt, dass $y \notin A_\epsilon$.

Das bedeutet, zentriert an jedem Punkt $y \in J$ können wir ein offenes Intervall $J(y)$ mit positiver Länge finden, sodass

$$\sup_{z_1, z_2 \in J} |f(z_1) - f(z_2)| \leq \epsilon$$

finden. Es gilt $J \subset \bigcup_{y \in J} J(y)$, es existiert also eine endliche Teilüberdeckung $I_{p+1}, \ldots, I_{p+q}$.
Wir nehmen die Endpunkte von $I_{p+1}, \ldots, I_{p+q}$ und partitionieren damit $[a, b]$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} O(f) - U(f) &= \sum (x_k - x_{k-1})(\sup f - \inf f) \\ &\leq 2M \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda(I_k)}_{\leq \epsilon} + \epsilon \underbrace{\sum_{k=p+1}^{p+q} (x_k - x_{k-1})}_{\leq b-a} \\ &\leq \epsilon(2M + b - a) \end{aligned}$$

Die Beweisidee der Rückrichtung ist folgende: Wir wollen eine Partition von $[a, b]$, sodass die Oszillation klein ist. Wenn die Oszillation aber groß wäre, dann wissen wir, dass sie höchstens $2M$ sein kann. □

Wir verwendeten, dass $A_\epsilon$ kompakt ist. Das beweisen wir im nächsten Lemma.

**Lemma 5.6.2.** *Die Menge $A_\epsilon$ ist kompakt.*

*Beweis.* Sei $(x_n)_n \in A_\epsilon$, sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Angenommen $x \notin A_\epsilon$. Dann ist $\mathcal{O}(f, x) = \epsilon - \delta$ für $\delta \in (0, \epsilon]$.

Jetzt wählen wir ein $r \in (0, 1)$ mit $\mathcal{O}(f, x, r) < \epsilon - \frac{\delta}{2}$ und ein $n_0 \geq 1$ mit $|x_{n_0} - x| < \frac{r}{2}$.

Wir schauen uns die Menge $[a, b] \cap [x_{n_0} - \frac{r}{2}, x_{n_0} + \frac{r}{2}]$ an. Für alle $x'$ und $x''$, die darin enthalten sind, ist

$$\begin{aligned} |x' - x| &\leq |x' - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |x'' - x| &\leq |x'' - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$\epsilon < \mathcal{O}(f, x_{n_0}, \frac{r}{2}) \leq \mathcal{O}(f, x, r) < \epsilon. \qquad ↯$$

Ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $x \notin A_\epsilon$. Daher ist $A_\epsilon$ abgeschlossen und wegen $A_\epsilon \subset [a, b]$ auch beschränkt und somit kompakt. □

## 5.7 Grenzwertsätze

Abschließend werden in diesem Kapitel noch drei Grenzwertsätze für das Lebesgue-Integral formuliert, die die Stärke des Integralbegriffs veranschaulichen.

Wir beginnen mit dem Satz der monotonen Konvergenz. Manchmal wird er auch als Satz von Beppo Levi bezeichnet. Wir werden über das Intervall $[0,1]$ integrieren, aber die Sätze stimmen für beliebige Integrationsbereiche, solange die Mengen $E$, über die man integriert, messbar sind. Selbst Integrationsbereiche mit $\lambda(E) = \infty$ sind zugelassen.

**Satz 5.7.1.** ***Monotone Konvergenz***
*Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : [0,1] \to [0,\infty]$ *eine nichtnegative, monoton wachsende Folge messbarer Funktionen, also*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \dots \qquad \forall x$$

*Wenn die Funktionenfolge fast überall punktweise gegen* $f$ *konvergiert*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

*dann existiert das Lebesgue-Integral von* $f$ *und es gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ d\lambda = \int_0^1 f(x)\ d\lambda.$$

Es wird die starke Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz, die man für das Riemann-Integral benötigt, um Limes und Integral vertauschen zu können durch Monotonie ersetzt.

*Beweis.* Wegen der Monotonie von $f_n$ ist auch

$$\int_0^1 f_n(x)\ d\lambda \leq \int_0^1 f_{n+1}(x)\ d\lambda \leq \int_0^1 f(x)\ d\lambda$$

und wir können schließen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ d\lambda \leq \int_0^1 f(x)\ d\lambda \tag{5.1}$$

Für die andere Ungleichung betrachten wir eine Treppenfunktion $s$ mit $s(x) = \sum_{k=1}^m c_k \mathbb{1}_{E_k}$ und $s \leq f$ und wir wählen ein festes $\alpha \in (0,1)$. Weiters sei $A_n$ die Menge

$$A_n = \{x \in [0,1] \mid \alpha s(x) \leq f_n(x)\} \in \mathcal{E}$$

Weil $f_n$ gegen $f$ konvergiert und $\alpha s(x) < f$ ist, folgt, dass

$$[0,1] = \bigcup_{n\geq 1} A_n \qquad \text{und} \qquad A_n \subset A_{n+1}$$

Die Mengen $E_k$ sind messbar und es gilt

$$E_k = \bigcup_{n\geq 1} E_k \cap A_n$$

und wir haben

$$\lambda(E_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_k \cap A_n),$$

da das Lebesgue-Maß (von unten) stetig ist. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \alpha s(x) d\lambda &= \sum_{k=1}^m \alpha c_k \lambda(E_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m \alpha c_k \lambda(E_k \cap A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^m \alpha c_k \mathbb{1}_{E_k \cap A_n}(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^m \alpha c_k \mathbb{1}_{E_k(x)} \mathbb{1}_{A_n}(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \alpha s(x) \mathbb{1}_{A_n}(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \alpha s(x) d\lambda
\end{aligned}$$

Da wir die Menge $A_n$ so definiert haben, dass $\alpha s(x) \leq f_n$ auf ihr gilt, folgt

$$\alpha \int_0^1 s(x) d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n d\lambda.$$

Lassen wir jetzt $\alpha$ gegen 1 gehen und bilden das Supremum über alle Treppenfunktionen mit $s \leq f$, dann haben wir

$$\int_0^1 f(x) d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$$

und der Satz ist gezeigt. $\square$

Das Lemma von Fatou liefert eine Aussage über die Vertauschung von Grenzwertprozessen. Man nimmt hier nicht an, dass die Funktionenfolge monoton ist und wir arbeiten auch nur mit $\limsup$ beziehungsweise $\liminf$. Wir gehen also nicht einmal davon aus, dass die Funktionenfolge konvergiert.

**Satz 5.7.2.** ***Lemma von Fatou***
*Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen mit $f_n : [0,1] \to [0,\infty]$. Dann gilt*

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ d\lambda.$$

*Beweis.* Seien $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$ und $g_m := \inf_{n\geq m} f_n$, wobei $m \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $f$ und $g_m$ sind messbar, nichtnegativ und es gilt, dass $g_m$ für $m \to \infty$ von unten gegen $f$ konvergiert. Wir können daher den Satz der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 g_m(x) d\lambda = \int_0^1 f(x) d\lambda.$$

Für $n \geq m$ gilt, dass $g_m \leq f_n$ ist und daher auch $\int_0^1 f(x)d\lambda \leq \lim_{m\to\infty}(\inf_{n\geq m} \int_0^1 f_n(x)d\lambda) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda$ und schlussendlich

$$\int_0^1 f(x)d\lambda \leq \lim_{m\to\infty} (\inf_{n\geq m} \int_0^1 f_n(d)d\lambda) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda$$

□

**Satz 5.7.3.** ***Dominierte Konvergenz***
*Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.*
*Wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion $g : [0,1] \to [0,\infty]$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \textit{fast überall} \quad x \in [0,1],$$

*dann sind die Funktionen $f_n$ und $f$ lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ d\lambda = \int_0^1 f(x)\ d\lambda$$

*Beweis.* Die Funktion $f$ ist integrierbar auf $[0,1]$ und es gilt $|f(x)| \leq g(x)$ fast überall für $x \in [0,1]$. Da $f + g$ nichtnegativ ist, konnen wir Fatou's Lemma anwenden und erhalten

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 (f_n(x) + g(x))d\lambda$$
$$\int_0^1 f(x)d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)d\lambda$$

Analog gilt

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 (g(x) - f_n(x))d\lambda$$
$$\int_0^1 f(x)d\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)d\lambda$$

Die beiden Ungleichungen kombiniert liefern das Resultat. □

Um den Vorteil der Lebesgue'schen Integrationstheorie bzgl. der Voraussetzungen bei den Grenzwertsätzen nochmal zu verdeutlichen, betrachten wir folgendes Beispiel.

**Beispiel 5.7.4.** *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Funktionenfolge mit*

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n|x|^{\frac{3}{2}}}$$

*Diese Funktionenfolge konvergiert fast überall punktweise gegen die Nullfunktion:* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

*Beachte: Wir haben keine gleichmäßige Konvergenz!*

$f_n$ *ist für alle* $n \in \mathbb{N}$ *durch* $g(x) = \frac{1}{1+|x|^{\frac{3}{2}}}$ *beschränkt. Wir wenden den Satz der dominierten Konvergenz an und erhalten*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n|x|^{\frac{3}{2}}} d\lambda = 0$$

Die Voraussetzung, dass $f_n$ fast überall mit $g$ beschränkt ist, ist wichtig, denn sonst gilt die obige Gleichung nicht, wie nachstehendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 5.7.5.** *Sei*

$$f_n(x) = n^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n})}.$$

*Dann konvergiert* $f_n$ *für* $n \to \infty$ *punktweise gegen* $0$ *für alle* $x \in [0,1]$.

*Aber es ist*

$$\lim_{n\to\infty} L\int_0^1 f_n(x)\ d\lambda = \lim_{n\to\infty} l_k \cdot \lambda([0,1]) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

*und*

$$L\int_0^1 f(x)\ d\lambda = \int_0^1 0\ d\lambda = 0$$

# Kapitel 6

# Ausblick

## 6.1 Hauptsatz der Differntial- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral

Es gibt Versionen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral. In dem Ausblick wird eine Formulierung gegeben. Die Beweise können zum Beispiel in [3][Kapitel 7.4] nachgelesen werden. Sie sind recht aufwändig und es braucht etwas Vorarbeit.

**Satz 6.1.1.** *Ist eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar auf* $[a, b]$*, dann ist*

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\lambda$$

*fast überall differenzierbar und es gilt*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{fast überall}$$

Wir erinnern uns noch einmal an die Definition für absolute Stetigkeit[1].

**Satz 6.1.2.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *absolut stetig. Dann ist* $f$ *fast überall differenzierbar mit lebegue-integrierbarer Ableitung* $f'$ *auf* $[a, b]$ *und es gilt für alle* $x \in [a, b]$*, dass*

$$f(b) - f(a) = L\int_a^b f'(x)d\lambda$$

Integration und Differentiation sind also umkehrbar, wenn die Ableitung $f'$ lebesgue-integrierbar ist. Eine Schwäche des Riemann-Integrals, bei dem wir zusätzlich fordern müssen, dass $f'$ integrierbar ist, konnte so behoben werden.

[1] siehe Definition A.1.2

# Anhang A

## A.1 Analysis

**Theorem A.1.1.** *Seien $(M_1, d_1)$ und $(M_2, d_2)$ metrische Räume.Jede stetige Funktion Sei $f : M_1 \to M_2$ mit kompaktem Definitionsbereich $X \subset M_1$ ist gleichmäßig stetig.*

**Beweis 1.** *(indirekt) Ang. $f$ ist nicht gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\epsilon_0$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es stets Punkte $x(\delta), y(\delta) \in X$ für die $|x(\delta) - y(\delta)| < \delta$ gilt, aber $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \epsilon_0$. Weiters gibt es zu jedem $\delta = \dfrac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$ Punkte $x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Da $X$ kompakt ist besitzt die Folge $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$, deren Grenzwert $\xi$ in $X$ liegt. Dann strebt wegen $x_n - y_n \to 0$ auch $y_{n_k} = x_{n_k} - (x_{n_k} - y_{n_k}) \to \xi$ und es konvergiert $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ und $f(y_{n_k}) \to f(\xi)$. $\lightning$ zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0 \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.*

**Definition A.1.2.** ***Absolute Stetigkeit***
*Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist absolut stetig auf $[a, b]$, wenn für ein gegebenes $\epsilon > 0$ gilt, dass ein positives $\delta$ existiert, sodass für eine beliebige endliche (bzw- abzählbare) Menge von paarweise disjunkten Intervallen $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, ..., n$ mit $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ gilt, dass $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ ist.*

**Lemma A.1.3.** *Eine auf dem Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetige Funktion ist auch absolut stetig auf $[a, b]$.*

**Theorem A.1.4.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ mit beschränkter Ableitung $f'$. Dann ist $f$ absolut stetig auf $[a, b]$.*

*Beweis.* Sei $\delta > 0$ und sei $M > 0$ eine obere Schranke für $f'$. Weiters bestehe die Menge $\{[a_k, b_k] : 1 \leq k \leq n\}$ eine endliche Familie von disjunkten Intervallen in $[a, b]$, sodass $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ein $c_k \in (a_k, b_k)$ sodass $|f(b_k) - f(a_k)| = |f'(c_k)(b_k - a_k)| < M(b_k - a_k)$. Dann haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \sum_{k=1}^{n} M(b_k - a_k) < \delta M$$

und die absolute Stetigkeit von $f$ ist gezeigt. □

## A.2 Maßtheorie

**Theorem A.2.1.** *Seien $E_1, E_2, \ldots$ messbare Mengen, sodass*

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$$

*und*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = E.$$

*Dann ist $E$ messbar und*

$$\lambda(E) = \lim_{k \to \infty} \lambda(E_k)$$

*Beweis.* Sei $E_0 = \emptyset$. Die Mengen $E_2 \setminus E_1$, $E_3 \setminus E_2$ , ... sind paarweise disjunkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} \lambda(E_k) &= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (\lambda(E_i) - \lambda(E_{i-1})) \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (\lambda(E_i \setminus E_{i-1}) \\
&= \lambda\big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \setminus E_{i-1}\big) \\
&= \lambda(E)
\end{aligned}$$

□

# Literaturverzeichnis


[1] Frank E. Burk *A Garden of Integrals*. The Mathematical Association of America, 2007.

[2] David M. Bressoud *A Radical Approach To Lebesgue's Theory of Integration*. MAA textbooks, 2008.

[3] David M. Bressoud *A Radical Approach To Real Analysis*. Second edition. MAA textbooks, 2007.

[4] Edwin Hewitt und Karl Stromberg *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1965.

[5] Douglas S Kurtz und Charles W Swartz *Theories of Integration. the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.

[6] Detlef D. Spalt *Die Vernunft im Cauchy-Mythos*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1996

[7] Hans Niels Jahnke *Geschichte der Analysis*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg/Berlin, 1999.

[8] Jean Dieudonné *Grundzüge der modernen Analysis*. Friedr. Vieweg und Sohn, Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1985.

[9] Adrian Constantin *Fourier Analysis Part I - Theory*. Cambridge University Press, 2016.

[10] Adrian Constantin. Vorlesungsnotizen: *Real analysis VO*. Universität Wien, Fachbereich Mathematik, Sommersemester 2017.

[11] Harro Heuser *Lehrbuch der Analysis* Teil 1. 17. Auflage. Vieweg + Teubner, 2009.

[12] Roland Zweimüller. *Maß- und Integrationstheorie*. Vorlesungsskriptum, Universität Wien, Fachbereich Mathematik, Wintersemester 2014/15.