universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Unterrichtsmomente in der Lehramtsausbildung Mathematik“

verfasst von / submitted by

Lukas Bäcker

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 884
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Informatik und Informatikmanagement
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer

Für Schnübchen

"I may not have gone where I intended to go,
but I think I have ended up where I needed to be."
- Douglas Adams -

Danksagung

Der Abschluss eines Lehramtsstudiums ist zwar ein Ende, doch auch ein Anfang.

Ein Anfang deshalb, da man nun offiziell dem Beruf nachgehen kann, für welchen man sich vor zahlreichen Semestern entschieden hat: Wegbegleiter und Unterstützer für viele Lernende zu sein, die noch am Beginn ihrer Ausbildung stehen; Jugendliche dazu zu motivieren, sich selbstständig und offen mit dem Thema „Lernen“ auseinanderzusetzen, lösungsorientiert statt problemorientiert zu denken und Herausforderungen positiv gegenüberzustehen.

Ein Ende deshalb, da nun Stunden an investierter Zeit zum Pendeln, Besuchen von Lehrveranstaltungen, Vorbereiten auf Prüfungen, Lösen von Übungsaufgaben etc. ihr Ende in Form dieser verfassten Diplomarbeit finden. Das Verfassen einer Diplomarbeit ist ein Prozess, der viel Ausdauer, Kraft, Konzentration, Flexibilität und Konsequenz fordert. Diese Bedingungen sind zwar für den Abschluss des Studiums notwendig, jedoch – um im Jargon der Mathematik zu bleiben – nicht hinreichend. Darüber hinaus ist nämlich die Hilfe einiger Mitmenschen essentiell, die mich während des ganzen Studiums sowie davor, in vielerlei Hinsicht, unterstützt haben. Aus diesem Anlass sehe ich es angebracht, an dieser Stelle folgenden Personen ein großes Dankeschön auszusprechen.

Danke an…

… meinen Betreuer Roland Steinbauer, der sowohl am Anfang als auch am Ende meiner Mathematikausbildung stand und mich stets dazu motiviert hat, mich differenziert mit der Mathematik sowie mit meinem Diplomarbeitsthema auseinanderzusetzen. Zudem möchte ich mich für sein engagiertes und konstruktives Feedback bedanken, mit welchem er mir zu jedem Zeitpunkt des Schreibprozesses zur Seite stand. In diesem Sinne möchte ich mich auch bei Christoph Ableitinger sowie Franz Embacher für ihr Feedback im Rahmen des DiplomandInnen-Jour-Fixes bedanken.

… meine Kolleginnen und Kollegen aus der Schule, die mich bei der Suche nach prototypischen Unterrichtssituationen durch ihre eigenen Erfahrungen unterstützt haben.

… meine Schülerinnen und Schüler, die mich in schwierigen Schreibphasen daran erinnert haben, wofür ich diese Diplomarbeit unter anderem verfasse.

… meine Tischtennis-Kollegen für den Ausgleich neben dem Studium und dem Beruf.

… meine Familie (Robert, Edith, Bri und Klaus sowie Irene, Jordan, Gerda, Susanne und Wolfgang), auf die ich in allen Lebenslagen zählen kann.

… Karin, Margarete und Wilhelm, die mir in meiner Kindheit viel Wärme und Geborgenheit mit auf den Weg gaben und bereits früh meine Neugierde und mein Interesse am Lernen wecken konnten.

…Barbara. Für alles.

Abstract

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit einem innovativen Ansatz nach PREDIGER (2013), die Idee sogenannter Unterrichtsmomente in die Lehramtsausbildung einzubinden. Unterrichtsmomente greifen Erkenntnisse aus der empirischen Erforschung des Lehrerprofessionswissens von BALL und BASS (2004) auf. Darüber hinaus beziehen auf Unterrichtsmomenten aufbauende Übungsaufgaben für Lehramtsstudierende prototypische Unterrichtssituationen mit ein, in deren Rahmen didaktisches Handeln durch mathematische Erwägungen fundiert werden soll. Zunächst werden bereits bestehende Aufgabenkonzepte betrachtet, die vielversprechende Ansätze zur Verknüpfung der Ausbildungsteile „Fachmathematik“ und „Fachdidaktik“ darstellen. Im Zuge der Arbeit werden anschließend vier reale Unterrichtssituationen aufgegriffen und im Sinne der Idee der Unterrichtsmomente zu Übungsaufgaben für Lehramtsstudierende ausgearbeitet.

Der Ansatz der Unterrichtsmomente soll dazu beitragen, Lehramtsstudierende zu einer differenzierten Auseinandersetzung mit hochschulmathematischen Fragestellungen vor einem schulmathematischen Hintergrund zu motivieren. Dadurch soll jenem Problem der doppelten Diskontinuität entgegengewirkt werden, dass Schul- und Hochschulmathematik von Studierenden des Lehramts häufig als voneinander getrennte Welten wahrgenommen werden.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

2. Die doppelte Diskontinuität 3

2.1 Begriffserklärung 3

2.2 Ursachen 5

3. Was Lehrer lernen müssen 8

3.1 Probleme, die ein Lehrer im Unterricht zu lösen hat – historische Genese 9

3.2 Die Job-Analyse 10

3.3 Eine mögliche Transformation der Jobs zu konkreten Lernanlässen 16

3.4 Eine erweiterte Liste an Handlungsanforderungen 18

4. Projekte im Schnittstellenbereich Hochschulmathematik/Schulmathematik 22

4.1 Demonstrationsaufgaben 23

4.2 FABEL-Aufgaben 28

4.3 Schnittstellenaufgaben 34

4.4 Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis 38

5. Lernen mit Unterrichtsmomenten 43

5.1 Unterrichtsmomente 43

5.2 Ausgearbeitete Unterrichtsmomente als Aufgabenvorschläge 47

5.3 Handlungsanforderungen in den ausgearbeiteten Unterrichtsmomenten 63

6. Rückblick und Ausblick 65

Literaturverzeichnis 67

Anhang 71

Anhang A – Epistemologische Bewusstheit (aus PREDIGER und HEFENDEHL-HEBEKER 2016, S. 258 f) 71

Anhang B – Demonstrationsaufgabe Stetigkeit (aus ABLEITINGER 2013, S. 24-27) 73

Anhang C – Einsetzen von Heuristiken (aus BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013, S. 67) 77

Anhang D – Schnittstellenaufgabe (aus BAUER und PARTHEIL 2013, S. 55) 78

Anhang E – Evaluationsaufgabe (aus LEUFER und PREDIGER 2006, S. 8) 79

1. Einleitung

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist das Problem der doppelten Diskontunität nach KLEIN (1924). Dabei handelt es sich um ein vielzitiertes Phänomen der Mathematikdidaktik, welches speziell in der Ausbildung angehender Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer für die Sekundarstufe auftritt: Mathematikinteressierte Schülerinnen und Schüler, welche sich für das Lehramt entscheiden, stehen zu Beginn ihres Studiums der Hochschulmathematik gegenüber. Diese erinnert kaum an jene Art von Mathematik, mit welcher sich die Lernenden jahrelang in der Schule beschäftigt haben. Beim späteren Berufseinstieg soll schließlich wieder die Schulmathematik unterrichtet werden, die oft nicht selbstständig in Bezug zur im Studium wesentlichen Hochschulmathematik gesetzt werden kann. Dies resultiert häufig daraus, dass Schul- und Hochschulmathematik als zwei voneinander getrennte Welten wahrgenommen werden. In diesem Zusammenhang wird oft die Sinnhaftigkeit der zu lernenden mathematischen Inhalte im Studium angezweifelt, gleichzeitig entstehen Demotivation und Selbstzweifel. Anstatt die Schulmathematik nach dem Lehramtstudium von einem „höheren" Standpunkt aus zu unterrichten, wird primär der in der Schule selbst erlebte Mathematikunterricht repliziert, da eine Vernetzung der Inhalte der Schulmathematik mit jenen der Hochschulmathematik im Rahmen des Studiums nicht stattgefunden hat. Kapitel 2 diskutiert im Detail das Problem der doppelten Diskontinuität und zeigt weitere daraus resultierende Problemfelder auf.

Um reflektierte Aussagen rund um das Problem der doppelten Diskontinuität treffen und konstruktive Lösungsansätze erörtern zu können, widmet sich Kapitel 3 deshalb einer tiefergreifenden Analyse der Herausforderungen, mit welchen Lehrende der Mathematik in der Sekundarstufe konfrontiert sind. Hierzu wird der praxisorientierte Ansatz der Job-Analyse von BALL und BASS (2002) aufgegriffen. Im Rahmen der Job-Analyse wurde eine Mathematikklasse ein ganzes Jahr lang begleitet und Videoaufzeichnungen, Audioaufzeichnungen, Transkripte, Aufzeichnungen der Lehrperson, Kopien von Schülerausarbeitungen etc. wurden analysiert. Das Ziel war es, einerseits herauszufinden, welche mathematischen Fähigkeiten das Lehren bzw. Unterrichten von Mathematik erfordert und andererseits, in welcher Art und Weise didaktisches Handeln im Unterricht fachmathematisch fundiert wird. Die Ergebnisse wurden unter anderem in Form einer Liste an mathematischen Tätigkeiten („Core-Tasks") zusammengefasst, die Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Berufsalltag ausüben müssen. Darauf aufbauend formuliert PREDIGER (2013) eine Liste an Handlungsanforderungen, indem sie die Ergebnisse der Job-Analyse aufgreift und um einige Aspekte ergänzt. Diese explizite Darstellung legt eine Integration der Handlungsanforderungen als Lerngegenstände in die Lehramtsausbildung nahe. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden weitere Items ermittelt und die Liste an Handlungsanforderungen erweitert.

In Kapitel 4 werden bereits existierende Aufgabenkonzepte zur Unterstützung von Studierenden vorgestellt, die von Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern ausgearbeitet wurden. Insbesondere zu Studienbeginn erleben Mathematikstudierende des Lehramts das Phänomen der doppelten Diskontinuität besonders stark, weswegen diese Aufgabenkonzepte speziell in der Anfangsphase des Mathematikstudiums eingesetzt werden. Exemplarisch werden vier Aufgabenkonzepte vorgestellt: Demonstrationsaufgaben nach ABLEITINGER (2013), „FABEL"-Aufgaben nach BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013), Schnittstellenaufgaben nach BAUER (2013) sowie das Projekt „Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis" nach LEUFER und PREDIGER (2006). Vor dem Hintergrund der

Handlungsanforderungen wird analysiert, in wie weit die einzelnen Jobs in den Aufgabenkonzepten trainiert werden.

Im Zentrum dieser Arbeit steht die in Kapitel 5 vorgestellte Idee der sogenannten Unterrichtsmomente nach PREDIGER (2013). Unterrichtsmomente sind prototypische Unterrichtssituationen, die mindestens eine Handlungsanforderung thematisieren. In auf Unterrichtsmomenten aufbauenden Übungsaufgaben für begleitende Übungen zu fachmathematischen Vorlesungen soll didaktisches Handeln durch mathematische Erwägungen fundiert werden. Durch die Bearbeitung von Unterrichtsmomenten soll eine Auseinandersetzung mit der Hochschulmathematik im Zuge von realen Problemstellungen aus der Unterrichtspraxis ermöglicht werden, wodurch Schulmathematik und Hochschulmathematik als ineinander verwobene anstatt als getrennte Welten vermittelt werden können. Der starke Schulbezug soll zudem einen motivationssteigernden Effekt haben und die eingangs erwähnte und oft mangelnde Sinnstiftung im Lehramtsstudium begünstigen.
PREDIGER (2013) zeigt anhand einiger Beispiele auf, wie Aufgaben gestaltet werden können, die auf Unterrichtsmomenten aufbauen. Um einen flächendeckenden Einsatz solcher Übungsaufgaben im Lehramtsstudium gewährleisten zu können, bedarf es zahlreicher weiterer Unterrichtsmomente und somit Dokumentationen von adäquaten Unterrichtssituationen aus der Schulpraxis. Im Rahmen dieser Arbeit werden vier Unterrichtsmomente ausgearbeitet, deren Grundlage Unterrichtssituationen aus dem Sekundarstufenbereich an österreichischen Gymnasien bilden. Die zugrunde liegenden Unterrichtssituationen sind entweder der Unterrichtspraxis des Autors entnommen oder stammen von dokumentierten Überlieferungen anderer Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer der Sekundarstufe. Dabei werden die Unterrichtsmomente in folgender Form präsentiert: Zunächst wird im Rahmen der Ausgangssituation das Auftreten des Unterrichtsmoments im Unterricht beschrieben, wodurch die Leserin bzw. der Leser einen Eindruck vom Umfeld bekommen soll, in welchem die Unterrichtssituation stattgefunden hat. Danach folgt die Angabe der Übungsaufgabe für Lehramtsstudierende, welche sich im Zuge der Aufgabe explizit mit Handlungsanforderungen auseinandersetzen und ihr fachmathematisches Wissen im didaktischen Kontext aktivieren müssen. Dabei wurde darauf geachtet, die Aufgabenstellungen möglichst vielseitig zu gestalten, um zahlreiche Aspekte der Handlungsanforderungen zu thematisieren. Konkret müssen zum Beispiel Resultate aus Fachvorlesungen retrospektiv betrachtet, Zugänge aus Schulbüchern analysiert, Fehler von Lernenden aufgegriffen, Schüleraussagen bewertet oder Unterrichtssequenzen entwickelt werden, um lernförderliche Akzente in der Unterrichtssituation zu setzen. Die darauffolgende Lösungserwartung dient als Handreichung für Lehrende, welche den Unterrichtsmoment innerhalb von Lehrveranstaltungen aufgreifen. Die Lösungserwartung beinhaltet eine Ausarbeitung der Übungsaufgabe des Autors, welche als Referenz für eine mögliche Lösung der Aufgabe herangezogen werden kann. Abgeschlossen wird die Darstellung des Unterrichtsmomentes von einer didaktischen Analyse, in welcher neben didaktischen Aspekten erörtert wird, welche Handlungsanforderungen im Rahmen des jeweils vorliegenden Unterrichtsmoments thematisiert werden.
Schließlich werden in Kapitel 6 einige Vorschläge zur Umsetzung der Idee der Unterrichtsmomente in der Lehramtsausbildung erläutert und weitere Anknüpfungspunkte aufgezeigt.

2. Die doppelte Diskontinuität

2.1 Begriffserklärung

Die Ursprünge des Begriffs der doppelten Diskontinuität im Kontext der Ausbildung angehender Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer gehen auf den deutschen Mathematiker Felix KLEIN und ein Zitat zu Beginn des 20. Jahrhunderts zurück. Der Ausgangspunkt zahlreicher Artikel in der Disziplin der Mathematik-Didaktik ist die folgende, von Klein formulierte Aussage (KLEIN 1924, Seite 1):
Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.
Diese doppelte Diskontinuität […] bemüht man sich neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen […] Ideen zu durchtränken sucht […], andererseits aber durch geeignete Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht.

Anhand einiger aktueller fachdidaktischer Auseinandersetzungen mit dem Begriff der doppelten Diskontinuität ist zu erkennen, dass sich diese über die Jahrzehnte als hartnäckiges Thema in der Mathematikdidaktik festgesetzt hat. Dass das Problem der doppelten Diskontinuität auch heute nichts an Aktualität verloren hat, bedeutet jedoch keineswegs, dass in der LehrerInnenbildung ein ganzes Jahrhundert lang keine Veränderungen stattgefunden hätten. Vielmehr scheint das Phänomen der doppelten Diskontinuität an die institutionelle Organisation der Schul- bzw. Lehramtsausbildung gekoppelt zu sein, welche in ihrem Wesen sich von jener zu Beginn des letzten Jahrhunderts kaum unterscheidet.

Abbildung 1: Von der Schule in die Schule, eigene Bearbeitung

BAUER und PARTHEIL (2009) sprechen von sogenannten Bruchstellen (in obiger Abbildung durch die roten Pfeile symbolisiert), die Studierende des Lehramts zu Beginn und am Ende ihrer Ausbildung erleben. Diese Bruchstellen äußern sich häufig dadurch, dass Lehramtsstudierende die Schulmathematik und die universitäre Mathematik als zwei komplett voneinander verschiedene und isolierte Welten wahrnehmen. Im selben Text schildern BAUER und PARTHEIL (2009) eine Beobachtung, die man bei vielen Junglehrerinnen und Junglehrern unmittelbar nach deren Berufseinstieg tätigen kann: Aufgrund der scheinbar isolierten Rolle der Universitätsmathematik reproduzieren viele Lehrkräfte den Unterricht, den sie während ihrer Schulzeit erlebt haben. Somit setzen sich die Eindrücke des eigenen Daseins als Schülerin bzw. Schüler gegenüber dem in der Lehramtsausbildung erworbenen Bild von Mathematiklernen und Mathematik durch. Des Weiteren stellen BAUER und

PARTHEIL (2009) die These auf, dass sich die Verbindungen zwischen „Schulmathematik“ und „Mathematik als Wissenschaft“ auf der einen Seite sowie „Fachdidaktik“ und „Fachwissenschaft“ auf der anderen Seite nicht von selbst einstellen. Vielmehr müssten die hierfür notwendigen gedanklichen Prozesse geeignet initiiert werden. Die Autoren begründen zusätzlich im selben Artikel, warum sich das Phänomen der doppelten Diskontinuität gerade in der Mathematik – im Vergleich zu manchen anderen Disziplinen – so stark aufdrängt. Eine Diskontinuität in Inhalten und Zielen sei auch in anderen Studienfächern keine Seltenheit. Als Eigenheit des Fachs Mathematik spezifizieren BAUER und PARTHEIL (2009) noch zusätzlich einen Begriff namens „Argumentations-Diskontinuität“. Dies bedeutet, dass sich die Schulmathematik von der Hochschulmathematik nicht nur bezüglich der inhaltlichen Dimension und der Zielsetzung unterscheidet, sondern dass außerdem Unterschiede in der Argumentationskultur bestehen.

Einen weiteren Aspekt für das Fortbestehen der doppelten Diskontinuität findet man in einem Artikel namens „Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge“ (HEFENDEHL-HEBEKER 2013). Die Autorin resümiert, dass das Interesse an einer zweckmäßigen und allen Bedürfnissen gerecht werdenden Ausbildung von Lehramtskandidatinnen und Lehramtskandidaten zu einer Änderung der Gewichtung der Studienteile geführt hat. Trotz der Verstärkung der erziehungswissenschaftlichen Komponente sowie der Integration der Fachdidaktiken als wissenschaftliche Disziplin sei das Ziel einer allseits zufriedenstellenden Berufsvorbereitung nicht erreicht worden. Die Konsequenzen dieses Umstands haben in weiterer Folge die Lehramtsstudierenden zu deren Berufseinstieg zu tragen.
Im Bereich der ersten Bruchstelle – beim Übergang von der Schule in die Universität – ist sich etwa KÜMMERER (2013) der Einstiegshürde für junge Studierende der Mathematik bewusst, die der abrupte Paradigmenwechsel von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik bedingt. Metaphorisch treffend vergleicht er in diesem Kontext Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Fachs Mathematik mit Schwimmenden, die sich mühsam paddelnd über Wasser halten. Den Gedanken weiterführend ist der Autor davon überzeugt, dass während der Anfangszeit im Studium ein besonderes Augenmerk auf dieses Problem gelegt werden müsse. Hinzu kommt außerdem eine sowohl von HEFENDEHL-HEBEKER (2013) als auch von BAUER und PARTHEIL (2009) gemachte Beobachtung: Trotz der bewussten Entscheidung für das Mathematikstudium werden häufig gerade jene Vorlesungen, welche die fachmathematischen Inhalte in den Vordergrund stellen, von den Studierenden als unangenehm empfunden bzw. negativ beurteilt. Darüber hinaus wird die Fachwissenschaft in einer Relevanzbewertung aller Wissensbereiche der Lehramtsausbildung von den Studierenden an die vorletzte Stelle gereiht, wie die im Rahmen einer Diplomarbeit gewonnen Erkenntnisse zeigen (ETZLSTORFER 2010).

Weitere Erläuterungen zum Problem der doppelten Diskontinuität findet man – oft implizit – in zahlreichen aktuellen wissenschaftlichen Auseinandersetzungen, in Folge derer teilweise Konzepte entwickelt wurden, um auf diesen Umstand zu reagieren (ABLEITINGER 2013; BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013; DANCKWERTS 2013; FISCHER 2013; HALVERSCHEID und MÜLLER 2013; HUBER 2016; LEUFER und PREDIGER 2006; PREDIGER 2013). Einige dieser Projekte sollen noch in einem späteren Kapitel betrachtet werden, nicht zuletzt um ein Bild davon zu bekommen, wie in fachdidaktischen Arbeitskreisen der Thematik um die doppelte Diskontinuität derzeit begegnet wird. Dazu benötigt es jedoch eine vorangestellte tiefergreifende Betrachtung der Ursachen des Problems, nicht zuletzt um einen Blick auf den Teil unterhalb der Wasseroberfläche jenes Eisbergs „Doppelte Diskontinuität“ werfen zu können, der sich bereits über ein Jahrhundert lang – gemäß der Terminologie, mit welcher KÜMMERER (2013) metaphorisch die Studienanfänger beschrieb – „mühsam paddelnd über Wasser hält“.

2.2 Ursachen

Es gibt verschiedene Herangehensweisen, die Ursachen für das Problem der doppelten Diskontinuität zu klassifizieren. HEFENDEHL-HEBEKER (2013) geht dabei vor allem auf die unterschiedlichen Sichtweisen auf das Mathematikstudium von Studierenden auf einer einen Seite und Lehrenden auf der anderen Seite ein. Ein aus der Sicht der Studierenden häufig erwähntes Problem stellen auch BEUTELSPACHER et al. (2012) in ihrem empirischen Befund fest. Dieser Befund besagt, dass eine deutliche Mehrheit der Lehramtsstudierenden die fachwissenschaftlichen Anforderungen im Studium als für zu hoch und zu wenig mit dem Berufsziel verbunden erachten. In diesem Sinn rufen Fachveranstaltungen, die inhaltlich anspruchsvoll sind und ein hohes Abstraktionsniveau aufweisen, oft Sinnfragen hervor. Die Konsequenz mangelnder Sinnstiftung spiegelt sich darin wider, dass viele Studierende gewisse Denkweisen entwickeln, die sich in die folgenden drei „Problemtypen" kategorisieren lassen (HEFENDEHL-HEBEKER und SCHUSTER 2006, S. 12 ff.):

- *Der „engagierte Hilflose" sieht wenig Sinn in den Inhalten seines Fachstudiums. Er favorisiert einen eigenständigen Aufbau des Lehramtsstudienganges mit einer starken fachdidaktischen Komponente. Er vermag Sachverhalte, die er selbst einmal verstanden hat, vorzüglich und in methodischer Hinsicht facettenreich auf verschiedenen Altersstufen zu lehren, ist aber oft nicht in der Lage, den Ideengehalt mathematischer Phänomene eigenständig zu erfassen.*
- *Der „Fachgelehrte" ist mathematisch hoch interessiert und sieht das Mathematikstudium zunächst einmal als eigenständig, erst sekundär auf das Berufsziel gerichtet an. Es fällt ihm schwer, Inhalte altersgerecht und methodisch vielfältig zu vermitteln, denn die Vorstellung, dass der Vortrag eines sachlogisch korrekten Aufbaus auch ein geeignetes Lehrprinzip darstellt, leitet ihn unbewusst stark.*
- *Der „Pragmatiker" sieht wenig Funktion im Studium, da ein Lehrer seiner Meinung nach die benötigte Mathematik schon in der Schule gelernt hat. In seinem Unterricht dominiert der Kalkülaspekt, und er beurteilt seinen Unterrichtserfolg nach diesbezüglichen Prüfungsergebnissen. Die Art der Vermittlung an der Hochschule schätzt er als völlig ineffizient ein, auch die didaktische.*

Die Beschwerde, etwas lernen zu müssen, wobei man doch „nur" Lehrerin bzw. Lehrer werden wolle zeigt, dass sich die Betroffenen bewusst gegenüber Fachstudierenden abgrenzen (HEFENDEHL-HEBEKER 2013). HEFENDEHL-HEBEKER gesteht dem Statement zu, dass einige Fachvorlesungen auch noch in der heutigen Zeit mathematische Wissenschaft als Selbstzweck und ohne Rücksicht auf die Bedürfnisse angehender Lehrerinnen und Lehrer betreiben, wobei exemplarisch der weite Gestaltungsspielraum für die Vorlesung „Lineare Algebra" im Grundstudium erwähnt wird. Weiters tendieren viele Mathematikstudierende dazu, die Anforderungen des eigenen Studiums zu unterschätzen, wofür zum Beispiel die zwei folgenden Ursachen verantwortlich sein können (HEFENDEHL-HEBEKER 2013, S. 4):

- *„Einseitige oder gefilterte Erinnerungen an den eigenen Schulunterricht, in denen die kalkül- und verfahrensorientierten Anteile überwiegen.*
- *Einseitige Erfahrungen mit Nachhilfeunterricht, der in der Regel im Vergleich zum Klassenunterricht deutliche didaktische Verkürzungen aufweist."*

Hinter diesen Fehleinschätzungen sieht HEFENDEHL-HEBEKER tiefer liegenden Ursachen, die in einem unzureichenden Bewusstsein für Ausgestaltung und Anforderung des angestrebten Berufszieles bestünden.

HEFENDEHL-HEBEKER (2013) merkt beim Vergleich zwischen Nachhilfeunterricht und Schulunterricht an, dass ersterer häufig auf kurzfristige Verfahrensbewältigung und weniger auf nachhaltiges Verständnis ausgerichtet sei. Hinter Fehleinschätzungen dieser Art sieht die Autorin tiefer liegende Ursachen, die darin bestünden, dass ein unzureichendes Bewusstsein für die Ausgestaltung und Anforderung des angestrebten Berufsziels vorhanden sei. Als Konsequenz daraus fehle es vielen Studierenden an Verständnis, wie mathematische Erkenntnisbildung geschieht und wie diese Erfahrung im Unterricht vermittelt werden kann. Was zunächst wie eine Unterstellung klingt, entspringt jedoch zahlreichen empirischen Erörterungen, die die Gültigkeit dieser Behauptung nahelegen (ebd.).
Um die Ursachenforschung aus einem anderen Winkel zu betrachten, bietet es sich an, sich auch der Perspektive der Lehrenden zu widmen. HEFENDEHL-HEBEKER erläutert, dass Lehrende den Studierenden immer wieder mangelnden Fleiß bzw. mangelnde Identifikation mit dem Fach unterstellen. Dieser Ansicht muss das Argument gegenübergestellt werden, dass Professorinnen und Professoren der Mathematik aufgrund ihrer intensiven fachlichen Identifikation und dem Streben nach systematischen Begriffsbildungen und eleganten Schlussweisen diesen mathematischen Habitus bereits derart verinnerlicht haben, dass sie kaum noch nachvollziehen können, wie viel Anstrengung Novizen aufbringen müssen, um in diese Gedankenwelt hineinzuwachsen.
Eine weitaus aufschlussreichere Möglichkeit zur Diagnose bietet die Aussage seitens der Lehrenden, dass Studierende nicht mehr das nötige „Rüstzeug“ aus der Schule mitbringen. Die Defizite machen sich dabei vor allem im Umgang bei Routinetätigkeiten der elementaren Algebra bemerkbar, wodurch der Übergang von der Schule zur Universität noch zusätzlich erschwert wird (HEFENDEHL-HEBEKER 2013).

Die Ursachen des Problems der doppelten Diskontinuität werden auch in der Diplomarbeit von HUBER (2016) anhand verschiedener Ansätze aus der Literatur zusammengefasst und in vier Kategorien eingeordnet: „Schulausbildung“, „Erwartung und Sinnstiftung“, „Druck und Selbstzweifel“ sowie „Fachdidaktik und Fachmathematik als getrennte Welten“. Im Folgenden sollen jene vier Aspekte kurz erläutert werden.

Schulausbildung: Eine Schwäche der Schulausbildung ist, dass die Mathematik von Lehrenden der Sekundarstufe meistens als eine deduktiv geordnete eigene Welt präsentiert wird, welche als isoliertes und – in Sprachen, Symbolen, Bildern und Formeln – repräsentiertes Konstrukt wahrgenommen wird. Diesen Wortlaut verwendet auch HEINRICH WINTER (1995), der für die Formulierung der nach ihm benannten Winter‘schen Grunderfahrungen in der Disziplin der Fachdidaktik bekannt wurde. Er postuliert an den Mathematikunterricht, dass dieser den Lernenden die folgenden drei Grunderfahrungen ermöglichen sollte (WINTER 1995, S. 1):

1. *Erscheinungen in der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
2. *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*
3. *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben*

BORNELEIT (2001) kritisiert, dass die Grunderfahrungen Nr. 1 und Nr. 3 im Mathematikunterricht unterrepräsentiert seien. Des Weiteren weist er auf die Überhand nehmende Kalkülorientiertheit im Mathematikunterricht hin. Diese Kritik wird um einen Gedanken des Autors ergänzt, dass ein ausschließlich kalkülorientierter Mathematikunterricht in der aktuellen Schulpraxis schon allein wegen

der stärker verständnisorientierten Aufgaben im Rahmen der zentralisierten Reifeprüfung nicht mehr ausreichend ist.
Erwartung und Sinnstiftung: Unter diesem Punkt werden im Wesentlichen die auf der vorigen Seite erwähnten Überlegungen zu Fehleinschätzungen seitens der Studierenden von HEFENDEHL-HEBEKER (2013) sowie die Argumente von BEUTELSPACHER (2012) zur mangelnden Sinnstiftung zusammengefasst. Eine Konsequenz dieses Problemfeldes kann unter anderem eine einseitige Schwerpunktsetzung im Studium sein, wie dies bei den von HEFENDEHL-HEBEKER identifizierten Problemtypen der Fall ist.
Druck und Selbstzweifel: HUBER bezieht sich in der Erörterung dieses Problemfelds auf die Aussage von BEUTELSPACHER (2012), dass selbst nach abgeschlossenem Lehramtsstudium Studierende die Universität mit mangelndem Selbstvertrauen sowie dem Gefühl verlassen, mathematisch nicht ausreichend kompetent zu sein.
Fachdidaktik und Fachmathematik als getrennte Welten: Unter diesem Punkt werden einige der bereits in der Einleitung erwähnten Aspekte zusammengefasst. Da sich das Problem der doppelten Diskontinuität durch dieses Problemfeld teilweise selbst definiert, ist es nicht verwunderlich, dass es zugleich als nicht zu vernachlässigende Ursache anzusehen ist. Die Feststellung, dass Fachdidaktik und Fachmathematik als voneinander getrennte Welten wahrgenommen werden, ist demnach so alt die der Begriff der doppelten Diskontinuität selbst, den – wie eingangs erwähnt – FELIX KLEIN vor über 100 Jahren ins Leben gerufen hat.

Um die Darlegung möglicher Ursachen der doppelten Diskontinuität abzuschließen, muss festgehalten werden, dass die einzelnen Problemfelder zwar nebeneinander, jedoch keineswegs unabhängig voneinander bestehen können. Beispielsweise können Probleme im Bereich „Schulausbildung“ einen direkten Einfluss darauf haben, dass sich bei mathematikinteressierten Schülerinnen und Schülern falsche Erwartungen bezüglich des Mathematikstudiums bilden und beim Eintritt in die Universität Frustrationseffekte mit sich bringen. Es erscheint sinnvoll, die Wechselwirkungen zwischen diesen Problemfeldern zu visualisieren, um die Komplexität des Problems der doppelten Diskontinuität erfassen zu können, was in der folgenden Grafik (siehe **Abbildung 2**) dargestellt wird:

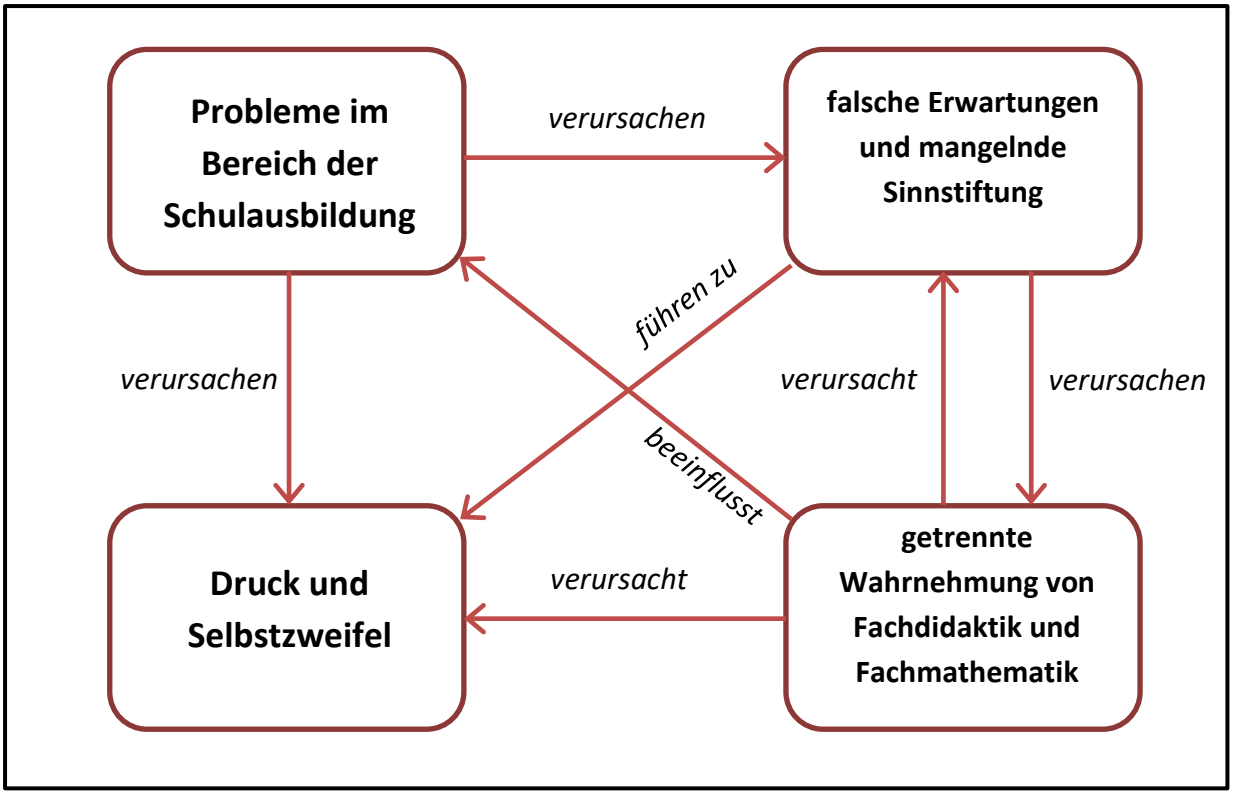


Abbildung 2: Wechselwirkungen zwischen den Problemfeldern, Quelle: Huber (2016), eigene Bearbeitung

Obwohl diese Visualisierung keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, ist erkennbar, wie „gefährlich“ eine getrennte Wahrnehmung von Fachdidaktik und Fachmathematik ist. Erstens führt eine etwa bereits zu Beginn des Studiums entwickelte Wahrnehmung von Fachdidaktik und Fachmathematik als getrennte Welten in weiterer Folge zu falschen Erwartungen und mangelnder Sinnstiftung. Zweitens können entweder direkt oder indirekt über jene falschen Erwartungen ein hoher Druck sowie Selbstzweifel entstehen. Drittens beeinflusst diese getrennte Wahrnehmung das eigene Handeln als Lehrende bzw. Lehrender in der späteren Unterrichtspraxis, wodurch das Problem womöglich wiederum in die Schulausbildung zurückgeliefert wird und eine Art Teufelskreis entsteht. Den Lernenden wird in diesem Fall ein allumfassendes Verstehen der mathematischen Inhalte deutlich erschwert, etwa dadurch, dass der Fokus des Unterrichts ausschließlich auf einer kalkülorientierten Auffassung von Mathematik liegt. An dieser Stelle sei noch einmal auf die Kritik von BORNELEIT (2001) verwiesen, der diese Vermutung bekräftigt, indem er eine Überrepräsentation der Kalkülorientierheit im Mathematikunterricht feststellt.

Aus diesem Anlass schließt sich diese Diplomarbeit im weiteren Verlauf dem Trend an, ein Aufgabenformat zu entwickeln, dass den Bezug zwischen Fachdidaktik und Fachmathematik explizit thematisiert. Ähnliche bereits existierende Aufgabenkonzepte werden in Kapitel 4 vorgestellt. Zunächst folgt jedoch eine ausführliche Auseinandersetzung mit den Inhalten, die aktuell in der LehrerInnenbildung eine zentrale Rolle spielen. Im Zuge dieser wird erörtert, welchen Anforderungen Lehrende der Sekundarstufe im Schulalltag gegenüberstehen, um schließlich einen Vergleich zwischen eben diesen Anforderungen und den Inhalten des Lehramtsstudiums ziehen zu können. Die Betrachtung dieses „Status quo“ scheint notwendig, um erarbeiten zu können, wo Aufgabenformate wie jene im darauffolgenden Kapitel sowie das im Zuge dieser Diplomarbeit entworfene ihren Platz finden könnten.

3. Was Lehrer lernen müssen

Eine wesentliche Frage in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufe ist, welche mathematischen Kompetenzen diese erwerben müssen, um ihrerseits bestmögliche Voraussetzungen für den Lernerfolg ihrer Schülerinnen und Schüler bieten zu können. Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dieser Frage geschah aus methodologischer Sicht häufig durch einen „top-down"-Ansatz (die identifizierten mathematischen Kompetenzen werden hier von allgemeinen, meist theoriebasierten Ergebnissen weiterer Studien abgeleitet).
Zu Beginn dieses Kapitels werden in einem kurzen historischen Abriss einige bereits erbrachte Resultate zusammengefasst (BEGLE 1979; SHULMAN 1986). Danach wird der praxisbasierte „bottom-up"-Ansatz der „Job-Analyse" von BALL und BASS (2002) vorgestellt, mit Hilfe dessen, aufbauend auf empirischen Untersuchungen, eine Liste an Anforderungen – den sogenannten „Jobs" – formuliert wurde, die im Mathematikunterricht einen zentralen Stellenwert einnehmen. Anschließend werden darauf aufbauende Überlegungen von PREDIGER (2013) sowie PREDIGER und HEFENDEHL-HEBEKER (2016) zusammengefasst. Diese sowie weitere Ergebnisse aus weiterführenden Quellen sollen abschließend für die Ermittlung weiterer relevanter Gesichtspunkte der Unterrichtspraxis herangezogen werden (HATTIE 2009; BRUNNER und KRAUSS 2011).

3.1 Probleme, die ein Lehrer im Unterricht zu lösen hat – historische Genese

Welche mathematischen bzw. mathematisch-didaktischen Fähigkeiten Lehrerinnen und Lehrer beherrschen sollen, trägt wesentlich zur Entscheidungsfindung bei, wie die Ausbildung von Lehrenden der Sekundarstufe gestaltet werden soll. Nicht zuletzt sind es eben jene Fähigkeiten, welche einen wesentlichen Einfluss auf das Vermitteln mathematischer Inhalte haben und in weiterer Folge auch darauf, welche Voraussetzungen für die Lernenden im schulischen Setting geschaffen werden können. Demnach ist es nicht verwunderlich, dass die Mathematikdidaktik daran interessiert ist, möglichst konkret zu formulieren, welche Kompetenzen seitens der Lehrperson eine gute Grundlage für einen gelungenen Mathematikunterricht bilden. Einen Versuch unternahm bereits BEGLE (1979), indem er fünf Variablen festlegte, welche er als zentral für das unterrichtliche Gelingen sah. Die miteinbezogenen Variablen waren die Lehrperson, das Curriculum, die Lernenden, die Lernumgebung sowie der Instruktionsprozess selbst. Zur Analyse dieser fünf Merkmale wurden zahlreiche empirische Studien berücksichtigt, von welchen deduktiv Aussagen über die Auswirkung der Variablen abgeleitet wurden. Aus der Untersuchung ging das interessante Ergebnis hervor, dass der Besuch der Lehrperson von Kursen der höheren Mathematik in nur 10% der Fälle einen positiven Effekt auf Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler aufwies, wohingegen sogar in 8% der Fälle ein negativer Effekt vermerkt wurde. Eine mögliche Erklärung, weshalb der Besuch der fortgeschrittenen Kurse im geschilderten Fall kontraproduktiv war, wäre, dass durch die Auseinandersetzung mit – für die Mathematik typisch – stark komprimierten Inhalten die Notwendigkeit in der Schulmathematik vernachlässigt wurde, den Stoff für die Lernenden zu dekomprimieren (BALL und BASS 2002). Gleichzeitig wird häufig erwähnt, dass Lehrende die zu vermittelnden Inhalte fachlich gänzlich durchdringen und innerhalb eines Themengebiets sicher und gedanklich flexibel sein müssen.
Das Vorhandensein von Fachwissen ohne weiterführende pädagogische Überlegungen ist für den Unterricht ebenso unzureichend wie eine hohe Kompetenz an pädagogischem Wissen, gepaart mit mangelnden Fachkenntnissen (SHULMAN 1986). Um feststellen zu können, was Lehrerinnen und Lehrer lernen müssen, muss unter anderem analysiert werden, wie diese ihr im Rahmen der universitären Ausbildung erworbenes Fachwissen einsetzen, um daraus akkurate Erklärungen im Schulunterricht

abzuleiten. SHULMAN (1986) führt den Begriff des *pedagogical content knowledge* ein, was ein weiterer zentraler Beitrag zur Identifikation der Anforderungen an Lehrerinnen und Lehrer ist. *Pedagogical content knowledge* meint die Art und Weise, wie die Lehrperson Inhalte in für ihre Schülerinnen und Schüler nützlichen Darstellungsformen präsentiert. Dazu zählt auch die Wahl von aussagekräftigen Analogien, Illustrationen, Beispielen und Erklärungen. Darüber hinaus inkludiert der Begriff auch eine gewisse Sensibilität dafür, welche Hürden es bei dem Erlernen eines spezifischen Themas für die Jugendlichen geben könnte und welche Vorkonzepte sich bereits zu bestimmten Fachbegriffen gefestigt haben könnten. Dies sei nicht zuletzt deshalb wichtig, damit Lehrende Strategien entwickeln können, wie sie gewissen Fehlvorstellungen im weiteren Verlauf des Unterrichts entgegenwirken können (SHULMAN 1986). Zusammengefasst erweitert *pedagogical content knowledge* den Begriff des Fachwissens also um all jene Aspekte, welche für den interaktiven Austausch mit Lernenden eine wesentliche Rolle spielen. Obwohl keine eindeutigen Effekte durch Analysen wie jene von BEGLE (1979) ausgemacht werden konnten, welche Variablen sich schließlich positiv auf den Lernerfolg auswirken, ist man dadurch zur Erkenntnis gekommen, dass die notwendigen Fähigkeiten für einen erfolgreichen Mathematikunterricht eng an die Ansprüche der Disziplin der Mathematik selbst gekoppelt sind und sich nicht daraus ableiten lassen, wie intensiv sich die Lehrperson im Rahmen des Studiums mit Mathematik auseinandergesetzt hat (BALL und BASS 2002).

3.2 Die Job-Analyse

Die Ausgangsfrage ist nun also, welche Art von Wissen bzw. welche Fähigkeiten und Fertigkeiten seitens der Lehrenden notwendig sind, um einen positiven Effekt auf den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler herzustellen. In einem ersten Erklärungsversuch könnte man dazu verleitet sein, es dabei zu belassen, dass Lehrerinnen und Lehrer nun einmal die Mathematik „verstehen und können" müssen. Mathematik „können bzw. verstehen" bekommt im Falle einer Lehrtätigkeit jedoch eine ambivalente Bedeutung, wie bereits die eingangs erwähnten Überlegungen von SHULMAN (1986) zeigen. Erstens muss spezifiziert werden, in welcher Weise mathematischer Inhalt „gekonnt" werden muss. Zweitens muss festgelegt werden, was Lehramtsstudierende – abgesehen von konkreten mathematischen Inhalten – noch über die Disziplin der Mathematik lernen sollen. Drittens wird von Lehrenden gefordert, dass diese wissen, in welcher Weise und an welcher Stelle sie das im Studium erworbene mathematische Wissen in der Praxis einsetzen müssen (BALL und BASS 2002). Letzteren Punkt thematisieren auch LEUFER und PREDIGER (2006), die eine Aktivierung entwickelter mathematischer Kompetenzen für didaktische Tätigkeiten von Lehrenden fordern und diesen Anspruch im gleichen Zug somit an die Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern stellen. Dem zufolge legen BALL und BASS (2002) den Fokus auf die Beobachtung der Unterrichtspraxis und das Unterrichtsgeschehen selbst, anstatt sich darauf zu konzentrieren, was die Lehrenden theoretisch unterrichten sollten. Dabei erscheint es zentral, Antworten auf die folgenden beiden Fragen zu finden (BALL und BASS 2002, S. 5):

1. *Welche mathematischen Fähigkeiten erfordert das Lehren bzw. Unterrichten von Mathematik?*
2. *In welcher Art und Weise wird die Fachmathematik im Schulunterricht verwendet? Wie ist dabei mathematisches Wissen mit anderen Wissensdimensionen verwoben?*

BALL und BASS (2002) wählen nun – anstatt eines theoriebasierten – einen praxisbasierten Ansatz, welcher die Beobachtung der Lehrtätigkeiten – kurz *jobs* – einer Lehrperson in der Schule im alltäglichen Unterricht verfolgt. In Form einer Längsschnittstudie wurde der Mathematikunterricht einer öffentlichen Schule im Jahre 1989 in Michigan kontinuierlich verfolgt, wobei sämtliche Videoaufzeichnungen, Audioaufzeichnungen, Transkripte, Kopien von Schülerausarbeitungen, Hausaufgaben, Quizzes sowie die Aufzeichnungen der Lehrperson, deren Reflexionen und Notizen ausgewertet wurden. Diese Längsschnittstudie wurde von der NSF (*National Science Foundation*) unterstützt und diente als Datengrundlage für die Überlegungen von BALL und BASS (2002).
Die Stärken der Datenerhebung in Form der Längsschnittstudie sind einerseits, dass die Daten in Form der erwähnten zahlreichen verschiedenen Repräsentationsformen vorliegen und andererseits, dass die Beobachtungen über den verhältnismäßig langen Zeitraum von über einem Jahr getätigt werden konnten. Dennoch sind sich die Autoren der Studie des Umstands bewusst, dass die Erhebung, da diese in einem kleinen Rahmen angesetzt wurde, keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit zu stellen hat. Vielmehr sollen die Ergebnisse Hilfestellungen bieten, um provisorische Hypothesen erstellen zu können, welche anhand detaillierterer Forschung verstärkt, relativiert und bei Bedarf sogar modifiziert werden können.
Da die Prozesse des Lernens und des Lehrens auf mehreren Ebenen sehr komplex sind, wurde die zur Auswertung der Artefakte verwendete Methodologie von einer interdisziplinär zusammengesetzten Expertengruppe, bestehend aus Expertinnen bzw. Experten der Bereiche Mathematik, Kognitionspsychologie sowie der allgemeinen Psychologie, ausgearbeitet. So wird sowohl durch die mathematische als auch durch die pädagogische Brille die Durchführung von Kernaufgaben des Mathematikunterrichtens analysiert. Einige dieser Kernaufgaben sind in etwa: die Repräsentation bzw. Aufbereitung mathematischer Ideen für die Lernenden, das Aufgreifen und Interpretieren von Aussagen oder Schrifterzeugnissen der Schülerinnen und Schüler, die Präsentation bzw. Evaluation von mathematischen Erklärungen und Argumenten im Diskurs sowie die Etablierung eines lernförderlichen Klassenklimas für mathematisches Arbeiten.

Gemäß diesen Überlegungen formulieren BALL und BASS (2002) zwei Ziele der Job-Analyse, die dabei helfen sollen, Antworten auf die beiden zuvor gestellten Fragen zu finden:

1. Die Untersuchung von Unterrichtssituationen, in welchen mathematische Aspekte im Vordergrund stehen und in welcher Art und Weise die Auseinandersetzung mit diesen die Zusammenarbeit von Lehrenden und Lernenden beeinflusst.
2. Die Entwicklung eines tieferen Verständnisses dafür, welche theoretischen Teilaspekte der Mathematik und welche praktischen Elemente einerseits tatsächlich im Mathematikunterricht Anwendung finden und andererseits noch stärker angewendet werden könnten.

Eine herausfordernde Aufgabe für Lehrende der Mathematik kann es sein, die Gedankengänge aus den Schriftstücken der Lernenden auf mathematische Gültigkeit zu prüfen. Die nachstehende Abbildung (siehe **Abbildung 3**) zeigt drei sich unterscheidende Arten, wie eine schriftliche Multiplikation zweier Zahlen durchgeführt werden kann.

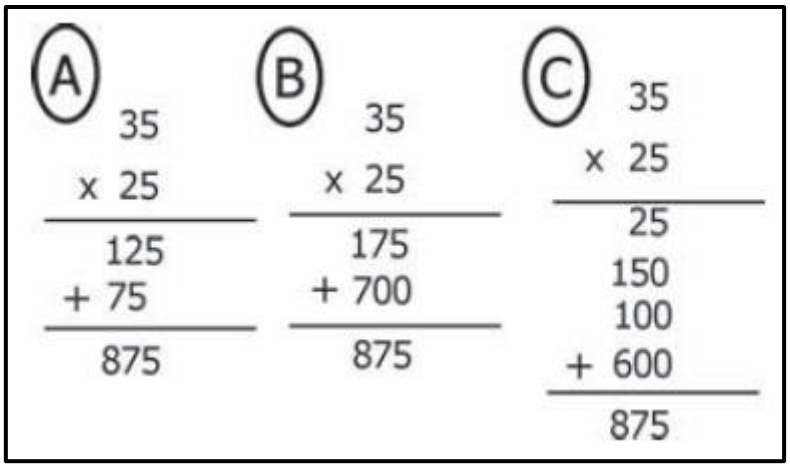


Abbildung 3: Drei Möglichkeiten einer schriftlichen Multiplikation, Quelle: BALL und BASS (2002)

Für die Einschätzung dieser drei Methoden sind offensichtlich mathematische Kompetenzen gefordert. Bei Rechnung A muss erkannt werden, dass die Zahl 75 stellenwertverschoben die Zahl 750 darstellt. Die Schülerin bzw. der Schüler verwendet hier neben der „üblichen" Trennung der Stellenwerte das Distributivgesetz und rechnet wie folgt: $35 \cdot 25 = (5 + 30) \cdot 25 = 5 \cdot 25 + 30 \cdot 25 = 125 + 750 = 875$. In Rechnung B wird genauso vorgegangen, wobei sich die oder der Lernende das Kommutativgesetz zu Nutze macht und statt der Zahl 35 die Zahl 25 in Zehner und Einer aufspaltet. In C wird das Ergebnis folgendermaßen berechnet: $35 \cdot 25 = (5 + 30) \cdot (5 + 20) = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 30 \cdot 20 = 25 + 150 + 100 + 600 = 875$. Dieses Beispiel demonstriert, dass bereits durch einfache Rechnungen Lehrerinnen und Lehrer vor die Herausforderung gestellt werden, alternative Herangehensweisen auf ihre mathematische Stichhaltigkeit zu überprüfen und zu beurteilen, ob – in diesem Fall – die Multiplikationsalgorithmen generalisierend angewendet werden können. Anschließend erwähnen BALL und BASS ein Beispiel, das einen weiteren Aspekt der Mathematikdidaktik beleuchtet. Eine Schulbuchdefinition der Polygone besagt (übersetzt): *„Ein Polygon ist eine geschlossene zweidimensionale Figur, deren Form durch Linien begrenzt wird."* Dies würde jedoch in der folgenden Grafik (siehe **Abbildung 4**) die Figuren (b), (c) und (f) fälschlicherweise nicht ausschließen.

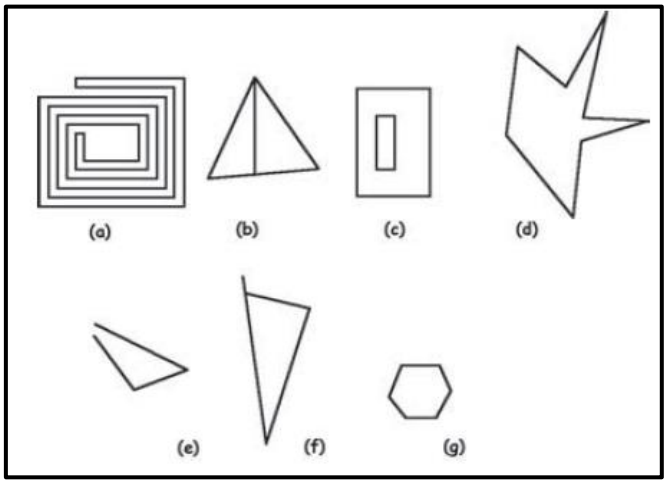


Abbildung 4: Präzision von Fachsprache im Unterricht, Quelle: BALL und BASS (2002)

Anhand dieses Beispiels lässt sich die folgende Herausforderung an Lehrkräfte identifizieren: Einerseits muss bewusst darauf geachtet werden, mathematische Inhalte fachsprachlich korrekt im Unterricht präsentieren zu können, andererseits sollten die Definitionen und Aussagen schüleradäquat aufbereitet sein, d.h. vor allem keine Begrifflichkeiten enthalten, die den Lernenden nach aktuellem Lernstand fremd sind.

Eine weitere alltägliche Aufgabe von Lehrerinnen und Lehrern ist es, den Leistungsstand ihrer Lernenden aufzuzeichnen. Im österreichischen Regelunterricht bekommen Lehrende diese Informationen zum größten Teil über Schularbeiten, Hausübungen und während der Mathematikstunden selbst. Will man den Lernstand der Jugendlichen erheben, ist es im Mathematikunterricht unerlässlich, dies anhand von Übungsaufgaben zu überprüfen, welche ein wesentliches Element von Schul- und Hausübungen sowie von Schularbeiten darstellen. Dementsprechend wichtig ist es, die Aufgaben so zu wählen, dass die oder der Lehrende möglichst viele Informationen über die Denkprozesse der Schülerinnen und Schüler durch deren Bearbeitung erfahren kann (BALL und BASS 2002). Während BALL und BASS an dieser Stelle ein Beispiel zum Ordnen von Dezimalzahlen präsentieren, soll die Kernaussage anhand eines Beispiels über das Ordnen von Brüchen nach der Größe ihrer Beträge illustriert werden. Teil a) der folgenden Aufgabe (siehe **Abbildung 5**) wurde vom Autor dieser Diplomarbeit für eine Schularbeit der dritten Klasse einer AHS (siebente Schulstufe) eingesetzt.

$$Ordne\ die\ folgenden\ Zahlen\ nach\ der\ Größe\ ihrer\ Beträge\ -\ schreibe\ als\ Ungleichungskette:$$
$$a)\ -1\frac{2}{3}, +\frac{4}{6}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}$$
$$b)\ +1\frac{2}{3}, +\frac{4}{6}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}$$

Abbildung 5: Große Konsequenzen durch ein einziges Vorzeichen, eigene Bearbeitung

Obwohl sich die Teilaufgabe b) von der Teilaufgabe a) nur um das Vorzeichen des ersten Eintrags unterscheidet, führt bei b) eine konzeptionell falsche Denkweise ebenfalls zur richtigen Lösung. Im zweiten Fall ist es nämlich ausreichend, die Brüche im ersten Schritt nach ihrer Größe zu ordnen und als Ungleichungskette anzuschreiben und im zweiten Schritt jede dieser Zahlen in Betragsstriche einzukleiden. Bei Teilaufgabe a) hingegen setzt eine richtige Bearbeitung voraus, dass der Schülerin bzw. dem Schüler zumindest geläufig ist, den Betrag auch als Abstand einer Zahl von 0 auf der Zahlengeraden aufzufassen. Durch die Wahl von a) als Testaufgabe konnte im vorliegenden Fall durch die Schularbeit tatsächlich bei zwei der vierundzwanzig Jugendlichen der Schulklasse ein Mangel an inhaltlichem Verständnis des Betrags (rationaler) Zahlen festgestellt werden. Durch die geschilderten Überlegungen konnte somit das „Unglück“ aus der Sicht des Lehrenden abgewendet werden, dass auf Grund einer durch Halbwissen lösbaren Aufgabe inhaltliche Fehlvorstellungen einiger Lernender im gegebenen Kontext unentdeckt blieben.
Eine erhöhte Schwierigkeit des in Abbildung 3 angesprochenen Aspekts besteht, wenn Schülerinnen und Schüler – etwa durch ihre Vorerfahrung entwickelte – Nicht-Standard-Methoden verwenden. BALL und BASS (2002) liefern das folgende Beispiel (siehe **Abbildung 6**), das zwei Strategien für die schriftliche Subtraktion zweier natürlicher Zahlen zeigt.

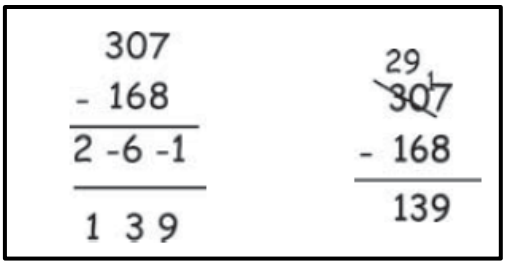


Abbildung 6: Nicht-Standard-Methoden der schriftlichen Subtraktion, Quelle: BALL und BASS (2002)

Auch in diesem Fall ist die mathematische Kompetenz der Lehrperson gefragt, die Subtraktionsalgorithmen auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Bei der ersten Vorgehensweise werden negative Ziffern zugelassen, wodurch man sich das „Ausborgen" über die nächste Stelle hinweg erspart. Die zweite Methode regruppiert die Zahl 307 – wodurch ebenfalls der Stellenübertrag beim Subtrahieren umgangen wird – folgendermaßen: $307 = 30 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 29 \cdot 10 + 17 \cdot 1$

Eine weitere Kernaufgabe des Mathematikunterrichts ist auf der einen Seite das Formulieren mathematischer Aussagen und Erklärungen und auf der anderen Seite das Evaluieren und Einordnen der mathematischen Aussagen der Lernenden (BALL und BASS 2002). Zusätzlich müssen Lehrende mathematische Textstellen in Schulbüchern danach beurteilen können, wie adäquat diverse Definitionen, Merksätze und Erläuterungen für das Lernen des Stoffgebiets formuliert sind und bei Bedarf alternative Erklärungen dazu abgeben. Wie wichtig Erklär- und Formulierungskompetenz sein kann, zeigt die folgende Grafik (siehe **Abbildung 7**), welche eine falsch durchgeführte schriftliche Multiplikation zeigt.

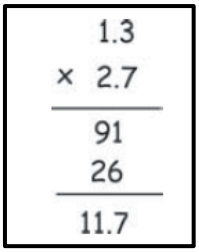


Abbildung 7: Stellenwertfehler bei schriftlicher Multiplikation, Quelle: BALL und BASS (2002)

Man könnte dem betroffenen Lernenden mitteilen, dass er die Zahl 26 um eine Stelle nach links verschieben und danach das Komma-Zeichen nach der zweiten Zahl von rechts platzieren müsse, da beide Faktoren in Summe zwei Nachkommastellen haben. Es ist jedoch zweifelhaft, ob dieser Hinweis auf der syntaktischen Ebene der Schülerin bzw. dem Schüler vermittelt, warum ihr bzw. sein Ansatz falsch war (BALL und BASS 2002). Vollständiger – und vor allem auf die mathematisch-inhaltliche Ebene Bezug nehmend – wäre es, zum Beispiel den Multiplikationsalgorithmus noch einmal anhand natürlicher Zahlen zu veranschaulichen und dabei auf die Bedeutung der Stellenwerte der einzelnen Zeilen in der vertikalen Schreibweise Bezug zu nehmen. Danach solle es möglich sein, den Gedanken der Stellenwerte von den natürlichen Zahlen auf die Dezimalzahlen zu übertragen, wodurch der bzw. dem Lernenden die Fehlerursache im Optimalfall klar ist.

BALL und BASS (2004) fassen zusammen, an welchen Stellen des beobachteten Unterrichts klar die mathematischen Fähigkeiten der Lehrkraft gefragt waren. Als Ergebnis ihrer Job-Analyse liefern sie die folgende Liste, welche zwar keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, jedoch durchaus eine

kompakte und aufschlussreiche Übersicht über wesentliche Anforderungen des Mathematikunterrichtens gibt.
Zu den Kernaufgaben von Lehrerinnen und Lehrern der Mathematik zählen (BALL und BASS 2004, S. 296):

1. *setting and clarifying goals*
2. *evaluating a textbook's approach to a topic*
3. *selecting and designing a task*
4. *re-scaling tasks*
5. *choosing and using representations*
6. *analyzing and evaluating student responses*
7. *analyzing and responding to student errors*
8. *managing productive discussions*
9. *figuring out what students are learning*

Als nicht unwesentlichen Anhang zu dieser Liste erwähnen BALL und BASS (2004) noch einen weiteren Gesichtspunkt, der ein besonderes Merkmal natur- und formalwissenschaftlicher Disziplinen darstellt. Mathematische Inhalte zeichnen sich häufig durch eine hohe Informationsdichte aus. Demnach sei es eine wesentliche Aufgabe von Mathematiklehrenden, jene Inhalte zu dekomprimieren und mittels geeigneter Darstellungsformen zu vermitteln. An dieser Stelle sei auf das eingangs geschilderte und von BEGLE (1979) beobachtete Phänomen hingewiesen, dass der Besuch von Kursen der höheren Mathematik nicht zwingend eine Verbesserung des Unterrichts führt, da eben jene Dekomprimierung mathematischer Inhalte nach BALL und BASS (2004) für den Schulunterricht selbst unerlässlich ist. Neben den bereits erwähnten Beobachtungen resümieren BALL und BASS (2002), dass ein sehr großer Teil des Unterrichtens aus mathematischem Problemlösen bestand, woraufhin sie postulieren, dem Problemlösen einen angemessenen Stellenwert in der LehrerInnenbildung zuzugestehen.
Auf mathematisch-inhaltlicher Ebene sehen BALL und BASS (2004) eine wesentliche Aufgabe von Lehrerinnen und Lehrern in der Etablierung einer Beweis- und Begründungskultur. Dabei muss zwischen zwei Arten des Begründens unterschieden werden: Einerseits kann das Begründen explorativer Natur sein, d.h. im Rahmen eines Problemlöseprozesses oder bei der Auffindung von Mustern geschehen oder andererseits ein Mittel zur Rechtfertigung sein, d.h. zu Erklärungszwecken, zur Argumentation oder dem Beweisen der Gültigkeit bestimmter Methoden dienen. Eine sensibilisierte Lehrperson könne durch die Inklusion metakognitiv aktivierender Fragen Einfluss nehmen (BALL und BASS 2004). Werden an geeigneten Stellen Fragen wie „*Woher weißt du das*?“, „*Haben wir bereits alle Lösungen gefunden*?“, „*Funktioniert deine Methode immer? Wenn nein, unter welchen Umständen funktioniert sie*?“, „*Kam das bereits an einer anderen Stelle vor?*“, „*Wie können wir uns dieses überraschende Resultat erklären?*“ oder „*Hier scheint es ein gewisses Muster zu geben. Wie können wir das mathematisch ausdrücken oder beweisen?*“ gestellt, kann dieser zentrale Aspekt des Beweisens und Begründens in der Mathematik den Jugendlichen nähergebracht werden.

3.3 Eine mögliche Transformation der Jobs zu konkreten Lernanlässen

Die Job-Analyse nach BALL und BASS (2004) kann nun als eine Basis zur Ermittlung von Lerninhalten für Lehramtsstudierende der Mathematik verwendet werden. Diese Idee greift PREDIGER (2013) auf, die einige fortführende Überlegungen – auf die Job-Analyse Bezug nehmend – anstellt. Zu dem im vorigen Unterkapitel erwähnten Gedanken, dass mathematische Inhalte mittels verschiedener Darstellungsformen präsentiert werden müssen, wird ergänzt (PREDIGER 2013, S. 5):

zu *5. Wer geeignete Darstellungen (und hinzuzufügen sind Exaktheitsstufen!) für Lernende auswählen soll […], muss in der Lage sein, einen mathematischen Zusammenhang auf unterschiedlichen Stufen und in unterschiedlichen Repräsentationen darzustellen und deren Chancen und Grenzen zu reflektieren. Dies erfordert eine hohe Flexibilität im Umgang mit mathematischen Inhalten, die nicht erworben werden kann, wenn sich die Lehrveranstaltung ausschließlich in symbolischen Darstellungen und axiomatischen Herleitungszusammenhängen bewegt.*

Die von BALL und BASS identifizierte Aufgabe von Lehrenden, auf Aussagen von Schülerinnen und Schülern aufschlussreiche Antworten bieten zu können, fordert nach PREDIGER noch zusätzliche Kompetenzen seitens der Lehrperson (PREDIGER 2013, S. 5):

zu *6. Wer Fehlvorstellungen von Lernenden evaluieren und bearbeiten soll, muss Vertrauen in die mathematische Fachsprache und ihre Konzepte als hilfreiche Instrumente zur Klärung von Zusammenhängen entwickelt haben.*

Auch hinter der Forderung produktive, mathematische Diskussionen moderieren zu können, verbergen sich notwendige Qualifikationen seitens der Lehrkräfte, die in der Ausbildungsphase thematisiert werden müssen (PREDIGER 2013, S. 5):

zu 8. *Wer mathematische Diskussionen von Schülerinnen und Schülern lernförderlich moderieren will […], muss erfahren haben, wie mathematische Wissensbildungsprozesse sich vollziehen, statt nur fertige Theorien kennenzulernen […]*

PREDIGER setzt den Ansatz fort, die im Rahmen der Job-Analyse durch mathematische Kompetenz fundierten Handlungsanforderungen in explizite Lernanlässe zu transformieren, welche Lehramtsstudierende der Mathematik unter Umständen bereits während ihrer Ausbildungsphase erfahren können und entwirft den folgenden Kriterienkatalog (PREDIGER 2013, S. 5 f):

1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können
2. Lernziele setzen und ausschärfen
3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten
4. Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren
5. Tests entwickeln und re-skalieren
6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln
7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren
8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren
9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren

10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende
11. Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen

Es wird vermerkt, dass auch diese Liste keinen abgeschlossenen Katalog darstellt, dessen Items alle Aspekte des Mathematikunterrichtens komplett beinhalten
Dass sowohl BALL und BASS (2004) mit bei der durchgeführten Job – Analyse als auch PREDIGER (2013) bei der Ausarbeitung des Kriterienkatalogs recht zurückhaltend im Stellen des Anspruchs auf Vollständigkeit sind, vermag an der hohen Komplexität und vielseitigen Aspekte des Sachverhalts liegen, z.B. wie Wissensbildungsprozesse im Mathematikunterricht geschehen. Diese Komplexität beschreiben auch HEFENDEHL-HEBEKER und PREDIGER (2016) mit dem Begriff der epistemologischen Bewusstheit im Kontext didaktischer Handlungen bei Lehrkräften. Die epistemologische Bewusstheit ist ein Begriff dafür, wie das Wissen über mathematische Inhalte im Bewusstsein der Lehrenden repräsentiert ist. Demnach benötigen Lehrkräfte über ein Wissen darüber (PREDIGER und HEFENDEHL-HEBEKER 2016, S. 242),

- *welche ursprünglichen Fragen einen Wissensbildungsprozess anstoßen können, welche orientierenden Leitideen und Zwecksetzungen ihn weiter tragen und welche Stufen dabei durchlaufen werden,*
- *welche spezifischen Denkhandlungen dabei am Werk sind,*
- *welche Darstellungsmittel und Sprachebenen jeweils verwendet werden können und welche Konventionen dabei zu beachten sind,*
- *wie einzelne Komponenten eines Wissensgefüges zueinander in Beziehung stehen und welche Rolle sie dabei einnehmen,*
- *welche Praktiken der Vergewisserung es gibt,*
- *welche Reichweite und welche Grenzen ein Wissensgebiet hat.*

Die darauf aufbauenden Überlegungen liefern Ergebnisse (siehe Anhang A), welche die Komplexität des Vorhabens, Handlungsanforderungen für Lehrende zu identifizieren, zum Vorschein bringen. In diesen Ergebnissen lassen sich Ideen der Job – Analyse wiedererkennen, teilweise spezifiziert und im Kontext der Epistemologie interpretiert. Die von HEFENDEHL-HEBEKER und PREDIGER (2016) formulierten Aspekte könnten einen richtungsweisenden Einfluss auf die Gestaltung der Lehramtsausbildung bringen, wodurch eine tiefgreifende Auseinandersetzung rund um den Begriff der epistemologischen Bewusstheit gewinnbringend erscheint. Im anschließenden Unterkapitel wird jedoch ein anderer Weg verfolgt: Im Sinne des Kriterienkatalogs von PREDIGER (2013) sollen ergänzende Überlegungen getätigt werden, um eine möglichst umfangreiche Liste relevanter Handlungsanforderungen für die Ausgestaltung eigener Übungsaufgaben für Studierende in Kapitel 5 vorzubereiten.

3.4 Eine erweiterte Liste an Handlungsanforderungen

Auffällig bei der Betrachtung der beiden im vorigen Kapitel behandelten Kriterienkataloge ist, dass alle Handlungsanforderungen auf der mathematisch-inhaltlichen Ebene gestellt werden. Unter anderem wurde erwähnt, dass Äußerungen analysiert, bewertet und auf Fehler (lernförderlich) reagiert werden müsse. Bei einigen erwähnten Punkten des Kriterienkatalogs spielt womöglich neben der inhaltlichen Dimension auch die zeitliche Dimension eine wesentliche Rolle, wodurch die kognitiven Ressourcen der oder des Lehrenden punktuell stark gefordert werden. Bei den folgenden vier Items aus PREDIGERS Handlungsanforderungen müssen in konkreten Unterrichtssituationen Entscheidungen innerhalb sehr kurzer Zeit getroffen werden:

7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren
8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren
9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren
10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende

Diese vier Handlungsanforderungen haben gemeinsam, dass vorab – zumeist durch Aussagen von Schülerinnen und Schülern – spontan eine neue Unterrichtssituation eingeleitet wird, wo mathematische Konzepte und Fehlkonzepte der Lernenden in das Zentrum des Gesprächs bzw. des Diskurses im Klassenplenum rücken. In diesen kognitiv anspruchsvollen Situationen ist die Lehrperson gefragt, die Lernendenaussagen aus fachlicher Perspektive zunächst unmittelbar zu beurteilen, um angemessen darauf reagieren zu können.

Den erhöhten Aufwand an kognitiven Ressourcen haben auch BRUNNER und KRAUSS (2011) festgestellt, die einen Teilaspekt der COACTIV-Studie aufgreifen, bei welchem das mathematisch-didaktische Wissen sowie das Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufe untersucht wurde. Vorab wurde im Rahmen der COACTIV-Studie die sogenannte „schnelle Beurteilungs-Fähigkeit“ (=SB-Fähigkeit) als ein wesentlicher Parameter eingeführt, der einer Art „Reaktionszeit“ entspricht. Dabei ist der Begriff der „Reaktionszeit“ jedoch nicht als jene Zeit zu verstehen, die benötigt wird, bis eine unmittelbare Aktion der Lehrkraft im Unterricht auf eine Lernendenaussage erfolgt, da es aus didaktischen Überlegungen durchaus sinnvoll sein kann, abzuwarten und die Fehlvorstellung zu einem geeigneteren Zeitpunkt im Unterricht zu thematisieren. BRUNNER und KRAUSS (2011) verstehen unter dem Begriff der „Reaktionszeit“ viel mehr die benötigte Zeit, sich über eine mathematische Situation vorab jene mentale Klarheit zu verschaffen, die ein anschließendes bewusstes Handeln überhaupt erst erlaubt. REIMANN (1998) liefert Ergebnisse aus der kognitionspsychologischen Expertiseforschung, dass Experten in ihrem Gebiet nicht nur besser, sondern auch grundsätzlich kognitiv schneller sind.

Der Parameter der SB-Fähigkeit wurde anhand computersimulierter Schülerantworten zu diversen inhaltlichen Gebieten der Schulmathematik ermittelt, indem diese von den Lehrenden möglichst schnell als korrekt bzw. inkorrekt identifiziert werden mussten. Die nachstehende Grafik (siehe **Abbildung 8**) zeigt einen Ausschnitt aus dem Testverfahren.

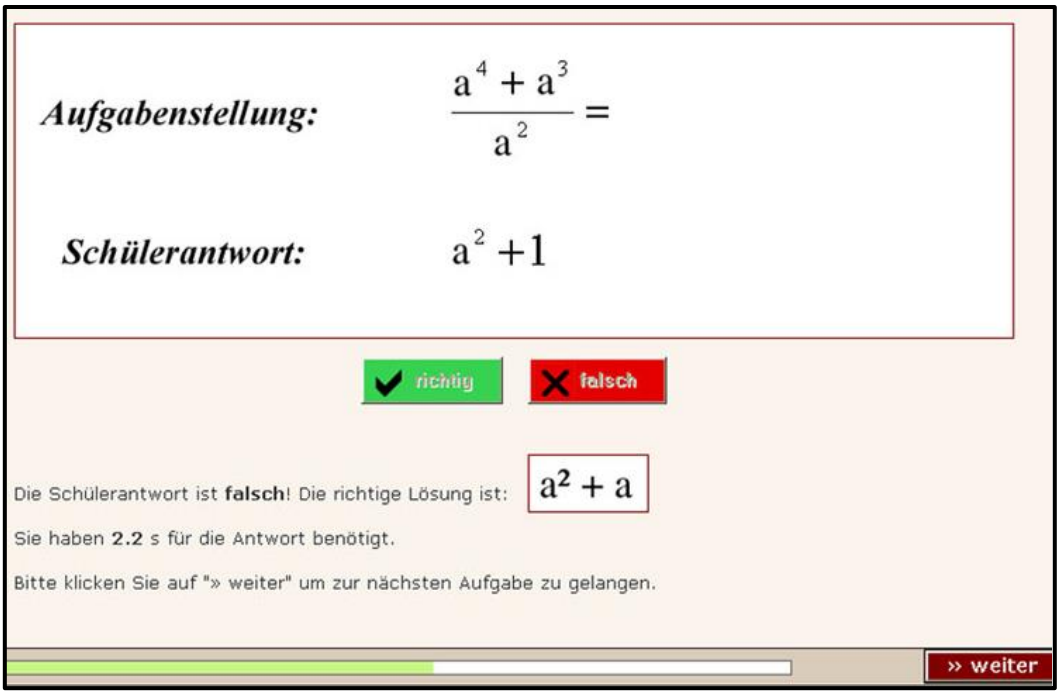


Abbildung 8: Computersimulation der COACTIV-Studie, Quelle: BRUNNER und KRAUSS (2011)

Vermerkt wurde einerseits, ob die Testpersonen fähig waren, zwölf (fiktive, aber realitätsnahe) Schülerantworten als korrekt bzw. inkorrekt zu identifizieren und andererseits, in welcher Zeit die jeweiligen Problemstellungen behandelt werden konnten. Die Testpersonen waren Lehrkräfte der Schulformen Gymnasium, Realschule, Gesamtschule sowie anderer Sekundarstufenformen. Somit unterscheiden sich die Probanden durchaus durch ihre fachmathematische sowie fachdidaktische Ausbildung. Das Ziel war es herauszufinden, was Lehrerinnen und Lehrer mit einer höheren SB-Fähigkeit von jenen mit geringerer SB-Fähigkeit unterschied, indem Rückschlüsse zu den Testergebnissen gezogen wurden (BRUNNER und KRAUS 2011).
Aus einer Beobachtung der Ergebnisse geht hervor, dass durchschnittlich nur 73% der zwölf Testaufgaben unter Zeitdruck korrekt gelöst wurden, wohingegen ohne zeitlichen Begrenzungen nahezu jede Aufgabe korrekt behandelt werden konnte. Dieser Wert lässt zwar lediglich Schlüsse im Kontext des vorliegenden durchgeführten Tests ziehen, jedoch ist die Einflussnahme der zeitlichen Komponente auf die Bearbeitung der Testitems klar erkennbar. Aus der Messung der SB-Fähigkeit sind folgende Tendenzen auffällig: Während das Alter der Probandinnen und Probanden keinen statistisch nachweisbaren Einfluss auf die SB-Fähigkeit hat, ist ein Einfluss der Schulform, in welcher die Lehrenden tätig sind, klar auszumachen. BRUNNER und KRAUSS (2011) gelangen zu dem Ergebnis, dass Gymnasiallehrkräfte durchschnittlich sowohl unter der Maxime der korrekten Beantwortung der Testaufgaben als auch unter dem Kriterium der SB-Fähigkeit besser abschnitten als Nicht-Gymnasiallehrkräfte. In weiterer Folge wird vermerkt, dass die beobachtete hohe Korrelation zwischen Schulform und SB-Fähigkeit insbesondere auf eine hohe Korrelation zwischen SB-Fähigkeit und Fachwissen der Lehrperson zurückzuführen ist.

Nach diesen theoretischen Erläuterungen wird ein weiteres Item dem von PREDIGER (2013) formulierten Kriterienkatalog hingefügt:

12. spontane Schüleraussagen umgehend anhand der Relevanz für weitere Handlungsakzente im Unterricht beurteilen können

Eine mittlerweile ebenso oft zitierte wie kritisierte Studie (siehe dazu URL-01) ist jene von HATTIE (2009). Die „Hattie-Studie“ legt 138 Einflussfaktoren zum Lernerfolg vor, die aus der statistischen Analyse zahlreicher Studien über einen Zeitraum von 15 Jahren hervorgehen. Als Parameter beschreibt das Effektmaß d, wie stark sich die jeweilige Variable auf den Lernerfolg auswirkt. Bei einem Wert von $0.4 < d < 0.6$ legt HATTIE (2009) einen moderaten Effekt fest. Ab einem Wert von $d \geq 0.6$ wird von starken Effekten gesprochen.

Es wird bemerkt, dass sich die Ausgangslage von jener der Job-Analyse von BALL und BASS (2002) deutlich unterscheidet. Letztere beschränkt sich auf das einfache, aber direkte und realitätsnahe Beobachten von Schulklassen während des Mathematikunterrichts, um Handlungsanforderungen an die Lehrkraft zu identifizieren. Die Intention der „Hattie-Studie“ es jedoch, allgemeine Effekte (nicht nur während des Mathematikunterrichts) auszumachen, die sich positiv auf den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler auswirken, selbst wenn sich diese außerhalb des Einflussbereichs der Lehrperson befinden. Aus der Studie gehen mehrere Rankings hervor, die die Effekte thematisch in einige Teilbereiche zusammenfassen, unter anderem in die Bereiche „Elternhaus“, „Schuleffekte“, „Lehrperson“, „Schülereffekte“ sowie „Unterrichten“. Um auf einer Ebene mit den Jobs nach BALL und BASS (2004) bzw. Handlungsanforderungen nach PREDIGER (2013) zu bleiben, werden die Ergebnisse aus der Analyse im Bereich „Unterrichten“ – also ebenfalls jene Beobachtungen des konkreten Unterrichtgeschehens – in der folgenden Grafik (siehe **Abbildung 9**) veranschaulicht und versucht, daraus weitere Handlungsanforderungen für den Kriterienkatalog abzuleiten.

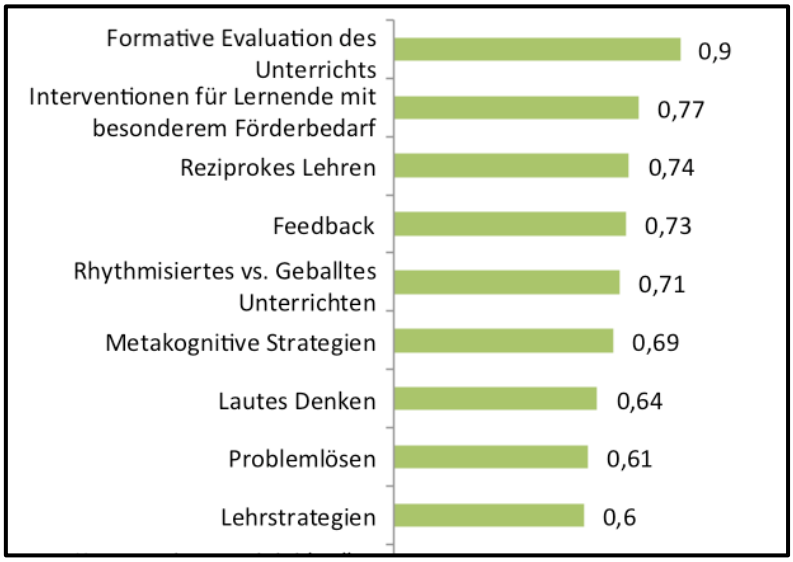


Abbildung 9: Starke Effekte im Teilbereich Unterrichten, Quelle: URL-02

Die „formative Evaluation des Unterrichts“ beschreibt die Weiterentwicklung des eigenen Unterrichtens anhand direkt auf den Schulunterricht bezugnehmender Fragen, die den Schülerinnen und Schülern gestellt werden. Basierend auf deren Antworten setzt die Lehrperson Schritte, um den eigenen Unterricht zu optimieren. Dieses konsequente Evaluieren kann zwar ebenso wie das Bestreben nach „Feedback“ als professionelle Komponente des Lehrberufs angesehen werden, eignet sich aber im Sinne einer Handlungsanforderung wenig, da dies eher den Bereich des Unterrichtsmanagements betrifft.

Erwähnenswert ist, dass im Ranking des Teilbereichs „Unterricht“ vier der neun starken Effekte Aspekte sind, die eng mit der methodischen Vorgangsweise der Lehrperson stehen: „reziprokes Lehren“, „rhythmisiertes vs. geballtes Unterrichten“, „Problemlösen“ sowie allgemein „Lehrstrategien“. Nun stellt sich die Frage nach der Verwertbarkeit dieser Ergebnisse für den

Mathematikunterricht. Ein Merkmal der Schulmathematik ist, dass mit unterschiedlichen Stoffgebieten jeweils unterschiedliche Voraussetzungen für den Mathematikunterricht gegeben sind. Manchmal liegen die größten Hürden im mathematisch exakten Formulieren bzw. im „Dingfestmachen" der Gedanken. An anderer Stelle ist womöglich eine ausführliche Auseinandersetzung mit den Vorerfahrungen sowie eventuell erworbenen Fehlkonzepten der Lernenden notwendig. Bei manchen Stoffgebieten eignet sich ein explorativer Zugang, um Mathematik erlebbar bzw. begreifbar zu machen, während bei manchen Inhalten genau dieselbe Vorgangsweise womöglich eher Frustrationserlebnisse hervorruft, z.B. da aufgrund des aktuellen Lernstands das nötige Werkzeug für ein entdeckendes Lernen noch nicht gegeben ist. Auch die Stärke von Gruppenarbeiten, der verbale Austausch mit anderen Lernenden, kann manchmal fruchtbar sein, anderenorts sind direkte Instruktionsphasen das Mittel der Wahl. HATTIE (2009) zeigt, dass ein durch Methodenvielfalt geprägter Unterricht grundsätzlich positive Lerneffekte bei den Schülerinnen und Schülern hervorrufen kann. Dass natürlich nicht jeder Inhalt im Mathematikunterricht für jede Methode geeignet ist, muss dabei stets bedacht werden. In weiterer Folge ist hier wiederum das mathematisch-didaktische Wissen gefragt, wenn entschieden werden muss, welche methodischen Optionen für konkrete Inhalte ertragreich sein könnten. Zugeschnitten auf den Mathematikunterricht ist hier die folgende Kompetenz gefragt:

13. methodische Vorgangsweisen anhand mathematisch-inhaltlicher Anforderungen wählen

Als Produkt der Erwägungen in diesem dritten Kapitel erhält man somit eine (erweiterte) Liste von Handlungsanforderungen, die im Mathematikunterricht einen zentralen Platz einnehmen. Da es eine wesentliche Aufgabe der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern ist, Lehramtsstudierende auf unterrichtliche Abläufe bestmöglich vorzubereiten, wird hier an dieser Stelle eine Miteinbeziehung des Kriterienkatalogs nach PREDIGER (2013) bzw. dessen erarbeitete Erweiterung in die Ausbildungsphase empfohlen. Der Optimalfall wäre, dass durch eine frühe Sensibilisierung im Studium auf die gestellten Handlungsanforderungen – unterstützt durch geeignetes Übungsmaterial – die von vielen Berufseinsteigerinnen und Berufseinsteigern empfundene Lücke zwischen Schulmathematik und Universitätsmathematik kontinuierlich geschlossen werden kann. Im folgenden Kapitel werden deshalb einige Projekte vorgestellt, die gezielt die Schnittstelle zwischen Universität und Schule thematisieren und implizit bereits einige Punkte der auf den letzten Seiten formulierten Handlungsanforderungen aufgreifen.

4. Projekte im Schnittstellenbereich Hochschulmathematik/Schulmathematik

Eines der Hauptziele dieser Diplomarbeit ist es, Aufgaben zu entwickeln, welche vor allem in der ersten Phase der Ausbildung von Lehramtsstudierenden eingesetzt werden können, um der durch die doppelte Diskontinuität verursachten Verunsicherung entgegenzuwirken, die aufgrund der unterschiedlichen Charakteristika zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik erlebt wird.
In diesem Kapitel sollen nun exemplarisch vier Projekte vorgestellt werden, welche sich ebenfalls zum Ziel gesetzt haben, die Studierenden zu Studienbeginn für den Schnittstellenbereich zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik zu unterstützen. Dieses Ziel soll teils durch sehr unterschiedliche, teils durch sehr ähnliche Herangehensweisen erreicht werden. Die Projekte besitzen eine große Relevanz für diese Diplomarbeit, da zahlreiche relevante des angesprochenen Schnittstellenbereichs Themen (sowohl inhaltlich als auch didaktisch) detailliert aufbereitet veranschaulicht werden.

Am Ende der Darstellung jedes Projekts soll mithilfe des in Kapitel 3 erstellten Kriterienkatalogs analysiert werden, welche Handlungsanforderungen durch die jeweiligen Aufgabenkonzepte thematisiert werden. Bei der Analyse muss jedoch differenziert werden, ob sich die Studierenden mit den im vorigen Kapitel thematisierten Jobs im Rahmen der Projekte jeweils explizit oder implizit auseinandersetzen. Ersteres würde bedeuten, dass konkrete Handlungsanforderungen aktiv und bewusst geübt werden. Hingegen kann es sein, dass die Lehramtsstudierenden implizit im eigenen Lernprozess mit einigen Aspekten der Handlungsanforderungen konfrontiert werden oder etwa erstrebenswerte Handlungsmuster im Zuge von Projektaktivitäten vorgelebt bekommen, wodurch diese in der späteren Berufspraxis analog übertragen werden können.
Es ist nicht das Ziel, die Projekte miteinander zu vergleichen (was aufgrund unterschiedlicher Ausgangslage gar nicht möglich wäre) und eine Reihung vorzunehmen, sondern viel mehr ein Gefühl dafür zu bekommen, welche Handlungsanforderungen durch die vorhandenen Konzepte gut abgedeckt sind. Im selben Zuge erhält man eventuell auch Aufschluss darüber, welche relevanten Aspekte des Unterrichtens in zukünftigen Projekten noch stärker Beachtung finden könnten, um in der Lehramtsausbildung auf eine möglichst breite Palette an Handlungsanforderungen vorbereiten zu können.

4.1 Demonstrationsaufgaben (nach ABLEITINGER 2013)

An der Universität Duisburg-Essen lief in den Studienjahren 2009/10 bis 2011/12 ein Projekt namens „Mathematik besser verstehen“, welches sich zum Ziel gesetzt hat, gymnasiale Lehramtsstudierende sowie Fachstudierende im ersten Studienjahr zu unterstützen. Dabei wurden verschiedene Projektaktivitäten eingesetzt, wobei sich im zweiten Projektjahr der Einsatz sogenannter Demonstrationsaufgaben etabliert hat. Zunächst soll die Intention dargelegt werden, die hinter der Einführung dieses Aufgabentyps steckt.
ABLEITINGER (2013) analysiert, dass zu Studienbeginn Studierende Schwierigkeiten haben, Aufgabenstellungen zu verstehen sowie die Bedeutung bzw. den Nutzen einer Aufgabe zu identifizieren. Weiters wurden Schwierigkeiten dabei festgestellt, eine gegebene Aufgabenstellung in eine Form zu bringen, in der sie den zur Verfügung stehenden Bearbeitungsmitteln zugänglich wird. Des Weiteren gelingt es den Studienanfängern häufig nicht, unterschiedliche Handlungsoptionen zu identifizieren, eine geeignete davon auszuwählen und bei Bedarf flexibel andere Lösestrategien zu verfolgen. Schließlich treten auch Probleme bei der Wahl eines passenden Argumentationsniveaus sowie einer strukturierten Darstellung auf. An dieser Stelle sei bemerkt, dass in der Schilderung der Probleme erneut die von KLEIN (1924) formulierten Gedanken zur doppelten Diskontinuität implizit erkennbar sind.

Die Idee dieses Projekts basiert jedoch nicht auf dem theoretischen Konstrukt um die Job-Analyse nach BALL und BASS (2004). Die konzeptionelle Einbettung der Demonstrationsaufgaben ist mit dem didaktischen Modell der „Cognitive Apprenticeship“, einem Ansatz aus den Bildungswissenschaften, gegeben (COLLINS 1989). Der Grundgednke des „Cognitive Apprenticeship“-Modells ist eine Sequenzierung der einzelnen Arbeitsschritte, ähnlich wie dies häufig bei handwerklich-praktischen Lehrverhältnissen der Fall ist. Als metaphorische Analogie kann der Tischlerberuf herangezogen werden, in dessen Praxis die einzelnen Arbeitsschritte und Handlungsfolgen klar ersichtlich sind. Durch die Einsicht über die Relevanz der Teilschritte sind diese für den Lernenden logisch nachvollziehbar, können abgespeichert und weiters reproduziert werden. Dieses praxisbasierte Modell wird nun im Rahmen des Projekts „Demonstrationsaufgaben“ auf die Vermittlung theoretischer Inhalte angepasst, woraufhin die Sequenzierung in die folgenden Lehr-Lern-Interaktionen erfolgte:
Während des *Modelling* wird den Lernenden das Problem, sowie die Problemlösung samt Problemlöseprozess vorgestellt – konkret erfolgt in der Einheit die Präsentation einer Demonstrationsaufgabe durch die Lehrperson. Im darauffolgenden Schritt, dem *Coaching*, betreuen Experten die (im vorliegenden Fall) Mathematikstudierenden bei der Ausführung der neu zu erlernenden Fähigkeit. Dies bedeutet, dass einzelne Aspekte der Demonstrationsaufgabe individuell mit den Experten (z.B. Tutoren) wiederholt werden. Im nächsten Schritt, dem *Scaffolding*, soll die oder der Studierende eine neue, ähnliche Aufgabe selbstständig lösen. Ist die Studentin bzw. der Student der Aufgabe noch nicht gewachsen, kann die oder der Lehrende Teile des Lösungsprozesses übernehmen. Anschließend soll in der nächsten Sequenz, der *Articulation*, das erworbene Wissen bzw. der Löseprozess benannt werden, d.h. von den Lernenden explizit beschrieben werden können. Im konkreten Fall der Mathematikaufgabe würde dies bedeuten, auch die aufgetretenen Probleme beim Problemlösen in Worte zu fassen. Während der Phase der *Reflection* sollen die Studierenden ihre Lösungsstrategien mit jenen des Experten oder anderer Lernenden vergleichen. Hier kann auch noch zusätzlich darüber reflektiert werden, welche Rolle nun der gelernte Satz oder Algorithmus an dieser Stelle des Lernfortschritts einnimmt. Eine vernetzende Tätigkeit wird in der letzten Phase, der *Exploration*, beschrieben. Wurde eine neu bewältigte Methode sicher beherrscht, soll sie auf andere

Kontexte übertragen werden. Die Studierenden können in diesem Schritt außerdem erkunden, innerhalb welcher Grenzen sie funktioniert und wann sie eventuell erweitert werden müsste. Im Falle eines mathematischen Satzes wäre dies eine Möglichkeit, sich zum Beispiel die Wichtigkeit bestimmter Voraussetzungen bewusst zu machen.

Die Demonstrationsaufgaben wurden nun mittels des folgenden Ablaufs in den Lehrveranstaltungen umgesetzt (ABLEITINGER 2013, S. 21):

1. *Ein neues Thema wird in der Vorlesung behandelt.*
2. *Eine dazu passende Demonstrationsaufgabe wird im Sinne des Modelling präsentiert.*
3. *Danach arbeiten die Studierenden zunächst unter Anleitung eines Übungsleiters an Aufgaben aus demselben Themenbereich (Coaching, Scaffolding, Articulation und Reflection).*
4. *Auf dem Hausaufgabenblatt gibt es dann eine Aufgabenstellung, die sich mit dem Know-How der Demonstrationsaufgabe leichter lösen lässt.*

ABLEITINGER (2013) sieht als ein wesentliches Problem der Mathematikausbildung, dass zu wenig transparent gemacht wird, wie Experten an Problemlösungen herangehen und welche strategischen Begleitüberlegungen beim Aufgabenlösen gemacht werden müssen. An der Tafel werde häufig nur ein Abbild der Reinschrift präsentiert, also ein von seiner Entstehungsgeschichte gesäubertes Endprodukt. Dieser Umstand sei sowohl in Vorlesungen als auch bei Lösungen von Übungsaufgaben beobachtbar. Dadurch fehle es an einer expliziten Darstellung der für den Lösungsprozess relevanten Gedankengänge.
Darauf aufbauend wurden die im Rahmen des Projekts „Mathematik besser verstehen“ entworfenen Demonstrationsaufgaben unter den folgenden Aspekten entwickelt (ABLEITINGER 2013, S. 22):

- *Es wurde klargemacht, worin das eigentliche Problem in der Aufgabe besteht.*
- *Es wurden Ideen für die Lösung entwickelt und nicht bloß fertige Produkte präsentiert.*
- *Es wurden manchmal Irrwege bis zu ihrem Scheitern verfolgt und andere mögliche Handlungsoptionen aufgezeigt.*
- *Entscheidende Punkte in der Aufgabenlösung wurden explizit hervorgehoben.*
- *Alle wesentlichen Argumentationsschritte wurden detailliert aufgeführt.*

Ziel war es, Aufgaben zu entwickeln, welche sich tatsächlich an den Inhalten der Anfängervorlesungen orientieren.
Die Verfasser der Demonstrationsaufgaben erhofften sich a priori folgende Effekte: Statt sich, etwa im Rahmen des üblichen Übungsbetriebs, mit komprimierten Musterlösungen herumschlagen zu müssen, sollten die Lernenden mathematische Texte im Zuge der Demonstrationsaufgabe besser verstehen können. Durch geeignete Formulierungen sollen auch Ideen für Lösungswege sowie Aspekte der Aufgabe Teil der mathematischen Auseinandersetzung mit einer Aufgabe sein. Weiters ist intendiert, dass die Studienanfängerinnen und Studienanfänger dazu motiviert werden, sich in einer vertiefenden Weise mit den Aufgaben auseinanderzusetzen, sodass sie innerhalb des Sachverhalts fundiert argumentieren können. Die Demonstrationsaufgaben sind zudem eher als Impulsgeber statt als Abschreibvorlage für vorzubereitende Übungsaufgaben zu verstehen. Durch die inhaltliche Orientierung an Standardaufgaben sollen eben diese auch in Prüfungssituationen rasch und effizient gelöst werden können. Die in den Musterbeispielen demonstrierte Art und Weise, wie an Probleme

herangegangen werden kann, soll als Vorbild dafür genommen werden, welche Argumentationstiefe und Präzision an gewissen Stellen adäquat ist.

Um nun eine konkrete Vorstellung einer Demonstrationsaufgabe zu bekommen, soll zunächst jene zum Thema „Stetigkeit“ (siehe Anhang B) beschrieben werden. Die Beispielaufgabe kann in der Anfangsphase der Fachausbildung im Mathematikstudium behandelt werden, jedoch (je nach Curriculum) etwa im zweiten oder dritten Semester, da einige grundlegende Konzepte über Folgen sowie reelle Funktionen Voraussetzung sind.
Die Ausgangsfrage ist, ob die stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ bei gegebenem Funktionsterm $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ im Punkt $(0,0)$ stetig fortsetzbar ist. Anschließend wird wiederholt, was der Begriff „stetig fortsetzbar“ allgemein sowie im Kontext dieser Aufgabe bedeutet. Danach wird explizit dargestellt, auf welche Aspekte bei der Bearbeitung des Problems zu achten ist. Bevor man sich dem Lösungsprozess des Problems widmet, wird als Merkregel für diesen Aufgabentyp vermerkt, dass die Berechnung zweier Grenzwerte (da zwei Variablen) umgangen wird, indem die Berechnung des Grenzwertes auf eine „gewöhnliche“ Grenzwertberechnung mit nur einer Variablen zurückgeführt wird. Anschließend wird noch einmal deutlich gemacht, welche Lösungsstrategien in den jeweiligen Fällen „ist stetig fortsetzbar“ bzw. „ist nicht stetig fortsetzbar“ angewendet werden können. In der Demonstrationsaufgabe versucht man zuerst, durch die in vielen Fällen einfachere Methode zum Ziel zu kommen und sucht nach zwei Nullfolgenpaaren, entlang derer die entsprechenden Grenzwerte der Folgen der Funktionswerte unterschiedliche Werte annehmen. Der Autor dieser Diplomarbeit schlägt ergänzend vor dem Lösungsprozess eine Betrachtung des entsprechenden Funktionsgraphen vor, da dadurch womöglich bereits vorab entschieden werden kann, ob man nun stetige Fortsetzbarkeit oder eben genau das Gegenteil zeigen will.
Nachdem das erste Folgenpaar $\{(x_n, y_n)\} := \left\{(0, \frac{1}{n})\right\}$ festgelegt wurde, findet ein Querverweis auf die eingangs formulierte Merkregel statt. Dabei wird die Wahl des Folgenpaares $(0, \frac{1}{n})$ im konkreten Fall motiviert. Im Rahmen der Wahl des zweiten Folgenpaars wird das Ziel vorangestellt, ein Nullfolgenpaar zu finden, welches bei Grenzübergang zu $(0,0)$ einen anderen Wert liefert. Anschließend wird auch der Irrweg erwähnt, auf den die Festlegung von $(\frac{1}{n}, 0)$ als zweites Paar führt. Danach bedient man sich dem Hinweis, sich die Termstruktur des Funktionsterms zu Nutze zu machen und zwei Folgen zu wählen, die eingesetzt auf einen Term führen, durch welchen sich der verlangte – sich vom ersten unterscheidende – Wert finden lässt. Abschließend wird der gefundene Widerspruch sprachlich formuliert. Die inhaltlich berechtigte Frage, was im Falle des Nicht-Auffindens zweier geeigneter Nullfolgenpaare getan worden wäre, wurde in einer gesonderten Übungsaufgabe behandelt.

ABLEITINGER (2013) unterzieht die Idee der Demonstrationsaufgaben anschließend einer kritischen Analyse, indem Studierende bei der Bearbeitung von – an eingesetzte Demonstrationsaufgaben angelehnte – Hausaufgaben gefilmt werden. Als positiver Effekt war erkennbar, dass die Demonstrationsaufgabe – wie intendiert – tatsächlich als Impulsgeber diente, wodurch der schwierige erste Schritt beim Bearbeiten von Übungsaufgaben erleichtert wurde. Weiters waren wertvolle Phasen des Selbsterklärens beobachtbar. Eine andere Entwicklung war, dass sich die Studierenden die übersichtliche Strukturierung der Demonstrationsaufgabe zum Vorbild nahmen, was bei der Abgabe der Hausübung erkennbar war.
Dem gegenüber war als negativer Effekt erkennbar, dass strategische Überlegungen aus der Demonstrationsaufgabe teilweise unhinterfragt übernommen wurden. Ein dokumentierter Fall zweier

Studierender endet zum Beispiel damit, dass diese auf die Richtigkeit der Demonstrationsaufgabe vertrauten und die Situation unverstanden auf die Hausaufgabe übertragen wurde.
Somit konnten einige angepeilte Effekte erzielt werden. ABLEITINGER (2013) fasst zusammen, dass die Demonstrationsaufgaben viel Potenzial beinhalten, welches jedoch nur durch geeignete weitere Maßnahmen vollständig genutzt werden kann. Zudem hänge der Erfolg zu einem großen Teil davon ab, dass die Studierenden die Demonstrationsaufgaben sinnvoll einsetzen, d.h. sich einzelne Argumentationen klarmachen und etwa die auf andere Aufgaben übertragbaren Kernideen herausarbeiten.

An dieser Stelle bietet es sich an, die Idee der Demonstrationsaufgaben unter den in Kapitel 3 der Diplomarbeit formulierten Kriterien des fortgesetzten Kriterienkatalogs zu untersuchen. Dazu wird erörtert, auf welche der in der Berufspraxis relevanten Handlungsdimensionen des fortgesetzten Kriterienkatalogs der Einsatz von Demonstrationsaufgaben in der Ausbildung von Studierenden positive Effekte haben könnte.
Eine große Stärke der Demonstrationsaufgaben ist die explizite Ausformulierung der Gedankengänge, die für den Lösungsprozess relevant sind. Durch diese Vorgangsweise wird es den Studierenden ermöglicht, mathematische Sachverhalte auf mehreren Ebenen unter verschiedenen Blickwinkeln kennenzulernen. Unter anderem ist davon auszugehen, dass die durch die Demonstrationsaufgabe behandelten Inhalte auf verschiedenen Exaktheitsstufen im Bereich der Argumentation wahrgenommen werden können. Es ist naheliegend, dass sich diese implizit gemachte Erfahrung im Studium positiv auch auf die folgende Handlungsdimension im späteren schulischen Tätigkeitsfeld auswirkt:

6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln

Weiters wurden auch Überlegungen zu Ende gedacht, die in Sackgassen führen. Irrwege sind natürliche und grundlegende Erfahrungen, die während des mathematischen Problemlösens gemacht werden. Auf eben solche Irrwege gelangen früher oder später auch Schülerinnen und Schüler, die sich mit Mathematik auseinandersetzen. Durch die explizite Thematisierung dieser Sackgassen im Rahmen der Demonstrationsaufgaben werden Studierende sensibilisiert, welche Fehlvorstellungen mit den zu erlernenden Inhalten in Verbindung gebracht werden könnten. Sie erleben somit – analog zu Lernenden der Sekundarstufe – am eigenen Beispiel, in welche Richtungen sich Fehlvorstellungen entwickeln können und bekommen zudem vorgelebt, wie im Sinne des mathematischen Diskurses mit diesen umgegangen werden kann. Dieser Gedanke ist auch in zwei zentralen Handlungsdimensionen erkennbar, die BALL und BASS (2004) formuliert haben und welche auch von PREDIGER (2013) sowie im Zuge dieser Diplomarbeit aufgegriffen wurden:

7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren
8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren

Dadurch wäre ein möglicher positiver Effekt im Sinne dieser Kriterien auf Studierende denkbar. Die beiden erwähnten Handlungsanforderungen werden im Zuge der Demonstrationsaufgaben implizit erlebt. Eine weitere Eigenschaft der Demonstrationsaufgaben ist, dass durch die Lockerung der Informationsdichte im Vergleich zu stark formalen fachmathematischen Texten die sprachliche Ebene viel stärker in den Vordergrund tritt. Der Übergang zwischen Fachsprache und Symbolsprache findet dadurch fließend statt, was ebenfalls in das Handlungsrepertoire von Lehrerinnen und Lehrern nach dem Kriterienkatalog Eingang zu finden hat:

10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende

Der Vollständigkeit halber soll darauf hingewiesen werden, dass im Beispiel der dargebrachten Demonstrationsaufgabe „Stetigkeit“ auf den Gebrauch von Alltagssprache verzichtet wurde. Die weiterführende Projektaktivität zielt auf eine aktive Bearbeitung von Übungsaufgaben aus, die den jeweiligen Demonstrationsaufgaben ähneln. Durch die Kommunikation mit Studienkolleginnen bzw. Studienkollegen werden bei der Ausarbeitung der Aufgaben Passagen der Demonstrationsaufgabe von Fachsprache in Symbolsprache und womöglich Alltagssprache übersetzt und schließlich rückübersetzt, wodurch diese Handlungsanforderungen ebenfalls im eigenen Lernen implizit erfahren werden.
Der Autor dieser Arbeit erachtet die Idee der Demonstrationsaufgaben als Bereicherung für die Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern, da gerade zu Studienbeginn die Denkweise der Hochschulmathematik für viele Studienanfängerinnen und Studienanfänger Neuland ist und gerade die Demonstrationsaufgaben durch ihre detaillierten Ausformulierungen einen Einblick in eben jene Denkweise bieten. Speziell das Wechseln zwischen verschiedenen Sprachebenen sowie die Wahl einer geeigneten Exaktheitsstufe in der Argumentation sind Kompetenzen, die im Mathematikstudium von großer Bedeutung sind und gleichzeitig in der Ausbildung eine unterrepräsentierte Rolle einnehmen, wodurch eine Thematisierung zu Studienbeginn umso wichtiger erscheint.

4.2 FABEL-Aufgaben (nach BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013)

An der Universität Bremen wurde im Jahr 2013 das Aufgabenkonzept „FABEL“ für die Anfängervorlesung im Mathematik-Lehramtsstudium eingeführt. Wie auch bei den eben behandelten Demonstrationsaufgaben waren die sichtbaren Schwierigkeiten von Studierenden beim Lösen von Übungsaufgaben in den ersten Semestern ausschlaggebend dafür, dass die Entwicklung dieses Aufgabenkonzepts in die Wege geleitet wurde (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013). In dieses Aufgabenkonzept wurden Tätigkeiten eingebunden, die für das Lernen von Mathematik wesentlich sind und im späteren Studienverlauf von den Lernenden alleine realisiert werden sollen. Eine solche Kerntätigkeit ist das mathematische Beweisen, welches in der Schule eher eine Entwicklungsaufgabe ist, d.h. ein explorativer Prozess, um (meistens gemeinsam mit den Lernenden) ein Plausibilitätsargument für einen gelernten Satz oder eine Formel zu finden. Im Hochschulkontext jedoch nimmt das Beweisen die Rolle einer Geltungsbegründung der forschenden Mathematik ein. Zum Lernen von Mathematik gehört aber über das Beweisen hinaus noch das Erschließen und Definieren von Strukturen und Begriffen, das Rezipieren und Erstellen mathematischer Texte sowie das Anwenden und Nutzen von Sätzen und Algorithmen dazu. BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) stellen fest, dass bisher klassische Übungsaufgaben überwiegend entweder rein technische Aufgaben sind, bei denen es um die Anwendung bekannter Algorithmen geht oder sowohl technische als auch weniger technische Beweisaufgaben sehr unterschiedlicher Schwierigkeit.
Um die Studierenden zu Studienbeginn mit Beweisaufgaben zügig vertraut zu machen, greifen BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER auf das von BOERO entworfene Phasenmodell des Beweisens zurück (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013, BOERO 1999). Dieses stellt ein Expertenmodell dar, welches aus sechs Phasen besteht. Im Rahmen des Aufgabenkonzepts der FABEL-Aufgaben wird das von BOERO (1999) entworfene Phasenmodell leicht abgewandelt und als Gebrauchsheuristik für die Studierenden unter dem folgenden Wortlaut im Zuge der Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik zur Verfügung gestellt *(*BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013, S. 60):

- *Schritt 1: Eine Behauptung durch unspezifisches Explorieren entwickeln (Beispiele untersuchen, Aussagen finden und prüfen)*
- *Schritt 2: Eine Behauptung formulieren, die den formalen Konventionen genügt (in den meisten Fällen ist dies bereits passiert, manchmal aber noch zu realisieren oder auch zu ergänzen)*
- *Schritt 3: Die Behauptung spezifisch explorieren, indem Ideen gesucht, Argumente gesammelt und verknüpft werden (Was bedeutet die Aussage? Welche Definitionen und Sätze sind wichtig? Welche Zusammenhänge dazu kenne ich?)*
- *Schritt 4: Passende Argumente auswählen und lokal ordnen (in eine Argumentationskette bringen, Beweisskizze oder Beweisskizzen von Teilen anfertigen)*
- *Schritt 5: Beweis „formal“ aufschreiben (Argumente logisch in eine Reihenfolge bringen)*

BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) kritisieren, dass traditionelle Beweisaufgaben gerade diesen ersten Schritt häufig überspringen, in welchem ein exploratives Herantasten an die mathematische Problemstellung stattfinden soll. Eben diese traditionellen Beweisaufgaben stellen die Studierenden in den ersten Semestern vor große Hürden. Nun wird zunächst durch die dargebotene Gebrauchsheuristik für das Beweisen in Kombination mit strukturierten Aufgaben, die sich gerade auf die ersten drei Phasen des Modells fokussieren, das begriffliche Arbeiten ins Zentrum gestellt.

Anschließend wird davon ausgegangen, dass ein Bedürfnis nach Erkenntnisgewinn entsteht, da nun die durch die explorative erste Phase gefundenen Vermutungen allgemein bewiesen werden wollen.

In diesem Kapitel werden anschließend Ausschnitte aus einigen FABEL-Aufgaben genauer betrachtet. Diese haben es sich zum Ziel gesetzt, Teilkompetenzen zum wissenschaftlichen Arbeiten gezielt anzusprechen, den Übungsbetrieb von Lehramtsstudierenden zur linearen Algebra vertiefend zu ergänzen und den Bezug zur Schulmathematik herzustellen. Das Kürzel „FABEL" fasst fünf Aufgabengruppen mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen zusammen. Der Terminus „FABEL" ist als Akronym zu verstehen, welches sich aus den in der nachstehenden Grafik (siehe **Abbildung 10**) veranschaulichten Begriffen zusammensetzt.

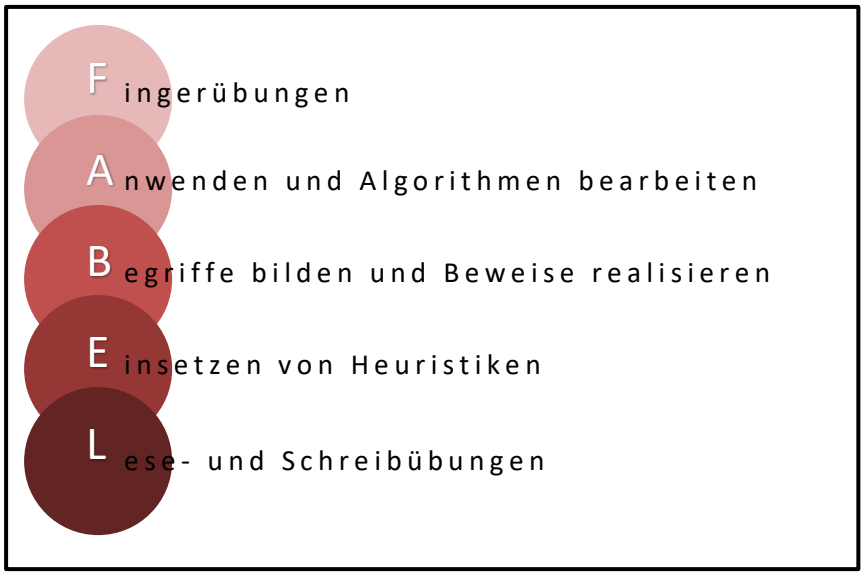


Abbildung 10: Das Akronym Fabel, Quelle: BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013), eigene Bearbeitung

Als „Fingerübungen" wird eine Aufgabenart bezeichnet, welche durch einen geringen Schwierigkeitsgrad charakterisiert werden. Deren Bearbeitung erfordert häufig lediglich die Angabe eines Beispiels oder eines Gegenbeispiels zu einer einfachen Definition, das Lösen eines einfachen Gleichungssystems oder das Benennen von Voraussetzungen für eine Behauptung. Durch den Einsatz dieser Aufgaben soll erstens das Erinnern an die Begrifflichkeiten unterstützt werden, zweitens durch gezielte Wiederholungen Faktenwissen gefestigt werden und drittens durch variantenreichen Perspektivenwechsel der jeweilige Sachverhalt flexibel nutzbar und zugänglich gemacht werden (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013). Aufgaben dieser Art eignen sich, um kleine Studierendenaktivitäten in Vorlesungen durchzuführen oder können eine vorbereitende Funktion für Übungsstunden darstellen. Die Lernenden können sich so mit dem Gegenstand auf der Phänomenstufe vertraut machen, d.h. aktiv einen Bezug zu dem zu beweisenden Sachverhalt herstellen und sich explorativ an das Phänomen herantasten. Weiters werden durch die klar formulierten Arbeitsaufträge die Handlungsmöglichkeiten relativ minimal und somit die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs durch Verfolgen eines Irrwegs geringgehalten, wodurch Kompetenzerlebnisse bereits während der Vorlesung ermöglicht werden. Als Aufgabenbeispiel erwähnen BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) die Angabe einer stetigen Funktion mit zwei Nullstellen, das Nennen einer sowohl abgeschlossenen als auch offenen Menge reeller Zahlen, die Beschreibung einer 2x2-Matrix vom Rang 1 sowie die Fragestellungen, warum zwei verschiedene Elemente einer Gruppe nicht neutrale Elemente sein können oder etwa weshalb Spiegelungen immer einen Eigenwert von –1 aufweisen.

In den Bereich „Anwenden und Algorithmen bearbeiten“ fallen traditionelle Lehrbuchaufgaben, in welchen eine Definition, eine Regel oder ein Algorithmus angewendet werden muss. Derlei Aufgaben ermöglichen die Wahrnehmung der Mathematik als Werkzeug, auf welches man zurückgreifen kann. BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) sind der Meinung, dass gute Anwendungsaufgaben neben der Anwendung der Theorie auch Gelegenheit dazu geben, Strukturen oder Phänomene zu erkennen. In diesem Kontext wird als Aufgabenbeispiel die Bestimmung der Dimension von Kern und Bild konkreter Abbildungen, etwa von dem $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$, erwähnt. Diese Aufgabe wird zu einer guten Anwendungsaufgabe, wenn zum Beispiel in Form eines zusätzlichen Unterpunkts gefragt wird, welche Ergebnisse im Falle einer Definition über $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \cdots, \mathbb{R}^n)$zu erwarten wäre. Dadurch könnten etwa seitens der Studierenden erste Hypothesen entstehen, die der Aussage des Rangsatzes ähneln.
„Begriffe bilden und Beweise realisieren“ stellen zentrale Handlungen der Disziplin Mathematik dar. Mathematische Theorien werden verstanden, indem die damit verbundenen Begriffe und Beweise verstanden werden. Aufgaben, die sich explizit mit dem Begriffsverständnis auseinandersetzen, greifen die Konfliktbereiche zwischen Begriffsvorstellung – durch persönliche Vorerfahrung kognitiv gefestigte Assoziationen mit einem bestimmten Begriff – und Begriffsdefinition auf. Solche Konfliktsituationen können erzeugt werden, indem man etwa Definitionen in eigenen Worten wiedergeben lässt. Durch die Angabe von Beispielen und Nicht-Beispielen zu einem Begriff kann die Abgrenzung zu anderen Begriffsapparaten geschaffen werden. BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) liefern das in folgender Grafik (siehe **Abbildung 11**) veranschaulichte Aufgabenbeispiel als mögliche Realisierung des Handlungsbereichs „Begriffe bilden“.

a) Formulieren Sie in eigenen Worten eine kurze Definition für die folgenden Begriffe: *Span*, *Erzeugendensystem* und *linear unabhängig*.
b) Geben Sie zu jedem Begriff jeweils drei Beispiele und Nicht-Beispiele an. Ein Nicht-Beispiel ist ein sinnvolles Beispiel, das die Definition nicht erfüllt.
c) Tauschen Sie Ihre Beispiele mit einer Nachbargruppe aus. Passen die Beispiele und Nicht-Beispiele auch zu Ihren Definitionen aus Aufgabenteil a)? Diskutieren Sie anschließend etwaige Unterschiede.
d) Worin genau unterschieden sich die drei Begriffe aus Aufgabenteil a)? Braucht man wirklich alle drei Begriffe?

Abbildung 11: Aufgaben zur Begriffsbildung, Quelle: BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013)

In den Unterpunkten a) und b) sind nun konkret die Schlüsselstellen „Formulieren Sie in eigenen Worten“ bzw. „Geben Sie […] Beispiele und Nicht-Beispiele an“ erkennbar, welche die eben genannten Konfliktsituationen entstehen lassen können. In c) und d) soll ein verbaler Austausch zwischen den Kleingruppen über die Ausarbeitungen stattfinden.

In diese Kategorie fallen auch Beweisaufgaben, in welchen Beweise anhand der von BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) zur Verfügung gestellten Gebrauchsheuristik geübt werden können. Im geschilderten Beispiel wird bewiesen, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, wobei die Ausgangsfrage mit „Wie viele Primzahlen gibt es?“ etwas offener formuliert ist. Dabei werden die Teilschritte im Sinne der Heuristik explizit angegeben und voneinander abgegrenzt durchgearbeitet (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013, S. 66):

- Schritt 1: *Unspezifisches Explorieren*: Primzahlen sammeln, Anzahl der Primzahlen bis 100? Gibt es mehr? Gibt es eine größte?
- Schritt 2: *Behauptung formulieren*: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- Schritt 3: *Spezifisches Explorieren*: Primzahlen sind natürliche Zahlen, so haben genau zwei Teiler, 1 und sich selbst, sind also von 1 verschieden. Sie bauen die natürlichen Zahlen multiplikativ auf.
  Definition der Teilbarkeit und Sätze dazu. Unendlich heißt, dass es keine Bijektion mit einer endlichen Menge gibt oder dass es zu jeder natürlichen Zahl eine Primzahl gibt, die größer ist. Hinzu kommen Sätze zur Primzahlzerlegung und zur Existenz eines größten Elements in endlichen Mengen. Schließlich die Frage: Kann man mittels $1,2,3,\cdots,n$ Primzahlen neue finden? Wie?
- Schritt 4: *Argumente sammeln und ordnen*: Es gibt keine Bijektion auf eine endliche Menge, was heißt das?
  Zu endlich vielen Primzahlen findet man stets eine größere. Wie kann man diese konstruieren? Produkt der Primzahlen plus 1 wäre eine Zahl die größer ist, das muss keine Primzahl sein, aber sie muss einen Primfaktor enthalten, der nicht in der Menge ist, also nur größer sein kann. Widerspruch.
- Schritt 5: *Beweis „formal" aufschreiben*: Angenommen wird, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Dann ist die Zahl $p \coloneqq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ durch keine der Primzahlen p_i $(i = 1, \cdots, n)$ teilbar, weil diese sonst auch Teiler von 1 wäre.
  Fall 1: p ist eine Primzahl, dann ist p eine Primzahl, die größer als alle n Primzahlen ist. Widerspruch.
  Fall 2: p ist keine Primzahl, dann ist p aber größer als 1 und muss eine Primzahl q als Teiler haben. q ist nicht 1, also $q > 1$. Weil q Teiler von p ist und nicht Teiler von 1 sein kann, kann q auch nicht Teiler des Produkts der p_i $(\text{für } i = 1, \cdots, n)$ sein. Da aber $p_1, p_2, \cdots, p_n$ Primzahlen sind, sind sie von q verschieden, also ist q eine zusätzliche Primzahl. Widerspruch. (Wenn $p_1, p_2, \cdots, p_n$ die ersten n Primzahlen sind, dann muss q eine sein, die größer als diese n Primzahlen ist.)

Die vierte Aufgabenart beschäftigt sich mit dem „Einsetzen von Heuristiken". In diese Kategorie fallen unter anderem klassische Problemlöseaufgaben, bei welchen häufig der richtige Ansatz nur durch vorangestellte heuristische Überlegungen gefunden werden kann. Zudem ist der geübte Umgang mit Problemlöseaufgaben für Lehrerinnen und Lehrer essentiell, da die in vielen Lehrplänen der Sekundarstufe verankerte dritte WINTERsche Grunderfahrung (1995) den Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer Auseinandersetzung mit Problemlöseaufgaben ermöglicht werden soll. BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER (2013) kreieren eine Aufgabe, welche anhand von geometrischen Veranschaulichungen von Drehungen und Spiegelung zu einer heuristischen Auseinandersetzung mit den algebraischen Begriffen der Gruppe bzw. Untergruppe anregen soll (siehe Anhang C).

Die fünfte Kategorie „Schreibübungen" setzt sich mit dem Begriff der mathematischen Stilsicherheit auseinander. Diesen Begriff hat HEFENDEHL-HEBEKER (2013) geprägt, die darunter Stilmerkmale für mathematische Darstellungen wie etwa der Präzision der Formulierung, der Klarheit der Gedankenführung, einem abgewogenen Verhältnis von sprachlichen und symbolischen Darstellungen und passend gewählten Visualisierungen versteht. Im Zuge des Mathematikstudiums müssen alternative Definitionen erschlossen, Fehler in Ausarbeitungen erfasst sowie formale Texte gelesen und in verbale Formate übersetzt werden (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013). Somit müssen

mathematische Texte gelesen und auch geschrieben werden – ein Prozess, der unter anderem bei zahlreichen Übungsaufgaben vollzogen wird. Aufgaben der Kategorie „Schreibübungen“ sollen dazu beitragen, dass Studierende lernen, mathematische Fachtexte angemessen zu rezipieren und zu verfassen.

An dieser Stelle soll diskutiert werden, auf welche Punkte des in Kapitel 3 erstellten Kriterienkatalogs die Auseinandersetzung mit FABEL-Aufgaben positive Effekte zielen könnte. Zunächst schärfen Aufgaben der Kategorie „Begriffe bilden und Beweise realisieren“ den Blick für die mathematische Fachsprache. Dadurch kann es leichter fallen, im Rahmen des Unterrichtens auf verschiedenen Exaktheitsstufen argumentieren und Sachverhalte logisch stringent erklären zu können. Gepaart mit den in Form von „Lese- und Schreibübungen“ behandelten Übungsaufgaben wird dadurch die folgende Handlungsanforderung explizit geübt:

6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln

Wie das Aufgabenbeispiel zur Kategorie „Begriffe bilden“ zeigt, werden im Rahmen der FABEL-Aufgaben auch Diskussionen mit Mitstudierenden verlangt. Die in Kleingruppen gebildeten Begriffsdefinitionen sollen im Zuge der Lehrveranstaltung auch mit den Ergebnissen anderer Gruppen verglichen werden. Dieser Aufgabenteil bereichert der Ansicht des Autors nach um einen wesentlichen weiteren Aspekt, der im unterrichtlichen Alltag eine wesentliche Rolle spielt: die Fähigkeit der Lehrperson, an inhaltlich entscheidenden Stellen die Kommunikation zwischen den Lernenden durch bewusste sprachliche Formulierungen zu provozieren. Im Rahmen der Fachlehrveranstaltung stattfindende Diskussionen durch Erfahrungen im Rahmen des eigenen Lernprozesses könnten zu einem Lerneffekt im folgenden Bereich beitragen:

9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren

Des Weiteren wird man im Zuge dieser Tätigkeit neben eigenen Fehlern vermutlich auch Ungenauigkeiten oder Fehler anderer Kleingruppen erkennen. Dies stellt eine Parallelsituation zum Schulalltag der Mathematiklehrerin bzw. des Mathematiklehrers dar, in welchem regelmäßig Fehler der Lernenden zu erkannt und darauf aufbauend Hilfestellungen überlegt werden müssen. So kann im Studium bereits die folgende Handlungsanforderung explizit trainiert werden:

8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren

Schließlich bemüht sich das Konzept der FABEL – Aufgaben darum, viele Perspektiven des mathematischen Arbeitens zu behandeln. Während Aufgaben des eben angesprochenen Bereiches „Begriffe bilden und Beweise realisieren“ sich eher mit fachsprachlichen Formulierungen befassen, lassen Aufgaben der Kategorien „Einsetzen von Heuristiken“ bzw. „Fingerübungen“ auch Raum für alternative Ansätze und können dazu anregen, alltagssprachliche Formulierungen mit einfließen zu lassen. Die Tatsache, Mathematik sowohl vom Standpunkt der Alltagssprache aus als auch durch die fachsprachliche Brille betrachten zu können – unter Einbeziehung der Gruppendiskussionen – kann dazu beitragen, auch die nachstehende Handlungsanforderung früh in der Ausbildungsphase zu erleben:

10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende

Die erörterten Handlungsanforderungen, auf welche positive Effekte erwartet werden können, stimmen bis dato in den behandelten Projekten „Demonstrationsaufgaben“ sowie „Fabel-Aufgaben“

zu einem großen Teil überein. Dies ist auf Grund der ähnlich formulierten Zielsetzungen der Projekte auch nicht weiter verwunderlich, legt jedoch nahe, dass das Konzept der Jobs als Referenzmodell für die vorgestellten Projekte ein adäquates Analysewerkzeug darstellt.

4.3 Schnittstellenaufgaben (nach BAUER und PARTHEIL 2013)

An der Philipps-Universität Marburg wird die einführende Analysis-Vorlesung für mehrere Studiengänge zusammen angeboten. Die Lehramtsstudierenden nehmen dabei an separaten Übungen teil, wobei die Aufgaben der darin behandelten Übungsblätter zu ca. 50 % sogenannten „Schnittstellenaufgaben" darstellen. Mithilfe dieser „Schnittstellenaufgaben" versuchen BAUER und PARTHEIL (2013) dem Problem der doppelten Diskontinuität entgegenzuwirken. Mittels Schnittstellenaktivitäten sollen Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik bearbeitet werden. Das Projekt strebt einerseits die Wirkrichtung Schulmathematik → universitäre Mathematik und andererseits die Wirkrichtung universitäre Mathematik → Schulmathematik an (BAUER und PARTHEIL 2013). Das bedeutet, dass die Studierenden von Beginn des Mathematikstudiums an Schulmathematik und universitäre Mathematik bidirektional als füreinander nützlich und aufeinander bezogen erleben sollen. Dieses Ziel wird in weiterer Folge in vier Teilziele gegliedert (BAUER und PARTHEIL 2013, S. 41):

A. *Grundvorstellungen aufbauen und festigen*
B. *Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren*
C. *Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen*
D. *Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren*

Das Teilziel „Grundvorstellungen aufbauen und festigen" baut darauf auf, dass die Studierenden im Rahmen der Schulmathematik bereits mit einigen Begriffen und Konzepten aus der Analysis in Berührung gekommen sind. Aufgaben des Typs A sollen vordergründig die in der Schule erworbenen Vorstellungen zu in der Analysis relevanten Begriffen und Konzepten behandeln. Als positive Konsequenzen erwarten BAUER und PARTHEIL (2013), dass durch gezielte Anknüpfung an eben jene Vorerfahrungen aus der Schulmathematik bessere Vorstellungen zu Gegenständen aus der Hochschulmathematik entwickelt werden können. Außerdem erfahren die Studierenden dadurch, dass ihre Vorstellungen ernst genommen, aufgegriffen und weiterentwickelt werden sollen. Häufig müssen in der Schulzeit erworbene Vorstellungen erweitert, korrigiert oder präzisiert werden. Abgesehen von individuell falsch entwickelten Grundvorstellungen müssen Inhalte speziell dann weiterentwickelt werden, wenn in der Schulanalysis nicht der gesamte Begriffsumfang erfasst wurde. Als Beispiel erwähnen die Autoren den Integralbegriff, der sich in der Schule auf stetige oder monotone Funktionen bezieht und einen Flächeninhaltsbegriff voraussetzt. Zudem kann es sein, dass eine schulmathematische Vorstellung einen Begriff nur vage beschreibt, wie dies etwa häufig beim Stetigkeitsbegriff der Fall ist.

In den Bereich „Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren" fallen Aufgaben, die die Zugänge der Schulmathematik mit den Zugängen der Hochschulmathematik aus Sicht der sachlogischen Vorgehensweise vergleichen. Als Beispiel wird der Zugang zur Sinus- bzw. Cosinusfunktion erwähnt: Während die trigonometrischen Funktionen in der Schule über Streckenverhältnisse in rechtwinkeligen Dreiecken definiert werden, findet in der Analysis-Vorlesung in der Regel eine Bezugnahme auf die komplexe Exponentialfunktion bzw. direkt über die Reihendarstellung statt (BAUER und PARTHEIL 2013). Die Herausforderung ist es nun, im Rahmen der Hochschulausbildung nicht diesen oder jenen als richtigen Zugang zu identifizieren, sondern viel mehr zu vermitteln, wo die Unterschiede zwischen den Zugängen liegen und warum die Wahl in konkreten Situationen zugunsten einer bestimmten Vorgehensweise ausfällt. Im erwähnten Beispiel der Winkelfunktionen stünde dem

schulmathematischen Zugang im Rahmen der Hochschulmathematik der Winkelbegriff im Weg, der an dieser Stelle noch nicht verfügbar ist, während umgekehrt der hochschulmathematische Zugang Werkzeuge nutzt (komplexe Exponentialreihe), die in der Schulmathematik nicht vorhanden sind.

Das dritte Teilziel wird unter der Terminologie „Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen“ zusammengefasst. Aufgaben dieser Kategorie stellen die inhaltliche Nützlichkeit der Hochschulmathematik für Problemstellungen aus der Schulmathematik in den Vordergrund. Davon betroffen sind Fragestellungen, die zwar für Schülerinnen und Schüler verständlich, jedoch erst durch die Verfügbarkeit hochschulmathematischer Mittel bearbeitbar werden (BAUER und PARTHEIL 2013). Gemäß ihrer Ausgangslage können diese Fragestellungen in zwei Kategorien eingeteilt werden: Im ersten Fall sind bereits Plausibilitätsüberlegungen mithilfe der Mittel aus der Schulmathematik möglich, im zweiten Fall sind Mittel aus der Hochschulmathematik notwendig, um eine fundierte Auseinandersetzung zu ermöglichen. Weitere Schnittstellenaufgaben, die Inhalte aufweisen, zu welchen bereits Plausibilitätsüberlegungen in der Schule möglich sind, sich aber darüberhinausgehend zu vertiefender Bearbeitung im Rahmen des Studiums eignen, sind (BAUER und PARTHEIL 2013, S. 44 f.):

- *Aufgaben, die das vertiefte Verständnis elementarmathematischer Begriffe wie Winkel und Bogenlänge zum Ziel haben*
- *Aufgaben, die aufzeigen, an welchen Stellen Analysis in der Elementargeometrie von Bedeutung ist: Dort erlauben Überlegungen zu Grenzwerten und die Verwendung von Begriffen wie Monotonie, Supremum und Infimum gewisse Betrachtungen, zum Unendlichen* [rund um den Grenzwertbegriff bzw. den Unendlichkeitsbegriff – Anm. d. Verf.*], die in geometrischen Situationen auftreten, dort aber in der Schulmathematik nicht so thematisiert werden (können)*
- *eine Aufgabe zu Potenztürmen, in der eine für Schüler naheliegende Problemstellung mittels Iterationsfolgen und Sätzen über Grenzwerte gelöst werden kann*
- *eine Aufgabe zur Fibonacci-Folge, in der Werkzeuge der Analysis eingesetzt werden, um grundlegende Eigenschaften dieser populären und in vielen Zusammenhängen auftretenden Folge zu verstehen*
- *eine Aufgabe, in der es gelingt, mit den Mitteln der Analysis Paradoxa zu erklären, die bei der Approximation von Kurven auftreten.*

Die vierte Kategorie, „mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren“, fasst einige Komponenten mathematischen Arbeitens zusammen. Dazu gehören die Schlagworte „Definieren lernen“, „Beweisen lernen“, „Vermutungen finden“ sowie „Beispiele und Gegenbeispiele finden/konstruieren“. Definieren zu lernen bedeutet, selbst Definitionen auszusprechen sowie vorhandene Definitionen auf ihre Konsequenzen zu analysieren (BAUER und PARTHEIL 2013). Das Lernen des Beweisens sei gerade für Lehramtsstudierende unerlässlich, da Fähigkeiten geübt werden, wie man in unterschiedlichen Begründungsebenen und auf Grundlage unterschiedlicher Begründungsbasen argumentiert. Um stichhaltiges Argumentieren zu ermöglichen, müssen Lehrerinnen und Lehrer eine geeignete Begründungsbasis, angepasst an die Lernstufe, wählen können. Um diesem Anspruch gerecht werden zu können, müsse man einen kompetenten und reflektierten Umgang mit Argumentationsebenen beherrschen. BAUER und PARTHEIL (2013) beobachten, dass sich das Gelingen der Aufgabe, einen reflektierten Umgang im Kontext des Beweisens zu schaffen, häufig anhand des Standpunkts der Studierenden gegenüber der Thematik des Beweisens erkennen lässt.

Die Aussagen *„Das konnte man dann noch so formal beweisen. So machen die Mathematiker das eben."* und *„Wir verfügen in der Mathematik über leistungsfähige Argumentationsmittel, die uns sowohl von den Beschränkungen der geometrischen Anschauung als auch von Meinungen unabhängig machen."* unterscheiden sich nicht nur im Zugehörigkeitsgefühl der Verfasser, sondern weisen auch auf ein unterschiedliches Verständnis hin, welchem Zweck ein mathematischer Beweis dient.

An dieser Stelle wird eine der beiden in BAUER und PARTHEIL (2013) behandelten Schnittstellenaufgaben vorgestellt. Seitens des Autors wurde der Aufgabe „Funktionen qualitativ verstehen" der Vorzug gegenüber einer zweiten gegeben, da diese gleich zwei Teilziele miteinbezieht. Neben dem Teilziel „A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen" liegt der Schwerpunkt außerdem im Bereich der Kategorie „C. Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen". Zusätzlich sei erwähnt, dass nach Ansicht des Autors auch die zweite Aufgabe, die sich mit verschiedenen Zugängen zur Differenzierbarkeit der Sinusfunktion beschäftigt, ein sehr gutes Beispiel einer Schnittstellenaufgabe darstellt, an dieser Stelle jedoch nicht weiter untersucht wird.
Zunächst soll im Teil (a) der Aufgabe „Funktionen qualitativ verstehen" (siehe Anhang D) ein möglicher Verlauf des Funktionsgraphen einer Funktion f skizziert werden, von welcher ein gewisses Vorzeichenverhalten ihrer Ableitungen f' und f'' bekannt ist. Es wird die Auseinandersetzung mit Grundvorstellungen provoziert, welche sehr der Definition des Monotonie- bzw. Krümmungsverhaltens ähneln (BAUER und PARTHEIL 2013, S. 44 f.):

- *Gilt für eine differenzierbare Funktion f auf einem Intervall die Ungleichung $f'>0$ bzw. $f'<0$, so ist f dort streng monoton steigend bzw. fallend.*
- *Gilt für eine zweimal differenzierbare Funktion f auf einem Intervall die Ungleichung $f''>0$ bzw. $f''<0$, so ist der Graph von f dort streng linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt.*

Sind die inhaltlichen Vorstellungen der Begriffe und das Bewusstsein um deren Konsequenzen für den Verlauf Funktionsgraphen ausreichend vorhanden, kann der Aufgabenteil (a) gelöst werden.
Im Aufgabenteil (b) wird dazu übergegangen, hochschulmathematische Überlegungen zu einer Problemstellung vorzunehmen, welche bereits vom Standpunkt der Schulmathematik aus zumindest intuitiv erfassbar ist. Es wird die Frage aufgeworfen, ob das Auffinden einer solchen zweimal differenzierbaren Funktion bei beliebiger Nullstellenvorgabe und somit Vorgabe von Steigungs- und Krümmungsverhalten immer möglich ist. Was bei graphischer Veranschaulichung recht schnell zu erörtern ist, ist, dass eine solche Funktion nicht unter jeder Vorgabe gefunden werden kann. Salopp gesagt scheitert es bereits an der Veranschaulichung zweier nebeneinanderliegender Extremstellen, zwischen welchen keine Stelle existiert, an der sich das Krümmungsverhalten der Funktion ändert. Eine aus argumentativer Sicht stichhaltige Begründung gelingt durch Einsatz der Hochschulmathematik – genauer gesagt durch Anwendung des Mittelwertsatzes: Wenn a und b Nullstellen von f' sind, so folgt aus dem Mittelwertsatz $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=\mathrm{f}''(\mathrm{c})$ und der Voraussetzung $\mathrm{f}'(\mathrm{b})=\mathrm{f}'(\mathrm{a})=0$, dass auch f'' an einer Stelle c mit $\mathrm{a}<\mathrm{c}<\mathrm{b}$ verschwinden muss, wodurch zwischen zwei Extremstellen eine Wendestelle existieren muss (vorausgesetzt die Ausgangsfunktion ist stetig differenzierbar, was hier der Fall ist).
Aufgabenteil (c) befasst sich schließlich mit einer Konkretisierung des Sachverhalts. Es soll untersucht werden, welche Funktionsklassen in Frage kommen, um die gegebenen Voraussetzungen zu erfüllen. Während quadratische und kubische Funktionen aufgrund der zu geringen Anzahl an notwendigen Wendestellen ausscheiden, kann nachgewiesen werden, dass die Funktionsklasse vom Typ Polynom-mal-Exponentialfunktion die Anforderungen erfüllt, wohingegen Polynomfunktionen das geforderte

Verhalten nicht aufweisen können (BAUER und PARTHEIL 2013). Für die Aufgabe, die mit der in (c) bearbeiteten Frage grundsätzlich abgeschlossen ist, werden in weiterer Folge noch Anknüpfungspunkte aufgezeigt, um zusätzliche inhaltliche Aspekte zu behandeln. Abschließend wird ergänzt, dass viel Spielraum bestehe, wie die Aufgaben variiert werden können.

Wie schon bei den in den Kapiteln 4.2 und 4.3 präsentierten Projekten, soll nun untersucht werden, inwieweit die Aspekte des Kriterienkatalogs durch Aufgaben des Projekts „Schnittstellenaufgaben" angesprochen werden. Lernen die Studierenden unterschiedliche Zugänge zu mathematischen Inhalten kennen, so ist davon auszugehen, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer später auch auf unterschiedliche Zugänge aus Schulbüchern sowie Tafelbilder flexibler eingehen können. Häufig gehen mit unterschiedlichen Zugängen auch verschiedene Exaktheitsstufen einher, auf welcher eine bestimmte Herangehensweise operiert. An dieser Stelle ist einmal mehr das Erleben von mathematischen Überlegungen auf diesen unterschiedlichen Exaktheitsniveaus der Fall. Diese Erläuterungen sind sowohl bei BAUER und PARTHEIL (2009) als auch in den folgenden beiden Handlungsanforderungen des Kriterienkatalogs wiederzufinden:

3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten
6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln

Ein wesentliches Lernziel, welches der Mathematikunterricht zu leisten hat, ist, dass Lernende selbst die richtigen Grundvorstellungen zu mathematischen Konstrukten aufbauen. Dazu sind gefestigte Grundvorstellungen seitens der Lehrenden unabdingbar. Haben Lehrerinnen und Lehrer konkrete Vorstellungen, auf welche Grundvorstellungen – dem jeweils aktuellen Lernstand der Schülerinnen und Schüler entsprechend – hingearbeitet werden soll, können Lernziele kann klarer festgelegt werden. Aktivitäten im Bereich des Aufgabentyps A lassen somit indirekt positive Effekte auf die von PREDIGER (2013) beigesteuerte Handlungsanforderung des Kriterienkatalogs erhoffen:

2. Lernziele setzen und ausschärfen

Das Bestreben der Schnittstellenaufgaben, dass Studierende lernen, mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft zu verstehen, ist vor allem in der zuvor erläuterten Schnittstellenaufgabe „Funktionen qualitativ verstehen" erkennbar. Der Aufgabe gelingt es, fließend den Übergang zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen. Einerseits rechtfertigt das Operieren um den Mittelwertsatz den Einsatz als Aufgabe im Rahmen einer Analysis-Vorlesung, andererseits würden Lernende der elften bzw. spätestens zwölften Schulstufe einige Fragestellungen – zumindest intuitiv – verstehen. Es ist gar denkbar, dass vereinzelt bereits mithilfe der Schulmathematik Lösungsvorschläge erarbeitet werden können, die den durch die Hochschulmathematik stichhaltig begründeten konzeptionell zu einem großen Teil ähneln. Durch Anpassen der Formulierungen könnte man somit eine Schulaufgabe erstellen, die Möglichkeiten zu vertiefter Bearbeitung offenlässt. Schnittstellenaufgaben können also dazu führen, dass Schulaufgaben von einem höheren Standpunkt aus betrachtet werden können. Die Behandlung von Schnittstellenaufgaben thematisiert somit explizit die folgende Handlungsanforderung:

1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können

Mit dem Projekt der Schnittstellenaufgaben wird die Liste der durch Demonstrations- sowie FABEL-Aufgaben behandelten Aspekten des Kriterienkatalogs um einige neue Facetten erweitert, worüber eine Übersicht in Form einer Tabelle (siehe **Tabelle 1**) am Ende des Kapitels gegeben werden soll.

4.4 Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis (nach LEUFER und PREDIGER 2006)

Im Studienjahr 2005/2006 wurde an der Universität Bremen das Projekt „Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis“ erstmals für die Analysis-Veranstaltungen im ersten Semester durchgeführt (LEUFER und PREDIGER 2006). Die Veranstaltung wurde von Lehramts- wie Diplomstudierenden (Anm.: Fachstudierenden) gleichermaßen besucht, wobei zusätzlich versucht wurde, speziell auf die Bedürfnisse der angehenden Lehrerinnen und Lehrer einzugehen.
Im Rahmen des Projektes wurde etwa ein Fünftel der üblichen Übungsaufgaben durch spezielle schulbezogene Aufgaben ersetzt, die auch in unterschiedlichen Sozialformen bearbeitet werden sollten. Das Ziel dieser konzipierten Aufgaben war es, ein vorstellungsorientiertes Verständnis sowie den Prozess der Begriffsbildung in den Vordergrund zu stellen. Darüber hinaus sollten sie eine Anregung darstellen, den mathematischen Gehalt von Schulbuchausschnitten zu analysieren und diese in Bezug zur Lehrveranstaltung zu setzen. Weiters provozieren einige Fragestellungen der Aufgaben das Begründen auf verschiedenen Exaktheitsstufen (LEUFER und PREDIGER 2006).
Die Autorinnen sind prinzipiell der Ansicht, dass die Brückenschläge zwischen Schul- und Hochschulmathematik weder in Form eigener Module noch innerhalb fachdidaktischer Vorlesungen angeboten, sondern direkt in die Fachvorlesungen zu Studienbeginn eingebunden werden sollten. Grundsätzlich sei die Fachdidaktik als wissenschaftliche Disziplin für die Etablierung solcher Brückenschläge zuständig, da Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker sowohl über eine hochschulmathematische Ausbildung verfügen als auch Erfahrungen mit schulischen Herausforderungen aufweisen. Die Umsetzung selbst sei hingegen eine gemeinsame Aufgabe von Fachdidaktik und Fachwissenschaft. Für einen erfolgreichen Ablauf des Projekts sind jedoch auch geeignete didaktische Ansprüche an die Vorlesung notwendig, in welcher die Einbettung stattfindet. LEUFER und PREDIGER sahen die Fachvorlesung, in welcher das Projekt umgesetzt wurde, als geeignet an, da sie die folgenden Kriterien erfüllte (LEUFER und PREDIGER 2006, S. 4):

- Genetisch erlebbare Begriffs- und Theoriebildung, ausgehend von inner- und außermathematischen Problemstellungen statt Präsentation fertiger axiomatisch-deduktiver Theorie
- Verzicht auf formale Strenge (an geeigneten Stellen), zugunsten der Anschaulichkeit und des Verständnisses der Grundideen
- Arbeiten und Argumentieren auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen
- Modellieren als zentrale mathematische Tätigkeit erlebbar machen
- Betonung des kooperativen Arbeitens und des Kommunizierens über Mathematik in den methodisch umstrukturierten Übungen

Einige der weiteren Lernziele, die sich das Projekt gesetzt hat, sind: mathematische Grunderfahrungen nach WINTER (1995) in ganzer Breite zu erleben, mathematische Kompetenzen für didaktische Tätigkeiten zu aktivieren, vorstellungs- und prozessorientierte mathematische Kompetenzen zu entwickeln sowie ein didaktisch sensibles Fachverständnis aufzubauen. Letzteres soll dadurch geschehen, dass Studierende erfahren, wie mathematische Wissensbildung geschieht und lernen, die Fachsprache als hilfreiches Instrument zur Klärung von Zusammenhängen wahrzunehmen (LEUFER und PREDIGER 2006). Im selben Kontext wird einmal mehr das Argumentieren auf verschiedenen Exaktheitsstufen erwähnt.

Das hier von diesem Projekt vorgestellte Beispiel greift eine Situation auf, die im Schulunterricht durch eine Aussage einer Schülerin entstand (siehe Anhang E). Bei dieser Aufgabe ist zunächst die Funktion $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$ gegeben. Im Zuge des Aufgabenteils (a) sollen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten sowie Extrem- und Wendepunkte des entsprechenden Funktionsgraphen ermittelt werden. Im Unterpunkt (b) soll zunächst explorativ durch Bilden der ersten vier Ableitungen eine Vermutung für die Stammfunktion F von f aufgestellt werden. Anschließend soll diese Vermutung rechnerisch verifiziert werden. Mithilfe dieses Ergebnisses soll schließlich noch der Flächeninhalt berechnet werden, der durch die Gerade $x = -1$ sowie die sich rechts davon befindlichen Abschnitte der x-Achse und des Funktionsgraphen festgelegt wird.
Diese Aufgabe kann bereits mit den in der Schulanalysis gelernten Mitteln gelöst werden. Dort nimmt die Differential- sowie die Integralrechnung häufig den Stellenwert einer Rechentechnik ein, die – ähnlich wie die Grundrechnungsarten reeller Zahlen – angewendet werden, um das Ergebnis zu berechnen. Unter diesem Gesichtspunkt ist der dargestellte Arbeitsauftrag in (a) als Routineaufgabe einzuordnen, die von den Schülerinnen und Schülern gelöst werden soll. Die Lehrperson erhält dann genau darüber Aufschluss, ob das Operieren dieser Rechentechniken beherrscht wird. Durch den Unterpunkt (b) lässt sich ermitteln, wie versiert die Lernenden dabei sind, Muster zwischen den verschiedenen Ableitungen zu erkennen, um Rückschlüsse auf die Stammfunktion ziehen zu können. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass an dieser Stelle für die Lernenden der mathematisch gefährliche Trugschluss nahegelegt werden kann, dass das Integrieren eine Umkehrung des Differenzierens – im Sinne einer Umkehrung, wie dies die Subtraktion für die Addition darstellt – wäre. Als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen im Zuge der Aufgabe soll die folgende Aussage einer Schülerin dienen: *„Wenn ich da rechts gegen unendlich gehe, dann kommt doch zu der Fläche immer was dazu. Die wird also immer größer – wie soll ich denn da einen Wert angeben? Das wird doch dann … unendlich! Weil da immer was dazu kommt!“*

Diese nahelegende und natürliche Überlegung führt dazu, dass aus der Routineaufgabe plötzlich für die Lehrerin bzw. den Lehrer eine Situation entstanden ist, die universitäres Hintergrundwissen und eine didaktisch sensible Fachkompetenz erfordert (LEUFER und PREDIGER 2006). Die Arbeitsaufträge an die Studierenden im Rahmen des Projekts waren nun erstens, den mathematischen Hintergrund des Problems der Schülerin zu erörtern und zweitens, wie man in Form eines individuellen Gesprächs mit der Lernenden auf den Sachverhalt eingehen und eine plausible Antwort auf die Frage liefern könnte. Zunächst liegt das Problem nämlich nicht direkt in der Integration, sondern ist mit dem Begriffsgebilde verknüpft, auf welchem das Riemann-Integral aufbaut. Das Riemann-Integral arbeitet mit der Vorstellung, den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen als Summe von Rechtecken anzunähern, deren Breite sukzessiv verringert wird, um eine immer bessere Annäherung zu erhalten. Hinter dem Aufsummieren steckt nun wieder der Reihenbegriff, dem ebenfalls eine zentrale Rolle in der Analysis-Ausbildung zukommt. Im Zuge der Beschäftigung mit Reihen ist die Frage wesentlich, wann unendliche Reihen konvergieren. Genau genommen liegt an dieser Stelle das Problem der Schülerin: Sie ist sich nicht bewusst, dass auch unendliche Reihen konvergieren können.
Nachdem das Problem fachmathematisch erörtert wurde, muss überlegt werden, wie man didaktisch im vorliegenden Fall am besten agiert. Dass Lernende Fragen wie diese stellen zeigt, dass sie die Fähigkeit entwickelt haben, sich aktiv gedanklich mit Konzepten der Mathematik zu beschäftigten. Nach Meinung des Autors bietet das Paradoxon von Zenon (siehe URL-03), einem griechischen Mathematiker, eine gute Möglichkeit, um der Schülerin den Sachverhalt zu erläutern. Zenon tätigt sachlogisch in seinem Paradoxon namens „Achilles und die Schildkröte“ dieselben Überlegungen wie die Schülerin in unserem Fall. Die Erläuterungen sind außerdem logisch mithilfe der Schulmathematik

nachvollziehbar sowie zudem anschaulich gestaltet. LEUFER und PREDIGER (2006) präsentieren weitere, von Studierenden vorgeschlagene Optionen, wie der Schülerin begegnet werden kann, die an dieser Stelle jedoch nicht genauer beleuchtet werden sollen.

Abschließend soll nun analysiert werden, welche Handlungsanforderungen des Kriterienkatalogs in den Aufgaben des Projekts „Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis“ wiedererkennbar sind. In der vorgestellten Beispielaufgabe wird verlangt, auf die Aussage der Schülerin einzugehen, wodurch die erste Handlungsanforderung des Katalogs explizit geübt wird:

7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren

Im Zuge des Prozesses, bei welchem die Aussage auf ihren mathematischen Gehalt überprüft wird, bekommt man zugleich einen Einblick in die Gedankenwelt der Lernenden. Durch den fachlichen Diskurs, der durch die Beispielaufgabe provoziert wird, fällt es in weiterer Folge leichter, den aktuellen Lernstand der Schülerinnen und Schüler einschätzen zu können, da man direkt in den Lernprozess involviert ist. Zudem besteht die Möglichkeit, den Sachverhalt nicht bloß in einem individuellen Gespräch mit der Schülerin zu klären, sondern die Problemstellung im Plenum der Klasse aufzugreifen. Diese Gedanken spiegeln sich auch in zwei Punkten des Kriterienkatalogs wider:

9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren
11. Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen

Außerdem hat die Aussage der Schülerin die Eigenheit, dass diese innerhalb der Unterrichtszeit getätigt wurde. Dies bedeutet, dass die Lehrkraft in dieser Situation die Aussage unmittelbar einschätzen und Stellung beziehen musste. Es musste kurzfristig entschieden werden, ob auf die Aussage an dieser Stelle im Unterricht, zu einem späteren Zeitpunkt in derselben Stunde oder in einer der nächsten Stunden eingegangen werden soll. Zudem musste die Lehrperson abschätzen, ob es sich lohnt, die Frage mit der ganzen Klasse zu besprechen oder ob es genügt, das Problem der Schülerin als ein individuelles zu sehen, welches in einem persönlichen Gespräch ausdiskutiert werden kann. Da in der Lehramtsausbildung Praxisstunden in den meisten Fällen einen geringen Anteil der Ausbildung darstellen, kann zwar die nachstehende Handlungsanforderung nicht direkt geübt, jedoch prophylaktisch – durch die dargebotene Unterrichtssituation – darauf vorbereitet werden:

12. spontane Schüleraussagen umgehend anhand der Relevanz für weitere Handlungsakzente im Unterricht beurteilen können

LEUFER und PREDIGER (2006) schlagen außerdem die folgende Aufgabe vor (siehe **Abbildung 12**), im Zuge derer man eine Definition aus einem Schulbuch nach ihrem mathematischen Gehalt analysieren soll:

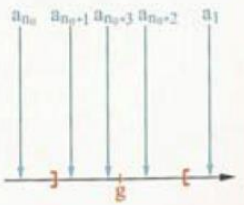
1. Aufgabenbeispiel: Alternative Grenzwertdefinitionen untersuchen

Alternative Definition auf Äquivalenz untersuchen: Im Schulbuch Elemente der Mathematik (Griesel/Postel 1999, S. 235) finden wir die folgende Definition des Grenzwertes:

Definition 2

Die Zahl g heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von g unendlich viele Glieder der Folge liegen, aber außerhalb nur endlich viele, d. h. wenn man eine Platznummer n_0 angeben kann, sodass alle Glieder mit einer höheren Platznummer als n_0 in der Umgebung liegen.

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.



Schreibweise für den Grenzwert

Formalisieren Sie die Aussage in die Epsilon-Sprache und vergleichen Sie sie mit der in der Veranstaltung benutzten. Wo liegen die Unterschiede? Ist sie äquivalent? Wenn ja, zeigen Sie die Äquivalenz, falls nein, widerlegen Sie sie.

Abbildung 12: Zugänge in Schulbüchern analysieren, Quelle: LEUFER und PREDIGER 2006, S. 269

Diese Tätigkeit trifft genau auf eine im Rahmen der Erörterung des Kriterienkatalogs für wichtig befundene Handlungsanforderung zu und wird im Zuge dieses Projekts somit explizit geübt:

3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten

Im Vergleich zu den ersten drei Projekten werden hier die Aufgaben um das Konzept erweitert, dass direkt eine Unterrichtssituation aufgegriffen wird. Die folgende Tabelle soll abschließend eine Übersicht der in den Projekten explizit oder implizit vertretenen Handlungsanforderungen darstellen.

Projekt	Handlungsanforderungen (explizit/implizit)
Mathematik besser verstehen (Demonstrationsaufgaben)	6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(implizit)** 7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(implizit)** 8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren **(implizit)** 10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende **(implizit)**
FABEL-Aufgaben	6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(explizit)** 8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)** 9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren **(implizit)** 10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende **(implizit)**
Schnittstellenaufgaben	1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(explizit)** 2. Lernziele setzen und ausschärfen **(implizit)** 3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(implizit)** 6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(implizit)**
Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis	3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(explizit)** 7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)** 9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren **(implizit)** 11. Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen **(implizit)** 12. spontane Schüleraussagen umgehend anhand der Relevanz für weitere Handlungsakzente im Unterricht beurteilen können **(implizit)**

Tabelle 1: Zusammenfassung der auftretenden Handlungsanforderungen, eigene Bearbeitung

5. Lernen aus Unterrichtsmomenten

In diesem Kapitel soll zunächst die Idee der Unterrichtsmomente nach PREDIGER (2013) erläutert werden. Danach werden weitere – vom Autor entworfene – Unterrichtsmomente präsentiert, die für den Einsatz als Übungsaufgaben im Lehramtsstudium Mathematik gedacht sind. Ähnlich wie die in Kapitel 4 vorgestellten Projekte, soll auch die Thematisierung von Unterrichtsmomenten in der Ausbildung angehender Lehrerinnen und Lehrer dem in Kapitel 2 geschilderten Problem der doppelten Diskontinuität entgegenwirken.

Jede Darstellung eines Unterrichtsmoments beginnt mit einer kurzen Erläuterung zur Ausgangssituation der jeweiligen Aufgabe. In dieser Rubrik werden grundlegende Überlegungen sowie die Entstehungsgeschichte der in den Aufgaben beschriebenen Unterrichtssituationen geschildert. Die Beschreibungen der ausgearbeiteten Unterrichtsmomente beinhalten jeweils die Angabe der Übungsaufgabe inklusive eines darauffolgenden Lösungsvorschlags. In den Unterrichtsmomenten dokumentierte Aussagen von Lernenden wurden in die Hochsprache übersetzt, womit diese transformierende Tätigkeit bei der Bearbeitung der Aufgabe außen vor bleibt. Es wurde bewusst diese sprachliche Transformation vorweggenommen, um die Aufgabenstellung klar formuliert zu halten. Abschließend werden in der didaktischen Analyse die im Rahmen des Unterrichtsmoments thematisierten Handlungsanforderungen des Kriterienkatalogs aus Kapitel 3 herausgearbeitet.

5.1 Unterrichtsmomente (nach PREDIGER 2013)

PREDIGER (2013) beschreibt Unterrichtsmomente als prototypische Unterrichtssituationen, die durch einen authentischen Auszug (aus einem Schulbuch, schriftlichen Dokumenten von Lernenden, einer Unterrichtskommunikation etc.) in möglichst knapper Form repräsentiert sind und eine Handlungsanforderung thematisieren. In auf Unterrichtsmomenten aufbauenden Aufgaben soll explizit die Aufforderung formuliert werden, didaktisches Handeln durch mathematische Erwägungen zu fundieren.

Periodische Dezimalzahlen und Reihen

a.) Was haben Dezimalzahlen mit Reihen überhaupt zu tun?
Erläutern Sie den Zusammenhang. Nutzen Sie dazu das Beispiel des Bruchs $\frac{1}{99}$.
Konvergiert die zugehörige Reihe? Wieso (nicht)?

b.) Mira (9. Klasse) setzt sich mit der Frage auseinander, ob $0,\overline{9} = 1$ oder $0,\overline{9} < 1$ ist.

Mira: Er fragte uns plötzlich ob $0,\overline{9}$ nicht auch ein Name für 1 wäre, denn zu 1 passt ja auch (oder Name) $\frac{1}{1}$ oder $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{5}$ oder 1,0. Ich protestierte natürlich, denn von $0,\overline{9}$ zu 1 fehlt ja noch $0,\overline{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik dass 0,0000...1 nicht $0,\overline{0}1$ schreiben; aber wie soll es denn sonst kurz heißen? Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0,\overline{9}$ und 1 noch ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich, wenn 0,999 zu 0,9999 wird. Es wird von 0,001 zu 0,0001 kleiner, also: es ist immernoch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl. Ein kleines Stück fehlt immer.

- Nutzen Sie die erworbenen Konzepte zu Reihen und Grenzwerten, um Miras Gedanken nachzuvollziehen.
- Formalisieren Sie Miras Denkfehler, um ihn genau zu fassen.
- Schreiben Sie Mira eine Antwort.

(Quelle des Dokuments: T. Jahnke (2005). Unendlich. Mathe-Welt. In: Mathematik lehren 132)

Abbildung 13: Aufgabe "Periodische Dezimalzahlen und Reihen", Quelle: Prediger (2013)

Im Folgenden wird exemplarisch die von PREDIGER (2013) erwähnte Übungsaufgabe „Periodische Dezimalzahlen und Reihen“ vorgestellt, die auf einer schriftlichen Argumentation einer Schülerin basiert (siehe **Abbildung 13**).

Obwohl in der Schulmathematik periodische Dezimalzahlen bereits in der Unterstufe behandelt werden, gelangt man aufgrund von notwendigen Überlegungen zur Konvergenz von Reihen schnell in das Gebiet der Hochschulmathematik. Aufgabenteil a) stellt solche fachlichen Aspekte in den Vordergrund. Die Studierenden sollen sich zunächst des Zusammenhangs bewusst werden, dass jede periodische Dezimalzahl durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann. Für den vorgegebenen Bruch $\frac{1}{99}$ soll die entsprechende Reihe explizit angegeben werden. In diesem Fall lässt sich der Dezimalbruch $\frac{1}{99}$ folgendermaßen entwickeln:

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \cdots = 0,\overline{01}$$

Die Frage nach der Konvergenz dieser Reihe lässt sich auf die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ im Fall $|q| < 1$ zurückführen. Im anschließenden Aufgabenteil b) wird die Überleitung zu der zugrunde liegenden prototypischen Unterrichtssituation dieses Beispiels geschaffen. In diesem Aufgabenteil sollen das Statement der Schülerin Mira analysiert und deren Gedanken nachvollzogen werden. Daraufhin soll Miras Fehler formalisiert und zuletzt eine (fiktive) Antwort an die Schülerin verfasst werden.

Anhand der dargebotenen Überlegungen der Lernenden lässt sich erkennen, dass diese einen intuitiven Zugang zu der Fragestellung, ob $0,\overline{9} = 1$ oder $0,\overline{9} < 1$ gilt, findet. Mira ist sich des (inhaltlich jedoch irrelevanten) Formfehlers ihrer Schreibweise $0,\overline{0}1$ bewusst, was sie als jenes „Stückchen“ beschreibt, welches der Zahl $0,\overline{9}$ „immer“ auf 1 fehlt. Ein Fehler könnte durch den für Schülerinnen und Schüler anspruchsvollen Unendlichkeitsbegriff zustande gekommen sein, welcher bei Grenzwerten von Folgen und Reihen in der Schulmathematik erstmals zentral ist. Mira betrachtet zwar implizit die Reihendarstellungen der beiden Dezimalzahlen $0{,}999 = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ sowie $0{,}9999 = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ korrekt und bemerkt auch richtigerweise, dass selbst bei einer tausendstelligen Zahl „ein kleines Stückchen fehlt“, verpasst jedoch den entscheidenden Schritt, Überlegungen zur Konvergenz in Form der Reihe $\frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ in ihre Erklärung miteinzubeziehen, sondern beschränkt ihre Betrachtung sowie die Argumentation auf die endliche Reihe $\frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ für beliebig große n. Die der periodischen Dezimalzahl $0,\overline{9}$ entsprechende unendliche Reihe $\frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ ist schließlich eine geometrische Reihe, welche gegen den Grenzwert $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$ konvergiert. Gemäß Grenzwertdefinition kann zu jedem noch so kleinen, vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N für die Folge der Partialsummen s_n gefunden werden, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $s_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. In Bezug auf Miras Statement bedeutet das, dass diese jeweils ε in Abhängigkeit von n gewählt hat und somit im endlichen Fall zu jeder Partialsumme s_n der obigen Reihe ein ε mit $s_n < 1 - \varepsilon < 1$ gefunden hat. Das heißt, sie hat zuerst einen Index N gewählt und daraufhin festgestellt, dass es weiterhin eine ε-Umgebung um den Grenzwertkandidaten gibt, in welcher s_N nicht enthalten ist. Hätte sie gemäß Grenzwertdefinition umgekehrt zuerst ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wäre sie womöglich zu der Einsicht gekommen, dass die Folge der Partialsummen s_n für $n \to \infty$ beliebig nahe an 1 heranrückt und somit $0,\overline{9} = 1$ gelten muss. Vermutlich greift Mira auf

diesen intuitiven, jedoch falschen Zugang zurück, weil sie die die Definition der Zahl $0,\overline{9}$ nicht kennt bzw. nicht verstanden hat. Ihr intuitives Verständnis führt in weiterer Folge zu einer falschen Reihenfolge der Quantoren in der Definition des Grenzwerts.

Die didaktische Herausforderung ist es nun, an die Schülerin eine Antwort zu richten, die den Sachverhalt mathematisch korrekt darstellt und zugleich schülergerecht formuliert ist. Ein vom Autor entworfenes Antwortschreiben an die Lernende wäre: „Liebe Mira, du hast richtig erkannt, dass den Dezimalzahlen $0{,}999$ bzw. $0{,}9999$ jeweils $\frac{1}{1000}$ bzw. $\frac{1}{10\,000}$ auf die Zahl 1 fehlt. Damit sind beide Dezimalzahlen kleiner als 1. Dieselbe Überlegung hast du auch für die tausendstellige Zahl korrekt angestellt. Nun betrachte noch einmal die periodische Dezimalzahl $0,\overline{9}$, welche nicht nur drei, vier oder tausend, sondern beliebig viele 9-er nach dem Komma aufweist. Wäre $0,\overline{9} < 1$, so müsste es eine Zahl zwischen $0,\overline{9}$ und 1 geben (da zwischen zwei verschiedene reelle Zahlen immer unendlich viele weitere reelle Zahlen existieren). Wenn man also eine Zahl zwischen $0,\overline{9}$ und 1 angeben kann, weiß man, dass $0,\overline{9}$ und 1 unterschiedliche Zahlen sind. Wenn hingegen $0,\overline{9}$ so nahe an 1 ‚heranrückt', dass kein ‚Platz' für eine weitere Zahl dazwischen ist, dann muss $0,\overline{9} = 1$ gelten. Lege nun eine sehr kleine positive Zahl ε deiner Wahl fest, z.B. $\varepsilon = \frac{1}{100\,000}$. Die Zahl $1 - \varepsilon = \frac{99\,999}{100\,000}$ ist nun sehr nahe bei 1; nämlich genau ε von 1 entfernt. Überlege dir zunächst, wie viele 9-er du nach dem Komma benötigst, damit $0{,}9\cdots$ näher an 1 heranrückt als die gerade erdachte Zahl $1 - \varepsilon$. Wiederhole den Vorgang anschließend für ein weiteres, noch kleineres ε, z.B. $\varepsilon = \frac{1}{100\,000\,000}$. Kannst du auf diese Weise ein ε und somit eine Zahl $1 - \varepsilon$ finden, die zwischen $0,\overline{9}$ und 1 ‚Platz' hat? Da die periodische Dezimalzahl $0,\overline{9}$ beliebig viele 9-er aufweist, rückt sie beliebig nahe an 1 heran, wodurch kein ‚Platz' für eine weitere Zahl zwischen $0,\overline{9}$ und 1 bleibt. Somit muss $0,\overline{9} = 1$ gelten."

Ob diese Antwort in der Praxis einen geeigneten Denkanstoß für Mira darstellt, ist ungewiss, da – unter anderem – sehr wenig über die Lernende und deren individuelles mathematisches Vorwissen bekannt ist. Der erste Teil der Antwort soll Bezug auf die Aussage der Schülerin herstellen und die inhaltlich korrekten Überlegungen wiederholen, um sie zu motivieren, sich mit dem Problem weiterhin auseinanderzusetzen. Danach wird prophylaktisch die Bedeutung von $0,\overline{9} < 1$ bzw. $0,\overline{9} = 1$ in Worte gefasst. Den Kern der Erklärung bildet das schrittweise „Herunterbrechen" der Grenzwertdefinition auf ein adäquates Exaktheitsniveau. Es wurden bewusst umgangssprachliche Vokabel wie „heranrücken" und „Platz" verwendet, um das Prozesshafte des Grenzwertes, das im Rahmen dieses Problems greifbar gemacht werden kann, in den Vordergrund zu stellen. GREEFRATH (2016) verweist hierzu zunächst auf den Begriff des potenziell Unendlichen, das nur in der Vorstellung vorhanden ist und sich in der Möglichkeit der Vorstellung einer fortwährenden Handlung, wie etwa dem fortlaufenden Zählen, zeigt. Die unendliche Gesamtheit kann jedoch niemals vollkommen „durchlaufen" werden, weswegen das Unendliche in diesem Sinn nicht wirklich vorhanden ist (GREEFRATH et al. 2016, S. 74). Bei der Betrachtung von Folgen wird das Unendliche als etwas Dynamisches, im fortwährenden Aufbau Begriffenes, dargestellt – eine Grundvorstellung des Unendlichkeitsbegriffs, die in der Mathematik als zentral angesehen wird und mit welcher auch Mira im vorliegenden Beispiel konfrontiert ist.

Auf die explizite Erwähnung der Reihendarstellung von Dezimalzahlen sowie auf eine Argumentation über die geometrische Reihe wurde – ebenfalls bewusst – verzichtet.

Zusammenfassend werden im Zuge dieser Aufgabe für Studierende die folgenden Handlungsanforderungen nach PREDIGER (2013) thematisiert:

1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(implizit)**

6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(implizit)**
7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**
8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**
10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende **(implizit)**

5.2 Ausgearbeitete Unterrichtsmomente als Aufgabenvorschläge

5.2.1 Unterrichtsmoment 1: „Bernds Formel“

Ausgangssituation:

Bernd ist Schüler der 8. Schulstufe an einer niederösterreichischen AHS (Schuljahr 2017/2018) als er sich an seine Mathematiklehrerin wendet und behauptet, ein Muster entdeckt zu haben. Mithilfe seines Vaters hat er seine Entdeckung in Formalsprache aufgeschrieben und präsentiert diese seiner Lehrerin (siehe **Abbildung 14**):

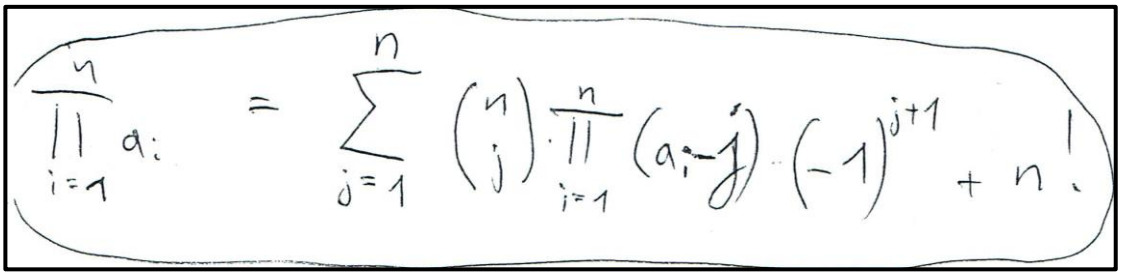


Abbildung 14: "Bernds Formel", Quelle: persönlicher E-Mail-Verkehr

Die Mathematiklehrerin berät sich daraufhin mit Kolleginnen und Kollegen, welche den Zusammenhang für einige Spezialfälle verifizieren. In weiterer Folge wird die Formel an die Arbeitsgemeinschaft für Mathematik der allgemeinbildenden höheren Schulen in Niederösterreich weitergeleitet, welche ihrerseits Clemens Brand, Fachmathematiker an der Montanuniversität Leoben, kontaktiert. Dieser erstellt daraufhin einen Beweis der Formel, welchen er den beteiligten Lehrenden der Sekundarstufe zukommen lässt. In der Zwischenzeit wurde Bernd zu einem Begabtenförderungskurs eingeladen.

Angabe:

Bernd (8. Schulstufe) nimmt nach der Mathematikstunde Kontakt mit seiner Lehrerin auf und präsentiert ihr eine von ihm entdeckte alternative Möglichkeit, das Produkt endlich vieler natürlicher Zahlen zu berechnen: Seien $a_1, a_2, \cdots, a_n$ natürliche Zahlen, dann gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n} (a_i - j) \cdot (-1)^{j+1} + n!$$

1. **Ein Schritt-für-Schritt-Beweis**
   a. **Den Zusammenhang entdecken**
      Überprüfen Sie die Gültigkeit der Formel zunächst für $n = 3$ und drei beliebig gewählte natürliche Zahlen!
      Tipp: Das „Vorziehen“ des von i unabhängigen Terms $(-1)^{j+1}$ vor das Produkt vereinfacht die Überlegungen.
   b. **Alternierende Zeilensummen im Pascal‘schen Dreieck**
      Beginnen Sie zunächst mit einer Variation des Binomischen Lehrsatz:
      $$(1 - x)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot x^j \qquad (*)$$
      Zeigen Sie die Gültigkeit von $(*)$ ausgehend vom Binomischen Lehrsatzes!
      Setzen Sie anschließend $\mathrm{x} = 1$ und beschreiben Sie Ihre Erkenntnisse (1) in Form einer Skizze des Pascal‘schen Dreiecks sowie (2) in Worten!

c. Verschwindende Summanden

Differenzieren Sie $(*)$ nach x und setzen Sie erneut $x = 1$ um zu zeigen, dass auch die weiteren Terme in Bernds Formel verschwinden! Verschwinden bei $1,2,3,\cdots$ n-maliger Differentiation diese Komponenten stets?

d. Die Formel zeigen

Das Resultat aus Aufgabenteil (c) kann man folgendermaßen verallgemeinern: Sei $p(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0$ ein Polynom n-ten Grades, dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot p(j) = b_n \cdot n! \cdot (-1)^n \qquad (**)$$

Setzen Sie $p(j) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - j)$ und vereinfachen Sie die rechte Seite! Zeigen Sie in weiterer Folge Bernds Formel!

Tipp: Durch „geschickte" Änderung des Vorzeichens in der Gleichung $(**)$ sowie Herausziehen des ersten Summanden kann „Bernds Formel" gezeigt werden.

2. Lernenden einen Zugang ermöglichen

„Bernds Formel" soll nun im Unterricht aufgegriffen werden.

a. Unterrichtssequenz für die 8. Schulstufe

Skizzieren Sie eine Unterrichtssequenz, mit Hilfe derer Sie Bernds Klassenkolleginnen und -kollegen (8. Schulstufe) die Idee von Bernds Formel näherbringen könnten!

b. Unterrichtssequenz für eine beliebige Schulstufe

Skizzieren Sie eine Unterrichtssequenz für eine höhere Schulstufe Ihrer Wahl, welche Bernds Formel aufgreift! Geben Sie auch Lernziele dieser Sequenz an!

Lösungsvorschlag:

1. Ein Schritt-für-Schritt-Beweis

a. Den Zusammenhang entdecken

Es soll exemplarisch $\prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) + n!$ für die drei natürlichen Zahlen $a_1 = 4, a_2 = 5$ und $a_3 = 7$ geprüft werden. Tatsächlich gilt: $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 + 3! = 140$

b. Alternierende Zeilensummen im Pascal'schen Dreieck

Setze $a = 1$ und $b = -x$ im Binomischen Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a^{n-j} \cdot b^j$, dann erhält man $(1-x)^n = \sum_{j=0}^{n}(-x)^j \cdot \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot x^j \cdot \binom{n}{j}$.

$(1-x)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot x^j \cdot \binom{n}{j}$ ergibt für $x = 1$ und $n \geq 1$ den Zusammenhang $0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j}$, was sich (1) folgendermaßen am Pascal'schen Dreieck veranschaulichen lässt:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & - & 1 & & & = \quad 0 \\
 & & 1 & - & 2 & + & 1 & & = \quad 0 \\
 & 1 & - & 3 & + & 3 & - & 1 & = \quad 0 \\
1 & - & 4 & + & 6 & - & 4 & + \quad 1 & = \quad 0 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

In Worten (2) bedeutet dies, dass die alternierenden Zeilensummen im Pascal'schen Dreieck (ab der zweiten Zeile) verschwinden.

c. Verschwindende Summanden

Differenzieren von $(*)$ führt zu: $-n \cdot (1-x)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot j \cdot x^{j-1}$

Für $x = 1$ erhält man für $n \geq 2$ die Gleichung

$$0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot j \cdot \binom{n}{j} \qquad (***)$$

Zweimaliges Differenzieren von $(*)$ führt zur Gleichung

$n \cdot (n-1) \cdot (1-x)^{n-2} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot j \cdot (j-1) \cdot x^{j-2}$, aus

welcher man nach Wahl von $x = 1$ für $n \geq 3$ wiederum

$0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot (j^2 - j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot j^2 - \underbrace{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot j}_{=0}$

erhält.

Nach $(***)$ verschwindet letztere Summe und es bleibt $0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot j^2 \cdot \binom{n}{j}$ übrig. Auf gleiche Weise weiter differenzierend lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot j^k \cdot \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ k \in \{0,1,\cdots,n-1\} \\ n! \cdot (-1)^n & f\ddot{u}r\ k = n \end{cases}$$

d. Die Formel zeigen

Setze $p(j) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - j)$ in $(**)$, dann erhält man dadurch die Gleichung

$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) = b_n \cdot n! \cdot (-1)^n$.

Bemerke, dass $p(j)$ ein Polynom n-ten Grades ist. Dies bedeutet, dass gemäß Aufgabenteil (c) nur jener Koeffizient der höchsten Potenz einen Beitrag liefert, der hier mit $b_n = (-1)^n$ gegeben ist. Dadurch vereinfacht sich die ganze Formel zu:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) = n! \qquad (\blacksquare)$$

Vorzeichenwechsel ergibt schließlich $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) = -n!$ und durch Herausziehen des ersten Reihengliedes erschließt sich der Zusammenhang $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) - \prod_{i=1}^{n} a_i = -n!$, was nach Umformen auf „Bernds Formel" $\prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - j) + n!$ führt.

2. Lernenden einen Zugang ermöglichen

a. Unterrichtssequenz für die 8. Schulstufe

Die „3-3-1-Regel" (Gruppenarbeit): Denkt euch drei beliebige natürliche Zahlen a, b und c aus und berechnet das Produkt dieser drei Zahlen! Mithilfe von „Bernds Formel" gelangt man auch auf eine andere Weise zum selben Ergebnis:

1. *Berechnet das Dreifache des Produktes der Zahlen $a-1, b-1$ und $c-1$!*
2. *Subtrahiert davon das Dreifache des Produktes der Zahlen $a-2, b-2$ und $c-2$!*
3. *Addiert das Produkt der Zahlen $a-3, b-3$ und $c-3$!*
4. *Addiert $3 \cdot 2 \cdot 1$ und notiert das Endergebnis!*

b. Unterrichtssequenz für die 11. Schulstufe

Lernziele:

- Die Lernenden sollen den Umgang mit dem Produkt- und dem Summenoperator üben.
- Die Lernenden sollen die alternative Methode zur Produktberechnung endlich vieler natürlicher Zahlen explorativ nachvollziehen können.

Aufgabe „Eine Formel entschlüsseln": Sind a_i endlich viele natürliche Zahlen, dann gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot \prod_{i=1}^{n} (a_i - j) + n!$$

1. *Was lässt sich mithilfe dieser Formel berechnen?*
2. *Fasse die rechte Seite der Gleichung in Worte!*
3. *Welchen Einfluss hat der Term $(-1)^{j+1}$ auf die einzelnen Summanden?*
4. *Wiederhole den Zusammenhang zwischen dem Ausdruck $\binom{n}{j}$ und dem Pascal'schen Dreieck!*
5. *Verifiziere die Formel für drei beliebig gewählte natürliche Zahlen!*

Didaktische Analyse:

Aufgabenteil (1) gibt einen Leitfaden vor, wie der Sachverhalt gezeigt werden kann. Durch Berücksichtigung der Tipps sollen die Mathematikstudierenden den Beweis nachvollziehen und wesentliche Beweisschritte selbstständig durchführen. Unterpunkt (1a) soll den Studierenden ermöglichen, den Zusammenhang zunächst selbst zu entdecken. Im Zuge des Unterpunkts (1b) wird eine Variation des Binomischen Lehrsatzes betrachtet. Das Resultat einer zielführenden, vorgegebenen Substitution soll anschließend in unterschiedliche Darstellungsformen übersetzt werden. Die Unterpunkte (1c) und (1d) widmen sich den eher technischen Passagen des Beweises, tragen jedoch zu einem umfassenden Verstehen des Zusammenhangs bei. Aufgabenteil (2) soll nun eine didaktische Reflexion seitens der Studierenden anregen.

Der Arbeitsauftrag zum Erstellen von Unterrichtssequenzen wurde zum einen deshalb gewählt, da die Lehramtsstudierenden dabei die methodische Vorgangsweise anhand inhaltlicher Anforderungen festlegen sollen. Zum anderen muss die Aufgabe rekonstruiert und für verschiedene Niveaus angepasst werden. Im Unterpunkt (2b) ist noch zusätzlich nach Überlegungen dazu gefragt, was die Schülerinnen und Schüler aus der Beschäftigung mit dem Sachverhalt im Rahmen der Unterrichtssequenz mitnehmen sollen. Zusammengefasst werden im Rahmen der Übungsaufgabe folgende Handlungsanforderungen thematisiert:

2. Lernziele setzen und ausschärfen **(explizit)**
4. Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren **(explizit)**
7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(implizit)**
13. methodische Vorgangsweisen anhand mathematisch-inhaltlicher Anforderungen wählen **(explizit)**

Es wird angemerkt, dass die mathematische Funktionalität von Bernds Formel nebensächlich ist, da das Berechnen eines Produkts endlich vieler natürlicher Zahlen dadurch keineswegs vereinfacht, sondern eher verkompliziert wird. Hervorzuheben ist viel mehr die kreative Denkarbeit, die Voraussetzung für eine derartige Formel ist. Hinzu kommt, dass Bernds Formel nicht als Ergebnis einer klassischen mathematisch-wissenschaftlichen Auseinandersetzung erarbeitet wurde, sondern lediglich

durch einen scharfsinnigen Blick auf Zusammenhänge im Bereich der Grundrechnungsarten in Form einer explorativ-spielerischen Auseinandersetzung zustande kam.

Dadurch ist es nicht verwunderlich, dass nahezu keine Publikationen ausfindig gemacht werden konnten, in welchen „Bernds Formel“ vertreten ist. Lediglich die Formel $(**)$ aus dem Aufgabenteil (1d) konnte nach Literaturrecherche des Autors wiedergefunden werden (GRAHAM et al. 1994, S. 190):

not an issue. In particular, we can prove the important identity

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n) = (-1)^n n!\, a_n\,, \qquad \text{integer } n \geqslant 0, \tag{5.42}$$

because the polynomial $a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n$ can always be written as a Newton series $c_0\binom{k}{0} + c_1\binom{k}{1} + \cdots + c_n\binom{k}{n}$ with $c_n = n!\, a_n$.

Abbildung 15: Teilergebnis des Beweises in der Literatur, Quelle: GRAHAM et al. (1994)

5.2.2 Unterrichtsmoment 2: „Geometrische Folge revisited“

Ausgangssituation:

In einer 6. Klasse AHS wurde ein Beweis aus einem Schulbuch zur Konvergenz der geometrischen Folge q^n im Fall $|q| < 1$ besprochen. Dabei unterscheidet sich die Beweisführung von der Herangehensweise in der klassischen Hochschulliteratur. Im Zuge der Auseinandersetzung in der Schule entstanden einige Fragen seitens der Lernenden zu gewissen Stellen der Beweisdokumentation. In einigen Schlussfolgerungen des Beweises wurden Resultate, die in klassischen Analysis-Einführungsvorlesungen thematisiert werden, implizit mitgedacht, wodurch die Argumentation für die beteiligten Schülerinnen und Schüler lückenhaft erscheint. Ein Vergleich der Herangehensweise des Schulbuchs mit jener in der Hochschulliteratur soll vorgenommen werden, um Antworten auf die Fragen der Lernenden vorzubereiten.

Angabe:

Die nachstehenden Abbildungen zeigen zwei Herangehensweisen, wie die Konvergenz der geometrischen Folge q^n für $|q| < 1$ gezeigt werden kann. Der erste Ausschnitt entstammt der Hochschulliteratur, während der zweite Ausschnitt einem Schulbuch der Sekundarstufe entspringt.

1. Möglichkeit (FORSTER 2011, S. 27 ff.):

Satz 3 (Wachstum von Potenzen). *Sei b eine positive reelle Zahl.*

a) *Ist $b > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*
$$b^n > K.$$

b) *Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*
$$b^n < \varepsilon.$$

Beweis. a) Sei $x := b - 1$. Nach Voraussetzung ist $x > 0$. Die Bernoullische Ungleichung sagt

$$b^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > K - 1$. Für dieses n ist dann $b^n > K$.

b) Da $b_1 := 1/b > 1$, gibt es nach Teil a) zu $K := 1/\varepsilon$ ein n mit $b_1^n > 1/\varepsilon$. Mit (3.11)[1] folgt $b^n < \varepsilon$, q.e.d.

(4.7) Das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hängt vom Wert von x ab. Wir unterscheiden vier Fälle.

1. Fall. Für $|x| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Beweis. Nach §3, Satz 3 b), existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x|^N < \varepsilon$. Damit ist

$$|x^n - 0| = |x|^n \leqslant |x|^N < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant N.$$

Abbildung 16: Konvergenz der geometrischen Folge nach FORSTER (2011)

[1] (3.11) besagt: $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$ für $x, y \in \mathbb{R}$

2. Möglichkeit (BRAND et al. 2013, S. 69):

344 Beweise: Die Folge $\langle q^n \rangle$ geht für $|q| < 1$ gegen 0.

Ausführung:

a) Sei $0 < q < 1$. Dann ist $|q| = q$, und q lässt sich in der Form $q = \frac{1}{1+h}$ anschreiben (für $h > 0$). Wir brauchen nun die Bernoulli'sche Ungleichung $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (siehe Aufgabe 431). Sie liefert für $|q^n| = q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+n \cdot h}$. Für genügend großes n wird der rechte Bruch kleiner als jedes beliebig vorgegebene ε. Das ist genau die Bedingung in der Definition des Grenzwertes.

$|q^n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

b) Sei $-1 < q < 0$. Dann alterniert das Vorzeichen der Folgenglieder, aber für deren Betrag gilt $|q^n| = |q|^n$. Die Folge $\langle |q|^n \rangle$ hat nach Punkt a) den Grenzwert 0, also gilt auch hier $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Abbildung 17: Konvergenz der geometrischen Folge nach BRAND et al. (2013)

1. **Die Zugänge verstehen**
   Lesen Sie die beiden dargestellten Zugänge und vollziehen Sie für sich die darin getätigten Überlegungen nach!
2. **Schul- UND Hochschulmathematik**
   Beachten Sie, dass beide Argumentationsstränge die Bernoulli'sche Ungleichung aufgreifen. Zeigen Sie diese mithilfe vollständiger Induktion (vgl. Aufgabe 431 bei BRAND et al. (2013))!
3. **Beweisbesprechung**
   Die zweite Möglichkeit sieht auf den ersten Blick kürzer aus. An einigen Stellen treten jedoch Argumente implizit auf, welche bei FORSTER (2011) explizit erwähnt werden (wie etwa Satz 3, das archimedische Axiom oder Bemerkung (3.11)). In einer 6. Klasse AHS wird Beispiel 344 besprochen, wobei – bezüglich der markierten Stellen – einige Fragen seitens der Lernenden auftreten.
   Anna (blau): „Weshalb ist hier auf einmal ein kleiner-gleich-Zeichen, wo doch vorher noch ein größer-gleich-Zeichen stand?"
   Peter (gelb): „Woher weiß man, dass der Bruch so klein wird?"
   Vera (rot): „Warum kann man das behaupten? Wir wissen doch nur, dass $\frac{1}{1+n\cdot h}$ gegen 0 geht…"

344 Beweise: Die Folge $\langle q^n \rangle$ geht für $|q| < 1$ gegen 0.

Ausführung:

a) Sei $0 < q < 1$. Dann ist $|q| = q$, und q lässt sich in der Form $q = \frac{1}{1+h}$ anschreiben (für $h > 0$). Wir brauchen nun die Bernoulli'sche Ungleichung $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (siehe Aufgabe 431). Sie liefert für $|q^n| = q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+n \cdot h}$. Für genügend großes n wird der rechte Bruch kleiner als jedes beliebig vorgegebene ε. Das ist genau die Bedingung in der Definition des Grenzwertes.

$|q^n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

b) Sei $-1 < q < 0$. Dann alterniert das Vorzeichen der Folgenglieder, aber für deren Betrag gilt $|q^n| = |q|^n$. Die Folge $\langle |q|^n \rangle$ hat nach Punkt a) den Grenzwert 0, also gilt auch hier $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Abbildung 18: Stellen, an welchen Fragen von Lernenden auftreten

   a. **Implizite Argumentationsgrundlagen explizieren**
      Fassen Sie für sich zusammen, welche Resultate an den markierten Stellen im Beweis die Argumentationsgrundlage bilden! Ergänzen Sie bei Bedarf fehlende Argumente!
      Tipp: Unter anderem werden einige dieser Resultate im ersten Ausschnitt explizit erwähnt.

b. Fragen beantworten

Verfassen Sie Kurzantworten an Anna, Peter und Vera!

Lösungsvorschlag:

2. Schul- UND Hochschulmathematik

Satz (Bernoulli'sche Ungleichung): Sei $\mathrm{x} \geq -1$, dann gilt $(1+\mathrm{x})^n \geq 1 + \mathrm{n} \cdot \mathrm{x}$ für alle $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Induktionsanfang $\mathrm{n} = 0$. Es gilt $(1+\mathrm{x})^0 = 1 \geq 1$

Induktionsschritt $\mathrm{n} \to \mathrm{n}+1$. Da $1 + x \geq 0$, folgt nach Multiplikation der Induktionsvoraussetzung $(1+\mathrm{x})^n \geq 1 + \mathrm{nx}$ mit $1 + \mathrm{x}$

$(1+\mathrm{x})^{n+1} \geq (1+\mathrm{nx}) \cdot (1+\mathrm{x}) = 1 + (\mathrm{n}+1)\mathrm{x} + \mathrm{nx}^2 \underbrace{\geq}_{\mathrm{x}^2 \geq 0} 1 + (n+1)x,$ q.e.d.

3. Beweisbesprechung

a. Implizite Argumentationsgrundlagen explizieren

Blau: Die Schlussfolgerung entspricht Bemerkung (3.11), welche eine direkte Konsequenz aus den Ordnungsaxiomen für Körper ist (FORSTER 2011, S. 22): $0 < \mathrm{x} < \mathrm{y} \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$ für $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$.

Gelb: Das archimedische Axiom besagt, dass es zu jedem $K > 0$ und $x > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass $nx > K$. Setze $K = 1$ und $x = \varepsilon$, dann folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n existiert, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dass auch $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{1+n\cdot h} = 0$ für $\mathrm{h} > 0$ gilt, kann folgendermaßen gezeigt werden: Für $h > 0$ und $n \geq 1$ gilt $\frac{1}{1+n\cdot h} < \frac{1}{n\cdot h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$ und aus den Grenzwertsätzen folgt $\underbrace{\frac{1}{h}}_{konst.} \cdot \frac{1}{n} \to 0$

Rot: Genau genommen bleibt hier das Argument für die Implikation „$\frac{1}{1+n\cdot h} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+h)^n} \to 0$" unerwähnt. Hier könnte man z.B. mit dem Sandwich-Lemma (oft auch „Einschließungssatz"), einem Resultat in klassischen Analysis-Einführungsvorlesungen, argumentieren (z.B. FRITZSCHE 2013, S. 45): Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$, a der Grenzwert von a_n und b der Grenzwert von b_n, so ist $a \leq b$. Ist sogar $a = b$, so konvergiert auch c_n gegen a. In der vorliegenden Aufgabe könnte man das Sandwich-Lemma nach Wahl von $a_n := 0$, $b_n := \frac{1}{(1+h)^n}$ und $c_n := \frac{1}{1+n\cdot h}$ anwenden.

b. Fragen beantworten

Antwort an Anna: „Liebe Anna, veranschauliche dir den Wechsel des Ungleichheitszeichens anhand zweier beliebiger Zahlen. Es gilt z.B. $4 < 5$, für die Kehrwerte jedoch gilt $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$. Dieses Umkehren des Ungleichheitszeichens für Kehrwerte gilt tatsächlich für alle reellen Zahlen."

Antwort an Peter: „Lieber Peter, betrachte zunächst die Folge $\frac{1}{n}$. Durch sukzessives Einsetzen der natürlichen Zahlen wird die Folge immer kleiner. Betrachte zunächst die Zahl $\varepsilon = 0{,}000001$ und versuche, eine natürliche Zahl N zu finden, sodass $\frac{1}{N}$ kleiner als ε ist! Denke dir eine noch kleinere Zahl ε aus und gib erneut die natürliche Zahl N an, sodass $\frac{1}{N}$ kleiner als ε ist! Da der Nenner in $\frac{1}{n}$ beliebig groß ‚gemacht werden' kann, nimmt $\frac{1}{n}$ beliebig kleine Werte an. Überzeuge dich auf dieselbe Weise, dass auch $\frac{1}{1+n\cdot h}$ beliebig klein wird! Setze dafür z.B. $h = 100$."

Antwort an Vera: „Liebe Vera, das hast du sehr gut durchschaut! Nur weil $\frac{1}{1+n\cdot h}$ gegen 0 geht, kann man nicht so ohne Weiteres auf die Konvergenz der Folge q^n schließen. Der Gedanke dahinter ist, dass $\frac{1}{1+n\cdot h}$ beliebig klein wird, aber stets positive Werte liefert. Da jedoch $0 < q^n < \frac{1}{1+n\cdot h}$ gilt, hat nun auch q^n keine andere ‚Wahl' und muss ebenfalls gegen 0 konvergieren." Ist die Schülerin an einer ausführlichen Erklärung interessiert, könnte man fortfahren: „Wenn a_n, b_n und c_n mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ (für fast alle natürlichen Zahlen) drei Folgen sind, wobei $a_n \to a$ und $b_n \to a$ gilt, dann geht auch c_n gegen a. Die Idee des sogenannten Sandwich-Lemmas könnte man wie in der nachstehenden Skizze (siehe **Abbildung 19**) veranschaulichen.

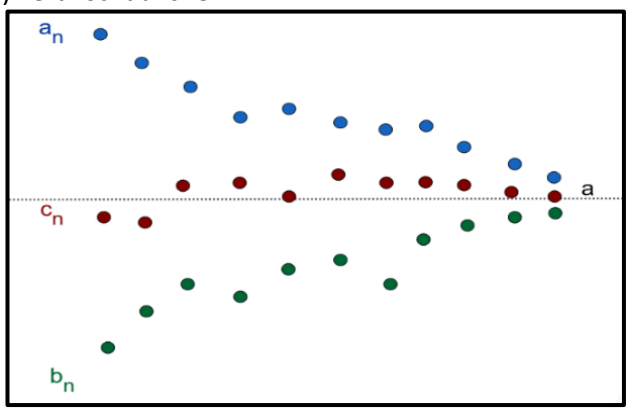


Abbildung 19: Idee des Sandwich-Lemmas, eigene Bearbeitung

Wähle für a_n die Folge 0_n und für b_n die Folge $\frac{1}{1+n\cdot h}$. Da diese beiden Folgen beide gegen 0 gehen und die Folge q^n von a_n und b_n eingeschlossen wird, muss diese ebenfalls den Grenzwert 0 haben."

Didaktische Analyse:

Die Aufgabe „Geometrische Folge revisited" beginnt im Aufgabenteil (1) mit der Handlungsaufforderung, die Bernoulli'sche Ungleichung mittels vollständiger Induktion zu zeigen, was außerdem eine Schulbuchaufgabe in BRAND et al. (2013) darstellt. Die Ungleichung ist bei beiden Herangehensweisen in der Beweisführung wesentlich. Aufgabenteil (2) basiert auf Äußerungen von Lernenden, welche Fragen bezüglich einiger Aspekte des Beweises haben. Die Unsicherheit seitens der Lernenden lässt sich – der Meinung des Autors nach – auf teilweise nicht explizit angeführte Argumente zurückführen, welche jedoch ausschlaggebend für einige Schlussfolgerungen sind. Durch die Arbeitsaufforderung, diese Argumentationsgrundlagen zu explizieren und Ergänzungen vorzunehmen, soll das Exaktheitsniveau des Beweises erhöht werden. Im Unterpunkt (2b) findet anschließend wieder eine Reduktion des Exaktheitsniveaus statt, indem die soeben getätigten Überlegungen in schülergerechte Formulierungen übersetzt werden müssen.

Im Rahmen des Unterrichtsmoments „Geometrische Folge revisited" werden die folgenden Handlungsanforderungen behandelt:

1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(explizit)**
3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(explizit)**
6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(explizit)**
7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**

5.2.3 Unterrichtsmoment 3: „Grenzwert(ige) Formulierungen“

Ausgangssituation:

Der Grenzwertbegriff spielt zu Beginn klassischer Analysis-Vorlesungen eine zentrale Rolle. Gleichzeitig stellt der Begriffsapparat um den Grenzwert einer Folge ein anspruchsvolles Thema der Schulmathematik in der Sekundarstufe 2 dar. Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind bei der Behandlung des Grenzwertbegriffs besonders darauf angewiesen, die Idee auf verschiedenen Exaktheitsstufen sowie mittels verschiedener Darstellungsformen zu präsentieren. Der Unterrichtsmoment „Grenzwertige Formulierungen“ thematisiert die Wahl eines für den Schulunterricht geeigneten Zugangs, zum Grenzwertbegriff – unter Berücksichtigung des fachmathematischen sowie mathematisch-didaktischen Gehalts ausgesuchter Formulierungen aus Mathematik-Schulbüchern.

Es muss ergänzt werden, dass es sich im vorliegenden Fall nicht um einen Unterrichtsmoment im klassischen Sinne handelt, da diese im einleitenden Absatz des Kapitels als mit Handlungsanforderungen versehene prototypische Unterrichtssituationen definiert wurden. Unterrichtsmoment 3 baut zwar auf keiner vorangegangenen Unterrichtssituation auf, behandelt jedoch für den Schulunterricht inhaltlich relevante Aspekte im Bereich der Analysis und thematisiert gleichzeitig essentielle Handlungsanforderungen an Lehrerinnen und Lehrer der Sekundarstufe, weswegen eine Auseinandersetzung mit der vorliegenden Übungsaufgabe „im Geiste der Unterrichtsmomente“ nach Ansicht des Autors sinnvoll erscheint.

Angabe:

Die folgenden fünf Formulierungen zur Definition des Grenzwerts einer Folge wurden Schulbüchern entnommen:

1. Formulierung (STEINER und WEILHARTER 2006, S. 7)*:*

Die Zahl α heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen: $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

2. Formulierung (BÜRGER 2004, S. 152)*:*

Ist $\langle a_n | n \in \mathbb{N}^* \rangle$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die reelle Zahl a Grenzwert der Zahlenfolge, wenn folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$

Man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

3. Formulierung (THORWARTL et al. 2005, S. 82)

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung $U(a; \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fast alle Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Anders ausgedrückt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ strebt mit wachsendem n dem Grenzwert (limes) a zu.

Man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergente Folge.

Anmerkung: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ bedeutet nicht, dass a tatsächlich „erreicht“ wird, sondern nur, dass in jeder auch noch so kleinen ε-Umgebung um a fast alle Glieder der Folge liegen.

4. Formulierung (SCHÄRF 1971, S. 24)*:*

Eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots \rangle$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (von ε abhängige) Nummer N, so daß für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

Man schreibt: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ und liest: a ist Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ für n gegen Unendlich.

Jede Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

5. Formulierung (BRAND et al. 2013, S. 62)*:*
Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$.
Wir schreiben dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.")
Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

Bemerkung: Einige Definitionen greifen die Terminologie „fast alle Folgenglieder" auf. In den im Rahmen dieses Unterrichtmoments aufgegriffenen Büchern wird diese Terminologie mit „alle bis auf endlich viele Folgenglieder" gleichgesetzt.

1. **Definitionen analysieren und vergleichen**
   Analysieren Sie die fünf gegebenen Definitionen einerseits nach deren mathematischer Exaktheit und andererseits danach, wie schülergerecht diese formuliert sind!
2. **Ranking erstellen**
   Versetzen Sie sich in die Situation, eine Definition für Ihren Schulunterricht zum Grenzwertbegriff festlegen zu müssen. Erstellen Sie gemäß Ihrer in (1) gemachten Beobachtungen ein (subjektives) Ranking von 1 (die Ihrer Ansicht didaktisch am besten geeignete) bis 5 (die Ihrer Ansicht nach didaktisch am wenigsten geeignete) der fünf Formulierungen! Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

Lösungsvorschlag:
Definition 1: Die erste Definition erfasst zunächst korrekt die Idee des Grenzwertbegriffs, enthält jedoch Mängel in der Formulierung. Die erste Formulierung erklärt den Begriff des Grenzwertes über die ε-Umgebung, während sich die zweite Formulierung des Abstandsbegriffs bedient. Der Doppelpunkt fungiert hier als Trennzeichen zwischen den beiden Zugängen. Durch die Verwendung des Doppelpunkts geht nicht klar hervor, in welchem Bezug die beiden Zugänge zueinanderstehen. Die Frage, die sich stellt, ist auch, ob das erneute Aufrollen in Form der in der ersten Definition formulierten Herangehensweise über den Abstandsbegriff hier den Lernenden eine neue Perspektive vermittelt. Weiters impliziert bereits der Beginn der Definition mittels „Die Zahl…" die Eindeutigkeit des Grenzwertes, obwohl diese an der Stelle nicht thematisiert wird (und auch nicht thematisiert werden soll). Im Sinne eines mathematisch sauberen Stils wäre stattdessen ein unbestimmter Artikel vorzuziehen, um die Frage der Eindeutigkeit zu diesem Zeitpunkt außen vor zu lassen. Zudem geht durch die doppelt vertretene Floskel „fast alle" die zum Nachweisen der Konvergenz praktische Spezifizierung eines Folgenindex unter, welcher sich zu jedem positiven, vorgegebenen ε finden lassen muss.
Definition 2: Diese Definition unterscheidet sich von den anderen durch ihre Kompaktheit und den Einsatz von Quantoren und ähnelt stark einer hochschulmathematischen Vorgehensweise. Die durch Quantoren formal stark komprimierte Aussage kann für viele Lernenden im Schulunterricht eine hohe Einstiegshürde für den Verstehensprozess zum Grenzwertbegriff darstellen, da diese Information allen voran erst einmal entpackt und durch geeignete Darstellungen vermittelt werden muss. Wie bei der ersten Definition besteht auch hier das Problem, dass der bestimmte Artikel bei „… heißt die reelle Zahl a Grenzwert…" die Eindeutigkeit des Limes impliziert.
Definition 3: Die dritte Definition erinnert zunächst stark an die erste Definition, mit dem Zusatz, dass sich eine formalsprachliche Repräsentation der ε-Umgebung finden lässt und die Nichtnegativität von

ε explizit erwähnt wird. Die angefügte Bemerkung ist jedoch mathematisch inkorrekt. Die Formulierung legt den Trugschluss nahe, dass das „Nicht-Erreichen" des Grenzwerts eine Grundvoraussetzung im Falle der Konvergenz ist – als Gegenbeispiel denke man an die (triviale) konstante Folge, deren Folgenglieder stets mit dem Grenzwert übereinstimmten. Zugleich liegen in jeder noch so kleinen ε-Umgebung um den Grenzwert fast alle (sogar alle) Glieder der Folge. Die inhaltliche Korrektheit der Aussage wäre gegeben, wenn die Textstelle „…, dass a tatsächlich erreicht **wird**, …" durch „…, dass a tatsächlich erreicht **werden muss**, …" ersetzt wird. Des Weiteren werden konstante Folgen bereits durch den Satz nach der Stelle „Anders ausgedrückt" ausgeschlossen. Die Terminologie „Anders ausgedrückt" legt ebenfalls eine nicht zutreffende Äquivalenz der Aussagen nahe. Außerdem folgt auf „Anders ausgedrückt" lediglich eine alternative Beschreibung auf einem viel niedrigerem Exaktheitsniveau. Innerhalb der vorliegenden Definition ist „Es gilt" ebenfalls problematisch, da nicht klar ist, dass es sich um eine Reformulierung des zuvor Gesagten handelt. Aus sprachlicher Sicht ist hingegen durchaus eine schülergerechte Formulierung gegeben.

Definition 4: Hier ist die Bemerkung inkludiert, dass die Wahl des Folgenindex N im Allgemeinen von ε abzuhängen hat. Im Falle der konstanten Folgen wäre diese Bedingung für die Konvergenz jedoch nicht notwendig. Problematisch ist, wie bei den Definitionen 1 und 3 auch hier, dass „a gegen den Grenzwert" konvergiert und somit erneut die Eindeutigkeit des Grenzwerts unkommentiert in der Definition enthalten ist.

Definition 5: Die fünfte Definition kennzeichnet ein hoher Grad an Versprachlichung – in gewisser Weise stellt die Formulierung damit einen Gegensatz zu Formulierung 2 dar. Dabei werden jedoch wesentliche Spezifikationen berücksichtigt, sodass die Aussage mathematisch korrekt bleibt.

Zudem thematisieren die Definitionen 4 und 5 die Schreib- und Sprechweise des Limes. In den Definitionen 2 und 3 wird nur die Schreibweise erläutert, während in Definition 1 weder Schreib- noch Sprechweise behandelt werden.

Die folgende Tabelle stellt einen Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil (2) dar:

Platzierung	**Definition Nr.**	**Begründung**	
1	**5**	+	schülergerecht formuliert, bildhaft, zugleich kompakt und mathematisch korrekt, behandelt Schreib- und Sprechweise sowie Konvergenz und Divergenz
2	**4**	+	expliziert die Abhängigkeit des Folgenindex N von ε, behandelt Schreib- und Sprechweise sowie Konvergenz und Divergenz, schülergerecht formuliert
		–	Eindeutigkeit des Grenzwerts ist unkommentiert in Definition enthalten
3	**2**	+	mathematisch korrekt, behandelt Schreibweise
		–	nicht schülergerecht formuliert, da Information stark komprimiert ist
4	**1**	+	schülergerecht formuliert
		–	vermischt unkommentiert (Doppelpunkt) zwei Zugänge in einer Definition, wesentliche Bausteine (z.B. „fast alle") der Definition werden nicht spezifiziert, Eindeutigkeit des Grenzwerts ist unkommentiert in Definition enthalten
5	**3**	+	schülergerecht formuliert
		–	einige Formulierungen können falsche Vorstellungen seitens der Lernenden hervorrufen, Eindeutigkeit des Grenzwerts ist unkommentiert in Definition enthalten

Tabelle 2: Ranking der Definitionen, eigene Bearbeitung

Didaktische Analyse:

Im Fokus des Unterrichtsmoments „Grenzwert(ige) Formulierungen“ steht das Vergleichen von verschiedenen Zugängen in Schulbüchern zum Grenzwertbegriff, das in Aufgabenteil (1) behandelt wird. In Aufgabenteil (2) sollen die Schulbuchdefinitionen anhand mathematischer sowie didaktischer Überlegungen bewertet und daraufhin ein Ranking erstellt werden. Ziel dieser Aufgabe ist es auch, dass sich die Bearbeitenden der verschiedenen Exaktheitsstufen bewusstwerden, auf welchen der Grenzwert einer Folge in Schulbüchern definiert wird. Die Auseinandersetzung mit den Definitionen soll zudem das „Auge für Details“ schärfen, von denen es in der Unterrichtspraxis abhängen kann, ob es gelingt, Schülerinnen und Schülern zu einem Konzept die richtigen Vorstellungen zu vermitteln. Zusammengefasst werden im Rahmen des Unterrichtsmoments „Grenzwert(ige) Definitionen“ folgende Handlungsanforderungen thematisiert:

3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(explizit)**
6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(explizit)**
10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende **(implizit)**

5.2.4 Unterrichtsmoment 4: „Spontan Elementargeometrie“

Ausgangssituation:
Die Grundlage für diesen Unterrichtsmoment bildet eine gehaltene Unterrichtsstunde des Autors in einer 5. Klasse AHS. Aufgrund der zu diesem Zeitpunkt bevorstehenden Mathematik-Schularbeit fand eine Übungsstunde statt, für welche die Schülerinnen und Schüler im Vorhinein Fragen zum Schularbeitsstoff sammeln konnten. Thema waren Grundlagen trigonometrischer Funktionen sowie die Darstellung von Punkten in Form von Polarkoordinaten.

Angabe:
Die folgende Aufgabenstellung stammt aus einem Schulbuch (BRAND et al. 2017, S. 159): *Welche zwei der angegebenen Punkte liegen auf einem gemeinsamen Kreis? Versuche, diese Aufgabe ohne Zeichnung zu lösen, und beschreibe deine Vorgangsweise.*

$$A = [5; 30°], B = [5; 40°], C = [3; 90°], D = [4; 90°]^2$$

Lisa behauptet: „Ich bin auf das Ergebnis gekommen, dass die Punkte C und D auf einem gemeinsamen Kreis liegen.“
Dominik hält entgegen: „A und B ist aber richtig, weil die beiden Punkte denselben Radius haben.“

1. **Lösungserwartung der gegebenen Formulierung**
   Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung, so wie sie im Schulbuch formuliert wurde!
2. **Umformulieren**
   Was war vermutlich die Intention der Schulbuchautoren hinter dieser Aufgabe? Formulieren Sie die Angabe dementsprechend um!
3. **Schüleraussagen bewerten**
   Bewerten Sie die Richtigkeit der beiden Schüleraussagen hinsichtlich der gegebenen Formulierung sowie Ihrer Korrektur!
4. **Missverständnisse klären**
   Entwerfen Sie – ausgehend von Lisas Lösungsweg – eine Unterrichtssequenz, die die Situation restlos klärt!

Lösungsvorschlag:

1. **Lösungserwartung der gegebenen Formulierung**
   Gemäß der gegebenen Formulierung gilt es herauszufinden, welche zwei Punkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Da offensichtlich $A \neq B \neq C \neq D$ gilt, lässt sich zu je zwei beliebigen Punkten der vier angegebenen ein Kreis mit Radius $r > 0$ finden, auf welchem die beiden Punkte liegen. Im Allgemeinen lassen sich beliebig viele Kreise durch je zwei Punkte legen. Die Menge der in Frage kommenden Mittelpunkte ist dabei durch die Streckensymmetrale der ausgewählten Punkte gegeben. Somit löst jedes genannte Paar (gebildet aus den vier gegebenen Punkten) die Aufgabe korrekt.

[2]Bei dieser Schreibweise gibt die erste Komponente den Radius und die zweite Komponente den Polarwinkel eines Punktes an.

2. **Umformulieren**

   Ziel der Schulbuchaufgabe ist es vermutlich, den grundlegenden Umgang mit Polarkoordinaten zu üben. Die Auffassung der ersten Komponente des Punktes als Polarradius bzw. der zweiten Komponente als Polarwinkel soll zu der Erkenntnis führen, dass aufgrund eines Radius von $r = 5$ die Punkte A und B auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegen. Ergänzt man die Formulierung im Schulbuch zur Fragestellung *„Welche zwei der angegebenen Punkte liegen auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung?“,* so erhält man eine Aufgabe mit einer eindeutigen Lösung.

3. **Schüleraussagen bewerten**

   Bei Betrachtung der Angabe aus dem Schulbuch lässt die Aussage von Lisa vermuten, dass diese das Prinzip der Polarkoordinaten nicht verstanden hat, da sie jene Punkte mit gleichem Polarwinkel auswählt. Wäre die Intention hinter ihrer Lösung bewusst der elementargeometrische Zugang zur Fragestellung gewesen, ob durch zwei Punkte der Ebene ein Kreis konstruiert werden kann, hätte sie erkennen müssen, dass jedes Paar aus den gegebenen vier Punkten die Aufgabe löst – ungeachtet dessen, dass ihre Lösung dennoch mathematisch korrekt ist.

   Dominik scheint davon auszugehen, dass die Lösung eindeutig sein muss, da er dies als Argument gegen Lisas Lösung vorbringt. Seine genannte Lösung „A und B“, die er vermutlich durch die Auffassung erhält, dass die erste Komponente des Punktes zugleich der Radius des gesuchten Kreises ist, ist mathematisch ebenfalls korrekt. Dominik hat die Angabe so interpretiert, wie sie intendiert, aber nicht gestellt war.

   Somit bleibt die mathematische Korrektheit von Dominiks Lösung auch unter der Betrachtung der in Aufgabenteil (2) getätigten Adaption erhalten. Lisas Lösung hingegen ist falsch, wenn Kreise mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung vorausgesetzt werden. Aus Sicht der Lehrerin bzw. des Lehrers wäre Dominiks Argumentation gegen Lisas Aussage in diesem Fall jene, welche zur Klärung der Sachlage aufgegriffen werden könnte.

4. **Missverständnisse klären**

   „Liebe Lisa, lieber Dominik, zunächst einmal sind bei der gegebenen Aufgabe beide von euch genannten Lösungen mathematisch korrekt – es wird nicht vorausgesetzt, dass die Lösung eindeutig ist. Bearbeitet die folgende Aufgabenstellung in Partnerarbeit:

   (a) Stellt die vier Punkte A, B, C und D in einem Koordinatensystem dar! Probiert nun, durch welche zwei Punkte sich gemeinsame Kreise zeichnen lassen! Wie viele Kreise könnt ihr zu jeweils zwei ausgewählten Punkten zeichnen? Formuliert schließlich eine mathematisch korrekte Lösung für die Schulbuchaufgabe!

   (b) Durch drei gegebene Punkte kann man eindeutig einen Kreis zeichnen. Beschreibt, wie man dabei den in Frage kommenden Mittelpunkt ausfindig machen kann!

   (c) Betrachtet nun die Aufgabe aus dem Schulbuch unter der Voraussetzung, dass nur Mittelpunkte im Koordinatenursprung betrachtet werden. Erläutert eurem Partner jeweils euren Lösungsweg von zuvor! Entscheidet euch danach für eine gemeinsame, mathematisch korrekte Lösung!“

<u>Didaktische Analyse:</u>

Der Unterrichtsmoment „Spontan Elementargeometrie“ greift eine Unterrichtssituation auf, in welcher einige Missverständnisse passiert sind. Einerseits bestehen zwischen den beiden Lernenden Dominik und Lisa unterschiedliche Zugänge zur Schulbuchaufgabe, andererseits wird die Situation durch eine vermutlich vergessene Textpassage in der Aufgabenstellung verkompliziert. Der

Unterrichtsmoment beschäftigt sich damit, die Situation zu entwirren. In Aufgabenteil (1) soll zunächst die Aufgabe gemäß der gegebenen Formulierung bearbeitet werden, wobei elementargeometrische Überlegungen im Vordergrund des Lösungsprozesses stehen. Der mathematische Hintergrund der Aufgabe wird ein komplett anderer, wenn man die Betrachtung auf Kreise mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung beschränkt, was vermutlich der ursprünglichen Intention hinter diesem Beispiel entspricht – siehe dazu Aufgabenteil (2). Im Zuge von Aufgabenteil (3) sollen die beiden Schüleraussagen gemäß ihrer mathematischen Richtigkeit bezüglich der gegebenen sowie der adaptierten Formulierung analysiert werden, um eine Vorstellung der Überlegungen zu bekommen, die hinter diesen Aussagen stehen. Im Rahmen von Aufgabenteil (4) soll – die Erkenntnisse aus den ersten drei Aufgabennummern berücksichtigend – schließlich eine Unterrichtssituation entworfen werden, welche die Missverständnisse klärt.

Der Unterrichtsmoment „Spontan Elementargeometrie“ behandelt die folgenden Handlungsanforderungen:

1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(explizit)**
4. Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren **(explizit)**
7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**
8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**
9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren **(explizit)**
12. spontane Schüleraussagen umgehend anhand der Relevanz für weitere Handlungsakzente im Unterricht beurteilen können **(implizit)**

5.3 Handlungsanforderungen in den ausgearbeiteten Unterrichtsmomenten

Abschließend werden die ausgearbeiteten Unterrichtsmomente in Form einer Tabelle dargestellt, welche eine Übersicht über Gemeinsamkeiten und Unterschiede der darin thematisierten Handlungsanforderungen darstellen soll.

Unterrichtsmoment	Handlungsanforderungen (explizit/implizit)
„Bernds Formel“	2. Lernziele setzen und ausschärfen **(explizit)** 4. Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren **(explizit)** 7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(implizit)** 13. methodische Vorgangsweisen anhand mathematisch-inhaltlicher Anforderungen wählen **(explizit)**
„Geometrische Folge revisited“	1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(explizit)** 3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(explizit)** 6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(explizit)** 7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)**
„Grenzwert(ige) Formulierungen“	3. Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten **(explizit)** 6. geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln **(explizit)** 10. zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende **(implizit)**
„Spontan Elementargeometrie“	1. Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können **(explizit)** 4. Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren **(explizit)** 7. Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)** 8. Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren **(explizit)** 9. fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren **(explizit)** 12. spontane Schüleraussagen umgehend anhand der Relevanz für weitere Handlungsakzente im Unterricht beurteilen können **(implizit)**

Tabelle 3: Thematisierte Handlungsanforderungen der ausgearbeiteten Unterrichtsmomente, eigene Bearbeitung

Im nächsten Kapitel sollen einige Ausführungen der Diplomarbeit retrospektiv betrachtet und einige weiterführende Erläuterungen präsentiert werden, die Anknüpfungspunkte für zukünftige wissenschaftliche Auseinandersetzungen mit diesem Thema aufzeigen sollen.

6. Rückblick und Ausblick

Das im Kapitel 2 beschriebene Problem der doppelten Diskontinuität ist ein in der fachdidaktischen Literatur vielfach vertretener Begriff, dessen Bearbeitung sich inzwischen zahlreiche wissenschaftliche Bände angenommen haben. Sowohl über die Ursachen, die Konsequenzen, als auch über die nach wie vor hohe Aktualität der doppelten Diskontinuität scheint sich die Fachdidaktik einig zu sein. Im Gegensatz dazu jünger ist eine empirische Erfassung der in Kapitel 3 zentralen mathematischer Tasks, welche die Grundlage für einen gelungenen Mathematikunterricht bilden. Sowohl BALL und BASS (2004) als auch PREDIGER (2013) weisen darauf hin, dass die identifizierten Jobs bzw. die Liste an Handlungsanforderungen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Es ist zu erwarten, dass vertiefende Auseinandersetzungen mit dieser Fragestellung – womöglich in Verbindung mit empirischen Methoden – weitere Erkenntnisse bringen, die neue Anknüpfungspunkte für den wissenschaftlichen Diskurs eröffnen.
Ein theoriebasierter Anknüpfungspunkt ist durch eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Begriff der, von HEFENDEHL-HEBEKER und PREDIGER (2016) geprägten, epistemologischen Bewusstheit gegeben, deren Thematisierung im Rahmen dieser Arbeit keinen Platz fand. Zusätzlich zu der Frage, welche Handlungsanforderungen Lehrerinnen und Lehrer erfüllen sollen, rückt die Betrachtung ins Zentrum, wie das Wissen in der psychischen Welt der Lernenden repräsentiert ist und welche Art von Wissen über Mathematik angehende Lehrerinnen und Lehrer benötigen. Ein vergleichbarer Ansatz, das Konzept der sogenannten „Beliefs“, wird etwa von SCHWARZ (2013) behandelt.

Die in Kapitel 4 präsentierten Projekte stellen, bezüglich der Einbindung der davor beschriebenen Handlungsanforderungen, vielversprechende Ansätze dar, um die Ausbildungsteile Fachdidaktik und Fachmathematik miteinander zu verbinden. Unter den hier behandelten Gesichtspunkten ist die Einbindung der vorgestellten Aufgabenkonzepte in die Ausbildung angehender Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer didaktisch gerechtfertigt. Der Meinung des Autors nach bietet eine Integration von Schnittstellenaufgaben in einführende (Fach-)Lehrveranstaltungen des Mathematik-Lehramtsstudiums eine gute Möglichkeit, um den eingangs erwähnten Problemfeldern der doppelten Diskontinuität entgegenzuwirken.

Die in Kapitel 5 ausgearbeiteten Unterrichtsmomente stellen exemplarisch dar, wie Unterrichtssituationen aus der Sekundarstufe zu möglichen Übungsaufgaben für Studierende verarbeitet werden können. Damit wird das Repertoire an vorhandenen Übungsaufgaben im Sinne der Unterrichtsmomente erweitert. Dies ist notwendig, um das Konzept der Unterrichtsmomente in die Lehramtsausbildung einzubringen.
Eine Umsetzung dieses Aufgabenkonzepts benötigt eine spezielle Herangehensweise, da sich die Idee der Unterrichtsmomente von den anderen vorgestellten Projekten vor allem darin unterscheidet, dass die Übungsaufgaben auf prototypischen Unterrichtssituationen basieren. Dies bedeutet implizit, dass eine bidirektionale Kommunikation zwischen der Universität und den Schulen notwendig ist, damit weitere Unterrichtssituationen aufgegriffen werden können. Dazu könnten in weiterer Folge Arbeitsgruppen eingeführt werden, in welchen Lehrerinnen und Lehrer, Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker sowie Fachmathematikerinnen und Fachmathematiker vertreten sind und gemeinsam Unterrichtsmomente erarbeiten. Sensibilisierte Lehrende der Sekundarstufe könnten dabei in ihrem Unterricht relevante Unterrichtssituationen dokumentieren und in den Arbeitsgruppen gemeinsam mit Experten der Mathematikdidaktik diskutieren. Dadurch wäre einerseits gewährleistet, dass die

zugrunde liegenden Unterrichtssituationen und somit die darauf aufbauenden Übungsaufgaben authentisch sind und andererseits, dass die Aufgaben auch mathematisch relevante Inhalte des Studiums in gewinnbringender Weise beleuchtet werden.

Dies erfordert unter anderem eine Sensibilisierung von Lehrkräften in der Sekundarstufe, damit vielversprechende Unterrichtssituationen auch sachgerecht dokumentiert werden. Dass eine solche Sensibilisierung im Status quo nicht flächendeckend gegeben ist, hat die Suche des Autors nach geeigneten Unterrichtssituationen in der Kollegenschaft gezeigt: Eine Vielzahl an Anfragen nach geeigneten Unterrichtssituationen hat verhältnismäßig wenige Rückmeldungen hervorgebracht. Von diesen Rückmeldungen war ein Großteil einigermaßen knapp dokumentiert oder für die Umsetzung im Sinne eines Unterrichtsmoments ungeeignet. Der Autor ist überzeugt, dass eine aktive Auseinandersetzung für die Integration der Unterrichtsmomente in die Lehramtsausbildung ein Weg ist, um sinnstiftende Brückenschläge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen und somit Studierenden metaphorisch zu ermöglichen, den Ozean der Hochschulmathematik zu erkunden, ohne sich dabei – gemäß der Terminologie nach KÜMMERER (2013) – „mühsam paddelnd über Wasser“ halten zu müssen.

Literaturverzeichnis

Ableitinger, C. (2013). Demonstrationsaufgaben im Projekt „Mathematik besser verstehen“. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 17–38). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Ball, D. L., & Bass, H. (2002). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group/Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques*, 3–14.

Ball, D. L., & Bass, H. (2004). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Bauer, T., & Partheil, U. (2009a). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *56*(1), 85–103.

Begle, E. G. (1979). Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(5), 381.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Bikner-Ahsbahs, A., & Schäfer, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 57–76). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Borneleit, P., Henn, H.-W., Danckwerts, R., & Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe: Verkürzte Fassung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *22*(1), 73–90.

Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher, & Nussbaumer. (2013). *Thema Mathematik 6* (3. Aufl.). Linz: VERITAS.

Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher, & Nussbaumer. (2017). *Thema Mathematik 5* (2. Aufl.). Linz: VERITAS.

Bürger, H. (Hrsg.). (2004). *Mathematik Oberstufe: Arbeitsbuch für die ... Klasse der AHS. 2 = Kl. 6, [Schülerbd.]: ...* (2. Aufl., Nachdr.). Wien: öbv & hpt.

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Etzlstorfer, S. (2010). $a^2 + b^2 = c^2$ - *¿Qué significa eso?* Universität Wien, Wien.

Fischer, A. (2013). Anregung mathematischer Erkenntnisprozesse in Übungen. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 95–116). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Forster, O. (2011). *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8139-7. Zugegriffen: 16. Juli 2018

Fritzsche, K. (2013). Der Grenzwertbegriff. In *Trainingsbuch zur Analysis 1* (S. 45–108). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). *Concrete mathematics: a foundation for computer science* (2nd ed.). Reading, Mass: Addison-Wesley.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Halverscheid, S., & Müller, N. C. (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 117–134). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London ; New York: Routledge.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schuster, A. (2006). *Probleme und Perspektiven der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik: Ergebnisse eines Symposiums der Deutsche Telekom Stiftung auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im September 2006 in Bonn*. Bonn: Deutsche Telekom Stiftung.

Huber, D. (2016). *Zur doppelten Diskontinuität Brückenschläge und Schnittstellen in der Analysis-Ausbildung*. Universität Wien, Wien.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Arithmetik, Algebra, Analysis* (3.Auflage.). Berin: Springer.

Krauss, S., & Brunner, M. (2011). Schnelles Beurteilen von Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrer/innen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(2), 233–251.

Kümmerer, B. (2013). Wenn du wenig Zeit hast, nimm' dir viel davon am Anfang: Ein Einstieg in die Analysis. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 135–150). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Leufer, N., & Prediger, S. (2006). Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule. In *Realitätsnaher Mathematikunterricht: vom Fach aus und für die Praxis ; Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag* (S. 265–276). Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151–168). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Prediger, S., & Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 239–262.

Reimann, P. (1998). Novizen- und Expertenwissen. In *Wissen. Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich C: Theorie & Forschung* (S. 325–367). Göttingen: Hogrefe.

Schärf, J. (1971). *Mathematik : Lehr-, Übungs- und Nachschlagbuch für höhere technische Lehranstalten und zum Selbststudium* (2. Aufl., Bd. 3). Wien: Oldenbourg.

Schwarz, B. (2013). *Professionelle Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden: eine Analyse der strukturellen Zusammenhänge*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4.

Steiner, G., & Weilharter, J. (2006). *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Thorwartl, W., Wagner, G., & Wagner-Eggenhofer, H. (2005). *Mathematik positiv! / 6. Klasse AHS - Musterbeispiele und Aufgaben* (3. Aufl.). Wien: G&G.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/45/muundallgemeinbildung.pdf. Zugegriffen: 26. März 2018

Online-Quellen:

URL-01. https://visible-learning.org/de/kritik-an-der-hattie-studie-visible-learning. Zuletzt zugegriffen: 8.Mai 2018

URL-02. https://visible-learning.org/de/hattie-rangliste-einflussgroessen-effekte-lernerfolg/hattie-rangliste-einfluss-von-lehr-und-lernmethoden. Zuletzt zugegriffen: 8.Mai 2018

URL-03. https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/das-paradoxon-von achilles-und-der-schildkroete. Zuletzt zugegriffen: 8.Mai 2018

Anhang

Anhang A – Epistemologische Bewusstheit (PREDIGER und HEFENDEHL-HEBEKER 2016, S. 258 f)

Tab. 1 Exemplarisch herausgearbeitete Konkretisierungen für epistemologische Bewusstheit – Anforderungen, Aspekte und Umgangsweisen

Epistemologische Anforderungen innerhalb der didaktischen Kernaufgaben	
…bezogen auf die Natur mathematischen Wissens und Spezifika mathematischer Praktiken:	**…bezogen auf Prozesse der Wissensbildung:**
• Mathematisches Potential in Äußerungen der Lernenden identifizieren	• Zugänge eröffnen
• logischen Status mathematischer Wissenselemente klären	• Perspektiven der Lernenden in Richtung der mathematischen Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren weiterentwickeln
• Spezifika mathematischer Praktiken vermitteln	• langfristige Lernprozesse im Blick behalten, dabei Stufen der Wissensbildung identifizieren, arrangieren und die nächste Stufe forcieren
• Wissenselemente zueinander in Beziehung setzen (lokal ordnen, Phänomene/Zusammenhänge in anderen Kontexten wieder entdecken)	
• Verschiedene Niveaus des mathematischen Diskurses adressieren	
• …	• …
Exemplarisch herausgearbeitete epistemologische Aspekte	
…bezogen auf die Natur mathematischen Wissens und Spezifika mathematischer Praktiken:	**…bezogen auf Prozesse der Wissensbildung:**
• Mathematisches Wissen kann in unterschiedlichen Kontexten und (auch unfertigen, intuitiven) Äußerungsformen auftauchen	• Nicht alle Situationen/Probleme eignen sich gleichermaßen, um daraus Begriffe und Verfahren zu entwickeln
• In der Mathematik sind begründbares Wissen und gesetzte Vereinbarungen klar trennbar	
• Es gibt spezifische mathematische Praktiken, die sich von denen aus anderen Bereichen (andere Fächer oder Alltagspraktiken) unterscheiden und mit denen sie dennoch Gemeinsamkeiten haben	• Der Übergang von der Vorschau der Lernenden zur Rückschau der fertigen Mathematik erfordert jeweils auszuweisende Perspektivwechsel
• Es gibt Analogien und Hierarchien zwischen Begriffsbildungen	
• Man kann Zusammenhänge eines mathematischen Gebietes mit den begrifflichen Mitteln einer anderen mathematischen Theorie strukturieren und deuten	• Auch nur partiell richtige Äußerungen der Lernenden können richtige bzw. entwicklungsfähige Ideen enthalten
• Es gibt verschiedene Niveaus des mathematischen Diskurses	
• Inhaltliche Vorstellungen und die dazu gehörigen abstrakten Begriffe dienen unterschiedlichen Zwecken, inhaltliche Vorstellungen haben eine große Relevanz für den Verstehensaufbau, aber dennoch auch eine begrenzte Reichweite	• Ein längerfristiger Wissensaufbau erfolgt stets im Spannungsfeld zwischen Anknüpfen an Bekanntem und Vordringen in neue Bereiche, daher ist das Spiralprinzip lernförderlich • Wissensbestände verändern sich im jeweiligen Lernkontext, wenn neue Stufen der Wissensbildung erreicht werden
• …	• …

Tab. 1 (Fortsetzung)

Weisen des Umgangs mit epistemologischen Aspekten	
Epistemologische Aspekte…	Beispiele
• ... kennen (als Hintergrundwissen) und reflektieren	• Kenntnis verschiedener Darstellungsebenen für einen Sachverhalt und Wissen um die jeweilige Reichweite • Kenntnis von Niveaustufen des Diskurses
• … in didaktischen Handlungssituationen als relevant wahrnehmen	• Sensibilität zum Identifizieren einer Schüleräußerung als intuitive Form eines tiefliegenden mathematischen Wissens
• … in didaktischen Handlungssituationen explizit machen	• Ausweisen der konkreten Unterschiede zwischen Vorschau- und Rückschau-Perspektive • Kritische Reflektion der Reichweite von inhaltlichen Vorstellungen für unterschiedliche Zwecke
• … als Grundlage für Handlungsentscheidungen nutzen	• Weiterarbeit mit den von Lernenden in Vorschauperspektive geäußerten Vorstellungen hin zur Mathematik • Auffinden und Konstruieren von passenden Situationen aus dem Umfeld der Lernenden, die zur Entwicklung von Begriffen und Verfahren führen

Anhang B – Demonstrationsaufgabe Stetigkeit (ABLEITINGER 2013, S. 24-27)

Kopiervorlage 2.1

(eingesetzt in Analysis 2)

DEMONSTRATIONSAUFGABE „Stetigkeit"

AUFGABE:

Kann die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *im Punkt* $(0,0)$ *stetig fortgesetzt werden?*

Aufgabenbearbeitung: Falls man f stetig in $(0,0)$ fortsetzen könnte, müsste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

gelten für ein geeignet gewähltes $f(0,0)$. Das soll etwas salopp formuliert bedeuten: „Egal entlang welches Nullfolgenpaares (x_n, y_n) man den Grenzübergang Richtung $(0,0)$ ausführt, die zugehörigen Folgen der Funktionswerte müssen alle gegen denselben Wert konvergieren."

Was ist denn eigentlich zu tun in dieser Aufgabe? Zunächst machen wir uns bewusst, dass die Funktion f in allen Punkten von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist. Uns interessiert nun der Punkt $(0,0)$. Kann man dort die Funktion so definieren, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ wird? Wenn ja, welchen Wert müsste die Funktion dort haben? Wenn nein, wie lässt sich das begründen?

Warum ist die Aufgabe nicht trivial zu lösen? Die naheliegendste Handlungsoption wäre hier wohl zu versuchen, den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

einfach durch Einsetzen von $x=0$ und $y=0$ in den Funktionsterm zu berechnen. Das klappt aber nicht. Nachdem sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruches

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{mit } (x,y)\to(0,0)$$

gegen Null konvergiert, können wir von vornherein nichts über diesen Grenzwert sagen. Für eine Funktion in einer Variablen würden wir in einer solchen Situation die Regeln von de l'Hôpital anwenden. Leider gibt es für Funktionen in mehreren Variablen aber keine Regeln von de l'Hôpital mehr.

Merkregel für Aufgaben dieser Art: Solche Funktionengrenzwerte sind deshalb schwer zu berechnen, weil man zwei Variablen gleichzeitig gegen Null laufen lassen muss[6] – in unserem Fall nämlich x und y. Ziel ist es bei solchen Aufgaben in der Regel, die Berechnung des Grenzwertes auf eine gewöhnliche Grenzwertberechnung mit nur einer Variablen zurückzuführen. Diese sind meist einfacher durchzuführen. Wir werden auf diese Merkregel in der Folge aufmerksam machen.

Wie weist man nach, ob eine Funktion stetig fortsetzbar ist oder nicht? Dazu gibt es entsprechende Strategien:

1. Entweder man findet zwei Nullfolgenpaare $\{(x_n, y_n)\}$ und $\{(u_n, v_n)\}$, entlang derer die entsprechenden Grenzwerte der Folgen der Funktionswerte zwei unterschiedliche Werte annehmen. Dann ist f nicht stetig fortsetzbar.

2. Oder man findet eben keine zwei solchen Folgenpaare. Dann muss man allgemein **beweisen, dass der Grenzwert der Folge der Funktionswerte entlang jedes beliebigen** Nullfolgenpaares $\{(x_n, y_n)\}$ derselbe ist. Dann ist f stetig fortsetzbar und man definiert

$$f(0,0) := \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Zurück zur Aufgabe: Wir versuchen, die erste der beiden genannten Handlungsoptionen zu verfolgen. Gelingt es uns nicht, zwei solche Nullfolgenpaare zu finden, so müssen wir eben auf die zweite Handlungsoption umschwenken.

Wahl des ersten Folgenpaares: Die Wahl des ersten Nullfolgenpaares fällt leicht – wir können ein möglichst einfaches nehmen und in den Funktionsterm einsetzen: Wähle z. B.

$$\{(x_n, y_n)\} := \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Dieses Folgenpaar nähert sich dem Punkt $(0,0)$ in der x-y-Ebene entlang der y-Achse (siehe Abb. 2.1, links). Sehen wir uns den zugehörigen Grenzwert der Folge der Funktionswerte an:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f(0, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

[6]Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Grenzwertberechnung mit nur einer Variablen. Während wir uns dort einer Stelle nur von rechts bzw. links nähern können, haben wir im Zweidimensionalen viel mehr Möglichkeiten. Wir können uns einem Punkt entlang von Geraden, Parabeln, Spiralen usw. annähern, was die Sache komplexer macht (Ableitinger 2013, S. 25).

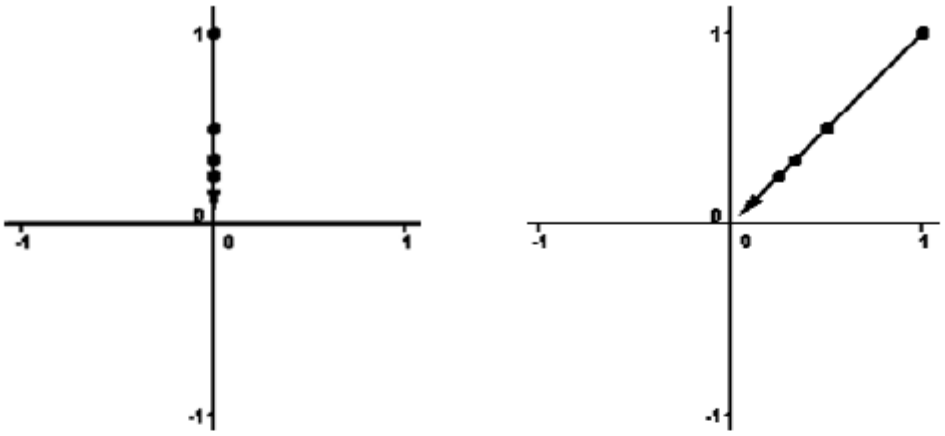


Abb. 2.1 Annäherung an $(0,0)$ entlang der y-Achse (links) und entlang der Geraden $y=x$ (rechts)

Wir haben hier also praktischerweise ein Folgenpaar gewählt, bei dem der Nenner des Bruchs ungleich Null, der Zähler aber Null für jedes Folgenglied ist. Man müsste also demnach $f(0,0):=0$ definieren. Beachten Sie außerdem, dass wir der oben formulierten Merkregel genüge getan haben, indem wir die Grenzwertberechnung auf nur eine Variable n zurückgeführt haben. Der Grenzwert war dann einfacher auszuwerten.

Wahl des zweiten Folgenpaares: Unser Ziel muss es jetzt sein, ein Nullfolgenpaar zu finden, entlang dem die Folge der Funktionswerte einen anderen Grenzwert als Null hat. Diese Suche ist im Allgemeinen nicht einfach. Würde man z. B. das Folgenpaar

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}$$

nehmen, das sich dem Punkt $(0,0)$ entlang der x-Achse nähert, so würde dabei ebenfalls der Grenzwert Null herauskommen[7] (was wegen der Symmetrie des Funktionsterms allerdings klar ist). Wir müssen also ein anderes Nullfolgenpaar finden. Es wäre z. B. zielführend, wenn wir nach dem Einsetzen der Folgen in den Funktionsterm erreichen könnten, dass sich die Variable n wegkürzen lässt. Denn dann stünden in Zähler und Nenner des Bruches von Null verschiedene Zahlen und wir wären fertig.

[7]Auch bei etwas komplizierteren Nullfolgenpaaren kann man als Grenzwert der entsprechenden Folge der Funktionswerte den Wert Null erhalten, z. B. beim Nullfolgenpaar $\left\{\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)\right\}$ (Ableitinger 2013, S. 26).

Ausnutzen der Struktur des Funktionsterms von f: Im Zähler steht das Produkt aus x und y, im Nenner die Summe aus x^2 und y^2. Wenn wir also etwa das Folgenpaar

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$$

wählen, dann hat n (nach kleinen Umformungen) im Zähler und Nenner denselben Exponenten und wir können kürzen:

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

Entlang des Paars

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$$

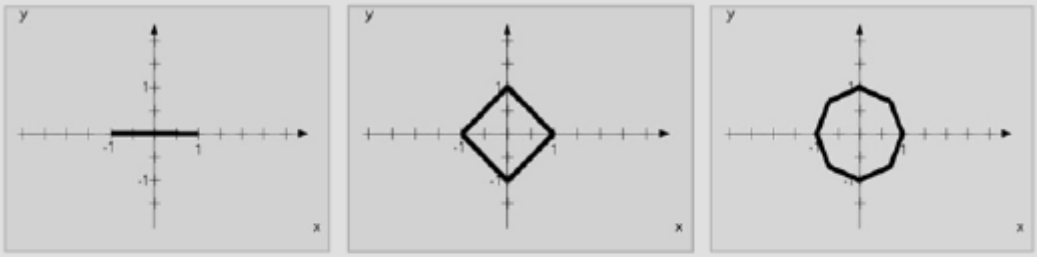
(das sich dem Punkt $(0,0)$ entlang der Winkelhalbierenden nähert, siehe Abb. 2.1, rechts) hat also f jeweils den Funktionswert $\frac{1}{2}$ und damit gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Hier müssten wir also $f(0,0):=\frac{1}{2}$ definieren, um eine Chance auf Stetigkeit zu haben. Das steht aber im Widerspruch zu der Wahl von $f(0,0)=0$ vorher. Die Funktion f lässt sich also nicht stetig fortsetzen.

Anhang C – Einsetzen von Heuristiken (BIKNER-AHSBAHS und SCHÄFER 2013, S. 67)

Im Folgenden sind mit Drehungen immer Drehungen um den Ursprung und mit Spiegelungen Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung gemeint.



(1) (2) (3)

a) Welche Drehungen und Spiegelungen führen die Figuren (1), (2) und (3) jeweils in sich über? Wenn man die Drehungen und Spiegelungen nur auf die Ecken anwendet, fallen einige von diesen Abbildungenzusammen. Welche?

b) Für jede der Figuren (1), (2) und (3) bilde man aus den in a) gefundenen Drehungen und Spiegelungen je eine Menge. Man beschreibe diese Mengen in ihrer Struktur. Wie viele Elemente haben sie jeweils? Wie sähe die Menge bei einem entsprechenden regelmäßigen Dreieck oder Sechseck aus?

c) Sind diese Mengen jeweils Gruppen, wenn man die Hintereinanderausführung als Verknüpfung nimmt? Falls nicht, was müsste man hinzunehmen oder weglassen?

d) Man betrachte die einzelnen Elemente der obigen Mengen. Was passiert, wenn man diese mehrfach hintereinander anwendet? Gibt es eine erkennbare Struktur der Ergebnisse?

Anhang D – Schnittstellenaufgabe (Bauer und Partheil 2013, S. 55)

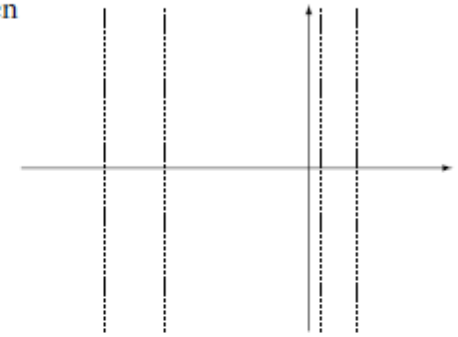
AUFGABE 3.1: Funktionen qualitativ verstehen

a) Funktionsverlauf gesucht. Von einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Folgendes bekannt:

(i) Die Ableitung f' ist negativ im Intervall $]-3, 1[$ und sie ist positiv außerhalb von $[-3, 1]$.

(ii) Die zweite Ableitung f'' ist negativ im Intervall $]-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}[$ und sie ist positiv außerhalb von $[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}]$.

Fertigen Sie eine Skizze an, die einen möglichen Verlauf des Graphen G_f im Intervall $[-6, 3]$ wiedergibt. Markieren Sie dabei die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.



b) Geht es immer? Die Vorgaben im vorigen Aufgabenteil legen insbesondere zwei Nullstellen von f' und zwei Nullstellen von f'' fest. Es liegt die Frage nahe, ob überhaupt zu beliebigen solchen Nullstellen-Vorgaben immer eine „passende" Funktion existiert. Als Beispiel: Klären Sie, ob es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben kann, bei der

- f' genau in den Punkten -3 und $-2-\sqrt{5}$ Nullstellen hat und
- f'' genau in den Punkten 1 und $2+\sqrt{5}$ Nullstellen hat.

Tipp: Stellen Sie zunächst ein paar Versuche an, eine solche Funktion zu skizzieren, um ein Gefühl für die Antwort zu entwickeln. Welcher zentrale Satz der Analysis lässt sich einsetzen, um die auf diese Weise gewonnene geometrische Vorstellung mit einem stichhaltigen Argument zu untermauern?

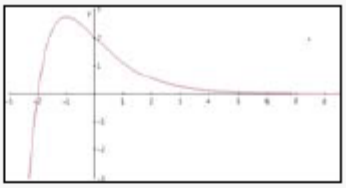
c) Realisierbarkeit in bestimmten Funktionsklassen. Wir kommen zurück zu der in (a) beschriebenen Situation. Nehmen wir also an, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe die in (i) und (ii) beschriebenen Eigenschaften.

- Kann f eine quadratische Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (für geeignete $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$) oder eine kubische Funktion $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ (für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$) sein?
- Kann f eine Funktion der Form $x \mapsto (x^2 + c)e^x$ sein (für geeignetes $c \in \mathbb{R}$)?
- *Zum Weiterarbeiten:* Kann f eine Polynomfunktion sein? (Beginnen Sie damit, die Situation bei Polynomen vom Grad 4 zu untersuchen.)

Anhang E – Evaluationsaufgabe (LEUFER und PREDIGER 2006, S. 8)

3. Beispiel. Evaluationsaufgabe

Folgende Aufgabe wurde zum Beginn der 13. Klasse (Mathematik Grundkurs) eines Gymnasiums in Bremen als Hausaufgabe gestellt:



Aufgabe: Gegeben ist die reelle Funktion f durch $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

a.) Untersuchen Sie die Funktion f und ihr Schaubild K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichen Sie K für x-Werte im Bereich -3 bis 5.

b.) Welche Vermutung ergibt sich aus den ersten vier Ableitungen von f für eine Stammfunktion F von f? Weisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch nach.

Die Kurve K, die Gerade x = -1 und die x-Achse rechts von dieser Geraden schließen eine Fläche ein. Wie groß ist diese?

Pia, eine Schülerin des 13. Jahrgangs, löste den Aufgabenteil a) ohne Probleme und stockt plötzlich bei b):

Wenn ich da rechts gegen unendlich gehe, dann kommt doch zu der Fläche immer was dazu. Die wird also immer größer – wie soll ich denn da einen Wert angeben? Das wird doch dann ... unendlich! Weil da immer was dazu kommt!

Arbeitsaufträge:

- Analysieren Sie, welches Problem Pia hat.
  Beleuchten Sie dabei den mathematischen Hintergrund des Problems.
- Beschreiben Sie ausführlich, wie Sie Pia im individuellen Gespräch die Aufgabe erklären könnten. Wie würden Sie dabei vorgehen und warum?
  Führen Sie auch Beispiele auf, die Sie benutzen würden, um das Problem zu klären!