



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Elliptische Randwertprobleme:
Finite-Differenzen-Methode (FDM),
Finite-Elemente-Methode (FEM)“

verfasst von / submitted by
Markus Schwaha-Schmid

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for
the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 884 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Informatik und Informatik-
management, UF Mathematik UniStG

Betreut von / Supervisor:

Priv.-Doz. Dr.(USA) Maria Charina

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundlagen der Elektrostatik	4
2.1	Historische Entwicklung	5
2.2	Elektrische Ladung	6
2.3	Elektrischer Strom	7
2.4	Elektrisches Feld	7
2.5	Permittivität (Materialgleichung)	10
2.6	Elektrostatisches Potential, Poissongleichung	12
2.7	Elektrische Spannung	14
2.8	Eindimensionale Problemstellung	15
3	Elliptische Randwertprobleme	16
3.1	Differenzialgleichung: Klassifikation	16
3.2	Randwerte	19
3.2.1	Dirichlet-Problem	19
3.2.2	Neumann-Problem	20
3.3	Korrekt gestellte Probleme	20
4	Eindimensionales elliptisches Randwertproblem: elektrostatisches Potential	22
4.1	Eigenschaften des Randwertproblems	23
4.2	Analytische Lösung	24
4.3	Methode der finiten Differenzen	26
4.3.1	Diskretisierung des Gebietes	26
4.3.2	Differenzengleichung	27
4.3.3	Lineares Gleichungssystem	28
4.3.4	Approximation der kontinuierlichen Lösung	31
4.3.5	Diskretisierungsfehleranalyse	31
4.4	Methode der finiten Elemente	35
4.4.1	Schwache Formulierung	36
4.4.2	Zerlegung in Teilgebiete, Galerkin-Methode	38
4.4.3	Basisfunktionen	40
4.4.4	Aufstellen des Gleichungssystems	42
4.4.5	Approximation der kontinuierlichen Lösung	45
4.4.6	Diskretisierungsfehleranalyse	48
5	Implementierung	49
5.1	Methode der finiten Differenzen	49
A	Mathematische Modelle	50
A.1	Skalar- und Vektorfeld	50
A.2	Gradient	51
A.3	Divergenz	51
A.4	Rotation	52

A.5	Konservatives Feld	52
B	Physikalische Modelle	53
B.1	Maxwell-Gleichungen	53
B.2	Gravitationsfeld	56

1 Einführung

Diese Arbeit soll eine Einführung in zwei numerische Lösungsmethoden für Randwertprobleme, die Finite-Differenzen Methode (FDM) und die Finite-Elemente Methode (FEM), geben. Um diese zu illustrieren werden zwei physikalische Beispiele verwendet. Die physikalische Anwendung wurde gewählt, da sehr viele physikalische Vorgänge über Differentialgleichungen modelliert werden. Bei den häufigsten zeitunabhängigen Problemen handelt es sich um Randwertprobleme mit Dirichlet-Randwertbedingungen beziehungsweise Neuman-Randwertbedingungen. Typische Beispiele sind die stationäre Temperaturverteilung, das elektrostatische Potential oder das Gravitationspotential.

Kapitel 2 geht auf die physikalischen Grundlagen des elektrostatischen Potentials ein. Zu Beginn wird die historische Entwicklung der Elektrostatik kurz erläutert und dann auf die physikalischen Grundlagen und Grundbegriffe eingegangen. Im Anschluss wird die Poisson-Gleichung für das elektrostatische Potential hergeleitet. Am Ende des Kapitels werden die physikalischen Problemstellungen vorgestellt.

Kapitel 3 geht mathematisch auf die Randwertprobleme ein. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über elliptische partielle Differentialgleichungen. Im Speziellen werden der Laplace-Operator und die Poisson-Gleichung behandelt. Im Anschluss wird auf die Dirichlet- und Neumann-Randwertbedingungen eingegangen. Am Ende des Kapitels wird aufgezeigt, wann ein Randwertproblem ein korrekt gestelltes Problem ist.

Die mathematischen Grundlagen der FEM und FDM sind in Kapitel 4 zu finden. Um einen Überblick zu schaffen, wird ein eindimensionales Beispiel behandelt, das auch leicht analytisch lösbar ist. Nach der Ermittlung der analytischen Lösung wird zuerst die FDM behandelt. Diese Methode beinhaltet die Transformation des ursprünglichen Problems in ein diskretes mittels Differenzgleichungen. Weiters wird der Fehler, der durch diese Diskretisierung entsteht, beleuchtet, und auf die Eindeutigkeit der approximierten Lösung eingegangen. Nach der FDM werden die mathematischen Grundlagen der FEM behandelt. Dies beinhaltet die schwache Formulierung der Differentialgleichung, der Diskretisierung mittels finiter Elemente, der Basisfunktion und erneut eine Fehlerabschätzung und Eindeutigkeit der Lösung.

In Kapitel 5 findet sich eine Möglichkeit der Implementierung der physikalischen Beispiele aus Kapitel 4 mittels GNU Octave.

2 Grundlagen der Elektrostatik

Als Anwendungsbeispiel in Kapitel 4 dient das elektrostatische Potential (Kapitel 2.6). Zum Zwecke der Illustration wird in Kapitel 2 auf die physikalischen Hintergründe der Elektrostatik eingegangen. Weitere mögliche Beispiele aus der Physik können Anhang (B) entnommen werden. Die in dieser Arbeit behandelten physikalischen Grundlagen sind auf das Nötigste reduziert. Weitere und ausführlichere Informationen können der Literatur [2], [3], und [5] entnommen werden. [2] enthält physikalische Grundlagen und die Elektrostatik. [3] beschäftigt sich mit Elektromagnetismus und beinhaltet auch die mathematischen Werkzeuge für die Feldtheorie, wie zum Beispiel Tensoren, Koordinatensysteme und Differenzialoperatoren. [5] beinhaltet einen sehr umfangreichen Überblick über physikalische Modelle unterschiedlicher Werkstoffe, wie zum Beispiel Metalle, Halbleiter oder Isolatoren.

Nach unserem heutigen Verständnis sind elektrische und magnetische Erscheinungen zwei Aspekte des elektromagnetischen Feldes. Das Wechselspiel dieser beiden physikalischen Phänomene wird durch die Theorie der Elektrodynamik, basierend auf den Maxwell-Gleichungen (siehe Anhang B.1), beschrieben. Die Ursache sind positive und negative elektrische Ladungen (2.2). Positive Ladungen bilden die Quellen und negative Ladungen die Senken von elektrischen Feldern (2.4). Werden Ladungen bewegt, spricht man von einem elektrischen Strom (2.3) und es kommt zur Ausbildung von magnetischen Feldern. Konstante Magnetfelder wirken selbst eine Kraft auf bewegte Ladung aus. Ein sich änderndes Magnetfeld wirkt wiederum eine Kraft auf statische elektrische Ladungen aus und ruft elektrische Ströme in elektrischen Leitern hervor. Kapitel 2.1 gibt einen kurzen Überblick über die historische Entwicklung der Elektrodynamik.

Befinden sich alle Ladungen in Ruhe spricht man von der **Elektrostatik** einem Spezialfall der Elektrodynamik. Bei dieser handelt es sich um keinen dynamischen Prozess mehr und magnetische Erscheinungen treten nicht auf. Ein sehr ähnliches Modell ist die **Quasi-Elektrostatik** bzw. das dominant elektrische Feld. Es treten zeitliche Ladungsänderungen (elektrische Ströme) auf jedoch sind die magnetischen Erscheinungen von so geringem Ausmaß, dass man diese vernachlässigen kann. Die folgenden Kapitel dieser Arbeit beschränken sich auf die Elektrostatik.

Anwendung findet die Elektrostatik z.B. in folgenden Bereichen

- elektrostatische Aufladung
- Gewitterwolken
- elektrostatisches Feld der Erde

- elektrische Felder von Kondensatoren

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die verwendeten physikalischen Größen, ihre Abkürzungen und Einheiten.

Physikalische Größe	Bezeichnung	Einheit
elektrische Ladung	Q	Coulomb (C)
Ladungsdichte	ρ	Coulomb pro Kubikmeter ($\frac{C}{m^3}$)
elektrische Stromstärke	I	Ampere (A)
Kraft	\vec{F}	Newton (N)
elektrische Feldstärke	\vec{E}	Newton pro Coulomb ($\frac{N}{C}$)
elektrische Flussdichte	\vec{D}	Coulomb pro Quadratmeter ($\frac{C}{m^2}$)
elektrisches Potential	φ	Volt (V)
elektrische Spannung	U	Volt (V)
Linienladungsdichte	λ	Coulomb pro Meter ($\frac{C}{m}$)
Länge	x	Meter (m)
Fläche	A	Quadratmeter (m^2)
Volumen	V	Kubikmeter (m^3)
elektr. Feldkonstante	ϵ_0	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$

2.1 Historische Entwicklung

Elektrische und magnetische Erscheinungen sind dem Menschen schon lange bekannt. Besonders der Magnetismus wurde schon in der Antike beschrieben und z.B. in der Konstruktion des Kompasses als Navigationsinstrument genutzt. Aber auch das elektrische Naturphänomen des Blitzes bei Gewittern war bekannt. Außerdem hatte man bereits beobachtet, dass Materialien, wie Bernstein, die man zuvor an einem Tuch gerieben hatte, andere leichte Gegenstände, wie Haare, anziehen. Dieses Phänomen lässt sich sehr einfach rekonstruieren, indem man einen Luftballon an z.B. einem Kleidungsstück reibt und dieser dann an einem selbst haften bleibt oder Papierschnipsel anzieht.

Eine systematische Untersuchung dieser Phänomene fand jedoch erst relativ spät im Mittelalter statt. Erste solche Beschreibungen elektrischer Kräfte wurden durch William Gilbert (1544-1603), einem englischen Arzt, an den oben erwähnten durch Reibungen anziehenden Körpern durchgeführt. Er bezeichnete diese Anziehungskraft "elektrisch", nach dem griechischen Wort elektron für Bernstein, und prägte damit die heute gängige Bezeichnung der Elektrizität.

Im 17. und 18. Jahrhundert kam es zu einem verstärkten Interesse an der Elektrostatik. 1729 teilte Stephan Gray erstmals unterschiedliche Materialien in elektrische

Isolatoren und Leiter ein. 1733 wurden von Cisternay Dufay auch abstoßende elektrische Kräfte beobachtet und veröffentlicht. Durch diese Beobachtungen und weitere Experimente kam Benjamin Franklin auf die Erkenntnis von zwei unterschiedlichen Arten von Elektrizität und benannte sie 1778 nach einem Vorschlag von Georg Christoph Lichtenberg mit Plus + und Minus -. Diese Bezeichnung hat sich bis zum heutigen Tage durchgesetzt, man spricht heute noch von positiven und negativen Ladungen. Weiters formulierte Franklin ein Gesetz zur Erhaltung der Ladung und erkannte die Beziehung zwischen elektrostatischen Entladungen und Blitzen. Diese Erkenntnis führte zur Erfindung des Blitzableiters. Das allgemeine Verständnis der Elektrostatik wurde 1785 weitestgehend von Charles-Augustin de Coulomb durch ein mathematisch ausformuliertes Kraftgesetz, dem Coulomb-Gesetz, geprägt. Dieses Gesetz ist in seiner Form dem Gravitationsgesetz sehr ähnlich und ermöglicht die Berechnung von Anziehungskräften zwischen elektrischen Ladungen.

Die ersten belegten Experimente zu strömender Elektrizität fanden ab 1780 statt. Luigi Galvani beobachtete Muskelkontraktionen bei toten Fröschen wenn es bei Hochspannungsmaschinen zu einem Funkenübersprung kam. Durch die Arbeit von Franklin konnte er Muskelzuckungen auch durch Blitze hervorrufen. Er erklärte sich dieses Phänomen durch fließende Ladungen, den elektrischen Strom. Durch diese Entdeckungen war es Alessandro Volta möglich 1800 die erste Batterie, die Volta-Säule, herzustellen. Mit dieser Erfindung stand eine zuverlässige Spannungsquelle zur Verfügung mit der viele weitere Experimente möglich wurden. Ab 1803 kam es zu ersten Beobachtungen die einen Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und Magnetismus herstellten. Ein weiterer Durchbruch gelang Michael Faraday 1831 mit der Entdeckung und Beschreibung der elektromagnetischen Induktion und Einführung des Feldbegriffs. Von dieser Arbeit wurde James Clerk Maxwell sehr beeinflusst und sein Wissen darüber führte 1873 zur Veröffentlichung seines vollständigen mathematischen Modells, den Maxwell-Gleichungen zur Beschreibung elektromagnetischer Felder und Wellen.

2.2 Elektrische Ladung

Alle elektromagnetischen Phänomene basieren auf elektrischen Ladungen und den Kräften die diese hervorrufen. Diese elektrischen Kräfte lassen sich durch das physikalische Modell des elektrischen Feldes beschreiben. Die Quellen und Senken dieses Feldes bilden elektrische Ladungen. Die elektrische Ladung Q ist eine Teilcheneigenschaft und als solche immer an Teilchen (z.B Elektronen oder Protonen) gebunden. Sie wird in Coulomb (C) gemessen. Geladene Teilchen werden auch als **Ladungsträger** bezeichnet. Nach aktuellem Wissensstand ist die Ladung immer ein Vielfaches

der Elementarladung $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ und kann zwei unterschiedliche Zustände (positiv und negativ) annehmen. Die Elementarladung entspricht der Ladung eines Protons ($Q = e$) bzw. eines Elektrons ($Q = -e$). Ähnlich der Dichte eines Körpers (Masse / Volumen) kann anstatt der Ladung Q die elektrische Ladungsdichte ϱ angegeben werden. Diese lässt sich durch den Quotienten der Ladung Q des Körpers durch dessen Volumen V berechnen.

$$\varrho = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

Für weitere Informationen über die elektrische Ladung dient [2, Kapitel 6.1].

2.3 Elektrischer Strom

Werden Ladungsträger bewegt kommt es zu einem elektrischen Strom. Dies ist vergleichbar mit einem Luft- oder Wasserstrom. Bei diesen bewegen sich Luft beziehungsweise Wasser in eine bestimmte Richtung. Bei einem elektrischen Strom bewegen sich Ladungsträger. Das heißt für einen elektrischen Strom sind bewegliche Ladungsträger nötig. Verfügt ein Körper über ausreichend solcher beweglicher Ladungsträger nennt man diesen einen elektrischen Leiter.

Die Intensität eines elektrischen Stromes wird über die elektrische Stromstärke I angegeben. Bei dieser handelt es sich um eine Änderungsrate der elektrischen Ladung Q und sie wird in Ampere angegeben.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

Obwohl es sich beim elektrischen Strom um eine Bewegung von Teilchen handelt wird die Stromstärke nicht als Vektor dargestellt sondern hat nur einen Bezugssinn. Bei diesem wird nur angegeben ob sich die Ladungsträger durch eine Fläche von links nach rechts oder von rechts nach links bewegen.

Für weitere Informationen über den elektrischen Strom dient [2, Kapitel 6.2].

2.4 Elektrisches Feld

Unterschiedliche Ladungen ziehen sich an und gleiche Ladungen stoßen sich ab. Mit welcher Kraft \vec{F} dies geschieht ist abhängig von der Stärke der Ladungen und deren Abstand r . Berechnet werden kann die Kraft zwischen Ladungsträgern durch das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_e \quad (3)$$

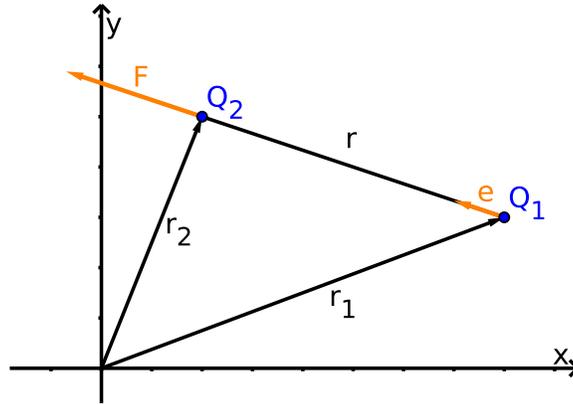


Abbildung 1: Coulomb Kraft

In Abbildung 1 sind zwei Ladungsträger mit den Ladungen Q_1 und Q_2 dargestellt. Der Vektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist ein vom Bezugspunkt abhängiger Vektor zwischen den Ladungen. $r = |\vec{r}|$ ist der Abstand zwischen diesen Ladungsträgern und $\vec{r}_e = \frac{1}{r} \cdot \vec{r}$ ist der Einheitsvektor entlang des Vektors \vec{r} . Es handelt sich dabei um eine idealisiertes Modell. Die Größe der Ladungsträger ist klein im Vergleich zum Abstand r (zwischen den Punktladungen) und der Raum ist bis auf die Ladungsträger leer. Die im Vorfaktor vorkommende Konstante $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$ ist die elektrische Feldkonstante (siehe 2.5).

Um diesen Sachverhalt besser zu beschreiben, hat man das physikalische Modell des elektrischen Feldes eingeführt. Zwei wesentliche Größen sind die elektrische Feldstärke \vec{E} und die elektrische Flussdichte \vec{D} . Nach diesem Modell wird jede Ladung von einem Kraftfeld umgeben ohne dass ein zweiter Ladungsträger vorhanden sein muss. Ein ähnliches Modell gilt auch für das Gravitationsfeld von Massen das ein massenbezogenes Kraftfeld ist. Für jede Ladungsverteilung kann ein elektrisches Feld berechnet werden und somit jedem Ort eine Feldstärke und eine Flussdichte zugeordnet werden. Dieses Feld für sich ist jedoch wirkungslos und erst durch die Anwesenheit weiterer Ladungen kommt es zum Auftreten von Kräften. Diese können abhängig von der Ladung anziehend oder abstoßend sein.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist die ladungsbezogene Kraft die eine Ladung auf den umgebenden Raum ausübt.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (4)$$

Sie dient als lokales Maß der Intensität eines elektrischen Feldes. Je größer der Betrag der Feldstärke $|\vec{E}|$ ist desto größer ist auch die Kraft die auf eine Ladung wirken

würde. Die Richtung der Feldstärke entspricht auch der Richtung der Kraft. Ist die elektrische Feldstärke in jedem Punkt des Raumes bekannt, kann man dadurch an jedem Ort die elektrische Kraft, die auf eine elektrische Ladungen wirkt, bestimmen.

Die elektrische Flussdichte \vec{D} ist ein abstraktes Modell. Der elektrische Fluss verhält sich ähnlich wie ein materieller Fluss, wie zum Beispiel Wasser. Dabei geht man davon aus, dass die Kraftübertragung zwischen zwei Ladungen durch den Raum fließt. Wichtig ist, dass es dabei nicht wirklich zu einer Bewegung von Teilchen kommt sondern dieses Modell nur einer mathematischen Beschreibung dient. Da elektrische Ladungen die Ursache der elektrischen Kräfte sind, entspringt der elektrische Fluss positiven Ladungen und endet in negativen Ladungen. Aus dieser Modellvorstellung ergeben sich auch die Bezeichnungen Quellen und Senken für positive und negative Ladungen. Der elektrische Fluss Ψ durch eine geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V , entspricht der Größe der Ladung die sich in diesem Volumen V befindet.

$$\Psi(\partial V) = Q(V)$$

Daraus resultiert, dass eine größere Ladung auch einen größeren elektrischen Fluss bedingt. Die elektrische Flussdichte \vec{D} gibt an wie sich ein elektrischer Fluss Ψ auf eine Fläche A aufteilt. Der elektrische Fluss lässt sich mit

$$\Psi(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{D} \cdot dA$$

aus der elektrischen Flussdichte berechnen, mit \vec{n} einem Einheitsvektor der Normal auf die Fläche A steht.

Mathematisch handelt sich bei der elektrischen Feldstärke und Flussdichte um Vektorfelder (siehe Anhang A.1). Diese Vektorfelder bieten Vorteile in der Handhabung gegenüber der einfachen Ladungsbetrachtung. Jedem Punkt des Raumes wird ein Vektor zugeordnet, der die Richtung und die Stärke des elektrischen Feldes repräsentiert.

Als eine gute Möglichkeit zur Veranschaulichung elektrischer Felder hat sich das Feldlinienbild erwiesen. Feldlinien entspringen positiven Ladungen (Quellen) und enden in negativen Ladungen (Senken). Feldlinien können auch der Unendlichkeit entspringen und dort enden. Elektrische Wirbelfelder (Feldlinien sind in sich geschlossen) haben keine Quellen und Senken und haben ihren Ursprung im Magnetismus. Daher haben sie für die Elektrostatik keine Bedeutung. Aus den Feldlinien lässt sich die Richtung der elektrischen Feldstärke und Flussdichte als Tangentialvektor an die Feldlinie in einem bestimmten Punkt ermitteln.

Bereiche des Raumes die den selben Betrag der elektrischen Feldstärke aufweisen nennt man Äquipotentialflächen beziehungsweise Äquipotentiallinien. Sie sind hilf-

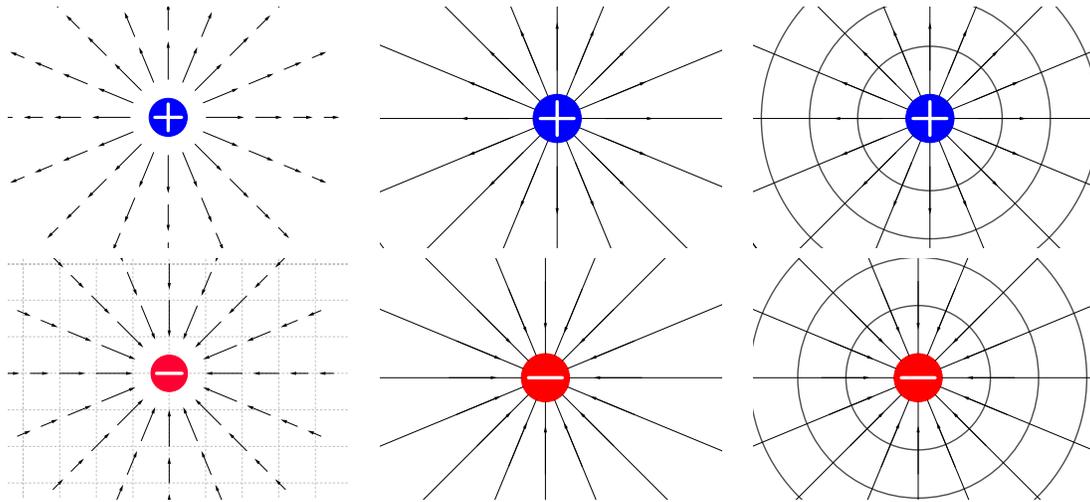


Abbildung 2: Elektrisches Feld einer positiven und negativen Punktladung. Links als Vektorfeld. In der Mitte mit Feldlinien. Rechts mit Äquipotentiallinien.

reich bei der Darstellung von elektrischen Feldern und sind vergleichbar zu Höhenlinien auf kartographischen Darstellungen. Sie stehen immer normal auf die Feldlinien.

Eine mögliche Berechnungsmethode bei bekannter Ladungsverteilung ist das Superpositionsprinzip (siehe [2, Kapitel 13]). Dieses Prinzip basiert auf der Linearität elektrostatischer Felder. Somit lässt sich das gesamte elektrische Feld im Falle einer diskreten Ladungsverteilung als Summe beziehungsweise bei stetigen Ladungsverteilungen als Integral der Felder der einzelnen Ladungen berechnen. [2, Kapitel 13, Seite 227 bis 250] beinhaltet elementare Methoden zur Berechnung elektrischer Felder über die Ladungsverteilung. Kommt es zu einer Änderung der Ladungsverteilung, muss das Feld erneut berechnet werden. In der Elektrostatik kommen nur zeitinvariante elektrische Felder vor. Das heißt die Ladungsverteilung ändert sich nicht mit der Zeit und somit ändert sich auch das elektrische Feld nicht.

Für weitere Informationen über das elektrische Feld dienen [2, Kapitel 9] und [3, Kapitel 2].

2.5 Permittivität (Materialgleichung)

Die Permittivität ϵ beschreibt die Durchlässigkeit elektrisch isolierender Materialien, sogenannter Dielektrika, für elektrische Felder. Es handelt sich bei den Permittivität somit um eine Materialeigenschaft. Das elektrische Feld wirkt auf diese Dielektrika ein und können das elektrische Feld wiederum stärken oder abschwächen. Dies kann

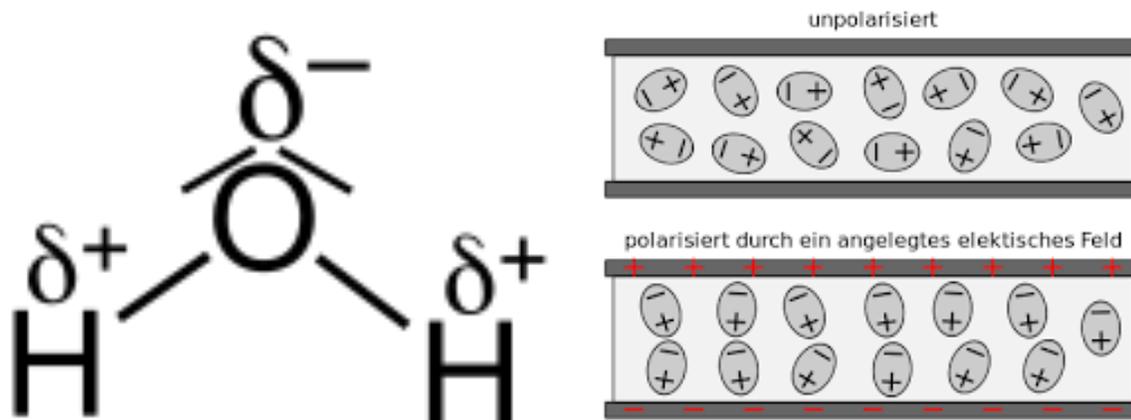


Abbildung 3: Wassermolekül (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:H2O_Polarization_V.2.svg?uselang=de) und Polarisation von Dipolen durch ein elektrisches Feld (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole_im_elektrischen_Feld.svg)

zum Beispiel durch Polarisation geschehen. Dabei werden sogenannte elektrische Dipole in Richtung des elektrischen Feldes ausgerichtet und verstärken somit das Feld. Dipole sind für sich ungeladen jedoch ist eine Ende leicht negativ geladen und das andere Ende positiv. Ein Beispiel für einen Dipol ist das Wassermolekül. Durch die geometrische Anordnung der Wasserstoffatome an das Sauerstoffatom wird die Seite der Wasserstoffatome leicht positiv und die Seite des Sauerstoffatoms leicht negativ. In Abbildung 3 ist ein Wassermolekül und eine Ausrichtung der Dipole dargestellt. Die Permittivität ε modelliert dieses Phänomen und ist das Produkt der elektrischen Feldkonstante ε_0 und der relativen Permittivität ε_r

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad (5)$$

Die elektrische Feldkonstante ist, wie schon im Namen ersichtlich, eine physikalische Konstante mit

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2} \quad (6)$$

und wird auch als Permittivität des leeren Raums bezeichnet. Sie ist ein wichtiger Faktor im Coulomb-Gesetz (3) und ist weiters der Proportionalitätsfaktor zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der elektrischen Flussdichte \vec{D} des Vakuums.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (7)$$

Ein Dielektrikum mit einer von der Richtung unabhängigen relativen Permittivität ε_r nennt man isotrop. Die Permittivität solcher isotroper Dielektrika ist durch $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ eine skalare Größe und man erhält die Materialgleichung

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (8)$$

die einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss, der elektrischen Feldstärke und dem physikalischen Körper in dem sich das elektrische Feld befindet herstellt. Für nicht isotrope Dielektrika wird ε_r zu einem Tensor zweiter Stufe um die Richtungsabhängigkeit zu modellieren. Unter anderem ist die relative Permittivität auch von Temperatur, Druck und dem elektrischen Feld selbst abhängig. In dieser Arbeit gehen wir nur von isotropen Körpern aus womit sich ε_r zu einem Skalar vereinfacht und die Materialgleichung (8) gilt. Einige Werte für relative Permittivität können der folgenden Tabelle entnommen werden. Diese gelten bei 20°C und Normaldruck.

Stoff	ε_r
Vakuum	1
Luft	1,00059
Benzol	2,3
Wasser	81
Eis (bei 0°C)	3
Papier	1,8 - 2,6

Für weitere Informationen über die Permittivität und der Wechselwirkung elektrischer Felder mit Materie dienen [2, Kapitel 9.4], [3, Kapitel 2.1 Verknüpfungsbeziehungen] und [5, Kapitel 13].

2.6 Elektrostatisches Potential, Poissongleichung

Das elektrostatische Potential φ ist ein Modell der Elektrostatik und wurde von Simeon-Denis Poisson (1781 - 1840) geprägt (siehe [3, Seite 2]). Es ist eine Kenngröße eines zeitinvarianten elektrischen Feldes. Mathematisch wird es durch ein Skalarfeld (siehe Anhang A.1) beschrieben. Dadurch wird jedem Punkt des Raums ein bestimmter Wert zugeordnet

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (9)$$

Die elektrische Feldstärke entspricht dem Gradienten dieses Potentials $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$ (definiert in Anhang A.2). Dies gilt jedoch nur in der Elektrostatik (oder Quasi-Elektrosatik). Allgemein ist dies nicht gültig und das elektrische Feld kann nicht über

ein Gradientenfeld beschrieben werden. Das elektrostatische Potential erleichtert die Lösung vieler elektrostatischer Aufgaben, da ein Skalarfeld einfacher handhabbar ist als ein Vektorfeld.

Aus der lokalen Form des elektrischen Hüllenflusses (97d), der Materialgleichung (8) und den Bedingungen der Elektrostatik lässt sich für das Potential φ die **Poisson-Gleichung** (11) herleiten.

Der Ansatz der Herleitung bildet der elektrische Hüllenfluss 97d mit der Divergenz $\vec{\nabla}$ (definiert in Anhang A.3)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho.$$

Man ersetzt die elektrische Flussdichte \vec{D} mittels der Materialgleichung

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

und erhält

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} = \rho.$$

Da wir von einem linearen, homogenen und isotropen Dielektrikum ausgehen kann die Gleichung durch Permittivität $\varepsilon \neq 0$ dividiert werden und man erhält

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Durch die Bedingungen der Elektrostatik ist die elektrische Feldstärke ein Gradientenfeld des elektrostatischen Potentials mit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Man erhält durch Einsetzen

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Mit dem sogenannten Laplace-Operator

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10)$$

erhält man die Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11)$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichung lässt sich das elektrostatische Potential bestimmen. Die zugehörige homogene Gleichung, die verwendet wird falls keine Ladungen ($\rho = 0$) vorhanden sind, ist die **Laplace-Gleichung** (12)

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (12)$$

Die Poisson-Gleichung ist eine elliptische partielle Differentialgleichung. Um eine eindeutige Lösung von (11) zu erhalten muss daher das elektrostatische Potential am Rand des physikalischen Körpers (mathematisch dem Rand des Definitionsbereichs) bekannt sein. Die Grundlagen von Randwertprobleme werden in Kapitel 3 behandelt.

Für weitere Informationen über das elektrostatische Potential und die Poisson-Gleichung dienen [2, Kapitel 9.1] und [3, Kapitel 3.1].

2.7 Elektrische Spannung

Neben der elektrischen Stromstärke ist die elektrische Spannung eine der physikalischen Größen der Elektrodynamik die auch im Alltag gebräuchlich ist. Dieser Abschnitt soll den Zusammenhang zwischen der elektrischen Spannung und dem elektrischen Feld herstellen.

Unter der elektrischen Spannung U versteht man ladungsbezogene Arbeit, die nötig ist um eine Ladung entlang einer bestimmten Kurve zu bewegen beziehungsweise wie viel Arbeit man bereits aufwenden musste um die Ladung bewegt zu haben. Man denke an positive und negative Ladungen. Diese ziehen sich an und man muss Energie aufwenden um diese zu trennen. Je größer die Ladungen sind desto stärker ist die Anziehungskraft, daher ist auch mehr Energie für eine Trennung notwendig. Da nach dem geltenden physikalischen Verständnis Energie nie verloren geht sondern nur in andere Energieformen umgewandelt werden kann, geht die zur Trennung der Ladung aufgewandte Energie auch nicht verloren. Spannung ist die treibende Kraft hinter dem elektrischen Strom.

Die elektrische Feldstärke kann man als den lokalen Repräsentanten der elektrischen Spannung auffassen. Ist die elektrische Feldstärke in jeden Punkt bekannt, kann man die Spannung entlang jeder beliebigen Kurve S ermitteln.

$$U = \int_S \vec{s} \cdot \vec{E} \cdot ds \quad (13)$$

\vec{s} ist dabei der Tangentialvektor an die Kurve S . In der Elektrostatik wird die elektrische Feldstärke durch ein Gradientenfeld beschrieben und ist somit ein konservatives Feld. Somit ist die Spannung zwischen zwei Punkten $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$, die den Anfang und das Ende einer beliebigen Kurve S bilden, unabhängig vom Weg und die Berechnung vereinfacht sich durch das elektrostatische Potenzial auf

$$U = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \quad (14)$$

Daraus ist ein weiterer Vorteil des elektrostatischen Potential ersichtlich, die Tatsache dass man an Stelle einer Integralrechnung eine Differenz erhält.



Abbildung 4: Modell des zylinderförmigen Körpers

Für weitere Informationen über die elektrische Spannung dienen [2, Kapitel 6.3], [2, Kapitel 9.1], [2, Kapitel 9.3] und [3, Kapitel 2.2].

2.8 Eindimensionale Problemstellung

Als einfaches Beispiel soll ein sehr dünner und langer Körper mit einer relativen Permittivität $\varepsilon_r = 1$ dienen, dessen elektrostatisches Potential φ gesucht ist. Der Körper wird, wie in Abbildung 4 dargestellt, durch eine Strecke der Länge 1 auf dem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}$ modelliert. Sei

$$\Omega =]0, 1[\quad (15)$$

Der Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω ist

$$\partial\Omega = \{0, 1\} \quad (16)$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad (17)$$

Da das Problem eindimensional ist wird die Raumladungsdichte ρ durch eine Linienladungsdichte λ ersetzt

$$\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (18)$$

Zur weiteren Vereinfachung wird die Linienladung als konstant angenommen

$$\lambda(x) = \lambda = \text{const}, x \in \overline{\Omega}. \quad (19)$$

Modell	eindimensionaler Körper
Gebiet des Körpers	$\Omega = [0, 1]$
randloses Gebiet des Körpers	$\Omega =]0, 1[$
Rand des Körpers	$\partial\Omega = \{0, 1\}$
relative Permittivität	$\varepsilon_r = 1$
Linienladungsdichte	$\lambda(x) = \lambda = \text{const}, x \in \overline{\Omega}$

3 Elliptische Randwertprobleme

Zur mathematischen Modellierung physikalischer Vorgänge werden oft Differentialgleichungen benötigt. Eine Differentialgleichung alleine liefert jedoch noch keine eindeutige Lösung, sondern eine ganze Schar an Lösungen. Um eine eindeutige Lösung einer spezifischen Problemstellung zu erhalten müssen gewisse Funktionswerte vorgegeben werden. Neben Anfangswertproblemen zählen sogenannte Randwertprobleme zu den wichtigsten Anwendungsfällen in der Physik.

Dieses Kapitel soll einen Überblick über elliptische Randwertprobleme und deren Eigenschaften bieten. Insbesondere soll gezeigt werden, dass es sich bei der Poisson-Gleichung (11) um ein solches Randwertproblem handelt und anhand der Problemstellung der Elektrostatik aus Kapitel 2.8 die Eigenschaften ergründet und das Verständnis von Randwertproblemen erleichtert werden. Sämtliche Definitionen, Sätze und Beweise sind in [1] enthalten.

3.1 Differenzialgleichung: Klassifikation

Zunächst muss geklärt werden, was eine partielle Differentialgleichung ist. Diese stellt die Grundlage der Randwertprobleme dar. Ist die Differentialgleichung nur von einer Variablen abhängig, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Definition 3.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Menge mit deren Punkten $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dann nennt man eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion $u(\vec{x})$ auf D der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \quad (20)$$

partielle Differentialgleichung. Sind die höchsten auftretenden Ableitungen von u von der Ordnung k , spricht man von einer partiellen Differentialgleichung k -ter Ordnung.

Eine Funktion u , die stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k auf D hat und der Differentialgleichung (20) genügt, heißt Lösung dieser Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (20) heißt linear, wenn u und alle seine partiellen Ableitungen nur linear auftreten. Diese Arbeit beschränkt sich auf solche linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung $k = 2$ mit maximal drei Unbekannten $n \in \{1, 2, 3\}$, da sich ein elektrostatisches Feld maximal in einem dreidimensionalen euklidischen Raum befindet. Somit vereinfacht sich die Differentialgleichung (20) auf die Form

$$F = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} u_{x_i, x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i u_{x_i} + cu + d = 0 \quad (21)$$

mit $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ und $u_{x_i, x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Die Koeffizienten a_{ij} , b_i , c und d sind im Allgemeinen von \vec{x} abhängige Funktionen und im einfachsten Fall konstante reelle Faktoren.

Durch Anwendung des Laplace-Operators Δ (10) auf φ in der Poissongleichung und anschließender Umformung (11) erhält man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \quad (22)$$

Wie man sehen kann, handelt es sich bei der Poissongleichung um eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x, y, z) \\ a_{i,j} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ b_i &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Für die Problemstellungen in Kapitel 2.8 ist der eindimensionale Fall von Interesse jedoch soll auch der zweidimensionale Fall betrachtet werden. Um die Lesbarkeit zu verbessern, werden die Koeffizienten nicht mit Indizes verwendet sondern alphabetisch. Für $n = 1$ erhält man mit $x_1 = x$ und $u = u(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Ordnung

$$au_{xx} + bu_x + cu + d = 0 \quad (23)$$

und für $n = 2$ mit $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $u = u(x, y)$ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0 \quad (24)$$

Viele Differentialgleichungen lassen sich in einer der drei folgenden Klassen einteilen

- elliptisch
- parabolisch
- hyperbolisch

Es existieren jedoch auch Differentialgleichungen, die sich nicht einer der drei Klassen zuordnen lassen. Durch diese Klassifikation beziehen sich bestimmte Eigenschaften und Sätze auf die Differentialgleichung und unterschiedliche Lösungsmethoden kommen zum Einsatz. Bei elliptischen Differentialgleichungen handelt es sich um Randwertprobleme, bei parabolischen um Randwert-/Anfangswertprobleme und bei hyperbolischen um Anfangswertprobleme. Ist also bekannt, dass eine Differentialgleichung elliptisch ist kann daraus gefolgert werden, dass es sich um ein Randwertproblem handelt. Umgekehrt ist dieser Schluss jedoch nicht möglich, da nicht alle Randwertprobleme elliptisch sein müssen. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 3.3 näher behandelt. Zusammenfassend lässt sich also folgendes festhalten

elliptische partielle Differentialgleichung \Rightarrow Randwertproblem
 parabolische partielle Differentialgleichung \Rightarrow Randwert-/Anfangswertproblem
 hyperbolische partielle Differentialgleichung \Rightarrow Anfangswertproblem

Welcher Klasse eine partielle Differentialgleichung angehört lässt sich über die Koeffizienten a_{ij} in F (21) ermitteln. Aus der zweifach stetigen Differenzierbarkeit von u und dem Satz von Schwartz, wonach $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt und somit $a_{ij} = a_{ji}$, lässt sich die symmetrische Koeffizienten-Matrix A mit

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad A(\vec{x}) = A^T(\vec{x}) \quad (25)$$

aufstellen. Über die Definitheit dieser Matrix lässt sich die partielle Differentialgleichung in eine jeweilige Klasse einteilen und wie folgt, nach [1, Seite 455, Definition 12.1], definieren:

Definition 3.2. *Eine partielle Differentialgleichung F heißt elliptisch, wenn für alle $\vec{x} \in \Omega$ die Eigenwerte der Matrix $A(\vec{x})$ ungleich Null sind und das gleiche Vorzeichen haben. Falls für alle $\vec{x} \in \Omega$ die Eigenwerte der Matrix $A(\vec{x})$ ungleich Null sind und unterschiedliches Vorzeichen haben, nennt man F hyperbolisch. Wenn für alle $\vec{x} \in \Omega$ genau ein Eigenwert der Matrix $A(\vec{x})$ gleich Null ist und die restlichen das selbe Vorzeichen haben, heißt F parabolisch*

Zusammenfassend:

A ist positiv oder negativ definit \Rightarrow F heißt elliptisch
 A ist positiv oder negativ semidefinit \Rightarrow F heißt parabolisch
 A ist indefinit \Rightarrow F heißt hyperbolisch

Für die Poissongleichung (22) erhält man die Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die einer Einheitsmatrix entspricht. Daraus ist ersichtlich, dass die Koeffizientenmatrix A der Poissongleichung positiv definit ist und es sich daher um eine elliptische partielle Differentialgleichung handelt.

3.2 Randwerte

Randwertprobleme lassen sich auf Grund der gegebenen Randwerte in weitere Klassifikationen einteilen. Dieses Kapitel geht auf die unterschiedlichen Arten der vorgegebenen Randwerte und die folgenden Einteilungen ein.

- Dirichlet-Problem
- Neumann-Problem
- Schiefe Randbedingung

Bei partiellen Differentialgleichungen ist eine alleinige Angabe von Randwerten, ungeachtet welcher Art, nur für elliptische Gleichungen auf einem beschränkten Gebiet $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ sinnvoll.

Daher sei $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und F eine lineare elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit

$$F = F\left(\vec{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0 \text{ für } \vec{x} \in \Omega$$

und $u = u(\vec{x})$ eine zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion die der Gleichung F genügt.

3.2.1 Dirichlet-Problem

Bei einem Dirichlet-Problem werden die Randbedingungen auf dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes vorgeschrieben. u ist eine Lösung der Gleichung F falls sie die vorgegebenen Bedingungen

$$u(\vec{x}) = g(\vec{x}) \text{ für } \vec{x} \in \partial\Omega \tag{26}$$

erfüllt. Die Funktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt dabei die Funktionswerte am Rand des Gebietes $\bar{\Omega}$ vor.

Im Falle des elektrostatischen Potentials sind diese Randwerte vorgegebene Spannungen am Rand des zu untersuchenden Gebietes. Dem Körper aus der eindimensionalen Problemstellung in Kapitel 2.8 wird an den Enden A und B (siehe Abbildung ??) eine Spannung (z.B. mittels einer Batterie) angelegt. Diese Werte der Spannung sind dann die vorgegebenen Randwerte und die zugehörige Funktion $g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ lautet

$$g(0) = U_1, g(1) = U_2 \text{ mit } U_1, U_2 \in \mathbb{R} \quad (27)$$

Bei Spannungsfreiheit sind die Spannungen U_1 und U_2 gleich Null.

Ein weiteres Beispiel für Dirichlet-Randwerte sind vorgegebene Temperaturen bei der Wärmeverteilung in einem Raum. Die Temperaturen werden dann den Wänden zugeordnet und daraus kann die Temperaturverteilung im restlichen Raum ermittelt werden.

3.2.2 Neumann-Problem

Bei einem Neumann-Problem sind die Randbedingungen auf dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ableitungen in Richtung der äußeren Normale. Damit Richtungsableitung definiert ist, muss dabei notwendig vorausgesetzt werden, dass der Rand $\partial\Omega$ einmal stetig differenzierbar ist. u ist eine Lösung der Gleichung F falls sie die vorgegebenen Bedingungen

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}} = g(\vec{x}) \text{ für } \vec{x} \in \partial\Omega \quad (28)$$

erfüllt. Die Funktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt dabei die Funktionswerte der Richtungsableitung vor.

Im Falle des elektrostatischen Potentials sind die Randwerte in 28 vorgegebene elektrische Feldstärken am Rand des zu untersuchenden Gebietes. Im Gegensatz zu den Dirichlet-Randbedingungen wird keine Spannung an das untersuchte Gebiet angelegt, sondern das äußere elektrische Feld wird vorgegeben.

Bei der Wärmeverteilung handelt es sich bei Neumann-Randwerte um sogenannte Wärmeströme. Diese könnten zum Beispiel durch einen Heizkörper an einer Wand verursacht werden.

3.3 Korrekt gestellte Probleme

Ist nun ein Randwertproblem eindeutig lösbar, muss es sich dabei jedoch nicht um eine sinnvolle oder befriedigende Lösung handeln. Auf [1, Seite 460] wird exem-

plarisch dargestellt, dass die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$, wobei $u = u(x, y)$ mit $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und y anstatt einer Ortsvariable als eine Zeitvariable angenommen wird, mit gegebenen Anfangswert $u_y(x, 0) = 0$ zwar eine eindeutige Lösung hat, diese aber nicht stetig von diesen Anfangswerten abhängt. Es handelt sich um ein schlecht gestelltes Problem, da beliebig kleine Anfangswerte beliebig starkes Lösungswachstum erzeugen. Das bedeutet, dass dieses Problem zwar mathematisch eindeutig lösbar ist, aber die numerischen Verfahren zum Lösen dieser Problems keine gute Approximationslösungen liefern werden.

Wie auf [1, Seite 460] ersichtlich, wurde bereits 1932 der Begriff des korrekt gestellten Problems von Hadamard eingeführt, daher werden diese Bedingungen auch als Hadamard'sche Bedingungen bezeichnet. Ein Problem ist korrekt gestellt falls:

- eine Lösung existiert,
- diese eindeutig ist,
- und stetig von den Daten abhängt.

Somit wird von einer Problemstellung nicht nur die eindeutige Lösbarkeit sondern auch die stetige Abhängigkeit von den Daten gefordert. Die Daten entsprechen dabei Anfangswerten und beziehungsweise für diese Arbeit relevanten Randwerten wie in Kapitel 3.2.

Ob ein elliptisches Randwertproblem nun stetig von den Daten abhängt soll jetzt anhand einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen beleuchtet werden.

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + c = 0 \text{ mit } \vec{x} = (x, y)$$

Diese Gleichung lässt sich mittels eines Differentialoperators D umschreiben zu

$$D \cdot u + C = 0$$

und mit $h = -c$ erhält man die Form

$$D \cdot u = h$$

Dieses elliptisches Randwertproblem erfüllt dann (siehe [1, Seite 461]), mit den Randwerten g , die Bedingung

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L_\infty(\partial\Omega)} + C\|h\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, C > 0, \quad (29)$$

wenn u zweifach stetig differenzierbar über Ω und stetig über $\partial\Omega$ ist und

$$\|s\|_{L_\infty(G)} := \sup_{x \in G} |s(x)|. \quad (30)$$

Ist nun u_1 die Lösung der Differentialgleichung mit g_1 und h_1 und u_2 die Lösung mit g_2 und h_2 dann folgt aus der Linearität

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g_1 - g_2\|_{L_\infty(\partial\Omega)} + C\|h_1 - h_2\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (31)$$

und man erhält somit die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten bezüglich der Maximumnorm in (29).

4 Eindimensionales elliptisches Randwertproblem: elektrostatisches Potential

In diesem Kapitel wird die eindimensionale Problemstellung aus Kapitel 2.8 behandelt und an diesem einfachen Beispiel die zwei diskreten Verfahren, Methode der finiten Differenzen und Methode der finiten Elemente, vorgestellt. Daher werden hier nochmals die wichtigsten Merkmale der Problemstellung zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Gesucht ist das elektrostatische Potential, das sich im Zylinder einstellt. Das elektrostatische Potential $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich durch die Poisson-Gleichung (11) ermitteln

$$\Delta\varphi(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (32)$$

Modell	eindimensionaler Körper
Gebiet des Körpers	$\overline{\Omega} = [0, 1]$
randloses Gebiet des Körpers	$\Omega =]0, 1[$
Rand des Körpers	$\partial\Omega = \{0, 1\}$
relative Permittivität	$\varepsilon_r = 1$
Linenladungsdichte	$\lambda(x) = \lambda = \text{const}, x \subset \overline{\Omega}$

In Kapitel 3 wurde bereits erwähnt, dass ein solches Problem erst eine eindeutige Lösung mit, durch $g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegebenen, Randwerten hat. Es werden in Folge zwei unterschiedliche Problemstellungen mit unterschiedlichen Randwerten behandelt.

Bei der **ersten Problemstellung** ist der Zylinder auf ganz $\bar{\Omega}$ ungeladen ($\lambda_1 = 0$) und es werden 14 V an den Randpunkten angelegt. Somit erhält man die Funktion g_1 mit den Funktionswerten

$$\begin{aligned} g_1(0) &= 0V \\ g_1(1) &= 14V \end{aligned} \tag{33}$$

Der Zylinder der **zweiten Problemstellung** hat eine konstante Ladungsdichte von $\lambda_2 = 10^{-9} \frac{C}{m}$ und es wird eine Spannungsfreiheit vorausgesetzt. Somit erhält man die Funktion g_2 mit den Funktionswerten

$$\begin{aligned} g_2(0) &= 0V \\ g_2(1) &= 0V \end{aligned} \tag{34}$$

Um die zwei diskreten Methoden aus Kapitel 4.3 und 4.4 mit den exakten Lösungen von (32) - (33) und (32) - (34) vergleichen zu können, werden diese über analytische Methoden in Kapitel 4.2 ermittelt. Jedoch müssen vor einer Lösungsfindung den Eigenschaften des gegebenen Randwertproblems in Kapitel 4.1 Beachtung geschenkt werden.

4.1 Eigenschaften des Randwertproblems

Das elektrostatische Potential lässt sich durch die Poisson-Gleichung ermitteln. Wie bereits in Kapitel 3.1 gezeigt wurde ist die Poisson-Gleichung eine elliptische partielle Differentialgleichung. Daraus lässt sich folgern, dass es sich um ein Randwertproblem handelt und die Randwerte durch g_1 (33) beziehungsweise durch g_2 (34) festgelegt sind.

Ob es sich um ein korrekt gestelltes Problem handelt wird durch die Hadamard'schen Bedingungen (Kapitel 3.3) festgestellt:

- eine Lösung existiert,
- diese eindeutig ist,
- und stetig von den Daten abhängt.

Bei diesem einfachen Beispiel handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung.

4.2 Analytische Lösung

Die gewöhnliche Differentialgleichung (32) zweiter Ordnung kann analytisch durch zweifache Integration gelöst werden:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot x + c_1, \quad (35a)$$

und

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (35b)$$

Wie aus der Gleichung (35b) ersichtlich ist die gesuchte Lösung von den zwei Parametern c_1 und c_2 abhängig. Aus den vorgegebenen Randwerten $\varphi(0)$ und $\varphi(1)$ lassen sich diese zwei Koeffizienten c_1 und c_2 bestimmen indem man das folgende Gleichungssystem löst

$$\varphi(0) = c_2 = g(0), \quad (36a)$$

$$\varphi(1) = \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon} + c_1 + c_2 = g(1) \quad (36b)$$

Mit den daraus resultierenden Koeffizienten $c_1 = \varphi(1) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon}$ und $c_2 = \varphi(0)$ erhält man die allgemeine Lösung des Randwertproblems:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon} \cdot x^2 + \left(\varphi(1) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon}\right) \cdot x + \varphi(0), \quad x \in [0, 1] \quad (37)$$

Zur Veranschaulichung sollen die zwei unterschiedlichen Problemstellungen mit den Randbedingungen (33) und (34) dienen. Für die erste Problemstellung mit λ_1 und g_1 erhält man das Gleichungssystem

$$c_2 = 0, \quad (38a)$$

$$\frac{\lambda_1}{2 \cdot \varepsilon} + c_1 + c_2 = 14 \Rightarrow c_1 = 14 \quad (38b)$$

und daraus die Lösung für die erste Problemstellung

$$\varphi_1(x) = 14 \cdot x, \quad x \in [0, 1] \quad (39)$$

Es handelt sich dabei um eine lineare Funktion deren Funktionsgraph in Abbildung 5 dargestellt wird. Wie in Kapitel 2.7 kann in der Elektrostatik die Spannung als Potentialdifferenz $U(x_1, x_2) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ ermittelt werden. Daraus ist ersichtlich, dass die maximale Spannung bei einem ungeladenen Körper der angelegten Spannung entspricht und die Spannung linear mit dem Abstand zunimmt.

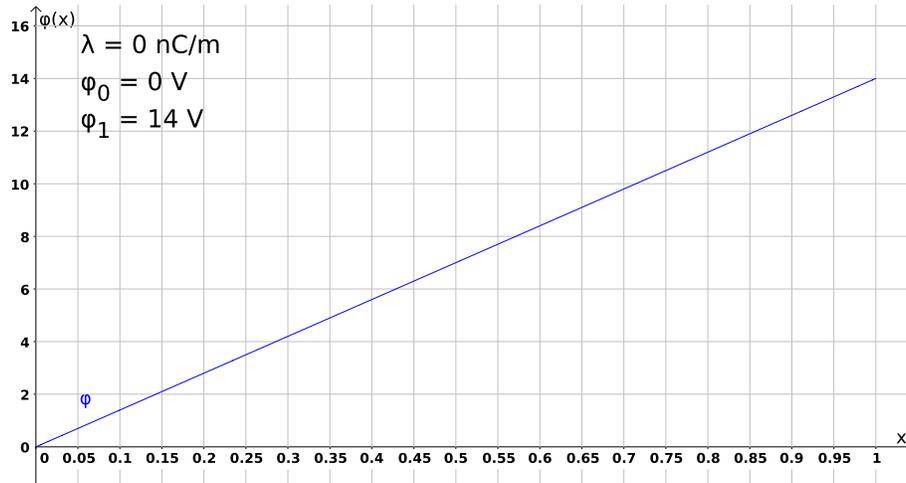


Abbildung 5: Funktionsgraph der Funktionsgleichung 39 der Lösung für $\lambda = 0 \frac{C}{m}$, $\varphi(0) = 0 V$, $\varphi(1) = 14 V$

Die zweite Problemstellung mit λ_2 und den Randwerten g_2 ergeben folgendes Gleichungssystem

$$c_2 = 0, \tag{40a}$$

$$\frac{\lambda_2}{2 \cdot \varepsilon} + c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{\lambda_2}{2 \cdot \varepsilon} = -\frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \approx 56,4705 \tag{40b}$$

und erhält folgende Funktionsgleichung als Lösung

$$\varphi_2(x) = -\frac{\lambda_2}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (x^2 - x) \quad \text{für } x \in [0, 1] \tag{41}$$

Man erhält somit eine quadratische Funktion deren Funktionsgraph in Abbildung 6 dargestellt ist. Man kann erkennen, dass die Spannung wie durch die Randwerte vorgegeben nach außen hin Null ergibt. Durch die Ladung im Inneren des Körpers ergeben sich jedoch elektrische Spannungen innerhalb des Körpers. Die maximale Spannung liegt bei $U_{max} = U(0.5) - U(0) = -U(1) + U(0.5)$.

Eine analytische Lösung der Poissongleichung, oder eines anderen elliptischen Randwertproblems, zu bestimmen ist in der Regel um ein Vielfaches aufwendiger als in diesem einfachen eindimensionalen Beispiel. Aus diesem Grund werden in den folgenden zwei Unterpunkten alternative numerische Lösungsmethoden vorgestellt. Bei diesen Lösungsmethoden wird das an sich stetige Problem diskretisiert und eine Lösung dieses neuen diskreten Problems ermittelt. Die gesuchte Lösung wird auf dem entsprechenden Diskretisierungsgitter durch die diskrete Lösung approximiert.

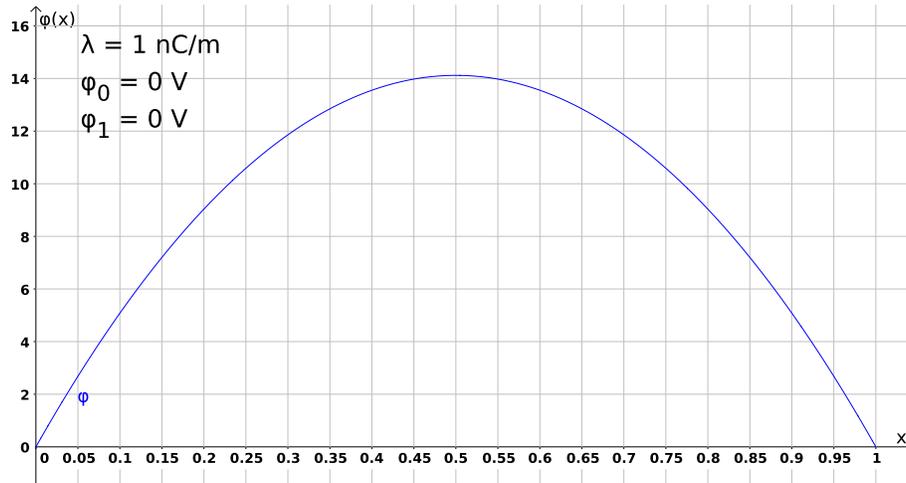


Abbildung 6: Funktionsgraph der Funktionsgleichung 41 der Lösung für $\lambda = 10^{-9} \frac{C}{m}$, $\varphi(0) = 0 V$, $\varphi(1) = 0 V$

4.3 Methode der finiten Differenzen

Die Methode der finiten Differenzen kann in folgende wesentliche Punkte aufgeteilt werden:

1. Stützstellen durch Zerlegung des Gebiets in Teilgebiete ermitteln
2. Transformieren der ursprünglichen Differenzialgleichung in eine Differenzengleichung
3. Aufstellen und lösen eines linearen Gleichungssystems
4. Approximation der Lösung durch eine stückweise lineare Funktion

4.3.1 Diskretisierung des Gebietes

Im ersten Schritt wird das Modell des dünnen, langen und zylinderförmigen Körpers diskretisiert. Die einfachste Methode ist es die Strecke Ω in n gleich große Streckenabschnitte Ω_i der Länge $h = \frac{1}{n}$ zu unterteilen wie in Abbildung 7 dargestellt. Die Teilstrecken Ω_i müssen nicht alle die selbe Länge aufweisen. So kann es dienlich sein einen Teil des Zylinders in kleinere Abschnitte zu zerlegen um in diesem Bereich eine bessere Approximation der Lösung zu erzielen. Dies führt jedoch zu einem erhöhten Rechenaufwand und wird an dieser Stelle daher nicht angewendet.



Abbildung 7: Diskretisierung des Modells des zylinderförmigen Körpers

Die Stützstellen sind dann die Punkte die sich zwischen den einzelnen Streckenabschnitten befinden. So erhält man das diskretisierte Gebiet

$$\overline{\Omega}_d = \{x_k = h \cdot k \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\} \quad (42)$$

das randlose diskrete Gebiet

$$\Omega_d = \{x_k = h \cdot k \mid k \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \quad (43)$$

und den diskreten Rand

$$\partial\Omega_d = \{x_k = h \cdot k \mid k \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\} \quad (44)$$

Für diese einfache Aufteilung des dünnen Zylinders erhält man $n+1$ unterschiedliche Stützstellen $x_k = h \cdot k$ für $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ wobei die zwei Stellen mit $k = 0$ und $k = n$ die Randpunkte darstellen.

4.3.2 Differenzengleichung

Die Poissongleichung (11) soll nun diskretisiert werden indem man diese zu einer Differenzengleichung transformiert. Dabei wird der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx}$ durch einen Differenzenquotienten $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ ersetzt. Mit der gewählten Diskretisierung $\Delta x = h$ erhält man für die Differenzenquotienten (siehe [1, Seite 464])

$$\frac{\Delta\varphi_d}{\Delta x} = \frac{\varphi_d[x+h] - \varphi_d[x]}{h}, \quad x \in \Omega_d \quad (45a)$$

$$\frac{\Delta^2\varphi_d}{\Delta x^2} = \frac{\varphi_d[x-h] - 2\varphi_d[x] + \varphi_d[x+h]}{h^2} \quad (45b)$$

Damit erhält man die diskrete Form der Gleichung (32).

$$\frac{\varphi_d[x-h] - 2\varphi_d[x] + \varphi_d[x+h]}{h^2} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega_d \quad (46)$$

Auch die rechte Seite der Poisson-Gleichung muss in diskreter Form vorliegen. So muss $\lambda(x)$ als auch $\varepsilon(x)$ diskretisiert werden. Es werden dafür $\lambda[x], \varepsilon[x], x \in \Omega_d$ verwendet.

Gesucht sind nun die Funktionswerte φ_d an den Stellen $x \in \Omega_d$. Um besser zwischen Funktion mit stetiger und diskreter Definitionsmenge zu unterscheiden werden für Funktionen mit stetiger Definitionsmenge runde Klammern verwendet $\varphi(x)$ und für Funktionen mit diskreten Definitionsmengen eckige Klammern $\varphi_d[x]$. Mit der Methode der finiten Differenzen wird also nicht die gesuchte stetige Funktion des elektrostatischen Potentials ermittelt, sondern die diskrete Funktion (47).

$$\varphi_d[x] : \overline{\Omega_d} \rightarrow \mathbb{R} \quad (47)$$

Diese Funktion muss die Differenzengleichung (46) für $x \in \Omega_d$ erfüllen und weiters auch den vorgegebenen Randwerten genügen. Die Funktion g die die Randwerte vorgibt muss auch diskretisiert sein mit

$$g_d : \partial\Omega_d \rightarrow \mathbb{R} \quad (48)$$

Für die Problemstellungen (32) - (33) oder (32), (34) hat (48) keine große Auswirkung da $\partial\Omega_d = \partial\Omega$ gilt. Dies ist im Allgemeinen nicht gültig und muss für die Randwerte beachtet werden.

Somit lautet die diskrete Form des Randwertproblems

$$\frac{\varphi_d[x-h] - 2\varphi_d[x] + \varphi_d[x+h]}{h^2} = -\frac{\lambda[x]}{\varepsilon[x]} \text{ für } x \in \Omega_d \quad (49a)$$

$$\varphi_d[x] = g[x] \text{ für } x \in \partial\Omega_d \quad (49b)$$

Wie mit dem Laplace-Operator Δ (10) lässt sich auch ein diskreter Laplace-Operator Δ_d einführen. Es ist jedoch darauf zu achten diesen nicht mit dem der Differenz-Operator Δ zu verwechseln, da beide die selben Symbole verwenden. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick zwischen stetiger und diskreter Poisson-Gleichung

	stetig	diskret
randloses Gebiet	Ω	Ω_d
Rand des Gebietes	$\partial\Omega$	$\partial\Omega_d$
Poisson-Gleichung	$\Delta\varphi(x) = -f(x)$ für $x \in \Omega$	$\Delta_d\varphi_d[x] = -f[x]$ für $x \in \Omega_d$
Randwerte	$\varphi(x) = g(x)$ für $x \in \partial\Omega$	$\varphi_d[x] = g[x]$ für $x \in \partial\Omega_d$

4.3.3 Lineares Gleichungssystem

Die diskretisierte Form (49) ist ein lineares Gleichungssystem mit $n - 1$ Gleichungen und Unbekannten. Man hat das ursprüngliche Problem durch die Diskretisierung

somit auf das Lösen eines Gleichungssystems transformiert. Für mehrdimensionale Probleme und große n führt dies zu sehr großen Gleichungssystemen die über numerische Verfahren gelöst werden. Um die Lesbarkeit zu erhöhen wird $\varphi_d[x] = \varphi_d[h \cdot i]$ mit φ_i bezeichnet. Damit lässt sich die Differenzgleichung der Poisson-Gleichung wie folgt anschreiben

$$\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (50)$$

Die $n - 1$ Gleichungen mit den Unbekannten $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\}$ und $h = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot (\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2) &= -\frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \frac{1}{h^2} \cdot (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) &= -\frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \frac{1}{h^2} \cdot (\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4) &= -\frac{\lambda}{\varepsilon}, i = 1, 2, \dots, n-1. \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{1}{h^2} \cdot (\varphi_{n-2} - 2\varphi_{n-1} + \varphi_n) &= -\frac{\lambda_i}{\varepsilon_i} \end{aligned}$$

lassen sich, durch Umformen der ersten und letzten Gleichung, mittels Matrizen, in der üblichen Form $A \cdot \vec{\varphi} = \vec{f}$ darstellen. Die Matrix A entspricht somit dem diskreten Laplace-Operator Δ_d .

$$\frac{1}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} + \frac{\varphi_0}{h^2} \\ \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} \\ \frac{\lambda_3}{\varepsilon_3} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{n-2}}{\varepsilon_{n-2}} \\ \frac{\lambda_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} + \frac{\varphi_n}{h^2} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Für die Matrix A gilt laut [1, Lemma 12.7 Seite 473] folgendes Lemma

Lemma 4.1. *Die Matrix A in (51) der diskretisierten Poisson-Gleichung ist symmetrisch positiv definit.*

Der Beweis dieses Lemmas ist auch auf [1, Seite 473 Lemma 12.7] zu finden. Weiters gilt für die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A folgendes [1, Lemma 12.8 Seite 473]

Lemma 4.2. *Für die Konditionszahl der Matrix A in (51) bezüglich der 2-Norm gilt*

$$\kappa_2(A) = \frac{\cos^2(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot h)}{\sin^2(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot h)} = \left(\frac{2}{\pi \cdot h}\right)^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(h^2)) \quad (52)$$

dessen Beweis auf [1, Seite 474] zu finden ist.

Lemma 4.1 und 4.2 zeigen wie in [1, Bemerkung 12.9 Seite 474] die positiven als auch negativen Eigenschaften der Matrix A . Um so feiner das Gebiet $\bar{\Omega}$ durch ein größeres n und somit einem kleinerem $h = \frac{1}{n}$ diskretisiert wird um so größer wird die Konditionszahl der Matrix A . Besonders diese hohe Kondition $\kappa_2(A)$ stellt sich als ein Hindernis bei der numerischen Lösung des Gleichungssystems heraus.

Für die erste Problemstellung mit $\lambda_1[x] = 0$, $x \in \partial\Omega_d$ und den Randwerten

$$\begin{aligned} g_1[0] &= 0V \\ g_1[1] &= 14V \end{aligned} \tag{53}$$

erhält man für $n = 4$ z.B. das folgende Gleichungssystem

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{14}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \end{pmatrix}$$

beziehungsweise für $n = 7$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{14}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} \end{pmatrix} \tag{54}$$

Für die zweite Problemstellung mit $\lambda_2[x] = 10^{-19} \frac{C}{m}$, $x \in \partial\Omega_d$ und den Randwerten

$$\begin{aligned} g_1[0] &= 0V \\ g_1[1] &= 0V \end{aligned} \tag{55}$$

erhält man für $n = 4$ z.B. das folgende Gleichungssystem

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \end{pmatrix} \tag{56}$$

beziehungsweise für $n = 7$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \end{pmatrix} \quad (57)$$

4.3.4 Approximation der kontinuierlichen Lösung

Durch lösen des Gleichungssystems (51) erhält man die Funktion $\varphi[x]$. Man erhält somit eine endliche Anzahl von Funktionswerten φ_1 bis φ_{n-1} . $\varphi[x]$ ist jedoch nicht die endgültige Lösung. Die eigentliche Lösung $\varphi(x)$ lässt sich nun durch die Punkte $(x, \varphi[x])$ approximieren indem man die einzelnen Punkte durch Strecken verbindet. Man erhält im eindimensionalen Fall eine stückweise lineare Funktion und in mehrdimensionalen Fällen eine sogenannte Gitterfunktion φ_d .

Zur Veranschaulichung sollen die zwei analytischen Lösungen $\varphi_1(x)$ in (39) und $\varphi_2(x)$ in (41) durch die Lösung der Differenzgleichungen mit unterschiedlichen n approximiert werden. In den Abbildungen 8 und 9 wird die analytische Lösung durch die blauen und die Approximation φ_d durch die roten Funktionsgraphen dargestellt. Die Punkte der Lösung der Differenzgleichung liegen immer auf dem Funktionsgraphen der analytischen Lösung.

Aus Abbildung 8 ist ersichtlich, dass die analytische Lösung $\varphi_1(x)$ mit der Approximation $\varphi_{d1}[x]$ für alle n übereinstimmt. Dies ist jedoch nur bei linearen Lösungen wie $\varphi_1(x)$ der Fall. Bei allen anderen Lösungsfunktionen entsteht ein Diskretisierungsfehler. Wie in Abbildung 9 leicht zu erkennen ist, ist die Abweichung der Funktion $\varphi_{d2}[x]$ von $\varphi_2(x)$ besonders bei kleinen n sehr groß.

4.3.5 Diskretisierungsfehleranalyse

Der Diskretisierungsfehler e_d wird durch den Ausdruck

$$e_d = \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - \varphi_d[x] \quad (58)$$

bestimmt (siehe [1, Seite 474]). Dadurch kommt es durch die Einschränkung $\varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d}$ zu einer Reduktion der exakten Lösung in $\bar{\Omega}_d$. Dabei beruht die Fehleranalyse bei Differenzenverfahren auf folgender Ungleichung

$$\|e_d\| = \|\Delta_d^{-1} \Delta_d e_d\| = \|\Delta_d^{-1} (-\Delta_d \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - f[x])\| \quad (59a)$$

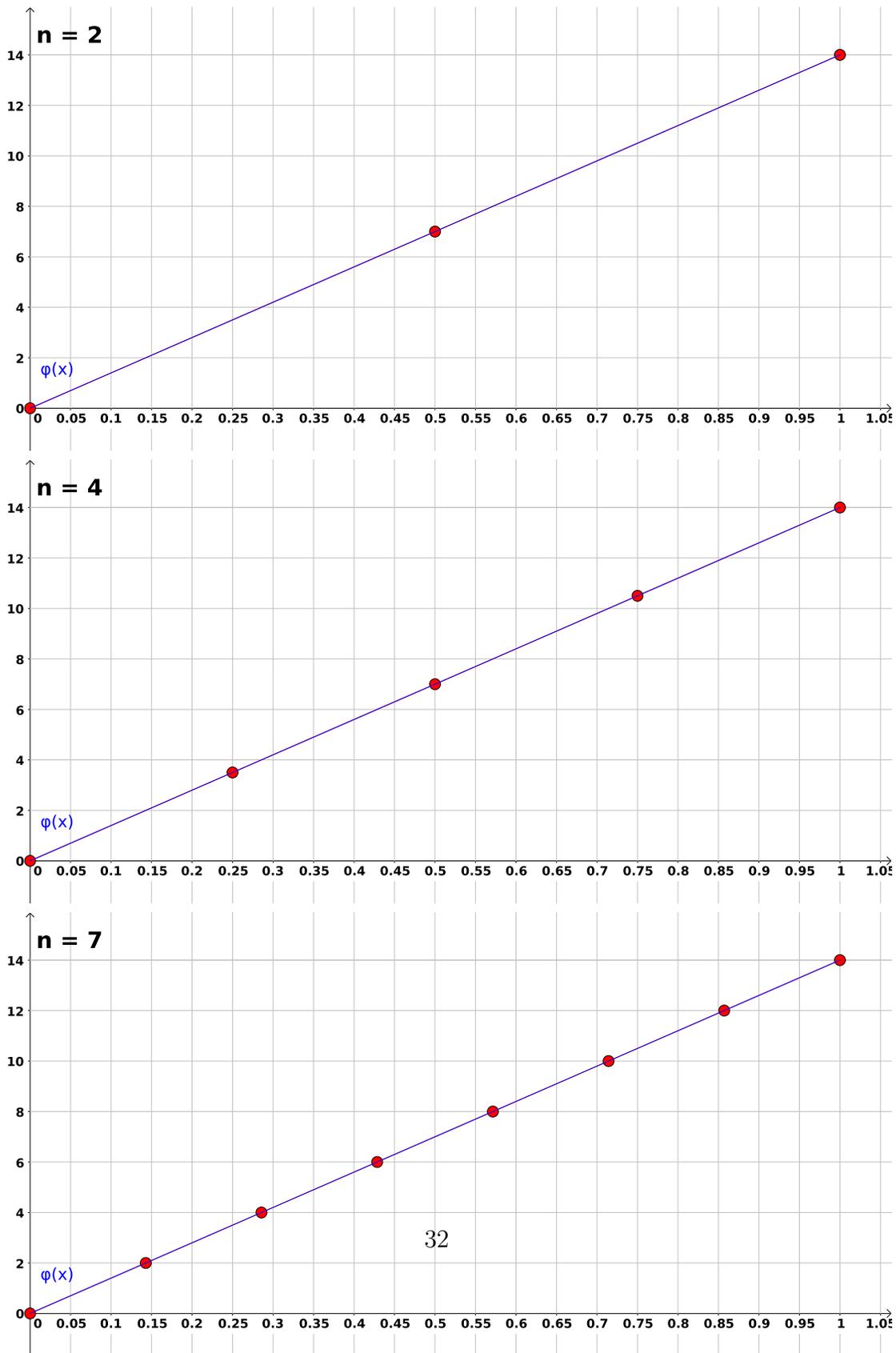


Abbildung 8: Approximation der stetigen Lösungsfunktion $\varphi_1(x) = 14 \cdot x$ für unterschiedliche n

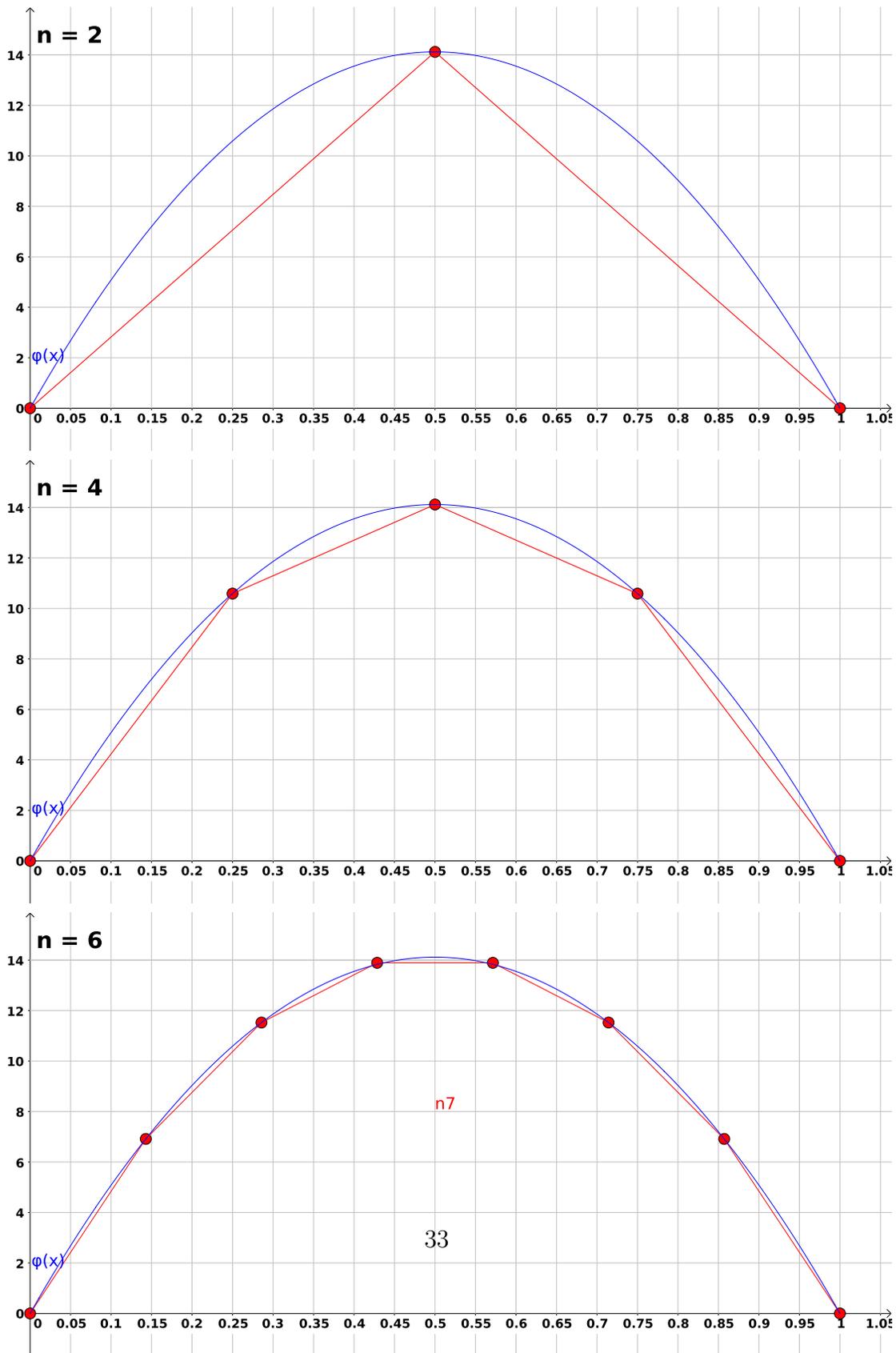


Abbildung 9: Approximation der stetigen Lösungsfunktion $\varphi_2(x) = -\frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (x^2 - x)$ für unterschiedliche n

$$\|e_d\| \leq \|\Delta_d^{-1}\| \|\Delta_d \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - f[x]\| \quad (59b)$$

Die zwei Faktoren aus dieser Ungleichung (59b) stellen den **Konsistenzfehler** $\|\Delta_d \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - f[x]\|$ und die **Stabilität der Methode** $\|\Delta_d^{-1}\|$ dar. Aus dieser Konsistenzanalyse und Stabilitätsanalyse folgt schließlich auch ein Konvergenzresultat (siehe [1, Seite 474, 475]).

Konsistenz + Stabilität \Rightarrow Konvergenz

Stabilitätsanalyse: Der Ausdruck $\|\Delta_d^{-1}\|$ quantifiziert die Stabilität der Diskretisierungsmethode. Dies beinhaltet sowohl die Fortpflanzung der Konsistenzfehler als auch die Verstärkung von Datenfehlern und Rundungsfehlern (siehe [1, Seite 475]). Der diskrete Laplace-Operator Δ_d entspricht der Matrix A (51) und somit gilt nach [1, Gleichung 12.46; Seite 467]

$$\|\Delta_d\| = \|A\|, \quad \|\Delta_d^{-1}\| = \|A^{-1}\| \quad (60)$$

Nach [1, Lemma 12.21; Seite 479] gilt:

Lemma 4.3. *Es gilt die Ungleichung*

$$\|\Delta_d^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

Der Beweis des Lemmas 4.3 ist auf [1, Seite 479, 480] ersichtlich.

Für den Fall $n = 4$ ist die Matrix $A = 16 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und somit $A^{-1} =$

$\frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Nun lässt sich die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bestimmen mit $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{4}{64} = \frac{1}{16} < \frac{1}{8}$ und erkennen, dass die Ungleichung aus Lemma 4.3 erfüllt ist.

Auch für den Fall $n = 7$ mit $A = 49 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} =$

$\frac{1}{343} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ erfüllt man die Ungleichung mit $\|A^{-1}\| = \frac{12}{343} < \frac{1}{8}$.

Konsistenzanalyse: Mit dem Ausdruck $\| -\Delta_d \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - f[x] \|$ wird der Fehler gemessen, der entsteht, wenn man die stetige Lösung $\varphi(x)$ in die Diskretisierungsmethode einsetzt (siehe [1, Seite 475]). Nach [1, Lemma 12.11; Seite 475] gilt:

Lemma 4.4. *Es gelte $\varphi(x)$ sei eine viermal stetig differenzierbare Funktion über $\bar{\Omega}$. Sei $C := \max\{\|\frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4}\|_\infty\}$ Dann gilt:*

$$\| -\Delta_h \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - f[x] \| \leq \frac{1}{6} Ch^2.$$

Der Beweis des Lemmas 4.4 ist auf [1, Seite 476, 480] ersichtlich. Bei den Lösungen von Problemstellungen (39) und (41) handelt es sich um Polynomfunktionen ersten und zweiten Grades. Diese sind unendlich oft differenzierbar auf $[0, 1]$, erfüllen somit die Bedingung des Lemmas 4.4. Bei beiden Lösungen ist die vierte Ableitung gleich Null und somit auch $C = 0$. Daraus ergibt sich, dass der Konsistenzfehler für beide Lösungsfälle gleich Null ist.

Aus diesen Resultaten der Konsistenz und Stabilität folgt das Konvergenzresultat nach [1, Satz 12.22; Seite 480].

Satz 4.5. *Für $e_d = \varphi(x)|_{\bar{\Omega}_d} - \varphi_d[x]$ und C wie in Lemma 4.4 gilt*

$$\|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{48} Ch^2.$$

Um diese Konvergenzordnung zu sichern wird jedoch verlangt, dass die Lösung viermal stetig differenzierbar ist. Praktisch ist dies jedoch nicht immer möglich. So bedarf es entweder einer anderen Methode, wie der Methode der finiten Elemente, oder man nimmt eine schlechtere Konvergenz in Kauf.

Wie bereits in den Abbildungen 8 und 9 ersichtlich ist liegen die Lösungspunkte von $\varphi_d[x]$ exakt auf der Lösung $\varphi(x)$. Somit ist der Diskretisierungsfehler, wie sich schon durch $C = 0$ gezeigt hat, gleich Null. Somit entsteht, für diese Problemstellungen, nur durch die lineare Approximierung zwischen den diskreten Lösungspunkten eine Abweichung zur analytischen Lösung.

4.4 Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente stellt eine Alternative zur Methode der finiten Differenzen dar, die gewisse Vorteile hat. Die finiten Differenzen haben mit Lemma 4.4 an die Lösung φ eine sehr starke Forderung um Konvergenz zu garantieren. So muss

φ viermal stetig differenzierbar sein. Dies ist jedoch nicht für jede Problemstellung erfüllbar, was mathematische als auch physikalische Ursachen haben kann wie in [1, Seite 484, 486] dargelegt.

Bei der Methode der finiten Elemente wird von der Lösung φ nur abverlangt, dass diese einmal stetig differenzierbar ist, was eine weitaus schwächere Bedingung ist. Dies wird erreicht indem man nicht die ursprüngliche Differenzialgleichung löst, sondern die sogenannte schwache Formulierung der ursprünglichen Differenzialgleichung. Eine Problemstellung für die keine zweimal stetig differenzierbare Lösung existiert, jedoch eine Lösung unter diesen schwächeren Bedingungen, findet sich in [1, Beispiel 12.40, Seite 495].

Die Methode der finiten Elemente kann in folgende wesentliche Punkte aufgeteilt werden:

1. Auffinden einer schwachen Formulierung der ursprünglichen Differenzialgleichung
2. Zerlegen des Gebiets in Teilgebiete, die finiten Elemente
3. Basisfunktionen auf den Teilgebieten aufstellen
4. Approximation der Lösung als Linearkombination der Basisfunktionen
5. Aufstellen und lösen eines linearen Gleichungssystems

4.4.1 Schwache Formulierung

Als erstes soll zur ursprünglichen Differenzialgleichung (11)

$$\Delta\varphi = \frac{\varrho(x)}{\varepsilon(x)} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (61)$$

eine schwache Formulierung gefunden werden. Dazu werden beide Seiten der Gleichung mit einer stetig differenzierbaren Funktion $v(x)$, die auf dem Rand des Gebietes $\partial\Omega$ (17) den Wert Null annimmt, multipliziert und anschließend über das gesamte Gebiet Ω integriert und man erhält

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

Durch partielle Integration der linken Seite erhält man

$$\nabla\varphi(x) \cdot v(x)|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

Aufgrund der Randwerte der Funktion v mit $v(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ erhält man

$$- \int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx. \quad (62)$$

Für zweifach stetig differenzierbare Lösungen φ sind die Gleichungen (61) und (62), wie auf [1, Seite 486, 488] beschrieben, äquivalent. In Gleichung (62) kommen jedoch nur Ableitungen ersten Grades vor, daher muss eine Lösung dieser Gleichung nur einmal stetig differenzierbar sein. Sei $C^1(\Omega)$ der Raum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen über Ω , $C(\Omega)$ der Raum aller stetigen Funktionen über Ω und

$$V_1 := \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid u = \text{entsprechend der Randwerte auf } \partial\Omega\}.$$

Zum Beispiel für das Problem (32) - (33) erfüllt u die Randwerte (33) und für das Problem (32), (34) erfüllt u die Randwerte (34). Dann muss eine solche Lösung $\varphi(x) \in V_1$ der Gleichung (62) jedoch nicht Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (61) sein. Durch diese erste Abschwächung kann ein ursprünglich unlösbares Problem plötzlich in der abgeschwächten Form lösbar sein.

$(V_1, \|\cdot\|_1)$, mit $\|u\|_1 := \sqrt{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx}$, $u \in V_1$ ist nach [1, Seite 486, 487] jedoch kein vollständig normierter Vektorraum. Man kann diesen Raum vervollständigen und erhält dadurch einen sogenannten *Sobolevraum* $H_0^1(\Omega)$, falls die Randwerte Null sind wie in (34), beziehungsweise $H^1(\Omega)$, falls die Randwerte ungleich Null sind wie in (33). Ein Sobolevraum beinhaltet nun auch schwache Ableitungen. Durch diese Vervollständigung erhält man die **schwache Formulierung der Poisson-Gleichung** (siehe [1, Seite 488])

Gesucht $\varphi \in H^1(\Omega)$, so dass

$$- \int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad (63)$$

für alle $v \in H_0^1$

Für den eindimensionalen Fall $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}$ erhält man nachdem man diese Differentialgleichung mit $v(x)$ multipliziert hat und über das gesamte Gebiet des zylindrischen Körpers integriert.

$$\int_0^1 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot v(x) dx = - \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot v(x) dx.$$

Durch partielle Integration der linken Seite erhält man

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot v(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{dv(x)}{dx} dx = - \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot v(x) dx.$$

Aufgrund der Randwerte der Funktion v mit $v(0) = 0$ und $v(1) = 0$ erhält man

$$-\int_0^1 \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{dv(x)}{dx} dx = -\int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot v(x) dx.$$

Somit lautet die schwache Formulierung der Differenzialgleichung (32)

$$\int_0^1 \varphi'(x) \cdot v'(x) dx = \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot v(x) dx. \quad (64)$$

4.4.2 Zerlegung in Teilgebiete, Galerkin-Methode

Mit der Zerlegung des ursprünglichen Gebietes Ω in endlich viele Teilgebiete wird die schwache Formulierung der Differenzialgleichung (63) diskretisiert. Diese Diskretisierung ist eine Galerkin-Methode mit einer speziellen Wahl des Unterraumes $H_h \subset H_0^1(\Omega)$ (siehe [1, Kapitel 12.4.4, Seite 496]). Man löst das ursprüngliche Problem, welches sich auf den unendlich dimensionalen Raum $H_0^1(\Omega)$ erstreckt, als Variationsproblem in einem endlich dimensionalen Unterraum H_h .

Eine zulässige Zerlegung des Gebietes Ω nennt sich Triangulierung von Ω . Dazu teilt man Ω in n Teilgebiete T_i die folgende Eigenschaften erfüllen müssen.

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i$
- $T_i \cap T_j$ ist für alle $i \neq j$ leer oder ein gemeinsamer Punkt (ein sogenannter Knoten) oder eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Fläche (wir schreiben dann $T_i \cap T_j = \{\}$ für alle $i \neq j$)

Diese Teilgebiete lassen sich zur Menge $T_h = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ zusammenfassen. h gibt dabei den maximalen Durchmesser aller Teilgebiete an. h ist somit auch ein Maß der Feinheit der Diskretisierung. Die richtige Wahl der Feinheit der Diskretisierung ist ausschlaggebend für die Qualität des Ergebnisses. Wird das Gebiet Ω in nur wenige Teilgebiete zerlegt ist der entstehende Rechenaufwand auch sehr gering, jedoch ist auch der Diskretisierungsfehler sehr groß. Wird Ω hingegen sehr fein zerlegt steigt wiederum der Rechenaufwand. Gesucht ist somit der geringste Rechenaufwand der sich innerhalb einer gewissen Fehlertoleranz befindet. Es ist auch möglich gewisse Teile von Ω feiner zu triangulieren als andere um so den Rechenaufwand zu minimieren aber die Approximation der gesuchten Lösung nicht zu verschlechtern. Intelligente Programme die adaptiv die Triangulation vornehmen sind Teil der aktuellen Forschung. Bei den Teilgebieten der Triangulation handelt es sich im eindimensionalen

Fall um Strecken, im zweidimensionalen Fall meistens um Dreiecke und im dreidimensionalen Fall meistens um Tetraeder. Es können aber auch andere geometrische Figuren wie Vierecke oder Quader zur Anwendung kommen.

Sobald man eine Triangulation T_h von Ω hat werden jedem dieser Teilräume sogenannte Ansatzfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ zugeordnet. Gesucht ist nun als Approximation zur Lösung φ , entweder aus $H^1(\Omega)$ für die Problemstellung (32) - (33) oder aus $H_0^1(\Omega)$ für Problemstellung (32), (34), die Funktion φ_h . φ_h ist eine Linearkombination der Ansatzfunktionen mit

$$\varphi_h = c_0 \cdot \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot \varphi_i + c_n \cdot \varphi_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (65)$$

und ist ein Element des endlich dimensionalen Unterraums H_h . H_h sei nun der Raum der stückweise linearen Finiten-Elemente (siehe [1, (12.104), Seite 497]. Für Randwerte gleich Null erhält man

$$S_h = \{v \in C(\Omega) | v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ und } v|_T \in \Pi_1 \text{ für alle } T \in T_h\} \quad (66)$$

und für Randwerte ungleich Null

$$\tilde{S}_h = \{v \in C(\Omega) | v|_{\partial\Omega} = \text{entsprechend der Randwerte und } v|_T \in \Pi_1 \text{ für alle } T \in T_h\} \quad (67)$$

mit Π_1 als den Raum der Polynome vom Grad eins. Aus [1, Lemma 12.33, Seite 489]

Lemma 4.6. *Sei Ω aufgeteilt in offene Teilgebiete Ω_i , $1 \leq i \leq n$, wobei jedes Teilgebiet einen stückweise glatten Rand hat (z.B. Dreieck in 2D) und $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \{\}$ für alle $i \neq j$. Für jedes $u \in C(\bar{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ und $u \in C^1(\bar{\Omega}_i)$, $i = 1, \dots, n$, gilt $u \in H_0^1(\Omega)$.*

folgt, dass S_h ein Teilraum von H_0^1 ist und somit der gesuchte endlich dimensionierte Unterraum H_h .

Durch diese Diskretisierung erhält man nun das diskrete Modellproblem der schwachen Formulierung (63)

$$\begin{aligned} & \text{Gesucht } \varphi_h \in \tilde{S}_h, \text{ so dass} \\ & - \int_{\Omega} \nabla \varphi_h(x) \cdot \nabla v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx \quad (68) \\ & \text{für alle } v_h \in S_h \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lax-Milgram [1, Satz 12.35 (Lax-Milgram), Seite 490]

Satz 4.7. Sei $(H, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum und $k(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit folgenden Eigenschaften: Es existieren Konstanten $0 < \gamma \leq \Gamma < \infty$, so dass

$$k(v, v) \geq \gamma \|v\|^2 \text{ für alle } v \in H \text{ (H-Elliptizität)} \quad (69)$$

$$k(u, v) \leq \Gamma \|u\| \|v\| \text{ für alle } u, v \in H \text{ (Beschränktheit)} \quad (70)$$

Sei $G \in H'$. Dann ist die Aufgabe

$$\text{Gesucht } u \in H, \text{ so dass } k(u, v) = G(v) \text{ für alle } v \in H \quad (71)$$

eindeutig lösbar.

lässt sich auf die Eindeutigkeit der Lösbarkeit dieser diskretisierten Problemstellung schließen (siehe [1, Lemma 12.37, Seite 492]). Dabei entspricht $k(u, v)$ dem Ausdruck $k(\varphi_h, v_h) = - \int_{\Omega} \nabla \varphi_h(x) \cdot \nabla v_h(x) dx$ und $G(v)$ entspricht $G(v_h) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx$.

Die Zerlegung von Ω (15) der Problemstellung in Kapitel 2.8 in Teilgebiete erfolgt der Einfachheit halber, wieder durch gleich große Streckenabschnitte der Länge $h = \frac{1}{n}$ wie in Abbildung 7 dargestellt. Dadurch erhält man $n + 1$ Stellen mit $x_i = h \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, n$ und es ergeben sich n Teilgebiete mit $T_i = [x_{i-1}; x_i] \subset \Omega$ mit $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Diese Zerlegung erfüllt die Bedingung $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i = [0, 1]$ und die Bedingung dass $T_i \cap T_j$ für alle $i \neq j$ leer ist oder einen gemeinsamen Punkt ergibt. Für zwei benachbarte Teilstücke erhält man $T_i \cap T_{i+1} = x_i$ das einem Knoten der finiten Elemente entspricht. Somit ist diese Zerlegung von Ω zulässig und es handelt sich um eine Triangulation.

4.4.3 Basisfunktionen

Für die Testfunktionen v_h und die Ansatzfunktionen φ_h sollen nun Basisfunktionen bestimmt werden. Diese müssen für v_h und φ_h nicht die selben sein, sondern es können auch unterschiedliche Basisfunktionen gewählt werden, Da S_h endlich dimensional ist lässt sich eine Menge von Basisfunktionen finden

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}\} \subset S_h$$

die linear unabhängig sind und somit

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot \Phi_i = 0$$

Durch die Wahl der Funktion $v(x) = \Phi_j(x)$ mit $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ erhält man das diskrete Modellproblem der schwachen Formulierung

$$\int_0^1 \varphi'_h(x) \Phi'_j(x) dx = \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi_j(x) dx. \quad (77)$$

4.4.4 Aufstellen des Gleichungssystems

Der nächste Schritt ist es aus der diskretisierten Problemstellung (77) ein lineares Gleichungssystem der Form $A \cdot \vec{c} = \vec{f}$ aufzustellen. Durch die folgende Umformung der linken Seite

$$\int_0^1 \varphi'_h(x) \Phi'_j(x) dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot \Phi'_i(x) \cdot \Phi'_j(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot \int_0^1 \Phi'_i(x) \cdot \Phi'_j(x) dx$$

ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi'_1 \cdot \Phi'_1 dx \cdot c_1 + \int_0^1 \Phi'_2 \cdot \Phi'_1 dx \cdot c_2 + \dots + \int_0^1 \Phi'_{n-1} \cdot \Phi'_1 dx \cdot c_{n-1} &= \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi_1 dx \\ \int_0^1 \Phi'_1 \cdot \Phi'_2 dx \cdot c_1 + \int_0^1 \Phi'_2 \cdot \Phi'_2 dx \cdot c_2 + \dots + \int_0^1 \Phi'_{n-1} \cdot \Phi'_2 dx \cdot c_{n-1} &= \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi_2 dx \\ &\vdots = \vdots \\ \int_0^1 \Phi'_1 \cdot \Phi'_{n-1} dx \cdot c_1 + \int_0^1 \Phi'_2 \cdot \Phi'_{n-1} dx \cdot c_2 + \dots + \int_0^1 \Phi'_{n-1} \cdot \Phi'_{n-1} dx \cdot c_{n-1} &= \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi_{n-1} dx \end{aligned}$$

Mit

$$a_{j,i} = \int_0^1 \Phi'_j \cdot \Phi'_i dx \quad (78)$$

und

$$f_j = \int_0^1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi_j dx = \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \int_0^1 \Phi_j dx \quad (79)$$

lässt sich das Gleichungssystem in der folgenden Matrixschreibweise darstellen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für die Integrale in (79) muss nur $\int_0^1 \Phi_j dx$ bestimmt werden. Dieses ist für alle Φ_j auf Ω gleich

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} : \int_0^1 \Phi_j dx = h$$

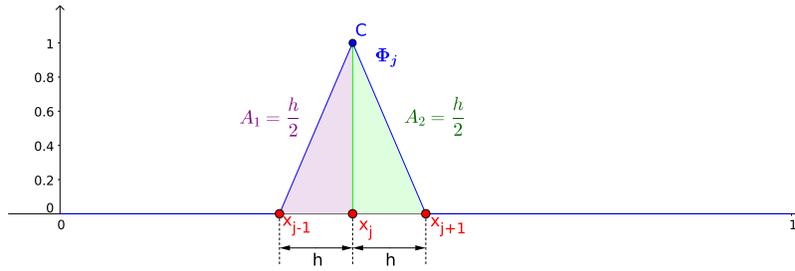


Abbildung 11: Integral einer Hutfunktion Φ_j über Ω

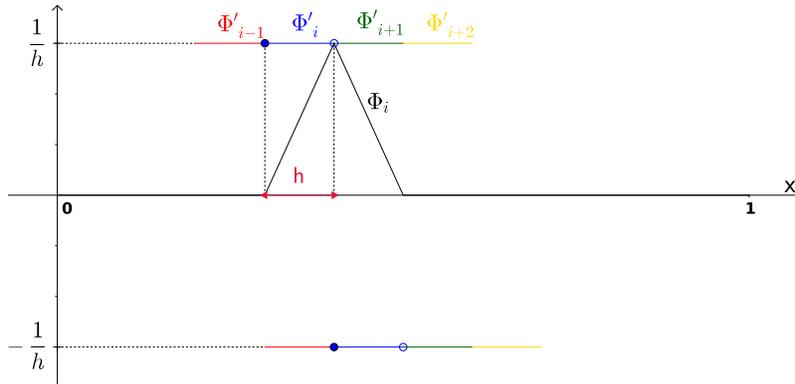


Abbildung 12: Ableitung mehrerer Hutfunktionen Φ_j mit $j \in \{i - 1, i, i + 1, i + 2\}$ über Ω

In Abbildung 11 ist eine der Hutfunktionen $\Phi_j(x)$ dargestellt. Das Integral entspricht der Fläche des Dreiecks mit einer Länge von $2h$ und einer Höhe von 1 wodurch sich die Dreiecksfläche von h ergibt.

Für die Integrale in (78) ist zuerst die Ableitung von $\Phi_i(x)$ von interesse.

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{wenn } x_{i-1} \leq x < x_i \\ -\frac{1}{h} & \text{wenn } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (80)$$

Das Produkt $\Phi_i \cdot \Phi_j$ ist nur für $j = i$ und benachbarte $j = i \pm 1$ relevant. Für alle anderen Fälle ist das Produkt und somit auch das Integral gleich Null. Abbildung 12 zeigt diesen Sachzusammenhang. Φ'_i überschneidet sich noch mit den beiden angrenzenden Ableitungen Φ'_{i-1} und Φ'_{i+1} . Bei Φ'_{i+2} ist der Wert von Φ'_i und somit auch das Produkt der beiden Ableitungen immer Null.

$$\int_0^1 \Phi'_i(x) \cdot \Phi'_j(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{wenn } j = i \\ -\frac{1}{h} & \text{wenn } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (81)$$

Mit den berechneten Integralen vereinfachen sich die Matrizen A und f auf

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot h \end{pmatrix} \quad (82)$$

Wie bei den finiten Differenzen ergibt sich eine schwachbesetzte Matrix A . Dies hat wieder den Vorteil, dass dieses Gleichungssystem effizient gelöst werden kann.

Durch Herausheben von $\frac{1}{h}$ aus der Matrix A und einer Division der Gleichung durch $-h$ erhält man eine ähnliche Form

$$\frac{1}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Die Matrix A ist für die als Basisfunktion gewählte Hutfunktion identisch mit der Matrix aus den finiten Differenzen (51). Somit gelten alle Aussagen aus Kapitel 4.3.3 über die Matrix A der finiten Differenzen auch für die Matrix A aus den finiten Elementen.

Wie bereits bei den finiten Differenzen zu sehen war ist die erste Problemstellung (33) mit ihrer linearen Lösung nicht sehr spektakulär in ihrer Aussagekraft über die Näherung. Daher soll hier gleich auf die zweite Problemstellung (34) eingegangen werden. Die Gleichungssysteme scheinen bis auf die Vektoren $\vec{\varphi}$ auf den ersten Blick sehr ähnlich denen der finiten Differenzen zu sein. Für dem Fall $n = 4$ erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \end{pmatrix} \quad (84)$$

Im direkten Vergleich mit dem Gleichungssystem (56) ist zu erkennen, dass diese beiden Gleichungssysteme bis auf den Lösungsvektor gleich sind. So erhält man für $n = 7$ wie bei den finiten Differenzen (57) ein Gleichungssystem sechsten Grades

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \\ \frac{10^{-9}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \end{pmatrix} \quad (85)$$

4.4.5 Approximation der kontinuierlichen Lösung

Im Gegensatz zur Methode der finiten Differenzen werden mit der Methode der finiten Elemente durch das Lösen des Gleichungssystems (83) keine Funktionswerte sondern die Koeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_n - 1$ der Ansatzfunktionen bestimmt. Mit diesen kann die Lösung der diskreten Problemstellung (77) ermittelt werden

$$\varphi_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot \Phi_i(x), \quad x \in [0, 1].$$

Als erstes soll der Fall $n = 4$ behandelt werden. Daraus ergibt sich ein $h = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ und somit eine Triangulation mit vier Teilgebieten $T_h = \{[0; 0, 25], [0, 25; 0, 5], [0, 5; 0, 75], [0, 75; 1]\}$. Neben den Randknoten in $\partial\Omega$ gibt es drei weitere Knoten $x_1 = 0, 25, x_2 = 0, 5$ und $x_3 = 0, 75$. Die Teilgebiete und zugehörigen Basisfunktionen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 sind in Abbildung 13 dargestellt. Aus dem zugehörigen Gleichungssystem (84) kann der Koeffizientenvektor $\vec{c} = (10, 5884; 14, 1179; 10, 5884)^T$ ermittelt werden. Mit den Randwerten in (34) erhält man $c_0 = 0$ und $c_4 = 0$ und damit die Lösung

$$\varphi_h = 10, 5884 \cdot \Phi_1 + 14, 1179 \cdot \Phi_2 + 10, 5884 \cdot \Phi_3.$$

Die mit c gewichteten Hutfunktionen sind in Abbildung 14 dargestellt. Der daraus resultierende Funktionsgraph der diskreten Lösung φ_h ist im Vergleich zur analytischen Lösung φ in Abbildung 15 dargestellt. Vergleicht man den Funktionsgraphen von φ_h mit dem von φ_d aus Abbildung 6 erkennt man, dass diese zwei Funktionsgraphen übereinstimmen. Es wurde für diese einfache Problemstellung mit zwei unterschiedlichen Methoden das selbe Ergebnis erzielt. Jedoch hat die Methode der finiten Elemente eine weitaus schwächere Bedingung an die Lösung.

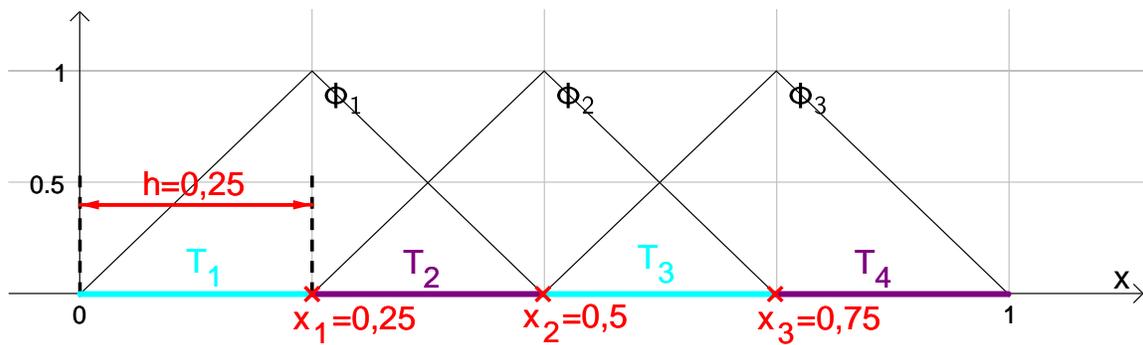


Abbildung 13: Triangulation von Ω und Basisfunktionen Φ für $n = 4$.

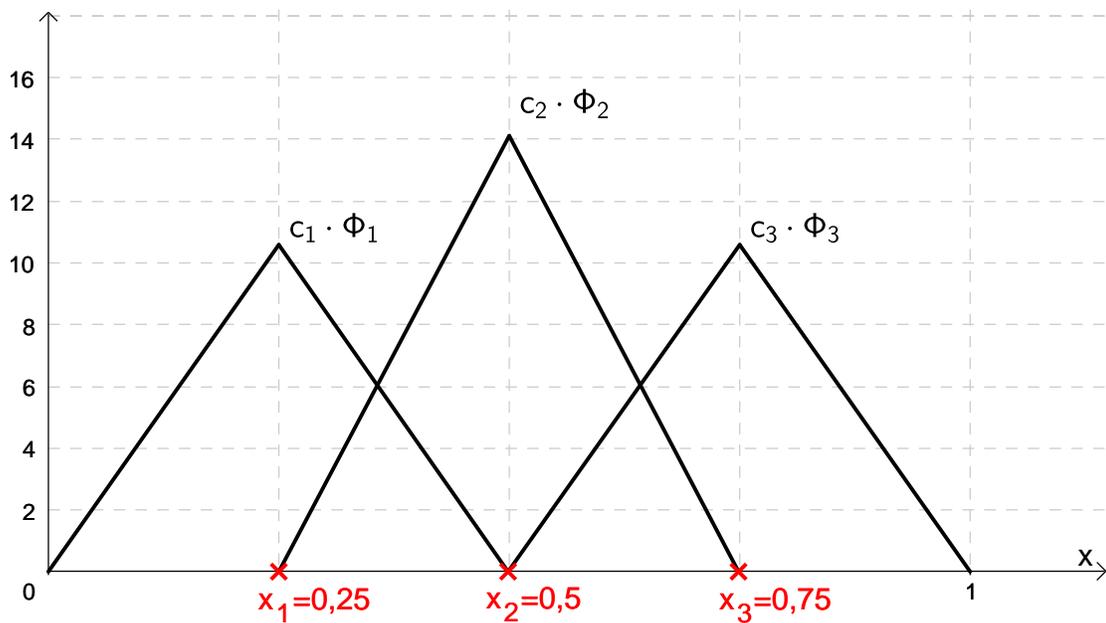


Abbildung 14: Mit c gewichteten Hutfunktionen $c_i \cdot \Phi_i$.

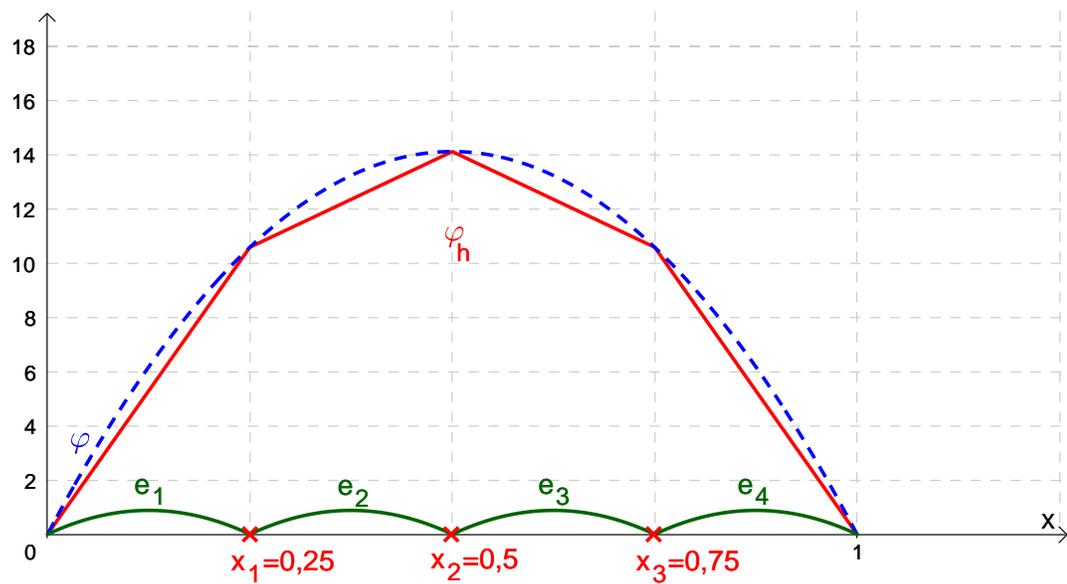


Abbildung 15: Funktionsgraph der Approximation φ_h für $n = 4$ (in Rot) und der analytischen Lösung φ (in Blau). Die Funktionen e_1 bis e_4 (in Grün) stellen den Approximationsfehler $\varphi - \varphi_h$ dar.

4.4.6 Diskretisierungsfehleranalyse

Eine zentrale Rolle zur Fehleranalyse bildet das Cea-Lemma [1, Lemma 12.38 (Cea), Seite 493], dessen Beweis auch auf [1, Seite 493] zu finden ist.

Lemma 4.8. *Es sei vorausgesetzt, dass $(H, \|\cdot\|)$, $k(\cdot, \cdot)$ und $G(\cdot)$ die Annahmen von Satz 4.7 erfüllen. Seien u , u_h die eindeutigen Lösungen von (63) beziehungsweise (68). Dann gilt*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\Gamma}{\gamma} \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\| \quad (86)$$

Für die Poisson-Gleichung gilt insbesondere $\gamma = \Gamma = 1$.

Im Gegensatz zur Fehleranalyse der finiten Differenzen liegen hier die exakte und die approximierte Lösung in dem selben unendlich dimensionalen Raum $H_0^1(\Omega)$ (siehe [1, Seite 502]). Daher wird auch der Fehler $e_h = u - u_h$ in diesem Raum H_0^1 gemessen im Gegensatz zu (58).

Ähnlich wie beim Differenzenverfahren in Kapitel 4.3.5 „Konsistenz + Stabilität \Rightarrow Konvergenz“ gilt, gilt für die finiten Elemente (siehe [1, Seite 502])

Approximation + Stabilität \Rightarrow Konvergenz

Der Approximationsfehler ist durch $\min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|$, aus Lemma 4.8, definiert. Folgte die Stabilität bei den finiten Differenzen aus der Beschränktheit des Lösungsoperators (60) folgt die Stabilität der finiten Elemente aus dem Lax-Milgram-Satz 4.7. So erhält man aus Gleichung [1, (12.111), Seite 503] und der H-Elliptizität die Stabilitätskonstante $\frac{1}{\gamma}$.

Für die Fehlerabschätzung bei elliptischen Randwertproblemen gilt nach [1, (12.112), Seite 503]

$$\|u - u_h\|_m \leq Ch^{k-m} |u|_k, \quad m \in \{0, 1\} \quad (87)$$

mit

Semi-Norm nach [1, Seite 501] $|u|_k^2 := \sum_{i+j=k} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$

m : Glattheitsordnung der Norm für den Fehler

k : Ordnung der Differenzierbarkeit der Approximation u_h

C : Konstante unabhängig von h und u

Im Falle von linearen finiten Elementen erhält man

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch|u|_2$$

und nach dieser Bedingung nimmt der Approximationsfehler linear mit h ab.

5 Implementierung

Dieses Kapitel beinhaltet zwei einfache Implementierungen in Octave, mit denen man die Problemstellung (39) lösen kann.

5.1 Methode der finiten Differenzen

Um die eindimensionale Problemstellung mit der Methode der finiten Differenzen zu lösen wird die Funktion *differenzen* verwendet, deren Source-Code in der Datei *differenzen.m* gespeichert ist. Der Source-Code der Funktionen ist:

```
1 function differenzen(n, lambda, phi_0, phi_1)
2   epsilon_0 = 8.854 * 10^-12;
3   h = 1/n;
4
5   diff_matrix = 1 / h^2 * ( -2 * eye(n) ...
6                           + diag(ones(n-1,1),1) ...
7                           + diag(ones(n-1,1),-1) );
8
9   f = lambda / epsilon_0 * ones(n,1);
10  f(1) = f(1) - phi_0 / h^2;
11  f(n) = f(n) - phi_1 / h^2;
12
13  phi = inv(diff_matrix) * f;
14
15  phi_plot = ones(n+1,1);
16  phi_plot(1) = phi_0;
17  phi_plot(n+1) = phi_1;
18  for i=1:1:n-1
19    phi_plot(i+1) = phi(i);
20  end
21
22  plot(0:h:1, phi_plot)
23
24 endfunction
```

Die Übergabeparameter der Funktion *differenzen* sind n als Maß der Diskretisierung λ als die Linienladungsdichte der eindimensionalen Poisson-Gleichung (32) ϕ_0 als Randwert an der Stelle $x = 0$ und ϕ_1 als Randwert an der Stelle

$x = 1$. In Zeile 5 wird die Matrix A aus Gleichung (51) als *diff_matrix* erstellt. In Zeile 9 wird der Vektor \vec{f} aus Gleichung (51) als f erstellt und in den Zeilen 10 und 11 die Randwerte hinzugefügt. In Zeile 13 wird das Gleichungssystem (51) gelöst. Zur grafischen Darstellung wird der Vektor *phi_plot* aus Zeile 15 verwendet, da *phi* nicht die Randwerte beinhaltet. In Zeile 16 und 17 werden *phi_plot* die Randwerten *phi_0* und *phi_1* zugeordnet und mittels einer for-Schleife die Werte von *phi*. Zeile 22 ist für die grafische Ausgabe der Lösung inklusive Randwerte *phi_plot* verantwortlich.

A Mathematische Modelle

Da sich der Fokus dieser Arbeit auf den Vergleich unterschiedlicher Methoden zur diskreten Behandlung physikalischer Modelle bezieht, beschränkt sie sich auf reelle Mengen und den reellen euklidischen Raum \mathbb{R}^n .

A.1 Skalar- und Vektorfeld

Unter einem Feld versteht man eine räumliche Zuordnung einer physikalischen Größe. Die Art der physikalischen Größe entscheidet, welches Feld man erhält. Ist die Größe durch einen einfachen Zahlenwert (einen Skalar) darstellbar, spricht man von einem Skalarfeld.

Definition A.1. *Ein Skalarfeld s ist eine Abbildung, die jeden Punkt X einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, auf ein Skalar $s(X) \subset \mathbb{R}$ abbildet.*

$$s : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{88}$$

Beispiele für Skalarfelder sind die Temperatur, das elektrostatische Potential, die Dichte eines Körpers oder die Luftfeuchtigkeit.

Ist zur Beschreibung der physikalischen Größe nicht nur der Betrag der Größe wichtig, sondern auch die Richtung, spricht man von einem Vektorfeld.

Definition A.2. *Ein Vektorfeld v ist eine Abbildung, die jedem Punkt X einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, auf einen Vektor $v(X) \subset \mathbb{R}^n$ abbildet.*

$$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{89}$$

Beispiele für Vektorfelder sind Kraftfelder, die elektrische Feldstärke, Geschwindigkeitsfelder oder die Wärmestromdichte.

Ist für die Erfassung einer physikalischen Größe mehr nötig als nur der Betrag und die Richtung wird diese durch Tensoren höherer Stufe dargestellt. Man spricht in einem solchen Fall von einem Tensorfeld. Für weitere Informationen zu Tensorfeldern wird auf die Literatur [6] verwiesen.

A.2 Gradient

Oft ist die räumliche Änderungsrate eines Skalarfeldes von Interesse. Ein wichtiges analytisches Werkzeug ist dabei der Gradient. Durch diesen kann für jeden Punkt des Raumes der stärkste Anstieg und seine Richtung bestimmt werden.

Der Gradient ist ein Differentialoperator, den man auf ein Skalarfeld anwenden kann. Dieser wird oft über den vektoriiellen Differentialoperator $\vec{\nabla}$ dargestellt.

Definition A.3. Für den Differentialoperator $\vec{\nabla}$ für kartesische Koordinaten, mit den Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ gilt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (90)$$

Somit kann jedem Punkt des Skalarfeldes ein Vektor zugeordnet werden, dessen Länge die maximale Änderungsrate in diesem Punkt repräsentiert, und man erhält ein sogenanntes Gradientenfeld.

Definition A.4. Das Gradientenfeld eines stetig partiell differenzierbaren Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Produkt des Nablaoperators $\vec{\nabla}$ mit dem Skalarfeld f

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (91)$$

Da durch das Gradientenfeld jedem Punkt in \mathbb{R}^n ein Vektor zugeordnet wird handelt es sich um ein Vektorfeld. Die Koordinaten vieler Kraftfelder sind nach Dirschmid [6, Seite 191] die partiellen Differentialquotienten eines Skalarfeldes. Ein solches Gradientenfeld ist ein konservatives Kraftfeld (siehe A.5).

A.3 Divergenz

Wird der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ nicht auf ein Skalarfeld sondern mittels Skalarprodukt auf ein Vektorfeld angewendet erhält man die Divergenz.

Definition A.5. Die Divergenz eines stetig partiell differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist das Produkt des Nablaoperators $\vec{\nabla}$ mit dem Vektorfeld \vec{f}

$$\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z. \quad (92)$$

Somit ist die Divergenz ein Skalarfeld welches aus einem Vektorfeld abgeleitet wird. Die Divergenz wird auch als Quellenstärke bezeichnet (vergleiche [6, Seite 195]). Dieser Begriff kommt aus der Betrachtung eines Strömungsfeldes mit Quellen und Senken. Quellen haben dabei eine positive und Senken eine negative Divergenz. Das Vektorfeld entspringt somit den Quellen und endet in den Senken. Ist $\text{div}(\vec{f}) = 0$ bedeutet dies, dass das Vektorfeld \vec{f} quellenfrei ist.

A.4 Rotation

Wie bei der Divergenz wird der Differenzialoperator $\vec{\nabla}$ auf ein Vektorfeld angewendet, bei der Rotation jedoch nicht mit einem inneren Produkt sondern mit einem Vektorprodukt.

Definition A.6. Die Rotation eines stetig partiell differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist das Vektorprodukt des Nablaoperators $\vec{\nabla}$ mit dem Vektorfeld \vec{f}

$$\text{rot}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} = (\partial_y f_z - \partial_z f_y)\vec{e}_x + (\partial_z f_x - \partial_x f_z)\vec{e}_y + (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\vec{e}_z \quad (93)$$

Der Begriff Rotation kommt aus der Fluidmechanik. Dem Strömungsfeld \vec{f} einer Flüssigkeit wird durch $\text{rot}(\vec{f})$ für jeden Ort die Geschwindigkeit zugeordnet, mit der sich ein Körper in der Flüssigkeit dreht. Man nennt solche rotierenden Felder Wirbelfelder. Der elektrische und magnetische Fluss sind keine materiellen Flüsse im klassischen Sinn sondern weisen nur ähnliche mathematische Eigenschaften wie Flüssigkeiten auf. So können magnetische und elektrische Felder auch Wirbelfelder sein beziehungsweise wirbelfrei sein.

A.5 Konservatives Feld

Ein konservatives Feld \vec{f} ist ein Vektorfeld bei dem jedes Integral über eine geschlossene Kurve K gleich Null ist. Es gilt

$$\oint_K \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (94)$$

Das bedeutet, dass jedes Linienintegral nur vom Anfangs- und dem Endpunkt der Kurve abhängig ist und nicht vom Verlauf der Kurve zwischen diesen Punkten. Weiters existiert ein Skalarfeld s für das gilt $s = \text{grad}(\vec{f})$. \vec{f} ist somit das Gradientenfeld von s . Dadurch lassen sich Linienintegrale vereinfachen auf

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = s(\vec{r}_2) - s(\vec{r}_1) \quad (95)$$

Linienintegrale sind nur noch von Anfangs- und Endpunkt abhängig und nicht vom Verlauf der Kurve zwischen diesen beiden Punkten. Ist somit das Skalarfeld s bekannt, lassen sich beliebige Linienintegrale durch eine einfache Subtraktion ersetzen.

Betrachtet man ein konservatives Kraftfeld physikalisch so erhält man durch ein Linienintegral die gewonnene oder investierte Arbeit beziehungsweise Energie. Durchläuft man in einem konservativen Kraftfeld eine beliebige geschlossene Kurve

verliert oder gewinnt man somit keine Energie. Die physikalische Arbeit ist daher auch nur von Anfangs- und Endpunkt einer Strecke abhängig.

Für ein konservatives Feld \vec{f} gilt weiters, dass $\text{rot}(\vec{f}) = 0$ ist. Umgekehrt lässt sich von einem Verschwinden der Rotation nicht auf ein konservatives Feld schließen. Es handelt sich somit um ein notwendiges Kriterium, jedoch nicht um ein hinreichendes.

B Physikalische Modelle

B.1 Maxwell-Gleichungen

Um elektromagnetische Phänomene zu beschreiben verwendet man in der Physik die Maxwell-Gleichungen. Diese ermöglichen es, elektromagnetische Phänomene vollständig mathematisch zu modellieren.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die verwendeten physikalischen Größen, Abkürzungen und Einheiten.

Physikalische Größe	Bezeichnung	Einheit
elektrische Spannung	U	Volt (V)
magnetische Spannung	V	Ampere (A)
elektrische Stromstärke	I	Ampere (A)
elektrischer Fluss	Ψ	Coulomb (C)
magnetischer Fluss	Φ	Weber (Wb)
elektrische Ladung	Q	Coulomb (C)
elektrische Feldstärke	\vec{E}	Volt pro Meter ($\frac{\text{V}}{\text{m}}$)
magnetische Feldstärke	\vec{H}	Ampere pro Meter ($\frac{\text{A}}{\text{m}}$)
elektrische Stromdichte	\vec{J}	Ampere pro Quadratmeter ($\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$)
elektrische Flussdichte	\vec{D}	Coulomb pro Quadratmeter ($\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$)
magnetische Flussdichte	\vec{B}	Tesla (T)
Ladungsdichte	ϱ	Coulomb pro Kubikmeter ($\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$)

Die Gleichungen (96) sind die globalen Darstellungsformen der Maxwell-Gleichungen. Die erste Gleichung (96a) ist das Induktionsgesetz. Gleichung 96b beschreibt den magnetischen Hüllenfluss und dadurch die Quellenfreiheit magnetischer Felder. Gleichung 96c beschreibt den Ampere-Maxwell-Satz. Gleichung 96d beschreibt den elektrischen Hüllenfluss und 96e die Erhaltung der elektrischen Ladung.

$$U(\partial A) = -\partial_t \Phi(A) \tag{96a}$$

$$\Phi(\partial V) = 0 \quad (96b)$$

$$V(\partial A) = I(A) + \partial_t \Psi(A) \quad (96c)$$

$$\Psi(\partial V) = Q(V) \quad (96d)$$

$$I(\partial V) = -Q(V) \quad (96e)$$

Durch das **Induktionsgesetz** (96a) wird beschrieben, dass durch eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ durch eine Fläche eine Spannung hervorgerufen wird. Dies bedeutet, dass Änderungen des Magnetfeldes elektrische Felder zur Folge hat. Dieser Effekt wird als Induktion bezeichnet und findet zum Beispiel Anwendung bei Induktionskochplatten. Bei diesen wird durch ein sich änderndes Magnetfeld eine Spannung im Boden eines Kochtopfes hervorgerufen. Diese Spannung führt zu elektrischen Strömen, die den Kochtopf erwärmen.

Durch den **magnetische Hüllenfluss** (96b) wird beschrieben, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche gleich Null ist. Dies bedeutet, dass der magnetische Fluss in sich geschlossen ist und somit keine Quellen und Senken hat. Daher sind magnetische Felder im Gegensatz zu elektrischen Feldern quellenfrei und es gibt keine magnetischen Ladungen.

Der **Ampere-Maxwell-Satz** (96c) ist dem Induktionsgesetz ähnlich. So wie ein sich ändernder magnetischer Fluss elektrische Spannungen hervorruft, verursacht ein sich ändernder elektrischer Fluss Ψ eine magnetische Spannung. Im Vergleich zum Induktionsgesetz kommt jedoch noch eine zusätzliche Ursache für eine magnetische Spannung hinzu, der elektrische Strom $I(A)$ der durch die Fläche A fließt. Dieser Unterschied lässt sich durch elektrische Ladung erklären, da der elektrische Strom eine zeitliche Änderungsrate elektrischer Ladung ist $I(A) = \partial_t Q(A)$ und es nach heutigem Wissensstand keine magnetische Ladungen gibt und somit auch keinen magnetischen Strom, der eine elektrische Spannung hervorrufen würde. Das Phänomen, dass elektrischer Strom magnetische Spannung hervorruft wird bei Elektromagneten verwendet. Somit lässt sich durch Ausschalten des Stromes im Gegensatz zum Dauermagneten auch der Elektromagnet wieder ausschalten.

Der **elektrische Hüllenfluss** (96c) ist das elektrische Äquivalent zum magnetischen Hüllenfluss. Durch die Existenz von elektrischen Ladungen müssen elektrische Flüsse jedoch nicht in sich geschlossen sein. Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche entspricht somit der in dieser Fläche eingeschlossenen elektrischen Ladung Q .

Durch die **Erhaltung der elektrischen Ladung** (96e) wird modelliert, dass elektrische Ladung nicht einfach verschwinden oder erscheinen kann. Die elektrische Ladung ist ähnlich der Masse eine Erhaltungsgröße. Die Änderung von Ladungen innerhalb eines Volumens V ist somit die Summe der durch die Oberfläche des Volumens ∂V fließenden elektrischen Ströme.

Die Gleichungen 97 sind die lokalen Darstellungsformen der Maxwell-Gleichungen. Die globalen Größen werden, wie in folgender Tabelle ersichtlich, durch lokale Größen ersetzt.

globale Größe	lokale Größe
elektrische Spannung U	elektrische Feldstärke \vec{E}
magnetische Spannung V	magnetische Feldstärke \vec{B}
elektrischer Fluss Ψ	elektrische Flussdichte \vec{D}
magnetischer Fluss Φ	magnetische Flussdichte \vec{H}
elektrischer Strom I	elektrische Stromdichte \vec{J}
elektrische Ladung Q	elektrische Ladungsdichte ϱ

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (97a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (97b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \cdot \vec{D} \quad (97c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad (97d)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho \quad (97e)$$

Sowohl in der globalen als auch der lokalen Darstellung lässt sich eine Asymmetrie in den sonst ähnlichen Gleichungen 96a, 97a zu 96c, 97c und 96b, 97b zu 96d, 97d erkennen. Diese Asymmetrie kommt durch das Fehlen der magnetischen Ladung zustande. Dies hat zur Folge, dass in der Physik bis jetzt vergeblich nach sogenannten magnetischen Monopolen, die magnetischen Ladungen entsprechen, gesucht wurde.

Bei den Gleichungen 97d, 97b und 97e sieht man die Bedeutung der Divergenz A.3 als Quellenstärke. So hat die magnetische Flussdichte \vec{B} keine Quellen und Senken, der elektrische Fluss \vec{D} hingegen die elektrische Ladungsdichte und somit wieder die elektrische Ladung als Ursache. Aus den Gleichungen 97a und 97c ist ersichtlich, dass

die durch sich ändernden Flüsse und Ströme hervorgerufenen Felder durch die Rotation A.4 Wirbelfelder sind. Durch diese zwei Gleichungen werden das elektrische und magnetische Feld miteinander gekoppelt und man erhält das elektromagnetische Feld. Ein sich selbsterhaltendes elektromagnetisches Feld ist elektromagnetische Strahlung, welche auch durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben werden kann. Sehr bekannte Erscheinungsformen der elektromagnetischen Strahlungen sind Licht, Mikrowellen, Röntgenstrahlung als auch UV-Strahlung.

B.2 Gravitationsfeld

Ein weiterer physikalischer Anwendungsfall der Poisson-Gleichung ist das Gravitationsfeld (auch Schwerefeld genannt). Bei diesem handelt es sich wie beim elektrischen Feld um ein Kraftfeld. Die Ursachen des elektrischen Feldes sind elektrische Ladungen, daher handelt es sich um ein ladungsbezogenes Kraftfeld, während es sich bei einem Gravitationsfeld um ein massenbezogenes Kraftfeld handelt. Die Ursache der Kräfte sind somit Massen. Wo es bei elektrischen Kräften positive und negative Ladungen gibt die sich anziehen beziehungsweise abstoßen können, gibt es bei der Gravitation keine zwei unterschiedlichen Quellen der Kräfte und keine Abstoßung. Massen können sich nur gegenseitig anziehen. Relativistisch handelt es sich bei der Gravitation nur um eine Scheinkraft, da Massen sich nicht direkt anziehen sondern den Raum selbst krümmen und dann dem Raum folgen. Diese Arbeit beschränkt sich jedoch nur auf den Spezialfall der Newtonschen Gravitation und geht nicht auf relativistische Sachverhalte ein.

Vergleicht man das Coulomb-Gesetz (3) mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{r}_e \quad (98)$$

lassen sich erste Parallelen erkennen. r beschreibt wieder den Abstand zweier Massen mit \vec{r}_e als Einheitsvektor. Statt der Ladungen Q_1 und Q_2 sind jetzt die Massen m_1 und m_2 als Ursache der Anziehungskraft vorhanden. Der Vorfaktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ wird durch die Gravitationskonstante $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ ersetzt. Das Gravitationsfeld \vec{g} ist nun die massenbezogene Kraft (vergleiche mit (4))

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (99)$$

Wie in der Elektrostatik (Kapitel 2.6) lässt sich auch für das Gravitationsfeld ein Potential einführen, das Gravitationspotential Φ . Das Gravitationsfeld ist dann das

Gradientenfeld dieses Potentials

$$\vec{g} = \text{grad}(\Phi) = \vec{\nabla}\Phi. \quad (100)$$

Weiters muss die elektrische Ladungsdichte ϱ durch die Massendichte ρ ersetzt werden. Dadurch erhält man die Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (101)$$

Abbildungsverzeichnis

1	Coulomb Kraft	8
2	Elektrisches Feld einer positiven und negativen Punktladung. Links als Vektorfeld. In der Mitte mit Feldlinien. Rechts mit Äquipotentiallinien.	10
3	Wassermolekül (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:H2O_Polarization_V.2.svg?uselang=de) und Polarisierung von Dipolen durch ein elektrisches Feld (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole_im_elektrischen_Feld.svg)	11
4	Modell des zylinderförmigen Körpers	15
5	Funktionsgraph der Funktionsgleichung 39 der Lösung für $\lambda = 0 \frac{C}{m}, \varphi(0) = 0 V, \varphi(1) = 14 V$	25
6	Funktionsgraph der Funktionsgleichung 41 der Lösung für $\lambda = 10^{-9} \frac{C}{m}, \varphi(0) = 0 V, \varphi(1) = 0 V$	26
7	Diskretisierung des Modells des zylinderförmigen Körpers	27
8	Approximation der stetigen Lösungsfunktion $\varphi_1(x) = 14 \cdot x$ für unterschiedliche n	32
9	Approximation der stetigen Lösungsfunktion $\varphi_2(x) = -\frac{\lambda}{2\epsilon} \cdot (x^2 - x)$ für unterschiedliche n	33
10	Darstellung der Hutfunktionen Φ_i auf Ω	41
11	Integral einer Hutfunktion Φ_j über Ω	43
12	Ableitung mehrerer Hutfunktionen Φ_j mit $j \in \{i - 1, i, i + 1, i + 2\}$ über Ω	43
13	Triangulation von Ω und Basisfunktionen Φ für $n = 4$	46
14	Mit c gewichteten Hutfunktionen $c_i \cdot \Phi_i$	46
15	Funktionsgraph der Approximation φ_h für $n = 4$ (in Rot) und der analytischen Lösung φ (in Blau). Die Funktionen e_1 bis e_4 (in Grün) stellen den Approximationsfehler $\varphi - \varphi_h$ dar.	47

Literatur

- [1] W. Dahmen, A. Reusken, *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler; Zweite korrigierte Auflage*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008
- [2] A. Prechtl, *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik Band 1*, Springer Wien 1994
- [3] A. Prechtl, *Vorlesungen über Elektrodynamik*, Wien 2005
- [4] G. A. Reider, *Photonik, Eine Einführung in die Grundlagen*, Springer Wien 2005
- [5] G. Fasching, *Werkstoffe für die Elektrotechnik*, Springer Wien 2005
- [6] H. J. Dirschmid, *Tensoren und Felder*, Springer Wien 1996