DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Modellierung wirtschaftlicher Prozesse mittels linearer Optimierung im computerunterstützten Mathematikunterricht“

verfasst von / submitted by

Dr. Nikolinka Fertala

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. i.R. Mag. Dr. Günter Hanisch

Danksagung

Die Verfassung einer Danksagung ist in meinen Augen sowohl mit Wehmut als auch mit Freude in Verbindung zu setzen. Die Wehmut entspringt aus der Tatsache, dass ein akademischer Lebensabschnitt zu Ende geht, die Freude deutet auf die Bereitschaft des Geistes an, sich auf neue wissenschaftlich herausfordernde Abenteuer einzulassen. Dieses persönliche Wechselspiel ist ohne die aktive Unterstützung von zahlreichen Mitmenschen nicht realisierbar.

Demgemäß ist an erster Stelle mein größter Dank dem Ao. Univ.-Prof. i.R. Mag. Dr. Günter Hanisch auszusprechen. Seine unkomplizierte und stets hilfsbereite, offene Art und Weise, mich bei der Verfassung dieser Arbeit zu betreuen und zu begleiten, schuf den Raum, mich möglichst optimal zu entfalten.

Abschließend gehört meine allertiefste Verbeugung und Danksagung meinem Mann Walter Fertala und meiner Mutter Argira Marinova für das Verständnis, welches sie für meine nie endendenden Aktivitäten im universitäreren Bereich aufbringen. Sie waren stets bereit, meine Freude und Leiden mit mir zu teilen. Mein Mann und mein Kollege MMag. Bernhard Weikmann stellten sich als Korrekturleser von diversen Kapiteln dankenswerterweise zur Verfügung. Ohne die außerordentliche und kontinuierliche Unterstützung der oben erwähnten Personen wäre die Verfassung dieser Diplomarbeit neben meiner vollen Lehrverpflichtung und Leitung der Fachgruppe „Naturwissenschaften“ nicht so leicht von Hand gegangen.

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG 1

1.1. Relevanz der linearen Optimierung für den Mathematikunterricht 3
1.2. Zielsetzung der Diplomarbeit 5
1.3. Gliederung der Diplomarbeit 6

2. GRUNDLAGEN DER LINEAREN OPTIMIERUNG 8

2.1. Lineare Optimierungsprobleme 9
2.1.1. Formen linearer Optimierungsprobleme 12
2.1.2. Grundlegende Eigenschaften linearer Optimierungsprobleme 17
2.1.3. Hauptsatz der linearen Optimierung 24
2.2. Grafische Lösung linearer Optimierungsproblemen in zwei Variablen 26

3. DAS SIMPLEXVERFAHREN 32

3.1. Grundversion des Simplexverfahrens 33
3.1.1. Basisabhängige Darstellung des linearen Optimierungsproblems 34
3.1.2. Durchführung des Simplexverfahrens 42
3.1.3. Phase I des Simplexverfahrens 52
3.2. Varianten des Simplexverfahrens 59
3.2.1. Das revidierte Simplexverfahren 59
3.2.2. Regeln zur Spalten- und Zeilenauswahl 62
3.2.3. Das duale Simplexverfahren 65

4. DISKRETE LINEARE OPTIMIERUNG 77

4.1. Grundbegriffe der diskreten Optimierung 77
4.2. Lösungsverfahren der diskreten Optimierung 82
4.2.1. Branch-and-Bound-Verfahren 83
4.2.2. Schnittebenenverfahren von Gomory 88

5. FACHDIDAKTISCHE ANALYSE 94

5.1. Lehrpläne und Grundkompetenzen 95
5.1.1. Lehrplan „Mathematik und angewandte Mathematik“ 96
5.1.2. Lehrplan „Rechnungswesen und Controlling“ 98
5.1.3. Grundkompetenzen und teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung 100
5.2. Computerunterstützter Mathematikunterricht 110
5.2.1. Tabellenkalkulationsprogramme 114
5.2.2. Computeralgebrasysteme 121
5.2.3. Dynamische Geometriesysteme 122

5.3. Lineare Optimierung in Schulbüchern 130
5.3.1. Mathematik anwenden HUM 131
5.3.2. Angewandte Mathematik @ HUM 132
5.3.3. Kompetenz: Mathematik HUM 133
5.3.4. Angewandte Mathematik HUM 135

6. STRUKTURIERUNG DER LINEAREN OPTIMIERUNG IM MATHEMATIKUNTERRICHT (UNTERRICHTSVORSCHLAG) 137

6.1. Unterrichtssequenz 1: Historischer Überblick und Motivation 138
6.2. Unterrichtssequenz 2: Lineare Gleichung und Ungleichung in zwei Variablen 139
6.3. Unterrichtssequenz 3: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen 140
6.4. Unterrichtssequenz 4: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen mit GeoGebra 142
6.5. Unterrichtssequenz 5: Lineare Optimierung in zwei Variablen – Maximalproblem 142
6.6. Unterrichtssequenz 6: Lineare Optimierung in zwei Variablen –Minimalproblem 144
6.7. Unterrichtssequenz 7: Lineare Optimierung in zwei Variablen - Lösbarkeit 146
6.8. Unterrichtssequenz 8: Lineare Optimierung in zwei Variablen – ganzzahlige Optimierung 147

7. ZUSAMMENFASSUNG 148

LITERATURVERZEICHNIS 151
ANHANG 157
Abstract Deutsch 157
Abstract English 158
Übungsblatt 1: Lineare Gleichungen und Ungleichungen in zwei Variablen 159
Übungsblatt 2: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen 160
Übungsblatt 3: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Maximum 161
Übungsblatt 4: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Minimum 163
Übungsblatt 5: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Lösbarkeit 165

1. Einleitung

Die rasche Globalisierung der wirtschaftlichen Prozesse und das Streben nach positiven Vergütungen in Form von Profiten drängen Unternehmen weltweit neue Managementstrategien kontinuierlich zu ergründen und zu implementieren, welche ihnen die Maximierung der Einnahmen bzw. die Minimierung der entstandenen Kosten ermöglichen. Unternehmen lagern beispielsweise ihre Produktionsstätten in Länder mit relativ betrachtet niedrigeren Lohnniveaus aus und optimieren ihre Verwaltungsprozesse im Inland, um das erstrebte Vorhaben zu erreichen. In diesem Kontext ist die zielgerechte mathematische Optimierung des wirtschaftlichen Handelns für die Überlebenschancen der Unternehmen in dem eingebetteten Umfeld von enormer Relevanz.

Der Wissenszweig, der sich mit der oben exemplarisch angedeuteten Problematik befasst, ist in den Wirtschaftswissenschaften unter *Operations Research* bekannt. Operations Research ist das Wissensgebiet, welches praxisnahe, komplexe Sachverhalte im Rahmen eines Planungsprozesses analysiert, mit dem Zweck möglichst gute Entscheidungen durch die Anwendung mathematischer Methoden auszuarbeiten. Die Abbildung eines realen Entscheidungsprozesses durch ein Optimierungsmodell und die Anwendung bzw. Entwicklung eines Lösungsalgorithmus gehören zu den primären Aufgaben im Operations Research. Die existierende Literatur unterscheidet zwischen Operations Research im engeren und im weiteren Sinne. Operations Research im engeren Sinne beschränkt sich einerseits auf die mathematische Modellierung von Entscheidungsfragen und anderseits auf die Entwicklung von Algorithmen zur Anwendung und Lösung mathematischer Modelle. Zu den Aufgaben im weiteren Sinne gehören die Definition, Beschreibung und Abgrenzung des Problems, sowie die Methoden zur Beschaffung und Analyse von Daten (vgl. Domschke et al. (2015); S. 1-2).

Die Jahre kurz vor und während des zweiten Weltkrieges können als Gründerzeit des Operations Research betrachtet werden. So arbeiteten Wissenschafter und Militär in Großbritannien ab den Jahren 1936/37 daran, ein Radar zur Abwehr von feindlichen Flugzeugen zu entwickeln. Später wurden in Großbritannien und in den USA Möglichkeiten erforscht, Schiffskonvois, die den Atlantik überqueren sollen, optimal zusammenzustellen. Diese Art von Forschungsarbeiten wurden in den USA als

„Operations Research“ und in Großbritannien als „Operational Research“ bekannt.[1] Heutzutage überwiegen in vielen Bereichen wie beispielsweise Produktion, Logistik und Verkehr, Gesundheitswesen, Umweltschutz, Projektplanung etc., die ökonomischen und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen (ebd., S.3).

Im Zentrum der schon genannten Anwendungsprobleme stehen die mathematische Modellierung und die Findung einer optimalen Lösung unter Berücksichtigung von Restriktionen in Form von Gleichungen und Ungleichungen. Dieser Wissenszweig der Mathematik ist unter mathematischer Optimierung bekannt, der ein Teilgebiet der linearen Algebra darstellt.

Die lineare Optimierung[2] als Optimierungsmethode ist die verbreitetste in den Wirtschaftswissenschaften. Als Erfinder der linearen Optimierung wird der russische Mathematiker und spätere Nobelpreisträger L.V. Kantorowicz (1912 – 1986) gesehen. Im Jahr 1939 erscheint seine ausführliche Arbeit „Mathematische Modelle der Organisation und Planung der Produktion“, in der Kantorowicz veranschaulicht, dass viele Probleme der Produktionsorganisation wohldefinierte mathematische Strukturen aufweisen. Diese Modelle lassen sich nummerisch behandeln (vgl. Burkard und Zimmermann (2012); S. 3).

Die Arbeit von Kantorowicz enthält nicht nur verschiedene ökonomische Aufgabenstellungen sondern die Skizze eines Lösungsverfahrens, welches wesentliche Grundgedanken der später entwickelten Simplexmethode zur Lösung linearer Optimierungsprobleme verwendet. Leider blieben seine früheren Beiträge lange Zeit unbeachtet, wodurch die Entwicklung der mathematischen Optimierung verzögert wurde (vgl. Körth et al. (1975); S. 260). Erst im Jahre 1947 gelang der tatsächliche Durchbruch für die theoretische Grundlage der linearen Optimierung, als G. B. Dantzig (1914 – 2005) ein nummerisches Verfahren – den Simplexalgorithmus – entdeckt. Dieses wirkungsvolle Rechenverfahren zählt weltweit zu den Standardverfahren der Angewandten Mathematik, da damit alle linearen Optimierungsprobleme gelöst werden können (vgl. Burkard und Zimmermann (2012); S. 4).

Abschließend ist festzuhalten, dass durch die rapide Entwicklung kontinuierlich leistungsfähiger werdender Computer das Simplexverfahren immer mehr an Relevanz gewinnt. Die in der Praxis zur Lösung stehenden Optimierungsprobleme weisen

[1] Eine exzellente Übersicht über die Entwicklung des Operations Research vom 16. bis zum 21. Jahrhundert liefern Gass und Assad (2005).

[2] Sehr oft wird der Begriff „lineare Programmierung“ als Äquivalent in der deutschsprachigen Literatur verwendet.

manchmal hunderte oder tausende unbekannte Variablen auf, die ohne Computereinsatz zu ermitteln wären. Zu optimierende Sachverhalte in zwei oder drei Variablen können für Unterrichtszwecke gelöst werden.
In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach der Relevanz der linearen Optimierung für den Mathematikunterricht.

1.1. Relevanz der linearen Optimierung für den Mathematikunterricht

Als Lehrkraft werde ich oft seitens der Schülerinnen und Schüler mit der Frage konfrontiert, warum sie dieses mathematische Wissen erwerben sollen. Eine Ausrede auf die in den Lehrplänen vorgeschriebenen Inhalte als Rahmenbedingungen führt nicht zu den gewünschten Ergebnissen. Um die lernenden Personen von der Tatsache überzeugen zu können, dass die Disziplin Mathematik keine abstrakte Welt darstellt, sind Realitätsbezüge äußerst wichtig. Die Relevanz der Mathematik wird durch authentische Probleme veranschaulicht, welche in einer außermathematischen Situation vorkommen. Maaß (2004) bietet eine einleuchtende Definition hinsichtlich der authentischen Situation:

> *„Eine authentische Situation ist eine außermathematische Situation, die in ein bestimmtes Gebiet eingebettet ist und sich mit Phänomenen und Fragen beschäftigt, die für dieses Gebiet bedeutsam sind und von den entsprechenden Fachleuten auch als solche erkannt werden. Dabei gelten auch der Alltag als „Gebiet“ und hier die Menschen, die in ihm leben als „Fachleute“. Eine Situation wird auch als authentisch angesehen, wenn sie im Unterricht nur simuliert wird.“*
>
> (Maaß (2004); S. 22).

Blum (1996; S. 21) macht auf weitere Argumente für die Realitätsbezüge im Mathematikunterricht aufmerksam. Der Autor unterteilt die Argumente in pragmatische, formale, kulturbezogene und lernpsychologische. Die Pragmatik ermöglicht den Lernenden durch das Herstellen passender Anwendungsbezüge im Unterricht, die Umweltsituationen besser nachzuvollziehen und zu bewältigen. Durch die Formalität erwerben Schülerinnen und Schüler allgemeine Qualifikationen und lernen sich mit anderen Individuen zu unterhalten, sich kritisch mit der eigenen Umgebung auseinander zu setzen und als Folge dessen eine angemessene Haltung zu entwickeln. Dank der

Kulturbezogenheit wird den Lernenden die Möglichkeit geboten, ein wohldurchdachtes Bild von der Mathematik als Gesamtphänomen gesellschaftlicher und kultureller Natur zu schaffen. Schlussendlich weisen die lernpsychologischen Argumente auf die Lernergebnisse und Motivation der zu unterrichtenden Personen hin. Durch die Bezüge zur Realität kann das Verständnis und das nachhaltige kognitive Einbetten mathematischer Inhalte gefestigt werden. Die Anwendungsorientiertheit kann motivierende Auswirkung auf die lernenden Personen haben (vgl. Blum (1996); S. 21).

Insbesondere in den Berufsbildenden Höheren Schulen (BHS) sollten die lehrenden Personen Sorge dafür tragen, dass die Verknüpfung zwischen der Mathematik und den realen Gegebenheiten stets präsent und sichtbar bleibt, da sie RepräsentantInnen der angewandten Mathematik als Unterrichtsfach sind. Darüber hinaus wird im Rahmen der didaktischen Grundsätze der Lehrpläne[3] darauf verwiesen, dass bei der Planung und Gestaltung des Mathematikunterrichts auf anwendungsorientierte Fragestellungen und die Entwicklung von Kompetenzen, wie beispielsweise selbstständiges logisches Denken oder Formalisieren sprachlich definierter Probleme, Acht zu geben ist (siehe Abschnitt 5.1.1., S. 96-110).

Die Praxisbezogenheit der Aufgabenstellungen ist durch das Modellieren mittels der linearen Optimierung eindeutig gegeben. Die lineare Optimierung findet eine vielfältige Anwendung und bietet somit außermathematische Situationen an, die in Gebieten wie beispielsweise Produktionsproblemen in der Erzeugung, Mischungsproblemen in der Nahrungs- und Futtermittelherstellung, Bebauungsproblemen in der Raumordnung, Transportproblemen im diversen Verkehr, Schichtarbeitsproblemen bei Versorgung-, Sicherheits- und Sozialeinrichtungen, etc. eingebettet sind (vgl. Reichel et al. (1992); S. 221). Somit können die Schülerinnen und Schüler durch die Vielseitigkeit der Sachverhalte der linearen Optimierung nicht nur verschiedene mathematische Modelle bilden, sondern sie lernen kritisch in einem abwechslungsreichen Umfeld zu denken, die rechnerisch ermittelten Ergebnisse auf Zulässigkeit zu überprüfen und Mängel in der Darstellung oder in der Begründung der modellierten Realbezügen zu entdecken.

Abschließend sind die vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) für die teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung vorgegebenen Kompetenzen[4] als Relevanz der linearen

[3] Vgl. Online: https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/downloads/?kategorie=10 (Zugriff: 11.07.2018).
[4] Vgl. Kompetenzkataloge für Angewandte Mathematik, Online: https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff: 11.07.2018).

Optimierung im Mathematikunterricht zu erwähnen. In dem Cluster W1[5] ist der Erwerb der Kompetenzen wie das Aufstellen, Lösen und Interpretieren linearer Ungleichungssysteme in zwei Variablen einerseits und das Berechnen und Interpretieren der optimalen Lösung einer Zielfunktion mit einem geeigneten Technologieeinsatz anderseits vorgesehen. Die Aufnahme der linearen Optimierung in die BIFIE-Kompetenzkataloge hebt noch einmal die essenzielle Relevanz dieses Themas für den Mathematikunterricht hervor.

1.2. Zielsetzung der Diplomarbeit

Die Zielsetzung der vorliegenden Diplomarbeit besteht darin, eine gut strukturierte, übersichtliche und logisch nachvollziehbare Ausarbeitung der Grundlagen der linearen Optimierung zu bieten, welche sich in einer abgekürzten Form für eine Anwendung direkt im Mathematikunterricht oder in einer vorwissenschaftlichen Arbeit eignet. Das in den Schulbüchern präsentierte theoretische Wissen ist meiner Ansicht nach unzureichend, um die lineare Optimierung als Modellierungsmethode nachzuvollziehen und auf die realitätsbezogenen Sachverhalte einwandfrei anzuwenden, da sie ausschließlich mittels Rechenaufgaben ausgearbeitet wird (siehe Abschnitt 5.3., S. 130-136).

Ein weiteres Ziel, welches durch die Arbeit angestrebt wird, sind die Lösungsverfahren – grafisches Lösen in zwei Variablen und Simplexalgorithmus – sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkt zu beleuchten, wobei im Zentrum die Möglichkeiten seitens des Technologieeinsatzes zu stellen sind.

In vielen Sachverhalten, welche mithilfe der linearen Optimierung modelliert werden, wird verlangt, dass einige oder alle zu untersuchenden Größen diskrete Werte annehmen sollen. Ein Runden einer kontinuierlichen optimalen Lösung zu diesem Zweck auf ganze Zahlen könnte in vielen Fällen wie beispielsweise bei der Planung des Produktionsprogramms bei sehr hohen Mengeneinheiten vertretbar sein, aber es liefert nicht notwendigerweise die tatsächliche optimale diskrete Lösung. Das gilt

[5] Die BHS sind laut der Abteilung VI/6 – Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung bzw. Reife- und Diplomprüfung bzw. Berufsreifeprüfung des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung in Clustern unterteilt. Der Cluster W1 umfasst die BHS für Wirtschaftliche Berufe, Tourismus, Mode und Design, Kunst, Landwirtschaftliche Schulen, Landtechnik und Forstwirtschaft. (vgl. Online: https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/ 08_AMT/srdp_am_clustereinteilung_2018_2017-01-27.pdf (Zugriff: 11.07.2018).

insbesondere bei Entscheidungen über binäre Realisationen wie etwa bei der Investitionsplanung. Die Schülerinnen und Schüler sollten verinnerlichen, dass eine Rundung der nichtganzzahligen Lösung nicht als optimale Lösung eines ganzzahligen Optimierungsproblems akzeptiert werden kann. Daher verfolge ich mit der vorliegenden Arbeit das Ziel, diese Problematik einschließlich Rechenaufgaben zu thematisieren und mögliche Lösungsverfahren, welche im Mathematikunterricht einsetzbar sind, zu erläutern.

Nicht zuletzt ist es mein Ziel, eine didaktische Begründung basierend auf den Lehrplänen, den Lehrbüchern und auf den Möglichkeiten des Technologieeinsatzes für die lineare Optimierung als lohnenswertes Thema im Unterricht zu liefern, wobei die Strukturierung der Unterrichtssequenzen einschließlich Rechenaufgaben zur linearen Optimierung das Primärziel der vorliegenden Diplomarbeit darstellt.

1.3. Gliederung der Diplomarbeit

Nach der Einleitung in die Problematik der linearen Optimierung (siehe Kapitel 1, S. 1-3), in welcher auf die Relevanz des Themas und auf die verfolgten Ziele eingegangen wird, werden im Kapitel 2 die Grundlagen der linearen Optimierung beleuchtet. Dabei sind die Formen – Standard-, Normal- und kanonische Form –, die grundlegenden Eigenschaften der linearen Optimierungsprobleme und schlussendlich die grafische Lösung in zwei Variablen von großer Bedeutung.

In Kapitel 3 wird das Simplexverfahren in seiner Grundversion und seinen Varianten ausgearbeitet, wobei bei den Varianten auf das revidierte Simplexverfahren, Regeln zur Spalten- und Zeilenauswahl und auf das duale Simplexverfahren eingegangen wird.

Dem Rechenalgorithmus zur Lösung der linearen Optimierungsprobleme folgt die ganzzahlige Problematik, die im Kapitel 4 ihre Thematisierung findet. Wie schon im Abschnitt 1.2. angedeutet, existieren Sachverhalte, bei denen eine Rundung der optimalen Lösung auf ganze Zahlen nicht akzeptabel ist. Daher werden im vorliegenden Kapitel die Grundbegriffe zur diskreten linearen Optimierung und die wesentlichen Lösungsansätze präsentiert.

Im Kapitel 5 wird eine fachdidaktische Auseinandersetzung darüber offeriert, warum die lineare Optimierung ein durchaus lohnenswertes Thema im Mathematikunterricht darstellt. Neben der Analyse der Grundkompetenzen und der Lehrpläne gehe ich auf

Aspekte des computerunterstützen und fächerübergreifenden Unterrichts ein, für welchen sich die lineare Optimierung besonders eignet.

Die Diplomarbeit wird mit dem Kapitel 6 abgeschlossen, indem fachdidaktischen Grundsätzen entsprechend Unterrichtssequenzen einschließlich Rechenaufgaben entwickelt werden, welche direkt im Schulunterricht Anwendung finden können. Die ausgearbeiteten Unterrichtssequenzen sind als Vorschlag zu sehen, wie das Thema „Lineare Optimierung in zwei Variablen“ in der Schule unterrichtet werden könnte.

2. Grundlagen der linearen Optimierung

Die Anwendung mathematischer Methoden zur Optimierung von Systemen und Prozessen setzt eine Planung voraus, welche sich in einem komplexen Prozess mit sechs Schritten nach Domschke (2015, S. 1-2) vollzieht. Diese lassen sich wie folgt kurz darstellen:

(1) *Das Problem erkennen und analysieren:* Der Prozess geht von dem Auftreten eines Entscheidungs- und Handlungsbedarfs oder von dem Erkennen einer Entscheidungs- und Handlungsmöglichkeit aus.

(2) *Die Ziele und Handlungsmöglichkeiten bestimmen:* Das rationale Handeln der EntscheidungsträgerInnen führt zur Vorgabe bestimmter Ziele, welche zu erreichen sind. Da bei diesem Schritt nicht alle Aspekte berücksichtigt werden können, entsteht ein vereinfachtes Modell der zu untersuchenden Situation.

(3) *Das mathematische Modell formulieren:* Das vereinfachte Modell bildet die Grundlage für die Formulierung eines mathematischen Modells, welches aus einer Reihe von mathematischen Beziehungen und Forderungen besteht.

(4) *Die Beschaffung der empirischen Daten:* Das Aufstellen des mathematischen Modells erfordert die Beschaffung von quantitativen Daten, welche auch unter Einsatz von Prognosemethoden erfolgen können.

(5) *Das Finden der Lösung:* Das unter Berücksichtigung der empirischen Daten aufgestellte Modell ist mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens zu lösen. Als Lösung können eine oder mehrere Alternativen erhalten werden, welche den Forderungen des mathematischen Modells genügen.

(6) *Das Bewerten der Lösung:* Die erhaltene Lösung wird analysiert und anschließend einer Bewertung auf Akzeptanz, Modifizierungsbedürftigkeit oder Unbrauchbarkeit unterworfen.

Die oben geschilderten Schritte stellen eine denkbare Abstraktion realer Prozesse, die einer Optimierung bedürfen, dar. Optimierungsaufgaben treten auf natürliche Weise in zahlreichen Anwendungen auf. Als Folge dessen wird in diesem Kapitel das theoretische Fundament der linearen Optimierung als die verbreitetste Optimierungsmethode in den Wirtschaftswissenschaften präsentiert. Das Kapitel 2 wird mit der grafischen Lösung linearer Optimierungsprobleme in zwei Variablen abgeschlossen.

2.1. Lineare Optimierungsprobleme

Die lineare Optimierung befasst sich mit Verfahren, welche den maximalen oder den minimalen Wert einer linearen Funktion unter Berücksichtigung einschränkender linearer Gleichungen oder Ungleichungen ermitteln. Die linearen Optimierungsprobleme sind allgemein folgendermaßen zu definieren.

Definition 2.1: (nach Domschke et al. (2015); S. 17-18)

Unter einem *Problem der linearen Optimierung* wird die Aufgabe verstanden, eine lineare Zielfunktion

$$z = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{2.1}$$

zu maximieren oder zu minimieren. Die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ müssen dabei die linearen *Nebenbedingungen* (genannt auch Restriktionen) der Form

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m_1 \tag{2.2}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geq b_i \qquad \text{für } i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2 \tag{2.3}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i \qquad \text{für } i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m \tag{2.4}$$

unter Einhaltung der *Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für einige oder alle } j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

genügen.

Man nennt die in der Definition 2.1. auftretenden veränderlichen Größen wie folgt:

z	die Zielfunktion
$c_1, c_2, \ldots, c_n$	die Koeffizienten der Zielfunktion
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	die Variablen
a_{ij}	die Koeffizienten der Nebenbedingungen

Die Optimierungsprobleme weichen häufig in ihrer Form von der Darstellung (2.1) – (2.5) ab. Es ist manchmal vorteilhaft, die Variablen nicht durch einen Index, sondern durch zwei oder mehrere Indizes zu beschreiben, wobei sich jede dieser Modellformen durch Umbezeichnung der Variablen in die Gestalt (2.1) – (2.5) überführen lässt (vgl. hierfür und im Folgenden: Körth et al. (1975); S. 262).

Aus den mathematischen Ausdrücken (2.1) – (2.5) lassen sich Bedingungen erkennen, welche ein vorgegebenes Anwendungsproblem zu erfüllen haben, damit sie sich durch ein lineares Optimierungsmodell darstellen lassen.

Bedingung 2.1: Jede der Modellrestriktionen und die zu optimierenden veränderlichen Größen müssen von jeder einzelnen Variablen linear abhängen.

Bedingung 2.2: Jede der Relationen, welche das Problem mathematisch darstellen, muss sich als Summe linearer Funktionen von jeweils einer der auftretenden Variablen darstellen lassen.

Die Aufgabenstellungen in der Praxis veranschaulichen, dass für zahlreiche Probleme die oben formulierten Bedingungen (2.1) und (2.2) in ausreichender Näherung erfüllt sind.

Die Definition 2.1 wird an einem Sachverhalt veranschaulicht, welcher sich auf die Sortimentsoptimierung eines Herstellbetriebs bezieht.

Beispiel 2.1: Das Optimierungsobjekt in diesem Modell ist das Volumen und die Struktur des Herstellungsprozesses. In Rahmen dieser Optimierungsaufgabe ist folgenden Fragen nachzugehen:

- ✓ Welche Positionen der Nomenklatur eignen sich für die Bestimmung eines fixen Produktionsvolumens?
- ✓ Welche Rohstoffe, Materialien, technische Ausstattung, Arbeits- und Finanzressourcen sind für den Herstellungsprozess limitierend?
- ✓ Haben die Transportkosten für Rohstoffe, Materialien und fertig gestellte Produkte einen Einfluss auf die Produktionsentwicklung?
- ✓ Welche zusätzlichen Restriktionen technischen und organisatorischen Charakters beeinflussen die Zusammensetzung der Produktionsstruktur?

Die Antwort auf die oben gestellten Fragen ermöglicht die Ausarbeitung eines mathematischen Optimierungsmodells. Dieses Optimierungsmodell inkludiert veränderliche Größen mit folgender ökonomischer Bedeutung:

$i = 1, 2, \ldots, m$	Arten von Endprodukten, welche im Unternehmen hergestellt werden
$j = 1, 2, \ldots, n$	Maschinengruppen im Produktionsprozess
a_{ij}	Produktivität der Herstellung des i-ten Produkts an der j-ten Maschinengruppe
$s = 1, 2, \ldots, S$	Arten von Ressourcen im Produktionsprozess
b_{si}	Ressource der s-ten Art für die Erzeugung einer Mengeneinheit des i-ten Produkts

$l = 1, 2, \ldots, L$	Qualifikationsgruppen innerhalb der Arbeitskräfte
t_{li}	Zeit der l-ten Qualifikationsgruppe für die Erzeugung einer Mengeneinheit des i-ten Produkts
M_j	Verfügbare Zeit der j-ten Maschinengruppe
R_s	Gelieferte Menge der s-ten Ressource zu einem bestimmten Zeitpunkt zuzüglich der auf Lager vorhandenen Menge
T_l	Verfügbare Zeit der l-ten Qualifikationsgruppe
x_i	Herstellmenge des i-ten Endprodukts im Unternehmen

Für das auf diese Art und Weise formulierte Optimierungsproblem ergeben sich folgende drei Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \leq M_j \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{si} \cdot x_i \leq R_s \qquad \text{für } s = 1, 2, \ldots, S$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{li} \cdot x_i \leq T_l \qquad \text{für } l = 1, 2, \ldots, L$$

Die Zielfunktion bezieht sich auf die Maximierung des Produktionsvolumens im Herstellunternehmen und lautet:

$$z = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \,.$$

Die Lösungsermittlung des in Definition 2.1 formulierten Problems der linearen Optimierung führt zu der Definition 2.2.

Definition 2.2: (nach Domschke et al. (2015); S. 18)

a) Ein Vektor $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ des $\mathbb{R}^n$ wird *Lösung* des linearen Optimierungsproblem genannt, wenn er allen Restriktionen (2.1) – (2.4) genügt.

b) Der Vektor $\mathbf{x}$ heißt *zulässige Lösung* des linearen Optimierungsproblems, wenn er außerdem die Restriktion (2.5) erfüllt.

c) Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ heißt *optimale Lösung*, wenn kein zulässiger Vektor $\mathbf{x}$ mit einem größeren (bei Maximierungsproblemen) bzw. mit

einem kleineren (bei Minimierungsproblemen) Wert der Zielfunktion als $F\left(\mathbf{x}^*\right)$ existiert.

d) Die *Menge der zulässigen Lösungen* wird mit X und die *Menge der optimalen Lösungen* mit X^* gekennzeichnet.

2.1.1. Formen linearer Optimierungsprobleme

Das lineare Optimierungsproblem kann in verschiedenen Formen wie zum Beispiel in Standardform, Normalform und kanonischer Form dargestellt werden.

Standardform des linearen Optimierungsproblems

Jedes beliebige Problem der linearen Optimierung lässt sich folgendermaßen als Maximierungsproblem formalisieren, welches als *Standardform* bezeichnet wird (vgl. hierfür und im Folgenden: Domschke et al. (2015); S. 21):

Maximiere $z = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (2.6)

unter den Restriktionen

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ (2.7)

$x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, 2, \ldots, n$ (2.8)

Das zu minimierende lineare Optimierungsproblem lässt sich auch wie folgt darstellen:

Minimiere $z = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (2.9)

unter den Restriktionen

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ (2.10)

$x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, 2, \ldots, n$ (2.11)

Die Aussagen (2.9) – (2.11) haben ihre Berechtigung aufgrund der unten aufgelisteten Überlegungen:

(1) Eine Zielfunktion $F\left(x\right)$, welche zu minimieren ist, kann durch die Funktion $-F\left(x\right)$, die zu maximieren ist, ersetzt werden und *vice versa*. Das erfolgt durch die Multiplikation des Koeffizientenvektors mit dem Skalar -1.

(2) Eine „$\geq$“-Restriktion lässt ich durch die Multiplikation mit dem Skalar -1 in eine „$\leq$“-Restriktion umformen.

(3) Durch zwei Ungleichungen $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_i$ und $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geq b_i$ (bzw. $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$) lässt sich eine Gleichung der Form $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i$ austauschen.

(4) Wenn eine Variable x_j die Nichtnegativitätsbedingung nicht erfüllt, d. h. sie darf beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen, dann kann diese durch zwei Variablen $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ substituiert werden, wobei $x_j := x'_j - x''_j$ gilt.

Die oben angeführten Überlegungen (1) – (4) werden anhand eines Sachverhaltens im Einzelnen veranschaulicht.

Beispiel 2.2: Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem in zwei Variablen:

Minimiere $z = F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ (2.12)

unter den Restriktionen

$$6x_1 + x_2 = 9 \tag{2.13}$$

$$4x_1 + 9x_2 \geq 5 \tag{2.14}$$

$$x_1 + 7x_2 \leq 3 \tag{2.15}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{2.16}$$

$$x_2 \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

In einem ersten Schritt wird die zu minimierende Zielfunktion durch die Multiplikation mit -1 in eine zu maximierende transformiert. Somit ergibt sich durch diese Äquivalenzumformung die neue Zielfunktion, welche lautet: Maximiere $-F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$.

Die in (2.13) dargestellte Restriktion ist eine Gleichung, welche durch zwei Ungleichungen zu ersetzen ist. Diese lauten $6x_1 + x_2 \leq 9$ und $6x_1 + x_2 \geq 9$. Die zweite Ungleichung ist durch Multiplikation mit -1 in die „$\leq$“-Form zu bringen ist. Dadurch ergibt sich: $-6x_1 - x_2 \leq -9$.

Da die (2.14)-Nebenbedingung von der „$\geq$“-Form ist, wird sie mit -1 multipliziert, so dass sie in die Restriktion $-4x_1 - 9x_2 \leq -5$ transformiert wird.

Schlussendlich ist eine Substitution bei diesem Optimierungsproblem vorzunehmen, da die Variable x_2 die Nichtnegativitätsbedingung nicht erfüllt. Wir setzen: $x_2 := x_2' - x_2''$ mit $x_2' \geq 0$ und $x_2'' \geq 0$.

Wir erhalten nach der Durchführung der obigen Transformationen das neue lineare Optimierungsproblem:

Maximiere $F\left(x_1, x_2', x_2''\right) = -x_1 - 2x_2' + 2x_2''$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2' - x_2'' &\leq 9 \\ -6x_1 - x_2' + x_2'' &\leq -9 \\ -4x_1 - 9x_2' + 9x_2'' &\leq -5 \\ x_1 + 7x_2' - 7x_2'' &\leq 3 \\ x_1, x_2', x_2'' &\geq 0. \end{aligned}$$

Normalform des linearen Optimierungsproblems

Wenn wir die Nebenbedingungen (2.2) und (2.3), die im Abschnitt 2.1. formuliert wurden, um die so genannten *Schlupfvariablen*[6] erweitern, die in der Zielfunktion (2.1) mit Null zu bewerten sind, erhalten wir aus (2.1) – (2.5) das folgende Optimierungsmodell, welches als *Normalform* bezeichnet wird (vgl. Domschke et al. (2015); S. 21-22):

Maximiere $z = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p\right) = \sum_{J=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{j=n+1}^{p} 0 \cdot x_j$ (2.18)

unter den Nebenbedingungen der Form

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n + x_{p+i} = b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m_1 \tag{2.19}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n - x_{p+i} = b_i \qquad \text{für } i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2 \tag{2.20}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i \qquad \text{für } i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m \tag{2.21}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, p \tag{2.22}$$

Die ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet man als *Strukturvariablen*.

[6] Die Schlupfvariablen (auch Überflussvariablen genannt) sind solche Variablen, die im Rahmen der linearen Optimierung eingeführt werden, damit Ungleichungen in Gleichungen transformiert werden.

Die Normalform des linearen Optimierungsproblems wird anhand des Beispiels 2.2 verdeutlicht (siehe S. 13-14 für die Angabe). Wir erhalten nach der Erweiterung mittels der Schlupfvariablen x_3 und x_4 folgendes Optimierungsproblem in Normalform:

Maximiere $F\left(x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4\right) = -x_1 - 2 \cdot x_2' + 2 \cdot x_2'' + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2' - x_2'' &= 9 \\ -4x_1 - 9x_2' + 9x_2'' + x_3 &= -5 \\ x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kanonische Form des linearen Optimierungsproblems

Für das lineare Optimierungsproblem kann auch die Matrixschreibweise verwendet werden. Für das oben notierte Problem in Normalform sieht sie wie folgt aus (vgl. Domschke et al. (2015); S. 22):

Maximiere $F\left(\mathbf{x}\right) = c^T \mathbf{x}$ (2.23)

unter den Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{2.25}$$

Dabei ist in Betracht zu ziehen, dass $\boldsymbol{c}$ und $\mathbf{x}$ jeweils p-dimensionale Vektoren, A eine $\left(m \times p\right)$-Matrix und $\mathbf{b}$ ein m-dimensionaler Vektor sind. Im Allgemeinen ist $p \geq m$ erfüllt.

Es stellt sich in diesem Kontext die Frage, ob jedes Optimierungsproblem eine kanonische Form besitzt.

Definition 2.3: Das lineare Optimierungsproblem besitzt eine *kanonische Form*, wenn in (2.23) – (2.25) sowohl für die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\boldsymbol{c}$ als auch für die Matrix A die Eigenschaften gelten (vgl. Domschke et al. (2015); S. 22):

$$\mathbf{b} \geq 0\,,\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{p-m} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1,p-m} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,p-m} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Die kanonische Form des linearen Optimierungsproblems wird mithilfe folgenden Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 2.3: Die lineare Optimierungsaufgabe in zwei Variablen ist in die kanonische Form zu überführen.

Maximiere $F(x_1, x_2) = x_1 + 1{,}5x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + 1{,}5x_2 \leq 3$$

$$0{,}25x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0\,.$$

Um diese Optimierungsaufgabe in kanonischer Form schreiben zu können, ist es zunächst erforderlich, sie in die Normalform zu überführen. Es werden zwei Schlupfvariablen x_3 und x_4 eingeführt. Wir erhalten damit für die kanonische Form wie folgt:

Maximiere $F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\,.$$

2.1.2. Grundlegende Eigenschaften linearer Optimierungsprobleme

Die Zielsetzung dieses Abschnitts ist, eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften für die linearen Optimierungsprobleme zu erläutern, die für die weitere Untersuchung von wesentlicher Relevanz sind bzw. einen Zusammenhang zu den geometrischen Betrachtungen im Abschnitt 2.1.4. herstellen. Dabei befassen wir uns in erster Linie mit den Charakteristika der Menge aller zulässigen Lösungen X und aller optimalen Lösungen X^* (für die Definitionen siehe Abschnitt 2.1., S. 12). Die Begriffe „beschränkte bzw. unbeschränkte Menge“ sowie „lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren“ werden als bekannt vorausgesetzt. Zunächst setzten wir uns mit den konvexen Mengen in $\mathbb{R}^n$ und mit dem Extrempunkt einer Menge auseinander (vgl. hierfür und im Folgenden dieses Abschnittes: Domschke et al. (2015); S. 23-26).

Definition 2.4: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ und $\lambda \in (0,1)$ auch jeder Punkt $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}_2 \in C$ ist.

Bemerkung 2.3: Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$. Dann heißt $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] := \{\lambda \cdot \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}_2 \,|\, \lambda \in [0,1]\}$ *Verbindungsstrecke* von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Für den $\mathbb{R}^n$ bedeutet die Konvexität, dass mit den zwei Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ auch ihre Verbindungsstrecke in C liegt.

Um die oben ausformulierte Definition zu verdeutlichen, widmen wir uns folgendem Beispiel.

Beispiel 2.4: Wir betrachten die in der Abbildung 2.1. dargestellten Mengen.

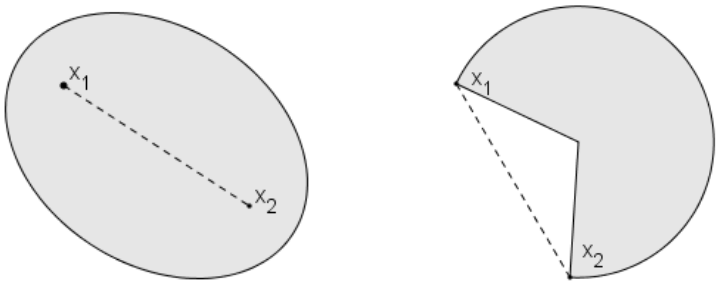


Abb. 2.1: Konvexe bzw. nicht konvexe Mengen

Laut Definition 2.4 und Bemerkung 2.3 ist es erforderlich, dass mit zwei beliebigen Punkten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ einer konvexen Menge C auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ zu der Menge C gehören. Somit ist die links

in Abb. 2.1 dargestellte Menge konvex. Bei der rechts abgebildeten Menge gehören zwar die Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ zu der Menge C, aber die Verbindungsstrecke liegt nicht mehr in C.

Definition 2.5: Die *konvexe Hülle* H einer beliebigen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, in der C enthalten ist.

Beispiel 2.5: Die rot umrandete Menge ist die konvexe Hülle H der elf abgebildeten Punkte. Wenn man die Punkte mit einander verbindet, ergibt sich eine Menge, die nicht konvex ist.

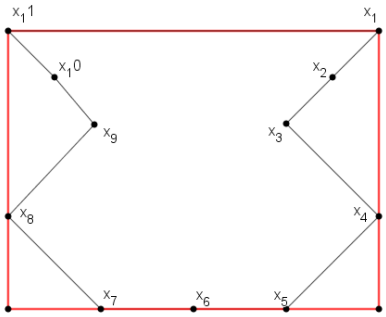


Abb. 2.2: Konvexe Hülle

Definition 2.6: Gegeben seien q Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ nichtnegative reelle Zahlen. Setzt man $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1$ voraus, so wird $\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \cdot \mathbf{x}_i$ *konvexe Linearkombination* der Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ genannt. Wenn für alle $i = 1, 2, \ldots, q$ zusätzlich erfüllt ist, dass $\lambda_i > 0$ ist, dann liegt eine *echte konvexe Linearkombination* vor.

Definition 2.7: Die Menge aller Linearkombinationen von endlich vielen Punkten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q \in \mathbb{R}^n$, die konvex sind, werden als *konvexes Polyeder* bezeichnet.

Bemerkung 2.4: Das konvexe Polyeder, welches durch die q Punkte aufgespannt wird, ist mit der konvexen Hülle der Menge identisch, die sich aus diesen Punkten zusammensetzt.

Es stellt sich allerdings die Frage, welche Punkte einer konvexen Menge eine besondere Stellung in den linearen Optimierungsproblemen einnehmen.

Definition 2.8: Gegeben sei eine konvexe Menge C. Der Punkt $\mathbf{y} \in C$ heißt *Eckpunkt* oder *Extrempunkt* von C, wenn aus $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ und $0 < \lambda < 1$ folgt $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Bemerkung 2.5: Man sagt, dass sich $\mathbf{y}$ nicht als echte konvexe Linearkombination zweier unterschiedlicher Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ präsentieren lässt.

Bemerkung 2.6: Ein konvexes Polyeder schließt endlich viele Eckpunkte ein.

Um die Eckpunkte und das konvexe Polyeder besser verstehen zu können, werden diese zwei Begriffe an folgendem Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 2.6: Konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ und konvexe Menge

a) Ein abgeschlossenes Intervall wie beispielsweise das Intervall $[2,9]$ bildet ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^1$.

b) Eine ebene Figur könnte ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^2$ sein. Wir betrachten die Abbildung 2.3. Das durch die Eckpunkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ gebildete Dreieck ist das konvexe Polyeder, welches durch diese Punkte aufgespannt ist. Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $x_1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 0$ und $x_2 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 6$ (wobei $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, 2, 3$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$) ist konvexe Linearkombination von $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$.

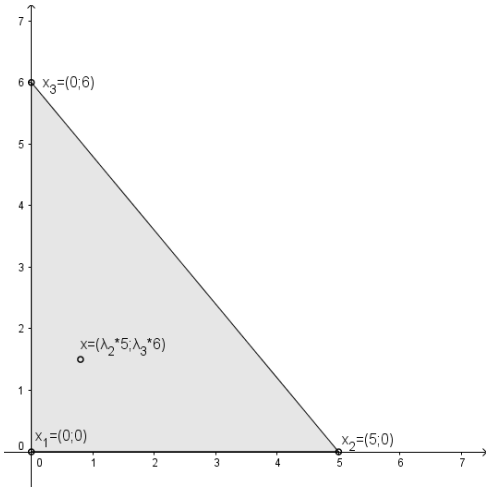


Abb. 2.3: Konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^2$

c) Die in der Abbildung 2.4 dargestellte Menge ist konvex. Sie ist hinsichtlich ihrer Unbeschränktheit kein konvexes Polyeder.

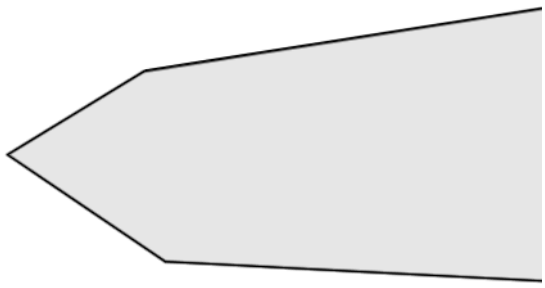


Abb. 2.4: Kein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^2$

Im Weiteren werden einige wesentliche Sätze formuliert und eine Auswahl von ihnen bewiesen, welche für die Ermittlung der Lösung eines linearen Optimierungsproblems relevant sind. Dabei wird stets von der Standardform in Matrixschreibweise (siehe Abschnitt 2.1.1., S. 12-13) ausgegangen.

Satz 2.1: Die Menge X der zulässigen Lösungen des durch das lineare Ungleichungssystem (2.6) – (2.8) definierten Optimierungsproblems ist *konvex*, wenn sie *nicht leer* ist.

Beweis: (vgl. Körth et al. (1975); S. 226; John (2009); S. 8)

Seien $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ zwei zulässige Lösungen des linearen Optimierungsproblems. Dann ist auch jede konvexe Linearkombination $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}_2$ mit $0 \le \lambda \le 1$ eine zulässige Lösung. Aus

$$A\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}\,;\ \mathbf{x}_1 \ge 0 \text{ und } A\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}\,;\ \mathbf{x}_2 \ge 0$$

folgt mit $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda A\mathbf{x}_1 \le \lambda\mathbf{b}\,,\ (1-\lambda)\,A\mathbf{x}_2 \le (1-\lambda)\mathbf{b}\,.$$

Durch die Addition und Linearität der Matrizenmultiplikation folgt, dass

$$A\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \le \mathbf{b}\,.$$

Anlog ergibt sich, dass $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ge 0$ ist. Damit ist nach Definition 2.4 (siehe S. 17) die Menge der zulässigen Lösungen X konvex.

□

Bemerkung 2.7: Es kann auch gezeigt werden, dass der Durchschnitt vieler konvexer Mengen auch konvex mit endlich vielen Eckpunkten ist.[7]

[7] Beweise für die Bemerkung 2.7 können beispielsweise in Neumann und Morlock (2002, S. 43ff.) sowie in Opitz und Klein (2014, Kapitel 16.3) nachgelesen werden.

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts richten wir unser Augenmerk auf die Begriffe Basislösung, zulässige Basislösung, Basisvektor(en) und Basisvariable(n) als Vorbereitung einerseits für das Definieren des Hauptsatzes der linearen Optimierung und anderseits für die grafische Lösung in zwei Variablen.

Definition 2.9: (vgl. Domschke et al. (2015); S. 25; John (2009); S. 14)

Es sei ein Problem der linearen Optimierung in der Normalform (2.18) – (2.22) mit Rang m der $(m \times p)$-Matrix A und $p \geq m$ gegeben.

a) Eine Lösung $\mathbf{x} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, 0, \ldots, 0)^T$ wird *Basislösung* des linearen Optimierungsproblems genannt, wenn die m Variablen $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$ eine Koeffizientenmatrix $A_{m \times m}$ mit Spaltenvektoren (a_j), $j = 1, 2, \ldots, p$, besitzen, die nicht singulär ist.

b) Eine Basislösung heißt *zulässig*, wenn alle Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt sind.

c) Die m linear unabhängigen Spaltenvektoren (a_j), $j = 1, 2, \ldots, p$, einer Basislösung nennt man *Basisvektoren*, die zugehörigen Variablen x_j bezeichnet man als *Basisvariablen*. Demzufolge ist die Rede von *Nichtbasisvektoren* und *Nichtbasisvariablen*.

d) Als *Basis* bezeichnet man die Menge aller Basisvariablen einer Basislösung.

Satz 2.2: Ein Vektor $\mathbf{x}$ ist genau dann eine zulässige Basislösung eines linearen Optimierungsproblems, wenn er einen Eckpunkt von $X = \{\mathbf{x} : \mathrm{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ darstellt (nach John (2009); S. 16-17).

Beweis:

(i) *Aus Basislösung folgt Eckpunkt:* Es sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ eine zulässige Basislösung von $\mathrm{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dann gibt es m linear unabhängige Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ von A mit $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}$. Die Nichtbasisvariablen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_p$ sind gleich Null. Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ kein Eckpunkt sei. Dann gibt es Punkte $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ und $0 < \lambda < 1$, so dass gilt $\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Da die letzten $p - m$-Elemente der zulässigen Basislösung $\mathbf{x}$ verschwinden, hat das auch für

entsprechende Elemente von $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ zu gelten, da alle Elemente dieser Vektoren nichtnegativ sind. Seien $\mathbf{y} = (y_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_m, 0, \ldots, 0)^T$ und $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0)^T$. Da die Punkte $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ zulässig sind, gilt $\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_m y_m = \mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \ldots + \mathbf{a}_m z_m = \mathbf{b}$. Es folgt $\mathbf{a}_1 (y_1 - z_1) + \mathbf{a}_2 (y_2 - z_2) + \ldots + \mathbf{a}_m (y_m - z_m) = \mathbf{0}$. Da die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ linear unabhängig sind, folgt $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Das widerspricht der getroffenen Annahme. Somit ist $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt.

(ii) *Aus Eckpunkt folgt Basislösung:* Es sei $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt von X mit nichtnegativen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ und es gilt $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{b}$, $x_j > 0$ für alle $a_j \in \mathbb{R}^m$ mit $j = 1, 2, \ldots, k \leq p$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Elemente, welche verschwinden, die hinteren. Es ist zu zeigen, dass $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig sind. Der Beweis wird wieder indirekt geführt. Es wird angenommen, dass es ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ mit $\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_k y_k = \mathbf{0}$ und mindestens ein $y_i \neq 0$ existieren. Für jede reelle Zahl ε gilt damit $\sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j (x_j + \varepsilon y_j) = \mathbf{b}$ und $\sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j (x_j - \varepsilon y_j) = \mathbf{b}$. Somit erfüllen die Punkte

$\mathbf{x}_1 = (x_1 + \varepsilon\, \mathrm{y}_1, x_2 + \varepsilon\, \mathrm{y}_2, \ldots, x_k + \varepsilon\, \mathrm{y}_k, 0, \ldots, 0)$,

$\mathbf{x}_2 = (x_1 - \varepsilon\, \mathrm{y}_1, x_2 - \varepsilon\, \mathrm{y}_2, \ldots, x_k - \varepsilon\, \mathrm{y}_k, 0, \ldots, 0)$

die Bedingung $\mathrm{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird, dann sind alle Elemente dieser Punkte nicht negativ und $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ sind zulässig. Aus der Konstruktion von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ folgt, dass $\mathbf{x} = 0{,}5\mathbf{x}_1 + 0{,}5\mathbf{x}_2$. Dieses Resultat widerspricht der Eckpunktannahme von $\mathbf{x}$. Die Basislösung verlangt m linear unabhängige Vektoren. Daher betrachten wir folgende drei Fälle.

Fall 1: $k > m$. In diesem Fall sind $m+1$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ stets linear abhängig. Dieser Fall kann also nicht vorkommen.

Fall 2: $k = m$. In diesem Fall weist die zulässige Basislösung m positive Komponenten auf und ist daher nicht entartet.

Fall 3: $k < m$. In diesem Fall haben wir eine zulässige Basislösung mit weniger als m positiven Komponenten, d.h. eine entartete Lösung. Aus den übrigen Spalten von A konstruieren wir eine Menge von linear unabhängigen Vektoren

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, für welche offensichtlich $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k + \mathbf{a}_{k+1} 0 + \ldots + \mathbf{a}_m 0 = \mathbf{b}$ erfüllt ist. Diese Konstruktion ist möglich, da m der Rang der Matrix A ist.

□

Ein Beispiel soll das Gesagte verdeutlichen, in dem auf die Begriffe Basis- und Nichtbasisvariablen, Basislösungen und zulässige Lösungen Acht gegeben wird.

Beispiel 2.7: (vgl. Domschke et al. (2015); S. 18-19)
Ein Herstellungsbetrieb kann wegen seiner Ausstattung mit Personal, Maschinen und Rohstoffen innerhalb einer Planungseinheit zwei Produkte P_1 und P_2 erzeugen. Die herstellbaren Mengeneinheiten sind durch drei Inputfaktoren beschränkt, wobei die pro Planungseinheit verfügbaren Kapazitäten, Produktionskoeffizienten und die pro erzeugtes Produkt erzielten Gewinne in der Tabelle 2.1 abgebildet sind.

Inputfaktoren	**Produkt P_1**	**Produkt P_2**	**Kapazitäten**
Maschinen	1	1	100
Rohstoffe	6	9	720
Montage	0	1	60
Gewinne	**10**	**20**	

Tab. 2.1: Inputfaktoren im Herstellungsprozess, Outputfaktor Gewinn

Um das oben formulierte lineare Optimierungsproblem mathematisch zu formalisieren, wählen wir folgende Variablen: x_1 von P_1 bzw. x_2 von P_2 herzustellende Mengeneinheiten (ME). Auf diese Weise erhalten wir folgendes in Normalform gebrachtes Modell:

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Restriktionen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$6x_1 + 9x_2 + x_4 = 720$$

$$x_2 + x_5 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 .$$

Mithilfe von Computerprogrammen, wie beispielsweise *GeoGebra*[8], ist es möglich, die Restriktionen grafisch darzustellen. In Abb. 2.5 sind alle Schnittpunkte von Restriktionsgeraden und/oder den Koordinatenachsen präsentiert. Die Punkte A bis I stellen sämtliche Basislösungen dar, die Punkte A bis E sind zulässige Basislösungen mit jeweils drei Basisvariablen und zwei Nichtbasisvariablen. Wie aus der Grafik ersichtlich ist, entspricht jeder dieser Basislösungen einem Eckpunkt des konvexen Polyeders der zulässigen Lösungen.

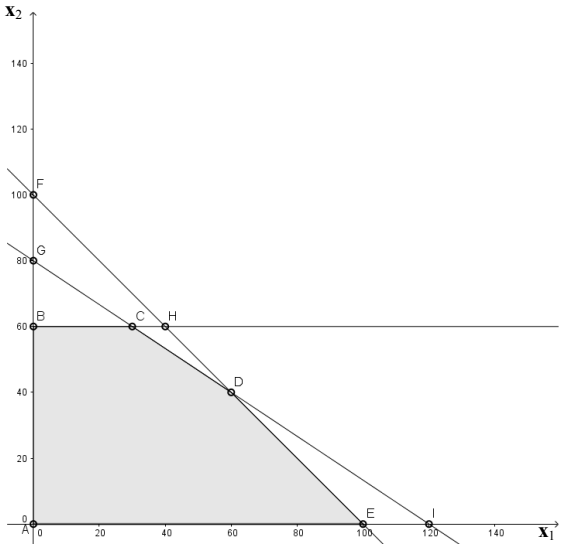


Abb. 2.5: Basislösungen und zulässige Basislösungen in $\mathbb{R}^2$

2.1.3. Hauptsatz der linearen Optimierung

Anhand des Beispiels 2.7 wurde grafisch die im Satz 2.3 formulierte und bewiesene Aussage veranschaulicht, dass sich unter den zulässigen Basislösungen eines linearen Optimierungsproblems stets ein Eckpunkt des zulässigen polyedrischen Bereichs befindet, welcher die affin-lineare Zielfunktion optimiert. Wir bezwecken in diesem Abschnitt zu zeigen, dass diese Aussage Allgemeingültigkeit hat.

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Menge der zulässigen Punkte stets in der Form $X = \{\mathbf{x} : \mathrm{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ gegeben ist. Somit ist X der Durchschnitt von $p+m$ Halbräumen. Der Durchschnitt der Halbräume kann entweder leer oder als Durchschnitt konvexer Mengen wieder eine konvexe Menge sein. Da die Menge X von Hyperebenen begrenzt wird, ist sie eine polyedrische Menge. Damit ergibt sich, dass X

[8] GeoGebra ist ein kostenloses Open-Source-Programm, welches unter dem Link www.geogebra.org downloadbar ist. Fast alle in der vorliegenden Arbeit befindlichen Abbildungen sind mit diesem Programm erstellt worden. In Abschnitt 5.2. werde ich genauer auf die Kapazitäten dieses Programms eingehen.

entweder leer oder eine konvexe, polyedrische Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. Falls die Menge der zulässigen Punkte leer ist, dann weist das lineare Optimierungsproblem keine Lösung auf und ist für uns an dieser Stelle nicht von Relevanz. Daher wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts davon ausgegangen, dass X nicht leer ist.

Satz 2.3 (Hauptsatz der linearen Optimierung): (nach Opitz und Klein (2014); S. 452)

Sei die Menge X der zulässigen Lösungen ein konvexes Polyeder. Dann gilt:

(i) Die Zielfunktion nimmt ihr Optimum (Maximum bzw. Minimum) in mindestens einem Eckpunkt an.

(ii) Existieren mehrere Eckpunkte des konvexen Polyeders, in denen die Zielfunktion ihr Optimum annimmt, so ist jede lineare Konvexkombination optimal.

Beweis:

(i) Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ die Eckpunkte des konvexen Polyeders. Wir betrachten ein Minimierungsproblem und nehmen an, dass keiner der endlich vielen Eckpunkte optimal ist. Dann existiert ein $\mathbf{y} \in X$ mit $\mathbf{c}^T\mathbf{y} < \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, q$. Außerdem ist $\mathbf{y}$ als lineare Konvexkombination der Eckpunkte darstellbar, also $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \cdot \mathbf{x}_i$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1$.

Mit $\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{y} < \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{c}^T\mathbf{y}$ erhalten wir einen Widerspruch. Somit ist mindestens ein Eckpunkt minimal.

(ii) Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$ die Eckpunkte des konvexen Polyeders, in denen die Zielfunktion ihr Optimum annimmt. Sei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{x}_i$ (mit $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{s}$ und $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$) lineare Konvexkombination.

Mit der Gleichung $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{s}$ ist die Optimalität von $\mathbf{x}$ nachgewiesen.

□

Bemerkung 2.8: Es lässt sich auch zeigen, dass bei einer unbeschränkten Menge X der zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems mindestens ein Eckpunkt von X optimale Lösung ist, wenn eine solche überhaupt existent ist.
Auf Grund von Satz 2.3 ist es nicht notwendig, alle $\mathbf{x} \in X$ auf Optimalität zu überprüfen, sondern wir können unsere Untersuchung auf die Eckpunkte von X beschränken, von denen es endlich viele, wie der folgende Satz zeigt, gibt.
Satz 2.4: Die Menge X hat endlich viele Eckpunkte (vgl. Burkard (2009); S. 23).
Beweis:
Jeder Eckpunkt ist ein Schnittpunkt von mindestens p Hyperebenen. Aus den gegebenen $p+m$ Hyperebenen, die die Nebenbedingungen des linearen Optimierungsproblems erfüllen, lassen sich nur endlich viele verschiedene p-Tupel von Hyperebenen auswählen.

□

Abschließend können wir festhalten, dass man sich auf eine endliche Menge zulässiger Eckpunkte bei der Suche nach der Optimallösung in Anbetracht der Sätze 2.3 und 2.4 beschränken kann.

2.2. Grafische Lösung linearer Optimierungsproblemen in zwei Variablen

In dem vorliegenden Abschnitt dieser Diplomarbeit richten wir unser Augenmerk auf die linearen Optimierungsaufgaben in zwei Variablen, welche in einfacher und sehr instruktiver Art und Weise grafisch dargestellt und gelöst werden können. Die Relevanz dieser grafischen Methode für die Praxis ist äußerst gering, da die Optimierungsprobleme in der realen Welt meistens eine sehr große Anzahl von Variablen beinhalten. Allerdings erfordert die Aufnahme der linearen Optimierung in zwei Variablen in die BIFIE-Kompetenzkataloge des Clusters W1 eine möglichst ausführliche theoretische und praktische Auseinandersetzung mit der geometrischen Darstellung, Lösung der Optimierungssachverhalte und Auslegung der gewonnenen Ergebnisse im Bereich der Schulmathematik. Außerdem eignen sich die in diesem Abschnitt durchzuführenden Betrachtungen sehr dazu, die grundlegenden Eigenschaften und alle wesentlichen Züge der linearen Optimierung zu veranschaulichen.
Das lineare Optimierungsproblem in zwei Variablen lautet:

Maximiere die *Zielfunktion* $F(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ (2.26)

unter den *Nebenbedingungen*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \tag{2.27}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,. \tag{2.28}$$

Deutung der Nebenbedingungen

Alle Restriktionen in den zu betrachtenden Optimierungsproblemen werden als Ungleichungen der Form (2.27) auftreten. Jede Ungleichung dieser Form definiert im zweidimensionalen Fall eine Halbebene, d.h. für $(a_{11}, a_{12}) \ne \mathbf{0}$ ist $H_{\le} = \{x \mid a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1\}$. Analog ist die Halbebene $H_{\ge}$ mit umgekehrter Ungleichung zu definieren. Der Durchschnitt dieser beiden Halbebenen ist die Gerade $H_{=}$. Um feststellen zu können, welche der beiden durch die Gerade $H_{=}$ erzeugten Halbebenen zu der Ungleichung $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ gehört, brauchen wir einen Punkt (x_1', x_2'), der nicht der Durchschnittsgerade genügt, in die Ungleichung einzusetzen. Ist $a_{11}x_1' + a_{12}x_2' < b_1$ erfüllt, dann gehört die Halbebene zu der Ungleichung, welche den Punkt (x_1', x_2') enthält, ansonsten ist es die andere Halbebene. Wenn die begrenzende Gerade $H_{=}$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, dann ist es angemessen, den Nullpunkt $(0,0)$ als Entscheidungspunkt zu wählen. Wenn $b_1 > 0$ ist, was in den meisten Optimierungsproblemen der Fall ist, dann gehört die den Nullpunkt enthaltene Halbebene zur Ungleichung. Darüber hinaus erweist es sich als günstig, die Gleichung der Gerade in Achsenschnittform zu bringen, d. h. für $b_1 \ne 0$ schreiben wir $\frac{a_{11}}{b_1}x_1 + \frac{a_{12}}{b_1}x_2 = 1$. Damit sind mit $\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right)$ der Schnittpunkt der Gerade mit der x_1-Achse und mit $\left(0, \frac{b_1}{a_{12}}\right)$ der Schnittpunkt der Gerade mit der x_2-Achse gegeben (vgl. Körth et al. (1975); S. 269-270).

Die Menge der Lösungen, welche den Nebenbedingungen genügen, bilden das Polyeder P der zulässigen Punkte in der Ebene. Der Durchschnitt zweier Halbebenen ist entweder leer oder unbeschränkt. In Abbildung 2.6 sind alle möglichen Fälle für das Polyeder P zweier Halbebenen ohne Berücksichtigung der Nichtnegativitätsbedingungen dargestellt (vgl. Burkard und Zimmermann (2012); S. 21).

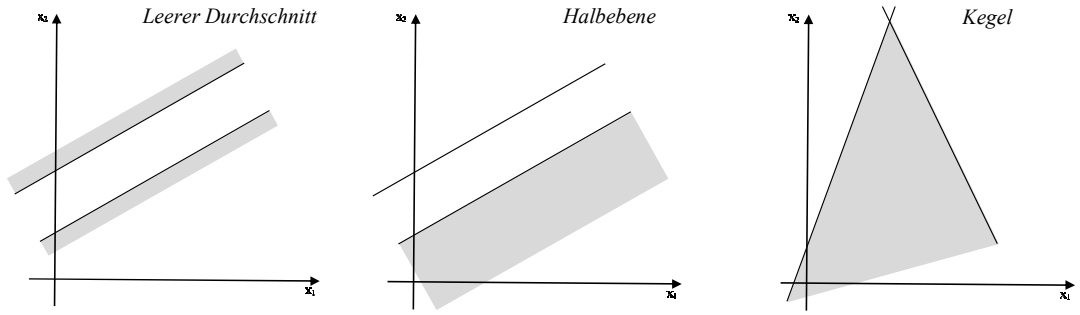


Abb. 2.6: Durchschnitt zweier Halbebenen

Deutung der Nichtnegativitätsbedingungen

Des Weiteren sind die Nichtnegativitätsbedingungen (2.28) zu erfüllen. In einem rechtwinkeligen kartesischen x_1, x_2-Koordinatensystem gilt $x_1 \geq 0$ für die Punkte, die rechts der x_2-Achse und genau auf dieser Achse liegen. Analog erhalten wir für $x_2 \geq 0$ jene Punkte, die oberhalb der x_1-Achse und auf dieser Achse liegen. Die auf diese Art und Weise definierten abgeschlossenen Halbebenen haben als Durchschnitt den abgeschlossenen ersten Quadranten (vgl. Körth et al. (1975); S. 269).

Wenn wir die oben ausgeführten Überlegungen bezüglich der Restriktionen und der Nichtnegativitätsbedingen zusammenfassen, können wir daraus folgern, dass der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems in zwei Variablen durch den Teil des Durchschnitts der allen Nebenbedingungen erfüllenden abgeschlossenen Halbebenen definiert ist, der im ersten Quadranten des rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystem liegt. Gemäß Definition 2.4 und 2.7 ist die Menge aller zulässigen Punkte entweder leer, konvexes Polyeder oder unbeschränkte polyedrische Menge. In Abbildung 2.7 sind ein konvexes Polyeder und eine unbeschränkte polyedrische Menge als zulässiger Bereich für ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Ungleichungen unter Berücksichtigung der Nichtnegativitätsbedingungen veranschaulicht.

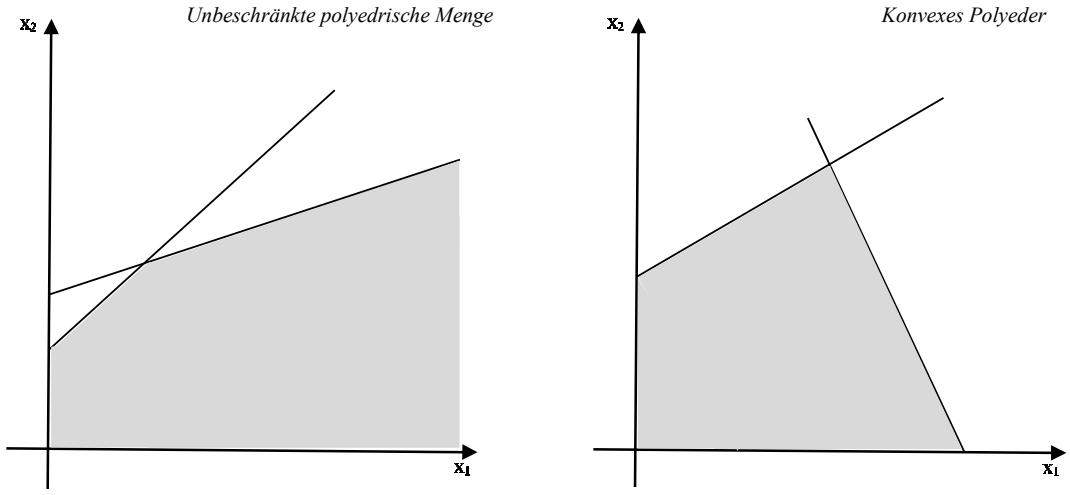


Abb. 2.7: Menge der zulässigen Punkte

Deutung der Zielfunktion

Wir können uns die Zielfunktion $F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ als Schar von Geraden $\{x | c_1x_1 + c_2x_2 = z\}$ mit einem Parameter $z \in \mathbb{R}$ vorstellen. Sinnvollerweise muss in (2.26) wenigstens einer der Koeffizienten c_1, c_2 verschieden von Null sein. Sei $c_2 \neq 0$ und wir lösen (2.26) nach x_2 auf. Wir erhalten (vgl. hierfür und im Folgenden dieses Abschnittes Körth et al. (1975); S. 270):

$$x_2 = \frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2}. \tag{2.29}$$

Wenn $c_2 = 0$ und $c_1 \neq 0$ sind, dann wird mithilfe von (2.26) eine zur x_2-Achse parallele Gerade für jedes feste z abgebildet. Bei einem veränderlichen z ist aus (2.29) erkennbar, dass eine Schar von parallelen Geraden entsteht. Das Glied $\frac{z}{c_2}$ in (2.29) gibt an, in welchem Punkt die betreffende Gerade die x_2-Achse schneidet. Dieser Schnittpunkt offeriert die erforderliche Auskunft über den Wert von z.

Des Weiteren können wir uns folgende Zusammenhänge überlegen:

- ✓ Wenn $c_2 > 0$ ist, dann wird bei wachsendem $\frac{z}{c_2}$ auch der Wert von z größer.
- ✓ Wenn $c_2 < 0$ ist, dann wird bei wachsendem $\frac{z}{c_2}$ der Wert von z kleiner.

Da wir das Maximum der Zielfunktion suchen, gilt es, die Gerade mit dem maximalen Parameterwert z zu finden, welche mit dem Polyeder P eine nicht leere Durchschnittsmenge aufweist. Daher zeichnen wir zuerst eine Gerade, für welche $z = 0$ ist. Wir verschieben die so gezeichnete Gerade parallel zu sich selbst, bis der Abschnitt auf der x_2-Achse bei $c_2 > 0$ möglichst groß bzw. bei $c_2 < 0$ möglichst klein wird.

Ist die Optimallösung *eindeutig* bestimmt, dann berührt diese parallel verschobene Gerade den zulässigen Bereich (in diesem Fall konvexes Polyeder) genau in einem Punkt. Die Koordinaten des Punktes sind als Schnittpunkt derjenigen Nebenbedingungen definiert, die er in der Gleichheit erfüllt. Bei zwei Restriktionen können wir die Optimallösung $\mathbf{x}^*$ folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Der zugehörige Optimalwert für z ist durch Einsetzen der Optimallösung $\mathbf{x}^*$ in die Zielfunktion zu errechnen (siehe Abb. 2.8).

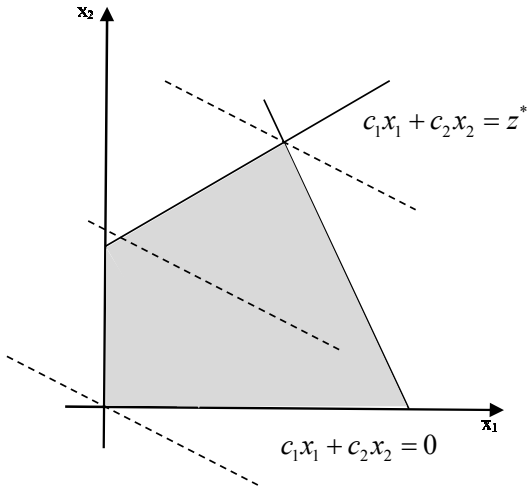


Abb. 2.8: Eindeutige Optimallösung

Ist die Optimallösung *nicht eindeutig* bestimmt, dann fällt diese parallel verschobene Gerade, die zum Optimalen z gehört, mit einer der Grenzgeraden zusammen. Daher gibt es unendlich viele Optimallösungen $\mathbf{x}^*$, welche die Zielfunktion maximieren. Diese kann man als lineare Konvexkombination darstellen (siehe Abb. 2.9)

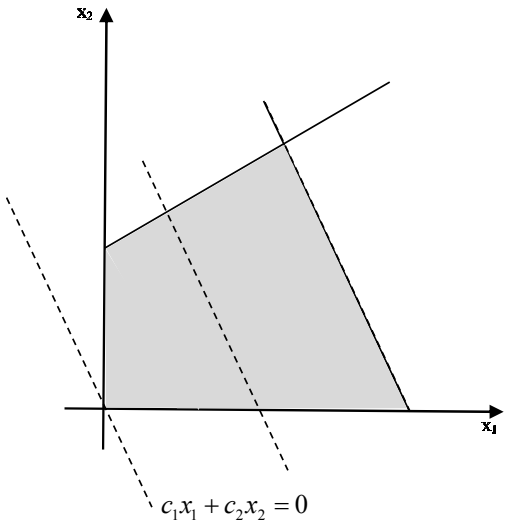


Abb. 2.9: Unendlich viele Optimallösungen

Abschließend ist auf den Fall Rücksicht zu nehmen, in dem die zulässige konvexe Menge unbeschränkt ist. Der Optimalwert für z ist nicht beschränkt, da die Gerade beliebig weit nach rechts parallel verschoben werden kann und der Wert von z gegen $+\infty$ strebt. Das lineare Optimierungsproblem besitzt keine endliche Optimallösung (siehe Abb. 2.10).

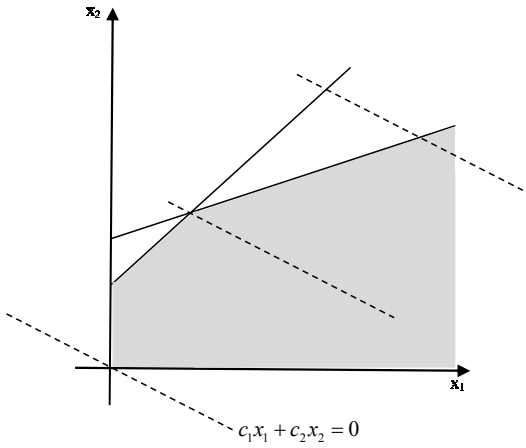


Abb. 2.10: Keine endliche Optimallösung

3. Das Simplexverfahren

Verfahren, die eine explizite Darstellung hinsichtlich der Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe angeben können, sind bis dato nicht bekannt. Dieses Faktum ist nicht besonders überraschend, da lineare Gleichungssysteme am wirksamsten mit iterativen Methoden zu lösen sind. Aus diesem Grund sind zur Bewältigung linearer Optimierungsprobleme Iterationsverfahren ausgearbeitet worden. Das am meisten angewandte und bekannteste ist die *Simplexmethode*. Der Name dieses Verfahrens leitet sich von dem Begriff Simplex aus der Geometrie ab, welcher ein durch $n+1$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ aufgespannten konvexen Polyeders bezeichnet (vgl. Körth et al. (1975); S. 278).
Wie schon im Kapitle 1 der vorliegenden Arbeit beleuchtet, wurden die Grundgedanken für die Simplexmethode von dem russischen Mathematiker Kantorowicz im Jahr 1939 dargelegt. Allerdings wird dieses Lösungsverfahren meistens G. B. Dantzig zugeschrieben, da er die Vorgehensweise in ausführlicher Entwicklung im Jahr 1947 veröffentlichte.
In dem vorliegenden Kapitel wird zunächst auf die Voraussetzungen und Konventionen kurz eingegangen, damit den weiteren Ausführungen unmissverständlich gefolgt werden kann (vgl. Grötschel (2015); S. 159-160).

Hauptvoraussetzungen

Das lineare Optimierungsproblem ist in der kanonischen Form angegeben:

$$\max\ c^T\mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass

- ✓ A eine $(m \times p)$-Matrix mit $m < p$
- ✓ $\text{Rang}(A) = m$
- ✓ Polyeder der Form $P^{=}(A,b) \neq \emptyset$ sind.

Konventionen

Um die Schreibtechnik der weiteren Darstellungen zu vereinfachen, werden folgende Konventionen festgelegt:

- ✓ Die Zeilenindexmenge der Matrix A wird mit $\{1,2,\ldots,m\}$ angegeben.
- ✓ Die Spaltenindexmenge des Vektors **b** wird mit $\{1,2,\ldots,p\}$ angegeben.
- ✓ Mit B und N werden stets Spaltenindexvektoren der Matrix A kennzeichnet, wobei $B=(p_1,p_2,\ldots,p_m)\in\{1,2,\ldots,p\}^m$ und $N=(q_1,q_2,\ldots,q_{p-m})\in\{1,2,\ldots,p\}^{p-m}$ gelten. Außerdem kommt kein Spaltenindex, der in B vorkommt, auch in N vor und *vice versa*.
- ✓ Wenn die Anordnung der Indizes nicht von Relevanz ist, können wir B und N als Mengen auffassen, für die $B\cap N=\varnothing$ und $B\cup N=\{1,2,\ldots,p\}$ gelten. Wir können dann $i\in B$ und $j\in N$ notieren.
- ✓ Zur Vereinfachung schreiben wir für die Basismatrix A_B und für die Nichtbasismatrix A_N.
- ✓ Ist ein Spaltenindexvektor B wie oben angeführt definiert, so bezeichnet $N=(q_1,q_2,\ldots,q_{p-m})$ immer den Spaltenindexvektor, welcher alle übrigen Spaltenindizes enthält. Dabei gilt $q_i<q_j$ für $i<j$.

Abschließend ist festzuhalten, dass wir zwischen Grundversion und Varianten des Simplexverfahrens in diesem Kapitel unterscheiden, wobei die Grundversion aus schulpädagogischen Motiven im Vordergrund steht. Die Varianten des Simplexverfahrens werden aus Gründen der Vollständigkeit kurz beleuchtet.

3.1. Grundversion des Simplexverfahrens

Das Simplexverfahren erzeugt in ihrer ersten Phase eine zulässige Basislösung des linearen Optimierungsproblems oder veranschaulicht, dass für diesen Optimierungssachverhalt keine zulässige Lösung existiert. Wie eine zulässige Lösung generiert wird, wird im Abschnitt 3.1.3. genauer erläutert. In der zweiten Phase werden ausgehend von einer zulässigen Basislösung schrittweise neue zulässige Basislösungen errechnet, wobei eine optimale zulässige Basislösung in endlich vielen Iterationen zu finden ist oder es ist zu erkennen, dass für dieses Problem sogenannte unbeschränkte Lösungen vorhanden sind. Dabei ist der Zielfunktionswert stets zu vergrößern, wenn man von einem Maximierungsproblem ausgeht.

Wir unterschieden zwischen der Simplexmethode, welche sich aus den beiden bereits erwähnten Phasen zusammensetzt, und dem Simplexalgorithmus, der in der ersten Phase aus einer vorliegenden zulässigen Basislösung eine neue generiert.

3.1.1. Basisabhängige Darstellung des linearen Optimierungsproblems

Da der Simplexalgorithmus stets mit der zulässigen Basislösung beginnt, ist es erforderlich, in einem ersten Schritt die wesentlichen Begrifflichkeiten an die angeführten Konventionen anzupassen.

Definition 3.1.: (vgl. Grötschel (2015); S. 160).
Es sei ein Problem der linearen Optimierung in der Normalform (2.18) – (2.22) mit Rang m der $(m \times p)$-Matrix A und $m < p$ gegeben.

a) Ist A_B regulär, so werden A_B *Basismatrix* (Basis) und A_N *Nichtbasismatrix* (Nichtbasis) genannt. Der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ mit $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_B = A_B^{-1} \cdot \mathbf{b}$ heißt die zu A_B gehörige Basislösung.

b) Ist A_B eine Basismatrix, dann heißt jede Variable x_j mit $j \in B$ *Basisvariable* und x_j mit $j \in N$ heißt *Nichtbasisvariable*.

c) Ist A_B eine Basismatrix, so werden A_B und die zugehörigen Basislösungen $\mathbf{x}_B$ *zulässig* bezüglich des Polyeders $P^{=}(A,b)$ genannt, wenn $\mathbf{x}_B = A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ erfüllt ist.

d) Eine Basislösung zur Basis A_B heißt nichtentartet, wenn $\mathbf{x}_B = A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} > \mathbf{0}$, ansonsten wird sie entartet genannt.

Die in Definition 3.1. angeführten Begrifflichkeiten werden anhand des Beispiels 2.7 (siehe Kapitel 2, S. 23-24) veranschaulicht. Das Produktionsplanungsproblem kann in kanonischer Form folgendermaßen notiert werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 720 \\ 60 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Somit ist das Polyeder $P^{=}(A,b)$ gegeben durch:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\6&9&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}100\\720\\60\end{pmatrix}.$$

In der Tabelle 3.1 sind die Basen von A und die zugehörigen Basislösungen $\mathbf{x}_B$ abgebildet. Bei diesem Optimierungsproblem stellt jede (3×3)-Matrix von A eine Basis dar, was allerdings nicht immer der Fall sein kann.

Spalten in B	A_B	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}$	**Ecke**
3, 4, 5	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$(x_3,x_4,x_5)=$ $(100,720,60)$	(x_1,x_2)	$(0,0,100,720,60)$	Ecke A
2, 3, 4	$\begin{pmatrix}1&1&0\\9&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$(x_2,x_3,x_4)=$ $(60,40,180)$	(x_1,x_5)	$(0,60,40,180,0)$	Ecke B
1, 2, 3	$\begin{pmatrix}1&1&1\\6&9&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$(x_1,x_2,x_3)=$ $(30,60,10)$	(x_4,x_5)	$(30,60,10,0,0)$	Ecke C
1, 2, 5	$\begin{pmatrix}1&1&0\\6&9&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$(x_1,x_2,x_5)=$ $(60,40,20)$	(x_3,x_4)	$(60,40,0,0,20)$	Ecke D
1, 4, 5	$\begin{pmatrix}1&0&0\\6&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$(x_1,x_4,x_5)=$ $(100,120,60)$	(x_2,x_3)	$(100,0,0,120,60)$	Ecke E
2, 4, 5	$\begin{pmatrix}1&0&0\\9&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$	$(x_2,x_4,x_5)=$ $(100,-180,-40)$	(x_1,x_3)	$(0,100,0,-180,-40)$	Ecke F
2, 3, 5	$\begin{pmatrix}1&1&0\\9&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$	$(x_2,x_3,x_5)=$ $(80,20,-20)$	(x_1,x_4)	$(0,80,20,0,-20)$	Ecke G

Spalten in B	A_B	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}$	Ecke
1, 2, 4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(x_1, x_2, x_4) = (40, 60, -60)$	(x_3, x_5)	$(40, 60, 0, -60, 0)$	Ecke H
1, 3, 5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(x_1, x_3, x_5) = (120, -20, 60)$	(x_2, x_4)	$(120, 0, -20, 0, 60)$	Ecke J

Tab. 3.1: Basenübersicht des Gleichungssystems

Die ersten fünf in der Tabelle 3.1 angeführten Basislösungen sind zulässig, da $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ ist. Die letzten vier Lösungen zu den entsprechenden Basen sind unzulässig, da das Nichtnegativitätskriterium verletzt ist.

Abschließend ist in Erinnerung zu rufen, dass zulässige Basislösungen Ecken des zulässigen Bereichs und umgekehrt entsprechen (siehe Satz 2.2, S. 21-23). In diesem Zusammenhang ergibt sich die Frage, wie man den zulässigen Bereich durch Basis- und Nichtbasisvariablen darstellen kann.

Zulässige Menge durch Basis- und Nichtbasisvariablen

Seien B eine festgewählte Basis und N eine festgewählte Nichtbasis. Das lineare Optimierungsproblem kann mithilfe dieser Basen folgendermaßen notiert werden (vgl. hierfür und im Folgenden: Burkard und Zimmermann (2012), S. 33-34):

$$A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

Wenn man mit der inversen Matrix A_B^{-1} zu Basis B die Gleichung (3.2) von links multipliziert, erhält man die äquivalente Gleichung

$$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N \tag{3.3}$$

Um die äquivalente Gleichung (3.3) schreibtechnisch zu vereinfachen, kann man die *reduzierte Matrix* $\tilde{A}_N := A_B^{-1} A_N$ und den *reduzierten Vektor* $\tilde{\mathbf{b}} := A_B^{-1}\mathbf{b}$ einführen. Damit erhält man für das Polyeder $P^{=}(A, b)$ die Notation

$$\mathbf{x}_B = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}_N \mathbf{x}_N, \qquad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Wie aus (3.4) hervorgeht, kann jede mögliche Lösung der Gleichung durch Angabe von $\mathbf{x}_N$ dargestellt werden.

Die Koeffizienten der rechten Seite der Gleichung (3.4) nennt man *Darstellungskoeffizienten* und wir bezeichnen sie mit t_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$). Die aus dieser Notation resultierende Darstellung ist

$$\mathbf{x}_{B(i)} = t_{i0} - \sum_{j=1}^{p} t_{ij} x_{N(j)}, \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.5}$$

Die in (3.5) angegebene Schreibweise werden wir anhand des Beispiels 2.7 veranschaulichen. Dabei wählen wir als $B = (1, 2, 3)$ und als Nichtbasis $N = (4, 5)$.

Beispiel 3.1: Darstellung des Beispiels 2.7 in der Form (3.5)

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 - \frac{1}{6} x_4 + \frac{3}{2} x_5 \\ x_2 &= 60 - x_5 \\ x_3 &= 10 + \frac{1}{6} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \end{aligned}$$

Zielfunktion durch Basis- und Nichtbasisvariablen

Seien B eine festgewählte Basis und N eine festgewählte Nichtbasis. Der Wert der Zielfunktion $F(\mathbf{x}) = \boldsymbol{c}^T \mathbf{x}$ sei gegeben durch $z = z_0 + \boldsymbol{c}^T \mathbf{x}$, wobei z_0 eine beliebige Konstante ist. Wenn man die Zielfunktion durch Basis und Nichtbasisvariablen ausdrückt, so erhält man

$$\begin{aligned} z &= z_0 + c_B^T \mathbf{x}_B + c_N^T \mathbf{x}_N \\ z &= z_0 + c_B^T \cdot \left(A_B^{-1} \mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N \right) + c_N^T \mathbf{x}_N \\ z &= \underbrace{\left(z_0 + c_B^T A_B^{-1} \mathbf{b} \right)}_{\tilde{z}_0} + \underbrace{\left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \right)}_{\tilde{c}_N^T} \mathbf{x}_N \\ z &= \tilde{z}_0 + \tilde{c}_N^T \mathbf{x}_N \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die in (3.6) angeführten Größen $\tilde{z}_0 := z_0 + c_B^T A_B^{-1} \mathbf{b}$ und $\tilde{c}_N^T := c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ werden *reduzierte Kostenkoeffizienten* der Zielfunktion genannt. Wie aus der Form (3.6) ersichtlich ist, ist jeder Wert der Zielfunktion durch die Angabe von $\mathbf{x}_N$ festgelegt. Die dazugehörigen Darstellungskoeffizienten der rechten Seite können analog zu (3.5) notiert werden:

$$z = t_{00} + \sum_{j=1}^{p} t_{0j} x_{N(j)} \tag{3.7}$$

Die in (3.7) angegebene Schreibweise der Zielfunktion werden wir anhand des Beispiels 2.7 verdeutlichen. Dabei gehen wir wieder von $B=(1,2,3)$ als Basis und $N=(4,5)$ als Nichtbasis aus.

Beispiel 3.2: Darstellung der Zielfunktion aus dem Beispiel 2.7 in der Form (3.7)

$$\underbrace{F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}_{z}=10x_1+20x_2$$

$$z=10\cdot\left(30-\frac{1}{6}x_4+\frac{3}{2}x_5\right)+20\cdot(60-x_5)$$

$$z=1500-\frac{5}{3}x_4+5x_5$$

Basiswechsel und Simplexkriterium

Da jede Basis der Matrix A, die zulässig ist, eine Ecke des Polyeders definiert, kann das Problem der linearen Optimierung dadurch gelöst werden, indem man alle Basen der Matrix A bestimmt, den Zielfunktionswert der zugehörigen Basislösung ermittelt und die optimalste aus den errechneten Lösungen auswählt. Wenn man in Erwägung zieht, dass eine $(m\times p)$-Matrix bis zu $\binom{p}{m}$ zulässige Basen haben kann, ergibt sich bei dieser Vorgehensweise mit Zunahme der Dimension der Basismatrix ein gewaltiger Rechenaufwand, der kaum durchführbar ist. Als Folge dessen sollte man – ausgehend von einer zulässigen Basislösung – eine neue Basislösung generieren, die einerseits zulässig ist und anderseits den Wert der Zielfunktion verbessert. Außerdem ist das Verfahren so auszurichten, dass der Basiswechsel nicht allzu viel Rechenaufwands bedarf. Des Weiteren wird veranschaulicht, wie ein Basisaustausch mit relativ geringem Rechenaufwand durchgeführt werden kann. Um den Basisaustausch rechentechnisch genau zeigen zu können, ist es notwendig, die Indexmengen B und N wie in den Konventionen (siehe S. 34) angegeben als Vektoren aufzufassen. (vgl. hierfür und im Folgenden: Grötschel (2015), S. 164-170).

Satz 3.1 (Basiswechsel): Es sei $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ein Gleichungssystem mit $\operatorname{Rang}(A)=m$. $B=(p_1,p_2,\ldots,p_m)\in\{1,2,\ldots,p\}^m$ und $N=(q_1,q_2,\ldots,q_{p-m})\in\{1,2,\ldots,p\}^{p-m}$ seien Spaltenindexvektoren von A, sodass A_B eine Basis von A ist. Dann setzen wir

$$\tilde{A}_N := A_B^{-1} A_N = \left(\tilde{a}_{rs}\right)_{\substack{1\le r\le m\\ 1\le s\le p-m}}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} := A_B^{-1}\mathbf{b}.$$

Ist $\tilde{a}_{rs} \neq 0$, so ist $A_{B'}$ mit $B' = \left(p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \ldots, p_m\right)$ eine Basis der Matrix A. Ferner gilt, dass $A_{B'}^{-1} = E \cdot A_B^{-1}$, wobei E eine $(m \times m)$-Elementarmatrix ist, welche wie folgt definiert ist:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \delta_{r-1} & & & \\ & & & \delta_r & & & \\ & & & \delta_{r+1} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \delta_m & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist der Vektor $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\right)^T$ die r-te Spalte der Matrix E und ist gegeben durch:

$$\delta_r := \frac{1}{\tilde{a}_{rs}}$$

$$\delta_i := \frac{\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}},\ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{r\}.$$

Das Element $\tilde{a}_{rs}$ wird *Pivot-Element* genannt.

Sind $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{x}}'$ die zu A_B und $A_{B'}$ gehörenden Basislösungen, dann gilt:

$$\tilde{\mathbf{x}}'_{p_i} = \tilde{\mathbf{b}}_i - \frac{\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}}\tilde{\mathbf{b}}_r = E_i \cdot \tilde{\mathbf{b}} = E_i \cdot \mathbf{x}_B,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{r\} \qquad \text{(alte Basisvariablen)}$$

$$\tilde{x}'_{q_s} = \frac{1}{\tilde{a}_{rs}}\tilde{b}_r = E_r \cdot \tilde{b}_r = E_r \cdot x_B \qquad \text{(neue Basisvariable)}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}'_j = \mathbf{0} \text{ andernfalls} \qquad \text{(Nichtbasisvariablen)}$$

Beweis: (ebd.; S. 165-167)

Es seien $\mathbf{d} := A_{\cdot q_s}$, $\tilde{\mathbf{d}} := A_B^{-1}\mathbf{d} = \tilde{A}_{\cdot s}$ und $F := A_B^{-1} A_{B'}$. Die Matrix $A_{B'}$ generiert man, indem die r-te Spalte $A_{\cdot p_r}$ von A_B durch $\mathbf{d}$ ersetzt wird. Daher ist die Matrix F eine $(m \times m)$-Elementarmatrix, deren r-te Spalte der Vektor $\tilde{\mathbf{d}}$ bildet. Somit gilt für das

Produkt der Matrizen $E \cdot F = I$. Daraus folgt, dass $E = F^{-1}$. Da F und A_B invertierbar sind, folgt aus $A_{B'} = A_B \cdot F$ sofort $A_{B'}^{-1} = F^1 \cdot A_B^{-1} = E \cdot A_B^{-1}$. Die übrigen im Satz 3.1 formulierten Formeln können durch einfache Berechnungen ermittelt werden.

□

Der Basiswechsel, der im Satz 3.1 beschrieben wurde, zeigt, dass von einer Basis zu einer anderen übergegangen wird, indem eine Nichtbasisvariable und eine Basisvariable gesucht werden, sodass $\tilde{a}_{rs} \neq 0$ erfüllt ist. Wenn diese Restriktion erfüllt ist, kann die Nichtbasisvariable zu einer Basisvariable gemacht werden, wobei alle restlichen Basisvariablen erhalten bleiben. Im Weiteren wird der Basistausch anhand folgenden Beispiels veranschaulicht.

Beispiel 3.3: Durchführung des Basiswechsels ausgehend vom Beispiel 2.7.
Wir betrachten wieder die kanonische Form des Produktionsplanungsproblems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 100 \\ 720 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Es seien $B = (3,4,5)$ und $N = (1,2)$, dann ist A_B eine Basis von A und es gilt

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 720 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Basislösung lautet $\mathbf{x}_B^T = (100, 720, 60)$ und $\mathbf{x}_N^T = (0,0,0)$. Folglich bekommen wir für die Lösung $\mathbf{x}^T = (0,0,100,720,60)$. Das Element $\tilde{a}_{22} = 9$ ist verschieden von Null und wir können es als Pivot-Element $\tilde{a}_{rs}$ ($r = 2, s = 2$) wählen.

Daraus resultieren: $B' = (3,2,5)$, $N' = (1,4)$, $E = \begin{pmatrix} 1 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & -1/9 & 1 \end{pmatrix}$,

$$E \cdot A_B^{-1} = A_{B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & -1/9 & 1 \end{pmatrix}$$ und

$$A_{B'}^{-1} \cdot A = E \cdot A_B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 & -1/9 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 1/9 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & -1/9 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{A}' = A_{B'}^{-1} A_{N'} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 \\ 2/3 & 1/9 \\ -2/3 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Basislösung ist $\mathbf{x}_{B'}^T = (20, 80, -20)$ und $\mathbf{x}_{N'}^T = (0, 0, 0)$. Damit erhalten wir für die Lösung $\mathbf{x}^T = (0, 80, 20, 0, -20)$. Allerdings wissen wir nicht, unter welchen Voraussetzungen die ermittelte Lösung $\mathbf{x}^T$ optimal ist. Dies wird im Satz 3.2 genauer erläutert.

Satz 3.2: Es sei ein lineares Optimierungsproblem in kanonischer Form (2.23 – 2.25) angegeben und A_B sei eine Basis von A (ebd.; S. 168).

(i) Für den Wert der Zielfunktion $c^T\mathbf{x}$, wenn $\mathbf{x} \in P^=(A, b)$, gilt

$$c^T\mathbf{x} = c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \left(\underbrace{c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N}_{\tilde{c}^T} \right) \mathbf{x}_N .$$

Der Term $\tilde{c}^T$ in den Klammern wird *reduzierte Kosten* genannt.

(ii) (Simplexkriterium) Wenn die Matrix A_B eine zulässige Basis und die reduzierten Kosten nichtpositiv sind, dann ist die zugehörige Basislösung $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_N = 0$ *optimal* für das Problem der linearen Optimierung in kanonischer Form (2.23 – 2.25).

(iii) Wenn die Matrix A_B eine zulässige Basis und die zugehörige Basislösung nichtdegeneriert und optimal sind, dann gilt $\tilde{c} \le 0$.

Beweis: (ebd.)

(i) Da die Matrix A_B eine Basis von A für das lineare Optimierungsproblem in kanonischer Form (2.23 – 2.25) ist, dann gilt $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N$.

Damit gilt $c^T\mathbf{x} = c_B^T\mathbf{x}_B + c_N^T\mathbf{x}_N = c_B^T \left(\underbrace{A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N}_{\mathbf{x}_B} \right) + c_N^T\mathbf{x}_N =$

$= c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \right) \mathbf{x}_N$.

(ii) Sei $\mathbf{z} \in P^{=}(A,b)$ beliebig. In diesem Fall ist zu zeigen, dass $c^T\mathbf{x} \geq c^T\mathbf{z}$. Wir können schreiben:

$c^T\mathbf{z}=c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \tilde{c}^T\mathbf{z}_N \leq c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b}=c_B^T\mathbf{x}_B = c^T\mathbf{x}$, da $\tilde{c}^T \leq 0$ und $\mathbf{z}_N \geq 0$. Somit wurde gezeigt, dass $c^T\mathbf{x} \geq c^T\mathbf{z}$.

(iii) Die Basislösung $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_N = 0$ sei optimal. Dann gilt für alle $\mathbf{z} \in P^{=}(A,b)$, dass $c^T\mathbf{x} \geq c^T\mathbf{z} \Leftrightarrow c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \tilde{c}^T\mathbf{x}_N \geq c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \tilde{c}^T\mathbf{z}_N \Leftrightarrow 0 \geq \tilde{c}^T\mathbf{z}_N$. Angenommen das i-te Element von $\tilde{c}^T$ wäre positiv. Nach Voraussetzung ist die zugehörige Basislösung nichtdegeneriert, d. h. $A_B^{-1}\mathbf{b} > 0$. Sei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{p-m}$, dann existiert ein $\lambda > 0$ mit $A_B^{-1}\mathbf{b} > A_B^{-1}A_N\lambda e_i$. Der Vektor $\mathbf{x}^\lambda$ mit $\mathbf{x}_B^\lambda = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\lambda e_i$ und $\mathbf{x}_N^\lambda = \lambda e_i$ ist für (2.23 – 2.25) ein zulässiger Vektor. Somit gilt es $c^T\mathbf{x}^\lambda = c_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} + \tilde{c}^T\lambda e_i = c^T\mathbf{x} + \underbrace{\lambda\tilde{c}_i}_{>0} > c^T\mathbf{x}$. Dadurch erhalten wir einen Widerspruch.

□

3.1.2. Durchführung des Simplexverfahrens

In dem Abschnitt der vorliegenden Arbeit setzen wir uns mit der numerischen Durchführung des Simplexverfahrens auseinander. Die Grundidee des Verfahrens wurde zu Beginn des Kapitels 3 bereits erläutert und kann an dieser Stelle folgendermaßen kurz dargestellt werden (vgl. hier und im Folgenden: Grötschel (2015); S. 170-171):

- ✓ Eine zulässige Basis A_B wird gefunden. (Phase I)
- ✓ Aus der Basis A_B wird eine zulässige Basis $A_{B'}$ konstruiert, sodass die neue zulässige Basislösung besser ist. (Phase II)
- ✓ Die zuletzt ermittelte Basislösung ist optimal, wenn keine bessere existiert.

Um die oben informell beschriebene Grundidee analytisch darzustellen, gehen wir von folgender Grundversion des Simplexverfahrens aus:

Definition 3.2. (Grundversion des Simplexverfahrens): Eingabe: $A' \in \mathbb{R}^{(m',p)}$, $\boldsymbol{b'} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}'}$, $c \in \mathbb{R}^p$; **Ausgabe:** Das Simplexverfahren liefert eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems, wenn eine solche existiert, die folgende Form aufweist:

max $c^T\mathbf{x}$ unter den Restriktionen $A'\mathbf{x}=\mathbf{b}'$, $\mathbf{x}\geq 0$. Ansonsten stellt das Verfahren fest, dass das Problem der linearen Optimierung unbeschränkt ist oder keine zulässige Lösung hat.

Phase I des Simplexverfahrens

In dieser Phase wird eine Basislösung ermittelt und auf die Zulässigkeit getestet. Wie die gesamte Phase I durchzuführen ist und wie numerisch vorzugehen ist, wenn die erstrebten Ergebnisse nicht zustande kommen, wird im Abschnitt 3.1.3. genauer erläutert.

Wir bestimmen von $A'\mathbf{x}=\mathbf{b}'$, $\mathbf{x}\geq 0$ ein Subsystem $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}\geq 0$, sodass $P^{=}(A,b)=P^{=}(A',b')$ gilt und die Zusatzbedingungen $\text{Rang}(A)=$Zeilenanzahl von $A<$ Spaltenanzahl von A, wenn möglich, erfüllt sind.

Des Weiteren ermitteln wir $B=(p_1,p_2,\ldots,p_m)\in\{1,2,\ldots,p\}^m$, sodass A_B eine zulässige Basis von A ist, wobei $N=(q_1,q_2,\ldots,q_{p-m})\in\{1,2,\ldots,p\}^{p-m}$ und $\text{Rang}(A)=m$ seien.

Abschließend berechnen wir die Inverse von A zur Basis B, $\tilde{A}=A_B^{-1}A_N$, $\tilde{\mathbf{b}}=A_B^{-1}\mathbf{b}$, $\tilde{c}^T=c_N^T-c_B^TA_B^{-1}A_N$ und $c_0=c_B^T\tilde{\mathbf{b}}$.

Allerdings gehen wir an dieser Stelle davon aus, dass die Phase I zum gewünschten Erfolg geführt hat.

Phase II des Simplexverfahrens

Die Phase II setzt sich aus Optimalitätsprüfung, Bestimmung der Pivotspalte, Prüfung auf Beschränktheit der optimalen Lösung, Bestimmung der Pivotspalte, Basiswechsel und Updating zusammen. Ist die gefundene zulässige Basislösung optimal, dann ist die Phase II abgeschlossen. Diese Phase geht auch zu Ende, wenn die Beschränktheit des Optimums nicht bestätigt wird. Andernfalls wiederholen sich die oben aufgelisteten Rechenschritte bis die errechnete Basislösung optimal wird. Im Konkreten beinhalten die Rechenschritte wie folgt (ebd., S. 171-173):

(1) ***Optimalitätsprüfung:*** Die errechnete Basislösung ist optimal, wenn $\tilde{c}_i\leq 0$ für $i=1,2,\ldots,p-m$ gilt. Wir geben den Vektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_B=\tilde{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$ aus. Für den Optimalwert des linearen Optimierungsproblems erhalten wir $c^T\mathbf{x}=c_B^T\tilde{\mathbf{b}}=c_0$. Somit ist das Simplexverfahren beendet.

(2) ***Bestimmung der Pivotspalte:*** Wir wählen einen Index $s \in \{1,2,\ldots,p-m\}$, sodass die reduzierten Kostenkoeffizienten positiv sind, d.h. $\tilde{c}_s > 0$. Wenn mehrere reduzierte Kosten positiv sind, existieren diverse Varianten zur konkreten Realisierung der Auswahl, die wir im Abschnitt 3.2.2. (siehe S. 62-65) genauer erläutern werden.

(3) ***Prüfung auf Beschränktheit der optimalen Lösung:*** Die ermittelte zulässige Basislösung wird auf Beschränktheit überprüft. Wenn $\tilde{A}_{\cdot s} \leq 0$ gilt, dann ist das lineare Optimierungsproblem unbeschränkt. Damit ist das Simplexverfahren beendet.

(4) ***Bestimmung der Pivotzeile:*** Wir berechnen $\lambda_0 := \min\left\{\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \middle| \tilde{a}_{is} > 0,\ i = 1,2,\ldots,m\right\}$.

Dann wählen wir einen Index $r \in \{1,2,\ldots,m\}$, sodass $\lambda_0 = \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}$ erfüllt ist. Die verschiedenen Möglichkeiten zur Auswahl der Zeile werden im Abschnitt 3.1.4 besprochen.

(5) ***Basiswechsel:*** Wir setzen $B' := (p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_m)$, $N' := (q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}, p_r, \mathrm{q}_{s+1}, \mathrm{q}_{s+2}, \ldots, \mathrm{q}_{p-m})$, $A_{B'}^{-1} := EA_B^{-1}$ (siehe Satz 3.1, S. 38-40).

(6) ***Updating:*** Wir berechnen $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ und c_o neu. Zur Ermittlung der erwähnten Größen existieren viele numerische Varianten. Allerdings aus fachdidaktischen Gründen wird ein klares Verfahren angegeben, welches numerisch umständlich und höchstens für Berechnungen ohne Computerunterstützung geeignet ist.

- ✓ *Neuberechnung* von $\tilde{A}$: Wir setzen $\tilde{\tilde{a}}_{rs} := \frac{1}{\tilde{a}_{rs}}$. Für $i = 1,2,\ldots,m$, $i \neq r$ führen wir $\tilde{\tilde{a}}_{is} := -\tilde{\tilde{a}}_{rs}\tilde{a}_{is}$ aus. Für $j = 1,2,\ldots,\mathrm{p-m}$, $j \neq s$ führen wir $\tilde{\tilde{a}}_{rj} := \tilde{\tilde{a}}_{rs}\tilde{a}_{rj}$ aus. Für $j = 1,2,\ldots,\mathrm{p-m}$, $j \neq s$ und $i = 1,2,\ldots,m$, $i \neq r$ führen wir $\tilde{\tilde{a}}_{ij} := \tilde{a}_{ij} - \frac{\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}}\tilde{a}_{rj} = \tilde{a}_{ij} + \tilde{\tilde{a}}_{is}\tilde{a}_{rj}$ aus.

- ✓ *Neuberechnung* von $\tilde{b}$: Wir setzen $\tilde{\tilde{b}}_r := \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}$. Für $i = 1,2,\ldots,m$, $i \neq r$ führen wir $\tilde{\tilde{b}}_i := \tilde{b}_i - \frac{\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}}\tilde{b}_r$ aus.

- ✓ *Neuberechnung* von $\tilde{c}$: Wir setzen für $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p} - \mathrm{m}$, $j \neq s$

  $\tilde{\tilde{c}}_j := \tilde{c}_j - \frac{\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}} \tilde{c}_s$ und $\tilde{\tilde{c}}_s := -\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}}$.

- ✓ *Neuberechnung* von c_o: Wir setzen für $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p} - \mathrm{m}$, $j \neq s$

  $c_o := c_o + \tilde{c}_s \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}$.

Schlussendlich setzen wir $\tilde{A} := \tilde{\tilde{A}}$, $\tilde{b} := \tilde{\tilde{b}}$, $\tilde{c} := \tilde{\tilde{c}}$ und gehen zum Schritt (1) der Phase II.

Simplextableau

Um die einzelnen Rechenschritte unmissverständlich zu veranschaulichen und ohne Technologieeinsatz leicht durchführbar zu machen, kann für das lineare Optimierungsproblem (2.23 – 2.25) das sogenannte Simplextableau verwendet werden.

Definition 3.3: Sind $\max\left\{c^T \mathbf{x} \middle| A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\right\}$ ein lineares Optimierungsproblem in kanonischer Form und A_B eine zulässige Basis von A, so wird die $(m+1, p+1)-$Matrix

$$T_B := \begin{pmatrix} c^T - c_B^T A_B^{-1} A & -c_B^T A_B^{-1} b \\ A_B^{-1} A & A_B^{-1} b \end{pmatrix}$$

ein Simplextableau zu Basis B mit Zeilen $i = 1, 2, \ldots, m+1$ und Spalten $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}+1$ genannt. (ebd., S. 173)

Insbesondere für Unterrichtszwecke im schulischen Kontext kann das Simplextableau folgendermaßen veranschaulicht werden (siehe Tabelle 3.2, vgl. Domschke et al. (2015), S. 28). Ein Simplextableau von dieser Gestalt wird in der gängigen Fachliteratur *primal zulässig* genannt. Die dabei auftretenden $(m+1)-$verschiedenen Einheitsvektoren bilden stets eine zulässige Basis.

Wie aus der Tabelle 3.2 (siehe S. 46) ersichtlich ist, beinhaltet das Simplextableau alle essenziellen Informationen eines linearen Optimierungsproblems in kanonischer Form mit $\mathrm{Rang}(A) = m$. Im Konkreten sind veranschaulicht:

- ✓ Basisvariablen aller Gleichungen des Optimierungsproblems
- ✓ Koeffizienten aller Basis- und Nichtbasisvariablen

- ✓ F als zusätzliche Variable
- ✓ Werte b_i der rechten Seite.

		Nichtbasisvariablen			*Basisvariablen*				
		x_1	$\dots$	x_{p-m}	x_{p-m+1}	$\dots$	x_p	F	b_i
Basisvariable	x_{p-m+1}	a_{11}	$\dots$	$a_{1,p-m}$	1	$\dots$	0	0	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_p	a_{m1}	$\dots$	$a_{m,p-m}$	0	$\dots$	1	0	b_m
		$-c_1$	$\dots$	$-c_{p-m}$	0	$\dots$	0	1	

Tab. 3.2: Simplextableau, Ausgangssituation

Die letzte Zeile des Simplextableaus listet die Koeffizienten der Zielfunktion auf und wird Ergebniszeile oder $F-$Zeile genannt. In der grauschattierten Zelle des Tableaus ergibt sich der aktuelle Zielfunktionswert, der aus der folgenden Gleichung ermittelt werden kann:

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_{p-m}x_{p-m} = \textit{aktueller Zielfunktionswert} \tag{3.8}$$

Wenn wir die Koeffizienten der Zielfunktion für die Nichtbasisvariablen zu Beginn mit negativem Vorzeichen eintragen, dann führt diese Vorgehensweise dazu, dass eine Lösung andauernd modifiziert werden kann, wenn eine negative Nichtbasisvariable in der $F-$Zeile vorkommt.

Jede Iteration des Simplexalgorithmus mithilfe des Tableaus setzt sich aus folgenden drei Schritten zusammen (vgl. Domschke et al. (2015); S. 29):

(1) ***Bestimmung der Pivotspalte:*** Wenn alle errechneten Werte in der $F-$Zeile nichtnegativ sind, dann ist die gegenwärtige Basislösung optimal und das Rechenverfahren wird abgebrochen. Ansonsten wird die Spalte s mit dem kleinsten Wert in der $F-$Zeile ausgesucht. Wenn wir mehrere Spalten mit kleinstem Wert zur Verfügung hätten, so wählen wir eine beliebige. Die zugehörige Nichtbasisvariable x_s wird in die Basis neu aufgenommen.

(2) ***Bestimmung der Pivotzeile:*** Wenn alle Koeffizienten in der Pivotspalte nichtpositiv sind, dann können wir für das lineare Optimierungsproblem keine

optimale Lösung angeben und das Rechenverfahren wird beendet. Ansonsten wird eine Zeile r bestimmt, für welche gilt, dass $\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \middle| \tilde{a}_{is} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}$ ist. Die Basisvariable, die zu der Zeile r gehört, verlässt die Basis.

(3) ***Berechnung des neuen Simplextableaus:***

- ✓ Die bisherige Basisvariable (BV) in der Pivotzeile r wird durch die bisherige Nichtbasisvariable x_s ausgetauscht. Dann wird durch lineare Transformation des Systems von Restriktionen unter der neuen Basisvariable x_s ein Einheitsvektor $\tilde{a}_{rs} = 1$ erzeugt. Das geschieht, indem wir die Pivotzeile durch das Element a_{rs} dividieren, und anschließend für alle Zeilen i (ausgenommen die Zeile s) die neue Pivotzeile mit $-a_{is}$ multiplizieren und diese zu der jeweiligen Zeile i hinzu addieren.
- ✓ Indem die Spalten der beiden beim Basiswechsel beteiligten Variablen vertauscht werden, wird ein neues Simplextableau für das lineare Optimierungsproblem in kanonischer Form erzeugt. Danach wird wiederum zum Schritt 1 übergegangen.

Um die Iterationsschritte des Simplextableaus zu demonstrieren, verwenden wir das Beispiel 2.7 aus dem Kapitel 2.

Beispiel 3.4: Iterationsschritte mithilfe des Simplextableaus

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem zur Produktionsplanung in kanonischer Form.

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Restriktionen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$6x_1 + 9x_2 + x_4 = 720$$

$$x_2 + x_5 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\,.$$

Das *Starttableau* T_0 zu diesem Optimierungsproblem sieht folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	100
x_4	6	9	0	1	0	720
x_5	0	**1**	0	0	1	60
F	-10	-20	0	0	0	0

Tab. 3.3: Ergebnisse des Starttableaus T_0

Das erhaltene Starttableau ist zulässig und wir können die zugehörige zulässige Basislösung (Ausgangslösung) bestimmen. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_2 = 0$ und bekommen die erste zulässige Lösung des Optimierungsproblems $\mathbf{x}=(0,0,100,720,60)$. Der Wert der Zielfunktion ist Null. Da die Werte in der $F-$Zeile nichtpositiv sind, ist die errechnete Lösung nicht optimal und kann verbessert werden. Es ist das Pivotelement zu bestimmen. Die Pivotspalte ist in diesem Fall die zweite, da $-20 = \min\{-10,-20\}$. Die sich daraus ergebende Pivotzeile ist die dritte, da $60 = \frac{60}{1} = \min\left\{\frac{100}{1}, \frac{720}{9}, \frac{60}{1}\right\}$. Somit ist das resultierende Pivotelement $a_{32}^0 = 1$.

Mithilfe des Algorithmus werden folgende Kalkulationen zum Basiswechsel durchgeführt:

- ✓ ***Für die Pivotzeile (dritte Zeile):*** Die Pivotzeile wird durch eins dividiert. Wir erhalten:

$$a_{31}^1 = \frac{a_{31}^0}{a_{32}^0} = \frac{0}{1} = 0,\ a_{32}^1 = \frac{a_{32}^0}{a_{32}^0} = \frac{1}{1} = 1,\ a_{33}^1 = \frac{a_{33}^0}{a_{32}^0} = \frac{0}{1} = 0,\ a_{34}^1 = \frac{a_{34}^0}{a_{32}^0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$a_{35}^1 = \frac{a_{35}^0}{a_{32}^0} = \frac{1}{1} = 1,\ b_3^1 = \frac{b_3^0}{a_{32}^0} = \frac{60}{1} = 60$$

- ✓ ***Für die erste Zeile:*** Die Formeln für die entsprechenden Berechnungen sind im Schritt 6 „Updating“ der Phase II ausführlich erläutert wurden (siehe S. 44). Wir erhalten:

$$a_{11}^1 = a_{11}^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{31}^0 = 1 - \frac{1}{1} \cdot 0 = 1\,,\; a_{12}^1 = a_{12}^0 - \frac{a_{13}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{32}^0 = 1 - \frac{1}{1} \cdot 1 = 0\,,$$

$$a_{13}^1 = a_{13}^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{33}^0 = 1 - \frac{1}{1} \cdot 0 = 1\,,\; a_{14}^1 = a_{14}^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{34}^0 = 0 - \frac{1}{1} \cdot 0 = 0\,,$$

$$a_{15}^1 = a_{15}^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{35}^0 = 0 - \frac{1}{1} \cdot 1 = -1\,,\; b_1^1 = b_1^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot b_3^0 = 100 - \frac{1}{1} \cdot 60 = 40$$

- ✓ ***Für die zweite Zeile:*** Die Elemente dieser Zeile werden wie schon oben veranschaulicht, errechnet. Wir bekommen:

$$a_{21}^1 = a_{21}^0 - \frac{a_{22}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{31}^0 = 6 - \frac{9}{1} \cdot 0 = 6\,,\; a_{22}^1 = a_{22}^0 - \frac{a_{22}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{32}^0 = 9 - \frac{9}{1} \cdot 1 = 0\,,$$

$$a_{23}^1 = a_{23}^0 - \frac{a_{22}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{33}^0 = 0 - \frac{9}{1} \cdot 0 = 0\,,\; a_{24}^1 = a_{24}^0 - \frac{a_{22}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{34}^0 = 1 - \frac{9}{1} \cdot 0 = 1\,,$$

$$a_{25}^1 = a_{25}^0 - \frac{a_{22}^0}{a_{32}^0} \cdot a_{35}^0 = 0 - \frac{9}{1} \cdot 1 = -9\,,\; b_2^1 = b_2^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{32}^0} \cdot b_3^0 = 720 - \frac{9}{1} \cdot 60 = 180$$

- ✓ ***Für die F-Zeile:*** Die Formel für die Berechnung der Ergebniszeile ist im Schritt 6 „Updating“ genau präsentiert worden. Nach Anwendung erhalten wir:

$$c_1^1 = c_1^0 - \frac{a_{31}^0}{a_{32}^0} \cdot c_2^0 = -10 - \frac{0}{1} \cdot (-20) = -10\,,\; c_2^1 = c_2^0 - \frac{a_{32}^0}{a_{32}^0} \cdot c_2^0 = -20 - \frac{1}{1} \cdot (-20) = 0\,,$$

$$c_3^1 = c_3^0 - \frac{a_{33}^0}{a_{32}^0} \cdot c_2^0 = 0 - \frac{0}{1} \cdot (-20) = 0\,,\; c_4^1 = c_4^0 - \frac{a_{34}^0}{a_{32}^0} \cdot c_2^0 = 0 - \frac{0}{1} \cdot (-20) = 0\,,$$

$$c_5^1 = c_5^0 - \frac{a_{35}^0}{a_{32}^0} \cdot c_2^0 = 0 - \frac{1}{1} \cdot (-20) = 20$$

- ✓ ***Für den aktuellen Funktionswert***: Für den Funktionswert des ersten Simplextableaus erhalten wir:

$$c_0^1 = c_0^0 + c_2^0 \frac{b_3^0}{a_{32}^0} = 0 + 20 \cdot \frac{60}{1} = 1200$$

Als Folge der oben durchgeführten Berechnungen sieht das *erste Simplextableau* T_1 folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	0	1	0	0	40
x_4	**6**	0	0	1	-9	180
x_2	0	1	0	0	1	60
F	-10	0	0	0	20	1200

Tab. 3.4: Ergebnisse des ersten Tableaus T_1

Das erhaltene erste Simplextableau T_1 ist zulässig und wir können die zugehörige zulässige Basislösung ermitteln. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_5 = 0$ und bekommen die zweite zulässige Lösung des Optimierungsproblems $\mathbf{x} = (0, 60, 40, 180, 0)$. Der Wert der Zielfunktion ist $F = 1200$. Da in der $F-$Zeile noch immer ein negativer Koeffizient vorhanden ist, ist die erzeugte Lösung nicht optimal und kann durch Anwendung des Simplexalgorithmus verbessert werden. In diesem Fall ergibt sich für die Pivotspalte die erste, da sich dort der einzige nichtpositive Wert befindet. Die sich ergebende Pivotzeile ist die erste, da $30 = \frac{180}{6} = \min\left\{\frac{40}{1}, \frac{180}{6}\right\}$.

Somit ist das resultierende Pivotelement $a_{21}^1 = 6$.

Die einzelnen Berechnungen sind analog durchzuführen und wir kommen das *zweiten Simplextableau* T_2, dessen Elemente wie folgt sind:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	-1/6	1/2	10
x_1	1	0	0	1/6	-9/6	30
x_2	0	1	0	0	1	60
F	0	0	0	5/3	5	1500

Tab. 3.5: Ergebnisse des zweiten Tableaus T_2

Wie aus der Tabelle 3.5 hervorgeht, ist das zweite Simplextableau T_2 zulässig und wir können die zugehörige zulässige Basislösung ermitteln. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_4 = x_5 = 0$ und bekommen die dritte zulässige Lösung des Optimierungsproblems $\mathbf{x} = (30, 60, 10, 0, 0)$. Der Wert der Zielfunktion ist $F = 1500$. Die ermittelte Lösung ist zugleich die optimale Lösung des aufgestellten Problems, da in der $F-$Zeile keine negativen Koeffizienten mehr vorhanden sind. Als Folge dessen

bedarf die Zielfunktion keiner Verbesserung. Somit ist der Simplexalgorithmus abgeschlossen.

Abschließen möchten wir den für das Beispiel 2.7 durchgeführte Simplexalgorithmus im Kontext des grafischen Lösens linearer Optimierungsprobleme interpretieren. Das Startsimplextableau T_0 lieferte die zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (0,0,100,720,60)$, welche der Ecke A mit Koordinaten $(0,0)$ entspricht (folge Abb. 3.1).

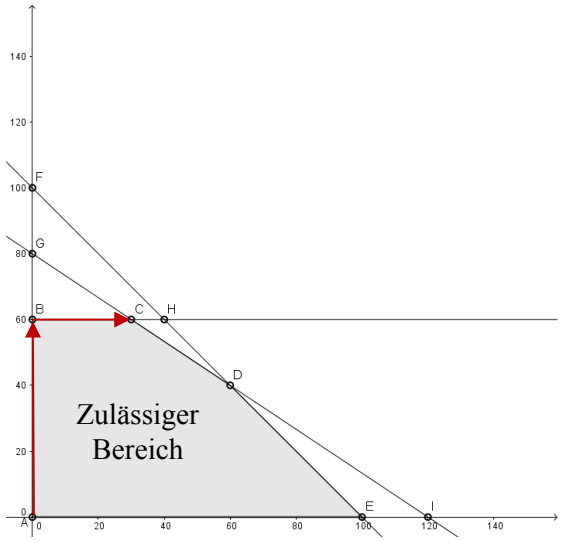


Abb. 3.1: Lösungsschritte nach dem Simplexalgorithmus

Durch das Generieren des ersten Simplextableaus T_1 ergab sich die zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (0,60,40,180,60)$. Diese entspricht dem Eckpunkt B mit Koordinaten $(0,60)$ und ist noch nicht optimal. Das zweite Simplextableau T_2 lieferte die optimale, zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (30,60,10,0,0)$, welche der Ecke C mit Koordinaten $(30,60)$ entspricht. Abschließend ist festzuhalten, dass das Rechenverfahren in der Ecke $(0,0)$ des Zulässigkeitsbereichs beginnt und über den Eckpunkt $(0,60)$ zu der optimalen Ecke $(30,60)$ für dieses Problem der linearen Optimierung konvergiert.

Zusammenfassend ist zu vermerken, dass die Grundversion des Simplexverfahrens nach endlich vielen Iterationen eine optimale Lösung errechnet, oder sie stellt fest, dass das lineare Optimierungsproblem in kanonischer Form unbeschränkt ist, wenn $P^{=}(A,b) \neq \emptyset$ und alle zulässigen Basislösungen nicht entartet sind. Wenn das lineare Optimierungsproblem degenerierte Ecken besitzt, könnte die Grundversion des

Simplexverfahrens nur noch zulässige Basen generieren, die zu der gleichen Ecke gehören. Man spricht in diesem Fall vom Kreiseln des Verfahrens (vgl. Grötschel (2015); S. 178).

3.1.3. Phase I des Simplexverfahrens

Das im Abschnitt 3.1.2. diskutierte Simplexverfahren ist nur dann anwendbar, wenn eine zulässige Ausgangslösung vorliegt. Andernfalls ist eine erste zulässige Lösung zu ermitteln, für deren Erzeugung mehrere Verfahren verfügbar sind. Wir widmen uns in diesem Abschnitt der vorliegenden Diplomarbeit den zwei gängigsten Verfahren – dem dualen Simplexalgorithmus und der sogenannten M-Methode.

Dualer Simplexalgorithmus

Ein Hilfsverfahren dieser Art ist dann durchzuführen, wenn das lineare Optimierungsproblem nicht in kanonischer Form angegeben ist oder wenn es nicht leicht in diese zu transformieren ist. Das Ausgangsproblem wird durch Hinzufügen von Schlupfvariablen, Multiplikation jeder $\geq -$ Bedingung mit -1 etc. (siehe für weitere mögliche Umformungen Beispiel 2.2, S. 13-14) so transformiert, dass der Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}$ und die Koeffizienten der Matrix A den Eigenschaften der kanonischen Form eines linearen Optimierungsproblems genügen. Allerdings weist der Vektor $\mathbf{b}$ negative Elemente auf. Danach startet man in Phase I mit einer nicht zulässigen Basislösung, da einige oder alle Elemente des Vektors $\mathbf{b}$ negativ sind. Im Laufe des dualen Simplexalgorithmus wird diese nicht zulässige Basislösung in eine zulässige transformiert (vgl. Domschke et al. (2015); S. 30).

Danach wird das lineare Optimierungsproblem durch ein Starttableau veranschaulicht und mit den entsprechenden Iterationen des Hilfsalgorithmus begonnen. Jede Iteration des Simplexalgorithmus mithilfe des Tableaus setzt sich aus folgenden drei Schritten zusammen, wobei hier mit der Bestimmung der Pivotzeile gestartet wird. (ebd.; S. 31):

(1) ***Bestimmung der Pivotzeile:*** Wenn alle Elemente des Vektors $\mathbf{b}$ positiv sind, dann liegt bereits eine zulässige Basislösung vor und das duale Rechenverfahren wird beendet. Ansonsten wird eine Zeile r mit dem kleinsten Wert in der $b-$Spalte ausgesucht. Sollten mehrere Zeilen mit dem kleinsten Wert zur Auswahl stehen, so wählen wir eine beliebige.

(2) ***Bestimmung der Pivotspalte:*** Wenn alle Werte in der Pivotzeile r positiv sind, dann besitzt das lineare Optimierungsproblem keine zulässige Basislösung und das duale Rechenverfahren wird abgebrochen. Andernfalls wird eine Spalte s bestimmt, für welche gilt, dass $\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}} = \max\left\{\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{rj}} \middle| \tilde{a}_{rj} < 0,\ j = 1,2,\ldots,p\right\}$ ist. Somit ergibt sich als Pivotelement $\tilde{a}_{rs}$.

(3) ***Berechnung des neuen Simplextableaus:*** Die Tableautransformationen sind analog zum primalen Simplexalgorithmus durchzuführen.

Die Iterationsschritte des Hilfsalgorithmus zur Berechnung der ersten zulässigen Basislösung werden anhand des Beispiels 3.5 erläutert.

Beispiel 3.5: Iterationsschritte der Phase I und II

Wir gehen aus folgendem Problem der linearen Optimierung in Standardform aus:

Maximiere $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, unter den Restriktionen

$$6x_1 + x_2 = 9$$

$$4x_1 + 9x_2 \geq 5$$

$$x_1 + 7x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zunächst ist es erforderlich, das lineare Optimierungsproblem in Normalform zu transformieren. Durch Anwendung der entsprechenden Umformungen erhalten wir:

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 + 2x_2$, unter den Nebenbedingungen

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$-6x_1 - x_2 + x_4 = -9$$

$$-4x_1 - 9x_2 + x_5 = -5$$

$$x_1 + 7x_2 + x_6 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

In diesem Fall sind x_3, x_4, x_5, x_6 die Schlupfvariablen.

Das Starttableau T_0 zu diesem Optimierungsproblem sieht folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	6	1	1	0	0	0	9
x_4	-6	**-1**	0	1	0	0	-9
x_5	-4	-9	0	0	1	0	-5
x_6	1	7	0	0	0	1	3
F	-1	-2	0	0	0	0	0

Tab. 3.6: Ergebnisse des Starttableaus T_0, Phase I

Die in dem Starttableau ausgewiesene Basislösung ist unzulässig, da zwei der Elemente in der $b-$Spalte negativ sind. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_2 = 0$ und bekommen die erste Basislösung $\mathbf{x} = (0,0,9,-9,-5,3)$. Der Wert der Zielfunktion ist Null. Da die errechnete Basislösung nicht zulässig ist, kann sie verbessert werden. Es ist das Pivotelement zu bestimmen. Die Pivotzeile ist die zweite, da $-9 = \min\{-9,-5\}$. Die sich ergebende Pivotspalte ist die zweite, da $2 = \max\left\{\frac{-1}{-6}, \frac{-2}{-1}\right\}$. Somit ist das resultierende Pivotelement $a_{22}^0 = -1$.

Nach Durchführung der Transformationsschritte, die wir in Phase II des Simplexverfahren (folge S. 43-44) ausführlich diskutiert haben, erhalten wir die unten abgebildeten Simplextableaus T_1, T_2, T_3. Die Simplextableaus T_1 und T_2 sind dual bzw. primal zulässig aber nicht optimal. Die optimale Lösung ist im Tableau T_3 dargestellt.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	1	0	0	0
x_2	6	1	0	-1	0	0	9
x_5	50	0	0	-9	1	0	76
x_6	**-41**	0	0	7	0	1	-60
F	11	0	-2	0	0	0	18

Tab. 3.7: Ergebnisse des Tableaus T_1, Phase I

Wie aus der Tabelle 3.7 ersichtlich ist, ist die Basislösung unzulässig, da ein Element in der $b-$Spalte negativ ist. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_4 = 0$ und bekommen die dual zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (0,9,0,0,76,-60)$. Der Wert der

Zielfunktion beträgt 18. Die erzeugte Basislösung ist zu verbessern, indem wieder das Pivotelement bestimmt wird. Für das Pivotelement erhalten wir $a_{41}^{1} = -41$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	**1**	0	0	0
x_2	0	1	0	1/41	0	6/41	9/41
x_5	0	0	0	-19/41	1	0	116/41
x_1	1	0	0	-7/41	0	-1/41	60/41
F	0	0	0	-5/41	0	11/41	78/41

Tab. 3.8: Ergebnisse des Tableaus T_2, Phase I

Die in der Tabelle 3.8 abgebildete Lösung ist primal zulässig, da alle Elemente des Vektors **b** nichtnegativ sind. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_4 = x_6 = 0$ und bekommen die zulässige Basislösung $\mathbf{x} = \left(\frac{60}{41}, \frac{9}{41}, 0, 0, \frac{116}{41}, 0\right)$. Der Wert der Zielfunktion ist $F = \frac{78}{41}$. Da die $F-$Zeile einen negativeren Koeffizienten enthält, ist die erzeugte Lösung nicht optimal und kann durch Anwendung des Simplexalgorithmus (Phase II) verbessert werden. In diesem Fall ergibt sich für das resultierende Pivotelement $a_{14}^{2} = 1$.

Die optimale Lösung für dieses lineare Programm ist in der Tabelle 3.9 dargestellt.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	0	0	1	1	0	0	0
x_2	0	1	-1/41	0	0	6/41	9/41
x_5	0	0	19/41	0	1	0	116/41
x_1	1	0	7/41	0	0	-1/41	60/41
F	0	0	0	5/41	0	11/41	78/41

Tab. 3.9: Ergebnisse des Tableaus T_3, Phase II

Wie aus der Tabelle 3.9 zu entnehmen ist, sind in der $F-$Zeile keine negativen Koeffizienten mehr vorhanden. Als Folge dessen bedarf die Zielfunktion keiner Verbesserung. Somit ist der Simplexalgorithmus abgeschlossen und die optimale Lösung lautet $\mathbf{x} = \left(\frac{60}{41}, \frac{9}{41}, 0, 0, \frac{116}{41}, 0\right)$.

Abschließend ist hervorzuheben, dass der duale Simplexalgorithmus für die Ermittlung einer zulässigen Basislösung insbesondere dann geeignet ist, wenn für ein lineares Optimierungsproblem, dessen optimaler Basislösung bekannt ist, durch Hinzufügen einer weiteren Nebenbedingung die so bestimmte Basislösung unzulässig wird (ebd.; S. 33).

M-Methode

In diesem Abschnitt der vorliegenden Diplomarbeit werden wir die M-Methode nur für Maximierungsprobleme erläutern, da wir bis jetzt die theoretischen Grundlagen für diese Art von Optimierungsproblemen ausführlich besprochen haben.

Wir gehen davon aus, dass das lineare Optimierungsproblem in Normalform angegeben ist. Die $\geq -$ Nebenbedingungen werden nicht mit -1 wie bei dem schon erläuterten dualen Simplexalgorithmus multipliziert. Es werden Schlupfvariablen mit negativem Vorzeichen eingefügt. Zu jeder Restriktion i, welche keine Schlupfvariable mit positivem Vorzeichen aufweist, fügen wir eine sogenannte *fiktive Variable* $y_i \geq 0$, die ein positives Vorzeichen hat, hinzu. Diese fiktive Variable wird in einer Zielfunktion, die zu maximierenden ist, mit $-M$ bewertet. Dabei ist M ausreichend groß zu wählen, sodass gewährleistet wird, dass alle fiktiven Variablen im Laufe des Optimierungsprozesses die Basis verlassen, wenn eine zulässige Lösung des linearen Optimierungsproblems existiert. Auf das mit y_i erweitere Optimierungsproblem wenden wir den primalen Simplexalgorithmus an, bis alle y_i, die anfänglich in der Basis enthalten sind, diese verlassen. Wenn die fiktive Variable in der Basis nicht mehr vorhanden ist und damit den Wert null annimmt, kann sie von den weiteren Rechenschritten ausgenommen werden (ebd.; S. 34).

Die M-Methode wird anhand des Beispiels 3.5 genauer erläutert. Dieses Beispiel erhält durch Hinzufügen von Schlupfvariablen sowie fiktive Variablen folgende Form:

Beispiel 3.6: Anwendung der M-Methode

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2) = x_1 + 2x_2 - My_1 - My_2$,

unter den Restriktionen

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$6x_1 + x_2 - x_4 + y_1 = 9$$

$$4x_1 + 9x_2 - x_5 + y_2 = 5$$

$$x_1 + 7x_2 + x_6 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

In diesem Fall sind x_3, x_4, x_5, x_6 die Schlupfvariablen und y_1, y_2 die fiktiven (künstlichen) Variablen.

Das Starttableau T_0 zu diesem Optimierungsproblem sieht folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	b_i
x_3	6	1	1	0	0	0	0	0	9
y_1	6	1	0	-1	0	0	1	0	9
y_2	4	9	0	0	-1	0	0	1	5
x_6	1	7	0	0	0	1	0	0	3
F	-10M -1	-10M -2	0	M	M	0	-M	-M	-14M

Tab. 3.10: Ergebnisse des Starttableaus T_0, M-Methode

Die in dem Starttableau abgebildete Basislösung ist zulässig, aber nicht optimal, da in der $F-$Zeile Elemente vorhanden sind, die einen negativen Wert aufweisen. Daher ist das Pivotelement nach der in Phase II angegebenen Kriterien zu bestimmen. Wir erhalten für das Pivotelement $a_{42}^1 = 7$.

Nach Anwendung der Rechenschritte des Simplexalgorithmus, erhalten wir die unten abgebildeten Simplextableaus T_1, T_2, T_3, T_4. Die Simplextableaus T_1, T_2 und T_3 sind primal zulässig aber nicht optimal. Im Simplextableau T_3 sind die fiktiven Variablen in der Basislösung nicht mehr präsent (siehe Tabelle 3.13, S. 58).

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	b_i
x_3	41/7	0	1	0	0	-1/7	0	0	60/7
y_1	41/7	0	0	-1	0	-1/7	1	0	60/7
y_2	19/7	0	0	0	-1	-9/7	0	1	8/7
x_2	1/7	1	0	0	0	1/7	0	0	3/7
F	-60/7M -5/7	0	0	M	M	10/7M +2/7	-M	-M	-68/7M -6/7

Tab. 3.11: Ergebnisse des Tableaus T_1, M-Methode

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	b_i
x_3	0	0	1	0	41/19	22/19	0	116/19
y_1	0	0	0	-1	41/19	50/19	1	116/19
x_1	1	0	0	0	-7/19	-9/19	0	8/19
x_2	0	1	0	0	1/19	4/19	0	7/19
F	0	0	0	M	-41/19M -5/19	-50/19M -1/19	0	-116/19M +22/19

Tab. 3.12: Ergebnisse des Tableaus T_2, M-Methode

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	1	0	-28/19	0
x_5	0	0	0	-19/41	1	50/41	116/41
x_1	1	0	0	-7/41	0	-1/41	60/41
x_2	0	1	0	1/41	0	6/41	9/41
F	0	0	0	-5/41	0	11/41	78/41

Tab. 3.13: Ergebnisse des Tableaus T_3, M-Methode

Wie Tabelle 3.13 zeigt, haben die fiktiven Variablen in dem Beispiel 3.6 nach drei Iterationen die Basis und damit das lineare Optimierungsproblem verlassen. Durch eine weitere Iteration, deren Ergebnisse in Tabelle 3.14 dargestellt sind, gelangen wir zu der optimalen Lösung. Daher ist der Simplexalgorithmus abgeschlossen und wir erhalten als Optimum $\mathbf{x} = \left(\frac{60}{41}, \frac{9}{41}, 0, 0, \frac{116}{41}, 0\right)$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	0	0	1	1	0	0	0
x_2	0	1	-1/41	0	0	6/41	9/41
x_5	0	0	19/41	0	1	0	116/41
x_1	1	0	7/41	0	0	-1/41	60/41
F	0	0	0	5/41	0	11/41	78/41

Tab. 3.14: Ergebnisse des Tableaus T_4, M-Methode

Abschließend ist zu vermerken, dass sowohl der duale Simplexalgorithmus als auch die M-Methode identische Lösung für das Optimierungsproblem geliefert haben. Allerdings

haben wir bei der M-Methode eine Iteration mehr benötigt, um zu dem gewünschten Resultat zu kommen.

3.2. Varianten des Simplexverfahrens

Der Simplexalgorithmus ist der Motor der linearen Optimierung. Daher wird stets nach effizienteren Implementationen des Verfahrens gesucht, sodass man im akademischen oder im kommerziellen Kontext mit wenig Aufwand zu der gewünschten Lösung gelangt.

Im Abschnitt 3.1. wurden die Grundversion des Simplexverfahrens theoretisch erläutert und die Iterationsschritte anhand von Beispielen deutlich veranschaulicht. Wir setzten diese Kenntnisse – Definitionen, Sätze, Notationen etc. – voraus, um ein Verständnis für ausgewählte, praxisrelevante Modifikationen des Simplexverfahrens aufzubauen und auf diese Art und Weise unsere Grundkenntnisse zu vertiefen.

3.2.1. Das revidierte Simplexverfahren

Für Probleme der linearen Optimierung, bei welchen die Variablenanzahl p wesentlich größer als die Anzahl der Restriktionen m ist, eignet sich das revidierte Simplexverfahren besser als die im Abschnitt 3.1. dargestellte Grundversion. Darüber hinaus stellt man bei genauer Betrachtung der Grundversion fest, dass während einer Iteration nicht alle Spalten der Matrix $\tilde{A}$ verwendet werden. Diese Tatsache wird im revidierten Verfahren ausgenutzt, indem nur diejenigen Spalten neu ermittelt werden, die im gegenwärtigen Rechenschritt benötigt werden.

Wir skizzieren den revidierten Simplexalgorithmus für ein Problem der linearen Optimierung in kanonischer Form (2.23) – (2.25):

Maximiere $F\left(\mathbf{x}\right) = \boldsymbol{c}^T\mathbf{x}$, unter den Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Wir gehen davon aus, dass eine erste zulässige Basislösung A_B des Optimierungsproblems existiert. Daher überspringen wir an dieser Stelle die Phase I und beschreiben im Nachfolgenden nur die Phase II des Verfahrens.

Definition 3.3. (Revidiertes Simplexverfahren): Eingabe: $A \in \mathbb{R}^{(m,p)}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{p}$, Spaltenindexvektor B, zugehörige Matrix A_B^{-1} und Vektor $\tilde{\mathbf{b}} = A_B^{-1}\mathbf{b}$; **Ausgabe:** Eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (vgl. Grötschel (2015); S. 218).

Die Phase II setzt sich aus Backward Transformation (BTRAN), Pivotspaltenauswahl (PRICE), Forward Transformation (FTRAN), Pivotzeilenauswahl (CHUZR), Updating der Basis (WRETA). Im Konkreten beinhalten die Rechenschritte wie folgt (ebd.):

(1) ***BTRAN:*** Wir berechnen $\pi_B := c_B^T A_B^{-1}$. Diese Werte werden auch *Schattenpreise* genannt.

(7) ***PRICE:*** Wir berechnen die reduzierten Kostenkoeffizienten $\tilde{c}_j := \left(c_N^T\right)_j - \pi_T A_N e_j$ für $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p} - m$ und wählen einen Index s mit $\tilde{c}_s > 0$. Die errechnete Basislösung ist optimal, wenn $\tilde{c}_j \leq 0$ für $j = 1, 2, \ldots, p - m$ gilt. Wir geben den Vektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_B = \tilde{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ aus. Für den Optimalwert des linearen Optimierungsproblems erhalten wir $c^T\mathbf{x} = c_B^T\tilde{\mathbf{b}} = c_0$. Somit ist das Simplexverfahren beendet.

(8) ***FTRAN:*** Wir aktualisieren die Pivotspalte indem wir $\tilde{d} := A_B^{-1} d = A_B^{-1} A_{\cdot q_s}$ berechnen.

(9) ***CHUZR:*** Wir berechnen $\lambda_0 := \min\left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{d}_i} \middle| \tilde{d}_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \right\}$. Dann wählen wir einen Index $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sodass $\lambda_0 = \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{d}_i}$ erfüllt ist.

(10) ***WRETA:*** Wir entfernen das $r-$te Element von B und ersetzen dieses durch q_s. Der aktualisierte Spaltenindexvektor heißt B'. Damit berechnen wir $A_{B'}^{-1}$ und $\tilde{\mathbf{b}} = A_{B'}^{-1}\mathbf{b}$.

Wir veranschaulichen das revidierte Simplexverfahren anhand des Beispiels 2.7 (siehe S. 23), indem wir von einem Simplextableau ausgehen, wie es in Tabelle 3.2 dargestellt ist.

Beispiel 3.5: Revidiertes Simplexverfahren

Die erst erzeugte zulässige Basislösung ist nicht optimal und lässt sich verbessern, indem die Variable x_5 durch x_2 in der Basis ersetzt wird. Somit ergibt sich für die Matrizen B und B^{-1} wie folgt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In den Zeilen und Spalten der Matrix B befinden sich die Werte der Variablen x_2, x_3, x_4 und diese der Zielfunktion F.

Durch die Multiplikation der Matrix B^{-1} mit $\tilde{A}$ erhalten wir:

$$B^{-1} \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 720 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ -10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 40 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 180 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1 & 1200 \end{pmatrix}$$

Die neue Basislösung ist zulässig aber nicht optimal. In den Zeilen der Matrix $B^{-1} \cdot \tilde{A}$ befinden sich die Werte der Variablen x_2, x_3, x_4 und diese der Zielfunktion F. In den Spalten sind die Eintragungen der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, diese der Zielfunktion F und des Vektors $\mathbf{b}$. Die erzeugte Lösung lässt sich durch den Austausch der Variable x_4 mit x_1 verbessern. Für diesen Zweck werden die neue Matrix B und ihre Inverse B^{-1} berechnet. Wir erhalten wie folgt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -20 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Multiplikation der Inversen B^{-1} mit der Matrix $\tilde{A}$, die im Laufe der Iterationen unverändert bleibt, bekommen wir die nächste Lösung des Optimierungsproblem. Diese ist wie folgt:

$$B^{-1}\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 720 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ -10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 5 & 1 & 1500 \end{pmatrix}$$

Wie aus der Matrix $B^{-1}\cdot\tilde{A}$ hervorgeht, ist die neu ermittelte Lösung optimal und bedarf keiner weiteren Verbesserung. Wir erhalten für die optimale Basislösung $\mathbf{x}=(30,60,10)$ mit $F=1500$.

Zusammenfassend ist zu vermerken, dass beim revidierten Simplexverfahren der größte Teil der Rechenzeit für die Erzeugung der inversen Matrix B^{-1} aufgewendet wird. Die Vorgehensweise dieser Modifikation lässt sich auf den, schon im Abschnitt 3.1.3. dargestellten, dualen Simplexalgorithmus und auf die M-Methode problemlos übertragen.

3.2.2. Regeln zur Spalten- und Zeilenauswahl

Bei der Durchführung des Simplexverfahrens kann die Wahl der Spalten bzw. der Zeilen nach diversen Regeln erfolgen, für welche detaillierte Diskussionen in der Literatur zu finden sind. Aus Gründen der Vollständigkeit listen wir einige der essenziellen Regeln im folgenden Abschnitt auf. Diese Regeln gewinnen insbesondere an Relevanz, wenn beispielsweise mehrere Spalten bzw. Zeilen mit der gleichwertigen Eintragung existieren.

Regeln der Spaltenauswahl

Es sei $S := \left\{ j \in \{1,2,\ldots,p\} \middle| \tilde{c}_j > 0 \right\} \neq \emptyset$. Folgende Varianten der Spaltenauswahl werden bei Implementationen des Simplexalgorithmus angewendet (vgl. Grötschel (2015), S. 181):

(1) ***Kleinster-Index-Regel:*** Diese Regel ist rechnerisch betrachtet die einfachste. Wir wählen $s = \min\{ j \in S \}$, d.h. wir durchlaufen den Vektor $\tilde{\mathbf{c}}$ bis wir einen Index s mit $\tilde{c}_s > 0$ finden. Dann gehen wir zum nächsten Schritt des Simplexalgorithmus. Bei dieser Regel müssen wir die reduzierten Kosten nicht ermitteln.

(2) ***Kleinster-Variablenindex-Regel:*** Wir wählen einen Index $s \in S$, sodass $q_s = \min\left\{ q_j \in N \middle| j \in S \right\}$ ist. Bei dieser Regel müssen alle reduzierten Kostenkoeffizienten neu errechnet werden.

(3) ***Steilster-Anstieg-Regel:*** Diese Regel findet bei einfachen Anwendungen des Simplexverfahrens am häufigsten eine Verwendung. Wir wählen dabei einen Index $s \in S$, sodass $\tilde{c}_s = \max\left\{ \tilde{c}_j \middle| j \in S \right\}$, d.h. in die Basis sollten jene Variablen aufgenommen werden, welche den größten Zuwachs pro Einheit der Zielfunktion verschaffen.

(4) ***Größter-Fortschritt-Regel[9]:*** Bei dieser Regel berechnen wir den tatsächlichen Zuwachs der Zielfunktion für jeden möglichen Basiswechsel. Dann nehmen wir den Basiswechsel vor, der, insgesamt betrachtet, den größten Fortschritt aufweist. In anderen Worten ermitteln wir für jedes $j \in S$ $\lambda_0^j = \min\left\{ \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{a}_{ij}} \middle| \tilde{a}_{rj} > 0,\ i = 1,2,\ldots,m \right\}$ und $q_j = \tilde{c}_j \lambda_0^j$. Danach wählen wir $s \in S$, sodass $q_s = \max\left\{ q_j \middle| j \in S \right\}$. Diese Variante wurde im Beispiel 3.4 bereits angewendet.

Abschließend ist festzuhalten, dass sich die Regeln (1) – (3) für kleinere bis mittlere Problemgrößen in der Praxis bewährt haben. Sie führen im Allgemeinen zu einer höheren Anzahl an Pivotoperationen. Für größere lineare Optimierungsprobleme ist es

[9] In der Literatur existieren zahlreiche Varianten von der größten Fortschritt-Regel. Einige dieser Modifikationen sind beispielsweise in Goldfarb und Reid (1977), Harris (1973) und Crowder und Hattingh (1975) beschrieben.

angebracht, die Regel (4) und ihre Modifikationen zu verwenden, da komplexere Regeln das Ziel verfolgen, die Pivotoperationen zu minimieren.

Regeln der Zeilenauswahl

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Spaltenindex durch eine der schon präsentierten Regeln ermittelt wurde. Wir setzen $R := \left\{ i \in \{1,2,\ldots,\mathrm{m}\} \middle| \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} = \lambda_0 \right\}$. Bevor wir die Varianten der Zeilenauswahl besprechen, definieren wir die Begriffe lexikographisch positiv und lexikographisches Minimum (vgl. hier und im Folgenden Grötschel (2015), S. 182-184).

Definition 3.4: Ein Vektor $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ heißt *lexikographisch positiv*, wenn die erste Komponente, welche verschieden von Null ist, positiv ist. Wir schreiben in diesem Fall $x \succ y$, wenn $x - y \succ 0$ gilt.

Bemerkung 3.1: $\succ$ definiert eine totale Ordnung in $\mathbb{R}^p$. Wir bezeichnen mit lex-min S das *lexikographische Minimum* einer endlichen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^p$.

Somit sind wir bereit die Varianten der Zeilenregeln zu erläutern. Die in der Praxis gängigen Regeln sind wie folgt:

(1) ***Erste lexikographische Regel:*** Wir wählen $r \in R$, sodass $\frac{1}{\tilde{a}_{rs}}\left(A_B^{-1}A\right)_{r\cdot} = \text{lex-min}\left\{ \frac{1}{\tilde{a}_{is}}\left(A_B^{-1}A\right)_{i\cdot} \middle| \tilde{a}_{is} > 0,\ i \in R \right\}$ gilt. In anderen Worten wird unter allen in Frage kommenden Zeilen diejenige ausgewählt, die lexikographisch eindeutig die kleinste ist.

(2) ***Zweite lexikographische Regel:*** Wir wählen $r \in R$, sodass $\frac{1}{\tilde{a}_{rs}}\left(A_B^{-1}\right)_{r\cdot} = \text{lex-min}\left\{ \frac{1}{\tilde{a}_{is}}\left(A_B^{-1}\right)_{i\cdot} \middle| \tilde{a}_{is} > 0,\ i \in R \right\}$ gilt. Hier wird bei der Auswahl von r im Gegensatz zu der ersten lexikographischen Regel nur denjenigen Teil des Simplextableaus verwendet, indem A_B^{-1} steht.

(3) ***Kleinster-Index-Regel:*** Wir wählen $r = \min\{i \in R\}$, d.h. wir durchlaufen den Vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ bis wir einen Index r mit $\tilde{b}_r > 0$ finden.

(4) ***Kleinster-Variablenindex-Regel:*** Wir wählen einen Index $r \in R$, sodass $p_r = \min\{p_j \in B | i \in R\}$.

Schlussendlich ist zu vermerken, dass die Regeln (1) und (2) eine Endlichkeit[10] des Simplexverfahrens garantieren. Die Varianten (3) und (4) können für sich allein keine Endlichkeit bewirken.

3.2.3. Das duale Simplexverfahren

Bei gewissen linearen Optimierungsproblemen ist eine Minimierung und keine Maximierung der Zielfunktion erforderlich. Die theoretischen Grundlagen und die nummerische Ausführung einer Maximierungsaufgabenstellung wurden in der vorliegenden Diplomarbeit ausführlich veranschaulicht. In diesem Abschnitt werden wir uns der Dualität widmen, d.h. wir werden die sogenannten Paare dualer linearer Optimierungsprobleme betrachten und die Beziehungen zwischen den beiden sowohl theoretisch als auch anhand von Rechenaufgaben untersuchen.

Dualität der linearen Optimierung

Definition 3.5: Es sei ein lineares Optimierungsproblem in der Form

Maximiere $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (3.1)

unter den Restriktionen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben.

Das Problem Minimiere $FD\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i^T u_i$ (3.2)

unter den Restriktionen

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^T u_i \leq c_j \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

$$u_i \geq 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$$

heißt das zu (3.1) duale Problem.

Wegen der Dualisierungsregel ist (3.2) dual zu dem linearen Optimierungsproblem in (3.1). Somit bezeichnet man diese zwei Optimierungsprobleme als zueinander dual. Die

[10] Der Beweis hierfür findet sich beispielsweise bei Grötschel (2015); S. 182-183.

Festsetzung primal-dual ist willkürlich gewählt. Der Vektor $\mathbf{u}$ wird Dualvariablenvektor genannt und hat die gleiche Dimension wie der Vektor $\mathbf{b}$.

Wie aus der Definition 3.5 abgeleitet werden kann, lauten die Vorschriften für die Bildung der zu (3.1) gehörenden Dualaufgabe (3.2) wie folgt (vgl. Körth et al. (1975); S. 309; Domschke et al. (2015); S. 39):

a) Die Zielfunktion des primalen Optimierungsproblems ist zu maximieren, während diese des dualen zu minimieren ist.

b) Die Koeffizienten der Zielfunktion gehen in den Restriktionsvektor des dualen über.

c) Die aus den Koeffizienten der Restriktion zusammengesetzte Matrix des dualen Problems ist die transponierte der Koeffizientenmatrix des primalen.

d) Eine $\leq -$ Nebenbedingung im primalen Optimierungsproblem korrespondiert mit einer im Vorzeichen beschränkten Variable im dualen. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass sich eine Gleichung als Restriktion durch zwei Ungleichungen ersetzen lässt. Daher erhält man bei der Dualisierung zwei nichtnegative Variablen, deren Differenz den im Vorzeichen unbeschränkten Variablen entspricht.

e) Eine nichtnegative Variable im primalen Problem entspricht einer $\geq -$ Nebenbedingung im dualen. Eine unbeschränkte Variable hat eine Gleichung als Nebenbedingung im dualen Problem zur Folge. Die Begründung kann analog zu d) erfolgen.

Des Weiteren enthält Tabelle 3.15 einen zusammengefassten Überblick über die oben verschriftlichten Dualitätsregeln, die im nummerischen Kontext von Relevanz sind.

Primales Optimierungsproblem (P)	**Duales Optimierungsproblem (D)**
Zielfunktion: Maximiere $F(\mathbf{x})$	Zielfunktion: Minimiere $FD(\mathbf{x})$
Nebenbedingungen:	***Dualvariablen:***
$i-$ te Nebenbedingung: $\leq$ $i-$ te Nebenbedingung: $=$	$u_i \geq 0$ $u_i \in \mathbb{R}$
Primalvariablen:	***Nebenbedingungen:***
$x_j \geq 0$	$j-$ te Nebenbedingung: $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j-$ te Nebenbedingung: $=$

Tab. 3.15: Dualisierungsregeln

Die Dualitätsregeln werden wir anhand zweier Rechenaufgaben erläutern. Bei der ersten Aufgabe handelt es sich um eine triviale Problemstellung der linearen Optimierung.

Beispiel 3.6: Dualisierung des linearen Optimierungsproblems, trivial

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 2x_3$ (3.3)

unter den Nebenbedingungen

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \quad (3.4)$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \quad (3.5)$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad (3.6)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (3.7)$$

Da alle Restriktionen der Form „$\leq$“ sind und alle Variablen x_i mit $i = 1,2,3$ die Nichtnegativitätsbedingung erfüllen, erhalten wir für das duale Optimierungsproblem wie folgt:

Minimiere $FD(u_1, u_2, u_3) = 5u_1 + u_2 + 2u_3$ (3.8)

unter den Nebenbedingungen

$$4u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 5 \quad (3.9)$$

$$3u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 6 \quad (3.10)$$

$$u_1 - u_2 + u_3 \geq 2 \quad (3.11)$$

$$u_1, u_2, u_3 \leq 0 \quad (3.12)$$

Beispiel 3.7: Dualisierung des linearen Optimierungsproblems, modifiziert

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 2x_3$ (3.13)

unter den Nebenbedingungen

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \quad (3.14)$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \quad (3.15)$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \quad (3.16)$$

$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \geq 0 \quad (3.17)$$

Da die Variable x_1 unbeschränkt ist, wird sie im dualen Problem einer Gleichung als Restriktion entsprechen. Die zweite Nebenbedingung im primalen Problem ist eine Gleichung, welche zur Folge hat, dass die Variable u_2 unbeschränkt sein wird. Die Variable x_3 ist nichtnegativ. Die im dualen Problem korrespondierte Nebenbedingung weist die Form „$\geq$“ auf. Damit erhalten wir für das duale Optimierungsproblem wie folgt:

Minimiere $FD(u_1, u_2, u_3) = 5u_1 + u_2 + 2u_3$ (3.18)

unter den Nebenbedingungen

$$4u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 5 \tag{3.19}$$

$$3u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 6 \tag{3.20}$$

$$u_1 - u_2 + u_3 \geq 2 \tag{3.21}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \in \mathbb{R},\ u_3 \leq 0 \tag{3.22}$$

Eigenschaften dualer linearer Optimierungsprobleme

Die Formulierung des dualen linearen Optimierungsproblems zu einem Ausgangsproblem wäre ohne große Relevanz, wenn zwischen den zwei Primal-Dual-Problemstellungen keine engen Beziehungen vorhanden wären. Einigen der wichtigsten dieser Zusammenhänge werden wir folgende Ausführungen widmen. Dabei gehen wir stets von einem dualen Paar der Form (3.1), (3.2) aus. Des Weiteren sei A_B die Basis von A.

Definition 3.6: (nach Grötschel (2015); S. 227)

Die Basis A_B von A wird *primal zulässig* genannt, wenn $A_B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ und *dual zulässig*, wenn $\tilde{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$. Die zugehörigen Basislösungen $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = 0$ bzw. $\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u}^T = c_B^T A_B^{-1}$ heißen *primal* bzw. *dual* zulässig.

Satz 3.3: (ebd.)

Ist A_B eine Basis von A, und sind $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{u}$ die zu A_B gehörenden primalen bzw. dualen Basislösungen, welche aber nicht notwendigerweise zulässig sind, dann gilt: $c^T\mathbf{x} = u^T\mathbf{b}$.

Beweis:

Da $\mathbf{u}$ die zu A_B gehörenden dual Basislösung ist, setzten wir in die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung ein und erhalten: $u^T\mathbf{b} = c_B^T \underbrace{A_B^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_B} = c_B^T\mathbf{x}_B = c^T\mathbf{b}$.

□

Satz 3.4: (vgl. Burkard (2009); S. 87) *Schwacher Dualitätssatz*

Ist $\mathbf{x}$ eine zulässige Lösung von (3.1) und $\mathbf{u}$ eine zulässige Lösung von (3.2), dann gilt: $F(\mathbf{x}) \le FD(\mathbf{u})$.

Beweis:

Es gelten $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ und $A^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c}$. Damit erhalten wir $F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{u}^T A\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b} = FD(\mathbf{u})$.

□

Eine Verstärkung des oben ausgeführten Resultats bietet der starke Dualitätssatz.

Satz 3.5: (vgl. Grötschel (2015); S. 208-209) *Starker Dualitätssatz*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{(m,p)}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$, dann haben das primale und duale lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lll} \max c^T\mathbf{x} & & \min u^T b \\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b} & \text{(P)} & \mathbf{u}^T A = \mathbf{c}^T \quad \text{(D)} \\ \mathbf{x} \ge 0 & & \mathbf{u} \ge 0 \end{array}$$

optimale Lösungen, deren Werte der Zielfunktion identisch sind, genau dann wenn beide Optimierungsprobleme *zulässige Lösungen* besitzen.

Beweis:

Wenn das primale und duale Problem optimale Lösungen besitzen, dann haben sie auch zulässige Lösungen.

Wenn sie zulässige Lösungen haben, dann gilt nach dem Satz 3.4, dass $F(\mathbf{x}) \le FD(\mathbf{u})$ ist. Das primale und duale Problem haben genau dann zulässige Lösungen mit dem gleichen Wert der Zielfunktion, wenn das System

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ b^T \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} A \\ -c^T \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^T u = c \\ u \ge 0 \end{array} \tag{3.23}$$

eine Lösung besitzt. Dies ist nach dem allgemeinen Farkas-Lemma[11] äquivalent dazu, dass das System

$$\begin{aligned} & zb^T + v^T A^T \geq 0^T \\ & u^T A - zc^T = 0^T \\ & u \geq 0 \\ & z \geq 0 \\ & u^T b + v^T c < 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

keine Lösung hat. Indirekt nehmen wir an, dass (3.24) eine Lösung $\left(u^T, v^T, z\right)$ hat. Wenn eine Lösung von (3.24) mit $z = 0$ existiert, dann hat nach dem Farkas-Lemma das System

$$\begin{aligned} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & A^T \mathbf{u} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq 0 \end{aligned}$$

keine Lösung. Das bedeutet wiederum, dass das primale oder das duale Optimierungsproblem keine zulässige Lösung besitzt. Die letztere Schlussfolgerung steht im Widerspruch zu der Annahme.

Wenn eine Lösung von (3.24) mit $z > 0$ existiert, dann können wir durch Skalieren eine Lösung mit $z = 1$ erzeugen. Daraus ergibt sich $0 > u^T b + v^T c \geq -u^T Av + v^T A^T u = 0$, was einen Widerspruch darstellt. Dies impliziert eine Inkonsistenz vom System (3.24). Als Folge dessen besitzt das System (3.23) nach dem Farkas-Lemma eine Lösung und der starke Dualitätssatz ist bewiesen.

□

Aus dem schwachen und starken Dualitätssatz kann der nachstehende Existenzsatz abgeleitet werden.

Satz 3.6: (vgl. Burkard (2009); S. 87-88) *Existenzsatz*

Seien die Menge M_P der zulässigen Lösungen des primalen Optimierungsproblems und M_D jene des dualen Problems. Dann gilt:

(i) Besitzen das primale und das duale Problem zulässige Lösungen, so haben beide lineare Optimierungsprobleme endliche Optimallösungen.

[11] Die Formulierung diverser Varianten von dem Farkas-Lemma findet sich beispielsweise bei Grötschel (2015); S. 201-202.

(ii) Besitzt nur eines der beiden Probleme zulässige Lösungen, so hat diese Aufgabenstellung keine endliche Optimallösung.

(iii) Besitzt ein Problem zwar zulässige Lösungen aber keine endliche Optimallösungen, so hat die zugehörige duale Aufgabenstellung keine zulässigen Punkte.

Beweis:

(i) Wenn beide Optimierungsprobleme eine zulässige Lösung besitzen, dann gilt nach dem Satz 3.4, dass $F(\mathbf{x}) \leq FD(\mathbf{u})$ ist. Daraus resultiert, dass die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ auf M_P nach oben beschränkt ist und als Folge dessen nimmt sie auf M_P ihr Maximum an. Nach dem starken Dualitätssatz 3.5 besitzt auch das duale Problem eine endliche Optimallösung.

(ii) Angenommen seien $\mathbf{u} \in M_D$ und $M_P = \varnothing$. Hätte das duale Optimierungsproblem eine endliche Optimallösung, so hätte nach dem Satz 3.5 auch das primale Problem eine endliche Optimallösung. Dies steht im Widerspruch zu $M_P = \varnothing$.

(iii) Angenommen seien $\mathbf{x} \in M_P$ und $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ unbeschränkt. Gäbe es ein $\tilde{\mathbf{u}} \in M_D$, so wäre nach dem Satz 3.4 $F(\mathbf{x}) \leq FD(\tilde{\mathbf{u}})$. Folglich wäre $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nach oben beschränkt. Dies widerspricht der Voraussetzung. Somit ist $M_D = \varnothing$.

□

In den oben dargestellten Sätzen haben wir uns mit der Zulässigkeit und Optimalität der Lösungen beider Optimierungsprobleme auseinander gesetzt. Ein wichtiges Resultat offeriert der Satz vom komplementären Schlupf, der notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angibt, dass zulässige Lösungen $\mathbf{x}$ des primalen und $\mathbf{u}$ des dualen Problems optimal sind.

Um zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren einer Matrix unterscheiden zu können, verwenden wir folgende Notation: $\mathbf{a}_{i.}$ bezeichnet den $i-$ten Zeilenvektor und $\mathbf{a}_{.j}$ den $j-$ten Spaltenvektor der Matrix A.

Satz 3.7: (ebd.; S. 88-89) *Satz vom komplementären Schlupf*

Besitzen das primale und duale Optimierungsproblem zulässige Lösungen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$, so sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} x_j > 0 &\Rightarrow \mathbf{a}_{.j}^T\mathbf{u} = c_j \\ \mathbf{a}_{.j}^T\mathbf{u} > c_j &\Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$
\begin{aligned}
&u_j > 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{i\cdot}^T \mathbf{x} = b_i \\
&\mathbf{a}_{i\cdot}^T \mathbf{x} < b_i \Rightarrow u_j = 0
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

notwendig und hinreichend für die Optimalität dieser zulässigen Lösungen.

Beweis:

Aus $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge 0$ und $A^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c}$, $\mathbf{u} \ge 0$ sowie $\mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$ folgt $\left(A\mathbf{x}\right)^T \mathbf{u} \le \mathbf{b}^T\mathbf{u} = \mathbf{x}^T\mathbf{c} \Rightarrow \left(A\mathbf{x}\right)^T \mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} \le 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T\left(A^T\mathbf{u} - \mathbf{c}\right) \le 0$. Aus $\mathbf{x}^T \ge 0$ und $A^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c}$ folgt $\mathbf{x}^T\left(A^T\mathbf{u} - \mathbf{c}\right) = 0$. Damit ergibt sich die Bedingung (3.25).

Aus $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge 0$ und $A^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c}$, $\mathbf{u} \ge 0$ sowie $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b}$ folgt $\left(A^T\mathbf{u}\right)^T \mathbf{x} \ge \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{u}^T Ax - \mathbf{u}^T\mathbf{b} \ge 0 \Rightarrow \mathbf{u}^T\left(Ax - \mathbf{b}\right) \ge 0$. Aus $Ax - \mathbf{b} \le 0$ und $\mathbf{u} \ge 0$ folgt, dass $\mathbf{u}^T\left(Ax - \mathbf{b}\right) = 0$. Damit ergibt sich die Bedingung (3.26).

Wenn die Beziehungen (3.25) und (3.26) für $\mathbf{x} \in M_P$ und $\mathbf{u} \in M_D$ gelten, dann folgt $\mathbf{x}^T\left(A^T\mathbf{u} - \mathbf{c}\right) = \mathbf{u}^T\left(Ax - \mathbf{b}\right) = 0$. Daher gilt $\mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{u} = \left(A\mathbf{x}\right)^T \mathbf{u} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$. Die Lösungen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ sind gemäß dem schwachen Dualitätssatz optimal.

□

Der Satz vom komplementären Schlupf kommt bei vielen Lösungsverfahren zum Einsatz. Beispielsweise bei dem Einsatz des primalen Simplexalgorithmus wird von einer zulässigen Lösung des primalen Optimierungsproblems ausgegangen und es werden Lösungen des dualen, welche den Bedingungen (3.25) und (3.26) genügen, generiert. Bei dem primal-dualen Optimierungsproblem ist die Vorgehensweise analog. Man startet mit einer zulässigen Lösung des dualen Problems und erzeugt stets eine Lösung des primalen Problems, welche die Bedingungen des *Satzes vom komplementären Schlumpf* erfüllen.

Durchführung des dualen Simplexalgorithmus

Lemke entwickelte im Jahr 1954 den dualen Simplexalgorithmus. Hinsichtlich der Transformationsschritte kann er als die Anwendung des primalen Simplexalgorithmus auf das duale Problem betrachtet werden. Der Algorithmus setzt sich aus Phase I und II. In Phase I wird eine erste zulässige Lösung erzeugt, für welche Zwecke die schon ausführlich besprochenen Methoden (folge S. 51-52 und S. 55-56) angewendet werden

können. Die Phase II des Rechenverfahrens umfasst folgende Rechenschritte, die aus Gründen der Vollständigkeit angeführt werden. Diese sind wie folgt (vgl. Grötschel (2015); S. 229):

(1) ***Optimalitätsprüfung:*** Die erzeugte gegenwärtige Basislösung ist optimal, wenn $\tilde{b}_i \leq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ gilt. Wir setzen $\mathbf{x}_B = \tilde{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ ein und erhalten den Optimalwert des linearen Optimierungsproblems. Somit ist das Simplexverfahren beendet. Andernfalls gehen wir zum Rechenschritt (2).

(2) ***Bestimmung der Pivotzeile:*** Wir wählen einen Index r, sodass $\tilde{b}_r > 0$ erfüllt ist.

(3) ***Prüfung auf Beschränktheit des Optimums:*** Die ermittelte zulässige Basislösung wird auf Beschränktheit überprüft. Wenn $\tilde{A}_{r\cdot} \geq 0$ gilt, dann ist das duale Optimierungsproblem unbeschränkt. Damit ist das Simplexverfahren beendet.

(4) ***Bestimmung der Pivotspalte:*** Zunächst berechnen wir $\lambda_0 := \min\left\{ \frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{rj}} \middle| \tilde{a}_{rj} < 0,\ j = 1, 2, \ldots, \mathrm{p} - m \right\}$. Dann wählen wir einen Index $s \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p} - m\}$, sodass $\lambda_0 = \frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{rj}}$ erfüllt ist.

(5) ***Basiswechsel:*** Wir setzen $B' := (p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_m)$, $N' := (q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}, p_r, \mathrm{q}_{s+1}, \mathrm{q}_{s+2}, \ldots, \mathrm{q}_{p-m})$, $A_{B'}^{-1} := EA_B^{-1}$ (siehe Satz 3.1, S. 38-40).

(6) ***Updating:*** Wir berechnen alle notwendigen Parameter und gehen zum Rechenschritt (1) über.

Die Durchführung der einzelnen Rechenschritte des dualen Simplexalgorithmus kann mittels des Simplextableaus dargestellt werden. Die Anwendung erfolgt analog zum Tableau des primalen Optimierungsproblems und wird anhand des Beispiels 3.8 veranschaulicht.

Beispiel 3.8: Duales Optimierungsproblem (vgl. Körth et al. (1975); S. 322-323)
Ein Herstellungsbetrieb erzeugt aus zwei Einsatzstoffen drei Endprodukte. Vom ersten Einsatzstoff sind maximal 50 Mengeneinheiten (ME) verfügbar und es müssen mindestens 35 ME verbraucht werden. Vom zweiten Einsatzstoff stehen maximal 70 ME zur Verfügung und es müssen mindestens 40 ME verbraucht werden. Die herstellbaren Mengeneinheiten sind durch zwei Inputfaktoren beschränkt, wobei die pro

Planungseinheit verfügbaren Kapazitäten und die pro erzeugtes Produkt erzielten Kosten in der Tabelle 3.16 abgebildet sind.

Inputfaktoren	**Endprodukt P_1**	**Endprodukt P_2**	**Endprodukt P_3**
Einsatzstoff I	2	3	4
Einsatzstoff II	1	2	5
Kosten	**30**	**20**	10

Tab. 3.16: Inputfaktoren im Herstellungsprozess, Outputfaktor Kosten

Um das oben formulierte lineare Optimierungsproblem mathematisch zu formalisieren, wählen wir folgende Variablen: x_1 von P_1, x_2 von P_2 und x_3 von P_3 herzustellende ME. Damit erhalten wir folgendes Modell:

Minimiere $F(x_1, x_2, x_3) = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$

unter den Restriktionen

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 50$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 35$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 70$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

Nach Einführen je einer Schlupfvariable und Multiplikation der Zielfunktion, der zweiten und vierten Restriktion mit -1 überführen wir das Optimierungsproblem in die Form:

Maximiere $FD(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = -30x_1 - 20x_2 - 10x_3$

unter den Restriktionen

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 50$$

$$-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_5 = -35$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 70$$

$$-x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_7 = -40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

Das *Starttableau* T_0 zu diesem Optimierungsproblem sieht folgendermaßen aus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_4	2	3	4	1	0	0	0	50
x_5	-2	-3	-4	0	1	0	0	-35
x_6	1	2	5	0	0	1	0	70
x_7	-1	-2	**-5**	0	0	0	1	-40
FD	30	20	10	0	0	0	0	0

Tab. 3.17: Ergebnisse des Starttableaus T_0

Die in dem Starttableau ausgewiesene Basislösung ist nur dual zulässig, da zwei der Elemente in der $b-$Spalte negativ sind. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und bekommen die erste Basislösung $\mathbf{x} = (0,0,0,50,-35,70,-40)$. Der Wert der Zielfunktion FD bzw. F ist Null. Da die errechnete Basislösung nicht optimal ist, müssen wir diese verbessern. Es ist das Pivotelement zu bestimmen. Das nach den schon dargestellten Regeln zu bestimmende Pivotelement ist $a_{43}^0 = -5$.

Nach Durchführung der Transformationsschritte, erhalten wir die unten abgebildeten Simplextableaus T_1 und T_2.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_4	6/5	7/5	0	1	0	0	4/5	18
x_5	-6/5	-7/5	0	0	1	0	**-4/5**	-3
x_6	0	0	0	0	0	1	1	30
x_3	1/5	2/5	1	0	0	0	-1/5	8
FD	28	16	0	0	0	0	2	-80

Tab. 3.18: Ergebnisse des Starttableaus T_1

Die in Tableau T_1 präsentierte Basislösung ist nur dual zulässig und nicht optimal. Das Pivotelement lautet $a_{27}^1 = -\frac{4}{5}$. Die optimale Lösung ist in Tableau T_3 dargestellt. Wir setzen die Nichtbasisvariablen $x_1 = x_2 = x_5 = 0$ und bekommen die optimale Basislösung $\mathbf{x}=\left(0,0,\frac{35}{4},15,0,\frac{105}{4},\frac{15}{4}\right)$. Der Wert der Zielfunktion F beträgt $\frac{350}{4}$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
x_4	0	0	0	1	1	0	0	15
x_7	3/2	7/4	0	0	-5/4	0	1	15/4
x_6	-3/2	-7/4	0	0	5/4	1	0	105/4
x_3	1/2	3/4	1	0	-1/4	0	0	35/4
FD	25	25/2	0	0	5/2	0	0	-350/4

Tab. 3.19: Ergebnisse des Starttableaus T_2

Schlussendlich erhalten wir folgenden optimalen Produktionsplan für den Herstellungsbetrieb: Es ist nur das Endprodukt P_3 zu 35/4 ME zu erzeugen. Dabei benötigt man 35 ME des ersten und 175/4 ME des zweiten Ausgangsstoffes. Die entstehenden Kosten belaufen sich auf 350/4.

Abschließend stellt sich die Frage, wie ökonomisch sinnvoll es ist, von einem Produkt 35/4 ME herzustellen, sollte es sich beispielsweise um Produkte handeln, die in ganzzahligen Mengeneinheiten anzufertigen sind. Diese Frage führt zum nächsten Kapitel dieser Diplomarbeit, in der wir uns mit den Grundzügen der ganzzahligen linearen Optimierung auseinander setzen werden.

4. Diskrete lineare Optimierung

Die in den Kapitel 2 und 3 betrachteten Probleme der linearen Optimierung weisen neben der Linearität der Zielfunktion und Restriktionen kontinuierliche Variablen auf, an welchen die Nichtnegativitätsbedingung in den meisten Fällen gestellt wurde. Solche Problemstellungen sind mit dem dargestellten Simplexalgorithmus oder spezialisierten Vorgehensweisen gut lösbar. Im Gegensatz dazu treten beispielsweise in Supply Chain Management, Verschnittoptimierung, Investitions- oder in der Personaleinsatzplanung Sachverhalte auf, die bei dem Modellierungsprozess nach diskreten[12] Variablen verlangen. In diesem Fall sprechen wir von einer diskreten linearen Optimierung, zu welcher auch solche Probleme mit binären Variablen zählen.

Da die Bedeutung dieses Teilgebietes der linearen Optimierung große Relevanz genießt, existieren zahlreiche Lehrbücher, welche sich ausführlich mit der diskreten linearen Optimierung auseinander setzen. An dieser Stelle sind beispielsweise Chen et al. (2010), Klein und Scholl (2011), Kallrath (2013) und Domschke et al. (2015) zu erwähnen, da sie eine fachlich fundierte Darstellung des Themas bieten.

In diesem Kapitel der vorliegenden Diplomarbeit wird die ganzzahlige lineare Optimierung nur eine kurze Behandlung erfahren, da sie in den Lehrplänen des Unterrichtsfaches „Mathematik und angewandte Mathematik“ nicht vertreten ist. Nichtsdestotrotz ist dieses Teilgebiet des Operations Research für die Optimierung wirtschaftlicher Prozesse von essenzieller Bedeutung und sollte im schulmathematischen Kontext auch seinen Platz im Rahmen eines Wahlfaches finden. Das Kapitel ist so strukturiert, dass nach einer kurzen Auseinandersetzung mit ausgewählten Grundbegriffen der ganzzahligen linearen Optimierung zu den Lösungsverfahren übergegangen wird. Zwei dieser Verfahren werden sowohl theoretisch als auch anhand relevanter Aufgabenstellungen erläutert.

4.1. Grundbegriffe der diskreten Optimierung

Die ganzzahligen linearen Optimierungsprobleme können allgemein folgendermaßen definiert werden.

Definition 4.1: Unter einem *ganzzahligen linearen Optimierungsproblem* versteht man die Aufgabenstellung:

[12] Die Begriffe „diskret“ und „ganzzahlig“ werden in diesem Kapitel äquivalent verwendet.

Maximiere $F(\mathbf{x}) = c^T \mathbf{x}$ (4.1)

unter den Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^p \tag{4.3}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass

- ✓ $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ mit $\text{Rang}(A) = m$
- ✓ $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$
- ✓ $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^p$
- ✓ Polyeder der Form $P^{=}(A,b) \neq \emptyset$ sind.

Des Weiteren wollen wir in diesem Abschnitt durchleuchten, unter welchen Bedingungen sich aus der Ganzzahligkeit der in Definition 4.1 formulierten Daten die Existenz einer ganzzahligen Lösung ergibt.

Satz 4.1: (Hier und im Folgenden dieses Abschnitts vgl. Werner (2001); S. 159-162)
Sei die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ mit $\text{Rang}(A) = m$ nichtsingulär. Dann ist $A^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ genau dann, wenn die Determinante von A den Wert 1 oder -1 hat.

Beweis:

Wir nehmen an, dass $\det(A) = \pm 1$ ist. Aus der Cramer'schen Regel[13] folgt, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{(m,m)}$ ist. Daraus ergibt sich trivialerweise für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, dass $A^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ ist.
Umgekehrt nehmen wir an, dass $A^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ erfüllt ist. Insbesondere ist $A^{-1}e_i \in \mathbb{Z}^m$ für $i = 1, 2, \ldots, m$. Folglich ist $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{(m,m)}$. Damit ergibt sich, dass die Determinanten von A und A^{-1} ganze Zahlen sind. Wegen $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ folgt $\det(A) = \pm 1$.

□

Definition 4.2: Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ mit $\text{Rang}(A) = m$ heißt *unimodular*, wenn jede $m \times m -$Subdeterminante 1 oder -1 ist.

[13] Eine Erläuterung der Cramer'schen Regel findet sich in Burkard und Zimmermann (2012), S. 205.

Aus dem Hauptsatz der linearen Optimierung (siehe Abschnitt 2.1.3., S. 25) folgt, dass die Zielfunktion ihr Optimum in mindestens einem Eckpunkt des Polyeders $P^{=}(A,b)$ annimmt. Wenn wir wissen, dass jede Ecke von $P^{=}(A,b)$ ganzzahlig ist, so können wir aus der Existenz einer Lösung des linearen Optimierungsproblems auch die Existenz einer diskreten Lösung folgern. Als Folge dessen sind wir daran interessiert, welche Eigenschaften die Matrix A aufzuweisen hat, sodass für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ jede Ecke vom Polyeder $P^{=}(A,b)$ ganzzahlig ist.

Satz 4.2: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = m$. Für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ ist jede Ecke des Polyeders $P^{=}(A,b)$ genau dann *diskret*, wenn die Matrix A unimodular ist.

Beweis:

Wir nehmen an, dass die Matrix A unimodular, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ und $\mathbf{x} \in P^{=}(A,b)$ eine Ecke seien. Dann existiert eine Basisindexmenge $B \subset \{1,2,\ldots,p\}$ mit $\#(B) = m$, sodass $A_B \in \mathbb{Z}^{(m,m)}$ nichtsingulär, $\mathbf{x}_B = A^{-1}\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_N = 0$ sind. Da die Matrix A unimodular ist, folgt nach dem Satz 4.1, dass $\mathbf{x}_B \in \mathbb{Z}^m$ und insgesamt $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^p$ sind.

Umgekehrt nehmen wir an, dass jede Ecke des Polyeders $P^{=}(A,b)$ für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig sei. Des Weiteren seien $B \subset \{1,2,\ldots,p\}$ eine Indexmenge mit $\#(B) = m$ und A_B nichtsingulär. Um die Unimodularität der Matrix A zu zeigen, genügt es gemäß des Satzes 4.1 nachzuweisen, dass $A^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{Z}^m$ für alle $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{Z}^m$ sei. Daher sei $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{Z}^m$ beliebig vorgegeben. Wir bestimmen $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^m$ hinreichend groß mit $\mathbf{v} + A^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \geq 0$ und setzen $\mathbf{b} := A_B\left(\mathbf{v} + A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}\right)$. Wir definieren $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_B, \mathbf{z}_N)$ durch $\mathbf{z}_B := \mathbf{v} + A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{z}_N := 0$. Dann ist $\mathbf{z}$ eine Ecke von $P^{=}(A,b)$ und wegen $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig. Da $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^m$ nach Voraussetzung ist, ist auch $A_B^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{Z}^m$. Gemäß des Satzes 4.1 ist die Determinante von A_B ± 1. Als Folge dessen ist die Matrix A unimodular.

□

Definition 4.3: Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A den Wert $1, -1$ oder 0 hat.

An dieser Stelle ist festzuhalten, dass wenn die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ total unimodular mit $\text{Rang}(A) = m$ ist, dann ist A unimodular. Ist umgekehrt die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ unimodular mit $\text{Rang}(A) = m$, so ist diese nicht notwendigerweise total unimodular.

Dieser Zusammenhang wird anhand der unten angeführten zwei Beispiele verdeutlicht.

Beispiel 4.1: Unimodularität, keine totale Unimodularität

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(3,6)}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist modular, da sie den $\text{Rang}(A) = 3$ hat und die Determinante jeder nichtsingulären $3 \times 3-$Untermatrix ± 1 ist. Allerdings ist die Matrix A nicht total unimodular, da beispielsweise die Determinante von der $2 \times 2-$Untermatrix $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 3 = 3$ ist.

Beispiel 4.2: totale Unimodularität, Unimodularität

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{(3,6)}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist total modular, da die Determinante jeder quadratischen Untermatrix den Wert $1, -1$ oder 0 aufweist. Sie ist gleichzeitig modular, da der $\text{Rang}(A) = 3$ und die Determinante jeder nichtsingulären $3 \times 3-$Untermatrix ± 1 ist.

Wie aus dem Beispiel 4.2 hervorgeht, ist eine notwendige Bedingung für die totale Unimodularität einer Matrix, dass nur Einträge der Größenordnung $1, -1$ und 0 auftreten. Bedauerlicherweise ist diese Bedingung nicht hinreichend, da beispielsweise die Matrix A

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht total unimodular ist, da die Determinante der $3\times 3-$Untermatrix $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ ist.

Satz 4.3: Sei $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ eine Matrix mit Elementen $a_{ij} \in \{0,+1,-1\}$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ und $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. Die Matrix A ist total unimodular, wenn jede ihrer Spalten nicht mehr als zwei von Null verschiedenen Elemente enthält und die Zahlenindexmenge $I \in \{1,2,\ldots,m\}$ so in zwei Teilindexmengen I_1 und I_2 partitioniert werden kann, sodass die Aussagen Geltung haben:

(i) Enthält eine Spalte zwei Elemente mit gleichem Vorzeichen, dann befinden sich die zugehörigen Zeilen in verschiedenen Teilindexmengen.

(ii) Enthält eine Spalte zwei Elemente mit unterschiedlichem Vorzeichen, dann befinden sich die zugehörigen Zeilen in der gleichen Teilindexmenge.

Beweis: Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion und ist in Werner (2001), S. 162 nachzulesen.

□

Abschließend formulieren wir den Satz von Hoffman und Kruskal, da seine Bedeutung daran zu sehen ist, dass lineare Optimierungsprobleme mit einer total unimodularen Restriktionsmatrix stets ganzzahlige Basislösungen haben. Wenn man derartige Aufgabenstellungen beispielsweise mit dem Simplexverfahren bewältigt, erhält man automatisch die gewünschte ganzzahlige Lösung.

Satz 4.4: (vgl. Burkhard (2009); S. 136-137, zitiert nach Veinott und Dantzig (1968); S. 371-372) *Satz von Hoffmann und Kruskal*

Sei $A \in \mathbb{Z}^{(m,p)}$ eine Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Matrix A ist total unimodular.

(ii) Für beliebige $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ sind die Ecken des Polyeders $P^{=}(A,b)$ ganzzahlig.

(iii) Jede quadratische, nichtsinguläre Untermatrix von A besitzt eine ganzzahlige Inverse.

Beweis: Der Beweis dieses als Hoffman und Kruskal bekannten Satzes ist in Veinott und Dantzig (1968), S. 371-372, nachzulesen.

□

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass wir uns mit einer Auswahl von Grundbegriffen und Sätzen hinsichtlich der ganzzahligen linearen Optimierung, welche für den Aufbau eines grundlegenden Verständnisses erforderlich sind, auseinander gesetzt haben.

4.2. Lösungsverfahren der diskreten Optimierung

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass das formulierte ganzzahlige Optimierungsproblem exakt gelöst werden kann. Solche Rechenverfahren, welche dies in endlich vielen Schritten ermöglichen, werden als *exakte Verfahren* bezeichnet. Sie durchsuchen den gesamten Lösungsraum und garantieren auf diese Art und Weise, dass eine Optimallösung gefunden wird, wenn sie existiert. Die exakten Lösungsverfahren lassen sich folgendermaßen unterteilen: (vgl. Domschke et al. (2015); S. 134)

(1) ***Entscheidungsbaumverfahren:*** Bei diesem Verfahren wird mittels einer sich auffächernden Baumstruktur nach Lösungen des Optimierungsproblems gesucht. Sie beruht auf dem Prinzip der vollständigen bzw. unvollständigen Enumeration, d.h. auf der Ermittlung sämtlicher Lösungen und Auswahl der optimalen unter denen. Zu den Entscheidungsbaumverfahren zählt das Branch-and-Bound-Verfahren, welches wir detailliert im Abschnitt 4.2.1. diskutieren werden.

(2) ***Schnittebenenverfahren:*** Dieses Verfahren wird als Erweiterung des Simplexverfahrens betrachtet. Es werden Schnittebenen als zusätzliche Restriktionen generiert, die aus dem Bereich der zulässigen Lösungen stammen, in denen keine ganzzahligen Lösungen enthalten sind. Anschließend wird mit dem Simplexalgorithmus ein neues Optimum ermittelt. Erste Schnittebenenverfahren stammen von Gomory (1958) und Benders (1962). Wir werden uns dem Schnittebenenverfahren von Gomory im Abschnitt 4.2.2. genauer widmen.

(3) ***Kombinationen aus (1) und (2):*** Zu den kombinierten Verfahren zählen solche Vorgehensweisen wie beispielsweise Branch-and-Cut oder Branch-and-Price, mit denen wir uns in dieser Arbeit nicht auseinander setzen werden.

Abschließend ist zu vermerken, dass die Entscheidungsbaumverfahren nur bei Optimierungsproblemen mit wenigen Variablen effizient sind, da der damit verbundene Rechenaufwand exponentiell mit der Problemgröße wächst. Im Bereich der Schulmathematik stellt dieses Verfahren eine exzellente Möglichkeit, das Themengebiet Stochastik mit der linearen Optimierung zu verknüpfen und dadurch den Schülerinnen

und Schülern plausibel die Koexistenz einzelner mathematischer Bausteine zu verdeutlichen.

4.2.1. Branch-and-Bound-Verfahren

Das Brach-and-Bound-Verfahren (B&B-) zählt zu der implizierten vollständigen Enumeration. Wir werden das Prinzip dieses Verfahrens für Maximierungsprobleme zunächst theoretisch erläutern und dann anhand eines Beispiels veranschaulichen.
Das B&B-Verfahren impliziert beide Lösungsverfahren *Branching* und *Bounding*, die sich folgendermaßen skizzieren lassen (vgl. hier und im Folgenden: Domschke et al. (2015); S. 140-141).

Branching

Ein Ausgangsproblem P_0 der diskreten linearen Optimierung wird in k Teilprobleme $P_1, P_2, \ldots, P_k$ so zerlegt, dass $X(P_0) = \bigcup_{i=1}^{k} X(P_i)$ und möglichst für alle $i \neq j$ $X(P_i) \cap X(P_j) = \emptyset$ erfüllt ist. Dabei stellt $X(P_i)$ die Menge der zulässigen Lösungen des Problems P_i dar.
Des Weiteren sind die Probleme $P_1, P_2, \ldots, P_k$ analog zum Ausgangsproblem so verzweigt, dass dadurch ein Lösungsbaum von Problemen entsteht.
Ein solch beliebiger Lösungsbaum ist in Abb. 4.1 präsentiert.

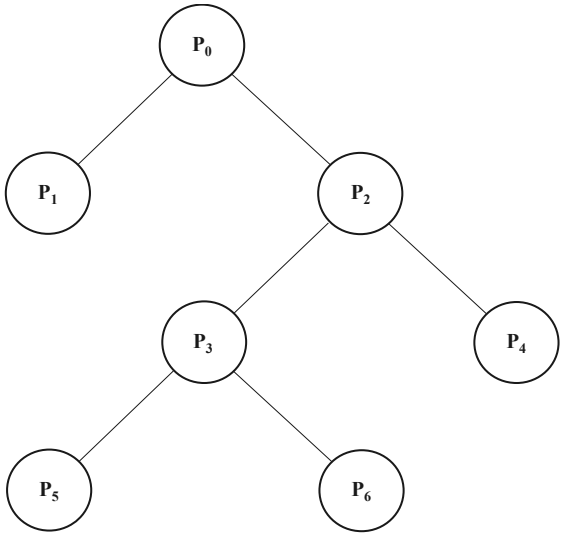


Abb. 4.1: Lösungsbaum eines beliebigen Problems

Wie aus der Abb. 4.1 hervorgeht, sind P_0, P_2 und P_3 in $k = 2$ Teilprobleme verzweigt. Die Probleme P_1, P_4, P_5 und P_6 besitzen keine Verzweigungen.

Bounding

Die Zielsetzung des Boundingprizips besteht darin, den in Abb. 4.1 dargestellten Verzweigungsprozess zu beschränken. Aus diesem Grund werden für die Zielfunktionswerte Schranken ermittelt, mithilfe derer entschieden werden kann, ob Teilprobleme zu verzweigen sind oder nicht. Dabei lässt sich stets eine untere globale Schranke $\underline{F}$ für den Zielfunktionswert einer optimalen Lösung des Ausgangsproblems bestimmen. Am Anfang des Verfahrens können wir entweder $\underline{F} := -\infty$ setzen oder eine bessere Schranke $\underline{F}$ ermitteln. Danach liefert die beste bekannte Lösung des linearen Optimierungsproblems die aktuelle Schranke $\underline{F}$.

Außerdem lässt sich für jedes Problem P_i $(i = 0,1,\ldots)$ eine obere lokale Schranke $\overline{F_i}$ für den Zielfunktionswert berechnen. Für diesen Zweck bilden wir eine *Relaxation* P_i' von P_i. Die Relaxation P_i' stellt ein vereinfachtes Problem im Vergleich zu P_i dar, welches die Eigenschaft $X(P_i) \subseteq X(P_i')$ besitzt. Sie kann beispielsweise durch Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingungen bei der diskreten linearen Optimierung erhalten werden.

Definition 4.4: Ein Problem P_i heißt *ausgelotet*, falls einer der unten aufgelisteten, sich ausschließenden Fälle eintritt:

Fall 1: Die optimale Lösung des Teilproblems P_i ist schlechter als die beste bekannte zulässige Lösung, d.h. es ist $\overline{F_i} \leq \underline{F}$ erfüllt.

Fall 2: Die optimale Lösung der Relaxation P_i' ist für P_i zulässig und somit für P_0. Sie liefert einen höheren Zielfunktionswert als die beste bekannte zulässige Lösung, d.h. es ist $\overline{F_i} > \underline{F}$ erfüllt. Wir setzten $\underline{F} := \overline{F_i}$.

Fall 3: Die Relaxation P_i' besitzt keine zulässige Lösung des Optimierungsproblems. Dadurch ist auch $X(P_i) = \varnothing$.

Wie die Definition 4.4 verdeutlicht, brauchen wir ausgelotete Probleme nicht weiter zu verzweigen, da sie keine bessere Lösung des Problems als die schon ermittelte besitzen. Außerdem weisen sie eine optimale Lösung auf, die auch für das Ausgangsproblem P_0 zulässig ist. Als Folge dessen werden nicht ausgelotete Teilprobleme in Teilprobleme verzweigt, solange bis alle Teilprobleme ausgelotet werden. Die dann beste bekannte zulässige Lösung ist eine optimale Lösung des Ausgangsproblems.

Das oben geschilderte Prinzip des B&B-Verfahrens wird anhand des Beispiels 4.3 erläutert.

Beispiel 4.3: (vgl. Werner (2001); S. 217 hinsichtlich der Angabe)

Die Möbelfabrik „Birnbaumblau" erzeugt vier Modelle von Schreibtischen – Alpha, Beta, Gamma und Delta. Der Produktionsprozess erfolgt in zwei Werkstätten - Tischlerei und Veredelung. Die Anzahl der Arbeitsstunden, die für die Herstellung einer Einheit erforderlich sind, sowie der Gewinn pro Mengeneinheit sind in der Tabelle 4.1 abgebildet.

	Tisch Alpha	**Tisch Beta**	**Tisch Gamma**	**Tisch Delta**
Tischlerei	4	9	7	10
Veredelung	1	1	3	40
Gewinne	12	20	18	40

Tab. 4.1: Inputfaktoren im Herstellungsprozess, Outputfaktor Gewinn

Da die Kapazität der Möbelfabrik begrenzt ist, können in den kommenden sechs Monaten höchstens 6000 Arbeitsstunden in der Tischlerei und 4000 Arbeitsstunden in der Veredelung investiert werden. Unter diesen Bedingungen bezweckt die Geschäftsführung den Gewinn des Betriebs zu maximieren.

Um das oben formulierte lineare Optimierungsproblem mathematisch zu formalisieren, wählen wir folgende vier Variablen: x_1 vom Tisch Alpha, x_2 vom Tisch Beta, x_3 vom Tisch Gamma und x_4 vom Tisch Delta herzustellende Mengeneinheiten. Damit erhalten wir folgendes in Standardform gebrachtes Modell:

Maximiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$ (4.4)

unter den Restriktionen

$$4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leq 6000 \quad (4.5)$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \leq 4000 \quad (4.6)$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i = 1,2,3,4 \tag{4.7}$$

Um zu einer Lösung mittels des B&B-Verfahrens zu kommen, wird das lineare Optimierungsproblem in Probleme P_i $(i = 0,1,\ldots)$ unterteilt.

Problem P_0***:*** Da der Ursprung $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$ zulässig ist, beginnen wir mit der unteren Schranke $\underline{F} = 0$. Die Relaxation P_0' bekommen wir mittels Weglassens der Ganzzahligkeitsbedingungen. Die optimale Lösung für P_0' ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4000}{3}, 0, 0, \frac{200}{3}\right)$ mit dem Zielfunktionswert $\overline{F_0} = \frac{56000}{3}$. Das Problem P_0 ist nicht ausgelotet, da die Lösung nicht zulässig ist. Sie liefert die obere Schranke $\overline{F_0}$ für den Zielfunktionswert einer optimalen Lösung für P_0. Da $\overline{F_0} > \underline{F}$ ist, muss P_0 verzweigt werden. Es bietet sich an, von der Lösung für P_0' auszugehen und zwei Teilprobleme P_1 und P_2 zu bilden. Im Teilproblem P_1 fordern wir $x_1 \leq 1333$ zusätzlich zu (4.4) – (4.7). Im Teilproblem P_2 verlangen wir stattdessen $x_1 \geq 1334$.

Problem P_1***:*** Die Relaxation P_1' besteht aus der Zielfunktion (4.4), die Restriktionen (4.5) – (4.6) und $x_1 \leq 1333$. Durch Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingungen bekommen wir die optimale Lösung für P_1' $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1333, 0, 0.2, 66.7)$ mit dem Zielfunktionswert $\overline{F_1} = 18666$. Das Problem P_1 wird weiter in die Teilprobleme P_3 mit $x_4 \leq 66$ und P_4 mit der zusätzlichen Bedingung $x_4 \geq 67$ zerlegt.

Problem P_2***:*** Die Relaxation P_2' besteht aus der Zielfunktion (4.4), die Restriktionen (4.5) – (4.6) und $x_1 \geq 1334$. Die optimale Lösung für die Relaxation P_2' wie für das Problem P_2 ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1334, 0, 0, 66.4)$ mit $\overline{F_2} = 18664$. Das Problem P_2 wird weiter in die Teilprobleme P_5 mit $x_4 \leq 66$ und P_6 mit der zusätzlichen Bedingung $x_4 \geq 67$ verzweigt.

Problem P_3***:*** Die optimale Lösung für das Problem P_3 mit der zusätzlichen Restriktion $x_4 \leq 66$ lautet $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1334, 0, 1.14, 66)$ mit $\overline{F_3} = 18656.7$. Da die Lösung nicht

zulässig ist, wird das Problem weiter in die Teilprobleme P_7 mit $x_3 \le 1$ und P_8 mit der zusätzlichen Bedingung $x_3 \ge 2$ zerlegt.

Problem P_4***:*** Die Relaxation P_4' besteht aus der Zielfunktion (4.4), die Nebenbedingungen (4.5) – (4.6) und den zwei zusätzlichen Restriktionen $x_1 \le 1333$ und $x_4 \ge 67$. Für die optimale Lösung sowohl der Relaxation als auch des Problems erhalten wir $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1310, 10, 0, 67)$ mit $\overline{F_4} = 18600$. Das ist eine verbesserte Lösung für das Ausgangsproblem P_0 und damit eine neue untere Schranke $\underline{F} = 18600$. Das Problem P_4 ist ausgelotet.

Problem P_5***:*** Die Relaxation P_5' beinhaltet die Zusatzrestriktionen $x_1 \ge 1334$ und $x_4 \le 66$. Als optimale Lösung für das Problem bekommen wir $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1335, 0, 0, 66)$ mit $\overline{F_5} = 18660$. Damit ist das Problem P_5 ausgelotet.

Problem P_6***:*** Die Relaxation P_6' besitzt keine zulässige Lösung und somit auch das Problem P_6.

Die Verzweigung des Problems P_3 führt zu keiner Verbesserung der besten bekannten Lösungen (siehe Abb. 4.2). Als Folge dessen sind alle Teilprobleme im Lösungsbaum ausgelotet und die optimale Lösung des diskreten Problems ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1335, 0, 0, 66)$ mit dem Zielfunktionswert $F = 18660$.

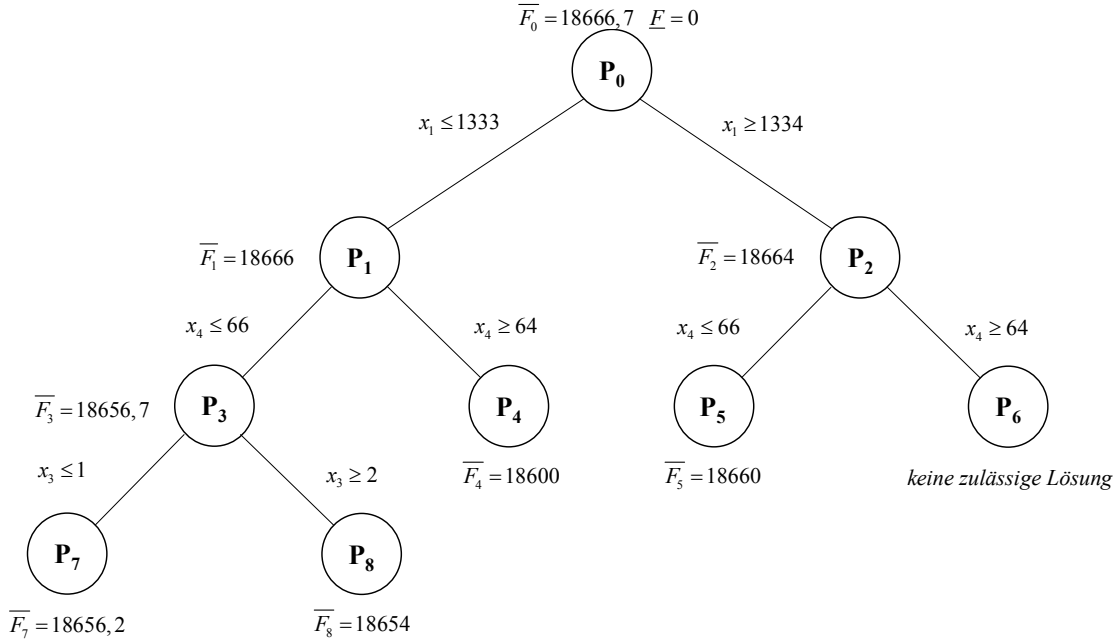


Abb. 4.2: Lösungsbaum des Beispiels 4.3

Die optimale Lösung des Beispiels 4.3 veranschaulicht, dass die Möbelfabrik den maximalen Gewinn in der Höhe von 18.660 Geldeinheiten erwirtschaften wird, wenn sie in das Produktionsprogramm nur die Tische Alpha und Gamma mit den Mengeneinheiten 1.335 und 66 aufnimmt. Nichtsdestotrotz ist zu bedenken, dass sich die Produktion eines Unternehmens nach der Nachfrage der Konsumentinnen und Konsumenten richtet. Die Geschäftsführung könnte sich Marketingmaßnahmen überlegen, sodass die Tische Alpha und Gamma gefördert werden und die restlichen zwei Arten eher in Ausnahmefällen hergestellt werden, wenn sie diesen maximal möglichen Gewinn erzielen wollen.

Abschließend ist zu vermerken, dass sich die größten Herausforderungen bei der Verzweigung der noch nicht ausgeloteten Teilprobleme ergeben. Es existieren verschiedene Regeln für die Vorgehensweisen, von denen zwei als die relevantesten an dieser Stelle zu nennen sind (vgl. Domschke et al. (2015); S. 145):

- ✓ ***Maximum Upper Bound-Regel:*** Aus den nicht ausgeloteten Teilproblemen P_i wird stets jenes Problem ausgewählt, welches die größte Oberschranke $\overline{F_i}$ besitzt. Bei dieser Regel wird in der Breite gesucht.
- ✓ ***Last In-First Out-Regel:*** Nach dieser Regel wird das zuletzt aufgetretene nicht ausgelotete Problem weiter zerlegt. Man unterscheidet zwischen der *reinen Tiefensuche* und der *Tiefensuche mit vollständiger Verzweigung*. Hinsichtlich der reinen Tiefensuche wird für jedes betrachtete Problem ein Teilproblem gebildet und in die Liste der nicht ausgeloteten Probleme abgelegt. Bei der Tiefensuche mit vollständiger Verzweigung wird jedes betrachtete Problem vollständig in Teilprobleme zerlegt und aus der Liste entfernt. Danach kann die Reihenfolge der Untersuchung entstandener Teilprobleme nach der Maximum Upper Bound-Regel erfolgen.

Ein ausführlicher Vergleich der verschiedenen Regeln zum Aufteilen eines ganzzahligen Optimierungsproblems in Teilprobleme ist in Achterberg et al. (2005) zu finden.

4.2.2. Schnittebenenverfahren von Gomory

Die Schnittebenenverfahren zählt zu den theoretisch am fundiertesten erforschten Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme. Der Durchbruch in diesem Gebiet der linearen Optimierung wurde mithilfe des Verfahrens von Gomory

(Gomory Cut) geschaffen. Dieses Verfahren kann als eine Alternative zu den schon behandelten B&B-Verfahren mit dem Unterschied angesehen werden, dass bei dem B&B-Verfahren die Lösungsmenge zerlegt wird, während beim Schnittebenenverfahren von Gomory die Lösungsmenge verkleinert wird. Wir bezwecken in diesem Abschnitt die Grundidee des Verfahrens zu beleuchten und die Vorgehensweise anhand eines Beispiels anzuwenden (vgl. Werner (2001); S. 225)

Wir gehen von dem ganzzahligen Optimierungsproblem aus, das durch (4.1) – (4.3) formuliert ist (siehe Abschnitt 4.1., S. 77-78). Die Vorgehensweise bei diesem Verfahren ist prinzipiell wie folgt (ebd. S. 225-227):

(1) ***Lösung der Relaxation:*** Um zu einer Lösung des Optimierungsproblems (4.1) – (4.3) zu gelangen, bilden wir eine Relaxation, die durch Weglassen der Ganzzahligkeitsforderungen entsteht. Besitzt die Relaxation keine zulässige Lösung oder unbeschränkte Lösungen, dann gilt das gleiche für das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x}^*$ die optimale Lösung von P_0' ist. Ist diese Lösung diskret, so ist das Optimierungsproblem gelöst.

(2) ***Bestimmung einer Hyperebene:*** Wenn die erzeugte Optimallösung $\mathbf{x}^* \notin \mathbb{Z}^p$ ist, dann ist ein Gomory-Schnitt (Hyperebene) $H := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \alpha^T \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}\right\}$ zu bestimmen.

Dieser Gomory-Schnitt weist folgende Eigenschaften auf:

- ✓ Die Menge der für das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem zulässigen Gitterpunkte befindet sich im nichtpositiven Halbraum, der vom Gomory-Schnitt erzeugt wird, d.h. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^p : \mathbf{x} \geq 0,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\right\} \subset H^- := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \alpha^T \mathbf{x} \leq \boldsymbol{\beta}\right\}$
- ✓ Die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ liegt nicht im nichtpositivem Halbraum bzw. $\alpha^T \mathbf{x}^* > \boldsymbol{\beta}$.

(3) ***Äquivalentes Optimierungsproblem:*** Die Schnittebeneungleichung wird als neue Restriktion dem Optimierungsproblem hinzugefügt. Wir ermitteln eine neue Optimallösung der entsprechenden Relaxation. Wenn diese ganzzahlig ist, dann wird das Gomory-Verfahren beendet, ansonsten wird wieder eine Hyperebene ermittelt.

Zusammengefasst wird die Lösung eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblems mithilfe des Schnittverfahrens von Gomory auf die Lösung einer Folge von linearen Problemen, welche der Ganzzahligkeitsforderung nicht genügen, zurückgeführt. In

diesem Kontext ergibt sich die Frage, ob die sogenannte Gomory-Folge der sich ergebenden linearen Probleme konvergent ist. Es lässt sich beweisen[14], dass nach endlich vielen Schritten mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory eine ganzzahlige Optimallösung gefunden oder angezeigt wird, dass eine solche nicht existiert.

Die oben geschilderte Vorgehensweise des Gomory-Verfahrens wird anhand einer Aufgabenstellung in zwei unbekannten Variablen veranschaulicht. Der Grund für dieses einfache Problem der ganzzahligen linearen Optimierung ist einerseits die Möglichkeit, die einzelnen Rechenschritte grafisch abzubilden und anderseits die Tatsache, dass der Rechenaufwand mit Anstieg der Variablen enorm ansteigt.

Beispiel 4.4: Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem in zwei Variablen: (nach Borgwardt (2010); S. 254, Angabe der Aufgabe 9.5.3)

Maximiere $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ (4.8)

unter den Restriktionen

$$2x_1 - x_2 \leq 4 \tag{4.9}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2 \tag{4.10}$$

$$x_1 + x_2 \leq 7 \tag{4.11}$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i = 1, 2 \tag{4.12}$$

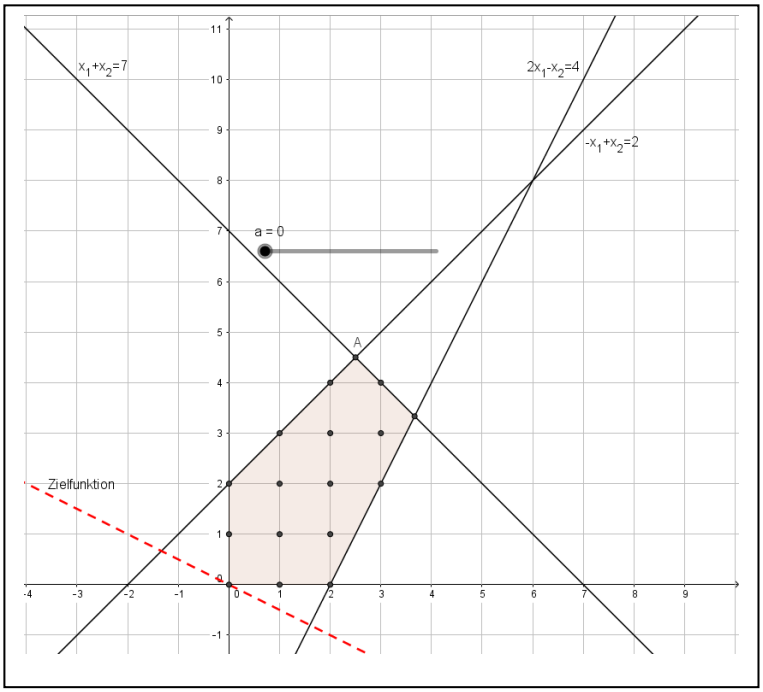


Abb. 4.3: Grafische Lösung des Beispiels 4.4

[14] Ein Beweis findet sich in Burkard (1972), S. 132-138.

Zunächst lösen wir grafisch das Problem mithilfe des Programms GeoGebra. Wie aus der Abb. 4.3 hervorgeht, ist die Lösungsmenge ein konvexes Polyeder. Die optimale Lösung wird sich in einem der Eckpunkte dieses Polyeders ergeben, welcher die Zielfunktion maximiert. In diesem Fall liegt die optimale Lösung im Punkt A, dessen Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Um zu einer Lösung des Beispiels 4.4 zu kommen, bilden wir eine Relaxation durch Weglassen der Ganzzahligkeitsforderung, die wir mittels des Simplexverfahrens lösen. Die optimale Lösung für die Relaxation ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2.5, 4.5, 3.5, 0)$ mit dem Zielfunktionswert 11,5 (siehe Tab. 4.2).

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	1,5	-0,5	3,5
x_2	0	1	0	0,5	0,5	4,5
x_1	1	0	0	-0,5	0,5	2,5
F	0	0	0	0,5	1,5	11,5

Tab. 4.2: Lösung der Relaxation mittels Simplexverfahrens

Die Komponenten der Lösung sind offenbar nicht ganzzahlig. Als Folge dessen wird ein Gomory-Schnitt für die Komponente $x_2 = 4,5$ konstruiert. Die Ungleichung der Hyperebene lautet:

$$-0,5 = \lfloor 4,5 \rfloor - 4,5 \geq (\lfloor -0,5 \rfloor + 0,5) x_4 + (\lfloor 0,5 \rfloor - 0,5) x_5 = -0,5x_4 - 0,5x_5$$

Des Weiteren wollen wir, die zur Gerade

$$-0,5x_4 - 0,5x_5 = -0,5 \,. \tag{4.13}$$

gehörenden Punkte in der (x_1, x_2) – Ebene aus den ursprünglichen Nebenbedingungen

$$x_4 = 2 + x_1 - x_2 \tag{4.14}$$

$$x_5 = 7 - x_1 - x_2 \,. \tag{4.15}$$

ermitteln.

Durch Einsetzen von (4.14) und (4.15) in (4.13) erhalten wir die Gleichung der gewünschten Geraden $x_2 = 4$. Die neue Restriktion wird in der grafischen Lösung berücksichtigt und wir erhalten Abb. 4.4 (siehe S. 92). Ein Vergleich der grafischen Lösung des relaxierten Optimierungsproblems mit der in Abb. 4.3 präsentierten Lösung verdeutlicht, dass sich der zulässige Bereich verkleinert hat. Als ganzzahlige Lösungen

kommen die zwei Punkte mit den Koordinaten $(2,4)$ und $(3,4)$ in Frage. Allerdings ist der Wert der zu maximierenden Zielfunktion im ersten Punkt kleiner als im zweiten.

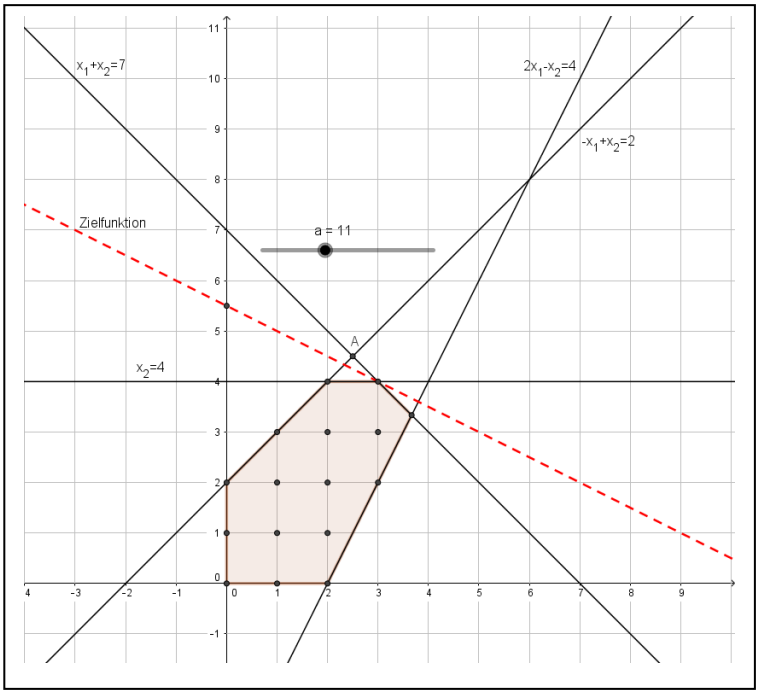


Abb. 4.4: Grafische Lösung des Beispiels 4.4 mit Gomory-Schnitt 1

Im nächsten Schritt des Schnittebenenverfahrens von Gomory ist das durch die neue Nebenbedingung erweiterte Optimierungsproblem zu lösen. Dieses lautet wie folg:

Maximiere $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

unter den Restriktionen

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_5 \leq 7$$

$$-0,5x_4 - 0,5x_5 \leq -0,5$$

$$x_i \geq 0 \text{ für } i = 1,2,3,4,5$$

Die optimale Lösung für das erweiterte Problem ist $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3,4,2,1,0)$ mit dem Zielfunktionswert 11 (siehe Tab. 4.3). Sie ist auch grafisch in Abb. 4.4 sehr gut ersichtlich. Diese Lösung ist ganzzahlig und somit optimal für das Ausgangsproblem.

Die Ermittlung eines weiteren Gomory-Schnitts ist nicht erforderlich, da das Verfahren abgeschlossen ist.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	0	-2	3	2
x_2	0	1	0	0	0	1	4
x_1	1	0	0	0	1	-1	3
x_4	0	0	0	1	1	-2	1
F	0	0	0	0	1	1	11

Tab. 4.3: Lösung des erweiterten Problems mittels Simplexverfahrens

Abschließend ist festzuhalten, dass das Schnittebenenverfahren von Gomory nur bei relativ kleindimensionalen Problemen der ganzzahligen linearen Optimierung effizient anzuwenden ist. Sein Nachteil besteht in der steigenden Dimension des zu lösenden Problems, da mit jeder Konstruktion eines neuen Gomory-Schnitts eine Ungleichung bzw. Gleichung und eine Schlupfvariable hinzukommen. Nichtsdestotrotz lässt sich das Verfahren für Unterrichtszwecke sehr gut mit dem grafischen Lösen von zweidimensionalen ganzzahligen Optimierungsproblemen kombinieren, indem die Schülerinnen und Schüler die Hyperebenen intuitiv beispielsweise mittels GeoGebra konstruieren und mit dem Schieberegler die Zielfunktionswerte miteinander vergleichen.

5. Fachdidaktische Analyse

Die lineare Optimierung in zwei Variablen ist ein fester Bestand in den seit 2014 bzw. 2015 in Kraft getretenen neunen Lehrplänen der Höheren Lehranstalten für Wirtschaftlichen Berufe, Tourismus, Mode und Design, Kunst (HUM) und der Höheren Lehranstalten für Land- und Forstwirtschaft (HLFS). Dieses Themengebiet des Unterrichtsfaches „Mathematik und angewandte Mathematik“ war in den auslaufenden Lehrplänen[15] mit der Überschrift „Lineare Optimierung“ vertreten. Wie aus den hervorgegangen Kapiteln dieser Diplomarbeit zu entnehmen ist, handelt es sich um ein äußerst komplexes Themengebiet, für welches eine Konkretisierung der Inhalte erforderlich ist. Diese Konkretisierung wurde in den neu ausgearbeiteten Lehrplänen durch die Einführung der teilstandardisierten Reife- und Diplomprüfung in Mathematik vorgenommen, um diese Inhaltsdimension einerseits objektiver überprüfen zu können und anderseits die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler in der vielseitigen Landschaft der HUM und HLFS vergleichbar miteinander zu machen, was schlussendlich von einer standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung bezweckt wird.

In diesem Kontext ergibt sich die Frage, welche Inhalte und Grundkompetenzen die Lernenden zu erwerben haben, um sowohl ein nachhaltiges mathematisches Wissen vorzuweisen als auch die Reife- und Diplomprüfung erfolgreich zu absolvieren. Für den nachhaltigen Erwerb des Lehrstoffes sind auch die Unterrichtsmethoden als Teil der fachdidaktischen Kompetenz der Lehrkräfte von besonderer Relevanz, zu denen auch der Technologieeinsatz zählt. Das computerunterstützte Unterrichten der angewandten Mathematik ist von dem Tagesgeschäft der lehrenden Personen nicht wegzudenken, da das Operieren als Handlungsdimension immer in einem möglichst realitätsnahen Zusammenhang zu erfolgen hat. Im Konkreten handelt es sich bei den anwendungsorientierten Aufgabenstellungen um ein Transferieren der erworbenen Fachkenntnisse, die vorwiegend einen fächerübergreifenden Charakter aufweisen. Erst der richtige Transfer des Wissens ermöglicht die Durchführung der Rechenschritte, welche eine Unterstützung durch einen geeigneten Technologieeinsatz bedingt durch die Anwendungsorientiertheit der mathematischen Probleme benötigen.

[15] Diverse auslaufende und neu in Kraft getretene Lehrpläne für die oben erwähnten Bildenden Höheren Schulen sind unter https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/downloads/ nachzulesen. (Zugriff: 12.07.2018)

Die Inhaltsdimensionen und die Grundkompetenzen sind in den Lehrplänen der jeweiligen BHS vorzufinden und werden im Folgenden dieses Kapitels diskutiert.

5.1. Lehrpläne und Grundkompetenzen

Die Lehrpläne der diversen Berufsbildenden Höheren Schulen (BHS) für das Unterrichtsfach „Mathematik und angewandte Mathematik“ können als Wegweiser jeder lehrenden Person angesehen werden. Sie geben die gesetzlichen Richtlinien an, die Vergleichbarkeit und Durchlässigkeit gewährleisten sollen, entscheiden über die Inhalte, Ziele und Lernergebnisse des Mathematikunterrichts und bieten schlussendlich die Grundlage für die Arbeit von SchulbuchautorInnen. Welche Inhalte Schülerinnen und Schüler und für welche Zwecke sie diese lernen sollten, ist durch den Lehrplan verbindlich vorgeschrieben. Allerdings sind diese Vorgaben meist in Form von Rahmenrichtlinien mit gewissen Interpretationsspielräumen, welche den Unterrichtenden ermöglichen, eigene Schwerpunkte zu setzen.
Der österreichische BHS-Lehrplan[16] besteht aus folgenden Teilen:

- ✓ Stundentafel;
- ✓ Allgemeines Bildungsziel: Lernergebnisse der im Lehrplan vertretenen Cluster;
- ✓ Schulautonome Lehrplanbestimmungen: Allgemeine Bestimmungen, Abweichungen von der Stundentafel, Freigegenstände, unverbindliche Übungen, Förderunterricht, Bestimmungen hinsichtlich integrierten Fremdsprachenlernens;
- ✓ Didaktische Grundsätze: Unterrichtsqualität, Unterrichtsplanung, Didaktische Grundsätze des jeweiligen Clusters, Unterrichtsorganisation, Pflichtpraktikum,
- ✓ Lehrpläne für den Religionsunterricht;
- ✓ Fachlehrpläne: Bildungs- und Lehraufgaben, Lehrstoffe der einzelnen Unterrichtsgegenstände.

Das Augenmerk in diesem Abschnitt wird auf die didaktischen Grundsätze, Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler und auf den Fachlehrplan gelegt. Die Grundkompetenzen, die im Rahmen des Konzeptes „teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung“ zu erwerben sind, werden gesondert behandelt.

[16] Vgl. Online: https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/downloads/ (Zugriff: 12.07.2018).

5.1.1. Lehrplan „Mathematik und angewandte Mathematik“

In Österreich kommt den BHS gemäß dem in Paragraph 65 des Schulorganisationsgesetzes (SchOG) verschriftlichten Bildungsauftrag die Aufgabe zu, den lernenden Personen eine allgemeine höhere und fachliche Bildung so zu vermitteln, dass sie zum Ausüben eines *„[...] Berufes auf technischem, gewerblichem, kunstgewerblichem, kaufmännischem, hauswirtschaftlichem oder sonstigem wirtschaftlichem Gebiet befähigt und sie zugleich zur Universitätsreife führt.“*[17] Der Bildungsauftrag im Unterrichtsfach Angewandte Mathematik bezieht sich insbesondere auf (ebd.):

- ✓ ***Anwendungsbezogenheit:*** Es sollten nicht nur allgemeine mathematische Bildungsziele sondern auch spezielle mathematische Kenntnisse, Methoden und Verfahren vermittelt werden, die für die Berufspraxis von Relevanz sind.
- ✓ ***Zubringerfunktion:*** Die mathematischen Kompetenzen sollten zum erst möglichen Zeitpunkt in den Berufskontext gestellt werden.
- ✓ ***Berufsfeldgerechten Technologieeinsatz:*** Den Lernenden sollte zu einer professionellen Technologiekompetenz hinsichtlich der verfolgten beruflichen Zielsetzung verholfen werden.

Die oben erwähnten Bildungsaufträge spiegeln sich in dem jeweiligen Lehrplan wider. Da die Fachlehrpläne der HUM und der HLFS im Unterrichtsfach „Mathematik und angewandte Mathematik“ kaum voneinander hinsichtlich der didaktischen Grundsätze, der Lernergebnisse und der Inhaltsdimension „lineare Optimierung“ divergieren, wird das Augenmerk auf den Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Wirtschaftsberufe (HLW) als Stellvertreterin für die oben genannten BHS gelegt.

Das Fundament des Lehrplanes bilden die Bildungsstandards einerseits mit den inhaltlichen Dimensionen Zahlen und Maße, Algebra und Geometrie, Funktionale Zusammenhänge, Analysis und Stochastik und anderseits mit den Handlungsdimensionen Modellieren und Transferieren, Operieren und Technologieeinsatz, Interpretieren und Dokumentieren, Argumentieren und Kommunizieren.[18] Diese Inhalts- und Handlungsbereiche sind mit dem BIFIE-Kompetenzmodell kompatibel und werden genauer im Abschnitt 5.1.3 diskutiert.

---

[17] Online: Allgemeine Information Angewandte Mathematik unter https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff: 12.07.2018).

[18] Vgl. hier und im Folgenden: Lehrplan Höhere Bundeslehranstalt für Wirtschaftsberufe unter https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2074/HLW.pdf/ (Zugriff: 12.07.2018).

Inhaltlich ist die lineare Optimierung in dem Bereich Algebra und Geometrie positioniert. Im Konkreten handelt es sich um die Bestimmung und Interpretation des Lösungsbereichs linearer Ungleichungssysteme in zwei unbekannten Variablen, um die Durchführung linearer Optimierung einer Zielfunktion mittels geeigneten Technologieeinsatzes und schlussendlich um die Erklärung, Begründung und Interpretation des Lösungsweges und der erzeugten Ergebnisse. Dieser Lehrstoff bildet nur den Rahmen, der die Berücksichtigung von Veränderungen in ökonomischen, gesellschaftlichen, kulturellen, wissenschaftlichen und technischen Belangen ermöglicht. Bei den Lehrplaninhalten ist auf regionale Besonderheiten und aktuelle Geschehnisse einzugehen.

Die Planung und Durchführung des Unterrichts hat stets auf die realitätsnahen, praxisorientierten Aufgabenstellungen zu achten, welche folgende Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler fördern und fordern (ebd.; S. 13):

- ✓ *„Kenntnisse der grundlegenden, allgemeinen mathematischen Strukturen*,
- ✓ *Selbständiges logisches Denken,*
- ✓ *Modellieren von sprachlich formulierten Problemen mit Hilfe von Gleichungen, Funktionen oder grafischen Darstellungen sowie*
- ✓ *Durchführung von allgemeinen Rechenverfahren mit Schritt-für-Schritt-Analysen.“*

Durch das Fördern und Fordern sollten die lernenden Personen folgende Lernergebnisse vorweisen können (vgl. ebd.; S. 8):

- ✓ Grundlegende Kenntnisse in allen Bereichen des Clusters Mathematik und angewandte Mathematik;
- ✓ Praxisbezogene Anwendung fachspezifischer Methoden sowie Problemlösungsstrategien;
- ✓ Beherrschung und situationsgerechte Anwendung der Fachsprache;
- ✓ Beschreibung von diversen Vorgängen durch Formeln, Größen und Einheiten sowie ihre Darstellung und Erläuterung durch einfache Modelle;
- ✓ Sinnvolle Anwendung einfacher Untersuchungsmethoden bzw. Planung, Durchführung und Dokumentierung der Experimente mit geeigneten Mitteln;
- ✓ Einordnung des erworbenen Wissens, Abschätzung der Konsequenzen und Setzung entsprechender Handlungen im eigenen Verantwortungsbereich;

- ✓ Präsentation fachbezogener Inhalte und Darlegung und Begründung der eigenen Standpunkte.

Wird die lineare Optimierung in zwei Variablen als Aufgabenstellung betrachtet, so ist festzustellen, dass alle vier aufgelisteten Kompetenzen darin Platz finden. Zunächst ist es erforderlich die mathematischen Strukturen Gleichung bzw. Gleichungssysteme und/oder Ungleichungen bzw. Ungleichungssysteme in zwei Variablen zu kennen und die Rechenverfahren sowohl grafisch als auch analytisch zu beherrschen. Das Modellieren des praxisorientierten, meist aus dem wirtschaftlichen Bereich, stammenden Optimierungsproblems setzt nicht nur entsprechendes, grundlegendes Mathematikwissen sondern auch logisches Denken und fächerübergreifende Fähigkeiten und Fertigkeiten aus den Gebieten „Rechnungswesen und Controlling“ und „Betriebswirtschaftslehre“ voraus. Anschließend sind die erhaltenen Ergebnisse in korrekter Fachsprache zu dokumentieren und weiteren Interpretationen und Begründungen zu unterziehen. Schlussendlich ist der Einsatz neuer Informations- und Kommunikationstechnologien bei der Bewältigung der linearen Optimierungsprobleme nicht außer Acht zu lassen.

5.1.2. Lehrplan „Rechnungswesen und Controlling“

Die einwandfreie Bewältigung der linearen Optimierungsprobleme setzt fundiertes Wissen der Kosten- und Preisbildung voraus, da der anwendungsorientierte Kontext in den BHS im Vordergrund steht. Außerdem sind die für den Unterricht „Mathematik und angewandte Mathematik“ approbierten Schulbücher voll mit Aufgabenstellungen, welche sich mit Maximierung von Umsätzen bzw. Gewinnen unter Berücksichtigung diverser Kostenpositionen auseinandersetzen. Aus diesem Grund bin ich der Überzeugung, dass eine kurze Beleuchtung der relevanten Lehrstoffinhalte in „Rechnungswesen und Controlling“ anzubieten ist und dass Möglichkeiten eines fächerübergreifenden Unterrichts zu überlegen sind.

Der Lehrplan für das Unterrichtsfach „Rechnungswesen und Controlling“[19] im Gegensatz zum Unterrichtsfach „Mathematik und Angewandte Mathematik“ ist hinsichtlich des zu behandelnden Lehrstoffs ziemlich offen gehalten. Im Konkreten sind die Kostenrechnung – System, Berechnung der Gemeinkostenzuschläge, Stundensätzen

[19] Vgl. Online: https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2074/HLW.pdf/ (Zugriff: 12.07.2018).

und Selbstkosten –, die einfachen Kalkulationen für diverse Wirtschaftszweige und die unternehmerischen Entscheidungen auf der Basis der Teilkostenrechnung genannt. Somit bleibt es der lehrenden Person überlassen, welche Branchen zu wählen sind und in welcher Tiefe das Kalkulieren von Kosten durchzuführen ist. Expliziert sind im Lehrplan die Bildungs- und Lehraufgaben genannt, welche sich mit folgenden Themen aus der Kostenrechnung befassen (ebd.; S. 54):

„Die Schülerinnen und Schüler können

- ✓ *das System der Kostenrechnung anwenden;*
- ✓ *Kosten ermitteln und auf Kostenstellen verteilen;*
- ✓ *Zuschlagsätze und Selbstkosten ermitteln;*
- ✓ *Kalkulation auf Basis eines Betriebsabrechnungsbogens für unterschiedliche Branchen durchführen;*
- ✓ *Zwischen fixen und variablen Kosten unterscheiden;*
- ✓ *Unternehmensentscheidungen auf der Basis der Teilkostenrechnung treffen und diese kostenrechnerisch und betriebswirtschaftlich beurteilen.“*

In diesem Zusammenhang bin ich der Überzeugung, dass Schülerinnen und Schüler wirtschaftliche Produktions- und Absatzprozesse mittels der linearen Optimierung modellieren können, wenn sie ein theoretisches Fundament in den Bereichen Kosten- und Preisbildung aufgebaut haben. Das Kumulieren des für die Aufstellung der mathematischen Modelle relevanten Wissens ist auf Grund der derzeitigen Reihenfolge der Lerninhalte nicht gewährleistet, da die lineare Optimierung im zweiten und die Kostenrechnung im dritten Jahrgang laut dem geltenden Lehrplan zu unterrichten sind. Diese tiefgreifende Symbiose zwischen den beiden Unterrichtsfächern wurde bedauerlicherweise von den zuständigen Institutionen nicht in Betracht gezogen. Konsequenterweise werden höchstwahrscheinlich die lernenden Personen mit Begriffen in beiden Unterrichtsfächern zu arbeiten haben, welche in ihrer Formulierung voneinander abweichen und schlussendlich zu einem neuen Wissenserwerb führen, und den sogenannten Schubladen-Effekt beim Lernen verstärken würden.

Nichtsdestotrotz bietet sich an, die mathematischen Inhalte der linearen Optimierung mittels eines COOL-Auftrags[20] im Unterrichtsfach „Rechnungswesen und Controlling“ im dritten Jahrgang aufzugreifen und ihre Relevanz für das Treffen von

[20] Die Abkürzung COOL bedeutet *Cooperatives Offenes Lernen*. Die Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Klasse oder eines ganzen Jahrganges befassen sich selbständig, eigenverantwortlich und kommunikationsfähig mit schriftlichen, oft auch fächerübergreifenden Arbeitsaufträgen. Die Lehrkraft wird zu einer moderierenden Person des Lernprozesses.

unternehmerischen Entscheidungen und für das kostenrechnerische und betriebswirtschaftliche Beurteilen dieser Entscheidungen zu verdeutlichen.

5.1.3. Grundkompetenzen und teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung

Die teilstandardisierte, kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung an BHS und Bildungsanstalten für Kindergartenpädagogik und Sozialpädagogik für das Unterrichtsfach „Angewandte Mathematik“ ist mit dem Haupttermin des Schuljahres 2015/16 flächendeckend eingeführt. Die gesetzlichen Rahmenbedingungen sind durch die Novelle zum Schulunterrichtsgesetz BGBl. Nr. 52/2010 und durch die Verordnung über die abschließende Prüfungen BGBl. II Nr. 160/2015 vom 22. Juni 2015 geschaffen.[21]

Den speziellen Bildungsauftrag, den das berufsbildende höhere Schulwesen auszuführen hat, spiegeln die seit dem Jahr 2004 für das Fach „Angewandte Mathematik“ entwickelten Bildungsstandards wider.[22] Sie stellen die sogenannten mathematischen Grundkompetenzen dar, welche die Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer BHS-Ausbildung dauerhaft erwerben sollen und orientieren sich an den Inhalten und Bildungszielen des jeweils geltenden Lehrplanes.

Bei der Erstellung dieses Kompetenzmodells fanden ihre Beachtung folgende Anforderungen:

- ✓ Sicherung der Ausbildungsqualität im Berufsbildungssystem;
- ✓ Analyse der Gemeinsamkeiten und Ausarbeitung möglichst einheitlicher Problemstellungen für alle BHS-Formen;
- ✓ Chancennutzung und Minimierung von Risiken innerhalb des einzuleitenden Paradigmenwechsels.

Die oben aufgezählten Anforderungen führten zum *Konzept der Zweiteilung* im hochdifferenzierten BHS-System. Das Kompetenzmodell für das Unterrichtsfach „Angewandte Mathematik“ setzt sich aus zwei Teilen zusammen, welche als Ganze im Rahmen der Reife- und Diplomprüfung zu betrachten sind. In dem sogenannten „Teil A“ sind Grundkompetenzen des gemeinsamen Kerns aufgewiesen, welche den

[21] Vgl. Online: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_bhs.html (Zugriff 12.07.2018).

[22] Vgl. hierfür und im Folgenden Online: Allgemeine Information Angewandte Mathematik unter https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff: 12.07.2018).

lernenden Personen aller Schultypen der BHS gleicherweise vermittelt werden sollen. Im Gegensatz dazu werden im „Teil B“ basierend auf dem gemeinsamen Kern erweiterte Kompetenzen inhaltlicher und sachbezogener Natur gelehrt, die in den verschiedenen Schulformen hinsichtlich der beruflichen und allgemeinbildenden Zielsetzung als wesentlich und unverzichtbar zu erachten sind (vgl. Schüller et al. (2009); S. 12).

Laut der von MR Dr. Schüller geleiteten Arbeitsgruppe steht der Begriff *Kompetenz „[…] für eine Vielfalt von Schlüsselqualifikationen und bezeichnet ganz allgemein die Fähigkeit eines Menschen, bestimmte Aufgaben und Problemstellungen selbständig situationsgerecht zu bewältigen.“*[23] Ausgehend von diesem Kompetenzbegriff und basierend auf der einschlägigen Literatur beziehen sich die mathematischen Kompetenzen auf Inhalte und Tätigkeiten.[24] Als Folge dessen unterscheidet die Arbeitsgruppe eine Inhaltsdimension und eine Handlungsdimension, deren Ausprägung in der Abb. 5.1 dargestellt ist.

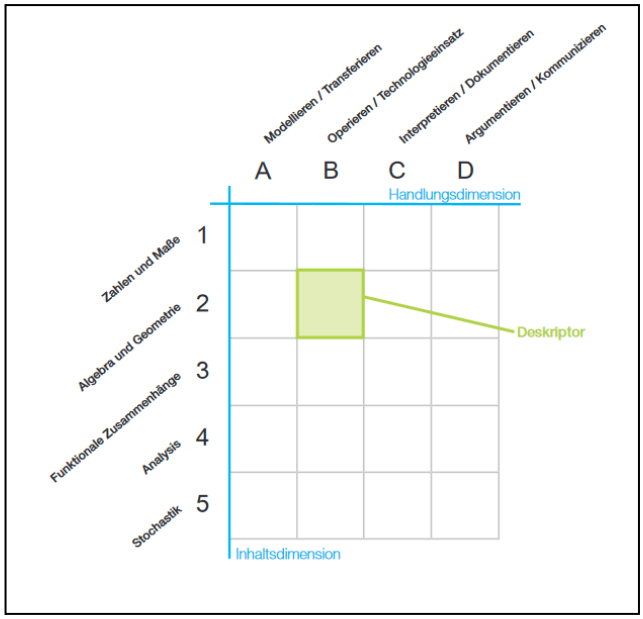


Abb. 5.1: Kompetenzmodell Angewandte Mathematik[25]

Wie aus der Abb. 5.1 hervorgeht, sind die Grundkompetenzen in vier Inhaltsbereiche – Zahlen und Maße, Algebra und Geometrie, Funktionale Zusammenhänge, Analysis und Stochastik – gegliedert, in welchen einerseits konkrete Inhalte erfasst sind, die für alle

[23] ebd., S. 7.
[24] Vgl. hierfür und im Folgenden: Schüller et al. (2009), S. 12-16.
[25] Konzepte und Kompetenzen gültig ab dem Maturatermin 2017/18, Kompetenz- und Bildungskataloge unter https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

BHS von Relevanz sind und anderseits spezifische Inhalte, welche nur für gewisse Schulformen Geltung haben. Für die Zwecke eines besseren Verständnisses des Kompetenzmodells bin ich der Überzeugung, dass eine kurze durch die Lupe der HLW Beleuchtung der einzelnen Inhaltsbereiche erforderlich ist.

Zahlen und Maße

In diesem Inhaltsbereich stehen im Vordergrund der Umgang mit Zahlen und ihre Zuordnung einer bestimmten Zahlenmenge, die Darstellungsmöglichkeiten der Zahlen und ihre Bedeutung als Größen, welche sich aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit zusammensetzten. Im Konkreten werden folgende Grundkompetenzen – im gemeinsamen Kern und erweitert – gefordert:[26]

- ✓ Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, Zahlengerade
- ✓ Fest- und Gleitkommadarstellung
- ✓ Maßeinheiten, Zehnerpotenzen
- ✓ Überschlagsrechnung, Runden und Abschätzen von Ergebnissen
- ✓ Prozent- und Promillerechnung
- ✓ Betrag einer Zahl

Der Erwerb der aufgelisteten Kompetenzen ist für die Bewältigung der linearen Optimierungsproblemstellungen unabdingbar, da sie, meiner Ansicht nach, das Fundament der mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten bilden.

Algebra und Geometrie

In diesem Inhaltsbereich wird ein sachlicher Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten der Algebra solche wie Terme, Variablen, Potenzen, Gleichungen (Formeln), Ungleichungen und Gleichungssysteme gefordert (vgl. Aue et al. (2015); S. 6). Darüber hinaus sollen die lernenden Personen algebraische Tatbestände geometrisch und umgekehrt geometrische Tatbestände algebraisch beurteilen und daraus resultierend neue Erkenntnisse gewinnen. Da die Inhalte Gleichungen, Ungleichungen und

[26] Zusätzlich zu Schüller et al. (2009) sind für die Ausarbeitung der Inhaltsbereiche die Kompetenzkataloge hinsichtlich des gemeinsamen Kerns und des Clusters W1 herangezogen. Vgl. Online: https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

Gleichungssysteme für die lineare Optimierung von essenzieller Bedeutung sind, werden sie genauer angeführt. Es sind folgende Grundkompetenzen gefordert:[27]

- ✓ *„Probleme aus Anwendungsgebieten durch lineare Gleichungen mit einer Unbekannten modellieren, diese lösen und die Lösung interpretieren; im Kontext argumentieren“*
- ✓ *„Zusammenhänge zwischen Größen durch eine Formel modellieren, die Formel umformen und die gegenseitige Abhängigkeit der Größen interpretieren und erklären“*
- ✓ *„Probleme aus Anwendungsgebieten durch lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen modellieren, diese lösen, die möglichen Lösungsfälle grafisch veranschaulichen und interpretieren; im Kontext argumentieren“*
- ✓ *„Probleme aus Anwendungsgebieten durch lineare Gleichungssysteme in mehreren Variablen modellieren, diese mittels Technologieeinsatz lösen; das Ergebnis in Bezug auf die Problemstellung interpretieren; im Kontext argumentieren“*
- ✓ *„Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen modellieren, deren Lösungen mittels Technologieeinsatz ermitteln; interpretieren und im Kontext argumentieren“*
- ✓ *„Lineare Optimierung: Zielfunktion aufstellen; die optimale Lösung mittels Technologieeinsatz ermitteln und interpretieren sowie den Lösungsweg erklären“*

Hierbei ist festzuhalten, dass die letzten zwei aufgelisteten Grundkompetenzen im Teil B des Clusters W1 abgeprüft werden. Überraschenderweise ist das Modellieren durch Gleichungen und Gleichungssysteme im Kompetenzkatalog stark vertreten, wobei die lineare Ungleichung als Bestandteil der Nebenbedingungen eines linearen Optimierungsproblems kein einziges Mal Erwähnung findet. Ihre genaue algebraische und geometrische Behandlung im Mathematikunterricht ist erforderlich, um ein Verständnis für die Optimierungsproblematik aufzubauen.

Funktionale Zusammenhänge

Dieser Inhaltsbereich verfolgt die Zielsetzung, dass die Schülerinnen und Schüler im Stande sind, mit der funktionalen Sichtweise sachlich und fachkundig umzugehen.

[27] Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern gültig ab den Matura-Prüfungsterminen 2017/2018, S. 1-2 und Schulformspezifische Kompetenzen und Begriffe im Cluster HLFS/HUM (W1) gültig ab den Matura-Prüfungsterminen 2017/2018, S. 1. Online: https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

Darunter wird verstanden, dass das Augenmerk auf das Verhältnis zwischen zwei oder mehreren Größen in diversen Sachzusammenhängen zu richten und des Weiteren die üblichen Darstellungsformen der Funktionen zu kennen, und mit ihnen verständnisvoll umgehen zu können. Somit steht im Mittelpunkt des von den lernenden Personen zu erwerbenden mathematischen Grundwissens das Kennen der Funktionstypen, welche für die Anwendungen von essenzieller Signifikanz sind. Im Konkreten sind es das Kennen von Namen, Gleichungen und typischen Verläufen der Graphen, das Wechseln zwischen den Darstellungsformen und das Wissen von charakteristischen Eigenschaften (vgl. Aue et al. (2015); S. 9).

Abschließend sind die Grundkompetenzen, welche meiner Meinung nach für die Auseinandersetzung mit dem Thema der linearen Optimierung besonders anzusprechen sind, zu nennen. Diese sind wie folgt:[28]

- ✓ *„Eine Funktion in einem geeigneten Definitionsbereich als eindeutige Zuordnung verstehen und als Darstellung der Abhängigkeit zwischen Größen interpretieren; den Graphen einer gegebenen Funktion mittels Technologieeinsatz darstellen, Funktionswerte ermitteln und den Verlauf des Graphen im Kontext interpretieren“*
- ✓ *„Zusammenhänge aus Anwendungsbereichen durch lineare Funktionen modellieren, damit Berechnungen durchführen, die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren; Graphen von linearen Funktionen skizzieren und die Parameter kontextbezogen interpretieren; den Zusammenhang zwischen einer linearen Gleichung in zwei Variablen und einer linearen Funktion verstehen und anwenden“*
- ✓ *„die Nullstellen einer Funktion gegebenfalls mittels Technologieeinsatz bestimmen und als Lösung einer Gleichung interpretieren“*
- ✓ *„Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen gegebenfalls mittels Technologieeinsatz bestimmen und diese im Kontext interpretieren“*

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die zu optimierende Zielfunktion eine lineare Funktion ist. Die Aufstellung ihrer Gleichung erfordert fundierte Kompetenzen über die eindeutige Zuordnung zwischen zwei Größen. Außerdem ist für die grafische

[28] Hierfür und im Folgenden sind die Kompetenzkataloge hinsichtlich des gemeinsamen Kerns und des Clusters W1 herangezogen. Vgl. Online: https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

Ermittlung der optimalen Lösung unabdingbar, einerseits den Graphen der Zielfunktion mittels Technologieeinsatz darzustellen bzw. ohne Technologieeinsatz zu skizzieren, und anderseits das Verhältnis zwischen einer linearen (Un-)Gleichung in zwei Variablen und einer linearen Funktion nachzuvollziehen, und diesen in einem grafischen Kontext zu präsentieren. Schlussendlich stellen die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen zulässige Basislösungen dar, welche für die Berechnung der Optimallösung von Relevanz sind.

Analysis

Dieser Inhaltsbereich setzt sich mit Konzepten auseinander, welche das formale Darstellen diskreten und stetigen Änderungsverhaltens nicht nur in der Mathematik sondern auch in diversen Anwendungsgebieten ermöglichen. Hierbei sind beispielsweise von grundlegender Bedeutung die mathematischen Begriffe *Differenzenquotient* bzw. *Differenzialquotient*, welche die quantitative Beschreibung des Änderungsverhaltens von Größen im jeweiligen Sachzusammenhang gewährleisten. Zusätzlich sind die *Stammfunktion* und das *bestimmte Integral* als zentrale Begriffe der Integralrechnung zu verstehen und kontextbezogen anzuwenden. Dabei ist es ausreichend, sich auf die grundlegendsten Differentiations- und Integrationsregeln zu beschränken, da die Betrachtung der grafischen Darstellung der Funktionen neben der symbolischen zur Verfügung steht, an der die wesentlichen Eigenschaften und Zusammenhänge zu erkennen und qualitativ abzuschätzen sind (vgl. Aue et al. (2015); S. 13).

Abschließend ist zu vermerken, dass die in diesem Inhaltsbereich durch die Schülerinnen und Schüler zu erarbeitenden Kompetenzen keinen direkten Bezug zu der linearen Optimierung aufweisen.

Stochastik

In dem Inhaltsbereich Stochastik stehen im Vordergrund der Umgang mit Begriffen, Darstellungsformen und Verfahren der beschreibenden Statistik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der schließenden Statistik. Im Konkreten werden folgende Grundkompetenzen – im gemeinsamen Kern und erweitert – gefordert (vgl. Schüller et al. (2009); S. 13):

- ✓ Beschreibende Statistik
- ✓ Korrelation und Regressionsanalyse

- ✓ Wahrscheinlichkeitsrechnung
- ✓ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ✓ Beurteilende Statistik

Der Erwerb der aufgelisteten Kompetenzen ist für die Bewältigung der linearen Optimierungsproblemstellungen nicht von besonderer Signifikanz, da es sich nicht um die Aufstellung von stochastischen Modellen sondern um die Arbeit mit deterministischen Modellen handelt, mit ihrer Hilfe die Zielfunktion optimiert wird. In vielen Problemstellungen der linearen Optimierung bilden beispielsweise die schon ermittelten Durchschnittskosten die Basis für die Aufstellung der Nebenbedingungen. Daher könnte das arithmetische Mittel als Teilbereich der beschreibenden Statistik im Rahmen eines fächerübergreifenden Unterrichts (Mathematik und Rechnungswesen) thematisiert werden. Beispielsweise bietet sich das gleitende Durchschnittsverfahren bei der Bewertung von Vorräten an, da es sich des arithmetischen Mittels als Zentralmaß bedient.

Zusammenfassend zeigt sich, dass sich Themen der linearen Optimierung hinsichtlich der Vermittlung von Grundkompetenzen einerseits für viele Inhaltsbereiche eignen und anderseits eine leicht für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbare Anwendung für die Modellierung wirtschaftlicher Prozesse anbieten.

Neben den inhaltsspezifischen Grundkompetenzen, erwähnt das Kompetenzmodell Angewandte Mathematik (siehe Abb. 5.1, S. 101) unterschiedliche Handlungsbereiche, nämlich Modellieren und Transferieren, Operieren und Technologieeinsatz, Interpretieren und Dokumentieren, Argumentieren und Kommunizieren. Im Folgenden werden die schon erwähnten Handlungsbereiche einschließlich charakteristischer Tätigkeiten kurz diskutiert.

Modellieren und Transferieren

Die im Vordergrund stehende Zielsetzung einer mathematischen Modellierung ist es, ein mathematisches Modell zur Lösung eins Problems, welches aus der Realität stammt, zu entwickeln. Nach Maaß ist das Modell eine *„vereinfachte Darstellung des realen Sachverhaltes, das nur gewisse, für die jeweilige Fragestellung relevante Teilaspekte der Situation berücksichtigt“* (Maaß (2007); S. 13). Folglich bedeutet das Modell, dass die reale Komplexität auf geeignete Größen reduziert wird, die alle wesentlichen Einflussfaktoren angemessen beschreiben.

In diesem Zusammenhang erfordert das Modellieren, die für den gegebenen Sachkontext relevanter mathematischer Beziehungen zu erkennen und unter Treffen diverser Annahmen und Vornehmen entsprechender Vereinfachungen diese mittels des mathematischen Formalismus darzustellen (vgl. hierfür und im Folgenden Schüller et al. (2009); S. 14-15).

Das Transferieren erfordert hingegen fundierte Kenntnisse über mathematische Modelle, adäquates Wissen über Anwendungsmöglichkeiten in dem Alltag bzw. berufsspezifischen Bereichen und die Fähigkeit ihrer Bewertung, damit für den Sachverhalt ein passendes Modell ausgewählt werden kann.

Die für den Handlungsbereich Modellieren und Transferieren charakteristischen Tätigkeiten - ohne Anspruch auf eine Vollständigkeit - sind wie folgt:

- ✓ Problemstellungen aus dem Alltag und berufsspezifischen Bereichen auf die wesentlichen Einflussgrößen reduzieren und präsentieren;
- ✓ Geeignete mathematische Darstellungsformen finden, für das formulierte Problem adaptieren und erklären;
- ✓ Formulierungen der Alltags- und der berufsspezifischen Sprache in die Sprache der Mathematik übertragen;
- ✓ Entscheidung für verschiedene Darstellungsformen treffen und zwischen ihnen wechseln;
- ✓ Das erarbeitete mathematische Wissen fächerübergreifend nutzen;
- ✓ Mathematische Konzepte eigenständig in den beruflichen Kontext umsetzen.

Bezogen auf die Problematik der linearen Optimierung ist die Handlungsdimension Modellieren und Transferieren von enormer Signifikanz. Beispielsweise hängt von der richtigen Übertragung der Textangabe in eine Tabelle als erster Schritt die Aufstellung der Zielfunktion und der Restriktionsbedingungen ab. Daher sind auch die Sprachkompetenzen der lernenden Personen äußerst gefordert. Die Wahl des Modells spielt in diesem Fall keine so große Rolle, da es sich um lineare Beziehungen zwischen den Einflussgrößen handelt.

Operieren und Technologieeinsatz

Das Operieren verfolgt die Zielsetzung, Rechen- und Konstruktionsabläufe nicht nur zu planen, sondern auch korrekt, sinnvoll und selbstverständlich effizient durchzuführen. Dabei ist bei der nummerischen bzw. algebraischen Lösungsermittlung auf die richtige

mathematische Notation Acht zu geben, da sie unmissverständlich den Rechenweg anzugeben hat. Außerdem beinhaltet das Operieren die zweckmäßige Auslagerung unterschiedlicher Bearbeitungstätigkeiten an die zur Verfügung stehende Technologie.
Der Technologieeinsatz unterstützt oder hat eigentlich das mathematische Bearbeiten von Problemstellungen durch die ständige Bereitstellung und Verwendung elektronischer Werkzeuge wie beispielsweise Tabellenkalkulationsprogrammen, dynamischer Geometriesoftware oder Computeralgebrasystemen ermöglicht. Dadurch wird gewährleistet, dass triviale Rechenoperationen, die mit keinem Erkenntnisgewinn in Verbindung zu setzten sind, vermieden werden.
Als charakteristische für die Handlungsdimension Operieren und Technologieeinsatz Tätigkeiten können exemplarisch folgende aufgezählt werden:

- ✓ Einfache Rechenoperation in den Zahlenmengen ohne Technologieeinsatz durchführen;
- ✓ Ergebnisse gestellter Probleme in geeigneter Genauigkeit abschätzen;
- ✓ Die Lösung des gestellten Problems sinnvoll runden und mit Näherungswerten rechnen;
- ✓ Zwischen nummerischen und algebraischen Methoden unterscheiden und diese situationsgerecht anwenden;
- ✓ Den Technologieeinsatz passend zur Lösung der Problemstellung auswählen und nutzen.

Für die Bewältigung der Probleme der linearen Optimierung ist die Auswahl und die Anwendung einer passenden Technologie von essenzieller Bedeutung, da laut dem Lehrplan 2015 sowohl der Lösungsbereich eines linearen Ungleichungssystems in zwei Variablen als auch die Optimierung der Zielfunktion mittels Technologieeinsatz zu erfolgen hat. Demnach sollten die Schülerinnen und Schüler das Arbeiten mit elektronischen Hilfsmitteln situationsgerecht beherrschen und Sensibilität für ihre Vor- und Nachteile aufweisen.

Interpretieren und Dokumentieren

Das Interpretieren bedarf der Erkennung und Darlegung von Fakten, Zusammenhängen und Sachverhalten, die auf Informationen oder mathematischen Darstellungen basieren. Im Konkreten handelt es sich um den Übergang von dem aufgestellten Modell zu der realen Ausgangsituation. Außerdem kann die Handlungsdimension Interpretieren die

Umdeutung der gewonnenen Ergebnisse eines Modells in neue mathematische Sichtweise beinhalten.

Das Dokumentieren verfolgt das Ziel, aufgestellte Modelle, ausgedachte Lösungswege und ermittelte Resultate für weitere Verwendung geeignet zu präsentieren, wobei die Darstellung verbal oder grafisch erfolgen kann.

Tätigkeiten, welche diese Handlungsdimension exemplarisch charakterisieren, sind wie folgt:

- ✓ Rechenergebnisse beschreiben und im jeweiligen Sachzusammenhang beurteilen;
- ✓ Mathematische Vorgangsweisen, Lösungswege oder Lösungen strukturiert und übersichtlich darstellen;
- ✓ Werte aus Tabellen, Grafiken ablesen und diese im adäquaten Kontext deuten;
- ✓ Mathematische Begriffe im angemessenen Sachzusammenhang deuten;
- ✓ Die Richtigkeit mathematischer Darstellungen im gegebenen Kontext einschätzen.

Da die Lösungsermittlung eines linearen Optimierungsproblems sehr technologiefokussiert ist, bedarf es einer gut strukturierten und übersichtlichen Darstellung der mathematischen Vorgehensweise und der Lösungsermittlung. Der optimale Wert der Zielfunktion ist ein mathematischer Begriff, der in einem wirtschaftlichen Kontext schlussendlich zu deuten ist, damit die Problemstellung korrekt gelöst ist.

Argumentieren und Kommunizieren

Die im Vordergrund des Argumentierens stehende Zielsetzung ist, getroffene Entscheidungen zu begründen oder mathematische Aspekte, welche für oder gegen eine konkrete Sichtweise sprechen, anzugeben. Diese Handlungsdimension bedarf einer richtigen und passenden Verwendung mathematischer Gesetzmäßigkeiten, wobei die Kenntnis der mathematischen Fachsprache nicht außer Acht zu lassen ist. Dabei ist Argumentieren mit Begründen nicht gleich zu setzen. Beim Begründen wird eine Argumentationskette hergestellt, welche zu einer bestimmten mathematischen Schlussfolgerung führt.

Das Kommunizieren beinhaltet das Austauschen von kontextbezogenen Informationen in mathematischen Schreibweisen und Formen der Ergebnispräsentation, um die Verständigung zwischen diversen AdressatInnen zu ermöglichen. Es ist allerdings festzuhalten, dass Kommunizieren in schriftlicher Form nicht zu testen ist.

Beispielgebend sind im Rahmen der Handlungsdimension Argumentieren und Dokumentieren als charakteristische Tätigkeiten folgende zu nennen:

- ✓ Mathematische Vermutung ausarbeiten und begründen;
- ✓ Die Entscheidung, mathematische Modelle und Rechenverfahren einzusetzen, belegen und reflektieren;
- ✓ Fehler erkennen und konstruktiv mit ihnen umgehen;
- ✓ Verschiedene Techniken und Mittel zur Präsentation der mathematischen Sachverhalte nutzen.

Die schlüssige Argumentation, warum die gegebene Zielfunktion ihr Optimum in diesem konkreten Eckpunkt annimmt, ist bei der grafischen Ermittlung der Lösung eines linearen Programms äußert wichtig. Wenn im Rahmen des Unterrichts zwischen einer grafischen Lösung und dem Simplexverfahren für ein bestimmtes Problem zu wählen ist, ist die von der lernenden Person getroffene Entscheidung zu begründen. Schlussendlich ist eine Entscheidung über eine adäquate Präsentationstechnik zu treffen, den erarbeiteten Lösungsweg bzw. die ermittelte Lösung zu wählen, sodass die Zuhörerinnen und Zuhörer die mathematischen Argumente folgen können.
Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Behandlung der linearen Optimierung im Unterricht Angewandte Mathematik ermöglicht, alle vier Handlungsdimensionen ausreichend zu schulen. Das Thema gewährleistet meiner Auffassung nach nicht nur eine Einsicht in die Anwendungsgebiete der wirtschaftlichen Prozesse, sondern erlaubt ein differenziertes Betrachten bezüglich der Umsetzbarkeit und Legitimität der aufgestellten Modelle auf die Realität zu entwickeln.
Ein weiterer Blickwinkel, der ein wesentlicher Bestandteil im Kompetenzmodell darstellt, ist die Rolle des Technologieeinsatzes. Dies soll im nächsten Abschnitt der vorliegenden Arbeit genauer beleuchtet werden.

5.2. Computerunterstützter Mathematikunterricht

Das Durchführen von nummerischen oder algebraischen Operationen unter Anwendung von Technologie ist wie im Abschnitt 5.1.3 erläutert, eine Handlungsdimension des Kompetenzmodells, die im Mathematikunterricht zu schulen ist. Der Diskurs hinsichtlich des Computereinsatzes im Mathematikunterricht veranschaulicht, dass

diese Technologie[29] mehrheitlich als Werkzeug zur Minimierung des Rechenaufwandes, zur Ergebnisüberprüfung von analogen Rechenschritten oder als Kommunikationsmedium zur Veranschaulichung mathematischer Sachverhalte Anwendung finden (vgl. Schneider (2002); S. 38). Die moderne Unterrichtstechnologie sollte sich nicht nur auf die Veränderungen beim Operieren beschränken, sondern den mathematischen Lernprozess und den Wissenserwerb unterstützen und verändern. Diese Forderung am Mathematikunterricht wird durch den Umbruch, welchen das Informationszeitalter auf allen Gesellschaftsebenen hervorrief, stark beschleunigt. Für den Einsatz von Technologien sprechen Aspekte wie folgt (vgl. hierfür und im Folgenden Fürst (2012), S. 101-103):

- ✓ Der Wissenserwerb wird nachhaltig durch das frühere Erlernen von Computertechniken gefördert;
- ✓ Durch die ansteigende Förderung technischer Fähigkeiten und Fertigkeiten bei den lernenden Personen kann dem Mangel an Fachkräften in den technischen Berufen entgegen gewirkt werden;
- ✓ Die teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung sieht an BHS Mindestanforderung an die Technologie[30] vor;
- ✓ Für die künftige Berufsauswahl vom Mädchen ist der selbstverständliche Umgang mit neuen Informations- und Kommunikationstechnologien (IKT) essenziell, da die Schülerinnen tendenziell weniger an technischen Berufen als die Schüler interessiert sind und diese als beruflicher Werdegang in Erwägung ziehen (siehe für weitere Details OECD (2015); S. 4-6);
- ✓ Der IKT-Grad in den einzelnen Haushalten steigt kontinuierlich und fordert von den Jugendlichen ein sicheres Umgehen mit diversen Technologien.

Unter welchen Voraussetzungen und zu welchem Zeitpunkt es im Mathematikunterricht didaktisch sinnvoll ist, das nummerische oder algebraische Operieren der Technologie zu überlassen, sollte im Einzelfall entschieden und individuell auf die lernende Person, Unterrichtsinhalte und Sozialformen abgestimmt werden. Allerdings sollte der Technologieeinsatz nicht temporär erfolgen, sondern ein kontinuierlicher Begleiter des Mathematikunterrichts sein. Die Gründe, die für den Technologieeinsatz sprechen sind:

[29] Laut Fürst (2012, S. 101) meint das Wort Technologie bezüglich des Mathematikunterrichts den Einsatz von elektronischen Werkezeugen, Lernmedien und Wissensbasen.
[30] Die Mindestanforderungen an die Technologie werden an einer späteren Stelle in diesem Abschnitt thematisiert.

- ✓ Begünstigen des entdeckenden Lernens und Beitragen zum nachhaltigen Wissenserwerb;
- ✓ Unterstützen beim Finden eigener Lösungsstrategien, da aufgestellte Vermutungen und durchzuführende Rechenschritte schnell überprüft werden können;
- ✓ Fördern der Kompetenzentwicklung in den Handlungsdimensionen „Modellieren und Interpretieren“ sowie „Argumentieren und Kommunizieren“;
- ✓ Unterstützen des Lese- und Textverständnisses;
- ✓ Begünstigen der Interpretation von Ergebnissen im Sachzusammenhang.

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft gibt in ihrem Mathe-Brief Nr. 26 (Juni 2012, S. 1) für den Einsatz von elektronischen Werkzeugen vier verschiedene Bereiche an:

- ✓ ***Modellieren:*** Durch die Technologie ist eine Vielzahl mathematischer Modelle, welche für den Unterricht relevant sind, leicht verfügbar. Die Schülerinnen und Schüler sind im Stande, rechenaufwändige Modelle effizient zu nutzen. Darüber hinaus stehen parallel verschiedene Darstellungsformen zur Verfügung, wodurch die Qualität der Modellbildung, Lösung und Interpretation der Ergebnisse verbessert wird.
- ✓ ***Visualisieren:*** Die lernenden Personen weisen Schwierigkeiten auf, sich abstrakte Objekte vorzustellen. Somit bietet die grafische Repräsentation mathematischer Sachverhalte die Möglichkeit, den Abstraktionsgrad zu reduzieren und die Kompetenzentwicklung im Allgemeinen zu beschleunigen.
- ✓ ***Experimentieren:*** Charakteristisch für diesen Bereich sind drei Phasen – experimentelle, *„exaktifizierende“* und Phase der Anwendung. Die experimentelle Phase ermöglicht das Finden von Vermutungen, welche in der exaktifizierenden Phase auf ein gesichertes mathematisches Fundament gestellt werden. Schlussendlich werden die gesicherten Erkenntnisse genutzt, das aufgestellte Problem zu lösen.
- ✓ ***Rechnen:*** Die „händische“ Durchführung von Rechenoperationen tritt bei einem verstärkten Technologieeinsatz in den Hintergrund und es wird freier Raum für die Schulung anderer mathematischer Kompetenzen wie Modellieren, Interpretieren, Argumentieren und Kommunizieren geschaffen. Selbstverständlich kann auf das „händische“ Operieren nicht komplett verzichtet werden, wenn es

die Zielsetzung bei der Aufgabenstellung ist, eine mathematische Lösung zu ermitteln. Allerdings bedeutet die Auslagerung des Operativen auf die Technologie keine Verarmung des Mathematikunterrichts. Dadurch werden neue Kompetenzen in diesem Bereich bedeutsam, wie beispielsweise das Erkennen von Strukturen in durchgeführten Rechnungen.

Abschließend soll zu den Mindestanforderungen an die Technologien Stellung genommen werden. Folgende Funktionalitäten werden von der zuständigen Instanz vorausgesetzt:[31]

- ✓ *„Darstellung von Funktionsgraphen“;*
- ✓ *„Möglichkeiten des numerischen Lösens von Gleichungen und Gleichungssystemen“;*
- ✓ *„Numerisches Integrieren“;*
- ✓ *„Grundlegende Funktionen der Matrizenrechnung“;*
- ✓ *„Funktionen für statistische Kenngrößen, lineare Regression und Korrelation, Binomial- und Normalverteilung“.*

Wenn die oben genannten Mindestanforderungen in Betracht gezogen werden, sind für den computerunterstützen Mathematikunterricht vor allem folgende drei Programme von zentraler Bedeutung:

- ✓ Tabellenkalkulationsprogramme (TKP)
- ✓ Computeralgebrasysteme (CAS)
- ✓ Dynamische Geometriesysteme (DGS)

Die Charakteristika einerseits und die Anwendungsmöglichkeiten der schon erwähnten Programme im Bereich der linearen Optimierung anderseits werden im Folgenden ausführlicher erläutert. Dabei wird anhand von Aufgabenstellungen schrittweise demonstriert, wie diese Programme bei der Bewältigung der linearen Optimierungsproblematik im Mathematikunterricht einzusetzen sind.

---

[31] Online: https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

5.2.1. Tabellenkalkulationsprogramme

Das erste TKP *VisiCalc* wurde im Jahr 1979 für verschiedene Personal Computer entwickelt und fand bald einen Einsatz im Mathematikunterricht. Vor allem diskrete dynamische Prozesse wie Wachstumsvorgänge, Probleme der Zinseszinsrechnung und stochastische Prozesse eignen sich mit einer Tabellenkalkulation (TK) modelliert zu werden. Die Tabellenkalkulationsprogramme, welche heutzutage eine breite Verwendung finden, sind solche wie *Microsoft EXCEL* und *OpenOffice Calc*. Sie sind bedingt durch ihre Wechselbeziehung zwischen Tabellen- und grafischen Darstellungen ein exzellentes Rechen- und Visualisierungswerkzeug (vgl. Weigand (2013); S. IX). Im Folgenden dieses Abschnittes wird der Schwerpunkt auf das Programm *Microsoft EXCEL* und ihr *Solver-Tool* liegen.

Microsoft EXCEL – Struktur, Eigenschaften und Anwendung

Eine TK ist eine Software, welche eine interaktive Eingabe und Bearbeitung von Daten in nummerischer bzw. alphanumerischer Form gestattet. Ein Datenblatt in *EXCEL* setzt sich aus einer Tabelle zusammen, deren Zeilen mit Zahlen und deren Spalten mit Buchstaben gekennzeichnet sind. Dadurch entsteht eine Matrix von Zellen, wobei die Position der jeweiligen Zelle durch die Zahlen-Buchstaben-Zuordnung eindeutig identifizierbar ist. Beispielsweise bedeutet die Bezeichnung *B2* die Zelle in der zweiten Zeile und Spalte (siehe Abb. 5.2).

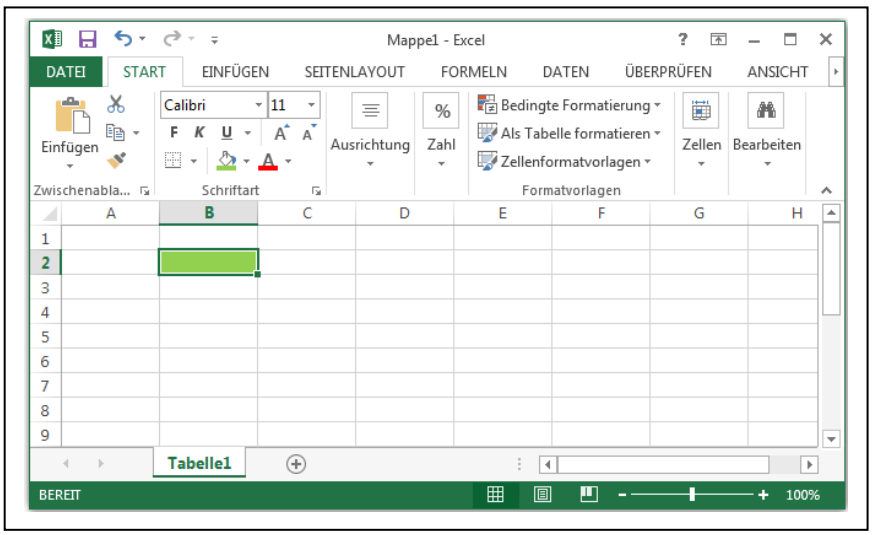


Abb. 5.2: Arbeitsblatt in Microsoft EXCEL

Jede Zelle des Datenblattes kann Text, Zahlen oder Formeln wie beispielsweise Berechnungsvorschriften, Programmcodes beinhalten. Allerdings können die Argumente der Formeln Werte aus anderen Zellen durch entsprechende Adressierung verwenden. Für die im TKP vorhandenen Formeln sind zahlreiche Bibliotheksfunktionen verfügbar, die eine zahlreiche Auswahl an mathematischen, finanzmathematischen, statistischen und logischen Funktionen bieten. Des Weiteren können die eingegebenen Zahlen auf beliebig viele Stellen formatiert werden, was bei einem diskreten Problem der linearen Optimierung äußerst praktisch ist.

Die wertvollste Eigenschaft vom TKP *EXCEL* ist die Kommunikation der einzelnen Zellen eines Arbeitsblattes bzw. mehrerer Arbeitsblätter miteinander. Das bedeutet, dass sich das Resultat in der Ergebniszelle automatisch mitverändert, wenn der Inhalt der verwendeten Zelle geändert wird. Eine weitere praktische Eigenschaft ist die Möglichkeit, eine angegebene Formel beispielsweise durch Hinunterziehen in die unten liegenden Zellen zu kopieren. Gerade dieses Kommunizieren der einzelnen Zellen miteinander ist für den iterativen Charakter des Simplexerfahrens, welches zur Anwendung bei der linearen Optimierung kommt, besonders essenziell. Außerdem verfügen die TKP über grafische Darstellungsmöglichkeiten, welche sich in wenigen Schritten ausführen lassen. Schlussendlich ist zu vermerken, dass die Struktur der *EXCEL*-Berechnungen jederzeit ersichtlich ist und damit die Gefahr minimiert werden kann, dass das Programm zu einer „Black-Box“ wird. Die Struktur des Programms ist sehr klar, die Kenntnisse der Syntax sind überschaubar. Rechenschritte und Abhängigkeiten können mittels Zuordnungspfeile nachvollzogen werden, was wiederum das rasche Entdecken und Korrigieren von Fehlern zulässt (vgl. Ableitinger (2008); S. 106-112).

Bedingt durch ihr Wesen und ihre Transparenz ermöglichen Tabellenkalkulationen eine natürliche Differenzierung ihrer Anwendungsbereiche. Folgende fünf Stufen ausführbarer schulischer Aktivitäten im Mathematikunterricht sind nennenswert (vgl. Wittmann (2001); S. 49):

(1) ***Verwenden vorgegebener Tabellen und Diagramme:*** Die lehrende Person verwendet im Unterricht angefertigte Tabellen und grafische Darstellungen sowohl für die Erarbeitung des Lehrstoffes als auch für Übungszwecke.

(2) ***Verstehen der Funktionsweise vorgegebener Tabellen und Diagramme:*** Die Lehrkraft nutzt vorgegebenen Tabellen und Diagramme, um die Funktionsweise des Programms den Schülerinnen und Schülern plausibel zu erklären.

(3) ***Veränderung und Erstellung von Tabellen und Diagrammen:*** Die Lernenden verändern, die von der unterrichtenden Person vorgegebenen Tabellen und grafische Darstellung oder sie erstellen analoge.

(4) ***Erstellen von eigenen Tabellen und Diagrammen aufbereiteter Probleme:*** Die Schülerinnen und Schüler fertigen eigene Tabellen und Diagramme als Lösung aufbereiteter Problemstellungen an.

(5) ***Erstellen von eigenen Tabellen und Diagrammen selbständigen Problemlösens:*** Die lernenden Personen erzeugen eigene Tabellen und Diagramme als selbständig erarbeitete Lösung vorgegebener Problemstellungen.

Zusammenfassend ist zu vermerken, dass innerhalb dieser fünf Stufen potenzieller Aktivitäten verschiedene Kompetenzen aufbauend geschult werden können. Außerdem können sie zum differenzierten Fördern und Fordern innerhalb einer Klasse eingesetzt werden. Dadurch erhält jede Person die Chance, ihre eigene Stufe herauszufinden und entsprechend ihrer Potenziale auf unterschiedlichen Niveaus zu agieren.
Abschließend wird auf die Typen von Aufgaben, welche mit der TK zu bewältigen sind, eingegangen, bevor das *Solver-Tool* in Microsoft *EXCEL* vorgestellt wird. In der Literatur wird zwischen folgenden Modelltypen unterschieden (vgl. Henning und Keune (2001); S. 28-37):

- ✓ Es werden Modelle bearbeitet und dargestellt, bei denen ein großes Datenvolumen involviert ist.
- ✓ Es werden Modelle bearbeitet und dargestellt, bei denen ein systematisches Probieren bei der Ermittlung der Lösung hilfreich ist.
- ✓ Es werden Modelle bearbeitet und dargestellt, welche auf Iterationen aufgebaut sind.
- ✓ Es werden Modelle bearbeitet und dargestellt, bei denen Daten auszuwerten sind, die funktionalen Zusammenhängen genügen.

In den Problemstellungen der linearen Optimierung können alle vier der oben aufgelisteten Voraussetzungen zum Tragen kommen. Das zu bearbeitende Modell könnte viele unbekannte Größen in der Zielfunktion und in den Restriktionsbedingungen enthalten. Das einfachste Modell, welches im Mathematikunterricht behandelt wird, besteht aus zwei unbekannten Variablen. Das systematische Probieren ist für die Lösungsfindung im Bereich der diskreten linearen

Optimierung von besonderer Relevanz. Von den Schülerinnen und Schülern wird die Kompetenz abverlangt, eine vollständige Verzweigung des Problems zu erarbeiten und systematisch die Lösungen durchzugehen, bis die optimale gefunden wird. Der interaktive Charakter kommt besonders bei der Generierung der einzelnen Simplextableaus zum Vorschein. Ausgehend von einem Starttableau wird das Tableau ermittelt, welches die Zielfunktion optimiert. Die einzelnen Simplextableaus sind iterativ miteinander verbunden. Der funktionale Zusammenhang ist durch die aufgestellte Zielfunktion eindeutig gegeben, da ihr Maximums bzw. Minimum unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen zu ermitteln ist.

Solver-Tool in Microsoft EXCEL

Das TKP *Microsoft EXCEL* verfügt über ein leistungsstarkes Werkzeug – das *Solver-Tool*, mit dessen Hilfe die lineare Optimierung mittels Simplexverfahrens problemlos durchzuführen ist. Das *Solver-Tool* ist als Add-In integriert und findet sich auf dem Register „Datei“ und dann auf der Schaltfläche „Optionen“. Im Dialogfenster „Excel-Optionen“ ist die Kategorie „Add-Ins“ zu wählen und dann auf die Schaltfläche „Gehe zu“ zu wechseln. Im Dialogfenster „Add-Ins“ wird die Option „Solver“ aktiviert (siehe Abb. 5.3). Danach wird das *Solver-Tool* in der Menüleiste des Programms unter „DATEN“ angezeigt.

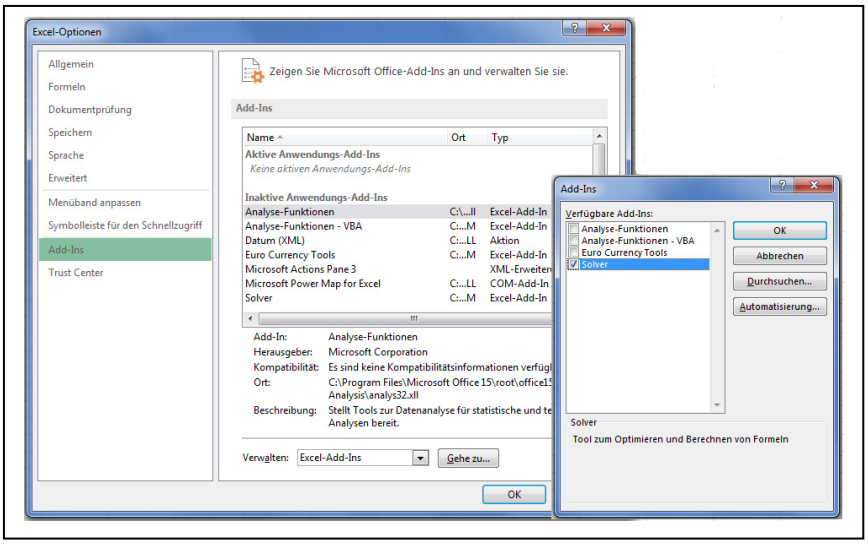


Abb. 5.3: Aktivierung des Solver-Tools in Microsoft EXCEL

Die Anwendung des *Solver-Tools* wird anhand einer Rechenaufgabe demonstriert, wobei es in diesem Fall keine Rolle spielt, ob die Zielfunktion maximiert bzw. minimiert wird.

Beispiel 5.2: Minimierungsproblem (nach Körth et al. (1975); S. 372)

Die Aufgabe einer Werkstätte ist es aus Stangen der Länge 16 m mindestens 1000 Stück der Länge 9 m, mindestens 2000 Stück der Länge 6 m und mindestens 3200 Stück der Länge 4 m zu erzeugen. Es soll ein Zuschnittplan erarbeitet werden, bei welcher die Anzahl der notwendigen Stangen minimiert wird.

Um das Zuschnittproblem mit Hilfe der linearen Optimierung formulieren zu können, ist es zunächst zu überlegen, welche die sinnvollen Zuschnittkombinationen sind, die in der Tabelle 5.1 abgebildet sind:

Kombinationen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Anzahl der 9 m Stücke	1	1	0	0	0
Anzahl der 6 m Stücke	1	0	2	1	0
Anzahl der 4 m Stücke	0	1	1	2	4

Tab. 5.1: Sinnvolle Zuschnittkombinationen

Für die mathematische Formalisierung des Zuschnittproblems in Standardform erhalten wir, nachdem die Anzahl der Stangen, die für die Kombination i zerschnitten werden, mit x_i bezeichnet werden, wie folgt:

Minimiere $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ (5.1)

unter den Restriktionen

$$x_1 + x_2 \geq 1000 \tag{5.2}$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 2000 \tag{5.3}$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 3200 \tag{5.4}$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{5.5}$$

Danach werden die Koeffizienten der Zielfunktion und der Nebenbedingungen in einer *EXCEL*-Tabelle übertragen, wobei die Beschriftung des Tableaus manuell durchzuführen ist (siehe Abb. 5.4, S. 119).

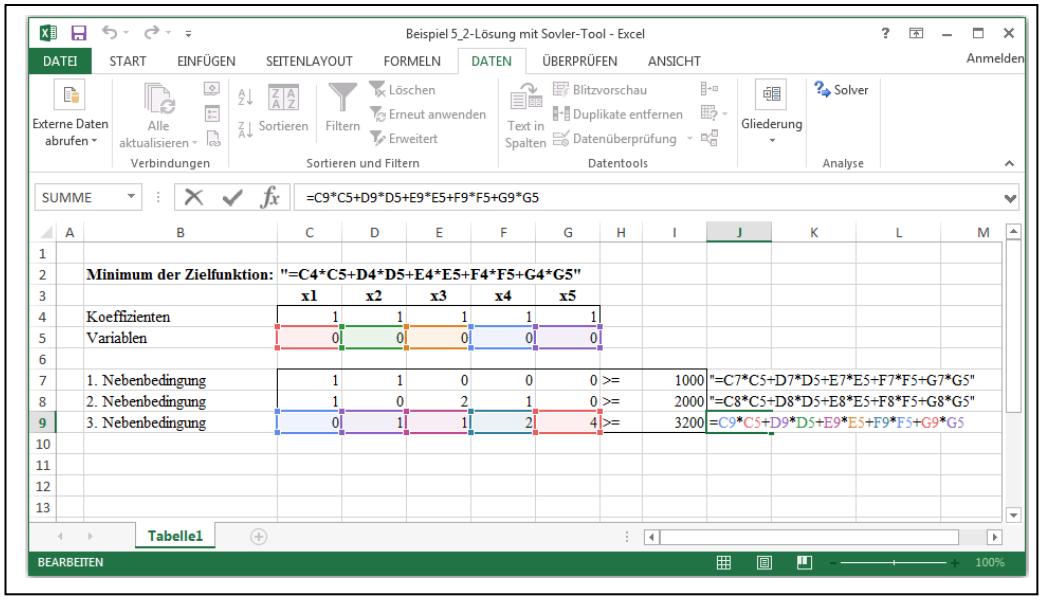


Abb. 5.4: Eingabe des Beispiels 5.2 in Microsoft EXCEL

Wie aus der Abb. 5.4 ersichtlich ist, sind die Koeffizienten der Zielfunktion in der Zeile 4 eingegeben. Die Zeile „Variablen“ - Zellen C5 bis G5 - ist für die optimale Lösung vorgesehen. Die zu verändernden Variablen in den oben erwähnten Zellen werden mit der Zelle C2 verknüpft, in der die Formel für die Zielfunktion eingetragen wird. Darüber hinaus sind sie mit Koeffizienten der Nebenbedingungen in Verbindungen zu bringen.

Danach wird der *Solver* mit den Angaben für die Zielfunktion („Ziel festlegen“), den Zielwert („Max, Min, Wert“), die veränderbaren Variablen („Durch Ändern von Variablenzellen“) und Nebenbedingungen, welche in Abb. 5.5 veranschaulicht sind, befüllt.

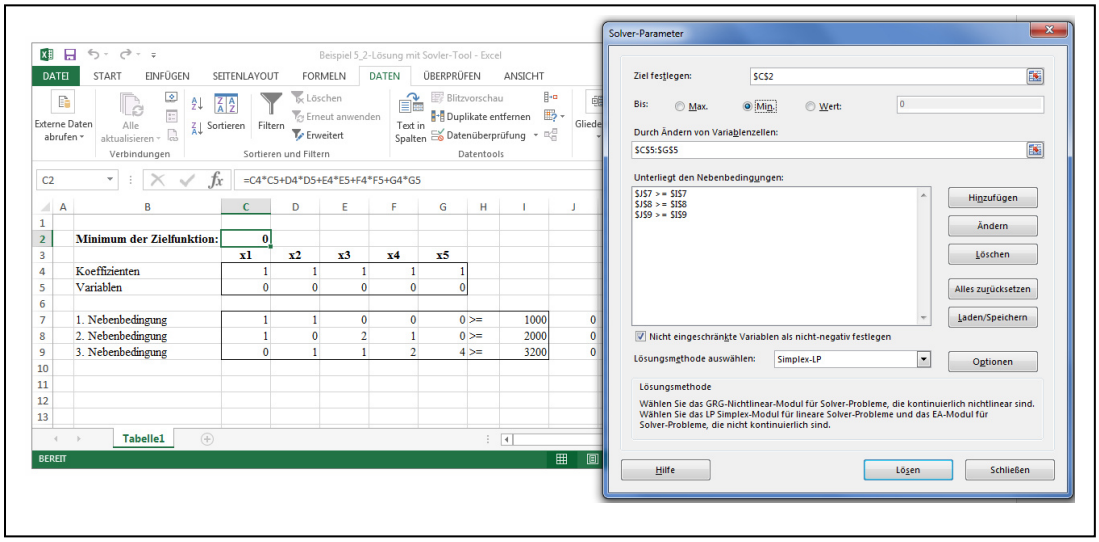
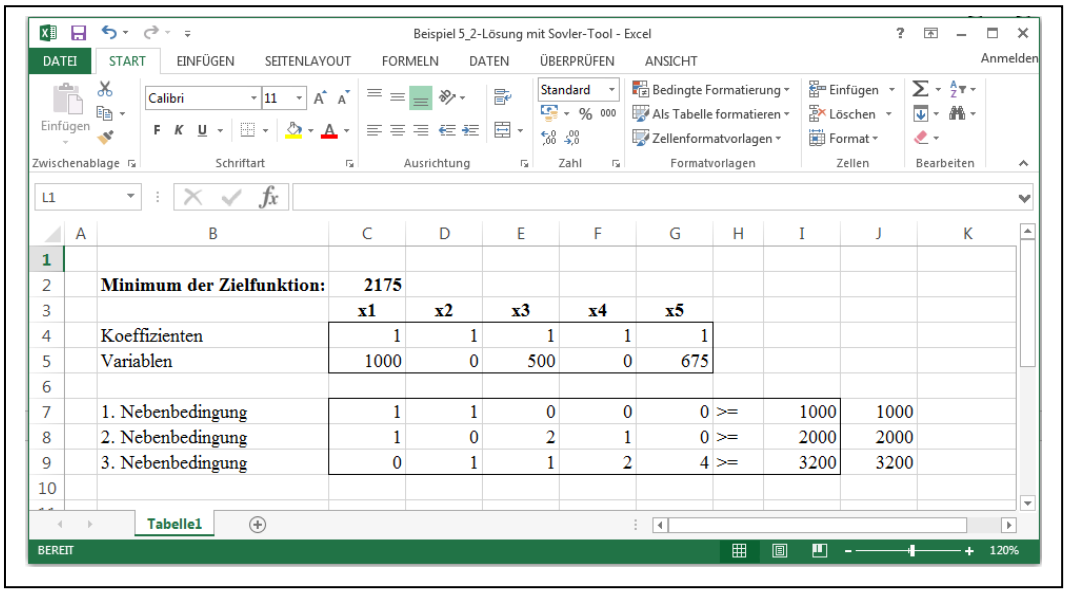


Abb. 5.5: Eingabe des Beispiels 5.2 mittels Solver-Tools in Microsoft EXCEL

Um die entsprechende Lösung des linearen Optimierungsproblems zu generieren, ist die Lösungsmethode „Simplex-LP“ auszuwählen. Außerdem ist auf die Nichtnegativitätsbedingung im *Solver* zu achten, dass diese aktiviert ist. Damit erzeugen wir die optimale Lösung des Beispiels 5.2 (siehe Abb. 5.6).



	Minimum der Zielfunktion:	**2175**							
		x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**			
	Koeffizienten	1	1	1	1	1			
	Variablen	1000	0	500	0	675			
	1. Nebenbedingung	1	1	0	0	0	>=	1000	1000
	2. Nebenbedingung	1	0	2	1	0	>=	2000	2000
	3. Nebenbedingung	0	1	1	2	4	>=	3200	3200

Abb. 5.6: Lösung des Beispiels 5.2 mittels Solver-Tools in Microsoft EXCEL

Wie aus der generierten Lösung hervorgeht, beläuft sich die minimale Anzahl an benötigten Stangen auf 2175 Stück. Dabei erweisen sich als sinnvolle Zuschnittkombinationen x_1, x_3 und x_5. Die Kombinationen x_2 und x_4 kommen in der optimalen Lösung dieses Problems nicht vor.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass *Microsoft EXCEL* zahlreiche Möglichkeiten für einen sinnvollen Einsatz im Mathematikunterricht bietet, wenn es sich um das Thema „Lineare Optimierung“ handelt. Ein großer Vorteil dieses Programms ist, dass es in jeder Schule der lehrenden Person zur Verfügung steht. Außerdem lassen sich Veränderungen der Restriktionen und der Zielfunktion mit dem *Solver-Tool* schnell durchführen. Nichtsdestotrotz bleiben die im Rahmen des Simplexalgorithmus vorzunehmenden Rechenschritte eine für die Schülerinnen und Schüler geheime Welt. Folglich sollte das *Solver-Tool*, meiner Ansicht nach, erst dann zum Einsatz im Mathematikunterricht kommen, wenn sich die lernenden Personen einerseits mit den theoretischen Grundlagen sehr intensiv auseinander gesetzt haben und anderseits einige Aufgabenstellungen rechnerisch bewältigt haben, sodass die Erstellung der einzelnen Simplextableaus nicht erforderlich ist.

5.2.2. Computeralgebrasysteme

Bei CAS geht es vereinfacht formuliert um Programme, welche den Benutzerinnen und Benutzern die rechnerischen Schritte einer mathematischen Problemstellung und damit die algorithmischen Prozesse abnehmen. Bevor ich den CAS-Einsatz im Mathematikunterricht thematisiere, möchte ich einen kurzen historischen Einblick in die Entwicklung der CAS bieten.

Die ersten Taschenrechner erblickten die Welt in den 60er Jahren und kosteten mehr als das Monatsgehalt eines Diplomingenieurs. Sie beherrschten nur die vier Grundrechenarten mit einer Genauigkeit von acht Stellen nach Dezimalkomma. Für schulische Zwecke wurde erst im Jahr 1984 auf dem *International Congress of Mathematical Education* in Adelaide, Australien, das CAS *muMATH*, welches von Albert D. Rich und David Stoutemyer entwickelt wurde, der breiteren Öffentlichkeit präsentiert. Das *MUMATH* war das erste kleinere CAS, das auf den damaligen PC zum Einsatz kam und wurde später als *DERIVE* weiterentwickelt. Die zweite Generation begann in den 80er Jahren und zwar mit den Versionen von *MAPLE* und *MATHEMATICA*. Die dritte Generation umfasst beispielsweise solche Programme wie *AXIOM* und *MUPAD*. Die Entwicklung der CAS geht weiter und die Vielfalt der am Markt angebotenen Produkte kennt kaum Grenzen. Die darin implementierten Algorithmen stützen sich auf den Ergebnissen aller mathematischen Gebiete (vgl. Henn (2004); S. 3).

Für schulische Zwecke ist die Tatsache von essenzieller Relevanz, dass das CAS beispielsweise in den *Texas-Intruments*-Taschenrechnern, in denen *DERIVE* implementiert ist, erhältlich ist. Somit lassen sich mittels des „*Solve*“-Befehls lineare Gleichungssysteme mühelos und frei von Rechenfehlern lösen. Diese Auslagerung der Rechenoperationen führt dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht mehr auf den Sachzusammenhang, den Modellierungsprozess und die Interpretation der gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich der linearen Optimierung konzentrieren können. An dieser Stelle ist auch zu erwähnen, dass die Auslagerung der erforderlichen Rechenschritte einige Gefahren mit sich bringt. Erstens wird das operative Arbeiten im Mathematikunterricht auf ein Minimum reduziert, da diese Aufgabe von dem CAS übernommen wird. Zweitens besteht die Gefahr, dass die erforderlichen Befehlsschritte von der lernenden Person maschinell eingetippt werden, ohne Verständnis dafür zu entwickeln, wie das CAS zum gewünschten Rechenergebnis

kommt. Dadurch verwandelt sich der Computer in eine *Black-Box*, welche aufgefordert ist, richtige Ergebnisse egal durch welche Mittel zu liefern.
In diesem Kontext stellt sich die Frage nach der Legitimität solch einer rezepthaften Anwendung von CAS. Meiner Ansicht nach ist die Auslagerung des operativen Arbeitens legitim, da dadurch andere wie schon oben genannte Aspekte in den Vordergrund rücken können. Dabei ist äußerst essenziell, die wichtigsten zur Anwendung kommenden Verfahren verstanden und diese ohne CAS durchgeführt zu haben, bevor sich die lernende Person des Technologieeinsatzes bedient. Schlussendlich müssen die Schülerinnen und Schüler vor der CAS-Verwendung die Struktur der Aufgabenstellung erkannt haben, die erforderlichen Daten in das CAS korrekt eintippen und die daraus generierten Ergebnisse richtig interpretieren können. Dadurch geraten verstärkt das mathematische Verständnis und die Strukturerkennung ins Zentrum des Unterrichts (vgl. Weigand und Weth (2002); S. 74).
Abschließend ist festzuhalten, dass CAS-Programme wie *MATHEMATICA*, *MAXIMA* und *MuPAD* durch ihre spezielle Syntax eine zeitintensivere Einarbeitungsphase im Mathematikunterricht zu Beginn erfordern, welche nur dann lohnenswert ist, wenn sie regelmäßig für Unterrichtszwecke benötigt werden. Die Befehlserlernung nur für den Bereich der linearen Optimierung zahlt sich, meiner Ansicht nach, nicht aus. *DIRIVE* hingegen bieten nur eine grafische Lösung des linearen Optimierungsproblems, welche beispielsweise auch mit dem Programm *GeoGebra* erarbeitet werden kann.

5.2.3. Dynamische Geometriesysteme

Grafische Darstellungen mithilfe von CAS-Programmen und der „*Plot*“-Funktion ermöglichen die rasche Bewältigung eines linearen Optimierungsproblems. Nichtsdestotrotz eignen sich dynamische Geometriesysteme (DGS), wie zum Beispiel *GeoGebra*, für die Erarbeitung der grafischen Lösung einer Optimierungsaufgabe.
Die dynamischen Geometriesysteme erblickten Ende der 80er Jahre als *„rein didaktische Software“* (Hischer (2002); S. 278) die Welt und charakterisieren sich durch ihre intuitive Handhabung. Ähnlich wie mit Zirkel und Lineal lassen sich mit DGS geometrische Konstruktionen nicht nur statisch darstellen, sondern auch animieren. Dadurch wird den lernenden Personen ermöglicht, die Zusammenhänge nachzuvollziehen und ihren geometrischen Horizont zu erweitern. Um die Dynamik der

Zeichnung gewährleisten zu können, stellen Hölzl (1997, S. 34) und Elschenbroich (2001, S. 13) drei Forderungen an die DGS:

(1) ***Zugmodus:*** Die euklidisch geprägte Geometrie der Schule und ihre Werkzeuge sind dynamisch zu modellieren, d.h. die einzelnen Elemente lassen sich mithilfe der Maus verschieben, wobei auf die logische Struktur zu achten ist.

(2) ***Ortslinie:*** Die Bahnbewegung der Punkte, welche von anderen Punkten abhängen, ist zu visualisieren.

(3) ***Makro:*** Eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen ist zu einem neuen Befehl (Makro) zusammenzufassen.

Das grundlegende Charakteristikum aller DGS ist laut Hischer (2002) der *Zugmodus*, da er *„die Visualisierung von sowohl metrischen als auch nicht metrischen Invarianten der Geometrie“* (Hischer (2002); S. 279) gestattet. Dadurch wird das heuristische und handlungsorientierte Arbeiten im Mathematikunterricht gefördert. Den Schülerinnen und Schülern wird durch ein experimentelles Verändern einzelner Komponente ermöglicht, sich ein Bild der funktionalen Zusammenhänge auszumalen, ohne die Konstruktion als Ganzes aus den Augen zu verlieren. Außerdem können durch die grafische Betrachtung des mathematischen Problems neue Fragen auftauchen. Das der Ereignisraum um die kontinuierlich fortschreitende Zeit als Dimension erweitert wird, rückt für die lernende Person in den Vordergrund die Frage „Was passiert, wenn ich …?“. Diese Dynamisierung der Problemstellung fordert den Denkprozess im Unterricht, da die Schülerinnen und Schüler stets neue Vermutungen aufstellen können, welche ohne nennenswerten Zeitaufwand zu überprüfen sind. Beispielsweise durch die parallele Verschiebung der Zielfunktion können sie verfolgen, wie sich ihre Werte verändern.

Darüber hinaus bieten die DGS eine Entlastung der lernenden Personen. Durch die Eingabe der Nebenbedingungen – Gleichungen oder Ungleichungen – und der Zielfunktion werden diese rasch, exakt und in kurzer Zeit grafisch dargestellt. Die grafische Darstellung der Restriktionen in einem passenden kartesischen Koordinatensystem ist für die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler eine echte Herausforderung. Allerdings ist so eine Handhabung laut Weigand und Weht (2002) nur dann als sinnvoll zu betrachten, *„wenn sie zielgerichtet sind, wenn sie als Antworten und Fragen verstanden sind.“* (ebd.; S. 31). Da die zu unterrichtenden Personen nicht mehr auf das Konstruieren ihren Blick zu fokussieren haben, geraten andere Aspekte des linearen Optimierungsproblems, wie beispielsweise Lösungsbereich, Eckpunkte und Werte der Zielfunktion, in den Vordergrund. Dabei können durch Vergrößern und

Verschieben des Bildes die wesentlichen Abschnitte der grafischen Lösung genauer betrachtet und analysiert werden.
Zusätzlich sollte die Frage nach dem „Warum?“ ein unverzichtbarer Bestandteil des Unterrichts sein, wenn die Schülerinnen und Schüler die grafische Erkenntnis gewonnen haben. Dabei ist die numerische und symbolische Ebene der Problemstellungen in vielen Fällen nicht zu vernachlässigen. Ansonsten besteht die Gefahr, dass das Nutzen von DGS in ein unkompliziertes Spiel verwandelt wird und dass die im Hintergrund laufende Mathematik vollkommen außer Acht gelassen wird (vgl. Ableidinger (2003); S. 38).
Im Folgenden wird der Schwerpunkt auf das Programm *GeoGebra* gelegt, da sein Einsatz aus der Mathematiklandschaft der BHS nicht auszudenken ist.

GeoGebra – Historie, Struktur und Anwendung

GeoGebra ist eine dynamische Open Source Mathematiksoftware für lehrende und lernende Personen aller Altersstufen.[32] Das Programm verbindet Geometrie, Algebra, Analysis, Statistik, Tabellen und Zeichnungen in einem handlungsfreundlichen Softwarepaket. Die erste Version der Software entwickelte Markus Hohenwarter innerhalb seiner Diplomarbeit mit dem Titel *„Didaktik der Mathematik und Informatik“* an der Universität Salzburg von 2001 bis 2002 und erzielte im Jahr 2002 den European Academic Software Award. Hohenwarter setzte von 2003 bis 2006 an derselben Universität als Dissertationsprojekt *„Didaktik der Mathematik“* fort, welches von der Akademie der Wissenschaften gefördert wurde. In diesem Zeitraum gewann der Entwickler fünf internationale Preise. Im Dezember 2007 wurde auch das Internationale *GeoGebra* Institut (IGI) gegründet und im Juli 2009 wurde zum ersten Mal eine internationale *GeoGebra*-Konferenz in Linz organisiert.[33]
Die Fähigkeiten der Unterrichtssoftware werden stets weiterentwickelt. Beispielswiese unterscheidet sich *GeoGebra* von den anderen am Markt existierenden interaktiven Geometrieprogrammen durch das Anzeigen einer algebraischen Definition aller mathematischen Objekte. Ab der Version 3.2 verfügt das Programm über eine Tabellenkalkulation, die zusätzlich die Interaktion mit den Zeichenblatt anbietet. Dadurch können Zahlen aus einer geometrischen Darstellung ausgesucht und Objekte aus der Tabelle abgezweigt werden. Abschließend ist hinsichtlich der Historie dieses

[32] Vgl. Online: https://www.geogebra.org/about?ggbLang=de (Zugriff: 28.03.2018).
[33] Vgl. hier und im Folgenden Online: https://de.wikipedia.org/wiki/GeoGebra (Zugriff: 28.03.2018).

Programms zu erwähnen, dass die Software ab der Version 5.0 die dreidimensionale Geometrie beherrscht.

GeoGebra ist ein Werkzeug, welches computerbasiert ist und ein *„aktives, handlungsorientiertes, experimentelles und entdeckendes Lernen“* durch die Verbindung symbolischer und ikonischer Repräsentationstechniken ermöglicht und fördert (vgl. Hohenwarter (2006); S. 16). Diese beiden Darstellungsformen werden von der Software im Algebra-, CAS- und Grafikfenster parallel angeboten (siehe Abb. 5.7).

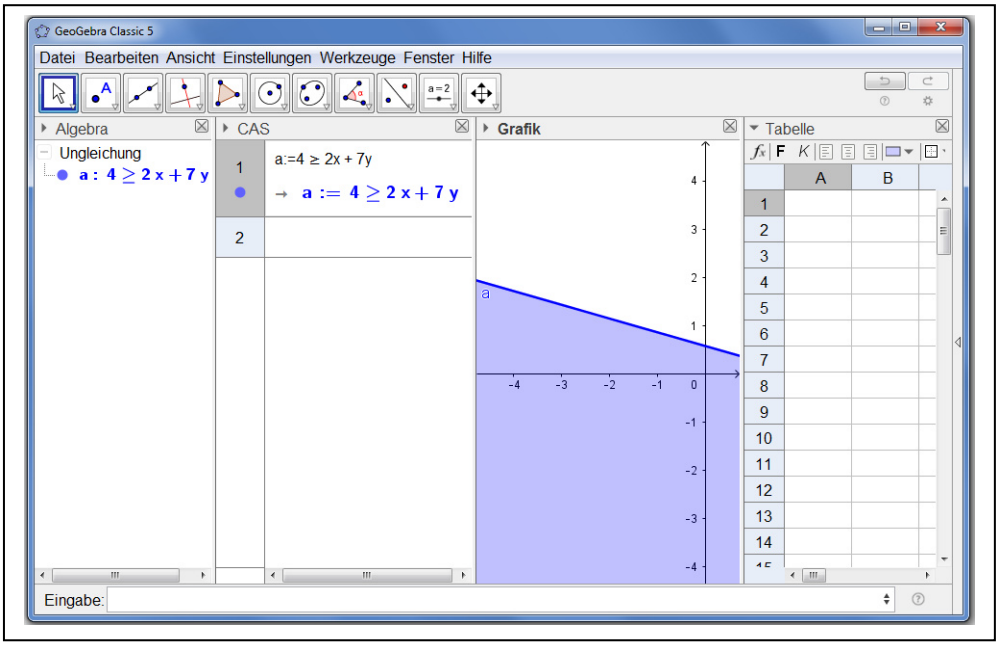


Abb. 5.7: Parallele Darstellung einer linearen Ungleichung in GeoGebra

Darüber hinaus bekommt die lernende Person durch die Koppelung ikonischer und symbolischer Darstellung des mathematischen Problems einerseits eine direkte Rückmeldung über das erstellte Modell (vgl. hier und im Folgenden: Hohenwarter (2006); S. 25-26). Anderseits kann sie auf das Modell durch beide Darstellungsarten Einfluss nehmen: ikonisch mittels der Maus und symbolisch über die Tastatur. Die Möglichkeit über zwei verschiedene Arten das Modell zu manipulieren, zeichnet die Software *GeoGebra* aus und differenziert sie von den anderen DGS und CAS. Diese bidirektionale Koppelung symbolischer und ikonischer Darstellung in GeoGebra scheint Markus Hohenwarter äußerst wichtig zu sein. Ein bidirektionales System hat zu gewährleisten, dass beispielsweise der Lösungsbereich einer Ungleichung wie in einem geläufigen DGS dynamisch konstruiert und seine Ungleichung angezeigt werden kann. Allerdings dass der Lösungsbereich mittels der Eingabe seiner Ungleichung in einem CAS dargestellt und dass ferner der Bereich mit Hilfe der Maus bewegten werden kann,

ist eine Selbstverständlichkeit in *GeoGebra*. Als Folge dessen bekommen die Schülerinnen und Schüler die einmalige Chance durch die Verwendung dieser Software, sich das mathematische Wissen mittels enaktiver, symbolischer und ikonischer Repräsentation verständlicher zu erwerben.

Abschließend ist festzuhalten, dass eine solche Unterrichtssoftware nicht alle erdenklichen Möglichkeiten eines DGS und CAS beinhalten muss bzw. kann. *GeoGebra* bietet als Darstellung und Berechnung – bidirektional – folgende Features in Auswahl:[34]

- ✓ Funktionsgraphen in Abhängigkeit diverser Parametern
- ✓ Bestimmtes und unbestimmtes Integral
- ✓ Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen
- ✓ Darstellung impliziter Kurven
- ✓ Krümmung von Funktionsgraphen
- ✓ Tangente und Normale an Funktionsgraphen
- ✓ Taylorpolynome
- ✓ Ausmultiplizieren und Faktorisieren von Polynomen
- ✓ Asymptoten von Hyperbeln
- ✓ Gerade und ihre Steigung, Halbgerade
- ✓ Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Lote, Parallele, Winkelsymmetrale
- ✓ Fläche beliebiger Polygone und regelmäßiger Vielecken
- ✓ Streckenlänge
- ✓ Winkelgröße
- ✓ Kegelschnitte: Kreis, Ellipse, Polare
- ✓ Kreissektor, Kreisbogen, Umkreis
- ✓ Achsen- und Punktspiegelung, Parallelverschiebung, Drehung, zentrische Streckung
- ✓ Vektoren, Normalvektor
- ✓ Komplexe Zahlen
- ✓ Rechnen mit Matrizen

Zusammenfassend ist zu vermerken, dass der Einsatz dieses Programms im Mathematikunterricht stets von den Fragen „Wie?“ und „Wann?“ zu begleiten ist, damit aus der Wissensvermittlung nicht eine Anleitung zu einem Computerspiel wird.

[34] Vgl. Online: https://de.wikipedia.org/wiki/GeoGebra (Zugriff: 28.03.2018).

GeoGebra – Lineare Optimierung

Die Anwendung des Programms *GeoGebra* im Bereich der linearen Optimierung wird anhand eines zweidimensionalen Maximierungsproblems demonstriert, indem auf den Technologieeinsatz genauer eingegangen wird.

Beispiel 5.3: Maximierungsproblem (vgl. Pauer et al. (2016); S. 29)

Der chinesische Textilhersteller „Lang Lang“ produziert Hosen und Jacken für den europäischen Markt. Die Produktion erfolgt in den Arbeitsschritten „Zuschnitt“, „Nähen“ und „Endfertigung“, welche in drei verschiedenen Werkstätten vorgenommen werden. Der Zeitaufwand, der für die einzelnen Arbeitsschritte benötigt wird und die Kapazitäten, die in den Werkstätten verfügbar sind, sind in der Tabelle 5.2 angeführt.

Werkstätten	**Zeitaufwand in Minuten**		**Kapazität in Minuten**
	Hose	**Jacke**	
Zuschnitt	4	6	350
Nähen	7	3	350
Endfertigung	1	4	200

Tab. 5.2: Inputfaktoren im Herstellungsprozess, Outputfaktor Gewinn

Der erwirtschaftete Gewinn beläuft sich für eine Hose auf € 20,00 bzw. für eine Jacke auf € 24,00. Es soll ein Produktionsprogramm erarbeitet werden, bei welchem die Anzahl der hergestellten Hosen und Jacken errechnet wird, sodass der erzielte Gewinn maximal ist. Wie groß ist der Zeitaufwand in den einzelnen Werkstätten für diesen Auftrag?

Für die mathematische Formalisierung des Produktionsprozesses in Standardform erhalten wir, nachdem die Anzahl der Hosen mit x_1 und die Anzahl der Jacken mit x_2 bezeichnet werden, wie folgt:

Maximiere $F(x_1, x_2) = 20x_1 + 24x_2$ (5.6)

unter den Restriktionen

$$4x_1 + 6x_2 \leq 350 \quad (5.7)$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 350 \quad (5.8)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 200 \quad (5.9)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+, \text{ ganzzahlig} \quad (5.10)$$

Nachdem die mathematische Formalisierung des linearen Optimierungsproblems abgeschlossen ist, werden zunächst die Nebenbedingungen in das Programm *GeoGebra* eingetippt. Die Koppelung ikonischer und symbolischer Darstellung ermöglicht der lernenden Person für die Eingabe der Restriktionen entweder das Algebra- oder das CAS-Fenster zu verwenden.

Zunächst werden die Nebenbedingungen in *GeoGebra* eingetippt, sodass man die Lösungsmenge veranschaulichen kann. An dieser Stelle ergibt sich die Frage, ob diese als Gleichung bzw. als Ungleichung im Programm einzugeben sind. Bei Eingabe als Gleichung bzw. Ungleichung zeichnet *GeoGebra* Gerade bzw. Halbebene. Meiner Ansicht nach ist es für den Aufbau des mathematischen Verständnisses sinnvoller, die Restriktionen als Gleichungen von der lernenden Person zeichnen zu lassen. Danach ermitteln die Schülerinnen und Schüler aus der grafischen Darstellung den Lösungsbereich und visualisieren diesen mittels der Option „*Vieleck*“ (siehe Abb. 5.8). Die Visualisierung der Nebenbedingungen als Ungleichungen führt dazu, dass das Programm *GeoGebra* die Lösungsmenge automatisch ermittelt und farblich entsprechend kennzeichnet. Diese Option sollte eher zu einem späteren Zeitpunkt im Unterricht thematisiert werden.

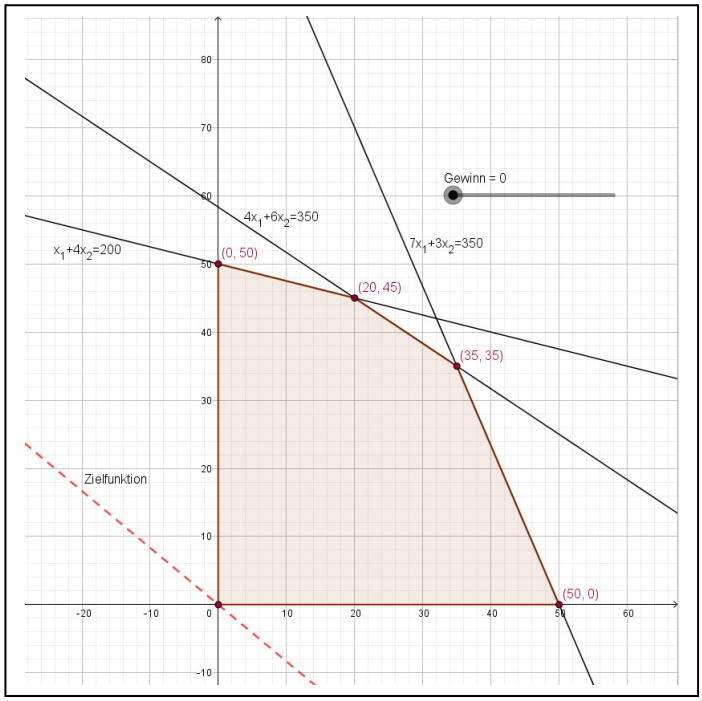


Abb. 5.8: Grafische Darstellung des Lösungsbereichs

Wie aus der Abb. 5.8 ersichtlich ist, ist der Lösungsbereich ein konvexes Polyeder. Daher wird sich die optimale Lösung in einem der Eckpunkte dieses Polyeders

befinden, welcher die Zielfunktion maximiert. Um die Zielfunktion in *GeoGebra* variabel verstellen zu können, wird ein Schieberegler benötigt, der mit „Gewinn“ beschriftet wird, um den Sachkontext hervorzuheben. Danach wird der Schieberegler mit der Zielfunktion verknüpft, indem die rechte Seite in „Gewinn“ umbenannt wird, d.h. „$20x_1 + 24x_2 = Gewinn$“. Damit wird die parallele Verschiebung der Zielfunktion ermöglicht und die Schülerinnen und Schüler erhalten die Möglichkeit, die Veränderung der Zielfunktion durch die Betätigung des Schiebereglers zu verfolgen, bis sie den maximalen Gewinn ermittelt haben (siehe Abb. 5.9).

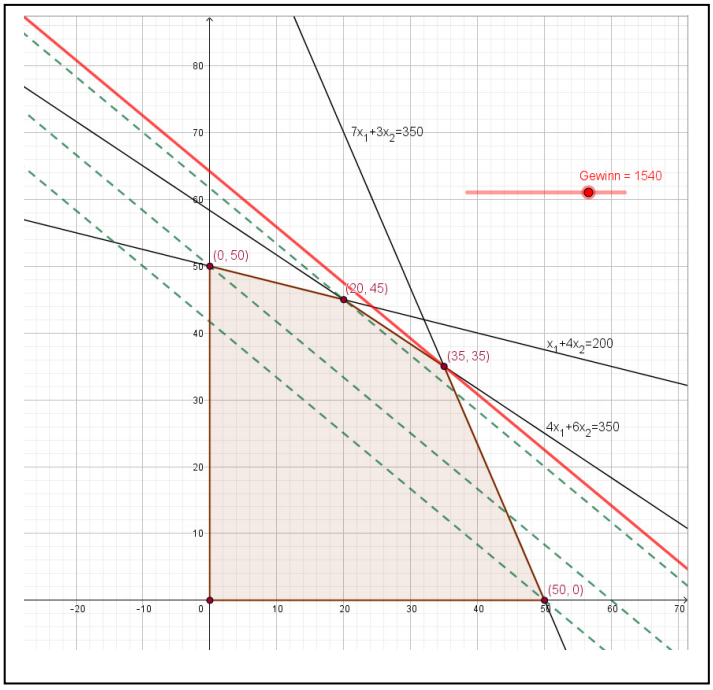


Abb. 5.9: Grafische Lösung des linearen Optimierungsproblems

Wie aus der Abb. 5.9 hervorgeht, beträgt der maximale Gewinn des Textilherstellers „Lang Lang“ € 1.540,00. Um dieses Betriebsergebnis erreichen zu können, sind 35 Hosen und 35 Jacken zu produzieren.

Die zur Verfügung stehenden Kapazitäten in den Werkstätten „Zuschnitt“ und „Nähen“ sind zur Gänze ausgeschöpft. In der Werkstätte „Endfertigung“ sind 25 Minuten ($200-(1\cdot 35+4\cdot 35)=25$) übrig geblieben. Aus ökonomischer Sicht stellt sich hier für die Geschäftsführung die Frage, wie diese freie Kapazität genutzt werden könnte, sodass die Effizienz des Unternehmens erhöht wird. Dies könnte durch die Annahme von Zusatzaufträgen in der Werkstätte „Endfertigung“ erreicht werden. Die an dieser Stelle angedeutete Problematik sollte vor Augen führen, dass der Technologieeinsatz

und das mathematische Instrumentarium bei der Lösung des linearen Optimierungsproblems ohne den Entscheidungsträger nicht auskommen können.
Abschließend ist hervorzuheben, dass die Software GeoGebra zahlreiche Gelegenheiten für einen anwendungsorientierten und fächerübergreifenden Einsatz im Mathematikunterricht hinsichtlich des Themas „Lineare Optimierung“ bietet. Durch die rasche Bewältigung der Kompetenz „Operieren und Technologieeinsatz“ wird der lehrenden Person mehr Zeit angeboten, die Schülerinnen und Schüler mit dem Sachkontext zu konfrontieren und sie dazu zu bewegen, ihr Wissen aus den anderen Unterrichtsfächern abzurufen und anzuwenden. Dadurch bekommen die lernenden Personen verstärkt vermittelt, dass die Mathematik nicht nur mit Rechenaktivitäten in Verbindung steht, sondern sie bildet den Anfang eines Denkprozesses, der stets durch Handeln und Experimentieren zu verbessern ist.

5.3. Lineare Optimierung in Schulbüchern

Die lineare Optimierung in zwei unbekannten Variablen, wie schon am Anfang dieses Kapitels thematisiert wurde, ist fester Bestandsteil der HUM- und HLFS-Lehrpläne und wird im Rahmen des Teils B der teilstandardisierten Diplom- und Reifeprüfung abgeprüft. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt die gängigsten österreichischen BHS-Lehrbücher auf ihre Inhalte hin untersucht. Die Buchreihen, die sich in der Schullandschaft etabliert haben, sind wie folgt:

- ✓ Mathematik anwenden HUM (Österreichischer Bundesverlag)
- ✓ Angewandte Mathematik @ HUM (Veritas Verlag)
- ✓ Kompetenz: Mathematik HUM (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky)
- ✓ Angewandte Mathematik HUM (E. Dorner Verlag)

Selbstverständlich gibt es im Entstehen begriffene Schulbuchreihen, die von den Verlagen Manz und Trauner vermarktet bzw. auf den Markt zu bringen sind. Manz und Trauner haben sich eher auf die Lerninhalte der kaufmännischen Schulen spezialisiert und beginnen sich für die anderen BHS-Formen langsam zu interessieren. Wir beschränken uns auf die vier oben erwähnten Werke, da sie in der Zwischenzeit an Relevanz in der Schullandschaft gewonnen haben.

5.3.1. Mathematik anwenden HUM

Das Schulbuch „*Mathematik anwenden HUM 2*“ wird von dem Österreichischen Bundesverlag (ÖBV) Schulbuch GmbH & Co. KG herausgebracht. Dem Thema „Lineare Optimierung“ sind im Buch 16 Seiten gewidmet, wobei das Kapitel in zwei Hauptteile untergliedert ist (siehe S. 19-34):

(1) ***Lineare Ungleichungssysteme:*** In diesem Abschnitt setzten sich die AutorInnen mit dem grafischen Lösen einer linearen Ungleichung bzw. eines linearen Gleichungssystems in zwei unbekannten Variablen auseinander. Dabei wird der Begriff der Lösungsmenge anhand einer konkreten Aufgabenstellung erarbeitet und erst dann formalisiert. Die mathematische Notation dieses Begriffes ist, meiner Ansicht nach, sehr kurz gehalten, sodass die Schülerinnen und Schüler kaum die Möglichkeit erhalten, in die Tiefe dieser Problematik einzutauchen. Danach gehen die AutorInnen gleich zu der Anwendung des Technologieeinsatzes – *GeoGebra* und *TI-Nspire* – über. Durch den relativ raschen Übergang zum computerunterstützten Mathematikunterricht besteht die Gefahr, dass die Probleme der linearen Optimierung nur rezepthaft durch die lernenden Personen gelöst werden.

(2) ***Lineare Optimierung:*** In diesem Abschnitt wird wieder mit einer konkreten Aufgabenstellung begonnen und anschließend werden die Begrifflichkeiten lineare homogene Funktion, lineare Optimierungsaufgaben, Zielfunktion, zulässiger Bereich, optimaler Punkt, Maximum- und Minimumaufgaben und Niveaulinien definiert. Der Teil, der sich mit der mathematischen Formalisierung bei der Erklärung der Begriffe befasst, ist sehr kurz. Somit ist wiederum zu bezweifeln, dass die Schülerinnen und Schüler im Stande sind, ein Verständnis für die Problematik aufzubauen. Des Weiteren sind die Spezialfälle hinsichtlich des zulässigen Bereiches nicht thematisiert worden. Schlussendlich ist kein Satz über das duale Optimierungsproblem von den AutorInnen verloren worden.

Das Kapitel wird mit einer Zusammenfassung und zusammenfassenden Aufgaben abgeschlossen. Die Zusammenfassung bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit an, schnell die in dem Kapitel vorkommenden Begriffe zu finden und ihre Erklärung nachzulesen. Die von AutorInnen kreierten und gewählten Rechenaufgaben decken viele Berufsfelder, welche für den Mathematikunterricht in den HUM bedeutsam sind.

Schlussendlich ist festzuhalten, dass die wesentlichen Inhalte der linearen Optimierung in diesem Schulbuch vorhanden sind, wobei ihre Ausarbeitung mit großer Wahrscheinlichkeit zu einem rezepthaften Erwerb des Wissens führen wird.

5.3.2. Angewandte Mathematik @ HUM

Der Veritas Verlag veröffentlichte im Jahr 2016 die erste Auflage des Schulbuches *„Angewandte Mathematik @ HUM 2“*, in dem sich die AutorInnen mit der linearen Optimierung auf 22 Seiten auseinandersetzten. Das Kapitel „Lineare Optimierung“ ist in vier Teile untergliedert, welche wie folgt sind (siehe S. 7-28):

(1) ***Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme:*** In diesem Unterkapitel befassen sich die AutorInnen einerseits mit der grafischen Darstellung linearer Ungleichungen und anderseits mit dem grafischen Lösen linearer Gleichungssysteme. Dabei wird der Unterrichtsstoff gleich mit einem Musterbeispiel begonnen und erst danach wird kurz die offene und geschlossene Halbebene definiert. Anschließend sollten die Schülerinnen und Schüler die Kompetenz erworben haben, die Lösung der formulierten Rechenaufgaben zu ermitteln.

(2) ***Maximalprobleme:*** Mit den Maximalproblemen sind Probleme der linearen Optimierung im Schulbuch gemeint, bei denen die Zielfunktion maximiert wird. Allerdings ist nach einer formalen Definition der Zielfunktion vergeblich in diesem Buch zu suchen. Sie ist anhand des als Einführung gelösten Musterbeispiels aufgestellt und grafisch durch eine parallele Verschiebung optimiert.

(3) ***Minimalprobleme:*** Die Minimierung der Zielfunktion steht im Vordergrund dieses Unterkapitels, wobei diese Problematik analog zu Maximierungsproblemen ausgearbeitet ist. Die AutorInnen beginnen mit einem Musterbeispiel und formulieren im gegebenen Sachkontext die Zielfunktion, die es zu optimieren gilt. Die Dualität spielt dabei keine Rolle und wird einfach als nichtexistent betrachtet.

(4) ***Lineare Optimierung mit Technologieeinsatz:*** Dem Technologieeisatz widmen die AutorInnen einen ganzen Abschnitt, was beim ÖBV-Schulbuch nicht der Fall war. Dabei wird die Lösung des Musterbeispiels mittels der Software *GeoGebra* ausführlich und sehr gut nachvollziehbar erläutert.

Die lineare Optimierung wird wie alle anderen im Buch erarbeiteten Kapitel mit folgenden Themenbereichen abgeschlossen:

- ✓ Vermischte Aufgaben
- ✓ Sprache der Mathematik
- ✓ Thema – lineare Optimierung in mehr als zwei Variablen
- ✓ Der Weg zur Reifeprüfung

Besonders irritierend, meiner Meinung nach, ist der Bereich „Sprache der Mathematik“, da man sich von den AutorInnen erwartet, dass sie den mathematischen Formalismus thematisieren und alle in den Musterbeispielen vorgekommenen Begrifflichkeiten definieren. Dabei geht es um Rechenaufgaben, welche keinen Sachkontext aufweisen. Äußerst lobenswert ist die Tatsache, dass im Veritas-Buch die lineare Optimierung mit mehr als zwei Variablen Erwähnung findet und mit dem TKP *Microsoft Excel* erklärt wird. Dadurch bekommen sich für das Unterrichtsfach interessierende Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihr Wissenshorizont zu erweitern und erhalten dadurch eine Förderung als Basis für ein Selbststudium im Bereich der linearen Optimierung.
Abschließend ist zu vermerken, dass Inhalte für den erfolgreichen Weg zur Reifeprüfung vorhanden sind, wobei ihre Thematisierung ausschließlich mittels Musterbeispielen vorgenommen worden ist.

5.3.3. Kompetenz: Mathematik HUM

Das Schulbuch *„Kompetenz: Mathematik“*, Band 2, welches von dem Verlag Hölder-Pichler-Tempsky (hpt) im Jahr 2015 zum ersten Mal herausgebracht wurde, setzt sich auf 19 Seiten mit der Problematik der linearen Optimierung auseinander. Das Kapitel „Lineare Optimierung“ ist in zwei Hauptteilen untergliedert, welche wie folgt sind (siehe S. 5-23):

(1) ***Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme:*** Dieses Unterkapitel setzt sich aus zwei Abschnitten zusammen: „Grafische Lösung einer linearen Ungleichung mit 2 Variablen“ und „Grafisches Lösen von linearen Ungleichungssystemen“. Bedauerlicherweise ist die Lösungsmenge der linearen Ungleichung in zwei Variablen anhand einer Rechenaufgabe definiert worden, wobei zu Beginn die Lösung einer Gleichung in zwei Variablen thematisiert wird. Davon ausgehend sind die offene bzw. die abgeschlossene Halbebene definiert

und grafisch dargestellt worden. Unmittelbar danach sind die Schülerinnen und Schüler gefordert, das erworbene Wissen anzuwenden und die Rechenaufgaben zu lösen. Als Technologieunterstützung verwendet das Schulbuch den *TI-Nspire*, welcher verglichen mit *GeoGebra* schwieriger in der Handhabung ist, wenn man die hohen Anschaffungskosten außer Acht lässt.

Der Abschnitt „Grafisches Lösen von linearen Ungleichungssystemen“ beginnt mit einer Aufgabenstellung, welche für den HUM-Bereich sehr passend ist. Allerdings wird auf S. 7 des Buches nur 1/5 dem Thema gewidmet, was ein Ungleichungssystem und seine Lösungsmenge sind. Unmittelbar danach sind die drei möglichen Lösungsbereiche – beschränkt, unbeschränkt und leer – abgebildet worden. Dieser Abschnitt wird mit dem Einsatz von *TI-Nspire* und Rechenaufgaben abgeschlossen. Hervorragend ist, meiner Ansicht nach, die Aufgabe 1.15 (siehe S. 9), welche von den Schülerinnen und Schülern verlangt, das Ungleichungssystem aufzustellen, dessen Lösungsbereich grafisch dargestellt ist. Aus meiner langjährigen Unterrichtserfahrung ist mir bekannt, dass sich solche Aufgabenstellungen als äußerst schwierig für die lernenden Personen erweisen, wenn sich diese mit dem theoretischen Hintergrund nicht vertiefend auseinander gesetzt haben.

(2) ***Lineare Optimierung:*** Dieses Unterkapitel besteht aus drei Abschnitten: „Maximumaufgabe“, „Minimumaufgabe“ und „Mehrdeutige Lösung bei linearer Optimierung“. Alle drei Abschnitte einschließlich wesentlicher Begriffe wie beispielsweise Zielfunktion, Zielfunktionsgerade und Lösungsbereich sind mittels einer einführenden Rechenaufgabe ausgearbeitet worden. Der Abschnitt „Maximumaufgabe“ schließt mit „Behandlung einer Maximumaufgabe“ ab. Den gleichen Aufbau weist der Abschnitt „Minimumaufgabe“ auf. Bei der Lösung des Minimierungsproblems wird der möglichst kleine, verschieden von Null Ordinatenabschnitt der Zielfunktion gesucht. Dadurch kann die Dualitätsproblematik im Unterricht umgangen werden.

Dieses Schulbuch zählt zu den wenigen, welches sich mit der Mehrdeutigkeit der Lösung in einem ganzen Abschnitt auseinandersetzt und den Hauptsatz der linearen Optimierung formuliert.

Das Kapitel „Lineare Optimierung“ wird wie alle anderen im Schulbuch ausgearbeiteten Kapitel mit folgenden Themenbereichen abgeschlossen:

- ✓ Zusammenfassung

- ✓ Vermischte Aufgaben zur Vertiefung
- ✓ Wissens-Check

Besonders hervorzuheben ist der Bereich „Zusammenfassung“, in dem das gesamte theoretische Wissen komprimiert, ohne Aufgabenstellungen, dargestellt ist. Dies bietet den Schülerinnen und Schülern schnell und mühelos die erforderliche Theorie zu wiederholen, bevor sie sich den Rechenaufgaben widmen.
Zusammenfassend ist festzuhalten, dass dieses Schulbuch alle für die erfolgreiche Absolvierung der Reife- und Diplomprüfung erforderliche Inhalte ausschließlich anhand von Rechenaufgaben thematisiert, deren Lösungen immer diskret sind.

5.3.4. Angewandte Mathematik HUM

Der Verlag E. Dorner GmbH brachte im Jahr 2017 die zweite Auflage des Schulbuches *„Angewandte Mathematik HUM“*, Band 2, heraus, in dem sich die AutorInnen auf 24 Seiten mit der Problematik der linearen Optimierung befassen. Um den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler zu erleichtern, bedienen sich die AutorInnen bei der Ausarbeitung des Lehrstoffes vier Farben – blau, grün, gelb und sandfarbig. Die Musterbeispiele sind in den Kästen mit blauen Balken präsentiert, in den Kästen mit grünen Balken sind die Definitionen zu finden, in orangen Kästen sind alle Erklärungen zum Technologieeinsatz nachzulesen und in einem sandfarbigen Hintergrund sind alle Rechenaufgaben zu selbständiger Ausarbeitung aufgelistet.
Das Kapitel „Lineare Optimierung“ ist in vier Teile untergliedert, welche wie folgt sind (siehe S. 5-28):

(1) ***Warum es bei der linearen Optimierung geht:*** In diesem Unterkapitel wird ein historischer Überblick zur linearen Optimierung einschließlich eines einführenden Beispiels angeboten. Dabei sind die Anwendungsgebiete nicht außer Acht gelassen, damit die lernenden Personen gleich einen Alltagsbezug bekommen, der für die mathematische Leistung der Schülerinnen besonders relevant ist.

(2) ***Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen:*** Dieses Unterkapitel setzt sich zu Beginn mit der Lösungsmenge einer linearen Ungleichung auseinander. Dabei wird auf die Definition nicht vergessen, was unter einer linearen Ungleichung verstanden wird, bevor die erste Aufgabe gelöst und die Lösungsmenge grafisch präsentiert wird. Danach folgt auch eine Definition der grafischen Darstellung

einer linearen Ungleichung. In einem nächsten Schritt werden Systeme linearer Ungleichungen anhand von Rechenaufgaben mit und ohne Sachzusammenhang ausgearbeitet. Dieses Unterkapitel wird mit dem Technologieeinsatz bei der Lösungserarbeitung von Ungleichungen und Ungleichungssystemen abgeschlossen. Das Schulbuch bietet Erklärung zu *GeoGebra* und *TI-Nspire*.

(3) ***Lineare Optimierung in zwei Variablen:*** In diesem Unterkapitel sind jeweils eine Maximum- und eine Minimumaufgabe grafisch in drei Schritten gelöst. Der erste Schritt umfasst die mathematische Formulierung des Optimierungsproblems, der zweite Schritt setzt sich mit der Ermittlung des Lösungsbereichs des Ungleichungssystems auseinander und der dritte Schritt thematisiert die Suche des Optimums. Unmittelbar nach den Lösungen beider Aufgabenstellungen sind die theoretischen Grundlagen zum Hauptsatz der linearen Optimierung und zu den Lösungsschritten einer linearen Optimierungsaufgabe nachzulesen. Besonders lobenswert ist die ausführliche Auseinandersetzung der AutorInnen mit der Lösbarkeit linearer Optimierungsprobleme in zwei Variablen. Kein anderes Schulbuch befasst sich so genau damit (siehe S. 21, Schulbuch). Abgeschlossen wird dieses Unterkapitel mit einer kurzen Bemerkung hinsichtlich der ganzzahligen Optimierung, die auch nur in diesem approbierten Schulbuch zu finden ist.

(4) ***Rechnerische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben mit Technologieeinsatz:*** In diesem Unterkapitel wird mit dem *Solver-Tool* von *Microsoft EXCEL* erläutert, wie Optimierungsprobleme mit mehr als drei Variablen zu bewältigen sind. Dabei wird wie schon auf S. 6 des Buches das Simplexverfahren erwähnt. Des Weiteren wird geklärt, was das Wort „Simplex“ bedeutet. Eine ausführliche theoretische Behandlung des Simplexverfahrens würde den Rahmen dieses Schulbuchens sprengen.

Das Kapitel „Lineare Optimierung“ wird mit einer *Mind-Map* abgeschlossen, in dem alle behandelten Themenbereiche auf einer Seite zusammengefasst sind.

Abschließend ist festzuhalten, dass dieses Schulbuch, meiner Ansicht nach, das einzige ist, welches eine exzellente Balance zwischen theoretischem Hintergrund und Rechenaufgaben im Sachkontext bietet. Aus diesem Grund wird dieses Schulbuch als Fundament bei der Ausarbeitung des Unterrichtsvorschlags dienen.

6. Strukturierung der linearen Optimierung im Mathematikunterricht (Unterrichtsvorschlag)

Das Unterrichtsthema „Lineare Optimierung“ ist der Inhaltsdimension „Algebra und Geometrie“ zuzuordnen. Dabei geht es um die Ermittlung und Interpretation des Lösungsbereichs linearer Ungleichungssysteme in zwei Variablen, um die Optimierung einer linearen Zielfunktion unter Berücksichtigung bestimmter Restriktionen mittels Technologieeinsatzes, und schlussendlich um die Dokumentation des Lösungsweges und Interpretation der gewonnen empirischen Evidenz. Dabei eignet sich die lineare Optimierung für die vertiefende Wiederholung folgender Themen des schon unterrichtenden Lehrstoffes:

(1) ***Lineare Funktionen:*** Die zu optimierende Zielfunktion ist eine lineare Funktion. Somit bietet das Thema die Möglichkeit, die Gleichung bzw. die Termdarstellung der linearen Funktion einschließlich ihrer Eigenschaften zu wiederholen, den Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem abzubilden und zu analysieren, was eine parallele Verschiebung des Graphen bewirkt.

(2) ***Lineare Algebra:*** Die bei der Optimierung der Zielfunktion zu berücksichtigenden Restriktionen sind lineare Gleichungen oder Ungleichungen. Als Folge dessen ist es angebracht, das Umformen linearer Gleichungen und Ungleichungen vertiefend zu wiederholen, das Lösen linearer Gleichungssysteme mit und ohne Technologieeinsatz kurz zu thematisieren.

(3) ***Geometrie:*** Da die Ermittlung des Lösungsbereichs linearer Ungleichungen und Ungleichungssysteme grafisch zu erfolgen hat, ist es von besonderer Relevanz, das Darstellen linearer Gleichungen und Ungleichungen im Koordinatensystem anzusprechen und das Augenmerk auf das grafische Lösen linearer Gleichungs- und Ungleichungssysteme in zwei Variablen zu legen.

Bei der vertiefenden Wiederholung der oben erwähnten Themenbereiche sollten alle Handlungsdimensionen – Modellieren und Transferieren, Operieren und Technologieeinsatz, Interpretieren und Dokumentieren, Argumentiren und Kommunizieren – geschult werden, die selbstverständlich nicht im gleichen Ausmaß bei der Auseinandersetzung mit der linearen Optimierung zum Zug kommen.

Wie die Analyse der Schulbücher hinsichtlich der linearen Optimierung (siehe Abschnitt 5.3, S. 130-136) veranschaulicht hat, stehen nicht die theoretischen Grundlagen und das Verständnis sondern die Bewältigung der Rechenaufgaben im

Vordergrund. Daher möchte ich einen Unterrichtsvorschlag unterbreiten, wie man dieses Thema in den HUM und HLFS durchführen könnte, sodass den lernenden Personen bewusst wird, dass die lineare Optimierung als Lösungsansatz in der Praxis zur Anwendung kommen kann.

Der im folgenden Kapitel ausgearbeitete Unterrichtsvorschlag setzt sich aus Unterrichtssequenzen zusammen, wobei jede Sequenz einer Unterrichtsstunde entspricht. Bei der Realisierung der einzelnen Unterrichtssequenzen werden Übungsblätter verwendet, welche aus dem Anhang der vorliegenden Diplomarbeit zu entnehmen sind. Darüber hinaus sind auf den Übungsblättern Literaturverweise zu finden, damit die lehrenden Personen über eine größere Aufgabenauswahlmöglichkeit verfügen.

Abschließend sei von mir ausdrücklich betont, dass die ausgearbeiteten Unterrichtssequenzen als Vorschlag zu sehen sind. Sie können in Abhängigkeit von Wissen und Kenntnissen der eigenen Schülerinnen und Schüler inhaltlich und zeitlich variiert werden.

6.1. Unterrichtssequenz 1: Historischer Überblick und Motivation

In dieser ersten Unterrichtssequenz werden die Schülerinnen und Schüler für das Thema „Lineare Optimierung“ motiviert. Dabei wird ein historischer Überblick hinsichtlich der WissenschafterInnen, welche sich mit dieser Problematik befassten, durch die Lehrkraft angeboten. Dabei sollen die Errungenschaften von dem Nobelpreisträger L.V. Kantorowicz und die Entwicklung des Simplexverfahrens von G. B. Dantzig thematisiert werden. Anschließend sollen sich die lernenden Personen mit den Anwendungsgebieten der linearen Optimierung vertraut machen, um für ihren späteren Werdegang ausgestattet zu sein.

Nach dem historischen Exkurs und potenziellen Anwendungsmöglichkeiten der linearen Optimierung folgt die Formulierung einer einführenden Aufgabenstellung durch die Lehrkraft, die entweder an der Tafel oder durch ein anderes Medium verschriftlicht wird, so dass die lernenden Personen mit dem Problemstellungstext stets in Kontakt bleiben. Eine mögliche Aufgabenstellung als Einführung bietet Beispiel 5.3 (siehe S. 127-128). Danach werden die Schülerinnen und Schüler in einer Diskussionsrunde aufgefordert, heraus zu finden, was für dieses Problem charakteristisch ist. Durch diese Diskussionsrunde wird bezweckt, die lernenden Personen zum selbstständigen Denken

zu bewegen, sodass sie zu der Schlussfolgerung kommen, dass sich die Aufgabenstellung aus einer linearen Gewinnfunktion zusammensetzt, die maximiert wird. Dabei sind die angegebenen Kapazitäten für die Werkstätten nicht zu überschreiten. Die Anzahl der herzustellenden Hosen und Jacken ist unter Berücksichtigung der Kapazitäten und Maximierung des Gewinns zu ermitteln.
Abschließend werden die Schülerinnen und Schüler in Transport-, Produktion- und Mischungsprobleme eingeteilt und mit der Aufgabe in Partnerarbeit betraut, ein eigenes Problem der linearen Optimierung auf ein Extrablatt zu formulieren. Die so ausgearbeiteten Aufgabenstellungen werden von der lehrenden Person am Ende der Unterrichtssequenz eingesammelt.

6.2. Unterrichtssequenz 2: Lineare Gleichung und Ungleichung in zwei Variablen

Zu Beginn der Unterrichtssequenz wird mittels eines fragend-entwickelnden Unterrichts die lineare Gleichung in zwei Variablen wiederholt. Bei dieser Wiederholung wird der Schwerpunkt auf die grafische Lösung der linearen Gleichung und auf die Verknüpfung der Geraden mit der linearen Funktion gelegt. Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, über die Lage-Beziehung zweier Geraden nachzudenken. Wie verändern sich die Koeffizienten vor den Variablen, wenn die Gerade parallel hinauf bzw. hinunter verschoben wird.
Danach wird definiert, was eine lineare Ungleichung in zwei Variablen ist. Eine mögliche Definition wäre:
Definition 6.1: (vgl. Timischl et al. (2017); S. 8) Eine Ungleichung einer der Formen $a \cdot x + b \cdot y < c$, $a \cdot x + b \cdot y \leq c$, $a \cdot x + b \cdot y > c$, $a \cdot x + b \cdot y \geq c$ nennt man lineare Ungleichung in zwei Variablen x und y, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$.

Beim Definieren der linearen Ungleichung in zwei Variablen ist es erforderlich, die lernenden Personen darauf aufmerksam zu machen, dass die Variablen auch anders, wie beispielsweise x_1 und x_2, genannt werden können.

Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, Rechenaufgaben zu jeder der in Definition 6.1 angegebenen Form der linearen Ungleichung in zwei Variablen zu geben, die an der Tafel verschriftlicht werden. Danach stellt sich die

Frage, wie diese lineare Ungleichung zu lösen ist und wie die grafische Lösung aussehen könnte. Das grafische Lösen erfolgt, indem man zuerst die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ in einem kartesischen Koordinatensystem abbildet. Diese Gerade wird Randgerade genannt und teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die grafische Lösung bildet dann genau eine, möglicherweise einschließlich der Randgerade, Halbebene. Die Überprüfung, ob die obere oder die untere Halbebene die Lösung der linearen Ungleichung darstellt, erfolgt mit Hilfe der Koordinaten eines beliebigen Punktes – am einfachsten mit dem Koordinatenursprung $O = (0|0)$, wenn dieser nicht auf der Randgerade liegt. Wenn die so geschilderte Überprüfung eine wahre Aussage ergibt, dann gehört der Koordinatenursprung zu der gesuchten Halbebene. Des Weiteren wird von einer abgeschlossenen Halbebene gesprochen, wenn die Randgerade ein Teil der Halbebene ist, ansonsten wird die Halbebene offen genannt. In diesem Fall kann die Randgerade beispielsweise strichliert und nicht durchgezogen gezeichnet werden.
Nach dieser theoretischen Auseinandersetzung mit dem grafischen Lösen der linearen Ungleichung in zwei Variablen sollten die lernenden Personen ohne Technologieeinsatz die an der Tafel verschriftlichten Rechenaufgaben im Heft lösen. Nach einer kurzen Präsentation der Lösungen an der Tafel durch die Schülerinnen und Schüler wird das erste Übungsblatt ausgeteilt, mit dem sie sich bis zum Schluss der Unterrichtssequenz befassen. Die Lehrkraft spielt dabei eine beratende Rolle.

6.3. Unterrichtssequenz 3: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen

Im Rahmen der zweiten Unterrichtsequenz erwarben die Schülerinnen und Schüler die Kompetenz, lineare Ungleichungen in zwei Variablen aufzustellen und diese grafisch zu lösen. Somit wird die Erweiterung auf lineare Ungleichungssysteme durch die Lehrkraft vorgenommen.
Zunächst wird definiert, was unter einem linearen Ungleichungssystem in zwei Variablen verstanden wird. Eine mögliche Definition wäre:
Definition 6.2: (vgl. Wessenberg et al. (2016); S. 7) Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen setzen sich aus mindestens zwei linearen Ungleichungen zusammen. Ein lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen liegt auch dann vor, wenn neben den Ungleichungen Gleichungen vorkommen.

Anschließend werden den Schülerinnen und Schülern zwei mögliche lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen in Allgemeinform mit Koeffizienten wie a, b, c etc. an der Tafel notiert, wie beispielsweise:

$$\begin{array}{lll} a \cdot x + b \cdot y < c & & a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y \geq f & \text{oder} & d \cdot x + e \cdot y \leq f \text{, wobei } a, b, \mathrm{d}, \mathrm{e} \neq 0 \text{.} \\ x \geq 0, y \geq 0 & & x \geq 0, y > 0 \end{array}$$

Dabei ist es wichtig, dass in einem der Ungleichungssysteme auch eine Gleichung vorkommt. Danach werden die lernenden Personen aufgefordert, konkrete Rechenaufgaben zu erfinden, indem sie die Koeffizienten durch Zahlen ersetzen.

Im nächsten Schritt wird die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems in zwei Variablen grafisch ausgearbeitet. Bei dieser Aufgabenstellung kommt das schon erworbene Wissen zur Anwendung, dass die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung eine offene bzw. abgeschlossene Halbebene ist. Da bei einem Ungleichungssystem alle Ungleichungen zu erfüllen sind, d.h. alle Zahlungspaare $(x|y)$ genügen den Ungleichungen, wird die Lösungsmenge des linearen Programms grafisch als Durchschnittsmenge aller offenen bzw. abgeschlossenen Halbebenen abgebildet, die sich aus den Ungleichungen ergeben. Die so entstandene Durchschnittsmenge gibt den Lösungsbereich des linearen Ungleichungssystems an.

Als nächstes stellt sich die Frage, wie der Lösungsbereich aussehen könnte. Den lernenden Personen wird zeitlich die Möglichkeit gegeben, nachzudenken, wie die Durchschnittsmenge grafisch dargestellt werden kann. Danach werden an der Tafel drei Lösungsbereiche – leer, beschränkt und unbeschränkt – von der Lehrkraft präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler werden mit der Aufgabe betraut, sich lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen auszudenken, sodass alle drei Lösungsbereiche – leer, beschränkt und unbeschränkt – vorkommen. Die von den lernenden Personen ausgedachten Ungleichungssysteme werden auf freiwilliger Basis mittels geeigneten Mediums präsentiert und wenn erforderlich mit einer nachvollziehbaren Erklärung ausgebessert.

6.4. Unterrichtssequenz 4: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen mit GeoGebra

Diese Unterrichtssequenz beginnt mit einer kurzen Wiederholung der wesentlichen Begriffe wie beispielsweise lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen, Lösungsbereich und Arten von Lösungsbereichen. Danach setzen sich die Schülerinnen und Schüler gemeinsam mit der lehrenden Person mit den Aufgabenstellungen des Übungsblattes 2 auseinander. Dabei spielt der Technologieeinsatz *GeoGebra* noch keine Rolle. Ich bin keine Vertreterin des zu frühen Einsatzes von *GeoGebra* bei der grafischen Lösung der linearen Ungleichungssysteme, da die lernenden Personen nicht nachvollziehen können, wie die Lösung zu Stande kommt. Das Lösen der Aufgabenstellungen kann sehr leicht zu einer Eintipp-Aufgabe degradiert werden, ohne die erforderlichen Rechentechniken ausreichend gut zu beherrschen. Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 1 (Übungsblatt 2) ohne Technologieeinsatz gelöst haben, wird der Einsatz von *GeoGebra* unterrichtet, wobei hervorzuheben ist, dass *GeoGebra* nicht automatisch den Lösungsbereich eines linearen Ungleichungssystems in zwei Variablen grafisch darstellt. Durch die Überlappung der Halbebenen verändert sich die von *GeoGebra* verwendete Farbe der Durchschnittsmenge. Auf diese Art und Weise kann der Lösungsbereich ermittelt werden.

Anschließend werden die restlichen Aufgaben aus dem Übungsblatt 2 mit Technologieeinsatz gemeinsam gelöst.

6.5. Unterrichtssequenz 5: Lineare Optimierung in zwei Variablen – Maximalproblem

Zu Beginn der Unterrichtssequenz wird Beispiel 5.3 in Erinnerung gerufen, welches in der ersten Sequenz verwendet wurde, um die lernenden Personen für das Problem der linearen Optimierung zu motivieren. Dabei ist meiner Ansicht nach, eine abstrakte Definition den Schülerinnen und Schülern als erster Schritt zumutbar. Eine Möglichkeit das lineare Optimierungsproblem zu definieren bietet Definition 2.1 (S. 9), die allerdings auf zwei Variablen zu reduzieren ist.

Definition 6.3: Unter einem *linearen Optimierungsproblem in zwei Variablen* wird die Aufgabe verstanden, eine lineare Zielfunktion

$$z = F(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

zu maximieren bzw. zu minimieren. Die Variablen x_1 und x_2 müssen dabei die linearen *Nebenbedingungen* (Restriktionen) der Form

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m_1$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i \qquad \text{für } i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad \text{für } i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m$$

unter Berücksichtigung der *Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für einige oder alle } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (6.5)$$

genügen (vgl. Domschke et al. (2015); S. 17-18).

Basierend auf der obigen Definition, sollen die lernenden Personen in einem fragend-entwickelnden Unterricht die Komponenten eines linearen Optimierungsproblems verschriftlichen, welche wie folgt sind:

(1) ***Lineare Zielfunktion:*** Die Zielfunktion hängt von jeder der zwei Variablen x_1 und x_2 linear ab. Die Funktion ist zu maximieren bzw. zu minimieren.

(2) ***Nebenbedingungen:*** Die Nebenbedingungen, auch Restriktionen genannt, stellen ein lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen dar, dessen grafische Ermittlung der Lösungsmenge schon im Unterricht durchgenommen wurde.

(3) ***Nichtnegativitätsbedingungen:*** Die Nichtnegativitätsbedingungen spielen eine essenzielle Rolle, wenn ein anwendungsorientiertes Problem der linearen Optimierung bearbeitet wird. Die zu bestimmende Produktionsmenge kann beispielswiese keine negativen Werte annehmen. Diese Bedingungen führen dazu, dass sich der Lösungsbereich stets im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems befindet.

Anschließend wird die Definition 6.3 auf das Beispiel 5.3 angewandt, indem der Sachkontext in die Sprache der linearen Optimierung übersetzt wird. Erst dann wird mittels *GeoGebra* die Lösungsmenge (auch Lösungsbereich, Zulässigkeitsbereich genannt) des Ungleichungssystems ermittelt. Es ist den Schülerinnen und Schülern noch einmal klar zu machen, dass sich der Lösungsbereich aus Zahlungspaaren $(x_1|x_2)$ bzw. $(x|y)$ zusammensetzt, welche den Restriktionen genügen.

Im nächsten Schritt bestimmt man das Optimum der Zielfunktion. Es soll aus der Menge aller Zahlenpaare $(x_1|x_2)$ der Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems jenes oder jene ermittelt werden, welche die Zielfunktion maximieren bzw. minimieren. Da das Thema „Lineare Funktion“ im ersten Jahrgang durchgenommen wurde, sind die Schülerinnen und Schüler im Stande, die Zielfunktion grafisch darzustellen. Des Weiteren wissen sie auch, was eine parallele Verschiebung der Geraden nach oben bzw. nach unten bewirkt. Allerdings ist ein Startwert erforderlich, um die lineare Zielfunktion grafisch darzustellen. Dabei wird die Zielfunktion meistens gleich Null gesetzt. Damit erhält man für die Geradengleichung wie folgt: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1$.

Anschließend wird die Gerade mittels GeoGebra gezeichnet und parallel verschoben, bis das Optimum der Zielfunktion aus dem Beispiel 5.3 gefunden wird. An dieser Stelle ist zu vermerken, dass in dieser Unterrichtssequenz nur Problemstellungen zu behandeln sind, die keine Sonderfälle (unlösbar, mehrere Optimallösungen, ganzzahlige Lösung) darstellen. Mit dieser Problematik wird man sich in einer eigenen Unterrichtssequenz auseinandersetzen.

Danach werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, die ersten zwei Aufgaben aus dem Übungsblatt 3 zu lösen. Bei den Aufgabenstellungen im Übungsblatt 3 geht es nur um Maximierungsprobleme. Die lernenden Personen werden gebeten, bei der grafischen Ermittlung der Lösung, Acht auf die Art der Lösungsmenge einerseits und anderseits auf das Optimum zu geben. Wo befindet sich die optimale Lösung?

Die nicht bearbeiteten Aufgabenstellungen aus dem Übungsblatt 3 werden als Hausübung vergeben.

6.6. Unterrichtssequenz 6: Lineare Optimierung in zwei Variablen – Minimalproblem

Zu Beginn der Unterrichtssequenz werden die Fragen aufgegriffen, die am Ende der 5. Unterrichtssequenz gestellt wurden. Die Schülerinnen und Schüler sollen bei der Lösung der linearen Maximalprobleme zum Schluss gekommen sein, dass der Lösungsbereich immer ein geschlossenes Vieleck war und dass sich die optimale Lösung in einer Ecke des zulässigen Bereichs befand. Dadurch ist die Basis für die Formulierung des Hauptsatzes der linearen Optimierung geschaffen. Die von mir auf S.

25 angebotene Formulierung dieses Hauptsatzes kann nicht als schülerInnengerecht angesehen werden. Eine für schulische Zwecke mögliche Formulierung wäre:

Satz 6.1 (Hauptsatz der linearen Optimierung): (vgl. Timischl et al. (2017); S. 20) Die optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems, wenn sie existiert, liegt stets in mindestens einem Eckpunkt der Lösungsmenge.

Dem Hauptsatz der linearen Optimierung folgend genügt es, die Koordinaten der Schnittpunkte aller Randgeraden des Lösungsbereichs zu ermitteln und diese in die Zielfunktion einzusetzen, um das Optimum zu finden.

Mit dem Hauptsatz der linearen Optimierung ausgestattet, wird das Minimierungsproblem ausgearbeitet. Dabei ist, meiner Meinung nach, die Dualitätsproblematik im Regelunterricht aus Zeitgründen nicht zu thematisieren. Die lehrende Person verschriftlicht an der Tafel oder ein anderes Medium verwendend eine Aufgabenstellung, in der die Zielfunktion zu minimieren ist. Es bietet sich folgende Minimierungsaufgabe aus Timischl et al. (2017):

Beispiel 6.1: *„Ein Lebensmittelbetrieb beabsichtigt Konserven herzustellen, die im Notfall den Tagesbedarf eines Menschen an Eiweiß, Fett und Kohlenhydraten decken. Dazu stehen zwei Lebensmittelprodukte A und B zur Verfügung. 1 kg des Produktes A enthält 120 g Eiweiß, 40 g Fett und 250 g Kohlenhydrate und kostet bei der Herstellung € 7. 1 kg des Produktes B enthält dagegen 80 g Eiweiß, 120 g Fett und 500 g Kohlenhydrate und kostet bei der Herstellung € 6. Es wird davon ausgegangen, dass ein Mensch im Mittel pro Tag mindestens 80 g Eiweiß, 80 g Fett und 400 g Kohlenhydrate zu sich nimmt. Ermittle die für die Notfallkonserve erforderlichen Mengen der beiden Lebensmittelprodukte A und B bei minimalen Herstellungskosten.“ (Timischl et al. (2017); S.19)*

Danach werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, selbständig die Lösung zu erarbeiten, indem sie folgende fünf Gedankenschritte befolgen:

(1) Welche Größen sind mit x_1 und x_2 zu bezeichnen?

(2) Wie lautet die Zielfunktion?

(3) Wie sehen die Restriktionsbedingungen aus? Sind bei dieser Aufgabenstellung die Nichtnegativitätsbedingungen erforderlich?

(4) Wie sieht der Lösungsbereich aus? Ist er offen oder abgeschlossen?

(5) Wie ist das Minimum der Zielfunktion zu ermitteln?

Nachdem die Phase der selbständigen Arbeit mit einer Zeitangabe abgeschlossen ist, wird die Lösung durch eine Schülerin bzw. einen Schüler auf freiwilliger Basis mittels *GeoGebra* präsentiert.
Abschließend sollen sich die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der Unterrichtssequenz den Aufgaben aus dem Übungsblatt 4 widmen, um das erworbene Wissen zu festigen. Je nach persönlicher Leistung, wird die Bewältigung der Problemstellung unterschiedlich sein. Jede Schülerin bzw. jeder Schüler soll entsprechend seinem/ ihrem Tempo arbeiten. Dabei übernimmt die Lehrkraft die Rolle eines Lernberaters bzw. einer Lernberaterin. Als Hausübung sollen die lernenden Personen die essenziellen Merkmale und Unterschiede zwischen dem Maximal- und Minimalproblem ausarbeiten.

6.7. Unterrichtssequenz 7: Lineare Optimierung in zwei Variablen - Lösbarkeit

Diese Unterrichtssequenz beginnt mit Überprüfung der als Hausübung ausgearbeiteten Unterschiede zwischen dem Maximal- und Minimalproblem. Es sollte den Schülerinnen und Schülern aufgefallen sein, dass die Lösungsmenge ein geschlossenes oder offenes Vieleck in den behandelten Aufgabenstellungen war. Bei einem Maximalproblem wird die Zielfunktion bis zu dem entferntesten Eckpunkt der Lösungsmenge parallel verschoben. Bei einem Minimalproblem kommt als Optimallösung der nächstliegende Eckpunkt des Lösungsbereichs in Frage.
Danach widmet sich die siebente Unterrichtssequenz der Lösbarkeit von linearen Optimierungsproblemen in zwei Variablen. Die Schülerinnen und Schüler werden mit den Fragen konfrontiert:

- ✓ Ist das lineare Optimierungsproblem in zwei Variablen eindeutig lösbar?
- ✓ Kann das lineare Optimierungsproblem mehrere optimale Lösungen besitzen?
- ✓ Besitzt das lineare Optimierungsproblem immer eine Lösung?

Um die Beantwortung dieser Fragen zu erleichtern, werden den Schülerinnen und Schülern drei Abbildungen präsentiert, welche die Zielfunktion und den Lösungsbereich eines Maximalproblems darstellen (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 1, S. 165). Die lernenden Personen sollen die optimale Lösung bestimmen und dabei zu folgenden Schlussfolgerungen kommen:

- ✓ Das Maximalproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Lösungsmenge abgeschlossen ist und wenn keine der Randgeraden die gleiche Steigung wie die Zielfunktion aufweist.
- ✓ Das Maximalproblem besitzt mehrere optimale Lösungen, wenn die Lösungsmenge abgeschlossen ist und wenn eine der Randgeraden die gleiche Steigung wie die Zielfunktion aufweist.
- ✓ Das Maximalproblem ist nicht lösbar, wenn die Lösungsmenge nach oben offen ist. Dadurch kann die Zielfunktion beliebig parallel verschoben werden und dadurch wird ihr Wert unbeschränkt groß.

Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler mit einer Zeitangabe aufgefordert, sich drei grafische Lösungen auszudenken, die alle oben erwähnten Fälle der Lösbarkeit bei einem Minimalproblem decken. Nach Ablauf der Zeit werden die Lösungen an der Tafel präsentiert und einer Diskussion unterworfen. Als Hausübung sollen die lernenden Personen Aufgabe 2 und 3 aus dem Übungsblatt 5 mittels *GeoGebra* lösen.

6.8. Unterrichtssequenz 8: Lineare Optimierung in zwei Variablen – ganzzahlige Optimierung

In den vorangegangenen Unterrichtssequenzen wurden die unbekannten Variablen nur den Nichtnegativitätsbedingungen unterworfen. Es stellt sich die Frage, wie die Lösung des linearen Optimierungsproblems zu ermitteln ist, wenn sie der Ganzzahligkeit genügen soll und wenn sie so eine nicht besitzt. Den lernenden Personen soll bewusst werden, dass eine Rundung der nichtganzzahligen Lösung nicht unbedingt die optimale Lösung einerseits ist und dass anderseits die optimale Lösung innerhalb des Lösungsbereichs liegen kann. Die Verfahren, welche zum Einsatz bei der diskreten Optimierung kommen, wurden im Kapitel 4 der vorliegenden Diplomarbeit präsentiert. Die diskrete Optimierung kann anhand des Beispiels 4.4 (siehe S. 90-93) demonstriert und gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden, damit sie einen Einblick in die komplexe Problematik dieser Aufgabenstellung als abschließende Unterrichtssequenz zum Thema „Lineare Optimierung in zwei Variablen“ bekommen. Als Hausübung sollen die lernenden Personen ein Optimierungsproblem formulieren, dessen optimale Lösung ganzzahlig ist und innerhalb des Lösungsbereichs liegt.

7. Zusammenfassung

Das Flexibilisieren der Lebensumstände und das Wegfallen diverser wirtschaftlicher Barrieren treiben eine raschere Globalisierung der Prozesse im wirtschaftlichen Bereich an. Dadurch sind Unternehmen, um ihre Überlebens- und Erfolgschancen zu garantieren, gezwungen, ihre Managementstrategien stets zu reflektieren und solche zu entwickeln, die ihnen die Maximierung der Profite bzw. die Minimierung der anfallenden Kosten gewährleisten. Das Wissensgebiet, welches ihnen eine fundierte theoretische Basis für die Optimierung ihrer Strategien bietet, ist in den Wirtschaftswissenschaften unter Operations Research bekannt. Zu den primären Aufgaben von Operations Research gehören die Auseinandersetzung mit einem realen Entscheidungsprozess, seine Abbildung durch ein Optimierungsmodell und schlussendlich die Entwicklung eines Lösungsansatzes, sodass die verfolgten Strategien optimale Anwendung finden. Ein wesentlicher Teil von Operations Research setzt sich mit der linearen Optimierung auseinander, welche im Mittelpunkt der vorliegenden Diplomarbeit steht.

Die lineare Optimierung wirtschaftlicher Prozesse ist für schulische Zwecke in den Berufsbildenden Höheren Schulen von besonderer Relevanz, da in diesen Schulformen angewandte Mathematik gelehrt wird. Die Veranschaulichung von authentischen Aufgabenstellungen in einer außermathematischen Situation sichert einerseits den durch die Lehrpläne geforderten Realitätsbezug und sensibilisiert die Schülerinnen und Schüler anderseits dafür, dass die Disziplin Mathematik keine abstrakte Welt darstellt, die keine Anwendungsmöglichkeiten offeriert.

Das Modellieren diverser praxisbezogener Sachverhalte mittels der linearen Optimierung ist im Rahmen der teilstandardisierten Reife- und Diplomprüfung im Kompetenzkatalog des Cluster W1 fest verankert. In dem erwähnten Cluster ist einerseits das Aufstellen, Lösen und Interpretieren von linearen Ungleichungssystemen in zwei unbekannten Variablen und anderseits das Ermitteln und Interpretieren der optimalen Lösung einer linearen Zielfunktion mittels geeigneten Technologieeinsatzes gefordert.

Um den oben angeführten Anforderungen zu genügen, verfolgt die vorliegende Arbeit das Ziel, eine prägnante, gut strukturierte und logisch nachvollziehbare Auseinandersetzung mit den Grundlagen der linearen Optimierung zu liefern, welche als potenzielles Aufschlagwerk von lehrenden Personen verwendet werden könnte, um

den eigenen Mathematikunterricht zu planen, entwickeln und reflektieren. Dieser Aspekt ist meiner Ansicht von äußerster Bedeutsamkeit, da dies in den gängigen Schulbüchern ausgearbeitete theoretische Wissen als unzureichend einzustufen ist, um die lineare Optimierung als Modellierungsansatz zu verstehen und einen für die Schülerinnen und Schüler plausiblen Unterricht mit praxisbezogenen Sachverhalten zu bieten. Schlussendlich ist festzuhalten, dass während meines Lehramtsstudiums keine einzige Lehrveranstaltung im Rahmen der Fachdidaktik angeboten wurde, die sich mit dieser Problematik auseinandersetzt, was im höchsten Grade erstaunlich ist, wenn man bedenkt, dass diese Inhalte für zahlreiche Schülerinnen und Schüler für die erfolgreiche Absolvierung der teilstandardisierten Reife- und Diplomprüfung in Mathematik von Bedeutung sind.

In vielen Aufgabenstellungen, welche mittels der linearen Optimierung zu bewältigen sind, werden direkt bzw. indirekt diskrete Werte für die zu untersuchenden Größen als Optimallösung verlangt. Ein Runden der ermittelten nicht diskreten Lösung auf ganze Zahlen liefert nicht notwendigerweise die optimale ganzzahlige Lösung. Die Mehrheit der analysierten Schulbücher bietet Aufgabenstellungen, die als optimale Lösung diskrete Werte aufweisen, ohne die ganzzahlige lineare Optimierung behandelt zu haben, was meiner Meinung nach sehr bedenklich ist. Dadurch verstärkt sich bei den lernenden Personen die Vorstellung, dass Probleme der linearen Optimierung immer eine ganzzahlige Lösung besitzen. In diesem Zusammenhang bietet die vorliegende Arbeit eine komprimierte Auseinandersetzung der diskreten linearen Optimierung, die auch mittels Rechenaufgaben veranschaulicht wurde. Darüber hinaus ist zu erwähnen, dass beispielsweise das Schnittebenenverfahren von Gomory problemlos mit Hilfe eines geeigneten Technologieeinsatzes wie *GeoGebra* durchzuführen ist.

Die Unterstützung durch Computertechniken ist aus zahlreichen zu unterrichtenden Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts nicht mehr weg zu denken. Nichtsdestotrotz stellt sich die Frage, welche Programme sollen im Unterricht Anwendung finden und an welcher Stelle bezüglich der Unterrichtssequenzen sollen sie eingesetzt werden. Der Technologieeinsatz sollte, meiner Ansicht nach, erst dann im Unterricht gefordert werden, wenn die Schülerinnen und Schüler die theoretischen Grundlagen der linearen Optimierung gefestigt und die erforderlichen Rechentechnikengen anhand einfacher Problemstellungen ausreichend gut geübt haben. Ansonsten besteht die Gefahr, dass die lineare Optimierung zu einer Eintipp-Aufgabe degradiert wird. Was die im Unterricht eingesetzten Programme anbelangt, sollte nicht das Ziel verfolgt werden, eine möglichst

große Auswahl zu bieten, da die verschiedenen Computertechniken unterschiedliche Handhabung aufweisen. Ich bin der Ansicht, dass das Programm *GeoGebra* für die Bewältigung der Aufgabenstellungen der linearen Optimierung den handlungsfreundlichsten Lösungsansatz bietet, was bei *Microsoft Excel* nicht der Fall ist. Die Anwendung dieses Tabellenkalkulationsprogramms ist empfehlenswert, wenn das Simplexverfahren für die Ermittlung der optimalen Lösung gefordert wird. Da die Auseinandersetzung mit dem Simplexverfahren in den BHS-Lehrplänen nicht vorgesehen ist, kann dies nur im Rahmen eines Wahlfaches vorgenommen werden. In so einem Fall würde ich das TKP *Microsoft Excel* einsetzen, wenn keine grafische Lösung zu erarbeiten ist. Abschließend möchte ich festhalten, dass die gängige zur Verfügung stehende mathematische Software als Unterstützung des sachbezogenen Kontextes und nicht als Ersatz für den Mathematikunterricht anzusehen ist.

Schlussendlich offeriert die vorliegende Arbeit einen Unterrichtsvorschlag, bestehend aus acht Sequenzen, der einerseits die Struktur des Denkprozesses im Bereich der linearen Optimierung in zwei unbekannten Variablen logisch nachvollziehbar abbildet und anderseits den zu beachtenden fachdidaktischen Grundsätzen genügt. Die Strukturierung der mathematischen Inhalte bildet, meiner Meinung nach, das Wesen des Unterrichts. Ein schlecht strukturierter Unterricht könnte dazu führen, dass die Lehrinhalte von den Schülerinnen und Schülern nicht verstanden werden und als Folge dessen, ihre Freude an Mathematik gedämpft wird. Den Höhepunkt dieses Unterrichtsvorschlags bilden die ausgearbeiteten Übungsblätter, welche kompatibel mit den in der entsprechenden Sequenz vorgenommenen Lehrinhalten sind. Dadurch bekommen die daran interessierten lehrenden Personen die Möglichkeit, den von mir ausgearbeiteten Unterrichtsvorschlag 1:1 zu erproben und daraus resultierend eigene Verbesserungsvorschläge vorzunehmen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die vorliegende Diplomarbeit eine fundierte theoretische Grundlage bezüglich der linearen Optimierung bietet, die in den Kontext des computerunterstützten Mathematikunterrichts gestellt ist und in einem ausführlich ausgearbeiteten Unterrichtsvorschlag die theoretischen und praktischen Aspekte schülerInnengerecht vereinigt.

Literaturverzeichnis

Ableidinger, F. (2003): Begründen und Beweisen mit dynamischer Geometriesoftware. Diplomarbeit. Wien.

Ableitinger, C. (2008): Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht. Chancen aus der Sicht der Mathematik. Dissertation. Wien.

Achterberg, T.; T. Koch und A. Martin (2005): Branching Rules Revisited. Operations Research Letters 33, S. 42-54.

Allerstorfer, C. et. al (2016): Angewandte Mathematik @ HUM 2. Veritas Verlags-u. HandelsgmbH, Linz.

Alten, H.-W. et. al. (2003): 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer-Verlag, Berlin.

Aspetsberger, K. und G. Funk (1984): Experiments with muMATH in Austrian high schools. In: SIGSAM Bull, 18(4), S. 4-7.

Aue, V. et al. (2015): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren. Online: https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf (Zugriff 03.07.2018).

Benders, J. F. (1962): Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerische Mathematik 4, S. 238-252.

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 23, S.15-38.

Borgwardt, K. H. (2010): Aufgabensammlung und Klausurentrainer zur Optimierung. Für die Bachelorausbildung in mathematischen Studiengängen. Vieweg-Teubner-Verlag, Wiesbaden.

Bundesministerin für Bildung und Frauen (Juni 2015): Änderung der Prüfungsordnung BHS, Bildungsanstalten, der Prüfungsordnung BMHS und der Prüfungsordnung Bildungsanstalten Online: https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/recht/erk/BGBl_II_160_2015.pdf?6a8sjn (Zugriff 12.07.2018).

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Allgemeine Information, Angewandte Mathematik unter https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff: 12.07.2018).

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Konzepte und Kompetenzen gültig ab dem Maturatermin 2017/18, Kompetenz- und Bildungskataloge unter https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/angewandte-mathematik/allgemeine-informationen/ (Zugriff 12.07.2018).

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung an BHS. Online: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_bhs.html (Zugriff 12.07.2018).

Burkard, R. E (1972): Methoden der ganzzahligen Optimierung. Springer-Verlag, Wien New York.

Burkard, R. E (2009): Einführung in die mathematische Optimierung. Skriptum zur Vorlesung im SS 2009, Institut für Mathematik, Technische Universität Graz. Online: https://www.opt.math.tugraz.at/~hatzl/Vorlesungen/MathoptSS09/Opt.pdf (Zugriff: 09.07.2018).

Burkard, R. E. und U. T. Zimmermann (2012): Einführung in die mathematische Optimierung. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Chen, D.-S.; R.G. Batson und Y. Dang (2010): Applied integer programming: Modeling and solution. Wiley, Hoboken.

Crowder H. und J. M. Hattingh (1975): Partially normalized pivot selection in linear programming. Mathematical Programming Study, 4, S. 12-25.

Dantzig G. B. (1966): Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

Domschke, W., A.; R. K. Drexl und A. Scholl (2015): Einführung in Operations Research. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Elschenbroich, H. J. (2001): Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software. Verlang Franzbecker, Hildesheim.

Fürst, S. (2012): Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. In: Praxisbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe, Band 2, Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.), Leykam, Graz.

Gass, S. I. und A. A. Assad (2005): An annotated timeline of Operations Research – An informal history. Kluwer, New York.

Goldfarb D. und J. K. Reid (1977): A practicable steepest-edge simplex algorithm. Mathematical Programming, 12, S. 361-371.

Gomory, R. E. (1958): Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. Bulletin of the American Mathematical Society 64, S. 275-278.

Grötschel, M. (2015): Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung (Algorithmische Diskrete Mathematik I, kurz ADM I). Skriptum zur Vorlesung im WS 2014/2015, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin. Online: http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1415/Skriptum_ADM_I-2015-02-16.pdf (Zugriff: 09.07.2018).

Harris, P. M. S. (1973): Pivot selection methods for the devex LP code. Mathematical Programming, 5, S. 1-28.

Henn, H.-W. (2004): Computer-Algebra-Systeme – Jünger Wein oder neue Schläuche? Journal für Mathematik-Didaktik 25/4, S. 198-220.

Henning, H. und M. Keune (2001): Diskrete Modellierung und Tabellenkalkulation. Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 28-37.

Hischer, H. (2002): Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin.

Hoffman A. J. und J. B. Kruskal (1956): Integral boundary points of convex polyhedra. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, (eds.) Linear inequalities and related Systems. Princeton University Press, Princeton, N.J., 223-246.

Hohenwarter, M. (2006): GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. Dissertationsschrift. Salzburg

Hölzl, R. (1997): Dynamische Geometriesysteme – softwaretechnologische Entwicklungen, didaktische Diskussionen und unterrichtspraktische Erfahrungen. In: H. Hischer (Hrsg.) Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht?. Verlag Franzbecker, Hildesheim, S. 34-39.

Jensen, P. und J. Bard (2003): Operations Research. Models and Methods. John Wiley & Sons, New York.

John, V. (2009): Mathematische Optimierung. Skriptum zur Vorlesung im SS 2009, Weierstraß-Institut Berlin und Institut für Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin. Online: https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/OPTI/SS09/opti.pdf (Zugriff: 09.07.2018).

Kallrath, J. (2013): Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis – Mit Fallstudien aus Chemie, Energiewirtschaft, Papierindustrie, Metallgewerbe, Produktion und Logistik. Springer-Verlag, Spektrum, Wiesbaden.

Klein, R. und A. Scholl (2011): Planung und Entscheidung – Konzepte, Modelle und Methoden einer modernen betriebswirtschaftlichen Entscheidungsanalyse. Vahlen, München.

Koop A. und H. Moock (2008): Lineare Optimierung. Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

Körth H. et al. (1975): Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Westdeutscher Verlag GmbH, Opladen.

Lehrplan Höhere Bundeslehranstalt für Wirtschaftsberufe. Online: https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2074/HLW.pdf/ (Zugriff 12.07.2018)

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie, Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen, Berlin.

Neumann, K. und M. Morlock (2002): Operations Research. Hanser, München - Wien.

Opitz, O. und R. Klein (2014): Mathematik – Lehrbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften. Oldenbourg, München - Wien.

Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD) (Hrsg.) (2015). Pisa 2015 Ergebnisse im Fokus . Verfügbar unter https://www.oecd.org/berlin/themen/pisa-studie/PISA_2015_Zusammenfassung.pdf (Zugriff 03.01.2018)

Österreichische Mathematische Gesellschaft (Juni 2012): MATHE-Brief, Nr. 26. Online: http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief26.pdf (Zugriff 13.07.2018).

Pauer, F. et al. (2016): Mathematik anwenden HUM 2. Österreichischer Bundesverlang Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien.

Reichel H.-C et al. (1992): Lehrbuch der Mathematik 5. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Schneider, E. (2002): Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Klagenfurter Beiträge zu Didaktik der Mathematik, Band 2. Profil, Wien.

Schüller, P. et al. (2009): Angewandte Mathematik BHS. Wien: BMUKK. Online: https://www.bildungsstandards.berufsbildendeschulen.at/sites/default/files/broschuere/BBS-Bildungsstandards-Broschuere-Angewandte-Mathematik-BHS.pdf (Zugriff 03.07.2018).

Schulorganisationsgesetz (SchOG). Online: https://www.jusline.at/gesetz/schog (Zugriff 12.07.2018).

Schulunterrichtsgesetz-Novelle BGBl. I Nr. 52/2010 (Mai 2013). Online: https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/I/2013/75 (Zugriff 12.07.2018).

Stepan, A. und E. Fischer (2001): Betriebswirtschaftliche Optimierung. Einführung in die quantitative Betriebswirtschaftslehre. Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Stingl, P. (2002): Operations Research. Linearoptimierung. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München/Wien.

Timischl, W. et al. (2017): Angewandte Mathematik 2, HUM kompetenzorientiert. Verlag E. Dorner GmbH, 2. Auflage, Wien.

Veinott A. F., Jr. und G. B. Dantzig (1968): Integral extreme points. SIAM Review 10 (3), 371-372.

Weigand, H.-G. (2013): Technologien im Mathematikunterricht (TiMu) – eine fortwährende Herausforderung, in: M. Ruppert und J. Wörler (Hrsg.), Technologien im Mathematikunterricht, Springer-Verlag, Fachmedien Wiesbaden, S. ix-xii.

Weigang, H.-G.; T. Weth (2002): Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Spektrum, Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin.

Werner J. (2001): Operations Research, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2000/2001. Online: http://num.math.uni-goettingen.de/werner/opres.pdf (Zugriff: 12.07.2018).

Wessenberg, B. et al. (2016): Kompetenz: Mathematik, Band 2 für Höhere Lehranstalten für Humanberufe. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Wittmann, G. (2001): Tabellenkalkulationen und diskrete Mathematik in der Sekundarstufe I – Darstellen und Interpretieren als zentrale Aktivitäten. Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, S. 38-51.

Anhang

Abstract Deutsch

Die vorliegende Diplomarbeit verfolgt die Zielsetzung, die lineare Optimierung in zwei und mehreren Variablen vorzustellen, da diese Inhaltsdimension ein verpflichtender Bestandteil der teilstandardisierten Reife- und Diplomprüfung der Höheren Lehranstalten für Wirtschaftlichen Berufe, Tourismus, Mode und Design, Kunst (HUM) und der Höheren Lehranstalten für Land- und Forstwirtschaft (HLFS) darstellt. Dabei liegt das Augenmerk auf die Ausarbeitung der für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht erforderlichen Grundlagen in einer gut gegliederten, übersichtlichen und logisch nachvollziehbaren Form.

Um die Zielsetzung der Arbeit zu erreichen, baut die Autorin in eigens dafür vorgesehenen Kapiteln das Wissensfundament auf. Im Konkreten werden die Formen, die grundlegenden Eigenschaften und abschließend das grafische Lösen der linearen Optimierungsprobleme in zwei Variablen präsentiert, bevor sich die Autorin dem Simplexverfahren und der ganzzahligen linearen Optimierung widmet. Dabei spielt der Technologieeinsatz stets eine essenzielle Rolle. Im Anschluss an das Wissensfundament folgt eine fachdidaktische Auseinandersetzung mit der linearen Optimierung, in der die Grundkompetenzen, die Lehrpläne und die approbierten Lehrbücher unter die Lupe genommen werden. Die Autorin lässt die Möglichkeiten eines computerunterstützen und fächerübergreifenden Unterrichts nicht außer Acht, welche sich beim Befassen mit der linearen Optimierung unmittelbar ergeben. Den Abschluss der Arbeit bilden die ausgearbeiteten Unterrichtssequenzen, welche direkt als Unterrichtsvorschlag Anwendung finden können. Die Umsetzung jeder Unterrichtssequenz wird durch die Bereitstellung entsprechender Übungsblätter unterstützt.

Abstract English

The current diploma thesis targets the objective to deal intensively with the linear optimization in two and more variables as this content dimension depicts an inherent part of the semi-standardized matriculation and final examination in the higher schools for business, tourism, fashion and design, and art as well as in the higher schools for agriculture and forestry. However, special attention is paid to the preparation of basics in a well-structured, clearly arranged and logically comprehensible form, which are required for an application-oriented mathematic lesson.

In order to achieve the objective of the thesis, the author builds the foundation of knowledge in chapters designed for this purpose. Specifically, the forms, the essential characteristics and finally the graphical solving of linear optimization problems with two variables are presented, before she addresses the simplex method and the integer linear optimization. The application of technology always plays a crucial role in this thesis. Subsequent to the foundation of knowledge, a subject-related didactical discussion of the linear optimization follows, which takes into consideration the basic mathematical competences, the syllabuses and the approbated teaching materials. The author does not disregard the possibilities of computer-aided and interdisciplinary teaching that immediately arise when dealing with linear optimization problems. The conclusion of the current thesis is the elaborated teaching sequences, which can be applied directly as a lesson proposal. The implementation of each teaching sequence is supported by the provision of appropriate exercise sheets.

Übungsblatt 1: Lineare Gleichungen und Ungleichungen in zwei Variablen

<u>Aufgabe 1:</u> Ermitteln Sie grafisch die Lösung der folgenden Gleichungen in zwei Variablen. Bestimmen Sie, ob die Koordinaten der Punkte $A=(2|-3)$, $B=(0|3)$ und $C=(4|-8)$ der Gleichung genügen.

a) $3x+2y=6$ **b)** $-x+2y=-8$ **c)** $\frac{5}{2}x+y=2$

<u>Aufgabe 2:</u> Stellen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen in zwei Variablen grafisch dar. Beurteilen Sie, ob die Ungleichung eine offene oder eine abgeschlossene Halbebene beschreibt.

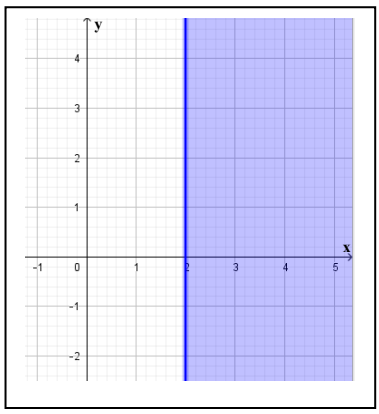
a) $x \geq -3$ **b)** $2y<5$ **c)** $-4x+2y \leq -1$

d) $\frac{2}{x} > -\frac{1}{3}$ mit $x \neq 0$ **e)** $-\frac{3}{2} \leq \frac{4}{y}$ mit $y \neq 0$ **f)** $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y<2$

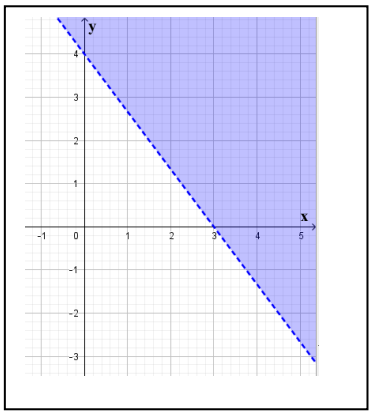
g) $2(x-4)-3(y-1) \leq x-y$ **h)** $(x-1)^2-(2y+1)^2 \geq -4\left(y^2-\frac{x^2}{4}\right)$

<u>Aufgabe 3:</u> Beschreiben Sie die folgende Halbebene durch eine passende Ungleichung in zwei Variablen. Geben Sie an, ob die Halbebene offen bzw. abgeschlossen ist.

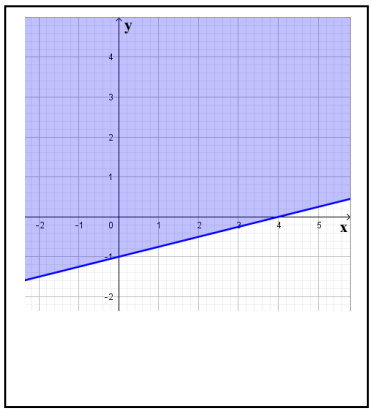
a)



b)



c)



Weitere Rechenaufgaben zur linearen Ungleichungen in zwei Variablen findet man in Wessenberg et al. (2016), S. 6 und in Timischl et al. (2017), S. 10.

Übungsblatt 2: Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen

<u>Aufgabe 1:</u> Ermitteln Sie grafisch den Lösungsbereich des linearen Ungleichungssystems in zwei Variablen. Bestimmen Sie, welche Art von Lösungsbereich – leer, beschränkt, unbeschränkt – vorliegt.

a) $I: x \geq -3$, $II: y \leq 5$

b) $I: 2x - y < 1$, $II: x + 3y \geq 6$

c) $I: 2x - 5y < 10$, $II: -2x + 5y \geq -1$

<u>Aufgabe 2:</u> Ermitteln Sie mit Hilfe von *GeoGebra* den Lösungsbereich des linearen Ungleichungssystems in zwei Variablen. Berechnen Sie die Koordinaten der entstehenden Schnitt- bzw. Eckpunkte.

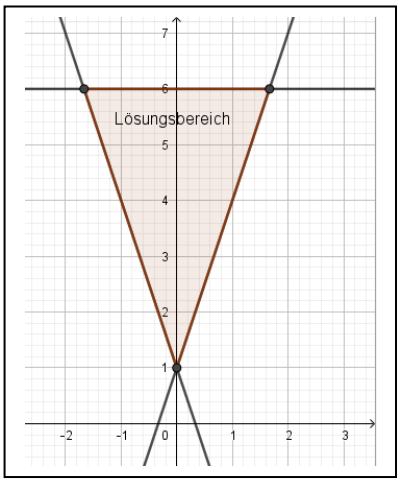
a) $I: x - 5y > -4$, $II: 2x - 4y \leq 1$, $III: x + y \geq 0$

b) $I: x - y \leq 4$, $II: y \leq 5$, $III: x \geq 0$, $IV: y \geq 0$

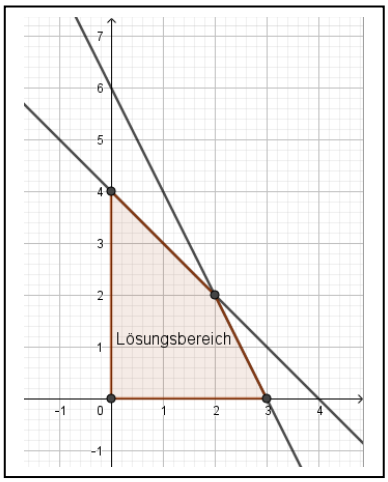
c) $I: -3x + 4y \leq 10$, $II: x - 2y \leq 6$, $III: 3x + 4y \leq 36$, $III: x \geq 4$, $V: x \geq 0$

<u>Aufgabe 3:</u> Stellen Sie das lineare Ungleichungssystem zu den folgenden grafisch abgebildeten Lösungsbereichen auf.

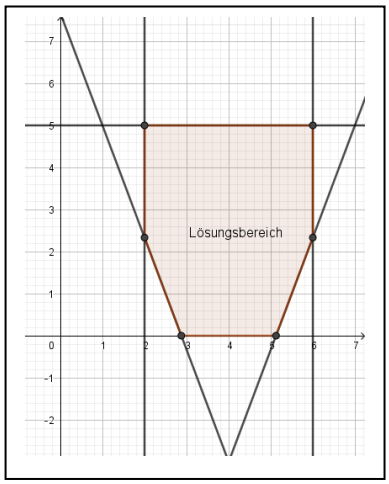
a)



b)



c)



Weitere Rechenaufgaben zur linearen Ungleichungen in zwei Variablen findet man in Wessenberg et al. (2016), S. 9-10 und in Timischl et al. (2017), S. 13-14.

Übungsblatt 3: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Maximum

Aufgabe 1: Die Landwirtin Olivia stellt am gut besuchten Kutschkermarkt jeden Samstag zwei Sorten selbsthergestellten Apfel- und Birnensaft aus, die in Ein-Liter-Flaschen abgefüllt sind. Sie kann aus Platzgründen nur 220 Flaschen am Stand aufbewahren. Pro Samstag verkauft sie höchstens 150 Flaschen Apfelsaft und 80 Flaschen Birnensaft. Der Verkaufspreis beträgt € 2,80 für 1 Liter Apfelsaft und € 3,00 für 1 Liter Birnensaft. Die Landwirtin möchte ihren Umsatz maximieren.

a) Ermitteln Sie das Ungleichungssystem in zwei Variablen, welches den Sachverhalt darstellt.

b) Stellen Sie die Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Umsatzes auf.

c) Berechnen Sie mittels *GeoGebra* den maximalen Umsatz, den die Landwirtin Olivia an einem Samstag erwirtschaften kann.

Aufgabe 2: Die Landwirtin Olivia überlegt zwei selbstgemachte Torten – Nuss- bzw. Obsttorte – anzubieten, da der Verkauf am Kutschermarkt sehr gut läuft. In der abgebildeten Tabelle sind die erforderlichen Zutaten, die Kapazität, die Kosten und der Verkaufspreis aufgelistet. Aus einer Torte lassen sich 8 Stücke schneiden.

	Nusstorte	**Obsttorte**	**Kapazität**
Mehl	400 g	150 g	10 kg
Zucker	200 g	100 g	5 kg
Butter	0 g	100 g	2 kg
Eier, Stück	6	3	120
Obst nach Saison	0 g	500 g	5 kg
Nüsse	450 g	0 g	15 kg
Kosten pro Torte	€ 9,60	€ 5,60	
Verkaufspreis pro Stück	*€ 2,50*	*€ 1,80*	

x … Anzahl der verkauften Nusstortenstücke

y … Anzahl der verkauften Obsttortenstücke

a) Stellen Sie das Ungleichungssystem in zwei Variablen auf, welches den Sachverhalt darstellt.

b) Ermitteln Sie die Termdarstellung der Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Gewinns.

c) Berechnen Sie mittels *GeoGebra* den maximalen Gewinn, den die Landwirtin Olivia an einem Samstag mit dem Tortenverkauf erzielen kann.

d) Wie viel Torten muss sie backen, damit sie den Bedarf der Kundinnen und Kunden deckt?

e) Auf wie viele Euro beläuft sich ihr maximaler Gewinn?

Aufgabe 3: Das Café Franze am Kutschermarkt möchte bei der Landwirtin Olivia Äpfel, Birnen und Zwetschken für die Herstellung der eigenen Torten und der frisch gepressten Säfte bestellen. Die Betreiberin kann pro Woche 50 Kisten kaufen, obwohl darunter mindestens 20 Kisten Äpfel, mindestens 10 Kisten Birnen und mindestens 15 Kisten Zwetschen sein müssen. Außerdem müssen mindestens doppelt so viele Kisten Zwetschen als Birnen vorhanden sein. Die Landwirtin Olivia erwirtschaftet pro Kiste Äpfel € 2,50, pro Kiste Birnen € 3,00 und pro Kiste Zwetschken € 3,50.

a) Wodurch unterscheidet sich dieses Problem der linearen Optimierung von diesen in der Aufgabe 1 bzw. Aufgabe 2 formulierten Sachverhalten?

b) Erstellen Sie die Ungleichungen, mit denen die Lösungsmenge zu bestimmen ist.

c) Stellen Sie die Zielfunktion zur Bestimmung des maximalen Verkaufsgewinns auf.

d) Berechnen Sie mittels *GeoGebra* wie viele Kisten je Obstsorte die Landwirtin Olivia dem Café Himmelblau verkaufen muss, damit sie ihren Gewinn maximiert.

e) Wie hoch ist ihr maximaler Gewinn?

Weitere Rechenaufgaben zur linearen Ungleichungen in zwei Variablen findet man in Wessenberg et al. (2016), S. 12-13 und in Timischl et al. (2017), S. 22-25.

Übungsblatt 4: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Minimum

Aufgabe 1: Die taiwanesische Künstlerin Lin Wu fertigt am Samstagsmarkt in Taipei Armbänder und Ringe an. Für die Anfertigung der Armbänder zu Hause benötigt sie 1,5 Stunden pro Stück, für die Finalisierung am Markt 15 Minuten. Die Ringe kreiert sie nach Anweisungen der Kundinnen ausschließlich am Markt und benötigt dafür 30 Minuten. Zu Hause stehen Frau Wu mindestens 15 Stunden pro Woche zur Verfügung. Der Kunstmarkt ist von 9:00 bis 18:00 Uhr am Samstag geöffnet. Sie verbringt am Markt mindestens 5 Stunden. Die Materialkosten für ein Armband betragen höchstens 240 NT$ und für einen Ring höchstens 160 NT$.

Quelle: Eigenes Foto

a) Erstellen Sie die Ungleichungen, mit denen die Lösungsmenge zu bestimmen ist.

b) Stellen Sie die Zielfunktion zur Bestimmung der minimalen Materialkosten auf.

c) Wie viele Armbänder und Ringe muss die Künstlerin Wu am Samstagsmarkt verkaufen, damit ihre Materialkosten minimal gehalten werden? Ermitteln Sie die Lösung mittels *GeoGebra*.

d) Die Künstlerin verfügt wöchentlich über ein Budget von 4.500 NT$. Ist dieser Betrag ausreichend, um die optimale Menge an Armbändern und Ringen herzustellen?

Aufgabe 2: Die Dumplings-Spezialistin Yuting Sun verkauft am Samstagmarkt in Taipei Dumplings „Zongzi“ mit gegrilltem Fleisch. Die Hauptzutaten für die Zubereitung sind Klebereis, gegrilltes Fleisch und Bambusblätter. 1 kg Klebereis kostet 80 NT$ und enthält 970 kcal. 1 kg Schweinsschulter kosten 240 NT$ und enthält 3 900 kcal. Die Kosten für die Bambusblätter sind zu vernachlässigen, da sie diese kostenlos bezieht. Ein „Zongzi“ soll mindestens 60 g wiegen und nicht mehr als 1500 kcal enthalten. Das Verhältnis Klebereis zu Fleisch soll 4:1 nicht übersteigen.

Quelle: Eigenes Foto

Frau Sun möchte die Dumplings so zubereiten, dass die Kosten pro Stück möglichst minimal bleiben.

a) Geben Sie alle Ungleichungen an, welche die Restriktionen beschreiben, unter welchen ein Stück Zongzi zubereitet wird.

b) Stellen Sie die Zielfunktion auf, mit welcher die minimalen Kosten zu bestimmen sind.

c) Berechnen Sie mittels *GeoGebra*, mit welchen minimalen Kosten pro Stück Frau Sun zu rechnen hat.

Hinweis: *Die für ein Stück verwendete Menge Klebereis in kg soll mit* ***x****, die Menge gegrilltes Fleisch in kg mit* ***y*** *bezeichnet werden.*

Aufgabe 3: Frau Yuting Sun bezieht ihr Schweinefleisch von dem Züchter Zhyoung Chen in der Gegend von Taipei. Damit das gegrillte Fleisch sehr bekömmlich schmeckt, müssen die Schweine mit gewissen Mindestmengen der Vitamine V_1 und V_2 ausreichend versorgt werden. Die Vitamine sind in den Futtermitteln F_1 und F_2 vorhanden, die Herr Chen fertig gemischt bezieht.

In der abgebildeten Tabelle sind der Vitamingehalt, die Preise pro kg für das jeweilige Futtermittel und den Mindestbedarf pro Tag und Schwein an Vitaminen aufgelistet.

	Vitamin V_1 pro kg	**Vitamin V_2 pro kg**	**Einkaufspreis pro kg**
Futtermittel F_1	40 mg	20 mg	60 NT$
Futtermittel F_2	30 mg	30 mg	50 NT$
Mindestbedarf	90 mg	60 mg	

a) Stellen Sie das Ungleichungssystem und die Zielfunktion auf, mit denen die minimalen Kosten zu berechnen sind.

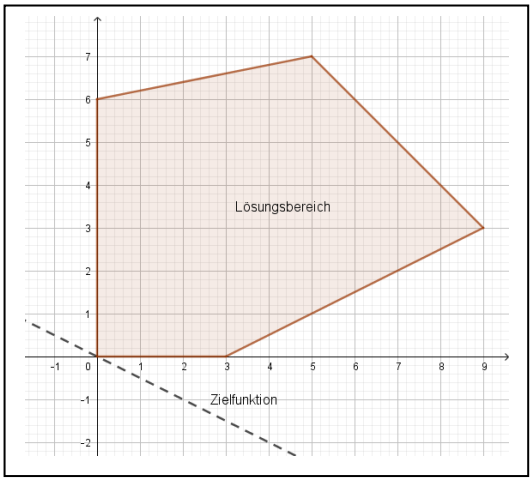
b) Ermitteln Sie mittels *GeoGebra* die Menge der Futtermittel F_1 und F_2, die an einem Schwein zu verfüttern sind, damit die Kosten minimal sind.

Weitere Rechenaufgaben zur linearen Ungleichungen in zwei Variablen findet man in Wessenberg et al. (2016), S. 14-15 und in Timischl et al. (2017), S. 22-25.

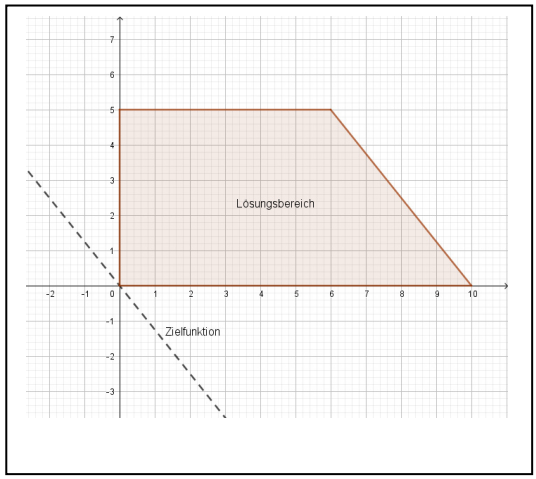
Übungsblatt 5: Lineare Optimierungsprobleme in zwei Variablen - Lösbarkeit

<u>Aufgabe 1:</u> Ermitteln Sie die Lösbarkeit des linearen Optimierungsproblems, wenn die Zielfunktion zu maximieren ist. Der Lösungsbereich und die entsprechende Zielfunktion sind unten abgebildet.

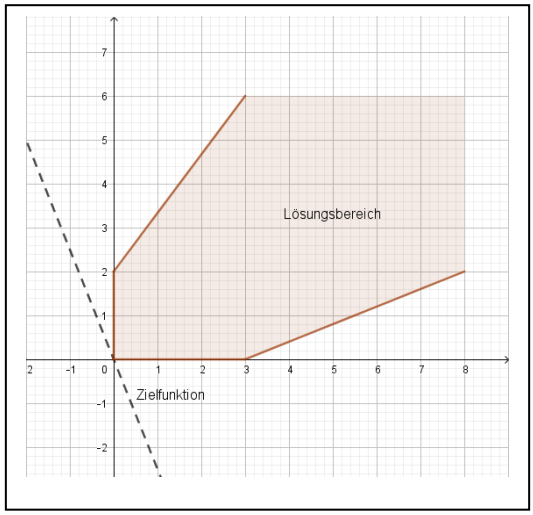
a)



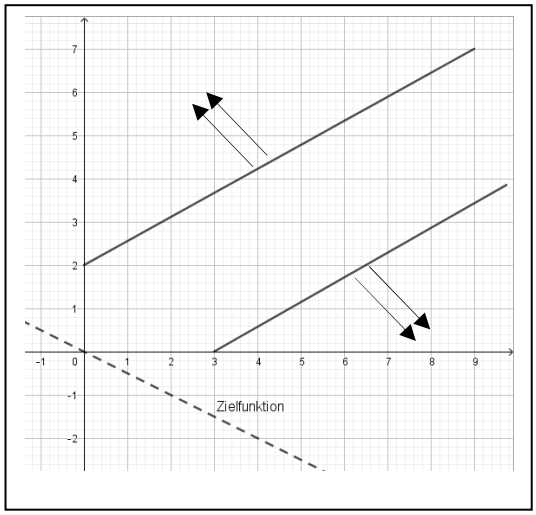
b)



c)



d)



<u>Aufgabe 2:</u> Die Familie Fertala pachtet einen Selbsterntegarten mit einer Fläche von 240 m^2. Sie plant den Garten mit Gemüse und Kräutern zu bepflanzen. Der pro Quadratmeter zu erwirtschaftende Gewinn für Gemüse beträgt € 50 und dieser für Kräuter € 30. Die Fläche, welche mit Kräutern bepflanzt wird, darf nicht größer als diese für Gemüse sein. Die Familie Fertala benötigt für den Anbau von Gemüse 12 Arbeitsstunden pro m^2, für die Kräuter nur 8 Stunden pro m^2. Für die gesamte Saison sollen höchstens 720 Arbeitsstunden zur Bewirtschaftung des Selbsterntegartens aufgewendet werden.

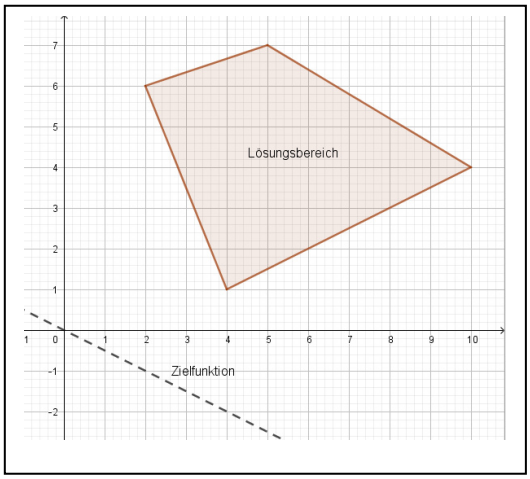
a) Stellen Sie das Ungleichungssystem und die Zielfunktion auf, mit denen der maximale Gewinn zu berechnen ist.

b) Bestimmen Sie, wie viele Quadratmeter Gemüse bzw. Kräuter anzubauen sind, damit ein maximaler Gewinn erwirtschaftet wird.

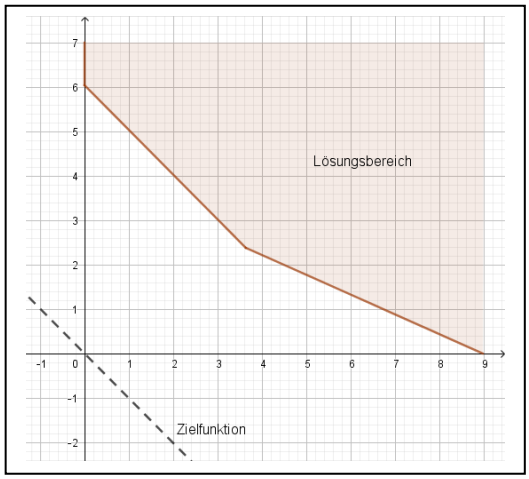
c) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn, den die Familie Fertala mit dem Selbsterntegarten erwirtschaften kann.

<u>Aufgabe 3:</u> Ermitteln Sie die Lösbarkeit des linearen Optimierungsproblems, wenn die Zielfunktion zu minimieren ist. Der Lösungsbereich und die entsprechende Zielfunktion sind unten abgebildet.

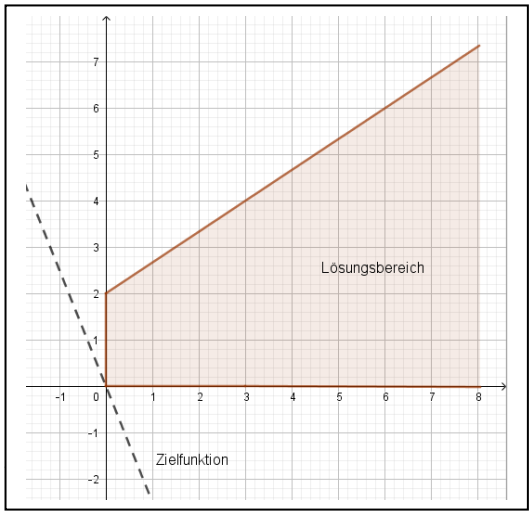
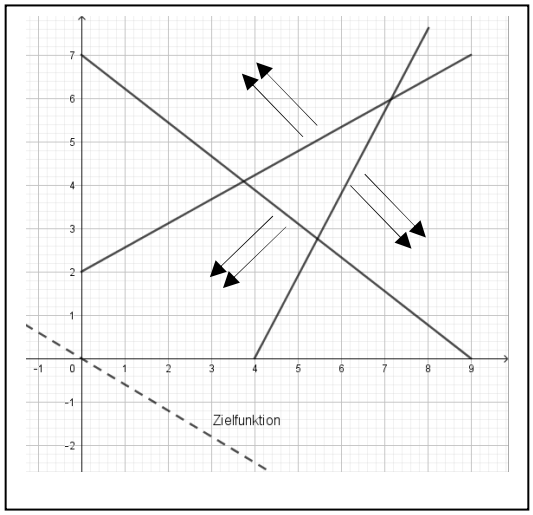
a)



b)



c)



d)