universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Warum man sich nicht auf die Wettervorhersage verlassen sollte – Eine mathematische Analyse des Lorenz-Attraktors“

verfasst von / submitted by

Alena Jony

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 423
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Chemie
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Kurzzusammenfassung

Mit einem stark vereinfachten Differentialgleichungssystem, dem Lorenz-System, beschrieb Edward Norton Lorenz 1963 das Verhalten unseres Wetters. Numerische Lösungen dieses scheinbar einfachen Systems zeigten aber alles andere als ein einfaches Bild und weckten breites Interesse. Die vorliegende Diplomarbeit beinhaltet eine mathematische Analyse des sogenannten Lorenz-Attraktors, die eine ausführliche Beschreibung des Systems geben soll. Nach einem kurzen Überblick über die Geschichte des Lorenz-System werden einfache Eigenschaften, das nichtperiodische Verhalten, die Dissipation und die Beschränktheit des Lorenz-Systems behandelt. Die besondere, komplexe Gestalt der Lösungen, die uns hier von einem „Attraktor“ oder sogar einem „seltsamen Attraktor“ sprechen lassen, wird aufgezeigt. Mehrere Beispiele für Bifurkationen werden angeführt. Nach einer Definition von Chaos wird das chaotische Verhalten des Systems untersucht. Ergebnisse der mathematischen Analyse werden im Hinblick auf das Wetter und die Wettervorhersage betrachtet. Ein Exkurs in die Schule stellt eine mögliche Behandlung des Lorenz-Systems im schulischen Mathematikunterricht vor.

Abstract

With a highly simplified system of differential equations, the Lorenz system, Edward Norton Lorenz described the behaviour of our weather in 1963. However, numerical solutions of this seemingly simple system proved to be anything but simple and generated broad interest. The following diploma thesis contains a mathematical analysis of the so-called Lorenz attractor, with which a detailed description of the system will be given. After a brief overview of the history of the Lorenz system, the thesis discusses simple properties, the nonperiodic behaviour, the dissipation, and the boundedness of the system. The particular, complex form of the solutions, which allow us to speak of an “attractor” or even a “strange attractor”, is shown. Several examples of bifurcations are given. After a definition of chaos, the chaotic behaviour of the system is analysed. Results of the mathematical analysis are examined with regard to the weather and the weather prediction. An excursion into school introduces possibilities of how the Lorenz system could be discussed in mathematics lessons.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich ganz herzlich bei ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith für die tolle Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Danke für die Geduld, die Zeit, die hilfreichen Rückmeldungen und die vielen unterstützenden Worte.

Besonderer Dank gilt auch meiner Familie, meinen Eltern und meinen Schwestern, und meinem Freund. Danke Mama, Papa, Romina, Corina und Lara, dass ihr immer für mich da seid und mir so viel Kraft gebt. Danke Alex für die vielen Aufmunterungen und die auch manchmal notwendigen Ablenkungen.

Auch bei meiner lieben Studienkollegin Laura, mit der ich viele schwierige Situationen meistern aber auch viele schöne Momente teilen durfte, möchte ich mich bedanken. Danke für deine Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 13

1.1 Thema und Ziel der Arbeit ... 13

1.2 Aufbau der Arbeit ... 14

2 Einführung in das Lorenz-System 15

2.1 Edward Norton Lorenz ... 15

2.2 Der Weg zum Lorenz-System ... 17

2.2.1 Das Modell von Saltzman ... 17

2.2.2 Die Gleichungen von Lorenz ... 22

2.3 Das Lorenz-System ... 23

2.3.1 Bedeutung der Parameter ... 23

2.3.2 Bedeutung der Variablen ... 25

3 Eigenschaften des Lorenz-Attraktors 27

3.1 Einfache Eigenschaften ... 27

3.1.1 Symmetrie ... 27

3.1.2 Die z-Achse ... 28

3.1.3 Gleichgewichtspunkte ... 30

3.1.4 Das typische Bild des Lorenz-Attraktors ... 39

3.2 Weitere Eigenschaften ... 43

3.2.1 Nichtperiodisches Verhalten ... 43

3.2.2 Dissipation des Lorenz-Systems 53
3.2.3 Beschränktheit der Lorenz-Gleichungen 54

4 Bifurkationen 61
4.1 Lokale Bifurkationen 61
4.1.1 Pitchfork-Bifurkation 61
4.1.2 Hopf-Bifurkation 63
4.2 Globale Bifurkationen 65
4.2.1 Homokline Bifurkation 65
4.2.2 Heterokline Bifurkation 68

5 Der Lorenz-Attraktor 75
5.1 Der Attraktor 75
5.1.1 Was ist ein Attraktor? 75
5.1.2 Existenz des Lorenz-Attraktors 76
5.2 Der „seltsame“ Lorenz-Attraktor 79
5.2.1 Was ist ein „seltsamer“ Attraktor? 79
5.2.2 Existenz des seltsamen Attraktors 80

6 Chaotisches Verhalten 85
6.1 Chaos 85
6.1.1 Was ist Chaos? 85
6.1.2 Die überflüssige Forderung in Devaneys Definition 87
6.2 Das Chaos im Lorenz-System 91
6.2.1 Dichte periodische Punkte 91
6.2.2 Topologische Transitivität 96
6.2.3 Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen 97
6.2.4 Der chaotische Lorenz-Attraktor 99

7 Das Wetter und die Wettervorhersage 103

7.1 Was sagt das Lorenz-System über unser Wetter? ... 103

7.1.1 Das Fehlen von Periodizität – Das sich-nie-wiederholende Wetter ... 103

7.1.2 Der Attraktor – Das „Herz“ des Wetters ... 104

7.1.3 Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen – Nur ein Flügelschlag ... 105

7.2 Warum ist die Wettervorhersage so oft falsch? ... 106

7.2.1 Riesige Anzahl von Variablen ... 106

7.2.2 Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ... 107

7.3 Grenzen und Möglichkeiten der Wettervorhersage ... 108

8 Exkurs: Das Lorenz-System im schulischen Mathematikunterricht 111

8.1 Warum das Lorenz-System auch für die Schule interessant ist ... 111

8.2 Möglicher Einstieg in das Lorenz-System mit GeoGebra ... 113

8.3 Ideen zur Behandlung ausgewählter Aspekte des Lorenz-Systems ... 119

8.3.1 Der anziehende Attraktor ... 119

8.3.2 Der Schmetterlingseffekt ... 121

8.3.3 Besondere Strukturen: Fraktale ... 122

9 Zusammenfassung 127

Abbildungsverzeichnis 129

Tabellenverzeichnis 131

Literaturverzeichnis 133

Kapitel 1

Einleitung

Wir können heute schon nachschauen, welches Wetter uns in 14 Tagen erwartet. Verlassen sollte man sich auf diese Wettervorhersage aber nicht. Das sagt nicht nur unsere Erfahrung – das sagt auch die Mathematik!

1.1 Thema und Ziel der Arbeit

Thema der vorliegenden Arbeit ist das Lorenz-System, das der Mathematiker und Meteorologe Edward Norton Lorenz 1963 als einfaches Modell des Wetters einführte. Ziel der Arbeit ist eine Beschreibung dieses Systems, die auf einer ausführlichen Untersuchung aufbaut. Auch wenn diese Beschreibung nicht alle Einzelheiten umfassen kann, soll diese Arbeit dennoch ein „schönes“ Gesamtbild vermitteln und ein grundlegendes Verständnis des Lorenz-Systems schaffen. Zugleich soll die mathematische Analyse des sogenannten Lorenz-Attraktors Einsicht in das Verhalten unseres Wetters und die oftmals fehlerhafte Wettervorhersage geben.

Neben dieser Einsicht soll das Lorenz-System als wohl eines der einfachsten chaotischen Systeme einen Einblick ins „Chaos“ ermöglichen. Ein weiteres Ziel der Arbeit ist damit, die wesentlichen Eigenschaften chaotischer Systeme am Beispiel des Lorenz-Systems aufzuschlüsseln.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nachdem das Lorenz-System im zweiten Kapitel eingeführt wird, werden in Kapitel drei Eigenschaften des Lorenz-Attraktors behandelt, die eine erste Beschreibung des Systems geben. Um das breite „Verhaltensspektrum“ des Systems zu verdeutlichen, werden in Kapitel vier mehrere Beispiele für Bifurkationen im Lorenz-System angeführt. Aus dem nächsten Kapitel geht hervor, warum in dieser Arbeit von einem „Attraktor“ die Rede ist und warum der Lorenz-Attraktor als „seltsam“ bezeichnet wird. Im sechsten Kapitel folgt eine Definition von Chaos. Eine Untersuchung des Lorenz-Systems zeigt das chaotische Verhalten und veranschaulicht die drei „Bestandteile“ von Chaos. Bedeutungen des Systemverhaltens für das Wetter und die Wettervorhersage werden im darauffolgenden Kapitel behandelt. Kapitel acht ist ein Exkurs, der das Lorenz-System in den schulischen Kontext setzt und Ideen für den schulischen Mathematikunterricht vorstellt. In Kapitel neun findet sich eine Zusammenfassung.

Die Abbildungen in dieser Arbeit wurden händisch, mit GeoGebra oder mit Matlab erstellt, wobei für letzteres das Matlab-Programm lorenzdemo.m zum Buch *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme* von Lars Grüne und Oliver Junge [7] verwendet wurde.

Kapitel 2
Einführung in das Lorenz-System

Nach einem kurzen Einblick in das Leben und Wirken von Edward Norton Lorenz wird in diesem Kapitel der Weg zum Lorenz-System, der über das Modell von Saltzman führt, beschrieben. Das Lorenz-System wird vorgestellt und interpretiert.

2.1 Edward Norton Lorenz

Edward Norton Lorenz wurde am 23. Mai 1917 in West Hartford in Connecticut geboren. Schon früh zeigte sich seine Begeisterung für Zahlen und mathematisches Denken und Lorenz studierte nach der Highschool Mathematik am Dartmouth College. Nach seinem Abschluss 1938 setzte er sein Mathematikstudium an der Harvard University fort, wo er auch sein Doktorat beginnen wollte. Dieses Vorhaben konnte Lorenz aber während des Zweiten Weltkrieges nicht umsetzen. Neben der Mathematik interessierte sich Lorenz schon immer für das Wetter. Er entschied sich daher, diesem Interesse nachzugehen, und arbeitete während des Krieges an Wettervorhersagen für die US Army Air Corps. Lorenz besuchte dafür einen Kurs am Massachusetts Institute of Technology (MIT), der Meteorologen für die US Army ausbilden sollte, und war einer der wenigen Studenten, die als Lehrer für den nächsten Kurs ausgewählt wurden. In dieser Zeit erwarb Lorenz am MIT einen Studienabschluss in Meteorologie.

Diese Beschäftigung mit dem Wettergeschehen brachte Lorenz dazu, sich nach dem Krieg weiter dem Meteorologiestudium zu widmen und nicht zur Mathematik

zurückzukehren. Nach seinem Doktorat 1948 am MIT arbeitete Lorenz in der Forschung und behandelte unter anderem Modelle zur Wettervorhersage. Ein eigener Computer Ende der 50er-Jahre ermöglichte numerische Untersuchungen der Wettermodelle. Diese Untersuchungen zeigten das chaotische Verhalten des Wetters, das Lorenz mit Hilfe eines einfachen Differentialgleichungssystems, dem Lorenz-System, beschrieb und das „entdeckte Chaos“ auch im Hinblick auf die Wettervorhersage deutete. Lorenz beeindruckte mit seiner Arbeit *Deterministic nonperiodic flow* [11], in der er seine Erkenntnisse veröffentlichte, sowohl Mathematikerinnen und Mathematiker als auch Meteorologinnen und Meteorologen und schaffte so im Lorenz-System eine Zusammenführung beider Wissenschaften, der Mathematik und der Meteorologie. Neben seinem wertvollen Beitrag zur Erforschung chaotischer Systeme, der Lorenz zum „Vater der Chaostheorie“ machte, wurde Lorenz auch für seine Arbeit zum Kreislauf der Atmosphäre sehr geschätzt und in der Meteorologie für seinen Energiekreislauf, den „Lorenz energy cycle“, der atmosphärischen Zirkulation bekannt.

Lorenz Erfolgsgeschichte startete am MIT, mit dem er sein ganzes Leben stark verbunden war. Nach seinem Meteorologiestudium und seiner wissenschaftlichen Mitarbeit am MIT, wurde Lorenz 1962 zum Professor für Meteorologie ernannt und war von 1977 bis 1981 Leiter des Instituts für Meteorologie und Meereskunde. 1987 wurde er emeritierter Professor. Neben seinem beruflichen Glück fand Lorenz aber auch sein privates Glück am MIT, an dem er seine Frau Jane kennenlernte, die er 1948 heiratete und mit der er drei Kinder hatte. Im Laufe seines Lebens wurde Lorenz mehrfach ausgezeichnet und erhielt unter anderem den Crafoord-Preis 1983 oder den Kyoto-Preis 1991, der eine der höchsten Auszeichnungen darstellt. Lorenz war zudem Mitglied zahlreicher wissenschaftlicher Institutionen wie der Royal Society oder der American Meteorological Society. Lorenz blieb bis ins hohe Alter aktiv und begeisterte Menschen mit seinem Denken, seinen Vorträgen und seiner bescheidenen Person. Im Alter von 90 Jahren starb Lorenz am 16. April 2008 in Cambridge in Massachusetts an Krebs.

Genaueres zu Lorenz persönlichem Werdegang kann in den Memoiren *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* [16], die auch dieser Abschnitt verwendet, nachgelesen werden.

2.2 Der Weg zum Lorenz-System

Der vorliegende Abschnitt verwendet die Arbeiten von Lorenz [11], Rayleigh [18], Saltzman [22] und Viana [26].

2.2.1 Das Modell von Saltzman

Die Gleichungen von Barry Saltzman, die als „Vorläufer" des Lorenz-Systems betrachtet werden können, beruhen auf den Experimenten von Henri Bénard, der die Strömung von dünnen Fluidschichten, die von einer unteren Platte erwärmt und von einer oberen gekühlt werden, untersuchte. Lord Rayleigh stützte sich auf die Beobachtungen von Bénard zur Konvektion und behandelte diese in seiner Arbeit *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side* [18] theoretisch.

Saltzman nutzte das mathematische Modell von Rayleigh und formulierte unter der Vereinfachung, dass sich Konvektionsrollen nur zweidimensional parallel zur x-z-Ebene ausbilden und entlang der y-Achse keine Schwankungen auftreten, die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{S1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta \tag{S2}$$

wobei

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,z)} = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial z}\right)$$

und der Nabla-Operator im dreidimensionalen Raum

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Die Symbole wurden dabei wie folgt definiert:

x, y ..... horizontale Koordinaten

z ..... vertikale Koordinate

t ..... Zeit

T ..... Temperatur

ΔT ..... Temperaturunterschied der beiden Platten,
definiert als $\Delta T = T_{untere\ Platte} - T_{obere\ Platte}$

ν ..... kinematische Viskosität

κ ..... Wärmeleitfähigkeitskoeffizient

g ..... Erdbeschleunigung

α ..... Wärmeausdehnungskoeffizient

H ..... Höhe der Fluidschicht

ψ ..... Strömungsfunktion der zweidimensionalen Bewegung,
definiert als $\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ und $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

θ ..... Abweichung von jener Temperatur, bei der keine Konvektion auftritt,
definiert als $\theta = \bar{T}_1''(z,t) + T_1'(x,z,t)$, wobei $T_1'(x,z,t)$ die Temperaturabweichung vom mittleren Wert entlang der Horizontalen und $\bar{T}_1''(z,t)$ die Abweichung von der linearen Temperaturänderung zwischen oberer und unterer Grenzfläche darstellen

Rayleigh erkannte, dass sich die Strömung in zylindrischen Konvektionszellen durch Gleichungen der Form

$$\psi = \psi_0 \, sin\left(\frac{\pi a}{H} x\right) sin\left(\frac{\pi}{H} z\right) \tag{R1}$$

$$\theta = \theta_0 \, cos\left(\frac{\pi a}{H} x\right) sin\left(\frac{\pi}{H} z\right) \tag{R2}$$

beschreiben lässt, wenn die sogenannte Rayleigh-Zahl

$$R = \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa}$$

einen kritischen Wert

$$R_c = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3}{a^2}$$

übersteigt. ψ_0 und θ_0 sind hier Konstanten. Der Parameter a ist ein Maß für die Form der Konvektionszellen. Die anderen Symbole sind wie oben definiert.
Saltzman machte die Gleichungen (S1) und (S2) zunächst dimensionslos, indem er neue „Maßeinheiten“ verwendete und

$$x = Hx^*$$

$$z = Hz^*$$

$$t = \frac{H^2}{\kappa} t^*$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{H^2} \nabla^{*2}$$

$$\psi = \kappa\psi^*$$

$$\theta = \frac{\kappa\nu}{g\alpha H^3} \theta^*$$

setzte, was auf die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\nabla^{*2}\psi^* = -\frac{\partial(\psi^*, \nabla^{*2}\psi^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \sigma\nabla^{*4}\psi^* + \sigma\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} \tag{S3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\theta^* = -\frac{\partial(\psi^*, \theta^*)}{\partial(x^*, z^*)} + R\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2}\theta^* \tag{S4}$$

mit

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$$

und der Rayleigh-Zahl R führte. Er entwickelte ψ^* und θ^* in eine zweifache Fourierreihe

$$\psi^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi(m, n, t^*)\, exp\left[2\pi Hi\left(\frac{m}{L}x^* + \frac{n}{2H}z^*\right)\right]$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta(m, n, t^*)\, exp\left[2\pi Hi\left(\frac{m}{L}x^* + \frac{n}{2H}z^*\right)\right]$$

mit der Wellenlänge L in x-Richtung und $2H$ in z-Richtung und den Wellenzahlen m und n in der jeweiligen Richtung. Durch Einsetzen in die obigen Gleichungen (S3) und (S4) erhielt Saltzman ein unendliches System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches er durch weitere Festlegungen und Vereinfachungen auf ein endliches System reduzierte. So betrachtete Saltzman den „Spezialfall“ von freien Grenzflächen und folgte den Lösungen von Rayleigh (R1) und (R2), wodurch er für eine minimale kritische Rayleigh-Zahl

$$R_c = \frac{27}{4}\pi^4$$

für ein

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lösungen der Form

$$\psi^* = A\, sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x^*\right) sin(\pi z^*)$$
$$\theta^* = B\, cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x^*\right) sin(\pi z^*)$$

für zwei Konstante A und B erhielt.

Für ein $\sigma = 10$ und beliebige Rayleigh-Zahl R ergab sich so ein System von 52 gewöhnlichen Differentialgleichungen. Durch numerische Methoden und starkes „Stutzen“ bekam er schließlich die zeitabhängigen Lösungen

$$\dot{A} = 23{,}521BC - 1{,}500D - 14{,}8046A$$
$$\dot{B} = -22{,}030AC - 1{,}589E - 186{,}429B$$
$$\dot{C} = 1{,}561AB - 0{,}185F - 400{,}276C$$
$$\dot{D} = -16{,}284CE - 16{,}284BF - 13{,}958AG - 1460{,}631\lambda A - 14{,}805D$$
$$\dot{E} = 16{,}284CD - 16{,}284AF - 18{,}610BG - 1947{,}508\lambda B - 18{,}643E$$
$$\dot{F} = 16{,}284AE + 16{,}284BD - 486{,}877\lambda C - 40{,}028F$$
$$\dot{G} = 27{,}916AD + 37{,}220BE - 39{,}479G$$

mit

$$\lambda = \frac{R}{R_c},$$

die Saltzman in [22] als „solutions for a highly truncated system“ – also Lösungen eines stark vereinfachten Systems – bezeichnete. In diesem Modell beschreibt die Variable A die Form der Strömung in der Konvektionszelle, D das Temperaturfeld und G die Abweichung der Temperaturverteilung von der Linearität.

2.2.2 Die Gleichungen von Lorenz

Lorenz erkannte, dass vier der sieben von Saltzman verwendeten Variablen mit der Zeit vernachlässigbar klein werden. Er reduzierte das ursprüngliche System gleich zu Beginn auf die drei wesentlichen Variablen und entwickelte die Lösungen

$$\frac{a}{(1+a^2)\kappa}\psi = X\sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi a}{H}x\right)sin\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$
$$\frac{\pi R}{R_c \Delta T}\theta = Y\sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi a}{H}x\right)sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) - Z\,sin\left(\frac{2\pi}{H}z\right).$$

Diese Ausdrücke führen eingesetzt in (S1) und (S2) und nach geeignetem Skalieren zu einem System mit nur drei Variablen und damit zu den drei als Lorenz-Gleichungen bekannten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz,$$

die erstmals 1963 von Edward Norton Lorenz in seiner Arbeit *Deterministic nonperiodic flow* [11] als einfaches Beispiel eines deterministischen nichtperiodischen Systems vorgestellt wurden. Die Variablen x, y und z unterscheiden sich hier von Saltzmans Variablen A, D und G jeweils nur um multiplikative Konstanten, die von den Größen ΔT, ν, κ, g, α, H und a abhängen.

2.3 Das Lorenz-System

Das System aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

mit den drei positiven reellen Parametern σ, b und r wird als Lorenz-System bezeichnet. Die Differentialgleichungen hängen dabei von den Anfangswerten $(x, \quad y, \quad z)$ und nicht explizit von der Zeit t ab und sind damit autonom.

Wie beschrieben wurden die Gleichungen dabei aus einem Modell zur Konvektion gewonnen. Ein ähnliches Muster, wie das von Bénard in seinen Experimenten beobachtete, zeigt sich auch in unserer Atmosphäre: Die von der Sonne aufgeheizte Erdoberfläche erwärmt die unteren Luftschichten, die dann aufsteigen und abkühlen. Die Strömungen unserer Erdatmosphäre beruhen auf Konvektion, sodass Lorenz das erhaltene System nutzte, um das Verhalten des Wetters zu beschreiben und Aussagen über die Wettervorhersage zu machen.

Zum Lorenz-System und zur Bedeutung der Parameter und der Variablen werden in diesem Abschnitt die Arbeiten von Lorenz [11], Nordmeier und Schlichting [15], Saltzman [22], Sparrow [23] und Viana [26] verwendet.

2.3.1 Bedeutung der Parameter

Der Parameter σ heißt Prandtl-Zahl und ist definiert als

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa},$$

wobei ν wie zuvor die kinematische Viskosität und κ den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten bezeichnen. Anschaulich kann σ als „das Verhältnis

der Wärme, die die Reibung in der Strömung erzeugt, zur Wärme, die aus dem System abfließt“ ([15] S. 39) betrachtet werden.

Der Parameter r ist proportional zur sogenannten Rayleigh-Zahl R

$$r = \frac{R}{R_c}$$

mit der Rayleigh-Zahl

$$R = \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa}$$

und ihrem kritischen Wert

$$R_c = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3}{a^2}$$

mit einem Minimumwert von $\frac{27}{4}\pi^4$. Hier beschreiben g, α, H, ΔT, ν und κ wie zuvor jeweils die Erdbeschleunigung, den Wärmeausdehnungskoeffizienten, die Höhe der Fluidschicht, die Temperaturdifferenz, die kinematische Viskosität und den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten. a ist ein Maß die Form der Konvektionszellen. Unter dem kritischen Wert der Rayleigh-Zahl versteht man jenen Wert, bei dessen Überschreitung Konvektion einsetzt. Diese zeigt sich also erst bei $R > R_c$ und damit bei Parameterwerten $r > 1$.

Der Parameter b mit

$$b = \frac{4}{1 + a^2}$$

ist ein geometrischer Faktor und beschreibt die Form der Konvektionsrollen. Der Parameter a ist hier wie oben definiert und beschreibt genauer die Abweichung der Konvektionsrollen von zylindrischen Rollen.

Klassische Parameterwahl

Die ersten Parameterwerte, die Lorenz für seine numerischen Untersuchungen in *Deterministic nonperiodic flow* [11] wählte und die heute als klassische Parameterwerte des Lorenz-Systems gelten, folgten den Ausführungen von Saltzman [22]. Saltzman wählte für die Prandtl-Zahl seiner Modell-Flüssigkeit den Wert 10, der etwa dem doppelten der Prandtl-Zahl von Wasser entsprechen sollte. Auch Lorenz setzte $\sigma = 10$. Weiters wurde $a^2 = \frac{1}{2}$ gesetzt, für das die kritische Rayleigh-Zahl ihren minimalen Wert annimmt und einen Parameterwert $b = \frac{8}{3}$ liefert. Lorenz berechnete zudem einen Parameterwert $r = 24{,}74$, bei dem die Gleichgewichtspunkte instabil werden, was in Kapitel 3 genauer behandelt wird. Lorenz überschritt diesen Wert knapp und verwendete den „überkritischen" Wert $r = 28$.
Damit ergeben sich die klassischen Parameterwerte

$$\sigma = 10$$
$$b = \frac{8}{3}$$
$$r = 28.$$

2.3.2 Bedeutung der Variablen

Die Variable x des Lorenz-Systems ist proportional zur Stärke der konvektiven Strömung und y proportional zum Temperaturunterschied aufsteigender und abfallender Schichten, wobei gleiches Vorzeichen von x und y das Aufsteigen warmer und das Absteigen kalter Schichten bedeutet. Die Variable z misst die Abweichung der vertikalen Temperaturverteilung von einem linearen Profil.

Etwas salopper werden die Bedeutungen bei Colin Sparrow (vgl. [23] S. 2) formuliert. So wird die Variable x grob als Maß für das Tempo des „konvektiven Überschlagens“ beschrieben. Stellt man sich dazu eine Konvektionsrolle vor, ergibt das ein recht anschauliches Bild. x stellt in diesem Sinne also die Strömungsgeschwindigkeit dar. Die Variablen y und z messen horizontale- und vertikale Temperaturschwankungen.

Kapitel 3
Eigenschaften des Lorenz-Attraktors

Um das Verhalten des Lorenz-Systems zu beschreiben, werden in diesem Kapitel Eigenschaften des Lorenz-Attraktors behandelt. Warum hier von einem „Attraktor“ gesprochen wird, wird in Kapitel 4 geklärt. Vorerst – so könnte man sagen – sind mit dem Lorenz-Attraktor die Lösungskurven des Lorenz-Systems gemeint.

Im ersten Abschnitt des Kapitels werden zunächst Eigenschaften des Lorenz-Attraktors beschrieben, die angelehnt an Sparrow [23] als „einfache Eigenschaften“ bezeichnet werden. Die Symmetrie des Lorenz-Systems und die besondere Stellung der z-Achse werden gezeigt. Die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems werden bestimmt und auf ihre Stabilität untersucht. Abschließend wird in diesem Abschnitt das „typische Bild“ des Lorenz-Attraktors dargestellt. Als weitere Eigenschaften werden im zweiten Abschnitt das nichtperiodische Verhalten, die Dissipation und die Beschränktheit des Lorenz-Systems behandelt.

3.1 Einfache Eigenschaften

3.1.1 Symmetrie

Eine der grundlegenden Eigenschaften des Lorenz-Attraktors ist die Symmetrie bezüglich der z-Achse für alle Parameterwerte σ, b und r. Diese Eigenschaft ist recht offensichtlich:

Nehmen wir den Punkt $A = (x, \quad y, \quad z)$. Für A gilt

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

Ersetzen wir diesen Punkt A durch den Punkt $\tilde{A} = (-x, \quad -y, \quad z)$, ergibt sich

$$\dot{x} = \sigma(-y + x)$$
$$\dot{y} = -rx + y + xz$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

Die ersten beiden Gleichungen des Systems wechseln also ihr Vorzeichen, während die dritte unverändert bleibt. Eine Trajektorie, eine Lösungskurve, durch einen Punkt $A = (x, \quad y, \quad z)$ ist also das genaue „Spiegelbild“ der Trajektorie durch den Punkt $\tilde{A} = (-x, \quad -y, \quad z)$.

3.1.2 Die z-Achse

Alle Lösungen, die auf der z-Achse starten, verbleiben für alle Zeiten auf ihr. Bezeichnen wir die z-Achse mit $Z = \{(x, \quad y, \quad z) | x = y = 0, z \; beliebig\}$, so gilt für den Fluss des Systems Φ_t

$$\Phi_t(Z) \subseteq Z \text{ für alle } t.$$

Die z-Achse kann nicht mehr verlassen werden und ist damit invariant. Auch diese Eigenschaft ist einfach nachzurechnen:

Setzen wir im Lorenz-System $x = y = 0$, erhalten wir

$$\dot{x} = 0$$
$$\dot{y} = 0$$
$$\dot{z} = -bz$$

und die Invarianz der z-Achse ist gezeigt.

Trajektorien auf der z-Achse laufen zudem für $t \to +\infty$ gegen den Ursprung, was durch Lösen obigen Differentialgleichungssystems mit den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 0$ und $z(0) = z_0$ gezeigt werden kann. Wir erhalten die Lösung

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = z_0 e^{-bt}.$$

Da $\lim_{t \to +\infty} z_0 e^{-bt} = 0$, strebt z für $t \to +\infty$ gegen Null und wir landen im Unendlichen im Ursprung.

Die z-Achse weist zudem eine weitere Besonderheit auf, wie Sparrow (vgl. [22] S. 8) beschreibt. Alle Trajektorien, die um die z-Achse rotieren, können dies – schaut man von oben auf die x-y-Ebene – nur im Uhrzeigersinn tun, was einfach zu zeigen ist:

Betrachten wir eine solch rotierende Trajektorie durch den Punkt $(0, \quad y, \quad z)$. Dann gilt

$$\dot{x} = \sigma y$$

und da der Parameter σ positiv ist

$$\dot{x} > 0 \; f\ddot{u}r \; y > 0$$

und

$$\dot{x} < 0 \; f\ddot{u}r \; y < 0.$$

Damit kann eine Drehung um die z-Achse nur im Uhrzeigersinn erfolgen, wie in Abbildung 1 veranschaulicht wird.

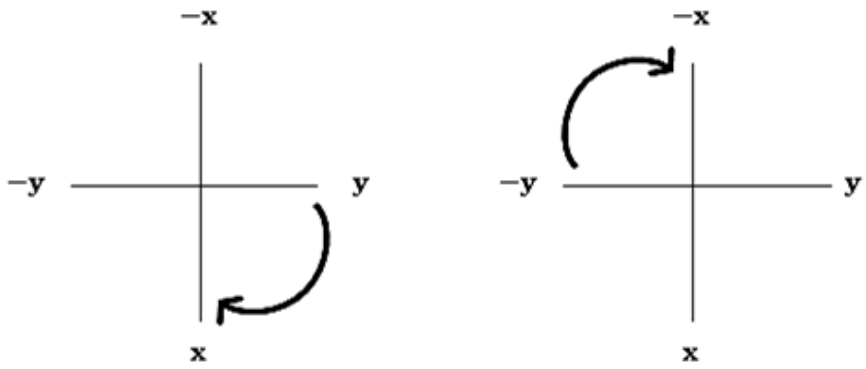


Abbildung 1: Drehung um die z-Achse

3.1.3 Gleichgewichtspunkte

Für einen Gleichgewichtspunkt, der auch als stationärer Punkt oder Fixpunkt bezeichnet wird, gilt

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.$$

Um die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems zu berechnen, lösen wir das zugehörige Gleichungssystem

$$\dot{x} = \sigma(y - x) = 0$$
$$\dot{y} = rx - y - xz = 0$$
$$\dot{z} = xy - bz = 0$$

und erhalten die Lösungen

$$x = y = z = 0$$

oder

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$$
$$z = r - 1.$$

Der Ursprung

$$O = (0, \quad 0, \quad 0)$$

bildet damit für alle Parameterwerte σ, b und r einen stationären Punkt. Ist $r > 1$, so ergeben sich zwei weitere Gleichgewichtspunkte

$$C_1 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, \quad -\sqrt{b(r-1)}, \quad r-1\right)$$

und

$$C_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \quad \sqrt{b(r-1)}, \quad r-1\right),$$

die sich für wachsendes r immer weiter vom Ursprung entfernen.
Das Verhalten des Systems in der Nähe der stationären Punkte soll nun bestimmt werden. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit den Stabilitätsbegriffen und definieren nach Sparrow (vgl. [23] S. 193) für einen Gleichgewichtspunkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$:

Definition 1. Ein Gleichgewichtspunkt x^* heißt (Ljapunov) **stabil**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \varepsilon]$ existiert, sodass für eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x^*| \leq \delta$: $|\Phi_t(x) - x^*| \leq \varepsilon$ für alle $t > 0$.

Ein Gleichgewichtspunkt ist also stabil, wenn Lösungen in der Nähe des Gleichgewichtspunktes auch in der Nähe bleiben.

Definition 2. Ein Gleichgewichtspunkt x^* heißt **instabil**, falls x^* für „rückwärtslaufende" Zeit, $t \to -\infty$, stabil ist.

Ein Gleichgewichtspunkt ist also instabil, wenn Lösungen von diesem „wegwandern".

Definition 3. Ein Gleichgewichtspunkt x^*, der weder stabil noch instabil ist, heißt **nicht-stabil**.

Morris W. Hirsch, Stephen Smale und Robert L. Devaney (vgl. [8] S. 175) definieren einen stabilen Gleichgewichtspunkt wie folgt:

Definition 4. x^* heißt **stabiler Gleichgewichtspunkt**, falls für jede Umgebung $\mathcal{O}$ von x^* in $\mathbb{R}^n$ eine Umgebung $\mathcal{O}_1$ von x^* in $\mathcal{O}$ existiert, sodass jede Lösung $x(t)$ mit $x(0) = x_0$ in $\mathcal{O}_1$ für alle $t > 0$ in $\mathcal{O}$ verbleibt.

Bemerkung 1. Wir folgen in unseren Definitionen Sparrow [23]. In der Literatur findet man häufig nur die Unterscheidung zwischen stabil und instabil. Als instabil werden dann alle Gleichgewichtspunkte bezeichnet, die nicht stabil sind und zumindest eine instabile Richtung aufweisen (siehe zum Beispiel Hirsch und andere [8] S. 175).

Ähnlich wie Sparrow (vgl. [23] S. 9) können wir kurz und anschaulich formulieren: Stabile Gleichgewichtspunkte, auch „Senken" genannt, sind jene, gegen die naheliegende Trajektorien streben, instabile, „Quellen", jene, von denen naheliegende Trajektorien wegwandern und nicht-stabile, „Sattelpunkte", jene, die weder stabil noch instabil sind und anziehen und abstoßen.

Um die Stabilität der Gleichgewichtspunkte zu untersuchen, wird der Satz von Hartman-Grobman aus [17] verwendet, der in salopper Formulierung lautet:

Satz 1 (Satz von Hartman-Grobman). Sei f stetig differenzierbar, x_0 Fixpunkt von $\dot{x} = f(x)$ und $df(x_0)$ habe keinen Eigenwert mit Realteil 0. Dann verhalten sich die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ in der Nähe von x_0 so wie die Lösungen von $\dot{y} = df(x_0)y$ in der Nähe von 0.

Es werden also die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $df(x_0)$ gesucht, die erlauben, die Gleichgewichtspunkte einzuordnen. Weiters ist der nachfolgende Satz aus [17] für unsere Untersuchung wichtig:

Satz 2. Sei A eine reelle $r \times r$-Matrix. Dann gibt es Teilräume E_s und E_u von $\mathbb{R}^r$ mit folgenden Eigenschaften:

Falls $x_0 \in E_s \backslash \{0\}$, dann gilt für die Lösung x von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\limsup_{t \to -\infty} |x(t)| = +\infty$ und $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Falls $x_0 \in E_u \backslash \{0\}$, dann gilt für die Lösung x von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$ und $\limsup_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$.

Dabei ist die Dimension von E_s gleich der Anzahl (mit Vielfachheit gerechnet) der Eigenwerte mit negativem Realteil und die Dimension von E_u gleich der Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil.

Wir nennen E_s (s für stable) den stabilen Teilraum und E_u (u für unstable) den instabilen Teilraum. Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$, die im stabilen Teilraum $E_s \backslash \{0\}$ starten, laufen für $t \to +\infty$ gegen den Ursprung, während Lösungen, die im instabilen Teilraum $E_u \backslash \{0\}$ starten, von diesem weglaufen. Zeigen alle Eigenwerte einen negativen Realteil, handelt es sich bei x_0 um einen stabilen Gleichgewichtspunkt, zeigen alle Eigenwerte einen positiven Realteil, um einen instabilen. Haben die Eigenwerte sowohl negative und als auch positive Realteile, ist x_0 nicht-stabil und hat in diesem Fall stabile und instabile Richtungen.

Zunächst wird also die Jacobi-Matrix df für unser stetig differenzierbares Differentialgleichungssystem f

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

berechnet. Durch partielles Ableiten bekommen wir

$$df = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

und erhalten so das System

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} Y$$

mit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$.

Für einen Eigenwert λ muss dann

$$det\left(\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} - \lambda I\right) = 0$$

gelten. Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r-z & -1-\lambda & -x \\ y & x & -b-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma r - \sigma z - \sigma b - \sigma - x^2 - b)\lambda \quad \text{(CP)}$$
$$+ \sigma r b - \sigma b z - \sigma x^2 - \sigma x y - \sigma b.$$

Betrachten wir zunächst den Gleichgewichtspunkt O. Im Ursprung erhalten wir durch Lösen der charakteristischen Gleichung $p(\lambda) = 0$ und Setzen von $x = y = z = 0$ die drei Eigenwerte

$$\lambda_1 = -b$$
$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}$$
$$\lambda_3 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}.$$

Da alle Parameter des Lorenz-Systems positiv definiert sind, ist der Eigenwert λ_1 für alle Parameterwerte b negativ. Zur Untersuchung der anderen Eigenwerte müssen mehrere Fälle unterschieden werden:

Für $0 < r < 1$ ist der Ursprung stabil. Wie λ_1 sind auch die Eigenwerte λ_2 und λ_3 hier negativ, da

$$\sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r} < \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma} = \sqrt{(\sigma+1)^2} = \sigma + 1.$$

Daher gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 < 0$$
$$Re\ \lambda_3 < 0$$

und

$$dim\ E_s = 3$$
$$dim\ E_u = 0.$$

Die Trajektorien werden vom Ursprung angezogen und – anschaulich gesprochen – wie in einen Abfluss gesaugt. In der englischsprachigen Literatur findet man für einen solchen Gleichgewichtspunkt den Ausdruck „sink“.

Für $r > 1$ ist der Ursprung nicht-stabil. Da für solch eine Wahl des Parameters

$$\sqrt{(\sigma-1)^2+4\sigma r} > \sqrt{(\sigma-1)^2+4\sigma} = \sqrt{(\sigma+1)^2} = \sigma+1,$$

ist der Eigenwert λ_2 negativ und der Eigenwert λ_3 positiv. Insgesamt ergeben sich somit zwei negative reelle Eigenwerte und ein positiver reeller Eigenwert.
Es gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 < 0$$
$$Re\ \lambda_3 > 0$$

und

$$dim\ E_s = 2$$
$$dim\ E_u = 1.$$

Der Ursprung zeigt sich hier als Sattelpunkt mit einem zweidimensionalen stabilen Teilraum und einer instabilen Richtung.

Betrachten wir nun die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2, die nur für $r > 1$ existieren. Durch Einsetzen der Punkte in (CP) erhalten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = -(\lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2\sigma b(r-1))$$

und durch Nullsetzen die Gleichung

$$-(\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1)) = 0,$$

deren Lösungen die Eigenwerte der Punkte C_1 und C_2 sind.

Man erkennt leicht, dass für $\lambda \geq 0$ und $r > 1$ das charakteristische Polynom p sicher kleiner als Null ist und betrachtet man die Funktion p, zeigt sich, dass für ein r nahe 1 alle drei Lösungen reell und negativ sind. Abbildung 2 stellt den Graphen von p für $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und verschiedene Parameterwerte r dar und veranschaulicht die drei negativen reellen Lösungen für $r = 1{,}1$, $r = 1{,}2$ und $r = 1{,}3$.

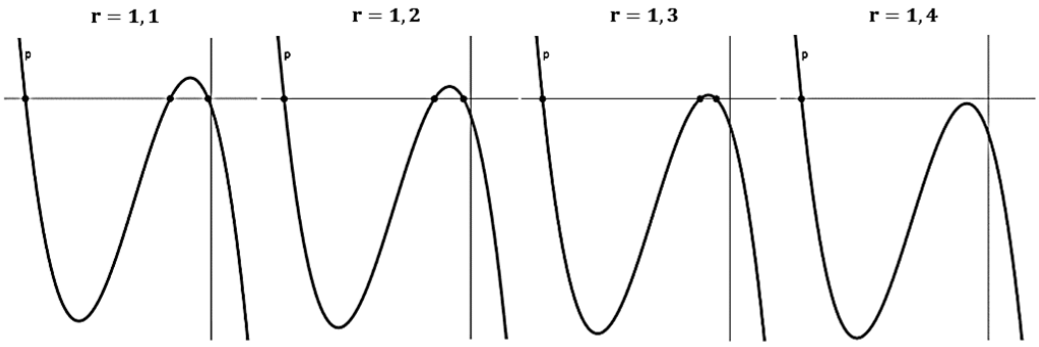


Abbildung 2: Graph von p für verschiedene Parameterwerte r

Wir fragen uns nun (vgl. [8] S. 308), für welches r es auch Eigenwerte mit positivem Realteil gibt und um das zu beantworten, für welches r erstmals Eigenwerte mit Realteil Null, also rein imaginäre Lösungen der Form $\pm i\omega$ mit $\omega \neq 0$, auftreten.

Angenommen $i\omega$ sei ein solcher Eigenwert, dann erfüllt dieser die obige Gleichung und es gilt

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + b(\sigma + r)i\omega + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{i\omega(b(\sigma + r) - \omega^2) = 0}_{\Leftrightarrow \omega^2 = b(\sigma + r)} \; und \; 2\sigma b(r - 1) - (\sigma + b + 1)\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \; 2\sigma b(r - 1) - (\sigma + b + 1)b(\sigma + r) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma br - b^2 r - br - 3\sigma b - \sigma^2 b - \sigma b^2 = 0$$
$$\Rightarrow br(\sigma - b - 1) - \sigma b(\sigma + b + 3) = 0$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Wir erhalten den „Schwellenwert“

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Unter diesem Parameterwert besitzen alle drei Eigenwerte einen negativen Realteil. Über diesem Wert kommen auch Eigenwerte mit positivem Realteil vor. Ist $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$, berechnet sich ein „Schwellenwert“ von $\frac{470}{19} \approx 24{,}74$.

Für $1 < r < \frac{470}{19} \approx 24{,}74$ und obige Wahl der Parameter σ und b sind die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 stabil. Genauer betrachtet haben wir in diesem Fall für r kleiner 1,346 drei reelle Eigenwerte und für r größer 1,346 eine reelle Lösung und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen, wie in Sparrow (vgl. [22] S. 10) beschrieben wird und Abbildung 2 verdeutlicht. Der Realteil der Lösungen ist dabei über das gesamte hier betrachtete Intervall $1 < r < \frac{470}{19}$ negativ.

Es gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 < 0$$
$$Re\ \lambda_3 < 0$$

und

$$dim\ E_s = 3$$
$$dim\ E_u = 0.$$

Trajektorien werden in diesem Parameterbereich von den Gleichgewichtspunkten C_1 und C_2 angezogen.

Für $r > \frac{470}{19} \approx 24{,}74$ und gleiche Parameterwahl für σ und b sind die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 nicht-stabil. Für diesen Bereich von r erhalten wir nach Sparrow (vgl. [22] S. 11) eine negative reelle Lösung und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen mit positivem Realteil.
Es gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 > 0$$
$$Re\ \lambda_3 > 0$$

und

$$dim\ E_s = 1$$
$$dim\ E_u = 2.$$

C_1 und C_2 sind hier Sattelpunkte mit einer stabilen Richtung und einem zweidimensionalen instabilen Teilraum.

3.1.4 Das typische Bild des Lorenz-Attraktors

Die bisherigen Überlegungen sollen nun helfen, das Verhalten des Lorenz-Systems für die klassischen Parameterwerte zu charakterisieren. Zunächst werden die Gleichgewichtspunkte berechnet und Aussagen über deren Stabilität gemacht. Anschließend wird das „typische Bild“ des Lorenz-Attraktors, welches sich für diese Parameterwahl ergibt, beschrieben.

Für die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ hat das Lorenz-System neben dem Ursprung O, der für alle Parameterwerte σ, b und r einen

Gleichgewichtspunkt bildet, mit einem $r = 28 > 1$ zwei weitere Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2. Nach den Berechnungen in Abschnitt 3.1.3 erhalten wir die drei Gleichgewichtspunkte

$$O = (0, \quad 0, \quad 0)$$
$$C_1 = (-6\sqrt{2}, \quad -6\sqrt{2}, \quad 27) \approx (-8{,}485, \quad -8{,}485, \quad 27)$$
$$C_2 = (6\sqrt{2}, \quad 6\sqrt{2}, \quad 27) \approx (8{,}485, \quad 8{,}485, \quad 27).$$

Für den Ursprung O ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3} \approx -2{,}667$$
$$\lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{1201}}{2} \approx -22{,}828$$
$$\lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{1201}}{2} \approx 11{,}828.$$

Alle drei Eigenwerte sind reell und es gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 < 0$$
$$Re\ \lambda_3 > 0$$

und deshalb

$$dim\ E_s = 2$$
$$dim\ E_u = 1.$$

Damit ist der Gleichgewichtspunkt im Ursprung O für die klassische Parameterwahl nicht-stabil und bildet einen Sattelpunkt mit einem zweidimensionalen stabilen und einem eindimensionalen instabilen Teilraum.

Für die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 lösen wir zunächst die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{304}{3}\lambda + 1440 = 0,$$

die durch Einsetzen von $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ in (CP) und Nullsetzen erhalten wird, und bekommen so die Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx -13{,}855$$
$$\lambda_2 \approx 0{,}094 + 10{,}195\, i$$
$$\lambda_3 \approx 0{,}094 - 10{,}195\, i.$$

Wir haben damit einen reellen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Es gilt

$$Re\ \lambda_1 < 0$$
$$Re\ \lambda_2 > 0$$
$$Re\ \lambda_3 > 0$$

und

$$dim\ E_s = 1$$
$$dim\ E_u = 2.$$

Damit sind die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 für die klassische Parameterwahl nicht-stabil und Sattelpunkte mit einem eindimensionalen stabilen und einem zweidimensionalen instabilen Teilraum.

Für die klassischen Parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ sind somit alle drei Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems nicht-stabil. Werden die Lösungen des

Lorenz-Systems für diese Parameterwahl numerisch berechnet und grafisch dargestellt, zeigt sich das „typische Bild“ des Lorenz-Attraktors, das in Abbildung 3 und Abbildung 4 zu sehen ist.

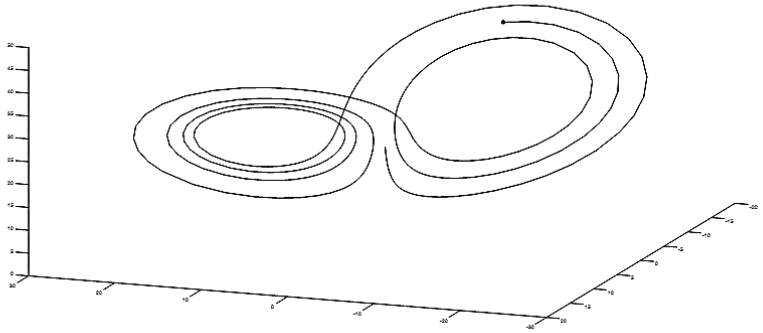


Abbildung 3: Das typische Bild des Lorenz-Attraktors

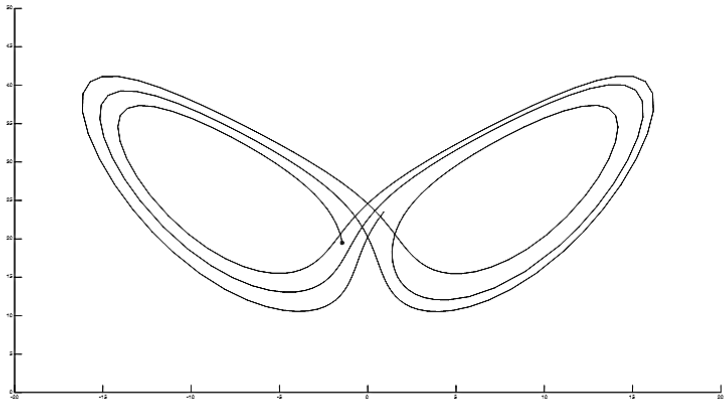


Abbildung 4: Die „Flügel“ des Lorenz-Attraktors

Die Lösung wickelt sich mal um den Gleichgewichtspunkt C_1 und mal um den Gleichgewichtspunkt C_2 und zieht dabei mal größere und mal kleinere Bahnen. Der Wechsel zwischen „den Seiten“ zeigt dabei keinerlei Regelmäßigkeiten. Manchmal wird ein Gleichgewichtspunkt nur einmal umlaufen, bevor die Lösung auf die „andere Seite“ wechselt, manchmal werden aber auch mehrere oder gar sehr viele Bahnen um einen Gleichgewichtspunkt beobachtet, bis die Lösung wieder um den anderen

Gleichgewichtspunkt läuft. Abbildung 4 stellt das „typische Bild“ des Lorenz-Attraktors in der x-z-Ebene dar und zeigt die besondere, schmetterlingsähnliche Gestalt des Lorenz-Attraktors. Wird die Lösung des Lorenz-Systems über lange Zeit berechnet und werden die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 damit weiter umlaufen, zählen die „Flügel“ des Lorenz-Attraktors immer mehr Bahnen und erinnern auch an zwei schrägliegende Schallplatten.

3.2 Weitere Eigenschaften

3.2.1 Nichtperiodisches Verhalten

Mithilfe numerischer Methoden untersuchte Lorenz in den 60er-Jahren das Verhalten der Lösungen des Lorenz-Systems und zeigte 1963 in *Deterministic nonperiodic flow* [11], dass fast alle Lösungen nichtperiodisch sind. Um Lorenz Überlegungen folgen zu können, werden zunächst periodische, quasiperiodische und nichtperiodische Trajektorien unterschieden:

Definition 5. Ein **periodischer Orbit** oder eine periodische Trajektorie ist eine Menge von Punkten $\{P(t): 0 \leq t < p\}$ für ein positives $p \neq 0$, sodass $P(t+p) = P(t)$ und $P(t+T) \neq P(t)$ für $0 < T < p$. p ist die Periode des Orbits.

Wir landen nach der Zeit p, der Periode, wieder in unserem Ausgangspunkt und die Trajektorie durchläuft exakt die selbe Bahn wie zuvor. Für die Definition siehe Sparrow (vgl. [23] S. 192).

Nach Lorenz (vgl. [11] S. 132-133) werden definiert:

Definition 6. Eine Trajektorie $P(t)$ wird **quasiperiodisch** genannt, wenn $P(t+\tau)$ für ein beliebig großes Zeitintervall τ beliebig nahe bei $P(t)$ bleibt, d.h., $P(t)$ ist quasiperiodisch, falls für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes Zeitintervall τ_0, ein $\tau(\varepsilon, \tau_0) > \tau_0$ und eine Zeit $t_1(\varepsilon, \tau_0)$ existieren, sodass für $t_2 > t_1$, $|P(t_2+\tau) - P(t_2)| < \varepsilon$.

Quasiperiodische Trajektorien zeigen keine genauen Wiederholungen, bleiben aber in einer Umgebung der zuvor durchlaufenen Bahn. Periodische Orbits können damit als Spezialfälle quasiperiodischer Trajektorien betrachtet werden.

Definition 7. Eine Trajektorie, die nicht quasiperiodisch ist, wird **nichtperiodisch** genannt. Falls $P(t)$ nichtperiodisch ist, ist $P(t_1 + \tau)$ möglicherweise für eine Zeit t_1 und ein beliebig großes Zeitintervall τ beliebig nahe bei $P(t_1)$, aber, wenn das so ist, kann $P(t + \tau)$ für $t \to \infty$ nicht beliebig nahe bei $P(t)$ bleiben.

Eine nichtperiodische Trajektorie entfernt sich für wachsendes t von ihrer ursprünglichen Bahn. Sie zeigt einen anderen Verlauf, der nicht der zuvor beobachteten Bahn folgt.

Weiter unterteilt Lorenz (vgl. [11] S. 132) Trajektorien nach ihrer Stabilität:

Definition 8. Eine Trajektorie $P(t)$ wird stabil in einem Punkt $P(t_1)$ genannt, wenn jede andere Trajektorie, die zur Zeit $t_1$ausreichend nahe bei $P(t_1)$ liegt, für $t \to \infty$ nahe bei $P(t)$ bleibt; d.h., $P(t)$ ist stabil in $P(t_1)$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, t_1) > 0$ existiert, sodass für $|P_1(t_1) - P(t_1)| < \delta$ und $t_2 > t_1$, $|P_1(t_2) - P(t_2)| < \varepsilon$. Andernfalls wird $P(t)$ instabil in $P(t_1)$ genannt. Wegen der Stetigkeit des Systems ist eine Trajektorie, die stabil in einem Punkt ist, stabil in jedem Punkt, und wird **stabile Trajektorie** genannt. Eine Trajektorie, die instabil in einem Punkt ist, ist instabil in jedem Punkt, und wird **instabile Trajektorie** genannt.

Ähnlich zur Stabilität der Gleichgewichtspunkte können wir damit formulieren: Bei stabilen Trajektorien bleiben nahe Trajektorien in der Nähe, während sich bei instabilen Trajektorien nahe Trajektorien mit der Zeit entfernen.

Wir folgen in diesem Abschnitt Lorenz ([11] S. 136-141), der, um das nichtperiodische Verhalten des Lorenz-Systems nachzuweisen, numerische Lösungen für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ berechnet. Lorenz verwendet für die Suche nach „Mustern“ die Maxima-in-z-Methode und beschränkt die komplexe Struktur des Lorenz-Attraktors so auf den jeweils maximalen z-Wert, den eine Trajektorie bei der

Windung um einen der Gleichgewichtspunkte C_1 oder C_2 durchläuft. Dieser Wert ist nach Lorenz für eine solche Untersuchung geeignet und legt das weitere Wandern und Winden der Trajektorie fest. Durch dieses Vorgehen erhält Lorenz durch numerische Integration für einen Anfangswert $(0,\ 1,\ 0)$ nach den ersten 6000 Iterationsschritten folgende Werte, die in Tabelle 1 (vgl. [11] S. 136, leicht abgeändert) dargestellt werden, wobei die Werte von x, y und z zur Tabellierung verzehnfacht und die Nachkommastellen anschließend weggelassen werden.

Der Weg der Trajektorie lässt sich durch Betrachtung der Tabellenwerte verfolgen. Das Vorzeichen der x- und y-Werte am jeweils höchsten Punkt lässt erkennen, welcher Gleichgewichtspunkt umlaufen wurde. Das erlaubt uns, die Anzahl der Windungen um C_1 oder C_2 zu zählen, bevor die Trajektorie zum anderen Gleichgewichtspunkt wechselt und um diesen wandert. Zur besseren Übersicht wurden die z-Werte in Tabelle 1 entsprechend ihrer „Zugehörigkeit“ markiert. Die Maxima in z, die beim Laufen um den Gleichgewichtspunkt C_1 angenommen werden, sind dabei hell hervorgehoben, jene, die beim Laufen um C_2 angenommen werden, dunkel hervorgehoben.

Tabelle 1: Die Werte von x, y und z für jeden Iterationsschritt N, bei dem z ein relatives Maximum aufweist

N	x	y	z	N	x	y	z
0045	0174	0055	0483	2962	−0152	−0072	0426
0107	−0091	−0083	0287	3029	0117	0075	0352
0168	−0092	−0084	0288	3098	0123	0076	0365
0230	−0092	−0084	0289	3171	0134	0082	0383
0292	−0092	−0083	0290	3268	0155	0069	0435
0354	−0093	−0083	0292	3333	−0114	−0079	0342
0416	−0093	−0083	0293	3400	−0117	−0077	0350
0478	−0094	−0082	0295	3468	−0125	−0083	0361
0540	−0094	−0082	0296	3541	−0129	−0073	0378
0602	−0095	−0082	0298	3625	−0146	−0074	0413
0664	−0096	−0083	0300	3695	0127	0079	0370
0726	−0097	−0083	0302	3772	0136	0072	0394
0789	−0097	−0081	0304	3853	−0144	−0077	0407
0851	−0099	−0083	0307	3926	0129	0072	0380
0914	−0100	−0081	0309	4014	0148	0068	0421
0977	−0100	−0080	0312	4082	−0120	−0074	0359
1040	−0102	−0080	0315	4153	−0129	−0078	0375
1103	−0104	−0081	0319	4233	−0144	−0082	0404
1167	−0105	−0079	0323	4307	0135	0081	0385
1231	−0107	−0079	0328	4417	−0162	−0069	0450
1295	−0111	−0082	0333	4480	0106	0081	0324
1361	−0111	−0077	0339	4544	0109	0082	0329
1427	−0116	−0079	0347	4609	0110	0080	0334
1495	−0120	−0077	0357	4675	0112	0076	0341
1566	−0125	−0072	0371	4741	0118	0081	0349
1643	−0139	−0077	0396	4810	0120	0074	0360
1722	0140	0075	0401	4881	0130	0081	0376
1798	−0135	−0072	0391	4963	0141	0068	0406
1882	0146	0074	0413	5035	−0133	−0081	0381
1952	−0127	−0078	0370	5124	−0151	−0076	0422
2029	−0135	−0070	0393	5192	0119	0075	0358
2110	0146	0083	0408	5262	0129	0083	0372
2183	−0128	−0070	0379	5340	0140	0079	0397
2268	−0144	−0066	0415	5419	−0137	−0067	0399
2337	0126	0079	0368	5495	0140	0081	0394
2412	0137	0081	0389	5576	−0141	−0072	0405
2501	−0153	−0080	0423	5649	0135	0082	0384
2569	0119	0076	0357	5752	0160	0074	0443
2639	0129	0082	0371	5816	−0110	−0081	0332
2717	0136	0070	0395	5881	−0113	−0082	0339
2796	−0143	−0079	0402	5948	−0114	−0075	0346
2871	0134	0076	0388				

Lorenz ordnet jedem Maximum aus Tabelle 1 seinen Nachfolger zu und erhält so folgende Abbildung (vgl. [11] S. 139, leicht abgeändert):

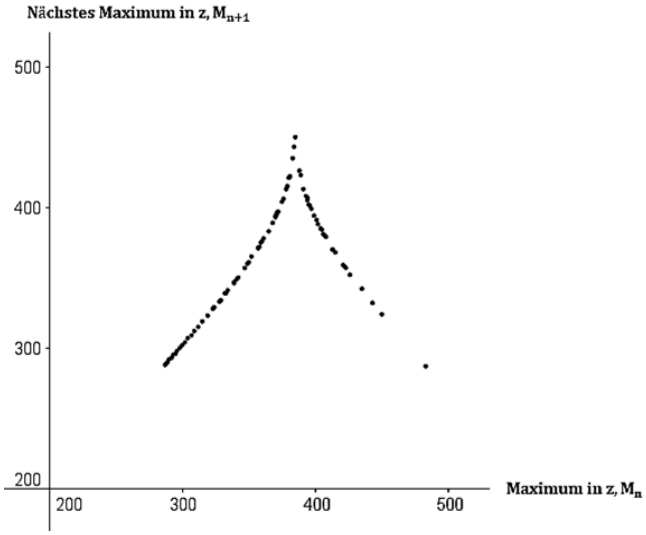


Abbildung 5: Abbildung der Maxima in z auf ihre Nachfolger

Die Spitze, die sich in dieser Auftragung erkennen lässt, ist in Abbildung 5 nicht vollständig ausgebildet. Sie wird durch den zweidimensionalen stabilen Teilraum des Gleichgewichtspunkts im Ursprung verursacht. Landen wir genau auf dieser Spitze, läuft die Trajektorie in den Ursprung. Punkte in der Nähe der Spitze, wie sie in Abbildung 5 zu sehen sind, entsprechen Trajektorien, die nahe am Ursprung vorbeilaufen, wie in Sparrow (vgl. [23] S. 234) erklärt wird.

Zur näheren Untersuchung von Abbildung 5 betrachtet Lorenz eine idealisierte Beziehung zwischen nachfolgenden Maxima in z und arbeitet für seine weiteren Überlegungen mit der Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$M_{n+1} = \begin{cases} 2M_n, & \text{für } M_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \text{nicht definiert}, & \text{für } M_n = \frac{1}{2}, \\ 2 - 2M_n, & \text{für } M_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \tag{L1}$$

wobei M_n den Wert des n-ten Maximums und M_{n+1} den Wert des nachfolgenden Maximums bezeichnen. (L1) definiert eine Abbildung auf dem Einheitsintervall. Die Abbildung (L1) ist in Abbildung 6 dargestellt und zeigt die gleiche Gestalt wie Abbildung 5 (vgl. [11] S. 139, leicht abgeändert).

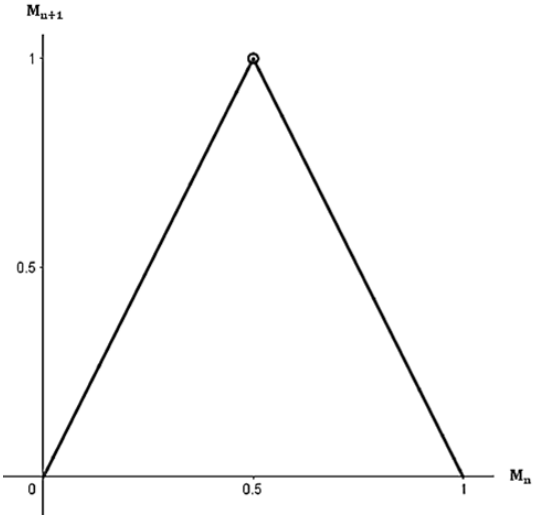


Abbildung 6: Idealisierung von Abbildung 5

Zur Berechnung der Nachfolger M_{n+1}, M_{n+2}, … wird ein Maximum M_n in jedem Schritt, für den $M_n \neq \frac{1}{2}$ gilt, entweder verdoppelt oder verdoppelt und von zwei subtrahiert. Daher lässt sich das n-te Maximum M_n nach wiederholtem Anwenden der rekursiven Vorschrift (L1) für eine gerade Zahl m_n und einen Anfangswert M_0 berechnen als

$$M_n = m_n \pm 2^n M_0. \qquad \text{(L2)}$$

Lorenz untersucht in [11] dann mehrere Fälle:
Im ersten Fall wählt er einen Anfangswert $M_0 = \frac{u}{2^p}$ für ein ungerades u und ein natürliches $p \geq 1$. Für $n = p - 1$ gilt nach (L2)

$$M_{p-1} = m_{p-1} \pm 2^{p-1} \frac{u}{2^p} = m_{p-1} \pm \frac{u}{2} = \frac{2m_{p-1} \pm u}{2}.$$

Weil $2m_{p-1} \pm u$ als Summe oder Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl sicher ungerade ist und (L1) eine Abbildung auf dem Einheitsintervall ist und daher $M_{p-1} \in [0, \quad 1]$ gilt, folgt

$$M_{p-1} = \frac{1}{2}$$

und die Folge von Maxima bricht nach $p-1$ Schritten ab, wie in Abbildung 7 für ein Anfangsmaximum $M_0 = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$ dargestellt ist. Für $M_0 = \frac{3}{16}$ bricht die Folge (M_n) nach vier Schritten bei $M_4 = \frac{1}{2}$ ab. Das Abbrechen entspricht dabei einem „Münden“ der Trajektorie im Ursprung.

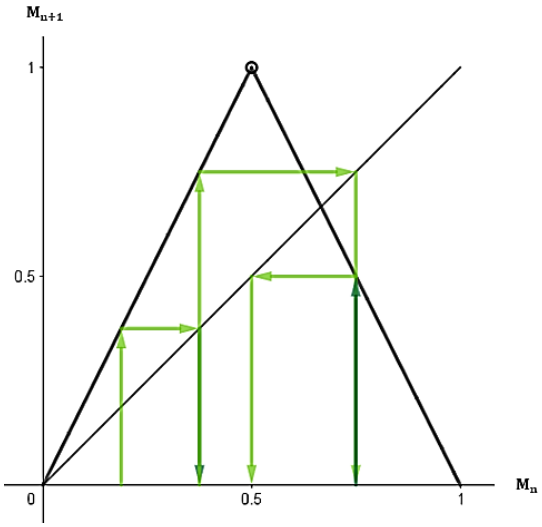


Abbildung 7: Die Folge (M_n) für $M_0 = \frac{3}{16}$

Im zweiten Fall betrachtet Lorenz einen Anfangswert $M_0 = \frac{u}{2^p v}$ für zwei relativ prime ungerade Zahlen u und v und eine natürliche Zahl p. Für $n = p + 1 + k$ und $k > 0$ berechnet sich nach (L2)

$$M_{p+1+k} = m_{p+1+k} \pm 2^{p+1+k} \frac{u}{2^p v} = m_{p+1+k} \pm 2^{1+k} \frac{u}{v} = \frac{v m_{p+1+k} \pm 2^{1+k} u}{v}.$$

Der Zähler $vm_{p+1+k} \pm 2^{1+k}u$ und der Nenner v von M_{p+1+k} sind relativ prim, was wir leicht zeigen können:
Sei $t \neq 1$ ein Teiler von v. Es gilt

$$t \mid v$$

und daher auch

$$t \mid vm_{p+1+k}.$$

Aber

$$t \nmid 2^{1+k},$$

da t als Teiler der ungeraden Zahl v sicher ungerade ist, und

$$t \nmid u,$$

da u und v keine gemeinsamen Teiler haben.
Daher gilt

$$t \nmid 2^{1+k}u$$

und

$$t \nmid vm_{p+1+k} \pm 2^{1+k}u.$$

Damit haben $vm_{p+1+k} \pm 2^{1+k}u$ und v keinen gemeinsamen Teiler $t \neq 1$ und sind relativ prim.

Außerdem ist $vm_{p+1+k} \pm 2^{1+k}u$ als Summe oder Differenz gerader Zahlen gerade und wir können M_{p+1+k} schreiben als

$$M_{p+1+k} = \frac{u_k}{v},$$

wobei u_k und v relativ prim sind und u_k gerade ist.

Da es für jedes v nur endlich viele $\frac{u_k}{v} \in [0, \quad 1]$ gibt, muss es zu Wiederholungen kommen und die Folge von Maxima ist nach endlich vielen Schritten periodisch. Die Folge ist für ein Startmaximum $M_0 = \frac{1}{2^1 5} = \frac{1}{10}$ in Abbildung 8 dargestellt. Für $M_0 = \frac{1}{10}$ verhält sich die Folge (M_n) nach zwei Schritten periodisch und die Maxima $M_2 = \frac{2}{5}$ und $M_3 = \frac{4}{5}$ werden wiederholt durchlaufen.

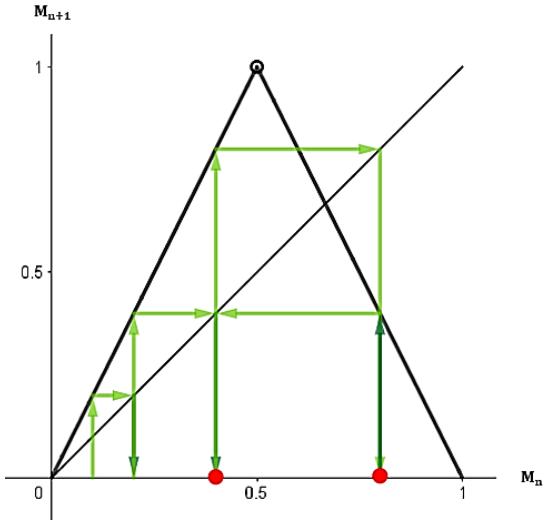


Abbildung 8: Die Folge (M_n) für $M_0 = \frac{1}{10}$

Die ersten beiden Fälle behandeln Trajektorien, die gegen den Ursprung laufen, und periodische Trajektorien. In diesen Fällen bilden die Folgen von Maxima (M_n) für rationale Anfangswerte $M_0 = \frac{u}{2^p}$ oder $M_0 = \frac{u}{2^p v}$ eine abzählbare Menge.

Im dritten Fall untersucht Lorenz die Folge (M_n) für einen Anfangswert M_0, der sich nicht als Bruch $\frac{m}{n}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ und ein $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ darstellen lässt. Für einen solchen Anfangswert M_0 ist

$$M_{n+k} \neq M_n \, f\ddot{u}r \; alle \; k > 0,$$

da aus (L2) folgt

$$\begin{aligned} & M_{n+k} = M_n \, f\ddot{u}r \; ein \; k > 0 \\ \Leftrightarrow \; & m_n \pm 2^n M_0 = m_{n+k} \pm 2^{n+k} M_0 \\ \Leftrightarrow \; & \pm 2^n M_0 \mp 2^{n+k} M_0 = m_{n+k} - m_n \\ \Leftrightarrow \; & 2^n M_0 (\pm 1 \mp 2^k) = m_{n+k} - m_n \\ \Leftrightarrow \; & M_0 = \frac{m_{n+k} - m_n}{2^n (\pm 1 \mp 2^k)} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Für ein irrationales M_0 zeigen sich somit keine Wiederholungen. Die entsprechenden Trajektorien sind entweder quasiperiodisch und nähern sich periodischen Trajektorien asymptotisch oder nichtperiodisch.

Für diese Unterscheidung betrachtet Lorenz zwei Folgen M_0, M_1, M_2, … und M_0', M_1', M_2', …, die wie in (L1) definiert sind, mit $M_0' = M_0 + \varepsilon$. Für ein $k \in \mathbb{N}$ und ausreichend kleines ε gilt dann

$$M_k' = M_k \pm 2^k \varepsilon.$$

Wir starten die zweite Folge also in der Nähe der ersten Folge und wählen dafür einen Startwert M_0' nahe M_0. Für wachsendes k bleibt die zweite Folge aber nicht in der Nähe und die Folgenglieder M_k' und M_k weichen immer mehr voneinander ab. Alle Folgen von Maxima – und damit alle Trajektorien – sind daher instabil. Insbesondere sind alle periodischen Trajektorien instabil. Andere Trajektorien können sich diesen nicht beliebig nähern und sind nichtperiodisch.

Der letzte Fall, den Lorenz in [11] anführt, behandelt demnach nichtperiodische Trajektorien. Die Folgen von Maxima (M_n) bilden in diesem Fall für einen irrationalen Anfangswert $M_0 \neq \frac{m}{n}$ eine überabzählbare Menge.

Insgesamt zeigt sich durch Betrachtung aller untersuchten Fälle, dass das Lorenz-System eine abzählbar unendliche Menge periodischer Lösungen aufweist. Alle anderen Lösungen sind nichtperiodisch und stellen eine überabzählbare Menge dar. Bis auf abzählbar viele Ausnahmen verhalten sich damit alle Lösungen des Lorenz-Systems nichtperiodisch.

Lorenz bemerkt hier, dass sein Vorgehen ausgehend von numerischen Lösungen des Lorenz-Systems, die nur einen „kleinen Ausschnitt" zeigen können, nicht als strenger mathematischer Beweis gelte. Seine Ergebnisse weisen aber stark auf das nichtperiodische Verhalten des Systems hin (vgl. [11] S.140).

3.2.2 Dissipation des Lorenz-Systems

Jede Menge von Punkten mit endlichem Volumen wird unter dem Fluss des Lorenz-Systems Φ in eine Menge mit kleinerem Volumen überführt. Das Lorenz-System ist deshalb dissipativ. Auch diese Eigenschaft können wir leicht zeigen:

Wir berechnen zunächst die Divergenz des Lorenz-Flusses Φ als Maß für die Volumenänderung und erhalten

$$div\,\Phi = div\begin{pmatrix} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{pmatrix} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

und damit eine negative Konstante, was uns sagt, dass das Volumen mit einer konstanten Rate abnimmt, die unabhängig von x, y und z ist. Bezeichnet $V(t)$ ein Volumenelement zum Zeitpunkt t, so gilt

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V$$

und wir bekommen nach Lösen dieser Differentialgleichung die Funktion

$$V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t}V(0)$$

mit dem Anfangswert $V(0)$, die die Volumenkontraktion in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Ein Volumenelement wird demnach unter dem Fluss des Systems für wachsendes t immer kleiner und wir haben die Dissipation des Lorenz-Systems gezeigt.

Bemerkung 2. Denken wir noch einmal an die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilität zurück und bemerken, dass das Lorenz-System keine instabilen Gleichgewichtspunkte besitzt, was direkt aus der dissipativen Eigenschaft gefolgert werden kann, wie Sparrow (vgl. [23] S. 9) ausführt. Die Existenz eines instabilen Gleichgewichtspunktes würde bedeuten, dass sich Trajektorien mit der Zeit von einem solchen Punkt entfernen und ein Volumen durch den Fluss des Systems hier eine Ausdehnung erfährt, was im Widerspruch zur beschriebenen Volumenkontraktion steht. Allein aufgrund der dissipativen Eigenschaft können die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems also nur stabil oder nicht-stabil sein – nicht aber instabil.

3.2.3 Beschränktheit der Lorenz-Gleichungen

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Beschränktheit der Lorenz-Gleichungen. Es wird gezeigt, dass alle Lösungen des Lorenz-Systems nach endlicher Zeit innerhalb einer beschränkten Menge liegen, die auch noch näher untersucht wird. Die Berechnungen und Beweise folgen dabei im wesentlichen Sparrow ([23] S. 196-198).

Existenz eines Ellipsoids, in das alle Trajektorien eintreten

Wir wollen hier die Existenz eines Ellipsoids zeigen, das alle Trajektorien in sich „hineinzieht“. Genauer beweisen wir die Behauptung:

Behauptung: Es gibt ein beschränktes Ellipsoid E, in das alle Trajektorien eintreten und nie wieder verlassen.

Beweis: Wir verwenden wie Sparrow [23] die Ljapunov-Funktion

$$V(x, \quad y, \quad z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2,$$

die ein Ellipsoid im $\mathbb{R}^3$ definiert. Wir berechnen die Ableitung der Funktion nach der Zeit t,

$$\dot{V}(x, \quad y, \quad z) = \frac{dV}{dt} = 2rx\frac{dx}{dt} + 2\sigma y\frac{dy}{dt} + 2\sigma(z - 2r)\frac{dz}{dt}.$$

Mit

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y, z) &= 2r\sigma x(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz) \\ &= 2\sigma(rxy - rx^2 + rxy - y^2 - xyz + xyz - bz^2 - 2rxy + 2brz) \\ &= -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz).\end{aligned}$$

Sei $D = \{(x, \quad y, \quad z) | \dot{V}(x, \quad y, \quad z) \geq 0\}$ das Gebiet, in dem diese Ableitung größer gleich Null ist. D definiert somit die Menge aller Punkte $(x, \quad y, \quad z)$, die im Inneren oder am Rand des Ellipsoids $-2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz) = 0$ liegen. Sei c das Maximum von V in D. So ein Maximum existiert, da die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt und abgeschlossen und damit kompakt ist. Da die Funktion V stetig ist, gibt es nach

dem Satz von Minimum und Maximum also $(x_m,\ y_m,\ z_m) \in D$ mit $V(x,\ y,\ z) \leq V(x_m,\ y_m,\ z_m) = c$ für alle $(x,\ y,\ z) \in D$.

Wir betrachten nun ein etwas größeres Gebiet, ein beschränktes Ellipsoid E, in dem $V \leq c + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist also $D \subset E$. Da V eine Ljapunov-Funktion unseres Differentialgleichungssystems ist, bewegen sich die Lösungen – salopp formuliert – in die Richtung, in die V fällt. Liegt ein Punkt $(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{z})$ außerhalb unseres Ellipsoids E, liegt dieser auch nicht in D und damit gilt $\dot{V}(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{z}) < 0$. Starten wir eine Trajektorie in diesem außenliegenden Punkt, so nimmt V mit der Zeit ab, bis in endlicher Zeit schließlich ein Wert $V \leq c + \varepsilon$ erreicht wird und die Trajektorie schließlich in unser Ellipsoid E eintritt. Wandert die Trajektorie nun weiter ins Innere von E und gelangt zu D mit einer Ableitung $\dot{V}(x,\ y,\ z) \geq 0$, verharrt sie oder kehrt um und läuft „nach außen“, wo aber sogleich $\dot{V}(x,\ y,\ z) < 0$. Die Trajektorie kommt somit nicht aus unserem konstruierten Ellipsoid E. Einmal in E gelandet, kann eine Trajektorie E nie wieder verlassen.

■

Größe des Ellipsoids

Um Aussagen über die Größe des Ellipsoids E machen zu können, wird nun überlegt, wann das Ellipsoid V in D sein Maximum annimmt. Das muss offensichtlich am Rand von D geschehen. Wir suchen also das Maximum von

$$V(x,\ y,\ z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{V}(x, y, z) = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz) = 0,$$

vereinfacht also unter

$$rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz = 0.$$

Dieses bestimmen wir mit der Methode der Lagrange‘schen Multiplikatoren und erhalten die Lagrange-Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2 - \lambda(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz).$$

Für den Punkt, an dem das Maximum auftritt, muss dann

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2rx - 2\lambda rx \Leftrightarrow 2rx = 2\lambda rx$$
$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} = 2\sigma y - 2\lambda y \Leftrightarrow 2\sigma y = 2\lambda y$$
$$0 = \frac{\partial F}{\partial z} = 2\sigma(z-2r) - 2\lambda b(z-r) \Leftrightarrow 2\sigma(z-2r) = 2\lambda b(z-r)$$

für einen Lagrange‘schen Multiplikator λ gelten, was zu den folgenden möglichen Lösungen führt:

1. Für $\lambda = 1$ erhalten wir $y = 0$ und $z = \frac{r(b-2\sigma)}{b-\sigma}$.

   Wegen $\dot{V} = 0$ gilt

   $$rx^2 + b\left(\frac{r(b-2\sigma)}{b-\sigma}\right)^2 - 2br\frac{r(b-2\sigma)}{b-\sigma} = 0$$

   und damit

   $$x^2 = \frac{b^2 r(b-2\sigma)}{(b-\sigma)^2}$$

   für $b \geq 2\sigma$.

In diesem Fall ist

$$V = r\frac{b^2 r(b-2\sigma)}{(b-\sigma)^2} + \sigma\left(\frac{r(b-2\sigma)}{b-\sigma} - 2r\right)^2 = \frac{b^2 r^2}{b-\sigma}.$$

2. Für $\lambda = \sigma$ erhalten wir $x = 0$ und $z = \frac{r(b-2)}{b-1}$.

Wegen $\dot{V} = 0$ gilt

$$y^2 + b\left(\frac{r(b-2)}{b-1}\right)^2 - 2br\frac{r(b-2)}{b-1} = 0$$

und damit

$$y^2 = \frac{b^2 r^2 (b-2)}{(b-1)^2}$$

für $b \geq 2$.

Hier ist

$$V = \sigma\frac{b^2 r^2 (b-2)}{(b-1)^2} + \sigma\left(\frac{r(b-2)}{b-1} - 2r\right)^2 = \frac{b^2 r^2 \sigma}{b-1}.$$

3. Auch $x = y = 0$ sind Lösungen.

Wegen $\dot{V} = 0$ gilt

$$\begin{aligned} & bz^2 - 2brz = 0 \\ \Leftrightarrow\ & bz(z-2r) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z = 0\ oder\ z = 2r. \end{aligned}$$

Hier ergibt sich ein V von

$$V = \sigma(0 - 2r)^2 = 4r^2\sigma$$

oder

$$V = \sigma(2r - 2r)^2 = 0.$$

Für das Maximum von V in D, das wir c nennen, bekommen wir nach einer kurzen Betrachtung der möglichen Lösungen und einem Vergleich der Werte von V

$$c = \begin{cases} \dfrac{b^2r^2}{b-\sigma}, & \text{für } b \geq 2\sigma \text{ und } \sigma \leq 1, \\ \dfrac{b^2r^2\sigma}{b-1}, & \text{für } b \geq 2 \text{ und } \sigma \geq 1, \\ 4r^2\sigma, & sonst. \end{cases}$$

Existenz einer volumenlosen beschränkten Menge, die alle Trajektorien anzieht

Im Inneren unseres Ellipsoids E gibt es eine beschränkte Menge, die alle Trajektorien anzieht und kein Volumen aufweist. Das folgt aus der Existenz des beschränkten Ellipsoids E zusammen mit der Dissipation des Lorenz-Systems. Folgen wir Sparrow (vgl. [23] S. 198) und stellen uns die Oberfläche des abgeschlossenen Ellipsoids E vor und beobachten den Fluss mit der Zeit in den Zeitschritten $1, 2, 3, \ldots$ so ergeben sich in diesen Schritten „neue“ Oberflächen, die „neue“ Gebiete $E_1, E_2, E_3, \ldots$ einschließen. Bezeichnen wir das Volumen von E mit $Vol(E)$, haben diese E_i für $i = 1, 2, 3, \ldots$ dann nach Abschnitt 3.2.2 das Volumen $e^{-(\sigma+1+b)i}\,Vol(E)$ und da $\lim_{i\to+\infty} e^{-(\sigma+1+b)i} \underbrace{Vol(E)}_{=konst.} = 0$, geht das Volumen für immer größer werdendes i gegen Null. Wir haben schon gezeigt, dass alle Trajektorien irgendwann in das Ellipsoid E eintreten und dann in diesem „festsitzen“. Alle Trajektorien durchwandern bei diesem

Eintreten den Rand von E. Nach dieser Überlegung muss also $E \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3$ ... gelten, sodass jede Trajektorie letztlich in einem bestimmten Teilraum von E, in E_∞, mit einem Volumen von Null „gefangen“ ist.

Das bedeutet aber nicht, dass ein Volumenelement auf einen Punkt „zusammenschrumpft“, sondern dass dieses durch den Fluss des Systems Φ zu einer Fläche „abflacht“, wie Lorenz (vgl. [11] S. 135) bemerkt.

Kapitel 4
Bifurkationen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit plötzlichen, sprunghaften Änderungen im Verhalten der Lösungen des Lorenz-Systems und beschreibt einige der auftretenden Bifurkationen. Bifurkation meint wörtlich übersetzt so etwas wie „Gabelung“ oder „Verzweigung“. Genauer definiert Lorenz (vgl. [13] S. 206):

Definition 9. Unter einer **Bifurkation** versteht man eine abrupte Änderung im Langzeitverhalten eines Systems, die auftritt, wenn ein Parameter einen kritischen Wert überschreitet.

Lokale und globale Bifurkationen, Änderungen im Verhalten des Systems in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes und solche, die über eine Umgebung eines Gleichgewichtspunktes hinausgehen, werden betrachtet. Als Beispiele werden die Pitchfork- und die Hopf-Bifurkation sowie die Homokline- und die Heterokline Bifurkation angeführt.

4.1 Lokale Bifurkationen

4.1.1 Pitchfork-Bifurkation

Bei der Pitchfork-Bifurkation ändert sich die Anzahl der Gleichgewichtspunkte bei Änderung eines Parameters in besonderer Weise. Betrachten wir die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems

$$O = (0, \quad 0, \quad 0)$$
$$C_1 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, \quad -\sqrt{b(r-1)}, \quad r-1\right)$$
$$C_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \quad \sqrt{b(r-1)}, \quad r-1\right)$$

und erinnern uns, dass C_1 und C_2 nur für $r > 1$ existieren, da wir für $r < 1$ eine negative Diskriminante in obigen Koordinaten erhalten, und für $r = 1$ die Punkte C_1 und C_2 mit dem Gleichgewichtspunkt O im Ursprung übereinstimmen. Die Anzahl der Gleichgewichtspunkte ändert sich somit, wenn r variiert wird. Nennen wir den kritischen Parameterwert, bei dem diese Änderung auftritt, r^* mit $r^* = 1$, dann hat das Lorenz-System

einen Gleichgewichtspunkt für $r \leq r^*$ und
drei Gleichgewichtspunkte für $r > r^*$.

Starten wir also unter r^* bei einem sehr kleinen r und erhöhen auf den kritischen Wert r^*, beobachten wir die Entstehung eines „neuen" Gleichgewichtspunktes, der zunächst mit dem Ursprung zusammenfällt und sich bei weiter anwachsendem r in zwei Gleichgewichtspunkte aufspaltet, die sich immer weiter voneinander entfernen. Solch eine Bifurkation nennt man „Pitchfork Bifurkation" – also „Heugabel-Verzweigung". In Abbildung 9 wurden die x-Koordinaten der Gleichgewichtspunkte gegen den Parameter r aufgetragen. Die grafische Darstellung zeigt die besondere Form, die der Pitchfork-Bifurkation ihren Namen gibt. Siehe dazu Grüne und Junge (vgl. [7] S. 147) und Hirsch und andere (vgl. [8] S. 178-179).

Aus Abschnitt 3.1.3 ist bekannt, dass der Gleichgewichtspunkt O

für $0 < r < r^*$ stabil und
für $r > r^*$ nicht-stabil

und die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2

für $r^* < r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ stabil und
für $r > \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ nicht-stabil

sind. Die Stabilität der Gleichgewichtspunkte wird in Abbildung 9 wie üblich (siehe zum Beispiel [7] S. 147) durch die Linienart dargestellt, wobei hier eine durchgezogene Linie für „stabil“ und eine gestrichelte Linie für „nicht-stabil“ verwendet wird. Für die Parameter σ und b wurden hier die klassischen Werte $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ gewählt.

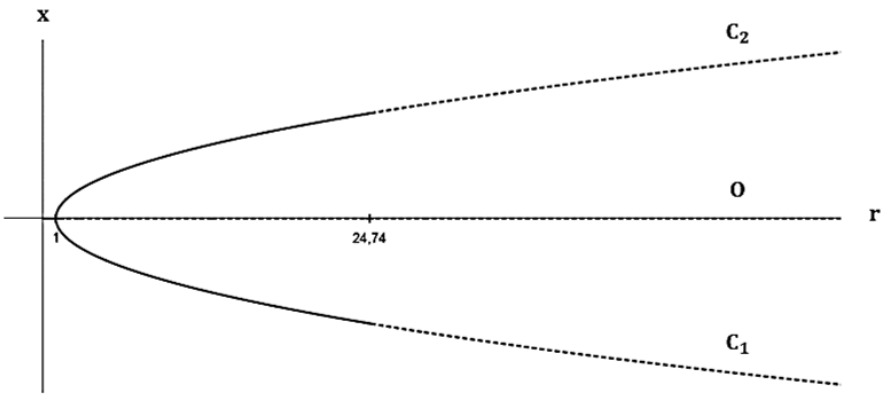


Abbildung 9: Pitchfork-Bifurkation

4.1.2 Hopf-Bifurkation

Bei der Hopf-Bifurkation geht es nun um die Änderung der Stabilität der Gleichgewichtspunkte bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes. Betrachten wir Abbildung 9, erkennen wir neben der „Heugabelform“ eine weitere Besonderheit. Der Ursprung O verliert bei $r^* = 1$ seine Stabilität an die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2, die dann bis zu einem Parameterwert $r < 24{,}74$ oder allgemein $r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ stabil bleiben und bei weiterer Erhöhung des Parameters plötzlich nicht-stabil werden. Nennen wir den kritischen Wert, bei dem diese Stabilitätsänderung auftritt, r_H mit $r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$, so sind die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2

stabil (Senken) für $r < r_H$ und
nicht-stabil (Sattelpunkte) für $r > r_H$.

Für $r = r_H$ schneidet das Paar konjugiert komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse und wir erhalten ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm i\omega$ mit $\omega \neq 0$, was sich im plötzlichen Verlieren der Stabilität der Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 zeigt. Wir beobachten eine sogenannte „Hopf-Bifurkation“. Siehe dazu Hirsch und andere (vgl. [8] S. 181-182) und Sparrow (vgl. [23] S. 11).
Man unterscheidet hier zwischen einer „superkritischen“ und einer „subkritischen“ Hopf-Bifurkation. Salopp kann nach Sparrow (vgl. [23] S. 11) definiert werden:

Definition 10. Die Bifurkation heißt **superkritisch**, falls jeder Punkt seine Stabilität durch Ausstoßen eines stabilen periodischen Orbits verliert.

Ein stabiler geschlossener Orbit um den Punkt entsteht und weitet sich mit Erhöhen des Parameters aus.

Definition 11. Die Bifurkation heißt **subkritisch**, falls jeder Punkt seine Stabilität durch Aufnehmen eines nicht-stabilen periodischen Orbits verliert.

Ein nicht-stabiler geschlossener Orbit um den Punkt zieht sich mit Erhöhen des Parameters zusammen und wird schließlich vom Punkt „verschluckt“.

Im Fall des Lorenz-Systems handelt es sich um eine subkritische Hopf-Bifurkation, wie Jerrold E. Marsden und Marjorie McCracken 1976 für die Parameterwerte $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$, für die sich ein Bifurkationswert $r_H = \frac{470}{19} \approx 24{,}74$ ergibt, bewiesen haben. Für den Beweis siehe Marsden und McCracken ([14] S. 142-147). Abbildung 10 zeigt in Anlehnung an Marsden und McCracken (vgl. [14] S. 9), was in der subkritischen Hopf-Bifurkation passiert. Die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 sind für $r < r_H$ stabil. Um die Gleichgewichtspunkte haben wir jeweils einen nicht-stabilen periodischen Orbit, der für wachsendes r immer weiter „schrumpft“. Bei $r = r_H$, dem kritischen Wert, „verschlucken“ die Gleichgewichtspunkte den periodischen Orbit und werden nicht-stabil.

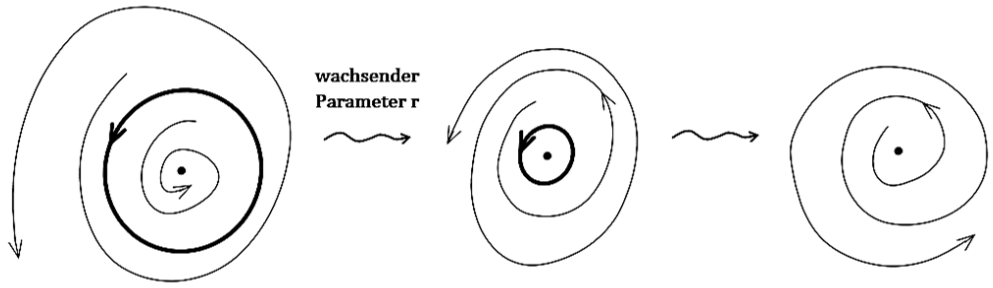


Abbildung 10: Hopf-Bifurkation

4.2 Globale Bifurkationen

4.2.1 Homokline Bifurkation

Im Folgenden wird eine Bifurkation, die mit dem Auftreten eines homoklinen Orbits verbunden ist, behandelt. Dazu werden nach Sparrow (vgl. [23] S. 193) definiert:

Definition 12. Ein **homokliner Orbit** eines stationären Punktes x^* ist eine Trajektorie, die in vorwärts- und rückwärtslaufender Zeit gegen x^* strebt. Ein **heterokliner Orbit** zwischen zwei stationären Punkten x^* und y^* ist eine Trajektorie, die in rückwärtslaufender Zeit gegen x^* und in vorwärtslaufender Zeit gegen y^* strebt.

Ein homokliner Orbit führt somit vom stationären Punkt x^* wieder in diesen zurück, während sich ein heterokliner Orbit zwischen zwei stationären Punkten x^* und y^* bewegt.

Definition 13. Die stabile Mannigfaltigkeit einer kompakten invarianten Menge S (eines Fixpunktes x^*) ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, für die Trajektorien durch x für $t \to +\infty$ gegen S (gegen x^*) streben. Die instabile Mannigfaltigkeit von S (von x^*) ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, für die Trajektorien durch x für $t \to -\infty$ gegen S (gegen x^*) streben.

Wir bezeichnen die stabile Mannigfaltigkeit mit W_s und die instabile Mannigfaltigkeit mit W_u. Analog zum stabilen und instabilen Teilraum – wo es um das Streben des linearisierten Systems gegen den Ursprung ging – können wir formulieren: Lösungen, die in der stabilen Mannigfaltigkeit W_s eines Fixpunktes x^* starten, laufen für $t \to +\infty$ gegen x^*, während sich Lösungen, die in der instabilen Mannigfaltigkeit W_u von x^* starten, von diesem entfernen.

Wir folgen in diesem Abschnitt den Ausführungen und numerischen Ergebnissen von Sparrow ([23] S. 13-16) für die festen Parameterwerte $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ und verwenden unsere bisherigen Ergebnisse.

Wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben ist der Gleichgewichtspunkt im Ursprung $O = (0, \quad 0, \quad 0)$ für einen Parameterwert $r > 1$ nicht-stabil und bildet mit zwei negativen reellen Eigenwerten und einem positiven reellen Eigenwert einen Sattelpunkt mit einem zweidimensionalen stabilen Teilraum und einem eindimensionalen instabilen Teilraum und damit – genauso – einer zweidimensionalen stabilen Mannigfaltigkeit und einer eindimensionalen instabilen Mannigfaltigkeit. Die stabile Mannigfaltigkeit können wir uns in der Nähe des Ursprungs als Ebene vorstellen, die nach unseren bisherigen Überlegungen in Abschnitt 3.1.2 die z-Achse einschließen muss.

Für ein kleines $r > 1$ teilt diese stabile Mannigfaltigkeit den dreidimensionalen Raum in besonderer Weise, wie Sparrow in [23] beschreibt: Startet eine Trajektorie in der Nähe des Ursprungs in der einen „Hälfte“ des Raumes, also auf der einen Seite der stabilen Mannigfaltigkeit, wandert diese gegen den Gleichgewichtspunkt C_1. Startet diese in der anderen „Hälfte“, wandert sie gegen C_2. Je größer dabei r ist, desto größere „Kreise“ ziehen die Trajektorien um die jeweiligen Gleichgewichtspunkte und desto langsamer nähern sie sich ihnen. Erhöhen wir r weiter über einen kritischen Parameterwert $r' \approx 13{,}926$ hinaus, ändert sich dieses Verhalten plötzlich. Die Trajektorien werden nicht mehr von ihren bisherigen Gleichgewichtspunkten angezogen. Sie laufen in die jeweils andere „Hälfte“ des Raumes über und wickeln sich um den jeweils anderen Gleichgewichtspunkt.

Folgen wir den Überlegungen von Sparrow, müssen für $r = r' \approx 13{,}926$ stabile und instabile Mannigfaltigkeit des Ursprungs zusammentreffen. Startet hier eine Trajektorie auf der instabilen Mannigfaltigkeit, startet sie zugleich auf der stabilen Mannigfaltigkeit – da diese die instabile einschließt – und die Trajektorie läuft „vorwärts und rückwärts“ gegen den Gleichgewichtspunkt im Ursprung. Wir beobachten einen homoklinen Orbit. Diese Änderung im Verhalten des Systems, die für den Bifurkationswert r' auftritt, wird deshalb „Homokline Bifurkation“ genannt. Abbildung 11 veranschaulicht die Bifurkation und stellt den Verlauf der Trajektorien für $1 < r < r'$, $r = r'$ und $r > r'$ in Anlehnung an Sparrow (vgl. [23] S. 14-15) schematisch dar.

Bemerkung 3. Interessant ist, dass der Orbit, der in der Homoklinen Bifurkation entsteht, jener periodische Orbit ist, den wir in der Hopf-Bifurkation beobachten, wie Sparrow in [23] durch Verfolgen eines nicht-stabilen periodischen Orbits um den Gleichgewichtspunkt C_2 für Parameterwerte r zwischen 13,926 und 24,74 feststellte: Geht man von einem „mittleren“ Wert $r = 20{,}0$ aus und verkleinert diesen Wert, läuft der Orbit immer näher am Ursprung vorbei und die Periode wächst stark an. Wird der Parameter r erhöht, zieht sich der Orbit immer mehr um C_2 zusammen und die Periode nimmt ab. Wird dieses beobachtete Verhalten in beide Richtungen gedanklich fortgesetzt, erhalten wir für $r = r' \approx 13{,}926$ unseren homoklinen Orbit und für $r = r_H \approx 24{,}74$ den in der Hopf-Bifurkation absorbierten Orbit. Siehe dazu Sparrow (vgl. [23] S. 26-28).

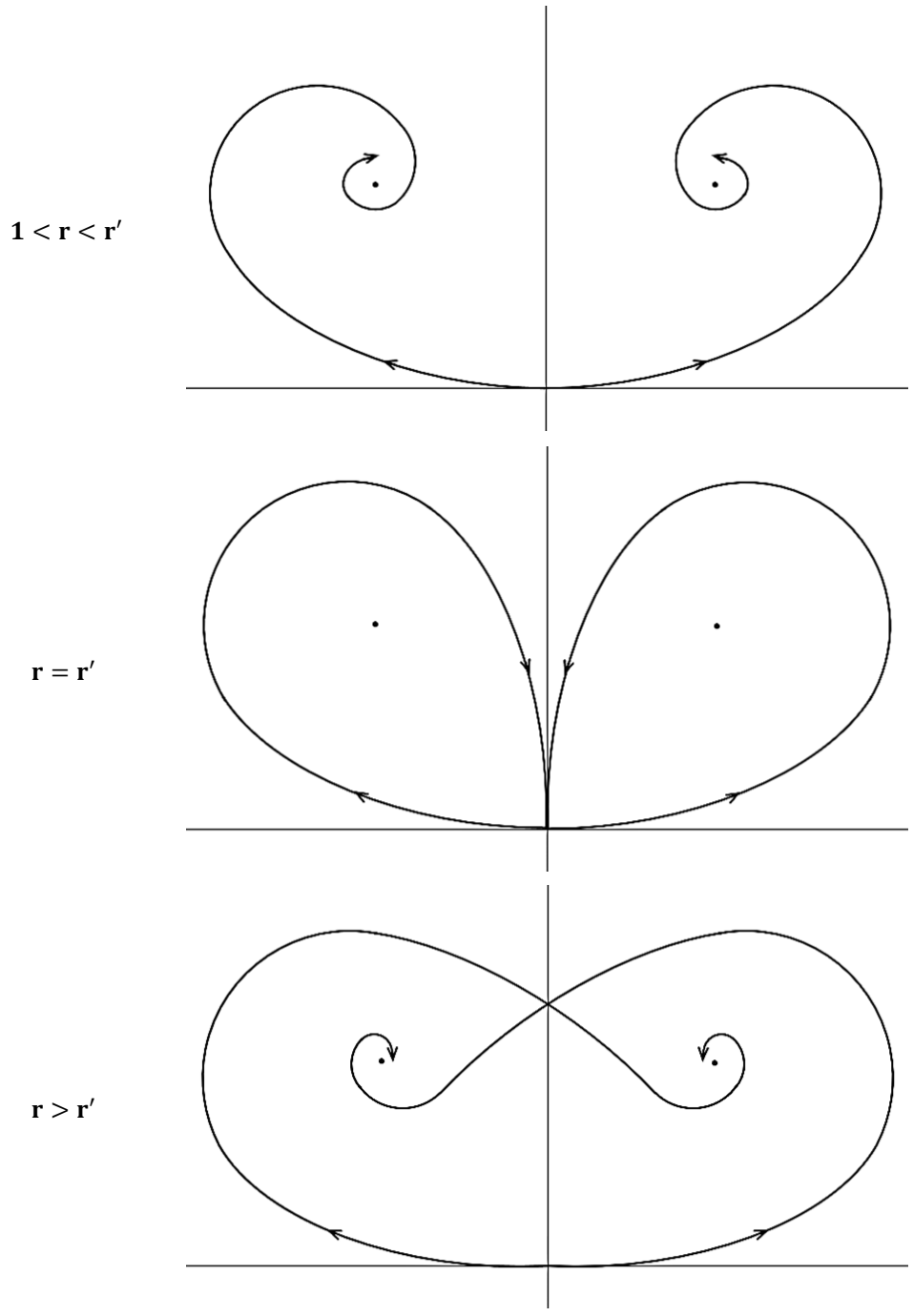


Abbildung 11: Homokline Bifurkation

4.2.2 Heterokline Bifurkation

Sparrow [23] untersucht das Lorenz-System neben der klassischen Wahl der Parameter $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ auch für kleine Parameterwerte b, für welche das System neue Eigenschaften und Besonderheiten zeigt. So beschreibt Sparrow für $b = 0{,}25$ die Heterokline Bifurkation, die – analog zur Homoklinen Bifurkation – nun mit dem Auftreten eines heteroklinen Orbits verbunden ist. Wir verwenden Sparrow ([23] S. 127-129 und 164-169) und geben einen Überblick über Sparrows Ergebnisse, die zur Entdeckung dieser neuen Bifurkation führten.

Hinweise für diese Bifurkation liefert das Verfolgen eines bestimmten symmetrischen periodischen Orbits, der sich abwechselnd um die stabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtspunkts C_2 und die stabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtspunkts C_1 windet. Diesen periodischen Orbit beobachtet Sparrow für verschiedene Parameterwerte r hinauf bis zu einem Wert $r \approx 1353$ und hinunter bis $r \approx 211$. Macht man dieses „Fenster“ immer kleiner, wird die Periode des verfolgten Orbits immer größer, bis „in der Mitte“ dieses Fensters zwischen $r = 480$ und $r = 500$ eine unendliche Periode erwartet werden kann, wie Abbildung 12 verdeutlicht (vgl. [23] S. 168, skizziert und leicht abgeändert).

Aus diesem Anwachsen der Periode schließt Sparrow, dass der Orbit den Gleichgewichtspunkten C_1 und C_2 immer näher kommt. Bei einem kritischen Wert $r = r^*$ mit $480 < r^* < 500$ laufen die Trajektorien schließlich gegen die Gleichgewichtspunkte und ein heterokliner Orbit zwischen C_1 und C_2 entsteht. Hier treffen die stabile Mannigfaltigkeit des einen und die instabile Mannigfaltigkeit des anderen Gleichgewichtspunktes zusammen. Die Trajektorie kann damit zugleich auf der stabilen und auf der instabilen Mannigfaltigkeit liegen und strebt für $t \to +\infty$ gegen den einen und für $t \to -\infty$ gegen den anderen Gleichgewichtspunkt. Das Verfolgen des Orbits führt damit auf einen heteroklinen Orbit mit unendlicher Periode, der den „Ursprung“ des beobachteten Orbits darstellt.

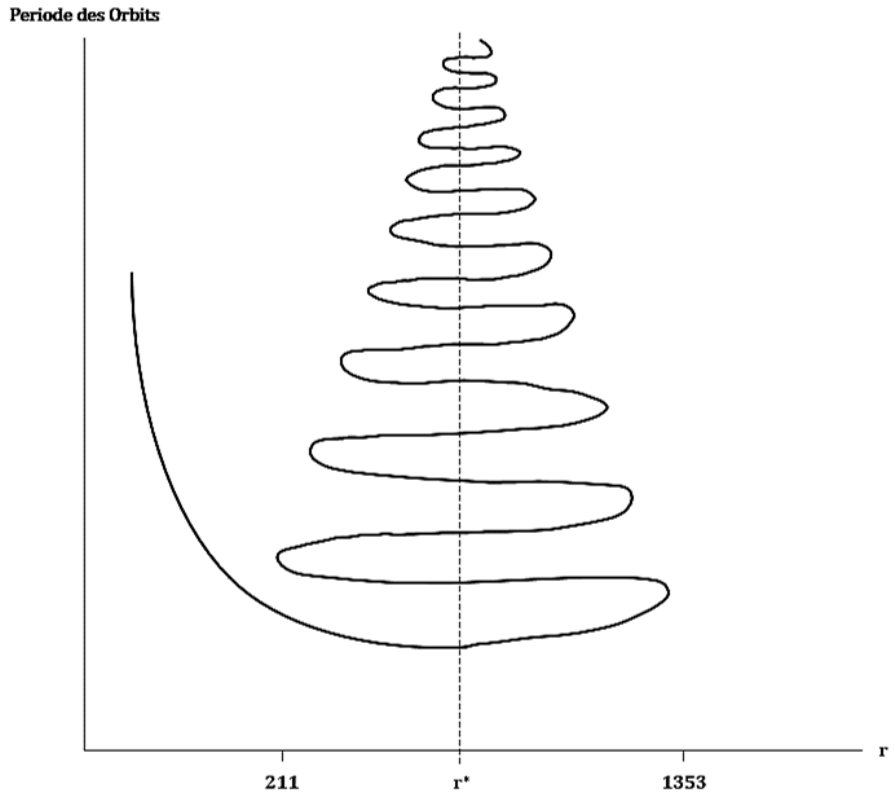


Abbildung 12: Erwartete Entwicklung der Periode

Aber nicht nur der auf diese Weise „gefundene“ heterokline Orbit, sondern auch Sparrows Untersuchungen der stabilen Mannigfaltigkeiten der Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 für $\sigma = 10$ und $b = 0{,}25$ zeigen diese neue Bifurkation an. Abbildung 13 und Abbildung 14 zeigen die stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für $r = 480$ und $r = 500$ (vgl. [23] S. 128-129, skizziert und leicht abgeändert). Betrachtet man die stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für den Parameterwert $r = 480$, lassen sich zwei „Äste“ links und rechts von C_2 erkennen, die mehr oder weniger stark „ausschlagen“. Für $r = 500$ tritt eine erste „halbe Windung“ um die z-Achse auf und die „Äste“ greifen nun ineinander. Es ergibt sich ein anderes Bild, wie durch Vergleich von Abbildung 13 und Abbildung 14 zu sehen ist.

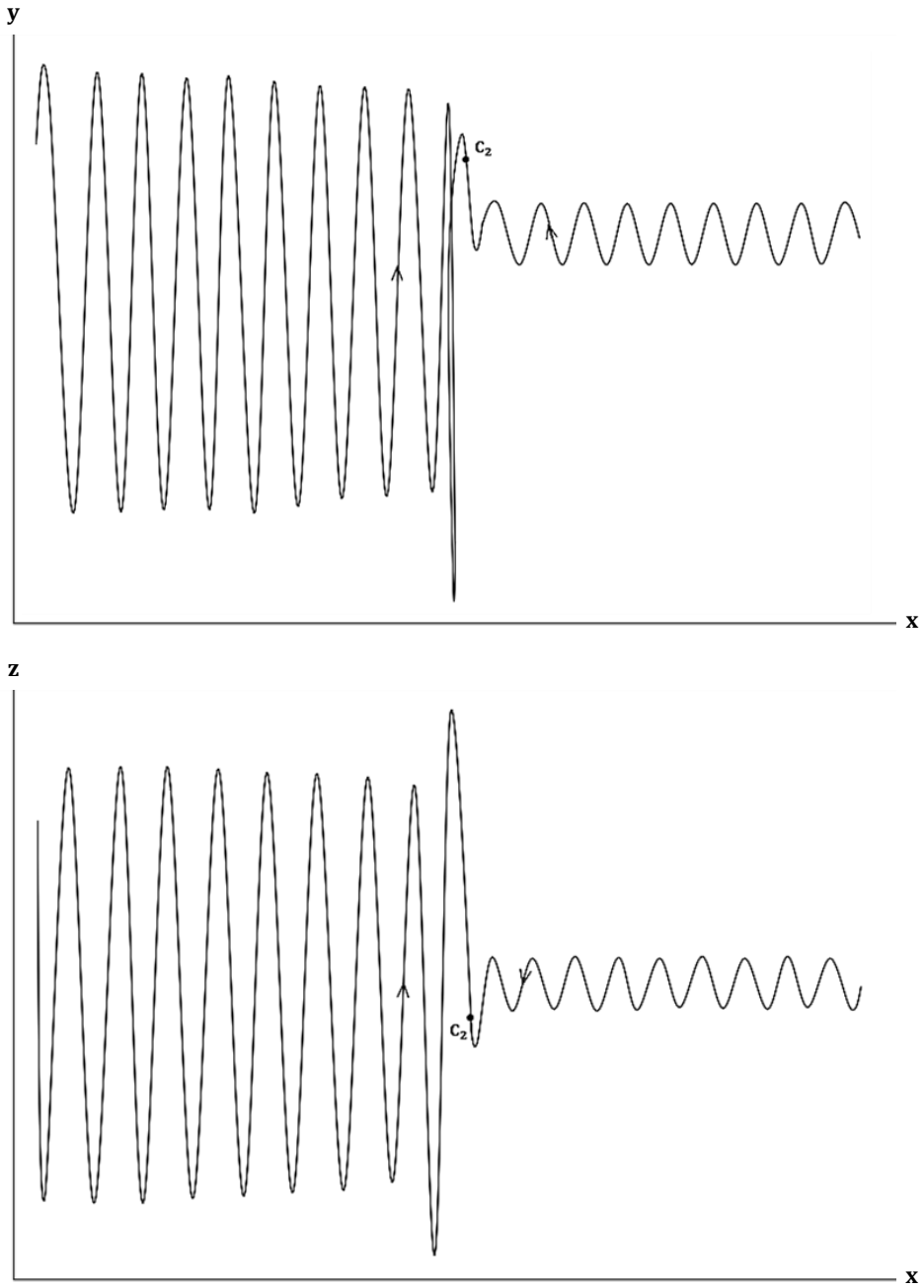


Abbildung 13: Stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für $r = 480$

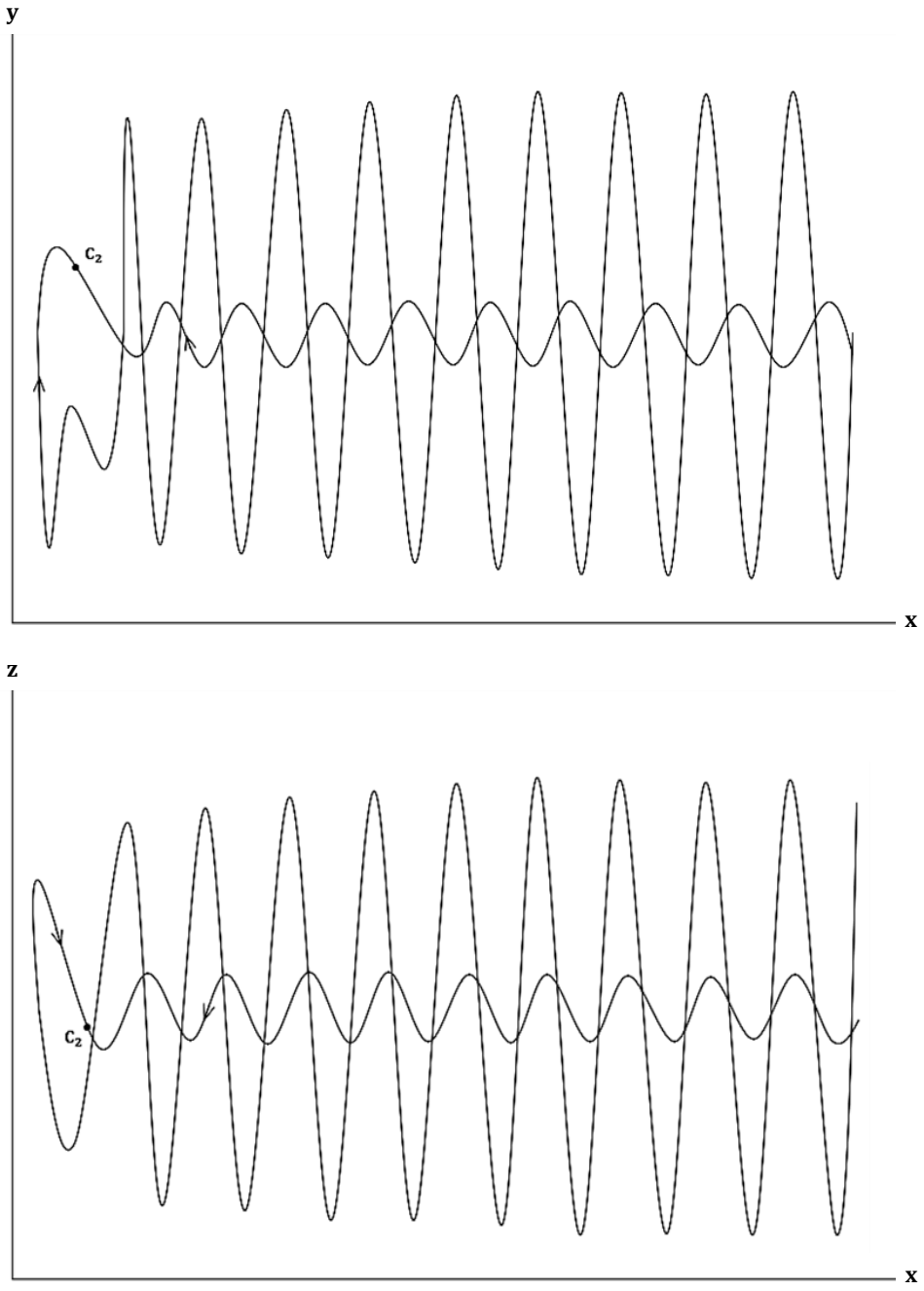


Abbildung 14: Stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für $r = 500$

Aufgrund der Symmetrie des Lorenz-Systems gelten analoge Aussagen auch für die stabile Mannigfaltigkeit von C_1. Diese Änderung im Verhalten der stabilen Mannigfaltigkeiten der Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2, die sich beim Durchlaufen des kritischen Parameterwertes r^* zwischen $r = 480$ und $r = 500$ zeigt, gibt nach Sparrow einen Hinweis auf die Heterokline Bifurkation und bekräftigt die Annahme einer solchen Bifurkation.

Kapitel 5
Der Lorenz-Attraktor

Im folgenden Kapitel wird auf die komplexe Struktur, die die Lösungen des Lorenz-Systems zeigen, eingegangen. Der „Attraktor“ wird definiert und näher erklärt. Die Existenz des Lorenz-Attraktors wird bewiesen. Anschließend werden weitere Besonderheiten aufgezeigt, die den Lorenz-Attraktor zu einem „seltsamen“ Attraktor machen. Der Beweis der Existenz des seltsamen Attraktors von Tucker wird skizziert.

5.1 Der Attraktor

5.1.1 Was ist ein Attraktor?

Salopp formuliert ist ein Attraktor eine invariante Menge, die alle naheliegenden Trajektorien anzieht. Startet eine Trajektorie ausreichend nahe dem Attraktor, läuft diese gegen den Attraktor, wie Robert L. Devaney (vgl. [5] S. 201) erklärt und Attraktoren auch als die Mengen beschreibt, die wir „sehen“, wenn wir dynamische Systeme mit Hilfe von Computern grafisch darstellen. Attraktoren sind als solche interessant, da „Attraktoren gerade diejenigen Teilbereiche des Zustandsraumes charakterisieren, in denen sich das Langzeitverhalten der Lösungen – soweit sie nicht unbeschränkt wachsen – abspielt.“ ([7] S. 157)

Hirsch und andere (vgl. [8] S. 310) definieren:

Definition 14. Sei $X' = F(X)$ ein System von Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^n$ mit Fluss Φ_t. Dann heißt eine Menge Λ **Attraktor**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Λ ist kompakt und invariant.
2. Es gibt eine offene Menge U, die Λ enthält, sodass für alle $X \in U$ und alle $t \geq 0$ $\Phi_t(X) \in U$ und $\bigcap_{t\geq 0} \Phi_t(U) = \Lambda$.
3. (Transitivität) Für beliebige Punkte $Y_1, Y_2 \in \Lambda$ und beliebige offene Umgebungen U_j von Y_j in U gibt es eine Lösung, die in U_1 startet und dann durch U_2 läuft.

Hirsch und andere (vgl. [8] S. 310-311) bemerken hier, dass es keine einheitliche, allgemein anerkannte Definition von Attraktoren gibt und in manchen Fällen auch von einem Attraktor gesprochen wird, wenn nur die Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind, während die Menge Λ bei zusätzlicher Erfüllung der Bedingung 3 manchmal als „transitiver Attraktor“ bezeichnet wird. Die Transitivitätsbedingung in obiger Definition stellt sicher, dass es sich um einen einzelnen Attraktor handelt und schließt damit eine „Ansammlung“ von mehreren verschiedenen Attraktoren aus.

5.1.2 Existenz des Lorenz-Attraktors

Wir werden nun zeigen, dass der Lorenz-Attraktor wirklich existiert. In der Literatur wird zum Beweis der Existenz des Attraktors oftmals ein vereinfachtes geometrisches Modell verwendet, das den Fluss des Lorenz-Systems beschreiben soll (siehe zum Beispiel Hirsch und andere [8] S. 314- 319). Wir werden hier aber anders vorgehen und einen einfachen Beweis führen, der aufgrund unseres Vorwissens aus Abschnitt 3.2.3 auch recht kurz ist. Die Beweisidee folgt dabei Grüne und Junge ([7] S. 165-169). Vor dem Beweis wird nach Grüne und Junge (vgl. [7] S. 165) definiert:

Definition 15. Eine kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^d$ heißt **absorbierende Menge** mit offener Absorptionsumgebung $U \supset C$, falls für jede kompakte Teilmenge $B \subset U$ ein $T > 0$ existiert, sodass $\Phi_t(B) \subset int\ C$ für alle $t \geq T$, wobei „$int\ C$“ das Innere der Menge C bezeichnet.

Außerdem verwenden wir für unseren Beweis den folgenden Satz:

Satz 3. Jede absorbierende Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit Absorptionsumgebung U enthält einen Attraktor $A \subset int\ C$ mit Stabilitätsumgebung U. Dieser Attraktor ist gegeben durch $A = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} \Phi_t(C)}$.

Die Stabilitätsumgebung U eines Attraktors A ist dabei eine offene Umgebung U von A, für die

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{x\in B} d(\Phi_t(x), A) = 0$$

für alle kompakten Teilmengen $B \subset U$ gilt (vgl. [7] S. 161).

Zum obigen Satz und zum Beweis des Satzes siehe Grüne und Junge ([7] S. 165-167).

Wir behaupten nun:

Behauptung: Der Lorenz-Attraktor existiert.

Beweis: Wir haben in Abschnitt 3.2.3 unter Verwendung der Ljapunov-Funktion

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

ein Ellipsoid $E \subset \mathbb{R}^3$ konstruiert, in dem $V \leq c + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und das Maximum c von V in $D = \{(x, y, z) | \dot{V}(x, y, z) \geq 0\}$, und gezeigt, dass alle Trajektorien in endlicher Zeit in dieses Ellipsoid E eintreten und dieses nach dem „Eintritt“ nicht mehr verlassen. Nach diesen Überlegungen existiert für jede kompakte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^3$ ein $T > 0$, sodass $\Phi_t(B) \subset int\ E$ für alle $t \geq T$. Da E beschränkt und abgeschlossen

ist, ist E kompakt. Damit ist unser Ellipsoid E eine absorbierende Menge mit Absorptionsumgebung $U = \mathbb{R}^3$. Nach Satz 3 enthält E einen Attraktor $A \subset int\ E$ mit Stabilitätsumgebung $U = \mathbb{R}^3$. Damit werden alle Trajektorien des dreidimensionalen Raumes vom Attraktor angezogen, was den Lorenz-Attraktor zu einem „globalen Attraktor“ macht. Wir finden den Lorenz-Attraktor also in unserem Ellipsoid E und haben die Existenz bewiesen.

■

Für die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ ergibt sich folgende Abschätzung des Ellipsoids E: Nach Abschnitt 3.2.3 berechnet sich das Maximum c von V in D für $b \geq 2$ und $\sigma \geq 1$ durch $c = \frac{b^2 r^2 \sigma}{b-1} = \frac{100352}{3}$. In E gilt daher $V \leq \frac{100352}{3} + \varepsilon$ und E ist gegeben durch $28x^2 + 10y^2 + 10(z-56)^2 = \frac{100352}{3} + \varepsilon$. Das Ellipsoid E und der enthaltene Lorenz-Attraktor sind für ein $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ in Anlehnung an Grüne und Junge (vgl. [7] S. 169) in Abbildung 15 dargestellt.

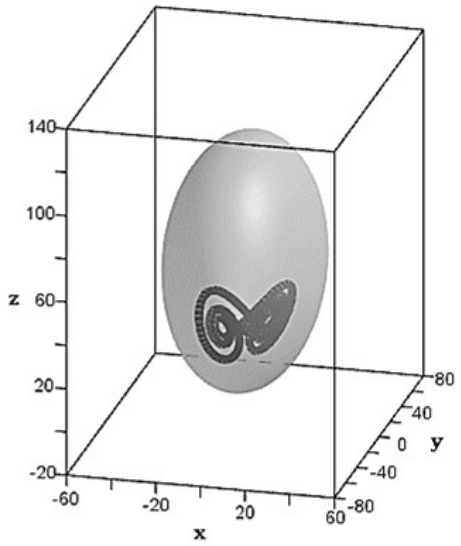


Abbildung 15: Der Lorenz-Attraktor im Ellipsoid E

Bemerkung 4. Wie bei Grüne und Junge ist auch unser Ellipsoid E sehr „großzügig“ gewählt und grenzt das Gebiet, in dem der Attraktor liegt, nur grob ein. Auch unser Ellipsoid E liefert keinerlei Informationen über die Größe oder die Struktur des Attraktors (vgl. [7] S. 169).

5.2 Der „seltsame“ Lorenz-Attraktor

5.2.1 Was ist ein „seltsamer“ Attraktor?

Der Begriff „strange attractor“ wurde erstmals von David Ruelle und Floris Takens in ihrer Arbeit *On the nature of turbulence* [21] 1971 verwendet. Als „seltsam“ bezeichneten sie dabei das Auftreten einer Cantor-Menge (vgl. [21] S. 170). Salopp können wir einen seltsamen Attraktor wie Lorenz (vgl. [13] S. 212) als Attraktor mit einer fraktalen Struktur definieren, dessen Schnitt mit einer entsprechenden Mannigfaltigkeit eine Cantor-Menge ist. Dazu wird die Definition einer Cantor-Menge nach Devaney (vgl. [5] S. 37) angeführt.

Definition 16. Eine Menge Λ heißt **Cantor-Menge**, falls sie abgeschlossen, total unzusammenhängend und perfekte Teilmenge eines Intervalls I ist. Eine Menge ist total unzusammenhängend, wenn sie keine Intervalle enthält. Eine Menge ist perfekt, wenn jeder Punkt der Menge Häufungspunkt der Menge ist. Ein Punkt ist Häufungspunkt der Menge, wenn es in jeder Umgebung des Punktes noch einen Punkt aus der Menge gibt.

In einer Cantor-Menge lassen sich damit zwischen zwei beliebigen Punkten der Menge immer andere Punkte der Menge und auch „Lücken“ finden (vgl. [13] S. 207).

Ein Fraktal kann anschaulich als eine Menge definiert werden, die selbstähnlich ist. Wird ein Teil der Menge „unter der Lupe“ betrachtet, ergibt sich das ursprüngliche Bild der Menge (vgl. [5] S. 37). Kurz: Fraktale sehen sich selbst ähnlich. Seltsame Attraktoren zeigen eine solche Selbstähnlichkeit und sind Fraktale.

Genauer und formaler definiert David Ruelle einen seltsamen Attraktor in *Strange attractors* [20] wie folgt (vgl. [20] S. 131):

Definition 17. Sei (X, F) ein dynamisches System. Man nennt eine beschränkte Menge A im m-dimensionalen Raum einen **seltsamen Attraktor**, wenn es eine Menge U mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) U ist eine m-dimensionale Umgebung von A,
d. h. für jeden Punkt X von A gibt es eine kleine Kugel mit Mittelpunkt in X, die vollständig in U enthalten ist. Insbesondere ist A in U enthalten.

(b) Für jeden Anfangspunkt X_0 in U liegt auch der Punkt X_t mit Koordinaten $x_1(t), \dots, x_m(t)$ für positives t in U.
X_t kann A dabei für ein ausreichend groß gewähltes t beliebig nahe kommen. Das bedeutet, A ist anziehend („attracting“).

(c) Es gibt eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen für X_0 in U.
Diese Eigenschaft macht A zu einem seltsamen Attraktor.

(d) Man kann einen Punkt X_0 in A wählen, sodass es beliebig nahe jedem anderen Punkt Y in A einen Punkt X_t für ein positives t gibt.
Diese „Unzerlegbarkeitsbedingung“ setzt voraus, dass A nicht in zwei verschiedene Attraktoren zerlegt werden kann.

Blicken wir auf die Definition eines Attraktors, Definition 14, in Abschnitt 5.1.1 zurück, erkennen wir, dass Ruelles "Unzerlegbarkeitsbedinung“ (d) der Transitivitätsbedingung in Definition 14 entspricht. Auch die Punkte (a) und (b) scheinen nicht neu. Die Besonderheit liegt hier in Bedingung (c), sodass also die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen einen Attraktor seltsam oder „strange“ macht.

5.2.2 Existenz des seltsamen Attraktors

Erst etwa 35 Jahre nachdem das Lorenz-System eingeführt wurde, konnte gezeigt werden, dass der Lorenz-Attraktor ein seltsamer Attraktor ist. In den späten 90er-Jahren konnte Warwick Tucker beweisen (vgl. [25] S. 1199):

Satz 4. Für die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ zeigen die Lorenz-Gleichungen einen seltsamen Attraktor A.

Tucker (vgl. [25] S. 1199) unterstreicht die Besonderheit seiner Beweismethode, die seinen Beweis von einem traditionellen mathematischen Beweis unterscheidet. Um die Existenz des seltsamen Attraktors A zu prüfen, erstellt Tucker einen Algorithmus, der mithilfe eines Computerprogramms umgesetzt wird. Tucker bedient sich damit einem zu dieser Zeit recht neuen Werkzeug und führt einen computergestützten Beweis. Zudem unterteilt Tucker seinen Beweis in einen globalen Teil und einen lokalen Teil, der speziell die Nähe des Ursprungs behandelt. Wir werden den Beweis von Tucker in diesem Abschnitt skizzieren und verwenden dazu Tucker [25] und Viana [26].

Tucker wählt für seinen Beweis eine Fläche Σ in der Ebene $z = r - 1 = 27$. Diese verwendet er als „Schnittfläche“ oder „Rückkehrfläche“, indem er die Schnittpunkte der Lösungen des Lorenz-Systems mit dieser Fläche betrachtet. Er reduziert den Fluss des Systems auf die Rückkehrabbildung R, die einen solchen Schnittpunkt auf den nächsten abbildet und so jedem Schnittpunkt seinen Rückkehrpunkt zu dieser Fläche zuordnet. Die Abbildung R ist dabei nicht definiert auf $\Gamma = \Sigma \cap W_s(O)$. Landet eine Trajektorie auf Σ auf der stabilen Mannigfaltigkeit des Ursprungs $W_s(O)$, läuft sie gegen den Ursprung und „geht verloren“. Sie kehrt nicht zur Fläche Σ zurück.

Tucker sucht dann ein „Einfanggebiet“ N in Σ, das Trajektorien nie wieder verlassen können. Dieses schätzt er mit ersten Berechnungen ab, nach denen N aus zwei disjunkten Mengen N^- und N^+ besteht. Diese Mengen deckt Tucker mit jeweils 350 kleinen anliegenden Rechtecken N_i^- und N_i^+ ab. Die Symmetrie des Lorenz-Systems erlaubt, die Berechnungen auf nur einen Teil von N zu beschränken. Tucker unterscheidet deshalb nicht weiter zwischen N^- und N^+ und bezeichnet die Rechtecke, die diese Mengen zusammensetzen, allgemein mit N_i.

Tucker verfolgt nun den Weg jedes Rechtecks N_i. Dafür überführt er ein „Startrechteck“ N_i auf eine erste Zwischenfläche $\Pi^{(1)}$, die sich nur knapp unterhalb der „Startfläche“ Σ befindet. Er berechnet die Trajektorie des Punkts in der Mitte des Rechtecks numerisch bis diese auf $\Pi^{(1)}$ trifft. Weil das Rechteck N_i und die

Entfernung zur Zwischenfläche $\Pi^{(1)}$ sehr klein gewählt sind, kann auch der Weg der anderen Punkte des Rechtecks abgeschätzt werden, die eine bestimmte Entfernung vom Zentrum nicht überschreiten können. Das liefert ein neues Rechteck $\mathcal{R}^{(1)}$, das auf die nächste Zwischenfläche $\Pi^{(2)}$ abgebildet wird und der Vorgang wird wiederholt. Jedes neue Rechteck $\mathcal{R}^{(m)}$ auf einer Zwischenfläche $\Pi^{(m)}$ wird auf eine neue Zwischenfläche $\Pi^{(m+1)}$ geschickt und jedes neue Rechteck enthält durch strenge Fehlerabschätzungen mit Sicherheit das Bild des vorangehenden Rechtecks. Die Zwischenflächen sind dabei parallel zur x-y- oder y-z-Ebene ausgerichtet. In jedem Schritt prüft das Programm die Flussrichtung der Trajektorien und wechselt zwischen horizontalen und vertikalen Flächen. Wird ein Rechteck auf seinem Weg zu groß, zerlegt das Programm es in kleinere Rechtecke, die dann getrennt „losgeschickt" werden. Das Verfolgen des Rechtecks N_i stoppt, wenn die Trajektorien von oben auf die Rückkehrfläche Σ treffen. Das Rechteck N_i besteht bei dieser Rückkehr aus vielen überlappenden Rechtecken $Q_{i,j}$ mit $j = 1, \dots, k(i)$. Die Vereinigung all dieser Rechtecke deckt das Bild des „Startrechtecks" N_i unter der Rückkehrabbildung R ab. Es gilt $R(N_i) \subset \bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_{i,j}$.

Tucker definiert zudem ein Kegelfeld $\mathfrak{C}$, indem er jedes „Startrechteck" N_i mit einem „Startkegel" C_i behaftet. Jeder solche Kegel ist durch die Winkel α_i^- und α_i^+ gegeben, die zwei Vektoren $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ in der Tangentialebene von N_i mit der x-Achse einschließen. Die Tangentialvektoren $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ werden dabei so gewählt, dass jeder „Startkegel" 10° geöffnet ist. Die Kegel C_i verfolgt Tucker in ähnlicher Weise wie die Rechtecke N_i: In jedem Schritt wird neben dem Überführen des Rechtecks auf eine Zwischenfläche $\Pi^{(m)}$ auch der Kegel auf $\Pi^{(m)}$ übertragen und die Entwicklung der Tangentialvektoren bis zur Rückkehr zur Fläche Σ beobachtet. Jeder neue Kegel wird dabei großzügig durch Auswählen der Vektoren $u^{(m)}$ und $v^{(m)}$, die den größten Winkel bilden, abgeschätzt und so enthält jeder neue Kegel mit Sicherheit die Bilder der Tangentialvektoren des vorangehenden Kegels. Die Rechtecke $Q_{i,j}$ sind dann bei ihrer Rückkehr zu Σ mit Kegeln beladen, die durch die Winkel $\beta_{i,j}^-$ und $\beta_{i,j}^+$ mit $j = 1, \dots, k(i)$ bestimmt sind. Das Programm grenzt damit nicht nur die Rückkehr des

Rechtecks N_i ein, sondern gibt auch eine obere Schranke für das Bild des Kegels C_i unter der Ableitung der Rückkehrabbildung DR.

Der Gleichgewichtspunkt des Lorenz-Systems im Ursprung erschwert numerische Berechnungen, da dieser für unbeschränkte „Rückkehrzeiten“ sorgt. Lösungen in der Nähe des Ursprungs laufen nur sehr langsam, was zu langen Berechnungszeiten und Fehleranhäufungen führen kann. Diese Schwierigkeiten umgeht Tucker folgendermaßen: Er setzt einen kleinen Würfel um den Ursprung, der „die Nähe“ des Ursprungs darstellt. In dieser gewählten Umgebung transformiert Tucker das Lorenz-System durch Umschreiben der Variablen in eine Normalform, die das System – grob formuliert – in eine einfachere Form bringt. Diese vereinfachte Form ist näherungsweise linear und ermöglicht numerische Berechnungen innerhalb des Würfels. Erreicht eine Lösung die vom Würfel festgelegte Umgebung des Ursprungs, wechselt das Computerprogramm die Integrationsmethode. Anstelle des zuvor beschriebenen schrittweisen Vorgehens arbeitet das Programm mit der linearen Näherung und berechnet jenen Punkt, an dem die Lösung diese Umgebung wieder verlässt. Tritt ein Rechteck mit Kegel in den Würfel ein, liefert das Programm den Austritt aus dem Würfel. Nach diesem Austreten wird wie zuvor durch Abbilden der Rechtecke auf Zwischenflächen fortgefahren.

Tuckers Programm führt die Berechnungen für alle Rechtecke N_i samt Kegel C_i durch. Dieses computergestützte Vorgehen erlaubt Tucker die folgenden wesentlichen Eigenschaften der Rückkehrabbildung R zu beweisen:

Existenz eines vorwärts invarianten Gebiets

Die Vereinigung aller Rechtecke $Q_{i,j}$ eines Startrechtecks N_i, $\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_{i,j}$, ist für alle i streng in N enthalten. Jedes Rechteck N_i, das in N startet, kehrt in N zur Fläche Σ zurück. Es gilt $R(N \backslash \Gamma) \subset int(N)$, wobei $int(N)$ das Innere von N bezeichnet, und daher existiert eine kompakte Menge $N \subset \Sigma$, sodass $N \backslash \Gamma$ vorwärts invariant unter der Rückkehrabbildung R ist. Der Fluss hat damit eine anziehende Menge A mit dem Schnitt $A \cap \Sigma = \bigcap_{n=0}^{\infty} R^n(N) = \Lambda$.

Existenz eines vorwärts invarianten Kegelfeldes

Für alle rückkehrenden Kegel auf den Rechtecken $Q_{i,j}$ gilt bei nichtleerem Schnitt $Q_{i,j} \cap N_k$ des Rechtecks mit einem Startrechteck: $\alpha_k^- < \beta_{i,j}^- < \beta_{i,j}^+ < \alpha_k^+$. Das Kegelfeld $\mathfrak{C}$, das durch die Gesamtheit aller Startkegel C_i gegeben ist, wird daher unter der Ableitung der Rückkehrabbildung DR streng auf sich selbst abgebildet und ist vorwärts invariant. Für alle $x \in N$ gilt $DR(x)\mathfrak{C}(x) \subset \mathfrak{C}\big(R(x)\big)$.

Ausdehnung und topologische Transitivität

Alle Vektoren innerhalb des Kegelfelds $\mathfrak{C}$ erfahren unter DR eine Ausdehnung. Es existieren $C > 0$ und $\lambda > 1$, sodass $|DR^n(x)v| \geq C\lambda^n|v|$ für alle $v \in \mathfrak{C}(x)$, $x \in N$ und $n \geq 0$. Der Ausdehnungsfaktor λ ist dabei ausreichend groß und stellt sicher, dass die Abbildung R topologisch transitiv auf Λ ist.

Aus diesen drei Eigenschaften folgt schließlich die Existenz des seltsamen Attraktors und Tucker beweist, dass der Lorenz-Attraktor wirklich „seltsam“ ist.

Kapitel 6
Chaotisches Verhalten

Mit dem Begriff „Chaos“ scheint wohl jeder Mensch eine gewisse Vorstellung zu verbinden. Im Alltag gebrauchen wir „Chaos“ oft für ein „Durcheinander“, etwas Ungeordnetes ohne jegliche Struktur. Entgegen diesem Alltagsverständnis meint chaotisches Verhalten im mathematischen Sinne aber kein regelloses „Wirrwarr“. In diesem Kapitel wird Chaos genau definiert. Als eine mögliche Definition wird hier die Definition von Chaos nach Devaney angeführt und näher betrachtet. Nach dieser Begriffsbestimmung wird das chaotische Verhalten des Lorenz-Systems beschrieben.

6.1 Chaos

6.1.1 Was ist Chaos?

Lorenz beschreibt Chaos in *The essence of chaos* (vgl. [13] S. 4-8) einführend und salopp als etwas, das zufällig („random“) scheint, aber nicht ist. Lorenz hebt den Unterschied zwischen Zufall und Chaos hervor, indem er näher auf diese Begriffe eingeht und erklärt, dass eine zufällige Abfolge von Ereignissen eine ist, „in der alles, was auch immer passieren kann, als nächstes passieren kann.“ ([13] S.6) Als Beispiel führt Lorenz hier den Münzwurf an. Ganz anders verhält es sich bei chaotischen Systemen. Hier ist jeder Zustand durch die Anfangsbedingungen bestimmt und daher gibt es nur einen möglichen nächsten Zustand. Chaos folgt ganz bestimmten Gesetzmäßigkeiten. Wir sprechen deshalb auch von „deterministischem Chaos“.

Es gibt in der Mathematik keine allgemein anerkannte Definition von Chaos (siehe dazu zum Beispiel *Defining chaos* von Brian R. Hunt und Edward Ott [9]). Wir werden hier die Definition von Chaos nach Devaney (vgl. [5] S. 50) als eine mögliche Definition anführen und anschließend auf die einzelnen Punkte eingehen.

Definition 18 (Chaos nach Devaney). Sei V eine Menge. $f: V \to V$ heißt **chaotisch** auf V, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. f zeigt eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.
2. f ist topologisch transitiv.
3. Periodische Punkte liegen dicht in V.

Nach Devaney (vgl. [5] S. 49) werden nun die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und die topologische Transitivität definiert.

Definition 19. $f: J \to J$ zeigt eine **starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen**, falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in J$ und jede Umgebung N von x ein $y \in N$ und ein $n \geq 0$ existieren, sodass $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen bedeutet also, dass es in der Nähe jedes Punktes x einen nahen Punkt y gibt, der nach kurzer Zeit weit weg ist. Startet eine Trajektorie in x und eine weitere im Startpunkt y, sind diese Trajektorien trotz ihrer anfänglichen Nähe nach endlich vielen Schritten weit voneinander entfernt und zeigen einen anderen Verlauf.

Definition 20. Man nennt $f: J \to J$ **topologisch transitiv**, falls für jedes Paar offener Mengen $U, V \subset J$ ein $k > 0$ existiert, sodass $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Nehmen wir zwei beliebige offene Teilmengen U und V unserer Menge J und starten eine Trajektorie in der Menge U, landen wir nach einer bestimmten Zeit in der Menge V. Die Trajektorie wandert also von der offenen Menge U in jede beliebige offene Menge V. Die Menge J kann daher nicht in zwei invariante disjunkte offene Mengen zerlegt werden.

Die dritte Eigenschaft von Chaos wird nach [17] definiert:

Definition 21. Sei $f: J \to J$. Man sagt, **periodische Punkte liegen dicht** in J, falls $\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in J\ periodisch$ mit $|y - x| < \varepsilon$.

Das heißt, in der Nähe jedes Punktes x gibt es auch einen periodischen Punkt y. Dazu wird die Definition eines periodischen Punktes angeführt, die zum Beispiel in Devaney (vgl. [5] S. 18) nachgelesen werden kann.

Definition 22. Ein Punkt x heißt **periodischer Punkt**, falls $f^n(x) = x$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(x) = x$ heißt Periode von x.

Entsprechend dieser drei beschriebenen Punkte ergeben sich nach Devaney (vgl. [5] S. 50) die folgenden wesentlichen „Bestandteile“ von Chaos:

- Unvorhersagbarkeit (Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen)
- Unzerlegbarkeit (Topologische Transitivität)
- Eine bestimmte Regelmäßigkeit (Dichte periodische Punkte)

6.1.2 Die überflüssige Forderung in Devaneys Definition

Interessant ist, dass eine der Bedingungen, die Devaney in seiner Definition von Chaos, in Definition 18, fordert, überflüssig ist. So zeigten J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis und P. Stacey 1992 in *On Devaney's definition of chaos* [1], dass die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus den beiden anderen Eigenschaften „Topologische Transitivität“ und „Dichte periodische Punkte“ folgt. Wir folgen Banks und anderen [1] und beweisen den folgenden Satz:

Satz 4. Ist $f: X \to X$ topologisch transitiv und hat dichte periodische Punkte, dann zeigt f eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beweis: Sei $f: X \to X$ topologisch transitiv und habe dichte periodische Punkte.
Zunächst zeigen wir, dass es ein $\delta_0 > 0$ gibt, sodass wir für jeden Punkt $x \in X$ einen periodischen Punkt $q \in X$ finden, dessen Orbit $O(q)$ mindestens $\frac{\delta_0}{2}$ von x entfernt ist.

So ein Orbit existiert, da für zwei beliebige periodische Orbits $O(q_1)$ und $O(q_2)$ mit einem Abstand δ_0 unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt

$$\delta_0 = |O(q_1) - O(q_2)| = |O(q_1) - x + x - O(q_2)| \leq |O(q_1) - x| + |x - O(q_2)|.$$

Wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|O(q_1) - x| \geq |x - O(q_2)|$, erhalten wir

$$\delta_0 \leq 2\,|O(q_1) - x|$$

und daher

$$\frac{\delta_0}{2} \leq |O(q_1) - x|.$$

Einer der gewählten Orbits ist damit mindestens $\frac{\delta_0}{2}$ von x entfernt und die Existenz eines solchen Orbits ist bewiesen.

Nun können wir zeigen, dass f eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen mit einer „Sensitivitätskonstante“ $\delta = \frac{\delta_0}{8}$ aufweist:

Sei N eine Umgebung eines beliebigen Punktes $x \in X$ und sei $B_\delta(x)$ eine offene Kugel mit Radius $\delta = \frac{\delta_0}{8}$ um x. Weil die periodischen Punkte von f dicht in X liegen, gibt es einen periodischen Punkt p der Periode n mit $p \in U = N \cap B_\delta(x)$ und, wie wir oben beschrieben haben, gibt es einen periodischen Punkt $q \in X$, dessen Orbit $O(q)$ mindestens $\frac{\delta_0}{2} = 4\delta$ von x entfernt ist. Wir setzen

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}\left(B_\delta\left(f^i(q)\right)\right).$$

Da die offene Kugel $B_\delta\left(f^i(q)\right)$ für $\delta > 0$ offen ist, die Urbilder offener Mengen offen sind und der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen offen ist, ist V offen. Außerdem ist V nicht leer, da $q \in V$. Auch die Menge $U = N \cap B_\delta(x)$ ist als Durchschnitt zweier offener Mengen offen und nicht leer, da $p \in U$. Weil f topologisch transitiv ist, existiert ein $y \in U$ und ein $k > 0$, sodass $f^k(y) \in V$.
Sei j die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{k}{n} + 1$. Es gilt $\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq j \leq \frac{k}{n} + 1$. Dann ist $1 \leq nj - k \leq n$ und

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}\left(f^k(y)\right) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta\left(f^{nj-k}(q)\right).$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|x - f^{nj-k}(q)\right| &= \left|x - f^{nj}(p) + f^{nj}(p) - f^{nj}(y) + f^{nj}(y) - f^{nj-k}(q)\right| \\ &\leq \left|x - f^{nj}(p)\right| + \left|f^{nj}(p) - f^{nj}(y)\right| + \left|f^{nj}(y) - f^{nj-k}(q)\right|\end{aligned}$$

und nach Umformen

$$\left|f^{nj}(p) - f^{nj}(y)\right| \geq \left|x - f^{nj-k}(q)\right| - \left|f^{nj}(y) - f^{nj-k}(q)\right| - \left|x - f^{nj}(p)\right|.$$

Da p ein periodischer Punkt der Periode n ist und nj ein Vielfaches dieser Periode ist, ist $f^{nj}(p) = p$, und wir bekommen

$$\left|p - f^{nj}(y)\right| \geq \left|x - f^{nj-k}(q)\right| - \left|f^{nj}(y) - f^{nj-k}(q)\right| - |x - p|.$$

Weil $p \in U = N \cap B_\delta(x)$ und daher insbesondere $p \in B_\delta(x)$ und $f^{nj}(y) \in B_\delta\left(f^{nj-k}(q)\right)$, folgt

$$\left|p - f^{nj}(y)\right| \geq \underbrace{\left|x - f^{nj-k}(q)\right|}_{>4\delta} - \underbrace{\left|f^{nj}(y) - f^{nj-k}(q)\right|}_{<\delta} - \underbrace{|x - p|}_{<\delta} > 2\delta.$$

Wenden wir die Dreiecksungleichung erneut an, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\delta < \left|p - f^{nj}(y)\right| &= \left|p - f^{nj}(x) + f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right| \\ &\leq \left|p - f^{nj}(x)\right| + \left|f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right|. \end{aligned}$$

Beträgt einer der Abstände $\left|p - f^{nj}(x)\right|$ oder $\left|f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right|$ höchstens δ, ist der andere Abstand sicher größer als δ, denn:
Ist $\left|p - f^{nj}(x)\right| \leq \delta$, folgt

$$\left|f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right| > 2\delta - \left|p - f^{nj}(x)\right| \geq \delta.$$

Ist $\left|f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right| \leq \delta$, folgt

$$\left|p - f^{nj}(x)\right| > 2\delta - \left|f^{nj}(x) - f^{nj}(y)\right| \geq \delta.$$

In beiden Fällen haben wir damit einen Punkt in der Umgebung N von x gefunden, der nach nj Schritten mehr als δ von $f^{nj}(x)$ entfernt ist. Damit besitzt f eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und wir haben gezeigt, dass diese direkt aus der toplogischen Transitivität und den dichten periodischen Punkten folgt.

■

Banks und andere bemerken in [1], dass die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen oftmals als „zentrale Idee“ von Chaos verstanden wird und ihr Beweis gewissermaßen überraschend scheint. Und auch wenn wir nun wissen, dass diese Bedingung in Devaneys Definition eine überflüssige Forderung darstellt, ist diese als „Schmetterlingseffekt“ bekannte und wohl berühmteste Eigenschaft chaotischer Systeme kaum wegzudenken und so bleibt Devaneys Definition von

Chaos bis heute in ihrer ursprünglichen Form eine der anerkanntesten und meist verwendeten Definitionen von Chaos.

6.2 Das Chaos im Lorenz-System

Um das chaotische Verhalten des Lorenz-Systems zu zeigen, werden wir hier auf Ergebnisse aus anderen Kapiteln zurückgreifen oder an diesen weiterarbeiten und anders als es in der Literatur häufig vorzufinden ist, das geometrische Modell vermeiden. Neben diesem Zugang wird die Vorgehensweise von Hirsch und anderen [8] skizziert, die einen formalen Beweis des chaotischen Verhaltens führen.

6.2.1 Dichte periodische Punkte

In Abschnitt 3.2.1 haben wir das nichtperiodische Verhalten des Lorenz-Systems behandelt. Um dieses Verhalten zu zeigen verfolgte Lorenz [11] eine numerische Lösung des Systems für die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ und $r = 28$. Durch Abbildung der beobachteten Maxima in z auf ihre jeweiligen Nachfolger und anschließende Idealisierung erhielt Lorenz die vereinfachte Abbildung auf dem Einheitsintervall

$$M_{n+1} = \begin{cases} 2M_n, & \text{für } M_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ nicht\ definiert, & \text{für } M_n = \frac{1}{2}, \\ 2 - 2M_n, & \text{für } M_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \qquad \text{(L1)}$$

die jedem Maximum M_n das nachfolgende Maximum M_{n+1} zuordnet. Wählen wir einen Anfangswert $M_0 = \frac{u}{2^p v}$ für zwei relativ prime ungerade Zahlen u und v und eine natürliche Zahl $p \geq 1$, ist die oben definierte Folge (L1) nach endlich vielen Schritten periodisch. Da die Menge aller rationalen Zahlen der Form $\frac{u}{2^p v}$ auf dem

Einheitsintervall abzählbar unendlich ist, folgerte Lorenz, dass das Lorenz-System abzählbar unendlich viele periodische Lösungen besitzt.

Ein Anfangswert $M_0 = \frac{u}{2^p v}$ führt daher zu periodischen Lösungen der idealisierten Abbildung (L1), die wiederum die periodischen Lösungen des Lorenz-Systems darstellen sollen. Diese periodischen Lösungen stimmen klarerweise mit den periodischen Punkten des Systems überein. Jeder Punkt einer solchen Lösung ist ein periodischer Punkt. Wir können daher die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.1 nutzen und zeigen, dass dieser idealisierten Betrachtung nach, die periodischen Punkte des Lorenz-Systems dicht liegen. Dafür beweisen wir folgende Behauptung:

Behauptung: Die Menge aller rationalen Zahlen der Form $\frac{u}{2^p v}$ für zwei relativ prime ungerade Zahlen u und v und eine natürliche Zahl $p \geq 1$ liegt dicht in $[0, \quad 1]$.

Beweis: Seien $\frac{m_1}{n_1}, \ \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ zwei beliebige rationale Zahlen auf dem Einheitsintervall mit $0 \leq \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \leq 1$. Dann können wir zwischen $\frac{m_1}{n_1}$ und $\frac{m_2}{n_2}$ immer eine rationale Zahl $\frac{u}{2^p v} \in \mathbb{Q}$ mit der oben beschriebenen Gestalt finden, indem wir wie folgt vorgehen:

Wir berechnen zunächst die rationale Zahl zwischen $\frac{m_1}{n_1}$ und $\frac{m_2}{n_2}$, die sich genau in der Mitte dieser beiden Zahlen befindet und bezeichnen diese mit q_1. Dann bestimmen wir die rationale Zahl in der Mitte von $\frac{m_1}{n_1}$ und unserer „neuen“ Zahl q_1 und nennen diese q_2. Fahren wir auf diese Weise fort, erhalten wir

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{2}\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}\right) = \frac{1}{2^2}\frac{(1+2) m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{2^2}\frac{(1+2) m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}\right) = \frac{1}{2^3}\frac{(1+2+2^2) m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

… .

Nach n Schritten bekommen wir die „n-te Mitte“

$$q_n = \frac{1}{2^n}\frac{(1+2+4+\cdots+2^{n-1})m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2} = \frac{1}{2^n}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\, m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}.$$

Abbildung 16 veranschaulicht das Vorgehen zur Konstruktion von q_n und stellt die „Halbierungsschritte“ bis zur „vierten Mitte“ q_4 grafisch dar.

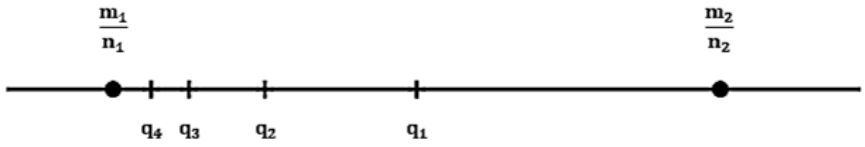


Abbildung 16: Konstruktion von q_n

Mit vollständiger Induktion kann leicht gezeigt werden, dass $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, und wir können q_n schreiben als

$$q_n = \frac{1}{2^n}\frac{(2^n-1)m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass unsere konstruierte rationale Zahl q_n die Form $\frac{u}{2^p v}$ hat. Bezeichnen wir dafür den Zähler $(2^n-1)m_1n_2 + m_2n_1$ mit $\tilde{u}$ und den Teil des Nenners n_1n_2 mit $\tilde{v}$ und betrachten alle möglichen Fälle:

1. Fall: $\tilde{u}$ ungerade, $\tilde{v}$ ungerade.

Sind $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ ungerade und haben keine gemeinsamen Teiler $\neq 1$, haben wir unsere gesuchte Form $\frac{u}{2^p v}$ erreicht. Sind $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ nicht teilerfremd, kürzen wir soweit wie möglich und kommen so auf die Form $\frac{u}{2^p v}$.

2. Fall: $\tilde{u}$ ungerade, $\tilde{v}$ gerade.

Ist $\tilde{v}$ gerade, gibt es eine natürliche Zahl $x \geq 1$, sodass $\tilde{v} = 2^x r$ für eine ungerade Zahl r. Wir können $\tilde{v}$ als Produkt einer Zweierpotenz und einer ungeraden Zahl schreiben. Fassen wir diese Zweierpotenz 2^x mit der Zweierpotenz 2^n zu 2^{n+x} zusammen, führt uns das auf den ersten Fall und wir bekommen – möglicherweise nach Kürzen – die Form $\frac{u}{2^p v}$.

3. Fall: $\tilde{u}$ gerade, $\tilde{v}$ ungerade.

Ist $\tilde{u} = (2^n - 1)m_1 n_2 + m_2 n_1 = 2^n m_1 n_2 + m_2 n_1 - m_1 n_2$ gerade, muss $m_2 n_1 - m_1 n_2 > 0$ gerade sein, da $2^n m_1 n_2$ sicher gerade ist. Daher ist $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 2^k r$ für eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und eine ungerade Zahl r. Durch unsere Konstruktion gilt $q_n < \frac{m_2}{n_2} \leq 1$ und da q_n nach oben beschränkt ist, muss k endlich sein. Wählen wir $N > k$, erhalten wir

$$\begin{aligned} q_{n=N} &= \frac{1}{2^N}\frac{(2^N - 1)m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{1}{2^N}\frac{2^N m_1 n_2 + m_2 n_1 - m_1 n_2}{n_1 n_2} \\ &= \frac{1}{2^N}\frac{2^N m_1 n_2 + 2^k r}{n_1 n_2} = \frac{2^k}{2^N}\frac{2^{N-k} m_1 n_2 + r}{n_1 n_2} \\ &= \frac{1}{2^{N-k}}\frac{2^{N-k} m_1 n_2 + r}{n_1 n_2}. \end{aligned}$$

Der Zähler $2^{N-k} m_1 n_2 + r$ ist nach dieser Wahl als Summe der geraden Zahl $2^{\overbrace{N-k}^{>0}} m_1 n_2$ und der ungeraden Zahl r ungerade. Nach N Schritten und nach Kürzen haben wir damit sicher die Form $\frac{u}{2^p v}$ erreicht.

4. Fall: $\tilde{u}$ gerade, $\tilde{v}$ gerade.

Sind $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ gerade, können wir durch Kürzen den Zähler $\tilde{u}$ oder den „Teilnenner“ $\tilde{v}$ ungerade machen, was uns auf die ersten drei Fälle führt. Daher hat q_n auch in diesem Fall die gesuchte Form $\frac{u}{2^p v}$.

Damit haben wir gezeigt, dass es für zwei beliebige rationale Zahlen $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \leq 1$ eine rationale Zahl $\frac{u}{2^p v} \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$0 \leq \frac{m_1}{n_1} < \frac{u}{2^p v} < \frac{m_2}{n_2} \leq 1. \quad (1)$$

Daher liegt die Menge aller rationalen Zahlen der Form $\frac{u}{2^p v}$ dicht in $\mathbb{Q} \cap [0, \quad 1]$.

$\mathbb{Q}$ liegt bekanntlich dicht in $\mathbb{R}$ und daher auch im Intervall $[0, \quad 1]$. Für zwei beliebige reelle Zahlen $x, \ y \ \in R$ mit $0 \leq x < y \leq 1$ gibt es eine rationale Zahl $\frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 \leq x < \frac{m_1}{n_1} < y \leq 1 \quad (2)$$

und weil jede rationale Zahl $\frac{m_1}{n_1}$ eine reelle Zahl ist, gibt es zwischen $\frac{m_1}{n_1}$ und y eine rationale Zahl $\frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 \leq x < \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} < y \leq 1. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt

$$0 \leq x < \frac{m_1}{n_1} < \frac{u}{2^p v} < \frac{m_2}{n_2} < y \leq 1$$

und wir können zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen x und y auf dem Einheitsintervall immer eine rationale Zahl $\frac{u}{2^p v}$ finden. Daher liegt die Menge aller rationalen Zahlen der Form $\frac{u}{2^p v}$ dicht in $[0, \quad 1]$.

■

Wir haben gezeigt, dass die Anfangswerte $M_0 = \frac{u}{2^p v}$, die zu periodischen Lösungen der Abbildung auf dem Einheitsintervall (L1) führen, dicht auf dem Einheitsintervall liegen. Folgen wir den Ausführungen in Abschnitt 3.2.1 und übertragen dieses Ergebnis auf das Lorenz-System, weist das darauf hin, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ einen periodischen Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ gibt und dass die periodischen Punkte des Lorenz-Systems damit dicht liegen.

6.2.2 Topologische Transitivität

Um die topologische Transitivität des Lorenz-Systems zu zeigen, nutzen wir unser Vorwissen. Aus Kapitel 5 wissen wir, dass der Lorenz-Attraktor existiert und ein seltsamer Attraktor ist, der nach Definition 17 „unzerlegbar“ – also transitiv – ist. Für die beschränkte Menge A, den seltsamen Attraktor, gilt nach Definition 17 (d): „Man kann einen Punkt X_0 in A wählen, sodass es beliebig nahe jedem anderen Punkt Y in A einen Punkt X_t für ein positives t gibt.“ Diese Formulierung ist gleichbedeutend mit der in diesem Kapitel angeführten Definition der topologischen Transitivität, Definition 20, denn:

Seien $U, V \subset A$ offene Mengen, U eine beliebig große Umgebung von $X_U \in A$ und V eine beliebig große Umgebung von $Y \in A$. Wählen wir ein $X_0 \in A$, so gibt es nach Definition 17 (d) ein $t > 0$, sodass

$$X_t = f^t(X_0) \in V.$$

Schränken wir unsere Auswahl auf die Menge U ein. Das dürfen wir, da unser zuvor gewähltes $X_0 \in A$ wegen der Transitivität von f nach Definition 17 (d) irgendwann beliebig nahe bei X_U und damit in U liegt.

Es gibt daher auch für einen Punkt $\tilde{X}_0 \in U$ ein $T > 0$, sodass

$$f^T(\tilde{X}_0) \in V.$$

Wir landen also nach T Schritten in V und der Schnitt $f^T(U) \cap V$ ist nicht leer. Abbildung 17 veranschaulicht diese Überlegungen und zeigt schematisch das „Wandern“ des Punktes $X_0 \in A$ in die Menge U und in die Menge V.

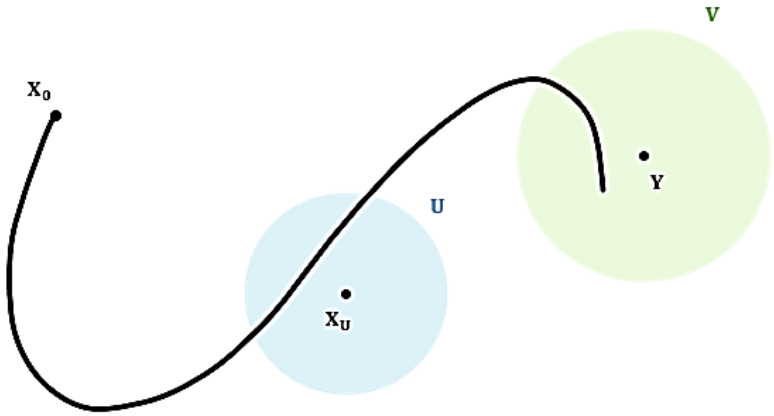


Abbildung 17: Das „Wandern“ von X_0

Weil obiges Argument für alle $X_U, Y \in A$ und damit für alle offenen Mengen $U, V \subset A$ gilt, folgt: Für jedes Paar offener Mengen $U, V \subset A$ existiert ein $k > 0$, sodass $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, und wir erhalten die in Definition 20 verwendete Formulierung.
Das Wissen darüber, dass der Lorenz-Attraktor ein seltsamer Attraktor mit den in Definition 17 beschriebenen Eigenschaften ist, reicht uns damit an dieser Stelle und wir haben gezeigt, dass der Lorenz-Attraktor als seltsamer Attraktor die im Chaos geforderte Bedingung „Topologische Transitivität“ erfüllt.

6.2.3 Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

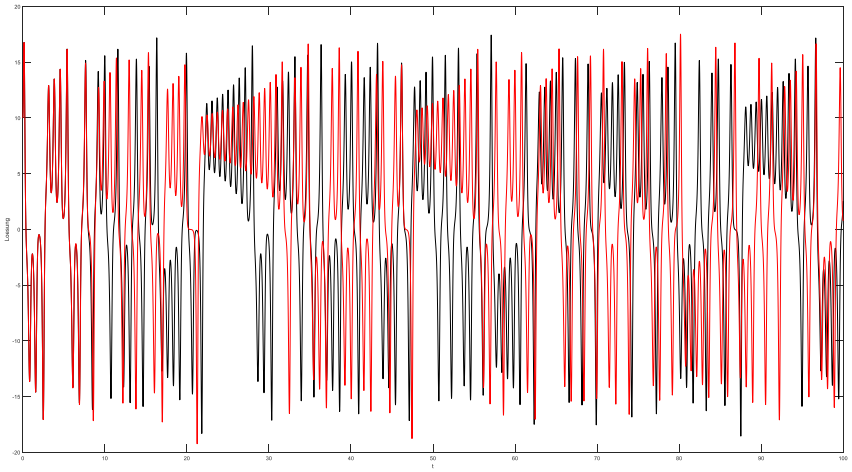
Kommen wir nun zur starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, die Lorenz in [11] unter der Bezeichnung „Instabilität gegenüber kleinen Veränderungen“ als eine der wichtigsten Eigenschaften des Lorenz-Systems anführte (vgl. [11] S. 132).
Betrachten wir noch einmal die Definition eines seltsamen Attraktors nach Ruelle, Definition 17, so finden wir in dieser unter Punkt (c) für die beschränkte Menge A, den

seltsamen Attraktor, und eine Umgebung U von A: „Es gibt eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen für X_0 in U.“ Ein seltsamer Attraktor zeigt damit per Definition eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und wir können wie zuvor in Abschnitt 6.2.2 argumentieren, dass die Kenntnis darüber, dass der Lorenz-Attraktor ein seltsamer Attraktor ist, ausreicht, um sicher zu sein, dass dieser eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aufweist.

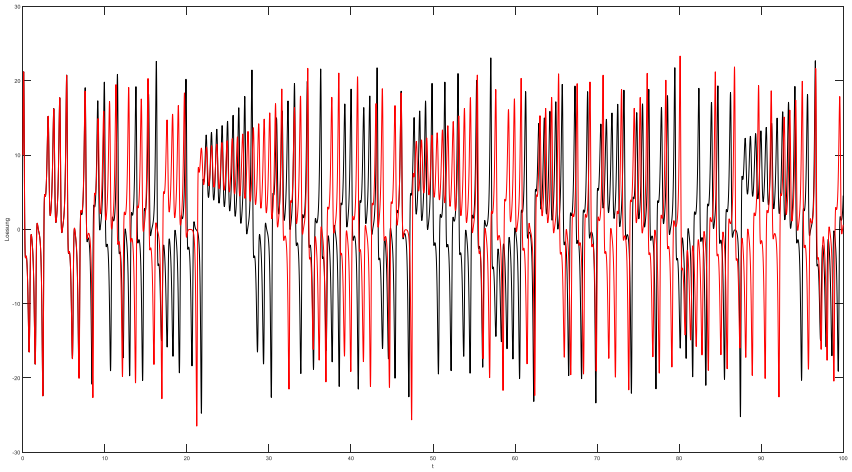
Genauso können wir argumentieren, dass die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen direkt aus den beiden anderen im Chaos genannten Bedingungen „Topologische Transitivität“ und „Dichte periodische Punkte“ folgt und damit eine überflüssige Forderung darstellt, wie in Abschnitt 6.1.2 bewiesen wurde. Wissen wir also, dass das Lorenz-System topologisch transitiv ist und periodische Punkte dicht liegen, genügt uns auch dieses Wissen und das Lorenz-System zeigt mit diesen Eigenschaften auch eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Numerisch können wir die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen im Lorenz-System leicht zeigen und veranschaulichen. Wählen wir zwei Anfangswerte nahe beieinander, so bleiben auch die entsprechenden Trajektorien anfangs nahe zusammen und sind kaum voneinander zu unterscheiden, bis sie sich schließlich weit voneinander entfernen und einen anderen Verlauf nehmen. Abbildung 18 stellt die x-, y- und z-Komponente zweier Lösungen mit den Anfangsbedingungen $(10,\ 10,\ 10)$ in Schwarz und $(10{,}001,\ 10{,}001,\ 10{,}001)$ in Rot in Abhängigkeit von der Zeit dar und zeigt das „Auseinanderwandern“ der Lösungen.

x



y



z

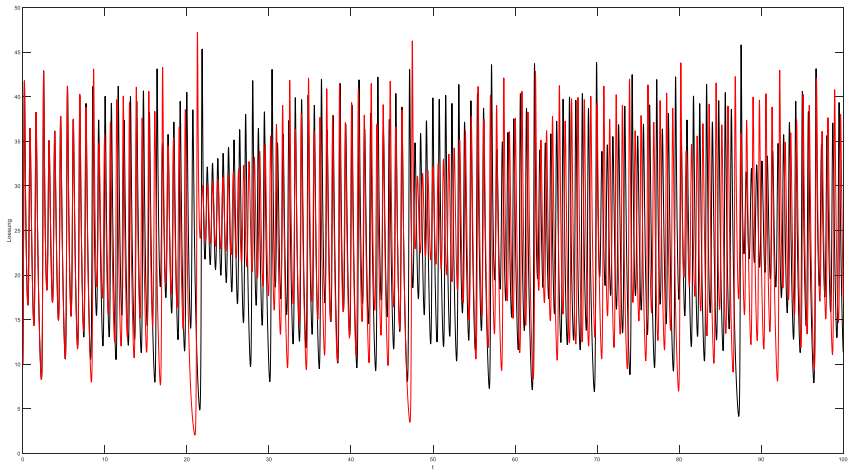


Abbildung 18: Komponenten zweier Lösungen mit leicht veränderten Anfangsbedingungen

6.2.4 Der chaotische Lorenz-Attraktor

Wir haben in diesem Kapitel vorangehende Kapitel oder Ergebnisse verwendet, um das chaotische Verhalten des Lorenz-Systems aufzuzeigen. Der „übliche Weg“ ein solches Verhalten zu zeigen, läuft über geometrische Modelle, die das Verhalten des Systems vereinfacht nachstellen. Auch Hirsch und andere [8] verwenden zum Nachweis des „chaotischen Attraktors“, wie sie ihn nennen, ein Modell des Lorenz-Systems, das nach ihnen „ein berechenbares Hilfsmittel, um das chaotische Verhalten des Systems zu untersuchen“ ([8] S. 313) darstellt. Ausgehend von diesem vereinfachten geometrischen Modell des Lorenz-Systems betrachten Hirsch und andere (vgl. [8] S. 314-323) die Schnittpunkte des Modellflusses mit einer Fläche parallel zur x-y-Ebene, die die Gleichgewichtspunkte $\widetilde{C_1}$ und $\widetilde{C_2}$ des Modell-Systems einschließt. Das „Verfolgen“ dieser Schnittpunkte führt zur Rückkehr- oder Poincaré-Abbildung Φ, die einen Schnittpunkt auf den nächsten abbildet. Hirsch und andere reduzieren die Untersuchung des Lorenz-Systems auf diese Weise auf die Untersuchung der deutlich einfacheren diskreten zweidimensionalen Abbildung Φ. Diese Vorgehensweise erlaubt Hirsch und anderen den Attraktor A des Lorenz-Modells zu bestimmen und zu zeigen (vgl. [8] S. 323):

Satz 5. Die Poincaré-Abbildung Φ beschränkt auf den Attraktor A für das Lorenz-Modell hat die folgenden Eigenschaften:

1. Φ zeigt eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.
2. Periodische Punkte von Φ liegen dicht in A.
3. Φ ist transitiv auf A.

Hirsch und andere beweisen damit, dass die Abbildung Φ chaotisch auf A ist, und bezeichnen den Attraktor daher als chaotisch. Zur Herleitung des geometrischen Modells und zum Beweis des obigen Satzes siehe Hirsch und andere ([8] S. 314-323).

Bemerkung 5. Die Verwendung einer Rückkehrabbildung ist bereits aus Abschnitt 5.2.2 bekannt. Auch Tucker baute seinen Beweis auf einer Rückkehrabbildung auf, die ihm erlaubte, die Existenz des seltsamen Attraktors zu zeigen. Das beschriebene

Vorgehen oder vielmehr die Grundidee, sich auf die Betrachtung „besonderer Punkte“ zu beschränken und mit einer Abbildung zu arbeiten, die einen solchen Punkt auf den nächsten abbildet, erinnert aber auch an das Vorgehen von Lorenz in Abschnitt 3.2.1, der um das nichtperiodische Verhalten des Lorenz-Systems zu zeigen nur die maximalen z-Werte einer Trajektorie bei Windung um die Gleichgewichtspunkte C_1 und C_2 betrachtete und dann eine idealisierte Abbildung, die einem Maximum seinen Nachfolger zuordnet, untersuchte. Auch hier ermöglichte die einfachere diskrete Abbildung Aussagen über das Verhalten des Systems.

Kapitel 7

Das Wetter und die Wettervorhersage

Als Modell zur Beschreibung des Wetterverhaltens verbindet das Lorenz-System die Mathematik und die Meteorologie, mit der sich nun dieses Kapitel beschäftigt. Zuvor gewonnene Erkenntnisse aus der mathematischen Analyse des Lorenz-Attraktors werden auf das Wettergeschehen übertragen. Eigenschaften des Lorenz-Systems werden im Hinblick auf das Wetter gedeutet. Schwierigkeiten und Probleme, die mit der Vorhersage des Wetters verbunden sind, werden behandelt. Zum Abschluss des Kapitels werden Grenzen und Möglichkeiten der Wettervorhersage aufgezeigt.

7.1 Was sagt das Lorenz-System über unser Wetter?

7.1.1 Das Fehlen von Periodizität – Das sich-nie-wiederholende Wetter

Denken wir an das Wetter, denken wir nicht unbedingt sofort an das Fehlen von Periodizität. Wir haben die Jahreszeiten, die uns eine gewisse Verlässlichkeit versprechen. Mit ihnen verbinden wir ein bestimmtes Wetterverhalten und bestimmte Temperaturen. Genauso wie es über das Jahr gesehen kühl startet, dann wärmer wird und anschließend wieder abkühlt, können wir auch im Laufe eines Tages ein Steigen und Fallen der Temperatur verzeichnen. Dieses regelmäßig wiederkehrende Aufwärmen und Abkühlen bezeichnet Lorenz in *The essence of chaos* ([13] S. 86) als

„periodische Bestandteile“ des Wetters. Die Wetterverläufe gleichen sich dabei aber nie exakt.

Das nichtperiodische Verhalten des Lorenz-Systems legt nahe, dass sich unser Wetter ebenso nichtperiodisch verhält. Die Wetterbeobachtungen scheinen das zu bestätigen. Unser Wetter wiederholt sich nie und zeigt nie genau die gleichen Wetterzustände, wie sie schon einmal durchlaufen wurden. Wegen der Instabilität des Systems ist auch jede annähernde Wiederholung nur von kurzer Dauer. Wäre unser Wetter periodisch, würden wir nach einer bestimmten Zeit, der Periode p, wieder „bei Null“ starten und das Wetter nähme exakt den gleichen Verlauf wie zuvor. Wäre die Periode p im Bereich unserer Wetteraufzeichnungen, wüssten wir genau, welches Wetter uns an einem bestimmten Tag erwartet, weil wir dieses schon einmal beobachtet hätten. Es wäre genau das gleiche wie vor p Zeitschritten. Damit könnten wir das Wetter für jeden beliebigen Tag vorhersagen.

So einfach macht es uns das Wetter aber nicht und wir können (bis heute) keine Zeit p ausmachen, nach der sich das Wetter exakt wiederholt. Das bedeutet aber nicht, dass es diese Zeit nicht gibt. Obwohl alles darauf hinweist, dass sich unsere Atmosphäre nichtperiodisch verhält, können wir nicht ausschließen, dass es sich hierbei um eine sehr große Periode p handelt, die über die Dauer unserer Wetteraufzeichnungen hinausgeht und deshalb noch nicht gefunden werden konnte, wie in Lorenz (vgl. [13] S. 86) erklärt wird.

7.1.2 Der Attraktor – Das „Herz“ des Wetters

Obwohl uns das Wetter immer wieder überrascht, ist das Ausmaß dieser Überraschungen in gewisser Art und Weise überschaubar. Bestimmte Wettergeschehen treten einfach nicht auf. So werden in Österreich beispielsweise in den Wintermonaten keine Temperaturen über 40° Celsius gemessen. Umgekehrt brauchen wir in Thailand zur selben Jahreszeit sicher keine Winterjacke. Das tagtägliche Wettergeschehen ist auf den Attraktor beschränkt (vgl. [13] S. 39-41). In unserem Wettersystem entspricht der Attraktor genau dem Klima und stellt die Menge aller Wetterzustände dar, die eintreten können. Andere Geschehen weit außerhalb des

Attraktors können nicht beobachtet werden, da sich unsere Erdatmosphäre sozusagen schon „eingependelt“ hat und der Attraktor gerade jener Bereich ist, in dem sich das Langzeitverhalten unseres Wetters einstellt. Lorenz ([13] S. 50) bezeichnet den Attraktor deshalb als „Herz“ des chaotischen Systems.

7.1.3 Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen – Nur ein Flügelschlag

Als Lorenz damals eine Wetterberechnung wiederholen wollte, die zuvor verwendeten Werte dafür erneut in den Computer tippte und dann etwa eine Stunde Kaffee trinken ging, so erzählt er in Lorenz (vgl. [13] S. 134-136), zeigten seine Berechnungen ein völlig anderes Bild. Lorenz dachte zuerst an einen Computerfehler. Bei genauerem Hinsehen bemerkte er, dass die neue Berechnung anfänglich noch mit der ursprünglichen übereinstimmte und mit der Zeit immer mehr von dieser abwich bis schließlich keinerlei Ähnlichkeit zwischen den Aufzeichnungen mehr festzustellen war. Lorenz entdeckte schließlich, dass er für seine neuerliche Berechnung nicht die exakt gleichen „alten“ Werte benutzte, sondern die gerundeten „alten“ Werte. Dieser scheinbar kleine Rundungsfehler in den Startwerten führte zu zwei völlig anderen Ergebnissen.

Lorenz erkannte die Bedeutung der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, die die Modelle unserer Atmosphäre zeigten, für unser Wetter und folgerte, dass sich Wettergeschehen ebenso empfindlich gegenüber kleinen Störungen verhalten. In seinem Vortrag *Predictability: Does the flap of a butterfly´s wings in Brazil set off a tornado in Texas?* [12] beschäftigte sich Lorenz mit der Frage, ob zwei bestimmte Wettersituationen, die sich nur um einen Flügelschlag eines Schmetterlings voneinander unterscheiden, mit der Zeit in zwei Wettersituationen münden können, die sich stark unterscheiden, und zum Beispiel in einer Situation ein leichter Wind weht, während in der anderen ein Wirbelsturm ausbricht. Lorenz verdeutlichte damit die kleine, kaum feststellbare Störung, die schließlich zu einem riesigen Unterschied führen kann, und machte den Schmetterling so zum Sinnbild für „das Kleine“ mit großen Auswirkungen.

7.2 Warum ist die Wettervorhersage so oft falsch?

7.2.1 Riesige Anzahl von Variablen

Bei der Wettervorhersage sind mehrere Größen von Interesse. Eine Vielzahl von Messwerten wird erfasst. Zerlegen wir das Wetter in seine einzelnen Bestandteile, sind das zum Beispiel die Temperatur, die Sonnenscheindauer, die Windstärke, die Luftfeuchtigkeit, die Wolkendichte und die Regenstärke. All diese Wetterkomponenten sind miteinander verflochten und wir können unsere Liste beliebig weiter fortsetzen. Das Wetter und damit unsere Variablen verändern sich natürlich mit der Zeit. Richtig kompliziert macht es uns aber erst die Tatsache, dass diese Variablen sich auch mit dem Ort verändern. Wollen wir einen Anfangszustand festlegen, müssen wir daher jede dieser Größen an jedem einzelnen Punkt der Atmosphäre kennen. Das würde uns schließlich auf ein System mit unendlich vielen Variablen führen (vgl. [13] S. 80-81).

Da das Wetter von Punkt zu Punkt keine großen Sprünge macht und wir ja auch kein spürbar anderes Wetter beobachten, wenn wir ein paar Meter weiterspazieren, machen wir die nach Lorenz (vgl. [13] S. 81-82) zulässige Vereinfachung und legen ein feines Netz über unsere Atmosphäre. Betrachten wir nur die Gitterpunkte, erhalten wir endlich viele Variablen und wir können die Erdatmosphäre auf diese Weise leicht auf ein endliches System reduzieren. Endlich viele Variablen würden uns zur Beschreibung des Systems also schon reichen. Das Netz muss dabei jedoch so feinmaschig gewählt werden, dass es einen fließenden Übergang erlaubt. Wir dürfen daher nicht an eine kleine überschaubare Anzahl von Variablen denken. Vereinfachen wir in der erlaubten beschriebenen Weise, erhalten wir eine riesige Anzahl von Variablen, die nicht bewältigt werden kann.

Um eine bessere Vorstellung von der „riesigen Anzahl“ zu bekommen, wird hier auf ein Modell eingegangen, welches Lorenz ([13] S. 101) als Beispiel eines modernen globalen Wettermodells anführt. Hierfür wurde die Erdkugel mit einem Netz mit 45 Tausend Gitterpunkten „umspannt“. Zusammen mit den physikalischen Größen ergab sich so ein System mit 5 Millionen Variablen. Wem das „riesig“ erscheinen mag, sollte

folgende Rechnung überschlagen: Die Erdoberfläche beträgt rund 500 Millionen Quadratkilometer. Wir haben weniger als 50 Tausend Gitterpunkte. Das bedeutet, dass jeder Punkt eine Fläche von mehr als 10 Tausend Quadratkilometern abdeckt, was etwa einem Achtel der Fläche Österreichs entspricht. Wir können uns vorstellen, dass in einem solch großen Bereich die Größen, die für die Wettervorhersage interessant sind, noch immer stark schwanken können und in einem Teil zum Beispiel die Sonne scheint und ein leichter Wind weht, während es in einem anderen Teil abkühlt und stürmisch regnet. Das gewählte Netz zeigt damit nicht den weichen Übergang, der gefordert wird.

7.2.2 Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Die wohl größte Schwierigkeit der Wettervorhersage ist das chaotische Verhalten und die damit verbundene starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen unserer Atmosphäre. Legen wir einen Anfangszustand fest, der dann natürlich auf Messdaten beruht, ist dieser immer, egal wie genau und gut wir messen, fehlerhaft und gibt nicht die getreue Wirklichkeit wieder. Jeder Messwert ist mit Fehlern behaftet. Schon 1951 nachdem die ersten Ansätze zur numerischen Wettervorhersage gemacht wurden, folgerte Eady [6] aus dem beobachteten Verhalten unserer Atmosphäre zusammen mit der Unmöglichkeit exakte Anfangsbedingungen zu bestimmen, dass Langzeitwettervorhersagen wertlos sind. Der Fehler wird irgendwann so groß, dass eine Berechnung nach Eady (vgl. [6] S. 464) mit einem „willkürlichen Herauspicken“ eines möglichen Zustandes gleichgesetzt werden kann – so als würden wir das Wetter auslosen.

Lorenz leistete mit seinen Untersuchungen des Lorenz-Systems in den 60er-Jahren einen wertvollen Beitrag zum besseren Verständnis unserer Atmosphäre. Er betrachtete seine Ergebnisse auch im Hinblick auf das Wetter und schloss aus der Unvermeidbarkeit von Fehlern in den Startbedingungen und der Empfindlichkeit des Systems gegenüber kleinsten Störungen, dass zuverlässige Wettervorhersagen, die bis in die ferne Zukunft reichen, unmöglich sind (vgl. [11] S. 141).

7.3 Grenzen und Möglichkeiten der Wettervorhersage

Um nun auf die Grenzen und Möglichkeiten der Wettervorhersage einzugehen, soll die im obigen Abschnitt 7.2 gestellte Frage „Warum ist die Wettervorhersage so oft falsch?“ zusammenfassend folgendermaßen beantwortet werden:

- Es gibt keine „perfekten“ Gleichungen und Modelle, die das Wetter in allen Einzelheiten und an jedem Punkt beschreiben.
- Es gibt keine „perfekten“ Messwerte. Die fehlerbehafteten Startwerte führen aufgrund des chaotischen Verhaltens der Atmosphäre mit der Zeit zu großen Abweichungen vom wahren Wettergeschehen.

Zur Bedeutung dieser beschriebenen Schwierigkeiten und zur Möglichkeit von Langzeitwettervorhersagen schreibt Lorenz ([11] S. 141) 1963: „Angesichts der unvermeidbaren Ungenauigkeit und Lückenhaftigkeit der Wetterbeobachtungen, scheinen genaue sehr langfristige Wettervorhersagen nicht existent zu sein.“ Was genau man dabei unter „sehr langfristig“ oder „Langzeit“ versteht und ab wann eine Wettervorhersage bedeutungslos wird, kann durch das Lorenz-System aber nicht beantwortet werden. Für Modelle kann diese Zeit durch Vergleichen der Entwicklungen von Lösungen mit leicht veränderten Anfangsbedingungen abgeschätzt werden (vgl. [11] S. 141). Für ein beliebiges Wettermodell werden die Anfangsbedingungen durch die Messwerte festgelegt und das Wetter wird berechnet. Weil die gemessenen Werte aber nicht den exakten, wahren Anfangsbedingungen entsprechen, werden weitere Berechnungen mit fast identischen Startwerten durchgeführt, um so die Messunsicherheiten zu berücksichtigen. Weichen die einzelnen Lösungen nach einer bestimmten Zeit – zum Beispiel nach zehn Tagen – deutlich voneinander ab, ist eine 10-Tages-Vorhersage oder gar längere Vorhersage sinnlos und gleicht eher dem zuvor beschriebenen „Auslosen“ unter allen möglichen Wettergeschehen.

Bei Systemen, die die Vorgänge in unserer Erdatmosphäre modellieren, ist diese „Langzeit“, nach der keinesfalls mehr eine zuverlässige Vorhersage gemacht werden kann, also recht einfach zu bestimmen. Für die Wirklichkeit, die reale Atmosphäre, gilt das nicht. Da wir der Atmosphäre nicht vorschreiben können einen ähnlichen

Wetterzustand nochmals nachzustellen, müssen wir auf ein Analogon – eine Wettersituation, die einer zuvor beobachteten stark ähnelt – warten. Durch Vergleichen der Wetterverläufe könnte so ein Einblick in die Grenzen der Wettervorhersage gewonnen werden. Denken wir an die vielen Größen, die unser Wetter ausmachen, und an die vielen Messpunkte über die gesamte Erdkugel, kann man sich jedoch vorstellen, wie schwierig es ist, ein solches Analogon zu finden. In einem Interview 2007 (vgl. [19] S. 685) berichtet Lorenz von seiner Suche nach ähnlichen Wettersituationen. Die beste Übereinstimmung, die Lorenz in seinem Datenmaterial über mehrere Jahre nach ein paar hunderttausend Vergleichen fand, lag bei etwa 62%. Nachdem uns aber immer mehr Daten zur Verfügung stehen, wächst mit den Wetteraufzeichnungen nach Lorenz [19] auch die Chance gute Übereinstimmungen und irgendwann ein brauchbares Analogon zu finden.

Lorenz zeigt sich im Interview (vgl. [19] S. 685-686) zufrieden mit der Entwicklung der numerischen Wettervorhersage und zuversichtlich, dass diese noch weiter verbessert werden kann. Allerdings zieht Lorenz eine Grenze der Vorhersagbarkeit – so könnte man sagen – bei einem Monat, indem er keine großen Hoffnungen in gute Vorhersagen setzt, die über einen solchen Zeitraum hinausreichen. Die Grenze, mit der die Wettervorhersage zum Zeitpunkt seines Interviews 2007 kämpft, schätzt Lorenz auf etwa vierzehn Tage und bewerten wir die heutige Wettervorhersage, so scheint die Grenze bis heute bei diesen zwei Wochen zu liegen. Nach Lorenz könnten wir diese Grenze aber „überspringen“. Die beobachteten Verbesserungen in der numerischen Wettervorhersage lassen ihn hoffen, dass irgendwann gute Wettervorhersagen in diesem Umfang möglich sein werden. Diese Verbesserungen schreibt Lorenz vor allem verbesserten Anfangsbedingungen und Datenassimilationsmethoden, die ein Zusammenspiel von Messwerten und berechneten Werten ermöglichen, zu. Eine weitere Möglichkeit zur künftigen Verbesserung der Wettervorhersage sieht Lorenz (vgl. [13] S. 104-105) in weiterentwickelten Modellen, die die Strukturen auf unserer Erde und die physikalischen Vorgänge genauer darstellen und die Wirklichkeit besser abbilden.

Wir dürfen daher auch in Zukunft auf Verbesserungen hoffen, nicht aber auf Perfektion! Lorenz betont in seinem Vortrag *Predictability: Does the flap of a*

butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? [12], dass es nicht das Ziel sei, exakte Wettervorhersagen zu machen, sondern vielmehr die besten Vorhersagen, die die Atmosphäre „gewillt ist", uns zu ermöglichen. Eine wichtige Konsequenz all dieser Grenzen und Möglichkeiten scheint damit zu sein, dass wir unsere Erwartungshaltung ändern müssen und uns nicht zu sehr auf eine Vorhersage – besonders über einen längeren Zeitraum – verlassen sollten. Schließlich können wir nichts Unmögliches erwarten. Genauso dürfen wir aber auch gespannt sein, wie sich die Wettervorhersage weiterentwickeln wird und wo uns die immer besseren Messungen, Methoden und Modelle noch hinführen werden.

Kapitel 8

Exkurs: Das Lorenz-System im schulischen Mathematikunterricht

Auch für die Schule kann das Lorenz-System interessant sein. Eine Behandlung im schulischen Mathematikunterricht erlaubt den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in chaotische Systeme und das Kennenlernen neuer Begriffe. Neben dem Anführen formaler Definitionen geht es in der Schule vor allem um das Entwickeln von Vorstellungen und um ein intuitives Verständnis. Dieses Kapitel stellt einen möglichen Einstieg in das Lorenz-System und einige Ideen und Anregungen zur Einführung ausgewählter Begriffe vor.

8.1 Warum das Lorenz-System auch für die Schule interessant ist

Das Lorenz-System kann in der Schule als Erweiterung der Lehrinhalte des Pflichtfaches Mathematik im Wahlpflicht-Unterricht behandelt werden. Dazu müssen Differentialgleichungen aus dem Pflichtfach bereits bekannt sein. Das notwendige Vorwissen zur Einführung des Lorenz-Systems, der Lehrinhalt „Differenzen- und Differentialgleichungen; Grundlagen der Systemdynamik“, ist im Lehrplan der Allgemeinbildenden höheren Schule [4] in der 8. Klasse, im 7. Semester der Oberstufe, zu finden, der auch schon erste Untersuchungen einfacher dynamischer Systeme vorsieht. Mit seiner Entstehungsgeschichte und seiner Bedeutung ist das Lorenz-

System besonders interessant. Die Schülerinnen und Schüler kennen das Wetter. Das Verhalten unseres Wetters, das die Lorenz-Gleichungen beschreiben, erleben sie tagtäglich. Das Lorenz-System spricht damit die Lebens- und Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler an und kann ein Bewusstsein für unser Wettergeschehen schaffen. Die Mathematik kann in diesem Rahmen als wichtiges Instrument zur Beschreibung unserer Welt und zum Aufdecken von Zusammenhängen und Mustern wahrgenommen werden, was den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans [4] folgt.

Als chaotisches System erlaubt das Lorenz-System den Schülerinnen und Schülern einen Einblick „ins Chaos“. Allein der Begriff „Chaos“ ist reizvoll und attraktiv, wie Lorenz (vgl. [13] S. 179) bemerkt. Er weckt Assoziationen in den Schülerinnen und Schülern und macht neugierig. Interessant kann hier auch der Unterschied zwischen dem, was die Schülerinnen und Schüler in ihrem Alltag unter Chaos verstehen, und dem, was in der Mathematik als Chaos bezeichnet wird, erlebt werden. Das Lorenz-System kann im Wahlpflicht-Unterricht auch genutzt werden, um das Chaos in der Natur „zu entdecken“ und den Schülerinnen und Schülern aufzuzeigen, wo wir in unserem Leben noch auf Chaos treffen. Andere Beispiele chaotischer Systeme können angesprochen werden.

Das Lorenz-System bietet als eines der berühmtesten und bestuntersuchten Systeme viele Anhaltspunkte für das Kennenlernen neuer Bereiche der Mathematik, die nach Interesse der Schülerinnen und Schüler zu wählen sind. So können mit dem Lorenz-System Themen wie beispielsweise „numerische Methoden“, „Differenzen- und Differentialgleichungen“, „Fraktale“ und „Chaostheorie“, die der Lehrplan [4] für eine Erweiterung im Wahlpflicht-Unterricht vorschlägt, erarbeitet und vertieft werden. Eine Behandlung des Lorenz-Systems im schulischen Mathematikunterricht kann demnach sehr spannend sein und vielfältig gestaltet werden.

Im Wahlpflicht-Unterricht ist dabei besonders auf die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler zu achten. Horst Bennemann ([2] S. 133) schreibt:

> „Moderner Mathematikunterricht ist u. a. dadurch gekennzeichnet, dass er den Schülerinnen und Schülern Gelegenheiten zum selbstständigen Entdecken gibt, ihnen individuelle Lernwege ermöglicht, sie fördert und fordert, zu sinnstiftendem Kommunizieren anregt und dabei digitale Medien lernwirksam und unterstützend einsetzt.“

Ein möglicher Einstieg in das Lorenz-System, der, wie es der Lehrplan [4] und moderner Mathematikunterricht nach Bennemann [2] fordert, selbstständiges Arbeiten erlaubt und technologische Hilfsmittel einsetzt, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

8.2 Möglicher Einstieg in das Lorenz-System mit GeoGebra

Das Vorwissen und die Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler zum Thema Differentialgleichungen aus dem Pflichtfach Mathematik ermöglichen einen natürlichen, fließenden Übergang zu Differentialgleichungssystemen im Wahlpflicht-Unterricht. Hier kann das Lorenz-System als berühmtes Differentialgleichungssystem vorgestellt werden. Nach einem kurzen Überblick über die Geschichte und Motivation sollen die Schülerinnen und Schüler das Lorenz-System als einfaches Modell des Wetters kennenlernen. Analog zum Pflichtfach, in dem die Schülerinnen und Schüler einfache Differentialgleichungen lösen, kann hier zunächst das Lösen des Differentialgleichungssystems thematisiert werden, was zu den numerischen Verfahren führt, mit denen die Lösungen des Lorenz-Systems näherungsweise bestimmt werden können.

Wegen seiner Einfachheit bietet sich im schulischen Mathematikunterricht vor allem das Euler-Verfahren an. Die Grundidee dieses Verfahrens kann zunächst anhand einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ vermittelt werden (siehe zum Beispiel Hirsch und andere [8] S. 153-154). Wesentlich ist hier das kleinschrittige Vorgehen oder "Weiterbewegen". Ausgehend vom Startzeitpunkt $t_0 = 0$ und dem Anfangswert $x(0) = x_0$, dem Startpunkt, macht die Zeit einen kleinen Sprung Δt zum nächsten Zeitpunkt t_1. Die kleine Schrittweite Δt erlaubt, die entsprechende Änderung von x_0 über die Änderungsrate $\dot{x} = f(t_0, x_0)$ anzunähern. x_0 wandert mit t_0 weiter und „rutscht" entlang der Geraden mit Anstieg $f(t_0, x_0)$ zum Zeitpunkt t_1. Das liefert einen neuen Startpunkt (t_1, x_1), der wieder Δt Zeiteinheiten weitergeschickt wird, und so weiter.

Für den Zeitpunkt t_{k+1} mit

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \; f\ddot{u}r \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

erhalten wir die Rekursionsformel

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)\Delta t.$$

Den Schülerinnen und Schülern sollte die Gelegenheit gegeben werden, das Euler-Verfahren an einfachen Beispielen zu üben. Ist das grundlegende Vorgehen klar, kann das Verfahren auf das Lorenz-System übertragen werden. Für diese Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Lorenz-Gleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

„einzeln" betrachten und bestimmen, wovon diese abhängen. Werden die Differentialgleichungen mit f_1, f_2 und f_3 bezeichnet, ergibt sich dadurch

$$\dot{x} = \sigma(y - x) = f_1(x, y)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz = f_2(x, y, z)$$
$$\dot{z} = xy - bz = f_3(x, y, z)$$

und die Schülerinnen und Schüler erhalten durch Anwenden des Euler-Verfahrens

$$x_{k+1} = x_k + f_1(x_k, y_k)\Delta t = x_k + \sigma(y_k - x_k)\Delta t$$
$$y_{k+1} = y_k + f_2(x_k, y_k, z_k)\Delta t = y_k + (rx_k - y_k - x_k z_k)\Delta t$$
$$z_{k+1} = z_k + f_3(x_k, y_k, z_k)\Delta t = z_k + (x_k y_k - bz_k)\Delta t.$$

Die Lösungen des Lorenz-Systems können mit geeigneten Programmen berechnet und grafisch dargestellt werden. Für den schulischen Mathematikunterricht ist hier besonders GeoGebra, eine dynamische Mathematiksoftware, die speziell für die Schule entwickelt wurde, interessant. „GeoGebra kann zur Visualisierung mathematischer Sachverhalte eingesetzt werden, kann aber auch als Katalysator mathematischen Verständnisses dienen“, wie Rainer Kaenders und Reinhard Schmidt in *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* ([10] S. 1) schreiben. Auch in diesem Fall soll GeoGebra das Lorenz-System für die Schülerinnen und Schüler „sichtbar“ machen und „katalytisch“ wirken.

Um die Lösungen mit GeoGebra numerisch zu berechnen, werden Schieberegler für die Parameter des Lorenz-Systems, σ, b und r, erstellt. Hier sollen zunächst die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ gewählt werden. Die Lorenz-Gleichungen werden definiert. Zum Anwenden des Euler-Verfahrens müssen Startwerte x_0, y_0 und z_0 und eine Schrittweite Δt festgelegt werden. Um diese Wahl jederzeit einfach ändern zu können, werden auch für diese Werte Schieberegler verwendet. Dann wird mit der Tabelle gearbeitet. Wir starten in der ersten Zeile mit den Anfangsbedingungen. In die erste Spalte kommt der Startwert x_0, in die zweite Spalte y_0 und in die dritte Spalte z_0. In die zweite Zeile wird die Vorschrift eingegeben, die die nächsten Werte liefert. Dafür beziehen wir uns auf die vorangehende Zeile und nutzen die zuvor definierten Gleichungen.

Schritt für Schritt, Zeile für Zeile, kann das Euler-Verfahren so im Unterricht noch einmal „durchgedacht“ werden. GeoGebra genügen aber schon wenige Zeilen, um das Muster zu erkennen, und die Vorschrift kann durch Markieren und Ziehen der Zellen für beliebig viele Zeilen übernommen werden. Tabelle 2 zeigt die Vorschrift zur Berechnung der Lösung für die ersten zehn Zeilen. Die berechneten Werte sind in Tabelle 3 zu finden. Jede Zeile der Tabelle entspricht einem Punkt der Lösung des Lorenz-Systems für die gewählten Parameterwerte und Anfangsbedingungen. Alle Punkte zusammen bilden einen „Ausschnitt“ der Lösung.

Tabelle 3: Das Euler-Verfahren in GeoGebra

	A	B	C
1	x_0	y_0	z_0
2	A1 + x'(A1, B1) Δt	B1 + y'(A1, B1, C1) Δt	C1 + z'(A1, B1, C1) Δt
3	A2 + x'(A2, B2) Δt	B2 + y'(A2, B2, C2) Δt	C2 + z'(A2, B2, C2) Δt
4	A3 + x'(A3, B3) Δt	B3 + y'(A3, B3, C3) Δt	C3 + z'(A3, B3, C3) Δt
5	A4 + x'(A4, B4) Δt	B4 + y'(A4, B4, C4) Δt	C4 + z'(A4, B4, C4) Δt
6	A5 + x'(A5, B5) Δt	B5 + y'(A5, B5, C5) Δt	C5 + z'(A5, B5, C5) Δt
7	A6 + x'(A6, B6) Δt	B6 + y'(A6, B6, C6) Δt	C6 + z'(A6, B6, C6) Δt
8	A7 + x'(A7, B7) Δt	B7 + y'(A7, B7, C7) Δt	C7 + z'(A7, B7, C7) Δt
9	A8 + x'(A8, B8) Δt	B8 + y'(A8, B8, C8) Δt	C8 + z'(A8, B8, C8) Δt
10	A9 + x'(A9, B9) Δt	B9 + y'(A9, B9, C9) Δt	C9 + z'(A9, B9, C9) Δt

Tabelle 3: Die berechneten Tabellenwerte

	A	B	C
1	-9.6	-17.3	12.4
2	-9.677	-17.44	12.533
3	-9.755	-17.58	12.668
4	-9.833	-17.72	12.806
5	-9.912	-17.86	12.946
6	-9.991	-17.999	13.089
7	-10.071	-18.138	13.234
8	-10.152	-18.276	13.381
9	-10.233	-18.415	13.531
10	-10.315	-18.553	13.683

Für die grafische Darstellung werden zunächst drei Listen erzeugt. Durch Markieren der ersten Spalte und Erstellen einer Liste werden alle x-Werte in der Liste, die „Listex“ genannt wird, gesammelt. Analog werden in „Listey“ alle y-Werte und in „Listez“ alle z-Werte aufgelistet. Dann kann eine Folge der „Lösungspunkte“ mit dem Befehl

$$\text{Folge}\left(\left(\text{Element}(\text{Listex}, i), \text{Element}(\text{Listey}, i), \text{Element}(\text{Listez}, i)\right), i, 1, n\right)$$

definiert werden, die die einzelnen Koordinaten der Punkte aus den Listen „Listex“, „Listey“ und „Listez“ erhält. Für n ist dabei ein Schieberegler zu erstellen, der so gewählt wird, dass die gesamte Tabelle „abgedeckt“ wird. Die Folge von Punkten wird mit „Folge“ bezeichnet und kann in der 3D-Grafik beobachtet werden. Das Bild des Lorenz-Attraktors, das sich hier zeigt, ist in Abbildung 19 dargestellt. Der Schieberegler erlaubt durch langsames, schrittweises Vergrößern von n, die Lösung des Lorenz-Systems zu verfolgen.

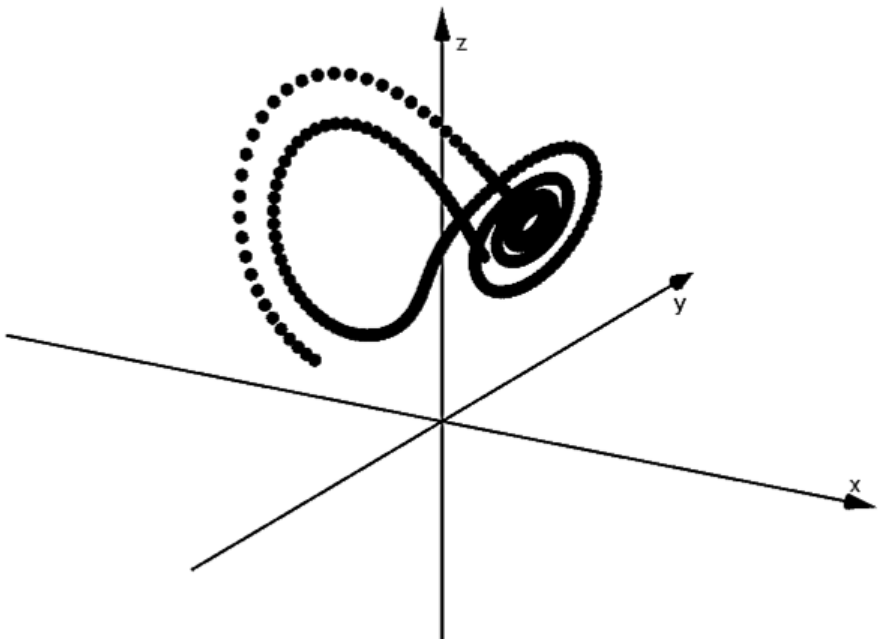


Abbildung 19: Der Lorenz-Attraktor in GeoGebra

Um eine „glatte“ Lösungskurve zu bekommen, kann der Befehl

Polygonzug(Folge)

verwendet werden, der die einzelnen Punkte über einen Streckenzug verbindet, wie in Abbildung 20 zu sehen ist.

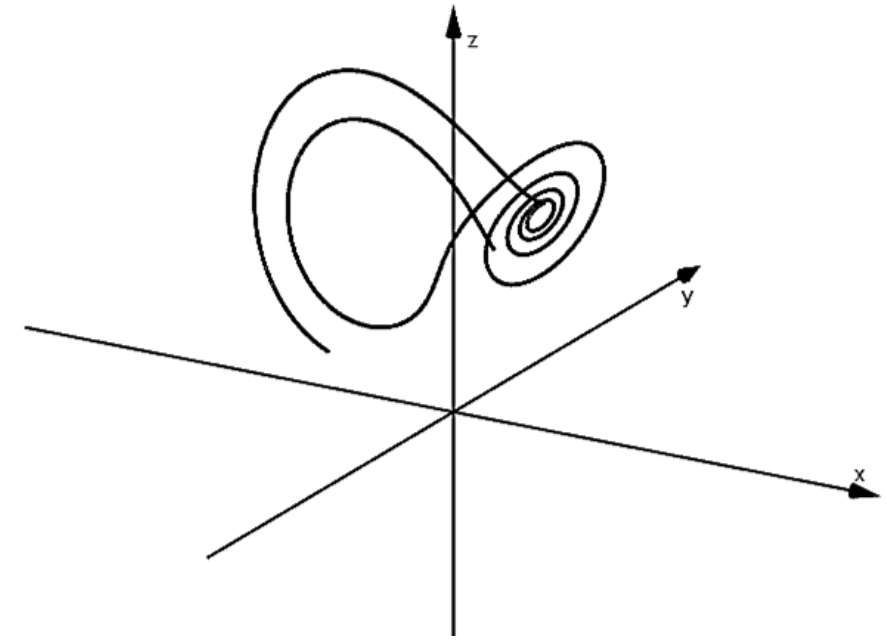


Abbildung 20: Der „glatte“ Lorenz-Attraktor

Die Schülerinnen und Schüler sollen das Lorenz-System nun selbstständig untersuchen. Dafür können im ersten Schritt Startwerte in der Nähe des Attraktors vorgegeben werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre Beobachtungen dokumentieren, das Schlingen der Lösung festhalten und nach Mustern oder Regelmäßigkeiten suchen. Um selbstständiges Forschen und Entdecken zuzulassen, können die Schülerinnen und Schüler dann verschiedene Anfangsbedingungen ausprobieren und auch verschiedene Schrittweiten vergleichen. Nach ausreichend Zeit, die hier eingeplant werden muss, können die Ergebnisse dann vorgestellt und diskutiert werden. Neben der schmetterlingsähnlichen Gestalt der Lösungen des Lorenz-Systems, die sich auch für „weit entfernte“ Startwerte zeigt, und dem wilden

Schlingen der Lösungen, kann zum Beispiel auch die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erkannt werden.

Ausgehend von diesem Erforschen können ausgewählte Aspekte des Lorenz-Systems behandelt werden. Das selbstständige Erkunden des Systems hat dabei mehrere Vorteile. Zum einen erleben die Schülerinnen und Schüler beim Vortragen ihrer Ergebnisse und in der Diskussion die Notwendigkeit von Begriffen. Sie wollen das Beobachtete benennen. Die Entdeckungen der Schülerinnen und Schüler können so aufgegriffen werden, um neue Begriffe einzuführen. Zum anderen gewinnen die Schülerinnen und Schüler durch die Visualisierung und durch ihre eigenen Ausführungen sofort Vorstellungen dieser neuen Begriffe, die dann im Unterricht weiter ausgebaut werden können. Die Selbsttätigkeit soll die Grundlage für das Arbeiten mit dem Lorenz-System schaffen und den Schülerinnen und Schülern helfen, ein „Gefühl“ für das Verhalten des Systems zu bekommen. Die Beobachtungen und Beschreibungen, die aus dieser Selbsttätigkeit entstehen, können vielfältig und bunt sein, was den Unterricht auch für die Lehrperson besonders spannend macht.

Um die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern, sollten hier nur die klassischen Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ und $r = 28$ betrachtet werden. Bei besonders interessierten Schülerinnen und Schülern können die Parameter des Lorenz-Systems aber auch variiert werden und weitere Untersuchungen und Entdeckungen gemacht werden.

8.3 Ideen zur Behandlung ausgewählter Aspekte des Lorenz-Systems

8.3.1 Der anziehende Attraktor

Der Attraktor kann als anziehende Menge beschrieben werden, die nicht mehr verlassen werden kann. Salopp formuliert ist er die Menge, auf die sich ein System „einpendelt“. Im Lorenz-System, das das Verhalten unseres Wetters vereinfacht darstellt, kann der Attraktor als das „normale Wetter“, das Klima, aufgefasst werden.

Eine grafische Darstellung des Lorenz-Systems erlaubt, den Lorenz-Attraktor zu „sehen“ (vgl. [5] S. 201) und den Schülerinnen und Schülern den Attraktor zu zeigen. Unterstützend kann im schulischen Mathematikunterricht folgendes Gedankenexperiment gemacht werden, das den Ausführungen von Lorenz (vgl. [13] S. 96-97) folgt:

> *Stellt euch vor, ein riesiges außerirdisches Wesen, ein Alien, kommt auf unsere Erde. Neugierig was geschehen würde, streckt das Alien die Arme aus, rührt unsere Atmosphäre einmal kräftig um und verschwindet dann wieder. Was passiert mit unserem Wetter?*

Die Auswirkungen des „Alienbesuchs“ können gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden. Klar dürfte sein, dass das Alien das Wetter ganz schön durcheinanderbringt und für ein Auf und Ab des Drucks und des Winds sorgt. Überraschend dürfte für die Schülerinnen und Schüler jedoch sein, dass dieses starke Durcheinander nicht lange andauert. Die Schwankungen werden mit der Zeit gedämpft und schon nach kurzer Zeit scheint alles wieder normal. Abbildung 21 veranschaulicht die Rückkehr zum Attraktor und zeigt die Anziehung dieser Menge.

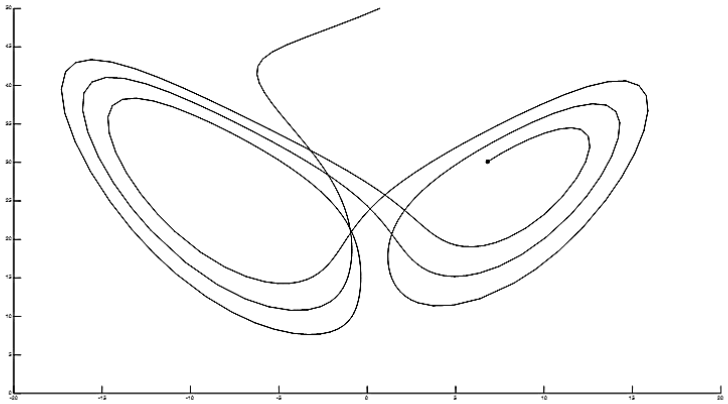


Abbildung 21: Die Anziehung des Attraktors

Zusammen mit einer grafischen Veranschaulichung kann erklärt werden: Das Alien stört unser normales Wettergeschehen und reißt das Wetter durch sein kräftiges

Rühren aus dem Attraktor. Es erzeugt einen Zustand weit außerhalb des Attraktors. Das Wetter wird vom Attraktor angezogen und pendelt sich nach dieser Störung neu ein. Es bewegt sich eine Zeit lang außerhalb des Attraktors, bis sich wieder alles im Attraktor abspielt und normales Wetter beobachtet wird. Ohne erneute „Alienstörung“ wird der Attraktor nicht mehr verlassen.

8.3.2 Der Schmetterlingseffekt

Eine wesentliche Eigenschaft chaotischer Systeme ist die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, die als „Schmetterlingseffekt“ weltberühmt wurde. Um den Schülerinnen und Schülern diesen zentralen Begriff näherzubringen, kann das von Lorenz in seinem Vortrag *Predictability: Does the flap of a butterfly´s wings in Brazil set off a tornado in Texas?* [12] erzeugte bekannte Bild des Schmetterlings, der mit seinen Flügeln schlägt und einen Tornado auslöst, genutzt werden. Passend zum wetterverändernden Flügelschlag können hier auch die Schwierigkeiten der Wettervorhersage besprochen werden.

Einen weiteren Zugang zur starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, der für den schulischen Bereich geeignet ist, bietet Ray Bradburys Kurzgeschichte *A sound of thunder* [3], die im Jahr 2055 spielt, in dem „Zeitsafaris“ angeboten werden. Die Geschichte erzählt von einem Mr. Eckels, der in die Vergangenheit reisen möchte, um einen Dinosaurier, einen Tyrannosaurus rex, zu jagen. Auf der Safari müssen strenge Regeln befolgt werden. So dürfen die Teilnehmer nur auf einem festen Pfad, der über dem Boden schwebt, wandern und nur ausgewählte Tiere kurz vor ihrem eigentlichen, natürlichen Tod erschießen. Jede kleine Änderung könne die Zukunft drastisch verändern, wie ausführlich erklärt wird. Nach seiner Reise 60 Millionen Jahre in die Vergangenheit bekommt Eckels beim Anblick des riesigen Tyrannosaurus rex Angst und flüchtet zurück zur Zeitmaschine. Auf seiner Flucht verlässt Eckels den Pfad, was vom Leiter der Safari sofort bemerkt wird. Eckels ist sich jedoch keiner Schuld bewusst und versteht den Wirbel um den Matsch an seinen Schuhen nicht. Die Gruppe reist zurück und findet sich in einer völlig veränderten Gegenwart wieder. An seinen Schuhen entdeckt Eckels in all dem Matsch einen toten Schmetterling. Auch Bradbury

veranschaulicht damit die kleine, winzige Abweichung, die zu großen Veränderungen führt, mit einem Schmetterling.

Eine andere Vorstellung der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen vermittelt Ian Stewart in *Weltformeln – 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten* [24]. Er vergleicht chaotisches Verhalten mit dem Kneten von Teig beim Brotbacken und verdeutlicht zwei nahe beieinander liegende Anfangswerte mit zwei benachbarten Rosinen. Durch das Kneten des Teiges, das wiederholte Strecken und Falten, bewegen sich die Rosinen immer weiter auseinander. Die Entfernung wird immer größer, bis die anfängliche „Nachbarschaft“ nicht mehr zu erkennen ist und jede Rosine auf einem ganz anderen Weg durch den Teig wandert. Die nahen Rosinen sind also nach endlich vielen Schritten weit voneinander entfernt. Siehe dazu Stewart (vgl. [24] S. 458-460).

Der „Schmetterlingseffekt“ kann den Schülerinnen und Schülern grafisch mit Hilfe zweier Lösungen des Lorenz-Systems, die in der Nähe starten, demonstriert werden. Siehe dazu zum Beispiel Abbildung 18. Auch hier können die angeführten Vorstellungen genutzt werden und die gewählten Anfangsbedingungen zum Beispiel als Wettersituationen, die sich nur um einen Flügelschlag eines Schmetterlings unterscheiden, oder Rosinen und die Lösungen entsprechend als Wetterverläufe oder Wege der Rosinen aufgefasst werden.

8.3.3 Besondere Strukturen: Fraktale

Eine Besonderheit, die der Lorenz-Attraktor als seltsamer Attraktor mitbringt, ist seine fraktale Struktur. Um den seltsamen Lorenz-Attraktor als Fraktal kennenzulernen, muss geklärt werden, was man unter einem Fraktal versteht. Für den schulischen Bereich genügt hier die „einfache Definition“: Fraktale sehen sich selbst ähnlich. Nehmen wir einen kleinen Ausschnitt und vergrößern ihn, zeigt sich das selbe „Gesamtbild“. Um diese Definition noch anschaulicher zu machen, können verschiedene Beispiele für Fraktale vorgestellt werden, die ein intuitives Verständnis des Begriffs ermöglichen sollen.

Ein berühmtes Beispiel ist die klassische Cantor-Menge, die „Middle-Thirds“-Cantor-Menge, die folgendermaßen erhalten wird (siehe zum Beispiel Devaney [5] S. 37): Gestartet wird mit dem Einheitsintervall, aus dem das offene mittlere Drittel herausgeschnitten wird. Aus den verbleibenden Intervallen wird nun wieder das offene mittlere Drittel entfernt und so weiter. Die ersten Schritte zur Konstruktion der klassischen Cantor-Menge sind in Abbildung 22 dargestellt und können in der Schule einfach und schnell skizziert werden. Das schrittweise Herausschneiden des offenen mittleren Drittels der verbleibenden Intervalle, das bis ins Unendliche fortgeführt wird, „durchlöchert“ das Einheitsintervall in einem bestimmten besonderen Muster. Betrachten wir nur einen Teil der Cantor-Menge „unter der Lupe“, sehen wir das ursprüngliche Bild.

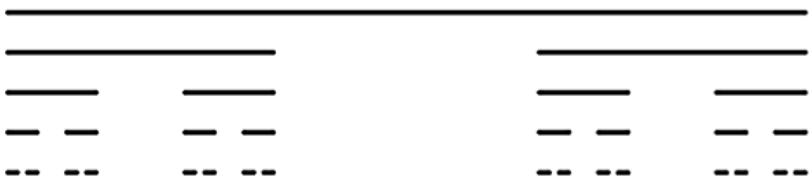


Abbildung 22: Konstruktion der klassischen Cantor-Menge

Neben der klassischen Cantor-Menge, die ein einfaches Einstiegsbeispiel darstellt, können auch andere, „ausgefallenere“ Beispiele behandelt werden. So kann die Selbstähnlichkeit von Fraktalen auch mit Hilfe eines „Fraktalbaums“ verdeutlicht werden. Eine Anleitung zur Konstruktion eines solchen Baums findet sich in Lorenz ([13] S. 171-173). Im schulischen Mathematikunterricht kann dieser gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern ausgearbeitet und zum Beispiel wie folgt aufgebaut werden: Zunächst wird eine 10 cm lange vertikale Strecke gezeichnet, die den Stamm des Baumes bildet. Am oberen Ende teilt sich der Stamm in zwei Äste, zwei horizontale Strecken, die im rechten Winkel vom Stamm abstehen. Die Länge eines Astes macht dabei die Hälfte der Stammlänge aus. Die erhaltenen neuen Strecken, die Äste, teilen sich weiter. Am Ende werden nach oben und unten jeweils zwei vertikale

Strecken gezeichnet. Die Länge einer Strecke entspricht der halben Länge des Astes, auf dem die neuen Strecken sitzen. Auf diese Weise wird fortgefahren. In jedem Schritt wird zwischen vertikalen und horizontalen Strecken gewechselt und jede neue Strecke, jeder neue Ast oder Zweig, ist $\frac{1}{2}$-mal so lang wie ihr Träger. Nach unendlich vielen Schritten ergibt sich ein Fraktal. Eine Zeichnung oder Skizze lässt das natürlich nicht zu. Aber auch nach nur endlich vielen Schritten ist die selbstähnliche Struktur erkennbar, wie Abbildung 23 zeigt.

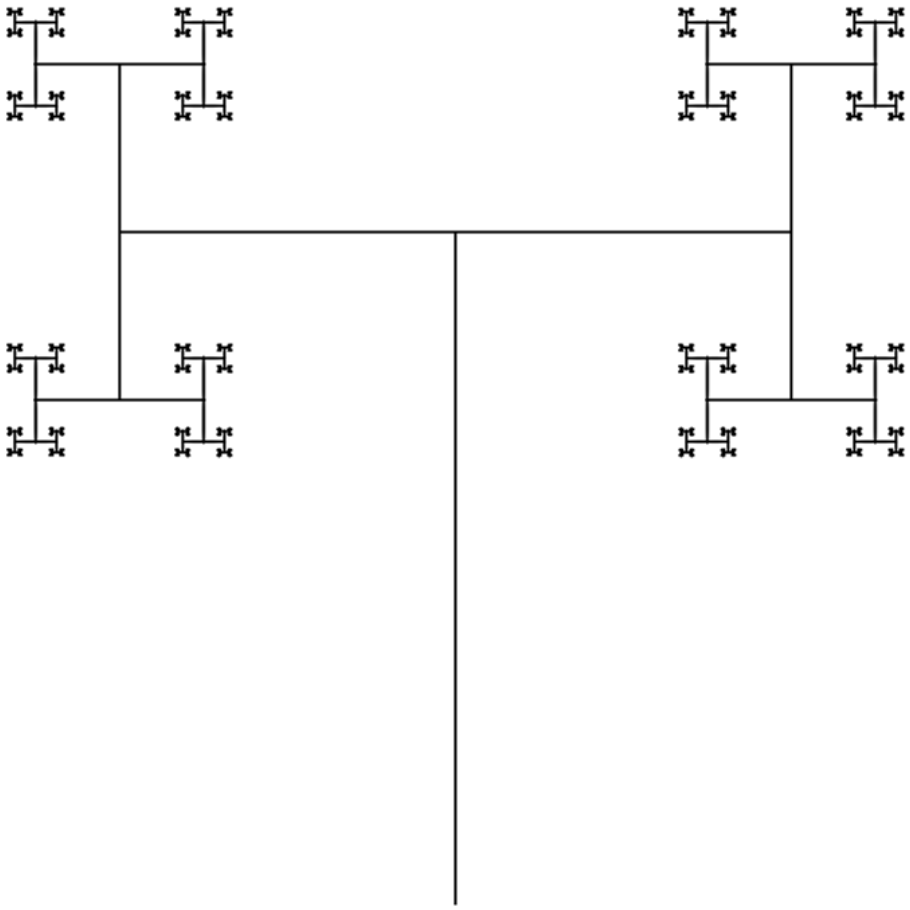


Abbildung 23: Fraktalbaum

Das gemeinsame Zeichnen des in Abbildung 23 dargestellten „Grundbaums“ soll den Schülerinnen und Schülern ein Grundgerüst liefern. Die Startstrecke muss nicht 10 cm lang, der Verzweigungswinkel nicht 90° und auch das Verhältnis der Streckenlängen nicht $\frac{1}{2}$ sein. Genauso müssen die Winkel und Verhältnisse nicht an beiden Seiten der

Verzweigung gleich gewählt werden. Der Grundbaum kann beliebig abgewandelt werden. Hier können die Schülerinnen und Schüler kreativ werden, mit Winkeln und Verhältnissen spielen und ihren eigenen Fraktalbaum gestalten.

Die angeführten Beispiele für Fraktale sollen nicht nur das Begriffsverständnis aufbauen, die ansprechenden Muster und Strukturen können auch genutzt werden, um den Schülerinnen und Schülern wieder einmal die Schönheit der Mathematik aufzuzeigen. Interessant an den Beispielen ist sicher auch das Erleben oder die Erkenntnis, welch einfache Vorschriften diese „eigenartigen“, besonderen Muster hervorbringen – genau wie das Lorenz-System als einfaches Differentialgleichungssystem einfachen Regeln folgt und eine „seltsame“ Struktur zeigt!

Kapitel 9
Zusammenfassung

Das Lorenz-System beschreibt das Verhalten unseres Wetters und ist damit nicht nur als „mathematisches Objekt“ sondern auch als „Wettermodell“ interessant. Entstanden sind die Lorenz-Gleichungen aus einem Modell von Saltzman, das auf den Strömungsexperimenten von Bénard und der theoretischen Behandlung von Rayleigh aufbaut. Neben einem Überblick über die Herleitung des Systems wurde in Kapitel zwei die Bedeutung des Lorenz-Systems, der Parameter und der Variablen, erläutert. Im dritten Kapitel wurden die Symmetrie und das besondere Verhalten des Lorenz-Attraktors an der z-Achse und um die z-Achse gezeigt. Die Gleichgewichtspunkte wurden berechnet und untersucht. Für die klassischen Parameterwerte hat das Lorenz-System drei nicht-stabile Gleichgewichtspunkte. Für eine andere bestimmte Parameterwahl zeigt das System nur einen Gleichgewichtspunkt, der stabil ist. Wie viele Gleichgewichtspunkte es gibt und ob diese stabil oder nicht-stabil sind, hängt vom betrachteten Parameterbereich ab und kann sich mit den Parametern ändern.

Die sprunghaften Verhaltensänderungen des Systems, die mit diesen Änderungen einhergehen, wurden in Kapitel vier behandelt. Neben der Pitchfork- und der Hopf-Bifurkation, in denen sich die Anzahl und die Stabilität der Gleichgewichtspunkte ändert, wurden die Homokline- und die Heterokline Bifurkation beschrieben, die mit dem Auftreten besonderer Orbits verbunden sind. Zuvor wurden im dritten Kapitel weitere Eigenschaften des Lorenz-Attraktors ausgeführt. Es wurde gezeigt, dass das System nichtperiodisch und dissipativ ist. Die Existenz eines Ellipsoids, in das alle Trajektorien eintreten und nie wieder verlassen, wurde bewiesen. Eine invariante,

anziehende Menge im Inneren dieses Ellipsoids gibt dem „Lorenz-Attraktor“ seinen Namen. Als absorbierende Menge half das Ellipsoid, die Existenz dieser Menge, des Attraktors, in Kapitel fünf zu zeigen. Der Lorenz-Attraktor wurde als seltsamer Attraktor mit einer besonderen, fraktalen Struktur beschrieben. Nach der Definition von Ruelle, die angeführt wurde, macht die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen einen Attraktor „seltsam“. Der Beweis der Existenz des seltsamen Attraktors von Tucker wurde skizziert.

Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen wurde dann nochmals in Kapitel sechs als eine der wesentlichen „Bestandteile“ von Chaos nach Devaney thematisiert. Es wurde gezeigt, dass das Lorenz-System die im Chaos geforderten Eigenschaften „Starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen“, „Topologische Transitivität“ und „Dichte periodische Punkte“ erfüllt und damit chaotisch ist. Was nach der mathematischen Analyse des Lorenz-Attraktors über das Wetter und die Wettervorhersage gesagt werden kann, wurde in Kapitel sieben diskutiert. Eine besondere Rolle kommt hier der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen zu, die unser Wetter unvorhersagbar macht. In einem Exkurs im achten Kapitel wurden abschließend verschiedene Ideen für den schulischen Mathematikunterricht zusammengetragen, die ein Erforschen des Lorenz-Systems in der Schule und das Entwickeln von Vorstellungen fördern sollen.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Drehung um die z-Achse 30
Abbildung 2: Graph von p für verschiedene Parameterwerte r 37
Abbildung 3: Das typische Bild des Lorenz-Attraktors 42
Abbildung 4: Die „Flügel“ des Lorenz-Attraktors 42
Abbildung 5: Abbildung der Maxima in z auf ihre Nachfolger 47
Abbildung 6: Idealisierung von Abbildung 5 48
Abbildung 7: Die Folge (M_n) für $M_0 = \frac{3}{16}$ 49
Abbildung 8: Die Folge (M_n) für $M_0 = \frac{1}{10}$ 51
Abbildung 9: Pitchfork-Bifurkation 63
Abbildung 10: Hopf-Bifurkation 65
Abbildung 11: Homokline Bifurkation 68
Abbildung 12: Erwartete Entwicklung der Periode 70
Abbildung 13: Stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für $r = 480$ 71
Abbildung 14: Stabile Mannigfaltigkeit von C_2 für $r = 500$ 72
Abbildung 15: Der Lorenz-Attraktor im Ellipsoid E 78
Abbildung 16: Konstruktion von q_n 93
Abbildung 17: Das „Wandern“ von X_0 97
Abbildung 18: Komponenten zweier Lösungen mit leicht veränderten Anfangsbedingungen 99
Abbildung 19: Der Lorenz-Attraktor in GeoGebra 117
Abbildung 20: Der „glatte“ Lorenz-Attraktor 118
Abbildung 21: Die Anziehung des Attraktors 120

Abbildung 22: Konstruktion der klassischen Cantor-Menge 123
Abbildung 23: Fraktalbaum 124

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Die Werte von x, y und z für jeden Iterationsschritt N, bei dem z ein relatives Maximum aufweist 46
Tabelle 2: Das Euler-Verfahren in GeoGebra 116
Tabelle 3: Die berechneten Tabellenwerte 116

Literaturverzeichnis

[1] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. & Stacey, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *The American Mathematical Monthly, 99* (4), 332-334.

[2] Bennemann, H. (2014). Iteration: Ein Weg zu Ordnung & Chaos. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn* (2., erweiterte Auflage) (S. 133-168). Wiesbaden: Springer Spektrum.

[3] Bradbury, R. (2010). A sound of thunder. In *The stories of Ray Bradbury* (7th printing) (pp. 281-293). New York: Everyman's Library.

[4] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019). *Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule*. Online unter https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 [5. Juni 2019].

[5] Devaney, R. L. (2003). *An introduction to chaotic dynamical systems* (2nd edition). Boulder: Westview Press.

[6] Eady, E. T. (1951). The quantitative theory of cyclone development. In T. F. Malone (Eds.), *Compendium of meteorology* (pp. 464-469). Boston, Massachusetts: American Meteorological Society.

[7] Grüne, L. & Junge, O. (2016). *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme* (2., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

[8] Hirsch, M. W., Smale, S. & Devaney, R. L. (2004). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (2nd edition). Amsterdam: Academic Press.

[9] Hunt, B. R. & Ott, E. (2015). Defining chaos. *Chaos, 25* (9), 097618.

[10] Kaenders, R. & Schmidt, R. (2014). Zu einem tieferen Mathematikverständnis. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn* (2., erweiterte Auflage) (S. 1-11). Wiesbaden: Springer Spektrum.

[11] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences, 20* (2), 130-141.

[12] Lorenz, E. N. (1972). *Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?* Talk at the 139th meeting of the American Association for the Advancement of Science in Washington, D.C., on December 29, 1972. Presented in The essence of chaos (1995), Appendix 1, 181-184.

[13] Lorenz, E. N. (1995). *The essence of chaos*. Seattle: University of Washington Press.

[14] Marsden, J. E. & McCracken, M. (1976). *The Hopf bifurcation and its applications*. New York: Springer-Verlag.

[15] Nordmeier, V. & Schlichting, H.-J. (2003). Chaos für die Schule! Nichtlinearität und Strukturbildung. *Physik in unserer Zeit, 34* (1), 32-39.

[16] Palmer, T. N. (2009). Edward Norton Lorenz. 23 May 1917 – 16 April 2008. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 55*, 139-155.

[17] Raith, P. (2015/2016). *Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen.* Mitschrift zur Vorlesung Differentialgleichungen für LAK, ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, Wintersemester 2015. Universität Wien, Institut für Mathematik.

[18] Rayleigh, Lord (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 32* (192), 529-546.

[19] Reeves, R. W. (2014). Edward Lorenz revisiting the limits of predictability and their implications: An interview from 2007. *Bulletin of the American Meteorological Society, 95* (5), 681-687.

[20] Ruelle, D. (1980). Strange attractors. *The Mathematical Intelligencer, 2* (3), 126-137.

[21] Ruelle, D. & Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics, 20* (3), 167-192.

[22] Saltzman, B. (1962). Finite amplitude free convection as an initial value problem – I. *Journal of the Atmospheric Sciences, 19* (4), 329-341.

[23] Sparrow, C. (1982). *The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors*. New York: Springer-Verlag.

[24] Stewart, I. (2014). *Weltformeln. 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten* (Deutsche Erstausgabe). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

[25] Tucker, W. (1999). The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris – Série I Mathématique, 328* (12), 1197-1202.

[26] Viana, M. (2000). What's new on Lorenz strange attractors? *The Mathematical Intelligencer, 22* (3), 6-19.