DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

„Bedeutung von Unterrichtseinstiegen in Mathematik

in der Sekundarstufe I“

verfasst von / submitted by

Dipl.-Ing. Christa Perner, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 190 445 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Biologie und Umweltkunde UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Univ. Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger
Mitbetreut von / Co-Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

Kurzzusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit geht es um die Bedeutung von Unterrichtseinstiegen im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I hinsichtlich der biologischen Grundlagen zur Lernfähigkeit von Schülern und Schülerinnen. In den Unterrichtseinstiegen sind Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften zu berücksichtigen und es ist altersadäquat zu agieren gemäß den Stadien der Denkentwicklung nach Jean Piaget. Enaktive, ikonische und symbolische Darstellungsformen sollten Bestandteil bei der Planung des Unterrichts sein, um das Verständnis für die mathematischen Inhalte zu erhöhen. Bausteine für gelungene Lernsituationen sowie Störfaktoren sollten ebenso beachtet werden. Zu den relevanten didaktischen Prinzipien zählen unter anderem die Entwicklung von Grundvorstellungen, die Beachtung der multiplen Intelligenzen sowie die anschauliche Darstellung und der Bezug zu den Lebenswelten der Kinder. Sieben Unterrichtseinstiege geben einen Überblick über die Möglichkeiten und eigene Beispiele regen zur praktischen Ausführung an. Passende Einstiege sind nur im Gesamtkonzept des Unterrichts erfolgreich, das heißt, der Einstieg allein ist keine Garantie für erfolgreiches Lernen mathematischer Inhalte.

Summary

This diploma thesis deals with the importance of entry-level mathematics lessons at lower secondary level in terms of the biological basis for the students' ability to learn. Neuroscientific findings must be taken into account, as well as the stages of thought development according to Jean Piaget. Enactive, iconic and symbolic forms of representation should be part of the lesson planning in order to increase the understanding of the mathematical content. Modules for successful learning situations and disruptive factors should also be considered. Among the relevant didactic principles are the development of basic ideas, the observance of multiple intelligences as well as the descriptive presentation and the relation to the children's environment. Seven introductions give an overview of the possibilities, and own examples encourage their practical implementation. Suitable introductions are only successful within an appropriate concept of teaching, i.e. a good introduction alone does not guarantee successful learning.

Vorwort

Die Ausbildung zur Pädagogin an der Universität Wien hält eine Fülle von fachlichen und didaktischen Inhalten als Vorbereitung für den Beruf bereit. Das ist eine Seite. Die andere ist die praktische in der Schule selbst, wo man mit Situationen konfrontiert ist, die man vorher nicht für möglich gehalten hätte. Mit Kindern zu arbeiten, die sich in einer wichtigen Entwicklungsphase ihres Lebens befinden, ist ein spannendes Abenteuer, auf das ich nicht mehr verzichten möchte. Es braucht viel Zeit und Erfahrung, bis man seinen eigenen Unterrichtsstil gefunden hat und ein ständiges Reflektieren, um sich den gegebenen Situationen anzupassen und nach fortlaufender Verbesserung zu streben.

Ich bedanke mich bei meinem Vorgesetzten, Herrn Mag. Günter Maresch und seinem bienenfleißigen Team dafür, dass sie mir schon während meiner Ausbildung die Möglichkeit zum Unterrichten gegeben haben. So konnte ich Gelerntes unmittelbar in die Praxis übertragen und sehen, ob es eine tragfähige Grundlage für den Unterricht ist. Danken möchte ich auch den Schülern und Schülerinnen selbst, die mich jeden Tag herausfordern, mein Bestes zu geben und mir unmittelbar Feedback geben, wenn sie etwas nicht verstanden haben. Schule ist vor allem Beziehungssache, ein vielfältig verwobenes Netz von Menschen, die sich ständig austauschen und sie stellt außerdem eine wichtige soziale Struktur im Leben Heranwachsender dar.

Danken möchte ich auch meinen Betreuern, Herrn Univ. Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger, der mir das Thema erlaubt hat und Mag. Dr. Andreas Ulovec, der mich mit einem, für mich maßgeschneiderten perfekten Betreuungsstil begleitet hat.

Wien, im August 2019 CHRISTA PERNER

Inhalt

1 Einführung

Im Unterrichtsjahr 2016/17 hatte ich zum ersten Mal die Gelegenheit, eine 1. Klasse in einem Wiener Realgymnasium zu unterrichten. Ich brachte in diesem Jahr viel Material mit in den Unterricht, z. B. Legosteine (→Bruchrechnen), Hula hoop Reifen (→Kreise), Messbecher und Medizinlöffel (→Hohlmaße), Kleiderhaken (→Gleichungen) etc. Wiederholt bin ich mit den Schülern und Schülerinnen am Boden gesessen und ich habe versucht, ihnen mit dem Anschauungsmaterial eine Vorstellung zum Thema zu geben.

In meiner bisherigen Tätigkeit als Lehrerin habe ich die Erkenntnis gewonnen, dass selbst Kinder, denen Mathematik nicht sehr vertraut ist, ein großes Interesse entwickeln können, wenn ihnen ein entsprechender Unterricht geboten wird. Es geht meiner Ansicht nach darum, das kindliche Bedürfnis nach Neugier zu berücksichtigen und ihnen eine entspannte, angstfreie Atmosphäre zu bieten, um sie zu motivieren.

Dies führt unweigerlich zur Thematik einer angemessenen Unterrichtsgestaltung respektive zu einem gelungenen Einstieg, über den die Kinder ins „mathematische Boot“ geholt werden sollen.

Ich beschränke mich in der vorliegenden Arbeit auf die Bedeutung eines Unterrichtseinstieges in ein neues Thema und nicht den Einstieg in eine Mathematikstunde. „*You never get a second chance for the first impression!* “ (Barzel et. al., 2014a, S 82). Dieses Zitat gilt durchaus auch für den Mathematikunterricht und den (lebenslangen) Zugang der Schüler und Schülerinnen zur Mathematik.

Die Bedeutung des Unterrichtseinstieges soll bezogen auf die biologischen Grundlagen der Lernfähigkeit eines Kindes erarbeitet werden. Daher werde ich zunächst auf entwicklungspsychologische Grundlagen eingehen. Es ist wichtig zu wissen, was in welchem Alter einem Kind vom mathematischen Verständnis her zuzumuten ist. Daneben möchte ich die neuronalen Grundlagen im Gehirn Heranwachsender beschreiben und, um der Altersstufe von Schülern und Schülerinnen in der Sekundarstufe I gerecht zu werden, auch auf die Vorgänge im Gehirn von Pubertierenden eingehen. Führende Neurowissenschaftler kommen in der Diplomarbeit mit ihren Erkenntnissen ebenso zu Wort, um auch von dieser Perspektive optimale Lernbedingungen zu erheben.

Über relevante didaktische Prinzipien geht es hin zu grundlegenden Einstiegsmodellen, die für den Mathematikunterricht geeignet sind. Zuletzt beschreibe ich eigene Unterrichtseinstiege aus meiner Lehrtätigkeit im genannten Unterrichtsfach. Aus diesen Erfahrungen hat sich auch das Thema der Diplomarbeit ergeben. Ich möchte über eine vertiefende wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Thema des Einstieges meinen eigenen Unterricht verbessern, um in den mir anvertrauten Kindern die Freude an Mathematik zu entfachen bzw. zu erhalten.

Mein persönliches übergeordnetes Lehrziel ist es, die Schüler und Schülerinnen so für Mathematik zu begeistern, dass sie sich freiwillig und entspannt (über den Lernstoff hinaus) in ihrer Freizeit mit mathematischen Inhalten befassen.

„Lernen heißt, ein Feuer zu entfachen, und heißt nicht, Fässer zu befüllen.“

Manfred Spitzer

2 Entwicklungspsychologie

Um die Ansprüche eines lernenden Kindes besser zu verstehen, muss man sich mit seiner Entwicklung befassen, insbesondere der Gehirnentwicklung. Kinder der Sekundarstufe I sind altersbedingt während der Pubertät auch mit einem Umbau ihres Gehirns konfrontiert, der sich in einem veränderten Verhalten zeigt und zur Herausforderung der Lehrkraft werden kann. Das Unterrichtsfach Mathematik betreffend wird auch die Entwicklung eines mathematischen Verständnisses genauer betrachtet, um daraus Erkenntnisse für die Unterrichtsgestaltung zu gewinnen.

2.1 Ausbildung eines neuronalen Netzwerkes im Gehirn

2.1.1 Strukturierung des neuronalen Netzwerkes im Embryonalstadium

Gerald Hüther beschreibt einen sehr wichtigen Zusammenhang, den es bereits im Embryonalstadium eines Kindes gibt: Strukturen, die sich im Embryo entwickeln, sind bereits während der Ausformung an bestimmte Funktionen gebunden. Das Herz beispielsweise funktioniert nicht erst dann, wenn es fertig ausgereift ist, sondern schon bei seiner Entwicklung. Nervenzellen wissen anfangs noch nicht, in welche Richtung sie wachsen und wie sie sich verbinden müssen. Funktionelle Netzwerke können nur entstehen, wenn die Nervenzellen einen entsprechenden Anreiz bekommen, also benutzt werden.

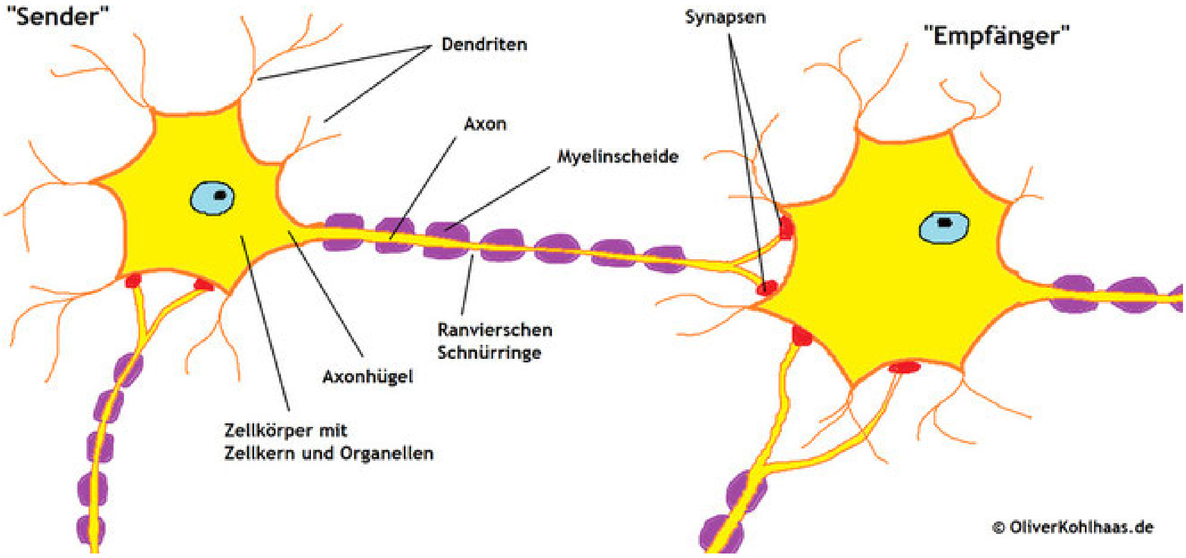


Abbildung 1: Aufbau und Verbindung von Nervenzellen[1]

[1] Diese Bildquelle sowie alle folgenden Bildquellen finden sich gesondert im Abbildungsverzeichnis (S 82).

Hüther schließt aus dem Grundprinzip einer von Funktion und Nutzen abhängigen Strukturierung auf die Erkenntnis, *„dass lernen und sich entwickeln nicht voneinander zu trennen sind.“* Daher können alle fördernden oder hemmenden Faktoren während der Schwangerschaft Einfluss auf die spätere Ausprägung von Funktionen und Fähigkeiten bei Kindern haben. Schädigende Einflüsse wären beispielsweise der Konsum von Drogen, Mangelernährung oder viel Stress während der Schwangerschaft.

Der Neurobiologe vergleicht das embryonale Nervensystem mit einem Verkehrswegesystem, das in einer expandierenden Stadt fortwährend den Gegebenheiten angepasst werden muss. Es werden „Verbindungsstraßen“ gebaut, die neu entstandene „Stadtteile“ vernetzen und *„je langsamer das geschieht, desto komplexer kann alles miteinander verbunden werden.“* Jede neu entstandene Nervenzelle wird in das vorhandene Netzwerk eingebettet und deshalb dahingehend beeinflusst von dem, was sich bis dahin entwickelt hat.

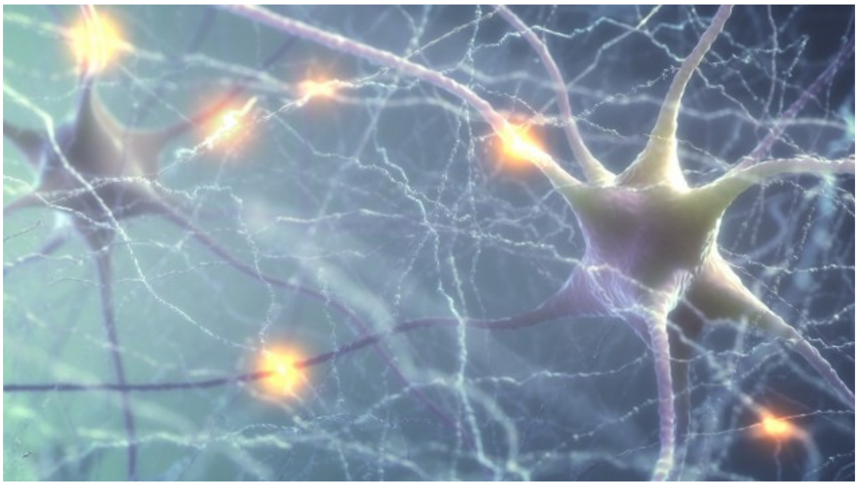


Abbildung 2: Neuronales Netzwerk

In der Reihenfolge der entstehenden neuronalen Netzwerke werden zunächst jene ausgebildet, die für das Überleben notwendig sind und zwar im Stammhirn, Mittelhirn und Zwischenhirn. Neuronale Verschaltungen im Vorderhirn, dem Neocortex, bilden sich zuletzt, aber genau diese Netzwerke sind die Grundlage für die Leistungen, die uns einen aufrechten Gang ermöglichen, mit deren Hilfe wir uns Sprache aneignen und Lesen, Schreiben und Rechnen lernen können.

Die enge Verbindung des Ungeborenen mit der Mutter verankert sich tief im Gehirn und bringt die Erfahrung, dass *„Verbundenheit und eigenes Wachsen möglich sind.“* Mit dieser Erfahrung werden die Kinder geboren und sie spielt bei der Reifung des Gehirns weiterhin eine wichtige Rolle. (Hüther, 2015, S 93-102)

2.1.2 Einflüsse auf die Gehirnstrukturierung nach der Geburt

Kinder haben zum Zeitpunkt der Geburt ein Gehirn, das noch nicht ausgereift ist und das sich noch weiter entwickeln muss. Ein Neugeborenengehirn wiegt etwa nur ein Viertel von einem Erwachsenengehirn (Spitzer, 2012, S 159).

„Keine andere Spezies kommt mit einem derart offenen, lernfähigen und durch eigene Erfahrungen in seiner weiteren Entwicklung und strukturellen Ausreifung formbaren Gehirn zur Welt wie der Mensch." (Hüther, 2009, S 43)

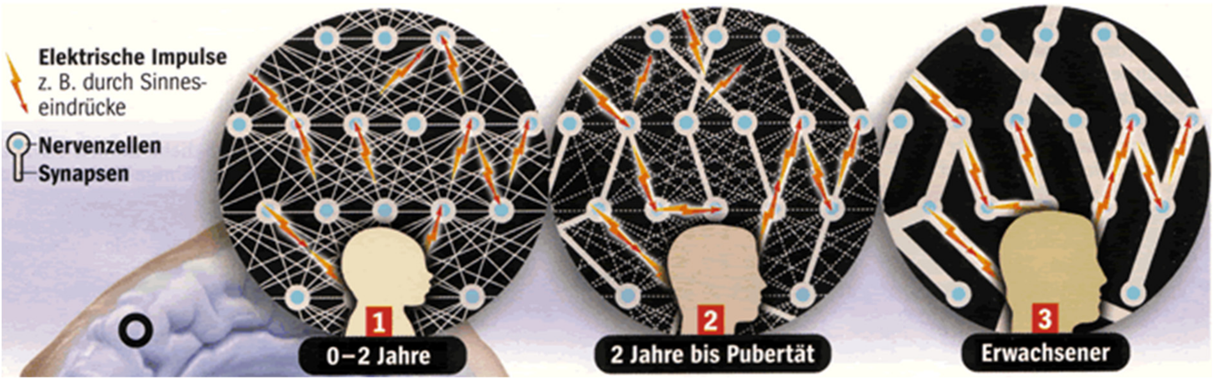


Abbildung 3: Entwicklung von Synapsen im Gehirn

Zu Beginn des Lebens gleichen die Nervenzellen einem dichten Netz, das in jede Richtung Impulse weiterleitet. Wesentlich ist, dass nach der Geburt Erfahrungen hinzukommen und damit die Struktur der unzähligen Nervenzellen ändern. Bis zum zweiten Lebensjahr geht man etwa von 1,8 Millionen Synapsen pro Sekunde aus, die entstehen können, wobei diese Verknüpfungen von den gemachten Erfahrungen abhängig sind. Fehlen einem Kind Erfahrungen in dieser wichtigen Zeit, so wird sich auch das Gehirn nicht entsprechend entwickeln. Daher ist es maßgeblich, dass genügend Anregungen in der Umwelt für die Entwicklung bzw. Erhaltung der Nervenverbindungen vorhanden sind. Lernen fördert die Häufung der Impulse in den Nervenbahnen weiterhin vom zweiten Lebensjahr an bis zur Pubertät. Für die Komplexität der neuronalen Struktur ist wieder die Vielfalt von Anregungen maßgeblich. (Hobmair et. al., 2008, S 34)

Bei der Ausbildung neuronaler Netzwerke spielt eine sichere Bindung eine tragende Rolle, und *„ist entscheidend dafür, dass ein Neugeborenes die von ihm mitgebrachte und in seinem Gehirn angelegte Offenheit für alles, was es in seiner Lebenswelt zu entdecken gibt, nicht verliert."* Die Obhut einer einfühlsamen Person, die dem Kind Sicherheit und Bestätigung gibt für sein Tun, ist also wesentlich für erfolgreiches Lernen und dahingehend für die weitere Gehirnentwicklung.

Kinder lernen umso erfolgreicher, wenn sie sich für eine Sache begeistern, weil dabei die emotionalen Zentren im Mittelhirn aktiviert werden. Die damit verbundene Freisetzung neuroplastischer Botenstoffe fördern das Wachsen neuer Fortsätze von Nervenzellen und die Neubildung und Stabilisierung von Nervenzellkontakten.

Ein ungestilltes Bedürfnis nach Erfahrung mit anderen hat zur Folge, dass Vernetzungen der Nervenzellen im Frontalhirn nicht gelingen. Das hat Lernschwierigkeiten zur Folge: Metakompetenzen, die im Frontalhirn lokalisiert sind, können nicht entwickelt werden. Solche fehlenden Metakompetenzen wären z. B. Fähigkeit zur Impulskontrolle, Frustrationstoleranz, Abschätzung der Folgen des eigenen Handelns, Übernahme von Verantwortung, Konzentrationsfähigkeit und Empathie.

Für das Lernen ist weiterhin wichtig, dass es für die Kinder Vorbilder gibt, von denen sie lernen können. Mit Hilfe von Spiegelneuronen sind Heranwachsende in der Lage, sich beispielsweise Verhaltensmuster abzuschauen und nachzuvollziehen. Auch hier gelingt der Lernprozess nur, wenn eine Person da ist, mit der sich das Kind emotional verbunden fühlt. Spiegelneurone sind die neurologische Basis für das Lernen am Modell (Bauer, 2009, S 112).

Aufgrund der Bedürfnisse, einerseits zur sozialen Gruppe gehören zu wollen und andererseits sein eigenes Potential entfalten zu können, sind Kinder bereit alles zu tun, um weiterhin dazuzugehören und neue Fähigkeiten zu erwerben. Ein starker Wille begleitet diese Bedürfnisse, und wenn etwas gelungen ist, sind die Kinder glücklich und es kommt zur verstärkten Freisetzung von Dopamin und endogenen Opiaten, welche wiederum die Neubildung von synaptischen Verbindungen anregen. (Hüther, 2015, S 106-107)

An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass meine AHS-Schüler und Schülerinnen im Alter von ca. 10-12 Jahren äußerst bemüht sind, ihre Eltern nicht zu enttäuschen. Das geht im Extremfall bei Leistungsüberprüfungen wie Schularbeiten so weit, dass einzelne Kinder völlig blockiert sind durch die hohe Erwartungshaltung der Eltern. In einem Fall kam es bei einem 10-Jährigen sogar zu einer Panikattacke, weil die Mutter kein „Befriedigend“ im Zeugnis des Sohnes sehen wollte!

In der Pubertät kann sich das Bemühen um die weitere Zuneigung der Eltern stark verändern und bisweilen in Rebellion umschlagen. Auch in diesem Abschnitt der Entwicklung spielt das Gehirn eine herausragende Rolle, es ist wichtigen Reifeprozessen unterworfen. Während der Adoleszenz ist das Teenagergehirn überragend von Emotionen gesteuert und nicht vom Verstand (Jensen, 2016, S 209).

2.2 Reifung des Gehirns während der Pubertät

Mittels bildgebender Verfahren konnte man erkennen, dass das Teenagergehirn erst zu etwa 80% ausgereift ist. Der Rest, der noch nicht richtig vernetzt ist, erklärt das eigentümliche Verhalten der pubertierenden Jugendlichen, ihre emotionalen Ausbrüche, ihre Reizbarkeit, Konzentrationsstörungen, Ungeduld sowie Neigung zu riskanten Manövern. Das hat damit zu tun, dass bei der Reifung des Gehirns die Stirnlappen zuletzt verknüpft werden und damit die Kontrolle über Emotionen nicht ausreichend ausgeübt werden kann, vor allem nicht in Krisensituationen. (Jensen, 2016, S56)

Teenager sind besonders stressanfällig und daher weniger belastbar als Erwachsene. Stressauslöser gibt es für heranwachsende Jugendliche heutzutage mehr denn je: das Internet mit seinen vielfältigen Kontaktmöglichkeiten und Einflüssen, soziale Akzeptanz, Mobbing, familiäre Probleme sowie Autoritäten in Schule und Elternhaus. Alle diese Stressfaktoren üben Druck auf die Teenager aus. (ebd., S 212)

In der Adoleszenz ist das Gehirn im Allgemeinen leistungsfähiger als in den anderen Abschnitten des Lebens, es ist aber auch empfindlicher. Teenager lernen grundsätzlich schnell, jedoch baut ihr Gehirn aufgrund der neuronalen Plastizität (Fähigkeit zur Selbstformung) dabei zur gleichen Zeit graue Hirnsubstanz und Neuronen ab. (ebd., S 90)

Der Abbau nicht benötigter Synapsen, die in der Kindheit entstanden sind, findet hauptsächlich von der Mitte bis zum Ende der Adoleszenz statt – nur die am meisten genutzten Synapsen bleiben, man spricht hier von einem „neuronalen Darwinismus“. Forscher erkannten, dass eine wirksame Elimination die Effizienz des Gehirns steigert. (ebd., S 102)

Die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Handlungen zu wechseln, also Multitasking zu betreiben, entwickelt sich erst im späteren Abschnitt der Adoleszenz. Mit etwa 15 Jahren ist das logische Denkvermögen zumeist voll entwickelt. (ebd., 62-63)

Zusammenfassend bedeuten die Erkenntnisse aus der Forschung, dass ein Teenagergehirn für Lernvorgänge bestens ausgerüstet ist. Im Gegensatz dazu gibt es deutliche Einbußen hinsichtlich erhöhter Stressanfälligkeit, mangelnder Selbsteinschätzung, Aufmerksamkeit, Konsequenz, Selbstdisziplin und Emotionen. (ebd., S 106)

2.3 Entwicklung des mathematischen Denkens

Im Folgenden werden Theorien angeführt, die zur Entwicklungspsychologie von Kindern entscheidende Beiträge geliefert haben. Sie dienen als Grundlage für eine altersgerechte Unterrichtsgestaltung.

2.3.1 Jean Piaget und die Theorie von den Stadien der Denkentwicklung

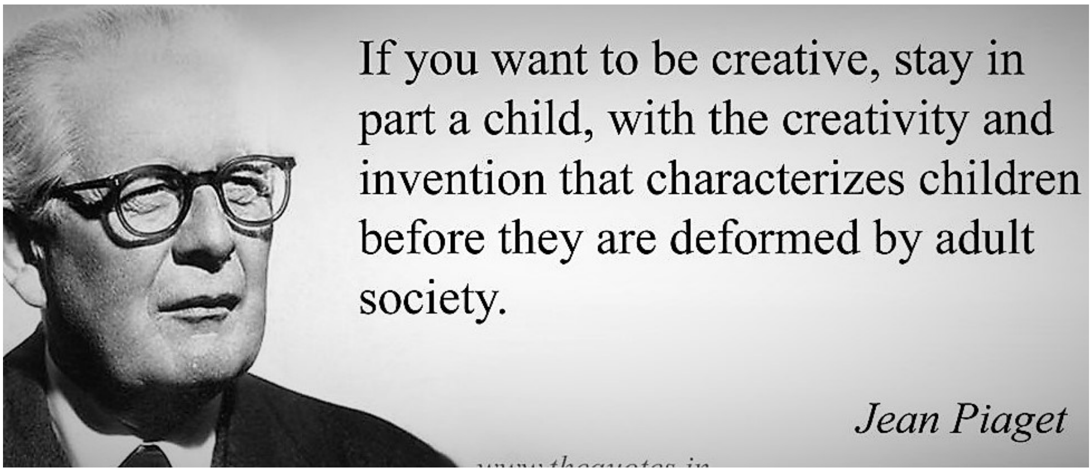


Abbildung 4: Jean Piaget (1896-1980)

Jean Piaget hat sich in zahlreichen Abhandlungen mit der Entwicklungspsychologie des Denkens von Kindern beschäftigt. Er hat grundlegende Denkstrukturen zur Zahl, des Raumes und der Zeit in vielen Einzelversuchen mit Kindern untersucht und als Resultat eine Entwicklungsgeschichte des Denkens, bestehend aus klar definierten Stadien veröffentlicht. Damit hat Piaget wertvolle Impulse für die Didaktik im Mathematikunterricht geliefert. (Fricke, 1970, S 80)

Die geistige Entwicklung des Kindes ist bei Piaget einerseits durch einen stufenunabhängigen Aspekt und andererseits durch einen Aspekt gekennzeichnet, der sich auf bestimmte Stufen innerhalb der Entwicklung bezieht. Der stufenunabhängige Aspekt behandelt die Assimilation und die Akkommodation. Die Assimilation beinhaltet das Einbeziehen der Umwelt in die bestehenden Verhaltensweisen, während man unter Akkommodation das Anpassen der existierenden Verhaltensweisen an die Umweltsituation versteht. (Steiner, 1973, S 5)

1. Sensomotorisches Stadium: Dieses Stadium, das mit Eintritt ins Leben beginnt und etwa eineinhalb bis zwei Jahre dauert, ist gekennzeichnet von einer Intelligenz, die auf das Praktische ausgerichtet ist. Eine Sprache ist noch nicht vorhanden, deshalb stützen sich die Konstruktionen ausschließlich auf Wahrnehmungen und Bewegungen ohne Mitwirkung der Vorstellungskraft oder des Denkens. (Piaget und Inhelder, 1996, S 15-16)

2. Präoperatives Stadium: Im Alter von ca. zwei/drei bis sechs/sieben Jahren tritt die vorstellungserzeugende Funktion auf, mit Hilfe eines Zeichens (Sprache, symbolische Geste u.a.) beispielsweise einen Gegenstand oder ein Ereignis abbzubilden. Piaget spricht hier von einer sogenannten semiotischen Funktion und erwähnt in diesem Zusammenhang fünf Verhaltensweisen: die aufgeschobene (zeitlich versetzte) Nachahmung, das symbolische Spiel, die Zeichnung, das innere Bild (das als verinnerlichte Nachahmung erscheint) und die verbale Erwähnung (mit Hilfe der sich entwickelnden Sprache). Man findet auf der präoperativen Stufe Reaktionen, die auf wahrnehmungsmäßige oder bildhafte Darstellungen fokussiert sind. (Piaget und Inhelder,1996, S 61-63)

   Piaget hat in Versuchen zur Mengenkonstanz festgestellt, dass Kinder in diesem Alter aufgrund ihrer Wahrnehmung nicht fähig sind beispielsweise das Ergebnis eines Umschüttversuches einmal mit Flüssigkeiten und dann auch mit Glasperlenmengen in anders geformte Gefäße richtig einzuschätzen. Es gibt also beim Kleinkind *keine Erhaltung der Menge.* (Piaget, 1970, S 52-53) Piaget folgert daraus, dass bei Kindern dieses Alters die inneren Bilder nur ein System von Symbolen bilden und das Bild nicht genügt, um operative Strukturierungen zu erzeugen. (Piaget und Inhelder, 1996, S 83-84) *„Die Abhängigkeit von der äußeren totalen Wahrnehmung verhindert also die Feststellung der Gleichheit zweier Mengen“* (Resag, 1970, S 34).

3. Stadium der konkreten Operationen: Dieses Stadium betrifft Kinder im Alter von etwa sieben/acht bis elf/zwölf Jahren, die nun Operationen durchführen können. Operationen sind nach Piaget verinnerlichbare und reversible Aktionen wie beispielsweise die Zusammenfassung zweier Klassen oder die Addition. Die Reversibilität kann eine Inversion (A – A = 0) oder eine Reziprozität (A entspricht B und umgekehrt) sein. In dieser Altersstufe wird die Erhaltung einer Substanz (Verformung einer Tonkugel), die Erhaltung der Länge (Streckenvergleich von geraden und gebrochenen Strecken), Flächen oder Inhalte (durch Verschiebung von Elementen) richtig erkannt und damit der Erhaltungsbegriff erworben.

   Konkrete (direkt auf Objekte bezogene und noch nicht verbal formulierte Hypothesen) Operationen bilden den Übergang zwischen der Aktion und logischen Strukturen wie zum Beispiel Klassifizierungen, Aneinanderreihungen, Zuordnungen und Matrizen. Piaget bezeichnet solche Strukturen als „Gruppierungen“. In enger Verbindung mit der Aneinanderreihung und Abgrenzung in Klassen geht der Aufbau der ganzen Zahlen vonstatten. Verbales Zählen führt noch nicht zur Zahl, *„die zahlenmäßige Schätzung bleibt in Wirklichkeit lange* *mit der räumlichen Anordnung der Elemente verbunden.“* Piaget unterscheidet zwei Arten von Zuordnungen und zwar erstens die „qualifizierten Zuordnungen“, die sich aus der Ähnlichkeit der Elemente ergeben wie es beispielsweise bei Vergleichen zwischen Modellen und ihren Kopien der Fall ist sowie die „beliebigen Zuordnungen“ von einzelnen Elementen zweier Mengen zueinander. Letztere sind es, die dann zur Zahl führen, weil sie die numerische Einheit in sich tragen. (Piaget und Inhelder, 1996, S 100-107)

4. <u>Stadium der formalen Operationen</u>: In dieser Periode zwischen elf/zwölf und vierzehn/fünfzehn Jahren löst sich der junge Mensch vom Konkreten, das von Piaget als wichtigstes Kennzeichen der beginnenden Adoleszenz gesehen wird. Es findet nun eine Transformation des Denkens statt, die es möglich macht, mit Hypothesen umzugehen und über Aussagen nachzudenken, die von einer konkreten und aktuellen Feststellung entbunden sind. Der junge Mensch lernt, aus potentiellen Wahrheiten die relevanten Folgerungen zu ziehen. Dies stellt den Beginn des hypothetisch-deduktiven oder formalen Denkens dar. (Piaget und Inhelder, 1996, S 131-132)

Abschließend sind folgende Kriterien zu nennen, die den Stadien der geistigen Entwicklung des Kindes zugeordnet werden können:

- Die Reihenfolge ist konstant, obwohl sich das zugeordnete durchschnittliche Alter je nach Intelligenzgrad oder unterschiedlichem gesellschaftlichen Milieu ändern kann.
- Jede große Periode ist durch eine Gesamtstruktur gekennzeichnet, durch die man die wichtigsten Reaktionen begründen kann.
- Die Gesamtstrukturen sind umfassend und lösen sich gegenseitig nicht ab: *„Jede geht aus der vorhergehenden hervor, indem sie sie als untergeordnete Struktur integriert, und bereitet die nächste vor, indem sie sich früher oder später in sie integriert.“* (Piaget und Inhelder, 1996, S 151-152)

2.3.2 Ebenen der Repräsentation nach Jerome Bruner

Jerome Bruner (1915-2016) ist der Meinung, dass der Entwicklungsprozess überwiegend von einer evolutiven und einer kulturellen Determinante bestimmt ist. Der Aufbau der logischen Strukturen ist für ihn, im Gegensatz zu Piaget, nicht von Bedeutung. Mehr interessieren ihn die psychologischen Faktoren im Laufe der Entwicklung. Eine herausragende Stellung haben dabei die verschiedenen Möglichkeiten, wie sich ein Kind seine Umwelt repräsentiert. (Steiner, 1973, S 167-168)

Repräsentation bedeutet für Bruner eine Konstruktion, eine Darstellung der Umwelt. Diese Darstellung und die sich daraus ergebenden Erfahrungen können mit Unterstützung durch verschiedene Mittel oder Medien erfolgen. Man kann etwas auf drei verschiedene Weisen kennen: *„dadurch, daß man es tut, dadurch, daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z. B. die Sprache verwendet.“* (Bruner, 1971, S 27)

Bruner bezeichnet die Möglichkeiten der Repräsentation als enaktiv (handlungsgebend), ikonisch (bildlich) oder symbolisch (sprachlich). Besonders hervorzuheben ist, dass hier erstmals die Sprache (bei Piaget noch ein Anhängsel) als bestimmender Faktor des Denkens ausgewiesen wird.

Bruner führt mit diesem Konzept Piagets Theorie der phasentypischen kognitiven Verhaltensweisen entscheidend weiter. Bemerkenswert ist, dass für die drei Repräsentationsformen zwar schon eine entwicklungsbedingte Ordnung besteht, aber nicht in dem Sinn, dass eine bestimmte Repräsentationsform einer bestimmten Entwicklungsphase zugeordnet werden kann. Dem Kind sollten mit zunehmendem Entwicklungsstand verschiedene Repräsentationsformen gleichzeitig zur Verfügung stehen, bis es situationsangepasst alle drei entsprechend anwenden kann.

Zu beachten ist, dass die drei genannten Repräsentationsweisen drei eigenständige Systeme zur Darstellung der Umwelt sind und eine Form der Darstellung zumindest teilweise in eine andere übergeführt werden können. In der Möglichkeit zur Transformation sieht Bruner einen bedeutenden Anstoß zur geistigen Entwicklung. (Steiner, 1973, S 168-169).

Obwohl es keine altersmäßige Zuordnung gibt, besteht doch eine Präferenz der Kinder für die Art der Darstellung. Bei jüngeren Kindern ist es zumeist die enaktive Ebene, weil die Umwelt wesentlich durch Handeln begriffen wird, z. B. bei der Beschäftigung mit Bausteinen und deren unterschiedlichen Formen. Bei Jugendlichen und jungen Erwachsenen kann die Darstellung auf der symbolischen und ikonischen Ebene eine wirksame Art der Vermittlung sein.

Die Ebenen sind nicht zwingend in einer Reihenfolge anzuwenden, es gibt aber Bereiche der Mathematik, wie das Bruchrechnen, wo es sinnvoll ist, die Ebenen so einzusetzen, das eine erste Begriffsbildung damit erfolgreich ist. Da gerade der Mathematikunterricht Jahr für Jahr auf vorhandenem Wissen aufbaut, ist es von Vorteil, auf unterschiedliche Weisen Zugang zum Lernstoff zu wählen und die Ebenen dahingehend zu nützen, dass sie Vorstellungen verknüpfen und sich gegenseitig gut ergänzen. (Reiss und Hammer, 2010, S 31)

2.3.3 Operative Methode nach Hans Aebli

Hans Aebli (1923-1990) war Schüler von Piaget und er widmete seine Forschung ebenso dem Lehren und Lernen. Aebli war der Ansicht, *„daß das mathematische Denken aus dem praktischen Tun und aus der Herstellung konkreter Beziehungen innerhalb der Wirklichkeit hervorgegangen sei, und daß es auch in der Erfahrung des einzelnen Kindes diese Entwicklung noch einmal durchlaufen müsse."* (Aebli, 2011, S 203)

Piaget hat den Begriff der Operation in die Psychologie eingeführt. Zuvor verstand man darunter alleine mathematische Verknüpfungen, wobei die Verknüpfungen für mathematische Grundoperationen wie zum Beispiel Addition oder Subtraktion standen. Für Piaget stand ein weiterer Gedanke hinter der Idee der Operation, für ihn ging mathematisches Denken aus Handlungen hervor, *„die Addition aus dem Zusammenfügen von Mengen, die Subtraktion aus dem Wegnehmen, die Multiplikation aus dem mehrmaligen Nehmen einer gleichen Menge, die Division aus dem mehrmaligen Wegnehmen einer gleichen Menge von einer Gesamtmenge oder aus dem Einteilen einer Gesamtmenge in eine gegebene Anzahl von gleichen Teilen."* (Piaget, 1947/1972, zitiert nach Aebli, 2011, S 204)

Aebli war der Meinung, dass aus einer Handlung im Geist des Ausführenden eine Operation werden kann, wenn er das eigene Handeln *„abstrakt betrachtet"*. Dazu führte er ein Beispiel an, in dem von einem Mädchen 5 x 4 Flaschen Cola aus dem Keller geholt werden. Da 20 Flaschen gebraucht werden, muss das Mädchen fünfmal gehen, weil sie nur vier Flaschen auf einmal tragen kann. Die Operation entsteht nicht gleichzeitig mit der Handlung, sondern wird erst rückblickend auf diese aufgebaut: *„Ich habe jedesmal vier Flaschen genommen, bis es 20 Flaschen waren. Da stehen fünf Gruppen von vier Flaschen, das ist, weil ich fünfmal hinuntergegangen bin. Ich habe 5 x 4 = 20 Flaschen gebracht."* Die Schülerin erkennt in der rückblickenden Betrachtung den Zusammenhang innerhalb der Handlung und die *„Operation schält sich aus der konkreten Handlung heraus".* (Aebli, 2011, S 207, S 214)

Ein konkret-anschaulicher Aufbau einer Operation bildet allerdings noch keinen vollständigen Lernprozess, die Operation muss auch noch durchdacht und automatisiert werden, um sie sicher ausführen zu können. Eine erfolgreiche Verinnerlichung und Automatisierung bedingt eine Übersetzung des Verfahrens in Zeichen. Aebli spricht hier von einer *„symbolischen Kodierung der Operation".* (ebd., S 215)

Vier Zeichengruppen stehen hierfür zur Verfügung: das gesprochene und das geschriebene Zahlwort, die Ziffer und das algebraische Zeichen (Variablenbezeichnung). Mit Hilfe solcher Zeichen kann nun eine Operation symbolisch ausgeführt werden, sie muss jedoch auch noch verinnerlicht werden. (ebd., S 216)

Im Rahmen der Verinnerlichung besteht die erste Möglichkeit darin, sich die Gegebenheiten bildhaft, „ikonisch“ vorzustellen. Gleichzeitig braucht es die Vorstellung, wie man in die gedachte Situation eingreift und sie ändert. Eine weitere Möglichkeit beinhaltet nun den Austausch des wahrgenommenen Bildes gegen ein Zeichen oder ein Wort, womit eine symbolische Repräsentation vorliegt. Sodann können zwischen den Zeichen die gleichen Beziehungen hergestellt und erkannt werden, wie sie auch zwischen den konkreten Gegebenheiten bewusst gemacht wurden. (ebd., S 218-219)

Der automatisierten Ausführung von Operationen liegt die Assoziation von Aufgabe und Ergebnis zugrunde. Eine weitere Art von Automatisierung ist das Auswendiglernen mathematischer Formeln und Sätze. Der Automatismus erlaubt dem Lernenden gewisse Effekte zu erzielen, ohne die Sache verstanden bzw. mit bestimmten Vorstellungen verbunden zu haben. Trotzdem braucht der Schüler oder die Schülerin Automatismen, jedoch immer mit der Möglichkeit behaftet, die Bedeutung von Operationen bzw. die zugrundeliegenden Beziehungen zu kennen. Die Funktion des Automatismus besteht darin, das Denken zu entlasten und die Aufmerksamkeit auf größere Zusammenhänge zu richten. Automatismen können jede bekannte Operation schnell verfügbar und einsetzbar machen und damit in höhere Zusammenhänge einbauen lassen. (ebd., S 222-224)

Für die Unterrichtsplanung ist die Klarheit des Aufbaus von neuen Operationen ein wichtiges Kriterium, Zusammenhänge und Beziehungen müssen dem Lernenden transparent sein, er muss Einblick in sie erhalten. Neue Operationen erhält man, indem sie aus bekannten erschlossen werden. (ebd., S 231)

3 Optimale Lernbedingungen sowie Störfaktoren

In diesem Kapitel werden Einflüsse dargestellt, die für erfolgreiches Lernen von Kindern maßgeblich sind. Erkenntnisse aus der Neurobiologie dienen als Basis für die Gestaltung optimaler Lernsituationen. Im Weiteren werden aber auch Faktoren behandelt, die den Lernprozess bei Kindern erheblich behindern.

3.1 Bausteine für erfolgreiches Lernen

„Intelligenz ist zum großen Teil angeboren, Expertenwissen kann man sich anpauken, klug wird man nur durch hochgradige Vernetzung des eigenen Wissens.“ (Roth, 2009, S 67)

Im Kindes- und Jugendalter wird hinsichtlich grundlegender Prägungen des Nervensystems das Lernen wesentlich beeinflusst. Aus der Sicht der Neurowissenschaften ist es daher unumgänglich, Lernprozesse zu analysieren und Einflussfaktoren zu bestimmen, die Lernprozesse fördern. Erkenntnisse sollen mit pädagogisch-didaktischen Aspekten Aufschluss darüber geben, wie Lernen am besten gefördert wird und welche Bedingungen sich dahingehend günstig auswirken. (Brand und Markowitsch, 2009, S 69)

Bewusst gemacht werden muss vor allem die Tatsache, dass Wissen nicht einfach übertragen werden kann, sondern in den Gehirnen der einzelnen Schüler und Schülerinnen neu geschaffen werden muss. (Roth, 2009, S 58)

3.1.1 Neugier und Spiel

Wie schon erwähnt, sind Kinder von ihrer Natur aus neugierig und wissbegierig. Schon von Plato ist bekannt, dass Spielen eine Übung für Handlungen im Erwachsenenalter ist. (Braun, 2009, S 134)

Als Voraussetzung für Neugier und Spielverhalten ist ein sogenanntes „*entspanntes Feld*“ erforderlich, das einerseits Sicherheit und andererseits Anregung bietet. Lernvorgänge dieser Art sind intrinsisch motiviert. Wenn es während der Entwicklung eines Kindes gelingt, viele „*entspannte Felder*“ zu erzeugen, dann müssten Lernprozesse nicht erst durch andere initiiert bzw. motiviert werden, sondern würden aus innerem Antrieb heraus in Gang gesetzt werden. (Sachser, 2009, S 26-27)

Gerald Hüther und Christoph Quarch (2016) haben dem Spiel ein eigenes Buch gewidmet: „Rettet das Spiel!“ und weisen auf die Bedeutung des Spiels hinsichtlich der Entfaltung des eigenen Potentials, hinsichtlich der Kreativität und Lebensfreude hin.

Das entdeckende Lernen kommt der kindlichen Neugier sehr entgegen. Statt einem „Lehrer-Instruktions-Modell“ soll ein „Schüler-Selbstlern-Modell“ selbstorganisiertes Lernen ermöglichen. (Herrmann, 2009, S 149)

Für das Kind bedeutsame Wahrnehmungen und Erfahrungen verstärken Neugierverhalten, während es bei Sachverhalten ohne erkennbaren Sinn mehr und mehr verloren geht und damit auch die Freude und Lust am Lernen. Wenn Lerninhalte Bedeutung für die Lernenden haben, ist die Merkfähigkeit dafür nachhaltiger (Arnold, 2009, S 193-194).

3.1.2 Flow-Learning-Konzept

Joseph Cornell befasste sich 1991 mit Naturerlebniserfahrungen von Kindern. In seinem sogenannten Flow-Learning-Konzept bezog er sich auf die dazu grundlegende Theorie von Mihaly Csikszentmihalyi (sprich: Tschiksentmihail). Ein „flow-Erlebnis“ kann als tiefe Versunkenheit oder selbstvergessenes Lernen beschrieben werden, in dem sich das Kind so eingehend mit einem Gegenstand oder Thema befasst, dass es Raum und Zeit um sich herum vergisst. (Csiksentmihalyi, 1975/1992, zitiert nach Krejcarek, 2000, S 27)

Csikszentmihalyi (2007, S16) ist der Ansicht, dass sich die besten Momente gewöhnlich dann ergeben, *„wenn Körper und Seele eines Menschen bis an die Grenzen angespannt sind, in dem freiwilligen Bemühen, etwas Schwieriges und etwas Wertvolles zu erreichen“.* Er versteht unter flow *„jenen Zustand, bei dem man in eine Tätigkeit so vertieft ist, daß nichts anderes eine Rolle zu spielen scheint“.*

3.1.3 Leichte Anspannung

Dem erfolgreichen Lernen dienlich ist schwacher, anregender Stress, weil in diesem Fall im Gehirn der Neurotransmitter Noradrenalin produziert wird, das in einer geringen Menge die Aufnahmebereitschaft fördert. Aus diesem Grund ist eine zu entspannte Atmosphäre, also eine Art „Kuschelpädagogik“ nicht zu empfehlen. Stress in geringem Maß ist also anzuraten, während eine zu große Anspannung, insbesondere Stress durch Angstzustände auf jedem Fall zu vermeiden ist. (Roth, 2009, S 65)

3.1.4 Periphere Wahrnehmung

Für einen dauerhaften Lernerfolg ist es ebenso wichtig, auf den Lernkontext zu achten, also auf die Lehrperson, die Zeit und den Ort, in dem Wissen vermittelt wird. Inhalte werden im Gedächtnis nur wenig verankert, wenn sie beispielsweise in heruntergekommenen Klassenräumen und in einer konfliktbeladenen Atmosphäre von unmotivierten Lehrpersonen vermittelt werden. (Roth, 2009, S 67)

3.1.5 Vertrauen und Sicherheit

In Bezug auf Vertrauen spielt die Lehrperson eine tragende Rolle. Nur dort, wo sich Schüler und Schülerinnen gut aufgehoben fühlen und keine Angst vor Misserfolgen oder Fehlern haben müssen, dort ist auch erfolgreiches Lernen möglich.

Kinder suchen enge Beziehungen zu Menschen, bei denen sie sich sicher fühlen und die ihnen helfen, Probleme zu lösen. Aber nicht nur das Gesagte zählt, sondern auch das, was tatsächlich auch (vor)gelebt wird. Eine schlechte Voraussetzung für wachsendes Vertrauen bieten Lehrer und Lehrerinnen, die selbst verunsichert sind. (Hüther, 2009, S 46)

3.1.6 Aussicht auf Belohnung und Motivation

Je ansprechender eine Lernsituation für Schüler und Schülerinnen ist, desto besser arbeitet das Gehirn. Bezüglich Motivation wirken Rahmenbedingungen förderlich, die je nach individueller Lernbefähigung und Lernleistung selbst aktiv gestaltet werden können. Motivierend ist auch die Aussicht auf Erfolg, denn wenn sich der Erfolg einstellt, gibt es eine „Wohlfühldusche" (Dopamin-Ausschüttung) aus dem Belohnungssystem des Gehirns. (Herrmann, 2009, S 153)

Das Ermöglichen von Erfolgserlebnissen stärkt das Selbstwertgefühl des Kindes und wird in der Individualpsychologie als Ermutigung bezeichnet. In der schulischen Praxis ist darauf zu achten, dass insbesondere leistungsschwache Kinder Erfolgserlebnisse brauchen, die ermutigend wirken. (Hobmair et. al., 2008, S 246)

3.1.7 Anknüpfen an Vorwissen

Schüler und Schülerinnen sollten Verknüpfungen von neuem zu bereits vorhandenem Wissen herstellen und Gelerntes anwenden können (Arnold, 2009, S 193). Um eine geeignete Verknüpfung von alten und neuen Inhalten zu begünstigen, ist es anzuraten, dass neue Inhalte zunächst anschaulich präsentiert werden, damit die Lernenden eine Vorstellung davon bekommen können (Roth, 2009, S 66). Vorwissen muss durch Übung gefestigt werden, andernfalls wird es nicht verfügbar sein bzw. wird die Anknüpfung daran nicht gelingen.

3.2 Störfaktoren

In diesem Unterkapitel wird Faktoren auf den Grund gegangen, die Kinder und Jugendliche in ihrem Lernprozess behindern bzw. sogar vollständig blockieren können.

3.2.1 Soziale Konflikte

Aus meinen eigenen Erfahrungen in der Schule weiß ich, dass potentielle soziale Konflikte innerhalb einer Klasse so vorrangig sein können, dass während dieser Krisenzeit der Kopf der Schüler und Schülerinnen sich mit nichts Anderem mehr befasst. Die Folgen sind mangelndes Interesse am Unterricht und reihenweise schlechte Noten. Warum ist das so?

Untersuchungen haben ergeben, *„dass Ausgrenzung aus der Sicht des Gehirns ähnlich wahrgenommen wird wie absichtsvoll zugefügter körperlicher Schmerz."* Da das Gehirn kaum zwischen körperlichem und psychischem Schmerz unterscheidet, liegt hierin ein potentieller Auslöser für zwischenmenschliche Aggression. (Bauer, 2009, S111)

Offenbar haben die Motivationssysteme im Gehirn das vorrangige Ziel auf Zuwendung und Zugehörigkeit. Gelungene soziale Interaktionen und ein Teil einer sozialen Gruppe zu sein sowie Anerkennung und Wertschätzung zu erfahren, ist für den Menschen von herausragender Bedeutung. Thomas R. Insel hat diesbezüglich den Begriff des „social brain" geprägt. Ein Ausschluss aus der sozialen Gemeinschaft gehört zu den schlimmsten Strafen und führt dauerhaft zum *„Zusammenbrechen jeglicher Motivation und jeden Antriebs, zu hoher Infektanfälligkeit und Krankheitsgefährdung und letztendlich zum „shut down" des Systems, zum Tod des Individuums."* (Leibovici-Mühlberger, 2010, S 41-44)

Mit diesem Grundbedürfnis kann auch erklärt werden, warum die sozialen Netzwerke im Internet so erfolgreich sind. Aber der Schein trügt und viele Nutzer fallen reihenweise darauf herein, der Begriff „Freund" wird auf eine schäbige Art und Weise missbraucht.

Studien deuten darauf hin, dass sich vor allem bei jungen Menschen, die ihre sozialen Kontakte hauptsächlich auf das Internet beschränken, jene Gehirnareale nicht normal entwickeln, die für soziales Verhalten zuständig sind. Die möglichen Folgen sind Einsamkeit und Depression. Das führt wiederum zum Absterben von Nervenzellen und begünstigt somit in weiterer Folge Demenz. (Spitzer, 2012, S 128)

3.2.2 Handy und digitale Medien

„Heranwachsende sind zu Hause, in der Schule, unter Gleichaltrigen und nicht zuletzt durch die Medien und das Internet einer Flut von Eindrücken ausgesetzt, die es in der Geschichte der Menschheit so noch nie gegeben hat." (Jensen, 2016, S 37)

Handy und digitale Medien bieten den Jugendlichen vor allem eins, und das ist massenhaft geistige Ablenkung. Dass Handyabnahmen in der Schule zu regelrechten Zusammenbrüchen führen können, ist mir aus dem Schulalltag bekannt. Einer Handyabnahme zum Beispiel folgte die Mail einer Schwester, die mit rechtlichen Konsequenzen drohte, denn ihre Angehörige müsse jederzeit erreichbar sein. Auch Eltern haben schon durchgedreht, als ihrem Kind in der Schule für ein paar Stunden das Handy abgenommen wurde.

2010 wurden 200 Studentinnen und Studenten an der University of Maryland angewiesen, 24 Stunden auf sämtliche Medien zu verzichten. Für eine zweite Umfrage kam eine Kooperation mit der Salzburger Academy on Media & Global Change zustande. Nunmehr rund 1000 Studenten und Studentinnen hielten schriftlich ihre Erfahrungen zum Medienverzicht fest. Kommentare wie *„Abgeschaltet…als hätte man eine Herz-Lungen-Maschine vom Netz genommen"* oder *„Ich litt wie ein Crack-Junkie, weil ich mein Smartphone nicht benutzen durfte"* waren die Folge. Es wurden Ausdrücke genannt, die Drogensüchtige bei ihrem Entzug verwenden. (ebd., S 252-254)

Jugendliche verbringen bis zu ihrem 21. Lebensjahr unglaubliche 10 000 Stunden mit Computerspielen, Jungen sind dabei ganz besonders betroffen. Chinesische Forscher haben bei Online-Gamern Veränderungen im Gehirn festgestellt. Bereiche waren betroffen, die für Sprache, Gedächtnis, Motorik und Emotionen zuständig sind sowie eine Beeinträchtigung der Fähigkeit zur Entscheidungsfindung. (ebd., S 260)

Computer- und Handyspiele birgen auch dahingehend eine Gefahr für die Schule, da sie mit ihren Spezialeffekten ein hohes Reizniveau erzeugen. Das hat zur Folge, dass eine unspektakuläre Art der Vermittlung von Unterrichtsinhalten schnell als langweilig empfunden wird.

Das französische Parlament hat sich am 30. Juli 2018 dazu entschlossen, ein Handyverbot für 3- bis 15-Jährige an den Schulen zu erlassen. Die Regelung gilt für alle Räume der Schule sowie für schulische Aktivitäten außerhalb des Schulgebäudes.[2]

[2] URL: https://kurier.at/politik/ausland/frankreich-macron-verbannt-handys-aus-schulen/400076948 [2.8.2018]

3.2.3 Angst

Die Offenheit von Kindern, sich auf Neues einzulassen, kann ein jähes Ende finden, sobald Angst und Druck ins Spiel kommen. In diesem Fall breitet sich im Gehirn Unruhe und Erregung aus und es kann nichts Neues mehr gelernt und im Gehirn gespeichert werden. In diesem Zustand gerät im Kopf alles durcheinander, was auch dazu führen kann, dass sich der Schüler oder die Schülerin sogar an bereits Gelerntes nicht mehr erinnern kann. In dieser Stresssituation greift der Betroffene auf fest verankerte Verhaltensweisen zurück. Vertrauen, Neugier und Offenheit gehen verloren und damit die Fähigkeit beim Lernen erfolgreich zu sein. (Hüther, 2004, S 40-45)

In der folgenden Abbildung ist gut erkennbar, dass der Bereich des Gehirns, der mit Emotionen zu tun hat, die Amygdala, direkt neben dem Hippocampus liegt, der uns hilft, Erlerntes im Gedächtnis zu behalten. Somit kann leicht nachvollzogen werden, dass negative Emotionen wie beispielsweise Angst und Unsicherheit einen sehr schlechten Einfluss auf den Lernerfolg haben. Andererseits kann jedoch die Nähe beider Gehirnareale bewirken, dass sich positive Emotionen förderlich auf das Lernen auswirken.

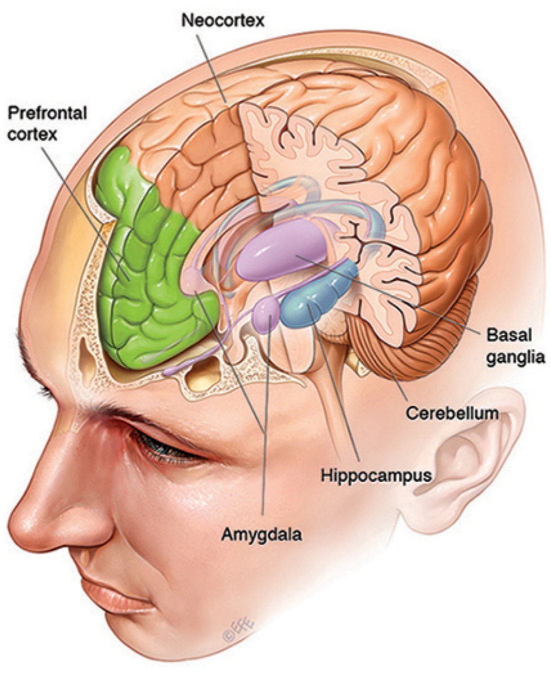


Abbildung 5: The parts of the brain involved in memory (Illustration by Levent Efe)

Im Falle von angstbedingtem Stress, der häufig bei Teenagern vorkommt, stellt der Hippocampus seine normale Funktion hinsichtlich Erinnerungs- und Lernleistung ein. Hinzu kommt eine Anflutung von Kortisol (ein Stresshormon), das bei Jugendlichen ohnehin erhöht ist und mit negativen Emotionen in Verbindung gebracht wird. Fortlaufender chronischer Stress schadet dem Hippocampus erheblich, d. h. das Denkvermögen verliert hier seine Flexibilität. Problematisch scheint zudem, dass stressbedingte Folgen bei Jugendlichen viel länger als bei Erwachsenen anhalten, wie es in Tierversuchen gezeigt werden konnte. (Jensen, 2016, S 213)

3.2.4 Ablenkung

Arnold Fricke bezieht sich auf Untersuchungen, die mangelnde rechnerische Fähigkeiten bei Schülern und Schülerinnen und bei Lehrlingen bestätigen. In diesem Zusammenhang gibt er allgemein gängige Argumentationen wie *„zu große Klassenfrequenzen, Reizüberflutung und damit Konzentrationsschwäche“* zu bedenken. Diese Erkenntnisse sind an sich nichts Neues, bemerkenswert ist aber, dass Arnold Fricke das vor ca. 50 (!) Jahren geschrieben hat! (Fricke, 1970, S 73)

Demnach scheint die Klassenschülerhöchstzahl ein immerwährendes Problem zu sein. Gegenwärtig sitzen 28 Schüler und Schülerinnen in den AHS-Klassen der Unterstufe. Aus meinen eigenen Erfahrungen heraus weiß ich, dass in manchen Klassen eine große Anfälligkeit für Ablenkung während des Unterrichts durch Klassenkollegen und Kolleginnen besteht. Das hat mangelnde Aufmerksamkeit, Konzentrations- und Verständnisschwierigkeiten zur Folge.

Das Thema Reizüberflutung scheint ebenfalls ein zeitloses zu sein, wobei man jedoch mit Sicherheit sagen kann, dass dieses Thema heute im Gegensatz zu früher völlig andere Dimensionen angenommen hat. Die oben bei Jensen erwähnte Flut von Eindrücken und die Schnelllebigkeit unserer Zeit, die sich leider auch zunehmend bei Kinderfilmen bzw. -serien in Form von unzumutbaren Sprechtempos und sinnentleerten Inhalten äußert, bieten den Kindern viel Ablenkung. Das alles im Gehirn verarbeiten zu können und dann noch Ruhe und Muße zum Lernen zu finden, ist eine große Herausforderung!

3.2.5 Lärm

Hotter und Zollneritsch haben sich mit dem Thema Lärm in der Schule befasst und herausgefunden, dass sich ein hoher Lärmpegel nachteilig auf die Arbeitsgeschwindigkeit, Leistungsvermögen und Merkfähigkeit der Schulkinder auswirkt. Physiologisch reagieren Schüler und Schülerinnen auf ein lautes Umfeld häufiger mit erhöhtem Blutdruck, höherem Puls und ansteigenden Stresshormonen im Blut.

Lärm wirkt sich zudem nachteilig auf Konzentration sowie Problemlösekapazitäten aus und kann Lernprozesse richtiggehend lahmlegen. Lernende sind schneller müde (Zuhören strengt mehr an und kostet dementsprechend mehr Energie) und reizbar, wenn sie Lärm in der Schule ausgesetzt sind.

Experimente belegen auch, dass unter Einfluss von Lärm stärker nach schnellen, vermeintlich einfachen Lösungen gesucht wird. In lauten Klassen wird von Pädagogen und Pädagoginnen weniger differenziert unterrichtet. Insgesamt werden die Inhalte stark vereinfacht und es wird weniger gesagt.

Beobachtungen zeigen, dass soziale Beziehungen zwischen Schülern und Schülerinnen und das Benehmen in lauten Klassen schlechter sind. Aggressionen, Ärger und Unlust treten in solchen Klassen häufiger auf. (Hotter und Zollneritsch, 2008, S83-91)

Mehr denn je muss bei Schülern und Schülerinnen ein Bewusstsein für Stille geschaffen werden. Um Unterrichtsinhalte erfolgreich verarbeiten und im Gedächtnis konsolidieren zu können, müssen Ruhephasen in Schule und Elternhaus eingehalten werden. Mein Eindruck ist, dass es Kindern immer schwerer fällt, zur Ruhe zu kommen.

3.2.6 Überbesorgte, vernachlässigende oder ehrgeizige Eltern

Forscher aus Japan fanden über einen schlechter entwickelten präfrontalen Cortex bei Erwachsenen heraus, dass Eltern, die es mit ihrer Fürsorge übertreiben, das Wachstum des Gehirnes ihrer Kinder behindern. Eltern, die um ihre Kinder ängstlich besorgt sind, gestehen ihnen keine Eigenverantwortung sowie Möglichkeiten zu, Probleme selbst zu lösen, wodurch die Gehirnentwicklung der Kinder gehemmt wird. In einem Vergleich des präfrontalen Cortex im Gehirn von Personen, die einerseits in ihrer Kindheit überbehütet worden waren, und jenen, die vernachlässigt worden waren, fand man keinen Unterschied. Daraus lässt sich schließen, dass sich Überfürsorge und Ignoranz gleichermaßen negativ auf Kinder auswirken. (Bierbaumer, 2014, S43-44)

In der Praxis ist es so, dass manche Eltern mit ungeheurem Ehrgeiz die Schullaufbahn ihres Kindes vorantreiben und sich viel mehr ins Schulleben einmischen als es ihren Kindern gut tut. Sie nehmen ihnen einerseits die Möglichkeit, selbstständig mit Problemen zurechtzukommen und andererseits üben sie mit ihrem Verlangen nach guten Noten ungeheuren Druck aus, was bei manchen Schülern oder Schülerinnen insbesondere in der Pubertät zur völligen Verweigerung des Lernens führen kann.

Wichtig ist es, dass Lernende nicht zum Objekt von Erziehungs- und Bildungsmaßnahmen gemacht werden, denn kein Kind oder Jugendlicher kann so sein Potential entfalten, also seine Talente und Fähigkeiten zur bestmöglichen Ausprägung bringen (Hüther, 2015, S 157).

4 Relevante didaktische Prinzipien

In diesem Kapitel geht es um ausgewählte didaktische Prinzipien, die als Basis für produktives Lehren und nachhaltiges Lernen gelten und grundlegend für die Planung der Unterrichtseinstiege sind. Bei jeder Unterrichtsvorbereitung müssen sie sorgfältig berücksichtigt werden.

4.1 Entwicklung von Grundvorstellungen

Eine Grundvorstellung kann als inhaltliche Deutung eines Begriffs verstanden werden. Aus Sicht der Schüler und Schülerinnen lassen sich Grundvorstellungen in universelle und individuelle einteilen. Die universellen Grundvorstellungen beziehen sich auf die Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff, während man bei individuellen Grundvorstellungen konkret auf die Vorstellung eines Lernenden schließen kann. Letztere sind vor allem im Hinblick auf möglicherweise notwendige Fördermaßnahmen relevant.

Eine weitere Unterscheidung sind primäre und sekundäre Grundvorstellungen. Primäre Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff werden durch Handlungserfahrungen mit bestimmten Materialien vor allem im Grundschulbereich geschaffen. Sekundäre Grundvorstellungen hingegen bauen auf bereits vorhandenen Vorstellungen auf.

Das Entwickeln von Grundvorstellungen ist ein Herzstück im verständnisorientierten Mathematikunterricht. Mit deren Hilfe können Begriffe mit bekannten Sach- und Handlungszusammenhängen verbunden werden und damit ein inhaltliches Verstehen gefördert werden. Auch für mathematisches Operieren sind sinnhafte Vorstellungen zu den Objekten notwendig. Für Lehrkräfte bieten Grundvorstellungen eine geeignete Zielorientierung hinsichtlich Unterrichtsgestaltung. Der Unterricht sollte idealerweise so ausgeführt werden, dass möglichst viele Schüler und Schülerinnen fundierte Grundvorstellungen entwickeln können. (Greefrath et. al., 2016, S 16-21)

Beispiel:

Beim **Einstieg in die Division** sollten die Lernenden der 1. Klasse ausreichend mit dem Unterschied zwischen Teilen und Messen vertraut gemacht werden, da die Division jene Rechnung ist, die dem Teilen und Messen zugrunde liegt. (Humenberger et. al., 2016, S 54)

Hier kann beispielsweise mithilfe von Schogetten (einzelne kleine Schokoladen), die auf die einzelnen Kinder aufgeteilt werden, das Teilen vermittelt werden.

Von einem langen Geschenkband kann man einzelne Bänder mit einer bestimmten Länge abschneiden, um das Messen zu verdeutlichen. Hier sollten die Schüler und Schülerinnen vorher schätzen, wie oft ein entsprechendes Teilstück abgeschnitten werden kann.

Danach werden die Ergebnisse auf die zentrale Fragestellung hin betrachtet, beim Messen heißt die zugehörige Fragestellung: *„Wie oft passt ein Teil hinein?“* und beim Teilen stellt sich die Frage: *„Wie groß ist ein Teil?“* (Humenberger et. al., 2016, S 54) Im Anschluss sollten durch Beispiele die Unterschiede zwischen Teilen und Messen erkannt werden (ebd., S 55):

- 5 Runden im Stadion sind 2000 m. Wie lang ist eine Runde?
- 27 Schülerinnen und Schüler sollen in Gruppen zu 3 Personen eingeteilt werden.
- 12 Personen werden auf 3 Autos aufgeteilt.
- 30 l Apfelsaft sollen in 2-Liter Flaschen abgefüllt werden.
- Wie viele Runden sind für 10 000 m zu laufen, wenn 1 Runde 400 m lang ist?

Erst nach dem grundlegenden Verständnis zur Division sollte mit den eigentlichen Rechnungen begonnen werden.

Die ersten Divisionen werden zusätzlich grafisch unterstützt:

Beispiel: Wie oft kannst du 4 Felder von 24 Feldern wegnehmen? 24 : 4 = _______

Hier wird vermittelt, dass statt einer mehrmaligen Subtraktion dividiert werden kann, also die Division ein vereinfachtes Verfahren zur Subtraktion von gleichen Zahlen ist.

Danach folgen die Rechnungen, bei denen in der ersten Klasse unbedingt die Zwischenschritte angeführt werden müssen, um den Rechengang verständlich zu machen.

```
  2 3 4 6  :  3 = 782
-  2 1
   ---
     2 4
   - 2 4
     ---
       0 6
     - 0 6
       ---
         0  Rest
```

4.2 Alters- und Entwicklungsgerechtigkeit

Eine elementare Aufgabe im Mathematikunterricht ist es, die Inhalte an den Entwicklungsstand der Kinder anzupassen.

Im Unterrichtsalltag zeigt sich immer wieder, dass man nicht alle Schüler und Schülerinnen bezüglich ihrer Entwicklung respektive des Alters gleichschalten kann. Während einzelne Kinder blitzschnell neues mit vorhandenem Wissen verknüpfen können, braucht es bei anderen wieder Zeit, um bei ihnen erst einmal die Grundvorstellungen zu festigen.

Hier hat es sich bewährt, bei sehr interessierten Kindern bewusst Grenzen zu überschreiten und ihnen Inhalte anzubieten, die über die aktuellen Unterrichtsinhalte hinausgehen oder ihnen Zusatzmaterial anzubieten, das dem Erweiterungsbereich entspricht. Bei passender Gelegenheit biete ich den Schnellsten und Eifrigsten ab und zu Inhalte zum Nachdenken an, die eigentlich erst der nächst folgenden Unterrichtsstufe zugeordnet werden. Peschel (2006b, S 117) kritisiert, dass im Unterricht selten eine qualitative Differenzierung durch schwierigere Aufgaben vorgenommen wird. Im Allgemeinen kommt es nur zu einer zeitlichen Korrektur der abweichenden Arbeitsgeschwindigkeit durch Zusatzaufgaben.

Beispiel:

Zum **Einstieg in die Kongruenzsätze beim Dreieck** wird über das Suchen nach übereinstimmenden Figuren zunächst ein intuitiver Zugang zur Kongruenz gefunden:

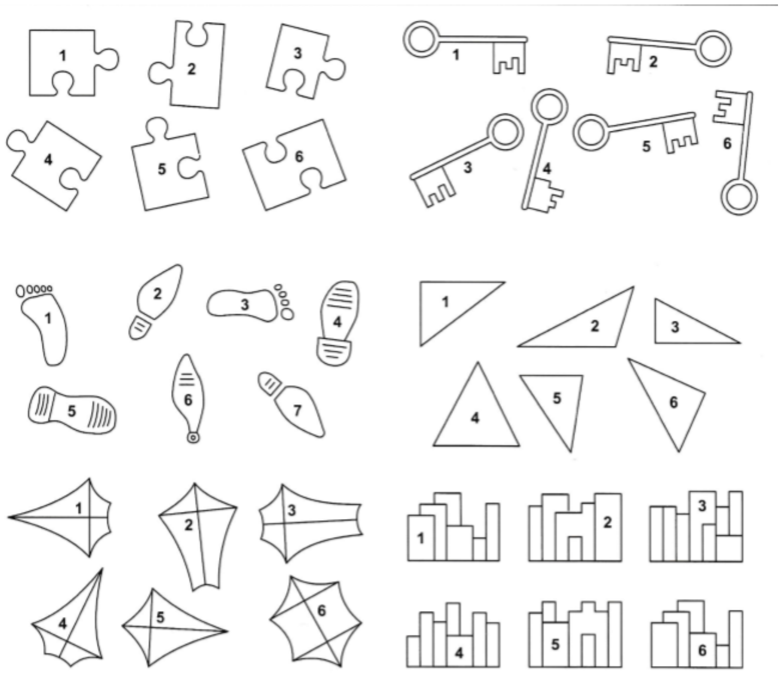


Abbildung 6: Übungsblatt zum Finden kongruenter Figuren

Von den Schülern und Schülerinnen wird sodann der Begriff der Kongruenz formuliert und festgehalten.

In weiterer Folge wird der Kongruenzbegriff auf Dreiecke übertragen und die Lernenden erarbeiten in Gruppen unterschiedliche Möglichkeiten, welche Angaben für ein Dreieck notwendig sind, um eine eindeutige Konstruktion zu ermöglichen. Auf einzelnen Kärtchen werden die Beispiele inklusive Vorschläge zur Konstruktion festgehalten und die Ergebnisse aus der Gruppenarbeit in der Klasse besprochen, verglichen und ähnliche Ergebnisse sortiert.

Von der Lehrperson werden nun Karten mit den Kongruenzsätzen mit einem Magneten an die Tafel geheftet und die Bedeutung der unterschiedlichen Notationen erklärt:

Abbildung 7: Karten zu Kongruenzsätzen

Nun ordnen die Kinder ihre Ergebniskärtchen den entsprechenden Kongruenzsätzen zu und ein abschließendes Gespräch schafft die Grundlage zur Anwendung der einzelnen Kongruenzsätze. (Klippert, 2011a, S 12-15)

Bei der Gruppenarbeit muss die unterschiedliche Lernfähigkeit und einzelne mathematische Begabung berücksichtigt werden. Ich nenne die Kinder, die Herausforderungen brauchen, die „Pioniere“. Meistens setzen sich die „Pioniere“ in einer Gruppe zusammen und das ist gut so. Sie kommen sehr schnell zu verschiedenen Vorschlägen bzw. Ergebnissen und schaffen in einer Stunde wesentlich mehr als die von mir genannten „Langsambrüter“. Sie brauchen Zeit, oft sind sie auch jünger als der Rest der Klasse und daher auch von der Entwicklung noch nicht so weit wie die anderen. Es sind Altersdifferenzen in einer einzigen Jahrgangsstufe von bis zu einem Jahr möglich und das ist deutlich spürbar im Unterricht. Die „Langsambrüter“ bekommen von mir für die Gruppenarbeit mehr Impulse als die „Pioniere“ und am Ende der Gruppenarbeit ist es für mich ausreichend, wenn die langsameren Schüler und Schülerinnen weniger Ergebnisse erzielen als die schnelleren, aber dafür die Aufgabenstellung wie im genannten Fall der Konstruktionsmöglichkeiten für Dreiecke gut durchdacht haben. Vom Lernvermögen her unterscheide ich zusätzlich noch die „Schmetterlinge“, die Neues schnell lernen, aber auch schnell vergessen und zuletzt noch die „Stimmungskanonen“, die maßgeblich auf eine gute Stimmung im Unterricht angewiesen sind und oftmals auch nur der Lehrperson zuliebe ein großes Interesse entwickeln und sich deshalb sehr bemühen.

4.3 Vernetzung mit vorhandenem Wissen

Ein erfolgreicher Unterricht sollte so gut es geht am bereits erworbenen Wissen ansetzen. Hierzu ist es notwendig, den jeweiligen Lernstand der Schüler und Schülerinnen zu ermitteln. Erhebungen dieser Art dienen auch dazu, mögliche fehlerhafte Vorstellungen zu finden, zu korrigieren und sie gegebenenfalls als Ausgangspunkt für den folgenden Unterricht zu verwenden. (Krauthausen und Scherer, 2014, S 136-137)

Die Vernetzung mit bereits erworbenem Wissen stößt besonders dann an die Grenzen, wenn in einer Mathematikklasse ein häufiger Lehrer- oder Lehrerinnenwechsel stattfindet. Eine Lehrkraft, die eine Klasse übernimmt, weiß oft nicht genügend über bereits erarbeitetes Wissen bzw. tatsächlich vorhandene Kenntnisse der Kinder Bescheid und kann dementsprechend nicht annähernd in dem Maße weiterarbeiten, wie sie das bei einer durchgängig unterrichteten Klasse tun kann.

Beispiel:

Beim **<u>Einstieg in lineare Funktionen</u>** in der 4. Klasse bietet sich an, an das Wissen über direkt proportionale Größen aus der 3. Klasse anzuschließen. Dazu wird ein Beispiel erarbeitet, bei dem sieben Arbeiter einen Lohn von 280 € bekommen. Wie viel bekommen fünf Arbeiter? Begonnen wird mit einer Tabelle:

Anzahl der Arbeiter	Lohn in €
7	280
1	40
5	200

Über einfache Schlussrechnungen können die Löhne für einen bzw. fünf Arbeiter berechnet werden. Mit den Lernenden sollte wiederholt werden, dass hier ein direkt proportionales Verhältnis vorliegt, d. h. wenn beispielsweise doppelt (k-fach) so viele Arbeiter beteiligt sind, dann ist der auszubezahlende Lohn doppelt (k-fach) so hoch.

Der erste Wert (Anzahl der Arbeiter) wird mit der Variablen x bezeichnet und der zweite Wert (Lohn in €) mit y. Nun werden mit den Angaben jeweils Quotienten aus y durch x berechnet. Daraus ergibt sich der Proportionalitätsfaktor k, der bei allen Divisionen ($\frac{280}{7}$; $\frac{40}{1}$; $\frac{200}{5}$) gleich 40 ist. Die Umformung des Quotienten $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ ergibt $\mathrm{y} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{x}$, im konkreten Beispiel ist $\mathrm{y} = 40 \cdot \mathrm{x}$.

Im nächsten Schritt folgt die grafische Darstellung des Beispieles:

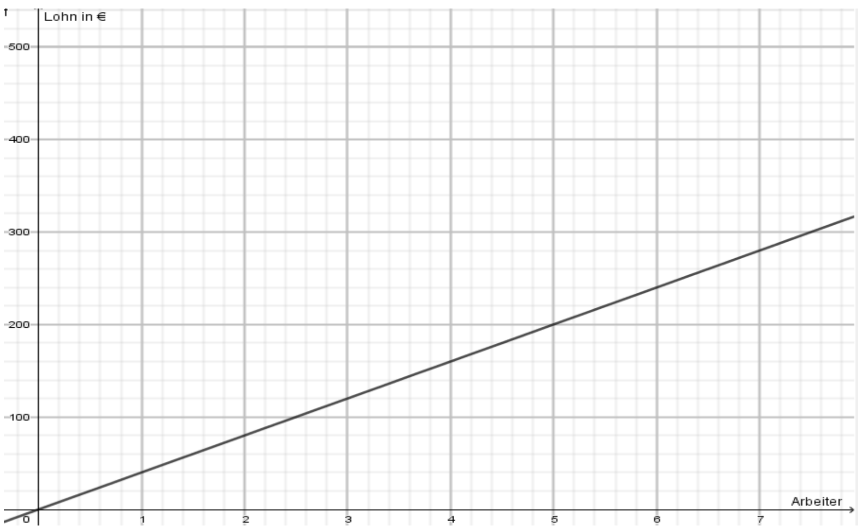


Abbildung 8: Beispiel Arbeiter - Lohn

Aus der Grafik ist ersichtlich, dass bei einer direkt proportionalen Zuordnung der Graf im Nullpunkt beginnt und als Strahl dargestellt werden kann. Die grafische Darstellung soll zudem von den Schülern und Schülerinnen im gegebenen Kontext interpretiert werden.

Danach wird der Begriff der Funktion definiert: *„Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung zwischen zwei Größen. Jedem Wert der ersten Größe x wird genau ein Wert der von ihr abhängigen zweiten Größe y zugeordnet. Jedem y-Wert können kein, ein oder mehrere x-Werte zugeordnet werden.*“ (Beer et. al., 2018, S 196-198)

Die Zuordnungsmöglichkeiten zwischen zwei Größen, also die Möglichkeit der verbalen Beschreibung, der Wertetabelle, der grafischen Darstellung sowie der Zuordnung durch eine Vorschrift (Term oder Funktionsgleichung) werden besprochen.

Für das konkrete Beispiel ist die Zuordnungsvorschrift $y = 40 \cdot x$ (Funktionsgleichung) oder $f(x) = 40 \cdot x$ (Funktionsterm). Die Schüler und Schülerinnen sollen nun verschiedene Werte für x einsetzen und daraus den jeweiligen y-Wert berechnen. (Beer et. al., 2018, S 200)

4.4 Berücksichtigung von multiplen Intelligenzen (Howard Gardner)

„Die Nichtbeachtung der Verschiedenheit der Köpfe ist das entscheidende Hindernis in der Schulbildung.“ J.F. Herbart (1776 – 1841)

Wenn Howard Gardner von sogenannten multiplen Intelligenzen spricht, meint er die individuellen Unterschiede in der Wahrnehmung der Umwelt, der kognitiven und emotionalen Verarbeitung von Eindrücken. Für den Unterricht werden acht Intelligenzen in Erwägung gezogen, wobei zu beachten ist, dass die einzelnen Begabungen nicht starr getrennt sind, sondern ineinander übergehen können.

- Linguistische Intelligenz
- Logisch-mathematische Intelligenz
- Visuell-räumliche Intelligenz
- Kinästhetische Intelligenz
- Musikalische Intelligenz
- Interpersonale Intelligenz
- Intrapersonale Intelligenz
- Naturbezogene Intelligenz

Es ist empfehlenswert, dass im Unterricht möglichst viele Intelligenzen angesprochen werden sollen, um die individuellen Begabungen zu fördern. Um diesem Umstand gerecht zu werden, sollten Unterrichtsinhalte über vielfältige Methoden vermittelt werden. Der offene Unterricht kommt der Beachtung des Konzepts der multiplen Intelligenzen am meisten entgegen, beispielsweise beim Arbeiten an Stationen oder beim Arbeiten mit einem Wochenplan. (Vinzentius, 2010, S 20-23)

Beispiel:

In der 3. Klasse kann zum **Einstieg in den Lehrsatz von Pythagoras** zunächst ein Mathe-Song dienen:[3] *„Hat ein Dreieck die Seitennamen a, b und c und einen rechten Winkel gegenüber von c, hast du gleich zur Berechnung eine Formel parat, denn dann gilt* $a^2 + b^2 = c^2$*…..“*

An der Tafel wird danach von der Lehrkraft ein rechtwinkeliges Dreieck gezeichnet und die Lage der Katheten und der Hypotenuse erläutert, wobei die Bezeichnungen der Seitenlängen beim rechtwinkeligen Dreieck schon von der zweiten Klasse her bekannt sein sollten. Danach wird der Satz von Pythagoras dazugeschrieben und anhand des Dreiecks erklärt.

Anschließend gehen die Schüler und Schülerinnen in Gruppen zusammen und bekommen ein Seil (festes Baumwollgarn), in das sie zunächst in gleichen Abständen zwölf Knoten knüpfen und danach das Seil in Form eines rechtwinkeligen Dreiecks so aufspannen sollen, dass mit der richtigen Anzahl Knoten an den Seiten der Satz von Pythagoras erfüllt ist. Eine große Schwierigkeit hierbei ist die regelmäßige Anordnung von Knoten zu knüpfen, sodass es nicht leicht fällt, die richtige Lösung zu finden.

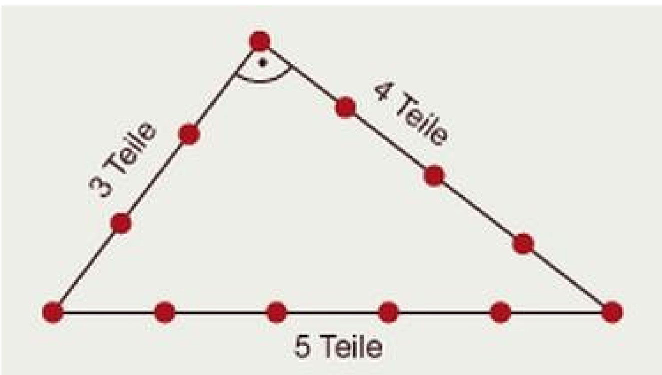
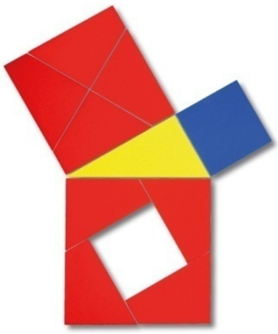


Abbildung 9: Knotenseil

[3] URL: https://www.youtube.com/watch?v=8IZ_0qhZ36M [2.3.2019]

Die richtige Lösung sieht so aus, dass das Knotenseil mit zwölf Knoten so gespannt wird, dass die Hypotenuse fünf Teilstrecken und die Katheten jeweils drei bzw. vier Teilstrecken umfassen[4]. Zur Veranschaulichung wird das Knotenseil mit Magneten an die Tafel geheftet und die Lösung daneben geschrieben: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Anhand verschiedener anderer rechtwinkeliger Dreiecke wird im nächsten Schritt der Satz von Pythagoras angewendet und gemeinsam weitere Aufgaben bearbeitet.



Danach wird in Gruppen gemeinsam ein Beweis gelegt. Im Lehrmittelversand gibt es hierzu günstige Varianten wie die hier abgebildete, die den Lernenden angeboten werden. Im Anschluss daran werden gemeinsam Begründungen bearbeitet, die auf Flächeninhaltsberechnungen beruhen (siehe Lehrbücher).

Abbildung 10: Pythagoras Puzzle

4.5 Anschaulichkeit

Aebli empfiehlt die Anwendung von Anschauungsmitteln in der Reihenfolge: wirklicher Gegenstand, Modell, Bild. Eine Landschaft wird beispielsweise zuerst in der Natur betrachtet, dann im Sandkasten nachgebaut, als Zeichnung festgehalten und sodann in eine Textform gebracht. Bei komplizierten Strukturen wie z. B. einem Organ wird die Reihenfolge umgekehrt angewandt, um das Verständnis zu erhöhen. (Aebli, 2011, S 103-104)

Wann immer die Möglichkeit besteht, sollte man Schulkindern die Gelegenheit geben, Gegenstände nicht nur anzuschauen, sondern Handlungen am Gegenstand selbst auszuführen (Aebli, 2011, S 107). Das Hantieren mit Gegenständen kann insbesondere der Veranschaulichung einer Textaufgabe dienlich sein, zum Beispiel der Verteilung von einem Teil Wasser aus einem Krug auf mehrere kleinere Gefäße. In der ersten Klasse ist es bei den Schülern und Schülerinnen sehr beliebt, verschiedene Lerngegenstände mit einer Feinwaage abzuwägen, zu vergleichen und sich damit die Gewichtsmaße zu erarbeiten. Feinwaagen sind zumeist in der Ausstattung des Physiksaales einer Schule in ausreichender Anzahl vorhanden.

[4] URL: https://www.br.de/grips/faecher/grips-mathe/29-pythagoras-nachlesen100.html [4.3.2019]

Peschel (2006b, S 152) zitiert Untersuchungen in Grundschulklassen, wonach Veranschaulichungshilfen wie Bilder und Darstellungen oftmals nicht den erwünschten Zweck erfüllen und die meisten von ihnen wegen ihrer unterschiedlichen Interpretation durch die Schüler und Schülerinnen sogar einen kontraproduktiven Effekt erzielen. Alltagsmaterialen seien nach Peschel als Anschauungsmaterialien zu bevorzugen.

Beispiele:

Zum **Einstieg in die Hohlmaße** in der 1. Klasse kann man Messbecher, Löffel, Tetrapacks und Flaschen in den Unterricht mitbringen, damit die Kinder eine Vorstellung von diversen Rauminhalten bekommen. Gerade sehr kleine Einheiten sind kaum vorstellbar, zeigt man jedoch beispielsweise einen Messlöffel, mit dem Medizin verabreicht wird, ist das Volumen eines Milliliters sofort ersichtlich. Bei der rein rechnerischen Auseinandersetzung mit Volumina haben Lernende zumeist wenig Ahnung, welches Ausmaß die einzelnen Rauminhalte überhaupt haben.

Für diesen Einstieg eignet sich ein Stationenbetrieb mit verschiedenen Gefäßgrößen und Wannen für Schüttversuche. Auf einem Laufzettel werden Ergebnisse und Schätzungen (z.B. Wie oft passt 1ml in 1l hinein?) von einzelnen Stationen notiert und am Ende der Klasse präsentiert und gemeinsam diskutiert.

Im Anschluss daran werden angegebene Hohlmaße mit Hilfe einer Stellenwerttafel umgewandelt und mehrnamig angeschrieben.

Beispiel:

Für den **Einstieg in die Winkelarten** in der 1. Klasse eignet sich sehr gut ein Zollstock, anhand dessen die verschiedenen Winkelarten gezeigt werden können. Ins Heft wird zunächst eine Übersicht zu den Winkelarten geklebt und gemeinsam besprochen. Danach werden mehrere Zollstöcke ausgeteilt und die Winkelarten daran nachvollzogen. In Partnerarbeit gibt jeweils ein Kind einem anderen Anweisungen, bestimmte Winkel zu zeigen.

Der Zollstock ist den meisten Schülern und Schülerinnen aus dem Alltag als Werkzeug bekannt. Aufgrund der leichten Handhabbarkeit können die Kinder die einzelnen Winkelarten ausreichend üben und sich einprägen.

Abbildung 11: Zollstock

4.6 Didaktik des weißen (leeren) Blattes

Dieses Konzept geht auf die Grundschullehrerin Hannelore Zehnpfennig zurück, die in ihrer Unterrichtstätigkeit einen offenen Unterricht verwirklicht hat. Sie hat den Wunsch nach selbstständiger Arbeit bei ihren Schulkindern erkannt und daraufhin sämtliche Arbeitsmittel weggeräumt und den Kindern ein weißes Blatt Papier gegeben, um das Unterrichtsmaterial selbst herstellen zu lassen. Das weiße Blatt Papier stellt im offenen Unterricht das zentrale Arbeitsmittel dar und fordert zur Eigenaktivität auf. Die Lehrperson unterstützt mit passenden Impulsen, Ideen, Fragen, usw.

Der formale und inhaltliche Aufbau eines kreierten Arbeitsblattes wird den Schülern und Schülerinnen selbst überlassen. Schlussendlich werden die Arbeitsblätter in der Klasse vorgestellt und besprochen. Dadurch zeigt sich, dass nur jene Inhalte den Kollegen und Kolleginnen verständlich mitgeteilt bzw. erklärt werden können, die das Kind selbst gut begriffen hat. Die ausgeübte Eigenaktivität regt Fantasie und Kreativität an und wirkt auf die Lernenden sehr motivierend. *„Dabei stellt das „weiße Blatt“ wahrscheinlich die größte Herausforderung an die Imagination dar.“* (Peschel, 2006a, S 112ff)

Ein Elternsprechtag brachte in einer 2. Klasse zutage, was ich auch von meiner eigenen Tochter kenne und zwar die wenig erfreuliche Tatsache, dass die während eines Schultages erhaltenen Arbeitsblätter oftmals nur in die Schultasche gestopft werden oder gar verloren gehen. Kurz gesagt, vorgegebene Arbeitsblätter werden wenig wertgeschätzt. Diese Tatsache inspirierte mich von der besagten Klasse selbst Arbeitsblätter zu einem Thema herstellen zu lassen und siehe da, die in Gruppen erstellten Arbeitsblätter wurden erstens mit höchster Sorgfalt und Kreativität hergestellt, nach Bearbeitung einer anderen Gruppe genau auf die richtigen Lösungen hin kontrolliert und schließlich selbstständig in die Mappe eingeordnet.

Beispiel:

Die Erfindung von Rechengeschichten kann gut als **Einstieg in Textaufgaben** in der 1. Klasse verwendet werden. Ein Bild dient zunächst als Impuls und die Kinder beschreiben, was darauf zu sehen ist.

Abbildung 12: Flohmarkt am Campus Mainz

Die Lehrkraft erklärt die weitere Vorgehensweise: *„Jeder schreibt eine kleine Rechengeschichte auf, die zu diesem Bild passt. Tauscht eure Rechengeschichten aus und löst sie. Vergleicht eure Ergebnisse miteinander.“* Die Schüler und Schülerinnen erstellen nun einzeln Arbeitsblätter mit Rechengeschichten und geben sie anschließend an Klassenkollegen und Kolleginnen weiter, damit sie von ihnen gelöst werden können. Eine Rechengeschichte zeigt rasch, wenn eine Formulierung unklar oder zu kompliziert verfasst ist. Dies sollte untereinander besprochen werden und am Ende die Lösungen von den Verfassern und Verfasserinnen kontrolliert werden. Als Abschluss der Stunde können einzelne Rechengeschichten der Klasse vorgelesen und diskutiert werden. Weiterführend ist es möglich, aufwändigere Rechengeschichten erfinden zu lassen oder Stichworte bzw. Satzanfänge vorzugeben, die im Text vorkommen sollen. (Bühler, 2018, S 41)

Im Anschluss werden Textaufgaben aus dem Mathematikbuch besprochen und eine Hilfestellung gegeben, wie man an eine Textaufgabe herangeht und sie schrittweise zu lösen versucht.

4.7 Bezug zu Lebenswelten

„Die ganze Welt um uns herum ist voll von Mathematik. Man muss nur mit offenen Augen durch die Welt gehen und lernen, mathematische Fragen zu stellen.“ (Maaß, 2007, S 22)

Um Mathematik lebendig werden zu lassen, ist es spannend, mit Zahlen aus der Realität zu arbeiten, die den Schülern und Schülerinnen einen völlig anderen Zugang vermitteln. Hier bieten sich vor allem Zahlen aus der Biologie an wie z. B. die Berechnung der Herzschläge in einem gegebenen Zeitraum oder die Größe von roten

Blutkörperchen (Quak, 2006, S 184). Dabei könnte man die Lernenden vorher Schätzungen abgeben lassen, um die Spannung zu erhöhen. Mit realitätsbezogenen Daten kann einerseits logisches Denken gefördert und andererseits fächerübergreifend gearbeitet werden, womit die Kinder lernen, Inhalte zu vernetzen und ein entsprechendes Verständnis dafür aufzubauen. Der Bezug zu den Lebenswelten der Lernenden wird zumeist über eine anschauliche Darstellung hergestellt, umgekehrt ist das jedoch nicht der Fall.
Aufgaben mit lebenspraktischen Bezügen setzen nicht nur Intelligenz, sondern auch viel praktisches Wissen bei der Lehrperson voraus: *„Er [Sie] sollte nicht nur in seiner Studierstube zu Hause sein, sondern auch mit dem Handwerk, der Landwirtschaft, der Industrie und – allgemeiner - den wirtschaftlichen Verhältnissen und Zusammenhängen vertraut sein.“* (Aebli, 2011, S 229)

Beispiel:

Zum **Einstieg ins Arbeiten mit Größen** kann in der 2. Klasse folgender Impuls gegeben werden: Die Lehrkraft dreht beim Auswaschen des Tafelschwammes absichtlich den Wasserhahn nicht ganz zu. Der tropfende Wasserhahn wird zum Ausgangspunkt für die Frage genommen: *„Wie viel Wasser verschwenden wir, wenn dieser Wasserhahn einen ganzen Tag lang tropft?“*

Zunächst werden Schätzungen der Schüler und Schülerinnen entgegengenommen und an der Tafel festgehalten. Danach werden von der Lehrperson Vorschläge aus der Klasse gesammelt, wie man den Wasserverlust durch das Tropfen am besten messen könnte. Die Wassermenge könnte beispielsweise über einen bestimmten Zeitraum des Tages mithilfe eines Messzylinders gemessen und danach das Ergebnis auf einen Tag hochgerechnet werden.

Im folgenden Verlauf der Stunde kann noch der Wasserverbrauch von einer Person für einen Tag thematisiert werden. Diese Größe bezeichnet man als „Wasserfußabdruck“ des Menschen (siehe dazu die Internetseite: www.wasserfußabdruck.com). Auf dieser Seite sind viele Fakten und grafische Darstellungen zum Thema zu finden. Aus den Angaben lassen sich beispielsweise folgende Fragestellungen für den Mathematikunterricht ableiten:

- *In Deutschland verbrauchen wir durchschnittlich 125 l Wasser pro Tag und Person direkt (d.h. im Haushalt und für die Herstellung aller Produkte, die wir selbst konsumieren). Wie viele Wassereimer sind das?*
- *Der Gesamtverbrauch (alle hergestellten Produkte und importierten Güter) liegt sehr viel höher. Er wird für Deutschland mit etwa 5000 l pro Kopf und Tag angegeben. Wie viele Badewannenfüllungen (von ca. 150 l) sind das?*

- *Wie groß ist der Jahresverbrauch in ganz Deutschland verglichen mit dem Inhalt des Bodensees (485 km^3)?*

Weiters kann fächerübergreifend das Thema der Wasserknappheit besprochen werden und der eigene Beitrag zur Vermeidung von Wasserverschwendung diskutiert werden. (Woithe, 2017, S 6)

4.8 Zielorientierung

Ein vorrangiges Ziel im Mathematikunterricht ist das Erkennen von Problemen und deren Zusammenhängen. Demnach kommt dem Stellen von Fragen und dem Finden von Antworten im Sinne passender Lösungswege bzw. -strategien eine große Bedeutung zu. Für den Schüler oder die Schülerin heißt das, dass der Weg zum Lösen des Problems möglichst von den Lernenden selbst ausgehen sollte, sie sollten auch selbst ihre passenden Lösungshilfen bestimmen können. Der individuell gefundene und auch verstandene Weg sollte sodann mit anderen verglichen werden, um den geeignetsten Lösungsweg herauszufinden. Eine strikte Vorgabe hat möglicherweise nur ein Unverständnis zur Folge. (Peschel, 2006b, S 119)

Die zu vermeidenden Schwierigkeiten, die sich im Zusammenhang mit dem Problemlösen ergeben können, sind folgende: Das Problem wird grundsätzlich nicht gründlich genug verstanden. Weiterhin besteht die Gefahr, dass sich Schüler und Schülerinnen planlos in die Einzelheiten der Problemstellung stürzen und bei Textrechnungen sofort zu rechnen beginnen. Das führt dazu, dass der Rahmen fehlt, der die Steuerung und Überwachung des Lösungsweges regelt. Die Lernenden wissen auf einmal nicht mehr, was sie machen und warum sie Rechnungen ausführen. Eine weitere Schwierigkeit kann die mangelnde Kontrolle der Güte der Lösung sowie die fehlende Plausibilität des Ergebnisses sein. (Aebli, 1997, S 203)

Unter Rechnen darf keinesfalls nur das Ausführen eines bestimmten Algorithmus verstanden werden, das alleinige Lernen einer Technik ist kein anzustrebendes Lernziel. Die Anwendung technologischer Hilfsmittel kann im nachteiligen Fall dazu führen, nicht zu wissen, was eigentlich berechnet wurde, sowie das Resultat nicht richtig beurteilen zu können.

Mathematikunterricht soll die Fähigkeit entwickeln, *„zu lernen, kreativ zu sein sowie argumentieren und mathematisieren zu können, das heißt reale Situationen in mathematische zu übersetzen, zu lösen, zu interpretieren, darzustellen und zu begründen, […] und fördert gleichzeitig auch die Entwicklung geistiger Vorgehensweisen wie Klassifizieren, Ordnen, Analogisieren und Formalisieren.“* (Peschel, 2006b, S118)

Beispiel:

Für den **Einstieg in den Mittelwert** habe ich mit der 1. Klasse die Gewichte der Schultaschen ermittelt und zunächst die zentrale Frage gestellt: Sind die Schultaschen der Mädchen oder jener der Burschen schwerer? Wie können die Ergebnisse interpretiert werden?

Mit einer Kofferwaage lässt sich jede Schultasche auf eine Nachkommastelle genau wiegen. Abwechselnd durften die Kinder wiegen oder die Ergebnisse an der Tafel festhalten.

Abbildung 13: Wiegen mit einer Kofferwaage

Konkret ergaben die Messungen der Gewichte der Schultaschen von 15 Jungen folgende Ergebnisse:

4,8 kg; 7,1 kg; 4,4 kg; 6,2 kg; 4,8 kg; 6,3 kg; 5,7 kg; 5,7 kg; 4,5 kg; 5,6 kg; 6,9 kg; 5,9 kg; 4,2 kg; 4,6 kg; 2,3 kg

Die Messwerte der Gewichte der Schultaschen von 13 Mädchen waren wie folgt:

4,9 kg; 6,5 kg; 4,2 kg; 4,2 kg; 5,7 kg, 5,4 kg; 5,4 kg; 4,9 kg; 4,6 kg; 6,4 kg; 8,7 kg; 4,5 kg; 5,4 kg

Nun mussten die Schüler und Schülerinnen die Gesamtgewichte ermitteln, indem sie die einzelnen Werte addierten. Das Gesamtgewicht aller Schultaschen der Jungen ergab 79 kg, das Schultaschengewicht der Mädchen 70, 8 kg.

Die Lernenden wurden nun gefragt, ob man aufgrund des Ergebnisses schon sagen könnte, ob Mädchen oder Burschen mehr tragen. An dieser Stelle ist es wichtig, den Kindern genügend Zeit zu lassen, um über den Sachverhalt nachdenken zu können. Da das Wiegen von 28 Schultaschen einen erheblichen Teil der Unterrichtsstunde beanspruchte, konnten die Schüler und Schülerinnen zuhause darüber nachdenken.

In der folgenden Stunde wurde der Sachverhalt wieder aufgegriffen und nach den Überlegungen der Lernenden zur Interpretation des Ergebnisses gefragt. Es kam die Antwort, dass ja die Anzahl der Mädchen und Burschen nicht gleich sei, weshalb die Gesamtgewichte nicht vergleichbar wären. Auf die Frage, wie man die unterschiedliche Anzahl ausgleichen könnte, meinte ein Mädchen, sie hätte zwei häufig vorkommende Werte bei den Mädchen noch einmal dazugezählt. Danach wären die Ergebnisse für sie vergleichbar gewesen.

An dieser Stelle kann der Mittelwert ins Spiel gebracht werden und die Schüler und Schülerinnen berechnen aus dem jeweiligen Gesamtgewicht und der entsprechenden Anzahl den Mittelwert. Der Mittelwert der Jungen lag bei 5,27 kg und jener der Mädchen bei 5,45 kg. Wie kann dieses Ergebnis nun interpretiert werden? Auch hier soll die Möglichkeit bestehen, genügend lange darüber nachzudenken und individuell deuten zu können. Unsere Erhebung brachte die Erkenntnis, dass im Mittel Jungen und Mädchen etwa gleich schwer tragen. Wie sieht es mit extrem abweichenden Werten aus? Auch dieser Frage sind wir nachgegangen und haben bei einem Mädchen nachgefragt, ob sie tatsächlich jeden Tag eine so schwere Schultasche trägt (ihr Schultaschengewicht lag bei 8,7 kg), worauf die Schülerin bejahte.

Da ich in dieser Klasse auch Biologie unterrichte, habe ich am Ende unsere Erhebungen mit den Biologiestunden über die Wirbelsäule, richtiges Tragen und Heben verknüpft und mit den Kindern erarbeitet, wie man das Schultaschengewicht am besten senken könnte. Weiter fächerübergreifend bat ich den Turnlehrer und die Turnlehrerin der Klasse, mit den Schülern und Schülerinnen Wirbelsäulengymnastik im Turnunterricht durchzuführen.

5 Grundlegende Einstiegsmodelle

Der Mathematikunterricht birgt die Gefahr, dass der Ablauf der Stunde einer gewissen Routine unterliegt und das Lehrbuch im Mittelpunkt steht. Die Unterrichtsstunde kann jedoch durch Ideen und Fantasie lebendig und abwechslungsreich für die Schüler und Schülerinnen gestaltet werden. In dieser Hinsicht ist ein interessanter, spannungsreicher Beginn des Unterrichts besonders hervorzuheben, um die Lust zu erhöhen, sich mit Mathematik zu beschäftigen. (Quak, 1998, S 133)

Der Unterrichtseinstieg sollte eigenständig betrachtet und nicht nur auf *„ein bloßes Anhängsel des Unterrichtsinhalts*“ reduziert werden (Greving, Paradies, 1996, S 17). Der Einstieg verdient besondere Aufmerksamkeit, wenn die Lehrperson Begeisterung für den Unterrichtsgegenstand Mathematik wecken möchte. Auf unterschiedliche Art und Weise wird zum Kern des Unterrichtsinhaltes hingeführt und damit über eine entsprechend motivierte Arbeitshaltung der Lernenden eine Basis für einen guten Lernerfolg und einen positiven Zugang zur Mathematik gelegt. Aus der Praxis kann ich berichten, dass allein schon das Mitbringen von Gegenständen die Aufmerksamkeit schlagartig erhöht und sich eine neugierige Erwartungshaltung einstellt.

Wer Unterrichtseinstiege plant, kommt nicht umhin, mit verschiedenen Methoden zu arbeiten. Hierzu bedarf es der Kenntnis eines Methodenrepertoires, das individuell für die Lehrkraft passend sein sollte, um überzeugend bei den Lernenden anzukommen. Darüber hinaus müssen bei jedem Einstieg das Ziel vor Augen und der schulische „Ertrag“ gesichert sein. Spektakuläre Einstiege können zwar der Unterhaltung dienen, sie sind aber nicht immer zweckmäßig, wenn es um die Vermittlung eines mathematischen Inhaltes geht. Wenn die Schüler und Schülerinnen am Ende nicht wissen, was das eigentliche Thema war, ist das Ziel klar verfehlt.

„Ein wichtiges Mittel der Aktivierung ist die Kommunikation zwischen den Schülern. Dazu gehören das Präsentieren mathematischer Inhalte und das Argumentieren auf unterschiedlichen Ebenen der mathematischen Strenge.“ (Woithe, 2017, S 5) Über passende Einstiege kann die Kommunikation schriftlicher und mündlicher Art trainiert werden.

Anzumerken ist noch die Tatsache, dass der Einstieg direkt in den fortlaufenden Unterricht übergeht, sodass meist keine klare Grenze gezogen werden kann. Aus diesem Grund werden didaktische Prinzipien als auch Standardsituationen wie z.B. eine fragend-entwickelnde Erarbeitung gleichermaßen für den Regelunterricht sowie für aktivierende Unterrichtseinstiege verwendet.

5.1 Fragend entwickelnde Erarbeitung

„..ein problemlösender Unterricht ist auch ein entwickelnder Unterricht. Er ist „fragend-entwickelnd“, wenn sich der Schüler selbst, oder, stellvertretend für ihn der Lehrer, nacheinander Fragen stellen, bei deren Beantwortung sich die Problemlösung immer klarer abzeichnet, bis sie, voll entwickelt, dem Denken und Handeln des Schülers einverleibt ist.“ (Aebli, 2011, S 296)

Den Schülern und Schülerinnen wird eine bestimmte Problemstellung oder offene Situation vorgestellt, mit der sie sich gegebenenfalls kurze Zeit alleine, in Partnerarbeit oder in einer Gruppe beschäftigen. Die Lehrkraft führt anschließend mit den Kindern ein Unterrichtsgespräch, das die gegebene Problemstellung zur Lösung bringen soll. Die Lernenden werden dabei über gezielte Fragen dazu angeregt, den jeweils nächsten Schritt in Richtung Lösung zu finden. Bei diesem Verfahren behält die Lehrkraft im Auge, in welchem Ausmaß der erarbeitete Lösungsweg vom idealen abweicht und falls notwendig, führt der Lehrer oder die Lehrerin selbst einzelne Schritte durch. Dabei muss jedoch sichergestellt werden, dass die Schüler und Schülerinnen der Darstellung folgen können. Am Ende des Prozesses entsteht ein Ergebnis, das als Modell weitergehend verwendet werden kann. (Barzel et. al., 2014a, S 28-29)

Bei diesem Vorgehen gilt das Grundprinzip, dass die Lehrkraft dem selbstständigen Nachdenken der Schüler und Schülerinnen solange freien Lauf lässt, solange die Kinder der Lösung des Problems näherkommen. Die Lehrperson nimmt vorerst die Beiträge der Klasse in ungeordneter Folge auf und übernimmt erst allmählich die Leitung, mit der sie nach und nach Ordnung in die Betrachtungen bringt. Falls sich mehrere Schüler und Schülerinnen zur Beantwortung einer Frage melden, beginnt man bei den schwächsten und nimmt erst danach die besseren dran. Auf diese Weise erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass jede neue Antwort ein weiteres unbekanntes Element enthält. (Aebli, 2011, S 300-301)

Bei der Planung des Unterrichts in Form eines fragend-entwickelnden Gesprächs sollte gewissenhaft geprüft werden, ob diese Methode auch wirklich zum behandelten Thema passt. Ein wichtiger Aspekt ist die Frage, ob die Beiträge der Schulkinder tatsächlich zur Grundlage des Unterrichtsgeschehens gemacht werden, wenn nicht, trägt die Methode allenfalls zur Frustration der Schüler und Schülerinnen betreffend der Belanglosigkeit ihrer Beiträge bei. (Leuders, 2001, S 146)

Beispiel (Barzel et. al., 2014a, S 29):

Schülerinnen und Schüler sollen erstmals das Phänomen der Irrationalität erfassen und eine Begründung für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ *nachvollziehen.*

Die Lehrperson beginnt die Stunde, indem sie die Frage nach der Länge von verschiedenen Strecken in einer geometrischen Skizze aufwirft. Schülerinnen und Schüler bestimmen einige Strecken nach ihnen bekannten Verfahren, z. B. mit dem Strahlensatz. Eine bestimmte Strecke der Figur bleibt dabei offen. Die Lehrperson fordert die Schülerinnen und Schüler auf, verschiedene Verfahren zur Bestimmung vorzuschlagen. Dabei bringen die Schülerinnen und Schüler unter anderem den Vorschlag ein, die gesuchte Strecke zu konstruieren und zu messen. Sie erkennen, dass die Strecke sich als Diagonale im Quadrat darstellt. Die Messung ist allerdings unbefriedigend genau und daher fordert die Lehrperson auf, die Strecke, so wie auch bei den Strahlensatzfiguren, als Bruch zu berechnen. Als Hilfe gibt sie dazu die Flächenverdoppelungsfigur (sofern die Schülerinnen und Schüler noch keinen Satz von Pythagoras zur Verfügung haben). Das Ergebnis des fragend-entwickelnden Gespräches lautet: Gesucht ist ein Bruch $\frac{p}{q}$*, dessen Quadrat den Wert 2 ergibt. In einem zweiten fragend-entwickelnden Gespräch entwickelt der Lehrer zusammen mit den Schülerinnen und Schülern den Widerspruchsbeweis für die Irrationalität von* $\sqrt{2}$.

5.2 Verfahren erarbeiten an Lösungsbeispielen

Hier wird den Schülern und Schülerinnen von der Lehrperson nicht nur ein Ausgangsproblem, sondern auch die einzelnen Schritte bis zur Lösung vorgestellt. Entweder erfolgt die Demonstration mündlich durch die Lehrperson selbst oder mit Unterstützung von Medien. Schüler und Schülerinnen werden hier nicht nach den Problemlöseschritten befragt, sondern allenfalls zur Erläuterung der Schritte miteinbezogen.

Nach der Vorführung des gelösten Beispiels bekommen die Lernenden Gelegenheiten, das demonstrierte Verfahren in anderen Situationen anzuwenden. Die folgenden Beispiele sollten jedoch anfangs nur wenig vom vorgeführten Beispiel abweichen, danach aber zunehmend komplexer werden, um die Flexibilität des gelernten Verfahrens zu erhöhen. Mit den Schülern und Schülerinnen sollte anschließend gemeinsam reflektiert werden, wie gut und in welchen Problemstellungen das vorgestellte Verfahren anwendbar ist.

Das Lernen anhand von Musterbeispielen bewährt sich insbesondere für Inhalte, die von den Kindern nur schwer von selbst entdeckt werden können wie zum Beispiel komplexere algorithmische Verfahren oder bereichsspezifische mathematische Strategien. Damit ist jedoch die Gefahr verbunden, dass der zugrunde liegende Inhalt des Verfahrens nicht gut genug von den Lernenden verstanden wird.

Unterrichtskonzepte solcher Art sind mitunter davon abhängig, ob der Lernprozess auf wenige Stunden ausgelegt ist oder ob es sich um einen über einen längeren Zeitraum angelegten Lernprozess handelt. Ein Beispiel für das Erlernen eines komplexen Verfahrens wäre die Erarbeitung von Strategien für ein taktisches Vorgehen beim Modellieren oder Problemlösen. (Barzel et. al., 2014a, S 36-39)

Beispiel:

Um **Inkreis und Umkreis in einem Dreieck** in der 2. Klasse konstruieren zu können, ist es unerlässlich, sich zunächst mit Winkel- und Streckensymmetralen vertraut zu machen. Hierzu ist eine genaue Anleitung notwendig wie sie hier beispielsweise für die Streckensymmetrale beschrieben ist (Boxhofer et. al., 2013, S 93):

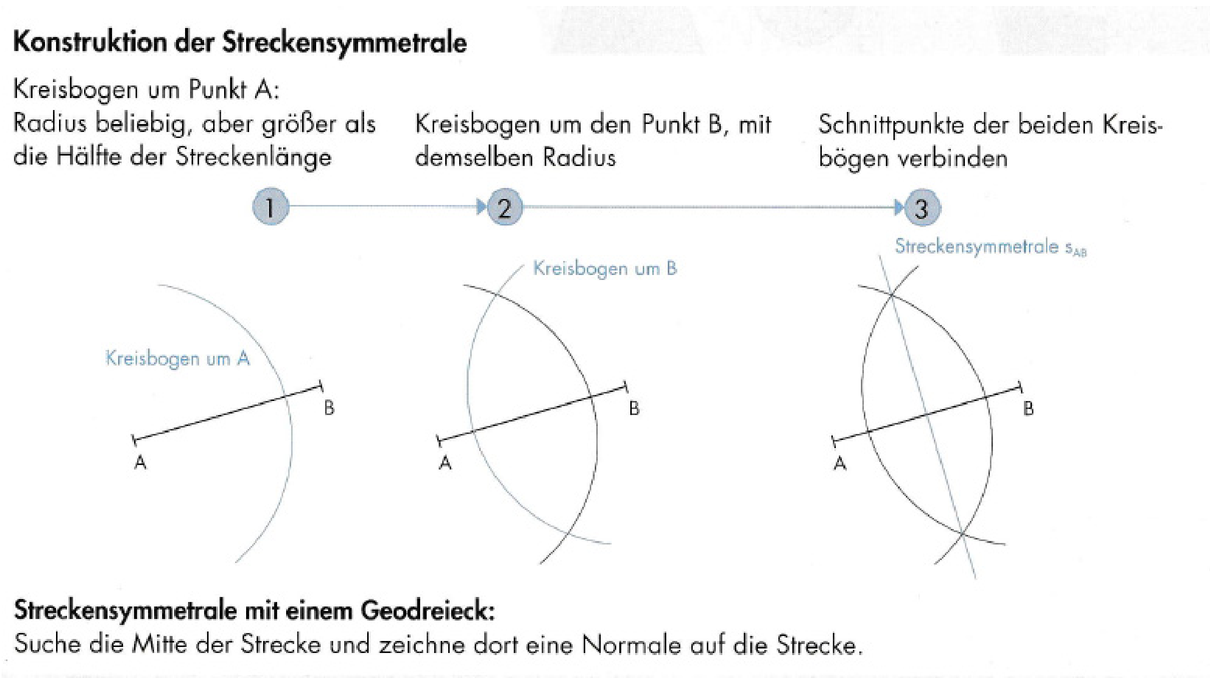


Abbildung 14: Konstruktion der Streckensymmetrale

Die Lehrperson führt die einzelnen Konstruktionsschritte in einem angemessenen Tempo an der Tafel vor und die Schüler und Schülerinnen zeichnen in ihren Heften mit. Gerade geometrische Aufgaben verlangen im Einstieg eine präzise Vorgabe durch die Lehrkraft. Erst wenn Symmetralen in Winkeln und Strecken einwandfrei konstruiert werden können, können sie in einem Dreieck auf die einzelnen Seiten angewendet werden. Die Schnittpunkte ergeben dann entsprechend den Inkreis- oder Umkreismittelpunkt.

5.3 Forschend - Entdeckendes Lernen

Schüler und Schülerinnen werden zunächst mit einer problemhaltigen Situation konfrontiert, die auf eine leitende Fragestellung hinführen soll. Dies kann über ein Unterrichtsgespräch, über Partner- oder Einzelarbeiten erfolgen. Sobald die leitende Fragestellung klar formuliert ist, bearbeiten die Lernenden das Problem selbstständig. Die Sozialform zur Behandlung des Themas kann variieren.

Am Ende der Bearbeitung werden die einzelnen Ergebnisse entweder präsentiert oder in einem Unterrichtsgespräch festgehalten. Die Endprodukte können auch ausgestellt werden. Der Lehrkraft obliegt es schlussendlich, die Diskussion über die erhaltenen Ergebnisse in einer solchen Art und Weise zu moderieren, dass jene Unterrichtsziele, die den Inhalt betreffen, auch wirklich erreicht, gegebenenfalls abstrahiert und festgehalten werden.

Zum Schluss gibt es nicht nur eine bestimmte Lösung eines konkreten Problems, sondern möglicherweise ein allgemeines Lösungsverfahren, einen entdeckten mathematischen Zusammenhang und dessen Beweis oder einen neuen Begriff aus der Mathematik.

Im Mathematikunterricht gibt es zahlreiche Möglichkeiten, die Methode des forschend-entdeckenden Lernens anzuwenden, insbesondere dann, wenn man problemlösendes Denken und Arbeiten als Kern des Unterrichts betrachtet. Die Inhalte der Stunde werden mit diesem Unterrichtskonzept oft von den Lernenden bei der Beschäftigung mit dem Problem selbst erkannt wie beispielsweise der Satz von Thales. (Barzel et. al., 2014a, S 41) Der **Satz von Thales** lässt sich sehr gut mit Hilfe von GeoGebra entdecken. Die Anwendungen des Satzes in Form von Aufgaben können im Anschluss mit der genannten mathematischen Software ausgeführt werden. Der Technologieeinsatz erweist sich hier als sinnvoll und geeignet.

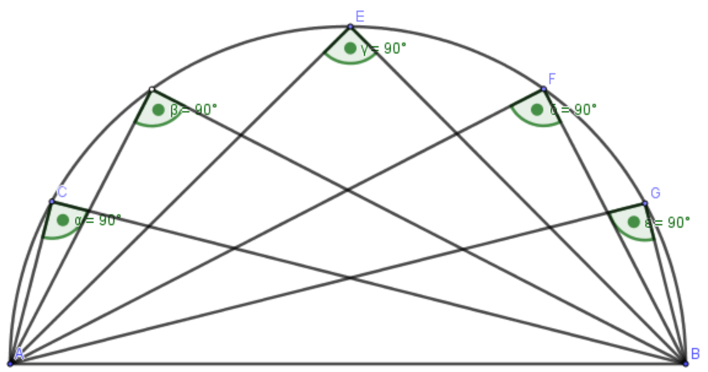


Abbildung 15: grafische Darstellung des Satzes von Thales

Es gibt drei Typen forschend-entdeckenden Lernens:

a. Offene Exploration: Die Aufgabenstellung ist offen gehalten und läuft darauf hinaus, eine Situation zu untersuchen und diesbezüglich alles Mögliche herauszufinden. Der Unterricht hat hier den Lernprozess und nicht das Ergebnis zum Ziel. Als Anwendung könnte man beispielsweise eine Fermi-Aufgabe untersuchen. Offene Explorationen bedingen eine gesonderte Haltung seitens der Schüler und Schülerinnen, die erst durch Gewöhnung an solche Aufgaben zustande kommt. Die Lehrkraft muss ihre Erwartungen an die Lernenden klar formulieren und gegebenenfalls über eine geeignete Hilfestellung den Lernprozess begleiten und die Schulkinder motivieren. (Barzel et. al., 2014a, S 45-46)

Beispiele für Fermi-Aufgaben sind folgende Fragestellungen (Bühler, 2018, S 59):

- *Wie viele Stühle gibt es in deiner Schule?*
- *Wie viele SMS werden täglich von allen Schülern und Schülerinnen deiner Schule verschickt?*
- *Wie viele Stunden Unterricht gibt es pro Jahr in deiner Schule?*
- *Wie viele Haare hast du auf dem Kopf?*
- *Wie viel Konfetti lässt sich aus einer DIN-A4 Seite herstellen?*

Bruder et. al., 2014, S 141, geben nachstehende Aufgabenstellung:

Die Firma Braun hat damit geworben, dass ein Mann in 18 Monaten eine Bartfläche rasiert, die einem Fußballfeld entspricht. Die Werbung ist beim Verbraucher gut angekommen. Untersucht die Werbung mathematisch und schreibt einen Brief an die Firma, in dem ihr eure Einschätzung darlegt.

Lösungsvorschlag:

Die Größe eines Fußballfeldes beträgt mindestens 90 x 45 m, wir gehen von 90 x 50 m aus. Das entspricht einer Fläche von 45 000 000 cm^2. Die Hautfläche im Gesicht, die täglich rasiert werden muss, beträgt ca. 480 cm^2. Diese Fläche wird pro Rasur sieben Mal überstrichen (die Scherfolie berührt ein Stück Haut nicht nur einmal), und zwar jeden Tag, 18 Monate lang. Und: Auf der Haut wachsen durchschnittlich 50 Haare pro cm^2, auf dem Fußballrasen sind es nur zwei Grashalme pro cm^2.

Die Formel der Berechnung lautet:

480	*cm^2 Haut*
x 7	*mehrfaches Überstreichen pro Rasur*
x 30	*Tage im Monat*
x 18	*Monate*
x 25	*Faktor Haare pro cm^2 / Grashalme pro cm^2*

Summa summarum macht das exakt 45 360 000 cm^2.

b. Problemgenetische Erkundungen: Bei dieser Art des Lernens besteht die Schwierigkeit darin, *„die Aufgaben und den Unterricht so anzulegen, dass sich die mathematischen Begriffe auf ganz natürliche Art, „genetisch“ aus dem Prozess des Problemlösens ergeben.“* Genetisch bezeichnet hier die aktive Konstruktion mathematischer Begriffe und Verfahren im Laufe der Bearbeitung, das heißt, dass es am Ende ein neues inhaltliches Ergebnis gibt. Bei der Annäherung an das Problem ist es von Vorteil, wenn die Schüler und Schülerinnen die leitende Fragestellung selbst erarbeiten und benennen können. Die Sozialform sollte passend gewählt werden und die unterstützenden Impulse durch die Lehrperson sollten minimalistisch sein. Als Beispiele wären geeignet, die Koordinaten auf einer Karte oder das Runden im Zusammenhang mit dem Einkaufen selbst zu entdecken. (Barzel et. al., 2014a, S 48-49)

Beispiel:

Beim **Einstieg in die binomischen Formeln** in der 3. Klasse wird mit einer Expertenrunde gearbeitet. Bei dieser Methode sind die Schüler und Schülerinnen einerseits als Lehrende und andererseits als Lernende gefordert.

Es werden zunächst sechs Stammgruppen gebildet, wobei die Gruppenmitglieder anfangs noch nicht beisammen sitzen. Ein Arbeitsblatt, das einer Stammgruppe zugeordnet wird, wird zunächst in Einzelarbeit bearbeitet. Je zwei Stammgruppen befassen sich mit einer binomischen Formel in unterschiedlicher Aufgabenstellung. Danach kommen die Stammgruppenmitglieder zusammen und vergleichen ihre Ergebnisse und diskutieren darüber. Im Anschluss wird die Gruppenaufgabe bearbeitet. Im nächsten Schritt treffen sich je zwei Experten in einer neuen Gruppe, präsentieren dort ihre Ergebnisse und tauschen ihre Erkenntnisse aus.

Das Arbeitsblatt für die Stammgruppe 1 enthält folgende Angaben:

Stammgruppe 1:

1.Einzelarbeit:

- Löse die Aufgaben 1-6 durch Ausmultiplizieren der Klammern und fasse das Ergebnis zusammen.
- Welche Besonderheit haben die Aufgaben 1-6? Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?

$(a+c) \cdot (a+c) =$ ____________________ = ________________________

$(x+y) \cdot (x+y) =$ ____________________ = ________________________

$(y+z) \cdot (y+z) =$ ____________________ = ________________________

$(x+3) \cdot (x+3) =$ ____________________ = ________________________

$(5a+b) \cdot (5a+b) =$ ____________________ = ________________________

$(4+3x) \cdot (4+3x) =$ ____________________ = ________________________

2.Gruppenarbeit:

- Vergleicht in der Stammgruppe eure Ergebnisse. Was ist euch aufgefallen?
- Warum enthält das Ergebnis weniger Summanden als das Zwischenergebnis?
- Vergleicht die Aufgabe mit dem Endergebnis. Seht ihr Zusammenhänge?
- Formuliert eine Regel oder Anweisung, wie man das Ergebnis ohne Zwischenschritt bestimmen kann. Schreibt sie auf euer Arbeitsblatt.

  ____

  ____

  ____

- Wendet eure Regel auf folgende Aufgaben an:

$(a+b) \cdot (a+b) =$ ________________________

$(4+a) \cdot (4+a) =$ ________________________

$(3x+y) \cdot (3x+y) =$ ________________________

$(2a+3b) \cdot (2a+3b) =$ ________________________

Den Abschluss bildet ein zusammenfassendes Unterrichtsgespräch in der Klasse. (Realschule Enger, 2006, S 118-121)

c. Lernwerkstätten: Hier wird das Prinzip wirksam, einen Gegenstand aus unterschiedlichen Perspektiven und mit verschiedensten Handlungen zu untersuchen. Ein mathematischer Gegenstand steht also im Zentrum der Betrachtung, dem sich die Schüler und Schülerinnen auf unterschiedliche Art und Weise nähern. Wesentlich ist, dass zwar ein bestimmter Begriff wie z. B. der eines mathematischen Körpers von Anfang an bekannt ist, aber nicht die damit verbundenen Aspekte. (Barzel et. al., 2014a, S 50) Die Lernenden arbeiten an mehreren Stationen, um sich auf unterschiedliche Art und Weise mit dem Thema auseinanderzusetzen (Barzel et. al., 2014b, S 198)

Nachstehend ist ein Beispiel für vier von insgesamt acht Stationen einer Lernwerkstatt zum Thema Körper erkunden (Barzel et. al., 2014b, S 199):

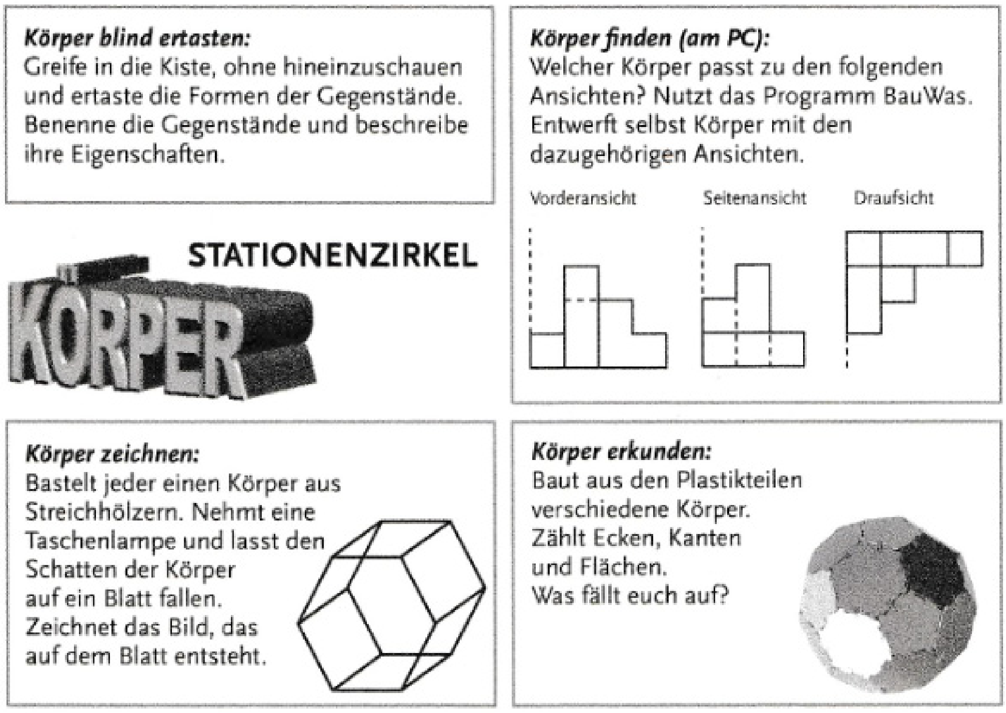


Abbildung 16: Körper erkunden

Ein weiteres Beispiel für forschend-entdeckendes Lernen ist der **Einstieg in die Terme.** In einer 3. Klasse habe ich mit Würfelbauten Gruppenarbeiten machen lassen; die Idee dazu stammt aus einem Schweizer Mathematikbuch[5]. Hier stand die Entwicklung des Termbegriffs im Zentrum der Betrachtungen. Daneben wurden auch Impulse zur Umformung von Termen (Addition, Auflösen von Klammern) gegeben. Das Ziel war, dass von den Schülern und Schülerinnen ein Variablenbegriff entwickelt und für die gegebene Aufgabenstellung ein passender Term mit einer Variablen

[5] URL: https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/download/1424 [9.2.2019]

gefunden werden sollte. Nachstehend zeige ich eine von mehreren Aufgaben. Pro Gruppe ist es ausreichend, vier Würfel zur Verfügung zu stellen.

Würfelturm

Ein Würfel liegt vor dir auf dem Tisch.

Man kann ihn von allen Seiten betrachten.

5 Quadrate sind sichtbar,

1 Quadrat ist verdeckt.

Bei einem zweistöckigen Turm sind am Boden und im Innern drei Quadrate verdeckt.

9 Quadrate sind sichtbar,

3 Quadrate sind verdeckt.

Wie viele Quadrate sind sichtbar, und wie viele sind verdeckt

- bei einem dreistöckigen Turm
- bei einem vierstöckigen Turm
- …

Erkennst du Gesetzmäßigkeiten?

Stockwerke	sichtbare Quadrate	verdeckte Quadrate
1	5	1
2	9	3
3		
4		
20		
100		
…		
x		
Gesetzmäßigkeit (Erkläre diese!)		

Erkläre die Terme an zwei verschieden hohen Türmen.

Eine zusätzliche Aufgabenstellung lautet:

Paul erhält für die sichtbaren Quadrate den Term: 6 x – 2 x + 1. Wie hat er gedacht? (Wieland, 2003, S 22-23)

5.4 Schaffen eines kognitiven Konflikts

„Provozieren, scheinbare Widerstände aufstellen, etwas in Zweifel ziehen, Verwirrung stiften." Diese Möglichkeit des Einstiegs soll die Schüler und Schülerinnen aufrütteln, zum Nachdenken anregen und motivieren. Diese Art von Einstieg eignet sich zum Beispiel für Schätzungen, die von den Schülern und Schülerinnen abgegeben werden. Die Neugierde erhält sich zumeist bis zur Enthüllung des tatsächlichen Wertes. Ebenso können zwei verschiedene Lösungsvorschläge zur Diskussion gestellt werden. (Barzel et. al., 2014a, S 83)

Eine weitere Möglichkeit wäre, nach der Begrüßung der Klasse etwas Ungewöhnliches oder Provozierendes an die Tafel zu schreiben. Dazu eignen sich falsche Behauptungen, fehlerhafte Verfahren, falsche geometrische Beziehungen oder unzutreffende Begriffe. Bestenfalls beginnen die Schüler und Schülerinnen zu protestieren, woraus sich eine lebendige Diskussion entwickelt und letztendlich auf das geplante Thema der Unterrichtsstunde hinführt. (Quak, 1998, S 134)

Beispiele für provozierende Aussagen wären z.B.:

„Verdoppelt man den Radius eines Kreises, verdoppelt sich auch der Umfang."

„Jedes Quadrat ist auch eine Raute."

„Zwischen 1 und 2 gibt es mehr Dezimalbrüche als zwischen -1 und 0."

„Es gibt kein gleichschenkeliges Dreieck, das auch einen rechten Winkel hat."

(Bühler, 2018, S 45)

Beispiel:

Als **<u>Einstieg in die Stammbrüche</u>** in der 1. Klasse eignet sich die Aussage:

„$\frac{1}{5}$ ist größer als $\frac{1}{4}$, weil 5 größer als 4 ist." (Bühler, 2018, S 45)

Die Schüler und Schülerinnen sollten genügend Zeit haben, um sich mit dieser Aussage zu beschäftigen, entweder einzeln oder mit dem Banknachbarn oder der Banknachbarin. Tatsächlich bereitet ein Vergleich der Nenner von Stammbrüchen oft Kopfzerbrechen und es ist anfangs nicht gut vorstellbar, dass eine größere Zahl im Nenner einen kleineren Bruch bedeutet. Die Kinder üben hierbei das Argumentieren und sind angehalten, die Aussage zu bestätigen oder zu widerlegen. Erfahrungsgemäß entwickelt sich bei dieser Aufgabenstellung ein großer Eifer und meistens beginnen die Lernenden zu zeichnen, sie teilen einen Kreis durch den angegebenen Nenner und zeigen, dass der fünfte Teil eines Kreises kleiner ist als der vierte Teil eines Kreises.

5.5 Bilder, Modelle, Experimente oder Filme zeigen

Das Zeigen eines Bildes oder eines Modelles kann als nonverbaler Impuls verwendet werden oder es kann mit einer gegebenen Aufgabenstellung verbunden sein. Aussagekräftige Bilder haben oft eine größere Wirkung als gesprochene Worte und sie hinterlassen einen nachhaltigeren Eindruck.

Experimente können entweder von der Lehrperson oder von den Schülern und Schülerinnen durchgeführt werden. Geeignete Beispiele hierzu wären Abkühlungsprozesse oder ein Bierschaumzerfall als Anwendung im Hinblick auf Exponentialfunktionen.

Das Vorführen von Filmsequenzen ist ebenso geeignet wie beispielsweise die Darstellung mathematischer Inhalte mit einer entsprechenden Software. Gerade Themen aus der Geometrie können sehr gut visualisiert und damit besser vermittelt werden. (Barzel et. al., 2014a, S 83)

Beispiel:

Als **Einstieg in die Symmetrie** in der ersten Klasse habe ich die Kinder gefragt, ob denn ein Gesicht bezüglich linker und rechter Gesichtshälfte symmetrisch sei. Es ist immer wieder faszinierend, wie ungleich eigentlich die beiden Gesichtshälften sind und das ist den Lernenden sofort klar. Ich habe dabei aus dem Buch von Walter Schels „Das offene Geheimnis“ (1995, S 62-63) Bilder entnommen, foliert und an der Tafel mit einem Magneten fixiert, zunächst das Bild eines Gesichtes und danach die einzelnen Gesichtshälften, jeweils gespiegelt.

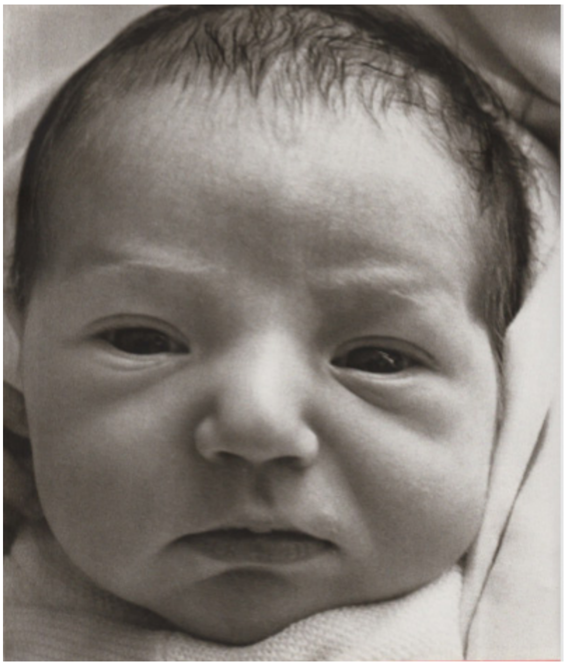


Abbildung 17: Gesicht eines Babys

Abbildung 18: Gespiegelte Gesichtshälften

Das erwähnte Buch von Walter Schels bietet einige tolle Bilder zur symmetrischen Betrachtung von Gesichtshälften, womit den Lernenden ein faszinierender Einstieg in die Symmetrie geboten werden kann. Nun kann der Begriff der Symmetrie bzw. der Symmetrieachse(n) besprochen werden und was man unter deckungsgleich (kongruent) versteht.

Herauszuheben ist das Thema Symmetrie in der Natur oder bei Bauwerken bezüglich der Genauigkeit von symmetrischen Verhältnissen. Eine Schneeflocke beispielsweise ist auf den ersten Blick symmetrisch, bei genauerem Hinsehen sind jedoch kleine Unterschiede erkennbar. Ebenso verhält es sich bei Bauwerken wie z. B. beim Schloss Schönbrunn, auch hier scheint auf den ersten Blick Symmetrie vorzuliegen, im Detail gibt es aber auch hier kleine Abweichungen. Das bedeutet, dass man zwischen genauer und ungefährer Symmetrie unterscheiden muss. Genau dieser Unterschied ist auch beim eben geschilderten Phänomen der menschlichen Gesichter zu erkennen.

Im weiteren Unterrichtsverlauf haben die Kinder aus einem gefalteten Papier Scherenschnitte angefertigt und wieder auseinandergefaltet. Anzumerken ist hier, dass sich dafür buntes Origamipapier wegen der verschiedenen Farben und dem quadratischen Format eignet.

5.6 Einstieg über ein Spiel, eine Geschichte oder ein Gedicht

Spiele sind eine willkommene Abwechslung im Unterricht. Bei der Einführung des Zweiersystems kann beispielsweise ein Würfelspiel herangezogen werden (Barzel et. al., 2014a, S 83). Bei Spielen im Mathematikunterricht muss man jedoch beachten, dass sie dem mathematischen Verständnis tatsächlich dienlich sind und nicht bloß als Zeitvertreib eingesetzt werden, um für die Unterhaltung der Schüler und Schülerinnen zu sorgen.

Eine Geschichte zum behandelten Thema, die lebendig und spannend erzählt wird, kann ebenfalls als Einstieg gewählt werden. Sie bleibt zumeist nachhaltig in Erinnerung und das mit ihr zusammenhängende Stoffgebiet kann gut assoziiert werden. Ebenso kann aus der Geschichte der Mathematik erzählt werden oder Anekdoten über berühmte Mathematiker Teil des Unterrichtseinstieges sein. Schüler und Schülerinnen sind oft erstaunt, wenn sie einen historischen Hintergrund zu ihrem aktuellen Thema hören, vor allem wenn sie erfahren, wie lange es einen bestimmten Bereich der Mathematik schon gibt. Ein solches Hintergrundwissen wirkt motivierend und es bleibt eindrucksvoll in Erinnerung. Ebenso kann gemeinsam mit der Klasse beispielsweise die Annäherung an die Zahl π in der Art von Archimedes nachvollzogen werden und damit der historische Bezug und die gewonnene Erkenntnis untermauert werden.

Beispiele:

Für den **Einstieg in die Dezimalzahlen** erzähle ich den Schülern und Schülerinnen der ersten Klasse ein Märchen (Quelle unbekannt):

„Das Land der Zahlen war einmal ein riesiges Reich. Wegen der starken „Größenunterschiede“ gab es aber viel Streit, jede Zahl wollte die größte sein. Ein kluger Zahlenkönig beschloss, das Reich in zwei Gebiete zu teilen. Diese beiden Reiche waren durch eine magische Linie voneinander getrennt. Links lebten die „Ganzen“ – die „Einer“, die „Zehner“, die „Hunderter“ usw. Je weiter links sie lebten, desto größer wurden sie. Auf der rechten Seite der magischen Linie – sie nannten sie „Komma“ – lebten die „Stel“. Die ersten waren die „Zehntel“, dann kamen die „Hunderstel“, dann die „Tausendstel“ usw. Je weiter rechts sie lebten, desto kleiner wurden sie. Und wenn sie nicht gestorben sind, dann rechnen wir noch heute mit ihnen!“

Einige Kinder der ersten Klasse kennen die Dezimalzahlen aus der Volksschule als Kommazahlen, der Begriff Dezimalzahlen ist kaum bekannt. Im Anschluss an das Märchen überlegen wir gemeinsam, in welchen Bereichen Dezimalzahlen vorkommen wie etwa bei der Zeitmessung im Sport oder bei der Angabe von Preisen.

Danach lasse ich den Schülern und Schülerinnen aus einer Speisekarte Speisen und ihre Preise auswählen. Dabei gibt es jedesmal einige Lernende, die dann auch wegen ihrer Vorkenntnisse schon die Preise ihres Menüs zusammenzählen können.

Als **Einstieg in die Streuungsmaße (Standardabweichung)** in der 4. Klasse kann ein Gedicht verwendet werden, das die Eigenschaft der Streuung im Vergleich zum Mittelwert unterhaltsam zum Ausdruck bringt:

„Ein Mensch, der von Statistik hört, denkt dabei nur an den Mittelwert. Er glaubt nicht dran und ist dagegen, ein Beispiel soll es gleich belegen:

Ein Jäger auf der Entenjagd hat einen ersten Schuss gewagt. Der Schuss, zu hastig aus dem Rohr, lag eine gute Handbreit vor.

Der zweite Schuss mit lautem Krach lag eine gute Handbreit nach. Der Jäger spricht ganz unbeschwert voll Glauben an den Mittelwert: Statistisch ist die Ente tot.

Doch wär´ er klug und nähme Schrot – dies sei gesagt, ihn zu bekehren – er würde seine Chancen mehren: Der Schuss geht ab, die Ente stürzt, weil Streuung ihr das Leben kürzt.“ (Krafft, 1977, zitiert nach Henze, 2013, S 31)

Das Gedicht wird an die Wand projiziert und von den Schülern und Schülerinnen interpretiert. In welchem Zusammenhang ist hier der Mittelwert erwähnt? Was könnte die Aussage betreffend den Schrotkugeln und Streuung bedeuten?

Von der Lehrperson wird anschließend der Unterschied zwischen Lagemaßen und Streuungsmaßen erklärt.

Um statistische Daten zu erhalten, mit denen die Standardabweichung berechnet wird, wird in der Klasse ein „Stressmessexperiment“ durchgeführt. Dieses sieht so aus, dass in Partnerarbeit erhoben wird, wie lange eine Minute subjektiv empfunden wird. Einer von beiden führt die Zeitmessung durch und der andere sagt stopp, wenn er glaubt, dass eine Minute vorbei ist. Tendenziell neigt man dazu, die Dauer einer Minute sehr falsch einzuschätzen, wenn man einer hohen Stressbelastung ausgesetzt ist. In Zeiten hoher Stressspitzen, die ich selbst erlebt habe (Familie, Studium, Beruf) habe ich 20 Sekunden für eine Minute eingeschätzt.

Dieses Experiment wird gegenseitig sechs bis sieben Mal durchgeführt, sodass eine passende Datengrundlage für den Einstieg gewonnen werden kann. Zu Beginn ist es besser mit einer geringen Anzahl von Daten zu arbeiten, um das grundsätzliche Verständnis zu schaffen. Basierend auf den Ergebnissen eines einzelnen Schülers oder einer Schülerin wird in einzelnen Schritten, die die Lehrperson vorzeigt, die Standardabweichung berechnet. Die Lernenden vollziehen mit ihren eigenen Messergebnissen die Vorgänge nach. Zum Aufbau der Kennzahl wird zuerst die Summe der absoluten Abweichungen vom Mittelwert berechnet und dann die mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert. Was würde passieren, wenn man nicht mit Absolutbeträgen arbeiten würde? Anstelle von Absolutbeträgen wird in weiterer Folge quadriert und die mittlere quadratische Abweichung (Varianz) und aus dieser die Standardabweichung berechnet. Warum wird quadriert? Das Quadrieren der Differenzen berücksichtigt positive und negative Abweichungen der Daten vom Mittelwert in gleicher Weise. Nach Vorliegen der Standardabweichung aus den erhobenen Daten wird das Ergebnis gemeinsam besprochen und interpretiert.

5.7 Einstieg über Vorerfahrung bzw. über vorhandenes Wissen

In der Mathematik wird in nachfolgenden Unterrichtsjahren auf vorhandenes Wissen aufgebaut. Als Einstieg kann deshalb ein bereits im Vorjahr behandeltes Thema aufgegriffen und erhoben werden, wie weit es noch in Erinnerung ist. Das können einzelne Beispiele sein, die schon früher gemacht wurden oder eine gemeinsame Wiederholung von Unterrichtsinhalten. Diese Art von Einstieg motiviert die Lernenden, ihr bereits erworbenes Wissen wieder aufzufrischen. Selbst wenn nicht mehr alles vollständig bekannt ist, so dient trotzdem jeder erinnerte Beitrag der Wiederholung.

Aber nicht nur schon weiter zurückliegende Themen können Gegenstand des Einstiegs sein, sondern auch Hausaufgaben, die gezielt aufgegriffen werden und der fortführenden Entwicklung dienen (Barzel et. al., 2014a, S 83). Als Beispiel eignet sich hier der Einstieg in die Primzahlen über die vorher in der Hausübung bearbeiteten Teilermengen. Diese Variante ist sehr vorteilhaft, da ein nahtloser Anschluss an vorangegangenes Wissen ermöglicht wird und die Schüler und Schülerinnen die Relevanz des früheren Themas erkennen, indem sie darauf aufbauen.

Beispiel:

Für den **Einstieg ins Prozentrechnen** in der 2. Klasse bietet sich an, an das Bruchrechnen anzuschließen. Hierzu gibt es Vorkenntnisse aus der 1. Klasse und Bruchrechnen umfasst auch einen großen Teil im Lehrplan der 2. Klasse. In wie viel Teile das Ganze (=100%) zerlegt wird, steht bei der Bruchdarstellung im Nenner.

Was bedeutet $\frac{1}{100}$ oder $\frac{50}{100}$? Wie können diese Dezimalbrüche als Prozente dargestellt werden, wenn ein Ganzes 100% ist? Im nächsten Schritt werden Prozentangaben grafisch illustriert, einmal als Prozentstreifen und als Prozentkreis.

Was ist der Grundwert, der Prozentsatz und der Prozentanteil (Prozentwert)? Bei den folgenden Bildern (Klippert, 2011b, S 7) geht es im ersten Schritt nur darum, jeweils den Grundwert und den Prozentanteil zu erkennen. Was ist mit den Angaben gemeint? Auf Bild 1 sind beispielsweise mit den 240 bzw. 250 Personen die Grundwerte und mit den 96 bzw. 120 Personen die Prozentanteile angegeben.

Abbildung 19: Prozentrechnung – Vergleichen von Anteilen

Sobald die Begriffe von Grundwert und Prozentanteil unterschieden werden können und gefestigt sind, werden aus den Angaben oben die Prozentsätze berechnet. Dazu wird der Prozentanteil durch den Grundwert dividiert, z. B. $\frac{96}{240}$. Das Ergebnis ist 0,4. Anschließend wird gefragt, wie viele Hunderstel das sind. Es sind $\frac{40}{100}$, d. h. 40%.

Ich arbeite bei Prozentrechnungen in der 2. Klasse bewusst nicht mit Formeln, da in einem klaren Feedback von Schülern und Schülerinnen gekommen ist, dass sie mit den üblichen Grundwert/Anteil Formeln nichts anfangen können. Nachdem die Prozentsätze berechnet wurden, wird die Vergleichbarkeit von absoluten und relativen Angaben thematisiert.

Im nächsten Schritt werden Beispiele zum Berechnen des Grundwerts und des Anteils mit einfachen Schlussrechnungen (in Tabellenform) gemacht, um ein grundlegendes Verständnis zu schaffen.

6 Unterrichtseinstiege aus der eigenen Praxis

In den folgenden Unterrichtseinstiegen beschreibe ich selbst durchgeführte Einstiege in einer 1. Klasse, 2. Klasse und 4. Klasse einer AHS-Unterstufe in Wien Alsergrund. In den Klassen befinden sich jeweils 27 Schüler und Schülerinnen mit einem ungefähr ausgewogenen Geschlechterverhältnis.

6.1 Einstieg ins Bruchrechnen (1. Klasse)

Dieser Einstieg orientiert sich an Arbeiten mit einem Modell (Abschnitt 5.5) und soll auf diese Weise Grundvorstellungen zum Bruchrechnen (Abschnitt 4.1) anschaulich (Abschnitt 4.5) vermitteln. Gezielte Fragen (Abschnitt 5.1) regen die Schüler und Schülerinnen an, sich mit dem Thema so auseinanderzusetzen, dass einmal der Bezug zur eigenen Lebenswelt erkannt (Abschnitt 4.7) sowie fortschreitend Grundbegriffe zum Bruchrechnen erworben werden, auf die später hervorragend aufgebaut werden kann.

Die Kinder sitzen im Kreis mit der Lehrkraft auf dem Boden. In der Mitte befinden sich Legosteine mit verschiedenen Farben, die der Veranschaulichung dienen. Daneben liegt ein DIN A3 großes weißes Blatt Papier und ein Stift mit dicker Strichstärke. Das weiße Blatt dient zum Sammeln erster Erkenntnisse und Ideen, die darauf unstrukturiert von der Lehrkraft und/oder den Lernenden notiert werden.

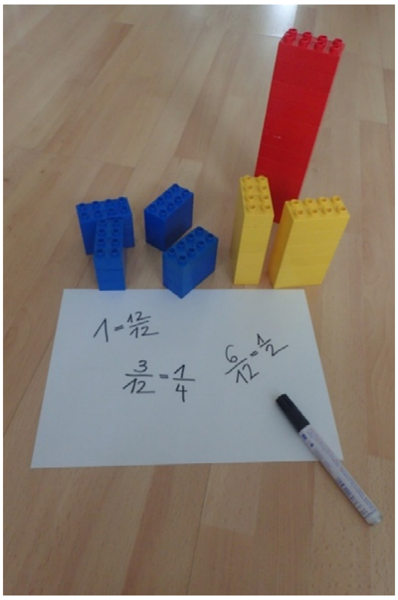
Zunächst wird besprochen, was ein Bruch ist: Es ist ein Teil des Ganzen.

Wo kommen Brüche im Alltag vor? z. B. ½ Pizza, ¼ l Saft, ¼ Stunde, Halbzeit

Was kann das Ganze sein? z. B. ein Kreis, ein Rechteck, ein Quadrat

Legotürme in der Mitte des Kreises sollen jeweils ein Ganzes darstellen. Die Anzahl der Bausteine eines Turmes sollte durch vier teilbar sein, damit später leicht halbiert und geviertelt werden kann. Wir verwenden Legotürme (rot, gelb, blau), die aus je 12 Einzelbausteinen bestehen. Wichtig ist es zu vermitteln, dass die Bausteine innerhalb eines Turmes die gleiche Größe haben müssen, um die gleichmäßige Teilung des Ganzen in Form von Bruchteilen zu ermöglichen.

Türme mit abweichenden Bausteingrößen sollten nicht nebeneinander verwendet werden, denn es besteht die Gefahr, dass dann möglicherweise $\frac{1}{3}$ eines Turmes gleich hoch ist wie $\frac{1}{4}$ eines anderen Turmes. Gerade beim Einstieg sollte so eine Verwirrung vermieden werden.



Nun werden die Bruchteile des Ganzen bzw. der Türme dargestellt. Wir halbieren den gelben Turm mit den zwölf Bausteinen und stellen die Hälften nebeneinander. Was fällt auf? Die Hälfte sind zugleich sechs Zwölftel. Wie viel Bausteine enthält ein Viertel des Turmes? Ein Viertel sind zugleich drei Zwölftel (blaue Steine). Die Kinder können die Türme beliebig zerlegen und verschiedene Bruchteile des Ganzen darstellen und vergleichen.

Abbildung 20: Legotürme

Bezeichnungen: Der Nenner gibt an, in wie viele gleiche Teile das Ganze geteilt ist. Der Zähler gibt an, wie viele solcher Teile gemeint sind.

Der Bruch zeigt eine Division an, indem der Zähler durch den Nenner dividiert wird. Dies wird in der folgenden Abbildung veranschaulicht:

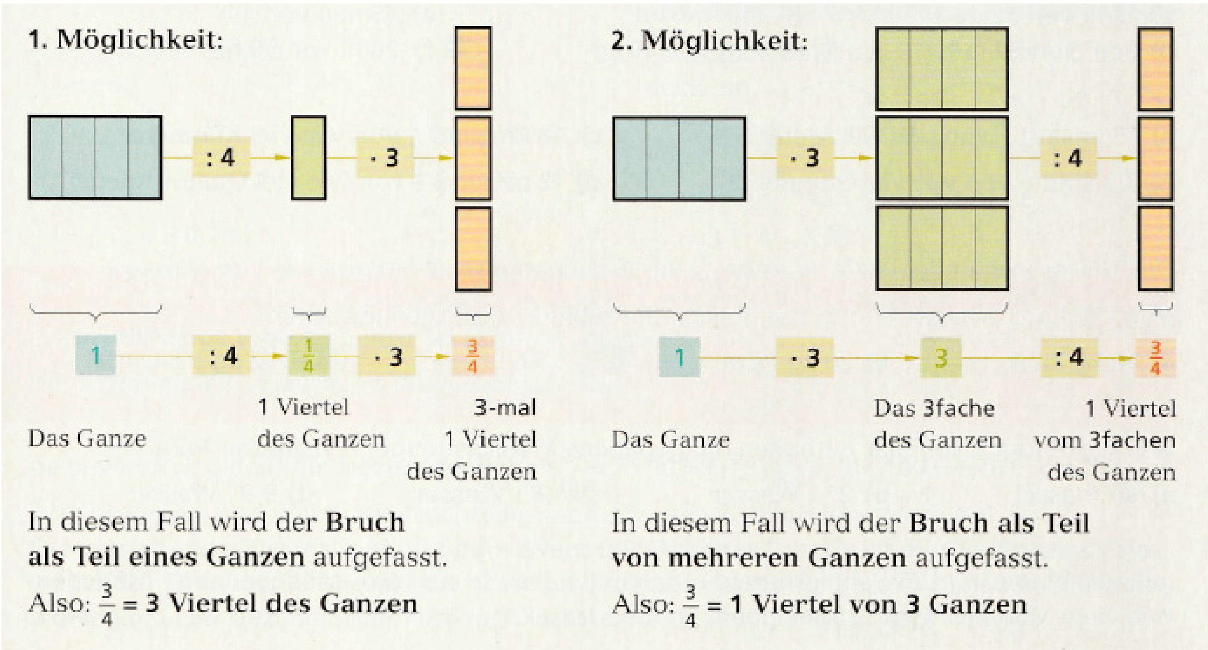


Abbildung 21: Der Bruch als Division

Die einzelnen Brucharten können sehr schön mit den Legosteinen veranschaulicht werden: Echter Bruch, Unechter Bruch, Stammbruch und gemischte Zahlen. Die Türme können hierzu entsprechend zerlegt und aufeinander gesteckt werden. Für den unechten Bruch und die gemischten Zahlen beachten, dass Bausteine gleicher Größe verwendet werden.

Grundlegendes zu den Brüchen wird im Anschluss daran im Heft festgehalten und ein Arbeitsblatt zu den Brucharten bearbeitet (siehe Anhang 1).

<u>Verbesserungsvorschlag:</u>

Es ist mir aufgefallen, dass sich die Kinder gerne noch einzeln mit den Legosteinen befasst hätten und ich nicht genug Lego für alle Schüler und Schülerinnen dabei hatte. Wenn ich wieder mit diesem Einstieg arbeite, werde ich die Kinder bitten, selbst Legosteine mitzubringen, damit jeder Einzelne für sich noch einmal nachvollziehen kann, was im Kreis erarbeitet wurde. Ein passendes kurzes Anweisungsblatt für die Einzelbeschäftigung wäre sinnvoll oder ein leeres Blatt, auf dem die Schulkinder mit Zeichnungen und/oder Texten festhalten können, worum es bei Brüchen geht.

6.2 Einstieg in Gleichungen (1. Klasse)

Hier dient ein Kleiderbügelmodell (Abschnitt 5.5) dem Entwickeln von Grundvorstellungen (Abschnitt 4.1) zum Thema Gleichungen. Als weiteres Modell für die „Unbekannte“ werden verpackte Murmeln herangezogen. Damit kann an Wissen aus der Volksschule (Abschnitt 4.3) angeknüpft werden, wo bereits mit Unbekannten (meist Symbole oder Platzhalter) gearbeitet wurde.

Das Prinzip von Gleichungen kann mit einer symbolischen Balkenwaage demonstriert werden. Dazu verwendet man einen möglichst langen Kleiderbügel mit je einen Haken links und rechts außen. Auf diese Haken hängt man ein transparentes Sackerl (hierzu eignet sich ein Gefrierbeutel) und befüllt die „Waagschalen“ mit Murmeln. Ein paar Murmeln werden in Geschenkspapier verpackt und ihre Anzahl dient als „Unbekannte“. Im linken und rechten Gefrierbeutel sollten insgesamt jeweils gleich viele Murmeln (inklusive den verpackten) sein. Damit die „Waage“ ausgeglichen ist, sollten die Murmeln jeweils zur Mitte hin orientiert sein.[6] Der Kleiderbügel sollte auch frei schwingen und sich damit gut auspendeln können und wird deshalb in der Klasse am besten an der Kreidehalterung der Tafel platziert.

[6] Die Idee zur Balkenwaage mit einem Kleiderbügel stammt aus dem Buch „111 neue spannende Experimente für Kinder“, Compact Verlag, München 2016 und wurde für den Unterricht entsprechend adaptiert.

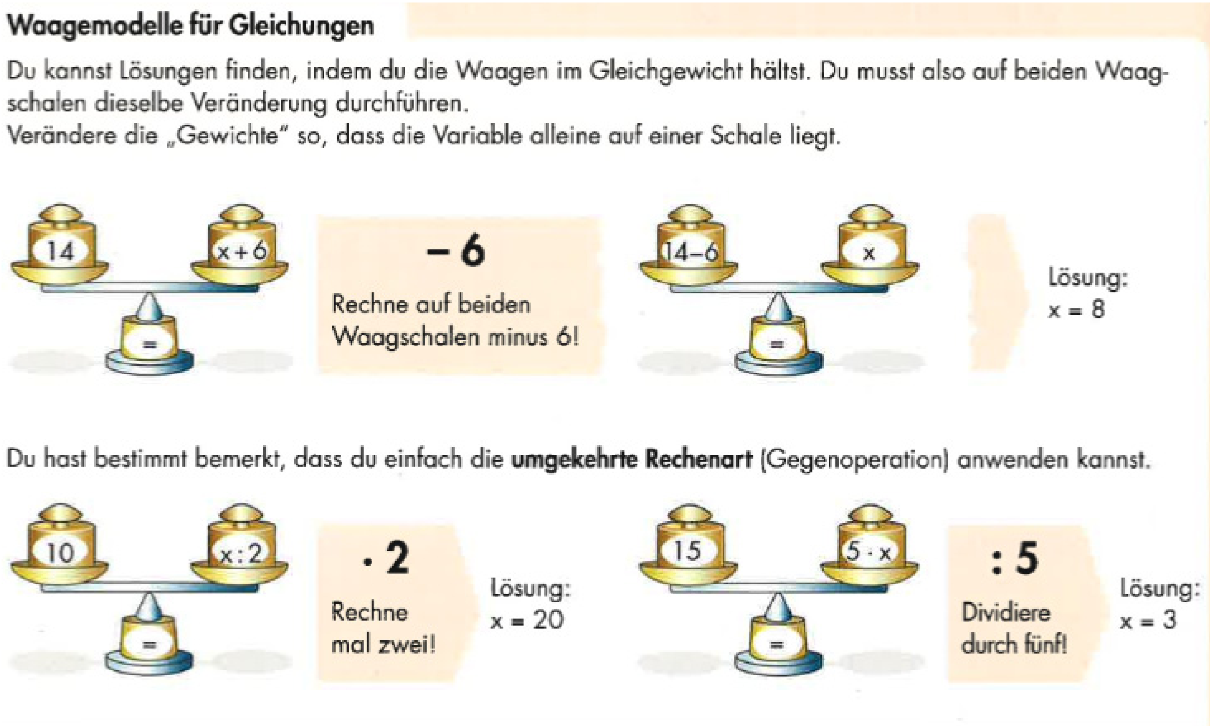
Abbildung 22: Kleiderbügelwaage

Anhand dieses Modells kann nun gezeigt werden, dass sich die Waage nur dann im Gleichgewicht befindet, wenn beide Seiten gleich viele Kugeln enthalten. Bei Gleichungen müssen ebenso beide Seiten, die durch ein Gleichheitszeichen getrennt sind, einen gleichen Wert ergeben. Mit der Wegnahme bzw. dem Hinzufügen von Murmeln kann das Gleichgewicht des Modells nach Belieben verändert werden und ein Ungleichgewicht sofort erkannt werden. Damit können auch die Rechenoperationen, die zum Lösen einer Gleichung führen, thematisiert werden.

Hinzu kommt eine Unbekannte, die die Kinder zunächst mit Überlegungen zum Gleichgewicht ermitteln sollen. Sobald alle Schüler und Schülerinnen ihre Vermutung kundgetan haben, wird die Unbekannte, also die eingewickelten Murmeln, ausgepackt und mit dem vermuteten Ergebnis verglichen.

Bezüglich der Unbekannten kann an das Vorwissen der Schulkinder aus der Volksschule zurückgegriffen werden. Wo sind Unbekannte bzw. Platzhalter in Rechnungen vorgekommen? z. B. 4 + __ = 10 oder 15 - ■ = 9 . Die Lernenden sollen dabei erklären, wie man bei diesen Beispielen zur Lösung kommt wie z. B. „Ich habe berechnet, wie viel von 4 auf 10 fehlt“ oder „Ich habe 10 minus 4 gerechnet:“ Anstatt von Platzhaltern werden fortan Kleinbuchstaben verwendet. (Reichel et. al., 1994, S 29)

Anhand des unten abgebildeten Modells wird der Übergang vom Waagemodell zu den Umkehroperationen geschaffen, die man zum Lösen einer Gleichung benötigt (Boxhofer et. al., 2015, S 108):



Waagemodelle für Gleichungen

Du kannst Lösungen finden, indem du die Waagen im Gleichgewicht hältst. Du musst also auf beiden Waagschalen dieselbe Veränderung durchführen.
Verändere die „Gewichte“ so, dass die Variable alleine auf einer Schale liegt.

Du hast bestimmt bemerkt, dass du einfach die **umgekehrte Rechenart** (Gegenoperation) anwenden kannst.

Abbildung 23: Einfache Gleichungen

Nun werden Umkehroperationen besprochen (Eßletzbichler et. al., 2014, S 117):

Lösen von Gleichungen mithilfe von Umkehroperationen

Rechenausdrücke, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden, nennt man Gleichung. Beispiele: x = 3   2 · a = 4   5 + a = 10

Mithilfe von Umkehroperationen kannst du herausfinden, für welche Zahl die Unbekannte steht. Man nennt diese Zahl auch „Lösung der Gleichung“.

Rechnung	*Umkehroperation*	*Ergebnis*	*Rechenoperation ↔ Umkehroperation*
5 + x = 16	*x = 16 – 5*	*x = 15*	*Addition ↔ Subtraktion*
y –7 = 25	*y = 25 + 7*	*y = 32*	*Subtraktion ↔ Addition*
3 · a = 18	*a = 18 : 3*	*a = 6*	*Multiplikation ↔ Division*
b : 5 = 9	*b = 9 · 5*	*b = 45*	*Division ↔ Multiplikation*

Anschließend können einfache Gleichungen gemeinsam an der Tafel und danach selbstständig von Schülern und Schülerinnen ausgeführt werden. Später sollten auch einfache Textaufgaben in Gleichungen übersetzt werden.

Für die 1. Klasse ist es wichtig, ein gutes Grundverständnis zum Thema Gleichungen zu erwerben und es genügt, wenn sie Gleichungen mit einer Rechenoperation lösen können. Dabei sollte jedoch darauf geachtet werden, dass alle Umkehroperationen geübt werden.

6.3 Einstieg in Primzahlen (2. Klasse)

Bei diesem Einstieg kann auf dem bereits vorhandenen Wissen über Teilermengen (Abschnitt 5.7) das Thema Primzahlen aufgebaut und damit erfolgreich vermittelt werden. Ein neuer Begriff wird entdeckt (Abschnitt 5.3) und über Spiele wiederholt und gefestigt.

Im ersten Schritt werden an der Tafel gemeinsam die Teiler der Zahlen von 1 bis 10 wiederholt und notiert (Bruder et. al., 2014, S 107):

$T_1 = \{1\}$	$T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$
$T_2 = \{1, 2\}$	$T_7 = \{1, 7\}$
$T_3 = \{1, 3\}$	$T_8 = \{1, 2, 4, 8\}$
$T_4 = \{1, 2, 4\}$	$T_9 = \{1, 3, 9\}$
$T_5 = \{1, 5\}$	$T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$

Was fällt bei den Teilermengen auf? Die Anzahl der Teiler ist unterschiedlich. Es gibt Zahlen größer als 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben. Welche sind das? 2,3,5,7

Über die Betrachtung der Teilermengen gelangt man nun zum Begriff der Primzahlen (Bruder et. al., 2014, S 107):

Alle Zahlen, die größer sind als 1 und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen Primzahlen. Sie haben genau zwei Teiler. Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,..

Die Teilermengen und die Definition werden ins Heft geschrieben.

Wie viele Primzahlen gibt es? Unendliche viele Primzahlen – Hinweis auf Euklid, der um 300 v. Chr. den Satz bewiesen hat, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Von Euklid lässt sich gut zu Eratosthenes (275 v. Chr. bis 195 v. Chr.), einem griechischen Gelehrten, überleiten. Er hat nach einem Verfahren gesucht, um Primzahlen zu finden, weil es keine Formel gibt, mit der man Primzahlen berechnen kann.

Der Grieche hat schließlich das „Sieb des Eratosthenes“ entwickelt, das im Folgenden für den Unterricht verwendet wird. (Lewisch, 2015, S 14) Dieses Verfahren zur Bestimmung der Primzahlen, die es von 1 bis 100 gibt, ist bei den Schülern und Schülerinnen sehr beliebt.

Sieb des Eratosthenes:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

Zum Finden der Primzahlen gibt es eine Kurzanleitung:

- Streiche 1, es ist keine Primzahl
- 2 ist eine Primzahl, ringle sie ein und streiche alle durch 2 teilbaren Zahlen
- 3 ist eine Primzahl, ringle sie ein und streiche alle durch 3 teilbaren Zahlen
- 5 ist eine Primzahl, ringle sie ein und streiche alle durch 5 teilbaren Zahlen
- Verfahre so weiter und finde alle Primzahlen zwischen 1 und 100.
- Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 1 und 100? Notiere sie.

Lösungsblatt:

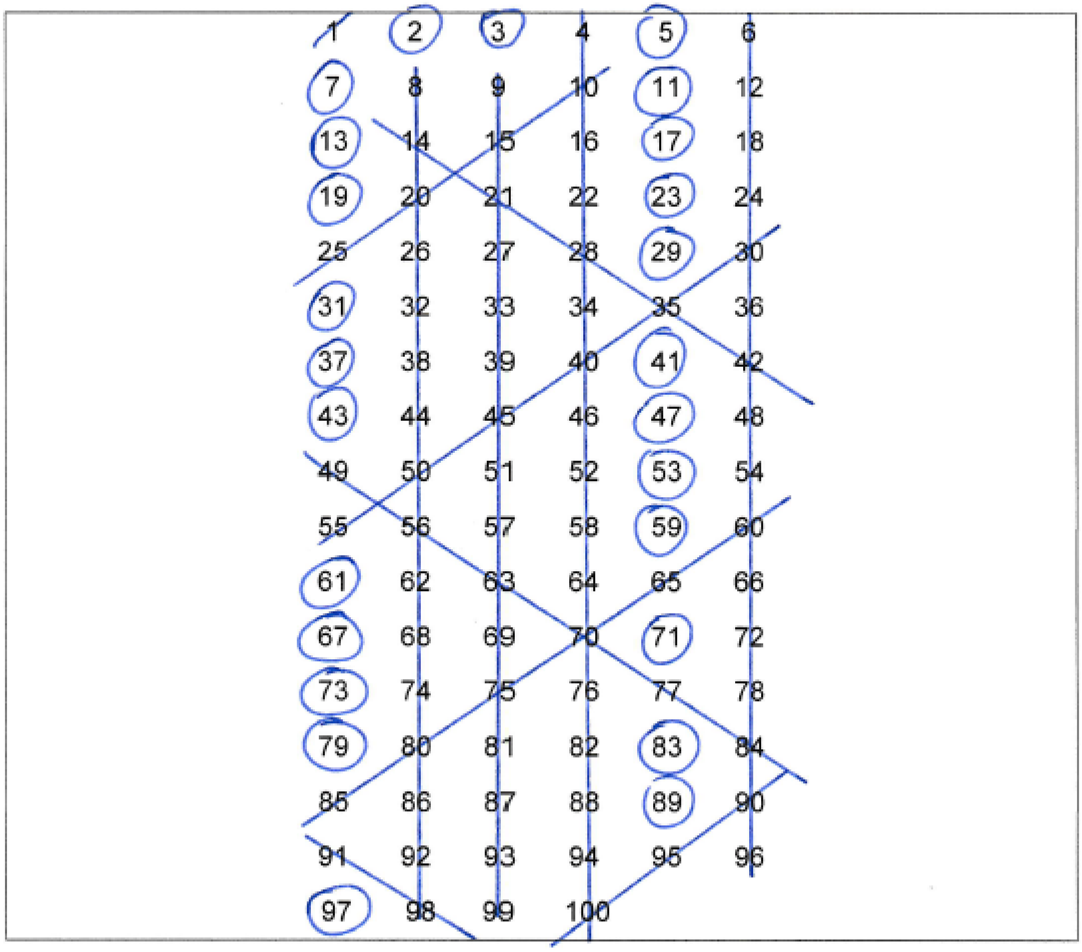


Abbildung 24: Primzahlen zwischen 1 und 100

Mit sechs Spalten sind die Primzahlen durch Diagonal- und Längsstriche (Vielfache von 2, 3, 5 oder 7) einfach und schnell herauszufinden. Ich würde auf diese Möglichkeit aber erst dann hinweisen, wenn die Kinder das Blatt eigenständig bearbeitet haben.

Wenn in späteren Unterrichtseinheiten die Primzahlen schon gut bekannt sind, kann ein Primzahlspiel der Wiederholung dienen: Die Kinder stehen auf und zählen von 1 bis 100 durch. Wenn eine Primzahl an der Reihe ist, darf nicht die Zahl genannt werden, sondern das Kind sagt dann „Primzahl“ und der nächste zählt weiter. Wer einen Fehler macht, muss sich setzen, bis der „Primzahlkönig“ feststeht.

Außerdem habe ich die zu dieser Zeit sehr beliebten Fidget-Spinner in den Unterricht miteinbezogen. Während der Zeit, in der sich ein Fidget-Spinner dreht, müssen die Lernenden so viele Primzahlen aufschreiben, wie ihnen einfallen. Gewinner oder Gewinnerin ist, wer am meisten Primzahlen notiert hat.

Von den Primzahlen geht es weiter zur Primfaktorenzerlegung, die anhand eines Musterbeispieles an der Tafel vorgezeigt wird.

6.4 Einstieg Dreiecke (2. Klasse)

Diesem Einstieg liegt forschend-entdeckendes Lernen (Abschnitt 5.3) zugrunde und liefert erste Grundvorstellungen (Abschnitt 4.1) zur mathematischen Behandlung von Dreiecken.

Bei der allerersten Unterrichtsstunde zum Thema Dreiecke erkunden die Schüler und Schülerinnen sechs verschiedene Arten von Dreiecken. Dazu gibt es ein Arbeitsblatt (siehe Anhang 2), in dem die Ergebnisse der Messungen von Winkeln und Seiten eingetragen werden. Dieser Einstieg eignet sich auch dazu, das Winkelmessen aus der 1. Klasse zu wiederholen. Die verschiedenen Arten von Dreiecken sind durch unterschiedliche Farben gekennzeichnet, auf die ich mich im Arbeitsblatt beziehe. Pro Dreiecksart sind sechs Dreiecke (hier sind jeweils nur drei abgebildet) verfügbar.

Abbildung 25: Dreiecksarten nach Farben sortiert

Drei Stationen beziehen sich auf Dreiecke, bei denen schwerpunktmäßig die Seitenlängen betrachtet werden und bei den anderen drei Stationen die Winkel. Am Ende des Arbeitsblattes gibt es eine Anleitung zum Beschriften eines Dreieckes.

Den Lernenden wird freigestellt, wo sie arbeiten und mit wem sie gegebenenfalls zusammenarbeiten wollen. Es gibt immer wieder einzelne Kinder, die gerne alleine arbeiten. Da der Platz in dieser Klasse ausreichend ist, kann auch am Boden gemessen werden und das machen einige der Kinder auch. Sie liegen mit ihren Dreiecken und Messgeräten am Boden und befassen sich eine ganze Stunde intensiv mit den Dreiecken. Abschließend werden die Ergebnisse verglichen und die verschiedenen

Arten von Dreiecken benannt sowie die Erkenntnis gewonnen, dass die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt. Die korrekte Beschriftung eines Dreieckes wird anhand des Arbeitsblattes gelernt.

In der folgenden Stunde bekommen die Schüler und Schülerinnen je ein Dreieck, um die Innenwinkelsumme von 180° zu überprüfen (Humenberger et. al., 2011, S 191):

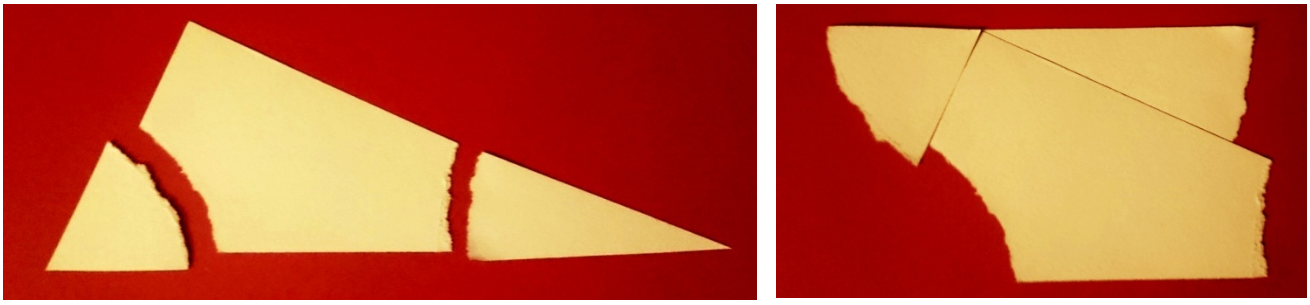
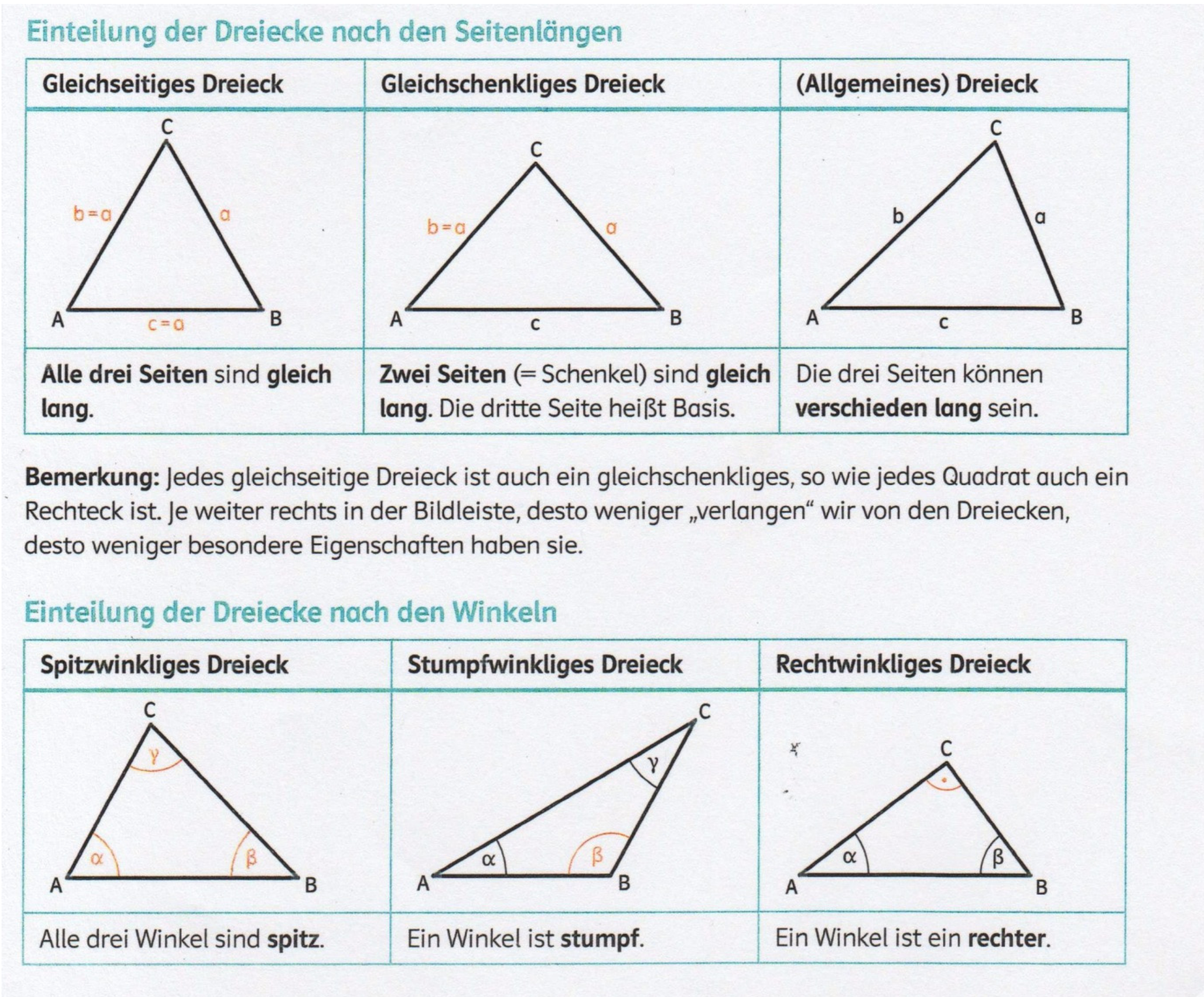


Abbildung 26: *Experiment zur Innenwinkelsumme von Dreiecken*

Ins Heft kommt eine Kopie (Humenberger et. al., 2011, S 189), die der Übersicht dient:



Einteilung der Dreiecke nach den Seitenlängen

Gleichseitiges Dreieck	Gleichschenkliges Dreieck	(Allgemeines) Dreieck
Alle drei Seiten sind **gleich lang**.	**Zwei Seiten** (= Schenkel) sind **gleich lang**. Die dritte Seite heißt Basis.	Die drei Seiten können **verschieden lang** sein.

Bemerkung: Jedes gleichseitige Dreieck ist auch ein gleichschenkliges, so wie jedes Quadrat auch ein Rechteck ist. Je weiter rechts in der Bildleiste, desto weniger „verlangen" wir von den Dreiecken, desto weniger besondere Eigenschaften haben sie.

Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln

Spitzwinkliges Dreieck	Stumpfwinkliges Dreieck	Rechtwinkliges Dreieck
Alle drei Winkel sind **spitz**.	Ein Winkel ist **stumpf**.	Ein Winkel ist ein **rechter**.

Abbildung 27: Einteilung der Dreiecke

6.5 Einstieg zur Erweiterung der Zahlenmengen (4. Klasse)

Der Einsatz eines Modells (Abschnitt 5.5) dient zur Veranschaulichung (Abschnitt 4.5) der Beziehung der Zahlenmengen. Da bereits einige Zahlenmengen aus den Vorjahren bekannt sind, kann gut an das vorhandene Wissen angeknüpft (Abschnitt 5.7) bzw. dieses erweitert werden.

In der 4. Klasse werden die Zahlenmengen bis zu den reellen Zahlen erweitert. Die Schüler und Schülerinnen sitzen mit der Lehrperson im Kreis am Boden und verwenden eine russische Puppe, eine sogenannte Matrjoschka. Ein leeres Blatt dient Wiederholungen bzw. Notizen über bereits bekannte Zahlenmengen.

Abbildung 28: Erweiterung der Zahlenmengen bis zu den reellen Zahlen

Die kleinste Zahlenmenge ist die der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Darauf verweisen, dass $\mathbb{N}^*$ die natürlichen Zahlen ohne Null sind. Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der übergeordneten ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. Dies kann gut mit der Matrjoschka veranschaulicht werden, indem die kleinste Puppe in die nächstgrößere gesteckt wird. Mit den folgenden Zahlenmengen wird analog verfahren: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und die Puppen der Größe nach ineinandergesteckt. Die größte Puppe bleibt über und damit die Erweiterung zu den komplexen Zahlen, die aber nur erwähnt werden, da sie Thema der Oberstufe sind.

Zur Erweiterung der Zahlenmengen werden Überlegungen angestellt, welche Zahlen jeweils hinzukommen. Weiterhin sollten sich die Schüler und Schülerinnen Gedanken darüber machen, in welcher Zahlenmenge Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division beschränkt oder unbeschränkt ausführbar sind.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$, wobei a ϵ $\mathbb{Z}$ und b ϵ $\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ werden näher besprochen. Warum darf der Nenner nicht Null sein? Welche Arten von Dezimalzahlen gehören zu den rationalen Zahlen? Aus der dritten Klasse sollten die Beweise bekannt sein, dass alle endlichen und unendlich periodischen Dezimalzahlen rationale Zahlen sind. Gegebenenfalls kurz wiederholen bzw. von einem Schüler oder einer Schülerin vorführen lassen:

Beispiel: Zeige, dass $0,\overline{31}$ eine rationale Zahl ist! (Humenberger et. al., 2012a, S 50)

Lösung: Es sei x = $0,\overline{31}$ = 0,3131.., dann ist das Hundertfache 100·x = $31,\overline{31}$ = 31,3131..Bei beiden Fällen sind die Nachkommaziffern die gleichen. Wir ziehen x von 100·x ab:

$$\begin{array}{rl} 100\cdot x = & 31{,}313131\ldots \\ -x = & 0{,}313131\ldots \\ \hline 99\cdot x = & 31 \end{array}$$

Also ist x = 31: 99 = $\frac{31}{99}$

Eine Bruchdarstellung von $0,\overline{31}$ ist $\frac{31}{99}$. Daher ist $0,\overline{31}$ eine rationale Zahl.

Gibt es zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden eine weitere rationale Zahl? Ja, durch Erweiterung eines Bruches kann immer noch ein Bruch dazwischen gefunden werden, d. h. zwischen zwei rationalen Zahlen liegen beliebig viele weitere rationale Zahlen (sie liegen „dicht" auf der Zahlengeraden). Sind alle Punkte auf der Zahlengeraden rationale Zahlen? Vermutungen der Lernenden dazu hören.

Beispiel: Wie groß ist die Diagonale in einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 1 Einheit? Skizze erstellen und mit Anwendung des Satzes von Pythagoras ergibt sich für die Diagonale ein Wert von $\sqrt{2}$ Einheiten. Die Darstellung auf der Zahlengeraden sieht so aus:

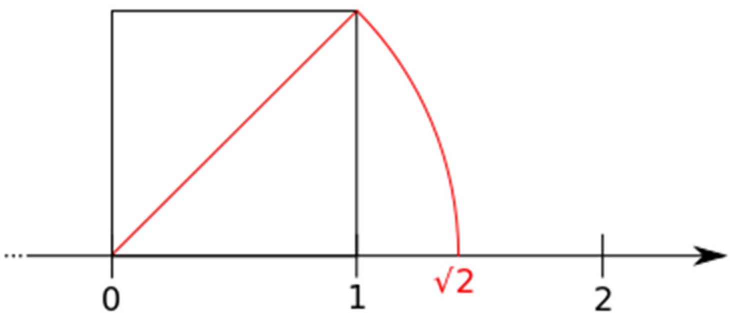


Abbildung 29: Darstellung von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden

Für die oben genannte Frage ergibt sich, dass es unendlich viele Punkte auf der Zahlengeraden gibt, die keine rationale Zahl darstellen. $\sqrt{2}$ gehört zu den irrationalen Zahlen, es handelt sich um eine unendliche, nichtperiodische Dezimalzahl, die man nicht als Bruch darstellen kann. Die neu hinzugekommene Zahlenmenge der irrationalen Zahlen ergänzt die bisherigen rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Wichtig ist, dass wegen der Ergänzung durch die irrationalen Zahlen nun jeder Punkt auf der Zahlengeraden eine reelle Zahl darstellt und umgekehrt zu jeder reellen Zahl ein Punkt auf der Zahlengeraden gehört.

Ins Heft kommt eine Übersicht zu den Zahlenbereichen (Reichel et. al., 2007, S 28):

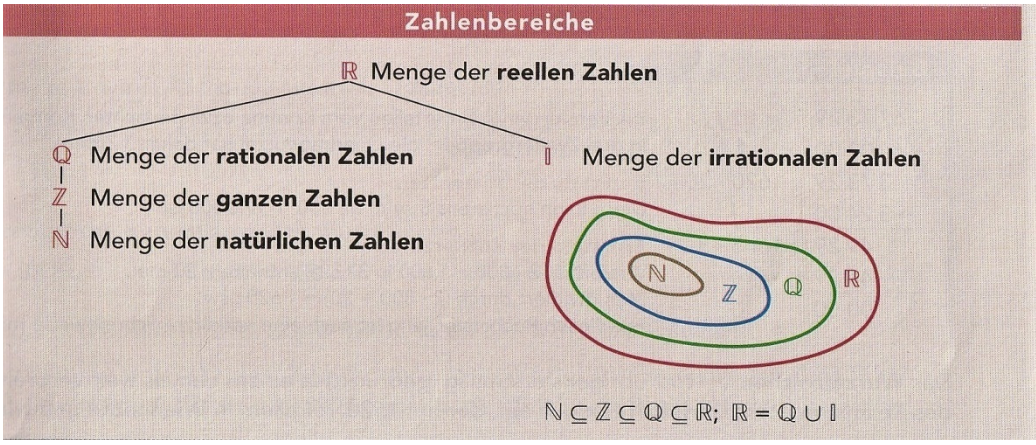


Abbildung 30: Übersicht über die erweiterten Zahlenbereiche

Anschließend geht es mit Zuordnungsaufgaben weiter (Boxhofer et. al., 2010, S 10):

Zahl	N	Z	Q	I	R
5	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
-17					
4,35					
$\sqrt{3}$					
356					
$-\frac{4}{17}$					

Abbildung 31: Zuordnungsaufgaben

6.6 Einstieg Boxplot (4. Klasse)

Über eine anschauliche Darstellung (Abschnitt 4.5) sollen statistische Kennzahlen wiederholt (Abschnitt 5.7) und mit weiteren Kennzahlen zur Erstellung eines Boxplots ergänzt werden. Zunächst werden die Körpergrößen der Schüler und der Schülerinnen getrennt nach Geschlecht an der Tafel gesammelt. Folgende Werte werden erhoben:

Körpergrößen Mädchen	Körpergrößen Burschen
180 cm	185 cm
167 cm	175 cm
171 cm	168 cm
156 cm	170 cm
167 cm	160 cm
168 cm	175 cm
166 cm	172 cm
154 cm	170 cm
171 cm	172 cm
156 cm	159 cm
168 cm	170 cm
158 cm	170 cm
171 cm	176 cm
	170 cm

Nach der Datenerhebung stellen sich die 14 Schüler und die 13 Schülerinnen der Größe nach geordnet jeweils in eine Reihe. Nun werden anhand der Aufstellung einige statistische Parameter erhoben. Der Median (50%-Grenze der Datenreihe) ist beispielsweise die Körpergröße der Schülerin, die genau in der Mitte steht, bei den Burschen ist es der Mittelwert der mittleren beiden Schüler. Minimum und Maximum sind jeweils die Werte der kleinsten bzw. größten Schüler oder Schülerin. Die beiden Quartile q_1 (25%-Grenze der Datenreihe) und q_3 (75%-Grenze der Datenreihe) können ebenfalls aus der Reihe „abgelesen“ werden. Die Spannweite ergibt sich aus der Differenz von Minimum und Maximum. (Idee aus Humenberger et. al., 2012b, S 139)

Die einzelnen Quartile lassen sich mit nachstehender Formel berechnen[7]:

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} \dfrac{x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}}{2}, & \text{wenn } n \cdot p \in \mathbb{Z}, \\ x_{\lceil n\cdot p \rceil}, & \text{wenn } n \cdot p \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Nach der anschaulichen Darstellung der statistischen Kennzahlen anhand der aufgestellten Reihen werden die Daten in GeoGebra ausgewertet und ein passendes Kastenschaubild (Boxplot) erstellt und interpretiert. Zu diesem Zweck bekommt jeder Schüler und jede Schülerin eine schriftliche Kurzanleitung für die Datenauswertung. Das hat den Vorteil, relativ selbstständig arbeiten zu können und rasch zu einem Ergebnis zu kommen. Auch die Betreuung der 27 Schüler und Schülerinnen durch eine einzige Lehrperson ist damit wesentlich einfacher. Der in GeoGebra erstellte Boxplot zur Datenreihe der Körpergrößen wird mittels Beamer an die Wand projiziert und mit den Lernenden besprochen.

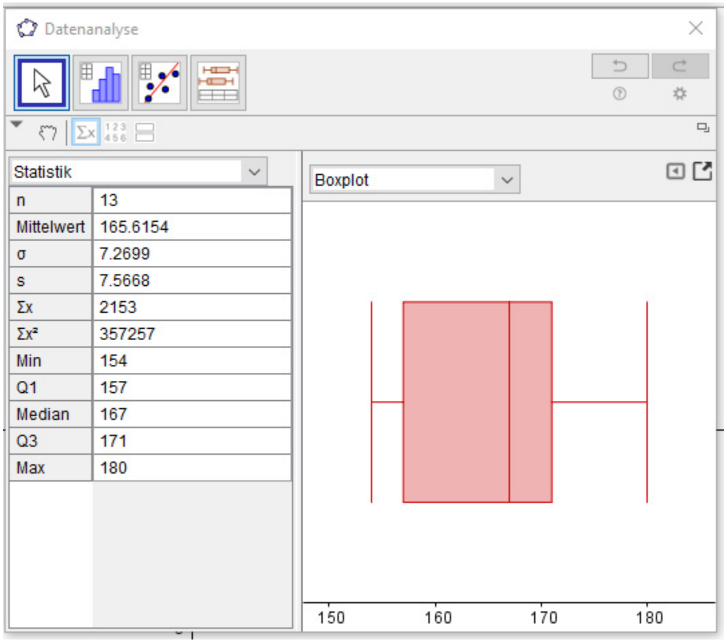


Abbildung 32: Boxplot zur Körpergröße der Mädchen

[7] URL: https://matheguru.com/images/latex//41251d773590ea2e3ec58b1e20001dfc.svg [12.7.2019]

<u>Interpretation</u>:

Der Median (=167 cm) bildet die 50% Grenze der Datenreihe. Das erste Quartil (=157 cm) bildet die 25% Grenze der Daten und das dritte Quartil (=171 cm) die 75% Grenze. Das Minimum (=154 cm) ist die Körpergröße der kleinsten Schülerin und das Maximum (=180 cm) die Größe der größten Schülerin. Hier nochmals an die aufgestellten Schülerinnen erinnern und fragen, von wem diese Werte stammen, damit der direkte Bezug der ausgewerteten Daten zur Reihe erkannt wird.

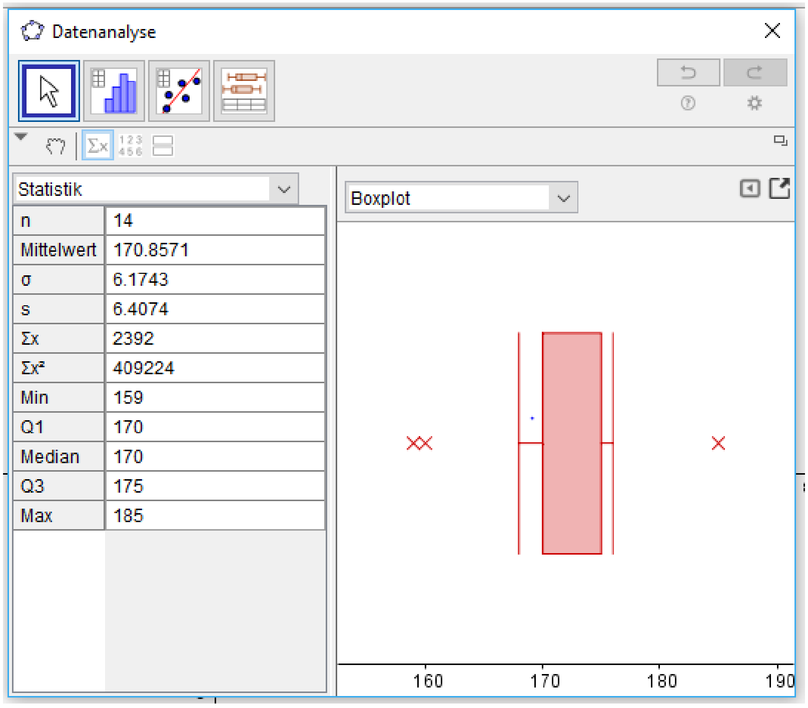


Abbildung 33: Boxplot zur Körpergröße der Burschen

Dieser Boxplot wird analog wie derjenige der Mädchen nur mit den Daten der Burschen interpretiert. Die beiden Boxplots werden anschließend verglichen. Warum sieht dieser Boxplot anders aus? Wer sind die Burschen, deren Körpergrößen die Kreuze im Bild darstellen? Warum werden diese Daten mit Kreuzen dargestellt? Welcher Wert ist der Median, welcher das erste Quartil? (Beide fallen hier zusammen.) Die Daten können auch nochmals nebeneinander in einer Tabelle verglichen werden. Wie sind die Körpergrößen verteilt, sind Burschen oder Mädchen größer? Wer ist der/die Größte bzw. Kleinste in der Klasse?

Ins Heft kommt eine Übersicht (Boxhofer et. al., 2016, S 189):

Kastenschaubilder (Boxplots)

Sie sind sehr nützlich, um sich über einen Datensatz schnell einen **Überblick** zu verschaffen oder verschiedene **Datensätze** miteinander zu **vergleichen**.

Abbildung 34: Boxplot

Zur Diskussion steht die Frage, ob es nicht sinnvoller ist, den Boxplot beim ersten Mal selbst zeichnen zu lassen. Im Hinblick auf den verpflichtenden Technologieeinsatz bei der standardisierten Reifeprüfung, wo die Schüler und Schülerinnen jedoch ohnehin auf die computergestützte Datenauswertung zurückgreifen können, ist die Notwendigkeit von eigens erstellten Zeichnungen fraglich. Die Interpretation sollte aber ausreichend behandelt werden, wobei zu bedenken ist, dass Boxplots in der Oberstufe erneut gelehrt werden. Daher ist wohl für den Einstieg ins Thema ein gutes Grundverständnis ausreichend.

7 Schlussfolgerungen

Wesentlich ist: Kinder wollen lernen! Es ist ihre Natur, möglichst viele Eindrücke aus der Umwelt zu sammeln, um sich über ein ausreichend vernetztes System aus Nervenzellen an die bestehenden Umweltverhältnisse anzupassen.

Im Allgemeinen beginnen die Schüler und Schülerinnen mit einer hohen Motivation und Wissbegierde ihren Start in der Schule. Den Start in ein neues Thema im Mathematikunterricht bildet ein anregender, interessanter Einstieg, der die Kinder neugierig machen soll. Dabei sollten diejenigen Faktoren berücksichtigt werden, die Lernprozesse bei Kindern fördern wie zum Beispiel die spielerische Auseinandersetzung mit dem Lerninhalt oder eine leichte Anspannung, die die Aufmerksamkeit erhöht. Weiterhin ist ein hohes Maß an Eigenaktivität zu planen, das aus Sicht der Neurowissenschaft erheblich zur Lernmotivation beiträgt. Bestenfalls ermöglicht man den Kindern durch gezielt angeregte Eigenbeschäftigung „Flow"-Erlebnisse im Unterricht und kann den Lernenden die Bedeutung der Mathematik so wirksam übermitteln, dass damit auch die Merkfähigkeit nachhaltig gefördert wird. Die Lernprozesse sollten so geplant werden, dass auch schwache Schüler und Schülerinnen Erfolgserlebnisse haben können, die ermutigend wirken.

Spiegelneurone haben eine große Bedeutung im Hinblick auf die Lehrperson, die nach Möglichkeit selbst vom Unterrichtsfach Mathematik begeistert sein sollte und den Kindern offenkundig etwas beibringen möchte. Eine positive emotionale Verbindung mit dem oder der Lehrenden ist eine tragfähige Basis für gegenseitiges Wohlbefinden während des Unterrichts und einem nachhaltigen Erfolg in der Schule. Aber nicht nur diese Verbindung ist relevant, sondern auch ein gelungenes soziales Netzwerk innerhalb der Schüler und Schülerinnen. Konflikte können das Lernklima so negativ beeinträchtigen, dass das Interesse und die aktive Teilnahme am Unterricht regelrecht zum Stillstand kommen. Die Aufklärung der Eltern hinsichtlich ihres Einflusses auf erfolgreiches Lernen ihrer Kinder ist ein unabdingbares Element der Elternberatung. Angst und Druck wirken kontraproduktiv auf die schulische Leistung. Handys sollten in der Schule generell verboten werden, Frankreich hat hier als Vorbild vor kurzem eine gesetzliche Regelung dafür getroffen. Die Beschäftigung mit dem Handy oder anderen digitalen Medien hat bei vielen jungen Menschen flächendeckend schon so suchtartige Ausmaße erreicht, dass sie kaum mehr darauf verzichten können. Damit wird im großen Stil geistige Energie verschwendet und schulisches Interesse nachteilig beeinflusst.

In der Planung des Unterrichtseinstieges ist das Alter der Schüler und Schülerinnen zu berücksichtigen. Jean Piaget und seine Mitarbeiter haben gezeigt, dass es verschiedene Stadien der Denkentwicklung gibt, das heißt, dass es keinen Sinn macht, beispielsweise von jüngeren Kindern unter elf Jahren abstrakte Überlegungen zu verlangen. Interessant ist, dass mit dem Beginn des formalen Denkens auch das Gehirn wichtigen Umbauprozessen ausgesetzt ist.

In der Adoleszenz sind Heranwachsende vorwiegend von Emotionen gesteuert und wegen der noch fehlenden Vernetzung im vorderen Gehirnbereich weniger vom Verstand. Da sie aber trotz allem eine hohe Lernfähigkeit besitzen und die weitere Gehirnstrukturierung von positiven Einflüssen abhängt, sollte der Zugang zu pubertierenden Jugendlichen über ihre empfindliche emotionale Seite gefunden werden. Positive Emotionen im Zusammenhang mit interessanten Einstiegen wirken sich zudem förderlich auf den Gedächtnisbereich des Gehirnes (Hippocampus) aus.

In der Vorbereitung von Einstiegen sind die verschiedenen Darstellungsformen der Umwelt nach Jerome Bruner zu berücksichtigen: die enaktive, ikonische und symbolische. Ob jedoch der Einsatz aller drei Darstellungsformen in jedem Bereich der Mathematik sinnvoll und gerechtfertigt ist, stelle ich infrage. Hier sollte situationsangepasst entschieden werden.

Gelungene Unterrichtseinstiege regen die natürliche Wissbegierde der Schüler und Schülerinnen an. Mitgebrachte Anschauungsmittel werden neugierig betrachtet und überlegt, in welchem Bezug sie zum Thema stehen. Nach einer gemeinsamen Demonstration sollte im Einstieg auch die Handlungsorientierung berücksichtigt werden, das heißt, wann immer es möglich ist, sollten die Kinder einzeln Zugang zu den Gegenständen haben, damit hantieren und eigenständig wichtige Erkenntnisse gewinnen können. Dabei sollte man das Ziel und den roten Faden im Unterrichtsgeschehen nicht aus dem Auge verlieren.

Ein mitreißender Einstieg ist noch keine Garantie für einen nachhaltigen Lernerfolg. Effekthaschende spektakuläre Einstiege ohne sinnvolle Planung des weiteren Unterrichtsgeschehens wirken wie ein Feuerwerk, das schnell seine Energie verliert und damit unwirksam verpufft. Der Aufwand ist völlig umsonst, wenn die Lernenden nach der Behandlung eines Themas keine Ahnung von dem haben, was sie eigentlich hätten lernen sollen und damit im folgenden Schuljahr nicht daran anknüpfen können. Bestenfalls entwickeln sie aber eine tragfähige Grundvorstellung, die ihnen hilft, im Mathematikunterricht am Ball zu bleiben und ein gutes Fundament für die weitere Schullaufbahn bietet.

8 Zusammenfassung

In der Diplomarbeit geht es um die Bedeutung von Unterrichtseinstiegen in der Sekundarstufe I aus der Sicht der biologischen Grundlagen der Lernfähigkeit von Schüler und Schülerinnen dieser Altersstufe.

Aus entwicklungspsychologischer Sicht wird zunächst auf die Gehirnstrukturierung eines Kindes eingegangen und dabei erkannt, dass das Gehirn eine große Fähigkeit zur neuronalen Plastizität (Formbarkeit) hat, die durch die Einflüsse aus der Umwelt wesentlich beeinflusst wird.

Um einen Unterrichtseinstieg altersadäquat vorzubereiten, ist es unerlässlich, sich mit der Entwicklung des mathematischen Denkens vertraut zu machen. Die Diplomarbeit beinhaltet aus diesem Grund die Theorie der Stadien der Denkentwicklung von Jean Piaget. Jerome Bruner liefert Beiträge zur Darstellung der Umwelt über enaktive, ikonische und symbolische Repräsentationsformen. Hans Aebli vertritt eine operative (handlungsorientierte) Methode für den Mathematikunterricht.

Unterrichtseinstiege beinhalten ein großes Potential zur Aktivierung von Schülern und Schülerinnen. Die Kenntnisse von optimalen Lernbedingungen liefern eine Basis zur angemessenen Gestaltung. Kinder sind von ihrer Natur aus neugierig und brauchen eine ansprechende Lernumgebung, die außerdem Sicherheit, Anregung und leichte Anspannung bietet, um erfolgreiche Lernprozesse in Gang zu setzen. Darüber hinaus braucht es Lernsituationen, die sogenannte „Flow"-Erlebnisse ermöglichen.

Die besten Einstiege bringen nicht den erwarteten Erfolg, wenn Störfaktoren die Kinder behindern. In der Schule sind soziale Konflikte, Zugang zu Handy und digitalen Medien und vor allem Angst zu vermeiden. Ablenkung und Lärm können ebenfalls dazu beitragen, dass die die Lernenden nicht entsprechend aktiviert werden.

Aus der Sicht der Didaktik muss bei Unterrichtseinstiegen die Entwicklung von Grundvorstellungen, eine altersgerechte Gestaltung und die Vernetzung mit bekannten Inhalten berücksichtigt werden. Abwechslung der angewendeten Methoden bei den Einstiegen kommt den multiplen Intelligenzen der Kinder entgegen. Über anschauliche Darstellungen und einem Bezug zur Lebenswelt der Lernenden fällt der Zugang zu mathematischen Inhalten leichter. Dabei sollte stets Raum für eigenes Erkunden und Selbsttätigkeit gewahrt bleiben.

In der Diplomarbeit werden schließlich sieben Möglichkeiten zu Unterrichtseinstiegen aus der eigenen Praxis beschrieben, die allesamt ein großes Interesse bei den Lernenden wecken und ihnen das grundlegende Verständnis für die mathematischen Inhalte erleichtern sollen. Dabei sollte jedoch beachtet werden, dass interessante Unterrichtseinstiege zwar die Aufmerksamkeit der Schüler und Schülerinnen erhöhen, aber ohne ausreichend durchdachtes Unterrichtskonzept nicht dem nachhaltigen Lernerfolg des Themas dienen.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 11: Zollstock

Quelle: URL: http://www.heimwerkerkniffe.de/wp-content/uploads/2014/10/zollstock-winkel.jpg [5.7.2019]

Abbildung 12: Flohmarkt am Campus Mainz

Quelle: URL: https://www.campus-mainz.net/newsdetails/news/bildgalerie-campus-mainz-winterflohmarkt-2019/# [5.7.2019]

Abbildung 13: Wiegen mit einer Kofferwaage

Abbildung 14: Konstruktion von Streckensymmetralen

Quelle: Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 2. Veritas Verlag, Linz 2013, S 93.

Abbildung 15: grafische Darstellung des Satzes von Thales

Abbildung 16: Körper erkunden

Quelle: Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin 2014b, S 199

Abbildung 17: Gesicht eines Babys

Quelle: Schels, Walter: Das offene Geheimnis. Mosaik Verlag, München 1995 S 62 .

Abbildung 18: Gespiegelte Gesichtshälften

Quelle: Schels, Walter: Das offene Geheimnis. Mosaik Verlag, München 1995, S 63 .

Abbildung 19: Prozentrechnung – Vergleichen von Anteilen

Quelle: Klippert, Heinz: Mathematik Lehrerheft zu Prozente und Zuordnungen. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2011b, S 7.

Abbildung 20: Legotürme

Abbildung 21: Der Bruch als Division

Quelle: Humenberger, Hans (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist Mathematik 2. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2011, S 37

Abbildung 22: Kleiderbügelwaage

Abbildung 23: Einfache Gleichungen

Quelle: Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 1. Veritas Verlag, Linz 2015, S 108

Abbildung 24: Primzahlen zwischen 1 und 100

Abbildung 25: Dreiecksarten nach Farben sortiert

Abbildung 26: Experiment zur Innenwinkelsumme von Dreiecken

Quelle: URL: https://de.serlo.org/mathe/geometrie/dreiecke-vierecke-kreise-andere-ebene-figuren/dreieck/dreieck-allgemein-besondere-dreiecke/winkelsumme-dreieck [5.8.2018]

Abbildung 27: Einteilung der Dreiecke

Quelle: Humenberger, Hans (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist Mathematik 2. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2011, S 189

Abbildung 28: Erweiterung der Zahlenmengen bis zu den reellen Zahlen

Abbildung 29: Darstellung von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden

Quelle: URL:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Construction_of_square_root_of_2_on_the_line_number.svg [8.8.2018]

Abbildung 30: Übersicht über die erweiterten Zahlenbereiche

Quelle: Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert: Das ist Mathematik 4. ÖBV Verlag, Wien 2007, S 28

Abbildung 31: Zuordnungsaufgaben

Quelle: Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 4. Veritas Verlag, Linz 2010, S 10

Abbildung 32: Boxplot zur Körpergröße der Mädchen

Abbildung 33: Boxplot zur Körpergröße der Burschen

Abbildung 34: Boxplot - Übersicht

Quelle: Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 4. Veritas Verlag, Linz 2016, S 189

10 Literaturverzeichnis

Aebli, Hans: Zwölf Grundformen des Lehrens. Verlag Ernst Klett, Stuttgart 2011.

Aebli, Hans: Grundlagen des Lehrens. Verlag Klett-Cotta, Stuttgart 1997.

Arnold, Margret: Brain-based Learning an Teaching – Prinzipien und Elemente. In: Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Barzel, Bärbel; Holzäpfel, Lars; Leuders, Timo; Streit, Christine: Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren. 3. Auflage. Cornelsen Verlag, Wien 2014a.

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin 2014b.

Bauer, Joachim: Erziehung als Spiegelung. Die pädagogische Beziehung aus dem Blickwinkel der Hirnforschung. In: Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Bauer, Joachim: Kleine Zellen, große Gefühle – wie Spiegelneurone funktionieren. Die neurobiologischen Grundlagen der „Theory of Mind“. In: Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Beer, Rudolf; Chelly, Astrid; Ilias, Petra; Jilka, Susanna; Steffan, Christina; Verelija, Gordan: Genial Mathematik 4. Bildungsverlag Lemberger, Wien 2018.

Bierbaumer, Nils: Dein Gehirn weiß mehr, als du denkst. Neueste Erkenntnisse aus der Hirnforschung. Verlag Ullstein, Berlin 2014.

Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 4. Veritas Verlag, Linz 2010.

Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 2. Veritas Verlag, Linz 2013.

Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 1. Veritas Verlag, Linz 2015.

Boxhofer, Emmerich; Huber, Franz; Lischka, Ulrike; Panhuber Brigitta: MathematiX 4. Veritas Verlag, Linz 2016.

Brand, Matthias und Markowitsch, Hans J.: Lernen und Gedächtnis aus neurowissenschaftlicher Perspektive-Konsequenzen für die Gestaltung des Schulunterrichts. In: Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Braun, Anna Katharina: Wie Gehirne laufen lernen oder: “Früh übt sich, wer ein Meister werden will.“ In: Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Bruder, Regina; Leuders, Timo; Büchter, Andreas: Mathematikunterricht entwickeln Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Cornelsen Verlag, Berlin 2014.

Bruner, Jerome S.: Über kognitive Entwicklung. In: Bruner, Jerome S.; Olver, Rose R.; Greenfield, Patricia M.: Studien zur kognitiven Entwicklung Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1971.

Bühler, Katharina: 55 Stundeneinstiege Mathematik. Auer Verlag, Augsburg 2018.

Csikszentmihalyi, Mihaly: FLOW. Das Geheimnis des Glücks. Verlag Klett-Cotta, Stuttgart 2007.

Eßletzbichler, Beate; Höller, Christine; Lechner, Peter; Luksch, Julia; Niedertscheider, Franz: 100% Mathematik (Schulbuch). Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2014.

Fricke, Arnold: Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget. In: Piaget, Jean; Resag, Kurt; Fricke, Arnold; Van Hiele, P.M; Odenbach, Karl: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Verlag Westermann, Braunschweig 1970.

Greefrath, Gilbert; Oldenburg, Reinhard; Siller, Hans-Stefan; Ulm, Volker; Weigand, Hans-Georg: Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2016.

Greving, Johannes; Paradies, Liane: Unterrichts-Einstiege. Ein Studien- und Praxisbuch. Cornelsen Verlag, Berlin, 1996.

Herrmann, Ulrich: Gehirnforschung und die neurodidaktische Revision schulisch organisierten Lehrens und Lernens. In: Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Hobmair, Hermann (Hrsg.): Pädagogik. 4.Auflage. Bildungsverlag EINS, Troisdorf, 2008.

Hotter, Erich und Zollneritsch, Josef: Lärm in der Schule. Leykam Verlag, Graz 2008.

Humenberger, Hans (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist Mathematik 2. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2011.

Humenberger, Hans (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera; Neuwirth, Erich: Das ist Mathematik 3. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2012a.

Humenberger, Hans (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera; Neuwirth, Erich: Das ist Mathematik 4. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2012b.

Humenberger, Hans (Hrsg.); Hasibeder, Johannes; Himmelsbach, Michael Schüller-Reichl, Johanna; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist Mathematik 1. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien 2016.

Hüther, Gerald: Die Bedeutung sozialer Erfahrungen für die Strukturierung des menschlichen Gehirns. Welche sozialen Beziehungen brauchen Schüler und Lehrer? Zeitschrift für Pädagogik, Ausgabe 50, Verlag Beltz, Weinheim 2004.

Hüther, Gerald: Die Bedeutung sozialer Erfahrungen für die Strukturentwicklung des menschlichen Gehirns. In: Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Hüther, Gerald: Etwas mehr Hirn, bitte. Eine Einladung zur Wiederentdeckung der Freude am eigenen Denken und der Lust am gemeinsamen Gestalten. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht GmbH. Co. Göttingen, 2015.

Hüther, Gerald und Quark, Christoph: Rettet das Spiel! Verlag Hanser, München 2016.

Jensen, Frances E.: Teenagerhirn. Was in der Pubertät im Kopf ihres Kindes los ist. Deutsche Erstausgabe. Verlag Goldmann, München 2016.

Klippert, Heinz: Mathematik, Lehrerheft für Geometrie und Stochastik, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2011a.

Klippert, Heinz: Mathematik Lehrerheft für Prozente und Zuordnungen. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2011b.

Krafft, O.: Statistische Experimente: Ihre Planung und Analyse. Zeitschrift f. Angew. Math. u. Mech 57, T17-T23.

Krauthausen, Günter und Scherer, Petra: Einführung in die Mathematikdidaktik. Verlag Springer, Berlin Heidelberg 2014.

Krejcarek, Martin: Ein Weg – viele Ansprüche. In: Lang, Christian und Stark, Werner: Schritt für Schritt NaturErleben. Forum Umweltbildung, Wien 2000.

Leibovici-Mühlberger: Wie Kinder wieder wachsen. Verlag Ecowin, Salzburg 2010.

Leppig, Manfred: Lernstufen Mathematik, Klasse 6, Ausgabe N. Cornelsen Verlag, Berlin 2001.

Leuders, Timo: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin 2001.

Lewisch, Ingrid: Mehr als 1 x 1. Anspruchsvolle Aufgaben für die 2. Klasse AHS/NMS. Veritas Verlag, Linz 2015.

Maaß, Katja: Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen Verlag, Berlin 2007.

Müller, Karin; Stipsits, Elisabeth; Straub, Martin: Gemeinsam Mathematik 1. Arbeitsbuch. Arbeitsblatt zu Grundlagen des Bruchrechnens. Westermann Gruppe. Verlag Jugend & Volk, Wien 2014.

Nix, Frank: Die besonders runde Stunde. Cornelsen Verlag, Berlin 2016.

Piaget, Jean: Die Genese der Zahl beim Kind. In: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Verlag Westermann, Braunschweig 1970.

Piaget, Jean und Inhelder, Bärbel: Die Psychologie des Kindes. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1996.

Peschel, Falko: Offener Unterricht. Idee-Realität-Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion. Teil I: Allgemein didaktische Überlegungen. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2006a.

Peschel, Falko: Offener Unterricht. Idee-Realität-Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion. Teil II: Fachdidaktische Überlegungen. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2006b.

Realschule Enger: Lernkompetenz: Mathematik, Biologie, Physik, Chemie – Bausteine für das 5. bis 10. Schuljahr. Cornelsen Verlag, Berlin 2006.

Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert: Lehrbuch der Mathematik. ÖBV Verlag, Wien 1994.

Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert: Das ist Mathematik 4. ÖBV Verlag, Wien 2007.

Reiss, Kristina und Hammer, Christoph: Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Verlag Springer, Basel 2013.

Resag, Kurt: Die Bildung des Zahlbegriffes beim Kind. In: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Verlag Westermann, Braunschweig 1970.

Roth, Gerhard: Warum sind Lehren und Lernen so schwierig? In: Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Rüter, Martina: 111 neue spannende Experimente für Kinder. Compact Verlag, München 2016.

Sachser, Norbert: Neugier, Spiel und Lernen: Verhaltensbiologische Anmerkungen zur Kindheit. In: Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen. 2.Auflage, Verlag Beltz, Weinheim und Basel, 2009.

Schels, Walter: Das offene Geheimnis. Mosaik Verlag, München, 1995.

Spitzer, Manfred: Digitale Demenz. Wie wir uns und unsere Kinder um den Verstand bringen. Verlag Droemer, München 2012.

Steiner, Gerhard: Mathematik als Denkerziehung. Verlag Ernst Klett, Stuttgart 1973.

Quak, Udo (Hrsg.): Fundgrube Mathematik. Cornelsen Verlag, Berlin 1998.

Vinzentius, Christian: Multiple Intelligenzen ansprechen. Tipps zur Umsetzung im geöffneten Unterricht. In: Zeitschrift für Pädagogik, Heft Nummer 11, 62. Ausgabe, 2010.

Wieland, G.: mathbuch.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I: Lernumgebungen S. 22 – 23. Schulverlag Blmv, Bern, und Klett und Balmer, Baar, 2003.

Woithe, Petra: Unterrichtseinstiege Mathematik. Cornelsen Verlag, Berlin 2017.

11 Anhang

11.1 Anhang 1 – Einstieg ins Bruchrechnen

infocenter

Bruchharten

$\frac{3}{4}$ … echter Bruch

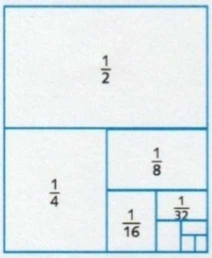
$\frac{7}{5}$ … unechter Bruch

$\frac{8}{8}$ … uneigentlicher Bruch

$\frac{1}{12}$ … Stammbruch

$2\frac{2}{3}$ … gemischte Zahl

Teile eines Ganzen:



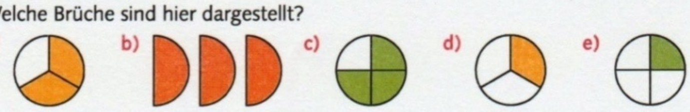
Um unechte Brüche in eine gemischte Zahl zu verwandeln, muss man ermitteln, wie oft der Nenner in den Zähler passt. Das ergibt die ganze Zahl. Der Rest ergibt einen echten Bruch.

1. Grundlagen des Bruchrechnens

1.1. Arten von Brüchen

518 Welche Brüche sind hier dargestellt?

a) b) c) d) e)



Bruchharten

Echte Brüche: Der Zähler ist **kleiner** als der Nenner.
Z. B.: $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{11}{20}$ → Der Wert des Bruches ist kleiner als ein Ganzes.

Unechte Brüche: Der Zähler ist **größer** als der Nenner.
Z. B.: $\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}$ → Der Wert des Bruches ist größer als ein Ganzes.

Uneigentliche Brüche: Der Zähler ist ein **Vielfaches** des Nenners oder **gleich** dem Nenner.
Z. B.: $\frac{4}{2} = 2, \frac{6}{2} = 3, \frac{5}{5} = 1$

Stammbrüche: Der Zähler ist immer **1**.
Z. B.: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$

Dezimalbrüche: Der Nenner ist 10, 100, 1 000 …
Z. B.: $\frac{3}{10}, \frac{15}{100}, \frac{250}{1000}$

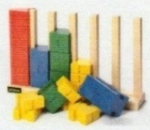
519 Gib jeweils fünf Beispiele an.

echte Brüche: ……………………………………………………

unechte Brüche: ……………………………………………

uneigentliche Brüche: ………………………………………

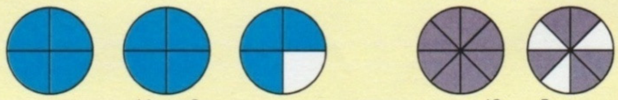
Dezimalbrüche: ……………………………………………



520 H1/K1 Kreuze jeweils die richtige Bruchart an.

	$\frac{5}{6}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{1000}$
echter Bruch:	☐	☐	☐	☐	☐
unechter Bruch:	☐	☐	☐	☐	☐
uneigentlicher Bruch:	☐	☐	☐	☐	☐
Stammbruch:	☐	☐	☐	☐	☐
Dezimalbruch:	☐	☐	☐	☐	☐

Unechte Brüche lassen sich immer als **gemischte Zahl** angeben.



$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$

11.2 Anhang 2 – Einstieg in Dreiecke

Station 1 (Schwerpunkt Seitenlängen) – pinke Dreiecke

1. Miss die Seiten des Dreiecks ab. Wie lange sind sie?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich lange Seiten?

____

2. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

3. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?____

Station 2 (Schwerpunkt Seitenlängen) – hellgrüne Dreiecke

1. Miss die Seiten des Dreiecks ab. Wie lange sind sie?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich lange Seiten?

____

2. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

3. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?____

Station 3 (Schwerpunkt Seitenlängen) – dunkelblaue Dreiecke

1. Miss die Seiten des Dreiecks ab. Wie lange sind sie?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich lange Seiten?

____

3. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

4. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?____

Station 4 (Schwerpunkt Winkel) – orange Dreiecke

1. Wie groß sind die einzelnen Winkel?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich große Winkel?

____

2. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

3. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?____

Station 5 (Schwerpunkt Winkel) – braune Dreiecke

1. Wie groß sind die einzelnen Winkel?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich große Winkel?

____

2. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

3. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?______________________________________

Station 6 (Schwerpunkt Winkel) – dunkelgrüne Dreiecke

1. Wie groß sind die einzelnen Winkel?____

Was fällt dir auf? Gibt es gleich große Winkel?

____

2. Zähle alle drei Winkel zusammen. Wie viel Grad haben alle Winkel im Dreieck gemeinsam?______

3. Wie könnte man ein solches Dreieck bezeichnen?______________________________________

Beschriftung von Dreiecken

1. Trage die Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn im Dreieck ein, beginne links unten.

2. Die zu einem Eckpunkt gehörige Seite liegt gegenüber und wird mit einem Kleinbuchstaben beschriftet, z. B: A - a.

3. Nun beschrifte die Winkel: α beim Eckpunkt A, β beim Eckpunkt B und γ beim Eckpunkt C.