



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Mathematik auf der Weltkugel

Phänomene auf der Erde beschreiben und erklären

verfasst von / submitted by

Joseph Hochwarter

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 412 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Physik UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Vorwort

Ausschlaggebend für die Beschäftigung mit diesem Thema im Zuge einer Diplomarbeit, war ein Vortrag von Mag. Franz Schoberleitner mit dem Titel „*Die Erde ist rund... Mathematische Fragen und Aktivitäten im Zusammenhang mit der Kugelgestalt der Erde*“ ([Sch19]) an der Universität Wien. Dadurch bin ich erstmals mit dem schulmathematischen Potential, welches von diesem Thema ausgeht, in Berührung gekommen.

Anhand simpler Beobachtungen und einfacher Mathematik mehr über die Welt und die Auswirkungen ihrer Kugelgestalt erfahren zu können, hat in mir einen gewissen Forschergeist erweckt.

Neben allen anderen Werken, die im Literaturverzeichnis angegeben sind, war vor allem Berthold Schuppars „*Geometrie auf der Kugel*“ ([Sch17]) als zeitgemäßes und für Lehramtsstudierende gedachtes Buch über Kugelgeometrie ein Fundament dieser Arbeit.

Besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger, der bereit war diese Arbeit zu betreuen und durch seine hilfreichen Anregungen einen großen Anteil dazu beigetragen hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Aktueller und historischer Hintergrund	3
2.1	„Die Erde ist flach.“ – Ein alternatives Weltbild	3
2.2	Die Entwicklung der Sicht auf die Welt-„Kugel“ – Geozentrisches Weltbild	5
2.3	Heliozentrisches Weltbild	8
3	Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen	13
3.1	Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius	13
3.1.1	Die Methode des Eratosthenes	13
3.1.2	Die Methode des Posidonius	16
3.1.3	Den Erdradius mittels Höhensatz ermitteln	17
3.1.4	Bestimmung des Erdradius durch Beobachtung von Objekten hinter dem Meereshorizont	18
3.1.5	Bestimmung des Erdradius durch Messung der Kimmtiefe	23
3.2	Bestimmung der Sichtweite – Wie weit kann man sehen?	25
3.2.1	Experiment: Wie weit sieht man wirklich?	27
3.3	Aufwölbung eines Sees	29
3.3.1	Turm am Seeufer	32
4	„Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie	33
4.1	Grundlagen	33
4.1.1	Begriff und Eigenschaften der Kugel	33
4.1.2	Schnittfiguren von Ebenen mit einer Kugel	34
4.1.3	Kugelzweiecke und Kugeldreiecke	37
4.1.4	Polardreieck	41
4.2	Geografische Koordinaten	43
4.3	Entfernungen und Wege	45
4.3.1	Orte mit gleicher geografischer Länge	45
4.3.2	Weg auf einem Breitenkreis	46
4.3.3	Orte mit gleicher geografischer Breite	47
4.3.4	Kürzeste Entfernung zweier beliebiger Orte auf der Erde I	49
4.4	Sphärische Trigonometrie	50
4.4.1	Seitenkosinussatz	51
4.4.2	Kürzeste Entfernung zweier beliebiger Orte auf der Erde II	53
4.4.3	Winkelkosinussatz	54
4.4.4	Sinussatz	55

4.4.5	Rechtwinkelige Kugeldreiecke	56
4.4.5.1	Nördlichster Punkt einer Orthodrome	58
5	Richtungen und Kurse	61
5.1	Richtungsangaben auf der Erde	61
5.2	Kursrichtungen	62
5.2.1	Berechnung des Anfangskurs oder „In welcher Richtung liegt...?“	62
5.2.2	Kurs und Position nach einer bestimmten Strecke	63
5.2.2.1	Kürzeste Verbindung auf einer Landkarte	65
5.3	Loxodrome	67
6	Kartografie	75
6.1	Grundbegriffe	75
6.2	Azimutalprojektionen	76
6.2.1	Gnomonische Projektion	76
6.2.2	Stereografische Projektion	79
6.2.3	Lambert'sche Azimutalprojektion	81
6.2.4	Weitere Azimutalprojektionen	83
6.3	Zylinderprojektionen	85
6.3.1	Plattkarte	85
6.3.2	Flächentreuer Zylinderentwurf nach Lambert	86
6.3.3	Mercator-Projektion	89
6.4	Kegelprojektionen	93
6.4.1	Abstandstreue Kegelprojektion	94
7	Fazit	97
	Literaturverzeichnis	101
	Abstract	105

1 Einleitung

Alles was die Menschheit heute über die Erde weiß, wurde hart und über lange Zeit erarbeitet. Und obwohl wir viel über die Erde wissen, wissen wir längst noch nicht alles. In vielerlei Hinsicht war und ist dabei die Mathematik ein wichtiges Werkzeug.

Mithilfe von Geometrie (altgriechisch für „Erdmessung“ oder „Erdmaß“) war es möglich, viele Fragestellungen hinsichtlich Erdvermessung, Navigation oder Kartografie zu lösen. In diesen Kategorien tauchen *Phänomene* auf, von denen manche in der nachfolgenden Arbeit beschrieben werden. So kann man vorausblickend schon anmerken, dass z. B. kürzeste Verbindungen auf der Weltkugel in womöglich unerwarteter Richtung verlaufen oder auch Weltkarten die Erde in gewisser Hinsicht falsch darstellen. Vor allem wird darauf Wert gelegt, dass sich die beschriebenen Phänomene, soweit es möglich ist, mit Schulmathematik beschreiben lassen bzw. nur ein wenig darüber hinaus gehende Mathematik erfordern. Für tiefergehende Betrachtungen auf der Weltkugel, wie Kursrichtungen oder Linien mit konstantem Kurs, muss auf die Kugelgeometrie zurückgegriffen werden, die schon lange nicht mehr im Lehrplan österreichischer Regelschulen zu finden ist.¹

Es ist schwer zu glauben, doch die Welt-„Kugel“ ist für manche Menschen auch noch heutzutage eine nicht akzeptierte Tatsache. Die sogenannten „Flat-Earther“ glauben trotz bildlicher, technischer und wissenschaftlicher Belege nicht an eine (annähernd) kugelförmige Erde. Dass die Flat Earth Society ihre Theorien über soziale Netzwerke verbreitet, macht sie für jeden leicht greifbar. Besonders Heranwachsende informieren sich wahrscheinlich täglich in sozialen Netzwerken, wo sich Falschnachrichten und Gerüchte wie ein Lauffeuer verbreiten. Auch das geradezu in letzter Zeit modern gewordene Negieren oder Infragestellen wissenschaftlicher Errungenschaften macht die Betrachtung von historisch wichtigen wissenschaftlichen Beiträgen im Schulunterricht sinnvoll. Gerade als Lehrkraft hat man die Verantwortung darüber, dass Lernende ein Gefühl, ja vielmehr eine Kompetenz dafür entwickeln, sogenannte „Fake News“ kritisch zu hinterfragen und als solche zu identifizieren. Die Methode des Eratosthenes ist ein sehr früher *Meilenstein* in der Naturwissenschaft, mit der es möglich war, den Umfang der Erde als Kugel näherungsweise zu bestimmen. Dahinter verbirgt sich simple Mathematik, weshalb beispielsweise gerade dieses Thema prädestiniert für den Schulunterricht und interessant für Lehrende ist. Es handelt sich bei den einzelnen Kapiteln nicht um konkret ausformulierte Unterrichtsvorschläge, sondern um Anreize für einen realitätsnahen, anwendungsbezogenen Mathematikunterricht, der hin und wieder Erstaunen hervorrufen kann, weil die Ergebnisse dem bisherigen Verständnis von Schüler*innen widersprechen könnten. Außerdem bilden die nachfolgenden Inhalte ein gutes Repertoire für Lehrkräfte, um Argumente gegen *alternative* oder falsche Weltanschauungen parat zu haben.

¹Zumindest enthält das Schulbuch [RLW69] aus 1969 ein ausführliches Kapitel zur Kugelgeometrie.

2 Aktueller und historischer Hintergrund

2.1 „Die Erde ist flach.“ – Ein alternatives Weltbild

Wie bereits in den einleitenden Worten erwähnt, stellt sich die Frage nach der Gestalt unserer Erde für manche Menschen auch heute noch als Glaubensfrage dar. Die „Flat Earth Society“¹ bezeichnet sich selbst nicht als Religion und wehrt sich dagegen, als solche bezeichnet zu werden. „*The Flat Earth Society is a group actively promoting the Flat Earth Movement worldwide [...] The Flat Earth Theory is neither officially nor unofficially associated with any religion.*“²

Tatsächlich wirkt der Web-Auftritt der „Flat Earth Society“ professionell und umfangreich. Um einen kurzen Überblick vor Augen zu haben, sind im Folgenden einige Theorien der „Flat Earther“ aufgelistet.³

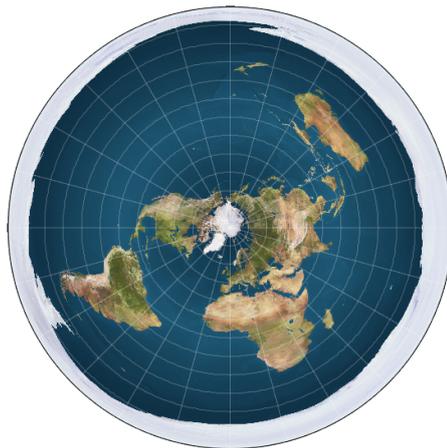


Abbildung 2.1: Flache Erde

(Quelle: <https://wiki.tfes.org/images/4/43/Map.png>, besucht am 05. Dez. 2019)

- Die Erde hat die Form einer Scheibe mit dem Nordpol im Zentrum und der Antarktis als Eis-Wall am Rand der Scheibe, welcher die Ozeane auf der Erde hält. Dementsprechend zeigt ein Kompass auf der flachen Erde immer zum Zentrum, dem Nordpol.

¹[Fla19]

²[Fla19], https://wiki.tfes.org/Flat_Earth_-_Frequently_Asked_Questions#What_is_the_Flat_Earth_Society.3F

³[Fla19]

2 Aktueller und historischer Hintergrund

- Die Sonne kreist über der flachen Erde. Das Sonnenlicht ist beschränkt auf einen definierten Lichtkegel, der nie die ganze Erde gleichzeitig beleuchtet. Somit ergeben sich die Tag- und Nachtzyklen auf der Erde. Der Sonnenaufgang sowie der Sonnenuntergang werden mithilfe von „Elektromagnetischer Beschleunigung“ erklärt. Ebenso kreist der Mond über der Erde.
- Die Jahreszeiten ergeben sich durch die Veränderung der Sonnenbahn über der Erde. Kreist die Sonne in großem Radius über der Erde, herrscht auf der nördlichen „Hemisphere“ Winter und auf der südlichen „Hemisphere“ Sommer. Übers Jahr vergrößert und verkleinert sich der Radius der Sonnenbahn.
- Die Erde ist kein Planet per Definition. Sie sitzt im Zentrum unseres Sonnensystems und um sie rotieren die anderen (kugelförmigen) Planeten sowie die Sonne. Gravitation existiert nur in einem geringen Ausmaß, weshalb die Erde durch sie auch nicht in eine kugelförmige Form „gezogen“ wurde. Stattdessen beschleunigt die flache Erde immerwährend mit $9,8 \frac{m}{s^2}$ nach oben und „drückt“ uns somit auf die Erdoberfläche. Grund dafür ist die sogenannte „universale Acceleration“. Sie kann die Erde allerdings nicht auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigen, denn das ist laut Spezieller Relativitätstheorie nicht möglich. Die Erde müsste nämlich unendlich lang beschleunigt werden um Lichtgeschwindigkeit zu erreichen.
- Weltraumorganisationen haben bis heute auf unzähligen Missionen nicht entdecken können, dass die Erde eine flache Scheibe sei. Alle diese Organisationen sind Teil einer Verschwörung, die Raumfahrt und Erforschung des Weltraums fälscht. Im „Race to the Moon“ in den 1960er Jahren, zwischen der UdSSR und der USA, führte die Besessenheit der beiden Länder, den jeweils anderen zu besiegen, zum Vortäuschen von Leistungen, um mit den anderen mithalten zu können. Seit damals ist die Verschwörung hauptsächlich durch Gier motiviert, sowie durch die Möglichkeit, Fördergelder zu veruntreuen, da „Fake Space Travelling“ natürlich billiger ist als echte Weltraumforschung.
Die Weltraumorganisationen stellen die Erde als rund dar, weil sie erwarten, dass sie rund ist.

Diese oben angeführten Thesen werfen natürlich noch viel mehr Fragen auf, als sie beantworten. Tatsächlich ist die Flat Earth Society gut gerüstet und antwortet gerne auch mit physikalischen Konzepten und Formeln. Diese dann nachzuvollziehen ist nicht immer ganz einfach und verursacht manchmal auch etwas Kopfzerbrechen. Jedoch enden die doch recht ausführlich angelegten Begründungen vorwiegend vereinfacht in Sätzen wie:

- *Die Welt ist nicht rund, also ist sie flach.*
- *Bezieht man sich auf seine eigenen Sinne, so beobachtet man um sich herum eine flache und keine sphärische heliozentrische Welt.*

Interessant ist, dass seitens der Flat Earth Society auch auf die Methode des Eratosthenes eingegangen wird. Es wird jedoch behauptet, dass Eratosthenes nur den Umfang

2.2 Die Entwicklung der Sicht auf die Welt-„Kugel“ – Geozentrisches Weltbild

der Erdkugel bestimmt hat, weil er die Annahme getroffen hat, dass die Erde eine Kugel sei. Laut Flat Earth Society hat Eratosthenes also nicht den Umfang, sondern den Durchmesser der flachen Erde bestimmt. Dem ist in erster Linie wenig entgegenzusetzen. Letztlich ist aber doch davon auszugehen, dass Eratosthenes auch andere Belege für die Kugelgestalt der Erde hatte und seine Annahme berechtigt war.

In den letzten 60 Jahren verlor die Gemeinschaft der Flat Earther an Anhängern. Seit Anbeginn des digitalen Zeitalters werden allerdings wieder Zuwächse verzeichnet, woran soziale Medien wahrscheinlich eine Mitschuld tragen. So ergab eine Umfrage, dass 2 % der US-Amerikaner sicher an eine flache Erde glauben.⁴ Grob überschlagen wären das ca. 6 Millionen Menschen nur in Amerika.

In dieser Arbeit soll es nicht um die „flache Erde“ gehen, auch wenn beim Leser jetzt eventuell das Bedürfnis nach mehr fragwürdigen Theorien, nebulösen Thesen oder verdrehter Physik entstanden ist. Vielmehr soll es darum gehen, wie unser heutiges Weltbild überhaupt entstanden ist, wie man Heranwachsenden durch gezielten Unterricht Vertrauen in die Wissenschaft vermitteln und wie uns Mathematik dabei helfen kann.

2.2 Die Entwicklung der Sicht auf die Welt-„Kugel“ – Geozentrisches Weltbild

Mit dem Geozentrischen Weltbild bezeichnet man die Weltvorstellung, die die Gelehrten um ca. 600 v. Chr. hatten. Wie dem Wort *geozentrisch* bereits entnommen werden kann, ist dabei die Erde selbst der Mittelpunkt aller Himmelskörper. Dabei war die Kugelgestalt der Erde in diesem Konzept bereits weitaus angenommen.

Der Geograph Strabon hat die Theorie des Geozentrismus im letzten Jahrhundert v. Chr. so zusammengefasst:⁵

„Die Lehren der Physiker sind die folgenden: Das Weltall und das Himmelsgewölbe sind kugelförmig. Die Bewegung der schweren Körper strebt nach dem Mittelpunkt. Verdichtet um das Zentrum des Weltalls steht die kugelförmige Erde. Sowohl die Erde als auch der Himmel haben einen gemeinsamen Mittelpunkt. Durch diesen Mittelpunkt und durch die Mitte des Himmels geht die Achse der Welt. Der Himmel befindet sich um seine Achse herum vom Osten her nach Westen zu in gleichmäßiger Bewegung. Mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen sich auch die Fixsterne des Himmels. Die Bahnen der Fixsterne am Himmel sind parallele Kreise. Die bekanntesten Parallelkreise sind der Äquator, die beiden Wendekreise und die Polarkreise. Die Planeten, die Sonne und der Mond bewegen sich auf schiefen Kreisen durch den Zodiakus⁶...“⁷

Die Erkenntnisse, die einst zu dieser Theorie geführt haben, hat Ptolemäus in seinem Hauptwerk, dem *Almagest* als Standardwerk der antiken Astronomie ausgearbeitet und

⁴[Pic19]

⁵[Sza92], S. 60 ff.

⁶bezeichnet eine 20° breite Zone um die Ekliptik (ein Großkreis auf der Himmelskugel bzw. eine Ebene in der die Sonne und die Planeten liegen)

⁷[Sza92], S. 60

2 Aktueller und historischer Hintergrund

als Überschriften im Buch I⁸ zusammengefasst:

1. *Das Himmelsgewölbe hat Kugelgestalt und dreht sich wie eine Kugel.*
2. *Ihrer Gestalt nach ist die Erde für die sinnliche Wahrnehmung, als Ganzes betrachtet, gleichfalls kugelförmig.*
3. *Die Erde ist das Zentrum des Himmelsgewölbes.*
4. *Die Erde verhält sich wie ein Punkt zu den Himmelskörpern.*
5. *Sie hat ihrerseits keine Bewegung, die zur Ortsveränderung führt.*

Die Kugelgestalt und die Kreisbewegung des Himmelsgewölbes wurden bei Ptolemäus wie folgt begründet. Man beobachtet, dass Sonne, Mond und die Sterne am Nachthimmel sich von Osten nach Westen bewegen – und das in Parallelkreisen. Dies passiert zunächst vom Horizont aus aufwärts bis ein Höchststand erreicht wurde. Dann folgt wieder eine absteigende Bewegung bis sie schließlich im Westen hinter dem Horizont verschwinden. Nach einer gewissen Zeit erscheinen sie im Osten wieder und das Spiel beginnt von vorne. Eine besondere Rolle spielen die Sterne, die immer sichtbar sind. Am Himmel ist eine vollständige Kreisbewegung dieser Sterne zu verzeichnen, wenn man die Bogenteile ergänzt, die man bei Tageslicht nicht sehen kann. Für die Kreisbahnen aller Sterne ist ein gemeinsamer Mittelpunkt zu beobachten – der *Pol* der Welt. Somit war auch der Begriff der *Achse* der Welt gegeben.

Die zweite Erkenntnis in obiger Auflistung liest sich zunächst als reine Fortsetzung dessen, dass der Himmel kugelförmig ist. So erschien es eben sinnvoll, dass auch die Erde eine Kugel sein muss. Tatsächlich wurde ihre Kugelgestalt aus der Beobachtung geschlossen, dass eben nicht überall auf der Erde der Aufgang oder Untergang der Sonne zum gleichen Zeitpunkt stattfindet und dass der Mond oder die Sterne nicht überall gleichzeitig jederorts zu sehen sind. Alle sichtbaren Himmelskörper konnten stets früher im Osten und erst dementsprechend später westlich wahrgenommen werden. Besonders wesentlich war jedoch die Beobachtung der Mondfinsternisse. Der Eintritt einer Mondfinsternis, der ja zu einem fixen Zeitpunkt passiert, wurde nicht überall zur gleichen Zeit vernommen. Dies war darauf zurückzuführen, dass die Ortszeit damals über die sog. Mittagsstunde, also den Höchststand der Sonne am jeweiligen Tag, ermittelt wurde. Östliche Bewohner verzeichneten den Eintritt der Mondfinsternis später als westliche. Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.) folgte die Kugelgestalt der Erde übrigens aus dem Erdschatten bei Mondfinsternissen. Dessen Rand hat immer die Form eines Kreisbogens – der Erdschatten selbst hat also immer (d.h. bei jeder Mondfinsternis) die Form einer Kreisscheibe. Daraus schloss Aristoteles, dass die Erde eine Kugel sein muss. Denn unter allen geometrischen Körpern besitzt nur die Kugel in jeder Lage eine Kreisscheibe als Schatten.⁹

Die Behauptung, dass die Erde fest im Zentrum des Universums „steht“ geht wohl auf einen Schüler von Thales, Anaximander, zurück. Er war jedoch kein Vertreter derer, die

⁸vgl. [Pto12], Erstes Buch, S. 5 ff.

⁹vgl. [Jor09], Buch II, S. 82

2.2 Die Entwicklung der Sicht auf die Welt-„Kugel“ – Geozentrisches Weltbild

die Kugelgestalt der Erde behaupteten. Seiner Ansicht nach hätte die Erde eine zylindrische Form. Unbeweglich sei sie deshalb, da sie sich in jede Richtung von allen Dingen gleich weit entfernt befindet – deshalb gäbe es auch keinen Grund, warum sie sich in irgendeine bevorzugte Richtung bewegen sollte. Er folgerte die feste, unbewegliche Lage der Erde also aus dem zentralen Ort, in dem sie sich befindet. Diese These ist nur schwer mit einer zylindrischen Erde vereinbar, sehr wohl aber mit einer kugelförmigen Erde. Wohl auch deswegen wurde am Erdzylinder nicht festgehalten.¹⁰

Von der Größe der Erde hatte im 4. Jhdt. v. Chr. bereits Aristoteles eine ungefähre Vorstellung. Er vertrat die Meinung, dass die Erde gegenüber der Entfernung der Sterne gar nicht so groß sein kann. Die Begründung, die er dafür fand, bezieht sich auf den Horizont, der ja als Kreis den sichtbaren vom unsichtbaren Teil des Himmels trennt. Geht man also beispielsweise ein Stück in Nord-Süd-Richtung, so verändert sich der Horizont und es würde ein anderes Himmelsbild mit anderen Sternen sichtbar. Wäre also die Erde sehr groß, würde eine derart markante Veränderung des Sternengewölbes nicht möglich sein. Ptolemäus verfeinerte diese Theorie im *Almagest* noch einmal deutlich. Er stellte fest, dass die Größe der Erde zur Entfernung der Fixsterne *„wirklich nur in dem Verhältnis eines Punktes steht“*¹¹. Der Beweis dafür ist, dass die scheinbaren Größen der Sterne und ihre gegenseitigen Abstände zu jeder Zeit und unabhängig vom Ort, von dem aus sie beobachtet werden, in keiner Weise voneinander abweichen.

Dass die Erde schließlich selbst keine Bewegung ausführt, erschließt sich nach Ptolemäus bereits aus den vorangegangenen Ausarbeitungen. Alle Körper strebten im freien Fall nach der Mitte des Universums, welche gleichzeitig der Mittelpunkt der Erdkugel sei – denn schließlich strebten alle Körper auf der Erde und im Universum lotrecht nach dem Erdmittelpunkt. Ptolemäus erläutert, dass die *„leichten [...] Körper so weit es die ihnen von Natur aus anhaftende Neigung zum freien Fall gestattet [...] empor nach außen (streben)“*¹², und somit im Weltall verharren können. Er gelangt weiters zu der Erkenntnis, dass das gesamte Volumen der Erde weitaus größer sein muss als alle Gegenstände, die auf sie fallen. Hätte auch die Erde selbst eine Neigung zum „Fallen“, so würde sie den anderen Objekten aufgrund ihres massiven Übergewichts immer vorausseilen.

Offensichtlich, gab es zur Zeit Ptolemäus’ auch Menschen, die seinen Ausarbeitungen entgegengetreten sind. Liest man im *Almagest* nach, so gab es durchaus Philosophen, die anstatt der Drehung des Himmelgewölbes eine Drehung der Erdkugel für möglich gehalten haben. Auch wenn Ptolemäus teilweise durchaus eingestanden hat, dass so etwas möglich sei, ist er diesen Menschen mit einer Vehemenz begegnet, welche sich vermutlich am ehesten aus den (übersetzten) Originaltexten ersehen lässt:

„Nun stellen sich manche Philosophen, ohne gegen die hier entwickelten Ansichten etwas einwenden zu können, ein nach ihrer Meinung glaubwürdiges System zusammen und geben sich dem Glauben hin, daß keinerlei Zeugnis wider sie sprechen werde, wenn sie z.B. das Himmelsgewölbe als unbeweglich annähmen, während sie die Erde um dieselbe Achse von Westen nach Osten

¹⁰[Sza92], S. 61 ff.

¹¹[Sza92], S. 68

¹²[Pto12] S. 16

2 Aktueller und historischer Hintergrund

*täglich nahezu eine Umdrehung machen ließen, oder auch wenn sie beiden eine Bewegung von einem Gewissen Betrag erteilten, nur, wie gesagt, um dieselbe Achse und im richtigen Verhältnis zur Erhaltung der auf gegenseitigem Überholen beruhenden Beziehungen. Wenn auch vielleicht, was die Erscheinungen in der Sternenwelt anbelangt, bei der größeren Einfachheit des Gedankens nichts hinderlich sein würde, daß dem so wäre, so ist doch diesen Männern entgangen, daß aus den uns selbst anhaftenden Eigenschaften und den eigenartigen atmosphärischen Verhältnissen die ganze Lächerlichkeit einer solchen Annahme ersichtlich werden muß. Gesetzt nämlich, wir machten ihnen das Zugeständnis, daß im Widerspruch mit ihrer natürlichen Beschaffenheit aus den feinsten Molekülen bestehenden und daher leichtesten Substanzen entweder gar keine Bewegung hätten oder unterschiedslos dieselbe wie die Körper von entgegengesetzter Natur – wo doch die atmosphärischen Massen und die aus weniger feinen Molekülen gebildeten Körper so sichtlich den Trieb zu schnellerer Fortbewegung äußern als sämtliche mehr erdartigen Körper – während die aus den größten Molekülen bestehenden und daher schwersten Körper in diesem Fall eine eigene rasend schnelle und gleichförmige Bewegung hätten – wo doch wieder die erdartigen Körper anerkanntermaßen bisweilen nicht einmal auf die von anderen Körpern ihnen aufgedrungene Bewegung hätten – wo doch wieder die erdartigen Körper anerkanntermaßen bisweilen nicht einmal auf die von anderen Körpern ihnen aufgedrungene Bewegung in entsprechender Weise reagieren – nun, so müßten sie doch zugeben, daß die Drehung der Erde die gewaltigste von ausnahmslos allen in ihrem Bereich existierenden Bewegungen wäre, insofern sie in kurzer Zeit eine so ungeheuer schnelle Wiederkehr zum Ausgangspunkt bewerkstelligte, daß alles, was auf ihr nicht niet- und nagelfest wäre, scheinbar immer in einer einzigen Bewegung begriffen sein müßte, welche der Bewegung der Erde entgegengesetzt verlief. So würde sich weder eine Wolke noch sonst etwas, was da fliegt oder geworfen wird, in der Richtung von Osten ziehend bemerkbar machen, weil die Erde stets alles überholen und in der Bewegung vorauseilen würde, so daß alle übrigen Körper scheinbar in einem Zuge nach Westen, d.i. nach der Seite, welche die Erde hinter sich läßt, wandern müßten.*¹³

2.3 Heliozentrisches Weltbild

Lange bevor Ptolemäus das geozentrische Weltbild im „Almagest“ niedergeschrieben und begründet hatte, war es Aristarch von Samos, der bereits die Theorie eines heliozentrischen Weltbilds vor Augen hatte. Hierbei sollte sich die Sonne im Zentrum befinden und die Erde, sowie alle anderen Planeten sich um sie herum. Mit beiden Systemen, sowohl mit dem geozentrischen als auch mit dem heliozentrischen konnten die Vorgänge gut beschrieben werden. Das heliozentrische Weltbild erforderte jedoch zusätzlich eine Rotation um eine erdinnere Achse um den Tag-Nacht-Rhythmus zu erklären. Warum Ptolemäus

¹³[Pto12] S. 18,19

eine Eigenrotation der Erde nicht für möglich gehalten hat, ist oben ausführlich zitiert. Er hatte jedoch noch ein weiteres Argument dafür: Eine senkrecht nach oben geworfene Kugel müsse ja, sofern die Erde eine immerwährende Rotation ausführt, eine Abweichung in westlicher Richtung erfahren. Kurzum: Die Kugel dürfte nie am gleichen Ort wieder auftreffen, von dem aus sie senkrecht nach oben geworfen wurde. Dies konnte aber nicht beobachtet werden.

In der Zeit nach Ptolemäus, also nach ca. 160 n. Chr. war das geozentrische Weltbild mehr oder weniger gefestigt, was nicht bedeuten soll, dass alle Gelehrten die Idee der zentralen ruhenden Erde vertraten. Es dauerte einige Jahrhunderte bis der Perser Al-Biruni und später auch Nikolaus Kopernikus die Begründungen von Ptolemäus durchleuchteten und zu widerlegen versuchten. Der senkrechte Wurf, ein oben beschriebenes Hauptargument Ptolemäus', wurde zum zentralen und wegweisenden Thema.¹⁴ Beide trafen in gewisser Weise dieselbe revolutionäre Annahme (auch gestützt durch Ausarbeitungen anderer Wissenschaftler), dass sich auch nicht direkt mit der Erdoberfläche verbundene Körper mit ihr „mitdrehen“.¹⁵ Ein senkrecht nach oben geworfener Körper führt also zwei Bewegungen aus, nämlich eine senkrecht zur Erdoberfläche nach oben und eine weitere, die in horizontaler Richtung oberhalb der Erdoberfläche verläuft und zudem noch dieselbe Geschwindigkeit wie diese besitzt. Damit wäre erklärt, warum eine senkrecht nach oben geworfene Kugel keine Abweichung in westliche Richtung erfährt. Kopernikus folgerte daraus die Unrichtigkeit des ptolemäischen, geozentrischen Weltbilds. Da er sowieso der Meinung war, sein heliozentrischer Ansatz würde die Vorgänge am Himmel besser beschreiben, kam ihm das nur gelegen – auch wenn er keine stichhaltigen Beweise dafür liefern konnte.¹⁶ Dem großen Galileo Galilei gelang es bald darauf, Hinweise für die Richtigkeit des heliozentrischen Systems zu erlangen. Aus Beobachtungen der Venusphasen schloss er, dass sich die Venus um die Sonne und nicht um die Erde drehen muss – als Beweis galten diese Entdeckungen aber nicht. In seinem Werk *„Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische“*¹⁷ legt er seine Tendenz zum Heliozentrismus dar. Natürlich war auch eine erdeigene Rotation Thema. Jedoch legte Galileo bereits zu Beginn des Buches fest, dass *„kein irdisches Experiment Auskunft über den Bewegungszustand der Erde geben könne“*¹⁸. Die Veröffentlichung des Werks wurde durch die katholische Kirche gestoppt, welche natürlich daran Interesse gehabt hätte, ein geozentrisches Weltbild mit der Erde als Zentrum jeglichem Daseins zu verbreiten. Galileo Galilei musste sich vor der Römischen Inquisition verantworten, wurde verurteilt und dazu gezwungen jegliche Existenz des heliozentrischen Weltbilds zu widerrufen:

„... Ich Galileo Galilei, Sohn des verstorbenen Vincenzo Galilei aus Florenz, 70 Jahre alt, schwöre ab, verfluche und verwünsche mit aufrichtigem Herzen und ungeheucheltem Glauben besagte Irrtümer und Ketzereien: nämlich, für

¹⁴[HL16], S. 186,187

¹⁵heutzutage bekannt als Trägheitsprinzip

¹⁶[HL16], S. 188

¹⁷[GFS14]

¹⁸[HL16], S. 188

2 Aktueller und historischer Hintergrund

*wahr gehalten und geglaubt zu haben, dass die Sonne der Mittelpunkt der Welt und unbeweglich und die Erde nicht der Mittelpunkt sei und sich bewege.*¹⁹

Unmittelbar nach Galilei entwickelte Isaac Newton das Newton'sche Bewegungsgesetz $F = m \cdot a$ und entdeckte zudem das Gravitationsgesetz, welches angibt welche Kraft zwischen zwei Körpern wirkt – abhängig von deren Masse. Die Frage, ob sich die Erde um die Sonne oder die Sonne um die Erde dreht, beantwortete er für alle in unvermuteter Form: Keine der beiden Theorien sei richtig, jedoch käme der heliozentrische Ansatz der Wirklichkeit näher. Die Sonne besitze eine deutlich höhere Masse als die Erde, somit liege deren gemeinsamer Schwerpunkt im Inneren der Sonne. Die Erdrotation war damit allerdings nicht erklärt – das war für Newtons Theorie auch nicht nötig. Gemeinsam mit Christian Huygens sagte Isaac Newton die Abplattung der Erde voraus, welche nämlich durch eine erdeigene Rotation entstehen müsse. Diese Abplattung wurde durch die tatsächliche Vermessung von zwei Meridian-Bögen im 18. Jahrhundert bestätigt.²⁰ An der Beobachtung der Erdrotation wurde aber noch länger geforscht. Die genaue Untersuchung der Fallexperimente des Ptolemäus wurde erst durch Arbeiten von Gaspard Coriolis (Coriolis-Kraft) möglich. Durch die Coriolis-Kraft wird aber dem fallenden Objekt ein östlicher Auftreffort vorhergesagt und nicht wie bei Ptolemäus ein westlicher. Die Abweichung ist jedoch bei damals üblichen Fallexperimenten so gering, dass der Nachweis der Erddrehung sehr schwierig wurde. (Ptolemäus hatte bei seinen Experimenten viel größere Auswirkungen vorhergesagt und sich deshalb auf das Nichtvorhandensein der Erdrotation festgelegt.)

Der wohl schönste und anschaulichste, quantitative Versuch die Erdrotation zu beweisen wurde erst Mitte des 19. Jahrhunderts vom französischen Physiker Léon Foucault durchgeführt. Er ließ in der Kuppel des Pariser Panthéon ein 67 m langes Seil mit einer 28kg schweren Kugel befestigen. Die Schwingungsdauer dieses Pendels betrug 16 Sekunden. Man beobachtete, dass sich die Pendelebene in einer Stunde um $11,5^\circ$ im Uhrzeigersinn weiterbewegte.²¹ Ursache der Drehung der Pendelebene ist die schon oben erwähnte Coriolis-Kraft. Sie resultiert einzig und alleine aus der Erdrotation und bewirkt auf der Nordhalbkugel eine Weiterbewegung der Pendelebene im Uhrzeigersinn, auf der Südhalbkugel eine Weiterbewegung der Pendelebene gegen den Uhrzeigersinn. Wohl wegen des recht simplen Aufbaus und der Tatsache, dass dabei die Erdrotation mit eigenen Augen wahrgenommen werden kann, gibt es in vielen Museen Foucault'sche Pendel zu beobachten – so auch im Technischen Museum Wien.

¹⁹[GFS14], S. 3

²⁰[HL16], S. 189

²¹[HL16], S. 190

2.3 Heliozentrisches Weltbild



Abbildung 2.2: Foucault'sches Pendel, Technisches Museum Wien
(©Anna Hochwarter)

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

Viele historische Fragestellungen, welche die Kugelgestalt der Erde betreffen, lassen sich mit vergleichsweise einfachen mathematischen Mitteln lösen. Zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben sind eigentlich nur Kenntnisse über Parallelwinkel, die Ähnlichkeit von Dreiecken, den Lehrsatz des Pythagoras sowie Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck notwendig. Die Erde als Weltkugel wird in den unten angeführten Abhandlungen immer auf einen (Groß-)Kreis als Schnittfläche einer Kugel reduziert. Immer, wenn für Berechnungen oder zum Vergleich der „echte“ Erdradius herangezogen wird, ist damit der mittlere Erdradius $r = 6371$ km gemeint.

3.1 Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius

3.1.1 Die Methode des Eratosthenes

Eratosthenes von Kyrene wurde schon in Kapitel 2.1 erwähnt. Er lebte 275-195 v. Chr., also lange bevor das geozentrische Weltbild etabliert war und nahm an, dass die Erde eine „schwebende“ Kugel ist. Man muss bedenken, dass damals niemand bezeugen konnte, wie die Welt außerhalb der Mittelmeer-Antike aussah und auch niemand sie umfahren konnte.¹ Was Eratosthenes jedoch beobachtete war, dass in Syene (dem heutigen Assuan)

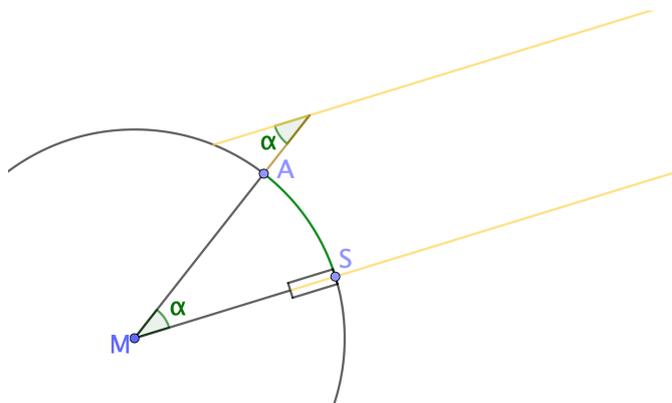


Abbildung 3.1: Messung des Erdumfangs nach Eratosthenes (erstellt mit GeoGebra)

in Ägypten, die Sonne an einem bestimmten Tag im Jahr, dem 21. Juni, mittags genau

¹vgl. [Wag88], S. 298

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

im Zenit steht. Darüber, wie er das bemerkte, gibt es verschiedene Angaben. Einerseits wird berichtet, er beobachtete, wie das Sonnenlicht senkrecht in einen Brunnen fiel.² Andere Quellen berufen sich auf einen Obelisk, dessen Schatten nicht zu sehen war.³ In Alexandria, das einige hundert Kilometer nördlich und – wie Eratosthenes annahm – am selben Meridian liegt, konnte man zum gleichen Zeitpunkt jedoch einen Schatten, bspw. eines Obelisk, beobachten. So stellte Eratosthenes für Alexandria eine Abweichung der Sonnenrichtung von $\frac{1}{50}$ eines Vollkreises fest, was $7,2^\circ$ entspricht. Das ist genau der Winkel, der auch zwischen den beiden Erdradien auftritt, welche auf Assuan und Alexandria zeigen! Somit brauchte er nur noch die Entfernung Assuan-Alexandria zu wissen und konnte den Erdumfang bestimmen. Diese Entfernung betrug 5000 „Stadien“ womit Eratosthenes für den Erdumfang 250000 Stadien berechnete. Man kann diese Länge heute aufgrund der nicht vorhandenen Kontinuität der Längeneinheiten nicht umrechnen. Quantitativ ist es auch gar nicht notwendig dieses Ergebnis zu beurteilen. Vielmehr ist beachtlich, dass die mathematische Abhandlung des Problems vollkommen richtig ist und dass man damals eine Vorstellung der Entfernung Assuan-Alexandria hatte. Nimmt man für die Distanz Alexandria-Syene 890 km an, so erhält man einen Erdumfang von $890 \text{ km} \cdot 50 = 44500 \text{ km}$.

So schlicht und einfach die Methode des Eratosthenes auch wirkt – man müsste vor diesem geometrischen Beweis eigentlich noch ein paar Dinge klarstellen.⁴

1. Die Sonne befindet sich von der Erde so weit entfernt, dass wir die einfallenden Sonnenstrahlen als parallel betrachten können.
2. Parallele Geraden werden von einer sie schneidenden Geraden unter dem gleichen Winkel geschnitten.
3. Kreisbögen, die gleichen Zentriwinkeln entsprechen sind ähnlich. Das Verhältnis ihrer Bogenlängen entspricht dem Verhältnis ihrer Kreisumfänge.
4. Syene und Alexandria liegen auf demselben Meridian.
5. Die Entfernung der beiden Städte ist bekannt.

Heutzutage könnte man die Methode relativ leicht wiederholen. Es bedarf dazu nur zweier Orte unterschiedlicher geographischer Breite, an denen man auf einer annähernd ebenen Fläche jeweils einen „Gnomon“⁵ aufstellt. Dass an einem Ort die Sonne zur Messung im „Zenit“ steht, also senkrecht über dem Himmel, ist nicht notwendig. Sehr wohl sollten die Messungen aber zum jeweiligen Mittag stattfinden, d.h. wenn die Sonne am höchsten steht. Insbesondere bedeutet das, dass die beiden Messorte nicht zwingend auf demselben Meridian liegen müssen. Das wiederum heißt, dass die beiden Messungen auch nicht gleichzeitig stattfinden können. Es ist jedoch nicht ratsam, zwischen den Messungen mehr als einen Tag vergehen zu lassen – die Sonne ändert ihre Deklination stetig und diese

²vgl. [Sch17], S. 3

³vgl. [Wag88], S.299

⁴vgl. [Ste15], Zitat 11

⁵griechisch für „Schattenzeiger“

3.1 Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius

Änderung hat natürlich Einfluss auf die gemessenen Winkel. (Liegen die beiden Orte auf demselben Meridian, so entsteht durch die erzwungene gleichzeitige Messung – der Sonnenstand ist ja an beiden Orten gleichzeitig am höchsten – eine höhere Genauigkeit.) Zur Auswertung ist einzig und alleine die geographische Breite der Orte entscheidend, mit deren Hilfe man den Abstand der beiden Breitenkreise berechnen kann. Aus den gemessenen Einfallswinkeln der Sonne kann dann die Abweichung der Sonnenrichtung zwischen den beiden Messorten berechnet werden. Der Sachverhalt ist in Abb. 3.2 dargestellt. Verlängert man wie in Abb. 3.3 die beiden „Lichtstrahlen“ und ergänzt einen

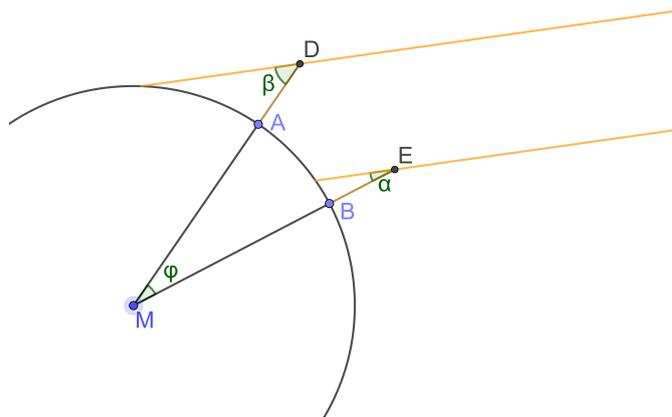


Abbildung 3.2: Adaptierte Methode des Eratosthenes (erstellt mit GeoGebra)

weiteren parallelen Strahl, der durch den Mittelpunkt der Erde geht, so ist die Herleitung des Winkels φ als $\varphi = \beta - \alpha$ offensichtlich. Die beiden Winkel α und β treten

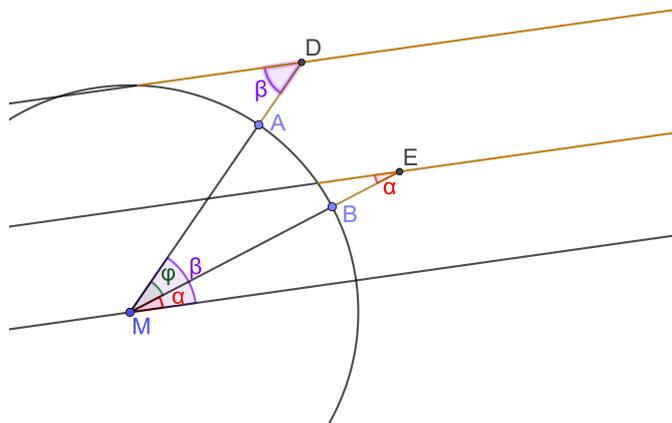


Abbildung 3.3: Adaptierte Methode des Eratosthenes – Erklärung
(erstellt mit GeoGebra)

dann auch am Mittelpunkt M auf, da wie oben festgehalten, zwei Parallele von einer schneidenden Geraden immer im selben Winkel geschnitten werden. Der Winkel φ kann

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

somit einfach berechnet werden.

$$\varphi = \beta - \alpha \quad (3.1)$$

Die zugehörige Bogenlänge AB kann aus den geographischen Breiten der Orte bestimmt werden – siehe dazu Kapitel 4.3.1 auf S. 45. Alternativ kann der Abstand zweier Breitenkreise bzw. auch die Distanz zweier Orte (bspw. bei Betrachtung zweier Orte, die auf einem Meridian liegen) mithilfe von Online-Kartendiensten ermittelt werden.

3.1.2 Die Methode des Posidonius

Weitaus weniger populär als die Methode des Eratosthenes ist die des Posidonius. Posidonius lebte 140-50 v. Chr. und ermittelte mit einem recht ähnlichen Verfahren wie Eratosthenes Erdradius bzw. Erdumfang. Er bediente sich dazu aber nicht der Sonne, sondern des Fixsternhimmels. Genauer gesagt, beobachtete er den Fixstern Canopus an den Orten Rhodos und Alexandria, welche beide am selben Meridian, aber ca. 600 km voneinander entfernt liegen.⁶ Canopus steht auf Rhodos in einem anderen Winkel zum Zenit als in Alexandria. Mithilfe der Differenz dieser Winkel und der Distanz der Messorte kann wie bei Eratosthenes der Erdumfang ermittelt werden. In Abb. 3.4 ist der Sachverhalt nochmals dargestellt. Geometrisch spiegelt diese Methode exakt dieselbe Situation wie bei Eratosthenes wider. Die gelb dargestellten Linien in Abb. 3.4 darf man sich nun nicht als Sonnenstrahlen denken – vielmehr handelt es sich dabei um Lichtstrahlen, die vom Fixstern Canopus ausgehen. Posidonius ermittelte eine Winkeldifferenz $\varphi = 7,5^\circ$

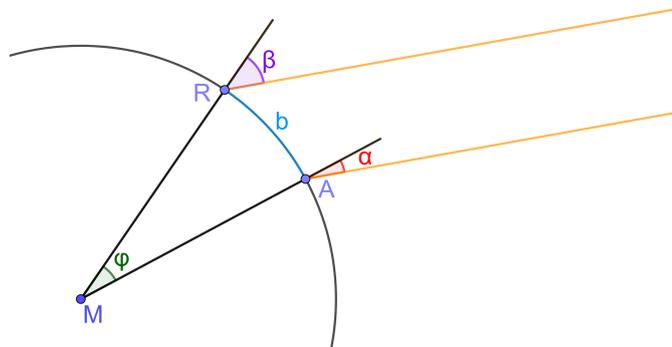


Abbildung 3.4: Methode des Posidonius (erstellt mit GeoGebra)

und nahm die Entfernung der Orte, wie oben schon erwähnt, mit 600 km an. Somit kam er auf einen Erdumfang von 28800 km.

Die Durchführung dieser Methode erfordert auch heutzutage eine gewisse technische Grundausstattung. Man könnte sich heute zum Beispiel zweier Kameras bedienen, welche an verschiedenen Messorten – vorzugsweise am selben Meridian – mit einer guten Wasserwaage nach oben zum Zenit ausgerichtet werden. Bei längerer Belichtungszeit kann man

⁶vgl. [SS82], S.14

auf den Bildern die Spuren von Sternen registrieren.⁷ Der Zenit liegt bei beiden Bildern in der Mitte. Um nun anhand der Bilder die notwendigen Winkel zu ermitteln, muss noch der Abbildungsmaßstab der verwendeten Kamera herausgefunden werden.⁸ Eine solche Messung wurde 1978 in Bochum und Donaueschingen durchgeführt und lieferte den Erdradius zu $r = 6800$ km.⁹

3.1.3 Den Erdradius mittels Höhensatz ermitteln

Eine direkte Bestimmung des Erdradius ist mit der folgenden, etwas aufwändigeren Methode möglich, für die vor allem auch technische Hilfsmittel notwendig sind.¹⁰ In einer gewissen Entfernung – empfohlen werden 1,5 – 2 km – werden zwei Messlatten senkrecht aufgestellt. Beide Messlatten müssen von der jeweils anderen Messlatte aus gesehen sichtbar sein und sich ungefähr auf gleicher Meereshöhe befinden. Am besten sucht man hierbei ebenes Gelände auf. Man markiert nun auf einer Messlatte einen Punkt A und peilt von diesem Punkt aus, in der Horizontalen und mithilfe eines Nivelliergeräts die zweite Messlatte an. Damit erhält man Punkt B in Abb. 3.5. Nun peilt man vom Punkt

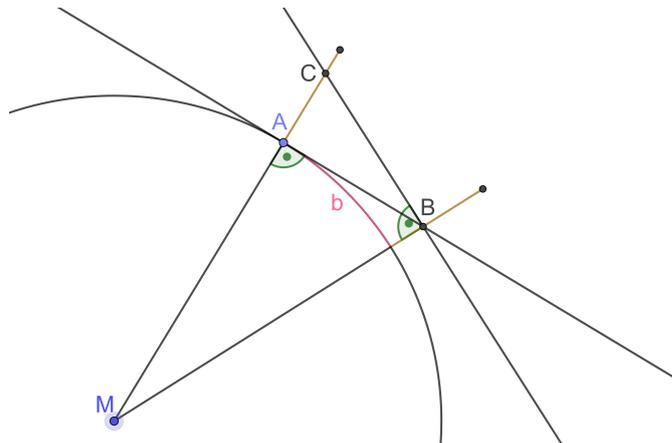


Abbildung 3.5: Erdradius mit Höhensatz (erstellt mit GeoGebra)

B aus in horizontaler Richtung die andere Messlatte an. Dies ergibt einen Punkt C , der aufgrund der Erdkrümmung üblicherweise über dem Ausgangspunkt A liegt. Die Winkel $\angle MAB$ und $\angle MBC$ sind rechte Winkel, da von den Messlatten aus immer in horizontaler Richtung gepeilt wurde. Somit ergibt sich ein rechtwinkeliges Dreieck $\triangle MBC$. Der Abstand der beiden Messlatten, in Abb. 3.5 dargestellt als Kreisbogen b ist im Vergleich zum Erdumfang eher klein. Also kann angenommen werden, dass

$$b \approx \overline{AB}. \quad (3.2)$$

⁷ vgl. [SS82], S. 15 ff.

⁸ vgl. [SS82] S. 18

⁹ vgl. [SS82], S. 16

¹⁰ vgl. [Fac18]

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

Da $\triangle MBC$ rechtwinkelig ist, gilt der Höhensatz.

$$\overline{AB}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{AC}. \quad (3.3)$$

Wegen (3.2) und weil der Radius der Erdkugel $r = \overline{MA}$ ist, kann umgeformt werden zu

$$r = \frac{b^2}{\overline{AC}}. \quad (3.4)$$

Eine Messung dieser Form ist mit Schülerinnen und Schülern in Würzburg durchgeführt worden.¹¹ Die Messpunkte wurden auf zwei Brücken über dem Main verortet. Als knifflig und langwierig wird die Peilung bzw. die Ausrichtung der Nivelliergeräte beschrieben. Mithilfe gut sichtbarer Markierungen und Kommunikation zwischen den Messtrupps an den Orten A und B wurde die Peilung bewerkstelligt. Die Distanz zwischen den beiden Brücken wurde mit einem Fahrrad mit Kilometerzähler abgefahren und betrug $b = 1450$ m, der Abstand $\overline{AC} = 0,35$ m. Unter Berücksichtigung der Messungenauigkeiten ergibt sich laut 3.4 folgender Erdradius.¹²

$$r = 6007 \text{ km} \quad (3.5)$$

In Anbetracht des heute aktuellen Werts des mittleren Erdradius von 6371 km lieferte diese Messung ein recht akzeptables Ergebnis.

3.1.4 Bestimmung des Erdradius durch Beobachtung von Objekten hinter dem Meereshorizont

Die Beobachtung von Schiffen am bzw. hinter dem Meereshorizont ist ein leicht verständliches und deshalb gerne genanntes Phänomen, um für eine Erdkrümmung und somit für eine runde Erde zu argumentieren.¹³ Auch Ptolemäus beschrieb bereits ein Verschwinden der unteren Teile eines Schiffes unter dem Horizont, während der obere Teil noch sichtbar war.¹⁴ Abb. 3.6 stellt den oben beschriebenen Sachverhalt dar. Interessanterweise findet



Abbildung 3.6: Ein Schiff nähert sich dem Beobachter (erstellt mit Microsoft Word)

man relativ wenig Fotos, die eine solche Situation abbilden würden. Die, die im Internet

¹¹vgl. [Lud]

¹²vgl. [Sch19]

¹³vgl. [Sch16] und [Sch17], S. 1-2

¹⁴vgl. [Ste15], S. 20

3.1 Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius

zu finden sind, stammen meistens von „Flat Earthern“, die versuchen die runde Erde zu widerlegen, weil das Auftreten dieses Effekts nicht gut sichtbar ist.¹⁵

Tatsächlich dürfte es aufgrund einiger Umstände schwierig sein, ein hinter dem Horizont verschwindendes oder auftauchendes Schiff zu beobachten. Maßgeblich ist in erster Linie natürlich die Sichtweite, die wiederum vom Wetter abhängig ist. Ebenso vom Wetter und der Sonneneinstrahlung abhängig ist die sogenannte Refraktion¹⁶. Sie bewirkt eine bogenförmige Krümmung der Lichtstrahlen und lässt uns somit ein wenig hinter den Horizont schauen, erhöht also die Sichtweite geringfügig. Zudem werden wohl auch noch der Wellengang, die Reflexion am Wasser und die verwendeten Hilfsmittel, z. B. Teleskop oder Kamera, eine Rolle spielen.

Lässt es sich bewerkstelligen, ein solches Phänomen zu fotografieren so kann es auch mathematisch ausgewertet werden. Das heißt, man kann damit den Erdradius bestimmen, wenn man die benötigten Längen weiß bzw. abschätzen kann.¹⁷ Der geometrische Sachverhalt ist in Abb. 3.7 dargestellt. Ein Beobachter am Ort B in der Höhe b sieht also nur

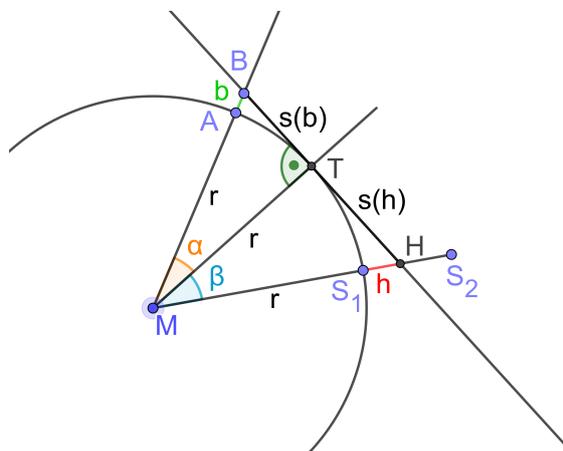


Abbildung 3.7: Ein Schiff hinter dem Meereshorizont (erstellt mit GeoGebra)

den oberen Teil eines Schiffs mit der Gesamthöhe $\overline{S_1S_2}$, das sich am Ort S_1 befindet. Die in Abb. 3.7 rot gekennzeichnete Höhe des Schiffs h ist für ihn nicht sichtbar hinter dem Horizont. Der Punkt T stellt in dieser Skizze den Horizont für den Beobachter dar. Die Tangente durch T entspricht einem Lichtstrahl, der vom gerade noch sichtbaren Teil des Schiffs ausgeht und den Horizont (also Punkt T) streift. Zeichnet man die Erdradien zu allen genannten Punkten ein, so ergeben sich zwei rechtwinkelige Dreiecke, für die der Lehrsatz des Pythagoras angewendet werden kann. Im Dreieck $\triangle MTB$ gilt:

$$r^2 + s(b)^2 = (r + b)^2 \quad (3.6)$$

¹⁵vgl. [Kle19]

¹⁶auch terrestrische Refraktion – meint die Brechung von Licht in den untersten Atmosphärenschichten und entsteht durch Änderung des Brechungsindex der Luft in Sehrichtung

¹⁷vgl. [Ste15]

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

Und im Dreieck $\triangle MHT$ gilt:

$$r^2 + s(h)^2 = (r + h)^2 \quad (3.7)$$

Um daraus nun den Erdradius berechnen zu können, müssen die Höhen h und b , die Entfernung $s = s(b) + s(h)$ sowie das Verhältnis $\frac{s(b)}{s(h)}$ bekannt sein. Letzteres kann wie folgt hergeleitet werden. Man betrachte das Dreieck $\triangle MTB$. Weil die Entfernung $s(b)$ gegenüber dem Erdradius im üblichen sehr klein ist (≤ 10 km), und somit auch α sehr klein, kann man $\tan \alpha \approx \alpha$ und damit folgende Näherung annehmen.

$$s(b) = r \cdot \tan \alpha \approx r \cdot \alpha \quad (3.8)$$

Setzt man diese Näherung nun in Gleichung (3.6) ein, und formt nach α^2 um erhält man folgenden Ausdruck.

$$\alpha^2 = \frac{(b+r)^2}{r^2} - 1 = \frac{b^2 + 2br}{r^2} = \frac{b}{r} \cdot \left(\frac{b}{r} + 2 \right) = b \cdot \frac{\frac{b}{r} + 2}{r} \quad (3.9)$$

Und somit ist

$$\alpha = \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{\frac{b}{r} + 2}{r}}. \quad (3.10)$$

Gegenüber dem Erdradius r ist die Höhe b des Beobachters sehr klein ($b \ll r$), weshalb $\frac{b}{r}$ in (3.10) in erster Näherung vernachlässigt werden kann.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2b}{r}} \quad (3.11)$$

Auf dieselbe Weise erhält man im Dreieck $\triangle MHT$ mit Gleichung (3.7) und der Näherung für $s(h)$ einen Ausdruck für den Winkel β .

$$s(h) \approx \beta \cdot r \quad (3.12)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2h}{r}} \quad (3.13)$$

Dividiert man nun α durch β so erhält man das oben angesprochene Verhältnis $\frac{s(b)}{s(h)}$.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{b}{h}} \quad (3.14)$$

Wegen (3.8) und (3.12) gilt nun

$$\frac{s(b)}{s(h)} = \sqrt{\frac{b}{h}}. \quad (3.15)$$

3.1 Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius

Berücksichtigt man nun, dass $s = s(b) + s(h)$ so gilt

$$s(b) = s - s(h) = s - s(b) \cdot \sqrt{\frac{h}{b}} \Leftrightarrow s(b) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{h}{b}}\right) = s \Leftrightarrow s(b) = \frac{s}{1 + \sqrt{\frac{h}{b}}} \quad (3.16)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.6) und umgeformt ergibt sich für den Erdradius r folgender Ausdruck:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s^2}{b \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{h}{b}}\right)^2} - b \right) \quad (3.17)$$

Man könnte hier noch berücksichtigen, dass im Allgemeinen $b \ll s$ ist. Somit lässt sich r näherungsweise schreiben als

$$r \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{b \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{h}{b}}\right)^2}. \quad (3.18)$$

Damit wäre der mathematische Sachverhalt fürs Erste geklärt. Man muss sich nun anhand eines Fotos die benötigten Daten beschaffen.

Folgende Fotografie (Abb. 3.8) stammt aus einer Ausarbeitung der Sternwarte Recklinghausen und zeigt ein Schiff mit Kränen am Horizont¹⁸. Um die Gegenstandsweite s nun



Abbildung 3.8: Schiff mit Kränen

(Quelle: https://sternwarte-recklinghausen.de/data/uploads/dateien/pdf/erdkugel1_abb.pdf)

zu bestimmen muss man ein paar Daten der Aufnahme wissen bzw. schätzen. Der Fotograf stand auf einer Höhe von $b = 25 \text{ m}$. Das Schiff, welches leider nicht scharf abgebildet

¹⁸[Ste15]

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

wurde, ist bis zu einer Höhe von $h = 15\text{ m}$ vom Horizont verdeckt. Bei beiden Höhenangaben handelt es sich um Schätzungen. Abb. 3.9 zeigt einen vergrößerten Bildausschnitt. Das Original wurde mit einer Objektivbrennweite von $f = 1000\text{ mm}$ auf Kleinbildfilm aufgenommen, wie man an den Perforierungen erkennen kann. Die Gesamtbreite des Bilds beträgt also 36 mm . Die Länge des Schiffs im Foto wurde mit $4,4\text{ mm}$ gemessen. Die Gegenstandsgröße, also die reale Länge des Schiffs wurde mit 100 m geschätzt. Um nun die Gegenstandsweite s zu berechnen muss man sich des Abbildungsmaßstabs von Linsen bedienen.



Abbildung 3.9: Schiff mit Kränen, vergrößert

(Quelle: https://sternwarte-recklinghausen.de/data/uploads/dateien/pdf/erdkugel_abb.pdf)

Exkurs: Abbildungsmaßstab von Sammellinsen

Der Abbildungsmaßstab einer Sammellinse berechnet sich mithilfe der Gegenstandsweite g , der Bildweite b , der Gegenstandsgröße G und der Bildgröße B . Es gilt laut Abb. 3.10

$$\frac{b}{g} = \frac{B}{G}. \quad (3.19)$$

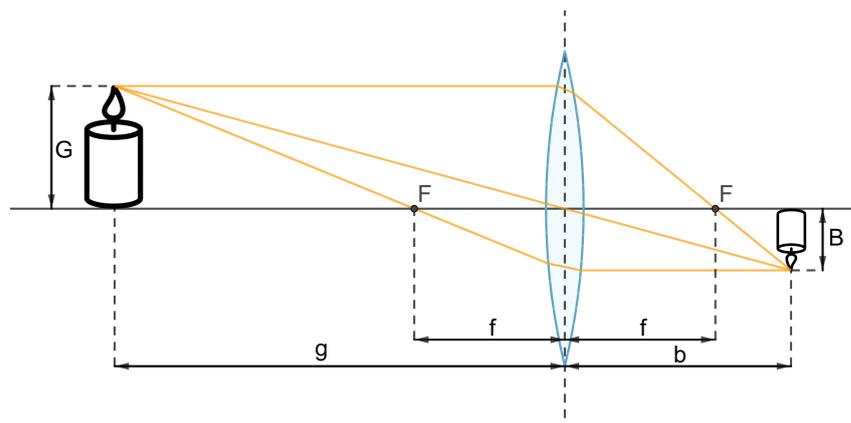


Abbildung 3.10: Abbildung einer Sammellinse (erstellt mit GeoGebra)

3.1 Mathematische Wege zur Bestimmung des Erdradius

Für große Gegenstandsweiten g wird die Bildweite b zur Brennweite f . Somit kann man obigen Abbildungsmaßstab mit der (bei einem Objektiv meist bekannten) Brennweite f anschreiben.

$$\frac{f}{g} = \frac{B}{G}. \quad (3.20)$$

In den obigen Berechnungen wurde die Gegenstandsweite mit s bezeichnet. Nach (3.20) gilt also

$$s = f \cdot \frac{G}{B} \quad (3.21)$$

Setzt man die oben genannten Werte ein, erhält man folgendes Ergebnis.

$$s = 22727 \text{ m} \approx 22,7 \text{ km} \quad (3.22)$$

Anmerkung: Objektive von Kameras bestehen selbstverständlich aus mehr als nur einer Linse, nämlich einem ganzen Linsensystem. Die Reduzierung eines Kameraobjektivs auf eine Linse ist natürlich nur eine Näherung, erlaubt aber eine relativ einfache mathematische Betrachtung.

Nun hat man alle Werte um schließlich den Erdradius berechnen zu können. Formel (3.18) liefert den Erdradius zu

$$r = 3280 \text{ km} \quad (3.23)$$

Dieser Wert stimmt nur in der Größenordnung mit dem tatsächlichen Wert überein. Auf den ersten Blick scheint naheliegend, dass die vielen Schätzungen das Ergebnis „verwaschen“. Variiert man jedoch die geschätzten Werte b und h um $\pm 10\%$, so liegen die berechneten Erdradien in einem Bereich von ca. 2900 bis 3600 km – sie weichen also „nur“ um wenige hundert Kilometer vom ursprünglichen Ergebnis ab. Tatsächlich müssen also andere Einflüsse eine wesentliche Rolle spielen. Laut [Ste15] liegt die Hauptfehlerquelle in den bereits oben erwähnten Refraktionseinflüssen, was aufgrund der obigen „Fehlerabschätzung“ plausibel erscheint.

Um ein genaueres Ergebnis zu bekommen, könnte man versuchen die geschätzten Längen (Länge und Höhe des Schiffs) zu recherchieren. Natürlich bedürfte dies einer Identifizierung des Schiffs, was wegen der großen Entfernung schwierig sein könnte.

3.1.5 Bestimmung des Erdradius durch Messung der Kimmtiefe

Die kugelförmige Erde krümmt sich in der Ferne unterhalb einer gedachten horizontalen Ebene weg. Deshalb verläuft der sichtbare Horizont immer unter einem negativen Höhenwinkel. Je höher ein Beobachter steht, desto tiefer muss er auf den entfernten Horizont blicken. Dieser negative Höhenwinkel wird auch „Kimmtiefe“ genannt und lässt sich mit

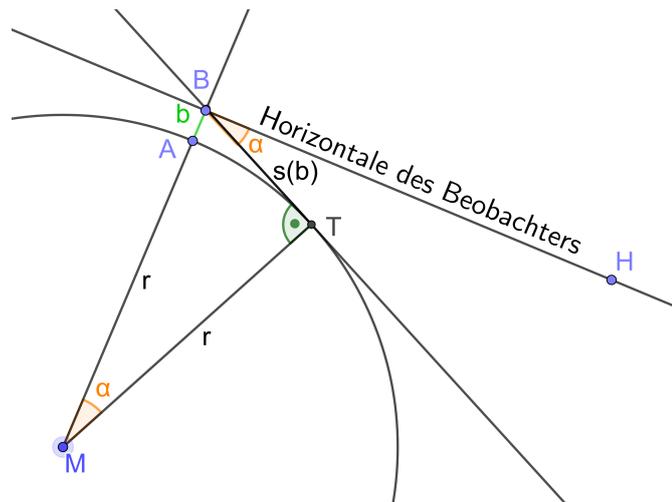


Abbildung 3.11: Kimmtiefe (erstellt mit GeoGebra)

geeignetem Messgerät messen.¹⁹ Ein Beobachter im Punkt B (siehe Abb. 3.11) in einer Höhe b , sieht also den Horizont unter einem bestimmten Winkel $\angle TBH = \alpha$. Zeichnet man wie in Abbildung 3.11 den Erdradius zum Beobachter, sowie den zum Meereshorizont ein, lässt sich der Winkel α auch am Erdmittelpunkt M finden. (Bildet man die Senkrechten auf zwei einander schneidende Geraden, so schneiden die beiden Senkrechten einander unter demselben Winkel.) Man betrachte nun das Dreieck $\triangle MTB$, in dem der Satz des Pythagoras gilt.

$$r^2 + s(b)^2 = (r + b)^2 \quad (3.24)$$

Wie in Kap. 3.1.4 gilt für kleine Winkel α im Dreieck $\triangle MTB$ auch hier dieselbe Näherung

$$s(b) = r \cdot \tan \alpha \approx r \cdot \alpha. \quad (3.25)$$

Einsetzen von (3.25) in (3.24) ergibt denselben Ausdruck für α wie in Kapitel 3.1.4. Wieder lässt sich Formel (3.10) durch die Annahme $b \ll r$ vereinfachen zu

$$\alpha = \sqrt{\frac{2b}{r}}. \quad (3.26)$$

Diese Formel lässt sich nun zur Bestimmung des Erdradius, bei bekannter Kimmtiefe α und Höhe b verwenden.

Eine Probemessung der Sternwarte Recklinghausen²⁰, die in einer Höhe $b = 80$ m durchgeführt wurde lieferte eine Kimmtiefe $\alpha = 14' = 0,00407$ rad. Nach Formel (3.26) berechnet sich der Erdradius zu

$$r \approx 9650 \text{ km}. \quad (3.27)$$

¹⁹vgl. [Ste15]

²⁰[Ste15]

3.2 Bestimmung der Sichtweite – Wie weit kann man sehen?

Wie im vorigen Kapitel stimmt dieser Wert nur größenordnungsmäßig mit dem tatsächlichen Erdradius überein. Es ist anzunehmen, dass auch hier terrestrische Refraktion – sie bewirkt eine Anhebung der Kimm – eine wesentliche Rolle spielt.²¹

3.2 Bestimmung der Sichtweite – Wie weit kann man sehen?

Besonders interessant ist diese Frage, wenn man auf Aussichtsplattformen oder Berggipfeln in die Ferne schaut oder aber am Ufer von Gewässern steht und am Horizont Land sichtbar ist. Mathematisch lässt sich darauf mit relativ wenig Aufwand eine Antwort finden, legt man vorweg fest, dass

- wir uns in ebenem Gelände befinden und
- optimale Sichtverhältnisse herrschen.

Ein Beobachter befindet sich im Punkt B , in einer Höhe b . Er blickt in Richtung Horizont, welcher den Punkt T darstellt. Der Abschnitt s der Tangente durch den Punkt T stellt nun die Sichtweite dar. Bereits anhand Abb. 3.12 sollte man sich klar machen: Je höher der Aussichtspunkt liegt, desto weiter kann man sehen – also je größer b wird, desto weiter wandert der Punkt T vom Beobachter weg. Zur Berechnung von s betrachtet man

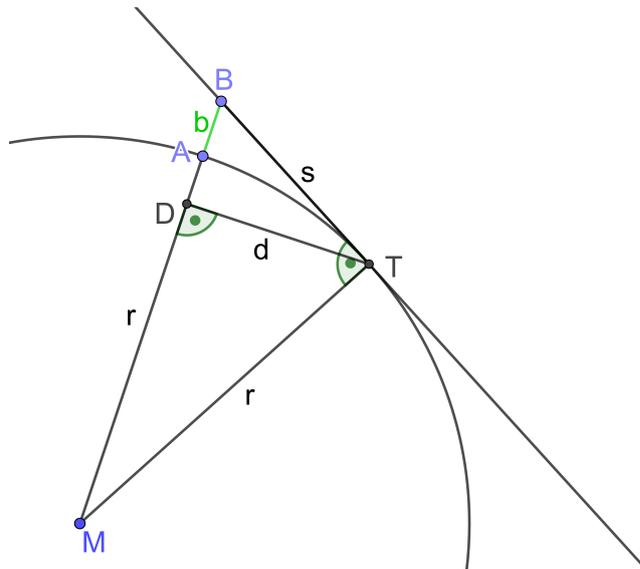


Abbildung 3.12: Wie weit kann man sehen? (erstellt mit GeoGebra)

zunächst das Dreieck $\triangle MTB$. In diesem gilt der Lehrsatz des Pythagoras.

$$s^2 = (r + b)^2 - r^2 = 2rb + b^2 \quad (3.28)$$

²¹vgl. [Ste15]

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

Die Streckenlänge $\overline{DT} = d$ ergibt sich durch Anlegen der Senkrechten auf MB durch den Punkt T . Daraus ergibt sich das Dreieck $\triangle MTD$. Die Dreiecke $\triangle MTB$ und $\triangle MTD$ sind ähnlich, denn sie stimmen in zwei Winkeln überein – dem rechten Winkel $\angle MDT$ bzw. $\angle MTB$ und dem Winkel $\angle TMD$. Somit stehen die Seitenlängen in einem festen Verhältnis.

$$\frac{d}{r} = \frac{s}{r+b} \Leftrightarrow d = \frac{r}{r+b} \cdot s \quad (3.29)$$

Einsetzen von (3.28) ergibt

$$d = \frac{r}{r+b} \cdot \sqrt{2rb + b^2} \quad (3.30)$$

Für Betrachtungen auf der Erde ist $b \ll r$, woraus sich folgende Formel ergibt, welche für die Praxis ausreichend ist.

$$d \approx s \approx \sqrt{2rb} \quad (3.31)$$

Setzt man den Erdradius zu $r = 6371$ km in diese Formel ein und misst die Höhe b in Metern und die Sichtweite s in Kilometern lässt sich die Formel anschreiben als

$$s \approx 3,6 \cdot \sqrt{b} \quad (3.32)$$

So lassen sich beispielsweise folgende Sichtweiten ermitteln. Wie oben bereits angemerkt

	Höhe b	Sichtweite s
Meeresufer	3 m	~ 6 km
Aussichtswarte Geschriebenstein	884 m	~ 106 km
Terrasse des Wiener Donauturms	155 m	~ 44 km

Tabelle 3.1: Verschiedene Sichtweiten

können diese berechneten Sichtweiten nur in ebenem Gelände gelten. Ausgehend von der Terrasse des Wiener Donauturms kann man also höchstens in östlicher Richtung diese Sichtweite erwarten, da Richtung Westen der Horizont durch Leopoldsberg, Schafberg und den hügeligen nördlichen Wienerwald gegeben ist. Außerdem macht es Sinn im Gebirge als Höhe b nicht die Höhe über dem Meeresspiegel einsetzen, sondern die Höhendifferenz zum umliegenden Gelände. Die berechneten Werte sollte man nicht zu genau nehmen – die Formel liefert höchstens gute Anhaltspunkte dafür, wie weit von welcher Höhe aus zu sehen ist.²²

Der Vollständigkeit halber sei hier noch auf den Fall $b \gg R$ eingegangen. Das würde zutreffen, wenn wir also aus großer Höhe bzw. aus großem Abstand auf die Erde schauen – beispielsweise von der Sonne. In (3.28) kann man dann $2rb$ gegenüber b^2 vernachlässigen und wir erhalten $s \approx b$. Eingesetzt in (3.30) ergibt $d \approx \frac{r}{r+b} \cdot b$, wobei aber r im Nenner vernachlässigt werden kann. Somit erhält man die Näherung $d \approx r$. Von der Sonne aus sieht man also eine halbe Erdkugel ein. Anders formuliert: Die Sonne bescheint immer eine Erdhalbkugel.²³

²²vgl. [Sch17], S.55

²³vgl. [Wit87], S.184, 185

3.2.1 Experiment: Wie weit sieht man wirklich?

Mit der oben hergeleiteten Formel lässt sich also grob bestimmen, wie weit man von welcher Höhe aus sieht. Inwiefern aber entsprechen diese berechneten Sichtweiten der Realität? Und ergibt eine Änderung der Beobachtungshöhe um ca. 100 m bereits eine bemerkbare Vergrößerung der Sichtweite?

Dazu wurde ein kleines Experiment durchgeführt. Als Aussichtspunkt wurde die Aussichtswarte am Geschriebenstein, der mit 884 m Seehöhe die höchste Erhebung des Burgenlands ist, gewählt. Von dort aus sieht man bei guten Sichtverhältnissen weit in die Pannonische Tiefebene, also sehr flaches Gelände, wie es auch der hergeleiteten Formel zur Berechnung der Sichtweite zugrunde liegt.

Die variable Beobachtungshöhe wurde durch den Flug mit einer Drohne erreicht. Dazu wurde ein Foto auf Höhe der Aussichtswarte (ca. 14 m) und eines aus ca. 120 m Höhe gemacht. Diese Höhen entsprechen ungefähr 900 m und 1020 m Seehöhe. Zur Berechnung der Sichtweite ist es sinnvoll, wie oben schon angemerkt, die Differenzen zur Höhe des beobachteten Geländes heranzuziehen (hier: Seehöhe des Neusiedlersees: 115 m). Mithilfe von Formel (3.32) kommt man für dieses Experiment auf folgende Sichtweiten:

	Seehöhe	Höhe b	Sichtweite s
Aussichtswarte am Geschriebenstein	900 m	785 m	~ 100 km
120 m über der Aussichtswarte Geschriebenstein	1020 m	905 m	~ 108 km

Tabelle 3.2: Berechnete Sichtweiten

Abbildung 3.13 zeigt Ausschnitte der aufgenommenen Bilder. Beide Fotos wurden mit der Kamera der Drohne, also fester Brennweite, aufgenommen. Auch der Vergrößerungsfaktor ist bei beiden Bildern derselbe. In der Bildmitte sind jeweils die Windräder bei Sopronkövesd (Ungarn) zu sehen. Links im Bild sind Teile des Windparks bei Nikitsch (Burgenland) abgebildet, dahinter als heller Streifen ein Teil der südlichen Uferlandschaft des Neusiedlersees. Hinter dieser sind am Horizont zahlreiche Windräder, die wohl zum Windpark Albrechtsfeld bei Andau und Halbtorn gehören, in den Bildern (nur relativ schwierig) zu erahnen. Die Kamera der verwendeten Drohne kommt hier an ihre Grenzen – mit freiem Auge waren die Windräder recht deutlich auszumachen.

Die Abbildung 3.14 zeigt das abgelichtete Gelände in einer Karte. Die mit Google Earth Pro berechnete Luftlinie zwischen Geschriebenstein und Windpark Albrechtsfeld beträgt 69 km. Verglichen mit der berechneten Sichtweite laut Tabelle 3.1 wären das rund 30 km zu wenig. Eventuell kommt man bei exzellenter Weitsicht näher an den berechneten Wert. Aus der Aufnahme, die aus ca. 120 m über dem Boden erstellt wurde, ist zunächst keine unmittelbare „Vergrößerung“ der Sichtweite zu erkennen.

Anhand der Windräder bei Sopronkövesd in der Bildmitte, lässt sich aber eine deutliche Vergrößerung des „Abstands“ zum Horizont erkennen. In den Bildern ist jeweils die „Grundlinie“ der Windräder eingezeichnet, sowie die Horizontlinie.

Der Abstand zwischen den beiden Linien ist auf dem Foto aus 1020 m deutlich größer, womit die Abhängigkeit der Sichtweite von der Höhe gezeigt wäre, obwohl Unter-

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen



Abbildung 3.13: Ausblick vom Geschriebenstein in Richtung Nordosten
(aufgenommen mit einer DJI Mavic Air, ©Joseph Hochwarter)

de in der Horizontlandschaft nicht wahrgenommen werden können. Vergessen darf man aber dabei nicht, dass laut Berechnung der Unterschied in der berechneten Sichtweite ca. 8 km beträgt (siehe Tabelle 3.2). Aufgrund der geometrischen Situation (siehe Abb. 3.12) entsprechen diese 8 km nur einem ganz schmalen Geländestreifen am Horizont. Mit der Kamera der Drohne sind diese Details nicht aufzulösen.

Wie in Kapitel 3.1.4 ist auch zur Durchführung dieses Experiments gute Weitsicht notwendig. Nicht jeden Tag ist der Horizont als klare Linie auszumachen. Das Wetter spielt selbstverständlich eine entscheidende Rolle, jedoch geht nach eigener Erfahrung gute Weitsicht nicht immer mit gutem Wetter einher. Die Bilder in Abbildung 3.13 wurden vormittags bei fast wolkenlosem Himmel aufgenommen. Bei denselben Bedingungen an anderen Tagen war jedoch der Horizont kaum zu sehen. „Gute Weitsicht“ ist also nur schwer zu prognostizieren, denn es sind dafür wahrscheinlich auch andere Variablen, wie z. B. Wasserdampf oder Luftverschmutzung verantwortlich. Man braucht Glück, um beste Bedingungen vorzufinden. Außerdem spielt beim Flug mit der Drohne auch der Wind eine wesentliche Rolle.

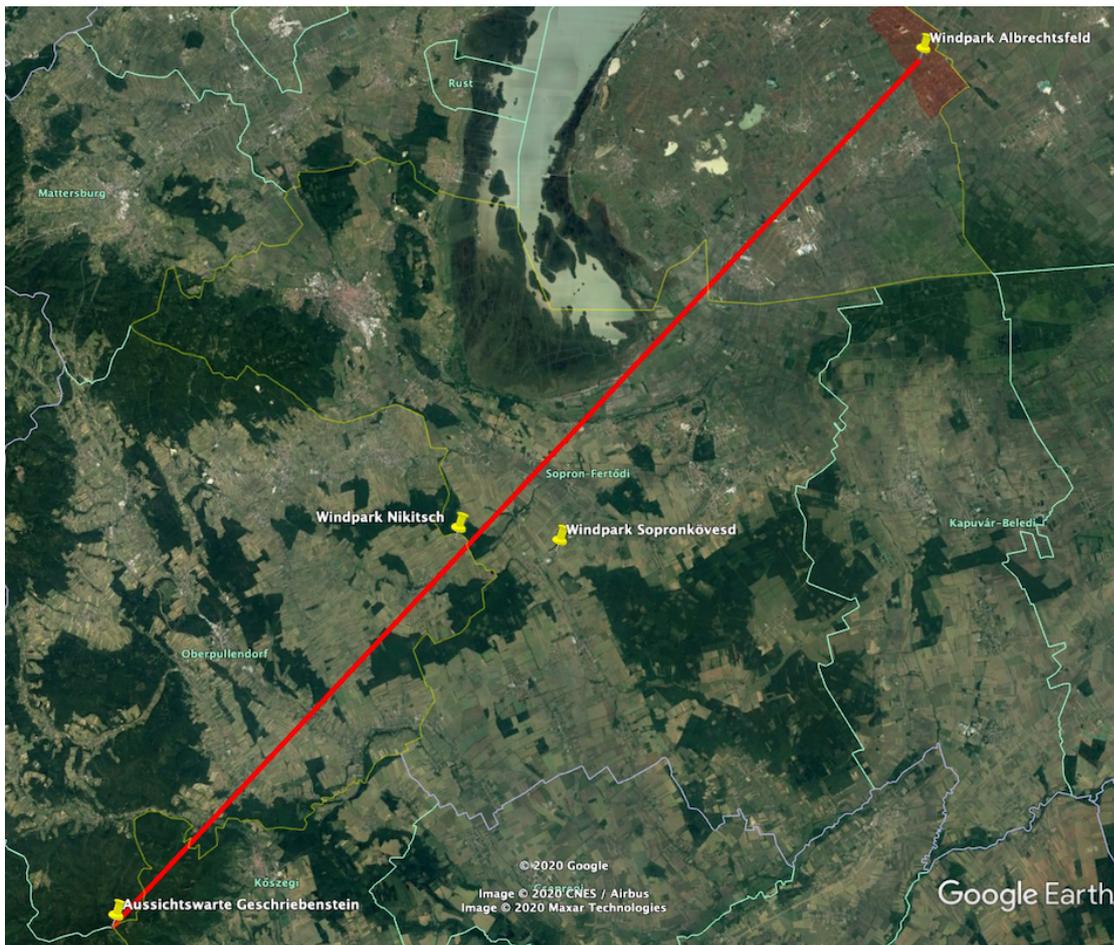


Abbildung 3.14: Luftlinie Geschriebenstein-Albrechtsfeld (69 km)
(erstellt mit Google Earth Pro)

3.3 Aufwölbung eines Sees

Die Oberfläche unserer Erde ist aufgrund ihrer Kugelgestalt keine ebene Fläche, sondern gewölbt. Deshalb sind auch die Oberflächen von Gewässern gewölbt. Die Höhe dieser Aufwölbung kann man berechnen.²⁴ In Abb. 3.15 bezeichnet l die Länge des Sees, α den zur Bogenlänge l gehörenden Zentriwinkel und w seine Aufwölbung. Für den Winkel α gilt $\alpha = \frac{l}{r}$. Die Aufwölbung w berechnet sich wie folgt:

$$w = r - r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = r \cdot \left(1 - \cos \frac{l}{2r}\right) \quad (3.33)$$

Näherungsweise könnte man die Aufwölbung auch mittels ähnlicher Dreiecke berechnen – siehe dazu Abb. 3.16. Die Dreiecke $\triangle WBL$ und $\triangle MBY$ sind ähnlich, denn sie stimmen

²⁴vgl. [Sch19]

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

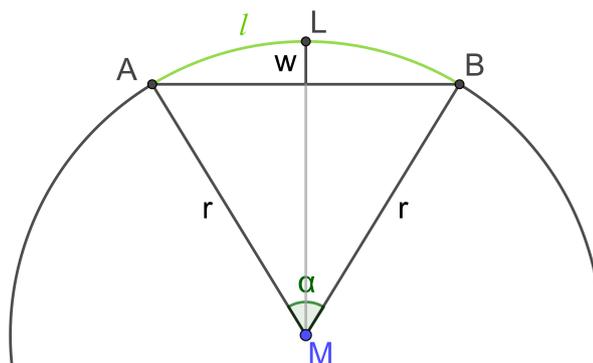


Abbildung 3.15: Aufwölbung eines Sees (erstellt mit GeoGebra)

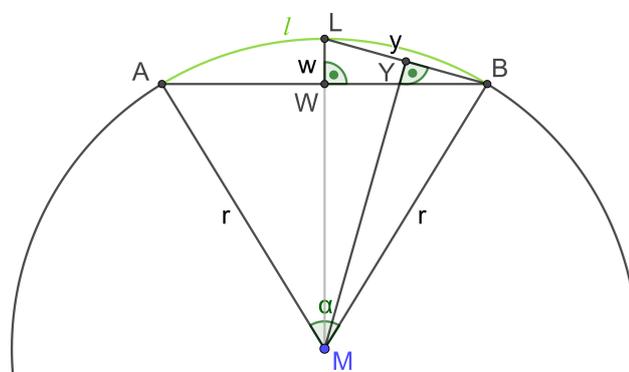


Abbildung 3.16: Aufwölbung eines Sees – Berechnung mit ähnlichen Dreiecken (erstellt mit GeoGebra)

in zwei Winkeln überein – dem eingezeichneten rechten Winkel, sowie Winkel $\angle MBY$ und $\angle MLB$. Es gilt also

$$\frac{w}{y} = \frac{\frac{y}{2}}{r} \quad (3.34)$$

Für unsere Betrachtung kann man davon ausgehen, dass die Länge des Sees gegenüber dem Erdumfang sehr klein ist. Wir können also annehmen, dass $y \approx \frac{l}{2}$. Eingesetzt in 3.34 ergibt

$$w \approx \frac{l^2}{8r}. \quad (3.35)$$

Man kann diesen Sachverhalt allerdings auch mit dem Höhensatz lösen. Nachstehende Abb. 3.17 zeigt die zugehörige Skizze.²⁵ Weil LC ein Durchmesser des Kreises ist, ist

²⁵vgl. [Sch17], S. 55 ff.

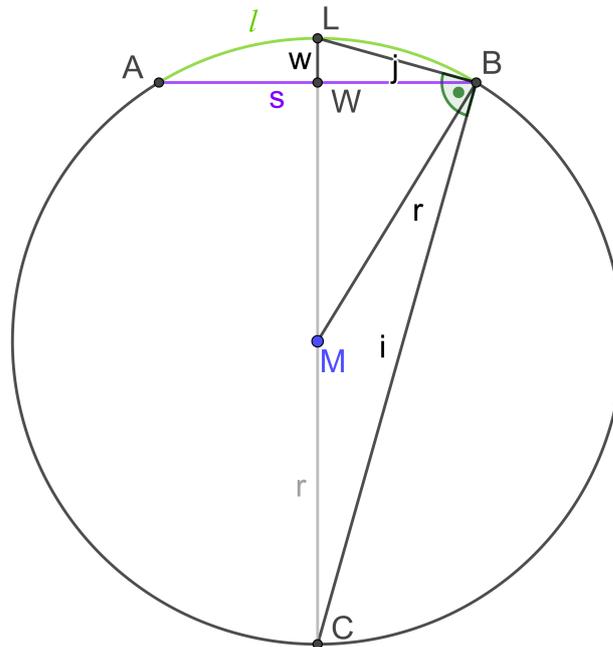


Abbildung 3.17: Aufwölbung eines Sees – Berechnung mit Höhensatz
(erstellt mit GeoGebra)

das Dreieck $\triangle LCB$ rechtwinklig (Satz des Thales). Die Hälfte der zum Kreisbogen l gehörigen Sehne s ist die Höhe dieses Dreiecks. Aus dem Höhensatz folgt also:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = w \cdot (2r - w) \quad (3.36)$$

Gleichung (3.36) ist eine quadratische Gleichung für w und deren Lösung grundsätzlich kein Problem. Wer jedoch bereits jetzt in eine der weiter oben hergeleiteten Lösungsformeln für die Aufwölbung eine typische Seelänge eingesetzt hat, weiß bereits, dass die Lösung in der Größenordnung von ein paar Metern liegen wird. Daher ist die Aufwölbung w in der Differenz $2r - w$ vernachlässigbar klein. Man kann daher Gleichung (3.36) vereinfachen und die Lösungsformel für w wie folgt anschreiben.

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 \approx w \cdot 2r \Leftrightarrow w \approx \frac{s^2}{8r} \quad (3.37)$$

Der Ausdruck für die Aufwölbung w in (3.37) sieht den oben hergeleiteten Formeln schon sehr ähnlich, enthält aber statt der Seelänge bzw. Bogenlänge l die Länge der zugehörigen Sehne s . Tatsächlich unterscheiden sich l und s für „übliche“ Seelängen nur marginal. Betrachtet man nämlich eine gegebene Sehne mit Länge $l = 10$ km, dann wäre α der zu l gehörige Zentriwinkel und $\alpha = \frac{10 \text{ km}}{6371 \text{ km}} = 0,0015696\dots$ rad. Die zugehörige Sehne s berechnet sich nun zu $s = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 9,9999989\dots$ km. Der Unterschied von l und s

3 Mit Schulmathematik die Weltkugel erforschen

befindet sich also im Bereich einiger Millimeter, weshalb man wie oben schreiben kann:

$$w \approx \frac{l^2}{8r} \quad (3.38)$$

Man könnte als Beispiel nun die Aufwölbung des Neusiedlersees, Österreichs flächenmäßig größten Sees, berechnen. Der Neusiedlersee hat eine Gesamtlänge von 36 km. Sowohl bei exakter Rechnung, als auch mit der Näherung ergibt sich eine Aufwölbung $w = 25$ m (gerundet auf ganze Meter). Verblüfft dieses Ergebnis noch nicht, könnte man sich noch vor Augen halten, dass der Neusiedlersee an der tiefsten Stelle nur 2 m tief ist.

3.3.1 Turm am Seeufer

Da nun im vorangegangenen Kapitel die Aufwölbung eines Sees berechnet wurde, könnte man sich noch folgende Frage stellen: In welcher Höhe muss man sich befinden, um das gegenüberliegende Seeufer einzusehen? Aufgrund der Erdkrümmung sehen wir ja alles um uns herum nur deswegen, weil wir uns in einer gewissen Höhe relativ zum umliegenden Gelände befinden – diese Situation wurde bereits in Kap. 3.2 behandelt und ist komplett ident zu dieser Frage. Man kann in die oben hergeleiteten Formeln (3.31) bzw. (3.32) statt der Sichtweite s die Seelänge l einsetzen und die Beziehung umschreiben nach der Höhe des Beobachters – bzw. hier – der Turmhöhe b .

$$b \approx \frac{l^2}{8r} \quad (3.39)$$

Für das Beispiel des Neusiedlersees ergibt das für die Nord-Süd-Richtung einen Turm mit einer Höhe von ca. 102 m, der natürlich direkt am Ufer stehen müsste. Um das gegenüberliegende Ufer wirklich einsehen zu können, sollten selbstverständlich auch optimale Sichtverhältnisse herrschen.

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

Bis hierher wurde die Weltkugel immer auf einen Kreis reduziert (Schnittfläche einer Kugel mit einer Ebene). Möchte man aber nun die kürzeste Entfernung zwischen zwei Orten bestimmen oder diesen gar auf einer Karte einzeichnen, so ist es sinnvoll, seinen mathematischen Horizont etwas zu erweitern. Beschränkt man sich nicht nur auf aktuelle Schulmathematik, so ist die „Sphärische Geometrie“ oder „Kugelgeometrie“ ein adäquates Werkzeug, um die Weltkugel zu beschreiben. Voraussetzung dafür ist selbstverständlich die Akzeptanz einer runden, in erster Näherung kugelförmigen Erde. Die vorangegangenen Kapitel sollten dafür aber genügend Argumente geliefert haben.

4.1 Grundlagen

4.1.1 Begriff und Eigenschaften der Kugel

Wir wollen hier mit zwei Definitionen der Kugel starten¹:

Definition 4.1. *Die Kugel ist der geometrische Ort der Punkte des Raumes, die von einem festen Punkt M , dem Mittelpunkt, einen konstanten Abstand r haben. r ist der Radius der Kugel.*

Definition 4.2. *Die Kugel entsteht durch Rotation eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Durchmesser.*

Die erste Definition geht im weitesten Sinne auf Aristoteles zurück, während die zweite bei Euklid zu finden ist. Beide Definitionen sind äquivalent – es würde also ausreichen, eine davon anzugeben². Die grundlegende Eigenschaft einer Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r ist folgende³.

Alle Punkte der Kugeloberfläche haben den gleichen Abstand von M , nämlich r .

Liegt A $\left\{ \begin{array}{l} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{array} \right\}$ der Kugel, dann ist $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AM} < r \\ \overline{AM} > r \end{array} \right.$.

Eine weitere „schöne“ Eigenschaft der Kugel ist beispielsweise diese:

¹vgl. [Lie49], S. 28

²[Lie49], S. 29

³vgl. [Sch17], S. 15

Unter allen Körpern mit einem festen Volumen ist sie derjenige mit der kleinsten Oberfläche.

Diese Eigenschaft ist dafür verantwortlich, dass Seifenblasen kugelförmig sind. Darauf wird hier aber nicht näher eingegangen.

Der Vollständigkeit halber sei noch angemerkt, dass eine Kugel mit Radius r das Volumen $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ und die Oberfläche $O = 4\pi r^2$ besitzt.

Ist A ein Punkt auf der Kugeloberfläche, so ist die Strecke AM der zugehörige Radius. Die Gerade durch A und M schneidet die Kugeloberfläche ein zweites Mal, nämlich im sogenannten Gegenpunkt zu A , dem Punkt \bar{A} . Die Strecke $A\bar{A}$ ist also der Durchmesser des Kreises, dessen Länge bekanntlich $2r$ beträgt.⁴

4.1.2 Schnittfiguren von Ebenen mit einer Kugel

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Man unterscheidet nun zwei Fälle.⁵ (siehe dazu Abb. 4.1)

1. **Fall** Der Kugelmittelpunkt M liegt in der Schnittebene. Dann entsteht als Schnittfigur ein Kreis mit Radius r . Ein derartiger Kreis heißt *Großkreis*.
2. **Fall** Der Kugelmittelpunkt M liegt nicht in der Schnittebene. Also besitzt M einen gewissen Abstand d von der Ebene. Es gilt $r > d > 0$. Fällt man nun vom Punkt M das Lot auf die Schnittebene, so erhält man als Fußpunkt M' und $\overline{MM'} = d$. Für alle Punkte P auf der Schnittlinie sind die Dreiecke $\triangle MPM'$ kongruent. Als Schnittfläche ergibt sich also ein Kreis mit Mittelpunkt M' und Radius $r' = \sqrt{r^2 - d^2} < r$. Ein solcher Kreis heißt *Kleinkreis*.

Der Mittelpunkt eines Großkreises ist also immer auch der Mittelpunkt der Kugel. Durch zwei verschiedene Punkte A und B auf der Kugel, die nicht Gegenpunkte voneinander sind, geht genau ein Großkreis. Das kann man leicht begründen, denn die Punkte M , A , und B liegen nicht auf einer Geraden, also spannen sie eine Ebene auf. Diese Ebene schneidet die Kugel genau im Großkreis durch A und B .

Hier zeichnet sich eine gewisse Analogie zur ebenen Geometrie ab. Dort kann man durch zwei Punkte immer eine Gerade legen – in der Kugelgeometrie kann man durch zwei Punkte immer einen Großkreis legen. Großkreise werden deshalb auch *Kugelgeraden* genannt.

Die Punkte A und B teilen den Großkreis in zwei Bögen. Der kleinere der beiden Bögen wird Großkreisbogen genannt.⁶ Wie so oft in der Mathematik ist auch diese Vorgabe nicht in Stein gemeißelt. So werden in anderen Quellen beide Bögen Großkreisbogen genannt.⁷ Großkreisbögen sind das Analogon zu Strecken in der ebenen Geometrie.

Betrachtet man zwei Großkreise, so gilt folgende Aussage:

⁴vgl. [Sch17], S. 15 ff.

⁵[Sch17], S. 16 ff.

⁶vgl. [Sch17], S. 17

⁷vgl. [Big84], S. 2

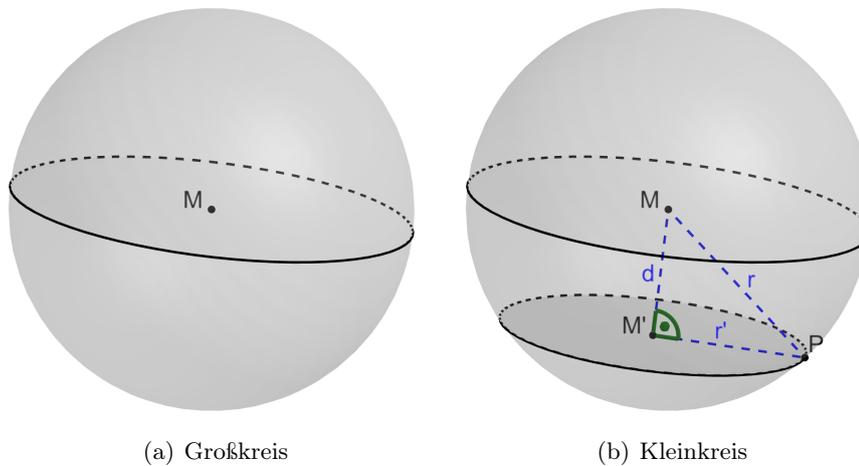


Abbildung 4.1: Großkreis und Kleinkreis auf der Kugel (erstellt mit GeoGebra)

Je zwei verschiedene Großkreise schneiden einander in zwei Gegenpunkten.

Denn beide Großkreisebenen enthalten den Kugelmittelpunkt, sie schneiden sich also in einer Geraden die M enthält. Die Kugelfläche schneidet diese Gerade an zwei Schnittpunkten, den Schnittpunkten der beiden Großkreise. Diese beiden Punkte bilden einen Durchmesser und sind somit Gegenpunkte. Weiters gilt:

Es gibt keine parallelen Großkreise.

Diese Aussage ist nur eine Folgerung aus der vorangegangenen. Hier ist der Vergleich mit der ebenen Geometrie nun nicht mehr möglich.

Den Winkel, den zwei Großkreise einschließen, kann man folgendermaßen ermitteln. Man legt in einem Schnittpunkt A der Großkreise eine Tangentialebene an die Kugel (senkrecht zum Durchmesser $A\bar{A}$). Die Großkreisebenen schneiden dann diese Tangentialebene in den Tangenten an die Kugel, die in Richtung der jeweiligen Großkreise verlaufen. Der Winkel zwischen den Tangenten ist dann der Winkel zwischen den beiden Großkreisen. Jedem Großkreis kann man einen bzw. zwei *Pole* zuordnen. Betrachtet man einen beliebigen Großkreis, so schneidet die Gerade, die senkrecht auf die Großkreisebene steht und durch den Kugelmittelpunkt M verläuft, die Kugelfläche in zwei Gegenpunkten. Es macht nun Sinn, nur einen dieser Punkte als *den Pol* zu definieren. Die Auswahl ist, wie vieles in der Mathematik, nicht einheitlich. Wichtig ist hierbei nur, dass man sich für einen der beiden entscheidet. Das ist nur möglich, wenn man dem Großkreis eine Orientierung zuschreibt (siehe Abb. 4.2). Wir definieren also, dass der Pol (bzw. *Linkspol*) eines Großkreises jener Punkt ist, der links liegt, wenn man den Kreis in Pfeilrichtung durchläuft.⁸ Wählt man nun umgekehrt einen Punkt A auf der Kugelfläche, dann lässt

⁸vgl. [Sch17], S. 19 ff.

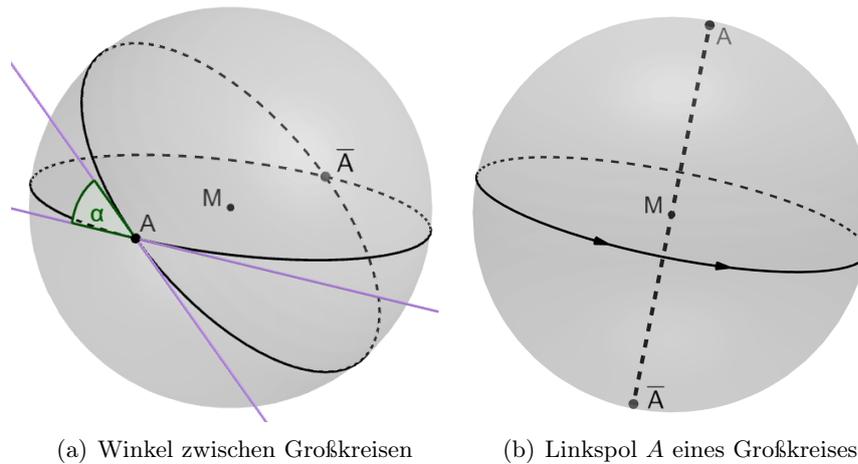


Abbildung 4.2: Winkel und Pol (erstellt mit GeoGebra)

sich eine Ebene bestimmen, die senkrecht auf den Radius AM ist und den Kugelmittelpunkt M enthält. Diese Ebene schneidet die Kugeloberfläche in einem Großkreis, der nun so orientiert wird, dass er von A aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Damit ist A der Linkspol.

Man kann nun jedem orientierten Großkreis eindeutig einen Punkt als Linkspol (bzw. nur *Pol*) zuordnen und umgekehrt, jedem Punkt einen orientierten Großkreis zuordnen. Großkreise und ihre Pole besitzen interessante Eigenschaften. Sei Punkt A der Pol eines orientierten Großkreises g , dann kann man folgende Eigenschaften formulieren.⁹

- Jeder Großkreis durch A schneidet g im rechten Winkel. Denn PM steht senkrecht auf die Großkreisebene von g und ist in jeder Großkreisebene durch A enthalten. Also ist jede Großkreisebene durch A senkrecht zur Großkreisebene g . (siehe Abb. 4.3a)
- Für alle Punkte G auf g ist $\widehat{AG} = 90^\circ$. Es gilt: $\angle AMP = \widehat{AG} = 90^\circ$. (Das Maß des Bogens wird durch dessen Zentriwinkel bestimmt. Auf einer Kugel mit gegebenem Radius, wie z. B. der Erde, ist diese Angabe ausreichend. Für die Angabe in Längeneinheiten muss mittels Radius umgerechnet werden.)
- Sind G und H zwei Punkte auf g , so gilt $\angle GAH = \angle GMH = \widehat{GH}$. Der Winkel zwischen den Großkreisen \widehat{AG} und \widehat{AH} findet sich also als Bogen \widehat{GH} auf dem zu A gehörenden Großkreis wieder. (siehe Abb. 4.3b)

⁹vgl. [Sch17], S. 21

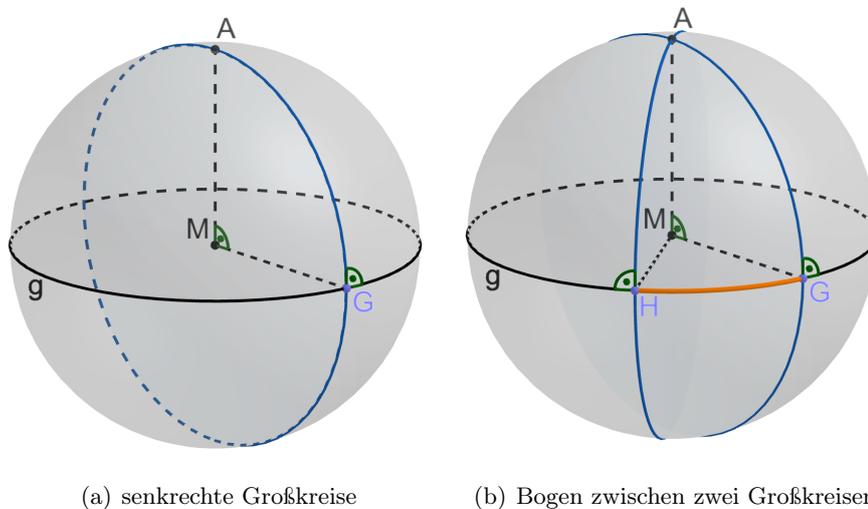


Abbildung 4.3: Zu Großkreisen senkrechte Großkreise (erstellt mit GeoGebra)

4.1.3 Kugelzweiecke und Kugeldreiecke

Auch wenn es sich zunächst etwas kurios liest, so ist ein Kugelzweieck nach den bisherigen Formulierungen und Abbildungen nichts Besonderes¹⁰:

Ein Flächenstück auf der Kugel, welches durch zwei Großkreise begrenzt wird, heißt Kugelzweieck.

Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks ist proportional zum Winkel α zwischen den Großkreishälften. Er beträgt $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{2\alpha}{180^\circ}$. Ein spezielles Kugelzweieck wäre die Halbkugel. Viel interessanter als Kugelzweiecke sind allerdings Kugeldreiecke. Sie werden auch Euler'sche Dreiecke genannt.¹¹

Verbindet man drei verschiedene Punkte auf der Kugeloberfläche (von denen je zwei keine Gegenpunkte voneinander sind) durch Großkreisbögen, so erhält man ein Kugeldreieck.

Die drei Seiten des Kugeldreiecks $\triangle ABC$ werden, wie bei Dreiecken in der ebenen Geometrie üblich, bezeichnet (siehe Abb. 4.4).

$$\widehat{AB} = c, \quad \widehat{BC} = a, \quad \widehat{CA} = b$$

Wie oben schon erwähnt, sind die Seiten des Kugeldreiecks Großkreisbögen – sie werden also in Grad gemessen. Es gilt $0^\circ < a, b, c < 180^\circ$.

¹⁰vgl. [Sch17] S. 21 ff.

¹¹vgl. [Sch17], S. 23

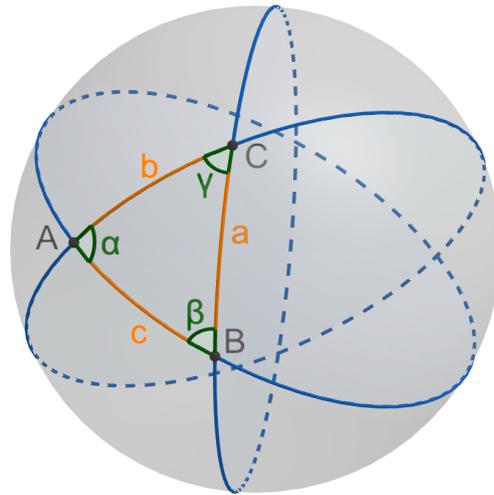


Abbildung 4.4: Kugeldreieck (erstellt mit GeoGebra)

Die Winkel α, β, γ des Kugeldreiecks sind die Winkel zwischen den Großkreisen, welche einander im jeweiligen Eckpunkt schneiden.

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle BCA = \gamma$$

Für diese Winkel gilt ebenso $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$. Anhand Abb. 4.4 erkennt man auch (evtl. nach längerem Hinschauen), dass die drei Großkreise die Kugelfläche in insgesamt acht Kugeldreiecke teilen. Als Eckpunkte besitzen diese Dreiecke die Punkte A, B oder C oder deren Gegenpunkte. Die Seiten der Dreiecke sind entweder a, b oder c oder deren Komplemente zu 180° . Die Herleitung für den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks ist relativ einfach, weshalb hier nur kurz darauf eingegangen wird. Im Wesentlichen betrachtet man die drei Kugelzweiecke, die durch die jeweiligen Winkel des Kugeldreiecks bestimmt sind. Die Fläche dieser drei Kugelzweiecke bildet zusammen immer die Fläche einer Halbkugel, ergänzt durch die Fläche des Kugeldreiecks $\triangle ABC$ und die des Gegendreiecks $\triangle \overline{ABC}$. Das Kugeldreieck und sein Gegendreieck haben jedoch denselben Flächeninhalt, weshalb der Flächeninhalt für das Kugeldreieck $\triangle ABC$ lautet¹²:

$$A(\triangle ABC) = \frac{\pi r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \quad (4.1)$$

An Formel (4.1) ist bereits zu erkennen, dass die Winkelsumme im Kugeldreieck größer als 180° sein muss, ansonsten wäre der Flächeninhalt immer $A(\triangle ABC) = 0$ oder gar $A(\triangle ABC) < 0$. Die Differenz zu 180° bzw. der Klammerausdruck in (4.1) wird auch „sphärischer Exzess“ des Kugeldreiecks genannt und ist ein bzw. *das* Maß für dessen Flächeninhalt. Man schreibt den sphärischen Exzess auch an als $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$.

¹²vgl. [Sch17], S. 23

Wie auch für Dreiecke in der ebenen Geometrie kann man für Euler'sche Dreiecke die Dreiecksungleichung formulieren¹³:

Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite.

Um das ohne richtigen mathematischen Beweis zu begründen, reichen ein paar anschauliche Überlegungen aus. Es wird davon ausgegangen, dass c die längste Seite des Kugeldreiecks ist, also $a < c$ und $b < c$. Man verbindet nun die Punkte A, B und C mit dem Kugelmittelpunkt M und erhält zu jeder Seite einen Kreisausschnitt (siehe Abb. 4.5). Nun klappt man die Kreisausschnitte AMC und BMC so ein, dass die Seiten a

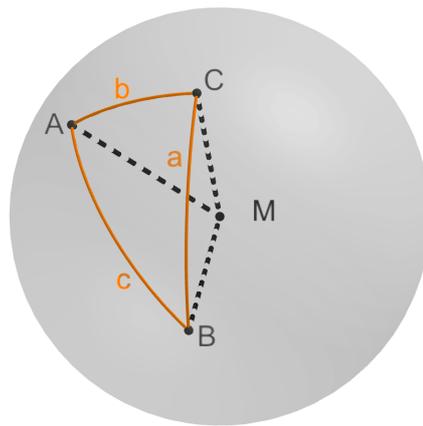


Abbildung 4.5: Zur Begründung der Dreiecksungleichung (erstellt mit GeoGebra)

und b auf c zu liegen kommen. Da $a < c$ und $b < c$, kommt der Punkt C jeweils auf dem Bogen \widehat{AB} zu liegen und die beiden eingeklappten Sektoren überlappen einander. Es muss deshalb $a + b > c$ gelten. Für die beiden anderen Seiten kann man das Prozedere genauso durchführen. Deshalb gilt $a + c > b$ und $b + c > a$.

Aus der Dreiecksungleichung für Euler'sche Dreiecke kann man nun folgern:

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A, B auf der Kugeloberfläche ist der Großkreisbogen \widehat{AB} .

Man kann diese Tatsache vorweg auch ohne Dreiecksungleichung überlegen. Es sind A und B zwei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel (siehe Abb. 4.6). Die aller kürzeste Verbindung wäre immer die gerade Strecke AB , welche durch die Kugel verläuft. Durch die Kugel verlaufen würden auch alle Kreisbögen, deren Radius größer als der Kugelradius ist. Also kommen für Verbindungen *auf* der Kugeloberfläche nur Bögen infrage, deren Radius kleiner oder gleich dem Kugelradius ist. Alle Bögen mit kleinerem Radius als dem Kugelradius besitzen jedoch eine größere Krümmung, was bedeutet, dass ihre Bogenlänge größer ist, als die des Bogens mit Kugelradius. Der Bogen mit Kugelradius,

¹³vgl. [Sch17], S. 24 ff.

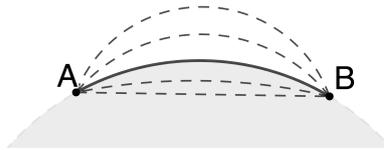


Abbildung 4.6: Kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche
(erstellt mit GeoGebra)

also der Großkreisbogen, ist deshalb die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B auf der Kugeloberfläche.

Mithilfe der Dreiecksungleichung geht es natürlich auch:

Es sei irgendein Weg zwischen zwei Punkten A und B auf der Kugeloberfläche gegeben. Man wählt nun Zwischenpunkte P_1, P_2, \dots, P_n auf diesem Weg und approximiert ihn durch eine endliche Folge von kleinen Großkreisbögen (in der Ebene entspräche das einer Approximation eines Weges durch Streckenzüge). Das sollte für „vernünftige“ Wege immer möglich sein, bzw. werden andere gar nicht in Betracht gezogen. Die Gesamtlänge des Weges ist dann nahezu gleich der Summe der Bogenlängen $\widehat{AP_1} + \widehat{P_1P_2} + \dots + \widehat{P_nB}$. Aufgrund der Dreiecksungleichung kann man dann die Weglänge sukzessive verkürzen, also von einem Punkt aus direkt zum übernächsten gehen – denn es gilt z. B. $\widehat{AP_1} + \widehat{P_1P_2} > \widehat{AP_2}$. So erhält man letztlich den Großkreisbogen \widehat{AB} als kürzesten Weg.¹⁴



Abbildung 4.7: Kugellineal auf einem Globus mit M 1 : 42000000
($9^\circ \hat{=} 1000\text{km} \hat{=} 2,4\text{cm}$) (©Joseph Hochwarter)

An einer Kugeloberfläche schmiegt sich ein gespannter Faden entlang des kürzesten Weges an, d.h. entlang eines Großkreisbogens. In [Sch17] wird sogar empfohlen, sich ein „Kugellineal“ aus einem Folienstreifen zu basteln. Man zeichnet darauf eine gerade Linie und kann ihn dann, wie den gespannten Faden, an die Kugel anlegen und hat ebenfalls einen

¹⁴vgl. [Sch17], S. 25

Großkreisbogen „sichtbar“ gemacht. Zusätzlich könnte man noch eine Skala einzeichnen, die in Grad geeicht ist – die Abstände der Skalenstriche richten sich selbstverständlich nach dem Kugelradius. So kann man sogar die kürzeste Entfernung zweier Orte mithilfe eines Globus grob bestimmen (siehe Abb. 4.7).

4.1.4 Polardreieck

Es sei ein beliebiges Kugeldreieck $\triangle ABC$ gegeben. Konstruiert man zu jeder Seite dieses Dreiecks den Pol des zugehörigen Großkreises, so entsteht ein neues Dreieck $\triangle A'B'C'$ (siehe Abb. 4.8):

Zu $c = \widehat{AB}$ sei C' der Linkspol des Großkreises AB , orientiert von A nach B ,
 zu $a = \widehat{BC}$ sei A' der Linkspol des Großkreises BC , orientiert von B nach C ,
 zu $b = \widehat{AC}$ sei B' der Linkspol des Großkreises CA , orientiert von C nach A (!).

Das so konstruierte Dreieck heißt *Polardreieck* zum Dreieck $\triangle ABC$ und besitzt die Seiten $a' = \widehat{B'C'}$, $b' = \widehat{A'C'}$ und $c' = \widehat{A'B'}$, sowie die Winkel $\alpha' = \angle C'A'B'$, $\beta' = \angle A'B'C'$ und $\gamma' = \angle B'C'A'$. Ein solches Polardreieck verfügt über ein paar „schöne“ Eigenschaften,

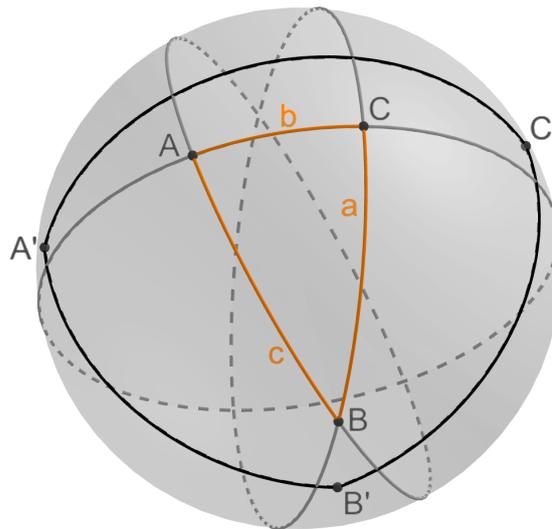


Abbildung 4.8: Polardreieck (erstellt mit GeoGebra)

die wie folgt lauten¹⁵:

- (i) Die Winkel des ursprünglichen Kugeldreiecks und die zugehörigen Seiten des Polardreiecks ergänzen einander zu 180° , also $\alpha + a' = 180^\circ$, usw.

Das lässt sich beweisen, indem man die Kugel so dreht, dass man in Richtung

¹⁵vgl. [Sch17], S. 26 ff.

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

des Kugelradius AM blickt (siehe dazu Abb. 4.9) – der Punkt A auf der Kugeloberfläche und der Kugelmittelpunkt M liegen nun übereinander. Es entsteht eine Projektion, in der die Großkreise der Seiten c und b als Durchmesser und der Winkel α als Winkel zwischen ihnen erscheint. Die Pole der beiden soeben genannten Großkreise B' und C' kommen am Kreisrand zu liegen – der Großkreis $B'C'$ wird also unverzerrt dargestellt, weshalb man die Seite a' des Polardreiecks als $\angle B'AC'$ ablesen kann. Außerdem ist $AB' \perp CA$ und $AC' \perp AB$. Die beiden rechten Winkel $\angle B'AC$ und $\angle BAC'$ überlappen einander – und zwar genau um den Winkel α . Man kann schreiben:

$$a' = \angle B'AC' = 2 \cdot 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha + a' = 180^\circ \quad (4.2)$$

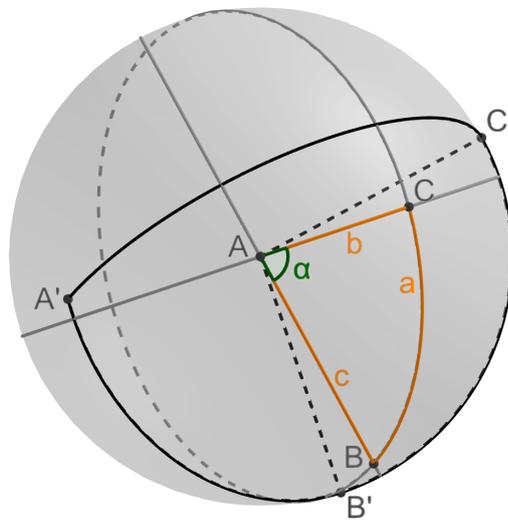


Abbildung 4.9: Beziehungen zwischen Dreieck und Polardreieck (erstellt mit GeoGebra)

- (ii) Das Polardreieck des Polardreiecks ist wieder das Ausgangsdreieck.
Anhand der Konstruktion des Polardreiecks $\triangle A'B'C'$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

- C' ist der Pol zu \widehat{AB} , also ist $\widehat{AC'} = \widehat{BC'} = 90^\circ$,
- B' ist der Pol zu \widehat{AC} , also ist $\widehat{AB'} = \widehat{CB'} = 90^\circ$,
- A' ist der Pol zu \widehat{BC} , also ist $\widehat{BA'} = \widehat{CA'} = 90^\circ$.

Zu zeigen wäre nun:

- C ist der Pol zu $\widehat{A'B'}$, d. h. $\widehat{A'C} = \widehat{B'C} = 90^\circ$,
- B ist der Pol zu $\widehat{C'A'}$, d. h. $\widehat{A'B} = \widehat{C'B} = 90^\circ$,
- A ist der Pol zu $\widehat{B'C'}$, d. h. $\widehat{B'A} = \widehat{C'A} = 90^\circ$.

Durch Umsortieren der obigen Liste erhält man alle diese Zusammenhänge – auch die Orientierungen stimmen. So ist beispielsweise B der Linkspol zu $C'A'$ usw.

- (iii) Würde man nun vom Polardreieck $\triangle A'B'C'$ selbst ausgehen, so kann man auf dieses Eigenschaft (i) anwenden. Diese lautet dann $\alpha' + a'' = 180^\circ$, wobei a'' eine Seite des Polardreiecks von $\triangle A'B'C'$ wäre. (Zunächst muss man davon ausgehen, dass das Polardreieck des Polardreiecks ein gewisses $\triangle A''B''C''$ ist.) Laut Eigenschaft (ii) ist jedoch das Polardreieck des Polardreiecks wieder das Ausgangsdreieck, also gilt $a'' = a$. Oben eingesetzt ergibt das

$$\alpha' + a = 180^\circ \quad (4.3)$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass die jeweiligen Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ und die zugehörigen Winkel des entsprechenden Polardreiecks, einander zu 180° ergänzen.

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich nun recht praktische Anwendungsmöglichkeiten. Man kann so Aussagen über ein Dreieck und sein zugehöriges Polardreieck treffen, bzw. Aussagen über Winkel in Aussagen über Seiten überführen.

Wie oben bereits festgestellt, ist die Winkelsumme im Kugeldreieck $\triangle ABC$ größer als 180° . Das heißt, dass das für die Winkelsumme des Polardreiecks $\triangle A'B'C'$ auch gelten muss:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' > 180^\circ$$

Für die Winkel des Polardreiecks kann man aber nun obige Beziehung $\alpha' = 180^\circ - a$ einsetzen, und es ergibt sich:

$$a + b + c < 360^\circ \quad (4.4)$$

In Worten niedergeschrieben bedeutet das:

Die Summe der Seiten eines Kugeldreiecks sind kleiner als 360° .

4.2 Geografische Koordinaten

Nach diesem sehr theoretischen aber notwendigen Kapitel können wir uns endlich wieder auf die Weltkugel konzentrieren. Am Beginn des Kapitels 4.1 war von Großkreisen und Kleinkreisen die Rede – diese findet man auch im Gradnetz der Erde wieder. Die Erde dreht sich bekanntlich um sich selbst. Die Rotationsachse schneidet die Erde im Nord- und Südpol. Senkrecht zur Rotationsachse kann man in den Erdmittelpunkt eine Ebene legen, die die Erdoberfläche im Äquator schneidet. Der Äquator ist ein Großkreis und teilt die Erde in Nordhalbkugel und Südhalbkugel, also in zwei gleich große Hälften. Er ist die Bezugslinie zur Angabe der geografischen Breite. Nämlich ist als *geografische Breite* φ eines Ortes P auf der Erde der Winkelabstand vom Äquator, gemessen als Bogen auf

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

dem zugehörigen *Meridian* gemeint. Man unterscheidet nördliche oder südliche Breite – für Rechnungen ist es jedoch auch sinnvoll, der geografischen Breite ein Vorzeichen zu geben. In der Regel ist die nördliche Breite positiv und demnach die südliche negativ. Für die geografische Breite gilt also $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Alle Orte, die an derselben geografischen Breite liegen, bilden den Breitenkreis zu φ (siehe Abb. 4.10a). Mit Ausnahme des Äquators ($\varphi = 0^\circ$) sind alle Breitenkreise Kleinkreise.

Die *geografische Länge* λ ist die zweite Koordinate, die zum Verorten eines Punktes auf der Erdkugel notwendig ist. Ihre Bezugslinie ist der sog. *Nullmeridian*. Im Jahre 1884 wurde der Meridian bei Greenwich als allgemein gültiger Nullmeridian festgelegt. Damit eng verbunden ist auch die Festlegung der Weltzeit. Die Meridiane werden auch *Längengkreise* genannt. Ähnlich wie bei der geografischen Breite kann man nun sagen: Die *geografische Länge* λ eines Ortes P ist also der Winkelabstand des zum Ort P zugehörigen Meridians zum Nullmeridian. (siehe Abb. 4.10b). Meridiane sind ohne Ausnahme Großkreise – bzw. genauer gesagt – halbe Großkreise. Man unterscheidet östliche und westliche Länge, weshalb es auch hier sinnvoll ist Vorzeichen zu vergeben. Recht praktikabel ist es der östlichen Länge ein positives und der westlichen Länge ein negatives Vorzeichen zu geben. Dementsprechend gilt für die geografische Länge $-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$. Auch hier gilt: Das ist nicht einheitlich! Manchmal werden die Vorzeichen gar vertauscht oder die Länge im Bereich von 0° bis 360° angegeben. Die geografischen Längen $+180^\circ$ und -180° beschreiben übrigens den gleichen Meridian, nämlich den, der dem Nullmeridian gegenüber liegt bzw. ihn auf einen „ganzen“ Großkreis ergänzt. Dieser Meridian wird auch *Datumslinie* genannt. Je nach Reiserichtung muss man beim Überqueren dieser Linie das Datum um einen Tag anpassen. Übrigens besitzen Nord- und Südpol keine bestimmte

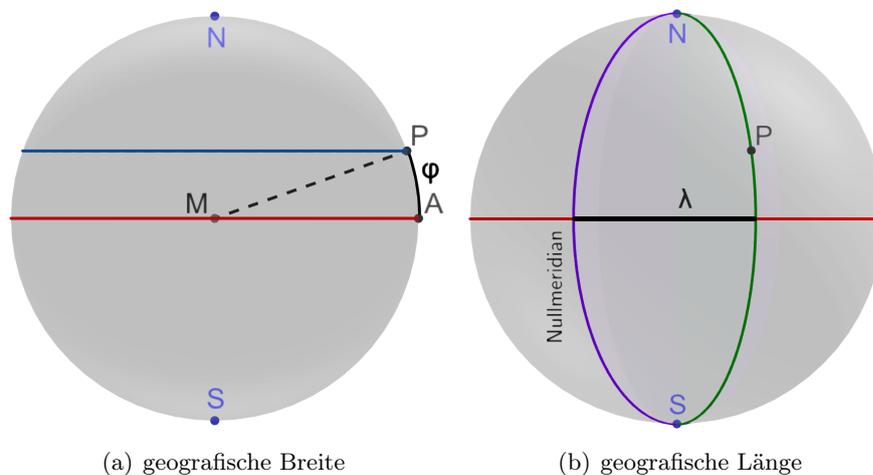


Abbildung 4.10: Geografische Breite und Länge (erstellt mit GeoGebra)

geografische Länge, es kann hierfür jeder Wert angegeben werden. Die geografische Breite beträgt an den Polen $\pm 90^\circ$, damit sind diese beiden Orte eindeutig festgelegt.¹⁶

¹⁶vgl. [Sch17]

Die geografischen Koordinaten sind im Großen und Ganzen also nichts anderes als Angaben von Winkeln. Rein mathematisch gesehen verbergen sich dahinter lediglich Kugelkoordinaten, die ausgehend vom Erdmittelpunkt als Ursprung angegeben werden. Da die Erde als Kugel betrachtet wird, ist die radiale Komponente immer konstant.

Längen- und Breitenkreise schneiden einander immer im rechten Winkel! Dies deshalb, weil die Längengrade senkrecht auf den Äquator stehen und alle Breitenkreise parallel zum Äquator sind.

Koordinatenangaben für Orte finden sich übrigens in vielen möglichen Varianten. Wie oben schon angeführt, gibt es einerseits die Variante der Angabe mit Vorzeichen oder der Angabe der zugehörigen Halbkugel – Nord oder Süd bzw. Ost oder West. Bei ersterer Variante ist es sinnvoll anzugeben, ob es sich beim jeweiligen Wert um die Breite (engl. „Latitude“) oder um die Länge (engl. „Longitude“) handelt. Zusätzlich dazu gibt es für die Angabe der Winkel die Möglichkeiten der Angabe in Dezimalgrad, in Grad-Winkelminuten-Winkelsekunden oder in Grad-Dezimalminuten.

Unten angeführt sind zwei Beispiele, wie die Koordinaten für den Wiener Stephansplatz angegeben werden können – beide Varianten beschreiben den gleichen Ort, nur in anderer Darstellung!

$$48^{\circ}12'29,43'' \text{ N } 16^{\circ}22'25,75'' \text{ E}$$

$$\text{Lat} = 48,281750^{\circ} \text{ Long} = 16,438194^{\circ}$$

Bequemer für Berechnungen ist selbstverständlich die zweite Variante, wobei Umrechnen keine große Hürde darstellt.

4.3 Entfernungen und Wege

Mit den bisherigen Informationen ist man bereits in der Lage Entfernungen von Orten mit bekannten Koordinaten zu berechnen – wenn auch nur in speziellen Fällen, wie sich zeigen wird. Man betrachtet also zwei Orte A und B auf der Erde und will ihre Entfernung berechnen.

4.3.1 Orte mit gleicher geografischer Länge

Dies ist der einfachste Fall der auftreten kann. A liegt also genau südlich oder nördlich von B , also auf demselben Meridian. Die Entfernung bzw. der kürzeste Weg von A nach B ist dann der Großkreisbogen \widehat{AB} , also ein Stück des Meridians. Dieser berechnet sich einfach aus den beiden geografischen Breiten von A und B .¹⁷

$$\widehat{AB} = \Delta\varphi = |\varphi_B - \varphi_A| \tag{4.5}$$

Das Gradmaß für einen Großkreisbogen auf der Erde kann man in eine Länge umrechnen, denn der Umfang eines gesamten Großkreises auf der Erde entspricht ja dem Erdumfang

¹⁷vgl. [Sch17] S. 35,36

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

$U \approx 40000 \text{ km}$.

$$1^\circ \hat{=} \frac{40000 \text{ km}}{360^\circ} = 111,1 \text{ km oder } 1 \text{ km} \hat{=} 0,009^\circ \quad (4.6)$$

Anmerkung: Dieser Wert ist übrigens Basis für die Definition der Längeneinheit *Seemeile*. Eine Seemeile ist eine Winkelminute eines Großkreisbogens auf der Erde. Umgerechnet in Längeneinheiten ist

$$1 \text{ sm} = 1' = \frac{1^\circ}{60} \hat{=} \frac{111,1 \text{ km}}{60} = 1,852 \text{ km}$$

Die Städte Wien und Malanje (Angola) befinden sich auf demselben Meridian, nämlich $\lambda = 16^\circ 21' = 16,35^\circ$. Die geografische Breite von Malanje beträgt $\varphi_M = -9^\circ 32' = -9,53^\circ$, die von Wien beträgt $\varphi_W = 48^\circ 12' = 48,20^\circ$.

Somit berechnet sich die Entfernung zu

$$\Delta\varphi = |\varphi_M - \varphi_W| = |-9,53^\circ - 48,20^\circ| = 57,73^\circ \hat{=} 6414 \text{ km}.$$

4.3.2 Weg auf einem Breitenkreis

Ganz ähnlich wie im vorigen Kapitel 4.3.1 kann man von zwei Orten A und B , welche auf derselben geografischen Breite liegen, den Weg am zugehörigen Breitenkreis berechnen.¹⁸ Es handelt sich hierbei **nicht** um die kürzeste Entfernung, denn der Breitenkreis ist im Allgemeinen kein Großkreis. Das bedeutet, dass im Allgemeinen auch sein Umfang kleiner ist, als der eines Großkreises. Bezeichnet R den Erdradius und r den Radius des zur Breite

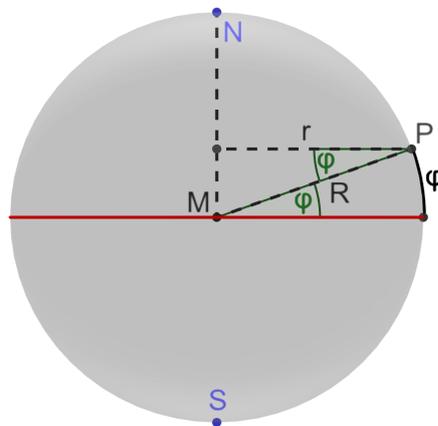


Abbildung 4.11: Radius des Breitenkreises zur Breite φ (erstellt mit GeoGebra)

des Orts P gehörenden Breitenkreis, dann ist (siehe Abb. 4.11):

$$r = R \cdot \cos \varphi \quad (4.7)$$

¹⁸vgl. [Sch17], Seite 36 ff.

Das bedeutet für den Umfang u des Breitenkreises, wenn U der Erdumfang ist :

$$u = U \cdot \cos \varphi \quad (4.8)$$

Daraus kann man jetzt den Weg auf einem Breitenkreis leicht herleiten. Der gesamte Umfang u eines Breitenkreises entspricht einer Längenänderung $\Delta\lambda = 360^\circ$. Somit berechnet sich der Weg zu einer gegebenen Längendifferenz $\Delta\lambda$:

$$\frac{\Delta\lambda}{360^\circ} \cdot u = \frac{\Delta\lambda \cdot U \cdot \cos \varphi}{360^\circ} = \Delta\lambda \cdot \cos \varphi \cdot 111,1 \text{ km} \quad (4.9)$$

Sind λ_A und λ_B die geografischen Längen der beiden Orte, dann berechnet sich die Längendifferenz zu $\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A|$. Auf demselben Breitenkreis wie Wien ($\varphi = 48^\circ 12' = 48,20^\circ$) befindet sich zum Beispiel die ukrainische Kleinstadt Jenakijewe. Mithilfe der beiden geografischen Längen kann man nun den Weg am Breitenkreis berechnen.

$$\Delta\lambda \cdot \cos \varphi \cdot 111,1 \text{ km} = |16,37^\circ - 38,20^\circ| \cdot \cos(48,20^\circ) \cdot 111,1 \text{ km} = 1617 \text{ km}$$

Noch einmal sei darauf hingewiesen, dass dies nicht die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Orten ist.

Um dies zu verdeutlichen, hier eine Aussage, über die man eventuell ein bisschen nachdenken muss, bevor man sie für richtig erklärt:

Wenn also vier Wanderer von einem Ort 10 km genau nach Norden, Süden, Osten, Westen gehen, haben sich die beiden zuletzt genannten weniger von ihrem Ausgangsort entfernt als die beiden ersten.¹⁹

Der Vollständigkeit halber müsste man hier noch festhalten, dass die Wanderer im Allgemeinen nicht von einem Ort starten, der am Äquator liegt.

4.3.3 Orte mit gleicher geografischer Breite

Wie nun schon öfters erwähnt, ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Orten auf der Kugeloberfläche ein Großkreisbogen. Es werden nun wieder die Orte A und B betrachtet, die beide auf dem gleichen Breitenkreis φ liegen (siehe Abb. 4.12). Die Berechnung des Großkreisbogens \widehat{AB} wird anhand einer zeichnerischen Ermittlung gut verständlich.²⁰

¹⁹[Lie49], S. 233

²⁰vgl. [Sch17], S. 39 ff.

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

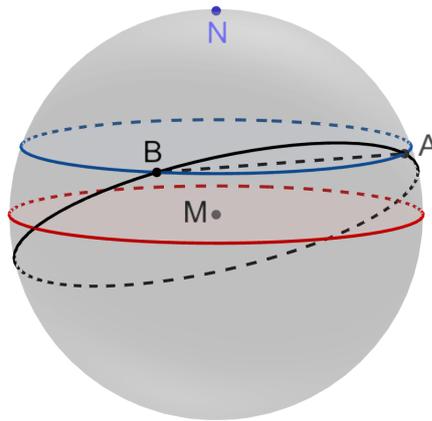
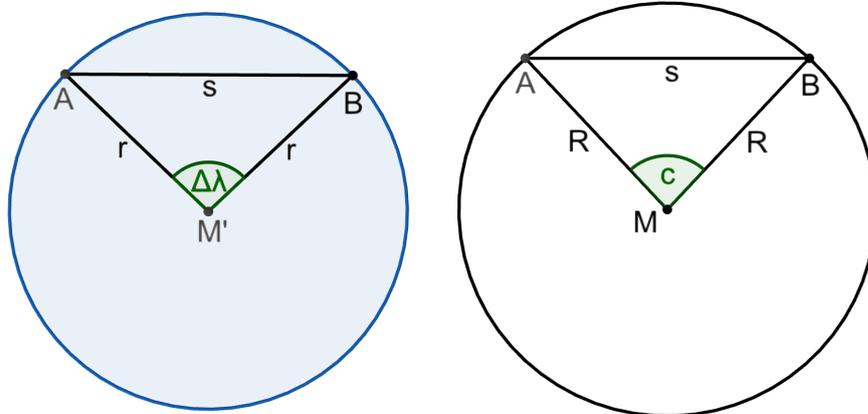


Abbildung 4.12: Großkreisbogen zwischen zwei Orten mit selber Breite
(erstellt mit GeoGebra)

Der Radius des Breitenkreises mit Breite φ wurde weiter oben bereits hergeleitet und berechnet sich nach (4.7). Man zeichnet nun, wie in Abb. 4.13a, diesen Breitenkreis mit Radius r , auf dem die Orte A und B liegen (von oben gesehen). Weiters kann im Mittelpunkt M' dieses Breitenkreises auch die Längendifferenz $\Delta\lambda$ eingezeichnet werden (das ist der Winkel zwischen den Meridianen, auf denen A und B liegen). Daraus ergibt sich die Sehne AB mit Länge $s = \overline{AB}$. Diese kann nun in einen Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M übertragen werden, indem man sie mit dem Zirkel abschlägt. Der Winkel $c = \angle AMB$ entspricht dem gesuchten Großkreisbogen \widehat{AB} . Anhand dieser zeichnerischen



(a) Breitenkreis auf dem A und B liegen (b) Großkreis auf dem A und B liegen

Abbildung 4.13: Ermittlung der kürzesten Entfernung zwischen A und B
(erstellt mit GeoGebra)

Ermittlung fällt auch die Berechnung nicht schwer. Der Radius des Breitenkreises ist gegeben durch die geografische Breite der Orte, also $r = R \cdot \cos \varphi$ (siehe (4.7)). Das

Dreieck $\triangle AM'B$ (siehe Abb. 4.13a) ist gleichschenkelig, somit halbiert die Höhe auf s den Winkel $\Delta\lambda$ und s selbst. Es gilt also:

$$\sin \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (4.10)$$

Gleichermaßen berechnet sich der gesuchte Winkel c im Dreieck $\triangle AMB$.

$$\sin \frac{c}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{R} = \frac{r \cdot \sin \frac{\Delta\lambda}{2}}{R} \quad (4.11)$$

Setzt man hierfür noch den Ausdruck für den Radius r ein gelangt man schließlich zu

$$\sin \frac{c}{2} = \cos(\varphi) \cdot \sin \frac{\Delta\lambda}{2} \Rightarrow c = 2 \cdot \arcsin \left(\cos \varphi \cdot \sin \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \quad (4.12)$$

Um das Beispiel aus Kapitel 4.3.2 wieder aufzugreifen, berechnen wir nun die kürzeste Entfernung zwischen Wien und der ukrainischen Kleinstadt Jenakijewe. Es war $\Delta\lambda = 21,83^\circ$ und $\varphi = 48,20^\circ$. Somit berechnet sich die kürzeste Entfernung zu

$$c = 2 \cdot \arcsin \left(\cos 48,20^\circ \cdot \sin \frac{21,83^\circ}{2} \right) = 14,50^\circ \hat{=} 1611 \text{ km}$$

Die Differenz von ca. 6 km zum Weg am Breitenkreis ist in diesem Fall nicht groß, aber definitiv vorhanden. Für weiter voneinander entfernte Orte ergeben sich selbstverständlich auch größere Differenzen.

4.3.4 Kürzeste Entfernung zweier beliebiger Orte auf der Erde I

Ziel ist es nun, die kürzeste Entfernung zwischen zwei beliebigen Punkten A und B berechnen zu können. Die betrachteten Spezialfälle in 4.3 sind zwar mit nicht sehr aufwendigen mathematischen Mitteln zu bewerkstelligen, jedoch ist eine Verallgemeinerung auf beliebige Punkte auf der Weltkugel damit nicht zu erreichen. Mithilfe der Sphärischen Trigonometrie kann man dieses Problem sehr bequem lösen – dazu aber ein bisschen später. Denn, es geht auch anders! Und zwar über einen Umweg: Man überführt die geografischen Koordinaten bzw. die Kugelkoordinaten der Orte in kartesische Koordinaten und bildet die Ortsvektoren $\vec{0A}$ und $\vec{0B}$. Der Winkel θ zwischen den beiden Ortsvektoren entspricht dem Großkreisbogen \widehat{AB} (siehe Abb. 4.14).²¹ Es sind also die Orte A (φ_A, λ_A) und B (φ_B, λ_B) gegeben. Zunächst müssen diese Koordinaten in kartesische Koordinaten transformiert werden. Der Nullpunkt des Koordinatensystem bleibt der Erdmittelpunkt ($M = 0$), die z -Achse verläuft in Richtung Nordpol N und die x -Achse durch den Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator. Die Umrechnungsformeln lauten, unter Berücksichtigung, dass der radiale Abstand zunächst mit $R = 1$ angenommen wird:

$$x = \cos \lambda \cdot \cos \varphi, \quad y = \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \quad z = \sin \varphi \quad (4.13)$$

²¹vgl. [Sch19]

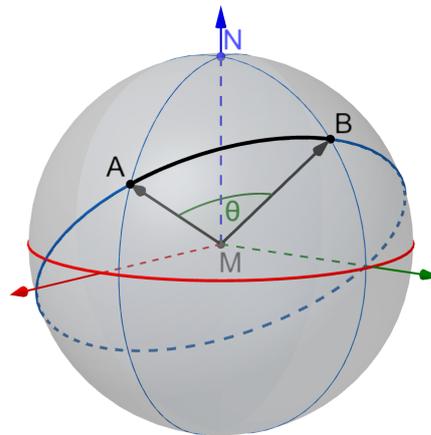


Abbildung 4.14: Berechnung der kürzesten Entfernung \widehat{AB} mithilfe kartesischer Koordinaten (erstellt mit GeoGebra)

Mittels der transformierten Punkte A und B kann man nun mithilfe des Skalarprodukts den eingeschlossenen Winkel θ der Vektoren \vec{OA} und \vec{OB} berechnen. Wegen obiger Annahme ($R = 1$) sind die Beträge dieser Vektoren gleich 1. Es gilt

$$\cos \widehat{AB} = \cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}. \quad (4.14)$$

Der erhaltene Winkel θ muss dann noch in eine Länge auf der Erdkugel umgerechnet werden ($1^\circ \cong 111,1 \text{ km}$). Zum Beispiel kann man nun die kürzeste Entfernung zwischen Wien ($\varphi_A = 48,20^\circ$, $\lambda_A = 16,37^\circ$) und Canberra, Australien ($\varphi_B = -35,27^\circ$, $\lambda_B = 149,12^\circ$) berechnen. Die zugehörigen Ortsvektoren lauten dann

$$\vec{OW} = \begin{pmatrix} 0,640 \\ 0,189 \\ 0,745 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} -0,701 \\ 0,419 \\ -0,577 \end{pmatrix}$$

Setzt man diese beiden Vektoren in (4.14) ein ergibt das $\theta = 143,12^\circ$. Umgerechnet in eine Länge auf der Erdkugel entspricht das $143,12^\circ \cdot 111,1 \text{ km} = 15900 \text{ km}$. Dieses Ergebnis scheint recht plausibel, wie man unten anhand weiterer Berechnungen sehen wird.

Der Umweg über kartesische Koordinaten macht diese Art der Entfernungsberechnung etwas „zäh“, jedoch kann man festhalten, dass sonst recht wenig Kugelgeometrie erforderlich war. Mit Ausnahme der Kugelkoordinaten und des Begriffs *Großkreisbogen* samt seinen Eigenschaften, sind wir nicht weit von der Schulmathematik abgedriftet. Dieses Unterkapitel hätte also eventuell auch im Abschnitt 3 seine Berechtigung.

4.4 Sphärische Trigonometrie

Mit Sphärischer Trigonometrie soll es also bequem möglich sein, den Großkreisbogen \widehat{AB} als kürzeste Entfernung der Orte A und B zu ermitteln. Man betrachte dazu Abbildung

4.15. \widehat{AB} bildet mit den Bögen \widehat{NA} und \widehat{NB} (auch Poldistanzen genannt) das Kugeldreieck $\triangle ABN$. Es ist übrigens üblich Großkreisbögen auch als *Orthodrome*²² zu bezeichnen.

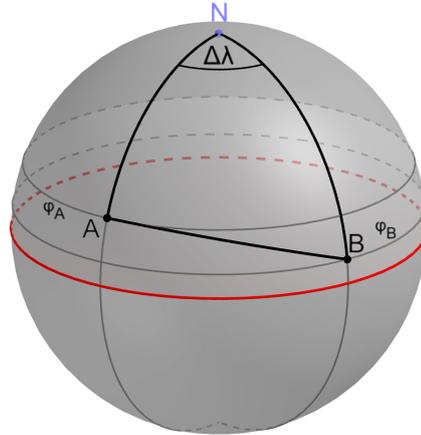


Abbildung 4.15: Kugeldreieck zur Berechnung der kürzesten Entfernung \widehat{AB}
(erstellt mit GeoGebra)

Die Poldistanzen kann man sich mithilfe der geografischen Breiten φ_A und φ_B berechnen, die Differenz der geografischen Längen $\Delta\lambda$ ebenso. Man kennt also zwei Seiten, sowie den eingeschlossenen Winkel des Dreiecks $\triangle ABN$ – es handelt sich um den Fall SWS (Seiten-Winkel-Seiten), für den der Seitenkosinussatz prädestiniert ist.

4.4.1 Seitenkosinussatz

Er lautet folgendermaßen:

Satz 4.1. *Seitenkosinussatz*²³: In einem Kugeldreieck mit den Seiten a, b, c (angegeben in Grad) und den Winkeln α, β, γ gilt:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \quad (4.15)$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die zwei anderen Formeln des Seitenkosinussatz ($\cos a = \dots$ und $\cos b = \dots$).

Einen recht anschaulichen Beweis dazu liefert [Sch17], S. 63 ff:

Beweis. Im Grunde genommen macht man nichts anderes, als das Kugeldreieck in ein „passendes“ ebenes Dreieck zu überführen und das so erhaltene Polyeder „aufklappt“. Mithilfe der ebenen Trigonometrie kann dann weitergerechnet werden.

Man verbindet also die drei Eckpunkte A, B, C des Kugeldreiecks jeweils mit dem Kugelmittelpunkt. Nun legt man im Punkt C die Tangentialebene an die Kugel. Diese Ebene

²²griech. orthos für „gerade“, dromos für „Lauf“

²³[Sch17], S.63

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

schneidet die Mittelpunktstrahlen MA und MB in zwei Punkten. Diese werden ebenfalls mit A und B bezeichnet. Das so erhaltene Polyeder kann man entlang der von C aus-

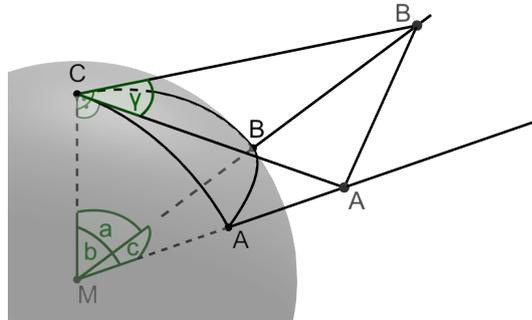


Abbildung 4.16: Hilfskonstruktion zum Beweis des Seitenkosinussatzes
(erstellt mit GeoGebra)

gehenden Kanten aufschneiden und die Dreiecke in die Ebene klappen. Das so erhaltene Netz ist in Abb. 4.17 dargestellt. In ebenen Dreiecken gilt bekanntlich der Kosinussatz. Diesen kann man nun anwenden, um die Länge der Strecke AB zu berechnen. Im Dreieck

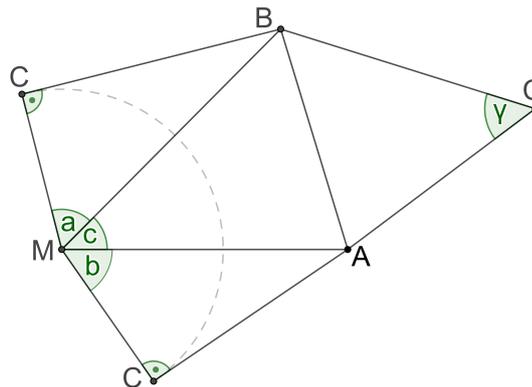


Abbildung 4.17: Netz des Polyeders $MABC$
(erstellt mit GeoGebra)

$\triangle MAB$ ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \cos c \quad (4.16)$$

\overline{AB} kann auch im Dreieck $\triangle ABC$ mithilfe des Kosinussatzes ausgedrückt werden.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma \quad (4.17)$$

Subtrahiert man Gleichung (4.17) von (4.16), kommt man auf:

$$0 = \overline{MA}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \cos c + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma \quad (4.18)$$

Die Dreiecke $\triangle MCA$ und $\triangle MBC$ in Abbildung 4.17 sind rechtwinkelig, deshalb gilt $\overline{MA}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{MC}^2$ und $\overline{MB}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{MC}^2$. Eingesetzt in (4.18) ergibt

$$2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \cos c = 2 \cdot \overline{MC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma,$$

und umgeformt

$$\cos c = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{MB}} \cdot \cos \gamma.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle MCA$ und $\triangle MBC$ kann man außerdem ablesen:

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \cos b, \quad \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \cos a, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} = \sin b, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{MB}} = \sin a$$

Einsetzen ergibt den oben formulierten Seitenkosinussatz zu

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Für die Seiten a und b ist der Beweis analog zu führen. □

Man muss hierbei anmerken, dass stillschweigend vorausgesetzt wurde, dass die Seiten a und b spitz sind – jedoch ist der Satz allgemein gültig. Mithilfe geeigneter Nebendreiecke könnte man auch das zeigen.

Desweiteren fällt auf, dass der Seitenkosinussatz alle drei Seiten a, b, c , sowie einen Winkel des Kugeldreiecks enthält. Es lässt sich somit auch der Seiten-Seiten-Seiten-Fall lösen, denn man kann (4.15) einfach nach $\cos \gamma$ auflösen (analog für α, β).²⁴

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

Somit erscheint der Seitenkosinussatz auf den ersten Blick ausgesprochen praktisch zu sein. In [Big84], S. 27, wird der Seitenkosinussatz sogar als **fundamentaler Satz der Kugelgeometrie** beschrieben. Aus ihm lassen sich viele weitere trigonometrische Grundformeln ableiten, beispielsweise der Winkelkosinussatz, der Sinus-Kosinus-Satz, der Kotangenssatz, der Sinussatz und viele mehr.²⁵ Um die Entfernung zweier beliebiger Punkte auf der Erde zu berechnen, ist man mit dem Seitenkosinussatz also gut gerüstet.

4.4.2 Kürzeste Entfernung zweier beliebiger Orte auf der Erde II

Man betrachte also nochmals Abbildung 4.15. Durch die Koordinaten der Orte A und B kennt man vom Kugeldreieck $\triangle ABN$ also die Poldistanzen \widehat{NA} und \widehat{NB} , sowie den Winkel $\Delta\lambda$. Der Seitenkosinussatz zur Ermittlung der Orthodrome \widehat{AB} lautet dann

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\Delta\lambda). \quad (4.19)$$

²⁴vgl. [Sch17], S. 65

²⁵vgl. [Sig69], S. 238 ff. und S. 266 ff.

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

Als Beispiel sollen nun wieder die Orte Wien ($\varphi_A = 48,20^\circ$, $\lambda_A = 16,37^\circ$) und Canberra, Australien ($\varphi_B = -35,27^\circ$, $\lambda_B = 149,12^\circ$) dienen. Die Poldistanzen betragen dann

$$\widehat{NA} = 90^\circ - 48,20^\circ = 41,80^\circ \text{ und } \widehat{NB} = 90^\circ - (-35,27^\circ) = 125,27^\circ.$$

Die Differenz der geografischen Längen beträgt

$$\Delta\lambda = |149,12^\circ - 16,37^\circ| = 132,75^\circ.$$

Eingesetzt in den Seitenkosinussatz (4.19) ergibt das

$$\widehat{AB} = 143,12^\circ \hat{=} 15900 \text{ km}$$

Um den errechneten Wert einigermaßen überprüfen zu können, wurde mit dem Online-Kartendienst „Google Maps“ die Entfernung zu 15916,61 km ermittelt (siehe Abb. 4.18). Das stimmt mit dem errechneten Wert recht gut überein, die Differenz beträgt nur ca. 17 km. Auch der über www.luftlinie.org ermittelte Wert kommt nicht näher an das berechnete Ergebnis, er beträgt 15918,77 km. Wie die beiden Kartendienste die Entfernung berechnen, ist leider nicht bekannt.

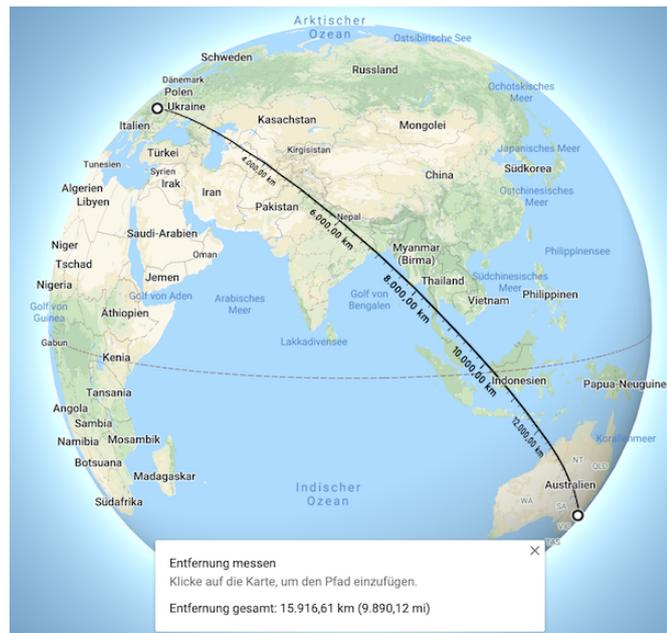


Abbildung 4.18: Entfernung Wien-Canberra (erstellt mit Google Maps)

4.4.3 Winkelkosinussatz

Die Herleitung des Winkelkosinussatzes geht recht bequem vonstatten. Man betrachtet also ein allgemeines Kugeldreieck $\triangle ABC$. Für das zugehörige Polardreieck $\triangle A'B'C'$,

mit den Seiten a', b', c' und den Winkeln α', β', γ' kann man den Seitenkosinussatz nach (4.15) anschreiben.

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma \quad (4.20)$$

Die Seiten und Winkel des Polardreiecks stehen, wie in Kapitel 4.1.4 (S. 41) nachzulesen ist, in bestimmter Beziehung zu jenen im Ausgangsdreieck. Es gilt also $a' = 180^\circ - \alpha$ und $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, analog für b, c und β, γ . Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \gamma) &= \\ \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \beta) &+ \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \beta) \cdot \cos(180^\circ - c) \end{aligned}$$

Da $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ folgt:

$$-\cos \gamma = (-\cos \alpha) \cdot (-\cos \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot (-\cos c)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar der Winkelkosinussatz.²⁶

Satz 4.2. *Winkelkosinussatz: In einem Kugeldreieck mit den Seiten a, b, c (angegeben in Grad) und den Winkeln α, β, γ gilt:*

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c \quad (4.21)$$

Der Winkelkosinussatz eignet sich augenscheinlich zur Lösung des Winkel-Seiten-Winkel-Falls (WSW). Sind von einem Kugeldreieck eine Seite und die ihr anliegenden Winkel bekannt, so kann man den dritten Winkel berechnen. Was allerdings auch auffällt, ist, dass man durch Umformen von (4.21) nach $\cos c$ aus den drei Winkeln des Kugeldreiecks die Seite c berechnen kann.

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Das bedeutet, dass ein Kugeldreieck durch seine drei Winkel eindeutig bestimmt ist und unter Kugeldreiecken der Winkel-Winkel-Winkel-Kongruenzsatz (WWW) gilt. Dies ist also ein weiterer, gravierender Unterschied zur ebenen Geometrie.

4.4.4 Sinussatz

Mit dem Seitenkosinussatz und Winkelkosinussatz können die Fälle SWS, SSS, WSW und WWW gelöst werden. Die Fälle SSW (zwei Seiten und ein anliegender Winkel) und SWW (zwei Winkel und eine anliegende Seite) können beispielsweise mit dem Sinussatz berechnet werden.

Satz 4.3. *Sinussatz: In einem Kugeldreieck mit den Seiten a, b, c (angegeben in Grad) und den Winkeln α, β, γ gilt:*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b} \quad (4.22)$$

²⁶vgl. [Sch17], S. 67 und [Sig69], S. 245, 246

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die beiden anderen Beziehungen. Äquivalent dazu ist auch die Formel

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \quad (4.23)$$

Der Sinussatz lässt sich, wie weiter oben schon angemerkt, aus dem Seitenkosinussatz herleiten. Ein direkter Beweis lässt sich allerdings auch formulieren²⁷, wird aber hier nicht angeführt. Ähnlich, wie beim Beweis des Seitenkosinussatzes wird ein Polyeder betrachtet, dessen Netz mit ebener Trigonometrie behandelt werden kann.

4.4.5 Rechtwinkelige Kugeldreiecke

Für rechtwinkelige Kugeldreiecke lassen sich, ähnlich wie für ebene rechtwinkelige Dreiecke, Beziehungen zwischen Seiten und Winkel ableiten. Ein rechtwinkeliges Kugeldreieck $\triangle ABC$ besitzt also einen Winkel $\gamma = 90^\circ$. Wie in der ebenen Geometrie, bezeichnet man die dem rechten Winkel anliegenden Seiten als *Katheten* und die gegenüberliegende Seite als *Hypotenuse*. Die sogenannten *Neper'schen Formeln* erweisen sich bei Berechnungs-

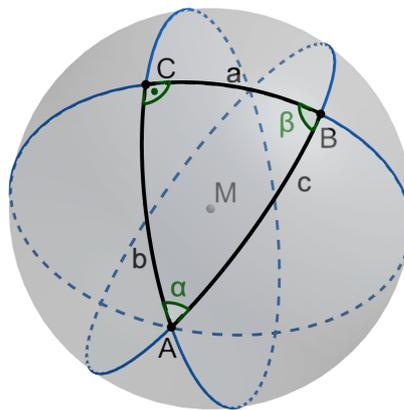


Abbildung 4.19: Rechtwinkeliges Kugeldreieck (erstellt mit GeoGebra)

problemen an rechtwinkeligen Kugeldreiecken als äußerst praktisch.²⁸

Unter deren Zuhilfenahme ist es möglich, aus je zwei gegebenen Größen, jede der fehlenden Größen eines rechtwinkeligen Dreiecks direkt zu berechnen.

Zunächst kann man in die bereits oben erwähnten trigonometrischen Sätze für $\gamma = 90^\circ$ einsetzen.

- Der Seitenkosinussatz (Formel (4.15)) liefert dann:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos(90^\circ) = \cos a \cdot \cos b \quad (4.24)$$

²⁷vgl. [Sch17], S. 68, 69 und [Sig69], S. 239, 240

²⁸vgl. [Sch17], S. 70 ff.

- Aus dem Winkelkosinussatz (Formel (4.21)) für $\cos \alpha$ erhält man:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos(90^\circ) + \sin \beta \cdot \sin(90^\circ) \cdot \cos a = \sin \beta \cdot \cos a \quad (4.25)$$

- Ebenso aus dem Winkelkosinussatz (Formel (4.21)), jedoch für $\cos \gamma$, folgt:

$$\cos 90^\circ = 0 = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c \Rightarrow \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

Diese Gleichung kann nun durch die rechte Seite dividiert werden. Wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lautet Gleichung (4.26) dann:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \cos c = 1 \quad (4.26)$$

- Aus dem Sinussatz (Formel (4.22)) erhält man schlussendlich

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin a}{\sin c} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (4.27)$$

Die oben beschriebenen Herleitungen beziehen sich auf die Bezeichnungen in Abb. 4.19, und aus ihnen ergeben sich folgende Anwendungsfälle. In Formel (4.24) sind drei Seiten beteiligt, bei Formel (4.25) zwei Winkel und eine Kathete. Formel (4.26) enthält zwei Winkel und die Hypotenuse und Formel (4.27) die Hypotenuse, einen Winkel und die dazugehörige Gegenkathete.

Um nun alle rechtwinkligen Kugeldreiecke berechnen zu können, fehlen noch zwei Anwendungsfälle.

- Die oben erste hergeleitete Neper'sche Formel (4.25) lautete

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a.$$

Setzt man hier für $\sin \beta = \frac{\sin b}{\cos c}$ (laut Formel (4.27)) und für $\cos a = \frac{\sin c}{\cos b}$ (nach Formel (4.24)), so ergibt das

$$\cos \alpha = \frac{\sin b}{\cos c} \cdot \frac{\sin c}{\cos b}$$

und wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ erhält man

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}. \quad (4.28)$$

Diese Formel enthält nun die Hypotenuse, einen Winkel und die zugehörige Ankathete.

- Um auch eine Lösung für den letzten möglichen Anwendungsfall zu haben, benötigt man eine Gleichung, die einen Winkel sowie die beiden Katheten enthält. Der Sinussatz (4.22) liefert dazu den passenden Ansatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b}.$$

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

Laut Formel (4.25) ist $\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$. Eingesetzt ergibt das

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\cos \alpha}{\cos a \cdot \sin b} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin a}{\cos a \cdot \sin b}$$

und man erhält

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\cos b}. \quad (4.29)$$

Zusammenfassend sind nachfolgend die sechs Neper'schen Formeln und die beteiligten Winkel bzw. Seiten nochmals angeführt.

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (\text{Hypotenuse, Winkel und zugehörige Gegenkathete}) \quad (4.30)$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad (\text{Hypotenuse, Winkel und zugehörige Ankathete}) \quad (4.31)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b} \quad (\text{zwei Katheten und ein Winkel}) \quad (4.32)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad (\text{drei Seiten}) \quad (4.33)$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \cos c = 1 \quad (\text{Hypotenuse und zwei Winkel}) \quad (4.34)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a \quad (\text{eine Kathete und zwei Winkel}) \quad (4.35)$$

Diese Formeln sind auch für allgemeine Kugeldreiecke hilfreich. Zusammen mit den weiter oben genannten trigonometrischen Sätzen ist es möglich, jedes Kugeldreieck durch Angabe dreier Bestimmungstücke, d.h. SSS, WWW, SWS, WSW, SSW oder WWS zu bestimmen. Bei den beiden letztgenannten Fällen ist aber Vorsicht geboten. Die Anwendung des Sinussatzes bringt im Allgemeinen zwei Lösungen für den unbekannt Winkel bzw. die unbekannte Seite (analog zur ebenen Geometrie). Durch Einzeichnen einer passenden Höhe teilt man das Kugeldreieck in zwei rechtwinkelige Kugeldreiecke und kann dann mithilfe der Neper'schen Formeln für beide Fälle weiter rechnen.

4.4.5.1 Nördlichster Punkt einer Orthodrome

Ein Anwendungsfall wäre z. B. die Bestimmung des nördlichsten Punkts auf einer Orthodrome. Der Fußpunkt des Lots vom Nordpol N auf die Orthodrome \widehat{AB} ergibt den nördlichsten Punkt D auf ihr. Der Großkreisbogen \widehat{AB} steht dann senkrecht auf den Meridian durch F (siehe dazu Abb. 4.20). Die Koordinaten von Punkt D sind nun zu berechnen. Dazu benötigt man die Poldistanz \widehat{ND} und den Winkel $\gamma_1 = \angle BND$. Damit

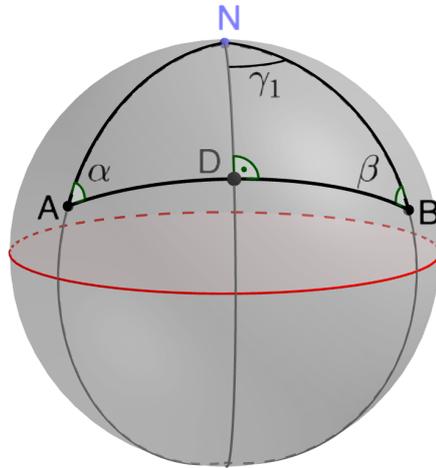


Abbildung 4.20: Nördlichster Punkt einer Orthodrome (erstellt mit GeoGebra)

ist nämlich $\varphi_D = 90^\circ - \widehat{ND}$ und $\lambda_D = \lambda_B - \gamma_1$ (D liegt hier westlich von B). Um die nötigen Werte zu berechnen, benötigt man vom rechtwinkligen Dreieck $\triangle DAN$ die Poldistanz \widehat{NB} und den Winkel β . Mithilfe der Neper'schen Formel (4.30) lässt sich \widehat{ND} berechnen.

$$\sin \beta = \frac{\sin \widehat{ND}}{\sin \widehat{NB}} \quad \Rightarrow \quad \sin \widehat{ND} = \sin \beta \cdot \sin \widehat{NB} \quad (4.36)$$

Der Winkel γ_1 kann mithilfe der Neper'schen Formel (4.32) berechnet werden.

$$\cos \gamma_1 = \frac{\tan \widehat{ND}}{\tan \widehat{NB}} \quad (4.37)$$

Wo liegt also der nördlichste Punkt auf der Orthodrome zwischen Wien (A) und Canberra (B)?

Für Canberra beträgt $\widehat{NB} = 125,27^\circ$. Den Winkel β könnte man mit dem Seitenkossinussatz berechnen. Da dies aber im nächsten Kapitel sowieso gemacht wird, sei er hier vorausgesetzt. Also ist $\beta = 54,63^\circ$. Gleichung (4.36) liefert $\widehat{ND} = 41,74^\circ$, und aus Gleichung (4.37) berechnet sich $\gamma_1 = 129,13^\circ$. Somit hat der Punkt D die Koordinaten $\varphi_D = 48,26^\circ$ und $\lambda_D = 19,99^\circ$. Auf der Landkarte liegt dieser Ort nordöstlich von Budapest an der slowakisch-ungarischen Grenze.

Im Allgemeinen muss dieser Punkt nicht zwischen den Orten A und B liegen, er kann auch außerhalb der Dreiecksseite \widehat{AB} (aber auf dem zugehörigen Großkreis) zu liegen kommen. Dieser Fall tritt auf, wenn α oder β ein stumpfer Winkel ist.

Liegt von den beiden Orten einer auf der Nord- und der andere auf der Südhalbkugel, so stellt sich die Frage, wo und unter welchem Winkel die Orthodrome den Äquator schneidet. Auch bei der Lösung dieses Problems sind die Neper'schen Formeln ein geeignetes

4 „Weltkugelmathematik“ mit Sphärischer Geometrie

Hilfsmittel, denn der Äquator schneidet die Poldistanz eines Ortes, woraus sich wieder rechtwinkelige Dreiecke ergeben. ²⁹

²⁹vgl. [Sch17], S. 84,85

5 Richtungen und Kurse

5.1 Richtungsangaben auf der Erde

Auf der Erde orientiert sich die Menschheit nach den vier Himmelsrichtungen: Norden, Osten, Süden und Westen – in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn. Leicht zu merken nach dem allseits bekannten Merksatz: „**N**ie **o**hne **S**eife **w**aschen.“

Üblicherweise wird die Nordrichtung mit einem Kompass bestimmt. Die Kompassnadel richtet sich nach dem Magnetfeld der Erde aus, also nach Nord-Süd-Richtung. Nach Norden weist die markierte Spitze der Kompassnadel. Die Nordrichtung kann man jedoch auch anders bestimmen – beispielsweise durch Schattenaufzeichnung und „indische Kreise“. Der Verlauf der Spitze des Schattens eines Gnomons wird am Boden nachgezeichnet – prinzipiell reicht die Aufzeichnung eines Tages, die Aufzeichnung mehrerer Tage übers Jahr bringt allerdings ein genaueres Ergebnis. Außerdem kann längerfristig die Änderung dieser Sonnenstands-Kurve beobachtet werden. Aus dem Verlauf kann die Nordrichtung ermittelt werden.¹ Diese ermittelte Richtung weicht übrigens geringfügig von der eines Kompass ab. Denn der geografische Nordpol, also der Schnittpunkt von Rotationsachse und Erdoberfläche ($\varphi = 90^\circ$), und der magnetische Nordpol befinden sich nicht am selben Ort. Die magnetische Achse ist zurzeit um ca. 11° gegenüber der Rotationsachse geneigt. Hinzu kommt, dass der magnetische Nordpol in den letzten Jahrzehnten sehr stark gewandert ist – das Magnetfeld der Erde verändert sich also mit der Zeit.²

Die Abweichung der magnetischen zur geografischen Nordrichtung ist abhängig vom Mesort, an dem man sich befindet. Diese „Deklination“ spielt in der Navigation selbstverständlich eine Rolle, für die hier betrachteten Richtungs- und Kursberechnungen soll sie aber außer Acht gelassen werden. Ein Kompass besteht im Allgemeinen aus einer Nadel und aus einer „Kompassrose“, auch „Windrose“ genannt. Auf ihr sind die vier Himmelsrichtungen und meistens auch noch die vier dazwischen liegenden Nebenrichtungen, also NO, SO, SW, NW (siehe Abb. 5.1), dargestellt. Die weiteren Nebenrichtungen, welche die Kompassrose in Sechzehntel teilen, also NNO, ONO, OSO, SSO, ... findet man nicht mehr so häufig auf Kompassrosen eingezeichnet. Sowie so ist es viel sinnvoller und genauer, die Richtung in Grad anzugeben. Dazu ist die abgebildete Kompassrose mit einer 360° -Einteilung versehen. Der Richtungswinkel oder Kurswinkel wird also ausgehend von der Nordrichtung, im Uhrzeigersinn orientiert, angegeben. Diese Kursangabe wird auch *rechtsweisender Kurs* genannt.³

¹vgl. [Ver]

²vgl. [Hüt11], S. 142 ff.

³vgl. [Sch17], S.48,49



Abbildung 5.1: Kompassrose (Osten markiert mit E für „East“)
(Quelle: <https://verlag.aeviate.de/downloads/kompassrose>)

5.2 Kursrichtungen

5.2.1 Berechnung des Anfangskurs oder „In welcher Richtung liegt...?“

In Kapitel 4.4.2 (S. 53) wurde der kürzeste Weg, also die Orthodrome, zwischen zwei Orten A und B mithilfe sphärischer Trigonometrie berechnet. Mit welchem Kurs muss man aber nun in A starten? Oder in welche Richtung muss man fliegen, wenn man den Rückweg von B nach A antreten möchte? In Abb. 5.2 ist der Sachverhalt nochmals dargestellt. Die zu den Orten A und B gehörigen Poldistanzen \widehat{NA} und \widehat{NB} bilden mit der Orthodrome \widehat{AB} ein Kugeldreieck. Der Winkel $\Delta\lambda$ ist bekannt. Um nun die Kursrichtung zu ermitteln müssen die Winkel α bzw. β bestimmt werden.⁴ Mit bekannter Orthodrome

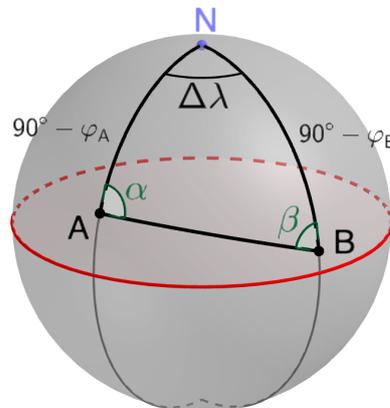


Abbildung 5.2: Kugeldreieck $\triangle ABN$ (erstellt mit GeoGebra)

\widehat{AB} kann wieder der Seitenkosinussatz angewendet werden. Also ist

$$\cos \alpha = \frac{\cos \widehat{NB} - \cos \widehat{NA} \cdot \cos \widehat{AB}}{\sin \widehat{NA} \cdot \sin \widehat{AB}} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\cos \widehat{NA} - \cos \widehat{NB} \cdot \cos \widehat{AB}}{\sin \widehat{NB} \cdot \sin \widehat{AB}}. \quad (5.1)$$

⁴vgl. [Sch17], S. 79 ff.

Weil α und β Dreieckswinkel sind (kleiner als 180°) müssen sie gegebenenfalls noch entsprechend umgerechnet werden. Schließlich wurde weiter oben festgelegt, dass die Angabe des Richtungswinkels zwischen 0° und 360° erfolgt.

In Kapitel 4.4.2 wurde die Entfernung zwischen Wien ($\varphi_A = 48,20^\circ$, $\lambda_A = 16,37^\circ$) und Canberra, Australien ($\varphi_B = -35,27^\circ$, $\lambda_B = 149,12^\circ$) berechnet. Sie betrug $\widehat{AB} = 143,12^\circ$.

Mit welcher Richtung müsste man nun starten, wenn man von Wien (A) nach Canberra (B) aufbrechen möchte?

Einsetzen in Gleichung (5.1) ergibt $\alpha = 87,30^\circ$ und dieser Winkel ist bereits der Kurswinkel für den Start in Wien. Dieser Wert bedeutet also, dass die kürzeste Verbindung nach Canberra ziemlich genau nach **Osten** zielt! Das kommt zunächst etwas unerwartet. Hat man eine Landkarte vor sich, so wäre man sofort der Meinung, dass man auf kürzestem Weg nach Canberra, südöstliche Richtung einschlagen müsste. Ein nochmaliger Blick auf Abbildung 4.18 (S. 54 lässt aber keine Zweifel mehr zu – die mit Google Maps ermittelte Orthodrome zeigt von Wien aus gesehen, ebenfalls nach Osten. Dass wir Richtungen „falsch“ vermuten, liegt jedenfalls an unserer gefestigten Verinnerlichung von Landkarten. Diese liefern aber immer ein verzerrtes Bild der Weltkugel, welches bei Projektion der Erdoberfläche in die Ebene erzeugt wird (siehe Kapitel 6, ab S. 75).

Will man nun von Canberra aus Richtung Wien starten, so ist der Winkel β die Grundlage für die anfängliche Richtung. Er berechnet sich wieder nach Formel (5.1). Man erhält $\beta = 54,63^\circ$. Dieser Winkel muss jetzt allerdings umgerechnet werden. Anhand von Abb. 5.2 ist zu sehen, dass der gesuchte Kurswinkel derjenige ist, der β auf 360° ergänzt. Also ist der richtige Abfahrtswinkel in Canberra $305,37^\circ$. Dieses Ergebnis erscheint plausibel. Auch auf einer Landkarte würde man, von Canberra aus, Wien in nordwestlicher Richtung vermuten. Nicht immer sind Richtungen, die man laut Landkarte vermuten würde, falsch. Besonders aber bei großen Distanzen kann der Unterschied zur tatsächlichen Richtung groß ausfallen.⁵

5.2.2 Kurs und Position nach einer bestimmten Strecke

Man kann mithilfe der sphärischen Trigonometrie den Kurs und die Position auf einer gegebenen Orthodrome bestimmen. Um das Beispiel Wien-Canberra fortzuführen, könnte die Frage beispielsweise lauten: An welcher Position befindet sich ein Flugzeug, das in Wien gestartet ist, nachdem es 1000 km zurückgelegt hat?

Es sei der Ort P derjenige, an dem sich das Flugzeug nach zurücklegen dieser Distanz befindet. Die Längendifferenz zum Ausgangsort A , also Wien, wäre dann $\Delta\lambda_1$ (siehe Abb. 5.3). Die zurückgelegte Distanz entspricht als der Orthodrome $\widehat{AP} = 1000 \text{ km} \hat{=} 9^\circ$. Im Dreieck $\triangle APN$ kann man nun mithilfe des Seitenkosinussatzes die Poldistanz \widehat{NP} berechnen.

$$\widehat{NP} = \arccos(\cos \widehat{NA} \cdot \cos \widehat{AP} + \sin \widehat{NA} \cdot \sin \widehat{AP} \cdot \cos \alpha)$$

⁵vgl. [Sch17], S. 82,83

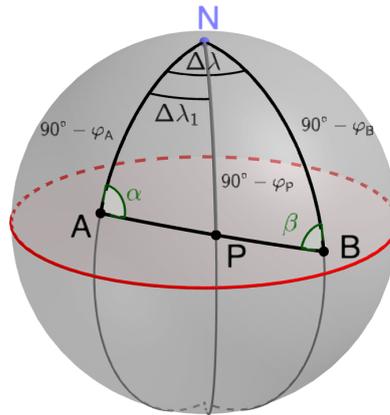


Abbildung 5.3: Position nach zurückgelegter Strecke (erstellt mit GeoGebra)

Für das genannte Beispiel ist $\widehat{NP} = 42,17^\circ$. Die Längendifferenz zu Ort A, also $\Delta\lambda_1$, ist sicher ein spitzer Winkel, weshalb man ihn mit dem Sinussatz berechnen kann (es sind also keine zwei Lösungen zu erwarten). Alternativ ist auch eine Berechnung mit dem Seitenkosinussatz möglich.

$$\sin(\Delta\lambda_1) = \frac{\sin \alpha}{\sin \widehat{NP}} \cdot \sin \widehat{AP}$$

Die Längendifferenz berechnet sich zu $\Delta\lambda_1 = 13,46^\circ$. Damit kann man nun die Koordinaten für den Punkt P anschreiben als

$$\begin{aligned}\lambda_P &= \lambda_A + \Delta\lambda_1 = 29,88^\circ \text{ und} \\ \varphi_P &= 90^\circ - \widehat{NP} = 47,83^\circ.\end{aligned}$$

Um die Kursrichtung im Punkt P auch noch zu bestimmen, muss der Winkel $\angle APN$ bestimmt werden. Dies ist z. B. mit dem Winkelkosinussatz möglich.

$$\angle APN = \arccos(-\cos(\Delta\lambda_1) \cdot \cos \alpha + \sin(\Delta\lambda_1) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \widehat{NA})$$

Der Winkel $\angle APN$ beträgt für das gegebene Beispiel $82,67^\circ$. Damit kann der Kurswinkel in Richtung Canberra ermittelt werden – dieser ergänzt den Winkel $\angle APN$ auf 180° . Deshalb beträgt der Kurswinkel im Punkt P, in Richtung Canberra, $97,33^\circ$.

Zur Erinnerung: Für den Startpunkt Wien beträgt der berechnete Kurswinkel $87,30^\circ$. Das bedeutet also, dass sich der Kurswinkel entlang eines Großkreises ändern muss. Blickt man noch einmal auf Abbildung 4.18 zurück, so kann man dies auch an der eingezeichneten Orthodrome erahnen. Um also den kürzesten Weg zurückzulegen, müsste man ständig den Kurs wechseln, was praktisch nur schwer möglich ist. Eine Lösung wäre, eine Reihe von Punkten auf der Orthodrome zu berechnen um diese dann mit konstantem Kurs anzusteuern. Fliegt man mit konstantem Kurs bewegt man sich nicht auf Großkreisbögen,

demnach sind auch die Kurswinkel keine Winkel in Kugeldreiecken.⁶

5.2.2.1 Kürzeste Verbindung auf einer Landkarte

Oben wurde ein Punkt auf einer Orthodrome mit sphärischer Trigonometrie berechnet. Für mehrere Distanzen entlang der Orthodrome können auch mehrere Punkte berechnet werden. Um die Orthodrome in einer Landkarte sichtbar zu machen, brauchen diese Koordinaten dann nur mehr in der Landkarte eingezeichnet werden.

Es ist auch möglich, Punkte auf einer Orthodrome mithilfe kartesischer Koordinaten zu berechnen.⁷ Dies ist eventuell besonders interessant, wenn man sich nicht weit von der Schulmathematik wegbewegen möchte. So kann Nachfolgendes als Fortsetzung von Kapitel 4.3.4 (S. 49) gesehen werden. Dort wurden bereits die geografischen Kugelkoordinaten in kartesische umgerechnet. Ausgehend von den kartesischen Koordinaten der Orte A und B kann man nun eine Gleichung für die Verbindungsstrecke AB aufstellen. Diese Strecke AB verläuft innerhalb der Weltkugel (siehe Abb. 5.4).

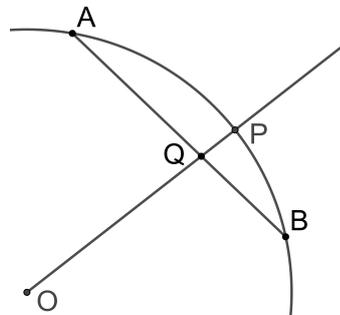


Abbildung 5.4: Projektion der Strecke AB auf die Kugeloberfläche
(erstellt mit GeoGebra)

Eine Parameterdarstellung von AB lautet

$$s : Q = A + t \cdot \overrightarrow{AB} \text{ mit } t \in [0, 1]. \quad (5.2)$$

Wie bei der Entfernungsberechnung mit kartesischen Koordinaten betrachten wir eine Erdkugel mit Radius $R = 1$ und Ursprung im Kugelmittelpunkt. Das bedeutet aber, dass der Ortsvektor \overrightarrow{OP} ein Einheitsvektor ist und angegeben werden kann als

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{|\overrightarrow{OQ}|} \cdot \overrightarrow{OQ}. \quad (5.3)$$

So können alle Punkte P auf dem Großkreis \widehat{AB} berechnet werden. Um das Eintragen auf einer Landkarte möglich zu machen, müssen diese noch in Kugelkoordinaten umgerechnet

⁶vgl. [Sch17], S. 87,88

⁷vgl. [Sch19]

5 Richtungen und Kurse

werden. Dies ist mit folgender Transformation möglich:

$$\varphi = \arcsin z \quad \lambda = \arctan2\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5.4)$$

Die Funktion $\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)$ ist hierbei wahrscheinlich nicht jedem geläufig. Sie ist eine Erweiterung der Funktion $\arctan x$ und ebenfalls eine Umkehrfunktion des Tangens. Ihr werden zwei reelle Zahlen als Argumente übergeben – damit kann der Definitionsbereich auf das volle Intervall $[0^\circ, 360^\circ]$ erweitert werden.⁸ Die Funktion $\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)$ unterscheidet vier Fälle

$$\arctan2\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & , \text{ für } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} y & , \text{ für } x = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & , \text{ für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & , \text{ für } x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Sie wird hauptsächlich zur Koordinatentransformation verwendet und man findet sie auch eingebettet in diverse Programmiersprachen (z. B. Python oder Fortran) sowie in Programmen der Geoinformatik (z. B. ArcGIS). Die kartesischen Koordinaten für die Orte Wien (Ort A) und Canberra (Ort B) wurden in Kapitel 4.3.4 berechnet. Die Parameterdarstellung für die Sehne AB lautet dann laut Gleichung (5.2):

$$s : Q = \begin{pmatrix} 0,640 \\ 0,189 \\ 0,745 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,341 \\ 0,230 \\ -1,322 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 1] \quad (5.5)$$

Man kann nun für $t \in [0, 1]$ verschiedene Punkte Q ausrechnen, woraus umgehend laut Gleichung (5.3) die zugehörigen Punkte P zu ermitteln sind. Diese Berechnung lässt sich auch schön mit GeoGebra durchführen. Ebenfalls kann auch die Koordinatentransformation der Punkte P in Kugelkoordinaten mit GeoGebra durchgeführt werden – GeoGebra kennt die Funktion $\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)$, bzw. kann auch direkt durch Umschalten der Darstellungsform in Kugelkoordinaten wechseln. Man erhält dadurch die Punkte P_1, P_2, P_3, \dots , die alle auf dem Großkreisbogen \widehat{AB} liegen in Kugelkoordinaten.

Für das Beispiel Wien-Canberra lauten die Punkte P_1 bis P_8 (mit Schrittweite $\Delta t = 0,1$) folgendermaßen ($P_n = (\varphi_n; \lambda_n)$):

$$\begin{array}{lll} P_1 = (48,169^\circ; 22,736^\circ) & P_2 = (47,536^\circ; 32,295^\circ) & P_3 = (44,803^\circ; 47,345^\circ) \\ P_4 = (35,825^\circ; 69,762^\circ) & P_5 = (15,373^\circ; 95,729^\circ) & P_6 = (-7,501^\circ; 116,719^\circ) \\ P_7 = (-21,408^\circ; 130,478^\circ) & P_8 = (-28,684^\circ; 139,244^\circ) & \end{array}$$

Tabelle 5.1: Punkte auf dem Großkreisbogen \widehat{AB} in Kugelkoordinaten

Diese können nun in eine Karte eingetragen werden. Will man dies auch mithilfe von GeoGebra erledigen, so muss diese Karte eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Um das

⁸vgl. [HA13]

kartesische, zweidimensionale Koordinatensystem in GeoGebra nutzen zu können, benötigt man als Landkarte eine *Quadratische Plattkarte* (siehe dazu auch Kapitel 6). Auf ihr wird der Äquator längentreu abgebildet. Der Abstand je zwei benachbarter Breitenkreise ist gleich lang, wie der Abstand zweier benachbarter Meridiane. Die Meridiane und Breitenkreise werden also als quadratisches Gitter abgebildet. Somit gilt für die Koordinaten: $x = \lambda$ und $y = \varphi$. Die berechneten Winkel der Kugelkoordinaten können also direkt als x - und y -Koordinate eingetragen werden, vorausgesetzt ist natürlich die richtige Skalierung der Abbildung der Landkarte in GeoGebra.

In Abbildung 5.5 ist die Eintragung dieser Punkte mit GeoGebra durchgeführt worden. Die Darstellung der Orthodrome in der Karte zeigt nicht im weitesten Sinne die Gestalt

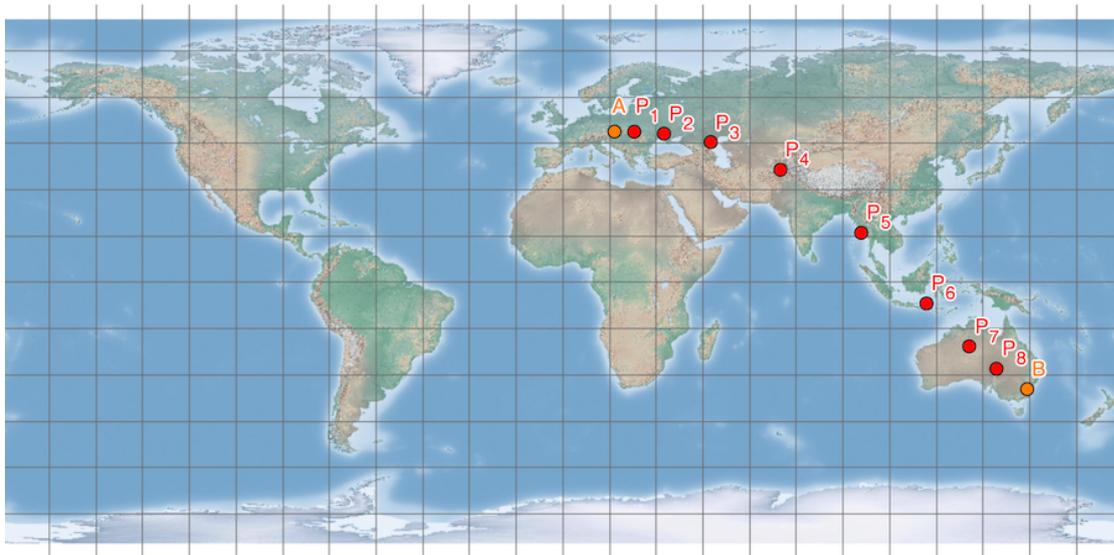


Abbildung 5.5: Darstellung der Orthodrome \widehat{AB} auf einer Landkarte mittels GeoGebra (erstellt mit GeoGebra bzw. ArcGis/ArcMap)

eines Großkreisbogens und ist auch keine gerade Linie – das liegt jedoch nur am Typ der verwendeten Karte, worüber Kapitel 6 Aufschluss bringen wird.

Die Darstellung von kürzesten Entfernungen mithilfe von GeoGebra ist durchaus etwas, das auch für den Schulunterricht interessant sein kann, zumal GeoGebra heutzutage ein fixer Bestandteil dessen ist. Mit Ausnahme der Funktion $\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)$ (die man ja mithilfe von GeoGebra übergehen kann) und den Kugelkoordinaten, findet sich in den obigen Berechnungen nichts, was nicht im AHS-Lehrplan⁹ enthalten ist.

5.3 Loxodrome

Nach diesem kurzen Ausflug über die Darstellung von Orthodromen auf Landkarten setzen wir am Ende von Kapitel 5.2.2 fort. Es wurde festgestellt, dass die Orthodrome sehr

⁹vgl. [Bil19]

5 Richtungen und Kurse

wohl den kürzesten Weg darstellt, aber es durch die ständige Kursänderung schwer möglich ist, sich genau auf ihr fortzubewegen. Es braucht also einen Mittelweg, der sich an der Orthodrome orientiert und dies mit möglichst gleichbleibendem Kurs. Schiffe und Flugzeuge legen also eine größere Distanz, bspw. einige hundert Kilometer, mit konstantem Kurs zurück, wodurch die Orthodrome durch einen Streckenzug aus *Loxodromen* ersetzt wird.¹⁰ Loxodromen sind Linien mit konstantem Kurs auf der Erdoberfläche. Das bedeutet, dass eine Loxodrome auch jeden Meridian unter demselben Winkel schneidet. Spezielle Loxodrome wären die Meridiane, der Äquator und die Breitenkreise.

Zur Bestimmung der Gleichung der Loxodrome kommt man um die Differential- und Integralrechnung nicht herum. Um in diese nicht komplett unvorbereitet einsteigen zu müssen, betrachte man zunächst zwei Orte A und B , die nicht sehr weit voneinander entfernt sind.¹¹ Die Meridiane und Breitenkreise, die durch die Koordinaten von A und B bestimmt sind, bilden eine Masche im Gradnetz. Die Masche bildet ein Viereck auf der Kugel, welches im Allgemeinen einer Trapezform ähnelt. Bei kleinen Entfernungen kann es durch ein ebenes Rechteck angenähert werden (siehe Abb. 5.6). Die Seiten des Recht-

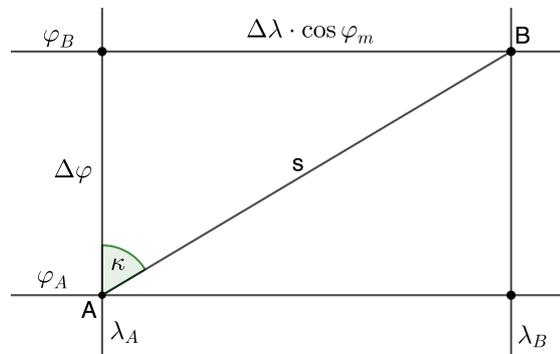


Abbildung 5.6: Masche des Gradnetzes angenähert als ebenes Rechteck
(erstellt mit GeoGebra)

ecks sind durch die Längen- und Breitengrade bestimmt. Die kurze Seite des Rechtecks in Abb. 5.6 ergibt sich schlicht aus der Differenz der Breiten, beträgt also $\Delta\varphi$. Die lange Seite berechnet sich nach der Formel für die Länge eines Bogens am Breitenkreis (siehe Formel (4.9)) und beträgt $\Delta\lambda \cdot \cos \varphi_m$, wobei φ_m die mittlere Breite ist, also $\varphi_m = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$. Der Winkel κ kann nun berechnet werden mittels

$$\tan \kappa = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos \varphi_m}{\Delta\varphi} \quad (5.6)$$

Die Differenzen der Breiten und Längen sollten hier vorzeichenbehaftet eingesetzt werden, damit der Kurswinkel einfacher ins Intervall $[0^\circ, 360^\circ]$ übertragen werden kann. Also ist

¹⁰Dass selbstverständlich auch andere Faktoren für die Route von Flugzeugen und Schiffen verantwortlich sind, wird hier außer Acht gelassen. Üblicherweise bewegen sich Flugzeuge und Schiffe auf definierten Verkehrsrouten.

¹¹vgl. [Sch17], S. 103 ff.)

$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ und $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$. Je nachdem, wie A und B liegen, müssen verschiedene Fälle unterschieden werden, um auf den rechtsweisenden Kurs zu kommen.

- Der Zielort B liegt östlich von A (so wie in Abb. 5.6): Der aus (5.6) direkt bestimmte Winkel κ ist auch der Kurswinkel.
- B liegt südöstlich von A : Dann muss $90^\circ < \kappa < 180^\circ$ sein. Aufgrund von $\Delta\varphi < 0^\circ$ und $\Delta\lambda > 0^\circ$ ist $\tan \kappa < 0$. Bilden des $\arctan(\dots)$ liefert einen negativen Winkel. Um den korrekten Kurswinkel zu erhalten müssen 180° addiert werden.
- B liegt südwestlich von A : Also ist $180^\circ < \kappa < 270^\circ$. Hier ist $\Delta\varphi < 0$ und $\Delta\lambda < 0$, also liefert (5.6) einen positiven Winkel. Es müssen zum Ergebnis 180° addiert werden.
- B liegt nordwestlich von A : Demnach ist $270^\circ < \kappa < 360^\circ$ und $\Delta\varphi > 0$ sowie $\Delta\lambda < 0$. Zum Ergebnis müssen 360° addiert werden.

Die Länge s eines solchen Wegstücks kann (laut Abbildung 5.6) berechnet werden mit

$$s = \frac{\Delta\varphi}{\cos \kappa}, \quad (5.7)$$

wobei für κ der rechtsweisende Kurswinkel einzusetzen ist ($\kappa \in [0^\circ, 360^\circ]$), um für s einen positiven Wert zu erhalten.

Für eine allgemeine Berechnung besteht die Möglichkeit eine Loxodrome stückweise zu berechnen.¹² Dazu benötigt man einen Startpunkt A , sowie einen gegebenen Kurswinkel κ . Der Startpunkt hat die Koordinaten φ_A und λ_A . Die Breitendifferenz $\Delta\varphi$ bestimmt die Schrittweite der Punkte. Vom Punkt $A = A_0$ ausgehend kann nun eine Folge von Punkten A_1, A_2, \dots berechnet werden. Die Koordinaten von A_i und die Breitendifferenz $\Delta\varphi$ bestimmen zusammen mit dem Winkel κ eine Masche im Gradnetz. Aufgrund dessen, dass $\Delta\varphi$ klein angenommen wird (z. B. $\Delta\varphi = 1^\circ$) kann diese Masche wieder als Rechteck angenommen werden (siehe Abbildung 5.7).

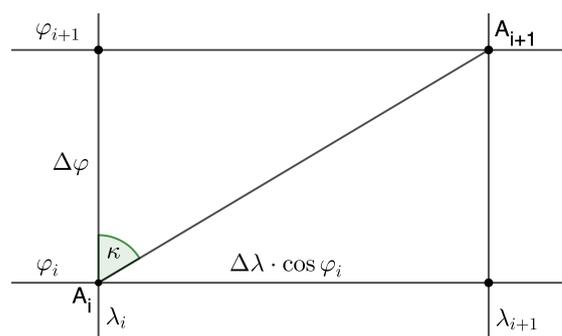


Abbildung 5.7: Masche des Gradnetzes zur stückweisen Berechnung einer Loxodrome (erstellt mit GeoGebra)

¹²vgl. [Sch17], S. 106, 107

5 Richtungen und Kurse

Es gilt ähnlich wie vorhin:

$$\tan \kappa = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos \varphi_i}{\Delta\varphi} \Rightarrow \Delta\lambda = \tan \kappa \cdot \frac{\Delta\varphi}{\cos \varphi_i} \quad (5.8)$$

Die Koordinaten des Punktes A_{i+1} können dann folgendermaßen berechnet werden:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta\varphi \text{ und } \lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda = \lambda_i + \tan \kappa \cdot \frac{\Delta\varphi}{\cos \varphi_i} \quad (5.9)$$

Durch diese Folge von Punkten wird eine Loxodrome näherungsweise beschrieben. Je kleiner $\Delta\varphi$ gewählt wird, desto genauer wird die Loxodrome abgebildet. Die erhaltenen Punkte können nun in einer Tabelle eingetragen werden. Die wichtigste Eigenschaft einer solchen Tabelle ist, dass sie jeder Breite φ eine Länge λ zuordnet. Die Loxodrome schneidet jeden Breitenkreis genau einmal. Sie ist demnach als Funktion $\lambda = \lambda(\varphi)$ aufzufassen.¹³

Man nehme an, der Punkt P hat die geographische Breite φ und liegt auf der Loxodrome mit Kurswinkel κ . Für ein infinitesimal kleines Stück dieser Loxodrome (siehe Abbildung 5.8) gilt wie vorhin¹⁴:

$$\Delta\lambda = \tan \kappa \cdot \frac{\Delta\varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \tan \kappa \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad (5.10)$$

Voraussetzung muss nun sein, dass $\Delta\varphi$ nicht Null ist, also $\Delta\varphi \neq 0$. Gleichung (5.10) ist

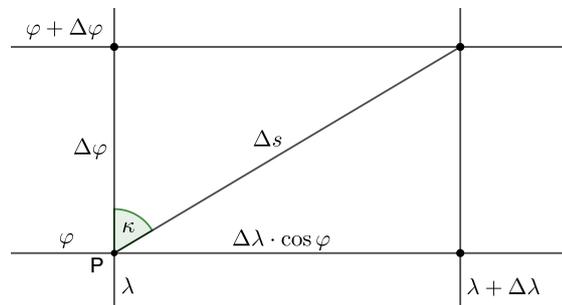


Abbildung 5.8: Masche des Gradnetz zu einem kleinen Loxodromenstück
(erstellt mit GeoGebra)

ein Differenzenquotient und wird durch den Grenzübergang $\Delta\varphi \rightarrow 0$ zur Ableitung:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \tan \kappa \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad (5.11)$$

D. h. für $\lambda(\varphi)$ benötigt man eine Stammfunktion (bzgl. φ) der rechten Seite von (5.11). Bevor man diese Stammfunktion bildet, muss man jedoch ins Bogenmaß wechseln. Also

¹³vgl. [Sch17], S. 107 ff.

¹⁴Herleitung der Loxodromengleichung: vgl. [Sig69], S. 367 ff. bzw. [Sch17], S. 108 ff.

betrachten wir alle beteiligten Winkel λ und φ ab nun im Bogenmaß.¹⁵ Der Wert $\tan \kappa$ ist konstant und es bleibt das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$ übrig. Durch Substitution erhält man

$$\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) + C. \quad (5.12)$$

Also kann man λ anschreiben zu

$$\lambda(\varphi) = \tan \kappa \cdot \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) + C. \quad (5.13)$$

Die Integrationskonstante C bedeutet, dass Gleichung (5.13) einer unendlichen Schar von Loxodromen entspricht. Die Loxodrome soll aber nun durch den Punkt A mit den Koordinaten φ_A und λ_A verlaufen, d. h. $\lambda(\varphi_A) = \lambda_A$. Dadurch kann man die Integrationskonstante als

$$C = \lambda_A - \tan \kappa \cdot \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right) \quad (5.14)$$

berechnen. Setzt man dies in Ausdruck (5.13) ein, ergibt das die Gleichung der vom Punkt A unter dem Winkel κ ausgehenden Loxodrome:

$$\lambda(\varphi) = \lambda_A + \tan \kappa \cdot \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \tan \kappa \cdot \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right). \quad (5.15)$$

Den wichtigsten Anwendungsfall, also die Bestimmung der Loxodrome von A nach B , kann man damit ebenso lösen. Man setzt die Koordinaten für den Zielort $B(\varphi_B, \lambda_B)$ ein und stellt obige Gleichung nach $\tan \kappa$ um.

$$\tan \kappa = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_B}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right)} \quad (5.16)$$

Nochmal angemerkt: Beim Berechnen des Kurswinkels κ muss die Längendifferenz $\lambda_B - \lambda_A$ im Bogenmaß eingesetzt werden.¹⁶ Außerdem liefert $\arctan(\dots)$ immer einen Winkel zwischen -90° und $+90^\circ$, der erst in einen rechtsweisenden Kurswinkel umgerechnet werden muss. Generell beschreiben zwei Kurswinkel immer dieselbe Loxodrome – die Kurswinkel unterscheiden sich um 180° . Der richtige Kurswinkel ist durch die Lage der Orte A und B zueinander bestimmt.

Um die Länge der Loxodrome von A nach B zu bestimmen, betrachte man nochmals Abbildung 5.8. Es gilt $\cos \kappa = \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$, bzw. durch den Grenzübergang $\Delta \varphi \rightarrow 0$ geht diese Gleichung wieder in eine Differentialgleichung über:

$$\cos \kappa = \frac{d\varphi}{ds} \Rightarrow ds = \frac{d\varphi}{\cos \kappa}. \quad (5.17)$$

¹⁵Die gewohnten Differentiationsregeln wie bspw. $\sin' x = \cos x$, $1 + \tan^2 x = \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$, usw. gelten alle nur für Winkel im Bogenmaß!

¹⁶Bemerkung: Die Formeln (5.15) und (5.16) erfordern das Einsetzen der geografischen Längen λ unbedingt im Bogenmaß, da λ in diesen „alleine“ vorkommt. Verantwortlich ist dafür das Bilden der Stammfunktion in (5.14) und (5.13). Die Werte für φ können theoretisch auch im Gradmaß eingesetzt werden, denn diese kommen nur in $\tan(\dots)$ vor (statt $\frac{\pi}{4}$ muss dann natürlich auch 45° im Argument des Tangens eingesetzt werden) und bekanntlich ist z. B. $\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \tan 45^\circ$.

5 Richtungen und Kurse

Integrieren von (5.17) ergibt

$$s = \int_A^B ds = \frac{1}{\cos \kappa} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = \frac{1}{\cos \kappa} \cdot (\varphi_B - \varphi_A).$$

Die Weglänge s auf der Loxodrome von A nach B ist also proportional zur Breiten-differenz $\Delta\varphi$, denn der Vorfaktor $\frac{1}{\cos \kappa}$ ist konstant. Noch einmal angeschrieben ist die Weglänge

$$s = \frac{1}{\cos \kappa} \cdot (\varphi_B - \varphi_A). \quad (5.18)$$

Auch hier ist die Differenz der Breiten $\varphi_B - \varphi_A$ im Bogenmaß einzusetzen.¹⁷ Außerdem gilt diese Formel für eine Kugel mit $R = 1$ als Radius – für Berechnungen auf der Weltkugel muss man den berechneten Wert noch mit dem Erdradius multiplizieren.

Wie verläuft nun die Loxodrome von Wien ($\varphi_A = 48,20^\circ$, $\lambda_A = 16,37^\circ$) nach Canberra, Australien ($\varphi_B = -35,27^\circ$, $\lambda_B = 149,12^\circ$)?

Man berechne zuerst den Kurswinkel κ nach Gleichung (5.16).

$$\tan \kappa = \frac{\frac{\pi}{180^\circ} (149,12^\circ - 16,37^\circ)}{\ln \left(\tan \left(45^\circ - \frac{35,27^\circ}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(45^\circ + \frac{48,20^\circ}{2} \right) \right)}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt $-55,02^\circ$. Aus der Lage der beiden Orte ergibt sich der rechtsweisende Kurs zu

$$\kappa = -55,02^\circ + 180^\circ = 124,98^\circ.$$

Dieser Wert stimmt mit der Richtung überein, in der man Canberra üblicherweise vermuten würde – also in südöstlicher Richtung. Noch einmal zum Vergleich: Die kürzeste Verbindung, also die Orthodrome (Kap. 5.2.2, S. 63), verläuft von Wien aus zunächst in einem Winkel von $87,30^\circ$. In Abbildung 5.9 sind die beiden Linien zum Vergleich dargestellt. Die Länge der Loxodrome berechnet sich mithilfe von Formel (5.17).

$$s = \frac{1}{\cos 124,98^\circ} \cdot (-35,27^\circ - 48,20^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 6371 \text{ km} = 16189,78 \text{ km}$$

Damit ist die Loxodrome um ca. 290 km länger, als die in Kapitel 4.4.2 (S. 53 berechnete Orthodrome. Der Vorteil eines konstanten Kurses würde sich hierbei also gar nicht so drastisch auf die Reisedauer auswirken. Der Wegunterschied zwischen Orthodrome und Loxodrome kann jedoch auch viel größer ausfallen. Die Loxodrome von San Francisco nach Wien hat beispielsweise eine Länge von 11905 km, während der kürzeste Weg nur 9597 km lang ist (siehe Abb. 5.10).¹⁸

Loxodromen haben die Eigenschaft, sich spiralförmig an die beiden Pole anzunähern. Dies geht auch aus Gleichung (5.15) hervor. Geht φ gegen 90° oder -90° , so wächst λ

¹⁷siehe Fußnote 16

¹⁸vgl. [Sch17], S. 109,110

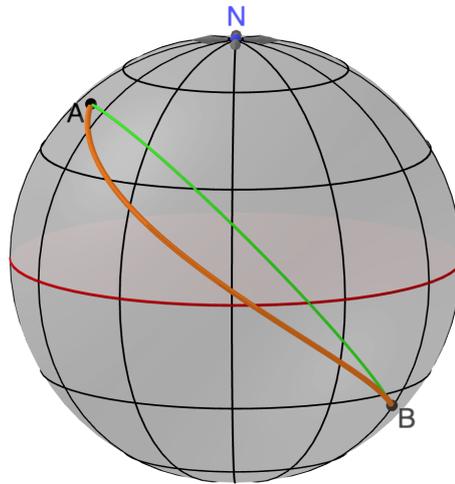


Abbildung 5.9: Orthodrome (grün) und Loxodrome (orange) von Wien (A) nach Canberra (B) (erstellt mit GeoGebra)

exorbitant. Die Loxodrome weist also einen asymptotischen Verlauf in Richtung der Pole auf ohne diese je zu erreichen.

Die nachfolgende Abbildungen 5.12 und 5.11 zeigen den vollständigen Verlauf der Loxodrome mit Kurswinkel $\kappa = 84,1^\circ$ und $\kappa = 124,98^\circ$ – diese ergeben sich aus der Berechnung des konstanten Kurs von San Francisco nach Wien bzw. von Wien nach Canberra.

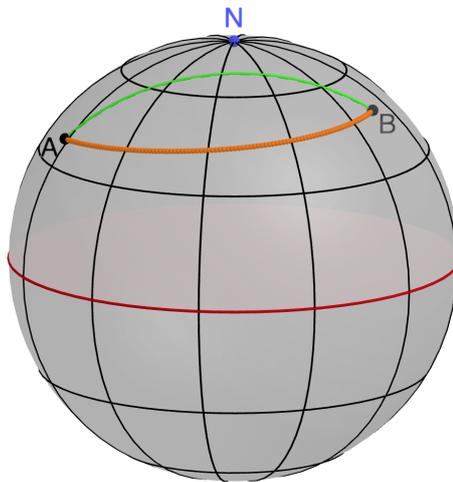
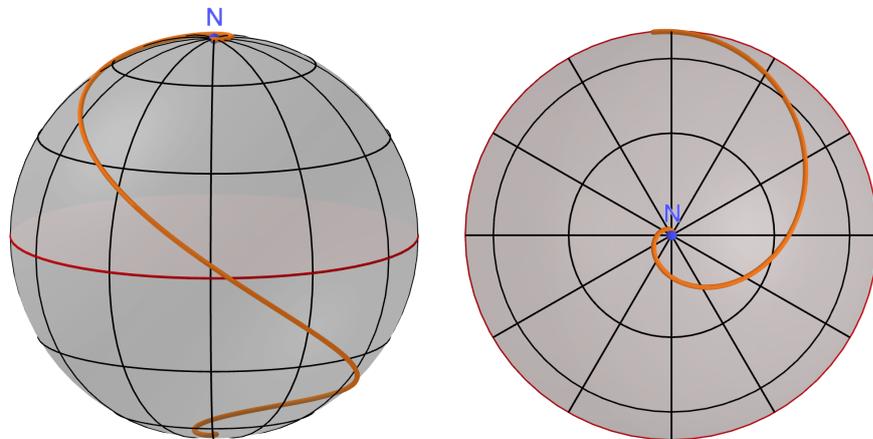


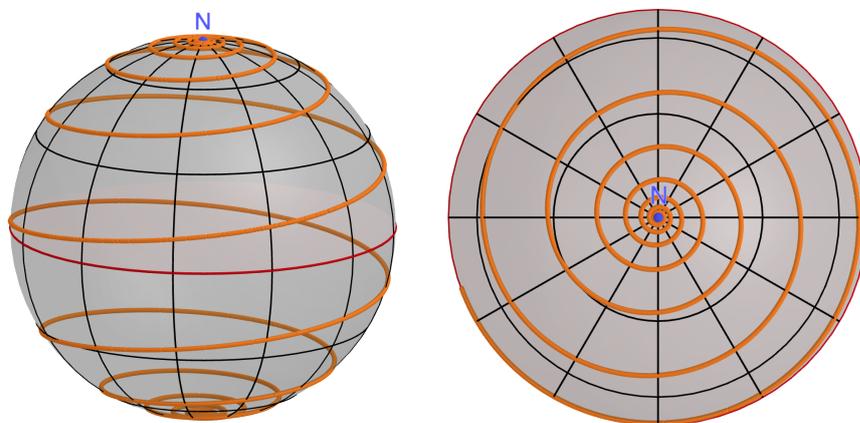
Abbildung 5.10: Orthodrome (grün) und Loxodrome (orange) von San Francisco (A) nach Wien (B) (erstellt mit GeoGebra)

5 Richtungen und Kurse



(a) Loxodrome zwischen den Polen (b) Loxodrome auf der Nordhalbkugel

Abbildung 5.11: Loxodrome mit Kurswinkel $\kappa = 124,98^\circ$ (Wien-Canberra)
(erstellt mit GeoGebra)



(a) Loxodrome zwischen den Polen (b) Loxodrome auf der Nordhalbkugel

Abbildung 5.12: Loxodrome mit Kurswinkel $\kappa = 84,11^\circ$ (San Francisco-Wien)
(erstellt mit GeoGebra)

6 Kartografie

6.1 Grundbegriffe

In diesem Kapitel geht es darum, wie man die Oberfläche der (annähernd) kugelförmigen Erde in eine Ebene abbilden kann. Ein Globus hätte selbstverständlich immer Vorzüge, wie z. B. die *Formtreue*, d.h. er ist in seiner Form zur Erde gleich. Damit einher gehen dann auch die *Winkeltreue* und die *Längentreue* – beide Begriffe werden im Folgenden noch erklärt. Trotzdem ist seine Anwendbarkeit beschränkt, denn es wäre nur schwer möglich, für Abbildungen mit größerem Maßstab Kugeln bzw. Kugelteile herzustellen. Außerdem erzwingt jede Änderung des Maßstabs die Erzeugung einer neuen Kugel. Und abgesehen davon ist eine Kugel ein ziemlich sperriger Körper, mit dem man ungern auf Reisen geht. Karten hingegen lassen sich relativ einfach herstellen und noch dazu bequem aufbewahren.

Die Grundlage jeder geografischen Karte, einer ebenen und verkleinerten Abbildung der Erdoberfläche, ist das aus den Meridianen und Breitenkreisen gebildete Netz. In [Sig69] ist festgehalten:

*Aufgabe der Kartenentwurfslehre ist, das ideelle Netz der Meridiane und Parallelkreise von der Erdoberfläche (Kugeloberfläche) in die Ebene zu übertragen, d.h. in eine Ebene abzubilden.*¹

Diese Aussage zielt auf den Begriff der „Abbildung“. Einem Punkt $P = (\varphi, \lambda)$ auf der Erdoberfläche wird also nach einem festgelegten mathematischen Gesetz ein Bildpunkt P' in der ebenen Karte zugeordnet.

Das ist für den Mathematiker erfreulich, doch es folgt darauf nun ein etwas ernüchternder Satz²:

Karten können als ebene Bilder der Kugeloberfläche niemals dem Urbild ähnlich sein.

Zur Begründung denkt man sich drei Punkte auf einer Kugel, verbunden durch Orthodromen. Es entsteht also ein Kugeldreieck. Diesem Kugeldreieck soll nun ein ebenes Dreieck entsprechen, dessen geradlinige Seiten die Seiten des Kugeldreiecks wiedergeben. Dies lässt sich z. B. durch eine sogenannte *Zentralprojektion* erreichen. Zentralprojektion bedeutet, dass man die Kugeloberfläche durch Strahlen ausgehend vom Mittelpunkt auf eine Tangentialebene der Kugel abbildet. Diese Art der Projektion bildet alle Großkreise auf Geraden ab, was bedeutet, dass das projizierte Kugeldreieck ein ebenes Dreieck ist.

¹[Sig69], S. 376

²[Bal51], S. 11

Die Winkelsumme im ebenen Dreieck beträgt 180° , im Kugeldreieck ist sie aber sicher größer als 180° (siehe Kap. 4.1.3, S. 37). Diese Art der Abbildung ist also mit Winkelverzerrung behaftet. Noch klarer wird es, wenn man sich ein Dreieck vorstellt, dessen Grundlinie am Äquator liegt und die beiden anderen Seiten zu einem Pol verlaufen. Dieses Kugeldreieck besitzt zwei rechte Winkel – es kann nicht ohne Verzerrungen in ein ebenes Dreieck überführt werden. Das heißt, es ist unmöglich ein Kugeldreieck in ein dazu ähnliches ebenes Dreieck abzubilden.

Anschaulich und ohne Mathematik kann man es auch so formulieren: Einen Ball kann man nicht platt drücken, ohne dass er Falten wirft.³

Es können aber unter Verzicht gewisser Eigenschaften, wie Winkel-, Längen-, oder Flächentreue, andere erhalten bleiben. *Winkeltreue* bedeutet, dass zwei beliebige Kurven, die auf der Kugeloberfläche den Winkel α einschließen, durch die Abbildung in zwei Kurven in der Ebene übergehen und dort ebenso den Winkel α einschließen. *Längentreue* ist dann gegeben, wenn alle Längen auf der Kugeloberfläche um denselben Faktor verkleinert in der ebenen Abbildung zu finden sind. Demnach ist ein Kartennetzentwurf *flächentreu*, wenn die Größe einer Fläche um einen gewissen Faktor verkleinert dargestellt wird und dieser auf der ganzen Karte derselbe bleibt.

Kartennetzentwürfe lassen sich auf verschiedene Weise gliedern, hier werden sie in weiterer Folge nach der Art der Abbildungsfläche unterschieden. Dabei sind die grundlegenden Kartennetzentwürfe die Azimutal-, die Zylinder- und die Kegelprojektionen, für die es jeweils wieder untergeordnete Varianten gibt und die ganz verschiedene Verzerrungseigenschaften aufweisen können.

Um die angeführten mathematischen Ausdrücke und Gleichungen etwas zu vereinfachen wird die Erde, wie bisher, als Kugel mit Radius $R = 1$ betrachtet. Außerdem findet sich neben fast jeder der behandelten Projektionen eine Beispielkarte.

6.2 Azimutalprojektionen

Sie werden auch *Zentralprojektionen* genannt. Das Prinzip ist folgendes: Die Erdoberfläche wird auf eine Bildebene abgebildet, welche die Erdkugel in einem Punkt berührt – sie ist also Tangentialebene. Die Lage des Kartenmittelpunkts, dieser ist dann der Berührungspunkt der Tangentialebene, ist beliebig. Nicht nur dadurch unterscheiden sich die verschiedenen Varianten der Azimutalprojektion.

6.2.1 Gnomonische Projektion

Die Gnomonische Projektion wird manchmal auch *die Zentralprojektion* genannt⁴. Sie ist eine Projektion aus der Kugelmitte, mit „zentral“ ist also der Erdmittelpunkt gemeint (siehe Abb. 6.1). Man kann sich auch vorstellen, dass im Mittelpunkt eine Projektionslampe installiert ist. Der Berührungspunkt der Tangentialebene ist oftmals einer der beiden

³[Sch17], S. 185

⁴vgl. [Sch17], S. 88 ff.

Pole, kann prinzipiell aber jeder Punkt auf der Kugeloberfläche sein. Man lege sich zunächst aber auf einen der Pole als Berührungspunkt fest. Direkt aus Abbildung 6.1 kann man schon qualitativ einige Eigenschaften erkennen:

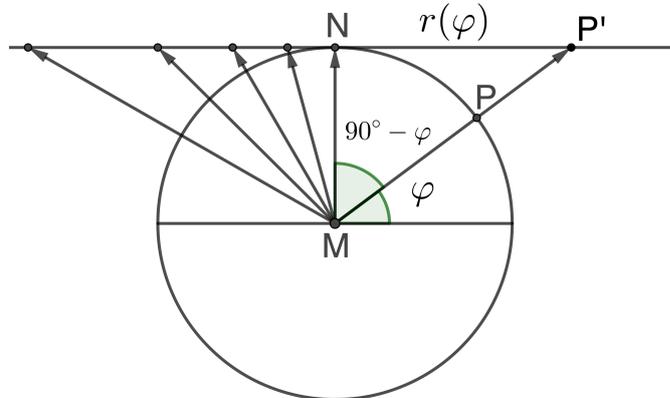


Abbildung 6.1: Gnomonische Projektion (erstellt mit GeoGebra)

- Auf einer solchen Karte kann nur eine Erdhalbkugel dargestellt werden. (Wenn man es genau nimmt, kann die Erdhalbkugel nicht ganz abgebildet werden – die Abbildung des Äquators zielt ins Unendliche.)
- Alle Breitenkreise werden als konzentrische Kreise abgebildet, d.h. alle Punkte mit gleicher geografischer Breite haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt.
- Die Meridiane werden auf Geraden durch den Pol abgebildet. Der Winkel, den zwei Meridiane dort miteinander einschließen, entspricht genau der Längendifferenz $\Delta\lambda$.
- Besonders in der Nähe des Äquators erzeugt die Abbildung ein stark verzerrtes Bild, verglichen zur Polgegend.

Der Radius der Breitenkreise im Kartenbild berechnet sich laut Abb. 6.1. Für eine gegebene Breite ist φ ist die Poldistanz $90^\circ - \varphi$ relevant. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MP'N$ gilt (für $R = 1$)

$$r(\varphi) = \tan(90^\circ - \varphi). \quad (6.1)$$

Ein Punkt $P = (\varphi, \lambda)$ auf der Erdoberfläche kann also im Kartenbild durch Übertragen seiner geografischen Breite in einen Radius $r(\varphi)$ eingezeichnet werden – die geografische Länge λ kann direkt in die Karte übernommen werden.

Die wichtigste Eigenschaft jeder gnomonischen Abbildung ist, dass sie alle Großkreisbögen auf Geraden abbildet. Denn jeder Großkreisbogen liegt in einer Ebene mit dem Kugelmittelpunkt, der gleichzeitig das Projektionszentrum enthält. Diese Ebene schneidet die Kartenebene in einer Geraden. Also geht jeder Großkreis durch gnomonische Abbildung in eine Gerade über. Umgekehrt gilt: Jede gerade verlaufende Strecke in der

6 Kartografie

Bildebene ist das Bild eines Großkreises. Die Endpunkte der Strecke können durch Geraden mit dem Kugelmittelpunkt verbunden werden. Dieses Dreieck bildet eine Ebene, die mit der Kugeloberfläche einen Großkreisbogen als Schnittfigur bildet.⁵

Hat man also zwei Punkte A, B auf der Halbkugel gegeben, so kann man den Verlauf der Orthodrome durch Verbinden der beiden Bildpunkte A' und B' konstruieren. Wegen dieser Eigenschaft spielen gnomonische Projektionen in der Navigation eine wichtige Rolle. In der Geografie kommt ihnen keine Bedeutung zu. Winkel werden in der gnomonischen Abbildung nur im Berührungspunkt mit der Ebene, also im Pol, richtig dargestellt. Damit ist diese Form der Abbildung im Allgemeinen nicht winkeltreu. Sie ist ebenso nicht flächentreu.

Abbildung 6.2 zeigt eine Gnomonische Azimutalprojektion der Nordhalbkugel.

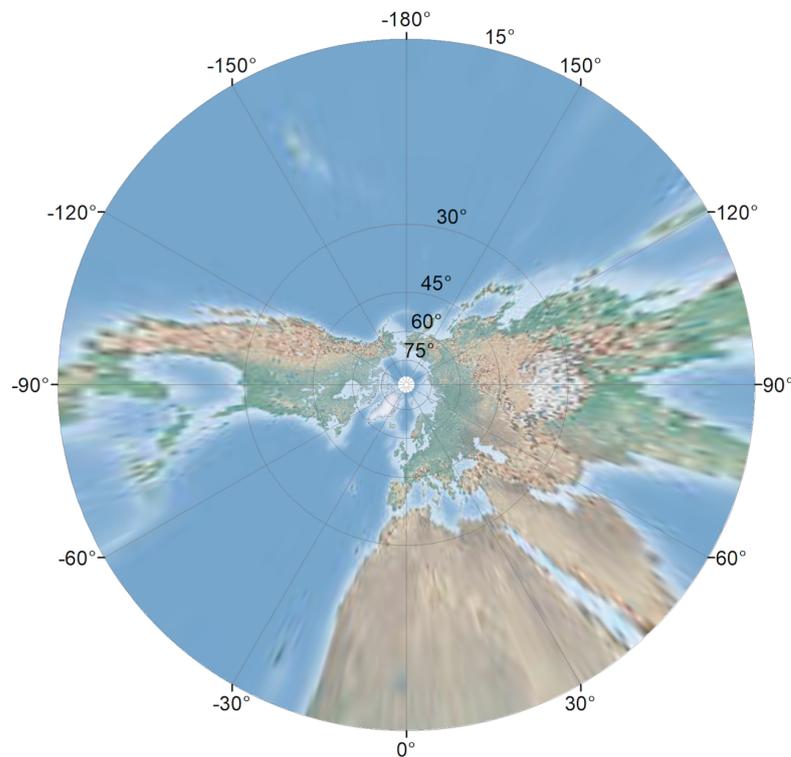


Abbildung 6.2: Gnomonische Azimutalprojektion (Nordpol als Berührungspunkt)
(erstellt mit ArcGis/ArcMap)

Wie anfangs des Kapitels bemerkt, muss der Berührungspunkt der Tangentialebene nicht zwingend ein Pol sein. Ein weiterer Spezialfall wäre die äquatorständige Zentrprojektion. Hierbei liegt der Berührungspunkt der Tangentialebene am Äquator. Sie bietet sich an, wenn eine gleichzeitige Abbildung von Gebieten auf der Nord- und Südhalbkugel erwünscht ist. An der Abbildung der Meridiane als Großkreise ändert sich nichts. Jedoch werden die

⁵vgl. [SB59], S. 50

Breitenkreise nun als Hyperbeln abgebildet. Für einen allgemeinen Berührungspunkt werden Breitenkreise auf Kegelschnitte abgebildet.

6.2.2 Stereografische Projektion

Diese Art der Projektion ist der gnomonischen Projektion ähnlich, nur befindet sich das Projektionszentrum auf der Kugeloberfläche, direkt gegenüber vom Berührungspunkt der Tangentialebene. Für die erste Anschauung sei das Projektionszentrum der Südpol und demnach der Kartenmittelpunkt wieder der Nordpol (siehe Abb. 6.3). Man kann daraus

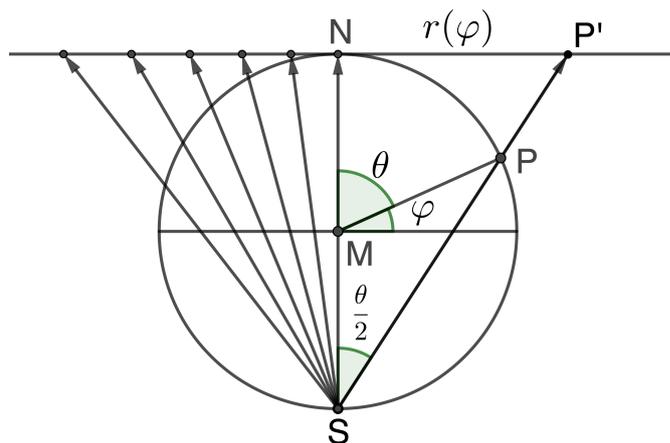


Abbildung 6.3: Stereografische Projektion (erstellt mit GeoGebra)

gleich eine qualitative Eigenschaft dieser Projektion erkennen: Die Südhalbkugel wird nun zwar abgebildet, jedoch stark verzerrt. Der Südpol selbst wird nicht abgebildet. Für die Meridiane gilt nur für diesen betrachteten Spezialfall, dass sie auf Geraden abgebildet werden. Liegen Projektionszentrum und Berührungspunkt nicht auf der Polachse, sieht es anders aus.

Für eine Erdkugel mit Radius $R = 1$ kann man die Abstände $r(\varphi)$ der Breitenkreisbilder folgendermaßen anschreiben. Das Dreieck $\triangle SPM$ in Abbildung 6.3 ist gleichschenkelig. Der Winkel $\theta = 90^\circ - \varphi$ ergänzt den Winkel $\angle SMP$ auf 180° .

Deshalb ist $\angle PMS = \frac{\theta}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle SP'N$ gilt dann wegen $\overline{SN} = 2$

$$r(\varphi) = 2 \cdot \tan \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \tan \frac{90^\circ - \varphi}{2}. \quad (6.2)$$

Die wichtigste Eigenschaft der stereografischen Projektion ist ihre Winkeltreue.⁶ Um sie geometrisch zu zeigen, betrachte man folgende Abbildung 6.4. Der Berührungspunkt der Ebene ist der Nordpol, jedoch wurde die Darstellung gegenüber der vorigen Abb. 6.3 auf den Kopf gestellt, damit die dreidimensionale Darstellung der Situation leichter zu erfassen ist. In 6.4a ist der Sachverhalt zunächst so beschrieben, dass die Ebenen ε und σ senkrecht zur Papierebene gerichtet sind. Das Projektionszentrum ist S , die Kartenebene bzw.

⁶Beweis nach [SB59], S. 20,21

ist in [Bal51], S. 38 ff. beschrieben.

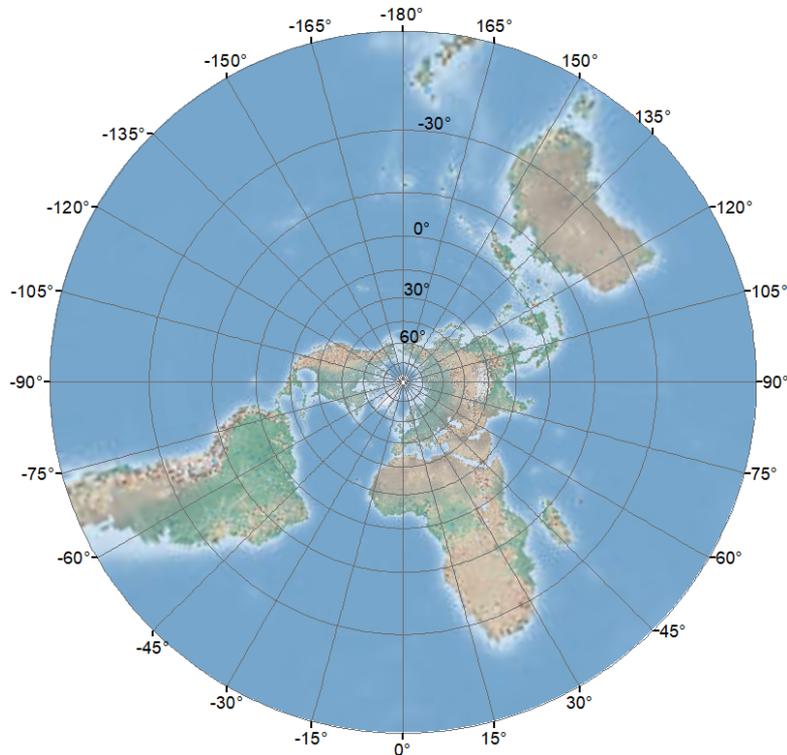


Abbildung 6.5: Stereografische Azimutalprojektion (Nordpol als Berührungspunkt)
(erstellt mit ArcGis/ArcMap)

Abbildung 6.5 zeigt eine stereografische Azimutalprojektion mit Nordpol als Berührungspunkt. Wegen ihrer Winkeltreue findet die stereografische Projektion bei Abbildungen der Himmelskugel oft Anwendung, da es dort hauptsächlich darauf ankommt die Gestalt von Sternbildern wiederzugeben – es kommt also hauptsächlich auf Richtungen an. Ebenso findet diese Art der Projektion in der Kristallografie Anwendung, und zwar zur Darstellung der Gitterebenen eines Kristalls.

6.2.3 Lambert'sche Azimutalprojektion

Dieser Kartenentwurf wird auch *flächentreue Azimutalprojektion* genannt. Damit wäre seine wichtigste Eigenschaft bereits erwähnt. Die Flächentreue wird auf folgende Weise erreicht. Man betrachte wieder eine Projektion mit dem Nordpol N als Kartenmittelpunkt (siehe Abb. 6.6). Er ist Mittelpunkt eines Kreises auf der Kugeloberfläche mit dem Radius \widehat{NP} . Dieser Kreis begrenzt ein Kugelsegment, welches N enthält. Bereits jetzt ist klar, dass die Meridiane wieder als Geraden bzw. Kugeltangenten durch N abgebildet werden. Ziel ist es nun, den Punkt P so auf die Kartenebene zu projizieren, dass die Fläche der Kugelkappe und die Fläche ihres Bildkreises gleich groß werden. Der

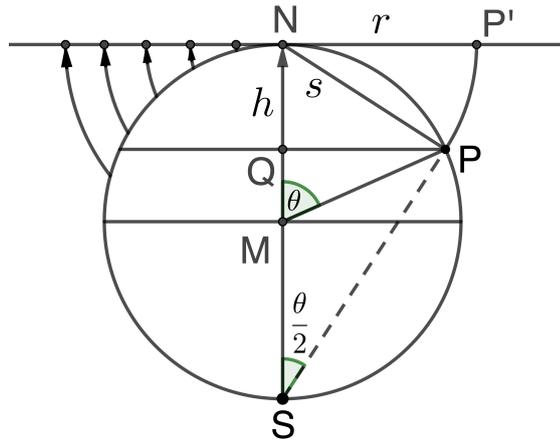


Abbildung 6.6: Lambert'sche Azimutalprojektion (erstellt mit GeoGebra)

gekrümmte Oberflächeninhalt der Kugelkappe berechnet sich zu $A = 2\pi Rh$, wobei h die auf dem Kugeldurchmesser gemessene Höhe ist. Laut Abb. 6.6 beträgt diese Höhe für einen Kugeldurchmesser $R = 1$

$$h = \overline{NQ} = 1 - \cos \theta.$$

Somit beträgt der Oberflächeninhalt des Kugelsegments

$$A = 2\pi \cdot (1 - \cos \theta). \quad (6.3)$$

Der Flächeninhalt des Bildkreises mit Radius $r = \overline{NP'}$ ist $A' = r^2\pi$. Die Flächentreue erfordert nun $A' = A$, woraus sich folgende Gleichung ergibt.

$$r^2 = 2 \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow r = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \theta)} \stackrel{7}{=} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.4)$$

Im (wg. dem Satz von Thales) rechtwinkligen Dreieck $\triangle SPN$ in Abb. 6.6 gilt die Beziehung

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{s}{2} \text{ und wegen (6.4) gilt } r = s. \quad (6.5)$$

Also ist der Radius des Bildkreises gleich der zu \widehat{NP} gehörenden Sehne s .⁸ Das Netz einer solchen Karte lässt sich auch bequem geometrisch konstruieren. Als Kartenmittelpunkt kann man selbstverständlich jeden anderen Punkt auf der Kugeloberfläche wählen. Ein weiterer Spezialfall wäre eine äquatorständige lambertsche Azimutalprojektion, deren Kartenmittelpunkt am Äquator liegt.

In Abbildung 6.7 ist eine Lambert'sche Azimutalprojektion mit dem Nordpol als Berührungspunkt dargestellt.

⁷Das Additionstheorem für den Kosinus lautet: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Deshalb ist $\cos \theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

⁸Herleitung vgl. [SB59], S. 62 ff.

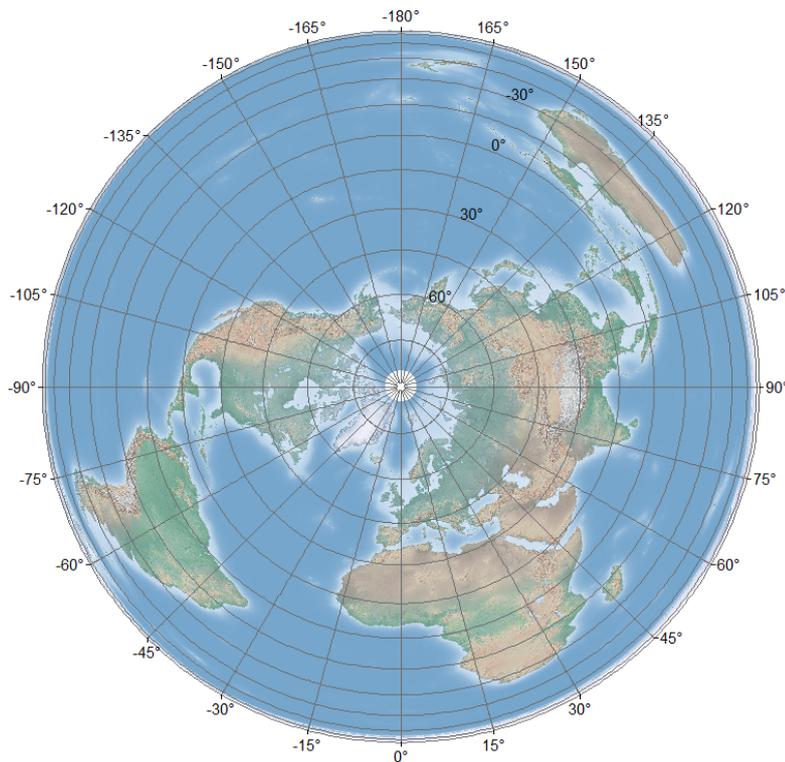


Abbildung 6.7: Lambertsche Azimutalprojektion (Nordpol als Berührungspunkt)
(erstellt mit ArcGis/ArcMap)

6.2.4 Weitere Azimutalprojektionen

Es gibt noch viele weitere Azimutalprojektionen, wie beispielsweise die *mittabstandstreue Azimutalprojektion*. Für die Bilder der Breitenkreise gilt einfach $r = \theta = 90^\circ - \varphi$. Auch hier sind die Bilder der Meridiane Geraden, deren Länge mit den wahren Winkeln der Meridianbögen übereinstimmen. Vom Kartenmittelpunkt aus werden also Entfernungen in wahrer Größe, also längentreu, aufgetragen. Für die Breiten gilt keine Längentreue. Abbildung 6.8 zeigt eine Karte in mittabstandstreuer Azimutalprojektion.

Weiters wäre noch die *orthografische Azimutalprojektion* zu erwähnen. Hier werden die Punkte der Kugeloberfläche jeweils senkrecht auf die Tangentialebene projiziert. Für den Radius der Breitenkreise in der Karte gilt $r = \sin \theta = \sin (90^\circ - \varphi)$. Diese Art der Darstellung wird selten verwendet – nur manchmal findet man Darstellungen der Polargebete in orthografischer Projektion. Die Karte bietet keine besonderen Vorteile.⁹ Erwähnenswert ist immerhin, dass man beim Betrachten von Kugeln, also bspw. des Mondes, näherungsweise eine orthografische Projektion dessen sieht. „Näherungsweise“ deshalb, weil es eigentlich eine Zentralprojektion (im geometrischen Sinn) ist, aber auf-

⁸vgl. [SB59], S. 59 ff.

⁹vgl. [SB59], S. 16,17 bzw. [Sch17], S. 192

6 Kartografie

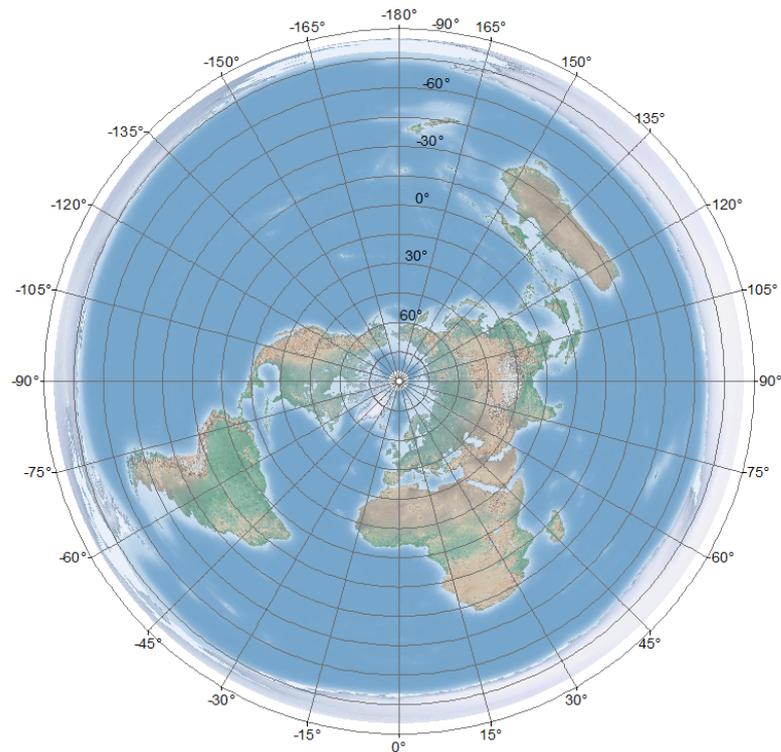


Abbildung 6.8: Mittabstandstreue Azimutalprojektion (Nordpol als Berührungspunkt)
(erstellt mit ArcGis/ArcMap)

grund der großen Entfernung die Lichtstrahlen annähernd parallel ins Auge oder eine Kamera fallen. So ist auch eine der ersten ansehnlichen Fotografien der Erde, welche 1972 von der Apollo 17-Besatzung auf dem Weg zum Mond aufgenommen wurde, näherungsweise eine orthografische Projektion (siehe Abb. 6.9).

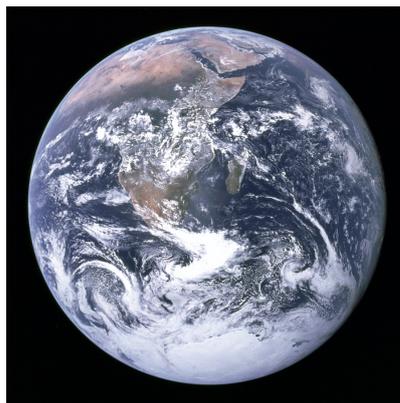


Abbildung 6.9: „Blue Marble“, Fotografie der Erde von Apollo 17
(Quelle: <https://eol.jsc.nasa.gov/SearchPhotos/photo.pl?mission=AS17&roll=148&frame=22727>)

6.3 Zylinderprojektionen

Wie der Name bereits vermuten lässt, wird bei Zylinderprojektionen die Erdoberfläche auf einen Zylinder projiziert. Dies passiert stets entlang eines Großkreises – in den meisten Fällen wird dazu der Äquator herangezogen, weshalb hier in weiterer Folge nur solche Zylinderprojektionen behandelt werden. Sie werden auch „erdachsige“ Zylinderentwürfe genannt.

Die Abbildung entsteht rotationssymmetrisch, d.h. die zum Äquator senkrechten Meridiane gehen in vertikale Linien gleichen Abstands über. Die Breitenkreise gehen in Parallelkreise auf dem Zylinder über, welche die Bilder der Meridiane im rechten Winkel schneiden. Durch Aufschneiden längs einer geraden Mantellinie und Abwickeln entsteht eine ebene Karte. Auch die Breitenkreise werden dann zu Geraden und es entsteht ein rechtwinkeliges Gradnetz. Damit ist es naheliegend, Zylinderprojektionen mit kartesischen Koordinaten zu beschreiben. Ein Punkt $P = (\varphi, \lambda)$ auf der Erdoberfläche wird im Allgemeinen abgebildet auf einen Punkt P' mit den Koordinaten

$$x = \lambda \quad \text{und} \quad y = f(\varphi),$$

wobei $f(\varphi)$ von der Art der Abbildung abhängig ist.¹⁰

6.3.1 Plattkarte

Der *abstandstreue Zylinderentwurf* oder auch *quadratische Plattkarte* genannt, ist die einfachste Zylinderprojektion. Hier werden die geografischen Koordinaten schlicht und einfach als kartesische aufgefasst. Es gilt

$$x = \lambda \quad \text{und} \quad y = \varphi. \quad (6.6)$$

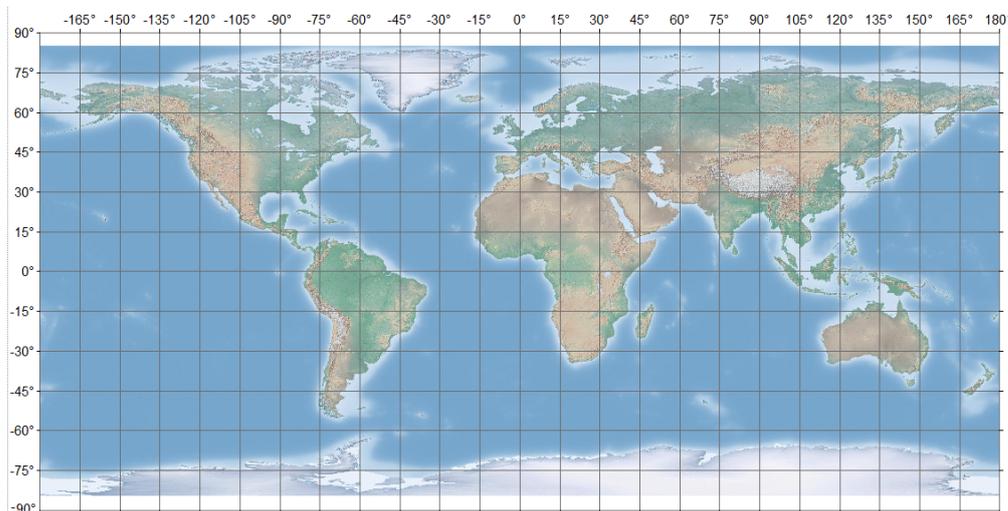


Abbildung 6.10: Quadratische Plattkarte (erstellt mit ArcGis/ArcMap)

¹⁰vgl. [SB59], S. 68,69

6 Kartografie

Eine Karte dieser Art wurde bereits in Kapitel 5.2.2.1 auf S. 67 verwendet. Das Gradnetz der Erde wird also mit dieser Karte zu einem quadratischen Gradnetz. Der Äquator wird längentreu abgebildet, weshalb die Abbildung um den Äquator auch relativ passabel erscheint. Andere Breiten werden horizontal gestreckt. Um die Darstellung für eine gewünschte Breite (also für einen Ausschnitt der Weltkarte) zu verbessern, kann man dem entgegenwirken: Man staucht die Karte horizontal, indem man $x = c \cdot \lambda$ und $0 < c < 1$ setzt. Das Gebiet um den Äquator wird dann selbstverständlich schlechter dargestellt, die Verzerrung wird also nur anders verteilt. Die Konstante c kann mit der geografischen Breite des darzustellenden Gebiets berechnet werden: $c = \cos \varphi$.¹¹

6.3.2 Flächentreuer Zylinderentwurf nach Lambert

Diese Zylinderprojektion wird auch *Parallelprojektion* oder *archimedische Zylinderprojektion* genannt.¹² Diese Abbildung zeichnet sich durch die einfache Konstruktion aus, womit trotzdem Flächentreue erreicht wird.

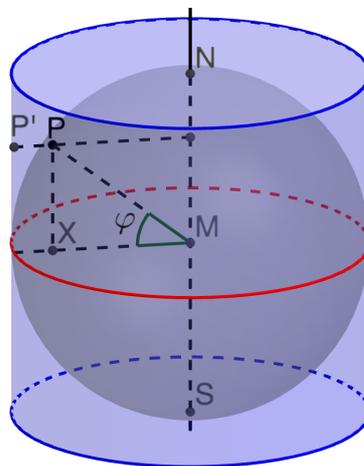


Abbildung 6.11: Flächentreuer Zylinderentwurf nach Lambert (erstellt mit GeoGebra)

Jeder Punkt P auf der Kugeloberfläche wird auf den Punkt P' abgebildet, der durch schneiden der Senkrechten zur Erdachse durch P mit dem Zylindermantel entsteht (siehe Abb. 6.11). Die y -Koordinate des Punkts P' ist somit die Kathete PX im rechtwinkligen Dreieck $\triangle XMP$. Demnach hat der Lambert'sche Zylinderentwurf (für einen Kugelradius $R = 1$) die Abbildungsgleichungen

$$x = \lambda \quad \text{und} \quad y = \sin \varphi. \quad (6.7)$$

Die Flächentreue ergibt sich folgendermaßen: Der Flächeninhalt zwischen zwei Breitenkreisen φ_1 und φ_2 ($\varphi_1 > \varphi_2$) berechnet sich nach der Flächenformel für ein Kugelsegment

¹¹vgl. [Sch17], S. 186,187

¹²vgl. [Sch17], S. 187

und Kugelradius $R = 1$ zu

$$A_{\text{Kugel}(\varphi_1\varphi_2)} = 2\pi h_1 - 2\pi h_2 = 2\pi \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).$$

In der Karte berechnet sich der Flächeninhalt zwischen zwei Breitenkreisen wie der Flächeninhalt eines Rechtecks. Die Breite der Karte entspricht dem Umfang des Zylinders, die Höhe eben der Differenz der zugehörigen y -Koordinaten.

$$A_{\text{Karte}(\varphi_1\varphi_2)} = 2\pi \cdot (h_1 - h_2) = 2\pi \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$$

Die beiden Flächeninhalte sind also gleich. Zusammen mit der gleichmäßigen Verteilung der Bilder der Meridiane bewirkt dies die Flächengleichheit beliebig enger Netzmaschen des Gradnetzes.

Abbildung 6.12 zeigt eine Karte in flächentreuer Zylinderprojektion nach Lambert. Es ist zu erkennen, wie die Erfüllung der Flächentreue eine beträchtliche Winkelverzerrung an den Polgegenden bewirkt. Zu den Polen hin werden die Netzmaschen auf der Lambert'schen Zylinderprojektion immer schmaler, bzw. relativ immer breiter. Hingegen auf der Erdkugel werden sie wegen der polgerichteten Meridiane immer schmaler.

Längentreu wird auf dieser Karte wieder nur der Äquator abgebildet. Wie bei der Plattkarte ist es möglich, die Verzerrung von äquatorfernen Breiten durch horizontale Stauchung zu korrigieren ($x = c \cdot \lambda$, für $0 < c < 1$). Die Flächentreue bleibt erhalten. Für $c = 0,5$ ergibt sich die *Peters-Projektion*.¹³

¹³vgl. [SB59] S. 70,71 und [Sch17], S. 187

6 Kartografie

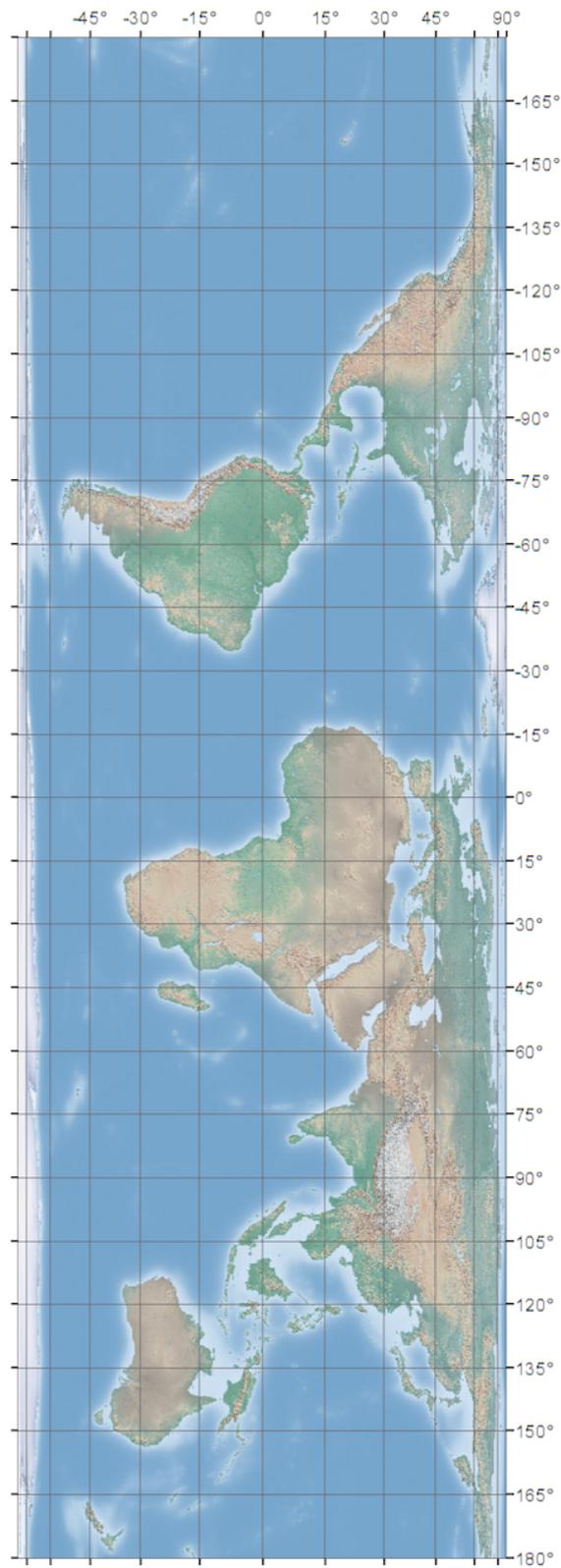


Abbildung 6.12: Flächentreuer Zylinderentwurf nach Lambert (erstellt mit ArcGis/ArcMap)

6.3.3 Mercator-Projektion

Diese Karte ist nach dem Kartografen Gerardus Mercator (1512-1594) benannt und wird auch *winkeltreue Zylinderprojektion* bezeichnet. Sie hatte und hat auch heute noch große Bedeutung für die Navigation in der Luft- und Schifffahrt, denn sie bildet Loxodrome auf Geraden ab. Ihre Winkeltreue erlaubt es zudem, den Kurswinkel einfach aus der Karte abzulesen. Die Herleitung der Winkeltreue ist im Folgenden beschrieben.¹⁴

Winkeltreue erfordert, dass kleine Figuren auf dem Globus auf ähnliche Figuren in der Karte abgebildet werden. Es muss also eine sehr kleine Masche auf der Kugel, die ein nahezu ebenes Rechteck ist, auf ein ähnliches Kartenrechteck abgebildet werden. In Abbildung 6.13 sind das „Kugelrechteck“ und das Kartenrechteck abgebildet. Damit die beiden Rechtecke nun ähnlich werden, muss der Anstieg der Diagonale in beiden Rechtecken gleich sein. In weiterer Folge ist es wieder notwendig die geografischen Längen λ

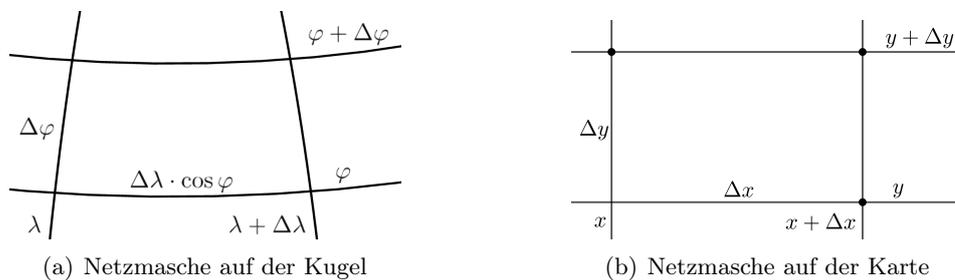


Abbildung 6.13: Winkeltreue der Mercator-Projektion (erstellt mit GeoGebra)

und Breiten φ im Bogenmaß anzugeben. Mit den Abmessungen aus Abbildung 6.13 kann man den Anstieg von „Kugelrechteck“ und Kartenrechteck gleichsetzen und schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \lambda \cdot \cos \varphi} \quad (6.8)$$

Allgemein wurde am Anfang von Kapitel 6.3 festgelegt, dass für Zylinderprojektionen $x = \lambda$ und $y = f(\varphi)$ gelten. Somit gilt auch hier $\Delta x = \Delta \lambda$ und man kann (6.8) schreiben als

$$\Delta y = \frac{\Delta \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (6.9)$$

Um die Abstandsfunktion $f(\varphi)$ herzuleiten, lässt man diesen Differenzenquotienten, wie in Kapitel 5.3 (S. 67), in einen Differentialquotienten übergehen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \xrightarrow{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (6.10)$$

Die Stammfunktion dieses Ausdrucks ist ebenfalls bereits in Kapitel 5.3 aufgetreten und liefert die Abstandsfunktion als

$$y = f(\varphi) = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) + C. \quad (6.11)$$

¹⁴vgl. [Sch17], S. 110 ff.

6 Kartografie

Der Wert der Integrationskonstante C lässt sich bestimmen, indem man festlegt, dass der Äquator in die x -Achse übergehen soll, also für $\varphi = 0$ soll $f(\varphi)$ gleich Null sein. Das ergibt wiederum $C = 0$. Somit lauten die Abbildungsgleichungen für die Mercator-Projektion (für λ und φ im Bogenmaß!)

$$x = \lambda \quad \text{und} \quad y = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (6.12)$$

Dabei fällt gleich auf, dass für die Polgebiete, also $\varphi = \pm 90^\circ = \pm \frac{\pi}{2}$, die y -Koordinate exorbitant wächst. Mit der Mercatorkarte können die Pole also nicht dargestellt werden.

Aus den Abbildungsgleichungen (6.12) kann man die Winkeltreue beweisen, indem man zeigt, dass die Loxodrome, die unter dem Kurswinkel α durch den Punkt $A = (\varphi_A, \lambda_A)$ verläuft, in eine Gerade übergeht, die im Bildpunkt $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ den Richtungswinkel α hat. Die benötigte Loxodromengleichung, für eine vom Punkt A unter dem Winkel α ausgehende Loxodrome lautet nach (5.15)

$$\lambda - \lambda_A = \tan \alpha \cdot \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right) \right]. \quad (6.13)$$

Laut den Abbildungsgleichungen (6.12) gilt

$$x - x_{A'} = \lambda - \lambda_A \quad (6.14)$$

und

$$y - y_{A'} = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right), \quad (6.15)$$

Dividiert man Gleichung (6.14) durch (6.15) so erhält man unter Verwendung der Loxodromengleichung (6.13)

$$\frac{x - x_{A'}}{y - y_{A'}} = \tan \alpha \quad \text{bzw.} \quad x - x_{A'} = (y - y_{A'}) \cdot \tan \alpha. \quad (6.16)$$

Dies ist eine Geradengleichung durch den Punkt $A' = (x_A, y_A)$, die mit der y -Achse den (im Uhrzeigersinn gezählten) Winkel α einschließt.¹⁵

Damit wären zwei Dinge gezeigt:

- Die Bilder von Loxodromen in der Mercator-Projektion sind Geraden.
- Die Mercator-Projektion ist winkeltreu.

Diese beiden Merkmale machen die Mercator-Projektion für die Navigation so bedeutsam. Der kursfeste Weg zwischen zwei Orten kann mit ihr einfach durch Ziehen einer Linie auf der Karte bestimmt werden. Für zwei Orte, die nicht sehr weit voneinander entfernt sind, ist dies bereits der einzuschlagende Kurs. Für weiter entfernte Orte – also

¹⁵Herleitung und „Beweis“ der Winkeltreue vgl. [SB59], S. 72-77 bzw. [Sch17], S. 110-113

dann, wenn der Weg auf der Loxodrome viel länger wäre als die Orthodrome – kann zunächst die Orthodrome bestimmt werden. Dafür bietet sich z. B. eine Karte in gnomonischer Projektion (siehe Kap. 6.2.1) an. Durch Unterteilen dieser Linie in Teilstrecken und übertragen der erhaltenen Punkte in die Mercator-Karte lässt sich dort der durch Loxodromenbögen angenäherte kürzeste Weg darstellen. Die Kurswinkel können direkt abgelesen werden.¹⁶ Betrachtet man das Gradnetz einer Mercator-Karte, so ist gleich zu sehen, dass die Netzmaschen zu den Polen hin immer länger werden – also die Abstände der Breitenkreise wachsen (nämlich um den Faktor $\frac{1}{\cos \varphi}$). Diese Verzerrung ist der Winkeltreue geschuldet und bewirkt eine starke Flächenvergrößerung in Richtung der Pole. Damit einher geht auch eine empfindlich spürbare Längenvergrößerung. Längentreu ist diese Projektion nur am Äquator. Die Flächenverzerrung muss man beim Betrachten einer solchen Karte im Hinterkopf behalten, um nicht zu falschen Vorstellungen zu kommen. Die Antarktis erscheint auf ihr beispielsweise als riesiger Kontinent (siehe Abb. 6.15). Man kann anhand eines einfachen Merkmals eine Mercator-Karte als solche identifizieren: Grönland scheint genauso groß wie Afrika zu sein (tatsächlich ist Afrika ca. 14 mal so groß wie Grönland).¹⁷ Veranschaulichen lässt sich die Flächenverzerrung auch anhand einer interaktiven Grafik von [DF19]. Per Mausclick kann man Russland „nehmen“ und an den Äquator verschieben (siehe Abb. 6.14). Die Mercator-Projektion ist auch aus heutiger Sicht eine Karte, die vielseitig genutzt wird.



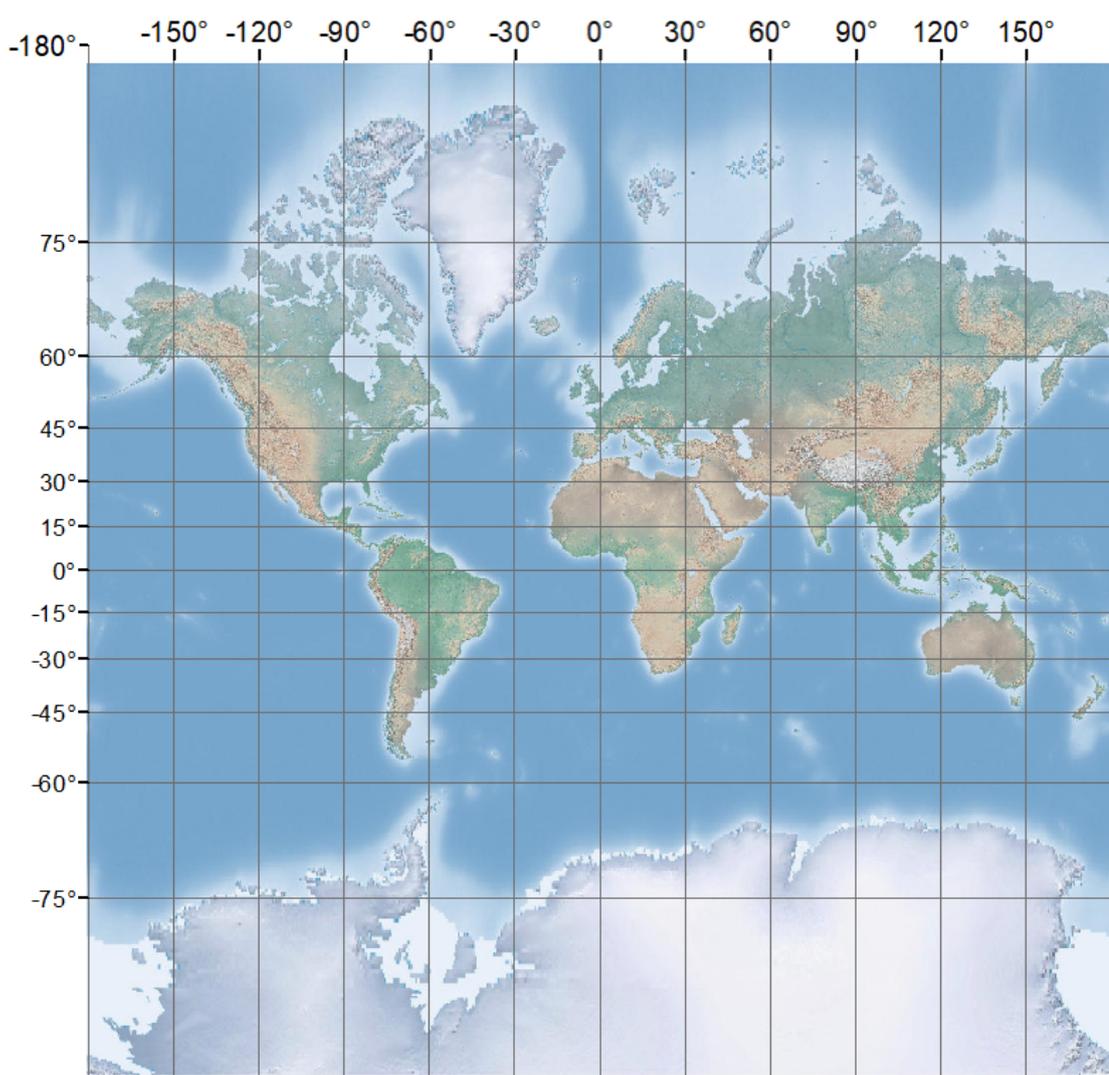
Abbildung 6.14: Russland (rot) als Beispiel für die Flächenverzerrung in der Mercator-Karte (Quelle: <https://mercator.tass.com>)

¹⁶vgl. [SB59], S. 78

¹⁷vgl. [Sch17], S.190

6 Kartografie

Online-Kartendienste wie www.openstreetmap.org oder maps.google.com verwenden die Mercator-Projektion nach wie vor. Google Maps hat erst 2018 auf eine orthografische Azimutalprojektion umgestellt, mit der die Erde beim Herauszoomen kugelförmig dargestellt wird. Es ist dort aber per Mausklick möglich, auch die gesamte Weltkarte wie früher als Mercator-Projektion darzustellen. Für Kartenausschnitte verwendet Google Maps noch immer die Mercator-Projektion, bzw. wahrscheinlich je nach Anwendungsfall auch andere Projektionen.¹⁸



Klassische Mercator-Projektion

Abbildung 6.15: Klassische Mercator-Projektion (erstellt mit ArcGis/ArcMap)

¹⁸[Sin18]

6.4 Kegelprojektionen

Im Allgemeinen ist die geometrische Idee folgende: Der Weltkugel wird entlang eines Breitenkreises ein Kegel umgelegt auf den die Kugeloberfläche abgebildet wird. Aufschneiden des Kegels längs einer Mantellinie und Abwickeln in die Ebene ergibt die Karte. Bereits jetzt bemerkt man: Dieser „Berührkreis“ wird längentreu abgebildet.

Im weiteren Verlauf werden nur Kegelprojektionen betrachtet, bei denen die Kegellachse in der Nord-Süd-Achse der Erde liegt (es sind selbstverständlich beliebige Lagen möglich). Beschränkt man sich auf rotationssymmetrische Abbildungen, so werden die Meridiane auf die berührenden Mantellinien des Kegels abgebildet. Jedoch ist nun der Winkel, den die Bilder zweier Meridiane miteinander einschließen, nicht einfach die Längendifferenz, sondern ein konstant verkleinerter Winkel. Die gesamten Meridiane bilden auf der Weltkugel einen vollen Winkel von 360° , welcher durch die Kegelprojektion auf die Winkelöffnung des Kegelmantels abgebildet wird.¹⁹ Man betrachte dazu Abb. 6.16. Die

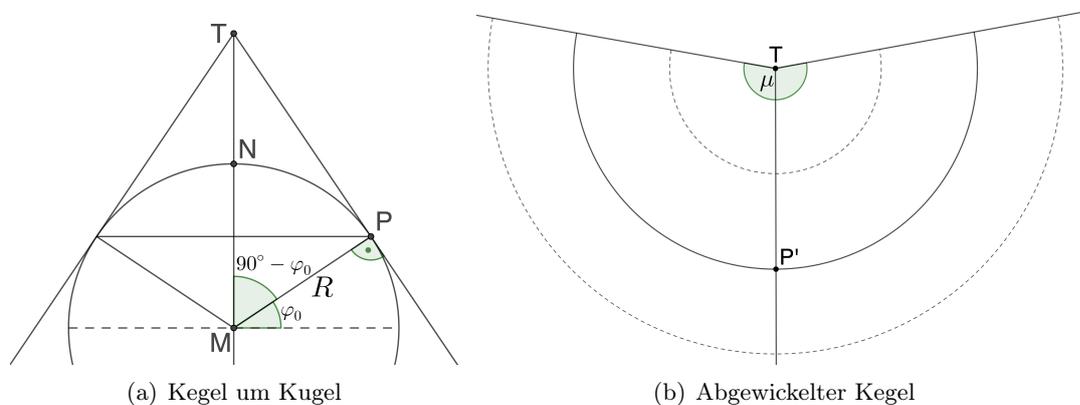


Abbildung 6.16: Allgemeine Kegelprojektion (erstellt mit GeoGebra)

Poldistanz des Punktes P mit geografischer Breite φ_0 , der den Kartenmittelpunkt bilden soll, beträgt $\widehat{NP} = 90^\circ - \varphi_0$. So beträgt der Umfang des zugehörigen Breitenkreises mit $r = \sin(90^\circ - \varphi_0)$

$$u = 2\pi \cdot \sin(90^\circ - \varphi_0).$$

Der Kreisbogen des abgewickelten Kegelmantels besitzt ebenfalls diese Länge. Außerdem ist die Mantellinie TP des Kegels eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MPT$ und besitzt somit die Länge (für $R = 1$)

$$\overline{TP} = \overline{TP'} = \tan(90^\circ - \varphi_0).$$

Somit beträgt der Zentriwinkel des Kreissektors

$$\mu = \frac{u}{\overline{TP}} = \frac{2\pi \cdot \sin(90^\circ - \varphi_0)}{\tan(90^\circ - \varphi_0)} = 2\pi \cdot \cos(90^\circ - \varphi_0).$$

¹⁹vgl. [SB59], S. 87,88

Längendifferenzen, also Winkel zwischen Meridianen, erscheinen bei dieser Art von Kegelp Projektion um den Faktor $\frac{2\pi}{2\pi \cdot \cos(90^\circ - \varphi_0)} = \frac{1}{\cos(90^\circ - \varphi_0)}$ verkleinert bzw. müssen mit $\cos(90^\circ - \varphi_0)$ multipliziert werden.

Diese Vorschrift gilt nicht für alle Kegelp Projektionen, denn es gibt auch solche, bei denen der einhüllende Kegel die Kugel nicht berührt, sondern schneidet. Diese Projektionen heißen dann *Schnittkegelp Projektionen*. Die beiden Breitenkreise, in denen der Kegel die Kugel schneidet, werden dann unverzerrt auf der Karte dargestellt.²⁰ Solche Kegelp Projektionen werden hier nicht betrachtet.

Die Breitenkreisbilder entstehen als konzentrische Kreise mit Mittelpunkt T (vorausgesetzt die Abbildung ist rotationssymmetrisch). Die Abstände der Breitenkreise in der Karte bestimmt ein Abbildungsgesetz.

6.4.1 Abstandstreue Kegelp Projektion

Bei der abstandstreuen Kegelp Projektion lautet dieses Abbildungsgesetz, ähnlich wie bei der mittabstandstreuen Azimutalprojektion (siehe Kap. 6.2.4): Die Abstände der Breitenkreise sind dieselben, wie auf der Weltkugel. Der Kartenmittelpunkt liegt auf dem Berührungskreis, den man praktischerweise in der Mitte des darzustellenden Gebiets wählt. In Abbildung 6.16 wäre dies der Punkt P . Der Nordpol würde auf einer solchen Karte nicht als Punkt abgebildet werden, denn \widehat{NP} ist kürzer als die Strecke TP . Somit ist der Nordpol in dieser Kegelp Projektion ein Kreisbogen. Die Karte ist also im Bereich des Punkts T bis zum Nordpol „leer“.

Ausgehend von Punkt T kann man in der Karte nun Polarkoordinaten einführen. Der Winkel zwischen zwei Meridianen in der Karte heiÙe δ , der Radius der Breitenkreisbilder sei ϱ . Dann gelten für eine Projektion mit Kartenmittelpunkt $P = (\lambda_0, \varphi_0)$ die Abbildungsgleichungen

$$\varrho(\varphi) = \tan(90^\circ - \varphi_0) - (\varphi_0 - \varphi) \quad \text{und} \quad \delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_0). \quad (6.17)$$

Praktikabel ist diese Form der Koordinaten nicht unbedingt, da der Punkt T üblicherweise außerhalb der Karte liegt. Man rechnet deshalb um in ein kartesisches Koordinatensystem, mit dem Kartenmittelpunkt P als Ursprung. Die Abbildungsgleichungen (6.17) gehen dann über in

$$x = \varrho \cdot \sin \delta \quad \text{und} \quad y = \tan(\varphi_0) - \varrho \cdot \cos \delta. \quad (6.18)$$

Die Abbildungsgleichungen (6.17) gehen für $\varphi_0 = 90^\circ$ und $\lambda_0 = 0^\circ$ übrigens in die Abbildungsgleichungen der mittabstandstreuen Azimutalprojektion über.²¹

Verwendet wird diese Art der Darstellung hauptsächlich für Kartenausschnitte von Gebieten in den mittleren Breiten. Längentreu werden die Meridiane und der Berührungskreis

²⁰vgl. [Sch17], S. 196,197

²¹vgl. [SB59], S. 87-89

abgebildet, die Abbildung ist also im Allgemeinen nicht längentreu und auch nicht winkel- oder flächentreu.

7 Fazit

Ausschlaggebend für die Beschäftigung mit dem Thema dieser Arbeit waren unter anderem die Menschen, die nicht an die (annähernd) kugelförmige Erde glauben. Es ist aber nun nicht so, dass alles Verfasste nur geschrieben wurde, um Flat Earther zu belehren. Besonders die Inhalte von Kapitel 3 bieten sich zur Bearbeitung im Schulunterricht an. Einige der dort beschriebenen Fragestellungen sind sogar mit dem Mathematik-Niveau der Sekundarstufe I zu lösen. Damit würde sich die Vorstellung solcher Fragen im Unterricht anbieten und damit einhergehend die Beschäftigung mit der zugehörigen Mathematik als Mehrwert. Beispielsweise ist die Einführung von Parallelwinkel in der Unterstufe, ohne die Einbettung in einen konkreten Sachverhalt, eine ziemlich trostlose Sache. Dafür bietet die Methode des Eratosthenes eine hervorragende Gelegenheit. In [Wag88] steht dazu Folgendes:

„Wie tödlich langweilig ist es und allzu leicht zu verstehen, dass an zwei parallelen geraden Linien, die von einer dritten gekreuzt werden, Winkel sich finden lassen (mit schwer zu behaltenden Namen), die gleich groß sind. Langweilig, weil es ohne einen vernünftigeren Anlass traktiert wird als aus der Gewohnheit, auf Vorrat zu stapeln, was dann später, irgendwann, unter tausend anderen solchen Dingen „angewandt“ werden soll. Wie anders aber sieht diese Figur aus, wenn sie aus einer unser Denken herausfordernden Wirklichkeit herausgelesen wird. . .“¹

Zudem sollen laut aktuellem Lehrplan für die Sekundarstufe I auch historische Betrachtungen in den Mathematikunterricht einfließen, welche „... *Einblick in die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden* ...“² geben und „... *einige Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte* ...“² vorstellen sollen. Es gibt dazu auch ein globales Projekt namens „Eratosthenes Experiment“, welches von der Internationalen Astronomischen Union (IAU100) unterstützt wird. Ziel dieses Projekts ist, dass Schüler*innen Messungen nach Eratosthenes Methode durchführen und mithilfe von Datenaustausch mit anderen Schulen den Erdumfang selbst berechnen.³

Auch die anderen Inhalte von Kapitel 3 bilden einen Anreiz für realitätsnahen Mathematikunterricht, der für Schüler*innen hin und wieder unerwartete Ergebnisse liefern kann. Spätestens wenn die Frage nach kürzesten Entfernungen auftaucht, benötigt man zumindest Grundlagen der sphärischen Geometrie. Diese ist seit den 1960er-Jahren kein Bestandteil des Lehrplans mehr – sie wurde zugunsten neuer Inhalte aufgegeben.⁴

¹[Wag88], S. 298

²[Bil19]

³vgl. [Ago20]

⁴vgl. [Sch17], Vorwort S. 6

Damit ist die Beschäftigung mit sphärischer Geometrie in der Schule wohl nur mehr als fachliche Vertiefung, z. B. in einem Wahlfach möglich. Dabei ist es nicht nötig, die „ganze“ Kugelgeometrie zu konsumieren. Die vorgestellten Methoden in den Kapiteln 4.3.4 und 5.2.2.1 zeigen, dass es auch mithilfe ebener Geometrie (und einfachen Grundlagen der Kugelgeometrie) möglich ist, kürzeste Entfernungen auf der Erde zu berechnen und diese sogar in Landkarten einzutragen. Der „Mehraufwand“ zum Schulstoff laut Lehrplan hält sich in Grenzen. Dabei ist selbstverständlich auch eine DGS⁵ wie GeoGebra eine große Hilfe.

Dass Landkarten *immer* ein verzerrtes Bild der Erde wiedergeben, dessen sollte sich vor allem ihr Anwender bewusst sein. Die Mercator-Projektion hat sich als universelle Landkarte etabliert – viele Online-Kartendienste nutzen sie, obwohl sie ursprünglich für die Navigation auf hoher See entwickelt wurde und deswegen ihre Vorteile in diesen heutigen Anwendungen nicht wirklich ausspielen kann. Es wäre deshalb wichtig für die Vor- und Nachteile der Mercator-Projektion sensibilisiert zu sein. Gut möglich also, dass jemand die Größe von Ländern anhand einer Mercator-Karte beurteilt, aber gar nicht um ihre großen Flächenverzerrungen Bescheid weiß. Man könnte sich auch die Frage stellen, warum mit dem Tool „Entfernung messen“ (gemeint ist die Luftlinie) in Google Maps, keine geraden Linien auf der Karte produziert werden. Dafür ist es notwendig, zumindest die „Basics“ der Kartografie zu kennen. Im Lehrplan für Geografie in der Sekundarstufe I ist die sehr allgemeine Formulierung *„Erwerben grundlegender Informationen über die Erde mit Globus, Karten, Atlas und Bildern.“*⁶ vermerkt, in dem für die Oberstufe konnte diesbezüglich nichts gefunden werden. Es bleibt also auch hier nur die Möglichkeit, das Thema der Kartografie im Zuge einer fachlichen Vertiefung zu behandeln. Anbieten würde sich auch ein fächerübergreifendes Projekt der Unterrichtsfächer Mathematik und Geografie.

Laut [Sch17], S. 237 wird die Kugelgeometrie im Bereich der Schulmathematik seit jeher diskutiert. Wegen der gegebenen Realitätsbezüge wird sie in letzter Zeit wieder stärker beachtet. Schließlich bekunden viele Autoren von Werken über Kugelgeometrie⁷, dass diese zur allgemeinen Bildung gehören sollte.

Ganz am Beginn der Arbeit wurde versucht, die Entwicklung der Sicht auf die Welt straff zusammenfassen. Dabei fällt auf, dass die damaligen Philosophen und Wissenschaftler ihre Aussagen bereits durch deduktive und naturwissenschaftliche Argumentationen trafen. Ihre Erkenntnisse haben sie hauptsächlich aus Beobachtungen der Sterne und des Himmels geschlossen. Dadurch ermittelten sie recht früh konkrete Vorstellungen (Zahlen) über das Ausmaß der Erde, welches damals wie heute kaum vorstellbar ist. Wahrscheinlich trägt letzteres dazu bei, dass Menschen alternativen Weltbildern Gehör schenken.

⁵Abkürzung für **D**ynamische-**G**eometrie-**S**oftware

⁶[Bil19]

⁷vgl. [Lie49], Vorwort, [Sig69], Vorwort S. 12 oder [Big84], Vorwort

Der einzelne Mensch ist gegenüber der Größe der Erde verschwindend klein – sogar in einem Kinderbuch steht dazu:

„Den elektronischen Augen der ersten Satelliten ist es nicht möglich diesen kleinen Punkt auf der Erde ausfindig zu machen. Jene kleine Welt, in der Naz [Name der Figur – Anm. d. Verf.] in seinem Universum lebt. . .“⁸

Um die schiere Größe der Welt zumindest zu begreifen, muss man also einen Schritt aus seinem *eigenen kleinen Universum* wagen, das Vermögen haben sich die Welt von außen vorzustellen.

⁸[Hoc16]

Literaturverzeichnis

- [Ago20] Ellinogermaniki Agogi. *Eratosthenes Experiment*. 2020. URL: <https://eratosthenes.ea.gr> (besucht am 04.02.2020).
- [Bal51] L. Balser. *Einführung in die Kartenlehre : (Kartennetze)*. 2. Aufl. Mathematisch-physikalische Bibliothek ; 81. Leipzig: B. G. Teubner, 1951.
- [Big84] H.G. Bigalke. *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main: Otto Salle Verlag GmbH & Co., 1984. ISBN: 3793555305.
- [Bil19] Bundesministerium für Bildung Wissenschaft und Forschung. *Lehrplan der allgemeinbildenen höheren Schule*. 2019. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> (besucht am 04.02.2020).
- [DF19] D. Donina und T. Fekhetdinov. *MERCATOR. It's a flat, flat world!* News agency TASS. 2019. URL: <https://mercator.tass.com> (besucht am 12.02.2020).
- [Fac18] R. Fackiner. *astRONOMIE - ralf. private Webseite für Bildungs- und Hobbyzwecke*. 2018. URL: <http://ast-ra.de/Landvermessung/Erdvermessung/erdvermessung.html> (besucht am 16.12.2019).
- [Fla19] FlatEarthOrg. *The Flat Earth Society*. 2019. URL: <https://www.tfes.org> (besucht am 05.12.2019).
- [GFS14] G. Galilei, H.J. Fischer und E. Strauss. *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme*. marixverlag, 2014. ISBN: 9783843804387. URL: <https://books.google.at/books?id=L114DwAAQBAJ>.
- [Hoc16] J. Hochwarter. *Naz düst durch den Sommer*. novum pro Verlag, 2016. ISBN: 9783990487556.
- [HA13] K. Höllig und A. App. *Kugelkoordinaten. Mathematik-Online-Lexikon der Universität Stuttgart*. 2013. URL: <https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aussage/aussage441/> (besucht am 04.02.2020).
- [HL16] J. Hüfner und R. Löhken. „Sie dreht sich, doch unbemerkt“. Der Nachweis der Erdrotation. In: *Physik in unserer Zeit* 47 (Juli 2016). Wiley-VCH Verlag GmbH & CoKGaA. Weinheim.
- [Hüt11] R.F.J. Hüttl. *Ein Planet voller Überraschungen / Our Surprising Planet: Neue Einblicke in das System Erde / New Insights into System Earth*. SpringerLink : Bücher. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011. ISBN: 9783827424709.

- [Jor09] A. Jori. *Über den Himmel*. Aristoteles Werke in deutscher Übersetzung. Akademie Verlag, 2009. ISBN: 9783050048932.
- [Kle19] M. Kleespies. *Die Erde ist flach: Annäherung eines Schiffes an den Beobachter - ein Gastbeitrag*. 2019. URL: <https://euronia.com/de/flache-erde-blog/160-die-erde-ist-flach-annaeherung-eines-schiffes-an-den-beobachter-ein-gastbeitrag> (besucht am 12.12.2019).
- [Lie49] W. Lietzmann. *Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden*. Studia mathematica: Mathematische Lehrbücher. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1949.
- [Lud] M. Ludwig. *Die Vermessung des Erdumfangs*. unveröffentlicht. Pädagogische Hochschule Weingarten.
- [Pic19] G. Pichler. „Flat-Earther: Wie das Internet die Renaissance der Erdscheibe brachte“. In: *DerStandard* (Juni 2019). URL: <https://www.derstandard.at/story/2000104154839/flatearther-wie-das-internet-die-renaissance-der-erdscheibe-brachte> (besucht am 05.12.2019).
- [Pto12] C. Ptolemäus. *Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie*. Übers. von K. Manitius. Erster Band. Leipzig: B.G. Teubner, 1912. URL: <https://archive.org/details/desclaudiusptole01ptoluoft> (besucht am 05.12.2019).
- [RLW69] K. Rosenberg, E. Luwig und P. Wühr. *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit Lösungen und einem Leitfaden für die 7. und 8. Klasse der Mittelschulen und gleichgestellten Anstalten*. 8. Aufl. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1969.
- [SS82] W. Schlosser und T. Schmidt-Kaler. *Astronomische Musterversuche für die Sekundarstufe II*. Frankfurt am Main: Hirschgraben-Verlag, 1982. ISBN: 3454249309.
- [SB59] W. Schmid und W. Borsdorf. *Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen: Kartenentwürfe und sphärische Astronomie*. 2. Aufl. Bd. 2. Freiberg: Bergakademie, 1959.
- [Sch19] F. Schoberleitner. *Die Erde ist rund ... Mathematische Fragen und Aktivitäten in Zusammenhang mit der Kugelgestalt der Erde*. Vortrag. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, 4. Apr. 2019.
- [Sch16] M. Schottlender. *10 easy ways you can tell for yourself that the Earth is not flat*. Jan. 2016. URL: <https://www.popsci.com/10-ways-you-can-prove-earth-is-round/> (besucht am 12.12.2019).
- [Sch17] B. Schuppar. *Geometrie auf der Kugel: Alltägliche Phänomene rund um Erde und Himmel*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 9783662529423.
- [Sig69] R. Sigl. *Ebene und Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf Kartographie, Geodäsie und Astronomie*. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft, 1969.

- [Sin18] I. Singh. „The Earth is not flat, Google Maps confirms with Globe Mode“. In: *geoawesomeness.com* (Aug. 2018). URL: <https://geoawesomeness.com/the-earth-is-not-flat-google-maps-confirms-with-globe-mode/> (besucht am 18.02.2020).
- [Ste15] B. Steinrücken. *Antike Quellen zur Gestalt und Größe unserer Erde*. Westfälische Volkssternwarte und Planetarium Recklinghausen. 2015. URL: <https://sternwarte-recklinghausen.de/data/uploads/dateien/pdf/erdkugel.pdf> (besucht am 10.12.2019).
- [Sza92] A. Szabó. *Das geozentrische Weltbild: Astronomie, Geographie und Mathematik der Griechen*. München: Deutscher Taschenbuchverlag, 1992.
- [Ver] ohne Verfasser. *Gestaltung einer Windrose auf dem Schulhof*. Westfälische Volkssternwarte und Planetarium Recklinghausen. URL: <https://sternwarte-recklinghausen.de/data/uploads/dateien/pdf/windrose.pdf> (besucht am 03.02.2020).
- [Wag88] M. Wagenschein. *Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge*. Klett, 1988.
- [Wit87] E. Ch. Wittmann. *Elementargeometrie und Wirklichkeit: Einführung in geometrisches Denken*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1987. ISBN: 3528089792.

Abstract

Seit wann weiß die Menschheit, dass die Erde kugelförmig ist und wie wurde diese Kugelgestalt seit der Antike begründet? Darauf wird am Beginn dieser Arbeit eingegangen. Ebenso wird das alternative Weltbild der „Flat Earther“ kurz erläutert. Die (annähernde) Kugelgestalt der Erde birgt viel Potential für mathematische Fragestellungen rund um sie. Einige dieser Fragestellungen sind von historischer Bedeutung, wie z. B. die Methode des Eratosthenes. Vor allem aber ist sie, wie andere vorgestellte Phänomene, mithilfe von Schulmathematik zu bewältigen. Das macht sie gerade für den Mathematikunterricht interessant. Darüber hinaus macht es die sphärische Geometrie möglich, kürzeste Entfernungen und Richtungen auf der Weltkugel zu betrachten. Das Berechnen von Richtungen kann übrigens unerwartete Ergebnisse liefern, woran die verzerrte Darstellung in Landkarten vielleicht eine Mitschuld trägt. Zu diesem Anlass werden die wichtigsten Kartennetzentwürfe und ihre Eigenschaften behandelt.

Since when do we know that the earth is spherical and how has its spherical shape been founded since ancient times? This will be discussed at the beginning of this work. The alternative view of the world of the “Flat Earthers” is also briefly explained. The (approximately) spherical shape of the earth leads to many interesting mathematical questions with high potential. Some of these questions are of historical importance, such as Eratosthenes’ method. Among other phenomena presented, it can be handled using school mathematics. This makes them particularly interesting for math classes as a part of applicable mathematics. In addition, the spherical geometry makes it possible to view shortest distances and directions on the surface of the globe. Incidentally, calculating directions can provide unexpected results, for which the distorted representation on maps may be partly to blame. On this occasion, the most important types of maps and their properties are introduced.