



universität  
wien

# MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

## **Wetteranalyse auf triangulären Gittern mit dem VERA Verfahren**

verfasst von / submitted by

**Martin Schneider, BSc**

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

**Master of Science (MSc)**

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

UA 066 614

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Masterstudium Meteorologie

Betreut von / Supervisor:

Ass.-Prof. Mag. Dr. Manfred Dorninger



## Zusammenfassung

Das Analyseverfahren VERA (Vienna Enhanced Resolution Analysis) wurde beginnend im Jahr 1995 am Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien unter der Leitung von Prof. Reinhold Steinacker entwickelt. Seither wurde es kontinuierlich verbessert und in verschiedenen Anwendungsgebieten genutzt. Mit VERA können unregelmäßig verteilte meteorologische Messdaten auf einem regelmäßiges Gitter analysiert werden. Neben der Interpolation wird gleichzeitig ein Downscaling durch die Verwendung von hoch aufgelösten Fingerprintfeldern durchgeführt. In der bisherigen Variante erfolgt dabei die Berechnung des Analysefeldes auf einem rechteckigen Gitter. Einerseits bringt diese Tatsache Vorteile in der einfachen mathematischen Formulierung und effizienten Berechnung mit sich, andererseits ist sie mit wesentlichen Einschränkungen (u.a. ausschließlich rechteckige Form der Analysedomäne möglich, fixierte bzw. konstante räumliche Auflösung, Meridiankonvergenz bei globaler Analyse) verbunden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Machbarkeitsnachweis des Analyseverfahren VERA auf einem triangulären Gitter erbracht. Dabei wurden die Prinzipien und Annahmen der konventionellen Methode (Standard-VERA auf rechteckigem Gitter) erhalten. Der grundlegende Ansatz in der triangulären VERA besteht im Ausdruck der Analysewerte durch Taylorreihenentwicklungen der benachbarten Werte. Die darin enthaltenen ersten und zweiten Ableitungen in x- und y-Richtung werden explizit ausgedrückt und wie in der Standard-VERA eine Kostenfunktion der Summe dieser quadrierten Ableitungen minimiert. Unregelmäßig verteilte Stationsdaten werden mit Hilfe einer Stationsmatrix auf das Dreiecksgitter interpoliert und dabei baryzentrisch gewichtet. Auch das Fingerprintkonzept wurde mit konstanten Fingerprintgewichten für die trianguläre VERA übernommen.

Ein Vergleich zwischen triangulärer und Standard-VERA für idealisierte Stationsdaten zeigte weder relevante positive, noch negative Qualitätsunterschiede. Es scheint somit möglich, die Vorteile der triangulären VERA ohne Qualitätsverlust in der Analyse ausschöpfen zu können. Diese inkludieren die beliebige geometrische Form der Analysdomäne, die Möglichkeit der lokalen Verdichtung des Gitters bzw. variable räumliche Auflösung, die Möglichkeit einer globalen Analyse und eine räumlich variable Dimensionserweiterung.

## Abstract

The analysis method VERA (Vienna Enhanced Resolution Analysis) was developed at the Department of Meteorology and Geophysics at the University of Vienna. Starting in 1995 under the direction of Prof. Reinhold Steinacker, the method was continuously improved and used in different areas of application. The VERA method interpolates irregularly distributed meteorological observation data to a regular grid. Along with the interpolation, a downscaling is executed through the usage of high-resolved fingerprint fields. In the conventional version of VERA, the analysis is calculated on a rectangular grid. While this leads to advantages of straightforward mathematical formulations and efficient computation, it implicates a number of constraints (e.g. rectangular shape of spatial domain, fixed spatial resolution, convergence of meridians for global analysis).

This master thesis demonstrates the proof of concept for the computation of the VERA method on a triangular grid, maintaining the principles and assumptions of the conventional method. The fundamental approach of the triangular VERA is found in the expression of the analysis values through Taylor series of the neighboring values. The first and second derivations of the series along the x- and y-coordinates are expressed explicitly. As in the conventional formulation of VERA, a cost function of the sum of these squared derivations is minimized. Irregularly distributed station data is interpolated on the triangular grid through barycentric weighting. The fingerprint concept is applied in the triangular VERA for constant fingerprint weights.

A comparison between triangular and conventional VERA with idealized station data did not reveal any substantial positive or negative quality differences. Therefore, it seems that the advantages of the triangular version can be used without any loss of quality. These include the arbitrary geometrical shape of the analysis domain, the possibility of using varying spatial resolution, the possibility of computation of a global analysis and the spatially varying extension of dimensions.

# Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung . . . . .	i
Abstract . . . . .	ii
<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1. Motivation . . . . .	3
1.2. Gliederung der Arbeit . . . . .	5
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1. Meteorologische Analyseverfahren . . . . .	6
2.2. Gitter in der meteorologischen Analyse . . . . .	8
2.2.1. Strukturierung eines Gitters . . . . .	8
2.2.2. Geometrische Form der Zellen eines Gitters . . . . .	9
2.2.3. Delaunay-Triangulierung . . . . .	10
2.2.4. Lokale Verdichtung eines Gitters . . . . .	10
2.3. VERA - Vienna Enhanced Resolution Analysis . . . . .	12
2.3.1. Mathematische Formulierung . . . . .	12
<b>3. Methode der triangulären VERA</b>	<b>15</b>
3.1. Stationsverteilung entspricht Gitterpunkten . . . . .	15
3.2. Von Stationsverteilung unabhängige Gitterpunkte . . . . .	21
3.2.1. Berücksichtigung von 1. und 2. Ableitungen in der Berechnung der Stationsmatrix	23
3.3. Konstant gewichtete Zusatzinformationen (Fingerprints) . . . . .	25
3.3.1. Das Fingerprintkonzept in der LAMA der triangulären VERA . . . . .	26
3.3.2. Das Fingerprintkonzept in der STAMA der triangulären VERA . . . . .	27
3.4. Zusammenfassung des schrittweisen Ablaufs der triangulären VERA . . . . .	29
3.5. Normierungen . . . . .	29
3.6. Verifikationsmethoden . . . . .	30
3.6.1. Leave-one-out cross-validation . . . . .	30
3.6.2. Gitterpunktverifikation . . . . .	31
<b>4. Ergebnisse</b>	<b>32</b>
4.1. Optimierung der internen Gewichtungsfaktoren . . . . .	33
4.1.1. Gewichtung der Stationsmatrix $\sigma$ . . . . .	34
4.1.2. Distanzgewichte $\alpha$ . . . . .	35
4.1.3. Flächengewichte $\gamma$ . . . . .	35
4.1.4. Ableitungsgewichte $\kappa$ . . . . .	36
4.2. Vergleich mit Standard-VERA . . . . .	37
4.2.1. Stationskonfigurationen . . . . .	38
4.2.2. Vergleich der Analysequalität anhand des RMSE und BIAS . . . . .	39
<b>5. Schlussfolgerungen und Ausblick</b>	<b>42</b>

<b>6. Anhang</b>	<b>44</b>
6.1. LAMA - Stationsverteilung entspricht Gitterpunkten . . . . .	44
6.1.1. Matrix-Schreibweise der LAMA . . . . .	54
6.2. STAMA - Von Stationsverteilung unabhängige Gitterpunkte . . . . .	59
6.3. Das Fingerprintkonzept in der LAMA der triangulären VERA . . . . .	61
6.4. Das Fingerprintkonzept in der STAMA der triangulären VERA . . . . .	69
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>72</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>73</b>

# 1. Einleitung

Die meteorologische Analyse strebt danach, den Zustand der Atmosphäre so akkurat als möglich zu beschreiben. Grundlage dafür bilden die erhobenen Daten verschiedener Messinstrumente. Deren Ursprung kann bis in das Jahr 1643 zurückverfolgt werden, als Torricelli zum ersten Mal die Konstruktion eines Quecksilberbarometers zur Messung des Luftdrucks gelang. In dieser Zeit wurden auch weitere wichtige Instrumente zur Messung atmosphärischer Parameter erfunden oder wesentlich weiterentwickelt. Beispiele dafür sind das Thermometer (Temperatur), Hygrometer (Feuchte), Anemometer (Windgeschwindigkeit und -richtung) oder Pluviometer (Niederschlag) (Pasini, 2003). Diese Instrumente fokussierten sich ausschließlich auf in-situ Messungen der jeweiligen Parameter. Heutzutage stehen darüber hinaus Messungen aus hochentwickelten Fernerkundungsinstrumenten (Satellitenbeobachtungen, Radarmessungen, etc.) zur Beschreibung des atmosphärischen Zustands zur Verfügung. Einer der wesentlichen Unterschiede zwischen in-situ-Messungen und Daten aus Fernerkundungsinstrumenten ist die räumliche Verteilung der Messdaten. Während Fernerkundungsdaten, mit spezifischen Einschränkungen des jeweiligen Geräts oder der Messmethode, in räumlicher Hinsicht regelmäßig verteilte Messungen eines Parameters durchführen können, liegen Daten von in-situ Messgeräten für gewöhnlich nur unregelmäßig verteilt vor. Die Berechnung eines regelmäßig verteilten Feldes eines meteorologischen Parameters basierend auf in-situ Daten ist ein wichtiges Hilfswerkzeug der meteorologischen Analyse und kann mit dem VERA Verfahren realisiert werden. In der vorliegenden Arbeit werden diese räumlichen Analysen mittels intelligenter Interpolationsmethoden im Allgemeinen mit dem Begriff „Analyse“ bezeichnet (in Abgrenzung zur meteorologischen Analyse, die als Beschreibung des gesamten Atmosphärenzustandes dient).

## 1.1 Motivation

Das Analyseverfahren VERA (Vienna Enhanced Resolution Analysis) ist eine variationelle Analyseemethode, die ausschließlich Messdaten und physikalisch motiviertes Vorwissen, jedoch keine zusätzlichen Modellinformationen (first-guess Feld) für die Berechnung eines Analysefeldes benötigt (Bica et al., 2007). Die Methode wurde unter der Leitung von Prof. Reinhold Steinacker 1995 am Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien entwickelt und seither laufend verbessert. In verschiedenen Publikationen wurde das Konzept der VERA beschrieben, weiterentwickelt, sowie neue Ansätze zur Verbesserung dargelegt (Steinacker et al. (2000), Steinacker et al. (2006), Bica et al. (2007), Mayer (2007), Lotteraner (2009), Löscher (2013)). In Abschnitt 2.3 wird die Funktionsweise und die mathematische Formulierung zusammenfassend erläutert.

Die Berechnung des Analysefeldes erfolgt in den aktuell in Betrieb stehenden Versionen der VERA auf einem regelmäßigen rechteckigen Gitter. Dieses Spezifikum der räumlichen Verteilung bringt neben den Vorteilen der einfachen Formulierung und effizienten Berechnung mittels dünn besetzter Matrizen auch einige Einschränkungen mit sich, die hier nachfolgend ausgeführt werden.

### Geometrische Form der Analysedomäne

Die geometrische Form der Analysedomäne ist stets auf ein Rechteck beschränkt. Dadurch müssen in der Analyse oftmals Gebiete mitanalysiert werden, die für den Anwendungsfall nicht von Interesse sind. Man denke beispielsweise an eine Analyse des alpinen Raums, für die große Gebiete in Norditalien, Süddeutschland oder auch Kroatien stets mitberechnet werden müssen. Darüber hin-

aus werden in einigen Fällen große Meeresgebiete mitanalysiert (z.B. Europadomäne), für die keine Beobachtungsdaten zur Verfügung stehen. In diesem Fall werden vereinzelte Punkte über dem Meer mit Modelldaten ergänzt. Dies benötigt Rechenzeit und Speicherkapazität für Daten, die unter Umständen nicht von Bedeutung sind.

### **Konstante räumliche Auflösung**

Die räumliche Auflösung ist derzeit für die gesamte Analysedomäne konstant. Wenn diese jedoch auf Basis verschiedener Kriterien variieren könnte, wäre es denkbar, einerseits Rechen- und Speicherkapazität einzusparen (bei geringerer Auflösung) und andererseits die Qualität der Analyse zu erhöhen (bei höherer Auflösung). Kriterien für die Auflösung könnten die Gradienten und Krümmungen übergebener Zusatzinformationen (z.B. Topographie) oder der Stationswerte (z.B. bei Frontdurchgang) sein.

### **Meridiankonvergenz**

Eine globale Analyse ist durch die Kugelgestalt der Erde und die damit verbundene Meridiankonvergenz auf rechteckigen Gittern nicht in einheitlicher Qualität möglich. Bei einer annähernd globalen Analyse müssen derzeit die Bereiche um die Pole ausgespart und die Analyse nur bis zu einem gewissen Breitengrad durchgeführt werden.

### **Rechenaufwändige Dimensionserweiterung**

Eine Erweiterung der Dimension von 2D auf 3D oder 4D (vertikale Koordinate und/oder Zeit) ist auch in der konventionellen Variante der VERA auf einem rechteckigen Gitter möglich. Die Vertikalkoordinate einer 3-dimensionalen Analyse im Raum Zentraleuropa spielt insbesondere im alpinen Raum bei Inversionslagen eine wichtige Rolle. Hingegen liegen in Norddeutschland aufgrund der flachen Topographie keine Daten in den Höhenschichten (mit Ausnahme der untersten Schicht) vor. Die Analyse muss jedoch trotzdem immer auf der gesamten Analysedomäne für alle Höhenschichten durchgeführt werden. Dies führt wiederum zu erheblich höheren Rechenzeiten.

Die hier angeführten Einschränkungen könnten möglicherweise durch die Berechnung auf einem triangulären Gitter gelöst werden. Durch die Verwendung von Dreiecken anstatt Rechtecken würde zunächst die mathematische Notwendigkeit eines benachbarten Gitterpunktes in zonaler und meridionaler Richtung aufgelöst. Die Lage der benachbarten Gitterpunkte wäre beliebig und somit auch die Form der Analysedomäne. Durch die frei wählbare Lage der Gitterpunkte könnte auch die Auflösung räumlich variiert werden. In weiterer Folge könnten auch die Meridiankonvergenz und die rechenaufwändige Dimensionserweiterung umgangen werden.

Diese im Konjunktiv angeführten Verbesserungen bilden die Motivation dieser Forschungsarbeit. Der Kern der Untersuchung liegt in der Feststellung der Machbarkeit einer räumlichen Analyse auf einem triangulären Gitter mit dem VERA Verfahren. Dafür wird eine Analysemethode für ein trianguläres Gitter entwickelt, die die Grundprinzipien der VERA erhält, und in weiterer Folge als trianguläre VERA bezeichnet wird. Die Umsetzbarkeit der beliebigen Form der Analysedomäne und der variierenden räumlichen Auflösung werden überprüft. Für eine globale Analyse und eine Dimensionserweiterung wird lediglich ein Ausblick geboten.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in drei Abschnitte gegliedert, auf welche abschließend die Schlussfolgerungen und ein Ausblick folgen. Zunächst wird in Abschnitt 2 ein Überblick über die verschiedenen Analyseverfahren geboten. Ebenso wird eine Einteilung von Gitterarten vorgenommen und insbesondere die Vorgehensweise bei der Konstruktion triangulärer Gitter beleuchtet. Das konventionelle Verfahren der VERA auf rechteckigem Gitter wird in Kapitel 2.3 als Grundlage für das Verständnis und die Darstellung der triangulären VERA beschrieben. In weiterer Folge wird in dieser Arbeit der Begriff „Standard-VERA“ für die bisherige operationelle Variante der VERA auf rechteckigem Gitter verwendet.

Deren konzeptionelle Entwicklung und mathematische Formulierung wird darauf folgend in Abschnitt 3 ausgeführt. Dabei steigt die Komplexität beginnend bei gleichen Koordinaten von Gitterpunkten und Stationen (Kapitel 3.1) über von der Stationsverteilung unabhängiger Gitterpunkte (Kapitel 3.2) bis zur Inkludierung von konstant gewichteten Zusatzinformationen bzw. Fingerprints (Kapitel 3.3). Anschließend werden noch die verwendeten Verifikationsmethoden vorgestellt (Kapitel 3.6). Eine detaillierte mathematische Dokumentation ist im Anhang zu finden.

Die Ergebnisse der entwickelten Methode werden schließlich in Abschnitt 4 dargelegt. Auf die Optimierung der Methode selbst (Kapitel 4.1) folgt der Vergleich mit der Standard-VERA (Kapitel 4.2).

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1 Meteorologische Analyseverfahren

Meteorologische Analyseverfahren übernehmen eine wichtige Funktion in zahlreichen Bereichen der Meteorologie und deren Anwendungsgebieten. Sie dienen beispielsweise als

- Initialisierungszustand von numerischen Vorhersagemodellen
- Observationen für Assimilationsverfahren in numerischen Vorhersagemodellen
- Vergleichsfelder für die Verifikation von Wetterprognosen, insbesondere für räumliche Verifikationsmethoden
- Informationsquelle für Anwenderinnen und Anwender meteorologischer Produkte

Eine gute meteorologische Analyse verwendet verschiedene Datenquellen, um die physikalischen Gegebenheiten in der Atmosphäre zum Analysezeitpunkt darzustellen (NOAA, 2013). Während meteorologische Prognoseparameter in der numerischen Wettervorhersage als zwei- oder dreidimensionale Felder auf einem regelmäßigen Gitter vorliegen, stehen Messungen von Bodenstationen nur unregelmäßig verteilt an den jeweiligen Orten der Messung zur Verfügung. Diese Unzulänglichkeit der räumlichen Verteilung gilt es zu überwinden. Hierfür stehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Unregelmäßig verteilte Messungen durch regelmäßig verteilte zu ergänzen, oder die unregelmäßig verteilten Messungen durch mathematische Verfahren auf ein regelmäßiges Gitter zu übertragen.

In den vergangenen Jahrzehnten gelang es durch verschiedene Fernerkundungssysteme wie beispielsweise Infrarotradiometern auf Satelliten oder dem Niederschlagsradar, meteorologische Beobachtungen in einem größeren Gebiet hoch aufgelöst und nahezu zeitgleich zu erheben. Aufgrund physikalischer und technischer Gegebenheiten dieser Messinstrumente und deren Messumgebung können nur ausgewählte Parameter gemessen werden. Darüber hinaus müssen Einschränkungen in der Messgenauigkeit hingenommen werden. Als Beispiele seien Abschattungen durch Gebirge beim Niederschlagsradar oder die Kollisionsverbreiterung der Absorptionslinien bei Radianzmessungen genannt. Somit bilden unregelmäßig verteilte Stationsdaten weiterhin ein wesentliches Element des meteorologischen Observationsnetzwerks. Dies gilt insbesondere für Parameter, deren in-situ Messung eine höhere Messgenauigkeit aufweist, als mit Fernerkundungssystemen derzeit erzielt werden kann. Diese können mittels räumlicher Interpolation auf ein regelmäßiges Gitter gebracht werden. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Methode kann auch auf zeitlich asynoptische Beobachtungen angewandt werden, um Regelmäßigkeit in der Dimension der Zeit zu erzielen. Auf diese Anwendung wird in dieser Arbeit nicht explizit eingegangen.

Während in der Vergangenheit Analysen von Meteorologinnen und Meteorologen per Hand gezeichnet und somit von Natur aus subjektiv waren, werden diese heute von Computerprogrammen durchgeführt. Die Herausforderung ist damals wie heute die Berücksichtigung physikalischer Prozesse in der Atmosphäre zur akkuraten Darstellung des gegenwärtigen Zustands (Steinacker et al., 2006). Die Analyse unregelmäßig verteilter Stationsdaten auf einem regelmäßigen Gitter kann auf unterschiedliche Arten vollzogen werden. Es existieren bereits verschiedene Ansätze diese Herausforderung zu lösen, ohne Verwendung von Daten eines numerischen Wettervorhersagemodells zu nutzen. Steinacker et al. (2000) unterteilen diese Verfahren in fünf Gruppen:

1. Eine der ersten Methoden aus historischer Sicht wurde von Panofsky (1949) entwickelt. Die Parameter werden durch Polynome dritten Grades auf die Gitterpunkte interpoliert. Durch die erforderliche Glättung kann bei diesem Ansatz nur eine großskalige Repräsentation erwartet werden.
2. Die Interpolation kann mit Hilfe einer vorgegebenen Gewichtsfunktion und der Anpassung von Polynomen zweiten Grades durchgeführt werden (Gilchrist und Cressman, 1954). Auch mit diesem Ansatz können nur großräumige Strukturen eines Parameters beschrieben werden.
3. Barnes (1964) stellt eine Methode vor, in der das Analysefeld durch die Summierung von unabhängigen harmonischen Wellen berechnet wird. Mit Hilfe dieser konvergenten, gewichtet-gemittelten Interpolationsmethode können abhängig von der Datendichte bereits detailliertere Strukturen als zuvor analysiert werden.
4. Die Methode "Optimum Interpolation" (OI) wurde als erstes von Gandin (1965) formuliert. Sie eignet sich insbesondere für Daten bei denen ein "first guess" (Vorwissen in Bezug auf räumliche Autokorrelation und Fehlerstatistik, beispielsweise aus einem Modell) vorliegt. Der Vorteil dieser Methode liegt in der Möglichkeit auch in Regionen ohne Beobachtungsdaten eine plausible Analyse auf Basis des first guess Feldes zu berechnen. Die Notwendigkeit und der Einfluss dieses first guess Feldes ist evident.
5. Variationelle Methoden inkludieren physikalische Nebenbedingungen in der mathematischen Formulierung der Analyse (Sasaki, 1958, 1970). Im Zuge dieser Methode werden Kostenfunktionen minimiert, um ein möglichst exaktes Analysefeld zu generieren. Der Ansatz der VERA fällt in diese Gruppe der variationellen Methoden und wird in Abschnitt 2.3 dieser Arbeit vorgestellt.

Im Allgemeinen werden diese Ansätze der Analyse, die mittels mathematischer Verfahren gelöst werden, als objektive Methoden bezeichnet. Sowohl in der subjektiven, als auch in der objektiven Analyse, ist das Ziel eine möglichst genaue Darstellung des analysierten Parameters, in der Irregularitäten, Beobachtungsfehler und kleinskalige (irrelevante) Fluktuationen geglättet werden (Sasaki, 1958). Während subjektive Ansätze stets unter Einfluss der analysierenden Person stehen und dessen Erfahrung als Vorwissen miteinbeziehen, variiert der Umfang und Einsatz von Vorwissen bei objektiven Analyseverfahren. Während einige Methoden ausschließlich mit den aktuell gemessenen Beobachtungsdaten arbeiten (Anpassung von Polynomen), verwenden andere ein first guess Feld (Optimum Interpolation) oder physikalisch motiviertes Vorwissen (VERA). Die Beobachtungsdaten sollten für alle Verfahren in möglichst hoher räumlicher Auflösung vorliegen. Da jedoch die Dichte des Messnetzes trotz kontinuierlicher Zunahme von Messstationen immer noch ein Vielfaches der Skala der aufzulösenden Phänomene beträgt, werden objektive Analysen oftmals an ein Downscaling-Verfahren gekoppelt werden (Mayer und Steinacker, 2013). Insbesondere lokale, feinskalige und orographisch bedingte Effekte wie beispielsweise Stauniederschläge, Inversionen oder lokale Hitzetiefs bzw. Kältehochs sind davon betroffen.

Neben Subjektivität und Objektivität variieren die Ansätze auch hinsichtlich der benötigten Rechenleistung. Während in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts einige Methoden schon aufgrund der benötigten Computerleistung nicht umsetzbar gewesen wären, können heute bereits komplexe Analysen mit einer räumlichen Auflösung von weniger als 1 km beinahe in Echtzeit durchgeführt werden. Dafür werden zumeist regelmäßige Gitter, bestehend aus Quadraten oder Rechtecken im zweidimensionalen Raum (bzw. Würfeln und Quadern im dreidimensionalen Raum) verwendet. Im nächsten Abschnitt wird ein Überblick über verschiedene Arten von Gittern geboten und insbesondere auf trianguläre Gitter, wie in der Methode der triangulären VERA verwendet, eingegangen.

## 2.2 Gitter in der meteorologischen Analyse

Die Generierung und Anwendung verschiedener Arten von Gittern spielt im Zuge von numerischen Strömungssimulationen (Computational Fluid Dynamics) eine wesentliche Rolle. Als Teilgebiet dieser Disziplin sind auch in numerischen Wettermodellen unterschiedliche Arten von Gittern in Verwendung. Während deren Eigenschaften und Funktionen sowohl in wissenschaftlichen Beiträgen, als auch vom jeweiligen Betreiber dokumentiert und detailliert beschrieben sind, gibt es über die Anwendung unterschiedlicher Gitter in Methoden der objektiven Analyse keine zugänglichen Untersuchungen. Für den Zweck dieser Arbeit werden nur zweidimensionale Gitter betrachtet. Vor- und Nachteile der verschiedenen Gitter werden kompakt dargestellt, da diese nicht ausschließlich von der Form des Gitters, sondern insbesondere von der jeweiligen Anwendung oder Problemstellung abhängig sind. Als Beispiel seien Instabilitäten durch zeitliche Integration in der numerischen Wettervorhersage genannt, die jedoch in der Analyse durch die fehlende Integration keine Rolle spielen.

Eine allgemeine Gliederung der Gitter kann sowohl hinsichtlich ihrer Strukturierung (strukturiert, unstrukturiert), als auch der geometrischen Form ihrer Zellen vorgenommen werden. Da es sich in dieser Arbeit um ein Analyseverfahren auf einem triangulären Gitter handelt, wird auf diese Form des Gitters genauer eingegangen.

### 2.2.1 Strukturierung eines Gitters

#### Strukturierte Gitter

Der Charakter von strukturierten Gittern ist durch die regelmäßige Verbindung von Gitterpunkten gegeben. Ein Gitterpunkt kann entweder im Zentrum, am Rand oder in der Ecke einer Domäne liegen. In einem strukturierten Gitter hat jeder Zentrums-, Rand- und Eckpunkt eine bestimmte Anzahl an Verbindungen zu den benachbarten Gitterpunkten. Alle Punkte seiner Kategorie besitzen die gleiche Anzahl an Verbindungen (Vartziotis und Wipper, 2019) (Abbildung 1). Sind auch die Abstände zu den benachbarten Gitterpunkten konstant, spricht man von einem gleichmäßig strukturierten Gitter (oder auch regelmäßigem Gitter). Bei ungleichmäßig strukturierten Gittern können hingegen die Gitterpunktabstände variieren (Tu et al., 2013).

#### Unstrukturierte Gitter

Im Gegensatz zu strukturierten Gittern steht bei der unstrukturierten Form die variierende Anzahl der Gitterpunktverbindungen im Vordergrund. In Abbildung 1 (rechts) ist ersichtlich, dass keine Struktur und Regelmäßigkeit in der Anordnung der Zellen gegeben ist und die Koordinatenlinien in ihrer Orientierung nicht mehr einheitlich sind. Während der Rand der Domäne noch strukturiert erscheinen mag, lässt sich bei genauerer Betrachtung im Inneren der Domäne feststellen, dass die Anzahl (und auch die Abstände) der Gitterpunktverbindungen nicht konstant sind. Dies ermöglicht mehr Flexibilität in der Darstellung komplexer Domänen. Die üblichste Form der unstrukturierten Gitter sind trianguläre Gitter (Tu et al., 2013). Eine viel verwendete Generierungsmethode für trianguläre unstrukturierte Gitter ist die sogenannte Delaunay-Triangulierung (Farrashkhalvat und Miles, 2003).

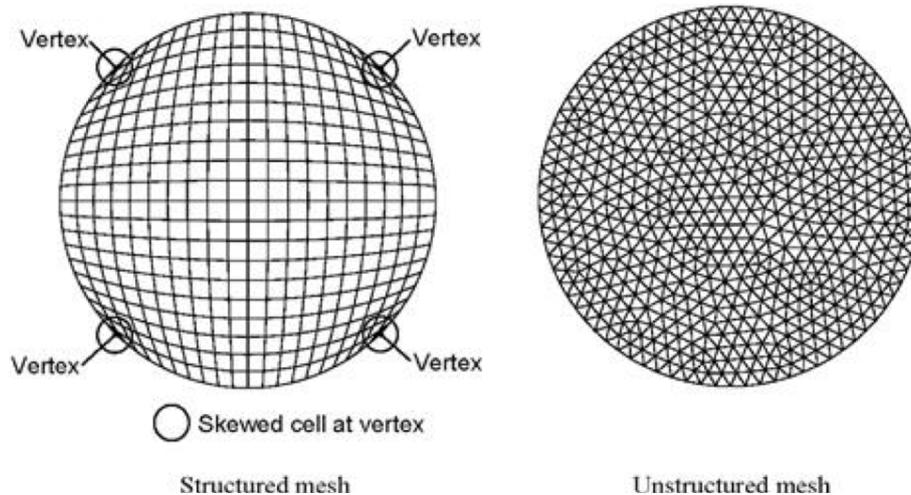


Abbildung 1: Kreisförmige Domäne basierend auf einem strukturierten (links) und unstrukturierten (rechts) Gitter. Die Form der Gitterboxen (drei- oder viereckig) ist dabei nicht ausschlaggebend. Die Definition erfolgt über die konstante (strukturiert) oder variierende (unstrukturiert) Anzahl der Verbindungen zwischen Gitterpunkten gleichen Typs (Zentrum, Rand, oder Eckpunkt). Abbildung von Tu et al. (2013).

## 2.2.2 Geometrische Form der Zellen eines Gitters

### Rechteckige Gitter

Traditionelle rechteckige (auch Latitude-Longitude) Gitter sind die am häufigsten verwendeten Gitterformen in der Meteorologie und werden seit den 1960er Jahren in vielen numerischen Wettervorhersagemodellen verwendet (Staniforth und Thuburn, 2012). Durch die orthogonale Natur dieser Darstellung sind mathematische Operationen verhältnismäßig leicht realisierbar. Schwierigkeiten ergeben sich durch die sphärische Gestalt der Erde und die damit verbundene Meridiankonvergenz an den Polen. Durch begrenzte Domänen, rotierte Gitter und geeignete Projektionen kann dieses Problem überwunden werden (Collins et al., 2013).

### Trianguläre Gitter

Trianguläre (dreieckige) Gitter werden zwar seltener verwendet als rechteckige Gitter, ermöglichen jedoch eine nahezu homogene Abdeckung der gesamten Erde. In globalen Modellen wird ein trianguläres Gitter durch die Unterteilung eines Ikosaeders erstellt. Dabei wird jede Dreiecksfläche in kleinere Dreiecke gegliedert. Jeder neue Eckpunkt entlang der Kanten der ursprünglichen Dreiecke ist von sechs Dreiecken umgeben und bildet somit den Mittelpunkt eines Hexagons. Die Eckpunkte der ursprünglichen Dreiecke sind von nur fünf Dreiecken umgeben und somit Mittelpunkt eines Pentagons (Collins et al., 2013). Im globalen Kontext wird daher auch von einem pentagonal-hexagonalen Gitter gesprochen (Staniforth und Thuburn, 2012).

In der lokalen Analyse sind trianguläre Gitter nicht an eine spezielle Domänenform gebunden. Der betrachtete Kartenausschnitt muss keine rechteckige Form annehmen, sondern kann beliebig definiert werden. Eine Analyse kann somit beispielsweise nur für eine bestimmte Region (z.B. Alpenraum) durchgeführt werden und für die Anwendung nicht relevante Ausschnitte aussparen. Da im Zuge der Modellierung eines Parameters stets ein Zusammenhang zwischen benachbarten Gitterpunkten hergestellt wird, muss bei triangulären Gittern besonderes Augenmerk auf die Architektur und Verbindungen der Gitterpunkte gelegt werden. Bei rechteckigen Gittern erfolgt die Identifikati-

on eines Gitterpunkts einfach über den Wert seiner x- und y- bzw. lon- und lat-Koordinate (Tu et al., 2013). Nächste und übernächste Nachbarn können somit leicht zugeordnet werden. Um auch bei triangulären Gittern eine effiziente Berechnung sicherzustellen, müssen entsprechende Datenstrukturen verwendet werden. Dabei werden alle Gitterpunkte ebenso wie die einzelnen Dreiecke des Gitters durchnummeriert. Jedem Dreieck können somit seine entsprechenden Eckpunkten zugeordnet werden. Ebenso können für jeden Gitterpunkt deren nächste und übernächste Nachbarn abgegriffen werden.

### **Hexagonale Gitter**

Die Bildung hexagonaler Gitter erfolgt oftmals aus zuvor definierten triangulären Gittern. Dabei wird ein Hexagon aus sechs Dreiecken zusammengesetzt. Während bei triangulären und rechteckigen Gittern die Variablen jeweils an den Kreuzungen der Gitterlinien (Gitterpunkte) berechnet werden, können diese bei hexagonalen Gittern zusätzlich an den Mittelpunkten der Hexagone bestimmt werden. Neben dieser Umformung eines triangulären Gitters wurden bereits Methoden entwickelt, in der die benötigten Berechnungen direkt auf dem hexagonalen Gitter durchgeführt werden. Räumliche Ableitungen werden dabei ohne Verwendung von Dreiecken innerhalb der Hexagone durchgeführt (Collins et al., 2013).

### **2.2.3 Delaunay-Triangulierung**

Das Ziel der Delaunay-Triangulierung ist die Verbindung einer willkürlichen Anzahl von Punkten zu einem triangulären Gitter, sodass die gebildeten Dreiecke so gleichseitig wie möglich sind. Die Grundlage dafür bildet die Dirichlet- oder Voronoi-Zerlegung einer Fläche in konvexe Polygone. Dabei werden Polygone um die gegebenen Gitterpunkte so konstruiert (jeweils ein Polygon um jeden Gitterpunkt), dass jeder Punkt innerhalb eines Polygons näher am umgebenen Gitterpunkt liegt, als an benachbarten Gitterpunkten (Abbildung 2). Die Eckpunkte der Voronoi-Polygone bilden somit die Umkreismittelpunkte der Delanauy-Dreiecke. Sie haben daher alle den gleichen Abstand zu den Eckpunkten der Delaunay-Dreiecke (Abbildung 3). Somit ist eine wichtige Eigenschaft der Delaunay-Triangulation bereits definiert: die Umkreiseigenschaft. Sie garantiert, dass in keinem Umkreis eines Dreiecks ein Eckpunkt eines weiteren Dreiecks liegt (Farrashkhalvat und Miles, 2003). Dadurch tendiert diese Methode dazu, die Dreiecke so zu konstruieren, dass der kleinste Winkel in den Dreiecken so groß wie möglich gemacht wird. Spitze Winkel in unstrukturierten Gittern führen oftmals zu einer Qualitätsreduktion der berechneten Resultate oder zu numerischen Instabilitäten. Um dies zu vermeiden, können zusätzliche Gitterpunkte eingefügt und das Gitter lokal verdichtet werden (Tu et al., 2013).

### **2.2.4 Lokale Verdichtung eines Gitters**

Die benötigte Dichte eines triangulären Gitters kann einerseits anhand eines geometrischen und andererseits anhand eines physikalischen Aspektes bewertet werden. Aus geometrischer Sicht sollen die gebildeten Dreiecke möglichst gleichmäßig in Form und Größe sein. Aus physikalischer Sicht soll das Gitter möglichst gut an die physikalischen Eigenschaften des betrachteten Parameters angepasst sein. Das bedeutet, dass in Gebieten, in denen die berechnete Variable stark variiert, eine hohe Gitterpunktdichte herrscht (und in Gebieten von geringer Variation eine geringere Gitterpunktdichte). Die Entscheidung, welche Dreiecke für eine Verdichtung ausgewählt und an welcher Stelle ein neu-

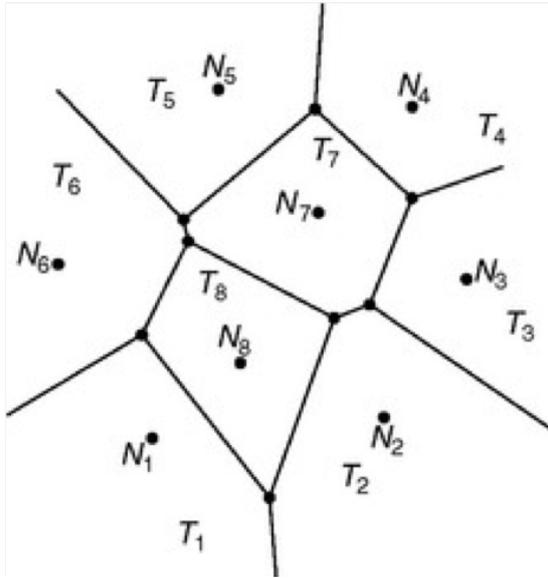


Abbildung 2: Dirichlet Zerlegung (Voronoi-Diagramm) der Gitterpunkte  $N_1, N_2, \dots, N_8$  in konvexe Polygone  $T_1, T_2, \dots, T_8$ . Jeder Punkt innerhalb von  $T_j$  ist näher zum Gitterpunkt  $N_j$  als zu jedem anderen Gitterpunkt. Abbildung von Farrashkhalvat und Miles (2003).

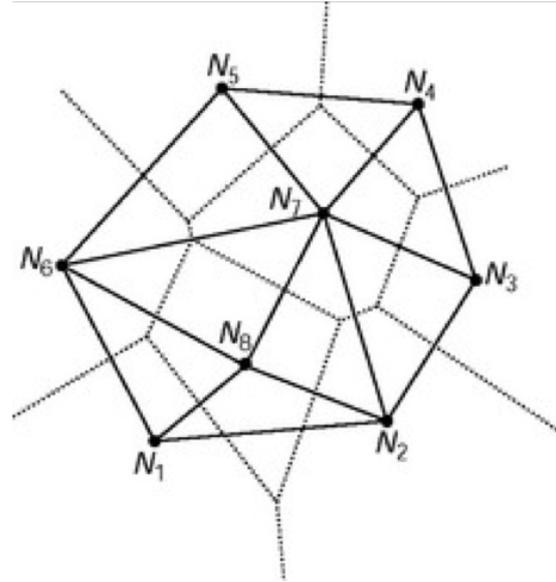


Abbildung 3: Delaunay-Triangulierung der Gitterpunkte  $N_1, N_2, \dots, N_8$ . Verbindungen werden zwischen angrenzenden Polygonen gebildet (vgl. Abbildung 2). Abbildung von Farrashkhalvat und Miles (2003).

er Gitterpunkt eingefügt wird, ist essentiell für die Qualität der Resultate (Farrashkhalvat und Miles, 2003). Eine Selektion von grundlegenden Ansätzen und Methoden, die den geometrischen Aspekt behandeln, wird hier angeführt. Für die Auswahl der zu unterteilenden Dreiecke werden zunächst jene Dreiecke innerhalb der aktuellen Triangulierung identifiziert, welche nicht den vorgegebenen Regeln von Farrashkhalvat und Miles (2003) entsprechen. In diese werden dann neue Gitterpunkte eingesetzt und eine Neu-Triangulierung durchgeführt. Dies wird so oft wiederholt, bis das gewünschte Gitter erreicht ist. Für die Definition der zu unterteilenden Dreiecke innerhalb einer (Sub-)Domäne können drei Regeln formuliert werden (Farrashkhalvat und Miles, 2003).

1. Dreiecke mit einer „zu großen“ Fläche sollen unterteilt werden. Die Definition von „zu groß“ obliegt den spezifischen Anforderungen der Analyse.
2. Das Dreieck mit dem größten Umkreisradius wird ausgewählt. Diese Regel eliminiert Dreiecke mit stumpfen Winkeln bzw. schmale Dreiecke mit zu kleiner Fläche, als dass sie durch Regel 1 eliminiert werden würden.
3. Stumpfwinkelige bzw. schlanke Dreiecke werden direkt gesucht. Hierfür wird ein eigenes Kriterium zur Erkennung von schlanken Dreiecken benötigt (z.B. das Seitenverhältnis).

Neue Punkte sollten grundsätzlich nicht zu knapp an existierenden Gitterpunkten inseriert werden. Ein bewährter Ansatz ein Gitter zu verdichten besteht darin, neue Gitterpunkte an den Umkreismittelpunkten der triangulierten Dreiecke einzusetzen und die Triangulierung erneut durchzuführen. Dabei kann nicht sichergestellt werden, dass ehemals bestehende Verbindungen aufrecht erhalten werden. In zwei Fällen muss die Insertierung am Umkreismittelpunkt jedoch verworfen werden (Farrashkhalvat und Miles, 2003).

- Fall 1: Der Umkreismittelpunkt des ausgewählten Dreiecks liegt nicht innerhalb der zu analysierenden Domäne.

- Fall 2: Der Umkreismittelpunkt des ausgewählten Dreiecks liegt zu knapp an der Grenze der zu analysierenden Domäne. Als Distanzkriterium für den Abstand zur Domänengrenze wird oftmals festgelegt, dass der Abstand des neuen Gitterpunkts zur Domänengrenze nicht kleiner als ein Drittel des Abstands der beiden Gitterpunkte, die diese Domänengrenze definieren, sein darf.

## 2.3 VERA - Vienna Enhanced Resolution Analysis

Das Analyseverfahren VERA wurde am Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien unter der Leitung von Prof. Reinhold Steinacker entwickelt. Beginnend im Jahr 1995 wurde das Verfahren laufend verbessert, ausgebaut, ergänzt und in verschiedenen Anwendungsgebieten getestet (Lotteraner, 2009). Die VERA zählt zu den Gruppen der Variationsanalysen, ist modellunabhängig und benötigt somit kein first guess Feld oder statistische Zusatzinformationen. Sie umfasst sowohl die Interpolation der Stationswerte auf ein regelmäßiges Gitter, als auch das Downscaling durch Inkludierung von physikalisch motivierten Vorwissen (Fingerprints). Das Analysefeld wird in dieser Methode durch einen unerklärten Anteil (nicht durch das physikalische Vorwissen erklärbar) und einen erklärten Anteil (durch das physikalische Vorwissen erklärbar) zusammengesetzt. Aus mathematischer Sicht erfolgt die Berechnung des unerklärten Anteils der Analyse durch die Minimierung einer Kostenfunktion. Dabei werden die quadrierten ersten (Gradienten) und zweiten (Krümmungen) Ableitungen minimiert, sodass ein möglichst glattes Analysefeld, das ebenso in der Natur angestrebt wird, generiert werden kann. Gleichzeitig wird über die Methode der Fingerprints Zusatzwissen angeboten (erklärter Anteil), das innerhalb der Berechnung erkannt und berücksichtigt werden kann (Mayer und Steinacker (2013), Bica et al. (2007)). Somit können Analysen auch im komplexen Gelände durchgeführt werden. In diesem sollen insbesondere Phänomene der niederen Meso-Beta oder sogar höheren Meso-Gamma Skala mit typischen Längenskalen von 5 bis 50 km identifiziert werden. Dafür ist eine räumliche Auflösung der Analyse von 2 bis 20 km von Nöten (Steinacker et al., 2006). Ein wesentlicher Bestandteil des VERA Verfahrens ist darüber hinaus die ausgeklügelte Qualitätskontrolle. Diese ist sowohl modellunabhängig, als auch selbstkonsistent und berücksichtigt zeitliche und räumliche Korrelationen meteorologischer Parameter (Steinacker et al., 2011).

Die mathematische Formulierung der VERA selbst stützt sich im Wesentlichen auf die Ausführung von Mayer und Steinacker (2013) und wird insbesondere in Vorbereitung auf die in Abschnitt 3 detailliert ausgeführte, den Kern dieser Arbeit bildende Methode der triangulären VERA, beschrieben.

### 2.3.1 Mathematische Formulierung

Eine Grundannahme der VERA besteht darin, einen meteorologischen Parameter  $\Psi$  in einen erklärten Anteil  $\Psi_E$  und einen unerklärten Anteil  $\Psi_U$  aufspalten zu können ( $\Psi$  steht dabei stellvertretend für die Größe Temperatur, Druck o.ä.). Diese Annahme gilt sowohl für die Stationswerte  $\Psi_S$  als auch für die Analysewerte an den Gitterpunkten  $\Psi_A$ .

Die Information des erklärten Anteils  $\Psi_E$  ist im Fingerprintkonzept enthalten. Dieser Anteil lässt sich in den Wert eines Fingerprintfeldes  $\Psi_{FP}$  und einen Gewichtungsfaktor für dieses Feld  $c$  aufspalten. Für  $N$  Zusatzinformationen durch Fingerprintfelder kann dementsprechend folgender formeller Zusammenhang hergestellt werden:

$$\Psi_A = \Psi_U + \Psi_E = \Psi_U + \sum_{n=1}^N c_n \Psi_{FP,n} \quad (1)$$

Die Fingerprintfelder  $\Psi_{FP}$ , deren hohe Auflösung auch feinskalige Strukturen aufweisen können, sind an dieser Stelle bereits bekannt. Hingegen sind Analysefeld  $\Psi_A$  und Fingerprintgewichte  $c_n$  unbekannt. Deren Werte werden im Zuge der Analyse bestimmt.

Für den unerklärten Anteil  $\Psi_U$  wird nun die in der Einleitung dieses Abschnitts erwähnte Glattheitsbedingung in Form einer Kostenfunktion, in der die Quadrate der ersten und zweiten Ableitungen minimiert werden, eingeführt. Um die Übersichtlichkeit zu wahren beschränken sich die Ausführungen nur auf eine Dimension.

$$J_1 = \kappa_1 \left( \int \frac{\partial \Psi_U}{\partial x} dx \right)^2 + \kappa_2 \left( \int \frac{\partial^2 \Psi_U}{\partial x^2} dx \right)^2 \quad (2)$$

Die Faktoren  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  ermöglichen die Gewichtung und somit die Steuerung des Einflusses der ersten bzw. zweiten Ableitungen. Nach Approximation der Ableitungen durch endliche Differenzen, sowie der Integrale durch Summen, kann die Kostenfunktion wie folgt angeschrieben werden:

$$J_1 \approx \kappa_1 \sum_i (\Psi_{U,i+1} - \Psi_{U,i})^2 + \kappa_2 \sum_i (\Psi_{U,i+1} - 2\Psi_{U,i} + \Psi_{U,i-1})^2 \quad (3)$$

Neben dieser ersten Kostenfunktion wird eine weitere Kostenfunktion  $J_2$  definiert, die möglichst geringe Abweichungen zwischen den unerklärten Anteilen der Stationswerte  $\Psi_{s,U}$  und den linear auf die Stationsposition interpolierten Werte  $\hat{\Psi}_{s,U}$  sicherstellen soll.

$$J_2 \approx \sigma \sum_{s=1}^S (\Psi_{s,U} - \hat{\Psi}_{s,U})^2 = \sigma \sum_{s=1}^S [\Psi_{s,U} - (\delta_{s,i(s)} \Psi_{U,i(s)+1} + \delta_{s,i(s)+1} \Psi_{U,i(s)})]^2 \quad (4)$$

Der Gewichtungsfaktor  $\sigma$  steuert dabei den Einfluss der Kostenfunktion  $J_2$  im Vergleich zu  $J_1$ .  $S$  steht für die Anzahl der Stationen und  $\delta_{s,i(s)}$  bzw.  $\delta_{s,i(s)+1}$  für den normierten Abstand zwischen der Station und ihrem links und rechts benachbarten Gitterpunkt. Die Stationswerte werden ebenso wie die Analysewerte in einen unerklärten und erklärten Anteil aufgespalten und die entsprechenden Werte der Fingerprintfelder an der Stationsposition abgegriffen.

Aus den Kostenfunktionen  $J_1$  und  $J_2$  kann nun die gesamte zu minimierende Kostenfunktion gebildet und nach allen unbekannt Variablen (Gitterpunktwerte  $\Psi_{A,i}$  und Fingerprintgewichten  $c_n$ ) abgeleitet werden.

$$J = J_1 + J_2 \Rightarrow \text{Min} \quad (5)$$

$$\forall i = 1, \dots, I: \frac{\partial J}{\partial \Psi_{A,i}} = 0 \quad (6)$$

$$\forall n = 1, \dots, N: \frac{\partial J}{\partial c_n} = 0 \quad (7)$$

$$M \cdot (\Psi_{A,1}, \dots, \Psi_{A,I}, c_1, \dots, c_N)^T = \vec{b} \quad (8)$$

Da jede Gleichung in den unbekanntenen Variablen linear ist, kann sie als lineares Gleichungssystem mit einer Koeffizientenmatrix  $M$  angeschrieben werden (Gleichung 8).  $T$  steht für die Transponierung des durch den Klammersausdruck definierten Vektors. Die Koeffizientenmatrix wird dabei aus der Summe der jeweiligen Anteile der Kostenfunktion  $J_1$  (Large-Matrix, LAMA) und  $J_2$  (Stations-Matrix, STAMA) zusammengesetzt (Mayer und Steinacker, 2013). Dabei koppelt die LAMA die Analysewerte an die Werte ihrer jeweiligen benachbarten Gitterpunkte und die Stationsmatrix liefert die Übertragung der Stationswerte auf die umgebenden Gitterpunkte.

Die wesentlichen Konzepte dieser Methode (Fingerprintkonzept, Minimierung der Steigungen und Krümmungen, LAMA und STAMA) sollen auch in der Berechnung auf einem triangulären Gitter erhalten bleiben. Die Entwicklung dieser triangulären VERA wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

### 3. Methode der triangulären VERA

Für die Berechnung einer meteorologischen Analyse auf triangulären Gittern werden die Grundprinzipien der VERA-Methode erhalten. Durch veränderte Verbindungen der Gitterpunkte, die nicht mehr ausschließlich horizontal und vertikal nebeneinander angeordnet sind, müssen die benötigten Gleichungen neu entwickelt werden. In diesem Abschnitt wird die Herleitung der Lösungsmatrizen in steigender Komplexität auf triangulären Gittern vorgestellt. Eine detaillierte Dokumentation befindet sich im Anhang. Die in Abschnitt 2.3 verwendeten Abkürzungen werden so weit als möglich wieder verwendet. Aus Gründen der Lesbarkeit werden für manche Parameter neue Abkürzungen eingeführt. Um eine klare Differenzierung zwischen der bisherigen Version der VERA und der in dieser Arbeit dokumentierten Version der triangulären VERA zu unterscheiden, werden die Bezeichnungen „Standard-VERA“ und „trianguläre VERA“ verwendet.

Der grundlegende Ansatz besteht im Ausdruck der Analyseparameter  $\Psi_P$  durch Taylorreihen 2. Ordnung, ausgehend von den benachbarten Gitterpunkten. Die darin enthaltenen 1. und 2. Ableitungen in x- und y-Richtung werden durch im Anschluss beschriebene mathematische Operationen explizit ausgedrückt. Durch die Minimierung einer Kostenfunktion der Summe dieser quadrierten Ableitungen (Gleichung 15) können die Analysewerte bestimmt werden. Die einzelnen Bestandteile dieser Vorgehensweise werden nun in angemessener Detailliertheit angeführt.

#### 3.1 Stationsverteilung entspricht Gitterpunkten

Zunächst wird als primitivste Konfiguration ein unstrukturiertes Gitter betrachtet, bei dem die Stationskoordinaten gleichzeitig als Gitterpunktkoordinaten dienen. Die Einfachheit in diesem Fall liegt in der Abwesenheit der Interpolation von Stations- auf Gitterpunktkoordinaten. Dadurch ist die Stationsmatrix (STAMA) in diesem ersten Schritt nicht von Nöten. In Abbildung 4 ist eine simple Anordnung von Stationen/Gitterpunkten dargestellt.

Der Analysewert  $\Psi_P$  an jedem Gitterpunkt  $P$  wird durch eine Taylorreihe 2. Ordnung der nächsten und übernächsten Nachbargitterpunkte ausgedrückt. Das Konzept der nächsten und übernächsten Nachbarn bezieht sich auf die Verbindung der Gitterpunkte durch die Delaunay-Triangulierung. Als nächste Nachbarn eines Gitterpunktes, werden alle durch die Triangulierung direkt verbundenen Gitterpunkte bezeichnet. Die übernächsten Nachbarn stellen wiederum alle mit den nächsten Nachbarn verbundenen Gitterpunkte dar (sofern sie nicht ohnehin bereits als nächster Nachbar identifiziert sind). Somit kann ein übernächster Nachbar bei lokal hoher Gitterpunktdichte auch räumlich näher als ein nächster Nachbar sein. In Abbildung 5 ist das Konzept im Zuge der Erläuterung der Distanzgewichte graphisch dargestellt.

Mit dem Analysewert am Gitterpunkt  $A$  werden exemplarisch die Werte an den Gitterpunkten  $B$  (repräsentativ für die nächsten Nachbarn) und  $G$  (repräsentativ für die übernächsten Nachbarn) ausgedrückt (zur vollständigen Darstellung siehe Anhang).

$$\Psi_B = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_B - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_B - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_B - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_B - x_A)(y_B - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_B - y_A)^2 \right] \quad (9)$$

$$\Psi_G = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_G - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_G - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_G - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_G - x_A)(y_G - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_G - y_A)^2 \right] \quad (10)$$

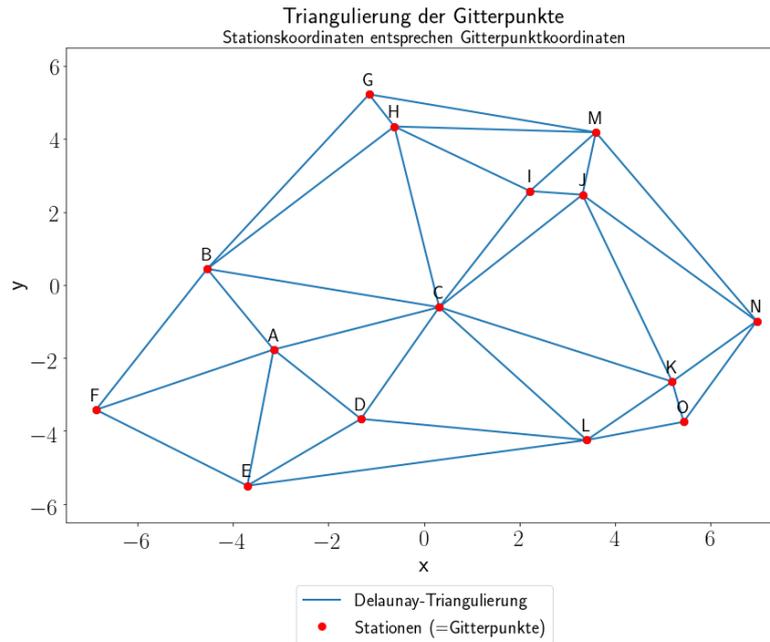


Abbildung 4: Unregelmäßig verteilte Gitterpunkte eines triangulären Gitters. Die Stationskoordinaten sind mit den Gitterpunktkoordinaten gleichgesetzt.

In weiterer Folge werden Differenzen zwischen Gitterpunkten in folgender Schreibweise abgekürzt:

$$(x_B - x_A) = x_{B,A} \quad (11)$$

Diese Differenzen können je nach Lage der Gitterpunkte positive oder negative Werte annehmen. Der Abstand zwischen den Gitterpunkten soll sich über den Einfluss der Taylorreihe in der Kostenfunktion widerspiegeln. Daher wird das Distanzgewicht  $\alpha_{B,A}$  eingeführt. Die Analysewerte werden dadurch entsprechend des Abstands zu den umliegenden Gitterpunkten invers gewichtet (Abbildung 5). Der optimale Faktor für dieses Gewicht wird in Abschnitt 4.1.2 experimentell ermittelt.

$$d_{B,A} = \sqrt{(x_{B,A})^2 + (y_{B,A})^2} \quad (12)$$

$$\alpha_{B,A} = \frac{1}{d_{B,A}} \quad (13)$$

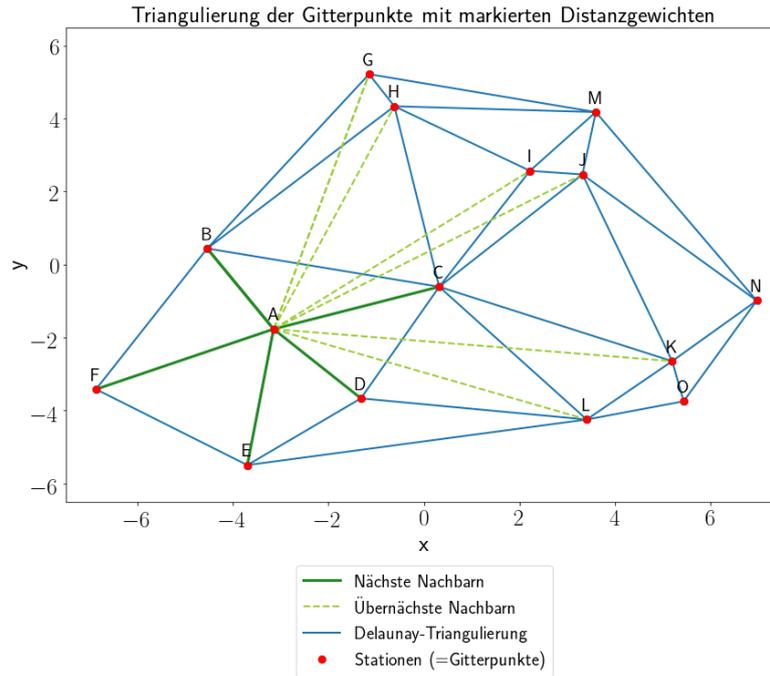


Abbildung 5: Grafische Darstellung des Gewichtungsfaktors  $\alpha$  für die umgebenden Gitterpunkte (nächste und übernächste Nachbarn) eines ausgewählten Gitterpunktes A. Je näher die Gitterpunkte zusammen liegen, desto höher die Gewichtung. Die Bestimmung der optimalen Gewichtung wird in Abschnitt 4.1.2 erläutert.

Die abstandsgewichteten Taylorreihen-Gleichungen für die Analysewerte werden zu einer Gleichung  $\chi_{P,R}$  umgeformt, dessen Wert minimiert wird. Dadurch wird erzwungen, dass die Differenzen zwischen tatsächlichem Analysewert und durch die Taylorreihen ausgedrücktem Analysewert minimal werden. Für jeden Gitterpunkt  $P$  und seine umgebenden Gitterpunkte  $R$  (nächste und übernächste Nachbarn) gilt daher folgender Ausdruck:

$$\chi_{P,R} = \alpha_{R,P} \Psi_P - \Psi_R + \alpha_{R,P} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P (x_R - x_P) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P (y_R - y_P) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P (x_R - x_P)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P (x_R - x_P)(y_R - y_P) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P (y_R - y_P)^2 \right] \right\} \rightarrow \min \quad (14)$$

Die Differenz zwischen den tatsächlichen Analysewerte an jedem Gitterpunkt und den durch die Taylorreihen formulierten Werten soll möglichst klein sein. Mathematisch kann dies mittels einer Kostenfunktion  $J_0$  formuliert und durch deren Minimierung realisiert werden.

$N$ ...Anzahl der Gitterpunkte

$\zeta(P)$ ...Gridpoint-Neighbor-Operator (spezifiziert alle nächsten und übernächsten Nachbar-Gitterpunkte von  $P$ )

$$J_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{R=\zeta(P_i)} \chi_{P_i,R}^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

Die Ableitungen stellen die unbekanntnen Variablen dieser Kostenfunktion dar, nach denen diese abgeleitet wird, um zu einer Lösung zu gelangen. Durch entsprechende Umformungen kann für jeden Gitterpunkt  $P$  ein Gleichungssystem in Matrixschreibweise entwickelt werden (detaillierte schrittweise Darstellung siehe Anhang).

$$\begin{pmatrix}
\sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} \\
\sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\
\sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} \\
\sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} y_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 \\
\sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Der Vektor der gesuchten (unbekannten) Ableitungen kann mit Hilfe der Cramer'schen Regel ausgedrückt werden. Diese dient der Lösung eines Gleichungssystems der Form  $M\vec{x} = \vec{b}$ , wobei  $M$  eine quadratische und invertierbare Koeffizientenmatrix darstellt und  $\vec{x}$  den gesuchten Vektor repräsentiert (Knabner und Barth, 2013).

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

Im vorliegenden Fall besteht der gesuchte Lösungsvektor aus den Ableitungen am jeweiligen Gitterpunkt. Jede Komponente des Vektors wird durch die Cramer'sche Regel explizit bestimmt.

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(M)} \quad (18)$$

Bei der Matrix  $M_k$  handelt es sich um die nach der Spalte  $k$  entwickelten Koeffizientenmatrix  $M$ , in der die Spalte  $k$  durch den Vektor  $\vec{b}$  ersetzt wurde.

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Somit existiert für jede Ableitung an jedem Gitterpunkt ein formeller Zusammenhang. Diese sind erforderlich, um einen Kerngedanken der VERA zu ermöglichen, der auch in der bisher angewandten Methode implementiert war und in Abschnitt 2.3 erwähnt wird: Die quadrierten Steigungen und Krümmungen an den Gitterpunkten werden minimiert, sodass ein möglichst glattes Analysefeld konstruiert wird, welches auch in der Realität von der Natur angestrebt wird. Dieser Ansatz ist äquivalent zur Verwendung von Thin-plate splines für die räumliche oder zeitliche Glättung (Steinacker et al.

(2000), Daley (1991)). Dies wird durch die Minimierung der Kostenfunktion  $J_1$  erzwungen und kann als Analogon zu Gleichung 2 interpretiert werden.

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i \kappa_1} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i \kappa_1} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i \kappa_2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i \kappa_2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i \kappa_3} \rightarrow \min \quad (20)$$

In der Kostenfunktion treten neben den Ableitungen der Analysewerte auch die Gewichtungsfaktoren  $\gamma$  und  $\kappa$  auf. Mit  $\kappa$  kann der Einfluss der Steigungen und Krümmungen analog zur Standard-VERA gesteuert werden. Hier wurde als Vorbereitung für potentielle weitere Experimente noch der Faktor  $\kappa_3$  für die gemischten Ableitungen als eigener Faktor berücksichtigt. Veranschaulicht wurde die Wirkung der ersten und zweiten Ableitungen bereits von Mayer (2007) in einer wissenschaftlichen Dokumentation von VERA (Abbildung 6) für die Universität Wien. Dabei wurde eine eindimensionale Analyse implementiert und jeweils nur die ersten, zweiten oder beide Ableitungen minimiert. Eine höhere Gewichtung der zweiten Ableitung bietet die Möglichkeit auch Maxima und Minima zwischen benachbarten Gitterpunkten zuzulassen. Darüber hinaus treten in den Analysefeldern meteorologischer Variablen kaum Ecken und Kanten auf, die durch ein höheres Gewicht der ersten Ableitungen erzwungen würden. Neben diesen Argumenten für eine höhere Gewichtung der zweiten Ableitungen ist auch der Umstand der Randeffekte in Abbildung 22 erkennbar. Am äußersten Rand einer Domäne sind keine Informationen aus Stationsdaten mehr verfügbar. Daher werden die Steigungen und Krümmungen dort einfach fortgesetzt. In der Realität muss daher eine etwas größere Domäne analysiert und anschließend zugeschnitten werden.

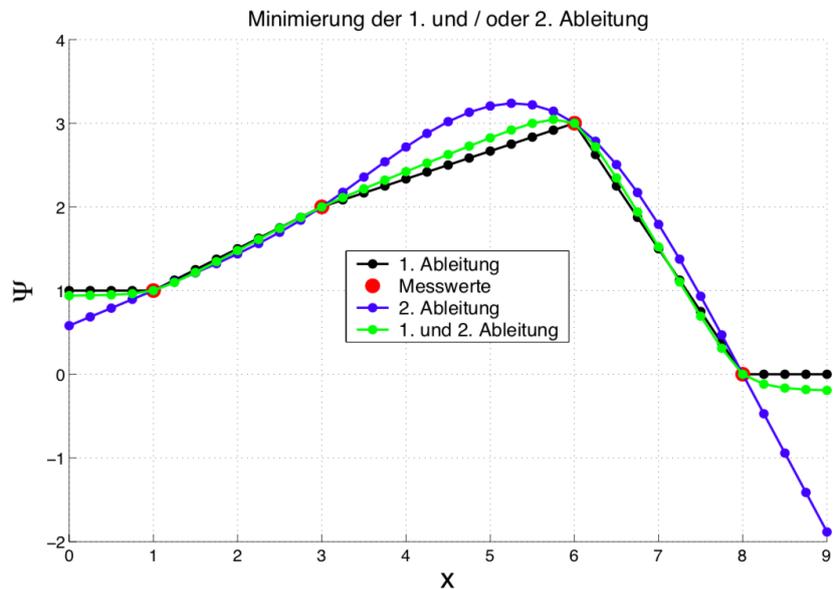


Abbildung 6: Eindimensionale Analyse mit dem Verfahren der Standard-VERA mit 37 Gitterpunkten und 4 Stationen mit Messwerten (rot). Für die Inter- und Extrapolation auf die Gitterpunkte wurden nur die Steigungen (schwarz), nur die Krümmungen (blau) und sowohl Steigungen, als auch Krümmungen (grün) minimiert. Abbildung von Mayer (2007).

Während die Gewichtungsfaktoren  $\kappa$  bereits in der Standard-VERA Anwendung fanden, treten die Flächengewichte  $\gamma$  nur bei der neu entwickelten Methode der triangulären VERA auf. Insbesondere bei unregelmäßig strukturierten und lokal verdichteten Gittern zeigt sich deren Einfluss. Die quadrierten Ableitungen an jedem Gitterpunkt  $P$  werden mit einem Faktor  $\gamma_P$  multipliziert, der sich aus dem Verhältnis der Fläche der angrenzenden Dreiecke zur Gesamtfläche der analysierten Domäne

berechnet (Abbildung 7). Dadurch wird erzwungen, dass das analysierte Feld in Regionen mit geringer Gitterpunktanzahl auch weniger variieren darf. Hingegen tragen einzelne Gitterpunkte in Gebieten höherer Gitterpunktdichte individuell gesehen weniger zur Kostenfunktion bei.

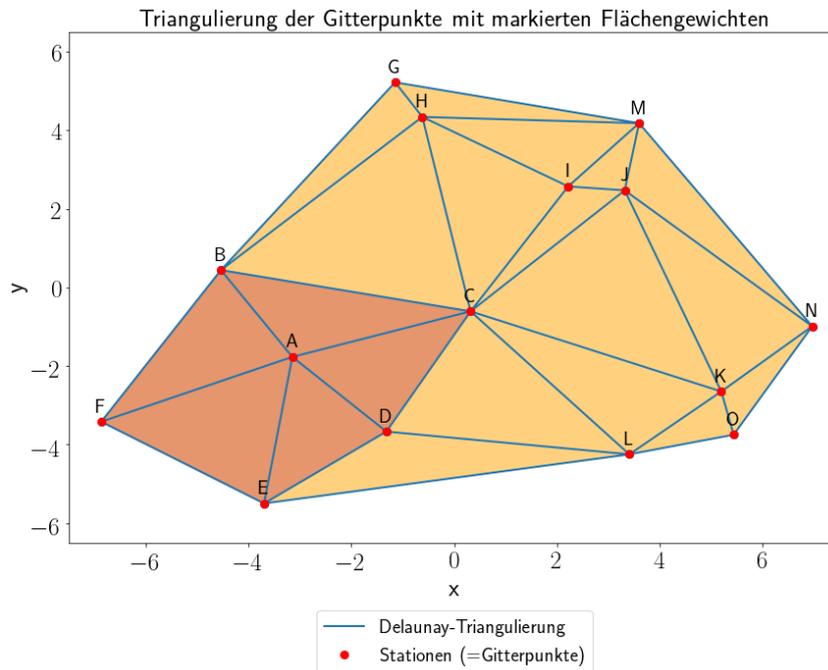


Abbildung 7: Grafische Darstellung des Gewichtungsfaktors  $\gamma$  für einen ausgewählten Gitterpunkt A. Das Gewicht wird als Anteil der mit dem Gitterpunkt A verbundenen Dreiecke (orange) von der Gesamtfläche der Analysedomäne (gelb und orange) ausgedrückt.

Die aus der Cramer'schen Regel gewonnenen Ausdrücke für die Ableitungen an jedem Gitterpunkt werden in die Kostenfunktion eingesetzt. Die tatsächlichen Unbekannten, die Analysewerte an den Gitterpunkten, können anschließend durch die Minimierung der Kostenfunktion  $J_1$  berechnet werden (zur detaillierten Ausführung siehe Anhang).

Im Zuge dessen werden nach Ableitung eines Analysewerts alle Unbekannten (alle Analysewerte) herausgehoben und somit eine Koeffizientenmatrix konstruiert. Die Multiplikation dieser Matrix mit dem Vektor der Analysewerte  $\vec{\Psi}$  ergibt den Nullvektor (Gleichung 21). Diese Koeffizientenmatrix wurde bereits in der Standard-VERA traditionell als LAMA (Large Matrix) bezeichnet.

$$\mathcal{LAMA} * \vec{\Psi} = \vec{0} \quad (21)$$

Die trianguläre VERA kann somit an dieser Stelle für unstrukturierte Gitter, bei denen die Stationskoordinaten gleichzeitig die Gitterpunktkoordinaten bilden, durchgeführt werden. Die Auflösung der Analyse ist somit direkt an die Stationsdichte gekoppelt. Um diesen Zusammenhang zu lösen, wird im nächsten Abschnitt analog zur Standard-VERA die Interpolation zwischen den Stations- und Gitterpunktswerten als STAMA (Stationsmatrix) entwickelt.

### 3.2 Von Stationsverteilung unabhängige Gitterpunkte

Um eine meteorologische Analyse auf einem beliebigen triangulären Gitter durchführen zu können, muss eine Verbindung zwischen den Stations- und Gitterpunktkoordinaten hergestellt werden. Während dies auf einem klassischen Rechteckgitter mittels bilinearer Interpolation durchgeführt wird, bedient man sich im triangulären Fall der baryzentrischen Gewichtung.

Die Basis dafür wurde mit den baryzentrischen Koordinaten bereits von Möbius (1827) gelegt. Sie bilden die Grundlage für die Lage und Repräsentation eines Punktes innerhalb eines Dreiecks (Floater, 2015). Die baryzentrische Interpolation ist eine lineare Interpolationsmethode, mit der ein Skalarwert innerhalb eines Dreiecks, ausgehend von den Skalarwerten an den Eckpunkten, berechnet werden kann. Der Wert an einem Punkt mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Dreiecks wird durch baryzentrische Gewichtung  $(\omega_A, \omega_B, \omega_C)$  der Eckpunkte  $(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C)$  beschrieben (Floater, 2015).

$$\mathbf{x} = \omega_A \mathbf{v}_A + \omega_B \mathbf{v}_B + \omega_C \mathbf{v}_C \quad (22)$$

Die baryzentrischen Gewichte für jeden Eckpunkt werden als Anteil der Dreiecksfläche der Subdreiecke  $\mathcal{A}_i$ , in denen der jeweilige Eckpunkt nicht enthalten ist, von der gesamten Dreiecksfläche  $\mathcal{A}_{tri}$  ausgedrückt (Abbildung 8). Diese baryzentrischen Gewichte werden in der Formulierung der Stationsmatrix (STAMA) benötigt.

$$\omega_i = \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_{tri}}, \quad i = A, B, C \quad (23)$$

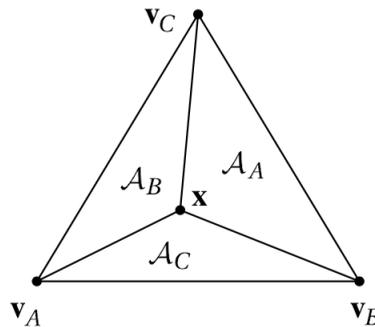


Abbildung 8: Graphische Veranschaulichung der Berechnung der baryzentrischen Gewichte (Gleichung 22, 23). Abbildung nach Floater (2015).

Ausgangspunkt für die mathematische Herleitung der STAMA ist wieder die Minimierung einer Kostenfunktion. In diesem Fall soll wie in Gleichung 4 der Standard-VERA die Differenz zwischen den tatsächlichen Stationswerten und den von den stationsumgebenden Gitterpunkten auf die Stationskoordinaten interpolierten Werte betrachtet und minimiert werden.

$$J_2 = \sum_{j=1}^M (\Omega_{S_j} - \bar{\Omega}_{S_j})^2 \quad (24)$$

$M$ ...Anzahl der Stationen

$\Omega_{S_j}$ ...Stationswert an der Station  $S_j$

$\bar{\Omega}_S$ ...von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierte Werte

$\omega_P$ ...baryzentrisches Gewicht des stationsumgebenden Gitterpunktes  $P$

$\Psi_P$ ...Analysewert am Gitterpunkt  $P$

Für eine Station  $S$ , die von den drei Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, können die baryzentrischen Gewichte  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , sowie der von den Gitterpunkten auf die Stationskoordinaten interpolierte Wert  $\bar{\Omega}_S$  angeschrieben werden. Dabei wird der Flächeninhalt des Dreiecks mit  $\mathcal{A}_{tri}$  und die Flächeninhalte der Sub-Dreiecke mit  $\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B, \mathcal{A}_C$  bezeichnet.

$$\mathcal{A}_{tri} = \frac{1}{2}(\vec{v}_{AB} \times \vec{v}_{AC}) \quad (25)$$

$$\mathcal{A}_A = \frac{1}{2}(\vec{v}_{BC} \times \vec{v}_{BS}) \quad \omega_A = \frac{\mathcal{A}_A}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (26)$$

$$\mathcal{A}_B = \frac{1}{2}(\vec{v}_{CA} \times \vec{v}_{CS}) \quad \omega_B = \frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (27)$$

$$\mathcal{A}_C = \frac{1}{2}(\vec{v}_{AB} \times \vec{v}_{AS}) \quad \omega_C = \frac{\mathcal{A}_C}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (28)$$

$$\bar{\Omega}_S = \omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C \quad (29)$$

Die Kostenfunktion  $J_2$  kann analog zur Kostenfunktion der LAMA nach ihren Unbekannten  $\Psi_P$  abgeleitet werden. Durch Herausheben der unbekanntenen Analysewerte kann wieder eine Koeffizientenmatrix (STAMA) und ein entsprechendes Gleichungssystem erstellt werden. Die rechte Seite dieses Gleichungssystems wird allerdings nicht durch den Nullvektor ausgedrückt, sondern durch die baryzentrisch gewichteten Stationswerte, die mit dem Gitterpunkt in Verbindung stehen. Im Fall von sechs Gitterpunkten, wobei eine Station von den Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, kann das Gleichungssystem der STAMA wie folgt formuliert werden:

$$\begin{pmatrix} \omega_A^2 & \omega_A \omega_B & \omega_A \omega_C & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \omega_B & \omega_B^2 & \omega_B \omega_C & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \omega_C & \omega_B \omega_C & \omega_C^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_A \Omega_S \\ \omega_B \Omega_S \\ \omega_C \Omega_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Im Falle mehrerer Stationen werden einzelne Stationsmatrizen gebildet und zu einer STAMA summiert. Die Verbindung mit der Large Matrix LAMA wird durch eine einfache Addition der beiden Matrizen gebildet, sodass folgendes Gleichungssystem gelöst werden kann:

$$(STAMA + LAMA) * \vec{\Psi} = \vec{v} \quad (31)$$

$\vec{v}$  entspricht der Summe der jeweils rechten Seiten des Gleichungssystems der einzelnen Stationsmatrizen. Im vorangehenden Beispiel (Gleichung 30) ist dies der Vektor mit dem gewichteten Stationswerten  $(\omega_A \Omega_S, \omega_B \Omega_S, \omega_C \Omega_S, 0, 0, 0)^T$ . Durch die Aufspaltung der Koeffizientenmatrix in LAMA

und STAMA kann eine Analyse nun auf beliebigen triangulären Gittern durchgeführt werden. Drei Beispiele für verschiedene trianguläre Gitter bei gleicher Stationsverteilung sind in Abbildung 9a-c abgebildet. Um die Qualität der Analyse möglichst hoch zu halten, sind die in Abschnitt 2.2 genannten Kriterien der Gittergenerierung zu berücksichtigen.

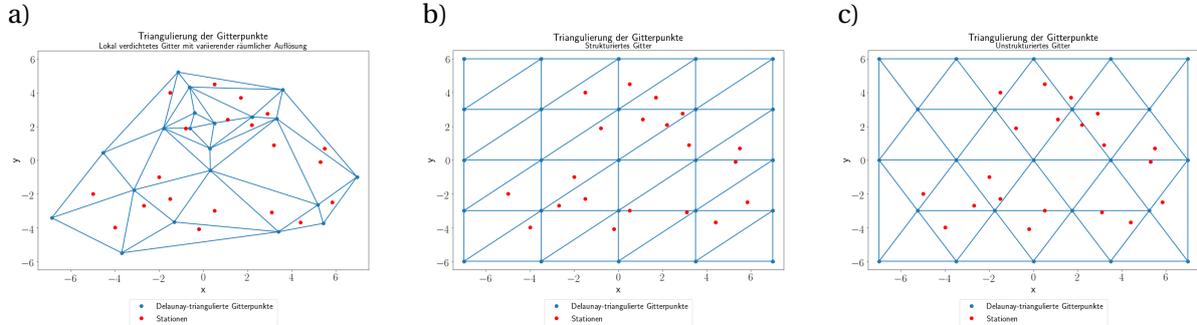


Abbildung 9: Verschiedene Gitterkonfigurationen für trianguläre VERA Analysen mit idealisierten Koordinaten  $x$  und  $y$ . Stationen sind als rote, Gitterpunkte als blaue Punkte gekennzeichnet. a) Unstrukturiertes Gitter mit lokaler Verdichtung. b) Strukturiertes Gitter bei dem die Gitterpunkte so gewählt sind, dass eine Analyse auch mit der Standard-VERA berechnet werden kann. c) Unstrukturiertes Gitter.

Durch die in diesem Kapitel beschriebene Art der Berechnung der Stationsmatrix werden für die Interpolation zwischen Stationen und Gitterpunkten ausschließlich die Stations- und Analysewerte selbst betrachtet. Im folgenden Abschnitt wird eine verbesserte Version der Stationsmatrix vorgestellt, in der auch die Steigungen und Krümmungen des zu analysierenden Feldes an den Gitterpunkten inkludiert werden.

### 3.2.1 Berücksichtigung von 1. und 2. Ableitungen in der Berechnung der Stationsmatrix

In der bisherigen Version der Stationsmatrix wird durch die Minimierung der Kostenfunktion  $J_2$  bei der klassischen STAMA zwischen den Analysewerten an den Gitterpunkten aus geometrischer Sicht eine ebene Fläche aufgespannt, die sich möglichst nahe an den entsprechenden Stationswerten befindet. Im Zuge der Entwicklung der triangulären VERA wurde auch eine verbesserte Version der Stationsmatrix konzipiert, in der auch die 1. und 2. Ableitungen an den Gitterpunkten im Zuge der Interpolation berücksichtigt werden können. Dadurch kann eine Dreiecksfläche zwischen drei Gitterpunkten auch als gekrümmt betrachtet werden. Hierfür wird, analog zu den ersten Schritten der LAMA-Entwicklung, der Stationswert  $\Psi_S$  als Taylorreihe der drei umgebenden Analysewerte  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$ ,  $\Psi_C$  formuliert.

$$\Psi_S = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_S - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_S - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_S - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_S - x_A)(y_S - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_S - y_A)^2 \right] \quad (32)$$

$$\Psi_S = \Psi_B + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_B (x_S - x_B) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_B (y_S - y_B) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_B (x_S - x_B)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_B (x_S - x_B)(y_S - y_B) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_B (y_S - y_B)^2 \right] \quad (33)$$

$$\Psi_S = \Psi_C + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_C (x_S - x_C) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_C (y_S - y_C) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_C (x_S - x_C)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_C (x_S - x_C)(y_S - y_C) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_C (y_S - y_C)^2 \right] \quad (34)$$

Die stationsumgebenden Gitterpunkte einer Station  $S$  werden mit dem Station-Neighbor-Operator  $\rho(S)$  zusammengefasst. Dieser ist analog zum Gridpoint-Neighbor-Operator definiert und spezifiziert

alle die Station  $S$  umgebenden Gitterpunkte. Allgemein kann der Ausdruck der Taylorreihe für einen stationsumgebenden Gitterpunkt als  $\mathcal{T}_G$  bezeichnet werden.

$$\mathcal{T}_G = \Psi_G + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_G (x_S - x_G) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_G (y_S - y_G) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_G (x_S - x_G)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_G (x_S - x_G)(y_S - y_G) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_G (y_S - y_G)^2 \right] \quad (35)$$

Der von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierte Wert  $\bar{\Omega}_S$  wird analog zur klassischen Variante der Stationsmatrix mit Hilfe der baryzentrischen Gewichte gebildet und eine neue Kostenfunktion  $J_2$  für alle Stationen minimiert.

$$\bar{\Omega}_S = \sum_{G=\rho(S)} \omega_G \mathcal{T}_G \quad (36)$$

$$J_2 = \sum_{j=1}^M \left( \Omega_{S_j} - \sum_{G=\rho(S_j)} \omega_G \mathcal{T}_G \right)^2 \quad (37)$$

Die Ableitungen in den Taylorreihenentwicklungen der stationsumgebenden Gitterpunkte werden, wie schon in der Herleitung der LAMA, mit Hilfe der Cramer'schen Regel definiert. Im Falle einer einzigen Station  $S$  nimmt die Kostenfunktion folgende Form an.

$$J_2 = \left\langle \Omega_S - \omega_A \left( \Psi_A + \frac{\det(M_{A1})}{\det(M_A)} x_{S,A} + \frac{\det(M_{A2})}{\det(M_A)} y_{S,A} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\det(M_{A3})}{\det(M_A)} x_{S,A}^2 + 2 \frac{\det(M_{A5})}{\det(M_A)} x_{S,A} y_{S,A} + \frac{\det(M_{A4})}{\det(M_A)} y_{S,A}^2 \right] \right) \right. \quad (38)$$

$$- \omega_B \left( \Psi_B + \frac{\det(M_{B1})}{\det(M_B)} x_{S,B} + \frac{\det(M_{B2})}{\det(M_B)} y_{S,B} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\det(M_{B3})}{\det(M_B)} x_{S,B}^2 + 2 \frac{\det(M_{B5})}{\det(M_B)} x_{S,B} y_{S,B} + \frac{\det(M_{B4})}{\det(M_B)} y_{S,B}^2 \right] \right) \quad (39)$$

$$\left. - \omega_C \left( \Psi_C + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)} x_{S,C} + \frac{\det(M_{C2})}{\det(M_C)} y_{S,C} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\det(M_{C3})}{\det(M_C)} x_{S,C}^2 + 2 \frac{\det(M_{C5})}{\det(M_C)} x_{S,C} y_{S,C} + \frac{\det(M_{C4})}{\det(M_C)} y_{S,C}^2 \right] \right) \right\rangle^2 \quad (40)$$

Die Zahlen in den tiefgestellten Indizes der Matrizen stehen für die Entwicklung nach der entsprechenden Spalte. Die unbekanntes Analysewerte an den Gitterpunkten sind in ebendiesen Matrizen enthalten. Durch die Minimierung der Kostenfunktion kann ebenso wie in der Bildung der LAMA eine Koeffizientenmatrix (verbesserte STAMA) konstruiert werden, die multipliziert mit den gesuchten Analysewerten eine neue rechte Seite  $\vec{V}$  des Gleichungssystems ergibt.

Quantitative Vergleiche zwischen der klassischen und der verbesserten Variante der Stationsmatrix wurden im Zuge dieser Arbeit nicht durchgeführt. In ersten Experimenten konnte im Falle eines lokalen Minimums/Maximums an einem Gitterpunkt bzw. in dessen Umgebung und entsprechender Gewichtung der Stationsmatrix (Abschnitt 4.1) eine höhere Analysequalität durch diese verbesserte Variante der Stationsmatrix festgestellt werden (Abbildung 10 bis 12). Dieser Taylorreihenansatz für die STAMA könnte auch in der Standard-VERA implementiert werden.

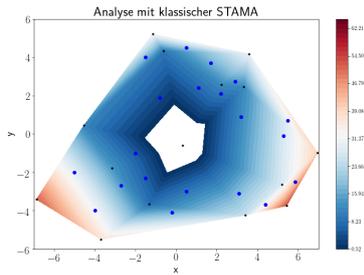


Abbildung 10: Analyse mit einem lokalen Minimum an einem Gitterpunkt mit klassischer Stationsmatrix. (Gitterpunktverifikation:  $RMSE = 6.73, BIAS = -3.97$ )

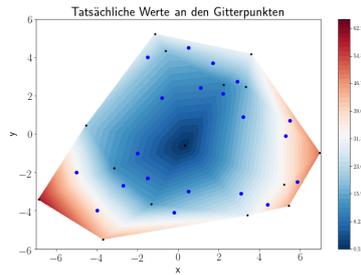


Abbildung 11: Tatsächliches Feld, das mit einer Analyse reproduziert werden soll.

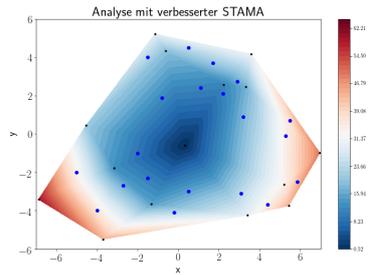


Abbildung 12: Analyse mit einem lokalen Minimum an einem Gitterpunkt mit verbesserter Stationsmatrix. (Gitterpunktverifikation:  $RMSE = 2.9 \cdot 10^{-4}, BIAS = -10^{-4}$ )

### 3.3 Konstant gewichtete Zusatzinformationen (Fingerprints)

Einen Hauptbestandteil des Analyseverfahrens VERA stellt die Verwendung der Fingerprinttechnik dar. Diese ist ein wesentlicher Bestandteil der Standard-VERA und muss somit auch inhärenter Bestandteil der Analyse auf einem triangulären Gitter sein.

Der Einsatz von Fingerprintfeldern ermöglicht modellunabhängiges Downscaling von unregelmäßig verteilten Beobachtungsdaten. Diese Felder sind vorgegebene Muster, die physikalische Mechanismen durch beispielsweise Topographie, Land-Wasser-Verteilung o.ä. repräsentieren und dem Analysefeld aufgeprägt werden (Steinacker et al., 2006). Unter idealen Verhältnissen beschreiben sie den Einfluss des jeweiligen Musters auf den analysierten meteorologischen Parameter. Dadurch kann die räumliche Auflösung der Analyse auf jene des Fingerprintfeldes erhöht und somit feine Struktu-

ren dargestellt werden, die durch die Stationsdaten alleine nicht aufgelöst werden können (Löscher, 2013).

Als Fingerprintfelder eignen sich verschiedene Arten von Zusatzinformationen, die sich auf drei verschiedene Typen reduzieren lassen (Mayer und Steinacker, 2013):

- Aus topographischen Gegebenheiten beeinflusste Felder, die unter idealisierten Bedingungen gewonnen werden können. Die Basis dafür bilden digitale Geländemodelle mit hoher räumlicher Auflösung von  $\Delta x = \Delta y < 1$  km. In diese Kategorie fallen unter anderem Fingerprintfelder der Land-Wasser-Verteilung, Bodenrauigkeit oder die Topographie selbst.
- Felder, die auf aktuellen Fernerkundungsdaten basieren und aus denen Informationen zu Niederschlag, Bewölkung, Strahlungstemperatur oder Schneebedeckung extrahiert werden können. Beispiele hierfür sind Radardaten oder Satellitenbilder.
- Aus mathematischen Basisfunktionen formulierte Felder, die mit der aktuellen Datenlage variieren. Mittels unterschiedlicher Gewichtungen können diese zu einem flexiblen, übergeordneten Fingerprint zusammengesetzt werden.

Die Amplitude eines Fingerprintfeldes ist für die Analysemethode nicht relevant. Durch das mit dem jeweiligen Fingerprint verknüpfte Gewicht werden dessen Werte während der Berechnung der Analyse selbst gesteuert. Würde dieselbe Analyse einmal mit dem tatsächlichen Fingerprint und einmal mit verdoppelter Amplitude desselbigen durchgeführt, würde das erkannte Fingerprintgewicht im zweiten Fall halbiert werden (Mayer und Steinacker, 2013).

### 3.3.1 Das Fingerprintkonzept in der LAMA der triangulären VERA

Um die Methode der Fingerprints auch in die trianguläre VERA zu implementieren, wird zunächst analog zur Variante ohne Fingerprintfeld ein Analysewert als Taylorreihe der benachbarten Analysewerte ausgedrückt. In der folgenden Gleichung wird exemplarisch der Wert  $\Psi_B$  durch  $\Psi_A$  ausgedrückt.

$$\Psi_B = \alpha_{B,A} \left\{ \Psi_A + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_A x_{B,A} + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_A y_{B,A} + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_A x_{B,A}^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right|_A x_{B,A} y_{B,A} + \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_A y_{B,A}^2 \right] \right\} \quad (41)$$

In weiterer Folge werden in den Taylorreihenentwicklungen die Ableitungen der Analysewerte in einen unerklärten ( $\tilde{\Psi}$ ) und erklärten ( $\hat{\Psi}$ ) Anteil aufgespalten (vgl. Gleichung 1). Die erklärten Anteile bestehen wieder aus den Werten des Fingerprintfeldes und einem jeweils konstanten Fingerprintgewicht für das Feld. Der unbekannte Analysewert selbst wird in der Taylorreihenentwicklung nicht aufgespalten, da nach diesem zum späteren Zeitpunkt abgeleitet und die Gleichung aufgelöst wird. In den weiteren Ausführungen werden zwei Fingerprintfelder mit den jeweiligen Gewichtungsfaktoren  $c$  und  $d$  angenommen. Eine Begrenzung der Anzahl der Fingerprintfelder ist nicht gegeben.

$$\Psi_B = \alpha_{B,A} \left\{ \Psi_A + \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_A}{\partial x} + c \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,A}}{\partial x} + d \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,A}}{\partial x} \right) x_{B,A} + \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_A}{\partial y} + c \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,A}}{\partial y} + d \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,A}}{\partial y} \right) y_{B,A} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,A}}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,A}}{\partial x^2} \right) x_{B,A}^2 + \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,A}}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,A}}{\partial x \partial y} \right) x_{B,A} y_{B,A} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,A}}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,A}}{\partial y^2} \right) y_{B,A}^2 \right\} \quad (42)$$

Die Herleitung der LAMA wird konzeptionell wie in Abschnitt 3.1 durchgeführt. In der Minimierung der Kostenfunktion  $J_0$  treten die Taylorreihenentwicklungen der Fingerprintfelder am Gitterpunkt  $P$  auf und können als Subtraktionen zwischen den Fingerprintwerten eines umgebenden Gitterpunktes  $R$  und dem Punkt  $P$  aufgefasst werden.

$$\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P} = \frac{\partial \widehat{\Psi}_{c,P}}{\partial x} x_{R,P} + \frac{\partial \widehat{\Psi}_{c,P}}{\partial y} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}_{c,P}}{\partial x^2} x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}_{c,P}}{\partial x \partial y} x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}_{c,P}}{\partial y^2} y_{R,P}^2 \quad (43)$$

Im daraus resultierenden Gleichungssystem (das wieder für jeden Gitterpunkt existiert und in dem wieder der Gridpoint-Neighbor-Operator  $\zeta(P)$  zur Anwendung kommt, da die bekannten Werte auf dem Gitternetz vorliegen) ändert sich im Gegensatz zur Variante ohne Fingerprintfelder nur die rechte Seite (vgl. Gleichung 16).

$$\begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} y_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} [c(\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P}) + d(\widehat{\Psi}_{d,R} - \widehat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} [c(\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P}) + d(\widehat{\Psi}_{d,R} - \widehat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 [c(\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P}) + d(\widehat{\Psi}_{d,R} - \widehat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 [c(\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P}) + d(\widehat{\Psi}_{d,R} - \widehat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} [c(\widehat{\Psi}_{c,R} - \widehat{\Psi}_{c,P}) + d(\widehat{\Psi}_{d,R} - \widehat{\Psi}_{d,P})] \end{pmatrix} \quad (44)$$

Die im gesuchten Vektor enthaltenen Ableitungen dieses Gleichungssystems können wieder mit Hilfe der Cramer'schen Regel explizit ausgedrückt und somit die Kostenfunktion  $J_1$  (vgl. Gleichung 20) gebildet werden. Die unbekannt Parameter sind in dieser nun nicht mehr ausschließlich die gesuchten Analysewerte  $\Psi$ , sondern werden um die Anzahl der gesuchten Fingerprintgewichte  $c, d, \dots$  erweitert.

$$\overline{\Psi} = (\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C, \dots, \Psi_{P_N}, c, d, \dots, c_F)^T \quad (45)$$

### 3.3.2 Das Fingerprintkonzept in der STAMA der triangulären VERA

In der Entwicklung der STAMA werden die Stationswerte ebenso in einen unerklärten und erklärten Anteil aufgespalten und nach dem unerklärten Anteil aufgelöst.

$$\Omega = \tilde{\Omega} + c\hat{\Omega}_c + d\hat{\Omega}_d \quad (46)$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d \quad (47)$$

Bevor in derselben Art wie in der Variante ohne Fingerprints vorgegangen werden kann, müssen auch die in Gleichung 29 beschriebenen, von den Analysewerten interpolierten Stationswerte, in bereits bekannter Weise aufgespalten werden.

$$\bar{\Omega} = \omega_A (\tilde{\Psi}_A + c\hat{\Psi}_{c,A} + d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\tilde{\Psi}_B + c\hat{\Psi}_{c,B} + d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\tilde{\Psi}_C + c\hat{\Psi}_{c,C} + d\hat{\Psi}_{d,C}) \quad (48)$$

$$\tilde{\bar{\Omega}} = \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \quad (49)$$

Dementsprechend nimmt die Kostenfunktion  $J_2$  (vgl. Gleichung 24) folgende Form an:

$$J_2 = \sum_{j=1}^M \left( \Omega_{S_j} - c\hat{\Omega}_{c,S_j} - d\hat{\Omega}_{d,S_j} - \sum_{G=\rho(S_j)} \omega_G (\Psi_G - c\hat{\Psi}_{c,G} - d\hat{\Psi}_{d,G}) \right)^2 \quad (50)$$

In der Minimierung von  $J_2$  muss neben den unbekanntenen Analysewerten auch nach den unbekanntenen Fingerprintgewichten abgeleitet werden. Im Zuge dessen wird für die Differenz zwischen dem Wert eines Fingerprintfeldes an einer Station und dem an diese Stelle baryzentrisch interpolierten Wert die Abkürzung  $\xi$  eingeführt.

$$\xi_c = \hat{\Omega}_c - \omega_A \hat{\Psi}_{c,A} - \omega_B \hat{\Psi}_{c,B} - \omega_C \hat{\Psi}_{c,C} \quad (51)$$

Im analogen Beispiel zu Abschnitt 3.2 mit sechs Gitterpunkten und einer Station, die von den Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, nimmt das Gleichungssystem der Stationsmatrix durch die Inkludierung der Fingerprints folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \omega_A^2 & \omega_A \omega_B & \omega_A \omega_C & 0 & 0 & 0 & \omega_A \xi_c & \omega_A \xi_d \\ \omega_A \omega_B & \omega_B^2 & \omega_B \omega_C & 0 & 0 & 0 & \omega_B \xi_c & \omega_B \xi_d \\ \omega_A \omega_C & \omega_B \omega_C & \omega_C^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_C \xi_c & \omega_C \xi_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \xi_c & \omega_B \xi_c & \omega_C \xi_c & 0 & 0 & 0 & \xi_c^2 & \xi_c \xi_d \\ \omega_A \xi_d & \omega_B \xi_d & \omega_C \xi_d & 0 & 0 & 0 & \xi_c \xi_d & \xi_d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_A \Omega \\ \omega_B \Omega \\ \omega_C \Omega \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_c \Omega \\ \xi_d \Omega \end{pmatrix} \quad (52)$$

Für die Berechnung der Analyse können nun wie in Abschnitt 3.2 die STAMA und die rechte Seite  $\vec{\mathcal{V}}$  aller Stationen aufsummiert werden. Durch die Addition von LAMA und STAMA können somit die gesuchten Analysewerte und konstanten Fingerprintgewichte berechnet werden.

In der verbesserten Version der Stationsmatrix, in der die 1. und 2. Ableitungen der stationsumgebenden Gitterpunkte berücksichtigt werden, kann das Fingerprintkonzept ebenso umgesetzt werden. Es

sind die selben Annahmen zu treffen und die Entwicklungsschritte, wie in Abschnitt 3.2.1 ausgeführt, vorzunehmen.

### 3.4 Zusammenfassung des schrittweisen Ablaufs der triangulären VERA

Am Ende dieses Abschnitts der konzeptionellen Beschreibung der triangulären VERA, in der auch eine beliebige Anzahl an Fingerprintfeldern berücksichtigt werden kann, wird eine Zusammenfassung des schrittweisen Ablaufs des Verfahrens angeführt.

#### Berechnung der Large Matrix (LAMA)

1. Gesuchte Analysewerte werden als Taylorreihe 2. Ordnung der benachbarten Analysewerte ausgedrückt (Gleichung 9). Dabei werden entsprechende Abstandsgewichte  $\alpha$  eingeführt.
2. Aufspaltung der Analysewerte in einen erklärten und unerklärten Anteil.
3. Minimierung der Differenz der tatsächlichen und der durch die Taylorreihen der benachbarten Gitterpunkte ausgedrückten Analysewerte (Gleichung 15).
4. Minimierung der Summe aller quadrierten Steigungen und Krümmungen der Analysewerte an den Gitterpunkten um ein möglichst glattes Analysefeld zu erzeugen (Gleichung 20). Dabei werden Flächengewichte  $\gamma$  und Ableitungsgewichte  $\kappa$  berücksichtigt.
5. Durch Herausheben der Unbekannten (Analysewerte und Fingerprintgewichte), kann die Koeffizientenmatrix LAMA (Large Matrix) bestimmt werden.

#### Berechnung der Stationsmatrix (STAMA)

1. Aufspaltung der Stationswerte und der von den stationsumgebenden Analysewerten interpolierten Stationswerte in einen erklärten und unerklärten Anteil.
2. Minimierung der Summe aller Differenzen der tatsächlichen und der durch die Taylorreihen der umgebenden Analysewerte ausgedrückten Stationswerte (Gleichung 24). Die Matrizen der einzelnen Stationen werden ebenso zu einer gesamten Stationsmatrix addiert, wie die als Vektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems auftretenden gewichteten Stationswerte ( $\vec{V}$ )

Durch die Addition der Large Matrix (LAMA) und der Stationsmatrix (STAMA) kann der gesuchte Lösungsvektor der unbekanntenen Analysewerte und Fingerprintgewichte berechnet werden.

### 3.5 Normierungen

Die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Gewichtungsfaktoren spielen ebenso wie das Verhältnis zwischen LAMA und STAMA eine wesentliche Rolle für die Qualität der Analyse und werden in Abschnitt 4 im Detail besprochen. Um einen weiteren Qualitätsgewinn (im Vergleich zur Analyse ohne Normierung) aus den optimierten Gewichtungsfaktoren herauszuholen, müssen Normierungen im Gleichungssystem 31 sowie in den Koordinaten vorgenommen werden. Die bekannten Elemente dieser Gleichung (LAMA, STAMA und  $\vec{V}$ ) werden dafür durch ihren gemeinsamen maximalen Wert dividiert. Die Normierung erfolgt somit auf das Intervall  $[-1,1]$ . Auch die Koordinaten der Gitterpunkte, Stationen und

Fingerprintfelder werden durch das Maximum des Absolutbetrages der x- und y-Koordinate dividiert und somit die Domäne auf den Wertebereich  $[-1,1]$  normiert.

Für die in dieser Arbeit angewandten Gitterpunkt- und Stationskonfigurationen konnten diese Normierungen problemlos vorgenommen werden. In den graphischen Darstellungen wurden die Resultate wieder mit dem jeweiligen Normierungsfaktor multipliziert, um die tatsächlichen Werte abzubilden. Eine Einschränkung hinsichtlich der Konditionierung von Matrizen wird bei einer größeren Anzahl von Gitterpunkten vermutet. Wenn die Gitterpunkte zu nah beieinander liegen, könnte es zu schlecht konditionierten Matrizen in der Berechnung der LAMA kommen. Das Intervall der Normierung müsste dann angepasst, die in Abschnitt 4.1 beschriebene Optimierung der Gewichtungsfaktoren abermals durchgeführt und die Gewichte entsprechend adaptiert werden.

## 3.6 Verifikationsmethoden

Die Resultate, die mit der triangulären VERA erzielt werden konnten, werden in Abschnitt 4 vorgestellt. Die Evaluierung der Qualität erfolgt auf Basis zwei verschiedener Verifikationsverfahren:

1. Leave-one-out cross-validation
2. Gitterpunktverifikation

Die Gütemaße bilden in beiden Fällen der Root Mean Squared Error (RMSE) und die mittlere Abweichung (BIAS). Um Randeffekten vorzubeugen (vgl. Abbildung 22) werden in der Verifikation nur jene Stationen und Gitterpunkte berücksichtigt, deren Koordinaten die Kriterien  $-6 \leq x \leq 6$  und  $-5 \leq y \leq 5$  erfüllen.

### 3.6.1 Leave-one-out cross-validation

Bei der Kreuzvalidierung handelt es sich um ein Verfahren mit dem die Güte eines Modells bestimmt werden kann. Dabei wird versucht, einen tatsächlich bekannten Wert (bzw. eine Gruppe von Werten) mit einem Modell zu reproduzieren. Das Modell darf allerdings weder bei der Berechnung selbst, noch in einem etwaigen Trainingsdatensatz (liegt bei der Methode VERA nicht vor), Informationen über das korrekte Ergebnis erhalten. Im einfachsten Fall wird diese Methode einmal durchgeführt. Für eine robustere Verifikation eines Modells wird die Kreuzvalidierung k-mal vorgenommen (k-fold cross-validation). Der Extremfall wird durch die leave-one-out cross-validation realisiert. Dabei wird jeder Wert im vorhandenen Datensatz zu reproduzieren versucht, ohne ihn dem Modell zur Verfügung zu stellen (Kiralj und Ferreira, 2009).

Im Fall der triangulären VERA wird diese Form der Kreuzvalidierung wie folgt verwendet: Von einer bekannten Anzahl von  $M$  Stationswerten werden  $M - 1$  Werte an die Methode übergeben und die Analyse durchgeführt. An den Koordinaten der ausgelassenen Stationen wird der analysierte Stationswert abgegriffen. Dabei wird der unerklärte Anteil von den umgebenden Gitterpunkten interpoliert. Der bekannte Wert des Fingerprintfeldes wird am Ort der ausgelassenen Station mit dem berechneten Fingerprintgewicht multipliziert. Dieser erklärte Anteil wird zum unerklärten Anteil addiert und die Differenz zum tatsächlichen Stationswert gebildet. Dies wird für alle  $M$  Stationen durchgeführt und aus den gebildeten Differenzen der RMSE und BIAS berechnet.

### 3.6.2 Gitterpunktverifikation

Während die leave-one-out cross-validation auch in der Praxis für die Verifikation der VERA mit realen Stationsdaten verwendet werden kann, ist die Gitterpunktverifikation ausschließlich im Fall idealisierter Felder anwendbar. Hier werden die analysierten Gitterpunktwerte direkt mit den korrekten Gitterpunktwerten aus den verwendeten mathematischen Funktionen verglichen und der RMSE und BIAS berechnet. In der Realität stehen die tatsächlichen Werte an den Gitterpunkten nicht zur Verfügung, da die Berechnung derselbigen den Selbstzweck der Analyse bildet.

## 4. Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird die Qualität der im Zuge dieser Arbeit entwickelten triangulären VERA anhand der Verifikationsergebnisse evaluiert und optimiert. Auf diesen Ergebnissen basierend werden der Prozess und die Resultate der experimentellen Optimierung der internen Gewichtungsfaktoren dargelegt. Im letzten Teil wird schließlich ein Vergleich mit der Standard-VERA in verschiedenen idealisierten meteorologischen Situationen vorgenommen.

Um Aussagen über die Güte der Analyse treffen zu können, werden Analysen eines meteorologischen Parameters durchgeführt. Die idealisierten Stationswerte werden durch mathematische Funktionen berechnet und der Analysemethode übergeben. Die beiden gewählten mathematischen Funktionen simulieren jeweils eine meteorologische Situation. Während Gleichung 53 ein Tiefdruckgebiet nachbildet, stellt Gleichung 54 den Durchzug eines Frontensystems dar. Die analysierte meteorologische Größe kann beliebig als Temperatur, Druck oder vergleichbarer skalarer Parameter interpretiert werden. Vor der Analyse wurde der Wertebereich der Stationswerte mittels Division durch den Maximalwert und anschließender Multiplikation mit dem Wert 10 auf Werte zwischen 0 und 10 für die Konfiguration "Tief" bzw. -10 und 10 für die Konfiguration "Front" beschränkt. Damit die zu reproduzierenden Felder und das im Anschluss beschriebene Fingerprintfeld keine zufälligen Übereinstimmungen aufweisen, die die Analyse verzerren könnten, werden die Felder verschoben und im Fall der Front auch gedreht (Abbildung 13 und 14).

$$\text{Tief: } z_t = \left( (x-2)^2 + (y+1)^2 \right) \quad (53)$$

$$\text{Front: } z_f = \text{atan}\left( (x-2) + \frac{y}{2} \right) \quad (54)$$

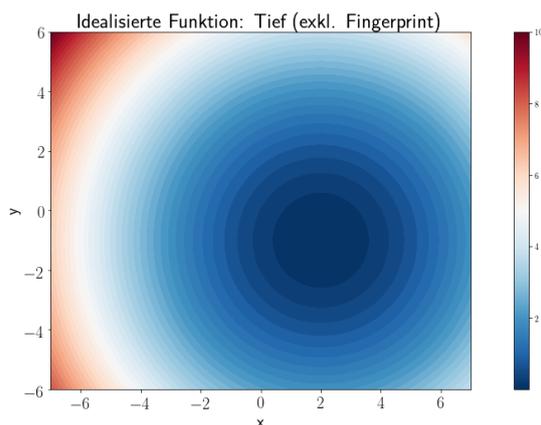


Abbildung 13: Idealisierte meteorologische Konfiguration "Tief" (ohne Fingerprint).

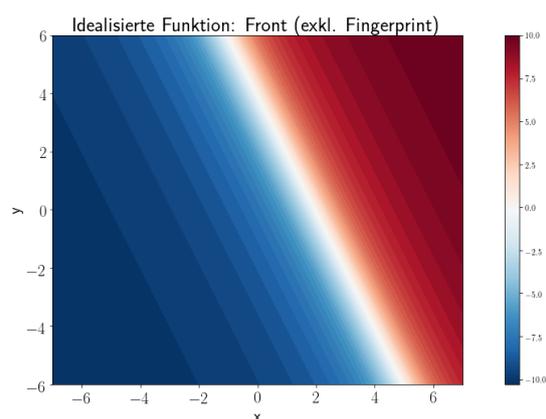


Abbildung 14: Idealisierte meteorologische Konfiguration "Front" (ohne Fingerprint).

Beide Konfigurationen wurden mit einem die Topographie simulierenden Fingerprintfeld aus trigonometrischen Funktionen überlagert (Gleichung 55, 56, Abbildung 17). Die tatsächlichen Analysefelder, die von der VERA auf Basis der Stationsdaten und des Fingerprintfeldes analysiert werden sollen, sind in Abbildung 15 und 16 dargestellt.

$$\text{Tief: } z_t = \left( (x-2)^2 + (y+1)^2 \right) + 10 * (\sin(x) * \cos(y)) \quad (55)$$

$$\text{Front: } z_f = \text{atan}\left(x-2 + \frac{y}{2}\right) + (\sin(x) * \cos(y)) \quad (56)$$

Die Gitterpunktverteilung (Abbildung 18) bildet im Hinblick auf den Vergleich mit der Standard-VERA ein Gitter, welches mit beiden Methoden verwendet werden kann und daher eine Vergleichbarkeit ermöglicht. Die Verbindungen der Gitterpunkte für die Erstellung eines triangulären Gitters werden durch die Delaunay-Triangulierung erzeugt (Abschnitt 2.2.3). Diese wird mit Hilfe des auf dem *python*-Paket *scipy* basierenden Programm *spatial.Delaunay* durchgeführt. Wodurch die Entscheidung der gleichwertig scheinenden Möglichkeiten der Diagonalverbindungen getroffen wird, wurde nicht weiter untersucht. Als Vergleich wurden benachbarte Gitterpunkte nicht durch die Delaunay-Triangulierung, sondern über einen festgelegten Radius definiert. Alle Gitterpunkte innerhalb dieses Radius wurden als verbunden klassifiziert. Diese Änderung zeigte keine Veränderungen in den Resultaten der Analysen. Dies lässt darauf schließen, dass auch in der Variante der Delaunay-Triangulierung bereits genügend Verbindungen existieren.

Die Stationsverteilung wurde durch Zufallszahlen bestimmt. Die Anzahl der Gitterpunkte und Stationen entspricht in etwa einer Analyse mit einer räumlichen Auflösung von 12 km des österreichischen Bundeslandes Niederösterreich.

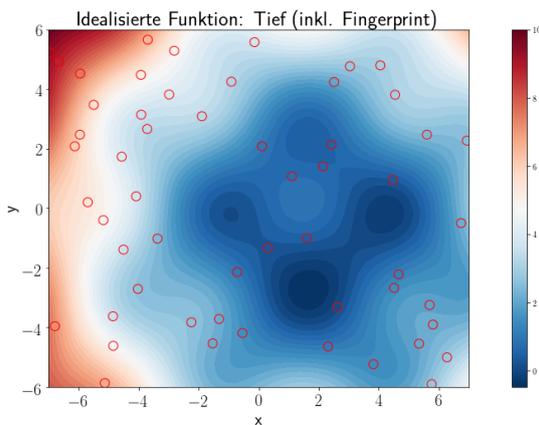


Abbildung 15: Idealisierte meteorologische Konfiguration "Tief" (inkl. Fingerprint). Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten.

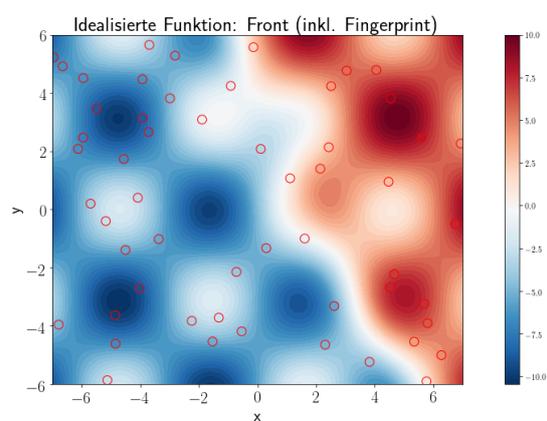


Abbildung 16: Idealisierte meteorologische Konfiguration "Front" (inkl. Fingerprint). Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten.

Für die Optimierung der internen Gewichtungsfaktoren, sowie den Vergleich mit der Standard-VERA, wurden beide Verifikationsmethoden (leave-one-out cross-validation und Gitterpunktverifikation (Abschnitt 3.6) herangezogen.

## 4.1 Optimierung der internen Gewichtungsfaktoren

Im Verfahren der triangulären VERA treten, wie in der Vorstellung der Methode in Abschnitt 3 beschrieben, verschiedene Gewichtungsfaktoren auf, die die Qualität der Analyse maßgeblich beeinflussen:

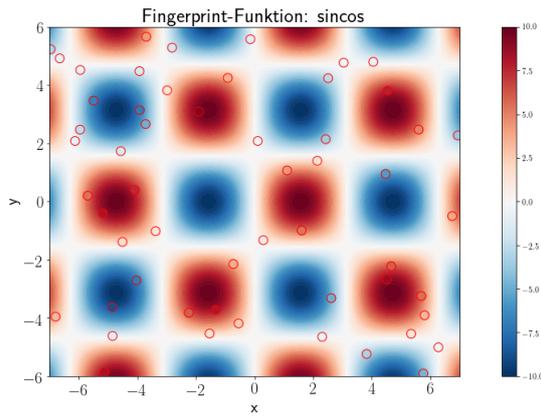


Abbildung 17: Fingerprintfeld aus trigonometrischen Funktionen, das eine idealisierte Topographie für die Analyse simuliert. Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten.

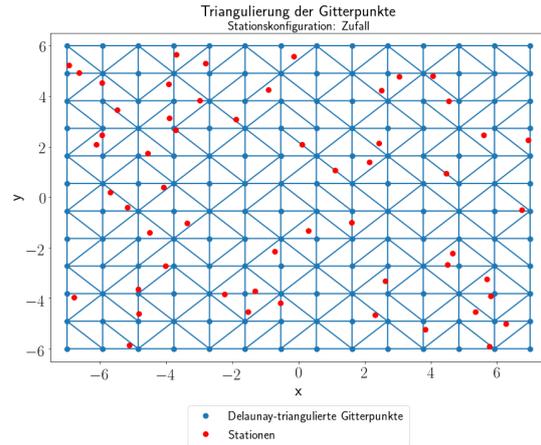


Abbildung 18: Gitterpunktsanordnung (blaue Punkte), berücksichtigte Verbindungen zwischen Gitterpunkten (blaue Linien) und Stationsverteilung (rote Kreise) des experimentellen Setups.

- Gewichtung der Stationsmatrix  $\sigma$  (Verhältnis zwischen STAMA und LAMA)
- Distanzgewicht  $\alpha$  (vgl. Gleichung 13, Abbildung 5)
- Flächengewicht  $\gamma$  (vgl. Gleichung 20, Abbildung 7)
- Ableitungsgewicht  $\kappa$  (vgl. Gleichung 20, Abbildung 6)

Der Einfluss dieser internen Gewichtungsfaktoren wurde experimentell analysiert. Für die Optimierung der Faktoren wurden die Stationswerte mit Hilfe der in Gleichung 55 und 56 formulierten Funktionen (für die nicht normierten Koordinaten) erzeugt. Als Gitter wurde die Gitterpunktverteilung aus Abbildung 18 verwendet. Anschließend wurde ein Gewichtungsfaktor nach dem anderen optimiert. Da die verschiedenen Distanzen zwischen Gitterpunkten (Distanzgewichte) und bei unregelmäßigen Gittern auch die Flächen der Dreieckszellen (Flächengewichte) nur die Large Matrix verändern, in der Stationsmatrix allerdings nicht vorkommen, wird mit dem Gewicht der STAMA begonnen.

Die Faktoren werden dabei variiert und jeweils eine Analyse für die beiden zuvor beschriebenen meteorologischen Konfigurationen (Tief, Front) berechnet. Für beide wurde der RMSE beider Verifikationsmethoden addiert. Je nach Gewichtungsfaktor wurde entweder jener Wert mit dem geringsten Fehler in der Verifikation, oder ein robuster Wert, ab dem die Veränderung der Analysequalität nicht mehr von Relevanz ist, als optimaler Gewichtungsfaktor betrachtet.

#### 4.1.1 Gewichtung der Stationsmatrix $\sigma$

Als erster Schritt wurde ein bestmögliches Verhältnis zwischen Stationsmatrix und Large Matrix identifiziert. Dabei wurde beginnend bei einem Gewicht von 0.1 der Gewichtungsfaktor um eine Zehnerpotenz erhöht und bei 10,000,000 beendet. Ab einem Gewichtungsfaktor von 10,000 stellten sich keine sichtbaren Verbesserungen im RMSE mehr ein (vgl. Abbildung 19). Geringfügig bessere Ergebnisse konnten jedoch mit einem Faktor von 100,000 erzielt werden. Dementsprechend wurde dieser Faktor übernommen und in der Optimierung der weiteren Faktoren bereits berücksichtigt. Dieser Gewichtungsfaktor erscheint sehr hoch und tritt durch die in Abschnitt 3.5 beschriebene Normierung in dieser Höhe auf. Im Zuge dieser werden die Werte der Stationsmatrix stärker reduziert als die

Werte der Large Matrix. Dies wird durch die hier festgestellte höhere Gewichtung der Stationsmatrix wieder ausgeglichen. Ob diese Auffälligkeit in anderen Stations- und Gitterpunktkonfigurationen in ähnlicher Höhe auftritt, bedarf weiterer Untersuchungen.

### 4.1.2 Distanzgewichte $\alpha$

Für die Optimierung der Distanzgewichte wurden für  $\alpha$  die folgenden Zusammenhänge der Gitterpunktdistanz getestet:  $\alpha = 1, \frac{1}{d}, \frac{1}{d^2}, \frac{1}{d^4}, \frac{1}{d^8}, \frac{1}{d^{10}}, \frac{1}{d^{14}}, \frac{1}{d^{20}}$ . Die Werte der Kostenfunktion steigen naturgemäß durch die kleineren Werte im Nenner. Die Verifikation aus Abbildung 20 zeigt, dass die Güte ab einem Faktor  $\alpha = \frac{1}{d^8}$  nahezu konstant bleibt. Eine geringe Verbesserung konnte jedoch mit dem Faktor  $\alpha = \frac{1}{d^{10}}$  noch erreicht werden, weshalb dieser auch übernommen wurde. Der Exponent im Nenner mit dem Wert 10 fiel höher aus als erwartet. Diese hohe Gewichtung bedeutet, dass näher liegende Gitterpunkte um ein vielfaches stärker berücksichtigt werden, als weiter entfernte Punkte.

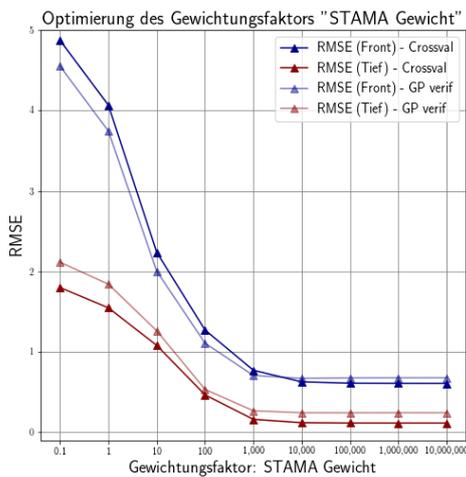


Abbildung 19: Optimierung der Gewichtung der Stationsmatrix im Verhältnis zur Large Matrix anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief.

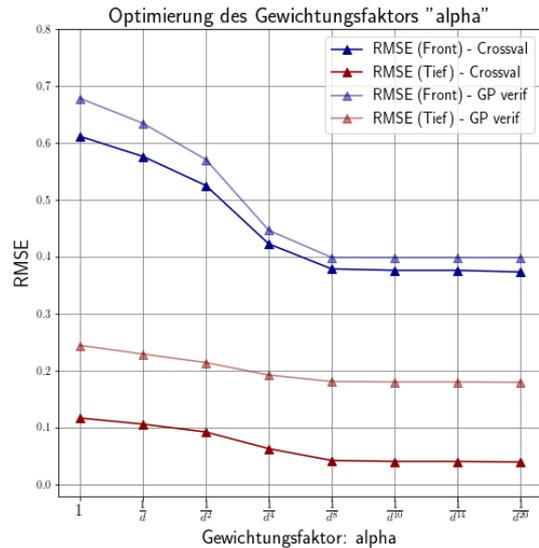


Abbildung 20: Optimierung der Distanzgewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief. Der Parameter  $d$  auf der x-Achse bezieht sich auf die Distanzen zwischen den Gitterpunkten (vgl. Gleichung 12)

### 4.1.3 Flächengewichte $\gamma$

Die Idee hinter der Flächgewichtung  $\gamma$  wurde bereits in Abschnitt 3.1 erläutert. Experimentell wurden verschiedene Arten der Flächengewichtung getestet. Zunächst wurde die Flächengewichtung außer Acht gelassen ( $\gamma = 1$ ). Danach wurde  $\gamma$  wie in Abbildung 7 dargestellt, über jene Dreiecksflächen, die mit dem Gitterpunkt direkt verbunden sind, gebildet (diese Variante wird als *area weight* bezeichnet). In der Variante *extended area weight* wurden nicht nur die direkt benachbarten Dreiecke, sondern auch die daran angrenzenden Nachbar-Dreiecke in der Anteilsberechnung der Gesamtfläche berücksichtigt. Eine Optimierung dieses Faktors ist für das vorliegende Gitter (Abbildung 18) nicht sinnvoll. Die Triangulierung ordnet theoretisch gleichberechtigten Gitterpunkten im Falle der Variante *area weight* innerhalb der Grenzen  $-6 \leq x \leq 6$  und  $-5 \leq y \leq 5$  zwischen 4 und 8 angrenzende Dreiecke zu. Dadurch verschlechtert sich der RMSE bei Berücksichtigung der Flächengewichte (Ab-

bildung 21). Erste Experimente, die vom Autor außerhalb dieser Arbeit mit lokal verdichteten Gittern durchgeführt wurden, legen nahe, dass die Flächengewichte bei dieser Art von Gittern berücksichtigt werden sollten und die erwartete Qualitätsverbesserung bringen. Daher wurde auch schon in den idealisierten Berechnungen dieser Arbeit (Gitter gemäß Abbildung 18) wurde die Flächengewichtung auf identisch 1 gesetzt.

#### 4.1.4 Ableitungsgewichte $\kappa$

Die Ableitungsgewichte  $\kappa$  sind keine Eigenheit der triangulären VERA, sondern werden auch in der konventionellen Variante berücksichtigt. Wie bereits in Abschnitt 3.1 angedeutet, sollte der Minimierung der Krümmung eine höhere Bedeutung zukommen, als der Minimierung der Steigung. Mit den in Abbildung 22 durchgeführten Konfigurationen konnten allerdings keine relevanten Unterschiede zwischen den Varianten 0.33/0.33/0.33, 0.0/0.5/0.5 und 0.1/0.45/0.45 identifiziert werden (Gewicht der 1. Ableitung  $\kappa_1$ / 2. Ableitung  $\kappa_2$ / gemischten Ableitung  $\kappa_3$ ). Bei der Konfiguration Front lieferte die Variante 0.9/0.05/0.05 die besten Resultate. Da dies durch die hauptsächlich lineare Steigung der Front erklärt werden kann, aber bei der Konfiguration Tief nicht der Fall ist, wurde diese Konfiguration nicht weiter verwendet. Aufgrund der Ähnlichkeit der Resultate der drei genannten Varianten, müssten Experimente mit realen, nicht idealisierten Daten durchgeführt werden, um die optimale Konfiguration zu finden. Für den anschließenden Vergleich mit der Standard-VERA wurde die Variante 0.0/0.5/0.5 gewählt, mit der diese auch berechnet wurde.

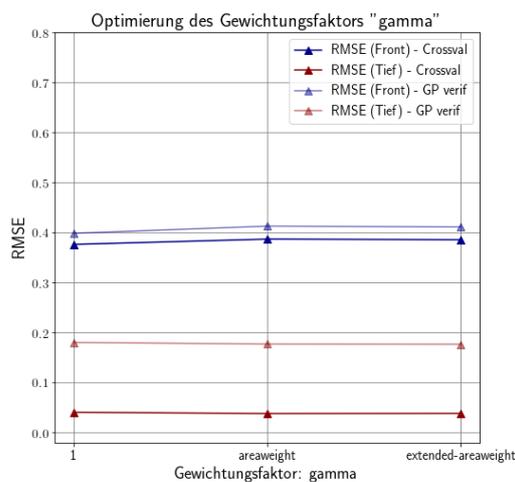


Abbildung 21: Optimierung der Flächengewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief.

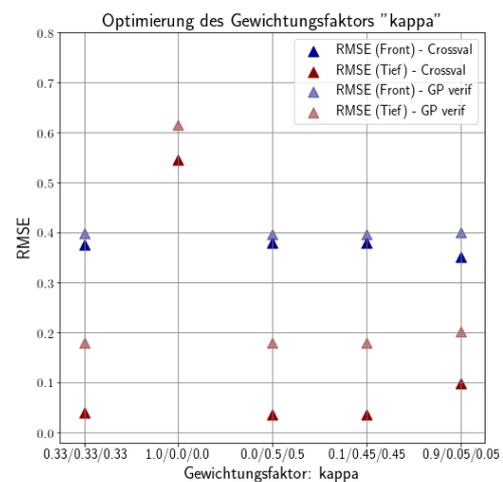


Abbildung 22: Optimierung der Ableitungsgewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief.

Die Resultate der Optimierung der internen Gewichtungsfaktoren lassen den Schluss zu, dass folgende Konfiguration für die vorliegenden idealisierten Situationen die bestmöglichen Ergebnisse zulässt:

- Gewichtung der Stationsmatrix  $\sigma$ : 100,000
- Distanzgewicht:  $\alpha = \frac{1}{d^{10}}$
- Flächengewicht:  $\gamma = 1$

– Ableitungsgewicht:  $\kappa = [0.00, 0.50, 0.50]$

In Abbildung 23 und 24 sind die Ergebnisse dieser Einstellungen im Vergleich mit den tatsächlichen Analysewerten grafisch dargestellt. Die großen Übereinstimmungen dieser Plots in beiden meteorologischen Konfigurationen bestätigen die Qualität der Analyse. Rechts oben sind jene Einstellungen, mit welchen die Analyse berechnet wurde, angeführt.

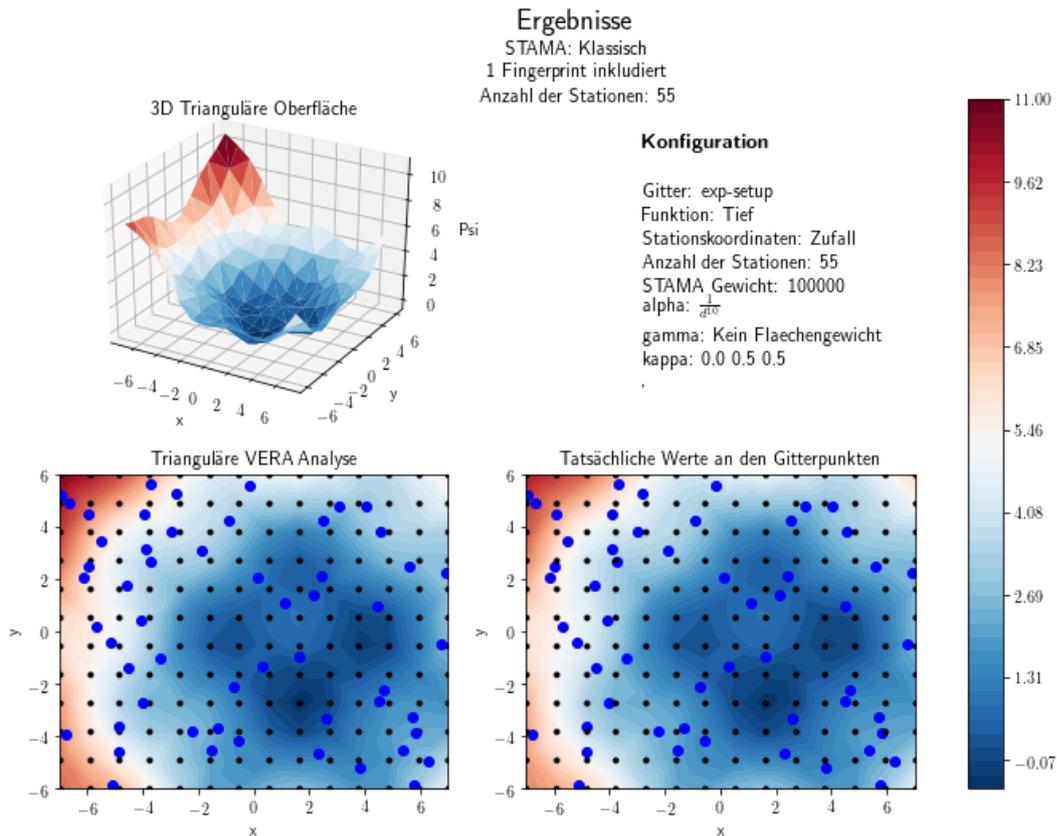


Abbildung 23: Analyse mit Stationswerten der Funktion „Tief“ inkl. idealisiertem topographischen Fingerprint. Links oben: 3D-Darstellung der Analyse. Links unten: 2D-Darstellung der Analyse (blaue Punkte: Stationen). Leave-one-out cross-validation:  $RMSE = 0.04$  und  $BIAS = 0.01$ , Gitterpunktverifikation:  $RMSE = 0.18$  und  $BIAS = 0.12$ . Rechts unten: 2D-Darstellung der tatsächlichen Funktionswerte.

Es wird festgehalten, dass die Resultate der Optimierung auf idealisierten meteorologischen Feldern basieren. In weiterführenden Untersuchungen kann der gleiche Aufbau der Experimente in einem Praxissetting abermals durchgeführt und die Ergebnisse verglichen werden. Im folgenden Abschnitt wird die Analysequalität der optimalen Konfiguration mit der Standard-VERA verglichen.

## 4.2 Vergleich mit Standard-VERA

Um die Vergleichbarkeit zwischen triangulärer und Standard-VERA zu ermöglichen, wurden alle Einstellungen und Konfigurationen so gewählt, dass sie in beiden Versionen realisiert werden können. Die Gewichtungsfaktoren, die ausschließlich in der triangulären VERA vorkommen, sind die Distanzgewichte  $\alpha$  und Flächengewichte  $\gamma$ . Diese wurden auf Basis der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Optimierung auf  $\alpha = \frac{1}{d^{10}}$  und  $\gamma = 1$  gesetzt. LAMA und STAMA sind in der Standard-VERA von ähnlicher Größenordnung, weshalb dort keine eigene Gewichtung der Stationsmatrix vorgenommen wird

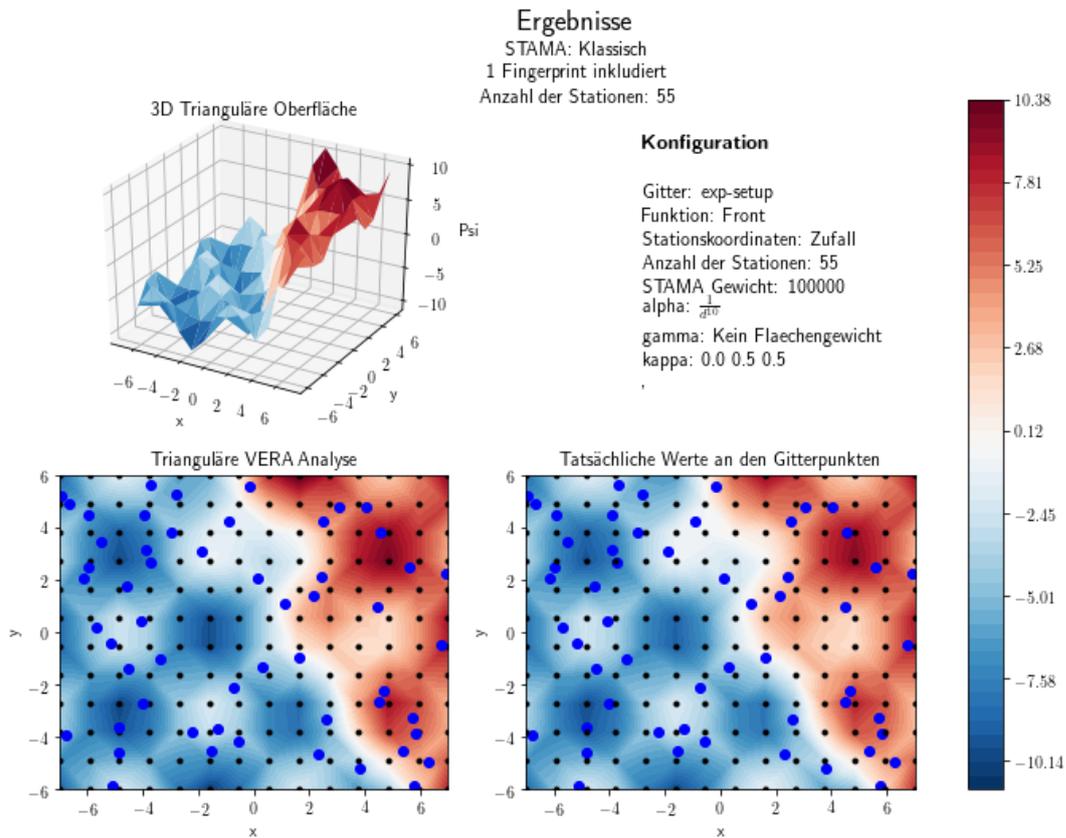


Abbildung 24: Analyse mit Stationswerten der Funktion „Front“ inkl. idealisiertem topographischen Fingerprint. Links oben: 3D-Darstellung der Analyse. Links unten: 2D-Darstellung der Analyse (blaue Punkte: Stationen). Leave-one-out cross-validation:  $RMSE = 0.38$  und  $BIAS = 0.02$ , Gitterpunktverifikation:  $RMSE = 0.40$  und  $BIAS = -0.14$ . Rechts unten: 2D-Darstellung der tatsächlichen Funktionswerte.

( $\sigma = 1$ ). In der triangulären Variante wird die Stationsmatrix hingegen entsprechend der zuvor angeführten Resultate aufgrund der Normierungen mit  $\sigma = 100,000$  gewichtet.

#### 4.2.1 Stationskonfigurationen

Die Gitterpunkte wurden so gewählt, dass beide Versionen der VERA damit rechnen können (Abbildung 18). Neben der Konfiguration mit zufällig verteilten Stationskoordinaten wurden zwei weitere idealisierte Sonderfälle von Stationsverteilungen (in vier Varianten) getestet, die in der konventionellen Variante der VERA in vereinzelt Analysen meteorologischer Parameter zu Schwierigkeiten führten.

- **Insel:** Meteorologische Messstationen befinden sich auf Inseln oftmals vermehrt am Inselrand. Dadurch entsteht eine annähernd kreisförmige Anordnung der Stationen (Abbildung 25). Beispiele hierfür sind Hawaii oder Korsika.
- **Küstenlinie:** Nicht nur auf Inseln, sondern auch an Küstenstreifen konzentrieren sich meteorologische Stationen entlang einer Linie an der Küste (Abbildung 26, 27, 28). Beispiele hierfür sind die Adriaküste von Kroatien und Italien, sowie der Westküste von Italien zu finden.

Im Zuge dieser Arbeit wurden die Analysen beider Methoden auch für diese Sonderfälle von Stationsverteilungen in den idealisierten Situationen eines Tiefs und einer Front berechnet. Konkrete Fälle in

denen Probleme bei der Standard-VERA in der Vergangenheit auftraten, wurden aufgrund fehlender Daten und Details nicht simuliert.

Durch die erweiterten Verbindungen der Gitterpunkte in der triangulären VERA mit den nächsten und übernächsten Nachbarn aller Verbindungslinien (nicht ausschließlich horizontale und vertikale Verbindungen) könnten entstehende Schwierigkeiten der Standard-VERA reduziert werden. Um etwaige Auswirkungen dieser Spezialkonfigurationen in der triangulären VERA zu testen, wurde die Stationskonfiguration „Küstenlinie“ in drei Varianten getestet (Abbildung 26, 27, 28). Dabei wurden die Stationen zunächst im Zentrum einer rechteckigen Gitterbox platziert. In einer zweiten Variante wurden sie um die Hälfte der Distanz zwischen Gitterpunkt und Stationen in horizontaler und vertikaler Richtung verschoben. In der dritten Variante wurden die Stationen dann direkt am Gitterpunkt platziert.

Unabhängig von der Anordnung entlang einer Küstenlinie kam es in der Standard-VERA stets zu Unstetigkeiten wenn eine Station zu nahe an einem Gitterpunkt lokalisiert war. Diese wurde dann geringfügig verschoben, um das Problem zu umgehen. In der triangulären Variante der VERA tritt diese Problematik nicht mehr auf.

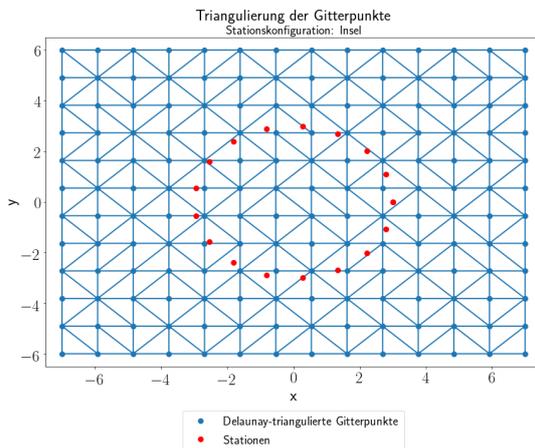


Abbildung 25: Stationskonfiguration „Insel“. Die Stationen sind wie auf Inseln oftmals üblich am Inselrand konzentriert.

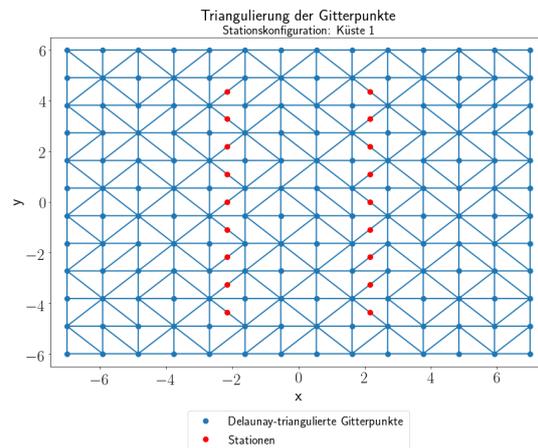


Abbildung 26: Stationskonfiguration „Küste 1“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier im Zentrum einer Gitterbox der Standard-VERA).

#### 4.2.2 Vergleich der Analysequalität anhand des RMSE und BIAS

Für die im vorangehenden Abschnitt erwähnten fünf Stationskonfigurationen (Zufall, Insel, Küstenlinie 1,2,3) wurde jeweils eine Analyse mit der Standard- und der triangulären VERA durchgeführt. Die Verifikation erfolgte für alle Konfigurationen mittels Leave-one-out cross-validation. Als Verifikationsmaße dienen RMSE und BIAS. Die Stationskonfiguration „Zufall“ wurde auch anhand der bekannten Gitterpunktwerte verifiziert. Diese wurde für die übrigen vier Spezialkonfigurationen nicht gemacht, da sich der Großteil der Gitterpunkte in großer Distanz zu den im Zentrum der Domäne konzentrierten Stationen befindet. Die Resultate der Gitterpunktverifikation würden somit maßgeblich von den Randeffekten beeinflusst werden.

Die Resultate für beide idealisierten meteorologischen Situationen Tief und Front sind in den Abbildungen 29 bis 32 abgebildet. Weder die trianguläre, noch die konventionelle Variante konnte bei einer

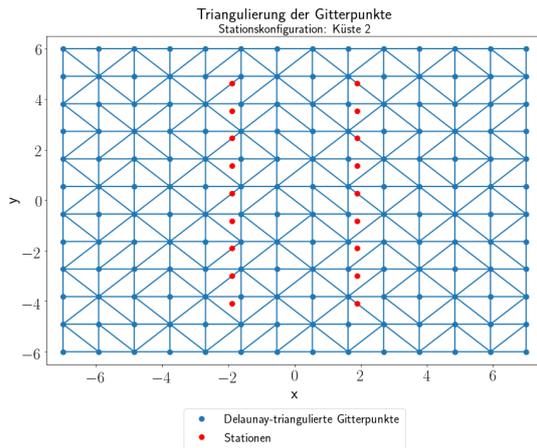


Abbildung 27: Stationskonfiguration „Küste 2“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier im linken bzw. rechten oberen Bereich einer Gitterbox der Standard-VERA).

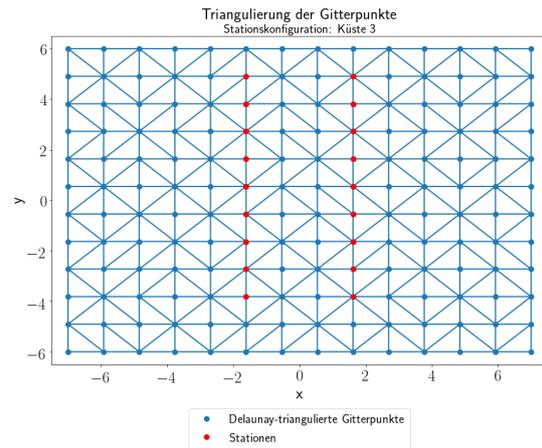


Abbildung 28: Stationskonfiguration „Küste 3“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier direkt auf den Gitterpunkten).

speziellen Situation oder Stationskonfiguration herausstechen. Beide Varianten sind somit in ihrer Analysequalität vergleichbar. Leichte Vorteile der Standard-VERA in der Kombination Front/Zufall in der Gitterpunktverifikation (Abbildung 29) sind mit einem Wert von 0.36 gegenüber 0.40 der triangulären VERA auszumachen. Hingegen liefert die trianguläre VERA in den Kombinationen Tief/Küste 1 und 2 geringfügig bessere Resultate. Diese "größten" Unterschiede in den Verifikationsmaßen sind jedoch nicht eklatant und lassen somit nicht auf eine qualitative Überlegenheit einer Variante schließen. Auch beim BIAS (Abbildung 30, 32) sind sich die Resultate der beiden Varianten sehr ähnlich.

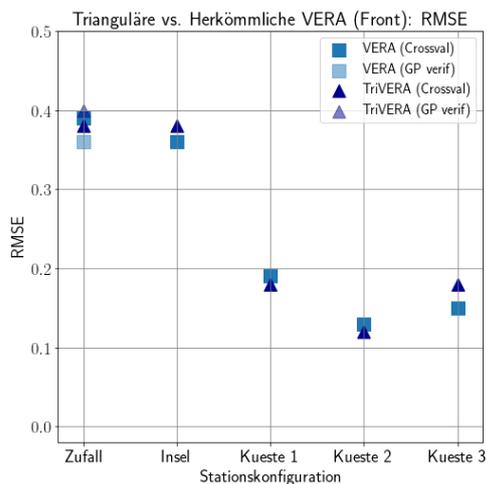


Abbildung 29: Vergleich der Analysen von Standard- und triangulärer VERA für die Konfiguration Front anhand des RMSE. Fünf Stationskonfiguration wurden mittels Cross-validation verifiziert, eine davon (Zufall) auch mittels Gitterpunktverifikation.

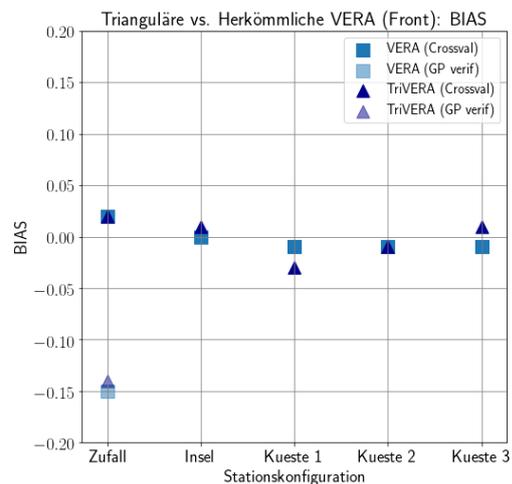


Abbildung 30: Wie Abbildung 29, aber für den BIAS.

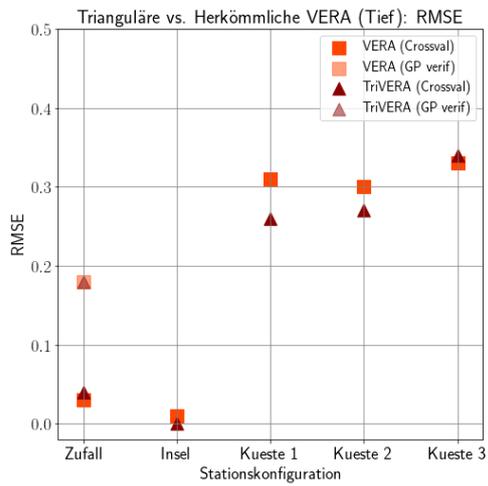


Abbildung 31: Wie Abbildung 29, aber für die Konfiguration Tief.

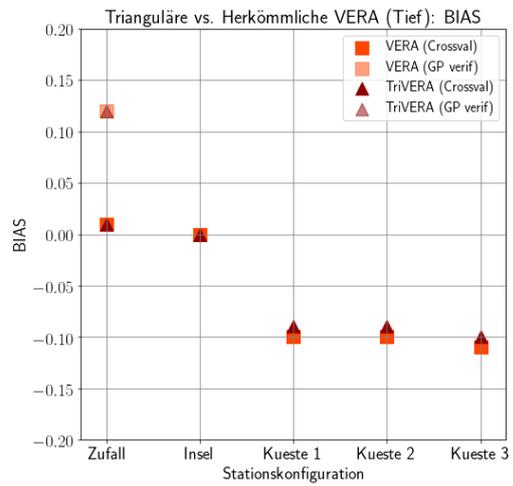


Abbildung 32: Wie Abbildung 29, aber für den BIAS der Konfiguration Tief.

## 5. Schlussfolgerungen und Ausblick

Der Machbarkeitsnachweis der Berechnung einer meteorologischen Analyse mit der VERA Methode auf einem triangulären Gitter konnte im Zuge dieser Arbeit erbracht werden. Der Ansatz, die Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Gitterpunkten mittels gewichteter Taylorreihenentwicklungen auszudrücken, stellte sich als erfolgreich heraus. Auf dessen Basis konnten die Ableitungen an einzelnen Gitterpunkten explizit ausgedrückt und somit die Steigungen und Krümmungen im Analysefeld entsprechend des VERA Ansatzes minimiert werden (Kostenfunktion in Gleichung 20).

Anhand der idealisierten meteorologischen Situationen eines Tiefdruckgebiets und einer Front zeigte sich der große Einfluss der verschiedenen Gewichtungsfaktoren der triangulären VERA. Der Einfluss und die Auswirkungen dieser Faktoren wurden für den Zweck dieser Arbeit beschrieben und evaluiert. Eine Ausnahme bildet die Relevanz des Flächengewichtes  $\gamma$ . Diese bedarf weiterer Untersuchungen im Fall unstrukturierter Gitter, deren durch die Koordinaten definierte Dreiecke verschiedene Flächeninhalte aufweisen. Durch die Optimierung der übrigen Parameter auf Basis der Reduktion des Root Mean Squared Error konnte die Qualität der Analyse bis auf das Niveau der Standard-VERA verbessert werden. In den Verifikationsresultaten zeigen sich weder positive, noch negative relevante Qualitätsunterschiede zwischen der triangulären und der Standard-VERA (Abschnitt 4.2.2). Somit können etwaige Vorteile der triangulären VERA ohne Qualitätsverlust in der Analyse ausgeschöpft werden. Diese umfassen die folgenden in Abschnitt 1.1 detaillierter formulierten Möglichkeiten:

- Die geometrische Form der Analysedomäne kann beliebig gewählt werden und ist nicht an die Form eines Rechtecks gebunden.
- Gitterpunkte können beliebig gesetzt werden. Dadurch ist eine lokale Verdichtung des Gitters und somit variierende räumliche Auflösung innerhalb der Domäne möglich.
- Das Problem der Meridiankonvergenz an den Polen bei globaler Analyse wird reduziert.
- Eine effizientere Dimensionserweiterung kann realisiert werden.

Das Ziel dieser Arbeit konnte somit erreicht werden. Es eröffnen sich jedoch gleichzeitig zahlreiche weitere Entwicklungsfelder der triangulären VERA. Die Fingerprintgewichte werden in der vorliegenden Version ausschließlich als konstante Werte berechnet. Räumlich variable Fingerprintgewichte wurden für die Standard-VERA bereits entwickelt und implementiert. Dadurch kann der Einfluss der Fingerprints lokal optimiert und gesteuert werden. Dies führte zu weiteren Verbesserungen der Analysequalität und kann auch für die trianguläre VERA entwickelt werden.

Eine Dimensionserweiterung in eine dritte und vierte Dimension (Raum, Zeit) verspricht ebenso Verbesserungen und eine Reduktion des RMSE in ausgewählten Regionen bei bestimmten Wetterlagen. Somit können beispielsweise Inversionslagen korrekter dargestellt (Seehöhe als Koordinate) oder zeitlich homogenere Analysen durch die Berücksichtigung zuvor gemessener Stationswerte (Zeit als Koordinate) berechnet werden. In der Standard-VERA müssen für diese Erweiterungen eigene Abstände definiert werden, die für die gesamte Analysedomäne gelten (z.B. fünf Höhenschichten). In der triangulären VERA könnten diese nur in relevanten Regionen (z.B. im Gebirge) berücksichtigt und wiederum Regionen, in denen dadurch keine Verbesserungen erwartet werden (z.B. im Flachland) außer Acht gelassen werden. Dies würde sich aller Voraussicht nach in der Effizienz der Berechnung niederschlagen. Insbesondere im operationellen Betrieb eines Analysesystems könnte dies wesentliche Vorteile erzielen.

Hinsichtlich der Rechenzeit im Allgemeinen wurden im Zuge dieser Arbeit keine Optimierungen und Untersuchungen angestellt. Für einen Effizienz-Vergleich hinsichtlich dieser Größe zwischen triangulärer und Standard-VERA, müssten zunächst vergleichbare Rahmenbedingungen und Voraussetzungen geschaffen werden. Neben der Berechnung der Analyse auf selber Hardware sind Versionen mit Fokus auf zeitlicher Effizienz zu entwickeln und umzusetzen. In einem Vergleich können sowohl übliche Domänen (Rechteck), wie auch Fokusregionen getestet werden. In diesen kann die Berechnung von nicht relevanten Regionen in der triangulären VERA ausgespart werden und die Verifikation nur für die Region von Interesse durchgeführt werden.

Im Zuge dieser Arbeit wurden auch theoretische Überlegungen zur Verwendung triangulärer Gitter ausgeführt. Der Einfluss verschiedener Gitter auf die Qualität der Analyse kann Gegenstand weiterer Untersuchungen sein. Durch die lokale Verdichtung in Gebieten räumlich stark variierende Fingerprints bei gleichzeitiger Verwendung von räumlich variablen Fingerprintgewichten und der Höhe der Stationen und Gitterpunkte als dritte Dimension, könnten voraussichtlich Analysen mit höherer Qualität erzielt werden.

## 6. Anhang

### 6.1 LAMA - Stationsverteilung entspricht Gitterpunkten

Ausdruck der Analysewerte (Gitterpunktwerte) durch Taylorreihenentwicklung der nächsten und übernächsten Nachbarn.

$$\Psi_B = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_B - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_B - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_B - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_B - x_A)(y_B - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_B - y_A)^2 \right] \quad (57)$$

$$\Psi_C = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_C - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_C - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_C - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_C - x_A)(y_C - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_C - y_A)^2 \right] \quad (58)$$

...

$$\Psi_F = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_F - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_F - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_F - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_F - x_A)(y_F - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_F - y_A)^2 \right] \quad (59)$$

$$\Psi_G = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_G - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_G - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_G - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_G - x_A)(y_G - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_G - y_A)^2 \right] \quad (60)$$

...

$$\Psi_L = \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_L - x_A) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_L - y_A) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_L - x_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_L - x_A)(y_L - y_A) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_L - y_A)^2 \right] \quad (61)$$

In weiterer Folge werden Differenzen in folgender Schreibweise abgekürzt.

$$(x_B - x_A) = x_{B,A} \quad (62)$$

Der Gewichtungsfaktor  $\alpha_{R,A}$  gewichtet die späteren Analysewerte entsprechend des Abstands zu den umliegenden Gitterpunkten.  $R$  bezeichnet dabei die mit  $A$  verbundenen Gitterpunkte (nächste und übernächste Nachbarn).

$$d_{R,A} = \sqrt{(x_{R,A})^2 + (y_{R,A})^2} \quad (63)$$

$$\alpha_{R,A} = \frac{1}{d_{R,A}} \quad (64)$$

$$\Psi_B = \alpha_{B,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_{B,A}) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_{B,A}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_{B,A})^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_{B,A})(y_{B,A}) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_{B,A})^2 \right] \right\} \quad (65)$$

$$\Psi_C = \alpha_{C,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_{C,A}) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_{C,A}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_{C,A})^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_{C,A})(y_{C,A}) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_{C,A})^2 \right] \right\} \quad (66)$$

...

$$\Psi_F = \alpha_{F,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_{F,A}) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_{F,A}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_{F,A})^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_{F,A})(y_{F,A}) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_{F,A})^2 \right] \right\} \quad (67)$$

$$\Psi_G = \alpha_{G,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_{G,A}) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_{G,A}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_{G,A})^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_{G,A})(y_{G,A}) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_{G,A})^2 \right] \right\} \quad (68)$$

...

$$\Psi_L = \alpha_{L,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A (x_{L,A}) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A (y_{L,A}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A (x_{L,A})^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A (x_{L,A})(y_{L,A}) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A (y_{L,A})^2 \right] \right\} \quad (69)$$

Für jeden Gitterpunkt  $P$  und seine umgebenden Gitterpunkte  $R$  (nächste und übernächste Nachbarn) gilt daher folgender Ausdruck.

$$\chi_{R,R} = \alpha_{R,P} \Psi_P - \Psi_R + \alpha_{R,P} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P (x_R - x_P) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P (y_R - y_P) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P (x_R - x_P)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P (x_R - x_P)(y_R - y_P) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P (y_R - y_P)^2 \right] \right\} \rightarrow \min \quad (70)$$

Minimierung der Kostenfunktion  $J_0$  führt zu kleinstmöglichen Differenzen zwischen den tatsächlichen und den durch Taylorreihen ausgedrückten Analysewerten. Dabei wird nach den Unbekannten (1. und 2. Ableitungen) abgeleitet. Der Faktor 2 wird dabei gekürzt, da er in allen Gleichungen gleichermaßen vorkommt. In den folgenden Gleichungen wird dies für einen beliebigen Gitterpunkt  $P$  demonstriert. Aufgrund besserer Lesbarkeit wird auch der distanzgewichtende Faktor  $\alpha$  zwischenzeitlich ausgespart und an späterer Stelle wieder eingefügt.

$N$ ...Anzahl der Gitterpunkte

$\zeta(P)$ ...Gridpoint-Neighbor-Operator (spezifiziert alle nächsten und übernächsten Nachbar-Gitterpunkte von  $P$ )

$$J_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{R=\zeta(P_i)} \chi_{P_i,R}^2 = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P} = \sum_{R=\zeta(P)} \left[ \Psi_P - \Psi_R + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P x_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P y_{R,P}^2 \right] x_{R,P} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P} = \sum_{R=\zeta(P)} \left[ \Psi_P - \Psi_R + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P x_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P y_{R,P}^2 \right] y_{R,P} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P} = \sum_{R=\zeta(P)} \left[ \Psi_P - \Psi_R + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P x_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P y_{R,P}^2 \right] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P} = \sum_{R=\zeta(P)} \left[ \Psi_P - \Psi_R + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P x_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P y_{R,P}^2 \right] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 = 0 \quad (75)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P} = \sum_{R=\zeta(P)} \left[ \Psi_P - \Psi_R + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P x_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P y_{R,P}^2 \right] x_{R,P} y_{R,P} = 0 \quad (76)$$

Durch Ausmultiplizieren der Terme mit den inneren Ableitungen, umschreiben der Terme ohne Ableitungen auf die rechte Seite und Aufteilung der Summe  $\sum_{R=\zeta(P)} (\dots)$  auf die einzelnen Terme, gelangt man zu folgenden Gleichungen.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P} y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \Psi_P] x_{R,P} \quad (77)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P} y_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum y_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P} y_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} y_{R,P}^3 = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \Psi_P] y_{R,P} \quad (78)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^3 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{4} x_{R,P}^4 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \quad (79)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} y_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{4} y_{R,P}^4 = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \quad (80)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P} y_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P, R=\zeta(P)} \sum \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \quad (81)$$

Die Gleichungen können als Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise angeschrieben werden. Ab dieser Stelle werden die Distanzgewichte  $\alpha$  wieder berücksichtigt.

$$\begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} y_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \end{pmatrix} \quad (82)$$

Der allgemeine explizite Ausdruck einer  $n \times n$  Determinante, entwickelt nach der Spalte  $j$  lautet wie folgt. Der Summand  $i$  bezeichnet die jeweilige Zeile der Matrix.

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \det(M_{ij}) \quad (83)$$

Hier repräsentiert  $D_{ij}$  die Determinante von  $M_{ij}$ , die entsteht wenn die Zeile  $i$  und die Spalte  $j$  der Matrix  $M$  gestrichen werden.  $a_{ij}$  steht für das jeweilige Matrixelement der Matrix  $M$  in der Zeile  $i$  und der Spalte  $j$ . Im Falle einer 5x5 Matrix kann die Determinante daher entsprechend berechnet werden.

$$\det(M) = a_{11} \cdot D_{11} - a_{21} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot D_{31} - a_{41} \cdot D_{41} + a_{51} \cdot D_{51} \quad (84)$$

Wie in Abschnitt 3 beschrieben, muss für die Berechnung der Analyse die folgende Kostenfunktion  $J_1$  minimiert werden. Die Unbekannten bilden die Analysewerte  $\Psi_i$ , die hier noch in den ersten und zweiten Ableitungen enthalten sind.

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i, \kappa_1} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i, \kappa_1} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i, \kappa_2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i, \kappa_2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{P_i} \right)^2 \gamma_{P_i, \kappa_3} \quad (85)$$

Die ersten und zweiten Ableitungen müssen daher zunächst aus dem zuvor angeführten Gleichungssystem  $M \vec{x} = \vec{b}$  entsprechend der Cramer'schen Regel explizit aufgelöst und eingesetzt werden.

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det M} \quad (86)$$

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (87)$$

Dementsprechend kann die Matrix  $M_{P_1}$  für den Gitterpunkt  $P$  wie folgt angeschrieben werden. Dabei wurde die Spalte  $j = 1$  durch den Vektor der rechten Seite des Gleichungssystems ersetzt.

$$M_{P1} = \begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} y_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 \end{pmatrix} \quad (88)$$

Im Zuge der Minimierung der Kostenfunktion  $J_1$  wird nun nach allen Gitterpunkten, hier exemplarisch nach  $\Psi_A$ , abgeleitet.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial \Psi_A} = & - \frac{\det(M_{A1})}{\det(M_A)^2} \left[ \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A11} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A21} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A31} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A41} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A51} \right] \gamma_{A\kappa_1} \\
 & - \frac{\det(M_{A2})}{\det(M_A)^2} \left[ - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A12} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A22} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A32} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A42} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A52} \right] \gamma_{A\kappa_1} \\
 & - \frac{\det(M_{A3})}{\det(M_A)^2} \left[ \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A13} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A23} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A33} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A43} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A53} \right] \gamma_{A\kappa_2} \\
 & - \frac{\det(M_{A4})}{\det(M_A)^2} \left[ - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A14} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A24} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A34} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A44} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A54} \right] \gamma_{A\kappa_2} \\
 & - \frac{\det(M_{A5})}{\det(M_A)^2} \left[ \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A15} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A25} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A35} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A45} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A55} \right] \gamma_{A\kappa_3} \\
 & + \frac{\det(M_{B1})}{\det(M_B)^2} \left[ \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B11} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B21} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B31} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B41} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B51} \right] \gamma_{B\kappa_1} \\
 & + \frac{\det(M_{B2})}{\det(M_B)^2} \left[ -\alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B12} + \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B22} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B32} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B42} - \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B52} \right] \gamma_{B\kappa_1} \\
 & + \frac{\det(M_{B3})}{\det(M_B)^2} \left[ \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B13} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B23} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B33} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B43} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B53} \right] \gamma_{B\kappa_2} \\
 & + \frac{\det(M_{B4})}{\det(M_B)^2} \left[ -\alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B14} + \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B24} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B34} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B44} - \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B54} \right] \gamma_{B\kappa_2} \\
 & + \frac{\det(M_{B5})}{\det(M_B)^2} \left[ \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B15} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B25} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B35} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B45} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B55} \right] \gamma_{B\kappa_3} \\
 & + \dots + \\
 & + \dots + \\
 & \dots \text{Vorgehensweise bei den weiteren benachbarten Gitterpunkte C,D,E,F,... wie fuer B.}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Jene Terme dieser Ausdrücke, in den die unbekanntenen Analysewerte  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$ ,  $\Psi_C$ , etc. nicht vorkommen, werden in den Variablen  $\Theta$  zusammengefasst. Für den Gitterpunkt  $\Psi_A$  lauten die zugehörigen  $\Theta$  wie folgt.

$$\Theta_{xA A} = \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A11} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A21} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A31} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A41} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A51} \quad (90)$$

$$\Theta_{yAA} = - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A12} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A22} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A32} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A42} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A52} \quad (91)$$

$$\Theta_{x^2 AA} = \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A13} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A23} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A33} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A43} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A53} \quad (92)$$

$$\Theta_{y^2 AA} = - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A14} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A24} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A34} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A44} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A54} \quad (93)$$

$$\Theta_{xyAA} = \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} \cdot D_{A15} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A25} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} x_{R,A}^2 \cdot D_{A35} - \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} \frac{1}{2} y_{R,A}^2 \cdot D_{A45} + \sum_{R=\zeta(A)} \alpha_{R,A} x_{R,A} y_{R,A} \cdot D_{A55} \quad (94)$$

$$\Theta_{xA B} = \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B11} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B21} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B31} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B41} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B51}$$

$$\Theta_{yAB} = -\alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B12} + \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B22} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B32} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B42} - \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B52} \quad (95)$$

$$\Theta_{x^2 AB} = \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B13} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B23} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B33} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B43} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B53} \quad (96)$$

$$\Theta_{y^2 AB} = -\alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B14} + \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B24} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B34} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B44} - \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B54} \quad (97)$$

$$\Theta_{xyAB} = \alpha_{A,B} x_{A,B} \cdot D_{B15} - \alpha_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B25} + \alpha_{A,B} \frac{1}{2} x_{A,B}^2 \cdot D_{B35} - \alpha_{A,B} \frac{1}{2} y_{A,B}^2 \cdot D_{B45} + \alpha_{A,B} x_{A,B} y_{A,B} \cdot D_{B55} \quad (98)$$

Verallgemeinert können die Variablen  $\Theta$  für den Gitterpunkt  $i$  und seine benachbarten (nächste und übernächste) Gitterpunkte  $j$  wie folgt definiert werden.

$$\Theta_{xii} = \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} \cdot D_{i11} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i21} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} x_{R,i}^2 \cdot D_{i31} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \cdot D_{i41} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i51} \quad (99)$$

$$\Theta_{yii} = - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} \cdot D_{i12} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i22} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} x_{R,i}^2 \cdot D_{i32} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \cdot D_{i42} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i52} \quad (100)$$

$$\Theta_{x^2ii} = \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} \cdot D_{i13} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i23} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} x_{R,i}^2 \cdot D_{i33} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \cdot D_{i43} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i53} \quad (101)$$

$$\Theta_{y^2ii} = - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} \cdot D_{i14} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i24} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} x_{R,i}^2 \cdot D_{i34} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \cdot D_{i44} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i54} \quad (102)$$

$$\Theta_{xyii} = \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} \cdot D_{i15} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i25} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} x_{R,i}^2 \cdot D_{i35} - \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \cdot D_{i45} + \sum_{R=\zeta(i)} \alpha_{R,i} x_{R,i} y_{R,i} \cdot D_{i55} \quad (103)$$

$$\Theta_{xij} = \alpha_{i,j} x_{i,j} \cdot D_{j11} - \alpha_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j21} + \alpha_{i,j} \frac{1}{2} x_{i,j}^2 \cdot D_{j31} - \alpha_{i,j} \frac{1}{2} y_{i,j}^2 \cdot D_{j41} + \alpha_{i,j} x_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j51}$$

$$\Theta_{yij} = -\alpha_{i,j} x_{i,j} \cdot D_{j12} + \alpha_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j22} - \alpha_{i,j} \frac{1}{2} x_{i,j}^2 \cdot D_{j32} + \alpha_{i,j} \frac{1}{2} y_{i,j}^2 \cdot D_{j42} - \alpha_{i,j} x_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j52} \quad (104)$$

$$\Theta_{x^2ij} = \alpha_{i,j} x_{i,j} \cdot D_{j13} - \alpha_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j23} + \alpha_{i,j} \frac{1}{2} x_{i,j}^2 \cdot D_{j33} - \alpha_{i,j} \frac{1}{2} y_{i,j}^2 \cdot D_{j43} + \alpha_{i,j} x_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j53} \quad (105)$$

$$\Theta_{y^2ij} = -\alpha_{i,j} x_{i,j} \cdot D_{j14} + \alpha_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j24} - \alpha_{i,j} \frac{1}{2} x_{i,j}^2 \cdot D_{j34} + \alpha_{i,j} \frac{1}{2} y_{i,j}^2 \cdot D_{j44} - \alpha_{i,j} x_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j54} \quad (106)$$

$$\Theta_{xyij} = \alpha_{i,j} x_{i,j} \cdot D_{j15} - \alpha_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j25} + \alpha_{i,j} \frac{1}{2} x_{i,j}^2 \cdot D_{j35} - \alpha_{i,j} \frac{1}{2} y_{i,j}^2 \cdot D_{j45} + \alpha_{i,j} x_{i,j} y_{i,j} \cdot D_{j55} \quad (107)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden zusammengefassten Terme  $\Theta$  in die Ableitung der Kostenfunktion  $J_1$  nach  $\Psi_A$  kann Gleichung 89 vereinfacht angeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial \Psi_A} = & -\frac{\det(M_{A1})}{\det(M_A)^2} \Theta_{xAA\gamma A\kappa_1} - \frac{\det(M_{A2})}{\det(M_A)^2} \Theta_{yAA\gamma A\kappa_1} - \frac{\det(M_{A3})}{\det(M_A)^2} \Theta_{x^2 AA\gamma A\kappa_2} - \frac{\det(M_{A4})}{\det(M_A)^2} \Theta_{y^2 AA\gamma A\kappa_2} - \frac{\det(M_{A5})}{\det(M_A)^2} \Theta_{xyAA\gamma A\kappa_3} \\
& + \frac{\det(M_{B1})}{\det(M_B)^2} \Theta_{xAB\gamma B\kappa_1} + \frac{\det(M_{B2})}{\det(M_B)^2} \Theta_{yAB\gamma B\kappa_1} + \frac{\det(M_{B3})}{\det(M_B)^2} \Theta_{x^2 AB\gamma B\kappa_2} + \frac{\det(M_{B4})}{\det(M_B)^2} \Theta_{y^2 AB\gamma B\kappa_2} + \frac{\det(M_{B5})}{\det(M_B)^2} \Theta_{xyAB\gamma B\kappa_3} \\
& + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)^2} \Theta_{xAC\gamma C\kappa_1} + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)^2} \Theta_{yAC\gamma C\kappa_1} + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)^2} \Theta_{x^2 AC\gamma C\kappa_2} + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)^2} \Theta_{y^2 AC\gamma C\kappa_2} + \frac{\det(M_{C1})}{\det(M_C)^2} \Theta_{xyAC\gamma C\kappa_3} \\
& + \dots + \\
& + \dots + \\
& \dots \text{Vorgehensweise bei den weiteren benachbarten Gitterpunkte D,E,F,... wie fuer B und C.}
\end{aligned} \tag{108}$$

Die gesuchten Analysewerte sind nun in den Determinanten von  $M_{P1} \dots M_{P5}$  enthalten. Diese können für einen beliebigen Gitterpunkt  $P$  entsprechend Gleichung 84 ausgeschrieben werden.

$$\det(M_{P1}) = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \cdot D_{P11} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \cdot D_{P21} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \cdot D_{P31} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \cdot D_{P41} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \cdot D_{P51} \tag{109}$$

$$\det(M_{P2}) = - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \cdot D_{P12} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \cdot D_{P22} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \cdot D_{P32} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \cdot D_{P42} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \cdot D_{P52} \tag{110}$$

$$\det(M_{P3}) = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \cdot D_{P13} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \cdot D_{P23} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \cdot D_{P33} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \cdot D_{P43} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \cdot D_{P53} \tag{111}$$

$$\det(M_{P4}) = - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \cdot D_{P14} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \cdot D_{P24} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \cdot D_{P34} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \cdot D_{P44} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \cdot D_{P54} \tag{112}$$

$$\det(M_{P5}) = \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} \cdot D_{P15} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} \cdot D_{P25} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \cdot D_{P35} - \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \cdot D_{P45} + \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} \cdot D_{P55} \tag{113}$$

Die Determinanten werden nun in die nach  $\Psi_A$  abgeleitete Kostenfunktion  $J_1$  eingesetzt und die gesuchten Analysewerte herausgehoben.

$\zeta(A, B) \dots$  Gridpoint-Neighbor-Operator (spezifiziert alle nächsten und übernächsten Nachbar-Gitterpunkte die die Gitterpunkte  $A$  und  $B$  gemeinsam haben)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial \Psi_A} = & \Psi_A \left[ \frac{\Theta_{xAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{yAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{x^2AA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{y^2AA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{xyAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} + \right. \\
& \left. \sum_{R=\zeta(A)} \left[ \frac{\Theta_{xAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right] + \\
\Psi_B \left[ & \sum_{R=\zeta(B)} \left[ -\frac{\Theta_{xAB} \Theta_{xRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK1} - \frac{\Theta_{yAB} \Theta_{yRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK1} - \frac{\Theta_{x^2AB} \Theta_{x^2RB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK2} - \frac{\Theta_{y^2AB} \Theta_{y^2RB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK2} - \frac{\Theta_{xyAB} \Theta_{xyRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK3} \right] + \right. \\
& \left. \sum_{R=\zeta(A,B)} \left[ \frac{\Theta_{xAR} \Theta_{xBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR} \Theta_{yBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR} \Theta_{x^2BR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR} \Theta_{y^2BR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR} \Theta_{xyBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right] + \\
& \left[ -\frac{\Theta_{xAA} \Theta_{xBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{yAA} \Theta_{yBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{x^2AA} \Theta_{x^2BA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{y^2AA} \Theta_{y^2BA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{xyAA} \Theta_{xyBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} \right] + \\
\Psi_C \left[ & \sum_{R=\zeta(C)} \left[ -\frac{\Theta_{xAC} \Theta_{xRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{yAC} \Theta_{yRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{x^2AC} \Theta_{x^2RC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{y^2AC} \Theta_{y^2RC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{xyAC} \Theta_{xyRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK3} \right] + \right. \\
& \left. \sum_{R=\zeta(A,C)} \left[ \frac{\Theta_{xAR} \Theta_{xCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR} \Theta_{yCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR} \Theta_{x^2CR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR} \Theta_{y^2CR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR} \Theta_{xyCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right] + \\
& \left[ -\frac{\Theta_{xAA} \Theta_{xCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{yAA} \Theta_{yCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{x^2AA} \Theta_{x^2CA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{y^2AA} \Theta_{y^2CA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{xyAA} \Theta_{xyCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} \right] + \\
\Psi_D \left[ \dots \right.
\end{aligned} \tag{114}$$

... selbiges für andere mit A verbundenen Punkte

Somit kann die Ableitung der Kostenfunktion  $J_1$  nach dem Punkt  $P$  wie folgt verallgemeinert werden.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial \Psi_P} = & \Psi_P \left[ \gamma_P \left[ \frac{\Theta_{xPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_3 \right] \right. \\
& \sum_{R=\zeta(P)} \gamma_R \left[ \frac{\Theta_{xPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] + \\
& \sum_{R=\zeta(P)} \left\langle \Psi_R \left[ \sum_{Q=\zeta(R)} \gamma_R \left[ -\frac{\Theta_{xPR}\Theta_{xQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{yPR}\Theta_{yQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2PR}\Theta_{x^2QR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2PR}\Theta_{y^2QR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xyPR}\Theta_{xyQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] + \right. \right. \\
& \sum_{Q=\zeta(P,R)} \gamma_Q \left[ \frac{\Theta_{xPQ}\Theta_{xRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPQ}\Theta_{yRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PQ}\Theta_{x^2RQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PQ}\Theta_{y^2RQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPQ}\Theta_{xyRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_3 \right] + \\
& \left. \left. \gamma_P \left[ -\frac{\Theta_{xPP}\Theta_{xRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{yPP}\Theta_{yRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2PP}\Theta_{x^2RP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2PP}\Theta_{y^2RP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xyPP}\Theta_{xyRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_3 \right] \right\rangle \right]
\end{aligned} \tag{115}$$

Aus der Ableitung nach einem Analysewert  $\Psi_{P_i}$  und herausheben aller Analysewerte, kann die  $i$ -te Zeile der LAMA im folgenden Gleichungssystem gebildet werden, wobei  $\vec{\Psi}$  der Vektor der Analysewerte ist.

$$\mathcal{LAMA} * \vec{\Psi} = \vec{0} \tag{116}$$

### 6.1.1 Matrix-Schreibweise der LAMA

Um die Gleichungen in Matrixschreibweise zusammenzufassen, müssen einige Vektoren und Matrizen vordefiniert werden.

$GP$  ... Gitterpunkte (Anzahl der GP)

$A, B, C$ , etc. ... einzelne Gitterpunkte

$$\mathcal{E}_{GP1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E}_{1,GP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{117}$$

$$\mathcal{I}_{GP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & . \\ 0 & 0 & 1 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (118)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ \dots \\ x_{GP} \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ \dots \\ y_{GP} \end{pmatrix} \quad (119)$$

$\mathcal{C}$  ist die Verbindungsmatrix der Gitterpunkte (nächste und übernächste Nachbarn). Die Zeilen- und Spaltenanzahl entspricht der Gitterpunktanzahl und verbundene Gitterpunkte werden mit 1, nicht verbundene Punkte mit 0 definiert. Hier ist ein beliebiges Beispiel angeführt.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & . \\ 0 & 1 & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (120)$$

$$\vec{\mathcal{I}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{I}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{I}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{I}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{I}}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (121)$$

Aus diesen Vektoren und Matrizen kann die Trianguläre VERA berechnet werden. Neben der klassischen Matrixmultiplikation werden das Hadamard-Produkt (Symbol  $\odot$ ) und das Kronecker-Produkt (Symbol  $\otimes$ ) benötigt. Diese beiden Multiplikationen sind wie folgt definiert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix} \quad (123)$$

In einem ersten Schritt werden nun zunächst Differenzenmatrizen der Gitterpunkte definiert.

$$X = \mathcal{E}_{GP1} \cdot \vec{x}^T \quad Y = \mathcal{E}_{GP1} \cdot \vec{y}^T \quad (124)$$

$$X_{con} = \mathcal{C} \odot (X - X^T) \quad Y_{con} = \mathcal{C} \odot (Y - Y^T) \quad X_{con}^2 = X_{con} \odot X_{con} \quad Y_{con}^2 = Y_{con} \odot Y_{con} \quad XY_{con} = X_{con} \odot Y_{con} \quad (125)$$

Aus den Differenzmatrizen von X und Y kann die Taylor-Matrix  $\mathcal{T}$  bestimmt werden.

$$\mathcal{T} = (X_{con} \otimes \vec{\mathcal{I}}_1) + (Y_{con} \otimes \vec{\mathcal{I}}_2) + \left(\frac{1}{2} X_{con}^2 \otimes \vec{\mathcal{I}}_3\right) + \left(\frac{1}{2} Y_{con}^2 \otimes \vec{\mathcal{I}}_4\right) + XY_{con} \otimes \vec{\mathcal{I}}_5 \quad (126)$$

Aus der Taylor-Matrix  $\mathcal{T}$  wird nun die Matrix  $\mathcal{M}$  berechnet, mit der die Ableitungen an den jeweiligen Gitterpunktwerten ausgedrückt werden.

$$\mathcal{M} = \left[ [\mathcal{I}_{GP} \otimes (\mathcal{E}_{5,1} \cdot \mathcal{E}_{1,5})] \odot (T \cdot T^T) \right] \cdot (\mathcal{E}_{GP1} \otimes \mathcal{I}_5) \quad (127)$$

Die Matrix  $\mathcal{M}$  besteht aus den untereinander gereihten Matrizen  $\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B, \mathcal{M}_C, \dots$  der einzelnen Gitterpunkte. Die Matrix  $\mathcal{D}$  ordnet die Determinanten dieser Submatrizen in einem Vektor untereinander an.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_A \\ \mathcal{M}_B \\ \mathcal{M}_C \\ \dots \\ \mathcal{M}_N \end{pmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \det(\mathcal{M}_A) \\ \det(\mathcal{M}_B) \\ \det(\mathcal{M}_C) \\ \dots \\ \det(\mathcal{M}_N) \end{pmatrix} \quad (128)$$

In den Matrizen  $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$  sind die Determinanten der Submatrizen enthalten, die in  $\Theta$  verwendet wurden. Die tiefgestellten Zahlen entsprechen den ausgelassenen Zeilen und Spalten. Die Matrix  $\mathcal{U}$  ordnet schließlich die einzelnen Matrizen  $\mathcal{U}_A, \mathcal{U}_B, \mathcal{U}_C, \dots$  für alle Gitterpunkte untereinander an.

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{A11} & \mathcal{D}_{A21} & \mathcal{D}_{A31} & \mathcal{D}_{A41} & \mathcal{D}_{A51} \\ \mathcal{D}_{A12} & \mathcal{D}_{A22} & \mathcal{D}_{A32} & \mathcal{D}_{A42} & \mathcal{D}_{A52} \\ \mathcal{D}_{A13} & \mathcal{D}_{A23} & \mathcal{D}_{A33} & \mathcal{D}_{A43} & \mathcal{D}_{A53} \\ \mathcal{D}_{A14} & \mathcal{D}_{A24} & \mathcal{D}_{A34} & \mathcal{D}_{A44} & \mathcal{D}_{A54} \\ \mathcal{D}_{A15} & \mathcal{D}_{A25} & \mathcal{D}_{A35} & \mathcal{D}_{A45} & \mathcal{D}_{A55} \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_A \\ \mathcal{U}_B \\ \mathcal{U}_C \\ \dots \\ \mathcal{U}_N \end{pmatrix} \quad (129)$$

Nun werden die Verbindungsmatrix sowie die Differenzmatrizen als Vektor umgeschrieben.

$$\vec{C}_1 = [(\mathcal{C} \otimes \mathcal{E}_{GP,1}) \odot (\mathcal{E}_{GP,1} \otimes \mathcal{I}_{GP})] \cdot \mathcal{E}_{GP,1} \quad (130)$$

$$\vec{X}_{con,1} = (\vec{x} \otimes \mathcal{E}_{GP,1}) - (\mathcal{E}_{GP,1} \otimes \vec{x}) \quad (131)$$

Die Matrix  $\mathcal{K}$  bildet die Basis für den folgenden Vektor  $\vec{\Theta}_1$ , der wiederum die Synthese aus den bereits beschriebenen Größen  $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_{x^2}, \Theta_{y^2}$  und  $\Theta_{xy}$  bildet.

$$\vec{I}_v = [(\mathcal{I}_{GP} \otimes \mathcal{E}_{GP,1}) \odot (\mathcal{E}_{GP,1} \otimes \mathcal{I}_{GP})] \cdot \mathcal{E}_{GP,1} \quad (132)$$

$$\mathcal{K}_x = \left[ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (X_{con} \cdot \mathcal{E}_{GP1})] \odot \vec{I}_v \right] + (\overrightarrow{X_{con,1}} \odot \vec{C}_1) \quad (133)$$

$$\mathcal{K}_y = \left[ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (Y_{con} \cdot \mathcal{E}_{GP1})] \odot \vec{I}_v \right] + (\overrightarrow{Y_{con,1}} \odot \vec{C}_1) \quad (134)$$

$$\mathcal{K}_{x^2} = \left[ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (X_{con}^2 \cdot \mathcal{E}_{GP1})] \odot \vec{I}_v \right] + (\overrightarrow{X_{con,1}^2} \odot \vec{C}_1) \quad (135)$$

$$\mathcal{K}_{y^2} = \left[ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (Y_{con}^2 \cdot \mathcal{E}_{GP1})] \odot \vec{I}_v \right] + (\overrightarrow{Y_{con,1}^2} \odot \vec{C}_1) \quad (136)$$

$$\mathcal{K}_{xy} = \left[ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (XY_{con} \cdot \mathcal{E}_{GP1})] \odot \vec{I}_v \right] + (\overrightarrow{XY_{con,1}} \odot \vec{C}_1) \quad (137)$$

$$\mathcal{K} = (\vec{\mathcal{I}}_1^T \otimes \mathcal{K}_x) + (\vec{\mathcal{I}}_2^T \otimes \mathcal{K}_y) + (\vec{\mathcal{I}}_3^T \otimes \frac{1}{1} \mathcal{K}_{x^2}) + (\vec{\mathcal{I}}_4^T \otimes \frac{1}{1} \mathcal{K}_{y^2}) + (\vec{\mathcal{I}}_5^T \otimes \mathcal{K}_{xy}) \quad (138)$$

$$\vec{\Theta}_1 = \left\{ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes [(\mathcal{E}_{GP1} \otimes \mathcal{S}) \odot \mathcal{U}]] \odot (\mathcal{K} \otimes \mathcal{E}_{5,1}) \right\} \cdot \mathcal{E}_{5,1} \quad (139)$$

Aus diesen Matrizen kann nun die LAMA (Large Matrix) berechnet werden.

$$\mathcal{L}_1 = \left[ \vec{\Theta}_1 \odot [(\mathcal{E}_{GP1} \otimes \frac{1}{\mathcal{D}^2}) \otimes \mathcal{E}_{5,1}] \right]^T \odot (\mathcal{I}_{GP} \otimes \mathcal{E}_{1,5*GP}) \quad (140)$$

$$\mathcal{L}_{21} = (\mathcal{E}_{5*GP^2,1} \cdot \mathcal{E}_{1,GP}) - 2 * abs \left\{ [\mathcal{E}_{GP1} \otimes (\mathcal{I}_{GP} \otimes \mathcal{E}_{5,1})] - [(\vec{I}_v \otimes \mathcal{E}_{GP1}) \otimes \mathcal{E}_{5,1}] \otimes \mathcal{E}_{1,GP} \right\} \quad (141)$$

$$\mathcal{L}_{22} = \mathcal{E}_{GP1} \otimes \left\{ (\mathcal{E}_{1,GP} \otimes \mathcal{I}_{5*GP}) \cdot [(\vec{\Theta}_1 \otimes \mathcal{E}_{1,GP}) \odot [(\mathcal{I}_{GP} \otimes \mathcal{E}_{5,1}) \otimes \mathcal{E}_{GP1}]] \right\} \quad (142)$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{21} \odot \mathcal{L}_{22} \quad (143)$$

$$\mathcal{LAMA} = 2 * (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) \quad (144)$$

## 6.2 STAMA - Von Stationsverteilung unabhängige Gitterpunkte

In diesem Abschnitt entsprechen die Stationen nun nicht mehr den Gitterpunkten. Stattdessen wird ein beliebiges Gitter definiert und die Stationen befinden sich unregelmäßig verteilt zwischen den Gitterpunkten. Die Interpolation zwischen Gitterpunkten und Station erfolgt mittels baryzentrischer Gewichtung. Für eine Station  $S$ , die von den drei Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, können die baryzentrischen Gewichte  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , sowie der von den Gitterpunkten auf die Stationskoordinaten interpolierte Wert  $\bar{\Omega}$  angeschrieben werden. Dabei wird der Flächeninhalt des Dreiecks mit  $\mathcal{A}_{tri}$  und die Flächeninhalte der Sub-Dreiecke mit  $\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B, \mathcal{A}_C$  bezeichnet.

Das baryzentrische Gewicht für jeden Eckpunkt wird als Anteil der Dreiecksfläche des Subdreiecks, in dem der jeweilige Eckpunkt nicht enthalten ist, von der gesamten Dreiecksfläche ausgedrückt.

$$\mathcal{A}_{tri} = \frac{1}{2} (\vec{v}_{AB} \times \vec{v}_{AC}) \quad (145)$$

$$\mathcal{A}_A = \frac{1}{2} (\vec{v}_{BC} \times \vec{v}_{BS}) \quad \omega_A = \frac{\mathcal{A}_A}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (146)$$

$$\mathcal{A}_B = \frac{1}{2} (\vec{v}_{CA} \times \vec{v}_{CS}) \quad \omega_B = \frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (147)$$

$$\mathcal{A}_C = \frac{1}{2} (\vec{v}_{AB} \times \vec{v}_{AS}) \quad \omega_C = \frac{\mathcal{A}_C}{\mathcal{A}_{tri}} \quad (148)$$

Die Differenzen zwischen den tatsächlichen Stationswerten  $\Omega_{S_j}$  und den von den stationsumgebenden Gitterpunkten auf die Stationskoordinaten interpolierten Werte  $\bar{\Omega}_{S_j}$  sollen minimal sein. Hierfür wird wieder eine Kostenfunktion ( $J_2$ ) aufgestellt und minimiert.

$M$ ...Anzahl der Stationen

$\Omega_S$ ...Stationswert an der Station  $S$

$\bar{\Omega}_S$ ...von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierte Werte

$\omega_P$ ...baryzentrische Gewichte des stationsumgebenden Gitterpunktes  $P$

$\Psi_P$ ...Analysewert am Gitterpunkt  $P$

$$J_2 = \sum_{j=1}^M (\Omega_{S_j} - \bar{\Omega}_{S_j})^2 \quad (149)$$

$$\bar{\Omega}_S = \omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C \quad (150)$$

Die Kostenfunktion  $J_2$  kann analog zur Kostenfunktion der LAMA nach ihren Unbekannten (umliegende Analysewerte)  $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C$  abgeleitet werden.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_A} = \left( \Omega - \frac{\omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \left( -\frac{\omega_A}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \quad (151)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_B} = \left( \Omega - \frac{\omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \left( -\frac{\omega_B}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \quad (152)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_C} = \left( \Omega - \frac{\omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \left( -\frac{\omega_C}{\omega_A + \omega_B + \omega_C} \right) \quad (153)$$

Durch Herausheben der unbekanntenen Analysewerte kann wieder eine Koeffizientenmatrix (STAMA) und ein entsprechendes Gleichungssystem erstellt werden. Die rechte Seite dieses Gleichungssystems wird allerdings nicht durch den Nullvektor ausgedrückt, sondern durch die baryzentrisch gewichteten Stationswerte, die mit dem Gitterpunkt des Analysewerts in Verbindung stehen.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_A} + \omega_A \Omega = \Psi_A \omega_A^2 + \Psi_B \omega_A \omega_B + \Psi_C \omega_A \omega_C \quad (154)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_B} + \omega_B \Omega = \Psi_A \omega_A \omega_B + \Psi_B \omega_B^2 + \Psi_C \omega_B \omega_C \quad (155)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_C} + \omega_C \Omega = \Psi_A \omega_A \omega_C + \Psi_B \omega_B \omega_C + \Psi_C \omega_C^2 \quad (156)$$

Im Fall von sechs Gitterpunkten, wobei eine Station von den Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, kann das Gleichungssystem der STAMA wie folgt formuliert werden.

$$\begin{pmatrix} \omega_A^2 & \omega_A \omega_B & \omega_A \omega_C & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \omega_B & \omega_B^2 & \omega_B \omega_C & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \omega_C & \omega_B \omega_C & \omega_C^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_A \Omega_S \\ \omega_B \Omega_S \\ \omega_C \Omega_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (157)$$

Die Stationsmatrizen der einzelnen Stationen werden summiert und für die Berechnung der Analyse schließlich zur LAMA addiert, sodass folgendes Gleichungssystem gelöst werden kann.

$$(STAMA + LAMA) * \vec{\Psi} = \vec{v} \quad (158)$$

### 6.3 Das Fingerprintkonzept in der LAMA der triangulären VERA

Wie am Beginn von Abschnitt 6.1 werden die unbekanntes Analysewerte als Taylorreihe der benachbarten (nächste und übernächste Nachbarn) Analysewerte ausgedrückt. Die Ableitungen werden nun in einen erklärten und unerklärten Anteil aufgespalten. In dieser Dokumentation werden zwei konstante Fingerprintgewichte  $c$  und  $d$  betrachtet. In der Realität kann eine beliebige Anzahl verwendet werden.

$$\Psi_B = \alpha_{B,A} \left\{ \Psi_A + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_A x_{B,A} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_A y_{B,A} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_A x_{B,A}^2 + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_A x_{B,A} y_{B,A} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_A y_{B,A}^2 \right] \right\} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} \Psi_B = \alpha_{B,A} \left\{ \Psi_A + \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_A}{\partial x} + c \frac{\partial \tilde{\Psi}_{c,A}}{\partial x} + d \frac{\partial \tilde{\Psi}_{d,A}}{\partial x} \right) x_{B,A} + \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_A}{\partial y} + c \frac{\partial \tilde{\Psi}_{c,A}}{\partial y} + d \frac{\partial \tilde{\Psi}_{d,A}}{\partial y} \right) y_{B,A} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,A}}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,A}}{\partial x^2} \right) x_{B,A}^2 + \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,A}}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,A}}{\partial x \partial y} \right) x_{B,A} y_{B,A} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_A}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,A}}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,A}}{\partial y^2} \right) y_{B,A}^2 \right\} \end{aligned} \quad (160)$$

Allgemein gilt folgender Zusammenhang für einen beliebigen Gitterpunkt  $P$  und seine Nachbarn  $R$ .

$$\begin{aligned} \chi_{R,R} = \alpha_{B,A} \Psi_P - \Psi_R + \alpha_{R,P} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial x} + c \frac{\partial \tilde{\Psi}_{c,P}}{\partial x} + d \frac{\partial \tilde{\Psi}_{d,P}}{\partial x} \right) x_{R,P} + \alpha_{R,P} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial y} + c \frac{\partial \tilde{\Psi}_{c,P}}{\partial y} + d \frac{\partial \tilde{\Psi}_{d,P}}{\partial y} \right) y_{R,P} + \\ \alpha_{R,P} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,P}}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,P}}{\partial x^2} \right) x_{R,P}^2 + \alpha_{R,P} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,P}}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,P}}{\partial x \partial y} \right) x_{R,P} y_{R,P} + \alpha_{R,P} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{c,P}}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{d,P}}{\partial y^2} \right) y_{R,P}^2 \end{aligned} \quad (161)$$

Die Differenz des tatsächlichen Analysewerts und durch die Taylorreihen ausgedrückten Analysewerts soll wieder möglichst gering sein. Dies wird mathematisch durch die Ableitung der Kostenfunktion  $J_0$  nach den unbekanntem Ableitungen ausgedrückt (in denen die eigentlichen unbekanntem Analysewerte  $\Psi_P$  enthalten sind).

$$J_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{R=\zeta(P_i)} \chi_{P_i,R}^2 = 0 \quad (162)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \bar{\Psi}_P}{\partial x}} = \sum_{R=\zeta(P)} 2\chi_{P,R} x_{R,P} = 0 \quad (163)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \bar{\Psi}_P}{\partial y}} = \sum_{R=\zeta(P)} 2\chi_{P,R} y_{R,P} = 0 \quad (164)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_P}{\partial x^2}} = \sum_{R=\zeta(P)} 2\chi_{P,R} x_{R,P}^2 = 0 \quad (165)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_P}{\partial x \partial y}} = \sum_{R=\zeta(P)} 2\chi_{P,R} x_{R,P} y_{R,P} = 0 \quad (166)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_P}{\partial y^2}} = \sum_{R=\zeta(P)} 2\chi_{P,R} y_{R,P}^2 = 0 \quad (167)$$

Exemplarisch wird hier die weitere Vorgehensweise anhand der Ableitung  $\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \bar{\Psi}_P}{\partial x}}$  demonstriert. Einsetzen von  $\chi_{P,R}$  und Division durch den Faktor 2 führt zu folgender Gleichung.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial x} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 + \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x \partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial y^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 = \\
& \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} \left[ \left( c \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x} + d \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x} \right) x_{R,P} + \left( c \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y} + d \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial y} \right) y_{R,P} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left( c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x^2} \right) x_{R,P}^2 + \left( c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x \partial y} \right) x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \left( c \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial y^2} \right) y_{R,P}^2 \right]
\end{aligned} \tag{168}$$

Auf der rechten Seite können die konstanten Fingerprintgewichte  $c$  und  $d$  herausgehoben werden.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial x} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 + \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x \partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial y^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 = \\
& \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} \left[ c \left( x_{R,P} \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x} + y_{R,P} \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y} + \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x^2} + x_{R,P} y_{R,P} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. d \left( x_{R,P} \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x} + y_{R,P} \frac{\partial \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial y} + \frac{1}{2} x_{R,P}^2 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x^2} + x_{R,P} y_{R,P} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} y_{R,P}^2 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{d,P}}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{169}$$

Die Ausdrücke in den runden Klammern entsprechen einer Taylorreihenentwicklung des erklärten Anteils des Fingerprintgewichts am Gitterpunkt  $P$ .

$$\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P} = \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x} x_{R,P} + \frac{\partial \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x^2} x_{R,P}^2 + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial x \partial y} x_{R,P} y_{R,P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_{c,P}}{\partial y^2} y_{R,P}^2 \tag{170}$$

Somit kann der vorhergehende Ausdruck vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_0}{\partial \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial x}} &= \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial x} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 + \frac{\partial \tilde{\Psi}_P}{\partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial x \partial y} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_P}{\partial y^2} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 = \\
& \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} \left[ c (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d (\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P}) \right]
\end{aligned} \tag{171}$$

Dies wird für alle unbekanntenen Ableitungen der Kostenfunktion  $J_0$  durchgeführt. Im daraus resultierenden Gleichungssystem ändert sich im Gegensatz zur Variante ohne Fingerprintfelder nur die rechte Seite (vgl. Gleichung 16).

$$\begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{4} y_{R,P}^4 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 \\ \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P}^2 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^3 y_{R,P} & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P} y_{R,P}^3 & \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P}^2 y_{R,P}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_P \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_P \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} [c(\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d(\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] y_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} [c(\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d(\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} x_{R,P}^2 - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 [c(\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d(\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] \frac{1}{2} y_{R,P}^2 - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 [c(\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d(\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P})] \\ \sum_{R=\zeta(P)} [\Psi_R - \alpha_{R,P} \Psi_P] x_{R,P} y_{R,P} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} [c(\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) + d(\hat{\Psi}_{d,R} - \hat{\Psi}_{d,P})] \end{pmatrix} \quad (172)$$

Die weitere Vorgehensweise erfolgt analog zur Ableitung der Kostenfunktion  $J_1$  in Abschnitt 6.1. Die Fingerprintgewichte treten dabei in den Termen der Determinanten  $\det(M_{P1}) \dots \det(M_{P5})$  (vgl. Gleichung 109-113) auf. Diese sind weitere Unbekannte die einerseits in den Ableitungen nach den Analysewerten berücksichtigt und nach denen die Kostenfunktion ebenso abgeleitet werden muss. Zur weiteren vereinfachten Schreibweise wird neben den bereits bekannten Zusammenfassungen zahlreicher Terme in der Variablen  $\Theta$  (mit verschiedenen Indizes), weitere Ausprägungen für die Fingerprintgewichte ergänzt. Hier sind diese für einen beliebigen Gitterpunkt  $P$  und ein beliebiges Fingerprintgewicht  $c$  angeführt.

$$\Theta_{xcP} = \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{11} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{21} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{31} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{41} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{51} \quad (173)$$

$$\Theta_{ycP} = - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{12} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{22} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{32} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{42} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{52} \quad (174)$$

$$\Theta_{x^2cP} = \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{13} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{23} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{33} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{43} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{53} \quad (175)$$

$$\Theta_{y^2cP} = - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{14} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{24} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{34} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{44} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{54} \quad (176)$$

$$\Theta_{xycP} = \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{15} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{25} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} x_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{35} - \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} \frac{1}{2} y_{R,P}^2 (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{45} + \sum_{R=\zeta(P)} \alpha_{R,P} x_{R,P} y_{R,P} (\hat{\Psi}_{c,R} - \hat{\Psi}_{c,P}) \cdot DP_{55} \quad (177)$$

Die weitere Minimierung der Kostenfunktion erfolgt exemplarisch für den Punkt  $A$  und das Fingerprintgewicht  $c$ .

Berechnung der Ableitung der Kostenfunktion  $J_1$  nach  $\Psi_A$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial \Psi_A} = & \Psi_A \left[ \frac{\Theta_{xAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{yAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{x^2AA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{y^2AA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{xyAA}^2}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} + \right. \\
 & \left. \sum_{R=\zeta(A)} \left[ \frac{\Theta_{xAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR}^2}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right] + \\
 \Psi_B \left[ & \sum_{R=\zeta(B)} \left[ -\frac{\Theta_{xAB} \Theta_{xRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK1} - \frac{\Theta_{yAB} \Theta_{yRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK1} - \frac{\Theta_{x^2AB} \Theta_{x^2RB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK2} - \frac{\Theta_{y^2AB} \Theta_{y^2RB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK2} - \frac{\Theta_{xyAB} \Theta_{xyRB}}{\det(M_B)^2} \gamma_{BK3} \right] + \right. \\
 & \sum_{R=\zeta(A,B)} \left[ \frac{\Theta_{xAR} \Theta_{xBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR} \Theta_{yBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR} \Theta_{x^2BR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR} \Theta_{y^2BR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR} \Theta_{xyBR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] + \\
 & \left. \left[ -\frac{\Theta_{xAA} \Theta_{xBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{yAA} \Theta_{yBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} - \frac{\Theta_{x^2AA} \Theta_{x^2BA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{y^2AA} \Theta_{y^2BA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} - \frac{\Theta_{xyAA} \Theta_{xyBA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} \right] \right] + \\
 \Psi_C \left[ & \sum_{R=\zeta(C)} \left[ -\frac{\Theta_{xAC} \Theta_{xRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{yAC} \Theta_{yRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{x^2AC} \Theta_{x^2RC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{y^2AC} \Theta_{y^2RC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{xyAC} \Theta_{xyRC}}{\det(M_C)^2} \gamma_{CK3} \right] + \right. \\
 & \sum_{R=\zeta(A,C)} \left[ \frac{\Theta_{xAR} \Theta_{xCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{yAR} \Theta_{yCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} + \frac{\Theta_{x^2AR} \Theta_{x^2CR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{y^2AR} \Theta_{y^2CR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} + \frac{\Theta_{xyAR} \Theta_{xyCR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] + \\
 & \left. \left[ -\frac{\Theta_{xAA} \Theta_{xCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{yAA} \Theta_{yCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{CK1} - \frac{\Theta_{x^2AA} \Theta_{x^2CA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{y^2AA} \Theta_{y^2CA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{CK2} - \frac{\Theta_{xyAA} \Theta_{xyCA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{CK3} \right] \right] + \\
 \Psi_D \left[ & \dots \right] + \\
 & \dots + \\
 & \dots + \\
 & \dots + \\
 c \left[ & \frac{\Theta_{xcA} \Theta_{xAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{ycA} \Theta_{yAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{x^2cA} \Theta_{x^2AA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{y^2cA} \Theta_{y^2AA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{xycA} \Theta_{xyAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} + \right. \\
 & \left. \sum_{R=\zeta(A)} \left[ -\frac{\Theta_{xcR} \Theta_{xAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} - \frac{\Theta_{ycR} \Theta_{yAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} - \frac{\Theta_{x^2cR} \Theta_{x^2AR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} - \frac{\Theta_{y^2cR} \Theta_{y^2AR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} - \frac{\Theta_{xycR} \Theta_{xyAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right] \\
 d \left[ & \frac{\Theta_{xdA} \Theta_{xAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{y dA} \Theta_{yAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK1} + \frac{\Theta_{x^2 dA} \Theta_{x^2AA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{y^2 dA} \Theta_{y^2AA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK2} + \frac{\Theta_{xy dA} \Theta_{xyAA}}{\det(M_A)^2} \gamma_{AK3} + \right. \\
 & \left. \sum_{R=\zeta(A)} \left[ -\frac{\Theta_{x dR} \Theta_{xAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} - \frac{\Theta_{y dR} \Theta_{yAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK1} - \frac{\Theta_{x^2 dR} \Theta_{x^2AR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} - \frac{\Theta_{y^2 dR} \Theta_{y^2AR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK2} - \frac{\Theta_{xy dR} \Theta_{xyAR}}{\det(M_R)^2} \gamma_{RK3} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{178}$$

Berechnung der Ableitung der Kostenfunktion  $J_1$  nach  $c$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial c} = & -\frac{\det(M_{A1})}{\det(M_A)^2} \Theta_{xcA} \gamma_{A\kappa_1} - \frac{\det(M_{A2})}{\det(M_A)^2} \Theta_{ycA} \gamma_{A\kappa_1} - \frac{\det(M_{A3})}{\det(M_A)^2} \Theta_{x^2cA} \gamma_{A\kappa_2} - \frac{\det(M_{A4})}{\det(M_A)^2} \Theta_{y^2cA} \gamma_{A\kappa_2} - \frac{\det(M_{A5})}{\det(M_A)^2} \Theta_{xycA} \gamma_{A\kappa_3} \\ & - \frac{\det(M_{B1})}{\det(M_B)^2} \Theta_{xcB} \gamma_{B\kappa_1} - \frac{\det(M_{B2})}{\det(M_B)^2} \Theta_{ycB} \gamma_{B\kappa_1} - \frac{\det(M_{B3})}{\det(M_B)^2} \Theta_{x^2cB} \gamma_{B\kappa_2} - \frac{\det(M_{B4})}{\det(M_B)^2} \Theta_{y^2cB} \gamma_{B\kappa_2} - \frac{\det(M_{B5})}{\det(M_B)^2} \Theta_{xycB} \gamma_{B\kappa_3} \end{aligned} \quad (179)$$

...

...für alle weiteren Gitterpunkte analog...

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial c} = & \Psi_A \left[ \gamma_A \left( \frac{\Theta_{xcA} \Theta_{xAA}}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycA} \Theta_{yAA}}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cA} \Theta_{x^2AA}}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cA} \Theta_{y^2AA}}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycA} \Theta_{xyAA}}{\det(M_A)^2} \kappa_3 \right) + \right. \\ & \left. \sum_{R=\zeta(A)} \gamma_R \left( -\frac{\Theta_{xcR} \Theta_{xAR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{ycR} \Theta_{yAR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2cR} \Theta_{x^2AR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2cR} \Theta_{y^2AR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xycR} \Theta_{xyAR}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right) \right] + \\ & \Psi_B \left[ \gamma_B \left( \frac{\Theta_{xcB} \Theta_{xBB}}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycB} \Theta_{yBB}}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cB} \Theta_{x^2BB}}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cB} \Theta_{y^2BB}}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycB} \Theta_{xyBB}}{\det(M_B)^2} \kappa_3 \right) + \right. \\ & \left. \sum_{R=\zeta(B)} \gamma_R \left( -\frac{\Theta_{xcR} \Theta_{xBR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{ycR} \Theta_{yBR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2cR} \Theta_{x^2BR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2cR} \Theta_{y^2BR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xycR} \Theta_{xyBR}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right) \right] + \\ & \Psi_C \left[ \dots \right] + \\ & \dots + \\ & \dots + \\ & c \left[ \gamma_A \left( \frac{\Theta_{xcA}^2}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycA}^2}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cA}^2}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cA}^2}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycA}^2}{\det(M_A)^2} \kappa_3 \right) + \right. \\ & \gamma_B \left( \frac{\Theta_{xcB}^2}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycB}^2}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cB}^2}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cB}^2}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycB}^2}{\det(M_B)^2} \kappa_3 \right) \\ & \dots \left. \right] + \\ & d \left[ \gamma_A \left( \frac{\Theta_{xcA} \Theta_{xdA}}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycA} \Theta_{ydA}}{\det(M_A)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cA} \Theta_{x^2dA}}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cA} \Theta_{y^2dA}}{\det(M_A)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycA} \Theta_{xydA}}{\det(M_A)^2} \kappa_3 \right) + \right. \\ & \gamma_B \left( \frac{\Theta_{xcB} \Theta_{xdB}}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycB} \Theta_{ydB}}{\det(M_B)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cB} \Theta_{x^2dB}}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cB} \Theta_{y^2dB}}{\det(M_B)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycB} \Theta_{xydB}}{\det(M_B)^2} \kappa_3 \right) \\ & \dots \left. \right] \end{aligned} \quad (180)$$

Allgemein gilt demnach für die Ableitung der Kostenfunktion nach einem beliebigen Analysewert  $\Psi_P$  und einem beliebigen Fingerprintgewicht  $c$  folgender Zusammenhang.

$N$ ...Anzahl der Gitterpunkte  $P$ ...Gitterpunkt

$\zeta(P)$ ...Gridpoint-Neighbor-Operator (spezifiziert alle nächsten und übernächsten Nachbar-Gitterpunkte von  $P$ )

$F$ ...Anzahl der Fingerprintfelder

$c$ ...Fingerprintgewicht

$\mu(c)$ ...Fingerprint-Operator, der ein beliebiges Fingerprintgewicht  $c$  aus der Menge der Fingerprintfelder ausschließt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \Psi_P} = & \Psi_P \left[ \gamma_P \left( \frac{\Theta_{xPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPP}^2}{\det(M_P)^2} \kappa_3 \right) + \right. \\
& \sum_{R=\zeta(P)} \gamma_R \left[ \frac{\Theta_{xPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPR}^2}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] + \\
& \sum_{R=\zeta(P)} \left\langle \Psi_R \left[ \sum_{Q=\zeta(R)} \gamma_R \left[ -\frac{\Theta_{xPR}\Theta_{xQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{yPR}\Theta_{yQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2PR}\Theta_{x^2QR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2PR}\Theta_{y^2QR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xyPR}\Theta_{xyQR}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \sum_{Q=\zeta(R,R)} \gamma_Q \left[ \frac{\Theta_{xPQ}\Theta_{xRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yPQ}\Theta_{yRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2PQ}\Theta_{x^2RQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2PQ}\Theta_{y^2RQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyPQ}\Theta_{xyRQ}}{\det(M_Q)^2} \kappa_3 \right] + \right. \\
& \quad \left. \gamma_P \left[ -\frac{\Theta_{xPP}\Theta_{xRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{yPP}\Theta_{yRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2PP}\Theta_{x^2RP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2PP}\Theta_{y^2RP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xyPP}\Theta_{xyRP}}{\det(M_P)^2} \kappa_3 \right] \right\rangle + \\
& \sum_{f=1}^F \left\langle c_f \left[ \gamma_P \left[ \frac{\Theta_{xc_fP}\Theta_{xPP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{yc_fP}\Theta_{yPP}}{\det(M_P)^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2c_fP}\Theta_{x^2PP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2c_fP}\Theta_{y^2PP}}{\det(M_P)^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xyc_fP}\Theta_{xyPP}}{\det(M_P)^2} \kappa_3 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \sum_{R=\zeta(P)} \gamma_R \left[ -\frac{\Theta_{xc_fR}\Theta_{xPR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{yc_fR}\Theta_{yPR}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2c_fR}\Theta_{x^2PR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2c_fR}\Theta_{y^2PR}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xyc_fR}\Theta_{xyPR}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] \right\rangle
\end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial J_1}{\partial c} = & \sum_{i=1}^N \left\langle \Psi_{P_i} \left[ \gamma_{P_i} \left[ \frac{\Theta_{xcP_i} \Theta_{xP_i P_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycP_i} \Theta_{yP_i P_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cP_i} \Theta_{x^2P_i P_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cP_i} \Theta_{y^2P_i P_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycP_i} \Theta_{xyP_i P_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_3 \right] + \right. \\
 & \left. \sum_{R=\zeta(P)} \gamma_R \left[ -\frac{\Theta_{xcR} \Theta_{xP_i R}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{ycR} \Theta_{yP_i R}}{\det(M_R)^2} \kappa_1 - \frac{\Theta_{x^2cR} \Theta_{x^2P_i R}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{y^2cR} \Theta_{y^2P_i R}}{\det(M_R)^2} \kappa_2 - \frac{\Theta_{xycR} \Theta_{xyP_i R}}{\det(M_R)^2} \kappa_3 \right] \right] \rangle + \\
 & c \left[ \sum_{P_i} \gamma_{P_i} \left[ \frac{\Theta_{xcP_i}^2}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycP_i}^2}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cP_i}^2}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cP_i}^2}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycP_i}^2}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_3 \right] \right] + \\
 & \sum_{d=\mu(c)} \left\langle d \left[ \sum_{P_i} \gamma_{P_i} \left[ \frac{\Theta_{xcP_i} \Theta_{xdP_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{ycP_i} \Theta_{ydP_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_1 + \frac{\Theta_{x^2cP_i} \Theta_{x^2dP_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{y^2cP_i} \Theta_{y^2dP_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_2 + \frac{\Theta_{xycP_i} \Theta_{xydP_i}}{\det(M_{P_i})^2} \kappa_3 \right] \right] \right\rangle
 \end{aligned} \tag{182}$$

## 6.4 Das Fingerprintkonzept in der STAMA der triangulären VERA

Analog zu Abschnitt 6.2 erfolgt die Interpolation zwischen stationsumgebenden Gitterpunkten und der Station selbst mittels baryzentrischer Gewichtung. Die von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierten Werte  $\bar{\Omega}$  werden in einen erklärten und unerklärten Anteil aufgespalten. Analog zu Gleichung 149 wird nun in der Kostenfunktion  $J_2$  der unerklärte Anteil minimiert.

$$J_2 = \sum_{j=1}^M (\tilde{\Omega}_{S_j} - \hat{\tilde{\Omega}}_{S_j})^2 \tag{183}$$

$\bar{\Omega}$ ...von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierter Stationswert

$\tilde{\Omega}$ ...unerklärter Anteil des von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierten Stationswertes

$\hat{\tilde{\Omega}}$ ...erklärter Anteil des von den Gitterpunkt- auf die Stationskoordinaten interpolierten Stationswertes

$$\bar{\Omega} = \omega_A \Psi_A + \omega_B \Psi_B + \omega_C \Psi_C \tag{184}$$

$$\tilde{\Omega} = \omega_A (\tilde{\Psi}_A + c \hat{\Psi}_{c,A} + d \hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\tilde{\Psi}_B + c \hat{\Psi}_{c,B} + d \hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\tilde{\Psi}_C + c \hat{\Psi}_{c,C} + d \hat{\Psi}_{d,C}) \tag{185}$$

$$\hat{\tilde{\Omega}} = \omega_A (\Psi_A - c \hat{\Psi}_{c,A} - d \hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c \hat{\Psi}_{c,B} - d \hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c \hat{\Psi}_{c,C} - d \hat{\Psi}_{d,C}) \tag{186}$$

$$\Omega = \tilde{\Omega} + c\hat{\Omega}_c + d\hat{\Omega}_d \quad (187)$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d \quad (188)$$

$$J_2 = \sum_{j=1}^M \left( \Omega_{S_j} - c\hat{\Omega}_{c,S_j} - d\hat{\Omega}_{d,S_j} - \sum_{G=\rho(S_j)} \omega_G (\Psi_G - c\hat{\Psi}_{c,G} - d\hat{\Psi}_{d,G}) \right)^B \quad (189)$$

Die Kostenfunktion  $J_2$  wird nun nach den unbekanntem Analysewerten an den drei umliegenden Gitterpunkten sowie den unbekanntem Fingerprintgewichten abgeleitet (hier am Beispiel von einer Station).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_A} = \left( \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d - \left[ \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \right] \right) (-\omega_A) \quad (190)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_B} = \left( \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d - \left[ \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \right] \right) (-\omega_B) \quad (191)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_C} = \left( \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d - \left[ \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \right] \right) (-\omega_C) \quad (192)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial c} = \left( \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d - \left[ \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \right] \right) \left( -\hat{\Omega}_c + \omega_A \hat{\Psi}_{c,A} + \omega_B \hat{\Psi}_{c,B} + \omega_C \hat{\Psi}_{c,C} \right) \quad (193)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial d} = \left( \Omega - c\hat{\Omega}_c - d\hat{\Omega}_d - \left[ \omega_A (\Psi_A - c\hat{\Psi}_{c,A} - d\hat{\Psi}_{d,A}) + \omega_B (\Psi_B - c\hat{\Psi}_{c,B} - d\hat{\Psi}_{d,B}) + \omega_C (\Psi_C - c\hat{\Psi}_{c,C} - d\hat{\Psi}_{d,C}) \right] \right) \left( -\hat{\Omega}_d + \omega_A \hat{\Psi}_{d,A} + \omega_B \hat{\Psi}_{d,B} + \omega_C \hat{\Psi}_{d,C} \right) \quad (194)$$

Mit der Einführung von  $\xi$  und durch Herausheben der Analysewerte und Fingerprintgewichte können die Gleichungen wie folgt vereinfacht und zusammengefasst werden.

$$\xi_c = \hat{\Omega}_c - \omega_A \hat{\Psi}_{c,A} - \omega_B \hat{\Psi}_{c,B} - \omega_C \hat{\Psi}_{c,C} \quad (195)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_A} + \omega_A \Omega = \Psi_A \omega_A^2 + \Psi_B \omega_A \omega_B + \Psi_C \omega_A \omega_C + c \omega_A \xi_c + d \omega_A \xi_d \quad (196)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_B} + \omega_B \Omega = \Psi_A \omega_A \omega_B + \Psi_B \omega_B^2 + \Psi_C \omega_B \omega_C + c \omega_B \xi_c + d \omega_B \xi_d \quad (197)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial \Psi_C} + \omega_C \Omega = \Psi_A \omega_A \omega_C + \Psi_B \omega_B \omega_C + \Psi_C \omega_C^2 + c \omega_C \xi_c + d \omega_C \xi_d \quad (198)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial c} + \xi_c \Omega = \Psi_A \omega_A \xi_c + \Psi_B \omega_B \xi_c + \Psi_C \omega_C \xi_c + c \xi_c^2 + d \xi_c \xi_d \quad (199)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_2}{\partial d} + \xi_d \Omega = \Psi_A \omega_A \xi_d + \Psi_B \omega_B \xi_d + \Psi_C \omega_C \xi_d + c \xi_c \xi_d + d \xi_d^2 \quad (200)$$

Im schon bekannten Beispiel mit sechs Gitterpunkten und einer Station, die von den Gitterpunkten  $A, B, C$  umgeben ist, nimmt das Gleichungssystem der Stationsmatrix durch die Inkludierung der Fingerprints folgende Form an.

$$\begin{pmatrix} \omega_A^2 & \omega_A \omega_B & \omega_A \omega_C & 0 & 0 & 0 & \omega_A \xi_c & \omega_A \xi_d \\ \omega_A \omega_B & \omega_B^2 & \omega_B \omega_C & 0 & 0 & 0 & \omega_B \xi_c & \omega_B \xi_d \\ \omega_A \omega_C & \omega_B \omega_C & \omega_C^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_C \xi_c & \omega_C \xi_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_A \xi_c & \omega_B \xi_c & \omega_C \xi_c & 0 & 0 & 0 & \xi_c^2 & \xi_c \xi_d \\ \omega_A \xi_d & \omega_B \xi_d & \omega_C \xi_d & 0 & 0 & 0 & \xi_c \xi_d & \xi_d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_A \Omega \\ \omega_B \Omega \\ \omega_C \Omega \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_c \Omega \\ \xi_d \Omega \end{pmatrix} \quad (201)$$

Wie auch schon in der Variante ohne Fingerprintfelder werden die Stationsmatrizen der einzelnen Stationen summiert und für die Berechnung der Analyse schließlich zur LAMA addiert, sodass das bereits bekannte Gleichungssystem gelöst werden kann. Die Matrizen und der Vektor der Analysewerte werden also um die Anzahl der Fingerprintfelder vergrößert.

$$(STAMA + LAMA) * \vec{\Psi} = \vec{v} \quad (202)$$

## Literaturverzeichnis

- Barnes, S. L. (1964), A Technique for Maximizing Details in Numerical Weather Map Analysis. *Journal of Applied Meteorology* **3**, 396–409.
- Bica, B., T. Knabl, R. Steinacker, M. Ratheiser, M. Dorninger, C. Lotteraner, S. Schneider, B. Chiamani, W. Gepp, und S. Tschannett (2007), Thermally and Dynamically Induced Pressure Features over Complex Terrain from High-Resolution Analyses. *Journal of Applied Meteorology* **46**, 50–65. doi:<https://doi.org/10.1175/JAM2418.1>.
- Collins, S. N., R. S. James, P. Ray, K. Chen, A. Lassman, und J. Brownlee (2013), Grids in Numerical Weather and Climate Models. In: P. Ray und Y. Zhang (eds.), *Climate Change and Regional/Local Responses*, IntechOpen. doi:<http://dx.doi.org/10.5772/55922>.
- Daley, R. (1991), *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge University Press. doi:<https://doi.org/10.1002/joc.3370120708>.
- Farrashkhalvat, M. und J. P. Miles (2003), *Basic Structured Grid Generation: With an Introduction to Unstructured Grid Generation*. Butterworth-Heinemann. doi:<https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5058-8.X5000-X>.
- Floater, M. S. (2015), Generalized barycentric coordinates and applications. *Acta Numerica* **24**, 161–214. doi:<https://doi.org/10.1017/S0962492914000129>.
- Gandin, L. (1965), Objective analysis of meteorological fields. *U.S. Dept. Commerce and National Science Foundation p. 242*. doi:<https://doi.org/10.1002/qj.49709239320>.
- Gilchrist, B. und G. P. Cressman (1954), An Experiment in Objective Analysis. *Tellus* **6**(4), 309–318.
- Kiralj, R. und M. M. C. Ferreira (2009), Basic Validation Procedures for Regression Models in QSAR and QSPR Studies: Theory and Application. *Journal of the Brazilian Chemical Society* **20**(4), 770–787. doi:<https://doi.org/10.1590/S0103-50532009000400021>.
- Knabner, P. und W. Barth (2013), *Lineare Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-642-32186-3>.
- Löscher, G. M. (2013), *Einführung in die VERA-Analyse mit Hilfe von Monte-Carlo Verfahren*. Master's thesis, Universität Wien.
- Lotteraner, C. (2009), *Synoptisch-klimatologische Auswertung von Windfeldern im Alpenraum*. Ph.D. thesis, Universität Wien.
- Mayer, D. (2007), *Wissenschaftliche Dokumentation VeraXX 2.0*. Universität Wien.
- Mayer, D. und R. Steinacker (2013), VERA - Ein objektives Verfahren zur Analyse von meteorologischen Messwerten. *Mitteilungsblatt des Hydrographischen Dienstes in Österreich* Nr. 88.
- Möbius, A. F. (1827), *Der barycentrische Calcul*. Johann Ambrosius Barth. doi:<https://doi.org/10.3931/e-rara-14538>.
- NOAA, W. P. C. (2013), *Unified Surface Analysis Manual*. Weather Prediction Center and Ocean Prediction Center and National Hurricane Center and Honolulu Forecast Office.

- Panofsky, H. A. (1949), Objective Weather-Map Analysis. *Journal of Meteorology* **6**, 386–392. doi:[https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1949\)006<0386:OWMA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006<0386:OWMA>2.0.CO;2).
- Pasini, A. (2003), From Observations To Simulations: A Conceptual Introduction To Weather And Climate Modelling. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd MLA (Modern Language Assoc.) Pasini, Antonello. From Observations To Simulations: A Conceptual Introduction To Weather And Climate Modelling. World Scientific, 2005. APA (American Psychological Assoc.) World Scientific Publishing Co. Ptc. Ltd. doi:<https://doi.org/10.1142/5930>.
- Sasaki, Y. (1958), An Objective Analysis Based on the Variational Method. *Journ. Met. Soc. Japan* **36**(3), 77–88. doi:[https://doi.org/10.2151/jmsj1923.36.3\\_77](https://doi.org/10.2151/jmsj1923.36.3_77).
- Sasaki, Y. (1970), Some Basic Formalisms in Numerical Variational Analysis. *Monthly Weather Review* **98**(12), 875–883. doi:[https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1970\)098<0875:SBFINV>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1970)098<0875:SBFINV>2.3.CO;2).
- Staniforth, A. und J. Thuburn (2012), Horizontal grids for global weather and climate prediction models: a review. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **138**, 1–26. doi:<https://doi.org/10.1002/qj.958>.
- Steinacker, R., C. Häberli, und W. Pötschacher (2000), A Transparent Method for the Analysis and Quality Evaluation of Irregularly Distributed and Noisy Observational Data. *Monthly Weather Review* **128**, 396–409. doi:[https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2000\)128<2303:ATMFTA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2000)128<2303:ATMFTA>2.0.CO;2).
- Steinacker, R., D. Mayer, und A. Steiner (2011), Data Quality Control Based on Self-Consistency. *Monthly Weather Review* **139**, 3974–3991. doi:<https://doi.org/10.1175/MWR-D-10-05024.1>.
- Steinacker, R., M. Ratheiser, B. Bica, B. Chimani, M. Dorninger, W. Gepp, C. Lotteraner, S. Schneider, und S. Tschannett (2006), A Mesoscale Data Analysis and Downscaling Method over Complex Terrain. *Monthly Weather Review* **134**, 2758–2771. doi:<https://doi.org/10.1175/MWR3196.1>.
- Tu, J., G. H. Yeoh, und C. Liu (2013), Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach. Butterworth-Heinemann. doi:<https://doi.org/10.1016/C2015-0-06135-4>.
- Vartziotis, D. und J. Wipper (2019), The GETMe Mesh Smoothing Framework. A Geometric Way to Quality Finite Element Meshes. CRC Press. doi:<https://doi.org/10.1201/9780429399626>.

## Abbildungsverzeichnis

1. Kreisförmige Domäne basierend auf einem strukturierten (links) und unstrukturierten (rechts) Gitter. Die Form der Gitterboxen (drei- oder viereckig) ist dabei nicht ausschlaggebend. Die Definition erfolgt über die konstante (strukturiert) oder variierende (unstrukturiert) Anzahl der Verbindungen zwischen Gitterpunkten gleichen Typs (Zentrum, Rand, oder Eckpunkt). Abbildung von Tu et al. (2013). . . . . 9
2. Dirichlet Zerlegung (Voronoi-Diagramm) der Gitterpunkte  $N_1, N_2, \dots, N_8$  in konvexe Polygone  $T_1, T_2, \dots, T_8$ . Jeder Punkt innerhalb von  $T_j$  ist näher zum Gitterpunkt  $N_j$  als zu jedem anderen Gitterpunkt. Abbildung von Farrashkhalvat und Miles (2003). . . . . 11

3.	Delaunay-Triangulierung der Gitterpunkte $N_1, N_2, \dots, N_8$ . Verbindungen werden zwischen angrenzenden Polygonen gebildet (vgl. Abbildung 2). Abbildung von Farrashkhalvat und Miles (2003). . . . .	11
4.	Unregelmäßig verteilte Gitterpunkte eines triangulären Gitters. Die Stationskoordinaten sind mit den Gitterpunktkoordinaten gleichgesetzt. . . . .	16
5.	Grafische Darstellung des Gewichtungsfaktors $\alpha$ für die umgebenden Gitterpunkte (nächste und übernächste Nachbarn) eines ausgewählten Gitterpunktes $A$ . Je näher die Gitterpunkte zusammen liegen, desto höher die Gewichtung. Die Bestimmung der optimalen Gewichtung wird in Abschnitt 4.1.2 erläutert. . . . .	17
6.	Eindimensionale Analyse mit dem Verfahren der Standard-VERA mit 37 Gitterpunkten und 4 Stationen mit Messwerten (rot). Für die Inter- und Extrapolation auf die Gitterpunkte wurden nur die Steigungen (schwarz), nur die Krümmungen (blau) und sowohl Steigungen, als auch Krümmungen (grün) minimiert. Abbildung von Mayer (2007). . .	19
7.	Grafische Darstellung des Gewichtungsfaktors $\gamma$ für einen ausgewählten Gitterpunkt $A$ . Das Gewicht wird als Anteil der mit dem Gitterpunkt $A$ verbundenen Dreiecke (orange) von der Gesamtfläche der Analysedomäne (gelb und orange) ausgedrückt. . . . .	20
8.	Graphische Veranschaulichung der Berechnung der baryzentrischen Gewichte (Gleichung 22, 23). Abbildung nach Floater (2015). . . . .	21
9.	Verschiedene Gitterkonfigurationen für trianguläre VERA Analysen mit idealisierten Koordinaten $x$ und $y$ . Stationen sind als rote, Gitterpunkte als blaue Punkte gekennzeichnet. a) Unstrukturiertes Gitter mit lokaler Verdichtung. b) Strukturiertes Gitter bei dem die Gitterpunkte so gewählt sind, dass eine Analyse auch mit der Standard-VERA berechnet werden kann. c) Unstrukturiertes Gitter. . . . .	23
10.	Analyse mit einem lokalen Minimum an einem Gitterpunkt mit klassischer Stationsmatrix. (Gitterpunktverifikation: $RMSE = 6.73, BIAS = -3.97$ ) . . . . .	25
11.	Tatsächliches Feld, das mit einer Analyse reproduziert werden soll. . . . .	25
12.	Analyse mit einem lokalen Minimum an einem Gitterpunkt mit verbesserter Stationsmatrix. (Gitterpunktverifikation: $RMSE = 2.9 \cdot 10^{-4}, BIAS = -10^{-4}$ ) . . . . .	25
13.	Idealisierte meteorologische Konfiguration "Tief" (ohne Fingerprint). . . . .	32
14.	Idealisierte meteorologische Konfiguration "Front" (ohne Fingerprint). . . . .	32
15.	Idealisierte meteorologische Konfiguration "Tief" (inkl. Fingerprint). Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten. . . . .	33
16.	Idealisierte meteorologische Konfiguration "Front" (inkl. Fingerprint). Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten. . . . .	33
17.	Fingerprintfeld aus trigonometrischen Funktionen, das eine idealisierte Topographie für die Analyse simuliert. Die roten Kreise entsprechen den Stationskoordinaten. . . . .	34
18.	Gitterpunktsanordnung (blaue Punkte), berücksichtigte Verbindungen zwischen Gitterpunkten (blaue Linien) und Stationsverteilung (rote Kreise) des experimentellen Setups. . . . .	34

19.	Optimierung der Gewichtung der Stationsmatrix im Verhältnis zur Large Matrix anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief. . . . .	35
20.	Optimierung der Distanzgewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief. Der Parameter $d$ auf der x-Achse bezieht sich auf die Distanzen zwischen den Gitterpunkten (vgl. Gleichung 12) . . . . .	35
21.	Optimierung der Flächengewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief. . . . .	36
22.	Optimierung der Ableitungsgewichte anhand des RMSE für beide idealisierten meteorologischen Situationen Front und Tief. . . . .	36
23.	Analyse mit Stationswerten der Funktion „Tief“ inkl. idealisiertem topographischen Fingerprint. Links oben: 3D-Darstellung der Analyse. Links unten: 2D-Darstellung der Analyse (blaue Punkte: Stationen). Leave-one-out cross-validation: $RMSE = 0.04$ und $BIAS = 0.01$ , Gitterpunktverifikation: $RMSE = 0.18$ und $BIAS = 0.12$ . Rechts unten: 2D-Darstellung der tatsächlichen Funktionswerte. . . . .	37
24.	Analyse mit Stationswerten der Funktion „Front“ inkl. idealisiertem topographischen Fingerprint. Links oben: 3D-Darstellung der Analyse. Links unten: 2D-Darstellung der Analyse (blaue Punkte: Stationen). Leave-one-out cross-validation: $RMSE = 0.38$ und $BIAS = 0.02$ , Gitterpunktverifikation: $RMSE = 0.40$ und $BIAS = -0.14$ . Rechts unten: 2D-Darstellung der tatsächlichen Funktionswerte. . . . .	38
25.	Stationskonfiguration „Insel“. Die Stationen sind wie auf Inseln oftmals üblich am Inselrand konzentriert. . . . .	39
26.	Stationskonfiguration „Küste 1“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier im Zentrum einer Gitterbox der Standard-VERA). . . . .	39
27.	Stationskonfiguration „Küste 2“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier im linken bzw. rechten oberen Bereich einer Gitterbox der Standard-VERA). . . . .	40
28.	Stationskonfiguration „Küste 3“. Die Stationen sind wie oftmals üblich entlang der Küstenlinien angeordnet (hier direkt auf den Gitterpunkten). . . . .	40
29.	Vergleich der Analysen von Standard- und triangulärer VERA für die Konfiguration Front anhand des RMSE. Fünf Stationskonfiguration wurden mittels Cross-validation verifiziert, eine davon (Zufall) auch mittels Gitterpunktverifikation. . . . .	40
30.	Wie Abbildung 29, aber für den BIAS. . . . .	40
31.	Wie Abbildung 29, aber für die Konfiguration Tief. . . . .	41
32.	Wie Abbildung 29, aber für den BIAS der Konfiguration Tief. . . . .	41