

Sonderdruck aus der Physikalischen Zeitschrift

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

H. Thirring

Über die Wirkung rotierender ferner Massen in
der Einsteinschen Gravitationstheorie

Korrigiert nach Besprechung mit W. Pauli

=====
14. II. 1919

Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von Hans Thirring.

Die Überlegungen, denen die vorliegende Arbeit ihr Entstehen verdankt, lassen sich am besten klarmachen durch ein Zitat aus Einsteins grundlegender Arbeit vom Jahre 1914¹⁾. Er sagt da einleitend folgendes:

„Zunächst scheint es nun allerdings, daß eine derartige Erweiterung der Relativitätstheorie aus physikalischen Gründen abzulehnen sei. Es sei nämlich K ein im Galilei-Newtonschen Sinne berechtigtes Koordinatensystem, K' ein relativ zu K gleichförmig rotierendes Koordinatensystem. Dann wirken auf relativ zu K' ruhende Massen Zentrifugalkräfte, während auf relativ zu K ruhende Massen solche nicht wirken. Hierin sah bereits Newton einen Beweis dafür, daß man die Rotation von K' als eine „absolute“ aufzufassen habe, daß man also K' nicht mit demselben Rechte wie K als „ruhend“ behandeln könne. Dies Argument ist aber — wie insbesondere E. Mach ausgeführt hat — nicht stichhaltig. Die Existenz jener Zentrifugalkräfte brauchen wir nämlich nicht notwendig auf eine Bewegung von K' zurückzuführen; wir können sie vielmehr ebensogut zurückführen auf die durchschnittliche Rotationsbewegung der ponderablen fernen Massen in der Umgebung in bezug auf K' , wobei wir K' als ruhend behandeln. Lassen die Newtonschen Gesetze der Mechanik eine solche Auffassung nicht zu, so kann dies sehr wohl in Mängeln dieser Theorie begründet sein. . . .“

Da nun die Einsteinsche Theorie in den Publikationen von 1915 fertig ausgebaut zu sein scheint, liegt es nahe zu fragen: Ist die neue Theorie insofern frei von den Mängeln der Newtonschen, als tatsächlich die Rotation ferner

Massen gemäß ihren Gleichungen ein Gravitationsfeld erzeugt, das einem „Zentrifugalfeld“ äquivalent ist? Man wird vielleicht versucht sein, eine Diskussion dieser Frage für müßig zu halten, indem man sagt, daß die geforderte Äquivalenz durch die allgemeine Kovarianz der Feldgleichungen gewährleistet sei. Nun liegt die Sache aber doch nicht ganz so einfach, da ja auch die Randbedingungen für die $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen eine Rolle spielen. Die diesbezüglichen Fragen prinzipieller Natur sind in den Arbeiten von De Sitter¹⁾ und Einstein²⁾ behandelt worden. Es soll nun im folgenden auf diese allgemeinen Fragen nicht eingegangen werden; wir wollen vielmehr an einem speziellen konkreten Beispiel das Feld rotierender ferner Massen durchrechnen und studieren. Zu diesem Zwecke eignet sich ausgezeichnet die von Einstein³⁾ angegebene Methode der näherungsweise Integration der Feldgleichungen, welche den folgenden Rechnungen als Grundlage dienen soll. Wir wählen als Beispiel das Feld im Innern einer gleichförmig rotierenden, unendlich dünnen Hohlkugel, welche mit konstanter Massendichte belegt ist.

Im ersten Abschnitte dieser Arbeit (welcher ohne Beeinträchtigung des Verständnisses für das folgende überschlagen werden kann) wird die näherungsweise Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für das Innere der Kugelschale durchgeführt, im zweiten Abschnitt wird die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Felde diskutiert.

A. Rechnerischer Teil: Die Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für die Umgebung des Mittelpunktes der rotierenden Hohlkugel.

Bezeichnungen:

a Radius der Hohlkugel;

M ihre Masse;

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1030; vgl. auch Ann. d. Phys. 49, 769, 1916.

1) De Sitter, Amsterdam Proc. 19, 527, 1917.

2) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142.

3) A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 688.



- ω ihre Winkelgeschwindigkeit;
- x, y, z rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche;
- x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Aufpunktes;
- κ Gravitationskonstante;
- ρ_0 natürliche gemessene Raumdichte der Materie.

Was die Gesichtspunkte der bei der Feldberechnung benutzten Approximationen anlangt, ist folgendes vorauszuschicken: Das Feld in der Umgebung des Kugelmittelpunktes wird als so schwach betrachtet, daß in den Feldgleichungen nur die Glieder, welche in bezug auf die Größen $\gamma_{\mu\nu}$ erster Ordnung sind, in Rechnung gesetzt werden ($\gamma_{\mu\nu}$ definiert durch: $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$). Diese Vernachlässigung ermöglicht die Verwendung der Einsteinschen Methode der näherungsweise Integration der Feldgleichungen. Nach dem zweiten oft benutzten Gesichtspunkt der Approximation werden die Geschwindigkeitskomponenten der ponderablen Materie als klein gegenüber der Einheit (Lichtgeschwindigkeit) angesehen, so daß in jener grössten Näherung, welche auf die Newtonsche Theorie führt, schon ihre ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Wir wollen diese Approximation — die von der ersten völlig unabhängig ist — nur insoweit anwenden, als wir die Glieder dritter und höherer Ordnung in den Geschwindigkeiten gegen 1 streichen. Schließlich beziehen sich unsere Rechnungen auf die Umgebung des Kugelmittelpunktes; sei r der Abstand Aufpunkt—Kugelmittelpunkt und R der Abstand Aufpunkt—Integrationselement, so werden wir $\frac{1}{R}$ in eine Potenzreihe nach $\frac{r}{a}$ entwickeln, die wir nach der zweiten Potenz abbrechen werden.

Die Einsteinsche Methode der näherungs-

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \begin{pmatrix} -a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi, & +a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi, & 0 & i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi \\ +a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi, & -a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi, & 0 & -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi, & -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi, & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Da wir unter ρ_0 die natürlich gemessene Dichte der Materie verstehen, haben wir, um den Tensorcharakter des Integrals (2) zu wahren, für dV_0 ebenfalls das natürlich gemessene räumliche Volumelement zu setzen. Für dieses gilt die Formel¹⁾:

$$dV_0 = \sqrt{g} i \frac{dx_4}{ds} dV. \quad (7)$$

Für die Integration führen wir Polarkoordinaten ein, daher

$$\sqrt{g} dV = a^2 da \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (8)$$

1) Vgl. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1058, Gl. (47a).

weisen Integration liefert zur Berechnung der $g_{\mu\nu}$ folgende Vorschriften:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = 1, \mu = \nu, \quad (1)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu} = \frac{\kappa}{2} \sum_a \gamma_{\mu\nu}^a \quad (2)$$

$$\gamma_{\mu\nu}^a = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x, y, z, t-r)}{R} dV_0. \quad (3)$$

Dabei ist $T_{\mu\nu}$ der kovariante Energietensor der Materie, dV_0 das räumliche Volumelement des Integrationsraumes,

$$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2.$$

Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des Linienelements beziehen sich auf die Koordinaten $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = it$.

Nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation dürfen wir den kovarianten Energietensor durch den kontravarianten ersetzen; er ist bei Vernachlässigung der Spannungen gegeben durch:

$$T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4} \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \quad (4)$$

Die Hohlkugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, dann gilt für einen ihrer Punkte, der die Polarkoordinaten a, ϑ, φ hat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_4} &= -i \frac{dx}{dt} = i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \frac{dx_2}{dx_4} &= -i \frac{dy}{dt} = -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \frac{dx_3}{dx_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Werte liefern in (4) eingesetzt für $T_{\mu\nu}$ das folgende Schema:

Schließlich haben wir noch $\frac{1}{R}$ durch die Integrationsvariablen auszudrücken. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Aufpunkt in die Z - X -Ebene fällt, seine Koordinaten sind dann:

$$x_0 = r \sin \vartheta_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = r \cos \vartheta_0.$$

Dann gilt:
 $R^2 = (a \sin \vartheta \cos \vartheta - r \sin \vartheta_0)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + (a \cos \vartheta - r \cos \vartheta_0)^2 =$

$$= a^2 \left[1 - \frac{2r}{a} (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0) + \frac{r^2}{a^2} \right].$$

Entwicklung in die binomische Reihe liefert mit den eingangs angegebenen Vernachlässigungen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{r}{a} (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0)^2 \right\}. \quad (9)$$

Wir bezeichnen den Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit K und schreiben:

$$\frac{1}{R} = \frac{K}{a}. \quad (9a)$$

Einsetzen von (6), (7), (8) und (9a) in (3) gibt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \rho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi K, \\ \gamma_{22}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \rho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi K, \\ \gamma_{44}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \rho_0 a da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin \vartheta K, \\ \gamma_{12}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \rho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin^3 \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi K, \\ \gamma_{14}' &= \frac{\kappa}{2\pi} \rho_0 a^2 \omega da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin^2 \vartheta \sin \vartheta K, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \rho_0 a^2 \omega da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta K, \\ \gamma_{13}' &= \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Absolutwert der Größe $\frac{dx_4}{ds}$ unterscheidet sich von der Einheit nur um Glieder von der Größenordnung $\omega^2 a^2$; sie tritt in den kleinen Größen erster Ordnung $\gamma_{\mu\nu}'$ als Faktor auf; es genügt daher, wenn man sie aus dem Ausdruck „nullter“ Annäherung für das Linienelement berechnet:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2, \\ \frac{ds^2}{dx_4^2} &= -1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_4^2} = -1 + \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta, \\ \frac{ds}{dx_4} &= i \left(1 - \frac{\omega^2 a^2}{2} \sin^2 \vartheta \right); \\ \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 &= i \left(1 + \frac{3}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Da unsere Rechnungsgenauigkeit sich nur bis auf Glieder der Ordnung $\omega^2 a^2$ erstreckt, können wir in allen jenen $\gamma_{\mu\nu}'$, welche den Faktor ωa

schon enthalten, $\left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 = i$ setzen; bloß für

γ_{44}' verwenden wir den Ausdruck (11). Wir setzen noch

$$\rho_0 da = \sigma,$$

dann gehen Gl. (10) über in:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi K, \\ \gamma_{22}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi K, \\ \gamma_{44}' &= \frac{\kappa}{2\pi} \sigma a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta K \left(1 + \frac{3}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta \right), \\ \gamma_{12}' &= \frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta K, \\ \gamma_{14}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \sigma a^2 \omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta \sin \vartheta K, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \sigma a^2 \omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta \cos \vartheta K, \\ \gamma_{13}' &= \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\int \rho_0 i \frac{dx_4}{ds} = M$$

Wenn man in diese Ausdrücke den Wert von K aus (9) einsetzt und die Integrale auswertet, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= -\frac{\kappa M}{2\pi 3a} a^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r^2}{5a^2}\right), \\ \gamma_{22}' &= -\frac{\kappa M}{2\pi 3a} a^2 \omega^2 \left\{1 - \frac{r^2}{5a^2} \left(1 - 3 \sin^2 \vartheta_0\right)\right\}, \\ \gamma_{44}' &= \frac{\kappa M}{2\pi a} \left\{1 + \frac{a^2 \omega^2}{3} \left[1 - \frac{2r^2}{5a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta_0\right)\right]\right\}, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{i\kappa M}{2\pi 3a} \omega r \sin \vartheta_0, \\ \gamma_{12}' = \gamma_{14}' = \gamma_{13}' = \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' &= 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

Aus diesen Werten erhält man unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) die $\gamma_{\mu\nu}$ und hernach die $g_{\mu\nu}$. Wir setzen noch an Stelle der Polarkoordinaten r und ϑ_0 des Aufpunktes seine rechtwinkligen Koordinaten und ersetzen die Einsteinsche Gravitationskonstante κ durch die gewöhnliche: $k = \frac{\kappa}{8\pi}$ (Lichtgeschwindigkeit = 1). Dann ergibt sich:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2x^2 + x^2 - 3y^2)\right], & + \frac{4kM \omega^2}{a} xy, & 0, & + i \frac{4kM}{3a} \omega y, \\ + \frac{4kM \omega^2}{a} xy, & -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2x^2 - 3x^2 + y^2)\right], & 0, & -i \frac{4kM}{3a} \omega x, \\ 0, & 0, & -1, & 0, \\ + i \frac{4kM}{3a} \omega y, & -i \frac{4kM}{3a} \omega x, & 0, & -1 + \frac{2kM}{a} \left[1 + \frac{a^2 \omega^2}{10} (2x^2 - 3x^2 + y^2)\right] \end{pmatrix} (16)$$

Der Index 0 bei den Koordinaten ist hier weggelassen; x, y, z bedeuten von nun an die Koordinaten des Aufpunktes.

B. Physikalischer Teil: Die Bewegung eines Massenpunktes im Innern der rotierenden Hohlkugel.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes aufstellen, der sich in der Nähe des Mittelpunktes unserer rotierenden Kugelschale befindet. Das Feld in dieser Umgebung ist charakterisiert durch das Koeffizientenschema der $g_{\mu\nu}$ (Gl (16) des ersten Abschnittes).

Das Bewegungsgesetz für einen Massenpunkt ist in der Einsteinschen Theorie bekanntlich gegeben durch die Bedingung

$$\delta s = 0, \text{ oder, wenn man die Variation ausführt: } \frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad \tau = 1 \dots 4. (17)$$

1) Über Indizes, die zweimal vorkommen, ist von 1 bis 4 zu summieren.

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= -1 - \frac{2kM}{a} \left\{1 + \frac{a^2 \omega^2}{3} - \frac{2\omega^2}{10} (2z_0^2 + x_0^2)\right\}, \\ g_{22} &= -1 - \frac{2kM}{a} \left\{1 + \frac{a^2 \omega^2}{3} - \frac{2\omega^2}{10} (2z_0^2 - 2x_0^2)\right\}, \\ g_{33} &= -1, \\ g_{44} &= -1 + \frac{2kM}{a} \left\{1 + \frac{a^2 \omega^2}{3} - \frac{2\omega^2}{10} (2z_0^2 - x_0^2)\right\}, \\ g_{24} &= -i \frac{4kM}{3a} \omega x_0, \end{aligned} \right\}$$

alle übrigen $g_{\mu\nu}$ verschwinden.

Wir wollen uns nun noch von der speziellen Wahl des Koordinatensystems frei machen. (Wir hatten ja den Aufpunkt in die $z-x$ -Ebene gelegt.) Zu diesem Zwecke machen wir die Transformation:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ x_2' &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= x_4. \end{aligned} \right\} (15)$$

Dann geht mittels der Transformationsformel für einen kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$g_{\alpha\beta}' = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha'} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\beta'} g_{\mu\nu}$$

das Koeffizientenschema über in:

$$g_{\mu\nu}' = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2x^2 + x^2 - 3y^2)\right], & + \frac{4kM \omega^2}{a} xy, & 0, & + i \frac{4kM}{3a} \omega y, \\ + \frac{4kM \omega^2}{a} xy, & -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2x^2 - 3x^2 + y^2)\right], & 0, & -i \frac{4kM}{3a} \omega x, \\ 0, & 0, & -1, & 0, \\ + i \frac{4kM}{3a} \omega y, & -i \frac{4kM}{3a} \omega x, & 0, & -1 + \frac{2kM}{a} \left[1 + \frac{a^2 \omega^2}{10} (2x^2 - 3x^2 + y^2)\right] \end{pmatrix}$$

Für die „Feldkomponenten“ $\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ gilt nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = -\frac{\{\mu\nu\}}{\{\tau\}} = \frac{\{\mu\nu\}}{\{\tau\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\tau\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} \right) (18)$$

Wir wollen bloß Bewegungen des Massenpunktes betrachten, welche klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, so daß wir die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigen können. Dann kann man auf der rechten Seite der Gleichungen (17) alle jene Glieder streichen, in denen der Index 4 nicht vorkommt, und kann außerdem die Ableitungen nach s durch solche nach t ersetzen. Die Gleichungen (17) gehen dann unter Berücksichtigung

$$\text{von } \frac{dx_4}{dt} = i \text{ über in: } \frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = 2i \left(\Gamma_{14}^\tau \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{24}^\tau \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{34}^\tau \frac{dx_3}{dt} \right) - \Gamma_{44}^\tau (19)$$

Von den Feldkomponenten $\Gamma_{\mu\nu}^\tau$, kommen also für das folgende nur jene in Betracht, welche den Index 4 mindestens einmal enthalten. Das sind 16 Größen, die (obwohl sie keine Tensorkomponenten sind!) in unserem Falle sich nach dem Schema eines antisymmetrischen Tensors zweiten Ranges darstellen lassen. Denn, da im stationären Felde die partiellen Ableitungen nach x_4 sämtlich verschwinden, lassen sich die Größen $\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ folgendermaßen schreiben: 1)

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{14}^\tau &= 0 & \Gamma_{24}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{34}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{44}^\tau &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} \\ \Gamma_{14}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{24}^\tau &= 0 & \Gamma_{34}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{44}^\tau &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} \\ \Gamma_{14}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{24}^\tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{34}^\tau &= 0 & \Gamma_{44}^\tau &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} \\ \Gamma_{14}^\tau &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} & \Gamma_{24}^\tau &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} & \Gamma_{34}^\tau &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} & \Gamma_{44}^\tau &= 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

Setzt man hier die speziellen Werte der $g_{\mu\nu}$ aus (16) ein, so ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \frac{4kM}{3a} \omega & 0 & -\frac{4kM}{3a} \omega^2 x \cdot \frac{4kM}{15a} \\ -i \frac{4kM}{3a} \omega & 0 & 0 & -\frac{4kM}{3a} \omega^2 y \cdot \frac{4kM}{15a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4kM}{3a} \omega^2 z \cdot \frac{4kM}{15a} \\ \frac{kM}{3a} \omega^2 x & \frac{kM}{3a} \omega^2 y & -\frac{2kM}{3a} \omega^2 z & 0 \end{pmatrix} (21)$$

Aus (19) und (21) erhalten wir dann die Bewegungsgleichungen für unser spezielles Problem:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{8kM}{3a} \omega y + \frac{4kM}{15a} \omega^2 x, \\ \ddot{y} &= \frac{8kM}{3a} \omega x + \frac{4kM}{15a} \omega^2 y, \\ \ddot{z} &= -\frac{8kM}{3a} \omega z + \frac{4kM}{15a} \omega^2 z. \end{aligned} \right\} (22)$$

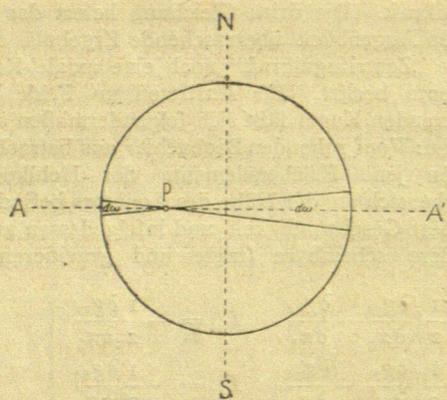
Die rechten Seiten der Gleichungen stellen die Komponenten der Kraft dar, welche unser Feld auf den Massenpunkt mit der Masse 1 ausübt. Wie man sieht, entspricht das erste Glied der X- und Y-Komponente vollständig der Corioliskraft, das zweite Glied der Zentri-

1) Man beachte, daß dieses Schema vollständig dem Sechservektor \mathcal{M} des elektromagnetischen Feldes entspricht. Die Analogie zwischen Elektrodynamik und (angenäherter) Gravitationstheorie geht noch weiter, wenn man bedenkt, daß bei der näherungsweise Integration die Größen $g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{44}$ sich aus der Dichte und Geschwindigkeit der Materie genau so berechnen, wie die Potentiale $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z, \Phi$ aus dem elektrischen Viererstrom, und ferner noch, daß in unserem Falle die rechten Seiten der Gl. (19) bis auf numerische Faktoren vollständig den Komponenten der ponderomotorischen Kraft $\mathcal{E} + [\mathcal{v}\mathcal{H}]$ entsprechen!

fugalkraft. Die dritte Gleichung liefert das im ersten Augenblick überraschende Ergebnis, daß diese „Zentrifugalkraft“ noch eine axiale Komponente besitzt. Ihr Auftreten im Felde der rotierenden Kugel läßt sich folgendermaßen aufklären: Vom ruhenden Beobachter aus betrachtet haben jene Flächenelemente der Hohlkugel, welche sich in der Nähe des Äquators befinden, größere Geschwindigkeit, und infolgedessen auch größere scheinbare (träge und gravitierende)

Masse als jene, die sich in der Umgebung der Pole befinden. Das Feld einer mit konstanter Flächendichte belegten rotierenden Hohlkugel entspricht also dem einer ruhenden Kugelschale, bei welcher die Flächendichte mit wachsendem Polabstand ϑ zunimmt. Daß im letzteren Falle Punkte, die außerhalb der Äquatorebene liegen, in sie hineingezogen werden, ist ohne weiteres verständlich.

(Man kann sich, nebenbei bemerkt, auch unschwer veranschaulichen, daß im Innern einer derart ungleichförmig mit Massendichte belegten Hohlkugel Kräfte auftreten, die der Zentrifugalkraft analog sind. In der Potentialtheorie kann man bekanntlich das Verschwinden des Kraftfeldes im Innern einer mit konstanter Flächendichte geladenen Hohlkugel so zeigen: Die Anziehungskraft der Flächenelemente, die von P aus betrachtet (vgl. Figur) unter dem Gesichtswinkel $d\omega$ gesehen werden, ist gleich und entgegengesetzt der Kraft, die von den Flächenelementen ausgeübt wird, die in dem zu $d\omega$ gehörigen Scheitelwinkel $d\omega'$ liegen. Das trifft natürlich bei ungleichförmiger Dichtebelegung nicht mehr zu. Sei AA' die Äquatorebene, dann liegen bei der in der Figur ge-



zeichneten Lage des Punktes P innerhalb des Gesichtswinkels $d\omega$ Flächenelemente, die im Mittel näher zum Äquator liegen, daher spezifisch schwerer sind als die von $d\omega'$. Es resultiert also eine Kraft in der Richtung $A'A$, d. i. ein Zug senkrecht auf die Drehungsachse nach außen, die um so kleiner wird, je näher der Aufpunkt P gegen den Mittelpunkt rückt.)

Daß wir in der Natur bloß eine radiale, aber nie eine axiale Komponente der Zentrifugalkraft kennen gelernt haben, ließe sich nun mit den hier gefundenen Resultaten etwa dadurch in Einklang bringen, daß wir sagen: Die Approximation des Fixsternhimmels durch eine unendlich dünne Hohlkugel ist eben eine unrichtige. Aber selbst wenn wir unsere Approximation (etwa durch eine räumliche Massenverteilung) verbessern wollten, erhielten wir bei der hier verwendeten Integrationsmethode niemals ein Feld, das einem wirklichen Zentrifugalfelde vollkommen äquivalent ist. Ein solches Feld erhielten wir dann, wenn wir uns sämtliche im Außenraum befindliche Massen (Milchstraßensysteme usw.) rotierend denken und ihre Gravitationswirkung berechnen. Die Lösung für die retardierten Potentiale (Gl. (3)) setzt aber die Randbedingung $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ für das räumlich Unendliche voraus. Wie nun Einstein in seiner kosmologischen Arbeit¹⁾ gezeigt hat, sind diese Randbedingungen angenähert erfüllt für ein Koordinatensystem, gegen das im Mittel die Fixsterne ruhen. Unsere Lösung (16) stellt demnach nicht das Feld einer „allein auf der Welt befindlichen“ rotierenden Hohlkugel dar, sondern das Feld im Innern einer solchen Hohlkugel, außerhalb welcher sich in noch viel größerer Entfernung vom Ursprung Massen befinden, die im Mittel gegen das gewählte Bezugssystem ruhen. Das durch die Gl. (16) dargestellte Feld ist also beispielsweise jenes, das im Orte des

1) Berl. Ber. 1917, S. 142.

Sonnenmittelpunktes bestünde, wenn statt der Sonne und aller Planeten eine große Hohlkugel, etwa vom Radius der Neptunbahn, vorhanden wäre, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Fixsterne rotiert. Befänden sich im Zentrum dieser Kugel auf einem Weltkörper, dessen eigenes Schwerfeld vernachlässigt werden kann und der mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um dieselbe Achse rotiert, Beobachter, so würden sie Zentrifugal- und Corioliskräfte wahrnehmen, die sich aus der Wirkung ihrer eigenen Rotation und der Wirkung der rotierenden Hohlkugel zusammensetzen. Der Einfluß des Feldes der Hohlkugel auf das von der Eigenrotation herührende Zentrifugalfeld soll im folgenden studiert werden.

Wir führen zu diesem Zwecke ein Koordinatensystem ein, das mit dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotierenden Bezugskörper fest verbunden ist. Das geschieht mittels der Transformation:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \omega' \frac{x_4}{i} + \sin \omega' \frac{x_4}{i}; & z' &= z, \\ y' &= -x \sin \omega' \frac{x_4}{i} + y \cos \omega' \frac{x_4}{i}; & x_4' &= x_4. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Durch diese Transformation gehen die uns interessierenden Größen $g_{\mu\nu}$ über in:

$$\left. \begin{aligned} g_{14}' &= -iy' \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{3a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right], \\ g_{24}' &= ix' \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{3a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right], \\ g_{44}' &= -1 + \frac{2kM}{a} \left[1 + \frac{1}{15} \frac{a^2 \omega^2}{\omega'^2} \frac{\omega^2}{z^2} \right] + \\ &\quad + (\omega'^2 + \omega^2) \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega \omega' \frac{8kM}{3a} + \omega^2 \frac{4kM}{15a} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Bildet man aus diesen Größen gemäß (19) und (20) die Bewegungsgleichungen, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right] \dot{y} + \\ &\quad + \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \omega' \frac{8kM}{3a} + \omega^2 \frac{4kM}{15a} \right\} x, \\ \ddot{y} &= -2 \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right] \dot{x} + \\ &\quad + \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \omega' \frac{8kM}{3a} + \omega^2 \frac{4kM}{15a} \right\} y, \\ \ddot{z} &= -\frac{8kM}{15a} \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Setzt man hier $M = 0$, so erhält man das gewöhnliche Zentrifugal-Coriolisfeld:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega' \dot{y} + \omega'^2 x, \\ \ddot{y} &= -2\omega' \dot{x} + \omega'^2 y, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Setzt man $M \neq 0$, $\omega = 0$, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) \dot{y} + \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) x, \\ \ddot{y} &= -2\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) \dot{x} + \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) y, \\ \ddot{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

woraus man ersehen kann, wie die Trägheitswirkungen durch die Anwesenheit der umgebenden Massen M beeinflusst werden. Zentrifugal- und Corioliskraft multiplizieren sich mit dem Faktor $\left(1 + \frac{2kM}{a} \right)$.

Aus den Gl. (25) selbst ersieht man schließlich, daß die Wirkung einer gleichsinnigen Rotation der Hohlkugel in einer Verkleinerung der Zentrifugal- und Corioliskraft besteht. Setzt man

$$\omega' = \omega \frac{4kM}{3(2kM + a)}, \quad (28)$$

so verschwindet die Corioliskraft. Man könnte die Größe $\frac{4kM}{3(2kM + a)}$ als den Mitführungskoeffizienten der Hohlkugel in bezug auf die Corioliskraft bezeichnen. Die Zentrifugalkraft kann nicht zum Verschwinden gebracht werden, da die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern Gl. (25) gleich Null gesetzt keine reellen Wurzeln für ω liefern. Im „ruhenden“ Bezugssystem ($\omega' = 0$) war der Wert der Zentrifugalkraft

$$\frac{kM}{3a} \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Läßt man nun das Bezugssystem gleichsinnig mit der Hohlkugel mitrotieren, so wird zunächst für kleine Werte von ω' die Zentrifugalkraft abnehmen und erreicht ein Minimum, wenn $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem ~~kleinen~~ Wert des „Mitführungs-

koeffizienten“ geworden ist¹⁾. Von da ab wächst sie wieder und erreicht, sobald $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem *doppelten*

Mitführungskoeffizienten wird, wieder den ursprünglichen Wert, den sie für $\omega' = 0$ hatte. Mit wachsendem ω' steigt sie dann weiter und erreicht für große ω' einen Betrag, der sich von dem Werte, den sie ohne Anwesenheit der Hohlkugel hätte (nämlich $\omega'^2 \sqrt{x^2 + y^2}$), nur wenig unterscheidet, da ja unseren Voraussetzungen gemäß $\frac{2kM}{a}$ klein gegen 1 ist.

Es scheint im ersten Augenblicke dem Wesen einer Relativitätstheorie zu widersprechen, daß die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (25) nicht bloß von der Differenz $\omega - \omega'$ abhängen. Man darf aber nicht vergessen, daß wir es bei dem hier behandelten Problem nicht nur mit zwei Körpern: Massenpunkt und Hohlkugel zu tun haben, sondern daß vielmehr durch die Randbedingungen $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ als drittes feldbestimmendes Element noch weiter entfernte Massen hineingebracht werden, welche gegenüber dem zuerst gewählten Bezugssysteme ruhen.

Zusammenfassung.

Es wird an einem konkreten Beispiel gezeigt, daß im (Einsteinschen) Gravitationsfelde ferner rotierender Massen Kräfte auftreten, die der Zentrifugal- bzw. Corioliskraft analog sind. Die dem gerechneten Spezialfalle anhaftenden Eigenheiten werden durchdiskutiert.

1) Davon kann man sich durch Differentiation der Klammergröße sofort überzeugen.

Wien, Dezember 1917, Institut für theoret. Physik der Universität.

(Eingegangen 21. Dezember 1917.)