MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Grundvorstellungen zu den Konzepten
`Stetigkeit´ und `Differenzierbarkeit´
von angehenden Mathematiklehrer*innen"

verfasst von / submitted by

Antonia Spannagl, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 520 526 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Mathematik Unterrichtsfach Russisch
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einen großen Dank an all diejenigen aussprechen, die mich beim Anfertigen meiner Masterarbeit unterstützt haben und dadurch zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn ao. Univ.-Prof- Mag. Dr. Stefan Götz, welcher meine Arbeit betreut hat. Für die Hilfe bei der Themenfindung, die konstruktive Kritik bei der Erstellung, die präzise Korrektur und das immer offene Ohr für neue Ideen, Anregungen und Fragen aller Art möchte ich mich herzlichst bedanken!

Ich bedanke mich auch beim gesamten Team des „BELLA"-Projekts dafür, dass sie mich so herzlich aufgenommen, all meine Fragen beantwortet und mir die Fragebögen des Projektes zur Verfügung gestellt haben.

Ein großes Dankeschön gilt meinen Eltern, die mich nicht nur emotional unterstützt und motiviert haben, sondern sich auch die Zeit genommen haben diese Arbeit Korrektur zu lesen und während des Entstehungsprozesses all meine Fragen zur wissenschaftlichen Vorgehensweise zu beantworten.

Herzlichen Dank auch an meine Großeltern, meine Schwester und meinen Freund, die immer ein offenes Ohr für mich gehabt haben, mich ganz selbstverständlich bei meinem Tun unterstützt haben und mir geduldig mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Abstract

Die vorliegende Masterarbeit untersucht, welche und wie viele Grundvorstellungen zur Stetigkeit und zur Differenzierbarkeit bei Mathematiklehramtsstudierenden vor und nach der theoretischen Beschäftigung mit Grundvorstellungen allgemein und zu ebendiesen Begriffen ausgeprägt sind. Diese empirische Untersuchung wurde mittels schriftlicher Datenerhebungen zu Beginn und zum Schluss einer universitären Lehrveranstaltung durchgeführt. Die Antworten auf die offenen Fragen wurden Grundvorstellungen zugeordnet und anschließend der Zusammenhang mit individuellen Merkmalen der Studierenden analysiert und die Antworten der beiden Fragebögen verglichen, um die Veränderung der Ausprägung und der Anzahl der Grundvorstellungen durch die theoretische Auseinandersetzung zu untersuchen.

Die Studie ergibt, dass die Grundvorstellungen zur Stetigkeit bei Mathematiklehramtsstudierenden besser verankert sind als die zur Differenzierbarkeit. Eine Steigerung der Anzahl der Grundvorstellungen vom ersten auf den zweiten Fragebogen kann bei beiden Begriffen festgestellt werden.

Abstract

This master´s thesis examines which and how many Grundvorstellungen about continuity and differentiability are developed by trainees mathematics teachers - with and without theoretical input about Grundvorstellungen.

This empirical study was carried out via written surveys before and after the completion of a university course, in which Grundvorstellungen were discussed. The answers to the open-ended questions were assigned to the Grundvorstellungen. Subsequently, the connection with individual characteristics of the students was analysed. Afterwards the answers to the two questionnaires were compared in order to analyse changes in the level of expression and in the number of Grundvorstellungen.

The study shows that the Grundvorstellungen about continuity are better established than those about differentiability. An increase of the number of Grundvorstellungen from the first to the second questionnaire can be observed for both terms.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ sind zwei zentrale Begriffe in der Mathematik, die daher einen Platz im Lehrplan der Sekundarstufe 2 besitzen.

Beide Begriffe sind grundlegend für viele Sätze und Definitionen in der Analysis, weshalb das Verständnis dieser für alle Lernenden relevant für die weitere Beschäftigung mit der Oberstufenmathematik ist. Da weder die Konzepte der Stetigkeit noch die der Differenzierbarkeit leicht zu erfassen sind, sollen Grundvorstellungen zu diesen bei jedem und jeder Lernenden ausgebildet werden. Diese Vorstellungen müssen nicht fachlich vollkommen korrekt sein, sie sind eine Unterstützung für die Lernenden, um mit den Begriffen gut umgehen zu können. Es gibt je nach Literatur unterschiedliche Grundvorstellungen, in dieser Arbeit wird mit den Grundvorstellungen Sprungfreiheit, Vorhersagbarkeit und Darstellbarkeit als Grundvorstellungen zu dem Stetigkeitsbegriff gearbeitet. Verbreitete Grundvorstellungen zu dem Differenzierbarkeitsbegriff sind die lokale Änderungsrate, die Tangentensteigung, die lokale Linearität und der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen. Diese Grundvorstellungen bilden sich durch die Beschäftigung mit unterschiedlichen Aufgaben zu den Begriffen und durch die theoretische Auseinandersetzung mit diesen aus. Damit das im Schulunterricht passieren kann, muss die Lehrperson sowohl selbst alle Grundvorstellungen ausgeprägt haben als auch ein fundiertes Wissen über die Grundvorstellungen besitzen.

Um herauszufinden, welche Grundvorstellungen zur Stetigkeit und zur Differenzierbarkeit bei angehenden Mathematiklehrkräften präsent sind und wie stark sich die theoretische Beschäftigung mit diesen auf die Grundvorstellungen bei den Studierenden auswirkt, wurde eine Studie im Zuge des Projekts „BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ durchgeführt. Diese besteht unter anderem aus dem Vergleich zweier schriftlicher Datenerhebungen in Form von Fragebögen. Der erste wurde zu Beginn, der zweite am Ende der Didaktikvorlesung zur Analysis im Mathematik-Lehramtstudium ausgefüllt. Diese Veranstaltung beschäftigt sich mit der Schulmathematik Analysis, in der unter anderem die Begriffe „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ bearbeitet und die Grundvorstellungen zu diesen herausgearbeitet werden. Die Antworten beider Fragebögen werden nach der Anzahl und der Ausprägung der Grundvorstellungen ausgewertet und anschließend mit den Ergebnissen der jeweils anderen Datenerhebung verglichen.

In der ersten Hälfte dieser Arbeit werden zuerst die Begriffe „Stetigkeit“, „Differenzierbarkeit“ und „Grundvorstellung“ erläutert und deren Relevanz im Schulkontext dargestellt. Anschließend werden die Grundvorstellungen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit präsentiert und abschließend wird auf den aktuellen Forschungsstand eingegangen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Studie zu den Grundbegriffen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Mathematiklehramtsstudierenden. Nachdem zu Beginn das Thema und die Fragestellung dargelegt wird, werden mehrere Hypothesen aufgestellt. Danach wird die Methode beschrieben, indem die Datengrundlage, das Erhebungsinstrument, die Durchführung der Datenerhebung und die Stichprobe genauer erläutert werden. Darauf folgt die Beschreibung der Datenaufbereitung und der statistischen Auswertung. In Folge werden die Ergebnisse dargestellt, wobei der Fokus auf dem Zusammenhang zwischen den individuellen Merkmalen der StudienteilnehmerInnen und der Ausprägung der Grundvorstellungen liegt. In der Interpretation und Diskussion werden die Ergebnisse der Fragebögen miteinander und mit Ergebnissen anderer Studien verglichen, wie auch die vorab aufgestellten Hypothesen bestätigt oder widerlegt. Im Anschluss werden die Limitationen dieser Studie aufgezählt und die Resultate zusammengefasst.

A Theorieteil

1. Begriffsbestimmungen

Zu Beginn dieser Arbeit werden die wichtigsten Begriffe in diesem Zusammenhang – die Stetigkeit, die Differenzierbarkeit und die Grundvorstellung – definiert beziehungsweise beschrieben.

1.1. Stetigkeit

Der Begriff „Stetigkeit“ scheint beim ersten Betrachten sehr intuitiv zu sein, da das Wort auch in der Alltagssprache Verwendung findet. So zum Beispiel in den Sätzen: „Die Kosten steigen stetig.“ oder „Sie haben sich stetig verbessert.“ Gemeint ist eine unaufhörliche, ständige, andauernde Veränderung. Wird diese Auffassung in die Mathematik übertragen, so deutet das die Idee an, dass der Graph einer Funktion eine durchgehende Linie ohne Lücken ist.[1]

Dass die Stetigkeit nicht so einfach zu erfassen ist, ist an der Entwicklung der vielen unterschiedlichen Beschreibungen und Definitionen des Begriffes erkennbar. Bereits im fünften Jahrhundert vor Christus wurden die ersten Überlegungen zur Stetigkeit aufgrund der Beschäftigung mit der Quadratur des Kreises von den Griechen Antiphon, Bryon und Proklos angestellt.[2]
Erst im 19. Jahrhundert wurden die ersten Definitionen zum Stetigkeitsbegriff erstellt. Euler, Arbogast und Fourier beschrieben die Stetigkeit durch bestimmte Eigenschaften. So meinte Euler zum Einen, dass eine „kontinuierliche“ Funktion ein einziger analytischer Ausdruck sei, zum Anderen, dass sie nur dann kontinuierlich sei, wenn „alle Teile der Kurve miteinander verbunden“[3] wären. Dass beide Aussagen nicht dasselbe seien, war Euler bereits selbst bewusst, blieb jedoch bei seinen Aussagen. Arbogast erklärte die Stetigkeit folgendermaßen: „Eine Menge kann nicht von einer Stelle zur anderen wechseln, ohne durch alle Zwischenstellen zu wandern, die demselben Gesetz genügen.“ Mit „Die Ordinate y einer algebraischen Funktion kann ihren Wert nicht abrupt ändern, wenn die Abszisse variiert.“[4] beschrieb er die kontinuierlichen Funktionen. Somit waren die Zwischenwerteigenschaft und Sprungfreiheit als Eigenschaften von stetigen Funktionen beschrieben. Fourier hingegen veranschaulichte den Begriff

[1] Tall, D. & Vinner, S. (1981, 164)
[2] Thiele, R. (1999, 22)
[3] Bumberger, G. (1993, 3)
[4] Bumberger, G. (1993, 4)

geometrisch: „… Deren Bild mit einem Bleistift gezeichnet werden kann, ohne ihn dabei vom Papier abzuheben…".[5]

Einen bedeutsamen Beitrag zur Entwicklung der Definition der Stetigkeit im 19. Jahrhundert trug Cauchy bei, der Eulers Auffassung der Stetigkeit widerlegte und mithilfe unendlich kleiner Größen die Stetigkeit definierte. Bolzano beschrieb die Stetigkeit sehr ähnlich, formulierte seine Definition jedoch globaler und unterschied zwischen Funktionen, die überall und nur in bestimmten Intervallen stetig sind.[6] Abel beschrieb als einer der ersten die Stetigkeit mit einer Grenzwertdefinition: „Eine Funktion $f(x)$ soll stetige Funktion von x, zwischen den Grenzen $x = 0, x = b$ heißen, wenn für einen beliebigen Wert von x, zwischen diesen Grenzen, die Größe $f(x - h)$ sich für stets abnehmende Werte von h, der Grenze $f(x)$ nähert."[7] Dirichlet verbesserte die Definition indem er den Definitionsbereich und die Endlichkeit wie auch die Eindeutigkeit der Funktionswerte einbrachte.[8] Die heutzutage verwendete Definition geht auf Riemann und Weierstraß zurück. Weierstraß formulierte diese so: „… Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in $x = x_0$, wenn $\forall\varepsilon > 0$ ein δ existiert, sodaß $\forall x$ im Intervall $|x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in einem Intervall von x Werten, wenn sie in jedem x dieses Intervalls stetig ist."[9]

Drei formale Definitionen werden abschließend dargestellt[10]:

Grenzwertdefinition der Stetigkeit:
Gegeben ist $f: D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Dann gilt:
Die Funktion f ist stetig an der Stelle $x = x_0$, falls der Grenzwert der Funktion für $x \to x_0$ existiert und gleich dem Funktionswert an dieser Stelle ist.

Folgendefinition der Stetigkeit:
Gegeben ist $f: D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Dann gilt:
Die Funktion f ist stetig an der Stelle $x = x_0$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in N}$ in D gilt:
$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

ε-δ-Definition der Stetigkeit:
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn gilt:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

---
[5] Bumberger, G. (1993, 4)
[6] Bumberger, G. (1993,7)
[7] Abel, N.H. (1826, 314)
[8] Dirichlet, G.L. (1837, 135)
[9] Bumberger, G. (1993, 13)
[10] Arend, S. (2017, 33f)

1.2. Differenzierbarkeit

Die Beschäftigung mit klassischen Problemen wie den Quadraturproblemen und der Berechnung der lokalen Änderungsrate führte im 17. Jahrhundert zur Entwicklung der Differenzialrechnung.

Die zwei Mathematiker, die unabhängig voneinander mit unterschiedlichen Zugängen die Differenzialrechnung entdeckten, sind Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz.[11] Leibniz wählte den Zugang über die lokale Linearität einer differenzierbaren Funktion, welches zur Tangentensteigung führte. Er führte die Notation $\frac{dy}{dx}$ ein, wobei das d eine beliebig kleine, aber endliche Größe (ungleich 0) darstellt[12]. Leibniz wählte den Buchstaben d in Anlehnung an das lateinische Wort „differentia", welches zur heutigen Bezeichnung Differential führte.[13] Die geometrische Veranschaulichung seines Verfahrens ist das Steigungsdreieck, welches er „charakteristisches Dreieck" nannte.
Newton hingegen beschäftigte sich mit der Momentangeschwindigkeit eines Punktes an einer Geraden, welche in die vertikale und die horizontale Richtung bzw. Geschwindigkeit unterteilt wird. Auch aus seiner Fluxionsmethode[14] folgt die Tangentensteigung, welche er mit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ notierte. Beide Mathematiker erreichten dasselbe Problem: „Die Berechnung des Wertes eines Quotienten bei Verkleinerung des Nenners, ohne dass dieser null werden darf."[15] Erst Cauchy definierte durch den Grenzwert eines Differenzenquotienten die Ableitung, wodurch die Entwicklung zur heute üblichen ε-δ-Definition der Differenzierbarkeit begann.

ε-δ-Grenzwertdefinition der Differenzierbarkeit[16]:
Es sei f eine in einer offenen Umgebung U der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, wenn eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Definition der Differenzierbarkeit als Grenzwert des Differenzenquotienten[17]:
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Er heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

[11] Büchter, A. & Henn, H. (2010, 79f)
[12] Tall, D. (2009, 485)
[13] Greefrath, G., et al (2016, 139)
[14] Büchter, A. & Henn, H. (2010, 80)
[15] Greefrath, G., et al (2016, 139)
[16] Greefrath, G., et al. (2016, 143)
[17] Binmore, K.G. (1977, 92)

Definition der Differenzierbarkeit über die lokale Approximation[18]

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Gerade t_{x_0} durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gibt, so dass der Approximationsfehler

$$r(h) \coloneqq f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h)$$

$(x_0 + h \in D)$ der Bedingung

$$\lim_{h \to \infty} \frac{r(h)}{h} = 0$$

genügt. Die Steigung t_{x_0} heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit[19] ist im Folgenden dargestellt:

$$f\ an\ der\ Stelle\ x_0\ stetig \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} f\ an\ der\ Stelle\ x_0\ differenzierbar$$

Beweis für diesen Zusammenhang nach Büchter und Henn[20]*:*

Differenzierbarkeit → Stetigkeit

Im Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ geht der Nenner Δx gegen Null. Um einen sinnvollen Grenzwert zu erhalten, muss der Zähler ebenfalls gegen Null gehen, sodass der unbestimmte Ausdruck „$\frac{0}{0}$“ entsteht. Das bedeutet, dass $f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x)$ gilt und f daher stetig bei x_0 ist.

Stetigkeit ↛ Differenzierbarkeit

Die Stetigkeit ist notwendig für die Differenzierbarkeit, jedoch nicht hinreichend, wie anhand des Gegenbeispiels $f: f(x) = |x|$ (Betragsfunktion) erkannt werden kann. Die Funktion f ist in $x = 0$ stetig. An allen Stellen $x \neq 0$ ist der Differenzenquotient gleich der Steigung der Funktion (1 für $x > 0$ und -1 für $x < 0$). Für $x = 0$ gilt jedoch:

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & für\ \Delta x < 0 \\ \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & für\ \Delta x > 0 \end{cases}$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung existieren, sind jedoch nicht gleich. Daher ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

[18] Danckwerts, R. & Vogel, D.(2006, 68-80)
[19] Büchter, A. & Henn, H. (2010, 199)
[20] Büchter, A. & Henn, H. (2010, 199)

1.3. Grundvorstellungen

Um komplexe Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit vollkommen verstehen zu können, ist eine längerdauernde Entwicklung der Begriffsbildung notwendig. So beginnt der Prozess des Verstehens laut Cornu[21] mit einer „spontanen Auffassung“ (spontaneous conception) des Begriffs. Diese resultiert aus der Kombination aus Erfahrung, Wissen, Ideen, Intuition und Vorstellungen. Dieses Verständnis wird aber nicht durch das Neugelernte verdrängt, sondern verändert sich und formt sich so zur persönlichen Vorstellung um. Gemeinsam mit dem wachsenden Verständnis für den formalen Begriff bildet sich eine Vorstellung zu einem Begriff, welche von Tall und Vinner „concept images“ (CI) genannt wird.[22] Ein CI zu einem Begriff beinhaltet alles Gedankliche, was mit dem Begriff verbunden wird, mentale Bilder, Prozesse und Eigenschaften. CIs verändern sich durch die Beschäftigung mit dem Begriff und können auch verschiedene Informationen enthalten, die noch nicht verknüpft sind. So erfordern unterschiedliche Aufgaben verschiedene Teile des CIs und rufen nur diese in der Situation hervor. Diese werden „evoked concept image“ genannt.
Tall und Vinner[23] führen auch den Begriff „concept definition“ (CD) ein, welcher die verbale oder schriftliche Beschreibung eines Konzepts/einer Vorstellung beschreibt. Unter diesem kann die Formulierung einer Lehrperson oder eine formale gemeint sein (formal concept definition), aber auch die Beschreibung einer Person, die ihre eigene Vorstellung wiedergibt (personal concept definition). So kann aus einer erlernten, weit verbreiteten CD durch Anpassung an das eigene Verständnis eine individuelle werden.[24] Wird von CD gesprochen, so wird jedoch meist die formale CD gemeint.

Moore[25] erweiterte das Konzept um „concept usage“, welches den Umgang mit dem Konzept an Beispielen oder Beweisen repräsentiert. Alle drei Teile concept image, concept definition und concept usage werden in dem Begriff „concept-understanding scheme“ vereinigt.

Um einen Begriff verstehen zu können müssen Begriffe auf verschiedene Arten und aus verschiedenen Perspektiven gelehrt werden, hierbei können jedoch Verständnishürden auftreten. Durch unterschiedliche mentale Bilder kann ein Widerspruch entstehen, der zu Fehlvorstellungen führen kann. Zur Hilfe in solchen Lernsituationen wurden viele pädagogische Strategien entwickelt. Cornu[26] schreibt, dass es ein relevanter Teil des Unterrichtens sei, dass die Lehrperson sich diesen Problemen bewusst ist und auch weiß, dass durch die eigenen Hilfestellungen bzw. vereinfachten Erklärungen später in Kombination mit anderen Erfahrungen Verständnisschwierigkeiten auftreten können. Nach Tall und Douady[27] ist es notwendig, zuerst die Vorstellungen implizit anzuwenden, Erfahrungen mit dem Begriff

[21] (2002, 154)
[22] vgl. Tall, D. & Vinner, S. (1981, 1)
[23] (1981, 2)
[24] Tall, D. & Vinner, S. (1981, 2)
[25] Moore, R. (1994, 4)
[26] (2002, 165)
[27] Tall, D. (1986) und Douady, R. (1986) in Cornu, B. (2002, 165)

zu machen, bevor eine Beschäftigung mit der formalen Definition erfolgt. In Studien[28] konnte herausgefunden werden, dass eine gute Strategie der Erarbeitung von Begriffen die theoretische Besprechung der Komplexität des Themas und die Anregung zur individuellen Reflexion der eigenen Vorstellungen ist.

Sollen einzelne Vorstellungen aus den CI extrahiert werden, so wird von einzelnen „Grundvorstellungen" gesprochen.[29] Grundvorstellungen sind ein fachdidaktisches Konzept, in welchem der Begriff wie folgt definiert wird:[30]

> „Eine *Grundvorstellung* zu einem mathematischen Begriff
> ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt."

Im Vergleich dazu existieren die fachwissenschaftlichen *Aspekte* eines mathematischen Begriffes, welches „ein Teilbereich des Begriffs [ist], mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann."[31]

Die Begriffe Grundvorstellung und Aspekt hängen insofern miteinander zusammen, als dass durch Grundvorstellungen Aspekte eines Begriffes verstanden werden können. So können mehrere Grundvorstellungen einen Aspekt darstellen, aber auch mehrere Aspekte von einer Grundvorstellung angesprochen werden: Abbildung 1.

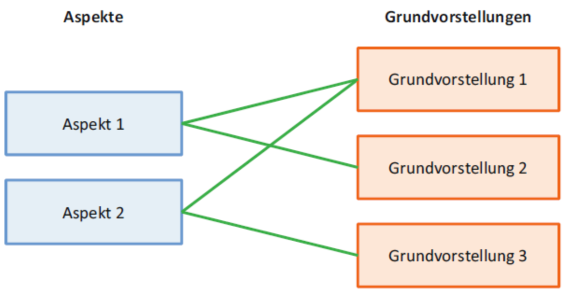

Abbildung 1: Aspekte und Grundvorstellungen zu einem Begriff[32]

[28] Cornu, B. (2002, 165)
[29] Greefrath, G., et al (2014,103)
[30] Greefrath, G., et al (2016, 17)
[31] ebenda
[32] Abbildung aus Greefrath, G., et al (2016, 18)

Der Zusammenhang der concept images, concept definitions, Aspekte und Grundvorstellungen kann durch folgende Grafik erklärt werden: Abbildung 2.

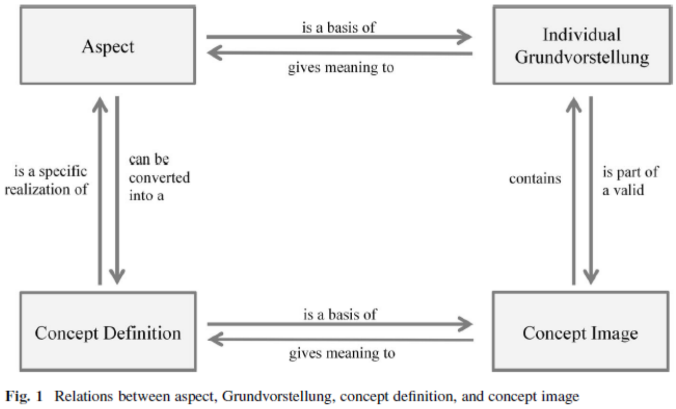

Abbildung 2: Zusammenhang von CI, CD, Aspekten und GV[33]

Der Begriff „Grundvorstellungen" entwickelte sich zunächst durch Piagets Einfluss[34] bei Oehl und wurde bei Griesel bereits zu einigen mathematischen Objekten beschrieben. Durch v. Hofe wurde das Konzept der Grundvorstellungen 1995 detailliert ausgearbeitet.[35]

In vom Hofes Dissertationsarbeit unterscheidet er zwischen „*normativ geprägten sachadäquaten Grundvorstellungen* und […] *deskriptiv feststellbaren individuellen Schülervorstellungen*."[36]
Die normativ geprägten Grundvorstellungen sind von der Lehrperson aus didaktischen Überlegungen hergleitet um Sachzusammenhänge deuten zu können. Diese sollen von den Schüler*innen ausgebildet werden. Sie werden auch „universelle Grundvorstellungen" genannt und sind ein Anhaltspunkt für die Lehrperson um den Unterricht vorzubereiten.[37] Die Schülervorstellungen hingegen sind diejenigen, die die individuellen Vorstellungen der Schüler*innen darstellen, welche durch die Beschäftigung mit den Begriffen und erkannten Sachzusammenhängen entstehen.

[33] Abbildung aus Greefrath, G., et al (2014, 103)
[34] Kleine, M., Jordan, A. & Harvey, E. (2005, 228)
[35] Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019, 129)
[36] Vom Hofe, R. (1995, 123)
[37] Greefrath, G., et al (2016, 18)

Vom Hofe skizziert die Ausbildung von Grundvorstellungen folgendermaßen: Abbildung 3.

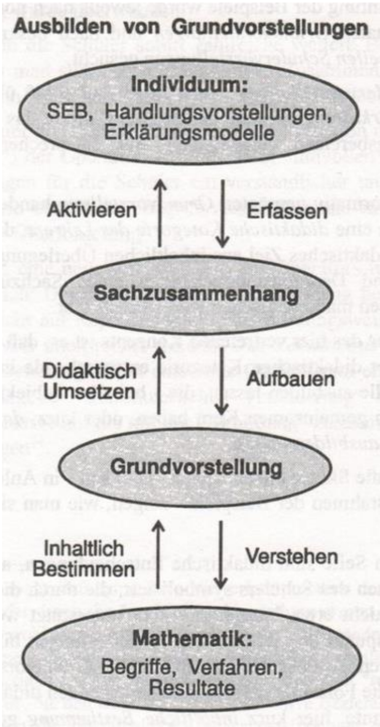

Abbildung 3: Ausbilden von Grundvorstellungen nach vom Hofe[38]

Eine andere Einteilung der Grundvorstellung ist die in *primäre* und *sekundäre* Grundvorstellungen. Primäre Grundvorstellungen sind jene, die Aspekte mathematischer Begriffe mit alltäglichen Erfahrung verbinden. Sekundäre zeigen einen Zusammenhang zwischen Aspekten des neuen mathematischen Begriffes mit bereits bekannten mathematischen Begriffen auf. Die sekundären Grundvorstellungen sind vorallem im Bereich der Sekundarstufe 2 und der Hochschulmathematik relevant, während die primären hauptsächlich in Primar- und Sekundarstufe 1 zum Einsatz kommen.[39]

[38] Abbildung aus Vom Hofe, R. (1995, 124)
[39] Steinbauer, R. & Süss-Stepancik, E. (2019b, 13f)

Somit können Grundvorstellungen als „Gelenkstelle zwischen Realität und mathematischem Modell“[40] im Modellierungskreislauf gesehen werden: Abbildung 4.

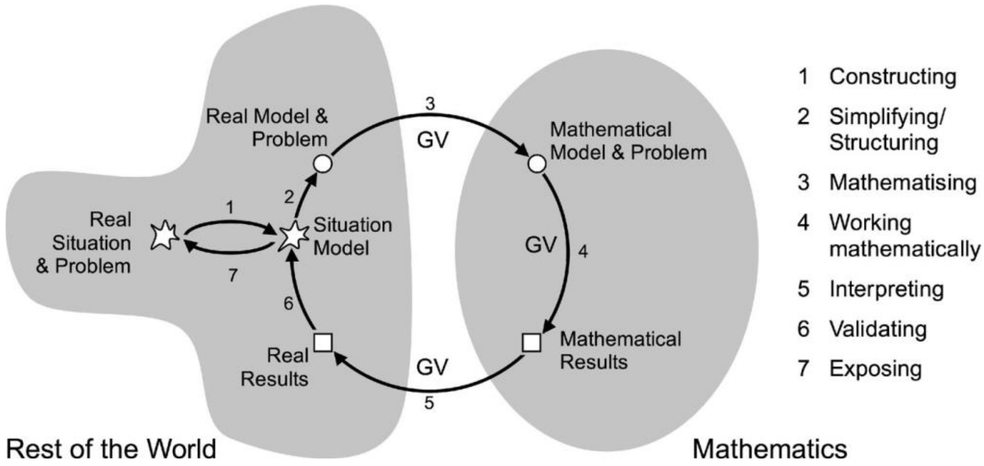

Abbildung 4: Grundvorstellungen und Modellierung[41]

Die Anwendbarkeit von Grundvorstellungen unterstützt die Ausbildung weiterer Grundvorstellungen zu einem Aspekt eines Begriffes, was dazu führt, dass weniger Fehlvorstellungen entwickelt werden.[42]

Sollen die Grund- und Fehlvorstellungen bei Lernenden untersucht werden, so wenden Hanke und Schäfer[43] ein, dass Grundvorstellungen niemals direkt erforscht werden können, sondern nur die verbalen oder schriftlichen Repräsentanten derer analysiert werden können.

[40] Heiderich, S. & Hussmann, S. (2013, 30)
[41] Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016, 235)
[42] vgl. Heiderich, S. & Hussmann, S. (2013, 38) und Weber, C. (2013, 94)
[43] (2017, 4)

2. Relevanz von Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2.1. Relevanz der Stetigkeit

Die Stetigkeit ist in der Analysis eine wichtige Grundlage für viele Sätze.
Einige Sätze, die ohne der Stetigkeit nicht gelten würden, wären der Zwischenwertsatz, der Nullstellensatz von Bolzano und der Satz vom Maximum und Minimum:

> *Zwischenwertsatz*[44]:
> Für eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetig definierte reelle Funktion f mit $f(a) \neq f(b)$ gilt: Für jede Zahl y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = y$.
>
> *Nullstellensatz von Bolzano*[45]*:*
> Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall $I = [a; b]$ und es gelte $f(a) < 0$ sowie $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl c mit $a < c < b$ und $f(c) = 0$.
>
> *Satz vom Maximum und Minimum*[46]*:*
> Jede auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion hat unter ihren Funktionswerten einen größten und einen kleinsten Wert.

Ein weiterer grundlegender Satz der Analysis, für den die Stetigkeit vorausgesetzt werden muss, ist der

> *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*[47]*:*
> Sei $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:
>
> $$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

2.1.1. Relevanz der Stetigkeit im Schulkontext

Aufgrund der Relevanz der Stetigkeit in der Analysis, die an dieser Auswahl der Sätze eben erkannt werden kann, spielt die Stetigkeit auch im Schulunterricht eine Rolle.

Der Grundkompetenzenkatalog für den allgemeinen Teil der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Angewandter Mathematik für die Berufsbildenden höheren Schulen erwähnt das Begriffsverständnis

[44] Arend, S. (2017, 43)
[45] Büchter A. & Henn, H. (2010, 191)
[46] Arend, S. (2017, 43)
[47] Arend, S. (2017, 42)

der Stetigkeit im Deskriptor 4.1 zur Analysis explizit: „Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses interpretieren und argumentieren.“[48]

Im Grundkompetenzkatalog für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik für Allgemeinbildende höhere Schulen kommt die Stetigkeit in Form des stetigen Änderungsverhaltens vor. So steht im ersten Satz zum Inhaltsbereich Analysis, welcher die bildungstheoretische Orientierung beschreibt: „Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind.“ Das Konzept der Stetigkeit zählt nicht zu den Grundkompetenzen der standardisierten Reifeprüfung, das Verständnis für den Begriff „stetig“ muss jedoch ausgebildet werden. In einer Anmerkung zu den Grundkompetenzen der Wahrscheinlichkeitsverteilung steht explizit, dass eine Stetigkeitskorrektur vernachlässigbar ist und nicht durchgeführt werden muss.[49]

Im Lehrplan für Mathematik für die AHS-Oberstufe hingegen wird der Stetigkeitsbegriff sowohl im Zuge der Differentialrechnung wie auch der Wahrscheinlichkeitsverteilungen erwähnt: Im 6. Semester (in der elften Schulstufe) im Kapitel „Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung“ des Kompetenzmoduls 6 ist Folgendes aufgelistet:

- „Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können.“
- „Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen.“

Im Kompetenzmodul 7 im ersten Semester der zwölften Schulstufe steht unter „Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, beurteilende Statistik“:

- „Die Begriffe ‚stetige Zufallsvariable‘ und ‚stetige Verteilung‘ kennen.“[50]

Die Erwähnungen sowohl im Lehrplan wie auch im Grundkompetenzenkatalog stellen die Grundlage für die Bearbeitung des Themas Stetigkeit in der Sekundarstufe 2 dar und fordern eine didaktische Aufarbeitung des Begriffs durch den Lehrkörper mit den Schülerinnen und Schülern, welche in Abschnitt 3.1 durch die Darstellung von Grundvorstellungen zum Stetigkeitsbegriff erarbeitet wird.

[48] Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019, 4)
[49] Aue, V., et al. (2019, 13 & 15)
[50] RIS (2020)

2.2. Relevanz der Differenzierbarkeit

Die Differenzierbarkeit hat eine zentrale Bedeutung in der Analysis. Greefrath et al[51] beschreiben in „Didaktik der Analysis“ die Anwendungsgebiete der Differenzierbarkeit so:

> „Im Vergleich zur Rechnung mit Differenzen vereinfachen sich viele Rechnungen. Mit der Differenzialrechnung erschließen sich Lernende die Grundlage für zahlreiche Wissenschaften. Viele Teilgebiete der Physik wie etwa Mechanik oder Elektrodynamik, Populationsmodelle in der Biologie und wirtschaftswissenschaftliche Zusammenhänge können mithilfe von Differenzialgleichungen beschrieben werden.“

Sichel[52] schreibt, dass das Verständnis von Stetigkeit und Grenzwerten den Lernenden die Möglichkeit gibt abstrakt über Funktionen nachzudenken und mit diesen zu arbeiten, was eine Grundlage alles weiteren Arbeitens mit Analysis ist.

In der Schule wird die Differentialrechnung über längere Zeit gelehrt[53]. Verschiedenste Themen werden im Zuge dieses Themas im Unterricht behandelt: Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben, Wachstumsvorgänge und Modellbildung – beispielsweise mit Themen wie der „Verkehrsproblematik“.[54]

2.2.1. Relevanz der Differenzierbarkeit im Schulkontext

Im Hinblick auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung wird der Differenzierbarkeit ein größerer Stellenwert zugemessen als der Stetigkeit. Das kann anhand der Grundkompetenzen überprüft werden. Anschließend an die Erwähnung der Stetigkeit in der bildungstheoretischen Orientierung zum Inhaltsbereich Analysis, wird der Differentialquotient beschrieben: „Die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient sind allgemeine mathematische Mittel, dieses [diskretes bzw. stetiges] Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe führt.“[55] Weiters wird erläutert, dass es notwendig ist, die Begriffe deuten und definieren zu können wie auch Zusammenhänge von Fachbegriffen erkennen zu können. Zusätzlich sollen symbolische Darstellungen des Differentialquotienten und der Ableitungsfunktion erkannt, richtig interpretiert und angewandt werden. Drei Deskriptoren beziehen sich explizit auf die Differenzierbarkeit[56]:

[51] (2016, 137)
[52] (2015, 22)
[53] Vollrath, H. & Roth, J. (2012, 180)
[54] Greefrath, G., et al. (2016, 192, 292 & 210-212)
[55] Aue, V., et al. (2019, 14)
[56] ebenda

AN 1.2 den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane“ bzw. lokale Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$

Da in einer Anmerkung erwähnt ist, dass durch Technologieeinsatz die Lernenden alle differenzierbaren Funktionen ableiten können, fordert der Deskriptor AN 2.1 nur die einfachen Regeln des Differenzierens.

Der Lehrplan für Mathematik der AHS-Oberstufe beschreibt die einzelnen Anforderungen spezifischer und erweitert diese um das Wissen den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.[57]

Die mathematischen Grundkompetenzen des allgemeinen Teils für die BHS decken sich weitgehend mit denen für die AHS.[58]

Erforderliche Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit, welche im Unterricht mit Unterstützung der Lehrperson ausgebildet werden sollen, sind in Abschnitt 3.2. aufgelistet.

[57] aus „Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 03.09.2020“ - Anlage A - Sechster Teil – Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände – A. Pflichtgegenstände – 2. Oberstufe - Mathematik

[58] Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019, 4)

3. Grundvorstellungen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel werden die Grundvorstellungen zu den Begriffen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, welche in dieser Arbeit behandelt werden, dargestellt.

3.1. Grundvorstellungen zu dem Begriff Stetigkeit

Durch die alltägliche Benutzung des Wortes „stetig“ bringt jeder und jede Lernende bereits eine individuelle Vorstellung zu dem Begriff in den Unterricht mit.[59] Um diesen zu erweitern und auszubilden, müssen verschiedene Grundvorstellungen dazu durch Beschäftigung mit diesem entwickelt werden.[60] Dies ist die Aufgabe der Lehrkraft, weshalb es wichtig ist, dass Lehrpersonen sich in ihrer Ausbildung bereits mit den Grundvorstellungen zu dem Begriff theoretisch beschäftigt und diese selbst ausgebildet haben. Diese Beschäftigung führt zu einem besseren Verständnis der Lehrkraft für Fehlvorstellungen der Lernenden.[61]

Bevor die Grundvorstellungen dargestellt werden sollen, werden kurz einige fachliche Aspekte präsentiert. Zwei der folgenden Aspekte können direkt den Definitionen, welche in Abschnitt 1.1. angeführt sind, entnommen werden. So ist der erste Aspekt zur Stetigkeit die „Folgenstetigkeit“, welche mit der Folgendefinition der Stetigkeit übereinstimmt. Der zweite Aspekt ist die Umgebungsstetigkeit, welche der ε-δ-Definition der Stetigkeit entspricht. Ein weiterer ist die Approximierbarkeit durch eine Konstante.[62]

Um diese fachlichen Aspekte und somit den Begriff verstehen zu können, werden folgende Grundvorstellungen ausgebildet: die Sprungfreiheit, die Vorhersagbarkeit und die Darstellbarkeit. Keine dieser Vorstellungen ist fachlich vollständig korrekt, jedoch unterstützen sie das Verständnis des Begriffes. Zusätzlich kann die theoretische Beschäftigung mit diesen zu der Erkenntnis führen, dass genaue Definitionen in der Mathematik wichtig sind.

[59] Cornu, B. (2002, 156)
[60] Vollrath, H. & Roth, J. (2012, 53)
[61] vgl. Götze, D. & Selter, C. (2002, 169) und Sichel, E. (2015, 30)
[62] Greefrath, G., et al. (2016, 141)

3.1.1. Sprungfreiheit

Die Grundvorstellung „*Sprungfreiheit*“ ist eine Vorstellung vom Aussehen des Graphens. Dieser soll keine Sprünge besitzen oder „wild oszillieren“ - wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.[63]

Folgend sind zwei Beispiele von Funktionen dargestellt, die Unstetigkeitsstellen besitzen, und häufig aufgrund der Grundvorstellung Sprungfreiheit als unstetig identifiziert werden: Abbildungen 5 und 6.

$$g: g(x) = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 1 \; für \; x \geq 0 \end{cases} \qquad f: f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

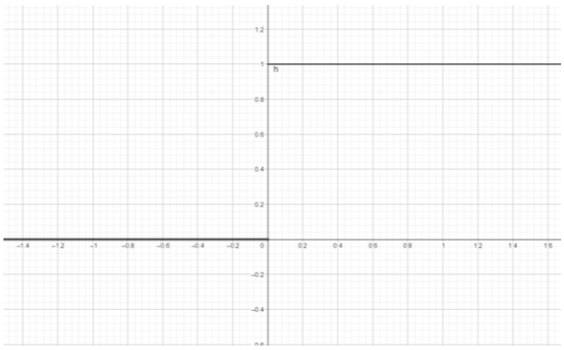

Abbildung 5: unstetige Funktion 1 (Sprungfreiheit)

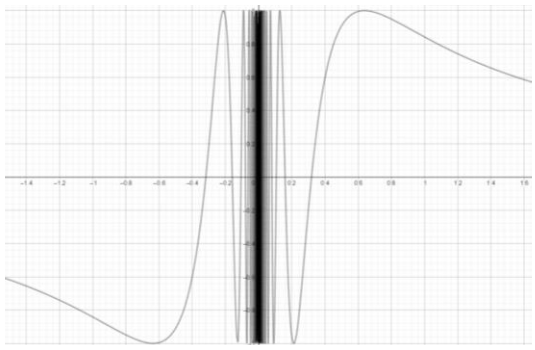

Abbildung 6: unstetige Funktion 2 (Sprungfreiheit)

3.1.2. Vorhersagbarkeit

Die Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit“ hängt stark mit dem Aspekt der Umgebungsstetigkeit und somit mit der ε-δ-Definition zusammen. Ein Repräsentant dieser Grundvorstellung ist die Aussage: „Wenn man den x-Wert bei einer Funktion nur wenig ändert, so ändert sich auch der y-Wert nur wenig.“[64]

Eine bekannte Abbildung zur Stetigkeit, die dieser Grundvorstellung zugeordnet wird, ist die eines Graphen mit eingezeichnetem ε- bzw. δ- Schlauch, welche das kleine Intervall, in dem sich die Werte verändern, angeben: Abbildung 7.

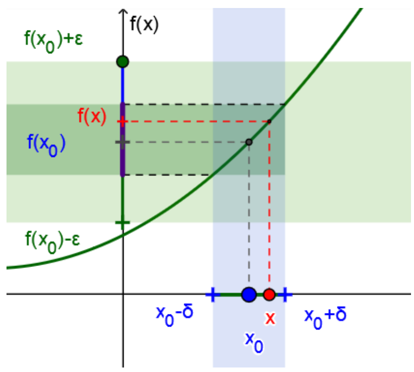

Abbildung 7: stetige Funktion zur GV Vorhersagbarkeit[65]

[63] Greefrath, G. et al. (2016, 141)
[64] Büchter, A. & Henn, H. (2010, 173)
[65] Dieses Bild ist der Website von Geogebra entnommen: https://www.geogebra.org/m/mBT6kWUG

3.1.3. Darstellbarkeit

Die dritte Grundvorstellung ist die Darstellbarkeit. Die bekannteste Aussage, die in diese Kategorie eingeordnet wird, ist: „Der Funktionsgraph ist stetig, wenn er sich in einem Zug ohne Absetzen zeichnen lässt.“[66] Oft gibt es auch den Ausdruck: „… wenn man eine Schnur darauflegen kann.“ Diese Beschreibungen sind mathematisch nicht korrekt, sind aber gute erste Annäherungen an den Begriff Stetigkeit.[67]

Die Reihenfolge, in welcher die Grundvorstellungen ausgebildet werden, ist unterschiedlich und hängt von der Art der Einführung in das Thema ab. Wichtig ist jedoch laut Tall[68], dass zuerst durch die Erfahrung mit dem Begriff die Grundvorstellungen ausgebildet werden, bevor die formale Definition eingeführt wird.

3.2. Grundvorstellungen zu dem Begriff Differenzierbarkeit

Die Grundvorstellungen der Differenzierbarkeit unterstützen das Verständnis und zeigen die Nützlichkeit des Begriffes auf. Es ist notwendig alle vier Grundvorstellungen auszuprägen um den Begriff in seiner Gesamtheit erfassen zu können. Die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit sind in der Literatur bereits viel diskutiert worden, weshalb zu jeder ein eigener Einstieg in das Thema der Differentialrechnung präsentiert werden kann und einige Grundvorstellungen auch mit einem historischen Bezug dargestellt werden können.[69]

Zuerst werden jedoch die fachlichen Aspekte zur Differenzierbarkeit dargestellt: „die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und als lokale lineare Approximation.“ So können die zwei Definitionen aus Abschnitt 1.3 „ε-δ-Grenzwertdefinition der Differenzierbarkeit“ und „Definition der Differenzierbarkeit als Grenzwert des Differenzenquotienten“ dem ersten Aspekt zugeordnet werden. Graphisch ist durch den Wert des Differenzenquotienten die Steigung einer Sekante gegeben, welche durch den Grenzwert zur Ableitung an der Stelle wird. Diese wird durch die Steigung der Tangente an diesem Punkt grafisch dargestellt. Die dritte Definition „Definition der Differenzierbarkeit über die lokale Approximation“ ist dem zweiten Aspekt zuzuordnen. In diesem wird der Differenzenquotient vermieden. Der Aspekt stellt dar, dass eine auch nicht-lineare stetige Funktion durch eine lineare Funktion an einer Stelle angenähert werden kann, da der Fehler der Approximation im Grenzwert

[66] vgl. Greefrath, G., et al. (2016, 141)
[67] vgl. Büchter, A. & Henn, H. (2010, 173)
[68] Cornu, B. (2002, 165)
[69] Greefrath, G. et al. (2016, 154)

verschwindet. Auch kann dadurch ein Faktor dargestellt werden, der kleine Änderungen der Funktion repräsentiert.[70]

Die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit sind die „lokale Änderungsrate", die „Tangentensteigung"; die „lokale Linearität" und der „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen". Der Zusammenhang dieser mit den bereits dargestellten Aspekten kann Abbildung 8 entnommen werden.

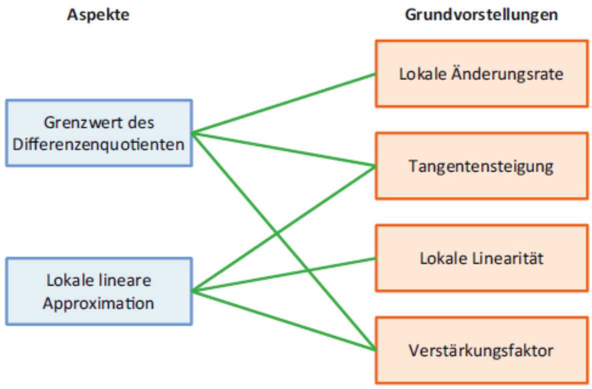

Abbildung 8: Zusammenhang der Aspekte und GV zur Differenzierbarkeit[71]

3.2.1. Lokale Änderungsrate

Die Ausprägung der Grundvorstellung „Lokale Änderungsrate" basiert auf der Beschäftigung mit Änderungs- und Bewegungsprozessen. Hierbei wird ein Differenzenquotient in einem Intervall betrachtet und dieses Intervall immer stärker verringert, sodass der Übergang zum Differentialquotienten an einem Punkt nachvollziehbar erscheint. Aus der durchschnittlichen Änderungsrate, die Schüler und Schülerinnen bereits aus der Sekundarstufe 1 kennen, wird die momentane Änderungsrate.[72] Historisch entspricht diese Vorstellung dem Differenzierbarkeitsbegriff von Cauchy und Newtons Fluxionsmethode, welche bei ausreichend Zeit zur Einbettung in die Geschichte der Mathematik im Unterricht besprochen werden könnten.[73]

Um die Grundvorstellung „lokale Änderungsrate" vollständig erfassen zu können, müssen drei Vorstellungen entwickelt werden:

- „die Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Änderungsprozessen"
- „die Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt"
- „die Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist."[74]

[70] Greefrath, G., et al. (2016, 142-145)
[71] Diese Abbildung wurde Greefrath, G., et al. (2016, 147) entnommen.
[72] Greefrath, G., et al. (2016, 160f)
[73] Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)
[74] Greefrath, G., et al. (2016, 148)

3.2.2. Tangentensteigung

Die Tangentensteigung ist neben der lokalen Änderungsrate die zweite die üblicherweise in der Schule ausgeprägt wird.[75] Die Vorstellung dieser Grundvorstellung ist jene, dass durch das Differenzieren die Steigung der Tangente an einer Stelle berechnet wird. Im Zuge dieser Grundvorstellung muss darauf geachtet werden, dass durch den Begriff „Tangente“ keine Verständnisschwierigkeiten bei den Lernenden auftreten, da diese den Begriff hauptsächlich in der Kreisthematik kennen und in diesem Fall eine Tangente das mathematische Objekt nicht schneidet. Um dieses Problem zu vermeiden halten Danckwerts und Vogel[76] dazu an, den Begriff „Schmiegegerade“ einzuführen, diese ist die Gerade, die sich lokal an den Graphen anschmiegt - ob diese den Graphen mehrmals berühren oder schneiden ist in diesem Fall nicht relevant.

Diese Grundvorstellung ist sehr wichtig um den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der Monotonie dieser Funktion zu verstehen, welche die Grundlage für die Kurvendiskussion und das graphische Differenzieren darstellt.

Eine gute Unterstützung zur Ausbildung dieser Grundvorstellung ist eine Graphiksoftware im Unterricht, anhand derer die Tangente an einen Punkt des Graphens gelegt werden kann und dieser Punkt anschließend vorschoben wird, wodurch sich die Tangente verändert.[77]

Die Vorstellungen, welche im Zuge der Ausbildung der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ entwickelt werden sollen, sind folgende:

- „die Vorstellung von Tangenten als Schmiegegeraden“
- „die Vorstellung, dass die Tangente einer Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat“
- „die Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung der Kurve angibt“[78]

3.2.3. Lokale Linearität

Diese Grundvorstellung unterstützt die Vorstellung, dass eine differenzierbare Funktion an einer Stelle lokal linear angenähert werden kann. In der Vergangenheit fand diese Grundvorstellung in der Schule kaum Anwendung[79]. Heutzutage ist der Zugang dazu durch graphische Mathematikprogramme, welche im Unterricht zum Einsatz kommen, einfacher. Die Methode des „Funktionenmikroskops“ ist das Hineinzoomen eines dargestellten Graphen so weit, bis dieser ungefähr linear dargestellt ist.[80] Diese Vorstellung ist grundlegend für das Verstehen von lokal linearen Wachstums- und Abnahmeprozessen, welche in der mathematischen Modellierung häufig angewendet wird.

[75] Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)
[76] Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006, 46)
[77] Greefrath, G., et al. (2016, 149f & 166)
[78] Greefrath, G., et al. (2016, 150)
[79] Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)
[80] Eberle, S. & Lewintan, P. (2019, 2)

Zum vollständigen Verständnis dieser Grundvorstellung gehören folgende Vorstellungen:

- „Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes eines Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück."
- „Für kleine Änderung der unabhängigen Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden."[81]

Diese Grundvorstellung kann auch durch Beschäftigung mit der Definition von Weierstraß thematisiert werden.[82]

3.2.4. Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

Diese Grundvorstellung beschäftigt sich mit der Frage, wie stark sich eine Veränderung der unabhängigen Variable auf die Veränderung der abhängigen Variable auswirkt. So bedeuten große Werte der Ableitung, dass bei kleinen Änderungen der unabhängigen Variable starke Änderungen der abhängigen auftreten.

Diese Grundvorstellung wird nur sehr selten in der Schule gelehrt, ist jedoch in unterschiedlichen Anwendungen, wie zum Beispiel der Fehlerrechnung oder in der Informatik oder bei Schwingungen in der Physik relevant.

Drei Kenntnisse müssen für diese Grundvorstellung erworben werden:

- „Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken."
- „Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte."
- „Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von Δx, Δy multiplikativ: $\Delta y = m \cdot \Delta x$"[83] ($m$ ...Konstante).

Um den Begriff „Differenzierbarkeit" vollständig zu verstehen und die Definition richtig interpretieren zu können, ist es notwendig alle vier Grundvorstellungen auszubilden.

[81] Greefrath, G., et al. (2016, 151)
[82] Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)
[83] Greefrath, G., et al. (2016, 151-153)

4. Aktueller Forschungsstand

Die Literaturrecherche hat ergeben, dass sich der Großteil der AutorInnen bezüglich der Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit einig sind. Die Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“ und „lokale Linearität“ werden meist genannt, die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ hingegen wurde erst von Greefrath et al.[84] als eigene Grundvorstellung betrachtet. Davor wurden die in diese Grundvorstellung fallenden Vorstellungen der ähnlichen Grundvorstellung „lokale Linearität“ zugeordnet.
In der Auswertung ihrer Studie zu Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten bei SchülerInnen der elften und zwölften Schulstufe erkennt Springnagel[85], dass viele Schüler*innen Aufgaben zu dem Differentialquotienten berechnen könnten, ohne ein Verständnis für diesen Begriff entwickelt zu haben.[86] Viele Fehlvorstellungen betreffen die Verwechslung des Differentialquotienten mit dem Differenzenquotienten und das fehlende Verständnis für den Unterschied zwischen den zwei Begriffen.[87]

Im Gegensatz zur Differenzierbarkeit gibt es sehr viele Studien, um die Grundvorstellungen zur Stetigkeit herauszufinden. Über die Grundvorstellungen zur Stetigkeit gibt es bis heute keinen Konsens in der Literatur. Die Grundvorstellungen „Vorhersagbarkeit“ und „Darstellbarkeit“ sind jedoch Teil fast aller Studien. In manchen werden sie anders benannt, so zum Beispiel bei Schäfer[88], welcher die Vorhersagbarkeit „Kontrollierte Stabilität unter Wackeln an einem Punkt“ und die Darstellbarkeit „Zusammenhang des Graphens“ nennt. Schäfer vereinte in der Kategorie „Zusammenhang des Graphen“ die Grundvorstellung „Darstellbarkeit“ mit der „Sprungfreiheit“, in welche Greefrath et al.[89] diese Kategorie später aufteilten. Schäfer hatte als weitere Vorstellung die „Approximierbarkeit an einem Punkt“, welche bei Greefrath et al. gemeinsam mit der „Kontrollierte Stabilität unter Wackeln an einem Punkt“ zu der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit“ fusionierte.
2017 arbeiteten Hanke und Schäfer in ihrer Studie mit acht Kategorien, von denen drei die Grundvorstellungen nach Schäfer sind.[90] Diese Studie ist in drei Teile gegliedert: der erste Teil untersucht die Repräsentanten der ausgebildeten Grundvorstellungen der Lernenden, der zweite Teil die Akzeptanz der Formulierungen von Grundvorstellungen und der dritte die Akzeptanz der Anwendung dieser. Ergebnis dieser Studie war, dass die Grundvorstellung „Aussehen des Funktionsgraphen“ der am stärksten verbreitete ist. So wurden diese auch im zweiten Teil am ehesten angenommen. Auch Aussagen zur Grenzwertdefinition wurden von Lernenden akzeptiert.

[84] Greefrath, G., et al. (2016, 153)
[85] (2000, 90-153)
[86] vgl. Cornu, B. (2002, 153)
[87] Springnagel, P. (200, 90-153)
[88] (2011, 724)
[89] (2016, 141)
[90] Hanke, E. & Schäfer, I. (2017, 4f)

Ein interessantes Ergebnis der Studie ist, dass es im Allgemeinen keinen signifikanten Unterschied zwischen den Antworten der Fachmathematikstudierenden und der Mathematik-Lehramtsstudierenden gibt.[91]

Bingolbali und Monaghan[92] untersuchten den Unterschied der ausgeprägten Grundvorstellungen zwischen Mathematikstudierenden und Studierenden des Studienganges Maschinenbau und fanden heraus, dass die Ausprägung der Grundvorstellungen stark von der Einführung und der Anwendung des Begriffes abhängt. Bezuidenhout[93] schließt aus seiner Studie, dass die Verbindung zwischen den Grundvorstellungen und der Anwendbarkeit im Unterricht intensiv bearbeitet und die Ausbildung der Grundvorstellungen aktiv besprochen werden soll, sodass das Problem, dass Studierende etwas rechnen können, was sie nicht verstehen, nicht auftritt.

Verschiedene Studien erforschen die Fehlvorstellungen zu den Grundvorstellungen der Stetigkeit. Viele – darunter Sichel im Jahr 2015, Takači, Pešić und Tatar in 2006 und Vela in 2011[94] – kommen zu ähnlichen Ergebnissen: der Großteil der Fehlvorstellungen kann in drei Kategorien aufgeteilt werden – Fehlvorstellungen in Verbindung mit dem Definitionsbereich, in Verbindung mit der Differenzierbarkeit und in Verbindung mit dem Grenzwert.
In den Studien von Schäfer[95], Sichel[96] und Tall und Vinner[97] ist zusätzlich eine häufige Vorstellung, dass eine Funktion stetig ist, wenn sie „nur durch eine Formel gegeben ist". Das würde bedeuten, dass die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0 \ für \ x < 0 \\ x \ für \ x \geq 0 \end{cases}$ unstetig sein müsste.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass aus allen Studien hervorgeht, dass es aufgrund der Schwierigkeit mathematischer Begriffe sehr wichtig ist, sich mit den Grundvorstellungen zu diesen zu beschäftigen und möglichst viele dieser auszubilden, wie auch den Zusammenhang dieser zu verstehen. Die Beschäftigung mit den Grundvorstellungen soll möglichst bereits im Schulunterricht stattfinden um ein fundiertes Wissen zu besitzen, auf dem weitere mathematische Begriffe und Prozesse aufgebaut werden können.

[91] Hanke, E. & Schäfer, I. (2017, 6f)
[92] Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008, 24)
[93] Bezuidenhout, J. (2001, 498)
[94] vgl. Sichel, E. (2015, 23f), Takači, D., Pešić, D. & Tatar, J. (2006, 791) und Vela, M. (2011, 50f)
[95] Schäfer, I. (2011, 1)
[96] Sichel, E. (2015, 20)
[97] vgl. Studie von 1981 bei Cornu, B. (2002, 157f)

B Empirischer Teil

5. Thema / Fragestellung / Ziele

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Erarbeitung ausgeprägter Grundvorstellungen zur „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ bei Studierenden des Lehramts Mathematik für die Sekundarstufe. Diese Auswertung erfolgt durch den Vergleich der Antworten zweier Fragebögen, die zu Beginn (Fragebogen 1) und zum Abschluss (Fragebogen 2) eines Semesters im Zuge einer universitären Lehrveranstaltung ausgeteilt und ausgefüllt wurden.

Die Fragestellung, welche dieser Arbeit zugrunde liegt, lautet: „Welche Grundvorstellungen zu den Begriffen *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* sind für Lehramtsstudierende des Unterrichtgegenstandes Mathematik für die Sekundarstufe am präsentesten und wie verändern sich die Grundvorstellungen zu diesen Begriffen durch die theoretische Beschäftigung mit diesen?“

Das Hauptziel meiner Masterarbeit ist herauszufinden, welche Grundvorstellungen zur Stetigkeit und zur Differenzierbarkeit bei angehenden Lehrpersonen weit verbreitet sind und welche nicht.
Da das Verständnis eines Begriffes umso klarer wird, je mehr Grundvorstellungen im eigenen Denken verankert sind[98], ist es wichtig, die Gruppe der nicht oder wenig verbreiteten Grundvorstellungen zu erarbeiten, um aufzuzeigen, welchen in Zukunft mehr Zeit und Beschäftigung in der Ausbildung zum Lehramt Mathematik gewidmet werden sollte.
Nicht nur die unterrepräsentierten Grundvorstellungen, auch diejenigen, die Fehlvorstellungen oder nur teilweise ausgeprägte Grundvorstellungen sind, sollen durch diese Arbeit aufgezeigt werden. Diesen Mängeln kann durch intensivere theoretische Beschäftigung mit Grundvorstellungen zu den Begriffen in der Ausbildung entgegengewirkt werden.
Zusätzlich soll die Veränderung der Grundvorstellungen durch die Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ erarbeitet und dargestellt werden, welche Grundvorstellungen vor beziehungsweise nach der Beschäftigung mit den Grundvorstellungen zu diesen beiden Begriffen dominant sind, welche Fehlvorstellungen geblieben und welche erfolgreich korrigiert werden konnten.

[98] vgl. Weber, C. (2013, 94)

6. Vermutungen und Hypothesen

Die Vermutungen und Hypothesen, welche ich zu Beginn der Erarbeitung des Themas aufstellte, beziehen sich zum größten Teil auf die Veränderung der Antworten der Studierenden vom ersten Fragebogen zum zweiten, und zusätzlich auf Verbindungen zu Merkmalen, wie bisherige Benotung oder praktische Unterrichtserfahrung.

6.1. Allgemeine Veränderungen der Ergebnisse zwischen den Fragebögen

Mit dieser Arbeit versuche ich zu belegen, dass die Studierenden durch die theoretische Beschäftigung mit Grundvorstellungen die eigenen erweitert und verbessert haben, wie auch eventuelle Fehlvorstellungen ausbessern konnten. Daher werden in Bezug auf allgemeine Veränderung der Ergebnisse drei Hypothesen aufgestellt:

H_1: In den Antworten des Fragebogens 2 geben die Studierenden mehr verschiedene Grundvorstellungen an als im ersten Fragebogen.

H_2: Die Grundvorstellungen sind in den Antworten des zweiten Fragebogens stärker ausgeprägt als im ersten.

H_3: Die Anzahl der Fehlvorstellungen in den Antworten verringert sich vom ersten auf den zweiten Fragebogen.

6.2. Veränderung der Ergebnisse zur Stetigkeit

Abgesehen von den allgemeinen Veränderungen, gibt es auch einige Vermutungen zu den Grundvorstellungen der Stetigkeit. Da im Schulunterricht die Stetigkeit den Schüler*innen oft durch die Eigenschaft eines Graphen, dass bei dessen Zeichnung der Stift nicht abgesetzt werden muss[99], näher gebracht wird, ist die Vermutung, dass die Grundvorstellungen „Darstellbarkeit“ und „Sprungfreiheit“ im ersten Fragebogen häufiger vorkommen als die Vorhersagbarkeit - die Vorhersagbarkeit jedoch am Ende der Vorlesung stärker ausprägt ist als zu Beginn. Daher lauten die Hypothesen:

H_4: In den Antworten des Fragebogens 1 sind die Grundvorstellungen „Sprungfreiheit“ und „Darstellbarkeit“ präsenter als die „Vorhersagbarkeit“.

[99] vgl. Schäfer, I. (2011, 1), Sichel, E. (2015, 19) und Büchter, A. & Henn, H. (2010, 181)

H_5: Die Ausprägungen der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit“ sind in den Antworten des Fragebogens 2 stärker als in denen des Fragebogens 1.

6.3. Veränderung der Ergebnisse zur Differenzierbarkeit

Die schulische Anwendung des Differenzierbarkeitsbegriffes hat ihre Schwerpunkte bei der Ableitung als lokale Änderungsrate wie auch der graphischen Interpretation als Tangentensteigung[100]. Daher werden die Hypothesen zur Differenzierbarkeit analog zu denen der Stetigkeit aufgestellt:

H_6: In den Antworten des ersten Fragebogens sind die Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“ und „Tangentensteigung“ präsenter als die „lokale Linearität“ und der „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“.

H_7: Die Ausprägungen der Grundvorstellungen „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ sind in den Antworten des zweiten Fragebogens stärker ausgeprägt als in denen des ersten.

6.4. Korrelationen zu Leistungen und Praxis

Auch die zusätzlichen Informationen über die Studierenden, die die Fragebögen ausgefüllt haben, lassen Hypothesen zu. So wurden die Noten der Fachvorlesung und -übung, die bisherige Unterrichtserfahrung und der Wunsch, in welchem Schultyp sie zukünftig unterrichten wollen, abgefragt.
Jeder dieser Bereiche ist die Basis einer der folgenden Hypothesen:

Davon ausgehend, dass Studierende mit besseren Noten den gelehrten Stoff besser gelernt und verstanden haben, wird Hypothese 8 aufgestellt.

H_8: Studierende mit besseren Noten weisen stärkere Ausprägungen und mehr Grundvorstellungen auf als Studierende mit schlechteren Noten.

Da die Frage nach der Praxiserfahrung der Studierenden zu diesem Zeitpunkt hauptsächlich die Praktika im Zuge des Studiums abfragt und diese erst eine (Orientierungspraktikum (PÄP)) beziehungsweise fünf (Schulpraxis (FAP)) selbstgehaltene Unterrichtsstunden inkludieren, gehe ich davon aus, dass die Unterrichtserfahrung keine relevante Auswirkung auf die Auswertung der Grundvorstellungen hat.

[100] vgl. Greefrath, G., et al. (2016, 163) und Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)

H_9: Die Unterrichtserfahrung der Studierenden hat keine signifikante Auswirkung auf die Art und Ausprägung der Grundvorstellungen.

Ausgehend von der Information, dass Gymnasiallehrpersonen besseres Fach- und fachdidaktisches Wissen besitzen als Real- und Hauptschullehrkräfte[101], wird angenommen, dass Studierende, die sich bei der Kategorie „Schulwunsch“ für die Oberstufe entschieden haben, sich lieber mit mathematischen Fachbegriffen, wie zum Beispiel Begriffen aus der Analysis, beschäftigen als jene, die sich für die Unterstufe entschieden haben. Darum wird vermutet, dass die zukünftigen Oberstufenlehrer*innen verschiedene Grundvorstellungen besser verankert haben als Unterstufenlehrer*innen.

H_{10}: Bei Studierenden mit dem Wunsch, in einer Oberstufe zu unterrichten, können stärkere Ausprägungen und mehr Arten von Grundvorstellungen nachgewiesen werden als bei jenen, die in einer Unterstufe unterrichten wollen.

[101] Hölzl, R. (2013, 198f)

7. Methode

Dieses Kapitel beschreibt die Datengrundlage, das Erhebungsinstrument und die Durchführung der Erhebung, sowie die Stichprobe. Anschließend werden die Codierung der Daten und die statistische Auswertung detailliert dargestellt.

7.1. Datengrundlage

Meine Daten durfte ich der in dem Projekt „BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis" durchgeführten Befragungen entnehmen. Im Zuge des Projektes BELLA unter der Leitung von Christoph Ableitinger, Stefan Götz, Roland Steinbauer und Evelyn Süss-Stepancik, welches von der Fakultät für Mathematik von der Universität Wien finanziert wird, wird „das Zusammenwirken der fachlichen und fachdidaktischen Lehre im Gebiet der Analysis im Rahmen des Unterrichtsfaches Mathematik im Verbund Nord-Ost […] qualitativ und quantitativ empirisch untersucht, um theoretische Grundlagen und Absichten mit den tatsächlichen Wirkungen vergleichen zu können."[102]

In diesem Sinne wurden in der Datenerhebung Fragen zu Grundvorstellungen zu neun verschiedenen Begriffen des Bereichs der Analysis beantwortet. Die Antworten, welche die Stetigkeit und Differenzierbarkeit betreffen, durfte ich für meine Arbeit auswerten.

7.2. Erhebungsinstrument

Die Daten wurden schriftlich durch zwei Fragebögen erhoben. Beide Fragebögen bestehen aus drei Teilen.

7.2.1. Fragebogen 1

Der erste Teil des ersten Fragebogens sind die Beschreibungen des Themas, des Ziels und der Durchführung dieser Untersuchung. Im zweiten Teil wird beschrieben, wie die Proband*innen einen persönlichen Code, der sich aus sechs Zeichen zusammensetzt, eintragen sollen, um die Anonymität der Studierenden zu gewährleisten, aber trotzdem den ersten mit dem zweiten Fragebogen in Verbindung

[102] https://www.ph-noe.ac.at/de/forschung/projekte/aktuelle-projekte/bella-beliefs-zum-lernen-und-lehren-von-analysis.html (zuletzt abgerufen am 31.08.2020)

setzen zu können. Im dritten Teil erfolgen die Aufgaben zu den Vorstellungen zur Analysis. Die Aufgabenstellung lautet:

„Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.“

Die zu ergänzenden Sätze sind auf verschiedene Arten formuliert:

- „Unter … stelle ich mir vor,…“
- „… ist wichtig, weil …“
- „Ein … ist …“
- „Welches Bild verbinden Sie mit …?“
- „In … geht es meiner Meinung nach vorwiegend um…“.

7.2.2. Fragebogen 2

Der zweite Fragebogen besteht aus den zwei ersten Teilen des ersten Fragebogens und einem neuen dritten Teil.
Zuerst ist erneut die Beschreibung des persönlichen Codes und das Feld, um diesen einzutragen, ausgeführt. Der Hauptteil besteht aus den gleichen Aufgaben, wie sie bereits im ersten Fragebogen angeführt waren.

Dann folgt der neue dritte Teil, der den zweiten Fragebogen erweitert, mit weiteren Angaben (10-13), welche sich auf individuelle Daten der Studierenden beziehen.
Die Angabe Nummer 10 ist die Beantwortung der Frage, ob die LehramtskandidatInnen bereits Mathematik in einer Schule unterrichtet haben. Hier können sie ja oder nein ankreuzen. Die weiterführende Frage zielt auf den Lehrkontext ab und gibt die Auswahlmöglichkeiten: Orientierungspraktikum (PÄP), Schulpraktikum (FAP) [103] und Sondervertragslehrer/in[104].
Als nächstes wird abgefragt, ob regelmäßig Nachhilfe gegeben wird oder wurde.
Die zwölfte Angabe ist die Nennung des Schultyps, in welchem die Studierenden zukünftig tätig sein wollen. Hier gibt es vier Antwortmöglichkeiten (NMS, AHS-Unterstufe, AHS-Oberstufe und BHMS), von denen mehrere gewählt werden durften.

[103] Die Begriffe Orientierungspraktikum und Schulpraktikum sind die Bennungen der Praktika in der Ausbildung Bachelor Lehramt. Die Begriffe, welche in Klammer gesetzt sind, sind die, welche im Diplomstudium benutzt wurden (PÄP – pädagogisches Praktikum, FAP – fachliches Praktikum). Da zur Zeit der Datenerhebung sowohl das Diplomstudium noch als auch das Bachelorstudium schon existiert haben und Studierende beider Studiengänge die Veranstaltung, in der die Erhebung stattfand, besuchen konnten, scheinen beide Begriffe in den Fragebögen auf.
[104] SondervertragslehrerInnen sind Lehrende, die bereits an Schulen als Lehrkraft angestellt sind, aber noch keine fertige Ausbildung für diese Lehrtätigkeit besitzen.

Zum Schluss kann angekreuzt werden, ob die Vorlesung und Übung zur „Analysis in einer Variable für das Lehramt“[105] bereits positiv absolviert wurde und falls ja, mit welcher Note.

7.3. Durchführung der Datenerhebung

Die Fragebögen wurden im Zuge der Didaktikvorlesung des Modules Analysis („Schulmathematik Analysis“) an die Studierenden ausgeteilt. In der ersten Einheit der Vorlesung (Anfang Oktober 2018) wurde in kurzen Worten das Projekt präsentiert und die Untersuchung durchgeführt. In dem vorherigen Semester sollten die Studierenden bereits die Fachvorlesung zu Analysis besucht haben, da diese eine empfohlene Voraussetzung für die Didaktikveranstaltung ist. Deshalb wird angenommen, dass zu diesem Zeitpunkt den Studierenden alle Begriffe der Analysis, welche in der Befragung vorkommen, bereits bekannt sind und sie ein Verständnis für diese entwickelt haben.

Die zweite schriftliche Befragung wurde in der letzten Vorlesungseinheit, Ende Jänner 2019, durchgeführt.

In beiden Fällen hatten die Studierenden zwischen 15 und 25 Minuten Zeit um die Fragebögen auszufüllen.

In der Zeit zwischen den Datenerhebungen wurde in der Vorlesung das Konzept der Grundvorstellungen vorgestellt, die Grundvorstellungen zu einigen Begriffen, darunter auch der Differenzierbarkeit, erarbeitet und einige zu der Stetigkeit erwähnt.

7.3.1. Gelehrtes in der Zeit zwischen den Datenerhebungen

Um nachvollziehen zu können, welchen Wissensstand die Studierenden zur Zeit der zweiten Datenerhebung haben hätten können, wird in diesem Kapitel kurz zusammengefasst, was in der Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ zu Grundvorstellungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit gelehrt worden ist.[106]

In der Vorlesung wurde der Begriff Grundvorstellung im Zusammenhang mit dem Aspekt eines mathematischen Begriffs eingeführt. Dieser erlaubt es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit Bedeutung zu versehen und dadurch in sinnhaltigen Kontext zu sehen. Der Begriff „Grundvorstellung“

[105] In der Ausbildung Lehramt für die Sekundarstufe im Unterrichtsfach Mathematik gibt es mehrere Module, in welchen zuerst die Fachvorlesung mit Übung und danach die Didaktikvorlesung mit Übung geplant ist. Die Veranstaltungen, auf die sich hier bezogen wird, sind die fachlichen zum Modul Analysis.

[106] Die Informationen zu den Inhalten der Vorlesung wurden dem Skript „Schulmathematik Analysis. Wintersemester 2018/19. 14. Februar 2019“ und den Vortragsfolien „aspekte_grundvorstellungen_ diffrechnung2019.01.24“ von Steinbauer, R., und Süss-Stepancik, E., entnommen.

wurde wie folgt eingeführt: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ Es wurde besprochen, dass es möglich ist, dass verschiedene Grundvorstellungen zu einem Aspekt möglich sind, aber auch eine Grundvorstellung verschiedene Aspekte berühren kann.

Weiters wurde der Unterschied zwischen einer universellen und einer individuellen Grundvorstellung dargelegt. Auch die Aufteilung in primäre und sekundäre Grundvorstellungen wurde thematisiert.

Nach vom Hofe[107] sollen drei Ziele beim Ausbilden einer Grundvorstellung erreicht werden. Zum einen soll die Bedeutung des Begriffs durch Anknüpfen an bekannte Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen erfasst werden. Zum anderen sollen mentale Repräsentationen aufgebaut werden, welche ein operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen. Drittens soll der Begriff in neuen Situationen angewendet, Sachzusammenhänge erkannt und Phänomene mithilfe der mathematischen Strukturen modelliert werden können.

In der Vorlesung wurden den Studierenden die Aspekte und die Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs, des Folgenbegriffs, des Grenzwertbegriffs und zur Differentialrechnung vorgestellt. Die Aspekte zur Differenzierbarkeit waren „Grenzwert des Differenzenquotienten“ und „Lokale lineare Approximation“. Die Grundvorstellungen, die gelehrt wurden, waren dieselben, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden: „Lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „Lokale Linearität“ und „Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“. Die Aspekte und Grundvorstellungen der Stetigkeit wurden nicht explizit besprochen. Der Begriff wurde formal definiert und die Beschreibung „Ein kleines Wackeln von x_0 führt zu einem kleinen Wackeln von $f(x_0)$.“ wurde erwähnt, was der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit“ zugeordnet werden kann.

In dem Kapitel „Die Lehren aus den Nicht-Beispielen“ wurde besprochen, dass aus einem Sprung im Graphen einer Funktion folgt, dass diese nicht stetig ist, und dass aus einem Knick im Graphen folgt, dass die zugehörige Funktion nicht differenzierbar ist. Weiters werden die Betrags- und die Wurzelfunktion als Beispiele für Funktionen, die stetig aber nicht differenzierbar sind, genannt.

Auch der Zusammenhang, dass aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt, aus der Stetigkeit jedoch nicht die Differenzierbarkeit, wurde besprochen.

[107] (1995, 97f)

7.4. Stichprobe

Die Teilnehmenden der Studie sind Studierende, welche zum Zeitpunkt der Durchführung entweder für das Bachelor Lehramt Studium Mathematik für die Sekundarstufe oder das Diplomlehramtstudium Mathematik inskribiert waren. Laut Studienplan hatten alle Teilnehmenden, welche im Bachelorstudium waren, bereits die StEOP[108] absolviert und alle, auch die aus dem Diplomstudium, sollten zuvor die Analysis-Fachvorlesung besucht haben. Die Vorlesung, in der die Studie durchgeführt wurde, ist im Bachelorstudium für das fünfte Semester vorgesehen[109], da sich viele an diesen Plan halten, kann davon ausgegangen werden, dass ein großer Teil der Studierenden im fünften Semester ihres Studiums waren.

An der Studie nahmen alle Besucher*innen der ersten und letzten Vorlesungseinheit „Schulmathematik Analysis" teil.

7.4.1. Ausschlusskriterien

Da das Ziel dieser Arbeit der Vergleich der Ausprägung der Grundvorstellungen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit zwischen den Zeitpunkten vor Beginn der Semestervorlesung und nach dieser ist, werden in der Auswertung nur die Fragebögen berücksichtigt, welche in der jeweils anderen Erhebung ein Gegenstück haben. Das konnte problemlos durch die personalisierten Codes auf den Unterlagen herausgefunden werden. Insgesamt wurden daher 59 Fragebogen-Paare für die Studie verwendet.

Um die Proband*innen etwas genauer beschreiben zu können, habe ich die individuellen Informationen, welche diese im zweiten Fragebogen anhand des zehnten bis 13. Punktes gegeben haben, aufgearbeitet und stelle sie in dem nächsten Abschnitt dar.

[108] StEOP-Studieneingangs- und Orientierungsphase: erste Lehrveranstaltungen (vor allem Vorlesungen, aber in einigen Fällen auch Übungen oder Seminare) der Bachelorstudien, welche positiv absolviert werden müssen, bevor eine prüfungsimmanente Lehrveranstaltung eines anderen Moduls besucht werden kann.

[109] Im „empfohlenen Pfad", welcher im „Teilcurriculum Unterrichtsfach Mathematik" (https://studieren.univie.ac.at/studienangebot/lehramtsstudien/mathematik-unterrichtsfach/) zu finden ist, werden die Vorlesung und die Übung „Schulmathematik Analysis" im fünften Semester des achtsemestrigen Studiums angegeben.

7.4.2. Lehrerfahrung

Die Studierenden haben am Ende des Semesters über ihre bisherige Lehrerfahrung in der Schule im Gegenstand Mathematik und über ihre Nachhilfeerfahrung Auskunft gegeben.

Unterrichtserfahrung in der Schule (Abbildung 9 und 10)

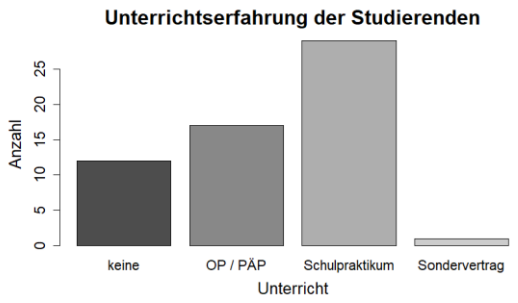

Abbildung 9: Anzahl der Studierenden nach Unterrichtserfahrung

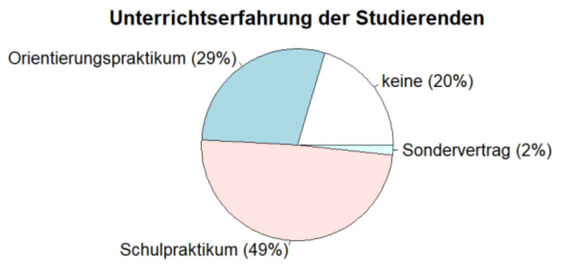

Abbildung 10: relative Häufigkeit der Anzahl der Studierenden nach Unterrichtserfahrung

Die Antworten der Studierenden wurden kodiert, indem „keiner Lehrerfahrung" die Ziffer 0, dem Orientierungspraktikum (PÄP) die Ziffer 1, dem Schulpraktikum (FAP) die Ziffer 2 und der Kategorie Sondervertragslehrer*in die Ziffer 3 zugeordnet wurde. Wie in den Abbildungen 9 und 10 ersichtlich, sind die Teilnehmenden, die bereits das Schulpraktikum oder FAP absolviert hatten, fast die Hälfte (29 von 59) aller. Nur eine Person arbeitete bereits in einem Sondervertrag, zwölf hingegen hatten noch keine Lehrerfahrung in der Schule. Die restlichen 17 hatten das Orientierungspraktikum bzw. PÄP vor der Beantwortung des zweiten Fragebogens positiv absolviert.

Nachhilfeerfahrung (Abbildung 11)

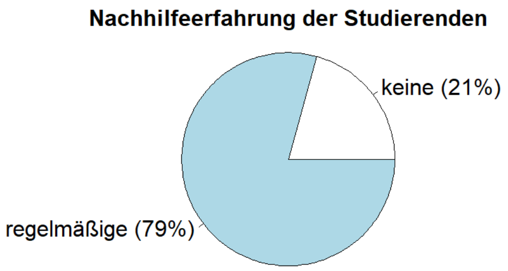

Abbildung 11: relative Häufigkeit der Anzahl der Studierenden nach Nachhilfeerfahrung

Der Großteil der Studierenden (46) hat zu dem Zeitpunkt der Erhebung oder davor regelmäßig Nachhilfe gegeben: Abbildung 11. Nur zwölf haben angekreuzt, dass sie diese Erfahrung noch nicht hatten. Eine Person hat diese Frage nicht beantwortet.

Abschließend kann gesagt werden, dass fast alle Teilnehmenden (mindestens 93%) Lehrerfahrung hatten, da nur 4 (bzw. 5) [110] weder Unterrichtserfahrung in der Schule noch durch Nachhilfe gewinnen konnten.

7.4.3. Leistungsdaten

Da der Fragebogen auch die Noten der Fachvorlesung und der dazugehörigen Übung abfragte, kann die Gruppe der Proband*innen auch nach diesen Kriterien dargestellt werden.

Vorlesungsnote (Abbildung 12 und 13)

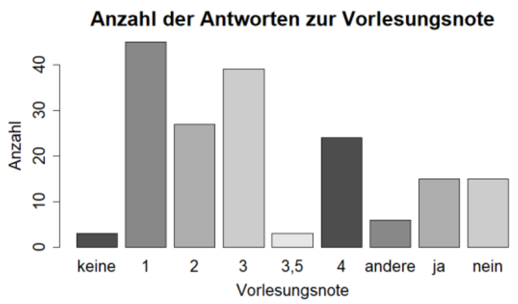

Abbildung 12: Anzahl der Studierenden nach Vorlesungsnote

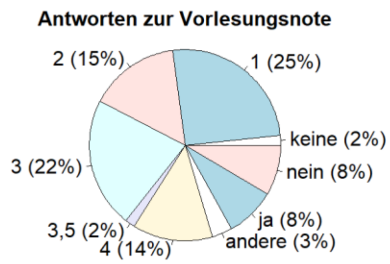

Abbildung 13: relative Häufigkeit der Anzahl der Studierenden nach Vorlesungsnote

Anhand dieser Grafiken (Abbildungen 12 und 13) kann erkannt werden, dass die Studierenden nicht nur die erwarteten Antworten gegeben haben. Dass zwei Teilnehmende „andere" hingeschrieben haben, lässt vermuten, dass sie die Angabe nicht genau gelesen haben, da sie auch andere Analysis-Lehrveranstaltungen inkludiert.[111] Die Antwort „3,5" interpretiere ich so, dass die Person sich nicht mehr sicher war, welche der Noten Drei oder Vier sie in der entsprechenden Lehrveranstaltung erhalten hatte. Die Personen, die in dieser Auswertung in die Kategorie „ja" fallen, sind jene, die angekreuzt haben, dass sie die Veranstaltung positiv absolviert hatten, aber die Note nicht ergänzten. In einem Fragebogen war dieser Punkt nicht beantwortet.

Nur fünf der insgesamt 58 hatten die vorbereitende Vorlesung zu dem Zeitpunkt der zweiten Befragung noch nicht abgeschlossen. Über 50 % derjenigen, die eine Note angegeben haben, konnten die Vorlesung mit einer guten oder sehr guten Note[112] absolvieren.

[110] Da eine der Personen, die noch keine Unterrichtserfahrung in einer Schule sammeln konnte, keine Angaben über die Nachhilfeerfahrung gegeben hat, kann nicht erfasst werden, ob diese zu der Gruppe ohne Lehrerfahrung gezählt werden kann.

[111] Genauer Wortlaut der Aufgabenstellung: „Ich habe die ‚Analysis in einer Variablen für das LA' oder eine entsprechende andere Analysis-LVA positiv absolviert:"

[112] 15 Sehr gut, 9 Gut von 46 Antworten mit Notenangabe – ~52,17%

Übungsnote (Abbildung 14 und 15)

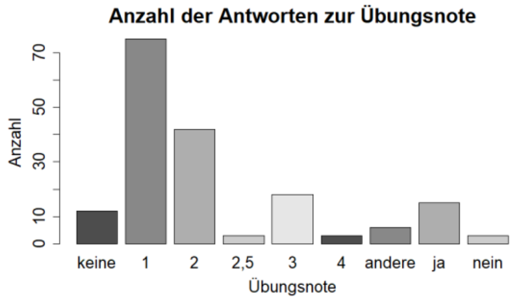

Abbildung 14: Anzahl der Studierenden nach Übungsnote

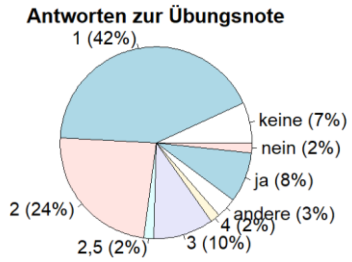

Abbildung 15: relative Anzahl der Studierenden nach Übungsnote

Auch bei dieser Aufgabe gibt es die Antworten „andere“, „ja“ ohne zusätzliche Note und „2,5“ (Abbildungen 14 und 15). Diese Antworten werden bei der Übungsnote so interpretiert wie bei der Beschreibung der Stichprobe nach der Vorlesungsnote. Zur Übungsnote haben vier der 59 Teilnehmenden keine Angabe gemacht.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Übungsnote im Allgemeinen besser ausgefallen ist als die Vorlesungsnote. Nur eine Person hat die Übung noch nicht positiv abgeschlossen. Unter den anderen Teilnehmenden gibt es nur einen Vierer und nur sechs Dreier[113] in der Benotung der Übung. Im Gegenzug dazu haben 14 angegeben einen Zweier und sogar 25 einen Einser erhalten zu haben. Das heißt, dass ungefähr 72%[114] aller, die die Übung abgeschlossen haben, diese mit gutem oder sehr gutem Erfolg beenden konnten. Beziehen wir uns auf die Anzahl der Personen, von denen die Noten bekannt sind, so sind es erfolgreiche 83%.

[113] Die Antwort „2,5“, welche nur einmal vorkommt, ist in dieser Aufzählung nicht eingerechnet.
[114] Hier wurde die Formulierung „ungefähr 72%“ gewählt, da unter den Antworten „andere“ und „ja“ ebenfalls 1er oder 2er sein könnten, welche in den 72% nicht eingerechnet sind.

7.4.4. Zukunftspläne

Weiters betrachten wir den Schultyp, in welchem die Studierenden zukünftig arbeiten wollen.

Schulwunsch (Abbildung 16 und 17)

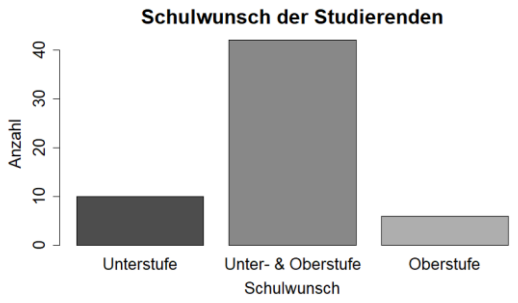

Abbildung 16: Anzahl der Studierenden nach Schulwunsch

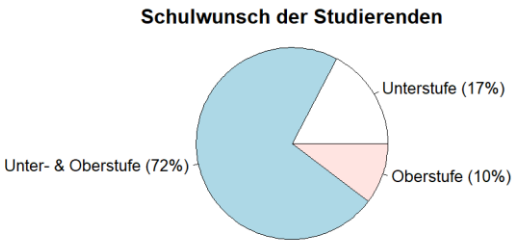

Abbildung 17: Prozent der Studierenden nach Schulwunsch

Auch bei dieser Auswertung (Abbildungen 16 und 17) fehlt leider eine Angabe, weshalb die Gesamtanzahl der berücksichtigten Studierenden 58 ist. Von diesen wollen ungefähr 17% ausschließlich in der Unterstufe unterrichten, zu dieser Kategorie gehören die Antworten „NMS“, „AHS-Unterstufe“, wie auch die Kombination aus „NMS“ und „AHS-Unterstufe“. 10% der Teilnehmenden haben vor nur in einer Oberstufe unterrichten. Die möglichen Antworten für diese Kategorie waren „AHS-Oberstufe“, „BHMS“ und deren Kombination. Der Großteil (mehr als 70%) jedoch hat vor in Unter- und / oder Oberstufe zu unterrichten, wobei hier fast alle Kombinationen der anzukreuzenden Antworten auftreten:

- AHS- Unterstufe & AHS- Oberstufe
- NMS, AHS- Unterstufe & AHS-Oberstufe
- AHS- Unterstufe, AHS-Oberstufe & BHMS
- NMS & BHMS
- AHS-Unterstufe & BHMS
- NMS, AHS-Unterstufe, AHS-Oberstufe & BHMS
- NMS & AHS-Oberstufe

Die einzigen Kombinationen, die in der Studie nicht vorkommen, sind:

- NMS, AHS-Oberstufe & BHMS
- NMS, AHS-Unterstufe & BHMS

7.5. Datenaufbereitung

In diesem Abschnitt wird zuerst die Codierung der Fragebögen und der Merkmale erläutert, anschließend die Kategorisierung der Antworten zu den Grundvorstellungen erklärt und abschließend die Datenstrukturierung in Untergruppen präsentiert.

7.5.1. Codierung und Operationalisierung

7.5.1.1. Zuordnungscode

Zu Beginn der Auswertung war es notwendig die Fragebögen ihren Gegenstücken zuzuordnen. Das war durch den individuellen sechsstelligen Code der Teilnehmenden möglich. Dieser Code besteht aus den ersten zwei Buchstaben des Vornamens der Mutter, den zwei Ziffern des Geburtstages der Mutter und danach den zwei Ziffern des eigenen Geburtstages. Sollte einer der Geburtstage zwischen dem ersten und neunten eines Monats stattfinden, muss eine Null davor geschrieben werden. Anhand dieser Codierung konnten 59 Fragebogenpaare gefunden und deren Daten (die Stetigkeit und Differenzierbarkeit betreffend) in Exceltabellen übertragen werden.

7.5.1.2. Codierung der Merkmale

Um die individuellen Merkmale statistisch auswerten zu können, wurden sie ordinalskaliert.

Die Antworten, welche die *Leistungsmerkmale* (Note der Vorlesung und Note der Übung) betreffen und Noten angegeben hatten, konnten ihre Werte beibehalten. Die anderen Antworten („ja“, „nein“, „andere“) wurden in der späteren Auswertung nicht berücksichtigt, da sie keinen Aufschluss über den Zusammenhang zwischen Leistung und Ausprägung der Grundvorstellungen geben könnten.

Alle Studierenden, die angegeben hatten, dass sie bereits regelmäßige *Nachhilfeerfahrung* hatten, erhielten in diesem Merkmal den Wert 1, diejenigen ohne den Wert 0. Die Person mit der fehlenden Antwort in dieser Kategorie erhielt keinen Wert und wurde bei Auswertungen bezüglich Nachhilfeerfahrung nicht miteinbezogen.

Die *Unterrichtserfahrung* erhielt, wie bereits in Abschnitt 7.4.2. beschrieben, Werte zwischen 0 und 3. 0 entspricht keiner Lehrerfahrung im Schulkontext, 1 der Absolvierung des Orientierungspraktikums oder des PÄPs, 2 dem erfolgreichen Abschluss des Schulpraktikums oder FAPs und 3 der Lehrtätigkeit im Sondervertrag.

Die 58 Antworten auf die Frage, in *welcher Schule* die Studierenden planen zu unterrichten, waren am schwierigsten einzuordnen. Da jedoch die Zuordnung der einzelnen Antworten beziehungsweise aller

13 gewählten Antwortkombinationen mit Werten zwischen 1 und 13 zu einer subjektiven Wertung geführt hätten, beschloss ich, die Antworten in drei Kategorien einzuteilen: Sekundarstufe 1 (5. bis 8. Schulstufe) , Sekundarstufe 2 (9. bis 12. bzw. 13. Schulstufe) und die Kombination aus beiden. Diese Kategorien unterscheiden nicht zwischen unterschiedlichen Schulformen innerhalb der Unter- bzw. Oberstufe. Die Antwortmöglichkeiten, welche zur Zuordnung zu den drei Kategorien führten, sind in Abschnitt 7.4.4. angeführt. Um diese Daten statistisch auswerten zu können, erhielten die Antworten, welche in die Kategorie Sekundarstufe 1 fallen, den Wert 1, diejenigen, die zur Kombination aus Unter- und Oberstufe gezählt wurden, den Wert 2 und die Antworten, die der Kategorie Sekundarstufe 2 zugeordnet wurden, den Wert 3.

7.5.2. Kategorisierung und Codierung der Antworten

Um einen ersten groben Überblick über die hundertachtzehn Antworten aus beiden Fragebögen pro Begriff zu erhalten, wurden zwei Excel-Tabellen erstellt – eine für die Stetigkeit und eine für die Differenzierbarkeit –, in denen einzelne Aussagen den individuellen sechsstelligen Codes der Studierenden zugeordnet wurden. So konnte auf einen Blick erkannt werden, welche Aussagen oft, manchmal oder selten getroffen wurden.

Um mit diesen Aussagen statistisch arbeiten zu können, mussten sie kategorisiert und codiert werden[115]. Sie wurden in die unterschiedlichen Grundvorstellungen aufgeteilt und in verschiedene Ausprägungen eingeteilt.

7.5.2.1. Skala

Damit die Antworten gemäß ihrer Ausprägung klassifiziert werden konnten, wurde eine Skala erstellt. Diese Skala kann mit der von Vela[116] verglichen werden, jedoch reicht sie nicht von *1* bis *5*, sondern von *0* bis *4*, wobei in der Kategorie *0* im Gegensatz zu Velas schwächster Kategorie auch die nichtvorhandenen Grundvorstellungen implementiert sind. Die einzelnen Ausprägungen sind wie folgt beschrieben:

0 … normative GV ist nicht vorhanden

1 … normative GV ist unspezifisch / naiv

2 … normative GV ist schwach ausgeprägt bzw. ungenau formuliert

[115] Hammann, M. & Jördens, J. (2014, 170)
[116] (2011, 22)

3 … normative GV ist vorhanden, aber nicht korrekt formuliert

4 … normative GV ist klar ausgeprägt bzw. adäquat ausgedrückt

7.5.2.2. Stetigkeit

Die Antworten auf die Frage zur Stetigkeit wurden auf die drei Grundvorstellungen „Sprungfreiheit", „Darstellbarkeit" und „Vorhersagbarkeit" aufgeteilt.

Manchmal konnten Aussagen der Studierenden auf mehrere Grundvorstellungen aufgeteilt werden, einige waren eindeutig nur zu einer Grundvorstellung zuordenbar und manche passten zu keiner der dreien. Aufgrund dieses letztbeschriebenen Falls wurden noch zusätzliche Kategorien erstellt. Zu diesen gehören: „Fehlvorstellungen", „Definitionen", „Differenzierbarkeit" und „nicht zuordenbar".

Sprungfreiheit

Den Wert 0 in der Kategorie Sprungfreiheit erhielten alle Fragebögen, deren Antwort nicht der Sprungfreiheit zugeordnet werden konnte.

In die Ausprägung 1 „unspezifisch / naiv" fallen sowohl in Fragebogen 1 wie auch in Fragebogen 2 jeweils nur eine Antwort. Eine dieser Antworten lautet „Eine Funktion ohne große Sprünge oder Oszillationen." Obwohl die Aussage fehlerhaft ist, da eine stetige Funktion überhaupt keine Sprünge haben darf und manche Oszillationen stetig sind, wurde diese nicht den Fehlvorstellungen zugeordnet, denn die Grundvorstellung „Sprungfreiheit" ist eindeutig erkennbar, obwohl die Beschreibung sehr ungenau formuliert ist. Aufgrund der Kombination der falschen mit der ungenauen Formulierung wird die Aussage nicht der Ausprägung 2 sondern der Ausprägung 1 zugeordnet. Die zweite Antwort, welche in diese Ausprägungsstufe fällt, ist „[Unter einer stetigen Funktion stelle ich mir vor,] eine durchgehende Funktion". Diese ist zu unspezifisch formuliert. Da „durchgehend" jedoch als „ohne Sprünge" interpretiert werden kann, wird sie der Sprungfreiheit zugeordnet.

Drei Antworten des ersten Fragebogens und zwei des zweiten wurden der Ausprägung 2 „normative GV ist schwach ausgeprägt bzw. ungenau formuliert" zugeordnet. Zu diesen gehören zum Beispiel: „Eine Funktion, die keine Abbruchstellen besitzt.", „eine Linie ohne Lücken" und „eine Funktion ohne Oszillationsstellen".

Ausprägung 3 „normative GV ist vorhanden, aber nicht korrekt formuliert" ist jene, in die am meisten Antworten fallen – zwölf der ersten Erhebung und 30 der zweiten. Obwohl die Grundvorstellung bei vielen Antworten vorhanden war, wurden sie dieser Ausprägung zugeordnet, da die Formulierung nicht korrekt war. So beschrieben einige eine stetige Funktion als „Funktion ohne Löcher" oder „Funktion ohne Lücken". Eine weitere Antwort ist „…eine Funktion, die nicht stark oszilliert." Da diese nicht eindeutig, aber am besten der Grundvorstellung Sprungfreiheit zugeordnet werden kann, ist sie – obwohl korrekt – in die Ausprägung 3 eingeteilt.

31 Antworten sind Ausprägung 4 „normative GV ist klar ausgeprägt bzw. adäquat ausgedrückt“ zugeteilt. Diese Aussagen sind inhaltlich entweder „… eine Funktion, die keine Sprungstellen besitzt.“ oder sind äquivalent zu: „Eine Funktion, deren Funktionsgraph durchgehend ist, also keine Sprünge oder Lücken besitzt.“

Darstellbarkeit

In die schwächste Ausprägung der Grundvorstellung Darstellbarkeit sind die folgenden drei unspezifischen beziehungsweise ungenauen Äußerungen: aus Fragebogen 1: „kann eine Schnur legen“, „eine Autobahn ohne Ampeln und Kreuzungen“ und aus Fragebogen 2: „eine durchgehende Funktion“.

Zuordnungen zur zweiten Stufe der Ausprägung gibt es nur aus dem ersten Fragebogen: „…einen Graphen, welcher in einem Intervall ohne Unterbrechung gezeichnet werden kann.“ und „…eine Funktion, die im Definitionsbereich nie unterbrochen wird“. Die Zuordnung zur Darstellbarkeit ist eindeutig sichtbar, jedoch sind sie nicht korrekt formuliert und deshalb Teil der zweiten Ausprägung.

Neun Aussagen des ersten und eine des zweiten Fragebogens können der dritten Ausprägungsstufe zugeteilt werden. Da „…eine Funktion ohne Lücken“ in Kombination mit einer Grafik hier zugeordnet wird, werden ebendiese Grafiken in zwei anderen Fragebögen ebenfalls in diese Ausprägung miteinbezogen. Auch „…ein Graph, der nicht unterbrochen wird.“ und ähnliche fallen in diese Stufe, da es sich bei dieser Grundvorstellung um die Darstellbarkeit im Sinne des Zeichnens handelt.

Die meisten Zuordnungen in der Grundvorstellung Darstellbarkeit gibt es zur stärksten Ausprägung: fünfzehn aus Fragebogen 1 und zwölf aus Fragebogen 2. Beispiele für Antworten sind: „…eine Funktion, deren Graph mit nur einmaligem Auf- und Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.“, „…eine Funktion, die man in einem Zug durchzeichnen kann.“ und „…einen Graph, den man zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.“

Vorhersagbarkeit

Die dritte Grundvorstellung zur Stetigkeit ist die Vorhersagbarkeit, dieser konnten insgesamt am wenigsten Aussagen zugeordnet werden.

In Ausprägung 1 fallen keine Antworten des ersten, aber zwei des zweiten Fragebogens: eine Zeichnung, in welcher der Epsilon-Deltabereich eingezeichnet war, jedoch aufgrund keiner weiteren Erläuterung die Antwort zu unspezifisch ist um höher kategorisiert zu werden, und die Antwort „…eine Funktion, die an jeder Stelle für $f(x)$ in einem beliebig kleinem Intervall um x einen weiteren Funktionswert $f(\widetilde{x})$ besitzt.“, da der Ansatz zu erkennen ist, die wichtige Information jedoch, dass $f(\tilde{x})$ ganz nah an $f(x)$

sein sollte, fehlt. Die Aussage könnte auch bei einer Funktion mit Sprungstelle erfüllt sein, da es nur darum geht, dass ein $f(\tilde{x})$ existiert.

Zwei Antworten des zweiten, aber keine des ersten Fragebogens können der Ausprägung 2 zugeordnet werden: „Nähert man sich von links und rechts einem Wert, so sollte (sich, Anm. A.S.) der zugehörige Funktionswert sowie die Steigung nicht abrupt ändern.“ und „Wenn ich den Funktionswert nehme und nur darum ein kleines Intervall bild, dann lande ich bei den „x-Werten“ wieder bei einem Wert und darum in einem kleinen Intervall.“ Der Ansatz bei der ersten Antwort ist eindeutig vorhanden, jedoch ist sie nicht ganz richtig. Die Aussage über den Funktionswert stimmt, jedoch darf sich die Steigung ändern, da eine stetige Funktion zum Beispiel Knicke haben darf. Die zweite Antwort ist schlecht formuliert und daher in Stufe 2.

Die meisten Antworten zur Vorhersagbarkeit besitzen die Ausprägung 3 – die drei aus dem ersten Fragebogen und neun aus dem zweiten. Bis auf eine sind alle der Stufe 3 aufgrund der nicht korrekten Formulierung zugeordnet – zum Beispiel: „Wenn man sich ein kleines bisschen auf der x-Achse bewegt, dann bewegt man sich auch nur ein kleines bisschen auf der y-Achse.“ Die eine Aussage, die nicht zu der vorigen Gruppe dazuzählt, ist aufgrund der zugehörigen Grafik in dieser Ausprägung, einzeln wären sowohl die Aussage „bis auf endlich viele Elemente müssen in dem Sicherheitsintervall liegen“ wie auch die Grafik zu ungenau um dieser Kategorie zugeteilt zu werden.

Die fünf der stärksten Ausprägung zugeordneten Antworten sind nur im zweiten Fragebogen zu finden und lauten „Kleine Änderungen des Argumentes verursachen kleine Änderungen der Werte“ oder „…eine Funktion, die, wenn man den x-Wert nur minimal ändert, sich auch im zugehörigen [sic!] $f(x)$-Wert nur minimal ändert“.

Fehlvorstellungen

Auch einige Fehlvorstellungen zu den Begriffen sind im Zuge der Befragungen aufgetreten. Die häufigste ist jene, dass einige Teilnehmenden sich unter einer stetigen Funktion eine Funktion vorstellen, die keine Knicke hat. Dies stimmt jedoch nicht, da es Funktionen gibt, die sowohl stetig sind, als auch einen Knick im Graphen besitzen. Weitere Antworten waren „eine surjektive Funktion“, „monoton wachsend oder fallend“, „eine Funktion, die sich an einen Grenzwert annähert“, „eine Funktion, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich definiert ist.“ und „…dass diese in jeder beliebig kleinen Epsilonumgebung einen Wert hat, der größer ist als der ursprüngliche Wert.“ Einige dieser Aussagen beschreiben die Monotonie oder Konvergenz, die jedoch keine richtigen Grundvorstellungen für die Stetigkeit sind.

Definitionen

Ebenfalls nicht zu den Grundvorstellungen zuordenbar war die Definition der Stetigkeit, welche sowohl formal wie auch in Worten beschrieben mehrmals – zweimal vor und achtmal nach der Vorlesung -

vorgekommen ist. Zu diesen Antworten zählen die Definitionen, welche über die Umgebungsstetigkeit, durch das Folgenkriterium und durch den Grenzwert definiert sind. Eine weitere Aussage, welche ebenfalls in diese Kategorie eingeordnet wurde, ist: „Eine stetige Funktion ist eine Funktion, die an jeder Stelle stetig ist.“

Differenzierbarkeit

Da mehrere Teilnehmende statt oder zusätzlich zu einer Grundvorstellung die Differenzierbarkeit in den Fragebögen erwähnten, wurde eine eigene Kategorie für diese erstellt. Insgesamt sind sechs Antworten (vier aus dem ersten und zwei aus dem zweiten Fragebogen) dieser Kategorie zugeteilt, dazu zählen zum Beispiel: „…eine Funktion, die überall differenzierbar ist“ und „…eine Funktion, die an jeder beliebigen Stelle differenzierbar ist.“

Nicht bearbeitete Antworten

Die vier Aussagen, die keiner der erstellten Kategorien zuordenbar waren, werden in dieser Studie nicht bearbeitet. Zu diesen Antworten zählen: „…keine Unstetigkeitsstellen“, „…einen „klaren“ Graphen besitzt“ und zwei Grafiken – ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für eine stetige Funktion.

7.5.2.3. Differenzierbarkeit

Die Antworten der Aufgabe „Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor,…“ wurden in die vier Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ eingeteilt.

Da viele Aussagen keiner der Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten, mussten auch bei der Differenzierbarkeit zusätzliche Kategorien erstellt werden. Deshalb gibt es neben der Grundvorstellungen noch die Kategorien „Fehlvorstellungen“, „Definition“, „Stetigkeit“, „Differenzierbarkeit“, „Aussehen“ und „nicht bearbeitete Antworten“.

Lokale Änderungsrate

Zu einer gut ausgeprägten Grundvorstellung gehören die Entwicklung der Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen, von der Steigung einer Kurve in einem Punkt und, dass die Änderung der abhängigen Variable y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist[117]. Nach diesen Vorstellungen werden die Antworten in die folgenden Ausprägungen eingeteilt.

Zur Ausprägung 1 zählen vier Aussagen des zweiten Fragebogens. Drei dieser sind zu unspezifisch, sie sind der Form: „…eine Funktion ist differenzierbar, wenn der linksseitige und rechtsseitige Limes übereinstimmen.“ Durch den erwähnten Limes bzw. Grenzwert können sie dieser Grundvorstellung

[117] Greefrath, et al. (2016, 148f)

zugeordnet werden, doch da nicht erwähnt wird, wovon der Grenzwert gebildet wird, ist die Ausprägung nur 1. Die vierte Antwort lautet: „…eine Funktion, die in jedem Punkt differenzierbar ist, das heißt, der $\lim \frac{f(x+h)-h}{h}$ existiert und ist endlich.“ Diese wird, da der „Differenzenquotient“ nicht die Veränderung der abhängigen Werte angibt und somit ein falsches Verständnis dessen vermutet wird, ebenfalls nur Ausprägung 1 zugeteilt.

Sechs Aussagen, alle aus dem zweiten Fragebogen, haben eine Ausprägung 2 dieser Grundvorstellung. Drei Antworten sind dieser Ausprägung zugeteilt worden, da die Formel nicht korrekt angeschrieben ist. Es fehlt die Information, wogegen der Limes strebt und in einem Fall werden die zwei Funktionswerte im Zähler addiert statt subtrahiert. Die anderen drei Antworten (z. B.: „…wenn in jedem Punkt ein Differentialquotient existiert und dieser von links und rechts gerichtet dasselbe ist“) deuten bereits auf eine schwache Ausprägung der Grundvorstellung der Änderungsrate hin, weshalb sie der Ausprägung 2 zugeordnet wurden.

Die Ausprägung 3 erhielten nur zwei Aussagen. „Ich kann dort momentane Steigung messen.“ (Fragebogen 1) ist eine ungenaue Formulierung der momentanen Steigung einer Kurve als Änderungsrate. Die zweite Antwort, welche der zweiten Erhebung entstammt, ist ebenfalls ungenau formuliert, da in der Information nicht zusätzlich angeschrieben ist, dass der Differenzenquotient die mittlere Änderung angibt: „…eine Funktion für die $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dieser Grenzwert an jeder Stelle x des Definitionsbereichs existiert und eindeutig ist.“

„…eine Funktion deren Steigung an jeder Stelle bestimmbar ist.“ ist die einzige Antwort, welche die Ausprägung 4 der Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“ erhielt.

Tangentensteigung

Eine gut ausgeprägte Grundvorstellung der Tangentensteigung besteht aus der Vorstellung von der Tangente als Schmiegegerade, der Vorstellung, dass die Tangente an einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat bzw. der Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt[118]. Diese Vorstellungen dienen als Basis der Zuordnung der Antworten zu ihren Ausprägungen.

Die Aussage aus dem zweiten Fragebogen „…eine Funktion, für die der Grenzwert benachbarte (-r, Anm. A.S.) Sekanten Steigungen existiert“ kann dieser Grundvorstellung zugeordnet werden, jedoch ist unklar, was gemeint wurde, weshalb die Ausprägung 1 ist. Diese ist die einzige Zuordnung zu dieser Ausprägungsstufe.

Nur vier Antworten erhielten die Ausprägung 2. Die aus dem ersten Fragebogen „eindeutige Steigung überall“ erwähnt nicht, dass es sich um eine Tangente handelt, die drei anderen Aussagen, welche aus

[118] Greefrath, et al. (2016, 150)

dem zweiten Fragebogen stammen, - „keine senkrechten Tangenten“ -beschreiben einen Spezialfall, der keine eindeutige Repräsentation darstellt.

Zehn der 13 Äußerungen, welche der Ausprägung 3 zugeordnet sind, lauten „…eine Funktion, die an allen Stellen eine eindeutige Tangente besitzt.“, in dieser wird jedoch keine Verbindung zur Steigung, Schmiegegeraden oder Richtung der Kurve hergestellt. Anhand der drei anderen Aussagen „eindeutig definierte Schmiegegerade an jeder Stelle“, „Tangente an den Punkt an dem die Funktion differenzierbar ist“ und „lässt sich durch Schmiegegerade annähern“ kann festgestellt werden, dass die Grundvorstellung bereits vorhanden ist, jedoch nicht korrekt formuliert ist; es fehlt der klare Zusammenhang zu einer der oben aufgezählten Vorstellungen zur Grundvorstellung.

Zwei Antworten der ersten und zwei der zweiten Datenerhebung haben die Ausprägung 4 erreicht. Zu diesen zählen: „…an welche [ich] an jeder Stelle eine Tangente anlegen kann und ihre Steigung ermitteln kann“ (zweimal), „eine Funktion, die an allen Stellen eine eindeutige Tangente/Steigung hat; Tangente gibt lokale Richtung der Kurve an“ und „eine Funktion, deren Tangente (Grenzwert der Sekante) in jedem Punkt des Definitionsbereichs bestimmt ist.“ Die letzte Aussage hat die Ausprägung 4, da durch die Information, dass die Tangente der Grenzwert der Sekante ist, der Zusammenhang mit der Schmiegegeraden herausgelesen werden kann.

Lokale Linearität

Folgende zwei Vorstellungen[119] gehören zur Ausprägung dieser Grundvorstellungen:

- Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, die Funktion kann approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

Keine der Antworten der Studierenden konnte im Zuge der Kategorisierung der Grundvorstellung „lokale Linearität“ zugeordnet werden.

Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

Essentielle Kenntnisse für eine gute Ausprägung der Grundvorstellung sind, dass die Ableitung angibt, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken, dass hohe Werte der Ableitung schnelle bzw. starke Änderungen der Funktionswerte bedeuten und dass für kleine Änderungen der Zusammenhang von Δx und Δy multiplikativ ist ($\Delta y = k \cdot \Delta x;\ k \dots Konstante$)[120].

[119] Greefrath, et al. (2016, 151)
[120] Greefrath, et al. (2016, 153)

Die Aussage „aus einem Intervall wieder ein Intervall abbildet“ kann dieser Grundvorstellung aufgrund der Abbildung von einem Intervall in ein anderes zugeordnet werden, ist aber ansonsten zu unspezifisch und hat deshalb nur die Ausprägung 1.

Es gibt keine Aussagen, die Ausprägung 2 dieser Grundvorstellung aufweisen.

Eine Antwort aus der zweiten Datenerhebung – „…eine Funktion, bei der ein ‚Zittern des Wertes des Differenzenquotienten ein Zittern des Funktionswertes‘ einschließt“ – erhält die Ausprägung 3, da die Kenntnis, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken, eindeutig ausgeprägt, jedoch nicht korrekt formuliert ist.

Die Ausprägung 4 hat keine der Aussagen beider Fragebögen erhalten.

Fehlvorstellungen

17 Antworten weisen eine Fehlvorstellung auf. Eine dieser kann der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ zugeordnet werden: „Ableitung ist Sekante“.

Andere falsche und ungenaue Antworten sind: „eine stetige Funktion“, „eine bijektive Funktion“, „eine Funktion, die an der Stelle A (aus der Definitionsmenge) einen Grenzwert besitzt“, „dass die Funktion über die gesamte Menge möglich ist“, „bei der an jeder Stelle der Grenzwert gleich dem Funktionswert“, „dass die Limes-Bildung für die ganze Funktion möglich ist“ und „Grenzwert von einem Punkt ist eindeutig“. Die Aussage „eine Funktion, bei der man sich sowohl von links als auch von rechts annähern kann und man einen Grenzwert erhält“ kann auch auf die Stetigkeit zutreffen. Mit „…dass diese mit z.B.: $\lim\limits_{x \to 0}$ eine weitere Funktion, aber nicht 0, ergibt“ ist vermutlich gemeint, dass die Ableitung immer eine weitere Funktion ergibt, aufgrund der ungenauen Formulierung ist diese Antwort den Fehlvorstellungen zugeordnet.

Definition

Zwei Antworten der ersten Datenerhebung inkludieren die formale Definition der Differenzierbarkeit über den Grenzwert des Differentialquotienten. In der zweiten Datenerhebung wird die Definition einmal verbal beschrieben.

Stetigkeit

Die Stetigkeit ist Voraussetzung für die Differenzierbarkeit, jedoch nicht als Vorstellung dafür geeignet. Einige Studierende nannten „eine stetige Funktion“ als einzige Antwort auf die Frage, was sie sich unter einer differenzierbaren Funktion vorstellten, weshalb diese Antwort auch in der Kategorie Fehlvorstellungen zu finden ist. Andere nannten diese Antwort als zusätzliche Information. Eine Person schrieb: „Die Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung, aber keine hinreichende.“, eine andere: „Ist eine Funktion an einer Stelle nicht stetig → nicht differenzierbar & differenzierbar → stetig“.

Aussehen des Funktionsgraphen

Da keine der Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit (im Gegensatz zu den Grundvorstellungen zur Stetigkeit) das Aussehen des Funktionsgraphen beschreibt, jedoch viele (46) Antworten dieses behandeln, habe ich eine Kategorie „Aussehen des Funktionsgraphen“ erstellt. Der Großteil der Aussagen beschreibt eine stetige Funktion: „besitzt keine Sprungstellen/Sprünge“, hat keine „Löcher/Lücken“, „ohne Unterbrechungen“, „keine Polstellen“, „keine undefinierten Stellen“ und „kein wildes Herumoszillieren“. Einige treffen jedoch speziell auf die Differenzierbarkeit zu: „besitzt keine Ecken“, „eine ‚glatte‘ Funktion ohne ‚Kanten‘“, „Ohne Knicke“ und „darf nicht zu eckig sein, z. B.: einen Flusslauf“. Eine weitere Antwort, welche im ersten Fragebogen vorkommt, lautet „ohne Asymptote“, welche jedoch ohne nähere Beschreibung keinen Zusammenhang weder mit der Differenzierbarkeit noch mit der Stetigkeit aufweisen kann.

Nicht bearbeitete Antworten

Drei Teilantworten konnten zu keiner bestehenden Kategorie zugeordnet werden und werden daher nicht weiterbearbeitet: „d. h. dass eine eindeutige Zuteilung möglich ist“, „Hier gilt ähnlicher Zusammenhang wie bei Folgen (Grenzwert einer Folge: Dass sie konvertiert, gegen einen gewissen Wert x_0)“ und „besitzt ev. Grenzwert“.

7.5.3. Datenstrukturierung

Für die statistische Auswertung der Daten erstellte ich vier Excelseiten, eine für die Antworten des ersten Fragebogens zur Stetigkeit, eine für die des zweiten Fragebogens und dieselbe Aufteilung für die Antworten zur Differenzierbarkeit.

Um die Daten auf unterschiedliche Arten auswerten zu können, musste die erhobene Datenmenge in verschiedene Gruppen unterteilt werden, dies geschah mithilfe der Anleitung durch Behr und Pötter.[121]

Die ersten Datenmengen, die ausgewertet wurden, sind jene, in denen jeder teilnehmenden Person drei Werte für die Stetigkeit beziehungsweise vier Werte für die Differenzierbarkeit zugeordnet sind - einen Wert für jede Grundvorstellung des Begriffes des Fragebogens. Dadurch hatte ich vier Datensätze, welche ich „Stetigkeitvorher Allgemein“, „Stetigkeitnachher Allgemein“, „Differenzierbarkeitvorher Allgemein“ und „Differenzierbarkeitnachher Allgemein“ nannte. Die Fragebögen zur Stetigkeit bestehen aus 177 Einträgen, die zur Differenzierbarkeit aus 236.

Um nur die gegebenen Antworten werten zu können, verringerte ich die oben beschriebenen Datenmengen um alle Eintragungen, welche in den Grundvorstellungen den Wert „0“ eingetragen

[121] (2011, 47-62)

hatten. Die neuen Datensätze erhielten eine „0“ am Ende ihres Namens, um sie von den oberen zu differenzieren. „Stetigkeitvorher Allgemein0“ besteht aus 57 Eintragungen, „Stetigkeitnachher Allgemein0“ aus 65, „Differenzierbarkeitvorher Allgemein0“ aus sieben und „Differenzierbarkeitnachher Allgemein0“ aus 28. Es ist möglich, dass in diesen Listen einzelne Teilnehmende öfters vorkommen, da ihre Antworten in verschiedene Grundvorstellungen zu unterteilen waren, oder gar nicht, da sie keine Antworten gegeben hatten, die zu den Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten.

Da viele Studierende die Aufgabe mit einem kurzen Satz, wenig Stichwörtern oder einer schnellen Zeichnung beantwortet hatten und sie, weil es in der Fragestellung nicht erwähnt wurde, nicht das Ziel hatten alle Grundvorstellungen niederzuschreiben, ist es sehr interessant auszuwerten, welche Grundvorstellung diejenige ist, die ihnen als erstes in den Sinn gekommen ist und daher bei ihnen am stärksten ausgeprägt ist - die Maximalausprägung der Antwort. Um diese Datensätze zu erhalten, wurde bei jedem Teilnehmer und jeder Teilnehmerin die Grundvorstellung mit der höchsten Ausprägung ausgewählt und aus diesen Datenpaaren (Person – Grundvorstellung mit Ausprägung) neue Datenmengen erstellt. Diese erhielten im Namen den Zusatz „Maximum“ statt „Allgemein“. In jeder dieser Mengen kommt jede Person genau einmal kombiniert mit der höchsten erreichten Ausprägung und der dazugehörigen Grundvorstellung vor.

Um die Veränderung der Ausprägung einer Grundvorstellung zwischen den zwei Datenerhebungen auswerten zu können, wurden auch Datensätze, welche alle Werte zu einer Grundvorstellung beinhalten, erstellt. So gibt es zur Stetigkeit des ersten Fragebogens einen Datensatz zur Sprungfreiheit, einen zur Darstellbarkeit und einen zur Vorhersagbarkeit, jeweils mit allen 59 Einträgen. Analog gibt es diese auch zum zweiten Fragebogen und die Erstellung der Datensätze zu den Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit erfolgte auf dieselbe Art und Weise. Diese 14 Datenmengen bestehen alle aus 59 Eintragungen, wobei die zwei zur lokalen Linearität zu vernachlässigen sind, da bei beiden alle Eintragungen den Wert „0“ besitzen.

Da durch die Menge der Nulleinträge in einigen Datensätzen die statistische Auswertung keine sinnvollen Ergebnisse liefern konnte, wurden weitere Datenmengen erstellt, in welchen die einzelnen Grundvorstellungen ohne der „0“-Werte vorkommen. Dadurch wurden zwölf [122] weitere erstellt. Diese sind zielführend, wenn die Veränderung der Ausprägungen ohne Rücksicht auf die Anzahl des Vorkommens der Grundvorstellung ausgewertet werden soll.
Insgesamt wurden 38 verschiedene Datensätze erstellt, welche anschließend statistisch ausgewertet wurden.

[122] Da die Datensätze zur „lokalen Linearität“ ausschließlich aus „0“-Werten bestehen, war es nicht notwendig bzw. sinnvoll weitere ohne „0“ zu erstellen, welche leer gewesen wären.

7.6. Statistische Auswertung

Die statistische Auswertung dieser Studie erfolgte in drei Teilen, welche in den folgenden Abschnitten beschrieben werden. Die Daten wurden mithilfe der kostenfreien *Programmiersprache R* in dem Programm *RStudio* analysiert.

Zu Beginn wurden die bereits erstellten Excel-Tabellen in das Programm eingespielt, danach wie in Abschnitt 7.5.3. beschrieben verändert.

7.6.1. Allgemeine Auswertung der Datenmengen

Als erstes wurden die absolute und relative Häufigkeit des Vorkommens der unterschiedlichen Grundvorstellungen unabhängig von deren Ausprägung und des Vorkommens der Ausprägungen unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung in den „Allgemein“- und „Allgemein0“-Datensätzen errechnet.

In den anderen Datensätzen, welche nur eine Grundvorstellung beinhalten, wurden die Ausprägungen dieser betrachtet und die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ausprägungen ausgerechnet. Um eine bessere Vorstellung der Verteilung zu erhalten wurden auch statistische Kennzahlen, wie zum Beispiel das arithmetische Mittel, der Median, das Minimum, das Maximum und die Standardabweichung, ausgegeben.

Aus den „Maximum“-Datensätzen wurde beides ermittelt: mit welcher Häufigkeit sowohl welche Grundvorstellungen als auch in welcher Ausprägung diese vorkommen. Zusätzlich wurden auch die oben erwähnten statistischen Kennzahlen berechnet.

7.6.2. Einflussfaktoren auf die Ausprägung der Grundvorstellungen

Um die fünf individuellen Merkmale der Studierenden auf drei Einflussfaktoren zu reduzieren, sollten die Vorlesungsnote und Übungsnote zu einem Faktor, der „Leistung“, und die Unterrichtserfahrung in der Schule mit der Nachhilfeerfahrung zu dem Faktor „Lehrerfahrung“ zusammengefasst werden.

Um zu überprüfen, ob die Merkmale dasselbe messen, wurde eine Reliabilitätsanalyse durchgeführt. Diese ermöglicht es, den Zusammenhang einzelner Items einer Skala zu erkennen. Als Reliablitätsanalysemodell wurde in diesem Fall Cronbachs Alpha gewählt, da es die interne Konsistenz zwischen zwei Items innerhalb einer Itemgruppe bestimmt.

Cronbachs Alpha kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen[123]. Der Wert ist höher, je mehr die Items miteinander korrelieren und aus je mehr Items eine Itemgruppe besteht. Das heißt, dass die Reliabilität kleiner ist, je weniger Items Teil einer Skala sind. Dies gilt vorallem für Skalen mit weniger als zehn Items.

Für die Interpretation des Cronbachs Alpha Wertes gibt es verschiedene Möglichkeiten. Der in der Literatur am häufigsten angegebene Wert für eine annehmbare Korrelation ist 0,7. Bei Itemgruppen mit weniger als zehn Items könnte auch 0,5 bereits als passende Grenze angenommen werden[124].

Durch den R-Befehl „alpha" konnte Cronbachs Alpha für die Unterrichtserfahrung in der Schule und die Nachhilfeerfahrung berechnet werden. Da dieser, trotz angepasster Skalen, gerundet nur 0,01 beträgt, wird die Zusammenfassung der zwei Merkmale verworfen und in der folgenden Arbeit die bisherige Unterrichts- und Nachhilfeerfahrung separat ausgewertet. Der Cronbach Alpha-Wert für den Leistungsfaktor mit den Items „Vorlesungsnote" und „Übungsnote" beträgt 0,54, welcher in diesem Fall, da nur zwei Items existieren, ein annehmbarer Wert ist. Da dieser jedoch keine hohe Signifikanz aufweist, wurde beschlossen auch die Daten der Vorlesungsnoten und der Übungsnoten einzeln auszuwerten und anschließend vergleichend zu interpretieren. Ergebnis dieser Überprüfung ist, dass alle Faktoren separat ausgewertet und anschließend verglichen werden.

Um herauszufinden, welchen Einfluss ein Faktor auf die Wahl und Ausprägung der Grundvorstellungen hat, wurden Korrelationsanalysen durchgeführt.
Nachdem der Mittelwert und die Standardabweichung der einzelnen Faktoren ermittelt worden war, wurde überprüft, ob diese normalverteilt sind. Dafür wurde der Shapiro-Wilk-Test angewandt, der im Gegensatz zu zum Beispiel dem Kolmogorov-Smirnov-Test eine hohe Teststärke besitzt[125]. Dies war für die Daten dieser Studie relevant, da einige Stichproben klein sind und mehrere Bindungen besitzen. Die Nullhypothese des Shapiro-Wilk-Testes ist, dass die Variable normalverteilt ist. Die Variable ist demnach normalverteilt, wenn die Nullhypothese nicht verworfen wird; sie wird abgelehnt, wenn der p-Wert unter dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ liegt. Der Großteil der Faktoren wie auch der Datensätze weist einen p-Wert kleiner als $0{,}05$ auf und ist somit nicht normalverteilt. Deshalb musste eine Korrelationsanalyse für nicht-normalverteilte Variablen gefunden werden.
Da einige Faktoren zusätzlich nicht intervallskaliert, sondern ordinalskaliert[126] sind, war es

[123] Schecker, H. (2014, 5)
[124] Schecker, H. (2014, 5)
[125] Hatzinger, R., Hornik, K. & Nagel, H. (2011, 264)
[126] Zum Beispiel ist der Abstand der Einteilungen des Faktors „Unterrichtserfahrung in der Schule" nicht gleichmäßig. Der Wert „0" sagt aus, dass die Person noch keine Stunde in der Schule unterrichtet hatte, der Wert „1" hingegen, dass bereits das Orientierungspraktikum (PÄP) absolviert wurde, in welchem ungefähr zwanzig

notwendig Rangkorrelationskoeffizienten anzuwenden. Diese überprüfen auch die Korrelation zweier Variablen, von der eine oder beide in einer „Rang-"Ordnung aufgelistet sind. In der Literatur[127] wird häufig von dem Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman gesprochen, welcher den monotonen Zusammenhang zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variable misst. Dieser wird durch die folgende Formel, mit d der Differenz zwischen den Rängen zusammengehöriger Werte von x und y und n der Anzahl der Wertepaare (x, y) in den Daten, angegeben:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

Da dieser Korrelationskoeffizient jedoch einer großen Anzahl an verbundenen (i. e. gleichen) Rängen gegenüber nicht robust ist, wird in dieser Arbeit zusätzlich auch der Rangkorrelationskoeffizient nach Kendall berechnet, welcher nicht die Differenz der Ränge, sondern den Unterschied in der Reihenfolge der Ränge betrachtet. Kendalls τ wird durch

$$\tau = \frac{v}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} = \frac{v}{\sum_{i=1}^{n} d_i}$$

definiert[128]. Dabei ist n wie bei Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten die Anzahl der Wertepaare (x, y) in den Daten. Der Wert v entsteht durch den Vergleich der y-Werte miteinander, wenn diese nach den dazugehörigen x-Werten angeordnet sind. Es wird vom ersten y-Wert ausgegangen und betrachtet, wie viele der nachfolgenden y-Werte größer und wie viele kleiner als dieser sind. Die Anzahl der größeren Werte wird mit einem Plus versehen, die der kleineren mit einem Minus. Diese Vorgehensweise wird bei jedem y-Wert der Reihe nach durchgeführt und anschließend alle größeren (konkordanten) und kleineren (diskordanten) Werte mit ihren jeweiligen Vorzeichen addiert. Das Ergebnis dieser Rechnung ist der Wert v.

Beide Korrelationskoeffizienten geben Ergebnisse von -1 bis +1 aus. Der Wert „1" zeigt eine perfekte positive, „-1" eine perfekte negative Korrelation der zwei Variablen an. Eine positive Korrelation bedeutet, dass der Wert der abhängigen Variable größer (bzw. kleiner) wird, wenn der Wert der unabhängigen größer (bzw. kleiner) wird. Eine negative Korrelation zeigt jedoch eine gegenläufige Korrelation an: Je kleiner (bzw. größer) der Wert der unabhängigen Variable wird, desto größer (bzw. kleiner) wird der Wert der abhängigen. Je näher der Wert des Korrelationskoeffizienten bei ± 1 liegt, desto höher ist die Korrelation. Bei „0" korrelieren die Variablen nicht. Für die Bestimmung der

---

Minuten allein und zwanzig Minuten im Teamteaching unterrichtet wurden. Im Schulpraktikum beträgt die unterrichtete Stundenanzahl fünf Einheiten, welche mit dem Wert „2" dargestellt wird. Der Wert „3" wird bei einer Lehrstelle im Sondervertrag gewählt, was auf einen regelmäßig gehaltenen Unterricht und mehr unterrichtete Einheiten hinweist.

[127] vgl. Spiegel, M.R. (1990, 248) und Böselt, M. (1992, 171)

[128] Rönz, B. & Förster, E. (1992, 311f)

Einteilung der Größe des Zusammenhanges werden in der Literatur verschiedene Skalen angegeben, in dieser Arbeit wird auf die von Cohen[129] zurückgegriffen: Tabelle 1.

Tabelle 1: Effektstärke des Rangkorrelationskoeffizienten nach Cohen

Effekt	**schwach**	**mittel**	**stark**
|*Wert des Koeffizienten*|	[0,1; 0,3)	[0,3; 0,5)	[0,5; 1,0]

Aufgrund der hohen Anzahl an verbundenen Rängen und der relativ kleinen Anzahl an Werten einiger Datensätze wird in der Auswertung primär das Kendall`sche τ betrachtet, der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman wurde ebenfalls bei jeder Auswertung berechnet und wird zusätzlich zu Kendalls τ angegeben.

Da die Nullhypothese der Korrelationsanalysen in R ist, dass die Variablen nicht korrelieren, kann eine Korrelation nur angenommen werden, wenn die Nullhypothese verworfen wird, was bei p-Werten kleiner als 0,05 geschieht. In diesem Fall wäre das Ergebnis *signifikant*. Wäre der p-Wert sogar unter 0,01, kann das Ergebnis als *hochsignifikant* eingestuft werden.

Zwischen den Faktoren in den Datensätzen ist eine lineare Regressionsanalyse durchgeführt worden. Mithilfe dieser wird versucht eine abhängige Variable so gut wie möglich linear durch die unabhängige zu erklären. Ziel ist das Erstellen einer Regressionsfunktion, deren Gerade bestmöglich durch die Punktwolke (Eintragungen des Streudiagrammes) gelegt wird. Bestmöglich meint in diesem Zusammenhang, dass die Summe der Quadrate der Fehler minimal wird[130]. Die Durchführung der linearen Regressionsanalyse in R gibt neben vielen anderen Werten die Regressionskoeffizienten „intercept“ (den Achsenabschnitt) und „slope“ (die Steigung) der Regressionsgeraden und den dazugehörigen p-Wert an. Dieser Wert bestimmt, ob die Nullhypothese – dass die unabhängige Variable keinen Einfluss auf die abhängige hat – verworfen oder behalten werden kann. Ist er unter 0,05, so kann angenommen werden, dass ein linearer Einfluss besteht. Zusätzlich können auch die 95%igen Konfidenzintervalle für diese Koeffizienten angezeigt werden. Weitere Informationen, die R ausgibt, sind die Residuen. Diese zeigen die Abstände der Werte von der Regressionsgeraden an. Je näher diese bei dem Wert „0“ liegen, desto besser gibt die Regressionsgerade die Daten wieder. Um zu überprüfen, wie gut die eigentlichen Daten zu dem Regressionsmodel passen, wird das Bestimmtheitsmaß R^2 betrachtet. Dieses ist durch den Anteil der „erklärten Variation“ an der „Gesamtvariation“ oder durch die Gegenwahrscheinlichkeit des Anteils der „Residuenquadratsumme“ an der Gesamtvariation definiert („Varianzaufklärung“). Dadurch nimmt es Werte zwischen 0 und 1 an. Je höher der Wert ist, desto mehr Prozent der Gesamtvariation kann durch das Modell erklärt werden. Würde der Wert „1“ annehmen, so wäre das Regressionsmodel ein perfektes, wäre dieser Wert „0“, so wäre es unbrauchbar.

[129] (1969, 79)
[130] Becker, B. (1993, 213f)

Auch für die Einteilung der Güte nach dem Bestimmtheitsmaß R^2 hat von Cohen Richtlinien aufgestellt, auf die sich in dieser Arbeit bezogen wird[131]: Tabelle 2.

Tabelle 2: Richtlinien der Interpretation des Bestimmungsmaßes R^2 nach Cohen

Varianzaufklärung	**schwach**	**mittel**	**stark**
R^2	[0,01; 0,09)	[0,09; 0,25)	[0,25; 1,0]

7.6.3. Vergleich der Ergebnisse der ersten mit der zweiten Datenerhebung

Es gibt mehrere Möglichkeiten Ergebnisse unterschiedlicher Datenerhebungen miteinander zu vergleichen. Da in diesem Fall die Anzahl der signifikanten Korrelationskoeffizienten sehr gering ist, ist ein direkter Vergleich nicht sinnvoll. Um einen Effekt über beide Erhebungen zu vergleichen, werden die Merkmale als quasistetiges Merkmal[132] behandelt und Cohen´s d als Methode zur Berechnung der Effektstärke verwendet. Dadurch dass Effektstärken standardisiert sind, können sie über beide Datenerhebungen verglichen werden. Diese Methode gibt die Größe des Effektes für den Vergleich zwischen zwei Mittelwerten bezogen auf die Standardabweichung an, so bedeutet zum Beispiel ein Wert von 0,5, dass der Unterschied dem einer halben Standardabweichung entspricht. Die Werte von Cohen´s d können alle reellen Zahlen annehmen, hierbei deuten die negativen Werte auf eine gegenläufige und die positiven auf eine gleichläufige Richtung des Effektes hin.

In Tabelle 3 kann die Interpretation von d nach Cohen abgelesen werden[133].

Tabelle 3: Richtlinien zur Interpretation der Effektstärke von Cohen´s d nach Cohen

Effektstärke	**klein**	**mittel**	**groß**
$\lvert d \rvert$	[0,2; 0,5)	[0,5; 0,8)	[0,8; 1,0]

Da Cohen´s d für kleine Stichproben ($n < 20$) verzerrte Werte angibt, wird für die betroffenen Datensätze zusätzlich Hedge´s g, welches eine bessere Schätzung für kleine Stichproben ausgibt, berechnet. Zur Interpretation werden dieselben Intervalle wie in obiger Tabelle für Cohen´s d verwendet.

Zur Kontrolle der Ergebnisse wurde auch der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test[134] verwendet, da dieser bei nichtparametrisierten, verbundenen Stichproben eingesetzt wird. Bei Stichproben kleiner als 60

[131] (1969,77)
[132] Bamberg, G., Baur, F. & Krapp, M. (2012, 7)
[133] (1969,79)
[134] Wilcoxon, F. (1945,80-83)

muss noch zusätzlich eine Stetigkeitskorrektur durchgeführt werden. Der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test berücksichtigt in der Auswertung sowohl die Richtung wie auch die Höhe der Differenzen der Ränge der Eintragungen, wodurch die Gleichheit der Erwartungswerte der Datensätze untersucht werden kann. Die Nullhypothese ist, dass die Erwartungswerte gleich sind, welche bei einem p-Wert kleiner 0,05 verworfen werden kann. Wird diese verworfen, so liegt eine signifikante Änderung der Werte vor, es müssen jedoch die Mittelwerte der Datensätze noch berechnet werden, um die Richtung der Änderung zu erkennen.
Für den Vergleich der Datensätze ohne „0“-Werte, die nicht dieselbe Anzahl der Einträge haben, habe ich die Daten in einen gemeinsamen Datensatz übertragen und eine neue Variable „Fragebogen“ erstellt, welche die Werte 1 für den ersten und 2 für den zweiten Fragebogen annimmt. Dadurch konnte ich eine verbundene Stichprobe mit den Ausprägungswerten bzw. der Differenz der Ränge im ersten und zweiten Fragebogen als abhängige Variable und der Fragebogenzuordnung als unabhängige Variable erstellen.

Wilcoxon führte ein Beispiel anhand von unterschiedlichen Verfahren der Weizensaat durch, um den Unterschied des Effekts zweier Behandlungen herauszufinden[135]. Es wurde ein zufälliger Blockversuch mit acht Parallelversuchen der Verfahren A und B durchgeführt. Die Daten können Tabelle 4 entnommen werden.

Tabelle 4: Bsp. WVR-Test

Block	*A*	*B*	*A-B*	*Rang*
1	209	151	58	8
2	200	168	32	7
3	177	147	30	6
4	169	164	5	1
5	159	166	-7	-3
6	169	163	6	2
7	187	176	11	5
8	198	188	10	4

Die Spalten A und B beschreiben den Weizenstand nach der jeweiligen Behandlung. Die nächste Spalte enthält die Differenzen der jeweiligen Weizenstände abhängig von deren Behandlungen. Anschließend werden die Differenzen der Größe nach den Rängen zugeteilt, wobei in diesem Fall Vorzeichen keine Rolle spielen. Dies kann aus der letzten Spalte abgelesen werden. Die Summe der positiven Ränge beträgt in diesem Beispiel 33 und die der negativen -3. Es wird immer die Summe gewählt, deren Betrag kleiner ist, mit dieser kann anhand einer Wahrscheinlichkeitstabelle, welche in Anhang 6 nachzulesen ist, die Wahrscheinlichkeit abgelesen werden, mit der die zwei Behandlungen sich nicht unterscheiden.

[135] Wilcoxon, F. (1945, 80)

In diesem Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit zwischen 0,024 und 0,055, dass die zwei Behandlungen A und B keinen Unterschied bewirken.

8. Ergebnisdarstellung

Dieses Kapitel ist in zwei Teile unterteilt. Zu Beginn werden die Ergebnisse der Auswertung der Fragen zur Stetigkeit und anschließend zur Differenzierbarkeit dargestellt. Zuerst wird jeweils der erste Fragebogen und danach der zweite Fragebogen aufbereitet. Innerhalb dieser Abschnitte wird mit der Präsentation der Datensätze „Allgemein“ und „Allgemein0“ begonnen, dann werden die zu den einzelnen Grundvorstellungen vorgestellt und danach die Auswertung der Maximalantworten und der anderen Kategorien beschrieben.

Da die Überprüfung der Normalverteilung der einzelnen Variablen durch den Shapiro-Wilk-Test meist ergibt, dass diese nicht normalverteilt sind, wird dieser nur in der Gesamtauswertung der Antworten zur Stetigkeit des ersten Fragebogens und in den Fällen, in welchen er die Normalverteilung bestätigt, in den jeweiligen Abschnitten angeführt. Die anderen Werte können im Anhang 2 nachgelesen werden.

8.1. Stetigkeit

Die Datensätze zu den Grundvorstellungen „Darstellbarkeit“; „Sprungfreiheit“ und „Vorhersagbarkeit“ werden nach den Ausprägungen der Antworten ausgewertet. Die anderen – Allgemein0, Allgemein und Maximal - werden sowohl nach der Wahl der Grundvorstellung wie auch der Ausprägung dieser analysiert.

8.1.1. Erster Fragebogen

Neun der 59 Antworten wurden keiner Grundvorstellung zugeordnet, 43 einer und sieben zwei. Die Kombination Sprungfreiheit – Vorhersagbarkeit kommt dreimal vor, die Kombination Sprungfreiheit – Darstellbarkeit viermal.

8.1.1.1. Allgemeine Auswertung

In diesem Abschnitt werden die Datensätze „Allgemein“ und „Allgemein0“ ausgewertet.

Allgemein (StvAll)

Häufigkeiten

Dieser Datensatz besteht aus 177 Eintragungen, je drei zu einer teilnehmenden Person. Jeder dieser drei Werte ist einer anderen Grundvorstellungen zugeordnet, sodass alle Teilnehmenden Ausprägungswerte zu allen Grundvorstellungen besitzen.

Von den insgesamt 177 Werten, gehören 28, also ungefähr 15,8 %, der Darstellbarkeit an. 26, zirka 14,7%, zählen zur Sprungfreiheit und nur 3 (1,7%) zur Vorhersagbarkeit. 120 mögliche Antworten (67,8%) zur Grundvorstellungen wurden nicht gegeben und werden daher in den Abbildungen 18 und 19 „keine“ genannt.

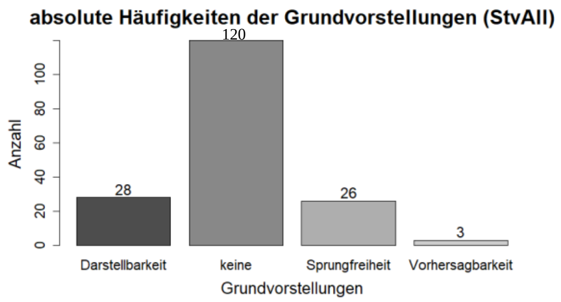

Abbildung 18[136]: abs. Häufigkeit der GV in StvAll

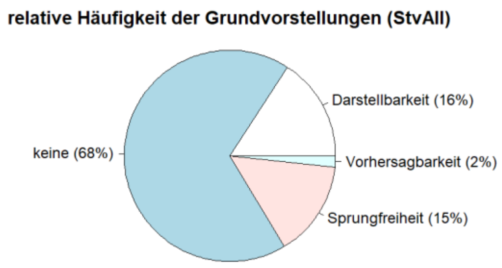

Abbildung 19: rel. Häufigkeit der GV in StvAll

Wie in den Abbildungen 20 und 21 zu sehen ist, ist die Verteilung der Häufigkeiten der Ausprägungen sehr ähnlich zu der der Grundvorstellungen verteilt:

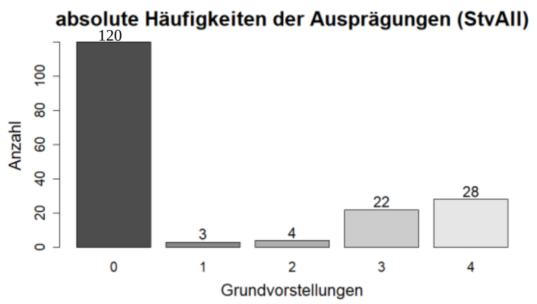

Abbildung 20: abs. Häufigkeit der Ausprägungen in StvAll

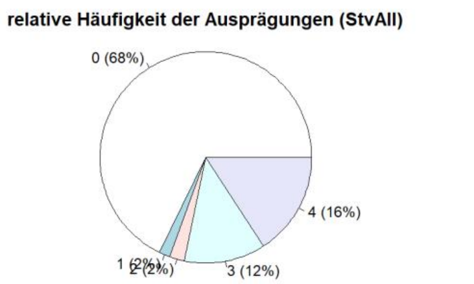

Abbildung 21: rel. Häufigkeit der Ausprägungen in StvAll

136 Die Grundvorstellungen in der horizontalen Koordinatenachse der Abbildungen werden in R alphabetisch geordnet.

Die 120 „0“-Werte alias „keine“-Werte bleiben selbstverständlich gleich. Die Ausprägung 1 wird zu drei Antworten zugeordnet, was einem relativen Anteil von 1,7% entspricht, die Ausprägung 2 wird vier Aussagen (2,3%) zugeordnet. Ausprägungen 3 und 4 sind stärker vertreten: 22mal kommt die Ausprägung 3 vor (12,4%) und 28mal die Ausprägung 4 (15,8%). Daraus ergeben sich der Median $\tilde{x}$ mit dem Wert 0, das arithmetische Mittel $\bar{x}$ mit dem Wert 1,07 und die Standardabweichung s mit 1,62.

Die nächsten Berechnungen beziehen sich auf die Ausprägungen.

Shapiro-Wilk-Test

Wie in Abschnitt 7.6.2. beschrieben, ist der Großteil der Variablen der Datensätze nicht normalverteilt. Tabelle 5 zeigt, dass das auch für diesen Datensatz gilt. Sie gibt den W-Wert und den p-Wert aus. Da die Nullhypothese dieses Testes ist, dass die Variable normalverteilt ist, muss der p-Wert größer als 0,05 sein um diese zu behalten.

Tabelle 5: Shapiro-Wilk-Test (StvAll)

Allgemein	*Punkte*[137]	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,6341	0,79597	0,4971	0,71148	0,84755	0,76306
p-Wert	< 2,2e-16	1,756e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	1,226e-10	8,205e-14

Weil alle p-Werte kleiner als 0,05 sind, ist keine der Variablen normalverteilt.

Korrelationsanalyse

Da keine der Variablen normalverteilt ist, und weil die Merkmale teilweise ordinalskaliert sind, wird für die Korrelationsanalyse das Kendall`sche τ verwendet. Es wird der Zusammenhang zwischen dem angegebenen Merkmal und der Ausprägung der Grundvorstellungen gemessen. Die Werte dieser Analyse können gemeinsam mit den Werten der Analyse nach Spearman Tabelle 6 entnommen werden. Da davon ausgegangen wird, dass keine Korrelation besteht, müssen die p-Werte der Berechnungen kleiner 0,05 sein, um diese Annahme zu verwerfen.

[137] Mit „Punkte“ sind in der Auswertung die unterschiedlichen Ausprägung benannt.

Tabelle 6: Korrelationsanalyse (StvAll)

Werte		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	p	0,1442	0,898	0,4485	0,9203	0,4729
	τ	0,099323	0,009302	-0,053306	-0,007441	0,054755
Spearman	p	0,1431	0,8984	0,4514	0,9079	0,4587
	ρ	0,11051	0,009745	-0,05746	-0,00994	0,0629

Da keines der Merkmale einen Zusammenhang mit der Ausprägungen vorweist, ist die Auswertung dieses Datensatzes beendet.

Allgemein ohne „0“-Werte (StvAll0)

<u>Häufigkeiten</u>

Dieser Datensatz beruht auf dem obigen, wobei nur die Werte zwischen 1 und 4 betrachtet werden. Die Gesamtanzahl der Einträge beträgt 57. Die absolute Anzahl der Grundvorstellungen kann Abbildung 18 entnommen werden. Die relativen Werte für die Grundvorstellungen sind in Abbildung 22 dargestellt:

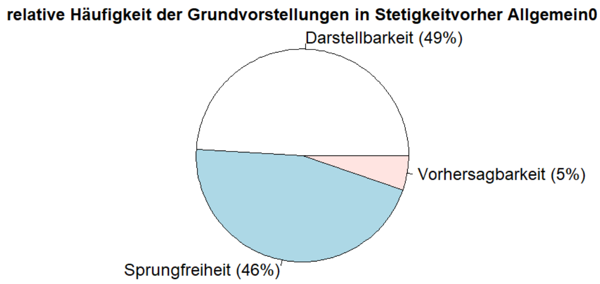

Abbildung 22: relative Verteilung der Grundvorstellungen (StvAll0)

Die statistischen Kennzahlen sind in diesem Datensatz um ein Vielfaches höher: der Median beträgt 3, das arithmetische Mittel 3,32 und die Standardabweichung 0,827.

Shapiro-Wilk-Test

Tabelle 7: Shapiro-Wilk-Test (StvAll0)

Allgemein0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,75099	0,78673	0,50536	0,71426	0,85757	0,76572
p-Wert	1,785e-08	1,122e-07	1,847e-12	3,956e-09	4,109e-05	2,367e-07

Durch die Ergebnisse dieser Auswertung kann geschlossen werden, dass wie im Datensatz „Allgemein“ keine Variable normalverteilt ist: Tabelle 7.

Korrelationsanalyse

Die Korrelationsanalyse ergibt folgende Werte in Tabelle 8.

Tabelle 8: Korrelationsanalyse (StvAll0)

Werte		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	p	0,2483	0,1567	0,5817	0,4403	0,03348
	τ	-0,13949	0,18224	-0,06881	0,09952	0,2795
Spearman	p	0,2475	0,1586	0,595	0,475	0,03171
	ρ	-0,1557	0,19096	-0,07259	0,10679	0,31052

Da der p-Wert der Korrelationsanalyse zwischen der Übungsnote und der Ausprägung unter 0,05 ist, wurde er markiert. Der τ-Wert ist 0,2795, was einer schwachen positiven Korrelation nach Cohen entspricht. Positiv heißt in diesem Fall: „Je höher (= schlechter) die Übungsnote, desto stärker die Ausprägung der Grundvorstellung.“ Betrachtet man Spearmans ρ, so ist der monotone Zusammenhang mittlerer Stärke.

Die Verteilung der Ausprägungen nach der Übungsnote zeigt Abbildung 23.

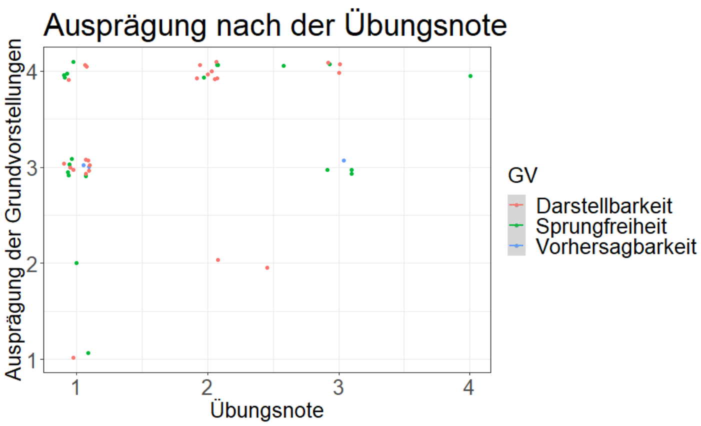

Abbildung 23: Die Ausprägung nach der Übungsnote (StvAll0)

Mögliche Interpretation:

Dass mit schlechteren Noten in der Übung bessere Ausprägungen der Grundvorstellungen einhergehen, lässt die Vermutung zu, dass in der Übung vorwiegend die fachliche Korrektheit der Beispiele abgeprüft wird – im Gegensatz zu den Grundvorstellungen, die hinter diesen Begriffen stehen. Für die korrekten Lösungen ist es oftmals nicht notwendig ein gutes Verständnis des Begriffes aufzubauen, es reicht ein Schema zu kennen und dies auf ähnliche Aufgaben anzuwenden. So setzen sich möglicherweise viele Studierende mit Formeln, Definitionen und Sätzen auseinander, während andere sich darauf konzentrieren, den Begriff mithilfe von Grundvorstellungen zu verstehen. Diesen fehlt jedoch dann an formalem Wissen, um die Beispiele in der Übung erklären zu können, weshalb sie schlechtere Noten erhalten.

Lineare Regressionsanalyse

Um zu überprüfen, ob der entdeckte monotone Zusammenhang linear ist, wurde eine lineare Regressionsanalyse durchgeführt. Diese ergab einen hochsignifikanten y-Achsenabstand mit $p = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$, jedoch keine signifikante Steigung (p = 0,0681), weshalb die Annahme, dass die Übungsnote keinen linearen Einfluss auf die Ausprägung der Grundvorstellungen hat, nicht verworfen werden kann.

8.1.1.2. *Auswertung der Grundvorstellungen*

Zuerst werden die Datensätze „Sprungfreiheit", „Darstellbarkeit" und „Vorhersagbarkeit" bearbeitet, anschließend die daraus resultierenden Datensätze „Sprungfreiheit0", „Darstellbarkeit0" und „Vorhersagbarkeit0".

Sprungfreiheit (StvSpr) & Darstellbarkeit (StvDar) & Vorhersagbarkeit (StvVor)

Diese Datensätze bestehen jeweils aus 59 Eintragungen, eine zu jeder/m Studierender/m. Alle beziehen sich auf die Antworten bezüglich der jeweiligen Grundvorstellung.

Häufigkeiten

Abbildung 24 zeigt die Verteilung der Grundvorstellungen nach ihren Ausprägungen:

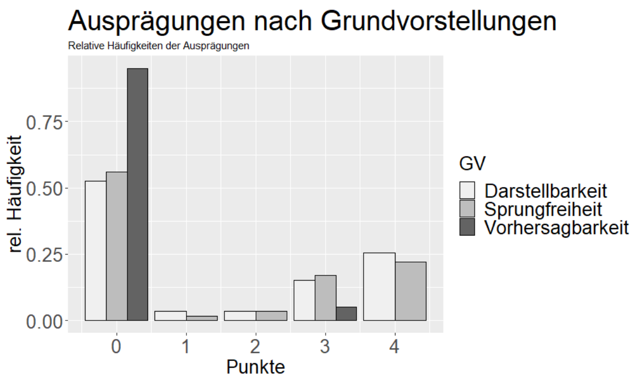

Abbildung 24: relativer Anteil der GV nach deren Ausprägungen (Stv)

Keine der Grundvorstellungen kommt bei mehr als 50 Prozent der Teilnehmenden vor. Bei 33 (55,9%) der 59 Teilnehmenden konnte keine ausgeprägte Grundvorstellung zur Sprungfreiheit, bei 31 (52,5%) keine zur Darstellbarkeit und bei fast 95% (56) der Studierenden keine zur Vorhersagbarkeit festgestellt werden. Dementsprechend war die Vorhersagbarkeit nur bei drei Personen (5,1%) präsent, all diese Antworten wurden der dritten Ausprägung zugeordnet. Eine Antwort zur Sprungfreiheit wurde der Ausprägung 1 zugeordnet (1,7%), zwei der Ausprägung 2 (3,4%), zehn der Ausprägung 3 (16,9%) und 13 (22%) der stärksten Ausprägung. Die Verteilung der Grundvorstellung Darstellbarkeit ist sehr ähnlich: Zwei Aussagen (3,4%) haben Ausprägung 1, zwei (3,4%) die Ausprägung 2, neun (15,3%) die dritte Ausprägung und fünfzehn (25,4%) die höchste.

Diese Verteilungen sind in den Abbildungen 25, 26 und 27 dargestellt:

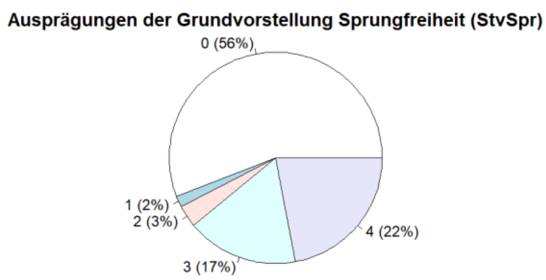

Abbildung 25: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StvSpr)

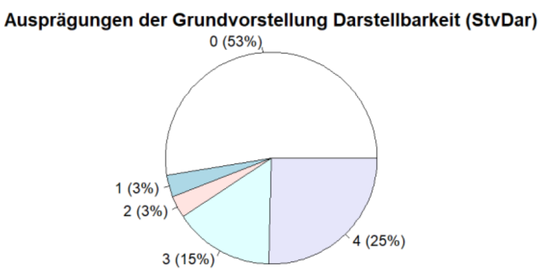

Abbildung 26: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StvDar)

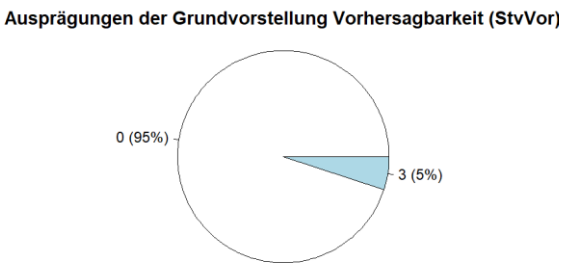

Abbildung 27: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StvVor)

Die Mediane der Datenmengen liegen aufgrund der großen Anzahl an „0“-Werten bei 0, das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Vorhersagbarkeit sind erwartungskonform niedriger als die der anderen, wie Tabelle 9 entnommen werden kann.

Tabelle 9: $\bar{x}$ und s der Grundvorstellungen (Stv)

Kennzahlen	*Sprungfreiheit*	*Darstellbarkeit*	*Vorhersagbarkeit*
$\bar{x}$	1,475	1,576	0,153
s	1,755	1,783	0,665

Keine der Variablen der drei Datensätze ist normalverteilt, die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests können im Anhang gefunden werden.

<u>Korrelationsanalyse</u>

Da die Korrelationsanalyse in diesem Datensatz nur in einem Fall ein signifikantes Ergebnis ausgibt, wird dieses eine in Tabelle 10 dargestellt, die übrigen sind im Anhang 3 in einer Tabelle angeführt.

Tabelle 10: Korrelationsanalyse (StvDar)

StvDar	*Kendall*			*Spearman*		
Werte	z	p	τ	S	p	P
Schulwunsch	-2,3518	0,01868	-0,28266	42588	0,01787	-0,31002

Sowohl die Analyse nach Kendall wie auch nach Spearman gibt einen monotonen Zusammenhang zwischen dem Merkmal „Schulwunsch“ und der Ausprägung der Grundvorstellung Darstellbarkeit an. Diese Korrelation ist nach Cohen bei der Auswertung nach Kendall schwach, bei der nach Spearman bereits den mittleren zuzuordnen. Sie ist negativ, was bedeutet, dass die Ausprägung, bei denen, die in einer Unterstufe unterrichten wollen, höher ist als bei denen, die planen in einer Oberstufe zu arbeiten.

<u>Mögliche Interpretation:</u>

Die Auswertung ergibt, dass Studierende, die planen in einer niedrigeren Schulstufe zu unterrichten, eine stärkere Ausprägung an Grundvorstellungen zur Stetigkeit besitzen als jene, die in einer höheren Schulstufe unterrichten wollen. Dies könnte damit zusammenhängen, dass das Gelehrte mit höherer Schulstufe abstrakter wird, wodurch es schwieriger wird, dieses zu veranschaulichen. Weiters konzentrieren sich Studierende, die in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen, womöglich eher auf die Darstellung und das Verständnis der mathematischen Begriffe, während die, die in der Sekundarstufe 2 unterrichten wollen, sich auf die Ausführung mathematischer Berechnungen konzentrieren.

Lineare Regressionsanalyse

Für diesen Fall gibt die Regressionsanalyse einen hochsignifikanten (p = 0,000229) y-Achsenabschnitt von 3,334 und eine signifikante Steigung (p = 0,038185) von -0,9043 an. Daraus ergibt sich die Gleichung der Regressionsgeraden: $f(x) = -0.9043 \cdot x + 3.334$: Abbildung 28.

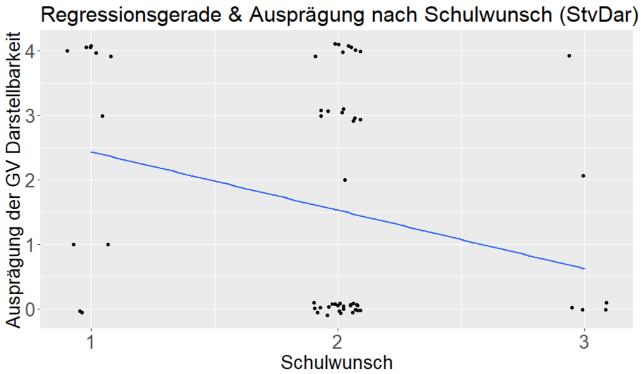

Abbildung 28: Regressionsgerade – Schulwunsch (StvDar)

Das Bestimmtheitsmaß R^2 beträgt 0,0795, was bedeutet, dass nur 7,95% der Varianzen der Ausprägungswerte durch den Schulwunsch erklärt werden können. Es ist daher nur eine schwache Varianzaufklärung zu beobachten.

Sprungfreiheit ohne 0 (StvSpr0) & Darstellbarkeit ohne 0 (StvDar0) & Vorhersagbarkeit ohne 0 (StvVor0)

Die Datensätze, die dieser Auswertung zu Grund liegen, sind die der oben beschriebenen Grundvorstellungen ohne „0“-Eintragungen.

Häufigkeiten

Die Werte werden in Tabelle 11 wiederholt:

Tabelle 11: Ausprägung der GV (StvGV0), absolute und relative Häufigkeiten

Ausprägung	*1*		*2*		*3*		*4*	
StvSpr0	1	3,84%	2	7,69%	10	38,46%	13	50,00%
StvDar0	2	7,14%	2	7,14%	9	32,14%	15	53,57%
SrvVor0	0	0,00%	0	0,00%	3	100,00%	0	0,00%

Die statistischen Kennzahlen werden in Tabelle 12 zusammengefasst:

Tabelle 12: Kennzahlen der StvGV0

	Median	*Arithmetisches Mittel*	*Standardabweichung*
StvSpr0	3,5	3,346	0,797
StvDar0	4	3,321	0,905
StvVor0	3	3	0

Aus diesen Datensätzen errechnet der Shapiro-Wilk-Test eine Normalverteilung, die allerdings auf den Zusammenhang Unterricht – Vorhersagbarkeit0 zutrifft, die nur aus drei Eintragungen besteht und daher nicht aussagekräftig ist.

<u>Korrelationsanalyse</u>

Die Analyse nach Kendall und Spearman ergeben, dass das Merkmal „Nachhilfe“, welches nur zwei Ausprägungen besitzt, einen positiven mittleren (nach Cohen) Einfluss[138] auf die Ausprägungen des Datensatzes Sprungfreiheit0 besitzt. Die Übungsnote hat nach Spearman einen positiven mittleren Einfluss[139] auf die Ausprägungen in Darstellbarkeit0. Die Analyse nach Kendall ergibt jedoch einen p-Wert von 0,05122, was das Signifikanzniveau von 0,05 nicht unterschreitet und somit nicht signifikant ist.

Die Korrelationsanalyse konnte aufgrund der geringen und gleichen Eintragungen bei dem Datensatz Vorhersagbarkeit0 nicht durchgeführt werden.

<u>Lineare Regressionsanalyse</u>

Die Analyse ergab, dass keine der beiden korrelierenden Merkmale einen linearen Zusammenhang zur Ausprägung haben – die Steigung war in keinem der beiden Fälle signifikant (Nachhilfe: $p = 0{,}105$, Übungsnote: $p = 0{,}142$).

[138] Kendall: $p = 0{,}04115$, $\tau = 0{,}3909885$; Spearman: $p = 0{,}03833$, $\rho = 0{,}4083955$
[139] Kendall: $p = 0{,}05122$, $\tau = 0{,}3613448$; Spearman: $p = 0{,}04975$, $\rho = 0{,}3964745$

8.1.1.3. Auswertung der Maximalantworten

Der Datensatz „Stetigkeitvorher Maximum“ ist die Grundlage für die Auswertung, welche in diesem Kapitel dargestellt wird.

Maximum (StvMax)

<u>Häufigkeiten</u>

Wie in den folgenden Graphiken gesehen werden kann, sind die Antworten der meisten TeilnehmerInnen mit den stärksten Ausprägungen der Darstellbarkeit (24; 40,7%) und der Sprungfreiheit (22; 37,3%) zugeordnet. Bei zwei Personen sind beide Grundvorstellungen gleichermaßen die stärksten Ausprägungen. Die Vorhersagbarkeit ist nur bei einer/m Teilnehmer *in die am stärksten ausgeprägte Grundvorstellung, eine andere Person hat die Vorhersagbarkeit und die Sprungfreiheit zugleich am stärksten ausgeprägt. Die Antworten von neun Studierenden konnten keinen Grundvorstellungen zugeordnet werden.

In Tabelle 13 sind die Ausprägungen der maximalen Antworten und die Aufteilung derer in die einzelnen Grundvorstellungen dargestellt, welche in Abbildung 29 veranschaulicht werden.

Tabelle 13: Anzahl der Ausprägungen (StvMax)

Ausprägung	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Maximal	9	2	3	18	27
maxSpr	0	0	2	10	13
maxDar	0	2	1	8	15
maxVor	0	0	0	2	0

Da manche Proband*innen mehr als eine Grundvorstellung mit gleicher Ausprägung genannt haben, ergeben die Einträge bei den einzelnen Grundvorstellungen addiert nicht immer die Gesamtanzahl einer einzelnen Ausprägung.

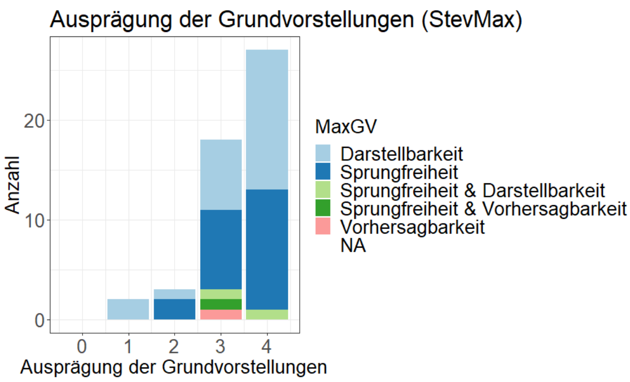

Abbildung 29: Ausprägungen, in GV aufgeteilt (StvMax)

Der Median dieses Datensatzes liegt bei 3, das arithmetische Mittel bei 2,88 und die Standardabweichung bei 1,43.

Korrelationsanalyse

Die Testungen nach Kendall und Spearman ergaben, dass die Übungsnote einen positiven Einfluss (p = 0,01821 bzw. 0,01262) auf die maximale Ausprägung hat. Dieser Zusammenhang ist nach Cohen sogar von mittlerer Stärke (τ = 0,3097791 bzw. ρ = 0,3611724). Dadurch, dass die Variable NoteUE jedoch negativ gepolt ist, bedeutet das, dass die Ausprägung verbessert wird, wenn die Übungsnote schlechter ist.

Mögliche Interpretation:

Diese Ergebnisse unterstützen die in Abschnitt 8.1.1.1 getätigte Vermutung, dass die fachliche Korrektheit stärker abgeprüft wird als die Grundvorstellungen in der Übung. Das deutet darauf hin, dass die Studierenden, die sich formales Wissen aneignen, bessere Noten erhalten, als jene, die Begriffe mithilfe von Grundvorstellungen verstehen zu versuchen.

Lineare Regressionsanalyse

Die Regressionsanalyse hat ergeben, dass kein linearer Zusammenhang besteht, da die berechnete Steigung von 0,4023 nicht signifikant ist (p = 0,105).

8.1.1.4. Auswertung der Antworten, die nicht den GV zugeordnet werden konnten

Die weiteren Kategorien sind „Fehlvorstellungen“, „Differenzierbarkeit“, „Definition“ und „nicht zuordenbar“.

Fehlvorstellungen StvFV

Acht Aussagen wurden der Kategorie Fehlvorstellung zugeordnet: Tabelle 14. (Aufgrund fehlender Angaben zur Vorlesungsnote und -übung sind die Summen der Anzahlen zu den einzelnen Merkmalen in der Tabelle unterschiedlich.)

Zwei dieser traten gemeinsam mit einer hohen Ausprägung der Grundvorstellung Darstellbarkeit auf, alle anderen können keine ausgeprägte Grundvorstellung ausweisen.

Tabelle 14: Aufteilung der FV auf Merkmale (StvFV)

Merkmal	*Unterricht*			*Schulwunsch*		*Note VO*			*Note UE*		
Einteilung	1	2	3	2	3	1	2	4	1	2	3
Anzahl	3	3	2	6	2	3	1	2	4	1	1

Die Fehlvorstellungen teilen sich gleichmäßig über die Stufen der Unterrichtserfahrung auf, wobei die Person im Sondervertrag keine Fehlvorstellung hat. Alle Personen, die eine Fehlvorstellung ausgeprägt haben, geben oder gaben regelmäßig Nachhilfe, was jedoch nicht als Anzeichen für eine Fehlvorstellung gewertet werden kann, da das nur eine kleine Anzahl der Studierenden mit Nachhilfeerfahrung ist.

Keine der Personen, die planen in einer NMS oder AHS-Unterstufe zu unterrichten, weist eine Fehlvorstellung auf.

Die Leistung betreffend kann eine leichte Tendenz der Existenz von Fehlvorstellungen zu besseren Vorlesungs- und Übungsnoten verzeichnet werden. Das heißt, dass Fehlvorstellungen vermehrt bei Personen mit besseren Noten ausgeprägt sind.

Mögliche Interpretation

Dieses Ergebnis bestärkt die Annahme, dass in Vorlesungen und Übungen hauptsächlich die korrekte Durchführung der Aufgaben und nicht das Verständnis der Konzepte bewertet wird. Die Vermutung aus Abschnitt 8.1.1.3. – dass Studierende, die sich auf Prüfungen durch Erlernen von Formeln, Definitionen und Sätzen vorbereiten, gute Noten schreiben, obwohl sie sich nicht die Zeit genommen haben, Verständnis für die mathematischen Konzepte zu erlangen und so möglicherweise Fehlvorstellungen zu diesen besitzen – trifft auch auf diesen Zusammenhang zu.

Differenzierbarkeit

Teile von vier Aussagen wurden dieser Kategorie zugeordnet.

All diese Einträge ähneln sich nur in zwei Punkten: Alle Studierende haben bereits regelmäßig Nachhilfe gegeben und keine/r dieser will ausschließlich in der Unterstufe unterrichten.

Drei dieser haben keine Grundvorstellung – zwei davon jedoch eine Fehlvorstellung – ausgeprägt, die weitere Antwort der vierten Person jedoch hat die stärkste Ausprägung der Grundvorstellung Sprungfreiheit.

Definition

Beide Personen, die die Definition angegeben haben, haben keine Fehlvorstellung entwickelt. Bei einer der beiden war dies die einzige Antwort, weshalb keine ausgeprägte Grundvorstellung eingetragen ist, bei der anderen ist die Darstellbarkeit mit der Ausprägung 3 erkennbar. In allen weiteren Angaben unterscheiden sie sich.

Nicht zuordenbar

Nur eine Antwort des ersten Fragebogens zur Stetigkeit ist keiner Kategorie zuordenbar. Diese kommt in Kombination mit einer Fehlvorstellung vor.

8.1.2. Zweiter Fragebogen

Sieben der insgesamt 59 Antworten weisen keine Grundvorstellung auf, 39 eine und 13 zwei. Die Kombination Sprungfreiheit – Darstellbarkeit existiert fünfmal, die Kombination Sprungfreiheit – Vorhersagbarkeit achtmal.

8.1.2.1. Allgemeine Auswertung

Allgemein (StnAll)

<u>Häufigkeiten</u>

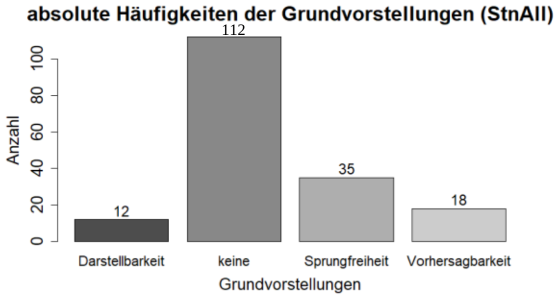

Abbildung 30: absolute Anzahl der GV (StnAll)

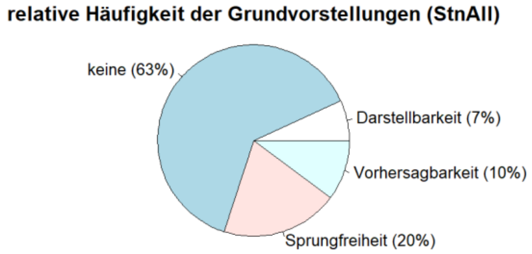

Abbildung 31: rel. Anzahl der GV (StnAll)

Wie in Abbildungen 30 und 31 zu sehen ist, sind fast zwei Drittel (112 – 63,3%) der möglichen Antworten nicht gegeben worden. Grob würde das bedeuten, dass jede Person eine Antwort gegeben haben könnte, die einer Grundvorstellung zuordenbar ist. Zwölf Antworten wurden der Darstellbarkeit (6,8%), 35 der Sprungfreiheit (19,8%) und 18 der Vorhersagbarkeit (10,2%) zugeordnet.

Dieser Datensatz kann auch nach den Ausprägungen analysiert werden, wie die Abbildungen 32 und 33 zeigen:

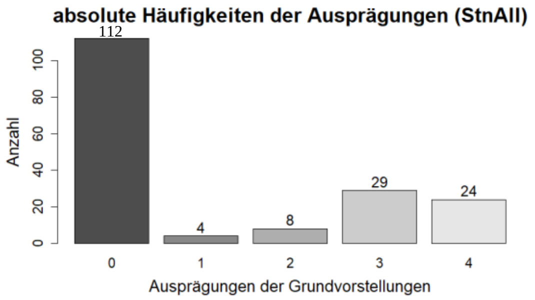

Abbildung 32: abs. Anzahl der Ausprägungen der GV (StnAll)

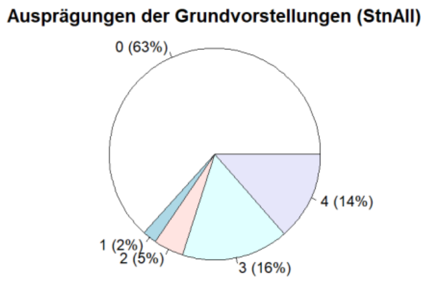

Abbildung 33: rel. Anzahl der Ausprägungen der GV (StnAll)

Die Einträge, die keiner Grundvorstellung zugeordnet wurden, fallen in die Gruppe „0“ und haben somit dieselbe Anzahl wie bereits oben beschrieben. Von den gewerteten Antworten gehören vier (2,3%) zur

Ausprägung 1, acht (4,5%) zur Ausprägung 2, weitere 29 (16,4%) zur Ausprägung 3 und die restlichen 24 (13,6%) zur stärksten Ausprägung.

Aufgrund der hohen Anzahl der „0“-Eintragungen sind die statistischen Werte sehr niedrig. Der Median beträgt klarerweise 0, das arithmetische Mittel 1,15 und die Standardabweichung 1,6.

Für keine der Variablen dieses Datensatzes gibt der Shapiro-Wilk-Test eine Normalverteilung aus.

Auch die Korrelationsanalyse führt keine Zusammenhänge zwischen den Variablen und der Ausprägung der Grundvorstellungen an. (Die Ergebnisse können in Anhang 3 betrachtet werden.)

Allgemein ohne „0“-Werte (StnAll0)

Der Datensatz Allgemein0 besteht aus den Daten des Satzes Allgemein, exkludiert jedoch die „0“-Einträge. Das bedeutet, dass die Gesamtanzahl der Eintragungen 65 ist und, dass die absolute Anzahl der Eintragungen, die den Grundvorstellungen beziehungsweise den Ausprägungen zugeordnet wurden, gleichbleibt, der relative Anteil sich jedoch verändert. So sind 18,5% der Darstellbarkeit, 53,8% der Sprungfreiheit und 27,7% der Vorhersagbarkeit zugeteilt: Abbildungen 34 und 35.

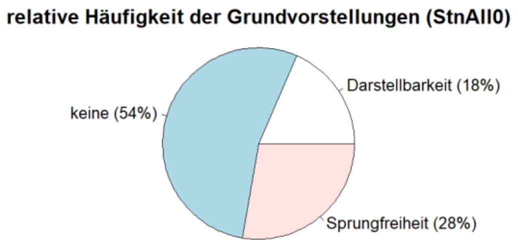

Abbildung 34: relative Häufigkeiten der Grundvorstellungen (StnAll0)

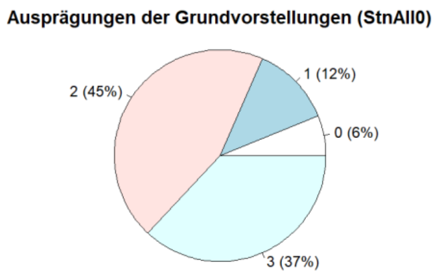

Abbildung 35: relative Häufigkeiten der Ausprägungen (StnAll0)

Auch die Werte der Ausprägung sind absolut dieselben, verändern sich jedoch relativ, wie in Abbildung 35 zu sehen ist. So sind die vier Eintragungen der Ausprägung 1 in diesem Datensatz nun 6,2%, in der zweiten Ausprägung sind 12,3 % der Antworten, in der dritten 44,6% und in der stärksten 36,9%.

Der Median (3) und das arithmetische Mittel (3,12) sind klarerweise höher als bei dem Datensatz „Allgemein“. Die Standardabweichung hingegen beträgt nur 0,857.

Keine der Variablen dieses Datensatzes ist normalverteilt oder korreliert mit der Ausprägung der Grundvorstellungen.

8.1.2.2. Auswertung der Grundvorstellungen

In diesem Abschnitt werden zuerst die Datensätze zu den Grundvorstellungen analysiert und verglichen, anschließend deren abgewandelte Form ohne „0“-Einträge.

Sprungfreiheit (StnSpr) & Darstellbarkeit (StnDar) & Vorhersagbarkeit (StnVor)

Alle Datensätze bestehen aus 59 Eintragungen, zu jeder/m Studierenden eine, welche sich auf die Grundvorstellung des Datensatzes bezieht.

<u>Häufigkeiten</u>

In Abbildung 36 ist die Verteilung der Grundvorstellungen nach ihren Ausprägungen zu sehen:

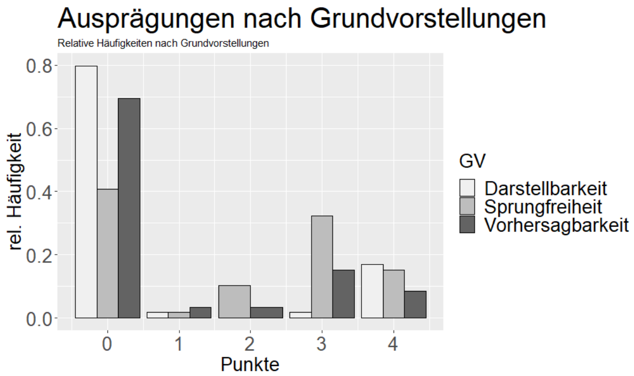

Abbildung 36: Verteilung der GV nach ihren Ausprägungen (StnAll0)

Die Grundvorstellung Darstellbarkeit wurde von 47 (79,7%) Studierenden in ihren Antworten nicht erwähnt. Die Vorhersagbarkeit im Gegensatz dazu wurde nur von 41 (69,5%) und die Sprungfreiheit sogar nur von 24 (40,7%) weggelassen. Die Ausprägung 1 ist diejenige, in die am wenigsten Antworten fallen: eine der Sprungfreiheit (1,7%), zwei der Vorhersagbarkeit (3,4%) und eine der Darstellbarkeit (1,7%). In der Ausprägung 2 gibt es nur Antworten der Sprungfreiheit (6 ≅ 10,2%) und der Vorhersagbarkeit (2 ≅ 3,4%). Die Sprungfreiheit sticht aus der Ausprägung 3 mit 19 zugeordneten Antworten (32,2%) heraus. Aus der Vorhersagbarkeit gehören neun (15,3%) und aus der Darstellbarkeit nur eine (1,7%) dazu. In der stärksten Stufe sind alle drei Grundvorstellungen vertreten: zehnmal die Darstellbarkeit (16,9%), neunmal die Sprungfreiheit (15,3%) und fünfmal die Vorhersagbarkeit (8,5%).

Diese Verteilungen sind in den Abbildungen 37, 38 und 39 festgehalten:

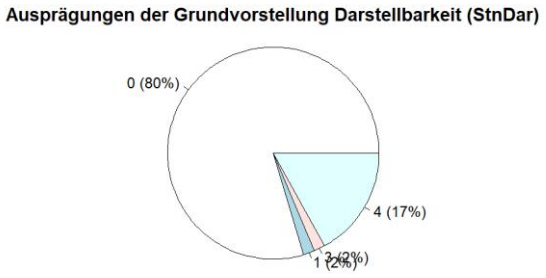

Abbildung 37: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StnDar)

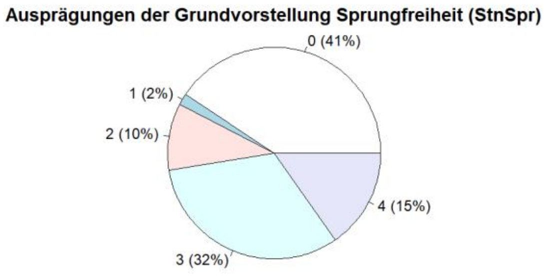

Abbildung 38: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StnSpr)

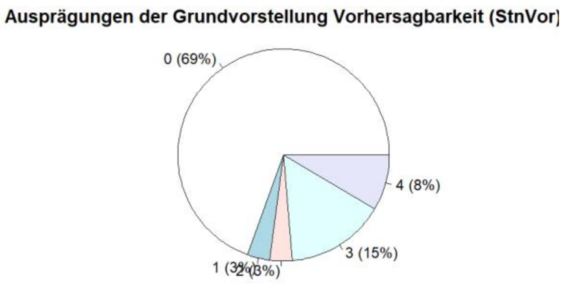

Abbildung 39: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (StnVor)

Die statistischen Kennzahlen der Datensätze zu Darstellbarkeit und Vorhersagbarkeit sind sich ähnlich, die zur Sprungfreiheit sind höher, wie in Tabelle 15 dargestellt:

Tabelle 15: Kennzahlen der GV (StnGV)

Kennzahlen	*Sprungfreiheit*	*Darstellbarkeit*	*Vorhersagbarkeit*
$\tilde{x}$	2	0	0
$\bar{x}$	1,797	0,746	0,898
s	1,606	1,538	1,459

Keine der Variablen der drei Datensätze ist normalverteilt.

<u>Korrelationsanalyse</u>

Drei Korrelationen, je eine in jedem Datensatz, konnten herausgefunden werden.

Im Datensatz Sprungfreiheit hat die Übungsnote einen schwachen negativen Einfluss auf die Ausprägung der Grundvorstellung (Kendall: p = 0,04479, τ = -0,25952; Spearman: p = 0,04172, ρ = -0,29826). Ein negativer Zusammenhang ist, dadurch weil die Variable negativ gepoolt ist, der erwartete: Je besser die Note, desto stärker die Ausprägung der Grundvorstellung.

Die Vorlesungsnote hat einen schwachen bzw. mittleren monotonen Zusammenhang zur Grundvorstellung Darstellbarkeit. Nach Kendall (p = 0,02675) ist es mit τ = 0,29599 eine schwache, nach Spearman (p = 0,02675) mit ρ = 0,33036 eine mittlere Korrelation.

Die dritte Korrelation ist die zwischen Unterrichtserfahrung und Vorhersagbarkeit. Mit p = 0,0278 nach Kendall bzw. 0,02817 nach Spearman ist der Zusammenhang ein schwacher negativer (τ = -0,2603, ρ = -0,28588). Das bedeutet, dass die Ausprägung der Grundvorstellung stärker ist, je geringer die Lehrerfahrung in der Schule ist.

Mögliche Interpretation

Der erste erwähnte Zusammenhang, dass mit einer besseren Übungsnote eine bessere Ausprägung der Grundvorstellung Sprungfreiheit einhergeht, wurde – wie in Hypothese 8 in Abschnitt 6.4 formuliert – erwartet.

Die Vorlesungsnote hat jedoch einen unerwarteten Zusammenhang mit der Ausprägung der Darstellbarkeit. Das kann möglicherweise dadurch erklärt werden, dass die Darstellbarkeit die Grundvorstellung zur Stetigkeit ist, welche bereits in der Schule gelehrt wird, weshalb diese in der Fachvorlesung nicht wieder aufgegriffen wird. In dieser Vorlesung geht es um die fachlichen Aspekte des Begriffes, welche bei einigen Studierenden zu einem Bruch mit den zuvor gelernten Vorstellungen führen könnte, sodass diejenigen, welche sich dem Fachlichem widmen, sich nicht die Zeit nehmen das Verständnis für den Begriff vollständig auszubilden.

Die dritte Korrelation zeigt auf, dass die Ausprägung der Grundvorstellung Vorhersagbarkeit geringer ist, je mehr Lehrerfahrung in der Schule existiert. Das könnte darauf beruhen, dass diese Grundvorstellung im Unterricht nicht thematisiert wird und dadurch bei den Lehrenden mit der Zeit immer weniger präsent ist.

Lineare Regressionsanalyse

Die Analyse ergab, dass die Regressionsgerade für die Korrelation zwischen Übungsnote und Sprungfreiheit durch $f(x) = -0.6082 \cdot x + 2.7049$ gegeben ist. Der Abstand auf der y-Achse zum Ursprung ist hochsignifikant mit $p = 3{,}9 \cdot 10^{-6}$, die Steigung mit p = 0,036 signifikant: Abbildung 40.

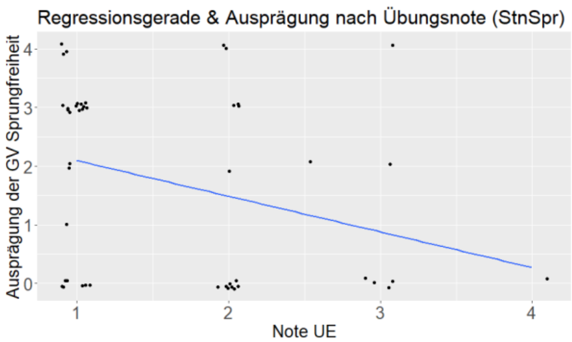

Abbildung 40: Regressionsgerade - Note UE (StnSpr)

Mit dem Bestimmtheitsmaß R^2 von 0,09406 ist eine Varianzaufklärung mittlerer Stärke gegeben.

Die Regressionsgerade der Korrelation zwischen Vorlesungsnote und Darstellbarkeit hat trotz signifikanter Steigung (p = 0,0469) keinen signifikanten y-Achsenabschnitt (p = 0,6653), weshalb davon ausgegangen werden kann, dass der monotone Zusammenhang nicht linear ist.

Die dritte Korrelation ist die zwischen Unterricht und Vorhersagbarkeit. Diese hat wiederum eine signifikante Steigung (p = 0,0192) und einen hochsignifikanten y-Achsenabschnitt ($p = 2{,}16 \cdot 10^{-5}$), woraus eine Regressionsgerade gebildet werden kann (Abbildung 41): $f(x) = -0{,}5418 \cdot x + 1{,}6146$.

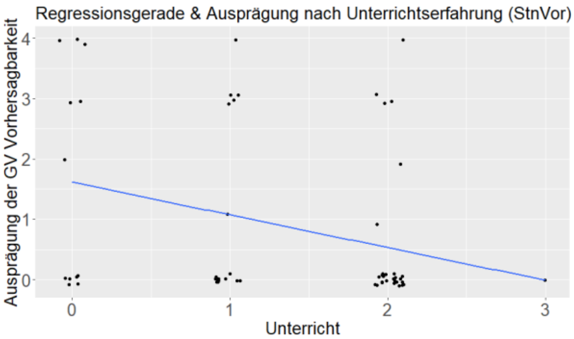

Abbildung 41: Regressionsgerade - Unterricht (StnVor)

R^2 in der Höhe von 0,09252 gibt erneut eine mittlere Varianzaufklärung an.

Sprungfreiheit0 (StnSpr0) & Darstellbarkeit0 (StnDar0) & Vorhersagbarkeit0 (StnVor0)

Die Datensätze bestehen aus 35 (StnSpr0), zwölf (StnDar0) und 18 (StnVor0) Eintragungen.

Häufigkeiten

Die Werte der Datensätze werden in Tabelle 16 angegeben.

Tabelle 16: Ausprägung der GV (StnGV0)

Ausprägung	*1*		*2*		*3*		*4*	
StnSpr0	1	2,86 %	6	17,14%	19	54,29%	9	25,71%
StnDar0	1	8,33%	0	0,00%	1	8,33%	10	83,33%
StnVor0	2	11,11%	2	11,11%	9	50,00%	5	27,78%

Die statistischen Kennzahlen werden in Tabelle 17 verglichen.

Tabelle 17: Kennzahlen der StnGV0

	Median	*Arithmetisches Mittel*	*Standardabweichung*
StnSpr0	3	3,028	0,747
StnDar0	4	3,667	0,888
StnVor0	3	2,944	0,938

Der Shapiro-Wilk-Test ergab, dass nur eine Variable der drei Datensätze mit p = 0,08368 einen p-Wert größer als 0,05 besitzt und somit die Hypothese, dass die Variable normalverteilt ist, bestätigt. Deshalb darf angenommen werden, dass die Variable Vorlesungsnote im Datensatz Vorhersagbarkeit0 normalverteilt ist.

Korrelationsanalyse

Die Korrelationsanalyse ergab, dass nur eine Variable einen Einfluss auf die Ausprägung einer Grundvorstellung hat. Mit p = 0,02091 nach Kendall (p = 0,01565 nach Spearman) besteht ein starker negativer (-0,52115 bzw. -0,57543) Zusammenhang zwischen dem Schulwunsch und der Ausprägung der Grundvorstellung Vorhersagbarkeit.

Lineare Regressionsanalyse

Dieser monotone Zusammenhang ist jedoch nicht linear, wie die Regressionsanalyse ergeben hat. Die Steigung von -0,7347 ist nicht signifikant (p = 0,0537)

8.1.2.3. Auswertung der Maximalantworten

In diesem Abschnitt wird der Datensatz „Stetigkeitnachher Maximum“ analysiert.

Maximum (StnMax)

Häufigkeiten

Für jede teilnehmende Person gibt es einen Eintrag, daher sind es 59.

Die am meisten vorkommende Grundvorstellung ist die Sprungfreiheit mit 26 Einträgen (44,1%), danach folgt die Vorhersagbarkeit mit 12 (20,3%) und dann die Darstellbarkeit mit 10 (16,9%). Zwei Personen haben die Sprungfreiheit und Darstellbarkeit gleich stark angegeben und zwei weitere die Sprungvorstellung und die Vorhersagbarkeit.

Die Ausprägung und die Aufteilungen in die einzelnen Grundvorstellungen werden in Tabelle 18 präsentiert und anhand von Abbildung 42 dargestellt.

Tabelle 18: Ausprägungen (StnMax)

Ausprägung	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Maximal	7	3	6	21	22
maxSpr	0	1	6	14	9
maxDar	0	1	0	1	10
maxVor	0	2	0	7	5

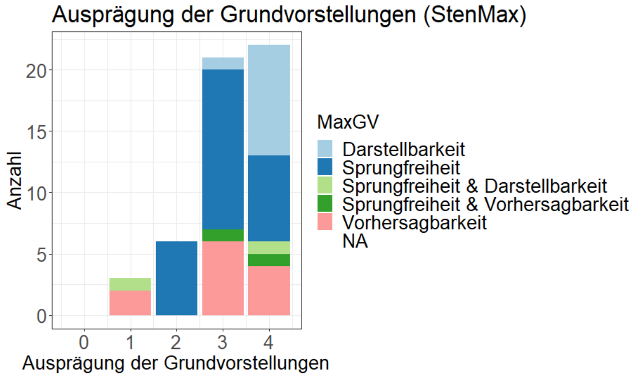

Abbildung 42: Ausprägungen in GV (StnMax)

Die statistischen Kennzahlen dieses Datensatz sind geringfügig niedriger als die des Pendants im ersten Fragebogen: $\tilde{x}$ = 3, $\bar{x}$ = 2,82, s = 1,32.

Korrelationsanalyse

Die Korrelationsanalyse hat ergeben, dass kein monotoner Zusammenhang zwischen den Variablen und der Ausprägung existiert.

8.1.2.4. Auswertung der Antworten, die nicht den GV zugeordnet werden konnten

In diesem Kapitel werden die Kategorie „Fehlvorstellung“, „Differenzierbarkeit“ und „Definition“ analysiert.

Fehlvorstellung (StnFV)

In die Kategorie Fehlvorstellungen fallen sieben Antworten.

Zwei der Personen, deren Antworten der Fehlvorstellung zugeordnet wurden, haben in einem anderen Teil ihrer Antwort die Grundvorstellung Darstellbarkeit in voller Stärke ausgeprägt, eine weitere hat die Sprungfreiheit mit Ausprägung 2 angegeben. Die übrigen haben keine Grundvorstellung beschrieben.

Tabelle 19: Aufteilung der FV auf Merkmale (StnFV)

Merkmal	*Unterricht*				*Nachhilfe*		*Schulwunsch*			*Note VO*			*Note UE*			
Einteilung	0	1	2	3	0	1	1	2	3	1	3	4	1	2	3	4
Anzahl	2	1	3	1	1	6	1	5	1	2	3	1	2	2	1	1

Auch in dieser Kategorie gibt es fehlende Antworten zur Vorlesungs- und Übungsnote, weshalb diesen Merkmalen nur sechs Antworten zugeteilt sind. Der Nachhilfe und dem Schulwunsch sind aufgrund einer fehlenden Antwort nur sieben Personen zugeteilt.

Anhand der Daten in Tabelle 19 kann erkannt werden, dass die Fehlvorstellung über alle Merkmalsausprägungen verteilt sind, es gibt keine klaren Zusammenhänge zu bestimmten Merkmalen.

Differenzierbarkeit

Drei Studierende haben die Differenzierbarkeit angegeben. Diese kommt zum einen in Kombination mit der Grundvorstellung Darstellbarkeit in der Ausprägung 4 und zum anderen mit der Grundvorstellung Sprungfreiheit mit der Ausprägung 2 vor. Der/die dritte Studierende/r hat keine der drei Grundvorstellung ausgeprägt. Keine/r der drei hat „Oberstufe“ als Schulwunsch angegeben, abgesehen davon gibt es keine Gemeinsamkeiten der Teilnehmenden.

Definition

Acht Antworten beinhalten Definitionen der Stetigkeit. Die Definitionen kommen zweimal als alleinige Antwort vor, in den anderen Fällen werden sie mit weiteren Aussagen, die alle Ausprägung 3 oder 4 besitzen, verbunden. Keiner der Einträge weist Fehlvorstellungen oder Aussagen über die Differenzierbarkeit auf. Auch in dieser Kategorie hat keine/r angegeben, nur in der Oberstufe unterrichten zu wollen.

8.1.3. Vergleich der Fragebögen

Da keine Korrelation, die im ersten Fragebogen auftritt, auch im zweiten existiert, werden die Korrelationen nicht direkt verglichen.

Um die standardisierten Effektstärken der Fragebögen miteinander zu vergleichen wird Cohens d beziehungsweise Hedges g berechnet. Es werden die Mittelwerte der Datensätze auf die Standardabweichung bezogen ausgewertet.

So ergibt die Analyse, dass die Datensätze „Allgemein0“ (d = -0,2285), „Sprungfreiheit0“ (d = -0,4132), „Darstellbarkeit“ (d = -0,4988) und „Darstellbarkeit0“ (d = 0,3836) einen kleinen signifikanten

Unterschied bezüglich der Ausprägung besitzen. „Vorhersagbarkeit“ hat mit einem d-Wert von 0,658 einen mittelstarken Unterschied. Die Datensätze mit einem positiven d-Werte geben eine Verbesserung der Mittelwerte im zweiten Fragebogen an, die mit einem negativen eine Verschlechterung.

Nur die Datensätze „Sprungfreiheit0“ und „Darstellbarkeit0“ haben eine geringe Anzahl der Eintragungen, weshalb zusätzlich Hedges g berechnet wurde. Diese Ergebnisse ergeben in allen Fällen gerundet dasselbe wie Cohens d. Sie werden im Anhang 4 als Tabelle angefügt.

Die Ergebnisse des Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Tests unterstützen die zwei stärksten zuvor angeführten Resultate: Es liegen signifikante Änderungen der Mittelwerte der Datensätze „Darstellbarkeit“ und „Vorhersagbarkeit“ vor, da die Nullhypothese mit p = 0,0063 und p = 0,0003 verworfen werden konnte.

Um die Mittelwerte der Datensätze vergleichen zu können, die einen signifikanten Unterschied aufweisen, wurden sie in Tabelle 20 eingetragen.

Tabelle 20: $\bar{x}$ und $\tilde{x}$ im Vergleich (Stetigkeit)

	All0	*Spr0*	*Dar*	*Dar0*	*Vor*
1. $\bar{x}$	3,3158	3,3462	1,5763	3,3214	0,1525
2. $\bar{x}$	3,1231	3,0286	0,8983	$3,\dot{6}$	0,7458
1. $\tilde{x}$	3	3,5	0	4	0
2. $\tilde{x}$	3	3	0	4	0
d	-0,228532	-0,413184	-0,498792	0,3836365	0,6579787

<u>Mögliche Interpretation zur Grundvorstellung Darstellbarkeit:</u>

Im zweiten Fragebogen ist die durchschnittliche Ausprägung dieser Grundvorstellung im Allgemeinen um einiges niedriger als im ersten. Werden hingegen nur die Werte bei den Studierenden betrachtet, die diese Grundvorstellung angegeben haben, so ist der Durchschnitt von 3,32 auf 3,67 gestiegen. Das bedeutet, dass im zweiten Fragebogen die Darstellbarkeit als Grundvorstellung bei weniger Personen erkannt werden konnte als im ersten. Bei denjenigen, bei denen diese Grundvorstellung nachgewiesen werden konnte, ist die Ausprägung jedoch sehr stark.

8.2. Differenzierbarkeit

Wie bei der Ergebnisdarstellung zur Stetigkeit werden die Datensätze zu den Grundvorstellungen – „Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lineare Lokalität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ - nach der Ausprägung der Grundvorstellungen ausgewertet. „Allgemein“, „Allgemein0“ und „Maximum“ werden zusätzlich auch nach der Art der Grundvorstellung analysiert.

8.2.1. Erster Fragebogen

Keine der Antworten wurde mehr als einer Grundvorstellung zugeordnet, sieben wurden genau einer zugeteilt und 52 keiner.

8.2.1.1. Allgemeine Auswertung

Die allgemeine Auswertung beschäftigt sich mit den Datensätzen „Allgemein“ und „Allgemein0“.

Allgemein (DifvAll)

Dieser Datensatz besteht aus 236 Einträgen.

<u>Häufigkeiten</u>

Drei (1,27%) dieser Einträge wurden der Grundvorstellung lokale Änderungsrate zugeordnet, gleichviele der Tangentensteigung. Eine Antwort (0,42%) wurde dem Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen zugesprochen und keine der linearen Lokalität. Die restlichen 229 Antworten (97,3%) konnten keiner Grundvorstellung zugeordnet werden: Abbildung 43.

Die Verteilung nach der Ausprägung ist folglich ebenso: 229 Aussagen erhielten die Ausprägung 0, eine die Ausprägung 1 und jeweils drei Ausprägungen 3 und 4.

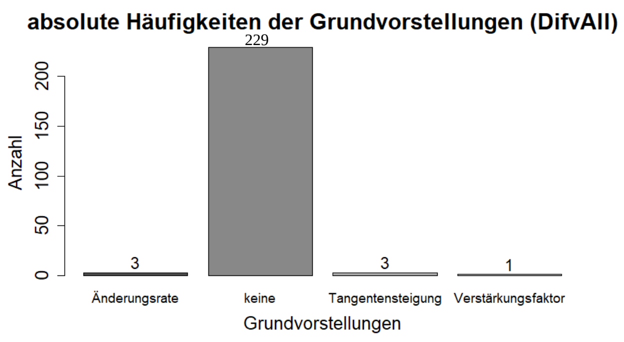

Abbildung 43: absolute Anzahl der Grundvorstellungen (DifvAll)

Der Median dieser Verteilung liegt bei 0, das arithmetische Mittel bei 0,0932 und die Standardabweichung bei 0,561.

Korrelationsanalyse

Die Auswertung hat ergeben, dass nach Kendall (p = 0,01483) und Spearman (p = 0,01451) die Nachhilfe einen schwachen, negativen Einfluss (τ = -0,1596, ρ = -0,1603) auf die Ausprägung der Grundvorstellungen hat. So scheint in diesem Datensatz eine Nachhilfeerfahrung zu einer schlechteren Ausprägung der Grundvorstellungen zu führen.

Mögliche Interpretation

Dass die Nachhilfeerfahrung zu einer schlechteren Grundvorstellung führt, könnte daraus resultieren, dass in der Nachhilfe keine Grundvorstellungen beigebracht werden. In den meisten Fällen ist das Ziel der Nachhilfe Prüfungen zu bestehen oder Noten zu verbessern, und nicht in erster Linie Mathematik besser zu verstehen. Daher werden oft Schemata beigebracht ohne Vorstellungen zu Begriffen auszubilden bzw. zu festigen.

Lineare Regressionsanalyse

Die Analyse ergab eine Regressionsgerade mit hochsignifikantem y-Achsenabschnitt von 0,27083 (p = 0,000935), einer signifikanten Steigung von -0,22192 (p = 0,015171) und einem R^2 von 0,02537. In Abbildung 44 ist die Gerade $f(x) = -0{,}22192 \cdot x + 0{,}27083$ graphisch veranschaulicht.

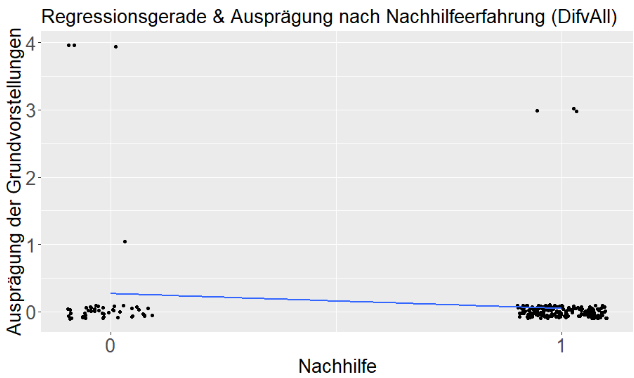

Abbildung 44: Regressionsgerade - Nachhilfe (DifvAll)

Allgemein ohne „0“-Werte (DifvAll0)

Dieser Datensatz besteht aus sieben Werten.

Häufigkeiten

Die drei Eintragungen, welche der lokalen Änderungsrate beziehungsweise der Tangentensteigung zugeordnet sind, haben in diesem Datensatz einen relativen Anteil von je 42,86%, die Antwort zum Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen 14,29%: Abbildung 45.

Auch die Ausprägungen verteilen sich nun auf diese Art: Ausprägung 1 – 14,29%, Ausprägung 3 – 42,86% und Ausprägung 4 – 14,29%: Abbildung 46.

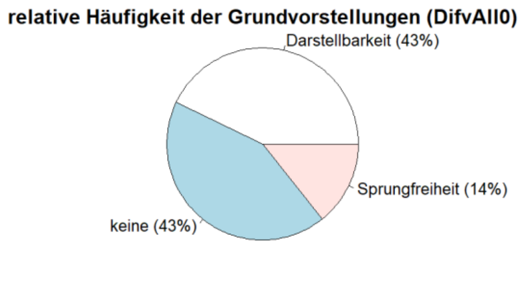

Abbildung 45: rel. Häufigkeiten der GV in DifvAll0

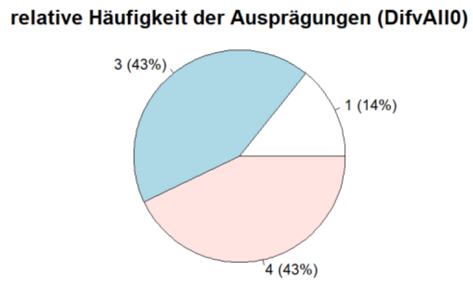

Abbildung 46: rel. Häufigkeiten der Ausprägungen in DifvAll0

Der Median dieses Datensatzes liegt bei 3, das arithmetische Mittel bei 3,14 und die Standardabweichung bei 1,069.

Shapiro-Wilk-Test

In diesem Datensatz gibt es eine normalverteilte Variable – der Schulwunsch mit p = 0,09945.

Es gibt keine Korrelation zwischen Merkmalen und der Ausprägung der Grundvorstellungen.

8.2.1.2. Auswertung nach den Grundvorstellungen

In diesem Kapitel werden zuerst die Datensätze „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lineare Lokalität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ bearbeitet, danach deren Pendants ohne Nullwerte.

lokale Änderungsrate (DifvÄnd), Tangentensteigung (DifvTan), lokale Linearität (DifvLin) & Verstärkung kleiner Änderungen (DifvVer)

Jede Datenmenge besteht aus 59 Eintragungen, von denen der Großteil „0“-Werte beinhaltet, wie in Tabelle 21 dargestellt und in Abbildung 47 veranschaulicht wird.

Tabelle 21: Häufigkeiten der Ausprägungen (DifvGV)

Datensatz	*0*		*1*		*2*		*3*		*4*	
Lok.Änderungsrate	56	94,92%	0	0,00%	0	0,00%	2	3,39%	1	1,69%
Tangentensteigung	56	93,22%	0	0,00%	0	0,00%	1	1,69%	2	3,39%
Lokale Linearität	59	100%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
Verstärkungsfaktor kl. Änderungen	58	98,31%	1	1,69%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%

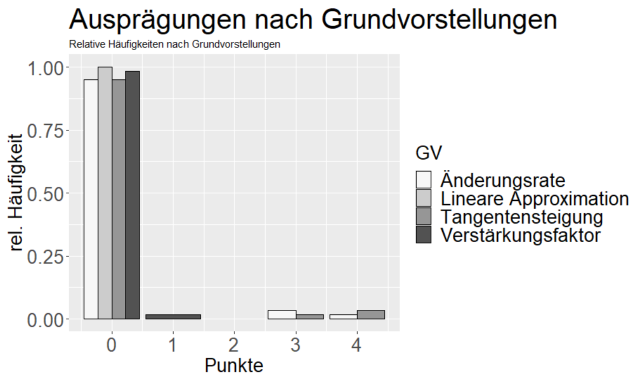

Abbildung 47: rel. Häufigkeit der Ausprägungen in Grundvorstellungen (DifvGV)

Die statistischen Kennzahlen im Überblick: Tabelle 22.

Tabelle 22: statistische Kennzahlen im Überblick (DifvGV)

Kennzahlen	*Lokale Änderungsrate*	*Tangentensteigung*	*Lokale Linearität*	*Verstärkungsfaktor kl. Änderungen*
$\tilde{x}$	0	0	0	0
$\bar{x}$	0,1695	0,1864	0	0,0169
s	0,7463	0,8195	0	0,1302

<u>Korrelationsanalyse</u>

Zwei Korrelationen mit der Ausprägung konnten berechnet werden: im Datensatz „Änderungsrate“ die Vorlesungsnote und im Datensatz „Tangentensteigung“ die Nachhilfe.

Die Vorlesungsnote hat einen schwachen (τ = -0,2895, p = 0,03208) bzw. mittleren (ρ = -0,3195, p = 0,03041) negativen Zusammenhang mit der Ausprägung der Grundvorstellung *lokale Änderungsrate*. Das heißt, dass die Ausprägung dieser besser wird, je besser die Vorlesungsnote ist.

Die Nachhilfe hat einen schwachen (τ = -0,2701, p = 0,0403; ρ = -0,2716, p = 0,03916) negativen Zusammenhang mit der Ausprägung der Grundvorstellung *Tangentensteigung*. Mehr Personen ohne Nachhilfeerfahrung als mit haben diese Vorstellung ausgeprägt.

Mögliche Interpretation

Die erste Korrelation ist nicht überraschend und unterstützt Hypothese 8 – dass bessere universitäre Leistungen mit stärkeren Ausprägungen der Grundvorstellungen einhergehen.

Die zweite Korrelation zeigt, wie auch in Abschnitt 8.2.1.1 zu erkennen ist, dass Nachhilfeerfahrung eine negative Auswirkung auf die Ausprägung der Grundvorstellung besitzt, in diesem Fall mit der Grundvorstellung *Tangentensteigung*. Dies entsteht vermutlich durch das Lehren von Abläufen von Rechenschritten, um Beispiele lösen zu können, da dies für die Schüler*innen wichtiger ist als das Verstehen der Begriffe.

Lineare Regressionsanalyse

Beide erkannten Korrelationen besitzen eine signifikante Regressionsgerade: Tabelle 23, Abbildungen 48 und 49.

Tabelle 23: Regressionsanalyse (DifvGV)

Vorlesungsnote – Änderungsrate		**Nachhilfe – Tangentensteigung**
$\boldsymbol{f(x) = -0,2344 \cdot x + 0,7653}$		$f(x) = -0{,}601 \cdot x + 0,\dot{6}$
-0,2344 mit $\boldsymbol{p}$ = 0,03368	**Steigung**	-0,6014 mit p = 0,0234
0,7653 mit $\boldsymbol{p}$ = 0,00829	**y-Achsenabschnitt**	$0,\dot{6}$ mit p = 0,0053
0,09848	$\boldsymbol{R^2}$	0,08847

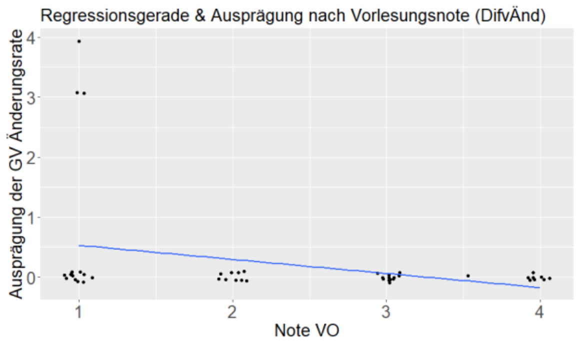

Abbildung 48: Regressionsgerade – Note VO (DifvÄnd)

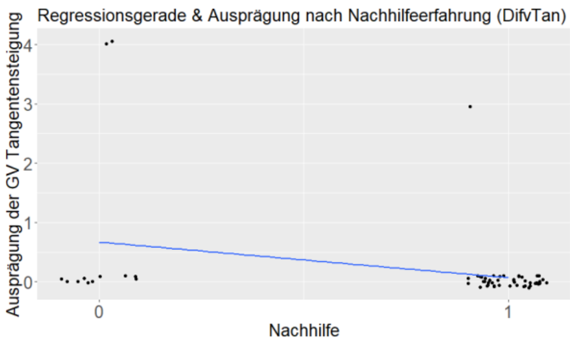

Abbildung 49: Regressionsgerade - Nachhilfe (DifvTan)

Die Werte des Bestimmtheitsmaßes sagen aus, dass bei der ersten Korrelation eine mittlere und bei der zweiten eine schwache Varianzaufklärung vorliegt.

Änderungsrate0 (DifvÄnd0), Tangentensteigung0 (DifvTan0), lokale Linearität (DifvLin0) & Verstärkungsfaktor0 (DifvVer0)

Häufigkeiten

Diese Datensätze haben nur eine sehr geringe Anzahl an Eintragungen. „Änderungsrate0“ besitzt drei Werte, von denen zwei ($66,\dot{6}\%$) der Ausprägung 3 und eine ($33,\dot{3}\%$) der Ausprägung 4 zugeteilt sind. „Tangentensteigung0“ besteht ebenfalls aus drei Werten – einer gehört zu Ausprägung 3 und die anderen zwei zu Ausprägung 4. Der Datensatz „lineare Lokalität0“ hat keine Eintragungen, „Verstärkungsfaktor0“ besitzt eine mit Ausprägung 1.

Aufgrund der geringen Anzahl der Eintragungen konnte in keinem der Datensätze eine Korrelation entdeckt werden.

8.2.1.3. Auswertung der Maximalantworten

Der Datensatz „Differenzierbarkeitvorher Maximum“ wird in diesem Kapitel analysiert.

Maximum (DifvMax)

Dieser Datensatz besteht aus 59 Eintragungen, zu jedem/r Teilnehmer/in eine.

Drei dieser (5,08%) sind der Grundvorstellung lokale Änderungsrate, drei weitere der Tangentensteigung, eine (1,69%) dem Verstärkungsfaktor und die restlichen 52 (88,14%) keiner Grundvorstellung zugeteilt: Abbildung 50.

Die Einteilung in Ausprägungen besitzt dieselbe Aufteilung: drei Antworten zu Ausprägung 3 und drei zu 4, eine zu Ausprägung 1 und die übrigen zu Ausprägung 0, da keine zur Ausprägung 2 zugeteilt wurden: Abbildung 51.

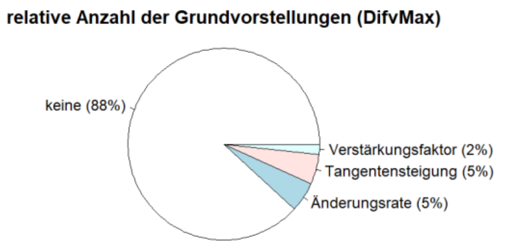

Abbildung 50: Verteilung der GV (DifvMax)

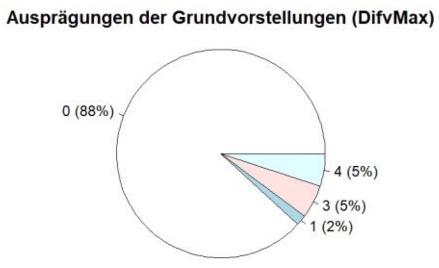

Abbildung 51: Verteilung der Ausprägungen (DifvMax)

Der Median beträgt 0, das arithmetische Mittel 0,3729 und die Standardabweichung 1,081.

Korrelationsanalyse

Die Nachhilfe hat nach Kendall (p = 0,009, τ = -0,3398) wie auch nach Spearman (p = 0,0078, ρ = -0,3461) einen mittleren negativen Zusammenhang mit der maximalen Ausprägung der Grundvorstellung. Demnach haben diejenigen mit einer stärken Ausprägung tendenziell keine Nachhilfeerfahrung.

Mögliche Interpretation

Wie bereits in den zwei vorigen Abschnitten zu sehen ist, wirkt sich Nachhilfeerfahrung negativ auf die Ausprägung der Grundvorstellungen aus. Es scheint, als ob die Nachhilfeerfahrung das Ausbilden dieser blockiert.

Lineare Regressionsanalyse

Die Analyse ergibt, dass es einen linearen Zusammenhang mit der Funktion f mit $f(x) = -0{,}8877 \cdot x + 1{,}0833$ gibt: Abbildung 52. Die Steigung ist signifikant mit einem p-Wert von 0,015171, der y-Achsenabstand mit einem Wert von 0,000935. Das Bestimmtheitsmaß R^2 ergibt mit einem Wert von 0,1108 eine mittelstarke Varianzaufklärung.

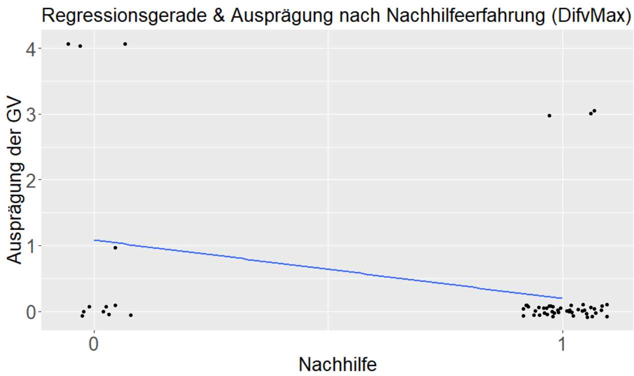

Abbildung 52: Regressionsgerade - Nachhilfe (DifvMax)

8.2.1.4. Auswertung der Antworten, die nicht den GV zugeordnet werden konnten

In diesem Kapitel werden die Kategorien „Fehlvorstellungen“, „Definition“, „Stetigkeit“, „Differenzierbarkeit“ und „Aussehen“ dargestellt.

Fehlvorstellungen (DifvFV)

Acht Aussagen wurden dieser Kategorie zugeordnet. Keine dieser kommt in Kombination mit der Ausprägung einer Grundvorstellung vor. Auch mit anderen Merkmalen, welche in Tabelle 24 dargestellt sind, können keine Verbindungen hergestellt werden.

Tabelle 24: Verteilung der Merkmale - Fehlvorstellungen (DifvFV)

Merkmal	*Unterricht*				*Nachhilfe*		*Schulwunsch*			*Note VO*				*Note UE*			
Einteilung	0	1	2	3	0	1	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4
Anzahl	5	0	3	0	1	7	1	5	2	1	1	2	2	1	3	1	1

Auch in dieser Kategorie ist die unterschiedliche Anzahl an Aussagen, die den Merkmalen zugeordnet sind, auf fehlende Werte zur Vorlesungs- und Übungsnote zurückzuführen.

Definition (DifvDef)

Zwei Personen haben mit der formalen Definition der Differenzierbarkeit geantwortet. Keine von beiden hat eine Grundvorstellung ausgeprägt, beide haben bereits Lehrerfahrung in der Schule und durch Nachhilfe und wollen sowohl in Unter- wie auch Oberstufe unterrichten. Eine hat eine weitere Antwort gegeben, die in die Kategorie „Aussehen“ fällt.

Stetigkeit (DifvSte)

Sechs Teilnehmende haben die Stetigkeit der Funktion erwähnt. Während vier zusätzlich die Differenzierbarkeit beschrieben, ist es bei zweien die alleinige Antwort, welche zu ungenau ist um die Differenzierbarkeit zu beschreiben und daher auch in den Fehlvorstellungen zu finden ist. Die Personen dieser Kategorie haben durchschnittlich gute Noten und alle können auf Nachhilfeerfahrung zurückblicken.

Differenzierbarkeit (DifvDif)

In unterschiedlichen Formulierungen kommt in 32 Antworten vor, dass die Studierenden sich unter einer differenzierbaren Funktion eine Funktion vorstellen, „die differenzierbar ist“. Auffallend ist, dass der Großteil der Studierenden dieser Kategorie sehr gute oder gute Noten in der Übung der Fachvorlesung erhielt und zusätzlich Nachhilfeerfahrung besitzen, über den restlichen Merkmalen sind die Angaben der Personen annähernd normalverteilt: Tabelle 25.

Tabelle 25: Verteilung der Merkmale – Differenzierbarkeit

Merkmal	*Unterricht*				*Nachhilfe*		*Schulwunsch*			*Note VO*					*Note UE*			
Einteilung	0	1	2	3	0	1	1	2	3	1	2	3	3.5	4	1	2	2.5	3
Anzahl	3	11	17	1	7	25	5	23	3	6	6	7	1	5	13	10	1	1

Auch in dieser Kategorie haben einige Studierende keine genauen Angaben zur Vorlesungs- und Übungsnote gegeben, weshalb zu diesen Merkmalen nur 25 Antworten zugeordnet wurden.

Aussehen (DifvAus)

14 Antworten beziehen sich auf das Aussehen des Graphens der differenzierbaren Funktion. In dieser Kategorie haben viele sehr gute oder gute Noten, zwölf haben Nachhilfeerfahrung, acht bereits das Schulpraktikum absolviert. Der Schulwunsch von zehn der 14 Personen ist es, sowohl in der Sekundarstufe 1 wie auch in der Sekundarstufe 2 zu unterrichten.

8.2.2. Zweiter Fragebogen

28 Antworten wurden genau einer Grundvorstellung zugewiesen, 31 keiner. Es gibt keine Antworten, in denen mehr als eine Grundvorstellung erkannt werden konnte.

8.2.2.1. Allgemeine Auswertung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Datensätze „Allgemein“ und „Allgemein0“ präsentiert.

Allgemein (DifnAll)

Insgesamt 236 Eintragungen besitzt dieser Datensatz. Diese Eintragungen werden zuerst den Grundvorstellungen und anschließend den Ausprägungen zugeordnet.

<u>Häufigkeiten</u>

Elf Aussagen (4,66%) betreffen die Grundvorstellung lokale Änderungsrate, sechzehn (6,78%) die Tangentensteigung, keine die lokale Linearität und eine (0,42%) den Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen. Alle anderen (88,14%) können keiner Grundvorstellung zugeordnet werden: Abbildung 53.

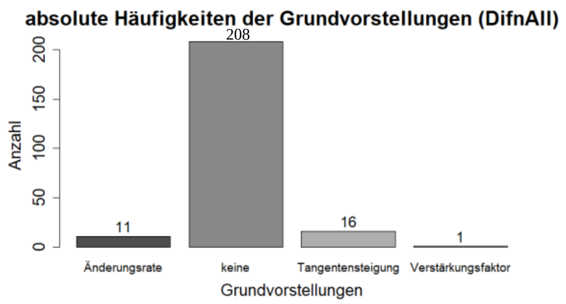

Abbildung 53: Aufteilung in GV (DifnAll)

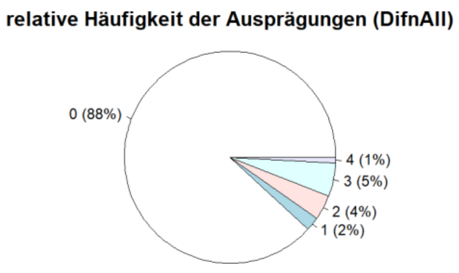

Abbildung 54: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (DifnAll)

Wie in Abbildung 54 zu sehen ist, ist nur ein geringer Teil den Ausprägungen zugeordnet. Fünf Antworten (2,12%) zählen zu Ausprägung 1, neun (3,81%) zu Ausprägung 2, zwölf (5,08%) zu Ausprägung 3 und zwei (0,85%) zu Ausprägung 4. Die restlichen 88,14% sind die Antworten, die keiner Grundvorstellung zugeordnet wurden. Folglich liegt der Median der Datenmenge bei 0, das arithmetische Mittel bei 0,2839 und die Standardabweichung bei 0,8302.

Keines der Merkmale korreliert in diesem Datensatz mit der Ausprägung der Grundvorstellungen.

Allgemein ohne „0“-Werte (DifnAll0)

Diese Datenmenge zählt 28 Eintragungen.

Häufigkeiten

Die Absolutwerte der Daten können der Information zum Datensatz „Allgemein“ entnommen werden. Die relativen Daten zur Verteilung der Grundvorstellungen sind wie in Abbildung 55 dargestellt: Änderungsrate mit 39,29%, Tangentensteigung mit 57,14%, lokale Linearität mit 0% und der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen mit 4,2%.

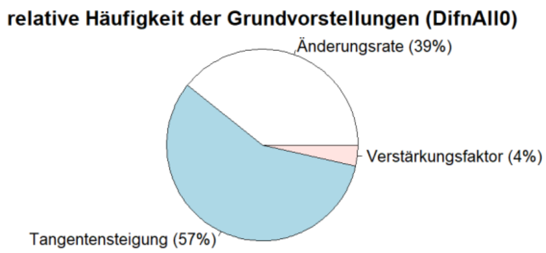

Abbildung 55: rel. Häufigkeiten der GV (DifnAll0)

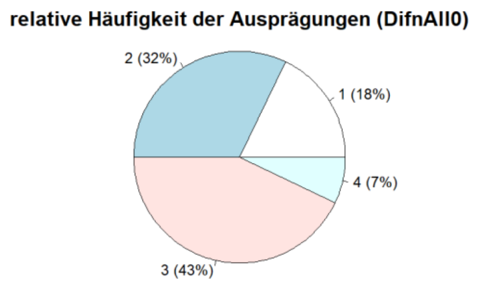

Abbildung 56: rel. Häufigkeiten der Ausprägungen (DifnAll0)

Wie in Abbildung 56 zu sehen ist, ist mit 42,86% Ausprägung 3 die am stärksten vertretene. Ausprägung 2 hat neun Aussagen (32,14%), Ausprägung 1 fünf Antworten (17,86%) und die wenigsten Aussagen (zwei, das sind 7,14%) sind der Ausprägung 4 zugeordnet worden.

Der Median dieses Datensatzes nach der Ausprägung ist 2,5. das arithmetische Mittel 2,393 und die Standardabweichung 0,8751.

Korrelationsanalyse

Die Analyse ergibt knapp keine Korrelation zwischen der Nachhilfe und der Ausprägung der Grundvorstellungen (Kendall: p = 0,07951, τ = -0,3202, Spearman: p = 0,07902, ρ = -0,3439).

8.2.2.2. Auswertung nach den Grundvorstellungen

In diesem Kapitel werden zuerst die Datensätze mit den „0“-Einträgen und danach die ohne bearbeitet.

lokale Änderungsrate (DifnÄnd), Tangentensteigung (DifnTan), lokale Linearität (DifnLin) & Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (DifnVer)

Jeder dieser Datensätze besteht aus 59 Eintragungen, zu jeder Person eine.

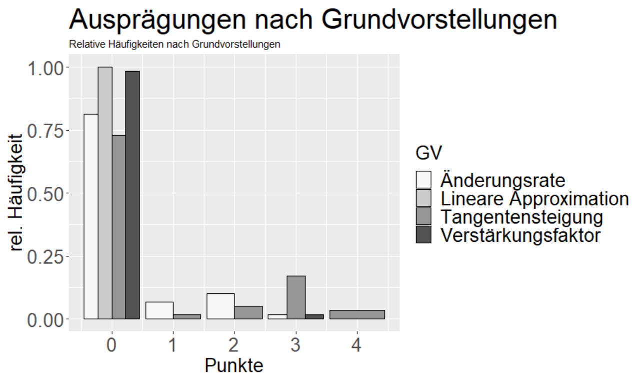

Abbildung 57: Verteilung der Ausprägungen in GV (DifnGV)

Wie in Abbildung 57 dargestellt, ist keine Antwort der Grundvorstellung lokale Linearität zugeordnet, daher erhielten alle Einträge dieser Datenmenge die Ausprägung 0. Nur eine (1,69%) Aussage wurde in die Grundvorstellung Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen eingeteilt, diese scheint in Ausprägung 3 auf. Die anderen 98,31% des Datensatzes Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen wurden der Ausprägung 0 zugeordnet. Im Datensatz Änderungsrate sind vier Antworten (6,78%) mit der Ausprägung 1, sechs (10,17%) mit der Ausprägung 2, eine (1,69%) mit Ausprägung 3, keine mit Ausprägung 4 und 48 (81,36%) mit Ausprägung 0. Die Tangentensteigung hat die wenigsten Aussagen in der Kategorie 0, es sind nur 43 (72,88%), eine Antwort (1,69%) hat die Ausprägung 1, drei (5,08%) die Ausprägung 2, zehn (16,95%) die Ausprägung 3 und zwei (3,39%) die Ausprägung 4.

In Tabelle 26 sind die statistischen Kennzahlen der Datensätze dargestellt.

Tabelle 26: statistische Kennzahlen im Überblick (DifnGV)

Kennzahlen	*Lokale Änderungsrate*	*Tangentensteigung*	*Lokale Linearität*	*Verstärkungsfaktor kl. Änderungen*
$\tilde{x}$	0	0	0	0
$\bar{x}$	0,322	0,7627	0	0,0508
s	0,7297	1,3175	0	0,3906

Korrelationsanalyse

Aufgrund der p-Werte von 0,06364 (nach Kendall) und 0,06306 (nach Spearman) existiert knapp keine Korrelation zwischen der Nachhilfeerfahrung und der Ausprägung der Grundvorstellung lokale Änderungsrate.

In den anderen zwei Datensätzen konnten ebenfalls keine Korrelationen festgestellt werden.

lokale Änderungsrate0 (DifnÄnd0), Tangentensteigung0 (DifnTan0), lokale Linearität0 (DifnLin0) & Verstärkungsfaktor0 (DifvVer0)

Der Datensatz „Änderungsrate0“ besitzt elf Einträge. Vier (36,36%) davon haben Ausprägung 1, sechs (54,55%) 2 und einer (9,09%) 3. In „Tangentensteigung0“ wurde eine (6,25%) der Ausprägung 1, drei (18,75%) 2, zehn (62,5%) 3 und zwei (12,5%) der Ausprägung 4 zugeordnet. Somit sind in diesem Datensatz 16 Antworten. Es gibt nur eine Aussage zur Grundvorstellung Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen, diese wurde der Ausprägung 3 zugesprochen. Zur Grundvorstellung lokale Linearität wurde keine Antwort gefunden.

Die Verteilung der Ausprägungen zu den Datensätzen Änderungsrate0 und Tangentensteigung0 sind in Abbildung 58 und Abbildung 59 repräsentiert.

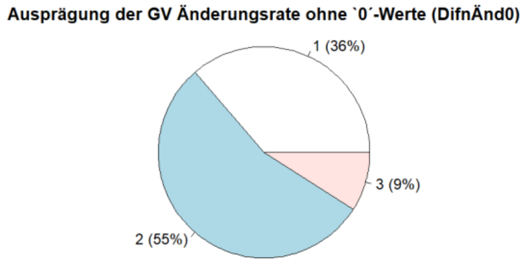

Abbildung 58: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (DifnÄnd0)

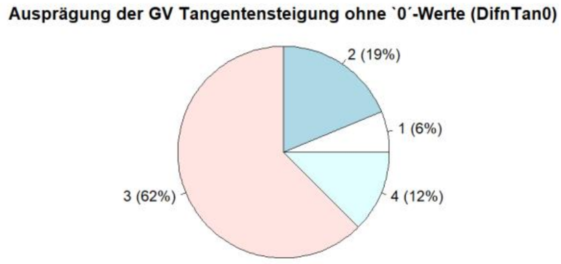

Abbildung 59: rel. Häufigkeit der Ausprägungen (DifnTan0)

Im Anschluss sind der Median, das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der vier Datensätze dargestellt: Tabelle 27.

Tabelle 27: Kennzahlen der DifnGV0

	Median	*Arithmetisches Mittel*	*Standardabweichung*
DifnÄnd0	2	1,7273	0,647
DifnTan0	2	2,8125	0,75
DifnLin0	-	-	-
DifnVer0	1	1	0

Shapiro-Wilk-Test

Die Variablen „Vorlesungsnote“ (p = 0,1679) und „Übungsnote“ (p = 0,1199) dieses Datensatzes sind normalverteilt. Um die Konsistenz zu wahren, wurde die Korrelation mit diesen Merkmalen trotz der Normalverteilung und der Intervallskalierung mit den Methoden nach Kendall und Spearman berechnet.

In keinem der Datensätze wurden Korrelationen zwischen Merkmalen und der Ausprägung festgestellt.

8.2.2.3. Auswertung der Maximalantworten

Der Datensatz „Maximum“ dient in diesem Kapitel als Datengrundlage.

Maximum (DifnMax)

Von den 59 Einträgen des Datensatzes sind 31 (52,54%) keiner Grundvorstellung zugeordnet. Wie beim Datensatz „Allgemein“ bzw „Allgemein0“ (vgl. Abschnitt 8.2.2.1) sind der Grundvorstellung lokale Änderungsrate elf (18,64%), der Grundvorstellung Tangentensteigung 16 (27,12%) und der Grundvorstellung Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen eine (1,69%) Antwort zugeordnet. Auch die Verteilung der Aussagen auf die Ausprägungen ist derer, in Abschnitt 8.2.2.1 beschriebenen, ähnlich. Die 31 keiner Grundvorstellung zugeordneten Antworten erhielten die Ausprägung 0, fünf (8,47%) die Ausprägung 1, neun (15,25%) die Ausprägung 2, zwölf (20,34%) die Ausprägung 3 und zwei (3,39%) die Ausprägung 4: Abbildung 60.

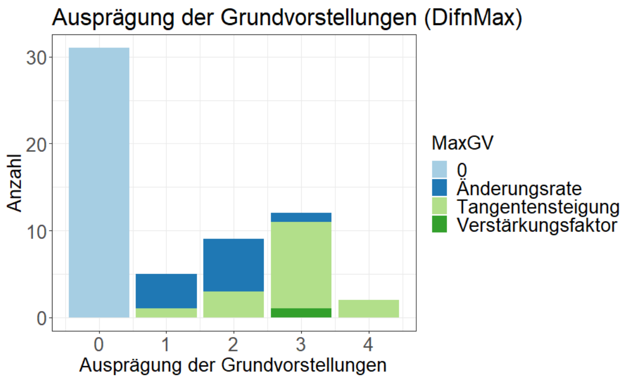

Abbildung 60: Verteilung der Ausprägungen nach GV (DifnMax)

Der Median dieses Datensatzes beträgt 0, das arithmetische Mittel 1,14 und die Standardabweichung 1,34.

Es wurden keine Korrelationen in diesem Datensatz entdeckt.

8.2.2.4. *Auswertung der Antworten, die nicht den GV zugeordnet werden konnten*

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Kategorien „Fehlvorstellung“, „Definition“, „Stetigkeit“, „Differenzierbarkeit“ und „Aussehen“ präsentiert.

Fehlvorstellungen (DifnFV)

Zu diesem Datensatz gehören neun Aussagen. Drei von diesen kommen mit Ausprägungen von Grundvorstellungen vor, zwei mit der lokalen Änderungsrate mit der Ausprägung 1 beziehungsweise 3 und eine mit der Grundvorstellung Tangentensteigung in Ausprägung 3.

Der Großteil der Antwortenden hatte bereits regelmäßige Nachhilfeerfahrung, keine/r hatte vor rein in der Oberstufe zu unterrichten, die meisten hatten sehr gute oder gute Noten in der Vorlesung oder Übung und acht hielten bereits in einer Klasse eine Unterrichtseinheit. Da zwei Personen keine Informationen zu Vorlesungs – bzw. Übungsnoten gegeben haben, sind zu diesen Merkmalen zwei Antworten weniger zu geordnet als zu den anderen dreien.

Merkmal	*Unterricht*				*Nachhilfe*		*Schulwunsch*			*Note VO*				*Note UE*			
Einteilung	0	1	2	3	0	1	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4
Anzahl	1	5	3	0	1	8	3	5	0	3	1	0	2	2	4	1	0

Definition (DifnDef)

Nur eine Aussage in den Antworten des zweiten Fragebogens fällt in diese Kategorie. Diese Antwort kommt gemeinsam mit der Ausprägung 2 der Grundvorstellung Änderungsrate vor. Diese Person hat eine Drei in der Vorlesungsnote und eine Vier als Übungsnote.

Stetigkeit (DifnSte)

Elf Antworten beinhalten die Aussage, dass die Funktion stetig ist. Drei dieser kommen in Kombination mit der Aussage, dass sie differenzierbar ist vor, drei mit einer ausgeprägten Grundvorstellung – Tangentensteigung der Ausprägung 1 oder 3 und Änderungsrate der Ausprägung 2 – und einmal mit beiden, wobei die Grundvorstellung ebenfalls die Tangentensteigung mit Ausprägung 3 ist. In den anderen Fällen tritt keine Zuordnung zu einer Grundvorstellung auf. Die beiden Antworten, die in Kombination mit der Grundvorstellung Tangentensteigung in Ausprägung 3 vorkommen, wie auch eine andere beinhalten auch eine Fehlvorstellung. Fast alle Personen, deren Antwort in diese Kategorie fallen, haben bereits mindestens eines der Praktika im Rahmen des Bachelors absolviert. Zusätzlich haben alle zuvor regelmäßig Nachhilfe gegeben. Die Übungsnote ist bei mindestens[140] neun eine Zwei oder Eins. Keine der Personen plante nur in einer BHS und /oder AHS-Oberstufe zu unterrichten.

Differenzierbarkeit (DifnDif)

25 Antworten beinhalten eine Aussage ähnlich der, dass eine differenzierbare Funktion differenzierbar ist. Sechs dieser kommen in Kombination mit einer Ausprägung der Grundvorstellung Tangentensteigung, zwei mit niedriger Ausprägung der Änderungsrate und drei mit einer Fehlvorstellung vor. Aus den Zuordnungen zu den Merkmalen kann keine eindeutige Tendenz abgelesen werden: Tabelle 28.

Tabelle 28: Merkmale der Differenzierbarkeit (DifnDif)

Merkmal	*Unterricht*				*Nachhilfe*		*Schulwunsch*			*Note VO*					*Note UE*			
Einteilung	0	1	2	3	0	1	1	2	3	1	2	3	3.5	4	1	2	2.5	4
Anzahl	4	8	12	1	9	16	5	17	2	4	3	6	1	4	10	6	1	3

Aufgrund fehlender Werte ist die Gesamtanzahl der zugeordneten Antworten zu den einzelnen Merkmalen unterschiedlich.

Aussehen (DifnAus)

In 18 Antworten wird das Aussehen des Graphen beschrieben – zweimal in Kombination mit der Grundvorstellung Tangentensteigung (Ausprägung 1 und 3) und zweimal mit der Grundvorstellung Änderungsrate (2 und 3). Zehn der Personen, deren Antworten in diese Kategorie fallen, haben bereits das Schulpraktikum abgeschlossen, fünfzehn gaben oder hatten regelmäßig Nachhilfe gegeben. Tendenziell gaben mehr Personen mit besseren Noten (sowohl in der Vorlesung wie auch der Übung) eine Aussage über das Aussehen des Graphen der Funktion als Studierende mit schlechteren Noten.

8.2.3. Vergleich der Fragebögen

Da in den Datensätzen des zweiten Fragebogens keine Korrelation zwischen der Ausprägung und einem Merkmal existiert, kann auch in diesem Fall keine Korrelation des ersten mit einer des zweiten verglichen werden. Daher werden erneut die Effektstärken mit Cohens d und Hedges g errechnet und die Ergebnisse anschließend mit denen des Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test verglichen.

Die Auswertung ergibt, dass in sieben Fällen eine Veränderung der Mittelwerte signifikant ist. Bei allen Datensätzen ergeben Cohens d und Hedges g eine gleich starke Effektstärke. „Allgemein“ und

[140] Der Ausdruck „mindestens“ wird hier verwendet, da nicht bei allen zugeordneten Fragebögen Aussagen zu den Übungs- bzw. Vorlesungsnoten gegeben wurden und daher die genaue Anzahl der Einser und Zweier nicht ermittelt werden kann.

„Änderungsrate“ besitzen mit einem d-Wert von 0,2691 beziehungsweise 0,2067 eine kleine Effektstärke. Zwei Datensätze besitzen eine mittlere Effektstärke: „Maximum“ (d = 0,6251) und „Tangentensteigung“ (d = 0,5253). Eine große Effektstärke kann bei „Allgemein0“, „Änderungsrate0“ und „Tangentensteigung0“ festgestellt werden. Da diese Datensätze keine „0“-Einträge haben, besitzen sie nur eine geringe Anzahl an Einträgen und deshalb wird Hedges g statt Cohens d angegeben: g_{All0} = -0,8022, $g_{\mathrm{Änd0}}$ = -2,3654 und g_{Tan0} = -1,1149.

Der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test unterstützt bei einem Signifikanzniveau von 0,1 alle oben angeführten Ergebnisse, bei einem Signifikanzniveau von 0,05 sind die Werte für „Allgemein0“ (p = 0,05007) und „Tangentensteigung0“ (p = 0,06899) knapp nicht signifikant und deshalb nicht farblich in Tabelle 29 markiert.

Bei den anderen fünf Datensatz-Paaren liegen signifikante Änderungen der Mittelwerte vor: „Allgemein“ – p = 0,0003021, „Maximum“ – p = 0,0001278, „Änderungsrate“ – p = 0,03494, „Änderungsrate0“ – p = 0,01342 und „Tangentensteigung“ – p = 0,001945.

Die arithmetischen Mittel der Datensätze entwickeln sich in die Richtung des Vorzeichens des d- bzw. g-Wertes. Somit zeigen alle schwachen und mittleren Ergebnisse Verbesserungen des Durchschnitts im zweiten Fragebogen auf, die starken eine Verschlechterung: Zusätzlich sind in Tabelle 29 Cohens d, Hedges g und der p-Wert des Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Tests angegeben.

Tabelle 29: $\bar{x}, x, d, \widetilde{g\ und}$ p im Vergleich (Differenzierbarkeit)

	All	*All0*	*Max*	*Änd*	*Änd0*	*Tan*	*Tan0*
1. $\bar{x}$	0,0932	3,1429	0,3729	0,1695	$3,\dot{3}$	0,1864	$3,\dot{6}$
2. $\bar{x}$	0,2839	2,3929	1,1356	0,322	$1,\overline{72}$	0,7627	2,1825
1. $\tilde{x}$	0	3	0	0	3	0	4
2. $\tilde{x}$	0	2.5	0	0	2	0	3
d	0,2691285	-0,821051	0,6250696	0,2066843	-2,526676	0,525256	-1,167205
g	0,2658974	-0,802248	0,6145732	0,2040025	-2,365399	0,5066701	-1,114942
p	0,0003021	0,05007	0,0001278	0,03494	0,01342	0,001945	0,06899

9. Interpretation und Diskussion

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Analyse im Hinblick auf die in Abschnitt 6 aufgestellten Hypothesen interpretiert und mit anderen Studienergebnissen verglichen.

9.1. Veränderungen zwischen den Fragebögen

Drei wesentliche Fragen, mit denen sich diese Arbeit beschäftigt, sind die nach der Veränderung der Anzahl der Grundvorstellungen, nach der Ausprägung dieser und der Anzahl der Fehlvorstellungen.

Vergleich der Anzahl der Grundvorstellungen zwischen ersten und zweiten Fragebogen

Wie Heiderich und Hussmann[141] beschreiben, führt die Ausbildung mehrerer Grundvorstellungen zu einem besseren Verständnis des Begriffs und zu weniger Fehlvorstellungen, weshalb nun die Anzahl der zu einer Antwort zugeordneten Grundvorstellungen betrachtet wird.

Der Großteil der Antworten zur Stetigkeit konnte – wie zu Beginn der Abschnitte 8.1.1. und 8.1.2. aufgelistet wurde – genau einer Grundvorstellung zugeordnet werden, ein paar zweien, keine allen dreien Grundvorstellungen.

Die Entwicklung der Verteilung ist vom ersten auf den zweiten Fragebogen positiv, da – wie in der nächsten Tabelle dargestellt – die Anzahl der Antworten, die keinen Grundvorstellungen zugeordnet wurden, um zwei gesunken ist und es im zweiten Fragebogen sechs Antworten mehr als im ersten gibt, die zwei Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten.

Tabelle 30: Anzahl der Zuordnungen zu Grundvorstellungen (Stetigkeit)

GV Stetigkeit	*keine*	*eine*	*zwei*	*drei*
Vorher	9	43	7	0
Nachher	7	39	13	0
Hanke & Schäfer	5	37	11	1

Dieses Resultat unterstützt das Ergebnis der Studie von Hanke und Schäfer[142], welches eine sehr ähnliche Verteilung der Antworten auf die Frage „What is the intuitive meaning of continuity from your point of view?“ aufweist. Die Ergebnisse können in der Tabelle 30 verglichen werden.

[141] (2013, 38)
[142] (2018, 6)

Die Kombination der Grundvorstellungen Darstellbarkeit und Vorhersagbarkeit kommt in keinem der beiden Fragebögen vor.
Im ersten Fragebogen gab es dreimal die Kombination aus Sprungfreiheit und Vorhersagbarkeit und viermal aus Sprungfreiheit und Darstellbarkeit. Im zweiten Fragebogen hingegen kommt die Sprungfreiheit am häufigsten mit der Vorhersagbarkeit (achtmal) vor und fünfmal mit der Darstellbarkeit.

Auch die Entwicklung der Antworten zur Differenzierbarkeit ist positiv. Wie zu Beginn der Abschnitte 8.2.1. und 8.2.2. beschrieben, gibt es jedoch keine Antworten, die zwei oder mehr Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten. Während vom ersten Fragebogen nur sieben Antworten zu einer Grundvorstellung passen, so sind es vom zweiten 28.

Aus diesen Ergebnissen kann geschlossen werden, dass im Allgemeinen die erste Hypothese H_1 (In den Antworten des Fragebogens 2 geben die Studierenden mehr verschiedene Grundvorstellungen an als im ersten Fragebogen.) bestätigt werden kann. Betrachtet man die Antworten zu den Konzepten separat, so trifft dies allerdings nur auf die zu der Stetigkeit zu, da die Antworten zur Differenzierbarkeit sowohl im ersten wie auch zweiten Fragebogen immer nur einer einzigen Grundvorstellung zugeordnet werden kann.

Vergleich der Ausprägungen der Grundvorstellungen zwischen ersten und zweiten Fragebogen

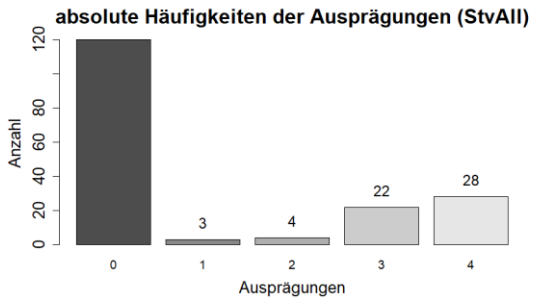

Abbildung 61: Ausprägungen der Grundvorstellungen (Stv)

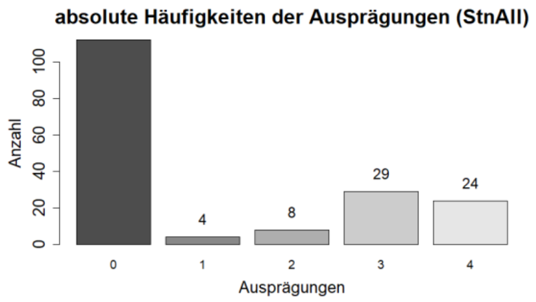

Abbildung 62:Ausprägungen der Grundvorstellungen (Stn)

Anhand der Abbildungen 61 und 62 und der arithmetischen Mittel von 1,07 im ersten Fragebogen und 1,15 im zweiten (vgl. Abschnitt 8.1.1.1. und 8.1.2.1.) kann erkannt werden, dass eine Verbesserung der Ausprägung der Grundvorstellung zur Stetigkeit vorliegt, diese ist jedoch nach Cohen und Hedge ($d = 0{,}0492, g = 0{,}0489$) vernachlässigbar wie auch nach Wilcoxon ($p = 0{,}5755$) nicht signifikant.

Das Resultat der Analyse der Maximalantworten zur Stetigkeit, welche in Abschnitt 8.1.1.3. und 8.1.2.3. dargestellt werden, deutet hingegen auf keine besondere Veränderung hin, da sich die arithmetischen Mittel der Datenmengen um nur 0,06 unterscheiden und die d-, g- und p-Werte nicht signifikant sind.

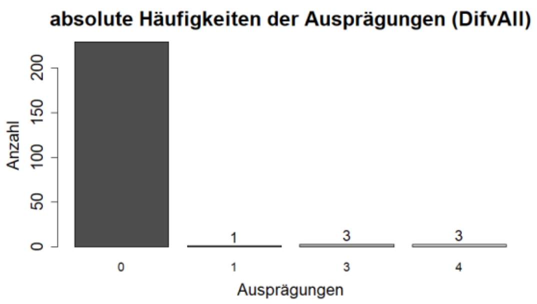

Abbildung 63: Ausprägungen der Grundvorstellungen (Difv)

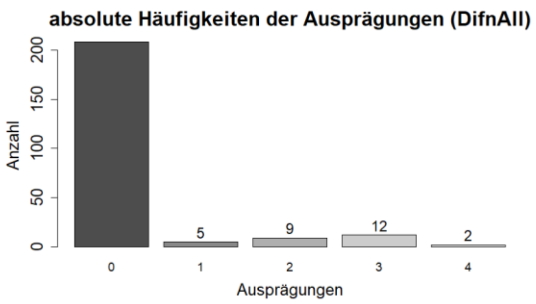

Abbildung 64: Ausprägungen der Grundvorstellungen (Difn)

Auch in den Antworten zur Differenzierbarkeit wurde in Abschnitt 8.2.3. bereits eine steigende Tendenz der Ausprägung entdeckt: Abbildungen 63 und 64. Diese scheint aufgrund der hohen Anzahl an „0"-Einträgen nicht hoch zu sein, ist jedoch durch die Veränderung der arithmetischen Mittel erkennbar: $\bar{x}_1$= 0,09, $\bar{x}_2$=0,28. Dieser Zusammenhang ergibt die Werte $d = 0{,}269$ und $g = 0{,}266$, wodurch es als kleiner Effekt eingeordnet werden kann, dieser ist mit einem p-Wert von 0,0003021 hochsignifikant.

Wie in Abschnitt 8.2.3. erkannt werden konnte, unterstützen die Ergebnisse der Maximalantworten ebenfalls diese Tendenz – das arithmetische Mittel erhöht sich von 0,37 auf 1,14, was nach Cohen ($d = 0{,}625$) und Hedges ($0{,}615$) einen mittleren Effekt bedeutet, welcher hochsignifikant ist ($p = 0{,}0001278$).

Diese Resultate bestätigen die Hypothese H_2 (Die Grundvorstellungen sind in den Antworten des zweiten Fragebogens stärker ausgeprägt als im ersten).

Vergleich der Fehlvorstellungen zwischen ersten und zweiten Fragebogen

Im zweiten Fragebogen zur Stetigkeit wurde sowohl der Kategorie „Fehlvorstellungen" wie auch der Kategorie „Differenzierbarkeit" eine Aussage weniger zugeordnet als im ersten (vgl. Abschnitt 8.1.1.4 und 8.1.2.4.). Nur zwei Teilnehmende haben sowohl im ersten wie auch im zweiten eine Fehlvorstellung. Die Antworten der einzelnen Personen sind jeweils sehr ähnlich, so dass vermutet werden kann, dass in der Zwischenzeit keine intensive Beschäftigung mit dem Begriff stattgefunden hat.

Im Falle der Differenzierbarkeit kann nicht von einer Verbesserung gesprochen werden, da im ersten Fragebogen acht Antworten der Kategorie „Fehlvorstellungen" angehören und zwei der sechs Einträge der „Stetigkeit" Fehlvorstellungen sind, wie in Abschnitt 8.2.1.4 dargestellt ist. Im zweiten Fragebogen hingegen sind neun Aussagen in der Kategorie „Fehlvorstellungen", welche in Abschnitt 8.2.2.4. näher beschrieben werden, und vier weitere aus der Kategorie „Stetigkeit" müssen dazugezählt werden, da dies die alleinige Antwort war. Daher sind im zweiten Fragebogen drei Fehlvorstellungen mehr entdeckt worden als im ersten.

Betrachtet man die Veränderungen der Fehlvorstellungen zur Stetigkeit und zur Differenzierbarkeit, so kann gesagt werden, dass die absolute Veränderung weder groß noch negativ ist, daher muss die dritte Hypothese H_3 (Die Anzahl der Fehlvorstellungen in den Antworten verringert sich vom ersten auf den zweiten Fragebogen.) verworfen werden.

Die Anzahl der Definitionen der Stetigkeit erhöht sich vom ersten auf den zweiten Fragebogen um sechs. In keinem der Fälle kann eine Fehlvorstellung festgestellt werden, wie in Abschnitt 8.1.1.4 und 8.1.2.4. nachgelesen werden kann. Die zusätzlichen Aussagen, die die Definition begleiten, sind ausschließlich mit Ausprägung 3 oder 4. Aus diesen Ergebnissen kann geschlossen werden, dass eine Definition nur in Zusammenhang mit gut ausgeprägten Grundvorstellungen auftritt.

Die Anzahl der Definitionen ist bei den Antworten zur Differenzierbarkeit niedriger als bei denen zur Stetigkeit, diese Antworten werden in Abschnitt 8.2.1.4. und 8.2.2.4. genauer beschrieben. Es gibt nur zwei Aussagen im ersten Fragebogen – sowohl zur Stetigkeit wie auch zur Differenzierbarkeit –, die dieser Kategorie zugeordnet werden. Im zweiten Fragebogen konnte nur eine Antwort zur Differenzierbarkeit der Kategorie *Definitionen* zugordnet werden, von den Antworten zur Stetigkeit hingegen acht.

Interessant ist die hohe Anzahl der Antworten zur Differenzierbarkeit, die der Kategorie „Aussehen des Funktionsgraphen“ zugeordnet werden – 14 des ersten Fragebogens und 18 des zweiten.

9.2. Stetigkeit

Grundvorstellungen in den Antworten des ersten Fragebogens

Wie bereits in Abschnitt 8.1.1.2. dargestellt, bestätigen die Ergebnisse, dass die Grundvorstellungen Sprungfreiheit und Darstellbarkeit verstärkt auftreten. Das kann auf den bereits beschriebenen Zugang zur Stetigkeit in der Schule zurückgeführt werden[143].

Tabelle 31: Ausprägung der einzelnen Grundvorstellungen zur Stetigkeit (erster Fragebogen)

GV Stetigkeit	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Σ*
Sprungfreiheit	33	1	2	10	13	26
Darstellbarkeit	31	1	2	9	15	27
Vorhersagbarkeit	56	0	0	3	0	3

[143] Büchter, A. & Henn, H. (2013, 134)

Aus Tabelle 31 kommt hervor, dass die Hypothese H_4 zur Stetigkeit (In den Antworten des Fragebogens 1 sind die Grundvorstellungen „Sprungfreiheit“ und „Darstellbarkeit“ präsenter als die „Vorhersagbarkeit“.) eindeutig bestätigt wird, da die Vorhersagbarkeit allgemein sehr schwach vertreten ist.

Grundvorstellungen in den Antworten des zweiten Fragebogens

In Fragebogen 2 hat sich die Verteilung stark verändert, wie die Graphiken in Abschnitt 8.1.2.2. zeigen.

Die Grundvorstellung „Sprungfreiheit“ ist am stärksten vertreten, danach folgt die „Vorhersagbarkeit“ und die schwächste dieser Erhebung ist die „Darstellbarkeit“, wie in Tabelle 32 abgelesen werden kann.

Tabelle 32: Ausprägung der einzelnen Grundvorstellungen zur Stetigkeit (zweiter Fragebogen)

GV Stetigkeit	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Σ*
Sprungfreiheit	24	1	6	19	9	35
Darstellbarkeit	47	1	0	1	10	12
Vorhersagbarkeit	41	2	2	9	5	18

Vergleich der Grundvorstellungen nach Fragebögen

Der Vergleich der Antworten der beiden Fragebögen zur Stetigkeit, welcher in Abschnitt 8.1.3. statistisch ausgearbeitet wurde, zeigt große Unterschiede zwischen der ersten und der zweiten Datenerhebung auf. Überblicksartig kann gesagt werden, dass zwei Grundvorstellungen während des Semesters verstärkt ausgeprägt wurden, eine sich jedoch bei einigen Studierenden zurückentwickelt hat. Die genauen Daten zu den Häufigkeiten des ersten Fragebogens können in Abschnitt 8.1.1.2 und die des zweiten in Abschnitt 8.1.2.2. gefunden werden.

So haben im zweiten Fragebogen statt 27 nur noch zwölf Personen eine Aussage getätigt, die der Darstellbarkeit zugeordnet werden konnte. Während jedoch in der ersten Erhebung nur ungefähr die Hälfte der Antworten korrekt ausgeprägt und formuliert waren, waren es in der zweiten zehn von zwölf.

Im ersten Fragebogen kommt die Sprungfreiheit seltener in den Aussagen vor als die Darstellbarkeit, im zweiten jedoch fast dreimal so oft, da nicht nur das Vorkommen der Darstellbarkeit gesunken, sondern auch das der Sprungfreiheit stark gestiegen ist. Obwohl in der zweiten Erhebung neun Antworten mehr zu der Grundvorstellung Sprungfreiheit zählen, ist die Anzahl der Aussagen mit Ausprägung 4 von 13 auf neun gesunken, die mit Ausprägung 3 hat sich von zehn auf 19 stark vergrößert.

Am wenigsten erwartet war die mittelstarke, signifikante Verbesserung der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit“ ($d = 0{,}6579787, g = 0{,}6330266,\ p = 0{,}0003374$). Während im ersten

Fragebogen dieser nur drei Aussagen zugeordnet sind, sind es im zweiten sechsmal so viel. Diese Zahlen verstärken die Vermutung, dass die Beschäftigung mit Grundvorstellungen und die Besprechung der Aussage „Ein kleines Wackeln von x_0 führt zu einem kleinen Wackeln von $f(x_0)$." in der Vorlesung[144] einen positiven Einfluss auf die ausgeprägten Grundvorstellungen zur Stetigkeit bei den Lehramtsstudierenden hat.

Diese Resultate bestätigen die zweite Hypothese H_5 zur Stetigkeit (Die Ausprägungen der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit" sind in den Antworten des Fragebogens 2 stärker als in denen des Fragebogens 1.).

9.3. Differenzierbarkeit

Grundvorstellungen in den Antworten des ersten Fragebogens

Die in Abschnitt 8.2.1.2. dargestellten Ergebnisse unterstützen Büchner und Henns[145] Feststellung, dass in der Schule die Ableitung hauptsächlich über „das innermathematische geometrisch-anschauliche Tangentenproblem" oder „die anwendungsbezogene Frage nach der lokalen Änderungsrate bei einem funktionalen Zusammenhang zwischen zwei Größen" eingeführt wird und sehr bald an den Regeln erarbeitet wird anstatt die Begriffsentwicklung zu fördern.

Diese dadurch entstandenen Grundvorstellungen sind jene, die in dieser Analyse am häufigsten auftreten. Sie kommen je dreimal mit hohen Ausprägungen vor, während von den anderen zwei Grundvorstellungen, welche in der Schule meist nicht gelehrt werden, nur eine, der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen, einmal mit der geringsten Ausprägung vorgefunden wird.

Die Hypothese H_6 (In den Antworten des ersten Fragebogens sind die Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate" und „Tangentensteigung" präsenter als die „lokale Linearität" und der „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen".) stellt sich somit als richtig heraus.

Grundvorstellungen in den Antworten des zweiten Fragebogens

Im Allgemeinen sind die Ausprägungen der Antworten der zweiten Erhebung stärker als die der ersten, wie Abschnitt 8.2.2.2. erkannt werden kann: Tabelle 33.

[144] Steinbauer, R. & Süss-Stepancik, E. (2019b, 115)
[145] (2013, 133f)

Tabelle 33: Ausprägung der einzelnen Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit (2. Fragebogen)

GV Differenzierbarkeit	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Σ*
Lokale Änderungsrate	48	4	6	1	0	11
Tangentensteigung	43	1	3	10	2	16
Lokale Linearität	59	0	0	0	0	0
Verstärkungsf. kl. Änd.	58	0	0	1	0	1

Die am stärksten ausgeprägte Grundvorstellung der Differenzierbarkeit im zweiten Fragebogen ist mit 16 Einträgen die Tangentensteigung, von denen zehn vorhanden und zwei klar ausgeprägt sind. Die lokale Änderungsrate besitzt elf zugeordnete Aussagen, von denen keine die stärkste Ausprägung erhalten hat. Der Großteil dieser sind entweder unspezifisch oder schwach ausgeprägt.

Vergleich der Grundvorstellungen nach Fragebögen

Die Anzahl der ausgeprägten Grundvorstellungen hat sich von der ersten Datenerhebung auf die zweite deutlich erhöht, wie die Daten in Abschnitt 8.2.1.2. und 8.2.2.2. zeigen. Diese haben sich jedoch nicht in allen Fällen verbessert, was mit statistischen Daten in Abschnitt 8.2.3. belegt werden konnte. Während die lokale Linearität gleichbleibend nicht auftritt, und die Aussage zum Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen sich verbessert hat, sind die Antworten zur lokalen Änderungsrate – werden die „0“-Werte nicht miteinbezogen – im Mittel schlechter geworden. Obwohl statt drei Aussagen vor der Vorlesung nach der Vorlesung elf in diese Kategorie eingeordnet werden können, gibt es keine mehr, die klar ausgeprägt ist und nur noch eine, die die Ausprägung 3 hat. Zehn der Antworten fallen in die erste und zweite Ausprägung, welche entweder eine unspezifische oder schwach ausgeprägte Grundvorstellung darstellt. Die Antworten zur Tangentensteigung haben sich vermehrt. Die Anzahl der Aussagen mit Ausprägung 1 ist gleichgeblieben, jedoch sind bei den anderen Ausprägungen 13 Antworten hinzugekommen.

Bingobali und Monaghan[146] führten eine Studie durch, bei der sie die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit bei Mathematikstudierenden und Studierenden des Studienganges Maschinenbau (mechanical engineering) untersuchten. Interessant ist, dass je nach Studiengang die am häufigsten ausgeprägte Grundvorstellung eine andere ist. Eine ähnliche eindeutige Zuordnung zu einer Grundvorstellung kann bei den Mathematik-Lehramtsstudierenden nicht erkannt werden. Eine Zuordnung nach den Ausprägungen hingegen wäre eindeutig zu der Grundvorstellung Tangentensteigung, welche auch jene ist, die die Mathematikstudierenden bei Bingobali und Monaghan am häufigsten ausgeprägt haben.

[146] (2008, 2 & 29f)

Die Hypothese H_7 (Die Ausprägungen der Grundvorstellungen „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ sind in den Antworten des zweiten Fragebogens stärker ausgeprägt als in denen des ersten.) hat sich teilweise bewahrheitet.

Im Falle der Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ hat sich die Ausprägung des einen Eintrages von Ausprägung 1 auf 3 erhöht, weshalb dieser Teil der Hypothese stimmt. Bezogen auf die Grundvorstellung „lokale Linearität“ jedoch gibt es keine Änderungen, da es weder im ersten noch im zweiten Fragebogen Einträge gibt.

Um diesem Mangel entgegenzuwirken schlagen Eberle und Lewintan[147] vor, die lokale Linearität durch eine Einführung der Ableitung mit der „Zoom-in-Methode“ zu erarbeiten. Sehr viele Schulen haben mittlerweile die Möglichkeit mit mathematischen Graphikprogrammen zu arbeiten, in denen Graphen von Funktionen dargestellt werden können. Mit deren Hilfe kann auf „natürlichem Weg“ durch die Vergrößerung mittels der Lupenfunktion die lokale Linearität präsentiert werden.

9.4. Einfluss der Merkmale auf die Ausprägungen

In diesem Abschnitt werden die Zusammenhänge zwischen den individuellen Merkmalen und der Ausprägung besprochen, welche in Abschnitt 8 jeweils in Zusammenhang mit den Grundvorstellungen dargestellt wurden.

Universitäre Leistung: Vorlesungs- und Übungsnote

Insgesamt konnten sechs Korrelationen zu universitären Leistungen in unterschiedlichen Datensätzen analysiert werden: fünf zu Datensätzen der Stetigkeit und eine zu einem Datensatz der Differenzierbarkeit.
Sehr häufig gibt es einen Zusammenhang der Ausprägung mit der Übungsnote der Fachvorlesung der Studierenden. Dieser kann sowohl bei dem „Allgemein0“-, dem „Darstellbarkeit0“- und dem „Maximum“-Datensatz der Stetigkeit des ersten Fragebogens betrachtet werden, wie in Abschnitt 8.1.1 dargestellt ist. Im zweiten Fragebogen existiert eine Korrelation zwischen der Übungsnote und der Sprungfreiheit mit „0“- Einträgen, welche in Abschnitt 8.1.2.2 ausgearbeitet ist.

Auffallend ist, dass der Zusammenhang der Übungsnote zu den Ausprägungen im ersten Fragebogen bedeutet, dass die Ausprägungen der Grundvorstellungen bei denen stärker sind, die schlechtere Übungsnoten haben.
Im Gegensatz dazu konnte ein Zusammenhang der Übungsnote mit einem Datensatz festgestellt werden, bei dem die Ausprägung bei den Studierenden höher ist, die bessere Übungsnoten besitzen. Dieser

[147] (2019, 1f)

Datensatz ist der zur Sprungfreiheit mit „0“-Einträgen zur Stetigkeit im zweiten Fragebogen (siehe Abschnitt 8.1.2.2). Diese Korrelation kann näherungsweise durch folgende Gerade beschrieben werden: Abbildung 65.

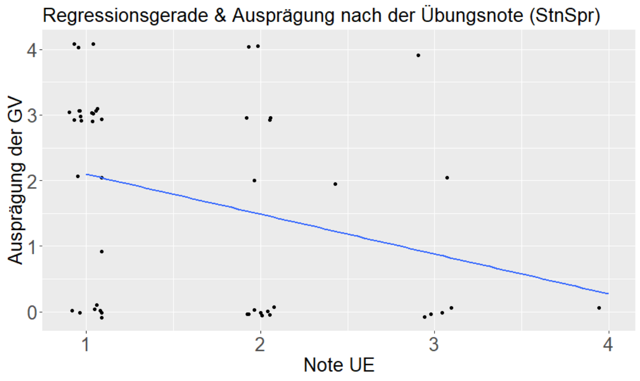

Abbildung 65: Korrelation: Übungsnote - StnSpr

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich die Übungsnote nur auf Ausprägungen zur Stetigkeit auswirkt, im ersten Fragebogen gegenläufig, im zweiten gleichläufig zu der Leistung.

Die Vorlesungsnote korreliert mit nur zwei Datensätzen, einem zur Stetigkeit und einem zur Differenzierbarkeit.

Durch den Zusammenhang mit dem Datensatz „Darstellbarkeit“ des zweiten Fragebogens kann erkannt werden, dass stärkere Ausprägungen der Grundvorstellung zur Stetigkeit tendenziell mit schlechteren Noten auftreten, wie in Abschnitt 8.1.2.2 dargestellt ist.

Der Zusammenhang zwischen der Vorlesungsnote und der Änderungsrate zur Differenzierbarkeit im ersten Fragebogen, welcher in Abschnitt 8.2.1.2 genauer beschrieben ist, deutet auf die Tendenz hin, dass bessere Noten eher zu einer Ausprägung dieser Grundvorstellung führen. Dieses Ergebnis ist jedoch aufgrund der geringen Anzahl der Antworten, die einer Ausprägung zugeordnet sind, nicht besonders aussagekräftig: Abbildung 66.

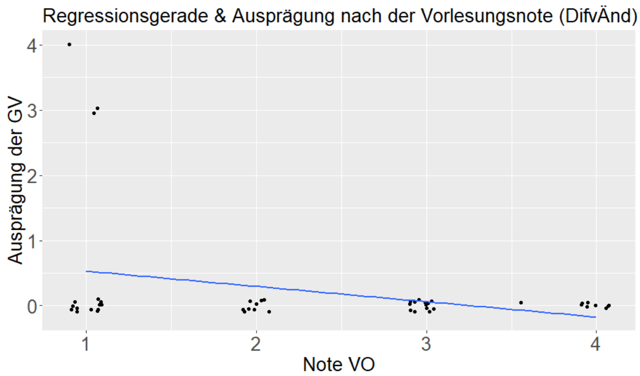

Abbildung 66: Korrelation: Vorlesungsnote - DifvÄnd

Zusammenfassend muss geschlossen werden, dass weder die Vorlesungsnote noch die Übungsnote einen eindeutigen positiven oder negativen Zusammenhang zu der Ausprägung bestimmter Grundvorstellungen besitzt.

Um Aussagen über die Hypothese H_8 (Studierende mit besseren Noten weisen stärkere Ausprägungen und mehrere Arten von Grundvorstellungen auf als Studierende mit schlechteren Noten) treffen zu können, muss noch betrachtet werden, ob die Noten einen Einfluss auf die Anzahl der ausgeprägten Grundvorstellungen besitzen. Dies betrifft nur die Daten der Stetigkeit, da zur Differenzierbarkeit keine Aussage mehr als einer Grundvorstellung zugeordnet wurde. Die Aufteilung der Noten auf die Aussagen, die zwei Grundvorstellungen der Stetigkeit zugeordnet wurden, ist in Tabelle 34 dargestellt.

Tabelle 34: Verteilung der Noten bei Personen mit Antworten zu zwei Grundvorstellungen

Noten[148]	*1*	*2*	*3*	*4*
Vorlesung	5	1	3.5	3.5
Übung	8	3.5	3.5	0

Die Untersuchung dieser Daten mit dem Shapiro-Wilk-Test ergibt, dass weder die Antworten zu den Vorlesungsnoten ($p = 0{,}0001531$) noch zu den Übungsnoten ($p = 5{,}071 \cdot 10^{-6}$) gleichverteilt sind. Daher ist die Anzahl der Grundvorstellungen nicht unabhängig von den Noten der Lehrveranstaltungen, allerdings ist keine signifikante Tendenz erkennbar, weshalb die Hypothese H_8 weder verifizierbar noch falsifizierbar ist.

Lehrerfahrung: Nachhilfe und Unterrichtserfahrung

Während im Abschnitt 8.1.2.2 die Auswirkung der Unterrichtserfahrung auf die Grundvorstellung Vorhersagbarkeit im zweiten Fragebogen zur Stetigkeit erkannt werden kann, können in Abschnitt 8.1.1.2 Zusammenhänge der Nachhilfeerfahrung mit Datensätzen des ersten Fragebogens festgestellt werden.

So hat die Nachhilfe einen positiven Zusammenhang mit der Ausprägung der Grundvorstellung Sprungfreiheit ohne „0“-Einträge. Zu Datensätzen der Differenzierbarkeit existieren nur negative Zusammenhänge, das bedeutet die Ausprägungen sind tendenziell bei den Antworten der Personen geringer, die bereits Nachhilfeerfahrung besitzen. Dies trifft auf die Datensätze „Allgemein“, „Tangentensteigung“ und „Maximum“ der Differenzierbarkeit des ersten Fragebogens zu, was in Abschnitt 8.2.1 nachgelesen werden kann.

[148] Die Werte „3.5“ sind durch die Antworten „3-4“ bei der Vorlesungsnote und „2-3“ bei der Übungsnote an einem Fragebogen entstanden. Diese Antworten wurde zur Hälfte der einen Note und zur anderen Hälfte der zweiten zugordnet.

Auch der Zusammenhang des Datensatzes „Vorhersagbarkeit“ zur Stetigkeit der zweiten Datenerhebung mit der Unterrichtserfahrung ist ein negativer, wie in Abschnitt 8.1.2.2 dargestellt ist.

Durch den Vergleich der Abschnitte 8.1.1 und 8.1.2 konnte festgestellt werden, dass keiner der Datensätze sowohl im ersten Fragebogen als auch im zweiten einen Zusammenhang mit entweder der Nachhilfe oder der Unterrichtserfahrung besitzt. Daher gibt es keine bestimmte Grundvorstellung die einen Zusammenhang mit der Lehrerfahrung aufweist.

Auffallend ist der in Abschnitt 8.2.1 entdeckte negative Zusammenhang der Nachhilfe mit drei Datensätzen zur Differenzierbarkeit der ersten Erhebung, dieser kann auf die geringe Anzahl der Antworten, die eine Ausprägung erhalten haben, zurückgeführt werden, da von den sieben Personen vier keine regelmäßige Nachhilfe gegeben haben.

So kann zur Hypothese H_9 (Die Unterrichtserfahrung der Studierenden hat keine signifikante Auswirkung auf die Art und Ausprägung der Grundvorstellungen.) gesagt werden, dass es abgesehen von dem Zusammenhang der Nachhilfe mit den oben genannten Datensätzen zur Differenzierbarkeit des ersten Fragebogens keinen signifikanten Einfluss der Lehrerfahrung auf die Ausprägung der Grundvorstellungen gibt.

Schulwunsch

Der Schulwunsch korreliert nur mit zwei Datensätzen zur Stetigkeit und keinem zur Differenzierbarkeit.

In den Abschnitten 8.1.1.2 bzw. 8.1.2.2 werden diese Datensätze, von denen einer aus dem ersten und der andere aus dem zweiten Fragebogen stammt, behandelt. In der ersten Datenerhebung besteht ein Zusammenhang zwischen der Darstellbarkeit und in der zweiten ein Zusammenhang zwischen der Vorhersagbarkeit ohne „0“-Einträge und dem Schulwunsch. Beide Korrelationen sind negativ. Das bedeutet, dass die Ausprägung der beiden Grundvorstellungen bei Studierenden, die den Wunsch hegen in einer Unterstufe zu unterrichten, stärker sind als bei jenen, die in einer Oberstufe unterrichten wollen. Der Zusammenhang zwischen der Darstellbarkeit und dem Schulwunsch kann näherungsweise wie folgt dargestellt werden: Abbildung 67.

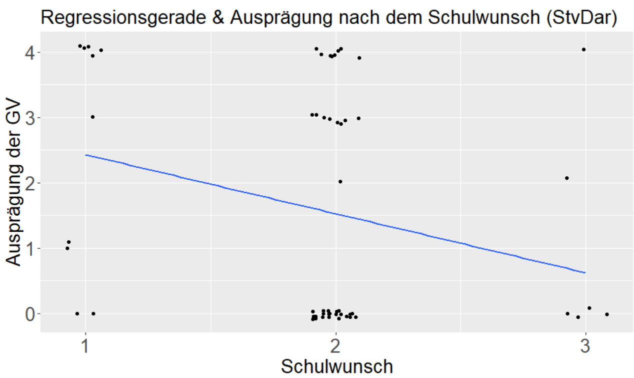

Abbildung 67: Korrelation: Schulwunsch - StvDar

Von den Studierenden, deren Antworten mehreren Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten, gab der Großteil an, sowohl in einer Unter- als auch Oberstufe unterrichten zu wollen. Zwei der Studierenden wollen nur in einer Unterstufe arbeiten, drei nur in einer Oberstufe. Daraus resultiert, dass von den Teilnehmenden, bei denen mehr Arten von Grundvorstellungen nachgewiesen werden können, minimal mehr in einer AHS-Oberstufe oder BHS arbeiten wollen als in einer AHS-Unterstufe oder NMS.

Daher ist die Hypothese H_{10} (Bei Studierenden mit dem Wunsch, in einer Oberstufe zu unterrichten, können stärkere Ausprägungen und mehr Arten von Grundvorstellungen nachgewiesen werden als bei jenen, die in einer Unterstufe unterrichten wollen.) die Anzahl der Arten von Grundvorstellungen betreffend bestätigt, da minimal mehr Arten von Grundvorstellungen im zweiten Fragebogen als im ersten erkannt werden konnten, – die Ausprägung betreffend jedoch zu verwerfen.

10. Limitationen

Die Ergebnisse dieser Studie können nicht als allgemein gültig angesehen werden, da nur eine geringe Anzahl an Mathematik-Lehramtsstudierenden an dieser Untersuchung teilgenommen haben.
Diese studierten alle an derselben Universität und besuchten alle die Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ im Wintersemester 2018/19. Um eine allgemeinere Aussage über die Veränderung der Grundvorstellungen durch die Beschäftigung mit diesen treffen zu können, müsste diese Erhebung in mehreren Jahren und an verschiedenen Universitäten durchgeführt werden.

Zusätzlich wurde in dieser Studie die Ergebnisse mit den Vorlesungs- und Übungsnoten zum Modul „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ verglichen. Jedoch ist es wahrscheinlich, dass die Studierenden die Vorlesung und die Übung bei unterschiedlichen ProfessorInnen besucht haben, wodurch möglicherweise die Gleichwertigkeit der Notengrade nicht gegeben ist. Der Bezug auf dieselbe Lehrveranstaltung müsste erhoben und ausgewertet werden.

Weiters sind auch die Ergebnisse, welche auf die Nachhilfe bezogen sind, kritisch zu betrachten, da jeder und jede Teilnehmende die Frage nach der regelmäßigen Nachhilfe individuell interpretieren konnte. So gab möglicherweise einer / eine, die ein Jahr lang monatlich eine Einheit unterrichtet hatte, dieselbe Antwort wie jemand, der / die jahrelang jede Woche mehrere Einheiten lehrte. Nicht nur die Intensität, sondern auch die Schulstufe, für welche Nachhilfe gegeben wurde, wäre für die Aufgabenstellung der Studie interessant gewesen, da sowohl die Stetigkeit als auch die Differenzierbarkeit in der Unterstufe keinen Platz hat.

Die hohe Anzahl der Fragen auf den Fragebögen hat dazu geführt, dass die Studierenden die einzelnen Antworten eher schnell beantwortet haben. Dadurch konnte diese Studie die Grundvorstellung, die ihnen als erstes einfällt und somit vermutlich die am stärksten ausgeprägteste ist, erheben. Jedoch kann nicht viel über die anderen, nicht erwähnten Grundvorstellungen ausgesagt werden, da diese möglicherweise ebenfalls ausgeprägt sind, aber aufgrund der geringen Zeit nicht auf diese eingegangen wurde.

Um sicher zu stellen, dass alle Teilnehmenden sich in der Zeit zwischen den Datenerhebungen mit der Theorie der Grundvorstellungen beschäftigt haben, müsste der Fragebogen nach der zur Vorlesung gehörenden Prüfung ausgefüllt werden, da Studierende in der letzten Einheit einer Vorlesung nicht notwendigerweise alle bereits für den ersten Prüfungstermin gelernt haben.

11. Conclusio und Ausblick

Diese Studie zeigt die positive Veränderung der Anzahl und der Ausprägungen der Grundvorstellungen zu den Begriffen Stetigkeit und Analysis von der ersten auf die zweite Datenerhebung auf. Sie bestätigt die Vermutung, dass die theoretische Beschäftigung mit Grundvorstellungen im Allgemeinen und den Grundvorstellungen zu bestimmten Begriffen die Ausbildung dieser positiv beeinflusst. Zwar haben sich nur zwei der vier Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit verbessert, die Ergebnisse zur Stetigkeit zeigen jedoch einen stärkeren positiven Unterschied. So haben sich die Anzahl der Grundvorstellungen als auch die Mehrfachnennungen und die Ausprägungen der Grundvorstellungen zur Stetigkeit im zweiten Fragebogen erhöht.

Die Grundvorstellung Sprungfreiheit des Graphen zur Stetigkeit ist sowohl vor als auch nach der theoretischen Beschäftigung mit den Grundvorstellungen hoch. Die Anzahl der anderen zwei verändert sich hingegen stark. Während die Grundvorstellung Darstellbarkeit in der ersten Datenerhebung sehr stark vertreten ist, ist sie in der zweiten die, die am wenigsten vertreten ist. Die Grundvorstellung Vorhersagbarkeit ist in der ersten Datenerhebung kaum vertreten, in der zweiten hingegen häufig und kann auch starke Ausprägungen vorweisen.
Die Ergebnisse zu den Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit verdeutlichen, dass die Grundvorstellungen Tangentensteigung und Lokale Änderungsrate die präsenten Grundvorstellungen sind. Diese kommen auch im zweiten Fragebogen öfter vor als im ersten und die Ausprägungen der Tangentensteigung verbessern sich stark. Die anderen zwei Grundvorstellungen treten hingegen fast nicht auf. Die Grundvorstellung Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen hat sowohl in der ersten wie auch in der zweiten Datenerhebung einen Eintrag, der sich von Ausprägung 1 auf 3 verbessert. Die Grundvorstellung Lokale Linearität wird in keinem der beiden Fragebögen angesprochen.

Die Korrelationsanalyse gibt vereinzelt Zusammenhänge der Ausprägungen von Grundvorstellungen zu individuellen Merkmalen wie universitäre Leistung, Lehrerfahrung und Schulwunsch an. Diese Zusammenhänge lassen sich jedoch nicht vor und nach der Vorlesung auffinden, weshalb auf keine Korrelation zwischen einem Merkmal und einer bestimmten Grundvorstellung geschlossen werden kann.

In der weiteren Beschäftigung mit dieser Thematik wäre es interessant diese Erhebung in weiteren Semestern und in unterschiedlichen Instituten durchzuführen, um Vergleiche anstellen zu können. Auch könnte diese Studie über einen größeren Zeitraum erfolgen, sodass die Veränderungen der Grundvorstellungen einer Gruppe von Beginn des Studiums bis zum Ende beobachtet werden könnte. Weiters könnten die ausgeprägten Grundvorstellungen im Zusammenhang mit der präferierten Definition der Begriffe verglichen werden oder erhoben werden, ob stetige und differenzierbare Funktionen anhand von Graphiken oder Funktionsgleichungen erkannt werden können. Auch interessant wäre, ob die Grundvorstellungen einen Zusammenhang mit der Fähigkeit der Studierenden, Stetigkeit an einem Punkt berechnen und differenzieren zu können, besitzen.

Verzeichnisse

Literaturverzeichnis

Abel, N.H. (1826): Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m*(m-1)}{1*2}x^2+\frac{m*(m-1)*(m-2)}{1*2*3}x^3+\cdots$usw. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Band 1826. Heft 1 (S. 311-339). online: https://doi-org.uaccess.univie.ac.at/10.1515/crll.1826.1.311 (zuletzt abgerufen am 31.08.2020)

Arend, S. (2017): Verständnisorientierter Umgang von Mathematikstudierenden mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit. Perspektiven und Analysen. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien

Aue, V. et al. (2019): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. online abzurufen unter: https://www.matura.gv.at/downloads/download/die-standardisierte-schriftliche-reifepruefung-in-mathematik-inhaltliche-und-organisatorische-grundlagen-zur-sicherung-mathematischer-grundkompetenzen (zuletzt abgerufen am 03.09.2020)

Bamberg, G., Baur, F. & Krapp, M. (2012): Statistik (17. überarbeitete Auflage). München: Oldenbourg Verlag

Becker, B. (1993): Statistik. München: R. Oldenbourg

Behr, A. & Pötter, U. (2011): Einführung in die Statistik mit R (2. Aufl.). München: Verlag Franz Vahlen

Bezuidenhout, J. (2001): Limits and continuity: some conceptions of first-year students. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32-4 (S.487-500). online: DOI: 10.1080/00207390010022590 (zuletzt abgerufen am 04.09.2020)

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008): Concept image revisited. *Educ Stud Math* 68 (S. 19-35). online: doi:10.1007/s10649-007-9112-2 (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Binmore, K.G. (1977): Mathematical Analysis. A straightforward Approach. Cambridge University Press

Böselt, M. (1992): Statistik. München: R. Oldenbourg Verlag

Büchter, A. & Henn, H. (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Büchter, A. & Henn, H. (2013): Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung und Reflexion des Ableitungsbegriffs. In: Allmendinger, H., et al. (Hrsg.): *Mathematik verständlich* *unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S.133-146). Wiesbaden: Springer Spektrum

Bumberger, G. (1993): Zum Begriff der Stetigkeit. Eine historische Betrachtung mit Schwerpunkt 19. Jahrhundert. Diplomarbeit an der Universität Wien

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019): Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern. Gültig ab den Matura-Prüfungsterminen 2017/2018. online abrufbar unter: https://www.matura.gv.at/downloads/download/kompetenz-und-begriffekataloge-fuer-angewandte-mathematik-gueltig-ab-den-matura-pruefungsterminen-2017-2018 (zuletzt abgerufen am 03.09.2020)

Cohen, J. (1969): Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences. New York: Academic Press

Cornu, B. (2002): Limits. In: Tall, D.: *Advanced Mathematical Thinking*. New York/Boston/Dordrecht/ London/Moscow: Kluwer Academic Publishers

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Dirichlet, G.L. (1837): Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Cambridge University Press: online: https://doi-org.uaccess.univie.ac.at/10.1017/CBO9781139237338.011 (zuletzt abgerufen am 31.08.2020)

Eberle, S. & Lewintan, P. (2019): Ein Vorschlag zur konsistenten Einführung der Ableitung mit der Zoom-in-Methode. online: https://doi.org/10.1007/s00591-019-00250-7 (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Götze, D. & Selter, C. (2013): Die Grundschulprojekte Kira und PIK AS – Konzeptionelles und Beispiele. In: Allmendinger, H., et al.: *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S.169-188). Wiesbaden: Springer Spektrum

Greefrath, G., et al (2014): Aspects and „Grundvorstellungen" of the Concepts of Derivate and Integral. Subject Matter-related Didactical Perspectives of Concept Formation. *J Math Didakt* 37 (S.99-129). online: DOI 10.1007/s13138-016-0100-x (zuletzt abgerufen am 02.09.2020)

Greefrath, G., et al. (2016): Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Verlag

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019): Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. In: *J Math Didakt* 40 (S.123-133). online: https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4 (zuletzt abgerufen am 02.09.2020)

Hammann, M. & Jördens, J. (2014): Offene Aufgaben codieren. In: Krüger, D., Parchmann, I. & Schecker, H.: *Methoden in der naturwissenschaftlichen Forschung* (S. 169-178). Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag

Hanke, E. & Schäfer, I. (2017): Students´ view of continuity: An empirical analysis of mental images and their usage. online: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01941355 (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Hatzinger, R., Hornik, K. & Nagel, H. (2011): R – Einführung durch angewandte Statistik. München: Pearson Studium

Heiderich, S. & Hussmann, S. (2013): „Linear, proportional, antiproportional… wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In: Allmendinger, H., et al. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 27-46). Wiesbaden: Springer Spektrum

Hölzl, R. (2013): Mathematisches Fachwissen für angehende Lehrpersonen der Sekundarstufe 1 – in welchem Umfang erwerben, auf welche Art? In: Allmendinger, H., et al. (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S.189-200). Wiesbaden: Springer Spektrum

Kleine, M., Jordan, A. & Harvey, E. (2005): With a focus on `Grundvorstellungen‘ Part 1: a theoretical integration into current concepts. In: *ZDM.* 37-3 (S.226-233). online: https://doi-org.uaccess.univie.ac.at/10.1007/s11858-005-0013-5 (zuletzt abgerufen am 02.09.2020)

Moore, R. (1994): Making the transition to formal proof. In: *Educational Studies in Mathematics.* 27-3 (S.249-266). online: https://doi-org.uaccess.univie.ac.at/10.1007/BF01273731 (zuletzt abgerufen am 02.09.2020)

RIS (2020): Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 08.11.2020. Anlage A. Sechster Teil. Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände. A. Pflichtgegenstände. 2. Oberstufe. Mathematik. online: https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 (zuletzt abgerufen am 08.11.2020)

Rönz, B. & Förster, E. (1992): Regressions- und Korrelationsanalyse. Grundlagen – Methoden – Beispiele. Wiesbaden: Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler

Schäfer, I. (2011): Vorstellung von Mathematiklehramtsstudieren zur Stetigkeit. In: Haug, R. (Hrsg.): *Tagung für Didaktik der Mathematik* 45. online: http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-7933 (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Schecker, H. (2014): Überprüfung der Konsistenz von Itemgruppen mit Cronbachs α. In: Krüger, D., Parchmann, I. & Schecker, H. (Online-Zusatzmaterial). online: https://www.researchgate.net/publi cation/313220515_Uberprufung_der_Konsistenz_von_Itemgruppen_mit_Cronbachs_alpha (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Sichel, E. (2015): Concepts of continuity in calculus: A look at how Algebra 1 and Algebra 2 shape students´ understanding of continuity. Columbia: ProQuest LLC

Spiegel, M.R. (1990): Statistik. 975 ausführliche Lösungsbeispiele. (2. neu bearbeitete Auflage.) Hamburg: McGraw-Hill Book Company

Springnagel, P. (2000): Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten. Eine empirische Untersuchung. Diplomarbeit an der Universität Wien

Steinbauer, R. & Süss-Stepancik, E. (2019a): aspekte_grundvorstellungen_diffrechnung20190124. online: https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/sma.html (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Steinbauer, R., & Süss-Stepancik, E. (2019b): Schulmathematik Analysis. Wintersemester 2018/19. 14. Februar 2019. online: https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/sma.html (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Takači, D., Pešić, D. & Tatar, J. (2006): On the continuity of functions, In*: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 37-7 (S.783-791). online: DOI: 10.1080/00207390600723619 (zuletzt abgerufen am 04.09.2020)

Tall, D. (2009): Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. In: *ZDM Mathematics Education* 41 (S.481-492). online: DOI 10.1007/s11858-009-0192-6 (zuletzt abgerufen am 31.08.2020)

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12 (S.151-169). online: https://link-springer-com.uaccess.univie.ac.at/article/10.1007/BF00305619 (zuletzt abgerufen am 31.08.2020)

Thiele, R. (1999): Antike. In: Jahnke, H.N. (Hrsg.): *Geschichte der Analysis* (S.5-36). Heidelberg und Berlin: Spektrum

Vela, M. (2011): A snapshot of advanced high school students´ understanding of continuity. Texas: ProQuest LLC

Vollrath, H. & Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag

Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016): „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *J Math Didakt* – Anhang 1 (S. 225-254). online: DOI 10.1007/s13138-016-0107-3 (zuletzt abgerufen am 02.09.2020)

Weber, C. (2013): Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In: Allmendinger, H., et al. (Hrsg.): *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S.79-98). Wiesbaden: Springer Spektrum

Wilcoxon, F. (1945): Individual Comparisons by Ranking Methods. In: *Biometrics Bulletin*, Vol. 1, No. 6. (S.80-83). online: http://links.jstor.org/sici?sici=0099-4987%28194512%291%3A6%3C80%3AICBRM%3E2.0.CO%3B2-P (zuletzt abgerufen am 28.08.2020)

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang

Anhang 1 – Fragebogen

Fragebogen 1A

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern. Daher ersuchen wir Sie, den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Auswertung erfolgt *ausschließlich anonym!*

Wir möchten diese Befragung am Ende des Wintersemesters in dieser Lehrveranstaltung wiederholen (Fragebogen 1B) und die Ergebnisse abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen mit einem Code zu versehen. Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!

Der persönliche Code setzt sich aus folgenden sechs Zeichen zusammen:

(a) Bitte geben Sie die ersten zwei Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter an.

(b) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern des Geburtstags Ihrer Mutter an (Bitte zweistellig als z.B. „05“ für „5“).

(c) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern Ihres eigenen Geburtstags an.

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtstag: erste zwei Ziffern	
Code						

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...

BELLA Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis 2

3. Die *Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ ist wichtig, weil ...

4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor ...

5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...

6. Ein *unbestimmtes* Integral ist ...

7. Ein *bestimmtes* Integral ist ...

8. Welches Bild verbinden Sie mit dem *Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?*

9. In der *Analysis* geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

Fragebogen 1B

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Wir möchten diese Befragung mit der identischen zu Beginn des Wintersemesters durchgeführten Befragung (Fragebogen 1A) abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen wieder mit demselben Code zu versehen. *Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!*

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtstag: erste zwei Ziffern	
Code						

Die Fragen sind fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1B: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor …

2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor …

3. Die *Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ ist wichtig, weil …

4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor …

BELLA Fragebogen 1B: Vorstellungen zur Analysis 2

5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...

6. Ein *unbestimmtes* Integral ist ...

7. Ein *bestimmtes* Integral ist ...

8. Welches Bild verbinden Sie mit dem *Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?*

9. In der *Analysis* geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

10. Ich habe selbst schon in der Schule Mathematik unterrichtet: □ Ja □ Nein
    Wenn ja, wo und in welchem Rahmen
    □ Orientierungspraktikum (PÄP) □ Schulpraxis (FAP)
    □ Sondervertragslehrer/in

11. Ich gebe/gab regelmäßig Mathematik-Nachhilfe: □ Ja □ Nein

12. Ich plane in der □ NMS □ AHS-Unterstufe □ AHS-Oberstufe
    □ BHMS zu unterrichten (Mehrfachnennungen möglich).

13. Ich habe die „Analysis in einer Variable für das LA“ oder eine entsprechende andere Analysis-LVA positiv absolviert:
    Vorlesung □ Ja Note .... □ Nein
    Übungen □ Ja Note .... □ Nein

Anhang 2 - Shapiro-Wilk-Test

Stetigkeitvorher

Stv - GV	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,79709	0,49759	0,71299	0,84864	0,76608
p-Wert	1,371e-07	8,548e-13	2,43e-09	2,834e-05	2,985e-07

Punkte	*StvSpr*	*StvDar*	*StvVor*
W-Wert	0,72112	0,70971	0,22924
p-Wert	2,853e-09	1,695e-09	5,538e-16

StvSpr0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,75942	0,786886	0,43581	0,62434	0,81758	0,76872
p-Wert	3,873e-05	0,0001061	6,032e-09	8,145e-07	0,001234	0,0003059

StvDar0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,73664	0,78925	0,57562	0,74759	0,87837	0,76569
p-Wert	9,815e-06	6,939e-05	1,084e-07	1,447e-05	0,009302	6,412e-05

StvVor0[149]	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	-	1	-	0,75	0,75	075
p-Wert	-	1	-	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 22e-16

StvMax	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,73085	0,79709	0,49759	0,69995	0,84864	0,76608
p-Wert	4,496e-09	1,371e-07	8,548e-13	1,362e-09	2,834e-05	2,985e-07

[149] Dieser Datensatz besteht nur aus drei gleichen Eintragungen. Da „Punkte" und „Nachhilfe" aus gleichen Werten besteht, kann der Test nicht durchgeführt werden.

Stetigkeitnachher

StnAll	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,67756	0,79507	0,4971	071148	0,84755	0,76306
p-Wert	< 2,2e-06	1,756e-14	< 2,2e-16	< 2,2e-16	1,226e-10	8,205e-14

StnAll0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,81094	0,77534	0,5063	0,69204	0,83064	0,74541
p-Wert	1,083e-07	1,364e-08	1,892e-13	3,3e-10	6,92e-06	5,964e-08

Stn - GV	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,79709	0,49759	0,71299	0,84864	0,76608
p-Wert	1,371e-07	8,548e-13	2,43e-09	2,834e-05	2,985e-07

Punkte	*StnSpr*	*StnDar*	*StnVor*
W-Wert	0,78839	0,49433	0,62833
p-Wert	8,439e-08	5,944e-13	5,83e-11

StnSpr0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,82874	0,78356	0,45752	0,66202	0,78795	0,66964
p-Wert	7,873e-05	9,873e-06	3,09e-10	1,351e-07	0,0001106	1,507e-06

StnDar0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,45002	0,57518	0,5521	0,69861	0,82489	0,80836
p-Wert	7,742e-06	6,711e-05	4,398e-05	0,000817	0,03913	0,02543

StnVor0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,82725	0,80099	0,5665	0,76572	0,88512	0,8064
p-Wert	0,003785	0,001569	3,207e-06	0,0007135	0,08368	0,005995

StnMax	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,78811	0,79709	0,49754	0,69995	0,84864	0,76608
p-Wert	8,311e-08	1,371e-07	8,548e-13	1,362e-09	2,834e-05	2,985e-07

Differenzierbarkeitvorher

DifvAll	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,15355	0,79488	0,49712	0,70833	0,84757	0,76278
p-Wert	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	1,357-12	3,917e-16

DifvAll0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,78052	0,81809	0,06644	0,84004	0,77091	0,64619
p-Wert	0,02615	0,06155	0,001497	0,09945	0,04595	0,0009314

Difv - GV	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,79709	0,49759	0,71299	0,84864	0,76608
p-Wert	1,371e-07	8,548e-13	2,43e-09	2,834e-05	2,985e-07

Punkte	*DifvÄnd*	*DifvTan*	*DifvLin*	*DifvVer*
W-Wert	0,23486	0,23246	-	-
p-Wert	6,295e -16	5,96e -16	-	-

DifvÄnd0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,75	0,75	0,75	-	-	-
p-Wert	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	-	-	-

DifvTan0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,75	0,75	0,75	0,75	-	0,75
p-Wert	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	-	< 2,2e-16

DifvMax	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,37876	0,79709	0,49759	0,69995	0,84864	0,76608
p-Wert	2,178e -14	1,371e-07	8,548e-13	1,362e-09	2,834e-05	2,985e-07

Differenzierbarkeitnachher

DifnAll	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,38193	0,79488	0,49712	0,71146	0,84757	0,76278
p-Wert	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	< 2,2e-16	1,357-12	3,917e-16

DifnAll0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,86558	0,75674	0,4759	0,75378	0,84735	0,7968
p-Wert	0,00196	2,016e-05	9,665e-09	2,391e-05	0,004814	0,0005865

Difn - GV	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,79709	0,49759	0,71299	0,84864	0,76608
p-Wert	1,371e-07	8,548e-13	2,43e-09	2,834e-05	2,985e-07

Punkte	*DifnÄnd*	*DifnTan*	*DifnLin*	*DifnVer*
W-Wert	0,49695	0,59907	-	-
p-Wert	6,445e -13	1,963 -11	-	-

DifnÄnd0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,79284	0,82191	-	0,36572	0,87483	0,85995
p-Wert	0,007572	0,01828	-	1,004e-07	0,1679	0,1199

DifnTan0	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,81417	0,68674	0,60343	0,79358	0,84649	0,75584
p-Wert	0,004227	0,000121	2,738e-05	0,002241	0,03324	0,002134

DifnMax	*Punkte*	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
W-Wert	0,7658	0,79709	0,49759	0,71299	0,84864	0,76608
p-Wert	2,53e -08	1,371e-07	8,548e-13	2,43e-09	2,834e-05	2,985e-07

Anhang 3 – Ergebnisse der Korrelationsanalysen

Stetigkeitvorher

StvSpr		Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
Kendall	*z*	1,3061	1,4026	0,66784	-0,78344	0,79743
Kendall	*p*	0,1915	0,1607	0,5042	0,4334	0,4252
Kendall	*τ*	0,15267	0,1748	0,08076	-0,10045	0,10511
Spearman	*S*	28336	26470	29644	18129	15097
Spearman	*p*	0,1928	0,1607	0,5106	0,4347	0,3944
Spearman	*ρ*	0,17195	0,18578	0,08813	-0,11802	0,12716

StvDar		Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
Kendall	*z*	1,0366	-1,3276	-2,3518	1,3241	0,72071
Kendall	*p*	0,2999	0,1843	0,01868	0,1855	0,4711
Kendall	*τ*	0,12058	-0,1648	-0,28266	0,16853	0,09402
Spearman	*S*	29443	38226	42588	13105	15508
Spearman	*p*	0,2917	0,1867	0,01787	0,2016	0,4893
Spearman	*ρ*	0,13958	-0,17585	-0,31002	0,1918	0,10336

StvVor		Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
Kendall	*z*	-0,69269	0,90059	1,3615	-1,5912	-0,12005
Kendall	*p*	0,4885	0,3678	0,1733	0,1116	0,9044
Kendall	*τ*	-0,08595	0,11929	0,17474	-0,21642	-0,01675
Spearman	*S*	37332	28631	26646	20061	17602
Spearman	*p*	0,4933	0,3725	0,1755	0,1125	0,906
Spearman	*ρ*	-0,09095	0,11929	0,18034	-0,2372	-0,01675

StvSpr0		Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
Kendall	*z*	-0,46857	2,042	0,29714	0,36088	1,0805
Kendall	*p*	0,6394	0,04115	0,7664	0,7182	0,2799
Kendall	*τ*	-0,085	0,3909885	0,05667	0,07221	0,22237
Spearman	*S*	3204,8	1730	2439,9	1408	989,09
Spearman	*p*	0,642	0,03833	0,77	0,7129	0,2753
Spearman	*ρ*	-0,09566	0,4084	0,06157	0,08536	0,25632

StvDar0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-1,4593	0,4095	-0,56307	0,36352	1,9496
	p	0,1445	0,6905	0,5734	0,7162	0,05122
	τ	-0,25323	0,07621	-0,10023	0,067	0,36134
Spearman	S	4659,5	3012	4014,7	1901,7	1569,2
	p	0,1564	0,6905	0,6173	0,7841	0,04975
	ρ	-0,27519	0,08031	-0,09871	0,06044	0,3964745

StvMax		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,83885	0,74842	-0,99122	0,38404	2,3614
	p	0,4016	0,4542	0,3216	0,7009	0,01821
	τ	0,096954	0,09223	-0,11849	0,04907	0,3097791
Spearman	S	30272	29286	36794	15403	11049
	p	0,3843	0,4591	0,324	0,741	0,01262
	ρ	0,11536	0,09913	-0,13182	0,05009	0,36117

Stetigkeitnachher

StnAll			*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall		z	0,65726	-0,26439	-0,2189	0,75697	-0,15049
		p	0,511	0,7915	0,8267	0,4491	0,8804
		τ	0,04426	-0,01899	-0,01525	0,05603	-0,0114
Spearman		S	878573	895623	892668	409600	473284
		p	0,5143	0,7923	0,8265	0,4501	0,8778
		ρ	0,04934	-0,0201	-0,01674	0,06482	-0,01307

StnAll0			*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall		z	-1,2266	-0,23244	-1,567	0,44549	1,0463
		p	0,22	0,8183	0,1171	0,656	0,2954
		τ	-0,13714	-0,02736	-0,1818	0,05611	0,13404
Spearman		S	52678	47090	50089	17358	17679
		p	0,2293	0,8183	0,112	0,696	0,295
		ρ	-0,15117	-0,02906	-0,20222	0,05787	0,15108

StnSpr			*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall		z	1,4078	0,82042	0,09796	-1,173	-2,0066
		p	0,1592	0,412	0,922	0,2408	0,04479
		τ	0,16167	0,10045	0,01163	-0,14797	-0,25952
Spearman		S	27711	28976	32070	19109	22455
		p	0,149	0,4168	0,9198	0,2354	0,04172
		ρ	0,19022	0,10867	0,0135	-0,17845	-0,29826

StnDar			*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall		z	1,4558	-0,34065	0,13157	2,2151	0,75766
		p	0,1455	0,7334	0,8953	0,02675	0,4487
		τ	0,17802	-0,04445	0,01664	0,29599	0,10389
Spearman		S	27727	33976	31948	10858	15357
		p	0,1502	0,7366	0,8977	0,02494	0,4532
		ρ	0,18973	-0,04512	0,01726	0,33036	0,11209

StnVor		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	-2,2001	-0,99836	-0,75652	0,61199	1,1754
	p	0,0278	0,3181	0,4493	0,5405	0,2398
	τ	-0,2603	-0,12596	-0,0928	0,0806	0,15773
Spearman	*S*	44002	36808	35807	14765	14375
	p	0,02817	0,3224	0,4486	0,5547	0,2565
	ρ	-0,28587	-0,13224	-0,10144	0,0894	0,16886

StnSpr0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	-1,6424	0,21769	-0,88456	-0,33801	-0,055982
	p	0,1005	0,8277	0,3764	0,7308	0,9534
	τ	-0,25572	0,03533	-0,14177	-0,05882	-0,00998
Spearman	*S*	9132,4	6873,4	7580,4	3132,3	3314,6
	p	0,1045	0,8314	0,3715	0,7308	0,9534
	ρ	-0,27905	0,03733	-0,1582	-0,07087	-0,0118

StnDar0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	0,42241	0,71067	1,1264	-0,61742	1,5513
	p	0,6727	0,4773	0,26	0,537	0,1208
	τ	0,12157	0,20998	0,32418	-0,19876	0,50637
Spearman	*S*	247,54	224,74	187,83	144,77	54,127
	p	0,6769	0,5037	0,2747	0,5942	0,1259
	ρ	0,13447	0,21427	0,34325	-0,2064	0,54894

StnVor0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	-1,2717	-0,58685	-2,3096	0,9478	0,42645
	p	0,2035	0,5573	0,02091	0,3432	0,6698
	τ	-0,27233	-0,13315	-0,5211451	0,24293	0,1073
Spearman	*S*	1264,8	1106,9	1285,6	265,56	403,06
	p	0,2181	0,5732	0,01565	0,3715	0,6698
	ρ	-0,30522	-0,14233	-0,57543	0,27043	0,11415

StnMax		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,24017	-0,68953	-1,0221	0,93705	0,28939
	p	0,8102	0,4905	0,3068	0,53068	0,7723
	τ	0,02746	-0,08429	-0,12087	0,11762	0,03716
Spearman	S	33136	35478	36990	14000	16601
	p	0,8117	0,4953	0,3021	0,3654	0,7887
	ρ	0,03168	-0,09133	-0,13783	0,13659	0,04016

Differenzierbarkeitvorher

DiffvAll		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-0,56111	-2,4366	-0,36657	-1,4917	-0,8475
	p	0,5747	0,01483	0,7139	0,1358	0,3967
	τ	-0,03443	-0,15958	-0,02327	-0,10028	-0,05832
Spearman	S	2270603	2414797	2131744	1152722	1175663
	p	0,577	0,01451	0,7139	0,3654	0,4008
	ρ	-0,03649	-0,16032	-0,02431	-0,11029	-0,06163

DiffvAll0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,0	-1,1456	-1,4733	0,6455	-0,20597
	p	1	0,2519	0,1407	0,5186	0,8368
	τ	0,0	-0,44721	-0,55205	0,30861	-0,07785
Spearman	S	54,857	82,192	90,943	13,545	58,694
	p	0,9654	0,2899	0,1342	0,5963	0,9184
	ρ	0,02041	-0,46771	-0,624	0,32275	-0,04811

DiffvÄnd		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-0,11229	-0,60021	0,32929	-2,1434	-1,5838
	p	0,9053	0,5484	0,7419	0,03208	0,1132
	τ	-0,01386	-0,07905	0,04202	-0,28946	-0,21945
Spearman	S	34762	35093	31091	21396	21335
	p	0,9053	0,553	0,7451	0,03041	0,1141
	ρ	-0,01583	-0,0795	0,04362	-0,31954	-0,23353

DiffvTan		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-1,2165	-2,0507	-0,96593	0,25121	-0,09599
	p	0,2238	0,0403	0,3341	0,8016	0,9235
	τ	-0,15011	-0,27008	-0,12326	0,03398	-0,0133
Spearman	S	39663	41339	36802	15643	17523
	p	0,2288	0,03916	0,3231	0,8159	0,9304
	ρ	-0,15907	-0,27162	-0,13205	0,03528	-0,0131

DiffvÄnd0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-1,4142	-1,4142	-	-	-
	p	0,1573	0,1573	-	-	-
	τ	1	-1	-	-	-
Spearman	S	0	8	-	-	-
	p	< 2,2e-16	< 2,2e-16	-	-	-
	ρ	1	-1	-	-	-

DiffvTan0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,70711	-1,4142	-1,4142	1	0,70711
	p	0,4795	0,1573	0,1573	1	0,4795
	τ	0,5	-1	-1	1	0,5
Spearman	S	2	8	8	2,2204e-16	2
	p	0,6667	< 2,2e-16	< 2,2e-16	1	0,6667
	ρ	0,5	-1	-1	1	0,5

DiffvMax		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-0,58371	-2,6131	-0,54691	-1,5158	-0,9033
	p	0,5594	0,008973	0,5844	0,1296	0,3664
	τ	-0,071146	-0,33984	-0,06899	-0,20355	-0,12325
Spearman	S	36810	43761	34918	19881	19549
	p	0,5688	0,007784	0,5804	0,1308	0,3828
	ρ	-0,07569	-0,34611	-0,07411	-0,2261	-0,13026

Differenzierbarkeitnachher

DiffnAll		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-0,20912	0,18002	0,43601	0,23934	0,47566
	p	0,8344	0,8571	0,6628	0,8108	0,6343
	τ	-0,01264	0,01161	0,02727	0,01588	0,03232
Spearman	S	2220214	2056506	2021606	1019893	1069006
	p	0,8367	0,8576	0,6646	0,812	0,6366
	ρ	-0,01349	0,01184	0,02861	0,01765	0,03468

DiffnAll0		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,1153	-1,7535	-0,62025	-0,44482	-1,5933
	p	0,9082	0,07951	0,5351	0,6565	0,1111
	τ	0,01966	-0,32024	-0,1096	-0,08864	-0,31364
Spearman	S	3548,5	4402,6	3645,8	1470,4	2090,9
	p	0,8841	0,07902	0,5751	0,6578	0,1113
	ρ	0,02886	-0,3439	-0,11288	-0,10558	-0,35775

DiffnÄnd		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	-0,86102	1,8547	1,1535	0,044855	0,948
	p	0,3892	0,06364	0,2487	0,9642	0,3431
	τ	-0,10415	0,23935	0,1447	0,00596	0,12905
Spearman	S	38051	24523	27469	16104	14927
	p	0,3986	0,06306	0,2452	0,9641	0,3586
	ρ	-0,11195	0,23935	0,15505	0,00683	0,13697

DiffnTan		*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	z	0,81307	-1,4885	-0,8915	0,24418	-0,22047
	p	0,4162	0,1366	0,3727	0,8071	0,8255
	τ	0,09727	-0,19009	-0,11024	0,03238	-0,0298
Spearman	S	30525	38918	36260	15639	17863
	p	0,4156	0,1366	0,3884	0,8146	0,827
	ρ	0,10798	-0,19715	-0,11539	0,03553	-0,03276

	DiffnÄnd0	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	-0,95557	-	-1,3944	-0,75307	-1,3029
	p	0,3393	-	0,1632	0,4514	0,1926
	τ	-0,27821	-	-0,44905	-0,25286	-0,4402
Spearman	*S*	288,95	-	241,69	105,57	126,61
	p	0,348	-	0,1759	0,5393	0,1994
	ρ	-0,31342	-	-0,46481	-0,25678	-0,50728

	DiffnTan0	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	0,24355	-0,62533	0,17717	-0,18942	-0,75541
	p	0,8076	0,5316	0,8594	0,8498	0,45
	τ	0,05715	-0,15787	0,04167	-0,05101	-0,20125
Spearman	*S*	634,53	653,59	647,58	303,03	446,14
	p	0,8057	0,5516	0,8608	0,8541	0,4585
	ρ	0,06686	-0,16713	0,04768	-0,05955	-0,22567

	DiffnMax	*Unterricht*	*Nachhilfe*	*Schulwunsch*	*Note VO*	*Note UE*
Kendall	*z*	-0,22501	-0,1994	0,36882	0,18669	0,19093
	p	0,822	0,8419	0,7123	0,8519	0,8486
	τ	-0,02594	-0,02454	0,04408	0,02388	0,02487
Spearman	*S*	35179	33368	30944	15770	16826
	p	0,8331	0,844	0,7197	0,8563	0,8561
	ρ	-0,02594	-0,02641	0,04814	0,02745	0,02717

Anhang 4 – Vergleich der Fragebögen

Stetigkeit

Datensätze	*Cohens d*	*Hedges g*	*Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test: p-Wert*
Allgemein	0,0492	0,0489	0,5755
Allgemein0	-0,2285	-0,2271	0,1603
Maximum	-0,0493	-0,0487	0,4952
Sprungfreiheit	0,1914	0,1889	0,3856
Sprungfreiheit0	-0,4132	-0,4079	0,0691
Darstellbarkeit	-0,4988	-0,4908	0,0063
Darstellbarkeit0	0,3836	0,376	0,1145
Vorhersagbarkeit	0,658	0,633	0,0003
Vorhersagbarkeit0	-0,0626	-0,0601	0,9105

Differenzierbarkeit

Datensätze	*Cohens d*	*Hedges g*	*Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test: p-Wert*
Allgemein	0,2691	0,2659	0,0003
Allgemein0	-0,8211	-0,8022	0,0501
Maximum	0,6251	0,6146	0,0001
Änderungsrate	0,2067	0,204	0,0349
Änderungsrate0	-2,5267	-2,3654	0,0134
Tangentensteigung	0,5253	0,5067	0,0019
Tangentensteigung0	-1,1672	-1,1149	0,069
Verstärkungsfaktor	0,1164	0,1153	1
Verstärkungsfaktor0	-	-	1

Anhang 5 – Datensätze

(Ein Feld ist leer, wenn keine Information gegeben ist.)

Stetigkeitvorher

Code	**Punkte**	**MaxGV**	**Sprungfreiheit**	**Vorhersagbarkeit**	**Darstellbarkeit**	**Definition**	**Differenzierbarkei**	**Nicht zuordenbar**	**Fehlvorstellung**	**Unterricht**	**Nachhilfe**	**Schulwunsch**	**Note VO**	**Note UE**
AM2720	4	S, D	4	0	4	0	0	0	0	2	1	1	3	1
AN1714	2	S	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	1	1
CH1516	3	S	0	0	3	0	0	0	0	1	1	2	2	1
CH2807	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	2
DA1421	4	S	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	2
DO1029	0		0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	4	2
DO3123	4	S	4	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4
EL0331	4	D	0	0	4	0	0	0	0	1	0	1	3	1
EL0706	4	D	3	0	4	0	0	0	0	2	1	2	3	3
EL1304	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	1	2	1	1
EL2409	0		0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	4	2
EL2919	0		0	0	0	0	1	1	1	0	1	3		
EV2427	0		0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	3	2
EV3108	3	D	0	0	3	0	0	0	1	2	1	2	2	1
GA0918	1	D	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1		
GA2603	3	D	0	0	3	1	0	0	0	2	0	1		1
GE2004	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
GE2517	4	S	4	3	0	0	0	0	0	2	1	2	1	3
HE1117	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	0	2	3	1
HE2022	4	D	0	0	4	0	0	0	0	1	1	2	1	1
HE2211	3	S	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3
HE2502	0		0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	1
HE2908	4	S	4	0	2	0	0	0	0	2	1	2	3,5	2,5
IN1122	4	S	4	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	
IN2120	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	2		
IR0216	4	S	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2		
IR1103	4	D	0	0	4	0	0	0	0	0	0	3		

IV0103	3	D	0	0	3	0	0	0	0	2	1	2	4	1
JU2713	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	1	1	4	2
KA0128	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1			
KA0703	4	S	4	0	0	0	1	0	0	2	1	2	2	1
KA1313	3	V	1	3	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
KA1903	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2		
LU1321	4	D	0	0	4	0	0	0	1	0	1	2	4	3
MA0202	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		
MA0227	3	D	0	0	3	0	0	0	0	2	1	2	1	
MA0327	3	S, D	3	0	3	0	0	0	0	3	0	2	1	1
MA1102	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2		3
MA1728	2	D	0	0	2	0	0	0	0	2	0	3	4	2
MA2013	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
MA2111	4	S	4	0	0	0	0	0	0	2	1	3	1	2
MA2428	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	
MA2803	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2	4	1
MI1521	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	0	2	2	2
MO2827	3	S, V	3	3	0	0	0	0	0	0	1	3	2	1
NA1303	4	D	0	0	4	0	0	0	0	0		1		3
NA2312	3	D	0	0	3	0	0	0	0	1	1	2	2	1
PE2612	1	D	0	0	1	0	0	0	0	2	1	1	3	1
RE1318	4	D	0	0	4	0	0	0	0	1	1	2	2	2
RE2006	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	1	2	3	2
RO1723	4	D	0	0	4	0	0	0	0	1	1	1	3	2
SI2125	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	1
SO0816	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	0	2		2
SU2716	2	S	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2		
UT0113	3	D	0	0	3	0	0	0	0	2	1	2	1	1
VE2612	3	D	0	0	3	0	0	0	0	2	1	2	2	1
VE2713	0		0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	1	1
WA0206	4	D	0	0	4	0	0	0	0	1	1	2	4	2

Stetigkeitnachher

Code	Punkte	MaxGV	Sprungfreiheit	Vorhersagbarkeit	Darstellbarkeit	Definition	Differenzierbarkeit	Nicht zuordenbar	Fehlvorstellung	Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
AD0609	4	S	4	0	0	1	0	0	0	1	1	2	1	1
AM2720	4	V	3	4	0	0	0	0	0	2	1	1	3	1
AN1714	1	V	0	1	0	0	0	0	0	2	0	2	1	1
CH1516	3	S	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1
CH2807	1	V	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	3	2
DA1421	0		0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	3	2
DO1029	3	S, V	3	3	0	0	0	0	0	1	1	2	4	2
DO3123	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	3	4
EL0331	3	D	0	0	3	0	0	0	0	1	0	1	3	1
EL0706	4	D	0	0	4	0	1	0	1	2	1	2	3	3
EL1304	4	D	3	0	4	1	0	0	0	2	1	2	1	1
EL2409	3	V	0	3	0	0	0	0	0	1	1	2	4	2
EL2919	3	S	3	2	0	0	0	0	0	0	1	3		
EV2427	4	S	4	3	0	0	0	0	0	0	1	2	3	2
EV3108	0		0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	2	1
GA0918	4	V	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1		
GA2603	3	S	3	0	0	1	0	0	0	2	0	1		1
GE2004	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
GE2517	4	S	4	3	0	0	0	0	0	2	1	2	1	3
HE1117	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	0	2	3	1
HE2022	3	S	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
HE2211	4	V	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3
HE2502	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2	1	1
HE2908	2	S	2	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3,5	2,5
IN1122	0		0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	2	
IN2120	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	2		
IR0216	4	S, D	4	0	4	1	0	0	0	2	1	2		
IR1103	4	D	0	0	4	0	0	0	0	0	0	3		
IV0103	1	S, D	1	0	1	0	0	0	0	2	1	2	4	1

JU2713	4	D	0	0	4	0	0	0	1	2	1	1	4	2
KA0128	4	V	3	4	0	0	0	0	0	1	1			
KA0703	3	V	0	3	0	0	0	0	0	2	1	2	2	1
KA1313	3	S	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
KA1903	4	D	3	0	4	0	0	0	0	2	1	2		
LU1321	4	D	0	0	4	0	0	0	0	0	1	2	4	3
MA0202	4	S, V	4	4	0	0	0	0	0	0	0	2		
MA0227	4	S	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2	1	
MA0327	2	S	2	0	0	0	0	0	1	3	0	2	1	1
MA1102	2	S	2	0	0	0	0	0	0	2	1	2		3
MA1728	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	0	3	4	2
MA2013	2	S	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
MA2111	2	S	2	0	0	0	0	0	0	2	1	3	1	2
MA2428	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	
MA2803	4	D	3	0	4	0	0	0	0	2	1	2	4	1
MI1521	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	0	2	2	2
MO2827	3	V	0	3	0	0	0	0	0	0	1	3	2	1
NA1303	0		0	0	0	0	1	0	0	0		1		3
NA2312	3	S	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1
PE2612	3	S	3	0	0	0	0	0	0	2	1	1	3	1
RE1318	3	V	0	3	0	1	0	0	0	1	1	2	2	2
RE2006	4	D	0	0	4	0	0	0	0	2	1	2	3	2
RO1723	3	V	0	3	0	0	0	0	0	1	1	1	3	2
SI2125	4	S	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	1
SO0816	3	S	3	2	0	0	0	0	0	2	0	2		2
SU2716	2	S	2	0	0	0	1	0	0	1	1	2		
UT0113	3	V	0	3	0	0	0	0	0	2	1	2	1	1
VE2612	3	S	3	0	0	1	0	0	0	2	1	2	2	1
VE2713	0		0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	1	1
WA0206	4	S	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	4	2

Differenzierbarkeitvorher

Code	**Punkte**	**MaxGV**	**Änderungsrate**	**Tangentensteigun**	**Lokale Linearität**	**Verstärkungsfakt**	**Definition**	**Differenzierbarke**	**Stetigkeit**	**Fehlvorstellung**	**Aussehen**	**Unterricht**	**Nachhilfe**	**Schulwunsch**	**Note VO**	**Note UE**
AD0609	0		0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	2	1	1
AM2720	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1	3	1
AN1714	4	Änd	4	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	1	1
CH1516	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	2	1
CH2807	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	3	2
DA1421	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	2
DO1029	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	4	2
DO3123	0		0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	2	3	4
EL0331	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	3	1
EL0706	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	3
EL1304	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	1
EL2409	0		0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	2	4	2
EL2919	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	3		
EV2427	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	2
EV3108	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	2	2	1
GA0918	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1		
GA2603	4	Tan	0	4	0	0	0	1	0	0	0	2	0	1		1
GE2004	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	1
GE2517	0		0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	1	2	1	3
HE1117	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	3	1
HE2022	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	1	1
HE2211	4	Tan	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3
HE2502	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	1	1
HE2908	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3,5	2,5
IN1122	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	2	2	
IN2120	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2		
IR0216	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2		
IR1103	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3		
IV0103	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	4	1

JU2713	0		0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	1	4	2
KA0128	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1			
KA0703	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	1	2	2	1
KA1313	3	Änd	3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	1
KA1903	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2		
LU1321	0		0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	2	4	3
MA0202	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2		
MA0227	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	1	
MA0327	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	2	1	1
MA1102	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2		3
MA1728	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	3	4	2
MA2013	3	Änd	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1
MA2111	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	3	1	2
MA2428	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1	
MA2803	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	4	1
MI1521	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	2	2	2
MO2827	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	2	1
NA1303	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		1		3
NA2312	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	2	1
PE2612	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	3	1
RE1318	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	2	2	2
RE2006	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	2
RO1723	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	3	2
SI2125	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	3	1
SO0816	1	Ver	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	0	2		2
SU2716	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2		
UT0113	0		0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	1	2	1	1
VE2612	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	2	1
VE2713	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	3	1	1
WA0206	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	4	2

Differenzierbarkeitnachher

Code	Punkte	MaxGV	Änderungsrate	Tangentensteigung	Lokale Linearität	Verstärkungsfaktor	Definition	Differenzierbarkeit	Stetigkeit	Fehlvorstellung	Aussehen	Unterricht	Nachhilfe	Schulwunsch	Note VO	Note UE
AD0609	0		0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	2	1	1
AM2720	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	1	1	3	1
AN1714	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	1	1
CH1516	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	2	1
CH2807	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	3	2
DA1421	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	2
DO1029	2	Änd	2	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	2	4	2
DO3123	2	Änd	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2	3	4
EL0331	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	3	1
EL0706	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	3
EL1304	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	1
EL2409	1	Änd	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	4	2
EL2919	3	Ver	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	3		
EV2427	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	3	2
EV3108	2	Änd	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	2	1
GA0918	2	Tan	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
GA2603	4	Tan	0	4	0	0	0	1	0	0	0	2	0	1		1
GE2004	3	Änd	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	1
GE2517	0		0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	2	1	3
HE1117	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	3	1
HE2022	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	1	1
HE2211	3	Tan	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3	3
HE2502	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	2	1	1
HE2908	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3,5	2,5
IN1122	2	Änd	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	
IN2120	0		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2		
IR0216	0		0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	1	2		
IR1103	0		0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3		
IV0103	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	4	1

JU2713	3	Tan	0	3	0	0	0	1	1	1	0	2	1	1	4	2
KA0128	1	Änd	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1			
KA0703	2	Änd	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	2	1
KA1313	0		0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	2	1	1
KA1903	1	Tan	0	1	0	0	0	0	1	0	1	2	1	2		
LU1321	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	4	3
MA0202	0		0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	2		
MA0227	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	1	
MA0327	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	2	1	1
MA1102	1	Änd	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2		3
MA1728	3	Änd	0	3	0	0	0	1	0	0	0	2	0	3	4	2
MA2013	2	Tan	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	1	1
MA2111	1	Änd	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	1	2
MA2428	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1	
MA2803	3	Tan	0	3	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	4	1
MI1521	0		0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	2	2	2
MO2827	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3	2	1
NA1303	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0		1		3
NA2312	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	2	1
PE2612	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	3	1
RE1318	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2
RE2006	2	Tan	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	2
RO1723	0		0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	3	2
SI2125	3	Tan	0	3	0	0	0	0	1	0	1	2	1	2	3	1
SO0816	0		0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	2		2
SU2716	2	Änd	2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2		
UT0113	0		0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	1	1
VE2612	3	Tan	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	2	1
VE2713	4	Tan	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	1
WA0206	0		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	4	2

Anhang 6 – Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test – Wahrscheinlichkeitstabelle[150]

Tabelle 35: WVR-Test-Wahrscheinlichkeitstabelle

TABLE II
For Determining the Significance of Differences in Paired Experiments

Number of Paired Comparisons	Sum of rank numbers, + or —, whichever is less	Probability of this total or less
7	0	0.016
7	2	0.047
8	0	0.0078
8	2	0.024
8	4	0.055
9	2	0.0092
9	3	0.019
9	6	0.054
10	3	0.0098
10	5	0.019
10	8	0.049
11	5	0.0093
11	7	0.018
11	11	0.053
12	7	0.0093
12	10	0.021
12	14	0.054
13	10	0.0105
13	13	0.021
13	17	0.050
14	13	0.0107
14	16	0.021
14	21	0.054
15	16	0.0103
15	19	0.019
15	25	0.054
16	19	0.0094
16	23	0.020
16	29	0.053

[150] Wilcoxon, F. (1945, 82)