



DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Georg Cantors Beiträge zum Unendlichkeitsbegriff
in der Mengenlehre und deren Einbindung in
den Mathematikunterricht.“

verfasst von / submitted by

Benjamin Kantor

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2021 / Vienna, 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik; UF Geschich-
te, Sozialkunde Polit.Bildg

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Mitbetreut von / Co-Supervisor:

Danksagung

Im Vorfeld dieser Arbeit möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums und dem Anfertigen dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Für die kurzfristige Übernahme der Betreuung, schnellen Rückmeldungen und hilfreichen Anmerkungen möchte ich mich bei ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith bedanken. Du hast mich nicht nur während dem Schreiben meiner Diplomarbeit, sondern auch während meines Studiums in vielen Lehrveranstaltungen bestmöglich unterstützt. Danke!

Unendlicher Dank gebührt meinen Eltern und Großeltern sowie meiner Schwester, die mich in jeder Lebenslage unterstützt haben und dies immer noch tun. Ohne eure finanzielle und moralische Unterstützung während meiner Studienzeit hätte ich es sicher nicht so weit geschafft. Vielen Dank!

Außerdem danke ich allen Freundinnen und Freunden für die gute Zeit, allen Kolleginnen und Kollegen für den konstruktiven Austausch und die gegenseitigen Hilfestellungen während des Studiums.

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit Georg Cantors Arbeiten zur Mengenlehre, dem Unendlichkeitsbegriff und deren Einbindung im Mathematikunterricht.

Cantors Arbeit in der Mengenlehre nimmt ihren Ausgang von seiner exakten Definition reeller Zahlen und dem Versuch, mengentheoretische Begriffe festzulegen, mit denen systematisch gearbeitet werden kann. Daraus entwickelt sich sein Interesse an unendlichen Mengen. Er beweist die Abzählbarkeit der rationalen und algebraischen Zahlenmenge sowie die Überabzählbarkeit der transzendenten und reellen. Danach entdeckt er die Gleichmächtigkeit mehrdimensionaler reeller Mengen und beweist diese.

Der „Satz von Cantor“ – über die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge – lässt den Schluss zu, dass es verschiedene Unendlichkeiten gibt, die er durch seine Entwicklung der Ordinal- und Kardinalzahlen verdeutlicht.

Da die Mengenlehre eine relativ junge Wissenschaft innerhalb der Mathematik darstellt, treten bereits während Cantors Arbeit Antinomien und Probleme bei der Bildung von Mengen auf; sogar Cantor selbst stößt auf Widersprüche. Diese können erst in den 1920er Jahren, einige Jahre nach Cantors Wirken, behoben werden. Bedeutsame Arbeit leisten Ernst Zermelo, der ein Axiomensystem der Mengenlehre entwickelt, Adolf Fraenkel, der Zermelos Axiome ergänzt, sodass Antinomien und problematische Mengenbildungen verhindert werden.

Die Einbindung der Mengenlehre und des Unendlichkeitsbegriffs im Schulunterricht wird anhand der Lehrpläne verschiedener Schulformen und ausgewählter Schulbücher analysiert.

Abstract

This thesis deals with Georg Cantor's studies on set theory, the concept of infinity and their integration into mathematical education in schools.

Cantor's studies originate from his exact definition of real numbers and his attempt to specify set-theoretic terminology needed to work systematically. Consequently, he develops interest in infinite sets and proves the countability of rational and algebraic number sets as well as uncountability of transcendent and real number sets. Subsequently, he discovers and proves that even continuous sets with different dimensions have the same cardinality.

Cantor's theorem – about the cardinality of power sets – allows conclusion about the existence of different infinities, which he demonstrates based on his development of ordinal and cardinal numbers.

As set theory is a rather young scientific field within mathematics Cantor and other mathematicians discover inconsistencies and face antinomies in creating sets.

These antinomies cannot be prevented until the 1920s, several years after Cantor's studies. Ernst Zermelo's development of an axiomatic system of set theory as well as Adolf Frankel's amendments of Zermelo's axioms ensure prevention of antinomies.

The implementation of set theory and concepts of infinity into school education is analyzed on the basis of curricula of different types of schools and selected school books.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Georg Cantor	5
2.1	Biographie	5
2.2	Frühe Arbeiten	15
2.2.1	Über einfache Zahlensysteme - 1869	15
2.2.2	Trigonometrische Reihen	16
3	Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre	17
3.1	Theorie über die reellen Zahlen	17
3.2	Abzählbarkeit	22
3.3	Überabzählbarkeit	29
3.3.1	Ordinalzahlen	35
3.3.2	Kardinalzahlen	39
3.3.3	Kontinuumshypothese	41
3.4	Satz von Cantor	42
3.5	Antinomien der Cantorschen Mengenlehre	44
3.5.1	Burali-Forti (1.Cantorsche) Antinomie	44
3.5.2	2.Cantorsche Antinomie	44
3.5.3	Russelsche Antinomie	45
3.6	Axiomatisierung durch Zermelo und Frankel	46

4	Unendlichkeit, Mengen und Schule	51
4.1	Unendlich „=“ Unendlich?	51
4.2	Unendlichkeitsbegriff	52
4.3	„Unendlichkeit“ im Mathematikunterricht	56
4.3.1	Mengenlehre	56
4.3.2	Geometrie	56
4.3.3	Algebra	57
4.3.4	Analysis	58
4.4	Mengenlehre im Mathematikunterricht	65
4.4.1	Neue Mathematik	65
4.4.2	Vorschulstufe und Volksschule	67
4.4.3	Mittelschule - NMS	68
4.4.4	AHS	68
4.4.5	BHS	70
4.4.6	Schriftliche Reife- und Diplomprüfung	72
5	Conclusio	73
	Verzeichnis	75
	Quellen	75
	Sekundärliteratur	76
	Internetquellen	77
	Schulbücher	79
	Abbildungsverzeichnis	81

1 Einleitung

Die Mengenlehre ist eine der mathematischen Fachrichtungen, deren Einflüsse sich in nahezu allen anderen mathematischen Disziplinen wiederfinden. Obwohl Mengenlehre als sehr junge Wissenschaft erst seit etwa 150 Jahren intensiv betrieben wird, übt sie großen Einfluss auf andere Gebiete aus und hat viele neue Erkenntnisse und Forschungsfragen ermöglicht, die ohne ihre Ergebnisse weder formuliert, noch bewiesen oder widerlegt hätten werden können.

Der „Begründer“ der Mengenlehre – Georg Cantor – beginnt in den 1870er Jahren mengentheoretische Überlegungen anzustellen, nachdem er in einem anderen Fachgebiet an die Grenzen der Definition der reellen Zahlen stößt und setzt sich fortan mit mengentheoretischen Fragen auseinander. Seine Arbeit geht weit über die Theorie der reellen Zahlen hinaus, wenig später arbeitet Cantor an völlig neuen Begriffen und Theorien und forscht an unendlichen Mengen. Er ist zwar nicht der erste, der sich mit unendlichen Mengen beschäftigt, aber der erste, der sich systematisch und mit klaren Vorstellungen über seine Ergebnisse damit auseinandersetzt.

Cantors Werk wirkt bis heute nach und ist in seinen Grundzügen noch in sehr vielen Begriffen und Ergebnissen erkennbar. Die von ihm formulierte Kontinuumshypothese konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden, ForscherInnen arbeiten noch immer daran und gewinnen mit der Nutzung neuer Technologien stets tiefere Einblicke in die Unendlichkeit.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Arbeiten Cantors zur Mengenlehre, der großen Bedeutung seiner Leistungen für die junge mathematische Disziplin und den Fragestellungen, mit denen er sich auseinandersetzte. Dazu werden die bemerkenswerten Erkenntnisse und Beweise dargestellt und mit ihren Beweisen untermauert. Die Ergebnisse in der Betrachtung unendlicher Mengen werden besonders hervorgehoben.

1 Einleitung

Als Quelle für Cantors Arbeiten dient eine Sammlung dieser, herausgegeben von Ernst Zermelo sowie Oliver Deisers *Einführung in die Mengenlehre* [8] und online Sammlung www.aleph1.info mit Briefen und Arbeiten Cantors. Besonders der Briefwechsel mit Dedekind enthält Beweise, die für die Zielsetzung dieser Arbeit relevant Informationen liefern.

Ein weiterer Aspekt dieser Arbeit ist die Einbindung mengentheoretischer Inhalte und des Unendlichkeitsbegriffs im Schulunterricht. Hierfür sollen die Forderungen des Lehrplans mit deren Umsetzung in ausgewählten Schulbüchern verglichen werden. Als Grundlage dafür dienen die Lehrpläne der Volksschule, Mittelschule und allgemein bildenden Schulen sowie berufsbildender Schulen und die Schulbücher der Reihen *Das ist Mathematik* und *Mathematik verstehen* der jeweiligen Jahrgänge.

Die Arbeit setzt sich aus drei Teilen zusammen. Im ersten Teil wird Georg Cantors Biographie und der historische Kontext seiner Arbeiten dargelegt. Im Hauptteil werden Cantors Arbeiten und Erkenntnisse zur Mengenlehre und dem Unendlichkeitsbegriff betrachtet. Den Abschluss dieses Abschnitts bilden entdeckte Antinomien der Mengenlehre und die Axiome nach Zermelo-Fraenkel.

Der dritte Abschnitt beleuchtet den Unendlichkeitsbegriff, gibt einen historischen Überblick und untersucht die Einbindung der Unendlichkeit sowie der Mengenlehre im Schulunterricht.

Für das Verständnis der folgenden Ausführungen sollte der mathematische Schulunterricht als Basis ausreichen, wobei Vertrautheit mit mathematischer Formulierungen und Beweisführung das Lesen erleichtert.

„In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.“

„In der Mathematik ist die Kunst der Fragestellung wichtiger als die der Lösung.“

GEORG CANTOR [15, 25f]



Abbildung 1: Georg Cantor (ca. 1870).

2 Georg Cantor

2.1 Biographie

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor wird am 3. März 1845 in St. Petersburg geboren. [8, S. 195] Sein Vater – Georg Woldemar Cantor – stammt aus Dänemark und führt in St. Petersburg ein Unternehmen für Tauwerk und Segeltuch, später ist er als Börsenmakler tätig. Durch seinen Eifer erarbeitet er sich im Laufe seiner Karriere ein stattliches Vermögen. Cantors Mutter, Marie Böhm, stammt aus einer angesehenen Familie; ihr Vater - Ludwig Böhm - ist Kapellmeister der kaiserlichen Oper St. Petersburgs, ihr Onkel - Josef Böhm, Professor am Konservatorium in Wien - unterrichtet nicht nur spätere Virtuosen, sondern hat auch eine enge Beziehung zu Ludwig van Beethoven.

Cantors Eltern - Georg Woldemar und Marie Böhm - heiraten am 27.04.1842 in St. Petersburg, in der deutschen Evangelisch-Lutherischen Kirche. Demnach muss Cantors Vater der evangelischen Konfession angehört haben, denn die Familie seiner Mutter ist römisch-katholischen Glaubens. Die Konfession und Abstammung Cantors wird aufgrund des erstarkenden Antisemitismus und der Verfolgung von Juden während des Zweiten Weltkrieges ein Thema, da Vertreter der „Deutschen Mathematik“ diese durch „jüdische Mathematik“ bedroht sehen. Nachforschungen des dänischen genealogischen Institutes aus dem Jahr 1937 können keine Verbindung Cantors zur jüdischen Gemeinde herstellen, weshalb eine jüdische Abstammung Cantors ausgeschlossen wird. Ob die Vorfahren Cantors Juden gewesen, oder vom jüdischen Glauben zum Christentum konvertiert sind, kann weder bestätigt, noch ausgeschlossen werden, ist aber für die weiteren Ausführungen auch nicht von Belang. [15, S. 13–15]

2 Georg Cantor

Georg Cantor lebt bis zu seinem 11. Lebensjahr mit drei Geschwistern¹ im „großzügig geführten Haus seiner Eltern“ [15, S. 16] und besucht die Elementarschule in St. Petersburg. [15, S. 16] Die Familie ist wohlhabend und möchte ihren Kindern eine gute Ausbildung ermöglichen. [10, S. 17]

1856 zieht sich Cantors Vater aufgrund einer Lungenerkrankung aus seinen Geschäften zurück und übersiedelt mit seiner Familie nach Frankfurt am Main, wo er von seinem Vermögen lebt. [15, S. 16] Georg besucht bis 1859 das Gymnasium in Wiesbaden, danach mehrere Privatschulen in Frankfurt [8, S. 195], wechselt auf die Realschule und danach auf die Höhere Gewerbeschule² in Darmstadt. [10, S. 17]

Während seiner Schulzeit steht Cantor mit seinem Vater in regelmäßigem schriftlichen Kontakt. Dieser versucht seinen Sohn durch Ratschläge und Empfehlungen auf den „richtigen Weg“ zu bringen und betont wiederholt wie wichtig eine gute Ausbildung sei und dass er sich nicht von anderen Einflüssen ablenken lassen dürfe. Zunächst sieht der Vater eine praktische Ausbildung vor, willigt dann aber ein, dass sein Sohn nach der Schule ein Studium der Mathematik beginnt. Die Abschlussprüfungen der allgemeinen Klassen und die – für ein Studium notwendige – Reifeprüfung absolviert Cantor mit sehr guten Noten. [15, S. 18] Im Wintersemester 1862 beginnt er sein Studium in Zürich. Dort bleibt er nur für ein Semester, bis sein Vater im Frühjahr 1863 verstirbt. Die Familie zieht nach Berlin und auch Georg Cantor verlegt seinen Studienort von Zürich dorthin. Er hört Vorlesungen bei Ernst Kummer, Leopold Kronecker und Karl Weierstrass; von letzterem wird er wegen seines großen Interesses an der Analysis besonders geprägt. Neben Mathematik studiert er Physik und Philosophie bis 1866, sein letztes Sommersemester verbringt er in Göttingen. [8, S. 195]

Georg Cantor promoviert Ende 1867 mit einer zahlentheoretischen Arbeit³ bei Professor Kummer. Ein Jahr später legt er zusätzlich die Staatsprüfung für das Lehramt mit großem Erfolg ab und absolviert eine pädagogisch-praktische Ausbildung für Mathematik- und Physiklehrer im Seminar von Karl Schellbach, aus dem er nach bereits zwei Monaten wieder ausscheidet. Ihm werden ausgezeichnete wissenschaftliche Leistung, aber Unterrichtsfähigkeit, die „der weiteren Entwicklung bedürftig“ [15, 26f] sei bescheinigt. Sein schnelles Ausscheiden aus dem Seminar hängt mit der Möglichkeit der Habilitation an der Universität Halle zusammen, wo Cantor seine aka-

¹Ludwig, Sophie und Constantin.

²spätere Technische Hochschule.

³„*De aequationibus secundi gradus indeterminatis.*“ - *Über unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.* [15, S. 24]

demische Laufbahn beginnen will. [15, 26f]

Ab dem 18. Jahrhundert ist Halle neben Göttingen eines der bedeutenden Zentren der deutschen Aufklärung und der modernen Naturwissenschaften. Aber die Universität Halle verliert allmählich an Bedeutung, weshalb die Zahl der Studierenden seither zurückgeht und nur noch einen Bruchteil der Zahlen zur Blütezeit der Hochschule ausmacht.

Cantors langjähriger Studienfreund Hermann A. Schwarz, der als Ordinarius⁴ nach Zürich berufen wird, schlägt mit großer Wahrscheinlichkeit der philosophischen Fakultät in Halle Cantor als seinen Nachfolger vor. [15, S. 29] Im Jahr 1869 habilitiert sich Cantor in Halle wieder mit einer zahlentheoretischen Arbeit⁵ und wird zum Privatdozent der philosophischen Fakultät, drei Jahre später zum Extraordinarius⁶ und 1879 zum ordentlichen Professor der Universität Halle ernannt.

In seiner Lehrtätigkeit von 1869 bis 1913, die er aufgrund seiner schlechten gesundheitlichen Verfassung aufgeben muss, hält Cantor Vorlesungen über viele verschiedene mathematische, aber auch philosophische Themen. [10, 20f]

„Er las unter anderem synthetische und analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Funktionentheorie, Zahlentheorie, Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung, analytische Mechanik, Variationsrechnung, Methodik des mathematischen Unterrichts und beabsichtigte sogar Vorlesungen über Philosophie und Literaturgeschichte.“ [10, S. 20]

In seinen ersten Arbeiten beschäftigt sich Cantor mit der eindeutigen Darstellung von reellen Zahlen (s. Unterabschnitt 2.2.1, auf Seite 15) und veröffentlicht dazu 1869 zwei Arbeiten. Bereits ein Jahr später löst er das Problem der Eindeutigkeit der trigonometrischen Reihenentwicklung und beweist unterschiedliche Verallgemeinerungen des Eindeutigkeitssatzes. Er ist vermutlich von Eduard Heine für dieses Gebiet inspiriert worden, der sich in Halle mit Fourierreihen beschäftigt. [8, S. 196] Schon zu Beginn der 1870er Jahre ist sich Cantor der Tragweite der Ergebnisse seiner mengentheoretischen Erkenntnisse bewusst, veröffentlicht diese aber erst 1874, nachdem er in regelmäßigem Briefwechsel mit Richard Dedekind⁷ über seine Arbeiten und Beweise

⁴Ordentlicher Universitätsprofessor - veraltete Bezeichnung.

⁵„*De transformatione formarum ternariorum quadraticum*“ [8, S. 196]

⁶Außerordentlicher Universitätsprofessor.

⁷Die beiden lernen sich 1872 während einer Reise Cantors in der Schweiz zufällig kennen. [8, S. 196]

2 Georg Cantor

diskutiert hat. [10, 22f]

Im Anhang der funktionentheoretischen Veröffentlichung von 1872 über die Verallgemeinerungen des Eindeutigkeitssatzes⁸ befindet sich auf vier Seiten Cantors Theorie über die reellen Zahlen. Er approximiert diese von den rationalen Zahlen ausgehend mithilfe von Fundamentalfolgen und spricht bereits 1870 in einer Vorlesung im Sommersemester über seine Erkenntnisse, deren Bedeutung den Studierenden zu dieser Zeit noch nicht bewusst zu sein scheint. Seine „*Theorie der reellen Zahlen, die allein hingereicht hätte, ihm einen Platz in der Geschichte der Mathematik zu sichern*“ [15, 36f] erfordert genauere Betrachtung (vgl. Abschnitt 3.1, Seite 17).

Im Frühjahr 1874 lernt Georg Cantor Vally Guttmann, eine Freundin seiner Schwester Sophie, in Berlin kennen, mit der er sich rasch verlobt und schon im Sommer 1874 verheiratet. Die beiden führen eine innige Ehe, von der zahlreiche Briefe aus Cantors Nachlass zeugen. Die Familie wächst schnell, bis 1887 kommen sechs Kinder⁹ zur Welt, die wie ihr Vater umfassende Bildung genießen, aber keines von ihnen wird eine wissenschaftliche Karriere einschlagen. [15, S. 42]

Cantors Neugierde und Freude an der Entdeckung von Neuem und Unerwarteten in den mengentheoretischen Auseinandersetzungen führen ihn zur Untersuchung unendlicher Mengen. Er scheint sich an der dritten These seiner Dissertation zu orientieren:

„In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.

In der Mathematik ist die Kunst der Fragestellung wichtiger als die der Lösung.“ [15, S. 24f]

Cantor beschäftigt sich mit der Abzählbarkeit von Mengen und veröffentlicht seine Ergebnisse dazu im Jahr 1874¹⁰. Es handelt sich um bedeutende Beweise zur Abzählbarkeit der rationalen und transzendenten Zahlen, einen Beweis zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, womit er beweist, dass verschieden mächtige unendliche Mengen existieren und, dass eine echte Teilmenge des Kontinuums dem Kontinuum gleichmächtig ist¹¹. [15, S. 46]

⁸ „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“

⁹ Else (1875-1954), Gertrud (1877-1956), Erich (1879-1962), Anne-Marie (1882-1920), Margarethe (1885-1956), Rudolf (1887-1899) [15, S. 42]

¹⁰ „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“ [15, S. 46]

¹¹ Zum Beispiel: $[0; 1] \subset \mathbb{R}$, aber $|[0; 1]| = |\mathbb{R}|$.

„Für viele Mathematiker [. . .] ist der Moment, in dem Cantor bewiesen hat, dass $\mathbb{R}$ nicht mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist und somit unendliche Mengen verschiedener Mächtigkeiten existieren, der Geburtsmoment der Mengenlehre.“ [7, S. 144]

Um seinen Wirkungsbereich zu vergrößern plant Cantor schon längere Zeit seine Professur nach Berlin zu verlegen. Konkrete Pläne setzt er 1874 um, indem er sich mit einem privaten Brief um die frei gewordenen Stellen der Extraordinariate von Thomé und Frobenius bewirbt. Die Fakultätskommission in Halle spricht sich trotz der außerordentlichen Leistungen und der Anerkennung der Berliner Kollegen für den Verbleib in Halle aus, wovon der Universitätskurator das Ministerium in Kenntnis setzt. Cantors Bewerbung wird dort 1876 gegenstandslos zu den Akten gelegt. Damit einher geht die Streichung der Gehaltserhöhung von 900 Mark mit Jänner 1876, wahrscheinlich als Strafe, dass Cantor seine Versetzung selbst in die Wege leiten hat wollen und nicht die offizielle Berufung der Universität Berlin abgewartet hat. Das Ministerium lässt sich auch bei der bereits Ende 1877 eingebrachten Empfehlung von Rosenberger, nach dessen Emeritierung Cantor zum Ordinarius zu ernennen, bis ins Frühjahr 1879 Zeit. [15, S. 53–55]

Der Höhepunkt Cantors mathematischen Arbeits liegt in den Jahren zwischen 1877 und 1884. Aufgrund der Entdeckung, dass es im Unendlichen verschiedene Unterscheidungen gibt, will Cantor die verschiedenen Typen näher charakterisieren. Dazu untersucht er, ob eine Fläche (z.B.: das Einheitsquadrat mit seinen Randlinien: $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$) eineindeutig bzw. bijektiv auf eine Strecke mit ihren Endpunkten (z.B.: $[0, 1]$) abgebildet werden kann¹². [15, S. 48f] In einem Brief an Dedekind über sein positives Ergebnis schreibt er 1877: „*Je le vois, mais je ne le crois pas.*“ (*Ich sehe es, aber ich glaube es nicht.*). [10, S. 23]

In *Crelles Journal* veröffentlicht er den Aufsatz „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, der den noch fehlerhaften Beweis über die Gleichmächtigkeit der Kontinua unterschiedlicher Dimension enthält. Am Ende des Beweises formuliert Cantor die Kontinuumshypothese¹³ [8, S. 196f], die er mit viel Anstrengung – aber ohne Erfolg – seit 1877 zu beweisen bzw. widerlegen versucht hat. [16, S. 9]

¹²Brouwer zeigt 1912, dass diese Abbildung nirgends stetig ist, da Bijektionen zwischen Räumen mit verschiedenen Dimensionen nie stetig sein können. [7, S. 144]

¹³Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ($|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = \aleph_1$) ist die nächstgrößere nach der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ ($|\mathbb{N}| = \aleph_0$), dazwischen gibt es keine weiteren Mächtigkeiten. [16, S. 9] (Vgl. Unterabschnitt 3.3.3, S. 41)

2 Georg Cantor

Cantors ehemaliger Professor aus Berlin, Leopold Kronecker, steht den Ergebnissen sehr kritisch gegenüber. Er versucht deren Veröffentlichung in der von ihm herausgegebenen Zeitschrift *Crelles Journal* zu verhindern; nach Einschreiten Dedekinds und Weierstrass wird die Arbeit¹⁴ 1878 dennoch gedruckt. Kroneckers Widerstand rührt von seiner konstruktivistischen Grundhaltung her; er ist davon überzeugt, dass der Beweis über die Existenz eines mathematischen Objekts eine explizite Konstruktion voraussetzt, die in endlich vielen Schritten aus ganzen Zahlen erfolgen muss. Demnach lehnt er unendliche Mengen und Cantors Beweis zu deren Existenz ab. Kronecker zweifelt sogar die Existenz der irrationalen Zahlen an, auch deren Existenzbeweis ist unkonstruktivistisch. [7, S. 144f]

Zwischen 1879 und 1884 veröffentlicht er in den *Mathematische[n] Annalen* insgesamt sechs Arbeiten unter dem Titel „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“. Er schreibt darin über die Grundbegriffe der Mengenlehre¹⁵, seine Ideen zur Mächtigkeit, der transfiniten Zahlen und über seine Definition der reellen Zahlen sowie des Kontinuums. [8, S. 197]

Der intensive Kontakt und die Freundschaft zu Dedekind gehen ab 1881 zurück, nachdem Dedekind einen Ruf an die Universität Halle ablehnt, obwohl sich Cantor dafür ausspricht und Dedekinds Leistungen sehr hervorhebt. Letzten Endes wird die Stelle ohne Cantors Einfluss an Albert Wangerin vergeben. Die beiden Mathematiker halten erst gegen Ende der 1890er Jahre wieder regelmäßigen Briefkontakt. Dafür freundet sich Cantor mit dem schwedischen Mathematiker Gösta Mittag-Leffler an, der für seine Zeitschrift *Acta Mathematica* – die auch heute noch von Bedeutung ist – bekannte Autoren sucht, um ihre Arbeiten zu publizieren. Georg Cantor veröffentlicht ab 1883 wiederholt in französischer Sprache in den *Acta Mathematica* und tritt in regelmäßigen Briefkontakt mit dem Herausgeber Mittag-Leffler. Währenddessen kühlt sich das Verhältnis zwischen Kronecker und Cantor weiter ab. Besonders schwer trifft Cantor, dass sich sein ehemaliger Studienfreund Schwarz seinen mengentheoretischen Arbeiten gegenüber ebenfalls skeptisch äußert. Im Januar 1884 bewirbt sich Cantor noch einmal um eine Stelle an der Universität Berlin, bekommt aber wieder keine Zusage. Er glaubt Kronecker verhindere, dass er eine Stelle in Berlin bekommt, da ihre

¹⁴ „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ [8, S. 197]

¹⁵ Begriffe wie abgeschlossen, offen, dicht, isolierter Punkt, perfekt und zusammenhängend werden definiert.

Ansichten sehr konträr sind. Nachdem er erfährt, dass Kronecker in den *Acta Mathematica* beweisen will, dass Cantors Ergebnisse nicht stimmen können, äußert dieser wenig später in einem Brief an Mittag-Leffler all seinen angestauten Ärger.

In den folgenden Jahren wird Cantors wissenschaftliche Arbeit vom Ausbruch seiner schweren Krankheit überschattet. [15, S. 73–77]

„Die Auseinandersetzung um die Mengenlehre und der Kampf um ihre Anerkennung wären sicher anders verlaufen, hätte sie Cantor selbst mit ungebrochener Schaffenskraft und vollem Einsatz seiner temperamentvollen Persönlichkeit führen können.“ [15, S. 77]

Er leidet an einer manisch-depressiven Erkrankung, die im Frühsommer 1884 das erste mal in Erscheinung tritt und später immer wiederkehrt. Es scheint, als wäre seine mathematische Karriere beendet und er möchte seinen Fokus vermehrt auf philosophische Inhalte legen. Daneben beginnt er sich für die Bacon-Shakespeare-Theorie¹⁶ zu interessieren. [15, S. 79 , 82] Fast 12 Jahre später entschließt sich Cantor seine Studien zur Bacon-Shakespeare-Theorie zu veröffentlichen. Er beschäftigt sich nicht nur mit der Frage der Autorenschaft, sondern deutet bestimmte Passagen des Werks neu und versucht so Beweise dafür zu finden, dass Bacon der „wahre“ Autor der Dramen sei. [15, S. 84] Ab 1900 will er sich nicht mehr mit dem Thema auseinandersetzen, veröffentlicht danach aber immer noch kleinere Arbeiten und kündigt darüber hinaus sogar Vorlesungen an der Universität Halle im Sommersemester 1900 an. Die intensive Auseinandersetzung mit der Bacon-Shakespeare-Theorie geht mit den Schüben seiner immer wiederkehrenden Krankheit einher. [15, S. 91f] Er selbst vermutet, dass der Ausbruch der Krankheit mit den Reibungen, *„die ich vernünftiger Weise hätte vermeiden können“* [15, 80f] zusammenhängt – er meint damit die Ablehnung Kroneckers gegenüber seiner Arbeit im Gebiet der Mengenlehre. Purkert hingegen schreibt, dass der Konflikt die Krankheit nicht begünstigt habe und ihm die Ablenkung durch wissenschaftliche Betätigung sogar gut getan hätte. [15, 80f]

Nachdem in Göttingen 1885 ein Ordinariat frei geworden ist, Cantor sich aber nicht einmal auf der Liste der möglichen Bewerber befindet, scheint er die Hoffnung auf Versetzung an eine der bedeutenden deutschen Universitäten aufgegeben zu haben und richtet sich in Halle ein. 1886 kauft er für seine Familie ein Haus in der Hän-

¹⁶Es wurde - auch von berühmten Schriftstellern - behauptet, dass Francis Bacon und nicht Shakespeare der Autor der Shakespeare-Dramen ist. [15, S. 83f]

delstraße am damaligen Stadtrand von Halle¹⁷, das sich 1983 noch im Besitz seiner direkten Nachfahren befindet [32]. Dieses Haus wurde Treffpunkt bedeutender Wissenschaftler und Kulturträger. [10, S. 21] In den Jahren von 1886 bis 1888 pflegt er regen Austausch mit Philosophen, Mathematikern, Theologen und stellt sich den Diskussionen und Kritikern zu seinen bisher veröffentlichten Arbeiten zum Unendlichen. Er veröffentlicht vor allem in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*. [8, S. 197]

Cantor führt den bereits Mitte des 19. Jahrhunderts verfolgten Gedanken einer Vereinigung der deutschen Mathematiker aus. Ziel der Vereinigung ist der Gedankenaustausch und die Lösung mathematischer Probleme in Zusammenarbeit verschiedener Wissenschaftler. Mit Königsberger und Dyck verfasst er ein „Zirkular“, dass an alle deutschen Mathematiker adressiert ist und diese zur Teilnahme an der ein Jahr später stattfindenden Versammlung in Bremen auffordert. Dort wird die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)* durch Cantors Initiative von 26 Mathematikern gegründet, den Vorsitz übernimmt er bis 1893. [15, S. 121f, 126] Neben der Gründung der *DMV* ist Cantor an der Etablierung und regelmäßigen Durchführung internationaler Mathematikerkongresse¹⁸ beteiligt und engagiert sich für die Zusammenarbeit der Wissenschaftler. [15, S. 127f] Im letzten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts veröffentlicht Cantor neben seinen Arbeiten zur Bacon-Shakespeare-Theorie eine gesamte Darstellung seiner Arbeit zur Mengenlehre; beginnend 1892 im *Jahresbericht der DMV* („Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“), in der er zum ersten mal das Diagonalverfahren anwendet, um zu zeigen, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge größer ist als die der Menge selbst. [8, S. 198] Die Arbeit „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ erscheint zwischen 1895 und 1897 zweiteilig in den *Mathematischen Annalen* und bildet laut Zermelo

„[...] den eigentlichen Abschluss seines Lebenswerkes. Hier erhalten die Grundbegriffe und Ideen, nachdem sie sich im Laufe von Jahrzehnten allmählich entwickelt haben ihre endgültige Fassung, und viele Hauptsätze der ‚allgemeinen‘ Mengenlehre finden erst hier ihre klassische Begründung.“ [8, S. 198]

¹⁷Aufgrund seines vergleichsweise geringen Gehalts von nur 4000 Mark (1888) muss Cantor sehr wahrscheinlich auf die Hinterlassenschaft seines Vaters zurückgreifen. [15, S. 93]

¹⁸1897: Zürich; 1900: Paris; 1904: Heidelberg; 1908: Rom; fortführend jedes vierte Jahr (ausgenommen in der Zeit der beiden Weltkriege). [10, S. 27]

Im Vergleich zu den vorigen Arbeiten, verschiebt sich Cantors Fokus von der Betrachtung von Mengen auf die von Zahlen und ist deutlich systematischer aufgebaut.

Nach der Veröffentlichung 1897 publiziert Cantor keine großen Arbeiten mehr. Dennoch beginnen Mathematiker seine Ergebnisse zu würdigen und können auf verschiedenen Gebieten Probleme lösen und neue Wege einschlagen, die zuvor nicht möglich gewesen sind. [18, S. 469] Am *Internationalen Mathematikerkongress* 1897 in Zürich wird Cantors Arbeit erstmals öffentlich gewürdigt. Hadamard nennt Cantors Begriffe der Mengenlehre „nicht verzichtbar“, Hurwitz hebt in seinem Vortrag die „*Befruchtung der Funktionentheorie*“ durch seine Erkenntnisse hervor. Die bereits damals hoch angesehenen Forscher Hilbert, Hurwitz und Minkowski sehen in den mengentheoretischen Veröffentlichungen großes Potential und scheuen trotz der zahlreichen Gegner nicht davor zurück ihren Zuspruch zu äußern. Durch diese Unterstützer können bestimmt einige Vorurteile entkräftet und Gegner von der Bedeutung der Ergebnisse überzeugt werden. [18, S. 471f]

Gleichzeitig entdecken andere Mathematiker, die sich mit Cantors Veröffentlichungen auseinandersetzen, Widersprüche und Ungenauigkeiten, die aber in den folgenden Jahren behoben werden können. Vor allem Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel leisten einen großen Beitrag und stellen mit zehn Axiomen (ZFC¹⁹, s. Abschnitt 3.6 ab S. 46) das Gebiet der Mengenlehre auf eine neue Basis, durch die – bis dato – keine Widersprüche aufgetaucht sind. Es konnte allerdings noch nicht bewiesen werden, dass die ZFC-Axiome tatsächlich widerspruchsfrei sind. Ähnlich verhält es sich mit der von Cantor erstmals 1877 erwähnten Kontinuumshypothese, deren Unabhängigkeit von den Zermelo-Fraenkel-Axiomen erst im Jahr 1963 bewiesen werden hat können. Gödel beweist 1938, dass die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom in ZF nicht widerlegt werden können. Paul Cohen beweist 1963, dass die Hypothese auch nicht bewiesen werden kann. [15, S. 178]

Am Beginn des 20. Jahrhunderts scheint die wissenschaftliche Welt von Cantors Arbeit mehr und mehr überzeugt zu sein. Es werden Lehrbücher über die Grundlagen der Mengenlehre in verschiedenen Sprachen veröffentlicht, Vorlesungen gehalten und später bedeutende Mathematiker²⁰ befassen sich mit der Mengenlehre. [15, S. 145f]

¹⁹Das C steht für das Auswahlaxiom - *engl. Axiom of Choice*.

²⁰Sierpinski und Hausdorff.

Hausdorff veröffentlicht 1914 *Gründzüge der Mengenlehre* - eines der ersten Lehrbücher zur Mengenlehre und widmet es Cantor - „Schöpfer der Mengenlehre“. [8, S. 199].

2 Georg Cantor

Cantor wird von verschiedenen internationalen Institutionen geehrt:

„Wahl zum Ehrenmitglied der London Mathematical Society (1901) und der Mathematischen Gesellschaft zu Charkow sowie zum korrespondierenden Mitglied des R. Istituto Veneto die Scienze, Lettere ed Arti (Venezia), die Verleihung des Dr. math. honoris causa durch die Universität Christiania²¹ (1902), der Sylvester-Medaille durch die Royal Society (1904), des Ehrendoktorrats der Universität St. Andrews (1911).“ [18, S. 473]

Nachdem Cantor jeweils im Winter von 1902 bis 1904 immer wieder schwer unter seiner Erkrankung leidet [8, S. 198], wird er 1905 von seinen Verpflichtungen an der Universität freigestellt. [18, S. 474] Seine Lehrtätigkeit behält er noch bis zum Sommer 1913, allerdings ist er in den Wintersemestern der Jahre 1905, 1907²² und 1908, sowie vom Sommersemester 1911²³ bis zum Wintersemester 1912 beurlaubt und wird schon im Sommer 1913 mit 68 Jahren emeritiert. Auch nach seiner Emeritierung nimmt Cantor am Leben der Fakultät teil: er ist bei Veranstaltungen anwesend, unterzeichnet bis 1914 offizielle Dokumente und plant bis 1917 Vorlesungen zu halten. Aufgrund seines Gesundheitszustandes kann er seine Pläne nicht mehr umsetzen. [15, S. 165]

Für das Jahr 1915 und zu Ehren des 70. Geburtstages von Cantor möchte ein Komitee²⁴ durch Spenden eine Gedenkbüste aus Marmor finanzieren und an der Universität errichten, wofür ein Aufruf an internationale Mathematiker versendet werden sollte. Der Plan wird wegen des Ausbruchs des Ersten Weltkriegs aber nicht umgesetzt. Die Feier findet in kleinerem Rahmen an Cantors Geburtstag in seinem Privathaus in Halle statt, dennoch wird eine Marmorbüste überreicht, die von einem kleineren Kreis finanziert wurde. Nur zwei Jahre später erkrankt Cantor im Sommer 1917 wieder schwer, er wird in die Universitätsnervenklinik Halle gebracht, die er bis zu seinem Tod nicht mehr verlässt. Im Januar 1918 stirbt der große Mathematiker, aber nicht aufgrund seiner manisch-depressiven Erkrankung.

Über die Todesumstände gibt es verschiedene Berichte, Deiser schreibt, Cantor sei an einem Herzanfall gestorben [8, S. 199], Purkert und Ilgauds berichten von einem Durchbruch des Herzmuskels. [15, S. 166]

²¹Bezeichnung für Oslo vor 1925. [30]

²²Klinikaufenthalt von Oktober 1907 bis Juni 1908. [8, S. 198]

²³Klinikaufenthalt von September 1911 bis Juni 1912. [8, S. 198]

²⁴F. Bernstein, A. Gutzmer, D. Hilbert, W. Lorey.

2.2 Frühe Arbeiten

2.2.1 Über einfache Zahlensysteme - 1869

Am Beginn seiner akademischen Karriere beschäftigt sich Cantor mit der eindeutigen Darstellung reeller Zahlen durch Reihen. In seiner Arbeit *Über einfache Zahlensysteme* aus dem Jahr 1869 formuliert er die Fragestellung Eulers – die Anzahl der möglichen Darstellung einer natürlichen Zahl – um und sucht die Zahlensysteme, durch die eine natürliche Zahl eindeutig dargestellt werden kann. [15, S. 31f]

Jede natürliche Zahl n ist genau dann auf genau eine Weise durch ein Zahlensystem

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad (a_v < a_{v+1})$$

mit den Vielfachheiten β_v darstellbar, wenn $\{a_v\}$ von der Form

$$\{1, b_1, b_1 b_2, b_1 b_2 b_3, \dots\}, \quad (b_k > 1) \quad (2.1)$$

ist und $\beta_v \leq b_v - 1$:

$$n = \sum_{v=1}^N \beta_v \cdot b_1 b_2 \cdot b_1 b_2 b_3 \cdot \dots \cdot b_{v-1}, \quad b_0 = 1.$$

Die Zahlen β_v heißen die Ziffern im Zahlensystem (2.1). [12, S. 11]

Jede positive reelle Zahl r ist mit Hilfe eines Systems (2.1) darstellbar in der Form

$$r = c_0 + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_1 b_2} + \frac{c_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots,$$

wobei

$$c_k \leq b_k - 1 \text{ für } k \geq 1; \quad c_0 \text{ ganzzahlig. [12, S. 11]}$$

Setzt man für $b_k = 10$ bzw. $b_k = 2$ für alle k , so erhält man die dekadische bzw. die binäre/duale Darstellung reeller Zahlen.

Eine besondere Rolle spielt die Darstellung mit $b_k = k + 1$, woraus sich für natürliche Zahlen ($n \in \mathbb{N}$) die eindeutige Darstellung ergibt:

$$n = \sum_{v=1}^N \beta_v \cdot v!, \quad \beta_v \leq v.$$

Für (positive) reelle Zahlen lautet die Darstellung:

$$r = c_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v}{(v+1)!}. \quad (2.2)$$

Reihen der Form (2.2) werden Cantorsche Reihen genannt. [12, 11f]

2.2.2 Trigonometrische Reihen

Cantor beschäftigt sich, von Eduard Heine angeregt, mit trigonometrischen Reihen und der Eindeutigkeit der Fourierreihe. 1870 veröffentlicht er in *Crelle's Journal* den „Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen läßt“. [15, S. 34]

„Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergent und die nämliche Funktion $f(x)$ darstellt.“ [1, S. 83]

Es sei $f(x)$ eine Funktion, die gegeben ist durch für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihen, wobei a_n, b_n Folgen in $\mathbb{R}$ sind:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(x) + b_n \cos(x)).$$

Sind a_n, b_n beschränkt und monoton, kann für alle $x \in (0, 2\pi)$ gezeigt werden, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, womit Cantor gezeigt hat, dass jede Funktion $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe eindeutig dargestellt werden kann. [15, S. 34]

Cantor widmet sich der Frage, ob bei der Untersuchung der Eindeutigkeit der Fourierreihe auch unendliche Punktmengen möglich sind. Die Ergebnisse dazu veröffentlicht er 1872 in „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ und erkennt, dass für diese Untersuchungen die Theorie der reellen Zahlen noch nicht exakt genug formuliert worden ist, was ihn dazu motiviert im Anhang der Arbeit auf vier Seiten seine Theorie der reellen Zahlen zu erläutern. [15, S. 35f]

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

3.1 Theorie über die reellen Zahlen

Cantors Veröffentlichung aus dem Jahr 1872 – „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, vgl. dazu [6] – entsteht aus den vorangehenden Arbeiten zur Funktionentheorie und dem Beweis von 1870, der die Eindeutigkeit trigonometrischer Reihenentwicklung zeigt, vgl. Unterabschnitt 2.2.2.

Cantors Ziel ist es zu zeigen, dass für unendlich viele Werte für x aus dem offenen Intervall $(0; 2\pi)$ die Konvergenz oder die Übereinstimmung der Reihensummen vernachlässigt werden kann, ohne dass dabei auf die Gültigkeit des obigen Satzes verzichtet werden muss. Für diesen Beweis stellt er fest, dass die bisher gültige Theorie über die reelle Zahlenmenge für seine Überlegungen nicht exakt genug formuliert ist und befasst sich deshalb nach einleitenden Worten auf nur vier Seiten mit dem reellen Zahlbegriff.

Cantor baut seine Argumentation auf der Grundlage der rationalen Zahlen auf und nennt diese Menge „*das Gebiet A*“, nachfolgend mit $\mathbb{Q}^1$ bezeichnet. Als nächstes definiert er eine „*unendliche Reihe rationaler Zahlen*“ – eigentlich definiert er eine Folge – der Form:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

Diese rationale Folge besitzt die Eigenschaft, dass $a_n - a_{n+m}$ mit wachsendem n ($\in \mathbb{N}$) unendlich klein wird. Anders formuliert:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N, \text{ sodass } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ mit } n \geq N : (a_n - a_{n+m}) < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$$

¹ $\mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Diese Eigenschaft der Reihe (3.1) formuliert Cantor so: „Die Reihe [3.1] hat eine bestimmte Grenze b .“ [6, S. 10] Für weitere von (3.1) verschiedene Reihen

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n, \dots; \quad a''_1, a''_2, a''_3, \dots, a''_n, \dots; \quad \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

ergeben sich aufgrund der Verschiedenheit zu (3.1) auch unterschiedliche Grenzen $b', b'', \dots$. Vergleicht man zwei dieser Reihen (a_n, a'_n) und ihre Grenzen (b, b') miteinander, so gibt es drei mögliche Beziehungen:

- (i) $a_n - a'_n$ wird mit größerem n unendlich klein $\Rightarrow b = b'$
- (ii) $\exists N$, sodass $\forall n \geq N : a_n - a'_n > \varepsilon > 0 \Rightarrow b > b'$
- (iii) $\exists N$, sodass $\forall n \geq N : a_n - a'_n < \varepsilon < 0 \Rightarrow b < b'$

Diese Beziehungen ergeben sich ebenso für eine Folge a_n wie in (3.1) mit der Grenze b und einer rationalen Zahl $a \in \mathbb{Q}$:

- (i) $a_n - a$ wird mit größerem n unendlich klein $\Rightarrow b = a$
- (ii) $\exists N : \forall n \geq N : a_n - a > \varepsilon > 0 \Rightarrow b > a$
- (iii) $\exists N : \forall n \geq N : a_n - a < \varepsilon < 0 \Rightarrow b < a$

Cantor identifiziert die „Gesamtheit“ – eine treffendere Bezeichnung wäre wohl der Begriff Menge – aller Zahlengrößen b als „das Gebiet B “. Nach den bisherigen Ausführungen lassen sich die elementaren Rechenoperationen der rationalen Zahlen auf beide Gebiete (A und B) ausdehnen.

Betrachtet man die Zahlengrößen b, b', b'' aus der Menge B , so kann aus den Formeln

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

in Zusammenhang mit den Grenzen b, b', b'' der entsprechenden Folgen

$$a_1, a_2, \dots, \quad a'_1, a'_2, \dots, \quad a''_1, a''_2, \dots$$

die Gültigkeit folgender Beziehungen abgeleitet werden:

$$\lim (a_n \pm a'_n - a''_n) = 0, \quad \lim (a_n a'_n - a''_n) = 0, \quad \lim \left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n \right) = 0.$$

Daher ist die Bezeichnung *Grenze einer Reihe* (3.1) für die Werte aus B gerechtfertigt. Nun lässt sich nach demselben Schema, wie B aus A erzeugt wurde, aus B ein weiteres Gebiet C erzeugen, das alle Grenzen $c, c', c'', \dots$ enthält, die zu vorliegenden unendlichen Reihen

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots; \quad b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots; \quad b''_1, b''_2, \dots, b''_n, \dots$$

gehören, deren Glieder b_n nicht alle zum Gebiet A gehören. Zwischen den Werten aus C lassen sich dieselben Beziehungen zu den Zahlen b , wie vorher zwischen den Zahlengrößen $b \in B$ und allen $a \in A$, herstellen (vgl. S. 18).

Vergleicht man die Beziehungen zwischen den drei Gebieten A , B und C , so kann jedes $a \in A$ mit einem $b \in B$ gleichgesetzt werden, umgekehrt aber nicht jedes $b \in B$ mit einem $a \in A$. Die Gebiete B und C decken einander, sodass jedes $b \in B$ mit einem $c \in C$ und auch umgekehrt jedes $c \in C$ mit einem $b \in B$ identifiziert werden kann. Es existiert eine bijektive Zuordnung zwischen B und C .

Setzt man das bereits bekannte Schema fort, dass man aus dem Gebiet C ein weiteres Gebiet D erzeugt und so weiter, erhält man keine Zahlenwerte, die nicht schon in den vorangegangenen Gebieten enthalten sind. Mit Ausnahme des Gebiets A können alle weiteren mittels Fundamentalfolgen erzeugten Gebiete $B, C, D, \dots$ gleichgesetzt werden. Es sind alle Zahlen, die in B enthalten sind auch im Gebiet C und allen weiteren daraus erzeugten Gebieten enthalten. Es gilt $B = C = D = \dots$

Cantor hat die Menge der reellen Zahlen aus der Menge der rationalen Zahlen erzeugt und beweist damit, dass die rationalen Zahlen in den reellen dicht liegen. Außerdem können aus den reellen Zahlen durch Fundamentalreihen keine weiteren von $\mathbb{R}$ verschiedenen Zahlenmengen erzeugt werden.

Die Zahlengerade

In seinen weiteren Ausführungen beschreibt Cantor den „Zusammenhang der Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie“. [6, S. 13]

Er identifiziert die Punkte einer geraden Linie mit einer Maßeinheit und einem festgelegten Nullpunkt durch ihren Abstand von genau diesem. Steht der Abstand eines Punktes zur vorliegenden Maßeinheit in rationalem Verhältnis, kann er durch eine rationale Zahl identifiziert werden. Ist das Verhältnis zwischen Abstand und Maßeinheit nicht rational, so kann der Abstand bzw. die Zahl nicht durch rationale Zahlen angegeben, aber aus diesen konstruiert werden. Der Abstand kann als Folge durch $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mit den Eigenschaften wie in (3.1) zusammengesetzt werden, wobei sich die Folge mit größer werdendem n dem entsprechenden Punkt immer mehr annähert. Da die Folge der Form wie in (3.1) ist, besitzt sie auch eine Grenze bzw. einen Grenzwert $b \in B$, die bzw. der dann dem Abstand des Punkts vom Nullpunkt entspricht.

Cantor formuliert diesen Zusammenhang folgend:

„Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte 0 ist gleich b , wo b die der Reihe [3.1] entsprechende Zahlengröße ist.“ [6, S. 13]

Für die umgekehrte Zuordnung formuliert Cantor ein Axiom, „[...] weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein“. [6, S. 14]

Um zum eigentlichen Ziel der Arbeit im Bereich der trigonometrischen Reihen zurückzukehren, definiert er zunächst Begriffe für bestimmte Mengen, mit denen er im weiteren Verlauf arbeitet.

Definition (Grenzpunkt). *Ein Grenzpunkt einer Punktmenge P ist ein Punkt, der Geraden mit der Eigenschaft, dass in jeder seiner Umgebungen unendlich viele Punkte aus P liegen. Ein Grenzpunkt kann selbst in der Menge P vorkommen.*

Eine Umgebung sei jedes Intervall, das den Punkt im Inneren hat. [6, S. 14]

Bemerkung. *Der Begriff „Grenzpunkt“ ist gleichbedeutend mit „Häufungspunkt“.*

Definition (Abgeleitete Punktmenge). Sei P eine Punktmenge. Die Menge aller Grenzpunkte von P wird mit P' bezeichnet und die erste abgeleitete Punktmenge von P genannt.

Eine Punktmenge P besitzt nur dann eine abgeleitete Punktmenge, wenn P aus nicht nur endlich vielen Punkten besteht.

Beispiel. Sei $P = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$, so gilt $P' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = P'' = \dots$ und $P' = P'' = \dots$.

Beispiel. Sei $P = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\}$, dann ist $P' = \{0\}$ und es gibt keine Menge P'' , da P' bereits endlich viele Punkte enthält. Die Menge $P = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\}$ ist somit eine Menge der 1^{ten} Art, da sie nur eine abgeleitete Punktmenge besitzt.

Das letzte Beispiel ist für Cantors Beweis in der Arbeit *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* von besonderer Bedeutung. Er betrachtet Mengen der v -ten Art, also Mengen P , die v Ableitungen besitzen, $P^{(v)}$ – die v^{te} Ableitung dieser Mengen – enthält endlich viele Punkte, womit keine weitere abgeleitete Menge $P^{(v+1)}$ existiert.

Dann beweist Cantor für diese Mengen der v^{ten} Art, dass der Satz über die trigonometrische Reihenentwicklung einer Funktion auch für Werte x aus Mengen v^{ter} Art gültig ist. [6, 15f]

Der Beweis über die Eindeutigkeit dieser trigonometrischen Reihen wird fortgeführt, bis feststeht, dass die gesuchte Funktion linear ist. Ab diesem Schritt ist der Beweis analog wie in „Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt“.

Weitere Ausführungen über diesen Beweis werden vernachlässigt, da der Beweis für die mengentheoretische Arbeit Cantors nicht so bedeutend wie seine Theorie über die reellen Zahlen auf den ersten Seiten dieses Aufsatzes ist.

3.2 Abzählbarkeit

Definition. Eine Menge M heißt abzählbar, falls (i) oder (ii) gilt:

(i) M ist endlich,

(ii) es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$.

Cantor definiert den Begriff *abzählbar unendlich* über die Äquivalenz von Mengen 1878 in *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Wie in obiger Definition festgelegt wird jedem Element der einen genau ein Element der anderen Menge – und umgekehrt – zugeordnet; es existiert eine Bijektion. [4]

Mit anderen Worten: Eine Menge ist genau dann abzählbar, wenn ihre Elemente mithilfe der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ durchnummeriert bzw. durchgezählt oder alle Elemente der Menge auf nummerierte Plätze verteilt werden können.

Die Abzählbarkeit für endliche Mengen ergibt sich daraus intuitiv, denn die Elemente einer endlichen Menge, die in beliebiger Ordnung angeordnet sind, können vom ersten bis zum letzten Element durchgezählt bzw. durchnummeriert werden.

Die Abzählbarkeit für unendliche Mengen lässt sich durch eine eindeutige Zuordnung oder bijektive Funktion zwischen einer unendlichen Menge und den natürlichen Zahlen zeigen. Cantors Beweise für die Abzählbarkeit der ganzen, rationalen sowie algebraischen Zahlen folgen weiter unten in diesem Abschnitt, zuerst sollen aber noch einige Beispiele die Abzählbarkeit unendlicher Mengen veranschaulichen.

Natürliche gerade Zahlen - $\mathbb{N}_g$

Es sei $\mathbb{N}_g = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$, die Menge der geraden Zahlen. Die Menge $\mathbb{N}_g$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ und es gibt intuitiv *doppelt so viele* natürliche wie gerade Zahlen. Aber es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_g$, mit $f : n \mapsto 2n$. Obwohl $\mathbb{N}_g$ in der Menge $\mathbb{N}$ zur Gänze enthalten ist, existiert eine bijektive Abbildung zwischen beiden Mengen. Also ist $\mathbb{N}_g$ abzählbar unendlich und gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ selbst.

Analog kann ein Beweis für die Abzählbarkeit der ungeraden natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_u$ geführt werden. Eine bijektive Abbildung könnte $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_u$ mit $f : n \mapsto 2n + 1$ sein.

Primzahlen - $\mathbb{P}$

Es sei $\mathbb{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Primzahlen. $\mathbb{P}$ enthält unendlich viele Elemente und ist eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen, es gilt $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Angenommen man ordnet die Primzahlen ihrer Größe nach beginnend mit der kleinsten: $\mathbb{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots\}$. Dann existiert eine bijektive Zuordnung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$, mit $f : n \mapsto p_n$, womit die Äquivalenz bzw. Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{P}$ gezeigt und $\mathbb{P}$ abzählbar unendlich ist. Intuitiv enthält $\mathbb{P}$ *sogar weniger* Elemente als $\mathbb{N}_g$ oder $\mathbb{N}_u$, dennoch sind die Mengen gleich mächtig.

Ganze Zahlen - $\mathbb{Z}$

Die Abzählbarkeit der ganzen Zahlen lässt sich mit Hilfe des Zahlenstrahles recht einfach beweisen. Man betrachtet die Menge der ganzen Zahlen dargestellt auf dem Zahlenstrahl. Der natürlichen Zahl 0 wird die ganze Zahl 0 zugeordnet, 1 wird 1 zugeordnet, 2 wird -1 zugeordnet und so fort. Der Abstand zu Null wird nach jeder zweiten Zahl um 1 vergrößert, das Vorzeichen alterniert.

Es kann eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(n) = (-1)^{n-1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ gefunden werden, aus der folgende Zuordnungstabelle resultiert:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...

Diese Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. Es werden alle ganzen Zahlen der Menge $\mathbb{Z}$ durch die Zuordnungsvorschrift aufgezählt, woraus nach Definition folgt, dass die Mengen der ganzen und natürlichen Zahlen äquivalent und gleich mächtig sind. Obwohl wie bei den zuvor genannten Beispielen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ gilt und es vermeintlich *doppelt so viele* ganze wie natürliche Zahlen gibt, ist auch $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich.

Rationale Zahlen - $\mathbb{Q}$

Der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen gestaltet sich nicht mehr so intuitiv wie die der bereits erwähnten Zahlenmengen. Die „Zählweise“ muss richtig gewählt werden, da bereits das Intervall $[0; 1]$ unendlich viele rationale, aber nur zwei natürliche Zahlen enthält. Vergleichbare Intervalle enthalten von den bereits erwähnten abzählbaren Mengen ebenfalls nur endlich viele Elemente.

Um den Beweis der Abzählbarkeit führen zu können, sucht Cantor nach einer geeigneten Vorgehensweise, um allen rationalen Zahlen jeweils eine natürliche Zahl bijektiv zuzuordnen. Dafür erstellt er eine Tabelle mit nummerierten Zeilen und Spalten. In jedem Feld dieser Tabelle befindet sich eine Bruchzahl, deren Zähler die Nummer der Spalte und deren Nenner die Nummer der Zeile des jeweiligen Feldes ist. Auf diese Weise entsteht eine Aufzählung aller rationalen Zahlen in Bruchschreibweise. Folgende Abbildung stellt die Tabelle dar (Brüche sind vollständig gekürzt, bereits zugeordnete grau). Damit die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ bewiesen ist, muss allen rationalen eine

	1		2		3		4		5		6	...
1	1		2		3		4		5		6	
		↙		↙		↙		↙		↙		
2	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3	
		↙		↙		↙		↙		↙		
3	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		2	
		↙		↙		↙		↙		↙		
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		2		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$	
		↙		↙		↙		↙		↙		
5	$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$		1		$\frac{6}{5}$	
	↓	↙		↙		↙		↙		↙		
6	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{6}$		1	
⋮												

Abbildung 2: 1.Diagonalargument - Abzählbarkeit $\mathbb{Q}$

natürliche Zahl zugeordnet werden. Um das zu erreichen, erfolgt die Zuordnung diagonal, weshalb dieser Beweis oft als *Cantors 1. Diagonalargument* bezeichnet wird. Die Vorgehensweise ist in der Tabelle durch Pfeile angedeutet, beginnt links oben und setzt sich über die Diagonalen fort. Würde die Zuordnung zeilen- bzw. spaltenweise erfolgen, würden ausschließlich die Werte der gewählten Zeile bzw. Spalte zugeordnet werden. Da in jeder Spalte bzw. Zeile unendlich viele Zahlen stehen, würden diese

den natürlichen Zahlen zugeordnet werden, alle Zahlen aus anderen Zeilen oder Spalten aber nicht. [34, 5f]

Der Beweis lässt sich auch am Koordinatengitter nachvollziehbar darstellen und besteht im Wesentlichen aus dem Abzählen von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten (x -Koordinate als Zähler und y -Koordinate als Nenner der Bruchzahl) in zwei horizontal benachbarten Quadranten (z.B. I und II, aber nicht I und III), wodurch sowohl positive als auch negative rationale Zahlen zugeordnet werden. Die Zuordnung erfolgt für alle Punkte (x, y) mit $x > 0$. Man betrachtet das ganzzahlige Koordinatengitter $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}$. Auf diese Weise können in abzählbar unendlich vielen Schritten alle ratio-

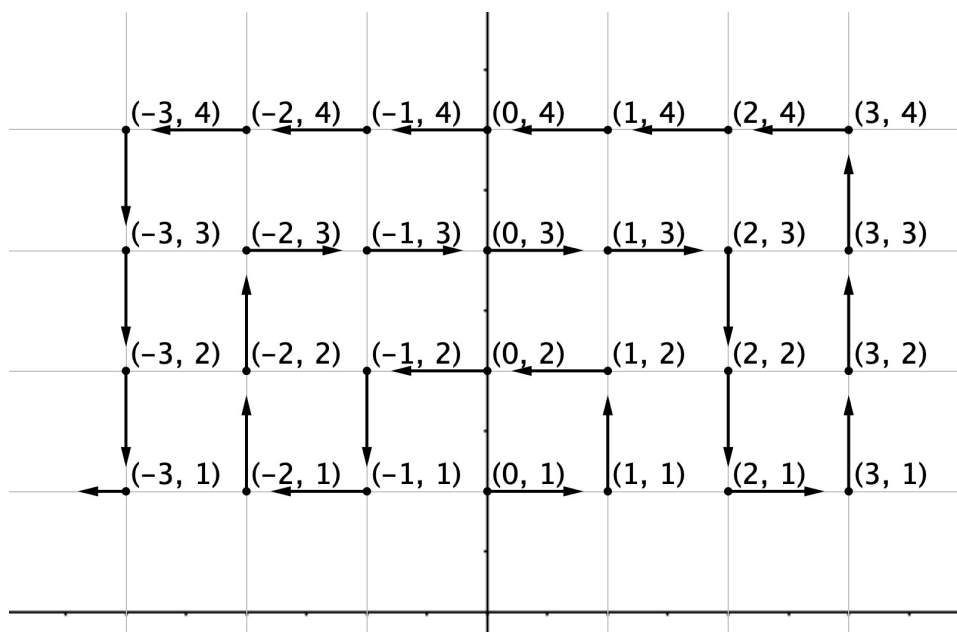


Abbildung 3: Zahlengitter - Punkte mit ganzzahligen Koordinaten (Ausschnitt)

nalen Zahlen den natürlichen Zahlen zugeordnet werden. Überspringt man dann nicht vollständig gekürzte Brüche und bereits zugeordnete rationale Zahlen, erhält man eine bijektive Zuordnung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, mit der die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ bewiesen ist.

Ein Ausschnitt der oben beschriebenen bijektiven Zuordnung wird durch die Abbildung auf der Folgeseite dargestellt. Die Brüche sind vollständig gekürzt, ihre zugeordnete natürliche Zahl steht in Klammern, bereits zugeordnete rationale Zahlen werden grau dargestellt und das Zuordnungsschema durch Pfeile angedeutet.

...	...	$\leftarrow -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$	$\leftarrow -\frac{1}{6}$ (37)	$\leftarrow \frac{0}{6} = 0$	$\leftarrow \frac{1}{6}$ (36)	$\leftarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\leftarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\leftarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\leftarrow \frac{5}{6}$ (35)
									$\uparrow$
$-\frac{4}{5}$ (21)	$\rightarrow -\frac{3}{5}$ (22)	$\rightarrow -\frac{2}{5}$ (23)	$\rightarrow -\frac{1}{5}$ (24)	$\rightarrow \frac{0}{5} = 0$	$\rightarrow \frac{1}{5}$ (25)	$\rightarrow \frac{2}{5}$ (26)	$\rightarrow \frac{3}{5}$ (27)	$\rightarrow \frac{4}{5}$ (28)	$\frac{5}{5} = 1$
$\uparrow$								$\downarrow$	$\uparrow$
$-\frac{4}{4} = 1$	$-\frac{3}{4}$ (16)	$\leftarrow -\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\leftarrow -\frac{1}{4}$ (15)	$\leftarrow \frac{0}{4} = 0$	$\leftarrow \frac{1}{4}$ (14)	$\leftarrow \frac{2}{4}$	$\leftarrow \frac{3}{4}$ (13)	$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{5}{4}$ (34)
$\uparrow$	$\downarrow$						$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$\frac{4}{3}$ (20)	$-\frac{3}{3} = -1$	$-\frac{2}{3}$ (6)	$\rightarrow -\frac{1}{3}$ (7)	$\rightarrow \frac{0}{3} = 0$	$\rightarrow \frac{1}{3}$ (8)	$\rightarrow \frac{2}{3}$ (9)	$\frac{3}{3} = 1$	$\frac{4}{3}$ (29)	$\frac{5}{3}$ (33)
$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$				$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$-\frac{4}{2} = 2$	$-\frac{3}{2}$ (17)	$-\frac{2}{2} = 1$	$-\frac{1}{2}$ (3)	$\leftarrow \frac{0}{2} = 0$	$\leftarrow \frac{1}{2}$ (2)	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{3}{2}$ (12)	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{5}{2}$ (32)
$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$-\frac{4}{1}$ (19)	$\leftarrow -\frac{3}{1}$ (18)	$-\frac{2}{1}$ (5)	$\leftarrow -\frac{1}{1}$ (4)	$\frac{0}{1}$ (0)	$\rightarrow \frac{1}{1}$ (1)	$\frac{2}{1}$ (10)	$\rightarrow \frac{3}{1}$ (11)	$\frac{4}{1}$ (30)	$\rightarrow \frac{5}{1}$ (31)

Daraus ergibt sich die Zuordnung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f : n \mapsto f(n)$ nach folgender Tabelle:

Algebraische Zahlen

Georg Cantor veröffentlicht 1874 auf nur wenigen Seiten den Aufsatz „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“, in dem er im ersten Teil die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen beweist und im zweiten schlussfolgert, dass die Menge der reellen Zahlen bzw. eine Teilmenge davon überabzählbar sein muss. Es handelt sich um einen weiteren Beweis (neben dem von Liouville), der zeigt, dass in jedem beliebigen reellen Intervall unendlich viele transzendente Zahlen enthalten sind. Weiters muss die Menge der transzendenten Zahlen ($\mathbb{T}$) ebenso wie $\mathbb{R}$ und auch jedes Kontinuum überabzählbar sein, da $\mathbb{A} \cup \mathbb{T} = \mathbb{R}$ gilt. Der Beweis zur Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen wird weiter unten im Unterunterabschnitt 3.3 ab Seite 29 wiedergegeben.

Cantor definiert zuerst algebraische Zahlen als Lösungen von Polynomen der Form

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + a_2\omega^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0, \quad (3.2)$$

$n \in \mathbb{N}$ ist der Grad des Polynoms und $a_k \in \mathbb{Z}$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten des Polynoms. Die Koeffizienten besitzen keine gemeinsamen Teiler und das Polynom ist irreduzibel. Aufgrund dieser Voraussetzung ist die Gleichung der Form (3.2), der eine bestimmte algebraische Zahl „genügt“ eindeutig bestimmt. Dazu kommt, dass jedes Polynom dieser Form höchstens so viele Lösungen besitzt wie es sein Grad n angibt.

Cantor bezeichnet diese Mengen noch als „Inbegriff von Zahlengrößen“. Weiters merkt er an, dass in jeder beliebigen Umgebung einer reellen Zahl α unendlich viele algebraische Zahlen enthalten sind und dennoch könnte man die algebraischen Zahlen den natürlichen Zahlen bijektiv zuordnen. Dazu möchte er auf den folgenden Seiten „denjenigen Anordnungsmodus mitteile[n], welcher, wie [ihm] scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.“ [2, S. 115]

Ausgehend von einer Gleichung wie in (3.2) definiert Cantor N als die *Höhe* eines dieser Polynome durch

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Aufgrund der Voraussetzungen von oben entspricht jeder algebraischen Zahl genau ein Polynom der Form (3.2) und daher genau ein Wert der Höhe N . Und zu jeder

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Höhe N existieren nur abzählbar viele, nämlich höchstens so viele wie der Grad des Polynoms angibt, algebraische Zahlen, die Lösung des Polynoms sind.

Im nächsten Schritt ordnet Cantor die algebraischen Zahlen ihrer Größe nach beginnend mit den algebraischen Zahlen, die Lösungen von Polynomen der Höhe $N = 1$ sind, gefolgt von denen, die Lösungen der Polynome der Höhe $N = 2$, $N = 3$ und so weiter, sind. Dadurch ergibt sich eine Zahlenfolge, in der alle algebraischen Zahlen vorkommen. Ordnet man die Folge der Zahlen nach obigem Schema, so kommt jede algebraische Zahl an einer bestimmten Position vor. Also gibt es eine eindeutige Zuordnung zwischen der algebraischen und der natürlichen Zahlenmenge, die Mengen sind gleich mächtig. [2, 115f]

Eine „moderne“ Interpretation dieses Beweises könnte aufgrund der später festgelegten Begrifflichkeiten folgend lauten:

Für Polynome mit dem Grad n der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

sei $h(p)$ die Höhe eines jeden dieser Polynome definiert durch

$$h(p) = n + \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass es nur endlich viele Polynome der Form (3.3) gibt, für die $m = h(p)$ gilt. Nach der Definition der Höhe eines Polynoms gilt $n < m$ und jedes Polynom der Höhe m besitzt höchstens n Nullstellen. [9, 10f]

Setzt man nun $Q(m)$ als die Menge aller Nullstellen aller Polynome mit der Höhe m , so sind alle Mengen $Q(m)$ abzählbar; sie sind sogar endlich, da es nur endlich viele Polynome mit der Höhe m gibt, die jeweils höchstens endliche viele Lösungen besitzen. Da jedes der Polynome p eine Höhe m besitzt, sind dessen Lösungen in einer der Mengen $Q(m)$ enthalten. Die Vereinigung aller Mengen $Q(m)$ enthält daher alle reellen algebraischen Zahlen ($\mathbb{A}$).

$$\mathbb{A} = \bigcup_{i=0}^m Q(i), \quad m \in \mathbb{N}$$

Die Menge $\mathbb{A}$ ist eine Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen und ist daher ebenfalls abzählbar.

3.3 Überabzählbarkeit

Definition. Eine Menge M heißt überabzählbar, wenn M nicht abzählbar ist bzw. keine bijektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert.

Überabzählbarkeit wird ausgehend von Abzählbarkeit definiert. Eine weitere Argumentationsweise wäre, dass eine Menge B genau dann überabzählbar ist, wenn die Vereinigung der Mengen A und B überabzählbar, A aber abzählbar ist.

Transzendente Zahlen - $\mathbb{T}$

Den Beweis der Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen $\mathbb{T}$ führt Cantor direkt nach der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen in seinem wenige Seiten umfassenden Aufsatz von 1874 „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“.

Cantor wählt dazu eine Folge unendlich vieler beliebiger reeller Zahlen „nach irgend einem Gesetze“. Diese seien

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_v, \dots \quad (3.4)$$

Zu beweisen ist, dass für jedes Intervall $[a; b]$, $a < b$ eine Zahl² $x_0 \in [a; b]$ bestimmt werden kann, die nicht in der Zahlenfolge (3.4) vorkommt.

Er wählt dann die ersten beiden Zahlen aus der Folge (3.4), die im Intervall $]a; b[$ enthalten sind, bezeichnet diese als a' und b' und bildet mit diesen ein weiteres Intervall $[a'; b']$, das zur Gänze in $[a; b]$ enthalten ist. Nach diesem Schema setzt die Beweisführung fort und man erhält die Folge von Intervallen $[a; b]$, $[a'; b']$, $[a''; b'']$, $\dots$, von denen jedes Intervall, abgesehen von $[a; b]$, im vorhergehenden zur Gänze enthalten ist.

Die Grenzen $a, a', a'', \dots$ und $b, b', b'', \dots$ dieser Intervalle kommen in der reellen Zahlenfolge (3.4) vor und es gilt $a < a' < a'' \dots$ und $\dots < b'' < b' < b$.

²Es lassen sich sogar unendlich viele Zahlen mit diesen Eigenschaften bestimmen.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Bildet man nach beschriebenem Schema so viele Intervalle als möglich, gibt es nur zwei mögliche Fälle:

1. Die Anzahl der Intervalle ist endlich und das letzte Intervall ist $[a^v; b^v]$, dann kann in diesem Intervall höchstens eine Zahl x_0 enthalten sein, die nicht in der Folge (3.4) enthalten ist, womit die Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen für diesen Fall bewiesen ist.
2. Im anderen Fall gibt es unendlich viele Intervalle dieser Gestalt. Betrachtet man die Zahlenfolgen der Grenzen der Folge von Intervallen, so ist $a < a' < a'' < \dots$ streng monoton steigend und beschränkt, weshalb ein Grenzwert a^∞ dieser Folge existiert. Für $b > b' > b'' \dots$ existiert ebenfalls ein Grenzwert b^∞ , da die Folge streng monoton fallend und beschränkt ist.

Die beiden Grenzwerte sind dann gleich – $a^\infty = b^\infty$ – „*Ein Fall, der bei dem Inbegriffe (ω) aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt*“. Nach Definition der Intervalle und der erhaltenen Grenzwerte, ist die Zahl $a^\infty = b^\infty = x_0$ nicht in der Zahlenfolge (3.4) enthalten.

Falls aber $a^\infty < b^\infty$ gilt, kommt jede Zahl $x_0 \in [a^\infty; b^\infty]$ nicht in der anfangs festgelegten Zahlenfolge (3.4) vor. [2, 22f]

Wählt man als Zahlenfolge (3.4) die Menge aller algebraischen Zahlen, so findet man mit dem im Beweis beschriebenen Schema unendlich viele reelle Zahlen, die der Menge der algebraischen Zahlen nicht angehören. Somit ist die Mächtigkeit der transzendenten Zahlen $\mathbb{T}$ größer als die der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$.

Dieser Beweis ist nicht auf die reellen Zahlen beschränkt, sondern kann auch auf die Menge der komplexen Zahlen erweitert werden und es kann bewiesen werden, dass die Menge der komplexen algebraischen Zahlen abzählbar und die der komplexen transzendenten Zahlen überabzählbar unendlich ist. [2, S. 118]

Nach der Axiomatisierung der Mengenlehre reicht für den Beweis der Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen $\mathbb{T}$ folgende Argumentation aus:

Da die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ abzählbar und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich sind, aber $\mathbb{A} \cup \mathbb{T} = \mathbb{R}$ gilt, muss die Menge $\mathbb{T}$ überabzählbar sein.

Reelle Zahlen - $\mathbb{R}$

Der erste Beweis zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen findet sich im Briefverkehr zwischen Dedekind und Cantor. Die Formulierungen sind umständlich und ohne Mengenbegriffe, weshalb Dedekind Vorschläge zur Vereinfachung liefert, die Cantor in den Beweis einarbeitet. [12, S. 29–31]

Die erste Beweisführung ähnelt dem Vorgehen im Beweis der Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen. Heute ist der Beweis mit dem sogenannten *Cantorschen 2. Diagonalverfahren* verbreitet, das er um 1890 im Jahresbericht der *Deutschen Mathematischen Vereinigung* veröffentlicht. [5, S. 278]

Cantor zeigt nur, dass die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen im Intervall $(0; 1)$ größer ist als die der natürlichen Zahlen. Dieser Beweis reicht als Nachweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ aus, da er bereits 1877 im Briefverkehr mit Dedekind zeigen konnte, dass überabzählbare Mengen auf echte Teilmengen ebendieser bijektiv abgebildet werden können.

$$(0; 1) \subset \mathbb{R} \text{ ist überabzählbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \text{ ist überabzählbar.}$$

Die Beweisführung erfolgt indirekt mit der Annahme, dass alle reellen Zahlen des Intervalls $(0; 1)$ in aufsteigender Reihenfolge und in Dezimalbruchentwicklung³ dargestellt werden können.

Es seien $a_{ij} \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ die Ziffern der reellen Zahlen x_i . Angenommen die Folge der reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots$ enthalte alle reellen Zahlen des Intervalls $(0; 1)$ in aufsteigender Reihenfolge und lasse sich folgend darstellen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots \\ x_2 & = & 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots \\ x_3 & = & 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots \\ & \vdots & \\ & & . \end{array}$$

Es kann eine Zahl der Form $z = 0, b_1b_2b_3b_4 \dots$ unter Berücksichtigung der Zahlen $x_1, x_2, \dots$ konstruiert werden, die in $(0; 1)$ enthalten ist, aber mit keiner der Zahlen x_i aus der Aufzählung oben übereinstimmt.

³Nicht abbrechende Dezimalzahlen, z.B.: $0,5 \hat{=} 0,4999 \dots$

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Für die Ziffern b_i von z soll $b_i = \begin{cases} 1 & , \quad a_{ii} = 2 \\ 2 & , \quad a_{ii} \neq 2 \end{cases}$ gelten.

Diese Vorschrift ist nur eine Möglichkeit eine Zahl z zu konstruieren, allerdings sollte man für die Ziffern b_i von z nicht 0 wählen, da eine Dezimalzahl mit nur endlich vielen Dezimalstellen entstehen könnte, die nicht mit der Dezimalbruchentwicklung der Zahlen x_i vergleichbar ist.

Die so konstruierte Zahl z unterscheidet sich von jeder Zahl $x_1, x_2, \dots$ zumindest um die Dezimalstelle a_{ii} und ist daher in der obigen Auflistung aller x_i sicher nicht enthalten. Aber z ist nach Definition in $(0; 1)$ enthalten.

Dieses Ergebnis widerspricht der ursprünglichen Annahme, die Zahlen x_i seien alle reellen Zahlen des Intervalls $(0; 1)$ und lässt den Schluss zu, dass die Menge der reellen Zahlen des Intervalls $(0; 1)$ den natürlichen Zahlen nicht bijektiv zugeordnet werden können. Die Mächtigkeit dieser Mengen ist verschieden. [9, 12f]

Mehrdimensionale Kontinua

Georg Cantor beweist 1877, dass offene zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ eineindeutig aufeinander abgebildet werden können, woraus deren Gleichmächtigkeit gefolgert werden kann. Seine ersten Beweisentwürfe diskutiert er, wie bereits bei vorigen Arbeiten, mit Dedekind per Brief und übernimmt dessen Korrekturen, Hinweise und Vereinfachung in seine Ausführungen.

Cantor zeigt in seinem ersten Beweis, dass die eindimensionale Menge $[0; 1]$ einer mehrdimensionalen Menge $[0; 1] \times [0; 1]$ eineindeutig zugeordnet werden kann und diese gleichmächtig sind. [12, S. 32] Wie im Beweis zur Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ reicht es die Gleichmächtigkeit echter Teilmengen zu zeigen um die Behauptung zu beweisen.

In „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ von 1878 verallgemeinert Cantor diese Theorie und zeigt, dass auch mehrdimensionale Mengen auf eindimensionale bijektiv abgebildet werden können und daher $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ gilt.

Da diese Arbeit Cantors bahnbrechende Erkenntnisse hervorheben soll, wird seine erste Beweisidee für die Gleichmächtigkeit von $[0; 1]$ und $[0; 1] \times [0; 1]$ dargestellt, obwohl diese noch Lücken aufweist und vereinfacht wird.

Die Koordinaten aller Elemente $x = (x_1; x_2)$ in $[0; 1] \times [0; 1]$ sowie die Werte $y \in [0; 1]$ sollten wie bereits oben im Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen durch unendliche⁴ Dezimalbrüche in folgender Form dargestellt werden:

$$x_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\dots \quad y = 0, b_1b_2b_3\dots \quad \text{mit } a_{ij}, b_k \in \{0; 1; 2; \dots 9\}.$$

Cantor wählt dann eine Zuordnung, bei der abwechselnd die Ziffern der ersten und zweiten Koordinate eines Elements aus $[0; 1] \times [0; 1]$ als Dezimalstelle einer Zahl aus $[0; 1]$ verwendet wird:

$$\begin{pmatrix} 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots \end{pmatrix} \leftrightarrow 0, a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}a_{13}a_{23}\dots = 0, b_1b_2b_3\dots$$

Es gilt: $b_{2 \cdot n - 1} = a_{1n}$ und $b_{2 \cdot n} = a_{2n}$. Die Elemente von $[0; 1] \times [0; 1]$ können auf diese Weise den Elementen von $[0; 1]$ zugeordnet werden.

Bei der Zuordnung von $[0; 1] \rightarrow [0; 1]^2$ tritt ein Problem auf:

$$0,3506060\dots \mapsto \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5666\dots \end{pmatrix}.$$

Die erste Koordinate des zweidimensionalen Elements ist kein unendlicher Dezimalbruch, muss aber als solcher dargestellt werden. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5666\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2999\dots \\ 0,5666\dots \end{pmatrix} \mapsto 0,25969696\dots$$

Diese Abbildungsvorschrift ist nicht bijektiv und reicht nicht um Gleichmächtigkeit zu zeigen. [12, 32f] Dedekind weist Cantor in einem Brief auf dieses Problem hin, worauf dieser am 23.06.1977 erwidert:

„Leider haben Sie mit ihrem Einwurfe ganz recht; glücklicherweise trifft derselbe aber nur den Beweis, nicht die Sache; ich beweise nämlich gewissermaßen mehr als in meiner Absicht lag...“ [27]

⁴Auf diese Korrektur weist Dedekind Cantor in seinem Antwortbrief hin.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Die Ungenauigkeit dieses Beweises kann durch einen Trick verhindert werden, mit dem sich Cantor selbst nicht beschäftigt, sondern kurz darauf mit der Verallgemeinerung des Satzes die problematische Zuordnung umgeht. Enthält eine Zahl $y \in [0; 1]$ Null als Ziffer einer Dezimalstelle, so werden die Ziffern zu einem Block zusammengefasst, bis eine Ziffer auftritt die nicht Null ist. Für obiges Beispiel bedeutet das:

$$0,350606\dots = 0,3|5|06|06|06|\dots$$

Die Zuordnung dieser Zahl erfolgt nach bereits erwähntem Schema und liefert:

$$0,350606\dots \mapsto \begin{pmatrix} 0,30606\dots \\ 0,50606\dots \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise wird jeder als unendlicher Dezimalbruch dargestellten Zahl $y \in [0; 1]$ genau ein $x \in [0; 1] \times [0; 1]$ und umgekehrt zugeordnet und es treten aufgrund der vorkommenden Nullen keine endlichen Dezimalbruchdarstellungen mehr auf.

Damit wurde eine eindeutige Zuordnungsvorschrift zwischen $[0; 1]$ und $[0; 1] \times [0; 1]$ gefunden und die Gleichmächtigkeit des zwei- und eindimensionalen Kontinuums bewiesen. [13, 25f]

Am 25.06.1877 übermittelt Cantor die Verallgemeinerung des Beweises der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}$ und schickt vier Tage später eine weitere Vereinfachung des Beweises. Dedekind antwortet am 02.07.1877:

„Ihren Beweis habe ich noch einmal geprüft, und ich habe keine Lücke darin entdeckt; ich glaube gewiss, dass Ihr interessanter Satz richtig ist, und beglückwünsche Sie zu demselben.“ [29]

3.3.1 Ordinalzahlen

Ordinalzahlen⁵ können für endliche geordnete Mengen als Nummerierung eines Elements in einer bestimmten Aufzählung verstanden werden. Für unendliche Mengen funktioniert das nicht, da bei unendlich vielen Elementen in der Gesamtbetrachtung die Position eines einzelnen nicht festgemacht werden kann.

Der Begriff der Ordnungszahl kann nicht ohne den der *wohlgeordneten Menge* beschrieben werden. Daher soll zuerst dieser genauer definiert werden.

Definition. Eine nichtleere Menge M heißt *wohlgeordnet*, mit einer in M definierten Relation $<$ und man schreibt $\langle M, < \rangle$ für eine wohlgeordnete Menge mit der Relation $<$, wenn

1. je zwei Elemente $a, b \in M$ vergleichbar sind und genau eine der Relationen gilt:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b,$$

2. und Transitivität gilt: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$.

Für zwei wohlgeordnete Mengen $\langle M, < \rangle$ und $\langle N, < \rangle$ sei der Ordnungstyp ($o.t.(\dots)$ – engl.: *order type*) so zugeordnet, dass für zwei Wohlordnungen gilt:

$$o.t.(\langle M, < \rangle) = o.t.(\langle N, < \rangle) \Leftrightarrow o.t.(\langle M, < \rangle) \text{ und } o.t.(\langle N, < \rangle) \text{ sind gleich lang.}$$

Definition (Ordinalzahl). Die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen heißen *Ordinalzahlen*.

Für endliche geordnete Mengen ergeben sich natürliche Zahlen als Ordnungszahlen. Die trivial wohlgeordnete leere Menge besitzt den Ordnungstyp 0. Die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist endlich, geordnet und vom Ordnungstyp 5.

Es ist $o.t.(\langle \{0, 1, 2, 3, 4\}, < \rangle) = 5$ und endliche geordnete Mengen der Form $\bar{n} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ entsprechen dem Ordnungstyp bzw. der Ordinalzahl $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der natürlichen Zahlen bildet ein Anfangsstück aller folgenden Ordinalzahlen. Bemerkenswert ist, dass für endliche geordnete Mengen Ordinalzahl und Kardinalzahl ident sind. Die Ordinalzahl der „kleinsten“ unendliche Menge – $\mathbb{N}$ – heißt ω . [8, S. 252]

⁵Die Begriffe Ordinalzahl und Ordnungszahl werden synonym verwendet.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

„Es ist natürlich, konkret $\mathbb{N}$ selbst als das durch ω bezeichnete Objekt zu wählen, und dann gilt $\omega = \mathbb{N} = \aleph_0$.“ [8, S. 252]

Wohlgeordnete Mengen die bijektiv aufeinander abgebildet werden können, wobei ihre Ordnung erhalten bleibt, sind einander ähnlich und besitzen daher die selbe Ordinalzahl. Daraus und über die Eigenschaften von Ordnungstypen geht hervor, dass Ordinalzahlen selbst geordnet werden können.

Definition (Ordnung der Ordinalzahlen). Seien α, β Ordinalzahlen, dann setzt man: $\alpha < \beta$ falls $\langle M, < \rangle \prec \langle N, < \rangle$, wobei $\langle M, < \rangle, \langle N, < \rangle$ Wohlordnungen sind und $\alpha = o.t.(\langle M, < \rangle), \beta = o.t.(\langle N, < \rangle)$.

Definition. Für alle Ordinalzahlen α setzt man:

$$W(\alpha) = \{\beta \mid \beta \text{ ist Ordinalzahl und } \beta < \alpha\}.$$

Die Relation $<$ hat auf den Ordinalzahlen die Eigenschaft, dass für alle Ordinalzahlen α und alle $\beta < \alpha$ für die nach Definition $\beta \in W(\alpha)$ gilt, die Menge $W(\alpha)$ ebenfalls eine Wohlordnung mit der Ordinalzahl α ist.

Da Ordinalzahlen ihrer Größe nach geordnet werden können, müssen die Begriffe *Nachfolger* und *Limesordinalzahl* genauer definiert werden.

Definition (Nachfolger von Ordinalzahlen). Sei α eine Ordinalzahl.

Dann heißt $\alpha + 1$ Nachfolger von α und wird definiert durch:

$$\alpha + 1 = o.t.(\langle W(\alpha), < \rangle + \{x\}), \text{ mit } x \notin W(\alpha).$$

Für x kann die Ordnungszahl α gewählt werden, da $\alpha \notin W(\alpha)$.

Definition (Nachfolger- und Limesordinalzahlen). Sei α eine Ordinalzahl, dann ist

1. α eine Nachfolgerordinalzahl, wenn $\alpha = \beta + 1$ für eine Ordinalzahl β gilt und β ist Vorgänger von α wenn $\beta = \alpha - 1$ gilt,
2. α eine Limesordinalzahl, wenn $\alpha \neq 0$ keine Nachfolgerordinalzahl ist.

Cantor hat in seinen Artikeln *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* in §11 (s. [3, S. 195–197]), die zwischen 1878 und 1883 veröffentlicht wurden, Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen definiert, die von späteren Bearbeitungen als richtig eingestuft und erweitert wurden. Die Ordinalzahlarithmetik soll durch folgende Abbildung dargestellt werden. Beginnend mit den Natürlichen Zahlen setzen die folgenden Ordinalzahlen spiralförmig fort, wobei sich die Wachstumsgeschwindigkeit pro ω verdoppelt.

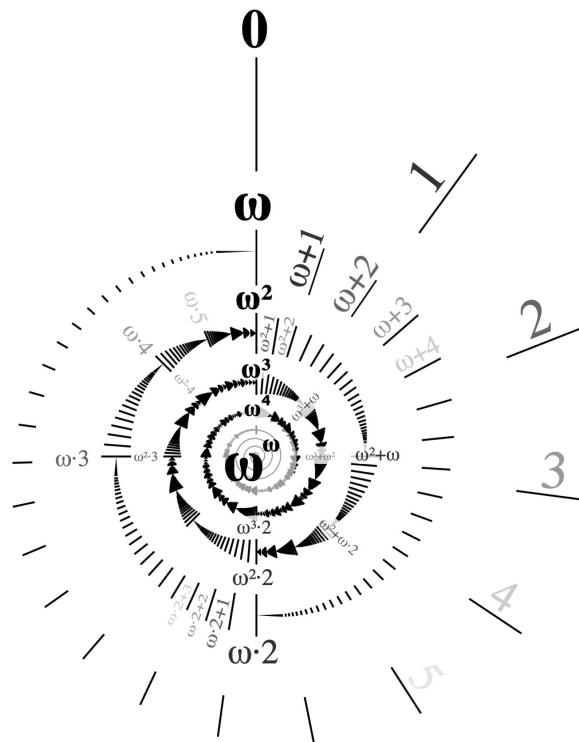


Abbildung 4: Spiralförmige Darstellung der Ordinalzahlen von 0 bis ω^ω

Im Gegensatz zur modernen Definition der *Neumann-Zermelo*-Ordinalzahlen gilt die Definition der Ordinalzahlen von Cantor und Felix Hausdorff in der axiomatisierten Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel nicht ohne Einschränkungen. Dennoch ist Cantors Definition der Ordinal- bzw. Ordnungszahlen trotz der auftretenden Probleme von großer Bedeutung, da viele Aspekte der Cantorsche Ordinalzahlen, wie in ihrer ursprünglichen Definition, auch in der „modernen“ Definition zu finden sind.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

John von Neumann (Meschkowski nennt ihn Hans) definiert die Menge der natürlichen Zahlen ausgehend von der leeren Menge im Jahr 1923, während er noch bei Zermelo studiert, in einem Brief an diesen. [13, S. 61] Die so entstehende Menge kann als Menge von Ordinalzahlen aufgefasst werden, da jede Zahl die Menge ihrer Vorgänger enthält und weitere Ordinalzahleigenschaften erfüllt sind. [8, 260f]

0	$\mapsto \emptyset$		
1	$\mapsto \{\emptyset\}$	$0 \cup \{0\} = \{0\}$	
2	$\mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$	
3	$\mapsto \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$\mapsto \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$	$n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ω	$\mapsto$		$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega+1$	$\mapsto$	$\omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega+\omega$	$\mapsto$		$\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ordinalzahlen sind also nicht nur Objekte, die es für die Elemente beliebiger wohlgeordneter Mengen möglich machen dessen Position genauer zu beschreiben, sondern bieten in verallgemeinerter Form die Möglichkeit, die Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich aus der leeren Menge und weiterer Mengenbildung zu konstruieren. Das Konzept der Ordinalzahl macht die Beweisführung der vollständigen Induktion erst möglich und ist wesentlich für die Definition der Kardinalzahlen, die die Anzahl der Elemente einer Menge angibt.

3.3.2 Kardinalzahlen

Bei der Untersuchung unendlicher Mengen wollte sich Cantor nicht auf Mengen gleicher unendlicher Mächtigkeit beschränken, sondern die Mächtigkeit selbst präziser beschreiben. Dazu sollte die Mächtigkeit unendlicher Mengen als neue Zahl – *Kardinalzahl* – definiert werden. Er beschreibt die Begriffe 1899 in einem Brief an Dedekind:

„Liegt eine Menge M vor, so nenne ich den Allgemeinbegriff, welcher ihr und noch allen ihr äquivalenten Mengen zukommt, ihre Kardinalzahl oder auch ihre Mächtigkeit.“ [13, S. 39]

Für endliche Mengen ist diese Beschreibung eindeutig und klar. Die Mächtigkeit einer endlichen Menge entspricht der Anzahl ihrer Elemente. Endliche, gleich mächtige Mengen können bijektiv aufeinander abgebildet werden; sie sind äquivalent und gleichmächtig, ihnen wird daher die selbe Kardinalzahl zugeordnet.

Die kleinste Kardinalzahl unendlicher Mengen bezeichnet Cantor mit dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets $\aleph_0$ ⁶. Sie beschreibt die Mächtigkeit aller Mengen, die der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ äquivalent sind. Die Mächtigkeit der reellen Zahlen bezeichnet er mit $\aleph$.

Die Kardinalzahlarithmetik unterscheidet sich grundlegend von der Arithmetik mit reellen Zahlen.

Betrachtet man die endlichen Mengen A , B und deren Mächtigkeit $|A| = a$ und $|B| = b$, dann gilt:

$$|A \cup B| \leq a + b.$$

Für disjunkte⁷ endliche Mengen C , D und deren Mächtigkeit $|C| = c$ und $|D| = d$, gilt:

$$|C \cup D| = c + d.$$

⁶Aleph-Null

⁷ $C \cap D = \emptyset$, C und D besitzen keine gemeinsamen Elemente.

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Für unendliche Mengen gelten diese Regeln nicht. Betrachtet man beispielsweise die Mächtigkeit der Menge der natürlichen geraden sowie ungeraden Zahlen $|\mathbb{N}_g| = |\mathbb{N}_u| = \aleph_0$, so gilt für die Vereinigung dieser disjunkten Mengen gilt:

$$|\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u| = |\mathbb{N}|, \text{ aber auch } \aleph_0 = \aleph_0.$$

$$\Rightarrow \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Betrachtet man in weiterer Folge die Mächtigkeit der reellen algebraischen Zahlen $|\mathbb{A}| = \aleph_0$ und die der transzendenten Zahlen $|\mathbb{T}| = \aleph$, so gilt:

$$|\mathbb{A} \cup \mathbb{T}| = |\mathbb{R}|, \text{ und } |\mathbb{R}| = \aleph.$$

$$\Rightarrow \aleph_0 + \aleph = \aleph.$$

Die vage Definition der Kardinalzahl lässt einiges offen. Fügt man beispielsweise zur Menge der reellen Zahlen eine einelementige Menge $\{a\}$ hinzu, so ist die Vereinigung $\mathbb{R} \cup \{a\}$ immer noch zu $\mathbb{R}$ äquivalent und gleichmächtig.

Dies gilt auch, wenn anstelle von einelementigen Mengen unendliche Mengen hinzugefügt werden. Problematisch wird das für die Menge aller Mengen M . Dann ist nämlich $\mathbb{R} \cup \{M\}$ immer noch gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, aber Mengen, die sich selbst enthalten, führen zu Widersprüchen bzw. Antinomien, siehe dazu Abschnitt 3.5 ab Seite 44. [13, S. 145–147]

Um den Begriff der Kardinalzahl widerspruchsfrei zu definieren, bedarf es festgelegter Regeln, nach denen Mengen gebildet werden dürfen, sodass keine Widersprüche entstehen. Genau diese sind durch die Axiomatisierung des heute gebräuchlichen Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel gegeben und werden in Abschnitt 3.6 ab Seite 46 betrachtet.

Unter Berücksichtigung der Axiome können sowohl *Kardinalzahlen* als auch die *Mächtigkeit einer Menge* definiert werden. Besonders elegant geht das mit Hilfe der bereits erwähnten Ordinalzahlen.

Definition (Kardinalzahl). *Sei α eine Ordinalzahl.*

Dann heißt α Kardinalzahl, falls gilt:

Für alle $\beta < \alpha$ ist $|W(\beta)| < |W(\alpha)|$.

Definition (Mächtigkeit einer Menge). Sei M eine Menge.

Dann ist die Mächtigkeit oder Kardinalität von M , in Zeichen $|M|$, definiert durch:

$|M| =$ „die kleinste Ordinalzahl α mit: $|M| = |W(\alpha)|$ “.

Auf diese Weise werden bestimmte Ordinalzahlen als Kardinalzahlen zur Beschreibung der Mächtigkeit von Mengen ausgewählt. Die Charakterisierung der Mächtigkeit schreibt den Kardinalzahlen einen gewissen Zahlencharakter zu, der für unendliche Mengen aber keinesfalls wie der intuitive Zahlbegriff aufgefasst werden darf. [8, 264f]

3.3.3 Kontinuumshypothese

Georg Cantor formuliert die Kontinuumshypothese erstmals in seinem 1878 veröffentlichten Aufsatz „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“. Sie ist das Ergebnis aus zahlreichen Vorarbeiten. Dazu gehört der Beweis, dass $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, es also „verschieden große“ Unendlichkeiten gibt.

Die Hypothese besagt, dass es zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ und der der reellen $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ keine weiteren Kardinalzahlen gibt, dass also $\aleph_1$ die nächstgrößere Kardinalzahl nach $\aleph_0$ ist.

Mangels passender Begrifflichkeiten in der frühen Phase formuliert er in seiner Schlussfolgerung, dass „lineare Mannigfaltigkeiten“ aus zwei Klassen von Zahlen bestünden. Die erste sei den natürlichen Zahlen äquivalent, die Zweite dem geschlossenen Intervall $[0; 1]$.

„Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.“ [4, 40f]

Im weiteren Verlauf seiner Arbeit wird Cantor noch feststellen, dass es darüber hinaus noch viel „größere“ Mächtigkeiten gibt. Der nach Cantor benannte Satz zeigt, dass die Potenzmenge einer Menge immer größere Mächtigkeit besitzt als die Menge selbst, dementsprechend gilt für die Potenzmenge der reellen Zahlen $\aleph_1 = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. Dieser Satz wird im Abschnitt 3.4 betrachtet.

Innerhalb des Zermelo-Fraenkel-Axiomensystems gibt es unter Mathematikern Zweifel, ob das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese nicht zu Problemen in der

3 Wissenschaftliche Beiträge zur Mengenlehre

Mengenlehre führen würden. Allerdings zeigt Kurt Gödel 1938, dass wenn ZF ⁸ widerspruchsfrei ist, dies auch für ZFC (ZF mit Auswahlaxiom) gilt. Im selben Jahr zeigt Gödel, dass wenn ZF unter Annahme der Gültigkeit der Kontinuumsypothese widersprüchlich ist, dies bereits für ZF gilt. Die Kontinuumsypothese kann mit dem Axiomensystem Zermelo-Fraenkel also nicht widerlegt werden.

Erst 1963 zeigt Paul J. Cohen mit Hilfe der Beweismethode des „forcing“, dass die Kontinuumsypothese in der Mengenlehre nach ZF nicht bewiesen werden kann. Da sie in ZFC auch nicht widerlegbar ist, ist die Kontinuumsypothese von ZFC unabhängig.

Es hat über 80 Jahre gedauert, bis die von Cantor postulierte Kontinuumsypothese vom mengentheoretischen Axiomensystem unabhängig erklärt werden konnte. Der „Erfinder“ der Mengenlehre wäre mit diesem Ergebnis vermutlich weniger zufrieden gewesen, er hätte wahrscheinlich erst gar nicht damit gerechnet. [10, 85f]

3.4 Satz von Cantor

Satz (Satz von Cantor). *Für jede beliebige Menge M sei $\mathcal{P}(M) = \{x \mid x \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M .*

Dann gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Der Satz sagt aus, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge immer größer ist als die Mächtigkeit der Menge selbst.

Für endliche Mengen ist das anschaulich nachzuvollziehen:

Sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Dann ist $|M| = n$ und $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Offensichtlich ist $n < 2^n$.

Für unendliche Mengen genügt folgender Beweis.

Beweis. *Man betrachte die Funktion $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ mit $f : x \mapsto \{x\}$.*

Dann ist f eine bijektive Abbildung auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$

und es gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Um die Gleichheit der Mächtigkeiten auszuschließen reicht es zu zeigen, dass jede Funktion $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ nicht surjektiv ist.

Angenommen $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ wäre bijektiv.

⁸Das Zermelo-Fraenkel Axiomensystem ohne Auswahlaxiom

Definiere $U := \{x \in M : x \notin f(x)\}$.

Weil f bijektiv ist, gibt es ein $u \in M : f(u) = U$.

Falls $u \in U$ wäre, dann wäre wegen $U = f(u)$ auch $u \in f(u)$, was aber $u \notin f(u)$ widerspricht.

Wenn $u \notin U$, dann müsste wegen $u \notin U = f(u)$ aber $u \in U$ sein, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Die Annahme der Existenz einer bijektiven Funktion $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ führt zu Widersprüchen, es kann so eine Funktion also nicht geben. [11, S. 150] $\square$

Das Ergebnis dieses Satzes liefert weitere Erkenntnisse: Es gibt nicht nur die „zwei Unendlichkeiten“ $\aleph_0$ und $\aleph_1$, sondern darüber hinaus noch weitere, die nach dem „Satz von Cantor“ anhand ihrer Mächtigkeit vergleichbar sind.

Für die Menge der natürlichen Zahlen gilt $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, aber ist $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_1 = |\mathbb{R}|$?

Beweis. Zunächst sei festgehalten, dass jede zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen zu ebendiesen gleichmächtig ist, es gilt $]|0; 1| = |\mathbb{R}|$.

Es kann jede reelle Zahl $x \in]0; 1|$ in Binärdarstellung der Form $x = 0, z_1 z_2 z_3 z_4 \dots$ mit $z_1 \in \{0; 1\}$ dargestellt werden.

Dann ist die Abbildung $f :]0; 1| \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $f(x) = \{n \mid z_n = 1\}$ bijektiv. [37, S. 130] $\square$

Die Abbildung f ordnet der Zahl $0,010011010\dots$ beispielsweise die Menge $\{2, 5, 6, 8, \dots\}$ zu. [37, S. 130]

Der Satz von Cantor liefert unter Annahme der Kontinuumshypothese:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0, |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \aleph_1, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = \aleph_2, \dots,$$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

3.5 Antinomien der Cantorschen Mengenlehre

In der *naiven Mengenlehre* wurden notwendige Grundbegriffe und Regeln zur Bildung und dem Umgang mit Mengen nicht exakt genug definiert. Daher ist es möglich nach Cantors Vorgaben Mengen zu bilden, die auf Widersprüche führen.

In folgendem Abschnitt werden die drei bekanntesten Antinomien aufgezählt.

3.5.1 Burali-Forti (1.Cantorsche) Antinomie

Bei der Betrachtung von Ordinalzahlen und der *Menge aller Ordinalzahlen* kann folgende Antinomie gefunden werden:

Sei W die Menge aller Ordinalzahlen. Dann ist W wohlgeordnet und besitzt selbst eine Ordinalzahl α . Aber die Ordinalzahl α ist größer als alle ihr vorangegangenen Ordinalzahlen $\beta < \alpha$. Da α auch eine Ordinalzahl ist muss α in W enthalten sein.

Es müsste α gleichzeitig in W enthalten sein und auch nicht.

Cantor ist 1895 auf diese Antinomie gestoßen, zwei Jahre später hat sie Burali-Forti ebenfalls entdeckt und veröffentlicht, weshalb sie auch als „Burali-Forti Antinomie“ bekannt ist. [12, S. 144]

3.5.2 2.Cantorsche Antinomie

Cantors zweite Antinomie entsteht bei der Bildung einer Menge M , die alle Mengen enthält.

Jede Menge $A \subseteq M$ mit beliebiger Mächtigkeit α ist in M enthalten. Dann kann zu jeder Kardinalzahl α eine Menge $A_\alpha \in M$ ausgewählt werden.

Vereinigt man alle A_α und bildet die Vereinigungsmenge $B = \bigcup A_\alpha$, so muss B selbst eine Mächtigkeit besitzen. Es sei $|B| = \alpha_0$. Nach dem Satz von Cantor muss aber $|\mathcal{P}(B)| = \alpha'_0 > \alpha_0$ sein, denn die Potenzmenge einer Menge besitzt eine größere Mächtigkeit als die Menge selbst.

Weil B die Vereinigung aller aus M ausgewählten Mengen A_α ist, gibt es eine Menge $|A_{\alpha'_0}| = \alpha'_0$, die Teilmenge von B ist. Dann muss $\alpha'_0 \leq \alpha_0$ sein.

Das ergibt $\alpha'_0 > \alpha_0$ und $\alpha'_0 \leq \alpha_0$ – ein Widerspruch.

Es existiert keine Menge aller Mengen, ein solches Konstrukt kann nur eine echte Klasse sein, das beweist Cantor selbst in einem Brief an Dedekind. [12, 144f]

3.5.3 Russelsche Antinomie

Bertrand Russel entdeckt die nach ihm benannte Antinomie bei der Bildung der Menge $M = \{A \mid A \notin A\}$, die sich nicht selbst als Element enthält.

Dann gibt es zwei Fälle:

1. $M \in M$, nach Definition ist dann $M \notin M$,
2. $M \notin M$, dann ist nach Definition $M \in M$.

Also $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$, ein Widerspruch. [10, S. 83]

Ein anschauliches Beispiel dafür ist der Bücherkatalog einer Bibliothek, in dem alle Bücher der Bibliothek registriert werden. Dieser Katalog ist aber auch ein Buch der Bibliothek und müsste sich selbst registrieren.

Angenommen es gibt einen Katalog, der alle Bücher registriert, die sich nicht selbst registrieren. Registriert sich dieser Katalog dann selbst, oder nicht?

Eine weitere Veranschaulichung ist der Barbier, der alle Männer eines Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier dann selbst, oder nicht?

Beide Gedankenspiele veranschaulichen Russels Antinomie und führen auf den gleichen Widerspruch. [13, S. 43]

3.6 Axiomatisierung durch Zermelo und Frankel

Die Axiomatisierung der Mengenlehre ist nach dem Auftreten grundlegender Antinomien unumgänglich gewesen. Diese Antinomien lassen nicht nur am Fachgebiet der Mengenlehre, sondern auch an Cantors Ergebnissen Zweifel aufkommen. Mathematiker stellen sich die Frage, ob Mengenlehre, so wie sie von Cantor betrieben wurde und seine Ergebnisse, in Anbetracht der Antinomien überhaupt haltbar sind.

In gewissem Sinne ist es dem Gebiet der nichteuklidischen Geometrie ähnlich ergangen. Es ist erst durch ein Axiomensystem auf ein fundiertes Grundgerüst gestellt worden, sodass – bis dato – keine Widersprüche entdeckt worden sind. Diese Axiome definieren keine Begriffe, sie geben nur den Umgang mit den Objekten der Geometrie vor. [13, S. 54]

Es ist Ernst Zermelo, der im Jahr 1908 das erste Axiomensystem der Mengenlehre veröffentlicht. Zermelo ist Cantors Student und wird bereits während seines Studiums von dessen mengentheoretischen Arbeiten stark geprägt.

Wie in der Axiomatisierung der Geometrie verzichtet Zermelo darauf, den Begriff der „Menge“ und andere Grundbegriffe explizit zu definieren. Zunächst führt er $\in$ als Relation zwischen Mengen und ihren Elementen ein und legt die Eigenschaften der $\in$ -Relation durch die Axiome fest. [13, S. 58] Zermelos Axiomensystem von 1908 umfasst sieben Axiome, die 1922 durch zwei weitere ergänzt werden. Dabei handelt es sich um das „Ersetzungsschema“ von Fraenkel und das „Fundierungsaxiom“, das auf Fraenkel, von Neumann und Zermelo zurückgeht. [8, S. 418]

David Hilbert fordert, dass für die großen mathematischen Theorien deren Widerspruchsfreiheit bewiesen werden solle. Dieses Vorhaben hat sich aber schwieriger herausgestellt als gedacht. 1931 kann Kurt Gödel zeigen, dass beispielsweise die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht mit den Mitteln der Zahlentheorie beweisbar ist. Ein System von Regeln kann mit ebendiesen also nicht als richtig bewiesen werden.

„Das Problem der Widerspruchsfreiheit ist systemimmanent und nicht behebbar.“ [8, S. 418]

Nur wenige Jahre nach Gödels Beweis zeigte Gerhard Gentzen, dass die Zahlentheorie widerspruchsfrei ist, benutzt aber den „Satz über die transfinite Induktion“ aus der

Mengenlehre, weshalb dieser Beweis den von Gödels aber nicht konterkariert. Denn dieser hat gezeigt, dass die Widerspruchsfreiheit eines Systems mit den Axiomen desselben nicht gezeigt werden kann, ohne dabei auf andere Disziplinen zurückzugreifen. [13, 153f]

Im folgenden Abschnitt werden die Zermelo-Frankel-Axiome wiedergegeben. Als Vorlage dient der Abschnitt „Das Axiomensystem ZFC“ in Oliver Deiser *Einführung in die Mengenlehre*, vgl. [8, S. 422–436].

Extensionalitätsaxiom

„Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Mengen enthalten.“

Für alle Mengen x, y gilt $x = y$ genau dann, wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$.

Auf diese Weise wird eine Menge über ihre enthaltenen Elemente bestimmt.

Existenz der leeren Menge

„Es existiert eine Menge, welche keine Elemente hat.“

Die leere Menge kann auch durch das Extensionalitätsaxiom, als die Menge die keine Elemente enthält festgelegt werden. Für die leere Menge schreibt man: $\emptyset = \{\}$.

Paarmengenaxiom

„Zu je zwei Mengen x, y existiert eine Menge z , die genau x und y als Elemente hat.“

Man schreibt $\{x, y\}$ für die Paarmenge der Elemente x und y . Da auch $x = y$ möglich ist existiert die Einermenge $\{x\}$ und ein geordnetes Paar wird definiert durch $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Für die Gleichheit zweier geordneter Paare gilt: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

Vereinigungsmengenaxiom

„Zu jeder Menge x existiert eine Menge y , deren Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind.“

Diese Vereinigungsmenge ist aufgrund des Extensionalitätsaxioms eindeutig bestimmt und man schreibt:

$$y \in \bigcup x \Leftrightarrow \exists z \in x \text{ mit } y \in z$$

. Unter Verwendung des Paarmengenaxioms ergibt sich die übliche Schreibweise:

$$x \cup y = \bigcup \{x, y\}, \text{ mit } z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$$

.

Aussonderungsschema

„Zu jeder Eigenschaft ξ und jeder Menge x gibt es eine Menge y , die genau die Elemente von x enthält, auf die ξ zutrifft.“

Diese Menge y sei mit $\{u \in x \mid \xi(u)\}$ festgelegt.

Es wird bewusst nicht der Begriff Aussonderungssaxiom verwendet, da das Schema ξ , nach dem die Elemente von y ausgesondert werden, frei wählbar ist. Es gibt unendlich viele ξ , demnach müsste für jedes mögliche ξ ein Aussonderungssaxiom formuliert werden.

Das Aussonderungsschema garantiert auch die Existenz der Schnittmenge von Mengen und der Mengendifferenz für passende ξ .

Das Aussonderungsschema verhindert die Russelsche-Antinomie, da in einer Menge y nur Elemente aus einer vorgegebenen Menge x enthalten sein können, für die ξ zutrifft und Mengen nicht aus beliebigen Objekten gebildet werden können.

Unendlichkeitsaxiom

„Es existiert eine Menge x , die die leere Menge als Element enthält und die mit jedem ihrer Elemente y auch $\{y\}$ als Element enthält.“

Also kann $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$ sein, wobei die Existenz der Menge x erst durch das folgende Potenzmengenaxiom garantiert ist.

Potenzmengenaxiom

„Zu jeder Menge x existiert eine Menge y , die genau die Teilmengen von x als Elemente besitzt.“

Die Potenzmenge einer Menge x wird mit $\mathcal{P}(x)$ bezeichnet. Dieses Axiom garantiert die Existenz unendlicher Mengen, wie die oben erwähnte Menge $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$.

Ersetzungsschema

„Zu jeder funktionalen Eigenschaft ξ und jeder Menge M existiert eine Menge N , die genau diejenigen y als Elemente enthält, für welche ein $x \in M$ existiert mit $\xi(x, y)$.“

Intuitiv kann ξ als Funktion aufgefasst werden. Das Schema besagt, dass das Bild einer Menge wieder eine Menge ist.

Es kann als freier formuliertes Aussonderungsaxiom angesehen werden, das aus dem Axiomensystem gestrichen werden könnte, ohne die Gültigkeit und Stärke von ZF(C) zu beeinträchtigen.

Fundierungsaxiom

„Jede nichtleere Menge x hat ein Element y , das mit x kein Element gemeinsam hat.“

Das Fundierungsaxiom lässt die Bildung von Mengen auch nur aus bereits vorhandenen Mengen zu und schließt zyklische Mengen, die sich mit der $\in$ -Relation wieder selbst enthalten, aus. Es verhindert die 1. Cantorsche Antinomie, die Bildung einer Menge, die alle Mengen als Element enthält.

Dieses Axiom geht auf Johann von Neumanns „Beschränktheitsaxiom“ zurück.

Auswahlaxiom

„Ist x eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge y , die mit jedem Element von x genau ein Element gemeinsam hat.“

Dieses Axiom entspringt dem intuitiven Mengenbegriff, aber besitzt dennoch einen besonderen Charakter. Die Menge y kann nur dann in der Form $y = \{z \mid \xi(z)\}$ dargestellt werden, wenn alle Teilmengen $x_i \subseteq x$ ausgezeichnete Elemente besitzen, auf die $\xi(z)$ zutrifft.

Die Existenz einer Menge, die ausgewählte Elemente einer anderen Menge enthält, ist bereits durch das Aussonderungsschema garantiert. Da aber nicht zwingend für alle Elemente einer Menge eine Aussonderung möglich sein muss, garantiert das Auswahlaxiom die Existenz einer solchen.

Ein Beispiel dafür wäre eine Anzahl von Schuhpaaren. Man kann mit einem Aussonderungsschema ξ von jedem Paar beispielsweise den linken Schuh als ausgezeichnetes Element auswählen. Betrachtet man aber eine große Anzahl von Paaren schwarzer ununterscheidbarer Socken, so gibt es kein Schema ξ , das ein ausgezeichnetes Element aussondert. Um trotzdem ein Element auszuwählen wird das Auswahlaxiom benötigt.

4 Unendlichkeit, Mengen und Schule

4.1 Unendlich „=“ Unendlich?

Bis ins 19. Jahrhundert wurde die Vorstellung von Unendlichkeit sehr strikt in zwei gegensätzliche Ansichten getrennt.

Das potenziell Unendliche beschreibt einen nicht endenden Prozess, dem in jeder Situation noch ein weiterer Schritt angehängt werden kann. Eine einfache Veranschaulichung dafür ist eine Aufzählung der natürlichen Zahlen der Größe nach. Für jede beliebige Aufzählung der natürlichen Zahlen gibt es eine weitere um 1 größere natürliche Zahl. Dieser Prozess ist potenziell unendlich. Aber jede Aufzählung der natürlichen Zahlen ist endlich, denn es gibt für jede eine größte natürliche Zahl, die größte des jeweiligen aufgezählten Abschnitts.[17, S. 22]

Im Gegensatz dazu, ist das aktual Unendliche ein gedanklich abgeschlossenes Konstrukt. Es beschreibt die abgeschlossene Gesamtheit einer unendlichen Größe. Als Beispiel können wieder die natürlichen Zahlen betrachtet werden. Diesmal nicht als Aufzählung, sondern als Gesamtheit – die Menge der natürlichen Zahlen. Es gibt unendlich viele, die durch den gedanklichen – realistisch aber unmöglichen – „Abschluss“ des Aufzählungsprozesses als eine Menge betrachtet werden können. [17, S. 22]

Constantin Gutberlet¹ veröffentlicht 1878 *Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet*. Eine Arbeit in der er den Begriff des aktual Unendlichen verteidigt. Er schreibt, dass potenziell unendliche Größen die Existenz eines aktual Unendlichen sogar voraussetzen. Denn eine Größe heißt potenziell unendlich, wenn sie durch Hinzufügen immer weiterer unendlich fortgesetzt werden kann. Es kann aber jeder endliche Teil einer potenziell unendlichen Größe fortgesetzt werden, also muss ein

¹(1837-1928), deutscher Philosoph und katholischer Theologe. [35]

aktual Unendliches existieren, aus dem die Elemente zur Fortsetzung des potenziell Unendlichen stammen. Würde so eine Größe nicht existieren, könnte der potenziell unendliche Prozess ab einer gewissen Grenze nicht mehr fortgesetzt werden. Gutberlet schlussfolgert, dass auch die Existenz des aktual Unendlichen die eines potenziell Unendlichen bedingt. [12, S. 64]

Auch Cantor tritt für die Existenz unendlicher Größen ein, weshalb beide Wissenschaftler in Kontakt stehen und die jeweiligen Arbeiten unterstützen, obwohl die des Philosophen für mathematische Belange nicht wirklich ausschlaggebend sind, aber durchaus interessante Aspekte des Unendlichen aus der Theologie oder der Scholastik beinhalten. Im Gegensatz zu Gutberlet möchte Cantor die Verwendung unendlicher Zahlen aber nicht grundsätzlich verwerfen, wie an seiner Arbeit zu Ordinal- und Kardinalzahlen zu erkennen ist. [12, S. 66]

4.2 Unendlichkeitsbegriff

Das Konzept unendlicher Mengen und Größen ist bereits seit der Antike Gegenstand mathematischer Betrachtungen. Vermutlich mangels notwendiger „Werkzeuge“, wie Definitionen und Rechentechniken, sind unendliche Größen als „schädlich“ betrachtet worden.

Um 500 v.Chr. beginnt eine Entwicklung für das Verständnis der reellen Zahlen, als die Pythagoräer herausfinden, dass $\sqrt{2}$ keine rationale – sondern eine irrationale – Zahl ist. Die Griechen arbeiten mit diskreten Zahlen, um zu Zählen und kontinuierliche Größen um Längen, Flächen und Volumina zu beschreiben, weshalb die Erkenntnis über die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zur damaligen Zeit für Unverständnis gesorgt haben muss. Der Fortschritt hinsichtlich der Arbeit mit Zahlen ist aber beachtlich, es werden schon kontinuierliche Größen mit natürlichen Zahlen in Relation gesetzt.

Um etwa 350 v.Chr. verfasst Eudoxos die *Proportionenlehre*, die eine Definition für Zahlen, die den bekannten reellen Zahlen sehr nahe kommen, enthält. Bis ins 19. Jahrhundert, als Dedekind und Cantor die Definitionen reeller Zahlen präziser beschreiben, kommt keine Definition reeller Zahlen der heutigen Auffassung näher als die von Eudoxos.

Auch Euklid erkennt die Existenz unendlicher Größen bei der Untersuchung von Län-

gen. Er definiert eine Länge l als irrational, wenn der Euklidische Algorithmus mit der Zahl l und 1 unendlich ist. Die Darstellung von l ist dann nur durch einen unendlichen Kettenbruch ohne periodische Wiederholung möglich.

Bei der Berechnung von Flächen und Volumina gekrümmter Objekte verwendet Archimedes unendliche Prozesse und bedient sich teilweise sogar aktuell unendlicher Mengen, die zu dieser Zeit ein Tabu darstellen. [17, 21f]

Neben den bemerkenswerten Arbeiten zum Unendlichkeitsbegriff sind manche Auffassungen aufgrund des frühen Stadiums auch Fehlvorstellungen, die im Laufe der Zeit durch Axiome und präzisere Definitionen richtig gestellt werden.

Die wahrscheinlich bekanntesten Fehlvorstellungen sind Zenons² Paradoxien, die direkt auf dem Problem der Unendlichkeit fußen.

Das Paradoxon der Verfolgung einer Schildkröte von Achilles ist ein Gedankenspiel: Angenommen Achilles ist 10 mal schneller als eine Schildkröte, weshalb diese 100 m Vorsprung erhält. Zenon betrachtet die Verfolgung der Schildkröte durch Achilles in Abschnitten.

Der erste Abschnitt ist die Strecke zwischen den Startpunkten von Achilles und der Schildkröte. Achilles erreicht den 100 m entfernten Start der Schildkröte während diese auch 10 m zurücklegt. Der zweite Abschnitt entspricht der Strecke zwischen den nunmehrigen Startpunkten und Achilles erreicht den zweiten Startpunkt der Schildkröte, während diese wieder 1 m zurücklegt und so weiter. Zenon argumentiert, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen kann, da diese immer genau $\frac{1}{10}$ der Länge des letzten Abschnitts Vorsprung haben wird. [14, S. 66]

In der Realität ist es sehr wohl möglich eine Schildkröte trotz eines Vorsprungs einzuholen, auch wenn die Geschwindigkeit nicht das Zehnfache beträgt. Die mathematische Begründung dafür ist, dass eine unendliche Summe einer endlichen Größe entsprechen kann. Das Paradoxon lässt sich durch den Grenzwertbegriff für abzählbar unendliche Reihen auflösen, womit die mathematische Betrachtung mit der realen übereinstimmt. Das Paradoxon kann sogar als Existenznachweis unendlicher konvergenter Reihen herangezogen werden.

Zenons Maßparadoxon ist eine verallgemeinerte Form dieses Problems. Betrachtet man das Intervall $[0; 1]$ und teilt dieses in unendlich viele gleich lange Teilstücke, so

²Zenon von Elea 5. Jahrhundert v. Chr.

ist die Länge jedes dieser Teilstücke entweder 0 oder $\epsilon > 0$. Ist die Länge jedes Teiles 0, ist die Summe aller Teillängen auch 0. Andernfalls ist sie unendlich groß.

Dieses Paradoxon kann durch die Maßtheorie gelöst werden. Die Länge eines Intervalls kann als das Supremum der Länge aller Überdeckungen von $[0; 1]$ definiert werden. [14, S. 66]

Euklid und Archimedes beschäftigen sich mit unendlichen Reihen und begründen, dass die Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

dem Wert $\frac{4}{3}$ entspricht, indem Sie nur einzelne Teile der Reihe betrachten und erkennen, dass jede Teil- bzw. Partialsumme kleiner als $\frac{4}{3}$ ist, es aber immer eine länger fortgesetzte Summe dieser Form gibt, die größer ist als jede vorherige, aber $\frac{4}{3}$ nicht überschreitet. [17, 22f]

Damit genügt die Reihe dem Monotoniekriterium – ihre Partialsummen sind beschränkt – die Reihe konvergiert.

Archimedes intuitive Verwendung eines Unendlichkeitsbegriffs ist auch in der Berechnung von Volumina zu erkennen. Er definiert das Volumen als die Summe von „*Scheiben der Breite null*“ [17, S. 23], von denen es überabzählbar viele gibt, das Volumen entspricht also einer unendlichen Summe. Ob sich Archimedes der Bedeutung des von ihm verwendeten Unendlichkeitsbegriffs bewusst ist, geht aus seiner Arbeit nicht hervor. Seine Überlegungen zeugen aber davon, dass die Verwendung unendlicher Größen zu wesentlichen mathematischen Ergebnissen führt.

Nachfolgende bemerkenswerte Arbeiten sind erst im 19. Jahrhundert zu finden. Carl Friedrich Gauß hat versucht den „Fundamentalsatz der Algebra“ zu beweisen. Die Beweisidee ist, dass eine Polynomfunktion betrachtet wird, die für bestimmte Argumente positive und für andere negative Funktionswerte besitzt. Die Funktion muss daher für ein bestimmtes Argument den Funktionswert 0 annehmen.

Der Beweis ist nur dann schlüssig zu führen, wenn die Definitionsmenge – die reellen Zahlen – als stetig und zusammenhängend angesehen wird. Dieses Erkenntnis ist durch den „Zwischenwertsatz“ festgehalten. [17, 24f] Bernard Bolzano leistet für den Beweis Vorarbeit, die aufgrund der fehlenden Vollständigkeit des reellen Kontinuums unvollständig bleibt. Er erkennt aber, dass das Kontinuum vollständig sein muss, um

den Beweis führen zu können.

Richard Dedekind führt Bolzanos Arbeit weiter und betrachtet die reellen Zahlen mit sogenannten *Schnitten* der rationalen Zahlen. Diese sind als Teilung der geordneten rationalen Zahlenmenge mit einem unendlich scharfen Messer vorstellbar, sodass eine untere Menge U und eine obere O entsteht. Für das Paar (U, O) gilt $U, O \subseteq \mathbb{Q}$, die beiden Mengen besitzen keine gemeinsamen Elemente und ihre Vereinigung enthält alle rationalen Zahlen. Jedes Element in U ist kleiner als jedes in O und Dedekind weist jedem Schnitt (U, O) eine Zahl zu, entweder die größte Zahl in U oder die kleinste in O . Es gibt für ein Paar genau zwei mögliche zugeordnete Zahlen:

Besitzt U ein größtes Element oder O ein kleinstes, dann entspricht der Wert des Schnitts (U, O) dieser rationalen Zahl.

Besitzt weder U ein größtes, noch O ein kleinstes Element, dann ist die dem Schnitt (U, O) entsprechende Zahl irrational.

Durch Schnitte können Lücken in den rationalen Zahlen aufgespürt und mit dem Wert der Lücke selbst gefüllt werden. Es ist leicht zu zeigen, dass die Menge aller Schnitte keine Lücken enthält. Es muss aber auch festgestellt werden, dass man mit den Werten, die den Schnitten zugeordnet werden, wie mit Zahlen arbeiten kann. Mit dieser Definition der reellen Zahlen können der Fundamentalsatz der Algebra und der Zwischenwertsatz bewiesen werden. Betrachtet man den Dedekindschen Schnitt (U, O) , der der Zahl $\sqrt{2}$ entspricht, so gilt für alle $u \in U$, dass $u < \sqrt{2}$ und für alle $o \in O$: $\sqrt{2} < o$. Die Mengen U und O besitzen weder ein größtes, noch ein kleinstes Element, daher wird $\sqrt{2}$ diesem Schnitt zugeordnet. [17, S. 25–27]

Nur etwas mehr als 10 Jahre später beginnt Georg Cantor mit seiner Arbeit im Bereich der Mengenlehre. Durch die Arithmetisierung der Geometrie können geometrische Ergebnisse mit geeigneten Zahlen beschrieben werden. Cantors Forschung im Bereich der Unendlichkeit stößt zunächst auf großen Widerstand unter einigen bekannten Mathematikern und erfährt erst weit nach seinem Tod breite Anerkennung. Diese Umstände wurden in dieser Arbeit bereits im Abschnitt 2.1 erläutert. [17, S. 27]

4.3 „Unendlichkeit“ im Mathematikunterricht

Für diesen Abschnitt werden vorrangig die Schulbuchreihen *Das ist Mathematik* sowie *Mathematik verstehen*, die in vielen allgemeinbildenden (höheren) Schulen im Mathematikunterricht verwendet werden, aber auch Bücher der berufsbildenden höheren Schulen herangezogen, um exemplarisch das Auftreten des Unendlichkeitsbegriffs im Unterricht aufzuzeigen. AHS Schulbücher eignen sich besonders um den Unendlichkeitsbegriff im Mathematikunterricht zu untersuchen, da die Inhalte in theoretischer Natur viel genauer behandelt und formaler unterrichtet werden als in anderen Schulformen, deren Fokus auf der Anwendung der entsprechenden Inhalte mit Realitätsbezug liegt.

4.3.1 Mengenlehre

Im Zuge des mengentheoretischen Unterrichts wird in einigen Schulformen zwar der Begriff der Mächtigkeit behandelt, beispielsweise in *Mathematik I* [45] für Elementar- und Sozialpädagogik. Die Beispiele und Aufgaben behandeln dann aber nur endliche Mengen. [45, S. 15–21] Die aktuelle Unendlichkeit der Zahlenmengen wird ebenso nicht angeführt. Dies wird durch Formulierungen mit Vorgänger und Nachfolger umgangen, woraus potenzielle Unendlichkeit abgeleitet werden kann. Der Begriff *unendlich* wird aber auch in diesem Zusammenhang nicht verwendet.

Konkret bedeutet das, dass SchülerInnen den Begriff der Unendlichkeit im Zuge mengentheoretischer Aufgaben nicht kennenlernen.

4.3.2 Geometrie

In der 5. Schulstufe lernen Kinder die Begriffe *Strahl*, *Strecke* und *Gerade* kennen. Der Lehrplan fordert, dass Schülerinnen und Schüler „aufbauend auf die Grundschule Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen“. [19, S. 83]

Unter „Punktmengen und Längen“ findet sich in *Mathematik verstehen 1* eine für diese Schulstufe sehr detaillierte Definition:

„Eine Gerade, einen Strahl und eine Strecke kann man sich als eine Menge von unendlich vielen Punkten vorstellen.“ [44, S. 172]

Auf diese Formulierung folgen Ausführungen, dass ein Punkt P Element einer Geraden g ist und g durch den Punkt P geht und dafür $P \in g$ geschrieben wird. Für besseres Verständnis wird der im Text beschriebenen Zusammenhang in einer Skizze dargestellt. [44, S. 172]

In der zitierten Definition wird formuliert, dass eine Strecke (mit Anfangs- und Endpunkt), ein Strahl (mit Anfangs- aber ohne Endpunkt) und eine Gerade (ohne Anfang und Ende) aus jeweils unendlich vielen Punkten besteht. Bezogen auf Cantors mengentheoretische Arbeit wird hier verwendet, dass echte Teilmengen eines reellen Kontinuums gleichmächtig sind, obwohl diese Teilmengen grafisch dargestellt und im anschaulichen Vergleich nicht gleich mächtig erscheinen. In diesem Abschnitt geht das Schulbuch auf den Unendlichkeitsaspekt der beschriebenen geometrischen Objekte nicht weiter ein.

4.3.3 Algebra

Die Bearbeitung algebraischer Aufgabenstellungen im Schulunterricht bedient sich mehrmals dem Unendlichen. Dabei sind es meist aktuell unendliche Auffassungen des Unendlichkeitsbegriffs, die im Unterricht vorkommen.

In der 9. Schulstufe im Kapitel „Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen“ lautet der Satz zur Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems:

„Ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen hat keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen (wobei die zugehörigen Punkte auf einer Geraden liegen).“ [40, S. 200]

Die Formulierung definiert, wie die geometrische Definition einer Geraden in der 5. Schulstufe, eine Gerade als Menge von (aktuell) unendlich vielen Punkten.

Eine ähnlich Anschauung betrifft *Geraden in $\mathbb{R}^2$* in Parameterform.

„Die Vektorgleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$ nennt man eine Parameterdarstellung der Geraden g mit dem Parameter t .“ [40, S. 247] Wobei P ein Punkt und $\vec{g}$ irgendein Richtungsvektor der Geraden ist. Für t muss jede beliebige reelle Zahl eingesetzt werden, damit alle Punkte der Geraden durch diese Gleichung dargestellt werden.

Jeder dieser Punkte X der Geraden entspricht genau einem Wert t und umgekehrt. Da $t \in \mathbb{R}$ und es unendlich viele reelle Zahlen gibt, besteht die Gerade aus unendlich

vielen Punkten. Dieser Aspekt ist für Geraden im Raum analog gültig.

Die Parameterdarstellung einer Ebene E kann durch die Gleichung $E: X = P + s \cdot \vec{v}_1 + u \cdot \vec{v}_2$ angegeben werden, wenn P ein Punkt der Ebene und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nicht parallele Richtungsvektoren von E sind. Diese Darstellung entspricht der zweidimensionalen Ausdehnung einer Geraden.

Die Menge, die alle Punkte von E enthält, ist gleichmächtig wie die Menge aller Punkte einer Geraden.

Denn jedem Punkt einer Geraden entspricht in der obigen Darstellung genau ein Wert $t \in \mathbb{R}$ und jedem Punkt einer Ebene entspricht ein Zahlenpaar $(s, u) \in \mathbb{R}^2$. Da mehrdimensionale Kontinua auf eindimensionale bijektiv abgebildet werden können, gilt für diese Mengen $|g| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |E|$.

Die gegenseitige Lage von Geraden, egal ob in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, ist nur dann hinsichtlich des Unendlichkeitsbegriffs interessant, wenn zwei Geraden ident sind. Dieser Zusammenhang wurde bereits als Lösungsfall eines linearen Gleichungssystems erwähnt und wird hier deshalb nicht weiter ausgeführt.

4.3.4 Analysis

Im Bereich der Analysis werden Schülerinnen und Schüler sowohl mit dem potenziell als auch aktuell Unendlichen konfrontiert. Darüber hinaus wird erstmals mit unendlich kleinen Größen gearbeitet; zuvor reichte ein Verständnis für unendlich viele Zahlen oder Punkte, die aufgrund der Anzahl meist mit einem ‚unendlich Großen‘ assoziiert werden.

Folgen und Reihen

In der 10. Schulstufe der AHS lernen Schülerinnen und Schüler Folgen und Reihen kennen. Sie sollen grundlegende „Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)“. [19, S. 169] Es sollen dabei sowohl arithmetische als auch geometrische Folgen betrachtet werden und im Sinne des Spiralprinzips³ bereits bekannte Eigenschaften der linearen und exponentiellen Funktion wiederholt und Gemeinsamkeiten mit den entsprechenden Folgen herausgearbeitet werden. [19, 169f]

³Besonders im Mathematikunterricht wird auf bereits bekannte Inhalte und Methoden zurückgegriffen um Probleme und Aufgaben unter Zuhilfenahme dieser zu lösen bzw. daraus komplexere Verfahren zu entwickeln.

Die Beschäftigung mit unendlichen Folgen erfordert sowohl eine aktual als auch potenziell unendliche Betrachtung. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein entsprechendes Folgenglied existiert, gibt es unendlich viele; diese Anschauung fußt auf einem aktual Unendlichen. Betrachtet man nur einen Teil oder Abschnitt von Folgen- oder Reihengliedern, so handelt es sich um einen potenziell unendlichen Aspekt, da immer wieder ein nächstes Glied gefunden werden kann und es kein letztes gibt. Dieser Aspekt wird dann besonders deutlich, wenn eine Folge durch ein rekursives Bildungsgesetz gegeben ist.

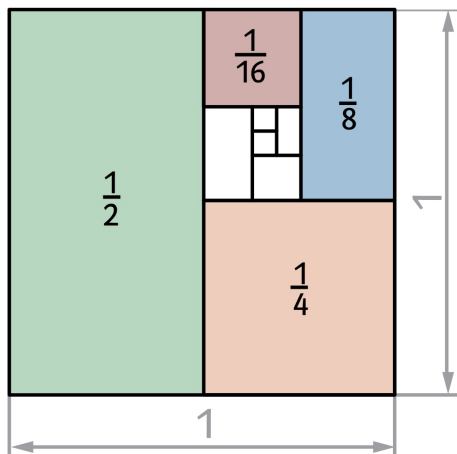
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + k & \Leftrightarrow & a_n = a_0 + k \cdot n, & n &\in \mathbb{N} \\ b_{n+1} &= b_n \cdot q & \Leftrightarrow & b_n = c \cdot q^n, & c &\in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ein praxisbezogenes Beispiel für Folgen und Unendlichkeit stellt stetige Verzinsung dar. Dabei wird ein veranlagtes Kapital zu jedem Zeitpunkt, in jedem Verzinsungszeitraum also unendlich oft, verzinst. Für diese Überlegung wird aufgrund der Anschaulichkeit des Ergebnisses ein Jahreszinssatz von 100% angenommen. Das Endkapital E kann bei der einjährigen Verzinsung eines Kapitals K mit n Verzinsungsperioden mit folgender Formel berechnet werden:

$$E = K \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In *Mathematik verstehen 6* werden die jährlichen Änderungsfaktoren $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für ein konkretes Beispiel und verschiedene n berechnet. Die Anzahl der Verzinsungsperioden wird schrittweise über jährliche, monatliche und tägliche auf stündliche Verzinsung erhöht, wodurch die Annäherung des Faktors an die eulersche Zahl $e = 2,718281 \dots$ zu erkennen ist. [41, S. 139] Die Veränderung der Anzahl der Verzinsungsperioden bedient sich dem potenziell Unendlichen der natürlichen Zahlen, die Verzinsung ‚zu jedem Zeitpunkt‘ einem aktuellen Unendlichkeitsbegriff.

Im Schulbuch *Mathematik verstehen 6* wird die Konvergenz einer Reihe mit dem Beispiel der folgenden Reihe und ihrer graphischen Veranschaulichung in Abbildung 5 dargestellt. Man betrachtet ein Quadrat mit einer Fläche von 1, wie in Abbildung 5 skizziert, das halbiert wird. Eine der Hälften wird wieder halbiert, eine der erhaltenen Hälften ebenso und so weiter. Wenn man die nicht weiter halbierten unendlich vielen – in der Grafik eingefärbten – Rechtecke nach dem Schema in Abbildung 5 zusam-



$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1\end{aligned}$$

Abbildung 5: Summe einer unendlichen Reihe.

mensetzt, entsteht genau das ursprüngliche Quadrat, das nach erläutertem Schema zerteilt wurde.

Weil das ursprüngliche Quadrat einen Flächeninhalt von 1 besitzt und die zusammengesetzten Rechtecke genau das ursprüngliche Quadrat ergeben, ist die Summe aller Teilflächen ebenfalls 1. Nun können die Flächeninhalte der farbigen Rechtecke mit den Gliedern der geometrischen Reihe identifiziert werden. Da die Summe der Teilflächen die Fläche des Quadrats ergibt und diese Summe der Reihensumme entspricht, ist der Wert der Reihe auch 1. [41, S. 139]

So kann anschaulich dargestellt werden, dass eine Summe unendlich vieler Summanden eine Zahl als Ergebnis besitzen kann und nicht unendlich groß sein muss. Solche Überlegungen haben beispielsweise im antiken Griechenland zu Paradoxien, wie die von Zenon von Elea über Achilles und die Schildkröte, geführt.

Die Konvergenz einer Reihe wird in diesem Schulbuch auf der selben Seite auch über Partialsummen definiert, wie es schon Euklid und Archimedes festgestellt haben, vgl. Seite 54.

Definition. Eine unendliche Reihe der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Teilsummen $(S_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ konvergent ist.

Die Folge der Teilsummen $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ist folgend dargestellt. [41, S. 1]

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 & \dots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n & \dots \end{array}$$

Für das Verständnis der Konvergenz einer Reihe sind beide Aspekte des Unendlichkeitsbegriffs notwendig. Einerseits kann stets eine weitere Partialsumme S_i gebildet werden, die sich dem Grenzwert weiter nähert, diesen aber nicht überschreitet. Andererseits entspricht die Folge der Partialsumme im Grenzübergang genau dem Flächeninhalt des Quadrates von Abbildung 5, welcher aus (aktuell) unendlich vielen Rechtecken zusammengesetzt wird.

Stetigkeit

Im Zuge der Differentialrechnung wird erstmals ein Aspekt der Unendlichkeit betrachtet, der keine unendlich großen, sondern unendlich kleine Größen betrachtet. Das betrifft den Stetigkeitsbegriff, der entweder durch Grenzwerte oder das Epsilon-Delta-Kriterium formuliert werden kann. Die Definition mit Hilfe von Grenzwerten wird in vielen Schulbüchern verwendet, da diese relativ einfach nachzuvollziehen und zu verstehen ist.

Definition. Eine reelle Funktion $f : A \rightarrow B$ ist an der Stelle $x_0 \in A$ stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Die Anschauungen hinsichtlich des Unendlichkeitsbegriffs sind für diese Definition sehr ähnlich wie die des Grenzwerts einer Folge und werden daher nicht näher erläutert.

Die Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit ist für SchülerInnen sicher schwerer zu verstehen, da diese mit zwei Umgebungen in verschiedenen Mengen formuliert ist und tieferes mathematisches Verständnis erfordert.

Definition. Eine reelle Funktion $f : A \rightarrow B$ ist an der Stelle $x_0 \in A$ stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Diese Definition besagt, dass eine Einschränkung der Änderung eines x -Werts nur eine eingeschränkte Änderung des y -Werts bewirken darf. Das heißt, dass jede beliebig (auch unendlich) kleine Änderung des Funktionswerts durch eine entsprechende (unendlich kleine) Änderung des Arguments erklärt werden kann und es keine Sprünge, Lücken oder Unstetigkeitsstellen gibt.

Differentialrechnung

Das wahrscheinlich größte Thema der Sekundarstufe 2 ist die Differential- und Integralrechnung. Auch in diesen Gebieten kommen auf SchülerInnen Unendlichkeitsbegriffe zu, die großteils unendlich kleine Größen betreffen.

Definition. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a; b] \subseteq A$.

Die Zahl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate von f in $[a; b]$.

Der Grenzwert $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ heißt Differentialquotient von f an der Stelle x oder Änderungsrate von f an der Stelle x . [42, S. 15]

Es handelt sich hier wieder um einen Grenzwert, der in ähnlicher Betrachtung bereits bei der Stetigkeit erläutert wurde, $|z - x|$ nähert sich 0 unendlich nahe an. Eine interessantere Deutung ist der Übergang einer Sekante in eine Tangente an den Graphen von f , wenn sich die erzeugenden Punkte *unendlich nahe* annähern. Diese Art der geometrischen Deutung ist in beinahe allen Schulbüchern zu finden und vielen SchülerInnen auch gut verständlich, vgl. Abbildung 6.

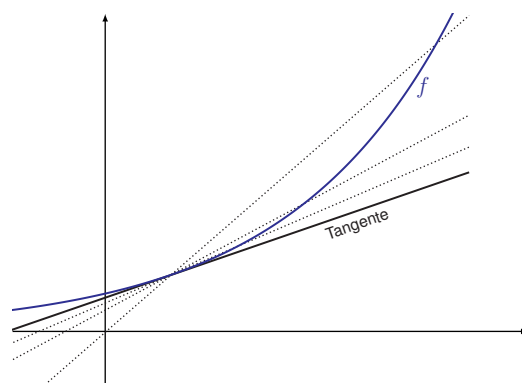


Abbildung 6: Näherung der Tangentensteigung durch Sekanten.

Die Steigung der Tangente an den Graphen kann durch die Steigung von Sekanten (in Abbildung 6 punktiert) approximiert werden. Dabei wird der Abstand der Schnittpunkte der Sekanten mit dem Graphen immer weiter verringert und die Sekantensteigung nähert sich immer mehr der Tangentensteigung an.

Im Grenzfall, wenn die Trägerpunkte der Sekante in einem Punkt „verschmelzen“ und die Sekante in eine Tangente übergeht, kann die Steigung der Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ berechnet werden.

Integralrechnung

In der Integralrechnung legt der Lehrplan die Veranschaulichung eines bestimmten Integrals bereits im Vorhinein fest:

„[Schülerinnen und Schüler sollen] das bestimmte Integral kennen und als Zahl ‚zwischen‘ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können.“ [19, S. 17]

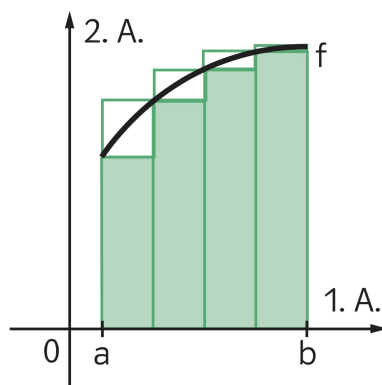


Abbildung 7: Ober- und Untersumme.

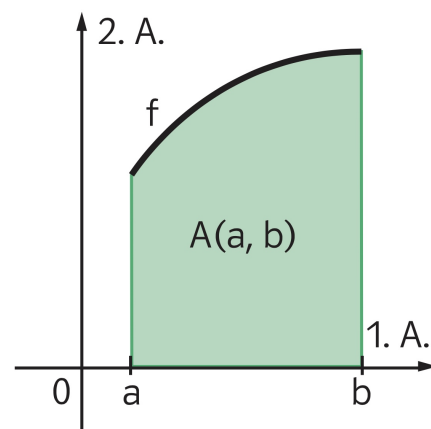


Abbildung 8: Bestimmtes Integral – Fläche unter einer Kurve.

Der Wert des bestimmten Integrals (s. Abbildung 8) kann durch Ober- und Untersummen (s. Abbildung 7) eingegrenzt werden. Je schmaler die Breite der Rechtecke für die Summen ist, desto kleiner ist das Intervall, das durch Ober- und Untersumme festgelegt wird und in dem der Wert des tatsächlichen Flächeninhalts liegt. Die exakte Berechnung geschieht im Grenzfall, die Breite der Rechtecke geht gegen Null, gleichzeitig wird die Anzahl der Rechtecke unendlich groß. Es kommen in einer Vorstellung zugleich unendlich kleine sowie unendlich große Aspekte vor, die einander

aufgrund des Zusammenhangs bedingen. Für die Breite l eines Intervalls und eine Anzahl n von Rechtecken zur Berechnung der Ober- bzw. Untersumme ist die Breite eines Rechtecks $\frac{l}{n}$. Wird die Anzahl der Rechtecke unendlich groß, wird deren Breite sich Null unendlich nähern.

In *Mathematik verstehen 8* wird ein bestimmtes Integral auch als unendliche Summe unendlich kleiner Produkte formuliert, die der Fläche unendlich vieler schmaler Rechtecke gerecht wird, wobei Δx der Breite der Rechtecke entspricht.

„Ein Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist näherungsweise gleich einer Summe von sehr vielen sehr kleinen Produkten der Form $f(x) \cdot \Delta x$.
Kurz: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(x) \cdot \Delta x$.“ [43, S. 16]

Wie hier bei der Berechnung eines bestimmten Integrals, können die meisten Berechnungen, bei denen eine unendliche Größe vorkommt – egal ob unendlich groß oder klein – auf die Betrachtung einer Folge oder Reihe zurückgeführt werden, wodurch Schülerinnen und Schüler nur peripher mit dem Begriff der Unendlichkeit konfrontiert sind und in den meisten Fällen nur Überlegungen anstellen müssen, wie sich das unendlich groß bzw. klein Werden bestimmter Größen auf die betrachteten Sachverhalte auswirkt.

Am Lehrplan und in den ausgewählten Schulbüchern werden verschiedene Unendlichkeitsbegriffe im Unterricht verwendet. Die Unendlichkeitsbegriffe werden aber nicht wirklich thematisiert. Eine Präzisierung des Begriffs ist in keiner Schulstufe vorgesehen, vielmehr wird mit dem Unendlichen einfach gearbeitet und darauf vertraut, dass die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler für den Umgang damit ausreichen. Zu diesem Thema gibt es verschiedene Forschungsarbeiten. Die Studie von Deborah Dötschel (vgl. [31]) kommt zu ähnlichen Ergebnissen. Sie betont, dass sogar Studierende der Mathematik in einer Befragung keine mathematisch korrekte Definition der Unendlichkeit geben könnten und liefert einen Vorschlag für ein Stufenmodell zur Behandlung des Unendlichkeitsbegriffs im Unterricht. Allerdings sollte die Umsetzung dieses Modells gut durchdacht sein, damit Unendlichkeit im Mathematikunterricht nicht wie ein „Fremdkörper“ auftritt sondern in den verschiedenen Themengebieten des Lehrplans passend eingesetzt und innerhalb der Kapitel nachvollziehbar vernetzt wird.

4.4 Mengenlehre im Mathematikunterricht

4.4.1 Neue Mathematik

Die „Neue Mathematik“ der 1970er Jahre sollte den Schülerinnen und Schülern mit Überlegungen der Mengenlehre einen Zugang zur wissenschaftlichen Grundlage der Mathematik eröffnen. Die Kinder sollten ab der Volksschule mit Mengen umgehen, dabei den Zahlbegriff über die Mächtigkeit von Mengen kennenlernen und mit Mengen hinsichtlich ihrer Elemente und deren Eigenschaften arbeiten. Die Inhalte sollten im Unterricht möglichst spielerisch mit neu entwickelten Methoden und Unterrichtsmaterialien, angelehnt an die wissenschaftliche Betrachtung, unterrichtet werden. [12, S. 119–123] Die grundlegenden Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen können dann über die Mengenoperationen der Vereinigung und der Mengendifferenz hergeleitet werden. Aber es stellt sich die Frage, ob die – mathematisch einwandfreie – Herangehensweise für Kinder im Volksschulalter auch die anschaulichste ist bzw. wie Kinder damit umgehen, die die trivialen Rechenoperationen bereits kennen. [12, S. 135–147] Das Ziel der neuen Herangehensweise sollte die Würdigung neuer wissenschaftlicher Ergebnisse sowie das Schließen der Schere zwischen Schule und Hochschule sein, womit möglichst schon in den ersten Schuljahren begonnen werden sollte. [33, S. 1]

Der Umgang mit Mengen im Sinne von Spielen mit greifbaren Elementen wie Plättchen, Symbolen und Figuren ist für Kinder sicher noch gut nachvollziehbar und verständlich. Auch die Bestimmung der Mächtigkeit endlicher Mengen und der Vergleich verschiedener Mächtigkeiten sollte keine großen Probleme verursachen. Aber spätestens hier würden Kinder, die bereits mit Zahlen umgehen, vielleicht sogar rechnen können, sich fragen wozu der ganze Aufwand betrieben wird um Zahlen zu beschreiben, die das Kind bereits kennt und mit diesen schon umgehen kann. [12, S. 129]

Die Gründe für das Scheitern des Konzepts der „Neuen Mathematik“ sind vielseitig. Besonders Eltern von Volksschulkindern leisten großen Widerstand. Sie sind in ihrer Schulzeit und ihrem täglichen Leben nicht mit Mengenlehre konfrontiert worden, können daher den neuen Vorstellungen in den Schulbüchern nicht folgen und ihre Kinder bei deren Aufgaben nicht unterstützen. Viele Eltern haben Sorgen, dass ihr Kind notwendige Fähigkeiten nicht ausreichend lernt und mit den Lernspielen wesentliche

4 Unendlichkeit, Mengen und Schule

Inhalte nicht vermittelt werden können. Ein weiterer Aspekt sind wahrscheinlich unzureichend aus- und weitergebildete Lehrerinnen und Lehrer, die in der kurzen Zeit der Umsetzung des neuen Lehrplans mit den Inhalten nicht vollkommen vertraut sind und mit neuen Methoden arbeiten müssen. Dazu kommt, dass viele fachfremd unterrichten oder der Neuen Mathematik einfach kritisch gegenüberstehen und den plötzlich geforderten Paradigmenwechsel nicht nachvollziehen können. [33, S. 2–4]

Trotz des großen Widerstandes gegen Mengenlehre im Lehrplan bestehen einige Aspekte der Reformen der 70er Jahre bis heute. Dazu gehören die Geometrie, die Reflexion über geeignete Lösungsmethoden für verschiedene Aufgaben, Gruppenarbeiten und Lernspiele zur anschaulichen Vermittlung mathematischer Probleme. [33, S. 4]

Die Abkehr von der Mengenlehre in der Primarstufe spricht ihr keineswegs ihre fachliche Notwendigkeit oder ihren Stellenwert innerhalb der Mathematik ab. Allerdings ist der Aufwand, der für einen fachlich korrekten und sinnvollen Umgang mit Mengen notwendig ist, größer als der Nutzen, der aus den Ergebnissen abgeleitet werden kann. Dazu kommt, dass die Grundvorstellungen nur schwer auf andere Bereiche übertragen werden können und nur den Umgang mit Mengen schulen. [36]

4.4.2 Vorschulstufe und Volksschule

Kinder, die für die Volksschule noch nicht bereit sind, aber bereits das schulpflichtige Alter erreicht haben, haben die Möglichkeit ein Vorschuljahr zu absolvieren. Diese kann in eigenen Vorschulklassen, aber auch gemeinsam mit der 1. oder 2. Schulstufe stattfinden. Nach der Vorschule nehmen Kinder regulär am Unterricht der 1. Schulstufe teil. [28]

Bereits in der Vorschule lernen Kinder den naiven Mengenbegriff kennen. Es sollen Objekte mit vorgegebenen Eigenschaften zusammengefasst und richtig zugeordnet werden. Diese Objekte sollen anschauliche Eigenschaften aufweisen und nach diesen entsprechenden Menge zugeordnet werden. [23, S. 60]

Der Lehrplan fordert das „Untersuchen von Mengen“– Schülerinnen und Schüler sollen anhand anschaulicher Objekte, Diagramme und ähnlichen Darstellungen die Eigenschaften der Elemente einer Menge untersuchen und beschreiben können und im nächsten Schritt mit Mengen arbeiten, die Zahlen enthalten. Die behandelten Mengen sollen dann mittels eineindeutiger anschaulicher Zuordnung durch Verbindungslinien, kombinieren von zugehörigen Objekten oder ähnlichen Paarbildungen, unter Verwendung der Begriffe *gleich viele*, *mehr* und *weniger* verglichen werden, wobei der Mächtigkeitsbegriff von Mengen benutzt wird.

Zur weiteren Abstraktion sollen Mengen mit vier bis sechs Elementen auf ihre Mächtigkeit untersucht werden, und die Elemente sollen in ihrer Anordnung und Beschaffenheit variiert werden. Den Abschluss bildet die Ordnung von höchstens sechs Mengen nach ihrer Mächtigkeit, deren Elemente möglichst bildlich dargestellt sein sollen. [23, 61f]

In der 1. Schulstufe der Volksschule sollen Schülerinnen und Schüler im Zahlenraum bis 100 Zahlen durch Mengendarstellung (auch mit den Relationszeichen $<$, $>$ und $=$) beschreiben und vergleichen können. [23, S. 148] Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Mengen Arbeiten, „*wobei auf eine altersadäquate, nicht formalistische Sprache zu achten ist.*“ [23, S. 163]

Interessanterweise sind im Lehrplan der Volksschule Aspekte der „Neuen Mathematik“ zu finden. Multiplikationen sollen durch „*wiederholtes Aneinanderfügen gleichmächtiger Mengen*“ hergeleitet und begründet werden. [23, S. 163]

4.4.3 Mittelschule - NMS

Im Lehrplan der Mittelschule für das Fach Mathematik sind keine Angaben zur Mengenlehre zu finden. Der einzige Bezugspunkt ist die Einführung der positiven rationalen Zahlen in der 1. Klasse (5. Schulstufe) aller rationalen Zahlen sowie deren Verwendung in Rechen- und Anwendungsaufgaben in der 3. Klasse (7. Schulstufe). In der 4. Klasse (8. Schulstufe) sollen die Schülerinnen und Schüler anhand einfacher Aufgabenstellungen lernen, dass mit Hilfe der rationalen Zahlen manche Aufgaben nicht gelöst werden können. Sie sollen Näherungen und Schranken mit Hilfe technologischer Hilfsmittel für irrationale Zahlen angeben können, die Lösung gegebener Probleme sind. [22, S. 59–66]

4.4.4 AHS

Der Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen für den Mathematikunterricht von der 5. bis zur 8. Schulstufe führt – ähnlich wie der der Mittelschule – keine spezifischen Themenbereiche der Mengenlehre auf. Die Inhalte mit Bezug zur Mengenlehre beschränken sich auf den Umgang mit den verschiedenen Zahlenmengen: Positive rationale Zahlen in der 1. Klasse (5. Schulstufe), die Darstellung positiver und negativer Zahlen in Bezug auf den Nullpunkt auf einer Zahlengeraden in der 3. Klasse (7. Schulstufe) und die Einführung der irrationalen Zahlen in der 4. Klasse (8. Schulstufe), als Lösung von Aufgaben, die nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen gelöst werden können. [19, S. 79–85]

In *Das ist Mathematik 1*, das sowohl für die erste Klasse der neuen Mittelschulen als auch für allgemein bildende höhere Schulen vom Bundesministerium zugelassen wurde, werden die ersten Elemente der natürlichen Zahlen und Teilmengen von diesen aufgezählt. Der Begriff Menge wird nicht exakt erklärt, nur deren Elemente. Die Formulierung lautet: „Zahlen, die zu einer Menge gehören, heißen Elemente dieser Menge.“ [38, S. 22] Darauf folgen Aufgaben, in denen Elemente einer Menge bestimmt, zugeordnet und Mengen gebildet werden müssen, deren Elemente in Worten beschrieben sind. Im Buch der 8. Schulstufe *Das ist Mathematik 4* werden die irrationalen Zahlen als Wurzeln natürlicher Zahlen eingeführt, die keine Quadratzahlen sind:

„Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder eine natürliche Zahl (Wurzel aus einer Quadratzahl) oder eine irrationale Zahl (Wurzel aus allen anderen natürlichen Zahlen.“ [39, S. 20]

In dieser Schulstufe sind abgesehen von der Vollständigkeit der reellen Zahlen, die zwar für die Intervallschachtelung bei Quadrat und Kubikwurzeln verwendet, aber nicht explizit eingeführt wird, keine weiteren nennenswerten mengentheoretischen Begriffe zu finden.

Im Lehrplan der Oberstufe der AHS werden Mengen zum ersten Mal seit der Volksschule wieder explizit angeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Zusammenhang und die jeweiligen Erweiterungen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlenmengen kennen sowie die grundlegenden Begriffe über Mengen und logische Zeichen kennen. [19, S. 168]

Der Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* der mathematischen Grundkompetenzen für die Reifeprüfung definiert die notwendigen Kenntnisse über Mengen einerseits im verständigen Einsatz der üblichen Zahlenmengen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), der Teilmengenbeziehungen dieser Zahlenmengen, aber auch dem Angeben von Elementen und die Zuordnung dieser zur entsprechenden Zahlenmenge. [26, 1f] Im Abschnitt „Mengen“ des Schulbuchs *Mathematik verstehen 5* [40] werden auf sieben Seiten die Grundbegriffe der Mengenlehre für den Schulunterricht erläutert. Einleitend werden Mengen axiomatisch über ihre Elemente definiert, anschaulich mit Diagrammen, aber auch durch logische Symbole dargestellt. Der Begriff Menge wird nicht explizit definiert. Nach verschiedenen Darstellungen werden die Mengenbeziehungen (echte) Teilmenge und die Gleichheit von Mengen definiert. Der nächste Abschnitt handelt von den Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung und Differenz), diese werden grafisch mit Venn-Diagrammen dargestellt. Auf den folgenden drei Seiten sind Aufga-

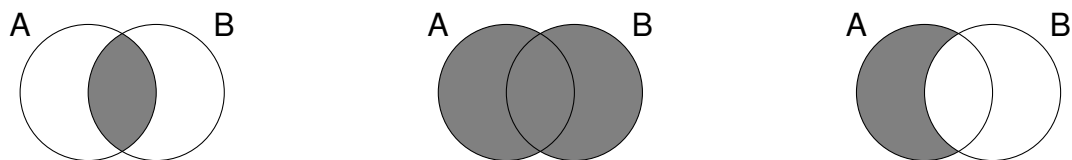


Abbildung 9: Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Mengendifferenz) als Venn-(Mengen-) Diagramme dargestellt.

ben zu finden, die sowohl theoretisch die Grundbegriffe der Mengenlehre betreffen, aber auch Aufgaben mit Praxisbezug, in denen die Mengenbildung anhand realer

„Objekte“ mit bestimmten Eigenschaften erfolgt und die Beziehungen dieser Mengen betrachtet werden.

Abschließend erfolgt ein historischer Überblick der Entwicklungen in der Mengenlehre, beginnend mit Bolzano und Cantor, gefolgt von Russel und Hilbert, in dem viele interessante Aspekte, aber auch die Antinomien der Mengenlehre, sowie die Notwendigkeit der Axiomatisierung, erläutert werden. Als Abschluss des Kapitels sind auf der letzten Seite – „Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“ – wiederholende Aufgaben, die die wesentlichen Kompetenzen sichern, zu finden. [40, S. 28–35]

4.4.5 BHS

In berufsbildenden höheren Schulen finden sich Inhalte der Mengenlehre sehr unterschiedlich ausgeprägt. Im folgenden Abschnitt werden nur die Lehrpläne der Handelsakademien, der höheren technischen Lehranstalten sowie der berufsbildenden Schulen mit landwirtschaftlichem, sozialem oder pädagogischem Schwerpunkt betrachtet. Die Lehrpläne der berufsbildenden Schulen mit anderen Schwerpunkten sehen entweder gleiche oder geringere Spezifizierung im Bereich der Mengenlehre vor, daher beschränkt sich die Auswahl auf die erwähnten Schulformen.

Die geringste Spezifizierung findet in den Handelsakademien statt. Im Themenbereich *Zahlen und Maße* des ersten Jahrgangs beschränken sich die entsprechenden Begriffe auf die Zahlenmengen, deren Darstellung am Zahlenstrahl, ihre Beschreibung mittels mathematischer Symbole und deren gegenseitige Beziehungen. [20, S. 85]

In den Lehrplänen der höheren technischen Lehranstalten (HTL) werden höhere Kompetenzmodule für die jeweilige Fachrichtung genauer spezifiziert. Da Inhalte der Mengenlehre im ersten Jahrgang (9. Schulstufe) behandelt werden, sind die Formulierungen für alle Fachbereiche gleich.

Schülerinnen und Schüler sollen den Mengenbegriff kennen lernen und grundlegende Mengenoperationen nutzen können, um Sachverhalte angemessen darstellen zu können. Sie sollen die Zahlenmengen kennen, diese beschreiben und auf der Zahlengeraden veranschaulichen können. [20, S. 35]

Die Lehrpläne der berufsbildenden Schulen mit landwirtschaftlichem und pädagogischem bzw. sozialem Schwerpunkt werden wie in den höheren technischen Lehran-

stalten für jede Fachrichtung genauer spezifiziert. Inhalte der Mengenlehre sind auch in diesen Schulformen in den ersten Jahrgängen vorgesehen, weshalb für alle Fachrichtungen dieselben Inhalte vorgesehen sind. Exemplarisch wird der Lehrplan der höheren Lehranstalten für Forstwirtschaft betrachtet.

Schülerinnen und Schüler sollen den „*Mengenbegriff der anschaulichen Mengenlehre⁴ erfassen*“ [21, S. 6] können. Weiters sollen die SchülerInnen die Symbole der naiven Mengenlehre sowie Mengenoperationen verständlich einsetzen können, die Zahlenmengen und den Aufbau des Zahlensystems kennen und beschreiben und mit der grafischen Darstellung von Intervallen am Zahlenstrahl vertraut sein. [21, S. 6]

In *Mathematik I* [45] für Bundeslehranstalten für Elementar- und Sozialpädagogik umfasst das Kapitel *Mengenlehre* acht Seiten, wobei auf 5 Seiten Erklärungen, Definitionen und Beispiele aufgeführt werden. Zu Beginn werden grundlegende Begriffe wie Menge, Element und sogar Mächtigkeit definiert. Die Mengendefinition ist die der naiven Mengenlehre: „*Eine Menge ist eine Gesamtheit von unterscheidbaren Objekte. Von jedem Objekt muss feststehen, ob es zur Menge gehört oder nicht.*“ [45, S. 15] Darauf folgen verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Mengen, wie das aufzählende oder beschreibende Verfahren bzw. das Mengendiagramm (Venn-Diagramm) und die Gleichheit von Mengen. Im nächsten Schritt werden Mengenbeziehungen behandelt. Sowohl der Begriff Teilmenge, als auch echte und unechte Teilmenge werden unterschieden und daraus direkt auf die Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Differenz übergeleitet.

Die letzten beiden Definitionen sind aus dem Lehrplan nicht direkt abzuleiten und behandeln die Komplementär- und Produktmenge. Alle Definitionen werden mit Beispielen und teilweise graphischen Darstellungen visualisiert, sodass die Sachverhalte gut nachvollziehbar und vorstellbar sind.

Direkt anschließend folgen auf drei Seiten Aufgaben zu den genannten Definitionen, die nicht nur rein mathematisch, sondern auch realitätsbezogen und altersgerecht für Schülerinnen und Schüler aufbereitet sind. [45, S. 16–19]

⁴naive Mengenlehre

4.4.6 Schriftliche Reife- und Diplomprüfung

In den Kompetenzen der schriftlichen Reife- und Diplomprüfung werden Inhalte der Mengenlehre auf den Umgang mit den Zahlenmengen, deren Beziehungen und Veranschaulichung am Zahlenstrahl beschränkt. Dies betrifft sowohl die *Mathematische[n] Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)* ([26, S. 2]), als auch die *Mathematische[n] Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern* [25, S. 1] der BHS. In den gemeinsamen Grundkompetenzen der BHS wird zusätzlich gefordert, dass Schülerinnen und Schüler von Potenzfunktionen die *Definitions- und Wertemenge angeben können*. [25, S. 3] AbsolventInnen von Bildungsanstalten für Elementarpädagogik, Bildungsanstalten für Sozialpädagogik und der Berufsreifeprüfung, müssen umfassendere Mengensymbole, Mengenoperationen inklusive Venn-Diagramme und Mengenbeziehungen zur schriftlichen Reife- und Diplomprüfung bzw. Berufsreifeprüfung kennen. [24, S. 1] In den übrigen Schulformen werden mengentheoretische Inhalte in den schulspezifischen Kompetenzen nicht genauer präzisiert, es bleibt bei den in den *Mathematische[n] Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern* formulierten Anforderungen.

Im Vergleich der verschiedenen Schulformen wird Mengenlehre in den Handelsakademien am wenigsten, in AHS und HTL etwas umfangreicher und in höheren Lehranstalten mit landwirtschaftlichem und sozialem Schwerpunkt am umfangreichsten behandelt.

5 Conclusio

Die Unendlichkeit ist seit der Antike ein Thema mathematischer, philosophischer und theologischer Überlegungen. In der historischen Entwicklung hat sich der Umgang mit den Begriffen immer weiter präzisiert, wodurch die Ergebnisse in der fortschreitenden Entwicklung auch immer präziser gefasst werden können. Georg Cantors Forschung bedeutet einen großen Sprung und rückt alle bis dahin bekannten Ergebnisse in neues Licht.

Die vorliegende Diplomarbeit untersucht, welchen Einfluss Cantors Beiträge auf den Unendlichkeitsbegriff in der Mengenlehre haben. Und geht der Frage nach, wie Unendlichkeit und Mengenlehre im Mathematikunterricht eingebunden werden.

Cantors Arbeiten sind in großer Zahl vorhanden; es konnten viele Manuskripte, Briefe und Veröffentlichungen gesichtet werden, um die zeitliche Entwicklung aber auch Irrwege zu verfolgen. Daneben gibt es zahlreiche neuere Publikationen zur Mengenlehre, die Cantors Beweisideen aufgreifen, aber Begriffe der formalen Mengenlehre verwenden und daher kompakter und leichter zu lesen sind.

Seine bemerkenswerteste Arbeit zur Mengenlehre stellt die Definition der reellen Zahlen dar. Bereits vor ihm sind die reellen Zahlen durch Dedekindsche Schnitte definiert worden, Cantors Definition hat sich aber aufgrund der einfacheren Formulierung durchgesetzt.

Während der Untersuchung unendlicher Mengen stößt der Mathematiker auf Ergebnisse, mit denen er selbst nicht gerechnet hat. Die Gleichmächtigkeit eines ein- und zweidimensionalen Kontinuums kann er selbst nicht glauben und versichert sich zuerst bei seinem Kollegen Dedekind. Nach dieser Entdeckung forscht Cantor in eine Richtung, die vor ihm gedanklich noch niemand „betreten“ hat. Er kommt zum Ergebnis, dass es nicht nur „ein Unendlich“, sondern viele in verschiedenen Abstufungen gibt und führt zum Vergleich dieser Unendlichkeiten Ordinal- und Kardinalzahlen ein. Seine Kontinuumshypothese ist eine der Fragen, die bis heute ungeklärt ist. Seine

5 Conclusio

Behauptung, dass die Mächtigkeit der reellen Zahlen die nächst größere unendliche Größe nach der der natürlichen Zahlen ist, konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden. Erst Mitte des 20. Jahrhunderts – über 40 Jahre nach Cantors Tod – wurde klar, dass diese Behauptung von den Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist. Aufgrund technologischen Fortschritts gelingt es Forschern immer wieder neue Erkenntnisse im Bereich unendlicher Mengen zu gewinnen, sie nähern sich der Klärung über den Wahrheitsgehalt der Kontinuumshypothese weiter an, ein Ergebnis scheint aktuell aber noch nicht greifbar.

Die Behandlung des Unendlichkeitsbegriffs der Mengenlehre und mengentheoretischer Begriffe im Schulunterricht ist abhängig vom Schwerpunkt der Schule und fällt je nach dem mehr oder weniger intensiv aus. Bei der Analyse der Lehrpläne und verschiedener Schulbücher stellt sich heraus, dass Mengenlehre zwar grundlegend unterrichtet wird, sich in vielen Schulformen aber auf den Umgang mit Zahlenmengen, Element- und Teilmengenbeziehungen, Mengenoperationen und Intervalle beschränkt. Die mengentheoretische Betrachtung der Mathematik wie in der *Neuen Mathematik* der 1970er Jahre kann sich im Schulunterricht nicht manifestieren und ist einige Jahre nach ihrer Umsetzung bereits wieder aufgegeben worden.

Unendlichkeit wird im mathematischen Schulunterricht nicht explizit angeführt. Schülerinnen und Schüler gehen mit dem Begriff der Unendlichkeit in verschiedenen Themengebieten „intuitiv“ um. In keiner Schulform sieht der entsprechende Lehrplan eine Definition des Unendlichkeitsbegriffs vor. Auch in den untersuchten Schulbücher wird keine Begriffsklärung oder exakte Definition gegeben.

Es stellt sich die Frage nach der Notwendigkeit der genaueren Einbindung des Unendlichkeitsbegriffs in den Schulunterricht. Es sollte vermieden werden, dass die Unendlichkeit im Unterricht als isoliertes Gebiet zwar behandelt wird, da die Vernetzung mit anderen Themen nur bedingt möglich ist, die Sinnhaftigkeit dieser Umsetzung zu hinterfragen ist.

Verzeichnis

Quellen

- [1] Georg Cantor. „Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt“. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin: Springer, 1932, S. 80–83.
- [2] Georg Cantor. „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin: Springer, 1932, S. 115–118.
- [3] Georg Cantor. „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin: Springer, 1932, S. 139–204.
- [4] Georg Cantor. „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“. In: *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872-1884*. Hrsg. von Günter Asser. Bd. 2. TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1984, S. 25–44.
- [5] Georg Cantor. „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin: Springer, 1984, S. 278–281.

- [6] Georg Cantor. „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“. In: *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872-1884*. Hrsg. von Günter Asser. Bd. 2. ARCHIV zur Mathematik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1984, S. 9–18.

Sekundärliteratur

- [7] Franka Miriam Brückler. *Geschichte der Mathematik kompakt. Das wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.
- [8] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [9] Erich Kamke. *Mengenlehre*. 7. Aufl. Berlin, New York: de Gruyter, 1971.
- [10] Andor Kertész. *Georg Cantor 1845 - 1918 ; Schöpfer der Mengenlehre*. Hrsg. von Georg Uschmann. Bd. 15. Acta Historica Leopoldina. Halle/Saale: Deutsche Akademie der Naturforscher, 1983.
- [11] Günter M. Ziegler Martin Aigner. *Das Buch der Beweise*. 5. Aufl. Berlin: Springer, 2018.
- [12] Herbert Meschkowski. *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1967.
- [13] Herbert Meschkowski. *Hundert Jahre Mengenlehre*. Wissenschaftliche Reihe. München: Dt. Taschenbuchverlag, 1973.
- [14] Lutz Prieße. „Aspekte des Unendlichen. Eine kleine Erzählung für Nichtmathematiker“. In: *Die blaue Stunde der Informatik*. Springer Vieweg, 2019.
- [15] Walter Purkert und Hans Joachim Ilgauds. *Georg Cantor 1845-1918*. Hrsg. von Emil A. Fellmann. Bd. 1. Vita Mathematica. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1987.
- [16] Helmut H. Schaefer. *Georg Cantor und das Unendliche der Mathematik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.
- [17] John Stillwell. *Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit*. Springer Spektrum, 2014.
- [18] Ernst Zermelo. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Springer, 1932.

Internetquellen

- [19] Bundesminister für Unterricht und Kunst. *Lehrplan allgemeinbildende höhere Schulen*. BGBl. II Nr. 395/2019. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008568/Lehrpla%20ne%20allgemeinbildende%20ho%20Schulen%2c%20Fassung%20vom%2001.03.2021.pdf>.
- [20] Bundesminister für Unterricht und Kunst. *Lehrplan der Handelsakademie*. BGBl. II Nr. 895/1994, 2021, (Zugriff: 09.03.2021, 23:00). URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008944/Lehrpl%20ne%20Handelsakademie%20und%20Handelsschule%2c%20Fassung%20vom%2009.03.2021.pdf>.
- [21] Bundesministerin für Bildung. *Allgemeines Bildungsziel, didaktische Grundsätze, Schulautonome Lehrplanbestimmungen und gemeinsame Unterrichtsgegenstände an den höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten*. Bd. Anlage 1.6. BGBl. II Nr. 201/2016. URL: <https://www.abcbildungsschulen.at/download/2116/HLA-f%20j%20r-Forstwirtschaft.pdf>.
- [22] Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur. *Lehrplan der Mittelschulen*. BGBl. II Nr. 379/2020. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/20007850/Lehrpla%20der%20Mittelschulen%2c%20Fassung%20vom%2001.03.2021.pdf>.
- [23] Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur. *Lehrplan der Volksschule*. BGBl. Nr. 303/2012, (Zugriff: 28.02.2021, 15:00). URL: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:b89e56f6-7e9d-466d-9747-fa739d2d15e8/lp_vs_gesamt_14055.pdf.
- [24] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *Schulformspezifische Kompetenzen und Begriffe im Cluster BAfEP/BASOP/BRP (P)*. 2017. URL: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=1269&token=b46424379c0647c32e5bb40706248c44a65b4f58>.
- [25] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern*. 2019, (Zugriff: 02.03.2021, 16:00). URL: https://www.matura.gv.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/AM/srdp_am_kompetenzen_2018_teil_a-2019-09-05.pdf.
- [26] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *Mathematische Grundkompetenzen für die SRDP in Mathematik (AHS)*. 2021, (Zugriff: 02.03.2021, 15:30). URL: https://www.matura.gv.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/AM/srdp_am_kompetenzen_2018_teil_a-2019-09-05.pdf.

gv . at / index . php ? eID = dumpFile & t = f & f = 4827 & token = ddec5415c590424ff8b29e9256efb30e0730c5b9.

- [27] Georg Cantor. *Der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind*. Oliver Deiser, (Zugriff: 14.02.2021, 23:00). URL: https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=cd1_Briefe_Z24.
- [28] *Das österreichische Bildungssystem. Vorschule*. URL: <https://www.bildungssystem.at/volksschule/vorschule>.
- [29] Richard Dedekind. *Der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind*. Oliver Deiser, (Zugriff: 14.02.2021, 23:00). URL: https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=cd1_Briefe_Z27.
- [30] *Die Geschichte von Oslo*. BONO (Billedkunst Opphavsrett i Norge), (Zugriff: 13.02.2021, 17:00). URL: <https://www.visitoslo.com/de/artikel/geschichte/>.
- [31] Deborah Dötschel. *Zum Verständnis der Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht*. Nürnberg, 2011, (Zugriff: 25.02.2021, 16:30). URL: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2011/_BzMU11_2_Einzelbeitraege/BzMU11_DOETSCHEL_Unendlichkeit.pdf.
- [32] M. Goebel, Ka. Richter und S. Sauter. *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)*. (Zugriff: 15.02.2021, 23:00). URL: <http://disk.mathematik.uni-halle.de/history/cantor/>.
- [33] Tanja Hamann. „»Macht Mengenlehre krank?« - Die neue Mathematik in der Schule“. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM, 2011, 347–350, (Zugriff: 20.02.2021, 21:00). URL: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2011/_BzMU11_2_Einzelbeitraege/BzMU11_HAMANN_T_Mengenlehre.pdf.
- [34] Aeneas Roach. *Georg Cantor und das Universum der Unendlichkeiten*. Bd. 3. 1. SWR2, 2018, (Zugriff: 13.03.2021, 16:00). URL: <https://www.swr.de/swr2/programm/download-swr-13356.pdf>.
- [35] Friedrich Scheidt. „Gutberlet, Konstantin“. In: *Neue Deutsche Biographie* 7. 1966, S.366, (Zugriff: 28.02.2021, 11:00). URL: <https://www.deutsche-biographie.de/pnd11943976X.html#ndbcontent>.
- [36] Simone Schmid. „Adieu, Mengenlehre“. In: *Neue Züricher Zeitung*. 7.11.2010, (Zugriff: 28.02.2021, 22:30). URL: https://www.nzz.ch/adieu_mengenlehre-1.8293063.
- [37] Thomas Weth. *Faszination Unendlichkeit: Über die Struktur des Unendlichen*. Rudolf Freiburg, 2016, 105–138, (Zugriff: 20.02.2021, 16:00). URL: <https://opus4.kobv.de/opus4-fau/frontdoor/index/index/docId/7462>.

Schulbücher

- [38] Johannes Hasibeder u. a. *Das ist Mathematik 1*. Hrsg. von Hans Humenberger. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.
- [39] Johannes Hasibeder u. a. *Das ist Mathematik 4*. Hrsg. von Hans Humenberger. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2020.
- [40] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2014.
- [41] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2015.
- [42] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 7*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.
- [43] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 8*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.
- [44] Bernhard Salzger u. a. *Mathematik verstehen 1*. 2. Aufl. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2014.
- [45] Friedrich Tinhof u. a. *Mathematik I BAFEP/BASOP*. Hrsg. von Trauner Verlag. Linz, 2013.

Abbildungsverzeichnis

1	Georg Cantor (ca. 1870) (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Georg_Cantor3.jpg , 19.02.2021, 19:00 Uhr).	4
2	1. <i>Diagonalargument</i> - Abzählbarkeit $\mathbb{Q}$ (nach [34, 7f])	24
3	Zahlengitter - Punkte mit ganzzahligen Koordinaten (Ausschnitt), erstellt mit GeoGebra 5.0.352.0 (http://www.geogebra.org/)	25
4	Spiralförmige Darstellung der Ordinalzahlen von 0 bis ω^ω (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Omega-exp-omega-labeled.svg/1280px-Omega-exp-omega-labeled.svg.png , 18.02.2021, 15:30).	37
5	Summe einer unendlichen Reihe. ([41, S. 135])	60
6	Näherung der Tangentensteigung durch Sekanten. (nach [42, S. 22])	62
7	Ober- und Untersumme. ([43, S. 11])	63
8	Bestimmtes Integral – Fläche unter einer Kurve. ([43, S. 11])	63
9	Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Mengendifferenz) als Venn-(Mengen-) Diagramme dargestellt. (Eigene Darstellung.)	69