MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master‘s Thesis

Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen und ihre Entwicklung über die Zeit – fachdidaktische Analysen und eine empirische Untersuchung

verfasst von / submitted by

Alexander Neuwirth, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 504 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund UF Chemie Lehrverbund UF Mathematik Lehrverbund
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Abstract

Das Erwerben geeigneter Grundvorstellungen zählt zu einer der wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts. Bereits bei der Bruchrechnung, welche in der 6. Schulstufe erstmals unterrichtet wird, gelingt es teilweise nicht die benötigten Vorstellungen aufzubauen, was zu Verständnisproblemen und somit auch zu Schwierigkeiten im Umgang mit Textaufgaben führen kann. Dieser Mangel kann mit der Zeit zunehmen, aber auch durch weiteren Unterricht geschmälert oder sogar behoben werden. Das Ziel dieser Arbeit ist es festzustellen, in welchem Ausmaß Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen im heutigen Mathematikunterricht am Gymnasium „BG und BRG St. Pölten“ aufgebaut werden und wie sich diese im Laufe der weiteren Schulzeit entwickeln. Zur Beantwortung dieser Fragestellung wurden mehrere Klassen des genannten Gymnasiums mit Hilfe eines Online-Fragebogens zu verschiedenen Grundvorstellungen befragt und die Daten einheitlich und mit Blick auf unterschiedliche Schwerpunkte ausgewertet. Die erhaltenen Ergebnisse legen nahe, dass die Schülerinnen und Schüler der befragten Schule in ihrer Schullaufbahn immer mehr passende Grundvorstellungen im Bereich der Multiplikation und Division von Brüchen aufbauen. Zusätzlich schnitt die Stichprobe in vielen Fällen deutlich besser ab, als es in Vergleichsstudien der Fall war, was auf mehrere Faktoren zurückgeführt werden könnte, welche in der Arbeit noch genauer erläutert werden.

Acquiring fitting mental models is one of the most important aims in mathematics education. Even the introduction of fractions, which is taught in 6th grade for the first time, can lead to a lack of comprehension and therefore also to difficulties when dealing with word problems. This shortage can evolve into an even greater deficit but can also be reduced or even remedied by further education. The objective of this work is to determine the extent to which mental models for multiplication and division of fractions are built up in today’s mathematics education at the “Gymnasium BG und BRG St.Pölten“ and how they develop in the process of further schooling. For dealing with this question several classes of the mentioned school were given an online questionnaire asking for different mental models. The obtained data was then evaluated in a uniform way several times, each having a different focus. The results of the empirical study suggest that the longer the mathematics education lasts the more the participating students develop fitting mental models for the multiplication and division of fractions. Furthermore the sample group performed considerably better than groups of comparative studies which could be attributed to several factors itemised in this work.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Die Bruchrechnung wird von vielen Schülerinnen und Schülern als eines der schwierigsten und unanschaulichsten Themengebieten der Unterstufe betrachtet. Oft stehen im Unterricht dabei Regeln wie „Beim Dividieren muss man mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multiplizieren“ im Vordergrund, während anschauliche Herangehensweisen und zugehörige Begründungen nur sehr knapp behandelt werden. Doch gerade diese anschaulichen Wege, welche bestimmte Vorstellungen in den Schülerinnen und Schülern aufbauen sollen, können letztendlich dazu führen, dass Lernende ihr Wissen reflektiert anwenden und auch über längere Zeit nützen können. Rechenregeln haben im Mathematikunterricht natürlich ihre Daseinsberechtigung. Jedes Mal bei der Vorstellung zu beginnen und sich Formeln herzuleiten, würde sehr viel Zeit in Anspruch nehmen und wäre dementsprechend auch im Alltag nicht immer sinnvoll. Allerdings ist es wichtig, dass Rechenregeln auf Verständnis basieren, da diese sonst sehr schnell verwechselt, verdreht oder auch vergessen werden können. Es könnten bei manchen Schülerinnen und Schülern die Fragen auftauchen, wenn man den Kehrwert verwendet, von welchem Bruch man den Kehrwert bildet oder ob man diesen bei der Division oder der Multiplikation braucht. Genauso finden manchmal Verwechslungen bei den Grundrechnungsarten bei Brüchen statt. Wenn ein Lernender jedoch erst einmal verstanden hat, warum die Multiplikation oder die Division bei Brüchen so funktioniert, wie es in der Formel oder einem Merksatz gezeigt wird, kann sie oder er dieses Wissen jederzeit wieder abrufen, um eine Formel zu validieren.

Ein weiteres Problem des Mathematikunterrichts auf rein syntaktischer Ebene ist der Wechsel zwischen verschiedenen Kontexten oder Darstellungsformen. Oft fällt es Schülerinnen und Schülern schwer bestimmte Textaufgaben zu lösen, da sie den Text erst einmal in ein mathematisches Problem übersetzen müssen, bevor sich die gelernten Formeln anwenden lassen. Beispielsweise bedarf die Frage nach dem Bruchteil von einem Bruch bereits einer bestimmten Vorstellung, um die Fragestellung in eine Multiplikationsaufgabe mit Bruchzahlen umschreiben zu können. Diese Vorstellungen, die in der Didaktik der Mathematik sogenannten Grundvorstellungen, spielen im Unterricht zwar bereits eine zentrale Rolle, unumgänglich werden sie jedoch vor allem dann, wenn es zu konkreten Anwendungssituationen und somit auch Alltagssituationen kommt. Denn ohne einer passenden Vorstellung einer gegebenen Situation fällt die Übersetzung in ein mathematisch äquivalentes Problem sehr schwer.

1.1 Forschungsfrage und Erkenntnisinteresse

Wie im vorigen Unterkapitel beschrieben, erfüllen Grundvorstellungen im Mathematikunterricht also zwei wichtige Funktionen: Einerseits bauen sie ein tieferes Verständnis für die Themen des Mathematikunterrichts auf, was nicht nur zu besseren Ergebnissen bei Überprüfungen, sondern auch zu nachhaltigem Wissen führen kann. Andererseits helfen Grundvorstellungen beim Übersetzen konkreter Probleme in die mathematische Sprache, was wiederum wichtig ist, um diese Probleme auf meist einfachere Weise lösen zu können. Diesen Ideen folgend wäre es naheliegend, vor allem in der Bruchrechnung, welche wie bereits erwähnt oft als schwer oder unanschaulich gilt, vermehrt den Aufbau von Grundvorstellungen im Unterricht zu fördern, anstatt auf der rein formalen Rechenebene zu bleiben. Im zweiten Kapitel wird dieser Vorschlag aus fachdidaktischer Sicht diskutiert.

Diese Arbeit befasst sich vor allem mit der Frage, welche Grundvorstellungen bezüglich des Rechnens mit Brüchen bei heutigen Schülerinnen und Schüler vorliegen. Um das Gebiet etwas einzugrenzen, wurde der Fokus auf die Multiplikation und Division von Bruchzahlen gelegt, da diese in verschiedenen Umfragen oft schlechter abschneiden, als die Addition und Subtraktion.

Zuletzt wird auch ein Blick auf die zeitliche Entwicklung der Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen geworfen. Während in der 6. Schulstufe die Bruchrechnung eingeführt wird, ist sie in höheren Schulstufen für verschiedenste Anwendungsgebiete wie die Prozentrechnung oder auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung oft präsent. Aus diesem Grund könnte schnell der Schluss gezogen werden, dass sie somit „verstanden“ sein müsse. Der Rückgriff auf die moderne Technik, meist in Form eines Taschenrechners oder auch eines Computers, erlaubt es jedoch Rechnungen mit Bruchzahlen schnell und einfach ohne weiteres Verständnis zu lösen, was wiederum implizieren könnte, dass die Grundvorstellungen zur Bruchrechnung in höheren Schulstufen in den Hintergrund treten oder vielleicht sogar vergessen werden. Möglicherweise führt der Einsatz von Technik aber auch dazu, dass der Fokus vom reinen Rechnen auf das sinnvolle Anwenden von Vorstellungen gelenkt wird.

Das Wissen um beziehungsweise das Bewusstwerden der hier aufgeworfenen Fragen sowie mögliche Antworten auf diese kann einer Lehrperson helfen, den Unterricht an die Schülerinnen und Schüler besser anzupassen und Grundvorstellungen gezielt aufbauen. Mit diesem Ziel im Hinterkopf wurde folgende Forschungsfrage formuliert, welche im Laufe der Arbeit durch eine empirische Untersuchung sowie fachdidaktische Analysen beantwortet werden soll:

In welchem Ausmaß werden Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen im heutigen Mathematikunterricht an der AHS „BG und BRG St.Pölten“ aufgebaut und wie entwickeln sich diese Vorstellungen in der weiteren Schullaufbahn?

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Dieser Abschnitt, das 1. Kapitel, stellte dabei die Einführung in die Thematik sowie die Hinführung zur Forschungsfrage dar. Das 2. Kapitel widmet sich der Theorie der für die empirische Untersuchung relevanten Grundvorstellungen sowie den daraus abzuleitenden zentralen Annahmen. Im dritten Abschnitt wird das Untersuchungsdesign vorstellt. Dabei wird erklärt, wie die Online-Umfrage durchgeführt wurde und welche Klassen daran teilnahmen. Anschließend folgt Kapitel 4, welches den Fragebogen sowie die einzelnen Fragen näher beleuchten soll. Infolge der Analyse der einzelnen Aufgaben wird auch ein auf der Theorie aufbauender Erwartungshorizont formuliert und begründet. Im 5. Kapitel, welches sich mit den Ergebnissen der empirischen Untersuchung beschäftigt, wird versucht diese anschaulich in verschiedenen Kontexten beziehungsweise durch mehrere Auswertungen und Analysen mit unterschiedlichen Fokussen und Grafiken übersichtlich darzustellen. Die zusammengefassten Ergebnisse werden im 6. Kapitel schließlich diskutiert und interpretiert. Infolgedessen wird auch die Forschungsfrage beantwortet. Das letzte Kapitel rundet die Arbeit schließlich mit einem Fazit sowie einem Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten ab, welche an die Ergebnisse der empirischen Untersuchung sowie die darauf beruhenden Schlussfolgerungen anschließen.

Am Ende dieser Arbeit befinden sich das Literaturverzeichnis sowie der Anhang, welcher den Fragebogen und die bei der Auswertung verwendeten Tabellen beinhaltet.

2 Theoretische Grundlagen und Forschungsstand

In diesem Abschnitt erfolgt eine Auseinandersetzung mit der für die empirische Untersuchung benötigten Theorie. Dabei wird zuerst auf die Idee der Grundvorstellung an sich eingegangen und dann im zweiten Unterkapitel relevante Grundvorstellungen im Bereich der Multiplikation und Division von Bruchzahlen aufgezeigt. Es folgen eine Analyse häufig auftretender Schwierigkeiten und Fehler (siehe Abschnitt 2.3) sowie ein kurzer Abschnitt über die Entwicklung von Grundvorstellungen mit der Zeit (siehe Abschnitt 2.4). Am Ende werden im letzten Unterkapitel für die Untersuchung zentrale Annahmen, welche aus dem Forschungsstand gezogen werden können, kurz ausformuliert.

2.1 Grundvorstellungen – was sind sie und wofür werden sie gebraucht

In der Einleitung wurde bereits die Idee der Grundvorstellung knapp skizziert: Der Mathematikunterricht soll vor allem dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Inhalte verstehen lernen. Dabei ist zu beachten, dass „verstehen" nicht fälschlicherweise mit „beherrschen" gleichgesetzt werden sollte. Das einfache Beherrschen des Kalküls, zum Beispiel die Rechnung $\frac{1}{3} \bullet 4 = \frac{4}{3}$ lösen zu können, bedeutet noch nicht zu verstehen, was hinter dieser Rechnung stecken oder wofür sie eingesetzt werden kann. Eine Schülerin oder ein Schüler, welche oder welcher die Bruchrechnung bereits gelernt, aber nicht verstanden hat, kann diese Rechnung zwar als solche erkennen und lösen, hat aber vermutlich Probleme damit, diese in einen Kontext zu setzen oder aus einem Kontext herauszulesen. Es fehlt die Verbindung zwischen der Mathematik und der realen Welt, eine Möglichkeit, die Symbole und Zeichen zu deuten, eine Grundvorstellung (Padberg & Wartha, 2017, S. 1-2). Eine knappe, aber treffende Definition des Wortes findet sich im Lehrbuch „Didaktik der Analysis", welche Grundvorstellungen als inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffes, die diesem Sinn gibt, wahrnehmen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, & Weigand, 2016, S. 17). Wie das im Begriff beinhaltete Wort „Vorstellung" bereits andeutet, sollen sich Schülerinnen und Schüler unter Rechnungen, Zahlen, sogar unter den einzelnen Operatoren etwas vorstellen können. Dabei ist es wichtig, dass sie Probleme nicht nur auf der symbolischen Ebene bearbeiten können, sondern flexibel zwischen verschiedensten Darstellungsmöglichkeiten umdenken können. Grundvorstellungen sollen den Schülerinnen und Schülern genau dieses Umdenken ermöglichen, indem sie als Übersetzungsmöglichkeit zwischen verschiedenen Darstellungsebenen dienen. Padberg und Wartha beschreiben die Begriffe „Beherrschen" und „Verstehen" dabei so, dass Schülerinnen und Schüler ein Teilgebiet der Mathematik beherrschen, wenn sie mathematische Fragestellungen auf einer Darstellungsebene bearbeiten können. Verstehen tritt jedoch erst ein, wenn die Bearbeitung auf verschiedenste Darstellungsformen ausgeweitet werden kann (Padberg & Wartha, 2017, S. 1-2).

Auch Malle schließt sich dieser Sichtweise an, er beschreibt Grundvorstellungen als wichtig und für die Allgemeinbildung unverzichtbar, da ohne diese Anwendung von Mathematik und Problemlösen nur schwer gelingen kann. Grundvorstellungen stellen dabei ein Bindeglied zwischen einer bestimmten Situation und der mathematischen Beschreibung dieser Situation dar. So soll die Situation bei einem Problemlösevorgang in der Bearbeiterin oder im Bearbeiter gewisse Grundvorstellungen ansprechen, mit deren Hilfe die Mathematik hinter dem Problem erkannt werden kann und welche eine Übersetzung auf die formale, mathematische Ebene ermöglichen. Umgekehrt sollen sie auch dazu führen, dass aus rein mathematischen Beschreibungen Ideen gewonnen werden, wie diese in konkreten Situationen gedeutet werden können. Die Verbindung zwischen Realität und Mathematik ist demnach in beiderlei Richtungen durch Grundvorstellungen möglich. An dieser Stelle erkennt Malle schließlich auch ein für ihn häufig auftretendes Problem: Wenn Menschen mit Mathematik in alltäglichen Kontexten konfrontiert werden, ihnen jedoch die passenden Grundvorstellungen fehlen, können sie nur auf auswendig gelernte, aber meist unverstandene Formeln zurückgreifen. Dieses Verhalten ist jedoch sehr fehleranfällig, da einzelne Symbole oder Phrasen schnell verwechselt oder vergessen werden können und den Anwendern jedoch keine Möglichkeit der Selbstkontrolle zur Verfügung steht, da diese Formeln nicht auf Verständnis fußen (Malle, 2004b, S. 1-2).

Für einen tieferen Einblick und das Aufzeigen weiterer Aspekte von Grundvorstellungen muss zwischen universellen und individuellen Vorstellungen unterschieden werden. Universelle Grundvorstellungen beschreiben, was sich Lehrende und im Endeffekt auch Lernende unter einem Begriff vorstellen sollen. Es handelt sich dabei um allgemeine Vorstellungen, welche als Ziele des Mathematikunterrichts angesehen werden können. Wenn der Fokus darauf liegt, was sich eine konkrete Schülerin oder ein konkreter Schüler unter einem bestimmten, mathematischen Begriff vorstellt, spricht man von individuellen Grundvorstellungen. Diese können von Person zu Person variieren, da sie das Produkt eines persönlichen Lernprozesses sind. Dabei können Schülerinnen und Schüler auch solche Erklärungsmodelle verwenden, welche in manchen Situationen vielleicht passen, aber teilweise nicht allgemein gültig sind (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, & Weigand, 2016, S. 18-19). Wird in dieser Arbeit von Grundvorstellungen gesprochen, so sind im Allgemeinen universelle Grundvorstellungen gemeint.

Mit der im vorigen Absatz erläuterten Unterscheidung lässt sich nun gezielt die Seite der Schülerinnen und Schüler betrachten: Individuelle Grundvorstellungen von Lernenden sind sehr flexibel, sie unterliegen regelmäßigen Veränderungen, werden teilweise verworfen oder durch neue Vorstellungen erweitert. So kann beispielsweise die Multiplikation von natürlicher Zahlen als wiederholte Addition gesehen werden, diese Vorstellung muss jedoch spätestens bei der Multiplikation zweier Bruchzahlen erweitert werden. Vom Hofe spricht dabei von der Ausbildung eines Netzwerks, welches sich immer weiter zu einem leistungsfähigen System mentaler, mathematischer Modelle entwickelt (Vom Hofe, 2003, S. 6). Natürlich können diese Erweiterungen den Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten, da vertraute Grundvorstellungen, welche sich bis zu diesem Zeitpunkt bewährt hatten, nun zurückgelassen oder adaptiert werden müssen. Konkrete Ausführungen zu diesem Thema finden sich im Abschnitt 2.3.

Wirft man nun einen Blick auf die Seite der Lehrkräfte, so bieten universelle Grundvorstellungen nicht nur eine gewisse Zielorientierung, sondern können auch zur Diagnose und einer anschließenden Behebung fachlicher Schwierigkeiten dienen. Da dank der fachdidaktischen Forschung viele universelle Grundvorstellungen formuliert sowie mögliche alternative Konzepte bereits bekannt sind, gibt es die Möglichkeit, Aufgaben so zu erstellen, dass sie gezielt nach einer bestimmten Grundvorstellung fragen. Die Analyse der von den Schülerinnen und Schülern bearbeiteten Aufgaben kann in einigen Fällen Rückschlüsse auf das Vorhandensein richtiger, aber auch mangelnder oder fehlerhafter Vorstellungen ermöglichen und somit auch als Ausgangspunkt für weitere Fördermaßnahmen dienen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, & Weigand, 2016, S. 20).

Einen letzten Vorteil, welcher für den Aufbau von Grundvorstellungen spricht, nennt Eva-Maria Pfeiffer in ihrer Diplomarbeit zum Thema „Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten“. Sie spricht davon, dass für viele Lernende die Sinnhaftigkeit des Lernstoffes ein entscheidender Faktor ist. Da Vorstellungen der Mathematik erst Sinn verleihen, da sie die Brücke zwischen der formalen Ebene und der Realität schlagen, fördert das Verstehen die Sinnhaftigkeit des Mathematikunterrichts aus Sicht der Schülerinnen und Schüler und kann somit auch zu erhöhter Motivation führen (Pfeiffer, 2012, S. 17).

Zusammenfassend dienen Grundvorstellungen der Sinnstiftung im Mathematikunterricht. Einerseits ermöglichen sie Schülerinnen und Schülern flexibel zwischen verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, alltäglichen Kontexten und der mathematischen Sprache zu übersetzen und sind damit essentiell für die Anwendung von Mathematik, andererseits helfen sie der Lehrperson als Zielformulierung und bei der Diagnostik im Unterricht. Aus diesen Gründen sind auch in der Forschung der Mathematikdidaktik Grundvorstellungen ein wichtiges Themengebiet und somit auch Thema vieler empirischer Untersuchungen. Malle beschreibt jedoch, dass Ergebnisse einiger empirischer Untersuchungen zeigen, dass Grundvorstellungen bei befragten Schülerinnen und Schülern weitgehend nicht oder nicht ausreichend vorhanden sind (Malle, 2004b, S. 3).

Während dieser Abschnitt die Idee der Grundvorstellungen sowie ihre einhergehenden Vorteile thematisierte, wird im folgenden Unterkapitel auf jene Grundvorstellungen eingegangen, welche für die empirische Untersuchung dieser Arbeit nötig sind.

2.2 Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen

Im letzten Abschnitt wurde auf die Wichtigkeit von Grundvorstellungen für die Anwendung von Mathematik hingewiesen. So ist auch beim Thema Bruchzahlen, welches sowohl in der Schule als auch im Alltag oft eine relevante Rolle spielt, ein Aufbau passender Vorstellungen und Ideen unverzichtbar. Padberg und Wartha betonen jedoch, dass es vor allem bei der Multiplikation und Division von Bruchzahlen zu Problemen bei der Aktivierung passender Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern kommt. Diese Aussage untermauern sie mit mehreren Studien und weisen darauf hin, dass beispielsweise in einer Studie nur 4% der Lernenden zu der Gleichung $\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ eine passende Aufgabe formulieren konnten (Padberg & Wartha, 2017, S. 156). Umgekehrt lässt Padberg in einer anderen Umfrage Schülerinnen und Schüler ein Viertel der Hälfte eines Rechtecks anmalen und fragt nach der zugehörigen Rechenaufgabe. Während 72% der Befragten das Rechteck richtig bemalte, schaffte es nur 1% auch die zugehörige Rechnung zu formulieren (Padberg, 1986, S. 68-69). Diese und weitere Ergebnisse empirischer Untersuchungen zeigen, dass im Bereich der Multiplikation und Division innerhalb der Bruchrechnung ein starker Nachholbedarf herrscht. Um jedoch gezielt nach Grundvorstellungen fragen und die Antworten einheitlich auswerten zu können, müssen die einzelnen Grundvorstellungen jedoch zuerst formuliert werden, was das Ziel dieses Abschnitts darstellt.

2.2.1 Multiplikation von Bruchzahlen

Den für Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich noch vertrautesten Aufgabentyp stellt die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl dar. Wie in den natürlichen Zahlen kann hier die Multiplikation als wiederholte Addition verstanden werden, beispielsweise kann die Rechnung $5 \bullet \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ als $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ gedeutet werden. Zusätzlich kann der Quasikardinalzahlaspekt der Bruchzahlen hinzugezogen werden, um den Denkprozess zu erleichtern: $5 \bullet \frac{1}{3} = 5 \bullet ein\ Drittel = 5\ Drittel$. Der Vorteil dieser Vorstellung ist jener, dass sie aus dem Bereich der natürlichen Zahlen übernommen werden kann und somit auf weniger Widerstand bei den Schülerinnen und Schülern stößt. Jedoch lässt sich diese Grundvorstellung nur für Aufgaben des Typs natürliche Zahl mal Bruchzahl verwenden und ist somit in ihrem Anwendungsgebiet sehr beschränkt (Padberg & Wartha, 2017, S. 105).

Betrachtet man nun den umgekehrten Fall, Bruchzahl mal natürliche Zahl, wird schnell klar, dass eine neue Vorstellung aufgebaut werden muss. Die Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 3 = 2$ kann nicht mehr als wiederholte Addition gedeutet werden, die Zahl 3 kann nicht $\frac{2}{3}$ mal addiert werden. An dieser Stelle muss die Vorstellung etabliert werden, dass der Operator „ • “ in diesem Kontext als „von“ gedeutet werden kann. Mit dieser Idee kann die Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 3 = 2$ als „zwei Drittel von drei Ganzen“ gedeutet werden, also als zwei Ganze. Um diese Grundvorstellung einerseits zu validieren und andererseits zu festigen, sollten verschiedenste, anschauliche Beispiele – auch oder vor allem auf der grafischen Ebene – aufgezeigt und gerechnet werden. (Padberg & Wartha, 2017, S. 106-107).

Wurde die Deutung der Multiplikation in der Bruchrechnung als „von“-Rechnung gewissenhaft eingeführt, wurde damit bereits ein wichtiger Grundbaustein für die Berechnung von Anteilen von Anteilen gelegt. Bei diesem Aufgabentyp handelt es sich um Rechnungen, in welchen eine Bruchzahl mit einer anderen Bruchzahl multipliziert wird. Auch in diesem Fall ist es vorteilhaft die Multiplikation als „von“ zu deuten. Beispielsweise kann die formale Rechnung $\frac{1}{2} \bullet \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ als „die Hälfte von zwei Drittel“ gedeutet werden, was ohne weitere Rechnung bereits die Lösung „ein Drittel“ nahelegt (Padberg & Wartha, 2017, S. 109-111).

Die eher einfache Verknüpfung des Wortes „von“ mit der Multiplikation von Bruchzahlen kann für einige Schülerinnen und Schülern bereits einen großen Schritt im Verständnis darstellen. Mit Hilfe dieser Vorstellung kann auch der erste Aufgabentyp, die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl, gelöst werden. $5 \bullet \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ kann dabei als „fünf Stück von einem Drittel, also fünf Drittel“ gedeutet werden. Zusätzlich bietet diese Deutung Anschluss an die aus den natürlichen Zahlen bekannte Grundvorstellung der wiederholten Addition.

2.2.2 Division von Bruchzahlen

Bereits aus der Volksschule ist bei den meisten Lernenden die Vorstellung der Division als Teilen vorherrschend. Diese Vorstellung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen kann in Spezialfällen auch für die Bruchrechnung übernommen werden. So kann die Rechnung $\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$ mit Hilfe des Quasikardinalzahlaspekts als „4 Neuntel dividiert durch 2 sind 2 Neuntel“ oder als „Man verteilt vier Neuntel gerecht an zwei Personen, jede bekommt zwei Neuntel“ gedeutet werden (Malle, 2004a, S. 7). Diese Vorstellung stößt jedoch sehr schnell an ihre Grenzen. $\frac{3}{5}$ können bereits nicht mehr so einfach durch zwei geteilt werden. Allerdings lässt sich dieses Problem mit einem Trick beheben: Erweitert man $\frac{3}{5}$ mit 2, so erhält man die zu $\frac{3}{5}$ äquivalente Bruchzahl $\frac{6}{10}$. Diese kann wiederum durch zwei geteilt werden. Anschaulich kann man hier beispielsweise mit einer Torte argumentieren, von welcher noch $\frac{3}{5}$ übrig sind. Will man diese gerecht auf zwei Personen verteilen, müssen alle drei Fünftel zuerst halbiert werden. Im Anschluss lassen sich die entstandenen sechs Tortenstücke einfach auf zwei Personen verteilen. Auf der formalen Ebene wäre dies die Rechnung $\frac{3}{5} : 2 = \frac{6}{10} : 2 = \frac{3}{10}$ (Padberg & Wartha, 2017, S. 129-133). Selbst mit diesem Trick bleibt jedoch zu beachten, dass die Vorstellung des Teilens nur im Fall Bruch durch natürliche Zahl einen Sinn macht. Die Deutung von $2 : \frac{2}{3} = 3$ als „Man teilt 2 Ganze auf $\frac{2}{3}$ Personen auf.“ ist nicht zielführend.

Eine weitere Grundvorstellung der Division aus dem Bereich der natürlichen Zahlen ist die Division als Messvorgang. Diese Vorstellung kann ebenfalls in der Bruchrechnung angewandt werden. Die vorher beschriebene und mit der Vorstellung des Teilens nicht lösbare Rechnung $2 : \frac{2}{3} = 3$ kann als „Wie oft passen $\frac{2}{3}$ in 2 hinein“ gedeutet werden. Denkt man sich noch einen konkreten Kontext dazu „Wie viele Kannen mit einer Füllmenge von $\frac{2}{3}$ Liter Milch kann man mit zwei Liter Milch füllen?“, wird die Berechnung des Ergebnisses einfacher, auch ohne Kenntnisse über die formalen Regeln der Division durch Bruchzahlen. Zusätzlich kann diese Deutung auch noch durch die Grundvorstellung des Dividierens als wiederholte Subtraktion, welche in sehr engem Zusammenhang mit der Multiplikation als wiederholter Addition steht, gestärkt werden. In diesem Sinne kann folgendermaßen vorgegangen werden: $2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \rightarrow 2 : \frac{2}{3} = 3$, in Worten: „Wenn man zwei Drittel von zwei Ganzen abzieht, bleiben ein Ganzes ein Drittel, zieht man erneut zwei Drittel ab, bleiben zwei Drittel. Man kann ein letztes Mal zwei Drittel abziehen und erhält null. Zwei Drittel passen demnach drei Mal in zwei Ganze hinein." Umgekehrt kann auch eine wiederholte Addition verwendet werden $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$, um zu argumentieren, dass $\frac{2}{3}$ dreimal in die Zahl 2 passt. Auch für den Fall Bruchzahl dividiert durch Bruchzahl lässt sich die Vorstellung des Messens anwenden. Als einfaches Beispiel könnte man fragen, wie oft $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ passt. Die Antwort zweimal spiegelt das Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$ wider. Die Division im Sinne eines Messvorgangs ist somit jene Grundvorstellung, welche für das Dividieren mit Bruchzahlen vorherrschend sein sollte. Diese Vorstellung erfordert jedoch für die Schülerinnen und Schüler ein Umdenken, da sich im Vergleich zu den natürlichen Zahlen einige, neue Hürden ergeben. Beispielsweise muss der Dividend nicht mehr größer oder gleich dem Divisor sein. Die Frage, wie oft $\frac{2}{3}$ in $\frac{1}{2}$ passt, welche die Rechnung $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$ widerspiegelt, erscheint kompliziert, da $\frac{2}{3}$ größer als $\frac{1}{2}$ ist und somit nicht ein einziges Mal hineinpasst. An dieser Stelle sollte versucht werden, anhand einfacher Beispiele ein erstes Verständnis zu generieren. So kann gefragt werden, wie oft $\frac{2}{3}$ in $\frac{1}{3}$ passt, was die Antwort ein halbes Mal nahe legt (Malle, 2004a, S. 7-8).

Lässt man sich die beiden Unterkapitel zum Thema Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Brüchen noch einmal durch den Kopf gehen, so erkennt man eine wesentliche Gemeinsamkeit der Rechenarten: Bei beiden Grundrechnungsarten können teilweise Vorstellung aus den natürlichen Zahlen übernommen werden und zumindest in Spezialfällen angewandt werden. Der Umstieg auf die neue „von"-Vorstellung bei der Multiplikation und die aus den natürlichen Zahlen bekannte, aber nun erweiterte Vorstellung des Messens bei der Division sollte einigermaßen fließend und mit anschaulichen Beispielen geschehen, um erste Grundsteine für die jeweilige Rechenart mit Bruchzahlen zu legen. Erst dann ist die Formulierung einer Rechenregel, welche über die jeweiligen Grundvorstellungen hergeleitet wird, für den allgemeinen Fall sinnvoll.

Während im Unterkapitel 2.2 mehrmals darauf verwiesen wurde, dass bestimmte Grundvorstellungen aus den natürlichen Zahlen in den Bereich der Bruchrechnung übernommen werden können, wird im nächsten Abschnitt vor allem auf jene Vorstellungen eingegangen, welche nicht übernommen werden können. Tatsächlich reicht bei manchen dieser Vorstellungen eine einfache Adaption nicht aus, sondern sie müssen von Grund auf überarbeitet werden.

2.3 Häufig auftretende Schwierigkeiten und Fehler im Bereich der Multiplikation und Division von Bruchzahlen

Die Deutung der Multiplikation als wiederholte Addition ist für die meisten Schülerinnen und Schüler, wie zuvor bereits angesprochen, eine vertraute Vorstellung. Im Kontext der natürlichen Zahlen kommt man dabei sehr schnell zu der Erkenntnis, dass die Multiplikation mit Zahlen außer 0 und 1 die ursprüngliche Zahl immer vergrößert. Diese Vorstellung erweist sich den Lernenden vermutlich in vielen Kontexten als nützlich, zum Beispiel zur schnellen Abschätzung, ob ein Ergebnis stimmen kann, muss jedoch bei der Multiplikation mit Bruchzahlen verworfen werden. Denn bei der Multiplikation mit Bruchzahlen kann das Ergebnis kleiner, gleich oder größer als die Ausgangszahlen sein. Padberg und Wartha beschreiben, dass diese Vorstellung der Vergrößerung durch Multiplikation auch teilweise erhalten bleibt, dass manche Schülerinnen und Schüler dies auch behaupten, wenn sie Rechnungen wie zum Beispiel $\frac{3}{4} \bullet \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ ausrechnen können, da sie sich algorithmisch und intuitiv auf verschiedenen Ebenen bewegen, ohne diese miteinander verknüpfen zu können (Padberg & Wartha, 2017, S. 114-115). Diese Dissonanz deutet darauf hin, dass die Multiplikation mit Bruchzahlen zwar beherrscht, aber nicht verstanden wird.

Passend zu der aus den natürlichen Zahlen kommenden Idee, dass die Multiplikation immer vergrößert, existiert auch die Vorstellung, dass die Division immer verkleinert, ausgenommen durch die Zahl 1 (Padberg & Wartha, 2017, S. 144). Dieser Gedanken entspringt wahrscheinlich der den Lernenden gut bekannten Deutung der Division als Teilen. Wenn man eine Menge an Dingen auf mehrere Personen gerecht verteilt, ist unmittelbar klar, dass jede einzelne Person danach weniger hat als zuvor gesamt zur Verfügung stand. Wie jedoch bereits im vorigen Abschnitt erläutert, lässt sich die Vorstellung des Verteilens nur mehr in speziellen Situationen anwenden, nämlich wenn der Divisor eine natürliche Zahl ist. In diesen Fällen passt auch die Vorstellung, dass die Division den Dividenden verkleinert, in anderen Situationen, in welchen durch eine Bruchzahl kleiner 1 und größer 0 dividiert wird, stimmt dies jedoch nicht. Im Allgemeinen kann die Division durch Bruchzahlen die Ausgangszahl vergrößern, verkleinern oder auch gleich bleiben lassen, je nachdem, durch welche Zahl dividiert wird.

Eine weitere Vorstellung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, welche nicht in den Bereich der Bruchzahlen übernommen werden kann, ist jene, dass eine natürliche Zahl nur in Sonderfällen restlos durch eine andere natürliche Zahl dividiert werden kann. In den meisten Fällen bleibt ein Rest, welcher nicht weiter aufgespaltet werden kann. Für den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen stimmt diese Aussage zwar, erweitert man jedoch auf den Bereich der Bruchzahlen, ergeben sich zwei neue Wege. Einerseits ist das Ergebnis einer Division natürlicher Zahlen immer ein sehr einfach anzugebener Bruch, als Beispiel $5 : 3 = \frac{5}{3}$. Andererseits kann man auch wie gewohnt dividieren und den Rest als Bruch angeben, um zu einer gemischten Zahl zu kommen, beispielsweise $5 : 3 = 1\frac{2}{3}$. Laut Padberg und Wartha kann diese Umstellung bei Schülerinnen und Schülern große Unsicherheiten hervorrufen, da für sie eine Division, welche sie sehr lange als nicht ausführbar betrachteten, jetzt plötzlich ein Ergebnis liefert. Die fälschliche Annahme, dass diese Rechnung jetzt auch im Bereich der natürlichen Zahlen möglich ist, kann zu Verständnisproblemen und noch größerer Unsicherheit führen. Diese Hypothesen werden durch Untersuchungen zur Bruchrechnung belegt, in welchen Schülerinnen und Schüler vor allem jene Beispiele des Typs natürliche Zahl dividiert durch natürliche Zahl auslassen (Padberg & Wartha, 2017, S. 138, 143).

Eine letzte Fehlvorstellung, welche sich bei Schülerinnen und Schülern entwickeln kann, stellt jene Vorstellung dar, dass sich eine kleinere Zahl nicht durch eine größere Zahl dividieren lässt. Auch diese Idee stammt ursprünglich aus dem Bereich der natürlichen Zahlen. Weder die Grundvorstellung der Division als Teilen, noch als Messen funktioniert, wenn der Dividend kleiner als der Divisor ist, solange nicht auf entsprechende Vorstellungen von Bruchzahlen zurückgegriffen wird. Die Frage, wie man zwei Äpfel auf drei Personen aufteilen soll, könnte man beispielsweise so beantworten, dass man jeden der beiden Äpfel drittelt und jeder Person von jedem Apfel ein Drittel abgibt. Dennoch hält sich die Vorstellung bei einigen Schülerinnen und Schülern, dass eine solche Division nicht möglich ist (Padberg & Wartha, 2017, S. 144).

Sowohl bei der Multiplikation, als auch bei der Division gibt es somit Bruchstellen zwischen den vor der Einführung in die Bruchzahlen vorherrschenden Grundvorstellungen und jenen Vorstellungen, welche während der Behandlung der Multiplikation und Division von Bruchzahlen entstehen sollen. Besonders auffällig ist hier auch, dass es bei der Division deutlich mehr potenzielle Bruchstellen gibt, was vermuten lässt, dass auch bei der Bruchrechnung die Division schwerer verständlich für die Schülerinnen und Schüler als die Multiplikation ist.

Die Frage, ob Grundvorstellungen wie diese, wenn sie einmal aufgebaut sind, sich auch halten beziehungsweise ob solche Vorstellungen, welche sich noch nicht gefestigt haben, im Laufe des Mathematikunterrichts noch die Möglichkeit dazu bekommen, wird im nun folgenden Abschnitt diskutiert.

2.4 Mögliche Entwicklungen von Grundvorstellungen über die Zeit

In der 6. Schulstufe, in welcher die systematische Bruchrechnung eingeführt wird, stehen Computeralgebrasysteme – kurz CAS – wie zum Beispiel in Form eines Taschenrechners an der untersuchten Schule noch nicht zur Verfügung. Dies ändert sich jedoch im Jahr darauf: Ab der 7. Schulstufe müssen alle Schülerinnen und Schüler einen Taschenrechner besitzen und die Verwendung dieses wird in den Unterricht fortan integriert. Diese Änderung kann den Mathematikunterricht natürlich auf verschiedenste Arten beeinflussen, vor allem auch auf der Ebene der Grundvorstellungen. Jedoch ist dies nicht der einzige Faktor, welcher sich auf die Ausbildung von Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern auswirkt. So spielen zum Beispiel eine immer größer werdende Vertrautheit mit der Mathematik oder das regelmäßige Wiederholen sowie die Erweiterung von Grundvorstellungen im Unterricht ebenso eine wichtige Rolle. In diesem Kapitel wird versucht, diese Faktoren, welche sich auf die Ausbildung und Festigung von Grundvorstellungen im Mathematikunterricht auswirken können, zu erläutern und zu diskutieren. Im Anschluss werden noch kurz zwei zur Thematik passende Studien zusammengefasst und deren Ergebnisse im Lichte der vorangegangenen Theorie hervorgehoben.

Eine mögliche Richtung, in welche der Einsatz von Computeralgebrasystemen den Mathematikunterricht führen kann, erläutert Josef Lechner in seinem Dokument „Grundwissen, Grundvorstellung, Grundtätigkeit“: Er beschreibt, dass der Einsatz von CAS im Unterricht auf eine ganz besondere Weise zum Aufbau tragfähiger Vorstellungen beitragen kann. Einerseits können bereits einfache Taschenrechner viele Rechenschritte übernehmen, welche in der Theorie zwar leicht verständlich, in der Praxis aber händisch sehr mühsam und langwierig durchzuführen sind. Andererseits können höherwertige CAS durch verschiedenste Darstellungsmöglichkeiten den Begriffsaufbau unterstützen und damit das Verstehen, wie es im Abschnitt 2.1 besprochen wurde, fördern. Des Weiteren kann der Einsatz elektronischer Hilfsmittel aufgrund der rechnerischen Entlastung zur Anregung von Denkprozessen und somit auch zur Festigung von Grundvorstellungen beitragen. Zusammenfassen könnte man diese Sichtweise so beschreiben, dass CAS es ermöglichen sollen sich vom händischen Ausrechnen komplizierter Rechnungen zu distanzieren und hin zur von Lechner betitelten „Strategiekompetenz“ zu gelangen, welche letztendlich vor allem Mathematik in Anwendungssituationen und somit auch Grundvorstellungen stärken soll (Lechner, 2001, S. 12).

Eine andere Perspektive bietet jedoch Hans-Wolfgang Henn in seinem Artikel „Computer-Algebra-Systeme - junger Wein oder neue Schläuche?“. Prinzipiell vertritt Henn eine ähnliche Ansicht wie Lechner und sieht in Computeralgebrasystemen ein sehr nützliches Werkzeug für

Modellbildung und Simulation im Mathematikunterricht, allerdings übt er jedoch auch nachdrücklich Kritik am unreflektierten Einsatz sowie neu auftretenden Gefahren durch diesen. Dabei dürfen Hilfsmittel wie Taschenrechner oder mathematische Computerprogramme nicht als allmächtige Problemlösewerkzeuge betrachtet werden, sondern sollten viel mehr als methodische Ergänzung, eben als ein Hilfsmittel, gesehen werden. Es sollte nicht nur die reine Anwendung der Software, sondern vor allem auch die Einsicht in den Kalkül durch die Software geübt werden (Henn, 2004, S. 2, 18-19). Ein Beispiel in Henns Argumentation wäre, dass es manchmal sinnvoller ist, die Schülerinnen und Schüler händisch, also ohne CAS, rechnen zu lassen, da beispielsweise bei neuen Stoffgebieten die für CAS benötigte Syntax schnell zu einer Verschiebung der Aufmerksamkeit weg von der anschaulichen Vorstellung hin zur Bedienung des Programmes führen kann. Der Fokus würde somit wieder am Kalkül liegen, vielleicht wäre es für die Lernenden sogar noch abstrakter, da nicht mehr „nur“ die Rechnung im Vordergrund steht, sondern auch die Syntax des Computerprogrammes. Ein weiterer Kritikpunkt eines unreflektierten Einsatzes von CAS ist jener, dass im Unterricht, sobald Taschenrechner oder mathematische Computerprogramme vorhanden sind, oft „unschönere“ oder „schwerere“ Zahlen vorkommen oder mehr Rechenschritte benötigt werden. Dies kann dazu führen, dass der Fokus vor allem bei schwächeren Schülerinnen und Schülern auf dem komplizierten Vorgang der Berechnung liegt, während die Vorstellung zur Rechnung in den Hintergrund verbannt wird. Dies kann bei den Lernenden ein Gefühl der Abhängigkeit von CAS induzieren, was dazu führt, dass auch für die einfachsten Aufgaben auf den Taschenrechner zurückgegriffen wird und Grundvorstellungen immer weiter verdrängt werden (Henn, 2004, S. 5).

Natürlich gibt es fernab des Einsatzes von CAS auch noch andere Faktoren, welche sich auf die Entwicklung von Grundvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern auswirken. So kann davon ausgegangen werden, dass Lernende gerade im Alter zwischen 10 und 18 Jahren eine zunehmende Reife mit den Jahren entwickeln, welche das logische Denken sowie das Vorstellungsvermögen, vor allem auch für das Abstrakte, verbessern. Dies lässt vermuten, dass ältere Lernende einfacher komplexere Grundvorstellungen aufbauen können. Des Weiteren weist Gert Kadunz in seinem Werk „Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht“ auch darauf hin, dass Schülerinnen und Schülern durch das Operieren auf der formalen Zeichenebene, durch das Übersetzen zwischen der Realität und der mathematischen Sprache, durch das Lösen mathematischer Probleme oder ganz allgemein durch die Anwendung Mathematik als Ganzes immer vertrauter wird (Kadunz, 2020, S. 40-41). Umso vertrauter den Lernenden die Sprache sowie die Zeichen der Mathematik sind und umso leichter ihnen Übersetzungen zwischen der Realität und der Mathematik fallen, umso wahrscheinlicher kann ihre Aufmerksamkeit auf den Erwerb von Vorstellungen gelenkt werden. Beide Faktoren, die zunehmende geistige Reife mit dem Alter sowie die wachsende Vertrautheit mit der Mathematik mit steigender Schulstufe, lassen vermuten, dass Grundvorstellungen in höheren Schulstufen stärker vorhanden sein könnten.

Weitere Argumente für eine mögliche Besserung der Schülerinnen- und Schülervorstellungen mit der Zeit lassen sich bei Kristina Reiss und Christoph Hammer finden, welche unter anderem über das von Brunner 1970 eingeführte Spiralprinzip (Bruner, 1970) schreiben. Dieses besagt, dass mathematische Inhalte in verschiedenen Jahrgängen aufgegriffen und dabei immer mehr in die Tiefe gegangen werden soll. Eine sehr ähnliche Richtung wird auch beim Prinzip des kumulativen Lernens eingeschlagen, welches fordert, dass Inhalte in der Schule sowohl innerhalb eines Jahres, als auch über mehrere Schuljahre hinaus vernetzt werden. Dies soll ein besseres Verständnis für die Mathematik und den dazugehörigen Vorstellungen ermöglichen (Reiss & Hammer, 2013, S. 66-68). Die Verknüpfung zwischen diesen beiden Prinzipien und den Grundvorstellungen stellt Andreas Vohns mit folgender Überlegung her „Versteht man die Orientierung an fundamentalen Ideen als spiraligen Prozess [...], dann dürfte ein entscheidendes Moment dieses Prozesses die Entwicklung und Veränderung von Grundvorstellungen sein“ (Vohns, 2005, S. 62). Gemäß dieser Überlegung, welche sich mit der Metapher des sich immer weiter entwickelten Netzwerks von Rudolf vom Hofe deckt (Vom Hofe, 2003, S. 6), kommt der Aktivierung und Anpassung früher erlernter Grundvorstellungen auch in höheren Schulstufen noch eine wichtige Rolle zu. Jedoch beschäftigt sich mit der Idee des regelmäßigen Wiederaufgreifens nicht nur die fachdidaktischen Forschung, sie ist auch in der Lehrerinnen- und Lehrerfortbildung zu finden (Wagner, 2014) und bereits im Lehrplan verankert. Ein konkretes Beispiel des Wiederaufgreifens einer Grundvorstellung innerhalb desselben Schuljahres wäre, dass die Deutung des Wortes „von“ als Multiplikation auch bei der Prozentrechnung eine wichtige Rolle spielt. Rechnet man beispielsweise 60% von 20 aus, kann dies im Sinne von $\frac{60}{100} \bullet 20$ als Multiplikation mit Bruchzahlen gedeutet werden. Die dafür benötigten Grundvorstellungen der Prozentrechnung können bei Thomas Hafner nachgelesen werden (Hafner, 2012, S. 37-38). Ein anderes Beispiel für das Wiederaufgreifen der Multiplikation von Bruchzahlen in einer höheren Schulstufe stellt das Themengebiet Stochastik dar. Hier findet man die „von“-Vorstellung der Multiplikation in Fragestellungen des Typs „Ereignis A tritt mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit ein. Wenn A bereits eingetreten ist, tritt Ereignis B mit 30%-iger Wahrscheinlichkeit ein. Wenn A nicht eingetreten ist, tritt auch B nicht ein. Wie wahrscheinlich ist es, dass Ereignis B eintritt, ohne zu wissen, ob A eingetreten ist?“. Bei jenen Aufgaben müssen 30% von 60% berechnet werden, also in der Bruchschreibweise $\frac{30}{100} \bullet \frac{60}{100}$. Wenn davon ausgegangen wird, dass Grundvorstellungen zur Bruchrechnung im Mathematikunterricht an verschiedenen Stellen wieder aufgegriffen und auch thematisiert werden, würde dies darauf hindeuten, dass sich die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Multiplikation und Division von Bruchzahlen im Laufe ihrer Schullaufbahn verbessern könnten.

Es zeichnet sich an dieser Stelle bereits ab, dass rein aus der Theorie nur schwierig eine klare Aussage über die zeitliche Entwicklung von Grundvorstellungen getroffen werden kann, unter anderem da die einzelnen Einflussfaktoren wie die geistige Reife oder das mathematische Verständnis sehr individuell ausgeprägt sein können und andere Faktoren wie das regelmäßige Wiederaufgreifen von Vorstellungen vom jeweiligen Unterricht abhängen. Deshalb werden in den kommenden beiden Absätzen zwei Längsschnittstudien vorgestellt, welche Grundvorstellungen thematisierten, um erste Einblicke aus anderen empirischen Untersuchungen zu erhalten. Dabei wird bei der ersten Studie eine quantitative Auswertung vieler Schülerinnen und Schüler und bei der zweiten eine qualitative Auswertung einzelner Lernender im Vordergrund stehen.

Die erste Studie wurde von mehreren Autoren im Zuge des Projekts zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) durchgeführt. Dabei handelt es sich um eine deutsche Längsschnittstudie im Entwicklungszeitraum von der 5. bis zur 8. Schulstufe, wobei die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler einmal jährlich befragt wurden. Zum Einsatz kamen dabei quantitative Erhebungen kombiniert mit qualitativen Interviews. Die Teilnehmerzahl variierte pro Jahr, betrug jedoch jährlich rund 2000 Schülerinnen und Schüler, wobei von diesen jeweils knapp über 100 interviewt wurden. Im Fokus der Studie standen die Kompetenzen der Lernenden, vor allem die Kalkül- und Modellierungskompetenz, sowie das zentrale Thema Bruchrechnung. Die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse lassen sich in drei Punkten zusammenfassen:

- Schülerinnen und Schüler aus dem Gymnasium (verglichen zu Realschulen und Hauptschulen) schnitten nicht nur bereits in der 5. Schulstufe besser ab, ihr Kompetenzlevel stieg auch über die folgenden drei Jahre stärker als in anderen Schulformen an. Dies ist insofern relevant, weil die empirische Untersuchung zu dieser Arbeit ausschließlich an einem Gymnasium angesetzt wurde.
- Auch innerhalb eines Schultyps lassen sich sehr starke Abweichungen bei der Entwicklung einzelner Klassen feststellen. Während sich die Schulbildung bei manchen Klassen überdurchschnittlich positiv auf die Kompetenzen in der Bruchrechnung auswirkte, gab

es auch einzelne Klassen, welche sehr schwach positive oder sogar negative Entwicklungsverläufe aufwiesen.

- Unzureichende Grundvorstellungen wurden als Hauptgrund falscher Antworten identifiziert. Dass die Kalkülkompetenz stets über der Modellierungskompetenz liegt, lässt sich als ein weiteres Indiz für nicht ausgeprägte Vorstellungen festhalten. Diese Ergebnisse legen nahe, dass der Verlauf der Kompetenzentwicklung in sehr engem Zusammenhang mit der Ausbildung der passenden Grundvorstellungen steht.

(Pekrun, et al., 2006, S. 26-36)

Bei der zweiten Studie handelt es sich um eine amerikanische Längsschnittstudie, welche mit 20 Schülerinnen und Schülern aus verschiedenen Schulen und Klassen/Jahrgangsstufen durchgeführt wurde. Dabei wurden die Lernenden einmal in der 4. oder 5. Schulstufe und ein weiteres Mal in der 5. beziehungsweise 6. Schulstufe in einem Interview zu verschiedenen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und den Operationen mit ihnen befragt. Zusätzlich wurden auch detaillierte Analysen und Ergebnisse von drei Schülern vorgelegt. Die sehr knapp ausfallende Conclusio der Studie besagt, dass Verbesserungen auf der rechnerischen Ebene nicht mit besseren Grundvorstellungen einhergehen müssen. In den vorgestellten Analysen der drei Interviews zeigt sich, dass sich die Befragten alle drei im syntaktischen Bereich verbessert haben, während die Entwicklung der Grundvorstellungen zu Brüchen sehr unterschiedlich verlief. In einem Fall konnte ein vertieftes Vorstellungsvermögen aufgezeigt werden, der zweite Lernende hatte manche Vorstellungen möglicherweise sogar abgebaut, da er die Aufgaben nur mehr rechnerisch behandelt und auch bei Nachfragen nicht auf Vorstellungen zurückgriff und der dritte Schüler hatte seine Vorstellungen zu Bruchzahlen und den Operationen mit diesen zwar verbessert, griff aber nicht immer darauf zurück.

Die beiden Längsschnittstudien untermauern das zuvor dargestellte Bild möglicher Einwirkungen auf die Entwicklungsprozesse von Vorstellungen. Sowohl die Theorie als auch die gezeigten Studien legen nahe, dass die Frage, ob Grundvorstellungen im weiteren Unterricht über die Zeit aufgebaut werden, abnehmen oder gleich bleiben, im Allgemeinen nicht beantwortet werden kann, da verschiedenste Faktoren eine Rolle spielen, welche sich untereinander nicht gut vergleichen oder abwägen lassen. Während Josef Lechner vor allem von den Vorteilen von Computeralgebrasystemen zur Förderung von Grundvorstellungen im Mathematikunterricht spricht, lenkt Hans-Wolfgang Henn die Aufmerksamkeit auf mögliche Probleme eines unreflektierten Einsatzes von CAS im Unterricht und der damit einhergehenden Blockade von Vorstellungen. Der gezielte Einsatz von CAS könnte dazu geführt haben oder auch immer noch führen, dass in einigen Klassen verstärkt auf den Aufbau und Erhalt von Grundvorstellungen – so auch zu Grundvorstellungen zur Bruchrechnung – im Mathematikunterricht geachtet werden konnte, aber umgekehrt auch dazu, dass bei einzelnen Rechnungen die Vorstellung in den Hintergrund trat und die Berechnung durch CAS dominierte. Zusätzlich dürfen Faktoren wie die geistige Reife, die Vertrautheit mit der Mathematik und das Wiederaufgreifen bekannter Vorstellungen in neuen Kontexten nicht außer Acht gelassem werden, da auch sie sich positiv auf die Entwicklung der Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler auswirken können. Zuletzt deuten die beiden vorgestellten Studien auf eine Verbesserung der Grundvorstellungen mit der Zeit hin, wobei beim Betrachten der einzelnen Fälle sehr schnell auffällt, dass dies nicht im Allgemeinen so sein muss, sondern sehr stark von Klasse zu Klasse oder auch von Schülerin und Schüler zu anderen Schülerinnen und Schülern variieren kann.

Im nächsten Abschnitt werden die zentralen Annahmen, welche aus dem beschriebenen Forschungsstand abgeleitet werden können, explizit formuliert und kurz diskutiert. Dabei wird unter anderem auch eine Vermutung zur zeitlichen Entwicklung der Grundvorstellungen in den untersuchten Klassen geäußert.

2.5 Zentrale Annahmen im Kontext des Forschungsstandes

Nachdem die wichtigsten, theoretischen Grundlagen, welche für die empirische Untersuchung in dieser Arbeit benötigt werden, besprochen und verschiedene Seiten derselben Thematik aufgezeigt wurden, stellt sich nun die Frage, ob man anhand dieser Forschung bereits erste Annahmen bezüglich der erwarteten Ergebnisse abschätzen kann. Dies wird in diesem Abschnitt versucht. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass sich diese Annahmen, auch wenn sie über die Forschung begründet werden, immer noch auf individuelle Aspekte beziehen und sich deshalb nicht bewahrheiten müssen.

Wirft man noch einmal einen Blick auf den Abschnitt 2.3 und führt sich die potenziellen Schwierigkeiten der Multiplikation und der Division im Bereich der Bruchzahlen vor Augen, erkennt man erneut, dass bei der Division deutlich mehr Umbrüche bei den Grundvorstellungen entstehen und somit auch deutlich mehr schief gehen kann als bei der Multiplikation. Eine Annahme ist demnach, dass in der empirischen Untersuchung jene Aufgaben, welche sich mit der

Division beschäftigen, seltener richtig gelöst werden, als jene, welche die Multiplikation thematisieren.

Eine weitere Annahme, welche mit Hilfe des vorigen Abschnitts getroffen werden kann, ist jene, dass die Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen bei Schülerinnen und Schülern im Laufe der Schulzeit vermutlich zunehmen werden. Während Technologieeinsatz, wenn er reflektiert angewandt wird, dazu führen kann, dass die Rechenarbeit erleichtert und somit mehr Zeit zum Nachdenken und Vorstellen bleibt, wurde bereits auch darauf hingewiesen, dass der unreflektierte Umgang mit Computeralgebrasystemen dazu führen kann, dass Grundvorstellungen eher in den Hintergrund gedrängt werden, da sie scheinbar nicht mehr gebraucht werden. In diesem Fall findet die Einführung in die systematische Bruchrechnung zu einem Zeitpunkt statt, wo CAS noch nicht zur Verfügung stehen. Ab dem Folgejahr wird der Taschenrechner im Mathematikunterricht verpflichtend. In den höheren Klassen steht die Bruchrechnung jedoch weiterhin indirekt im Lehrplan, sie kommt in verschiedensten Gebieten wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder auch der Prozentrechnung zur Anwendung. Während die Auswirkungen des Technologieeinsatzes auf die Entwicklung von Grundvorstellungen ungewiss bleiben, beeinflussen Faktoren wie die geistige Reife, die zunehmende Vertrautheit mit der Mathematik und ihrer Sprache sowie das eben angesprochene Wiederaufgreifen von Vorstellungen den Aufbau und die Festigung von Grundvorstellungen positiv. Wie in den beiden vorgestellten Längsschnittstudien im vorigen Unterkapitel ersichtlich wurde, wird damit gerechnet, dass Schülerinnen und Schüler aus höheren Schulstufen im Schnitt besser entwickelte Vorstellungen besitzen, als jene aus niedrigeren Schulstufen. Im Einzelfall sollte es aber nicht verwunderlich sein, wenn manche Klassen aus der Reihe fallen, da die Vielzahl an Einflussfaktoren nur schwer festgehalten und verglichen werden kann.

Die im vorigen Absatz beschriebenen, teilweise konkurrierenden Ansätze über die Entwicklung von Vorstellungen sowie die unterschiedlichen Ergebnisse einzelner Klassen und Schülerinnen und Schüler aus den Längsschnittstudien legen zusätzlich nahe, dass auch in Klassen derselben Schulstufe deutliche Unterschiede bei den Ausprägungen der Grundvorstellungen auftreten können.

Zuletzt wird hier noch einmal auf Günther Malle verwiesen, welcher die Problematik der fehlenden Grundvorstellungen im Mathematikunterricht thematisiert. Dabei verkündet er, dass viele Untersuchungen zeigen, dass Grundvorstellungen weitgehend nicht oder nicht ausreichend vorhanden sind (Malle, 2004b, S. 3). Auf dieser Aussage, man könnte es fast als Warnung bezeichnen, gründet die letzte Annahme, dass es allgemein keine hohen Lösungsquoten geben wird.

Ob sich die in diesem Abschnitt überlegten und kurz diskutierten Annahmen oder Vermutungen bestätigen werden, wird sich in der empirischen Untersuchung zeigen. An verschiedensten Stellen wurden bereits Andeutungen zur Stichprobe oder auch zu den Umständen der Untersuchung gemacht, im nächsten Kapitel werden diese und weitere Informationen systematisch erläutert.

3 Untersuchungsdesign

Ursprünglich war eine empirische Untersuchung mittels Fragebogen vor Ort geplant. Diese Idee musste jedoch aufgrund von COVID-19 etwas adaptiert und somit in ein Online-Format umgewandelt werden. Eine Erläuterung zum dafür erstellten Online-Fragebogen sowie den Änderungen im Format und eine Diskussion der einzelnen Items befinden sich im 4. Abschnitt dieser Arbeit, während es sich in diesem Kapitel vor allem um den Ablauf der Untersuchung sowie die Charakterisierung der Stichprobe drehen wird. Dabei wird im ersten Unterkapitel 3.1 beschrieben, wie die Schülerinnen und Schüler zu dem Online-Fragebogen kamen und wie die Auswertung organisiert wurde und im zweiten Unterkapitel werden noch mehr Details zu der Schule und den befragten Klassen gegeben.

3.1 Ablauf der empirischen Untersuchung

Vor Beginn der empirischen Untersuchung wurden die Genehmigung der Bildungsdirektion Niederösterreich und der Direktorin der befragten Schule eingeholt sowie der Kontakt zum Lehrerinnen- und Lehrer-Team der Schule aufgenommen. Nach Absprache, wie am besten vorgegangen wird, ohne die Schülerinnen und Schüler zu überlasten – aufgrund der sich regelmäßig ändernden Situation in der Schule bedingt durch COVID-19 waren sowohl Lehrpersonal, als auch Lernende schon relativ ausgelastet –, wurde jenen Lehrpersonen, welche ihre Klassen an der Untersuchung teilnehmen ließen, pro Klasse ein Link zu der Umfrage gegeben. Dabei wurden bewusst mehrere Kopien desselben Online-Fragebogens erstellt, sodass jede Klasse ihre eigene Umfrage hatte, um einerseits die Auswertung zu erleichtern und andererseits einen besseren Überblick zu behalten. Denn so konnten einzelne Lernende, welche vergessen hatten ihre Klasse anzugeben, dennoch ihrer Klasse zugeordnet werden. Die Lehrpersonen der teilnehmenden Klassen leiteten diese Links an die Schülerinnen und Schüler weiter, welche den Fragebogen schließlich jederzeit zuhause ausfüllen konnten. Alle Informationen, welche sie dazu brauchten, waren bereits in dem Online-Tool enthalten. Auf diese Art war es den Schülerinnen und Schülern möglich selbstständig Zeit und Ort zu wählen, um die Fragen zu beantworten. Hatten sie alle Fragen für sie ausreichend beantwortet, konnten sie den ausgefüllten Fragebogen über einen einzigen Klick auf „senden“ übermitteln.

Der nächste Schritt stellte die Auswertung der Umfrage dar. Nachdem alle Antworten übermittelt wurden, konnten diese alle online eingesehen werden. Dafür wurde bereits vorab versucht festzuhalten, in welche Richtung Antworten gehen können oder welche Aussagen sie enthalten müssen, um als korrekt anerkannt zu werden, um einen gewissen Grad an Objektivität oder zumindest Nachvollziehbarkeit zu erhalten. Diese Überlegungen befinden sich zusammen mit einer Analyse der einzelnen Fragen im Abschnitt 4.2. Die Auswertung erfolgte somit mit Hilfe dieses Erwartungshorizonts und es wurde versucht die Antworten in wenige, sinnvolle und aussagekräftige Kategorien einzuteilen. Schließlich wurden die Daten numerisch in Excel erfasst, um eine einfachere und präzisere Auswertung sowie grafische Darstellungen zu ermöglichen.

Auch wenn die Umstellung der gesamten empirischen Untersuchung auf ein Online-Format zusätzlichen Aufwand bedeutete, vor allem in der Absprache mit allen Beteiligten, lief die Umfrage an sich reibungslos ab. Jedoch sollte an dieser Stelle auch erwähnt werden, dass die Teilnahme an der empirischen Untersuchung nicht verpflichtend war, was bei den befragten Klassen teilweise zu sehr unterschiedlichen und in manchen Fällen auch sehr geringen Teilnahmezahlen führte. Im Sinne der Vollständigkeit wurden dennoch alle Daten, auch die jener Klassen, welche nur eine sehr geringe Teilnahme aufwiesen, für die Analyse und Auswertung verwendet.

3.2 Charakterisierung der Stichprobe

Dieser Abschnitt dient der Auflistung und Beschreibung jener Klassen, welche an der empirischen Untersuchung teilnahmen. Zuerst erfolgt eine kurze Schilderung der unterschiedlichen Zweige der Schule, da diese aufgrund anderer Schwerpunkte auch unterschiedlich viele Mathematikstunden haben. Danach folgen eine Auflistung der einzelnen Klassen sortiert nach der Lehrperson sowie einige Zusatzinformationen.

3.2.1 Beschreibung der verschiedenen Zweige der Schule

Am BG und BRG St. Pölten müssen sich die Schülerinnen und Schüler am Ende der zweiten Klasse entscheiden, welchen Schwerpunkt sie für die kommenden Schulstufen wählen. Dabei gibt es vier verschiedene Auswahlmöglichkeiten, welche von der Schule als Zweige betitelt werden: Das Realgymnasium, das Realgymnasium mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt (in dieser Arbeit abgekürzt als naturwissenschaftlicher Zweig), das Realgymnasium unter besonderer Berücksichtigung der sportlichen Ausbildung (in dieser Arbeit abgekürzt als sportlicher Zweig) sowie das Gymnasium (in dieser Arbeit abgekürzt als sprachlicher Zweig). Eine Ausnahme bildet jedoch der sportliche Zweig, da dieser bereits ab der ersten Klasse gewählt werden kann. Da sich in der Stichprobe dieser empirischen Untersuchung nur Klassen der naturwissenschaftlichen, sportlichen und sprachlichen Zweige befinden, wird auf die Beschreibung des Realgymnasiums verzichtet.

Der naturwissenschaftliche Zweig bietet von den genannten drei die umfassendste mathematische Bildung. Hier haben die Schülerinnen und Schüler in der Unterstufe 15 Mathematikwochenstunden und in der Oberstufe 14. Wie der Name des Zweiges bereits vermuten lässt, liegt das Hauptaugenmerk darauf, in den Naturwissenschaften bewandert zu werden, was auch eine vertiefte mathematische Ausbildung einschließt. Zusätzlich wird die Mathematik auch in anderen Bereichen wie zum Beispiel in der Physik wichtig und dort aktiv thematisiert. Meist gibt es in der Oberstufe einmal im Jahr eine mit einem naturwissenschaftlichen Thema behaftete Projektreise, durch welche einzelne Mathematikstunden entfallen, oft wird jedoch im Zuge des Projekts Mathematik angewandt, was die entfallenden Stunden einigermaßen ersetzt.

Im sportlichen Zweig liegt der Schwerpunkt der Ausbildung auf der Schulung des Körpers. Die Mathematikstunden fallen deshalb im Gegensatz zum naturwissenschaftlichen Zweig etwas geringer aus. In der Unterstufe gibt es für die Lernenden 14 Wochenstunden Mathematikunterricht und in der Oberstufe 12. Da es in diesem Zweig jedoch einigermaßen regelmäßig zu Sportveranstaltungen kommt (Wettbewerbe, Sportwochen, zusätzliches Training, etc.), kann es vorkommen, dass verglichen zu den anderen Zweigen öfter Mathematikstunden entfallen.

Der sprachliche Zweig bietet ebenfalls 14 Wochenstunden Mathematikunterricht in der Unterstufe und 12 Wochenstunden in der Oberstufe. Der Schwerpunkt dieses Zweiges liegt auf dem Erlernen von Sprachen. Dementsprechend gibt es in der Oberstufe auch bis zu einmal jährlich eine Sprachreise, durch welche ebenfalls Mathematikstunden ausfallen können. Diese sollten jedoch nicht allzu stark ins Gewicht fallen.

3.2.2 Beschreibung der Klassen

Den teilnehmenden Klassen wurde für die Arbeit eine systematische Nummerierung gegeben. Die erste Ziffer beschreibt dabei die in Österreich gängige Altersnummerierung der Sekundarstufe: Das Gymnasium setzt nach einer vierjährigen Grundausbildung an, demnach entspricht die 1. Klasse der 5. Schulstufe, die 2. Klasse der 6. Schulstufe und so weiter. Danach erfolgt ein Buchstabe, welcher die Klasse einer Lehrperson zuweist. Da es bei den teilnehmenden Klassen vier verschiedene Lehrpersonen gab, wurden diese mit den Buchstaben A, B, C und D durchnummeriert. Beispielsweise bedeutet das Kürzel 4A, dass es sich um eine Klasse der 8. Schulstufe handelt, welche von Lehrperson A unterrichtet wird.

An dieser Stelle werden nun alle Klassen, sortiert nach Lehrperson und Schulstufe, aufgelistet und kurz zusammengefasst, aus welchem Zweig sie stammen, wie viele Schülerinnen und Schüler an der Umfrage teilnahmen und wie viele Wochenstunden Mathematikunterricht sie bis zu diesem Zeitpunkt hatten, wobei die Anzahl der Stunden dieses Jahres mitgezählt wird.

3A
naturwissenschaftlicher Zweig
Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 11
Anzahl der Mathematikwochenstunden: 12

4A
naturwissenschaftlicher Zweig
Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 15
Anzahl der Mathematikwochenstunden: 15

5A
naturwissenschaftlicher Zweig
Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 27
Anzahl der Mathematikwochenstunden: 18

6A
sportlicher Zweig
Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 22
Anzahl der Mathematikwochenstunden: 20

7A
sportlicher Zweig
Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 2
Anzahl der Mathematikwochenstunden: 23

8A
naturwissenschaftlicher Zweig

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 27

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 29

2B

sportlicher Zweig

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 25

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 8

3B

sprachlicher Zweig

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 14

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 11

4B

sportlicher Zweig

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 5

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 14

2C

noch kein Zweig gewählt

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 10

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 8

6C

sprachlicher Zweig

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 6

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 20

2D

noch kein Zweig gewählt

Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler: 8

Anzahl der Mathematikwochenstunden: 8

Die Stundentafeln der einzelnen Zweige können von der Schulhomepage abgerufen werden (BG und BRG St. Pölten, 2021).

Die hier eingeführten Abkürzungen der einzelnen Klassen werden auch bei der Auswertung der empirischen Untersuchung verwendet werden. Zunächst erfolgt jedoch noch ein Kapitel über das eingesetzte Material sowie die Vorbereitung auf die Auswertung.

4 Material und Methoden

Wie bereits im vorigen Kapitel angekündigt, wird sich dieses Kapitel vor allem um den Online-Fragenbogen drehen. Dabei wird im ersten Unterkapitel 4.1 der Fokus auf den allgemeinen Überlegungen liegen, welche in den Fragebogen einflossen, während in 4.2 schließlich die Analyse und der Erwartungshorizont der einzelnen Fragen thematisiert werden. Zusätzlich befindet sich ein Ausdruck des verwendeten Online-Fragebogens im Anhang.

4.1 Erläuterung des Fragebogens

Es gibt verschiedene Methoden eine empirische Untersuchung durchzuführen. Für diese Arbeit fiel die Entscheidung jedoch sehr schnell, denn mit Hilfe eines Fragebogens lassen sich auf sehr einfache Weise eine große Anzahl an Schülerinnen und Schülern befragen. Es wurde erhofft, dadurch nicht nur ein einigermaßen breites Spektrum an individuellen Antworten zu erhalten, sondern auch quantitativ einen ersten Einblick zu bekommen, wie stark oder auch schwach Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division im Mathematikunterricht lokal in der befragten Schule heute vertreten sind. Ein weiterer Grund, warum der Fragebogen den anderen Methoden vorgezogen wurde, ist ein sehr einfacher: Man ist mit ihm sehr flexibel. In dem Zeitraum, in welchem die empirische Untersuchung geplant wurde, gab es bereits deutliche Anzeichen, dass es vielleicht aufgrund von COVID-19 nicht möglich sein könnte, eine Untersuchung vor Ort an einer Schule durchzuführen. Dieser Fakt erschwert es beispielsweise qualitative Interviews zu führen, während der Fragebogen, wie es letztendlich auch getan wurde, wenn auch mit Verlust mancher Fragestellungen, in ein Online-Instrument konvertiert werden kann.

Ein Nachteil des Fragebogens als Untersuchungsinstrument – vor allem im Online-Setting – ist, dass Schülerinnen und Schüler keine Möglichkeit haben, bei Unklarheiten nachzufragen. Umgekehrt hat auch diejenige oder derjenige, welche oder welcher die einzelnen Antworten auswertet, auch nicht die Möglichkeit bei Unklarheiten zu erfragen, was gemeint war. Eine präzise und gut verständliche Wahl der Fragestellungen ist demnach unverzichtbar. Gleichzeitig soll jedoch auch nicht zu viel vorgegeben werden, um die Antworten nicht im Vorfeld zu stark zu limitieren und die Lernenden somit in ihrer Kreativität einzuschränken. Aus diesem Grund wurden die Fragen schon vorab an einen kleinen Kreis an Testpersonen, darunter ehemalige und aktuelle Schülerinnen und Schüler, Kolleginnen und Kollegen des Lehramtstudiums und einem Universitätsprofessor, verteilt und Feedback zur Verständlichkeit sowie Verbesserungsvorschläge eingeholt und eingearbeitet.

Ein weiterer Nachteil des Online-Fragebogens stellt die Einschränkung an Antwortmöglichkeiten dar. Während im ursprünglichen, physischen Fragebogen beinahe nur offene Aufgabenformate mit Antworten auf verschiedensten Darstellungsebenen (symbolisch, zeichnerisch, wörtlich) vorhanden waren, musste vor allem im Bereich der Skizzen und Zeichnungen sehr stark gekürzt werden, da eine Beantwortung über ein Bild nur sehr umständlich möglich und deshalb für viele Schülerinnen und Schüler vermutlich zu schwierig gewesen wäre. Dennoch wurde versucht weiterhin möglichst viele offene Aufgabenformate anzubieten und einige Fragestellungen mit beispielhaften Skizzen zu unterstützen, um die Vorstellungskraft der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Zusätzlich wurden noch einige Aufgaben des Typs Single-Choice hinzugefügt. Die Hälfte dieser Aufgaben soll dabei durch die Wahl einer passenden Zeichnung gelöst werden, während die andere Hälfte der Fragen nur textbasiert ist. In allen Fällen existiert jedoch die Möglichkeit keine der vorgeschlagenen Möglichkeiten zu wählen, sondern einen eigenen Kommentar dazuzuschreiben, damit die Lernenden auch hier die Möglichkeit besitzen, eigene Ideen einzubringen.

Um die Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Schulstufen zu erhöhen, wurde der Online-Fragebogen so konzipiert, dass alle Schülerinnen und Schüler aller Schulstufen denselben Fragebogen erhalten. Dies ist insofern möglich, da das richtige Beantworten der Fragen vor allem passende Grundvorstellungen voraussetzt, welche bereits in der sechsten Schulstufe vorliegen können, aber auch in der zwölften Schulstufe noch nicht vorliegen müssen. Bei der Anzahl der Fragen musste darauf geachtet werden, sie so gering wie möglich zu halten, damit vor allem die Schülerinnen und Schüler aus der sechsten Schulstufe nicht überfordert waren. Aus diesem Grund wurden letztendlich 8 Items formuliert, welche teilweise in mehrere Fragen gegliedert sind, manchmal aber auch nur aus einer einzigen bestehen.

4.2 Vorbereitung zur Datenauswertung – Analyse und Erwartungshorizont

Um ein möglichst einheitliches Auswerten der Online-Fragebögen zu garantieren, werden in diesem Abschnitt einige allgemeinen Regeln, welche während der Auswertung berücksichtigt wurden, festgehalten und im Anschluss die einzelnen Items des Fragebogens analysiert und ein jeweiliger Erwartungshorizont verfasst. Zuvor wird an dieser Stelle jedoch noch kurz auf jene beiden Annahmen eingegangen, welche sich vor allem durch die Wahl der Stichprobe analysieren lassen.

Der erste Wirkungsfaktor, welcher zu bestimmen versucht wird, stellt das Alter beziehungsweise die Schulstufe dar. Die Frage, wie sich Grundvorstellungen über die Zeit verändern, ist

Teil der Forschungsfrage und somit sehr relevant für diese Arbeit. Aus diesem Grund wurden Klassen verschiedener Schulstufen befragt, während der Fragebogen für einfache Vergleiche für alle Befragten gleich blieb. Die Analyse wird dabei über alle Klassen/Schulstufen erfolgen. Des Weiteren wird die Annahme überprüft, dass verschiedene Klassen derselben Schulstufe deutliche Unterschiede in den Ausprägungen der Grundvorstellungen aufweisen können. Dies wird anhand der drei teilnehmenden 2. Klassen (6. Schulstufe) untersucht, indem diese in einem eigenen Abschnitt direkt verglichen werden. Ob sich hier eindeutige Ergebnisse zeigen, welche die Annahme bestärken oder auch entkräften, wird sich in der Diskussion der Ergebnisse der Auswertung zeigen.

Wie zuvor angedeutet, wurden einige allgemeine Regeln bei der Auswertung eingehalten, um eine einheitlichere Kategorisierung zu ermöglichen. Diese werden hier kurz aufgelistet:

- Eine Antwort wird prinzipiell als richtig gewertet, wenn sie mit einer der als korrekten Antwortmöglichkeiten gekennzeichneten Antworten übereinstimmt. Diese vorgeschlagenen Antwortmöglichkeiten finden sich in den Abschnitten 4.2.1 – 4.2.8.
- Sollte eine Schülerin oder ein Schüler auf kreative Lösungsmöglichkeiten oder -wege stoßen, durch welche sie oder er nachvollziehbar auf das richtige Ergebnis kommt, wird die Antwort ebenfalls als richtig gewertet.
- Ein Rechenergebnis wird als richtig gewertet, solange es den richtigen Zahlenwert aufweist. Wenn die richtige Lösung beispielsweise „ $\frac{1}{2}$ “ ist, eine Schülerin oder ein Schüler jedoch „ $\frac{2}{4}$ “ oder „ 0,5 “ hinschreibt, wird dies als richtiges Ergebnis betrachtet. Wird jedoch explizit nach einer Bruchzahl gefragt, werden Ergebnisse wie „0,5“ als falsch gewertet.
- Single-Choice Fragen werden als richtig beantwortet gewertet, wenn die richtige Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde. Eine Ausnahme bildet Frage 2.1, da hier sowohl bei der Hauptfrage, als auch der Zusatzfrage zwei richtige Antwortmöglichkeiten existieren. Wird eine der richtigen gewählt, zählt die Frage als korrekt beantwortet. Zusätzlich wird die Beantwortung als richtig gewertet, wenn sich die Schülerin oder der Schüler für keine der Antwortmöglichkeiten, sondern für „Sonstiges“ entscheidet und eine korrekte Antwort in eigenen Worten formuliert.
- Wenn explizit nach Begründungen, Erklärungen oder Vorstellungen hinter einer Rechnung gefragt wird, reicht das bloße Ausrechnen des Ergebnisses nicht aus, um eine richtige Antwort zu liefern.

In den folgenden Abschnitten erfolgt nun eine Diskussion der einzelnen Fragebogenitems. Dabei werden die Herkunft der einzelnen Fragen sowie gezielte Abänderungen thematisiert, der Schwierigkeitsgrad der Fragen für die Schülerinnen und Schüler abgeschätzt und zuletzt auch ein Erwartungshorizont für eine als richtig gewertete Antwort formuliert. Der Titel des Abschnitts trägt den Titel des jeweiligen Items aus dem Fragebogen. Die jeweilige Frage aus dem Online Fragebogen, welche diskutiert wird, wird zu Beginn kursiv und eingerückt dargestellt. Sollte sie Unterpunkte beinhalten, werden die Teilfragen der Reihe nach diskutiert und dafür zu Beginn des Absatzes ebenfalls kursiv und eingerückt dargestellt.

4.2.1 Wocheneinkauf

> *Wolfgang erledigt für seine Familie den Wocheneinkauf. Auf seiner Einkaufsliste steht, dass er drei Liter Milch kaufen soll. Im Kühlregal findet er allerdings nur mehr Milchpackungen zu je einem halben Liter Milch. Wie viele Milchpackungen muss er kaufen?*

Die erste Frage des Online-Fragebogens ist angelehnt an ein Beispiel aus einem Artikel der Zeitschrift „Mathematik lehren 123" von Heinrich Winter, in welchem dieser unter anderem auf verschiedene Dimensionen bei Bruchzahlen eingeht (Winter, 2004, S. 15). In Winters Beispiel werden 2 Liter Milch auf Gefäße mit einer Füllmenge von $\frac{3}{4}$ Liter verteilt. Um die Komplexität noch etwas zu verringern, wurden für die Umfrage andere Zahlenwerte festgelegt. Die Aufgabe wurde bewusst als Einstiegsaufgabe gewählt, da sie als eher einfach betrachtet wird und somit die Motivation der Schülerinnen und Schüler steigern und anfängliche Unsicherheiten gering halten soll. Die Einschätzung der Aufgabe als eine eher einfach zu lösende Aufgabe beruht auf zwei Erkenntnissen, welche Padberg und Wartha in ihrem Werk „Didaktik der Bruchrechnung" nennen. Zuerst handelt es sich bei dieser Aufgabenstellung um eine Rechnung des Typs natürliche Zahl dividiert durch einen Stammbruch. Die Idee des Messens, welche sich hier sehr leicht anwenden lässt, wird durch die Verwendung des den Lernenden gut bekannten Stammbruchs $\frac{1}{2}$ noch zusätzlich unterstützt (Padberg & Wartha, 2017, S. 130). Dazu kommt noch, dass der Kontext, in welchem die Aufgabe auftritt, schon bestimmte Rechenstrategien nahe legt, wie zum Beispiel die Division als Messen oder auch als wiederholte Subtraktion. Diese Unterstützung hilft einigen Schülerinnen und Schülern dabei, Rechenstrategien anzuwenden, welche sie sonst vielleicht nicht verwendet hätten und kann somit zu einer höheren Lösungsquote führen (Padberg & Wartha, 2017, S. 145). Aus den genannten Gründen wird bei dieser Frage eine hohe Richtigkeitsquote erwartet.

Die richtige Antwort auf diese Frage lautet „6 Milchpackungen“, wobei die Zahl 6 alleine ebenfalls als korrekt gewertet wird.

Kannst du diese Fragestellung auch als Rechnung formulieren?

An dieser Stelle wird es für die Schülerinnen und Schüler bereits etwas schwieriger, da sie nicht mehr auf der anschaulichen Ebene bleiben können, sondern nun auf die formale Ebene wechseln müssen. Diese Zusatzfrage wurde gewählt, um zu prüfen, ob den Lernenden eben dieser Wechsel möglich ist und sie somit den hier gestellten Aufgabentypen auch wirklich verstehen. Dazu müssen sie ihre Vorgehensweise explizit als Rechnung formulieren, falls dies nicht bereits geschah. Ein intuitives Lösen oder Erraten der Antwort reicht nicht mehr aus. Da die zur Aufgabe gehörende Rechnung sowohl als Messaufgabe, als auch als wiederholte Subtraktion nicht schwierig ist, wird weiterhin eine eher hohe Lösungsquote erwartet.

Korrekte Antwortmöglichkeiten können auf verschiedenste Arten dargestellt werden, je nachdem, auf welche Grundvorstellungen zurückgegriffen wird:

- $3 : \frac{1}{2} = 6$ Division als Messvorgang
- $3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ Division als wiederholte Subtraktion
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$ Umgekehrte Multiplikation als wiederholte Addition

4.2.2 Multiplikation: Bruch mit natürlicher Zahl

Was stellst du dir unter der Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$ vor?

Wähle das Bild aus, welches deine Vorstellung am ehesten beschreibt.

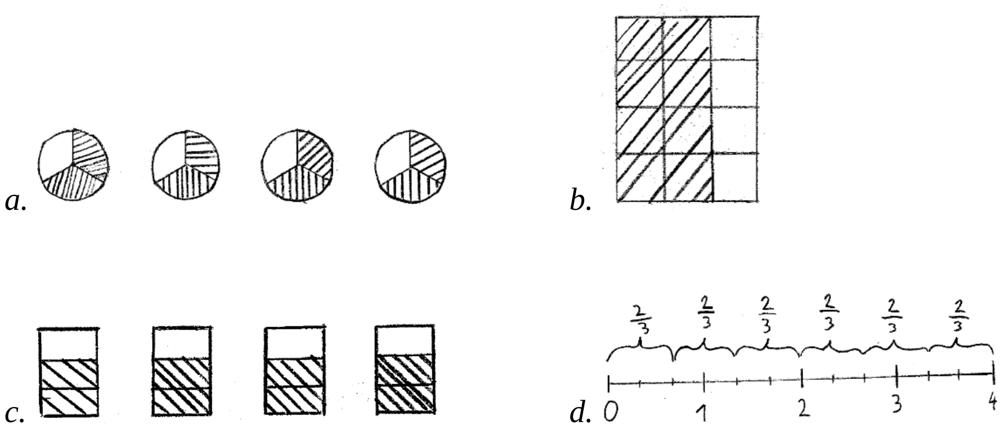


Abbildung 1: Antwortmöglichkeiten der 2. Frage

Susanne Prediger beschreibt in einem Artikel „Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben“, dass nur 17% der Lernenden aus einer 7. Klasse eines Gymnasiums eine Vorstellung zu einer Rechnung des Typs Bruch mal Bruch angeben konnten. Gemäß ihren Ausführungen ist den Schülerinnen und Schülern vor allem die Vorstellung von Brüchen als Anteile eines Ganzen im Weg gewesen, da häufig versucht wurde, alle Brüche als Pizzastücke darzustellen (Prediger, 2006, S. 3). Um auch die zweite Aufgabe dieses Online-Fragebogens noch nicht zu kompliziert zu machen, wurde die Fragestellung, angelehnt an jene von Prediger, auf den weniger anspruchsvollen Typ Bruch mal natürliche Zahl reduziert, wodurch die Vorstellung von Brüchen als Anteile mehrerer Ganzen zielführend sein kann. Zusätzlich wurde durch die Verschiebung auf das Online-Format noch eine weitere Änderung getätigt, die Schülerinnen und Schüler müssen nun nicht mehr selbst zeichnen, wie sie sich die Multiplikation vorstellen, sondern können eines von vier Bildern wählen, wobei zwei davon richtig sind. Aufgrund der beschriebenen Abänderungen sowie der hohen Wahrscheinlichkeit auch durch zufälliges Wählen richtig zu liegen, wird diese Aufgabe als einfach eingestuft und eine hohe Lösungsquote erwartet.

Die richtigen Antwortoptionen sind (a) und (c).

Welches dieser Bilder beschreibt deiner Meinung nach <u>nicht</u> die Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$? Gib den Buchstaben des Bildes an und begründe, warum das Bild die Rechnung deiner Meinung nach nicht beschreibt.

Dieser Zusatz wurde hinzugefügt, um die zuvor beschriebene, hohe Lösbarkeit durch zufälliges Raten zu minimieren. Während die Lernenden zuvor jene Option wählen sollten, welche ihre Vorstellung zur Rechnung am besten beschreibt, sollen sie hier jenes Bild wählen, welches die angegebene Rechnung nicht beschreibt und auch eine Begründung dazu abgeben. Ein einfaches Raten kann somit ausgeschlossen werden. Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe wird höher als jener der vorigen Aufgabe eingeschätzt und somit auch eine etwas geringere Lösungsquote als zuvor erwartet. Vor allem das gezielte Ausschließen einer Vorstellung, was so im Unterricht möglicherweise nie thematisiert wird, könnte zu Verwirrung führen.

Die richtigen Antworten sind (b) und (d), da die Skizzen hier einmal den Vorgang des Erweitern und einmal eine Divisionsaufgabe im Kontext des Messens, nämlich $4 : \frac{2}{3} = 6$, darstellen. Alternative könnte die zweite Skizze auch als $6 \bullet \frac{2}{3}$ gedeutet werden.

Stellst du dir unter der Rechnung $4 \bullet \frac{2}{3}$ *genau dasselbe wie oben vor?*

Wenn nein, versuche bei der Antwortoption „Sonstiges“ deine Vorstellung für $4 \bullet \frac{2}{3}$ *in Worte zu fassen.*

Bei dieser Zusatzfrage wird nicht zwischen richtig und falsch unterschieden. Sie dient rein der Erhebung, ob die befragten Schülerinnen und Schülern zwischen den Aufgabentypen Bruch mal natürlicher Zahl und natürlicher Zahl mal Bruch auf der Vorstellungsebene unterscheiden oder diese Aufgabentypen für sie ident sind.

4.2.3 Brüchige Schokolade

Tom findet bei sich zuhause eine Tafel Schokolade. Von dieser wurde bereits ein Drittel gegessen, es sind also nur mehr zwei Drittel übrig. Von der verbleibenden Schokolade nimmt sich Tom ein Viertel, also ein Viertel von zwei Drittel. Wie viel von der gesamten Schokolade ist das? Gib dein Ergebnis als Bruch an! Wie kommst du zu dem Ergebnis?

Diese Fragestellung ist an einer Aufgabe aus dem Schulbuch Mathematik heute 7 angelehnt. Dabei wurden die vorkommenden Zahlen vertauscht, der Schwierigkeitsgrad sollte durch diesen Eingriff jedoch nicht stark verändert worden sein (Vom Hofe, Humpert, Griesel, & Postel, 2013, S. 42). Um diese Aufgabenstellung lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler auf eine Grundvorstellung von Anteilen von Anteilen zurückgreifen können. Dazu sollte das „von“ als Multiplikation gedeutet werden, einerseits damit die Schülerinnen und Schüler auf das richtige Ergebnis kommen, und andererseits um erklären zu können, wie sie zu diesem Ergebnis kamen. Während für die erste Bruchzahl bewusst kein Stammbruch gewählt wurde, handelt es sich bei der zweiten, auftretenden Bruchzahl $\frac{1}{4}$ jedoch um einen, welcher die Vorstellung des Bildens des Anteils eines Anteils erleichtern soll. Trotz dieser Hilfestellung, welche auch im originalen Beispiel aus dem Schulbuch gegeben war, und trotz der Nähe der Aufgabe zum Unterricht, wird sie als Ganzes eher als schwierig eingeschätzt. Studien von Padberg und von Prediger zeigen, dass Schülerinnen und Schüler oft Schwierigkeiten mit Anteil von Anteil Situationen haben. So konnten nur 4% der Lernenden zu der Gleichung $\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ eine Textaufgabe formulieren (Prediger, 2011, S. 8-11), während in einer anderen Studie nur 1% der Befragten zu einer gegebenen Textaufgabe zum Thema Anteil vom Anteil die zugehörige Rechnung formulieren konnten (Padberg, 1986, S. 68-69). Gemäß diesen Ergebnissen wird eine eher geringe Lösungsquote erwartet, wobei davon auszugehen ist, dass sie über 1% sein wird, da einerseits die Aufgabenstellung einfacher formuliert ist und auch einfachere Bruchzahlen vorkommen und andererseits die Frage „Wie kommst du zu dem Ergebnis“ bewusst so formuliert wurde, dass nicht zwingend eine Rechnung angegeben werden muss, damit die Schülerinnen und Schüler in ihrer Kreativität nicht eingeengt werden. Zum Thema Anteile von Anteilen existiert außerdem noch eine weitere Aufgabe – Aufgabe 5 –, welche sehr stark an jene von Padberg angelehnt ist und bei welcher auch explizit nach der Rechnung gefragt wird (Padberg, 1986, S. 68-69).

Es werden alle Antworten als richtig erachtet, welche das Ergebnis $\frac{1}{6}$ beinhalten und nachvollziehbar argumentieren, wie dieses erreicht wurde. Eine Möglichkeit dabei ist, die dazugehörige Rechnung $\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ anzugeben.

4.2.4 Divisionsdilemma

> *Julian hat bei seiner Hausaufgabe die Zahl 2 durch* $\frac{1}{4}$ *dividiert. Er kommt auf das Ergebnis 8. Als er jedoch darüber nachdenkt, wundert er sich, wie das Ergebnis größer als 2 sein kann, er hat ja 2 durch etwas geteilt. Hat Julian richtig gerechnet? Wenn er richtig gerechnet hat, kannst du ihm erklären, warum das so ist? Wenn er falsch gerechnet hat, wo liegt der Fehler?*

Die hier gezeigte Aufgabenstellung wurde großteils aus Susanne Predigers Artikel aus Mathematik lehren 123 entnommen. Dabei wurden ein paar kleinere Abänderungen getätigt, beispielsweise wurde in der originalen Aufgabe bereits verraten, dass das Ergebnis 8 stimmt, was hier bewusst weggelassen wurde, um die Antworten der Schülerinnen und Schüler nicht vorab bereits in eine bestimmte Richtung zu drängen, sondern ihren Gedanken freien Lauf zu lassen (Prediger, 2004, S. 13). Wie bereits im Abschnitt 2.3 gezeigt wurde, stellt der Wechsel weg von der ehemaligen Grundvorstellung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, dass die Division immer verkleinert mit Ausnahme durch 1, eine große Hürde für einige Schülerinnen und Schüler dar. Diese Aufgabe soll jene Hürde explizit thematisieren und somit die Lernenden dazu anregen, sich Gedanken über sie zu machen und ihre aktuelle Vorstellung explizit hinzuschreiben. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe ist dabei kaum einschätzbar, da beispielsweise das Hinweisen auf dieses Problem bei manchen Schülerinnen und Schülern vielleicht schon dazu führen kann, dass ihre Antworten in die richtige Richtung gedrängt werden, während andere durch diesen expliziten Hinweise vielleicht verwirrt sind, was sich negativ auf die Bearbeitung der Aufgabe auswirken könnte. Vermutlich werden auch einige Antworten das Warum nicht abdecken, sondern möglicherweise nur rein rechnerisch dargestellt werden. Deshalb wird gesamt eine eher geringe Lösungsquote erwartet.

Da die Aufgabenstellung sehr offen ist, fällt es nicht leicht, konkrete Antworten vorzugeben. Deshalb werden zwei mögliche Argumentationen genannt, welche aber nicht zwingend vorkommen müssen. Einerseits könnten Erklärungen, welche auf der Vorstellung des Messens aufbauen, die Rechnung als „Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in 2“ deuten, was die Antwort „8 Mal“ nahelegt. Andererseits wäre eine mögliche Erklärung, dass bei einer Division durch eine Zahl zwischen 0 und 1 die ursprüngliche Zahl vergrößert wird. Beide Argumentationen würden akzeptiert werden, wobei die Erstgenannte bevorzugt wäre, da sie ein gutes Verständnis des Dividierens als Messen aufzeigt, während die zweite Argumentation eher auf der formalen Ebene bleibt. Dennoch wird auch die zweite Antwortmöglichkeit als richtig gewertet, da sie zeigt, dass die befragten Schülerinnen und Schüler verstanden zu haben scheinen, dass die Division nicht immer verkleinert.

4.2.5 Der Teil vom Teil

Ein Rechteck wird folgendermaßen schraffiert (mit Strichen angemalt): $\frac{3}{4}$ *des Rechtecks mit schwarzen Strichen von links unten nach rechts oben (///). Dann* $\frac{2}{3}$ *von den schwarz schraffierten* $\frac{3}{4}$ *mit roten Strichen von links oben nach rechts unten (\\\). Wähle jenes Rechteck aus, welches nach dieser Anleitung schraffiert wurde.*

a. *b.* *c.* *d.*

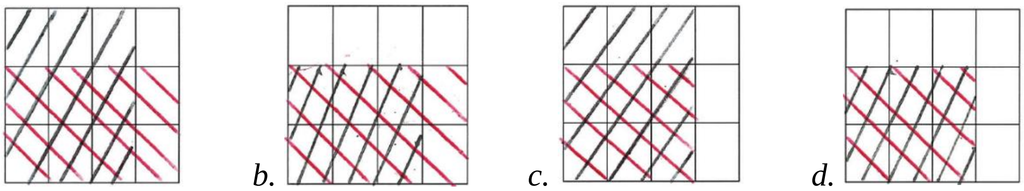


Abbildung 2: Antwortmöglichkeiten der 5. Frage

Welcher Teil des Quadrats ist jetzt doppelt schraffiert? Gib diesen Anteil als Bruch an!

Gib auch die Rechnung, welche den Vorgang des oben beschriebenen zweimaligen Schraffierens beschreibt, mit Bruchzahlen an!

Die ursprüngliche Idee für diese Aufgabe stammt aus einer Untersuchung von Friedhelm Padberg, in welcher dieser ebenfalls Grundvorstellungen beim Bruchrechnen erhob (Padberg, 1986, S. 68-69). Eine sehr ähnliche Aufgabenstellung ist jedoch auch bei Susanne Prediger zu finden, welche sich ebenfalls sehr viel mit Grundvorstellungen zur Operation mit Brüchen beschäftigte (Prediger, 2011, S. 72,75). Während Padberg ein Viertel der Hälfte berechnen ließ und somit ausschließlich Stammbrüche verwendete, war bei Prediger die gefragte Rechnung zwei Fünftel von drei Viertel. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe für diese Umfrage wurde dazwischen verankert, indem zwar keine Stammbrüche verwendet wurden, aber dafür Brüche mit noch kleineren und für die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich bekannteren Nennern. Die restlichen Unterpunkte wurden sinngemäß übernommen, unter anderem auch, um eine Vergleichsbasis für die Ergebnisse zu bekommen, wobei aufgrund des Online-Formats die Lernenden nur eine passende Skizze aus vier möglichen auswählen müssen, anstatt selbst eine zu zeichnen. Es wurde bei der Wahl der Antwortmöglichkeiten darauf geachtet, gängige Fehlvorstellungen als Distraktoren einzubauen. Auffallend ist, dass bei beiden der oben genannten Umfragen nur sehr wenige der Lernenden die Aufgabe vollständig lösen konnten. Padberg gibt an, dass 72% der Befragten die richtige Fläche des Rechtecks schraffieren konnten und es noch

52% möglich war, den gefragten Bruchteil als Zahl auszudrücken, aber nur mehr 1% die dazugehörige Rechenaufgabe angeben konnten (Padberg, 1986, S. 68-69). Bei der Untersuchung von Prediger schafften es 2% der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe vollständig zu lösen, obwohl sie etwas schwieriger formuliert war (Prediger, 2011, S. 72,75). Ob es sich dabei um zufällige Schwankungen handelt oder die Schülerinnen und Schüler sich allgemein etwas verbessert haben, kann an dieser Stelle nicht beurteilt werden. Jedoch ist auch eine Lösungsquote von 2% sehr niedrig und lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass den meisten Lernenden die Grundvorstellung, welche die Multiplikation von Bruchzahlen als „von" deutet, also als Anteil eines Anteils, fehlt oder sie zumindest unzureichend ausgebildet ist. Zusammen mit dem Wechsel der Ebenen, einerseits von der Sprache zur Zeichenebene, andererseits von diesen beiden Ebenen zur Rechenebene, umfasst diese Aufgabenstellung verschiedene Grundvorstellungen zur Multiplikation mit Bruchzahlen, aber auch zur Bruchrechnung allgemein und wird deshalb als schwierig eingeschätzt. Dementsprechend und auch mit Blick auf die Untersuchungen von Padberg und Prediger wird eine sehr niedrige Lösungsquote erwartet.

Die richtige Antwortmöglichkeit der Single-Choice Frage lautet „c". Die zur Aufgabe gehörige Rechnung inklusive dem richtigen Ergebnis ist $\frac{2}{3} \bullet \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

4.2.6 Handwerkskunst

Ein Brett ist 2 m lang. <u>Wie viele</u> Stücke mit einer Länge von $\frac{2}{3}$ m kannst du von dem Brett absägen? Gib das Ergebnis an und erkläre, wie du zu diesem gekommen bist.

***Tipp**: Du kannst die Skizze für deine Erklärung nutzen!*

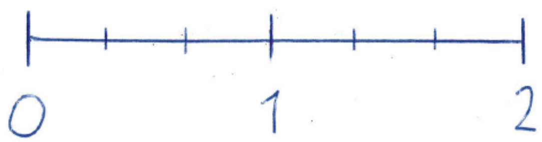


Abbildung 3: Skizze zur 6. Frage

Friedhelm Padberg hat diese Aufgabenstellung in derselben Umfrage wie im vorigen Unterkapitel (4.2.5) gestellt. Die Frage wurde dabei nur leicht abgeändert, um zusätzlich gezielt danach zu fragen, wie die Lernenden zu ihrem Ergebnis kommen und es wurde der Tipp gegeben, dazu die Skizze zu nutzen. Die dazugehörige Skizze wiederum wurde etwas vereinfacht, um weniger Hilfestellung zu geben (Padberg, 1986, S. 72). Der Schwierigkeitsgrad dieser Frage wird als eher niedrig eingeschätzt, da die Skizze ein einfaches Abzählen möglich macht und somit auch

Grundvorstellungen zur Division anregt. Zusätzlich legt die Fragestellung die Vorstellung der Division als wiederholte Subtraktion nahe, was laut Padberg und Wartha zu höheren Lösungsquoten führt, als es bei reinen Rechenbeispielen der Fall wäre (Padberg & Wartha, 2017, S. 145). Zuletzt spricht für einen geringen Schwierigkeitsgrad und eine hohe, erwartete Lösungsquote, dass bei Padbergs Untersuchung, von welcher diese Aufgabe ursprünglich stammt, 77% der Lernenden auf das richtige Ergebnis kamen. Möglicherweise liegt die Lösungsquote in dieser Umfrage unter den 77%, da zusätzlich nach dem Lösungsweg gefragt wird und da die dazugehörige Skizze reduziert wurde. Dennoch wird eine eher hohe Richtigkeitsquote erwartet.

Es werden alle schlüssigen Erklärungen der Schülerinnen und Schüler als richtig gewertet, welche zum Ergebnis 3, drei Bretter oder ähnlichen Formulierungen führen, unabhängig davon, ob sie sich auf die Skizze beziehen oder nicht.

4.2.7 Gerechtes Teilen

> *Nach einer Geburtstagsfeier sind noch $\frac{2}{3}$ von der Schokotorte und $\frac{3}{4}$ von der Erdbeertorte über. Anna und ihre zwei Schwestern teilen sich beide Torten gerecht auf, sodass jede ein gleich großes Stück von der Schokotorte und ein gleich großes Stück von der Erdbeertorte bekommt. Wie groß ist das Schokotortenstück, welches Anna bekommt, und wie groß ist ihr Erdbeertortenstück? Gib beide Zahlen als Bruch an!*

Eine ähnliche Aufgabe wie diese findet man auch in dem Lehrbuch „Didaktik der Bruchrechnung". Auf dieser basiert die hier präsentierte Fragestellung. Dabei wurde wie auch in dem Lehrbuch ein Tortenstück so gewählt, dass die Grundvorstellung der Division als Teilen ohne Umformungen angewendet werden kann und beim anderen Tortenstück müsste vorab erweitert werden, um die Vorstellung des Teilens anwenden zu können (Padberg & Wartha, 2017, S. 129-130). Mit den passenden Grundvorstellungen gibt es verschiedenste Wege diese Aufgabe zu lösen. Einerseits kann mit dem Quasikardinalzahlaspekt gearbeitet werden, dass beispielsweise 3 Viertel auf 3 Personen verteilt werden, was das Ergebnis 1 Viertel pro Person sehr nahe legt. Dabei muss bei der zweiten Torte jedoch zuerst von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{6}{9}$ erweitert werden, um ein einfaches Verteilen möglich zu machen. Andererseits könnten die Torten auch tatsächlich aufgezeichnet, die Aufgabe somit grafisch gelöst und anschließend verschriftlicht werden. Da es verschiedene, anschauliche Arten gibt, diese Aufgabe zu lösen und die Originalaufgabe von Padberg und Wartha ebenfalls eine modifizierte Fragestellung aus einem Schulbuch und somit die Aufgabenstellung dieser Umfrage sehr nahe dem Schulalltag ist, wird diese Aufgabe als eher einfach eingeschätzt. Es wird dementsprechend auch eine eher hohe Lösungsquote erwartet.

Die korrekte Antwort auf die Fragestellung lautet, dass Anna $\frac{2}{9}$ der Schokotorte und $\frac{1}{4}$ der Erdbeertorte bekommt. Sollten die Ergebnisse nur als Zahlen ohne Antwortsatz notiert werden, wird die Antwort als korrekt gewertet, solange die $\frac{2}{9}$ der Schokotorte und das $\frac{1}{4}$ der Erdbeertorte zugeordnet werden kann.

4.2.8 Single-Choice

Ein Kilogramm Äpfel kostet 3€. Andrea möchte $\frac{3}{4}$ Kilo Äpfel kaufen. Wie kann sie ihren Preis berechnen?
Wähle die richtige Antwort aus oder gib eine andere Antwort unter „Sonstiges“ an.
a.) $3 + \frac{3}{4}$ *b.)* $3 - \frac{3}{4}$ *c.)* $3 \bullet \frac{3}{4}$ *d.)* $3 : \frac{3}{4}$

Sonstiges:

Lukas baut für seine kleine Schwester ein Puppenhaus. Eine Wand des Puppenhauses soll $\frac{3}{5}$ m breit werden. Die Wand wird aus $\frac{1}{10}$ m breiten (senkrecht stehenden) Holzbrettern gebaut. Wie muss Lukas rechnen, um zu bestimmen, wie viele Holzbretter er nebeneinander für diese Wand braucht?

a.) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ *b.)* $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$ *c.)* $\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{10}$ *d.)* $\frac{3}{5} : \frac{1}{10}$

Sonstiges:

Die ersten beiden Single-Choice Fragen behandeln Bruchzahlen in verschiedenen Kontexten und mit verschiedenen Maßangaben. Die ursprüngliche Idee für diese Art von Aufgabentyp stammt von Susanne Prediger, welche mit ähnlichen Fragestellungen herausfinden wollte, wie gut Schülerinnen und Schüler Grundvorstellungen in konkreten Kontexten anwenden können (Prediger, 2011, S. 72-73). Dabei wurde die zweite Frage an eine Aufgabenstellung eines anderen Artikels von Prediger angelehnt (Prediger, 2006, S. 8). Ein erster Abstraktionsschritt, welchen die Schülerinnen und Schüler beim Lösen dieser beiden Aufgaben tätigen müssen, ist das Loslösen von den Einheiten, welche in den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten nicht mehr vorkommen. Die Maßeinheiten wurden bewusst weggelassen, um ein einfaches Beantworten der Frage durch das Vergleichen der Einheiten in der Rechnung und des Ergebnisses zu erschweren. Prinzipiell werden die beiden Aufgaben jedoch höchstens als mittelschwer eingestuft, da es sich um Single-Choice Aufgaben mit eher kleinen, überschaubaren Zahlen handelt. Wirft man jedoch einen Blick auf Predigers Studie, so konnte eine zur ersten Frage ähnliche Aufgabe nur von 9% der Befragten gelöst werden, was eine eher niedrige Lösungsquote nahelegen würde (Prediger, 2011, S. 75).

Bei der ersten Aufgabe stellt Antwortmöglichkeit „c" die richtige Antwort dar, während es sich bei der zweiten Aufgabe um eine Division handelt, genauer um eine Messaufgabe. Somit ist hier die Antwortmöglichkeit „d" korrekt.

Welche dieser Antwortmöglichkeiten ist korrekt?
Wenn ich zwei Bruchzahlen multipliziere, ist das Ergebnis …

a.) … immer größer als die beiden Bruchzahlen.

b.) … immer kleiner als die beiden Bruchzahlen.

c.) … manchmal größer, manchmal kleiner als die beiden Bruchzahlen, manchmal auch dazwischen.

Diese letzte Aufgabe stammt ebenfalls von Susanne Prediger, wobei die dritte Antwortmöglichkeit um das „manchmal auch dazwischen" ergänzt wurde, um Multiplikationen wie $\frac{1}{2} \bullet \frac{4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ nicht ausschließen zu müssen (Prediger, 2011, S. 72). Auch wenn diese Aufgabe sehr kurz und einfach erscheint, müssen für die korrekte Beantwortung zwei verschiedene Vorstellungen bei den Lernenden vorliegen: Einerseits müssen sie bereits verstanden haben, dass die Multiplikation nicht immer vergrößert, wie es bei den natürlichen Zahlen der Fall ist, sondern im Bereich der Bruchzahlen auch verkleinern kann, in beiden Fällen mit Ausnahme der Multiplikation mit 1 oder 0. Andererseits müssen die Schülerinnen und Schüler erkannt haben, dass die Bruchzahlen nicht nur zwischen den Zahlen 0 und 1 liegen, sondern dass auch Bruchzahlen größer als 1 existieren. Liegen diese beiden Vorstellungen vor und werden beim Bearbeiten dieser Aufgabenstellung aktiviert, sollte der korrekten Beantwortung dieser Frage nichts mehr im Weg stehen. Wirft man einen Blick auf Predigers Studie, so zeigt sich, dass 33% der Befragten die richtige Antwort auswählten (Prediger, 2011, S. 75). Dementsprechend wird auch diese Aufgabe als mittelschwer eingeschätzt.

Die richtige Antwortmöglichkeit ist „c".

Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Lösungsquoten der einzelnen Aufgaben etwas besser ausfallen könnten als in den angegebenen Vergleichsstudien, da jene Umfragen, wie zum Beispiel jene von Susanne Prediger, an verschiedenen Schultypen durchgeführt wurden und somit auch an Schultypen mit durchschnittlich leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern, während diese Umfrage nur an einem Gymnasium abgehalten wurde, einer Schule, welche eher von leistungsstärkeren Lernenden besucht wird. Diese Aussage wird durch die Ergebnisse der Längsschnittstudie, welche von Pekrun und weiteren Autorinnen und Autoren im Zuge der Projekts PALMA durchgeführt wurde, belegt (siehe Abschnitt 2.4). Im Gegensatz dazu stehen jedoch die COVID-19 Schutzmaßnahmen. Seit März 2020 wurden die Schulen in Österreich einige Male abrupt geschlossen und zu einem späteren Zeitpunkt wieder für verschiedene Schülerinnen und Schüler, teilweise auch als Schichtbetrieb, in welchem jeweils die Hälfte der Klasse anwesend war und die andere Hälfte von Zuhause aus lernte, geöffnet. Diese schnell wechselnden Situationen sowie die sehr knappe Vorbereitungszeit der Schulen auf die Schließung führten in vielen Fällen vermutlich zu erschwerten Lernbedingungen für Schülerinnen und Schüler. Dies könnte wiederum die Lösungsquote etwas verschlechtern, vor allem bei Lernenden der 5. und 6. Schulstufe, da diese in dem beschriebenen Zeitraum die Einführung in die Bruchrechnung erhielten. Die genauen Folgen der COVID-19 Situation auf die Entwicklung der Grundvorstellungen sind jedoch nur schwer abschätzbar.

Als Abschluss für dieses Kapitel kann gesagt werden, dass versucht wurde, den Fragenbogen abwechslungsreich zu gestalten und möglichst viele, verschiedene Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division mit Bruchzahlen voneinander getrennt abzufragen. Ob die aus der angegebenen Literatur abgeleiteten Schwierigkeitsgrade sowie durch ähnliche Studien vorhergesagten Lösungsquoten sich erfüllen oder ob es teilweise stark abweichende Ergebnisse gibt, wird im nächsten Kapitel offengelegt.

5 Auswertung und Analyse der Ergebnisse der Online-Umfrage

In diesem Kapitel, welches möglicherweise das Wichtigste der gesamten Arbeit darstellt, werden die erhaltenen Forschungsdaten ausgewertet und analysiert. Dafür wurden die Rohdaten im Vorfeld bereits in Kategorien unterteilt und ausgezählt, um die Ergebnisse quantitativ, knapp und dennoch vollständig präsentieren zu können. Diese Kategorien wurden nach einer ersten Sichtung der Rohdaten erstellt, um eine übersichtliche Darstellung der Daten zu gewährleisten. Zuerst werden im Abschnitt 5.1 die Ergebnisse der gesamten Stichprobe nach den Fragen gegliedert vorgestellt, die bei den einzelnen Fragen gewählten Kategorien erklärt und deren Wahl begründet. Im zweiten Unterkapitel erfolgt eine Auswertung der einzelnen Schulstufen nach den gestellten Fragen sortiert, wobei alle Klassen desselben Jahrgangs zusammengefasst werden, um einen Überblick über die Grundvorstellungen in den einzelnen Schulstufen zu bekommen. Zuletzt wird noch eine ebenfalls nach den gestellten Fragen sortierte Analyse der Gemeinsamkeiten und Unterschiede aller teilnehmenden 2. Klassen (= 6. Schulstufe) durchgeführt. Zusätzlich befindet sich im Anhang dieser Arbeit eine Tabelle aller erhaltenen, schon in die Kategorie eingeteilten und ausgezählten Antworten aus der empirischen Untersuchung.

5.1 Erläuterung der gewählten Kategorien und Auswertung der Stichprobe

Da in diesem Abschnitt erstmals die zuvor erwähnten Kategorien, welche für die quantitative Auswertung der Online-Umfrage erstellt wurden, explizit auftreten, werden sie in diesem Kapitel nach und nach erklärt und die Wahl dieser begründet. Infolgedessen werden auch die Ergebnisse der gesamten Stichprobe der empirischen Untersuchung präsentiert. Der Aufbau orientiert sich dabei am Kapitel 4.2: Es wird der Reihe nach jedes Item des Fragebogens durchbesprochen. Dabei trägt der Titel jedes Unterkapitels den Titel „Auswertung der gesamten Stichprobe:“ kombiniert mit dem Namen des jeweiligen diskutierten Items des Online-Fragebogens. Zu Beginn wird stets die Fragestellung zur Orientierung kursiv und eingerückt dargestellt, danach erfolgen die Präsentation der Ergebnisse der empirischen Untersuchung sowie die Diskussion dieser und der gewählten Kategorien. Bei mehreren Teilfragen eines Fragebogenitems werden diese hintereinander gereiht, wobei die Teilfragen ebenfalls kursiv und eingerückt präsentiert werden.

5.1.1 Auswertung der gesamten Stichprobe: Wocheneinkauf

Wolfgang erledigt für seine Familie den Wocheneinkauf. Auf seiner Einkaufsliste steht, dass er drei Liter Milch kaufen soll. Im Kühlregal findet er allerdings nur mehr Milchpackungen zu je einem halben Liter Milch. Wie viele Milchpackungen muss er kaufen?

Kannst du diese Fragestellung auch als Rechnung formulieren?

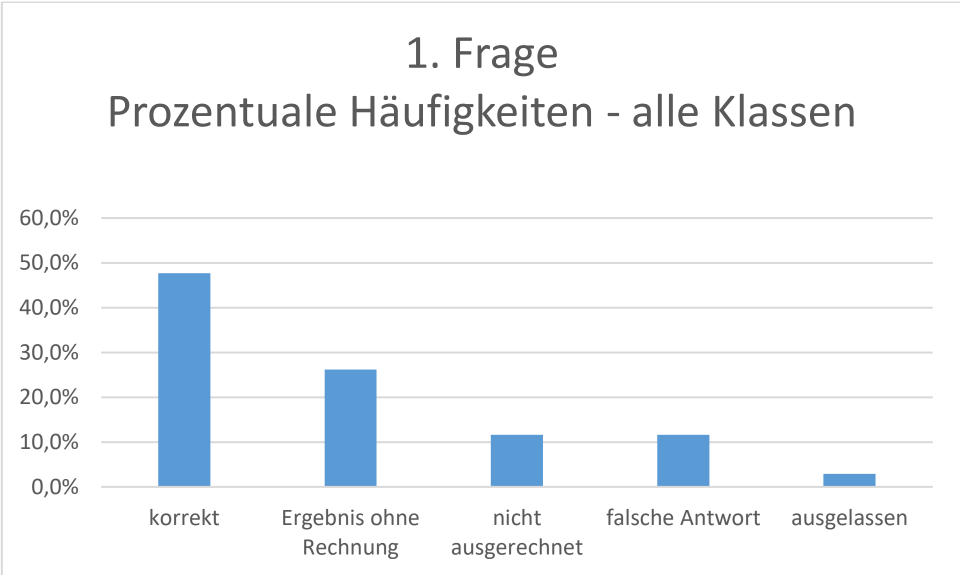


Abbildung 4: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 1

Die ersten beiden Kategorien, welche sich beinahe bei allen Fragen finden werden, stellen „korrekt“ und „ausgelassen“ dar. Wie die Betitelung bereits vermuten lässt, fallen unter „korrekt“ jene Antworten, welche allen in Kapitel 4.2 genannten Ansprüchen einer richtigen Antwort gerecht werden. „Ausgelassen“ beinhaltet die Antworten jener, welche die Frage gar nicht bearbeitet haben, aber auch jener, welche Aussagen wie „ich weiß nicht“ formulierten. In der Rubrik „Ergebnis ohne Rechnung“ werden Äußerungen zusammengefasst, welche das Ergebnis 6 nannten, jedoch keine Rechenwege umfassten. Im Gegensatz dazu steht die Kategorie „nicht ausgerechnet“, in welcher die Beteiligten nur die Rechnung, aber ohne Ergebnis, zum Beispiel „ $3 : \frac{1}{2} = x$ “, angaben. Kategorien wie „korrekt“, „falsche Antwort/falsches Ergebnis/anderes“ und „ausgelassen“ wurden bei den meisten Fragen eingesetzt, um zu zeigen, wie viele Testpersonen die Frage vollständig und richtig beantworten konnten, wie viele gänzlich falsche Ergebnisse lieferten und wie viele sich der Frage anscheinend gar nicht gewidmet haben oder mit der Fragestellung überfordert waren. Die für dieses Item etwas ungewöhnlicheren Kategorien stellen somit „Ergebnis ohne Rechnung“ sowie „nicht ausgerechnet“ dar. Diese wurden gewählt, um hervorzuheben, dass diese Schülerinnen und Schüler auf dem richtigen Weg waren und akzeptable, wenn auch nicht vollständige Lösungen lieferten. Da die Antwort 6 jedoch sehr wenig Einblick in die Gedankengänge hinter der Lösung gewährt, wird die Rubrik „Ergebnis ohne Rechnung“ nicht zu den richtigen Lösungen gezählt. Antworten der Kategorie „nicht ausgerechnet“ zeigen wiederum, dass die Schülerinnen und Schüler bereits einen Übersetzungsvorgang durchführten. Dies lässt bereits vermuten, dass sie eine passende Vorstellung der Division mit Bruchzahlen für diesen Kontext besitzen und kann somit auch als richtige Antwort gerechnet werden.

Betrachtet man sowohl die Kategorie „korrekt“, als auch „nicht ausgerechnet“ als richtig beantwortet, so konnte das erste Fragebogenitem von knapp 59% der Beteiligten gelöst werden. Auch wenn dieser Prozentsatz vielleicht nicht nach viel aussehen mag, bedeutet es, dass von zehn Befragten ungefähr sechs die Grundvorstellung zur Division hier richtig anwenden konnten, um den Text als Rechenaufgabe zu formulieren. Da in der fachdidaktischen Forschung aktuell davon ausgegangen wird, dass Grundvorstellungen im Unterricht noch nicht sehr weit verbreitet sind, stellen 59% schon ein beachtliches Ergebnis dar, vor allem, da weitere 26% auch auf den richtigen Zahlenwert kamen und vielleicht nur den zweiten Unterpunkt übersehen haben könnten. Die Vermutung, dass diese Frage als eher einfach gewählte Einstiegsfrage eine hohe Richtigkeitsquote erzielen würde, stellte sich somit als korrekt heraus.

5.1.2 Auswertung der gesamten Stichprobe: Multiplikation: Bruch mit natürlicher Zahl

Was stellst du dir unter der Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$ *vor?*

Wähle das Bild aus, welches deine Vorstellung am ehesten beschreibt.

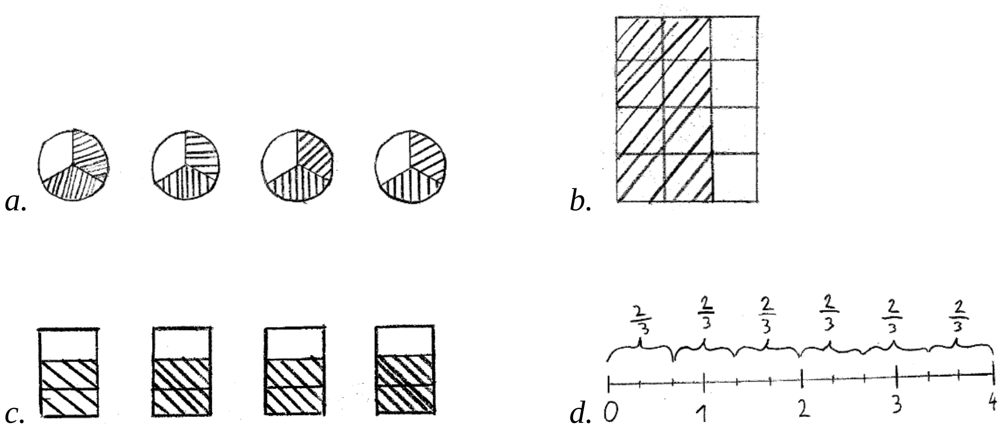


Abbildung 5: Antwortmöglichkeiten der 2. Frage (identisch mit Abbildung 1)

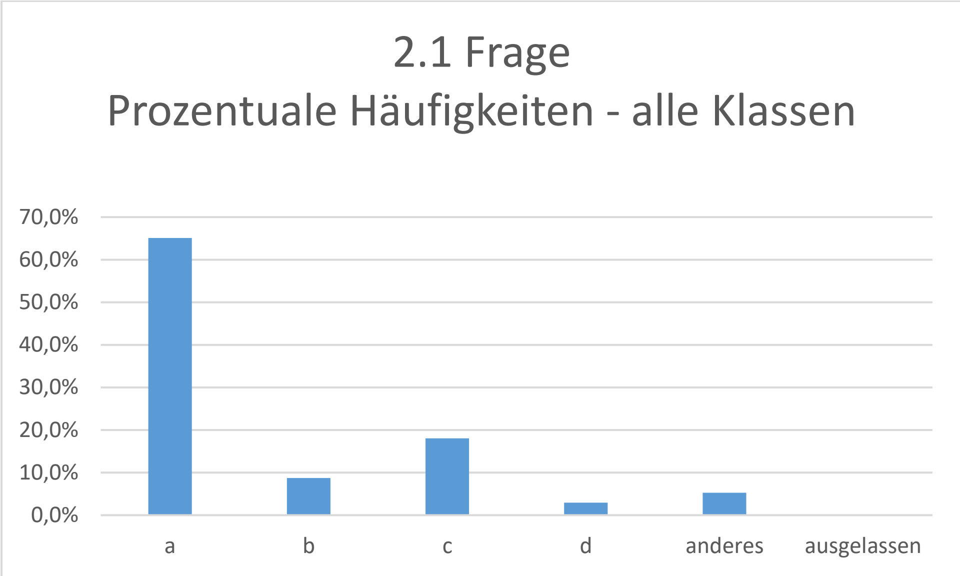


Abbildung 6: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 2.1

Da es sich bei dieser Fragestellung um eine Single-Choice Frage handelt, stellen die Kategorien die einzelnen Antwortmöglichkeiten dar. Zusätzlich wurden noch die Rubriken „anderes" und „ausgelassen" ergänzt, wobei „anderes" jene Antworten umfasst, welche selbst geschrieben wurden. Dabei handelte es sich großteils um Antworten wie „ich stelle mir nichts vor, ich rechne einfach". Die Kategorie „ausgelassen" wurde wie bei der vorigen Frage definiert.

Anhand von Abbildung 6 kann man bereits erkennen, dass die korrekten Antwortmöglichkeiten „a" und „c" stark überwiegen, wobei „a" häufiger gewählt wurde. Eine mögliche Begründung dafür ist, dass Tortendiagramme wahrscheinlich häufiger im Unterricht vorkommen und somit vertrauter für die Schülerinnen und Schüler sind. Die Lösungsquote liegt bei dieser Aufgabe bei zirka 83%, welche die ursprünglich genannte Vermutung einer hohen Lösungsquote nicht nur erfüllt, sondern möglicherweise bereits übertrumpft. Ob hier Wiedererkennungs- oder auch andere Effekt mitspielen und den Prozentsatz der vorhandenen Grundvorstellungen größer machen, als er es eigentlich ist, bleibt an dieser Stelle offen. Zuletzt fällt mit einem Blick auf Abbildung 6 sehr schnell auf, dass diese Frage von niemandem ausgelassen wurde, was ebenfalls ein Indiz dafür ist, dass viele der Befragten auf Vorstellungen zurückgreifen konnten. Zusätzlich könnte das Single-Choice Format, in welchem nur ein Bild ausgewählt und nicht berechnet werden musste, ebenfalls dazu geführt haben, dass weniger Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Frage übersprangen, dass an dieser Stelle also motivationale Effekte hinzugekommen sein könnten.

Welches dieser Bilder beschreibt deiner Meinung nach <u>nicht</u> die Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$? Gib den Buchstaben des Bildes an und begründe, warum das Bild die Rechnung deiner Meinung nach nicht beschreibt.

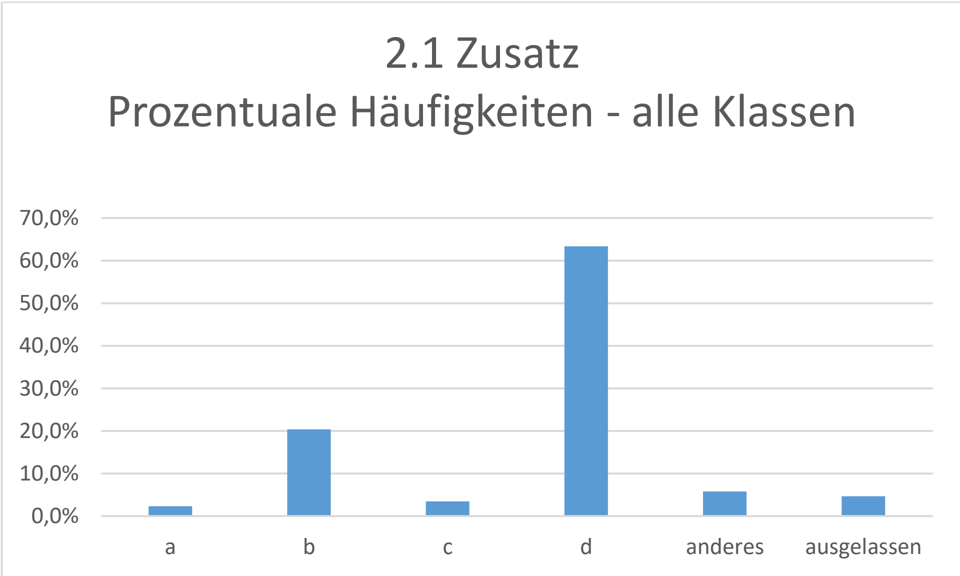


Abbildung 7: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Zusatz 2.1

Da sich die Zusatzfrage ebenfalls auf die Auswahlmöglichkeiten der Frage 2.1 bezog, wurden hier dieselben Kategorien wie zuvor verwendet.

Das Ergebnis der Zusatzfrage scheint sich mit dem der Hauptfrage zu decken. Während vor allem die korrekten Repräsentationen der Multiplikation als solche erkannt wurden, konnten in dieser Zusatzfrage die falschen Veranschaulichungen gezielt von knapp 84% der Schülerinnen und Schülern ausgeschlossen werden. Dieser Prozentsatz deckt sich mit den zuvor genannten 83% beinahe vollständig, was die Aussagekraft beider Ergebnisse zusätzlich bestärkt. Die Begründungen, warum die Befragten welches Bild ausschlossen, waren sehr unterschiedlich und wurden deshalb nicht festgehalten. Ein nicht zu unterschätzender Teil der Schülerinnen und Schüler erkannte jedoch Antwortmöglichkeit d als $\frac{2}{3} \bullet 6$ beziehungsweise auch Antwortmöglichkeit b als $\frac{2}{3}$, welche noch vier Mal genommen werden müssten, um die richtige Darstellung zu erhalten. Einige wenige schlossen Antwortmöglichkeit „a" oder „c" aus, weil es ihrer Meinung nach $4 \bullet \frac{2}{3}$ darstellt und nicht $\frac{2}{3} \bullet 4$, die häufigste Begründung, warum eine bestimmte Antwortmöglichkeit ausgeschlossen wurde, war jedoch, dass die Darstellung die Befragten verwirrte.

Stellst du dir unter der Rechnung $4 \bullet \frac{2}{3}$ *genau dasselbe wie oben vor?*

Wenn nein, versuche bei der Antwortoption „Sonstiges" deine Vorstellung für $4 \bullet \frac{2}{3}$ *in Worte zu fassen.*

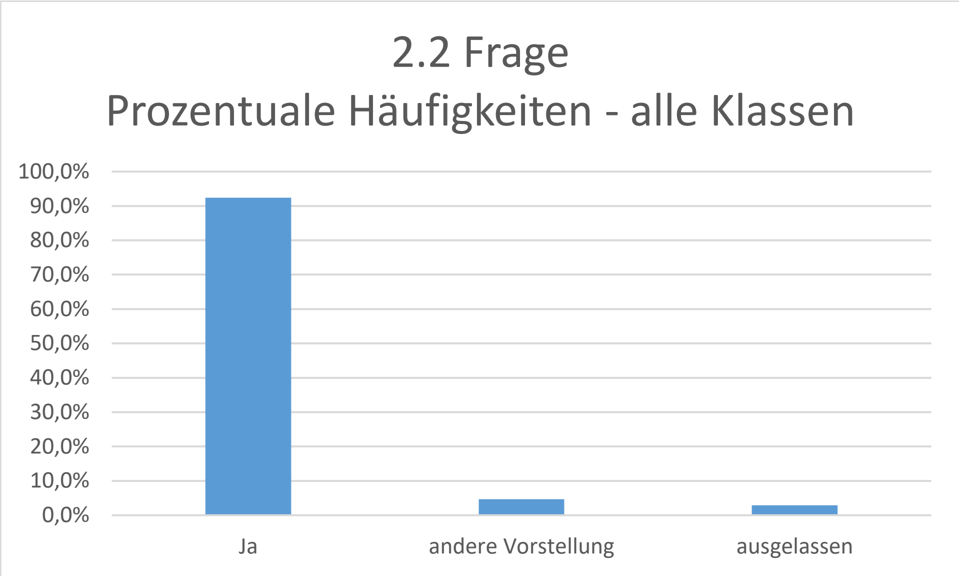


Abbildung 8:Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 2.2

Auch bei dieser Single-Choice Frage wurden die Kategorien nach den Antwortmöglichkeiten benannt.

Die 2. Unterfrage des zweiten Fragebogenitems zeigt, dass ungefähr 92% der Befragten zumindest nicht bewusst zwischen den Fällen Bruchzahl mal natürlicher Zahl und natürliche Zahl mal Bruchzahl unterscheiden. Bei den knapp 5%, welche andere Antworten nannten, traten verschiedenste Vorstellungen an den Tag, wobei auch einige davon nicht zutreffend waren. Dieses Ergebnis deckt sich mit einer Untersuchung von Padberg und Wartha, in welcher Aufgabentypen der beiden genannten Fälle gleich häufig gelöst wurden, obwohl der Fall natürliche Zahl mal Bruchzahl vorstellungsmäßig sehr nahe an den natürlichen Zahlen angelehnt ist und somit eine höhere Lösungsquote erwartet werden könnte (Padberg & Wartha, 2017, S. 117-118).

5.1.3 Auswertung der gesamten Stichprobe: Brüchige Schokolade

Tom findet bei sich zuhause eine Tafel Schokolade. Von dieser wurde bereits ein Drittel gegessen, es sind also nur mehr zwei Drittel übrig. Von der verbleibenden Schokolade *nimmt sich Tom ein Viertel, also ein Viertel von zwei Drittel. Wie viel von der gesamten Schokolade ist das? Gib dein Ergebnis als Bruch an! Wie kommst du zu dem Ergebnis?*

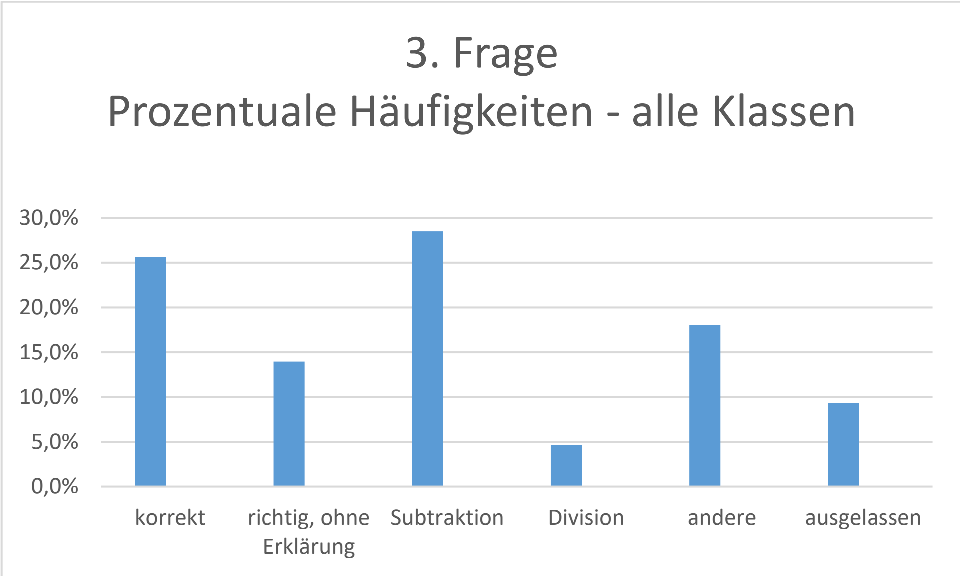


Abbildung 9: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 3

Die Kategorien „korrekt“ und „ausgelassen“ wurden wie bei Frage 1 definiert. Unter „richtig, ohne Erklärung“ fallen Antworten, welche das Ergebnis $\frac{1}{6}$ zwar nannten, aber keine oder keine nachvollziehbare Erklärung angaben, wie sie zu diesem Ergebnis kamen, was wiederum Rückschlüsse auf das Vorhandensein von Grundvorstellungen erschwert. Die Rubriken „Subtraktion“ und „Division“ beinhalten Antworten, bei welchen versucht wurde, die Aufgabe in Form einer Subtraktion, meist $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$, beziehungsweise einer Division, oft $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$, zu lösen. Da beide Lösungsstrategien mehr oder weniger stark vertreten waren, wurden hier die einzelnen Kategorien gebildet. Die letzte Kategorie „andere“ fasst alle anderen, falschen Antworten zusammen.

Bei der Analyse wurde eine geringe Lösungsquote erwartet, diese Vermutung ist nur teilweise bestätigt. Einerseits konnten ungefähr 26% die Aufgabe richtig lösen und den Lösungsweg erklären, andererseits waren zusätzlich 14% in der Lage, das korrekte Rechenergebnis zu liefern, was vorhandene Vorstellungen vermuten lässt. Aber auch 26% ist bereits ein Prozentsatz, welcher bei Aufgaben des Typs Bruchzahl mal Bruchzahl stark von den Ergebnissen anderer empirischer Untersuchungen, wie zum Beispiel jenen von Prediger (Prediger, 2011, S. 8-11) und Padberg (Padberg, 1986, S. 68-69), abweicht. Wie bereits im Kapitel 4.2.3 beschrieben, war diese Aufgabe jedoch offener als in den genannten Vergleichsstudien formuliert, was verschiedene, richtige Argumentationen ermöglichte und somit schon eine etwas höhere Lösungsquote erwarten ließ. So wurde beispielsweise in mehreren Fällen über Skizzen beziehungsweise über das Vorstellen des bildlichen Abbrechens der Schokolade argumentiert, anstatt die Rechnung anzugeben. Nichtsdestotrotz bleibt das Faktum, dass ein Viertel aller Befragten diese Aufgabe korrekt lösen konnten, ein unerwartetes Ergebnis. Besonders auffällig ist auch, dass die Subtraktion in relativ vielen Fällen als Mittel zum Zweck verwendet wurde. Möglicherweise beruht dies auf der Vorstellung, dass etwas weggenommen wird, welche oft mit der Subtraktion verknüpft wird. Der Versuch, die Fragestellung in eine Division zu übersetzen, wurde deutlich seltener unternommen. Möglicherweise spielte bei diesen Überlegungen die falsche Vorstellung, dass bei einer Division immer etwas weniger wird und bei der Multiplikation etwas mehr, eine Rolle, die Antworten waren jedoch in den meisten Fällen unbegründet.

5.1.4 Auswertung der gesamten Stichprobe: Divisionsdilemma

Julian hat bei seiner Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ *dividiert. Er kommt auf das Ergebnis 8. Als er jedoch darüber nachdenkt, wundert er sich, wie das Ergebnis größer als 2 sein kann, er hat ja 2 durch etwas geteilt. Hat Julian richtig gerechnet? Wenn er richtig gerechnet hat, kannst du ihm erklären, warum das so ist? Wenn er falsch gerechnet hat, wo liegt der Fehler?*

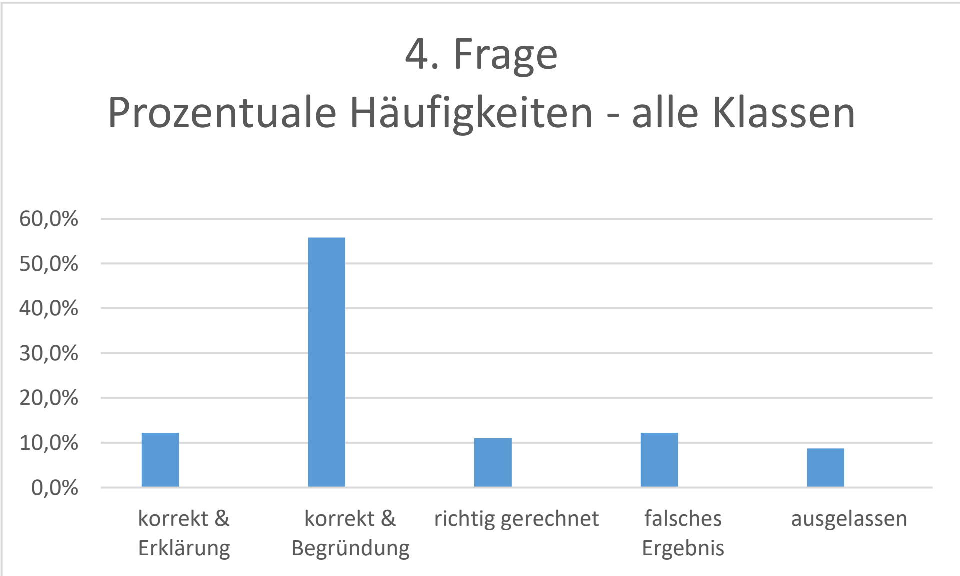


Abbildung 10: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 4

Bereits bei der Formulierung des Erwartungshorizonts zu der Frage wurde geäußert, dass zur Beantwortung dieser einerseits über Rechenregeln und andererseits direkt über die Vorstellung argumentiert werden kann. Beide Wege werden dabei als korrekt gewertet. Dennoch wurde bei der Auswertung zwischen den beiden Rechtfertigungen unterschieden. Die Kategorie „korrekt & Begründung" umfasst jene Antworten, welche nur über Rechenregeln argumentierten. Dabei wurden hauptsächlich Merksätze zum Thema Kehrwert wie „Wenn man durch einen Bruch dividiert, muss man mit dem Kehrwert multipliziert" angeführt, in wenigen Fällen erfolgten auch Argumentationen über das Auflösen von Doppelbrüchen oder allgemein, dass die Division durch eine Zahl zwischen 0 und 1 vergrößert. Während das letztgenannte Argument bereits eine passende Vorstellung zeigt, kann bei den anderen Begründungen nur vermutet werden, dass eine für die Situation hilfreiche Grundvorstellung angewandt werden konnte. Dennoch wurde vermutlich von den meisten erkannt und akzeptiert, dass die Division in diesem Kontext nicht verkleinert, sondern vergrößert, was eine passende Vorstellung zur Größenrelation bei der Division mit Bruchzahlen darstellt. Vertiefte Grundvorstellungen fanden sich jedoch vor allem bei den Antworten der Kategorie „korrekt & Erklärung". Hier wurde entweder erklärt, dass die Fragestellung zu „Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in 2?" umformuliert werden kann oder dass 2 aus acht Viertel besteht und die Frage lautet, in wie viele Viertel 2 zerlegt werden kann. In beiden Fällen wurde auf eine für Bruchzahlen in diesem Kontext passende Grundvorstellung zurückgegriffen und diese als Erklärungsgrundlage verwendet, was darauf schließen lässt, dass diese Vorstellung bereits einigermaßen in den Schülerinnen und Schülern dieser Kategorie verankert sein muss. Im Gegensatz dazu steht die Rubrik „richtig gerechnet". Hier wurden die Antworten jener Schülerinnen und Schüler zusammengefasst, welche nur zustimmten, dass Julian korrekt gehandelt hat, jedoch nicht argumentierten, wieso das Ergebnis stimmt. Zuletzt wurden Antworten, welche beinhalteten, dass Julian falsch gerechnet hat unter „falsches Ergebnis" zusammengefasst und jene Befragten, welche die Frage ausließen, unter „ausgelassen" festgehalten.

Mit einer Lösungsquote von 68% wurde die Annahme, dass es eher wenige, richtige Antworten geben wird, widerlegt. Knapp sieben von zehn befragten Schülerinnen und Schüler haben Julian nicht nur zugestimmt, sondern hatten auch eine Argumentation parat, um ihre Überlegung zu untermauern, was ein unerwartet hohes Ergebnis darstellt. Weniger positiv fällt jedoch auch sehr schnell auf, dass viel häufiger über Rechenregeln argumentiert wurde, als direkt auf die Vorstellung des Messens bei der Division zurückzugreifen. Dies legt zwei mögliche Schlüsse nahe: Entweder ist bei vielen Schülerinnen und Schülern die Grundvorstellung des Messens noch nicht umfassend vorhanden oder noch nicht so weit gefestigt, dass sie diese den Rechenregeln vorziehen würden. Bei den falschen Antworten fand man vor allem Argumentationen, dass $2 : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4}$ sei, dass das Ergebnis nicht 8, sondern 0,8 sein müsste oder dass 0,5 richtig wäre. In den ersten beiden Fällen wurde dabei auf die „Regel mit dem Kehrwert" eingegangen, wobei der Kehrwert einmal vom Dividenden und einmal vom Quotienten, anstelle des Divisiors, gebildet wurde. Das Ergebnis 0,5 wurde durch eine Multiplikation im Sinne von $2 \bullet \frac{1}{4}$ anstelle einer Division erreicht.

5.1.5 Auswertung der gesamten Stichprobe: Der Teil vom Teil

Ein Rechteck wird folgendermaßen schraffiert (mit Strichen angemalt): $\frac{3}{4}$ *des Rechtecks mit schwarzen Strichen von links unten nach rechts oben (///). Dann* $\frac{2}{3}$ *von den schwarz schraffierten* $\frac{3}{4}$ *mit roten Strichen von links oben nach rechts unten (\\\\\\). Wähle jenes Rechteck aus, welches nach dieser Anleitung schraffiert wurde.*

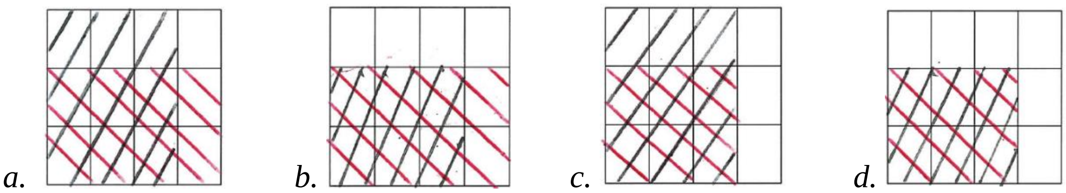


Abbildung 11: Antwortmöglichkeiten der 5. Frage (identisch mit Abbildung 2)

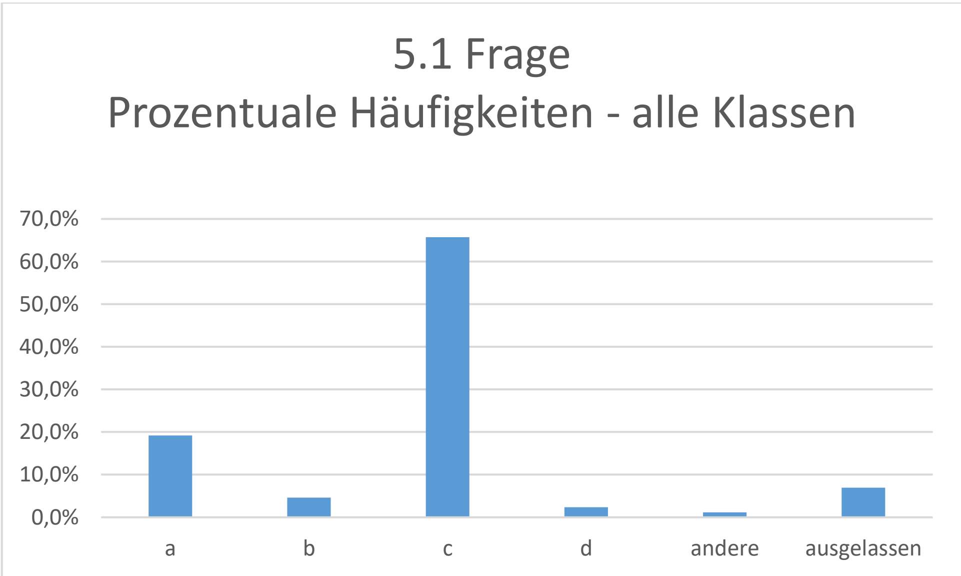


Abbildung 12: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 5.1

Wie bei Frage 2.1 handelt es sich hier um eine Single-Choice Frage. Die Kategorien wurden deshalb nach den unterschiedlichen Antwortmöglichkeiten benannt und um die bereits bekannten Rubriken „andere“ und „ausgelassen“ erweitert.

An dieser Stelle schnitt die Stichprobe erstmalig etwas schlechter ab, als aus der Literatur zu erwarten war. Bei einer empirischen Untersuchung von Padberg, konnten 72% der Befragten bei einer sehr ähnlichen Fragestellung das Rechteck richtig schraffieren, während sich in dieser Stichprobe ungefähr 66% für die richtige Skizze entschieden (Padberg, 1986, S. 68-69). Dennoch stellt dieser Prozentsatz immer noch eine gute Lösungsquote dar. Der einzige, nennenswerte Distraktor, welcher von knapp 19% gewählt wurde, Antwortmöglichkeit a, beschreibt eine Schraffierung von $\frac{3}{4}$ des gesamten Rechtecks und $\frac{2}{3}$ des gesamten Rechtecks. Hier scheint eine korrekte Unterscheidung zwischen $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ vom Ganzen nicht möglich gewesen zu sein. In die Rubrik „andere" fallen zwei Aussagen, welche beide „9 schwarze, 8 rote" als Antwort festhielten. Hier wurden vermutlich die schraffierten Kästchen gemeint. In diesem Fall könnten diese beiden Antworten ebenfalls zur Kategorie „a" hinzugezählt werden.

Welcher Teil des Quadrats ist jetzt doppelt schraffiert? Gib diesen Anteil als Bruch an!

Gib auch die Rechnung, welche den Vorgang des oben beschriebenen zweimaligen Schraffierens beschreibt, mit Bruchzahlen an!

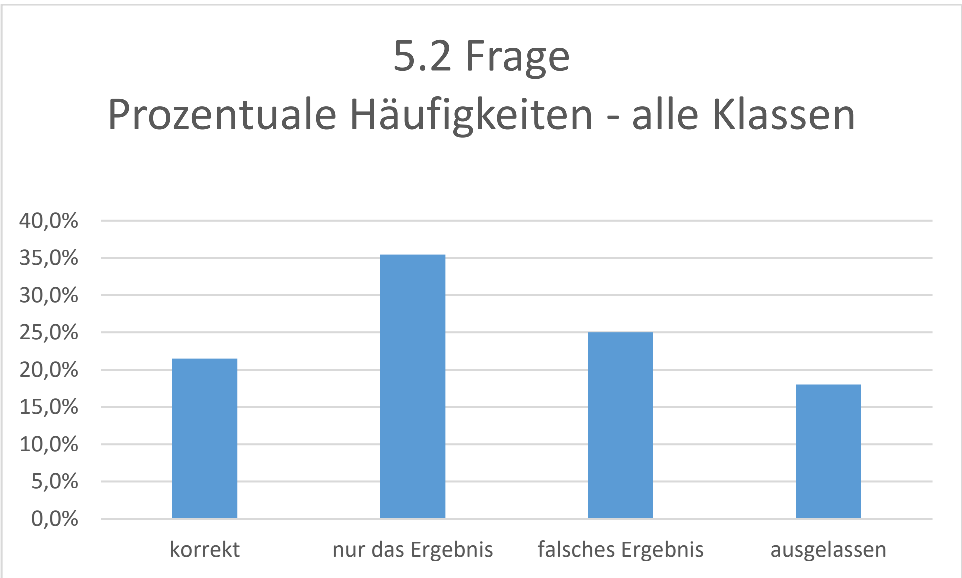


Abbildung 13: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 5.2

Die Kategorien „korrekt", „falsches Ergebnis" und „ausgelassen" wurden wie bei vorigen, ähnlichen Fragen festgelegt. In der Rubrik „nur das Ergebnis" wurden jene Antworten gesammelt, welche das richtige Ergebnis $\frac{1}{2}$ anschreiben konnten, jedoch keinen Rechenweg angaben.

Während die Schülerinnen und Schüler dieser Stichprobe bei der ersten Teilfrage etwas schwächer abschnitten als jene aus der Vergleichsstudie, wurden bei der zweiten Teilfrage deutlich bessere Ergebnisse erzielt. Padberg erklärt, dass in seiner Untersuchung 52% der Befragten den doppelt schraffierten Anteil des gesamten Rechtecks als Bruchzahl auszudrückt, aber nur mehr 1% auch die dazugehörige Rechnung angeben konnte (Padberg, 1986, S. 68-69). Im Vergleich dazu gelang es in dieser Umfrage 57% der Schülerinnen und Schüler das richtige Ergebnis als Bruchzahl anzugeben und zirka 22%, also über ein Fünftel aller Befragten, konnten auch die dazugehörige Rechnung aufschreiben. Bei dieser Frage schnitten die Befragten somit deutlich besser ab, als es erwartet wurde. Dennoch scheint die Frage einigen Probleme bereitet zu haben, da hier erstmalig auch eine beachtliche Anzahl der Befragten, 18%, die Frage ausließen. Besonders interessant war ein Fall, in welchem angegeben wurde, dass die Person intuitiv beziehungsweise der Abbildung nach als Antwort „$\frac{1}{2}$“ gegeben hätte, dann aber mit dem Taschenrechner „$\frac{5}{12}$“ berechnete. Hier zeigt sich, dass die Vorstellung zwar richtig war, aber anscheinend nicht als „mathematisch“ genug betrachtet wurde, um sie als Ergebnis zu nennen. Infolgedessen versuchte die Person eine Rechnung zu generieren, welche im Endeffekt ein falsches Ergebnis lieferte. Dass das Ergebnis der Rechnung von dem der Vorstellung abwich, schien die Person jedoch irritiert zu haben, weshalb sie wahrscheinlich beide Ergebnisse angab, aber das Berechnete noch einmal hervorhob.

5.1.6 Auswertung der gesamten Stichprobe: Handwerkskunst

Ein Brett ist 2 m lang. <u>Wie viele</u> Stücke mit einer Länge von $\frac{2}{3}$ m kannst du von dem Brett absägen? Gib das Ergebnis an und erkläre, wie du zu diesem gekommen bist.

***Tipp**: Du kannst die Skizze für deine Erklärung nutzen!*

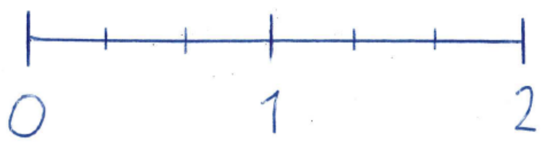


Abbildung 14: Skizze zur 6. Frage (identisch mit Abbildung 3)

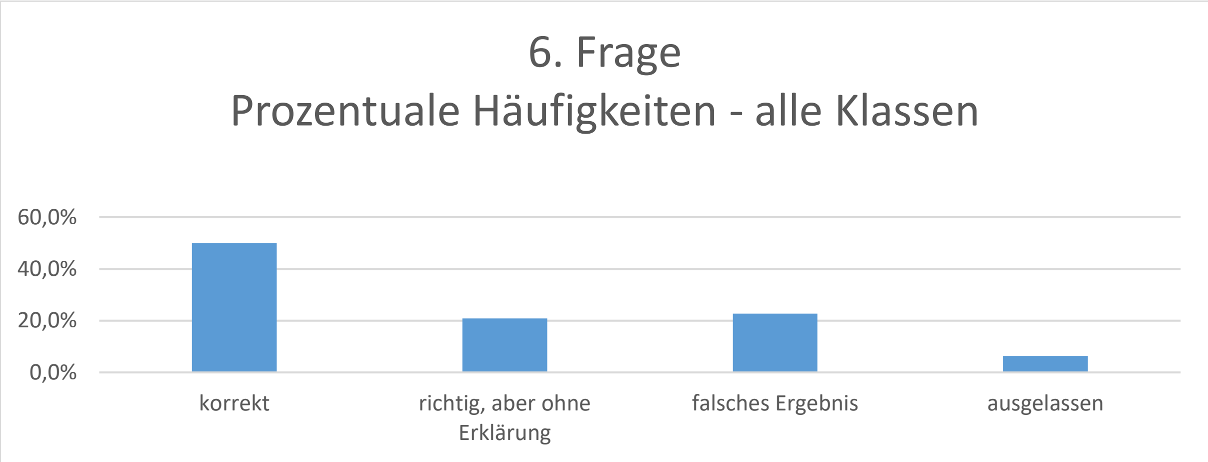


Abbildung 15: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 6

Die hier verwendeten Kategorien wurden wie bei einigen vorigen Fragestellungen definiert. Die Unterscheidung zwischen „korrekt" und „richtige, aber ohne Erklärung" besteht darin, dass Antworten der ersten Rubrik das richtige Ergebnis nannten und angaben, wie dieses erreicht wurde, während jene der zweiten Kategorie nur das Ergebnis beinhalteten.

Wie im Kapitel 4.2.6 prognostiziert, fielen die Antworten bei dieser Frage sehr gut aus. 71% der Befragten konnten das richtige Ergebnis nennen und 50% aller gaben ebenfalls eine Erklärung für dieses an. Einer der häufigsten Fehler, welche die Befragten dazu brachte „einmal" beziehungsweise „1" als das Ergebnis festzulegen, war der Gedankengang, dass zwei Meter in diesem Fall „das Ganze" seien und $\frac{2}{3}$ nur ein einziges Mal in ein Ganzes passen würden. Bei dieser Begründung wurde zwar auf die Vorstellung des Messens bei der Division mit Bruchzahlen zurückgegriffen, im Sinne von „Wie oft passen $\frac{2}{3}$ in ...?", jedoch kam es zu Unsicherheiten oder Verwechslungen mit dem Festlegen des Ganzen und dem Bezug der zwei Drittel auf dieses. Die Erklärungen der Antworten in der Kategorie „korrekt" wiesen sehr unterschiedliche Argumentationen auf. Teilweise wurde richtig über die Vorstellung des Messens argumentiert, öfters auch die Rechnung „$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$" aufgeschrieben, also im Sinne der wiederholten Addition begründet, oder einfach das Abzählen anhand der Skizze erklärt.

5.1.7 Auswertung der gesamten Stichprobe: Gerechtes Teilen

Nach einer Geburtstagsfeier sind noch $\frac{2}{3}$ von der Schokotorte und $\frac{3}{4}$ von der Erdbeertorte über. Anna und ihre zwei Schwestern teilen sich beide Torten gerecht auf, sodass *jede ein gleich großes Stück von der Schokotorte und ein gleich großes Stück von der Erdbeertorte bekommt. Wie groß ist das Schokotortenstück, welches Anna bekommt, und wie groß ist ihr Erdbeertortenstück? Gib beide Zahlen als Bruch an!*

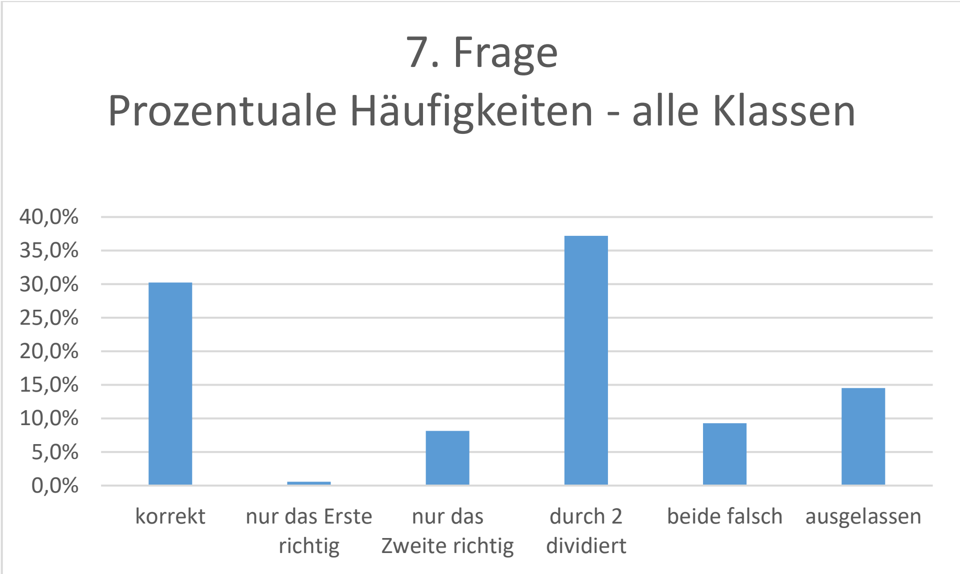


Abbildung 16: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen – Frage 7

Da es sich bei dieser Fragestellung um zwei Teilaufgaben handelt, das Aufteilen der Schokotorte und das der Erdbeertorte, wurden die Kategorien so eingeteilt, dass alle Kombinationen berücksichtigt wurden. „Korrekt" bedeutet, dass beide Teilaufgaben richtig gelöst wurden, „nur das Erste richtig" heißt, dass nur die Schokotorte richtig aufgeteilt wurde, „nur das Zweite richtig" meint, dass nur die Erdbeertorte korrekt aufgeteilt wurde und „beide falsch", dass die Befragten weder das eine Stück, noch das andere richtig berechneten. Ein sehr häufig aufgetretener Fall, welcher nicht vorhergesehen wurde, führte zur Einführung einer weiteren Kategorie: „durch 2 dividiert". Hier haben die Schülerinnen und Schüler vermutlich nicht genau gelesen – anscheinend wurde nur auf die zwei Schwestern aufgeteilt und auf Anna vergessen – und anstatt durch 3 nur durch 2 dividiert. Diese Rechnung ist jedoch ähnlich schwierig wie die Division durch 3, im Fall $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ kann direkt aufgeteilt werden, jedoch muss bei $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$ genauso wie es bei $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{9}$ der Fall ist, erweitert oder auf die Vorstellung des Messens zurückgegriffen werden. Da der Fokus dieser Umfrage nicht auf der Lesekompetenz, sondern auf dem Vorhandensein von Vorstellungen liegt, könnten Antworten dieser Kategorie als richtig oder besser ausgedrückt als akzeptabel gewertet werden. Die letzte Rubrik, „ausgelassen", zählt wieder jene Befragten, welche keine Antwort angaben.

Ob die Erwartung, dass die Lösungsquote dieser Aufgabe eher hoch ausfallen würde, erfüllt ist, lässt sich nicht genau festlegen. Die richtige Antwort konnte nur von knapp 30% der Befragten gegeben werden. Zählt man jene hinzu, welche durch 2 dividierten, steigt der Prozentsatz der akzeptablen Lösungen jedoch auf ungefähr 67% an, was zirka $\frac{2}{3}$ der Schülerinnen und Schüler sind und somit ein gutes Ergebnis darstellen. Dass jedoch mit knapp 37% mehr Befragte durch 2 dividierten, als auf das korrekte Ergebnis kamen, wirft an dieser Stelle ein anderes Problem auf. Bei dieser Fragestellung scheiterte es anscheinend weniger daran, eine passende Vorstellung anzuwenden, um den Text korrekt auf die syntaktische Ebene zu übersetzen und die Rechnung dann durchzuführen, als die Informationen aus dem Text richtig herauszulesen. Ob es sich dabei um Flüchtigkeits- oder um Denkfehler handelt, kann jedoch nicht bestimmt werden. Anhand von Abbildung 16 lässt sich außerdem noch sehr schnell erkennen, dass das Verteilen der Schokotorte, was der Rechnung $\frac{2}{3} : 3$ entspricht, den Befragten schwerer fiel, als das Aufteilen der Erdbeertort, welches direkt mit der Vorstellung des Teilens bewältigt werden konnte. Zuletzt ist auch bei dieser Frage die Zahl der Auslassungen mit ungefähr 15% aller Befragten, relativ hoch. Ob dies auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, mangelnder Motivation gegen Ende des Fragebogens oder darauf zurückzuführen ist, dass zwei separate Rechnungen getätigt werden sollten, bleibt offen.

5.1.8 Auswertung der gesamten Stichprobe: Single-Choice

Ein Kilogramm Äpfel kostet 3€. Andrea möchte $\frac{3}{4}$ *Kilo Äpfel kaufen. Wie kann sie ihren Preis berechnen?*
Wähle die richtige Antwort aus oder gib eine andere Antwort unter „Sonstiges“ an.
a.) $3 + \frac{3}{4}$ *b.)* $3 - \frac{3}{4}$ *c.)* $3 \bullet \frac{3}{4}$ *d.)* $3 : \frac{3}{4}$

Sonstiges:

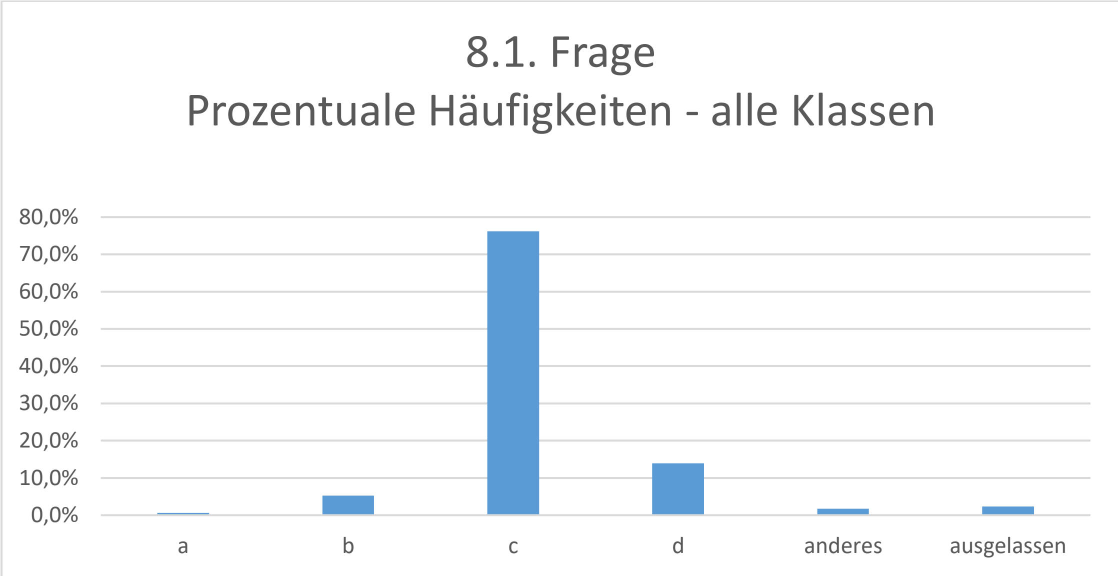


Abbildung 17: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 8.1

Bei dieser und den nachfolgenden beiden Teilfragen des Fragebogenitems 8 wurden die Kategorien wie bei anderen Single-Choice Fragen nach den Antwortmöglichkeiten benannt.

Während in der Theorie die Verteilung der Antworten schwer einschätzbar war, ist das Ergebnis eindeutig: Knapp 76% der Befragten entschieden sich für die richtige Antwortmöglichkeit „c“. Der einzige Distraktor, welcher zumindest von 14% gewählt wurde und somit einigermaßen oft vertreten war, ist „d“, die Division. Auch wenn es sich hier um eine Single-Choice Frage handelt, fiel das Ergebnis unerwartet gut aus, vor allem im Vergleich zu einer Umfrage von Susanne Prediger, welche eine sehr ähnliche Aufgabenstellung verwendet und eine Lösungsquote von 9% erhielt (Prediger, 2011, S. 75). Warum dieses Ergebnis so stark von dem der Vergleichsstudie abweicht, ist nur relativ schwierig einzuschätzen. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die Schülerinnen und Schüler heute als Vorbereitung auf die Zentralmatura öfter Aufgaben im Single-Choice- und Multiple-Choice Format bekommen und deshalb schon vertrauter mit ähnlichen Aufgabestellungen sind.

Lukas baut für seine kleine Schwester ein Puppenhaus. Eine Wand des Puppenhauses soll $\frac{3}{5}$ m breit werden. Die Wand wird aus $\frac{1}{10}$ m breiten (senkrecht stehenden) Holzbrettern gebaut. Wie muss Lukas rechnen, um zu bestimmen, wie viele Holzbretter er nebeneinander für diese Wand braucht?

a.) $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$ *b.)* $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$ *c.)* $\frac{3}{5}\bullet\frac{1}{10}$ *d.)* $\frac{3}{5}:\frac{1}{10}$

Sonstiges:

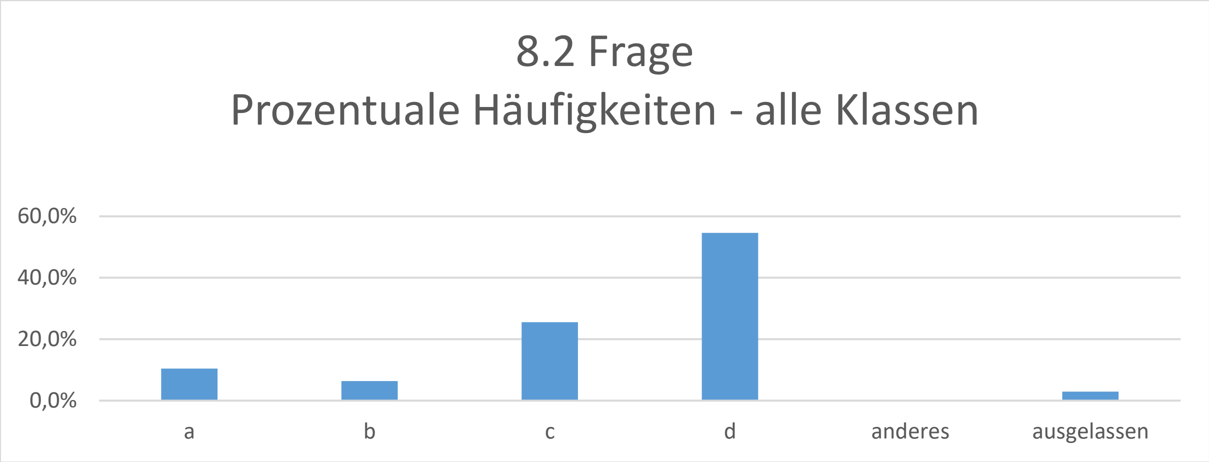


Abbildung 18: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 8.2

Bei den Analysen im Kapitel 4.2.8 wurden die vorige und diese Frage gemeinsam diskutiert, da sie einen sehr ähnlichen Charakter haben und somit auch als ähnlich schwierig eingeschätzt wurden. In der Praxis dürfte jedoch ein deutlicher Unterschied zwischen diesen beiden Aufgaben bestehen, da die zweite Unterfrage des Items 8 nur mehr von ungefähr 55% aller Befragten richtig beantwortet werden konnte. Während die Wahl des Distraktors „c“, welcher als Multiplikation das Gegenstück zur Division darstellte, bereits deutlich höher als die der Division in der ersten Unterfrage ausfällt, sind hier auch die Distraktoren „a“ und „b“ bereits etwas stärker vertreten. Die Division scheint hier einigen Befragten nicht in der Ausführung, sondern bereits beim korrekten Übersetzen der Aufgabe als Division Schwierigkeiten zu machen. Dennoch stellt eine Lösungsquote von zirka 55% immer noch ein akzeptables Ergebnis dar.

Welche dieser Antwortmöglichkeiten ist korrekt?
Wenn ich zwei Bruchzahlen multipliziere, ist das Ergebnis …

a.) … immer größer als die beiden Bruchzahlen.

b.) … immer kleiner als die beiden Bruchzahlen.

c.) … manchmal größer, manchmal kleiner als die beiden Bruchzahlen, manchmal auch dazwischen.

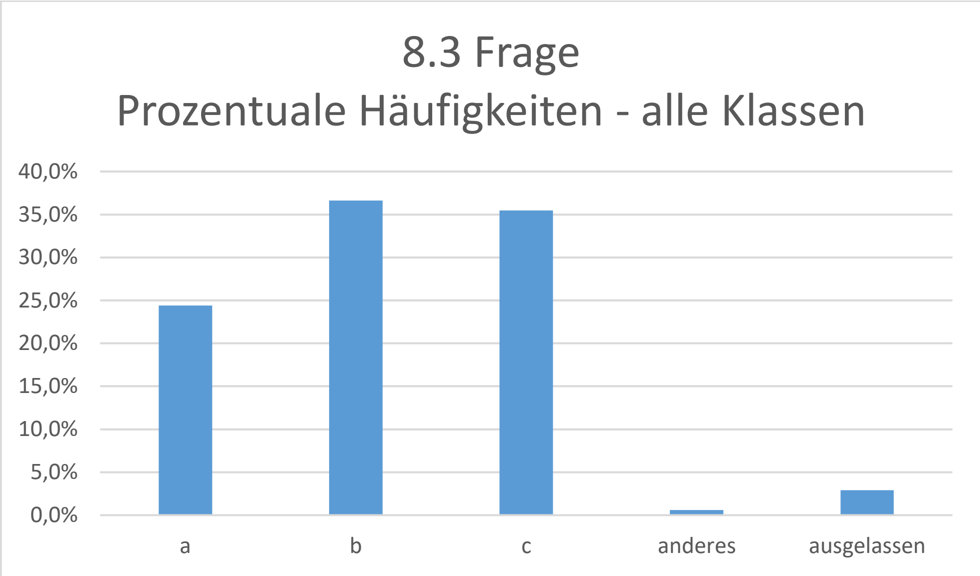


Abbildung 19: Prozentuale Häufigkeiten aller Klassen - Frage 8.3

Beim letzten Unterpunkt des Fragebogenitems 8 zeigt sich eine eher gleichmäßige Verteilung der Antworten auf alle Antwortmöglichkeiten. Distraktor „a", welcher die Vorstellung impliziert, dass eine Multiplikation immer vergrößert, wurde dabei am seltensten gewählt, was nahe legen könnte, dass bei ungefähr $\frac{3}{4}$ aller Befragten diese Vorstellung bereits überwunden wurde. Die häufige Wahl des Distraktors „b" könnte vor allem damit erklärt werden, dass im Unterricht, vor allem im Anfangsunterricht, oft Bruchzahlen kleiner 1 vorkommen und Bruchzahlen allgemein somit sehr schnell als Zahlen kleiner 1 abgespeichert werden könnten. Die Lösungsquote von ungefähr 36% kommt den 33%, welche Susanne Prediger mit einer beinahe identen Fragestellung erreichte, sehr nahe (Prediger, 2011, S. 75).

Im Großen und Ganzen lässt sich sagen, dass die Ergebnisse der Umfrage besser ausfielen als es ursprünglich erwartet wurde. Eine Diskussion des Gesamtergebnis sowie der Ergebnisse der folgenden beiden Unterkapitel erfolgt im 6. Kapitel.

5.2 Auswertung und Analyse der Stichprobe nach Schulstufen gereiht

In diesem Unterkapitel erfolgt eine nach den Fragen des Online-Fragebogens gereihte Auswertung dieser, wobei die einzelnen Schulstufen im Fokus stehen. Dazu wurden jeweils alle Antworten einer Schulstufe zusammengezählt und gemeinsam ausgewertet. Das Ziel dieser Analyse ist ein Vergleich der Ausprägungen der Grundvorstellungen in den unterschiedlichen

Schulstufen, um einen Einblick in die Entwicklung der Vorstellungen im Unterricht mit der Zeit zu bekommen. Durch das Zusammenfassen einzelner Schulstufen konnte dabei eine ähnliche Teilnahmezahl pro Schulstufe erreicht werden, mit Ausnahme der 2. und 7. Klasse. In den 2. Klassen wurden deutlich mehr Schülerinnen und Schüler befragt, da diese noch für weitere Analysen im Abschnitt 5.3 gebraucht werden und in der 7. Klasse nahmen nur 2 Schülerinnen und Schüler an der Umfrage teil. Die Ergebnisse der letztgenannten Klasse sind somit nicht sehr repräsentativ, wurden aber im Sinne der Vollständigkeit dennoch in die Auswertung mit hinein genommen. Um die Analysen übersichtlicher zu gestalten und die 7. Klasse bei der Diskussion jeder Frage als Ausreißer zu vermeiden, wird diese Klasse aus den Analysen und Diskussionen der einzelnen Fragebogenitems in den Kapiteln 5.2.1 bis 5.2.8 ausgenommen. In Kapitel 5.2.9 erfolgt jedoch noch eine kurze Diskussion der Antworten der 7. Klasse. Die Lehrperson als Einflussvariable wurde für diese Analyse außer Acht gelassen, vor allem da die einzelnen Klassen nicht durchgängig von denselben Lehrerinnen und Lehrern unterrichtet wurden.

Es wird versucht, die Ergebnisse möglichst übersichtlich durch Grafiken und Beschreibungen darzustellen und zu diskutieren. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, wurden in den meisten Grafiken, für jene Balken, welche die richtigen Antworten darstellen, die Farbe Grün, jene, welche die gänzlich falsche Antworten darstellen, Rot und der Teil der Befragten, welcher sich nicht zu der Frage äußerte, Gelb gewählt. Eine Ausnahme bilden Diagramme von Single-Choice Fragen. Hier wurden die Farben immer derselben Reihenfolge nach vergeben, da es nicht immer eine oder nur eine richtige Antwort gibt. Der Aufbau der einzelnen Unterkapitel gleicht jenem der Abschnitte 5.1.1 bis 5.1.8, wobei dieselben Kategorien zur Zusammenfassung der Fragen verwendet wurden und diese deshalb nicht mehr erklärt werden. Für eine schnelle Orientierung und um ein Zurückblättern zum Nachlesen der Fragestellung zu vermeiden, wird auch in den folgenden Abschnitten jeweils am Anfang die Fragestellung eingeblendet und darunter ein Balkendiagramm eingefügt, welches die Verteilung der Antworten auf die einzelnen Kategorien und Schulstufen darstellt.

5.2.1 Auswertung nach Schulstufen: Wocheneinkauf

Wolfgang erledigt für seine Familie den Wocheneinkauf. Auf seiner Einkaufsliste steht, dass er drei Liter Milch kaufen soll. Im Kühlregal findet er allerdings nur mehr Milchpackungen zu je einem halben Liter Milch. Wie viele Milchpackungen muss er kaufen?

Kannst du diese Fragestellung auch als Rechnung formulieren?

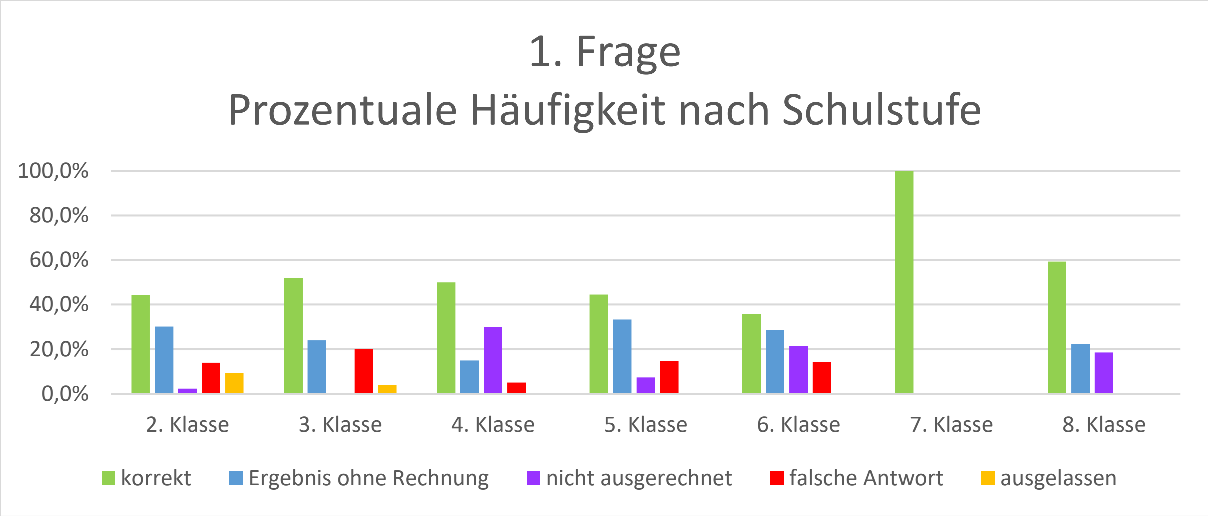


Abbildung 20: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 1

Auf den ersten Blick scheint es bei diesem Diagramm keine Regelmäßigkeiten zu geben. Geht man allerdings davon aus, dass jene Befragten, welche die Rechnung richtig angaben, aber nicht ausrechneten, ebenfalls eine passende Vorstellung anwandten, kann man die Antworten der Kategorie „korrekt“ und „nicht ausgerechnet“ zusammenzählen. Der Prozentsatz der Antworten dieser vereinten Rubrik ist beinahe ausnahmslos von der 2. bis Zur 8. Klasse monoton steigend. Die einzige Ausnahme bildet der Übergang von der 4. auf die 5. Klasse, da in der 4. Klasse eine Bestleistung von 80% richtiger Vorstellungen erreicht wurde. Dabei wurde, wie im vorigen Abschnitt angedeutet, die 7. Klasse, welche aufgrund der kleinen Stichprobe nicht sehr repräsentativ ist, außer Acht gelassen. Auffällig ist hier jedoch auch, dass die 4. Klasse gleichzeitig die höchste Quote der Antworten, welche nicht ausgerechnet wurden, besitzt. Die zweitbeste Leistung mit 77,8% und einem deutlich höherem Anteil der Kategorie „korrekt“ wurde von der 8. Klasse erreicht. Ein weiterer, interessanter Aspekt der erhaltenen Daten zeigt sich beim Betrachten der falschen Antworten. Zwar gibt es auch hier keine Regelmäßigkeiten, allerdings sticht die 8. Klasse besonders hervor, da von 27 Befragten niemand ein falsches Ergebnis angab. Beinahe 60% lösten die Aufgabe korrekt, die anderen knapp 40% verteilen sich einigermaßen gleichmäßig auf die Kategorien „Ergebnis ohne Rechnung“ und „nicht ausgerechnet“. Zuletzt kann man eine Tendenz der Kategorie „ausgelassen“ festmachen: Während in der 2. Klasse noch ungefähr 9% die Aufgabe nicht bearbeiteten, sinkt die Zahl in der 3. Klasse bereits auf 4% und in allen höheren auf 0%.

Zusammenfassend schnitten bei dieser Frage also die 4. und die 8. Klasse am besten ab, wobei die 8. Klasse ohne falsche Antworten möglicherweise sogar etwas bessere Leistungen erzielte.

Allgemein lässt sich eine leichte Tendenz feststellen, dass höhere Schulstufen bessere Ergebnisse erzielten als niedrigere Schulstufen.

5.2.2 Auswertung nach Schulstufen: Multiplikation: Bruch mit natürlicher Zahl

Was stellst du dir unter der Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$ *vor?*

Wähle das Bild aus, welches deine Vorstellung am ehesten beschreibt.

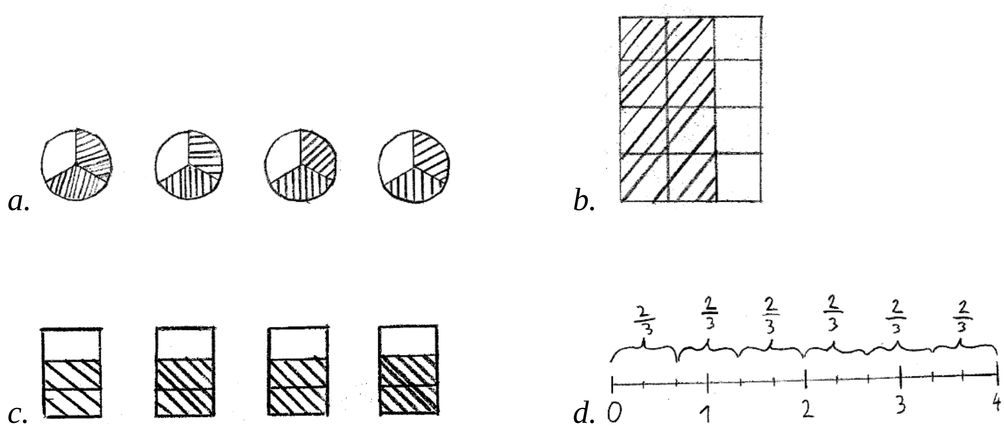


Abbildung 21: Antwortmöglichkeiten der 2. Frage (identisch mit Abbildung 1)

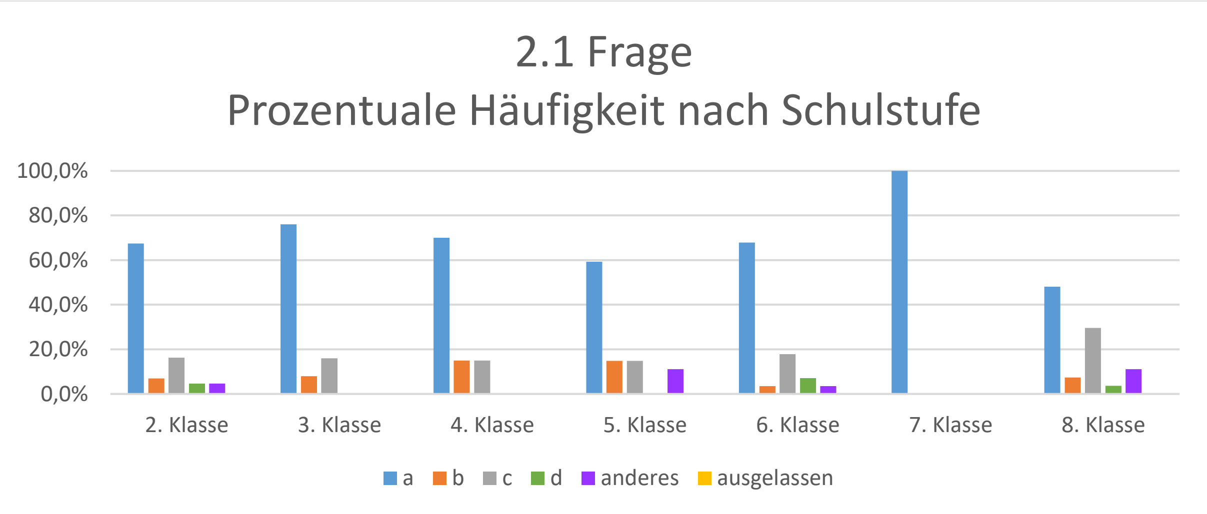


Abbildung 22: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 2.1

Beim Betrachten der Abbildung 22 sticht die Kategorie „a“ besonders stark hervor. Über alle Klassen ist dies die meistgewählte Antwortmöglichkeit, in allen außer der 8. sogar mit großem Abstand zu allen anderen Antworten. Am zweitstärksten ist ausnahmslos die zweite, korrekte Antwortmöglichkeit „c“ vertreten, wobei sie in manchen davon gleichauf mit dem Distraktor „b“ ist. Besonders hoch fiel Kategorie „c“ in der 8. Klasse aus, hier entschieden sich zirka 30%

für diesen, während in allen anderen Klassen, mit Ausnahme der 7., der Prozentsatz zwischen 15% und 18% schwankt. Warum eine Klasse so stark von den anderen abweicht, ist nur schwierig festzustellen. Eine mögliche Begründung könnte sein, dass die 8. Klasse kurz vor der Matura und somit dem Abschluss ihrer Schule steht und deshalb sich mehr mit verschiedenen Darstellungsformen von Zahlen, vor allem im Hinblick auf das Thema Statistik und Wahrscheinlichkeit, auseinandergesetzt hat. Vergleicht man zuletzt die Prozentsätze der richtigen Antworten, lässt sich kein Muster erkennen. Am besten schnitt die 3. Klasse mit 92% ab, am schlechtesten die 5. Klasse mit 74,1%, was jedoch immer noch ein sehr gutes Ergebnis darstellt.

> *Welches dieser Bilder beschreibt deiner Meinung nach nicht die Rechnung* $\frac{2}{3} \bullet 4$ *? Gib den Buchstaben des Bildes an und begründe, warum das Bild die Rechnung deiner Meinung nach nicht beschreibt.*

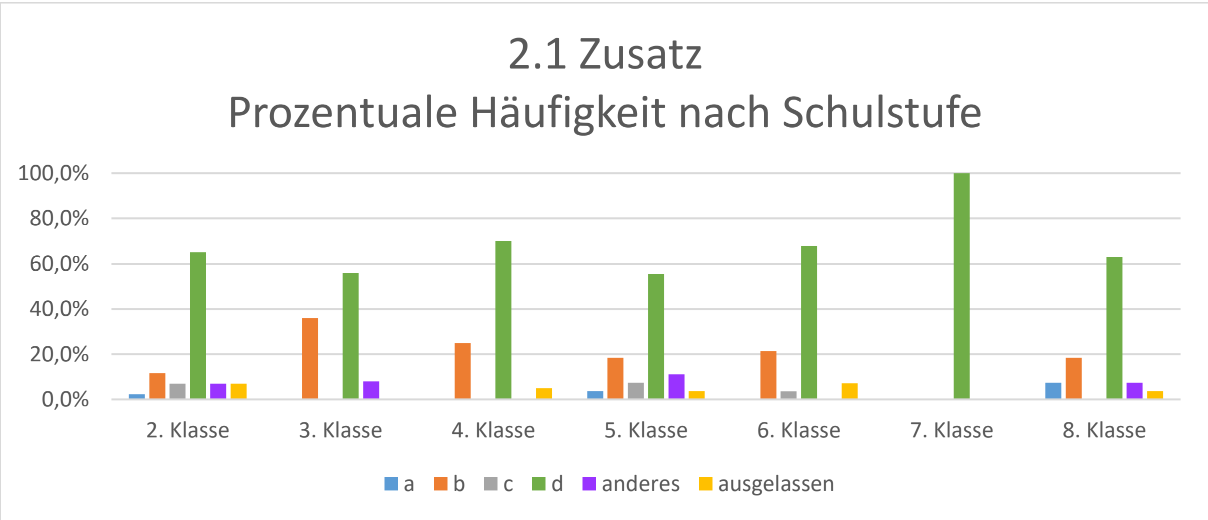


Abbildung 23: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Zusatz 2.1

Auch bei dieser Frage zeichnet sich ein ähnliches, wenn auch umgekehrtes Bild ab, da die richtigen Antworten und Distraktoren jetzt ihre Rolle geändert haben. Dieses Mal sticht die richtige Antwortmöglichkeit „d“ besonders hervor, während die ebenfalls korrekte Option „b“ in allen Klassen am zweitstärksten vertreten ist. Die Distraktoren „a“ und „c“ spielen keine nennenswerte Rolle. Vor allem die 3. und 4. Klasse schnitten mit Ergebnissen von 92% und 95% richtige Antworten aller Befragten besonders gut ab. Im Allgemeinen lässt jedoch keine Aussage zur Lösungsquote mit Blick auf die Schulstufe treffen.

Stellst du dir unter der Rechnung $4 \bullet \frac{2}{3}$ genau dasselbe wie oben vor?

Wenn nein, versuche bei der Antwortoption „Sonstiges“ deine Vorstellung für $4 \bullet \frac{2}{3}$ in Worte zu fassen.

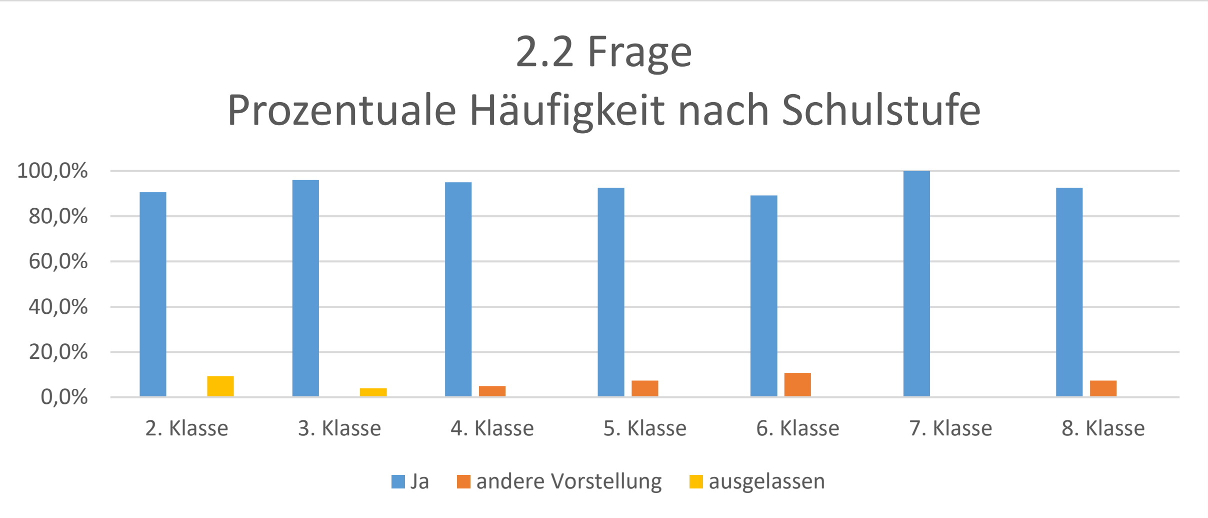


Abbildung 24: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 2.2

Die Vorstellung, dass sich die Rechnungen $\frac{2}{3} \bullet 4$ und $4 \bullet \frac{2}{3}$ unterscheiden, scheint vor allem in höheren Schulstufen vertreten zu sein. Von der 4. bis zur 6. Klasse nimmt die Anzahl der Antworten dieser Kategorie leicht zu, in der 8. Klasse finden sich gleich viele wie in der 5. Klasse. Im Allgemeinen gaben jedoch fast alle Schülerinnen und Schüler aller Klassen an, dass sie sich unter diesen beiden Rechnungen dasselbe vorstellen.

Vergleicht man nun die Teilfragen des 2. Fragebogenitems, so lässt sich nur schwierig eine Aussage über den Verlauf der Entwicklung von Grundvorstellungen über die einzelnen Schulstufen tätigen. Anhand der Bestleistungen könnte man jedoch mutmaßen, dass in diesem Fall möglicherweise die niedrigeren Schulstufen etwas besser abschnitten. Aufgrund des stark schwankenden Verlaufs sollte diese Aussage jedoch mit Vorsicht betrachtet werden.

5.2.3 Auswertung nach Schulstufen: Brüchige Schokolade

Tom findet bei sich zuhause eine Tafel Schokolade. Von dieser wurde bereits ein Drittel gegessen, es sind also nur mehr zwei Drittel übrig. Von der verbleibenden Schokolade nimmt sich Tom ein Viertel, also ein Viertel von zwei Drittel. Wie viel von der gesamten Schokolade ist das? Gib dein Ergebnis als Bruch an! Wie kommst du zu dem Ergebnis?

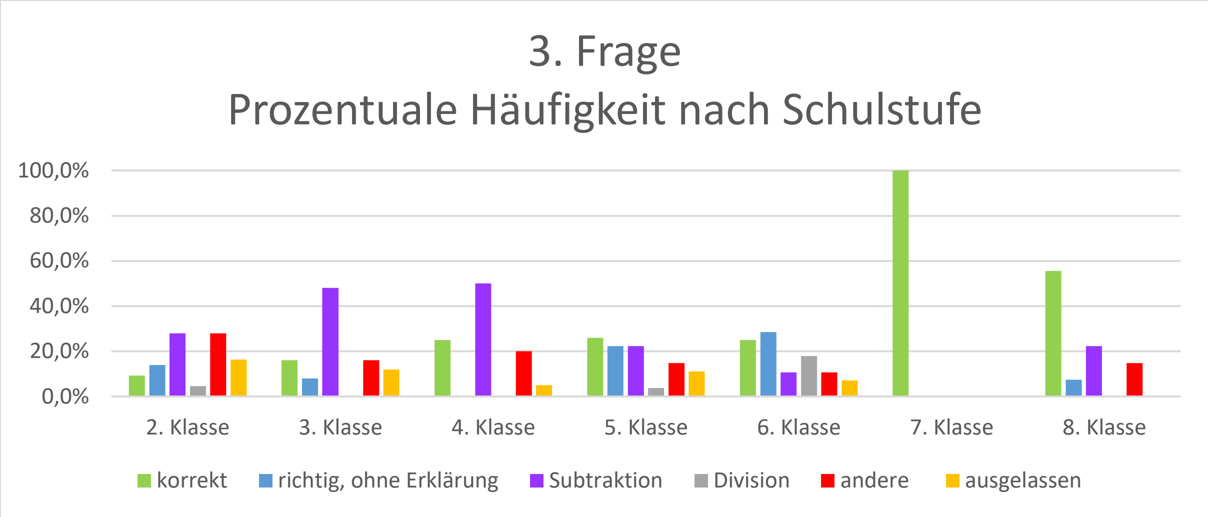


Abbildung 25: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 3

Während man bei den vorigen Fragebogenitems vergeblich nach einheitlichen Verläufen suchte, wird man hier erstmalig fündig. Die Lösungsquote ist von der 2. bis zur 8. Klasse streng monoton steigend. Die einzige Ausnahme bildet die 6. Klasse, hier fällt das Ergebnis von der 5. zur 6. um knapp 1 Prozentpunkt. Zählt man die Kategorien „korrekt“ und „richtig, aber ohne Erklärung“ zusammen, da man davon ausgeht, dass das richtige Übersetzen des Textes in die Sprache der Mathematik sowie das Lösen des Beispiels auch schon ein Anzeichen für vorhandene Grundvorstellungen ist, so ergibt sich eine streng monoton steigende Lösungsquote über alle Schulstufen. In beiden Fällen dominiert die 8. Klasse mit einem Ergebnis von 55,6% beziehungsweise 63% richtiger Antworten. Wirft man nun einen Blick auf den Einsatz der Subtraktion anstelle der Multiplikation, fallen vor allem die 3. und 4. Klasse ins Auge, in welchen 48% beziehungsweise 50% der Befragten sich für Antworten dieser Kategorie entschieden. In späteren Schulstufen senkt sich dieser Prozentsatz wieder deutlich, spielt jedoch weiterhin eine wichtige Rolle.

Es lässt sich an dieser Stelle festhalten, dass sich bei diesem Fragebogenitem, welches sich mit Anteilen von Anteilen beschäftigt, in der Stichprobe eine deutliche Tendenz zeigt, dass die Grundvorstellungen der Multiplikation von Bruchzahlen mit Bruchzahlen mit steigender Schulstufe zunehmen.

5.2.4 Auswertung nach Schulstufen: Divisionsdilemma

Julian hat bei seiner Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ *dividiert. Er kommt auf das Ergebnis 8. Als er jedoch darüber nachdenkt, wundert er sich, wie das Ergebnis größer als 2 sein kann, er* *hat ja 2 durch etwas geteilt. Hat Julian richtig gerechnet? Wenn er richtig gerechnet hat, kannst du ihm erklären, warum das so ist? Wenn er falsch gerechnet hat, wo liegt der Fehler?*

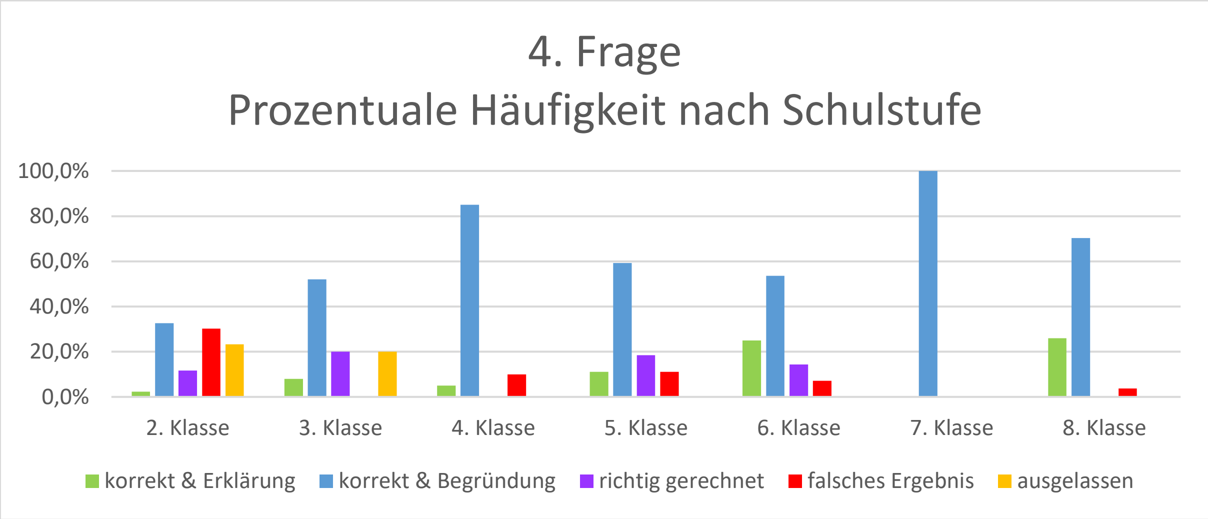


Abbildung 26: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 4

Zählt man die Kategorien „korrekt & Erklärung“ und „korrekt & Begründung“ zusammen und wertet diese gemeinsam aus, erhält man den Prozentsatz der korrekten Äußerungen. Auch hier steigt die Zahl der richtigen Antworten mit zunehmender Schulstufe monoton an, wobei die 4. Klasse mit einer Lösungsquote von 90% eine Ausnahme bildet. Ein sehr ähnlicher Trend lässt sich auch für die Kategorie „korrekt & Erklärung“ alleine, welche jene Antworten repräsentiert, welche direkt über die Grundvorstellung argumentierten, feststellen. Der Prozentsatz der Befragten, welche in diese Rubrik fallende Antworten gab, nimmt ebenfalls monoton mit steigender Schulstufe zu, wobei sich wieder eine Ausnahme finden lässt: Von der 3. auf die 4. Klasse sinkt der genannte Prozentsatz um 3 Prozentpunkte, ansonsten steigt er jedoch von jeder Klasse zur nächst Höheren. Erneut lässt sich auch bei diesem Item erkennen, dass nur in der 2. und 3. Klasse die Frage von manchen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ausgelassen wurde.

Alles in allem lässt die Analyse dieses Fragebogenitems denselben Schluss wie im vorigen Abschnitt zu: Die Grundvorstellung des Messens bei der Division mit Bruchzahlen und vor allem die damit einhergehende Vorstellung, dass die Division nicht immer verkleinert, scheint in dieser Stichprobe im Allgemeinen mit steigendender Schulstufe zuzunehmen.

5.2.5 Auswertung nach Schulstufen: Der Teil vom Teil

Ein Rechteck wird folgendermaßen schraffiert (mit Strichen angemalt): $\frac{3}{4}$ *des Rechtecks mit schwarzen Strichen von links unten nach rechts oben (///). Dann* $\frac{2}{3}$ *von den schwarz schraffierten* $\frac{3}{4}$ *mit roten Strichen von links oben nach rechts unten (\\\\\\). Wähle jenes Rechteck aus, welches nach dieser Anleitung schraffiert wurde.*

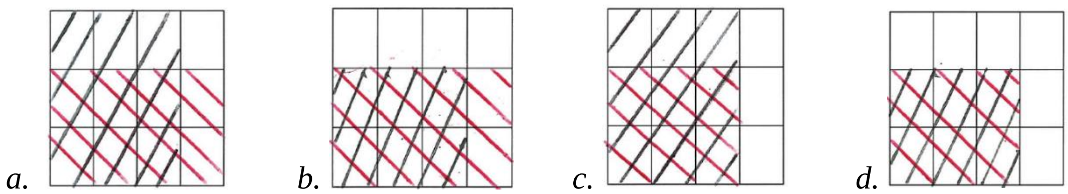


Abbildung 27: Antwortmöglichkeiten der 5. Frage (identisch mit Abbildung 2)

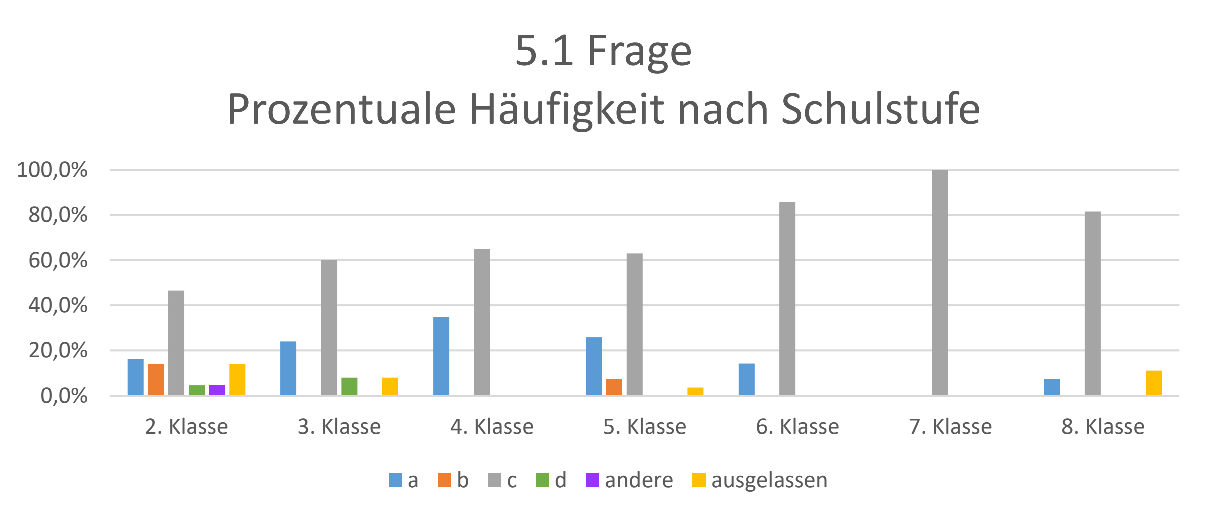


Abbildung 28: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 5.1

Fokussiert man zuerst nur die richtige Auswahlmöglichkeit „c", fällt auf, dass der Verlauf von Klasse zu Klasse zwar etwas schwankt, dass im Allgemeinen die Lösungsquote in den höheren Schulstufen jedoch deutlich besser ausfällt. Höchstleistungen erbringen dabei die 6. Klasse mit fast 86% und die 8. Klasse mit ungefähr 82%. Außerdem kann beobachtet werden, dass die Wahl der anderen Distraktoren sich mit zunehmender Schulstufe immer mehr auf die Antwortmöglichkeit „a" beschränkt, welche $\frac{3}{4}$ vom Ganzen und $\frac{2}{3}$ vom Ganzen darstellt. Dies deutet an, dass die Repräsentation der beiden Bruchzahlen in Bezug auf ein Ganzes, in diesem Fall die ganze Schokolade, vermutlich bereits vorhanden ist, dass der gedankliche Vorgang des Bildens eines Anteils eines Anteils jedoch noch Schwierigkeiten zu verursachen scheint.

Welcher Teil des Quadrats ist jetzt doppelt schraffiert? Gib diesen Anteil als Bruch an!

Gib auch die Rechnung, welche den Vorgang des oben beschriebenen zweimaligen Schraffierens beschreibt, mit Bruchzahlen an!

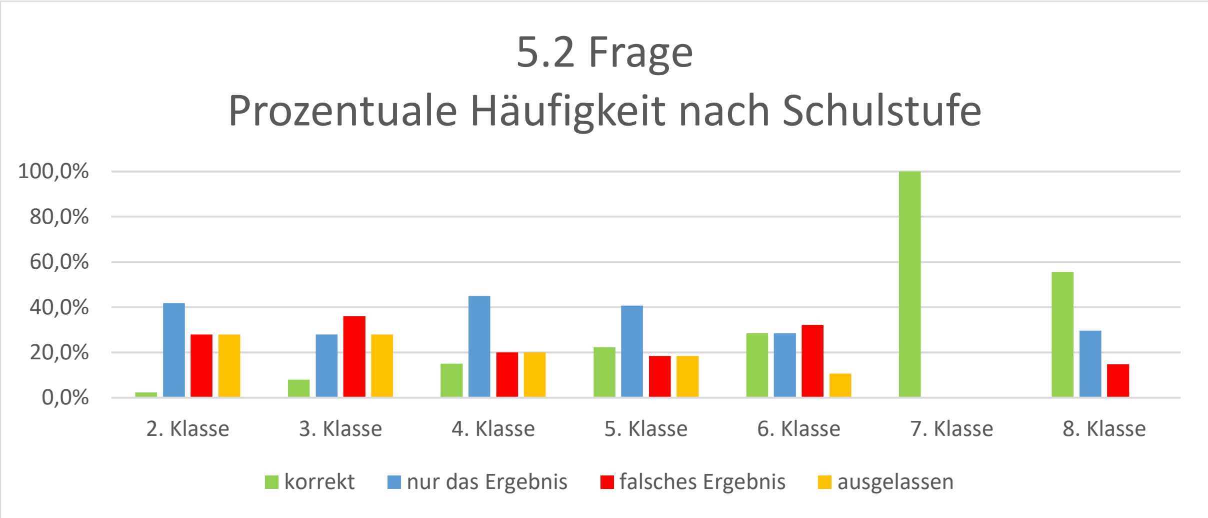


Abbildung 29: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 5.2

Betrachtet man nun, verglichen mit der Analyse der vorigen Teilfrage, wie viele der Befragten nun auch das Ergebnis mit einer passenden Rechnung angeben können, wird eine deutliche Tendenz sichtbar: Je weiter fortgeschritten die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht waren, desto besser konnten sie diese Aufgabe vollständig lösen. Zusätzlich bekräftigt wird dieses Ergebnis noch beim Betrachten der Kategorie „ausgelassen“, da vor allem in den niedrigeren Klassen oft keine Antwort angegeben wurde. Wirft man einen Blick auf jene, welche das Ergebnis angeben konnten, zusätzlich zu jenen, welche die Aufgabe vollständig lösten, erkennt man auch noch eine steigende Tendenz mit zunehmender Schulstufe. Allerdings kann hier nicht mehr von einer monotonen Steigung gesprochen werden, da bei zwei Übergängen von einer zur nächsthöheren Schulstufe der relative Anteil der richtigen Ergebnisse wieder um ein paar Prozentpunkte abnimmt.

Zusammenfassend lässt sich jedoch festhalten, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Beantwortung des 5. Fragebogenitems mit steigender Schulstufe bessere Ergebnisse lieferten, was zusammen mit dem Ergebnis der Analyse des dritten Items nahe legt, dass die Grundvorstellung des Bildens von Anteilen von Anteilen und der dazugehörigen Multiplikation von Bruchzahlen in der Stichprobe mit steigender Schulstufe besser ausgeprägt wurde.

5.2.6 Auswertung nach Schulstufen: Handwerkskunst

Ein Brett ist 2 m lang. <u>Wie viele</u> Stücke mit einer Länge von $\frac{2}{3}$ m kannst du von dem Brett absägen? Gib das Ergebnis an und erkläre, wie du zu diesem gekommen bist.

***Tipp**: Du kannst die Skizze für deine Erklärung nutzen!*

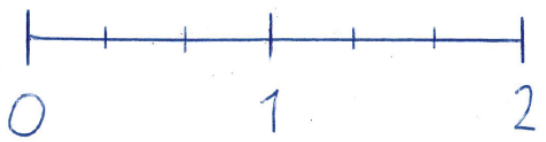


Abbildung 30: Skizze zur 6. Frage (identisch mit Abbildung 3)

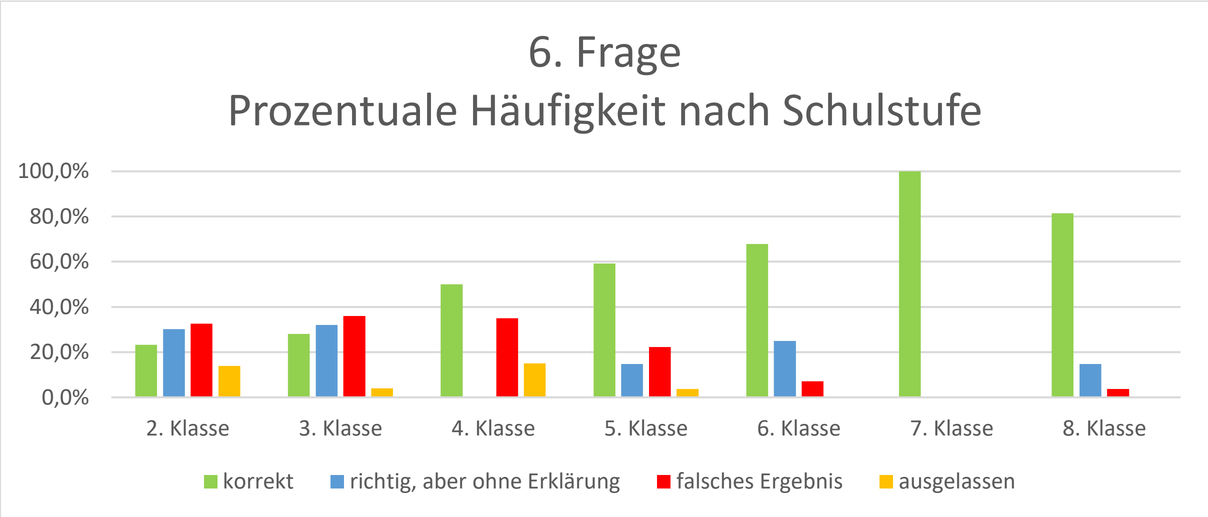


Abbildung 31: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 6

Geht man die Ergebnisse Klasse für Klasse durch, merkt man nicht nur, dass bei den niedrigeren Klassenstufen noch teilweise die falschen Antworten dominieren, während diese in der 6. und 8. Klasse beinahe gar nicht mehr vertreten sind, es kann auch ein ständiger Zuwachs an korrekten Äußerungen mit steigender Schulstufe deutlich erkannt werden. Rechnet man die Ergebnisse der Kategorien „korrekt“ und „richtig, aber ohne Erklärung“ zusammen, ergibt sich ein ähnliches, wenn auch nicht mehr so gleichmäßiges Bild: Der Prozentsatz an Antworten dieser beiden Rubriken nimmt ebenfalls mit steigender Schulstufe zu, wobei die 4. Klasse mit 50% eine Ausnahme bildet. Hier fällt das Ergebnis zwischenzeitlich von 60% herab, steigt aber in der 5. Klasse bereits wieder auf ungefähr 74% an und erreicht in der 8. Klasse ein Maximum von knapp 96%. Im Allgemeinen lässt sich kein einheitlicher Verlauf der Kategorie „ausgelassen“ bestimmen. Die 6. und 8. Klasse stechen jedoch etwas hervor, da in diesen Klassen niemand die Frage unbeantwortet ließ.

Aus den Ergebnissen dieses Fragebogenitems geht Folgendes deutlich hervor: Je höher die Schulstufe war, aus welcher die Befragten kamen, desto besser konnten sie mit dieser Fragestellung umgehen. Dies legt wiederum nahe, dass sich die Grundvorstellung des Messens, welche hier benötigt wird, in dieser Stichprobe mit steigender Schulstufe in immer mehr Schülerinnen und Schülern festigte.

5.2.7 Auswertung nach Schulstufen: Gerechtes Teilen

Nach einer Geburtstagsfeier sind noch $\frac{2}{3}$ von der Schokotorte und $\frac{3}{4}$ von der Erdbeertorte über. Anna und ihre zwei Schwestern teilen sich beide Torten gerecht auf, sodass jede ein gleich großes Stück von der Schokotorte und ein gleich großes Stück von der Erdbeertorte bekommt. Wie groß ist das Schokotortenstück, welches Anna bekommt, und wie groß ist ihr Erdbeertortenstück? Gib beide Zahlen als Bruch an!

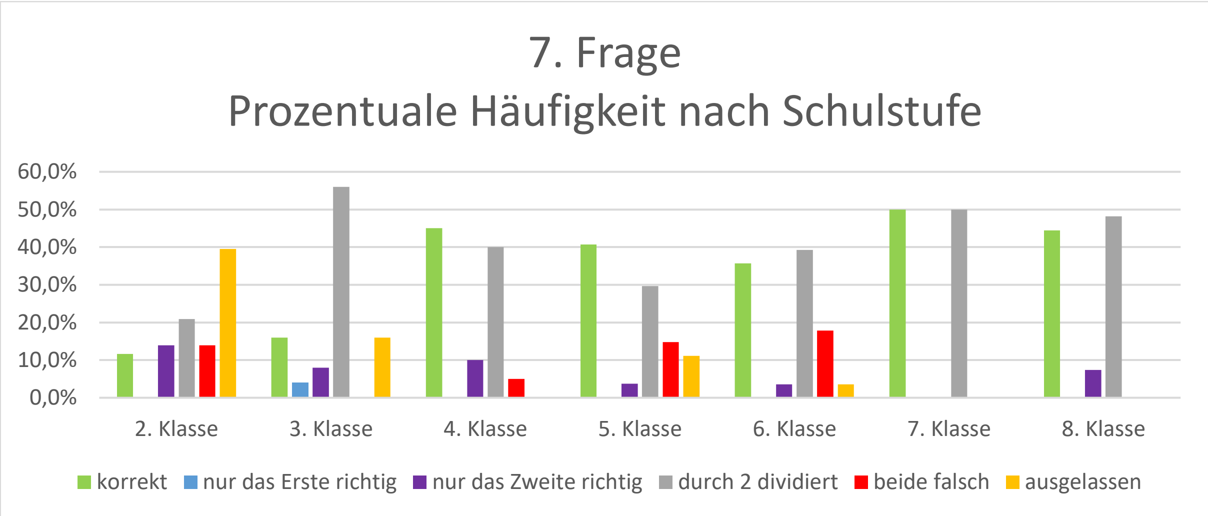


Abbildung 32: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 7

Die Auswertung der Ergebnisse der 7. Frage lässt keine Regelmäßigkeiten erkennen. Die Anzahl der korrekten Antworten ist in Klassen mit niedrigerer Schulstufe zwar kleiner, jedoch steigt und fällt sie von Klassenstufe zu Klassenstufe in unregelmäßigen Intervallen. Sieht man bei der Kategorie „durch 2 dividiert“ darüber hinweg, dass nicht durch 3 dividiert wurde und geht davon aus, dass die Befragten jener Kategorie ebenfalls korrekte Vorstellungen für diese

Aufgabenstellung besitzen, kann man diese zu der Rubrik „korrekt“ dazuzählen. Diese neue Kategorie zeigt schon ein einheitlicheres Bild: Bei der 3. Klasse mit ungefähr 33% beginnend, steigt die Zahl der akzeptierten Antworten mit zunehmender Schulstufe bis zur 8. Klasse, welche mit ungefähr 93% die beste Leistung liefert. Die einzige Ausnahme in dieser Kette stellt der Übergang von der 4. bis zur 6. Klasse dar. Während in der 4. bereits 85% der Befragten akzeptable Antworten lieferten, fällt der Prozentsatz in der 5. Klasse auf 70,4% und steigt in der nächstfolgenden Klasse erstmal wieder auf 75% an. Das Ergebnis der 4. Klasse, welches das Zweitbeste bei diesem Fragebogenitem darstellt, tanzt somit etwas aus der Reihe. Eine andere Unregelmäßigkeit, welche in der Abbildung 32 sehr schnell erkannt werden kann, stellen jene Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus der 2. Klasse dar, welche die Frage ausließen. Mit zirka 40% wird hier die mit Abstand höchste Auslassungsquote der gesamten Umfrage erreicht, obwohl die Fragestellung an eine Schulbuchaufgabe angelehnt ist und deshalb angenommen wurde, dass es sich eher um eine einfache Aufgabe handelt. Auch wenn eine Begründung dieser Tatsache im Nachhinein schwer fällt, könnte es möglicherweise mit der Länge der Online-Umfrage zusammenhängen. Vielleicht wirkte die Aufgabe, welche nach zwei verschiedenen Rechnungen fragte gegen Ende der Umfrage etwas abschreckend und führt deshalb vor allem bei den jüngeren Schülerinnen und Schüler zu einer Ausweichreaktion.

Resümierend lässt sich bei dieser Fragestellung, wenn man die Kategorien „korrekt“ und „durch 2 dividiert“ zusammenzählt, zwar ein leichter Trend festlegen, dass in höheren Schulstufen besser Ergebnisse erzielt wurden, allerdings scheinen die Ergebnisse nicht sehr aussagekräftig zu sein.

5.2.8 Auswertung nach Schulstufen: Single-Choice

Ein Kilogramm Äpfel kostet 3€. Andrea möchte $\frac{3}{4}$ *Kilo Äpfel kaufen. Wie kann sie ihren Preis berechnen?*
Wähle die richtige Antwort aus oder gib eine andere Antwort unter „Sonstiges“ an.
a.) $3+\frac{3}{4}$ *b.)* $3-\frac{3}{4}$ *c.)* $3 \bullet \frac{3}{4}$ *d.)* $3 : \frac{3}{4}$

Sonstiges:

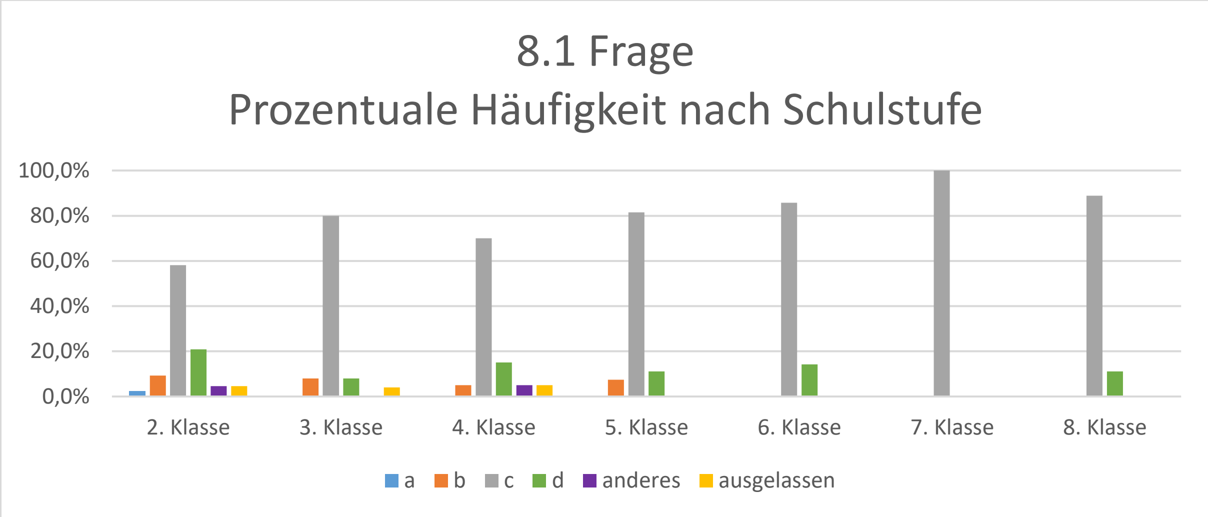


Abbildung 33: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 8.1

Aus Abbildung 33 geht bereits sehr schön ersichtlich hervor, dass die richtige Antwortmöglichkeit „c“ auch in allen Klassen die dominierende Kategorie darstellt. Mit Ausnahme der 3. Klasse, welche ein sehr hohes Ergebnis von 80% erreichte, steigt der Prozentsatz der richtigen Antworten mit steigender Schulstufe konstant an und erreicht bei der 8. Klasse den bei dieser Frage höchsten Wert von 89%. Zusätzlich lässt sich erkennen, dass alle anderen Kategorien, mit Ausnahme von „d“, mit steigender Schulstufe eine immer kleinere Rolle spielen und ab der 5. beziehungsweise 6. Klasse vollständig verschwinden. Rubrik „d“ ist zwar noch etwas häufiger als die anderen Distraktoren vertreten, beschränkt sich aber auf einen Bereich von 8%, erzielt in der 3. Klasse, bis 21%, erzielt in der 2. Klasse, der Befragten. Diese beiden Werte zeigen auch schon, dass sich bei dieser Auswahlmöglichkeit kein Muster über die einzelnen Klassen und Schulstufen feststellen lässt.

Lukas baut für seine kleine Schwester ein Puppenhaus. Eine Wand des Puppenhauses soll $\frac{3}{5}$ m breit werden. Die Wand wird aus $\frac{1}{10}$ m breiten (senkrecht stehenden) Holzbrettern gebaut. Wie muss Lukas rechnen, um zu bestimmen, wie viele Holzbretter er nebeneinander für diese Wand braucht?

a.) $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$ *b.)* $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$ *c.)* $\frac{3}{5}\bullet\frac{1}{10}$ *d.)* $\frac{3}{5}:\frac{1}{10}$

Sonstiges:

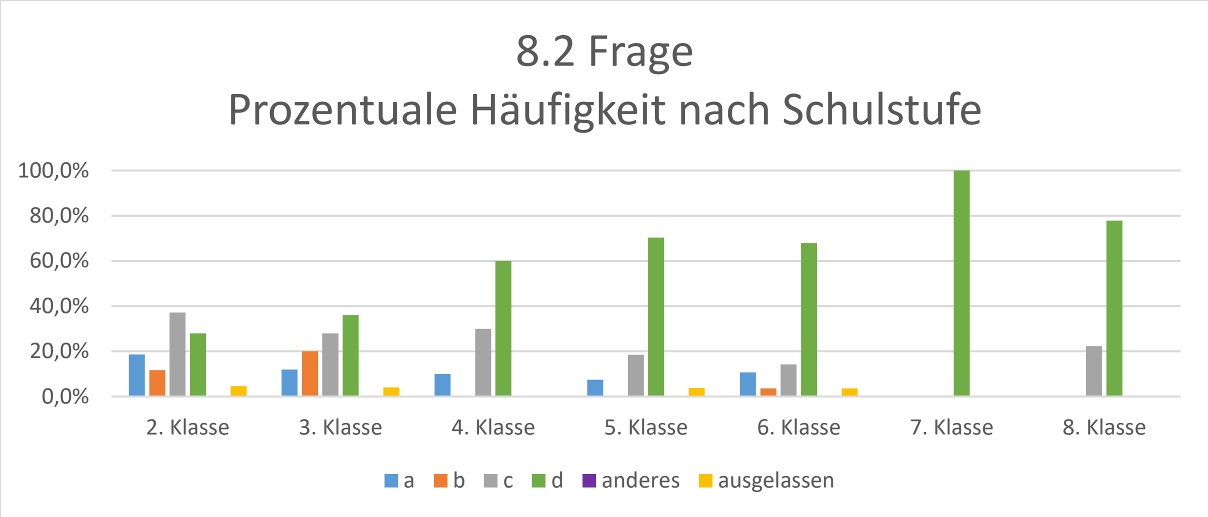


Abbildung 34: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 8.2

Auch bei dieser Fragestellung lässt sich die Tendenz, dass der Prozentsatz der richtigen Antworten mit steigender Schulstufe zunimmt, im Allgemeinen erkennen. Wie bei der vorigen Teilfrage fällt auch hier eine Klasse, die 5., aus der Reihe und erzielte mit ungefähr 70% ein etwas besseres Ergebnis als die nächst höhere Klasse. Die Verteilung der Antworten auf die richtigen Antwortmöglichkeit und die Distraktoren ist innerhalb der einzelnen Schulstufen jedoch im Vergleich zu 8.1 nicht mehr einheitlich. In der 2. Klasse entschieden sich beispielsweise mit 37% der Befragten mehr für den Distraktor „c“ als für die richtige Antwortmöglichkeit „d“, welche von nur knapp 28% gewählt wurde. Wie bei der vorigen Teilfrage sind andere Kategorien als „c“ und „d“ vor allem in den unteren Schulstufen vertreten, wobei sie hier etwas stärker ausfielen als bei der ersten Teilfrage. Vor allem in der 2. und 3. Klasse scheint eine Unsicherheit bei der korrekten Übersetzung der Aufgabenstellung verstärkt aufzutreten.

Welche dieser Antwortmöglichkeiten ist korrekt?
Wenn ich zwei Bruchzahlen multipliziere, ist das Ergebnis …

a.) … immer größer als die beiden Bruchzahlen.

b.) … immer kleiner als die beiden Bruchzahlen.

c.) … manchmal größer, manchmal kleiner als die beiden Bruchzahlen, manchmal auch dazwischen.

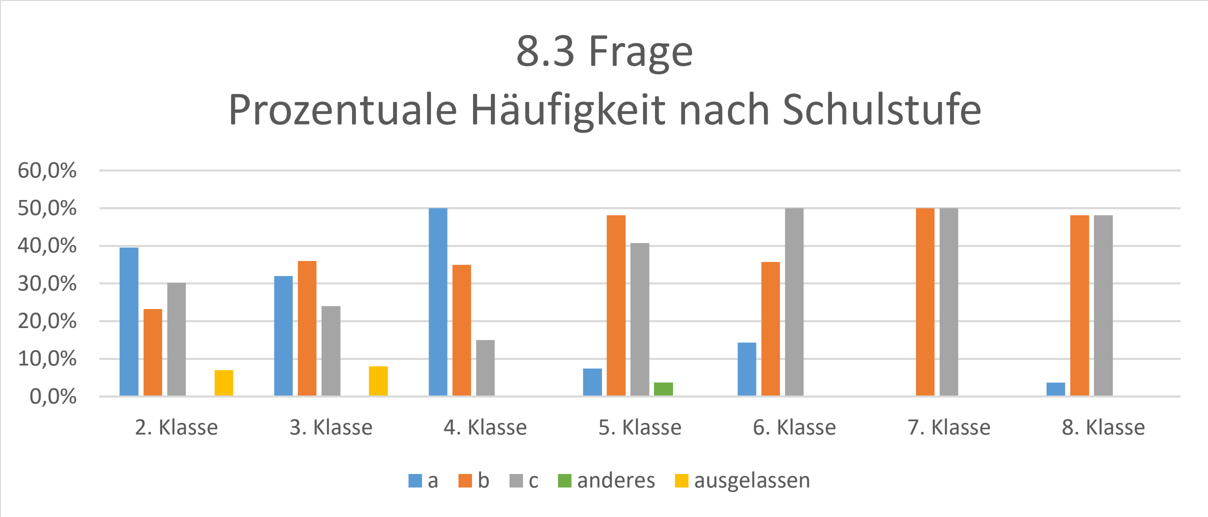


Abbildung 35: Prozentuale Häufigkeiten nach Schulstufen – Frage 8.3

Beim ersten Blick auf Abbildung 35 lässt sich kaum eine Regelmäßigkeit erkennen. Durch genauere Beobachtung fällt jedoch auf, dass Antwortmöglichkeit „a“ vor allem in der 2. bis zur 4. Klasse vertreten ist, danach jedoch sehr stark abfällt und die anderen beiden Kategorien dominieren. Es wird vermutet, dass die Vorstellung, dass Multiplizieren immer vergrößert, somit vor allem in der Oberstufe nur mehr schwach vertreten ist, diese also über die Zeit abgebaut werden konnte. Die Erkenntnis, dass auch mit Bruchzahlen größer 1 multipliziert werden kann, scheint jedoch noch etwas nachzuhinken. Zwar konnten in der 6. und 8. Klasse grob die Hälfte der Befragten die richtige Antwort auswählen, allerdings liegt die Lösungsquote beim zufälligen Wählen einer Antwortmöglichkeit von dreien bei 33%, was das Ergebnis von 50% in seiner Bedeutung etwas abschwächt.

Zusammenfassend konnte bei den ersten beiden Teilfragen, welche sich um die Übersetzung von Alltagstexten in die Sprache der Mathematik drehten, festgestellt werden, dass in der Stichprobe der relative Anteil korrekter Antworten mit steigender Schulstufe zunahm. Teilfrage 3 ergab, dass die Vorstellung, dass eine Multiplikation immer vergrößert, zwar in höheren Schulstufen nicht mehr stark vertreten war, dass jedoch in allen Klassen noch Unsicherheiten bezüglich der Größe des Ergebnisses nach einer Multiplikation mit Bruchzahlen vorherrschen.

5.2.9 Zusatz: Analyse der 7. Klasse

Betrachtet man die Ergebnisse der 2 Befragten der 7. Klasse, zeigt sich, dass beide beinahe bei allen Fragen korrekte Antworten lieferten. Die einzigen beiden Ausnahmen bilden die 7. Frage, bei welcher eine oder einer von beiden durch 2 dividierte, jedoch für diese Rechnung auf das richtige Ergebnis kam, und Frage 8.3, bei welcher die andere Person angab, dass eine Multiplikation mit Bruchzahlen immer zu einem kleineren Ergebnis führt. Abgesehen von diesen beiden Fehlern, wurde der Fragebogen jedoch von beiden Teilnehmenden richtig gelöst, was ein überdurchschnittlich gutes Ergebnis darstellt. Dass es sich hierbei um einen Zufall handelt, ist möglich, jedoch eher unwahrscheinlich. Es wird vermutet, dass jene beiden, welche sich meldeten, eher zu den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern gehörten und vermutlich auch deshalb bessere Ergebnisse lieferten. Diese Überlegung kann natürlich auch auf alle anderen Klassen, welche nicht mit annähernd voller Klassenstärke an der Umfrage teilnahmen, erweitert werden. Eine dementsprechende Analyse ist im Nachhinein jedoch nicht mehr möglich. Es bleibt an dieser Stelle noch einmal zu sagen, dass die Zahl der Antworten dieser Klasse zu niedrig für eine tiefgreifende Auswertung ist, dass die erzielten Ergebnisse im Einzelfall jedoch sehr erfreulich sind.

5.3 Vergleich der teilnehmenden 2. Klassen

Im vorigen Abschnitt erfolgte eine umfassende Analyse der Stichprobe nach den Schulstufen. Jedoch bleibt das Alter beziehungsweise die Länge der schulischen Ausbildung nicht die einzige Variable, welche sich auf die Ausbildung von Grundvorstellungen auswirkt. In der im Kapitel 2.5 vorgestellten Längsschnittstudie, welche im Zuge des Projekts PALMA entstand, wurde darauf verwiesen, dass sogar Schülerinnen und Schüler desselben Schultyps stark unterschiedliche Entwicklungsverläufe in ihren Vorstellungen während der Schulzeit aufzeigen (Pekrun, et al., 2006, S. 26-36). An diesen Aspekt wird noch kurz angeknüpft: Dieses Kapitel setzt sich mit den Unterschieden aller teilnehmenden 2. Klassen auseinander und versucht somit einen Einblick zu gewähren, ob die Schülerinnen und Schüler dieser Klassen, welche erst in diesem Jahr die Multiplikation und Division von Bruchzahlen gelernt haben, sich bereits deutlich in ihren Antworten voneinander unterscheiden oder ob sich die Entwicklung ihrer Grundvorstellungen noch auf einem sehr ähnlichem Niveau befindet. Dazu werden die korrekten Antworten aller Fragen als Datenbasis herangezogen, präsentiert und kurz beschrieben. Am Ende dieses Abschnitts erfolgt noch eine kurze Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse, welche im Kapitel 6 bei der Diskussion der Ergebnisse der gesamten Auswertung noch einmal aufgegriffen wird.

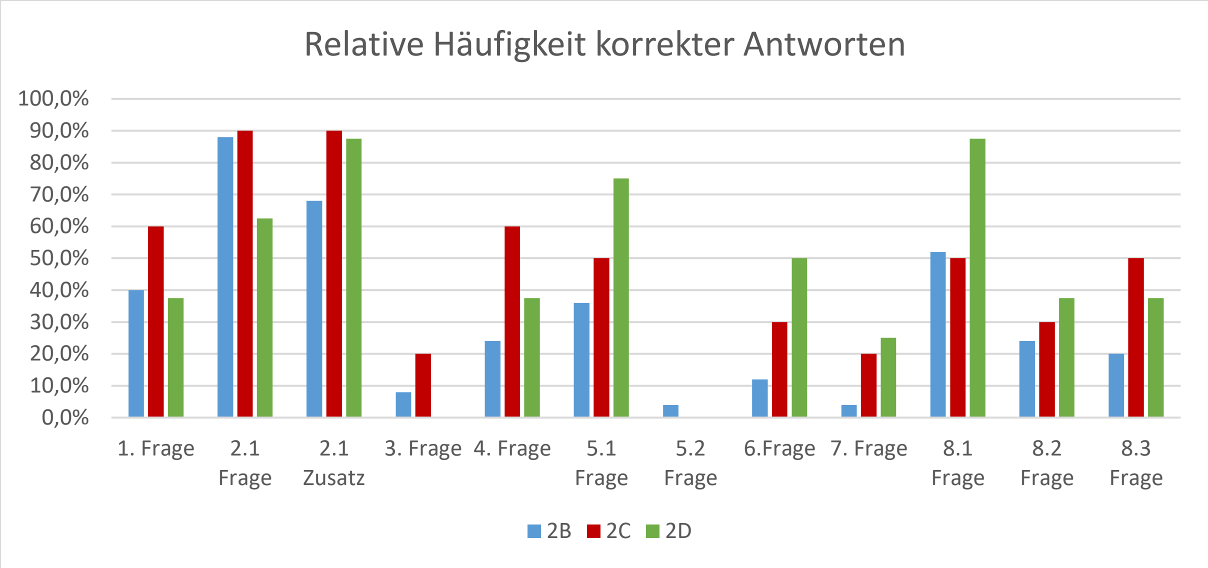


Abbildung 36: Relative Häufigkeit der korrekten Antworten aller 2. Klassen

Es wurden alle richtigen Antworten jeder teilnehmenden 2. Klasse nach den einzelnen Fragen sortiert zusammengezählt und in Abbildung 36 die relative Häufigkeit dieser in Prozent dargestellt. Frage 2.2 wurde ausgelassen, da es bei dieser keine korrekte oder falsche Antwort gab. Als „richtige Antwort“ wurden alle jene Antworten gewertet, welche sich in der Kategorie „korrekt“ oder in Rubriken, welche das Wort korrekt beinhalten, befanden. Dies bedeutet wiederum, dass beispielsweise jene Antworten, welche bei Frage 7 durch 2 anstatt durch 3 dividierten nicht als richtige Antwort gezählt wurden. Bei Single-Choice Fragen wurden ebenso alle richtigen Antworten zusammengerechnet. Die Tabelle, auf welcher Abbildung 36 fußt, befindet sich im Anhang. Für genauere Informationen kann auch noch einmal die Tabelle der Auswertung der gesamten Stichprobe zur Hand genommen werden, welche ebenfalls im Anhang zu finden ist.

Ein Blick auf die Ergebnisse der 1. Frage zeigt bereits, dass sich eine Klasse von den anderen beiden abhebt. Während sich die 2B und 2D im Bereich von 40% korrekter Antworten bewegen, erzielte die 2C eine relative Häufigkeit von 60%. Diese 20 Prozentpunkte Unterschied fallen umso mehr ins Gewicht, da der Prozentsatz der richtigen Antworten allgemein nicht sehr hoch ist. Ausgehend von den anderen beiden Klassen konnte in der 2C somit um 50% häufiger die richtige Antwort gegeben werden. Die Ergebnisse der 2. Frage zeigen jedoch bereits ein anderes Bild. Bei beiden Teilfragen konnten dieses Mal sehr hohe Lösungsquoten erzielt werden, jedoch gab es auch in beiden Fällen jeweils eine Klasse, welche sich deutlich von den anderen unterschied, dieses Mal durch eine geringere Häufigkeit an richtigen Antworten. Besonders interessant ist jedoch, dass es sich dabei nicht um dieselbe Klasse handelt, obwohl es zwei Teilfragen sind, welche miteinander im Zusammenhang stehen. Bei der ersten Teilfrage erreichte die 2D bezüglich der Lösungsquote grob gerundet 30 Prozentpunkte weniger, bei der zweiten Teilfrage die 2B knapp 20 Prozentpunkte weniger. Während sich bisher immer nur eine der drei Klassen deutlich von den anderen unterschied, erkennt man bei der 3. Frage erstmalig, dass hier alle drei Klassen unterschiedliche Ergebnisse erreichten. Mit einer relativen Häufigkeit von 20% richtiger Lösungen war der Anteil richtiger Antworten in der 2C zweieinhalb Mal so hoch wie in der 2B, während die korrekte Beantwortung in der 2D niemanden gelang. Auch bei den Ergebnissen der 4. Frage schnitt die 2C deutlich besser ab als die anderen Klassen und erreichte eine Lösungsquote von 60%. Jedoch unterscheiden sich auch die anderen beiden Klassen noch einmal untereinander. Während in der 2B 24% aller Befragten die richtige Antwort geben konnten, war der relative Anteil richtiger Antworten in der 2D mit zirka 38% ungefähr eineinhalb Mal so hoch.

An dieser Stelle wird eine kurze Zwischenbilanz gezogen: Während sich bei den ersten beiden Fragebogenitems jeweils nur eine Klasse deutlich von den anderen beiden unterschied, lieferten bei dem 3. und 4. Item alle Klassen sich voneinander abhebende Ergebnisse. Bei genauerer Betrachtung, welche mit Abbildung 36 sehr leicht fällt, kann man erkennen, dass die 2C bisher bei allen Items und allen Teilfragen die höchste Lösungsquote erzielte.

Die Beantwortung des 5. Fragebogenitems zeigt sehr interessante Ergebnisse: Bei der ersten Teilfrage erzielte die 2D mit 75% erstmalig die höchste Lösungsquote. Der Anteil richtiger Antworten war somit mehr als doppelt so hoch wie in der 2B und eineinhalb Mal so hoch wie in der 2C. Umgekehrt wurde die zweite Teilfrage jedoch ausschließlich von Schülerinnen und Schülern der 2B gelöst, wenn auch hier nur von 4% der Befragten. Die Antworten des 6. und 7. Fragebogenitems liefern ähnlich gestaffelte Lösungsquoten wie die Teilfrage 5.1. Beide Mal konnte die 2D die höchste Lösungsquote erzielen, gefolgt von der 2C und die 2B erreichte jeweils die niedrigste Quote. Bei der 6. Frage unterscheiden sich die Ergebnisse aller drei Klassen mit 50%, 30% und 12% jedoch stärker als bei der 7. mit 25%, 20% und 4%. Der Sprung der Lösungsquote der 2B mit 4% auf die nächsthöheren 20% beim 7. Item fällt jedoch besonders stark aus, da 4% ein sehr kleiner Prozentsatz ist. Der Anteil richtiger Antworten der 7. Frage war somit in der 2C fünf Mal so hoch und in der 2D sogar sechs Mal so hoch wie in der 2B. Betrachtet man die Ergebnisse der ersten Teilfrage des 8. Items sticht die 2D noch einmal besonders hervor. Mit einer Lösungsquote von ungefähr 88% liegt sie zirka 37 Prozentpunkte, was über ein Drittel aller Befragten einer Klasse darstellt, über denen der anderen beiden Klassen. Die 2B und 2C hingegen, zeigen sehr ähnlich Ergebnisse auf. Auch bei der Beantwortung der zweiten Teilfrage konnte die 2D häufiger richtige Antworten liefern, als die anderen beiden Klassen, jedoch ist der Abstand zwischen den Lösungsquoten mit ungefähr 8 Prozentpunkten zur 2C und 14 Prozentpunkten zur 2B deutlich geringer als zuvor. Zuletzt zeigen sich auch in den Ergebnissen der letzten Teilfrage deutliche Unterschiede. Dieses Mal erzielte die 2C mit 50% die höchste Lösungsquote. Während die 2D mit ungefähr 38% im Mittelfeld liegt, wurde die Frage in der 2B erneut mit der geringsten, relativen Häufigkeit von 20% gelöst.

Im Allgemeinen zeigt sich durch die Auswertung oder auch durch eine genauere Betrachtung der Abbildung 36, dass sich keine Regelmäßigkeiten bei der korrekten Beantwortung aller Fragen der 2. Klassen festlegen, dass sich jedoch einige Auffälligkeiten entdecken lassen. So gelang es der 2C in allen Teilfragen des 1. bis zum 4. Fragebogenitems und bei Frage 8.3 die höchste Lösungsquote zu erzielen, der 2B in Teilfrage 5.2 und in allen anderen Fällen der 2D. Dass die 2B damit etwas schlechter abgeschnitten zu haben scheint, deckt sich auch mit den gemittelten Lösungsquoten über alle Teilfragen: 31,7% (2B), 45,8% (2C), 44,8% (2D). Jedoch impliziert dies nicht, dass die 2B bei allen Fragen am schlechtesten abschnitt. Dies zeigen beispielsweise Teilfrage 5.3, welche ausschließlich von Schülerinnen und Schüler dieser Klasse beantwortet werden konnte oder auch Fragen wie 2.1, welche von 88% der Befragten der 2B beantwortet werden konnte, während die Lösungsquote in der 2D bei zirka 63% liegt. Zuletzt wurden auch bei den meisten Items deutliche Unterschiede zwischen den Lösungsquoten aller Klassen festgestellt.

Während das gesamte Kapitel 5 vor allem der Präsentation und Beschreibung der Ergebnisse der empirischen Untersuchung diente und deshalb nur in Einzelfällen bereits erste Interpretationen angedeutet wurden, werden im nächsten Kapitel die gewonnen Ergebnisse und Erkenntnisse im Hinblick auf die getroffenen Annahmen und letztendlich auch auf die Forschungsfrage diskutiert.

6 Diskussion der Ergebnisse

Bereits bei den Auswertungen der Ergebnisse der empirischen Untersuchung wurde ersichtlich, dass nicht alle so ausfielen, wie es durch vorangegangenen Analyse, unterstützt durch Theorie und Vergleichsstudien, prognostiziert wurde. Teilweise gab es nur kleine Abweichungen, des Öfteren jedoch auch sehr große Unterschiede. Für weitere Forschung, im Sinne eines Forschungszyklus, ist es wichtig, die gewonnenen Daten noch einmal zu sammeln und mit den vorab getroffenen Annahmen zu vergleichen, um eine bessere Einordnung der Ergebnisse in den Forschungsstand zu ermöglichen und potenzielle Abweichungen hervorzuheben. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt die Auswertungen des Kapitels 5 noch einmal herangezogen und diskutiert. Im ersten Unterkapitel werden dabei die in Abschnitt 2.5 aufgestellten, zentralen Annahmen im Fokus stehen und die Diskussion leiten, während im Kapitel 6.2 vor allem noch einmal auf die Forschungsfrage eingegangen und diese beantwortet wird.

6.1 Diskussion der zentralen Annahmen anhand der Ergebnisse

Die erste zentrale Annahme, welche auf den häufigeren Umbrüchen bei der Division von Bruchzahlen im Vergleich zur Multiplikation beruhte, besagte, dass jene Aufgaben der empirischen Untersuchung, welchen eine Division zu Grunde liegt, vermutlich weniger häufig gelöst werden als jene, welche durch eine Multiplikation von Bruchzahlen beantwortet werden können. Berechnet man aus den Ergebnissen des Abschnitts 5.1 eine allgemeine Lösungsquote aller Teilaufgaben, welche sich mit einer Multiplikation beschäftigen, erhält man knapp 56%, während jene Teilaufgaben, welche eine Division beinhalteten durchschnittlich nur von ungefähr 50% der Befragten gelöst werden konnten. Die Selektierung der dafür verwendeten Kategorien erfolgte dabei wie in Abschnitt 5.3, sodass nur jene Äußerungen verwendet wurden, welche die Aufgabe vollständig und richtig beantworteten. Ein Unterschied von 6 Prozentpunkten über die gesamte Umfrage ist nicht überragend viel, jedoch auch nicht unbeachtlich. Die Aussagekraft des Ergebnisses bleibt jedoch insofern eingeschränkt, da im Vorhinein nicht versucht wurde, andere potenzielle Einflüsse gering zu halten. Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Items, welcher im Allgemeinen nur schwierig einschätzbar ist, sowie die Anzahl der Aufgaben (7 Teilfragen zu Multiplikation, 5 zur Division) könnten das gezeigte Ergebnis möglicherweise beeinflussen. Beispielsweise schnitten die Befragten bei der Umsetzung von Multiplikationsaufgabe des Typs Bruchzahl mal Bruchzahl, welche zumindest drei der sieben Teilfragen ausmachten, deutlich schwächer ab, als bei der Aktivierung anderer Grundvorstellungen. Dies könnte beispielsweise zu einer deutlich geringeren Lösungsquote bei der Multiplikation von Bruchzahlen geführt haben, als es der Fall gewesen wäre, wenn die Teilfragen gleichmäßig auf alle Grundvorstellungen verteilt gewesen wären. Dennoch wird ein Unterschied zwischen diesen beiden Grundrechnungsarten angenommen. Dies wird auch durch einen Vergleich der Ergebnisse der Teilfragen 8.1 und 8.2 ersichtlich. Diese Aufgaben wurden absichtlich sehr ähnlich aufgebaut, wobei einmal nach einer Multiplikation und einmal nach einer Division gefragt wurde. In der Analyse der Fragestellung und beim Erläutern des Erwartungshorizonts wurden diese beiden Teilfragen auch gemeinsam diskutiert, da angenommen wurde, dass die Ergebnisse sehr ähnlich ausfallen würden. Im Gegensatz zu dieser Annahme zeigte sich jedoch, dass die Lösungsquote bei Frage 8.1, welche durch eine Multiplikation zu lösen war, nicht nur um zirka 22 Prozentpunkte höher ausfiel als bei der Aufgabe 8.2, sondern auch, dass die Antworten bei jener Frage, welche sich mit der Division beschäftigte, deutlich stärker über alle Kategorien streuten als bei der Multiplikationsaufgabe. Zusammengefasst wird die Annahme, dass ein Unterschied im Schwierigkeitsgrad bei der Multiplikation und Division von Bruchzahlen besteht, durch die Ergebnisse gestärkt, gleichzeitig sollte jedoch erwähnt werden, dass der Unterschied schwächer ausfiel als erwartet.

Da sich die zweite Annahme auf die Entwicklung der Grundvorstellungen mit der Zeit und somit auf die Forschungsfrage bezog, wird diese im Abschnitt 6.2 aufgearbeitet und hier vorerst ausgelassen. Die nächste Annahme behauptete, basierend auf den Ergebnissen der Längsschnittstudie des Forschungsprojekts PALMA, dass nicht nur deutliche Unterschiede in den Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Brüchen zwischen den Schulstufen vorliegen können, sondern auch innerhalb derselben Schulstufe (Pekrun, et al., 2006, S. 30-33). Um diese Annahme besser beurteilen zu können, wurden im Abschnitt 5.3 bereits die Ergebnisse aller drei teilnehmenden 2. Klassen analysiert und verglichen. In den Analysen wurde ersichtlich, dass es bei vielen Fragen deutlich Unterschiede zwischen den einzelnen Klassen gab und sich im Allgemeinen keine Ähnlichkeiten oder Trends über alle Fragen festlegen lassen konnten. Bei einigen Teilaufgaben traten auch besonders starke Unterschiede auf, wie im Fall der Aufgabe 5.2, welche nur von einer Klasse gelöst werden konnte oder auch bei der 7. Frage, welche von Schülerinnen und Schüler einer Klasse sechs Mal häufiger beantwortet werden konnten als von jenen einer anderen Klasse. Diese und weitere, ähnliche Ergebnisse aus Abschnitt 5.3 untermauern die Annahme, dass sich Grundvorstellungen auch innerhalb einer Schulstufe stark voneinander unterscheiden können.

Basierend auf der Aussage von Günther Malle, dass Grundvorstellungen nicht in ausreichendem Maße bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden sind, wurde die letzte Annahme getroffen, dass allgemein keine hohen Lösungsquoten zu erwarten sind (Malle, 2004b, S. 3). Wie es jedoch bereits bei einzelnen Analysen angedeutet wurde, trifft diese Annahme nicht zu. Mehr als einmal kam es bei der Auswertung der Antworten zu deutlich besseren Ergebnissen als es im Vorhinein aufgrund der Analyse der Fragestellung und dem Vergleich ähnlicher Studien erwartet wurde. Als Beispiele sind hier einige Single-Choice Fragen wie Aufgabe 2.1 mit einer Lösungsquote von 83,1%, aber auch offene Aufgaben wie das 4. Fragebogenitem, welches 68% der Befragten richtig beantworten konnten, zu nennen. Besonders überraschend war auch das Ergebnis der Frage 5.2: Eine Lösungsquote von ungefähr 22% scheint zwar kein gutes Ergebnis zu sein, ist aber im Vergleich zu den Lösungsquoten sehr ähnlicher Untersuchungen von Susanne Prediger (Prediger, 2011, S. 72-75) und Friedhelm Padberg (Padberg, 1986, S. 68-69), in welchen nur jeweils 2% beziehungsweise 1% der Befragten vergleichbare Aufgaben lösen konnten, deutlich besser ausgefallen. Wie viel dieser teilweise sehr hohen Prozentsätze darauf zurückgeht, dass ausschließlich Schülerinnen und Schüler eines Gymnasiums befragt wurden, und welche anderen Einflussfaktoren, mit Ausnahme der Schulstufe, welche im nächsten Abschnitt noch genauer thematisiert wird, an dieser Stelle möglicherweise noch mitwirken, bleibt offen. Dennoch fielen einige Ergebnisse deutlich positiver als erwartet aus, was darauf hoffen lässt, dass Grundvorstellungen heute bereits verbreiteter sind als in den Jahren der Vergleichsstudien.

6.2 Beantwortung der Forschungsfrage

Die Forschungsfrage gliedert sich in zwei Teilfragen. Einerseits wird nach dem Ausmaß der aufgebauten Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler der AHS „BG und BRG St. Pölten“ gefragt, andererseits ist auch die Entwicklung dieser im Laufe der Schulzeit von Interesse. Im vorigen Abschnitt wurde bereits deutlich, dass die Stichprobe gute Ergebnisse erzielte, was darauf rückschließen lässt, dass vermutlich viele bis alle im Kapitel 2.2 erläuterten Grundvorstellungen bei zumindest einigen der befragten Schülerinnen und Schülern vorliegen werden. Die gemittelte Lösungsquote über alle vollständig und richtig gelösten Teilfragen von 53% bestärkt diese Vermutung. Fasst man die die Fragen geordnet nach den einzelnen Grundvorstellungen zusammen, zeigen sich noch genauere Ergebnisse. Bei der Multiplikation konnten Aufgaben des Typs Bruchzahl mal natürliche Zahl beziehungsweise natürliche Zahl mal Bruchzahl, welche zusammengezählt wurden, da sie vom Großteil der Schülerinnen und Schülern laut eigener Aussage nicht unterschieden wurden, von knapp 80% der Befragten gelöst werden, während Anteil von Anteil Aufgaben, also die Multiplikation von Bruchzahlen mit Bruchzahlen, zu einer Lösungsquote von nur zirka 37% führte. Hier ist demnach ein deutlicher Unterschied zu erkennen, welcher möglicherweise darauf zurückzuführen ist, dass die „von“-Deutung der Multiplikation noch nicht so stark ausgeprägt ist und in vielen Fällen vielleicht auf die wiederholte Addition zurückgegriffen wird. Während Aufgaben wie $\frac{2}{3} \bullet 4$ noch mit Hilfe des Kommutativgesetzes in $4 \bullet \frac{2}{3}$ transformiert und als wiederholte Addition gedeutet werden können, ist dies bei Anteil von Anteil Aufgaben nicht mehr möglich. Bei der Division wiederum scheint vor allem der Aufgabentyp Bruchzahl durch natürliche Zahl mit einer Lösungsquote von ungefähr 30% Probleme bereitet zu haben, während die anderen beiden Aufgabentypen, natürliche Zahl dividiert durch Bruchzahl und Bruchzahl durch Bruchzahl, in beiden Fällen von knapp 55% der Befragten gelöst werden konnten. Diese Ergebnisse können, wie auch im Falle der Multiplikation, aufgrund unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade der Aufgaben oder möglicherweise von der Position der Fragen im Online-Fragebogen und somit der Motivation der Schülerinnen und Schüler abhängen. Sie können aber auch darauf zurückzuführen sein, dass die Vorstellung des Messens intuitiver ist, wenn der Dividend größer als der Divisor ist, wie es bei allen Fragen außer des Typs Bruchzahl durch natürliche Zahl der Fall war. Es wird somit vermutet, dass die Vorstellung des Messens zwar prinzipiell vorhanden ist, dass es jedoch noch Probleme gibt, diese in verschiedenen Kontexten anzuwenden.

Da nun geklärt ist, welche Grundvorstellungen in welchem Ausmaß auftreten, bleibt nun die Frage, wie sich diese in der weiteren Schullaufbahn entwickeln. Im Kapitel 2.5 wurde vorab anhand einiger vorgestellter Theorien und Längsschnittstudien die Annahme getroffen, dass Schülerinnen und Schüler in höheren Schulstufen besser entwickelte Vorstellungen besitzen als in niedrigeren. Diese Annahme wird durch die Analysen, welche im Kapitel 5.2 getätigt wurden, bestätigt. Bei sieben der zwölf Teilfragen (3., 4., 5.1, 5.2, 6., 8.1, 8.2; Teilfrage 2.2 wurde weggelassen, da bei dieser keine richtige oder falsche Antwort gegeben werden konnte) gab es eine deutliche Tendenz, dass in höheren Schulstufen auch häufiger richtige Antworten gegeben werden konnten als in niedrigeren und bei zwei Teilfrage (1., 7.) eine leichte Tendenz in dieselbe Richtung. Diese Ergebnisse legen nahe, dass in der Stichprobe in den höheren Schulstufen häufiger passende Grundvorstellungen vorliegen, als es in den Unterstufen der Fall ist. Es wird somit angenommen, dass zumindest in der untersuchten Schule im Allgemeinen die Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen im Laufe der Schulzeit weiter aufgebaut und vertieft werden. Dies darf jedoch nicht als immer gültige Vorhersage gesehen werden, welche auf jede Schülerin und jeden Schüler zutrifft, sondern ist eher als Durchschnitt über alle Klassen zu sehen.

Mit der Beantwortung der Forschungsfrage ist das Ziel dieser Untersuchung erreicht. Es folgt noch ein kurzes Kapitel, welches die Arbeit abrunden sowie einen weiteren Ausblick geben soll.

7 Fazit und Ausblick

Nach den Interpretationen des vorigen Kapitels wird nun angenommen, dass zumindest bei den Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums „BG und BRG Josefstraße“ die Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen in der weiteren Schullaufbahn zunehmen. Dies könnte ein zusätzlicher Faktor sein, welcher die Gesamtergebnisse der Stichprobe begünstigte und somit ebenfalls häufiger zu richtigen Antworten führte, als in den angegebenen Vergleichsstudien, welche sich vor allem mit Unterstufenklassen beschäftigten. Dennoch sind die erhaltenen Antworten deutlich besser ausgefallen als erwartet, auch in den 2. Klassen, was hoffen lässt, dass in der Schule, welche an der empirischen Untersuchung teilnahm, bereits mehr auf den Aufbau von Grundvorstellungen gesetzt wird als es in den letzten Jahren bis Jahrzehnten der Fall war. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage auf andere Schulen ist jedoch nicht möglich. Um ein genaueres Bild der gesamten Situation in Niederösterreich oder sogar ganz Österreich zu bekommen, müssten ähnliche Umfragen in verschiedenen Schulen über das ganze Land verteilt durchgeführt werden. Besonders wichtig wäre es an dieser Stelle auch, alle anderen Schultypen, und nicht nur das Gymnasium, genauer zu beforschen, da auch hier teilweise starke Differenzen vermutet werden, was zuletzt auch in der Längsschnittstudie zum Projekt PALMA für Deutschland bestätigt wurde (Pekrun, et al., 2006, S. 30-32).

Abgesehen von dem Wunsch eines landesweiten, flächendeckenden Ergebnisses kam im Laufe der Auswertung und den Analysen ein anderes Themengebiet auf, welches Anlass für weitere Forschung bietet. An mehreren Stellen wurde klar, dass die Aussagekraft erhaltener Ergebnisse nur schwierig einzuschätzen war, da meist zusätzliche Einflussfaktoren nicht ausgeschlossen werden konnten. Alleine in dieser Arbeit wurden drei nicht berücksichtigte Variablen kurz thematisiert. Wie oben beschrieben sind Unterschiede in den Vorstellungen nicht nur in verschiedenen oder sogar derselben Schulstufe zu finden, sondern vermehrt auch zwischen einzelnen Schultypen. Wie stark die Variable „Schultyp“ aber tatsächlich mitwirkt, bleibt in dieser Arbeit offen. Zweitens war es nicht möglich, die Variable der Lehrperson auszuschließen, da die meisten Klassen bereits von mehreren, verschiedenen Lehrerinnen und Lehrern unterrichtet wurden. Auch hier wäre es spannend, den Einfluss der Lehrperson konkretisieren zu können, was ein Anreiz für weitere Forschung darstellen kann. Zuletzt wurden auch noch kurz motivationale Aspekte angesprochen. Die Ergebnisse der 7. Klasse, welche besonders gut ausfielen, allerdings nur aus Antworten zweier Befragter bestanden, waren sicher nicht repräsentativ. Es stellte sich dabei allgemein die Frage, ob jene Schülerinnen und Schüler, welche freiwillig an der Umfrage teilnahmen, vielleicht zu einer Gruppe besonders engagierter Lernender zählte und ob die Vermutung, dass jene, welche weniger motiviert sind, vielleicht nicht teilnahmen, somit ebenfalls zu besseren oder zumindest verfälschten Ergebnissen führte. Natürlich sind in der fachdidaktischen Literatur noch weitere Einflussfaktoren zu finden, für diese Untersuchung wäre jedoch vor allem die Beforschung der drei genannten Variablen interessant.

Am Ende der Arbeit angekommen bleibt noch die Frage, welche Relevanz, abgesehen für die fachdidaktische Forschung, die erhaltenen Ergebnisse für Schulen allgemein oder noch genauer für Mathematiklehrerinnen und -lehrer haben. Dafür werden zwei relevante Punkte festgehalten. Durch die Auswertungen und Analysen wurde eine Art Bestandsaufnahme getätigt, welche den Ist-Zustand, zumindest an der befragten Schule, darstellt. Dies war auch eine der Hauptintentionen der Arbeit, da anhand dieser bereits erste Rückschlüsse für den (eigenen) Unterricht gezogen werden können. Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass im Allgemeinen akzeptable Lösungsquoten erhalten wurden, dass jedoch einzelne Vorstellungen noch sehr viel mehr Zuwendung bräuchten. So sollte im Unterricht die „von“-Deutung der Multiplikation noch stärker angesprochen werden, sodass Aufgaben, welche Anteile von Anteilen behandeln, von den Schülerinnen und Schülern besser verstanden und umgesetzt werden können. Genauso sollte die für die Division mit Bruchzahlen relevante Vorstellung des Messens noch deutlicher thematisiert und in verschiedene Kontexte gesetzt werden, um auch diesen Grundrechnungstyp, welcher auch bei der Bruchrechnung etwas mehr Probleme zu bereiten scheint, besser verständlich machen zu können. Die zweite Erkenntnis, welche aus dieser Arbeit gewonnen werden kann, ist, dass eine positive Entwicklung der Grundvorstellungen im Laufe der Schulzeit nicht nur theoretisch möglich, sondern auch praktisch realisierbar ist. Die Ergebnisse lassen vermuten, dass im Mathematikunterricht der befragten Klassen gelungen ist, was in der Theorie bereits besprochen wurde. Hier wird noch einmal nahe gelegt, auch in höheren Schulstufen aktiv auf die Grundvorstellungen zurückzugreifen, um diese zu festigen oder im Zweifelsfall auch (erneut) aufzubauen. Vor allem wenn der Kontext dazu Anlass bietet, wie zum Beispiel die Wahrscheinlichkeitsrechnung, können die passenden Vorstellungen auch aktiv thematisiert werden. Gerade bei besonders einfachen Rechnungen kann im Unterricht auch immer wieder einmal auf den Rechenvorgang verzichtet und das Ergebnis über Vorstellungen hergeleitet werden. Ein Beispiel wäre hier die Frage „Wie viel $\frac{1}{3}$ von 3 Viertel“, welche so in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftauchen und über die „von“-Deutung der Multiplikation und den Quasikardinalzahlaspekt der Brüche sehr einfach gelöst werden kann.

Zuletzt bleibt zu sagen, dass diese Arbeit mir neue Blickwinkel auf die Bruchrechnung gewährte sowie zu einigen Ideen zur Umsetzung der Multiplikation und Division von Bruchzahlen für den Unterricht verhalf und dass ich hoffe, dass auch zukünftige Leserinnen und Leser aus dieser etwas mitnehmen können.

8 Literaturverzeichnis

BG und BRG St. Pölten. (2021). *Laufbahnwahl*. Von BG und BRG St.Pölten: https://www.bgstpoelten.ac.at/organisation/laufbahnwahl/ abgerufen am 13.05.2021

Bruner, J. (1970). *Der Prozess der Erziehung.* Düsseldorf: Berliner-Verlag.

Goldin, G., & Passantino, C. (1996). A longitudinal study of children's fraction representations and problem-solving behavior. In L. Puig, & A. Gutiérrez, *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)* (S. 3-10). Valencia: Encuademaciones Artesanas.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Berlin: Springer Spektrum.

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe 1.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Henn, H.-W. (20. Dezember 2004). Computer-Algebra-Systeme - junger Wein oder neue Schläuche? *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*, S. 198-220.

Kadunz, G. (2020). *Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht.* Berlin: Springer Spektrum.

Lechner, J. (23. Februar 2001). *Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten.* Von Regionales Fachdidaktikzentrum Mathematik und Informatik: www.acdca.ac.at/projekt3/a303grundwissen.pdf abgerufen am 13.05.2021

Malle, G. (April 2004a). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, S. 4-8.

Malle, G. (2004b). *Grundvorstellungen im Mathematikunterricht.* Von Innovationen machen Schule Top!:https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/8/83/Langfassung_Grundbildung_Malle.pdf abgerufen am 13.05.2021

Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Der Mathematikunterricht, 32(3)*, S. 58-77.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung.* Berlin: Springer Spektrum.

Pekrun, R., Vom Hofe, R., Blum, W., Götz, T., Wartha, S., Frenzel, A., & Jullien, S. (2006). *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) : Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I.* Von KOPS - Das Institutionelle

Repositorium der Universität Konstanz: https://kops.uni-konstanz.de/bitstream/handle/123456789/13900/Pekrun_PALMA.pdf?sequence=2&isAllowed=y abgerufen am 13.05.2021

Pfeiffer, E.-M. (2012). *Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten.* Von Universität Wien: E-Theses: http://othes.univie.ac.at/18324/ abgerufen am 13.05.2021

Prediger, S. (April 2004). Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren, 123*, S. 10-13.

Prediger, S. (2006). *Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben.* Von Technische Universität Dortmund: https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/06-PM-H11-Prediger-Vorstellungen.pdf. abgerufen am 13.05.2021

Prediger, S. (08. August 2011). *Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations with Fractions.* Von International Electronic Journal of Mathematics Education: https://www.iejme.com/article/why-johnny-cant-apply-multiplication-revisiting-the-choice-of-operations-with-fractions abgerufen am 13.05.2021

Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik.* Basel: Birkhäuser.

Vohns, A. (März 2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematikdidaktik 26*, S. 52-79.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren 118*, S. 4-8.

Vom Hofe, R., Humpert, B., Griesel, H., & Postel, H. (2013). *Mathematik heute 7.* Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage (Schroedel).

Wagner, U. (2014). *Ständiges Wiederaufgreifen und Fortentwickeln des Wissens*. Von LehrerInnenfortbildung Baden-Württemberg: https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/gym/bp2004/fb3/1_grund/1_nachhalt/wiederaufgreifen.htm abgerufen am 13.05.2021

Winter, H. (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *Mathematik lehren, 123*, S. 14-18.

9 Anhang

Der Anhang unterteilt sich in zwei Abschnitte. Im ersten Teil befindet sich der Online-Fragebogen, wobei die dazugehörigen Formatierungen und der eingerechnete Platz für Antworten nicht übernommen wurden, im zweiten Abschnitt sind die durch die empirische Untersuchung gewonnen Daten, welche bereits in die einzelnen Kategorien eingeteilt wurden, in tabellierter Form dargestellt.

9.1 Der Online-Fragebogen

Fragebogen: Grundvorstellungen zum Thema Bruchzahlen

Hinweise:

- Um die **Anonymität** zu wahren, wird darum gebeten, **keinen Namen anzugeben**!
- Bitte fülle diesen Fragebogen nur aus, wenn dein/e Erziehungsberechtigte/r damit einverstanden ist!

Zum Fragebogen:

Der folgende Fragebogen enthält großteils offene Fragen, welche durch Rechnungen oder auch **durch verschriftlichte Überlegungen** zu beantworten sind. Es ist wichtig, die **Angaben genau zu lesen**, da in vielen Fällen **nicht** nach einer Rechnung gefragt wird.

Allgemein wird bei diesem Fragebogen darum gebeten, **ehrliche Antworten** zu geben. Eine fehlerhafte, aber ehrliche Antwort ist mehr wert, als eine abgeschriebene, richtige Antwort. Dieser Fragebogen wird nicht benotet und fließt auch in keine Note ein, er dient lediglich dazu, aktuelle Daten aus der Schule zu bekommen, was wiederum dazu beitragen kann, zukünftigen Unterricht zu verbessern.

Verwendung des Fragebogens:

Es erfolgt eine Auswertung aller Fragebögen, nach Klassen sortiert, welche in einer Masterarbeit weiterverwendet wird.

In dieser Umfrage kommen ausschließlich die Aufgabenformate „Single-Choice“ oder „Frage mit offener Antwort“ vor. Single-Choice bedeutet, dass du vorgegebene Antworten hast und eine davon wählen oder auch deine eigene Meinung unter „Sonstiges“ dazuschreiben kannst. Bei offenen Fragen kannst du hinschreiben, was du für richtig hältst.

Es wird auch öfter nach Bruchzahlen gefragt, schreibe diese mit einem / an.

Beispiele:

$\frac{1}{2}$ wird angeschrieben als 1/2

$\frac{3}{4}$ wird angeschrieben als 3/4

$\frac{5}{8}$ wird angeschrieben als 5/8

1.) **<u>Wocheneinkauf</u>**
Wolfgang erledigt für seine Familie den Wocheneinkauf. Auf seiner Einkaufsliste steht, dass er drei Liter Milch kaufen soll. Im Kühlregal findet er allerdings nur mehr Milchpackungen zu je einem halben Liter Milch. Wie viele Milchpackungen muss er kaufen?

Kannst du diese Fragestellung auch als Rechnung formulieren?

2.) **<u>Multiplikation: Bruch mit natürlicher Zahl</u>**
Was stellst du dir unter der Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$ vor?
Wähle das Bild aus (Kreis links unter dem Bild), welches deine Vorstellung am ehesten beschreibt.

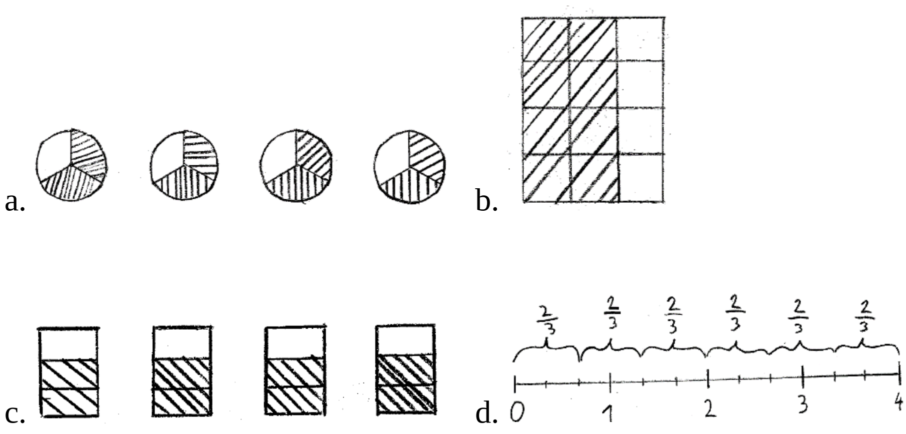


Abbildung 37: Antwortmöglichkeiten der 2. Frage (identisch mit Abbildung 1)

Welches dieser Bilder beschreibt deiner Meinung nach nicht die Rechnung $\frac{2}{3} \bullet 4$? Gib den Buchstaben des Bildes an (siehe 2.1) und begründe, warum das Bild die Rechnung deiner Meinung nach nicht beschreibt.

Stellst du dir unter der Rechnung $4 \bullet \frac{2}{3}$ genau dasselbe wie oben vor?

Wenn nein, versuche bei der Antwortoption „Sonstiges“ deine Vorstellung für $4 \bullet \frac{2}{3}$ in Worte zu fassen.

3.) Brüchige Schokolade

Tom findet bei sich zuhause eine Tafel Schokolade. Von dieser wurde bereits ein Drittel gegessen, es sind also nur mehr zwei Drittel übrig. Von der verbleibenden Schokolade nimmt sich Tom ein Viertel, also ein Viertel von zwei Drittel. Wie viel von der gesamten Schokolade ist das? Gib dein Ergebnis als Bruch an! Wie kommst du zu dem Ergebnis?

4.) Divisionsdilemma

Julian hat bei seiner Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ dividiert. Er kommt auf das Ergebnis 8. Als er jedoch darüber nachdenkt, wundert er sich, wie das Ergebnis größer als 2 sein kann, er hat ja 2 durch etwas geteilt. Hat Julian richtig gerechnet? Wenn er richtig gerechnet hat, kannst du ihm erklären, warum das so ist? Wenn er falsch gerechnet hat, wo liegt der Fehler?

5.) Der Teil vom Teil

Ein Rechteck wird folgendermaßen schraffiert (mit Strichen angemalt): $\frac{3}{4}$ des Rechtecks mit schwarzen Strichen von links unten nach rechts oben (///). Dann $\frac{2}{3}$ von den schwarz schraffierten $\frac{3}{4}$ mit roten Strichen von links oben nach rechts unten (\\\).

Wähle jenes Rechteck aus (links unter den Bildern), welches nach dieser Anleitung schraffiert wurde.

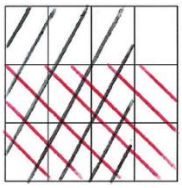
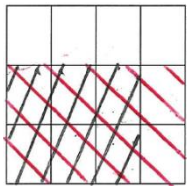
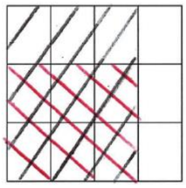
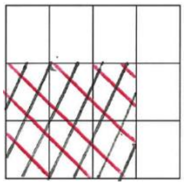
a.  b.  c.  d. 

Abbildung 38: Antwortmöglichkeiten der 5. Frage (identisch mit Abbildung 2)

Welcher Teil des Quadrats ist jetzt doppelt schraffiert? Gib diesen Anteil als Bruch an!

Gib auch die Rechnung, welche den Vorgang des oben beschriebenen zweimaligen Schraffierens beschreibt, mit Bruchzahlen an!

6.) <u>Handwerkskunst</u>

Ein Brett ist 2 m lang. <u>Wie viele</u> Stücke mit einer Länge von $\frac{2}{3}$ m kannst du von dem Brett absägen? Gib das Ergebnis an und erkläre, wie du zu diesem gekommen bist.

Tipp: Du kannst die Skizze für deine Erklärung nutzen!

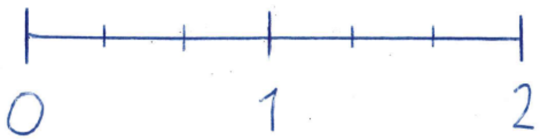


Abbildung 39: Skizze zur 6. Frage (identisch mit Abbildung 3)

7.) <u>Gerechtes Teilen</u>

Nach einer Geburtstagsfeier sind noch $\frac{2}{3}$ von der Schokotorte und $\frac{3}{4}$ von der Erdbeertorte übrig. Anna und ihre zwei Schwestern teilen sich beide Torten gerecht auf, sodass jede ein gleich großes Stück von der Schokotorte und ein gleich großes Stück von der Erdbeertorte bekommt.

Wie groß ist das Schokotortenstück, welches Anna bekommt, und wie groß ist ihr Erdbeertortenstück? Gib beide Zahlen als Bruch an!

8.) <u>Single Choice:</u>

- Ein Kilogramm Äpfel kostet 3€. Andrea möchte $\frac{3}{4}$ Kilo Äpfel kaufen. Wie kann sie ihren Preis berechnen?

  Wähle die richtige Antwort aus (Kästchen immer links unter dem Bild) oder gib eine andere Antwort unter „Sonstiges“ an.

a.) $3 + \frac{3}{4}$ b.) $3 - \frac{3}{4}$ c.) $3 \bullet \frac{3}{4}$ d.) $3 : \frac{3}{4}$

e.) auf keine dieser Möglichkeiten, sondern so: ________________________________

- Lukas baut für seine kleine Schwester ein Puppenhaus. Eine Wand des Puppenhauses soll $\frac{3}{5}$ m breit werden. Die Wand wird aus $\frac{1}{10}$ m breiten (senkrecht stehenden) Holzbrettern gebaut. Wie muss Lukas rechnen, um zu bestimmen, wie viele Holzbretter er nebeneinander für diese Wand braucht?

a.) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ b.) $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$ c.) $\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{10}$ d.) $\frac{3}{5} : \frac{1}{10}$

e.) keine dieser Möglichkeiten, sondern so: __________________________

- Welche dieser Antwortmöglichkeiten ist korrekt?
  Wenn ich zwei Bruchzahlen multipliziere, ist das Ergebnis …

a.) … immer größer als die beiden Bruchzahlen.

b.) … immer kleiner als die beiden Bruchzahlen.

c.) … manchmal größer, manchmal kleiner als die beiden Bruchzahlen, manchmal auch dazwischen.

Falls du noch Anmerkungen zum Fragebogen, zu den Fragen oder zu etwas anderem hast, kannst du diese hier gerne festhalten:

9.2 Tabellierte Ergebnisse der Auswertung der empirischen Untersuchung

Auswertung der gesamten Stichprobe

	2B	3B	4B	2C	6C	3A	4A	5A	6A	7A	8A	2D	alle Klassen
	Anzahl der Antworten												
1. Frage													
korrekt	10	8	2	6	4	5	8	12	6	2	16	3	82
Ergebnis ohne Rechnung	9	2	1	0	1	4	2	9	7	0	6	4	45
nicht ausgerechnet	0	0	2	0	1	0	4	2	5	0	5	1	20
falsche Antwort	4	3	0	2	0	2	1	4	4	0	0	0	20
ausgelassen	2	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	5
		0											
2.1 Frage		0											
a	16	13	4	9	5	6	10	16	14	2	13	4	112
b	1	0	0	0	0	2	3	4	1	0	2	2	15
c	6	1	1	0	0	3	2	4	5	0	8	1	31
d	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	5
anderes	0	0	0	1	0	0	0	3	1	0	3	1	9
ausgelassen	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.1 Zusatz													
a	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	4
b	4	4	1	1	2	5	4	5	4	0	5	0	35
c	2	0	0	1	0	0	0	2	1	0	0	0	6
d	13	8	4	8	4	6	10	15	15	2	17	7	109
anderes	2	2	0	0	0	0	0	3	0	0	2	1	10
ausgelassen	3	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	8
2.2 Frage													
Ja	23	14	5	9	5	10	14	25	20	2	25	7	159
andere Vorstellung	0	0	0	0	1	0	1	2	2	0	2	0	8
ausgelassen	2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	5

3. Frage													
korrekt	2	4	0	2	1	0	5	7	6	2	15	0	44
richtig, ohne Erklärung	2	0	0	1	1	2	0	6	7	0	2	3	24
Subtraktion	7	8	4	2	2	4	6	6	1	0	6	3	49
Division	0	0	0	0	0	0	0	1	5	0	0	2	8
andere	9	0	1	3	2	4	3	4	1	0	4	0	31
ausgelassen	5	2	0	2	0	1	1	3	2	0	0	0	16
4. Frage													
korrekt & Erklärung	0	1	0	0	2	1	1	3	5	0	7	1	21
korrekt & Begründung	6	6	5	6	4	7	12	16	11	2	19	2	96
richtig gerechnet	2	4	0	1	0	1	0	5	4	0	0	2	19
falsches Ergebnis	11	0	0	0	0	0	2	3	2	0	1	2	21
ausgelassen	6	3	0	3	0	2	0	0	0	0	0	1	15
5.1 Frage													
a	4	4	1	2	1	2	6	7	3	0	2	1	33
b	4	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	8
c	9	8	4	5	5	7	9	17	19	2	22	6	113
d	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
andere	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
ausgelassen	4	0	0	1	0	2	0	1	0	0	3	1	12
5.2 Frage													
korrekt	1	2	0	0	4	0	3	6	4	2	15	0	37
nur das Ergebnis	6	7	2	6	0	0	7	11	8	0	8	6	61
falsches Ergebnis	9	4	2	2	1	5	2	5	8	0	4	1	43
ausgelassen	9	1	1	2	1	6	3	5	2	0	0	1	31
6.Frage													
korrekt	3	5	4	3	3	2	6	16	16	2	22	4	86
richtig, aber ohne Erklärung	6	4	0	4	3	4	0	4	4	0	4	3	36
falsches Ergebnis	14	5	1	0	0	4	6	6	2	0	1	0	39
ausgelassen	2	0	0	3	0	1	3	1	0	0	0	1	11

7. Frage													
korrekt	1	2	4	2	1	2	5	11	9	1	12	2	52
nur das Erste richtig	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
nur das Zweite richtig	1	2	0	3	1	0	2	1	0	0	2	2	14
durch 2 dividiert	4	7	1	2	4	7	7	8	7	1	13	3	64
beide falsch	5	0	0	1	0	0	1	4	5	0	0	0	16
ausgelassen	14	2	0	2	0	2	0	3	1	0	0	1	25
8.1 Frage													
a	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b	3	1	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	9
c	13	12	2	5	5	8	12	22	19	2	24	7	131
d	7	1	2	2	1	1	1	3	3	0	3	0	24
anderes	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
ausgelassen	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	4
8.2 Frage													
a	8	3	0	0	1	0	2	2	2	0	0	0	18
b	4	1	0	1	0	4	0	0	1	0	0	0	11
c	6	5	2	5	1	2	4	5	3	0	6	5	44
d	6	5	3	3	4	4	9	19	15	2	21	3	94
anderes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ausgelassen	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
8.3 Frage													
a	13	4	3	3	1	4	7	2	3	0	1	1	42
b	5	5	1	1	1	4	6	13	9	1	13	4	63
c	5	5	1	5	4	1	2	11	10	1	13	3	61
anderes	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
ausgelassen	2	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	5
Anzahl der Teilnahmen	25	14	5	10	6	11	15	27	22	2	27	8	172

Tabelle 1: Absolute Häufigkeit der Antworten aller Klassen

	2B	3B	4B	2C	6C	3A	4A	5A	6A	7A	8A	2D	alle Klassen
	Prozentuale Häufigkeit der Antworten												
1. Frage													
korrekt	40,0%	57,1%	40,0%	60,0%	66,7%	45,5%	53,3%	44,4%	27,3%	100,0%	59,3%	37,5%	47,7%
Ergebnis ohne Rechnung	36,0%	14,3%	20,0%	0,0%	16,7%	36,4%	13,3%	33,3%	31,8%	0,0%	22,2%	50,0%	26,2%
nicht ausgerechnet	0,0%	0,0%	40,0%	0,0%	16,7%	0,0%	26,7%	7,4%	22,7%	0,0%	18,5%	12,5%	11,6%
falsche Antwort	16,0%	21,4%	0,0%	20,0%	0,0%	18,2%	6,7%	14,8%	18,2%	0,0%	0,0%	0,0%	11,6%
ausgelassen	8,0%	7,1%	0,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,9%
2.1 Frage													
a	64,0%	92,9%	80,0%	90,0%	83,3%	54,5%	66,7%	59,3%	63,6%	100,0%	48,1%	50,0%	65,1%
b	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	18,2%	20,0%	14,8%	4,5%	0,0%	7,4%	25,0%	8,7%
c	24,0%	7,1%	20,0%	0,0%	0,0%	27,3%	13,3%	14,8%	22,7%	0,0%	29,6%	12,5%	18,0%
d	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	4,5%	0,0%	3,7%	0,0%	2,9%
anderes	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	11,1%	4,5%	0,0%	11,1%	12,5%	5,2%
ausgelassen	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
2.1 Zusatz													
a	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	7,4%	0,0%	2,3%
b	16,0%	28,6%	20,0%	10,0%	33,3%	45,5%	26,7%	18,5%	18,2%	0,0%	18,5%	0,0%	20,3%
c	8,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,4%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%	3,5%
d	52,0%	57,1%	80,0%	80,0%	66,7%	54,5%	66,7%	55,6%	68,2%	100,0%	63,0%	87,5%	63,4%
anderes	8,0%	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	11,1%	0,0%	0,0%	7,4%	12,5%	5,8%
ausgelassen	12,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	6,7%	3,7%	9,1%	0,0%	3,7%	0,0%	4,7%
2.2 Frage													
Ja	92,0%	100,0%	100,0%	90,0%	83,3%	90,9%	93,3%	92,6%	90,9%	100,0%	92,6%	87,5%	92,4%
andere Vorstellung	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	6,7%	7,4%	9,1%	0,0%	7,4%	0,0%	4,7%
ausgelassen	8,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	2,9%

3. Frage													
korrekt	8,0%	28,6%	0,0%	20,0%	16,7%	0,0%	33,3%	25,9%	27,3%	100,0%	55,6%	0,0%	25,6%
richtig, ohne Erklärung	8,0%	0,0%	0,0%	10,0%	16,7%	18,2%	0,0%	22,2%	31,8%	0,0%	7,4%	37,5%	14,0%
Subtraktion	28,0%	57,1%	80,0%	20,0%	33,3%	36,4%	40,0%	22,2%	4,5%	0,0%	22,2%	37,5%	28,5%
Division	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	22,7%	0,0%	0,0%	25,0%	4,7%
andere	36,0%	0,0%	20,0%	30,0%	33,3%	36,4%	20,0%	14,8%	4,5%	0,0%	14,8%	0,0%	18,0%
ausgelassen	20,0%	14,3%	0,0%	20,0%	0,0%	9,1%	6,7%	11,1%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%	9,3%
4. Frage													
korrekt & Erklärung	0,0%	7,1%	0,0%	0,0%	33,3%	9,1%	6,7%	11,1%	22,7%	0,0%	25,9%	12,5%	12,2%
korrekt & Begründung	24,0%	42,9%	100,0%	60,0%	66,7%	63,6%	80,0%	59,3%	50,0%	100,0%	70,4%	25,0%	55,8%
richtig gerechnet	8,0%	28,6%	0,0%	10,0%	0,0%	9,1%	0,0%	18,5%	18,2%	0,0%	0,0%	25,0%	11,0%
falsches Ergebnis	44,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	13,3%	11,1%	9,1%	0,0%	3,7%	25,0%	12,2%
ausgelassen	24,0%	21,4%	0,0%	30,0%	0,0%	18,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	8,7%
5.1 Frage													
a	16,0%	28,6%	20,0%	20,0%	16,7%	18,2%	40,0%	25,9%	13,6%	0,0%	7,4%	12,5%	19,2%
b	16,0%	0,0%	0,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,7%
c	36,0%	57,1%	80,0%	50,0%	83,3%	63,6%	60,0%	63,0%	86,4%	100,0%	81,5%	75,0%	65,7%
d	8,0%	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,3%
andere	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,2%
ausgelassen	16,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	18,2%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	11,1%	12,5%	7,0%
5.2 Frage													
korrekt	4,0%	14,3%	0,0%	0,0%	66,7%	0,0%	20,0%	22,2%	18,2%	100,0%	55,6%	0,0%	21,5%
nur das Ergebnis	24,0%	50,0%	40,0%	60,0%	0,0%	0,0%	46,7%	40,7%	36,4%	0,0%	29,6%	75,0%	35,5%
falsches Ergebnis	36,0%	28,6%	40,0%	20,0%	16,7%	45,5%	13,3%	18,5%	36,4%	0,0%	14,8%	12,5%	25,0%
ausgelassen	36,0%	7,1%	20,0%	20,0%	16,7%	54,5%	20,0%	18,5%	9,1%	0,0%	0,0%	12,5%	18,0%
6.Frage													
korrekt	12,0%	35,7%	80,0%	30,0%	50,0%	18,2%	40,0%	59,3%	72,7%	100,0%	81,5%	50,0%	50,0%
richtig, aber ohne Erklärung	24,0%	28,6%	0,0%	40,0%	50,0%	36,4%	0,0%	14,8%	18,2%	0,0%	14,8%	37,5%	20,9%
falsches Ergebnis	56,0%	35,7%	20,0%	0,0%	0,0%	36,4%	40,0%	22,2%	9,1%	0,0%	3,7%	0,0%	22,7%
ausgelassen	8,0%	0,0%	0,0%	30,0%	0,0%	9,1%	20,0%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	6,4%

7. Frage													
korrekt	4,0%	14,3%	80,0%	20,0%	16,7%	18,2%	33,3%	40,7%	40,9%	50,0%	44,4%	25,0%	30,2%
nur das Erste richtig	0,0%	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
nur das Zweite richtig	4,0%	14,3%	0,0%	30,0%	16,7%	0,0%	13,3%	3,7%	0,0%	0,0%	7,4%	25,0%	8,1%
durch 2 dividiert	16,0%	50,0%	20,0%	20,0%	66,7%	63,6%	46,7%	29,6%	31,8%	50,0%	48,1%	37,5%	37,2%
beide falsch	20,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	6,7%	14,8%	22,7%	0,0%	0,0%	0,0%	9,3%
ausgelassen	56,0%	14,3%	0,0%	20,0%	0,0%	18,2%	0,0%	11,1%	4,5%	0,0%	0,0%	12,5%	14,5%
8.1 Frage													
a	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
b	12,0%	7,1%	20,0%	0,0%	0,0%	9,1%	0,0%	7,4%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	5,2%
c	52,0%	85,7%	40,0%	50,0%	83,3%	72,7%	80,0%	81,5%	86,4%	100,0%	88,9%	87,5%	76,2%
d	28,0%	7,1%	40,0%	20,0%	16,7%	9,1%	6,7%	11,1%	13,6%	0,0%	11,1%	0,0%	14,0%
anderes	4,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	6,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,7%
ausgelassen	4,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	9,1%	6,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,3%
8.2 Frage													
a	32,0%	21,4%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	13,3%	7,4%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%	10,5%
b	16,0%	7,1%	0,0%	10,0%	0,0%	36,4%	0,0%	0,0%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%	6,4%
c	24,0%	35,7%	40,0%	50,0%	16,7%	18,2%	26,7%	18,5%	13,6%	0,0%	22,2%	62,5%	25,6%
d	24,0%	35,7%	60,0%	30,0%	66,7%	36,4%	60,0%	70,4%	68,2%	100,0%	77,8%	37,5%	54,7%
anderes	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ausgelassen	4,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	9,1%	0,0%	3,7%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%	2,9%
8.3 Frage													
a	52,0%	28,6%	60,0%	30,0%	16,7%	36,4%	46,7%	7,4%	13,6%	0,0%	3,7%	12,5%	24,4%
b	20,0%	35,7%	20,0%	10,0%	16,7%	36,4%	40,0%	48,1%	40,9%	50,0%	48,1%	50,0%	36,6%
c	20,0%	35,7%	20,0%	50,0%	66,7%	9,1%	13,3%	40,7%	45,5%	50,0%	48,1%	37,5%	35,5%
anderes	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
ausgelassen	8,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	18,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,9%
Anzahl der Teilnahmen	25	14	5	10	6	11	15	27	22	2	27	8	172

Tabelle 2: Relative Häufigkeit der Antworten aller Klassen

Auswertung nach Schulstufe

	2. Klasse	3. Klasse	4. Klasse	5. Klasse	6. Klasse	7. Klasse	8. Klasse
	Anzahl der Antworten						
1. Frage							
korrekt	19	13	10	12	10	2	16
Ergebnis ohne Rechnung	13	6	3	9	8	0	6
nicht ausgerechnet	1	0	6	2	6	0	5
falsche Antwort	6	5	1	4	4	0	0
ausgelassen	4	1	0	0	0	0	0
2.1 Frage							
a	29	19	14	16	19	2	13
b	3	2	3	4	1	0	2
c	7	4	3	4	5	0	8
d	2	0	0	0	2	0	1
anderes	2	0	0	3	1	0	3
ausgelassen	0	0	0	0	0	0	0
2.1 Zusatz							
a	1	0	0	1	0	0	2
b	5	9	5	5	6	0	5
c	3	0	0	2	1	0	0
d	28	14	14	15	19	2	17
anderes	3	2	0	3	0	0	2
ausgelassen	3	0	1	1	2	0	1
2.2 Frage							
Ja	39	24	19	25	25	2	25
andere Vorstellung	0	0	1	2	3	0	2
ausgelassen	4	1	0	0	0	0	0

	2. Klasse	3. Klasse	4. Klasse	5. Klasse	6. Klasse	7. Klasse	8. Klasse
	Prozentuale Häufigkeit der Antworten						
1. Frage							
korrekt	44,2%	52,0%	50,0%	44,4%	35,7%	100,0%	59,3%
Ergebnis ohne Rechnung	30,2%	24,0%	15,0%	33,3%	28,6%	0,0%	22,2%
nicht ausgerechnet	2,3%	0,0%	30,0%	7,4%	21,4%	0,0%	18,5%
falsche Antwort	14,0%	20,0%	5,0%	14,8%	14,3%	0,0%	0,0%
ausgelassen	9,3%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
2.1 Frage							
a	67,4%	76,0%	70,0%	59,3%	67,9%	100,0%	48,1%
b	7,0%	8,0%	15,0%	14,8%	3,6%	0,0%	7,4%
c	16,3%	16,0%	15,0%	14,8%	17,9%	0,0%	29,6%
d	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	7,1%	0,0%	3,7%
anderes	4,7%	0,0%	0,0%	11,1%	3,6%	0,0%	11,1%
ausgelassen	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
2.1 Zusatz							
a	2,3%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	7,4%
b	11,6%	36,0%	25,0%	18,5%	21,4%	0,0%	18,5%
c	7,0%	0,0%	0,0%	7,4%	3,6%	0,0%	0,0%
d	65,1%	56,0%	70,0%	55,6%	67,9%	100,0%	63,0%
anderes	7,0%	8,0%	0,0%	11,1%	0,0%	0,0%	7,4%
ausgelassen	7,0%	0,0%	5,0%	3,7%	7,1%	0,0%	3,7%
2.2 Frage							
Ja	90,7%	96,0%	95,0%	92,6%	89,3%	100,0%	92,6%
andere Vorstellung	0,0%	0,0%	5,0%	7,4%	10,7%	0,0%	7,4%
ausgelassen	9,3%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

3. Frage							
korrekt	4	4	5	7	7	2	15
richtig, ohne Erklärung	6	2	0	6	8	0	2
Subtraktion	12	12	10	6	3	0	6
Division	2	0	0	1	5	0	0
andere	12	4	4	4	3	0	4
ausgelassen	7	3	1	3	2	0	0
4. Frage							
korrekt & Erklärung	1	2	1	3	7	0	7
korrekt & Begründung	14	13	17	16	15	2	19
richtig gerechnet	5	5	0	5	4	0	0
falsches Ergebnis	13	0	2	3	2	0	1
ausgelassen	10	5	0	0	0	0	0
5.1 Frage							
a	7	6	7	7	4	0	2
b	6	0	0	2	0	0	0
c	20	15	13	17	24	2	22
d	2	2	0	0	0	0	0
andere	2	0	0	0	0	0	0
ausgelassen	6	2	0	1	0	0	3
5.2 Frage							
korrekt	1	2	3	6	8	2	15
nur das Ergebnis	18	7	9	11	8	0	8
falsches Ergebnis	12	9	4	5	9	0	4
ausgelassen	12	7	4	5	3	0	0
6.Frage							
korrekt	10	7	10	16	19	2	22
richtig, aber ohne Erklärung	13	8	0	4	7	0	4
falsches Ergebnis	14	9	7	6	2	0	1
ausgelassen	6	1	3	1	0	0	0

3. Frage							
korrekt	9,3%	16,0%	25,0%	25,9%	25,0%	100,0%	55,6%
richtig, ohne Erklärung	14,0%	8,0%	0,0%	22,2%	28,6%	0,0%	7,4%
Subtraktion	27,9%	48,0%	50,0%	22,2%	10,7%	0,0%	22,2%
Division	4,7%	0,0%	0,0%	3,7%	17,9%	0,0%	0,0%
andere	27,9%	16,0%	20,0%	14,8%	10,7%	0,0%	14,8%
ausgelassen	16,3%	12,0%	5,0%	11,1%	7,1%	0,0%	0,0%
4. Frage							
korrekt & Erklärung	2,3%	8,0%	5,0%	11,1%	25,0%	0,0%	25,9%
korrekt & Begründung	32,6%	52,0%	85,0%	59,3%	53,6%	100,0%	70,4%
richtig gerechnet	11,6%	20,0%	0,0%	18,5%	14,3%	0,0%	0,0%
falsches Ergebnis	30,2%	0,0%	10,0%	11,1%	7,1%	0,0%	3,7%
ausgelassen	23,3%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
5.1 Frage							
a	16,3%	24,0%	35,0%	25,9%	14,3%	0,0%	7,4%
b	14,0%	0,0%	0,0%	7,4%	0,0%	0,0%	0,0%
c	46,5%	60,0%	65,0%	63,0%	85,7%	100,0%	81,5%
d	4,7%	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
andere	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ausgelassen	14,0%	8,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	11,1%
5.2 Frage							
korrekt	2,3%	8,0%	15,0%	22,2%	28,6%	100,0%	55,6%
nur das Ergebnis	41,9%	28,0%	45,0%	40,7%	28,6%	0,0%	29,6%
falsches Ergebnis	27,9%	36,0%	20,0%	18,5%	32,1%	0,0%	14,8%
ausgelassen	27,9%	28,0%	20,0%	18,5%	10,7%	0,0%	0,0%
6.Frage							
korrekt	23,3%	28,0%	50,0%	59,3%	67,9%	100,0%	81,5%
richtig, aber ohne Erklärung	30,2%	32,0%	0,0%	14,8%	25,0%	0,0%	14,8%
falsches Ergebnis	32,6%	36,0%	35,0%	22,2%	7,1%	0,0%	3,7%
ausgelassen	14,0%	4,0%	15,0%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%

7. Frage							
korrekt	5	4	9	11	10	1	12
nur das Erste richtig	0	1	0	0	0	0	0
nur das Zweite richtig	6	2	2	1	1	0	2
durch 2 dividiert	9	14	8	8	11	1	13
beide falsch	6	0	1	4	5	0	0
ausgelassen	17	4	0	3	1	0	0
8.1 Frage							
a	1	0	0	0	0	0	0
b	4	2	1	2	0	0	0
c	25	20	14	22	24	2	24
d	9	2	3	3	4	0	3
anderes	2	0	1	0	0	0	0
ausgelassen	2	1	1	0	0	0	0
8.2 Frage							
a	8	3	2	2	3	0	0
b	5	5	0	0	1	0	0
c	16	7	6	5	4	0	6
d	12	9	12	19	19	2	21
anderes	0	0	0	0	0	0	0
ausgelassen	2	1	0	1	1	0	0
8.3 Frage							
a	17	8	10	2	4	0	1
b	10	9	7	13	10	1	13
c	13	6	3	11	14	1	13
anderes	0	0	0	1	0	0	0
ausgelassen	3	2	0	0	0	0	0
Anzahl der Teilnahmen	43	25	20	27	28	2	27

7. Frage							
korrekt	11,6%	16,0%	45,0%	40,7%	35,7%	50,0%	44,4%
nur das Erste richtig	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nur das Zweite richtig	14,0%	8,0%	10,0%	3,7%	3,6%	0,0%	7,4%
durch 2 dividiert	20,9%	56,0%	40,0%	29,6%	39,3%	50,0%	48,1%
beide falsch	14,0%	0,0%	5,0%	14,8%	17,9%	0,0%	0,0%
ausgelassen	39,5%	16,0%	0,0%	11,1%	3,6%	0,0%	0,0%
8.1 Frage							
a	2,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
b	9,3%	8,0%	5,0%	7,4%	0,0%	0,0%	0,0%
c	58,1%	80,0%	70,0%	81,5%	85,7%	100,0%	88,9%
d	20,9%	8,0%	15,0%	11,1%	14,3%	0,0%	11,1%
anderes	4,7%	0,0%	5,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ausgelassen	4,7%	4,0%	5,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
8.2 Frage							
a	18,6%	12,0%	10,0%	7,4%	10,7%	0,0%	0,0%
b	11,6%	20,0%	0,0%	0,0%	3,6%	0,0%	0,0%
c	37,2%	28,0%	30,0%	18,5%	14,3%	0,0%	22,2%
d	27,9%	36,0%	60,0%	70,4%	67,9%	100,0%	77,8%
anderes	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ausgelassen	4,7%	4,0%	0,0%	3,7%	3,6%	0,0%	0,0%
8.3 Frage							
a	39,5%	32,0%	50,0%	7,4%	14,3%	0,0%	3,7%
b	23,3%	36,0%	35,0%	48,1%	35,7%	50,0%	48,1%
c	30,2%	24,0%	15,0%	40,7%	50,0%	50,0%	48,1%
anderes	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%
ausgelassen	7,0%	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Anzahl der Teilnahmen	43	25	20	27	28	2	27

Tabelle 3: Absolute und relative Häufigkeit der Antworten nach Schulstufe zusammengefasst

Auswertung der 2. Klassen			
	2B	2C	2D
	relative Häufigkeit korrekter Antworten		
1. Frage	40,0%	60,0%	37,5%
2.1 Frage	88,0%	90,0%	62,5%
2.1 Zusatz	68,0%	90,0%	87,5%
3. Frage	8,0%	20,0%	0,0%
4. Frage	24,0%	60,0%	37,5%
5.1 Frage	36,0%	50,0%	75,0%
5.2 Frage	4,0%	0,0%	0,0%
6.Frage	12,0%	30,0%	50,0%
7. Frage	4,0%	20,0%	25,0%
8.1 Frage	52,0%	50,0%	87,5%
8.2 Frage	24,0%	30,0%	37,5%
8.3 Frage	20,0%	50,0%	37,5%

Tabelle 4: Relative Häufigkeit korrekter Antworten aller 2. Klassen