MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Evaluierung der Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten der Schülerinnen und Schüler einer AHS beim Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe I“

verfasst von / submitted by

Matthias Böck, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 500 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Bewegung und Sport UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

An dieser Stelle danke ich herzlich Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger für seine umfassende und stets hilfreiche Unterstützung beim Verfassen dieser Masterarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundvorstellungen im Mathematikunterricht 1

1.1 Ein kurzer historischer Rückblick . . . 1
1.2 Begriffsdefinition „Grundvorstellung“ . . . 2
1.3 Der Unterschied zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen . . . 3
1.4 Die Bedeutung von Grundvorstellungen im Lernprozess . . . 3
1.5 Diagnose und Förderung bestehender Grundvorstellungen . . . 4
1.5.1 Grundlegende Begriffe und Prinzipien . . . 4
1.5.2 Fachlicher Inhalt als Ausgangspunkt . . . 5
1.5.3 Überprüfen von Grundvorstellungen . . . 7
1.6 Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten . . . 9
1.6.1 Grundvorstellungen zur Addition . . . 9
1.6.2 Grundvorstellungen zur Subtraktion . . . 11
1.6.3 Grundvorstellungen zur Multiplikation . . . 14
1.6.4 Grundvorstellungen zur Division . . . 17
1.7 Multiplikation und Division in unterschiedlichen Schulbüchern – ein genauerer Blick . . . 21
1.7.1 Multiplikator oder Multiplikand – 1. oder 2. Faktor? . . . 21
1.7.2 Messen und Teilen – erwähnenswert? . . . 29

2 Empirische Analyse 35

2.1 Forschungsfrage . . . 35
2.2 Methode und Design . . . 35
2.3 Erstellung des Fragebogens . . . 35
2.3.1 Welche Vorstellungen sollten nach der Primarstufe bereits ausgebildet sein? . . . 36
2.3.2 Auswahl der Fragen . . . 36
2.4 Durchführung der Untersuchung und Beschreibung der Stichprobe . . . 39
2.5 Auswertung des Fragebogens . . . 41
2.5.1 Kategoriebildung und Codierung der offenen Fragen . . . 41
2.5.2 Aufgabe 1 . . . 42
2.5.3 Aufgabe 2 . . . 44
2.5.4 Aufgabe 3 . . . 45
2.5.5 Aufgabe 4 . . . 47
2.5.6 Aufgabe 5 . . . 49
2.5.7 Aufgabe 6 . . . 50
2.5.8 Aufgabe 7 . . . 52
2.5.9 Aufgabe 8 . . . 54
2.5.10 Aufgabe 9 . . . 56
2.6 Ergebnisse . . . 57
2.6.1 Welche Grundvorstellungen der Multiplikation bzw. Division konnten anhand der Rechengeschichten ermittelt werden? . . . 57

2.6.2 Wird ein kombinatorischer Kontext als Multiplikation gedeutet? . . 61
2.6.3 Ergebnisse der Sachaufgaben zum Messen und Teilen 62
2.6.4 Welche Zählstrategien wurden bei dem Punktefeld verwendet? . . . 65
2.6.5 Wurden die Angaben von Aufgabe 7 als Messen und Teilen im geometrischen Kontext erkannt? 66
2.6.6 Wurde der kontextuelle Unterschied bei Aufgabe 8 erkannt? 68
2.6.7 Ergebnisse zur Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler . . 70
2.6.8 Kritische Betrachtung des Fragebogens 74
2.6.9 Welche Schlussfolgerungen für den Unterricht ergeben sich dadurch? 75
2.7 Zusammenfassung und Ausblick 78

Literatur **80**

Fragebogen **82**

Zusammenfassung **85**

Abstract **86**

1 Grundvorstellungen im Mathematikunterricht

Jede Schülerin und jeder Schüler baut im Laufe ihrer bzw. seiner Schullaufbahn individuelle Vorstellungen zu gewissen mathematischen Inhalten auf, und mit deren Hilfe wird versucht, Problemstellungen im Unterricht zu begegnen. Doch wie sehen diese Vorstellungen aus und tragen diese individuellen Konstrukte tatsächlich zu einem besseren Verständnis der mathematischen Beziehungen bei? Denn nicht selten werden auch so genannte „Fehlvorstellungen“ entwickelt, die es den Schülerinnen und Schülern nahezu unmöglich machen, komplexere Zusammenhänge tatsächlich zu verstehen. Welche Vorstellungen sind überhaupt gewünscht und wie können diese bei den Kindern hervorgerufen werden? Fragen, die nicht erst seit kurzem auftauchen, sondern bereits seit dem Ende des 18. Jahrhunderts intensiv bearbeitet werden. Auch in dieser Arbeit werden in den folgenden Kapiteln Antworten auf die Fragen gesucht und erläutert, was unter dem Terminus „Grundvorstellung“ zu verstehen ist.

1.1 Ein kurzer historischer Rückblick

Dass es wichtig ist, welche Vorstellung die Lernenden von den gelehrten Inhalten haben, war offensichtlich bereits Euler bewusst. In seinem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ zeigte Euler beispielsweise mögliche Vorstellungen von negativen Zahlen oder Brüchen auf, die von einem stark ausgeprägten didaktischen Gespür zeugen. Aber vor allem ab der Zeit des Johann Heinrich Pestalozzi fand im 19. Jahrhundert ein Umdenken in Bezug auf den damalig herrschenden Rechenunterricht statt, wodurch das reine Lehren von Lehrsätzen ohne nach dem Verständnis zu fragen nach und nach hinterfragt wurde. „Seit Pestalozzi wird die Genese mathematischer Begriffe zunehmend in engen Zusammenhang mit der Ausbildung von „Vorstellungen“ und „Anschauungen“ gesehen; eine Bedeutungskonstruierung mathematischer Begriffe [...] ist ohne adäquate „Vorstellungen“ nicht mehr denkbar “ (Hofe, 1995, S. 31). Mit dem Beginn des 20. Jahrhunderts gewannen die damaligen Erkenntnisse der Psychologie starken Einfluss auf die Mathematikdidaktik. Neben den Mathematikdidaktikern Kühnel und Wittmann erzielte vor allem der Psychologe Jean Piaget mit seiner Entwicklungs- bzw. Denkpsychologie einen entscheidenden Effekt auf den Mathematikunterricht des 20. Jahrhunderts. Während seine Überlegungen zwar ein psychologisches, aber kein didaktisches Modell waren, wurden anhand der gewonnen Erkenntnisse von Zeitgenossen Rückschlüsse auf konkrete Konzepte für den Unterricht gezogen. Wilhelm Oehl verwendete in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bereits den Terminus „Grundvorstellung“ und entwickelte dazu ein eigenes Modell, an welches Heinz Griesel anknüpfte. Diese „Griesel´sche Grundvorstellungsidee“, welche unabhängig von einem speziellen psychologischen Bezugssystem ist und sachlich konkrete Ausprägungen aufweist, wird zur Basis für viele zeitgenössische Didaktiker, darunter auch dem „Entwickler“ des in dieser Arbeit herangezogenen Grundvorstellungskonzepts Rudolf vom Hofe (Hofe, 1995, vgl. S. 30ff).

1.2 Begriffsdefinition „Grundvorstellung“

Wie dieser kurze historische Rückblick zeigt, ist das Thema „Grundvorstellungen“ nicht von heute auf morgen entstanden, sondern hat sich im Laufe der Geschichte entwickelt. Rudolf vom Hofe(1995) schreibt daher von einer Grundvorstellungsidee, welche sich im Zuge der Auseinandersetzung mit Praxis und Theorie herauskristallisiert hat. Grundvorstellungen sollen sozusagen zwischen mathematischen Strukturen und den Vorstellungen des Individuums „vermitteln“. Eine Unterscheidung von individuellen Schülervorstellungen und normativen Grundvorstellungen ist an dieser Stelle unbedingt erforderlich. Vom Hofe (1995) liefert folgende Definitionen für diese beiden Begriffe:

- *Die **Schülervorstellungen** geben dabei Aufschluß über die individuellen Erklärungsmodelle des Schülers, die in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind.*
- *Bei der normativ geprägten **Grundvorstellung** handelt es sich hingegen um eine didaktische Kategorie des Lehrers, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt* (Hofe, 1995, S. 123).

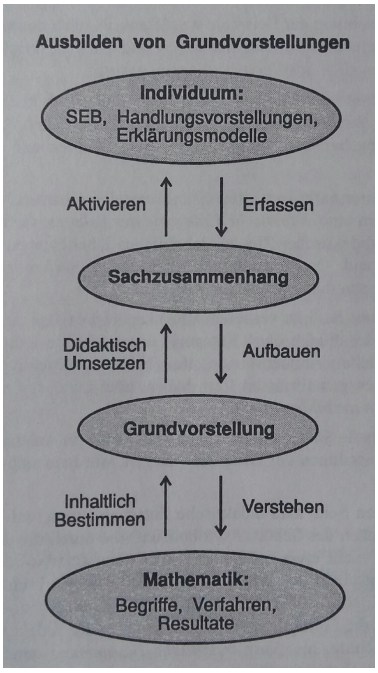


Abbildung 1: Modellhafte Skizze zum Prozess des Ausbildens von Grundvorstellungen (Hofe, 1995, S. 124)

Entscheidend ist an dieser Stelle, dass man davon ausgeht, dass sich Grundvorstellungen auch tatsächlich bei den Schülerinnen und Schülern ausbilden lassen. Das Ziel der Lehr-

person ist nach diesem Konzept, dass sich die individuellen Schülervorstellungen mit den Grundvorstellungen (zumindest großteils) decken. Wie so ein „Prozess des Verstehens “ modellhaft aussehen kann, ist in Abbildung 1 zu sehen, wobei die linke Seite didaktische Entscheidungen aufzeigt und die rechte die Schüleraktivität symbolisiert.
Die Aufgabe der Lehrperson ist zunächst die Auswahl der entsprechenden und erwünschten Grundvorstellungen auf Grundlage der mathematischen Inhalte unter Berücksichtigung der bereits gemachten Erfahrungen (subjektive Erfahrungsbereiche, kurz SEB) der Schülerinnen und Schüler. Unter Zuhilfenahme eines passenden Sachzusammenhangs soll die Grundvorstellung für die Lernenden „greifbar “ gemacht und bereits frühere Erfahrungen aktiviert werden. Langfristig können die Schülerinnen und Schüler dadurch die gewünschten Grundvorstellungen aufbauen und in ihr Repertoire von Handlungsvorstellungen integrieren. Im besten Fall führt das dazu, dass der zu Beginn von Lehrenden gewählte mathematische Begriff auch tatsächlich im Kern verstanden wird. (Hofe, 1995, vgl S.123ff)

1.3 Der Unterschied zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen

Nachdem die meisten Inhalte in der Mathematik aufeinander aufbauen, ist es im Lernprozess zunächst wichtig, sogenannte primäre Grundvorstellungen auszubilden. Vom Hofe beschreibt diese als „solche, die ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit haben“(Hofe, 2014, S. 1267). Diese Vorstellungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie einerseits bereits über einen langen Zeitraum durch unterschiedliche Erfahrungen – zum Teil auch spielerisch – entwickelt wurden und andererseits sehr häufig aktiviert werden. Beispiele hierfür sind die meisten Vorstellungen zu den Grundrechnungsarten, wie das Hinzufügen (Addition) oder das Verteilen (Division). Diese Operationen können nicht nur durch Bilder leicht veranschaulicht werden, sondern sind sogar mit entsprechenden Gegenständen realisierbar. Nicht zuletzt deshalb sind die zugrunde liegenden Vorstellungen in der Regel stark gefestigt. Werden jedoch mathematische Inhalte bearbeitet, welche mit den vorherrschenden Vorstellungen nicht mehr begriffen werden können, so müssen diese mit entsprechenden sekundären Grundvorstellungen erweitert werden. Diese knüpfen an die primären Vorstellungen an, indem zusätzliche mathematische Darstellungsmittel wie das Koordinatensystem, die Zahlengerade oder auch symbolische Darstellungen zum Einsatz kommen, um „komplexere“ Zusammenhänge deutlich zu machen. Ein Beispiel hierfür ist der Übergang von den natürlichen zu den negativen Zahlen (Hofe, 2014, vgl S. 1267ff).

1.4 Die Bedeutung von Grundvorstellungen im Lernprozess

In der Regel lässt sich ein mathematischer Zusammenhang oder Begriff nicht nur mit einer, sondern vielmehr mit mehreren unterschiedlichen Grundvorstellungen begreifen. Erst die Vernetzung der einzelnen Grundvorstellungen bildet schließlich ein *Grundverständnis* des Begriffs (Beispiele hierfür sind die unterschiedlichen Vorstellungen zu den Grundrech-

nungsarten, welche im Kapitel 1.6 erläutert werden). Im Laufe der Schulzeit werden so immer mehr Vorstellungen zu einem verflochtenen System zusammengeführt, welches im besten Fall einen Transfer zwischen den einzelnen Begriffen und Themengebieten erlaubt. Dabei handelt es sich allerdings nicht um eine starre Struktur, sondern vielmehr um ein stetig erweiterbares Netzwerk, das sich „durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle entwickelt“ (Hofe, 2003, S. 6). Bleiben bei dem Aufbau dieses Systems Verständnislücken zurück, welche beispielsweise durch die Anwendung ausschließlich auswendig gelernter Strukturen gefüllt werden, kann es in der Folge zur Entwicklung von Fehlvostellungen kommen, die das Erlernen neuer mathematischer Inhalte deutlich erschweren (Hofe, 2014, vgl. S. 1267).
Daher sind drei zentrale Aspekte bei der Ausbildung von Grundvorstellungen unbedingt zu beachten (Hofe, 2003, S. 7) :

1. *Erfassung der Bedeutung eines neuen mathematischen Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge*
2. *Aufbau entsprechender mentaler Modelle, die den Begriff auf der Vorstellungsebene repräsentieren*
3. *Anwendung des Begriffs auf neue Sachsituationen (d. h. Modellierung).*

Gelingt es unter Berücksichtigung dieser Aspekte Vorstellungen zu mathematischen Regeln, formalen Definitionen oder Verfahren aufzubauen, so können diese von den Lernenden selbständig auf ihre Glaubhaftigkeit überprüft werden, was wiederum verhindert, dass Inhalte unverstanden nach einem bestimmten, angelernten Schema bearbeitet werden (Hofe, 2003, vgl. S. 7).

1.5 Diagnose und Förderung bestehender Grundvorstellungen

In diesem Kapitel soll geklärt werden, wie die entsprechenden Grundvorstellungen bei den Heranwachsenden überhaupt überprüft werden können. Im Gegensatz zu Aufgabenstellungen zu Rechenkompetenzen, welche in der Regel relativ einfach abgefragt werden können, müssen Aufgabenbeispiele zur Abklärung von bestehenden Vorstellungen wesentlich mehr Informationen liefern. Welche unterschiedliche Möglichkeiten es hierfür gibt, wird im Folgenden aufgezeigt und im Anschluss geklärt, welche Diagnosemethoden bei der Überprüfung im Zuge dieser Arbeit Verwendung finden.

1.5.1 Grundlegende Begriffe und Prinzipien

Diagnosearbeit im Mathematikunterricht ist eine der zentralen und wichtigen Kompetenzen einer Lehrkraft. Sie dient primär dazu, den derzeitigen Lernstand der Heranwachsenden zu

erfassen, damit sich der Unterricht an dem Bedarf der Lernenden orientieren kann. „Nur wer ein realistisches Bild von dem hat, was die jeweiligen Lernenden wissen und können, kann sie adaptiv fördern “ (Abshagen et al., 2017, S. 167). Förder- und Diagnosearbeit sollten daher stets aufeinander abgestimmt sein, wobei der Fokus jeweils ein anderer ist. Eine Diagnose kann nur jene Informationen liefern, welche auch abgefragt werden und sie beschreibt damit einen Ist-Zustand. Im Gegensatz dazu wird bei der Förderung versucht, unter Zuhilfenahme entsprechender Förderinhalte und Aufgabenstellungen einen bestimmten Soll-Zustand zu erreichen. Im Zentrum der Überlegungen – sowohl bei der Diagnose, als auch bei der Förderung – soll eine bestimmte mathematische Kompetenz stehen.

1.5.2 Fachlicher Inhalt als Ausgangspunkt

Nachdem es sehr viele unterschiedliche Diagnose- und Fördermöglichkeiten gibt, können solche nur dann sinnvoll funktionieren, wenn der zu untersuchende bzw. fördernde Bereich sehr genau definiert ist. Daher soll der Blick nicht auf ein gesamtes Themengebiet gelegt werden, sondern es sollen einzelne Lernziele und Inhalte im Fokus stehen. Je genauer die zu untersuchende Kompetenz bzw. Vorstellung abgesteckt ist, desto konkreter kann diese auch überprüft werden. Welches Diagnoseinstrument dabei dann in Frage kommt, ist ein ganz entscheidender Punkt. Diagnosen werden grundsätzlich nach ihren Zeitpunkten in Lernausgangslagen-, Lernprozess-, und Lernergebnisdiagnosen eingeteilt. In Abbildung 2 sind entscheidende Planungsfragen für gezielte Diagnosen und Förderungen nach den jeweiligen Planungsphasen aufgelistet. Dabei werden in dieser Tabelle sowohl Fragen mit Blick auf die Klasse, als auch solche zu möglichen Schwierigkeiten und mathematischen Potentialen skizziert. Bei der im Zuge dieser Arbeit durchgeführten Diagnose ist man wohl am ehesten in der Phase der Lernausgangsdiagnose. Die Untersuchung soll der Frage nachgehen, welche Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten beim Übergang von der Primar- in die Sekundarstufe bereits etabliert sind. Die Schülerinnen und Schüler haben in der Primarstufe bereits Vorstellungen dazu aufgebaut, welche jedoch vor allem zu Beginn der Sekundarstufe erweitert, gefestigt, beziehungsweise neu gebildet werden. Auf Basis dieser Ergebnisse kann man dann mögliche Förderkonzepte entwickeln und im Zuge von Lernprozessdiagnosen gezielt steuern und evaluieren.
Um zu überprüfen, ob ein abgeschlossener Lernprozess tatsächlich das gewünschte Ziel erreicht hat, kommen Lernergebnisdiagnosen zum Einsatz. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, stehen hier gänzlich andere Fragen im Fokus, wodurch sich auch die Diagnoseinstrumente unterscheiden. Klassische Beispiele für Lernergebnisdiagnosen sind Hausübungen oder Schularbeiten, bei welchen das Wissen über gelernte Inhalte zu einem bestimmten Moment überprüft wird.

Planungsschritt	Mit Blick auf die Klasse	Mit Blick auf spezifische Schwierigkeiten und Potentiale von Lernenden
Spezifizierung der Inhalte von Förderung und Diagnose	• Über welche inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen sollen welche Lernenden verfügen? • Welche inhaltlichen Vorstellungen sollen aufgebaut, welche Darstellungen eingeführt werden? • Welche Begriffe, Vorgehensweisen und Verfahren sollen die Lernenden erarbeiten? • Welche typischen Schwierigkeiten werden voraussichtlich auftauchen, die berücksichtigt werden müssen? (evtl. nicht alle Fragen für jedes Thema relevant)	**Bzgl. Schwierigkeiten:** • Welche Verstehensgrundlagen sind für das Thema relevant? • Welches Lernangebot für zieldifferent unterrichtete Lernende ist thematisch passend? **Bzgl. mathematischen Potentialen:** • Welche anspruchsvollen kognitiven Aktivitäten können im selben Thema geplant werden? • Welche Möglichkeiten zur Vernetzung, Vertiefung und Erweiterung bieten sich?
Lernausgangslagendiagnose	• Über welche inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen verfügen welche Lernende bereits? • Welche intuitiven Vorerfahrungen zu inhaltlichen Vorstellungen, Begriffen, Vorgehensweisen und Verfahren lassen sich bei wem aktivieren?	**Bzgl. Schwierigkeiten:** • Welche Verstehensgrundlagen müssen im Vorfeld ausgleichend gefördert werden? • Wie lässt sich für zieldifferent Unterrichtete thematisch anschließen? **Bzgl. mathematischen Potentialen:** • Welche themenübergreifenden und spezifischen Potenziale zeigen sich bei wem, und wie können Freiräume dafür geschaffen werden?
Durchführung der Förderung / des Unterrichts und begleitende Lernprozessdiagnose	• Welche inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen zeigen die Lernenden? • Welche Vorstellungen, Vorgehensweisen, Ideen, Schwierigkeiten zeigen sich in der Klasse? Wie können diese für alle nutzbar gemacht werden?	**Bzgl. Schwierigkeiten:** • Wie können Verstehensprozesse durch weitere Materialien und Angebote unterstützt werden? Welche Aktivitäten können in den Unterricht integrierend angeboten werden? • Welche (Fehl-)Vorstellungen müssen genauer diagnostiziert werden? **Bzgl. mathematischen Potentialen:** • Welche themenübergreifenden und spezifischen Potenziale zeigen sich im Prozess, und wie lassen sie sich stärken? • Welche anspruchsvollen kognitiven Aktivitäten (z.B. problemlösende oder vernetzende) lassen sich weiter stärken?
Lernergebnisdiagnose **und Reflexion der Förderung**	• Welche inhaltlichen Vorstellungen, Begriffe, Vorgehensweisen und Verfahren haben welche Lernenden bis zu welchem Grad entwickelt? • Inwieweit wurden die (unterschiedlichen) Ziele erreicht? • Welche Schwierigkeiten und Fehler müssen noch überwunden werden? • Inwieweit wurden die Lernenden gefördert? Welche Aktivitäten erwiesen sich als besonders produktiv?	**Bzgl. Schwierigkeiten:** • Welche Verstehensgrundlagen konnten aufgebaut werden? Welche Fördermaßnahmen sollten sich anschließen? **Bzgl. mathematischen Potentialen:** • Welche Querverbindungen/Vernetzungen wurden gezogen? • Wie können die Aktivitäten wertgeschätzt werden?

Abbildung 2: Wichtige Planungsfragen für Förderung und Diagnose in unterschiedlichen Phasen (Abshagen et al., 2017, S. 168)

Der Zeitpunkt alleine ist aber noch nicht ausschlaggebend für das Format und die Qualität der Diagnose. Diese zeichnet sich durch folgende Qualitätskriterien aus (Abshagen et al., 2017, S. 177):

1. ***Diagnostische Expertise:*** *Welche Diagnoseinstrumente sollten für welchen Zweck eingesetzt werden, welche Aussagen sind im Rahmen des Instruments möglich und wie werden passende Urteile gebildet?*

2. ***Fachdidaktische Deutungsfähigkeit:*** *Welche Vorgehensweisen und Vorstellungen von Lernenden zeigen sich bei der Bearbeitung von Aufgaben?*

Um diese Fragen im Kontext dieser Arbeit beantworten zu können, wird im folgenden Kapitel erläutert, auf welche Art und Weise Grundvorstellungen überprüft werden können.

1.5.3 Überprüfen von Grundvorstellungen

Bei der Analyse von Grundvorstellungen sind grundsätzlich zwei unterschiedliche Aspekte zu beachten. Zum ersten der **normative Aspekt**, welcher im Kontext der Analyse zunächst sozusagen einen bestimmten „Rahmen“ vorgibt. Hierbei wird der Frage nachgegangen, welche Grundvorstellungen zum Lösen einer Aufgabe notwendig sind. Folglich können unter diesem Gesichtspunkt Diagnoseaufgaben erstellt werden, die auch die entsprechenden Grundvorstellungen überprüfen. Der **deskriptive Aspekt** einer Analyse beinhaltet das Untersuchen konkreter Aufgabenlösungen der Schülerinnen und Schüler. Dabei wird überprüft, welche Grundvorstellungen (oder Fehlvorstellungen) tatsächlich anhand der Lösungen nachgewiesen werden können (Kleine, 2007, vgl S. 183f). Somit sind bei der Überprüfung von Grundvorstellungen diese beiden Aspekte zu berücksichtigen. Durch eine Gegenüberstellung normativer und deskriptiver Analysen, also durch einen Vergleich der zu erwarteten und der tatsächlichen Lösung, können Rückschlüsse auf die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler gemacht werden (Blum & Hofe, 2003, vgl S. 14).
Damit ist jedoch noch nicht geklärt, wie entsprechende Diagnosen konkret aussehen können. Zur Überprüfung individueller Vorstellungen können sowohl Verschriftlichungen analysiert, als auch Interviewstudien durchgeführt werden (Kleine, 2007, vgl S. 184). Je nachdem, welches Ziel bei der Überprüfung verfolgt wird, ergeben sich jeweils Vor- und Nachteile der angeführten Methoden. Interviews haben den Vorteil, dass durch das Gespräch mit den Probanden näher ins Detail gegangen und im Zweifel noch einmal nachgefragt werden kann. Möchte man jedoch eine größere Stichprobe untersuchen, ergibt sich schnell ein enormer organisatorischer und zeitlicher Aufwand. In einem solchen Fall ist eine schriftliche Untersuchung vorzuziehen. Grundsätzlich ist jedoch zu beachten: Je informativer und offener die Diagnoseaufgaben gestellt sind, desto genauere Schlüsse können Lehrkräfte ziehen – unabhängig von dem Setting (Abshagen et al., 2017, vgl S. 178).
Welche Diagnoseaufgaben sich zur Überprüfung inhaltlicher Vorstellungen eignen, ist in Abbildung 3 zu sehen. Diese Aufgaben zielen darauf ab, möglichst viele Informationen über den Gedankenprozess des Lernenden zu erhalten. An dieser Stelle werden nun einige Beispiele für solche „informative Aufgaben“ angeführt.

Sachsituationen finden:
Bei dieser Art der Diagnoseaufgaben wird danach gefragt, welche „Rechengeschichte“ sich

Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose inhaltlicher Vorstellungen	
Was diagnostizieren?	**Mit welchem Aufgabentyp?**
Vorstellungen nutzen können zur Mathematisierung	– Gegeben ist eine Sachsituation – wie mathematisieren? – Typische falsche Mathematisierung – was hat sich das Kind wohl dabei gedacht, wieso ist das falsch? – …
Vorstellungen nutzen können zur Veranschaulichung und Interpretation	– Gegeben ist ein mathematisches Objekt (z. B. Gleichung, …): Finde Sachsituation dazu! – Gegeben mathematisches Objekt, male ein Bild dazu, das das Phänomen erklärt (z. B. Male Rechteckbild um zu zeigen, dass zwei Brüche gleichwertig sind.) – Welche Mathematisierung (z. B. Term, Begriff, …) passt zu welcher Sachsituation? – …

Abbildung 3: Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose inhaltlicher Vorstellungen (Hußmann et al., 2007, S. 5)

hinter einer Rechnung verbergen könnte. Den Schülerinnen und Schülern muss dabei der Transfer von dem gegebenen mathematischen Objekt hin zu einer passenden Sachsituation gelingen. „Mit diesem offeneren Aufgabenformat erfährt die Lehrkraft nicht nur, ob die Lernenden über bestimmte Grundvorstellungen verfügen, sondern Genaueres über die individuellen Vorstellungen der Lernenden, auch wenn sie den mathematischen Grundvorstellungen nicht entsprechen“ (Hußmann et al., 2007, S. 5).

Falsche Mathematisierungen erkennen:
Bei diesen Aufgabestellungen sind (bewusst falsche) Beispiellösungen zu einer mathematischen Frage gegeben, und die Aufgabe der Lernenden ist, die Fehler zu erkennen und zu beschreiben, warum es sich dabei um solche handelt.

Aufgaben visualisieren:
Auch Skizzen und Zeichnungen zu mathematischen Problemstellungen können Aufschlüsse darüber geben, ob der entsprechende Inhalt verstanden wurde. Dabei ist es durchaus erwünscht, dass die Lernenden kreativ werden und ein gegebenes Problem in einer Zeichnung darstellen.

Zuordnungsaufgaben:
Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler bei diesen Diagnoseaufgaben ist es, gegebene Mathematisierungen (Bergiffe, Terme, ...) entsprechenden Bildern oder Texten zuzuordnen. Für zusätzliche Informationen empfielt es sich, hier auch nach dem „warum“ zu fragen.

Es gibt freilich noch etliche weitere Möglichkeiten Fragestellungen so aufzubauen, dass möglichst viele Informationen über die Vorstellungen der Lernenden ermittelt werden können. Hierbei ist der zu überprüfende Inhalt ausschlaggebend, denn nicht alle Aufgabenformate eignen sich für alle mathematischen Inhalte gleichermaßen. Bevor in dieser Arbeit also die gewählten Diagnoseinstrumente und Aufgabenstellungen beschrieben und erläutert werden, braucht es einen genauen Blick auf die zu untersuchenden Grundvorstellungen.

1.6 Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten

Bei näherer Betrachtung der Grundrechnungsarten kann festgestellt werden, dass trotz der vermeintlich „einfachen“ Rechnungen, sehr viele unterschiedliche Vorstellungen bedient werden. Es wird zunächst jene Rechenart durchleuchtet, welche von Kindern in der Regel zuerst gelernt wird – die Addition.

1.6.1 Grundvorstellungen zur Addition

Dass es zu einer Aufgabe wie beispielsweise $3 + 5 = 8$ viele unterschiedliche Vorstellungen gibt, würde man zunächst möglicherweise gar nicht vermuten, da das reine Lösen der Rechenaufgabe sehr einfach ist. Diese Vorstellungen werden allerdings deutlich, wenn man die Aufgabe in unterschiedlichen Kontexten betrachtet. In den folgenden Beispielen wird bewusst auf einen einheitliche Aufbau geachtet und in Kauf genommen, dass es sich dabei in den meisten Fällen um so genannte „eingekleidete Aufgaben“ handelt, die Situationen beziehungsweise Vorgänge betreffen, welche in der Regel in der Realität wohl kaum so stattfinden würden.

1. Emilia hat 3 Weinbeeren, Thomas hat 5 Weinbeeren. Wie viele Weinbeeren haben sie gemeinsam?

2. Emilia hat 3 Weinbeeren. Sie bekommt 5 Weinbeeren dazu. Wie viele Weinbeeren hat Emilia jetzt?

3. Emilia bekommt zu ihren Weinbeeren zunächst 3 dazu und dann noch 5. Wie viele Weinbeeren hat sie insgesamt dazubekommen?

All diese Beispiele werden mathematisch mit Hilfe der Additionsgleichung $3 + 5 = 8$ gelöst. Allerdings werden in diesen Beispielen auch unterschiedliche Vorstellungen zu der Addition aufgezeigt (Humenberger, 2018, vgl S. 5):

Vereinigen: In Beispiel 1 wird die Addition als Vereinigung zweier Größen verstanden. Dabei handelt es sich um eine *statische* Struktur, da mit den Weinbeeren in dem Beispiel nicht aktiv etwas gemacht wird. Zwei Zustände werden hier zu einem Gesamtzustand zusammengefasst: Zustand + Zustand = Zustand. Bildlich kann man das wie in Abbildung 4 darstellen.

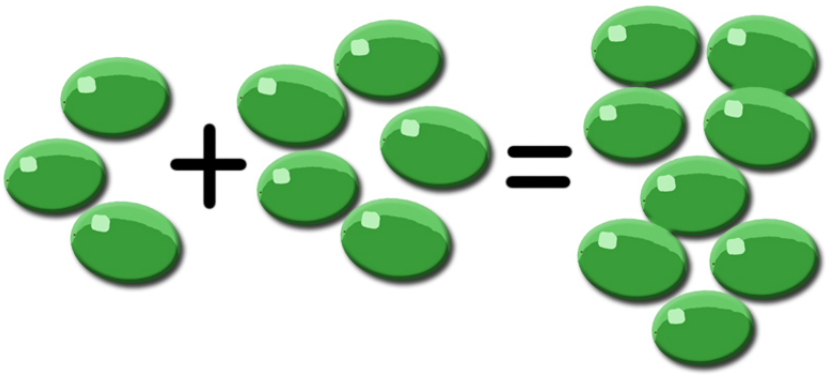


Abbildung 4: Bildhafte Darstellung der Vereinigungsvorstellung.

Hinzufügen: In Beispiel 2 wird ein bestehender Zustand verändert und das Ergebnis ist ein neuer Zustand. Im Gegensatz zur Vereinigung spricht man hier von einer *dynamischen* Struktur. Diese Hinzufüge-Vorstellung kann gut auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, wie in Abbildung 5 zu sehen ist.

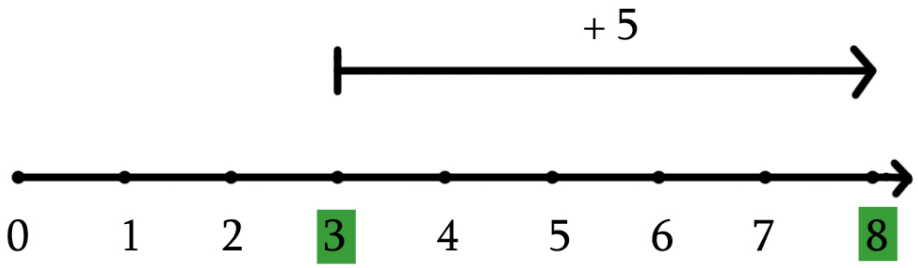


Abbildung 5: Bildhafte Darstellung der Hinzufüge-Vorstellung.

Der Zustand „3 “ wird verändert, wobei die Veränderung als Pfeil dargestellt ist. Am Ende ergibt sich wieder ein Zustand.

Verändern: Aufgabe 3 ist ein Beispiel für die Veränderungsvorstellung der Addition. Auch hier handelt es sich um eine *dynamische* Struktur. Zwei Veränderungen werden hier zu einer Gesamtänderung zusammengefasst. Für diese Vorstellung ist ebenfalls eine bildhafte Darstellung sinnvoll, allerdings ausschließlich mit Hilfe von Pfeilen, wie in Abbildung 6 deutlich wird.

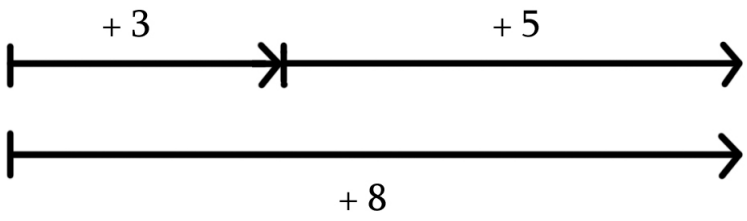


Abbildung 6: Bildhafte Darstellung der Veränderungsvorstellung.

Damit Kinder eine tragfähige, breite Operationsvorstellung der Addition erwerben, müssen konkrete Aufgaben zu den oben genannten Grundvorstellungen als Addition gedeutet werden können. Außerdem muss auch umgekehrt einer symbolisch dargestellte Additionsaufgabe die entsprechende konkrete Aufgabe zugeordnet werden können (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 95).
Es gibt also, wie man sieht, nicht **die** Grundvorstellung zur Addition, sondern vielmehr eine Sammlung von Vorstellungen, welche zusammen ein Verständnis der Rechenoperation hervorrufen können. Wie in Abbildung 1 des Kapitels 1.2 dargestellt, müssen von der Lehrperson jene Sachsituationen thematisiert werden, welche oben genannte Grundvorstellungen der Addition bedienen, um gewährleisten zu können, dass von den Schülerinnen und Schülern die Operation tatsächlich verstanden wird. Sonst kann es passieren, dass ein $+$ ausschließlich als Symbol gedeutet wird, welches einen bestimmten Algorithmus bedient. Selbstverständlich gilt dies nicht nur für die Addition, sondern auch für die übrigen drei Grundrechnungsarten.

1.6.2 Grundvorstellungen zur Subtraktion

Betrachtet wird nun die Umkehroperation der Addition, welche in der Regel zeitnah zur Addition erarbeitet wird. Auch hier werden konkrete Beispiele angeführt, welche mit Hilfe der Subtraktionsgleichung $8 - 5 = 3$ gelöst werden können:

1. Emilia hat 8 Spielkarten und gibt ihrem Freund Thomas 5 davon. Wie viele Spielkarten bleiben ihr übrig?

2. Emilia hat 5 Spielkarten. Von ihrem Freund Thomas bekommt sie einige Spielkarten und hat danach 8 Stück. Wie viele Spielkarten hat sie von Thomas bekommen?

3. Emilia hat 8 Spielkarten. Ihr Freund Thomas hat 5 Spielkarten. Wie viele Spielkarten hat ihr Freund weniger?

4. Emilia hat 8 Spielkarten und gibt ihrem Freund Thomas einige davon. Danach hat sie noch 3 Spielkarten. Wie viele Spielkarten hat Emilia ihrem Freund gegeben?

5. Emilia hat insgesamt 8 Spielkarten, davon sind 5 rote und einige schwarz. Wie viele schwarze Spielkarten hat sie?

6. Emilia hat einige Spielkarten, von welchen sie 5 ihrem Freund Thomas gibt. Danach hat sie noch 3 Spielkarten übrig. Wie viele Spielkarten hatte Emilia ursprünglich?

In diesen sechs Beispielen sind die vier gängigen Grundvorstellungen der Subtraktion ersichtlich. Ähnlich wie bei der Addition kann auch hier zwischen *dynamischen* (Beispiel 1, 2, 4, 6) und *statischen* (Beispiel 3, 5) Strukturen unterschieden werden (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 115).

Abziehen, Wegnehmen, Zurückzählen: Aufgabe 1 ist ein typisches Beispiel für diese Grundvorstellung. Wenn man 8 um 5 verkleinert, so ergibt sich 3. Dieser Zusammenhang kann gut auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, wie in Abbildung 7 zu sehen ist.

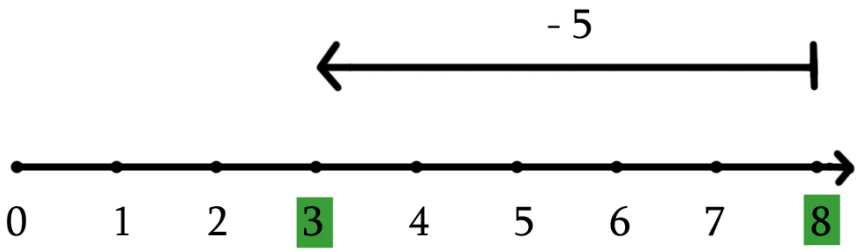


Abbildung 7: Bildhafte Darstellung des Abziehens auf dem Zahlenstrahl.

Padberg & Benz (2011) sehen diese Grundvorstellung des Abziehens auch in den Beispielen 4 und 6. Allerdings wird bei genauerer Betrachtung der weiteren drei Vorstellungen deutlich, dass hier eine eindeutige Zuordnung schwer fällt.

Ergänzen: Die Vorstellung des Ergänzens wird in Beispiel 2 deutlich. Wie viel muss man zu 5 ergänzen, um 8 zu erhalten. Es ist somit die Antwort auf folgende Frage: $5+? = 8$

Vergleichen, Unterschied bestimmen: Bei dem Beispiel 3 wird ein Vergleich angestellt. Um wie viel unterscheiden sich 8 und 5? Dieser Zusammenhang kann wiederum gut auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, wie in Abbildung 8 zu sehen ist.

Die Vorstellung des Ergänzens ist sehr ähnlich, wie die des Vergleichens. Daher kann diese auch mit Hilfe derselben Darstellung sichtbar gemacht werden.

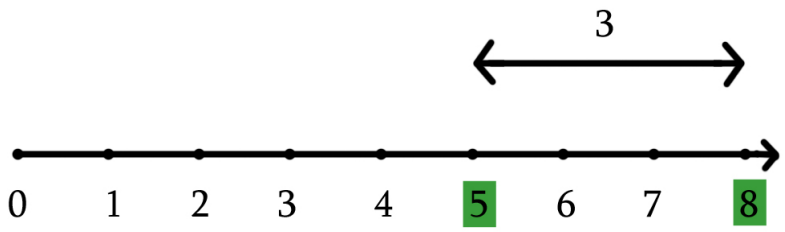


Abbildung 8: Bildhafte Darstellung des Vergleichens bzw. Ergänzens auf dem Zahlenstrahl.

Bei dem Beispiel 4 kann neben der Abzieh-Vorstellung auch ein Vergleich angestellt werden. Um wie viel unterscheidet sich 8 von 3? Die Abbildung wäre dann allerdings eine andere.

Vereinigen, Teil-Ganzes Vorstellung: Diese Grundvorstellung wird in Beispiel 5 bedient. Hier wird die Ausgangsmenge in zwei Teilmengen zerlegt: die schwarzen Spielkarten und die roten Spielkarten. Diese beiden Teilmengen ergänzen einander zu der Ausgangsmenge. Somit ist diese Vorstellung sehr ähnlich wie die Ergänzungsvorstellung.

Bei Beispiel 6 wird zwar die Vorstellung des Abziehens geweckt, allerdings wird zur Lösung dieses Problems die Umkehroperation benötigt. Nachdem der Minuend gesucht ist, lautet die gesuchte Rechnung folgendermaßen: $? - 5 = 3$.

Anhand dieser Beispiele wird der enge Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion sichtbar. Vor allem bei den Vorstellungen des Ergänzens, des Vergleichens aber auch des Vereinigens kann sowohl subtrahiert, als auch addiert werden.

Wann bei gegebenen Subtraktionen eher eine Abzieh-Vorstellung oder eine Unterschied/ Ergänzungs-Vorstellung sinnvoll ist, hängt stark von den gegebenen Zahlen ab:

$$100 - 2 = 98$$

Hier wird man eher an das Abziehen denken.

$$100 - 98 = 2$$

Bei dieser Subtraktion fragt man eher nach dem Unterschied zwischen 100 und 98.
Für Schülerinnen und Schüler ist diese Differenzierung im Volksschulalter oftmals gar nicht leicht (Humenberger, 2018, vgl. S. 5).

1.6.3 Grundvorstellungen zur Multiplikation

Die Grundvorstellungen zu der Multiplikation können ebenfalls anhand von passenden Beispielen sichtbar gemacht werden. Die zugehörige Multiplikation, welche für alle Aufgaben zutrifft, lautet $3 \cdot 5 = 15$:

1. Hannah möchte ihren Bücherschrank neu ordnen. Daher nimmt sie zunächst 5 Bücher heraus und legt diese auf den Tisch. Anschließend nimmt sie weitere 5 Bücher aus dem Regal und legt diese ebenfalls auf den Tisch. Das macht sie auch ein weiteres Mal und legt diese 5 Bücher ebenfalls auf die Tischplatte. Wie viele Bücher liegen nun auf dem Tisch?

2. Simone hat bei einem Brettspiel folgenden Wurf erzielt. Wie viele Felder darf sie vorrücken?

3. Simon hat in seinem Kleiderschrank 3 Jeans und 5 dazu passende T-Shirts. Wie viele unterschiedliche Outfits (Kleidungskombinationen) sind damit möglich?

Grundsätzlich gibt es drei grundlegende Vorstellungen zu der Multiplikation, welche im Folgenden erklärt werden. Anschließend werden ergänzende Vorstellungen aufgezeigt und kurz beschrieben (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 128-133).

Zeitlich-sukzessive Handlungen: Ein typisches Beispiel für diese Vorstellung ist die Aufgabe 1. Die gleiche Handlung wird dabei mehrmals hintereinander wiederholt, die Gesamtmenge entsteht somit zeitlich-sukzessive. Durch diese Art der Darstellung wird der Zusammenhang zwischen der wiederholten Addition und der Multiplikation deutlich: $5{+}5{+}5 = 3{\cdot}5$. Es handelt sich hierbei um einen dynamischen Prozess, da bei dieser Grundvorstellung die Handlung aktiv wiederholt wird. Eine mögliche Darstellung am Zahlenstrahl ist in Abbildung 9 zu sehen.

Räumlich-simultane Anordnungen: Im Gegensatz zu der zeitlich-sukzessiven Handlung ist in so einem Fall die eigentliche Handlung bereits abgeschlossen. Ein Beispiel hierfür ist die Aufgabe 2. Die drei Würfel liegen bereits am Tisch und es ist dabei nicht wichtig, wie es zu diesem Wurf gekommen ist (statische Struktur). Die Darstellung einer solchen Situation ist in der Regel einfach und damit leicht überschaubar. Auch bei dieser Anordnung wird der Zusammenhang zwischen wiederholter Addition und Multiplikation deutlich.

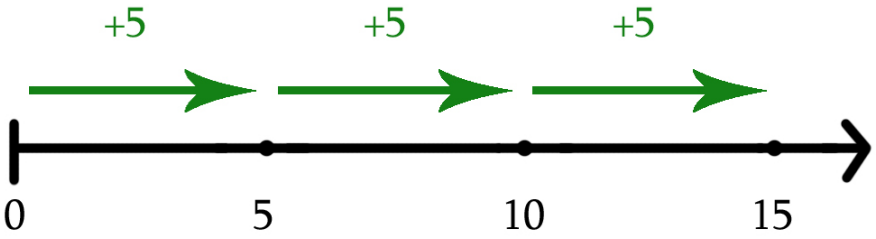


Abbildung 9: Bildhafte Darstellung einer zeitlich-sukzessiven Handlung auf dem Zahlenstrahl.

Es besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen diesen beiden Vorstellungen. Denn das Ergebnis jeder zeitlich-sukzessiven Handlung endet in einer räumlich-simultanen Anordnung. Umgekehrt kann eine räumlich-simultane Anordnung vorher zeitlich-sukzessive entstanden sein. „Während für die Lehrkraft die Unterscheidung dieser beiden Aspekte hilfreich sein kann, müssen die Kinder diese Aspekte weder unterscheiden noch gar benennen können. Entscheidend ist, dass sie entsprechende Sachsituationen als **Multiplikationssituationen** erkennen“ (Padberg & Benz, 2011, S. 130).

Wie bereits erwähnt kann sowohl bei zeitlich-sukzessiven Handlungen als auch bei räumlich-simultanen Anordnungen die Multiplikation $3 \cdot 5$ als wiederholte Addition gleicher Summanden verstanden werden, nämlich $5 + 5 + 5$. Dabei werden die unterschiedlichen Bedeutungen beider Faktoren ersichtlich. 3 ist dabei der *Multiplikator* und 5 der *Multiplikand*. Der Multiplikator gibt an, wie oft eine Zahl vervielfacht wird, während der Multiplikand die zu vervielfältigende Zahl repräsentiert. Bei Sachsituationen ist diese Rollenverteilung der Faktoren bereits durch den Kontext determiniert. Rein formal (in Hinblick auf die Notation) kann der Multiplikator jedoch sowohl an erster, als auch an zweiter Stelle stehen. In Deutschland wird dieser in neueren Schulbüchern üblicherweise an die erste Stelle gestellt, da es bei der Betrachtung konkreter Situationen und Handlungen näherliegend erscheint. In Schulbüchern aus Österreich steht allerdings oftmals der Multiplikand an erster Stelle (siehe Kapitel 1.7.1). Bei dem Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation wird der Multiplikator für gewöhnlich als zweiter Faktor angeschrieben (Hasemann & Gasteiger, 2020, vgl. S. 153). Unabhängig davon, welche formale Schreibweise schlussendlich gewählt wird, ist jedoch das Wissen um die unterschiedlichen Funktionen der beiden Faktoren bei der Multiplikation entscheidend.
Besonders gut erkennbar ist die Rollenverteilung der Faktoren bei Aufgaben im geometrischen Kontext. So ist bei der Multiplikation $3 \cdot 5\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}$ allein durch die Position der Einheiten die Funktion der beiden Faktoren ersichtlich. Der kontextuelle (und auch formale) Unterschied zu der Aufgabe $3\,\mathrm{m} \cdot 5 = 15\,\mathrm{m}$ beziehungsweise $5 \cdot 3\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}$ und die ent-

sprechenden Funktionen des Multiplikators und des Multiplikanden können durch passende Skizzen gut verständlich dargebracht werden, wie in Abbildung 10 zu sehen ist.

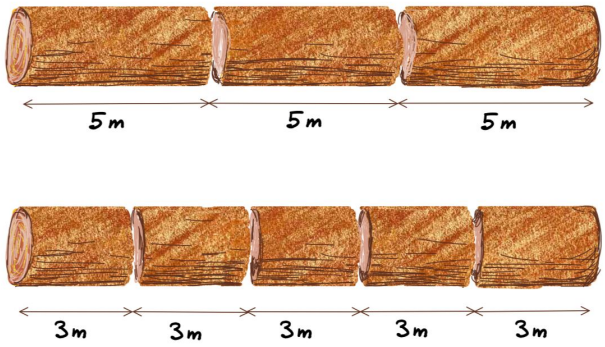


Abbildung 10: Bildhafte Darstellung der beiden Multiplikationen $3 \cdot 5\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}$(oben) und $5 \cdot 3\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}$(unten).

Kombinatorischer Kontext: Eine gänzlich andere Vorstellung der Multiplikation wird in Beispiel 3 ermöglicht. Hierbei sind alle möglichen Kombinationen aus zwei unterschiedlichen Mengen gesucht. Zu jeder der drei Hosen können jeweils fünf unterschiedliche T-Shirts getragen werden. Dementsprechend führt auch diese Aufgabenstellung zu der Multiplikation $3 \cdot 5 = 15$. Um diesen Zusammenhang zu verstehen, ist es sinnvoll die gegebene Situation grafisch darzustellen. Eine Aufgabenstellung aus der Kombinatorik lässt sich in der Regel gut mit Hilfe eines Baumdiagramms darstellen, welches in Abbildung 11 zu sehen ist.
Hintergrund dieses Zugangswegs zur Multiplikation ist das Kreuzprodukt $A \times B$ der zwei Mengen A und B. Bei einer solchen Aufgabenstellung ist die Kardinalzahl (Zahl der Elemente) $|A \times B|$ dieser Menge gesucht, welche mit Hilfe des Produkts der Kardinalzahlen der Mengen A und B ermittelt wird.

Wie bereits erwähnt, gibt es neben diesen Vorstellungen der Multiplikation noch einige weitere multiplikative Kontexte (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 132f). Hier wird jeweils ein Beispiel zur Verdeutlichung angeführt.

Multiplikativer Vergleich: Lorenz hat 5 € in seiner Spardose. Seine Schwester hat bereits 3mal soviel Geld gespart. Wie viel Geld hat seine Schwester?

Multiplikatives Ändern: Bei einem Glücksspiel ist der mögliche Gewinn der dreifache Einsatz. Wie hoch wäre der mögliche Gewinn bei einem Einsatz von 5 €?

Proportionalität: Aus einem Wasserschlauch laufen in einer Minute 5 Liter Wasser in einen Kübel. Wie viele Liter sind nach 3 Minuten in dem Kübel?

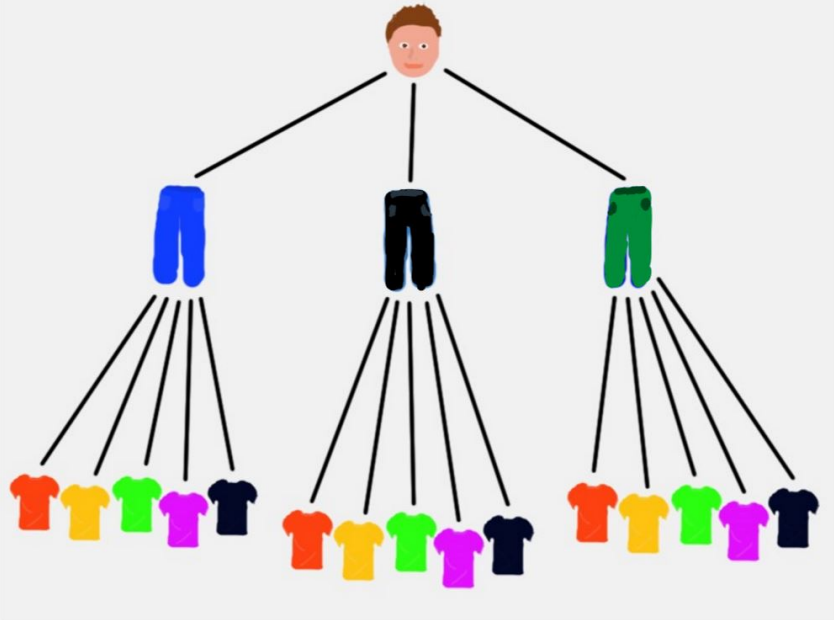


Abbildung 11: Baumdiagramm zur Darstellung eines kombinatorischen Zusammenhangs.

Formelhafte Multiplikation von Größen: Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechteckigen Grundstücks, welches 5 Meter lang und 3 Meter breit ist?

1.6.4 Grundvorstellungen zur Division

Im Folgenden werden schließlich die Grundvorstellungen zu der Division näher betrachtet. Auch hier werden zunächst entsprechende Beispiele vorgestellt und anschließend analysiert. Die Rechnung zu diesen Aufgaben lautet jeweils $35 : 7 = 5$.

1. Lisa möchte 35 Spielkarten gerecht auf 7 Personen verteilen. Wie viele Karten bekommt jede Person?
2. 35 Kinder sollen Gruppen zu je 7 Kindern bilden. Wie viele Gruppen entstehen so?

Bei der Division gibt es grundsätzlich zwei vorherrschende Vorstellungen, das Teilen (Verteilen) und das Messen (Aufteilen).

Teilen: Ein typisches Beispiel für diese Vorstellung ist Aufgabe 1. Eine bestimmte Menge (in diesem Fall Karten) soll gerecht oder gleichmäßig auf eine bestimmte Anzahl an Personen verteilt werden. Gesucht ist dabei die Anzahl an Karten, welche jede Person erhält. „Das Verteilen lässt sich mathematisch exakter als eine Tätigkeit beschreiben, die zur Zerlegung

einer Menge M in gleichmächtige, paarweise elementfremde Teilmengen führt“ (Padberg & Benz, 2011, S. 155). Gegeben ist hierbei die Anzahl der Elemente von M sowie die Anzahl an Teilmengen. Gesucht wird die Anzahl der Elemente jeder Teilmenge. Ähnlich wie bei der Multiplikation kann auch hier zwischen zeitlich-sukzessiven (Aufgabe 1) oder räumlich-simultanen (Karten sind bereits ausgeteilt und liegen vor den Personen) Kontexten unterschieden werden.

Messen: Aufgabe 2 wird zwar mit derselben Rechnung $35 : 7 = 5$ gelöst, die Vorstellung hierzu ist jedoch eine völlig andere. In diesem Fall wird eine bestimmte Menge (Kinder) restlos in Teilmengen zu je 7 Elementen aufgeteilt. Gesucht ist dabei die Anzahl an Teilmengen. Analog zu der Vorstellung des Teilens kann auch hier zwischen zeitlich-sukzessiven und räumlich-simultanen Kontexten unterschieden werden.

Dass sowohl das Teilen als auch das Messen mit derselben Schreibweise $a : b = c$ angeschrieben wird, ist nach genauerer Überlegung mit Sicherheit nicht selbstverständlich, denn die Vorstellungen zu diesen beiden Operationen sind gänzlich unterschiedlich. Daher wurden hierbei früher auch unterschiedliche Zeichen verwendet (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 158).

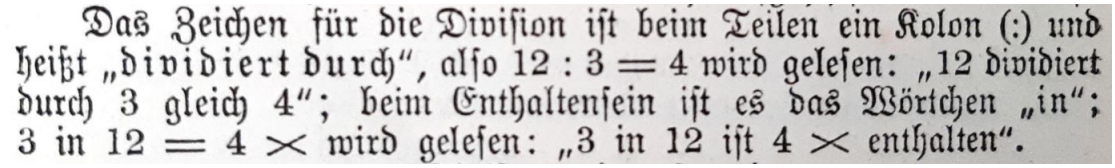

Das Zeichen für die Diviſion iſt beim Teilen ein Kolon (:) und heißt „dividiert durch“, alſo 12 : 3 = 4 wird geleſen: „12 dividiert durch 3 gleich 4“; beim Enthaltenſein iſt es das Wörtchen „in“; 3 in 12 = 4 × wird geleſen: „3 in 12 iſt 4 × enthalten“.

Abbildung 12: Ausschnitt aus dem Buch „Richtig Rechnen durch Selbst-Unterricht“ aus dem Jahr 1904.

Abbildung 12 zeigt einen Ausschnitt eines Mathematikbuchs aus dem Jahr 1904, welcher die eben genannten unterschiedlichen Schreibweisen des Teilens beziehungsweise Messens (in diesem Buch als „Enthaltensein“ beschrieben) darlegt. Das Messen wird dabei mit dem Wort „in“ angeschrieben. Die eingangs angegebene Aufgabe würde man somit folgendermaßen anschreiben:

$$7 \text{ in } 35 = 5\times$$

Diese Schreibweise ist zwar heutzutage nicht mehr üblich, „in“-Sätze findet man jedoch auch heute noch in einigen Schulbüchern als zusätzliche Verständnishilfe (siehe Kapitel 1.7.2). Bei einer derartigen Schreibweise wird die Vorstellung zu der Operation des Messens sehr gut ersichtlich. Ein Lösen über die Umkehroperation (also der Multiplikation) ist dabei intuitiv gegeben.
Dennoch gibt es natürlich eine Berechtigung, beide Operationen (Messen und Teilen) auf dieselbe Art und Weise anzuschreiben, da schließlich bei gegebenen Zahlen a und b stets dasselbe Ergebnis c resultiert (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 159). Außerdem können auch beide Operationen Umkehrungen (beziehungsweise Proben) zu der Multiplikation sein.

Betrachtet man eine Multiplikation, bei welcher Multiplikand und Multiplikator eindeutig zugeordnet sind, so kann die entsprechende Divisionsprobe sowohl ein Vorgang des Messens als auch des Teilens sein, wie in Abbildung 13 zu sehen ist.

Abbildung 13: Die Probe für die Multiplikation in dem Buch „Das ist Mathematik 1“ (Humenberger et al., 2016, S. 56)

Eine Division kann grundsätzlich auch als wiederholte Subtraktion des Divisors verstanden werden – ähnlich der Vorstellung der wiederholten Addition bei der Multiplikation (siehe Kapitel 1.6.3). $35 : 7$ bedeutet dann: Wie oft kann man 7 von 35 abziehen, bis man Null erhält? Diese wiederholte Subtraktion steht mit der Vorstellung des Messens in einem engen Zusammenhang. Denn jede Aufgabe, welche der Vorstellung des Messens zugrunde liegt, kann auch über eine wiederholte Subtraktion gelöst werden und umgekehrt (Padberg & Benz, 2011, vgl. S. 156).

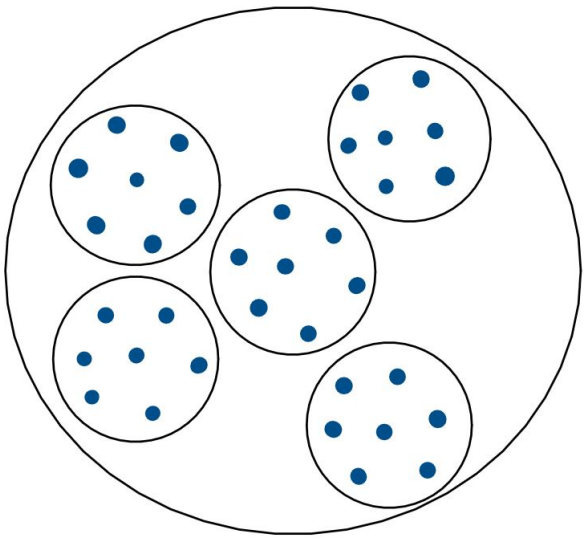


Abbildung 14: Ikonische Darstellung des Messens bzw. der wiederholten Subtraktion.

Abbildung 14 kann sowohl als ikonische Fixierung des Messens (In wie viele Siebenergruppen können 35 Kinder aufgeteilt werden?) als auch des wiederholten Subtrahierens (Wie viele Siebenergruppen können von 35 weggenommen werden, bis keine Kinder mehr übrig bleiben?) gedeutet werden. Selbst bei Divisionen mit Rest ist diese Vorstellung der wiederholten Subtraktion möglich: Betrachtet man beispielsweise die Division $37 : 7$. Hier werden so oft 7 Elemente von der Ausgangsmenge 37 abgezogen, bis schließlich 2 Elemente übrig

bleiben. Stellt man für diese Aufgabe einen analogen Kontext her, so können auch diesmal 5 Gruppen zu je 7 Kindern gebildet werden, mit dem Unterschied, dass zwei Kinder übrig bleiben. Das Ergebnis der wiederholten Subtraktion deckt sich also auch hier mit dem der Division mit Rest und steht in einem engen Zusammenhang mit der Vorstellung des Messens.

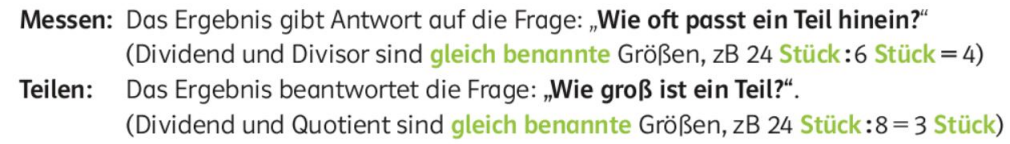


Abbildung 15: Ausschnitt aus dem Schulbuch *Das ist Mathematik 1* (Humenberger et al., 2016, S. 54)

In dem Schulbuch *Das ist Mathematik 1* wird den Schülerinnen und Schülern der Unterschied der beiden Vorstellungen zu der Division (Teilen und Messen) anhand zweier Beispiele näher gebracht. Dabei werden auch mögliche Leitfragen formuliert, um den Unterschied besser zu erkennen. Abbildung 15 zeigt diese beiden Fragen zum Messen und Teilen. Außerdem ist hier zusätzlich noch beschrieben, wie die Einheiten bei der jeweiligen Operation gesetzt werden müssen. Diese „Regeln“ sollen eine zusätzliche Hilfestellung darstellen, um den Unterschied leichter zu erkennen. Dabei sei jedoch gesagt, dass ein ausschließliches Lernen und Können dieser Regel nicht gleichbedeutend ist mit einer Verinnerlichung der beiden Grundvorstellungen zu der Division.

Ähnlich wie bei der Multiplikation ist auch bei der Division eine Betrachtung geometrischer Aufgabenstellungen zum besseren Verständnis zielführend. Gleichzeitig kann mit Hilfe der Umkehraufgabe der Division – also der Multiplikation – ein Unterschied zwischen Messen und Teilen verständlich dargebracht werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Zunächst wird eine konkrete Aufgabenstellung betrachtet:

Wie viele 4 dm lange Stäbe können aus einem 12 dm langen Holzstab geschnitten werden?

Diese Aufgabe kann mit Hilfe der Division $12\,\mathrm{dm} : 4\,\mathrm{dm} = \ldots$ gelöst werden, es handelt sich folglich um eine Aufgabe des Messens. Bei dieser Aufgabenstellung liegt es jedoch auch nahe, mittels Multiplikation zu der Lösung zu kommen. Wie oft muss ich 4 dm „hintereinanderlegen“, bis ich 12 dm erhalte. Also:

$$\ldots \cdot 4\,\mathrm{dm} = 12\,\mathrm{dm}$$

Unbekannt ist in diesem Fall somit der Multiplikator. Ist also bei der zu einer Divisionsaufgabe gehörigen Umkehroperation der Multiplikator gesucht – also jener Faktor, welcher angibt, wie oft etwas vervielfacht wird – handelt es sich um eine Aufgabe des Messens.

Nun wird die dem Kontext entsprechende Aufgabe des Teilens betrachtet:

Ein 12 dm langer Holzstab wird in drei gleich lange Stäbe zerschnitten. Wie lang sind diese Stäbe jeweils?

Die Division, mit welcher diese Aufgabe gelöst werden kann, lautet $12\,\mathrm{dm} : 3 = \ldots$. Betrachtet man hier wieder den alternativen Lösungsweg über die Umkehroperation, ergibt sich folgende Multiplikation:

$$3 \cdot \ldots = 12\,\mathrm{dm}$$

In diesem Fall ist also der Multiplikand gesucht. Folglich ist alleine durch die unterschiedlichen Rollen der beiden Faktoren einer Multiplikation der Unterschied zwischen Messen und Teilen gegeben. Ist man auf der Suche nach dem Multiplikanden, handelt es sich um eine Aufgabe des Teilens und sucht man den Multiplikator, liegt eine Aufgabe des Messens vor. Betrachtet man die beiden Aufgabenstellungen vor dem eben genannten Hintergrund, so fällt auf, dass der Lösungsweg über die Multiplikation bei der Aufgabe des Messens intuitiver erscheint. Die Frage nach dem Multiplikanden ist speziell für Kinder sicherlich ungewöhnlich und macht es ihnen gerade in der Phase des Erlernens der Division möglicherweise schwerer, den Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation zu erschließen (Hasemann & Gasteiger, 2020, vgl. S. 154).

1.7 Multiplikation und Division in unterschiedlichen Schulbüchern – ein genauerer Blick

Im Zuge der Recherchen, welche im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, sind einige Erkenntnisse zu den derzeit aktuellen Schulbüchern gewonnen worden, von welchen die wichtigsten in diesen Kapiteln erläutert sind. Speziell vor dem Hintergrund der Grundvorstellungen zu der Multiplikation beziehungsweise Division sind für beide Rechenoperationen offene Fragen aufgetaucht.

1.7.1 Multiplikator oder Multiplikand – 1. oder 2. Faktor?

In Kapitel 1.6.3 wurde bereits kurz erwähnt, dass es grundsätzlich in Hinblick auf die Positionierung von Multiplikanden und Multiplikator keinen einheitlichen Konsens gibt. Auf den ersten Blick scheint die Frage, ob der Multiplikator oder doch der Multiplikand an erster Stelle steht, möglicherweise nicht sonderlich bedeutend zu sein. Schließlich ist durch die Kommutativität der Multiplikation das Vertauschen der Faktoren erlaubt, da sich am Ergebnis nichts ändert. Wahrscheinlich ist auch das mit ein Grund dafür, dass die Fachbegriffe *Multiplikand* und *Multiplikator* immer häufiger aus den Schulbüchern verschwinden und ausschließlich von den beiden Faktoren gesprochen wird (meistens 1. Faktor und 2. Faktor). Geht es nur um das Berechnen des Ergebnisses einer Multiplikation, so ist es tatsächlich für die Lösung irrelevant, welcher Faktor an erster Stelle steht und welcher an

zweiter. Gerade beim Lösen schriftlicher Multiplikationen mit mehrstelligen Faktoren ist die willkürliche Vertauschbarkeit dieser von großem Vorteil, nämlich dann, wenn einer der Faktoren mehrere gleiche Ziffern, viele Einser oder viele Nuller beinhaltet und damit der Multiplikationsalgorithmus ungleich leichter wird. So ist beispielsweise $2212 \cdot 3495$ mit dem in unseren Breiten gängigen Algorithmus händisch mühsamer zu berechnen als $3495 \cdot 2212$. Wofür soll es also gut sein, den Kindern die Fachbegriffe Multiplikator und Multiplikand zu lehren, wenn spätestens nach Einführung des Kommutativgesetzes geklärt ist, dass es für die Berechnung an sich eigentlich egal ist?
Betrachtet man die Multiplikation $3 \cdot 5 = 15$ gänzlich ohne Kontext, so kann a priori nicht gesagt werden, ob nun 3 oder 5 der Multiplikator ist. Ich persönlich habe zu Schulzeiten gelernt, dass der Multiplikator an zweiter Stelle steht, folglich wäre es in diesem Fall der Fünfer. Diese Vereinbarung, nämlich dass der Multiplikator in der Regel immer an zweiter Stelle steht, wurde damals im Rahmen des Unterrichts von der Lehrperson getroffen und wurde auch so in den Schulbüchern gelehrt: *Multiplikand mal Multiplikator ist gleich Produkt*. Der Multiplikator (oder 2. Faktor) gibt an, wie oft der Multiplikand (oder 1. Faktor) vervielfältigt wird. Heute findet man diese Fachbegriffe sehr selten in österreichischen Schulbüchern (eines davon ist in Abbildung 16 zu sehen).

5.1 Multiplizieren mit einstelligen natürlichen Zahlen

Ivan findet bei seinen Großeltern ein Kartenspiel mit 52 Karten. Er möchte wissen, ob noch alle Karten vorhanden sind. Ivan stellt fest, dass es von jedem Symbol 13 Karten gibt. Er rechnet: 13 + 13 + 13 + 13 = .

Ivans Großmutter rechnet etwas schneller: 13 · 4 = .

Die **Addition gleicher Summanden** wurde durch eine **Multiplikation** ersetzt.

Bezeichnungen bei der Multiplikation

13	·	4	=	52
1. Faktor	mal	2. Faktor	gleich	(Wert des) **Produkt**(es)

Hinweis Der **1. Faktor** heißt auch **Multiplikand**. Das ist die Zahl, die vervielfacht wird. Der **2. Faktor** wird auch **Multiplikator** genannt. Der Multiplikator gibt an, wie oft die erste Zahl (Multiplikand) vervielfacht wird. **Bemerkung:** multiplicare (lat.) … vervielfältigen

Abbildung 16: Einführung des Multiplizierens natürlicher Zahlen in dem Schulbuch *Das ist Mathematik 1* (Humenberger et al., 2016, S. 49)

Ist also 5 in der oben angeführten Multiplikation der Multiplikator, so bedeutet das, dass $3 \cdot 5 = 3+3+3+3+3$ ist. Umgekehrt wäre nach dieser Vereinbarung $5 \cdot 3 = 5+5+5$. Dass man bei diesen beiden Multiplikationen dasselbe Ergebnis erhält, ist natürlich klar, der *Weg zum Ergebnis* ist jedoch ein völlig anderer. In den meisten österreichischen Schulbüchern der AHS bzw. Mittelschule (auf die Einführung der Multiplikation in Volksschulbüchern wird später eingegangen) wird bei der Einführung der Multiplikation diese eben beschriebene „Vereinbarung“ die Positionen der Faktoren betreffend übernommen, ohne jedoch

die Begriffe Multiplikand und Multiplikator zu erwähnen (siehe Abbildung 17 *Mehrfach Mathematik* und *Expedition Mathematik*). Hier wird stattdessen vom 1. Faktor und 2. Faktor gesprochen. Dass diese beiden Faktoren unterschiedliche Funktionen haben, wird in den meisten Fällen dabei nicht explizit thematisiert. Anhand der angeführten Beispiele und Übungsaufgaben wird jedoch die Reihenfolge der Faktoren und damit die Position des Multiplikators indirekt vorgegeben.

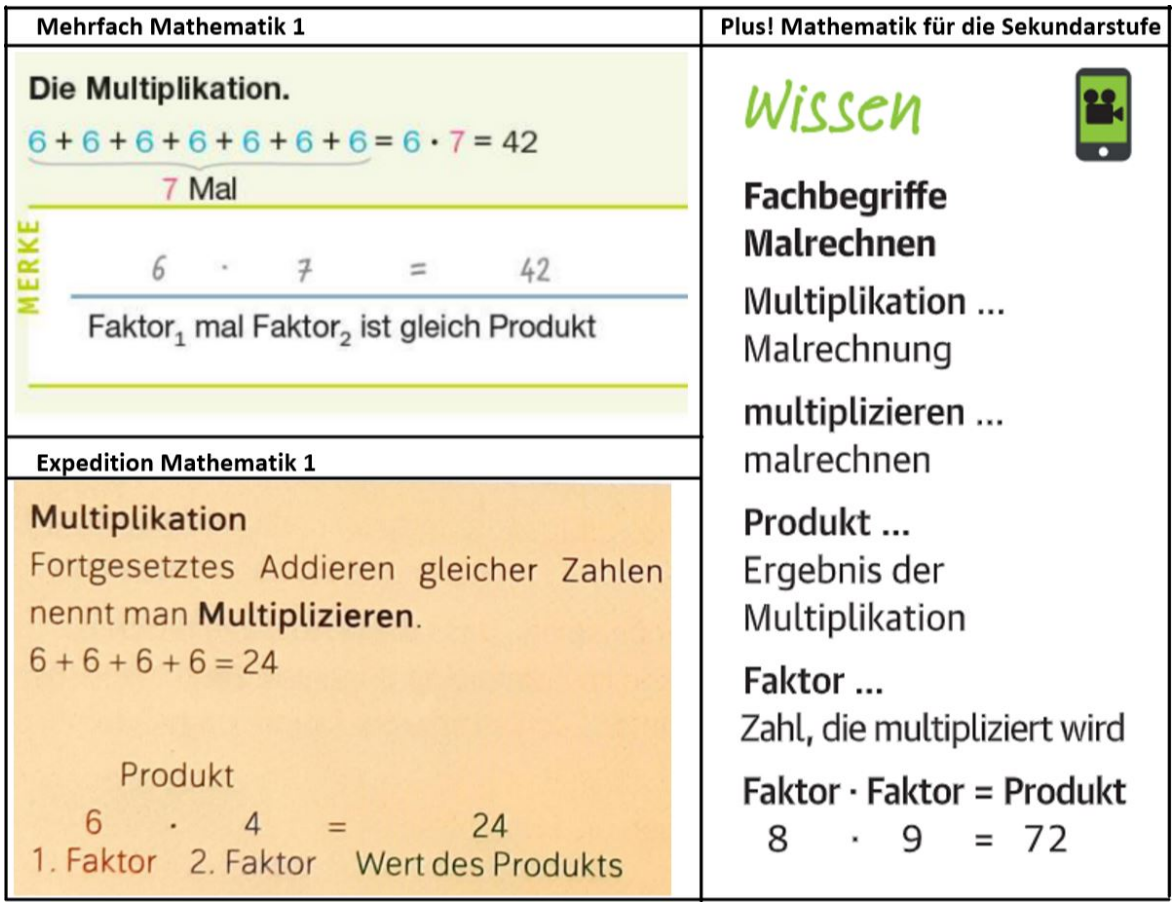
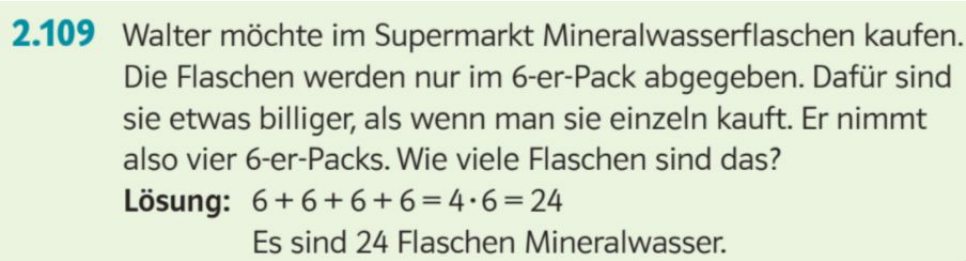


Abbildung 17: Einführung der Multiplikation in drei österreichischen Schulbüchern der 5. Schulstufe: Mehrfach Mathematik 1 (Krempl et al., 2018, S. 36), Expedition Mathematik 1 (Kraker et al., 2018, S. 76), Plus!1 (Wohlhart & Scharnreitner, 2018, S. 12)

Betrachtet man die Einführung (bzw. Wiederholung) der Multiplikation im Schulbuch *Plus! 1* in Abbildung 17, so fällt auf, dass hier nicht zwischen 1. und 2. Faktor unterschieden wird. Gibt es wie in diesem Schulbuch vorab keine Vereinbarung und den Faktoren werden keine bestimmten Rollen zugeteilt, so ist $3 \cdot 5$ als $3+3+3+3+3$ oder $5+5+5$ zu verstehen – je nachdem wie man es gewohnt ist, wie es „einfacher“ zu rechnen ist oder wie der Kontext einer Sachaufgabe die Rollen determiniert. Die unterschiedlichen Funktionen der Faktoren (die ja grundsätzlich bestehen bleiben, auch wenn man sie nicht benennt,) sind in diesem

Fall offensichtlich nicht wichtig, der Fokus wird hierbei auf das Rechnen an sich gelegt. Ein Faktor wird entsprechend als „Zahl, die multipliziert wird“ bezeichnet, wobei diese Formulierung nicht unproblematisch ist. Denn schließlich wird bei der Multiplikation in der Regel jene Zahl, welche *multipliziert wird* als Multiplikand gedeutet, was in diesem Fall allerdings wohl nicht gemeint ist. Hierbei sollen die Faktoren schlicht als Zahlen verstanden werden, die „miteinander multipliziert“ werden. Bei Beispiel- und Sachaufgaben wird jedoch auch in diesem Buch die Reihenfolge von Multiplikator und Multiplikand in den meisten Fällen (Ausnahme sind die Malreihen) wie bei allen bisher genannten Schulbüchern übernommen. Und schließlich gibt es auch österreichische Schulbücher, welche die Reihenfolge der Faktoren umdrehen, sodass der Multiplikator an erster Stelle steht. In Abbildung 18 ist ein Auschnitt aus dem Schulbuch *Mathematik verstehen* zu sehen.



2.109 Walter möchte im Supermarkt Mineralwasserflaschen kaufen. Die Flaschen werden nur im 6-er-Pack abgegeben. Dafür sind sie etwas billiger, als wenn man sie einzeln kauft. Er nimmt also vier 6-er-Packs. Wie viele Flaschen sind das?

Lösung: $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \cdot 6 = 24$

Es sind 24 Flaschen Mineralwasser.

Abbildung 18: Einführung der Multiplikation in dem Schulbuch *Mathematik verstehen 1* (Salzger et al., 2021, S. 52)

In diesem Schulbuch wird zwar wieder „nur“ von den beiden Faktoren gesprochen, allerdings wird die vorgegebene Reihenfolge (fast) immer eingehalten. (Bei der Einführung des Flächeninhalts wurde von dieser „Linie“ abgewichen und der Multiplikator an zweiter Stelle geschrieben). So wird in diesem Schulbuch auch beim Rechnen mit Bruchzahlen die Vervielfältigung von Brüchen mit dem Multiplikator an erster Stelle demonstriert: $5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Aber warum wird in diesem Buch überhaupt von der in Österreich üblichen Schreibweise abgewichen und welchen Vorteil soll das haben?
Beschäftigt man sich mit den Grundvorstellungen zu der Multiplikation, so sind die unterschiedlichen Rollen von Multiplikator und Multiplikand von zentraler Bedeutung. Ganz unabhängig davon, ob es sich um zeitlich-sukzessive Handlungen oder räumlich-simultane Anordnungen handelt, steht die Vorstellung der wiederholten Addition im Mittelpunkt. Und natürlich sind die Vorstellungen mit konkreten Sachsituationen verknüpft, wie zum Beispiel: *Auf einem Tisch stehen* 3 *Teller mit jeweils* 5 *Keksen. Wie viele Kekse sind das insgesamt?* In diesem Fall passt nur eine der beiden wiederholten Additionen, nämlich $5 + 5 + 5$. $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ würde in diesem Kontext keinen Sinn ergeben – die Rollenverteilung der beiden Faktoren ist hier also bereits vorgegeben. Möchte man die vorliegende Sachaufgabe verbal beschreiben, so würde man das wohl auf diese oder eine ähnliche Art machen: „Es liegen *dreimal* fünf Kekse auf diesem Tisch“. In diesem Satz wird also der Multiplikator (3) vor dem Multiplikanden genannt. In unserem Sprachgebrauch trifft das grundsätzlich

auf fast alle derartige Sachsituationen zu: Man bezahlt *viermal* 12€, Toni läuft *siebenmal* 200 Meter; ... . Kaum jemand würde sagen: „Es liegen fünf Kekse *dreimal* auf dem Tisch“. Daher liegt es also durchaus auf der Hand, diese beim Sprechen „logische“ Reihenfolge auch beim Anschreiben der Multiplikation zu übernehmen. Denn die Schreibweise $3 \cdot 5$ deckt sich mit unserem Sprachgebrauch und damit in gewisser Weise auch mit der Vorstellung zu der gegebenen Sachsituation. Würde man willkürlich 100 Personen mündlich befragen, was sie sich unter der Multiplikation $3 \cdot 5$ vorstellen, würde wohl ein erheblicher Teil eine Vorstellung zu der wiederholten Addition $5 + 5 + 5$ beschreiben – ganz einfach weil es unserem Sprachgebrauch entspricht (bei dieser Aussage handelt es sich ausschließlich um eine Vermutung, welche im Zuge dieser Arbeit wissenschaftlich nicht näher untersucht wurde).
Möglicherweise ist das der Grund dafür, dass die Multiplikation in fast allen Volksschulbüchern (sowohl in Deutschland als auch in Österreich) in der eben genannten Reihenfolge eingeführt wird: *Multiplikator mal Multiplikand ist gleich Produkt*. Allerdings finden sich diese Fachausdrücke in keinem im Zuge der Recherche durchleuchteten aktuellen österreichischen Schulbuch der Volksschule wieder.

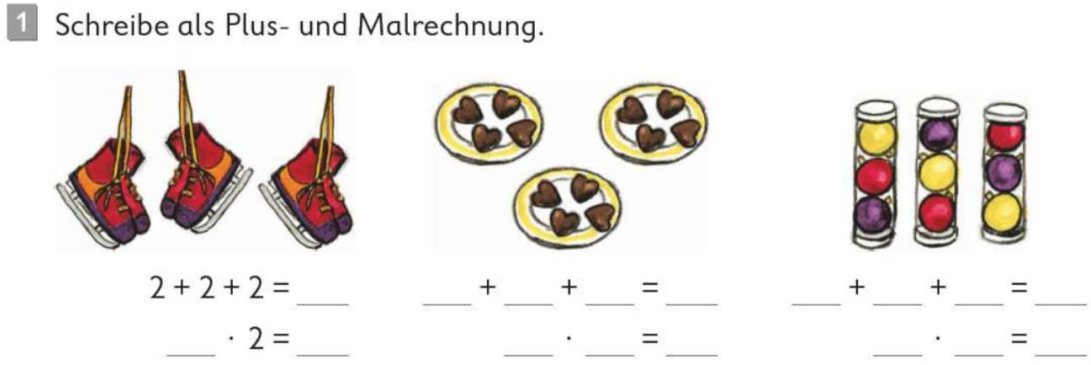


Abbildung 19: Einführung der Multiplikation in dem Schulbuch *Alles klar! 2* (Grosser & Koth, 2015, S. 75)

In Abbildung 19 ist die Einführung der Multiplikation in dem Schulbuch *Alles klar!* der 2. Klasse Volksschule zu sehen. Hierbei wird ersichtlich, dass der Multiplikator an die erste Stelle geschrieben wird und damit die dem Sprachgebrauch angepasste Schreibweise Anwendung findet: *Dreimal zwei Eislaufschuhe* oder *dreimal vier Schokoladeherzen*. Erst in der 3. Klasse Volksschule wird diese Reihenfolge der Faktoren bei der Einführung der schriftlichen Multiplikation umgedreht. Dabei wird dieser Schritt in dieser Schulbuchreihe auf einer Buchseite mit der Erleichterung der Rechnung argumentiert. Allerdings fällt auf, dass ab diesem Zeitpunkt die Schreibweise einige Male hin und her springt und dabei die Position von Multiplikator und Multiplikand nicht mehr näher thematisiert wird. Bei der Durchsicht anderer Schulbücher aus der Primarstufe hat sich jeweils ein ähnliches Bild abgezeichnet: Solange es um die *Vorstellung* zu der Multiplikation geht, wird der Multiplikator an die erste Stelle gestellt. Erst wenn es hauptsächlich um die Rechenkompetenz geht, also nach

der Einführung der schriftlichen Multiplikation, wird die Schreibweise umgedreht und in der Folge auch hauptsächlich so gewählt.
In den meisten österreichischen Schulbüchern der Sekundarstufe wird die Schreibweise jedoch von vornherein der Rechenkompetenz angepasst, indem der Multiplikator an zweiter Stelle steht. Somit wird allerdings in fast allen Schulbüchern die *Vorstellung* zu der Multiplikation in einer für die Kinder (und auch sprachlich) unüblichen Reihenfolge vorgestellt. Hierbei stellt sich für mich die Frage, ob ein gemeinsamer Konsens für die Schülerinnen und Schüler von Vorteil wäre. In Deutschland beispielsweise werden bereits in fast allen Schulbüchern der 5. Schulstufe die Multiplikatoren bei der Einführung (bzw. Wiederholung) der Multiplikation an erster Stelle geschrieben. Auch bei anderen Themengebieten, wo die *Vorstellung* zu der Multiplikation wieder angeregt werden soll, wird diese Schreibweise konsequent gewählt, wie in Abbildung 20 zu sehen ist. Ähnliches findet sich in dieser Schulbuchreihe auch bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen mit Bruchzahlen wieder.

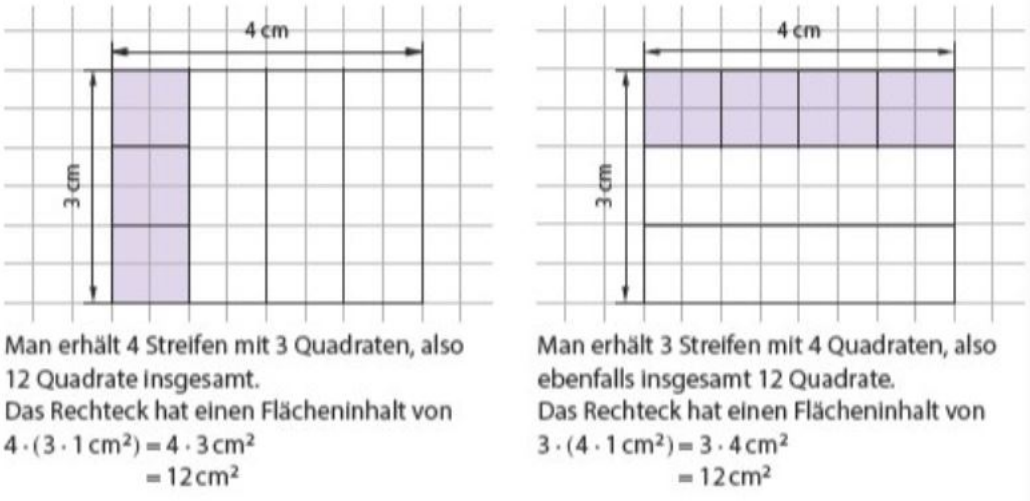


Abbildung 20: Erklärung der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks im Schulbuch *Fundamente der Mathematik 5*. Der Multiplikator steht auch hier an erster Stelle (Ahrens et al., 2018, S. 136)

Auch in den deutschen Schulbüchern der 1. bis 4. Schulstufe wird diese Reihenfolge bei kontextbezogenen Aufgaben konsequent eingehalten. Beim Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe ändert sich folglich für die Schülerinnen und Schüler an der gewohnten Sprech- und Schreibweise nichts. Dieser nahtlose Übergang und der einheitliche Weg ist meiner Ansicht nach gerade für Schülerinnen und Schüler, welche Schwierigkeiten bei dem Verständnis von mathematischen Inhalten haben, sicherlich von Vorteil.
Natürlich gibt es auch Argumente, die „alte“ Schreibweise beizubehalten. Betrachtet man beispielsweise das Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation, so steht der Multiplikator, wie bereits erwähnt, stets an zweiter Stelle. Daher könnte man argumentieren, dass es vorteilhaft ist, diese Schreibweise grundsätzlich einzuhalten. Eine weitere Motivation könnte

die Operatorschreibweise bei der Multiplikation sein. Dabei wird der Multiplikator sozusagen als Rechenbefehl mittels Pfeil dargestellt und steht somit an zweiter Stelle:

$$5 \xrightarrow{\cdot 3} 15$$

Ähnlich verhält es sich auch, wenn man die Multiplikation analog zu den übrigen Grundrechnungsarten anschreiben möchte. Ausgehend von einer *Startzahl* a werden die Operationen durchgeführt und entsprechend wird mit dieser Startzahl etwas gemacht. Damit steht bei der Multiplikation der Multiplikator an zweiter Stelle:

1. Addition: $a + 3 = \ldots$
2. Subtraktion: $a - 3 = \ldots$
3. Division : $a : 3 = \ldots$
4. **Multiplikation**: $a \cdot 3 = \ldots$

Grundsätzlich ist jedoch das Folgende entscheidend: „Welche Schreibweise auch immer man wählt, es handelt sich dabei um eine Vereinbarung, und wie bei allen Festlegungen und Vereinbarungen über formale Dinge ist es wichtig, sie als solche zu erkennen, im Unterrichtsgespräch ausdrücklich auf sie einzugehen und sie möglichst zusammen mit den Schülerinnen und Schülern zu treffen“ (Hasemann & Gasteiger, 2020, S. 163).
Meiner Ansicht nach spricht allerdings einiges dafür, die Schreibweise speziell bei der Einführung der Multiplikation der Sprechweise anzupassen und folgendes (auch in den Schulbüchern) konsequent einzuhalten: Immer wenn es um die *Vorstellung* zu der Multiplikation geht, sollte der Multiplikator (zunächst) an die erste Stelle gestellt werden. Liegt der Fokus auf dem schriftlichen Rechenweg, ist die Vorstellung zu der Multiplikation zweitrangig und damit die Position des Multiplikators variabel. Mittlerweile gibt es auch aktuelle Studien, welche diese Vereinbarung nahe legen. So geht man davon aus, dass die schriftliche Multiplikation zwar von einem Großteil der Schülerinnen und Schüler der 5. Schulstufe gekonnt wird, die Vorstellung zu dieser Rechenart jedoch teilweise lückenhaft ist. Grund dafür ist vielfach die wachsende sprachliche Barriere, wodurch ein Übersetzen von einer Sachsituation in eine mathematische Struktur und umgekehrt schwierig wird. Gerade in solchen Fällen ist es umso wichtiger, die mathematische und sprachliche Struktur aufeinander abzustimmen und entsprechende Lehr-Lern-Arrangements zu finden. Prediger (2019) sieht zum Beispiel für einen erfolgreichen Aufbau multiplikativen Denkens Sprachmittel vor, welche das mentale Bündeln (Unitizing) ermöglichen – also im Fall des eingangs gewählten Beispiels *„drei 5er“*. Diese Sprechweise legt wiederum nahe, die entsprechende Schreibweise $3 \cdot 5$ zu wählen. Ob es nun sinnvoll ist, auch die ursprünglichen Fachausdrücke zu verwenden und zu lehren, ist schließlich einige weitere Überlegungen wert. Denn gerade wenn es um die Vorstellung zu der Multiplikation geht, sind die unterschiedlichen Rollen der beiden Faktoren entscheidend. Daher liegt es auf der Hand, diese auch unterschiedlich zu benennen, um sie in der Folge auch voneinander unterscheiden zu können. Freilich ist auch eine Unterscheidung

ausschließlich mittels Nummerierung möglich (1. und 2. Faktor), jedoch ist dabei die Rollenverteilung in manchen Situationen möglicherweise verwirrend, wie man bei folgendem Beispiel sieht:

$$12 \cdot 125\,\mathrm{m} = 1500\,\mathrm{m}$$

$$\textit{1. Faktor} \cdot \textit{2. Faktor} = \textit{Produkt}$$

In diesem Fall ist der 1. Faktor der Multiplikator. Wird diese Rechnung beispielsweise aufgrund des einfacheren Rechenwegs jedoch umgekehrt angeschrieben, so wechseln die Rollen der beiden Faktoren:

$$125\,\mathrm{m} \cdot 12 = 1500\,\mathrm{m}$$

$$\textit{1. Faktor} \cdot \textit{2. Faktor} = \textit{Produkt}$$

Dennoch würde man hier wohl kaum *2. Faktor · 1.Faktor = Produkt* schreiben, nur um die zu Beginn gewählte Rollenverteilung beizubehalten. Verwendet man die ursprünglichen Fachausdrücke, sind zwar zwei weitere Vokabeln zu lernen, gleichzeitig wird aber auch derartigen Verwirrungen vorgebeugt:

$$12 \cdot 125\,\mathrm{m} = 1500\,\mathrm{m}$$

$$\textit{Multiplikator} \cdot \textit{Multiplikand} = \textit{Produkt}$$

oder:

$$125\,\mathrm{m} \cdot 12 = 1500\,\mathrm{m}$$

$$\textit{Multiplikand} \cdot \textit{Multiplikator} = \textit{Produkt}$$

In diesem Fall ist die Rollenverteilung eindeutig auch sprachlich zugeordnet. Ist das Wissen zu diesen beiden Vokabeln gefestigt, kann auch aktiv nach dem Multiplikator oder dem Multiplikand in einer gegebenen Rechnung (mit Sachbezug) gefragt werden, während das bei nummerierten Faktoren schnell verwirrend wird. Diese eindeutige Zuordnung kann auch bei der Unterscheidung von Messen und Teilen bei der Division hilfreich sein (siehe Kapitel 1.6.4). Natürlich kann man auch ohne das Wissen über die Fachbegriffe nach dem *Faktor, der vervielfältigt wird* oder dem *Faktor, der den anderen vervielfältigt* fragen, um zu erfahren, ob die Schülerinnen und Schüler bereits ein entsprechendes Verständnis aufgebaut haben. An dieser Stelle bringt ein Artikel von Prediger (2019) aufschlussreiche Erkenntnisse. Sie beschreibt darin die Vernetzung der Darstellungs- und Sprachebenen als Grundlage für eine gefestigte Vorstellung (siehe Abbildung 21). Dabei sollen unter anderem Alltagssprache, Bildungssprache und Fachsprache vernetzt werden, um den Zusammenhang zwischen

Sprache und mathematischem Inhalt bestmöglich herzustellen. Unter diesen Gesichtspunkten ist somit ein Lernen der Fachbegriffe *Multiplikand* und *Multiplikator* nur dann sinnvoll, wenn es sich dabei nicht ausschließlich um auswendig gelernte Vokabeln handelt, sondern der Bezug zur Alltagssprache hergestellt werden kann und die Begriffe im Vorstellungskonstrukt eingebunden sind. Ist dies der Fall, ist eine Integration dieser Fachausdrücke in den heutigen Mathematikunterricht am Anfang der Sekundarstufe (oder bereits früher) meiner Ansicht nach durchaus zu empfehlen.

Abbildung 21: Vernetzung der Darstellungs- und Sprachebenen als Prinzip der Vorstellungs- und Sprachförderung (Prediger, 2019, S. 253)

1.7.2 Messen und Teilen – erwähnenswert?

Ein weiterer Sachverhalt, welcher bei der Durchsicht aktueller Schulbücher aufgefallen ist, war jener des Umgangs mit den unterschiedlichen Vorstellungen zu der Division. Hierbei haben sich sehr deutliche Unterschiede gezeigt, was die Wichtigkeit der Thematisierung der beiden unterschiedlichen Vorstellungen *Messen* und *Teilen* betrifft. Während in einigen Schulbüchern der Sekundarstufe die beiden Vorstellungen explizit beschrieben werden und sogar Aufgabenstellungen zur Verdeutlichung der Unterschiede Anwendung finden, gibt es auch Schulbücher, welche keinerlei Differenzierung vornehmen und ausschließlich von *der Division* als Rechenoperation sprechen.
Betrachtet man zunächst Schulbücher der Primarstufe, so wird ersichtlich, dass bei der Einführung der Division durchaus der Unterschied zwischen Teilen und Messen thematisiert und sogar teilweise benannt wird. So wird beispielsweise bei dem Schulbuch *Alles Klar 2* die

Division auf jeweils zwei Seiten über das Messen und das Teilen eingeführt. Dabei werden jeweils passende Sachsituationen bildlich dargestellt, wie in Abbildung 22 zu sehen ist. Hier wird das Messen zunächst über die bereits erwähnten „in“-Sätze eingeführt.

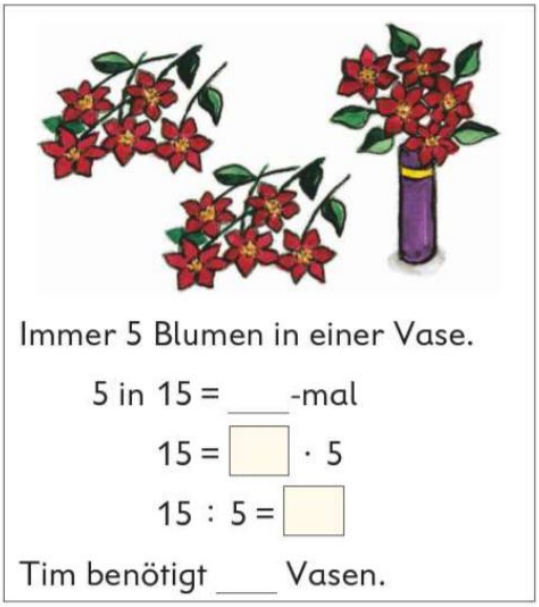


Abbildung 22: Einführung des Messens in dem Schulbuch *Alles Klar 2* (Grosser & Koth, 2015, S. 86)

Auch in der 3. und 4. Schulstufe – bereits nach der Einführung der schriftlichen Division – werden in dieser Schulbuchreihe Sachaufgaben jeweils mit entsprechender Überschrift konsequent in Messen und Teilen getrennt. Es wird also offensichtlich gezielt darauf geachtet, den Kindern den Unterschied bis zum Übergang in die Sekundarstufe bewusst zu machen. Andere Schulbücher der Primarstufe bedienen zwar bei der Einführung und auch später bei Sachaufgaben ebenfalls beide Vorstellungen, benennen diese jedoch nicht derartig konsequent bis zum Ende der 4. Schulstufe. So werden beispielsweise bei dem deutschen Schulbuch *Jo-Jo Mathematik 2* bei der Einführung sowohl Aufgaben des Teilens (Verteilen) als auch des Messens (Aufteilen) dargebracht, in weiterer Folge wird aber nicht mehr explizit unterschieden. Ähnliches findet sich in dem österreichischen Schulbuch *Zahlenreise 2*, wobei hier die Begriffe *Teilen* und *Messen* zu Beginn als Überschrift geführt werden.
Es sind also bereits in den einzelnen Schulbüchern der Primarstufe sehr unterschiedliche Zugänge zu der Einführung und Erarbeitung der Division zu sehen. Ähnliches findet sich auch in den Schulbüchern der Sekundarstufe beziehungsweise 5. Schulstufe wieder. In einigen österreichischen Schulbüchern wird bei der Einführung (beziehungsweise Wiederholung) der Division zunächst auf den Unterschied zwischen Messen und Teilen eingegangen.
In Abbildung 23 ist zu sehen, dass in dem Schulbuch *Das ist Mathematik 1* anhand zweier Beispiele zunächst der Unterschied zwischen Messen und Teilen dargebracht und anschließend erklärt wird, dass die Division jene Rechenoperation ist, welche dem Messen und Teilen

6.1 Dividieren durch einstellige natürliche Zahlen

Für die acht Schülerinnen und Schüler der Theatergruppe besorgt der Lehrer 24 Krapfen.

Wie viele Packungen muss der Lehrer kaufen, wenn in einer Packung 6 Krapfen sind? 24 Stück : 6 Stück = ____

Der Lehrer muss ____ **Packungen** kaufen.

Hier wurde **gemessen, wie oft** der Packungsinhalt in der Gesamtanzahl **enthalten** ist.

Wie viele Krapfen bekommt jedes Kind, wenn der Lehrer die Krapfen gleichmäßig aufteilt? 24 Stück : 8 = ____ Stück

Jedes Kind bekommt ____ **Krapfen**.

Hier wurde die Gesamtanzahl der Krapfen durch die Anzahl der Kinder **geteilt**.

Die Rechnung, die dem **Messen** und dem **Teilen** zugrunde liegt, heißt **Division**.

Abbildung 23: Einführung der Division in dem Schulbuch *Das ist Mathematik 1* (Humenberger et al., 2016, S. 54)

zugrunde liegt. Hier stehen also die beiden Grundvorstellungen im Fokus, werden explizit benannt und auch in Übungsaufgaben thematisiert. Dabei soll von den Schülerinnen und Schülern beispielsweise angegeben werden, ob es sich bei gegebenen Aufgabenstellungen um Messen oder Teilen handelt. Oder es sollen Rechengeschichten zu vorgegebenen Divisionen mit Einheiten erfunden werden. Auch einige andere österreichische Schulbücher (*Genial Mathematik 1*, *Mathematik verstehen 1*, *Expedition Mathematik 1*, ...) wählen einen ähnlichen Zugang.

Dann gibt es jedoch sowohl österreichische (*Mehrfach Mathematik 1*, *Plus! 1*, ...) als auch deutsche (*Fundamente der Mathematik 1*, ...) Schulbücher, welche den Unterschied der beiden Grundvorstellungen entweder gar nicht thematisieren und direkt mit der Rechenoperation starten oder die Division über die wiederholte Subtraktion einführen. Bei den Sachaufgaben finden sich in der Regel beide Vorstellungen wieder, werden allerdings auch hier nicht thematisiert. Abbildung 24 zeigt Ausschnitte zweier österreichischer Schulbücher. Im Buch *Plus! 1* wird die Division ausschließlich als Operation des Teilens klassifiziert und hauptsächlich der Rechenalgorithmus erklärt, während die Division im Schulbuch *Mehrfach Mathematik 1* über die wiederholte Subtraktion eingeführt wird. In beiden Fällen liegt der Fokus offensichtlich von Beginn an auf dem Berechnen und nicht hauptsächlich auf den Grundvorstellungen zu dieser Rechenoperation.

Bei diesen (und ähnlichen) Schulbüchern wird wohl davon ausgegangen, dass die Grundvorstellungen zu der Division bereits in den ersten vier Schulstufen so weit verinnerlicht sind, dass ein erneutes Wiederholen nicht notwendig ist. Genau hier setzt die empirische

Abbildung 24: Einführung der Division in zwei österreichischen Schulbüchern der 5. Schulstufe: Mehrfach Mathematik 1 (Krempl et al., 2018, S. 40), Plus! 1 (Wohlhart & Scharnreitner, 2018, S. 14 bzw. S. 36)

Untersuchung dieser Arbeit an, welche unter anderem genau diesen Sachverhalt ein wenig näher beleuchten möchte und zumindest im untersuchten Rahmen eine Antwort auf die folgende Frage geben soll: *Ist eine Wiederholung und Vertiefung der Grundvorstellungen zu der Division zu Beginn der Sekundarstufe notwendig und sinnvoll?* Eine zweite Frage, welche im Zuge dieser Recherche aufgetaucht ist, ist folgende: *Sollen Kinder den Unterschied zwischen Messen und Teilen auch benennen und zuordnen können?*
Die Beantwortung der ersten Frage ist sicherlich nicht allgemein für alle Schulformen gleichermaßen möglich. Dennoch ist eines gewiss: Für ein vollständiges Operationsverständnis müssen beide Vorstellungen zu der Division entsprechend verstanden und verinnerlicht sein. Im Zuge der Sekundarstufe wird dieses Operationsverständnis immer wieder verändert und erweitert, sodass diese Basis Voraussetzung für komplexere Inhalte ist. Spätestens bei der Bruchrechnung sind *beide* Vorstellungen zur Division entscheidend. Dazu sei die Rechnung $4 : \frac{1}{2} = 8$ ein illustrierendes Beispiel. Um diese in einem Kontext deuten zu können, ist die

Vorstellung des Messens erforderlich: Wie oft passt ein halber Meter in vier Meter? Mit der Vorstellung des Teilens kommt man an dieser Stelle nicht weiter (Abshagen et al., 2017, vgl. S. 89). Fehlt einem Kind jedoch bis dahin diese Vorstellung, kann dieser Zusammenhang nicht mit dieser verknüpft werden, sondern muss gänzlich neu verinnerlicht werden. Wie bereits in Kapitel 1.4 erläutert, können aus solchen Verständnislücken auch Fehlvorstellungen resultieren, welche es den Lernenden deutlich schwieriger machen, die neu gelernten Inhalte zu verstehen. Daher ist es meiner Meinung nach sehr wichtig, die beiden Grundvorstellungen zu der Division auch bei dem Übergang von der Primarstufe zu der Sekundarstufe zu wiederholen und zu festigen.
Bleibt noch die Frage offen, ob es wichtig ist, dass die Kinder die Begriffe *Messen* und *Teilen* auch benennen und zuordnen können sollen. Nach Abshagen et al. (2017) soll es keine Anforderung sein, dass Schülerinnen und Schüler die beiden Vorstellungen benennen und zuordnen können. Entscheidend ist, dass beide Vorstellungen verinnerlicht sind und entsprechende Sachaufgaben der Division zugeordnet werden können. Dass es nicht unbedingt notwendig ist, die beiden Vorstellungen zu benennen, um sie auch tatsächlich zu verstehen, liegt natürlich auf der Hand. Aber umgekehrt kann es meiner Meinung nach nur vorteilhaft sein, wenn man zusätzlich zum Verständnis die beiden Vorstellungen auch explizit unterscheiden und benennen kann. Hier spielt sicherlich auch Gewohnheit und Übung eine entscheidende Rolle. Werden in der gesamten Primarstufe die Wörter „Messen“ und „Teilen“ niemals erwähnt und in der Sekundarstufe wird plötzlich danach gefragt, so wird man mit großer Wahrscheinlichkeit auf Unverständnis stoßen. In so einem Fall müssten die beiden Grundvorstellungen (welche hoffentlich dennoch verinnerlicht sind) zunächst mit diesen neuen Begriffen verbunden werden.

Abbildung 25: Aufgabe aus dem Schulbuch *Genial Mathematik 1* (Beer et al., 2020, S. 84) zum Thema Messen und Teilen.

Sind diese Begriffe jedoch bereits aus der Volksschule vertraut, ist es mit Sicherheit durchaus sinnvoll, mit diesen auch weiter zu arbeiten und explizit danach zu fragen. Aufgaben, wie sie beispielsweise in Abbildung 25 zu sehen sind, können in so einem Fall gezielt eingesetzt werden und durchaus aufschlussreiche Erkenntnisse liefern.
Unabhängig davon, ob die Begriffe *Messen* und *Teilen* nun namentlich vorkommen oder nicht, wäre eine einheitliche Linie von der Primarstufe bis in die Sekundarstufe wünschenswert. Ähnlich wie bei der Frage nach der Position und dem Umgang mit dem Multiplikator, könnte auch bei diesem Thema ein gemeinsamer Konsens Verwirrungen und Unsicherheiten vorbeugen und vielleicht zu einem besseren Verständnis führen. Natürlich hängt der Erfolg eines Unterrichts und damit der Lernerfolg der Heranwachsenden nicht alleine von dem verwendeten Schulbuch ab, sondern zu einem großen Teil von dem Unterricht an sich. Dennoch

soll es eine gute Ergänzung, Hilfestellung und Übungsmöglichkeit für die Schülerinnen und Schüler darstellen und hat damit sicherlich auch einen Einfluss auf das Verständnis zu den mathematischen Inhalten.

2 Empirische Analyse

Nachdem nun die theoretischen Begriffe und Definitionen geklärt sind, wird in den folgenden Kapiteln die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Untersuchung thematisiert. Nach der Erläuterung der konkreten Forschungsfrage werden die Methode und das Design der Analyse beschrieben und anschließend die Ergebnisse präsentiert.

2.1 Forschungsfrage

Die Forschungsfrage, welche mittels empirischer Untersuchung beantwortet werden soll, lautet folgendermaßen:

Welche Grundvorstellungen zu den beiden Grundrechnungsarten Multiplikation und Division können bei Schülerinnen und Schülern einer AHS beim Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe festgestellt werden?

Im Zuge der Beantwortung dieser Frage wird außerdem überprüft, inwieweit die Rechenkompetenz in diesen beiden Grundrechnungsarten ausgeprägt ist und ob ein Unterschied bei den vorherrschenden Vorstellungen zwischen Schülerinnen und Schülern feststellbar ist.

2.2 Methode und Design

Um der eben genannten Frage nachzugehen, wurde die Untersuchung in vier ersten Klassen ($n = 99$) eines Wiener Gymnasiums im Frühjahr 2021 durchgeführt. Damit ein möglichst vollständiges Bild über die bestehenden Vorstellungen in diesem Jahrgang gezeichnet werden kann, wurde eine quantitative Untersuchung mittels Fragebogen durchgeführt. Die dadurch ermittelten schriftlichen Antworten der Schülerinnen und Schüler wurden anschließend qualitativ untersucht, in entsprechende Kategorien eingeteilt und schließlich quantitativ ausgewertet.

2.3 Erstellung des Fragebogens

Das Herzstück dieser Untersuchung ist sicherlich der Fragebogen. Schließlich soll es damit möglich sein, alle nötigen Informationen zu sammeln, um eine Antwort auf die Forschungsfrage zu bekommen. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit besonderes Augenmerk darauf gelegt, einen Aufgabebogen zu entwickeln, mit welchem das tatsächlich gelingen kann. Basis für die Erstellung waren die im Zuge der Literaturrecherche und der theoretischen Aufarbeitung (siehe Kapitel 1.5) gewonnenen Erkenntnisse. In Anlehnung an die „Handreichung für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen“ (Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann, 2014) welche im Rahmen vom Projekt „Mathe sicher können“ konzipiert wurde, wurden Aufgabenformate ausgewählt und an die Fragestellung angepasst.

2.3.1 Welche Vorstellungen sollten nach der Primarstufe bereits ausgebildet sein?

Anhand des Lehrplans der Volksschule wurde zunächst ermittelt, welche der oben genannten Grundvorstellungen (siehe Kapitel 1.6) zu den Grundrechungsarten am Ende der 4. Klasse bereits etabliert sein müssten. Aus diesem geht hervor, dass grundsätzlich fast alle genannten Vorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern ausgebildet sein sollten:

„Beim Erlernen der additiven (Addieren, Subtrahieren) und multiplikativen (Multiplizieren, Dividieren) Rechenoperationen ist vom Erfahrungsbereich der Schüler auszugehen. Aus praktischem Handeln und bildhaftem Darstellen, wie z.B. Hinzufügen, Zusammenlegen, Vermehren, Vereinigen, Ergänzen, Wegnehmen, Abtrennen, Vermindern, sind die additiven Rechenoperationen abzuleiten, zu interpretieren und zu begründen. Die multiplikativen Rechenoperationen sind aus Situationen, wie zB wiederholtes Aneinanderfügen gleichmächtiger Mengen, Vervielfachen, wiederholtes Ausgliedern gleichmächtiger Mengen, Verteilen, Messen, abzuleiten, zu interpretieren und zu begründen“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2003, S. 20).

Im Bereich der multiplikativen Rechenoperationen wird im Lehrplan der Volksschule der kombinatorische Kontext allerdings nicht explizit erwähnt.

2.3.2 Auswahl der Fragen

Im Zuge des Planungsprozesses dieser Arbeit und insbesondere des Fragebogens hat sich herausgestellt, dass eine Überprüfung aller vier Grundrechnungsarten im Zuge einer Untersuchung nicht sinnvoll erscheint. Schließlich soll der Fragebogen nicht zu umfangreich sein, um eine mögliche Überforderung der Kinder zu vermeiden, aber dennoch genügend Informationen für eine Beantwortung der Fragestellung liefern. Unter diesen Gesichtspunkten wurden folglich die beiden additiven Operationen (Addition und Subtraktion) aus der Untersuchung gestrichen und ausschließlich die multiplikativen Operationen **Multiplikation** und **Division** untersucht.

Bei der Auswahl der Fragen wurde darauf geachtet, dass die Grundvorstellungen einerseits adäquat überprüft werden und andererseits ein möglichst abwechslungsreicher Fragebogen für die Schülerinnen und Schüler entsteht, welcher im Rahmen einer Unterrichtsstunde bearbeitet werden kann. Neben dem Überprüfen der Grundvorstellungen werden bei einigen Fragen auch Rechenkompetenzen abgefragt, um gleichzeitig auch ein Bild davon zu bekommen, ob diese beim Übergang von der Primar- in die Sekundarstufe ausreichend vorhanden sind. Der Fragebogen ist im Anhang dieser Arbeit zu finden.

Die ersten beiden Fragen des Aufgabenblatts sollen eine Antwort auf die Frage liefern, welche Grundvorstellungen zur Multiplikation bzw. Division bedient werden, wenn die Schülerinnen und Schüler zu einer gegebenen Rechnung selbst eine Rechengeschichte erfinden sollen. In

1) Erfinde zu der folgenden Rechnung eine passende Rechengeschichte und löse diese anschließend!

Angabe: $14 \cdot 5 =$	
Rechengeschichte:	Rechnung:
Antwort zur Rechengeschichte:	

Abbildung 26: Überprüfung der vorherrschenden Grundvorstellungen bei der Multiplikation

Abbildung 26 ist die entsprechende Angabe für die Multiplikation zu sehen. Neben dem Erfinden der Rechengeschichte soll außerdem die Rechnung gelöst und eine passende Antwort verfasst werden. Anhand der Rechengeschichte in Kombination mit der Antwort wird dabei ersichtlich, welche Vorstellung der Multiplikation bedient wird. Diese beiden Fragen stehen bewusst am Beginn des Fragebogens, um möglichst intuitive Lösungsansätze zu bekommen.

Die dritte Aufgabe (Abbildung 27 oben) soll der Frage nachgehen, ob der kombinatorische Kontext als Multiplikation gedeutet wird. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler neben dem Lösen der Aufgabe außerdem erläutern, wie sie auf ihre Lösung gekommen sind und wieder eine passende Antwort verfassen.

Aufgabe 4 beschäftigt sich mit der Grundvorstellung Messen der Division. Wie in Abbildung 27 zu sehen ist, wurde hier zusätzlich zu dem Text eine bildliche Darstellung der Situation hinzugefügt, welche dem besseren Verständnis der Sachaufgabe dient. Bei dieser Aufgabe muss nun nicht explizit beschrieben werden, wie man zu der Lösung gekommen ist. Allerdings liefert die Lösung in Kombination mit dem Antwortsatz eine Antwort auf die Frage, ob die gegebene Aufgabe als Division erkannt und außerdem der Kontext verstanden wurde. Beispiel 5 ist eine Fragestellung zu einem 10×6-Punktefeld und ist erst im Verlauf des Erstellungsprozesses des Fragebogens in die nähere Auswahl gekommen. Hintergrund ist die Frage, wie viele Schülerinnen und Schüler für eine derartige Zählaufgabe (*Wie viele Kreise sind auf dem folgenden Bild abgebildet?*) auf die Multiplikation zurückgreifen und diese auch richtig anwenden. Hier sollen die Kinder zusätzlich erklären, wie sie jeweils auf diese Lösung gekommen sind.

3) Lorenz hat in seinem Kleiderschrank 5 Hosen und 12 T-Shirts. Wie viele unterschiedliche Kombinationen von Hosen und T-Shirts kann er tragen? Schreibe auf, wie du zu deiner Lösung gekommen bist!

Überlegungen/Rechnungen:
Antwort:

4) Herr Meier hat nach seiner Gartenumgestaltung einen Erdhaufen von etwa 500 kg auf seiner Wiese liegen, welchen er mit seinem Fahrzeug wegbringen möchte. Mit seiner Schaufel kann Herr Meier in etwa 4 kg Erde heben.

Wie oft muss er schaufeln, um den gesamten Erdhaufen auf seinen Transporter zu verladen?

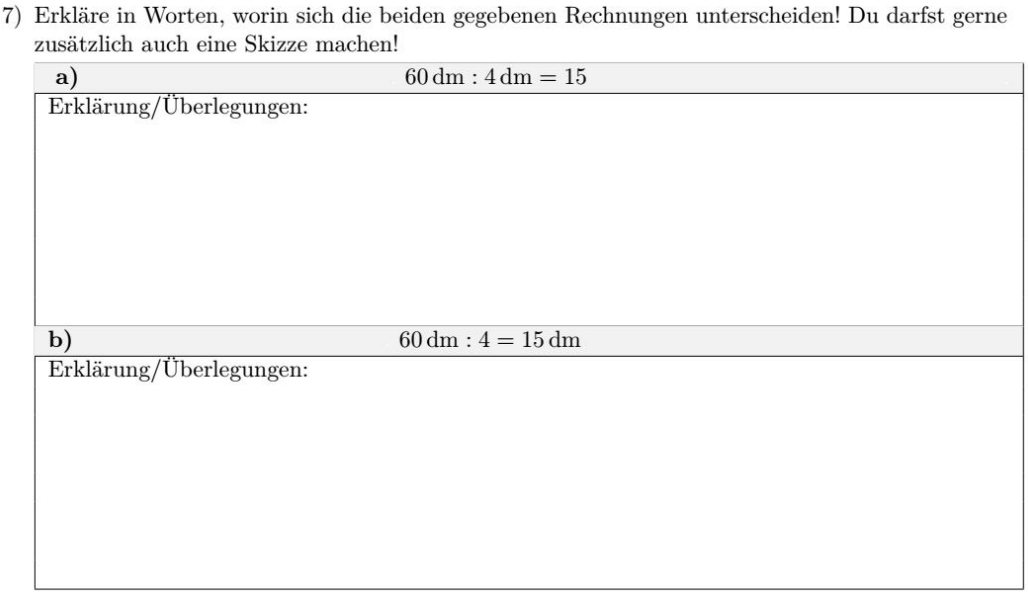
Überlegungen/Rechnungen:	
Antwort:	

Abbildung 27: Aufgabe 3: Überprüfung der Vorstellung des kombinatorischen Kontexts der Multiplikation, Aufgabe 4: Überprüfung der Grundvorstellung *Messen* bei der Division

Bei Aufgabe 6 ist wieder eine Sachsituation gegeben: *Ein Kinosaal mit 480 Sitzplätzen hat 30 gleich lange Reihen. Wie viele Sitzplätze sind in einer Reihe?* Hier geht es um die Vorstellung des Teilens, welche mittels Division bearbeitet wird. Ähnlich wie bei Aufgabe 4 müssen auch hier keine zusätzlichen Erläuterungen aufgeschrieben werden, warum eine Division durchgeführt werden muss. Eine Antwort auf die Frage ist ebenfalls verlangt.

Unkonventionell sind schließlich die beiden Aufgaben 7 und 8, welche sehr ähnlich aufgebaut sind. Die Schülerinnen und Schüler sollen in eigenen Worten erklären, worin sich zwei gegebene Rechnungen unterscheiden und gegebenenfalls auch eine Skizze hinzufügen. In Abbildung 28 ist jene Aufgabe zu sehen, welche sich mit den unterschiedlichen Vorstellun-

gen von Messen und Teilen bei der Division auseinandersetzt. Aufgabe 8 beschäftigt sich ganz analog mit dem Unterschied der beiden Rechnungen $4 \cdot 5m = 20m$ und $5 \cdot 4m = 20m$. Hintergrund dieser beiden Aufgaben ist die Frage, ob die Vorstellungen der Kinder so weit ausgebildet und gefestigt sind, dass die Unterschiede im Kontext allein durch die unterschiedlichen Angaben erkannt werden oder nicht.


7) Erkläre in Worten, worin sich die beiden gegebenen Rechnungen unterscheiden! Du darfst gerne zusätzlich auch eine Skizze machen!

a)	$60\,\mathrm{dm} : 4\,\mathrm{dm} = 15$
Erklärung/Überlegungen:	

b)	$60\,\mathrm{dm} : 4 = 15\,\mathrm{dm}$
Erklärung/Überlegungen:	

Abbildung 28: Kann der Unterschied von *Messen* und *Teilen* anhand der gegebenen Beispiele von den Schülerinnen und Schülern erklärt werden?

Als Abschluss des Fragebogens sollen schließlich noch zwei Rechnungen – eine Multiplikation und eine Division – gelöst werden. Bei diesen Aufgaben wird ausschließlich die Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler überprüft. Der komplette Fragebogen ist am Ende der Arbeit im Anhang zu finden.

2.4 Durchführung der Untersuchung und Beschreibung der Stichprobe

Durchgeführt wurde die beschriebene Untersuchung im Frühjahr des Schuljahrs 2020/21 an einem Wiener Gymnasium. Ursprünglich hätte das Projekt früher durchgeführt werden sollen, doch auf Grund der im Herbst und Winter 2020 vorherrschenden Covid-19 Situation, wurde erst zu diesem Zeitpunkt ein geeigneter Rahmen gefunden.
Grundsätzlich handelt es sich bei der untersuchten Schule um ein sehr lesitungsorientiertes Gymnasium. Daher ist davon auszugehen, dass bei den meisten der untersuchten Kinder ein „Sehr gut“ oder zumindest ein „Gut“ im Unterrichtsfach Mathematik im Abschlusszeugnis der Volksschule zu finden ist und folglich die meisten mathematischen Inhalte, welche der

Lehrplan der Volksschule vorsieht, gekonnt und verstanden wurden. Somit kann anhand der in dieser Stichprobe ermittelten Daten sicherlich nicht automatisch auf Kinder in anderen Gymnasien oder gar Mittelschulen geschlossen werden, was jedoch im Rahmen dieser Untersuchung ohnehin nicht die Zielsetzung war.
Alle vier der untersuchten Klassen der fünften Schulstufe wurden innerhalb eines kurzen Zeitraums überprüft, wobei dabei $n = 99$ Fragebögen ausgefüllt wurden. In Abbildung 29 ist zu erkennen, dass die Anzahl der Mädchen und Buben, welche bei dieser Untersuchung teilgenommen haben, annähernd gleich groß ist.

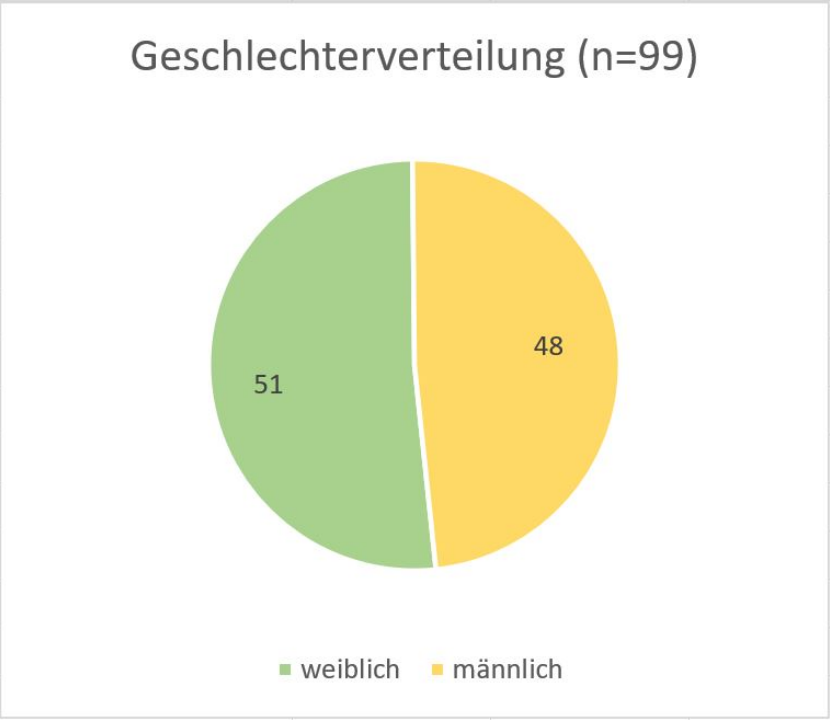


Abbildung 29: Geschlechterverteilung der Schülerinnen und Schüler in dieser Untersuchung im Überblick

Nachdem zu der Zeit der Testung im geteilten Schichtbetrieb unterrichtet wurde, mussten in jeder Klasse zwei Unterrichtsstunden in Anspruch genommen werden. Die Schülerinnen und Schüler hatten knapp 50 Minuten Zeit, um das Arbeitsblatt entsprechend zu bearbeiten, wobei sich herausgestellt hat, dass die Kinder bei der Bearbeitung des Fragebogens in der Regel zwischen 30 und 40 Minuten beschäftigt waren. Bei Fragen zu den Aufgabenstellungen war jeweils eine instruierte Lehrperson anwesend, die entsprechend reagieren konnte. Besonders in Hinblick auf die Beantwortung der ersten beiden Aufgaben des Fragebogens war es wichtig, dass auf die Frage nach der Bedeutung des Terminus *Rechengeschichte*, nicht mit einem konkreten Beispiel geantwortet wurde. Das hätte womöglich zur Folge gehabt, dass einige Schülerinnen und Schüler die in dem Beispiel übermittelte Vorstellung einfach übernommen hätten.

2.5 Auswertung des Fragebogens

Wie bereits eingangs erwähnt, mussten die bei der Untersuchung erhobenen Daten anschließend qualitativ untersucht werden. Die Vorgangsweise der Auswertung der Fragen wird in diesem Kapitel Schritt für Schritt erläutert und Beispiele aus der Untersuchung gebracht. Zunächst wird jedoch die gewählte Methode zur Auswertung der Schülerantworten näher erläutert.

2.5.1 Kategoriebildung und Codierung der offenen Fragen

Nachdem es sich bei den meisten Fragen um „informative Aufgaben“ handelt, welche Einblicke in die Denk- und Argumentationsweisen der Schülerinnen und Schüler erlauben, mussten diese vor der statistischen Auswertung qualitativ analysiert werden. Um beispielsweise absolute und relative Häufigkeiten bestimmter Grundvorstellungen in den Antwortbögen zu ermitteln, ist es notwendig, die Antworten der Schülerinnen und Schüler diesen auch zuordnen zu können. Damit diese Verständnisstufen der Schülerinnen und Schüler differenziert beschrieben werden können, müssen entsprechende Antwortkategorien entweder deduktiv oder induktiv erarbeitet werden. Dabei müssen diese Kategorien so gewählt werden, dass diese logisch voneinander unabhängig sind, damit eine eindeutige Zuordnung möglich ist (Hammann & Jördens, 2014, vgl. S. 170 f). Nachdem im Zuge der Literaturrecherche für diesen Zweck kein bereits passendes Kategoriensystem gefunden werden konnte, wurde für die einzelnen Fragen jeweils ein entsprechendes entwickelt. Wie in Blum, Hofe, Jordan und Kleine (2004) nachzulesen ist, gibt es zwar ein System, bei welchem Grundvorstellungen als empirische Kategorie für quantitative Studien dienen. Dabei steht jedoch die *Grundvorstellungsintensität* von Übungsaufgaben und entsprechenden Antworten von Schülerinnen und Schülern im Fokus, welche für die in dieser Arbeit gestellte Frage nicht zielführend erscheint. Im Zuge dieser Arbeit wurden die Kategorien der einzelnen Aufgaben nach Durchsicht der Antworten der Schülerinnen und Schüler induktiv entwickelt, wobei die in Kapitel 1.6 erläuterten Grundvorstellungen Basis der Entwicklung dieser Kategorien waren. Ziel dabei war es, die Kategorien so zu wählen, dass die anschließende Codierung eindeutig und möglichst nachvollziehbar durchgeführt werden konnte. Im folgenden Abschnitt werden die entwickelten Kategorien vorgestellt und entsprechende Beispiele angeführt.

2.5.2 Aufgabe 1

Das zentrale Untersuchungsziel der ersten Aufgabe war, einen Überblick zu bekommen, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler „intuitiv“ aufgreifen, um die gegebene Multiplikation in eine Rechengeschichte zu übersetzen. Daher wurden die Rechengeschichten in Hinblick auf die zugrundeliegenden Grundvorstellungen untersucht und in entsprechende Kategorien unterteilt. Folgende Grundvorstellungen wurden dabei gefunden:

1. Räumlich-simultane Anordnungen
2. Zeitlich-sukzessive Handlungen
3. Formelhafte Multiplikation von Größen
4. Multiplikativer Vergleich

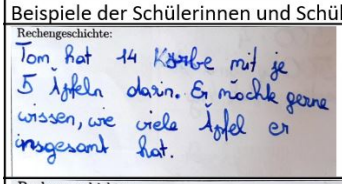
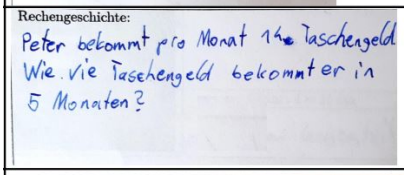
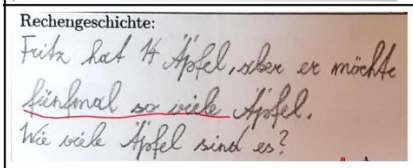
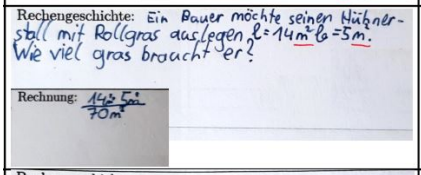
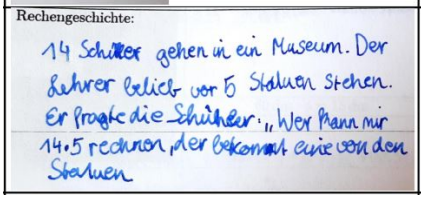
Beispiele der Schülerinnen und Schüler	Kategorie	Rechengeschichte
	**Räumlich-simultane Anordnung**	Tom hat 14 Körbe mit je 5 Äpfeln darin. Er möchte gerne wissen, wie viele Äpfel er insgesamt hat.
	**Zeitlich-sukzessive Handlung**	Peter bekommt pro Monat 14 € Taschengeld. Wie viel Taschengeld bekommt er in 5 Monaten?
	**Multiplikativer Vergleich**	Fritz hat 14 Äpfel, aber er möchte fünfmal so viele Äpfel [haben]. Wie viele Äpfel sind es?
	**Formelhafte Multiplikation von Größen**	Ein Bauer möchte seinen Hühnerstall mit Rollgras auslegen: l = 14 m , b = 5 m Wie viel Gras braucht er? *Anmerkung: Dieses Kind hat bei Länge und Breite fälschlicherweise m^2 als Einheit angeschrieben.*
	**Keine multiplikative Grundvorstellung**	14 Schüler gehen in ein Museum. Der Lehrer blieb vor 5 Statuen stehen. Er fragte die Schüler: "Wer kann mir 14 • 5 rechnen, der bekommt eine von den Statuen[?"]

Abbildung 30: Kategorien der Aufgabe 1 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

Wie bereits in Kapitel 1.6 erwähnt, stehen räumlich-simultane Anordnungen und zeitlich-sukzessive Handlungen in einem engen Zusammenhang. In einigen Fällen war es schwierig, eine eindeutige Zuordnung zu einer Kategorie zu finden. In so einem Fall wurde jene Kategorie gewählt, welche als etwas besser passend erachtet wurde.
Einige Kinder haben bei dieser Aufgabe keine Rechengeschichte gefunden oder zumindest nicht verschriftlicht, sodass diese Antworten unter der Kategorie *Keine Rechengeschichte* zusammengefasst wurden. Jene Rechengeschichten, welche keine multiplikativen Vorstellungen beinhaltet haben, wurden in der Kategorie *Keine multiplikative Grundvorstellung* zusammengefasst. In Abbildung 30 sind die einzelnen eben genannten Kategorien mit entsprechenden Beispielen zu sehen. Zusätzlich zu diesen Kategorien wurde überprüft, ob die Multiplikation richtig gerechnet wurde.

2.5.3 Aufgabe 2

Analog zu Aufgabe 1 wurden auch hier die Rechengeschichten der Schülerinnen und Schüler auf Basis der Grundvorstellungen der Division analysiert und entsprechend induktiv kategorisiert. Folgende Kategorien wurden dabei entwickelt:

1. Teilen
2. Messen
3. Keine divisionale Vorstellung
4. Keine Rechengeschichte

In Abbildung 31 sind die einzelnen Kategorien mit ausgewählten Beispielen zu sehen. Auch bei dieser Aufgabe wurde zusätzlich überprüft, ob die angegebene Division richtig gerechnet wurde.

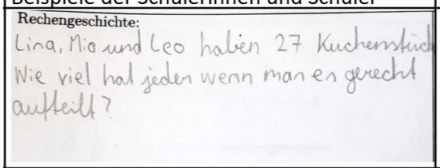
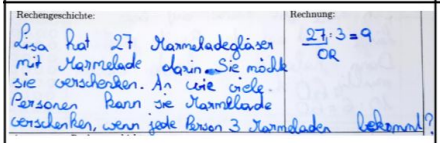
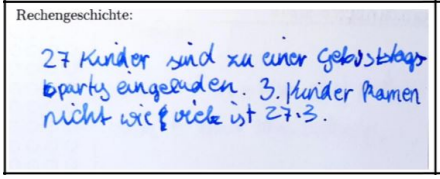
Beispiele der Schülerinnen und Schüler	Kategorie	Rechengeschichte
	**Teilen**	Lina, Mia und Leo haben 27 Kuchenstücke. Wie viel[e] hat jeder, wenn man es gerecht aufteilt?
	**Messen**	Lisa hat 27 Marmeladegläser mit Marmelade darin. Sie möchte sie verschenken. An wie viele Personen kann sie Marmelade verschenken, wenn jede Person 3 Marmeladen bekommt?
	**Keine divisionale Vorstellung**	27 Kinder sind zu einer Geburtstagsparty eingeladen. 3 Kinder kamen nicht[.] Wie viel ist 27:3[?]

Abbildung 31: Kategorien der Aufgabe 2 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

2.5.4 Aufgabe 3

Bei dieser Aufgabe sollte die Grundvorstellung der Multiplikation im kombinatorischen Kontext überprüft werden. Daher wurden die Lösungsansätze, Rechnungen und Überlegungen dahingehend analysiert und evaluiert, inwiefern diese Vorstellung bei den Schülerinnen und Schülern etabliert ist. Bei der Durchsicht der Fragebögen konnte festgestellt werden, dass sich die Antworten in drei Gruppen gliedern lassen. Diese Gliederung wurden folglich für die Entwicklung der Kategorien übernommen:

1. Lösung mittels Multiplikation
2. Lösungsansatz richtig
3. Fehlvorstellung/fehlende Vorstellungen

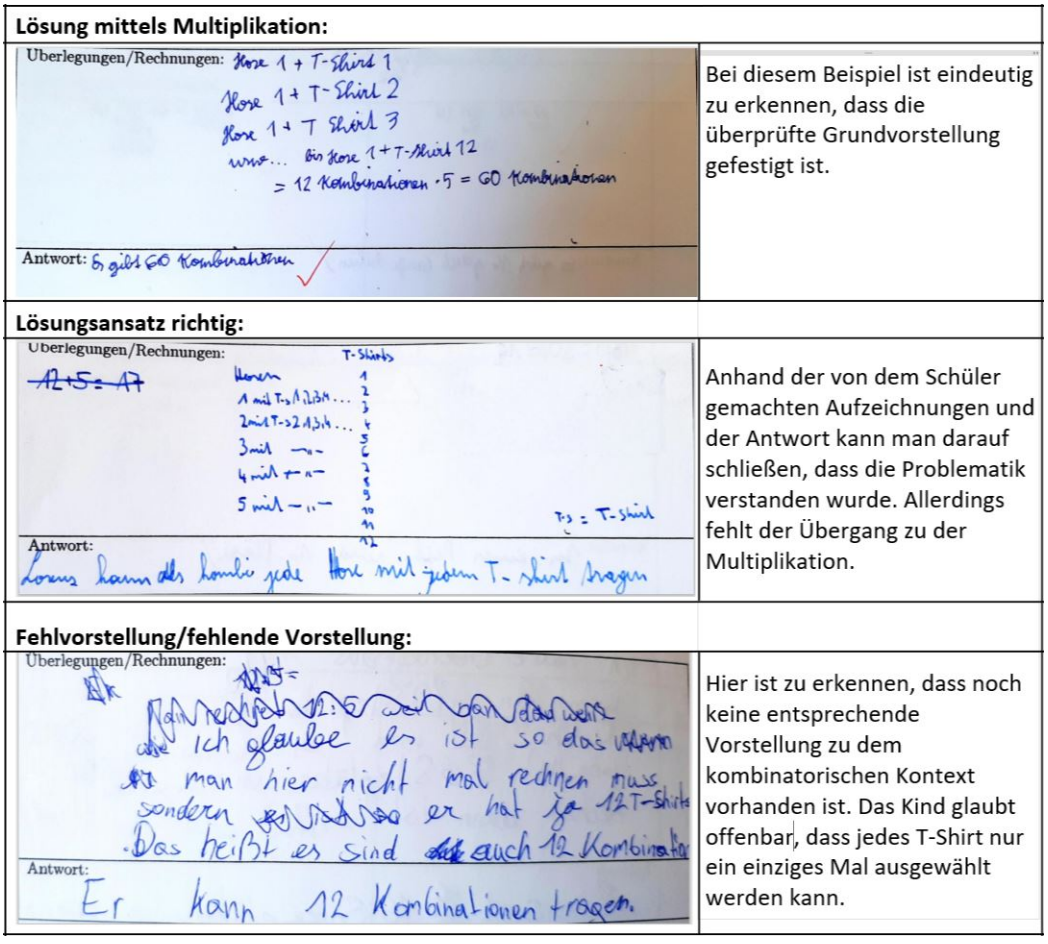


Abbildung 32: Kategorien der Aufgabe 3 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

In Abbildung 32 sind Beispiele der jeweiligen Kategorien zu finden.
In einem weiteren Schritt wurden anschließend die fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben, welche in der Kategorie „Fehlvorstellungen/fehlende Vorstellung“ zusammengefasst wurden, genauer unter die Lupe genommen und analysiert, zu welchen Fehlvorstellungen und Rechenfehlern es dabei gekommen ist. Genaueres dazu findet sich im Ergebnisbericht.

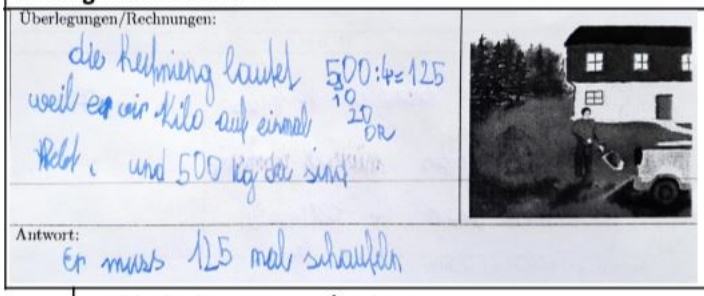
2.5.5 Aufgabe 4

Aufgabe 4 geht der Frage nach, ob die Grundvorstellung des Messens bei den Schülerinnen und Schülern derart etabliert ist, dass die gegebene Aufgabenstellung als Division erkannt und folglich entsprechend gelöst wird. Daher wurde zunächst eine Kategorie „Lösung mittels Division“ gebildet. Im Zuge der Durchsicht der Lösungen der Schülerinnen und Schüler konnte jedoch festgestellt werden, dass in einigen Fällen die Antworten nicht zu der Fragestellung passen, beziehungsweise die falsche Einheit (kg statt *Anzahl*) angegeben wurde. Daher wurde eine Unterkategorie zu der bereits beschriebenen hinzugefügt, welche diese Fälle zusammenfasst: „Fehlerhafte Antwort/Einheit“. Außerdem wurden noch zwei weitere Kategorien hinzugefügt, wie in der folgenden Auflistung zu sehen ist:

1. Lösung mittels Division
    (a) Fehlerhafte Antwort/Einheit
2. Alternativer Lösungsweg
3. Fehlvorstellung/fehlende Vorstellungen

Abbildung 33 zeigt jeweils ein Beispiel zu den vier Antwortkategorien. Auch bei dieser Aufgabe wurden die Antworten der Kategorie „Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung“ genauer betrachtet und in der Ergebnisdokumentation näher erläutert.

Lösung mittels Division

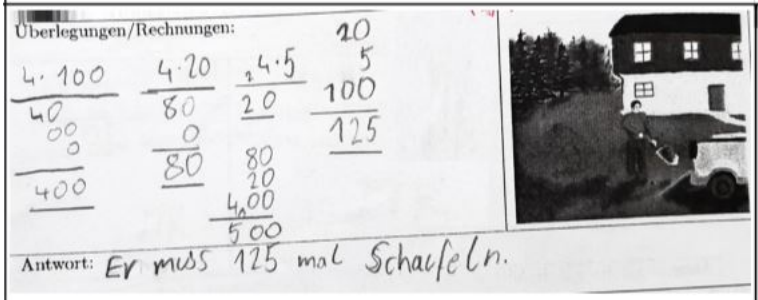


Bei diesem Beispiel ist eindeutig zu erkennen, dass die überprüfte Grundvorstellung gefestigt ist.

Fehlerhafte Antwort/Einheit

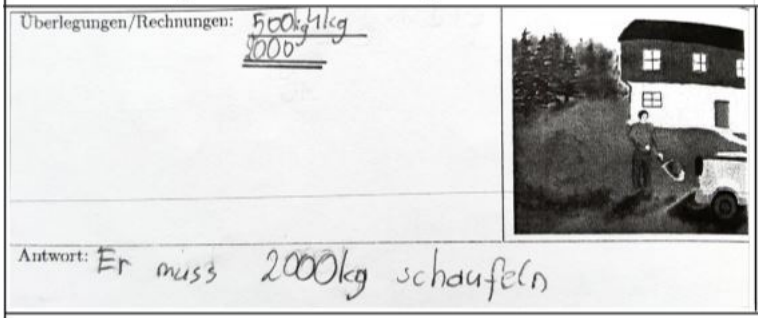
Hier wurde zwar die richtige Rechnung aufgeschrieben und auch richtig gerechnet, allerdings wurde bei der Antwort die falsche Einheit verwendet.

Alternativer Lösungsweg



Hier wurde die gestellte Aufgabe über einen multiplikativen Zugang gelöst. Inwiefern die Grundvorstellung *Messen* bei diesem Kind ausgeprägt ist, kann aufgrund dieser Lösung nicht beurteilt werden.

Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung



Bei diesem Beispiel ist zu erkennen, dass die Aufgabe nicht verstanden wurde und anstelle einer Division eine Multiplikation aufgestellt wurde. Die Grundvorstellung *Messen* ist (womöglich) noch nicht ausgebildet.

Abbildung 33: Kategorien der Aufgabe 4 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

2.5.6 Aufgabe 5

Bei dieser Aufgabe sollte untersucht werden, wie viele Kinder die Anzahl an Punkten eines Punktefelds mittels Multiplikation ermitteln. Daher wurden all jene Antworten, bei welchen das der Fall ist, in der Kategorie „Lösung mittels Multiplikation“ zusammengefasst. Zu dieser Kategorie wurde außerdem eine Unterkategorie erstellt, welcher Antworten zugeordnet wurden, bei denen die Multiplikation entweder falsch aufgestellt oder berechnet wurde. Kinder, welche überhaupt eine andere Strategie des Zählens verwendet haben, wurden in der Kategorie „Alternative Lösungsstrategie“ zusammengefasst. In Abbildung 34 sind Beispiele der jeweiligen Kategorien zu finden.

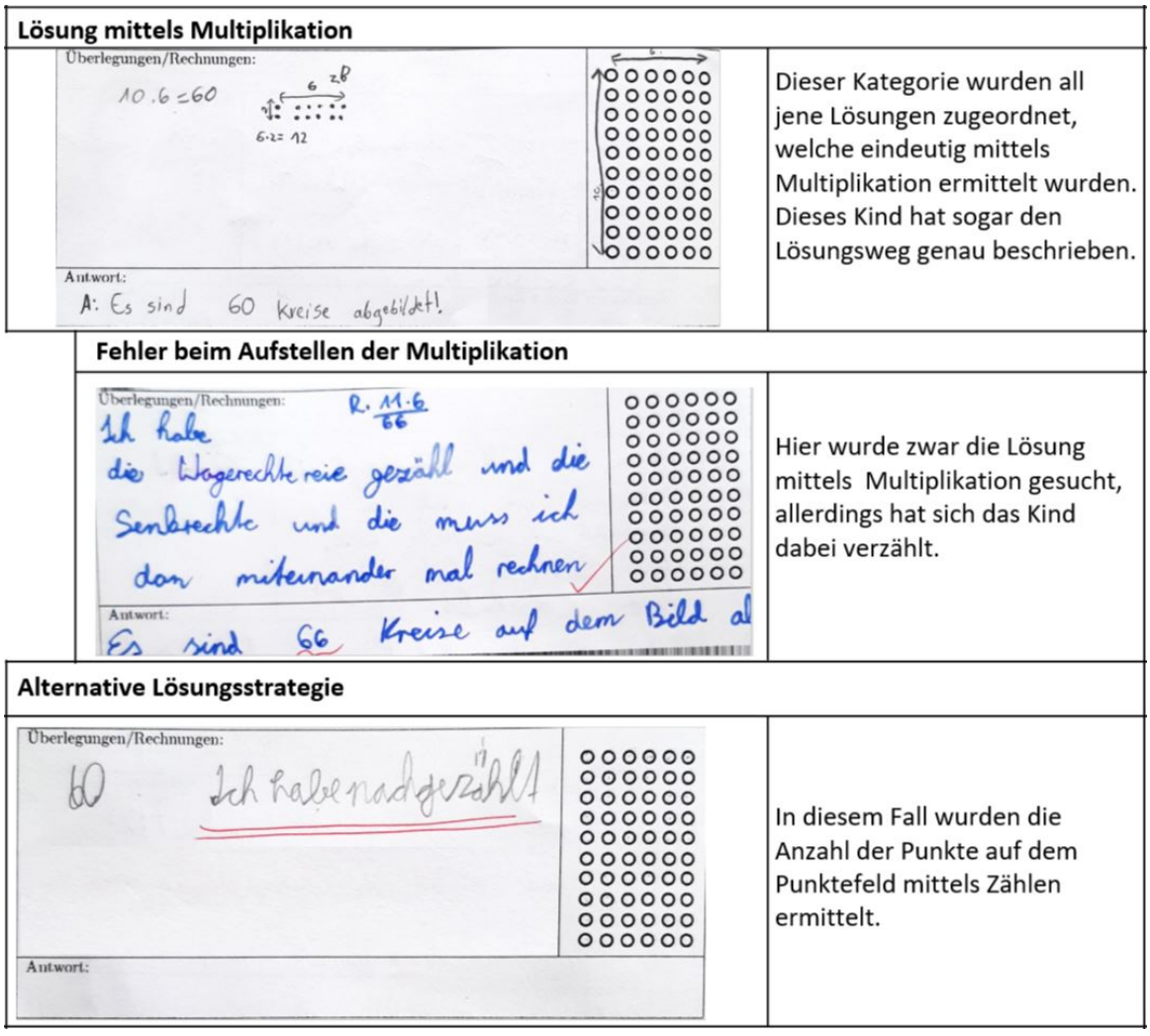


Abbildung 34: Kategorien der Aufgabe 5 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

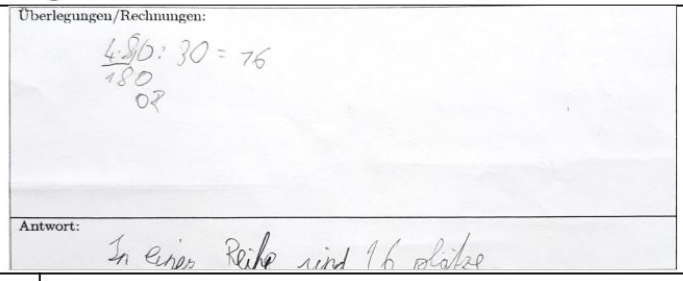
2.5.7 Aufgabe 6

Diese Aufgabe geht der Frage nach, inwiefern eine Sachaufgabe, welche die Vorstellung des Teilens bedient, auch tatsächlich mit der Rechenoperation der Division gelöst wird. In so einem Fall kann davon ausgegangen werden, dass diese Vorstellung des Teilens bei den Schülerinnen und Schülern bereits ausgebildet ist. Nach Durchsicht der bei dieser Untersuchung gewonnenen Antworten, liegt eine Einteilung in folgende Kategorien nahe. Auch hier wurde analog zu Beispiel 4 eine Unterkategorie gebildet:

1. Lösung mittels Division
    (a) Fehlerhafte Antwort/Einheit
2. Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung

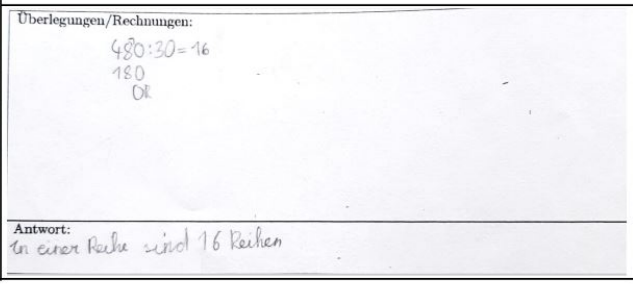
In Abbildung 35 sind jeweils Beispiele zu den einzelnen Kategorien zu finden. Welche unterschiedlichen Fehlvorstellungen im Zuge dieser Untersuchung bei dieser Aufgabe ausgemacht werden konnten, wird im Ergebnisbericht näher erläutert.

Lösung mittels Division



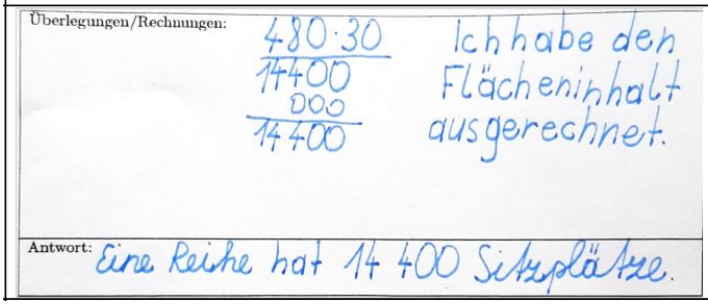
Dieser Kategorie wurden all jene Lösungen zugeordnet, welche eindeutig mittels Division ermittelt wurden.

Fehlerhafte Antwort/Einheit



Hier wurde zwar die Lösung mittels Division ermittelt, allerdings ist die Einheit bei der Antwort nicht korrekt.

Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung



Bei diesem Beispiel wurde eine Multiplikation anstelle einer Division gerechnet. Der Kontext dieser Sachaufgabe, welcher auf die Vorstellung des Teilens abzielt, wurde offensichtlich nicht verstanden.

Abbildung 35: Kategorien der Aufgabe 6 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

2.5.8 Aufgabe 7

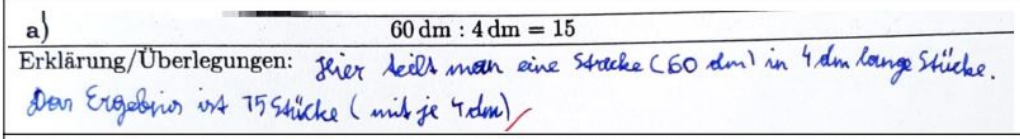
Bei Aufgabe 7 sollten die Schülerinnen und Schüler beschreiben, welcher Unterschied bei den beiden gegebenen Rechnungen $60\,\mathrm{dm} : 4\,\mathrm{dm} = 15$ und $60\,\mathrm{dm} : 4 = 15\,\mathrm{dm}$ festzustellen ist – gegebenenfalls mit einer Skizze. Die Lösungen der Kinder bei dieser Aufgabe wurden zu folgenden Kategorien zugeordnet:

1. Kontext (zumindest teilweise) erkannt
   (a) Aufgabe a) als *Messen* erkannt
   (b) Aufgabe b) als *Teilen* erkannt
   (c) passende Skizze
2. Unterschied ausschließlich durch Rechenregel
3. Unterschied ausschließlich durch Einheitentausch bzw. vergessene Einheiten
4. keine Antwort

An dieser Stelle sei gesagt, dass es sich in diesem Fall nicht um ausschließlich disjunkte Kategorien handelt, da die erste drei Unterkategorien umfasst. In die Kategorie 1 fallen die Lösungen all jener Schülerinnen und Schüler, welche zumindest in einer der drei Unterkategorien vertreten sind. So kann ein Kind beispielsweise Aufgabe a) als Messen erkannt und gleichzeitig eine passende Skizze gezeichnet haben. Die restlichen drei Kategorien sind jedoch tatsächlich abgeschlossen. Fällt eine Antwort in eine dieser Kategorien, ist diese in keiner anderen zu finden. In Abbildung 36 sind Beispiele der Kategorien aufgelistet. Nachdem all jene Antworten in Kategorie 1 fallen, welche in zumindest einer Unterkategorie zu finden sind, ist diese in der Abbildung nicht vertreten.

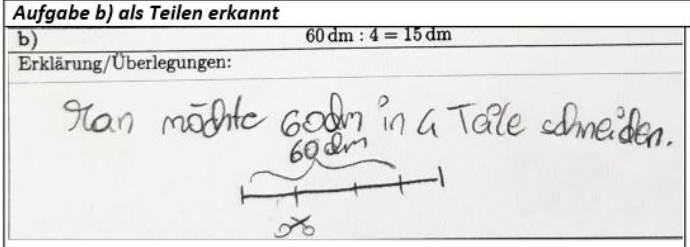
Kontext (zumindest teilweise) erkannt

Aufgabe a) als Messen erkannt



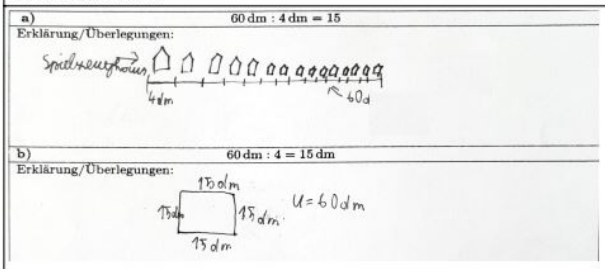
Anhand der Lösung ist hier eindeutig zu erkennen, dass das Kind die Vorstellung des Messens bereits verinnerlicht hat. Damit eine Zuordnung zu dieser Kategorie möglich ist, muss eine solche oder eine ähnliche Erklärung (auch in Form einer Skizze) vorhanden sein.

Aufgabe b) als Teilen erkannt



Aufgrund der Erklärung der Schülerin in Aufgabe b) ist eine Zuordnung zu diese Kategorie eindeutig gegeben. Für eine Zuteilung in diese Kategorie muss der Vorgang des Teilens einer Strecke in gleich lange Stücke (auch ausschließlich in Form einer Skizze) eindeutig erkennbar sein.

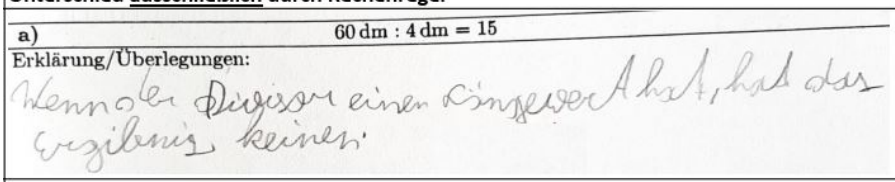
Passende Skizze



In dieser Kategorie wurden all jene Lösungen gesammelt, welche eine passende Skizze zu den Aufgaben aufweisen. Dabei wurde nicht differenziert, ob nur zu einer Aufgabe eine Skizze angefertigt wurde oder für beide.

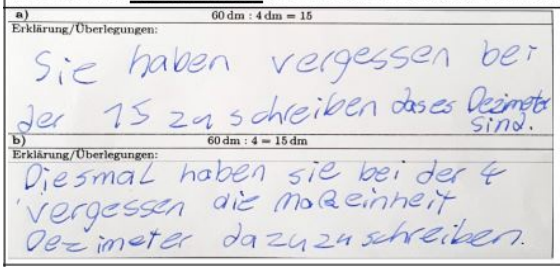
Anmerkung: Aufgaben, welche dieser Kategorie zugeordnet sind, finden sich gleichzeitig auch in anderen Kategorien wieder.

Unterschied <u>ausschließlich</u> durch Rechenregel



In dieser Kategorie werden all jene Beispiele gesammelt, bei welchen der Unterschied der beiden Rechnungen mit Hilfe der im Beispiel beschriebenen Rechenregel (auch in Abbildung 15 zu finden) erklärt wird. Aufgrund des Könnens dieser Regel allein kann noch nicht auf ein ausgebildetes Vorstellungskonstrukt der Division geschlossen werden.

Unterschied <u>ausschließlich</u> durch Einheitentausch bzw. vergessene Einheiten



Bei Aufgaben, welcher dieser Kategorie zugeordnet sind, ist der Unterschied zwischen den beiden Rechnungen ausschließlich mit fehlenden bzw. vertauschten Einheiten erklärt worden. In diesem Fall ist der Schüler davon ausgegangen, dass die Maßeinheiten jeweils vergessen wurden. Eine Vorstellung, wie Sachsituationen zu derartigen Angaben aussehen könnten, ist in so einem Fall nicht gegeben.

Abbildung 36: Kategorien der Aufgabe 7 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

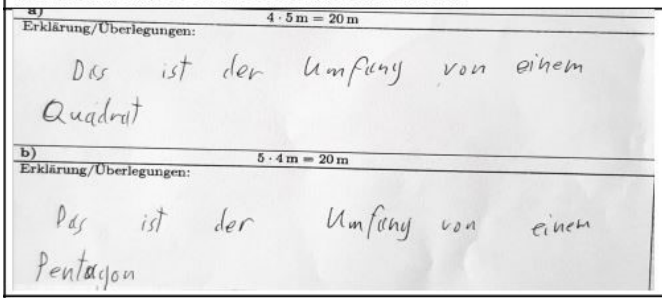
2.5.9 Aufgabe 8

Ähnlich der Aufgabe 7 soll bei dieser Aufgabe ein Unterschied zwischen zwei Rechnungen dargelegt werden. Dabei handelt es sich um die beiden Multiplikationen $4 \cdot 5\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$ und $5 \cdot 4\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$. Nach Durchsicht der im Zuge dieser Studie ermittelten Daten wurden folgende Kategorien erstellt:

1. Kontextueller Unterschied beschrieben
2. Kein kontextueller Unterschied beschrieben
3. Fehlvorstellung
4. passende Skizze
5. keine Antwort

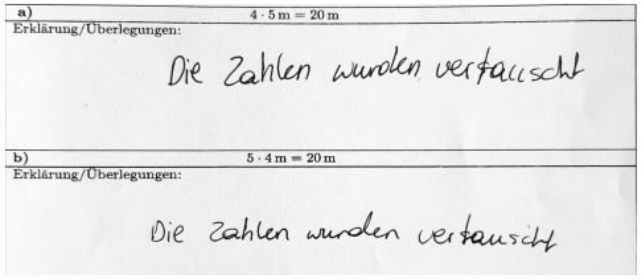
Es handelt sich auch hier wiederum nicht ausschließlich um disjunkte Kategorien. Ein Beispiel, bei welchem der kontextuelle Unterschied beschrieben ist, kann gleichzeitig auch eine Skizze beinhalten. Somit findet sich diese Antwort in beiden Kategorien wieder. In Abbildung 37 sind entsprechende Beispiele zu den einzelnen Kategorien angegeben.

Kontextueller Unterschied beschrieben



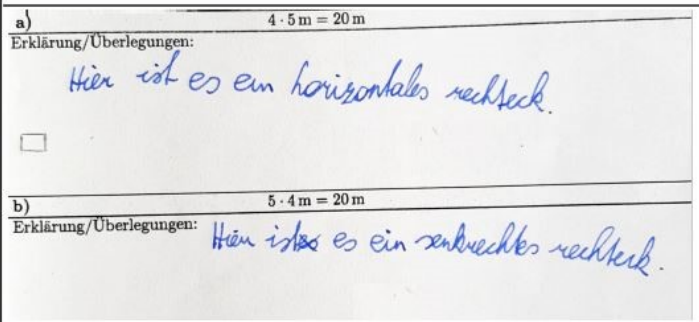
In dem nebenstehenden Beispiel kann man erkennen, dass dieser Schüler den kontextuellen Unterschied der beiden Multiplikationen verstanden hat. Der Unterschied muss bei dieser Kategorie allerdings nicht anhand des Umfangs beschrieben werden.

Kein kontextueller Unterschied beschrieben



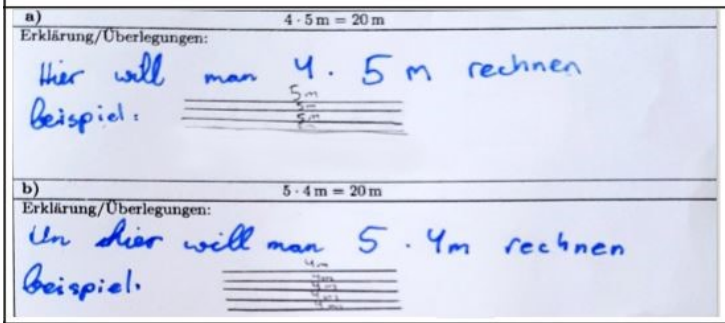
In diese Kategorie fallen all jene Lösungen, bei welchen kein kontextueller Unterschied beschrieben wird. In diesem Beispiel wird der Unterschied ausschließlich durch das Vertauschen der Zahlen ausgemacht. Erklärungen mittels Kommutativgesetz fallen ebenfalls in diese Kategorie.

Fehlvorstellung



Jene Lösungen, welche Fehlvorstellungen zu den gegebenen Multiplikationen beinhalten, sind in dieser Kategorie gesammelt. Dieser Schüler versteht die gegebenen Rechnungen beispielsweise als Flächenberechnung zweier unterschiedlicher Rechtecke.

Passende Skizze



Dieser Kategorie sind all jene Beispiele zugeordnet, welche passende Skizzen enthalten.

Anmerkung: Aufgaben, welche dieser Kategorie zugeordnet sind, finden sich gleichzeitig auch in anderen Kategorien wieder.

Abbildung 37: Kategorien der Aufgabe 8 mit entsprechenden Beispielen aus der Untersuchung

2.5.10 Aufgabe 9

Bei dieser Aufgabe wurde ausschließlich die Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler überprüft. Insofern wurden hier keinerlei Kategorien entwickelt, sondern lediglich quantitativ ausgewertet, wie viele Aufgaben korrekt beziehungsweise inkorrekt bearbeitet wurden. Im Ergebnisbericht ist außerdem zu finden, welche Fehler gemacht wurden und wie häufig diese aufgetreten sind.

2.6 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden schließlich die Ergebnisse zusammengefasst, welche im Zuge der Untersuchung gewonnen werden konnten. Hierbei werden zunächst die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben gesondert betrachtet und analysiert, um mögliche Schlüsse daraus zu ziehen. Außerdem werden anschließend die Aufgabenstellungen des Fragebogens anhand der gewonnenen Erkenntnisse erneut kritisch hinterfragt, um möglicherweise in Zukunft im Zuge einer Folgeuntersuchung ein noch schärferes Bild von den Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu erhalten. Ein weiteres Kapitel wird sich mit der Frage auseinandersetzen, welche Schlussfolgerungen nach einer derartigen Untersuchung für den Unterricht speziell in den untersuchten Klassen gezogen werden können.

2.6.1 Welche Grundvorstellungen der Multiplikation bzw. Division konnten anhand der Rechengeschichten ermittelt werden?

Sowohl bei der Multiplikation als auch bei der Division hat sich bei der Auswertung der ersten beiden Fragen des Überprüfungsbogens ein sehr klares Bild gezeichnet, welche Grundvorstellungen zu den multiplikativen Grundrechnungsarten bei den untersuchten Schülerinnen und Schülern vorherrschend sind. In Abbildung 38 sind die Häufigkeiten der einzelnen Vorstellungen zu der Multiplikation graphisch dargestellt.

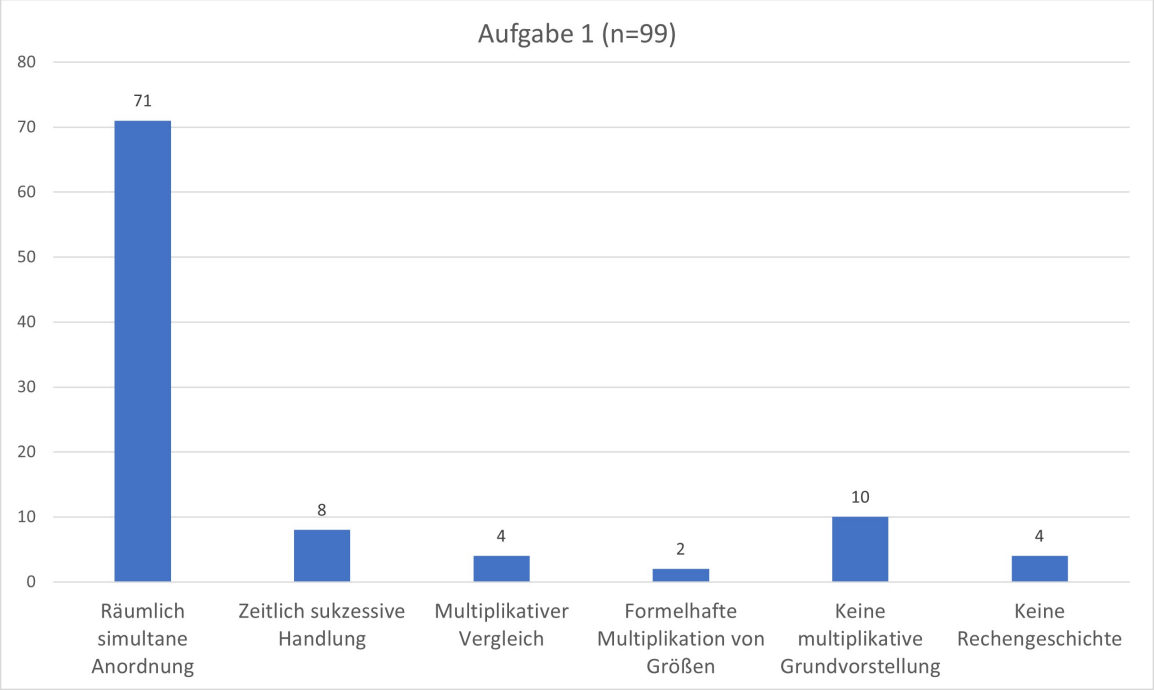


Abbildung 38: Häufigkeiten der erfassten Grundvorstellungen zu der Multiplikation

Dabei ist eindeutig zu erkennen, dass ein erheblicher Teil der Schülerinnen und Schüler Rechengeschichten erfanden, welche räumlich simultane Anordnungen beschreiben. Neben dieser Vorstellung wurden des Weiteren zeitlich sukzessive Handlungen, multiplikative Vergleiche und außerdem zwei formelhafte Multiplikationen von Größen beschrieben, welche jedoch zusammen nur rund 14% der Gesamtmenge ausmachten. Ein kombinatorischer Kontext konnte in keiner Rechengeschichte festgestellt werden, wodurch anzunehmen ist, dass diese Vorstellung der Multiplikation nicht so gefestigt ist, wie die übrigen genannten. Das ist allerdings wenig verwunderlich, da der kombinatorische Zugang zur Multiplikation im Lehrplan der Volksschule auch nicht explizit erwähnt wird und im Vergleich zu den übrigen Vorstellungen wohl sehr selten thematisiert wird.
Rund 10% der Schülerinnen und Schüler stellten Rechengeschichten auf, welche keine multiplikative Vorstellung beinhalten und vier Kinder schrieben gar keine Geschichte auf. Warum in diesen vier Fällen keine Rechengeschichte aufgeschrieben wurde ist nicht ersichtlich. Vergleicht man die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler miteinander, so zeigt sich, dass sich die Verteilung der Häufigkeiten der einzelnen Grundvorstellungen in dieser Aufgabe nicht nennenswert unterscheiden. Allerdings konnten bei den Schülerinnen im Vergleich zu den Schülern mehr als doppelt so viele (7) Rechengeschichten gefunden werden, bei welchen keine multiplikative Vorstellung bedient wurde. Bei diesen Geschichten haben sich unter anderem auch Fehlvorstellungen gezeigt.

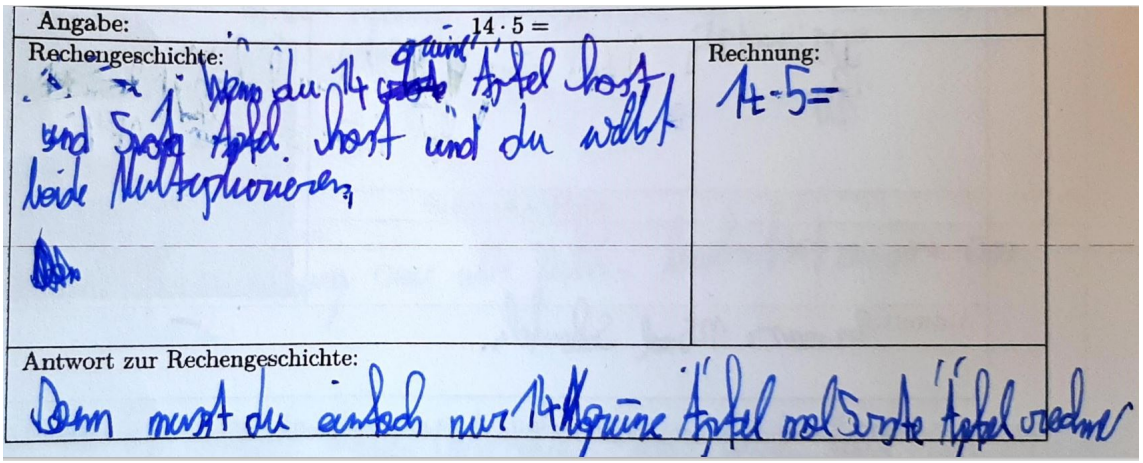


Abbildung 39: Beispiel einer Schülerinnenlösung, bei welcher keine multiplikative Vorstellung erkennbar ist

In Abbildung 39 ist folgende Rechengeschichte aufgestellt worden:

Wenn du 14 grüne [...] und 5 rote Äpfel hast und du willst beide multiplizieren[.]

Diese Schülerin hat anscheinend noch keine gefestigte Vorstellung zu der Multiplikation und hat die Zahlen in der Rechnung $14 \cdot 5$ einfach durch Äpfel ersetzt. Dass eine derartige Mul-

tiplikation von zwei Mengen in Realität keinen Sinn ergibt, dürfte dem Kind nicht bewusst sein.
Ein Beispiel für eine Rechengeschichte, welche zwar keine Fehlvorstellung beinhaltet, allerdings auch keine multiplikative Vorstellung bedient, ist in Abbildung 30 zu sehen.
Betrachtet man die Rechengeschichten zur Division, so ergibt sich ebenfalls ein deutliches Bild. In Abbildung 40 sind die Häufigkeiten der einzelnen Antwortkategorien zu sehen. Dabei kann man feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler hauptsächlich Rechengeschichten erfunden haben, welche die Vorstellung des Teilens beinhalten. Nur etwa fünf Prozent der Geschichten wecken die Vorstellung des Messens, wodurch man schließen kann, dass ein solcher Kontext einer Division weit seltener intuitiv zugeschrieben wird.

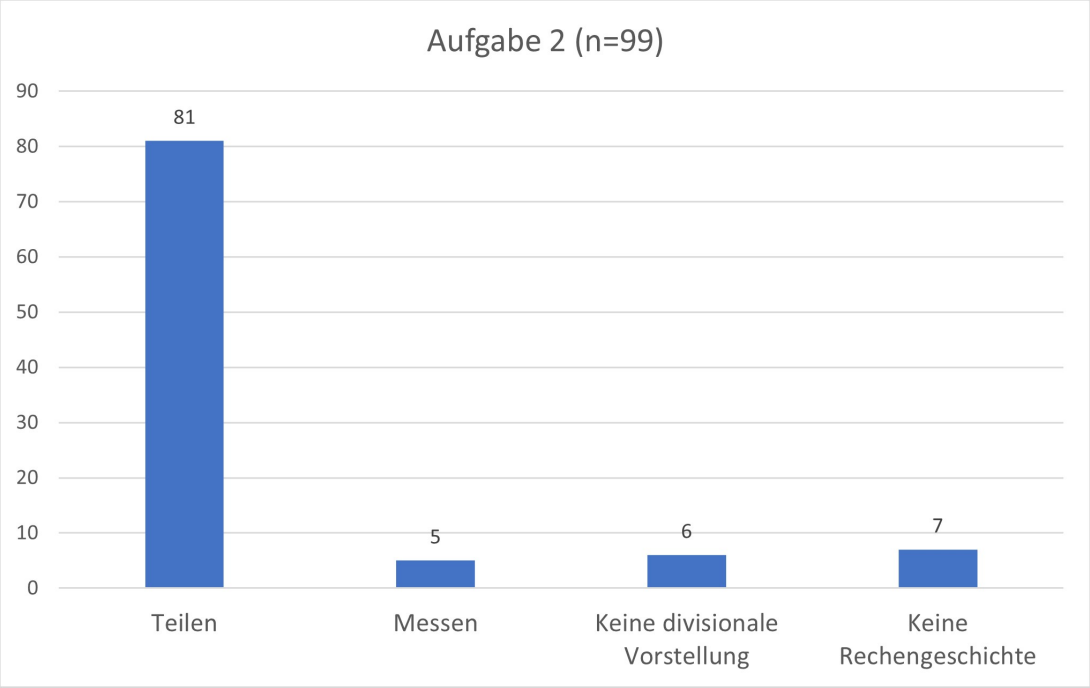


Abbildung 40: Häufigkeiten der erfassten Grundvorstellungen zu der Division

Rund sechs Prozent der Schülerinnen und Schüler haben keinerlei mit Division zusammenhängende Vorstellung in die Rechengeschichte verpackt und sieben Kinder haben überhaupt keine Rechengeschichte aufgeschrieben. Auch hier ist wiederum nicht ersichtlich, ob in diesen sieben Fällen keine passende Geschichte gefunden wurde, oder andere Gründe zur Nichtbeantwortung geführt haben.
Betrachtet man jene Rechengeschichten genauer, welche keine Vorstellung beinhalten, finden sich darunter auch Fehlvorstellungen. So hat beispielsweise eine Schülerin die Bedeutung des Dividenden mit jener des Divisors vertauscht und somit eine Rechengeschichte erfunden, welche zwar zur Rechnung $3 : 27$ passen würde, nicht jedoch zu der gegebenen Rechnung $27 : 3$, wie in Abbildung 41 zu sehen ist.

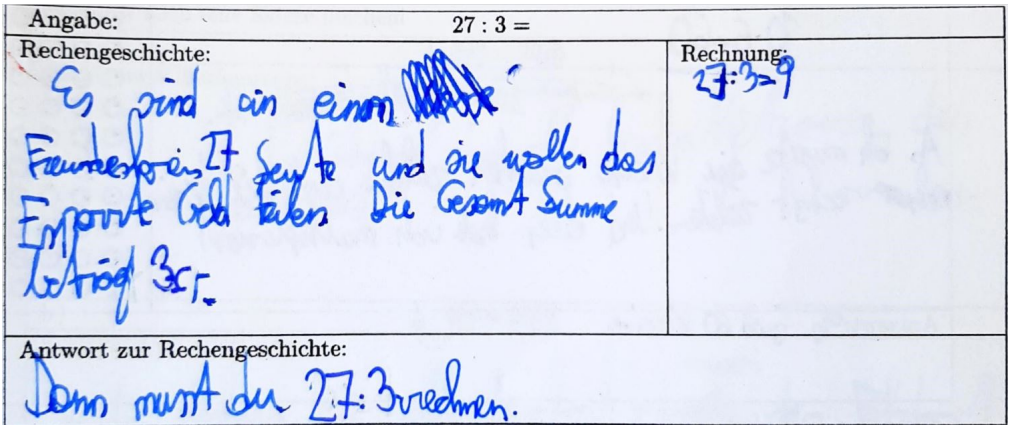


Abbildung 41: Bedeutung von Dividend und Divisor wurde von dieser Schülerin vertauscht

Vergleicht man die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler miteinander, so ist in Abbildung 42 zu erkennen, dass die Vorstellung des Teilens bei beiden Geschlechtern ähnlich stark etabliert ist. Allerdings fällt auf, dass in der Kategorie Messen hauptsächlich Schülerlösungen zu finden sind und die meisten Geschichten ohne entsprechender Vorstellung (5) bei Schülerinnen aufgetreten sind.

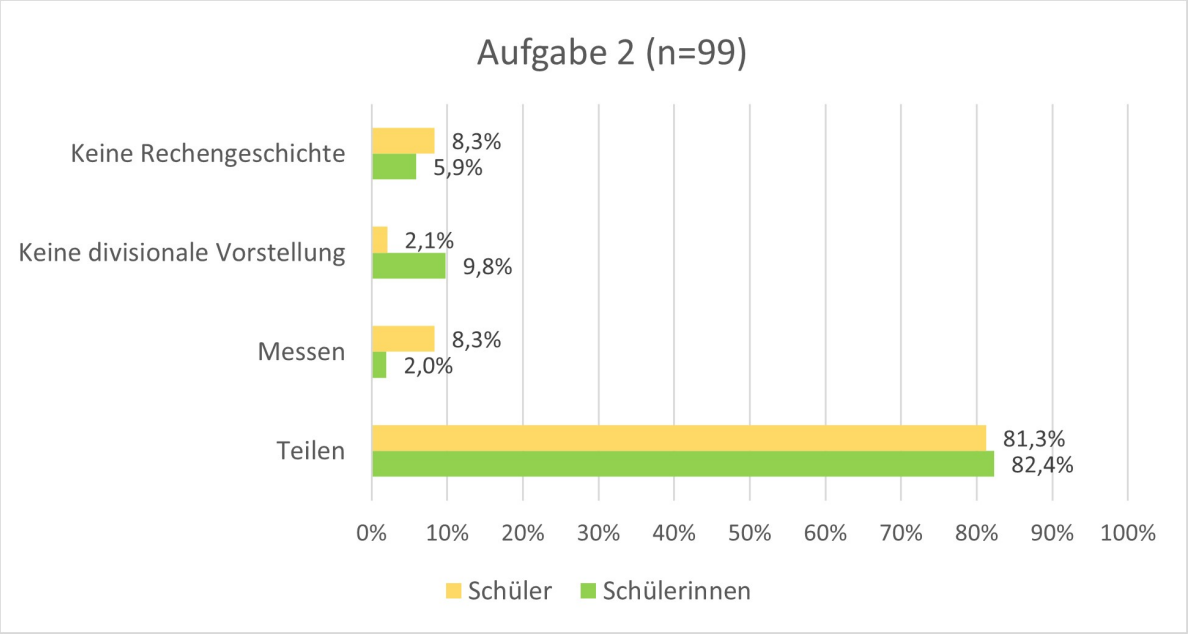


Abbildung 42: Prozentuale Häufigkeiten der Schülerinnen und Schüler

Im Zuge der Auswertung der Fragebögen hat sich bei Aufgabe 2 außerdem noch ein interessantes Detail herauskristallisiert. Bei rund 43% aller Rechengeschichten geht es darum, dass Süßigkeiten (Gummibären, Schokoladetafeln, ...) oder andere Speisen (Burger, Äpfel, ...) gerecht verteilt werden sollen. Die große Menge an ähnlichen Rechengeschichten ergibt sich wohl aus den unzähligen Sachaufgaben zur Division in unterschiedlichen Schulbüchern, bei welchen eben derartige Verteilungsaufgaben zu Übungszwecken herangezogen werden.

2.6.2 Wird ein kombinatorischer Kontext als Multiplikation gedeutet?

Der kombinatorische Zugang zur Multiplikation ist mit Sicherheit einer der schwierigeren und stellt Kinder nicht selten vor Verständnisprobleme. Bereits mehrere Studien haben gezeigt, dass im Vergleich zu Aufgaben, welche mit Hilfe der übrigen Grundvorstellungen der Multiplikation bearbeitet werden können, kombinatorische Aufgaben für Kinder sehr schwierig zu lösen sind (siehe beispielsweise Nesher (1988) oder Mulltigan und Mitchelmore (1997)). Im Zuge dieser Untersuchung hat sich bereits bei der Aufgabe 1 gezeigt, dass kein einziges Kind eine Rechengeschichte mit kombinatorischem Hintergrund erfunden hat. Betrachtet man die Ergebnisse von Aufgabe 3, so zeigt sich, dass solche Aufgabenstellungen tatsächlich einige Kinder der ersten Klasse AHS vor Probleme stellten.

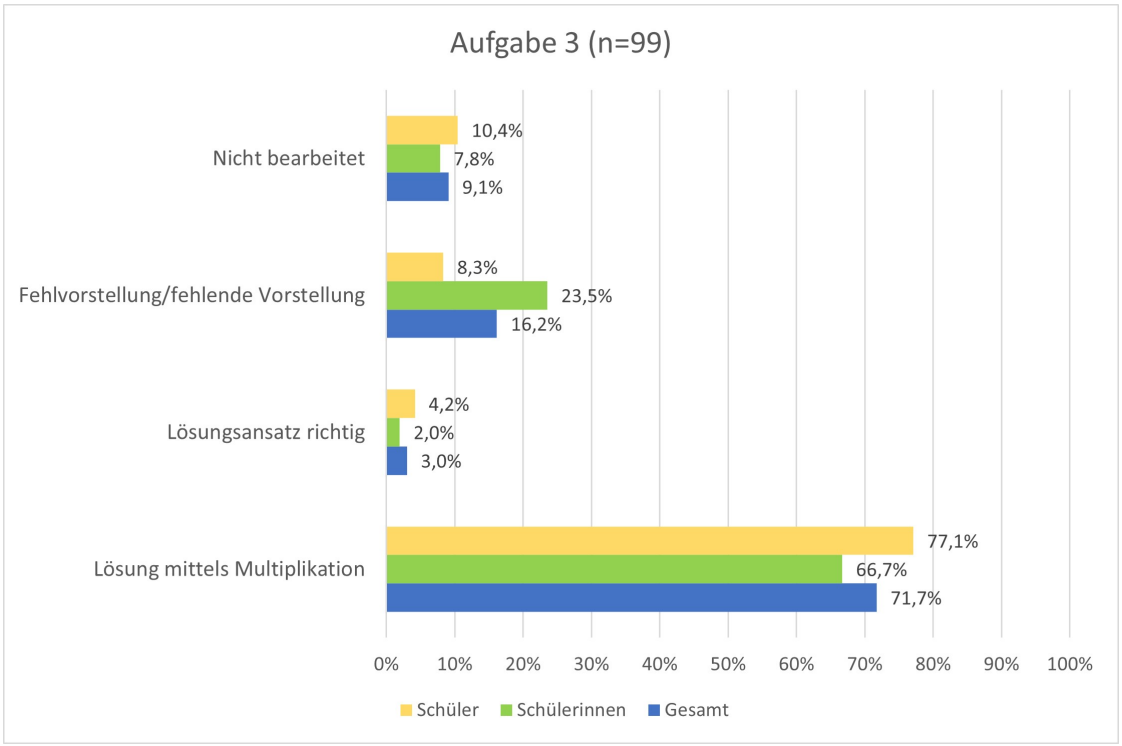


Abbildung 43: Prozentuale Häufigkeiten der Schülerinnen und Schüler differenziert nach Geschlecht

Abbildung 43 zeigt die prozentualen Häufigkeiten der entwickelten Kategorien differenziert nach dem Geschlecht. Hier ist zu sehen, dass rund ein Viertel $(25,3\%)$ aller Schülerinnen und Schüler die Aufgabe entweder nicht oder falsch bearbeitet haben. Betrachtet man ausschließlich die Ergebnisse der Schülerinnen, so fallen fast ein Drittel $(31,3\%)$ in diese beiden Kategorien. Allerdings haben rund 70% aller Kinder die Aufgabenstellung als Multiplikation verstanden und entsprechend gelöst. Hierbei zeigt sich, dass diese Vorstellung der Multiplikation im kombinatorischen Kontext bei Schülern dieser Untersuchung stärker etabliert ist, als bei Schülerinnen.
Betrachtet man nun die Kategorie der Fehlvorstellungen bzw. fehlenden Vorstellungen genauer, so erkennt man, dass solche vorwiegend bei Schülerinnen festgestellt werden konnten. Häufig war dabei zu finden, dass bei dieser Aufgabenstellung nicht gerechnet werden müsse, da 12 T-Shirts zur Verfügung stehen und dementsprechend 12 Kombinationen zu finden sind (siehe Abbildung 32). Außerdem haben einige Schülerinnen und Schüler die beiden Mengen addiert und sind dabei auf 17 Kombinationen gekommen. In beiden Fällen ist anhand der Lösungen ersichtlich, dass die Vorstellung zu Aufgaben mit kombinatorischem Kontext noch nicht ausgebildet ist. Geht man davon aus, dass der Großteil derer, welche die Aufgabe nicht bearbeitet haben, ebenfalls noch keine entsprechende Vorstellung aufgebaut haben, so kann man daraus schließen, dass rund ein Viertel aller Schülerinnen und Schüler dieser Untersuchung den kombinatorischen Kontext nicht ausreichend verstehen.

2.6.3 Ergebnisse der Sachaufgaben zum Messen und Teilen

Ein deutlich anderes Bild hat sich bei der Auswertung der beiden Sachaufgaben zu der Division gezeigt (Aufgabe 4 und 6). Tatsächlich haben bei beiden Aufgaben jeweils knapp 94% den Kontext verstanden und die Probleme mittels Division gelöst. Betrachtet man die Ergebnisse ein wenig genauer, so lassen sich aber dennoch einige Unterschiede erkennen.
Abbildung 44 zeigt sehr deutlich, dass sowohl Schülerinnen als auch Schüler zum Großteil keine Schwierigkeiten beim Lösen der Sachaufgabe zur Vorstellung des Messens gehabt haben. Diese Grundvorstellung dürfte also bei dieser Gruppe bereits verinnerlicht sein. Besonders gut abgeschnitten haben in diesem Fall Schüler. Fast 98% haben diese Sachaufgabe des Messens als Division erkannt, die restlichen zwei Prozent (ein einziger Schüler) haben diese nicht bearbeitet. Fehlvorstellungen sind ausschließlich bei Schülerinnen vorgekommen und machen rund 6% der Schülerinnenantworten aus. Jeweils eine Schülerin hat die Frage nicht beantwortet, beziehungsweise einen alternativen Lösungsweg gefunden (der Lösungsweg ist in Abbildung 33 zu finden).

Betrachtet man jene Lösungen, welche in der Kategorie *Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung* gefallen sind, so fällt auf, dass in allen Fällen eine Multiplikation anstelle einer Division durchgeführt wurde. Ein Beispiel hierfür findet man ebenfalls in Abbildung 33.

Bei der Auswertung der Kategorie *Fehlerhafte Antwort/Einheit* ist erkennbar, dass der Anteil an Schülern mit fehlerhaften Antworten oder Einheiten größer ist, als jener der Schülerinnen. Von 47 Schülern, welche die Aufgabe korrekt mittels Division gelöst haben, wurde bei

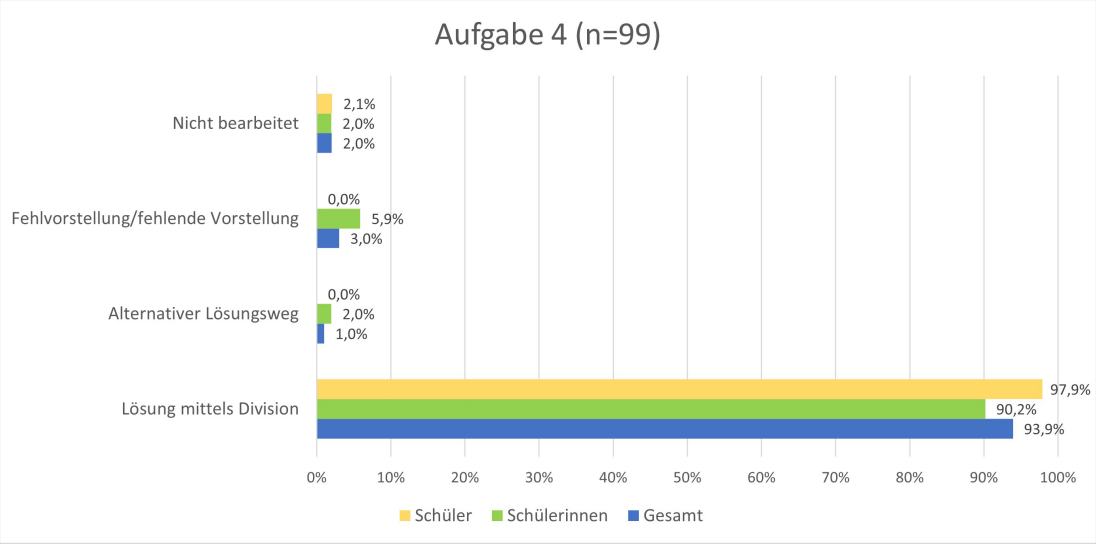


Abbildung 44: Prozentuale Häufigkeiten der Schülerinnen und Schüler differenziert nach Geschlecht

$8,5\%$ eine fehlerhafte Antwort oder Einheit gefunden, wie in Abbildung 45 zu sehen ist. Im Vergleich dazu sind solche Fehler bei der Beantwortung der Frage bei Schülerinnen seltener vorgekommen. Grundsätzlich ist bei diesen Antwortfehlern jedoch schwer ersichtlich, ob diese aus einem fehlenden Kontextverständnis resultieren oder Flüchtigkeitsfehler der Grund dafür sind.

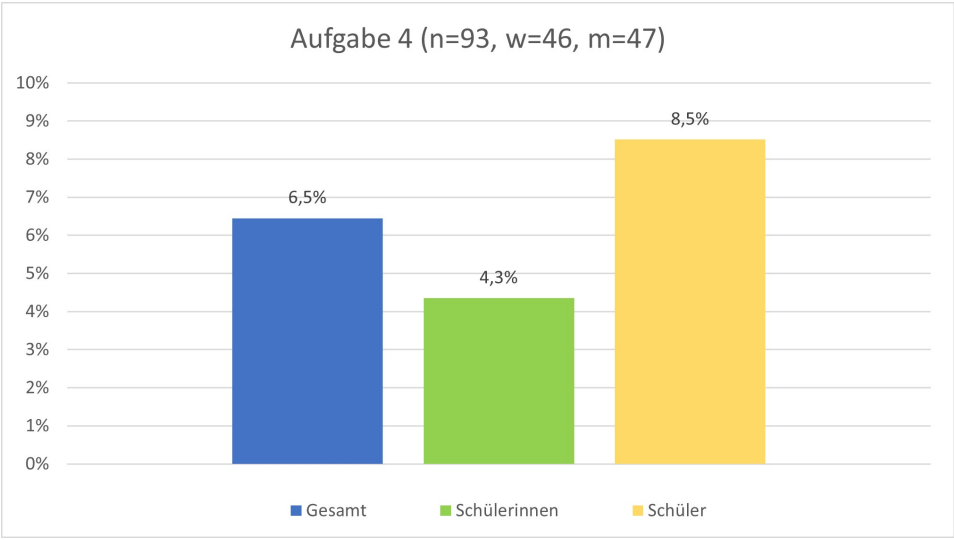


Abbildung 45: Prozentuale Häufigkeiten der Kategorie *fehlerhafte Antwort/Einheit*

Abbildung 46 zeigt nun Detailergebnisse der Aufgabe 6, welche der Vorstellung des Teilens zugrunde liegt. Auch diese Aufgabenstellung war für einen erheblichen Teil der Schülerinnen und Schüler problemlos lösbar. Dabei ist ersichtlich, dass im Vergleich zu Aufgabe 4 Schülerinnen besser abgeschnitten haben als Schüler. Rund 96% der Schülerinnen haben diese Aufgabe des Teilens mittels Division gelöst, bei einer Schülerin wurde eine Fehlvorstellung festgestellt und eine weitere hat die Aufgabestellung nicht beantwortet.

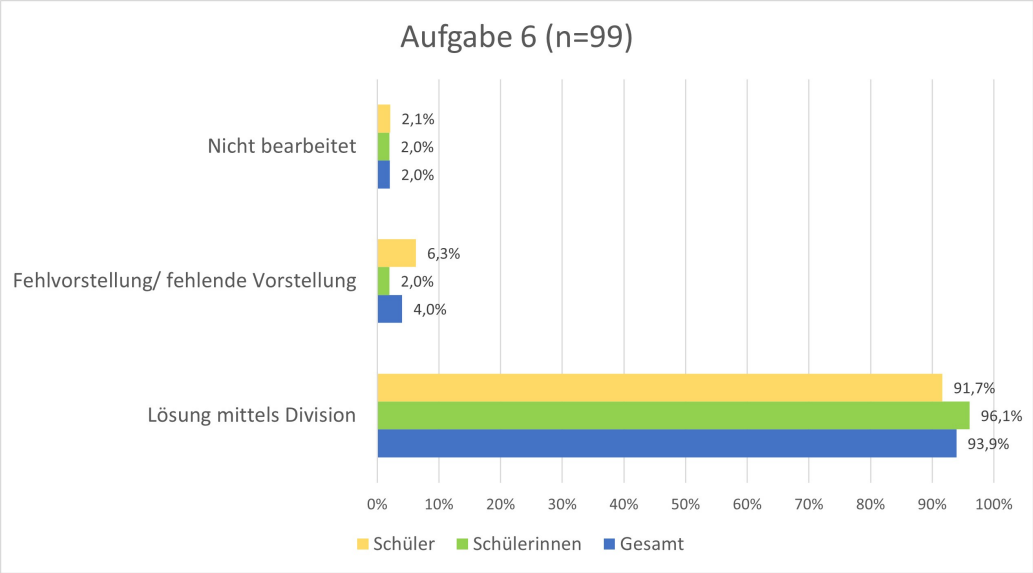


Abbildung 46: Prozentuale Häufigkeiten der Schülerinnen und Schüler differenziert nach Geschlecht

Neben der bereits erwähnten Schülerin wurden 6% der Schülerlösungen der Kategorie *Fehlvorstellung/fehlende Vorstellung* zugeordnet, wobei bei allen dieselbe Fehlvorstellung festgestellt wurde. Anstelle der Division wurde auch hier eine Multiplikation aufgestellt, wie beispielsweise in Abbildung 35 zu sehen ist.
Sehr ähnlich wie bei Aufgabe 4 sind die ermittelten Ergebnisse der Kategorie *Fehlerhafte Antwort/Einheit*. 9% jener Schüler, welche die Aufgabe mittels Division gelöst haben, konnten keine korrekte Antwort oder Einheit angeben. Im Vergleich dazu wurden solche Fehler bei dieser Aufgabe sogar nur bei einer Schülerin ausgemacht wie in Abbildung 47 zu sehen ist.
Grundsätzlich kann jedoch anhand der Ergebnisse der Kinder dieser Untersuchung festgehalten werden, dass die Vorstellung des Messens und Teilens großteils zumindest soweit gefestigt ist, dass einfache Sachaufgaben, welche mit diesen Grundvorstellungen zusammenhängen, richtig bearbeitet werden können.

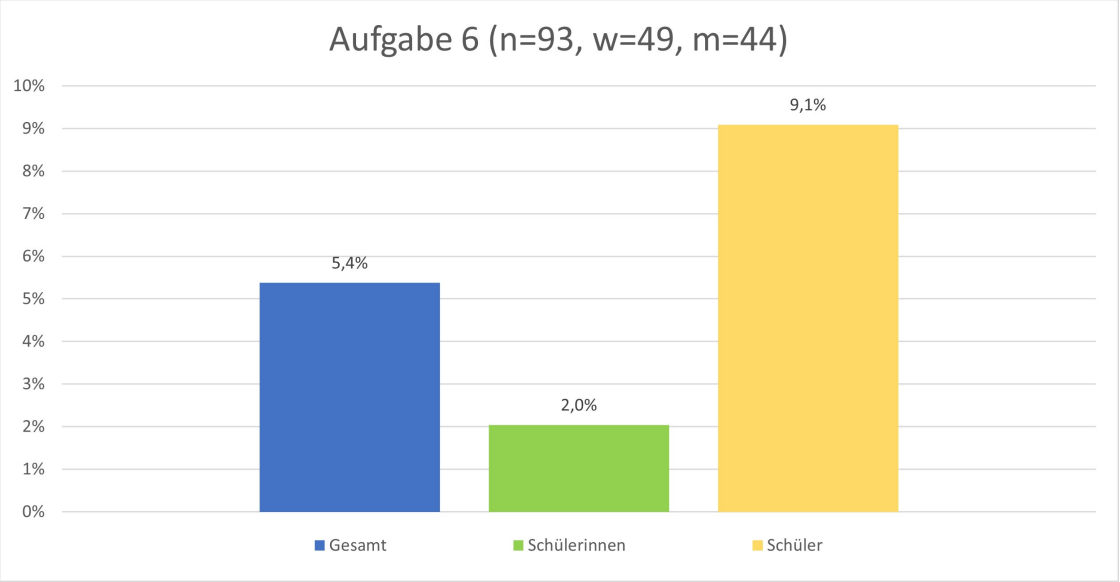


Abbildung 47: Prozentuale Häufigkeiten der Kategorie *fehlerhafte Antwort/Einheit*

2.6.4 Welche Zählstrategien wurden bei dem Punktefeld verwendet?

Die Ergebnisse, welche im Zuge dieser Untersuchung bei Aufgabe 5 ermittelt wurden, zeigen sehr deutlich, dass die vorherrschende Strategie zum Zählen von Punkten eines rechteckigen Punktefelds die entsprechende Multiplikation ist. Tatsächlich haben in diesem Fall 96 Schülerinnen und Schüler eine Multiplikation zur Lösungsfindung aufgestellt, ein Schüler hat die Punkte gezählt und zwei Kinder haben diese Aufgabe gar nicht bearbeitet.

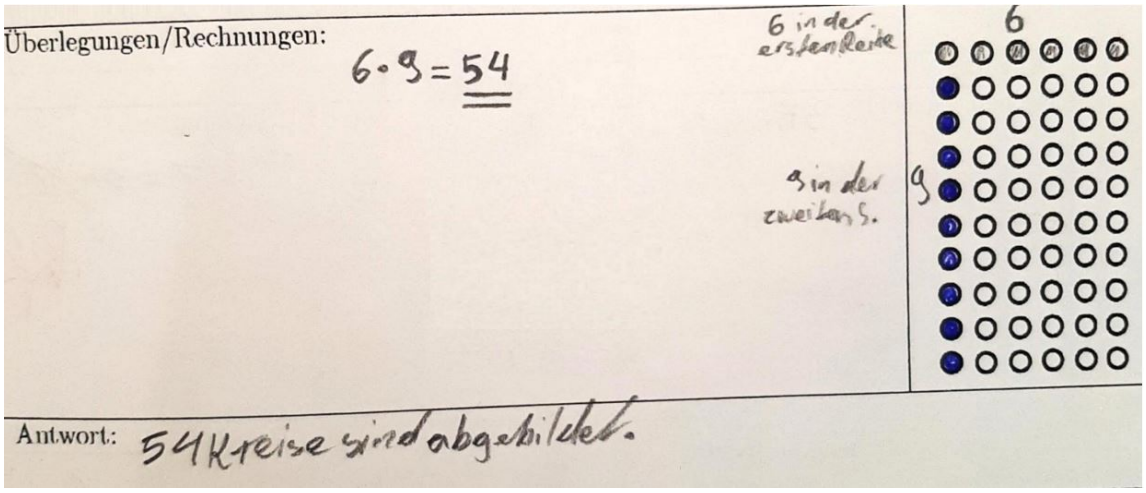


Abbildung 48: Fehlerhaft aufgestellte Multiplikation einer Schülerin

Bei jenen Kindern, welche die Zählaufgabe mittels Multiplikation gelöst haben, gibt es drei, welche auf eine falsche Lösung kommen. Das hat allerdings unterschiedliche Gründe. Während sich zwei Schülerinnen schlichtweg verzählt haben, zeigt sich bei der dritten Schülerin ein Verständnisfehler, welcher in Abbildung 48 zu sehen ist. Diese Schülerin hat sich zwar offensichtlich gemerkt, dass man die Anzahl von Spalten und Reihen gewissermaßen miteinander multiplizieren muss, allerdings möglicherweise die eigentliche Idee dahinter nicht verinnerlicht. Darauf lassen auch die unterschiedlich bemalten Kreise in der Skizze schließen. Um hier jedoch noch einen genaueren Eindruck von der Vorstellung der Schülerin zu dieser Aufgabe zu bekommen, wäre wohl ein weiterführendes Gespräch notwendig.

2.6.5 Wurden die Angaben von Aufgabe 7 als Messen und Teilen im geometrischen Kontext erkannt?

Zweifelsohne ist diese Aufgabenstellung, im Vergleich zu den bisherigen, herausfordernder für die Schülerinnen und Schüler, da hierbei der Unterschied der beiden Rechnungen $60\,\mathrm{dm} : 4\,\mathrm{dm} = 15$ und $60\,\mathrm{dm} : 4 = 15\,\mathrm{dm}$ in eigenen Worten beschrieben werden soll. Damit müssen gleich zwei Grundvorstellungen miteinander verglichen werden. Damit der kontextuelle Unterschied überhaupt erkannt werden kann, muss sowohl die Grundvorstellung des Messens als auch die des Teilens soweit ausgebildet sein, dass diese auch in diesem geometrischen Zusammenhang erkannt werden. Reicht hier die Vorstellungskraft nicht aus, um sich die beiden gegebenen Sachverhalte bildlich vorstellen zu können, wird der Unterschied der beiden Rechnungen ausschließlich durch fehlende, beziehungsweise vertauschte Vorzeichen beschrieben oder mit Hilfe einer gelernten Rechenregel erklärt.
Abbildung 49 zeigt die prozentualen Häufigkeiten der einzelnen Kategorien, wobei in die Kategorie *Kontext (zumindest teilweise) erkannt* all jene Schülerinnen und Schüler fallen, welche zumindest eine der beiden Aufgaben als Messen beziehungsweise Teilen erkannt haben. Im Zuge dieser Untersuchung haben rund ein Drittel der Kinder den Kontext erkannt, wobei auffällt, dass das Teilen im geometrischen Kontext besser verinnerlicht ist, als das Messen. Rund 23% der Schülerinnen und Schüler haben bei beiden Unteraufgaben den Kontext verstanden und damit offensichtlich auch den kontextuellen Unterschied erkannt. Skizzen zum Verdeutlichen des Sachverhaltes wurden nur bei rund 8% gefunden. Etwas weniger als die Hälfte aller Kinder $(43,4\%)$ haben bei dieser Aufgabe die Verschiedenartigkeit der beiden Rechnungen durch fehlende oder vertauschte Einheiten erklärt. Man kann daher davon ausgehen, dass bei diesen Schülerinnen und Schülern die Vorstellungen zum Messen und Teilen zumindest noch nicht so weit gefestigt sind, dass der Transfer von den Rechnungen zu einem entsprechenden Kontext bewältigt werden kann. Diejenigen Kinder, welche fehlende Einheiten als Unterschied beschrieben haben, haben zusätzlich noch kein Verständnis ausgebildet, was die Einheiten bei einer Division bedeuten und wie diese anzuschreiben sind. Jene rund 11%, welche den Unterschied mittels Rechenregel erklärt haben, können im Vergleich dazu offensichtlich auf ein bereits gelerntes Wissen solcher Aufgaben zurückgreifen. Das Können der Rechenregel alleine lässt jedoch noch nicht auf ein kontextuelles Verständnis schließen. 14% der Schülerinnen und Schüler haben diese Aufgabe gar nicht beantwortet.

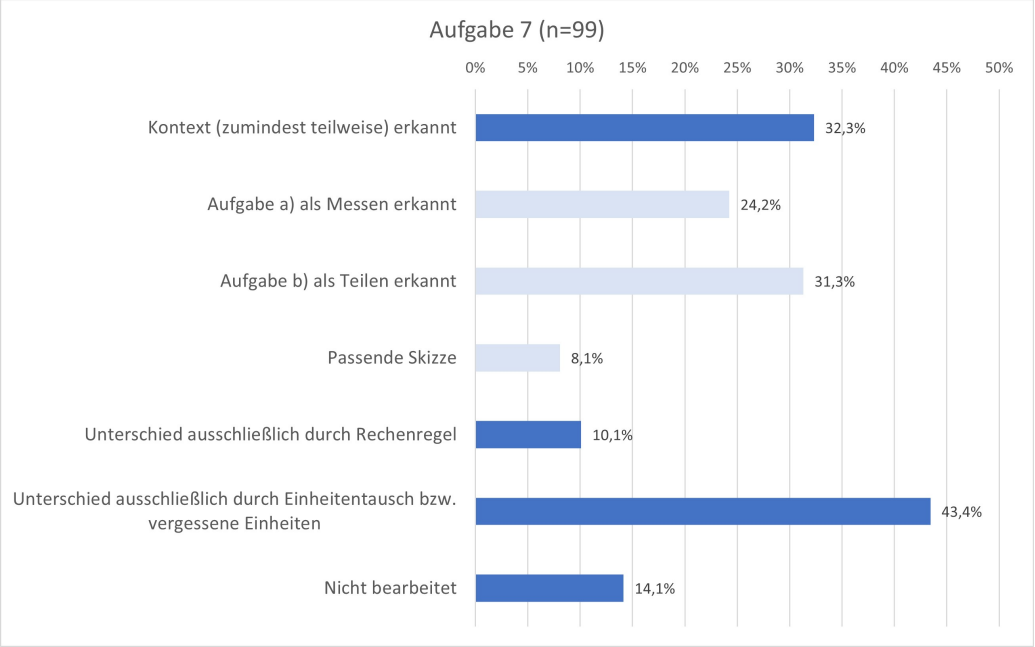


Abbildung 49: Prozentuale Häufigkeiten der entwickelten Kategorien

Betrachtet man den geschlechtsspezifischen Unterschied der gewonnenen Ergebnisse, so ergeben sich dabei doch deutliche Unterschiede. Zu deren Verdeutlichung wurde in Abbildung 50 ein relativer Vergleich angestellt, wobei darauf geachtet wurde, dass die unterschiedliche Anzahl an Repräsentanten (w = 51, m = 48) keinen Einfluss auf diesen Vergleich hat. Besonders deutlich ist der Unterschied bei den nicht bearbeiteten Aufgaben. Von allen nicht bearbeiteten Aufgaben sind im relativen Vergleich rund 70% von Schülerinnen (absolut: w = 10, m = 4). Genau umgekehrt verhält es sich mit jenen Lösungen, welche in die Kategorie *Unterschied ausschließlich durch Rechenregel* fallen. Rund 71% davon sind im Vergleich Schülern zuzuordnen.
Weniger deutlich ist der Unterschied bei der Kategorie *Kontext (zumindest teilweise) erkannt* und dessen Unterkategorien, aber auch hier ergeben sich spannende Erkenntnisse. So zeigt sich, dass Schüler den Kontext im relativen Vergleich häufiger erfasst haben. Hierbei wurde das Messen noch deutlicher als das Teilen vorwiegend von dieser Gruppe erkannt. Zieht man einen Vergleich zu den Sachaufgaben dieser beiden Grundvorstellungen (Aufgabe 4 und 6), so haben Schüler bei der Aufgabe zum Messen besser abgeschnitten und Schülerinnen bei jener zum Teilen. In diesem Fall haben zwar in beiden Fällen die Schüler vergleichsweise besser abgeschnitten, jedoch auch hier beim Messen noch deutlicher. Offenbar ist die Vorstellung des Messens bei dem männlichen Anteil der untersuchten Gruppe bereits besser ausgebildet als bei dem weiblichen. Skizzen wiederum wurden häufiger von Schülerinnen angefertigt.

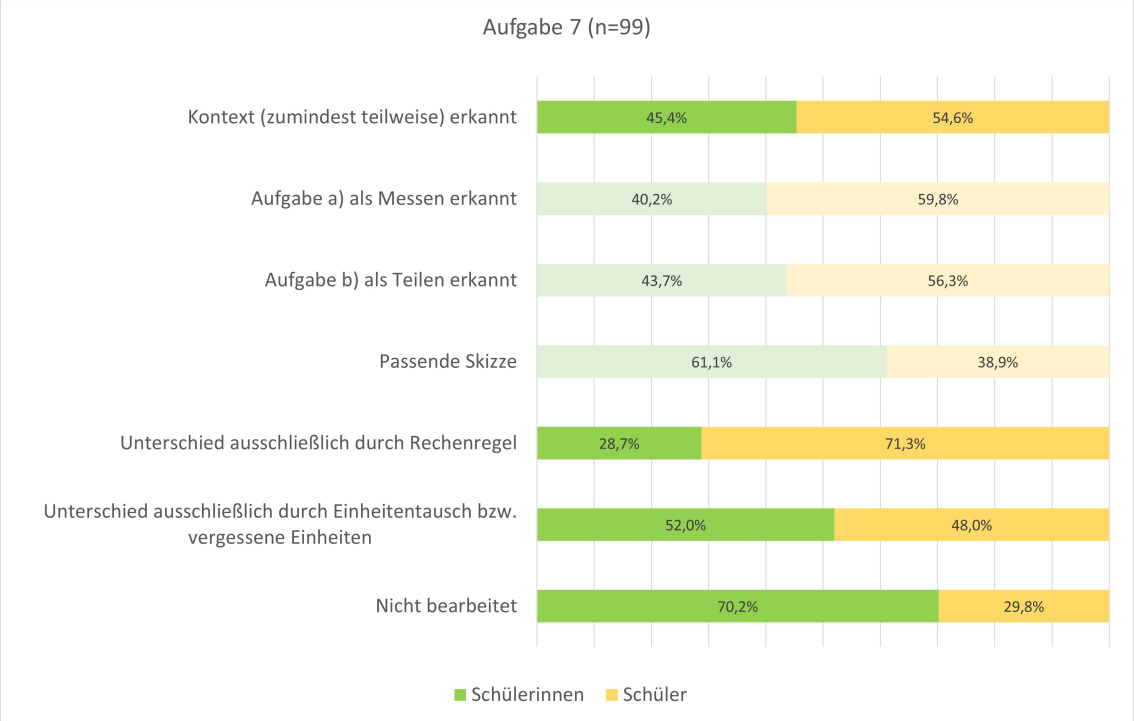


Abbildung 50: Relativer Vergleich der Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler

2.6.6 Wurde der kontextuelle Unterschied bei Aufgabe 8 erkannt?

Betrachtet man schließlich die Ergebnisse von Aufgabe 8, welche ähnlich aufgebaut war wie Aufgabe 7, so erkennt man, dass die Beantwortung dieser auch ähnlich schwer gefallen ist. Hierbei sollte der Unterschied der beiden Rechnungen $4 \cdot 5\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$ und $5 \cdot 4\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$ in eigenen Worten erklärt werden, gegebenenfalls mit einer Skizze. Das Ziel dieser Aufgabe war herauszufinden, wie viele Schülerinnen und Schüler dabei auf den kontextuellen Unterschied eingehen. Denn dann kann davon ausgegangen werden, dass das Verständnis der Multiplikation soweit ausgebildet ist, dass diese in diesem geometrischen Kontext im Kern verstanden wurde. In dem Fall gibt es sogar nicht nur eine Vorstellung, welche dabei aktiviert werden kann. Sowohl eine *zeitlich sukzessive Handlung* (man misst viermal hintereinander 5 Meter bzw. umgekehrt), eine *räumlich simultane Anordnung* (es liegen vier 5 Meter lange Holzstämme beisammen bzw. umgekehrt) als auch eine *formelhafte Multiplikation von Größen* (Umfang eines Quadrats mit 5 Meter Seitenlänge bzw. eines Fünfecks mit 4 Meter Seitenlänge) können in diesem Fall gemeint sein. Abbildung 51 zeigt, dass einen solchen Kontext rund 30% aller Schülerinnen und Schüler erkannt haben. Dabei wurde in den meisten Fällen eine zeitlich sukzessive Handlung oder eine räumlich simultane Anordnung beschrieben. Fünf dieser 30 Schülerinnen und Schüler haben den Unterschied mittels Umfang dargebracht. Rund jedes dritte dieser Kinder hat zusätzlich noch eine passende Skizze beigefügt.

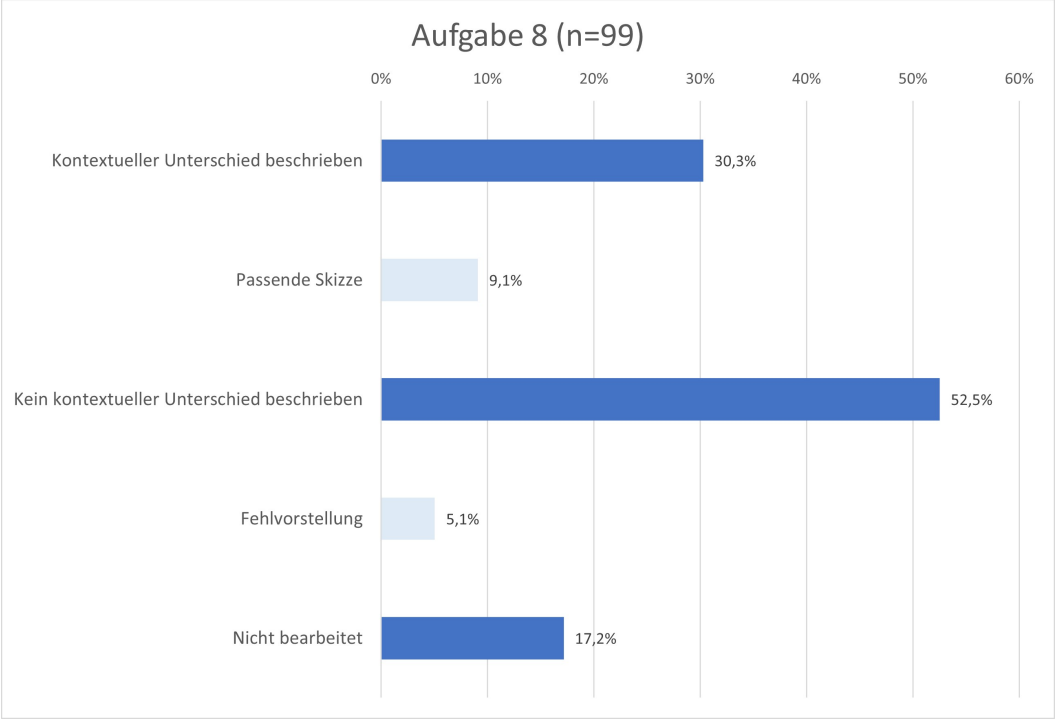


Abbildung 51: Prozentuale Häufigkeiten der entwickelten Kategorien

Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler haben keinen kontextuellen Unterschied beschrieben. Das heißt nicht automatisch, dass ein solcher grundsätzlich nicht verstanden wird. Jedoch ist die Vorstellung zu der Multiplikation möglicherweise noch nicht so weit ausgebildet, dass der Transfer zwischen Rechnung und der eigentlichen Vorstellung dahinter in beide Richtungen „automatisch“ funktioniert. 5% der Kinder und damit rund 10% der Schülerinnen und Schüler welche keinen kontextuellen Unterschied erkannt haben, zeigen durch die gegebenen Antworten Fehlvorstellungen auf. Dabei interpretieren 3 Kinder die gegebene Rechnung als Flächenberechnung und zwei beschreiben eine Situation, welche durch eine Division gelöst werden müsste. 17% der Schülerinnen und Schüler haben diese Aufgabe gar nicht bearbeitet, was der höchste Wert an unbearbeiteten Aufgabenstellungen in dieser Untersuchung ist.
Auch bei dieser Aufgabe wird der geschlechtsspezifische Unterschied mittels prozentualen Vergleichs sichtbar gemacht, wie in Abbildung 52 zu sehen ist. Hier wird ersichtlich, dass Schüler weitaus häufiger einen kontextuellen Unterschied beschrieben haben, als Schülerinnen, dabei wurde jedoch seltener auf Skizzen zurückgegriffen. Vergleicht man diese Resultate mit jenen aus Aufgabe 7, so erkennt man, dass sich hier durchaus Ähnlichkeiten feststellen lassen. Umgekehrt sind jene bearbeiteten Aufgaben, welchen keinen kontextuellen Unterschied behandeln, häufiger den Schülerinnen zuzuordnen. Ebenfalls ähnlich wie bei Aufgabe 7 haben auch hier im Vergleich mehr Schülerinnen als Schüler die Aufgabe gar nicht bearbeitet.

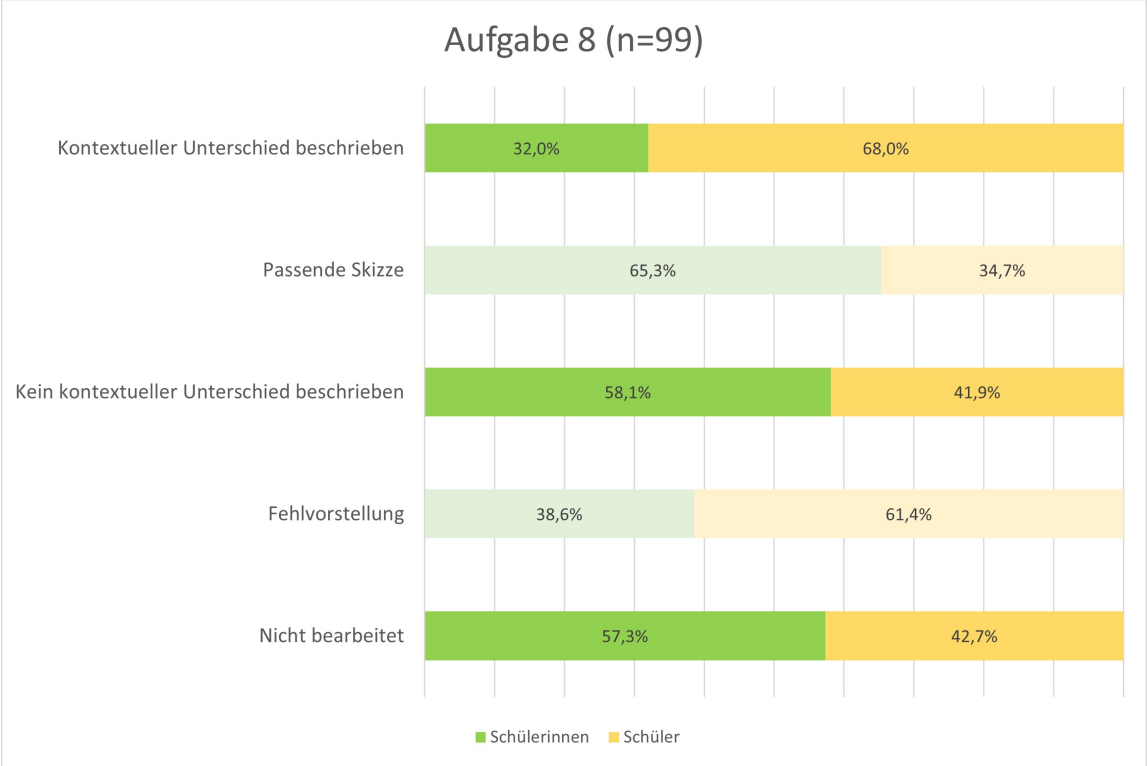


Abbildung 52: Relativer Vergleich der Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler

2.6.7 Ergebnisse zur Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler

Neben der Überprüfung der vorhandenen Grundkompetenzen wurde im Zuge dieser Evaluierung auch die Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Multiplikation und Division untersucht. Dabei wurden neben den beiden Rechnungen aus Aufgabe 9 auch die Multiplikationen und Divisionen von Aufgabe 1 bis 6 berücksichtigt. Zunächst werden jedoch die Ergebnisse von Aufgabe 9 genauer betrachtet, bei welchem die beiden Aufgaben $743 \cdot 26$ und $708 : 12$ gelöst werden sollten. Bei der Multiplikation, welche einen zweistelligen zweiten Faktor aufweist, handelt es sich um eine durchschnittlich schwierige Aufgabe. Es findet sich weder eine Null im Multiplikand noch im Multiplikator und alle Behalteziffern je Teilprodukt sind jeweils ≤ 5 (eine genaue Einordnung ist bei Padberg und Benz (2011) auf Seite 279 zu finden). Auch die Division mit zweistelligem Divisor wurde so gewählt, dass der Schwierigkeitsgrad als durchschnittlich angesehen werden kann. Es kommt zwar eine Null im Dividenden vor, allerdings bleibt kein Rest und die erforderliche Subtraktion $(70 - 60)$ ist vergleichsweise einfach (auch hier ist für eine genaue Einordnung bei Padberg und Benz (2011) auf Seite 301 Näheres zu finden).
In Abbildung 53 ist zu erkennen, dass es bei dieser Untersuchung durchaus beachtliche geschlechtsspezifische Unterschiede bei den Lösungshäufigkeiten gibt. Während die Multiplikation überraschenderweise insgesamt seltener richtig gelöst wurde, als die Division,

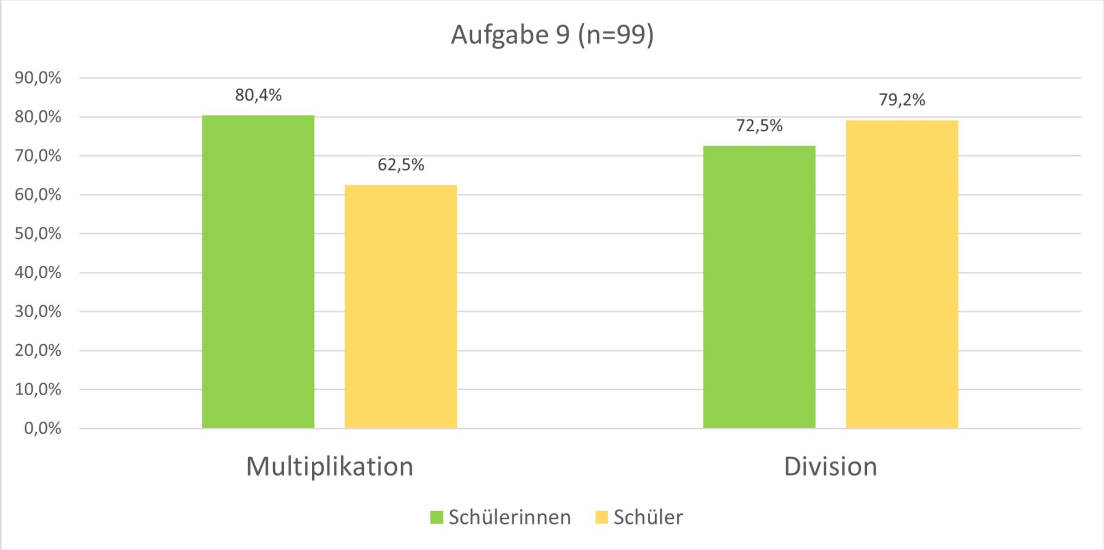


Abbildung 53: Prozentualer Anteil korrekt gelöster Rechnungen differenziert nach Geschlecht

besteht außerdem ein großer Unterschied zwischen Schülerinnen und Schülern. Es gibt allerdings eine plausible Erklärung für die nicht zu erwartenden großen Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern. In einer der untersuchten Klassen haben 8 von 13 Schülern anstelle der Multiplikation eine Division ausgeführt. Die Nachfrage bei der unterrichtenden Lehrperson hat ergeben, dass zu dem Zeitpunkt vor der Untersuchung die Division häufig geübt wurde und möglicherweise das ein Grund für die Häufung an fehlerhaften Rechenoperationen sein kann. Warum das allerdings nur den männlichen Anteil dieser Klasse betrifft, ist jedoch nicht nachvollziehbar. (Die Schüler haben die Überprüfung tatsächlich jeweils alleine gemacht und auch die Ergebnisse und Rechenwege der fälschlicherweise durchgeführten Divisionen unterscheiden sich voneinander.) Allerdings sei an dieser Stelle gesagt, dass auch bei Vernachlässigung der Ergebnisse dieser Klasse Schülerinnen bei der gegebenen Multiplikation besser abgeschnitten haben, wenn auch nicht so deutlich (w: 82%, m: 77%). Betrachtet man die nicht richtig bearbeiteten Aufgaben genauer, so konnten unterschiedliche Gründe festgestellt werden, warum das Endergebnis nicht mit der tatsächlichen Lösung übereinstimmt. Abbildung 54 zeigt die Verteilung der aufgetretenen Fehler. Dabei fällt auf, dass neben den bereits erwähnten Divisionen anstelle der Multiplikationen, hauptsächlich Fehler beim Übertrag gemacht wurden. Abbildung 55 zeigt, dass abgesehen von einem Abschreibfehler und einer größeren Zahl an nicht bearbeiteten Aufgaben, Schüler alle übrigen Fehlerkategorien dominieren. Bei den Multiplikationen der Aufgaben 1, 3 und 5 konnte kein signifikanter geschlechtsspezifischer Unterschied festgestellt werden und die Lösungshäufigkeiten waren grundsätzlich höher (Aufgabe 1: 94%, Aufgabe 3: 100% derer, welche eine Multiplikation aufgestellt haben und Aufgabe 5: 97%). An dieser Stelle sei jedoch gesagt, dass diese Multiplikationen durchwegs einfacher zu lösen sind als jene aus Aufgabe 9.

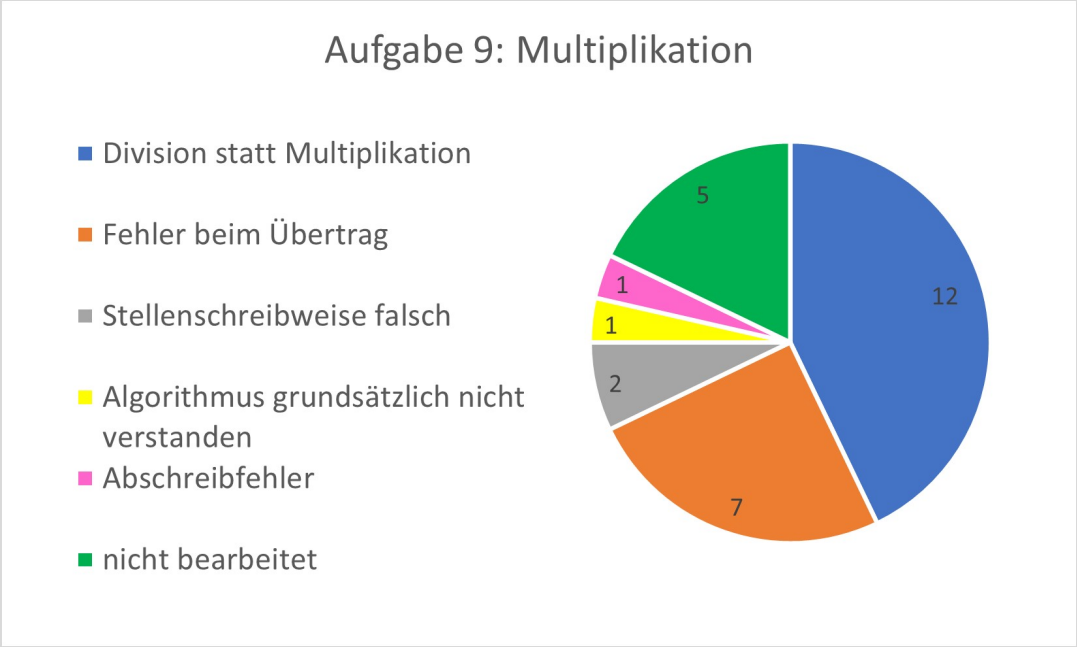


Abbildung 54: Absolute Häufigkeiten aufgetretener Fehler bei der Multiplikation

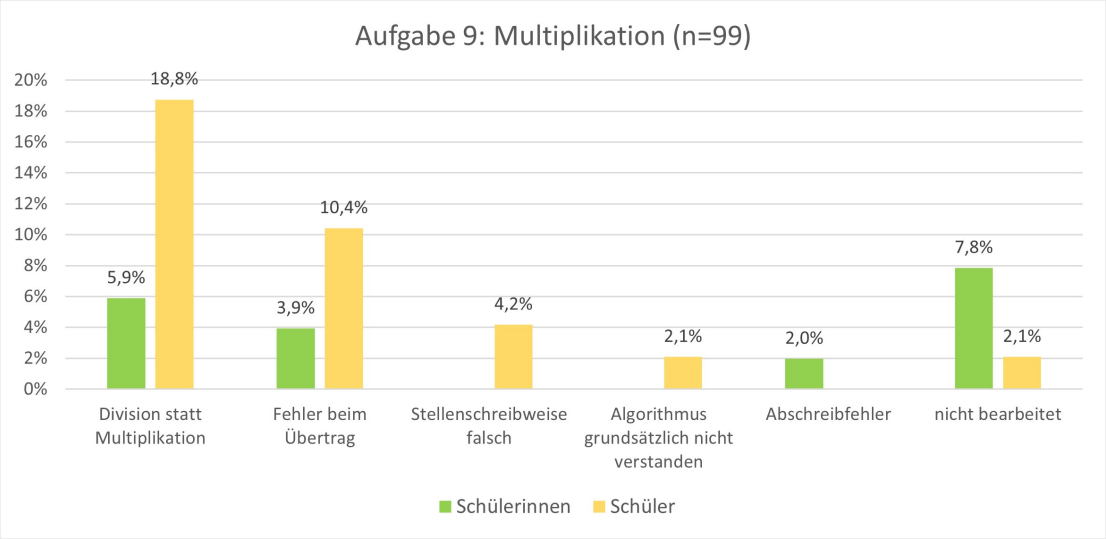


Abbildung 55: Prozentuale Häufigkeiten aufgetretener Fehler bei der Multiplikation differenziert nach Geschlecht

Betrachtet man nun die Ergebnisse der Division, so zeigt bereits Abbildung 53, dass hierbei Schülerinnen ein wenig schlechter abgeschnitten haben. Der geschlechtsspezifische Unterschied ist dabei jedoch weniger deutlich als bei der Multiplikation. Auch bei dieser Aufgabe sind die genauen Fehler untersucht worden, welche in Abbildung 56 zu sehen sind. Dabei ist ersichtlich, dass neben einer großen Zahl nicht bearbeiteter Aufgaben, hauptsächlich Fehler bei Teilprodukten im Zuge des Divisionsalgorithmus gemacht wurden. Auch diese Rechenoperation wurde in vier Fällen verwechselt, diesmal umgekehrt, mit der Multiplikation.

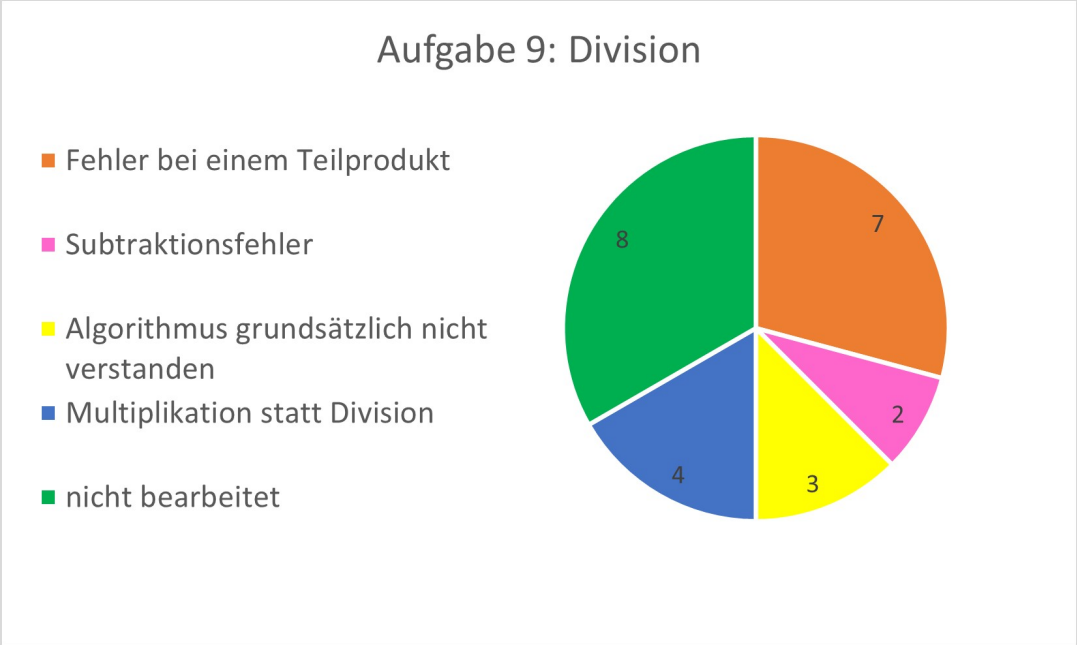


Abbildung 56: Absolute Häufigkeiten aufgetretener Fehler bei der Division

Ein Blick auf die geschlechtsspezifischen Unterschiede bei den gefundenen Fehlerkategorien ist hier ebenfalls spannend. Wie in Abbildung 57 zu sehen ist, ist ein Großteil der nicht bearbeiteten Aufgaben Schülerinnen zuzuordnen. Des Weiteren fällt auf, dass Verwechslungen der Rechenoperation auch hier hauptsächlich Schülern unterlaufen sind. Ähnlich wie bei der Multiplikation sind auch bei der Division die Lösungshäufigkeiten bei den vorhergehenden Aufgaben (2, 4 und 6) durchwegs höher. Auch hier sind die Divisionen jeweils einfacher zu lösen, wodurch die im Vergleich sehr häufig richtig gelösten Aufgaben erklärt werden können (Aufgabe 2: 94%, Aufgabe 4: 95% und Aufgabe 6: 96%). Allerdings hat sich hierbei der geschlechtsspezifische Trend, welcher bei Aufgabe 9 in Bezug auf die Division festgestellt werden konnte, immer bestätigt. In allen drei Aufgaben haben Schüler beim Lösen von Divisionen besser abgeschnitten (Aufgabe 2: w: 90% m: 98%, Aufgabe 4: w: 91% m: 98% und Aufgabe 6: w: 94% m: 98%).

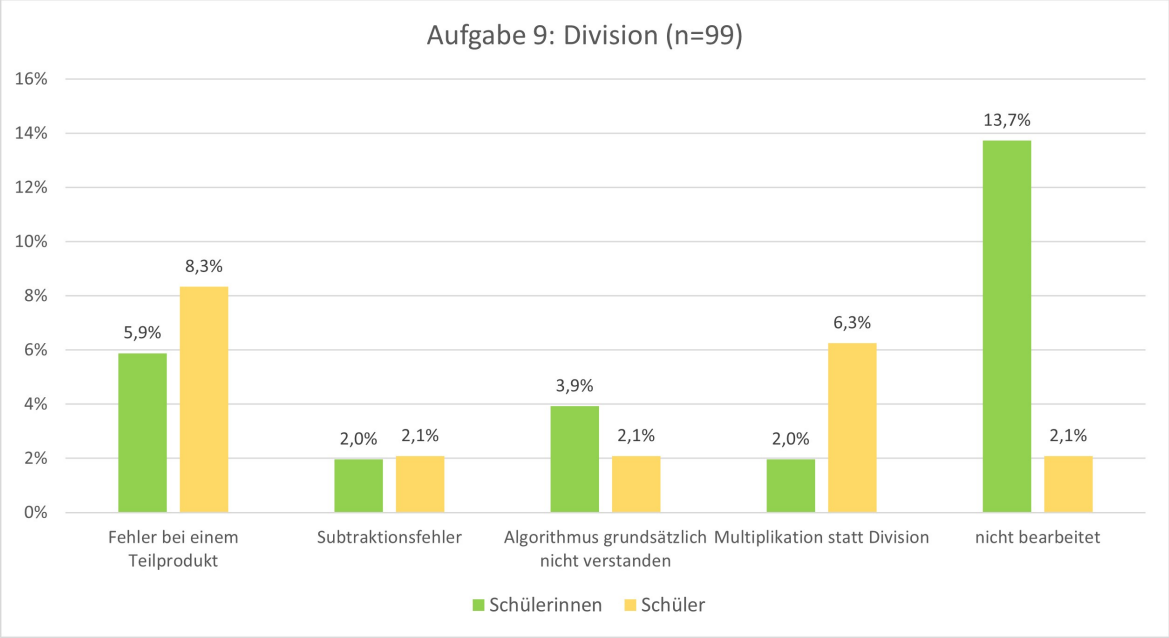
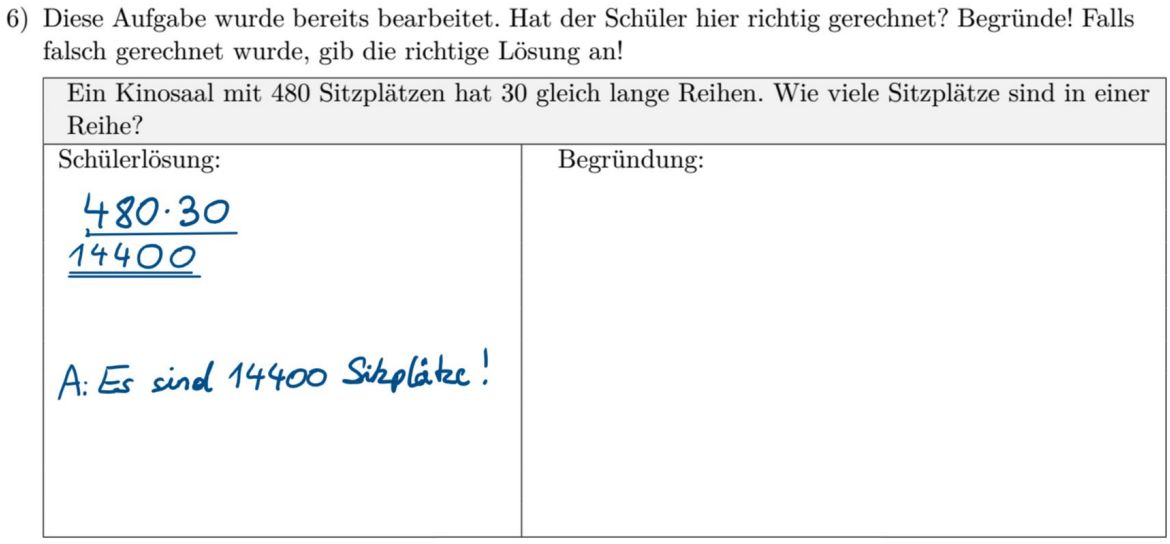


Abbildung 57: Prozentuale Häufigkeiten aufgetretener Fehler bei der Division differenziert nach Geschlecht

2.6.8 Kritische Betrachtung des Fragebogens

In diesem kurzen Kapitel soll der Frage nachgegangen werden, in welchen Bereichen der Fragebogen möglicherweise adaptiert werden sollte, um bei zukünftigen Untersuchungen ein noch schärferes Bild von den Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu erhalten. Die größten Schwierigkeiten bei der Bearbeitung des Fragebogens hatten die Kinder zweifelsohne bei den Aufgaben 7 und 8, was sich alleine an dem hohen Anteil nicht bearbeiteter Aufgaben festmachen lässt. Dennoch sind die gewonnenen Erkenntnisse sicherlich wertvoll und zeigen, dass es Kindern durchaus gelingt, den jeweiligen Unterschied zu erkennen und in eigenen Worten zu beschreiben. Um den Schülerinnen und Schülern die Beantwortung der Fragen möglicherweise ein wenig zu „erleichtern“, könnte als zusätzliche Anweisung beigefügt werden, dass jeweils eine Rechengeschichte zu den gegebenen Rechnungen erfunden werden soll. Das würde verhindern, dass als Unterschied ausschließlich die wechselnde Einheit oder eine gelernte Rechenregel angegeben werden. Somit wäre noch klarer ersichtlich, wie viele Kinder tatsächlich die entsprechenden Vorstellungen verinnerlicht haben.
Eine weitere Aufgabe, welche ein wenig verändert werden könnte, ist Aufgabe 5. Hierbei hat sich gezeigt, dass fast alle Kinder die entsprechende Zählstrategie entwickelt haben und daher nur wenige mögliche Probleme aufgezeigt wurden. Alternativ könnten an dieser Stelle kombinierte oder auch lückenhafte Punktefelder Anwendung finden, wodurch möglicherweise noch mehr Schlüsse gezogen werden können.
Es hat sich herausgestellt, dass bei den Aufgaben 4 und 6 oftmals Schülerlösungen zu finden

waren, wo keine weiteren Erklärungen oder Überlegungen beigefügt wurden. Damit ist der entsprechende Erkenntnisgewinn in gewisser Weise nicht optimal, da nicht mit Sicherheit gesagt werden kann, ob die Vorstellungen tatsächlich verinnerlicht sind. Daher könnte man beispielsweise Aufgabe 6 insofern adaptieren, dass ein weiterer in Kapitel 1.5.3 vorgestellter Diagnoseaufgabentyp zum Einsatz kommt. Dabei bietet es sich an, eine bewusst falsche Beispiellösung zu der Aufgabe anzuführen (Multiplikation anstelle der Division, Subtraktion anstelle der Division, ...). Die Schülerinnen und Schüler sollen schließlich erläutern, ob und warum die gegebene Beispiellösung falsch ist und wie die Aufgabe richtig bearbeitet werden muss (siehe Abbildung 58). Anhand der von den Kindern gegebenen Antworten, könnte man somit noch besser feststellen, ob die Vorstellung des Teilens gefestigt ist oder nicht.



6) Diese Aufgabe wurde bereits bearbeitet. Hat der Schüler hier richtig gerechnet? Begründe! Falls falsch gerechnet wurde, gib die richtige Lösung an!

Ein Kinosaal mit 480 Sitzplätzen hat 30 gleich lange Reihen. Wie viele Sitzplätze sind in einer Reihe?	
Schülerlösung: 480·30 14400 A: Es sind 14400 Sitzplätze!	Begründung:

Abbildung 58: Mögliche Alternative zu Aufgabe 6.

Eine weitere Möglichkeit, um ein noch schärferes Bild zu den bereits etablierten Vorstellungen zu erhalten, wäre, eine Aufgabe hinzuzufügen, bei welcher Sachaufgaben zu den entsprechenden Rechnungen zugeordnet werden müssen. Damit könnte man eine größere Menge an unterschiedliche Sachaufgaben (Geometrie, Alltag, ...) zu unterschiedlichen Vorstellungen überprüfen. Die Auswahlmöglichkeiten müssten dabei jedoch mit Bedacht gewählt werden, sodass eine Zuordnung allein durch die unterschiedlichen Einheiten nicht möglich ist. Um das zu gewährleisten, könnte man die Anzahl an Zuordnungsmöglichkeiten deutlich größer wählen, als die der Sachaufgaben. Zusätzlich könnte man auch hier nach dem „warum“ fragen.

2.6.9 Welche Schlussfolgerungen für den Unterricht ergeben sich dadurch?

Nachdem diese Untersuchung ausschließlich an einem Schulstandort durchgeführt wurde und damit keine allgemeinen Schlussfolgerungen gezogen werden können, werden im folgen-

den Kapitel ausschließlich Fördermaßnahmen skizziert, welche in den untersuchten Klassen aufgrund der gewonnenen Ergebnisse Anwendung finden können.
Sowohl bei der Multiplikation als auch der Division haben sich bei den ersten beiden Aufgaben doch sehr deutliche Trends gezeigt, welche Grundvorstellungen hauptsächlich vorherrschend sind. Man könnte hier folglich im Unterricht bewusst versuchen, auch andere Denkstrukturen zu fördern und den Kindern entsprechende Sachaufgaben zu weniger „beliebten“ Vorstellungen anbieten. Bei der Multiplikation hat sich gezeigt, dass der kombinatorische Zugang im Vergleich weit weniger etabliert ist. Hier könnte das Verständnis für solche Aufgaben möglicherweise unter Zuhilfenahme entsprechender Materialien „greifbarer“ gemacht werden. Sicherlich wird der kombinatorische Kontext in der Sekundarstufe II noch eingehend vertieft, allerdings ist für ein vollständiges Operationsverständnis der Multiplikation auch dieser Teilaspekt nicht zu vernachlässigen.
Die Auswertung der Sachaufgaben zum Messen und Teilen hat gezeigt, dass diese Aufgaben von einem Großteil der Schülerinnen und Schüler gelöst werden konnten. Dennoch haben einige Schülerinnen und Schüler trotz eines richtigen Rechenwegs fehlerhafte Antworten beziehungsweise Einheiten angeschrieben. Bei diesen Kindern könnte man im Zuge eines Gesprächs ermitteln, ob diese Fehler aus Verständnislücken resultieren, oder ob es sich dabei um Flüchtigkeitsfehler handelt, denn das ist aus den Lösungen alleine nicht ersichtlich.
Betrachtet man die Ergebnisse der Aufgaben 7 und 8, so erkennt man, dass dieser geometrische Kontext der Multiplikation beziehungsweise der Division bei einem Gutteil noch nicht vollständig verinnerlicht zu sein scheint. Hier ist es sicherlich hilfreich, den Unterschied noch einmal genau zu thematisieren und am besten mit Skizzen oder Materialien darzulegen. Kann der Unterschied anhand dieser Darstellungen erkannt und begriffen werden, sollten die Vorstellungen zu solchen Rechenoperationen folglich auch anhand gegebener Rechnungen in Zukunft leichter aktiviert werden. Dabei ist es sicherlich auch sinnvoll, den Zusammenhang von Multiplikation und Division als jeweilige Umkehroperationen zu vertiefen. Das Wissen über den Konnex dieser beiden Rechenoperationen kann möglicherweise Verständnislücken schließen und Fehlvorstellungen vermeiden. Dabei sollten auch die unterschiedlichen Funktionen der beiden Faktoren der Multiplikation wiederholt werden.
Im Hinblick auf die Ergebnisse zu der Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler, sollte in den untersuchten Klassen noch einmal darauf aufmerksam gemacht werden, Angaben genau zu lesen und Rechenzeichen zu beachten. Sehr viele Fehler sind dadurch entstanden, dass fälschlicherweise eine andere Rechenoperation (Multiplikation anstelle der Division und umgekehrt) durchgeführt wurde. Im Großen und Ganzen sind die beiden Algorithmen bei den meisten Kindern offensichtlich gefestigt und können (zumindest bei den natürlichen Zahlen) auch mit mehrstelligen Zahlen durchgeführt werden.
Eine weiterer Aspekt, welcher sich im Zuge der Untersuchung herauskristallisiert und vor allem während der Bearbeitung in den Klassenräumen gezeigt hat, ist der, dass viele Kinder mit Aufgabenformaten, welche sich von üblichen Formaten aus Schulbüchern unterscheiden, zunächst Schwierigkeiten hatten. Solche „unkonventionellen“ Aufgaben haben jedoch den Vorteil, weit mehr Informationen von den Schülerinnen und Schülern preiszugeben als klassische Übungsaufgaben. Möglicherweise fällt den Kindern eine Beantwortung solcher

Fragen in Zukunft leichter, wenn diese regelmäßig in den Mathematikunterricht eingebaut werden. Damit ist nicht gemeint, dass sich allein durch das Kennen der Aufgabenformate die mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler automatisch verbessern, jedoch gelingt es der Lehrperson durch die vorliegenden Antworten möglicherweise besser, Defizite und Wissenslücken genauer festzustellen.

2.7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit ist der Frage „Welche Grundvorstellungen zu den beiden Grundrechnungsarten Multiplikation und Division können bei Schülerinnen und Schülern einer AHS beim Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe festgestellt werden?“ nachgegangen.
Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage wurde eine quantitative Untersuchung mittels Fragebogen in vier ersten Klassen eines Wiener Gymnasiums durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Untersuchung haben gezeigt, dass einige Grundvorstellungen zu der Multiplikation und zur Division bei den Schülerinnen und Schülern bereits etabliert sind. Im Rahmen der Auswertung, der von den Kindern selbst erfundenen Rechengeschichten zu jeweils einer Multiplikation beziehungsweise Division, hat sich als Ergebnis der Untersuchung herausgestellt, welche Grundvorstellungen am ehesten mit diesen Rechnungen in Verbindung gebracht werden. Im Zusammenhang mit der Grundrechnungsart Multiplikation ist dies die Vorstellung von *räumlich-simultanen Anordnungen*. Die Vorstellung, die für die Division vorliegt, ist jene des *Teilens*.
Jene Grundvorstellung zur Multiplikation, welche zur Bearbeitung *kombinatorischer Aufgabenstellungen* benötigt wird, ist im Vergleich zur räumlich-simultanen sowie auch allen anderen Vorstellungen weniger stark verinnerlicht. Rund ein Viertel der Schülerinnen und Schüler konnten die Sachaufgabe im Rahmen der Untersuchung nicht lösen. Hierbei hat sich gezeigt, dass besonders Schülerinnen vermehrt Probleme bei diesen Aufgaben haben und vergleichsweise häufig Fehlvorstellungen aufzeigen.
Des Weiteren konnte festgestellt werden, dass Sachaufgaben, welche dem *Messen* beziehungsweise dem *Teilen* zugrunde liegen, von einem Großteil der teilgenommenen Schülerinnen und Schüler gelöst werden konnte; das Ergebnis erfolgreich bearbeiteter Aufgaben beläuft sich auf rund 94%. Allerdings hat sich auch gezeigt, dass der Unterschied dieser beiden Vorstellungen vor einem geometrischen Hintergrund von vielen Kindern anhand zweier stellvertretender Rechnungen nicht so einfach erfasst werden konnte. Lediglich bei rund 23% der Schülerinnen und Schüler sind beide Vorstellungen zu der Division jedenfalls so weit gefestigt, dass der Unterschied in diesem geometrischen Kontext tatsächlich auch in eigenen Worten (oder mittels Skizze) beschrieben werden kann.
Dass den Kindern das Beschreiben von kontextuellen Unterschieden zweier Rechnungen offensichtlich schwer fällt, hat auch eine weitere multiplikative Untersuchungsaufgabe gezeigt. Hierbei konnte das Verständnis in Bezug auf die Verschiedenartigkeit des Kontextes bei etwa 30% der Kinder festgestellt werden.
Weitere Erkenntnisse dieser Untersuchung, welche zwar nicht primär die Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten betreffen, wurden ebenfalls im Ergebnisbericht festgehalten. So konnte erkannt werden, dass fast alle Schülerinnen und Schüler als Zählstrategie bei rechteckigen Punktefeldern die der Flächenberechnung zugrundeliegende Multiplikation anwenden. Lediglich ein einziges Kind hat die Punkte abgezählt.
Bei der Überprüfung der Rechenkompetenz der Schülerinnen und Schüler hat sich herausgestellt, dass es hier doch recht deutliche geschlechtsspezifische Unterschiede gibt. So haben Schülerinnen bei der Multiplikation besser abgeschnitten, während Schüler beim Lösen von Divisionsaufgaben häufiger zum richtigen Ergebnis gekommen sind. Auch wenn dieses Er-

gebnis wiederum nicht primär zur Beantwortung der gestellten Forschungsfrage dieser Arbeit dient, so kann es doch als interessante Erkenntnis der durchgeführten Untersuchung gewertet werden. Es könnte eventueller Ausgangspunkt weiterführender Untersuchungen sein, wenn geschlechtsspezifische Unterschiede in der Herangehensweise mathematischer Aufgabenstellungen eine Relevanz für didaktische Überlegungen aufweisen.
Abschließend kann somit festgehalten werden, dass die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Untersuchung auf alle Fälle gezeigt hat, dass eine Überprüfung der bestehenden Vorstellungen zu den beiden multiplikativen Grundrechnungsarten spannende und wichtige Erkenntnisse bringt. Daher würde sich für weitere Forschungstätigkeiten anbieten, auch für die beiden übrigen Grundrechnungsarten – Addition und Subtraktion – einen ähnlichen Fragebogen zu entwerfen, um auch hier einen Überblick zu den bestehenden Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern nach dem Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe zu erhalten.

Literatur

Abshagen, M., Barzel, B., Kramer, J., Riecke-Baulecke, T., Rösken-Winter, B. & Selter, C. H. (2017). *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten*. Seelze: Kallmeyer Verlag.

Ahrens, H., Becker, F. G., Benölken, R., Durstewitz, A., Eberhard, D., Flade, L., ... von Scholz, A. (2018). *Fundamente der Mathematik 5*. Berlin: Cornelsen Verlag GmbH.

Beer, R., Chelly, A., Ilias, P., Jilka, S., Steffan, C. & Varelija, G. (2020). *Genial! Mathematik 1*. Wien: Bildungsverlag Lemberger.

Blum, W. & Hofe, R. v. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *Mathematik lehren*, *118*, 4–8.

Blum, W., Hofe, R. v., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische kompetenzen von schülerinnen und schülern in deutschland* (S. 145–157). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. (2003). *Lehrplan der Volksschule, Siebenter Teil, Bildungs- und Lehraufgaben sowie Lehrstoff und didaktische Grundsätze der Pflichtgegenstände der Grundschule und der Volksschuloberstufe, Grundschule – Mathematik.* `https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html`. (Online Zugriff 12.08.2021 , 16:07)

Grosser, N. & Koth, M. (2015). *Alles Klar 2*. Linz: VERITAS Schulbuch Verlags- und Handelsges.mbH Co. OG.

Hammann, M. & Jördens, J. (2014). Offene Aufgaben codieren. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen forschung* (S. 169–178). Springer Spektrum.

Hasemann, K. & Gasteiger, H. (2020). *Anfangsunterricht Mathematik - Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hofe, R. v. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte - Texte zur Didaktik der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hofe, R. v. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, *118*, 4–8.

Hofe, R. v. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth & J. H. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1267–1270). WTM-Verlag.

Hußmann, S., Leuders, T. & Susanne, P. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *15*, 1–8.

Humenberger, H. (2018). *Schulmathematik Arithmetik und Algebra [Vorlesung WS 2018/19].* `https://moodle.univie.ac.at/pluginfile.php/4839405/mod_resource/content/1/01-Nat%C3%BCrliche-Zahlen.pdf`. (Online Zugriff 08.03.2020 , 17:45)

Humenberger, H., Hasibeder, J., Himmelsbach, M., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H. & Aue, V. (2016). *Das ist Mathematik 1*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co.KG.

Kleine, M. (2007). Analyse von Grundvorstellungen - Möglichkeiten und Grenzen. In T. f. D. d. Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 183–186). Franzbecker.

Kraker, M., Plattner, G., Preis, C. & Schliegel, E. (2018). *Expedition Mathematik 1*. Wien: E. DORNER GmbH.

Krempl, M., Schranz, P. & Wihan-Schranz, N. (2018). *Mehrfach Mathematik 1*. Linz: VERITAS Schulbuch Verlags- und Handelsges.mbH Co. OG.

Mulltigan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 309–330.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems. Theoretical approaches and empirical findings. In M. Behr & J. Hiebert (Hrsg.), *Number concepts and operations in the middle grades* (S. 19–40).

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik - für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (2011, 4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Prediger, S. (2019). Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten: Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts. *Lernen und Lernstörungen*, *8* (4), 247–260.

Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K. & Ulovec, A. (2021). *Mathematik verstehen 1*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co.KG.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014). *Mathe sicher können - Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Berlin: Cornelsen Schulverlage GmbH.

Wohlhart, D. & Scharnreitner, M. (2018). *Plus! Mathematik für die Sekundarstufe. Band 1.* Rum: Helbling Verlag.

Fragebogen

Arbeitsblatt zu den Grundrechnungsarten Name:_____ Klasse: ____

Lies dir die Angaben genau durch und schreibe die Antworten möglichst verständlich auf.

1) Erfinde zu der folgenden Rechnung eine passende Rechengeschichte und löse diese anschließend!

Angabe: $14 \cdot 5 =$	
Rechengeschichte:	Rechnung:
Antwort zur Rechengeschichte:	

2) Erfinde zu der folgenden Rechnung eine passende Rechengeschichte und löse diese anschließend!

Angabe: $27 : 3 =$	
Rechengeschichte:	Rechnung:
Antwort zur Rechengeschichte:	

3) Lorenz hat in seinem Kleiderschrank 5 Hosen und 12 T-Shirts. Wie viele unterschiedliche Kombinationen von Hosen und T-Shirts kann er tragen? Schreibe auf, wie du zu deiner Lösung gekommen bist!

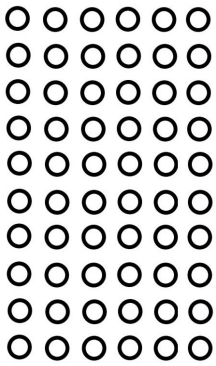
Überlegungen/Rechnungen:
Antwort:

4) Herr Meier hat nach seiner Gartenumgestaltung einen Erdhaufen von etwa 500 kg auf seiner Wiese liegen, welchen er mit seinem Fahrzeug wegbringen möchte. Mit seiner Schaufel kann Herr Meier in etwa 4 kg Erde heben.

Wie oft muss er schaufeln, um den gesamten Erdhaufen auf seinen Transporter zu verladen?

Überlegungen/Rechnungen:	
Antwort:	

5) Wie viele Kreise sind auf dem folgenden Bild abgebildet? Schreibe auf, wie du zu deiner Lösung gekommen bist!

Überlegungen/Rechnungen:	
Antwort:	

6) Ein Kinosaal mit 480 Sitzplätzen hat 30 gleich lange Reihen. Wie viele Sitzplätze sind in einer Reihe?

Überlegungen/Rechnungen:
Antwort:

7) Erkläre in Worten, worin sich die beiden gegebenen Rechnungen unterscheiden! Du darfst gerne zusätzlich auch eine Skizze machen!

a) $60\,\text{dm} : 4\,\text{dm} = 15$
Erklärung/Überlegungen:
b) $60\,\text{dm} : 4 = 15\,\text{dm}$
Erklärung/Überlegungen:

8) Erkläre in Worten, worin sich die beiden gegebenen Rechnungen unterscheiden! Du darfst gerne zusätzlich auch eine Skizze machen!

a) $4 \cdot 5\,\text{m} = 20\,\text{m}$
Erklärung/Überlegungen:
b) $5 \cdot 4\,\text{m} = 20\,\text{m}$
Erklärung/Überlegungen:

9) Löse folgende Rechnungen!

a) $743 \cdot 26 =$	**b)** $708 : 12 =$

Zusammenfassung

Der Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe ist im Leben eines Heranwachsenden ein großer Schritt. Nach vier Jahren in einem sich kaum verändernden Klassenverband und einer vertrauten Atmosphäre, wird die Ausbildung in einer neuen Bildungsanstalt fortgesetzt. Jene Schülerinnen und Schüler, welche die Aufnahme in eine AHS schaffen, benötigen in der Regel im Unterrichtsfach Mathematik entweder ein „Sehr gut“ oder „Gut“ im Zeugnis am Ende der Primarstufe. Da an den unterschiedlichen Volksschulen nach demselben Lehrplan unterrichtet wird, könnte man davon ausgehen, dass das Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler beim Übergang in die AHS ein ähnliches ist. In der Praxis zeigt sich, dass das mitunter nicht der Fall ist und Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Vorstellungen und Erfahrungen zusammentreffen. Die Herausforderung einer AHS-Lehrperson ist es, diese heterogene Gruppe gemeinsam zu unterrichten und dabei alle Heranwachsenden an dem jeweiligen Wissensstand abzuholen. An dieser Stelle stellt sich für Lehrpersonen oftmals die Frage, welche mathematischen Inhalte nach der Volksschule bei einem Großteil der Schülerinnen und Schüler bereits verinnerlicht sind und wo noch viel Aufholbedarf besteht. Um Antworten auf diese oder ähnliche Fragen zu bekommen, sind Standortbestimmungen zu Beginn der 5. Schulstufe probate Mittel. Eine reine Überprüfung der rechnerischen Kompetenzen geben jedoch nur bedingt Einblick in die tatsächlichen Vorstellungskonstrukte der Schülerinnen und Schüler zu bestimmten mathematischen Inhalten.
Im Zuge dieser Arbeit wird versucht, einen genaueren Blick auf die Erfahrungen der Heranwachsenden im Bereich der vier Grundrechnungsarten zu bekommen. Es gilt hierbei explizit herauszufinden, welche *Grundvorstellungen* zu den Grundrechnungsarten die Kinder aus der Volksschule mitbringen und welche möglicherweise noch gar nicht aufgebaut sind. Hierfür wird zunächst der Begriff Grundvorstellung im mathematischen Kontext definiert und erläutert, welche Vorstellungen es bei den Grundrechnungsarten gibt. Außerdem wird der Frage nachgegangen, wie man überhaupt Vorstellungen zu bestimmten mathematischen Inhalten evaluieren kann und welche Aufgabenformate dabei in dieser Arbeit Anwendung finden können. Anhand dieser Erkenntnisse wird ein Fragebogen erstellt, welcher die Grundvorstellungen zu zwei Rechenoperationen, nämlich zur Multiplikation und zur Division, überprüfen soll. Die im Zuge der Untersuchung vier erster Klassen einer Wiener AHS im Schuljahr 2020/21 ermittelten Ergebnisse werden schließlich zusammengefasst und die daraus erhaltenen Erkenntnisse in den finalen Kapiteln der Arbeit festgehalten.

Abstract

The step from primary school to high school represents a big leap in life of adolescents. After four years in a well-known class atmosphere and a fix peer group, school education continues in a new environment. For high school attendance all pupils need either an A or B qualification in mathematics. As all primary schools teach on the basis of the same curriculum, it might happen, that same capabilities among all children are assumed. However, in reality pupils show different mathematical experiences and mental representations of mathematical content. Thus teachers are often challenged with heterogenous groups and the demand to deal with individual levels of mathematical knowledge. This often has to be determined before starting with consolidation. To gain an insight, knowledge checks at the beginning of the first high school class represent an appropriate method. Checks of calculating capabilities only do not represent the real mathematical ideas of pupils regarding certain aspects.

Aim of this master thesis is therefore getting an insight according to adolescents´ experiences of the four basic arithmetical operations. The focus represents the investigation of "Grundvorstellungen" (basic ideas) in relation to these operations which have either been developed or not during primary school years. First step is the definition of the term "Grundvorstellungen" in a mathematical context and an explanation of the ideas which are connected with the basic arithmetical operations. Furthermore this thesis tries to find answers on how mental representations of certain mathematical contents can be evaluated. Based on these results a questionnaire is built to determine pupils´ "Grundvorstellungen" of division and multiplication. The results of this investigation in four first grades of a high school in Vienna, which took place in school year 2020/2021, are summarized and analyzed as final step of this thesis.