MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Augmented Reality und Raumvorstellung im Mathematikunterricht"

verfasst von / submitted by

Johannes Michael Kofler, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 507 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Englisch Unterrichtsfach Mathematik Lehrverbund
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

Allen voran möchte ich mich bei meinem Betreuer, Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger, sowie bei Mag. Dr. Christian Dorner, BSc bedanken, die mich zu diesem Projekt inspiriert haben und mir in meinem Schaffensprozess stets mit Fachwissen und aufschlussreichen Inputs zur Seite gestanden sind.

Weiters möchte ich mich bei den Lehrpersonen und Schüler*innen bedanken, die mit ihrer Teilnahme am Projekt einen großen Teil zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Ebenso geht ein großer Dank an meine Eltern. Sie haben mich in meinem akademischen und persönlichen Weg sowohl seelisch als auch finanziell immer unterstützt, und mir so eine große Last von den Schultern genommen.

Zuletzt möchte ich mich noch ganz besonders bei meiner Partnerin Franziska bedanken, die mich während dem Schreiben begleitet und mir fortwährend das Ziel vor Augen gehalten hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Relevanz 2

1.2 Aufbau der Arbeit 3

2 Theoretischer Hintergrund **5**

2.1 Räumliches Denken und Raumvorstellung 5

2.1.1 Räumliches Denken 6

2.1.2 Raumvorstellung 7

2.2 Faktoren der Raumvorstellung 8

2.2.1 Visualisierung 8

2.2.2 Räumliche Beziehung 9

2.2.3 Mentale Rotation 10

2.2.4 Räumliche Orientierung 10

2.3 Lösungsstrategien bei Raumvorstellungstests 11

2.4 Mathematikunterricht und Raumvorstellung 14

2.5 Virtual Reality und Augmented Reality 16

2.6 Eigenschaften von Augmented Reality 17

2.7 Mathematikunterricht und Augmented Reality 18

2.7.1 Technologieeinsatz im Mathematikunterricht 19

2.7.2 Bezug zum Lehrplan 20

2.7.3 Potential für den Mathematikunterricht 21

2.7.4 Mathematik als Allgemeinbildung 23

2.7.5 Modellbilden 25

2.8 Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG): Vektoren 28

2.9 Funktionen der App *Vektor AR³* 29

3 Forschungsfragen und Hypothesen **35**

3.1 Forschungsfragen 35

3.2 Hypothesen und Erwartung 36

4 **Versuchsablauf** **39**
4.1 Auswahl der Testpersonen . . . 40
4.2 Pretest . . . 40
4.3 Drei Interventionsstunden . . . 41
4.4 Überblick über die Planung . . . 42
4.5 Kommentare zum tatsächlichen Ablauf . . . 44
4.5.1 Experimentalgruppe . . . 45
4.5.2 Kontrollgruppe . . . 48
4.6 Posttest . . . 50

5 **Methode und verwendetes Material** **51**
5.1 Raumvorstellungstests . . . 51
5.1.1 Differential Aptitude Test: Spatial Relations (DAT) . . . 52
5.1.2 Purdue Spatial Visualization Test: Rotations (PSVT:R) . . . 52
5.1.3 Spatial Orientation Test (SOT) . . . 53
5.2 Typ-1-Aufgaben der österreichischen Matura . . . 55
5.3 Fragebogen und Feedback . . . 56

6 **Ergebnisse** **57**
6.1 DAT . . . 57
6.2 PSVT:R . . . 59
6.3 SOT . . . 59
6.4 Typ-1-Aufgaben . . . 62
6.5 Gesamtergebnisse . . . 64
6.6 Individuelle Entwicklung . . . 66
6.7 Fragebogen . . . 68
6.7.1 Experimentalgruppe . . . 68
6.7.2 Kontrollgruppe . . . 69
6.8 Korrelationen und Zusammenhänge . . . 70
6.9 Korrelationen der Ergebnisse der Experimentalgruppe . . . 71
6.10 Korrelationen der Ergebnisse der Kontrollgruppe . . . 71
6.11 Überprüfung der Mittelwerte . . . 72

6.12 Korrelation von Zeit und Testerfolg 72
6.13 Weitere Untersuchungen von Korrelationen und Zusammenhängen 73
6.13.1 Klasseneinteilung nach Pretest 73
6.13.2 Effektstärke 74
6.13.3 Geschlecht und Testerfolg 74
6.13.4 Selbsteinschätzung und Testerfolg 74
6.13.5 Schulnote und Testerfolg 75
6.13.6 Mathematik Kompetenz im Bereich Vektoren (AG 3.1 - AG 3.5) . . 75

7 Analyse **77**
7.1 Analyse der quantitativen Daten 77
7.1.1 Experimentalgruppe 77
7.1.2 Kontrollgruppe 78
7.1.3 Untersuchung des Faktors *Visualisierung* 79
7.1.4 Untersuchung des Faktors *Räumliche Beziehung* 80
7.1.5 Untersuchung des Faktors *Mentale Rotation* 80
7.1.6 Untersuchung des Faktors *Räumliche Orientierung* 80
7.1.7 Untersuchung der Mathematikkompetenz 81
7.1.8 Untersuchung der Korrelationen 81
7.2 Analyse der qualitativen Daten 82
7.2.1 Offene Fragen in der Experimentalgruppe 83
7.2.2 Erfahrungswerte mit *Vektor AR³* 85

8 Diskussion **87**
8.1 Diskussion der quantitativen Daten 87
8.2 Diskussion der qualitativen Daten 89
8.3 Beantwortung der Forschungsfragen 90
8.3.1 Hauptforschungsfrage 90
8.3.2 2. Forschungsfrage 91
8.3.3 3. Forschungsfrage 93

9 Fazit **94**
9.1 Limitationen und Ausblick 94

Literatur **97**

Appendix **105**

Zusammenfassung **136**

Abstract **137**

Abbildungsverzeichnis

1 Virtuality Continuum bzw. Virtualitätskontinuum 16
2 Modellbildungsprozess 27
3 Screenshots zu *Vektor AR³* 1 30
4 Screenshots zu *Vektor AR³* 2 31
5 Screenshots zu *Vektor AR³* 3 32
6 Screenshots zu *Vektor AR³* 4 33
7 Versuchsablauf der Studie 39
8 Beispiel einer Aufgabe des DAT 52
9 Beispiel einer Aufgabe des PSVT:R 53
10 Beispiel einer Aufgabe des SOT 54
11 Beispiel einer Typ-1-Aufabe 55
12 DAT: Verteilung der erreichten Punkte in der Experimentalgruppe 58
13 DAT: Verteilung der erreichten Punkte in der Kontrollgruppe 58
14 PSVT:R: Verteilung der erreichten Punkte in der Experimentalgruppe . . . 60
15 PSVT:R: Verteilung der erreichten Punkte in der Kontrollgruppe 60
16 SOT: Verteilung der durchschn. Abweichung in der Experimentalgruppe . . 61
17 SOT: Verteilung der durchschn. Abweichung in der Kontrollgruppe 61
18 Typ-1: Verteilung der richtig gelösten Aufgaben in der Experimentalgruppe 63
19 Typ-1: Verteilung der richtig gelösten Aufgaben in der Kontrollgruppe . . . 63
20 Individuelle Entwicklung der Totalscores in der Experimentalgruppe 66
21 Individuelle Entwicklung der Totalscores in der Kontrollgruppe 67

Tabellenverzeichnis

1 Raumvorstellung und Totalscore, gesammeltes Ergebnis 64
2 Raumvorstellungs- und Totalscore in der Experimentalgruppe 65
3 Raumvorstellungs- und Totalscore in der Kontrollgruppe 65
4 Fragebogen: Antworten der Experimentalgruppe 68
5 Fragebogen: Antworten der Kontrollgruppe 70
6 Korrelationen: Ergebnisse in der Experimentalgruppe 71

7 Korrelationen: Ergebnisse in der Kontrollgruppe 72
8 Korrelation: Zeit und Testerfolg 73
9 Korrelation: Semesternoten und Testerfolg 75
10 Korrelation: Raumvorstellung und Mathematikkompetenz 76
11 Fragebogen: Antworten der Schüler*innen zu *Vektor AR³* 84

Abkürzungsverzeichnis

AG Inhaltsbereich Algebra und Geometrie

AR Augmented Reality

DAT Differential Aptitude Test: Spatial Relations

EG Experimentalgruppe

KG Kontrollgruppe

MR Mixed Reality

$PSVT:R$ Purdue Spatial Visualization Test: Rotations

RV Raumvorstellung

SOT Spatial Orientation Test

$Typ-1$ Typ-1-Aufgabe der österreichischen Matura

VR Virtual Reality

1 Einleitung

Das Ziel des Mathematikunterricht ist es, mathematische Inhalte und Kompetenzen an Schüler*innen weiterzugeben. Dabei können viele technische und digitale Lösungen Verwendung finden, um erlebbare und angreifbare Mathematik zu vermitteln. In einer Zeit, in der Lernformen wie *technology-enhanced learning*, *mobile learning* und *ubiquitous learning* den Lernenden eine angenehme Erfahrung des multimodalen Lernens versprechen, ist es als Lehrperson wertvoll zu wissen, welche technologischen Innovationen für den Mathematikunterricht und die angestrebten Lernziele passend sind und welche nicht.

Fast alle dieser neuen Lernformen fokussieren sich auf die individuellen Erfahrungen der Lernenden, und bieten teilweise vorstellungsbildende Visualisierungen. So hat sich in den letzten Jahren im Bildungsbereich das Feld der Augmented Reality (AR) einiger Beliebtheit erfreut. Speziell durch Entwicklungen in schulexternen Settings, wie etwa der Videospiel- und Unterhaltungsindustrie, oder neuerdings auch in Verbindung mit dem Metaverse, wurde AR stetig verbessert.

So sind mittlerweile alle modernen Smartphones in der Lage, über spezielle Applikationen die Realität, welche über die Kamera aufgenommen wird, durch virtuelle, softwarebasierte Elemente auf dem Display zu ergänzen. Diese Vermischung von Realität und Virtualität wird als Mixed Reality bezeichnet. Überwiegt, der Realanteil, wird von der Augmented Reality gesprochen.

Das Arbeiten mit Augmented Reality im Unterricht hat den Vorteil, dass Schüler*innen selbstständig und erlebend Arbeiten können, während zusätzlich noch Kompetenzen wie die Raumvorstellung ausgebildet werden. So zeigen auch Studien, dass besonders das Arbeiten mit AR-Applikationen positive Effekte auf die Entwicklung der Raumvorstellung hat. Die Raumvorstellung wird als die rein kognitive Teilkomponente des räumlichen Denkens aufgefasst, und besteht üblicherweise aus mehreren Teilbereichen, genannt Faktoren, die lauten: *Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation* und *Räumliche Orientierung.* Diese Faktoren werden üblicherweise bei standardisierten Tests überprüft, bei denen mehrere, ähnliche Aufgaben auf einen (bzw. maximal zwei) dieser Faktoren abzielen.

Im Hinblick auf das angesprochene Potenzial der AR wurde im Rahmen dieser Masterarbeit ein Experiment durchgeführt, welches einerseits die Veränderung der Faktoren der

Raumvorstellung und andererseits die Effekte der Smartphone-Applikation *Vektor AR³* untersucht hat. Dafür wurden zwei 6. Klassen einer Wiener AHS einem Pretest und einem Posttest unterzogen. Zwischen diesen zwei Tests erhielt die Experimentalgruppe drei Schulstunden Unterricht, in denen *Vektor AR³* gezielt zum Einsatz kam, während die Kontrollgruppe drei analoge Unterrichtseinheiten ohne jegliche digitale Visualisierungen durchliefen. Durch drei Raumvorstellungstests sowie einen Mathematiktest wurden die individuellen Entwicklungen der Schüler*innen verfolgt und ausgewertet.
Für das Arbeiten mit Vektoren in $\mathbb{R}^3$ wurde die Smartphone-Anwendung *Vektor AR³* verwendet, die sich an den Erfordernissen des österreichischen Lehrplans orientiert und in Wien durch das *FH Technikum Wien* und das Unternehmen *Senselab.io* entwickelt wurde. Die App ist öffentlich und kostenlos zugänglich, und bietet daher eine gute Einstiegsmöglichkeit für Augmented Reality im Mathematikunterricht. Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Funktionsweisen dieser App genau aufgezeigt werden, um anschließend bewerten zu können, wie deren Einsatz für den Mathematikunterricht und die damit verbundenen Lernziele umzusetzen ist. Weiters soll der Einfluss der Arbeitsweise mit AR auf die Raumvorstellung untersucht werden, und durch qualitative Rückmeldungen der Schüler*innen gestützt werden.

1.1 Relevanz

Digitale Medien sind omnipräsent und längst nicht mehr wegzudenken. Daher kommen auch im Schulkontext viele technische Lösungen und Anwendungen zum Einsatz, die den Unterricht erleichtern und unterstützen können. Während digitale Lösungen bei Präsentationen und Hausaufgaben schon häufig Anwendung finden, so gibt es noch Aufholbedarf im Bereich von interaktiven Lösungen im Präsenzunterricht. Hierfür eignet sich im Speziellen die Anwendung von Augmented Reality Software, die Inhalte durch Visualisierung und Interaktion erlebbar machen. Diese ermöglichen es interaktiv mit dem eigenen Smartphone mit z.B. Vektoren oder Körpern zu arbeiten, diese zu modifizieren und darüber Aufgaben zu lösen. Dadurch kann der virtuelle mit dem realen Raum verbunden werden, was sich nicht nur stimulierend auf die visuelle Wahrnehmung und das räumliche Denken auswirkt, sondern auch die Mathematik intensiver erfahrbar macht (Chao & Chang, 2018, S. 455; Maresch, 2021, S. 26).

Zusätzlich hat AR den großen Vorteil, dass durch das direkte Erleben der Inhalte, eine längere und bessere Speicherung im Langzeitgedächtnis stattfindet und Veränderungen auf die Einstellung gegenüber Mathematik bemerkbar werden (Radu, 2014, S. 1533–1543). So konnte in Studien eine Vergrößerung des Selbstvertrauens (im Bezug auf die eigenen mathematischen Fähigkeiten) sowie eine Verminderung von Angst gegenüber Mathematik gemessen werden (Chao & Chang, 2018, S. 455–464). Teilweise wurde sogar ein positiver Einfluss von Augmented Reality im Schulunterricht auf die Kreativität, die Fähigkeiten kritisch zu analysieren und zu denken sowie die Eigenständigkeit im eigenen Denken und Handeln nachgewiesen (Bower, Howe, McCredie, Robinson & Grover, 2014, S. 1–15). Diese Ergebnisse sprechen eindeutig für eine nähere Betrachtung von Augmented Reality, im Hinblick auf Kompetenzen und Vorstellungen des Mathematikunterrichts.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Masterarbeit setzt sich aus einem theoretischen und einem empirischen Teil zusammen.
Zu Beginn werden im Abschnitt *2 Theoretischer Hintergrund* die Konzepte Räumliches Denken, Raumvorstellung in Verbindung mit dem Mathematikunterricht besprochen. Anschließend widmet sich die Theorie dem Thema Augmented Reality, und deren Einsatz im Mathematikunterricht. Letztlich wird die Smartphone-App *Vektor AR³* vorgestellt und deren Funktionalität aufgezeigt.
Darauf aufbauend wird im folgenden Abschnitt *3 Forschungsfragen und Hypothesen* das Forschungsinteresse aufgezeigt sowie Fragen und Hypothesen formuliert.
Anschließend wird der *Versuchsablauf* (Abschnitt *4*) der Experimental- und Kontrollgruppe genau beschrieben und die Interventionsstunden erklärt.
Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Raumvorstellungstests, der Mathematiktest mit Typ-1-Aufgaben sowie der Fragebogen werden im Abschnitt *5 Methode und verwendetes Material* vorgelegt.
Die aus der Studie gewonnen quantitativen und qualitativen Daten werden in Abschnitt *6 Ergebnisse* präsentiert und graphisch aufbereitet. Daran anknüpfend folgen statistische Tests auf Korrelation und Signifikanz zu diversen Zusammenhängen.
Im Abschnitt *7 Analyse* werden diese Daten weiter durchleuchtet, während der Abschnitt

8 Diskussion die Studienergebnisse mit der Theorie verbindet, und Antworten zu den drei aufgestellten Forschungsfragen gibt.
Abschließend findet sich in Abschnitt *9 Fazit* eine Einordnung der Studie sowie ein Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten und eine Reihe an Vorschlägen für den Mathematikunterricht mit Augmented Reality.

2 Theoretischer Hintergrund

Im folgenden Abschnitt soll zuerst der Stand der Forschung im Bereich der Raumvorstellung (bzw. oft auch das Raumvorstellungsvermögen genannt) sowie der Augmented Reality dargelegt werden. Weiters soll die Verbindung zur Vektorgeometrie (analytische Geometrie) hergestellt werden, um die Möglichkeiten bzw. die Vorteile für das Unterrichten mit Augmented Reality zu diskutieren. Darauf folgend wird der Bezug zum österreichischen Lehrplan aufgezeigt, und argumentiert, wie Augmented Reality und der Wunsch nach Mathematik als Allgemeinbildung zusammenpassen. Um die Möglichkeiten der Augmented Reality aufzuzeigen, wird das Modellbilden mit AR beispielhaft erläutert. Im Anschluss daran findet eine Erläuterung zu den Funktionen und Anwendungsmöglichkeiten der Smartphone-App *Vektor AR³*.

2.1 Räumliches Denken und Raumvorstellung

Die Begriffe *Räumliches Denken* und *Raumvorstellung(-svermögen)* werden in der Literatur nicht ganz einheitlich verstanden, und haben sich in den letzten 100 Jahren stark gewandelt (Maresch, 2013, S. 237-240; Maresch, 2015, S. 36-38; Maresch, 2021, S. 24). Daher soll nun das für diese Arbeit tragende Verständnis dieser zwei Begriffe erläutert und beschrieben werden.

Als Ursprung für jegliche visuelle Wahrnehmungen dient das Auge, welches optische Reize an das Gehirn weiterleitet. Der Teil des Gehirns, der für die visuelle Wahrnehmung zuständig ist, ist der visuelle Cortex. Hier werden die visuellen Reize verarbeitet, interpretiert und anschließend zu räumlichen Objekten strukturiert (Wade & Swanston, 2013, S. 140-168; Zöggeler & Maresch, 2018, S. 29-30; Maresch, 2021, S. 24-25). Dieser Wahrnehmungsprozess funktioniert zuerst rein anatomisch (also sinnesorganisch), und wird in Folge von einfachen kognitiven Vorgängen abgelöst. Die Raumvorstellung ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht aktiviert worden, denn davon kann erst gesprochen werden, wenn ein höheres kognitives Niveau erreicht wurde. Damit es dazu kommen kann, müssen die visuellen Sinne ein Objekt wahrnehmen, es als solches strukturieren sowie eine Interaktion damit ermöglichen. Als übergreifender Begriff für diesen Prozess dient das Räumliche Denken, welche als eine Art Überkategorie der Raumvorstellung zu verstehen ist, und sich zusätzlich aus Fähigkeiten wie „Raumdenken, Raumvorstellungsvermögen, visuelle Wahrnehmung, räumliche Wahrnehmung, Raumwahrnehmung oder Raumintelligenz“ (Maresch, 2021, S. 24) zusammensetzt. Somit besteht das Räumliche Denken nicht nur aus bewussten und kognitiven Prozessen, sondern stützt sich auch auf anatomische Wahrnehmungen und motorische Bewegungsabläufe sowie teilweise unbewusste kognitive Prozesse (Maresch, 2021, S. 24-25). Die Raumvorstellung ist in dieser Konzeption also eine spezielle Fähigkeit oder Leistungen und Teil des Räumlichen Denkens, und kann gefolgt aufsummiert werden:

> „Das Raumvorstellungsvermögen [bzw. die Raumvorstellung] wird als die Fähigkeit eines Individuums erachtet, durch Denken räumliche Objekte mental zu erzeugen und zu transformieren, Relationen zwischen mehreren dieser mentalen Objekte zu erkennen und herstellen zu können und selbst mental unterschiedliche räumliche Positionen einzunehmen.“ (Maresch, 2018 zitiert nach Zöggeler & Maresch, 2018, S. 30)

2.1.1 Räumliches Denken

Das Räumliche Denken ist ein alter Begriff aus der Intelligenzforschung, der erstmals von Galton (1879, S. 157-169) beschrieben wurde und ursprünglich einen Teil der „allgemeinen Intelligenz“ (Höffler, 2010, S. 246) darstellte. Räumliches Denken, bzw. in der englischen Literatur auch *Spatial Thinking* genannt, wird als eine kognitive Fähigkeit, die es ermöglicht ein Bild von einem Objekt zu erzeugen, das mental wahrgenommen werden kann (Maresch, 2021, S. 24-25). Weiters soll dieses Objekt beschrieben aber auch verändert werden können, und sowohl als Ganzes als auch aus Teilen bestehend aufgefasst werden (Buckley, Seery & Canty, 2018, S. 950-951). Durch dieses nicht streng abgegrenzte Verständnis verschwimmt in der Literatur häufig die Grenze zwischen der hier benannten Raumvorstellung und dem Räumlichen Denken, bzw. werden diese teilweise auch gleichgesetzt. Das kann darauf zurückgeführt werden, dass das Begriffsverständnis über lange Zeit hinweg stark angepasst wurde und die Interpretation des Räumlichen Denkens heute immer noch vom jeweiligen Wissenschaftskontext abhängig ist. Über spezielle Tests erfasst wird jedoch hauptsächlich die Raumvorstellung (Maresch, 2021, S. 24-35).

2.1.2 Raumvorstellung

Die Raumvorstellung ist rein kognitiv bzw. vorstellungsbasiert (im Gegensatz zum Räumlichen Denken) und beschreibt die Fähigkeit (komplexe) visuelle Informationen und Bilder zu erzeugen, transformieren, modifizieren, im Kopf zu behalten und anschließend wieder aufrufen zu können (Linn & Petersen, 1985, S. 1482; Lohman, 1996, S. 3). Wichtig ist zu betonen, dass die Raumvorstellung daher vollkommen ohne die visuelle Wahrnehmung (das Auge) auskommen kann (Maresch, 2021, S. 29) sowie „keinerlei reale Tätigkeiten (wie reales Betrachten von räumlichen Objekten oder Durchführen von (fein)motorischen Bewegungsabläufen)“ (Maresch, 2021, S. 34) beinhaltet.
Mathematisch gesprochen, handelt es sich bei Prozessen der Raumvorstellung also um Transformationen, Spiegelungen, Drehungen, Skalierungen, Projektionen, Relationen (zwischen Objekten), Schnitten, Vereinigungen, Teilungen, Differenzen oder jeglichen anderen Operationen, die mit Mengen oder Objekten erfolgen können (Zöggeler, 2019, S. 2). Durch diese Vielzahl an differenzierbaren Fähigkeiten wird die Gesamtheit der Raumvorstellung wiederum in weitere Teilkompetenzen bzw. sogenannte *Faktoren* untergliedert, die folgend in *2.2 Faktoren der Raumvorstellung* beschrieben werden.

Durch ein großes Interesse in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden in der „faktoriellen Phase der Raumintelligenzforschung“ (Maresch, 2021, S. 29-30) sehr viele unterschiedliche Faktoren gefunden und beschrieben. Dies geschah primär über Faktorenanalysen, in welchen Proband*innen mehrere Tests durchliefen wobei untersucht wurde, ob der Erfolg bei unterschiedlichen Testitems korrelierte oder nicht.

> „Dieses faktoranalytische Vorgehen mit passenden zugrundeliegenden mathematischen Rechenmodellen sollte ermöglichen zu erkennen, welche Testaufgaben inhaltlich „verwandt“ sind, welche Testaufgaben also inhaltliche Gemeinsamkeiten haben, daher mit gleichartigen Überlegungen und dadurch auch mit ziemlich gleich hoher Wahrscheinlichkeit gelöst werden. Auf diesem Wege wurde gehofft, dass einzelne Bereiche, aufgrund des faktoranalytischen Vorgehens Faktoren genannt, gefunden werden, die inhaltlich zusammenhängen und die somit unterschiedliche Bereiche des Raumvorstellungsvermögens (= Faktoren) erkennen lassen.“ (Maresch, 2021, S. 29-30)

Darauf aufbauend, wurden in der „postfaktoriellen Phase“ die Faktoren auf zumeist drei bis fünf voneinander unabhängige Faktoren reduziert (Thurstone, 1950, S. 517-521; Rost,

1977, S. 73-81; Carroll, 1993, S. 304-307; Maresch, 2013, S. 239-240).
Raumvorstellungstests, die in hohem Maße mit einem (oder mehreren) dieser Faktoren korrelieren, können als *Marker* für diesen Faktor bezeichnet werden. Diese ermöglichen es, den Faktor zu aktivieren und zu überprüfen (Maresch, 2015, S. 36-37). Diese Faktoren treten in der Literatur der letzten 25 Jahre zwar noch in kleinen Anordnungsvariationen auf, sind aber nun großteils einheitlich und lauten: *Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation, Räumliche Wahrnehmung* und *Räumliche Orientierung* (Maier, 1994, S. 49-51; Maresch, 2013, S. 239-240).

2.2 Faktoren der Raumvorstellung

Die Aufteilung in fünf Faktoren geht auf Maier (1994) zurück, der viele bisherige Strukturierungen verdichtet hat (Maresch, 2021, S. 30). Jedoch ist die exakte Deutung der Faktoren immer noch unterschiedlich. So wird der Faktor *Räumliche Wahrnehmung* teilweise auch dem Faktor *Räumliche Orientierung* untergeordnet, da dieser lediglich die Kompetenz beschreibt, horizontale und vertikale Orientierung bzw. Identifikation wahrnehmen und darstellen zu können, während der Faktor *Räumliche Orientierung* eine übergreifende Orientierung und Positionierung im Raum umfasst. (Thurstone, 1950, S. 517-521; Maresch, 2015, S. 37-38). Auch in dieser Arbeit wird diese Verknüpfung durchgeführt und somit von nun an mit vier Faktoren gearbeitet (*Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation, Räumliche Orientierung*), wie dies auch bei vergleichbaren Studien üblich ist (Maresch, 2021, S. 25). Diese Komprimierung ist auch insofern sinnvoll, als dass diese beiden Faktoren sehr eng aneinander liegen, und eine klare Differenzierung mit vielen der Raumvorstellungstests nicht möglich wäre.
Nun werden die angeführten vier Faktoren der Raumvorstellung detailliert beschrieben, um Unterschiede und Abgrenzungen aufzuzeigen.

2.2.1 Visualisierung

Der Faktor *Visualisierung* bzw. *Räumliche Visualisierung*, im Englischen daher zumeist als *Spatial Visualization* benannt, wird mittels Aufgaben überprüft, die besonders komplexer Natur sind und oft auch mehrere Zwischenschritte benötigen. Dadurch fordern diese Aufgaben einen hohen Grad an Genauigkeit bei den vorgestellten Transformationen und Manipulationen der Objekte (Dünser, 2005, S. 6-8; Ramful, Lowrie & Logan, 2017, S. 713-714). Ramful et al. beschreiben die *Visualisierung* als „am wenigsten streng abgegrenzt“ (Ramful et al., 2017, S. 713-714, übersetztes Zitat) im Vergleich zu den anderen Faktoren der Raumvorstellung. Linn und Petersen (1985, S. 1484-1485) differenzieren die *Visualisierung* insofern von anderen Faktoren, da sich diese grundsätzlich auf die anderen Faktoren der Raumvorstellung stützen darf, jedoch mehr ist als nur die Summe dieser. So kann beispielsweise die *Mentale Rotation* einen Teil zum Lösungsprozess beitragen, jedoch nicht zur vollständigen Lösung führen. Dafür ist der Einsatz von *Visualisierung* notwendig. Oft führt diese Herangehensweise zu einer analytischen Bearbeitungsstrategie, in der schrittweise zur Lösung manövriert wird. Wird jedoch gesamtheitlicher *visualisiert*, dann wird in diesem Zusammenhang von einer holistischen Strategie gesprochen (Dünser, 2005, S. 15-20).

Für den in dieser Studie verwendeten *Differential Aptitude Test: Spatial Relations* kommt sowohl der Faktor *Visualiserung* als auch, abhängig von der Bearbeitungsstrategie, die *Räumliche Beziehung* in einem größeren oder kleineren Ausmaß zu tragen (Bennett, Seashore & Wesman, 1973, S. 81-91).

2.2.2 Räumliche Beziehung

Im Gegensatz zur *Visualisierung* ist der Faktor *Räumliche Beziehung* (*Spatial Relation*) mehr auf Geschwindigkeit als auf Komplexität und Genauigkeit ausgerichtet. Die *Räumliche Beziehung* zeichnet sich besonders über die Schnelligkeit bei Manipulations- und Transformationsaufgaben aus. Wie erwähnt, kommt beim *Differential Aptitude Test: Spatial Relations* auch die *Räumliche Beziehung* zum Einsatz und ist besonders für den Mathematikunterricht wertvoll. Denn neben Aufgaben, die Raumvorstellung fordern, kann

> „zur Wahrnehmung der räumlichen Beziehungen [...] auch das Erfassen von Formen und deren Lage im Raum gehören. Diese Fähigkeit ist in der Geometrie wichtig, um z. B. Schnittpunkte von Geraden zu verstehen, Berührpunkte von Figuren zu erkennen oder sich bei der zweidimensionalen Darstellung von räumlichen Objekten auch in der Darstellung verdeckte Objektteile vorstellen zu können.“ (Helmerich & Lengnink, 2016, S. 16)

Somit ist die *Räumliche Beziehung* ein wichtiger Faktor der Raumvorstellung und gleichzeitig eine Kompetenz, die auch im Mathematikunterricht regelmäßig Anwendung findet.

2.2.3 Mentale Rotation

Der Faktor *Mentale Rotation* beschreibt einen kognitiven Prozess, bei dem zweidimensionale oder dreidimensionale Objekte in der Vorstellung um einen gewissen Winkel gedreht werden. Ebenso sind Spiegelungen, Achsenrotationen oder Drehungen um einen Punkt inbegriffen (Ramful et al., 2017, S. 711-712).

Bereits in den 1970er Jahren wurden Experimente durchgeführt, um zu untersuchen, wie die Beziehung zwischen dem Drehwinkel, der Komplexität, der Konfiguration des zu drehenden Objekts und der Reaktionszeit sind (Shepard & Metzler, 1971, S. 701-703). Cooper (1975, S. 40-42) konnte feststellen, dass die Schwierigkeit bei der Durchführung einer mentalen Drehung fast hauptsächlich vom Winkel abhängt und die Komplexität des Objekts eher nebensächlich ist. Die *Mentale Rotation* von dreidimensionalen Objekten gestaltet sich schwieriger ist als die von zweidimensionalen Objekten. Das liegt daran, dass bei einem dreidimensionalen Objekt auch die Tiefe vorgestellt und gedreht werden muss. Dabei können Teile des Objekt verschwinden oder auch zuvor verdeckte Teile wieder sichtbar werden (Ramful et al., 2017, S. 701-703).

Üblicherweise wird bei Raumvorstellungstests, welche die *Mentale Rotation* überprüfen, den Testpersonen ein Objekt vorgegeben, das mit einem gedrehten oder gespiegelten Objekt verglichen werden muss. Alternativ muss das korrekte Objekt unter mehreren ausgewählt werden. Die Zeit, die die Testpersonen für diese mentalen Drehungen benötigen, wird dann gemessen.

Es zeigte sich unter anderem, dass das Trainieren mit Rotationsaufgaben bei Kindern zu verbesserten Ergebnissen bei Mathematikaufgaben führen kann (Cheng & Mix, 2014, S. 2-11). Für die Überprüfung dieses Faktors ist der *Purdue Spatial Visualization Test: Rotations* als sehr reliables Instrument identifiziert worden, welches auch bei dieser Studie eingesetzt wird (Guay, 1997; Bodner & Guay, 1997, S. 14).

2.2.4 Räumliche Orientierung

Anders als die *Mentale Rotation*, beschreibt der Faktor *Räumliche Orientierung* keinen kognitiven Prozess, bei dem Objekte in der Vorstellung manipuliert werden (sollen). Vielmehr zielt die *Räumliche Orientierung* auf eine Verschiebung der eigene Person bzw. Perspektive ab. So geht es in den dazugehörigen Aufgaben darum, sich einen neuen Blick-

winkel im Raum vorzustellen, oder einen speziellen Standpunkt einzunehmen und andere Objekte in Beziehung mit der eigenen Perspektive zu setzen. In den üblichen Tests geht es darum, den Winkel zwischen zwischen zwei Objekten anzugeben, oder die Orientierung auf einer (Land-)Karte korrekt zu deuten (Hegarty & Waller, 2004, S. 176-178; Ramful et al., 2017, S. 712-713). Diese Raumvorstellungstests sind als *Object Perspective-Taking Test* und *Map Perspective-Taking Test* bekannt.
Kozhevnikov und Hegarty (2001, S. 747-755) konnten für den *Spatial Orientation Test*, welcher auch im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommt, feststellen, dass ausschließlich eine der folgenden drei Strategien angewandt wird: 1) der Winkel wird als solcher gesehen und teilweise durch neigen des Kopfes abgeschätzt, 2) die Aufgabe wird durch eine *Mentale Rotation* gelöst, 3) die angegebene Perspektive wird tatsächlich vorgestellt und mental eingenommen. Kozhevnikov und Hegarty konnten weiters beobachten, dass *Räumliche Orientierung* und *Mentale Rotation* zwar stark korrelierende Faktoren sind, eine genaue Faktorenanalyse zeigte jedoch, dass es sich tatsächlich um zwei zu differenzierende Raumvorstellungsfaktoren handelt (Kozhevnikov & Hegarty, 2001, S. 753-754).

Es muss angemerkt werden, dass es in unterschiedlichen Studien teilweise widersprüchliche Resultate im Bezug auf die Faktoren der Raumvorstellung gegeben hat, weshalb es auch nicht nur eine Auffassung der Faktoren der Raumvorstellung gibt (Zöggeler & Maresch, 2018, S. 31). Das ist insofern problematisch, als dass die genaue Zuordnung von Faktoren der Raumvorstellung zwischen unterschiedlichen Studien dadurch nur eingeschränkt möglich ist. Daher legen nun einige Studien den Fokus zusätzlich auf die Bearbeitungs- bzw. Lösungsstrategien der Teilnehmer*innen, und fügen somit der Raumvorstellung bzw. der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben eine weitere Komponente hinzu.

2.3 Lösungsstrategien bei Raumvorstellungstests

Um bei einem Raumvorstellungstest zu den richtigen Lösungen zu kommen, gibt es mehrere mögliche Strategien. Zwar sind die einzelnen Testitems so konzipiert, dass sie idealerweise ausschließlich mit Zuhilfenahme von tatsächlichem Raumvostellungsvermögen gelöst werden können, jedoch ist es wohl auch mit anderen Strategien und Methoden möglich.
Bei Lösen der Aufgaben wird unterschieden, ob die gewählte Strategie einen ganzheitlichen

Vorstellungsprozess involviert, oder ob die Aufgaben Schritt für Schritt gelöst werden. In der Literatur wird in diesem Kontext von einer holistischen oder einer analytischen Strategie gesprochen, wobei viele Versuche zeigen, dass in der Praxis beide zu tragen kommen (Glück & Fitting, 2003, S. 293–308; Dünser, 2005, S. 15-20; Maresch, 2015, S. 49).
Bei einer rein analytischen Strategie, würden beispielsweise einzelne Transformationen oder Manipulationen nacheinander stattfinden. Eventuell kann auch ein abwechselnder Einsatz von mehreren Faktoren der Raumvorstellung bzw. der mehrmaligen Verwendung eines Faktors hintereinander geschehen. Es führt jedoch nicht eine individuelle, mentale Vorstellung zur Lösung, sondern eine Mehrzahl an Methoden. Alternativ könnte es aber auch zur Anwendung von „verbal-analytischen Strategien“ und „logisch induktiven Überlegungen“ (Maresch, 2014, S. 127, übersetztes Zitat) sowie anderen kognitiven Prozessen kommen, die bei der Lösungsfindung helfen können (Dünser, 2005, S. 15-20; Maresch, 2014, S. 127-129). Wird umgekehrt rein holistisch gearbeitet, so kommt die Raumvorstellung (bzw. ein Faktor der Raumvorstellung) als einheitliche und gesamtheitliche Fähigkeit zum Einsatz, welche es ermöglicht eine mentale Operation gezielt ablaufen zu lassen, um zum erwünschten Resultat zu gelangen. Das Transformieren und Modifizieren von Bildern und visuellen Information läuft dabei rein kognitiv ab und führt so zu einer Lösung (Linn & Petersen, 1985, S. 1480; Lohman, 1996, S. 8-11). Maresch (2015, S. 38) differenziert neben der Trennung in eine holistische und eine analytische Strategie in insgesamt „Vier Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben“ die da lauten:

- „*Räumliches Denken* versus *Flächendenken*
- *Objekte werden bewegt* versus *Bearbeiter*in bewegt sich*
- *Verifizierende Strategie* versus *Falsifizierende Strategie*“ (Maresch, 2015, S. 38)

Räumliches Denken (*Spatial Thinking*) beschreibt einen dreidimensionalen Zugang, der voraussetzt, dass das zu modifzierende Objekt als tatsächlich dreidimensionales Objekt vorgestellt, und mental als ein räumliches Objekt gesehen wird. Dem gegenüber steht das *Flächendenken* (*Planar Thinking*), welches die Reduktion eines dreidimensionalen in ein zweidimensionales Objekt inkludiert, das erst anschließend transformiert wird (Maresch, 2014, S. 127-129). Die Modifikation geschieht dabei ausschließlich an einem flachen, zweidimensionalen Objekt, das ein Abbild des Ausgangsobjekts ist. Eventuell muss dieses nach

der Bearbeitung wieder in ein dreidimensionales Objekt umgewandelt werden, um zur Lösung zu kommen.
Die Entscheidung zwischen den Strategien *Objekte werden bewegt* (move object) und *Bearbeiter*in bewegt sich* (move self) wird stark von der Aufgabenstellung beeinflusst. So gibt es Testformate welche einen Perspektivenwechsel direkt einfordern (wie dies bei SOT der Fall ist), und im Idealfall darüber gelöst werden, und Aufgaben, die die *Mentale Rotation* markieren, und bestenfalls mit einer Bewegung des Objekts gelöst werden (wie beim PSVT:R). Somit ist die Effizienz abhängig vom gewählten Raumvorstellungstest (Just & Carpenter, 1985, S. 29-34 Maresch, 2014, S. 127-129).
Schlussendlich müssen die Testteilnehmer*innen für jede Aufgabe entscheiden, ob sie direkt versuchen die richtige Lösung anzusteuern (Verifizierende Strategie), oder mehrere bis alle falschen ausschließen (Falsifizierende Strategie), um so zum richtigen Ergebnis zu gelangen (Maresch, 2014, S. 129).

Neben einer persönlichen Präferenz, und der unmittelbaren Aufgabe, hängt die gewählte Strategie auch noch von anderen Kriterien ab. So sind vor allem die Komplexität und die Erfahrung mit ähnlichen Aufgaben ausschlaggebend, jedoch treffen Testteilnehmer*innen regelmäßig individuelle Entscheidungen und nutzen alle ihnen bekannten Strategien um voranzukommen (Grüßing, 2002, S. 44). Etwas allgemeiner lässt sich formulieren:

> „Die meisten Personen können eher simple Aufgaben, die einfache räumliche Manipulationen an einfachen Stimulusobjekten erfordern, mit holistischen Strategien lösen. Werden die Aufgaben komplexer, wird auch das Anwenden holistischer Strategien schwieriger, was dazu führt, dass mit steigender Komplexität der Aufgaben eher analytische Strategien eingesetzt werden. Zudem steigt mit der Schwierigkeit der Aufgaben auch generell die Anzahl eingesetzter Strategien. [...] Personen können also auch innerhalb einer Aufgabe ihre Strategien ändern, wenn dies notwendig ist, bzw. auch mehrere Strategien anwenden, um eine Aufgabenstellung zu lösen. [...] Diejenigen mit schlechten Leistungen in Raumvorstellungstests können anscheinend weniger effizient eine geeignete Strategie wählen." (Dünser, 2005, S. 19-20)

Anschließend gilt es noch zu beantworten, ob und inwieweit es möglich ist, verlässliche Informationen über die gewählte Strategie zu erlangen.
Den Testteilnehmer*innen selbst sind ihre eigenen Denkschritte nicht immer bewusst zugänglich, und es hat sich gezeigt, dass unterschiedliche Arten des Informationsgewinnes

die gewählten Strategien stark beeinflussen. So führt die „*Untersuchungsmethode Lautes Denken*“ (Grüßing, 2002, S. 44), bei der die Teilnehmer*innen ihre Denkschritte laut mitteilen, eventuell verstärkt zu einer analytischen Strategie. Auch ein explizites Abfragen der Strategie hat sich als wenig reliabel erwiesen, da einerseits nicht klar ist, ob die angegebene Strategie jene ist, die als richtig angesehen wird oder jene, die tatsächlich verwendet wird. Zusätzlich kommt hinzu, dass Komponenten wie das Verbalisieren einen Einfluss auf die Wahrnehmung haben können (Ericsson & Simon, 1980, S. 242-247; Dünser, 2005, S. 194-195).
Insgesamt ist es somit schwierig eine klare Aussage über die Strategien zu treffen, auch wenn diese implizit oder explizit erfasst werden.

2.4 Mathematikunterricht und Raumvorstellung

Da nun etabliert wurde, was die Raumvorstellung ist, aus welchen Faktoren sie besteht und wie sie eingesetzt wird, soll nun der Fokus auf die Verbindung der Raumvorstellung zum Mathematikunterricht fallen. In diesem Kontext gilt es zu klären, ob die Aus- bzw. Weiterbildung der Faktoren der Raumvorstellung einen positiven Effekt auf mathematische Fähigkeiten und Vorstellungen haben kann.

Als Ausgangspunkt ist eine veränderte Wahrnehmung in der Erforschung von Raumvorstellung zu sehen. Denn während zu Beginn das Interesse in der Erforschung der Raumintelligenz fundiert war, und räumliches Denken und Raumvorstellung als Teil von Intelligenztests überprüft wurden, konnte später festgestellt werden, dass es sich bei der Raumvorstellung um eine durch Training verbesserbare Kompetenz handelt. In diesem Zusammenhang beschreibt Lohman die Entwicklung von Raumvorstellung (Spatial Ability) folgendermaßen:

> „Once relegated to lower-order processing and concrete thought, spatial abilities are now understood as important for higher-order thinking in science and mathematics, for the ability to generate and appreciate metaphor in language, and for creativity in many domains.“ (Lohman, 1996, S. 13)

Darüber hinaus wurde festgestellt, dass die Raumvorstellung grundlegend für die Entwicklung von mathematischem Denken ist und mit dem akademischen Erfolg korreliert. Teilweise konnten sogar Korrelationen von 0,3 bis 0,45 zwischen Mathematikkompetenz und Raumvorstellung nachgewiesen werden, was einen deutlichen Zusammenhang demonstriert (Wheatley, 1990, S. 10-11; Pittalis & Christou, 2010, S. 196).

Glück et al. merken an, dass insbesondere der „Geometrieunterricht – in Abhängigkeit von Inhalt und Methode – verschiedene Fähigkeiten [...] trainiert, die zu einer Verbesserung der Raumvorstellungsleistung führen“ (2005, S. 8). Den großen Vorteil, den Glück et al. im Geometrieunterricht erkannten, ist das ständige Wechseln zwischen zweidimensionalen und dreidimensionalen Darstellungen, die beim Wahrnehmen und beim händischen Zeichnen notwendig sind. Denn ein dreidimensionales Objekt, welches z.B. in einem Schulbuch zweidimensional abgebildet ist, muss richtig verstanden (visualisiert) werden, eventuell rotiert oder transformiert werden, um anschließend wieder als dreidimensionales Objekt auf einer zweidimensionalen Oberfläche gezeichnet werden zu können. Hier kommt es also rasch zu einer hohen Anzahl an Überführungen und Modifikationen, die kognitiv abgewickelt werden müssen (Glück et al., 2005, S. 8-9). Somit wird der Geometrieunterricht als gute Stütze für die Ausbildung der Raumvorstellung gesehen, welche wiederum einen positiven Effekt auf die allgemeine Mathematikkompetenz ausübt (Glück et al., 2005, S. 4-11).

Daher ist die Ausbildung und Förderung von Raumvorstellung(-svermögen) nicht nur im Mathematikunterricht relevant, sondern auch in den Schulfächern Physik, Darstellende Geometrie, Geographie, Bildnerische Erziehung, Technisches Werken und Geometrisches Zeichnen, und wird auch als Kompetenz im österreichischen Lehrplan gelistet (siehe Abschnitt *2.7.2 Bezug zum Lehrplan*) (BMBWF, 2022a; Maresch, 2015, S. 36-37; Zöggeler & Maresch, 2018, S. 30). Zusätzlich dazu gilt die Raumvorstellung als eine der wichtigsten und erfolgversprechendsten Kompetenzen im STEM-Bereich (Science, Technology, Engineering, Mathematics) (Zöggeler, 2019, S. 1-2).

Neben der Raumvorstellung, die somit eine Rolle im Geometrieunterricht spielt, soll nun das nächste Themengebiet damit verbunden werden, welches durch deren Visualisierungsmöglichkeiten für diesen Teil der Mathematik passend ist: die Augmented Reality (Dilling, Jasche, Ludwig & Witzke, 2022, S. 296). Denn während der Geometrieunterricht von einer guten Raumvorstellung profitiert, so kann dieser die einzelnen Faktoren noch gezielt weiter fördern. Glück et al. merken hierfür unterstützend an:

> „Die empirischen Hinweise darauf, dass einerseits klassische Konstruktionssoftware wie CAD die Verbesserung der Raumvorstellung weniger unterstützt

> als Zeichnen und Skizzieren, und andererseits aktives, praktisches Arbeiten eine sehr effiziente Trainingsmethode darstellt, spricht für stark [sic] den Einsatz von Virtual Reality Techniken im Geometrieunterricht, der neue Möglichkeiten der Bearbeitung 3dimensionaler Objekte und geometrischer Probleme eröffnet, die weit über jene hinausgehen, die physische Modelle bzw. zweidimensionale Darstellungsmedien bieten.“ (Glück et al., 2005, S. 8)

So ist offenbar der Mathematikunterricht mit CAD im Hinblick auf die Raumvorstellung wenig förderlich, während Virtual Reality und Augmented Reality pragmatische Visualisierungs- und Bearbeitungsmöglichkeiten bieten. Um sich diesem Bereich weiter anzunähern, soll nun im nächsten Abschnitt die Augmented Reality allgemein beschrieben werden, bevor es um deren Verbindung zu Mathematik und Raumvorstellung geht.

2.5 Virtual Reality und Augmented Reality

Bereits 1994 zeigten Milgram und Kishino (1994, S. 1321–1329) auf, dass Virtual Reality (VR), also eine Welt der totalen Virtualität, rasch auf Probleme stößt, wenn es darum geht eine Darstellung der erlebten Realität abzubilden und erlebbar zu machen. Milgram und Kishino boten die Lösung an, auf eine vollständige Immersion zu verzichten, und einen Standpunkt zu wählen, welcher sich näher an der Realität befindet. Weiters spannen sie ein breites Spektrum zwischen Realität und Virtualität auf, das *Virtualitätskontinuum* (virtuality continuum), in welchem die Mixed Reality (MR) angesiedelt ist (siehe Abbildung 1).

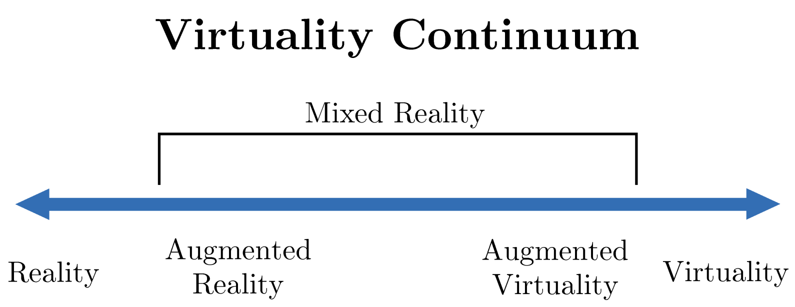


Abbildung 1: Virtuality Continuum bzw. Virtualitätskontinuum, (Milgram & Kishino, 1994, S. 1323)

Dazu gehören nun die erweiterten (= augmented) Formen der Realität und Virtualität, also die Augmented Reality (AR) und Augmented Virtuality (AV). Mit *erweitern* wird hier jeweils gemeint, dass Realität oder Virtualität mit Elementen des jeweils anderen bereichert werden.

Zur Mixed Reality zählen all jene Fälle, bei denen gleichzeitig Realität und Virtualität wahrgenommen werden und sich die jeweiligen Elemente überlagern und ergänzen. Dazu gehören beispielsweise Brillen, die transparent sind und Teile des Sichtfeldes mit virtuellen Inhalten ergänzen, oder Smartphone-Applikationen, welche die Live-Umgebung, die über die Kamera gefilmt wird, mit virtuellen Inhalten verbinden, welche sich glaubhaft in die gefilmte Umgebung fügen (Feiner, MacIntyre & Seligmann, 1993, S. 53–62; Yovcheva, Buhalis & Gatzidis, 2012, S. 63–66). Alternativ kann das lineare Virtualitätskontinuum auch noch um eine Dimension erweitert werden, um zu differenzieren, ob Elemente hinzugefügt, entfernt oder modifiziert wurden. Mann (2002) benennt dies mit der Mediated Reality, welche eine gefilterte Version der Realität darstellt. Als Beispiel hierfür kann eine Brille gesehen werden, die unerwünschte Inhalte wie z.B. Werbung aus dem Blickfeld ausblenden kann (Billinghurst, Clark, Lee et al., 2015, S. 81).

Zusätzlich lässt sich bei verschiedenen Mixed Reality Szenarien unterschieden, welcher Grad an Reproduktionstreue (*Reproduction Fidelity*) die virtuellen Elemente erreichen, und wie immersiv das Erlebnis (*Extent of Presence Metaphor*) wahrgenommen wird (Milgram & Kishino, 1994, S. 10-12).

Es ist wichtig zu betonen, dass sich AR jedoch immer näher an den realen Inhalten befindet, welche durch virtuelle Reize verbessert und ergänzt werden.

2.6 Eigenschaften von Augmented Reality

In einer der meistzitierten Definitionen der Augmented Reality fordert Azuma folgende Kriterien, um aus technologischer Sicht von AR zu sprechen:

1) „reale und virtuelle Inhalte werden kombiniert
2) in Echtzeit dargestellt
3) und in 3D abgebildet“ (Azuma, 1997, S. 2, übersetztes Zitat)

Wichtig zu beachten ist, dass weder die verwendete Technik (Hardware) noch die Art der Wahrnehmung eingeschränkt werden. So können die realen bzw. virtuellen Elemente etwa visuell, auditiv, taktil, olfaktorisch oder eine Kombination davon sein. Zusätzlich werden unterschiedliche Inputgeräte und Instrumente (Kamera, Joystick, Eingabegeräte,

Sensorik) benötigt, welche den Computer bzw. die AR-Software laufend mit Informationen speisen. Im Vergleich zur VR benötigt die AR einen hohen Genauigkeitsgrad bei der Datenerfassung, um die Illusion zu erzeugen, dass etwa virtuelle Elemente statisch im Realteil platziert sind, und sich nicht unerwartet oder unbeabsichtigt bewegen. Jedoch ist der Anspruch an die Echtheit des Gerenderten bei Augmented Reality deutlich geringer, und auch das Gesichtsfeld kann stark eingeschränkter werden, ohne die Wirksamkeit der erlebten Erfahrung zu mindern (Azuma, 1997, S. 17).
Das erste Augmented Reality-fähige System wurde zwar schon 1968 in Betrieb genommen, jedoch waren jegliche AR-Lösungen lange Zeit sehr unhandlich und nicht für die Allgemeinheit gedacht (Sutherland, 1968, S. 757–764). Eine geschichtliche Aufarbeitung der Augmented Reality würde am Fokus dieser Arbeit vorbeigehen, deshalb soll an dieser Stelle an *A Survey of Augmented Reality* von Mark Billinghurst, Adrian Clark und Gun Lee verwiesen werden (Billinghurst et al., 2015).
Während auch in den 90er Jahren die AR-Systeme technisch noch sehr begrenzt waren und meist teure und spezialisierte Geräte voraussetzten, bieten heutige Smartphones bereits eine Vielzahl von Anwendungen, die durch die eingebaute Sensorik dazu in der Lage sind auf dem Bildschirm eine Augmented Reality zu erzeugen (Kaufmann & Schmalstieg, 2003, S. 37-41; Kaufmann & Dünser, 2007, S. 660–669; Garzón, Pavón & Baldiris, 2019, S. 457; Hütthaler, 2020, S. 1-15). So liefert die Kamera des Smartphones in Echtzeit Bilder der realen Umgebung, und die Software ergänzt diese Bilder durch beliebige Elemente. Den Betrachtenden erscheint es so, als wäre das virtuelle Element im tatsächlichen, realen Raum, da es sich perspektivisch und authentisch verhält. Durch diese Entwicklung zu einem pragmatischen Werkzeug, haben sich unzählige Anwendungen für AR-Systeme in den Bereichen der Technik, Unterhaltung, Medizin, Marketing aber auch in der Schulbildung herauskristallisiert (Hütthaler, 2020, S. 1-4).

2.7 Mathematikunterricht und Augmented Reality

Der folgende Abschnitt widmet sich der Theorie und dem Einsatz von Augmented Reality im Mathematikunterricht. Zuerst wird ein kurzer Blick auf den allgemeinen Technologieeinsatz im Mathematikunterricht geworfen, darauf folgt eine Diskussion der Erfordernisse durch den österreichischen Lehrplan. Anschließend werden allgemein die Potentiale von

AR für den Mathematikunterricht erläutert, und dann beispielhaft für das mathematische Modellbilden skizziert.

2.7.1 Technologieeinsatz im Mathematikunterricht

Der Mathematikunterricht wurde in der Vergangenheit regelmäßig durch neue Medien erweitert, die jedoch an den Kernzielen des Mathematikunterrichts wenig änderten. So sind „adäquates Begriffsverständnis ausbilden, Problemlösefähigkeiten erwerben oder Argumentieren und Begründen lernen“ (Ruppert & Wörler, 2013, S. IX) immer noch die wichtigsten Fähigkeiten.

Zu den großen Errungenschaften der Technologie, die lang oder kurzfristig sehr verbreitet im Mathematikunterricht ankamen, zählen sicherlich der *Personal Computer (PC)* und der *Taschenrechner*. Darauf aufbauend war es möglich, *Grafik-Taschenrechner*, *Tabellenkalkulationsprogramme* und *Dynamische Geometrie Software* zu entwickeln, die einen sehr festen Platz im heutigen Verständnis von mathematischem Arbeiten eingenommen haben. Eine der populärsten Softwares, die alle der angeführten Funktionalitäten vereint, und zusätzlich für die Schule konzipiert wurde, ist *GeoGebra*. Durch passende Websites oder Smartphone-Anwendungen, haben es aber auch andere Softwares geschafft für das Klassen- bzw. individuelle Lernsetting attraktiv zu sein (Drijvers, 2015, S. 4-11; Ruppert & Wörler, 2013, S. IX-X). So sind es zurzeit vielfach interaktive online Anwendungen die an Beliebtheit gewinnen, und in den letzten Jahren verstärkt die „mobile technology in mathematics education“ (Drijvers, 2015, S. 7-9) die sich den Erfordernissen der Zeit anpassen konnten (Alabdulaziz, 2021, S. 7609-7633; Das, 2021, S. 310-319).

Denn digitales Lernen und Unterrichten spielt zunehmend eine größere Rolle im Schulalltag (Billinghurst & Duenser, 2012, S. 56-63). Dazu gehören jegliche Formen des E-Learning sowie des Mobile Learning, also „Lernen und Lehren mit mobilen Endgeräten“ (Gerlicher & Jordine, 2018, S. 164). Das bietet den Vorteil, dass sowohl Lernen als auch Lehren nicht mehr ortsgebunden oder zeitlich begrenzt sind, und von Schüler*innen individuell und angepasst genutzt werden können (Zobel, Werning, Metzger & Thomas, 2018, S. 123–140). Aber auch im regulären Präsenzsetting gibt es eine Vielzahl an digitaler Hilfsmittel und Werkzeuge die eingesetzt werden können und auch sollen. So fordert der österreichische Lehrplan dazu auf, verstärkt auf *technologische Hilfsmittel* zu setzen und diese im Mathematikunterricht anzuwenden (BMBWF, 2022a). Daher wird anschließend der Lehrplan genauer untersucht, um zu überprüfen, ob der Unterricht mit Augmented Reality den Anforderungen genügen kann.

2.7.2 Bezug zum Lehrplan

Da lautet es etwa im Lehrplan der Allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS):

> „Grundsätzlich sind schon ab der 1. Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von **elektronischen Hilfen** beim Bearbeiten von Fragestellungen der **Mathematik** und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbanken, ...) gegeben. [...] Die Möglichkeiten **elektronischer Systeme** bei der Unterstützung **schülerzentrierter, experimenteller Lernformen** sind zu nutzen. [...] Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei **verschiedenen Programmen und Geräten** bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines **problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens** beitragen.“(BMBWF, 2022a, Hervorhebung hinzugefügt)

Somit stellt der Lehrplan eine klare Anforderung an die Verwendung von digitalen Anwendungen ab der 1. Klasse. Weiters wird, interessanterweise nicht bei der genaueren Beschreibung des Mathematikunterrichts wohl aber bei der Darstellenden Geometrie, angemerkt: „Als zusätzliche Themenbereiche eignen sich unter anderen: [...], der Einsatz von weiteren neuen digitalen Technologien (z.B. **Augmented Reality**, 3D-Druck, Laser-Scanner, Navigationsgeräte)“ (BMBWF, 2022a, Hervorhebung hinzugefügt).
In der Oberstufe, und besonders im Hinblick auf den erkenntnistheoretischen Aspekt des Mathematikunterrichts scheint die Anwendung einer Augmented Reality Lösung gut zu passen. So wird im Lehrplan formuliert:

> „Mathematik ist eine spezielle Form der **Erfassung unserer Erfahrungswelt**. Sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch **Abstraktion** zu verstehen. **Mathematisierung eines realen Phänomens** kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“ (2022a, Hervorhebung hinzugefügt)

Wie bereits erläutert, stellt AR eine besondere Art der Erfahrung von Mathematik dar. Durch das immersive Erleben und die Interaktion sowie Kommunikation, kann z.B. aus der analytischen Geometrie eine erlebbare Materie werden. Im Idealfall kann dies umgekehrt dazu führen, dass Mathematik im direkten Umfeld der Schüler*innen angewandt und wahrgenommen werden kann. Zusätzlich gibt es im Lehrplan auch einen dezidierten Abschnitt zu technologischen Hilfsmitteln, welcher sich auch als Argumentationsgrundlage für den Einsatz von AR im Mathematikunterricht auslegen lässt:

> „Lernen mit **technologischer Unterstützung**: **Technologische Hilfsmittel** sollen in allen Kompetenzbereichen sinnvoll zum Einsatz kommen. Sie müssen zumindest über grundlegende Funktionen zur **Darstellung** von Funktionen, Kurven und anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik verfügen. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen **technologischer Hilfsmittel** durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Einsatz entsprechender **Hilfsmittel beim Lösen** von Aufgaben und dem gelegentlichen Einsatz als **didaktisches Werkzeug** beim Erarbeiten neuer Inhalte. Die maximale Realisierung ist die ständige Verfügbarkeit und der **sinnvolle Einsatz derartiger Technologien als Werkzeug** beim **Modellieren, Visualisieren und Experimentieren**.“ (BMBWF, 2022a, Hervorhebung hinzugefügt)

Besonders die zuletzt genannten Aspekte der Visualisierung und des (selbstständigen und individuellen) Experimentierens werden von den Möglichkeiten, welche sich durch das Arbeiten mit Augmented Reality ergeben, ermöglicht. Teilbereiche der Mathematik, die ansonsten nur in Schulbüchern oder durch andere Materialien erlebt werden, können durch AR greifbar werden. Zusätzlich lässt sich der Einsatz von einer AR-Smartphone-Anwendung als *technologisches Hilfsmittel*, welches *beim Lösen von Aufgaben* und als *didaktisches Werkzeug* beim Erarbeiten sowohl neuer als auch bereits bekannter Inhalte eingesetzt werden kann. Dabei kann AR für das *Modellieren, Visualisieren und Experimentieren* angewendet werden und befolgt somit nicht nur viele sondern alle vom Lehrplan gestellten Anforderungen (Beckmann, 2022, S. 53–75).

2.7.3 Potential für den Mathematikunterricht

Der Einsatz von Augmented Reality bietet neben diesen erforderten Eigenschaften auch noch viele weitere Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. So ist es möglich, dass Fotos, Videos, 3D Objekte oder auch Messinstrumente über AR mit dem physischen Unterricht verknüpft werden und erlebbare Anhaltspunkte für neue Eindrücke bieten. In den letzten zwei Jahrzehnten wurde der Bereich der Augmented Reality zunehmend für unterschiedliche Bereiche erschlossen, so auch für die (Schul-)Bildung. Durch den zunehmend niederschwelligen Einsatz von komplexer Technologie mit der Hilfe von alltäglich gewordenen Smartphones, ist es mittlerweile möglich, auch im Schulunterricht auf Augmented Reality zurückzugreifen (Zobel et al., 2018, S. 123–140; Hellriegel & Čubela, 2018, S. 72-75).

Neben der Neugierde und der damit verbundenen Motivation, welche neue Anwendungen zu Beginn oft auslösen, ist der Einsatz von AR im Unterricht vor allem damit begründet, dass mehrere Studien nachweisen konnten, dass Unterricht mit AR einen positiven Einfluss auf soziale Interaktion hat (Barak & Ziv, 2013, 159–170), und Teamarbeit verbessert wird (Radu, 2014, S. 1536). Weiters sind Motivation und Enthusiasmus messbar erhöht, und ein Zuwachs an *Lerngewinnen* konnte gegenüber dem regulären Unterricht festgestellt werden (Estapa & Nadolny, 2015, S. 44-45; Garzón & Acevedo, 2019, S. 244–260). Eine Metaanalyse, welche die Auswirkungen von Augmented Reality in unterschiedlichen Schul- und Universitätssettings untersucht hat, zeigte, dass der ein Einsatz von AR im Durchschnitt einen mittleren Effekt (mit Cohens d=0.64) auf „Lerneffizienz und Lernzuwachs“ (Garzón et al., 2019, S. 447–459) hat.

Zusätzlich eignet sich die Geometrie, im Speziellen die analytische Geometrie (Vektorgeometrie), besonders gut dafür, um visuell dargestellt zu werden und interaktiv damit zu arbeiten. In Studien diesbezüglich konnte gezeigt werden, dass Geometrieunterricht mit AR bei Schüler*innen Interesse auslösen, die Motivation erhöhen, Lereffekte verstärken sowie Kollaboration und Interaktion fördern kann (Estapa & Nadolny, 2015, S. 44-46; Gargrish, Mantri & Kaur, 2020, S. 1039–1046; Chao & Chang, 2018, S. 461-462; Bacca, Baldiris, Fabregat & Graf, 2014, S. 133–149; Altinpulluk, 2019, S. 1105-1110). Als weiterer Vorteil der AR sollte die Verbindung, welche zwischen virtuellem und realem Raum hergestellt wird, gesehen werden. Auf diese Weise kann eine Stimulation der visuellen Wahrnehmung angeregt werden, was die Entwicklung von zugehörigen Vorstellungen fördert. Im Speziellen ist dies der direkten Interaktion von Realität und Virtualität verschuldet, die ein immersives Erleben ermöglicht (Chao & Chang, 2018, S. 455-464). Es werden jedoch nicht nur visuelle Fähigkeiten gefördert, sondern auch auf kognitiv-visueller Ebene die Faktoren der *Raumvorstellung, Mentale Rotation, Räumliche Beziehung, Visualisierung* und *Räumliche*

Orientierung verbessert (Gün & Atasoy, 2017). Zusätzlich findet durch das Verbinden des realen und virtuellen Raumes eine Stimulation der visuellen Wahrnehmung statt, die zur Ausbildung neuer Vorstellungen von Mathematik führen kann. Das Arbeiten mit AR fördert also zusätzlich die Raumvorstellung (İbili, Çat, Resnyansky, Şahin & Billinghurst, 2020, S. 238-241).

Besonders im Hinblick auf die analytische Geometrie in der Sekundarstufe 2 sieht Reit (2020, S. 1307-1308) eine große Chance für den Mathematikunterricht mit Augmented Reality. Denn um nicht nur vom „Kalkülaspekt“ Gebrauch zu machen, merkt die Autorin an:

> „Um rezeptartiges Lernen zu vermeiden bedarf es eines Unterrichts, der die Anschauung enaktiv, durch konkret-handelndes Operieren mit den mathematischen Inhalten unterstützt. Genau hier setzt AR an, indem mathematische Situationen mit der AR-App durch eigene Körperbewegung aktiv analysiert und visuell entdeckt werden können. Das tatsächliche Erkunden dreidimensionaler Konstellationen im Raum durch eigene Körperbewegung eröffnet neue Lehr-Lern-Möglichkeiten und damit zugleich den Bedarf an mathematikdidaktischer Forschung in diesem Gebiet. Die Verschmelzung von Realität und virtueller Information, wie dies mit AR möglich ist, bringt bisher disjunkte Welten zusammen.“ (Reit, 2020, S. 1308)

Durch die Vielzahl an positiven Aspekte zeichnet sich Augmented Reality als potentes Werkzeug für den Mathematikunterricht ab. Zusätzlich schafft es der Unterricht mit AR auch für die Allgemeinbildung relevant zu sein.

2.7.4 Mathematik als Allgemeinbildung

Als weiterer Schritt soll nun Mathematikunterricht und Augmented Reality mit dem Konzept „Mathematik als Allgemeinbildung“ vereinbart werden.

In einer der ersten mathematikdidaktischen Arbeiten zur Rolle der Mathematik für die Allgemeinbildung, beschreibt Winter drei folglich nach ihm benannten Grunderfahrungen (Beckmann, 2022, S. 56-57). Diese legen dar, „in welcher Weise [der Mathematikunterricht] für Allgemeinbildung unersetzbar ist“ (Winter, 1995, S.37) und welche Position Mathematik in unserer Gesellschaft einnehmen sollte:

> (1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
>
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben." (Winter, 1995, S. 37)

Auch Unterricht mit Augmented Reality-Einsatz kann diesen drei Grunderfahrungen gerecht werden. Denn bezogen auf (1) stellt AR eine besondere Art der Wahrnehmung dar, ganz besonders jene der *Welt um uns.* Auch hilft AR dabei, *mathematische Gegenstände und Sachverhalte* (2) neu einzuordnen, kennenzulernen und nachzuvollziehen. Letztlich wird mit AR im Idealfall an Modellierungsaufgaben und dem Lösen von mathematischen Problemen gearbeitet. Dabei können *heuristische Fähigkeiten* (3) ausgebildet und die Aufgabe von Mathematik klar gezeigt werden.
Winter sieht die Rolle von Mathematik als „problemorientiert", „anwendungsorientiert" und „strukturorientiert" und war somit auch maßgeblich an der Erschaffung der heutigen Grundkompetenzen bzw. Bildungsstandards beteiligt, so auch an dem Begriff *Mathematical Literacy* (Beckmann, 2022, S. 56-57; Winter, 1995, S. 37-44). Jablonka reduziert *Mathematical Literacy* nicht auf das „mathematische Fachwissen" sondern betont vielmehr „die individuelle Fähigkeit, dieses Wissen zu nutzen und anzuwenden" (2003, S. 78, übersetztes Zitat) und somit die situationsspezifische Anwendbarkeit dieses Wissens.
Weiterführend verbindet Heymann (1996a; 1996b) in diesem Zusammenhang den Mathematikunterricht mit der allgemeinen Weiterbildung von kognitiven Fähigkeiten. So kann der Mathematikunterricht nicht eigenständig zu einer Steigerung der allgemeinen geistigen Fähigkeiten führen, sonder es bedarf eines *verstehensorientierten* Ansatzes, der bereits vorhandenes Wissen mit neuen (mathematischen) Konzepten verknüpft.

> „Ein verstehensorientierter Mathematikunterricht hat größere Realisierungschancen, wenn Denkstrategien und Heuristiken, Vorstellungsbilder und Metaphern des Alltagsdenkens für die Mathematik fruchtbar gemacht werden, wenn neben dem formalen Charakter der Mathematik (als abstrakten Symbolsystems, innerhalb dessen nach bestimmten „Spielregeln" verfahren werden kann) auch ihrem referentiellen Charakter (d.h., die mathematischen Symbole repräsentieren in bestimmten Situationen mehr oder weniger konkrete Bedeutungen, die über das Symbolsystem hinausweisen) Genüge getan wird, wenn - einfacher ausgedrückt - immer wieder Brücken zwischen dem mathematischen

> und dem alltäglichen (oder außermathematisch fachlichen) Denken geschlagen werden." (Heymann, 1996b, S. 547)

So ist es erforderlich, adäquate Anwendungssituationen im Unterricht zu schaffen um diese Erfordernisse zu erfüllen. Auch an dieser Stelle lässt sich die Funktion von Augmented Reality als Medium für diese Brückenbildung hervorheben.
Diesbezüglich hat Beckmann (2022, S. 56-69) die Grundvorstellungen sowie die *Mathematical Literacy* als Ausgangspunkt gewählt, und für den Unterricht mit Augmented Reality folgende Themenschwerpunkte theoretisch untersucht und dabei gleichzeitig aufgezeigt, wie ein Unterricht mit Augmented Reality inhaltlich und methodisch sinnvoll ablaufen könnte: *„Mathematische Begriffe, Dynamische und statische Sichtweise, Mathematisches Denken, Funktionalität der Mathematik, Modellieren, offenes Aufgabenformat"* (Beckmann, 2022, S. 56-69).
Dies soll aber nur als eine Auswahl gesehen werden, denn es gibt unzählige Möglichkeiten für passende Anwendungen. Allerdings „fehlt bisher eine detaillierte Einordnung von Augmented Reality aus mathematikdidaktischer Sicht" (Beckmann, 2022, S. 68), die jedoch notwendig wäre. Um das Arbeiten mit AR im Mathematikunterricht leichter zugänglich zu machen, soll an dieser Stelle der Einsatz von AR für das Modellbilden im Unterricht skizziert werden.

2.7.5 Modellbilden

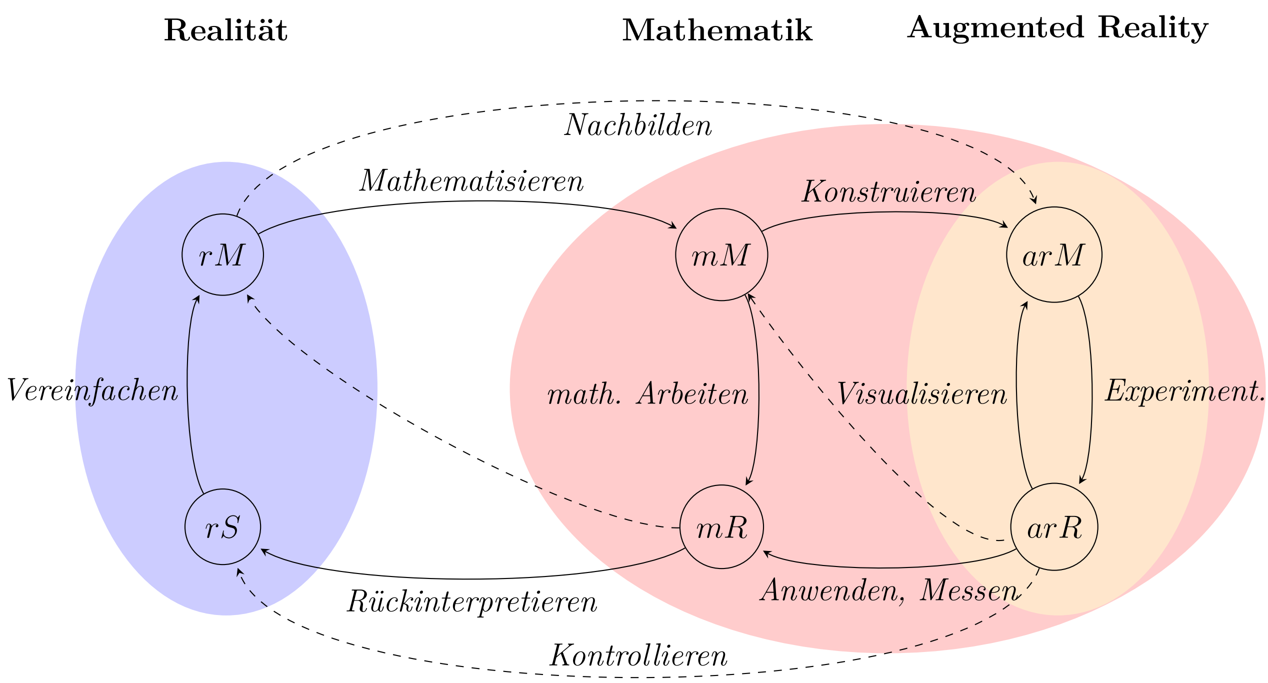
Eine große Chance für den Einsatz von Augmented Reality im Unterricht bietet das Arbeiten mit Modellierungsprozessen. Mathematische Modelle sind als Brücken zwischen dem realen und dem mathematischen Raum zu sehen (Büchter & Henn, 2015, S. 32). Beim Prozess des Modellierens „werden angewandte Probleme oder Situationen mithilfe mathematischer Begriffe und Verfahren gelöst oder beschrieben" (Beckmann, 2022, S. 64), während es gleichzeitig möglich ist, den Einsatz und die Funktionalität von Mathematik zu demonstrieren. Siller und Greefrath (2010, S. 2138) heben besonders die Rolle von technologiegestütztem Modellieren hervor, da es den Alltagsbezug von Mathematik betont und dabei hilft, komplexe Aufgabenstellungen zu lösen.
Die erstellten Modelle können sich auf praxisorientierte Fragestellungen, Alltagsprobleme der Schüler*innen aber auch gesellschaftspolitische und globale Herausforderungen be-

ziehen. Den Ausgangspunkt bildet jedoch immer ein „Problem im Realen“ (Beckmann, 2022, S. 64). Dieses Problem wird vereinfacht und auf ein reales Modell (bzw. Realmodell) reduziert (siehe Abbildung 2). Anschließend gilt es nun, dieses in die Welt der Mathematik zu überführen (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, S. 15). Damit ist „eine Übersetzung der Daten, Begriffe, Beziehungen, Gesetze, Forderungen oder Annahmen“ (Blum, 1985, S. 202) gemeint, deren Resultat ein mathematisches Modell ist. Dieses Modell sollte an den jeweiligen Kontext und die Ziele angepasst sein. Damit kann nun mathematisch gearbeitet, gerechnet, überlegt und argumentiert werden. Anschließend werden „diese Resultate wieder in die Realität zurückübersetzt, d. h. in der Ausgangssituation interpretiert bzw. auf diese angewandt“ (Blum, 1985, S. 204). Je nach Gegebenheit können die Ergebnisse direkt auf die reale Situation bezogen werden, in komplexeren Fällen muss dies allerdings erst am realen Modell geschehen.

Parallel ist es möglich, ein reales Modell auch direkt in ein Augmented Reality Modell zu überführen. Der Bereich der Augmented Reality ist als spezieller Teilbereich der Welt der Mathematik zu deuten, der nicht für den Modellbildungsprozess eingesetzt werden muss, jedoch mehrere Anknüpfungspunkte zwischen den einzelnen Schritten anbietet und so den Ablauf unterstützt.

Ausgehend vom realen Modell führt eine Nachbildung dessen zu einem „idealisierten Modell“ (Beckmann, 2022, S. 66) in der Augmented Reality. Alternativ kann auch das mathematische Modell verwendet werden, um ein AR-Modell zu zeichnen bzw. zu konstruieren. Mit diesem kann anschließend experimentiert und ausprobiert werden. In diesem Prozess kann sich der Lösung vielfältig angenähert werden, und die Visualisierung der AR-Resultate hilft dabei das AR-Modell sowie das mathematische Modell zu verfeinern (Greefrath, Hertleif & Siller, 2018, S. 236). Gleichzeitig ist es auch möglich, Größen und Werte aus dem AR-Resultat zu entnehmen oder diese mit einer Funktion abmessen zu können. Soll die Aussagekraft des AR-Resultats kontrolliert werden, so kann es auch direkt auf die reale Situation angewandt werden, wobei eventuell einige Interpretationen notwendig sind.

Zu erwähnen ist allerdings, dass „der gesamte Modellierungsprozess [...] häufig idealisiert als Kreislauf dargestellt [wird]. Ein solcher Modellierungskreislauf ist damit selbst wieder ein Modell des mathematischen Modellierens“ (Greefrath et al., 2013, S. 14).



rM = reales Modell	mM = mathematische Modell	arM = AR-Modell
rS = reale Situation	mR = mathematische Resultate	arR = AR-Resultate

Abbildung 2: Modellbildungsprozess als Zusammenführung von Blum (1985, S. 200), Greefrath et al. (2018, S. 234-237) und Siller und Greefrath (2010, S. 2137-2141)(eigene Darstellung)

Da Schüler*innen in jedem dieser Schritte des Modellierungskreislaufs Schwierigkeiten haben können, ist es wichtig als Lehrperson die Situation zu überblicken und zu unterstützen (Beckmann, 2022, S. 65). In der Vergangenheit wurde mit unterschiedlichem Technologieeinsatz versucht, das Modellieren und Visualisieren für Schüler*innen greifbarer zu gestalten, jedoch konnte die *Dynamische Geometrie Software* GeoGebra keine signifikanten Vorteile hervorrufen (Greefrath et al., 2018, S. 233–244; Beckmann, 2022, S. 65). Obwohl dieser Technologieeinsatz das Modellieren um einige Schritte erweitert, durch etwa digitales Visualisieren und Experimentieren (Greefrath et al., 2018, S. 236), besteht doch großes Potential für Realitätserweiterungen durch Augmented Reality in diesem Feld. Denn einerseits kann die Vereinfachung von realen Situationen zu einem (virtuellen) mathematischen Modell direkt geschehen, andererseits kann dieses Modell visualisiert und gleichzeitig modifiziert werden.

> „Der Modellierungskreislauf wird also mithilfe von AR langsamer und bewusster durchlaufen. AR bietet hier [...] die Möglichkeit, ohne Unterbrechung (ohne Wechsel des Mediums) vom eigens erfassten Realmodell zum Experimentieren zu gelangen. [...] AR-Apps mit Messfunktion gestatten zusätzliche Messungen und können gleichzeitig eine mathematische Prüfung anregen.“ (Beckmann, 2022, S. 66)

Augmented Reality bietet so die Möglichkeit den Modellierungsprozess zu unterstützen und für Schüler*innen leichter nachvollziehbar zu machen.

2.8 Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG): Vektoren

Im folgenden Abschnitt soll kurz auf die mathematischen Grundkompetenzen eingegangen werden, wie diese im Dokument *Mathematischen Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik für die AHS* dargelegt werden.

Es handelt sich dabei um die Grundkompetenzen AG 3.1 - AG 3.5 aus dem Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (BMBWF, 2022b). Diese Grundkompetenzen sind im Bereich der Vektorrechnung in Ebene und Raum relevant und dienen im Pre- und Posttest als auch in den Interventionsstunden als Grundlage für den Mathematikunterricht. Die Schüler*innen sollten diese Grundkompetenzen schon vor der Studie erworben haben, trotzdem werden diese in der ersten Interventionsstunde wiederholt und besprochen. Sie lauten gefolgt:

- AG 3.1 „Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- AG 3.3 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- AG 3.4 Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch Parameterdarstellungen und Gleichungen, in $\mathbb{R}^3$ durch Parameterdarstellungen angeben und diese Darstellungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
- AG 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können“ (BMBWF, 2022b, S. 3)

Zusätzlich ist im Konzept der *Mathematischen Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)* die Anmerkung zu finden:

> „Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können. Die geometrische Deutung des Skalarprodukts (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.“ (BMBWF, 2022b, S. 3)

Sowohl diese Grundkompetenzen als auch die angeführte Auffassung von Vektoren sind für die das Arbeiten mit der App *Vektor AR³* relevant, da die Schüler*innen die Vorstellungen selbstständig anwenden und die Darstellungen der App passend interpretieren müssen.

2.9 Funktionen der App *Vektor AR³*

Nun soll die Smartphone-Anwendung *Vektor AR³* genau vorgestellt werden, die für alle nachfolgenden Unterrichtssituationen verwendet wurde. Es handelt sich dabei um die Version 0.5 welche das letzte Mal am 20.12.2019 aktualisiert wurde (Senselab.io, 2019). Diese ist über den *Google Play Store* frei zugänglich, und ist aus einer Zusammenarbeit der *FH Technikum Wien* und des Unternehmens *Senselab.io* entstanden. Analog gibt es die App auch für das iOS Betriebssystem im *App Store*. Langfristig soll *Vektor AR³* als *Open-Source-Software* allgemein zugänglich bleiben (Langer, Lietze & Krizek, 2021, S. 51–64).

In Abbildung 3 ist auf der linken Seite das Logo und in der Mitte das anfängliche User Interface mit den einzelnen Menüpunkten zu sehen. Über die Einstellungen (Settings) lässt sich die Darstellung der Vektoren umstellen, sodass diese auch von Menschen mit Rot-Grün-Sehschwäche gut erkannt werden können. Darüber sind die Menüpunkte zu finden, die zu den drei unterschiedlichen Anwendungsbereichen weiterleiten (siehe Abbildung 3, Mitte).

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass in der Smartphone-Anwendung die dargestellten Pfeile durchgehend mit Vektoren gleichgesetzt werden. Jedoch stellt der Pfeil lediglich eine mögliche Interpretation des Vektorbegriffs dar, der auch als algebraisches Objekt (Zahlenpaare, Zahlentripel) oder als Punkt aufgefasst werden kann. Diese Reduktion des Vektors auf einen Pfeil ist didaktisch nur dann sinnvoll, wenn die Definition des Vektorbegriffs zuvor gesamtheitlich geschehen ist, also algebraische und geometrische Dimensionen aufgezeigt wurden. Weiters ist daher zu berücksichtigen, dass wenn im Kontext

der App *Vektor AR*^{3} bzw. der Anwendung im Unterricht über den Begriff *Vektor* gesprochen wird, tatsächlich die geometrische Deutung des Vektors als Pfeil gemeint wird.
In diesem Menü kann zwischen den Optionen *Kartesisches und schiefwinkliges Koordinatensysteme (Cartesian and Skew Coordinate Systems)*, *Skalarprodukt und Vektorprodukt (Dot and Cross Product)* und *Normalvektoren von Kurven und Flächen (Surface Normal)* ausgewählt werden. Wird eine dieser drei Optionen ausgewählt, muss danach entschieden werden, wie groß die Darstellung des in den Raum projizierten Koordinatensystems sein soll (siehe Abbildung 3, rechts). Anschließend muss die Kamera des Smartphones auf eine flache Oberfläche gerichtet werden, die mindestens so groß ist wie die ausgewählte Darstellungsgröße. Erkennt die App eine solche Oberfläche, wird diese durch eine helle Umrandung hervorgehoben, und kann dann ausgewählt werden, um als Verankerung für die virtuelle Darstellung zu dienen. Wurde ein Punkt bzw. eine Fläche ausgewählt, wird ein virtuelles Koordinatensystem an diesen Ort gesetzt.

Abbildung 3: Screenshots zu *Vektor AR*^{3} 1: links: Logo, Mitte: User Interface, rechts: Größenauswahl für die Skalierung des Koordinatensystems

Dieses verhält sich nun so, als wäre es im realen Raum an ebendieser Stelle fixiert. Wird das Smartphone im Raum bewegt, so passen sich die virtuellen Elemente realistisch an die Perspektive an. Es ist auch möglich, das Koordinatensystem und die Vektoren (Pfeile) aus nächster Nähe zu betrachten, oder sich von einer beliebigen Richtung (ausgeschlossen von unten) aus anzusehen. Am unteren Bildschirmrand lassen sich alle platzierten Elemente modifizieren. Dafür wird z.B. wie in Abbildung 4 (links) die Z-Achse ausgewählt und deren Komponenten mit den Schieberegler oder direktem Zahleninput verändert. Soll doch wieder einen Einheitsvektor dargestellt werden, lässt sich das über den Button *Reset to unit vector* schnell ändern. Alternativ lässt sich aber auch ein beliebiges, schiefwinkliges Koordinatensystem erstellen.

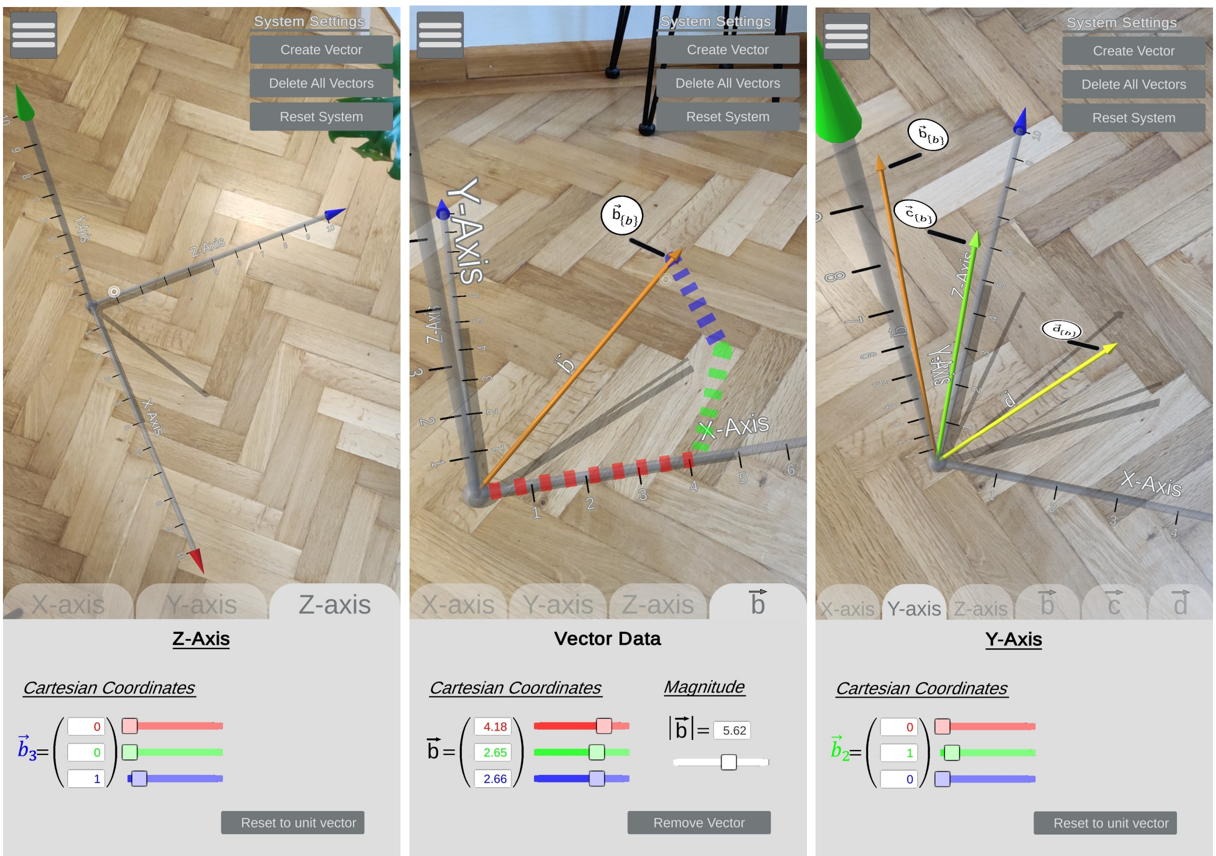


Abbildung 4: Screenshots zu *Vektor AR³* 2: links: Kartesisches Koordinatensystem wurde am Boden platziert, Mitte: Der Vektor $\vec{b}$ wurde platziert, rechts: drei Vektoren ($\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$) wurden platziert

Oben rechts im Menü, können neue Vektoren erstellt, alle Vektoren gelöscht oder auch das ganze Koordinatensystem rasch zur Ausgangssituation zurückgesetzt werden. Wird ein neuer Vektor erstellt, so wird dieser direkt in der Bildebene dargestellt, und ein neuer Reiter öffnet sich, über den sich der Vektor modifizieren lässt (siehe Abbildung 4, Mitte). Zusätzlich lässt sich nun auch die Länge des Vektors bestimmen. Die einzelnen Komponenten des Vektors sind farblich markiert, um die Lage im Raum gut abschätzen zu können. Es können bis zu drei Vektoren gleichzeitig dargestellt werden, die dann auch jeweils unterschiedlich eingefärbt werden (siehe Abbildung 4, rechts). Die virtuellen Schatten, die diese auf den Boden werfen, helfen dabei die Lage im Raum genauer einschätzen zu können. Wurde im Startmenü die Option *Skalarprodukt und Vektorprodukt* ausgewählt, und anschließend zwei Vektoren platziert, so lässt sich nun entweder das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt berechnen (siehe Abbildungen 5 und 6).

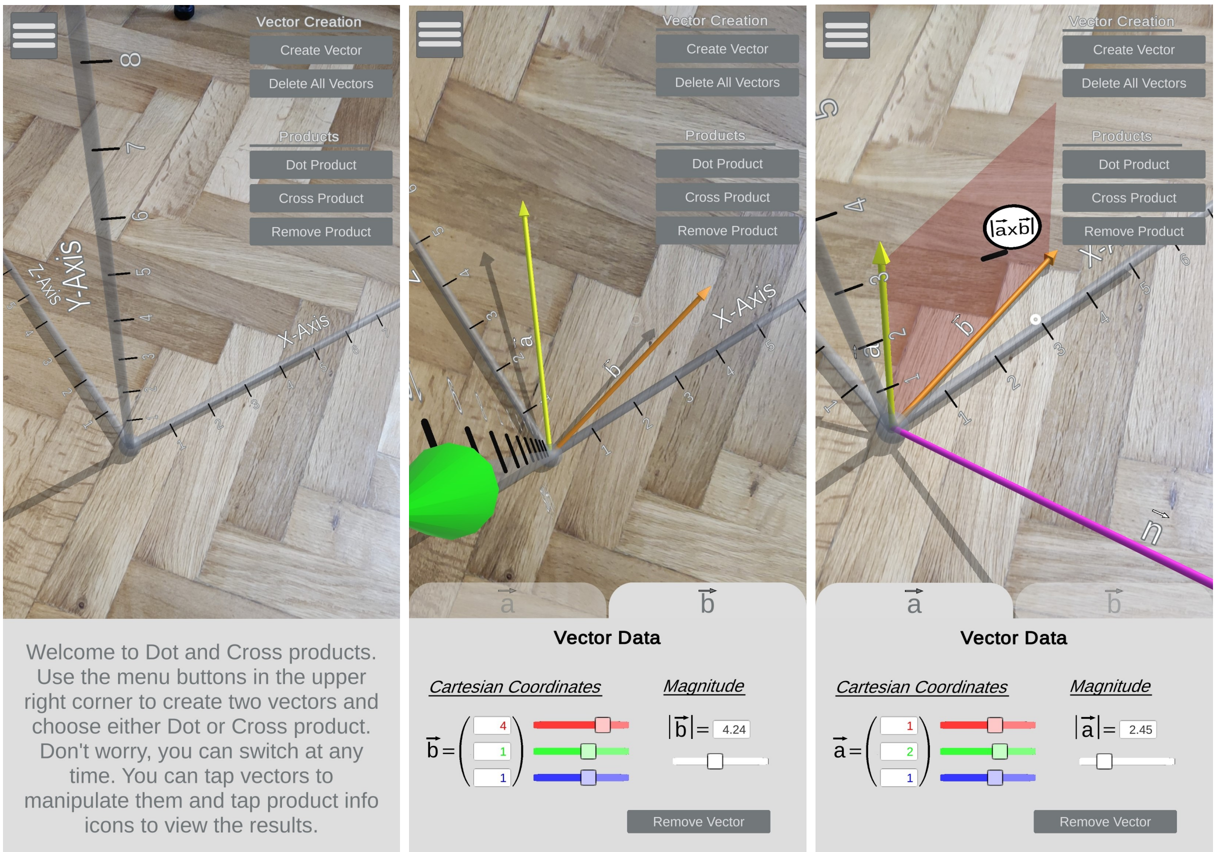


Abbildung 5: Screenshots zu *Vektor AR³* 3: links: Begrüßungsfenster bei der Option *Skalarprodukt und Vektorprodukt*, Mitte: Zwei Vektoren wurden erstellt, rechts: Das Vektorprodukt wurde berechnet

Dafür wird die jeweilige Funktion oben rechts im Menü ausgewählt, und anschließend die Vektoren der Reihe nach ausgewählt. Daraufhin wird das Vektorprodukt als Fläche des Parallelprogramms, das die zwei Vektoren aufspannen, visualisiert und ein Normalvektor berechnet, während beim Skalarprodukt der eingeschlossene Winkel sowie die Normalprojektion eingezeichnet werden. Die Vektoren lassen sich nun wie zuvor verändern, und auch die Berechnung des Skalar- bzw. Vektorprodukts aktualisiert sich automatisch. Wird das Symbol $|\vec{a} \times \vec{b}|$ berührt, so öffnet sich ein Fenster mit dem Wert des Vektorproduktes und dem eingezeichneten Normalvektor (siehe Abbildung 6, links). Analog kann durch Berühren des eingeschlossenen Winkels φ das Skalarprodukt und das Winkelmaß in Grad angezeigt werden (siehe Abbildung 6, rechts).

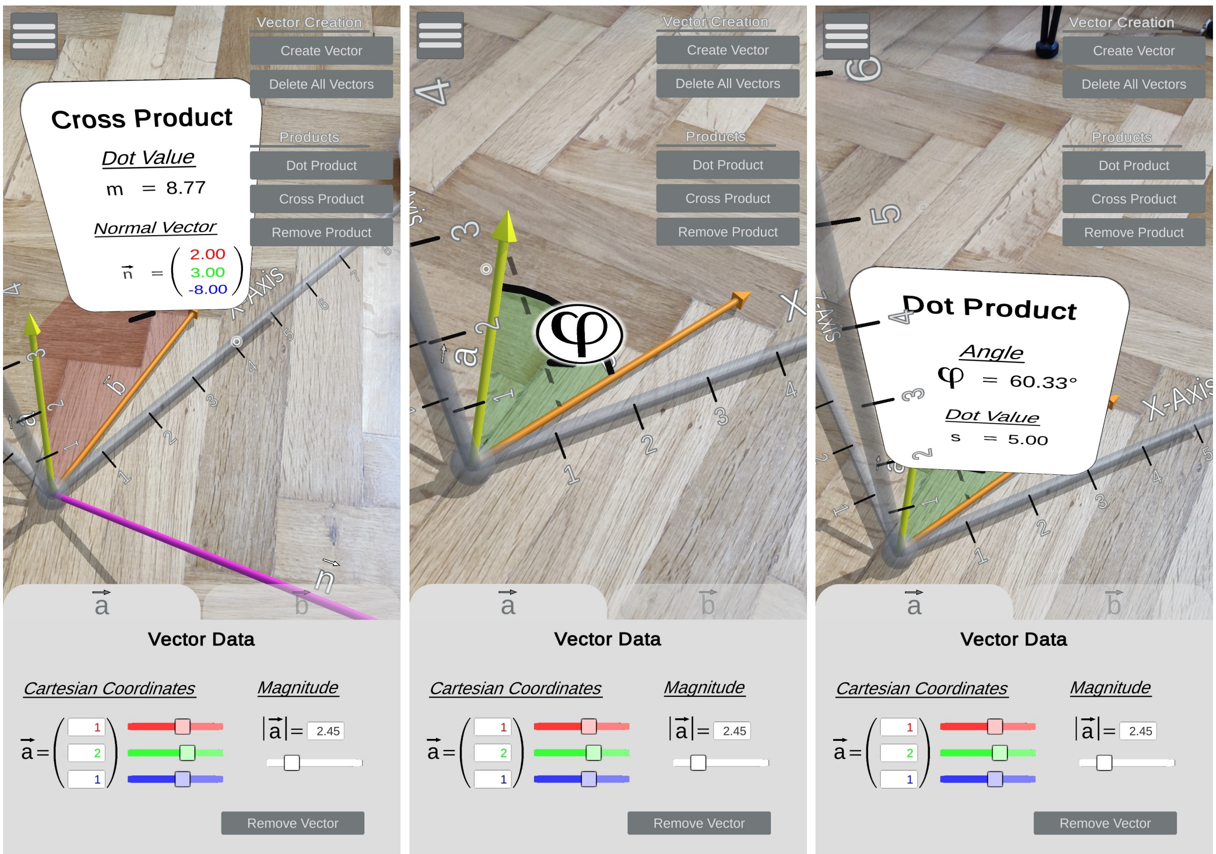


Abbildung 6: Screenshots zu *Vektor AR³* 4: links: Die genaue Beschreibung des Vektorprodukts mit Normalvektor, Mitte: Das Skalarprodukt wurde berechnet, rechts: Die genau Beschreibung des Skalarprodukts mit Winkel

Über diese zwei Funktionen lassen sich rasch die gesuchten Größen bestimmen. Auch hier hilft die Augmented Reality Darstellung einen nahbaren Zugang zu finden, und die Vektoren, Vektorprodukte und Winkel im Raum gut sichtbar und erlebbar zu machen.
Die letzte Funktion, *Normalvektoren von Kurven und Flächen* wird hier nicht weiter vorgestellt, da diese nicht für den Einsatz in der Schule vorgesehen ist.

3 Forschungsfragen und Hypothesen

Wie zuvor in Abschnitt *2 Theoretischer Hintergrund* aufgezeigt, bietet Mathematikunterricht mit der Verwendung von Augmented Reality den Vorteil, dass die Raumvorstellung weiter gebildet werden kann, und die Erlebbarkeit von Mathematik vergrößert wird. Einerseits geht der Unterricht so verstärkt auf die Anwendbarkeit, als auch auf die Relevanz von Mathematik im Alltag ein, und zeigt den Schüler*innen neue Möglichkeiten Mathematik zu verstehen auf. Zusätzlich bietet der Geometrieunterricht mit AR eine Visualisierung der sonst oft ausschließlich kalülbasierten Vorstellungen zu Vektoren im Raum.
Durch diesen noch nicht ausreichend erschlossenen Bereich, öffnen sich neue Fragen für den Mathematikunterricht. So soll untersucht werden, welchen Einfluss die ausgewählte Smartphone-App *Vektor AR³* auf den Mathematikunterricht und die Raumvorstellung hat. Weiters soll erfragt werden, wie die Schüler*innen das Arbeiten mit Augmented Reality einordnen, und wie es passend für den Unterricht angewandt werden kann.
Daher sollen nun das Forschungsinteresse und die Forschungsfragen formuliert werden.

3.1 Forschungsfragen

In vorangehenden Studien konnte gezeigt werden, dass das Arbeiten mit Augmented Reality in diversen schulischen Kontexten positive Effekte auf Lernen und Motivation ausübt. Gleichzeitig besteht die Meinung, dass der Mathematikunterricht mit AR viele Chancen für die analytische Geometrie bietet, besonders durch die Möglichkeiten der Visualisierung und Interaktion sowie für die Weiterbildung der kognitiv-visuellen Fähigkeiten in Form der Raumvorstellung. Trotz dieses großen Potentials, sind die bisher gesammelten Erfahrungswerte noch sehr gering, sowie teilweise stark veraltet.
Ausgelöst durch die fortwährende technische Weiterentwicklung im Bereich der Augmented Reality ist es notwendig, die aktuelle Situation für den Mathematikunterricht zu erproben und zu untersuchen. Denn durch die niederschwellige Möglichkeit mit dem persönlichen Smartphone und einer passenden Smartphone-Applikation in die Mixed Reality eintreten zu können, wurden auch für den Unterricht neue Perspektiven eröffnet. Damit die Erfahrungswerte und Ergebnisse aus österreichischer Lehrer*innensicht relevant sind, ist es notwendig, einen speziellen Bezug zum österreichischen Lehrplan zu nehmen, sowohl

auf Software- als auch auf Inhaltsebene. Die Forschungsfragen, die diese Arbeit motivieren und begleiten, sind daher folgende:

1. Welche Auswirkungen hat der Unterricht mit *Vektor AR³* auf die Raumvorstellung der Schüler*innen?

2. Welche Empfehlungen lassen sich aus den Rückmeldungen der Schüler*innen für die Anwendung von Augmented Reality im Mathematikunterricht im Allgemeinen formulieren?

3. Wie kann die App *Vektor AR³* weiter verbessert werden?

Zusammenfassend lässt sich formulieren, dass das Ziel der vorliegenden Arbeit die genauere Erprobung und Sammlung von Erfahrungswerten im Bezug zur App *Vektor AR³* im Themenbereich Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ist. Die Schüler*innen werden einerseits quantitativ über den Pretest und Posttest und andererseits qualitativ über das Feedback, das sie in einem Fragebogen angeben, erfasst. Während die quantitativen Daten die Raumvorstellung und Mathematikkompetenz verfolgen, sollen die qualitativen Daten Aufschluss über die spezielle Handhabung und Einsetzbarkeit der App *Vektor AR³* und allgemein über Augmented Reality im Mathematikunterricht geben.

3.2 Hypothesen und Erwartung

Diese Arbeit untersucht primär die Annahme, dass ein Mathematikunterricht mit Augmented Reality Vorteile gegenüber einem Mathematikunterricht mit Tafel, Taschenrechner, Stift und Papier hat. Diese Vorteile manifestieren sich am deutlichsten durch die zusätzliche Weiterentwicklung der Faktoren der Raumvorstellung und implizit durch die Fähigkeit sich kognitiv mit Vorstellungen von (mathematischen) Objekten befassen zu können, so die Hypothese. Um diese zu überprüfen, werden eine Experimentalgruppe, mit dem Einsatz von AR, und eine Kontrollgruppe, ohne dem Einsatz von AR, möglichst identen Interventionsstunden unterzogen, um dann die erreichten Testscores davor und danach zu vergleichen.

Jedoch wird allgemein erwartet, dass sowohl die Kontrollgruppe als auch die Experimentalgruppe einen Anstieg bei der durch die zwei Tests gemessenen Raumvorstellung verzeichnen können, da dies üblicherweise bei der Wiederholung von Tests geschieht

(Dimitrov & Rumrill, 2003, S. 159–165). Trotzdem sollte, und dies sei die zu überprüfende Hypothese, die Experimentalgruppe durch den Einsatz der Augmented Reality App *Vektor AR³* einen höheren, vielleicht sogar signifikant höheren, Wert in Bezug auf die Raumvorstellung erreichen.

Relevant sind zusätzlich die einzelnen Faktoren der Raumvorstellung, die individuell untersucht werden können. Besonders die *Mentale Rotation* kann stark durch AR gefördert werden, so die Erwartung. Weiters ist es durch die Identifikationsnummern der Schüler*innen möglich, die individuellen Verbesserungen bzw. Verschlechterungen genau zuzuordnen und zu interpretieren.

Um zusätzlich Rückmeldungen zum Arbeiten mit der App *Vektor AR³* zu bekommen, wird die Experimentalgruppe mit Hilfe eines digitalen Fragebogens zu den Erfahrungswerten befragt. Dieses Feedback soll dabei helfen, die Daten genauer interpretieren und eventuelle Limitationen klarer aufzeigen zu können. Zusätzlich kann dieses als direktes Feedback für die Weiterentwicklung und Verbesserung der Smartphone-Anwendung dienen.

Als mögliche Limitation ist allerdings vorab zu erwähnen, dass die statischen Raumvorstellungstests nicht direkt die identen Fähigkeiten überprüfen, die während der dynamischen und interaktiven Arbeit mit Augmented Reality gefordert und gefördert werden. Allerdings gibt es hier noch keine Testverfahren, die erprobt sind und zuverlässig verwendet werden könnten. Die Antworten auf die Fragestellungen müssen also aus den vorhandenen und erprobten Testverfahren abgeleitet werden.

Bezogen auf die erwähnten Strategien (siehe Abschnitt **??** *Lösungsstrategien bei Raumvorstellungstest*), die bei Raumvorstellungstest angewandt werden, wurde für dieses Forschungsdesign entschieden, keine Erfassung ebendieser Strategien vorzunehmen. Das ist damit zu begründen, dass Pre- und Posttest schon dicht gepackt mit den vier Tests zu Raumvorstellung und Mathematikkompetenz sind, als auch damit, dass gezeigt wurde, dass es nicht möglich ist, zuverlässige Aussagen über die Strategien erhalten zu können. Zusätzlich liegt der Fokus dieser Arbeit verstärkt auf den Vorteilen, die Augmented Reality und Raumvorstellung für den Mathematikunterricht haben können, während die exakten kognitiven Prozesse der Lernenden wohl verdeckt bleiben werden.

Der Themenbereich analytische Geometrie bzw. Vektorgeometrie wurde einerseits wegen der Fähigkeiten von *Vektor AR³* gewählt, und ist zusätzlich durch den Effekt des Geometrieunterrichts auf die Raumvorstellung zu begründen. Denn der Geometrieunterricht zeigte bereits eine Förderung der Raumvorstellung, so Glück et al.:

> „Da in den verschiedensten Tests, die unterschiedliche Raumvorstellungsaspekte erfassen, Leistungssteigerungen nachgewiesen wurden, ist anzunehmen, dass der Geometrieunterricht zentrale räumliche Fähigkeiten - insbesondere die Visualisierungsfähigkeit [in dieser Arbeit *Visualisierung* gennant]- verbessert und so eine entsprechend breite Transferwirkung auf verschiedenste räumliche Leistungen hat.“ (Glück et al., 2005, S. 7)

Somit gilt es die Wechselbeziehung zwischen Augmented Reality und Raumvorstellung im Mathematikunterricht zu untersuchen.

4 Versuchsablauf

Beim gesamten Ablauf des Experiments wurden jeweils in der Experimental- und Kontrollgruppe eine Stunde mit dem Pretest, eine Stunde mit dem Posttest sowie drei Schulstunden mit dem Bearbeiten mathematischer Aufgaben verbracht (siehe Abbildung 7). Die Experimentalgruppe verwendete hierfür *Vektor AR³*, während die Kontrollgruppe ganz ohne digitale Visualisierungen auskommen musste. Jedoch waren die drei Unterrichtseinheiten so konzipiert, dass diese sowohl passend für die Bearbeitung an der Tafel bzw. mit Stift und Papier, als auch für die genauen Funktionen der Augmented Reality-App waren. Denn ein allgemeines Motiv war es, alle kontrollierbaren Faktoren möglichst vergleichbar zu halten.

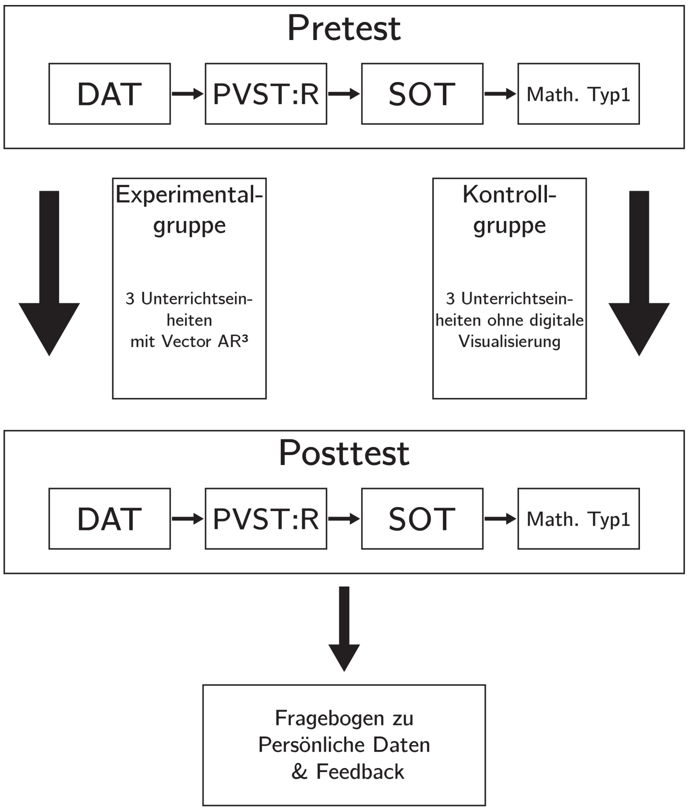


Abbildung 7: Versuchsablauf der Studie

Nun folgt eine detaillierte Ausführung der geplanten bzw. der umgesetzten Unterrichtseinheiten für die zwei Gruppen. Daran anschließend soll aufgezeigt werden, wann und wie in Experimental- und Kontrollgruppe von der ursprünglichen Planung abgewichen wurde. Im Appendix findet sich auch die exakte Unterrichtsmatrix, die bei der Erstellung und Umsetzung maßgeblich als Vorlage diente (siehe Appendix 1).

Die jeweils fünf Unterrichtseinheiten wurden während der regulären Mathematikstunden gehalten und erstreckten sich somit jeweils über den Zeitraum von etwa zwei Wochen. Zuerst erfolgte die Durchführung in der Experimentalgruppe (April 2022) und anschließend in der Kontrollgruppe (Mai 2022). Die mathematischen Inhalte waren jeweils schon vor dem Pretest unterrichtet worden und waren den Schüler*innen somit bekannt.

4.1 Auswahl der Testpersonen

Für den Versuch wurden zwei 6. Klassen (10. Schulstufe) eines Wiener Gymnasiums ausgewählt. Der Verfasser der vorliegenden Masterarbeit ist selbst an dieser AHS tätig, weshalb die Kontaktaufnahme zu den Lehrpersonen der Klassen sowie die Planung und praktische Umsetzung besonders niederschwellig waren. Da eine komplette Randomisierung in einem Schulsetting, durch Faktoren wie unterschiedliche Stundenpläne, Verfügbarkeit der Klassenräume und andere, sehr schwer möglich ist, wurde jeweils eine ganze Klasse der Experimental- bzw. Kontrollgruppe zugeteilt.
In der Experimentalgruppe (EG) absolvierten 24 Schüler*innen den Pretest und 24 den Posttest, jedoch nur 22 davon sowohl den Pre- als auch den Posttest. Davon wiederum waren nur 17 an der Mehrheit der drei Interventionsstunden (also an mindestens zwei von drei Einheiten) anwesend und nahmen somit an dem Versuch vollständig teil.
In der Kontrollgruppe (KG) absolvierten 12 Schüler*innen den Pretest und neun den Posttest. Alle neun nahmen auch mehrheitlich an den Interventionsstuden teil und konnten daher im Versuch berücksichtigt werden. Somit war die Gesamtzahl der Teilnehmer*innen 26.

4.2 Pretest

Die Teilnehmer*innen wurden vorab durch die Mathematiklehrer*innen sowie durch eine offizielle Ankündigung durch den schulinternen E-Mail-Service über die Teilnahme an der Studie informiert. Dadurch konnte in der ersten Einheit nach einer kurzen Vorstellung und Einführung direkt mit den Tests begonnen werden. Insgesamt waren die vier Tests mit einer maximalen Bearbeitungszeit von 43 Minuten eingeplant, weshalb ein rasches Vorankommen ohne Pausen zwischen den Tests notwendig war, um innerhalb einer Schulstunde fertig zu werden.

Um die individuellen Daten und Ergebnisse der Teilnehmer*innen anonym zu erfassen, wurden Identifikationsnummern erstellt, die dann auch beim Posttest wieder anzugeben waren. Diese ermöglichten es, die individuellen Veränderungen zu verfolgen, und gaben den Teilnehmer*innen die Möglichkeit, ihre persönlichen Ergebnisse einzusehen.
Der Pretest erfasste die Raumvorstellung der Teilnehmer*innen mit folgenden drei Tests in der dargestellten Reihenfolge:

- **DAT**, Differential Aptitude Test: Spatial Relations (Bennett et al., 1973, S. 81-91)
- **PSVT:R**, Purdue Spatial Visualization Test: Visualization of Rotations (Guay, 1997)
- **SOT**, Spatial Orientation Test (Kozhevnikov & Hegarty, 2001, S. 745-756; Hegarty & Waller, 2004, S. 175–191)

Diese überprüften die einzelnen Faktoren der Raumvorstellung, nämlich *Räumliche Beziehung, Mentale Rotation, Räumliche Orientierung* und *Visualisierung.*
Die Teilnehmenden hatten fünf Minuten Zeit, um 15 Aufgaben des DAT zu lösen, anschließend hatten sie zehn Minuten Zeit für 15 Aufgaben des PSVT:R, und als letztes wurde der SOT bearbeitet, wobei acht Aufgaben in acht Minuten gelöst werden mussten. Hierbei wurden die Teilnehmer*innen explizit dazu aufgefordert, nicht den Zettel zu verdrehen oder den Kopf zu neigen, um so nicht von der vorgegebenen Perspektive abweichen zu können. Die Teilnehmer*innen waren bei allen drei Tests dazu angehalten möglichst schnell zu arbeiten, und nach Beenden des jeweiligen Tests die benötigte Zeit zu notieren. Hierfür wurde über den Beamer im Klassenraum eine Stoppuhr angezeigt.
Anschließend wurden die Mathematikkompetenzen der Teilnehmenden überprüft. Hierfür wurden sechs Typ-1-Aufgaben aus dem Inhaltsbereich Vektoren (Algebra und Geometrie, Vektoren, AG 3.1 - AG 3.5) von vergangenen Maturaterminen verwendet. Für das Lösen waren maximal 20 Minuten vorgesehen, die genauen Bearbeitungszeiten wurden wieder individuell vermerkt.
Diese Einheit, wie auch die Posttest Einheit, verlief in beiden Klassen komplett analog.

4.3 Drei Interventionsstunden

Der aktive Teil der Studie beinhaltete drei Interventionsstunden, die so geplant wurden, dass sie für die Experimental- sowie die Kontrollgruppe im größtmöglichen Ausmaß vergleichbar blieben. Um dies zu gewährleisten, wurden Arbeitsblätter (siehe Appendix 3 und 4) gestaltet, die darauf abzielten, dass die Schüler*innen in Kleingruppen (2-3 Personen) möglichst selbstständig arbeiten konnten. Zusätzlich wurden die Materialien so entwickelt bzw. adaptiert, dass die Bearbeitung mit der App *Vektor AR³* als auch mit Stift und Papier sinnvoll umsetzbar war.

In der Experimentalgruppe wurde besonders darauf geachtet, dass in der 1. und 2. Stunde die Arbeitsanweisungen klar auf die Möglichkeiten der App referenzieren und von deren Fähigkeiten Gebrauch gemacht wird. Die dritte Einheit wurde möglichst offen und mathematisch deutlich komplexer angelegt, wodurch die Schüler*innen gefordert waren, selbst adäquate Anwendungsmöglichkeiten für *Vektor AR³* zu finden. Im Anhang (Appendix 1) lässt sich hierzu die detaillierte Unterrichtsmatrix finden, die nun erläutert wird.

Für die Erstellung der Formelsammlung (siehe Appendix 2) sowie der Arbeitsblätter (siehe Appendix 3 und Appendix 4) wurden als maßgebende Stütze die Schulbücher der Reihe *Mathematik verstehen. 6* verwendet (Malle et al., 2015, 2017, 2018).

4.4 Überblick über die Planung

Die 1. Stunde umfasst einen direkten Einstieg sowie eine Erläuterung der nächsten Schritte. Den Schüler*innen wird aufgezeigt, was in den nächsten vier Stunden passieren und was von ihnen erwartet wird. In der Experimentalgruppe laden die Schüler*innen die App auf ihr Smartphone. (Idealerweise ist das schon teilweise davor passiert). Es werden Kleingruppen (2-3 Personen) gebildet, in denen mindestens ein Mitglied mit funktionierender App ist. Die einzelnen Funktionen werden dann mit Hilfe einer PowerPoint-Präsentation vorgezeigt. Nach der Reihe soll jedes Gruppenmitglied mit dem Smartphone arbeiten, bzw. im Idealfall sollten möglichst viele Schüler*innen gleichzeitig arbeiten, die Funktionen sehen, selbstständig anwenden und Zeit haben auch das Ergebnis zu beobachten. Zusätzlich gibt es eine kurze Erklärung der englischen Begriffe, sowie ein gemeinsames Anwendungsbeispiel. In der Kontrollgruppe wird direkt mit diesem Anwendungsbeispiel angefangen.

Anschließend soll sichergestellt werden, dass die Schüler*innen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$ vertraut sind und die nachfolgenden Arbeitsschritte erfolgreich absolvieren können. Diese geschieht über einen Input zu den Themen für die nächsten Stunden. Die Inhalte sollten bereits vertraut sei, und mussten auch jeweils bei der letzten Schularbeit angewendet werden. Daher werden die Inhalte hier lediglich reaktiviert und nur oberflächlich besprochen. Es wurde darauf geachtet, dass alle für die Mathematikaufgaben relevanten Definitionen und Vorstellungen in der Formelsammlung (siehe Appendix 2) enthalten sind. Diese soll für die nächsten Stunden auch als Nachschlagwerk dienen. Die Schüler*innen sollen nun in ihren Kleingruppen arbeiten und die angegebene Aufgabe gemeinsam lösen. Bei Schwierigkeiten kann hier noch direkt ausgeholfen werden, besonders bei Fragen bezüglich der Smartphone-Applikation besteht Zeit für Fragen. In den Kleingruppen der Experimentalgruppe muss darauf geachtet werden, dass nicht nur eine Person mit dem Smartphone arbeitet, sondern die gesamte Gruppe. Abschließend werden die Ergebnisse verglichen und diskutiert.

Zu Beginn der 2. Stunde können etwaige Inhalte nachgeholt werden, für die in der vorhergehenden Stunde keine Zeit war. Wiederum sollen die Schüler*innen in Kleingruppen (2-3 Personen) arbeiten, und die acht einzelnen Aufgabenstellungen bearbeiten. In der Experimentalgruppe muss darauf geachtet werden, dass in jeder Gruppe ein Smartphone mit App vorhanden ist und nicht nur eine Person mit dem Smartphone arbeitet. Es gilt, die Gruppenmitglieder dazu zu motivieren sich auszutauschen und gemeinsam an der Bearbeitung zu arbeiten. Alle Rechnungen müssen schriftlich festgehalten werden, und sollen von allen Gruppenmitgliedern gerechnet werden. Zusätzlich sollen die Arbeitsblätter am Ende der Stunde abgesammelt werden. Falls die Schüler*innen deutlich länger benötigen als erwartet, können diese auch noch in der folgenden Stunde fertiggestellt werden. Es ist aber sicher sinnvoll die vollständig bearbeiteten Beispiele zu vergleichen und besprechen. Die Gruppen können dabei individuell befragt und unterstützt werden; je nach Geschwindigkeit der Gruppen bzw. der Gesamtgruppe. In der Experimentalgruppe ist es zusätzlich wichtig auszuhelfen, falls die App nicht unterstützend eingesetzt wird, oder Probleme beim Arbeiten auftauchen. Das Hauptziel ist hierbei die Bearbeitung mit der App *Vektor AR³* und die Maximierung der Arbeitszeit in der Augmented Reality. Anschließend sollen die Lösungen verglichen und besprochen werden. Je nach Fortschritt der Gruppen ist es auch möglich, nur einen Teil in dieser Einheit zu kontrollieren, und in der nächsten Einheit noch damit fortzufahren.

In der 3. Stunde soll wieder an unabgeschlossene Aufgaben angeknüpft werden. Erst anschließend wird mit Arbeitsblatt 2 weitergearbeitet. Dies ist damit begründet, dass Arbeitsblatt 1 einen direkten und niederschwelligen Einstieg in die Verwendung der App bietet und daher dieser Schritt besonders wertvoll für die intensive Anwendung der App ist. Erneut wird in den Kleingruppen (2-3 Personen) gearbeitet und nun sollen drei längere Aufgaben gelöst werden. Diese sind nun deutlich komplexer geschaffen, bestehen aus mehreren Teilaufgaben und geben keine direkten Anwendungsaufträge, sondern verlangen kombinatorisches Denken und Anwenden. Besonders für die Experimentalgruppe gilt es, passende Gelegenheiten für die Anwendung der App zu finden. So müssen erst Überlegungen angestellt werden, und dann können Rechenschritte und Veranschaulichungen mit der App rasch erledigt werden. Einige Gruppen benötigen hier eventuell Unterstützung und sollten individuell betreut werden. Die Kontrollgruppe wird sicherlich bei der Vorstellung und somit bei der Bearbeitung der Beispiele mehr Zeit benötigen. Deshalb kann an dieser Stelle auch noch besprochen werden, welche Vorstellungen hilfreich sind oder auch nicht. Gegebenenfalls kann abschließend nachgefragt werden, wie gearbeitet wurde und welche Aufgaben als leicht oder schwer empfunden wurden. Analog kann für die Experimentalgruppe besprochen werden, welche Funktionen hier zum Einsatz kamen und hilfreich waren. Abschließend sollte besprochen werden, welche Teilaufgaben wie vorgestellt bzw. gerechnet wurden.
Detailliertere Informationen sind der Unterrichtsmatrix (siehe Appendix 1) zu entnehmen.

4.5 Kommentare zum tatsächlichen Ablauf

Nach den Unterrichtseinheiten nahm sich der Autor dieser Arbeit jeweils einige Minuten Zeit, um die Umsetzung der Stunde zu reflektieren, und gravierende Abweichungen von der Unterrichtsplanung zu notieren. Zusätzlich wurde jeweils kurz zusammengefasst, wie die Einheit abgelaufen war. Die folgenden Passagen sind Ausformulierungen dieser Notizen und sollen die unmittelbare subjektive Wahrnehmung der Stunde repräsentieren, um für die Studie ein möglichst treues Bild der tatsächlichen Abläufe darstellen zu können.

4.5.1 Experimentalgruppe

Ad 1. Stunde: Die Schüler*innen wurden schon am Ende der letzten Stunde (Pretest) kurz über die App *Vektor AR³* informiert und gebeten diese auf ihren Smartphones zu installieren. In der ersten Interventionsstunde wurde direkt daran angeschlossen, und noch einmal darum gebeten, die App zu installieren. Nachdem die Schüler*innen mehrheitlich die App installiert hatten (es gab drei Fälle, in denen das technisch nicht möglich war) konnte mit einer Vorstellung der Funktionen der App fortgefahren werden. Hierfür wurden einige Screenshots in einer PowerPoint-Präsentation vorbereitet, die es erlaubte, die einzelnen Knöpfe und Bedienelemente vorzustellen. Parallel dazu konnten die Schüler*innen die App ausprobieren (siehe Appendix 5). So wurden etwa 15 Minuten lang unterschiedliche Koordinatensysteme in der Augmented Reality betrachtet, und die Möglichkeiten Vektoren zu erstellen und zu modifizieren sowie die Funktionen Skalarprodukt (Dotproduct) und Vektorprodukt (Crossproduct) besprochen. Den Schüler*innen wurde immer wieder kurz Zeit gegeben, um mit den Funktionen auch selbstständig experimentieren und sich die Darstellung in AR ansehen zu können. Hierzu wurden die Schüler*innen auch aktiv ermutigt.

Die Schüler*innen hatte alle das Kapitel Vektoren in $\mathbb{R}^3$ (und $\mathbb{R}^n$) bereits im regulären Mathematikunterricht behandelt, und abgeschlossen. Zusätzlich war dieses Thema auch Teil der letzten Mathematikschularbeit und darf daher als gut bekannt vorausgesetzt werden. Trotzdem wurden in dieser Stunde die mathematischen Grundkompetenzen für das Arbeiten mit Vektoren in $\mathbb{R}^3$ wiederholt und allen Schüler*innen eine Formelsammlung ausgeteilt, welche sie in den Stunden begleiten und unterstützen sollte (siehe Appendix 2). Diese wurde in der ersten Einheit gemeinsam besprochen, wobei die Schüler*innen gut mit den Inhalten vertraut waren. Es taten sich lediglich Fragen bezüglich Notation auf.

Nach dieser Einführung wurden die Schüler*innen in Kleingruppen (2-3 Personen) eingeteilt, in denen sie alle Arbeitsaufträge, in dieser und den folgenden zwei Stunden, erledigen sollten. Abschließend wurden noch zwei Aufgaben individuell bearbeitet, um zu überprüfen, ob die Bearbeitung auch in den Kleingruppen gelingt. Dies konnten alle Kleingruppen erfolgreich absolvieren.

Da die Installation der App schon großteils zu Hause erledigt worden waren, konnte schneller als erwartet mit der Vorstellung der App begonnen werden. Technisch klappte es bei fast allen, ein paar Smartphones schienen aber zu alt oder hatten Softwareprobleme. Die Gruppen konnten so eingeteilt werden, dass in den meisten Gruppen zwei Geräte funktionsfähig waren. Der Theorieteil wurde sehr passiv aufgenommen. Die Fragen beschränkten sich auf Notationen, zu den Inhalten wurde nichts gefragt. Auf Nachfrage kamen aber einige Antworten, dass der Stoff schon bekannt sei. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte überraschend schnell, sodass genug Zeit blieb um noch gemeinsam die Arbeitsschritte zu besprechen und die Ergebnisse zu vergleichen. Nur in einer Gruppe gab es hier technische Probleme, da das Koordinatensystem nicht korrekt platziert werden konnte und wieder verschwand. Am Ende der Einheit wurden noch kurz Strategien zur korrekten Handhabung der App erläutert.

Ad 2. Stunde: In der zweiten Interventionsstunde wurde in den Kleingruppen am Arbeitsblatt 1 (siehe Appendix 3) gearbeitet. Die Arbeitsaufträge waren an den Möglichkeiten und Fähigkeiten der App orientiert, und die einzelnen Aufgaben so gestaltet, dass sie leicht und sinnvoll mit der App bearbeitet werden konnten. Die Schüler*innen wurden dazu aufgefordert, alle Aufgaben mit Hilfe der App zu lösen, und auf andere Hilfsmittel zu verzichten. Das hat auch mit wenigen Ausnahmen funktioniert. Falls andere Bearbeitungsmethoden bemerkt wurden, wurden die Schüler*innen gebeten wieder mit der App zu arbeiten.
Während der eigenständigen Arbeit wurden die Schüler*innen bei Fragen oder technischen Problemen unterstützt, ansonsten war es das Ziel, möglichst wenig zu intervenieren und dadurch die Arbeitszeit mit der App zu maximieren.
Die vorgesehene Bearbeitungszeit für die acht Aufgaben des Arbeitsblatts betrug 40 Minuten. Einige Kleingruppen benötigten nur etwa 25 Minuten, während bis auf eine Gruppe alle anderen in den 40 Minuten fertig wurden. Anschließend wurden die Lösungen gemeinsam verglichen und besprochen. Insgesamt zeigte sich die Experimentalgruppe sehr motiviert und arbeitete intensiv mit.
Die Schüler*innen zeigten sich in dieser Stunde deutlich motivierter und interessierter als zuvor. Der Arbeitsauftrag schien von der Schwierigkeit und Länge passend, da bis auf eine Gruppe alle fertig wurden. Es gab sehr viele Fragen aufgrund von technischen Schwierigkeiten (Koordinatensystem verschwindet, oder lässt sich nicht platzieren; nach dem Einge-

ben von Koordinaten konnte die Darstellung nicht mehr „gefunden“ werden). Aber auch Fragen mathematischer Natur sowie Verständnisfragen traten auf. Einige Gruppen kamen miteinander ins Gespräch und konnten einander aushelfen oder gegenseitig Fragen beantworten. Auch diesmal gab es zumeist wieder zwei Smartphones pro Gruppe. In einem Fall wurde in einer Gruppe eine andere App (Geogebra) zum Lösen der Aufgabe verwendet. Diese Gruppe wurde rasch darauf hingewiesen, nur mit *Vektor* AR^3 zu arbeiten. Nach diesem Vorfall konnte keine weitere Alternativsoftware entdeckt werden. In einigen wenigen Fällen verwendeten Schüler*innen ihre Smartphones auch für andere Aktivitäten, diese wurden dann möglichst rasch unterbunden. Da zu Beginn bekanntgegeben wurde, dass die Mathematiklehrerin dieser Klasse die Arbeitsblätter zur Benotung der Mitarbeit erhalten werde, war jedoch genug Motivation und Ehrgeiz geschaffen worden, um auch mit dem Smartphone in der Hand ein normales Arbeiten zu ermöglichen.

Ad 3. Stunde: Das Ziel der dritten Interventionsstunde war es, komplexere Anwendungsbeispiele darzulegen, die eine passende Interpretation und kreative Verwendung der App erfordern. Die genauen Forderungen waren nun nicht mehr so direkt formuliert, und mussten erst richtig umgelegt werden, um dann mit *Vektor* AR^3 arbeiten zu können. Die drei Aufgaben des Arbeitsblatts 2 (siehe Appendix 4) gehen in Richtung von Typ-2-Aufgaben, und waren so gestaltet, dass sie die Schulstunde vollständig füllten. Tatsächlich wurde hauptsächlich an Aufgabe 1 und deren Teilaufgaben gearbeitet und nur drei Gruppen widmeten sich den weiteren Aufgaben. Wiederum war die Anweisung, möglichst viel mit der App zu arbeiten und auf alle anderen Hilfsmittel zu verzichten. Bei etwaigen Fragen oder Problemen wurde den Gruppen individuell geholfen, bzw. bei Fragen, die für alle relevant schienen, wurden Anmerkungen an der Tafel notiert.
Die Unterschiede zwischen den einzelnen Gruppen waren hier von Anfang an deutlicher zu bemerken, als noch in der Stunde zuvor. So kamen wenige sehr rasch voran und bearbeiteten die Aufgaben mehrheitlich, während andere fast 40 Minuten mit der ersten (aus mehreren Unterpunkten bestehenden) Aufgabe verbrachten. Auch musste hier auf viel mehr Wissen und Kompetenzen zurückgegriffen werden, was in manchen Gruppen große Schwierigkeiten auslöste. Vor allem die Aufgaben gleichschenklige bzw. -seitige Dreiecke über deren Eckpunkte zu bestimmen (siehe Appendix 4, Aufgabe 1) bereitete gleich zu

Beginn großes Kopfzerbrechen. Deshalb wurden hier teilweise Hilfestellungen gegeben, wie die Vorstellung und Berechnung erfolgen könnte und Hinweise gegeben, wie hier die App aushelfen könnte. Insgesamt war den Schüler*innen der kalkülbasierte Teil klar, während das Erarbeiten der Bedeutungen der Fragestellungen einiges an Zeit benötigte. Trotz der Schwierigkeiten beschäftigten sich alle Gruppen in den ersten 30 Minuten mit den Aufgaben, und arbeiteten sehr pflichtbewusst.
Während mehrere Gruppen auch noch Aufgabe 2 bearbeiteten, gab es nur eine Gruppe, die auch Aufgabe 3 erledigen konnte. Diesen schnelleren Gruppen wurde dann individuell Feedback gegeben, und nur Aufgabe 1 wurde kollektiv besprochen. Hier schien jedoch das Interesse schon mehrheitlich verloren, und nur wenige arbeiteten am Vergleichen und Erklären der Lösungen aktiv mit.

4.5.2 Kontrollgruppe

Ad 1. Stunde: Da in dieser Gruppe nicht die Installation und Erklärung der App stattfinden musste, konnte für die Wiederholung der Vektorrechnung und Besprechung der Formelsammlung deutlich mehr Zeit genommen werden. Die Klasse war währenddessen sehr leise und eher passiv. Nur sehr gezielte Fragestellungen konnten sie zu etwas Interaktion bewegen. Der Stoff war zwar vertraut, lag jedoch schon mehrere Wochen zurück.
Da etwas mehr Zeit war, wurden in der Kontrollgruppe nicht nur wie geplant zwei, sondern vier Berechnungsaufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt bearbeitet.

Ad 2. Stunde: Die Schüler*innen der Kontrollgruppe benötigten bei der Bearbeitung der Aufgaben deutlich länger. Keine der Kleingruppen konnte die acht Aufgaben in den geplanten 40 Minuten vollständig bearbeiten und besonders Aufgabe 6, zur Pyramide (siehe Appendix 3), führte zu regen Diskussionen, wie die Koordinaten der Eckpunkte richtig zu wählen wären.
Die Aufgaben benötigten ohne die Hilfe von *Vektor AR³* merklich länger, und auch die Überlegungen zu den Ergebnissen schienen mehr Zeit zu erfordern. Besonders die Aufgabe zur Ermittlung der Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide (Appendix 3, Aufgabe 6) forderte viel Vorstellungsvermögen ein, welches bei den Schüler*innen zu fehlen schien. Es wurden bei mehreren Gruppen Schwierigkeiten festgestellt,

und daraufhin kleine Hilfestellungen gegeben, die es den Schüler*innen ermöglichten, die Aufgaben zu lösen. So wurden dabei geholfen die Grundfläche der Pyramide mathematisch beschreiben zu können.
Alle Gruppen arbeiten an den Aufgaben und kamen zeitweise in einen angeregten Austausch, eine fehlende Motivation konnte nicht festgestellt werden.
Am Ende der Stunde wurden die Ergebnisse der ersten sieben Aufgaben verglichen und besprochen. Hier erschienen alle Schüler*innen gleichermaßen interessiert und beteiligten sich.

Ad 3. Stunde: Die Kontrollgruppe hatte merkliche Schwierigkeiten dabei die Aufgaben zu lösen und stellten zu Beginn zahlreiche Fragen zur ersten Aufgabe. Durch den hohen Schwierigkeitsgrad schien die Motivation in dieser Gruppe deutlich gedrückt zu sein, und die Aufmerksamkeit musste immer wieder aktiv auf die Fragestellungen gelenkt werden. Durch kleine Hilfestellungen war es möglich, einen Teil der ersten Aufgabe zu lösen, jedoch schaffte es keine der Gruppen diese vollständig zu lösen. Konkret wurde dabei geholfen, die passenden Vektoren zwischen den Spitzen der angegebenen Vektoren aufzustellen. Am Ende dieser Einheit konnten nur wenige Aufgaben verglichen werden, und nur wenige Schüler*innen waren aktiv beteiligt. Die Schüler*innen schienen sich mit den Aufgaben dieser Stunde besonders schwer zu tun. So war es für viele nicht möglich die Unterpunkte der Aufgabe 1 ohne deutliche Unterstützung zu lösen. Einerseits, weil hier wohl eine Form der Visualisierung hilfreich gewesen wäre, andererseits, weil auch viele mathematische Kompetenzen zu fehlen schienen. Die Hilfestellungen wurden analog zu denen in der Experimentalgruppe gehalten, jedoch konnten nicht alle damit etwas anfangen.
Insgesamt setzten sich alle Gruppen mit Aufgabe 1 auseinander und nur zwei Gruppen mit einer der weiteren Aufgaben.
Auch das Vergleichen der Ergebnisse schien wenig Interesse auszulösen, und die Schüler*innen waren hier nur mehr teilweise für die Erklärungen zu begeistern. Die Aufgaben schienen in dieser Gruppe als deutlich schwieriger wahrgenommen zu werden. Zusätzlich war aber auch die Bereitschaft geringer, in die Aufgaben einzutauchen und passende Lösungsstrategien zu finden. Eine zusätzliche graphische Visualisierung bzw. eine Visualisierung durch Augmented Reality hätte hier eventuell einen Anfangspunkt liefern können.

4.6 Posttest

Der Ablauf des Posttests verlief analog zu dem des Pretests. Es wurden die identen Aufgaben und Fragestellungen verwendet, um möglichst viele der kontrollierbaren Variablen gleich zu belassen. Anschließend wurden in einem digitalen Fragebogen die demographischen Daten erfasst, die letzte Mathematiknote abgefragt sowie Feedback zu den Testungen und der App eingeholt.

5 Methode und verwendetes Material

In diesem Abschnitt werden die drei Raumvorstellungstests, der Typ-1-Aufgaben Mathematiktest und der Fragebogen vorgestellt, die bei den Testungen verwendet wurden.

5.1 Raumvorstellungstests

Um die Veränderung der Raumvorstellung der Schüler*innen zu erfassen, wurden unterschiedliche Raumvorstellungstests begutachtet. Jeder dieser individuellen Tests hat die Aufgabe einen bzw. maximal zwei der unterschiedliche Faktoren der Raumvorstellung zu messen. Ein Großteil dieser Tests stammt aus den Vereinigten Staaten und wurde dort für Intelligenztests und diverse Aufnahmetests an Universitäten entwickelt. Im Original wurden diese daher auf Englisch konzipiert, jedoch existieren durch vorangehende Studien in diesem Bereich auch überprüfte und getestete Materialien auf Deutsch (z.B. Dünser, 2005, S. 81-85). Zusätzlich wurden von Dünser (2005, S. 87-102) zu den regulären Tests auch gekürzte Versionen erstellt, die mit einer reduzierten Anzahl an Testaufgaben in kürzerer Zeit zu vergleichbaren Ergebnissen wie die Langversion führen. Da diese zusätzlich eine höhere innere Konsistenz aufweisen und in mehrfachen Vorstudien erprobt wurden, können diese als valides Messinstrument angesehen werden. Eben diese gekürzten Versionen des *Differential Aptitude Test* (DAT), des *Purdue Spatial Visualization Test: Rotations* (PSVT:R) und des *Spatial Orientation Test* (SOT) wurden verwendet, um die drei Raumvorstellungstests sowie zusätzlich einen Mathematiktest in einer 50-minütigen Unterrichtseinheit unterzubringen.

Die Auswahl eben dieser drei Raumvorstellungstests ist so gewählt worden, dass alle vier identifizierten Faktoren der Raumvorstellung überprüft werden konnten (siehe *2.2 Faktoren der Raumvorstellung*). Der DAT überprüfte die Faktoren *Visualisierung* und *Räumliche Beziehung*, der PSVT:R den Faktor *Mentale Rotation* und beim SOT wurde der Faktor *Räumliche Orientierung* untersucht.

Allgemein muss noch einmal angemerkt werden, dass die Schüler*innen vor jedem Test dazu angehalten wurden, möglichst schnell zu arbeiten, und die benötigte Zeit selbstständig zu notieren. Nun sollen diese verwendeten Tests der Reihe nach vorgestellt werden.

5.1.1 Differential Aptitude Test: Spatial Relations (DAT)

Beim *Differential Aptitude Test: Spatial Relations* (DAT) müssen die (zweidimensionalen) Netze von Körpern deren äquivalenten dreidimensionalen Objekten zugeordnet werden (siehe Abbildung 8 und Appendix 8) (Bennett et al., 1973, S. 81-91; Katsioloudis, Jovanovic & Jones, 2014, S. 88-101). Das jeweils auf der linken Seite abgebildete zweidimensionale Objekt muss dann, etwa durch mentale Transformationen, Visualisierung, oder andere analytische Verfahren, in einen Körper gefaltet werden. Unterschiedliche Überlegungen oder Vorstellungen können hier zum Tragen kommen, und sollen zu einem richtigen Ergebnis führen. Dabei kommen die Faktoren *Visualisierung* und *Räumliche Beziehung* besonders stark zum Einsatz (Maresch, 2015, S. 41). Im Original besteht dieser Test aus 50 Aufgaben, jedoch wurde bei Pre- und Posttest eine kürzere Version verwendet, welche, wie erwähnt, bei einer Studie von Dünser entwickelt und erprobt wurde (2005, S. 87-102). Durch mehrschichtige Vorstudien konnte sichergestellt werden, dass bei dieser aus 15 Aufgaben bestehenden Variante die gleichen Faktoren überprüft werden, die auch beim vollständigen Test zu tragen kommen. Das Zeitlimit war bei diesem Test auf fünf Minuten limitiert, um Verbesserungen zu ermöglichen und die Gefahr eines Deckeneffekts zu reduzieren.

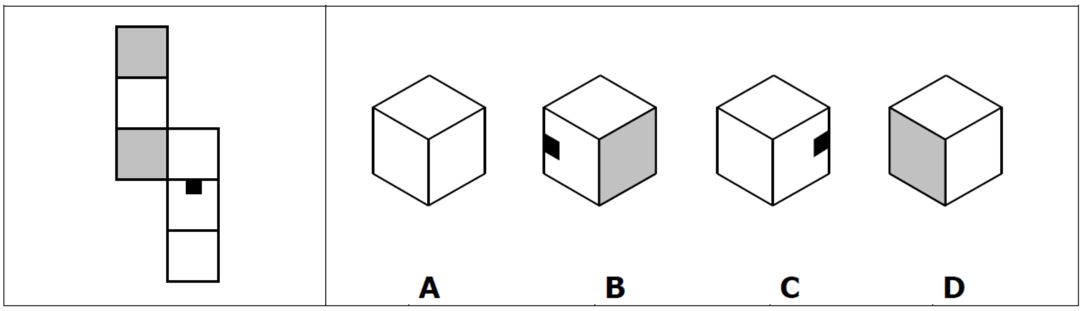


Abbildung 8: Beispiel einer Aufgabe des DAT (Bennett et al., 1973, S. 81-91)

5.1.2 Purdue Spatial Visualization Test: Rotations (PSVT:R)

Beim *Purdue Spatial Visualization Test: Rotations* (PSVT:R) wird bei jeder Aufgabe ein Objekt vor und nach einer Rotation dargestellt (Katsioloudis et al., 2014, S. 88-101; Bodner & Guay, 1997, S. 1-17). Anschließend gilt es, ein vorgegebenes Objekt mit der

gleichen Rotation zu versehen, und so zu einer der fünf mögliche Antworten zu kommen (siehe Abbildung 9 und Appendix 9). Auch hier sollte im Idealfall rein holistisch gearbeitet werden. Die Proband*innen sollten sich also eine Rotation vorstellen, die sich dann mit einer der Lösungen deckt. Jedoch kann das Finden der richtigen Lösung auch mit einer analytischen Strategie gestützt werden, indem etwa die einzelnen Lösungen nach der Reihe verglichen und ausgeschlossen werden.
Wie der Name des Tests schon erahnen lässt, wird durch den PSVT:R hauptsächlich der Faktor *Mentale Rotation* überprüft. Die Komplettversion des Tests besteht aus 30 Items, die in 20 Minuten gelöst werden müssen. In dieser Studie wurde jedoch wieder eine reduzierte Variante verwendet, die sich zuvor schon bewähren konnte (Dünser, 2005, S. 87-102). Diese bestand aus 15 Aufgaben, für die die Schüler*innen zehn Minuten Bearbeitungszeit zur Verfügung hatten.

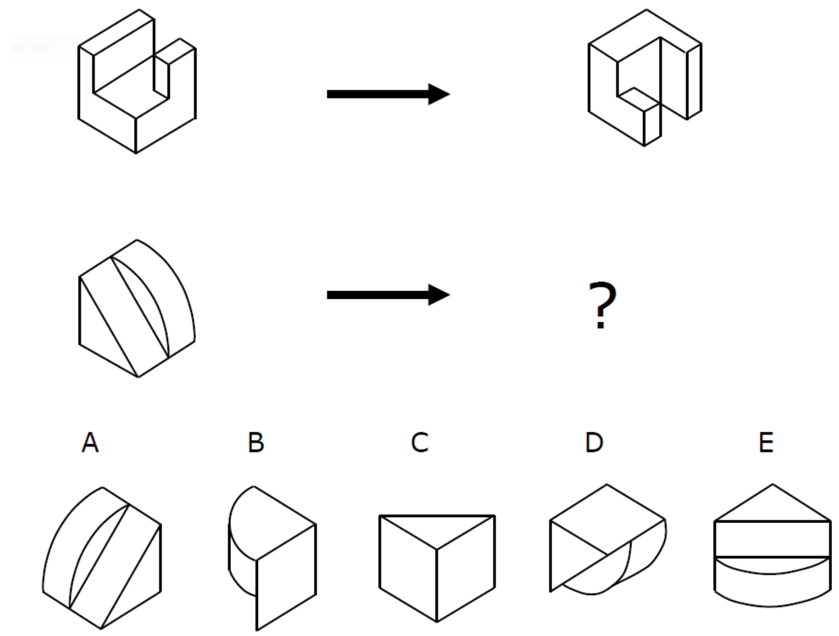


Abbildung 9: Beispiel einer Aufgabe des PSVT:R (Guay, 1997)

5.1.3 Spatial Orientation Test (SOT)

Beim letzten der drei Raumvorstellungstests, dem *Spatial Orientation Test* (SOT), muss nicht die richtige Antwort ausgewählt werden, sondern die Lage im Raum bzw. der Winkel zwischen zwei Objekten möglichst genau angegeben werden (siehe Abbildung 10 und

Appendix 10). Gleichzeitig wird auch eine spezielle Position und Perspektive im Raum eingenommen. Hierfür werden jeweils innerhalb des oben liegenden Rechtecks sieben Objekte dargestellt. Im darunterliegenden Kreis muss dann die Richtung zu einem angegebenen Objekt eingezeichnet bzw. der Winkel zwischen den Blickrichtungen angegeben werden. Im Rahmen der Auswertung wird die Differenz zum tatsächlichen Winkel gemessen, welche zwischen 0° und 180° liegen kann.

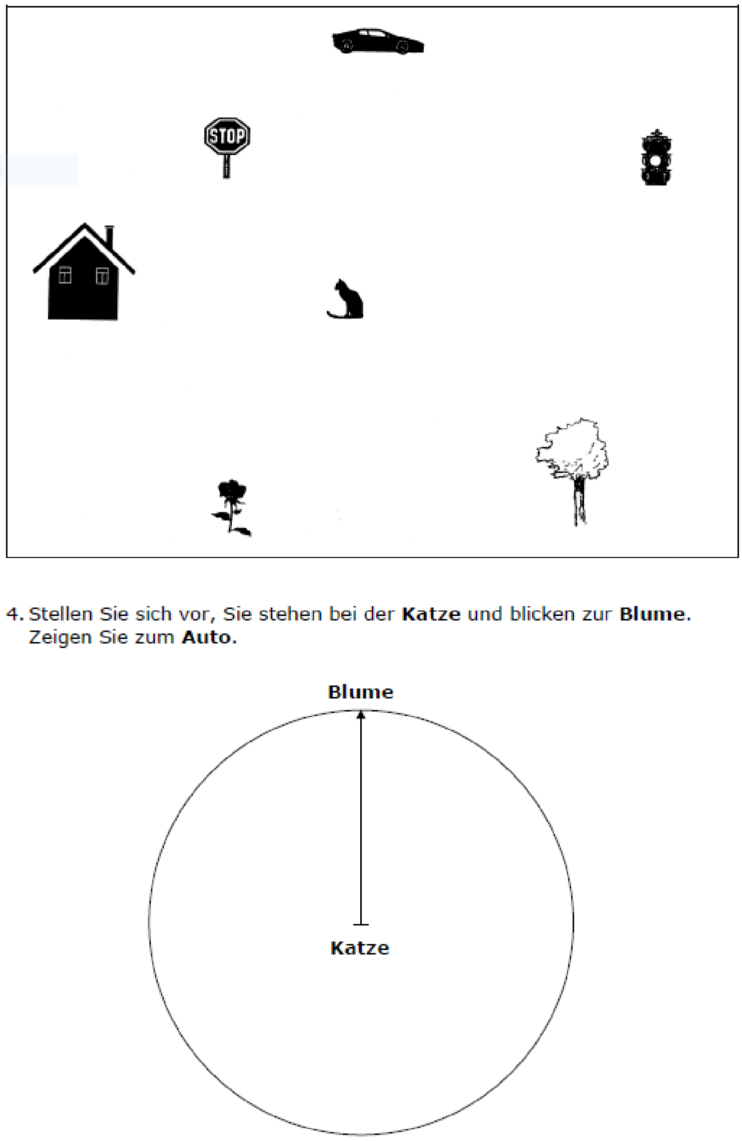


Abbildung 10: Beispiel einer Aufgabe des SOT (Hegarty & Waller, 2004, S. 175–191; Kozhevnikov & Hegarty, 2001, S. 745-756)

Folglich müssen hier auch keine Objekte manipuliert, sondern die eigene Position und die von Objekten im Raum bewertet werden. Der Faktor, welcher hier am stärksten zum

Tragen kommt, ist die *Räumliche Orientierung*, obwohl es, wie erwähnt, zum Einsatz des Faktors *Mentale Rotation* kommen kann. Bei diesem Test mussten acht Aufgaben in maximal acht Minuten gelöst werden.

5.2 Typ-1-Aufgaben der österreichischen Matura

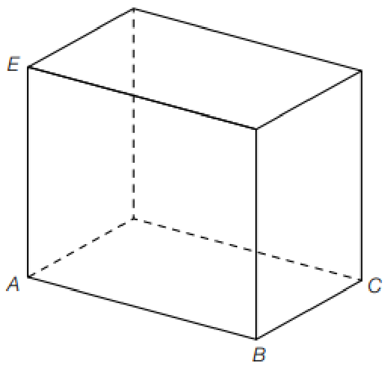
Um auch die Mathematikkompetenz der Schüler*innen im Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie Vektoren AG 3.1 - AG 3.5* zu überprüfen, folgte direkt anschließend an die Raumvorstellungstests ein Mathematiktest (siehe Abbildung 11 und Appendix 11).

Aufgabe 1

Eckpunkte eines Quaders*

Aufgabennummer: 1_689	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte *A*, *B*, *C* und *E* sind beschriftet.



Aufgabenstellung:

Für weitere Eckpunkte *R*, *S* und *T* des Quaders gilt:

$R = E + \overrightarrow{AB}$

$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$

$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte *R*, *S* und *T*!

Abbildung 11: Beispiel einer Typ-1-Aufabe

Hierfür wurden sechs Typ-1-Aufgaben aus dem Aufgabenpool der Matura ausgewählt. Es handelte sich also um auf den österreichischen Lehrplan angepasste und standardisierte Aufgaben, welche die Schüler*innen auch schon vor der Intervention richtig beantworten hätten können sollen (BMBWF, 2021, S. 3, BMBWF, 2017).

Diese Art der Mathematikaufgabe wird folgendermaßen beschrieben:

> „Typ-1-Aufgaben sind Aufgaben, die jeweils auf eine im Katalog angeführte Grundkompetenz fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen.“ (BMBWF, 2021, S. 4)

Für sechs Typ-1-Aufgaben hatten die Schüler*innen maximal 20 Minuten Bearbeitungszeit.

5.3 Fragebogen und Feedback

Nach dem Posttest wurden zusätzlich einige Daten der Schüler*innen mit einem digitalen Fragebogen erfasst. Auch hierfür mussten die Identifikationsnummern der Schüler*innen verwendet werden, um eine anonyme aber direkte Zuordnung zu den Testscores zu ermöglichen.

Unter anderem wurden die letzten Mathematiknoten im Jahres- und Semesterzeugnis, eine Selbsteinschätzungen bei den Raumvorstellungstests sowie die Meinungen zu dem Arbeiten mit der App *Vektor AR³* erfragt. Die Schüler*innen mussten weiters die Schwierigkeit der Tests, der Aufgaben sowie die Funktionalität und Handhabung der App bewerten. Die genauen Fragestellungen sind in Appendix 13 und 14 angeführt.

6 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der drei Raumvorstellungstests und der Typ-1-Aufgaben abgebildet. Insgesamt nahmen an den Pretests 36 Personen teil, an den Posttests 33. Sowohl an den zwei Testungen als auch an der Mehrheit der drei Interventionsstunden, also an mindestens zwei der drei Stunden, nahmen in der Experimentalgruppe 17 Personen teil. In der Kontrollgruppe waren es nur neun, auf die auch diese Kriterien zutrafen. Ausschließlich diese 26 Testteilnehmer*innen werden für alle der nachfolgenden Analysen der Daten verwendet, um ein kohärentes und valides Ergebnis abzuliefern. Es werden nun die einzelnen Tests der Reihe nach für Experimentalgruppe (EG) und Kontrollgruppe (KG) dargestellt, und statistisch beschrieben.

6.1 DAT

Beim DAT mussten 15 Aufgaben in fünf Minuten bearbeitet werden. Beim Pretest wurden insgesamt nur zwei der 26 Teilnehmer*innen in dieser Zeit fertig. Beim Posttest in der Experimentalgruppe wurden zehn Teilnehmer*innen (59%) innerhalb der Zeit fertig, und die durchschnittliche Bearbeitungszeit betrug 4:44 Minuten. In der Kontrollgruppe konnten sogar sechs Teilnehmer*innen (67%) vor Ablauf der Zeit fertig werden, durchschnittlich benötigten sie 4:11 Minuten. Für die tau-äquivalente Reliabilität liefern der Pretest und der Posttest zwei *akzeptable* Ergebnisse, mit $\rho\tau = 0,782$ und $\rho\tau = 0,776$. Während die Experimentalgruppe im Mittel nur 6,53 von 15 möglichen Fragen richtig beantwortete, waren es bei der Kontrollgruppe 8,56 (siehe Abbildung 12). Im Posttest verbesserte sich die EG um über drei Punkte auf 9,82 richtige Antworten im Mittel, was einer durchschnittlichen Steigerung um knapp über 50% entspricht. Die KG, die schon einen deutlich höheren Ausgangswert erzielte, konnte sich um nur halb so viele Punkte (1,54) verbessern, und landete bei durchschnittlich 10,1 richtigen Antworten (siehe Abbildung 13). Das entspricht einer Verbesserung um 18%.

Während sich in der Experimentalgruppe alle Teilnehmer*innen um ein bis sieben richtige Antworten verbessern konnten, gab es in der Kontrollgruppe drei Personen die sich um zwei bzw. drei Punkte, verschlechterten. Das konnte durch zwei Teilnehmer*innen ausgeglichen werden, die auch jeweils sieben Punkte dazugewinnen konnten.

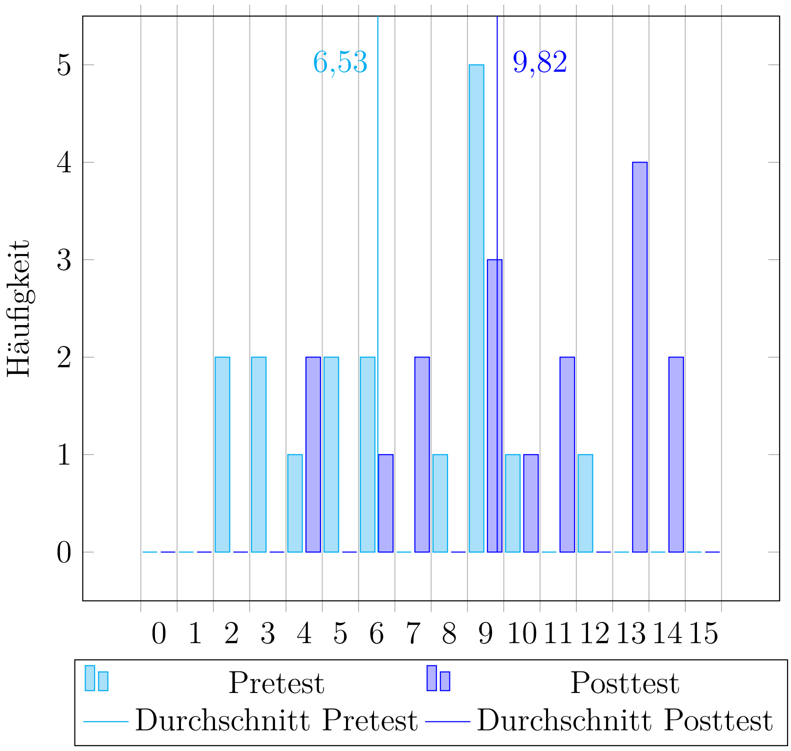


Abbildung 12: DAT: Verteilung der erreichten Punkte in der Experimentalgruppe

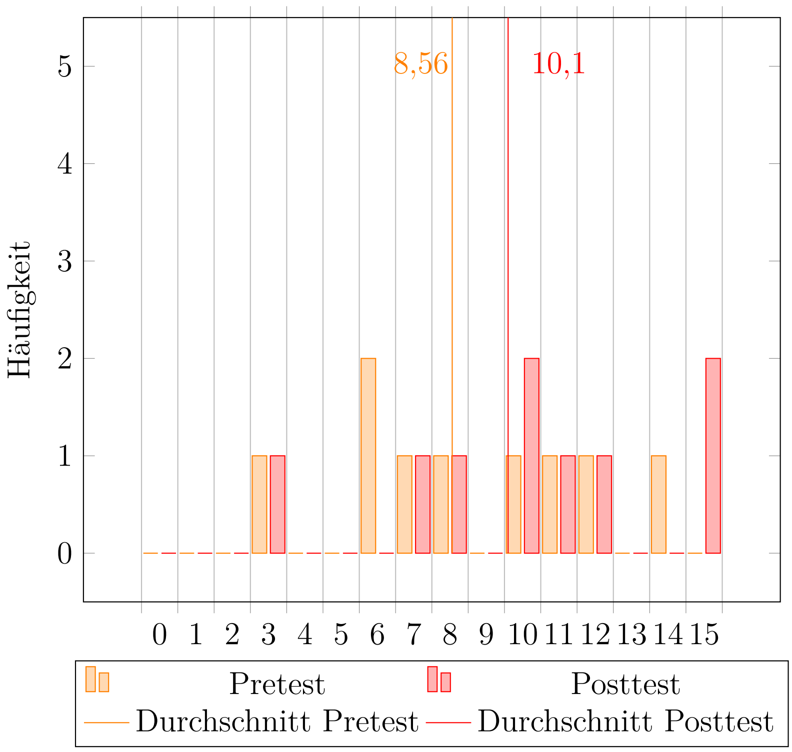


Abbildung 13: DAT: Verteilung der erreichten Punkte in der Kontrollgruppe

Insgesamt war der Mittelwert der richtigen Antworten bei beiden Testungen in der Kontrollgruppe größer als in der Experimentalgruppe.

6.2 PSVT:R

Der PSVT:R forderte von den Teilnehmer*innen in zehn Minuten 15 Rotationsaufgaben zu lösen. Die Experimentalgruppe erreichte beim Pretest im Mittel 8,59 richtige Antworten und benötigte dafür durchschnittlich 8:35 Minuten (siehe Abbildung 14). Die Kontrollgruppe konnte hingegen 7,89 Punkte erreichen, war aber mit einer durchschnittlichen Zeit von 6:38 Minuten deutlich schneller (siehe Abbildung 15).
Die EG verbesserte sich im Posttest auf durchschnittlich 8,94 Punkte und die KG auf 8,22, was jeweils einer Steigerung von etwa 4% entspricht. Die EG benötigte im Mittel 7:12 Minuten, die KG sogar nur 5:24 Minuten.
In der Experimentalgruppe konnten elf Teilnehmer*innen ihren Score halten oder sogar verbessern (65%), während sich der Rest um ein bis drei Punkte verschlechterte. In der Kontrollgruppe verlief dies sehr parallel, zwei Drittel konnten die Leistung halten oder verbessern, während ein Drittel zwei bis vier Punkte verlor.
Eine Berechnung der tau-äquivalenten Reliabilität ergab $\rho\tau = 0,59$ für den Pretest und $\rho\tau = 0,731$ für den Posttest. Während der erste Wert etwas niedrig ist, befindet sich der Wert des Posttests in einem guten Bereich.

6.3 SOT

Beim SOT mussten die Teilnehmer*innen acht Aufgaben zur Orientierung im Raum lösen, und dazu Richtungen (=Winkel) angeben. Diese eingezeichneten Winkel wurden im Rahmen der Auswertung händisch abgemessen, und die Differenz zur richtigen Lösung bestimmt. Die im Diagramm dargestellten Ergebnisse, zeigen die durchschnittliche Abweichung pro Proband*in. Je geringer der Wert desto besser. Die maximale Abweichung je Testitem konnte 180° sein, und minimal 0°.
Die Experimentalgruppe erzielte im Pretest durchschnittlich 42,7° Abweichung, und konnte sich im Posttest auf 39,6° verbessern (siehe Abbildung 16). Die Kontrollgruppe hingegen startete mit durchschnittlich 30,1° Abweichung, verschlechterte sich jedoch auf 31,8 (siehe Abbildung 17).

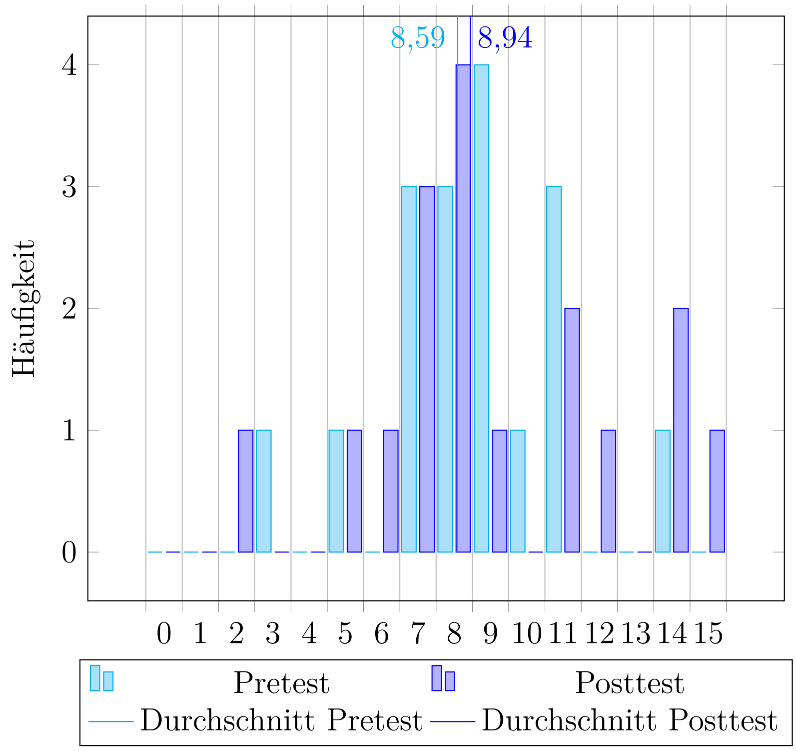


Abbildung 14: PSVT:R: Verteilung der erreichten Punkte in der Experimentalgruppe

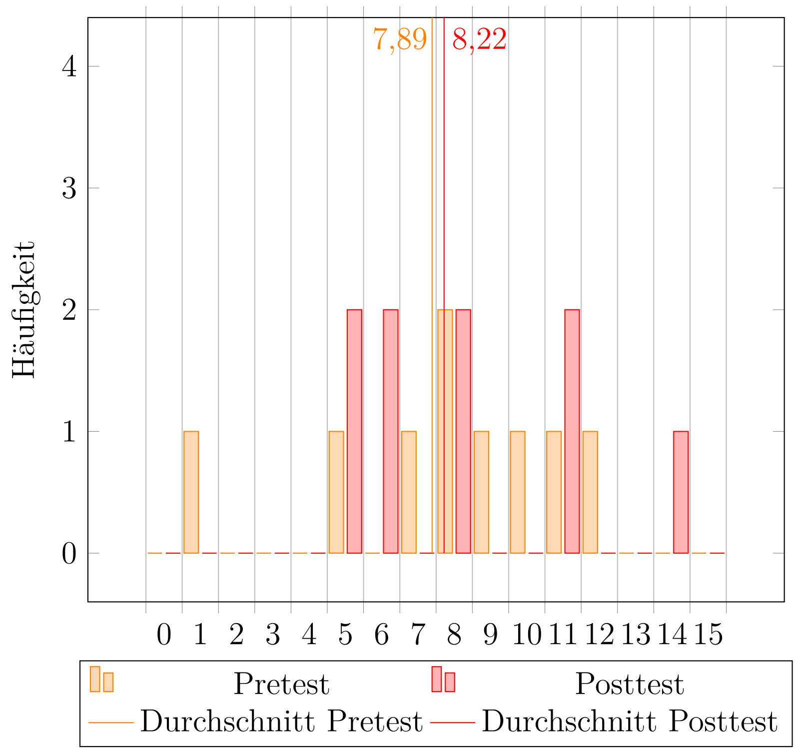


Abbildung 15: PSVT:R: Verteilung der erreichten Punkte in der Kontrollgruppe

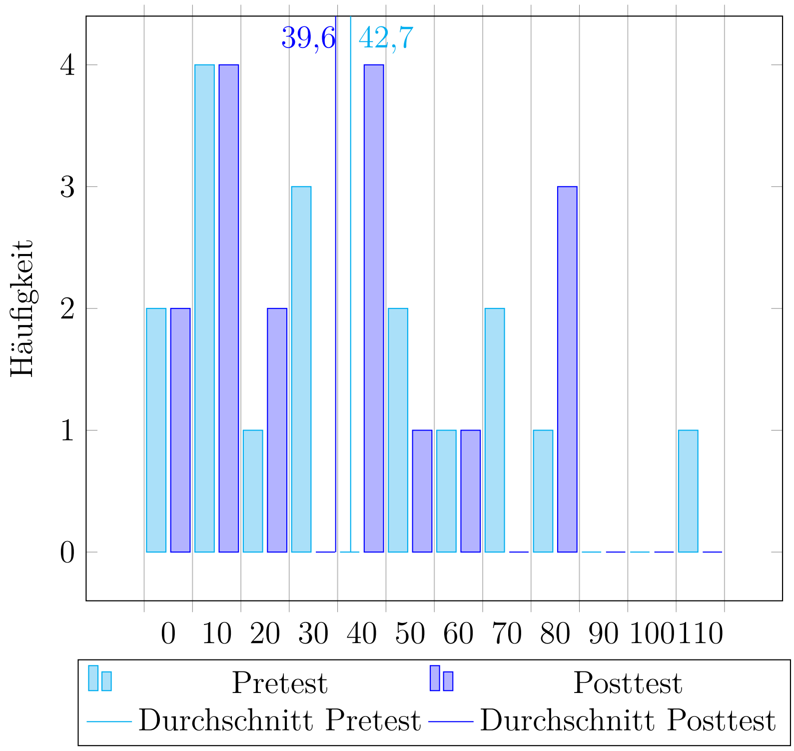


Abbildung 16: SOT: Verteilung der durchschnittliche Abweichung in Grad in der Experimentalgruppe, Klassenbildung

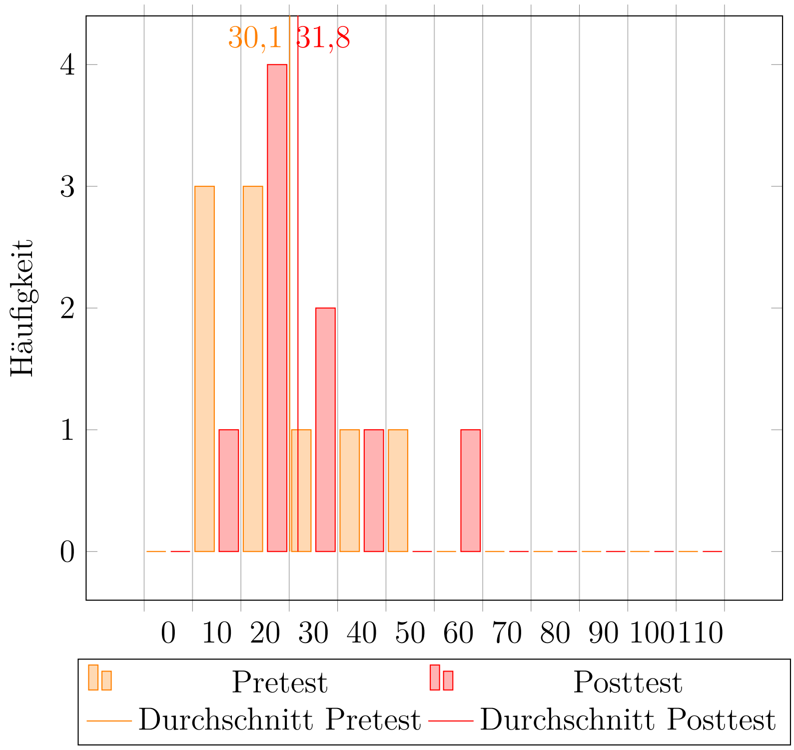


Abbildung 17: SOT: Verteilung der durchschnittliche Abweichung in Grad in der Kontrollgruppe, Klassenbildung

Mit einer Standardabweichung von 13,4° bzw. 13,2° lagen die Durchschnittswerte der Kontrollgruppe deutlich enger zusammen als die der Experimentalgruppe, mit 30,2° bzw. 27,6°.
Auch schafften es in der EG schon beim Pretest sechs Personen unter bzw. genau auf 20° durchschnittliche Abweichung zu kommen, beim Posttest waren es dann sogar sieben. In der Kontrollgruppe kamen beim Pretest drei Personen unter 20° durchschnittliche Abweichung, beim Posttest jedoch nur mehr eine. Insgesamt verbesserte sich in der KG nur ein Drittel, in der EG waren es hingegen knapp zwei Drittel. Jedoch konnten beide Gruppen den Posttest deutlich schneller absolvieren. So verbesserte sich die EG von durchschnittlich 4:17 Minuten auf 3:24, und die KG von 4:27 Minuten auf 3:10.

6.4 Typ-1-Aufgaben

Die sechs Mathematikaufgaben vom Typ-1 mussten in 20 Minuten bearbeitet werden. Beurteilt wurde entsprechend der vorgesehenen Beurteilungsunterlagen. Pro Aufgabe konnte jeweils ein Punkt erreicht werden, wobei keine halben Punkte verteilt wurden.
Die Experimentalgruppe schnitt hier insgesamt deutlich besser ab. Schon beim Pretest erreichte sie im Mittel 3,24 Punkte, und beim Posttest sogar 3,71 Punkte, ein Zuwachs von fast 15% (siehe Abbildung 18). Die Kontrollgruppe erreichte beim Pretest durchschnittlich 1,33 Punkte und beim Posttest 1,67 Punkte, was angesichts des geringen Anfangswertes jedoch einer Verbesserung um 25% entspricht (siehe Abbildung 19). Die EG benötigte beim ersten Test im Mittel 11:10 Minuten und beim zweiten 7:43, während die KG jeweils schneller war, mit 9:01 sowie 5:35 Minuten. In der Experimentalgruppe konnten sich bis auf 3 Personen (18%) alle verbessern oder ihr Ergebnis halten, während in der Kontrollgruppe auch beim Posttest noch drei Teilnehmer*innen null Punkte erzielten und sich nur drei verbesserten.

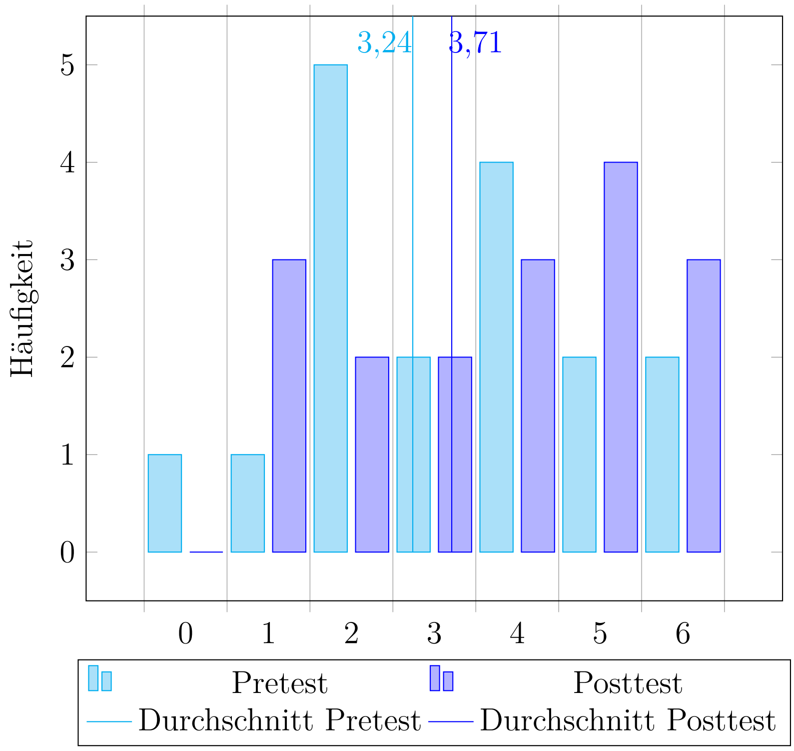


Abbildung 18: Typ-1: Verteilung der richtig gelösten Aufgaben in der Experimentalgruppe

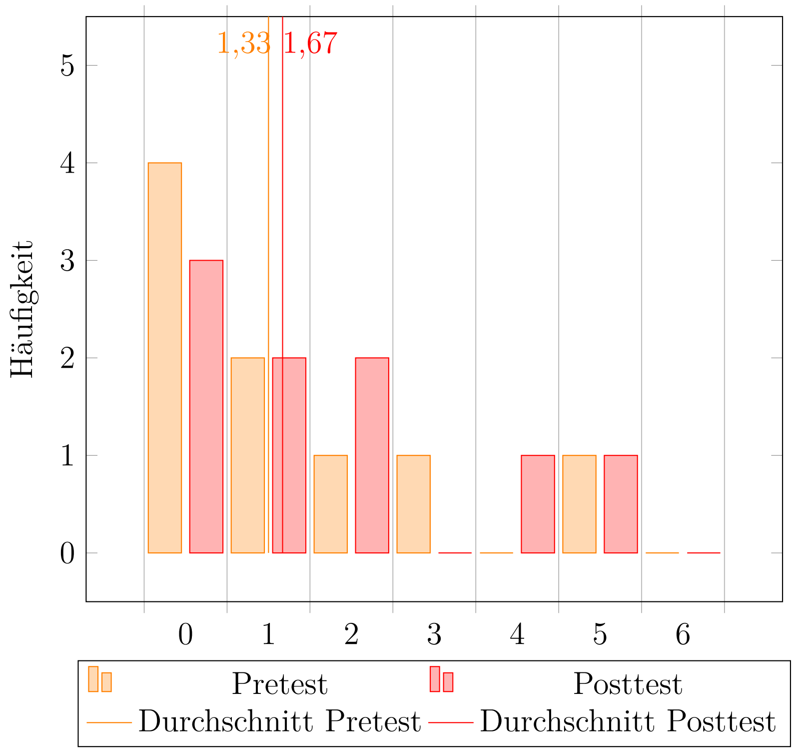


Abbildung 19: Typ-1: Verteilung der richtig gelösten Aufgaben in der Kontrollgruppe

6.5 Gesamtergebnisse

Um die gesamten Leistungen der individuellen Teilnehmer*innen leichter erfassen und vergleichen zu können, wurden die Punkte der drei Raumvorstellungstests zu einem Gesamtergebnis zusammengezählt. Anschließend wurde noch ein *Totalscore*, der zusätzlich die Leistung der Typ-1-Aufgaben erfasst, berechnet. Vorab musste entschieden werden, wie die drei bzw. vier unterschiedlichen Tests zu gewichten waren, die sich ja sowohl in Punkteanzahl als auch Bearbeitungszeit unterschieden. Hier wären mehrere Interpretationen möglich gewesen, es wurde jedoch entschieden, die Tests jeweils gleich zu gewichten, da somit in einem Gesamtergebnisse alle Faktoren der Raumvorstellung mit gleichem (bzw. möglichst ähnlichem) Ausmaß erfasst werden.

Kennzahl	Raumvorstellung		Total	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Minimum	14,4	17,2	14,4	17,7
Minimum in %	32%	38,3%	24%	29,6%
Maximum	38,4	42,3	52,5	56,8
Maximum in %	85,3%	94,1%	87,5%	94,7%
Arithm. Mittel	27,4	30,5	33,8	38
Arithm. Mittel in %	60,8%	67,9%	56,4%	63,4%
Median	28,3	30,4	33,3	35,0
Spannweite	24,0	25,1	38,1	39,1
St. Abweichung	6,7	7,6	9,9	11,0

Tabelle 1: Raumvorstellung und Totalscore, gesammeltes Ergebnis

Da DAT und PSVT:R schon auf maximal 15 Punkte normiert waren, wurden auch der SOT und Test der Typ-1-Aufgaben daran angepasst, und es war somit möglich, insgesamt 45 Punkte bei den drei Raumvorstellungstest zusammen zu erreichen. Um die durchschnittliche Abweichung des SOT in Grad auf die 15-Punkte-Skala umzurechnen, wurde wie folgt vorgegangen: (180 - durchsch. Abw.)/12 = Punkte. So konnten maximal 15 Punkte und minimal null Punkte erreicht werden, mit kontinuierlichen Werten dazwischen. Die neu gebildete Kategorie *Raumvorstellung* erfasst nun den DAT, PSVT:R und SOT gleichermaßen und repräsentiert die Testscores aller drei in einer Zahl (siehe Tabelle

1, linke Spalten).

In der dargestellten Tabelle werden jeweils alle 26 Teilnehmer*innen gemeinsam repräsentiert, um die Gesamtveränderung zu beobachten. In der Spalte der *Raumvorstellung* zeigt sich, dass die beiden Gruppen vom Pretest zum Posttest insgesamt einen klaren Anstieg erlebt haben, denn sowohl Minimum und Maximum, als auch arithmetisches Mittel haben sich vergrößert. So hat sich das arithmetische Mittel um über 11% erhöht, der Median um über 7%.

Kennzahl	Raumvorstellung		Total	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Minimum	14,4	17,2	14,4	24,3
Maximum	37,5	42,3	52,5	56,8
Arithm. Mittel	26,6	30,5	34,6	39,7
Median	28,1	30,2	35,6	36,2
Spannweite	23,1	25,1	38,1	32,5
St. Abweichung	6,9	7,9	10,4	11,2

Tabelle 2: Raumvorstellungs- und Totalscore in der Experimentalgruppe

Kennzahl	Raumvorstellung		Total	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Minimum	17,2	17,7	17,2	17,7
Maximum	38,4	41,8	45,9	54,3
Arithm. Mittel	28,9	30,7	32,3	34,8
Median	30,5	30,5	32,9	34,1
Spannweite	21,2	24,0	28,7	36,5
St. Abweichung	6,0	6,8	8,5	9,8

Tabelle 3: Raumvorstellungs- und Totalscore in der Kontrollgruppe

Anschließend wurden die Ergebnisse der Typ-1-Aufgaben mit 2,5 multipliziert, um auch hier auf maximal 15 mögliche Punkte zu gelangen, und zum zuvor errechneten Wert der *Raumvorstellung* addiert. Das scheint zuerst die Gewichtung der individuellen Mathematikaufgaben enorm zu erhöhen, jedoch war für diesen Test am meisten Zeit zur Verfügung, und gleichzeitig sind somit alle vier Tests gleichermaßen repräsentiert. Die dabei gewonnen *Totalscores* lassen sich den rechten Spalten entnehmen (siehe Tabelle 1, rechte Spalte). Um zwischen den Gruppen einen Vergleich von den neu gewonnenen Werten *Raumvorstellung* und *Totalscore* zu ermöglichen, werden die Ergebnisse auch für beide Gruppen dargestellt (siehe Tabelle 2 und Tabelle 3).

6.6 Individuelle Entwicklung

Um nun die individuellen Entwicklungen zu untersuchen, sind anschließend zwei Darstellungen abgebildet, welche die individuellen Verläufe der Totalscores (Raumvorstellung + Typ-1-Aufgaben zusammen) von Experimental- und Kontrollgruppe aufschlüsseln.

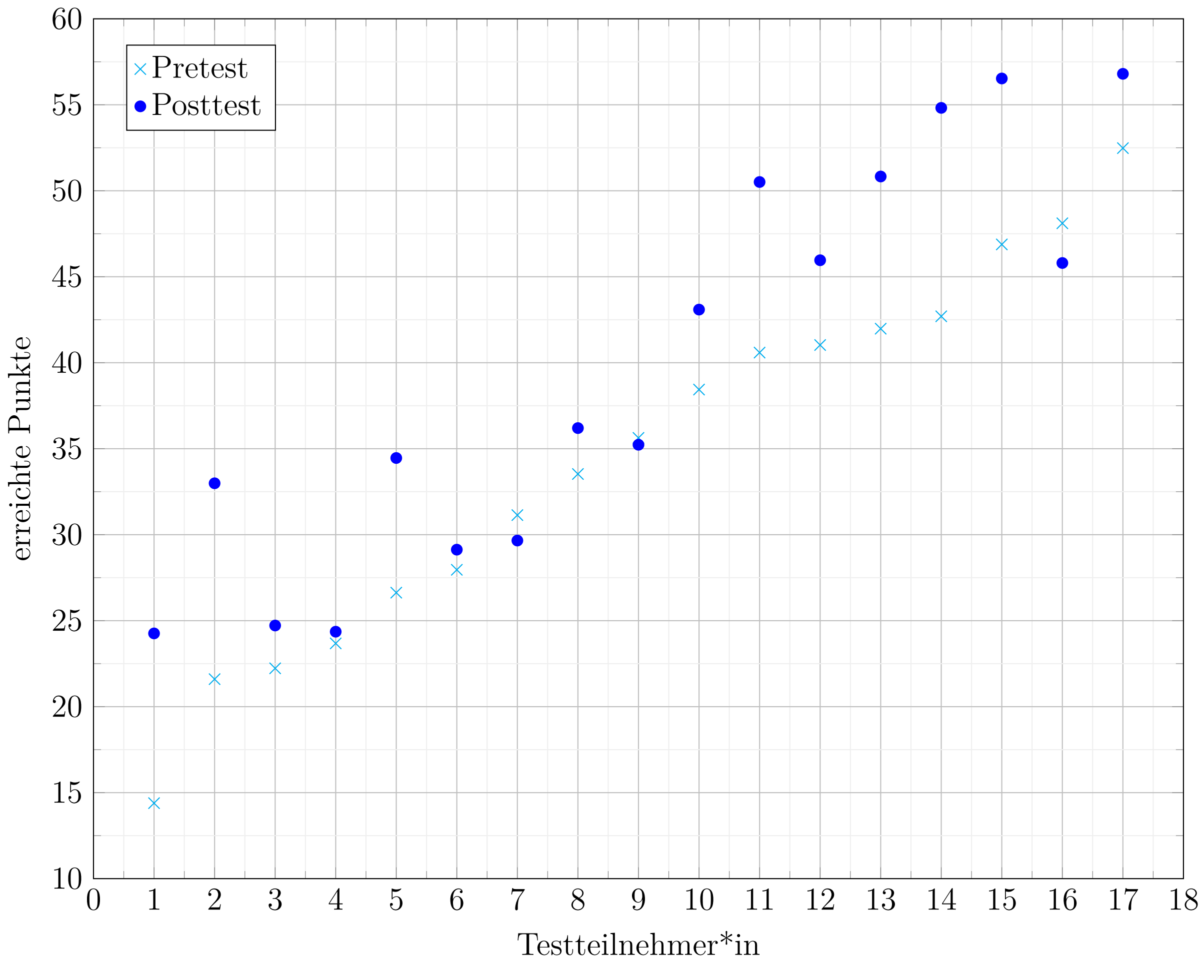


Abbildung 20: Individuelle Entwicklung der Totalscores in der Experimentalgruppe in Punkten von 60 möglichen, Sortierung nach dem Ergebnis im Pretest

Abbildung 20 zeigt, dass sich die Mehrheit der Experimentalgruppe verbessert hat und sich lediglich drei Teilnehmer*innen (18%) absolut verschlechtert haben. Durchschnittlich ist sogar eine Verbesserung von über fünf Punkten realisiert worden. Auch in der Kontrollgruppe (siehe Abbildung 21) konnten lediglich zwei Personen (22%) keinen Zuwachs verzeichnen, während durchschnittlich circa 2,5 Punkte vom Pre- zum Posttest dazugewonnen werden konnten.

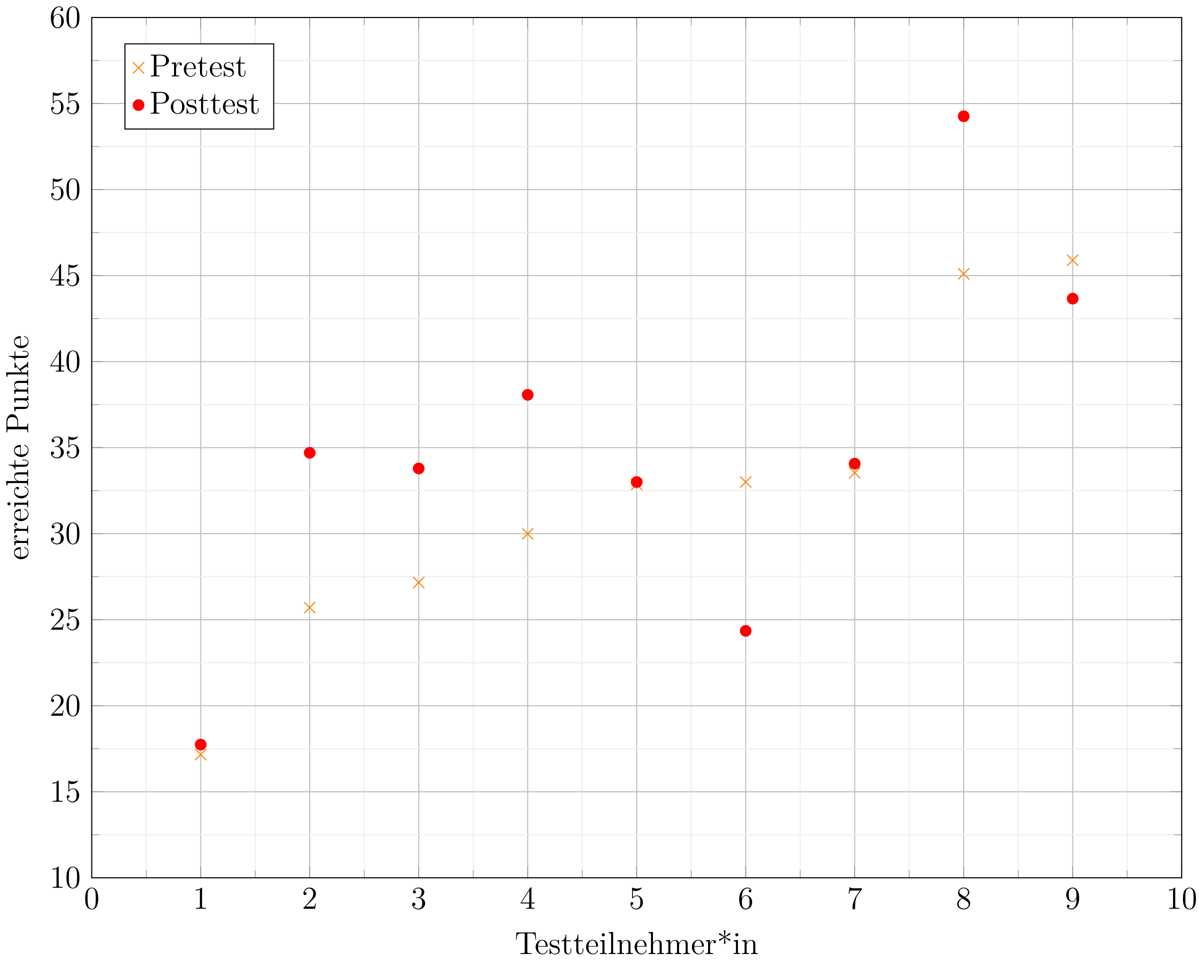


Abbildung 21: Individuelle Entwicklung der Totalscores in der Kontrollgruppe in Punkten von 60 möglichen, Sortierung nach dem Ergebnis im Pretest

Hier ist auch ersichtlich, dass in der Experimentalgruppe fast keine Totalscores unverändert geblieben sind, denn lediglich 12% der Schüler*innen lieferten sehr ähnliche Ergebnisse ab (Teilnehmer*in 4 und 9). In der Kontrollgruppe war dieser Anteil mit 33% schon deutlich größer (Teilnehmer*in 1, 5 und 7).

6.7 Fragebogen

In einem digitalen Fragebogen wurden nach dem Posttest noch einige Daten der Testteilnehmer*innen abgefragt. Für die Experimental- und Kontrollgruppe wurde ein unterschiedlicher Fragebogen verwendet, da viele Fragen auf das Arbeiten mit der App *Vektor* AR^3 abzielten.

Durchschnitt und Anzahlen der genannten Antworten auf der Skala								
	$\overline{x}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Wie war das Arbeiten mit der App?								
sehr leicht	**2,8**	1	7	5	3	1	0	sehr schwer
Gab es beim Arbeiten mit der App technische Probleme?								
Das Meiste hat funktioniert	**2,5**	5	3	6	1	2	0	Das Meiste hat nicht f.
Wie hilfreich war die App beim Lösen der Aufgaben?								
hat beim Lösen geholfen	**3,3**	1	7	2	1	5	1	hat gar nicht geholfen
Die App ist ...								
sehr intuitiv zu verwenden	**2,8**	0	7	6	4	0	0	kompliziert zu v.
praktisch aufgebaut	**2,6**	3	7	1	6	0	0	unpraktisch aufgebaut
geeignet für den Unterricht	**3,1**	3	5	1	5	2	1	ungeeignet für den U.
Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit der App auf Ihre RV?								
hat viel geholfen	**3,6**	1	3	6	1	4	2	hat wenig geholfen

Tabelle 4: Fragebogen: Antworten der Experimentalgruppe auf einer sechspunktige Likert-Skala

6.7.1 Experimentalgruppe

Die 17 Teilnehmer*innen, die mehrheitlich an der Intervention sowie den zwei Tests teilnahmen, beantworteten mehrere Fragen auf einer sechspunktigen Likert-Skala. Die genauen Antworten sind Tabelle 4 zu entnehmen.

Generell schätzten die Teilnehmer*innen das Arbeiten mit der App eher leicht ein, gaben an, dass das Arbeiten großteils funktioniert hat, und auch moderat beim Lösen geholfen

hat. Die App *Vektor AR³* wird als eher intuitiv zu verwenden, eher praktisch und moderat für den Unterricht geeignet eingestuft. Jedoch ist hier zu beachten, dass viele der Werte nur leicht unter einem neutralen Wert von 3,5 liegen. Tatsächlich wurde der Einfluss des Arbeitens mit der App auf die Raumvorstellung mit *hat moderat geholfen* eingeschätzt.
Neben einigen offenen Fragen, die zu einem späteren Zeitpunkt noch erläutert werden sollen, wurde auch um eine Einschätzung der drei Raumvorstellungstests gebeten. So wurde der DAT neunmal mit leicht oder sehr leicht bewertet (53%), der PSVT:R wurde hingegen zehnmal mit schwer oder sehr schwer beurteilt (59%) und der SOT sogar 13-mal mit leicht oder sehr leicht (76%).
Die Aussage *Ich bin mir sicher, dass ich meine Leistung bei der zweiten Testung gegenüber der ersten Testung verbessern konnte* bejahten nur 4 Personen (24%), während der Rest unsicher war, jedoch niemand die Aussage verneinte. Ähnlich war auch die Selbsteinschätzung im Vergleich zu den anderen Teilnehmer*innen. Die Schüler*innen mussten den Prozentsatz der Klasse abschätzen, den sie leistungsbezogen beim Posttest übertroffen hatten (z.B. ich habe besser abgeschnitten als 60% der Klasse). Hier gaben nur sechs Personen einen Wert größer oder gleich 50% an, und der Durchschnitt lag mit 37,2% sogar deutlich niedriger. Anschließend wurden das Geschlecht (8 $\times$ männlich, 9 $\times$ weiblich) und die Mathematiknoten im letzten Semester- und Jahreszeugnis abgefragt. Die 17 Teilnehmer*innen der Experimentalgruppe hatten im Durchschnitt eine Note von 2,6 im letzten Schuljahr und 3,1 im letzten Semester.

6.7.2 Kontrollgruppe

Die Kontrollgruppe wurde in ähnlicher Weise auch zu ihren Erfahrungen befragt. So wurde hier konkret die Frage gestellt: *Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit den Arbeitsblättern auf Ihre Raumvorstellung?* Die Kontrollgruppe schätzte den Einfluss ihrer Arbeitsweise sehr ähnlich ein, wie die Experimentalgruppe die Arbeit mit AR einschätzten (im Mittel 3,8 für die KG und 3,6 für die EG), und gab somit durchschnittlich an: *hat moderat geholfen* (siehe Tabelle 5).
Der DAT wurde insgesamt sehr neutral bewertet, und erhielt ähnlich viele *(sehr) leicht* wie *(sehr) schwer*. Ähnlich war es beim PSVT:R, der jedoch mehrheitlich *leicht* eingeschätzt wurde. Der SOT wurde von beiden Gruppen am leichtesten bewertet und besonders die

Kontrollgruppe stimmte zu zwei Drittel für *sehr leicht* oder *leicht* ab.

Jedoch gaben auch zwei Drittel an, sich unsicher zu sein, ob sie sich vom ersten auf den zweiten Test verbessern konnten, und lediglich zwei Personen waren sich sicher, eine Verbesserung geschafft zu haben. Auch bei der Selbsteinschätzung, bei der die Testpersonen abschätzen sollten, wie viel Prozent der Klasse sie übertroffen hatte, war die Unsicherheit groß. So gaben die Teilnehmer*innen im Mittel nur 24,7% an, und lediglich eine Person gab einen Wert über 50 an.

Von den neun Teilnehmer*innen der Kontrollgruppe waren fünf männlich und vier weiblich. Im letzten Jahreszeugnis hatten diese im Mittel eine Note von 3,3 und im Semesterzeugnis im Mittel eine Note von 3,1.

Durchschnitt und Anzahlen der genannten Antworten auf der Skala								
	$\overline{x}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Wie waren die Aufgaben der Arbeitsblätter?								
sehr leicht	**3,4**	0	1	4	3	1	0	sehr schwer
Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit den Arbeitsblätter auf Ihre RV?								
hat viel geholfen	**3,8**	0	1	2	4	1	1	hat wenig geholfen

Tabelle 5: Fragebogen: Antworten der Kontrollgruppe auf einer sechspunktigen Likert-Skala

6.8 Korrelationen und Zusammenhänge

Da wie in Abschnitt *2 Theoretischer Hintergrund* diskutiert, die Tests DAT, PSVT:R und SOT jeweils unterschiedliche Faktoren der Raumvorstellung überprüfen, wurde erwartet, dass ein gutes bzw. schlechtes Ergebnis bei einem dieser Tests auch ein gutes bzw. schlechtes Ergebnis bei den anderen zwei bedeuten würde, und die Testergebnisse somit positiv korrelieren. Zwar wurde in der Theorie aufgezeigt, dass die Raumvorstellung aus mehreren Faktoren besteht, jedoch scheint es üblich zu sein, dass diese in ähnlichem Maße ausgeprägt sind. Um dies zu überprüfen, wurde die Korrelation der einzelnen Tests miteinander verglichen. Auch die mathematischen Kompetenzen, getestet durch die Typ-1-Aufgaben, wurden als Vergleichsmittel herangezogen, da erwartungsgemäß eine hohe Mathematikkompetenz Indikator für gute Raumvorstellung sein sollte, und vice versa. Es werden nun für beide Versuchsgruppen die Ergebnisse präsentiert.

6.9 Korrelationen der Ergebnisse der Experimentalgruppe

Die Experimentalgruppe zeigte beim Pretest Zusammenhänge, die ähnlich den Erwartungen waren (siehe Tabelle 6). Die Raumvorstellungstests korrelierten moderat positiv untereinander und auch die Ergebnisse der Typ-1-Aufgaben waren ähnlich positiv zusammenhängend mit jeweils $r > 0.5$ und $p < 0.05$ (meist deutlich kleiner). Beim Posttest verstärkten sich die positiven Korrelationen zumeist leicht, lediglich der Zusammenhang zwischen DAT und Typ-1-Aufgaben rutschte etwas ab. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass sich die Scores beim DAT stärker verbesserten als sie dies bei den Typ-1-Aufgaben taten.

Pretest	PSVT:R	SOT	Typ-1
DAT	0,591	0,586	0,684
PSVT:R		0,726	0,687
SOT			0,570

Posttest	PSVT:R	SOT	Typ-1
DAT	0,635	0,777	0,429
PSVT:R		0,670	0,629
SOT			0,694

Tabelle 6: Korrelationen: Ergebnisse in der Experimentalgruppe

6.10 Korrelationen der Ergebnisse der Kontrollgruppe

Für die Kontrollgruppe waren die Zusammenhänge der Ergebnisse deutlich schwächer, aber immer noch leicht bis moderat positiv (siehe Tabelle 7). Dabei muss berücksichtige werden, dass in der Kontrollgruppe nur neun Teilnehmer*innen vollständig an der Studie beteiligt waren.

Lediglich der Zusammenhang zwischen SOT und Typ-1-Aufgaben war hier nicht gegeben und keine lineare Beziehung konnte zwischen den Ergebnissen erkannt werden. Jedoch sind hier viele der errechneten Werte nicht signifikant, was sicherlich auf die moderate Größe der Kontrollgruppe zurückzuführen ist.

Pretest	PSVT:R	SOT	Typ-1	**Posttest**	PSVT:R	SOT	Typ-1
DAT	0,341	0,360	0,194	DAT	0,703*	0,613	0,441
PSVT:R		0,662*	0,570	PSVT:R		0,613	0,586
SOT			0,027	SOT			0,421

Tabelle 7: Korrelationen: Ergebnisse in der Kontrollgruppe (Mit '*' gekennzeichnete Einträge sind signifikant)

6.11 Überprüfung der Mittelwerte

Aus der Überprüfung der einzelnen Posttestergebnisse sowie den Kategorien *Raumvorstellung* und *Totalscore* kann geschlussfolgert werden, dass diese normalverteilt sind. Daher wurde in einem t-Test überprüft, ob die Mittelwerte dieser zwei unabhängigen Gruppen verschieden sind. Jedoch konnten keine signifikanten Unterschiede gefunden werden. Die stärkste Tendenz ließ sich für den *Totalscore* des Posttests finden (t=1,054, df=24, p=0,151).

6.12 Korrelation von Zeit und Testerfolg

Zusätzlich wurde der Zusammenhang der Testergebnisse mit den jeweiligen Bearbeitungszeiten untersucht. Hierfür wurden die vollen 26 Testteilnehmer*innen einheitlich untersucht und die Korrelationen für die vier Tests des Pre- und Posttests bestimmt. Während die Mehrheit der erreichten Testergebnisse nicht mit der Bearbeitungszeit korrelierten, so sind doch drei moderate Zusammenhänge aufgefallen (siehe Tabelle 8).
Generell wurde bei den Pretests mehr Zeit mit den Aufgaben verbracht, und etwas niedrigere Scores erzielt. Der einzige Test, der sowohl beim Pretest als auch beim Posttest eine moderate Korrelation zur Bearbeitungszeit vorweisen konnte, war der SOT. Die durchschnittlichen Abweichungen in Grad und die benötigte Zeit hingen positiv voneinander ab, also eine geringe Abweichung bedeutete auch weniger benötigte Zeit. Das ist insofern auffällig, als dass längeres Überlegen hier also anscheinend keinen Vorteil erbrachte. Auch der PSVT:R zeigte im Posttest einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der richtigen Antworten und der benötigten Zeit. Die Korrelation ist hier negativ, da bei den Punkten ein großer Wert besser ist, bei der Zeit aber ein kleiner. Also umgekehrt, ein hoher Score

korreliert moderat positiv mit einer kurzen Bearbeitungszeit.

Tests	r	p
SOT (Pret.)	0,480	0,013
SOT (Postt.)	0,383	0,033
PSVT:R (Postt.)	-0,418	0,053

Tabelle 8: Korrelation: Zeit und Testerfolg

Um den Zusammenhang von Bearbeitungszeit und Raumvorstellung weiter zu untersuchen, wurden die individuellen Zeiten und Scores des Pre- und Posttest verglichen.
Die Experimentalgruppe benötigte beim Pretest für alle drei Raumvorstellungstests durchschnittlich 17:53 Minuten und beim Posttest 15:21 Minuten. Die Kontrollgruppe war jeweils schneller mit 16:05 Minuten bzw. 12:46 Minuten. Auch individuell konnten bis auf eine Person alle Testteilnehmer*innen vom ersten auf den zweiten Test schneller werden. Nun wurden die individuellen, zeitlichen Veränderungen mit den individuellen Verbesserungen bzw. Verschlechterungen in der Raumvorstellung verglichen. Für die Experimentalgruppe war diese Korrelation nur marginal positiv (r=0,09) und für die Kontrollgruppe konnte eine positive Korrelation von r=0,38 bestimmt werden (jeweils nicht signifikant).

6.13 Weitere Untersuchungen von Korrelationen und Zusammenhängen

Es folgen weitere Korrelationsuntersuchungen um die erfassten Daten noch weiter zu deuten.

6.13.1 Klasseneinteilung nach Pretest

Vorangehende Studien zeigten, dass sich üblicherweise die Testteilnehmer*innen, deren Leistungen beim ersten Test schwach waren, mehr verbessern als jene, deren Leistungen beim ersten Test schon besser waren. Das liegt daran, dass es ein vermutetes theoretisches Maximum gibt, das individuell erreicht werden kann. Um diese Tendenz auch mit den hier vorhandenen Daten zu überprüfen, wurden die Pretest-Ergebnisse in der Kategorie *Raumvorstellung* untersucht und die Testteilnehmer*innen jeweils in zwei Gruppen geteilt.

Hierfür wurden die Ergebnisse vom besten bis zum schlechtesten Wert sortiert, und in der Mitte geteilt.
Auffälligerweise zeigte sich in der Experimentalgruppe, dass die (im Pretest) schlechtere Hälfte durchschnittlich 3,1 Punkte vom Pretest zum Posttest dazugewinnen konnte, die bessere Hälfte durchschnittlich sogar 5,0. Umgekehrt galt für die Kontrollgruppe, dass sich die schlechtere Hälfte um durchschnittlich 4,8 Punkte verbesserte, und die bessere Hälfte um 0,6. Siehe hierzu auch Abbildung 20 und Abbildung 21. Somit kann die angesprochene Tendenz nur in der EG nachgewiesen werden.

6.13.2 Effektstärke

Um die Effektstärke vom Pretest zum Posttest in den jeweiligen Gruppen zu messen, wurde *Cohens d* berechnet. Es zeigte sich, dass diese in der Experimentalgruppe deutlich größer und mit einem mittleren Effekt ($d=0,525$) ausfiel, während die Kontrollgruppe nur einen kleinen Effekt verzeichnen konnte ($d=0,272$).

6.13.3 Geschlecht und Testerfolg

In einem t-Test wurden die *Totalscores* der männlichen und weiblichen Teilnehmer*innen verglichen. Diese unterschieden sich im Mittel (41,4 für die männlichen, 34,7 für die weiblichen T.), und auch wenn der Unterschied nicht signifikant war ($p=0.133$), zeigte sich dennoch eine Tendenz.
Auch ähnliche Studien finden regelmäßig widersprüchliche Ergebnisse im Bezug auf Geschlecht und Raumvorstellung, daher ist dieses Ergebnis nicht unerwartet.

6.13.4 Selbsteinschätzung und Testerfolg

Die Selbsteinschätzungen der Teilnehmer*innen (in Prozent) wurden mit deren realisierten Ergebnissen bei der Kategorie *Raumvorstellung* verglichen. Diese zeigten eine positive Korrelation ($r=0.681$, $p<0.001$) und lassen darauf schließen, dass Teilnemer*innen die gute Leistung bzw. Verbesserung beim Posttest wahrnehmen konnten, oder, dass das Vertrauen in die eigene Leistung eine Rolle spielte.

6.13.5 Schulnote und Testerfolg

Mit der Hilfe eines Spearman's Rangkorrelationskoeffizienten-Test wurden die Jahres- und Semesternoten der Schüler*innen mit deren Leistungen bei den einzelnen Tests verglichen. Da die Semesternoten allgemein stärker mit den Testergebnissen korrelierten, wurden diese für Tabelle 9 herangezogen.
In der Experimentalgruppe wurde beim Posttest eine starke Korrelation zwischen den Semesternoten und der Kategorie *Raumvorstellung* ($r=0.742$, $p<0.01$) sowie der Kategorie *Totalscore* ($r=0.625$, $p<0.01$) festgestellt. Für die Kontrollgruppe waren diese hingegen jeweils nahezu Null.

Test	Experimentalgruppe		Kontrollgruppe	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
DAT	0,513*	0,392	-0,068	0,101
PSVT:R	0,498*	0,573*	0,395	0,051
SOT	-0,567*	-0,575*	0,229	-0,068
Typ-1	0,815*	0,842*	0,236	0,133

Tabelle 9: Korrelation: Semesternoten und Testerfolg, Berechnung mittels Spearman's Rangkorrelationskoeffizienten (Mit '*' gekennzeichnete Einträge sind signifikant)

Da für die Kontrollgruppe die Korrelationen absolut geringer ausfielen, war es hier allgemein nicht möglich, signifikante Ergebnisse zu erhalten. Jedoch zeigt sich im direkten Vergleich sehr deutlich, dass die Zusammenhänge im Pre-und Posttest weniger deutlich sind als in der Experimentalgruppe. Besonders zufriedenstellend ist die stark positive Korrelation zwischen Semesternote und Typ-1-Aufgaben, welche in der EG herrscht (siehe Tabelle 9, linke Spalte).
Anzumerken ist, dass der Korrelationskoeffizient für SOT und Semesternote negativ ausfällt, da beim SOT ein hoher Rang (=kleine Abweichung) besser ist. Somit ist auch hier eine deutliche Korrelation zwischen einer guten Leistung und einer guten Note vorhanden.

6.13.6 Mathematik Kompetenz im Bereich Vektoren (AG 3.1 - AG 3.5)

Bezogen auf die erreichten Ergebnisse in der Kategorie Mathematikaufgaben konnte ein t-Test zeigen, dass sich die Experimental- und Kontrollgruppe schon vor dem Pretest signifikant voneinander unterschieden. Neben dem somit überprüften Unterschied der Mittelwerte, wurde mit Hilfe eines f-Tests auch eine signifikante Abweichung der Varianzen festgestellt.

Obwohl zwischen den Mathematikkompetenzen der zwei Gruppen ein signifikanter Unterschied besteht, existiert in beiden Gruppen eine Korrelation zwischen der gesammelten Kategorie *Raumvorstellung* und der Mathematikkompetenz (siehe Tabelle 10). Wie bereits in Abschnitt *6.9 Korrelationen der Ergebnisse der Experimentalgruppe* und Abschnitt *6.10 Korrelationen der Ergebnisse der Kontrollgruppe* gezeigt wurde, fällt diese in den unterschiedlichen Tests verschieden aus, ist jedoch jeweils vorhanden.

Test	Experimentalgruppe		Kontrollgruppe	
	r	p	r	p
Pretest	0,748	0,001	0,409	0,274
Posttest	0,643	0,005	0,556	0,120

Tabelle 10: Korrelation: Raumvorstellung und Mathematikkompetenz

7 Analyse

Im folgenden Abschnitt werden die Daten und deren Zusammenhänge analysiert. Zusätzlich werden nun auch erstmals die Daten des qualitativen Teils des Fragebogens vorgestellt.

7.1 Analyse der quantitativen Daten

Die nun folglich besprochenen Daten sind dem Abschnitt *6 Ergebnisse* zu entnehmen.

7.1.1 Experimentalgruppe

Die Experimentalgruppe, welche drei Interventionsstunden mit der der Augmented Reality App *Vektor AR³* erhielt, konnte sich in allen drei Raumvorstellungstests sowie beim Lösen der Mathematikaufgaben verbessern. Jedoch ist zu berücksichtigen, dass Pre- und Posttest ident waren, und eine gewisse Verbesserung somit auf jeden Fall zu antizipieren war.
Im Hinblick auf die vier untersuchten Faktoren der Raumvorstellung, *Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation* und *Räumliche Orientierung*, lässt sich sagen, dass bei allen Faktoren eine messbare, wenn auch teilweise sehr kleine Verbesserung stattfand. So zeigte sich gleich beim ersten Raumvorstellungstest, dem DAT, eine durchschnittliche Verbesserung von über 50% in der Score-Komponente.
Bezogen auf die Faktoren, entspricht dies einer Steigerung des Faktors *Visualisierung* sowie des Faktors *Räumliche Beziehung*, denn sowohl die Anzahl der richtigen Antworten als auch die Bearbeitungsgeschwindigkeit verbesserten sich. Jedoch ist es einerseits schwierig zu bestimmen, welcher Faktor mit welchem Ausmaß zum Tragen kam, als auch notwendig zu erwähnen, dass der Ausgangswert bei der ersten Überprüfung eher schwach ist, sowohl im Vergleich zur Kontrollgruppe, als auch zu anderen, ähnlichen Gruppen (Dünser, 2005, S. 166-174).
Die *Mentale Rotation*, welche mit Hilfe des PSVT:R gemessen wurde, konnte ebenso eine moderate Verbesserung verzeichnen. So verringerte sich einerseits die durchschnittliche Bearbeitungszeit um 16% (8:35 auf 7:12), und andererseits verbesserte sich der Score durchschnittlich um etwa 4%. Zusätzlich ist anzumerken, dass beim Posttest drei Personen auf 14 bzw. 15 richtige Antworten kamen, was eine beachtliche Leistung darstellt.

Insgesamt deuten diese Indizien eine Steigerung dieses Faktors an, auch wenn diese nur moderat sein mag.

Beim letzten der drei Raumvorstellungstests wurde mit Hilfe des SOT der Faktor *Räumliche Orientierung* überprüft. Wiederum konnten sich die Schüler*innen leistungsbezogen leicht verbessern, steigerten die Arbeitsgeschwindigkeit aber sehr deutlich, mit einer Bearbeitungszeit die im Durchschnitt um über 20% geringer war. Hier gab es einen großen Anteil an sehr guten Ergebnissen, und entgegengesetzt dazu einen großen Anteil an sehr schwachen Ergebnissen. Davon lässt sich ableiten, dass die individuelle Veränderung sehr unterschiedlich ist, und sich die *Räumliche Orientierung* bei manchen mehr verbessern konnte als bei anderen.

Bei den Überprüfungen der Mathematikkompetenz durch die Typ-1-Aufgaben, erzielte die EG jeweils deutlich höhere Scores, und konnte sich auch absolut gesehen mehr verbessern als die Kontrollgruppe (KG). Da die Experimentalgruppe beim Posttest zusätzlich durchschnittlich um über 30% schneller war als beim Pretest, kann auch in diesem Zusammenhang von einer Verbesserung gesprochen werden.

Gesamtheitlich haben sich also alle messbaren Faktoren und die Mathematikkompetenz in der Experimentalgruppe erhöht. Um weitere Aussagen über den Effekt der Intervention treffen zu können, sollen nun die quantitativen Daten der Kontrollgruppe herangezogen werden.

7.1.2 Kontrollgruppe

Gesamtheitlich konnte sich die Kontrollgruppe weniger stark verbessern als die Experimentalgruppe. Jedoch waren die erreichten Scores sowohl im Pretest als auch im Posttest durchschnittlich höher als jene der EG. Allerdings muss angemerkt werden, dass sich hier nicht alle Faktoren verbesserten, wie dies bei der EG der Fall war.

Nichtsdestotrotz verzeichnete die KG einen Zuwachs bei den Faktoren *Visualisierung* und *Räumliche Beziehung*. Es scheint, dass sich die *Visualisierung*, welche mehrheitlich über die Score-Komponente erfasst wird, weniger stark ausgebildet hat als bei der EG, jedoch die *Räumliche Beziehung*, welche vorwiegend über die Bearbeitungszeit erfasst wird, vergleichsweise mehr Anstieg verzeichnen konnte. Denn die Kontrollgruppe beantwortete durchschnittlich 18% mehr Aufgaben richtig und tat dies durchschnittlich 16% schnel-

ler als beim Pretest. Für den geringeren Zuwachs der Score-Komponente kann auch der Deckeneffekt des DAT verantwortlich sein, denn es erreichten zwei der Teilnehmer*innen die volle Punktzahl. Das Gesamtergebnis wurde zusätzlich sehr stark von diesen zwei Personen beeinflusst, denn aufgrund der geringen Personenanzahl in der Kontrollgruppe, nahmen diese einen starken Einfluss auf das Gesamtergebnis.
Die *Mentale Rotation* veränderte sich in der KG nur moderat. Beim PSVT:R erreichte die KG einen minimalen Zuwachs an Punkten, jedoch eine um durchschnittlich 19% geringere Bearbeitungszeit.
Die größte Abweichung gab es beim SOT und somit der *Räumlichen Orientierung*. Denn hier verschlechterte sich das Ergebnis der KG absolut, während sie gleichzeitig um durchschnittlich 29% schneller war. Es ist daher etwas schwierig, genau zu interpretieren, wie sich der Faktor *Räumlichen Orientierung* entwickelt hat. Jedoch weist ein schlechteres Ergebnis bei geringerem Zeitaufwand auf eine sehr kleine Veränderung hin. Anzumerken ist dennoch, dass die Kontrollgruppe beim SOT bei beiden Testdurchläufen besser abschnitt als die Experimentalgruppe.
Die Mathematikkompetenz der Kontrollgruppe fiel überraschend niedrig aus. Das ist möglicherweise damit zu begründen, dass für sie dieses Thema schon mehrere Wochen länger zurücklag als für die Experimentalgruppe. Jedoch auch nach der Auffrischung in der ersten Interventionsstunde und den Arbeitsaufträgen, konnte absolut nur ein moderater Anstieg verzeichnet werden (0,3 Punkte). Dennoch reduzierte sich die Bearbeitungszeit um fast 40%, was bei einer durchschnittlichen Zeit von 5:35 Minuten eventuell auch als Ungenauigkeit gedeutet werden kann.

Da nun die gruppenbezogenen Ergebnisse noch einmal aufsummiert wurden, sollen anschließend die einzelnen Faktoren der Raumvorstellung der Reihe nach in der Experimental- und Kontrollgruppe verglichen werden.

7.1.3 Untersuchung des Faktors *Visualisierung*

Im Durchschnitt zeigte die Experimentalgruppe eine doppelt so große absolute Verbesserung in Punkten beim DAT, verglichen mit jener der Kontrollgruppe. Da der Faktor *Visualisierung* stärker auf den Testerfolg als auf die benötigte Zeit gerichtet ist, kann hier von einem tendenziell höheren Zuwachs bei der EG gesprochen werden. Erwähnt werden muss aber, dass der Ausgangswert der KG etwas höher war als jener der EG. Da zusätzlich auch beim Posttest ein durchschnittlich besseres Ergebnis verzeichnet werden konnte, ist der Unterschied nicht signifikant. Jedoch gelang es der Experimentalgruppe von einem deutlich niedrigeren Wert, zu einem annähernd gleichen Posttestergebnis wie die Kontrollgruppe (9,82 für die EG zu 10,10 für die KG) zu kommen. Somit lässt sich für den Faktor *Visualisierung* doch eine leichte Tendenz bemerken, die für den Augmented Reality Einsatz spricht.

7.1.4 Untersuchung des Faktors *Räumliche Beziehung*

Für den Faktor *Räumliche Beziehung* ist die Untersuchung deutlich schwieriger. So hat einerseits die Experimentalgruppe mehr Zuwachs verzeichnen können, andererseits konnte die Kontrollgruppe schneller arbeiten. Es ist daher schwer zu sagen, ob sich der Faktor *Räumliche Beziehung* in einer der beiden Gruppen stärker verändert hat. Dadurch kann jedoch geschlussfolgert werden, dass die Interventionsstunden mit Augmented Reality keinen merkbaren Einfluss auf diesen Faktor genommen haben.

7.1.5 Untersuchung des Faktors *Mentale Rotation*

Sehr analog verlief die Veränderung des Faktors *Mentale Rotation*. So verzeichneten beide Gruppen sehr vergleichbare Geschwindigkeitszunahmen und Leistungsverbesserungen. Die Experimentalgruppe erzielte jeweils bessere Ergebnisse und konnte den Vorsprung auch halten. Insgesamt schneidet bei der *Mentalen Rotation* somit die EG knapp besser ab, jedoch zeichnete sich kein signifikanter Unterschied ab.

7.1.6 Untersuchung des Faktors *Räumliche Orientierung*

Beim letzten der vier Raumvorstellungsfaktoren zeigt sich wiederum eine markante Abweichung. Zwar konnten beiden Gruppen die Bearbeitungszeit in einem ähnlichem Ausmaß reduzieren, jedoch gelang es nur der Experimentalgruppe auch gleichzeitig genauer zu arbeiten, während in der Kontrollgruppe die Werte stagnierten bzw. sich sogar gesamtheitlich leicht verschlechterten.

Da jedoch die KG beim Pretest und beim Posttest eine deutlich niedrigere mittlere Abweichung hatte als die EG (31,8° gegenüber 39,6° beim Posttest) ist auch bei diesem Resultat schwer einzuordnen, ob der Unterschied der Intervention zugeschrieben werden kann oder nicht. Für die Intervention spricht, dass sich in der KG nur zwei Schüler*innen verbessern konnten (22%), in der EG jedoch sechs (35%), gegen die Intervention spricht die hohe Standardabweichung und nur kleine absolute Verbesserung in der Experimentalgruppe. Insgesamt konnte die *Räumliche Orientierung* teilweise von der Intervention ausgebaut werden, jedoch waren die Unterschiede zwischen den Gruppen schon vor Beginn zu groß, um einen sinnvollen Vergleich der Posttestergebnisse anstellen zu können.

7.1.7 Untersuchung der Mathematikkompetenz

Unerwarteterweise waren die Kompetenzen im *Inhaltsbereich Vektoren (AG 3.1 - AG 3.5)* nicht so gut ausgeprägt wie antizipiert (siehe Abschnitt *2.8*). Besonders die Kontrollgruppe schnitt deutlich schlechter ab als erwartet, und konnte sich auch beim Posttest nur mäßig verbessern. Das ist insofern auffällig, als dass die KG im Mittel bei beiden Testungen einen höheren Wert in der Kategorie *Raumvorstellung* erreichen konnte als die EG. Die gute Leistung bei den drei Raumvorstellungstests weicht somit stark von der mathematikbezogenen Leistung ab, deutet auf einen Unterschied zwischen den zwei Gruppen. Gleichzeitig zeigt sich somit aber auch eine starke Abweichung von den Erwartungen der vorgestellten Theorie. Denn es wurde erwartet, dass die Mathematikkompetenz und die Leistung bezogen auf die Raumvorstellungstests stärker korrelieren würden, als es die Ergebnisse dieser Arbeit vermuten lassen.

7.1.8 Untersuchung der Korrelationen

Die einzelnen Raumvorstellungstests korrelierten in einem zufriedenstellenden Ausmaß miteinander (siehe Abschnitt *6.9* und Abschnitt *6.10*). Auffälligerweise konnte für die meisten Tests kein Zusammenhang zwischen der benötigten Zeit und den erreichten Punkten festgestellt werden, jedoch zeigte der SOT sowohl beim Pretest als auch beim Posttest eine moderate Korrelation zwischen kurzer Bearbeitungszeit und geringer Abweichung. Auch beim PSVT:R zeigte sich im Posttest ein Zusammenhang zwischen kurzer Bearbeitungszeit und hohem Punktescore. Alle drei dieser Wechselbeziehungen sind auffällig, da somit rascheres Arbeiten zu besseren Ergebnissen führte (siehe Abschnitt *6.12*). In Bezug

auf den jeweiligen Raumvorstellungsfaktor, scheint dies zu bestätigen, dass der Ausprägungsgrad sowohl Geschwindigkeit als auch Genauigkeit betrifft und beeinflusst. In diesem Sinne sind diese Zusammenhänge im Einklang mit den Erwartungen, auch wenn diese nur bei wenigen Tests nachweisbar waren.
Weiters konnten bei der Untersuchung der Korrelationen (siehe Abschnitt *6.13*) tendenziell bessere *Totalscores* bei den männlichen Teilnehmern festgestellt werden. Auch konnte gezeigt werden, dass die Selbsteinschätzung mit den erreichten Ergebnissen sogar stark positiv korrelierten. Jedoch kann an dieser Stelle nicht überprüft werden, wie die Kausalität gerichtet ist und ob diese überhaupt besteht.
Im Hinblick auf die Effektstärke zeigte sich ein mittlerer Effekt in der Experimentalgruppe, und lediglich ein kleiner Effekt in der Kontrollgruppe, was wiederum für eine Wirkung der Intervention spricht.
Letztendlich fiel auf, dass die Mathematiknoten, besonders jene des letzten Semesters, gute Indikatoren für den Erfolg bei den individuellen Ramvorstellungstests waren. In der Experimentalgruppe bestand mehrheitlich eine moderat positive Korrelation zwischen guten Noten und guten Ergebnissen, in der Kontrollgruppe waren diese schwach bis nicht vorhanden.
Wie gezeigt werden konnte, bestand zwischen Experimental- und Kontrollgruppe vor der Studie ein signifikanter Unterschied in der Fähigkeit die Typ-1-Aufgaben zu lösen. Jedoch existierte für beide Gruppen sowohl beim Pretest als auch beim Posttest eine moderate bis starke Korrelation zwischen der Kategorie *Raumvorstellung* und den Typ-1-Aufgaben.

7.2 Analyse der qualitativen Daten

Im Hinblick auf die zweite und dritte Forschungsfrage:

2. Welche Empfehlungen lassen sich aus den Rückmeldungen der Schüler*innen für die Anwendung von Augmented Reality im Mathematikunterricht im Allgemeinen formulieren?

3. Wie kann die App *Vektor AR³* weiter verbessert werden?

soll nun zusätzlich ein Blick auf die Rückmeldungen der Schüler*innen geworfen werden. Wichtig zu erwähnen ist, dass für diesen Abschnitt alle qualitativen Antworten der Schüler*innen berücksichtigt werden, also auch die Aussagen jener, die eventuell nicht am Pretest oder an keiner oder nur einer der Interventionsstunden teilgenommen haben. Somit beantworteten insgesamt 33 Schüler*innen den Fragebogen.

7.2.1 Offene Fragen in der Experimentalgruppe

Über den digitalen Fragebogen wurden den Schüler*innen der Experimentalgruppe unter anderem auch offene Fragen gestellt. Es wurde um allgemeines Feedback zum Unterricht mit der Augmented Reality App *Vektor AR³* gebeten, um möglichst explizite und direkte Rückmeldungen zu bekommen. In Tabelle 11 findet sich hierzu eine Auflistung der relevantesten Antworten, welche das Spektrum an unterschiedlichen Ansichten abzudecken versucht.
Wie auch allgemein beim Fragebogen, spiegeln die Antworten ein sehr gemischtes Bild wider. Während sich die Person im Auszug 1 (siehe Tabelle 11) klar für die Verwendung der App ausspricht, gibt es bei den meisten anderen mehrere Kritikpunkte. So wird aufgezeigt, dass es noch teilweise technische Probleme während der Handhabung gab oder die praktische Umsetzung zu kompliziert war (Auszüge 5, 6, 8, 9, 11). Andere sahen wiederum den Anlass für eine AR-App im Unterricht als gegeben, bemerkten jedoch, dass *Vektor AR³* noch nicht ganz richtig an die Erfordernisse angepasst ist (Auszüge 2, 3, 10). Letztendlich wurde auch öfters auf *GeoGebra* und andere Alternativsoftware verwiesen, die von den Schüler*innen als praktischere und *bessere* Alternative beschrieben wurde (Auszüge 4, 5).
Insgesamt weisen die Schüler*innen auf einige Schwächen der Software hin. So gab es bei manchen Smartphones Probleme die Koordinatensysteme auf einer Oberfläche zu platzieren. Bei anderen hingegen verschwanden das Koordinatensystem während der Eingabe der Koordinaten, da die Smartphones etwas zu stark geneigt wurden, und der Ankerpunkt des AR-Koordinatensystems damit aus dem Blickwinkel der Kamera verschwand. Weiters wurde kritisiert, dass die einzelnen Koordinaten für jede Aufgabe eingetippt werden mussten, und keine Vorarbeit geleistet werden konnte.
Wie bereits in Abschnitt *6.7.1* zum Fragebogen in der Experimentalgruppe in Tabelle 4 abgebildet, wurde die Smartphone-App *Vektor AR³* als eher intuitiv und eher praktisch zu verwenden sowie moderat geeignet für den Unterricht bewertet. Das Arbeiten mit der

App wurde als eher leicht gesehen, und bei der Mehrheit schien es nur wenige oder keine technische Probleme gegeben zu haben. Jedoch wurde die Smartphonanwendung als nur mittelmäßig hilfreich beim Lösen der Aufgaben angesehen, und die Schüler*innen schätzten das Arbeiten mit der App als nur wenig förderlich für die Raumvorstellung ein.

	Allgemeines Feedback zur App
1	Die Verwendung der App hat es mir deutlich erleichtert, die Vektoraufgaben zu lösen -> ich denke, dass es vielen ähnlich ging und denke, dass es gut wäre sie im Unterricht einzubauen.
2	Gutes Prinzip, hat aber noch mehr Potenzial
3	Eine sehr schöne Idee, die mit ein wenig mehr Entwicklung und Überarbeitung sehr gut zu verwenden ist.
4	Die App war grundsätzlich einfach zu verwenden, dennoch finde ich, dass es für den Unterricht/Lösen von Aufgaben bessere Alternativen gibt.
5	Ich denke, dass etwas wie Geogebra mehr helfen würde, da es in der App umständlich ist 24/7 das Handy auf die Konstruktion zu halten und zu drehen bzw. aus einer anderen Perspektive aus zu betrachten.
6	Interessante Konzepte aber ein bisschen umständlich
7	Ist hilfreich um es sich bei gewissen Beispielen besser vorstellen zu können und auch praktisch für das Kreuzprodukt
8	Ich finde das Design kann überarbeitet werden. Sonst eine sehr hilfreiche App
9	Ganz gut. Es hat nur gestört, dass das Koordinatensystem verschwunden ist, wenn man es nicht im Bildschirm gehalten hatte
10	besser zum kontrollieren als zum Aufgaben lösen
11	Da man alle Vektoren, generell alles, immer manuell eingeben musst hat die Vorbereitung bevor man zur eigentlichen Aufgabe oder dem Rechenschritt gekommen ist immer einige Zeit gedauert.

Tabelle 11: Fragebogen: Antworten der Schüler*innen zu *Vektor AR³*, tatsächliche Wortlaute wurden übernommen (vollständige Liste siehe Appendix 6)

7.2.2 Erfahrungswerte mit *Vektor AR³*

An dieser Stelle sollen die Erfahrungen in der Handhabung von *Vektor AR³* gesammelt dargestellt werden.

Für die Verwendung der Smartphone-Anwendung spricht sicherlich, dass die App als Open-Source-Software frei verfügbar ist. Zusätzlich ist diese barrierefrei bezüglich Farbenfehlsichtigkeit und die Nutzung ist größtenteils selbsterklärend, da es nur sehr wenige, dafür spezifische Funktionen gibt. Im Allgemeinen ist die Verwendung der Software problemlos, sobald die ersten Hürden überwunden sind, und es möglich ist eine passende Oberfläche für die Darstellung des AR-Koordinatensystems zu finden.

Jedoch gibt es keine Möglichkeit den Schüler*innen über einen QR-Code (wie dies z.B. die Apps *cleARmaths* und *3D-Geometrie* lösen) oder mittels einer anderen Funktion (bei der App *GeoGebra 3D Calculator* z.B. über eine Datei) eine vorgefertigte Angabe zu übermitteln, mit der diese dann direkt starten können (Schutera et al., 2021, S. 10-12; Dilling et al., 2022, S. 289–306; *GeoGebra*, 2022). Dadurch wird viel Zeit mit der Handhabung und nicht mit der tatsächlichen Arbeit in der Augmented Reality verbracht. Den Vorteil, den *Vektor AR³* trotzdem besitzt, ist die schnelle und niederschwellige Ausführung der Berechnung des Skalarprodukts und des Vektorprodukts sowie die die Möglichkeit, Vektoren im Raum rasch zu erstellen, zu modifizieren und anschließend zu betrachten. Als weitere Funktion, die für spezifische Anwendungen sehr praktisch ist, existiert die Möglichkeit, ein *Schiefwinkliges Koordinatensystem* zu verwenden, in dem die Basisvektoren beliebig abgeändert werden können.

Während der tatsächlichen Handhabung gibt es aber noch folgende Einschränkungen, welche das Arbeiten oft schwer möglich machen. So ist das platzierte Augmented Reality Koordinatensystem auf einem fixen Punkt am Boden verankert, und wird so dargestellt, als wäre es Teil dieser Fläche. Werden nun Vektoren visualisiert, die in den Boden hineinragen (üblicherweise wegen einer negativen z-Komponente), dann ist es schwer diese gut sehen und mit diesen interagieren zu können. Es wird keine Möglichkeit geboten, die Verankerung vertikal nach oben zu verschieben. Um diese Situation etwas zu umgehen, ist es möglich, das Koordinatensystem an einer Tischkante bzw. Ecke eines Tisches zu platzieren, sodass es im realen Raum möglich ist, eine Perspektive von unten einzunehmen. Hier besteht jedoch die Gefahr, dass die Verankerung verschwindet und somit das

Koordinatensystem.
Zuletzt muss kritisiert werden, dass die Skalierung des Koordinatensystems fixiert ist, und die drei Komponenten der Vektors jeweils nur zwischen -10 und +10 variieren können. Es ist möglich, diese über eine manuelle Eingabe länger werden zu lassen, jedoch werden diese Vektoren dann nicht mehr sinnvoll dargestellt und das Arbeiten damit ist nur mehr schwer möglich. Daher ist es zumeist notwendig, selbst eine passende Skalierung zu berechnen, bevor mit der App gearbeitet werden kann.
Insgesamt stellt die Augmented Reality Smartphone-App *Vektor AR³* somit sehr spezifische Anforderungen, um sinnvoll damit arbeiten zu können. Werden diese erfüllt, und ist die Handhabung der App geübt, so führt dies üblicherweise zu den gewünschten Resultaten. Ist dies nicht der Fall, dann kann die Darstellung und Berechnung länger dauern als gewünscht.

8 Diskussion

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse diskutiert und interpretiert werden, um anschließend Antworten auf die Forschungsfragen zu verorten. Es soll festgehalten werden, welche Auswirkungen der Unterricht mit *Vektor AR³* auf die Raumvorstellung der Schüler*innen hatte. Weiters soll untersucht werden, welcher Faktor der Raumvorstellung hier die größte Änderung verzeichnen konnte sowie welche Vorschläge und Rückmeldungen für die Smartphone-Anwendung *Vektor AR³* seitens der Schüler*innen gegeben wurden. Im Zuge dessen werden praktische Handlungsempfehlungen für den Mathematikunterricht mit Augmented Reality formuliert.

8.1 Diskussion der quantitativen Daten

Somit lässt sich im Hinblick auf die Hauptforschungsfrage, *welche Auswirkungen hat der Unterricht mit Vektor AR³ auf die Raumvorstellung der Schüler*innen?*, zusammenfassen, dass einer der vier Raumvorstellungsfaktoren, nämlich die *Visualisierung*, einen tendenziell stärkeren Zuwachs bei der Experimentalgruppe verzeichnen konnten als bei der Kontrollgruppe. Die Ergebnisse der Faktoren *Räumliche Beziehung*, *Mentale Rotation* und *Räumliche Orientierung* weisen hingegen nur sehr kleine Unterschiede zwischen den zwei Gruppen auf. Dieser Unterschied bei der *Visualisierung* kann eventuell darauf zurückgeführt werden, dass diese besonders bei der Verwendung von Augmented Reality zum Einsatz kam.
Was an dieser Stelle noch erwähnt und berücksichtigt werden muss, ist, dass die Testpersonen aus zwei 6. Klassen (10. Schulstufe) eines Wiener Gymnasiums stammten, und somit zumeist etwas jünger waren, als die Versuchsteilnehmer*innen ähnlicher Studien (Dünser, 2005, S. 125-137). Da die Entwicklung der Raumvorstellungsfaktoren nicht im gleichen Alter geschieht, sondern speziell die *Räumliche Orientierung* bis in die Postadoleszenz Weiterentwicklung erfährt, scheint eine gute Begründung dafür gefunden, warum dieser Faktor mitunter schwächer ausfiel als erwartet (Zöggeler & Maresch, 2018, S. 34-35; Dünser, 2005, S. 193-198). Da die Schüler*innen auch keinen Unterricht in Darstellender Geometrie und Geometrisches Zeichnen haben bzw. hatten, liefert dies plausible Argumente, weshalb die Ergebnisse bei den Raumvorstellungstests eher schwächer waren als

bei anderen Studien.
Eine der Kennzahlen, die für den Einsatz von Augmented Reality im Mathematikunterricht spricht, ist die ermittelte Effektstärke in der Experimentalgruppe, die sich sehr mit den Erwartungen aus anderen Studien deckt (Garzón et al., 2019, S. 447–459).
Gesamtheitlich ist es trotzdem schwer, eine genaue Aussage zu tätigen. So war es die Kontrollgruppe, die jeweils die besseren Ergebnisse in der Kategorie *Raumvorstellung* sowie auch beim DAT und beim SOT ablieferte. Jedoch war es die Experimentalgruppe, die jeweils einen höheren *Totalscore* hatte. Für die Experimentalgruppe spricht zusätzlich der stärkere Zuwachs, den diese in jederlei Hinblick abliefern konnte.
An diesem Punkt soll noch einmal betont werden, dass besonders die KG sehr wenige Teilnehmer*innnen umfasste, und dadurch wenige, sehr gute Leistungen das Gesamtbild stark verzerrten. Nichtsdestotrotz wurden die gewonnen Daten so gut wie möglich gedeutet.

Um die Ergebnisse etwas weiter zu interpretieren, soll noch auf Abschnitt *4.5 Kommentare zum tatsächlichen Ablauf* Bezug genommen werden.
So schien die Motivation und mathematische Kompetenz in der Experimentalgruppe wahrnehmbar höher, während bei der Kontrollgruppe teilweise ein gewisses Desinteresse herrschte, welches immer nur kurzfristig zu überwinden war. Im Zusammenhang dazu sind eventuell auch die sehr kurzen Bearbeitungszeiten der KG zu sehen, die den Posttest zu überfliegen schienen. Insofern sind die Ergebnisse unerwartet, denn sie zeigten durchwegs gute Leistungen und Verbesserungen.

Obwohl die EG deutlich besser bei den Typ-1-Aufgaben abschneiden konnte, fehlte im Durchschnitt doch ein wenig um in der Kategorie *Raumvorstellung* mit der KG gleichzuziehen. Dieser Umstand war unerwartet und steht auch in einem Widerspruch zu den Erwartungen der bisherigen Forschung in diesem Bereich. Eventuell ist das aber auch mit der geringen Teilnehmer*innenanzahl zu begründen.
Warum der Einsatz von Augmented Reality eventuell nicht so deutliche Ergebnisse abgebildet hat wie erwünscht, begründen Glück et al. in diesem Zusammenhang mit dem „*power-generality-tradeoff*“, denn

> „grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass jene Trainingsmaßnahmen die stärksten Effekte haben, die sich auf eine spezifische Aufgabenstellung konzentrieren, während Trainingsmaßnahmen, die auf eine Verbesserung einer größeren Spannbreite von Raumvorstellungsleistungen abzielen, kleinere Effekte produzieren [...].“ (Glück et al., 2005, S. 7)

Somit lässt sich argumentieren, dass der Effekt in der Experimentalgruppe wohl insgesamt nur moderat ist, da das Training mit *Vektor AR³* sicherlich mehrere Faktoren oder sogar gesamtheitlich die Raumvorstellung weiterbildete. Daher sind die damit einhergehenden Verbesserungen klein sowie auf die vier Faktoren der Raumvorstellung aufgeteilt, die sich alle leicht steigerten. Denn während der Intervention wurde kein individueller Faktor besonders stark trainiert, der dann bei den Testungen herausstechen hätte können.

8.2 Diskussion der qualitativen Daten

Die Antworten der Schüler*innen zeigen doch recht deutlich, dass die Smartphone-Anwendung *Vektor AR³* eindeutig passende Funktionen für das Arbeiten mit Vektoren in $\mathbb{R}^3$ mitbringt, nichtsdestotrotz besitzt diese in der aktuellen Ausführung noch einige Unvollkommenheiten.
So konnten direkt bei der ersten Anwendungssituation einige Geräte die Software nicht installieren, obwohl die Smartphones sonst vollkommen funktionsfähig waren. Bei der Durchführung entstanden die größten Probleme dabei, die Koordinatensysteme zu platzieren, und nicht aus dem Blick zu verlieren. Aus Schüler*innensicht kam es hier immer wieder zu frustrierenden Erfahrungen, wenn Vektoren mehrfach eingegeben werden mussten, nachdem diese verschwunden waren.
Gelang es, diese Hürden zu überspringen, so war das Nutzungserlebnis sehr zufriedenstellend, und die geplanten Berechnungen konnten stattfinden. Zusätzlich wurde mehrmals angemerkt, dass die Schüler*innen bereits Alternativsoftware kannten und nutzten. An dieser Stelle wurde fast immer *GeoGebra* genannt, welches sonst mehrheitlich für Visualisierung genutzt wird, und anscheinend von den Schüler*innen bevorzugt wird.

Um die qualitativen Ergebnisse weiter zu verstehen, soll wiederum auf den tatsächlichen Ablauf Bezug genommen werden (Abschnitt *4.5*).
Die Experimentalgruppe erschien allgemein sehr interessiert daran, mit der App zu arbei-

ten, und die Schüler*innen installierten diese mehrheitlich schon vor der ersten Interventionsstunde. Nur wenige Kleingruppen hatten Probleme mit der Anwendung, wenn jedoch Probleme auftraten, dann war es zumeist nicht möglich, diese zu beseitigen, und es musste auf ein anderes Gerät ausgewichen werden. Besonders in der zweiten Interventionsstunde wurde sehr intensiv mit *Vektor AR³* dargestellt und gearbeitet. Es war somit auf jeden Fall Interesse und Motivation vorhanden, um mit der Software im Unterricht zu arbeiten.

8.3 Beantwortung der Forschungsfragen

Nachdem die Theorie besprochen, der Versuchsablauf und die Daten präsentiert, und anschließend diese Ergebnisse diskutiert und interpretiert wurden, werden nun die Forschungsfragen beantwortet.

8.3.1 Hauptforschungsfrage

> Welche Auswirkungen hat der Unterricht mit *Vektor AR³* auf die Raumvorstellung der Schüler*innen?

Um dies zu beantworten, sollen die Auswirkungen der Intervention mit Augmented Reality auf die Faktoren der Raumvorstellung der Reihe nach dargelegt werden.
Beim DAT und somit dem Faktor *Visualisierung* zeigte die Experimentalgruppe eine doppelt so große absolute Verbesserung im Vergleich zur Kontrollgruppe. Die KG wies jedoch im Durchschnitt jeweils bessere Resultate auf, auch wenn es beim Posttest nur mehr ein kleiner Vorsprung war. Weiters war ein Zuwachs beim Faktor *Räumliche Beziehung* in der EG vorhanden, jedoch war dieser ähnlich zu dem der KG.
Beim PSVT:R und damit dem Faktor *Mentale Rotation* verzeichneten wiederum beide Gruppen Steigerungen bezogen auf Geschwindigkeit und Testleistung, jedoch waren diese sehr ähnlich.
Der Faktor *Räumliche Orientierung*, der beim SOT überprüft wurde, zeichnet ein sehr diffuses Bild. Einerseits schaffte es nur die Experimentalgruppe beim Posttest genauer zu arbeiten als beim Pretest. Andererseits arbeiteten beide Gruppen deutlich schneller und die Kontrollgruppe erzielte auch hier jeweils absolut bessere Durchschnittswerte. Somit ist es schwer beim Faktor *Räumliche Orientierung* für eine Veränderung durch die Intervention zu argumentieren.

Durch die Untersuchung der Korrelationen konnte festgestellt werden, dass jene Testteilnehmer*innen bessere Leistungen erzielten, die auch schneller arbeiteten. Die männlichen Teilnehmer erreichten tendenziell höhere *Totalscores*, und die Selbsteinschätzung korrelierte moderat positiv mit der Kategorie *Raumvorstellung*. Auch die Mathematiknoten, besonders die Semesternoten, wiesen in der Experimentalgruppe eine moderat positive Korrelation zu den jeweiligen Tests auf, in der Kontrollgruppe waren diese teilweise nicht vorhanden und nicht signifikant.

Insgesamt konnten keine signifikanten Unterschiede durch statistische Tests zwischen Experimental- und Kontrollgruppe in den Posttestergebnissen gefunden werden. Jedoch ist zu betonen, dass sich die Teilnehmer*innen der Experimentalgruppe gesamtheitlich in Punkten gemessen absolut mehr verbesserten, und auch die Effektstärke dieser Gruppe deutlich höher ist als jener der Kontrollgruppe. Die moderate Effektstärke (d=0,525) ist tatsächlich ähnlich zu einem Durchschnitt, der beim Einsatz von AR zu erwarten ist (Garzón et al., 2019, S. 447-459). Durch diese Umstände, und dadurch, dass auch der Faktor *Visualisierung* eine merkliche Verbesserung erfuhr, hat sich doch eine leichte Tendenz abgezeichnet die für den Einsatz von Augmented Reality spricht, bzw. es konnte zumindest belegt werden, dass der Unterricht mit *Vektor AR³* einen messbaren, wenn auch kleinen, Effekt auf die Raumvorstellung hat. Denn durch die Intervention wurden alle Faktoren der Raumvorstellung weiter ausgebildet, wenn auch teilweise nur in einem kleinen Ausmaß.

8.3.2 2. Forschungsfrage

> Welche Empfehlungen lassen sich aus den Rückmeldungen der Schüler*innen für die Anwendung von Augmented Reality im Mathematikunterricht im Allgemeinen formulieren?

Aus dem Feedback der Schüler*innen, der in der Theorie angeführten Vorschläge für den Unterricht mit Augmented Reality sowie den Erfahrungen aus den Interventionsstunden lassen sich nun einige praktische Handlungsanweisungen für den Mathematikunterricht formulieren.
So hat sich gezeigt, dass die Auswahl an Mathematikaufgaben sehr sorgfältig getroffen

werden muss. Zusätzlich sollte überprüft werden, ob die Aufgaben mit der verwendeten AR-Software sinnvoll visualisiert und somit bearbeitet werden können. Gleichzeitig muss aber auch ein passendes Maß an Schwierigkeit gefunden werden, sodass Schüler*innen einerseits motiviert sind an den Arbeitsaufträgen zu arbeiten, und andererseits eine Notwendigkeit für die Verwendung der AR besteht. Sind diese Rahmenbedingungen gegeben, sollte den Schüler*innen genügend Zeit zur Verfügung gestellt werden, um die Aufgaben ausgiebig zu bearbeiten, darstellen zu lassen und mit Hilfe der AR zu lösen.
Das offene Aufgabenformat scheint viele dieser Anforderungen zu erfüllen, da es für Lernsituationen „verschiedene Annahmen, verschiedene Ansätze, verschiedene Wege und verschiedene Ergebnisse“ eröffnet (Büchter & Henn, 2015, S. 46; Beckmann, 2022, S. 68). Möglich ist es auch, durch AR direkte Unterstützung in Form von unterschiedlichen Hilfestellungen anzubieten und so heterogene Lerngruppen differenziert zu fordern und zu fördern (Beckmann, 2022, S. 68).
Als große Chance für Augmented Reality wird der Bereich des mathematischen Modellierens gesehen. Denn während beim Modellierungskreislauf Schwierigkeiten auftreten können, verspricht der Einsatz von AR die Visualisierung und den Übergang zwischen Realität und Modell niederschwelliger zu gestalten.
Für die Anwendung von Augmented Reality im Mathematikunterricht lässt sich somit im Allgemeinen empfehlen, dass die Aufgabenstellungen sehr eng an den Fähigkeiten bzw. Möglichkeiten der jeweiligen Software orientiert sein sollten, um den Schüler*innen keine zusätzlichen Schwierigkeiten zu bereiten. Bevor mit dem Arbeiten im Unterricht gestartet werden kann, muss mindestens eine Stunde vorgesehen werden, um den Schüler*innen die korrekte Handhabung und die Fähigkeiten der App vorzustellen. Es hat sich bewährt zu Beginn Aufgaben zu stellen, die ganz direkt und analog mit der App umgesetzt und beantwortet werden können, ohne davor eine passende Interpretation oder einen geeigneten Zugang finden zu müssen.

Während es in dieser Studie besonders wichtig war, die Zeit in der Augmented Reality zu maximieren, so ist es im regulären Mathematikunterricht wohl wichtiger die vorhandenen Vorstellungen weiterzubilden und erlebbar zu machen bzw. zu Beginn eines neuen Themas diese Vorstellungen zu bilden. Denn gleichzeitig müssen die Schüler*innen dazu in der Lage sein, diese Vorstellungen in der AR anzuwenden. Es hat sich in den Interventionsstunden gezeigt, dass es den Schüler*innen teilweise schwer fiel, die komplexeren Aufgaben für die App passend zu deuten und mit diesen zu arbeiten. Denn es benötigt sicher einiges an Übung, bevor eine Augmented Reality App zur Selbstverständlichkeit wird.

Letztendlich stellt der Mathematikunterricht mit Augmented Reality auch einige Forderungen an die Lehrperson. So müssen im Vorfeld die Möglichkeiten und Einsetzbarkeit individuell von der Lehrperson überprüft werden, um im Unterricht nicht selbst technischen oder methodischen Problemen zu unterliegen. Für die Unterrichtsplanung sollten erst nach Auswahl der Software passende Aufgaben herausgesucht werden, die sinnvoll mit der jeweiligen AR-Applikation bearbeitet werden können.

8.3.3 3. Forschungsfrage

> Wie kann die App *Vektor AR³* weiter verbessert werden?

Die Rückmeldungen zur Smartphone-Anwendung *Vektor AR³* zeigten ein sehr differenziertes Bild. So gab es einige Stimmen, die den Einsatz im Unterricht passend fanden, jedoch forderte die Mehrheit der Schüler*innen eine Überarbeitung und Weiterentwicklung der App, um für sie relevant zu sein. Weiters merkten die Schüler*innen mehrfach an, dass die Anwendung der App *Vektor AR³* in der jetzigen Form auch noch einige Schwachstellen aufweist und ihnen nur teilweise bei der Arbeit helfen konnte. So benötigt die Handhabung einiges an Know-How, um wie erwünscht zu funktionieren. Zusätzlich ist die App in ihrer Funktionalität teilweise stark eingeschränkt. So fehlt eine Möglichkeit, Aufgaben vor der Stunde vorzubereiten, und den Schüler*innen somit einen direkten Einstieg zu bieten, ohne dass jegliche Werte manuell eingegeben müssen. Auch kann die Skalierung nicht an die Gegebenheiten angepasst werden und die Verankerung des AR-Koordinatensystems zeigte sich teilweise unzuverlässig.

Somit lässt sich die Forderung formulieren, dass eine Behebung dieser Mängel wünschenswert wäre, um allgemein anwendbar zu werden. Zusätzlich könnten Implementierungen, wie das Platzieren von Körpern und Funktionen, eine Messfunktion sowie eine Kooperationsmöglichkeit zwischen mehreren Geräten hinzugefügt werden.

9 Fazit

Das Ziel dieser Masterarbeit war es, die Auswirkungen von Augmented Reality (AR), im Speziellen repräsentiert durch die Smartphone-App *Vektor AR³*, auf den Mathematikunterricht und die Raumvorstellung zu untersuchen. Darüber hinaus wollte die empirische Studie Rückmeldungen von Schüler*innenseite analysieren, um insbesondere Feedback zur Verwendung der Smartphone-App *Vektor AR³* zu erhalten und Handlungsempfehlungen für einen Mathematikunterricht mit Augmented Reality ableiten zu können.
Zu Beginn wurde daher der theoretische Hintergrund zu den Themen Räumliches Denken, Raumvorstellung, und anschließend zur Augmented Reality beschrieben. Dabei wurde verstärkt auf den Einfluss dieser Bereiche auf den Mathematikunterricht Bezug genommen, und deren Verbindung dargelegt. Abschließend wurde die App *Vektor AR³* mit Hilfe von Screenshots vorgestellt und die Funktionen erläutert.
Der *Versuchsablauf* widmete sich dem geplanten sowie dem tatsächlichen Ablauf der drei Interventionsstunden, und beschrieb die Auswahl der Testpersonen.
Der Methodenteil dieser Arbeit stellte die verwendeten Raumvorstellungstests, die Typ-1-Aufgaben der österreichischen Matura und den Fragebogen vor. Bei dieser Studie kamen gekürzte Versionen des *Differential Aptitude Test* (DAT), des *Purdue Spatial Visualization Test: Rotations* (PSVT:R) und des *Spatial Orientation Test* (SOT) zum Einsatz.
Anschließend konnten die gewonnen Daten präsentiert sowie Zusammenhänge und Korrelationen aufgezeigt werden. Dem folgte eine Diskussion, welche versuchte diese Daten mit Bedeutung zu versehen und die quantitativen und qualitativen Daten zusammenzufassen und zu deuten. Schlussendlich wurden davon Antworten auf die Forschungsfragen abgeleitet und Empfehlungen formuliert.

9.1 Limitationen und Ausblick

Als größte Einschränkung der Studie muss gleich zu Beginn die geringe Anzahl an Teilnehmer*innen genannt werden. So war es zwar in der Experimentalgruppe möglich, eine vertretbare Anzahl von Schüler*innen (n=17) für die Studie zu gewinnen. Jedoch waren es in der Kontrollgruppe mit letztendlich 9 Testteilnehmer*inne deutlich weniger als erwünscht. Das führte dazu, dass sehr starke bzw. schwache Leistungen einen proportional sehr großen Einfluss auf das Gesamtergebnis dieser Gruppe hatten, und leider auch dazu, dass viele statistische Tests keine signifikanten Ergebnisse liefern konnten. Dem ist es auch geschuldet, dass nur sehr schwache Aussagen über den Effekt des Arbeitens mit Augmented Reality im Mathematikunterricht getätigt werden konnten.

Als weitere Unklarheit ist anzumerken, dass nicht aus den Daten gewonnen werden kann, wie stark der Effekt der Testwiederholung im Vergleich zur Intervention in der Kontrollgruppe war. Einerseits ist zu erwarten, dass eine Testwiederholung, auch ohne zwischenzeitlicher Maßnahme (Interventionsstunden), zu einer gewissen Verbesserung der Leistungen führt. Andererseits ist unklar, wie stark diese Verbesserung ausfällt, und ob die drei Interventionsstunden in der KG nicht doch einiges zur Leistungssteigerung beigetragen haben. Als möglicher Vorschlag, um diese Unklarheit näher zu untersuchen, könnte eine Folgestudie mit einem *Solomon-Vier-Gruppen-Design* arbeiten (Navarro & Siegel, 2018, S. 1553-1554; Solomon, 1949, S. 137-150). Bei diesem Testdesign werden die Teilnehmer*innen der Gesamtgruppe zufällig in eine von vier Gruppen eingeteilt. Gruppe 1 nimmt an dem Pretest, der Intervention und dem Posttest teil; Gruppe 2 nimmt an dem Pretest und Posttest teil, nicht aber an der Intervention; Gruppe 3 nimmt an der Intervention und dem Posttest teil; Gruppe 4 hingegen nur am Posttest. Nun werden die Gruppen untereinander verglichen, um die Effektivität der Intervention und des Pretests messen zu können. Dieses Methode hilft dabei, auch bei ähnlicher Gesamtgruppengröße, zu signifikanten Ergebnissen zu gelangen, während zusätzlich die Wirkfaktoren klarer zuordenbar sind (Braver & Braver, 1988, S. 150-154).
Auch muss angefügt werden, dass die verwendeten Raumvorstellungstests eventuell zu weit vom dynamischen und immersiven Erleben der Augmented Reality entfernt waren, und eine nicht statische Überprüfung der Raumvorstellung stattfinden hätte sollen (Dünser, 2005, S. 202; Hunt, Pellegrino, Frick, Farr & Alderton, 1988, S. 95-99; Kaufmann et al., 2008). Auch diese Einschränkung könnte in einer Folgestudie anders gelöst werden.
Ganz allgemein ist zum Schulsetting anzumerken, dass es regelmäßig zu unerwarteten Krankenständen, Verschiebungen oder Ausfällen auf Seiten der Schüler*innen kommt, was schnell dazu führt, dass nicht alle Teilnehmer*innen in den geplanten Stunden verfügbar sind.

Für Folgestudien lässt sich erwarten, dass der Einsatz von Augmented Reality im Mathematikunterricht noch weiter und über einen längeren Zeitraum erprobt wird. Idealerweise würden die Schüler*innen durch ein ganzes Semester oder Schuljahr begleitet werden. Dies kann auch etwa im Rahmen von *Aktionsforschung* (Action Research) geschehen, die jeweils von der Mathematiklehrperson durchgeführt wird. Jedoch müsste dann eine Anwendung gefunden bzw. entwickelt werden, die den dadurch entstandenen Erfordernissen entsprechen kann.

Für den zukünftigen Mathematikunterricht lässt sich hoffen, dass es bald noch geeignetere Smartphone-Anwendungen gibt, die das freie Arbeiten mit Augmented Reality ermöglichen. Hierfür wäre sicher ein gesamtheitlicher Ansatz notwendig. So könnte etwa ein Schulbuch direkt in Verbindung mit einer Software entstehen, da so passende Einsatzmöglichkeiten der Software geschaffen sind und eine gegenseitige Abstimmung möglich wäre. Wird hier passend vorgegangen, so ist der Einsatz von Augmented Reality wohl in fast jeder Schulstufe möglich, und muss nicht nur auf einzelne Themen beschränkt sein.
Abschließend soll gesagt sein, dass in der Literatur sehr viele Anwendungsmöglichkeiten von Augmented Reality im Mathematikunterricht aufgezeigt werden, es jedoch auf Softwareseite nur sehr spezifische und eingeschränkte Anwendungen gibt, die diese umsetzen. So ist es bisher nicht gelungen, eine Smartphone-App zu entwickeln, die einen Großteil der erwünschten Funktionen kombiniert und auch in der Handhabung agil einsetzbar ist. Um weitere Forschung in diesem Bereich voranzutreiben, wäre es daher sehr wünschenswert eine Anwendung zu entwickeln, die es schafft viele dieser Funktionen zu kombinieren.

Literatur

Alabdulaziz, M. S. (2021). Covid-19 and the use of digital technology in mathematics education. *Education and Information Technologies*, *26* (6), 7609–7633.

Altinpulluk, H. (2019). Determining the trends of using augmented reality in education between 2006-2016. *Education and Information Technologies*, *24* (2), 1089–1114.

Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. *Presence: teleoperators & virtual environments*, *6* (4), 355–385.

Bacca, J., Baldiris, S., Fabregat, R. & Graf, S. (2014). Kinshuk: international forum of educational technology & society augmented reality trends in education: a systematic review of research and applications. *Educ. Technol*, *17*, 133–149.

Barak, M. & Ziv, S. (2013). Wandering: A web-based platform for the creation of location-based interactive learning objects. *Computers & Education*, *62*, 159–170.

Beckmann, A. (2022). Zur Bedeutung von Augmented Reality im Mathematikunterricht der Sekundarstufen: Eine mathematikdidaktische Diskussion an zentralen unterrichtsrelevanten Aspekten. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung*, *47*, 53–75.

Bennett, G., Seashore, H. & Wesman, A. (1973). *Differential aptitude tests, forms s and t.* The Psychological Corporation, New York.

BMBWF. (2017). *aufgabenpool.at des BMBWF.* Zugriff am 09.07.2022 auf `https://aufgabenpool.at/ahs/`

BMBWF. (2021). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS).* Zugriff am 09.07.2022 auf `https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik`

BMBWF. (2022a). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 09.07.2022.* Zugriff am 09.07.2022 auf `https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ahs.html`

BMBWF. (2022b). *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS).* Zugriff am 09.07.2022 auf `https://www.matura.gv.at/downloads/download/mathematische-grundkompetenzen-fuer-die-srp-in-mathematik-ahs`

Billinghurst, M., Clark, A., Lee, G. et al. (2015). A survey of augmented reality. *Foundations and Trends in Human–Computer Interaction*, *8* (2-3), 73–272.

Billinghurst, M. & Duenser, A. (2012). Augmented reality in the classroom. *Computer*, *45* (7), 56–63.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, *32* (2), 195–232.

Bodner, G. M. & Guay, R. B. (1997). The purdue visualization of rotations test. *The chemical educator*, *2* (4), 1–17.

Bower, M., Howe, C., McCredie, N., Robinson, A. & Grover, D. (2014). Augmented reality in education–cases, places and potentials. *Educational Media International*, *51* (1), 1–15.

Braver, M. W. & Braver, S. L. (1988). Statistical treatment of the solomon four-group design: A meta-analytic approach. *Psychological bulletin*, *104* (1), 150.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19–49). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Buckley, J., Seery, N. & Canty, D. (2018). A heuristic framework of spatial ability: A review and synthesis of spatial factor literature to support its translation into stem education. *Educational Psychology Review*, *30* (3), 947–972.

Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor–analytic studies.* Cambridge University Press.

Chao, W.-H. & Chang, R.-C. (2018). Using augmented reality to enhance and engage students in learning mathematics. *Advances in Social Sciences Research Journal*, *5* (12), 455–464.

Cheng, Y.-L. & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of cognition and development*, *15* (1), 2–11.

Cooper, L. A. (1975). Mental rotation of random two-dimensional shapes. *Cognitive psychology*, *7* (1), 20–43.

Das, K. (2021). Integrating e-learning & technology in mathematics education. *Journal of Information and Computational Science*, *11* (1), 310–319.

Dilling, F., Jasche, F., Ludwig, T. & Witzke, I. (2022). Physische Arbeitsmittel durch Augmented Reality erweitern – Eine Fallstudie zu dreidimensionalen Koordinatenmodellen. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf* *mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien: Eine Auswahl grundlagenorientierter und praxisorientierter Beiträge* (S. 289–306). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Dimitrov, D. M. & Rumrill, P. D. J. (2003). Pretest-posttest designs and measurement of change. *Work*, *20* (2), 159–165.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. J. Cho (Hrsg.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (S. 135–151). Cham: Springer International Publishing.

Dünser, A. (2005). *Trainierbarkeit der Raumvorstellung mit Augmented reality.* TU Wien.

Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, *87* (3), 215–251.

Estapa, A. & Nadolny, L. (2015). The effect of an augmented reality enhanced mathematics lesson on student achievement and motivation. *Journal of STEM education*, *16* (3), 40–48.

Feiner, S., MacIntyre, B. & Seligmann, D. (1993). Knowledge-based augmented reality. *Communications of the ACM*, *36* (7), 53–62.

Galton, F. (1879). Generic images. *The Nineteenth century and after: a monthly review*, *6* (29), 157–169.

Gargrish, S., Mantri, A. & Kaur, D. P. (2020). Augmented reality-based learning environment to enhance teaching-learning experience in geometry education. *Procedia Computer Science*, *172*, 1039–1046.

Garzón, J. & Acevedo, J. (2019). Meta-analysis of the impact of augmented reality on students' learning gains. *Educational Research Review*, *27*, 244–260.

Garzón, J., Pavón, J. & Baldiris, S. (2019). Systematic review and meta-analysis of augmented reality in educational settings. *Virtual Reality*, *23* (4), 447–459.

Geogebra. (2022). Zugriff am 10.07.2022 auf `https://www.geogebra.org/`

Gerlicher, A. & Jordine, T. (2018). Mobile Learning und Mobile Game-based Learning. In C. de Witt & C. Gloerfeld (Hrsg.), *Handbuch Mobile Learning* (S. 161–176). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Glück, J. & Fitting, S. (2003). Spatial strategy selection: Interesting incremental information. *International Journal of Testing*, *3* (3), 293–308.

Glück, J., Kaufmann, H., Dünser, A. & Steinbügl, K. (2005). Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, *24* (1), 4–11.

Greefrath, G., Hertleif, C. & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools - a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *Zdm*, *50* (1), 233–244.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren - Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 11–37). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34* (2), 37–45.

Guay, R. (1997). The purdue visualization of rotations test purdue research foundation. *The Chemical Educator*, *2* (4), 1–17.

Gün, E. T. & Atasoy, B. (2017). The effects of augmented reality on elementary school students' spatial ability and academic achievement. *Egitim ve Bilim*, *42* (191).

Hegarty, M. & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, *32* (2), 175–191.

Hellriegel, J. & Čubela, D. (2018). Das Potenzial von Virtual Reality für den schulischen Unterricht - Eine konstruktivistische Sicht. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung*, 58–80.

Helmerich, M. & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie.* Springer Berlin Heidelberg.

Heymann, H. W. (1996a). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz Weinheim.

Heymann, H. W. (1996b). Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. *Zeitschrift für Pädagogik*, *42* (4), 541–556.

Höffler, T. N. (2010). Spatial ability: Its influence on learning with visualizations - a meta-analytic review. *Educational psychology review*, *22* (3), 245–269.

Hunt, E., Pellegrino, J. W., Frick, R. W., Farr, S. A. & Alderton, D. (1988). The ability to reason about movement in the visual field. *Intelligence*, *12* (1), 77–100.

Hütthaler, M. (2020). Zur Relevanz von Augmented Reality in der Primarstufe aus Sicht angehender Lehrkräfte - Chancen und Herausforderungen beim Einsatz von Augmented Reality. *PH Niederösterreich. Open Online Journ. F. Res. And Education.*

İbili, E., Çat, M., Resnyansky, D., Şahin, S. & Billinghurst, M. (2020). An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3d geometry thinking skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51* (2), 224–246.

Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Hrsg.), *Second international handbook of mathematics education* (S. 75–102). Dordrecht: Springer Netherlands.

Just, M. A. & Carpenter, P. A. (1985). Cognitive coordinate systems: accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological review*, *92* (2), 137–172.

Katsioloudis, P., Jovanovic, V. & Jones, M. (2014). A comparative analysis of spatial visualization ability and drafting models for industrial and technology education students. *Journal of Technology Education*, *26* (1), 88-101.

Kaufmann, H., Csisinko, M., Strasser, I., Strauss, S., Koller, I. & Glück, J. (2008). *Design of a virtual reality supported test for spatial abilities.* TU Wien. Zugriff am 10.07.2022 auf `https://publik.tuwien.ac.at/files/PubDat_170660.pdf`

Kaufmann, H. & Dünser, A. (2007). Summary of usability evaluations of an educational augmented reality application. In *International conference on virtual reality* (S. 660–669).

Kaufmann, H. & Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education with collaborative augmented reality. *Computers & Graphics*, *27* (3), 339–345.

Kozhevnikov, M. & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory & cognition*, *29* (5), 745–756.

Langer, K., Lietze, S. & Krizek, G. C. (2021). Vector AR3-App-A Good-Practice Example of Learning with Augmented Reality. *European Journal of Open, Distance and E-*

Learning, *23* (2), 51–64.

Linn, M. C. & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, *56* (6), 1479–1498.

Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and g. *Human abilities: Their nature and measurement*, *97* (116), 1–19.

Maier, P. H. (1994). *Räumliches Vorstellungsvermögen: Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule.* Frankfurt am Main: Berlin: Bern: New York: Paris: Wien: Lang.

Malle, G., Koth, M., Dorner, C., Woschitz, H., Malle, S. & Salzger, B. (2017). *Mathematik verstehen. 6, Grundkompetenztraining für die Reifeprüfung* (1. Aufl.). Wien: öbv.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2015). *Mathematik verstehen. 6, Schülerbuch, Schülerbuch : Technologie integriert* (1. Aufl.). Wien: öbv.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2018). *Mathematik verstehen. 6, Lösungen* (1. Aufl.). Wien: öbv.

Mann, S. (2002). Mediated reality with implementations for everyday life. *Presence Connect*, *1*, 2002. Zugriff am 10.07.2022 auf `http://wearcam.org/presence_connect/`

Maresch, G. (2013). Spatial ability–the phases of spatial ability research. *Journal for Geometry and Graphics*, *17* (2), 237–250.

Maresch, G. (2014). Strategies for assessing spatial ability tasks. *Journal for Geometry and Graphics*, *18* (1), 125–132.

Maresch, G. (2015). Wie kann die Raumintelligenz gefördert werden? Faktoren, Strategien und geschlechtsspezifische Befunde. *Mathematik im Unterricht*, *6*, 36–56.

Maresch, G. (2018). Wie und was sieht das Gehirn? In *Vortrag bei der 39. Österreichischen Fortbildungstagung für Geometrie.* Strobl.

Maresch, G. (2021). Räumliches Denken. *Informationsblätter der Geometrie*, *40* (1), 23–36.

Milgram, P. & Kishino, F. (1994). A taxonomy of mixed reality visual displays. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, *77* (12), 1321–1329.

Navarro, M. & Siegel, J. (2018). Solomon Four-Group Design. In B. B. Frey (Hrsg.), *The SAGE Encyclopedia of Educational Research, Measurement, and Evaluation* (S. 1553–1554). SAGE Publications, Inc. Thousand Oaks.

Pittalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3d geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in mathematics*, *75* (2), 191–212.

Radu, I. (2014). Augmented reality in education: a meta-review and cross-media analysis. *Personal and Ubiquitous Computing*, *18* (6), 1533–1543.

Ramful, A., Lowrie, T. & Logan, T. (2017). Measurement of spatial ability: Construction and validation of the spatial reasoning instrument for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *35* (7), 709–727.

Reit, X.-R. (2020). Augmented Reality in der analytischen Geometrie: Hat das Potenzial? In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020. 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1305–1308). WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster.

Rost, D. H. (1977). *Raumvorstellung: psychologische und pädagogische Aspekte.* Beltz: Weinheim, Basel.

Ruppert, M. & Wörler, J. (2013). *Technologien im Mathematikunterricht.* Springer Spektrum Wiesbaden.

Schutera, S., Schnierle, M., Wu, M., Pertzel, T., Seybold, J., Bauer, P., … Krause, M. J. (2021). On the potential of augmented reality for mathematics teaching with the application clearmaths. *Education Sciences*, *11* (8), 1–18.

Senselab.io. (2019). *Vektor AR3 by FHTW.* Niederlassung Köln. Zugriff am 10.07.2022 auf `https://play.google.com/store/apps/details?id=com.Senselab.io.VektorARgl=`

Shepard, R. N. & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, *171*, 701–703.

Siller, H.-S. & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In *Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education* (S. 2136–2145).

Solomon, R. L. (1949). An extension of control group design. *Psychological bulletin*, *46* (2), 137–150.

Sutherland, I. E. (1968). A head-mounted three dimensional display. In *Proceedings of* *the December 9-11, 1968, fall joint computer conference, part I.*

Thurstone, L. L. (1950). Some primary abilities in visual thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society*, *94* (6), 517–521.

Wade, N. & Swanston, M. (2013). *Visual perception: An introduction.* Psychology Press.

Wheatley, G. H. (1990). One point of view: Spatial sense and mathematics learning. *The Arithmetic Teacher*, *37* (6), 10–11.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *21* (61), 37–46.

Yovcheva, Z., Buhalis, D. & Gatzidis, C. (2012). Smartphone augmented reality applications for tourism. *E-review of tourism research*, *10* (2), 63–66.

Zobel, B., Werning, S., Metzger, D. & Thomas, O. (2018). Augmented und virtual reality: Stand der Technik, Nutzenpotenziale und Einsatzgebiete. In C. De Witt & C. Gloerfeld (Hrsg.), *Handbuch Mobile Learning* (S. 123–140). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Zöggeler, M. (2019). Räumliches Denken in der Physik. *Delta Phi B 2019*, 1–9.

Zöggeler, M. & Maresch, G. (2018). Raumvorstellungsvermögen und mathematische Kompetenzen Vorstellung einer Studie bei zweitsemestrigen Lehramt-Mathematik-Studierenden. *Mathematik im Unterricht*, *9*, 29–38.

Appendix 1: Unterrichtsmatrix

Pädagogische Hochschule Wien | PH NÖ Pädagogische Hochschule Niederösterreich | universität wien

Zeit	Ziele/zu erreichende Kompetenzen	Geplante Lernschritte	**U-Mittel, Medien, Lern- und Sozialform**
	Die blau hinterlegten Abschnitte sind ausschließlich auf den Unterricht mit Vector AR³ anzuwenden, während die anderen Teile für beide Gruppen (Experimental und Kontrollgruppe) gültig sind.	**1. Stunde**	
5	Über das Projekt informieren, Interesse wecken, sowie die Schüler*innen motivieren bei den Arbeitsaufträgen mitzuarbeiten und gute Leistungen abzuliefern.	Einstieg, Erläuterung der nächsten Schritte, was die nächsten vier Stunden passieren wird und was von den Schüler*innen erwartet wird.	
20	Die App Vector AR³ wird installiert und deren Funktionen können nun selbstständig eingesetzt werden. Nach der Reihe sollen die Schüler*innen die Funktionen selbst anwenden und die Bedienelemente kennenlernen.	Die Schüler*innen laden die App auf ihr Smartphone. (Idealerweise ist das schon teilweise passiert). Es werden Kleingruppen (2-3) gebildet, in denen mindestens ein Mitglied mit funktionierender App ist. Die einzelnen Funktionen werden mit Hilfe einer PPT Präsentation vorgezeigt. Nach der Reihe soll jedes Gruppenmitglied auch das Smartphone in der Hand haben, die Funktionen sehen, selbstständig anwenden und Zeit haben auch das Ergebnis zu beobachten. Zusätzlich gibt es eine kurze Erklärung der englischen Begriffe, sowie ein gemeinsames Anwendungsbeispiel: zwei Vektoren a = (2, -1, 3), b = (-2, 3, 3), Skalarprodukt. Vergleich der Ergebnisse.	Die eigenen Smartphones der Schüler*innen, Präsentation mit Screenshots, um die Anwendungen zu verdeutlichen. Gruppenarbeit in Kleingruppen, App Vector AR³
20	Alle Schüler*innen auf die Arbeitsaufträge vorbereiten. Wissen und Kompetenzen wieder reaktiveren und für die nächsten Stunden einsetzbar machen. Konkret sind das: Summe, Differenz und Vielfache von Vektoren bilden; Skalarprodukt; Geometrische Darstellung der Rechenoperationen für Vektoren (Parallelogrammregel, Differenzregel); Mittelpunk einer Strecke; Schwerpunkt eines Dreiecks; Parallele und normale Vektoren; Betrag eines Vektors;	Nun soll sichergestellt werden, dass Schüler*innen mit Vektoren im R³ vertraut sind und die nachfolgenden Arbeitsschritte erfolgreich absolvieren können. Die Inhalte sind aber bereits vertraut, bei der letzten Schularbeit angewendet worden, und werden hier lediglich reaktiviert und nur oberflächlich besprochen. Es wurde darauf geachtet, dass alle für die Beispiele relevanten Definitionen und Vorstellungen in der Zusammenfassung enthalten sind. Diese soll für die nächsten Stunden auch als Nachschlagwerk dienen.	Die Schüler*innen erhalten eine Zusammenfassung zum Kapitel Vektoren im R³. „Vektoren in R³"

4

Appendix 1: Unterrichtsmatrix

	Einheitsvektor; Winkelmaß von Vektoren; Vektorprodukt; Betrag der Normalprojektion; Volumen eines Parallelepipeds		
5-10	Schüler*innen können das Skalarprodukt und das Winkelmaß mit Vector AR³ berechnen.	Die Schüler*innen arbeiten nun in ihren Kleingruppen und sollen die angegebene Aufgabe gemeinsam lösen. Bei Schwierigkeiten kann hier noch direkt ausgeholfen werden. Darauf achten, dass nicht nur eine Person mit dem Smartphone arbeitet, sondern die gesamte Gruppe.	Beispiel zu Winkelmaß a= (4|1|7), b= (5|5|2) wird an der Tafel angeschrieben
5-10	Schüler*innen können das Vektorprodukt und den Betrag des Vektorproduktes mit Vektor AR³ berechnen.	Die Schüler*innen sollen hier wieder in den Kleingruppen arbeiten. Darauf achten, dass nicht nur eine Person mit dem Smartphone arbeitet.	Beispiel zu Vektorprodukt a= (-2|6|3), b= (3|-2|6) wird an der Tafel angeschrieben
		2. Stunde	
		Eventuelle Fortsetzung der letzten Aufgaben.	
40	Kleingruppen können die Aufgaben des Arbeitsblattes lösen. Also die Aufgaben zu Streckung, Differenz zweier Vektoren, Parallelitätskriterium, Skalarprodukt, Orthogonalitätskriterium, Winkelmaß und Vektorprodukt lösen. Zusätzlich sollten die Fragestellungen zu einzelnen Vorstellungen korrekt beantwortet bzw. beschrieben werden können. Hier muss das Wissen passend angewandt werden, um korrekte Formulierungen zu finden. Bei der Experimentalgruppe beobachten, wie die App eingesetzt wird und gegebenenfalls Impulse für die Anwendung geben.	Wieder sollen die Schüler*innen in Kleingruppen (2-3) arbeiten, und die acht einzelnen Fragestellungen bearbeiten. Darauf achten, dass in jeder Gruppe ein Smartphone mit App ist und nicht nur eine Person mit dem Smartphone arbeitet. Die Gruppenmitglieder sollen sich austauschen und gemeinsam an der Bearbeitung bemüht sein. Alle Rechnungen müssen schriftlich festgehalten werden, und sollen von allen Gruppenmitgliedern gerechnet werden. Die Arbeitsblätter sollen am Ende der Stunde abgesammelt werden. Falls die Schüler*innen deutlich länger benötigen als erwartet, können diese auch noch in der folgenden Stunde fertiggestellt werden. Es ist aber sicher sinnvoll die vollständig bearbeiteten Beispiele zu vergleichen und besprechen. Falls die App nicht unterstützend eingesetzt wird, oder Probleme beim Arbeiten auftauchen, ist es wichtig auszuhelfen. Denn das Hauptziel ist die Bearbeitung mit der App und die Maximierung der Arbeitszeit in der Augmented Reality.	Arbeitsauftrag: „Arbeitsblatt 1“, Smartphone, Vector AR³ Die Gruppen individuell betreuen und Fragen klären. Den Schüler*innen sagen, dass die erbrachten Leistungen nicht bewertet werden, wohl aber die Mitarbeit.
10	Die Schüler*innen teilen ihre Lösungen und können argumentieren warum diese richtig sind. Wichtig ist es hier die Vorstellungen abzufragen und zu überprüfen. Zusätzlich ist relevant, wie hier mit der App gearbeitet wurde. Kurze	Lösungen vergleichen und besprechen. Eventuelle Fragen beantworten. Je nach Fortschritt der Gruppen ist es auch möglich, nur einen Teil in dieser Einheit zu kontrollieren, und in der nächsten Einheit noch damit fortzufahren.	Schüler*innen erklären lassen. Falls die Kontrollgruppe deutlich schneller (als erwartet und als die Experimentalgruppe) mit dem Arbeitsblatt fertig ist, können auch die

5

Appendix 1: Unterrichtsmatrix

	Fragen zu den Funktionen und den Erfahrungen.		Lösungen noch gemeinsam gerechnet und genauer besprochen werden. Lösungen an der Tafel anschreiben
		3. Stunde	
		Eventuelle Fortsetzung, falls etwas unabgeschlossen. Erst anschließend wird weitergearbeitet mit Arbeitsblatt 2. Da Arbeitsblatt 1 einen direkten und niederschwelligen Einstieg in die Verwendung der App bietet, ist dieser Schritt besonders wertvoll.	
40	Gemeinsam können Lösungswegen für die Beispiele gefunden werden. Die Aufgaben sollen Diskussionen und Gespräche unter den Schüler*innen auslösen, sowie reichlich Anwendungsmöglichkeiten für die App bieten. Im Idealfall wird hier noch mehr in der Augmented Reality betrachtet und bearbeitet. Ziel ist es wiederum die Arbeitszeit mit der App und somit in der AR zu maximieren.	Erneut wird in den Kleingruppen (2-3 Personen) gearbeitet und nun sollen drei Beispiele gelöst werden. Diese sind nun deutlich komplexer geschaffen und geben keine direkten Anwendungsaufträge, sondern verlangen kombinatorisches Denken und Anwenden. Besonders für die Experimentalgruppe gilt es, passende Gelegenheiten für die Anwendung der App zu finden. So müssen erst Überlegungen angestellt werden, und dann können Rechenschritte und Veranschaulichungen mit der App rasch erledigt werden. Dadurch soll auch überprüft werden, wie gut sich die App für den „regulären Mathematikunterricht", also einen Mathematikunterricht, der nicht dezidiert an die App angepasst ist, eignet. Einige Gruppen werden hier sicher Denkanstöße benötigen. Dadurch werden die einzelnen Faktoren der Raumvorstellung weiter ausgebildet.	Arbeitsblatt 2, Smartphone, Vector AR³ Kleingruppen arbeiten individuell an den Beispielen. Es gilt auszuhelfen, falls es Schwierigkeiten gibt. Falls sich die Schüler*innen aber überfordert fühlen, kann es auch zu Nachteilen führen. Um die Lernziele zu erreichen ist individuelle Unterstützung wichtig.
10	Vergleichen der Aufgaben und Besprechen von Lösungen. Auch hier sind Begründungen und richtige Argumentationen wichtig. Erklärungen formulieren können und Arbeitsweise am Handy erklären können.	Die Gruppe ohne App (Kontrollgruppe) wird hier sicherlich bei der Vorstellung und somit bei der Bearbeitung der Beispiele mehr Zeit benötigen. Deshalb kann hier auch noch besprochen werden, welche Vorstellungen hilfreich waren oder auch nicht. Auch nachfragen, wie gearbeitet wurde und welche Aufgaben als leicht oder schwer empfunden wurden. Analog kann für die Experimentalgruppe besprochen werden, welche Funktionen hier zum Einsatz kamen und hilfreich waren. Besprechen welche Schritte wie überlegt, bzw. gerechnet wurden.	Schriftliches Festhalten an der Tafel. Argumentieren und begründen lassen.

6

Appendix 2: Formelsammlung und theoretischer Input

1 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Darstellung als Zahlentripel in Form einer Spalte oder einer Zeile:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = (a_1|a_2|a_3)$$

Dieses Zahlentripel bezeichnet man als Vektor aus $\mathbb{R}^3$ oder als Vektor mit den Koordinaten a_1, a_2, a_3.

2 Summe, Differenz und Vielfache für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$

Wie auch im $\mathbb{R}^2$ werden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ komponentenweise addiert und subtrahiert. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

3 Skalarprodukt für Vektoren in $\mathbb{R}^3$

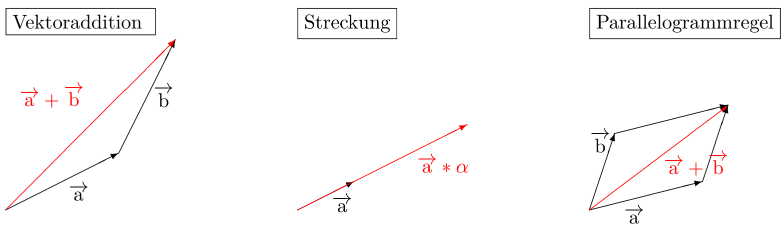
Das Ergebnis des skalaren Produktes oder Skalarproduktes ist eine Zahl, also eben ein Skalar.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

4 Geometrische Darstellung der Rechenoperationen für Vektoren

4.1 Pfeildarstellung der Vektoraddition

Werden zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ durch aneinandergehängte Pfeile im Raum dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren der Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils zum Endpunkt des zweiten Pfeils.



1

Appendix 2: Formelsammlung und theoretischer Input

4.2 Streckungsdeutung der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl α entspricht eine Streckung jedes zugehörigen Pfeils mit dem Faktor α.

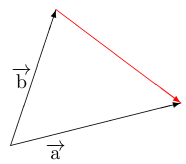
4.3 Parallelogrammregel

Die Summer $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ entspricht dem vom gemeinsamen Anfangspunkt ausgehenden Pfeil entlang der Diagonale des von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

4.4 Differenzregel

Die Differenz $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ entspricht dem Pfeil vom Endpunkt von $\overrightarrow{b}$ zum Endpunkt von $\overrightarrow{a}$.

Differenzenregel



5 Mittelpunk einer Strecke, Schwerpunkt eines Dreiecks

Mittelpunkt der Strecke AB: $M=\frac{1}{2}\cdot(A+B)$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $S=\frac{1}{3}\cdot(A+B+C)$

6 Parallele und normale Vektoren

Parallelitätskriterium: zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann zueinander parallel wenn $\overrightarrow{b}=\alpha\cdot\overrightarrow{a}$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$.
Orthogonalitätskriterium: zwei vom Nullvektor verscheidene Vektoren $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^3$ sind genau dann zueinander normal, wenn das Skalarprodukt $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ ist.

7 Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektros $\overrightarrow{a}=(a_1|a_2|a_3)\in\mathbb{R}^3$ versteht man die reelle Zahl $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$. Geometrisch entspricht das der Länge eines dem Vektor $\overrightarrow{a}$ zugeordneten Pfeils. Zusätzlich gilt für alle $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^3$ und alle $\alpha\in\mathbb{R}:|\alpha\cdot\overrightarrow{a}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{a}|$ und $|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}^2$.

8 Einheitsvektor

Ist $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{o}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, dann heißt der Vektor $\overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\cdot\overrightarrow{a}$ der zugehörige Einheitsvektor. Der Vektor $\overrightarrow{a_0}$ ist zu $\overrightarrow{a}$ parallel, zu $\overrightarrow{a}$ gleich gerichtet und hat den Betrag 1.

2

Appendix 2: Formelsammlung und theoretischer Input

9 Winkelmaß von Vektoren in R^3

Das Maß φ des Winkels, den zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ durch deren Pfeile einschließen, nennt man das Winkelmaß der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Dieses lässt sich bestimmen durch:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

10 Vektorprodukt

Es seien $\overrightarrow{a} = (a_1|a_2|a_3)$ und $\overrightarrow{b} = (b_1|b_2|b_3)$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Der Vektor

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

heißt Vektorprodukt der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Der Betrag von $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt eines von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Zusätzlich steht der Vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ normal auf $\overrightarrow{a}$ und auf $\overrightarrow{b}$. Die Orientierung hängt von davon ab, ob die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden.

11 Betrag der Normalprojektion

Für alle von $\overrightarrow{o}$ verschiedenen Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\overrightarrow{a_b}| = \frac{|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|}$$

12 Volumen eines Parallelepipeds, Spatprodukt

Für das Volumen V eines von den Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds gilt:

$$V = |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}|$$

3

Appendix 3: Arbeitsblatt 1

Name:

Arbeitsauftrag zu Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{a}$ = (4 | -3 | 2) und $\overrightarrow{b}$ = (1 | 0 | -2).
Aufgabenstellung: Ermittle den Vektor $\overrightarrow{c}$, mit $\overrightarrow{c} = 3 \cdot \overrightarrow{a} - 2 \cdot \overrightarrow{b}$. Sowie den Vektor $\overrightarrow{d}$, mit $\overrightarrow{d} = 2 \cdot \overrightarrow{b} - 3 \cdot \overrightarrow{a}$. Wie hängen diese zusammen?

$\overrightarrow{c}$= ____________________ $\overrightarrow{d}$= ____________________

____

Aufgabe 2

Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{g}$ = (1,3 | -1,5 | 0,7) und $\overrightarrow{h}$ = (x | y | z).
Aufgabenstellung: Ermittle die fehlenden Koordinaten so, dass $\overrightarrow{h} = 5 \cdot \overrightarrow{g}$. Wie stehen $\overrightarrow{h}$ und $\overrightarrow{g}$ sicher zueinander?

$\overrightarrow{h}$ = ____________________

____

Aufgabe 3

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{a}$ = (1,4 | -2,8 | -6,2).
Aufgabenstellung: Kreuze die beiden Vektoren an, die parallel zu $\overrightarrow{a}$ sind.

- ○ $\overrightarrow{p}$ = (-2,8 | -6,2 | 1,4)
- ○ $\overrightarrow{m}$ = (1,4 | 2,8 | 6,2)
- ○ $\overrightarrow{c}$ = (2,1 | -4,2 | -9,3)
- ○ $\overrightarrow{v}$ = (-0,7 | 1,4 | 3,1)
- ○ $\overrightarrow{r}$ = (2 | 1 | 0)

Aufgabe 4

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{b} = (\frac{1}{4} \mid \frac{4}{5} \mid -\frac{7}{10})$
Aufgabenstellung: Kreuze die beiden Vektoren an, die normal zu $\overrightarrow{b}$ sind.

- ○ $\overrightarrow{g}$ = (4 | -1,25 | 0)
- ○ $\overrightarrow{d} = (-\frac{1}{4} \mid -\frac{4}{5} \mid \frac{7}{10})$
- ○ $\overrightarrow{k} = (\frac{4}{10} \mid \frac{5}{10} \mid \frac{5}{7})$
- ○ $\overrightarrow{t} = (\frac{5}{20} \mid \frac{16}{20} \mid -\frac{14}{20})$
- ○ $\overrightarrow{f}$ = (-0,5 | -1,6 | 1,4)

Appendix 3: Arbeitsblatt 1

Name:

Aufgabe 5

Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{e}$ = (-6 | -2,5 | 4,5) und $\overrightarrow{f}$ = (4,2 | 1,75 | -3,15).
Aufgabenstellung: Ermittle $r \in \mathbb{R}$ so, dass $r \cdot \overrightarrow{e} = \overrightarrow{f}$. Was lässt sich über $\overrightarrow{e}$ und $\overrightarrow{f}$ sagen? Überlege, wie diese Vektoren im Raum stehen.

r = ______________________________

____

Aufgabe 6

Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge a und der Höhe h hat die Spitze S. Die Eckpunkte A, B, C und D der Grundfläche sind nicht eindeutig bestimmt. **Aufgabenstellung:** Gib eine Möglichkeit für die Wahl der Koordinaten von A, B, C und D an.
S = (5 | 5 | 5), a = 4, h = 8

____

Aufgabe 7

Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{h}$ = (-2 | -1 | 1) und $\overrightarrow{j}$ = (4 | 0 | 3).
Aufgabenstellung: Ermittle den eingeschlossenen Winkel und bestimme einen Vektor der zu $\overrightarrow{h}$ und $\overrightarrow{j}$ normal ist.

φ = ____

$\overrightarrow{n}$ = ____

Aufgabe 8

1) Wie addierst und subtrahierst du Vektoren in $\mathbb{R}^3$? Gibt es Ähnlichkeiten zu $\mathbb{R}^2$? Wie werden Vielfache von Vektoren gebildet?

____

2) Wie berechnest du den Betrag eines Vektors in $\mathbb{R}^3$?

____

3) Wie berechnest du das Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$?

____

4) Wie lässt sich das Winkelmaß zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen?

____

5) Wie ist das Vektorprodukt zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ definiert? Welche Eigenschaften besitzt es?

____

6) Wie kannst du in $\mathbb{R}^3$ einen Vektor ermitteln, der zu zwei von $\overrightarrow{o}$ verschiedenen Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ normal ist (und auch selbst nicht $\overrightarrow{o}$ ist)? Was lässt sich über Betrag und Richtung dieses Vektors aussagen?

____

Appendix 4: Arbeitsblatt 2

Name:

Arbeiten mit Vektoren in R³

Aufgabe 1

Finde geeignete Koordinaten:
Ein Dreieck wird von den Spitzen der drei Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ aufgespannt. $\overrightarrow{a} = (r|0|s)$, $\overrightarrow{b} = (r|r|r)$, $\overrightarrow{c} = (0|s|r)$ und $r, s \in \mathbb{R}$ (r und s nicht beide 0).

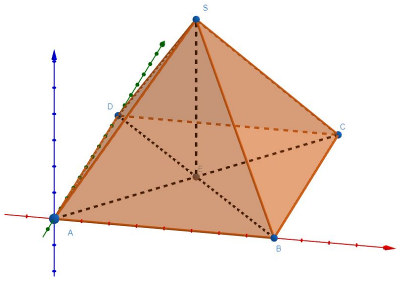
1. Zeige, dass das Dreieck gleichschenkelig ist!
2. Gib geeignete Zahlenwerte für r und s an, sodass das Dreieck gleichseitig ist!
3. Gib geeignete Zahlenwerte für r und s an, sodass das Dreieck spitzwinkelig ist!
4. Gib geeignete Zahlenwerte für r und s an, sodass das Dreieck stumpfwinkelig ist!
5. Zeige, dass das Dreieck für $r = 1$ und $s = -1$ nicht rechtwinkelig ist!
6. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks!
7. Gib geeignete Zahlenwerte für r und s an, sodass das Dreieck den Schwerpunkt S=(2|2|3) hat!
8. Gib für $r = 1$ und $s = -1$ einen Vektor an, der auf das zugehörige Dreieck normal steht und den Betrag $2\sqrt{21}$ hat!

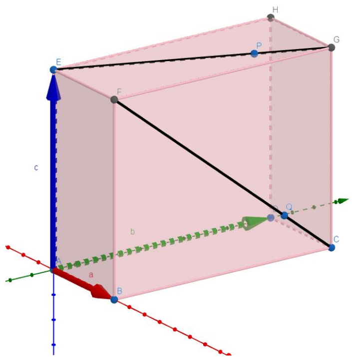
Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt eine gerade, rechteckige Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = \overline{\mathrm{AB}}$ und $b = \overline{\mathrm{BC}}$ und der Höhe h.
Gib die Koordinaten der dargestellten Pyramideneckpunkte A, B, C, D, S an und drücke h in Abhängigkeit von a und b so aus, dass die Seitenkanten AS und CS normal aufeinander stehen.

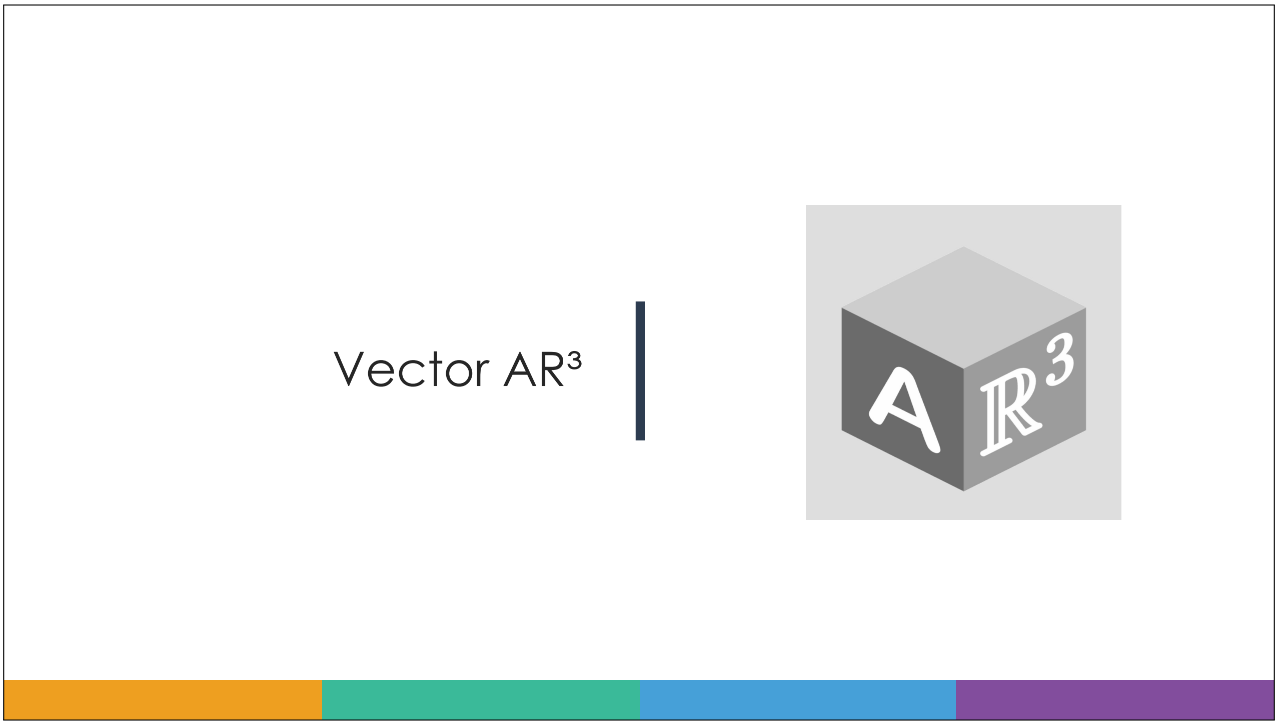
Aufgabe 3

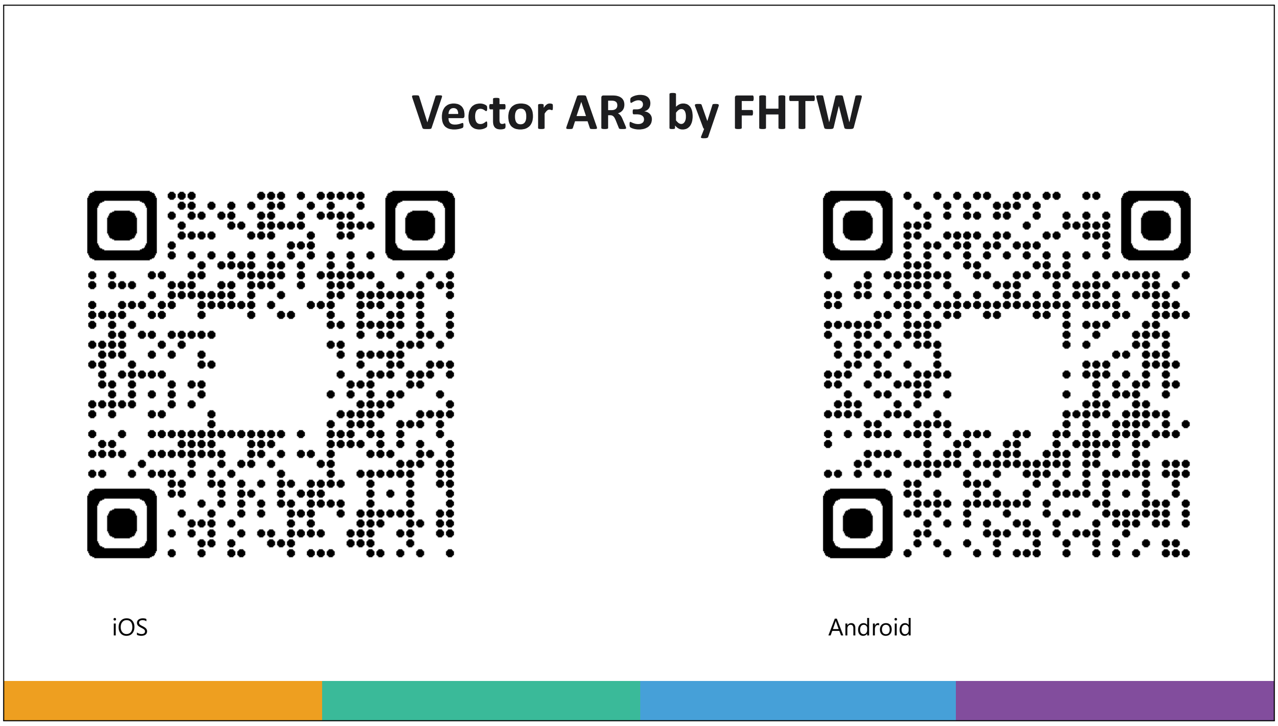
Ein Quader mit der Grundfläche ABCD und der Deckfläche EFGH wird von den Vektoren $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$ aufgespannt.
Der Punkt P teilt die Flächendiagonale EG im Verhätnis 3:2 und der Punkt Q teilt die Fächendiagonale FC im Verhältnis 4:1. Drücke den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ durch $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ aus!



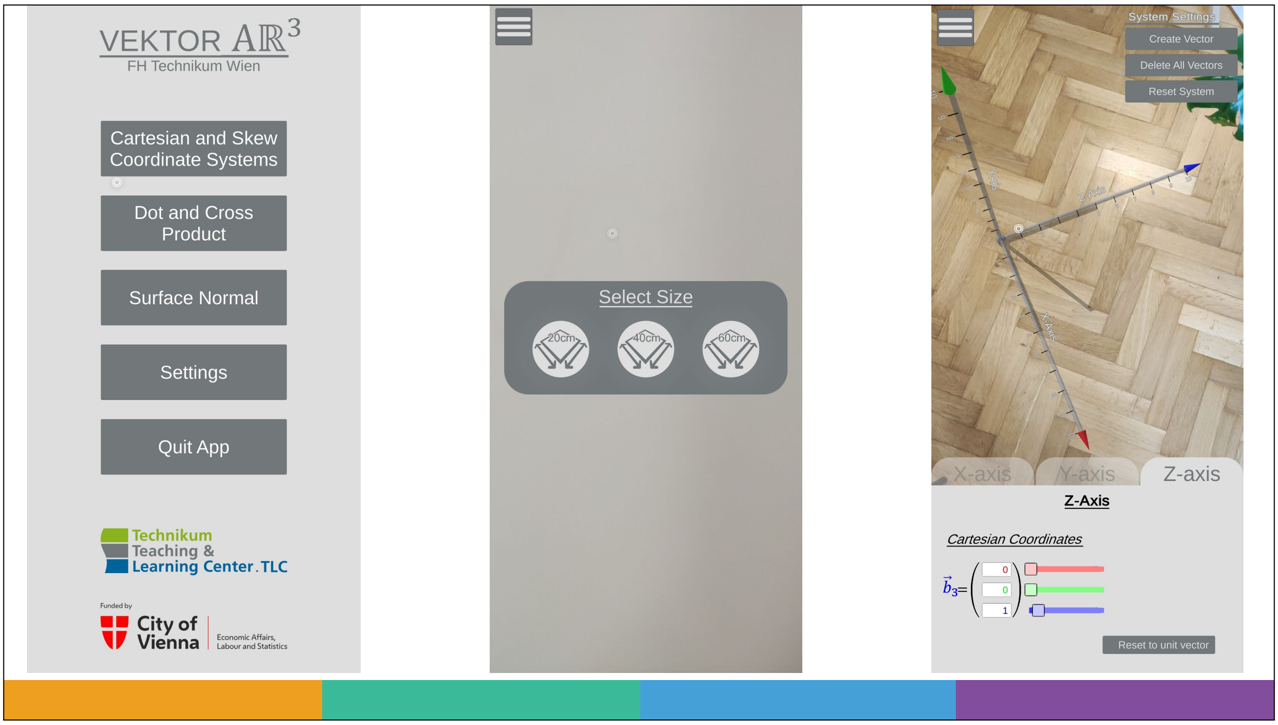


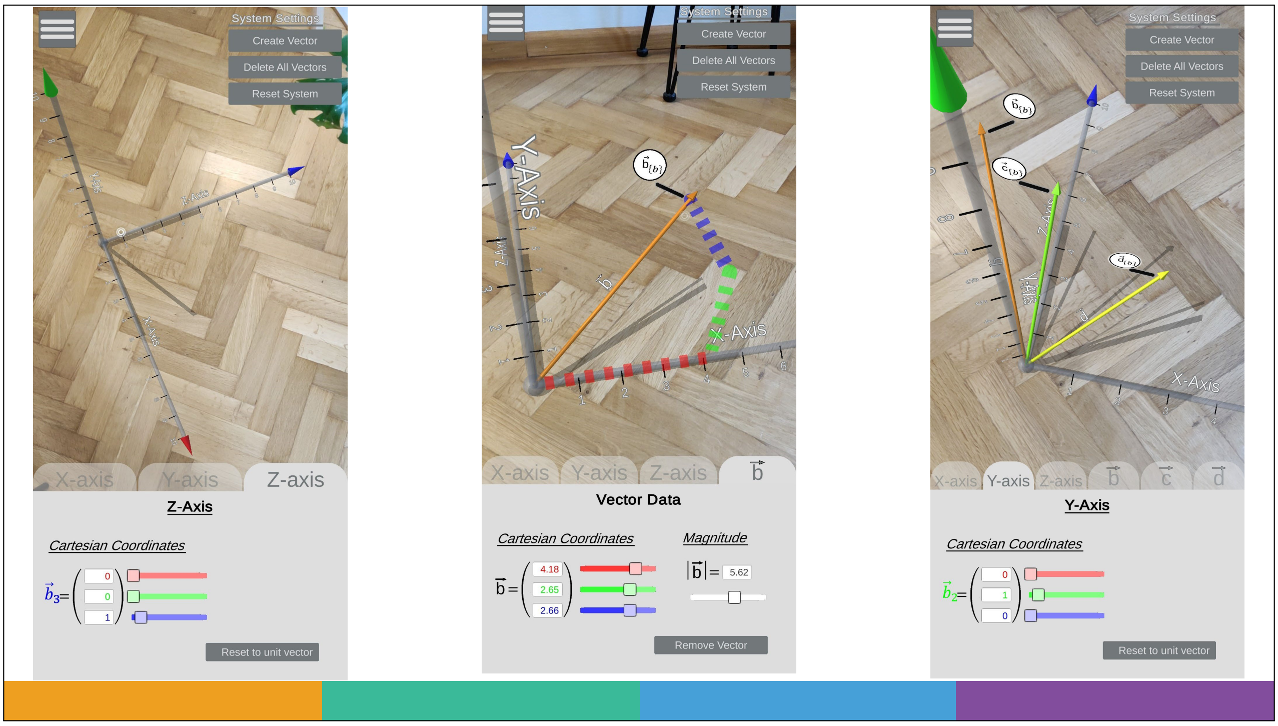
Appendix 5: PowerPoint Präsentation



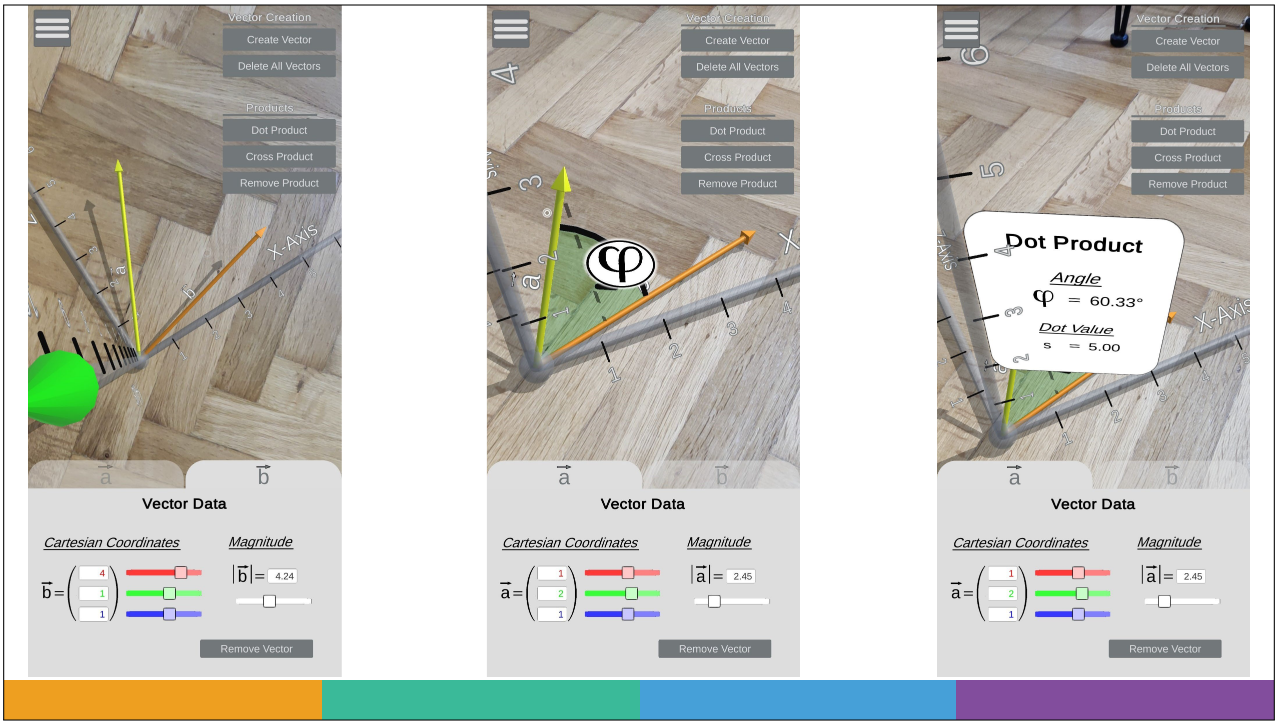


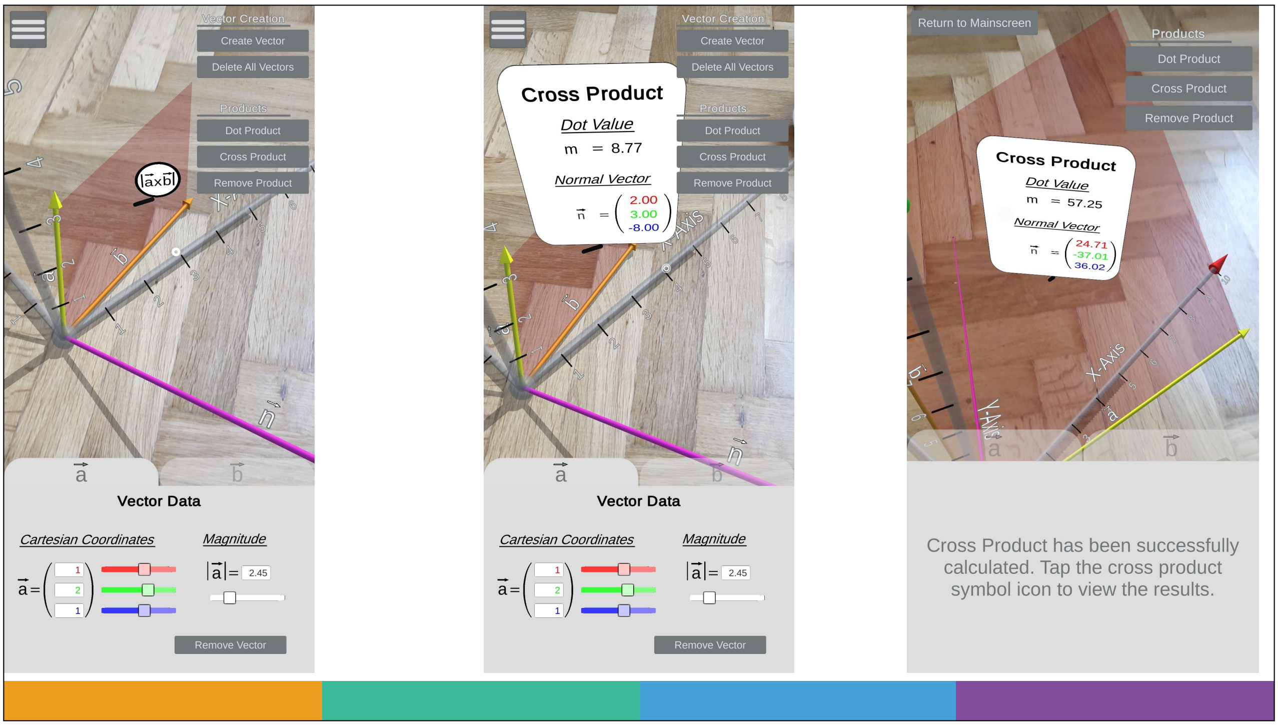
Appendix 5: PowerPoint Präsentation





Appendix 5: PowerPoint Präsentation





Appendix 6: Antworten des Fragebogen der Experimentalgruppe

Bitte den Persönlichen Code im Textfeld darunter einfüllen.	Ich habe teilgenommen an der ... (alle zutreffenden ankreuzen)	Wie war das Arbeiten mit der App?
JB04102212	1. Testung, 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
IV12101811	1. Testung, 2. Testung	1
LI07022804	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
LC19122904	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	5
DK18022411	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Testung	2
BA16090605	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
BS17021504	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
KM01020507	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
KG11012607	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
MM06010105	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
BN02063107	1. Testung, 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	5
JY03061503	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
AI11043011	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
BK30090303	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
NP18091402	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
VF17091508	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	1
M111030801	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
JM14020810	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
VA01070904	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
KW16040704	1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	1
AM03102107	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
OD05080806	3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2)	2
ME27080810	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3

Gab es beim Arbeiten mit der App technische Probleme?	Wie hilfreich war die App beim Lösen der Aufgaben?	Die App ist ...	Die App ist ...	Die App ist ...	Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit der App auf Ihre Raumvorstellung?
1	1	3	2	2	2
1	1	1	1	1	2
4	4	3	2	5	5
1	2	3	2	1	1
4	2	5	2	6	5
3	5	2	2	4	6
3	6	4	4	6	6
5	2	4	4	2	2
2	5	2	2	3	5
1	5	4	2	4	5
2	6	4	3	2	6
5	2	3	3	4	4
3	2	3	1	4	2
2	5	4	4	4	5
3	5	3	2	2	3
1	2	2	2	2	3
1	1	2	4	2	3
3	2	3	4	2	3
2	3	2	4	5	3
2	6	2	3	5	6
1	2	2	1	1	2
4	2	3	2	3	3
3	3	2	1	1	3

Appendix 6: Antworten des Fragebogen der Experimentalgruppe

Allgemeines Feedback zur App (Schlagworte oder ganze Sätze)
Die Verwendung der App hat es mir deutlich erleichtert, die Vektoraufgaben zu lösen -> ich denke, dass es vielen ähnlich ging und denke, dass es gut wäre sie im Unterricht einzubauen.
Sehr nützlich!
Die App war grundsätzlich einfach zu verwenden, dennoch finde ich, dass es für den Unterricht/Lösen von Aufgaben bessere Alternativen gibt.
Ich denke, dass etwas wie Geogebra mehr helfen würde, da es in der App umständlich ist 24/7 das Handy auf die Konstruktion zu halten und zu drehen bzw. aus einer anderen Perspektive aus zu betrachten.
Es verwirrt eher als dass es hilft
es hat meistens nicht funktioniert ein koordinatensystem einzublemden
Gutes Prinzip, hat aber noch mehr Potenzial
Eine sehr schöne Idee, die mit ein wenig mehr Entwicklung und Überarbeitung sehr gut zu verewenden ist.
Unterstützt nicht alle geräte
Interessante Konzepte aber ein bisschen umständlich
Ist hilfreich um es sich bei gewissen Beispielen besser vorstellen zu können und auch praktisch für das Kreuzprodukt
Gute idee!
Ich finde das Design kann überarbeitet werden. Sonst eine sehr hilfreiche App
eig hilfreich
Ganz gut. Es hat nur gestört, dass das Koordinatensystem verschwunden ist, wenn man es nicht im Bildschirm gehalten hatte
ist ok aber braucht man glaube ich nicht wegen geogebra
War in Ordnung
besser zum kontrollieren als zum Aufgaben lösen

Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung	Ich fand die Tests... [DAT (Faltungen)]
Am Anfang wusste ich nicht, wie man den Vektor aufbaut, doch das hat sich schnell geklärt.	Schwer
	Leicht
	Sehr leicht
	Ich weiß nicht.
/	Sehr leicht
Man wusste nicht was die App alles kann bzw. wo die App nützlich ist und wo nicht	Ich weiß nicht.
	Leicht
	Leicht
Alles klar	Leicht
Alles klar	Leicht
	Schwer
	Leicht
Eigentlich nichts die Arbeitsaufträge waren verständlich und sonst konnte man nachfragen	Schwer
Für normale Beispiele die man händisch lösen muss bringt es meines Erachtens nicht viel und wenn nur wenn man dich länger damit auseinander setzt	Schwer
Da man alle Vektoren,generell alles,immer manuell eingeben musst hat die Vorbereitung bevor man zur eigentlichen Aufgabe oder dem Rechenschritt gekommen ist immer einige Zeit gedauert.	Schwer
	Sehr leicht
	Schwer
	Ich weiß nicht.
	Sehr leicht
	Sehr Schwer
Alles verständlich	Leicht
	Leicht
	Schwer

Appendix 6: Antworten des Fragebogen der Experimentalgruppe

Ich fand die Tests... [PSVT:R (Rotationen)]	Ich fand die Tests... [SOT (Raumorientierung)]	Ich bin mir sicher, dass ich meine Leistung bei der zweiten Testung gegenüber der ersten Testung verbessern konnte.
Leicht	Sehr leicht	Ja
Schwer	Sehr leicht	Unsicher
Sehr leicht	Sehr leicht	Ja
Ich weiß nicht.	Ich weiß nicht.	Unsicher
Leicht	Sehr leicht	Ja
Schwer	Leicht	Unsicher
Schwer	Sehr leicht	Unsicher
Schwer	Leicht	Unsicher
Leicht	Sehr leicht	Unsicher
Schwer	Leicht	Unsicher
Leicht	Sehr Schwer	Unsicher
Schwer	Leicht	Unsicher
Ich weiß nicht.	Schwer	Unsicher
Ich weiß nicht.	Sehr leicht	Unsicher
Leicht	Leicht	Unsicher
Schwer	Leicht	Unsicher
Sehr Schwer	Leicht	Ja
Leicht	Schwer	Unsicher
Schwer	Leicht	Ja
Schwer	Schwer	Unsicher
Schwer	Leicht	Ja
Schwer	Leicht	Ja
Sehr Schwer	Schwer	Unsicher

Eigene Einschätzung: Ich war bei der zweiten Testung der Raumvorstellungen besser als .... % in der Klasse. Bitte als ganze Zahl eintragen (z.B.: 90 oder 25).
50
25
80
10
85
10
50
50
70
60
15
30
35
10
30
50
43
10
40
0
35
50
20

Appendix 6: Antworten des Fragebogen der Experimentalgruppe

Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung	Geschlecht	Mathematiknote im letzten Schuljahr (2020/21)	Mathematiknote im letzten Semester (Februar 2022).
-	männlich	1	1
	weiblich	4	5
	männlich	3	2
	weiblich	5	5
Manchmal konnte man nur schwer die Rotationen nachvollziehen	männlich	3	4
Ich glaube, dass es nicht viel mit der App zusammenhängt (raumdarstellung) etc., sondern, ob man einen schlechten Tag hat etc..	männlich	1	1
Bei den Rotationsachsen waren die Auswahlmöglichkeiten manchmal etwas unklar also ich fand es teilweise schwierig eine genaue Figur zu erkennen	weiblich	2	2
	weiblich	1	2
Alles klar	männlich	2	1
Alles klar	männlich	1	3
	weiblich	3	4
	männlich	5	5
Ich fand die Testungen haben etwas zu viel erwartet ohne davor etwas etabliert zu haben	männlich	3	3
/	weiblich	2	4
	weiblich	2	3
	weiblich	1	2
	männlich	4	5
	weiblich	5	5
	weiblich	2	3
	weiblich	2	2
	männlich	2	3
	männlich	1	3
	weiblich	3	4

Appendix 7: Antworten des Fragebogen der Kontrollgruppe

Bitte den Persönlichen Code im Textfeld darunter einfüllen.	Ich habe teilgenommen an der ... (alle zutreffenden ankreuzen)	Wie waren die Aufgaben der Arbeitsblätter?
DG08092502	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
JR02071809	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
MJ12445678	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	2
EE01091711	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
ZG10200417	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3
AJ20052002	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	5
AK26042109	1. Testung, 1. Mathematikstunde (Einführung zur App), 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
NJ22071910	1. Testung, 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	4
DO18073004	1. Testung, 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1), 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2), 2. Testung	3

Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit den Arbeitsblättern auf Ihre Raumvorstellung?	Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung	Ich fand die Tests... [DAT (Faltungen)]	Ich fand die Tests... [PSVT:R (Rotationen)]
4	/	Ich weiß nicht.	Leicht
3		Ich weiß nicht.	Ich weiß nicht.
5	Bei den roationen war das bild manchmal nicht gut zu erkennen	Sehr leicht	Leicht
4		Schwer	Schwer
2		Schwer	Schwer
6	Wieso Vektoren wiederholt wurden und nicht Rotation oder generelle Raumvorstellung	Schwer	Leicht
3	Aufgaben Stellungen der Arbeitsblätter	Sehr leicht	Schwer
4		Leicht	Leicht
4		Ich weiß nicht.	Ich weiß nicht.

Ich fand die Tests... [SOT (Raumorientierung)]	Ich bin mir sicher, dass ich meine Leistung bei der zweiten Testung gegenüber der ersten Testung verbessern konnte.
Sehr leicht	Unsicher
Ich weiß nicht.	Unsicher
Leicht	Ja
Leicht	Unsicher
Schwer	Ja
Sehr Schwer	Nein
Leicht	Unsicher
Leicht	Unsicher
Leicht	Unsicher

Mathematiknote im letzten Schuljahr (2020/21)	Mathematiknote im letzten Semester (Februar 2022).
5	3
4	5
4	5
2	2
2	1
4	5
3	5
2	1
4	1

Eigene Einschätzung: Ich war bei der zweiten Testung der Raumvorstellungen besser als .... % in der Klasse. Bitte als ganze Zahl eintragen (z.B.: 90 oder 25).	Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung	Geschlecht
30	/	weiblich
25		männlich
85		männlich
10		männlich
17		männlich
10		männlich
20		weiblich
15		weiblich
10		weiblich

Appendix 8: Kurzversion des DAT

Differential Aptitude Test

Space Relations

DAT:SR

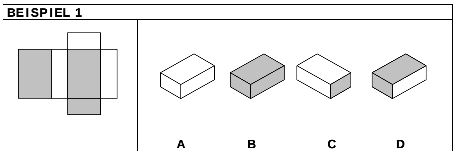
Bitte öffnen Sie dieses Testheft nicht, bevor Sie dazu aufgefordert werden!

Anleitung:

Die Aufgaben dieses Tests bestehen aus Faltvorlagen mit Schattierungen oder Mustern. Diese Faltvorlagen können zu 3-dimensionalen Figuren gefaltet werden. Jede Aufgabe zeigt eine Faltvorlage und vier 3-dimensionale Figuren. Wählen Sie diejenige Figur aus, welche aus der Faltvorlage erstellt werden kann. Dann markieren Sie die Lösung auf Ihrem Antwortbogen.

Betrachten Sie nun das Beispiel 1:

BEISPIEL 1

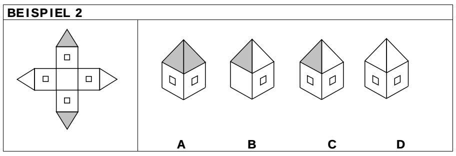


Die Faltvorlage zeigt immer die *Außenseite* der gefalteten Figur. Jede Antwortfigur hat die korrekte Form, aber nur *eine* Figur kann aus der Faltvorlage erstellt werden.

Schauen Sie auf die Antwortfiguren A, B, C und D. Nur eine von diesen kann aus der Vorlage erstellt werden. Die richtige Antwort ist für Beispiel 1 auf Ihrem Antwortbogen markiert.

Betrachten Sie nun das Beispiel 2:

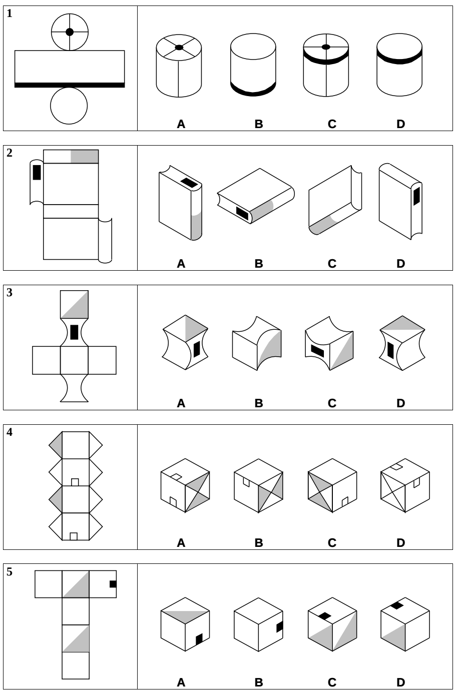
BEISPIEL 2



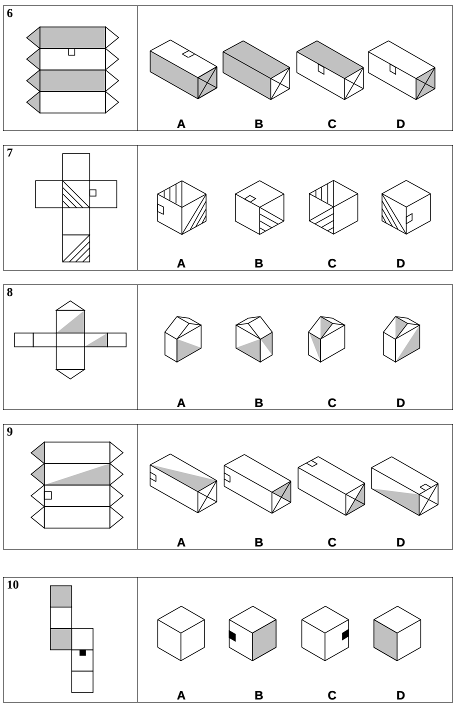
Betrachten Sie die Antwortfiguren A, B, C und D. Nur eine von diesen kann aus der Faltvorlage erstellt werden. Die richtige Antwort ist C. Markieren Sie C für Beispiel 2 in Ihrem Antwortbogen.

Bitte schreiben Sie nichts in dieses Testheft! Markieren Sie bitte Ihre Antworten nur auf Ihrem **Antwortbogen**!
Beginnen Sie erst dann, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

- 2 -

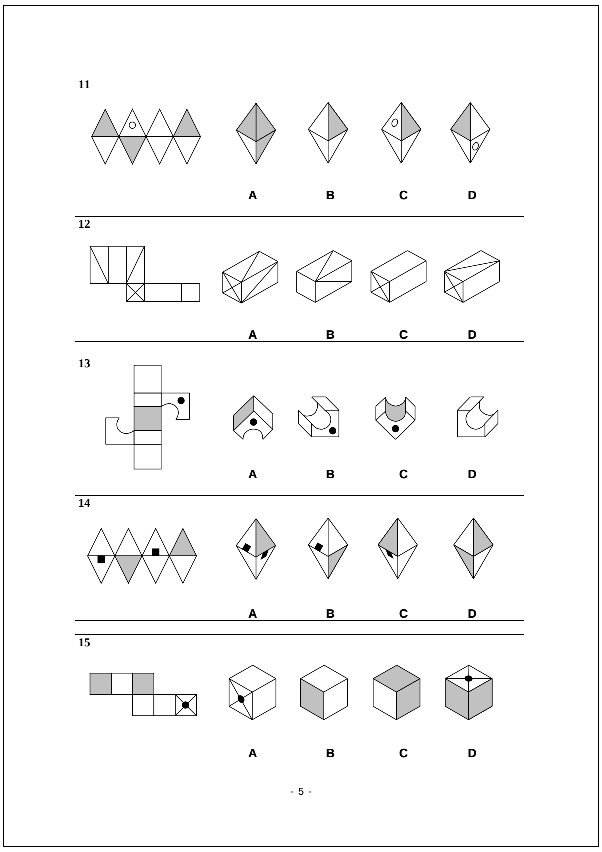


- 3 -



- 4 -

Appendix 8: Kurzversion des DAT



Appendix 9: Kurzversion des PSVT:R

PSVT:R

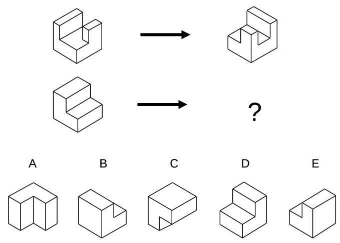
Purdue Spatial Visualization Test

Visualization of Rotations

Bitte öffnen Sie dieses Testheft nicht bevor Sie dazu aufgefordert werden!

Anleitung:

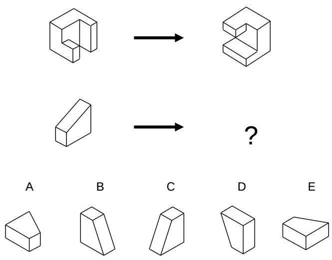
Dieser Test prüft, wie gut Sie sich die Drehung von dreidimensionalen Objekten vorstellen können. Unten sehen Sie ein Beispiel für eine solche Aufgabe.
Sie sehen in der oberen Zeile dasselbe Objekt in 2 verschiedenen Positionen. Finden Sie heraus, wie das Objekt von der ersten in die zweite Position gedreht wurde.
Nehmen Sie beim Objekt in der Zeile darunter dieselbe Drehung vor.
Wählen Sie aus den fünf Lösungsmöglichkeiten (A, B, C, D oder E) diejenige Position aus, die sich aus dieser Drehung ergibt.



Welche ist die Antwort für das obige Beispiel. Die richtige Lösung ist auf Ihrem Antwortbogen markiert.
Beachten Sie, dass es bei jeder Aufgabe nur eine richtige Antwort gibt.

2

Nun betrachten Sie das nächste Beispiel. Wie sieht dieses Objekt aus, wenn es wie das obere gedreht wird.

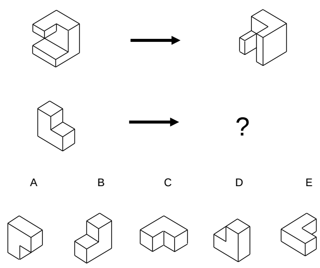


Beachten Sie, dass die vorgegebene Drehung in diesem Beispiel komplexer ist. Markieren Sie die richtige Antwort auf Ihrem Antwortbogen.

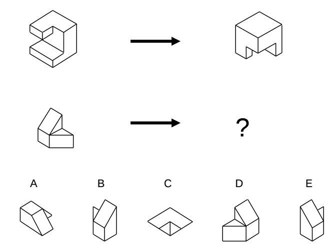
Bitte schreiben Sie nichts in dieses Testheft! Markieren Sie bitte Ihre Antworten nur auf Ihrem Antwortbogen!
Beginnen Sie erst dann, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

3

1



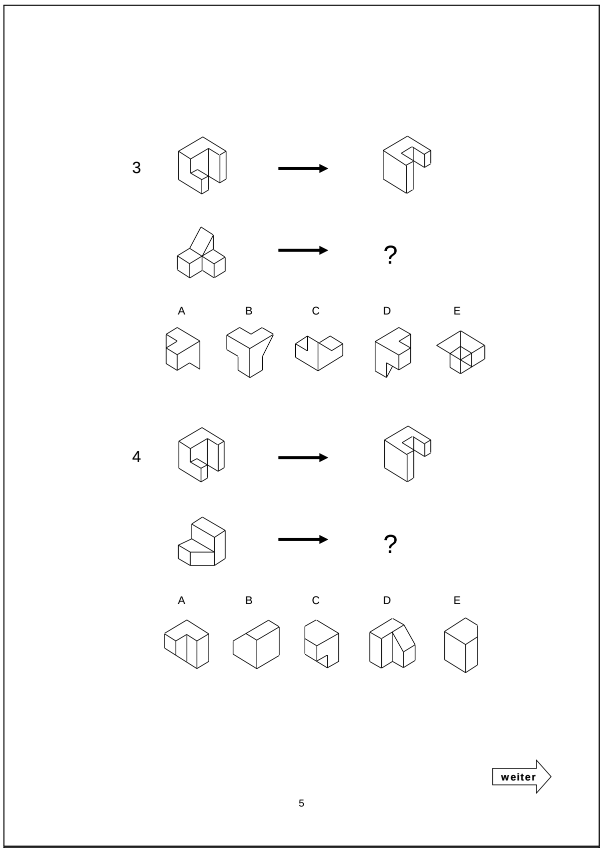
2

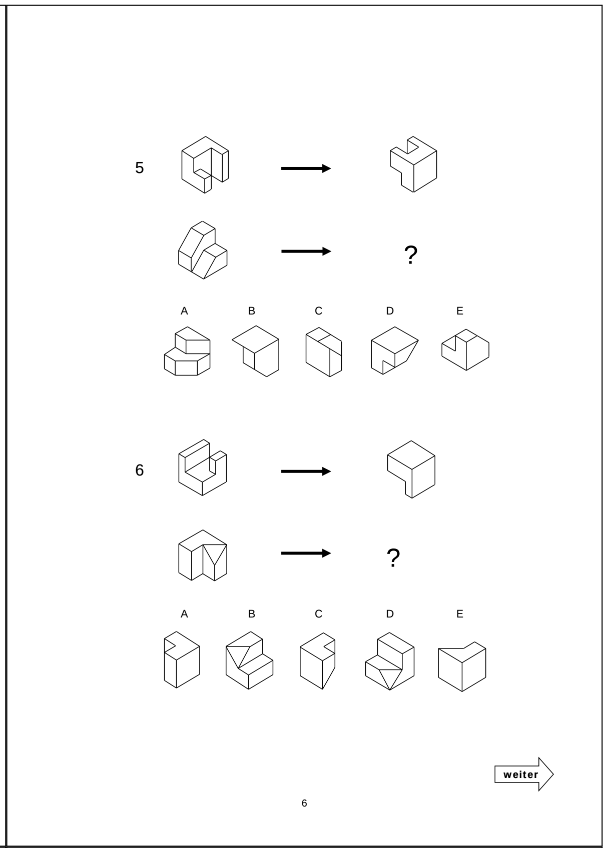


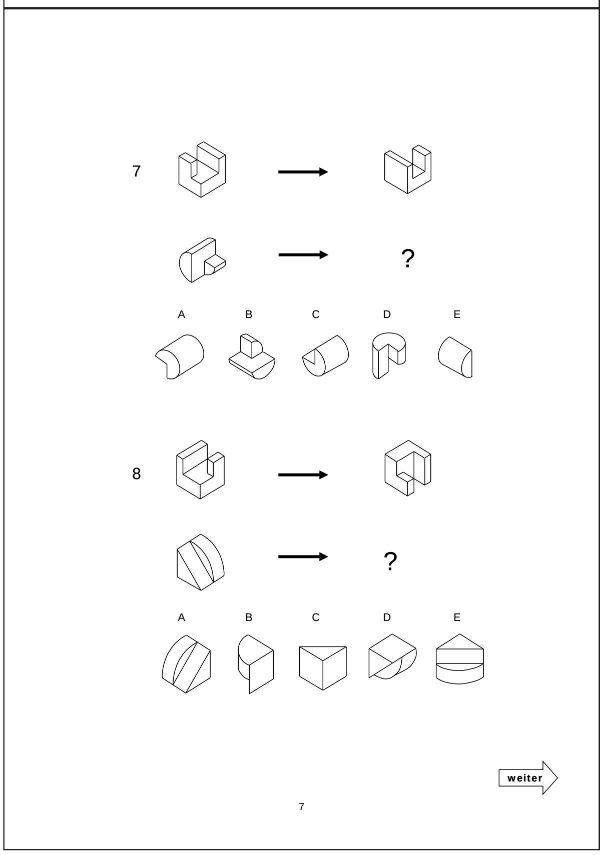
weiter

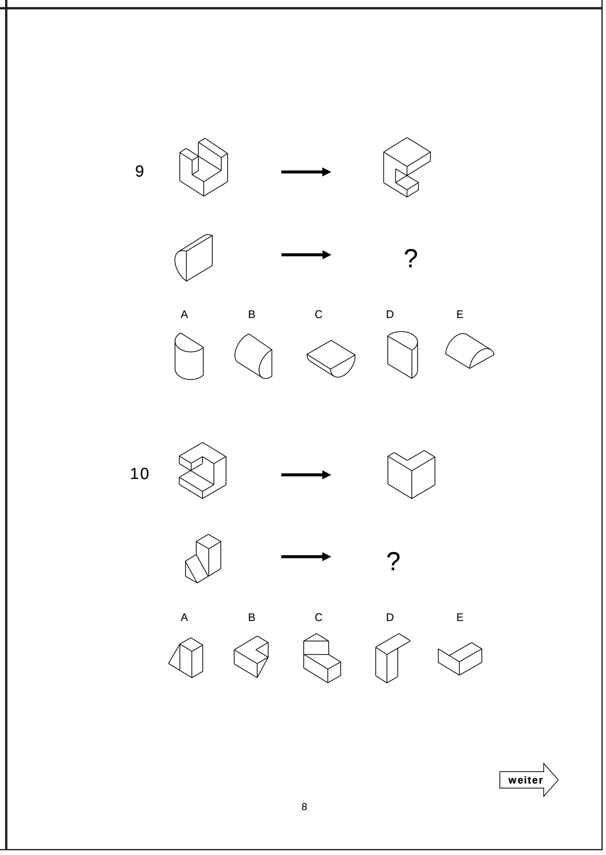
4

Appendix 9: Kurzversion des PSVT:R

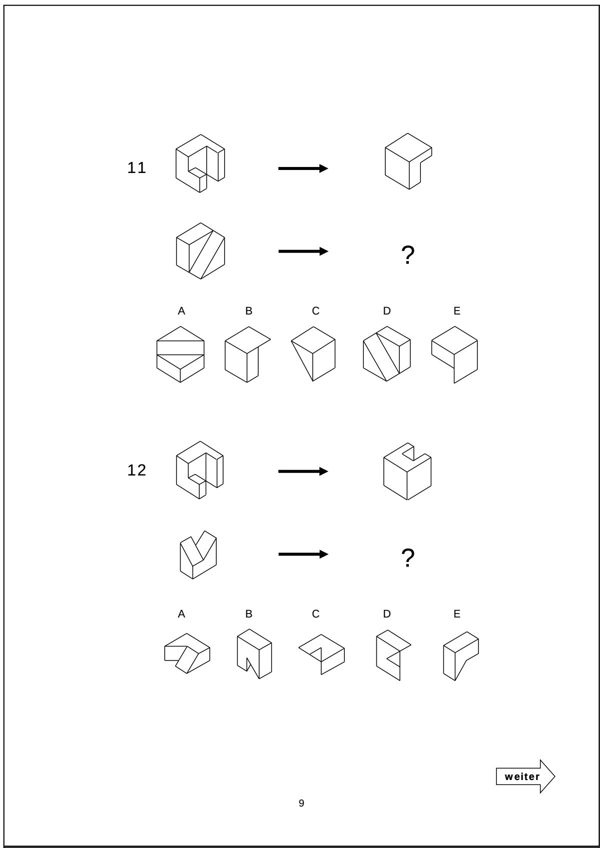


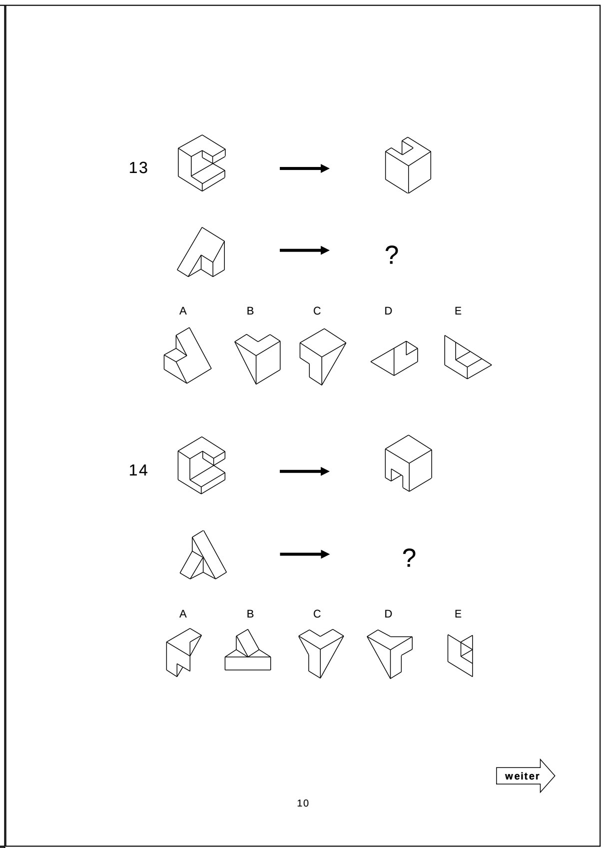


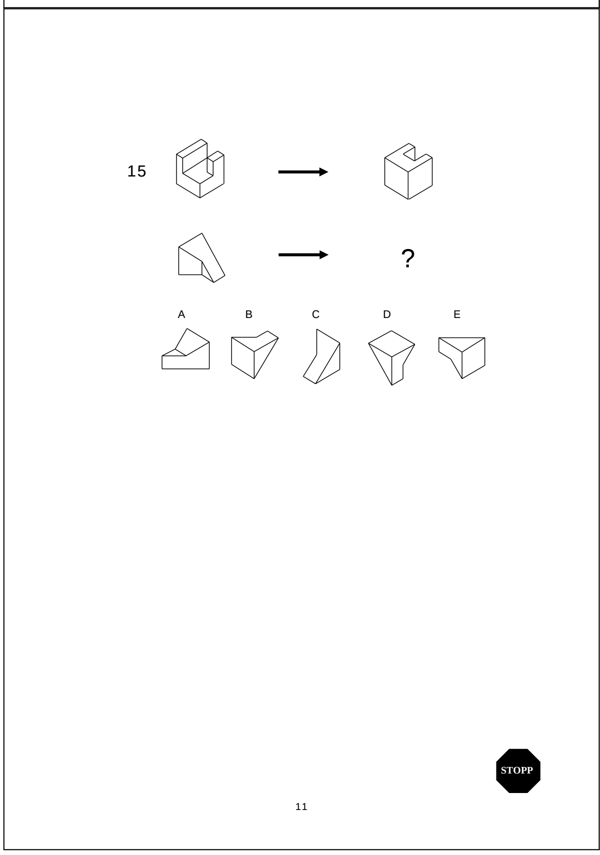




Appendix 9: Kurzversion des PSVT:R







Appendix 10: Kurzversion des SOT

Spatial Orientation Test

SOT

Bei diesem Test gibt es keinen Antwortbogen.

Bitte markieren Sie Ihre Antworten direkt in diesem Testheft!

Persönlicher Code

1:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter	z.B. „M" für „Maria"
2:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihres Vaters	z.B. „J" für „Josef"
3:	Geburtstag und -monat Ihrer Mutter	z.B. „0" „5" „1" „1" für 05. November
4:	Geburtstag und -monat Ihres Vaters	z.B. „2" „4" „0" „8" für 24. August

1	2	3	4

Bitte öffnen Sie dieses Testheft nicht, bevor Sie dazu aufgefordert werden!

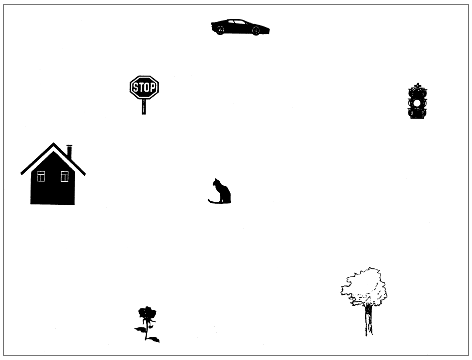
Anleitung:

Dieser Test misst Ihre Fähigkeit, sich verschiedene Perspektiven oder räumliche Orientierungen vorstellen zu können.

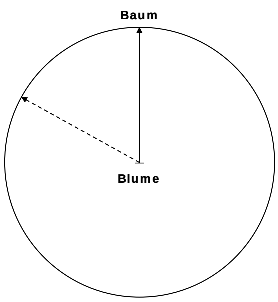
Auf jeder Seite sehen Sie ein Bild mit mehreren Objekten. Bei jeder Aufgabe sollen Sie sich vorstellen, bei einem dieser Objekte zu stehen und von dort zu einem anderen Objekt zu blicken. Dann sollen Sie bestimmen, in welcher Richtung von dieser Position aus ein drittes Objekt liegt und diese Richtung im vorgegebenen Kreis einzeichnen.

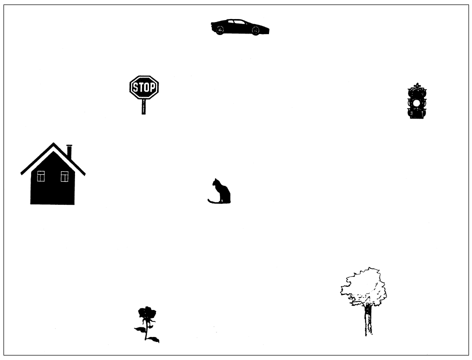
Betrachten Sie das erste Beispiel: Hier sollen Sie sich vorstellen, dass Sie bei der Blume stehen, die in der Mitte des Kreises dargestellt ist, und zum Baum blicken (oben am Kreis dargestellt). Ihre Aufgabe ist es, einen Pfeil zu zeichnen, der von Ihrer Position zur Katze zeigt. Im Beispiel wurde dieser Pfeil bereits eingezeichnet, bei den folgenden Aufgaben müssen Sie dies selbst tun.

Bitte drehen Sie während des Tests nicht das Testheft!
Beginnen Sie mit dem Test erst, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

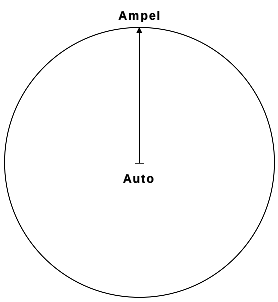


Beispiel:
Stellen Sie sich vor, Sie stehen bei der **Blume** und blicken zum **Baum**.
Zeigen Sie zur **Katze**.



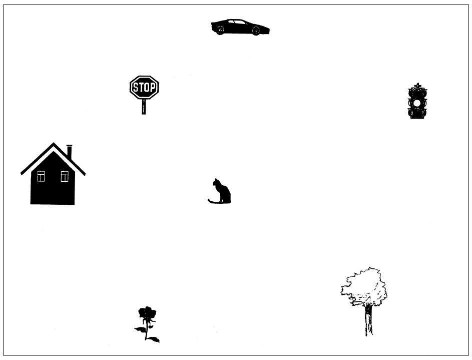


1. Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim **Auto** und blicken zur **Ampel**.
   Zeigen Sie zum **Stoppschild**.

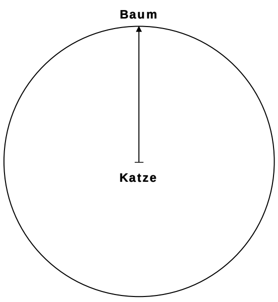


4

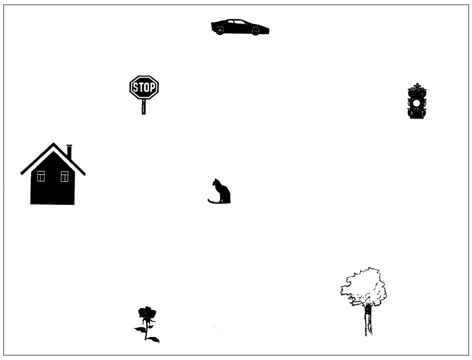
Appendix 10: Kurzversion des SOT



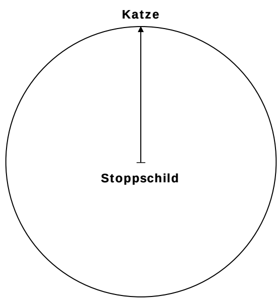
2. Stellen Sie sich vor, Sie stehen bei der **Katze** und blicken zum **Baum**. Zeigen Sie zum **Auto**.



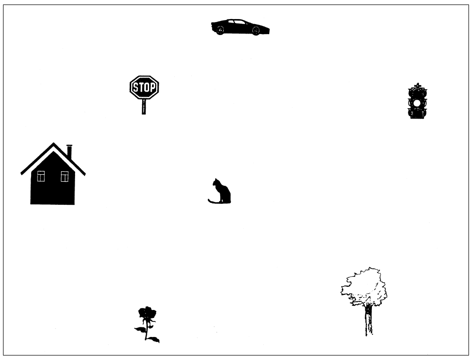
5



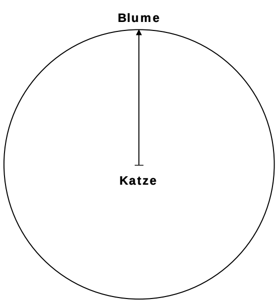
3. Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim **Stoppschild** und blicken zur **Katze**. Zeigen Sie zum **Haus**.



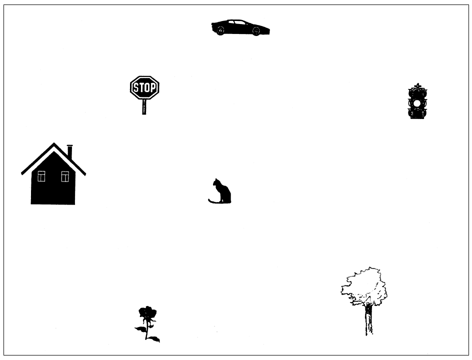
6



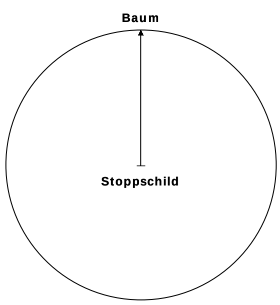
4. Stellen Sie sich vor, Sie stehen bei der **Katze** und blicken zur **Blume**. Zeigen Sie zum **Auto**.



7

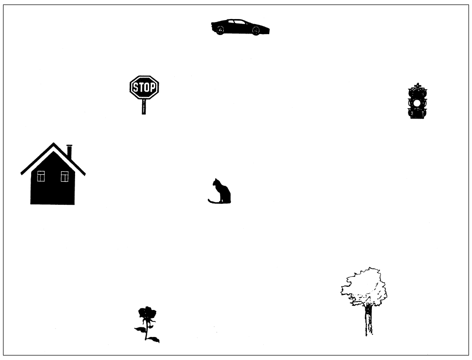


5. Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim **Stoppschild** und blicken zum **Baum**. Zeigen Sie zur **Ampel.**

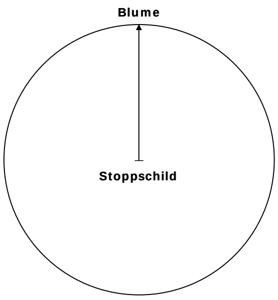


8

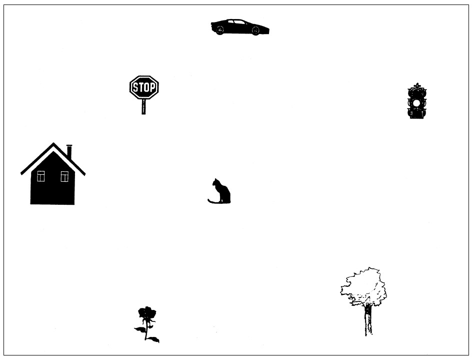
Appendix 10: Kurzversion des SOT



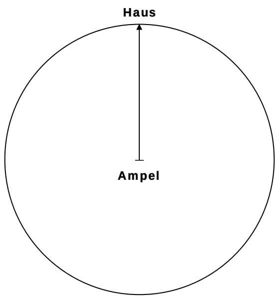
6. Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim **Stoppschild** und blicken zur **Blume**. Zeigen Sie zum **Auto**.



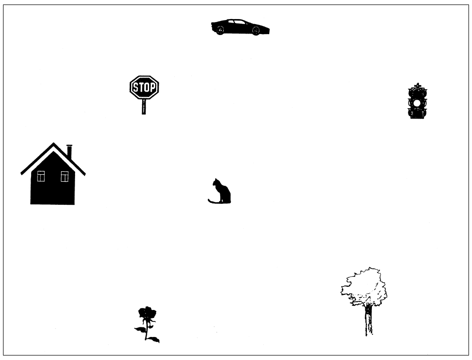
9



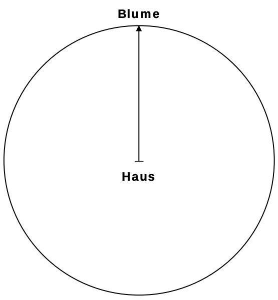
7. Stellen Sie sich vor, Sie stehen bei der **Ampel** und blicken zum **Haus**. Zeigen Sie zur **Blume**.



10



8. Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim **Haus** und blicken zur **Blume**. Zeigen Sie zum **Stoppschild**.



11

ZEIT:__________________

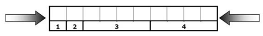
Appendix 11: Typ-1-Mathematikaufgaben

Mathematikaufgaben Typ 1

Sie haben 20 Minuten Zeit, um 6 Mathematikaufgaben vom Typ 1 zu lösen.
Schreiben bzw. markieren Sie Ihre Antworten direkt in diesem Aufgabenheft.

Persönlicher Code

1:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter	z.B. „M" für „Maria"
2:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihres Vaters	z.B. „J" für „Josef"
3:	Geburtstag und -monat Ihrer Mutter	z.B. „0" „5" „1" „1" für 05. November
4:	Geburtstag und -monat Ihres Vaters	z.B. „2" „4" „0" „8" für 24. August

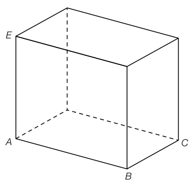


Aufgabe 1

Eckpunkte eines Quaders*

Aufgabennummer: 1_689	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte A, B, C und E sind beschriftet.



Aufgabenstellung:

Für weitere Eckpunkte R, S und T des Quaders gilt:

$R = E + \overrightarrow{AB}$

$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$

$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte R, S und T!

1

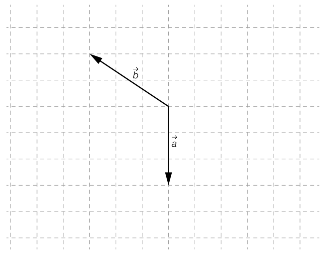
Aufgabe 2

Vektoren in der Ebene

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die Abbildung einen Vektor $\vec{c}$ so ein, dass die Summe der drei Vektoren den Nullvektor ergibt, also $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt!



2

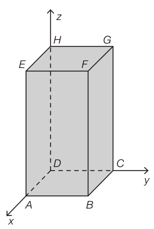
Aufgabe 3

Quader mit quadratischer Grundfläche*

Aufgabennummer: 1_562	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der xy-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 5 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 10 Längeneinheiten. Der Eckpunkt D liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt C liegt auf der positiven y-Achse.

Der Eckpunkt E hat somit die Koordinaten $E = (5|0|10)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\overrightarrow{HB}$ an!

3

Aufgabe 4

Normalvektoren

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

z_b = ______________________

4

Appendix 11: Typ-1-Mathematikaufgaben

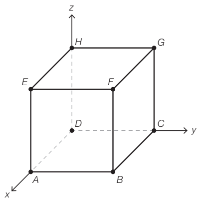
Aufgabe 5

Würfel und Vektor*

Aufgabennummer: 1_857	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Würfel, dessen Grundfläche *ABCD* in der *xy*-Ebene liegt.



Zwei Eckpunkte dieses Würfels legen einen bestimmten Vektor fest, der in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diesen Vektor an. *[1 aus 6]*

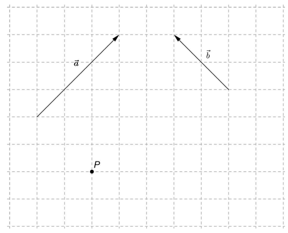
$\overrightarrow{EC}$	☐
$\overrightarrow{FD}$	☐
$\overrightarrow{GA}$	☐
$\overrightarrow{GD}$	☐
$\overrightarrow{HA}$	☐
$\overrightarrow{HB}$	☐

5

Aufgabe 6

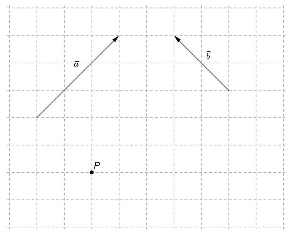
Vektorkonstruktion

Die Abbildung zeigt zwei als Pfeile dargestellte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und einen Punkt *P*.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die unten stehende Abbildung um einen Pfeil, der vom Punkt *P* ausgeht und den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ darstellt!



ZEIT:________________ 6

Appendix 12: Antwortzettel

ANTWORTZETTEL

Persönlicher Code

1: Erster Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter z.B. „M“ für „Maria“
2: Erster Buchstabe des Vornamens Ihres Vaters z.B. „J“ für „Josef“
3: Geburtstag und -monat Ihrer Mutter z.B. „0“ „5“ „1“ „1“ für 05. November
4: Geburtstag und -monat Ihres Vaters z.B. „2“ „4“ „0“ „8“ für 24. August

1	2	3				4			

DAT

AUFGABE NUMMER	ANTWORT			
1	A	B	C	D
2	A	B	C	D
3	A	B	C	D
4	A	B	C	D
5	A	B	C	D
6	A	B	C	D
7	A	B	C	D
8	A	B	C	D
9	A	B	C	D
10	A	B	C	D
11	A	B	C	D
12	A	B	C	D
13	A	B	C	D
14	A	B	C	D
15	A	B	C	D
Zeit:				

PSVT:R

AUFGABE NUMMER	ANTWORT				
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
Zeit:					

Appendix 13: Digitaler Fragebogen der Experimentalgruppe

Raumvorstellungen

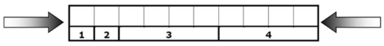
Für ein kurzes Feedback würde ich bitten den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Dauer beträgt etwa 2-3 Minuten.

* Required

1. Bitte den Persönlichen Code im Textfeld darunter einfüllen. *

Persönlicher Code

1:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter	z.B. „M“ für „Maria“
2:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihres Vaters	z.B. „J“ für „Josef“
3:	Geburtstag und -monat Ihrer Mutter	z.B. „0“ „5“ „1“ „1“ für 05. November
4:	Geburtstag und -monat Ihres Vaters	z.B. „2“ „4“ „0“ „8“ für 24. August



2. Ich habe teilgenommen an der ... (alle zutreffenden ankreuzen) *

Check all that apply.

- [ ] 1. Testung
- [ ] 1. Mathematikstunde (Einführung zur App)
- [ ] 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1)
- [ ] 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2)
- [ ] 2. Testung

Teil 1: Arbeiten mit der App

3. Wie war das Arbeiten mit der App? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
Sehr leicht	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Sehr schwer

4. Gab es beim Arbeiten mit der App technische Probleme? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
Das Meiste hat funktioniert	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Das Meiste hat nicht funktioniert

5. Wie hilfreich war die App beim Lösen der Aufgaben? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
hat beim Lösen der Aufgaben geholfen	◯	◯	◯	◯	◯	◯	hat gar nicht geholfen

6. Die App ist ... *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
sehr intuitiv	◯	◯	◯	◯	◯	◯	kompliziert zu verwenden

7. Die App ist ... *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
praktisch aufgebaut	◯	◯	◯	◯	◯	◯	unpraktisch aufgebaut

8. Die App ist ... *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
geeignet für den Unterricht	◯	◯	◯	◯	◯	◯	ungeeignet für den Unterricht

9. Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit der App auf Ihre Raumvorstellung? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
hat viel geholfen	◯	◯	◯	◯	◯	◯	hat wenig geholfen

10. Allgemeines Feedback zur App (Schlagworte oder ganze Sätze)

11. Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung

Teil 2: Testungen

12. Ich fand die Tests... *

Mark only one oval per row.

	Sehr leicht	Leicht	Schwer	Sehr Schwer	Ich weiß nicht.
DAT (Faltungen)	◯	◯	◯	◯	◯
PSVT:R (Rotationen)	◯	◯	◯	◯	◯
SOT (Raumorientierung)	◯	◯	◯	◯	◯

13. Ich bin mir sicher, dass ich meine Leistung bei der zweiten Testung gegenüber der ersten Testung verbessern konnte. *

Mark only one oval.

- ◯ Ja
- ◯ Nein
- ◯ Unsicher

14. Eigene Einschätzung: Ich war bei der zweiten Testung der Raumvorstellungen besser als .... % in der Klasse. Bitte als ganze Zahl eintragen (z.B.: 90 oder 25). *

15. Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung

Teil 3: Kurze Infos zur Person

16. Geschlecht *

Mark only one oval.

- ◯ männlich
- ◯ weiblich
- ◯ divers

17. Mathematiknote im letzten Schuljahr (2020/21) *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Sehr gut	◯	◯	◯	◯	◯	Nicht genügend

Appendix 13: Digitaler Fragebogen der Experimentalgruppe

18. Mathematiknote im letzten Semester (Februar 2022). *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Sehr gut						Nicht genügend

Appendix 14: Digitaler Fragebogen der Kontrollgruppe

Raumvorstellungen

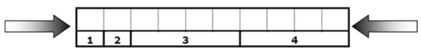
Für ein kurzes Feedback würde ich bitten den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Dauer beträgt etwa 2 Minuten.

* Required

1. Bitte den Persönlichen Code im Textfeld darunter einfüllen. *

Persönlicher Code

1:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter	z.B. „M" für „Maria"
2:	Erster Buchstabe des Vornamens Ihres Vaters	z.B. „J" für „Josef"
3:	Geburtstag und -monat Ihrer Mutter	z.B. „0" „5" „1" „1" für 05. November
4:	Geburtstag und -monat Ihres Vaters	z.B. „2" „4" „0" „8" für 24. August



2. Ich habe teilgenommen an der ... (alle zutreffenden ankreuzen) *

Check all that apply.

- [ ] 1. Testung
- [ ] 1. Mathematikstunde (Einführung zur App)
- [ ] 2. Mathematikstunde (Arbeitszettel 1)
- [ ] 3. Mathematikstunde (Arbeitszettel 2)
- [ ] 2. Testung

Teil 1: Arbeisblätter

3. Wie waren die Aufgaben der Arbeitsblätter? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
Sehr leicht	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Sehr schwer

4. Welchen Einfluss, denken Sie, hatte das Arbeiten mit den Arbeitsblättern auf Ihre Raumvorstellung? *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	6	
hat viel geholfen	◯	◯	◯	◯	◯	◯	hat wenig geholfen

5. Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung

Teil 2: Testungen

6. Ich fand die Tests... *

Mark only one oval per row.

	Sehr leicht	Leicht	Schwer	Sehr Schwer	Ich weiß nicht.
DAT (Faltungen)	◯	◯	◯	◯	◯
PSVT:R (Rotationen)	◯	◯	◯	◯	◯
SOT (Raumorientierung)	◯	◯	◯	◯	◯

7. Ich bin mir sicher, dass ich meine Leistung bei der zweiten Testung gegenüber der ersten Testung verbessern konnte. *

Mark only one oval.

- ◯ Ja
- ◯ Nein
- ◯ Unsicher

8. Eigene Einschätzung: Ich war bei der zweiten Testung der Raumvorstellungen besser als .... % in der Klasse. Bitte als ganze Zahl eintragen (z.B.: 90 oder 25). *

9. Das war nicht ganz klar, bzw. individuelle Anmerkung

Teil 3: Kurze Infos zur Person

10. Geschlecht *

Mark only one oval.

- ◯ männlich
- ◯ weiblich
- ◯ divers

11. Mathematiknote im letzten Schuljahr (2020/21) *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Sehr gut	◯	◯	◯	◯	◯	Nicht genügend

12. Mathematiknote im letzten Semester (Februar 2022). *

Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Sehr gut	◯	◯	◯	◯	◯	Nicht genügend

Zusammenfassung

Der Einsatz von *Augmented Reality* (AR) zeichnet sich als eine relevante, neue Technologie für den Mathematikunterricht ab. So weisen vorhergehende Studien auf die Weiterentwicklung von Raumvorstellung und das zusätzliche Erleben von Mathematik, das durch AR ermöglicht wird, hin. Ausgehend davon besteht ein mathematikdidaktisches Interesse, weitere empirische Daten und Erfahrungswerte im Mathematikunterricht mit AR auf dem Smartphone zu sammeln.
Begründet durch dieses Forschungsinteresse wurde in dieser Masterarbeit der Effekt der Augmented Reality Smartphone-App *Vektor* AR^3 auf den Mathematikunterricht untersucht. Dafür wurde die Veränderungen der Faktoren der Raumvorstellung sowie der Mathematikkompetenz in einer Studie mit einem Pretest-Posttest-Design untersucht. An dieser Studie nahmen Schüler*innen (n=26) der 6. Klasse einer Wiener AHS teil, die jeweils drei Schulstunden in Kleingruppen an Aufgaben der Vektorrechnung im Raum arbeiteten. In der Experimentalgruppe wurde mit der Smartphone-App gearbeitet, in der Kontrollgruppe nur mit Taschenrechner, Stift und Papier.
Es zeigte sich, dass die Unterschiede zwischen den Gruppen nach der Intervention nicht signifikant waren, jedoch zeichneten sich eine Tendenz ab, die für den Einsatz von Augmented Reality spricht. Die Schüler*innen gaben in einem qualitativen Fragebogen an, dass sie den Anlass für das Arbeiten mit AR im Unterricht als gegeben sahen, die verwendete App jedoch nicht alle Herausforderungen ideal lösen konnte. Es gilt somit weiter an der Entwicklung passender Software und der Erprobung im Unterricht zu arbeiten.

Abstract

Augmented Reality (AR) is emerging as a relevant new technology for mathematics education. Previous studies point to the development of spatial abilities and improved mathematics skills that are enabled by AR. Based on these findings, there is a mathematics didactics interest in collecting further empirical data and experiential knowledge in teaching mathematics with AR on smartphones.

Based on this research interest, this master's thesis investigated the effect of the Augmented Reality smartphone app *Vektor AR³* on mathematics. For this purpose, the changes in the factors of spatial ability as well as mathematics skills were investigated in a study with a pretest-posttest design. Students (n=26) of the 6^{th} grade of an academic high school (AHS) in Vienna participated in this study, each working in small groups for three school hours on tasks of vector calculus in space. The experimental group worked with the smartphone app, and the control group only with a calculator, pencil, and paper.

The differences between the groups after the intervention were not significant, but there were tendencies that favored the use of Augmented Reality. The students indicated in a questionnaire that they saw the reason for working with AR in class as given, but that the app was not able to solve all the challenges in an ideal way. It is, therefore, necessary to continue to work on the development of suitable software and testing in the classroom.