

# MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

**„Hyperbolische Geometrie und trigonometrische  
Berechnungen in der hyperbolischen Geometrie“**

verfasst von / submitted by

Anna Riss, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Education (MEd)

Wien, Oktober 2022 / Vienna Octobre 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

UA 199 500 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)  
UF Bewegung und Sport UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Peter Raith

# Dank

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die durch ihre fachliche und persönliche Unterstützung zum Gelingen dieser Masterarbeit beigetragen haben.

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer ao. Univ. Prof. Mag. Raith danken, der mich richtungsweisend und mit viel Engagement während meiner Arbeit begleitet hat.

Mein besonderer Dank gilt auch meiner Familie und meine Freunde. Insbesondere möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich in all meinen Entscheidungen und in meinem Studium immer unterstützt haben. Ebenso gilt mein Dank Claudia Koliander-Bayer für das Korrekturlesen.

# Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Thematik der hyperbolischen Geometrie. Ziel ist es einen Art Vergleich zu der euklidischen Geometrie zu ziehen und zu erfassen wie sich die Axiomatik voneinander unterscheiden. Weiters wird die Frage behandelt wie sich die Änderung der Axiomatik auf die Darstellung der Figuren auswirkt, sowie trigonometrische Berechnungen betrachtet.

Bei dieser Arbeit handelt es sich um eine Literaturarbeit. Dabei werden vorwiegend die Arbeiten von Barot (2019), Filler (1993), Gans (1973) und Völk (1995) herangezogen.

Zu Beginn wird ein Überblick über die Geschichte und Entstehung der hyperbolischen Geometrie gegeben und von da ausgehend die Modell und Darstellung in diesen betrachtet. Daran anschließend wurde die Thematik der Parallelität, da dieses Axiom zur Unterscheidung von euklidischer und hyperbolischer Geometrie führt, genauer untersucht und die unterschiedlichen Arten der Parallelität beschrieben. Abschließend werden unterschiedliche Herangehensweisen zur Erarbeitung der Trigonometrie betrachtet und angeführt.

Durch die Änderung des fünften Axioms ändern sich alle Sätze und Lemmata, welche dieses als Grundlage haben. Durch die unterschiedlichen Modelle ist es schwer, zu einer allgemeineren Vorstellung von Figuren zu gelangen. In dieser Arbeit wurden nicht alle Aspekte bearbeitet es, und es handelt sich somit um keine vollständige Darlegung der hyperbolischen Geometrie.

This paper deals with the topic of hyperbolic geometry. The aim is to draw a kind of comparison with Euclidean geometry and to understand how the axiomatics differ from each other. Furthermore, the question of how the change of axiomatics affects the representation of the figures is dealt with, and trigonometric calculations are considered.

This work is a literary work. It draws mainly on the works of Barot (2019), Filler (1993), Gans (1973) and Völk (1995).

At the beginning, an overview of the history and emergence of hyperbolic geometry is given and from there the model and representation in these are considered. Following this, the topic of parallelism, since this axiom leads to the distinction between Euclidean and hyperbolic geometry, is examined more closely and the different types of parallelism are described. Finally, different approaches to working out trigonometry are considered and cited.

By changing the fifth axiom, all the theorems and lemmas that have it as a basis change. Owing to the different models, it is difficult to arrive at a more general idea of figures. Not all aspects have been dealt with in this work, and it is therefore not a complete exposition of hyperbolic geometry.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Das Parallelenaxiom-Durch Umdenken zu einer neuen Geometrie</b>	<b>6</b>
2.1	Axiomatik der hyperbolischen Geometrie . . . . .	6
2.1.1	Ableitungen aus dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Die Modelle der hyperbolischen Geometrie</b>	<b>11</b>
3.1	Die Pseudosphäre . . . . .	11
3.2	Das zweischalige Hyperboloid . . . . .	11
3.3	Die Kreisscheibe . . . . .	12
3.3.1	Das Kreisscheibenmodell nach Poincaré . . . . .	12
3.3.2	Das Kreisscheibenmodell nach Klein . . . . .	13
3.4	Die Halbebene . . . . .	13
3.5	Die Halbkugel . . . . .	14
3.6	Die Kugel . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Länge, Abstände und Winkelmessung</b>	<b>16</b>
4.1	Länge, Abstände und Winkelmessung im Modell der Halbebene . . . . .	16
4.1.1	Abstand von Punkten . . . . .	17
4.1.2	Abstand von Punkten zu Geraden . . . . .	24
4.1.3	Abstandslinien . . . . .	24
4.2	Länge, Abstände und Winkelmessung im Modell der Kreisscheibe . . . . .	26
4.2.1	Messung von Strecken . . . . .	27
4.2.2	Messung von Winkeln . . . . .	29
4.2.3	Winkelsummen und Satz von Thales . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Parallelen in der hyperbolischen Geometrie</b>	<b>37</b>
5.1	Überparallele Geraden . . . . .	38
5.2	Verbindbare Geraden . . . . .	39
5.3	Randparallele Geraden . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Die Darstellung von geometrische Figuren in der hyperbolischen Geometrie</b>	<b>45</b>
6.1	Darstellung im Modell der Halbebene . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie</b>	<b>48</b>
7.1	Äquivalenz von Dreiecken mit Saccheri Vierecken . . . . .	49
7.2	Flächeninhalt von Dreiecken . . . . .	53
7.3	Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks . . . . .	55
7.3.1	Der Umkreismittelpunkt und der Umkreis eines Dreiecks . . . . .	55
7.3.2	Inkreismittelpunkt eines Dreiecks . . . . .	61



7.3.3	Höhenschnittpunkt eines Dreiecks . . . . .	61
7.4	Asymptotische Dreiecke . . . . .	62
7.4.1	Einfaches asymptotisches Dreieck . . . . .	62
7.4.2	Doppelt asymptotisches Dreieck . . . . .	68
7.4.3	Dreifach asymptotisches Dreieck . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Kreise in der hyperbolischen Geometrie - eigentlicher Kreis, Horozykel und Hyperzykel</b>	<b>70</b>
8.1	Definitionen . . . . .	70
8.2	Der Horozykel . . . . .	73
8.2.1	Länge eines Horozykelbogens . . . . .	77
8.3	Der eigentliche Kreis . . . . .	80
8.3.1	Länge eines eigentlichen Kreisbogens . . . . .	80
8.4	Der Hyperzykel . . . . .	81
8.4.1	Länge eines Hyperzykelbogens . . . . .	81
<b>9</b>	<b>Trigonometrie</b>	<b>83</b>
9.1	Vereinigte rechtwinklige Dreiecke . . . . .	97
9.2	Formeln bezüglich des Parallelwinkels . . . . .	101
9.3	Trigonometrische Formeln im rechtwinkligen Dreieck . . . . .	103
9.4	Trigonometrische Formeln im Spitzeck . . . . .	107
<b>10</b>	<b>Resümee</b>	<b>109</b>

# 1 Einleitung

Was ist die hyperbolische Geometrie und wie kann man sich diese vorstellen? Jeder und jede kennt die euklidische Geometrie und kann sich unter einem Viereck oder Dreieck der euklidischen Geometrie eine bestimmte Figur vorstellen, mache vielleicht besser als andere. Wie ist dies jedoch in der hyperbolischen Geometrie? Den Meisten ist diese kein Begriff und haben demnach auch keine Vorstellung davon, wie in dieser Geometrie Figuren aussehen oder wie weit bekannte mathematische Sätze und ähnliches anwendbar sind.

Diese Arbeit befasst sich mit der Frage in welchen Aspekten der Axiomatik sich die hyperbolische Geometrie von der euklidischen Geometrie unterscheidet und wie sich dies auf die Darstellung von Figuren auswirkt? Weiters werden auch einige Veränderungen in den trigonometrischen Berechnungen betrachtet. Das Ziel dieser Arbeit ist es eine Übersicht über die Entstehung der hyperbolischen Geometrie zu geben und diese relativ neu Geometrie verständlich, durch eine Art Vergleich mit der euklidischen Geometrie, darzustellen.

Im ersten Kapitel wird die Geschichte der Lobatschewskischen Geometrie dargelegt. Anschließend werden die unterschiedlichen Modelle skizziert und beschrieben. Anschließend daran bearbeiten die nächsten Kapitel die Längen- und Winkelmessung, sowie die Darstellung der unterschiedlichen Figuren. Abschließend werden trigonometrische Berechnungen getätigt.

## 2 Das Parallelenaxiom-Durch Umdenken zu einer neuen Geometrie

Um Sätze und Aussagen zu beweisen, bedarf es bestimmter Grundaussagen, welche als gegeben angesehen werden und mit Hilfe deren geometrische Eigenschaften und Sätze ableitbar sind. Diese Grundaussagen werden als Axiome bezeichnet. Das Axiomensystem von Euklid, welches etwa 325 v. Chr. veröffentlicht wurde, war lange Zeit Grundlage für die Geometrie, bis es etwa 1899 von einem vollständigen Axiomensystem, veröffentlicht von David Hilbert, abgelöst wurde. (vgl. [Filler1993], S. 52ff)

Das fünfte Axiom, welches auch Parallelenaxiom genannt wird, störte viele Mathematiker. Jene versuchten zu zeigen, dass dieses nicht notwendig ist und es sich bei dem Axiom lediglich um eine Konsequenz der ersten vier handelt. (vgl. [Barot2019], S. 3) Da dieses Axiom in der euklidischen Geometrie gilt, versteht man unter parallel, dass zwei Geraden keinen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Das Parallelenaxiom lautet wie folgt:

### V. Parallelenaxiom

Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $A$  gibt es höchstens eine Gerade, die durch  $A$  verläuft und zu  $g$  parallel ist. ([Filler1993], S. 110)

Es gibt unterschiedliche Beweisansätze, die hier einen Widerspruch aufzeigen, diese genauer zu betrachten, ist für diese Arbeit jedoch nicht von besonderer Wichtigkeit. Wesentlich interessanter sind die Ansätze von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski und Janós Bolyai. Die beiden betrachteten die Diskussion um das Parallelenaxiom als eine Möglichkeit für eine andere Geometrie als die euklidische. Sie publizierten ihre Entdeckungen unabhängig voneinander, ein weiterer Mathematiker, Carl Friedrich Gauss, der sich mit dieser Thematik beschäftigte, publizierte nicht, aus Angst vor den Reaktionen der mathematischen Gesellschaft. (vgl. [Barot2019], S. 4f)

Die so neu entstandene Geometrie wird als hyperbolische Geometrie, nichteuklidische Geometrie oder auch Lobatschewski-Geometrie bezeichnet. In der hyperbolischen Geometrie gelten die ersten vier Axiome der euklidischen Geometrie sowie die Verneinung des euklidischen Parallelenaxiom. (vgl. [Filler1993], S. 143)

### 2.1 Axiomatik der hyperbolischen Geometrie

Die verneinte Version des euklidischen Parallelenaxioms kann somit als Lobatschewskisches Parallelenaxiom bezeichnet werden und lautet wie folgt (vgl. [Filler1993], S. 166):

### **V'. Lobatschewskisches Parallelenaxiom**

Es existiert eine Gerade  $g$  und ein nicht auf  $g$  liegender Punkt  $P$ , durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die  $g$  nicht schneiden. ([Filler1993], S. 166)

Die weiteren in der hyperbolischen Geometrie geltenden Axiome lauten:

### **I. Inzidenzaxiome**

- I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.
- I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.
- I/3 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.
- I/4 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

([Filler1993], S. 65)

### **II. Abstandsaxiome**

- II/1 Zu zwei beliebigen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es eine nicht-negative reelle Zahl  $d$  mit  $d = 0 \iff A = B$ . (Diese Zahl wird als Abstand  $|AB|$  der Punkte  $A$  und  $B$  bezeichnet.)
- II/2 Für zwei beliebige Punkte  $A$  und  $B$  gilt  $|AB| = |BA|$ .
- II/3 Für drei beliebige Punkte  $A, B$  und  $C$  gilt

$$|AB| + |BC| \geq |AC|.$$

Falls  $A, B$  und  $C$  auf einer Geraden liegen, so gilt eine der drei Gleichungen

$$|AB| + |BC| = |AC|,$$

$$|AC| + |CB| = |AB|,$$

$$|BA| + |AC| = |BC|;$$

ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so liegen  $A, B$  und  $C$  auf einer Geraden.

([Filler1993], S. 73)

### III. Anordnungsaxiome

- III/1 Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl  $a$  und jedem Punkt  $O$  der Ebene existiert auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt  $O$  genau ein Punkt  $A$  mit  $|OA| = a$ .
- III/2 Eine beliebige Gerade  $g$  teilt die Menge der ihr nicht angehörenden Punkte der Ebene in zwei nichtleere, disjunkte Mengen derart, daß [sic!]
- a) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die verschiedenen Mengen angehören, die Gerade  $g$  schneidet und
  - b) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die derselben Menge angehören, die Gerade  $g$  nicht schneidet.

([Filler1993], S. 80)

### IV. Bewegungsaxiom

Wenn der Abstand zweier Punkte  $A$  und  $B$  positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte  $C$  und  $D$  ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die  $A$  auf  $C$  und  $B$  auf  $D$  abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden  $AB$  wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich  $CD$  abgebildet. ([Filler1993], S. 86)

#### 2.1.1 Ableitungen aus dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom

Die Verneinung des euklidischen Parallelenaxioms schließt nicht ein, dass es durch jeden Punkt zu jeder Geraden mindestens zwei Parallelen geben muss, da eine Allaussage stets durch eine Existenz widerlegt wird. Es lässt sich jedoch leicht nachweisen, dass dies bei einer Grundlage der ersten vier euklidischen Axiome und dem hyperbolischen Parallelenaxiom gelten muss. (vgl. [Filler1993], S. 166)

**Satz 2.1.** *Wenn die Axiome I, II, III, IV und V' gelten, dann*

*existieren zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $P$  mindestens zwei Geraden, die durch  $P$  verlaufen und  $g$  nicht schneiden. ([Filler1993], S. 166)*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt indirekt. Sollten eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $P$  existieren, durch den nur eine Gerade verläuft, welche  $g$  nicht schneidet, so würde dies einer äquivalenten

Aussage zum euklidischen Parallelenaxiom entsprechen. Damit würde die Gültigkeit des Axioms V folgen, dies ist ein Widerspruch zu dem Axiom V'. (vgl. [Filler1993], S. 166) Da  $g$  und der Punkt  $P$  beliebig gewählt sind, gilt dies für alle Geraden  $g \in \mathbb{H}$  und alle  $P \in \mathbb{H}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die Formulierung „Wenn die Axiome I, II, III, IV und V' gelten“ kann durch „in der hyperbolischen Geometrie gilt“ ersetzt werden. Diese Voraussetzungen werden ab nun nicht mehr extra erwähnt. (vgl. [Filler1993], S. 166)

Weiters lässt sich beweisen, dass in der hyperbolischen Geometrie nicht nur mindestens zwei Geraden existieren, wie in Satz 2.1. gezeigt, sondern unendlich viele.

**Satz 2.2.** *Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $P$  existieren unendlich viele Geraden, die durch  $P$  verlaufen und  $g$  nicht schneiden. ([Filler1993], S. 167)*

*Beweis.* Man betrachte zwei nicht kollineare Geraden  $h_1$  und  $h_2$ , die durch einen Punkt  $P$  verlaufen und die Gerade  $g$  nicht schneiden. Weiters sei  $A$  ein Punkt auf  $g$  und die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  Punkte der Geraden  $h_1$  bzw.  $h_2$ , welche von  $P$  verschieden sind.  $B_1, B_2$  liegen zudem bezüglich der Geraden  $AP$  in einer Halbebene (siehe Abbildung 1). Legt man für jeden Punkt  $X$  der offenen Strecke  $\overline{B_1B_2}$  eine Gerade  $x = PX$  fest, so existieren unendlich viele solcher Geraden, die voneinander verschieden sind, da  $\overline{B_1B_2}$  unendlich viele Punkte enthält. (vgl. [Filler1993], S. 167)

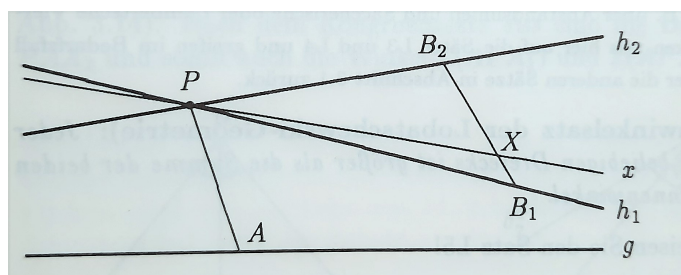


Abbildung 1: Darstellung zu Beweis Satz 2.2.

Nun wird die Behauptung aufgestellt, dass keine der Geraden  $x$   $g$  schneidet. Hierzu soll die Halbgerade  $h_2^+ := \overline{PB_2^+}$  in der anderen Halbebene bezüglich  $h_1$  liegen als  $g$ . Zunächst wird gezeigt, dass in der Halbebene  $APB_1^+$  kein Schnittpunkt von  $g$  und einer beliebigen Geraden  $x$  liegt. Da  $X$  in derselben Halbebene bezüglich  $h_1$  liegt wie  $B_2$ , müsste es einen Schnittpunkt von  $x$  und  $h_1$  in der Halbebene  $APB_1^+$  geben, damit  $x$  und  $g$  in der Halbebene  $APB_1^+$  einen gemeinsamen Punkt haben. Dies kann jedoch nicht der Fall sein, da  $P$  der einzige gemeinsame Punkt von  $x$  und  $h_1$  sein kann. Ansonsten wären  $x$  und  $h_1$  identisch. Damit ist bewiesen, dass alle Punkte von  $x^+$  in derselben Halbebene bezüglich  $h_1$  liegen wie  $h_2^+$ . Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass  $x^+$  und  $h_1^+ := \overline{PB_1^+}$  in einer Halbebene bezüglich  $h_1$  liegen. Somit bleibt zu zeigen, dass die Halbgerade  $x^- := \overline{PX^-}$   $g$  nicht schneidet. Da  $x^+$  auf derselben Halbebene bezüglich  $h_1$  liegt wie  $h_1^+$  und  $h_2^+$ , gehört  $x^-$  zu derselben Halbebene bezüglich  $h_2$  wie  $h_1^-$ . Zudem liegen nach dem Axiom III/2  $h_1^-$  und  $g$  vollständig in der anderen Halbebene

bezüglich  $h_2$ . Daraus lässt sich folgern, dass auch  $x^-$  und  $g$  in unterschiedlichen Halbebenen bezüglich  $h_2$  liegen und keine gemeinsamen Punkte haben können. (vgl. [Filler1993], S. 167f)  $\square$

**Satz 2.3.** *Stimmen zwei Dreiecke in allen drei Winkelmaßen überein, so sind sie kongruent. ([Filler1993], S. 168)*

Es handelt sich hierbei um eine Folgerung aus einem Satz der euklidischen Geometrie. (vgl. [Filler1993], S. 168) Dieser lautet:

Falls zwei Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{DEF}$  existieren, die in allen drei Winkelmaßen übereinstimmen und nicht kongruent sind, so gilt das Parallelenaxiom. ([Filler1993], S. 159)

Da das Parallelenaxiom in der hyperbolischen Geometrie nicht gilt, lässt sich folgern, dass Dreiecke deren Winkelmaße übereinstimmen, kongruent sind.

**Satz 2.4.** *Die Innenwinkelsumme eines jeden Dreiecks ist kleiner als zwei Rechte. ([Filler1993], S.168)*

Hier ist ebenfalls eine Folgerung aus Sätzen der euklidischen Geometrie möglich. Der Innenwinkelsatz der absoluten Geometrie besagt, dass die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks stets kleiner oder gleich  $180^\circ$  ist. (vgl. [Filler1993], S. 152) Da die Aussage, dass ein Dreieck mit der Innenwinkelsumme von  $180^\circ$  existiert eine Äquivalenzaussage zum Axiom V., dem Parallelenaxiom (vgl. [Filler1993], S. 160), ist und dieses in der Lobatschewski-Geometrie nicht gilt, folgt: Die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks ist kleiner als  $180^\circ$ .

**Satz 2.5.** *Jeder Außenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist größer als die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. ([Filler1993], S. 168)*

Dieser Satz folgt aus dem Nebenwinkelsatz:

Es seien  $A, B, D \in \mathbb{E}$  drei Punkte auf einer Geraden  $g$  mit  $A$  zwischen  $B$  und  $D$ .

Weiter sei  $C \in \mathbb{E}$  ein Punkt nicht auf  $g$ . Dann gilt

$$\sphericalangle CAD = \pi - \sphericalangle BAC.$$

([Berchtold2017], S. 25)

Da die Innenwinkelsumme eines Dreiecks nach Satz 2.4. kleiner als  $180^\circ$  ist, folgt, dass der Außenwinkel größer als die beiden Innenwinkel ist. (vgl. [Filler1993], S. 241)

### 3 Die Modelle der hyperbolischen Geometrie

Es gibt unterschiedliche Modelle, mithilfe derer die hyperbolische Geometrie veranschaulicht werden kann. Vorab ist zu sagen, dass alle diese Modelle isomorph zueinander sind. Das bedeutet, dass es immer eine eindeutige Abbildung gibt, mit der Punkte, Geraden und Weiteres des einen Modells auf ein anderes Modell übertragen werden können und die Relationen dabei erhalten bleiben. Ist somit eine Aussage in einem Modell der hyperbolischen Geometrie wahr, so gilt dies auch in allen weiteren Modellen der hyperbolischen Geometrie. Man sagt auch, das Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie ist monomorph bzw. kategorisch. (vgl. [Buchmann1975], S. 119)

#### 3.1 Die Pseudosphäre

Das Modell der Pseudosphäre wurde 1868 von Eugenio Beltrami in *Interpretation der nicht euklidischen Geometrie* veröffentlicht und 1871 von Felix Klein vervollständigt. Hierbei handelt es sich um ein dreidimensionales Modell. In der Pseudosphäre wird ein H-Punkt als ein E-Punkt auf der Pseudosphäre dargestellt. Eine H-Gerade wird durch eine Geodäte dargestellt, die Längenmessung erfolgt mit Hilfe einer Logarithmusfunktion und Winkelmessungen erfolgen euklidisch als Winkel zwischen Tangenten an zwei H-Geraden. (vgl. [Wagner2017], S. 238f)

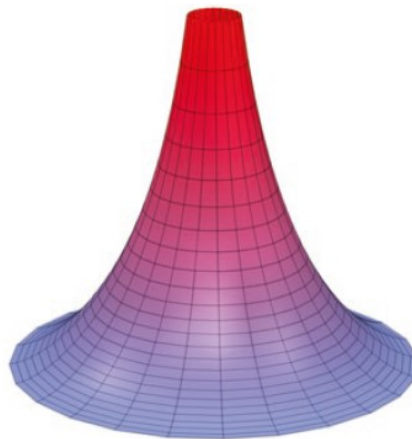


Abbildung 2: Pseudosphäre

#### 3.2 Das zweischalige Hyperboloid

Ebenso wie das Pseudosphärenmodell handelt es sich auch bei dem Modell der Halbschale um ein dreidimensionales Modell. Dieses Modell hat einige Ähnlichkeiten mit der sphärischen Geometrie. So sind beispielsweise die Formeln der sphärischen Geometrie ähnlich jener der hyperbolischen Geometrie. Für das Modell der Halbschale ist eine des zweischaligen Hyperbo-



loids auszuwählen. Auf dieser werden H-Punkte als E-Punkte und H-Geraden als Geodäten auf der Halbschale dargestellt. Die Darstellung der H-Geraden erfolgt dabei durch einen Schnitt der Halbschale mit einer Ebene  $\mathbb{E}$ , dadurch stellt die Geodäte eine Hyperbel dar. Längenmessungen erfolgen wie bei dem Pseudosphärenmodell mit Hilfe einer Logarithmusfunktion und Winkelmessungen euklidisch als Winkel von Tangenten an zwei H-Geraden. (vgl. [Wagner2017], S. 239f)

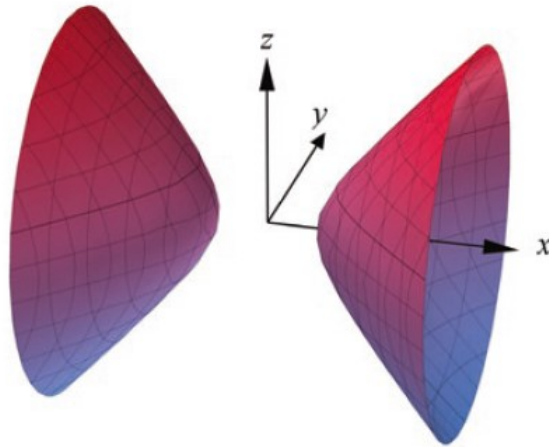


Abbildung 3: Zweischaliges Hyperboloid

### 3.3 Die Kreisscheibe

Das Modell der Kreisscheibe wurde sowohl von Henri Poincaré als auch Felix Klein als zweidimensionales Modell der hyperbolischen Geometrie entwickelt. (vgl. [Wagner2017], S. 241)

#### 3.3.1 Das Kreisscheibenmodell nach Poincaré

Im Modell nach Poincaré wird ein H-Punkt als E-Punkt im Inneren des Kreises dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass auf dem Rand des Kreises keine H-Punkte existieren. Eine H-Gerade wird als E-Durchmesser des Kreises oder als E-Kreisbögen, die normal zum Kreis verlaufen, dargestellt. Die Längenmessung erfolgt durch eine Logarithmusfunktion und Winkel können euklidisch als Winkel zwischen zwei Tangenten an H-Geraden gemessen werden. Der Vorteil des Modells von Poincaré gegenüber jenem von Klein ist, dass hier Winkelmessungen euklidisch möglich sind und es ein Computerprogramm, Cinderella, gibt, mit Hilfe dessen die hyperbolische Geometrie veranschaulicht werden kann. (vgl. [Wagner2017], S. 241)

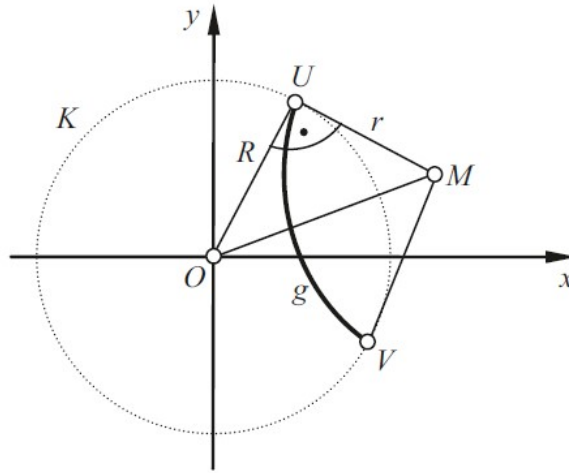


Abbildung 4: Kreisscheibenmodell mit hyperbolischer Geraden  $g$  und euklidischem Mittelpunkt  $M$

### 3.3.2 Das Kreisscheibenmodell nach Klein

Ein H-Punkt wird auch im Modell nach Klein als E-Punkt innerhalb des Kreises abgebildet. Es gilt ebenfalls, dass die Punkte am Kreis keine H-Punkte sind, man bezeichnet diese als Randpunkte. Eine H-Gerade wird als Sehne des Kreises dargestellt. (vgl. [Buchmann1975], S. 20f) Längen werden in diesem Modell mit Hilfe einer Logarithmusfunktion gemessen. (vgl. [Buchmann1975], S. 82f) Die Winkelmessung ist in diesem Modell nicht wie in den anderen, bereits kennengelernten Modellen, euklidisch möglich. Hier ist die Verwendung von Hyperbelfunktionen notwendig. Lediglich die H-Winkel im Ursprung lassen sich wie E-Winkel messen. (vgl. [Buchmann1975], S. 84)

## 3.4 Die Halbebene

Dieses Modell geht ebenfalls, wie jenes der Kreisscheibe, auf Henri Poincaré zurück. Es handelt sich bei dem Modell der Halbebene  $\mathbb{H}$  um ein zweidimensionales Modell. H-Punkte werden in diesem Modell als E-Punkte einer offenen E-Halbebene  $\mathbb{H}$  dargestellt. Die E-Gerade, welche die Halbebene  $\mathbb{H}$ , begrenzt enthält keine H-Punkte. H-Geraden können als E-Senkrechte auf die begrenzende Gerade oder als E-Halbkreise dargestellt werden. Die Mittelpunkte der E-Halbkreise liegen dabei immer auf der begrenzenden Geraden. Die Längenmessung erfolgt auch in diesem Modell mit Hilfe einer Logarithmusfunktion und die Winkelmessung ist euklidisch, durch die Messung des Winkels zwischen Tangenten zweier H-Geraden, möglich. (vgl. [Wagner2017], S. 246)

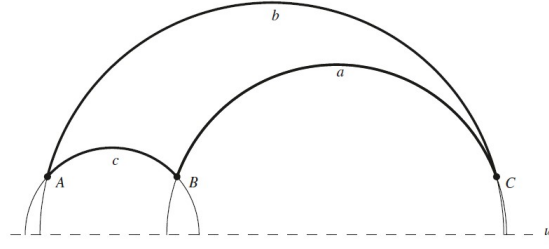


Abbildung 5: H-Dreieck im Halbebenenmodell

Dieses Modell hat den Vorteil, dass einige Berechnungen besonders einfach sind. Man kann die Halbebene wie folgt definieren:

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

in  $\mathbb{C}$ , d.h es wird die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Imaginäranteil betrachtet. (vgl. [Berchtold2017], S. 87) Diese Art der Darstellung wird im Laufe der Arbeit zum Beweisen einiger Sätze von Bedeutung sein.

### 3.5 Die Halbkugel

Das Modell der Halbkugel zählt nicht zu den klassischen Modellen der hyperbolischen Geometrie. Bei diesem Modell handelt es sich, ebenso wie bei der Pseudosphäre und dem zweischaligen Hyperboloid, um ein dreidimensionales Modell. H-Punkte entsprechen E-Punkten auf der E-Halbkugel und H-Geraden E-Halbkreisen, welche e-normal zu dem E-Äquator stehen. Die Winkelmessung erfolgt euklidisch mit Hilfe der Winkel von Tangenten an H-Geraden. (vgl. [Barot2019], S. 67)

Das Halbkugelmodell ist das dreidimensionale äquivalente Modell zum Modell der Halbebene. (vgl. [Barot2019], S. 67)

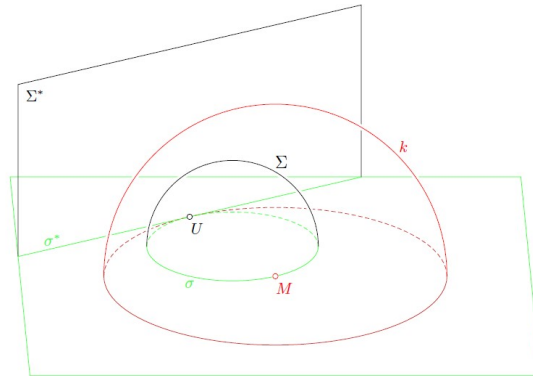


Abbildung 6: Halbkugel

### 3.6 Die Kugel

Ein weiteres dreidimensionales Modell ist das Modell der Kugel. Dieses ist äquivalent zum zweidimensionalen Modell der Kreisscheibe nach Klein. (vgl. [Barot2019], S. 72)

H-Punkte werden als E-Punkte innerhalb der Kugel aufgefasst, H-Geraden sind E-Sehnen der Kugel

und h-Ebenen das Innere von e-Kreisscheiben, ([Barot2019], S. 72)

diese berühren die Kugel in einem E-Kreis. Analog zum Kreisscheibenmodell lässt sich festhalten, dass H-Winkel im Ursprung wie E-Winkel messbar sind. (vgl. [Barot2019], S. 72)

Dieses Modell ist vorwiegend für das hyperbolische Sehen von Hyperbolien geeignet. (vgl. [Barot2019], S. 72)

Für die zweidimensionale Betrachtung der hyperbolischen Geometrie wird in dieser Arbeit vorwiegend das Modell der Halbebene verwendet werden.

## 4 Länge, Abstände und Winkelmessung

Die Längen und Winkelmessung sind, wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, nicht allgemeingültig für die hyperbolische Geometrie. Hier muss zwischen den verschiedenen Modellen unterschieden werden.

### 4.1 Länge, Abstände und Winkelmessung im Modell der Halbebene

Das Halbebenenmodell nach Poincaré sei, wie in Kapitel 3 beschrieben, eine offene Halbebene bezüglich einer Geraden  $u$ . Bei den nichteuklidischen Geraden spricht man von zwei Typen. Die Einteilung in diese erfolgt nach äußerer, d.h. euklidischer, Sicht. Aus der Sicht der hyperbolischen Geometrie sind diese Geraden nicht voneinander unterscheidbar. (vgl. [Filler1993], S. 177)

**Definition 4.1.** *H-Geraden, die als euklidischer Halbkreis dargestellt werden können, werden als H- oder N-Geraden vom Typ 1 bezeichnet. Jene H-Geraden, die als euklidische Halbgerade aufgefasst werden, bezeichnet man als H- oder N-Geraden vom Typ 2. (vgl. [Filler1993], S. 176)*

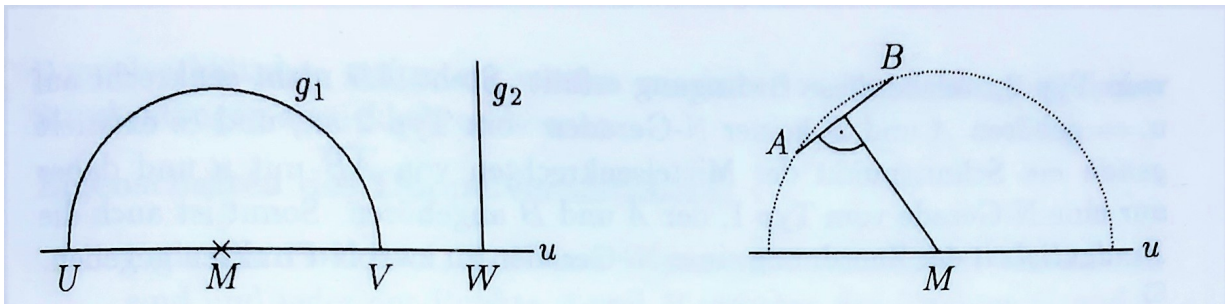


Abbildung 7: N-Geraden vom Typ 1 (links) und vom Typ 2 (rechts)

Betrachtet man die Inzidenzaxiome, so sind I/1, I/3 und I/4 für Punkte und Geraden der hyperbolischen Ebene unmittelbar ersichtlich. Für I/2 ist eine etwas genauere Betrachtung notwendig:

Sollten zwei Punkte  $A$  und  $B$  nicht auf einer euklidischen Geraden liegen, die  $u$  in einem rechten Winkel schneidet, betrachtet man den Schnittpunkt  $M$  der Streckensymmetrale von  $\overline{AB}$  mit  $u$ . Da das Dreieck  $\triangle MAB$  gleichschenkelig ist, gilt  $|MA| = |MB|$ . Somit liegen die Punkte  $A$  und  $B$  auf einem Kreis um  $M$  und sind somit ein Teil einer Geraden vom Typ 1. Sollten die Punkte  $A$  und  $B$  auf einer Normalen zu  $u$  liegen, so folgt aus der Definition 4.1., dass diese auf einer Geraden vom Typ 2 liegen. Es handelt sich hier um eine eindeutige Zuordnung einer Geraden zu zwei Punkten, da, wenn die Gerade  $AB$  auf  $u$  normal steht, kein Schnittpunkt mit  $u$  besteht und somit keine Gerade vom Typ 1 vorliegt und es genau

eine Gerade vom Typ 2 gibt. Wenn  $AB$  nicht normal auf  $u$  steht, so sind die Punkte  $A$  und  $B$  kein Teil einer Geraden vom Typ 2 und es existiert genau ein Schnittpunkt mit der Geraden  $u$  und somit genau eine Gerade vom Typ 1, die  $A$  und  $B$  enthält. (vgl. [Filler1993], S. 177f)

#### 4.1.1 Abstand von Punkten

Für den Abstand von Punkten im Halbebenenmodell von Poincaré benötigt man den Begriff des Doppelverhältnisses von Punkten einer Geraden und die Eigenschaften des Doppelverhältnisses. (vgl. [Filler1993], S. 178)

**Definition 4.2.** Seien  $A, B, U, V \in g$ , weiters sei auf der Geraden  $g$  eine Richtung eingezeichnet. Man bezeichnet den Quotienten

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}$$

als Doppelverhältnis der Punkte  $A, B, U$  und  $V$ . Dabei sind  $|AU|, |BU|$  und  $|BV|$  gerichtete Streckenlängen. Das bedeutet, die Länge einer Strecke  $|XY|$  ist genau dann positiv, wenn  $Y$  rechts von  $X$  liegt, bzw. negativ, wenn  $Y$  links von  $X$  liegt. (vgl. [Filler1993], S. 178)

Für das Doppelverhältnis gelten folgende Eigenschaften:

1. Sind die Punkte  $A, B, U$  und  $V$  paarweise voneinander verschieden und jeder der Punkte  $A$  und  $B$  liegt zwischen  $U$  und  $V$ , so gilt  
 $(A, B, U, V) > 0$ .
2. Für vier beliebige Punkte  $A, B, U$  und  $V$  gilt  
 $(A, B, U, V) = \frac{1}{(B, A, U, V)}$ .
3. Für fünf beliebige Punkte  $A, B, C, U$  und  $V$  gilt  
 $(A, C, U, V) = (A, B, U, V) \cdot (B, C, U, V)$ .  
(vgl. [Filler1993], S. 179)
4. Das Doppelverhältnis kann die Werte 0 und 1 nicht annehmen, da sonst zwei der vier Punkte zusammenfallen würden.
5. Wenn man die Punkte  $A$  und  $U$  tauscht und gleichzeitig die Punkte  $B$  und  $V$ , so bleibt das Doppelverhältnis unverändert.  
 $(A, B, U, V) = (U, V, A, B) = \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|}$ .  
(vgl. [Buchmann1975], S. 14)

Die Gültigkeit dieser Eigenschaften ist nun noch nachzuweisen:

*Beweis.* Nach der Voraussetzung ist keine der gerichteten Streckenlängen  $|AB|, |BU|, |AV|$  und  $|BV|$  gleich Null und somit auch das Doppelverhältnis nicht gleich Null. Da weiters die Punkte  $A$  und  $B$  zwischen den Punkten  $U$  und  $V$  liegen, gilt:  $|AU| < 0, |BU| < 0$  und  $|AV| > 0, |BV| > 0$  oder  $|AU| > 0, |BU| > 0$  und  $|AV| < 0, |BV| < 0$ . In diesen Fällen ist  $(A, B, U, V)$  stets positiv. Die erste Eigenschaft ist damit gezeigt.

Die zweite Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|}$$

$$(B, A, U, V) := \frac{|BU||AV|}{|AU||BV|}.$$

Bildet man nun den Kehrwert, so ergibt sich:

$$\frac{1}{(B, A, U, V)} = \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = (A, B, U, V).$$

Die dritte Eigenschaft lässt sich durch Nachrechnen zeigen:

$$(A, B, U, V) \cdot (B, C, U, V) = \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} \cdot \frac{|BU||CV|}{|CU||BV|} = \frac{|AU||CV|}{|CU||AV|} = (A, C, U, V)$$

(vgl. [Filler1993], S. 242) Die vierte Eigenschaft zeigt sich ebenfalls durch Nachrechnen:

$\frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = 1$  gilt genau dann, wenn  $|BU| = |BV|$  und  $|AU| = |AV|$  oder wenn  $|AU| = |BU|$  und  $|AV| = |BV|$ .  $|BU| = |BV|$  und  $|AU| = |AV|$  gelten genau dann, wenn  $U = V$  und  $|AU| = |BU|$  und  $|AV| = |BV|$  genau dann, wenn  $A = B$ .

Damit das Doppelverhältnis den Wert 0 annimmt, müsste eine der gerichteten Streckenlängen den Wert 0 haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn zwei Punkte zusammenfallen. Fallen beispielsweise die Punkte  $A$  und  $U$  zusammen, so ist  $|AU| = 0$  und somit das Doppelverhältnis gleich Null. Die vierte Eigenschaft ist somit gezeigt.

Ebenso wie die anderen Eigenschaften kann auch die fünfte durch Nachrechnen gezeigt werden.

$$(A, B, U, V) = \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} \text{ und } (U, V, A, B) := \frac{|UA||VB|}{|UB||VA|}$$

Da es sich hier um entgegengesetzte gerichtete Strecken handelt, muss die Länge gleich sein, somit gilt  $|AU| = |UA|$  und damit handelt es sich hier um das gleiche Doppelverhältnis.

Es sind also alle Eigenschaften des Doppelverhältnisses gezeigt.  $\square$

**Satz 4.1.** *Es seien drei Punkte einer Geraden  $g$  und eine reelle Zahl  $r$  gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt auf der Geraden  $g$ , der mit den anderen drei Punkten in der gegebenen Reihenfolge das Doppelverhältnis mit dem Wert  $r$  bildet. (vgl. [Buchmann1975], S. 14)*

*Beweis.* Das Doppelverhältnis kann mit Hilfe der Koordinaten der Punkte berechnet werden. Hier für gilt:

$$(A, B, U, V) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1}. \quad (1)$$

Setzt man nun in (1) die Koordinaten der gegebenen Punkte ein und das Doppelverhältnis  $(A, B, U, V) = r$ , so erhält man für die Koordinaten des vierten Punktes eine Bestimmungsgleichung der Form:

$$a \cdot u = b, \text{ wobei immer } a \neq 0 \text{ gilt.}$$

Für  $x_1$  ergibt sich beispielsweise (für  $x_2, x_3$  und  $x_4$  müssen die Indizes getauscht werden):

$$[x_2 - x_4 + r(x_3 - x_2)] \cdot x_1 = x_3(x_2 - x_4) + rx_4(x_3 - x_2)$$

aus  $x_2 - x_4 + r(x_3 - x_2) = 0$  folgt

$$r = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}.$$

Setzt man dies nun in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2} &= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} \\ \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} &= 1 \end{aligned}$$

Somit würde  $x_3 = x_4$  gelten. Da die Bestimmungsgleichung  $a \cdot u = b$  bekanntlich genau eine Lösung hat, ist die x-Koordinate des vierten Punktes eindeutig bestimmt. Für die y-Koordinate erfolgt dies analog, somit ist auch die y-Koordinate eindeutig bestimmt und daher ist der vierte Punkt eindeutig auf  $g$  bestimmt.  $\square$

(vgl. [Buchmann1975], S. 14f)

**Definition 4.3.** Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte, auf einer Gerade vom Typ 1 mit den uneigentlichen Punkten  $U$  und  $V$ . Weiters seien  $A'$  und  $B'$  die Fußpunkte der Normalen durch  $A$  und  $B$  auf die Randgerade  $u$ . Die Punkte  $C$  und  $D$  liegen auf einer Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt  $W \in u$ . Wir bezeichnen

$$|AB|_N := \frac{1}{2} |\ln(A', B', U, V)| \text{ bzw. } |CD|_N := \left| \ln \frac{|DW|}{|CW|} \right|$$

als nichteuklidischen Abstand der Punkte  $A$  und  $B$  bzw. der Punkte  $C$  und  $D$ . (vgl. [Filler1993], S. 179)

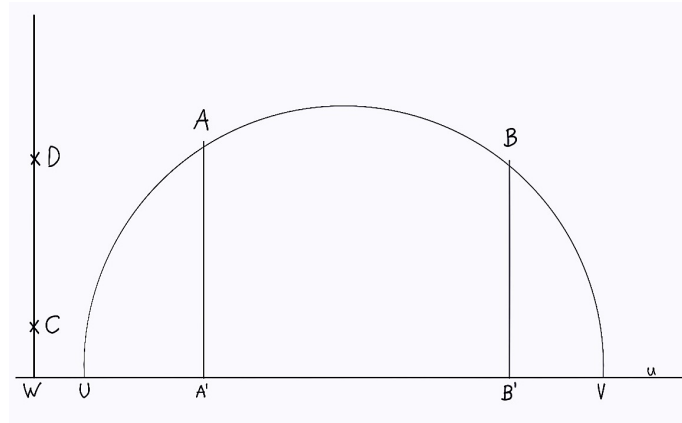


Abbildung 8: Skizze zu Definition 4.3.

Aus der Definition 4.3. folgt, dass falls es ein kartesisches Koordinatensystem gibt, dessen horizontale Achse auf der Randgeraden  $u$  liegt und  $A, B, C, D, U$  und  $V$  Punkte sind, wie sie in Definition 4.3. beschrieben wurden, die die Koordinaten  $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), (x_U, 0)$  und  $(x_V, 0)$  haben. Dann gilt:



$$|AB|_N := \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(x_U - x_A)(x_V - x_B)}{(x_U - x_B)(x_V - x_A)} \right| \text{ und } |CD|_N := \left| \ln \frac{|y_D|}{|y_C|} \right|.$$

(vgl. [Filler1993], S. 179) Es ist nun zu überprüfen, ob mit dieser Definition des Abstandes die Abstandsaxiome II/1, II/2 sowie II/3 erfüllt sind, da diese auch in der hyperbolischen Geometrie gelten.

*Beweis.* Sollten die Punkte  $A$  und  $B$  identisch sein, gilt  $(A', B', U, V) = 1$ . Wenn die Punkte  $C$  und  $D$  identisch sind, gilt  $\frac{|CW|}{|DW|} = 1$ . Der natürliche Logarithmus ist in beiden Fällen somit Null. Daher ist  $|AB|_N = 0$  bzw.  $|CD|_N = 0$ . Ist umgekehrt  $|AB|_N = 0$  bzw.  $|CD|_N = 0$ , so muss  $(A', B', U, V) = 1$  und  $\frac{|CW|}{|DW|} = 1$  gelten. Daraus folgt, dass  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  identisch sind. Somit ist gezeigt, dass II/1 gilt.

Die Gültigkeit von II/2 kann mit Hilfe des Doppelverhältnisses sowohl für Geraden vom Typ 1 als auch vom Typ 2 gezeigt werden:

$$|BA|_N = \frac{1}{2} \left| \ln(B', A', U, V) \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1}{(A', B', U, V)} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln(A', B', U, V) \right| = |AB|_N.$$

(vgl. [Filler1993], S. 242) Vom Axiom II/3 werden nur die Teilaussagen für kollineare Punkte an diesem Punkt bewiesen.

Seien  $A, B$  und  $C$  drei Punkte einer Geraden, wobei  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass  $A, B$  und  $C$  auf einer Geraden vom Typ 1 liegen, mit den uneigentlichen Punkten  $U$  und  $V$ . Auf Grund der Lage der Punkte muss auch der Fußpunkt  $B'$  des Lotes durch  $B$  auf  $u$  zwischen den Fußpunkten  $A'$  und  $C'$  liegen (siehe Abbildung). Aus der Definition der Doppelverhältnisses folgt, dass  $(A', B', U, V) \leq 1$  und  $(B', C', U, V) \leq 1$  oder  $(A', B', U, V) \geq 1$  und  $(B', C', U, V) \geq 1$ . Betrachtet man nun die dritte Eigenschaft des Doppelverhältnisses mit dem bereits Bekannten, ergibt sich

$$\begin{aligned} |AB|_N + |BC|_N &= \frac{1}{2} \left| \ln(A', B', U, V) \right| + \frac{1}{2} \left| \ln(B', C', U, V) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln(A', B', U, V) + \ln(B', C', U, V) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[ \ln(A', B', U, V) \cdot (B', C', U, V) \right] \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln(A', C', U, V) \right| = |AC|_N. \end{aligned}$$

(vgl. [Filler1993], S. 180)

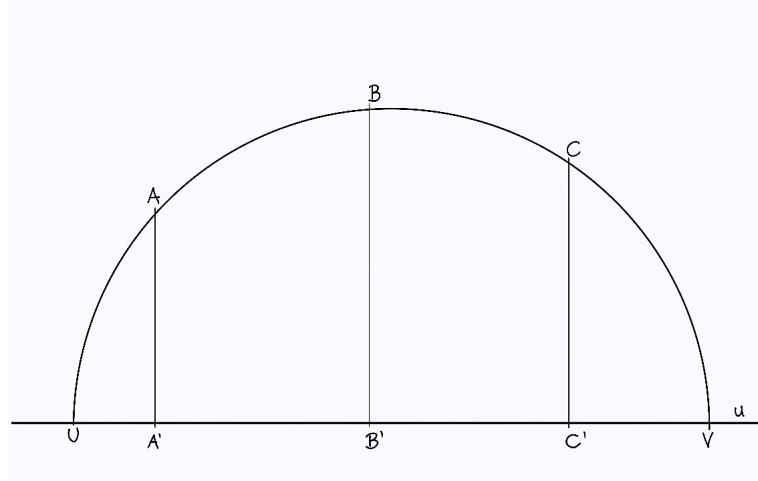


Abbildung 9: Kollineare Punkte auf einer Geraden vom Typ 1

Die Beweise für  $|AC|_N + |CB|_N = |AB|_N$  und  $|BA|_N + |AC|_N = |BC|_N$  erfolgen analog, für  $A, B$  und  $C$  kollineare Punkte auf einer Geraden vom Typ 1.

Seien nun  $A, B$  und  $C$  Punkte einer Geraden vom Typ 2. Weiters soll  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegen. Bei den Abständen  $|AB|_N = \left| \ln \frac{|BW|}{|AW|} \right|$  und  $|BC|_N = \left| \ln \frac{|CW|}{|BW|} \right|$  müssen beide Logarithmen entweder positiv oder negativ sein.

$$\begin{aligned}
 |AB|_N + |BC|_N &= \left| \ln \frac{|BW|}{|AW|} \right| + \left| \ln \frac{|CW|}{|BW|} \right| \\
 &= \left| \ln \frac{|BW|}{|AW|} + \ln \frac{|CW|}{|BW|} \right| \\
 &= \left| \ln \left[ \frac{|BW|}{|AW|} \frac{|CW|}{|BW|} \right] \right| \\
 &= \left| \ln \frac{|CW|}{|AW|} \right| = |AC|_N.
 \end{aligned}$$

(vgl. [Filler1993], S. 242) Somit ist  $|AB|_N + |BC|_N = |AC|_N$  gezeigt. Die anderen Fälle folgen analog.  $\square$

Die Definition des Abstandes ist insofern sinnvoll, da aus begrenzten Objekten unbegrenzte werden. So können in der Nähe von uneigentlichen Punkten einer Geraden, sowohl vom Typ 1 als auch vom Typ 2, euklidisch kleine Abstände nichteuklidisch sehr groß werden. Die Abstände zwischen zwei benachbarten Punkten sind, wie die folgende Abbildung zeigt, stets gleich groß:

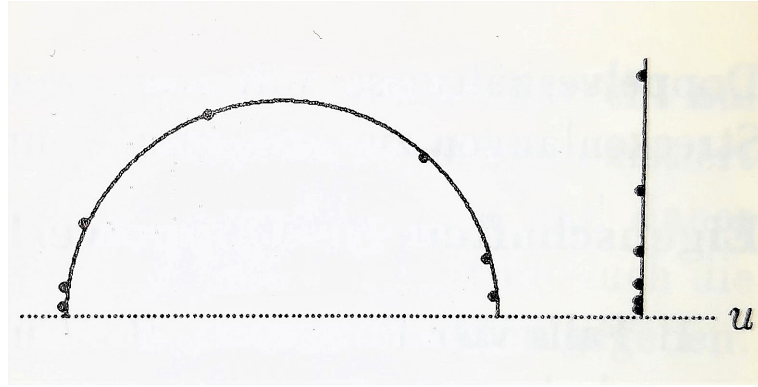


Abbildung 10: Abstand von Punkten

Als Nächstes sollen die Anordnungsaxiome auf ihre Gültigkeit in der hyperbolischen Geometrie überprüft werden.

Die Gültigkeit des Axiomes III/2 ist durch eine Betrachtung der folgenden Abbildung feststellbar.

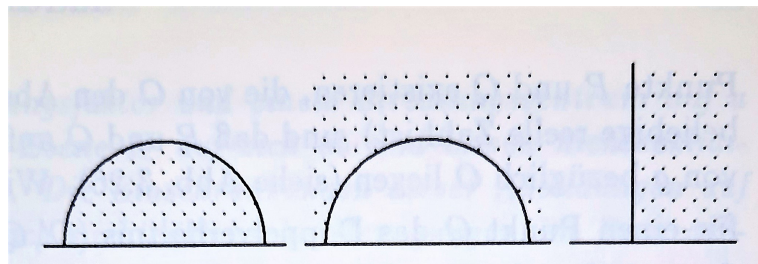


Abbildung 11: Halbebenen

*Beweis.* Um die Gültigkeit von III/1 nachzuweisen, betrachtet man eine beliebige Gerade  $g$  vom Typ 1, mit den uneigentlichen Punkten  $U$  und  $V$ , und einen beliebigen Punkt  $O \in g$ . Es soll gezeigt werden, dass es von  $O$  genau zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gibt, die den Abstand  $a$  haben, und dass diese Punkte auf unterschiedlichen Halbgeraden auf  $g$  bezüglich  $O$  liegen. Betrachtet man die Abbildung, so sieht man, dass für den Punkt  $Q$  das Doppelverhältnis  $(O', Q', U, V) := \frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|} > 1$  gilt, wenn  $Q$  auf  $g$  links von  $O$  liegt bzw. der Fußpunkt  $Q'$  links von  $O'$  auf  $u$  liegt.

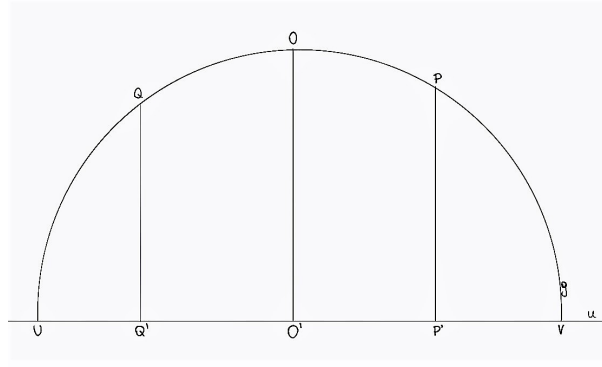


Abbildung 12: Skizze zu Beweis Axiom III/1

In diesem Fall gilt:

$$|OQ|_N = \frac{1}{2} \ln \frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|} = a$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|} &= \exp(2a) \\ \frac{|Q'V|}{|Q'U|} &= \exp(2a) \frac{|O'V|}{|O'U|}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird durch das Streckenverhältnis genau ein Punkt  $Q'$  und somit auch genau ein Punkt  $G$  festgelegt, der von  $O$  den Abstand  $a$  hat und auf der linken Halbgeraden von  $g$  bezüglich  $O$  liegt. Analog lässt sich auf der rechten Halbgerade von  $g$  bezüglich  $O$  genau ein Punkt  $P$  finden mit  $|OP| = a$ . Da für alle Punkte rechts von  $O$  für das Doppelverhältnis  $(O', P', U, V) := \frac{|O'U||P'V|}{|P'U||O'V|} < 1$  gilt, wird  $P$  durch

$$\begin{aligned} \frac{|O'U||P'V|}{|P'U||O'V|} &= \exp(2a) \\ \frac{|P'V|}{|P'U|} &= \exp(2a) \frac{|O'V|}{|O'U|} \end{aligned}$$

festgelegt. (vgl. [Filler1993], S. 182)

Sei nun  $O$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$  vom Typ 2, mit dem uneigentlichen Punkt  $W$ . Für alle Punkte  $Q \in g$ , die oberhalb von  $O$  liegen, gilt  $\ln \frac{|QW|}{|OW|} > 0$  und  $\ln \frac{|PW|}{|OW|} < 0$  gilt für jene Punkte  $P$ , die unterhalb von  $O$  auf  $g$  liegen. Es gibt somit genau zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , die von  $O$  den Abstand  $a$  aufweisen. Diese werden durch  $\frac{|QW|}{|OW|} = e^a$  bzw.  $\frac{|PW|}{|OW|} = e^{-a}$  festgelegt. (vgl. [Filler1993], S. 243)  $\square$

### 4.1.2 Abstand von Punkten zu Geraden

**Definition 4.4.** Sei  $g$  eine Gerade und  $P$  ein Punkt, der nicht auf der Gerade  $g$  liegt, dann nennt man

$$d(P, g) := \inf\{d(P, G); G \in g\}$$

den Abstand von  $P$  zu  $g$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 107)

**Beispiel 4.1.** Seien  $g := i\mathbb{R}_{>0}$  und  $h := 1 + i\mathbb{R}_{>0}$ . Für einen Punkt  $H := 1 + i\eta \in h$  gilt:

1.  $d(g, h) = \text{Arcosh}\left(\frac{1}{\eta}\sqrt{\eta^2 + 1}\right)$ .
2. Wenn für den Punkt  $L \in g$   $d(L, H) = d(g, H)$  gilt, dann schneidet  $\overline{LH}$  die Gerade  $g$  im rechten Winkel.

*Beweis.* Es sei  $is \in g$ . Dann gilt [...]

$$\cosh(d(is, H)) = \frac{s^2 + 1 + \eta^2}{2s\eta} \geq \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta}$$

wobei die Ungleichung gerade die Ungleichung  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel mit

$$a := \frac{s}{\eta} \text{ und } b := \frac{1 + \eta^2}{s\eta}$$

ist und das Minimum daher genau für  $a = b$ , d.h.  $s = \sqrt{1 + \eta^2} = |H|$  angenommen wird. Damit erhält man beide Behauptungen.

([Berchtold2017], S. 108)

□

### 4.1.3 Abstandslinien

Eine Abstandslinie, also eine Menge von Punkten, die von einer bestimmten Gerade den gleichen Abstand haben, muss in der hyperbolischen Geometrie keine Gerade, sowie man sich diese im Allgemeinen vorstellt, sein. Im Folgenden wird die Gestalt der Abstandslinien genauer betrachtet.

**Satz 4.2.** Sei  $g$  eine Gerade vom Typ 2, mit dem uneigentlichen Punkt  $W$ . Weiters sei  $P \notin g$ . Dann ist die Menge aller Punkte, die von  $g$  denselben Abstand haben wie  $P$  und mit  $P$  in einer Halbebene bezüglich  $g$  liegen, eine euklidische Halbgerade durch  $P$  mit dem Anfangspunkt  $W$ . (vgl. [Filler1993], S. 193)

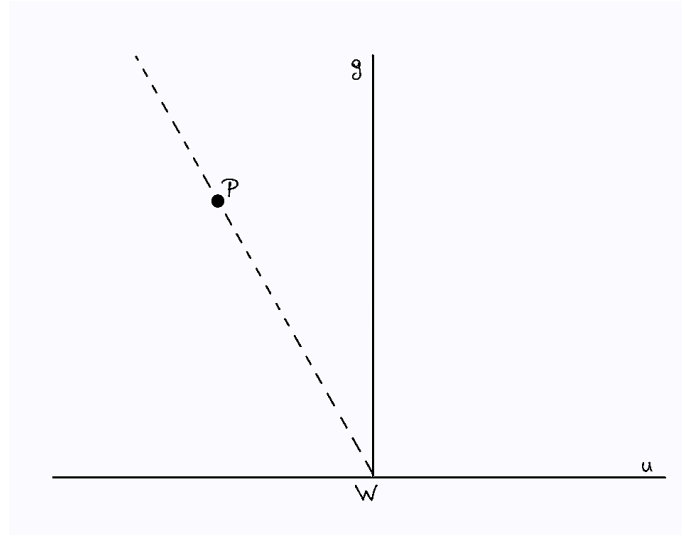


Abbildung 13: Abstandslinien zu Geraden vom Typ 2

*Beweis.* Der Abstand des Punkt  $P$  von der Geraden  $g$  entspricht dem Abstand zwischen  $A$  und  $P$ , wobei  $A$  der Fußpunkt des Lotes auf  $g$  durch  $P$  ist. Weiters liegen  $A$  und  $P$  auf einem euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt  $W$ . Weiters sei  $Q$  ein beliebiger Punkt auf der Halbgeraden  $WP$  und  $B$  der Fußpunkt des Lotes auf  $g$  durch  $Q$ . Dann liegen auch  $Q$  und  $B$  auf einem euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt  $W$ . Durch eine Streckung mit dem Zentrum  $W$  bildet man  $Q$  auf  $P$  und  $B$  auf  $A$  ab. Daher gilt  $|AP|_N = |BQ|_N$ . Somit haben die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  denselben Abstand von  $g$ . Da  $Q$  beliebig gewählt wurde, gilt dies für alle Punkte auf der Halbgeraden. (vgl. [Filler1993], S. 244)  $\square$

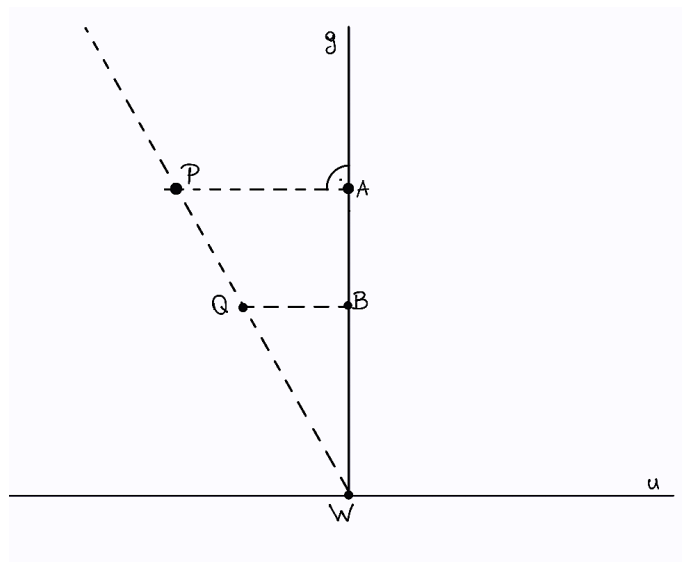


Abbildung 14: Skizze zu Beweis Satz 4.2.

Die Abstandslinien zu Geraden vom Typ 1 lassen sich durch Bewegungen aus den Abstandslinien zu Geraden vom Typ 2 ableiten. Durch eine Inversion an einem Kreis  $k$  mit dem

Inversionspol, verlaufend durch den uneigentlichen Punkt  $U$  von  $h$ , wird  $h$  auf einer Geraden vom Typ 2  $h'$  abgebildet. Da eine Inversion eine nichteuklidische Bewegung ist, bleiben die Abstände unverändert. Somit werden Abstandslinien der Urgeraden auf Abstandslinien der Bildgeraden abgebildet, dies gilt auch umgekehrt. Die Abstandslinien von  $h'$  werden auf Abschnitte von Kreisen, die durch den Inversionspol gehen, abgebildet. Es sind somit alle Abstandslinien von  $h$  Kreisbögen, die mit  $h$  die uneigentlichen Punkte  $U$  und  $V$  gemeinsam haben. (vgl. [Filler1993], S. 193)

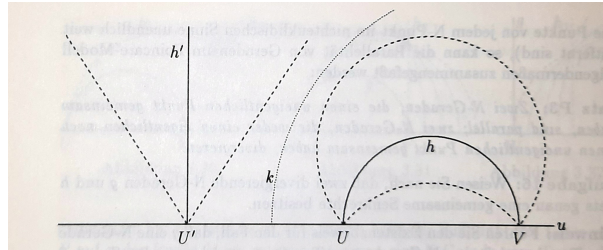


Abbildung 15: Abstandslinien zu einer Geraden vom Typ 1

## 4.2 Länge, Abstände und Winkelmessung im Modell der Kreisscheibe

Im Folgenden wird das Kreisscheibenmodell nach Klein verwendet, wie dieses bereits in Kapitel 3 beschrieben wurde.

Vorab einige Definitionen, die für dieses Kapitel von Bedeutung sind:

**Definition 4.5.** Zwei Teilmengen der hyperbolischen Ebene  $A$  und  $B$  nennt man kongruent,  $A \equiv B$ , wenn sie sich durch eine endliche Kette von Polarenspiegelungen aufeinander abbilden lassen. (vgl. [Buchmann1975], S. 21)

**Definition 4.6.** Eine Strecke  $\overline{AB}$ , mit den Randpunkten  $U$  und  $V$ , für die gilt: Das Doppelverhältnis  $(A, B, U, V) > 0$ , nennt man normal-gerichtet. (vgl. [Buchmann1975], S. 54)

**Definition 4.7.** Zwei Geraden  $l$  und  $k$  der hyperbolischen Ebene bezeichnet man zueinander als orthogonal, wenn die durch  $l$  festgelegte euklidische Gerade durch den Pol  $K$  der Geraden  $k$  geht. (vgl. [Buchmann1975], S. 23)

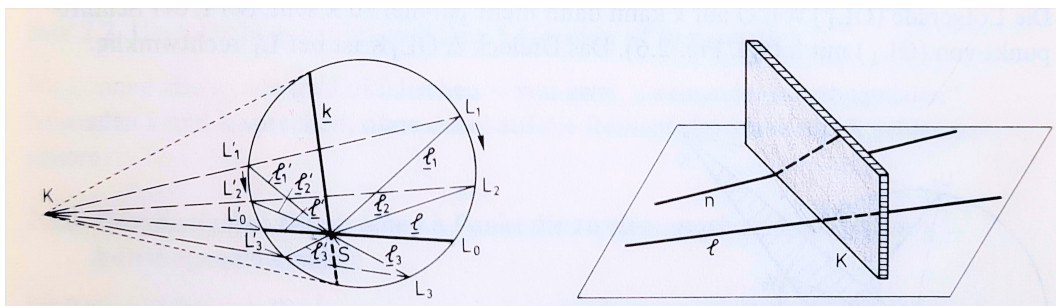


Abbildung 16: Veranschaulichung Orthogonalität im Kleinschen Modell

### 4.2.1 Messung von Strecken

Die Längenmessung  $L$ , welche auch oft als „Funktional“ bezeichnet wird, soll, wie auch in der euklidischen Geometrie, folgende Eigenschaften besitzen:

1.  $L(\overline{AB}) \geq 0$  und  $L(\overline{AB}) = 0$ , wenn  $A = B$ , (Definitheit)
2.  $L(\overline{AB}) = L(\overline{CD})$ , wenn  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , (Invarianz)
3.  $L(\overline{AC}) = L(\overline{AB}) + L(\overline{BC})$ , sollte  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegen. (Additivität)

(vgl. [Buchmann1975], S. 81)

Fraglich ist, nun wie sich ein solches Funktional finden lässt, wenn man die Kongruenz der euklidischen Geometrie durch jene der hyperbolischen ersetzt. Wie auch im Modell der Halbebene betrachtet man das Doppelverhältnis  $(A, B, U, V)$ , da man vermutet, dass dieses das gesuchte Funktional ist. Diese Annahme beruht darauf, dass das Doppelverhältnis eine reelle Zahl ist und für normal-gerichtete Strecken die Forderung der Invarianz erfüllt: Wenn für zwei normal-gerichtete Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{A'B'}$  gilt, dass  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ , so muss es nach der Definition 4.5. eine endliche Folge an Polarenspiegelungen geben. Bei diesen wird das Doppelverhältnis nicht verändert, es gilt  $(A, B, U, V) = (A', B', U', V')$ . Allerdings erfüllt das Doppelverhältnis nicht die Forderung der Additivität:  $(A, C, U, V) = (A, B, U, V) \cdot (B, C, U, V)$ . (vgl. [Buchmann1975], S. 82)

Somit ist es notwendig, eine Funktion zu suchen, die aus einem Produkt eine Summe werden lässt. Da als solche Funktion der Logarithmus bekannt ist, ist es naheliegend, diesen mit dem Doppelverhältnis zu kombinieren. Da für normal-gerichtete Strecken das Doppelverhältnis kongruenter Strecken mit ihren Randpunkten gleich ist, gilt

$$\ln(A, B, U, V) = \ln(C, D, U', V') \text{ für } \overline{AB} \equiv \overline{CD}.$$

Die Invarianz ist somit erfüllt. Aus der dritten Eigenschaft des Doppelverhältnisses in Kombination mit dem Logarithmus folgt:

$$\ln(A, C, U, V) = \ln(A, B, U, V) + \ln(B, C, U, V).$$

Dadurch ist auch die Additivität erfüllt. Nun gilt es noch, das Kriterium der Definition zu erfüllen. Für normal-gerichtete Strecken ist das Doppelverhältnis laut Definition stets größer 1 und  $\ln(A, B, U, V) > 0$ . Wenn  $A = B$ , gilt für das Doppelverhältnis  $(A, B, U, V) = 1$  und für  $\ln(A, B, U, V) = 0$ . Somit gilt auch die Definitheit für normal-gerichtete Strecken.

Man kennt bereits die Eigenschaften des Doppelverhältnisses und daher weiß man, dass  $(B, A, U, V) = \frac{1}{(A, B, U, V)}$  gilt und damit auch  $\ln(B, A, U, V) = -\ln(A, B, U, V)$ . Man würde also für nicht normal-gerichtete Strecken ein negatives Längenmaß erhalten. Somit benötigt man den Absolutbetrag  $|\ln(A, B, U, V)|$ , wenn die Definitheit für alle Strecken gelten soll. Durch Einsetzen und Nachrechnen lässt sich feststellen, dass für die Punkte  $P = (0, 0)$  und  $Q = (\frac{e-1}{e+1}, 0)$  und die dazugehörigen Randpunkte  $U = (1, 0)$  und  $V = (-1, 0)$  eine Einheitsstrecke  $\overline{PQ}$  gegeben ist, mit  $|\ln(P, Q, U, V)| = |\ln e| = 1$ .



Damit wurde die Existenz einer Maßfunktion für Strecken der hyperbolischen Geometrie nachgewiesen. Jedes Funktional der Form  $L = k \cdot |\ln(A, B, U, V)|$  mit  $k > 0$  und einer Konstanten  $k$  kann eine solche Maßfunktion sein. Aus historischen Gründen wird im Allgemeinen  $k = \frac{1}{2}$  gesetzt. (vgl. [Buchmann1975], S. 83f)

**Definition 4.8.** Sei  $\overline{AB}$  eine Strecke mit den dazugehörigen Randpunkten  $U$  und  $V$ , dann heißt die reelle Zahl

$$L(AB) = \frac{1}{2} \cdot |\ln(A, B, U, V)|$$

Maß der Strecke  $\overline{AB}$ . (vgl. [Buchmann1975], S. 83)

Somit ist jeder Strecke eine reelle Zahl und damit eine Länge zugeordnet. Eine Umkehrung bringt:

**Satz 4.3.** Wenn  $g$  eine von dem Punkt  $A$  ausgehende Halbgerade ist, dann gibt es zu jeder reellen Zahl  $r \in \mathbb{R}^+$  genau einen Punkt auf  $g$ , sodass  $L(\overline{AB}) = r$ . (vgl. [Buchmann1975], S. 83)

*Beweis.* Man bezeichnet die Randpunkte von  $g$  mit  $U$  und  $V$ , sodass zwischen  $V$  und  $A$  kein weiterer Punkt von  $g$  liegt. Es gibt nach Satz 4.1. genau einen Punkt  $B$ , der mit den gegebenen Punkten  $A, U$  und  $V$  das Doppelverhältnis  $(A, B, U, V) = e^{2r}$  bildet. Da  $e^{2r} > 1$  für  $r > 0$ , liegt der Punkt  $B$  zwischen  $A$  und  $U$ , also auf der Geraden  $g$ . Durch die Anwendung des Logarithmus erhält man  $\ln(A, B, U, V) = 2r$ , daher gilt

$$r = \frac{1}{2} |\ln(A, B, U, V)| = L(\overline{AB})$$

(vgl. [Buchmann1975], S. 83) □

Betrachtet man nun die Definition 4.8. unter Beachtung des Postulates, dass die Punkte des Kreises nicht zur Ebene gehören, so ergibt sich:

**Satz 4.4.** Wenn  $\overline{AB}$  eine beliebige Strecke ist und  $B$  auf der durch  $\overline{AB}$  festgelegten Gerade  $g$  von  $A$  unbegrenzt zum Rand hin abrückt, dann wächst das Maß der Strecke  $\overline{AB}$  über alle Grenzen. (vgl. [Buchmann1975], S. 83)

*Beweis.* Durch eine Bewegung wird die Strecke  $\overline{AB}$  so gelegt, dass  $A$  in den Mittelpunkt  $O$  des Einheitskreises fällt und  $B$  auf die positive  $x$ -Achse. Es gilt also  $H(A) = O = (0, 0)$  und  $H(B) = X = (x, 0)$ , mit  $\overline{AB} \equiv \overline{OX}$ . Aus der Definition 4.8. für das Maß der Strecke folgt:

$$L(\overline{AB}) = L(\overline{OX}) = \frac{1}{2} |\ln(O, X, U, V)| \text{ mit } U = (1, 0), V = (-1, 0).$$

Nach der Definition des Doppelverhältnisses ergibt sich daraus

$$L(\overline{AB}) = L(\overline{OX}) = \frac{1}{2} \left| \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right| \text{ mit } 0 < x < 1.$$

Wenn nun der Punkt  $B$  immer näher an den Kreisrand rückt, so nähert sich  $x$  dem Wert 1. Da  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = 0$  wächst  $\frac{1+x}{1-x}$  über alle Grenzen und somit auch das Maß von  $\overline{OX}$  und  $\overline{AB}$ . (vgl. [Buchmann1975], S. 83f) □

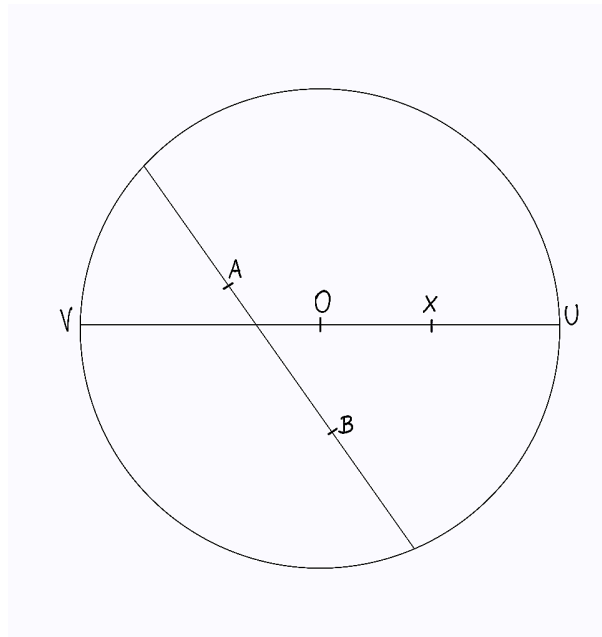


Abbildung 17: Skizze zu Beweis Satz 4.4.

#### 4.2.2 Messung von Winkeln

Das Verfahren zur Winkelmessung lässt sich analog zur Messung der Länge entwickeln, sodass jeder Winkel  $\alpha$  einem eindeutigen Winkelmaß  $W(\alpha)$  zugeordnet werden kann. Da im Modell nach Klein die Winkelmessung jedoch nur durch Benutzung von Hyperbelfunktionen, wie  $\sinh \alpha$ ,  $\cosh \alpha$  und anderen, möglich ist, werden hier nur Spezialfälle betrachtet, in denen ein Vergleich von euklidischen Winkelmaßen  $W_e(\alpha)$  und hyperbolischen Winkelmaßen  $W_h(\alpha)$  möglich sind. (vgl. [Buchmann1975], S. 84)

Dafür werden zunächst Gemeinsamkeiten der beiden Winkelmaße gesammelt.

Da die Polarenspiegelung einer hyperbolischen Geraden, die durch den Kreismittelpunkt  $O$  verläuft, mit der euklidischen Geradenspiegelung identisch ist, folgt unter Beachtung der Definition der Kongruenz und Orthogonalität Folgendes:

**Satz 4.5.** *Wenn ein Schenkel eines hyperbolisch rechten Winkels durch den Mittelpunkt  $O$  des Kreises geht, dann ist dieser auch euklidisch ein rechter Winkel. Dies gilt auch umgekehrt. (vgl. [Buchmann1975], S. 84)*

**Satz 4.6.** *Zwei hyperbolische Winkel, welche durch euklidische Spiegelungen am Durchmesser des Kreises aufeinander abgebildet werden können, sind sowohl euklidisch als auch hyperbolisch kongruent zu einander. (vgl. [Buchmann1975], S. 84)*

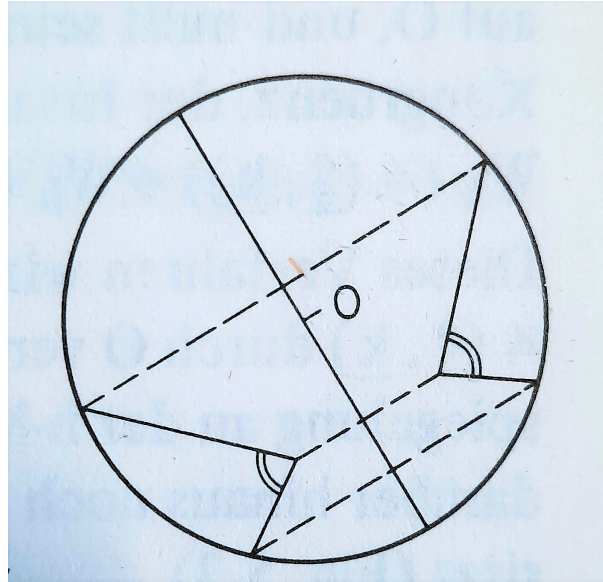


Abbildung 18: Skizze zu Satz 4.6.

Aus Satz 4.6. lassen sich folgende Spezialfälle als Folgerung ableiten:

- a) Falls zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel  $O$  hyperbolisch kongruent sind, dann sind diese auch euklidisch kongruent.
- b) Für eine Halbgerade  $g$ , welche durch den Kreismittelpunkt  $O$  verläuft, gilt: Ist  $g$  eine Winkelhalbierende für einen hyperbolischen Winkel  $\alpha$ , so halbiert die Halbgerade den Winkel auch euklidisch. Umgekehrt gilt: Sollte eine Halbgerade  $g$  einen Winkel  $\alpha$  euklidisch halbieren, so halbiert diese den Winkel auch hyperbolisch.  
(vgl. [Buchmann1975], S. 84f)

Wenn man die Eigenschaften der Maßfunktion  $L$  für Strecken sinngemäß auf eine Maßfunktion  $W$  für Winkel übertragen möchte, so ergibt sich Folgendes:

1.  $W(\sphericalangle(l, k)) \geq 0$  und  $W(\sphericalangle(l, k)) = 0$  genau, dann wenn  $l = k$  (Definitheit)
2.  $W(\sphericalangle(l, k)) = W(\sphericalangle(g, h))$ , wenn  $\sphericalangle(l, k) = \sphericalangle(g, h)$   
(Invarianz)
3.  $W(\sphericalangle(l, k)) = W(\sphericalangle(l, m)) + W(\sphericalangle(m, k))$  für jede im Winkel  $\sphericalangle(l, k)$  verlaufende Halbgerade  $m$  mit dem Scheitel als Anfangspunkt (Additivität)

([Buchmann1975], S. 85)

Diese Eigenschaften sind für das Maß  $W_h$ , wenn man die Kongruenz bei der Invarianz als hyperbolische Kongruenz auffasst, genauso verbindlich wie für die Winkelfunktion  $W_e$ . Auch die Normierung des Winkelmaßes kann aus dem Euklidischen übernommen werden, indem man festsetzt, dass für den gestreckten Winkel  $\sphericalangle(l, l^*)$  gelten soll:

$$W_h(\sphericalangle(l, l^*)) = W_e(\sphericalangle(l, l^*)) = \pi.$$

Auf diese Weise wird auch in der hyperbolischen Geometrie durch  $W_h$  dem rechten Winkel die Zahl  $\frac{\pi}{2}$  zugeordnet. (vgl. [Buchmann1975], S. 85)

Für einen Winkel  $\alpha$  des betrachteten Spezialfalles, dass der Scheitel im Punkt  $O$  liegt, für den das euklidische Winkelmaß  $k \cdot \pi = \alpha_e$  (mit  $0 \leq k \leq 1$ ) gilt, können die Überlegungen zum Steckenvergleich auf den Vergleich von Winkeln übertragen werden. Die reelle Zahl  $k$  kann somit durch wiederholtes Winkelhalbieren bestimmt werden. Da man aus den Folgerungen des Satzes 4.6. weiß, dass euklidisches und hyperbolisches Halbieren von Winkeln in diesem Fall identische Operationen sind, muss  $k \cdot \pi$  auch die Maßzahl  $W_h(\alpha) = \alpha_h$  sein. Somit gilt:

**Satz 4.7.** *Für jeden hyperbolischen Winkel, dessen Scheitel im Kreismittelpunkt  $O$  liegt, gilt: Das hyperbolische und euklidische Winkelmaß stimmen überein:*

$$\alpha_e = \alpha_h.$$

(vgl. [Buchmann1975], S. 85)

Man kann sagen, dass die euklidische und hyperbolische Welt sich im Punkt  $O$  „berühren“, sodass dem Winkel von zwei von  $O$  ausgehenden Halbgeraden ein euklidisches Winkelmaß zugeordnet werden kann und somit gleichzeitig das hyperbolische Winkelmaß bestimmt wird. Auf diese Art lässt sich das Winkelmaß eines jeden hyperbolischen Winkels  $\sphericalangle(l, k)$  durch Konstruktion bestimmen: Durch eine Bewegung wird der Scheitel des Winkels  $\sphericalangle(l, k)$  in  $O$  gelegt und anschließend am kongruenten Bild des Winkels  $\sphericalangle(l', k')$  der euklidische Winkel gemessen. Nach Definition 4.5., der Invarianzforderung und Satz 4.7. ist dadurch das hyperbolische Winkelmaß  $W_h(\sphericalangle(l, k)) = W(\sphericalangle(l', k'))$  bestimmt. (vgl. [Buchmann1975], S. 85f) Verläuft ein Schenkel des Winkels durch den Punkt  $O$ , so ist dieses Verfahren einfacher. Ist dann  $S$  der Schenkel des Winkels, so ist die benötigte Bewegung eine Polarenspiegelung an der Mittelsenkrechten  $m$  der Strecke  $\overline{OS}$ .

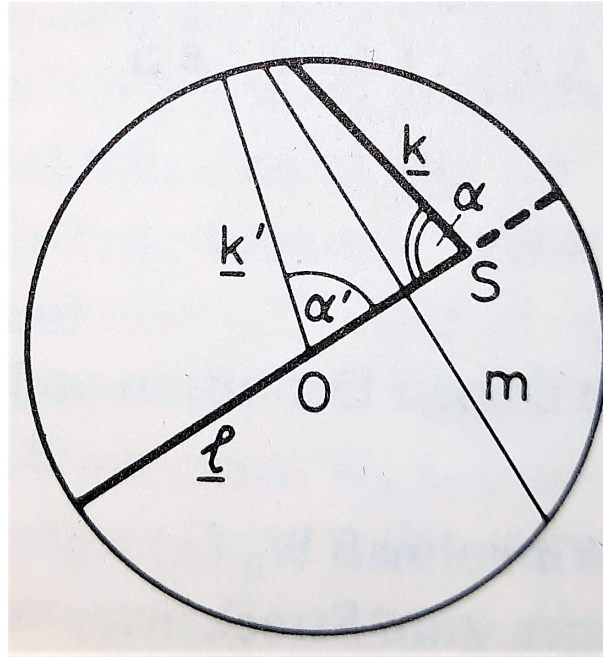


Abbildung 19: Schenkel des Winkels verläuft durch  $O$

Die Änderungen des euklidischen Winkels, die bei einer Polarenspiegelung auftraten, lassen sich auch quantitativ erfassen. Der gegebene Winkel  $\angle(l, k)$  soll kleiner als ein Rechter sein und die Halbgerade  $l$  jener Schenkel, der durch  $O$  verläuft. Legt man nun das Koordinatensystem so, dass der Scheitel  $S$  auf der positiven x-Achse liegt, dann schneidet der Schenkel  $k$  die y-Achse in  $T = (0, t)$ . Der Mittelpunkt  $A$  der Strecke  $\overline{OS}$  ist durch folgende Konstruktion ermittelbar:

Die Parallele zur y-Achse durch  $S(s; 0)$  schneidet den Einheitskreis in den Punkten  $S_1(s; +\sqrt{1-s^2})$  und  $S_2(s; -\sqrt{1-s^2})$ . Die Verbindungsgerade  $(VS_1)$  mit  $V(0; -1)$  schneidet die x-Achse in  $A$ . ([Buchmann1975], S. 86)

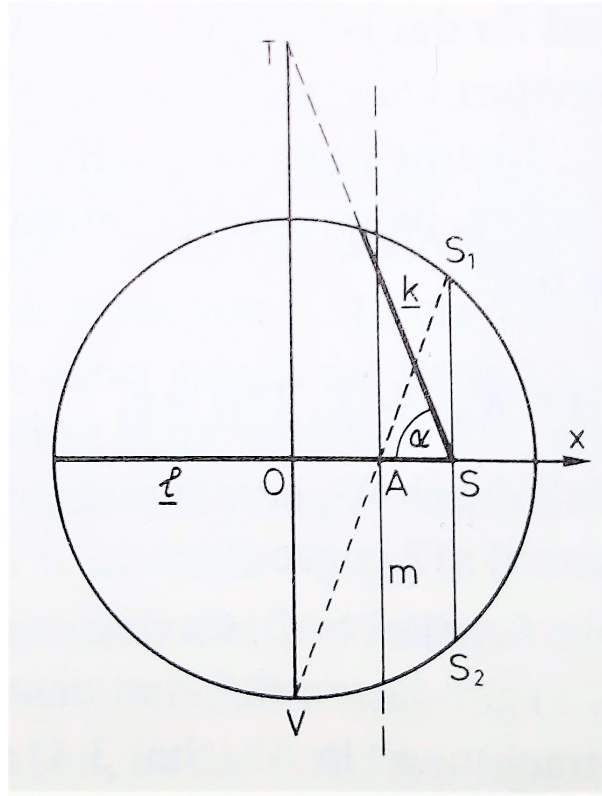


Abbildung 20: Skizze zur Konstruktion

Aus

$$(VS_1) : y = \frac{\sqrt{1-s^2}+1}{s}x - 1$$

ergibt sich für

$$A : A = \left( \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}, 0 \right).$$

Damit ergibt sich für die Mittelsenkrechte  $m$  der Strecke  $\overline{OS}$  die Gleichung

$$m : x = \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s},$$

und für die Transformationsgleichung erhält man die Werte

$$u = \frac{2}{s}, v = \frac{-2\sqrt{1-s^2}}{s}.$$

Somit ist die Polarenspiegelung  $S_m$  der Mittelsenkrechten von  $\overline{OS}$  festgelegt

$$S_m : x' = \frac{s-x}{1-sx}, y' = \frac{\sqrt{1-s^2}y}{1-sx}.$$

Somit ergeben sich die Bildpunkte  $S_m(T) = T'$ , mit  $T' = (s, \sqrt{1-s^2} \cdot t)$ ,  $S_m(O) = S$  und  $S_m(S) = O$ . Man erhält in den Dreiecken  $\triangle SOT$  und  $\triangle OST'$  (siehe Abbildung) für die Tangenswerte von  $\alpha_e$  und  $\alpha'_e$

$$\tan \alpha_e = \frac{t}{s} \text{ und } \tan \alpha'_e = \frac{\sqrt{1-s^2} \cdot t}{s}.$$

Somit gilt

$$\tan \alpha'_e = \tan \alpha_e \cdot \sqrt{1-s^2}.$$

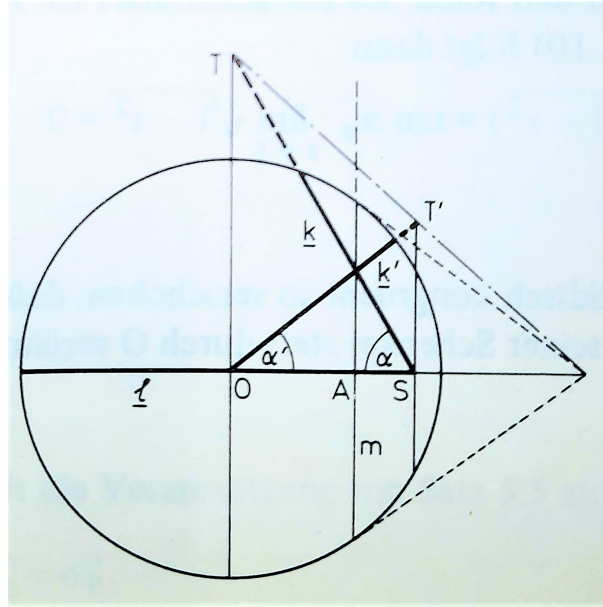


Abbildung 21: Skizze Polarenspiegelung

Das euklidische Winkelmaß  $W_e$  eines, durch eine Polarenspiegelung auf  $O$  abgebildeten, Winkels wird somit kleiner, da sein Tangenswert mit dem Faktor  $\sqrt{1-s^2}$  multipliziert wird. Da auf diesen Winkel die Voraussetzungen des Satzes 4.7. zutreffen, gilt:

$$\alpha'_e = \alpha'_h$$

Daraus folgt:  $\tan \alpha'_h = \sqrt{1-s^2} \cdot \tan \alpha_e$ .

Da  $\alpha \equiv \alpha'$  gilt, weil  $S_m(\alpha) = \alpha'$ , folgt aus der Invarianz für das Winkelmaß  $\alpha'_h = \alpha_h$  und somit gilt:

$$\tan \alpha_h = \sqrt{1-s^2} \cdot \tan \alpha_e$$

Wenn man einen hyperbolischen Winkel, der kleiner als ein hyperbolischer Rechter ist, als spitz bezeichnet, kann man Folgendes formulieren:

**Satz 4.8.** *Wenn  $\alpha$  ein spitzer Winkel ist, von dem ein Schenkel durch den Ursprung  $O$  verläuft, und  $s$  der euklidisch gemessene Abstand seines Scheitels von  $O$ , dann gilt folgende Beziehung:*

$$\tan \alpha_h = \sqrt{1-s^2} \cdot \tan \alpha_e$$

$$\alpha_h < \alpha_e \quad \text{für } s \neq 0$$

(vgl. [Buchmann1975], S. 88)

Für das Längenmaß der hyperbolischen Strecken wurde bereits überlegt, was bei einer Annäherung an den Rand geschieht. Dies soll nun analog auch für das Winkelmaß geschehen: Wenn der Scheitel eines Winkels, mit den in Satz 4.8. geforderten Eigenschaften, bei einem konstantem Winkelmaß näher zum Rand des Einheitskreises rutscht, so nähert sich der Wert



$s$ , des Abstandes zum Punkt  $O$ , immer mehr dem Wert 1. Aus der Beziehung aus Satz 4.8. folgt nun

$$\lim_{s \rightarrow 1} (\tan \alpha_h) = \lim_{s \rightarrow 1} (\tan \alpha_e \cdot \sqrt{1 - s^2}) = \tan \alpha_e \cdot \lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{1 - s^2} = 0.$$

Somit gilt:

**Satz 4.9.** *Wenn ein spitzer Winkel euklidisch kongruent so verschoben wird, dass der Scheitel dem Randkreis immer näher rückt und sein Schenkel dennoch weiterhin durch den Mittelpunkt  $O$  verläuft, so konvergiert sein Maß gegen Null.*

(vgl. [Buchmann1975], S. 88)

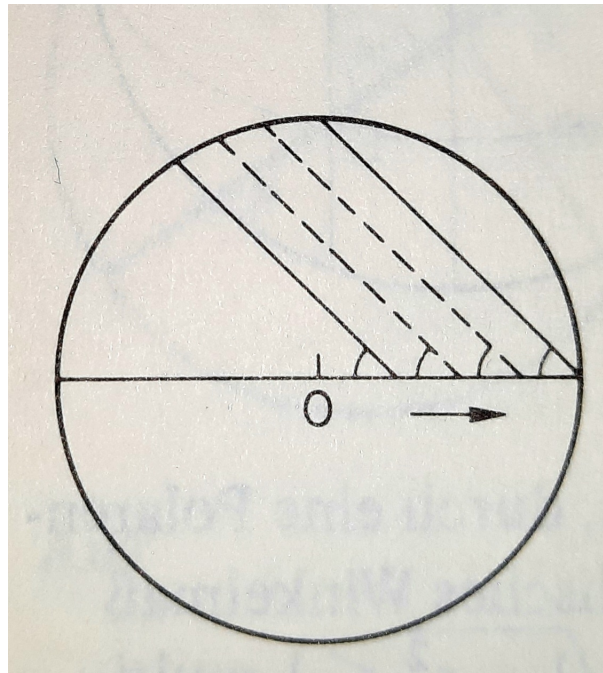


Abbildung 22: Scheitel des Winkels rückt gegen den Randkreis

### 4.2.3 Winkelsummen und Satz von Thales

Bereits in Kapitel 2 wurden einige Sätze der hyperbolischen Geometrie dargelegt und bewiesen, unter anderem auch, dass die Winkelsumme in einem Dreieck stets kleiner als  $\pi$  ist, siehe Satz 2.4.. Als Folgerung aus diesem Satz lässt sich ableiten

**Satz 4.10.** *Die Winkelsumme eines Viereckes ist stets kleiner als  $360^\circ$ .*

(vgl. [Buchmann1975], S. 90)

*Beweis.* Ein Viereck wird durch jede Diagonale in zwei Dreiecke geteilt. Wenn man auf beide Dreiecke den Satz 2.4. anwendet so erhält man durch eine Addition der beiden Innenwinkelsummen die Winkelsumme für das Viereck. Somit gilt die Behauptung.

(vgl. [Buchmann1975], S. 90)

□

Weiters lässt sich aus dem Innenwinkelsatz der Thales-Satz folgern.



**Satz 4.11.** (*h*-Thales-Satz) Der *h*-Winkel im *h*-Halbkreis ist stets kleiner als ein *h*-rechter. ([Buchmann1975], S. 90)

*Beweis.*  $\overline{AB}$  sei eine beliebige Strecke mit Mittelpunkt  $M$  und  $C$  ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt auf dem Halbkreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .

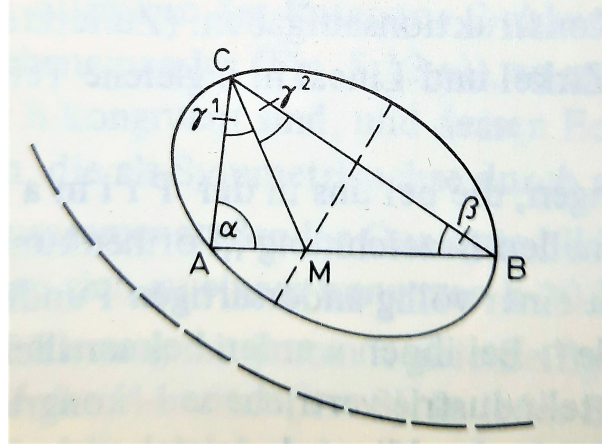


Abbildung 23: Skizze zu Beweis Thales-Satz

Nach Definition des Kreises in der hyperbolischen Geometrie haben alle Punkte des Kreises den gleichen Abstand zum Mittelpunkt, daher gilt:

$$\overline{MC} \equiv \overline{MA} \equiv \overline{MB},$$

somit sind die Dreiecke  $\triangle AMC$  und  $\triangle CMB$  gleichschenkelig. Daher gilt für die Winkel

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle(MAC) \equiv \sphericalangle(MCA) = \sphericalangle \gamma^1, \text{ somit } \alpha = \gamma^1,$$

und

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle(MBC) \equiv \sphericalangle(MCB) = \sphericalangle \gamma^2, \text{ somit } \beta = \gamma^2.$$

Aus Satz 2.4. weiß man, dass

$$\alpha + \beta + \gamma^1 + \gamma^2 < \pi.$$

Setzt man nun die Erkenntnisse aus den obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma^1 + \gamma^2 + \gamma^1 + \gamma^2 &= 2\gamma^1 + 2\gamma^2 \\ &= 2(\gamma^1 + \gamma^2) < \pi. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\gamma^1 + \gamma^2 < \frac{\pi}{2}.$$

□

## 5 Parallelen in der hyperbolischen Geometrie

Nachdem die unterschiedlichen Modelle vorgestellt wurden, die eine Darstellung der nicht-euklidischen Geometrie ermöglichen, und in Kapitel 2 bereits einige Sätze dieser Geometrie betrachtet wurden, werden nun die verschiedenen Arten von parallelen Geraden betrachtet. Man unterscheidet in der hyperbolischen Geometrie zwischen parallelen und überparallelen Geraden. Im Modell der Halbebene differenziert man zwei Arten der parallelen Geraden: verbindbare und randparallele. Den Begriff randparallel gibt es auch im Kreisscheibenmodell. Hier bezeichnet man Geraden dann als randparallel, wenn sie sich, dargestellt in einem Kreisscheibenmodell, am Kreisrand treffen.

**Definition 5.1.** *Es seien  $g$  eine Gerade und  $A$  ein Punkt, welcher nicht auf  $g$  liegt. Einen Strahl  $\overrightarrow{AP}$  nennt man parallel zu  $g$ , wenn dieser*

*der erste Strahl ist, der bei geeigneter Anordnung innerhalb eines Strahlenbündels die Gerade  $g$  nicht schneidet.*

([Voelk1995], S. 15) Auch die Gerade  $h$ , auf welcher der Strahl  $\overrightarrow{AP}$  liegt, heißt dann „in Richtung“  $\overrightarrow{AP}$  parallel zu  $g$ .

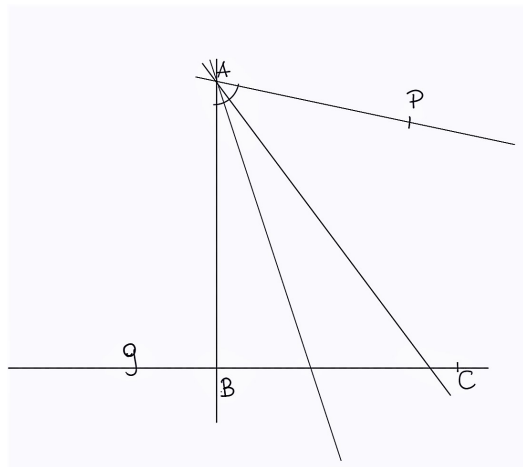


Abbildung 24: Skizze zu Definition 5.1. und 5.2.

**Definition 5.2.** *Der Winkel zwischen  $AB$ , die Normale auf die Gerade  $g$ , und dem zu  $g$  parallelen Strahl  $\overrightarrow{AP}$  nennt man Parallelwinkel  $p = II(AB)$ . (vgl. [Voelk1995], S. 15)*

Aus der Definition des Parallelwinkels lässt sich folgern, dass der Parallelwinkel in  $P$  für jene Gerade  $g$  und jeden nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $P$  stets kleiner oder gleich einem rechten Winkel ist. (vgl. [Filler1993], S. 170) Der Parallelwinkel kann somit nicht stumpf sein. (vgl. [Voelk1995], S. 15)

*Beweis.* Es sei  $AB$  die Normale auf die Gerade  $g$  und die Gerade  $h$  die Normale auf  $AB$ . Da die Innenwinkelsumme in einem Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, wie in Satz 2.4. bewiesen,

können sich die Geraden  $h$  und  $g$  nicht schneiden. Zudem kann der Strahl  $\overline{AP}$  nicht oberhalb der Gerade  $h$  liegen, sonst wäre dieser nicht der erste Strahl, der  $g$  nicht schneidet. Somit muss auch der Parallelwinkel kleiner oder gleich einem Rechten sein. (vgl. [Voelk1995], S. 16)  $\square$

Des Weiteren können Parallele durch ein gemeinsames Lot bestimmt werden.

**Lemma 5.1.** *Seien  $g$  und  $h$  zwei Geraden der hyperbolischen Ebene und  $l$  eine hyperbolische Gerade, welche  $g$  und  $h$  im rechten Winkel schneidet. Dann sind  $g$  und  $h$  parallel. (vgl. [Berchtold2017], S. 106)*

*Beweis.* Der Beweis wird als Widerspruch geführt.

Sei andernfalls  $A$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ ,  $B$  der Schnittpunkt von  $h$  und  $l$  und  $H$  der Schnittpunkt von  $l$  und  $g$ , dann gilt in  $\triangle ABC$  Satz 2.4.. Die Innenwinkelsumme wäre jedoch größer als zwei Rechte, da  $\sphericalangle ABC = \pi$  und  $\sphericalangle BCA = \pi$ . Somit würde für die Innenwinkelsumme  $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC > 2\pi$  gelten und dies widerspricht Satz 2.4..  $\square$

## 5.1 Überparallele Geraden

**Satz 5.1.** *Durch jeden nicht auf der Gerade  $g$  liegenden Punkt  $P$  gehen zwei verschiedene Geraden, die zu  $g$  parallel sind, und unendlich viele, welche  $g$  weder schneiden noch zu  $g$  parallel sind. (vgl. [Voelk1995], S. 26)*

*Beweis.* Der zweiten Teil des Satzes wurde bereits bewiesen, da es sich hier um Satz 2.2. handelt. Es bleibt somit noch der erste Teil zu zeigen.

$g$  sei eine Gerade mit den Punkten  $A$  und  $B$ . Der Punkt  $C$  liegt nicht auf  $g$ . Es sei weiters  $\overline{CP}$  ein zu  $g$  paralleler Strahl.

Der Parallelenwinkel  $\sphericalangle ACP$  ist spitz, daher kann der Strahl  $\overline{CP}$ , welcher zu  $AB$  parallel ist, mit dem bezüglich  $AC$  symmetrischen Strahl  $\overline{CS}$  nicht zusammenfallen (siehe Abbildung). Daher sind auch die zu  $g$  parallelen Geraden  $P_1P$ , in Richtung des Strahles  $\overline{CP}$ , und  $SS_1$ , in Richtung des Strahles  $\overline{CS}$ , unterschiedlich. (vgl. [Voelk1995], S. 26)  $\square$

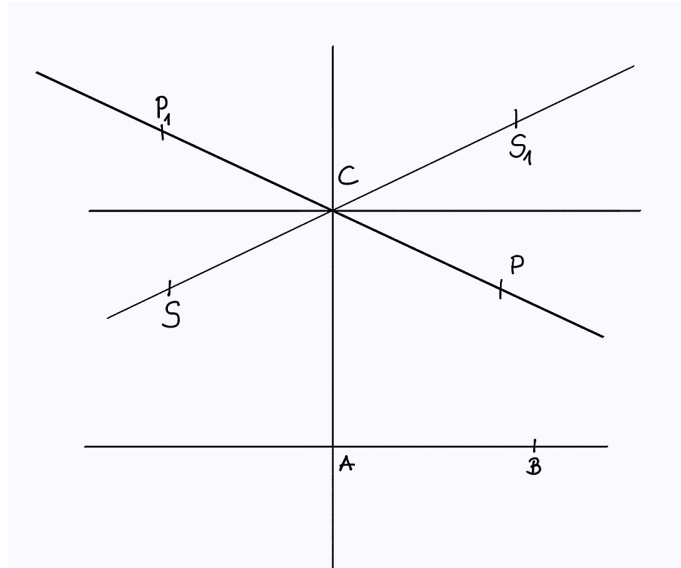


Abbildung 25: Skizze zu Beweis Satz 5.1.

Geraden, die einander weder schneiden noch zueinander parallel sind, werden als überparallel bezeichnet. Den Begriff überparallel gibt es nur im Modell des zweischaligen Hyperboloids und wird hier nur kurz angeführt, ohne in den nächsten Abschnitten von Bedeutung zu sein.

**Satz 5.2.** *Zu zwei überparallelen Geraden existiert genau eine Gerade, die normal auf beide Geraden steht. Umgekehrt gilt, wenn zwei Geraden genau ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie überparallel. (vgl. [Voelk1995], S. 27f)*

Der Beweis wird analytisch geführt. Die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}$  sei wie folgt definiert:  $\mathbb{H} := \{x \in \mathbb{R} | x_3 > 0 \text{ und } (x, x) = -1\}$ . Dabei ist  $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$  und der Einheitsvektor sei  $\vec{v}$  mit  $b(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ . Die Gerade  $l := \{x \in \mathbb{H} | b(\vec{v}, x) = 0\}$  ist dann eine Gerade mit Einheitsvektor  $\vec{v}$ . Wir befinden uns somit in dem Modell des zweischaligen Hyperboloids, genau genommen in der oberen Hälfte. (vgl. [Voelk1995], S. 23)

*Beweis.* Es seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  die Einheitsvektoren der überparallelen Geraden. Der Vektor  $\vec{w}$  sei ein Vielfaches des Kreuzproduktes  $\vec{u} \times \vec{v}$  und  $|\vec{w}| = 1$ . Dann ist  $b(\vec{u}, \vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{w}) = 0$  und somit ist die Gerade, deren Einheitsvektor  $\vec{w}$  ist, die gemeinsame Normale der beiden überparallelen Geraden.

Umkehrung: Zwei Geraden haben ein gemeinsames Lot, dessen Einheitsvektor sei  $\vec{w}$ . Dieser muss  $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$  erfüllen und ist somit ein Vielfaches des Vektors  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Das bedeutet, dass  $b(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) > 0$  und die Geraden sind daher überparallel. (vgl. [Voelk1995], S. 28)  $\square$

## 5.2 Verbindbare Geraden

In der hyperbolischen Geometrie gibt es des Weiteren auch verbindbare Geraden, es wird nun das Modell der Halbebene betrachtet. In diesem Modell gilt Lemma 5.1., somit sind

zwei Geraden, die beide von einer Gerade im rechten Winkel geschnitten werden, parallel. Dies sollte nicht mit denen in Satz 5.2 beschriebenen überparallelen Geraden verwechselt werden.

**Definition 5.3.** Die parallelen Geraden  $g$  und  $h$  heißen verbindbar, wenn es eine Gerade  $l$  gibt, welche zu beiden normal ist. (vgl. [Berchtold2017], S.106)

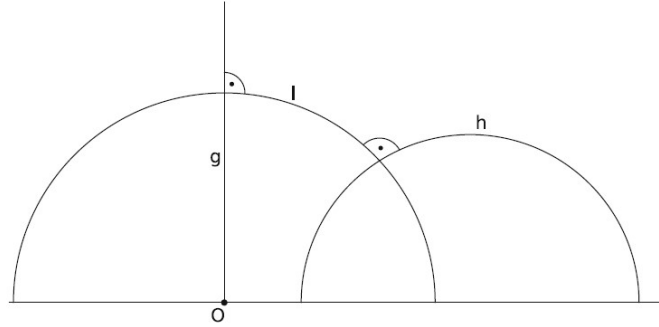


Abbildung 26: Verbindbare Geraden

**Lemma 5.2.** Sei  $g$  eine hyperbolische Gerade. Dann gibt es einen Punkt  $P \in \mathbb{H}$ , durch den unendlich viele zu  $g$  parallele Geraden gehen, die mit  $g$  verbindbar sind.

Dabei sei die hyperbolische Ebene folgendermaßen definiert:  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$

*Beweis.* Man kann  $g = i\mathbb{R}_{>0}$  und  $\operatorname{Re}(P) > 0$  annehmen. Nun sei  $h := K(M; r) \cap \mathbb{H}$  mit  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $r < M$  und  $P$  ein Punkt auf  $h$ . Somit sind  $g$  und  $h$  parallel. Weiters definiert man  $\rho := \sqrt{M^2 - r^2}$  und  $l := K(0, \rho)$ , dann schneidet  $l$  sowohl  $g$  als auch  $h$  im rechten Winkel. Der erste Teil ist somit richtig. Man setzt nun:

$$S := \frac{M^2 - r^2}{M} + i \frac{r}{M} \sqrt{M^2 - r^2}$$

und rechnet nach, ob  $S \in l$ ,  $S \in h$  und  $S \in K(\frac{M}{2}; \frac{M}{2})$  gilt. Dies ist leicht nachgerechnet. Aus den Beobachtungen folgt,

dass  $S = l \cap h$  gilt, aus der letzten Beobachtung folgt, dass  $S$  auf dem (euklidischen) Thales-Kreis über  $\overline{0M}$  liegt. Daher schneiden sich  $h$  und  $l$  in  $S$  rechtwinklig. ([Berchtold2017], S. 107)

□

Durch genaueres Betrachten des Beweises erkennt man, dass es für zwei Parallelen  $h_1 := K(M; M) \cap \mathbb{H}$  mit  $M := \frac{|P|^2}{2\operatorname{Re}(P)}$  und  $h_2 := \operatorname{Re}(P) + i\mathbb{R}_{>0}$  keine verbindbare Gerade gibt. (vgl. [Berchtold2017], S. 107)

**Satz 5.3.** Zu einer Geraden  $g$  gibt es unendlich viele parallele Geraden, die durch den Punkt  $P$ , der nicht auf  $g$  liegt, verlaufen. Von diesen sind genau zwei nicht mit  $g$  verbindbar. (vgl. [Berchtold2017], S. 107)

### 5.3 Randparallele Geraden

**Definition 5.4.** Sei  $g$  eine Gerade und  $P$  ein Punkt, für den gilt  $P \notin g$ . Dann heißen die zwei zu  $g$  parallelen, aber nicht mit  $g$  verbindbaren Geraden durch den Punkt  $P$  randparallel zu  $g$  bezüglich  $P$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 107)

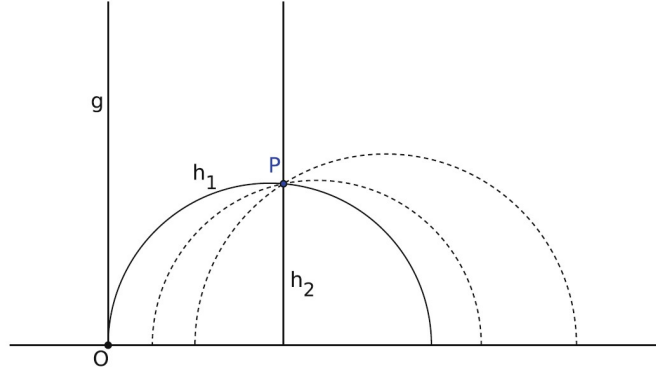


Abbildung 27: Randparallelen

Betrachtet man den Abstand von parallelen Geraden in der hyperbolischen Geometrie, so lässt sich feststellen, dass diese keinen festen Abstand haben. Im Allgemeinen gilt also  $d(P, g) \neq d(Q, g)$ , wobei  $g$  und  $h$  zwei parallele Geraden sind und  $P, Q \in h$  gilt. (vgl. [Berchtold2017], S. 108)

Der Abstand von zwei Parallelen lässt sich dennoch sinnvoll definieren.

**Definition 5.5.** Seien  $g$  und  $h$  parallele Geraden. Man nennt

$$d(g, h) := \inf \{d(P, Q); P \in g, Q \in h\}$$

den Abstand der parallelen Geraden  $g$  und  $h$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 108)

Der Abstand dieser Geraden wird somit über den Abstand zweier Punkte, auf den Geraden definiert. Hier findet man eine Parallele zu der euklidischen Geometrie, da auch hier die Abstände von Geraden durch Abstände von Punkten berechnet werden. Es ist zu beachten, dass in der hyperbolischen Geometrie der Abstand von zwei parallelen Geraden auch den Wert Null annehmen kann. (vgl. [Berchtold2017], S. 108)

Sollten zwei Geraden  $g$  und  $h$  verbindbar sein, so kann man den Abstand dieser durch eine gemeinsame Orthogonale berechnen.

**Lemma 5.3.** Seien  $g$  und  $h$  durch  $l$  verbindbare Geraden und  $P$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $l$  sowie  $Q$  der Schnittpunkt von  $l$  und  $h$ . Es gilt nach Definition  $d(g, h) = d(P, Q)$ . Weiters gilt  $d(g, h) < d(P', Q')$  für alle Paare  $(P, Q) \neq (P', Q') \in g \times h$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 109)

*Beweis.* Sei  $P' \in g$  und  $Q' \in h$  wobei  $(P', Q') \neq (P, Q)$ . Es werden hierbei zwei Fälle unterschieden:

1. Fall:  $P' = P$

Die Behauptung  $d(P, Q) < d(P', Q')$  folgt direkt aus der Behauptung von Beispiel 4.1..

2. Fall  $P' \neq P$

Sei  $Q'' \in h$  der Fußpunkt des Lotes von  $P'$  auf die Gerade  $h$ . Es gilt somit  $P'Q'' \perp h$ . Nach dem Beispiel 4.1. gilt  $d(P', Q'') \leq d(P', Q')$ . Da  $P \neq P'$  gilt auch  $Q \neq Q''$ . Somit gilt auch  $d(P, Q) < d(P', Q'')$ . Daraus folgt, dass  $d(P, Q) < d(P', Q')$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 109)  $\square$

Mit diesem Wissen ist folgender Satz beweisbar:

**Satz 5.4.** *Sei  $g$  eine Gerade und  $P$  ein Punkt, welcher nicht auf dieser Geraden liegt. Es gibt genau eine Parallele  $h$  zu  $g$ , die durch den Punkt  $P$  verläuft, deren Abstand maximal ist. Für diese Gerade gilt:  $d(g, h) = d(g, P)$*

*Beweis.* Man nehme an, dass  $g = i\mathbb{R}_{>0}$  sowie  $\operatorname{Re}(P) > 0$ . Weiters setze man  $\rho := |P|$ ,  $M := \frac{|P|^2}{\operatorname{Re}(P)}$  und  $r := \frac{\operatorname{Im}(P)}{\operatorname{Re}(P)}|P|$ . Dann sind die Gerade  $g$  und die Gerade  $h$ , mit  $h := K(M; r)$ , durch die Gerade  $l := K(0; \rho)$  verbindbar. Weiters ist  $P$  der Schnittpunkt von  $l$  und  $h$ . Daraus folgt, dass  $d(g, h) = d(g, P)$ .

Da es für jede andere mit  $g$  verbindbare Gerade  $h'$  mit  $P \in h'$  ein  $P \neq S \in h$  gibt, mit

$$d(g, h') = (d(g, S) < d(g, P) = d(g, h))$$

ist der Abstand von  $h$  maximal. (vgl. [Berchtold2017], S. 109)  $\square$

Nun sollen Eigenschaften paralleler Geraden betrachtet werden, die analog zu den Eigenschaften von parallelen Geraden in der euklidischen Geometrie sind.

**Satz 5.5.** *Wenn  $b \parallel a$  dann gilt auch  $a \parallel b$ .*

*Beweis.* Für zwei Geraden  $a, b$  gelte  $b \parallel a$ . Weiters gilt  $A \in a$  und  $B \in b$  und die Verbindungsstrecke der beiden Punkte sei  $\overline{AB}$ . Für die Winkelsymmetralen gilt: Die Symmetralen der Winkel in den Punkten  $A, B$  schneiden sich in dem Punkt  $C$ . Da die Winkelsymmetrale in  $B$  eine  $a$  schneidende Gerade ist, sie schneidet  $a$  beispielsweise in  $A'$ , schneidet die Winkelsymmetrale in  $A$ , nach dem Satz von Pasch, somit die Strecke  $\overline{A'B}$ .

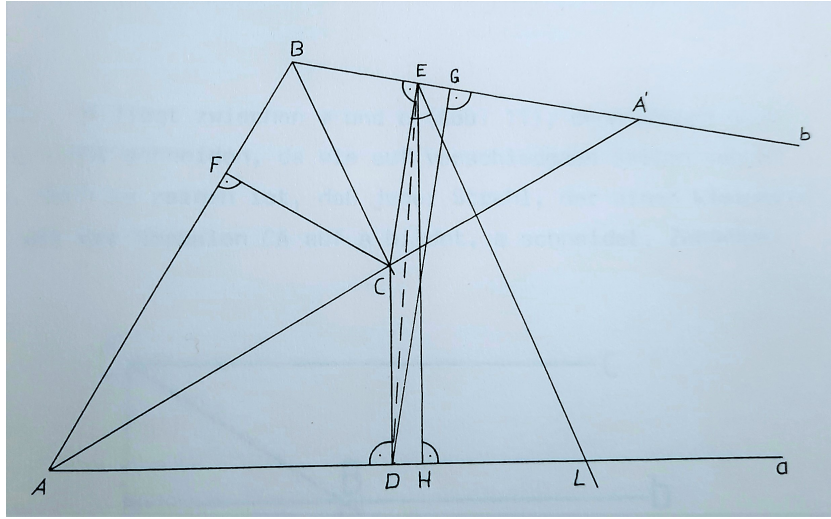


Abbildung 28: Skizze zu Beweis Satz 4.5.

Man legt nun ein Lot auf  $a, b$  und  $\overline{AB}$  durch den Punkt  $C$ , und beschriftet die Fußpunkte mit  $D, E$  und  $F$ . Nach Satz 2.3. folgt: Die Dreiecke  $\triangle ADC$  und  $\triangle AFC$  sind kongruent, daher gilt  $\overline{CD} = \overline{CF}$ . Des Weiteren sind auch  $\triangle BFC$  und  $\triangle BEC$  kongruent und somit  $\overline{CE} = \overline{CF}$ . Daraus folgt, dass auch  $\overline{CD} = \overline{CE}$ . Im Punkt  $E$  wähle man nun einen spitzen Winkel  $\alpha$  mit dem Schenkel  $\overline{EC}$  und dem zweiten Schenkel auf jener Seite von  $\overline{CE}$ , in die  $b$  weist. Dann schneidet jener zweite Schenkel die Gerade  $b$  in einem Punkt  $L$ , da  $b \parallel a$  gilt.

$$\sphericalangle LCE < 180^\circ - \alpha, \sphericalangle DCL < II(CD)$$

Die beiden Winkel sind zusammen somit kleiner als  $180^\circ$ , unter der Voraussetzung, dass  $\alpha < II(CD)$  gewählt wurde.  $\sphericalangle DCE$  ist somit kein gestreckter Winkel.

Im nächsten Schritt verbindet man  $D$  und  $E$  und legt ein Lot durch  $D$  auf  $b$  und ein Lot durch  $E$  auf  $a$ , mit den Fußpunkten  $G$  und  $H$ . Da es sich bei  $\triangle CDE$  um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, sind die Winkel in  $D$  und  $E$  gleich, somit auch ihre Komplementwinkel:

$$(1) \sphericalangle EDH = \sphericalangle DEG.$$

Da  $\triangle EDH$  und  $\triangle DEG$  kongruent sind, gilt weiters:

$$(2) \overline{HE} = \overline{GD}, \sphericalangle DEH = \sphericalangle EDG.$$

Daraus folgt, dass  $\sphericalangle HEG = \sphericalangle DEG - \sphericalangle DEH = \sphericalangle EDH - \sphericalangle EDG = \sphericalangle GDH$ , also:

$$(3) \sphericalangle HEG = \sphericalangle GDH.$$

Da  $b \parallel a$  gilt, ist  $\sphericalangle HEG = II(HE)$ , nach (2) und (3) ist dann  $\sphericalangle GDH = II(GD)$ . Daher gilt  $a \parallel b$ . (vgl. [Voelk1995], S. 28ff)  $\square$

**Satz 5.6.** Wenn  $c \parallel b$  und  $b \parallel a$ , dann ist auch  $c \parallel a$ . ([Voelk1995], S30)

*Beweis.* Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: Die Gerade  $b$  liegt zwischen den Geraden  $a$  und  $c$ . In diesem Fall können sich  $a$  und  $c$  nicht schneiden, da sie auf verschiedenen Seiten von  $b$  liegen und beide Geraden  $b$  nicht schneiden, da sie zu dieser parallel sind. Sei nun  $A \in a$  und  $C \in c$ . Es ist zu zeigen, dass jeder Strahl, der mit der Normalen auf  $CA$  einen kleineren Winkel bildet als  $c$ , die Gerade  $a$  schneidet. Da  $c \parallel b$ , schneidet dieser Strahl die Gerade  $b$  in einem Punkt  $B$ . Legt man nun



eine Normale durch  $B$  auf  $a$  mit dem Fußpunkt  $A'$ , so muss der Strahl auch mit  $A'B$  einen kleineren Winkel als  $b$  einschließen. Somit schneidet dieser auch  $a$ .

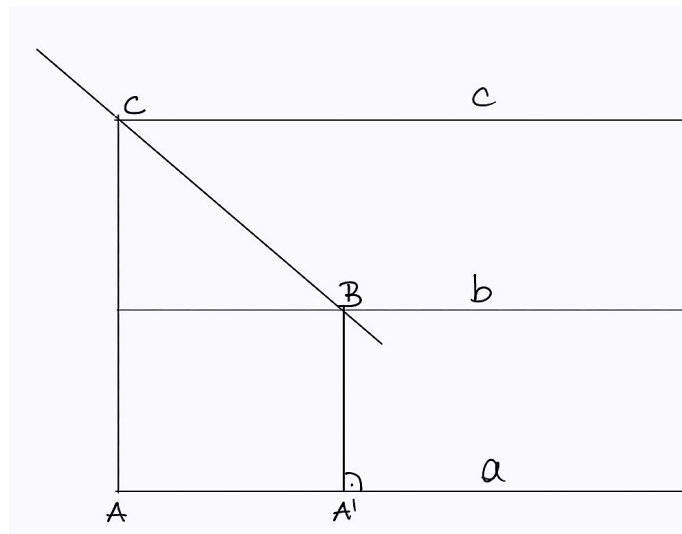


Abbildung 29: Skizze zu Beweis Satz 5.6., Fall 1

Fall 2: Die Gerade  $c$  liegt zwischen den Geraden  $a$  und  $b$ . Es sei  $A$  ein beliebiger Punkt auf  $a$  und einen Parallelenstrahl zu  $c$  durch  $A$  bezeichnet man mit  $a'$ . Es gilt  $a' \parallel c$  und  $c \parallel b$ . Nach Fall 1 folgt nun  $a' \parallel b$ . Des Weiteren soll  $b \parallel a$  und nach Satz 5.4. gilt somit auch  $a \parallel b$ . Da  $a$  und  $a'$  beide zu  $b$  parallel sind und den Punkt  $A$  enthalten, müssen diese identisch sein. Daher folgt aus  $a' \parallel c$ , dass  $a \parallel c$  und nach Satz 5.4.  $c \parallel a$ . (vgl. [Voelk1995], S. 30)  $\square$

## 6 Die Darstellung von geometrische Figuren in der hyperbolischen Geometrie

Die Darstellung der geometrischen Figuren ist je nach Modell unterschiedlich. So können Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie unterschiedlich aussehen, je nachdem in welchem Modell sie betrachtet werden.

### 6.1 Darstellung im Modell der Halbebene

Zunächst sollen die üblichen Bezeichnungen verwendet werden, daher wird ein Dreieck wie folgt definiert:

**Definition 6.1.**  $A, B, C \in \mathbb{H}$ . Wenn die drei Punkte  $A, B$  und  $C$  nicht auf einer Geraden liegen, dann heißt  $\triangle ABC$  hyperbolisches Dreieck mit den Seitenlängen  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$  und  $c = d(A, B)$  und den Winkeln  $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  und  $\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ .

(vgl. [Berchtold2017], S. 98)

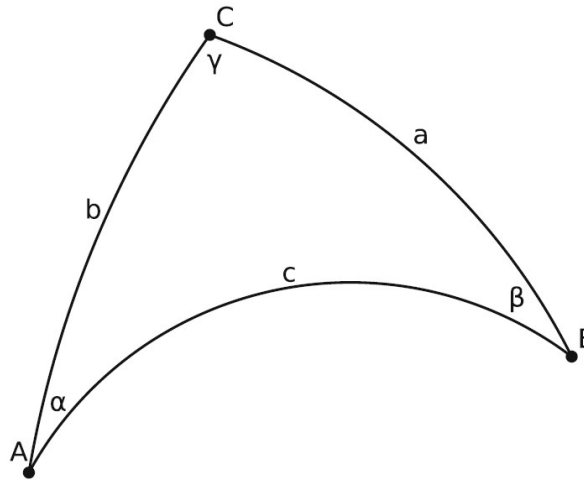


Abbildung 30: Hyperbolisches Dreieck

Da in dem Modell der Halbebene eine Gerade ein Halbkreis im euklidischen Sinne sein kann, sind auch die Begrenzungslinien des Dreieckes Abschnitte eines Halbkreises, wie man in Abbildung 30 erkennen kann.

**Definition 6.2.** Ein Dreieck  $\triangle ABC$  befindet sich in kanonischer Lage, falls  $A, C \in i\mathbb{R}_{>0}$  mit  $\text{Im}(C) > \text{Im}(A)$  und  $\text{Re}(B) > 0$  gilt. (vgl. [Berchtold2017], S. 98)

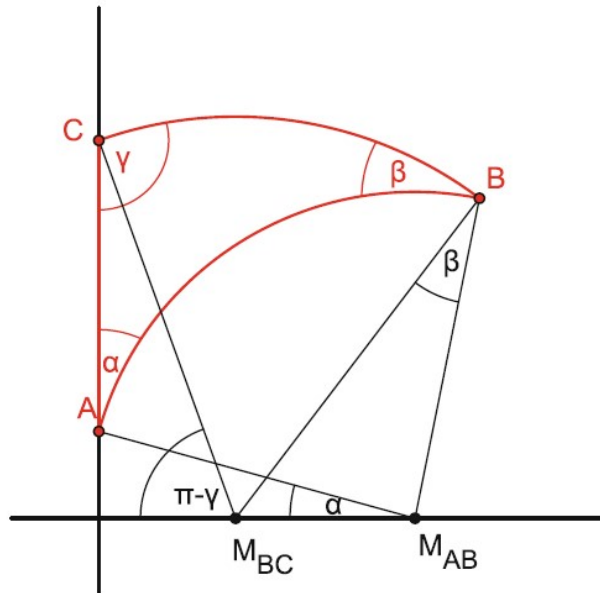


Abbildung 31: Dreieck in kanonischer Lage

Betrachtet man nun, wie Vierecke in dem Modell der Halbebene dargestellt werden, so findet man folgende Darstellungen.

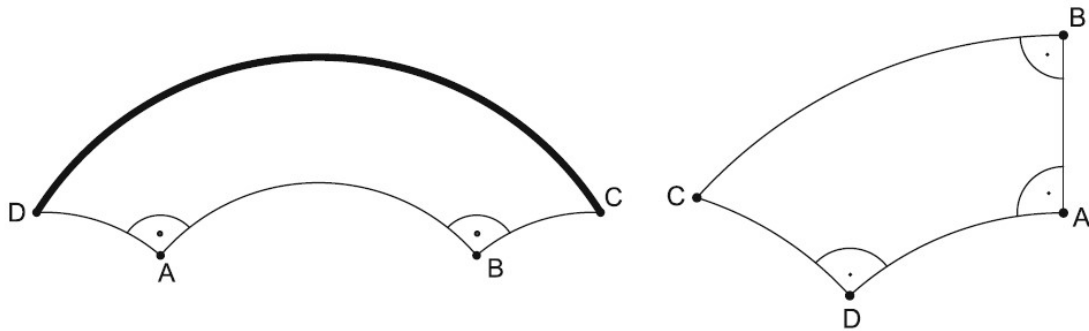


Abbildung 32: Saccherisches (links) und Lambertsches (rechts) Viereck

Vierecke sind im hyperbolischen Sinne konvexe Mengen mit Vierecken. Bei den beiden abgebildeten Vierecken handelt es sich um besondere Arten eines Viereckes.

**Definition 6.3.** *Ein Viereck  $ABCD$  nennt man ein Saccherisches Viereck, falls  $AD \perp AB, BC \perp AB$  sowie  $d(A, D) = d(B, C)$  gelten. ([Berchtold2017], S. 104)*

Giovanni G. Saccheri (1667-1733) versuchte zu zeigen, dass die beiden weiteren Winkel im Saccheri Viereck ebenfalls rechtwinklig sind, um so das Parallelenaxiom zu beweisen. Die beiden Winkel in den Punkten  $C$  und  $D$  stimmen zwar überein, sind jedoch beide kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ . (vgl. [Berchtold2017], S. 104)

*Beweis.* Hier für benötigt man den sws- und sss-Kongruenzsatz. Diese können in [Berchtold2017], S. 101 nachgelesen werden, werden jedoch an dieser Stelle nicht extra angeführt.

Nach Anwendung des sws-Satzes auf die Dreiecke  $\triangle ABD$  und  $\triangle ABC$  zeigt sich, dass  $d(A, C) = d(B, D)$  gilt. Wendet man nun den sss-Satz auf die Dreiecke  $\triangle BCD$  und  $\triangle ACD$  an, folgt die Winkelgleichheit. Dass beide Winkel kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  sind, folgt aus der Winkelsumme für Dreiecke. (vgl. [Berchtold2017], S. 104)  $\square$

In der hyperbolischen Geometrie gibt es im Vergleich zu der euklidischen Geometrie keine Rechtecke oder Quadrate. Die Anzahl der rechten Winkel in einem Viereck ist auf drei beschränkt, da die Winkelsumme in einem Viereck stets kleiner als  $2\pi$  ist, wie aus Satz 4.10. bereits bekannt. Ein Viereck mit drei rechten Winkeln bezeichnet man als Lambertsches Viereck.

**Definition 6.4.** *Ein hyperbolisches Viereck mit drei rechten Winkeln heißt Lambertsches Viereck. ([Berchtold2017], S. 105)*

Johann H. Lambert (1728-1777) versuchte das euklidische Parallelenaxiom daraus abzuleiten, dass in einem Lambertschen Viereck auch der vierte Winkel ein rechter ist. Allerdings gilt für dieses Viereck, dass der vierte Winkel kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  ist und die beiden anliegenden Seiten länger als die jeweils gegenüberliegenden sind. (vgl. [Berchtold2017], S. 105)

*Beweis.* Sei  $ABCD$  ein Lambertsches Viereck, wie in Abbildung 32 dargestellt, mit keinem rechten Winkel bei  $C$ . Da ein Winkel kleiner als  $90^\circ$  ist, weiß man aus dem Innenwinkelsatz für Vierecke 4.10.. Um zu zeigen, dass  $d(B, C) > d(A, D)$  gilt, geht man von der Annahme aus, dass  $d(B, C) \leq d(A, D)$  gilt. Somit gibt es einen Punkt  $D'$  auf der Strecke  $\overline{AD}$  mit  $D' \neq D$ , so dass  $d(A, D') = d(B, C)$  gilt. Dies ist nach Konstruktion ein Saccherisches Viereck. Der Winkel  $\angle AD'C$  ist demnach kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ . Daher müsste der Winkel  $\angle CD'D$  größer als  $90^\circ$  sein. Die Winkelsumme im Dreieck  $DD'C$  wäre dann allerdings größer als  $\pi$  und somit ein Widerspruch zu Satz 2.4. (vgl. [Berchtold2017], S. 105)  $\square$

## 7 Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie

Im vorherigen Kapitel wurde die Darstellung der Dreiecke im Modell der Halbebene betrachtet. Im folgenden Kapitel soll nun die Kongruenz von Dreiecken und Sacceri Vierecken betrachtet werden. Weiters sollen die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks untersucht werden.

Wie bereits bekannt beträgt die Winkelsumme eines Dreiecks in der hyperbolischen Geometrie stets weniger als  $\pi$ . Man spricht von einem Defekt des Dreiecks.

**Definition 7.1.** *Man nennt den Betrag, um den sich die Winkelsumme des Dreiecks von  $\pi$  unterscheidet, Defekt des Dreiecks.*

**Satz 7.1.** *Der Defekt eines Dreiecks ist die Summe der Defekte zweier Dreiecke, die dieses teilen. (vgl. [Voelk1995], S. 53)*

*Beweis.* Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck, das durch eine Gerade  $CD$  in zwei Dreiecke  $\triangle ADC$  und  $\triangle DBC$  geteilt wird, wobei der Punkt  $D$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Man bezeichnet die Winkel der Dreiecke wie folgt:  $\angle CAD = r$ ,  $\angle ADC = s$ ,  $\angle ACD = t$ ,  $\angle BDC = x$ ,  $\angle DBC = y$  und  $\angle BCD = z$  (siehe Abbildung 33). Weiters seien  $d, d_1, d_2$  die Defekte von  $\triangle ABC, \triangle ADC$  und  $\triangle DBC$ . Dann gilt:

$$d = d_1 + d_2.$$

Laut Definition gilt nämlich  $d_1 = 180^\circ - (r + s + t)$  und  $d_2 = 180^\circ - (x + y + z)$ . Es folgt somit

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 360^\circ - (r + s + t + x + y + z) \\ &= 360^\circ - (r + t + y + z) - (s + x) \\ &= 180^\circ - (r + t + y + z) \\ &= d \end{aligned}$$

(vgl. [Voelk1995], S. 52f)

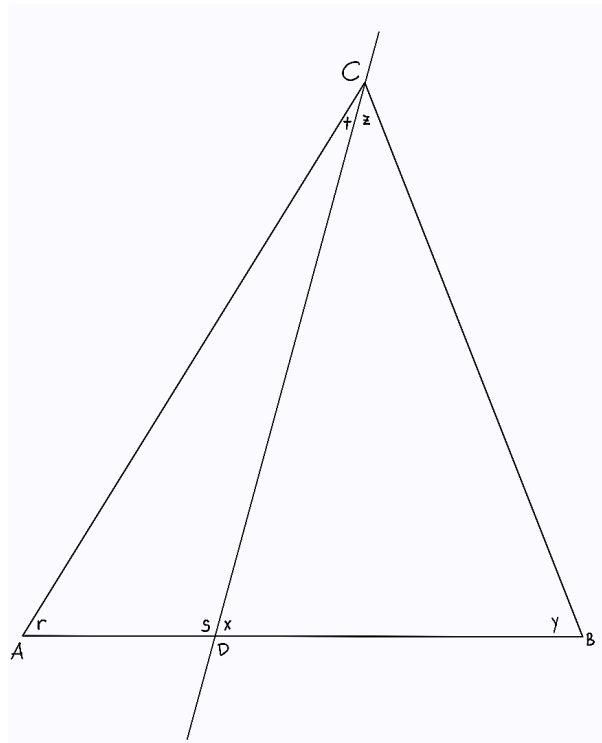


Abbildung 33: Skizze zu Beweis Satz 7.1.

□

## 7.1 Äquivalenz von Dreiecken mit Saccheri Vierecken

Betrachtet man die Kongruenz von Dreiecken, so kann dies aufbauend auf Sätze über die Saccheri Vierecke geschehen. Saccheri Vierecke können mit Dreiecken in der hyperbolischen Geometrie verbunden werden. Jede Seite von einem beliebigen Dreieck  $\triangle ABC$  kann zur Oberkante, das ist jene Seite, die der Basis gegenüberliegt, eines bestimmten Saccheri Viereckes werden. Wählt man  $\overline{BC}$  als diese Oberkante, so sind die Punkte  $D$  und  $E$  die Mittelpunkte der anderen Dreiecksseiten und die Punkte  $F, G$  und  $H$  die Projektion aller Eckpunkte des Dreieckes auf die Gerade  $DE$ . (vgl. [Voelk1995], S. 55)

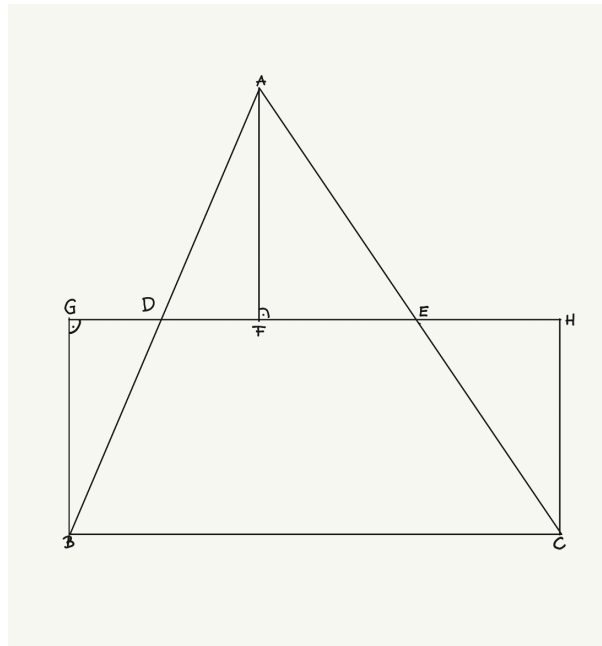


Abbildung 34: Verbindung von Saccheri Viereck und Dreieck mit zwei spitzen Winkeln

Die Dreiecke  $\triangle ADF$  und  $\triangle BDG$  sind kongruent, da zwei Winkel und die anliegende Seite der Dreiecke kongruent sind. Ebenso sind  $\triangle AEF$  und  $\triangle CEH$  kongruent. Daher gilt:  $\overline{BG} = \overline{AF}$  und  $\overline{AF} = \overline{CH}$ . Es gilt also auch  $\overline{BG} = \overline{CH}$ . Somit ist  $BCHG$  ein Saccheri Viereck mit Basis  $\overline{GH}$  und Oberkante  $\overline{BC}$ . (vgl. [Voelk1995], S. 55f)

Diese Konstruktion funktioniert unabhängig von der Winkeln des Dreieckes, so kann man auch ein Dreieck mit stumpfem oder rechtem Winkel verwenden, um ein Saccheri Viereck zu konstruieren. (vgl. [Voelk1995], S. 56)

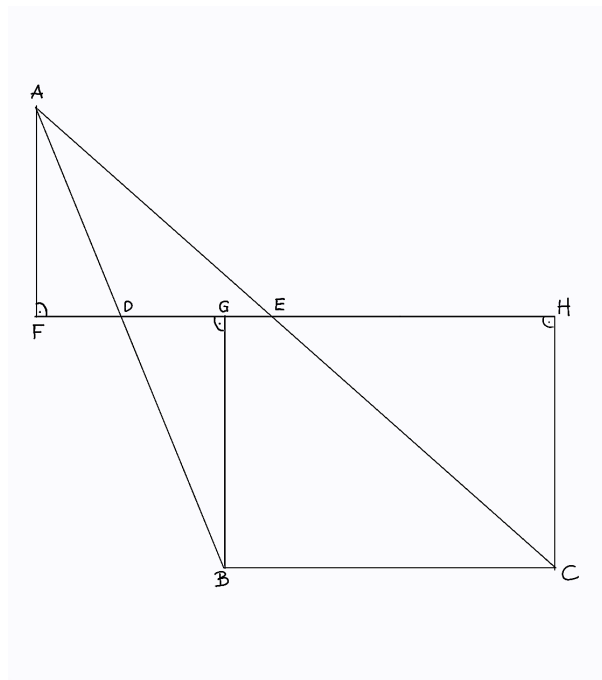


Abbildung 35: Verbindung von Saccheri Viereck und Dreieck mit einem stumpfen Winkel

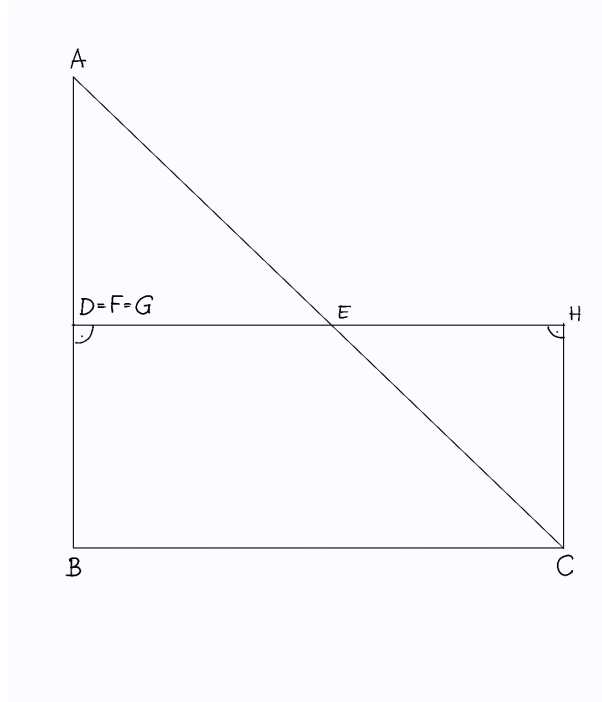


Abbildung 36: Verbindung von Saccheri Viereck und rechtwinkligem Dreieck

Man sagt, die Vierecke sind vereinigt mit dem Dreieck  $\triangle ABC$ . (vgl. [Voelk1995], S. 56)

**Satz 7.2.** *Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der der Oberkante anliegenden Winkel eines jeden vereinigten Saccheri Vierecks. (vgl. [Voelk1995], S. 56)*

*Beweis.* Dies folgt über die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle AEF \equiv \triangle CEH$  und  $\triangle ADF \equiv \triangle BDG$  □



**Satz 7.3.** *Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist überparallel zur Geraden, die die dritte des Dreiecks enthält, und somit haben beide eine gemeinsame Normale und die Strecken zwischen den Mittelpunkten ist kleiner als die dritte Seite des Dreiecks. ([Voelk1995], S. 57)*

Dadurch lässt sich festlegen, dass ...

**Definition 7.2.** *... zwei Polygone  $p, q$  äquivalent sind, wenn sie in die gleiche Zahl an Dreiecken  $p_i, q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  zerlegbar sind. Dies gilt dann, wenn die Dreiecke paarweise kongruent, d.h.  $p_1 = q_1, p_2 = q_2; \dots$ , sind.*

Aus dieser Definition lassen sich folgende Sätze schlussfolgern:

**Satz 7.4.** *Ein Dreieck ist zu jedem seiner vereinigten Saccheri Vierecke äquivalent. (vgl. [Voelk1995], S. 57)*

**Satz 7.5.** *Kongruente Polygone sind äquivalent. (vgl. [Voelk1995], S. 57)*

**Satz 7.6.** *Falls jedes von zwei Polygonen zu einem dritten Polygon äquivalent ist, dann sind sie auch zueinander äquivalent. (vgl. [Voelk1995], S. 57)*

**Satz 7.7.** *Zwei äquivalente Dreiecke haben dieselbe Winkelsumme. (vgl. [Voelk1995], S. 57)*

*Beweis.* Es seien die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  äquivalent. Nach der Definition der Äquivalenz können diese Dreiecke in gleich viele paarweise kongruente Dreiecke zerlegt werden. Da zwei Dreiecke die kongruent sind die gleiche Winkelsumme haben, haben sie auch den gleichen Defekt. Daher haben  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  denselben Defekt und somit auch die gleiche Winkelsumme. (vgl. [Voelk1995], S. 57)  $\square$

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:

**Satz 7.8.** *Wenn zwei Dreiecke dieselbe Winkelsumme haben, dann sind sie äquivalent.*

*Beweis.* Angenommen die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  haben dieselbe Winkelsumme  $s$ . Zuerst wird der Fall betrachtet, dass die Seite  $BC$  des einen Dreiecks kongruent zur Seite  $B'C'$  des zweiten Dreiecks ist. Die Scheitelwinkel des Saccheri Vierecks  $BCHG$ , welches mit dem Dreieck  $\triangle ABC$  vereinigt ist und  $\overline{BC}$  als Oberkante hat, ergeben die Winkelsumme  $s$ . Gleichermäßen summieren sich die Scheitelwinkel des Saccheri Vierecks  $B'C'H'G'$ , welches  $\overline{B'C'}$  als Oberkante hat, zu  $s$ . Da die Winkelsumme und die Oberkante kongruent sind, sind die beiden Saccheri Vierecke  $BCHG$  und  $B'C'H'G'$  kongruent und daher äquivalent. Die Saccheri Vierecke sind auch zu den Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  äquivalent. Aus der Äquivalenz der Saccheri Vierecke zueinander, des Dreiecks  $\triangle ABC$  zum Saccheri Viereck  $BCHG$  und der des Dreiecks  $\triangle A'B'C'$  zum Saccheri Viereck  $B'C'H'G'$  folgt, aus dem Satz 7.6., dass die beiden Dreiecke zueinander äquivalent sind.

Man betrachtet nun den Fall, dass keine der Seiten der beiden Dreiecke zueinander kongruent

sind. Man nimmt  $A'B' > AB$  an. Wenn  $J$  ein beliebiger Punkt auf der Geraden  $GH$  ist, dann ist der Abstand zwischen den Punkten  $B$  und  $J$  am geringsten, falls  $J = G$  und wird beliebig groß, wenn  $GJ$  beliebig groß wird.  $J$  soll nun so gewählt werden, dass  $BJ = \frac{1}{2}A'B'$ . Dies ist möglich, da  $\frac{1}{2}A'B' = BD > BG$ . Sei nun  $K$  ein Punkt auf der Geraden  $BJ$ , ungleich dem Punkt  $B$ , sodass  $BJ = JK$  gilt.

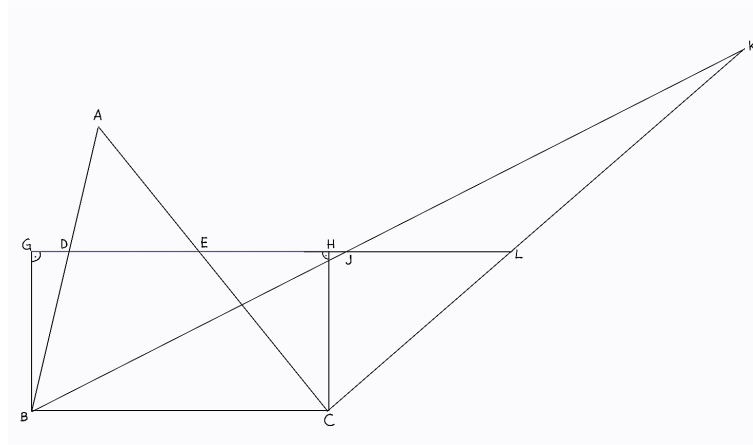


Abbildung 37: Skizze zu Beweis Satz 7.8.

Da die Punkte  $C$  und  $K$  nicht auf derselben Seite bezüglich der Geraden  $GH$  liegen, schneidet die Seite  $CK$  des Dreiecks  $\triangle BCK$  die Gerade  $GH$  in einem Punkt  $L$ . Die Seitensymmetrale von  $\overline{BC}$  ist normal zu  $\overline{GH}$ . Da der Punkt  $J$ , welcher auf der Geraden  $GH$  liegt, der Mittelpunkt der Seite  $BK$  des Dreiecks  $\triangle BCK$  ist und die Gerade  $GH$  normal auf die Seitensymmetrale von  $BC$  ist, liegt auch der Mittelpunkt der Seite  $CK$  auf  $GH$ . Somit ist der Punkt  $L$  der Mittelpunkt von der Seite  $CK$ .

Das Saccheri Viereck  $BCHG$  ist sowohl mit dem Dreieck  $\triangle ABC$  als auch mit dem Dreieck  $\triangle BCK$  vereinigt. Demnach ist das Saccheri Viereck zu  $\triangle ABC$  und  $\triangle BCK$  äquivalent (1) (siehe Satz 7.4.). Nach Satz 7.6. sind daher auch die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BCK$  äquivalent zueinander. Weiters haben die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BCK$  die gleiche Winkelsumme (2), da sie mit demselben Saccheri Viereck vereinigt werden können. Aus unserer Annahme, dass die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  die gleiche Winkelsumme haben und (2), kann man folgern, dass  $\triangle A'B'C'$  und  $\triangle BCK$  die gleiche Winkelsumme haben (3).

Da  $BK = A'B'$ , folgt aus (3) und dem ersten Teil des Beweises, dass die Dreiecke  $\triangle A'B'C'$  und  $\triangle BCK$  äquivalent sind. Aus (1) und Satz 7.6. folgt nun, dass die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  äquivalent sind. (vgl. [Gans1973], S. 66ff)  $\square$

## 7.2 Flächeninhalt von Dreiecken

Gleich der euklidischen Geometrie, soll auch in der Lobatschewski-Geometrie der Flächeninhalt eine Zahl sein, die den inneren Bereich von einem Dreieck angibt. Da Flächeninhalte in der euklidischen Geometrie von den Längeneinheiten abhängig sind, könnte man annehmen, dass dies auch in der hyperbolischen Geometrie der Fall ist. Dem ist jedoch nicht so. Weiters

gibt es in der hyperbolischen Geometrie keine quadratischen Einheiten, diese sind jedoch die bekannten Einheiten für eine Fläche. Um den Flächeninhalt dennoch untersuchen zu können, geht man intuitiv davon aus, dass äquivalente Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben. Man weiß bereits aus den Sätzen 7.7. und 7.8., dass äquivalente Dreiecke dieselbe Winkelsumme haben. Daher versucht man nun, den Flächeninhalt so zu definieren, dass zwei Dreiecke genau dann denselben Flächeninhalt haben, wenn diese dieselbe Winkelsumme aufweisen. Ein einfacher Weg, dies zu tun, ist über die Proportionalität. Man setzt den Flächeninhalt also proportional zu der Winkelsumme. Zum Beispiel hat ein Dreieck mit der Winkelsumme  $50^\circ$  den Flächeninhalt von  $50k$  mit einem konstanten  $k$ . Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks muss somit stets kleiner als  $180k$  sein, da die Winkelsumme eines Dreiecks immer kleiner als  $\pi$  ist.

Diese Art der Definition stimmt jedoch mit der Erwartung an den Flächeninhalt nicht überein. Betrachtet man zum Beispiel ein Dreieck  $\triangle ABC$ , das durch die  $\overline{CE}$  in zwei Dreiecke  $\triangle ACE, \triangle BCE$  geteilt wird, so erwartet man, dass der Flächeninhalt Folgendes erfüllt:

$$\text{Flächeninhalt } ABE + \text{Flächeninhalt } BCE = \text{Flächeninhalt } ABC.$$

Dies ist jedoch mit dieser Definition nicht möglich. Falls die Dreiecke  $\triangle ACE, \triangle BCE$  jeweils eine Winkelsumme größer als  $\frac{\pi}{2}$  haben, dann würde der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  größer als  $180k$  sein, wobei die Winkelsumme jedoch kleiner als  $180^\circ$  ist. (vgl. [Gans1973], S. 69f)

Es benötigt somit eine andere Definition des Flächeninhalts. Wir wissen bereits, dass Dreiecke, die die gleiche Winkelsumme haben, auch den gleichen Defekt haben. Daher besteht die Möglichkeit den Flächeninhalt auch über die Proportionalität zu dem Defekt eines Dreiecks zu definieren. Mit dieser Definition stößt man nicht auf das Problem, welches bei der Proportionalität zur Winkelsumme aufgetreten ist. Sollte eine Gerade ein Dreieck in zwei Dreiecke teilen so ist der Defekt gleich jenem der beiden Dreiecke, wie man bereits aus Satz 7.1. weiß. Seien die Defekte der Dreiecke  $\triangle ACE, \triangle BCE$ , unter der Voraussetzung, dass das Dreieck  $\triangle ABC$  wie oben geteilt wird,  $a$  und  $b$  und der Defekt von  $\triangle ABC$   $c$ . Dann gilt

$$a + b = c.$$

Multipliziert man mit einem konstanten  $k$ , ergibt sich

$$ka + kb = kc,$$

dies entspricht

$$\text{Flächeninhalt } ABE + \text{Flächeninhalt } BCE = \text{Flächeninhalt } ABC.$$

(vgl. [Gans1973], S. 70f) Man definiert daher den Flächeninhalt in der hyperbolischen Geometrie, wie folgt:

**Definition 7.3.** *Der Flächeninhalt  $A$  eines Dreiecks ist eine Zahl, die proportional ist zum Wert des Defekts  $D$  des Dreiecks. Die konstante Proportion  $k$  ist*

*dieselbe für alle Dreiecke.*

*Man schreibt:  $A = k \cdot D$ ,  $k$  konstant und positiv.*

([Voelk1995], S. 59)

Der Flächeninhalt eines Dreiecks in der Lobatschewski-Geometrie ist daher sowohl von einer linearen Einheit als auch einer Winkleinheit abhängig. Aus den obigen Beobachtungen folgt:

**Satz 7.9.** *Zwei Dreiecke haben genau dann denselben Flächeninhalt, wenn sie dieselbe Winkelsumme haben.*

## 7.3 Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks

Die in der euklidischen Geometrie existierenden merkwürdigen Punkte eines Dreiecks, wie der Höhenschnittpunkt, der Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen und der Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Seitensymmetralen, existieren auch in der hyperbolischen Geometrie. Die Existenz dieser lässt sich nachweisen.

### 7.3.1 Der Umkreismittelpunkt und der Umkreis eines Dreiecks

Den Umkreismittelpunkt der euklidischen Geometrie kennt man bereits aus Schulzeiten und hat ein entsprechendes Bild, wie dieser Kreis aussieht. Der Satz, in welchem der Umkreismittelpunkt definiert und beschrieben wird, ist wahrscheinlich weniger in Erinnerung geblieben.

**Satz 7.10.** *Wenn zwei Seitensymmetralen eines Dreiecks  $\triangle ABC$  zu einem Strahlenbündel bezüglich eines Punktes  $Q$  gehören, dann gehört auch die dritte Seitensymmetrale dazu, und die Eckpunkte  $A, B, C$  liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt  $Q$ .*

([Voelk1995], S. 60)

Da dieser mit Hilfe der Inzidenzaxiome, der Anordnungsaxiome und der Axiome der Bewegung bewiesen werden kann, ist dieser Satz auch in der absoluten Geometrie und somit auch in der hyperbolischen Geometrie gültig.

**Satz 7.11.** *Falls der größte Winkel eines Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden anderen Winkel, dann liegt der Umkreismittelpunkt des Dreiecks im Inneren des Dreiecks.*

*Beweis.* Es sei  $\triangle ABC$  das betrachtete Dreieck und  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  seien die Winkel in den Eckpunkten  $A, B, C$ . Des Weiteren seien  $u, v, w$  die Seitensymmetralen und zwar sei  $u$ , die Symmetrale von  $\overline{AB}$ , die durch  $M$  verläuft,  $v$  jene von  $\overline{AC}$  durch  $N$  und  $w$  jene von  $\overline{BC}$  durch den Punkt  $O$  verlaufend.

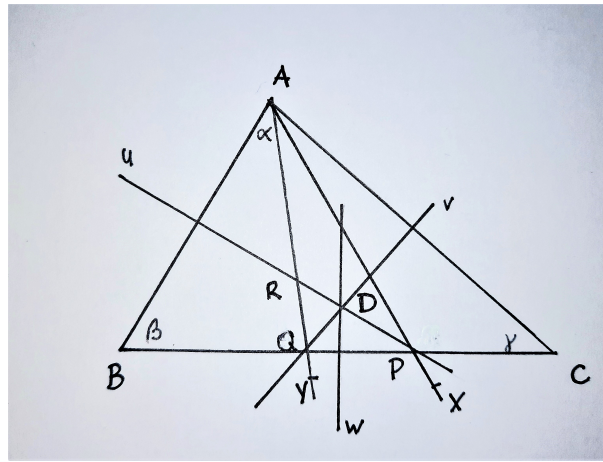


Abbildung 38: Skizze zu Beweis Satz 7.11.

Nun ist zu zeigen, dass die Geraden zu einem Geradenbündel gehören und die Punkte  $A, B$  und  $C$  auf einem Kreis liegen. Es sei  $\alpha$  der größte Winkel im Dreieck, d.h. es gilt  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha \geq \gamma$ . Es gilt nach der Voraussetzung  $\alpha < \beta + \gamma$ . Dann gibt es von  $A$  ausgehend einen Strahl  $AX$  in Richtung von  $\overline{AB}$ , sodass  $\angle BAX = \alpha$ . Da  $\alpha$  und somit der Winkel  $\angle BAX \geq \beta$  gilt, schneidet der Strahl  $AX$  die Seite  $\overline{BC}$  in einem Punkt, der mit  $P$  beschriftet wird. Für die Winkel gilt  $\angle ABC = \angle ABP$ . Da das Dreieck  $\triangle ABP$  in den Punkten  $P$  und  $B$  den gleichen Winkel hat, handelt es sich um ein gleichschenkeliges Dreieck bezüglich der Basis  $\overline{AB}$ . Die Gerade  $u$  sei eine Gerade durch die Punkte  $M$  und  $P$ . Weiters sei die Strecke  $\overline{PM}$  die Mittellinie des Dreiecks  $\triangle BAP$ . Somit ist klar, dass  $\overline{MP}$  sowohl im Inneren des Dreiecks  $\triangle BAP$  als auch im Inneren von  $\triangle ABC$  liegt. Man differenziert nun die Annahme  $\alpha \geq \gamma$ . Wenn  $\alpha = \gamma$ , dann ist auch das Dreieck  $\triangle ABC$  gleichschenklig bezüglich der Basis  $\overline{AC}$ . In diesem Fall würde die Gerade  $v$  durch die Punkte  $N$  und  $B$  verlaufen und die Strecke  $\overline{BN}$  würde im Inneren des Winkels  $\angle ABP$  liegen. Somit schneidet die Gerade  $v$  die Strecke  $\overline{MP}$ . Weiters schneiden sich dann die Geraden  $u$  und  $v$  in einem Punkt im Inneren des Winkels  $\angle ABC$ . Nach Satz 7.9. muss auch die dritte Seitensymmetrale durch diesen Punkt gehen und  $A, B$  und  $C$  liegen auf einem Kreis.

Sei nun  $\alpha > \beta$ , dann gibt es einen Strahl  $AY$  in die Richtung der Geraden  $AB$  so, dass  $\angle BAY = \alpha - \gamma$ . Da  $\alpha$  größer ist als die Summe der beiden anderen Winkel, folgt  $\alpha - \gamma < \beta$  und daraus wiederum folgt, dass der Strahl  $AY$  im Inneren des  $\angle BAP$  liegt. Der Strahl  $AY$  schneidet die Strecke  $\overline{BP}$  somit in einem Punkt  $Q$  und die Strecke  $\overline{MP}$  in einem Punkt  $R$ . Der Punkt  $R$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ . Da nun der Strahl  $AQ$  im Inneren des Winkels  $\angle BAP$  liegt und somit auch im Inneren von  $\angle BAC$ , folgt, dass  $\angle QAC = \angle BAC - \angle BAQ = \alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma$  gilt. Das Dreieck  $\triangle AQC$  ist somit ein gleichschenkliges mit der Basis  $\overline{AC}$  und die Gerade  $v$  entspricht der Geraden  $NB$ . Weil der Punkt  $P$  zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  liegt und  $Q$  zwischen  $B$  und  $P$ , weiß man, dass  $P$  zwischen  $Q$  und  $C$  liegt und daraus folgt mit  $R$  zwischen  $A$  und  $Q$ , dass  $\angle AQC = \angle RQP$ . Somit schneidet der Strahl  $QN$  die Strecke  $\overline{RP}$  und damit auch  $\overline{MP}$  in einem Punkt  $D$ , der im Inneren des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegt. Da sich die Seitensymmetralen in diesem Punkt schneiden, geht auch  $w$ , nach

Satz 7.9., durch diesen Punkt und die Eckpunkte  $A, B$  und  $C$  liegen auf einem Kreis. (vgl. [Voelk1995], S. 60f)  $\square$

Weiters wird nun betrachtet, wo der Umkreismittelpunkt liegt, wenn der größte Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist.

**Satz 7.12.** *Es sei der größte Winkel gleich der Summe der beiden anderen Winkel, dann ist die Dreiecksseite, die gegenüber jenem Winkel liegt, der Durchmesser des Umkreises. (vgl. [Voelk1995], S. 62)*

*Beweis.* Für die Winkel eines Dreiecks  $\triangle ABC$  gilt  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$ . Da der Winkel  $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ABC$  schneidet der Strahl  $AX$ , wobei  $\sphericalangle BAX = \sphericalangle ABC$  gilt, die Seite  $\overline{BC}$  in  $P$ . Wählt man nun einen Strahl  $AY$ , ähnlich jenem im vorangegangenen Beweis, so gilt  $\sphericalangle BAC - \sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC$ . Somit sind die Strahlen  $AX$  und  $AY$  gleich, daher gilt für die Punkte  $P$  und  $Q$ :  $P = Q$ .

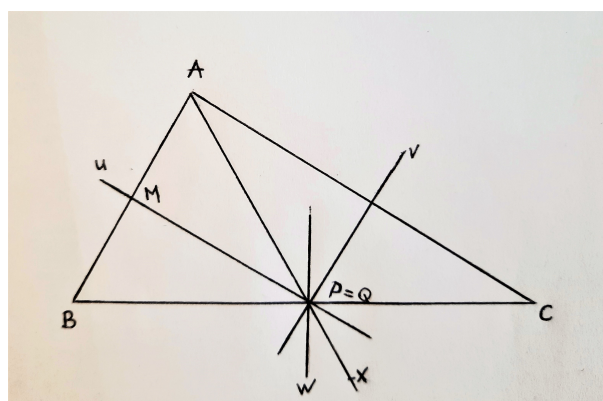


Abbildung 39: Skizze zu Beweis Satz 7.12.

Die beiden Dreiecke  $\triangle BAP$  und  $\triangle CAP$  sind gleichschenkelig mit der Basis  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{AC}$ . Somit schneiden sich die beiden Verbindungsgeraden  $u$ , die Verbindungsgerade von  $MP$ , und  $v$ , die Verbindungsgerade von  $NP$ , im Punkt  $P$ . Nach Satz 7.9. geht nun auch die Gerade  $w$  durch den Punkt  $P$ . Somit gilt  $P = O$  und der Punkt  $P$  ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$ , wobei der Durchmesser des Kreises gleich  $\overline{BC}$  ist. (vgl. [Voelk1995], S. 62)  $\square$

Die bisher betrachteten Fälle waren Sonderfälle, in denen die Seitensymmetralen  $u$  und  $v$  jene Seiten des Dreiecks geschnitten haben, die Schenkel des größten Winkels waren. Kreise, die solche Umkreise darstellen, werden auch als euklidische oder „eigentliche“ Kreise bezeichnet. Als Nächstes werden spezielle Halbierende untersucht, die parallel oder sogar überparallel sind. Dabei ergeben sich hyperbolische Kreise als Umkreise. Diese bezeichnet man auch als Horozykeln und Hyperzykeln. (vgl. [Voelk1995], S. 63) Die Kreise in der hyperbolischen Geometrie werden später in Kapitel 8 noch genauer betrachtet. Für den folgenden Satz werden nur die Definitionen dieser beiden Kreisarten geführt.

**Definition 7.4.** Sei  $(M)$  ein Büschel an parallelen Geraden und  $P$  ein beliebiger Punkt. Die Bahn von  $P$ , welche durch die Spiegelung von  $P$  an jedem Strahl des Bündels  $(M)$  entsteht, heißt Horozykel.

**Definition 7.5.** Es sei  $m$  eine Gerade und  $r$  eine reelle Zahl mit  $r > 0$ . Jener Teil von  $\{X/d(X, m) = r\}$ , der in einer Halbebene bezüglich  $m$  liegt, heißt äquidistante Kurve oder Hyperzykel. (vgl. [Voelk1995], S. 72)

**Satz 7.13.** a) Falls zwei der Seitensymmetralen  $u, v$  und  $w$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  parallel sind, dann gehören alle drei Geraden zu einem Geradenbündel Paralleler und die Punkte  $A, B$  und  $C$  liegen auf einem Horozykel.

b) Falls zwei der Seitensymmetralen  $u, v$  und  $w$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  überparallel sind, dann gehören alle drei Geraden zu einer Familie überparalleler Geraden und die Punkte  $A, B$  und  $C$  liegen auf einem Hyperzykel.

(vgl. [Voelk1995], S. 63)

*Beweis.* Es sei  $\triangle ABC$  das betrachtete Dreieck mit den Seitensymmetralen  $u, v$  und  $w$ . Die Symmetralen  $u$  und  $v$  schneiden einander nicht und haben somit auch keinen gemeinsamen Punkt. Aus den Sätzen 7.11. und 7.12. lässt sich daher schließen, dass  $\angle BAC > \angle ABC + \angle ACB$ . Wie in den vorherigen Beweisen wählt man einen Strahl  $AX$ , dann ist  $\angle BAX = \beta < \alpha$  und der Punkt  $P$  liegt auf dem Strahl  $AX$  und auf der Seite  $\overline{BC}$  des Dreiecks. Der Winkel  $\angle BAY = \alpha - \gamma > \beta$  für einen entsprechenden Strahl  $AY$ . Dieser schneidet die Strecke  $\overline{PC}$  in einem Punkt  $Q$ .  $R$  und  $S$  seien Punkte auf der Geraden  $u$  bzw.  $v$ , sodass der Punkt  $P$  zwischen  $M$  und  $R$  liegt und der Punkt  $Q$  zwischen  $N$  und  $S$ . Die Gerade  $u$  bildet die Verbindungsgerade von  $M$  nach  $P$  und die Gerade  $v$  jene von  $N$  nach  $Q$  und die Dreiecke  $\triangle BAP$  und  $\triangle CAQ$  sind gleichschenkelig. Da  $u$  den Winkel  $\angle BAP$  teilt, handelt es sich bei dem Winkel  $\angle QPM$  um einen spitzen Winkel und somit auch bei dem gegenüberliegenden Winkel  $\angle QPR$ . Die Gerade  $v$  schneidet den Winkel  $\angle CQA$ , weshalb der Winkel  $\angle CQN$  spitz ist, genauso wie sein gegenüberliegender Winkel  $\angle PQS$ .

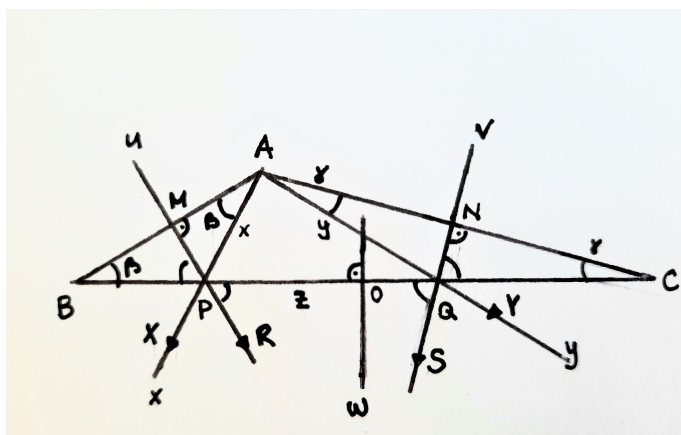


Abbildung 40: Skizze zu Beweis Satz 7.13. a)

Es seien  $u$  und  $v$  parallel. Die Strahlen  $PM$  und  $QS$ , sowie die Strahlen  $QN$  und  $PR$  sind nicht parallel, da  $P$  zwischen  $M$  und  $R$  liegt und  $Q$  zwischen  $N$  und  $S$  und die Punkte  $M$  und  $N$  auf der  $A$ -Seite der Geraden  $PQ$  liegen. Dadurch, dass die Winkel  $\angle QPR$  und  $\angle PQS$  spitz sind, würde die Parallelität der Strahlen  $PM$  und  $QN$  implizieren, dass das Dreieck  $(M - PQ - N)$  zwei stumpfe Winkel hat. Daraus würde folgen, dass die Strahlen  $PM$  und  $QN$  nicht parallel sind. Die Parallelität von  $u$  und  $v$  impliziert somit, dass die Strahlen  $PR$  und  $QS$  parallel sind.

Sei nun  $x = d(P, B) = d(P, A)$ ,  $y = d(Q, C) = d(Q, A)$  und  $z = d(P, Q)$ , dann gilt für  $d(O, Q) = d(O, R) = \frac{1}{2}(x + y + z)$ . Über die Seitenlängen des Dreiecks  $\triangle APQ$  mit  $y + z > x$  folgt  $x + y + z > 2x$  und somit folgt für  $d(B, O) = \frac{1}{2}(x + y + z) > x = d(B, P)$ . Daher muss  $O$  auf dem Strahl  $PQ$  liegen. Durch  $x + y > y$  wird impliziert, dass  $x + y + z > 2y$  gilt, und somit ist  $d(C, O) = \frac{1}{2}(x + y + z) > y = d(C, Q)$ . Somit liegt  $O$  auf dem Strahl  $QP$  und man kann sagen, dass  $O$  zwischen  $P$  und  $Q$  liegt. Die Gerade  $w$  schneidet das Dreieck  $(R - PQ - S)$  im Punkt  $O$ . Somit kann die Gerade  $w$  weder die Gerade  $u$  noch die Gerade  $v$  schneiden, da dies sonst nach Satz 7.9. implizieren würde, dass sich auch die Geraden  $u$  und  $v$  schneiden. Die Gerade  $w$  kann folglich auch keinen der beiden Strahlen des Dreiecks  $(R - PQ - S)$  schneiden. Somit ist nach dem Satz von Pasch  $w$  parallel zu den beiden Strahlen des Dreiecks. Somit gehört  $w$  zu einem Bündel paralleler Geraden, wenn gilt  $u \parallel v$ . Somit ist a) bewiesen.

Nun ist der Fall, dass  $u$  und  $v$  überparallel sind, zu untersuchen. Es existiert eine Gerade  $b$ , die eine Normale zu  $u$  im Punkt  $M_1$  und eine Normale zu  $v$  im Punkt  $N_1$  ist. Diese Gerade kann nicht der Geraden  $AB$  entsprechen, da sonst sowohl die Gerade  $AB$  als auch die Gerade  $AN$  eine Normale zu  $v$  wären. Es kann auch nicht  $v$  die Gerade  $AC$  sein. Somit muss  $b$  überparallel zu der Geraden  $AB$  sein, da beide normal zu  $u$  sind. Aus einem ähnlichen Grund muss  $b$  auch zu  $AC$  überparallel sein, die beide Geraden sind normal zu  $v$ . Daher kann  $b$  weder die Strecke  $\overline{AB}$  noch die Strecke  $\overline{AC}$  schneiden. Aus den Anordnungsaxiomen folgt, dass  $b$  die Strecke  $\overline{BC}$  und somit auch die Strecke  $\overline{PQ}$  nicht schneidet. Daher liegen die Punkte  $M_1$  und  $N_1$  in derselben Halbebene bezüglich der Geraden  $PQ$ . Sollten die Punkte  $M_1$  und  $N_1$  bezüglich der Geraden  $PQ$  auf derselben Seite wie  $A$  liegen, dann würde daraus folgen, dass die Winkel  $\angle RPQ$  und  $\angle SPQ$  spitz sind. Daraus wiederum würde folgen, dass das Viereck  $PQN_1M_1$  zwei stumpfe und zwei rechte Winkel hat, dies ist allerdings aufgrund der Winkelsumme nicht möglich. Somit müssen  $M_1$  und  $N_1$  auf derselben Seite wie  $R$  und  $S$  bezüglich der Geraden  $PQ$  liegen, d.h. die Punkte  $S$ ,  $R$ ,  $M_1$  und  $N_1$  liegen in derselben Halbebene bezüglich der Geraden  $PQ$ . Seien nun  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  die Fußpunkte der Normalen von  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus auf  $b$ .



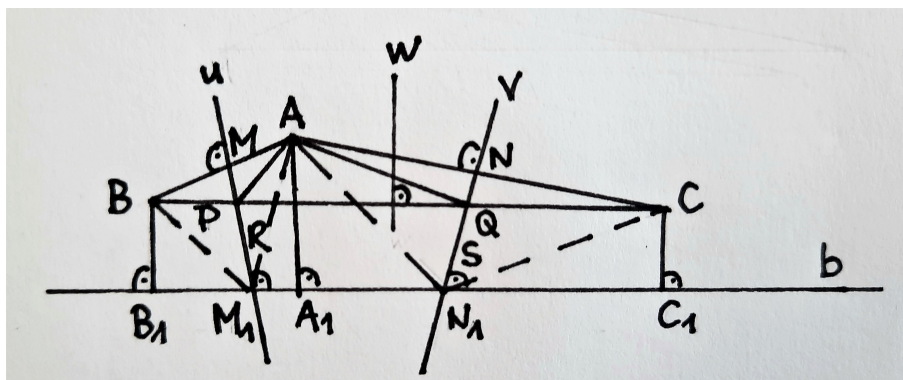


Abbildung 41: Skizze zu Beweis Satz 7.13. b)

Die Gerade  $u$  trennt  $A$  und  $B$  und der Punkt  $A$  liegt dabei auf derselben Seite von  $u$  wie die Gerade  $v$ , da die Geraden  $u$  und  $v$  überparallel sind und  $M$  zwischen den Punkten  $B$  und  $A$  und  $P$  zwischen den Punkten  $B$  und  $Q$  liegt. Gleichmaßen folgt daraus, dass  $N$  zwischen  $C$  und  $A$  und  $Q$  zwischen  $C$  und  $P$  liegt, dass die Gerade  $v$  die Punkte  $A$  und  $C$  trennt und daher  $A$  auf derselben Seite von  $v$  wie die Gerade  $u$  liegt. Die zu  $u$  und  $v$  überparallele Gerade  $AA_1$  liegt somit in dem Bereich zwischen  $u$  und  $v$ . Daraus folgt, dass der Punkt  $A_1$  zwischen  $M_1$  und  $N_1$  liegt. Die Geraden  $u, v, AA_1, BB_1$  und  $CC_1$  gehören zu der Familie der Überparallelen bezüglich der Geraden  $b$  und die Fußpunkte liegen in folgender Ordnung auf der Geraden  $b$ :  $B_1, M_1, A_1, N_1$  und  $C_1$ .

Da der Punkt  $M_1$  sowohl auf  $u$  als auch auf  $b$  liegt, gilt  $d(M_1, B) = d(M_1, A)$  und für die Winkel  $\sphericalangle MM_1B = \sphericalangle MM_1A$ . Aus dem Kongruenzsatz folgt daher, dass die Dreiecke  $\triangle BM_1B_1$  und  $\triangle AM_1A_1$  kongruent sind. Folglich gilt auch  $d(A, A_1) = d(B, B_1)$ . Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die Dreiecke  $\triangle A_1N_1A$  und  $\triangle C_1N_1C$  kongruent sind, somit gilt  $d(A, A_1) = d(C, C_1)$ . Daher gilt auch  $d(B, B_1) = d(C, C_1)$ . Diese Argumente implizieren, dass es sich bei dem Viereck  $BB_1CC_1$  um ein Saccheri Viereck handelt, mit der der Basis gegenüberliegenden Seite  $\overline{BC}$ . Da die Höhe, welche der Seitensymmetrale  $w$  entspricht, normal auf die Basis steht, schließt  $b$  mit  $w$  einen rechten Winkel ein und folglich gehört auch  $w$  zu der Familie der Überparallelen zu  $b$ . Somit ist der zweite Fall gezeigt.

Abschließend sollen a) und b) zusammengefasst werden:

Man betrachtet eines dieser Paare:  $u, v$  oder  $u, w$  oder  $v, w$ . Sollte  $u \parallel w$  gelten, so kann  $u$  die Gerade  $v$  nicht schneiden, da dies nach Satz 7.9. implizieren würde, dass  $u$  auch  $w$  schneidet, dies widerspricht jedoch  $u \parallel w$ . Die Gerade  $u$  kann in diesem Fall auch nicht überparallel zu  $v$  sein, da dies wiederum implizieren würde, dass  $u$  auch zu  $w$  überparallel ist, dies widerspricht ebenfalls  $u \parallel w$ . Somit muss falls  $u \parallel w$  auch  $u \parallel v$  gelten. Somit gehören die Geraden  $u, v$  und  $w$  nach a) zu einer Familie von parallelen Geraden.

Sei  $u$  überparallel zu  $w$ , sind die Möglichkeiten, dass  $u \parallel v$  oder  $u$  die Gerade  $v$  schneidet, nach Satz 7.9. und a) auszuschließen und daher ist  $u$  zu  $v$  überparallel. Somit gehören die Geraden  $u, v$  und  $w$  zu einer Familie Überparalleler. Die Punkte  $A, B$  und  $C$  liegen dann je nach Fall a) oder b) auf einem Horozykel oder einem Hyperzykel. (vgl. [Voelk1995], S. 63ff)  $\square$

### 7.3.2 Inkreismittelpunkt eines Dreiecks

**Satz 7.14.** *Die Winkelsymmetralen der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

[Voelk1995], S. 66f)

Dieser Satz existiert in der hyperbolischen Geometrie genauso wie in der euklidischen Geometrie.

### 7.3.3 Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

**Satz 7.15.** *In einem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt. (vgl. [Voelk1995], S. 67)*

*Beweis.* Dieser Satz lässt sich, wie auch in der euklidischen Geometrie auf einen Satz bezüglich der Winkelsymmetralen zurückführen. Man zeigt, dass die Höhen des Dreiecks  $\triangle ABC$ , beispielsweise  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CF}$  mit den Fußpunkten  $D$ ,  $E$  und  $F$ , die Innenwinkel des Dreiecks  $\triangle DEF$  halbieren. Daraus folgt dann, dass sich auch die Höhen in einem Punkt schneiden. Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$ , dessen Winkel in den Eckpunkten  $B$  und  $C$  spitz sind und der Eckpunkt  $A$  soll unendlich fern sein (d.h es handelt sich hier um ein asymptotisches Dreieck). Weiters sollen sich die Höhe von  $B$  auf die Strecke  $\overline{AC}$ , mit dem Fußpunkt  $E$ , und die Höhe von  $C$  auf die Seite  $\overline{AB}$ , mit dem Fußpunkt  $F$ , in einem Punkt  $M$  im Inneren des Dreiecks schneiden.

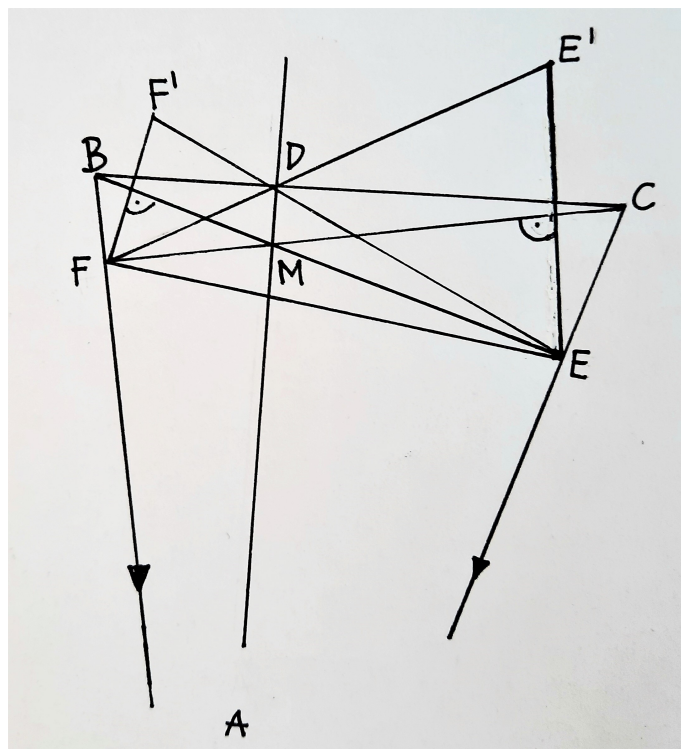


Abbildung 42: Skizze zu Beweis Satz 7.15.

Fällt man nun die Normale von  $E$  auf  $\overline{FC}$ , so entsteht der Schnittpunkt  $G$ . Nun wählt man auf der Normalen einen Punkt  $E'$  so, dass  $\overline{EG} = \overline{GE'}$  gilt, und verbindet den Punkt  $F$  mit dem Punkt  $E'$ . Auf gleiche Weise erhält man, wenn man die Normale von  $F$  auf  $\overline{EB}$  fällt, den Schnittpunkt  $H$  der Normalen und  $\overline{EB}$ . Dann wählt man auf der Normalen einen Punkt  $F'$ , ebenso, dass  $\overline{FH} = \overline{HF'}$  gilt. Abschließend verbindet man den Punkt  $E$  mit dem Punkt  $F'$ . Die so entstandenen Verbindungsgeraden  $EF'$  und  $E'F$  schneiden sich in einem Punkt  $D$ .

Man betrachtet nun das Dreieck  $\triangle FED$ . Dessen Inkreismittelpunkt bezeichnet man mit  $M$ . Die Verbindungsgerade  $FB$ , die eine Normale auf  $\overline{FM}$  ist, halbiert die Außenwinkel, die den Seiten  $\overline{EF}$  und  $\overline{FD}$  anliegen. Somit sind die Punkte  $B$  und  $C$  Schnittpunkte der Winkelsymmetralen von einem angeschriebenen Kreis. Es folgt, dass der Schnittpunkt  $D$  der Geraden  $EF'$  und  $E'F$  auf  $\overline{BC}$  liegt. Weiters folgt, dass die Gerade  $MD$  auf  $\overline{BC}$  eine Normale ist. Da  $\overline{MD}$  die Winkelsymmetrale des Winkels  $\angle FDE$  ist, hat nach Satz 7.14. die Gerade  $MD$  mit den Geraden  $BF$  und  $CE$ , welche Halbierende des Außenwinkels sind, den Punkt  $E$  gemein. Somit geht auch die von  $A$  auf  $\overline{BC}$  gefällte Höhe durch den gemeinsamen Punkt  $M$  der beiden Höhen  $\overline{CF}$  und  $\overline{BE}$ . (vgl. [Voelk1995], S. 67f)  $\square$

## 7.4 Asymptotische Dreiecke

Zusätzlich zu den aus der euklidischen Geometrie schon bekannten Dreiecken gibt es in der hyperbolischen Geometrie auch die sogenannten „asymptotischen“ Dreiecke. Aufgrund der speziellen Lage von parallelen Geraden in der Lobatschewski-Geometrie treten in dieser diese Dreiecke auf. Man kann drei Arten von asymptotischen Dreiecken unterscheiden.

### 7.4.1 Einfaches asymptotisches Dreieck

Vereinigt man zwei parallele Strahlen  $PX$  und  $QY$ , die zu einem Strahlenbündel gehören, mit einer Strecke  $\overline{PQ}$ , so nennt man die so entstandene Figur einfaches asymptotisches Dreieck. (vgl. [Voelk1995], S. 69)

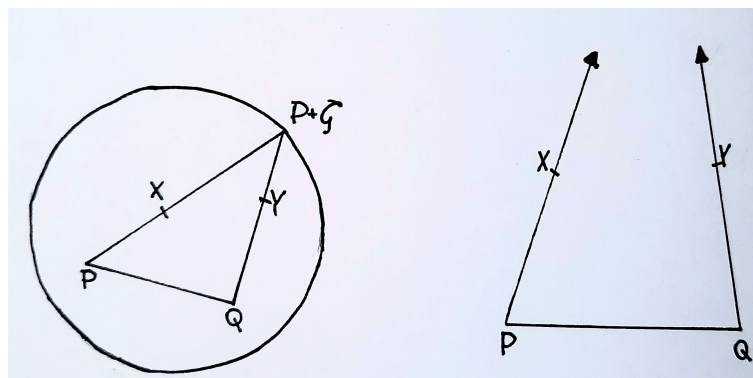


Abbildung 43: Skizze einfaches asymptotisches Dreieck

In den vorangegangenen Ausführungen wurde bereits der Begriff Dreiseit verwendet. Die-

ser ist eine andere Bezeichnung für die Figur, die in der Abbildung 43 gezeigt. Bei einem einfachen asymptotischen Dreieck liegt ein Eckpunkt im „Unendlichen“. Die Winkelsumme dieses Dreiecks ist die Summe der beiden Winkel in den „nicht-unendlichen“ Eckpunkten. (vgl. [Voelk1995], S. 69) Es sollen nun einige Eigenschaften des Dreiseits oder einfachen asymptotischen Dreiecks gezeigt werden.

Ein Dreiseit kann wie oben beschrieben definiert werden. Dabei versteht man unter den Seiten eines Dreiseits sowohl die Strahlen  $PX, QY$  als auch die Strecke  $\overline{PQ}$ . Die Eckpunkte  $P$  und  $Q$  sind jeweils der Scheitel eines Winkels. Ein Dreiseit wie jenes in Abbildung 43 wird kurz mit  $(X - PQ - Y)$  bezeichnet. (vgl. [Voelk1995], S. 33f)

Schreibt man  $\angle(X - PQ - Y)$ , so meint man damit das Innere des Winkels eines Dreiseits, genauer gesagt das Innere der beiden Winkel des Dreiseits  $\angle XPQ$  und  $\angle YQP$ . (vgl. [Voelk1995], S. 34)

Oftmals findet man auch die kurze Bezeichnung  $PQ\delta$  für ein Dreiseit. Der griechische Buchstabe  $\delta$  gibt dabei die Richtung an, in welche die parallelen Strahlen weisen. (vgl. [Voelk1995], S. 34)

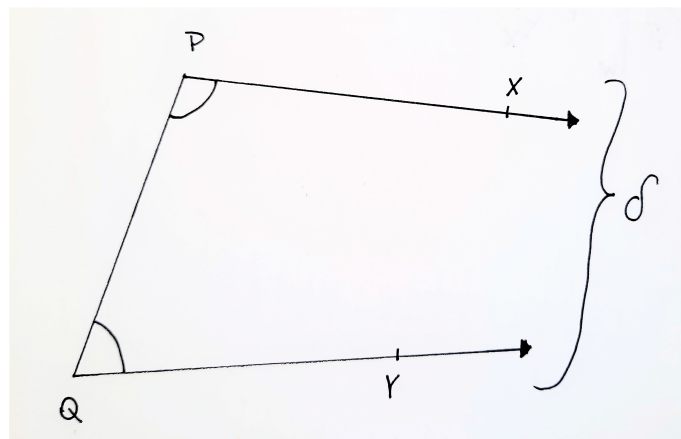


Abbildung 44: Dreiseit  $PQ\delta$

**Satz 7.16.** *Wenn eine Gerade ein Dreiseit schneidet, schneidet diese entweder mindestens zwei Seiten des einfach asymptotischen Dreiecks oder ist parallel zu den das Dreiseit bestimmenden parallelen Strahlen und schneidet somit die Strecke zwischen deren Endpunkten. (vgl. [Voelk1995], S. 34)*

Dieser Satz ist eine Analogie zu dem Axiom von Pasch.

*Beweis.* Es sei  $g$  die Gerade, die das Dreiseit  $(X - PQ - Y)$  schneidet. Falls einer der Scheitel, beispielsweise  $P$ , auf der Geraden  $g$  liegt, dann schneidet  $g$  natürlich die Strecke  $\overline{PQ}$ . Die Gerade kann entweder gleich dem Strahl  $PX$  oder der Strecke  $\overline{PQ}$  sein oder den Strahl  $PY$  in einem Punkt  $A$  schneiden. Analog dazu sind die Überlegungen, falls  $Q$  auf der Geraden  $g$  liegt. (vgl. [Voelk1995], S. 34f)

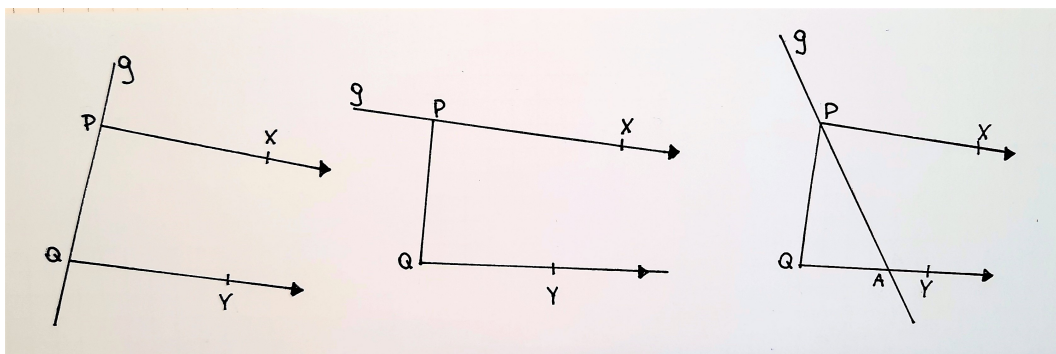


Abbildung 45: Skizzen zu  $P \in g$

Nun werden die Fälle, dass  $A$  auf einem Strahl des Dreiseits oder auf der Strecke  $PQ$  liegt, betrachtet, wobei  $A$  weder mit dem Punkt  $P$  noch dem Punkt  $Q$  gleichfällt.

Fall 1:  $A$  liegt auf einem der Strahlen, in diesem Fall beispielsweise auf dem Strahl  $PX$ . Da der Fall, dass die Gerade  $g$  Teil des Strahls  $PX$  ist oder dass  $P$  auf der Geraden  $g$  liegt, bereits betrachtet wurde, werden diese Eigenschaften nun ausgeschlossen. Weiters wird vorausgesetzt, dass  $A$  zwischen  $P$  und  $X$  liegt. Der Strahl  $AB$  soll in jene Halbebene weisen, in der auch die Punkte  $Q$  und  $Y$  liegen. Nachdem der Punkt  $Q$  nicht auf der Geraden  $g$  liegt, sind die Strahlen  $AQ$  und  $AB$  ungleich. Der Strahl  $AB$  liegt daher entweder im Inneren des Winkels  $\angle PAQ$  oder im Inneren des Winkels  $\angle XAQ$ . Wenn der Strahl  $AB$  im Inneren des Winkels  $\angle PAQ$  liegt, dann schneidet er die Strecke  $PQ$ , dies lässt sich aus einer Folgerung der Bewegungsaxiome ableiten. Falls der Strahl im Inneren des Winkels  $\angle XAQ$  liegt, folgt aus der Parallelität von  $AX$  und  $QY$  in der Richtung von  $QY$ , dass der Strahl  $AB$  den Strahl  $QY$  schneidet. Daher schneidet die Gerade  $g$ , von welcher der Strahl  $AB$  ein Teil ist, das Dreiseit  $(X - PQ - Y)$  in zwei Seiten. Analog hierzu lässt sich der Fall, dass  $A$  auf dem Strahl  $QY$  liegt, zeigen. (vgl. [Voelk1995], S. 35)

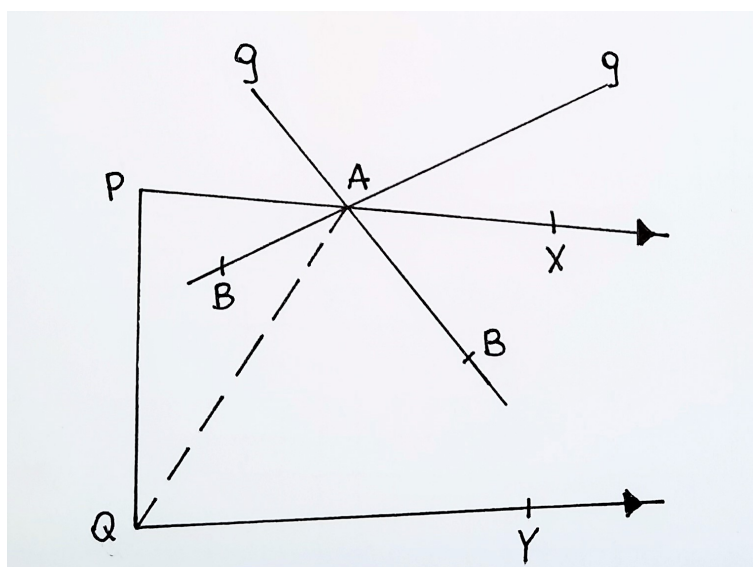


Abbildung 46: Skizze zu Fall 1



Fall 2: Der Punkt  $A$  liegt auf der Strecke  $\overline{PQ}$ . Da keiner der Scheitel, also die Punkte  $P$  oder  $Q$ , auf der Geraden  $g$  liegt, ist  $g$  ungleich der Gerade  $PQ$ . Es sei  $AB$  jener Strahl, der in die Halbebene der Geraden  $PQ$  weist, in der auch die Punkte  $X$  und  $Y$  liegen. Des Weiteren sei ein Strahl  $AC$  zu dem Strahl  $PX$  parallel und daher auch zu  $QY$ . Unter der Voraussetzung, dass die Strahlen  $AB$  und  $AC$  ungleich sind, liegt der Strahl  $AB$  entweder im Inneren des Winkels  $\angle PAC$  oder im Inneren des Winkels  $\angle QAC$ . Liegt der Strahl  $AB$  im Inneren des Winkels  $\angle PAC$ , so folgt aus  $PX \parallel AC$ , dass der Strahl  $AB$  den Strahl  $PX$  schneidet. Im Fall, dass  $AC$  innerhalb des Winkels  $\angle QAC$  liegt, folgt aus  $AC \parallel QY$ , dass der Strahl  $AB$  den Strahl  $PY$  schneidet. Somit schneidet die Gerade  $g$  zwei Seiten des Dreiseits.

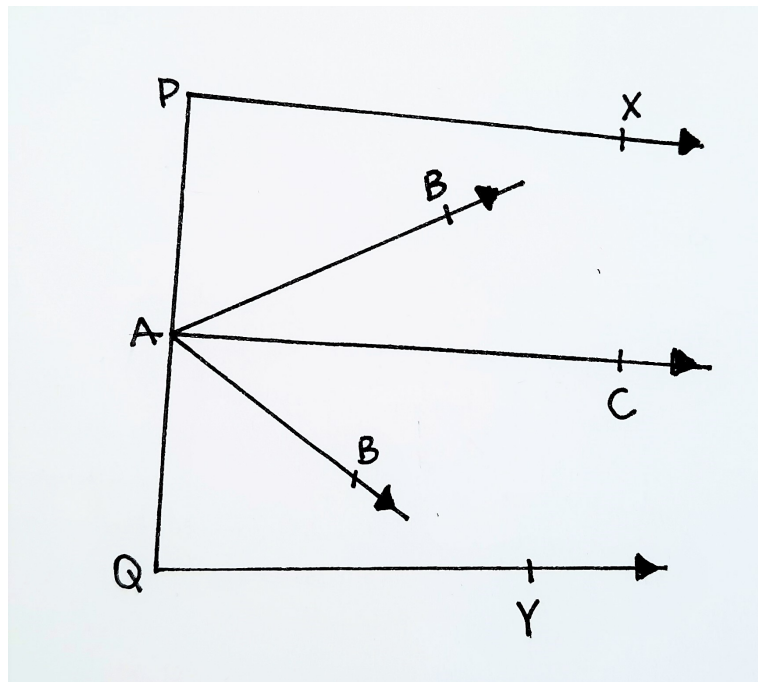


Abbildung 47: Skizze zu Fall 2

Bleibt noch zu betrachten, wie die Gerade  $g$  das Dreiseit schneidet, falls der oben beschriebene Strahl  $AB$  gleich dem oben beschriebenen Strahl  $AC$  ist. In diesem Fall ist die Gerade  $g$  parallel zu den Strahlen des Dreiseits. (vgl. [Voelk1995], S. 35f)  $\square$

Wie ein Dreieck hat auch ein einfach asymptotisches Dreieck Außenwinkel.

**Satz 7.17.** *Ein Außenwinkel eines Dreiseits ist größer als der nichtangrenzende Winkel des Dreiseits.*

([Voelk1995], S. 36)

*Beweis.* Es sei  $(X - PQ - Y)$  das betrachtete Dreiseit, der Strahl  $PX'$  sei dabei der zu  $PX$  entgegengesetzte Strahl. Der Winkel  $\angle X'PQ$  ist dann der Außenwinkel des Dreiseits im Scheitel  $P$ . Zu zeigen ist nun, dass  $\angle X'PX > \angle PQY$  gilt.

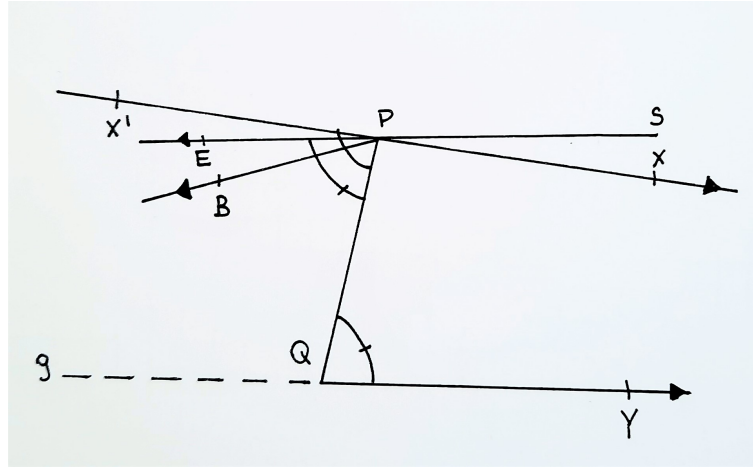


Abbildung 48: Skizze zu Beweis Satz 7.17.

Es sei  $g$  eine Gerade durch die Punkte  $Q$  und  $Y$ . Die Gerade  $g$  liegt im Inneren des Winkels  $\angle XPB$ . Es existiert eine zu  $g$  entsprechende Gerade  $s$  im Bündel durch  $P$ , sodass  $s$  und  $g$  überparallel sind und die Gerade  $PQ$  kongruente Innenwinkel mit den Geraden  $s$  und  $g$  bildet. Daraus folgt, dass in der Halbebene, die  $X'$  und  $B$  enthält, ein Strahl  $PE$  existiert, so dass  $\angle YQP = \angle EPQ$  gilt und  $PE$  auf der Geraden  $s$  liegt. Da  $s$  und  $g$  überparallel sind, kann  $s$  weder die Gerade  $PX$  noch  $PB$  sein. Somit trifft die Gerade  $s$  den Winkel  $\angle XPB$  nicht. Das bedeutet,  $s$  muss im Inneren des Winkels  $\angle X'PB$  liegen, wodurch  $PE$  zwischen  $PB$  und  $PX'$  liegt. Daraus folgt, dass  $\angle X'PQ > \angle EPQ = \angle PQY$ . (vgl. [Voelk1995], S. 36f)  $\square$

**Definition 7.6.** Zwei einfache asymptotische Dreiecke bezeichnet man als kongruent, wenn ihre Strecken kongruent sind und das Paar der Winkel des einen Dreiseits kongruent zum Paar der Winkel des anderen Dreiseits sind und zwar in derselben Ordnung. (vgl. [Voelk1995], S. 37)

Man schreibt:  $(A - BC - D) = (A' - B'C' - D')$ , wobei  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ,  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  und  $\angle DCB = \angle D'C'B'$ . ([Voelk1995], S. 37)

**Satz 7.18.** Falls die Strecken von zwei Dreiseiten kongruent sind und ein Winkel des einen Dreiseits zu einem Winkel des anderen kongruent ist, dann ist auch das Paar der verbleibenden Winkel kongruent. (vgl. [Voelk1995], S. 37f)

*Beweis.* Es seien  $(A - BC - D)$  und  $(E - FG - H)$  die betrachteten Dreiseite, wobei für  $\overline{BC}$  und  $\overline{FG}$  Gleichheit gilt. Weiters gilt  $\angle ABC = \angle EFG$ , diese werden in der Abbildung mit  $\alpha$  bezeichnet. Den Winkel  $\angle DCB$  nennt man  $\beta$  und  $\angle HGF$   $\gamma$ .

Falls für die Winkel  $\angle DCB$  und  $\angle HGF$  Ungleichheit gilt, dann muss einer der beiden kleiner sein. Man nimmt nun an, dass  $\gamma < \beta$  gilt. Wenn nun der Strahl  $CX$  in die Halbebene der Geraden  $BC$  weist, in der auch  $A$  und  $D$  liegen, sodass  $\angle BCX = \angle HGF$  gilt, dann folgt aus der Annahme, dass  $\gamma < \beta$ , dass der Strahl  $CX$  innerhalb des Winkels  $\angle BAD$  liegt. Aus  $CD \parallel BA$  folgt, dass der Strahl  $CX$  den Strahl  $BA$  schneidet. Dieser Schnittpunkt sei  $I$ .

Somit gibt es auf dem Strahl  $FE$  einen Punkt  $J$ , sodass  $\overline{FJ} = \overline{BI}$ . Die Dreiecke  $\triangle CBI$  und  $\triangle GFJ$  sind dann kongruent und somit gilt für die Winkel  $\angle FGJ$  und  $\angle DCI$  Gleichheit. Nachdem  $J$  innerhalb des Winkels  $\angle FGH$  liegt, folgt, dass  $\angle FGJ < \angle FGH$ . Dies würde bedeuten, dass  $\gamma < \gamma$  gilt, und somit stößt man hier auf einen Widerspruch. Daher muss für  $\beta$  und  $\gamma$  Gleichheit gelten. (vgl. [Voelk1995], S. 38)

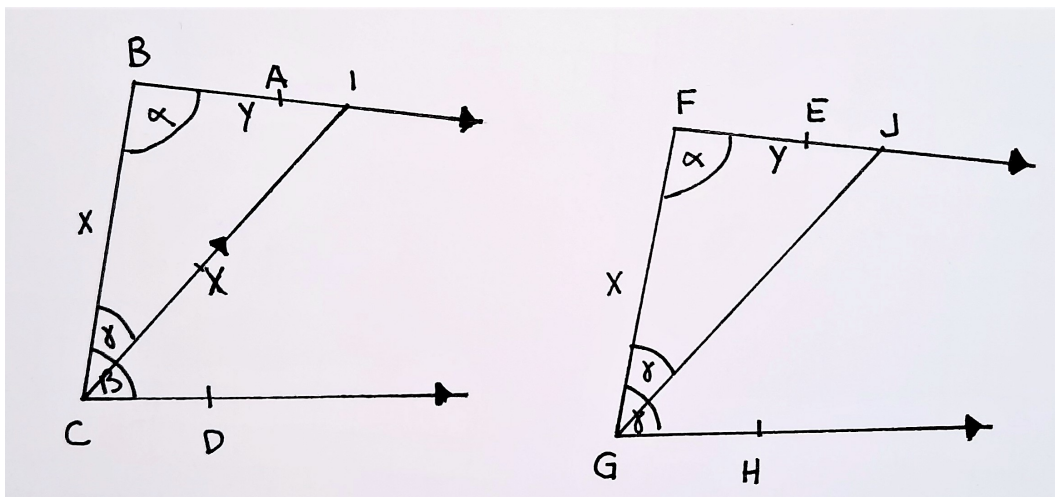


Abbildung 49: Kongruente Dreiseite

□

**Satz 7.19.** *Sollten zwei Winkel eines Dreiseits kongruent zu den Winkeln eines zweiten Dreiseits sein, dann sind auch die Strecken der beiden Dreiseiten kongruent. (vgl. [Voelk1995], S. 38)*

*Beweis.* Es seien  $(A - BC - D)$  und  $(E - FG - H)$  zwei Dreiseite und die Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle EFG$  kongruent. Weiters gilt  $\angle BCD = \angle FGH$ . Man bezeichnet die Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle EFG$  mit  $\alpha$  und  $\angle BCD$  und  $\angle FGH$  mit  $\beta$ . Weiters sei  $P$  ein Punkt auf dem Strahl  $CB$  genau so, dass  $\overline{CP} = \overline{GF}$  gilt. Weiters sei der Strahl  $PX$  parallel zu  $CD$  und geht durch den Punkt  $P$ . Die Dreiseite  $(E - FG - H)$  und  $(X - PC - D)$  sind kongruent, daher ist auch der Winkel  $\angle XPC = \alpha$ .

Falls für  $\overline{BC}$  und  $\overline{FG}$  Ungleichheit gilt, dann sind auch die Strahlen  $PX$  und  $BA$  ungleich. Da  $PX$  und  $BA$  ungleich sind und beide zu dem Strahl  $CD$  parallel sind, gilt nach Satz 5.6. auch  $PX \parallel BA$ . Somit existiert auch ein Dreiseit  $(X - PB - A)$ .

Falls  $\overline{BC} < \overline{FG}$  gilt, dann folgt daraus, dass  $B$  zwischen den Punkten  $C$  und  $P$  liegt. Daraus lässt sich schließen, dass der Winkel  $\angle CBA$  ein Außenwinkel des Dreiseits  $(X - PB - A)$  ist. Nach Satz 7.17. gilt daher, dass  $\angle CBA > \angle BPX = \angle CPX$ . Dies würde bedeuten, dass  $\alpha > \alpha$  gilt. Hier stößt man somit auf einen Widerspruch.

Falls  $\overline{BC} > \overline{FG}$  gilt, dann folgt daraus, dass  $P$  zwischen den Punkten  $B$  und  $C$  liegt. Dann ist der Winkel  $\angle CPX$  ein Außenwinkel zu  $(A - BP - X)$  und es folgt wiederum nach Satz 7.17., dass  $\angle CPX > \angle CBA$ . Man stößt somit auch hier auf einen Widerspruch. Folglich muss  $\overline{BC} = \overline{FG}$  gelten. (vgl. [Voelk1995], S. 39)



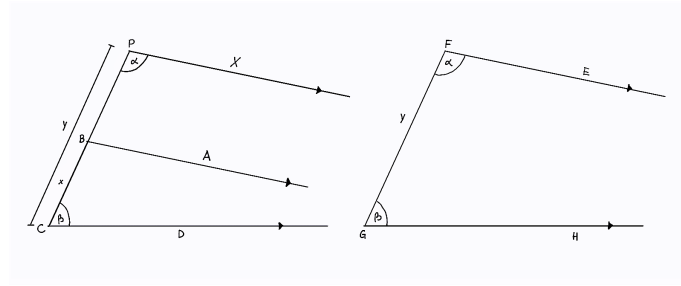


Abbildung 50: Kongruente Dreiseite

□

#### 7.4.2 Doppelt asymptotisches Dreieck

Unter einem doppelt asymptotischen Dreieck versteht man ein Paar von Strahlen  $PX$  und  $PY$ , welche zu einem Strahlenbündel gehören, vereinigt mit einer Geraden, die zu beiden Strahlen parallel ist.

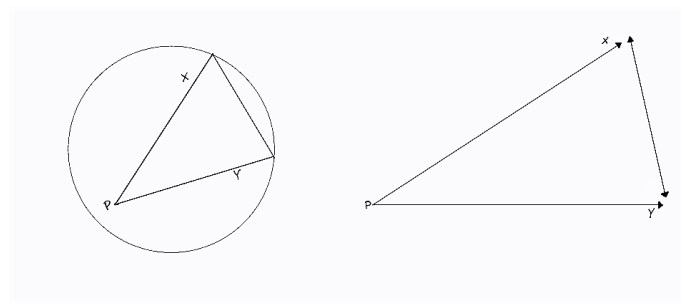


Abbildung 51: Skizze doppelt asymptotisches Dreieck

Die Winkelsumme in einem doppelt asymptotischen Dreieck ist gleich dem Winkel, welchen die beiden Strahlen einschließen. (vgl. [Voelk1995], S. 70)

#### 7.4.3 Dreifach asymptotisches Dreieck

Ein dreifach asymptotisches Dreieck besteht aus drei Geraden, die paarweise zueinander parallel sind.

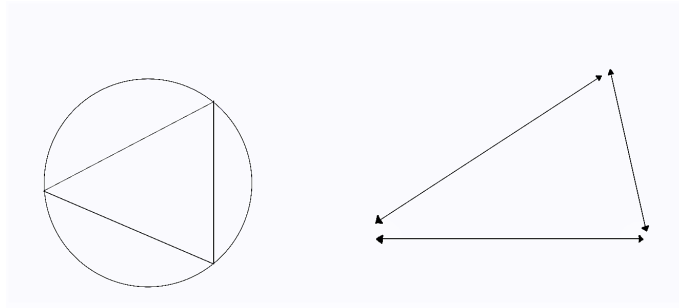


Abbildung 52: Skizze dreifach asymptotisches Dreieck

Die Winkelsumme in einem dreifach asymptotischen Dreieck ist gleich Null. (vgl. [Voelk1995], S. 70)

## 8 Kreise in der hyperbolischen Geometrie - eigentlicher Kreis, Horozykel und Hyperzykel

### 8.1 Definitionen

Unter einem „eigentlichen“ Kreis versteht man in der euklidischen Geometrie eine Menge jener Punkte, die von einem bestimmten Punkt denselben Abstand haben. Diesen fixen Punkt bezeichnet man als Mittelpunkt und den Abstand als Radius. Diese, so wie weitere Begriffe behalten auch in der hyperbolischen Geometrie ihre Bedeutung. Weiters gelten alle Theoreme und Beweise bezüglich des Kreises, die nicht das Parallelenaxiom direkt oder indirekt benötigen. (vgl. [Gans1973], S. 76)

**Definition 8.1.** *Sei  $M$  ein Punkt und  $r$  eine reelle Zahl größer gleich Null. Die Menge  $K = \{X/d(X, M) = r\}$  heißt Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ .*

**Satz 8.1.** *Es sei  $(M)$  ein Büschel an Geraden durch den Punkt  $M$  und  $P$  ein beliebiger Punkt. Die Bahn von  $P$ , welche durch die Spiegelungen von  $P$  an jeder Geraden durch  $M$  entsteht, ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r = d(P, M)$ . Umgekehrt erhält man auf diesem Weg jeden Kreis. (vgl. [Voelk1995], S. 71)*

**Definition 8.2.** *Sei  $(M)$  ein Büschel an parallelen Geraden und  $P$  ein beliebiger Punkt. Die Bahn von  $P$ , welche durch die Spiegelung von  $P$  an jedem Strahl des Bündels  $(M)$  entsteht, heißt Horozykel.*

Kurz bezeichnet man einen Horozykel mit  $(P, \delta)$ , dabei gibt  $\delta$  die Richtung an, in der die Horozykel-bestimmenden Strahlen parallel sind. (vgl. [Voelk1995], S. 72)

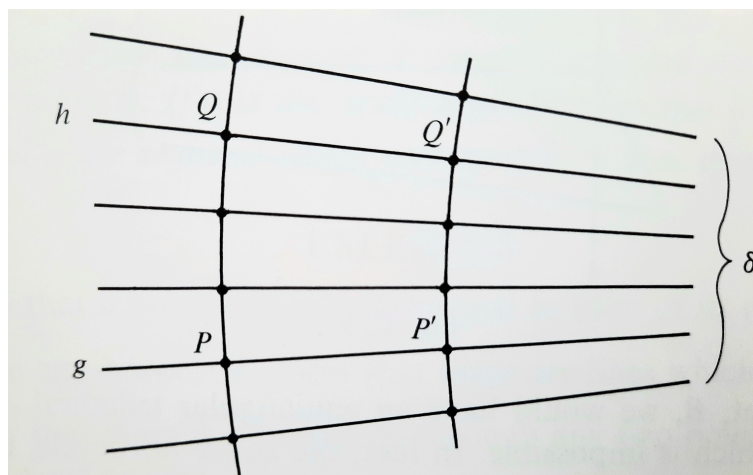


Abbildung 53: Horozykel  $(P, \delta)$

**Definition 8.3.** *Es sei  $m$  eine Gerade und  $r$  eine reelle Zahl mit  $r > 0$ . Jener Teil von  $\{X/d(X, m) = r\}$ , der in einer Halbebene bezüglich  $m$  liegt, heißt äquidistante Kurve oder Hyperzykel. (vgl. [Voelk1995], S. 72)*

Falls  $r = 0$ , ist die Gerade  $m$  ebenfalls ein Hyperzykel.

**Satz 8.2.** *Es sei  $(M)$  ein Büschel von Geraden, die zu einer Geraden  $m$  normal sind, und  $P$  ein beliebiger Punkt. Die Bahn von  $P$ , die durch eine Spiegelung von  $P$  an jeder Geraden des Büschels  $(M)$  entsteht, ist ein Hyperzykel. Umgekehrt erhält man auf diesem Weg jeden Hyperzykel. (vgl. [Voelk1995], S. 72)*

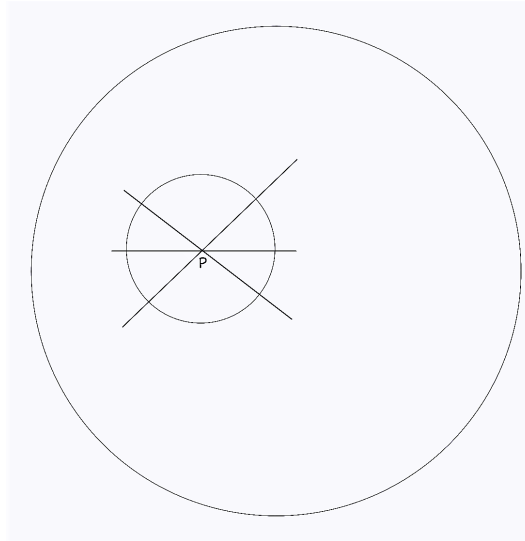


Abbildung 54: Eigentlicher Kreis im Kreismodell

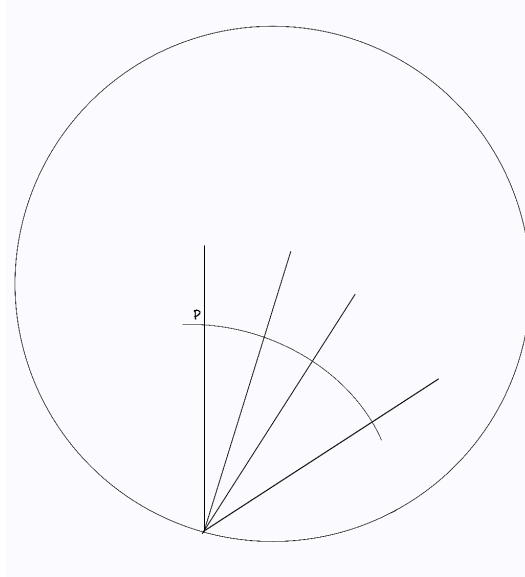


Abbildung 55: Horozykel im Kreismodell

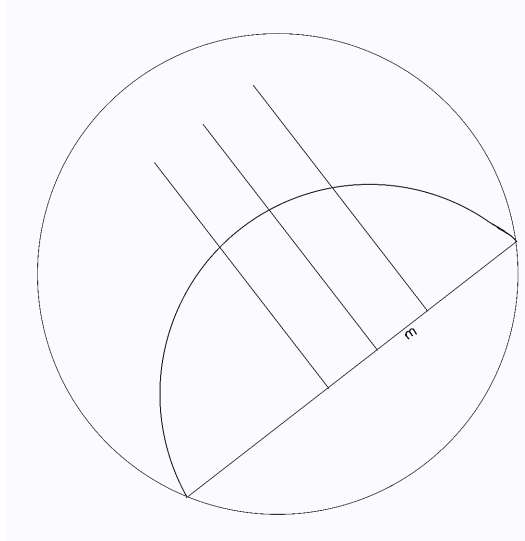


Abbildung 56: Hyperzykel im Kreismodell

## 8.2 Der Horozykel

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Länge eines Horozykelbogens angeben zu können. Hierfür werden einige Eigenschaften des Horozykels untersucht, beispielsweise die der Tangente oder Sehnen. Vorab werden einige Definitionen angeführt.

**Definition 8.4.** *Man bezeichnet zwei oder mehrere Horozykeln als gleichgerichtet, wenn ihre Radien zu demselben Bündel paralleler Strahlen gehören oder die Strahlen, welche die Radien bestimmen in derselbe Richtung parallel sind. (vgl. [Voelk1995], S. 74)*

**Definition 8.5.** *Zwei gleichgerichtete Horozykel haben keinen gemeinsamen Punkt. ([Voelk1995], S. 75)*

**Definition 8.6.** *Die Gerade, die durch einen Punkt des Horozykles geht, welche normal auf den Radius steht, ist die Tangente auf den Horozykel in diesem Punkt. ([Voelk1995], S. 75)*

**Satz 8.3.** *Eine Tangente in einem beliebigen Punkt  $A$  eines Horozykels schneidet diesen nur in  $A$ . Jede andere Gerade durch den Punkt  $A$ , mit Ausnahme des Radius, schneidet den Horozykel in einem weiteren Punkt  $B$ . Falls  $\alpha$  der spitze Winkel zwischen dieser Geraden und dem Radius ist, dann ist  $\alpha$  zweimal der Parallelwinkel bezüglich  $\overline{AB}$ , d.h.  $II(AB) = \alpha$ . (vgl. [Gans1973], S. 123)*

*Beweis.* Sei  $A$  der Punkt, in dem die Tangente  $t$  schneidet, und  $\delta$  die Richtung der parallelen Strahlen. Falls die Gerade  $t$  den Horozykel in einem weiteren Punkt  $B$  schneidet, dann erhält man ein gleichschenkliges Dreieit  $AB\delta$  mit zwei rechten Winkeln; dies ist jedoch nicht möglich. Der gesamte Horozykel, außer der Punkt  $A$ , liegt auf einer Seite von  $t$ , in jener Halbebene, die den Strahl  $A\delta$  enthält. Es sei  $C$  ein Punkt des Horozykels, der in der anderen Halbebene bezüglich  $t$  liegt, dann hat man ein gleichwinkliges Dreieit  $AC\delta$  mit zwei stumpfen Winkeln; dies ist ebenso unmöglich.

Es ist nun noch zu zeigen, dass jene Gerade  $g$ , welche durch  $A$  geht und weder eine Tangente noch der Radius ist, den Horozykel in einem weiteren Punkt schneidet. Solch eine Gerade nennt man - wie auch in der euklidischen Geometrie - Sekante.  $\alpha$  sei der spitze Winkel zwischen  $g$  und  $A\delta$  und  $C$  ein Punkt mit  $C \in g$ , der in derselben Halbebene bezüglich  $t$  liegt wie der Horozykel, sodass  $\overline{AC}$  die entsprechende Strecke für  $\alpha$  als Parallelwinkel ist. Die Normale in  $C$  auf  $g$  ist somit eine Parallele zu  $A\delta$ , in Richtung von  $\delta$ . Wählt man den Punkt  $B \in g$  so, dass  $C$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  ist, dann sind die beiden Dreieite  $AC\delta$  und  $BC\delta$  kongruent. Somit gilt, der Winkel  $\angle CB\delta = \alpha$ . Das bedeutet,  $A$  und  $B$  sind Eckpunkte eines gleichwinkligen Dreieits und  $B\delta$  ist ein Radius des Horozykels. Somit liegt  $B$  auf dem Horozykel. (vgl. [Voelk1995], S. 75f)

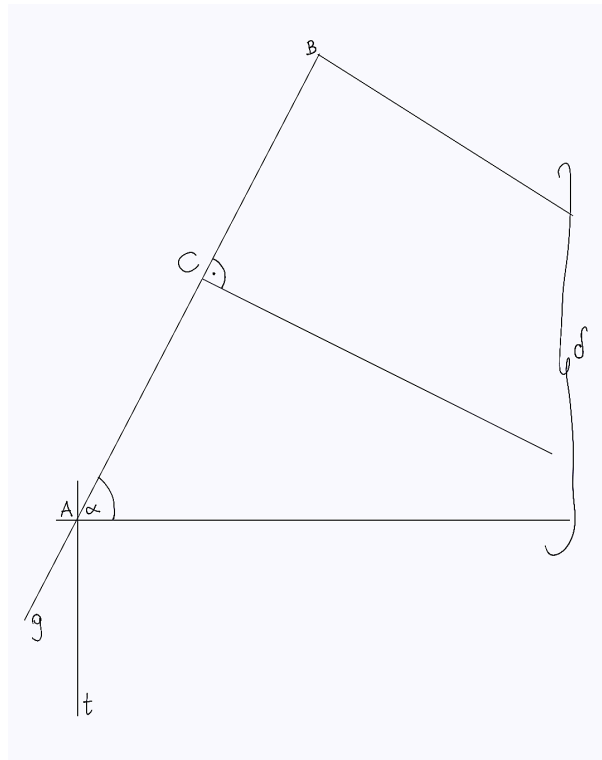


Abbildung 57: Skizze zu Beweis 8.3.

□

**Definition 8.7.** Eine Strecke zwischen zwei Punkten des Horozykels nennt man Sehne. (vgl. [Voelk1995], S. 76)

**Satz 8.4.** Eine Gerade, die eine Sehne des Horozykels im rechten Winkel schneidet, ist der Radius ein Horozykels. (vgl. [Gans1973], S. 123)

**Satz 8.5.** Falls  $\overline{AB}$  und  $\overline{A'B'}$  kongruente Sehnen von Horozyklen mit der Richtung  $\delta$  sind, dann sind die Dreiseite  $AB\delta$  und  $A'B'\delta$  kongruent.

Es soll nun versucht werden, eine Definition für das Bogenstück eines Horozykels zu finden. Man betrachtet zwei Geraden  $g, h$ , die in Richtung  $\delta$  parallel sind. Eine dritte Gerade  $j$ , für die  $j \parallel g; j \parallel h$  gilt, kann nur in eine der durch  $g$  und  $h$  bestimmten Regionen liegen.  $j$  kann zwischen  $g$  und  $h$  liegen, also in der Region zwischen den beiden Geraden. Dies ist dann der Fall, wenn auf  $j$  ein Punkt der Strecke  $\overline{MN}$  liegt, wobei  $M$  und  $N$  Punkte auf  $g$  bzw.  $h$  sind. Es seien  $A$  und  $B$  Punkte des Horozykels in Richtung  $\delta$ . Der Punkt  $C$ , ebenfalls ein Punkt des Horozykels, liegt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn er auf einem Radius liegt, der zwischen  $A\delta$  und  $B\delta$  liegt.

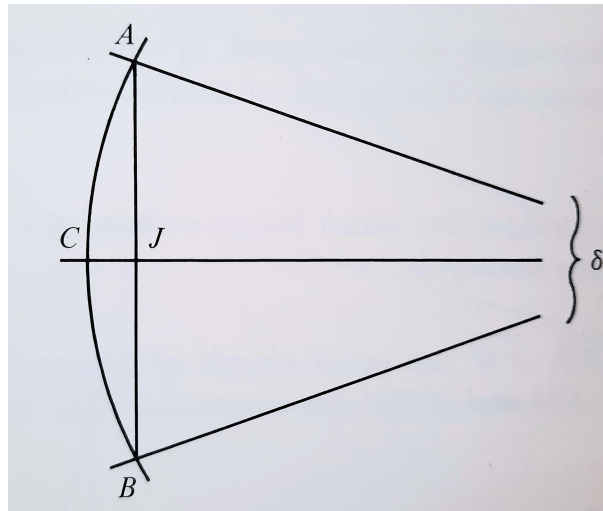


Abbildung 58: Skizze Kreisbogen

Nachdem jede Gerade durch einen Punkt der Sehne  $\overline{AB}$ , welche zu  $A\delta$  parallel ist, ein Radius ist, existieren unendlich viele Punkte zwischen  $A$  und  $B$ . Jene Menge, die alle diese Punkte, sowie  $A$  und  $B$ , enthält, nennt man Horozykelbogen  $AB$ , kurz  $\widehat{AB}$ . Die Sehne  $\overline{AB}$  und  $\widehat{AB}$  liegen einander gegenüber. Seien  $C, D$  Punkte des Bogens  $\widehat{AB}$ , dann bilden auch diese einen Bogen  $\widehat{CD}$ . Da jeder Punkt des Bogen  $\widehat{CD}$  auch auf  $\widehat{AB}$  liegt, nennt man  $\widehat{CD}$  Teilbogen von  $\widehat{AB}$ . (vgl. [Gans1973], S. 123ff)

**Satz 8.6.** *Die dem Horozyklenbogen gegenüberliegende Sehne ist größer als jede Sehne, die einem Teilbogen gegenüberliegt. Die Distanz zwischen den Endpunkten eines Bogens ist größer als jene zwischen zwei anderen Punkten. (vgl. [Gans1973], S. 125)*

**Satz 8.7.** *Die Bögen, die zwei Sehnen desselben oder zweier verschiedener Horozyklen gegenüberliegen, sind genau dann kongruent, wenn die Sehnen gleich sind. (vgl. [Gans1973], S. 126)*

*Beweis.* Siehe [Gans1973], S. 126-128. □

**Satz 8.8.** *Die größere Sehne eines Horozykels oder zweier verschiedener Horozykeln liegt dem größeren Bogen gegenüber und umgekehrt. (vgl. [Gans1973], S. 128)*

Sei  $\widehat{AB}$  ein beliebiger Bogen. Nach Satz 8.4. ist die Gerade, die normal auf  $\overline{AB}$  steht, ein Radius des Horozykels und enthält einen Punkt  $C$ . Dieser Punkt  $C$  gehört zum Kreisbogen  $\widehat{AB}$  und teilt diesen in zwei gleich große Teile, da die Sehnen  $\overline{AC}, \overline{BC}$  gleich sind. Es gibt keinen weiteren Punkt  $D$ , der  $\widehat{AB}$  in zwei gleiche Bogenstücke teilt. Denn wenn es zwei diesen Bogenstücken gegenüberliegende Sehnen gäbe, die gleich wären, dann wäre jene Gerade, auf der  $D$  liegt, normal auf  $\overline{AB}$  und dabei verschieden zu  $\overline{CD}$  und dies ist nicht möglich.



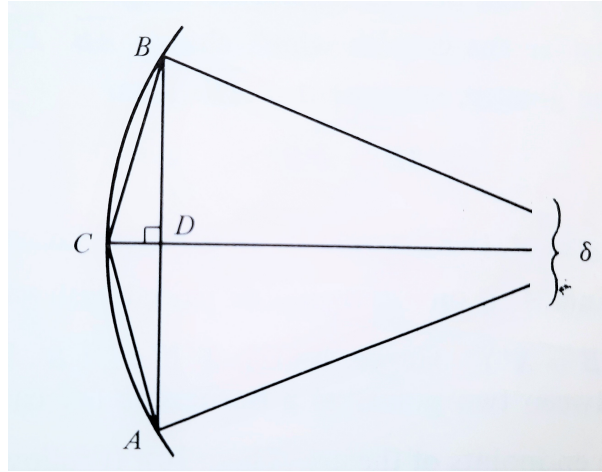


Abbildung 59: Skizze Kreisbogen

**Satz 8.9.** *Es gibt einen einzigen Punkt auf jedem Horozykelbogen, der den Bogen in zwei gleich große Teilbögen teilt. Diesen Punkt nennt man Mittelpunkt des Bogens und es liegt auf jenem Radius, der die dem Bogen gegenüberliegende Sehne im rechten Winkel halbiert. (vgl. [Gans1973], S. 128)*

**Definition 8.8.** *Zwei Horozykelbögen zweier gleichgerichteter Horozykel, deren Endpunkte auf denselben Radien liegen, nennt man korrespondierende Bögen. ([Voelk1995], S. 80)*

**Satz 8.10.** *Teilt ein Radius einen Horozykelbogen, dann teilt dieser auch einen korrespondierenden Bogen eines gleichgerichteten Horozykels im selben Verhältnis. (vgl. [Gans1973], S. 135)*

*Beweis.* Siehe [Gans1973] S. 135-138. □

**Satz 8.11.** *Das Verhältnis eines Paares korrespondierender Bogenstücke von gleichgerichteten Horozykeln hängt von der Länge der Strecke entlang des Radius' ab, die diese Bogenstücke trennt, man spricht hierbei auch von der Distanz zwischen ihnen. Das bedeutet zwei Verhältnisse sind gleich, wenn die zwei Distanzen gleich sind, bzw. ungleich, wenn die beiden Distanzen ungleich sind. (vgl. [Gans1973], S. 138)*

*Beweis.* Es seien  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{A'B'}$  die korrespondierenden Bogenstücke zweier Horozykeln und die parallelen Strahlen von den dazugehörigen Horozykeln weisen in Richtung  $\delta$ . Weiters seien  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{E'F'}$  zwei korrespondierende Bögen, wobei die parallelen Strahlen der Horozykeln in Richtung  $\delta'$  weisen. Es ist nicht notwendig, dass  $\delta$  und  $\delta'$  verschieden sind. Die Distanz zwischen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{A'B'}$  ist  $\overline{AA'}$  bzw.  $\overline{BB'}$  und der Abstand zwischen  $\widehat{EF}$  und  $\widehat{E'F'}$  beträgt  $\overline{EE'}$  bzw.  $\overline{FF'}$ . Nun wird  $\overline{AA'} = \overline{EE'}$  angenommen und man möchte zeigen, dass

$$(1) \quad \frac{s(\widehat{AB})}{s(\widehat{A'B'})} = \frac{s(\widehat{EF})}{s(\widehat{E'F'})}.$$

$s(\widehat{AB})$  soll dabei die Länge des Horozykelbogens  $\widehat{AB}$  angeben.

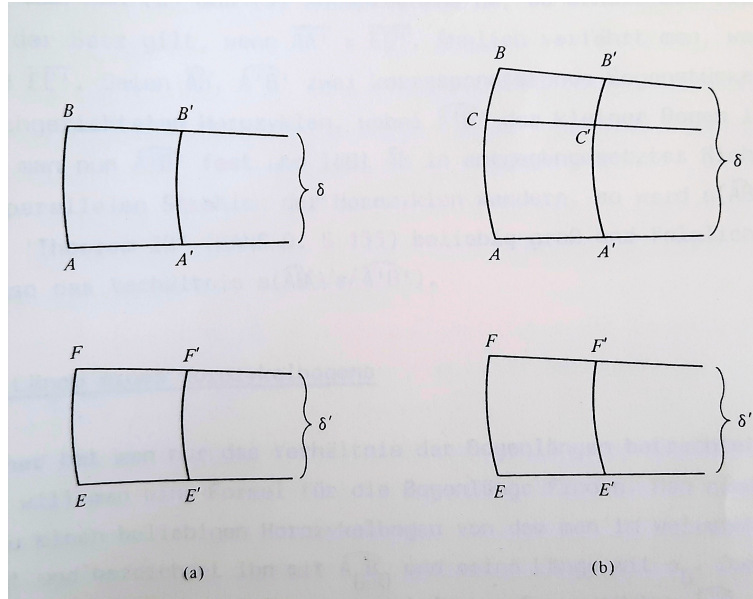


Abbildung 60: Skizze zu Beweis Satz 8.11.

Sollten  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{EF}$  gleich sein, dann sind die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{EF}$  gleich. Somit sind, nach Satz 8.5., die Dreiseite  $AB\delta$  und  $EF\delta$  kongruent. Daraus folgt, dass  $\overline{A'B'} = \overline{E'F'}$  gilt und daraus wiederum folgt, dass  $\widehat{A'B'}$  und  $\widehat{E'F'}$  gleich sind, somit folgt (1).

Sollten  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{EF}$  nicht gleich sein, dann sei  $\widehat{AB}$  der größere Horozykelbogen. Nun wählt man einen Punkt  $C \in \widehat{AB}$  so, dass  $s(\widehat{AC}) = s(\widehat{EF})$ . Dabei sei  $C'$  der Punkt, in dem der Radius durch  $C$  den Bogen  $\widehat{A'B'}$  schneidet. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt:

$$(2) \quad \frac{s(\widehat{AC})}{s(\widehat{A'C'})} = \frac{s(\widehat{EF})}{s(\widehat{E'F'})}.$$

Nach Satz 8.10. ist:

$$(3) \quad \frac{s(\widehat{AC})}{s(\widehat{AB})} = \frac{s(\widehat{A'C'})}{s(\widehat{A'B'})}.$$

Durch entsprechende Umformungen von (2) und (3) erhält man (1).

Somit gilt dieser Satz, falls  $\overline{AA'} = \overline{EE'}$  gilt. Sollte  $\overline{AA'} \neq \overline{EE'}$  gelten, verläuft das Verfahren ähnlich. Es seien  $\widehat{AB}, \widehat{A'B'}$  korrespondierende Bogenstücke von gleichgerichteten Horozykeln, dabei ist  $\widehat{A'B'}$  der kleinere Bogen. Wenn man  $\widehat{A'B'}$  als fest ansieht und  $\widehat{AB}$  in die entgegengesetzte Richtung der parallelen Strahlen wandern lässt, dann wird nach [Gans1973] (S. 135)  $s(\widehat{AB})$  beliebig groß und somit auch das Verhältnis. (vgl. [Voelk1995], S. 81f)  $\square$

### 8.2.1 Länge eines Horozykelbogens

Nun soll eine Formel für die Bogenlänge gefunden werden. Hierfür geht man von einem beliebigen Horozykelbogen aus und bezeichnet diesen mit  $\widehat{A_0B_0}$  und dessen Länge mit  $s_0$ .

Nun betrachtet man eine Folge von  $n$  kleineren Bogenstücken  $\widehat{A_1B_1}, \widehat{A_2B_2}, \widehat{A_3B_3}, \dots, \widehat{A_nB_n}$ , die zu  $\widehat{A_0B_0}$  korrespondieren und zwar so, dass die Distanzen  $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$  gleich sind. Dabei geben  $s_1, s_2, \dots, s_n$  die Längen dieser  $n$  Bogenstücke an. Nach Satz 8.11. ist dann

$$(1) \quad \frac{s_0}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s_n} = b,$$

dabei ist  $b$  eine Zahl größer 1 und gibt den gemeinsamen Wert der Verhältnisse der Bogenstücke an. Es kann nun jede Länge  $s_1, s_2, \dots, s_n$  als ein Term von  $s_0$  und  $b$  angegeben werden.

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 b^{-1} \\ s_2 &= s_1 b^{-1} = (s_0 b^{-1}) b^{-1} = s_0 b^{-2} \\ s_3 &= s_2 b^{-1} = (s_0 b^{-2}) b^{-1} = s_0 b^{-3} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ s_n &= s_{n-1} b^{-1} = (s_0 b^{-n+1}) b^{-1} = s_0 b^{-n} \end{aligned}$$

oder allgemein formuliert:  $s_x = s_0 b^{-x}$  (2)

wobei  $x = 1, 2, \dots, n$  ist.

Man legt nun für  $b$  einen speziellen Wert fest, den Wert  $e$ . Damit ist das Verhältnis der Bogenstücke  $\widehat{A_0B_0}, \widehat{A_1B_1}, \dots, \widehat{A_nB_n}$  gleich  $e$ . Als Einheitsstrecke legt man die Strecke  $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \dots$  fest und bezeichnet diese nun als „Standardeinheitsstrecke“. Obwohl  $x$  in der Formel  $y = 2 \arctan(e^{-x})$  bereits vorkam, wurde diese jedoch nicht weiter beschrieben. Man kann nun festlegen, dass  $x$  die Standardeinheitsstrecke ist. Somit schreibt man (2) nun folgendermaßen:

$$(3) \quad s_x = s_0 e^{-x}$$

Dabei ist  $x \in \mathbb{N}$  mit  $x = 1, 2, \dots, n$  und  $s_x$  die Länge des dazugehörigen Bogens  $\widehat{A_xB_x}$ .

Es ist nun zu zeigen, dass (3) nicht nur für natürliche Zahlen gilt. Hierfür betrachtet man  $x = \frac{1}{2}$ . Da  $\widehat{A_{\frac{1}{2}}B_{\frac{1}{2}}}$  von  $\widehat{A_0B_0}$  und  $\widehat{A_1B_1}$  jeweils  $\frac{1}{2}$  entfernt ist, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{s_0}{s_{\frac{1}{2}}} &= \frac{s_{\frac{1}{2}}}{s_1} \\ (s_{\frac{1}{2}})^2 &= s_0 s_1 \quad (4) \end{aligned}$$

Da man weiß, dass (3) für positive ganze Zahlen gilt, weiß man, dass  $s_1 = s_0 e^{-1}$  gilt und setzt ein. Dann erhält man

$$(s_{\frac{1}{2}})^2 = s_0 (s_0 e^{-1}) = s_0^2 e^{-1}$$

und somit folgt

$$s_{\frac{1}{2}} = s_0 e^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist gezeigt, dass (3) auch für  $x = \frac{1}{2}$  gilt. Man betrachtet nun auch die Beispiele  $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  und kann so zeigen, dass dies für alle positiven rationalen Zahlen  $\frac{p}{q}$  gültig ist. (vgl. [Voelk1995], S. 82ff)

Es ist nun noch zu zeigen, dass diese Formel für alle positiven reellen Zahlen  $x$  gilt. Auch hierzu verwendet man zunächst ein Beispiel, wie  $x = \sqrt{2}$ . Da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, kann man  $\sqrt{2}$  als den Grenzwert der Folge  $1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; \dots$  wählen. Beschreibt die Folge  $(x_n)$  eine Folge von positiven rationalen Zahlen und hat den Grenzwert  $\sqrt{2}$ , kann man  $(x_n) \rightarrow \sqrt{2}$  schreiben, mit  $n$  gegen unendlich strebend. Wenn  $x_n \rightarrow \sqrt{2}$ , dann nähern sich auch die Punkte  $A_{x_n}, B_{x_n}$  an  $A_{\sqrt{2}}, B_{\sqrt{2}}$ . Das Gleiche gilt auch für die Länge des Bogens  $\widehat{A_{x_n} B_{x_n}}$ , dieser nähert sich an  $\widehat{A_{\sqrt{2}} B_{\sqrt{2}}}$ . Man schreibt:

$$(6) \quad \lim_{x_n \rightarrow \sqrt{2}} s_{x_n} = s_{\sqrt{2}}$$

Da die Formel in (3) für positive rationale Zahlen gilt, ist

$$(7) \quad s_{x_n} = s_0 e^{-x_n}$$

Nun kombiniert man (6) und (7) und erhält

$$(8) \quad s_{\sqrt{2}} = \lim_{x_n \rightarrow \sqrt{2}} (s_0 e^{-x_n})$$

Da die Funktion  $s_0 e^{-x}$  stetig für alle positiven reellen Zahlen  $x$  ist, ist

$$(9) \quad \lim_{x_n \rightarrow \sqrt{2}} (s_0 e^{-x_n}) = s_0 e^{-\sqrt{2}}$$

Wenn man (8) und (9) kombiniert, erhält man so:

$$s_{\sqrt{2}} = s_0 e^{-\sqrt{2}}.$$

Dieses Verfahren kann man für jede beliebige positive Zahl anwenden. Es gilt daher:

**Satz 8.12.** *Ist  $s_0$  die Länge eines beliebigen Horozykelbogens,  $x$  eine beliebige positive Zahl und  $s_x$  die Länge eines korrespondierenden Bogens, der vom gegebenen Bogen  $x$  Einheiten entfernt ist, in die Richtung, in welche die parallelen Strahlen weisen, dann ist  $s_x = s_0 e^{-x}$ . (vgl. [Voelk1995], S. 86f)*

Durch weitere Überlegungen und Umformungen, die hier nicht weiter angeführt werden (siehe [Gans1973], S. 145ff), kann folgende Aussage über einen beliebigen Bogen  $\widehat{OP}$  eines Horozykels getroffen werden.

**Satz 8.13.** Wenn  $\widehat{OP}$  ein Horozykelbogen ist und  $Q$  die Projektion von  $P$  auf den Radius durch  $O$ , dann gilt

$$e^x = \cosh y \quad \text{und} \quad s = S \sinh y,$$

wobei  $s$  die Länge von  $\widehat{OP}$ ,  $x$  der Abstand von  $\overline{OQ}$  und  $y$  der Abstand von  $\overline{PQ}$  ist und  $S$  die Halbe eines Horozykelbogens ist, dem eine Sehne gegenüberliegt, die mit einem Radius einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. (vgl. [Gans1973], S. 149)

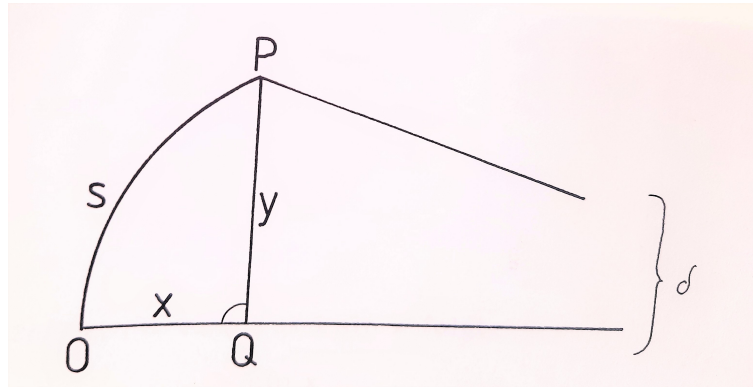


Abbildung 61: Skizze zu Satz 8.13.

## 8.3 Der eigentliche Kreis

### 8.3.1 Länge eines eigentlichen Kreisbogens

In diesem Abschnitt werden bereits einige trigonometrische Formeln benötigt, welche erst im nachfolgenden Kapitel hergeleitet und genauer betrachtet werden.

Die Länge des Kreisbogens lässt sich durch einen eingeschriebenen Streckenzug berechnen. Es sei  $r$  der Radius des Kreisbogens und  $z$  der zugehörige Zentriwinkel. Der Streckenzug besteht aus den Sehnen  $s_i$  und den dazugehörigen Zentriwinkeln  $z_i$ . Das heißt  $z = \sum_{i=1}^n z_i$ , dabei ist  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Nun betrachtet man den Grenzwert der Summe  $\sum_{i=1}^n s_i$ .

Ein gleichschenkliges Dreieck  $\triangle_i$ , dessen Basis  $s_i$  ist und dessen Schenkel  $r$  sind und in dem der Basis der Winkel  $\alpha_i$  gegenüberliegt, zerfällt durch eine Winkelsymmetrale des Winkels  $\alpha_i$  in zwei rechtwinklige Dreiecke. Es gilt daher:

$$\sinh \frac{s_i}{2} = \sinh r \sin \frac{z_i}{2},$$

und somit auch:

$$\sum_{i=1}^n \sinh \frac{s_i}{2} = \sinh r \sum_{i=1}^n \sin \frac{z_i}{2}.$$

Es folgt nun aus den Taylor-Reihen für  $\sinh x$  und  $\sin x$ , dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt. Nun sei  $q$  eine beliebige vorgegebene positive Zahl, dann ist

$$\frac{s_i}{2}(1 - q) < \sinh \frac{s_i}{2} < \frac{s_i}{2}(1 + q) \quad \text{und} \quad \frac{z_i}{2}(1 - q) < \sin \frac{z_i}{2} < \frac{z_i}{2}(1 + q)$$

Wenn nun die Sehnen  $s_i$  und die Zentriwinkel  $z_i$  klein genug sind, das bedeutet, wenn sie unter einer von  $q$  abhängigen Schranke liegen, folgt:

$$\begin{aligned} (1 + q) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{2} &> \sum_{i=1}^n \sinh \frac{s_i}{2} = \sinh r \sum_{i=1}^n \sin \frac{z_i}{2} > \sinh r (1 - q) \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{2} = (1 - q) \sinh r \frac{z}{2}, \\ (1 - q) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{2} &< \sum_{i=1}^n \sinh \frac{s_i}{2} = \sinh r \sum_{i=1}^n \sin \frac{z_i}{2} < \sinh r (1 + q) \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{2} = (1 + q) \sinh r \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\frac{1 - q}{1 + q} \sinh r \cdot z < \sum_{i=1}^n s_i < \frac{1 + q}{1 - q} \sinh r \cdot z$$

Da man  $q$  beliebig klein wählen kann, folgt für die Sehnen  $s_i$  und die Zentriwinkel  $z_i$ , dass die Summe  $\sum s_i$  den Grenzwert  $\sinh r \cdot z$  hat. Es gilt daher: (vgl. [Voelk1995], S. 88f)

**Satz 8.14.** *Ein Kreisbogen mit dem Radius  $r$  und dem Zentriwinkel  $z$  hat eine Länge  $b = \sinh r z$ . Insbesondere der Halbkreis  $b = \sinh r \cdot \pi$  und der Kreis  $b = \sinh r \cdot 2\pi$ . ([Voelk1995], S. 89f)*

## 8.4 Der Hyperzykel

### 8.4.1 Länge eines Hyperzykelbogens

In diesem Abschnitt werden bereits einige trigonometrische Formeln benötigt, welche erst im nachfolgenden Kapitel hergeleitet und genauer betrachtet werden.

Auf der Geraden  $m$  betrachte man eine Strecke der Länge  $g$  und lege in die Eckpunkte dieser jeweils eine Normale. Dadurch wird auf dem Hyperzykel im Abstand  $r$  ein Bogen begrenzt. In diesen schreibt man für die Berechnung einen Streckenzug aus den Sehnen  $s_i$  ein. Durch die Normalen in den Eckpunkten dieser Sehnen  $s_i$  wird die Strecke auf der Geraden  $m$  in Teilstrecken  $g_i$  zerlegt. Eine Teilstrecke  $g_i$  ist dabei die Basis eines Saccheri Trapezes mit der gegenüberliegenden Seite  $s_i$ . Teilt man nun dieses Trapez durch eine Seitensymmetrale in zwei kongruente Spitzecke, dann folgt:

$$\sinh \frac{s_i}{2} = \cosh r \sinh \frac{g_i}{2}.$$

Dann ist:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{2}s_i}{\sinh(\frac{s_i}{2})} \cosh r \frac{\sinh(\frac{g_i}{2})}{\frac{1}{2}g_i} \frac{g_i}{2}.$$

Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$ , folgt, dass

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n s_i = \cosh r \lim_{g \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g_i = \cosh r \cdot g,$$

und somit gilt (vgl. [Voelk1995], S. 90):

**Satz 8.15.** *Die Länge eines Hyperzykelbogens ist  $b = g \cosh r$ , wobei  $g$  die Länge der zugehörigen Strecke auf der Geraden  $m$  ist. ([Voelk1995], S. 90)*

## 9 Trigonometrie

Die Trigonometrie beschäftigt sich mit den Beziehungen von Seiten und Winkeln in Dreiecken. Aus der euklidischen Geometrie kennt man die Begriffe „Satz des Pythagoras“ oder „Sinus-“ bzw. „Kosinussatz“. Im Folgenden wird betrachtet, wie weit diese in der hyperbolischen Geometrie gültig sind oder welche anderen Sätze an Stelle dieser gelten.

Im vierten Kapitel wurde bereits der Satz von Thales betrachtet und gezeigt, dass dieser, so wie man ihn aus der Schulzeit kennt, in der hyperbolischen Geometrie nicht gültig ist. Es gibt einen eigenen Thales-Satz für die hyperbolische Geometrie, dieser wurde bereits in Satz 4.11. formuliert und anschließend bewiesen. Ähnlich wie der Satz von Thales ist auch der Satz des Pythagoras, wie man ihn in der Schule gelernt hat, nicht in der hyperbolischen Geometrie gültig.

**Korollar 9.1.** *Der Satz des Pythagoras gilt nicht. (vgl. [Gerhards2015], S. 45)*

*Beweis.* Dieser wird als Widerspruch geführt. Man nimmt an, dass der Satz ist gültig. Man konstruiert ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck  $\triangle ABC$  mit der Hypotenuse  $AB$ . Dieses wird durch das Lot von  $C$  halbiert und es entstehen so zwei kongruente Dreiecke.

Es sei nun  $h$  die Länge der Höhe und  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$  sowie  $c = d(A, B)$ . Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, gilt  $a = b$ . Durch den Satz des Pythagoras würde man nun für das große Dreieck  $2a^2 = c^2$  und für die beiden kleinen  $h^2 + \frac{c^2}{2} = a^2$  erhalten. Zusammengenommen ergibt dies  $h^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2}$ . Somit würden die drei Punkte  $A, B$  und  $C$  auf einem Halbkreis mit dem Radius  $\frac{c}{2}$  liegen. Dies widerspricht der Tatsache, dass der Satz von Thales nicht in dieser Form gültig ist. (vgl. [Gerhards2015], S. 46)  $\square$

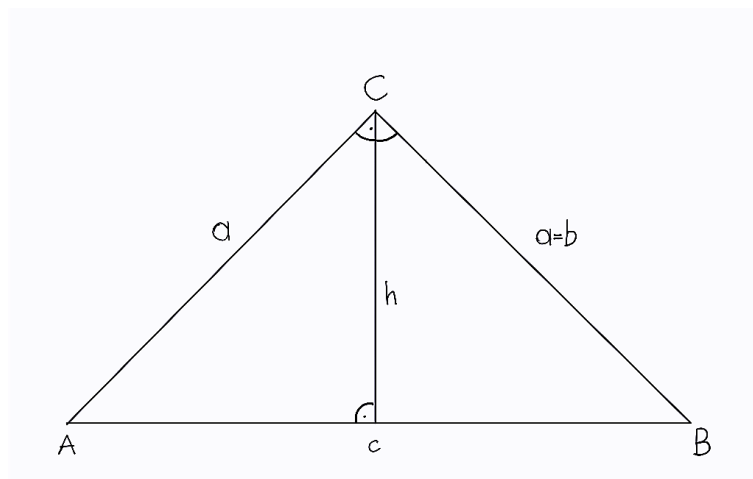


Abbildung 62: Skizze zu Beweis Korollar 9.1

**Lemma 9.1.** *Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in kanonischer Lage und  $M_{AB}$  und  $M_{BC}$  die Mittelpunkte der Kreise, auf denen die Strecken  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{BC}$  liegen. Für die Innenwinkel  $\alpha, \beta$  und*



$\gamma$  gelten dann

$$\alpha = \begin{cases} \angle AM_{AB}O, & \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \angle AM_{AB}O, & \alpha > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \pi - \angle CM_{BC}O, & \gamma \geq \frac{\pi}{2} \\ \angle CM_{BC}O, & \gamma < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\beta = \angle M_{BC}BM_{AB}.$$

(vgl. [Berchtold2017], S. 99)

*Beweis.* Der Vektor  $\overrightarrow{AC}$  sei der Tangentialvektor der Seite  $AC$  im Punkt  $A$  und der Vektor  $\overrightarrow{v}$  der Tangentialvektor zur Seite  $AB$ . Dann gelten  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{M_{AB}O}$  und  $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{M_{AB}A}$ . Daraus erhält man die Behauptung für den Winkel  $\alpha$ . Die Aussagen für die anderen beiden Winkel erhält man ähnlich. (vgl. [Berchtold2017], S. 99)  $\square$

Als Erstes wird nun der hyperbolische Sinussatz gezeigt.

**Satz 9.1.** *Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in üblicher Bezeichnung. Dann gelten*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

(vgl. [Berchtold2017], S. 99)

*Beweis.* Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass  $\triangle ABC$  in kanonischer Lage ist, d.h. es gelten  $A = iy, C = iv \in i\mathbb{R}_{>0}, v > y$  sowie  $B = b_1 + ib_2$  mit  $b_1 > 0$ . Seien weiters  $M_{AB}$  und  $M_{BC}$  die Kreismittelpunkte der Kreise durch  $A$  und  $B$  bzw.  $B$  und  $C$ . Nach Lemma 9.1. sowie dem euklidischen Sinussatz gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{Im}(A)}{|A - M_{AB}|} \text{ und } \sin(\gamma) = \frac{\operatorname{Im}(C)}{|C - M_{BC}|}.$$

Die Gleichung

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

ist nach Lemma 2.2. äquivalent zu

$$\frac{|B - A| \cdot |B - \overline{A}| \cdot |C - M_{BC}|}{2\operatorname{Im}(A)\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}(C)} = \frac{|B - C| \cdot |B - \overline{C}| \cdot |A - M_{AB}|}{2\operatorname{Im}(A)\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}(C)}.$$

Da  $\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(C) = 0$  zeigt Lemma 9.3. die Richtigkeit der letzten Gleichung. Die anderen Behauptungen lassen sich durch zyklische Vertauschungen erhalten. (vgl. [Berchtold2017], S. 99)  $\square$

Für die Vollständigkeit des Beweises fehlen noch zwei Lemmata, welche nun nachgereicht werden.

**Lemma 9.2.** Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ . Dann gilt:

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z + w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \quad (2)$$

$$\sinh(d(z, w)) = \frac{|z - w| \cdot |z - \bar{w}|}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}. \quad (3)$$

(vgl. [Berchtold2017], S. 93)

*Beweis.* (1) Zunächst zeigt man die Formel für  $z, w \in i\mathbb{R}$ , also  $z = iy$  und  $w = iv$  mit  $y < v$ . Dann gilt

$$\cosh(d(x, y)) = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{y} + \frac{y}{v} \right) = \frac{v^2 + y^2}{2vy} = 1 + \frac{(v-y)^2}{2vy} = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist unter Mörbustransformationen invariant. Um das zu zeigen, sei  $M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  mit (ohne Beschränkung)  $ad - bc = 1$  eine Mörbustransformation.

$$M(z) - M(w) = \frac{z-w}{(cz+d)(cw+d)}$$

Dann erhält man

$$\frac{|M(z)-M(w)|^2}{\operatorname{Im}(M(z))\operatorname{Im}(M(w))} = \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

(vgl. [Berchtold2017], S. 93)

□

**Lemma 9.3.** Seien  $A, B \in \mathbb{H}$  mit  $\operatorname{Re}(A) \neq \operatorname{Re}(B)$ . Weiters sei  $K(M; r)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}$  und  $A, B \in K(M; r)$ . Dann gelten

$$M = \frac{|B|^2 - |A|^2}{2(\operatorname{Re}(B) - \operatorname{Re}(A))} \quad \text{und} \quad r = \frac{|B-A| \cdot |B-\bar{A}|}{2|\operatorname{Re}(B) - \operatorname{Re}(A)|}.$$

(vgl. [Berchtold2017], S. 94)

*Beweis.* Es wird zunächst die Aussage über den Mittelpunkt gezeigt:

Punkte  $x$  auf der euklidischen Mittelsenkrechten von  $A$  und  $B$  erfüllen die Gleichung

$$(x - A)(\bar{x} - \bar{A}) = |x - A|^2 = |x - B|^2 = (x - B)(\bar{x} - \bar{B}).$$

Ist  $x$  reell, so erhält man die Gleichung  $-x(A + \bar{A}) + |A|^2 = -x(B + \bar{B}) + |B|^2$ , woraus man direkt die behauptete Form für  $M$  abliest.

([Berchtold2017], S. 94)

Man schreibt nun  $A = a_1 + ia_2$  und  $B = b_1 + ib_2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} M &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2}{2(b_1 - a_1)} = \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_2^2 - a_2^2}{2(b_1 - a_1)} \\ \implies B - M &= \frac{(b_1 - a_1)^2 + a_2^2 - b_2^2}{2(b_1 - a_1)} + ib_2 \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
& |B - M|^2 \\
&= \frac{(b_1 - a_1)^4 + (b_2^2 - a_2^2)^2 + 2(b_1 - a_1)^2(a_2^2 - b_2^2) + 4b_2^2(b_1 - a_1)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\
&= \frac{(b_1 - a_1)^4 + 2(b_1 - a_1)^2(a_2^2 + b_2^2) + (b_2^2 - a_2^2)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\
&= \frac{(b_1 - a_1)^4 + (b_1 - a_1)^2((b_2 + a_2)^2 + (b_2 - a_2)^2) + (b_2 - a_2)^2(b_2 + a_2)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\
&= \frac{((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2)((b_1 - a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2)}{4(b_1 - a_1)^2} \\
&= \frac{|B - A|^2 \cdot |B - \bar{A}|^2}{4(Re(B) - Re(A))^2}
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit gezeigt. (vgl. [Berchtold2017], S. 94)  $\square$

Analog zu dem euklidischen Kosinussatz gibt es in der hyperbolischen Geometrie, so wie auch in der sphärischen Geometrie, zwei Sätze. Zunächst wird der hyperbolischen Seitenkosinussatz betrachtet.

**Satz 9.2.** *Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen, dann gilt*

$$\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) = \sinh(b) \sinh(c) \cos(a)$$

und es gelten alle entsprechenden zyklischen Vertauschungen. (vgl. [Berchtold2017], S. 100)

*Beweis.* Man nehme an  $A = iy, C = iv \in i\mathbb{R}$  mit  $v > y > 0$  sowie  $Re(b) > 0$ . Sei weiters  $M \in \mathbb{R}$  der Mittelpunkt des Halbkreises, welcher  $A$  und  $B$  verbindet, so gilt wegen Lemma 8.1. und des euklidischen Kosinussatzes

$$\cos(\alpha) = \frac{M}{|A - M|} = \frac{|B|^2 - |A|^2}{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}.$$

Nach Lemma 8.2. (2) gelten

$$\sinh(c) = \frac{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}{2Im(B)Im(A)} \text{ und } \sinh(b) = \frac{(Im(C))^2 - (Im(A))^2}{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}.$$

Da  $Im(C) = |C|$  und  $Im(A) = |A|$ , steht auf der rechten Seite der Gleichung folgender Ausdruck

$$R := \frac{(|C|^2 - |A|^2)(|B|^2 - |A|^2)}{4(Im(A))^2 Im(B)Im(C)}.$$

Für den Ausdruck auf der linken Seite erhält man unter der Verwendung von  $\cosh(d(A, B)) = \frac{|A|^2 + |B|^2}{2Im(A)Im(B)}$  Folgendes:

$$\begin{aligned}
\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) &= \frac{(|A|^2 + |C|^2)(|B|^2 + |A|^2)}{4(Im(A))^2 Im(B)Im(C)} - \frac{|B|^2 + |C|^2}{2Im(B)Im(A)} = \\
&= \frac{|A|^2 |B|^2 + |C| |B|^2 + |A|^2 |C|^2 + |A|^4 - 2|A|^2 |B|^2 - 2|A|^2 |C|^2}{4(Im(A))^2 Im(B)Im(C)}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt ebenfalls  $R$ , wodurch die Behauptung  $\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) = \sinh(b) \sinh(c) \cos(a)$  abgelesen werden kann. (vgl. [Berchtold2017], S. 100)  $\square$

Der zweite Satz, der ein Analogon zum euklidischen Kosinussatz bildet, ist der hyperbolische Winkelsinussatz.

**Satz 9.3.** *Sei  $\triangle ABC$  ein hyperbolisches Dreieck in den üblichen Bezeichnungen, dann gelten*

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cosh(b)$$

*und alle entsprechenden zyklischen Vertauschungen. (vgl. [Berchtold2017], S. 101)*

*Beweis.* Man nimmt an, dass  $\triangle ABC$  in kanonischer Lage ist. Die Mittelpunkte der zu den Strecken  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{BC}$  gehörenden Kreise bezeichnet man mit  $M_{AB}$  und  $M_{BC}$ . Die dazugehörigen Radien bezeichnet man mit  $r_{AB}$  und  $r_{BC}$ . Unter Anwendung des euklidischen Kosinussatzes auf das Dreieck  $\triangle M_{AB}BM_{BC}$  erhält man

$$\cos(\beta) = \frac{M_{AB}}{r_{AB}} \cdot \frac{M_{BC}}{r_{BC}} + \frac{Im(A)}{r_{AB}} \cdot \frac{Im(C)}{r_{AB}} \cdot \frac{|A|^2 + |C|^2}{2Im(A) \cdot Im(C)}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$r_{AB}^2 + r_{BC}^2 - M_{AB}^2 - M_{BC}^2 = |A|^2 + |C|^2$$

gilt. Wendet man den Satz des Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle AOM_{AB}$  und  $\triangle COM_{BC}$  an, so ergibt sich  $r_{AB}^2 = M_{AB}^2 + |A|^2$  und  $r_{BC}^2 = M_{BC}^2 + |C|^2$ , wodurch die Behauptung gezeigt ist. (vgl. [Berchtold2017], S. 101)  $\square$

Zu Beginn des Unterkapitels wurde bereits gezeigt, dass der Satz des Pythagoras in der hyperbolischen Geometrie nicht gültig ist. Aus dem hyperbolischen Seitenkosinussatz lässt sich der hyperbolische Pythagoras ableiten.

**Korollar 9.2.** *Ist  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges hyperbolisches Dreieck mit  $\alpha = 90^\circ$ , dann gilt*

$$\cosh(a) = \cos(b) \cosh(c).$$

*(vgl. [Berchtold2017], S. 100)*

Es wurden somit einige trigonometrische Sätze für das Modell der Kugel gezeigt. Diese gelten in allen Modellen, da diese kategorisch sind. Auch mit Zuhilfenahme anderer Modelle lassen sich die hier gezeigten Sätze beweisen bzw. herleiten. Im Folgenden wird das Modell des Poincaréschen Kreises verwendet.

Nach Szász können zwei trigonometrische Formeln für das rechtwinklige Pseudodreieck aus drei elementargeometrischen Hilfssätzen an dem Kreismodell abgelesen werden. Die gesamte hyperbolische Trigonometrie kann aus diesen zwei trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Pseudodreieck gefolgert werden. Die Hilfssätze lauten wie folgt:

**Hilfssatz 9.1.** *Ist  $X$  ein vom Mittelpunkt  $M$  verschiedener Punkt im Inneren eines Kreises  $k$  und wird durch  $X$  ein Kreis gelegt, der  $k$  in den Punkten  $E, H$ , rechtwinklig schneidet, so ist der Schnittpunkt  $Y$  der Geraden  $EH, MX$  von der Wahl des durch  $X$  gelegten Kreises unabhängig. ([Szasz1956], S. 66)*



(vgl. [Szasz1956], S. 66)

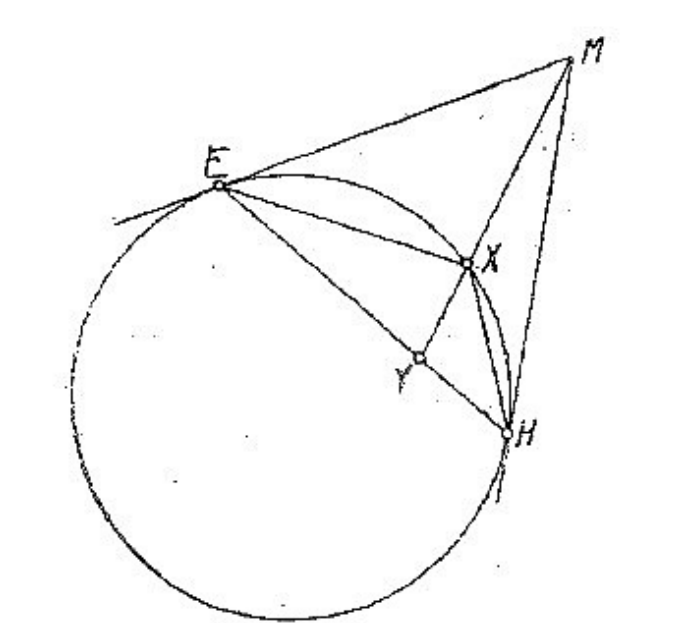


Abbildung 65: Skizze zu Hilfssatz 9.2.

*Beweis.* Um diese Formel herzuleiten, bezeichnet man den anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden  $MX$  mit  $Z$ . Da der Winkel  $\angle XEM = \angle XZE$  und  $\angle XHM = \angle XZH$ , sind die Dreiecke  $\triangle MEX$  und  $\triangle MZE$  proportional zueinander bzw.  $\triangle MHX \sim \triangle MZH$ . Es gilt also

$$\frac{EX}{MX} = \frac{ZE}{ME}, \frac{XH}{MX} = \frac{HZ}{MH}.$$

Berücksichtigt man, dass  $ME = MH$ , so folgt

$$\frac{EX}{XH} = \frac{ZE}{HZ}.$$

(vgl. [Szasz1955], S. 4)



(vgl. [Szasz1956], S. 66)

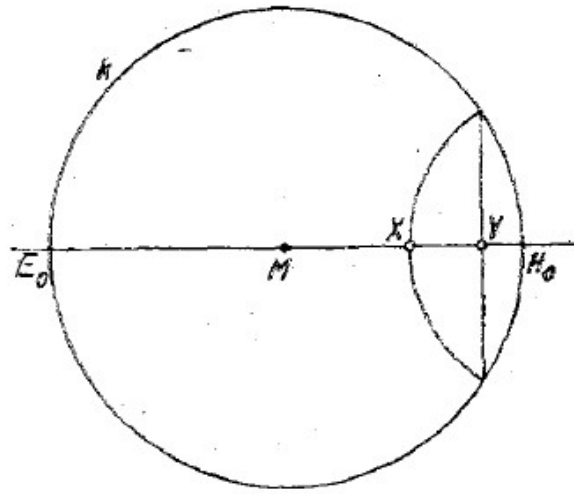


Abbildung 67: Skizze zu Hilfssatz 9.3.

*Beweis.* Für den Beweis legt man durch den Punkt  $X$  den zum Kreis  $k$  orthogonalen Kreis  $\bar{k}$ , der die Gerade  $MX$  als Symmetrieachse hat. Wenn die Punkte  $E$  und  $H$  die Schnittpunkte von den Kreisen  $k$  und  $\bar{k}$  sind, dann ist der Schnittpunkt der Geraden  $MX$  und  $EH$  der betrachtete Punkt  $Y$ . Weiters sei  $X^*$  der zweite Schnittpunkt der Geraden  $MX$  mit dem Kreis  $\bar{k}$ , somit ist es der zu  $X$  inverse Punkt in Bezug auf  $k$ . Man bezeichnet die Schnittpunkte der Geraden  $EX$  bzw.  $EX^*$  mit  $M$  bzw.  $N$  mit  $k$ . Der Durchmesser von  $k$  ist also  $MN$ , da nach dem Satz des Thales  $\angle XEX^* = 90^\circ$  ausfällt. Nach Voraussetzung wird  $\bar{k}$  von  $ME$  berührt, somit gilt  $\angle NX^*M = \angle MEX$  und aus  $ME = MN$  folgt  $\angle MNE = \angle MEN$ . Da  $\angle MEX + \angle MEN = 90^\circ$ , also auch  $\angle NX^*M + \angle MNE = 90^\circ$ , folgt  $\angle X^*MN = 90^\circ$ . Der Bogen  $\widehat{E_0MH_0}$  wird daher von  $M$  halbiert und somit ist  $EM$  die Winkelhalbierende von  $\angle E_0EH_0$ , also

$$\frac{E_0X}{XH_0} = \frac{E_0E}{EH_0}.$$

Da  $EY$  jedoch orthogonal auf  $E_0H_0$  steht, ist

$$E_0E^2 = E_0Y \cdot E_0H_0, EH_0^2 = YH_0 \cdot E_0H_0.$$

Setzt man dies in die obige Formel ein, so erhält man, wie behauptet,

$$\left( \frac{E_0X}{XH_0} \right)^2 = \frac{E_0Y}{YH_0}.$$

(vgl. [Szasz1955], S. 4f.)



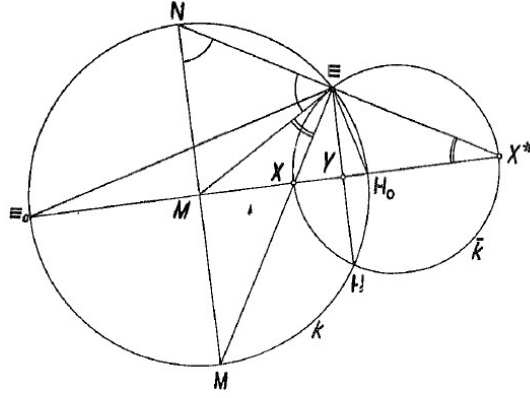


Abbildung 68: Skizze zu Beweis zu Hilfssatz 9.3.

□

Es sei  $k$  ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $r$  des Fundamentalkreises des Poincaréschen Kreismodells. Der Abstand zweier Punkte  $P_1, P_2$  in diesem Modell ist  $\overline{P_1 P_2} = \log(U, V, P_1, P_2)$ , wobei  $U, V$  die Schnittpunkte von  $k$  und der durch  $P_1$  und  $P_2$  verlaufenden Orthogonalkreise, Kreise oder Geraden, die auf  $k$  normal stehen, sind. Dabei liegt  $P_2$  auf dem Bogen  $\widehat{UV}$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $V$ . Ist  $X \neq O$  ein beliebiger Punkt des Modelles und  $Y$  jener Punkt entsprechend des Hilfssatzes 9.1., so kann der euklidische Abstand  $OY$  durch den Pseudoabstand  $t = \overline{OX}$  ausgedrückt werden. Es seien  $U, V$  die Schnittpunkte der Geraden  $OX$  mit dem Kreis  $k$ , dabei soll  $X$  zwischen den Punkten  $O$  und  $V$  liegen. Aus  $UO = OV$  folgt nach der Abstandsformel

$$e^t = (U, V, X, O) = \frac{UX}{XV},$$

durch Anwendung des Hilfssatzes 9.3 ergibt sich dann

$$e^{2t} = \left( \frac{UX}{XV} \right)^2 = \frac{UV}{YV} = \frac{r + OY}{r - OY}.$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$OY = r \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = r \tan t.$$

(vgl. [Szasz1956], S. 66f)

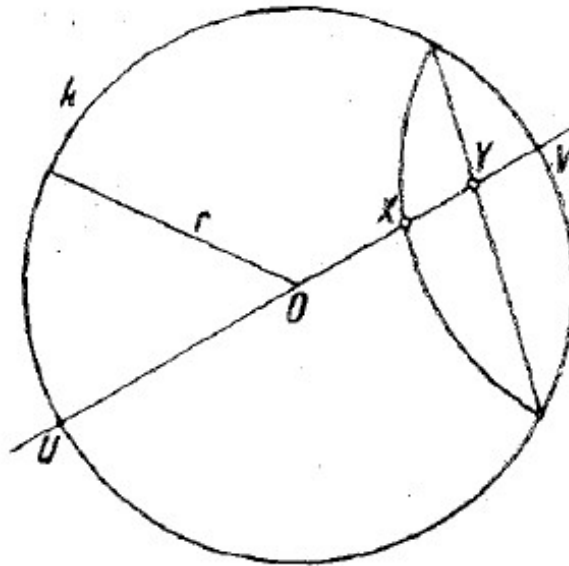


Abbildung 69: Skizze zu Schnittpunkten der Geraden  $OX$  mit Kreis  $k$

Man betrachtet nun ein rechtwinkliges Dreieck  $\triangle ABC$ , wobei der rechte Winkel jener beim Eckpunkt  $C$  ist. Die Strecke  $\overline{BC}$  bezeichnet man mit  $a$  und  $\overline{CA} = b$ ,  $\overline{AB} = c$  und den Winkel im Eckpunkt  $A$  bzw.  $B$  bezeichnet man mit  $\lambda$  bzw.  $\mu$ . Falls der Punkt  $A$  von  $O$  verschieden ist, so ist es möglich, diesen durch eine geeignete Inversion, bei der  $k$  und das Innere von  $k$  in sich selbst übergehen, in  $O$  zu bringen. Dabei bleiben die Winkelmaße und das Doppelverhältnis von vier Punkten erhalten. Somit geht  $\triangle ABC$  bei dieser Inversion in das Dreieck  $\triangle A_1B_1C_1$  über, wobei  $A_1 = O$ . Man kann daher  $A = O$  annehmen.

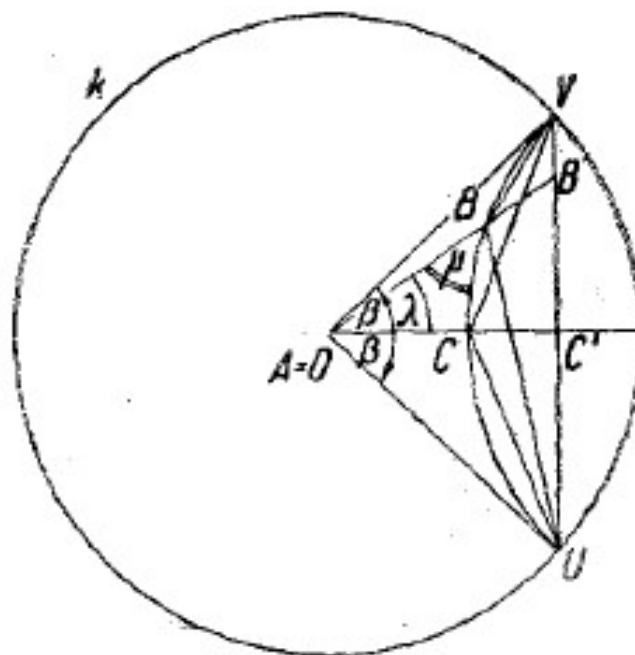


Abbildung 70: Skizze zu Dreieck mit  $A = O$

$U, V$  seien die Schnittpunkte des Kreises  $k$  und des durch die Punkte  $B$  und  $C$  gelegten Orthogonalkreises, dabei liegt  $C$  auf dem Bogen  $\widehat{UV}$  zwischen  $U$  und  $B$ . Unter Beachtung von  $UC = CV$  ergibt sich für die Seite  $a$

$$e^a = (U, V, B, C) = \frac{UB}{BV}.$$

Die Gerade  $UV$  wird von den Geraden  $AB$  und  $AC$  in den Punkten  $B'$  bzw.  $C'$  geschnitten, nach dem Hilfssatz 9.2. gilt

$$\left(\frac{UB}{BV}\right)^2 = \frac{UB'}{B'V} = \frac{\tan \beta + \tan \lambda}{\tan \beta - \tan \lambda},$$

wobei  $\beta = \angle COV = \angle UOC$  der dem Abstand  $\overline{OC} = b$  entsprechender Parallelwinkel ist. Es folgt

$$e^{2a} = \frac{\tan \beta + \tan \lambda}{\tan \beta - \tan \lambda},$$

woraus man

$$\tan \lambda = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \tan \beta = \tanh a \tan \beta$$

erhält. Da jedoch durch  $\overline{OC} = b$  unter Verwendung von  $r \cos \beta = OC' = r \tanh b$  ausfällt, ist  $\cos \beta = \tanh b$ , also

$$\tan \beta = \frac{1}{\sinh b}.$$

Durch Einsetzen entsteht daher die erste Grundformel:

$$\tan \lambda = \frac{\tanh a}{\sinh b}$$

für das rechtwinklige Dreieck in der hyperbolischen Ebene.

Infolge von  $\overline{OB} = c$  besteht weiters noch

$$OB' = r \tanh c,$$

also ergibt sich aus

$$\cos \lambda = \frac{OC'}{OB'}$$

die zweite Grundformel

$$\cos \lambda = \frac{\tanh b}{\tanh c}.$$

(vgl. [Szász1956], S. 67ff) Die übrigen vier Gleichungen, also jene außer der ersten und

zweiten Grundformel, lassen sich aus diesen beiden Gleichungen ableiten. Die beiden Grundformeln, welche am Poincaréschen Kreismodell abgelesen wurden, haben somit die gesamte hyperbolische Trigonometrie zur Folge. (vgl. [Szász1956], S. 69)

Ausgehend von der Arbeit Szász' (1956) verwendet auch Zeitler (1963) das Poincarésche Kreismodell. Dieser entnimmt jedoch den Winkelkosinussatz und gelangt, wie auch in der sphärischen Geometrie, über geeignete Umformungen zum Sinussatz und zum Seitenkosinussatz, wodurch ebenfalls die gesamte hyperbolische Trigonometrie beherrscht wird.

Es sei  $\triangle A_1 A_2 A_3$  ein Dreieck. Dessen Seite  $A_1 A_2$  wird durch den Mittelpunkt  $M$  des Fundamentalkreises  $k$  halbiert.

Die Mittelpunkte der euklidischen Kreise unseres hyperbolischen Bündels durch  $A_i, A_3$  sind  $M_i$ , ihre Radien  $r_i (i = 1, 2)$ .  $A_i^*$  sind die zu  $A_i$  bezüglich  $k$  inversen Punkte,  $Q_i$  die Projektionen von  $M_i$  auf der Geraden  $A_1 A_2$ .

([Zeitler1963], S. 123) Falls der Fundamentalkreis  $k$  den Radius  $r = 1$  hat, gilt

$$MA_i^* = \frac{1}{u}, \quad A_i Q_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} - u \right), \quad MQ_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} + u \right) \quad (i = 1, 2).$$

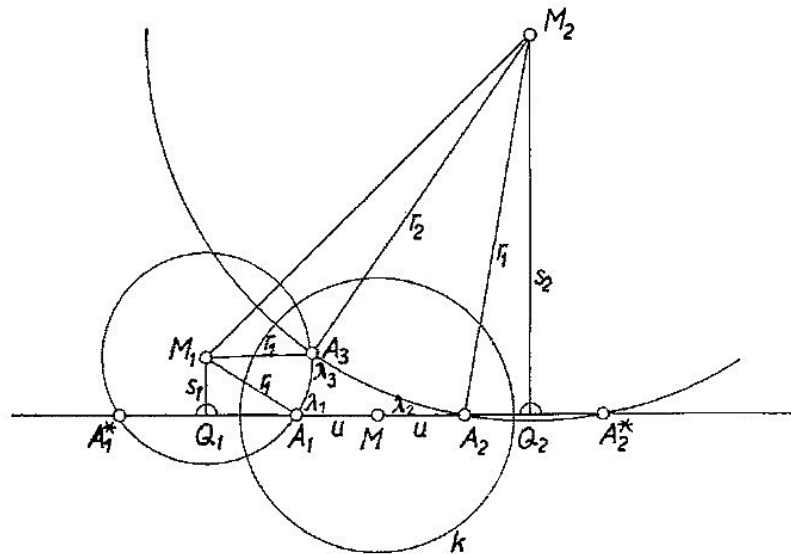


Abbildung 71: Skizze zu Herleitung des Seitenkosinussatzes

Die Seiten des Dreiecks  $\triangle A_1 A_2 A_3$  werden mit  $a_1, a_2$  und  $a_3$  bezeichnet und der Winkel im Eckpunkt  $A_1$  bzw.  $A_2, A_3$  mit  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2, \lambda_3$ . Somit lautet der zu beweisende Satz

$$\cos \lambda_3 = -\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \cosh a_3.$$

(vgl. [Zeitler1963], S. 123)

*Beweis.* Aus dem Dreieck  $\triangle M_i Q_i A_i$  entnimmt man, unter der Annahme, dass  $s_i$  negativ ist falls  $\lambda_i$  stumpf,

$$\cos \lambda_i = \frac{s_i}{r_i}, \quad \sin \lambda_i = \frac{A_i Q_i}{r_i} = \frac{1}{2r_i} \left( \frac{1}{u} - u \right).$$

Für die Länge  $a_3$  der Seite  $A_1 A_2$  gilt

$$e^{a_3} = \frac{1+u}{1-u} : \frac{1-u}{1+u} = \left( \frac{1+u}{1-u} \right)^2,$$

daraus ergibt sich

$$\cosh a_3 = \frac{(1+u)^2 + 4u^2}{(1-u^2)^2}.$$

Betrachtet man jedoch das Dreieck  $\triangle M_1 A_3 M_2$ , so gilt nach dem euklidischen Kosinussatz, da  $\angle M_1 A_3 M_2 = \pi - \lambda_3$  ist

$$M_1 M_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \lambda_3$$

und im Sinne des pythagoräischen Lehrsatzes besteht offenbar folgender Zusammenhang

$$Q_1 Q_2^2 + (s_1 - s_2)^2 = M_1 M_2^2,$$

es gilt also

$$Q_1 Q_2^2 - 2s_1 s_2 = r_1^2 - s_1^2 + r_2^2 - s_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \lambda_3.$$

Da jedoch  $r_1^2 - s_1^2 = A_1 Q_1^2 = A_2 Q_2^2 = r_2^2 - s_2^2$  gilt und sich durch eine Division mit  $2r_1 r_2$ , wegen

$$Q_1 Q_2 = 2M Q_1 = u + \frac{1}{u}, \quad A_i Q_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} - u \right)$$

unter Berücksichtigung von  $\cos \lambda_i = \frac{s_i}{r_i}$ ,  $\sin \lambda_i = \frac{A_i Q_i}{r_i} = \frac{1}{2r_i} \left( \frac{1}{u} - u \right)$

$$\begin{aligned} \cos \lambda_3 + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 &= \frac{1}{2r_1 r_2} \left\{ \left( u + \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} - u \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{2(1+u^2)^2 - (1-u^2)^2}{4r_1 r_2 u^2} = \frac{(1+u^2)^2 + 4u^2}{4r_1 r_2 u^2}. \end{aligned}$$

ergibt. Dann folgt aus den obigen Gleichungen durch Einsetzen und Gleichsetzen, wie zu zeigen war,

$$\cos \lambda_3 = -\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \cosh a_3$$

(vgl. [Zeitler1963], S. 124)

□

Dieser Beweis wurde in einem Spezialdreieck geführt. Man kann jedoch durch passende hyperbolische Bewegungen jedes Dreieck der hyperbolischen Geometrie in diesen Spezialfall übertragen. Da bei einer solchen Abbildung die Seiten und Winkel eines Dreiecks invariant bleiben, ist der Satz somit allgemein bewiesen. (vgl. [Zeitler1963], S. 124)

Eine andere Variante, sich mit den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie zu beschäftigen, benötigt zuerst eine Betrachtung der sogenannten vereinigten rechtwinkligen Dreiecke und beschäftigt sich zuerst mit den Formeln bezüglich des Parallelwinkels, bevor die Formeln für das rechtwinklige Dreieck betrachtet werden.

## 9.1 Vereinigte rechtwinklige Dreiecke

Das Dreieck  $\triangle ABC$  sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten und Winkeln, wie in der Abbildung dargestellt.

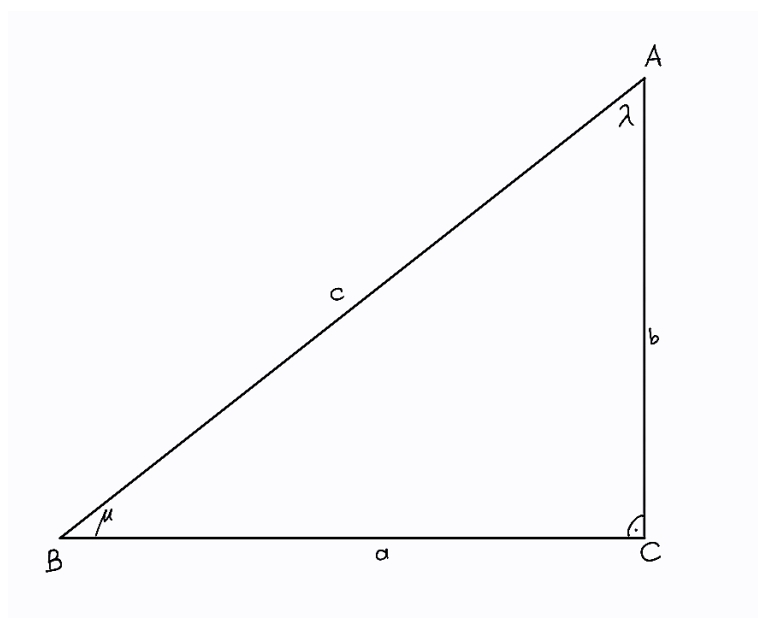


Abbildung 72: Rechtwinkliges Dreieck

Mit Hilfe dieses Dreiecks lassen sich vier weitere rechtwinklige Dreiecke konstruieren. Diese fünf rechtwinkligen Dreiecke nennt man vereinigte Dreiecke.

Die Maße der Seiten bzw. der Winkel der fünf Dreiecke bezeichnet man mit  $a, b, c, \lambda, \mu$  und die Parallelwinkel bezüglich  $a, b, c$  mit  $\alpha, \beta, \gamma$ . Mit  $l, m$  bezeichnet man die Distanzen bezüglich der Winkel  $\lambda, \mu$ , wenn man diese als Parallelwinkel auffasst.

Die Komplemente zu  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$  sind  $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu'$ . Die Distanzen bezüglich der als Parallelwinkel betrachteten Winkel  $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu'$  sind  $a', b', c', l', m'$ . Die Distanzen  $a', b', c', l', m'$  bezeichnet man als Ergänzung zu  $a, b, c, l, m$  und umgekehrt. Man sagt  $a$  und  $a'$  ergänzen sich, falls  $\alpha + \alpha' = 90^\circ$ . Dies kann man auch in einer Tabelle veranschaulichen: (vgl. [Voelk1995], S. 98f)

Längen:	a	b	c	l	m	a'	b'	c'	l'	m'
Parallelwinkel:	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\lambda$	$\mu$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$	$\lambda'$	$\mu'$

Der Parallelwinkel kann auch als Funktion seines entsprechenden Lotes gesehen werden, kurz  $y = II(x)$ , wobei  $y$  der Winkel und  $x$  die entsprechende Strecke ist. Für den Parallelwinkel könnte man nun folgende Funktion herleiten und setzt, da es einfacher ist,

$$y = 2 \arctan(e^{-x}) \quad (1)$$

voraus.

Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit den Werten  $a, b, c, \lambda, \mu$  und betrachtet man dieses bezüglich der Parallelwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bzw.  $\lambda, \mu$  als Parallelwinkel zu  $l$  und  $m$ , dann erhält man  $\alpha = 2 \arctan(e^{-a})$ . Formt man (1) um zu

$$x = \ln \cot \frac{y}{2}, \quad (2)$$

so ergibt sich  $l = \ln \cot(\frac{\lambda}{2})$ . Auf gleiche Weise erhält man auch die Werte für  $\beta, \gamma$  und  $m$ . Aus diesen Werten lassen sich auch jene für  $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu'$  bestimmen und aus diesen wiederum die Werte für  $a', b', c', l', m'$ . Wenn man all diese Werte kennt, kann man versuchen, die vereinigten Dreiecke zu bestimmen. Aus dem angegebenen Dreieck, welches vereinigt Dreieck 1 genannt wird, lässt sich folgendermaßen das Dreieck 2 bestimmen.

Man benötigt, um dieses zu erhalten, ein Lambert Viereck, wobei die Seiten, die an den rechten Winkel angrenzen, die Längen  $c$  und  $m'$  haben. Es sei  $DEFG$  ein solches Viereck mit  $\overline{DE} = c$  und  $\overline{EF} = m'$ . Weiters hat das Viereck einen spitzen Winkel in  $D$  und die rechten Winkel in  $E, F, G$ . Nun sind noch die anderen Maße des Vierecks zu finden. Es sei  $H$  ein Punkt auf  $\overline{DG}$  so, dass  $\overline{FH} = c$  gilt. Man kann weiters die Gerade  $FH$  als Parallele zu der Geraden  $DE$  festlegen und somit ist der Winkel  $\sphericalangle EFH$  ein Parallelwinkel bezüglich der Strecke  $\overline{EF}$ . Es gilt also  $\sphericalangle EFH = \mu'$  und daraus folgt  $\sphericalangle GFH = \mu$ . Das Dreieck  $\triangle HFG$  ist folglich zum Dreieck  $\triangle ABC$  kongruent, daher ist  $\overline{FG} = a, \overline{GH} = b$  und  $\sphericalangle FGH = \lambda$ . Weiters gilt  $\overline{DG} = 1$ . Somit fehlt nur noch der Wert für  $\sphericalangle EDG$ . Der auf der Verlängerung von  $\overline{DG}$  liegende Punkt  $J$  ist so zu wählen, dass  $\overline{DJ} = b$  gilt. Dann gilt für  $\overline{HJ} = 1$  und die Normale zu  $\overline{HJ}$  im Punkt  $J$  ist parallel zu der Geraden  $DE$  in derselben Richtung. Es folgt  $\sphericalangle EDG = \beta$ . (vgl. [Voelk1995], S. 99)





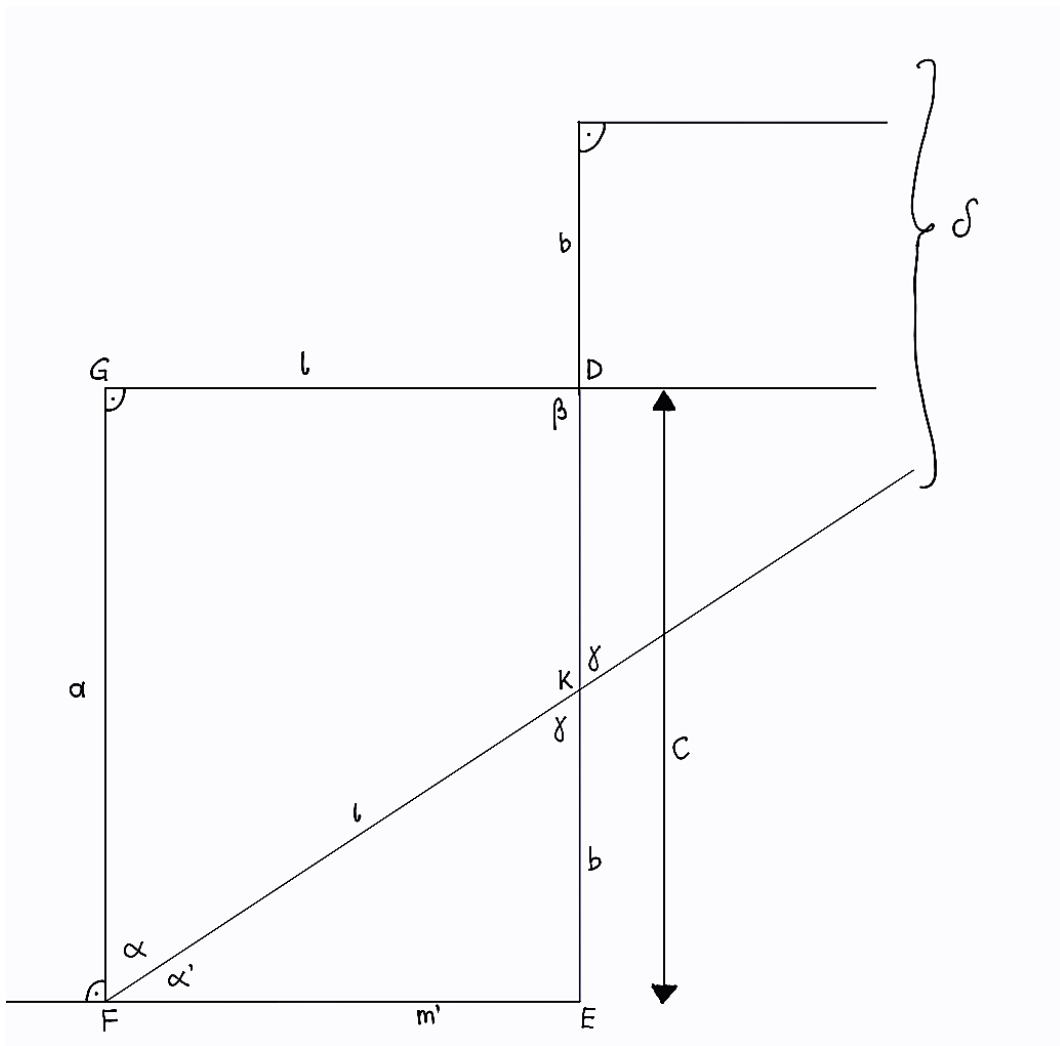


Abbildung 74: Gedrehtes Lambert Viereck

Verfährt man mit diesem Viereck 1 nun genauso wie mit dem nichtgedrehten, so erhält man ein Dreieck  $\triangle FEK$ , analog zu dem Dreieck  $\triangle FGH$ . Dieses Dreieck  $\triangle FEK$  ist das vereinigte Dreieck 2. Dessen Maße  $m', b, l, \gamma, \alpha'$  haben dieselbe Relation zum gedrehten Viereck 1, wie die Maße des Dreiecks 1 zum Viereck 1.

Viereck 1 gedreht:	$m'$	$\beta$	$l$	$c$	$a$
Dreieck 2:	$m'$	$b$	$l$	$\gamma$	$\alpha'$

Sowohl bei Dreieck 1 als auch bei Dreieck 2 entsprechen die ersten zwei Maße den Seiten des Dreiecks und die letzten zwei deren gegenüberliegenden Winkeln. Das dritte Maß entspricht der Hypotenuse. Man setzt dieses Verfahren nun fort, um weitere vereinigte Vierecke bzw. Dreiecke zu erhalten. Dafür dreht man zunächst Dreieck 2 und erhält:

Dreieck 2 gedreht:	$b$	$m'$	$l$	$\alpha'$	$\gamma$
Viereck 2:	$b$	$\mu'$	$l$	$a'$	$c'$

Nun dreht man das Viereck 2 und erhält:

Viereck 2 gedreht:	$c'$	$\mu'$	$a'$	$l$	$b$
Dreieck 3:	$c'$	$m'$	$a'$	$\lambda$	$\beta'$

Durch wiederholtes Anwenden des Verfahrens erhält man das Dreieck 4:

$$\text{Dreieck 4: } \left| \begin{array}{c} l' \\ c' \\ b' \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \alpha' \\ \mu \end{array} \right|,$$

sowie das nächste vereinigte Dreieck

$$\text{Dreieck 5: } \left| \begin{array}{c} a \\ l' \\ m \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \right|.$$

Das Verfahren ist nach Dreieck 5 nicht beendet, sondern kann beliebig oft durchgeführt werden. Das dabei entstehende sechste Dreieck ist kongruent zu Dreieck 1 etc. Somit ist eine Fortsetzung nach dem fünften Dreieck nicht notwendig. Als Resultat erhält man: (vgl. [Voelk1995], S. 99ff)

**Satz 9.4.** *Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck, wobei die Seiten und spitzen Winkel folgende Maße haben:  $a, b, c, \lambda, \mu$ . Durch die Existenz eines solchen Dreiecks wird die Existenz von vier weiteren rechtwinkligen Dreiecken impliziert. Diese fünf Dreiecke sind alle verschieden und man nennt sie vereinigte Dreiecke. (vgl. [Voelk1995], S. 102)*

## 9.2 Formeln bezüglich des Parallelwinkels

Man betrachtet die Gleichung

$$y = 2 \arctan(e^{-x}). \quad (1)$$

Dabei ist  $y$  der Parallelwinkel bezüglich der Länge  $x$ . Durch Substitution kann man dies vereinfachen

$$z = \arctan(e^{-x}), \quad (2)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ \tan y &= \tan 2z = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z} \end{aligned} \quad (3)$$

nach den trigonometrischen Formeln. Aus (2) folgt

$$\tan z = e^{-x}.$$

Setzt man dann dies in (3), so ergibt sich:

$$\tan y = \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x} = \sinh^{-1} x.$$

Die Gleichung

$$\tan y = \sinh^{-1} x \quad (4)$$

ist eine einfachere Form von (1). Daraus lassen sich weitere Formeln einfach ableiten. Hierfür verwendet man die reziproke Formel

$$\cot y = \sinh x \quad (5)$$

Aus diesem und  $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$  folgt:

$$\sin^{-1} y = (1 + \cot^2 y)^{\frac{1}{2}} = (1 + \sinh^2 x)^{\frac{1}{2}} = \cosh x. \quad (6)$$

Daraus erhält man weiters

$$\sin y = \frac{1}{\sin^{-1} y} = \frac{1}{\cosh x} = \cosh^{-1} x. \quad (7)$$

Aus (7) und der Gleichung  $1 - (\cosh^2 x)^{-1} = \tanh^2 x$  folgt dann

$$\cos y = (1 - \sin^2 y)^{\frac{1}{2}} = (1 - (\cosh^2 x)^{-1})^{\frac{1}{2}} = \tanh x. \quad (8)$$

Nimmt man nun das Reziproke von (8), dann erhält man

$$\cos^{-1} y = \frac{1}{\tanh x} = \coth x. \quad (9)$$

Wenn man nun alles zusammenfasst, dann erhält man: (vgl. [Voelk1995], S. 102f)

**Satz 9.5.** *Falls  $y$  der Parallelwinkel bezüglich der Länge  $x$  ist, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \sin y &= \cosh^{-1} x \\ \cos y &= \tanh x \\ \tan y &= \sinh^{-1} x \\ \sinh^{-1} y &= \cosh x \\ \cos^{-1} y &= \coth x \\ \cot y &= \sinh x \end{aligned}$$

(vgl. [Voelk1995], S. 103)

Diese Formeln dienen auch dem Aufsuchen der ergänzenden Distanzen. Man kann somit zum Beispiel zu einer gegebenen Länge  $a$  die ergänzende Länge  $a'$  ermitteln, indem man zuerst den Parallelwinkel  $\alpha$  bezüglich  $a$  bestimmt und dann den Komplementärwinkel  $\alpha'$  und mit Hilfe dessen kann man dann  $a'$  bestimmen. (vgl. [Voelk1995], S. 103)

Es sei  $x$  eine beliebige Distanz und  $y$  der Parallelwinkel bezüglich jener Distanz  $x$ . Nach Satz 9.5. gilt

$$\sinh x = \cot y. \quad (10)$$

Falls  $y'$  der komplementäre Winkel zu  $y$  ist, dann gilt

$$\cot y = \tan y'. \quad (11)$$

Sei nun  $x'$  die Länge bezüglich  $y'$ , dann ist nach Satz 8.5.

$$\tan y' = \sinh^{-1} x'. \quad (12)$$

Durch Kombinieren von (10),(11) und (12) erhält man

$$\sinh x = \sinh^{-1} x'. \quad (13)$$

(vgl. [Voelk1995], S. 103f)

**Satz 9.6.** *Wenn  $x$  und  $x'$  komplementäre Distanzen sind, dann gilt:*

$$\sinh x = \sinh^{-1} x'$$

$$\cosh x = \coth x'$$

$$\tanh x = \cosh^{-1} x'$$

(vgl. [Noelk1995], S. 104)

### 9.3 Trigonometrische Formeln im rechtwinkligen Dreieck

Im Gegensatz zu der euklidischen Geometrie, in der bei der Verwendung von Sinus oder Kosinus eine der beiden Größen stets eine Seitenlänge sein muss, können in der hyperbolischen Geometrie die beiden Größen beliebig aus den Bestimmungsstücken des rechtwinkligen Dreiecks gewählt werden.

Man betrachte ein rechtwinkliges Dreieck  $\triangle ABC$ . Die Seiten benennt man mit  $a, b, c$  und die Winkel mit  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Länge  $l$  korrespondiert zu  $\lambda$ , welcher als Parallelwinkel betrachtet werden, und kleiner, größer oder gleich der Länge  $c$  sein kann. (vgl. [Voelk1995], S. 104f)

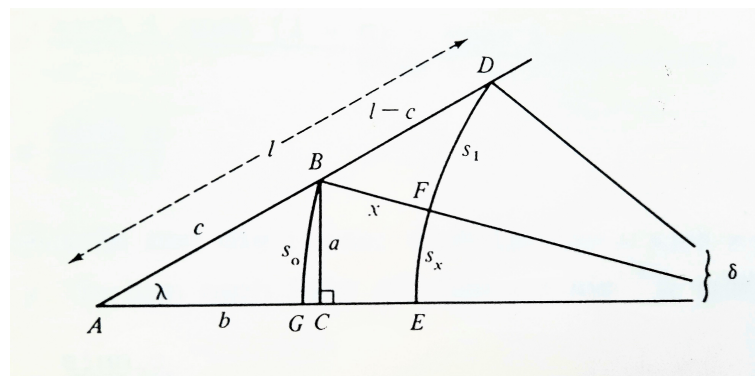


Abbildung 75: Dreieck  $\triangle ABC$  mit  $l > c$

Man betrachte den Fall, dass  $l > c$  gilt. Dann kann man auf der Verlängerung der Strecke  $\overline{AB}$  einen Punkt  $D$  so wählen, dass die Strecke  $\overline{AD} = l$ . Die Normale auf  $\overline{AD}$  ist zu  $\overline{AC}$  in Richtung von  $\delta$  parallel.  $E$  und  $F$  sind die zwei Punkte des Horozykels  $(D, \delta)$ , in denen dieser die Radien  $A\delta, B\delta$  schneidet. Weiters sei  $G$  jener Punkt, in dem der Horozykel  $(B, \delta)$  den Radius  $A\delta$  schneidet. Die Gerade  $AD$  bildet dabei eine Tangente an den Horozykel  $(D, \delta)$ , die diesen im Punkt  $D$  berührt. Man bezeichnet die Länge des Bogens von  $B$  nach  $G$  mit  $s_0$ , und die Länge von  $E$  nach  $F$  sei  $s_x$ . Dabei ist die Strecke  $\overline{BF} = x$ . Dann gilt nach Satz 8.12. und Satz 8.13. (vgl. [Voelk1995], S. 105)

$$s_x = s_0 e^{-x} \quad (1)$$

$$e^x = \cosh(1 - c) \quad (2)$$

$$s_0 = S \sinh a. \quad (3)$$

Wenn man weiters die Länge des Bogens von  $D$  nach  $F$  mit  $s_1$  bezeichnet, erhält man:

$$s_1 = S \tanh(1 - c) \quad (4)$$

$$s_1 + s_x = S \tanh 1. \quad (5)$$

Kombiniert man nun (1) bis (5) und beginnt dabei mit (3), so erhält man:

$$\begin{aligned} \sinh a &= \frac{s_0}{S} = \frac{s_x e^x}{S} = e^x \left( \frac{s_1 + s_x}{S} - \frac{s_1}{S} \right) \\ &= \cosh(1 - c) (\tanh 1 - \tanh(1 - c)) \\ &= \tanh 1 \cosh(1 - c) - \sinh(1 - c) \\ &= \frac{\sinh 1 \cosh(1 - c) - \cosh 1 \sinh(1 - c)}{\cosh 1} \\ &= \frac{\sinh c}{\cosh 1} \end{aligned}$$

Verwendet man nun noch die Formel  $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$  und dass nach Satz 8.5. gilt  $\cosh 1 = \sin^{-1} \lambda$  ist, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sinh a &= \frac{\sinh c}{\sin^{-1} \lambda} \\ \text{oder } \sin \lambda &= \frac{\sinh a}{\sinh c} \end{aligned} \quad (6)$$

Hier wird die Relation zwischen dem Winkel  $\lambda$ , der gegenüberliegenden Seite  $a$  und der Hypotenuse  $c$  gezeigt. Diese entspricht der analogen Formel der euklidischen Geometrie  $\sin \lambda = \frac{a}{c}$ . Daher gilt:

**Satz 9.7.** *Der Sinus eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem hyperbolischen Sinus der gegenüberliegenden Seite dividiert durch den hyperbolischen Sinus der Hypotenuse. ([Voelk1995], S. 106)*

Wenn man den Satz 9.7. auf den spitzen Winkel  $\mu$  und dessen gegenüberliegende Seite anwendet, dann erhält man:

$$\sin \mu = \frac{\sinh b}{\sinh c}. \quad (7)$$

Sowohl die Formel in (6), als auch jene in (7) gibt eine Relation zwischen drei Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle ABC$  an. Neben diesen beiden Formeln gibt es noch weitere. Hierfür betrachtet man das Dreieck 2 aus dem Kapitel 9.1.. Dieses hat die Bestimmungsstücke  $m', b, l, \gamma, \alpha'$ . Die Seiten  $m'$  und  $b$  liegen dabei  $\gamma$  und  $\alpha'$  gegenüber und die Hypotenuse wird durch 1 dargestellt. Man wendet nun Satz 9.7. auf dieses Dreieck an und erhält:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{\sinh m'}{\sinh 1} \\ \sin \alpha' &= \frac{\sinh b}{\sinh 1}. \end{aligned}$$

Verwendet man hier nun Satz 9.5., dann können die Gleichungen zu Formeln des Dreiecks  $\triangle ABC$  reduziert werden.

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} c &= \frac{\cot \mu'}{\cot \lambda} = \frac{\tan \mu}{\cot \lambda} \\ \text{oder} \quad \lambda \cot \mu &= \cosh c \end{aligned} \quad (8)$$

Da  $\sin \alpha' = \cos \alpha$ , erhält man weiters

$$\begin{aligned} \tanh a &= \frac{\sinh b}{\cot \lambda} \\ \text{oder} \quad \tan &= \frac{\tanh a}{\sinh b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Mit der Gleichung (8) ist der Zusammenhang zweier spitzer Winkel und der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle ABC$  gezeigt. Die Gleichung (9) hingegen zeigt den Zusammenhang zwischen zwei Katheten und einem spitzen Winkel. Auf gleiche Art und Weise kann die Relation zwischen den anderen Seiten und anderen spitzen Winkeln angegeben werden: (vgl. [Voelk1995], S. 106f)

$$\tan \mu = \frac{\tanh b}{\sinh a} \quad (10)$$

Substituiert man nun (9) und (10) in (8), dann erhält man dadurch weitere Formeln für das Dreieck  $\triangle ABC$ . Anschließend wendet man diese auf die vereinigten Dreiecke an. So erhält man vier weitere Formeln für das Dreieck  $\triangle ABC$ . Man führt erneut eine Substitution aus

und erhält so:

$$\frac{\sinh b}{\tanh a} \frac{\sinh a}{\tanh b} = \cosh c$$

oder  $\cosh a \cosh b = \cosh c.$  (11)

Man hat somit eine Relation zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks erhalten. Somit handelt es sich hierbei um eine Analogie zum Satz des Pythagoras der euklidischen Geometrie. (vgl. [Voelk1995], S. 107f)

**Satz 9.8.** *Sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $c$  und den Katheten  $a$  und  $b$ , dann gilt:*

$$\cosh a \cosh b = \cosh c.$$

(vgl. [Voelk1995], S. 108)

Nach Anwendung dieser auf das vereinigte Dreieck erhält man die Gleichung:

$$\cosh m' \cosh b = \cosh 1.$$

Man verwendet nun Satz 9.5. und erhält

$$\sin^{-1} \mu' \cosh b = \sin^{-1} \lambda$$

und somit

$$\cos^{-1} \mu \cosh b = \sin^{-1} \lambda$$

oder  $\cosh b = \frac{\cos \mu}{\sin \lambda}.$  (12)

Liegt die Seite statt dem Winkel  $\lambda$  dem Winkel  $\mu$  gegenüber, so ergibt sich:

$$\cosh a = \frac{\cos \lambda}{\sin \mu}. \quad (13)$$

Nach Anwendung des Satzes 9.8. auf das vereinigte Dreieck 4, gilt:

$$\cos \lambda = \frac{\tanh b}{\tanh c}. \quad (14)$$

Da die Formel (14) den Zusammenhang zwischen  $\lambda$ , der angrenzenden Kathete und der Hypotenuse darstellt, steht diese in Relation mit der euklidischen Formel  $\cos \lambda = \frac{b}{c}$ . Das Gleiche gilt für die folgende Formel:

$$\cos \mu = \frac{\tanh a}{\tanh c}. \quad (15)$$

(vgl. [Voelk1995], S. 108f)

**Satz 9.9.** *Sei  $\triangle ABC$  ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, mit den Katheten  $a, b$ , der Hypotenuse  $c$  und den spitzen Winkeln  $\lambda, \mu$ . Es gelten folgende Formeln:  
Für zwei Seiten und einen Winkel gilt:*

$$\begin{aligned}\sin \lambda &= \frac{\sinh a}{\sinh c} \\ \sin \mu &= \frac{\sinh b}{\sinh c} \\ \cos \lambda &= \frac{\tanh b}{\tanh c} \\ \cos \mu &= \frac{\tanh a}{\tanh c} \\ \tan \lambda &= \frac{\tanh a}{\sinh b} \\ \tan \mu &= \frac{\tanh b}{\sinh a}\end{aligned}$$

*Für zwei Winkel und eine Seite gilt:*

$$\begin{aligned}\cosh a &= \frac{\cos \lambda}{\sin \mu} \\ \cosh b &= \frac{\cos \mu}{\sin \lambda} \\ \cosh c &= \cot \lambda \cot \mu\end{aligned}$$

*Für drei Seiten gilt:*

$$\cosh a \cosh b = \cosh c$$

Da die Formeln für das allgemeine Dreieck bereits zu Beginn des Kapitels gezeigt wurden, werden nun noch trigonometrische Formeln im Spitzreck betrachtet.

## 9.4 Trigonometrische Formeln im Spitzreck

Wenn man von einem Punkt  $P$  im Inneren des rechten Winkels  $\angle SRQ$  die Normale auf die anderen Schenkel fällt, dann sind diese zu dem jeweils anderen Schenkel überparallel. So erhält man ein Viereck mit drei rechten Winkeln. Wie in der Abbildung seien diese Winkel in den Eckpunkten  $Q, R, S$ . Da die Winkelsumme bekanntlich kleiner als  $360^\circ$  sein muss, muss der vierte Winkel  $\varphi$  im Punkt  $P$  spitz sein. Man nennt dieses Viereck daher Spitzreck. Die Seiten bezeichnet man mit  $p, q, p', q'$  und das fünfte Bestimmungsstück ist der Winkel  $\varphi$ . (vgl. [Voelk1995], S. 112)



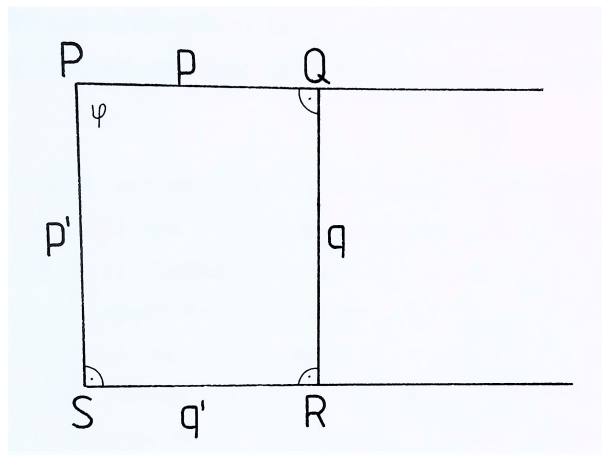


Abbildung 76: Spitzeck

Es besteht zwischen je drei dieser Größen eine Relation. Man erhält zehn Formeln:

$$\begin{aligned}
 \sinh p' &= \cosh p \sinh q & \text{bzw.} & & \sinh p &= \cosh p' \sinh q' \\
 \cot \varphi &= \sinh p \tanh q & \text{bzw.} & & \cot \varphi &= \sinh p' \tanh q' \\
 \cos \varphi &= \sinh q \sinh q' \\
 \cos \varphi &= \tanh p \tanh p' \\
 \tanh p &= \tanh q' \cosh q & \text{bzw.} & & \tanh p' &= \tanh q \cosh q' \\
 \cosh q' &= \cosh p \sin \varphi & \text{bzw.} & & \cosh q &= \cosh p' \sin \varphi
 \end{aligned}$$

(vgl. [Voelk1995], S. 113)

Die Herleitung dieser Formeln findet man in [Teubner1962], S. 37-42 bzw. 78-79.

## 10 Resümee

Es lässt sich feststellen, dass die Unterschiede der euklidischen und hyperbolischen Geometrie durch ein Axiom bedingt sind. Da das fünfte Axiom oder auch Parallelenaxiom in verneinter Form in der Axiomatik der hyperbolischen Geometrie auftritt, beeinflusst es alle Sätze und Lemmata, die dieses als Grundlage haben. Dadurch werden auch die Figuren verändert und je nach Modell werde diese anders dargestellt. Somit ist es schwierig eine allgemeine Vorstellung von Figuren, wie Dreiecke oder Vierecke, zu haben.

Es wurden nicht alle möglichen Aspekte betrachtet. Somit ist dies keine vollständige Darstellung der hyperbolischen Geometrie, sondern es bleiben einige Aspekte, die noch zu bearbeiten sind. So beispielsweise die Kurven zweiten Grades.

Ein weiterer Aspekt, der in Zukunft bearbeitet werden könnte, ist ob diese Art der Geometrie in der Schule bearbeitet werden soll, da man auch im alltäglichen Leben einige Beispiele findet, die ein Modell der hyperblischen Geometrie darstellen. Unsere Erde beispielsweise entspricht dem Kugelmodell.

# Literatur

- [1] Baldus, R.; Löbell F. (Ed.) (2019). *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene*. Berlin, Boston: De Gruyter.
- [2] Barot, M. (2019). *Einführung in die hyperbolisch Geometrie. Anleitung für eine Entdeckungsreise*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- [3] Berchtold, F. (2017). *Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete*. Berlin: Springer-Verlag GmbH.
- [4] Buchmann, G. (1975). *Nichteuklidische Elementargeometrie. Einführung in ein Modell*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- [5] Filler, A. (1993). *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*. Mathematische Texte. Band 7. Mannheim: Bibliographisches Institut und F.A Brockhaus AG.
- [6] Gerhards, M. (2015). *Elementare hyperbolische Geometrie*. Universität Freiburg.
- [7] Gans, D. (1973). *An introduction to non-Euclidean Geometry*. London: Academic Press, Inc.
- [8] Perron, O. (1962). *Nichteuklidische Geometrie der Ebene*. Stuttgart: Teubner.
- [9] Szász, P. (1955). *Elementargeometrische Herstellung des Klein-Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes*. Acta Scientiarum Mathematicarum, Vol. 16, p. 1.8.
- [10] Szász, P. (1965). *Hyperbolische Trigonometrie im Poincaréschen Kreismodell abgelesen*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Vol. 7, No. 1, p. 65-69. Springer Science and Business Media LLC
- [11] Wagner, J. (2017). *Einblicke in die euklidische und nicht euklidische Geometrie. Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus*. Berlin: Springer-Verlag GmbH.
- [12] Völk, I. (1995). *Hyperbolische Geometrie*. Universität Wien.
- [13] Zeitler, H. (1963). *Hyperbolische Trigonometrie im Poincaréschen Kreismodell*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 14, p. 123–124. Springer Science and Business Media LLC

# Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung zu Beweis Satz 2.2. . . . .	9
2	Pseudosphäre . . . . .	11
3	Zweischaliges Hyperboloid . . . . .	12
4	Kreisscheibenmodell mit hyperbolischer Geraden $g$ und euklidischem Mittelpunkt $M$ . . . . .	13
5	H-Dreieck im Halbebenenmodell . . . . .	14
6	Halbkugel . . . . .	14
7	N-Geraden vom Typ 1 (links) und vom Typ 2 (rechts) . . . . .	16
8	Skizze zu Definition 4.3. . . . .	19
9	Kollineare Punkte auf einer Geraden vom Typ 1 . . . . .	21
10	Abstand von Punkten . . . . .	22
11	Halbebenen . . . . .	22
12	Skizze zu Beweis Axiom III/1 . . . . .	23
13	Abstandslinien zu Geraden vom Typ 2 . . . . .	25
14	Skizze zu Beweis Satz 4.2. . . . .	25
15	Abstandslinien zu einer Geraden vom Typ 1 . . . . .	26
16	Veranschaulichung Orthogonalität im Kleinschen Modell . . . . .	26
17	Skizze zu Beweis Satz 4.4. . . . .	29
18	Skizze zu Satz 4.6. . . . .	30
19	Schenkel des Winkels verläuft durch $O$ . . . . .	32
20	Skizze zur Konstruktion . . . . .	33
21	Skizze Polarenspiegelung . . . . .	34
22	Scheitel des Winkels rückt gegen den Randkreis . . . . .	35
23	Skizze zu Beweis Thales-Satz . . . . .	36
24	Skizze zu Definition 5.1. und 5.2. . . . .	37
25	Skizze zu Beweis Satz 5.1. . . . .	39
26	Verbindbare Geraden . . . . .	40
27	Randparallelen . . . . .	41
28	Skizze zu Beweis Satz 4.5. . . . .	43
29	Skizze zu Beweis Satz 5.6., Fall 1 . . . . .	44
30	Hyperbolisches Dreieck . . . . .	45
31	Dreieck in kanonischer Lage . . . . .	46
32	Saccherisches (links) und Lambertsches (rechts) Viereck . . . . .	46
33	Skizze zu Beweis Satz 7.1. . . . .	49
34	Verbindung von Saccheri Viereck und Dreieck mit zwei spitzen Winkeln . . .	50
35	Verbindung von Saccheri Viereck und Dreieck mit einem stumpfen Winkel .	51
36	Verbindung von Saccheri Viereck und rechtwinkligem Dreieck . . . . .	51
37	Skizze zu Beweis Satz 7.8. . . . .	53
38	Skizze zu Beweis Satz 7.11. . . . .	56

39	Skizze zu Beweis Satz 7.12. . . . .	57
40	Skizze zu Beweis Satz 7.13. a) . . . . .	58
41	Skizze zu Beweis Satz 7.13. b) . . . . .	60
42	Skizze zu Beweis Satz 7.15. . . . .	61
43	Skizze einfaches asymptotisches Dreieck . . . . .	62
44	Dreiseit $PQ\delta$ . . . . .	63
45	Skizzen zu $P \in g$ . . . . .	64
46	Skizze zu Fall 1 . . . . .	64
47	Skizze zu Fall 2 . . . . .	65
48	Skizze zu Beweis Satz 7.17. . . . .	66
49	Kongruente Dreiseite . . . . .	67
50	Kongruente Dreiseite . . . . .	68
51	Skizze doppelt asymptotisches Dreieck . . . . .	68
52	Skizze dreifach asymptotisches Dreieck . . . . .	69
53	Horozykel $(P, \delta)$ . . . . .	70
54	Eigentlicher Kreis im Kreismodell . . . . .	72
55	Horozykel im Kreismodell . . . . .	72
56	Hyperzykel im Kreismodell . . . . .	72
57	Skizze zu Beweis 8.3. . . . .	74
58	Skizze Kreisbogen . . . . .	75
59	Skizze Kreisbogen . . . . .	76
60	Skizze zu Beweis Satz 8.11. . . . .	77
61	Skizze zu Satz 8.13. . . . .	80
62	Skizze zu Beweis Korollar 9.1 . . . . .	83
63	Skizze zu Hilfssatz 9.1. . . . .	88
64	Skizze zu Beweis zu Hilfssatz 9.1. . . . .	88
65	Skizze zu Hilfssatz 9.2. . . . .	89
66	Skizze zu Beweis zu Hilfssatz 9.2. . . . .	90
67	Skizze zu Hilfssatz 9.3. . . . .	91
68	Skizze zu Beweis zu Hilfssatz 9.3. . . . .	92
69	Skizze zu Schnittpunkten der Geraden $OX$ mit Kreis $k$ . . . . .	93
70	Skizze zu Dreieck mit $A = O$ . . . . .	93
71	Skizze zu Herleitung des Seitenkosinussatzes . . . . .	95
72	Rechtwinkliges Dreieck . . . . .	97
73	Lambert Viereck zu dem Dreieck $\triangle FGH$ . . . . .	99
74	Gedrehtes Lambert Viereck . . . . .	100
75	Dreieck $\triangle ABC$ mit $l > c$ . . . . .	103
76	Spitzeck . . . . .	108