MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Antike Verfahren der Würfelverdoppelung in Eutocios Kommentar zu Archimedes ‚Kugel und Zylinder'"

verfasst von / submitted by

Larissa Angelika Schölzky, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna, 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 507 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Englisch UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Christoph Baxa

Abstract

Deutsch:

Das Ziel dieser Masterarbeit ist es, das Problem der Würfelverdoppelung mathematisch zu veranschaulichen. Dazu wird zuerst gezeigt, welche Konstruktionen im alten Griechenland mit Zirkel und Lineal möglich waren, und welche Limitation es hierbei gab. In weiterer Folge wird aufgezeigt, wie sich Hippokrates von Chios der Würfelverdoppelung genähert und diese auf die Suche nach zwei mittleren Proportionalen umformuliert hat. Hierzu wird auch ausgeführt, wie Eutocius in seinem Kommentar zu *Kugel und Zylinder* den von Archimedes verwendeten zwei mittleren Proportionalen begegnet. Schließlich werden die von Eutocius gesammelten zwölf Verfahren behandelt, mit deren Hilfe antike Mathematiker versucht hatten, die Problematik zu lösen. Diese Lösungsversuche werden veranschaulicht und mit heutzutage üblichen mathematischen Verfahren erklärt. Die Masterarbeit richtet sich sowohl an Studierende der Fachmathematik als auch an Lehramtsstudierende der Mathematik.

English:

The aim of this master thesis is to analyse the duplication of the cube mathematically. For this purpose, it is first shown which kinds of constructions were possible in ancient Greece with compasses and rulers, and which limitations were imposed. Subsequently, it is shown how Hippocrates of Chios approached the duplication of the cube and how he reformulated it to the search for two middle proportionals. Furthermore, it is explained how Eutocius, in his commentary on *Sphere and Cylinder*, encounters the two middle proportionals used by Archimedes. Finally, the twelve methods collected by Eutocius, with the help of which ancient mathematicians had tried to solve the problem, are addressed. These attempted solutions are illustrated and explained with mathematical procedures commonly used today. The Master's thesis is intended for students of mathematics as well as for students in the teacher's programme.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Griechen öffneten das Tor zu unserem heutigen Europa. Ihre Philosophen, Künstler, Bildhauer, Dichter und Architekten sind heute noch präsent und bewundert.

Auch auf dem Gebiet der Mathematik gaben sie einen Startimpuls. Sie hoben diese aus dem alltäglichen Gebrauch, den man für Warenhandel, Gebietsaufteilung und Bauwerkserrichtung benötigte, heraus und etablierten sie als eigene Wissenschaft.

Der Wissensstand der alten Griechen im Bereich der Mathematik und der Physik ist beeindruckend. Sie stellten höchst beachtliche Theorien auf und konnten diese auch beweisen.

Die Liste der griechischen Mathematiker ist lang:

- Thales von Milet (624 v. Chr. bis 546 v. Chr.), besonders bekannt durch den nach ihm benannten Satz
- Phytagoras von Samos (570 v. Chr. bis 510 v. Chr.), besonders bekannt durch den nach ihm benannten Satz
- Eudoxos von Knidos (ca. 410 v. Chr. bis 347 v. Chr.), der die Grundlage für die Lehre von Größen bildete
- Platon (ca. 428 v. Chr. bis 348 v. Chr.), der die Mathematik mit der Philosophie verknüpfte
- Euklid von Alexandria (ca. 365 v. Chr. bis 300 v. Chr.), Verfasser eines 13-bändigen Lehrbuchs, worin er die Grundlagen des damals bekannten mathematischen Wissens zusammenfasste
- Archimedes von Syrakus (ca. 287 v. Chr. bis 212 v. Chr.), der als bedeutendster Mathematiker der Antike gilt. Er beschäftigte sich unter Anderem mit dem Verhältnis von Größen, ein Verfahren, auf welches wir später noch zurückkommen. So entwickelte er beispielsweise eine Methode, sich π mithilfe des Einheitskreises anzunähern.
- Appolonius von Perge (262 v. Chr. bis 190 v. Chr.), bekannt für seine Arbeiten mit Kegelschnitten und für den nach ihm benannten Kreis
- Pappos (Lebensdaten ungewiss, wahrscheinlich 4. Jahrhundert n. Chr.), der eine mathematische Sammlung hinterließ

Die Aufzählung ist exemplarisch und bei weitem nicht vollständig.

Die Arbeiten der griechischen Mathematiker sind vielfältig. Ein Themenkomplex, der sie über Jahrhunderte hinweg beschäftigte und einen besonderen Ruf erlangt hat, betrifft die drei klassischen Probleme der Antike:

- die Verdoppelung des Würfels
- die Quadratur des Kreises
- die Dreiteilung des Winkels

Diese Arbeit befasst sich im Besonderen mit der Verdoppelung des Würfels. Hierzu haben eine Reihe von griechischen Mathematikern Lösungen vorgeschlagen, welche wir uns genauer ansehen möchten. Der älteste Mathematiker, dessen Lösungsvariante wir uns widmen wollen ist Archytas (ca. 435 bis 355 v. Chr.), der Jüngste ist Pappos, der im 3. Jahrhundert n. Chr. gelebt haben soll. Dazwischen lebten zehn weitere namhafte Mathematiker, deren Lösungsvorschlägen wir diskutieren werden: Eratosthenes, Menaichmos, Nikomedes, Appolonius, Philon, Heron, Diokles, Sporus, Eudoxus und Platon.

Ferner haben sich auch nachfolgende Mathematiker und Künstler, wie zum Beispiel Isaac Newton, Albrecht Dürer, Heinrich Dörrie, Michael Stifel und Jean Borrel, mit diesem Thema auseinandergesetzt und interessante Beiträge geliefert, welche in dieser Arbeit behandelt werden sollen.

Schwerpunkt dieser Masterarbeit ist die Veranschaulichung dieser Lösungsansätze unter Zuhilfenahme moderner Methoden. Zuvor wird das Problem der Würfelverdoppelung behandelt und es wird darauf eingegangen, wo die Grenzen beim Arbeiten mit Zirkel und Lineal liegen. Zudem werden Gründe aufgezeigt, weshalb die drei klassischen Probleme der Antike als unlösbar galten.

2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchziehen die griechische Mathematik in den unterschiedlichsten Ausformungen. Unter einem Lineal verstand man eine beliebig lange, unskalierte Kante und beim Zirkel sei anzunehmen, dass er zuklappt, sobald man ihn vom Blatt Papier nimmt.

Von den Pythagoräern aus religiös-philosophischen Gründen stark forciert, im Bestreben die Welt einfach zu erklären, und auch von Euklid in seine mathematischen Abhandlungen übernommen, hat das Thema, mit welchen einfachen Mitteln man mathematische Probleme lösen kann, auch die Nachwelt fasziniert.

So besagt der Satz von Mohr-Mascheroni: Alles was mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist, ist auch mit dem Zirkel allein konstruierbar. Christian Dick zeigt in einer Abhandlung tatsächlich erstaunliche Lösungen - zumindest in den Beispielen, die er bringt [5].

Zulässige Konstruktionsschritte nach diesen Vorschriften sind das Legen einer Geraden durch zwei Punkte, das Zeichnen eines Kreises, bei dem der Mittelpunkt und ein Punkt auf der Kreislinie gegeben sind, sowie die Bestimmung von Schnittpunkten. Geschnitten werden konnten zwei nicht parallele Geraden, zwei Kreise oder ein Kreis mit einer Geraden [1].

Man geht davon aus, dass man mit Zirkel und Lineal jede natürliche Zahl konstruieren kann, falls eine Strecke mit Länge 1 gegeben ist. Man muss sie nur beliebig oft aneinanderreihen. Das Aneinanderreihen von Strecken mit zusammenklappendem Zirkel ist laut Propositionen 1 und 2 aus dem ersten Buch von Euklids *Elementen* umsetzbar. Es sei jedoch an dieser Stelle angemerkt, dass es sich bei Konstruktionen in der Schule nicht immer um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal handelt. Beispielsweise ist das Übertragen von Strecken mit dem Zirkel keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

2.1 Addition und Subtraktion

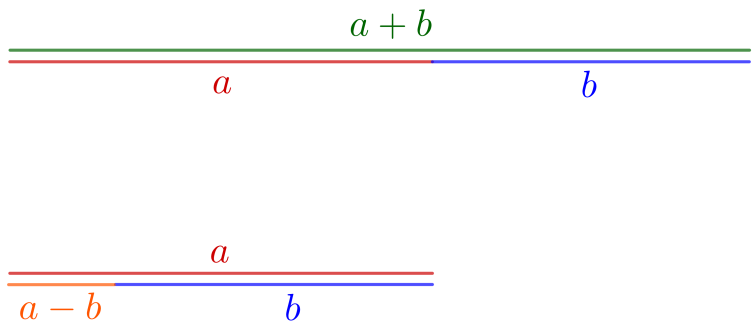

Abbildung: Addition und Subtraktion mit Zirkel und Lineal.

Die vier Grundrechnungsarten waren Konstruktionsschritte, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden konnten. So können beispielsweise, wie oben ersichtlich, zwei positive Zahlen a und b addiert und subtrahiert werden, indem man den Zirkel auf einer Geraden abschlägt.

2.2 Multiplikation und Division

Auch Multiplikationen können mittels Zirkel und Lineal durchgeführt werden:

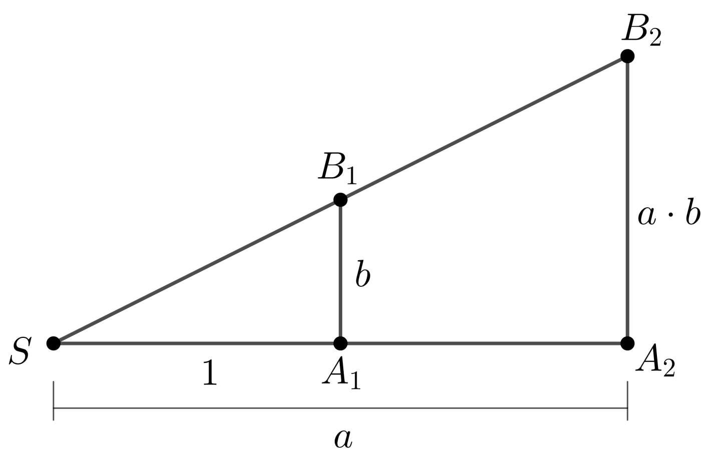

Abbildung: Multiplikation mit Zirkel und Lineal.

Die Länge $|\overline{SA_2}|$ sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ sei $|\overline{A_1B_1}|$. Wir bestimmen $|\overline{SA_1}| = 1$, und es gilt laut Strahlensatz

$$\frac{|\overline{SA_1}|}{|\overline{A_1B_1}|} = \frac{|\overline{SA_2}|}{|\overline{A_2B_2}|},$$

was man umformen kann zu

$$|\overline{A_2B_2}| = \frac{|\overline{SA_2}| \cdot |\overline{A_1B_1}|}{|\overline{SA_1}|}.$$

Somit erhalten wir

$$|\overline{A_2B_2}| = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b.$$

Auch hier ist evident, dass bekannte Strecken abgetragen und übertragen werden müssen, wofür man eigentlich Markierungswerkzeuge benötigt.

Zu dem Abtragen von Längen ist in dieser Version zusätzlich die Konstruktion von Normalen bei den Punkten A_1 und A_2 erforderlich. Die Multiplikation von zwei Längen ist geometrisch aber auch ohne das Konstruieren von Normalen durchführbar. Das ist in der untenstehenden Abbildung ersichtlich, die mit dem Strahlensatz arbeitet.

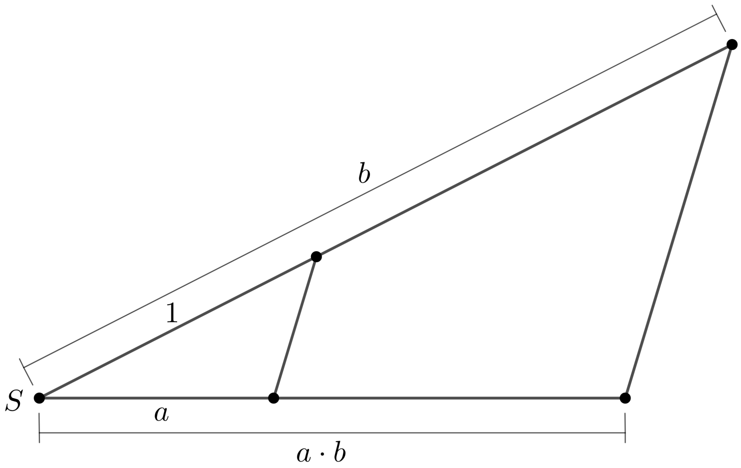

Abbildung: Multiplikation mit Zirkel und Lineal.

Die Division mit Zirkel und Lineal funktioniert analog:

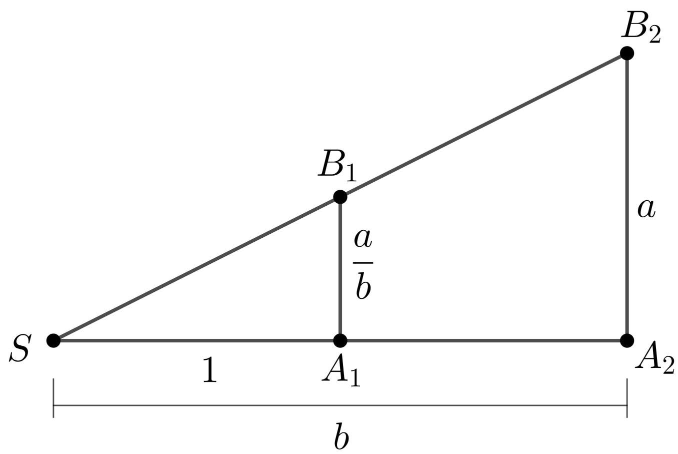

Abbildung: Division mit Zirkel und Lineal.

Diesmal sei die Länge $a = |\overline{A_2B_2}| \in \mathbb{R}^+$ und $b = |\overline{SA_2}| \in \mathbb{R}^+$. Es gilt wieder $|\overline{SA_1}| = 1$, und der Strahlensatz liefert

$$\frac{|\overline{SA_1}|}{|\overline{A_1B_1}|} = \frac{|\overline{SA_2}|}{|\overline{A_2B_2}|},$$

beziehungsweise

$$|\overline{A_1B_1}| = \frac{|\overline{SA_1}| \cdot |\overline{A_2B_2}|}{|\overline{SA_2}|}.$$

Wir erhalten also

$$|\overline{A_1B_1}| = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{a}{b}.$$

2.3 Quadratwurzelziehen

Wir sehen also, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier Zahlen konstruierbar sind, falls die zwei Zahlen selbst auch konstruierbar sind. Zusätzlich zu den vier Grundrechnungsarten war es den alten Griechen auch möglich, mit Zirkel und Lineal Quadratwurzeln zu ziehen. Es ist also möglich eine Zahl $\sqrt{a}$ zu konstruieren, sofern a konstruierbar ist.

Das ist anhand der Abbildung leicht zu erkennen:

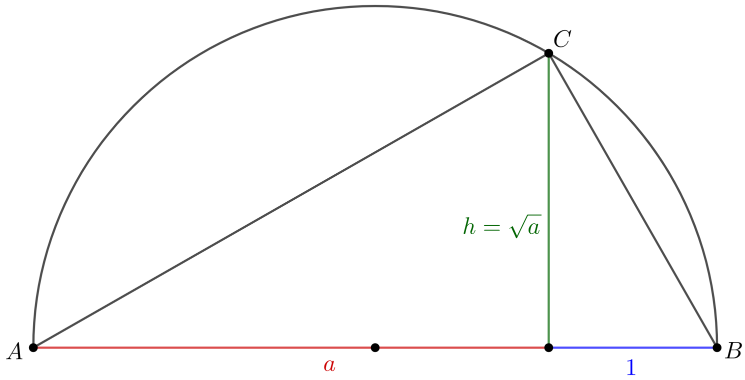

Abbildung: Das Ziehen einer Quadratwurzel mit Zirkel und Lineal.

Laut Satz des Thales ist das Dreieck ABC nämlich rechtwinkelig, was bedeutet, dass der Höhensatz gilt:

$$a \cdot 1 = h^2.$$

Wir erhalten also

$$a \cdot 1 = \sqrt{a}^2.$$

Wir sehen also: Aus positiven rationalen Zahlen sind Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Quadratwurzeln konstruierbar und somit natürlich auch allerlei Kombinationen. Beispielsweise ist die Zahl

$$\sqrt{\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}{4 - \sqrt{\frac{745 + \sqrt{\frac{9}{7}}}{2}}}}$$

theoretisch konstruierbar, sofern man den Überblick bewahrt.

Jedoch sei hier anzumerken, dass die Forderung, Konstruktionen nur mit Zirkel, unmarkiertem Lineal und der Strecke 1 *durchzuführen, realitätsfern ist. Bei komplexeren Problemen bedarf es einer Aneinanderreihung verschiedener geometrischer Konstruktionen, wobei das Ergebnis einer Konstruktion auf eine andere übertragen werden muss. Das ist äußerst mühsam, wenn man bedenkt, dass der Zirkel zuklappt, sobald man ihn vom Blatt Papier nimmt. Selbst unter der Annahme, dass der Zirkel nicht zuklappt, wäre bei komplexeren Operationen eine Reihe von Zirkeln erforderlich, in denen Zwischenergebnisse gespeichert werden, was natürlich äußerst umständlich wäre.*

Wie kompliziert die Forderung nach einem zusammenklappenden Zirkel werden kann, zeigt ein oft vorkommendes Problem der Übertragung der Länge einer Strecke auf eine andere Gerade. Mit einem fixierbaren Zirkel würde das kein gröberes Problem darstellen. Die Lösung mit einem zusammenklappenden Zirkel funktioniert auch und würde unter Zuhilfenahme von Proposition 2 aus dem ersten Band der *Elemente* des Euklid folgendermaßen aussehen [8]:

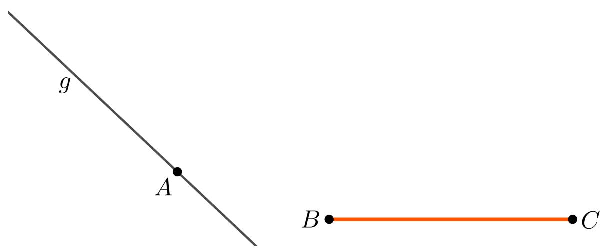

Abbildung: Übertragung einer Strecke.

Die Länge der (orangen) Strecke $\overline{BC}$ soll vom Punkt A aus auf eine Gerade g übertragen werden.

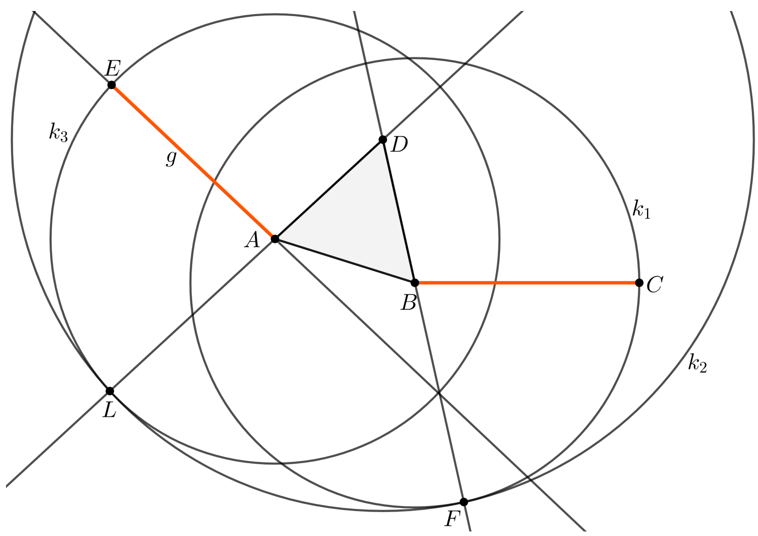

Abbildung: nach Propositionen 2 und 3 aus *Elemente 1*.

Dazu errichten wir ein gleichseitiges Dreieck ABD. Wir stechen den Zirkel in B ein und ziehen den Kreis k_1 mit dem Radius $|\overline{BC}|$. Der Punkt F ist der Schnittpunkt der Geraden DB mit der Kreislinie k_1.

Wir stechen nun den Zirkel in den Punkt D ein und ziehen den Kreis k_2 mit dem Radius $|\overline{DF}|$. Diese Kreislinie schneidet die Gerade DA im Punkt L. Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AL}$ sind nun gleich lang. Den Beweis wollen wir uns hier ersparen.

Mit Hilfe des Kreises k_3 kann die Länge auf die Gerade g übertragen werden. Wir stechen hierzu im Punkt A ein und zeichnen einen Kreis mit Radius $|\overline{AL}|$. Das funktioniert zwar, ist jedoch sehr aufwändig - vor allem wenn in einer geometrischen Konstruktion Strecken mehrfach übertragen werden müssen.

3 Die drei klassischen Probleme der Antike

Die Würfelverdoppelung zählt neben der Quadratur des Kreises und der Dreiteilung des Winkels zu den drei klassischen Problemen der Antike. Ihnen allen ist gemein, dass sie durch die alleinige Nutzung von Zirkel und Lineal nicht lösbar sind.

3.1 Die Würfelverdoppelung

Am Anfang steht ein Mythos.

Ein Mythos ist eine sagenhafte Erzählung, die Ereignisse erklären und beschreiben möchte. Er hat den Vorteil, dass er nur gut und interessant klingen muss. Er muss nicht unbedingt logisch oder geschichtlich wahr sein. Der Mythos der Würfelverdoppelung war immerhin so faszinierend, dass sich Generationen über Jahrhunderte hinweg der Lösung des aufgezeigten Problems gewidmet haben.

Da es bei Mythen, Sagen und Göttergeschichten bei den Griechen auch immer lokale Variationen gibt, existieren auch hier zwei verschiedene Varianten:

In der ersten Variante lässt einer der alten Tragödiendichter - es ist nicht ganz klar, welcher - den mythischen König Minos auftreten, der die Errichtung eines Grabes für seinen Sohn Glaukos plant. Er ist mit dem Entwurf nicht zufrieden und weist den Baumeister an, das Grab unter Beibehaltung der Würfelform doppelt so groß zu machen. Wie die Geschichte ausgegangen ist, ist nicht überliefert.

Die zweite Variante spielt auf der Insel Delos, weshalb es auch Delisches Problem genannt wird [9]. Während einer Pestepidemie sollen die Bewohner der Insel ein Orakel befragt haben, von dem sie den Rat erhielten, zu einem bereits bestehenden Altar einen mit dem doppelten Volumen zu konstruieren - denn nur so könnten die Delier der Plage Herr werden. Als sie jedoch an der Aufgabe scheiterten, wandten sie sich an Platon. Dieser erhob zusätzlich, um den Griechen ihre Vernachlässigung der Mathematik und Geringschätzung der Geometrie vor Augen zu halten [9], noch die Forderung, dass das Problem nur unter Verwendung von Zirkel und unmarkiertem Lineal zu lösen sei - obwohl das vom Orakel ursprünglich nicht so gefordert worden war.

Es hat ungefähr zwei Jahrtausende gedauert, bis Pierre Wantzel im Jahre 1837 den ersten Beweis erbrachte, dass dies nicht möglich ist. Die Griechen haben das mit der Zeit nach mehreren vergeblichen Versuchen erkannt und keiner der nachfolgenden Mathematiker, die sich des Problems angenommen haben, ging nach Platons Forderung vor. Unerlaubte Hilfsmittel wurden unentwegt verwendet und selbst Platon hielt sich nicht an seine eigene Forderung - wobei nicht sicher ist, ob diese Lösung der Würfelverdoppelung nicht fälschlicherweise Platon zugeschrieben wurde.

Der Lösung des Problems wurde von vielen verschiedenen Mathematikern auf den Grund gegangen. Wie in [9] beschrieben, fand Hippokrates von Chios (5. Jahrhundert v. Chr.) einen Lösungsansatz für die Würfelverdoppelung, bei dem zwei mittlere Proportionale gefunden werden mussten - sozusagen eine Umformulierung der Würfelverdoppelung. Hippokrates ist somit der erste Mathematiker, der für dieses klassische Problem der Antike einen theoretischen Lösungsansatz entwickelte.

Es ist interessant, wie viel menschliche Intelligenz und Einfallsreichtum zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung über Jahrhunderte angewendet wurde. Ist es doch aus heutiger Sicht in einer Zeile zu lösen:

Gegeben ist ein Würfel mit Seitenlänge a, zu dem die Seitenlänge x eines Würfels mit doppeltem Volumen gefunden werden soll. Es gilt dann

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Für die Griechen war das jedoch nicht so einfach.

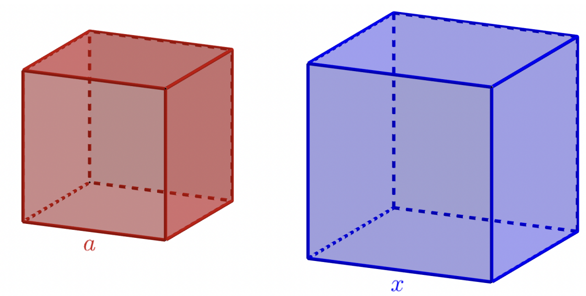

Abbildung: Würfelverdoppelung.

Ein Grund, wieso die Lösung der Würfelverdoppelung für die Griechen schwierig war, war das damals gebräuchliche Zahlensystem. Im mathematischen Bereich war das Milesische System in Verwendung, in dem Alphabetszeichen auch als Zahlenzeichen verwendet werden [1]:

Einer

A	α	Alpha	1
B	β	Beta	2
Γ	γ	Gamma	3
Δ	δ	Delta	4
E	ϵ	Epsilon	5
Ϛ	ϛ	Digamma	6
Z	ζ	Zeta	7
H	ζ	Eta	8
Θ	θ	Theta	9

Zehner

I	ι	Iota	10
K	κ	Kappa	20
Λ	λ	Lambda	30
M	μ	My	40
N	ν	Ny	50
Ξ	ξ	Xi	60
O	o	Omikron	70
Π	π	Pi	80
Ϙ	ϙ	Koppa	90

Hunderter

P	ρ	Rho	100
Σ	σ	Sigma	200
T	τ	Tau	300
Y	υ	Ypsilon	400
Φ	ϕ	Phi	500
X	χ	Chi	600
Ψ	ψ	Psi	700
Ω	ω	Omega	800
Ϡ	ϡ	Sampi	900

Das ergab zwar auch eine Art Dezimalsystem, aber mit eingeschränkter Lesbarkeit. Die Zahl

”444”

würde man beispielsweise als

”$\upsilon\mu\delta$”

schreiben. Das erschwert die üblichen Rechenoperationen aus unserer Sicht.

Noch schwieriger wird es in der Algebra aus heutiger Sicht. Wir verwenden Ziffern für Zahlenwerte, Buchstaben für Variablen und einige Sonderzeichen falls wir mit Integralen, Wurzeln oder Summen rechnen.

Den Term

$$"2b"$$

müsste man im milesischen System als

$$"\beta\beta"$$

schreiben. Natürlich war den Griechen klar, dass dies zu Interpretationsproblemen führen würde. Bei Buchstaben, welche eine Ziffer repräsentierten, wurde deswegen ein Punkt oder Strich hinzugefügt, was die Hantierbarkeit des Systems jedoch nur geringfügig verbesserte.

Den Ausweg fanden die Griechen, indem sie algebraische Probleme geometrisch zu lösen versuchten. Und darin waren die Griechen wahrlich erfinderisch. Die Lösung des Problems der Würfelverdoppelung wurde von Hippokrates von Chios auf das Finden zweier mittlerer Proportionalen zurückgeführt, was im Folgekapitel ausführlicher behandelt wird. Viele Mathematiker in der Vergangenheit versuchten also (meist mit streng genommen unerlaubten Hilfsmitteln) genau diese zwei mittleren Proportionalen zu finden, um eine geometrische Lösung für die Würfelverdoppelung zu erhalten.

So gibt es zu

$$x = a\sqrt[3]{2}$$

zumindest zwölf anerkannte griechische geometrische Lösungen.

Das Delische Problem ist nicht das einzige, welches Mythencharakter erlangt hat. Es hat sich ein Dreigestirn etabliert, welches zusätzlich noch die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises beinhaltet.

3.2 Die Quadratur des Kreises

Bei der Quadratur des Kreises ist zu einem gegebenen Kreis mit Radius r ein flächengleiches Quadrat mit Seitenlänge x zu konstruieren. Das bedeutet, zu lösen sei die Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 = r^2 \cdot \pi \\ \Leftrightarrow \quad & x = r \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Die Quadratur des Kreises läuft also auf die Konstruktion von $\sqrt{\pi}$ hinaus, was mit

Zirkel und Lineal nicht möglich ist, da π eine transzendente Zahl ist.

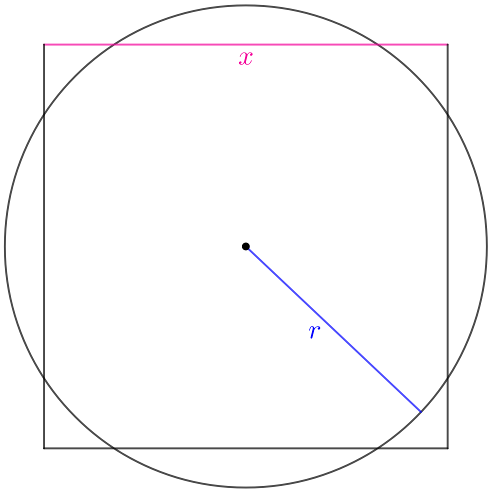

Abbildung: Quadratur des Kreises.

3.3 Die Dreiteilung des Winkels

Die Dreiteilung des Winkels ist ein weiteres Problem, mit dem sich die Griechen beschäftigt haben. Die Problematik wurde unter anderem wegen der Konstruktion von Neunecken behandelt. Der Beweis zur Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal gelang Gauß im 19. Jahrhundert.

Gegeben ist ein Winkel mit Größe 3α, der gedrittelt werden soll [1]. Es gilt:

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha),$$

was wegen $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2$ äquivalent ist zu

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha.$$

Weiters ist $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, deswegen erhalten wir

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha \cdot (2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Durch Ausmultiplizieren kommen wir auf

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha,\end{aligned}$$

was wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha + 3 \cdot \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

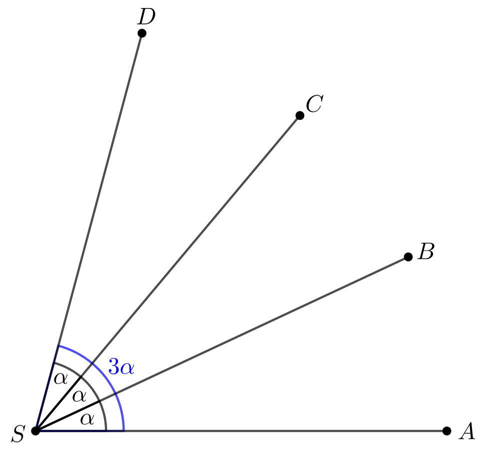

Abbildung: Dreiteilung des Winkels.

Der Winkel α ist genau dann konstruierbar, wenn $\cos \alpha$ konstruierbar ist. Wenn man also ausgehend von 3α den Winkel α konstruieren will, muss man eigentlich eine Lösung der Gleichung $4x^3 - 3x - \cos(3\alpha) = 0$ finden.

Breidenbach leitet diese Gleichung geometrisch her [3]:

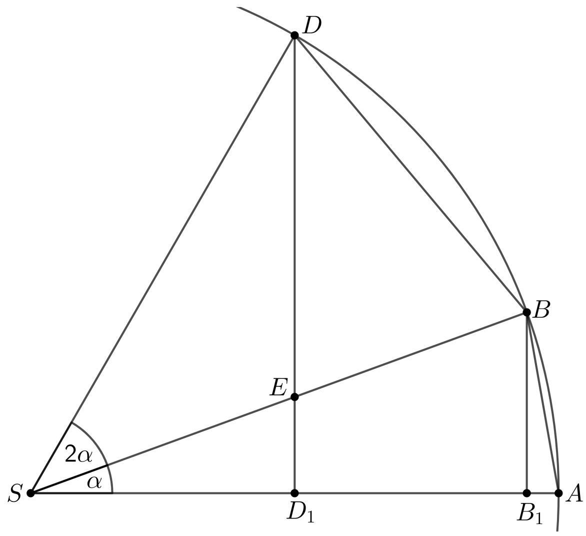

Abbildung: Dreiteilung des Winkels: analytisch betrachtet.

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt S, Radius 1 und zwei Punkten A und D auf der Kreislinie, wobei $\angle ASD = 3\alpha$ gilt. Dieser Winkel soll dreigeteilt werden, sodass $\angle ASB = \alpha$ ist. B wird also so bestimmt, dass der Kreisbogen von D bis B doppelt so lange wie der von B bis A ist, beziehungsweise so, dass die Strecke $\overline{DB}$ doppelt so lang wie $\overline{BB_1}$ ist.

Wir ziehen nun zwei Normale auf $\overline{SA}$ durch die Punkte D und B und erhalten dadurch die Punkte D_1 und B_1 als Schnittpunkte mit $\overline{SA}$. Außerdem erhalten wir den Punkt E als Schnittpunkt der Strecken $\overline{SB}$ und $\overline{DD_1}$.

Der Winkel 3α kann dreigeteilt werden, sofern man die Strecken $\overline{SB_1}$ und $\overline{B_1B}$ konstruieren kann.

Das Dreieck SB_1B ist deckungsgleich mit der Hälfte des Dreiecks SBD. Zusätzlich sind die Winkel $\angle BED$ und $\angle EBB_1$ gleich groß, da $\overline{DD_1}$ und $\overline{BB_1}$ parallel sind. Wir sehen, dass auch $\angle DBE$ die gleiche Größe hat. Das Dreieck EBD ist somit gleichschenklig und gleichzeitig ähnlich zum Dreieck SBD. Daraus folgt

$$\frac{|\overline{EB}|}{|\overline{BD}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{SD}|},$$

beziehungsweise, da $|\overline{SD}| = 1$ und $|\overline{BD}| = 2 \cdot |\overline{BB_1}|$,

$$\frac{|\overline{EB}|}{2 \cdot |\overline{BB_1}|} = \frac{2 \cdot |\overline{BB_1}|}{1}.$$

Es folgt

$$|\overline{EB}| = 4 \cdot |\overline{BB_1}|^2.$$

Außerdem sind die Dreiecke SD_1E und SB_1B ähnlich, da sie drei gleiche Winkel haben. Es gilt

$$\frac{|\overline{SE}|}{1} = \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{SB_1}|},$$

was äquivalent ist zu

$$1 - |\overline{EB}| = \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{SB_1}|} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 4 \cdot |\overline{BB_1}|^2 = \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{SB_1}|}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir zusätzlich

$$|\overline{SB_1}|^2 + |\overline{BB_1}|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\overline{BB_1}|^2 = 1 - |\overline{SB_1}|^2.$$

Setzen wir das in die obere Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 - 4 \cdot (1 - |\overline{SB_1}|^2) &= \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{SB_1}|} \\
\Leftrightarrow \quad -3 + 4 \cdot |\overline{SB_1}|^2 &= \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{SB_1}|} \\
\Leftrightarrow \quad -3 \cdot |\overline{SB_1}| + 4 \cdot |\overline{SB_1}|^3 &= |\overline{SD_1}| \\
\Leftrightarrow \quad -3 \cdot |\overline{SB_1}| + 4 \cdot |\overline{SB_1}|^3 - |\overline{SD_1}| &= 0
\end{aligned}$$

$|\overline{SD_1}|$ ist durch α eindeutig bestimmt.

4 Die Idee der mittleren Proportionalen

Die Idee der mittleren Proportionalen durchzieht immer wieder die griechische Geometrie und Mathematik.

4.1 Umformulierung von Hippokrates

Die Lösungsmethode mit zwei mittleren Proportionalen wird Hippokrates zugeschrieben, der in der Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. auf der griechischen Insel Chios geboren wurde. Er studierte in Athen Geometrie und beschäftigte sich dort unter anderem intensiv mit der Quadratur des Kreises [9]. Eine weitere mathematische Leistung war seine Umformulierung der Würfelverdoppelung:

Hippokrates führte das Problem der Würfelverdoppelung auf das Finden zweier mittlerer Proportionalen zurück. Die Verdoppelung des Volumens eines Würfels mit Seitenlänge a verlangt die Seitenlänge $a \cdot \sqrt[3]{2}$. Diese kann bestimmt werden, indem man zwei mittlere Proportionale zwischen den beiden Größen a und $2a$ findet, sodass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Die Frage ist jedoch, wie man zu diesem Ansatz kommen kann. Folgende Überlegung wäre möglich gewesen:

Beginnen wir ausgehend von der Flächenverdoppelung eines Quadrats:

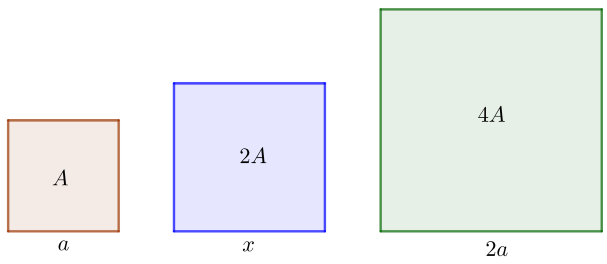

Abbildung: Verdoppelung des Flächeninhalts eines Quadrats.

Die Griechen beschäftigten sich intensiv mit dem Verhältnis von Größen und den daraus folgenden Wechselbeziehungen.

Ein Quadrat mit Seitenlänge a hat die Fläche $A = a^2$. Verdoppelt man die Seitenlänge a, so erhält man ein Quadrat mit vierfachem Flächeninhalt. Ein Quadrat mit dem doppeltem Flächeninhalt des Ursprungquadrats hätte die Seitenlänge x. Verdoppelt man dieses Quadrat wieder, so ergibt sich dann ein Flächeninhalt von $4A$. Dieses Quadrat hat dann die Seitenlänge $2a$.

Da es sich in beiden Fällen um Verdoppelungen des Flächeninhalts handelt, gilt die Verhältnisbeziehung:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}.$$

Daraus folgt die bekannte Beziehung

$$2a^2 = x^2$$

beziehunsgweise

$$x = a \cdot \sqrt{2}.$$

Überträgt man diese Überlegung auf die Würfelverdoppelung, so folgt:

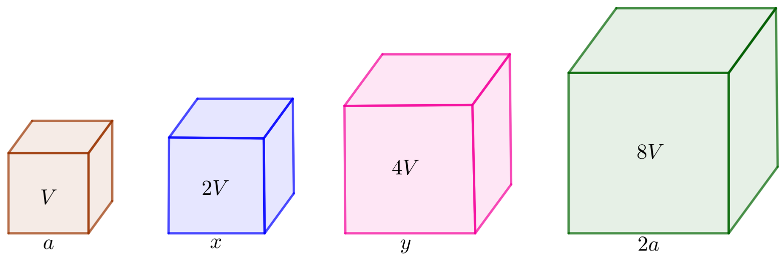

Abbildung: Umformulierung der Würfelverdoppelung.

Hat der Ausgangswürfel die Seitenlänge a und das Volumen V, so hat der Würfel mit der Seitenlänge $2a$ das Volumen $8V$. Der Würfel mit dem doppelten Volumen $2V$ hätte die Seitenlänge x. Verdoppelt man das Volumen dieses Würfels wieder, so bekommt man einen Würfel mit Seitenlänge y und Volumen $4V$. Wird dieser Würfel verdoppelt, erhält man den Würfel mit dem Volumen $8V$. Dieser hat aber die Seitenlänge $2a$.

Da es sich immer um Würfelverdoppelungen handelt, muss folgende Beziehung gelten:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Ob Hippokrates von Chios die obigen Überlegungen tatsächlich so angestellt hat, ist nicht überliefert. Da die einzelnen Gedankenschritte jedoch mit den Mitteln der damaligen Zeit umsetzbar sind, ist es durchaus denkbar, dass Hippokrates auf diese Weise zu seiner Umformulierung der Würfelverdoppelung gekommen ist.

Ergibt diese Vorgangsweise nun tatsächlich die Seitenkante des verdoppelten Würfels?

Wir können

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$$

auf

$$y = \frac{2a^2}{x}$$

umformen, und es folgt

$$\frac{a}{x} = \frac{x^2}{2a^2}$$

und weiters

$$2a^3 = x^3.$$

Das ist äquivalent zu

$$x = a \cdot \sqrt[3]{2},$$

was die Lösung unseres Problems ist.

Die Seitenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen ist dann x, ausgehend von dem Würfel mit Seitenlänge a.

Als zusätzliches Ergebnis bekommt man mit y die Seitenlänge eines Würfels mit vierfachem Volumen.

Der obige Ansatz der mittleren Proportionalen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

kann nun erweitert werden zur Beziehung zwischen zwei beliebigen Größen a und b:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Diese verallgemeinernde Beziehung wurde von den Griechen auch mehrfach angewendet - zum Beispiel von Archimedes in seinem Werk zu *Kugel und Zylinder*.

4.2 *Kugel und Zylinder* von Archimedes

Archimedes von Syrakus, der im 3. Jahrhundert v. Chr. auf der Insel Sizilien geboren wurde, zählt wahrscheinlich zu den bekanntesten Mathematikern aller Zeiten. Man weiß wenig über sein Leben [15] - es ist jedoch belegt, dass Archimedes im zweiten punischen Krieg verstorben ist. Was zusätzlich erhalten geblieben ist, sind einige seiner mathematischen Erkenntnisse, die in Schriften zusammengefasst sind. Diese behandeln unter anderem Kugel, Zylinder, Spiralen, Konoide und Sphäroide. Durch Archimedes regelmäßige Korrespondenz mit anderen Mathematikern sind viele seiner Schriften in Form von Briefen erhalten geblieben. Es ist nicht überliefert, wann die einzelnen Briefe zu vollständigen Abhandlungen zusammengefasst wurden - bekannt ist jedoch, dass die Werke im 9. Jahrhundert n. Chr. in Byzanz zu einem gesammelten Werk zusammengefasst wurden. Damals war es üblich, Kodizes nach gewissen Themen zu erstellen. Nur selten wurden hingegen die Werke eines Mathematikers in einem Kodex gesammelt, wenn darin verschiedene Themen behandelt wurden. Die Tatsache, dass ein Kodex einer Person gewidmet wurde, zeigt die Hochachtung gegenüber Archimedes Erkenntnissen.

Zu Archimedes bemerkenswertesten Werken zählt wahrscheinlich die zweibändige Schrift über Kugel und Zylinder, in der behandelt wird, wie man den Flächeninhalt der Oberfläche sowie das Volumen dieser beiden Körper berechnet [15]. Hier sei anzumerken, dass Archimedes keinenfalls eine Schrift über Kugel *und* Zylinder verfasst hat. Vielmehr wurden die beiden Werke später zusammengefasst.

Netz merkt an, dass Archimedes in beiden Bänden sehr kompliziert und überraschend arbeitet. Er gibt die Lösungen schon zu Beginn an, wie man in folgendem Brief an Dositheus lesen kann, der dem ersten Band vorausgeht [15]:

> Archimedes to Dositheus: Greetings. Earlier, I have sent you some of what we had already investigated then, writing it with a proof [...]. Later, theorems worthy of mention suggested themselves to us, and we took the trouble of preparing their proofs. They are these: first, that the surface of every sphere is four times the greatest circle of the circles in it.

Archimedes schreibt dann einige Kapitel über andere geometrische Figuren und Körper, die scheinbar nichts mit der Thematik zu tun haben und deren Relevanz nicht offensichtlich ist, nur um schlussendlich alle gewonnen Erkenntnisse zum Beweis der ursprünglichen Behauptung zu verwenden.

Andererseits verblüfft die Schrift durch ihre Einfachheit - denn Archimedes verwendet nur Figuren, die aus Kreisen und Strecken bestehen und verzichtet auf spezielle Kurven. Nachdem der Grundstein mittels einiger aneinander gereihter Propositionen gelegt ist, beweist Archimedes die verschiedensten mathematischen Theoreme, die nicht miteinander in Zusammenhang stehen. Die Reihenfolge dieser Theoreme ist irrelevant [15]. Im ersten Band verwendet Archimedes eine mittlere Proportionale x zwischen zwei Längen a und b, sodass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

gilt. Hier fehlt die Angabe, wie diese zu bestimmen ist, allerdings findet man die entsprechende Lösung in Proposition 13 im sechsten Buch der *Elemente*.

Interessant ist, dass sich der erste Band über *Kugel und Zylinder* weitestgehend mit Theoremen beschäftigt. Das bedeutet, dass hier Beweise für die Richtigkeit der ermittelten Ergebnisse geführt werden. Im Gegensatz dazu behandelt der zweite Band vorrangig Probleme. In diesem Fall steht die Ermittlung des Lösungsweges im Vordergrund [15].
Dem zweiten Band zu *Kugel und Zylinder* ist wieder ein Brief von Archimedes an Dositheus vorangestellt [15]:

> Archimedes to Dositheus: greetings. Earlier you sent me a request to write the proofs to the problems [...]. Now, I have sent you these theorems and problems that are proved [...]. Of the problems, the first was this: Given a sphere, to find a plane area equal to the surface of the sphere. And this is obviously proved [...]; for the quadruple of the greatest circle of the circles in the sphere is both, a plane area, and equal to the surface of the sphere.

Auch hier ist die Lösung des Problems bereits in der Einleitung enthalten. Zusätzlich zu dem oben genannten Problem will Archimedes auch den Lösungsweg für ein weiteres Problem finden: eine Kugel zu finden, deren Volumen gleich dem Volumen eines gegebenen Kegels oder Zylinders sei. Beim Ermitteln der Lösung für dieses Problem verwendet Archimedes zwei mittlere Proportionale zwischen a und b, sodass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

gelten muss.

Allerdings fehlt die Erklärung zur Ermittlung von diesen beiden mittleren Proportionalen.

Hier setzt Eutocius an, der in seinem Kommentar zu *Kugel und Zylinder* zwölf von verschiedenen Mathematikern entwickelte Lösungsverfahren zur Ermittlung dieser beiden mittleren Proportionalen sammelt.

4.3 Kommentar des Eutocius

Eutocius, geboren im späten 5. Jahrhundert n. Chr., verfasste zu beiden Bänden zu *Kugel und Zylinder* von Archimedes einen Kommentar. Im Prolog des ersten Bandes gibt Eutocius an, dass der Kommentar seinem Lehrmeister Ammonius gewidmet sei. Es handle sich bei Archimedes Werk um eine äußerst komplizierte Abhandlung, und es hätte noch nie zuvor ein Mathematiker versucht, diese zu erklären. Eutocius ortete also sozusagen eine Lücke, die er mit seinem Werk zu füllen versuchte [14].

Nachdem er den Kommentar zum ersten Band vollendet hatte, widmete er sich dem Folgeband. Gleich in Archimedes erstem Theorem stößt sich Eutocius an dessen selbstverständlicher Verwendung der zwei mittleren Proportionalen, auf denen seine weiteren Überlegungen basieren. Während Archimedes diese als gegeben annimmt, möchte sich Eutocius mit der Konstruktion der selben befassen. Deswegen sammelt er die Lösungsverfahren von zwölf verschiedenen Mathematikern, die sich mit dieser Thematik auseinandergesetzt haben: Eratosthenes, Archtyas, Menaichmos, Nikomedes, Appolonius, Philon, Heron, Diokles, Pappos, Sporus, Eudoxus und Platon.

Diese Lösungsverfahren arbeiten alle mit Hilfsmitteln, die über die Verwendung von Zirkel und Lineal hinausgehen. Beispielsweise verwendet Menaichmos Parabeln und Hyperbeln, Archytas schneidet einen Torus mit einem Kegel und einem Zylinder und Diokles verwendet eine krumme Linie, die Efeukurve genannt wird. Es ist höchst bemerkenswert, dass sich im Laufe der Jahrhunderte so viele Mathematiker mit der Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen befasst und versucht haben, Lösungsverfahren zu entwickeln. Aus heutiger Sicht ist die Komplexität der unterschiedlichen Ansätze beeindruckend, wenn man bedenkt, welches Instrumentarium damals zur Verfügung stand. Einige der zwölf Geometer mussten eine enorme Vorstellungskraft besessen haben - manche der Lösungswege sind trotz modernen Equipments, auf das wir heutzutage zurückgreifen können, nur schwer nachzuvollziehen.

5 Die Neusis-Methode

Die Neusis-Methode ist eine Vorgangsweise, bei der eine geometrische Konstellation - meistens zwei zusammenhängende Strecken - in eine andere geometrische Konstellation auf eine gewünschte Weise eingefügt wird. Das ist meistens nicht einfach und läuft auf ein Probieren hinaus. Es galt als Ideal, Konstruktionsschritte zu verwenden, die in den *Elementen* aufgeführt waren - die Konstruktion von Punkten, Geraden und Kreisen sowie das Schneiden der beiden letzteren. Manchmal wich man von diesem Ideal ab; ein Beispiel dafür ist die Neusis.

Für die Griechen war nicht der Vorgang des Einfügens das Wesentliche, sondern was man aus so einer Konstellation herauslesen kann [19]. Das Neusis-Lineal war ein Lineal mit zwei Markierungen, was dem griechischen Grundsatz eigentlich widerspricht - es durften ja nur unmarkierte Lineale verwendet werden.

Als Beispiel dazu sei folgende Konstellation nach Archimedes angenommen [10]:

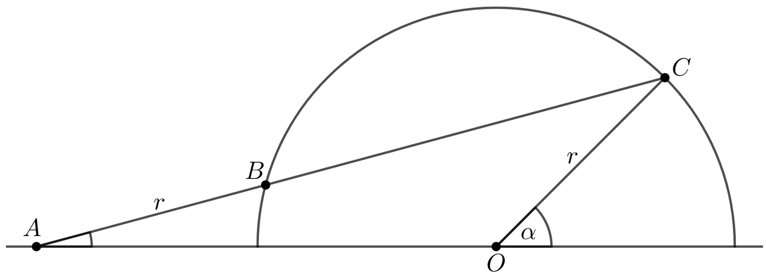

Abbildung: Ausgangskonstellation.

Ein Halbkreis mit Radius r ist gegeben. Vom Mittelpunkt O zeichnen wir unter dem Winkel α eine Gerade. Diese schneidet den Halbkreis im Punkt C. Von C ausgehend zeichnen wir eine Gerade derart, dass der Abstand der Schnittpunkte A und B wieder r ergibt.

Ergänzt man die Ausgangskonstellation, erkennt man Folgendes:

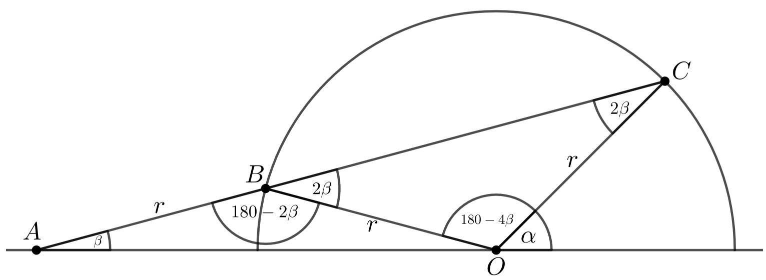

Abbildung: Erweiterte Skizze.

Den Winkel bei A bezeichnen wir als β. Da das Dreieck ABO gleichschenkelig ist, tritt der Winkel β auch bei O auf. Der Winkel des Dreiecks bei B ist demnach

$180° - 2\beta$. Der Winkel im Dreieck BOC bei B ist dann 2β. Da auch das Dreieck BOC gleichschenkelig ist, tritt der Winkel 2β auch bei C auf. Der Winkel des Dreiecks bei O ist dann $180° - 4\beta$. Daraus ergibt sich beim Mittelpunkt O

$$\begin{aligned} & 180° = \beta + (180° - 4\beta) + \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & 4\beta - \beta = \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & 3\beta = \alpha \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\beta = \frac{\alpha}{3}.$$

β ist also der dreigeteilte Winkel von α. Bis hierhin ist alles mathematisch korrekt. Wie man zu der anfänglichen Konstruktion kommt, ist hier nicht die primäre Frage.

Wir wollen uns im Folgenden der Sicht der Griechen anschließen und analysieren, wie weit die von den Griechen vorgeschlagenen konstruktiven Konstellationen zum gewünschten Ergebnis der Würfelverdoppelung führen.

6 Zwölf Verfahren zur Würfelverdoppelung

Wie zuvor erwähnt, nahm Eutocius in seinem Kommentar zu *Kugel und Zylinder* die von Archimedes selbstverständliche Verwendung von zwei mittleren Proportionalen nicht ohne weiteres hin. Archimedes ging in seinen Schriften nämlich nicht auf die Konstruktion dieser Proportionalen ein, sondern nahm sie als gegeben an. Die zwölf von Eutocius gesammelten Lösungsverfahren zu dieser Problematik werden in den folgenden Unterkapiteln mathematisch beschrieben und veranschaulicht.

6.1 Eratosthenes

Eratosthenes von Kyrene wurde im 3. Jahrhundert v. Chr. im heutigen Shahat in Lybien geboren. Er tauschte sich mit Archimedes zu den Fragestellungen der Alexandriner Mathematiker aus. Wie viele seiner Zeitgenommen war Eratosthenes in mehreren Bereichen tätig. Er war nicht nur an Mathematik, sondern auch auch Philosophie, Geschichte und Astronomie sowie an der Vermessung der Welt interessiert [9].

Neben seiner berühmtesten mathematischen Entdeckung, dem Sieb des Eratosthenes, ist dem Mathematiker auch eine der Lösungen zur Würfelverdoppelung zuzuordnen, die in der Folge beschrieben wird. Die Kurzfassung seiner Lösung findet man auf einer der Säulen des Serapeums, einer Tempelanlage im ägyptischen Sakkara, wo sie König Ptolemäus III. präsentiert wurde [9].

Eratosthenes von Kyrene entwickelte ein mechanisches Verfahren für Hippokrates Umformulierung der Würfelverdoppelung [9].

Wie in der untenstehenden Abbildung in Anlehnung an Pappos Vorgehensweise [9] gezeigt, haben wir einen Rahmen, begrenzt von den Parallelen AX und EY. In dem Rahmen befinden sich die Dreiecke AFM, MGN und NHQ. Zusätzlich befindet sich auf der zu AX normalen Kathete des Dreiecks NHQ der Punkt D.

In der folgenden Abbildung sind $\overline{AE}$ und $\overline{DH}$ die parallelen Längen, zu denen zwei mittlere Proportionale gefunden werden sollen. Die beiden rechten Dreiecke, also MGN und NHQ, werden also nach links verschoben, bis sich die Punkte B und C auf der Strecke AK befinden und sich die Dreiecke gegenseitig überlappen. Dabei sei K der Punkt, in dem sich die Geraden durch die Punkte A und D sowie E und H schneiden.

Die zwei gesuchten mittleren Proportionalen sind dann genau die Längen $\overline{CG}$ und $\overline{BF}$. Der Beweis erfolgt folgendermaßen:

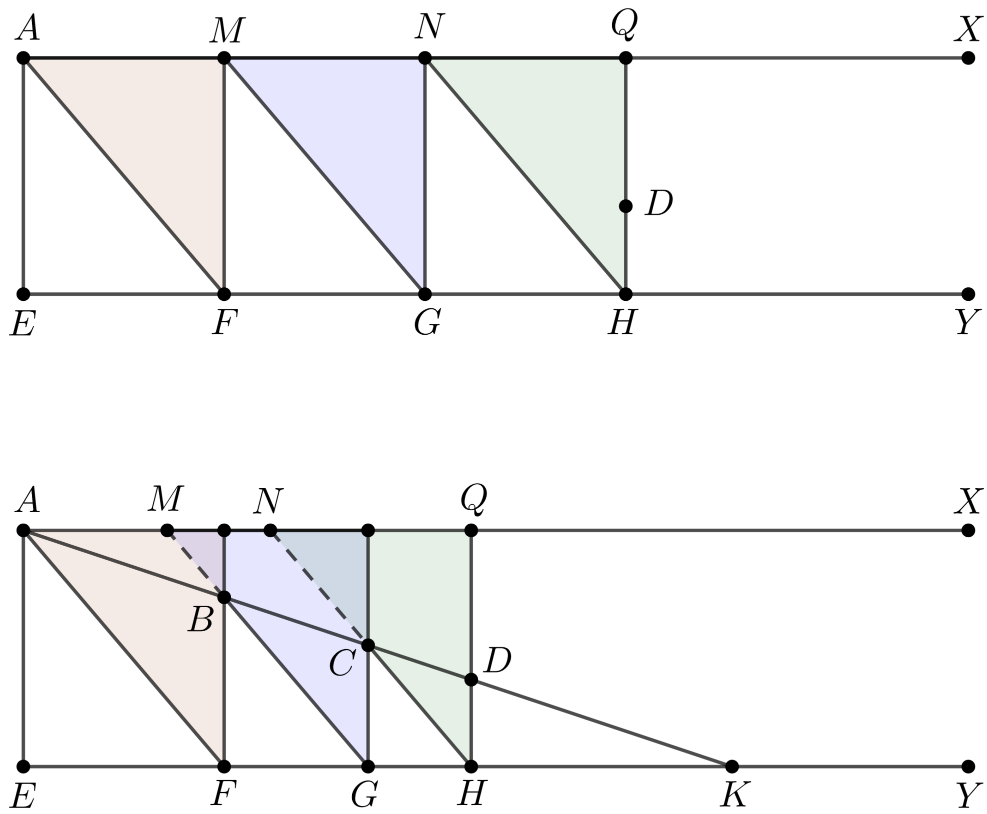

Abbildung: Eratosthenes mechanisches Verfahren.

Da AEK und BFK ähnliche Dreiecke sind, gilt

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{AK}|}{|\overline{BK}|}.$$

Weiters sind AFK und BGK ähnliche Dreiecke; somit

$$\frac{|\overline{AK}|}{|\overline{BK}|} = \frac{|\overline{FK}|}{|\overline{GK}|}.$$

Zuletzt sind die Dreiecke BFK und CGK ähnlich, weswegen

$$\frac{|\overline{FK}|}{|\overline{GK}|} = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{CG}|}$$

gilt.

Aus den drei Relationen folgt sofort

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{CG}|}.$$

Es gilt außerdem

$$\frac{|\overline{BF}|}{|\overline{CG}|} = \frac{|\overline{BK}|}{|\overline{CK}|},$$

da die Dreiecke BFK und CGK ähnlich sind. Weiters sind die Dreiecke BGK und CHK ähnlich, also

$$\frac{|\overline{BK}|}{|\overline{CK}|} = \frac{|\overline{GK}|}{|\overline{HK}|},$$

und schließlich, da $\triangle CGK$ und $\triangle DHK$ ähnlich sind,

$$\frac{|\overline{GK}|}{|\overline{HK}|} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{DH}|}.$$

Aus diesen Relationen folgt sofort

$$\frac{|\overline{BF}|}{|\overline{CG}|} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{DH}|},$$

und wir erhalten

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{CG}|} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{DH}|}.$$

Die beiden Längen $|\overline{BF}|$ und $|\overline{CG}|$ sind die beiden gesuchten mittleren Proportionalen.

Im speziellen Fall der Würfelverdoppelung gilt:

$$|\overline{AE}| = 2 \cdot |\overline{DH}|.$$

6.2 Archytas

Archytas Lösungsverfahren wird in [9] als das bemerkenswerteste tituliert. Archytas, der in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr. lebte, versuchte, eine Lösung für Hippokrates Umformulierung der Würfelverdoppelung im dreidimensionalen Raum zu finden. Bei diesem Verfahren werden ein Kegel, ein Zylinder und ein Torus mit Innendurchmesser Null geschnitten, und $a < b$ sind die beiden Größen, für die eine mittlere Proportionale gefunden werden soll [1], [9].

Der Kegel wird im Koordinatensystem mit der Spitze in den Nullpunkt gelegt. Die Kegelachse ist die x-Achse . Die Höhe des Kegels wird mit a bezeichnet, die Länge der Mantellinie bis zur Höhe a sei b.

Sei Punkt $P(x|y|z)$ ein beliebiger Punkt auf der Kegelmantelfäche. Betrachten wir die untenstehende Abbildung, sehen wir, dass

$$y^2 + z^2 = r^2$$

gilt.

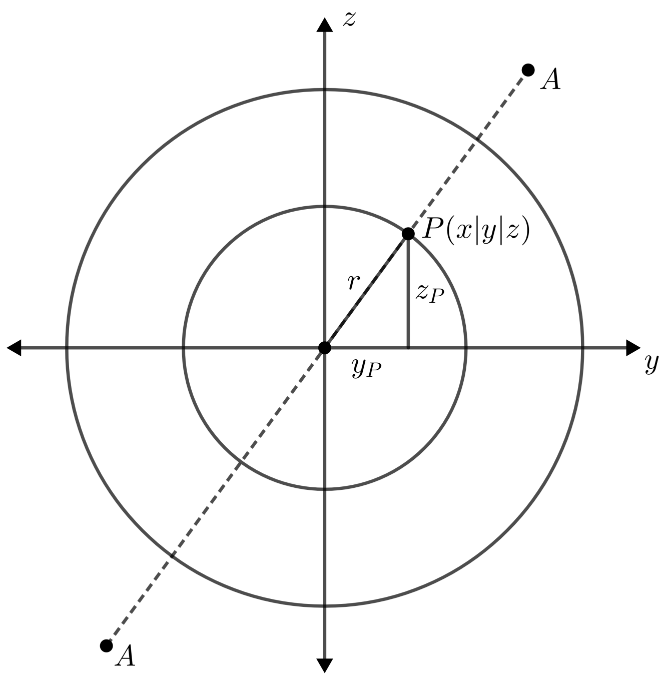

Abbildung: Kegelquerschnitt.

Weiters folgt aus den Verhältnissen gemäß Schnitt A-A

$$\frac{r}{x} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

beziehungsweise

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \cdot x.$$

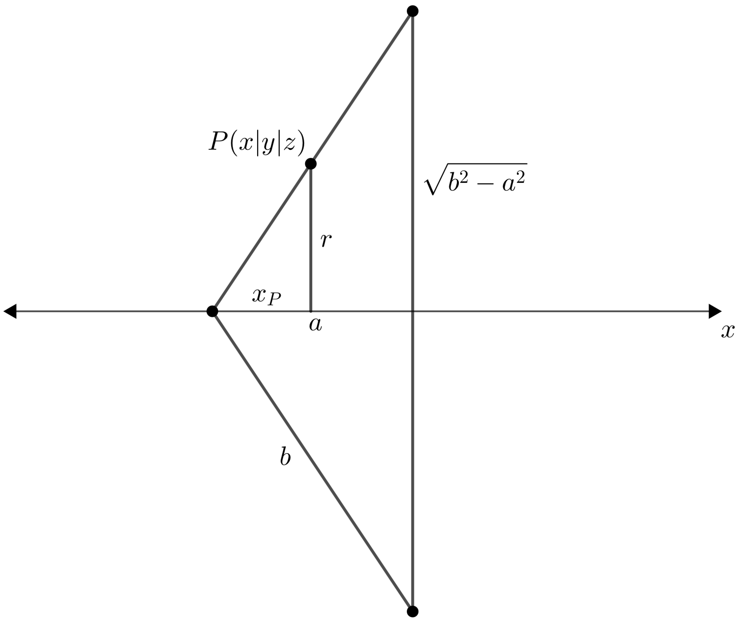

Abbildung: Schnitt A-A.

Wir erhalten somit

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cdot x^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - x^2.$$

Die Gleichung der Kegelmantelfäche ist somit

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

wobei $a < b$ und $x \geq 0$.

Widmen wir uns dem Zylinder. Wie auf der untenstehenden Abbildung ersichtlich, steht dieser auf der xy-Ebene. Seine Achse geht durch den Punkt $(\frac{b}{2}|0|0)$ und der Radius ist $r = \frac{b}{2}$.

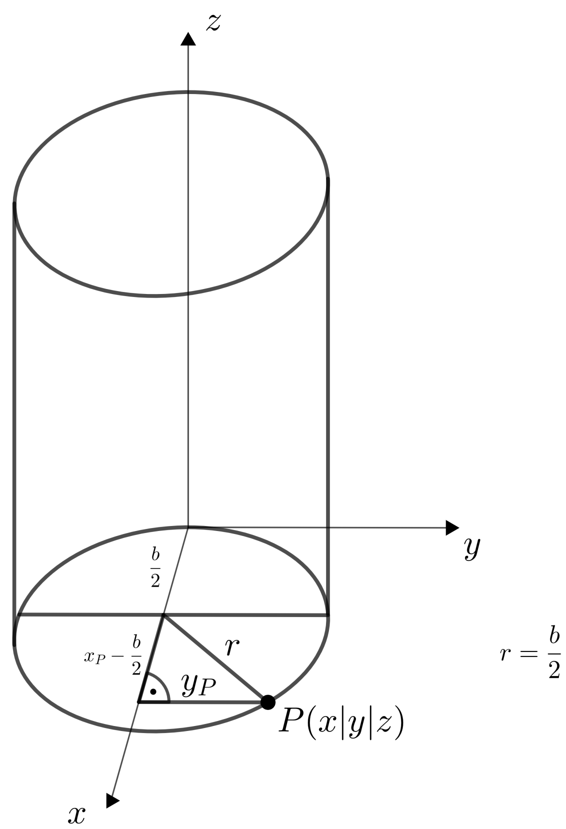

Abbildung: Herleitung der Zylindergleichung.

Die Gleichung des Zylinders ist für alle z gegeben durch

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

was man auf

$$x^2 + y^2 = bx$$

umformen kann.

Ein Torus entsteht, wenn man einen senkrecht stehenden Kreis um eine vertikale Achse rotiert. Dabei gibt r den Radius des Kreises an und R den Abstand zur Rotationsachse.

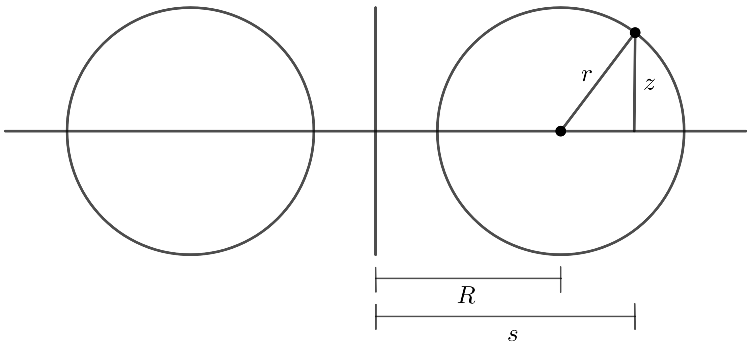

Abbildung: Allgemeiner Torus.

Wir wollen die allgemeine Torusgleichung herleiten. Wie anhand der Abbildung ersichtlich, gilt

$$(s-R)^2 + z^2 = r^2.$$

Da

$$s^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{x^2+y^2}$$

ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2+y^2} + R^2 + z^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2+y^2} \\
\Leftrightarrow \quad & (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

In unserem Fall gilt $R = r$, der Innendurchmesser ist also 0.

Es gilt:

$$R = r = \frac{b}{2}.$$

Durch Einsetzen in die Koordinatengleichung erhalten wir

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{b^2}{4} \cdot (x^2+y^2)$$

und durch Wurzelziehen

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

Durch Äquivalenzumformungen kommt man schließlich auf

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{b}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4} \\ \Leftrightarrow\quad & (x^2+y^2)-2\cdot\frac{b}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}+\frac{b^2}{4}+z^2=\frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Da

$$(x^2+y^2)-2\cdot\frac{b}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}+\frac{b^2}{4}=\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{b}{2}\right)^2,$$

erhält man für die obige Gleichung

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{b}{2}\right)^2+z^2=\frac{b^2}{4}.$$

Alternativ gibt es auch eine abgekürzte Variante, um sich die Gleichung des Torus mit Innendurchmesser 0 herzuleiten. Dafür schauen wir uns die untenstehende Abbildung an.

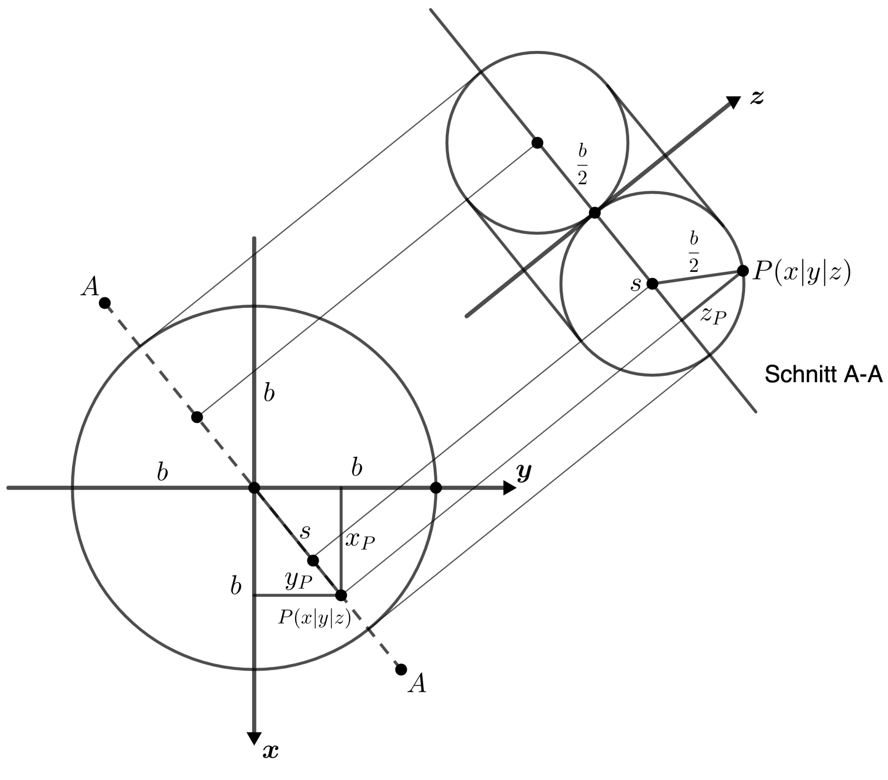

Abbildung: Torus: Aufsicht und Schnitt.

Aus der Torusaufsicht folgt

$$s^2=x^2+y^2$$

beziehungsweise

$$s=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Aus Schnitt A-A erkennt man sofort

$$\left(s-\frac{b}{2}\right)^2+z^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Oben eingesetzt ergibt das

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{b}{2}\right)^2+z^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Wir wollen die drei Flächen nun schneiden und beginnen, ähnlich wie in [1], mit Kegel und Zylinder. Wenn man die Zylindergleichung quadriert und durch a^2 dividiert, erhält man

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a^2}=\frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Durch Gleichsetzen mit der Kegelgleichung bekommt man

$$x^2+y^2+z^2=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a^2},$$

was man durch Wurzelziehen auf

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2}{a}$$

umformen kann.

Dividiert man diese Gleichung durch $\sqrt{x^2+y^2}$, erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2}{a}\\
\Leftrightarrow\quad & x^2+y^2+z^2=\frac{(x^2+y^2)^2}{a^2}
\end{aligned}$$

als Schnittkurve von Kegel und Zylinder.

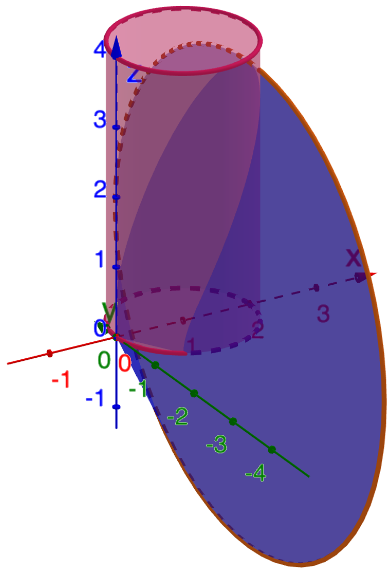

Abbildung: Schnittkurve.

Schneidet man Zylinder und Kegel nun auch mit dem Torus, so durchdringt die Schnittkurve von Zylinder und Kegel die Torusoberfläche an vier Punkten:

$$P_1(x_P|y_P|z_P),\ P_2(x_P|-y_P|z_P),\ P_3(x_P|y_P|-z_P),\ P_4(x_P|-y_P|-z_P).$$

Da die Punkte sowohl am Kegelmantel als auch am Zylindermantel und am Torusmantel liegen, erfüllen ihre Koordinaten alle drei Gleichungen. Für die weitere Behandlung reicht es, einen Punkt herauszunehmen. Für diesen Punkt gilt dann

$$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = \frac{\left(x_P^2 + y_P^2\right)^2}{a^2} = b \cdot \sqrt{x_P^2 + y_P^2}.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} & b \cdot \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 \\ \Leftrightarrow \quad & b = \frac{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{b}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}}{b}.$$

Da, wie vorher gezeigt, auch

$$\frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{a}$$

beziehungsweise umgekehrt

$$\frac{a}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}}$$

gilt, können wir beide Relationen zu

$$\frac{a}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}} = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}}{b}$$

zusammenfassen.

Die Längen $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ und $\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$ sind die zwei mittleren Proportionalen zu den Größen a und b.

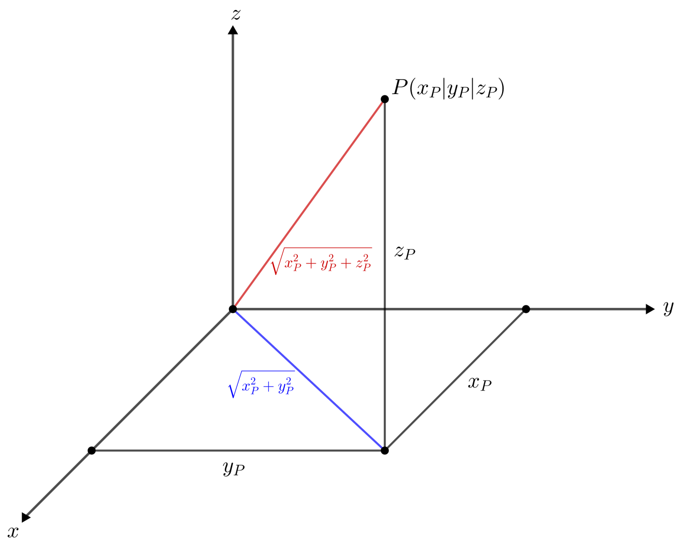

Abbildung: Projektion des Schnittpunktes.

Wie oben ersichtlich, ist $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ der Abstand der Projektion des Schnittpunktes auf die xy-Ebene vom Nullpunkt und $\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$ ist der Abstand des Punktes zum Nullpunkt.

Setzt man $b = 2a$, und ist a die Seitenlänge des Ausgangswürfels, so ist die Länge $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ die Seitenlänge des Würfels mit verdoppeltem Volumen.

Heath beschreibt Archytas Methode rein geometrisch [9].

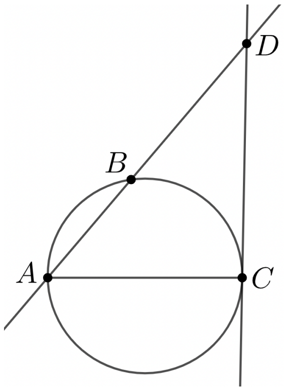

Abbildung: Veranschaulichung von Archytas Methode.

Wie vorher wollen wir zwei mittlere Proportionale finden, dieses Mal zwischen den beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Die drei Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis, wobei $|\overline{AC}|$ genau die Länge des Durchmessers des Kreises sei. Zwischen den Punkten A und B liegt eine Kreissehne. Zusätzlich verläuft durch den Punkt C eine Tangente, die die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt D schneidet.

Der Kreis, der durch die Punkte A, B und C gegeben ist, ist der waagrechte Querschnitt eines Zylinders. Zusätzlich verläuft ein weiterer Kreis durch die Punkte A und C - dieser steht orthogonal zum ersten Kreis.

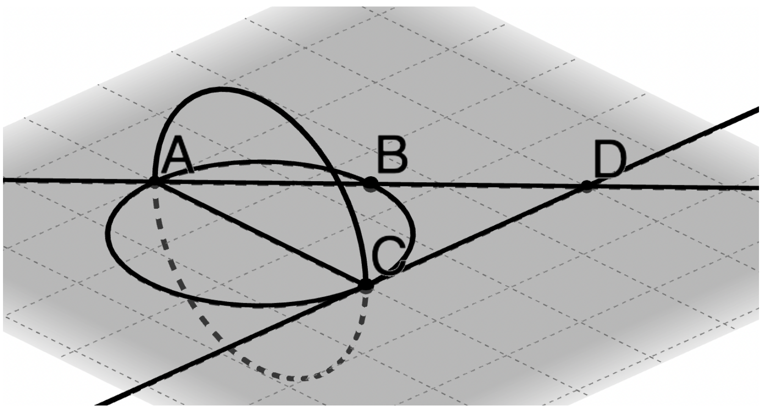

Abbildung: Zylinder, Torus und Kegel: Zwischenschritt.

Durch den Punkt A soll eine Achse gehen, die ebenfalls senkrecht auf den ersten Kreis steht. Der zweite Kreis rotiert um diese Achse und bildet dadurch einen Torus. Wir haben also nun einen Torus und einen Zylinder, die einander schneiden. Dabei entsteht eine Kurve, die als Kurve des Archytas bezeichnet wird.

Betrachten wir nun das Dreieck ACD. Dieses rotiert um die Achse durch die Punkte A und C und bildet dabei einen Kegel. Der Punkt B bewegt sich dabei auf dem Kreis

BTE, der senkrecht auf der von den Punkten A, B und C aufgespannten Ebene steht.

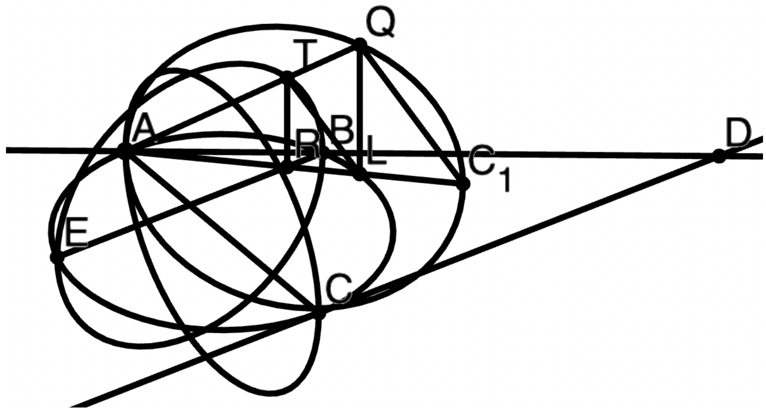

Abbildung: Zylinder, Torus und Kegel.

Der Durchmesser dieses Kreises (die Strecke $\overline{BE}$) steht im rechten Winkel zur Strecke $\overline{AC}$. Im Punkt Q trifft die Kurve des Archtyas den oben genannten Kegel.

Weiters rotiert, wie zuvor erwähnt, der senkrechte Kreis durch die Punkte A und C um die Achse durch A und berührt natürlich irgendwann den Punkt Q. Dadurch wird der Punkt C_1 gebildet. Die Strecke AC_1 trifft die Kreislinie des Kreises ABC im Punkt L. Die Gerade durch die Punkte Q und L steht senkrecht zur von den Punkten A, B und C aufgespannten Ebene und es ist klar, dass L auf der Kreislinie des Kreises ABC liegen muss, weil Q ja auf dem Zylinder liegt, der die Grundfläche ABC hat.

Verbindet man die Punkte A und Q, erhält man den Punkt T als Schnittpunkt mit dem Kreis BTE. Außerdem schneidet die Strecke $\overline{AC_1}$ den Durchmesser dieses Kreises (die Strecke $\overline{BE}$) im Punkt R. Auch die Gerade durch die Punkte T und R steht im rechten Winkel zur von den Punkten A, B und C aufgespannten Ebene, da die Kreise AC und BTE beide im rechten Winkel zum Kreis ABC stehen, der auf dieser Ebene liegt. Somit ist $\overline{TR}$ orthogonal zu $\overline{BE}$, da sich die beiden Halbkreise entlang dieser Strecke schneiden.

Da $\angle ETB$ ein rechter Winkel ist, folgt aus dem Höhensatz

$$|\overline{RT}|^2 = |\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}|.$$

Weiters wird behauptet, dass

$$|\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| = |\overline{AR}| \cdot |\overline{RL}|$$

ist. Der Beweis dieses Sachverhalts ist in Euklids drittem Buch der *Elemente* zu finden - es handelt sich dabei um Proposition 35 [8] beziehungsweise den Sehnensatz.

Der Vollständigkeit halber bringen wir einen Beweis, der an unsere Fragestellung angepasst ist:

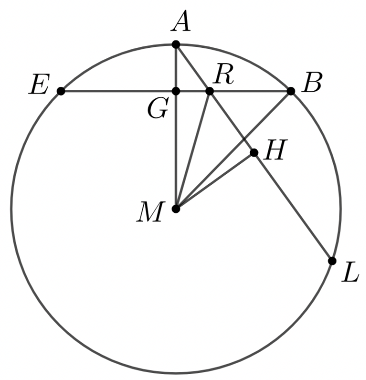

Abbildung: $|\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| = |\overline{AR}| \cdot |\overline{RL}|$.

Die Geraden AL und EB schneiden sich im Punkt R. Da in unserem Fall R nicht der Mittelpunkt des Kreises ist, ist der Beweis der Behauptung $|\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| = |\overline{AR}| \cdot |\overline{RL}|$ nicht trivial.

Die Gerade MG beziehungsweise MA steht im rechten Winkel zur Gerade EB und schneidet diese im Punkt G; die orthogonalen Geraden MH und AL schneiden sich im Punkt H. Wenn eine Sehne, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, auf eine andere, die nicht durch M geht, normal steht, dann wird Letztere durch die Sehne halbiert. Also halbiert MH die Strecke $\overline{AL}$ und es folgt $|\overline{AH}| = |\overline{HL}|$. $\overline{AL}$ wird demnach von H in zwei gleich lange und von R in zwei ungleich lange Strecken geteilt. Anhand der untenstehenden Abbildung, die Proposition 5 aus dem zweiten Buch der *Elemente* illustriert [8], erkennt man gut, dass der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $x = |\overline{AH}|$ gleich der Summe der Flächeninhalte des Rechtecks mit den Seitenlängen $2x - y = |\overline{RL}|$ und $y = |\overline{AR}|$ und des Quadrats mit der Seitenlänge $x - y = |\overline{RH}|$ ist.

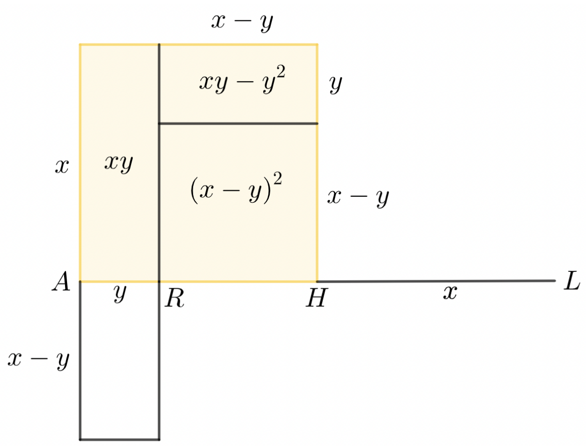

Abbildung: $|\overline{AH}|^2 = |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RH}|^2$.

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} |\overline{AH}|^2 &= |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RH}|^2 \\ \Leftrightarrow \quad |\overline{AH}|^2 + |\overline{MH}|^2 &= |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RH}|^2 + |\overline{MH}|^2 \end{aligned}$$

Da die Dreiecke $\triangle MHR$ und $\triangle MHA$ rechtwinkelig sind, gilt

$$|\overline{MH}|^2 + |\overline{RH}|^2 = |\overline{RM}|^2$$

und

$$|\overline{MH}|^2 + |\overline{AH}|^2 = |\overline{AM}|^2.$$

Es folgt

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RM}|^2,$$

was äquivalent ist zu

$$|\overline{BM}|^2 = |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RM}|^2,$$

da $|\overline{BM}| = |\overline{AM}|$.

Analog gilt

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{BM}|^2 = |\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| + |\overline{RM}|^2,$$

und somit

$$\begin{aligned} |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| + |\overline{RM}|^2 &= |\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| + |\overline{RM}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overline{RL}| \cdot |\overline{AR}| &= |\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| \end{aligned}$$

$\square$

Es gilt also

$$|\overline{RT}|^2 = |\overline{ER}| \cdot |\overline{RB}| = |\overline{AR}| \cdot |\overline{RL}|,$$

wobei $\angle ATL$ ein rechter Winkel ist, weil das Dreieck ATL den Höhensatz erfüllt. Hinzu kommt, dass die Strecken $\overline{TL}$ und $\overline{QC_1}$ parallel sind, da auch $\angle AQC_1$ ein rechter Winkel ist.

Weiters wird in [9] behauptet, dass

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|}$$

was wir mit Hilfe der untenstehenden Abbildung zeigen wollen.

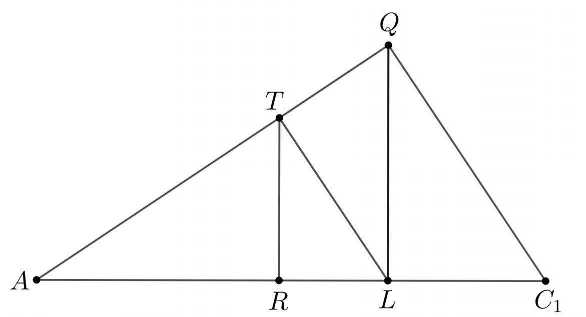

Abbildung: $\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|}$.

In der Abbildung sind die Strecken $\overline{TR}$ und $\overline{QL}$ sowie $\overline{TL}$ und $\overline{QC_1}$ parallel. Außerdem stehen $\overline{TR}$ und $\overline{QL}$ orthogonal auf die Strecke $\overline{AC_1}$, auf der auch die Punkte R und L liegen. Zudem sind $\angle ATL$ und $\angle AQC_1$ rechte Winkel.

Laut dem ersten Strahlensatz muss

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AC_1}|}$$

gelten. Durch einfaches Umformen kommt man auf

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AQ}|} \cdot |\overline{AC_1}| = |\overline{AL}|,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|},$$

womit ein Teil der Gleichheit gezeigt wäre.

Weiters sind die Dreiecke $\triangle ALT$ und $\triangle ALQ$ ähnlich zueinander. Das ist offensichtlich, weil sie drei gleich große Winkel haben: Beide Dreiecke sind rechtwinkelig und haben außerdem den Winkel $\angle QAL$ gemeinsam. Somit muss das Verhältnis der beiden längeren Katheten dem Verhältnis der Hypotenusen entsprechen; in anderen Worten

$$\frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|}.$$

Wir sehen also, dass tatsächlich

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|}$$

gilt.

Gehen wir nun zurück in den dreidimensionalen Raum. Wir erinnern uns, dass der Torus dadurch entsteht, dass ein Kreis um eine Achse durch den Punkt A rotiert, die senkrecht auf die Ebene steht, die durch die Punkte A, B und C aufgespannt ist. Der Punkt C_1 liegt auf eben dieser Ebene - genau so wie Punkt C: Wie wir wissen, liegt C_1 auf einem Kreis mit den Punkten A und Q, wobei Q der Schnittpunkt des Drehkegels mit der Kurve des Archytas ist.

Für uns ist nun relevant, dass demnach

$$|\overline{AC}| = |\overline{AC_1}|$$

sein muss. Somit gilt

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AT}|}.$$

Weiters wissen wir, dass die Strecke $\overline{BE}$ senkrecht auf die Strecke $\overline{AC}$ steht und diese mittig schneidet. Deswegen müssen alle Punkte auf der Kreislinie des Kreises durch die Punkte E, T und B den gleichen Abstand zum Punkt A haben. Daraus folgt, dass $|\overline{AT}| = |\overline{AB}|$ und wir können die Verhältnisgleichung auf

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{AB}|}$$

umformen. Wir haben also zwei mittlere Proportionale zwischen den beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gefunden.

6.3 Menaichmos

Menaichmos ist ein griechischer Mathematiker, der im 4. Jahrhundert v. Chr. gelebt hat. Ihm wird die Entdeckung der Kegelschnitte zugeschrieben. Auch in den zwei Lösungsverfahren, die er zur Würfelverdoppelung entwickelt hat, arbeitet er mit Kegelschnitten. Während beim ersten Verfahren zwei Parabeln geschnitten werden, schneidet Menaichmos beim zweiten Verfahren eine Parabel mit einer Hyperbel [9].

Bevor wir uns jedoch den Lösungsverfahren zur Würfelverdoppelung widmen, werfen wir einen kurzen Blick auf Kegelschnitte per se. Genau genommen gibt es sieben Arten von Kegelschnitten: Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, zwei Geraden, ein Punkt und eine Doppelgerade. Da Menaichmos in seinen Lösungenverfahren mit Parabeln und einer Hyperbel gearbeitet hat, wollen wir uns diese beiden Kegelschnitte etwas näher ansehen, bevor wir uns jeweils den Lösungsverfahren widmen.

Die Parabel kann allgemein als

$$par = \{X \in \mathbb{R}^2 : |XF| = |Xl|\}$$

geschrieben werden. Sie beschreibt also die Menge aller Punkte, die vom Brennpunkt F und der Leitlinie l gleich weit entfernt sind. Der Abstand vom Brennpunkt zur Leitlinie der Parabel wird als Parameter p bezeichnet, wobei $p > 0$ gilt. Durch den Brennpunkt verläuft orthogonal zur Leitlinie die Achse - ihren Schnittpunkt mit der Parabel bezeichnen wir als Scheitel S.

Falls dieser Scheitel auf dem Nullpunkt liegt, gibt es zwei Hauptlagen der Parabel. Liegt die Parabel in erster Hauptlage - in der Abbildung in rot markiert - dann hat der Brennpunkt die Koordinaten $F_1 = (\frac{p}{2}, 0)$ und die Leitlinie ist durch die Gleichung $l_1 : x = -\frac{p}{2}$ gegeben. Eine Parabel in zweiter Hauptlage - in der Abbilung in blau - hat $F_2 = (0, \frac{p}{2})$ als Brennpunkt und die Leitlinie ist durch die Gleichung $l_2 : y = -\frac{p}{2}$ gegeben.

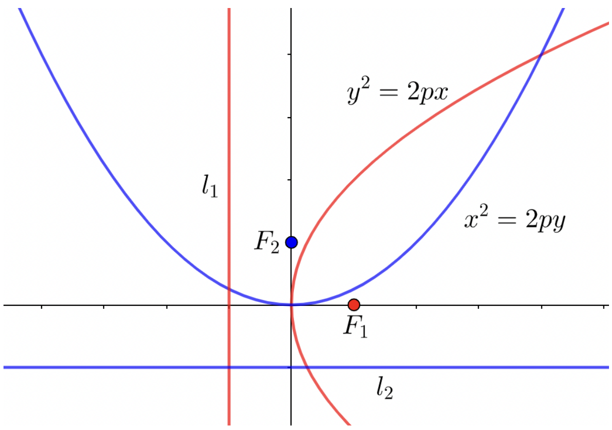

Abbildung: Parabel in erster und zweiter Hauptlage.

Sehen wir uns die Parabel in erster Hauptlage näher an.

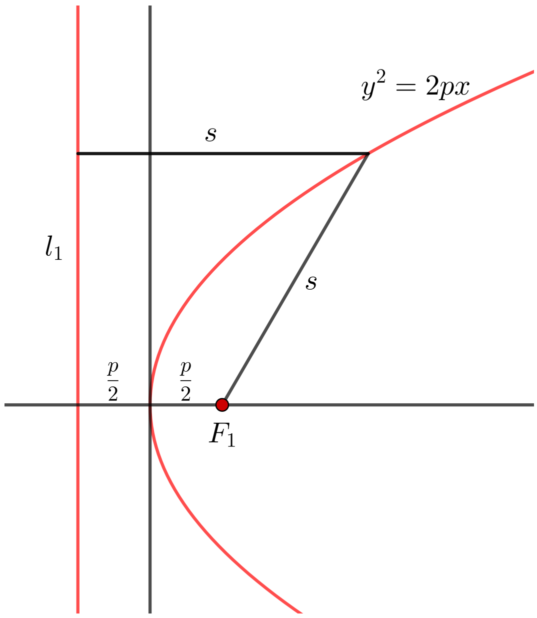

Abbildung: Parabel in erster Hauptlage.

Wie bereits erwähnt, ist eine Parabel die Menge aller Punkte, die von der Leitlinie und vom Brennpunkt gleich weit entfernt sind. Es gilt also

$$X \in par \Leftrightarrow |FX| = |Xl|$$

und, da

$$\overrightarrow{FX} = \begin{pmatrix} x - \frac{p}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$|Xl| = x + \frac{p}{2},$$

folgt

$$\begin{aligned} X \in par \quad & \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ & \Leftrightarrow -px + y^2 = px \\ & \Leftrightarrow y^2 = 2px. \end{aligned}$$

Analog erhält man für die Parabel in zweiter Hauptlage die Funktionsgleichung

$$x^2 = 2py.$$

Widmen wir uns nun dem ersten Lösungsverfahren von Menaichmos. Wie oben beschrieben, werden bei diesem Lösungsversuch, zwei mittlere Proportionale zu ermitteln, zwei Parabeln geschnitten. Wie immer suchen wir nach zwei mittleren Proportionalen x und y zwischen den Längen a und b. Wir suchen also x und y, sodass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Formt man um, erhält man - wie in [9] beschrieben -

$$ay = x^2$$

sowie

$$bx = y^2.$$

Es ist offensichtlich, dass es sich bei der ersten Gleichung um eine Parabel in zweiter Hauptlage handelt, wobei $p_1 = \frac{a}{2}$. Die zweite Gleichung beschreibt eine Parabel in erster Hauptlage mit $p_2 = \frac{b}{2}$.

In [11] wird die erste Lösung wie folgt beschrieben: Menaichmos konstruiert diese beiden Parabeln.

Die zwei Parabeln schneiden sich im Punkt C. Dieser Punkt habe die Koordinaten (x_C, y_C).

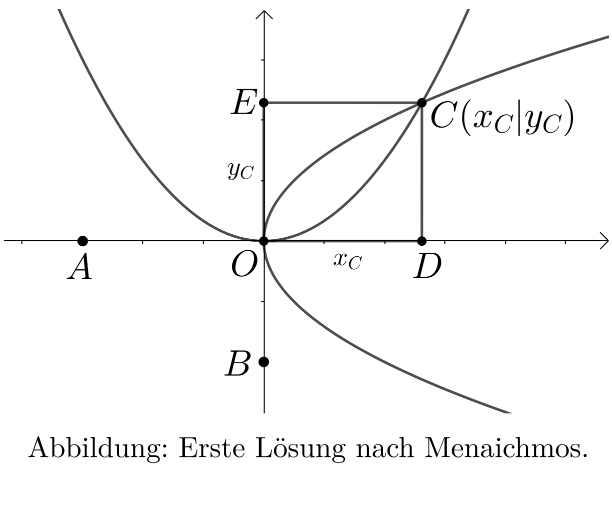

Abbildung: Erste Lösung nach Menaichmos.

Die Koordinaten des Schnittpunktes $(x_C|y_C)$ erfüllen sowohl die Gleichung der Parabel in erster Hauptlage als auch die Gleichung der Parabel in zweiter Hauptlage. Es gilt also

$$y_C{}^2 = b \cdot x_C$$

und

$$x_C{}^2 = a \cdot y_C.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{x_C}{y_C} = \frac{y_C}{b}$$

sowie

$$\frac{x_C}{y_C} = \frac{a}{x_C},$$

folglich

$$\frac{a}{x_C} = \frac{x_C}{y_C} = \frac{y_C}{b}.$$

Das heißt, die x-Koordinate des Schnittpunktes C ist die Seitenlänge des Würfels mit verdoppeltem Volumen und die y-Koordinate die Seitenkante des Würfels mit vierfachem Volumen, für den Fall dass $b = 2a$ gilt.

Menaichmos hat auch den Vorschlag für einen mechanischen Parabelzirkel gemacht [13], [18]. Der Parabelzirkel hätte folgendermaßen aussehen können:

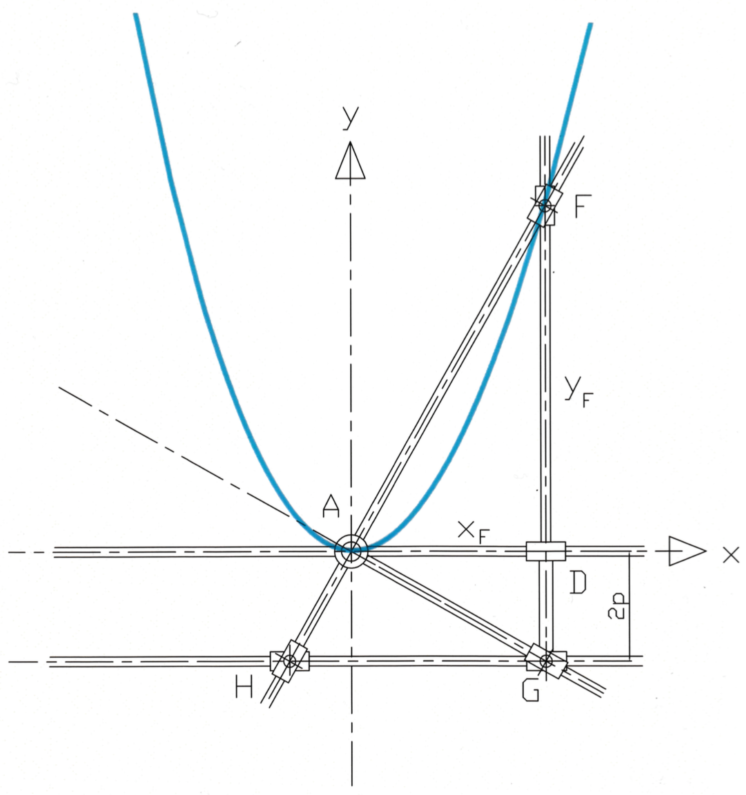

Abbildung: Parabelzirkel.

Es gibt zwei parallele Schienen im Abstand von $2p$. Ein drehbares Kreuz FHG mit rechtem Winkel bei A ist im Scheitelpunkt A der Parabel gelagert. Die Punkte H, G und D gleiten auf den Schienen. Im Punkt F ist das Kreuz mit einer senkrechten

Schiene drehbar und verschiebbar gekoppelt. Dreht man nun das Kreuz, so beschreibt der Punkt F eine Parabel.

Das erklärt sich aus der Beziehung:

Die Dreiecke AGD und ADF sind ähnlich, da AFG ein rechtwinkeliges Dreieck mit Höhe $|\overline{AD}|$ ist. Es gilt daher

$$\frac{2p}{x_F} = \frac{x_F}{y_F}.$$

Das ergibt mit

$$x_F^2 = 2py_F$$

die Gleichung der Parabel.

Man sieht, dass die Griechen außer an einem zusammenklappenden Zirkel durchaus auch an anderen mechanischen Instrumenten zur Lösung geometrischer Probleme interssiert waren.

Bevor wir den zweiten Lösungsversuch beschreiben, wollen wir die Hyperbel allgemein definieren. Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte, für die die Differenz ihrer Abstände von den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 den konstanten Wert $2a$ hat. Es gilt also

$$hyp = \{X : |\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a\}.$$

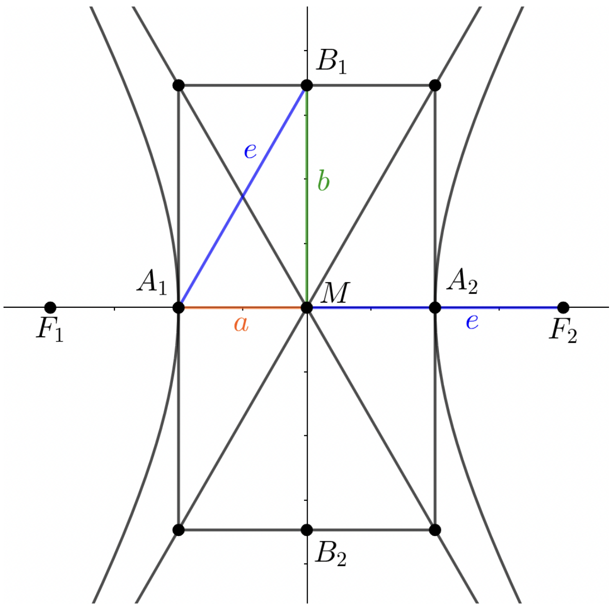

Abbildung: Hyperbel.

Wie man anhand der Abbildung erkennen kann, gilt die Bedingung $|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a$ für beide Äste. Betrachtet man die Äste separat, dann gilt für den rechten Ast $|\overline{XF_1}| - |\overline{XF_2}| = 2a$ und für den linken $|\overline{XF_1}| - |\overline{XF_2}| = -2a$. Dabei beschreibt $2a$ den

Abstand zwischen den Hauptscheitelpunkten A_1 und A_2. Die Gerade $F_1F_2 = A_1A_2$ wird als Hauptachse bezeichnet. Normal auf sie steht die Gerade B_1B_2, die Nebenachse. Die Punkte B_1 und B_2 sind die Nebenscheitel der Hyperbel.

Die Abstände zwischen Mittelpunkt und Haupt- beziehungsweise Nebelscheitelpunkt werden als Halbachsenlängen a und b bezeichnet. Die lineare Exzentrizität ist definiert als

$$e = \overline{|MF_1|} = \overline{|MF_2|}.$$

Die Punkte B_1 und B_2 haben von A_1 und A_2 je den Abstand e. Für eine Hyperbel mit linearer Exzentrizität e, Hauptachsenlänge $2a$ und Nebenachsenlänge $2b$ gilt somit laut Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = e^2.$$

Liegt die Hyperbel wie in der Abbildung in erster Hauptlage, haben die Punkte folgende Koordinaten:

$A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0)$
$B_1 = (0, b), \quad B_2 = (0, -b)$
$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$

Sei $X = (x, y)$ ein Punkt auf der Hyperbel. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{F_1X} = \begin{pmatrix} x+e \\ y \end{pmatrix}$ beträgt $\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$, während $|\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$.

Man kann also rechnen:

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{F_1X}| - |\overrightarrow{F_2X}| = 2a \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Durch Quadrieren erhält man

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

und weitere Umformungsschritte ergeben

$$\begin{aligned}
& x^2+2ex+e^2+y^2 = 4a^2+4a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}+x^2-2ex+e^2+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4ex = 4a^2+4a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & ex = a^2+a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & ex-a^2 = a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{ex-a^2}{a} = \sqrt{(x-e)^2+y^2},
\end{aligned}$$

was wir erneut quadrieren, um

$$\frac{e^2x^2-2a^2ex+a^4}{a^2} = (x-e)^2+y^2$$

zu erhalten.

Das ist wiederum äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& \frac{e^2x^2-2a^2ex+a^4}{a^2} = x^2-2ex+e^2+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & e^2x^2-2a^2ex+a^4 = a^2x^2-2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & e^2x^2+a^4 = a^2x^2+a^2e^2+a^2y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & e^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = -a^4+a^2e^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2(e^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(e^2-a^2).
\end{aligned}$$

Schließlich, da - wie vorher gezeigt - $e^2-a^2=b^2$, erhalten wir

$$x^2b^2-a^2y^2 = a^2b^2,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=1.$$

Somit ist

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung einer Hyperbel in erster Hauptlage. Geht man von $|\overrightarrow{F_1X}|-|\overrightarrow{F_2X}|=-2a$ aus, so erhält man, wie man leicht überprüft, die selbe Gleichung.

Menaichmos verwendet jedoch vermutlich in seiner zweiten Lösung eine Kurve, welche auf einem anderen Bildungsmechanismus basiert.

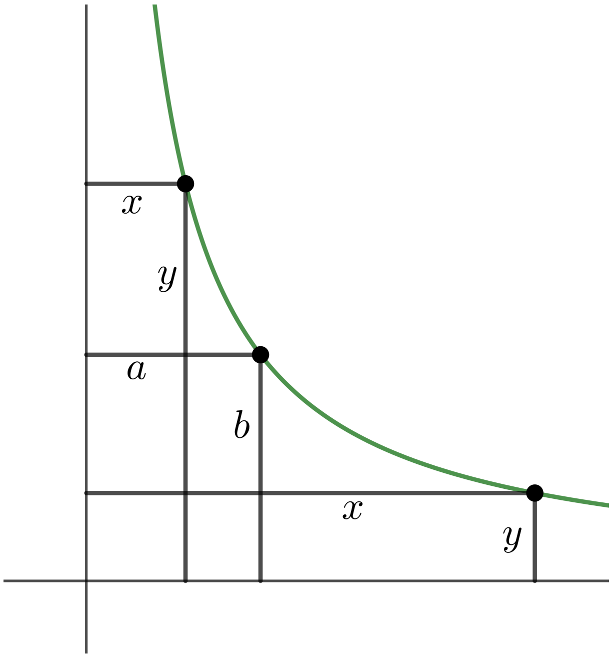

Abbildung: Kurve des Menaichmos.

Diese Kurve verbindet die Eckpunkte von Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Das Ausgangsrechteck wird von den Größen a und b gebildet:

$$x \cdot y = a \cdot b$$

Transponiert man diese Kurve in ein um 45° gedrehtes Koordinatensystem mit den Koordinaten δ und γ, dann erhalten wir für

$$x = \delta \cdot \cos 45° - \gamma \cdot \sin 45° = \delta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\delta - \gamma}{\sqrt{2}}$$

und

$$y = \delta \cdot \sin 45° + \gamma \cdot \cos 45° = \delta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\delta + \gamma}{\sqrt{2}}.$$

Es gilt

$$x \cdot y = \frac{\delta - \gamma}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta + \gamma}{\sqrt{2}} = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{2} = a \cdot b.$$

Die Gleichung der Kurve lautet dann im transponierten Koordinatensystem

$$\frac{\delta^2}{2ab} - \frac{\gamma^2}{2ab} = 1.$$

So ist diese Kurve tatsächlich eine gleichseitige Hyperbel, wie oben hergeleitet.

Schneidet man diese Hyperbel mit einer Parabel in zweiter Hauptlage mit Parameter $p = \frac{a}{2}$, so lautet die Formel

$$x^2 = a \cdot y.$$

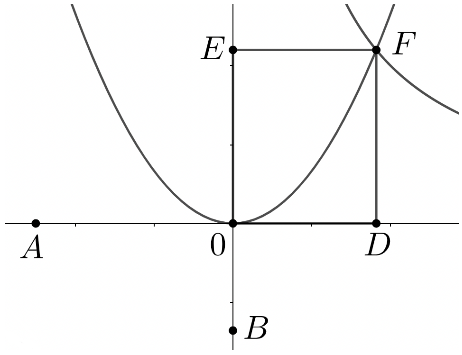

Abbildung: Zweite Lösung nach Menaichmos.

Da der Schnittpunkt F auf beiden Kurven liegt, erfüllen seine Koordinaten beide Gleichungen. Wir erhalten also

$$x_F^2 = a \cdot y_F \Rightarrow \frac{x_F}{y_F} = \frac{a}{x_F}$$

und

$$x_F \cdot y_F = a \cdot b \Rightarrow \frac{a}{x_F} = \frac{y_F}{b}$$

und somit

$$\frac{a}{x_F} = \frac{x_F}{y_F} = \frac{y_F}{b}.$$

Setzt man $b = 2a$, so ist x_F die Seitenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen und y_F die Seitenlänge des Würfels mit vierfachem Volumen.

6.4 Nikomedes

Nikomedes war ein griechischer Mathematiker, der im 3. Jahrhundert v. Chr. lebte. Er verwendete für seinen Lösungsansatz der Würfelverdoppelung eine Konchoide - auch Muschelkurve oder Hundekurve genannt. Wie in der untenstehenden Abbildung ersichtlich ist, entsteht eine solche Kurve durch die Bewegung eines Punktes. Gegeben sind eine Leitlinie und ein Punkt (in der Abbildung schwarz). Verschiedene Geraden schneiden vom Punkt ausgehend die Leitlinie. Auf den Geraden werden dann von der Leitlinie ausgehend Strecken mit der selben Länge k abgeschlagen - in der Abbildung in orange markiert.

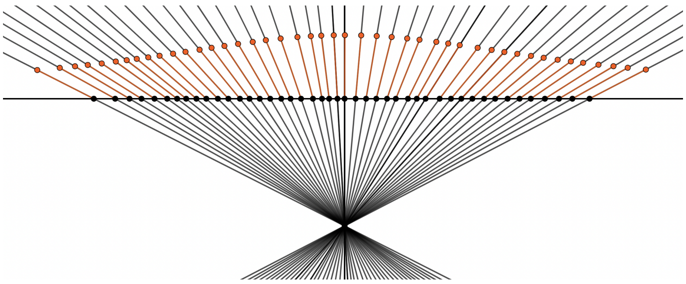

Abbildung: Konchoide des Nikomedes.

In anderen Worten gibt es die Leitlinie l und den Nullpunkt, von dem eine Gerade ausgeht, die l im Punkt K schneidet. Von K aus werden nun zwei Punkte abgetragen: X und Y. Dabei gilt, dass $|\overline{XK}| = |\overline{YK}|$. Tatsächlich gibt es also nicht nur einen Ast, sondern zwei Äste einer Konchoide.

Woher der Name *Hundekurve* stammt, ist auch schnell erklärt [4]. Eine Person geht mit ihren zwei Hunden entlang einer geraden Straße spazieren. Diese Straße ist die Leitlinie. Die Länge der Leine der Hunde ist konstant k. Der Nullpunkt ist ein Baum. Die beiden Äste der Konchoide werden durch die jeweilige Position der beiden Hunde gebildet. Einer der Hunde strebt zu dem Baum, dadurch wird der zweite Ast gebildet - also der Ast, den Nikomedes außer Acht gelassen hat. Der zweite Hund ist furchtsam und strebt immer genau in die entgegengesetzte Richtung. Dadurch entsteht der erste Ast der Hundekurve.

Nikomedes verwendete zur Konstruktion der Konchoide einen besonderen Zirkel [3], der auf der untenstehenden Abbildung zu sehen ist. Es ist jedoch offensichtlich, dass er mit Hilfe dieses Zirkels nur einen Ast der Konchoide konstruieren konnte.

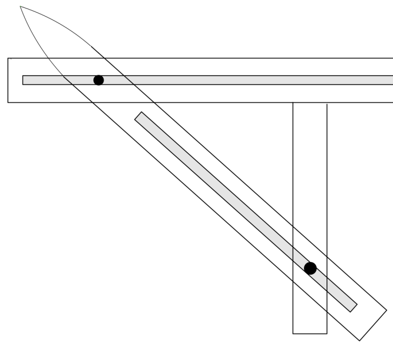

Abbildung: Zirkel des Nikomedes.

Wir wollen nun versuchen, die Gleichung der Konchoide für den Fall, dass die Leitlinie parallel zur x-Achse liegt, herzuleiten. Sehen wir uns dazu die Grafik an.

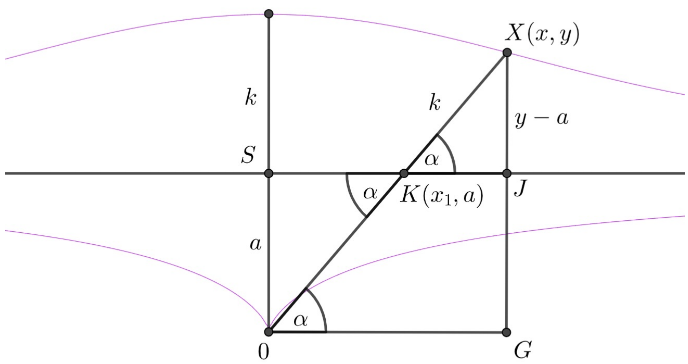

Abbildung: Herleitung des Funktionsterms der Konchoide.

Wie oben ersichtlich, werde der Normalabstand der Leitlinie zum Nullpunkt mit a bezeichnet. Durch den Nullpunkt geht eine Gerade, die die Leitlinie im Punkt K schneidet. Der Abstand des Schnittpunktes K von einem beliebigen Punkt $X(x, y)$ auf der Konchoide wird als k bezeichnet. In der Abbildung sieht man weiters die Punkte S, J und G, und wir erhalten für die eingezeichneten Punkte folgende Koordinaten:

$$S(0, a),\ K(x_1, a),\ J(x, a),\ G(x, 0),\ X(x, y)$$

Zudem ist

$$\angle G0X = \angle SK0 = \angle JKX.$$

Da $|\overline{JX}| = |y - a|$ und $|\overline{KJ}| = |x - x_1|$, gilt (für $x \neq 0$)

$$\tan \alpha = \frac{y - a}{x - x_1} = \frac{y}{x},$$

was äquivalent ist zu

$$y - a = \frac{y}{x} \cdot (x - x_1).$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$(y-a)^2 = \frac{y^2}{x^2} \cdot (x-x_1)^2.$$

Da das Dreieck KJX rechtwinklig ist, gilt

$$|\overline{KJ}|^2 + |\overline{JX}|^2 = |\overline{KX}|^2$$

beziehungsweise

$$(x-x_1)^2 + (y-a)^2 = k^2.$$

Somit ist

$$(y-a)^2 = \frac{y^2}{x^2} \cdot (x-x_1)^2$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned}
(y-a)^2 &= \frac{y^2}{x^2} \cdot \left(k^2 - (y-a)^2\right) \\
\Leftrightarrow (y-a)^2 \cdot x^2 &= y^2 \cdot \left(k^2 - (y-a)^2\right) \\
\Leftrightarrow (y-a)^2 \cdot x^2 &= y^2k^2 - y^2(y-a)^2 \\
\Leftrightarrow (y-a)^2 \cdot x^2 + y^2(y-a)^2 &= y^2k^2
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$(y-a)^2 \cdot (x^2+y^2) = y^2k^2$$

als Gleichung für eine Konchoide, bei der die Leitlinie parallel zur x-Achse ist.

Nikomedes verwendete seine Konchoide nicht nur als Methode zur Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen, sondern auch für die Winkeldreiteilung. Dieser Lösungsansatz soll um einiges komplizierter sein als die Einschiebung des Archimedes [13].

Widmen wir uns nun wieder dem Delischen Problem. Anders als die bisher behandelten Kurven handelt es sich bei der Konchoide des Nikomedes um eine höhere Kurve. Heath gibt an, dass Nikomedes sehr stolz auf seine Lösung gewesen sei und sie der Methode des Eratothenes als weitaus überlegen bezeichnet hätte [9]. Sie zählt zu den Lösungen durch Einschiebungen. Diese Lösungen sind zwar theoretisch exakt, ihre praktische Umsetzung ist aber nur approximativ möglich [3]. Die Lösung des Nikomedes ist keine elementare Lösung - das bedeutet, sie kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Wie immer handelt es sich um die Problematik, zwei mittlere Proportionale zu den Strecken a und b zu finden, wobei - wie wir bereits wissen - $2a = b$ gelten muss. Wir verwenden dafür die spezielle Konchoide, für die $k = a$ gilt.

Betrachten wir die folgende Abbildung. Wir behaupten, dass die Lösung des Problems gefunden ist, sobald wir den Punkt E konstruiert haben [3]. Die Leitlinie f ist parallel zur x-Achse. Um einen Punkt auf der Konchoide zu finden, wird vom Punkt A aus eine Gerade gezeichnet. Die Gerade hat den Schnittpunkt C mit der Leitlinie. Vom Punkt C aus tragen wir zweimal die Strecke a ab, und es gilt

$$a = |\overline{BC}| = |\overline{CD}|.$$

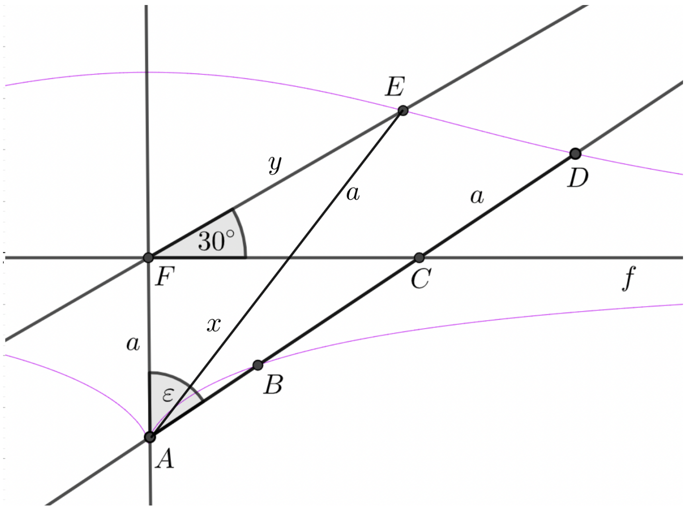

Abbildung: Lösung mit Hilfe der Konchoide.

Wie zuvor gezeigt, ergeben sich durch Rotation dieser Geraden um den Punkt A die zwei Äste der Konchoide. Der Abstand zwischen den beiden Punkten C und D wurde zuvor als k bezeichnet. Bei uns ist wie gesagt $k = a$.

Wir erhalten somit als Gleichung der Konchoide

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = a^2y^2.$$

Wir zeichnen nun eine Gerade durch den Punkt F, die die Leitlinie f in einem 30°-Winkel schneidet. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Konchoide wird mit E bezeichnet. Haben wir diesen Punkt, ist die Lösung nach Breidenbach gefunden [3].

Der Ansatz von Breidenbach gilt nur für die Würfelverdoppelung, also für $b = 2a$ zur Ermittlung der mittleren Proportionalen.

Wir ergänzen die Skizze:

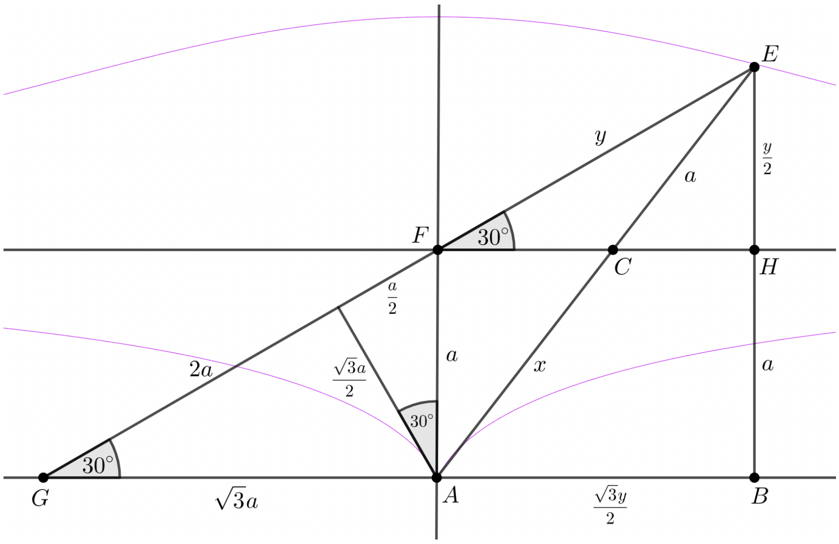

Abbildung: Erklärung der Lösung nach Breidenbach.

Nach dem Strahlensatz in den ähnlichen Dreiecken GAE und FCE gilt

$$\frac{y}{a} = \frac{y + 2a}{a + x}.$$

Die Länge $2a$ erhält man dabei aus $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Durch Auflösen der Brüche erhalten wir

$$y(a + x) = (y + 2a)a.$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$ay + xy = ay + 2a^2,$$

beziehungsweise

$$xy = 2a^2.$$

Das können wir umformen auf

$$y = \frac{2a^2}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{2a} = \frac{a}{x}.$$

Nach Satz des Pythagoras ergibt sich im Dreieck FHE für die Strecke $\overline{FH}$

$$|\overline{FH}|^2 = y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{3y^2}{4}.$$

Es gilt also

$$|\overline{FH}| = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{3} = |\overline{AB}|.$$

Im Dreieck ABE gilt laut Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}
(a+x)^2 &= \left(\frac{y}{2}+a\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad a^2+2ax+x^2 &= \frac{y^2}{4}+ay+a^2+\frac{3y^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad 2ax+x^2 &= ay+y^2 \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{y(a+y)}{x(2a+x)}
\end{aligned}$$

Mit $y = \frac{2a^2}{x}$ erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \frac{a+y}{2a+x} = \frac{a+\frac{2a^2}{x}}{2a+x},$$

was gleich ist zu

$$\frac{\frac{ax+2a^2}{x}}{2a+x} = \frac{ax+2a^2}{2ax+x^2} = \frac{a}{x}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Breidenbach merkt jedoch, wie bereits erwähnt, an, dass dies nur eine „gedachte" Lösung ist, da man zur Durchführung kein gewöhnliches Lineal, sondern ein Einschiebelineal verwendet [3].

Hischer beschreibt Cantors Herangehensweise an Nikomedes Beweis - dieser hat die Methode mit Gleichungen anstatt mit Proportionen durchgeführt [13]. Wir werfen dafür einen Blick auf die untenstehende Abbildung.

Wie immer wollen wir zwei mittlere Proportionale finden, und zwar zwischen den beiden Längen $|\overline{DA}|$ und $|\overline{AB}|$.

Zu sehen ist das Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b. Wir halbieren die beiden Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$ und erhalten dafür jeweils F und E. Zusätzlich tragen wir in Richtung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ vom Punkt A aus die Strecke a ab und erhalten dadurch den Punkt G.

Dann konstruieren wir eine Normale zur Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt E und zeichnen Punkt H so ein, dass die Strecke $|\overline{HB}| = \frac{b}{2}$ ist:

$$|\overline{AF}| = |\overline{FD}| = |\overline{HB}| = \frac{b}{2}.$$

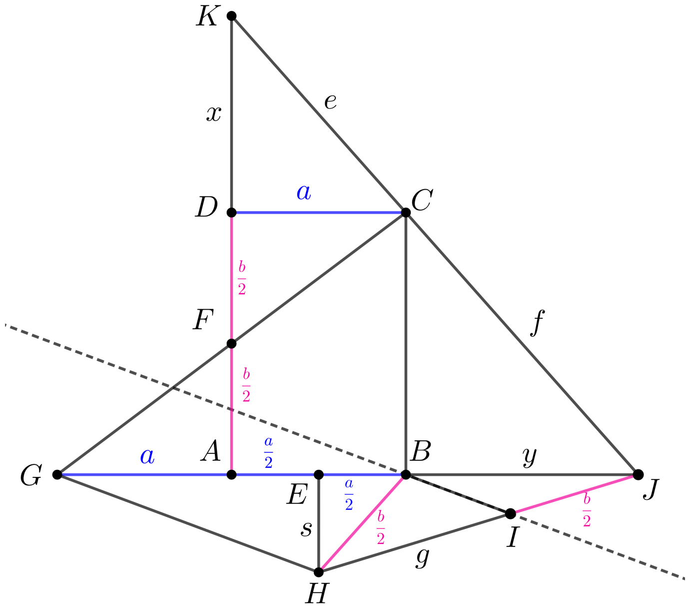

Abbildung: Nikomedes Lösung nach Cantor.

Punkt H ist der Pol der Konchoide. Wir verbinden nun die Punkte G und H und konstruieren eine Gerade, die parallel zur Strecke $\overline{GH}$ durch den Punkt B verläuft. Diese Gerade - in der Abbildung strichliert eingezeichnet - ist die Leitlinie unserer Konchoide.

Die Punkte I und J werden nun so konstruiert, dass

$$|\overline{AF}| = |\overline{FD}| = |\overline{HB}| = |\overline{IJ}| = \frac{b}{2}$$

ist. Es ist offensichtlich, dass dieser Schritt durch die alleinige Nutzung von Lineal und Zirkel unmöglich ist, da es sich um eine Einschiebung (Neusis) handelt.

Denn um den Punkt J zu konstruieren, wird eine Konchoide benötigt [9]. Diese Konchoide hat - wie bereits erwähnt - H als Pol und die Gerade BI als Leitlinie. Den Punkt J erhalten wir als Schnittpunkt der Konchoide mit der Geraden EB.

Schlussendlich wird noch eine Gerade durch die Punkte J und C gezogen. Den Schnittpunkt der Geraden JC mit der Geraden AD nennen wir K.

Die gesuchten zwei mittleren Proportionalen sind durch $|\overline{KD}|$ und $|\overline{BJ}|$ gegeben. Heath beschreibt den Beweis, den Eutocios und Pappos angeben, wie folgt:

Die Strecken $\overline{DC}$ und $\overline{AJ}$ sind parallel. Deswegen folgt aus dem Strahlensatz, dass

$$\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DA}|} = \frac{|\overline{KC}|}{|\overline{CJ}|}.$$

Zusätzlich sind aber auch die Strecken $\overline{KA}$ und $\overline{CB}$ parallel, woraus

$$\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DA}|} = \frac{|\overline{KC}|}{|\overline{CJ}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BJ}|}$$

folgt.

Multipliziert man die Relation $\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DA}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BJ}|}$ mit 2, erhält man

$$\frac{|\overline{KD}|}{\frac{1}{2} \cdot |\overline{DA}|} = \frac{2 \cdot |\overline{AB}|}{|\overline{BJ}|},$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{BJ}|}.$$

Wir benutzen nun wiederum den Strahlensatz und erhalten aufgrund der Parallelität der Strecken $\overline{BI}$ und $\overline{GH}$

$$\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{BJ}|} = \frac{|\overline{HI}|}{|\overline{IJ}|}.$$

Da $|\overline{KD}| = |\overline{KF}| - |\overline{DF}|$ und $|\overline{HI}| = |\overline{HJ}| - |\overline{IJ}|$ folgt aus

$$\frac{|\overline{KD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{HI}|}{|\overline{IJ}|}$$

direkt

$$\frac{|\overline{KF}| - |\overline{DF}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{HJ}| - |\overline{IJ}|}{|\overline{IJ}|},$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{|\overline{KF}|}{|\overline{DF}|} - 1 = \frac{|\overline{HJ}|}{|\overline{IJ}|} - 1.$$

Addiert man 1, so erhält man

$$\frac{|\overline{KF}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{HJ}|}{|\overline{IJ}|}.$$

Anhand der Abbildung kann man erkennen, dass aufgrund der Konstruktion $|\overline{DF}| = |\overline{IJ}| = \frac{b}{2}$ gilt, also können wir die Relation vereinfachen zu

$$|\overline{KF}| = |\overline{HJ}| \Rightarrow |\overline{KF}|^2 = |\overline{HJ}|^2.$$

Im nächsten Schritt verwendet Heath [9] die Relation

$$|\overline{KF}|^2 = |\overline{KA}| \cdot |\overline{KD}| + |\overline{DF}|^2,$$

die aus Euklids Elementen, Buch II, Prop. 6 folgt. Ihre Richtigkeit ist aber auch schnell gezeigt, denn wegen $|\overline{KF}| = |\overline{KD}| + |\overline{DF}|$ und $|\overline{KA}| = |\overline{KD}| + |\overline{DF}| + |\overline{FA}|$ ist sie äqivalent zu

$$(|\overline{KD}| + |\overline{DF}|)^2 = (|\overline{KD}| + |\overline{DF}| + |\overline{FA}|) \cdot |\overline{KD}| + |\overline{DF}|^2.$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$|\overline{KD}|^2 + 2 \cdot |\overline{KD}| \cdot |\overline{DF}| + |\overline{DF}|^2 = |\overline{KD}|^2 + |\overline{DF}| \cdot |\overline{KD}| + |\overline{FA}| \cdot |\overline{KD}| + |\overline{DF}|^2,$$

was man wegen $|\overline{FA}| = |\overline{DF}|$ zu

$$|\overline{KD}|^2 + 2 \cdot |\overline{KD}| \cdot |\overline{DF}| + |\overline{DF}|^2 = |\overline{KD}|^2 + 2 \cdot |\overline{KD}| \cdot |\overline{DF}| + |\overline{DF}|^2$$

umformen kann.

Aus der selben Proposition in den Elementen des Euklid folgt

$$|\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{BE}|^2 = |\overline{EJ}|^2,$$

was ebenfalls leicht zu zeigen ist, denn da

$$|\overline{AJ}| = |\overline{AB}| + |\overline{BJ}|$$

und

$$|\overline{EJ}| = |\overline{EB}| + |\overline{BJ}|$$

ist der obige Ausdruck äquivalent zu

$$(|\overline{AB}| + |\overline{BJ}|) \cdot |\overline{JB}| + |\overline{BE}|^2 = (|\overline{EB}| + |\overline{BJ}|)^2.$$

Das kann man wiederum umformen zu

$$|\overline{AB}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{BJ}|^2 + |\overline{BE}|^2 = |\overline{EB}|^2 + 2 \cdot |\overline{EB}| \cdot |\overline{BJ}| + |\overline{BJ}|^2.$$

Subtrahiert man nun $|\overline{EB}|^2 + |\overline{BJ}|^2$, erhält man

$$|\overline{AB}| \cdot |\overline{JB}| = 2 \cdot |\overline{EB}| \cdot |\overline{BJ}|.$$

Die Richtigkeit dieses Ausdrucks ist offensichtlich, denn $2 \cdot |\overline{EB}| = 2 \cdot \frac{a}{2} = a = |\overline{AB}|$.

Widmen wir uns wieder Nikomedes Beweisgang. Es gilt - wie gerade gezeigt -

$$|\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{BE}|^2 = |\overline{EJ}|^2.$$

Addiert man auf beiden Seiten $|\overline{EH}|^2$, erhält man

$$|\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{BE}|^2 + |\overline{EH}|^2 = |\overline{EJ}|^2 + |\overline{EH}|^2.$$

Da die Dreiecke HBE und HJE rechtwinklig sind, kann das zu

$$|\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{HB}|^2 = |\overline{HJ}|^2$$

umgeformt werden.

Wie bereits gezeigt, ist

$$|\overline{HJ}|^2 = |\overline{KF}|^2.$$

Aus dieser Tatsache und den beiden Relationen

$$|\overline{KF}|^2 = |\overline{KA}| \cdot |\overline{KD}| + |\overline{DF}|^2$$

und

$$|\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{HB}|^2 = |\overline{HJ}|^2$$

folgt also

$$|\overline{KA}| \cdot |\overline{KD}| + |\overline{DF}|^2 = |\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}| + |\overline{HB}|^2.$$

Da aufgrund der Konstruktion

$$|\overline{DF}| = |\overline{HB}|$$

ist, folgt

$$|\overline{KA}| \cdot |\overline{KD}| = |\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}|.$$

Verwenden wir die Bezeichnungen $x = |\overline{KD}|$ und $y = |\overline{BJ}|$, dann gilt

$$|\overline{KA}| = x + b$$

und

$$|\overline{AJ}| = a + y,$$

und somit kann die Beziehung

$$|\overline{KA}| \cdot |\overline{KD}| = |\overline{AJ}| \cdot |\overline{JB}|$$

auch geschrieben werden als

$$(x + b) \cdot x = (a + y) \cdot y,$$

was man zu

$$x^2 + bx = y^2 + ay$$

umformen kann.

Zu diesem Zwischenergebnis kann man auch in einem abgekürzten Verfahren kommen. Zur einfacheren Verfolgung der Rechenoperation bezeichnen wir die Strecken mit Buchstaben, wie in der Abbildung ersichtlich.

Aus dem Strahlensatz in den Dreiecken KDC und KAJ ergibt sich

$$\frac{x}{b} = \frac{e}{f}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke KDC und CBJ erhalten wir

$$\frac{a}{y} = \frac{e}{f}.$$

Daraus folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{y},$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{x}{\frac{b}{2}} = \frac{2a}{y}$$

beziehungsweise

$$\frac{y}{2a} = \frac{\frac{b}{2}}{x}.$$

Aus dem Strahlensatz in den Dreiecken JHG und JIB folgt

$$\frac{y}{2a} = \frac{\frac{b}{2}}{g}$$

und weiters

$$g = x.$$

Aus dem bisher Bewiesenen erhält man sofort

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{y + a}{x + b}.$$

Aus dem Dreieck EHJ ergibt sich nach Pythagoras

$$\left(g + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + s^2.$$

Da $g = x$ und $s^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ folgt

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + xb + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 - ya - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Folglich gilt

$$x^2 + xb = y^2 + ya.$$

Das ist die selbe Beziehung, auf die Heath gekommen ist.

Das kann umgeformt werden zu

$$1 = \frac{y^2 + ya}{x^2 + xb} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y + a}{x + b}$$

und weiters zu

$$\frac{x}{y} = \frac{y + a}{x + b}.$$

Das ergibt mit obiger Beziehung

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

6.5 Apollonius

Apollonius von Perge hat im 2. Jahrhundert v. Chr. während der Regierungszeit von Ptolemäus III. gelebt und war ein antiker griechischer Mathematiker [9]. Sein Studium absolvierte er in Alexandria an der Schule, die Euklid gegründet hatte. Neben Mathematik beschäftigte sich Appolonius von Perge auch mit Astronomie. Seine Bedeutung wird durch die große Anzahl an Kommentaren zu beziehungsweise Bezugnahmen auf seine Arbeiten offensichtlich. Appolonius ist hauptsächlich durch sein Werk *Conica* bekannt, in dem er Parabel, Ellipse und Hyperbel behandelt - jedoch benutzt er in seinem Verfahren zur Lösung der Würfelverdoppelung keine Kegelschnitte, sondern ähnliche Dreiecke [3].

Die Strecken a, b, x und y werden also als Seiten ähnlicher Dreiecke aufgefasst und es soll - wie immer - gelten:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

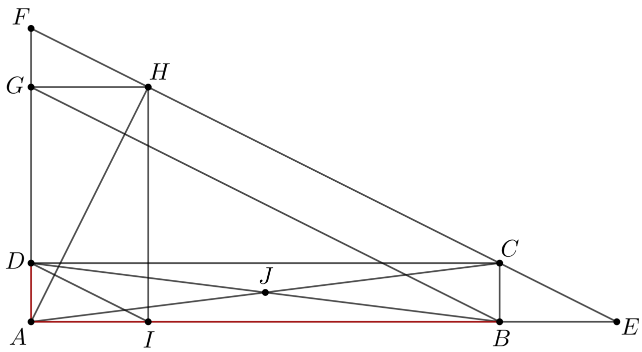

Abbildung: Lösung des Apollonius von Perge.

In der Abbildung suchen wir zwei mittlere Proportionale zwischen den Längen $a = |\overline{AD}|$ und $b = |\overline{AB}|$. Um Apollonius Lösung verständlich zu machen, setzen wir zunächst voraus, dass die Längen $a = |\overline{AD}|$ und $x = |\overline{AI}|$ gegeben sind.

Wir konstruieren dafür, wie von [3] beschrieben, das rechtwinkelige Dreieck AID und zeichnen orthogonal zu $\overline{AI}$ eine Gerade durch den Punkt I ein. Zusätzlich zeichnen wir orthogonal zur Strecke $\overline{DI}$ eine Gerade durch den Punkt A ein. Schnittpunkt der beiden Geraden sei der Punkt H.

Der Winkel $\angle IAD$ ist ein rechter Winkel, genau so wie der Winkel $\angle HIA$. Zusätzlich gilt $\angle IAH = \angle ADI$ und $\angle HAD = \angle DIA = \angle IHA$. Die Dreiecke AID und AIH sind demnach ähnlich, und es gilt

$$\frac{|\overline{DA}|}{|\overline{AI}|} = \frac{|\overline{AI}|}{|\overline{IH}|}.$$

Hier ist $x = |\overline{AI}|$ und $y = |\overline{IH}|$, also

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}.$$

Wir vervollständigen nun das Rechteck $AIHG$ mit den Seitenlängen x und y, und ziehen durch den dadurch entstehenden Punkt G eine Parallele zur Strecke $\overline{DI}$. Diese Parallele schneidet die Gerade AI im Punkt B - das Dreieck ABG ist offensichtlich ähnlich zum ersten Dreieck AID und somit auch zum Dreieck AIH. Wie zu Beginn festgelegt, suchen wir zwei mittlere Proportionale zwischen a und b - und diese Länge $b = |\overline{AB}|$ haben wir somit konstruiert, denn aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABG und AIH gilt

$$\frac{|\overline{AI}|}{|\overline{IH}|} = \frac{|\overline{AI}|}{|\overline{GA}|} = \frac{|\overline{GA}|}{|\overline{AB}|}$$

beziehungsweise

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Wir zeichnen nun - wie in [3] beschrieben - eine weitere Parallele zu DI ein, die die Normale auf AB durch den Punkt B in C schneidet. Dadurch erhalten wir auch die Schnittpunkte F und E. Wie wir sehen werden, liegt auch H auf dieser Gerade.

Der Punkt F hat von G den gleichen Abstand wie A von D, das heißt

$$a = |\overline{DA}| = |\overline{FG}|.$$

Wir wollen nun berechnen, wie groß der Abstand zwischen den Punkten B und E ist.

Da $GB \parallel FE$, sind die Dreiecke ABG und AEF ähnlich. Es gilt somit

$$\frac{|\overline{GA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{FA}|}{|\overline{AE}|}.$$

Wie vorher bestimmt, bezeichnen wir $|\overline{GA}|$ als y und $|\overline{AB}|$ als b. Da weiters $a = |\overline{DA}| = |\overline{FG}|$ gilt, können wir schreiben

$$\frac{y}{b} = \frac{y+a}{b+x_1},$$

wobei wir die zu bestimmende Länge $|\overline{BE}|$ als x_1 bezeichnet haben. Durch Äquivalenzumformungen kommen wir auf

$$
\begin{aligned}
& y \cdot (b + x_1) = b \cdot (y + a) \\
\Leftrightarrow \quad & b + x_1 = \frac{b}{y} \cdot (y + a) \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{b}{y} \cdot (y + a) - b \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{by + ba - by}{y} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{ba}{y} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_1}{a} = \frac{b}{y}
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

folgt aus

$$\frac{x_1}{a} = \frac{b}{y}$$

sofort $x_1 = x$. Das bedeutet, dass mit $x = |\overline{AI}| = |\overline{BE}| = |\overline{GH}|$ die erste der beiden mittleren Proportionalen gefunden ist - andererseits sind wir aber zu Beginn der Konstruktion genau von dieser ausgegangen!

Es ist somit zwar mit Zirkel und Lineal machbar, die Längen y und b zu finden, wenn man von a und x ausgeht (das ist auch möglich, wenn $a < x$) - jedoch war es ja unser eigentliches Ziel, von a und b ausgehend zwei mittlere Proportionale zu finden.

Breidenbach gibt weiters an, dass es sich beim Viereck $ABCD$ um ein Rechteck handelt, dessen Diagonalen sich im Punkt J schneiden. Das folgt aus $a = |\overline{DA}| = |\overline{CB}| = |\overline{FG}|$ [3]. Die Punkte H und C haben von J den selben Abstand, denn es gilt

$$|\overline{HJ}| = \sqrt{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2}$$

sowie

$$|\overline{CJ}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

$|\overline{HJ}| = |\overline{CJ}|$ ist schnell gezeigt:

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \underbrace{ay}_{=x^2} - \underbrace{bx}_{=y^2} + x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Zusätzlich haben auch die Punkte F und E von J den gleichen Abstand, denn

$$|\overline{FJ}| = \sqrt{\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

und

$$|\overline{EJ}| = \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

sind ident, da

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{ay}_{=x^2} + y^2$$

und

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{bx}_{=y^2} + x^2.$$

Heath beginnt genau hier, um das Verfahren des Apollonius zu beschreiben - verfolgt den Ansatz also in der eigentlichen Richtung. In der untenstehenden Abbildung stimmen zusätzlich (vorweggenommen) die Proportionen mit jenen überein, die wir für die Würfelverdoppelung brauchen - es ist also $b = 2a$.

Wir gehen von den aufeinander normal stehenden Geraden AB und AD aus. Diese schneiden sich offensichtlich im Punkt A und wir suchen zwischen den Längen $a = |\overline{AD}|$ und $b = |\overline{AB}|$ zwei mittlere Proportionale x und y.

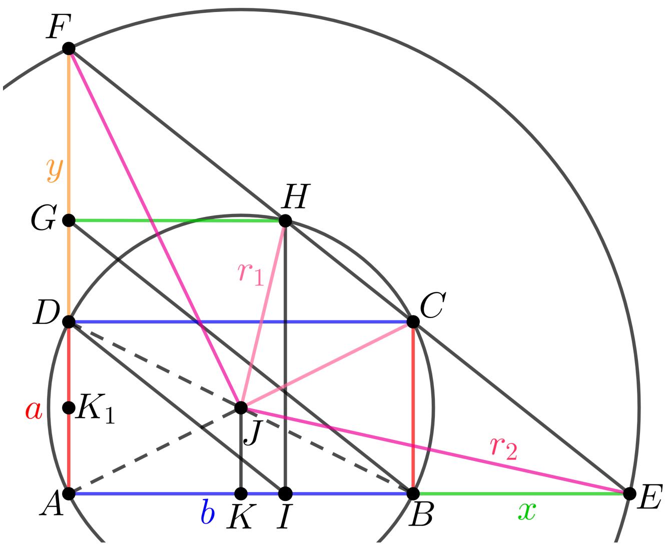

Abbildung: Lösung des Apollonius von Perge: ursprünglicher Ansatz.

Seien nun a und b die Seiten des Rechtecks $ABCD$. Die Diagonalen des Rechtecks schneiden sich im Punkt J. Der Umkreis des Rechtecks enthält per definitionem die Punkte A, B, C und D.

Apollonius konstruiert nun einen zweiten Kreis, der die Gerade AD im Punkt F und die Gerade AB im Punkt E schneidet - und zwar so, dass F, C und E auf einer Geraden liegen. Es ist offensichtlich, dass sich der Radius dieses Kreises nicht durch die alleinige Nutzung von Zirkel und Lineal finden lässt. Es sei H der zweite Punkt, in dem die Gerade FE den ersten Kreis schneidet.

Die Normale der Geraden FE durch den Punkt J halbiert sowohl die Strecke $\overline{HC}$ als auch die Strecke $\overline{EF}$. Aufgrunddessen gilt $|\overline{HF}| = |\overline{CE}|$.

Sei K der Mitelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt (wegen Euklid, Elemente, Buch II, Prop. 6):

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BK}|^2 = |\overline{EK}|^2,$$

beziehungsweise da

$$|\overline{AE}| = |\overline{AK}| + |\overline{KB}| + |\overline{BE}|$$

und

$$|\overline{EK}| = |\overline{KB}| + |\overline{BE}|$$

ist obiger Ausdruck äquivalent zu

$$\Big(|\overline{AK}| + |\overline{KB}| + |\overline{BE}|\Big) \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BK}|^2 = \Big(|\overline{KB}| + |\overline{BE}|\Big)^2.$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$|\overline{AK}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{KB}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{EB}|^2 + |\overline{BK}|^2 = |\overline{KB}|^2 + 2 \cdot |\overline{KB}| \cdot |\overline{BE}| + |\overline{BE}|^2$$

und schließlich

$$|\overline{AK}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{KB}| \cdot |\overline{EB}| = 2 \cdot |\overline{KB}| \cdot |\overline{BE}|.$$

Da K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist und somit $|\overline{AK}| = |\overline{KB}|$, ist die Richtigkeit dieser Gleichung offensichtlich.

Addiert man bei

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BK}|^2 = |\overline{EK}|^2$$

auf beiden Seiten $|\overline{KJ}|^2$ erhält man

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BK}|^2 + |\overline{KJ}|^2 = |\overline{EK}|^2 + |\overline{KJ}|^2.$$

Da die Dreiecke KBJ und KEJ rechtwinkelig sind, gilt laut Satz des Pythagoras $|\overline{EK}|^2 + |\overline{KJ}|^2 = |\overline{EJ}|^2$ und $|\overline{BK}|^2 + |\overline{KJ}|^2 = |\overline{BJ}|^2$. Deswegen ist der obige Ausdruck äquivalent zu

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BJ}|^2 = |\overline{EJ}|^2.$$

Analog ist

$$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}| + |\overline{DJ}|^2 = |\overline{JF}|^2,$$

denn es gilt (wieder wegen Euklid, Elemente, Buch II, Prop. 6):

$$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}| + |\overline{DK_1}|^2 = |\overline{FK_1}|^2,$$

wobei K_1 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ ist.

Das ist äquivalent zu

$$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}| + |\overline{DK_1}|^2 + |\overline{K_1J}|^2 = |\overline{FK_1}|^2 + |\overline{K_1J}|^2$$

und mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir tatsächlich

$$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}| + |\overline{DJ}|^2 = |\overline{FJ}|^2.$$

Der Punkt J ist ja der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ - deswegen sind die Punkte B und D gleich weit von J entfernt. Weiters sind E und F aufgrund der Konstruktion gleich weit von J entfernt. Wegen $|\overline{BJ}| = |\overline{DJ}|$ und $|\overline{EJ}| = |\overline{FJ}|$ folgt aus

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| + |\overline{BJ}|^2 = |\overline{EJ}|^2$$

und

$$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}| + |\overline{DJ}|^2 = |\overline{JF}|^2,$$

dass

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{EB}| = |\overline{AF}| \cdot |\overline{FD}|.$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{FD}|}{|\overline{EB}|}.$$

Aufgrund der Konstruktion sind die Dreiecke AEF und DCF ähnlich. Deswegen ist

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AB}| + |\overline{BE}|}{|\overline{AD}| + |\overline{DF}|},$$

was äquivalent ist zu

$$|\overline{DC}| \cdot (|\overline{AD}| + |\overline{DF}|) = |\overline{DF}| \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{BE}|).$$

Da $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, erhalten wir

$$|\overline{DC}| \cdot |\overline{BC}| = |\overline{DF}| \cdot |\overline{BE}|$$

beziehungsweise

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|}.$$

Da die Dreiecke CFD, BEC und AEF ähnlich sind und wir bereits $\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|}$ gezeigt haben, folgt aus dieser Relation auch

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|}.$$

Da aber $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$ und $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$, ist

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|}$$

äquivalent zu

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{AD}|}$$

beziehungsweise

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

womit wir unsere zwei mittleren Proportionalen $x = |\overline{BE}|$ und $y = |\overline{DF}|$ gefunden haben.

Persönlich finde ich Heaths Ansatz etwas unübersichtlich und werde deswegen nun skizzieren, wie ich das Lösungsverfahren nach Apollonius aufrollen würde. Wir zeichnen wie vorher ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b, wobei a und b auch jene Größen sind, zu denen die mittleren Proportionalen zu finden sind. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtsecks sei wieder J, und wir verlängern - wie vorher - die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.

Wir zeichnen nun einen Umkreis mit dem Radius r_1, dieser geht durch die Punkte A, B, C und D. Der folgende Schritt lässt sich nicht ohne unerlaubte Hilfsmittel ausführen - wir nehmen jedoch an, er sei erfolgreich gelungen: Wir legen eine Gerade durch C, sodass die Punkte F, H, C und E auf dieser Geraden liegen. Dabei liegt F auf der Geraden AD und E auf der Geraden AB. Es sind dann die Strecken $\overline{FH}$ und $\overline{CE}$ gleich lang, denn der zum Umkreis konzentrische Kreis mit dem Radius r_2 geht durch die Punkte F und E.

Der Übersichtlichkeit halber definieren wir folgende Strecken:

$$b = |\overline{AB}|,\ a = |\overline{AD}|,\ x = |\overline{BE}|,\ y = |\overline{AG}|,\ r_1 = |\overline{JB}|,\ r_2 = |\overline{JE}|$$

Aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt:

$$\begin{aligned}
&a = |\overline{AD}| = |\overline{BC}| = |\overline{GF}| \\
&\frac{a}{2} = |\overline{JK}| = |\overline{AK_1}| \\
&b = |\overline{AB}| = |\overline{DC}| \\
&\frac{b}{2} = |\overline{AK}| = |\overline{KB}| \\
&x = |\overline{BE}| = |\overline{GH}| \\
&y = |\overline{AG}| = |\overline{IH}| = |\overline{DF}| \\
&r_1 = |\overline{JB}| = |\overline{JC}| = |\overline{JH}| = |\overline{JD}| = |\overline{AJ}| \\
&r_2 = |\overline{JE}| = |\overline{JF}|
\end{aligned}$$

Im Dreieck JKE ergibt sich nach Satz des Pythagoras

$$r_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Aus dem Dreieck JKB ergibt sich

$$r_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

was äquivalent ist zu

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = r_1^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Oben eingesetzt ergibt das

$$r_2^2 = r_1^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Lösen wir die binomische Formel auf, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& r_2^2 = r_1^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & r_2^2 = r_1^2 + x^2 + bx \\
\Leftrightarrow\quad & r_2^2 = r_1^2 + x \cdot (x + b).
\end{aligned}$$

Wenden wir im Dreieck JFK_1 den Satz des Pythagoras an, ergibt das

$$r_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Aus dem Dreieck DK_1J erhalten wir

$$
\begin{aligned}
r_1^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= r_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Setzen wir das in die obige Gleichung ein, erhalten wir

$$r_2^2 = r_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2,$$

was äquivalent ist zu

$$r_2^2 = r_1^2 + y \cdot (y + a).$$

Setzen wir unsere beiden Ergebnisse gleich, ergibt das

$$r_1^2 + x \cdot (x + b) = r_1^2 + y \cdot (y + a),$$

also

$$x \cdot (x + b) = y \cdot (y + a).$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu

$$\frac{x + b}{y + a} = \frac{y}{x}.$$

Die Strecken $x + b$ und $y + a$ sind die Katheten des Dreiecks AEF. Dieses ist ähnlich zu den Dreiecken CBE, FDC und FGH. Daraus folgt

$$\frac{x + b}{y + a} = \frac{x}{a} = \frac{b}{y}.$$

Da aber, wie vorher gezeigt,

$$\frac{x + b}{y + a} = \frac{y}{x}$$

gilt, folgt

$$\frac{b}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a},$$

oder invertiert

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

was der Definition der zwei mittleren Proportionalen zwischen a und b entspricht.

6.6 Philon

Philon von Byzanz war ein antiker griechischer Erfinder und Konstrukteur, der im 3. Jahrhundert v. Chr. gelebt hat. Laut Heath [9] ist Philons Lösungsverfahren zur Würfelverdoppelung dem des Apollonius sehr ähnlich. Wir benutzen im Weiteren die Bezeichnungen aus der Abbildung im Kapitel über Appolonius Lösungsmethode. Denn auch Philon startet mit dem Rechteck $ABCD$, konstruiert den Mittelpunkt J und zeichnet von diesem aus den Umkreis des Rechtecks.

Wie Apollonius Konstruktion ist die des Philon keine mit Zirkel und Lineal. Auch er benutzt ein unerlaubtes Hilfsmittel, beziehungsweise eine theoretisch nicht exakte Methode. Er findet die Punkte F, H und E durch Drehen des Lineals um den Punkt C, sodass $|\overline{HF}| = |\overline{CE}|$. Dabei liegt wieder F auf der Geraden AD, H auf dem Umkreis des Rechtecks und E auf der Geraden AB.

Wie bereits in dem Unterkapitel über Apollonius Lösungsverfahren gezeigt, schneidet die Normale durch den Punkt J auf die Strecke $\overline{HC}$ diese genau in der Hälfte, weshalb sie auch die Strecke $\overline{FE}$ halbieren muss, da ja $|\overline{HF}| = |\overline{CE}|$ gilt. Daraus folgt natürlich, dass JEF ein gleichschenkliges Dreieck ist und die Strecken $\overline{JF}$ und $\overline{JE}$ somit auch gleich lang sein müssen.

Der Ausdruck $|\overline{HF}| = |\overline{CE}|$ ist äquivalent zu

$$|\overline{HF}| \cdot |\overline{CF}| = |\overline{CE}| \cdot |\overline{CF}|,$$

was wegen $|\overline{CF}| = |\overline{HE}|$ wiederum

$$|\overline{HF}| \cdot |\overline{CF}| = |\overline{CE}| \cdot |\overline{HE}|$$

entspricht.

Heath [9] gibt weiters an, dass die Relation

$$|\overline{HE}| \cdot |\overline{CE}| = |\overline{AE}| \cdot |\overline{BE}|$$

gilt. Das folgt aus dem Sekanten-Tangenten-Satz (Euklid, Elemente, Buch III, Prop. 36), ist aber auch leicht gezeigt:

Die Punkte A, B, C, H und D liegen alle auf einem Kreis. Die Geraden AB und HC sind zwei Sekanten dieses Kreises. Über der Sehne $\overline{CB}$ sind die Winkel $\angle BAC$ und $\angle BHC$ Peripheriewinkel und somit gleich. Weiters ist $\angle BAC = \angle EAC$ und $\angle BHC = \angle BHE$. Die beiden Dreiecke AEC und BEH stimmen auch im Winkel

$\angle AEH$ überein und sind somit ähnlich. Es muss also das Verhältnis

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{HE}|}$$

gelten, was in der Tat äquivalent zu

$$|\overline{HE}| \cdot |\overline{CE}| = |\overline{AE}| \cdot |\overline{BE}|$$

ist.

Analog sind auch die beiden Dreiecke AHF und DCF zueinander ähnlich, woraus

$$\frac{|\overline{FC}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{HF}|}$$

und schließlich

$$|\overline{HF}| \cdot |\overline{CF}| = |\overline{DF}| \cdot |\overline{AF}|$$

folgt.

Da

$$|\overline{HF}| \cdot |\overline{CF}| = |\overline{CE}| \cdot |\overline{HE}|$$

gilt, erhalten wir also

$$|\overline{AE}| \cdot |\overline{BE}| = |\overline{DF}| \cdot |\overline{AF}| \Leftrightarrow \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{FD}|}{|\overline{EB}|}.$$

Mit Hilfe ähnlicher Dreiecke erhält man

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|}$$

und daher

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|} \Leftrightarrow \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{AD}|}$$

Die obigen Umformungen sind äquivalent zu denen von Apollonius. So findet auch Philon zumindest praktisch zwei mittlere Proportionale, sodass

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Wie wir bereits wissen, kann man diese Relation umformen und erhält dadurch

$$x^2 = ay$$

sowie

$$y^2 = bx$$

und

$$xy = ab.$$

Die ersten beiden Gleichungen beschreiben zwei Parabeln in erster und zweiter Hauptlage, die sich für $a, b > 0$ in zwei Punkten schneiden. Addiert man die beiden Parabelgleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = ay + bx \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - ay - bx = 0, \end{aligned}$$

was die Gleichung eines Kreises beschreibt, der durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln geht. Die beiden Geraden AE und AF sind hier die Koordinatenachsen.

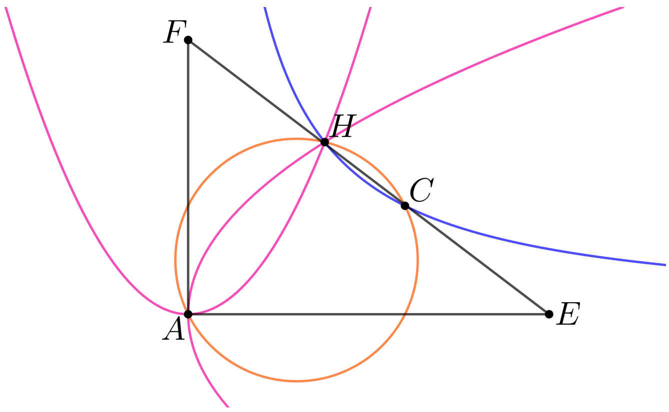

Abbildung: Lösungsverfahren des Philon.

Die Hyperbel $xy = ab$, die diese beiden Achsen als Asymptoten hat, schneidet den Kreis auch im Punkt C, wobei $|\overline{FH}| = |\overline{CE}|$.

Das bedeutet, wir erhalten auch durch das Schneiden dieser Hyperbel mit dem Kreis die Lösung der Würfelverdoppelung - allerdings wieder mit unerlaubten Hilfsmitteln.

6.7 Heron

Heron von Alexandria war ein griechischer Erfinder und Geometer. Es ist nicht überliefert, wann er geboren ist - bekannt ist nur, dass er nach Archimedes und vor Pappos, demnach also im Zeitraum zwischen dem frühen 2. Jahrhundert vor und dem späten 3. Jahrhundert nach Chr., gelebt hat. Laut anderen Quellen kann seine Lebenszeit jedoch im ersten Jahrhundert datiert werden [9]. Sein Hauptwerk *Metrica* war lange verschollen, wurde jedoch im 19. Jahrhundert in der Türkei entdeckt. Dieses Werk befasst sich hauptsächlich mit Mechanik, Erdvermessung, Optik und Geometrie.

Herons Lösung ist jenen von Apollonius und Philon sehr ähnlich - auch er beginnt mit einem Rechteck $ABCD$ mit Mittelpunkt J und einem Umkreis. Er legt ein Lineal auf den Punkt C und dreht es so lange, bis $|\overline{JF}| = |\overline{JE}|$.

Die Ermittlung der zwei mittleren Proportionalen funktioniert genauso wie bei Apollonius Lösungsverfahren, und es ist wieder

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{BE}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{AD}|}$$

beziehungsweise

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

6.8 Diokles

Diokles, geboren um 200 v. Chr., verwendete zum Lösen der Würfelverdoppelung eine Kissoide. Der Name leitet sich vom griechischen Wort $\kappa\iota\sigma\sigma o\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$ ab, was *efeuförmig* bedeutet. Die Kissoide ist nämlich eine Kurve dritter Ordnung, die einem Efeublatt ähnelt.

Diokles beginnt mit zwei gleich langen orthogonalen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die einander im Punkt M halbieren, und konstruiert dann einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = |\overline{AM}|$, der durch die Punkte A, B, C und D geht. Die Punkte F und E auf dem Kreis haben den gleichen Abstand zu C - wenn man durch die beiden Punkte parallel zu CD zwei Geraden zieht, erhält man die Schnittpunkte H und G mit der Geraden AB. Die Gerade durch die Punkte F und B schneidet die Gerade EG im Punkt P. Dieser Punkt liegt auf der Kissoide, die in der Abbildung strichliert eingezeichnet ist. Die Kissoide ergibt sich durch Verschiebung des Punktes F und des Punktes E [9].

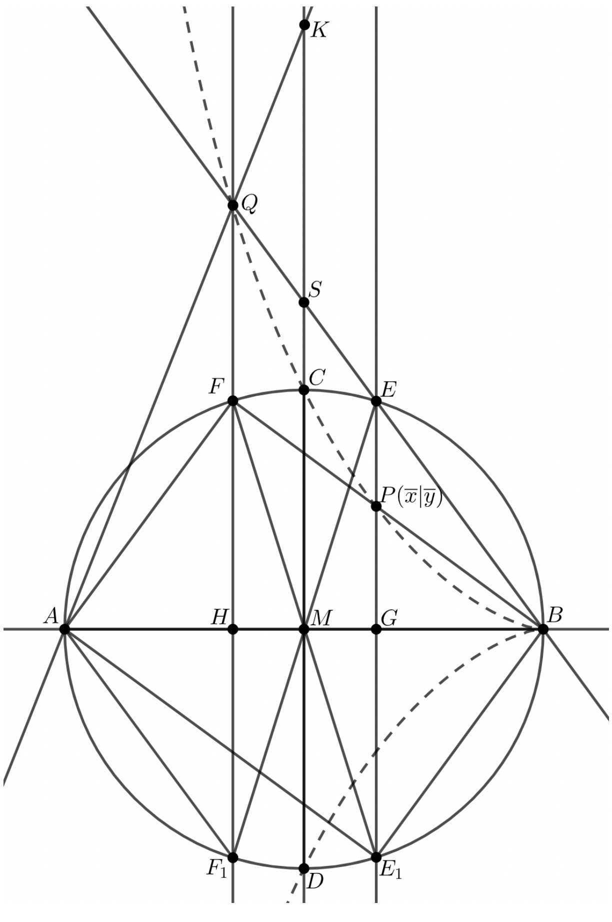

Abbildung: Lösungsverfahren des Diokles.

Widmen wir uns nun der Gleichung der Kissoide. Ausgangspunkt ist ein Kreis mit Radius r. Im Allgemeinen wird ein Koordinatensystem durch die Punkte A oder B

gelegt [20].

Wir werden das Koordinatensystem durch den Kreismittelpunkt M legen. In der Abbildung ist die Gerade MB unsere x-Achse und die Gerade MK die y-Achse.

Der Punkt $P(\overline{x}|\overline{y})$ einer Kissoide ergibt sich, wie zuvor beschrieben, aus dem Schnittpunkt der Geraden $\overline{EG}$, die zur y-Achse den Normalabstand $|\overline{x}|$ hat, und der Geraden von F nach B. Gleiches gilt sinngemäß natürlich auch für den Bereich mit negativem $\overline{x}$, wobei dann die Gerade BE mit der Parallelen zur y-Achse geschnitten wird.

Die Gleichung der Kissoide ermittelt sich aus den ähnlichen Dreiecken PGB und FHB zu

$$\frac{\overline{y}}{r-\overline{x}} = \frac{\sqrt{r^2-\overline{x}^2}}{r+\overline{x}}.$$

Quadrieren führt zu

$$\overline{y}^2 = \frac{(r-\overline{x})^2 \cdot (r^2-\overline{x}^2)}{(r+\overline{x})^2},$$

was äquivalent zu

$$\overline{y}^2 = \frac{(r-\overline{x})^2 \cdot (r-\overline{x}) \cdot (r+\overline{x})}{(r+\overline{x})^2}$$

ist.

Durch Kürzen erhalten wir

$$\overline{y}^2 = \frac{(r-\overline{x})^2 \cdot (r-\overline{x})}{r+\overline{x}}$$

und schließlich

$$\overline{y}^2 = \frac{(r-\overline{x})^3}{r+\overline{x}}.$$

Die Kissoide ist somit durch den Radius r eindeutig definiert.

Wie wir bereits wissen, verlangt die Verdoppelung des Volumens eines Würfels mit Seitenlänge a die Seitenlänge $a \cdot \sqrt[3]{2}$ - diese wird durch zwei mittlere Proportionale zwischen den Größen a und b bestimmt, wobei $b = 2a$. Es soll also gelten

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Aus

$$y = \frac{2a^2}{x}$$

folgt

$$\frac{a}{x} = \frac{x^2}{2a^2}$$

und somit

$$2a^3 = x^3.$$

Das führt zu

$$x = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

x ist dann die Seitenlänge des verdoppelten Würfels.

Die Kissoide ist eine geometrische Konstruktion, bei der die Strecken a, x, y und b in genau diesem Verhältnis zueinander stehen.

Wir zeichnen nun eine Kissoide mit Radius $a = |\overline{MB}|$.

Außerdem konstruieren wir eine Gerade von A nach K, wobei K die Koordinaten $(0|2a)$ hat. Die Gerade AK schneidet die Kissoide im Punkt Q. Wenn wir durch diesen Punkt eine Gerade parallel zur y-Achse ziehen, schneidet diese den Kreis in den Punkten F und F_1. Die Gerade BQ schneidet den Kreis im Punkt E. Dieser ist aufgrund der Eigenschaften der Kissoide symmetrisch bezüglich der y-Achse zu F.

Die Dreiecke AHF und HBF sind ähnlich, denn sie haben drei gleiche Winkel. Weiters sind die Dreiecke AHF und GBE symmetrisch bezüglich der y-Achse. Zudem ist die Strecke $\overline{AF_1}$ parallel zur Strecke $\overline{BE}$. Es folgt, dass die Dreiecke GBE und HBQ ähnlich sind, da sowohl $\angle BGE$ als auch $\angle BHQ$ rechte Winkel sind.

Es folgt

$$\frac{|\overline{AH}|}{|\overline{HF}|} = \frac{|\overline{HF}|}{|\overline{HB}|} = \frac{|\overline{HB}|}{|\overline{HQ}|}.$$

Da aber

$$|\overline{HQ}| = 2 \cdot |\overline{AH}|$$

gilt, ist obiger Ausdruck äquivalent zu

$$\frac{|\overline{AH}|}{|\overline{HF}|} = \frac{|\overline{HF}|}{|\overline{HB}|} = \frac{|\overline{HB}|}{2 \cdot |\overline{AH}|}.$$

Gemäß der mittleren Proportionalen ist somit $|\overline{HF}| = |\overline{AH}| \cdot \sqrt[3]{2}$.

Da das Dreieck GBE symmetrisch bezüglich der y-Achse zum Dreieck AHF ist, gilt auch $|\overline{GE}| = |\overline{GB}| \cdot \sqrt[3]{2}$.

Die Dreiecke GBE und MBS sind ähnlich. Somit gilt

$$\frac{|\overline{SM}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{GE}|}{|\overline{GB}|}.$$

Aufgrund obiger Berechnungen gilt aber

$$\frac{|\overline{GE}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{GB}| \cdot \sqrt[3]{2}}{|\overline{GB}|},$$

und wir erhalten somit durch Kürzen

$$\frac{|\overline{SM}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{GE}|}{|\overline{GB}|} = \sqrt[3]{2}.$$

Da $|\overline{MB}| = a$ ist, gilt

$$|\overline{SM}| = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Die Strecke $|\overline{SM}|$ entspricht somit der Seitenlänge des verdoppelten Würfels mit der Seitenlänge a.

Alternativ können wir das auch analytisch verifizieren:

Punkt Q ist der Schnittpunkt der Kissoide mit der Geraden $y = 2x + 2a$. Wir rechnen also

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot (a+x)^2 = \frac{(a-x)^3}{a+x} \\
\Leftrightarrow \quad & 4 \cdot (a+x)^3 = (a-x)^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[3]{4} \cdot (a+x) = a - x \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[3]{4}a + \sqrt[3]{4}x = a - x \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[3]{4}x + x = -\sqrt[3]{4}a + a \\
\Leftrightarrow \quad & x \cdot (1 + \sqrt[3]{4}) = a \cdot (1 - \sqrt[3]{4})
\end{aligned}$$

und erhalten somit für die x-Koordinate des Punktes Q

$$x_Q = \frac{a \cdot (1 - \sqrt[3]{4})}{1 + \sqrt[3]{4}}.$$

Setzt man diesen x-Wert in die Geradengleichung $y = 2x + 2a$ ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
y_Q &= 2x_Q + 2a \\
&= 2 \cdot \frac{a \cdot (1 - \sqrt[3]{4})}{1 + \sqrt[3]{4}} + 2a \\
&= 2a \cdot \left(\frac{1 - \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} + 1 \right) \\
&= 2a \cdot \left(\frac{1 - \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} + \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} \right) \\
&= 2a \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{4} + 1 + \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} \\
&= 2a \cdot \frac{2}{1 + \sqrt[3]{4}} \\
&= \frac{4a}{1 + \sqrt[3]{4}}
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun die Gleichung der Geraden von B nach Q bestimmen.

Wir kennen die Koordinaten der Punkte B und Q:

$$x_B = a, \ y_B = 0, \ x_Q = \frac{a \cdot (1 - \sqrt[3]{4})}{1 + \sqrt[3]{4}}, \ y_Q = \frac{4a}{1 + \sqrt[3]{4}}.$$

Die Steigung der Gerade ist mittels Differenzenquotient zu bestimmen:

$$k = \frac{y_Q - y_B}{x_Q - x_B}.$$

Wir erhalten also für die Gerade von B nach Q die Gleichung

$$y = \frac{y_Q - y_B}{x_Q - x_B} \cdot (x - a) + y_B.$$

Wenn wir die Werte für die Koordinaten einsetzen, erhalten wir

$$y = \frac{\frac{4a}{1+\sqrt[3]{4}}}{\frac{a \cdot (1-\sqrt[3]{4})}{1+\sqrt[3]{4}} - a} \cdot (x - a),$$

was äquivalent ist zu

$$y = \frac{\frac{4a}{1+\sqrt[3]{4}}}{\frac{a \cdot (1-\sqrt[3]{4}) - a \cdot (1+\sqrt[3]{4})}{1+\sqrt[3]{4}}} \cdot (x - a).$$

Das Auflösen des Doppelbruchs liefert

$$y = \frac{4a}{a \cdot (1 - \sqrt[3]{4}) - a \cdot (1 + \sqrt[3]{4})} \cdot (x - a),$$

beziehungsweise

$$y = \frac{4a}{a - \sqrt[3]{4} \cdot a - a - \sqrt[3]{4} \cdot a} \cdot (x - a) = \frac{4a}{-2a \cdot \sqrt[3]{4}} \cdot (x - a).$$

Wie man anhand der Abbildung erkennen kann, liegt der Punkt S auf der y-Achse, es gilt also $x_S = 0$ und weiters

$$y_S = \frac{4a}{-2a \cdot \sqrt[3]{4}} \cdot (0 - a),$$

beziehungsweise

$$y_S = \frac{4a^2}{2a \cdot \sqrt[3]{4}}.$$

Kürzen mit $2a$ liefert schließlich

$$y_S = \frac{2a}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2a}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{2}}} = \frac{2a}{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} = a \cdot \sqrt[3]{2},$$

was zu beweisen war.

6.9 Pappos

Pappos lebte im 4. Jahrhundert im antiken Ägypten. Er war Mathematiker und Astronom. Sein Verfahren zur Würfelverdoppelung ist dem von Diokles sehr ähnlich - er verwendet jedoch anstatt der Kissoide ein Lineal, das er um einen bestimmten Punkt dreht [9].

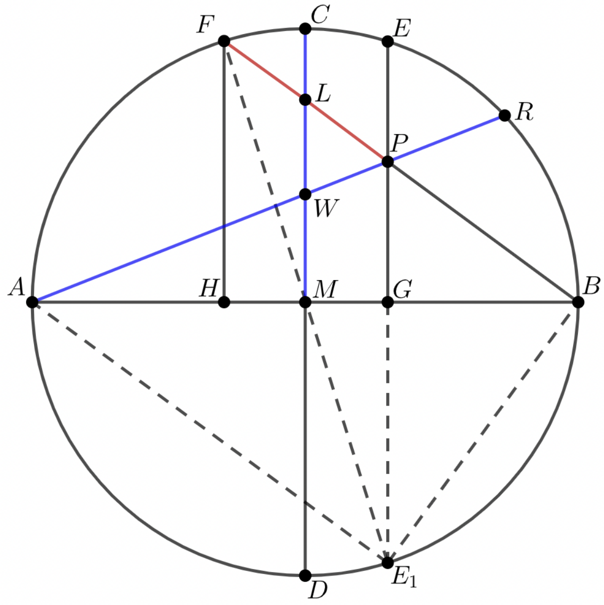

Abbildung: Lösungsverfahren des Pappos.

Der Übersichtlichkeit halber behalten wir die Bezeichnungen für die einzelnen Punkte größtenteils bei. Wie bei Diokles Lösungsverfahren haben wir zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die normal aufeinander stehen und sich im Punkt M schneiden. Hinzu kommen die Punkte R, L und W, wobei R der Schnittpunkt der Geraden AP mit dem Kreis ist und L und W auf der Strecke $\overline{CM}$ liegen. W ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{CM}$, L ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{FB}$.

Wir werden letztlich zwei mittlere Proportionale zwischen den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MW}$ finden, wobei aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke AGP und AMW gilt:

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|}.$$

Pappos legt ein Lineal an den Punkt B an und dreht dieses so lange, bis es die Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{CM}$ so schneidet, dass L zu F und P den gleichen Abstand hat.

Die Strecken $\overline{FH}$ und $\overline{EG}$ werden dann orthogonal zur x-Achse beziehungsweise zur Strecke $\overline{AB}$ konstruiert. Die beiden Strecken sind gleich weit von der y-Achse entfernt, da $|\overline{FL}| = |\overline{LP}|$ und $|\overline{HM}| = |\overline{MG}|$ gilt.

Der Punkt P liegt auf der Kissoide, die jedoch von Pappos nicht verwendet wird. Die Dreiecke AGE und GBE sind ähnlich, da sie die Seite $\overline{GE}$ gemeinsam haben und beide rechtwinkelig sind. Deswegen gilt

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GE}|} = \frac{|\overline{GE}|}{|\overline{GB}|},$$

beziehungsweise, da $|\overline{FH}| = |\overline{GE}|$,

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{HF}|} = \frac{|\overline{HF}|}{|\overline{GB}|}.$$

Weiters gibt Heath [9] an, dass

$$\frac{|\overline{HF}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|},$$

was leicht gezeigt ist. Die Dreiecke AHF und HBF sind ähnlich deswegen gilt

$$\frac{|\overline{HF}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{HB}|}{|\overline{HF}|}.$$

Da auch die Dreiecke HBF und GBP ähnlich sind, kann man diesen Ausdruck erweitern zu

$$\frac{|\overline{HF}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{HB}|}{|\overline{HF}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|}.$$

Da die Punkte H und G gleich weit vom Ursprung beziehungsweise vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind, ist $|\overline{AH}| = |\overline{GB}|$, und wir erhalten

$$\frac{|\overline{HF}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|}.$$

Gemeinsam mit obiger Relation ergibt das

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{HF}|} = \frac{|\overline{HF}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|},$$

womit wir zwei mittlere Porportionale zwischen den Strecken $\overline{AG}$ und $\overline{GP}$ gefunden haben.

Aufgrund der zu Beginn festgelegten Relation

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|}$$

können wir also auch leicht die mittleren Proportionalen zwischen $\overline{AM}$ und $\overline{MW}$ finden.

Pappos beweist, dass $|\overline{ML}|$ eine der beiden mittleren Proportionalen ist zwischen $|\overline{MW}|$ und $|\overline{AM}|$. Zu diesem Zweck zeigt er, dass die Relation

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|} = \frac{|\overline{AM}|^3}{|\overline{ML}|^3}$$

gilt [9].

Mit unserer Notation wäre dann $b = |\overline{AM}|$, $a = |\overline{MW}|$ und $y = |\overline{ML}|$, und wir sehen, dass sich aus obiger zu beweisender Relation der Ausdruck

$$\frac{b}{a} = \frac{b^3}{y^3}$$

ergibt.

Da wir bei der Würfelverdoppelung $b = 2a$ verwenden, ist diese Relation äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a} &= \frac{8a^3}{y^3} \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= \frac{8a^3}{y^3} \\ \Leftrightarrow \quad y^3 &= 4a^3 \\ \Leftrightarrow \quad y &= \sqrt[3]{4} \cdot a \end{aligned}$$

Hat man y gefunden, so findet man x, indem man eine mittlere Proportionale zwischen a und y findet, d.h. ein x mit der Eigenschaft $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$. Das kann (wie in Euklid, Elemente, Buch VI, Prop. 13 beschrieben) mit Hilfe des Höhensatzes geschehen.
Es wurde bereits bei Diokles gezeigt, wie diese mittlere Proportionale geometrisch und analytisch gefunden werden kann - jedoch beschreibt Heath das Verfahren des Pappos geringfügig modifiziert, weswegen wir es hier kurz ausführen werden [9].

Pappos verwendet die Hilfslinien, die in der Abbildung zu sehen sind. Er verbindet die Punkte F und M und verlängert die Strecke, bis sie den Kreis schneidet. Daraus ergibt sich der Punkt E_1, und er konstruiert die neuen Strecken $\overline{AE_1}$ und $\overline{BE_1}$.

Da die Strecken $\overline{FM}$ und $\overline{ME_1}$ sowie $\overline{FL}$ und $\overline{LP}$ gleich lang sind, folgt, dass $\overline{PE_1}$ parallel zur y-Achse verläuft und die Strecke $\overline{AB}$ in G schneidet.

Laut Satz des Thales ist $\angle AE_1B$ ein rechter Winkel und es folgt

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{E_1G}|^2}{|\overline{GB}|^2}.$$

Das ist mittels Höhensatz leicht zu beweisen, denn es gilt im Dreieck AE_1B

$$|\overline{AG}| \cdot |\overline{GB}| = |\overline{E_1G}|^2,$$

was man durch Multiplikation mit $\frac{1}{|\overline{GB}|^2}$ umformen kann zu

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{E_1G}|^2}{|\overline{GB}|^2}.$$

Aus dem Höhensatz in der Form $|\overline{E_1G}| \cdot |\overline{GP}| = |\overline{GB}|^2$ (und daher $|\overline{E_1G}|^2 \cdot |\overline{GP}|^2 = |\overline{GB}|^4$) erhält man

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{E_1G}|^2}{|\overline{GB}|^2} = \frac{|\overline{GB}|^2}{|\overline{GP}|^2}.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $\frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|}$, so erhalten wir

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GB}|} \cdot \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{GB}|^2}{|\overline{GP}|^2} \cdot \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{GB}|^3}{|\overline{GP}|^3}.$$

Wie wir bereits wissen, gilt aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke AGP und AMW

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|}.$$

Die Dreiecke MBL und GBP liefern

$$\frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{ML}|}.$$

Deswegen gilt

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GP}|} = \frac{|\overline{GB}|^3}{|\overline{GP}|^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|} = \frac{|\overline{MB}|^3}{|\overline{ML}|^3},$$

was man wiederum umformen kann zu

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MW}|} = \frac{|\overline{AM}|^3}{|\overline{ML}|^3},$$

da die Punkte A und B gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind.

Wir haben also mit $y = |\overline{ML}|$ eine der beiden mittleren Proportionalen gefunden. Sie ist die Seitenlänge des Würfels mit vierfachem Volumen.

6.10 Sporus

Laut Heath [9] war Sporus entweder Lehrer oder Mitschüler des Pappos. Sein Lösungsverfahren ähnelt denen von Diokles und Pappos stark - auch er verwendet den oben gegebenen Kreis mit den gleichen Punkten und Strecken. Auch Sporus sucht zuerst zwei mittlere Proportionale zwischen $\overline{AG}$ und $\overline{GP}$, sodass

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GE}|} = \frac{|\overline{GE}|}{|\overline{GB}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{GP}|},$$

was es ihm ermöglicht, auch die mittleren Proportionalen zwischen $\overline{AM}$ und $\overline{MW}$ zu finden.

Sporus findet die mittlere Proportionale x, indem er zuerst beweist, dass

$$\frac{|\overline{GE}|}{|\overline{ML}|} = \frac{|\overline{HB}|}{|\overline{MB}|}.$$

Die Relation folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke HBF und MBL und aus der Tatsache, dass die Strecken $\overline{HF}$ und $\overline{GE}$ gleich lang sind.

Sporus zeigt dann, dass

$$\frac{|\overline{HB}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{AG}|}{|\overline{AM}|},$$

was offensichtlich ist, weil die Punkte A und B sowie H und G auf einer Geraden liegen und je den selben Abstand zum Ursprung haben.

Letztendlich beweist er, dass

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{AM}|} = \frac{|\overline{GP}|}{|\overline{MW}|},$$

was wiederum auf die Ähnlichkeit der Dreiecke AMW und AGP zurückzuführen ist.

Laut Heath [9] sind die Beweise, die Sporus für die Relationen bringt, eher verwirrend und nicht so ausgeklügelt wie jene von Pappos. Trotzdem findet er die erste der beiden mittleren Proportionalen - obgleich er für die Konstruktion mit der Verschiebung eines Lineals ein unerlaubtes Hilfsmittel benutzt.

6.11 Eudoxus

Eudoxus lebte in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr. und war Schüler des Archytas [1] in der Akademie. Er lebte auf der Halbinsel Knidos, die sich im heutigen Kleinasien befindet [9]. Seine mathematischen Leistungen sind vor allem durch Werke anderer Mathematiker bekannt - beispielsweise stammt von ihm der Großteil des fünften und zwölften Buchs der *Elemente* von Euklid [9]. Das fünfte Buch befasst sich hauptsächlich mit Proportionen und ist somit eine Vorbetrachtung zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung.

Eutocios beschreibt Eudoxus Methode nicht. Tannery hat vorgeschlagen, dass es sich um eine zweidimensionale Version der Lösung des Archytas handelt, an die wir uns kurz zurückerinnern wollen. Archytas schneidet einen Kegel, einen Torus und einen Zylinder miteinander. Die Gleichung des Torus ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = b \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

die des Kegels durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2.$$

Schneiden wir die beiden Flächen miteinander, erhalten wir in der xy-Ebene die Gleichung einer Kurve

$$\begin{aligned} b \cdot \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= b \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= \frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Eudoxus beginnt mit einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ und einer Sehne $\overline{AC}$. Heath bestimmt die Längen der Strecken $\overline{AB}$ als a und $\overline{AC}$ als b. Da jedoch bei der Würfelverdoppelung immer $b = 2a$ gelten soll, bestimmen wir: $a = |\overline{AC}|$, $b = |\overline{AB}|$.

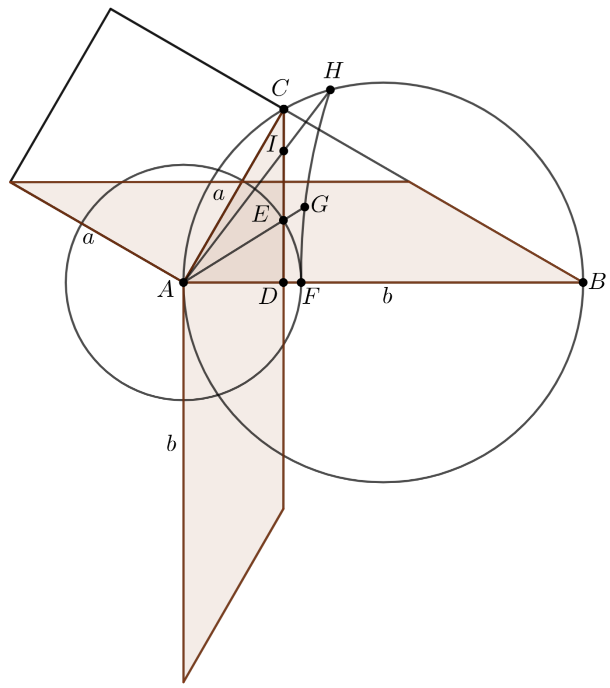

Abbildung: Lösungsverfahren des Eudoxus.

Durch den Punkt C wird eine Normale auf $\overline{AB}$ gezogen, sie bildet die Höhe des Dreiecks ABC. Heath [9] gibt nun an, dass

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}|$$

gilt. Dabei handelt es sich um den Kathetensatz (der in Euklid, Elemente, Buch I, Prop. 47 beschrieben wird). Die Gleichung ist aber auch leicht gezeigt:

Wir zeichnen ein Quadrat über die Seite $\overline{AC}$ und addieren zu seinem Flächeninhalt den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Verschieben wir nun das Dreieck ABC schräg links nach oben, sehen wir, dass das rote Parallelogramm den gleichen Flächeninhalt haben muss wie das Quadrat, und zwar $a^2 = |\overline{AC}|^2$.

Fixieren wir das rote Parallelogramm nun im Punkt A und drehen es nach unten, sehen wir, dass es den Flächeninhalt $b \cdot |\overline{AD}| = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}|$ haben muss.

Daraus folgt, dass $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}|$, was man zu

$$|\overline{AD}| = \frac{|\overline{AC}|^2}{|\overline{AB}|} = \frac{a^2}{b}$$

umformen kann.

Im Folgenden verwendet Heath [9] den Sekans, der im rechtwinkeligen Dreieck das

Verhältnis von Hypotenuse zu Ankathete und somit der Kehrwert der Kosinusfunktion ist.

Es gilt also

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

und weiters

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha.$$

Wir nehmen einen beliebigen Punkt E auf der Strecke $\overline{CD}$ und verbinden A und E . Den Winkel $\angle DAE$ bezeichnen wir mit α. Im rechtwinkeligen Dreieck ADE ist für den Winkel α die Strecke $\overline{AD}$ die Ankathete und die Strecke $\overline{AE}$ die Hypotenuse.

Wir erhalten somit

$$\sec\alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|}$$

beziehungsweise

$$|\overline{AE}| = |\overline{AD}| \cdot \sec\alpha.$$

Durch den Punkt E zeichnen wir nun einen Kreis mit Mittelpunkt A, der die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt F schneidet. Von diesem Punkt aus zeichnen wir eine weitere Strecke $\overline{FG}$ orthogonal zu $\overline{AB}$, sodass $\overline{FG}$ die Gerade durch A und E im Punkt G schneidet. Dadurch entsteht das rechtwinkelige Dreieck AFG mit der Ankathete $\overline{AF}$ und der Hypotenuse $\overline{AG}$ bezüglich des Winkels α und wir erhalten

$$\sec\alpha = \frac{|\overline{AG}|}{|\overline{AF}|}$$

und weiter

$$|\overline{AG}| = |\overline{AF}| \cdot \sec\alpha.$$

Da sowohl F als auch E am Kreis liegen und damit den gleichen Abstand von A haben, kann man obigen Ausdruck erweitern auf

$$|\overline{AG}| = |\overline{AF}| \cdot \sec\alpha = |\overline{AE}| \cdot \sec\alpha.$$

Wie vorher gezeigt, gilt

$$|\overline{AE}| = |\overline{AD}| \cdot \sec\alpha,$$

was äquivalent ist zu

$$|\overline{AE}| \cdot \sec\alpha = |\overline{AD}| \cdot \sec^2\alpha.$$

Somit gilt

$$|\overline{AG}| = |\overline{AF}| \cdot \sec\alpha = |\overline{AE}| \cdot \sec\alpha = |\overline{AD}| \cdot \sec^2\alpha$$

beziehungsweise

$$|\overline{AG}| = \frac{a^2}{b} \cdot \sec^2 \alpha.$$

Laut Eutocios arbeitet Eudoxus mit krummen Linien, und der Punkt G liegt auf zu Beginn angegebener Kurve. Wählt man nämlich ein Koordinatensystem mit Ursprung in A und der Gerade durch A und B als x-Achse und hat der Punkt G die Koordinaten (x, y), so ist

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und daher

$$\sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

Die Gleichung

$$|\overline{AG}| = \frac{a^2}{b} \sec^2 \alpha$$

ist nun gleichbedeutend mit

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2},$$

woraus

$$x^2 = \frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

folgt.

Auf diese Weise können beliebig viele weitere Punkte gefunden werden, die auf der Kurve liegen. Die Kurve schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt H. Da es sich bei diesem Kreis um den Schnitt des Zylinders aus Archytas Lösung mit der xy-Ebene handelt, ist $|\overline{AH}|$ die erste der beiden mittleren Proportionalen (siehe Abschnitt **6.2**).

6.12 Platon

Platon lebte im 4. Jahrhundert v. Chr. in Athen, wo er auch die Akademie gründete, in deren Umfeld sich unter anderem Archytas von Tarent, Eudoxus von Knidos und Menaichmos mathematisch betätigten. Die Lösung zur Würfelverdoppelung, die im Folgenden vorgestellt wird, wird Platon zwar zugeschrieben, stammt aber ziemlich sicher nicht von ihm. Platon verachtete mechanische Lösungsverfahren - er war der Überzeugung, dass diese der Exaktheit der Geometrie nicht würdig waren. Es wird angenommen, dass die Lösung von einem Zeitgenossen von Menaichmos stammt, da sich die beiden Verfahren sehr ähneln.

Heath [9] beschreibt das Lösungsverfahren folgendermaßen: Zum Finden der zwei mittleren Proportionalen wird ein stabiler rechter Winkel aus Holz verwendet, an dem eine Strebe so entlang geschoben wird, dass sie immer parallel zu einem der Schenkel bleibt.

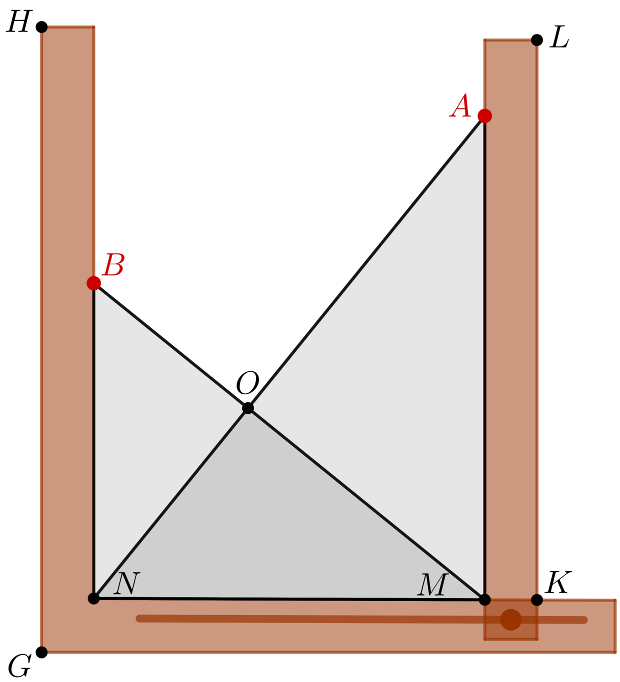

Abbildung: Lösungsverfahren, das Platon zugeschrieben wird.

Anhand der Abbildung kann man erkennen, wie die Holzstrebe entlang des unteren Schenkels bewegt wird. Die Punkte A und B sind rot markiert, weil das mechanische Hilfsmittel so platziert werden muss, dass die innere Seite von $\overline{HG}$ immer durch B und die innere Seite von $\overline{LK}$ immer durch A gehen muss.

Die Maschine muss dann bewegt und gedreht werden, und die Strebe wird so verschoben, sodass der innere Winkel bei G auf der Verlängerung von $\overline{AO}$ und der innere

Winkel zwischen unterem Schenkel und Strebe auf der Verlängerung der Strecke $\overline{BO}$ liegt und die Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ im rechten Winkel zueinander stehen. Wir erhalten dadurch drei ähnliche Dreiecke BNO, NMO und MAO, deren Eckpunkte genau so liegen, wie in dem Lösungsverfahren des Menaichmos.

Da $\angle BON$, $\angle NOM$ and $\angle MOA$ rechte Winkel sind, kann man in den Dreiecken den Höhensatz anwenden und erhält somit:

$$|\overline{MO}|^2 = |\overline{NO}| \cdot |\overline{AO}|$$

sowie

$$|\overline{NO}|^2 = |\overline{BO}| \cdot |\overline{MO}|.$$

Diese Ausdrücke können wir zu

$$\frac{|\overline{MO}|}{|\overline{NO}|} = \frac{|\overline{AO}|}{|\overline{MO}|}$$

und

$$\frac{|\overline{NO}|}{|\overline{BO}|} = \frac{|\overline{MO}|}{|\overline{NO}|}$$

umformen, was äquivalent ist zu

$$\frac{|\overline{AO}|}{|\overline{MO}|} = \frac{|\overline{MO}|}{|\overline{NO}|} = \frac{|\overline{NO}|}{|\overline{BO}|}.$$

Für $a = |\overline{AO}|$ und $b = |\overline{BO}|$ haben wir somit unsere beiden mittleren Proportionalen gefunden.

7 Weitere Verfahren

Auch später wurde noch versucht, Lösungen für die Würfelverdoppelung zu finden. Im Folgenden werden drei dieser Verfahren analysiert.

7.1 Isaac Newton

Bei der Methode des Isaac Newton wird in der Literatur immer eine Skizze wie in der untenstehenden Abbildung angeführt.

Dazu findet man folgenden Text [16]:

> I draw any line, $\overline{KA} = a$, and bisect it in C, and from the center K, with the distance $|\overline{KC}|$, describe the circle CX, to which I inscribe the right line $\overline{CX} = b$, and between AX and CX, infinitely produced, pass through the point K. So $|\overline{KA}|$, $|\overline{XY}|$, $|\overline{KE}|$, $|\overline{CX}|$ will be continual proportionals, that is, $|\overline{XY}|$ and $|\overline{KE}|$ two mean proportionals between a and b. This construction is known.

Es wird also eine beliebige Strecke $|\overline{KA}| = a$ mit Mittelpunkt C gezogen, und um K wird ein Kreis mit Radius $|\overline{KC}| = \frac{a}{2} = b$ gezogen. Weiters wird die Strecke $|\overline{CX}| = b$ bestimmt und durch C und X sowie durch A und X wird jeweils eine Gerade gezogen, sodass der Punkt E auf AX und der Punkt Y auf CX liegt. Die Punkte E und Y werden so gelegt, dass K, E und Y auf einer Geraden liegen und $|\overline{CX}| = |\overline{EY}|$. Das geschieht mittels Verschiebung eines Lineals (in der Skizze grau eingezeichnet).

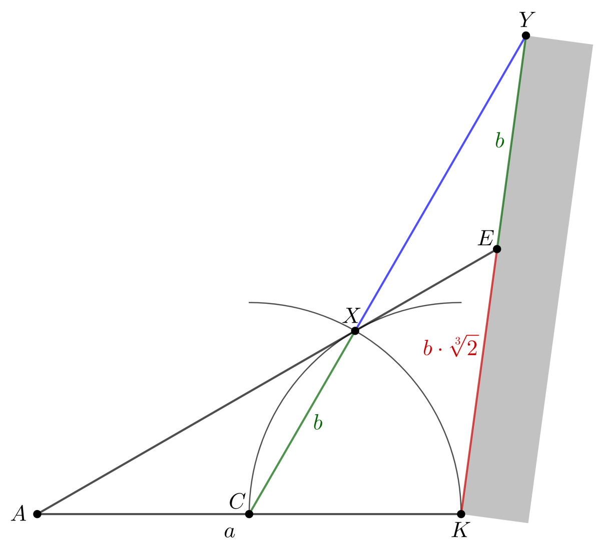

Abbildung: Skizze nach Newton.

Die Strecke $\overline{EK}$ soll dann die Länge $b \cdot \sqrt[3]{2}$ haben, wobei die Strecke b bei Newton - anders als bei uns - die Seitenlänge des ursprünglichen Würfels ist.

Wir ergänzen Newtons Skizze, wie unten ersichtlich:

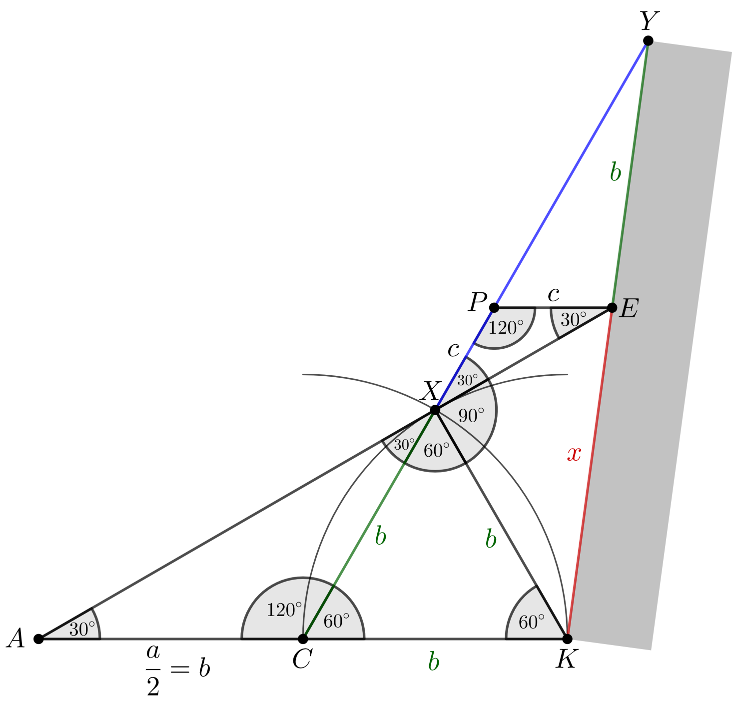

Abbildung: Erweiterte Skizze.

Die Strecke $\overline{KC}$ und die anschließende Strecke $\overline{CA}$ haben jeweils die Länge b beziehungsweise $\frac{a}{2}$. Der Punkt X entsteht, indem wir von C und K jeweils einen Kreisbogen mit Radius b schlagen. Es ist dann ersichtlich, dass das Dreieck CKX gleichseitig ist.

Man zieht dann die Geraden durch A und X sowie durch C und X und es wird die Neusis durchgeführt: Die Strecke $\overline{KY}$ wird so gelegt, dass $|\overline{CX}| = |\overline{EY}| = b$ und sie durch den Punkt K geht. So erhält man die Punkte Y und E.

Die Strecke $\overline{EY}$ hat dann, wie oben beschrieben, die Länge b; die Länge der Strecke $\overline{EK}$ bezeichnen wir mit x. Wir ziehen dann eine Parallele zu $\overline{AK}$ durch den Punkt E. Diese schneidet die Strecke $\overline{CY}$ im Punkt P. Die Länge der Strecke $\overline{EP}$ sei c.

Die Dreiecke PEY und CKY sind ähnlich. Es gilt somit

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x+b},$$

beziehungsweise

$$c = \frac{b^2}{x+b}.$$

Das Dreieck AKX ist rechtwinkelig. Die Strecke $\overline{AX}$ hat die Länge $\sqrt{4b^2 - b^2} = b\sqrt{3}$.

Auch das Dreieck KEX ist rechtwinkelig. Somit hat die Strecke $\overline{EX}$ die Länge $\sqrt{x^2 - b^2}$. Die Dreiecke ACX und XEP sind ähnlich. Somit gilt

$$\frac{b}{b\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{3}}.$$

Oben eingesetzt ergibt das

$$\sqrt{\frac{x^2 - b^2}{3}} = \frac{b^2}{x + b}.$$

Man quadriert die Gleichung und erhält

$$\frac{x^2 - b^2}{3} = \frac{b^4}{(x + b)^2},$$

was äquivalent ist zu

$$(x^2 - b^2)(b^2 + 2bx + x^2) = 3b^4.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} & b^2x^2 - b^4 + 2bx^3 - 2b^3x + x^4 - b^2x^2 = 3b^4 \\ \Leftrightarrow\quad & x^4 + 2bx^3 - 2b^3x = 4b^4 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{x^4}{b^4} + 2\frac{x^3}{b^3} - 2\frac{x}{b} = 4, \end{aligned}$$

was wiederum auch als

$$\left(\frac{x}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{b} + 2\right) = 4 + 2\frac{x}{b} = 2 \cdot \left(\frac{x}{b} + 2\right)$$

geschrieben werden kann.

Somit ist

$$\left(\frac{x}{b}\right)^3 = 2$$

und

$$x = b \cdot \sqrt[3]{2},$$

wobei x die Seitenlänge des verdoppelten Würfels ist.

Isaac Newton findet auch ein zweites Verfahren zur Würfelverdoppelung, eine weitere Neusis-Konstruktion [16].

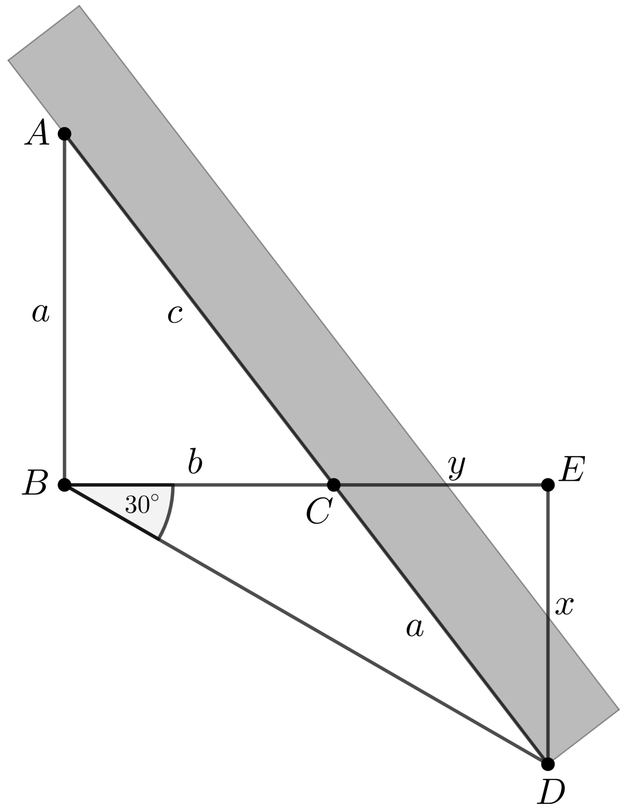

Abbildung: Newtons weniger bekannte Neusis-Konstruktion.

Zuerst wird die Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge a parallel zur y-Achse gezogen. Es wird dann ein $30°$-Winkel mit B als Scheitel konstruiert, wie in der Abbildung ersichtlich. Weiters wird auf einem Lineal der Abstand a markiert, und es wird so lange gedreht und verschoben, bis die Punkte D, C und A auf einer Geraden liegen, wobei $\overline{BC}$ normal auf $\overline{AB}$ steht. Die Länge der Strecke $c = |\overline{AC}|$ ist dann die Seitenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen.

Das ist leicht bewiesen: Es gilt nach Strahlensatz in den ähnlichen Dreiecken BCA und CDE

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{a}.$$

Das kann man umformen zu

$$x = \frac{a^2}{c}$$

und

$$y = \frac{ab}{c}.$$

Newton gibt außerdem an, dass

$$\tan 30^\circ = \frac{a^2}{b(a+c)}$$

gilt, was wir nun zeigen wollen:

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{b+y} = \frac{a^2}{c\left(b+\frac{ab}{c}\right)} = \frac{a^2}{cb+ab} = \frac{a^2}{b(a+c)}$$

Der Ausdruck ergibt quadriert

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{b^2(a+c)^2}$$

beziehungsweise

$$3a^4 = b^2(a+c)^2.$$

Das ist äquivalent zu

$$3a^4 = (c^2-a^2)(a+c)^2,$$

da im Dreieck BCA der Satz des Pythagoras gilt. Wir erhalten weiters

$$\begin{aligned}
& 3a^4 = (c^2-a^2)(a^2+2ac+c^2) \\
\Leftrightarrow\quad & 3a^4 = a^2c^2 - a^4 + 2ac^3 - 2a^3c + c^4 - a^2c^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4a^4 + 2a^3c - 2ac^3 - c^4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2a^3(2a+c) - c^3(2a+c) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2a^3 - c^3 = 0,
\end{aligned}$$

was uns schließlich zu

$$2a^3 = c^3$$

beziehungsweise

$$c = \sqrt[3]{2} \cdot a$$

führt. Somit ist c in der Tat die Seitenlänge des verdoppelten Würfels.

7.2 Albrecht Dürer

Albrecht Dürer war nicht nur ein begnadeter Maler, sondern auch ein bemerkenswerter Mathematiker. In seinem Werk "Underweysung der messung/mit dem zirckel un richtscheyt/in Linien ebnen vnnd gantzen corporen/durch Albrecht Dürer zusammen getzoge/und zu alle kunstliebe habende mit zu gehörigen figuren/in truck gebracht/im jar MDXXV" behandelt Dürer auch das Problem der Würfelverdoppelung [7].

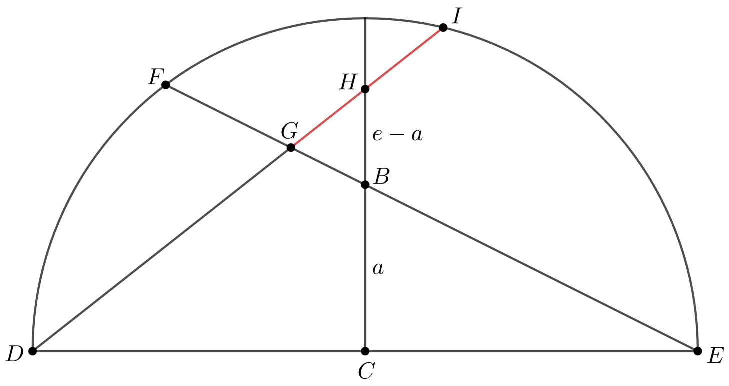

Abbildung: Lösungsverfahren von Albrecht Dürer.

Dürer bildet einen Halbkreis mit dem Radius $2a$. Mittelpunkt ist der Ursprung, hier als Punkt C bezeichnet. Der rechte Endpunkt ist Punkt E, der linke Endpunkt ist Punkt D. Auf der y-Achse trägt man die Strecke a ab, dies bringt Punkt B. Man zieht nun eine Gerade von Punkt E durch Punkt B. Diese schneidet den Kreis im Punkt F.

Mit einer abgewandelten Neusis-Konstruktion fügt man nun die Gerade durch die Punkte D, G, H und I ein, wobei die Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{HI}$ gleich lang sein sollen, was durch einiges Probieren auch gelingen dürfte. Man bekommt dadurch dann den Punkt H und die Strecke $\overline{CH}$ (deren Länge als e bezeichnet wird).

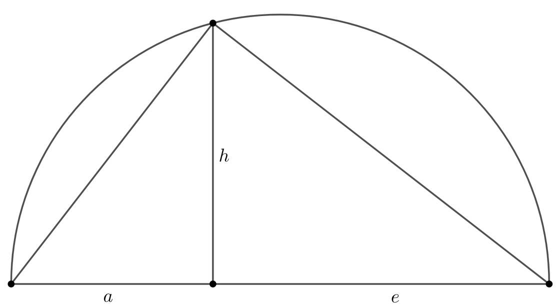

Abbildung: Nebenkonstruktion von Albrecht Dürer.

In einer zweiten Konstruktion errichtet man über der Strecke $a + e$ einen Halbkreis (Thaleskreis). Die Höhe h soll die Seitenlänge des verdoppelten Würfels sein, also

$h = a \cdot \sqrt[3]{2}$, was wir nun verifizeren wollen.

Wir bilden die Gleichungen der Geraden. Die Gerade FE hat die Steigung $k = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$ und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|a)$. Wir erhalten deswegen die Geradengleichung

$$FE : y = -\frac{x}{2} + a.$$

Die Gerade DI hat die Steigung $\frac{e}{2a}$ und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|e)$, wir erhalten also

$$DI : y = \frac{e}{2a}x + e.$$

Wir ermitteln nun die Koordinaten des Schnittpunktes G, wozu wir die beiden Geraden gleichsetzen:

$$-\frac{x}{2} + a = \frac{e}{2a}x + e,$$

was wir umformen können zu

$$a - e = \frac{e}{2a}x + \frac{x}{2} = x \cdot \left(\frac{e}{2a} + \frac{1}{2}\right).$$

Das ist wiederum äquivalent zu

$$a - e = x \cdot \frac{e + a}{2a}.$$

Wir erhalten so die x-Koordinate

$$x_G = 2a \cdot \frac{a - e}{a + e}.$$

Widmen wir uns nun dem Schnittpunkt I. Dieser liegt auf dem Kreis, der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

beziehungsweise

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

angegeben werden kann.

Wir setzen den Kreis mit der Geraden DI gleich und erhalten

$$\sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{e}{2a}x + e.$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$4a^2 - x^2 = \frac{e^2}{4a^2}x^2 + 2\frac{e^2}{2a}x + e^2,$$

was zusammengefasst

$$x^2\left(\frac{e^2}{4a^2}+1\right)+x\frac{e^2}{a}+(e^2-4a^2)=0$$

ergibt.

Durch die Lösungsformel ergibt sich weiters

$$\begin{aligned}
&& x_{1,2} &= \frac{-\frac{e^2}{a}\pm\sqrt{\frac{e^4}{a^2}-4\left(\frac{e^2}{4a^2}+1\right)\cdot(e^2-4a^2)}}{2\cdot\left(\frac{e^2}{4a^2}+1\right)}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{-\frac{e^2}{a}\pm\sqrt{\frac{e^4}{a^2}-4\left(\frac{e^4}{4a^2}+e^2-e^2-4a^2\right)}}{\frac{2e^2+8a^2}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{-\frac{e^2}{a}\pm\sqrt{\frac{e^4}{a^2}-\frac{e^4}{a^2}+16a^2}}{\frac{2e^2+8a^2}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{-\frac{e^2}{a}\pm 4a}{\frac{2e^2+8a^2}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{\frac{-e^2\pm4a^2}{a}}{\frac{2e^2+8a^2}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{4a^2\cdot(-e^2\pm4a^2)}{a\cdot(2e^2+8a^2)}\\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \frac{2a\cdot(-e^2\pm4a^2)}{e^2+4a^2}.
\end{aligned}$$

Durch Kürzen kommen wir auf

$$x_1=-2a,$$

was auch sein muss, da die Gerade DI ja durch den Punkt $D=(-2a|0)$ geht.

Wir erhalten weiters

$$x_2=\frac{2a\cdot(4a^2-e^2)}{4a^2+e^2}=x_I.$$

Da die Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{HI}$ gleich lang sind und H auf der y-Achse liegt, gilt $x_G=-x_I$, also

$$\begin{aligned}
&& -2a\cdot\frac{a-e}{a+e} &= 2a\cdot\frac{4a^2-e^2}{4a^2+e^2}\\
&\Leftrightarrow & (e-a)(4a^2+e^2) &= (e+a)(4a^2-e^2)\\
&\Leftrightarrow & 4a^2e-4a^3+e^3-ae^2 &= 4a^2e-e^3+4a^3-ae^2\\
&\Leftrightarrow & 2e^3 &= 8a^3\\
&\Leftrightarrow & e &= a\cdot\sqrt[3]{4}
\end{aligned}$$

Aus der Nebenskizze ist gemäß dem Höhensatz ableitbar

$$h^2 = a \cdot e,$$

was wegen $e = a \cdot \sqrt[3]{4}$ äquivalent ist zu

$$h^2 = a^2 \cdot \sqrt[3]{4}.$$

Es ist dann

$$h = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Die Strecke h in der Nebenskizze entspricht also tatsächlich der Seitenlänge des Würfels mit dem doppelten Volumen des Ausgangswürfels mit der Seitenlänge a.

7.3 Heinrich Dörrie

Heinrich Dörrie schreibt in seinem Buch *100 Problems of Elementary Mathematics* unter anderem über die Würfelverdoppelung. Nachdem er kurz das Lösungsverfahren des Menaichmos beschreibt, gibt er an, dass eine einfache Papierstreifenkonstruktion zur Lösung der Würfelverdoppelung ausreichend ist [6].

Dörrie nennt die Seitenlänge des ursprünglichen Würfels k und die des verdoppelten Würfels x. Die Volumina sind dann durch k^3 und x^3 gegeben, und es muss

$$x^3 = 2k^3$$

beziehungsweise

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot k$$

gelten.

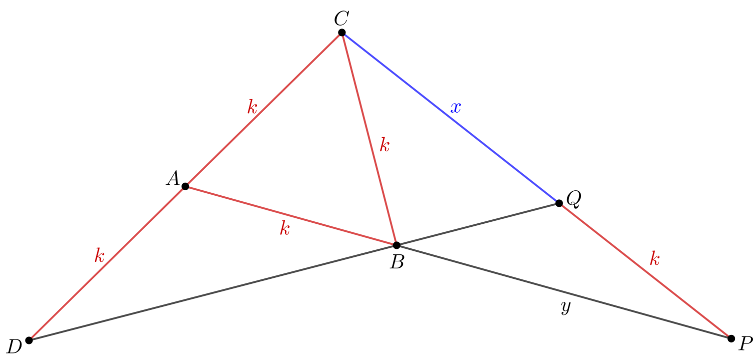

Abbildung: Papierstreifenkonstruktion nach Heinrich Dörrie.

Die Abbildung gibt die Skizze, die Dörrie in seinem Buch verwendet, wieder. Begonnen wird mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge k und Eckpunkten A, B, und C. Die Strecke $\overline{AC}$ wird dann nach unten um k verlängert, wodurch wir den Punkt D erhalten. Durch die Punkte D und B legt Dörrie eine Gerade. Er platziert dann einen Papierstreifen so, dass er die Geraden DB und AB sowie den Punkt C so schneidet, dass der Abstand der beiden Punkte Q (auf DB) und P (auf AB) genau k entspricht.

Die Strecke $\overline{CQ}$ hat dann genau die Länge $\sqrt[3]{2} \cdot k$, was folgendermaßen bewiesen wird:

Dörrie führt aus, dass

$$(x + k)^2 - k^2 = y(k + y)$$

gilt, was leicht gezeigt ist:

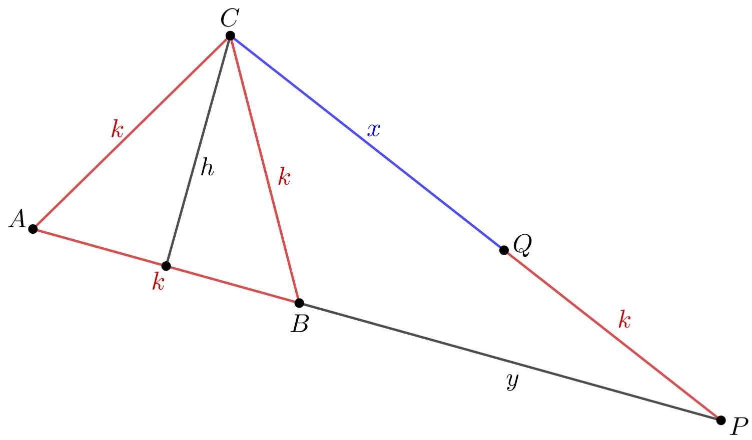

Abbildung: Beweis: $(x+k)^2 - k^2 = y(k+y)$.

Wir zeichnen zusätzlich die Höhe des Dreiecks APC ein und erhalten dadurch zwei rechtwinklige Dreiecke. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann im Dreieck rechts von h

$$(x+k)^2 = h^2 + \left(\frac{k}{2} + y\right)^2 .$$

In dem Dreieck links von der Höhe h gilt

$$k^2 = h^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 ,$$

was man umformen kann zu

$$h^2 = k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 .$$

Setzt man den obigen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$(x+k)^2 = k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} + y\right)^2 .$$

Durch Ausmultiplizieren kommen wir auf

$$(x+k)^2 - k^2 = -\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + ky + y^2.$$

Das ist äquivalent zu

$$(x+k)^2 - k^2 = y(k+y),$$

was zu beweisen war. Hier sei noch angemerkt, dass man das zu

$$x^2 + 2kx = y^2 + ky$$

umformen kann.

Dörrie legt außerdem dar, dass die Gleichung

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{CQ}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{QP}|$$

erfüllt ist, was wir nun mit Hilfe einer weiteren Abbildung zeigen wollen.

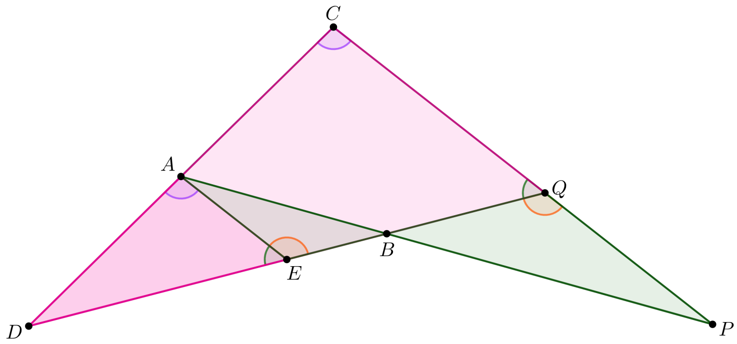

Abbildung: Beweis: $|\overline{AD}| \cdot |\overline{CQ}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{QP}|$.

Wir beginnen, indem wir die Strecke $\overline{AE}$ parallel zu $\overline{CP}$ ziehen. Die violetten Winkel $\angle DAE$ und $\angle DCP$, die grünen Winkel $\angle AED$ und $\angle CQD$ sowie die beiden orangen $\angle BEA$ und $\angle BQP$ sind jeweils gleich groß. Somit sind die zwei pinken Dreiecke DEA und DQC ähnlich und es gilt

$$\frac{|\overline{CQ}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|}.$$

Weiters sind die beiden grünen Dreiecke AEB und BPQ ähnlich zueinander, also erhalten wir

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{QP}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BP}|}.$$

Multipliziert man beide Gleichungen, kommt man auf

$$\frac{|\overline{CQ}|}{|\overline{AE}|} \cdot \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{QP}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|} \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BP}|}$$

und durch Kürzen auf

$$\frac{|\overline{CQ}|}{|\overline{QP}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|} \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BP}|},$$

was man zu

$$\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|} \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BP}|} \cdot \frac{|\overline{QP}|}{|\overline{CQ}|} = 1$$

umformen kann. Die Relation ist offensichtlich äquivalent zu Dörries Behauptung, und mit unseren Bezeichnungen für die einzelnen Strecken erhalten wir für $|\overline{AD}| \cdot |\overline{CQ}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{QP}|$:

$$k \cdot x \cdot y = 2k \cdot k \cdot k,$$

beziehungsweise

$$xy = 2k^2.$$

Aus

$$xy = 2k^2$$

folgt

$$y = \frac{2k^2}{x}.$$

Einsetzen in

$$x^2 + 2kx = y^2 + ky$$

gibt

$$\begin{aligned} & x^2 + 2kx = \frac{4k^4}{x^2} + \frac{2k^3}{x} \\ \Rightarrow \quad & x^4 + 2kx^3 - 2k^3x - 4k^4 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \left(\frac{x}{k}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{k}\right)^3 - 2\frac{x}{k} - 4 = 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Gleichung

$$t^4 + 2t^3 - 2t - 4 = 0.$$

Wegen

$$t^4 + 2t^3 - 2t - 4 = t^3(t+2) - 2(t+2) = (t+2)(t^3 - 2)$$

ist sie zu

$$(t+2)(t^3 - 2) = 0$$

äquivalent. Die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist

$$t = \sqrt[3]{2}.$$

(Die anderen Lösungen sind $t = -2$ und ein Paar komplex konjugierter, nicht reeller Lösungen.)

Also ist

$$\frac{x}{k} = \sqrt[3]{2}$$

und daher

$$x = \sqrt[3]{2}k.$$

Betrachtet man Dörries Skizze genauer, fällt auf, dass sie durch Drehen und Spiegeln eigentlich äquivalent zu Newtons Skizze ist. Das bedeutet, unser Lösungsansatz könnte auch in Dörries Fall angewendet werden.

8 Fehlerhafte und näherungsweise Lösungsverfahren

Auch im 15. und 16. Jahrhundert n. Chr. wurde versucht, der Lösung des Problems auf den Grund zu gehen. Jedoch handelt es sich bei den zwei im Folgenden geschilderten Verfahren keinesfalls um exakte Lösungen. Vielmehr hinken die Ansätze den antiken Methoden im Bezug auf Genauigkeit um einiges hinterher.

8.1 Michael Stifel

Michael Stifel wurde im 15. Jahrhundert in Esslingen am Neckar im heutigen Baden-Würtemberg geboren. In seiner *Arithmetica integra* befasst er sich mit der Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen - scheitert jedoch daran, eine korrekte Lösung zu finden.

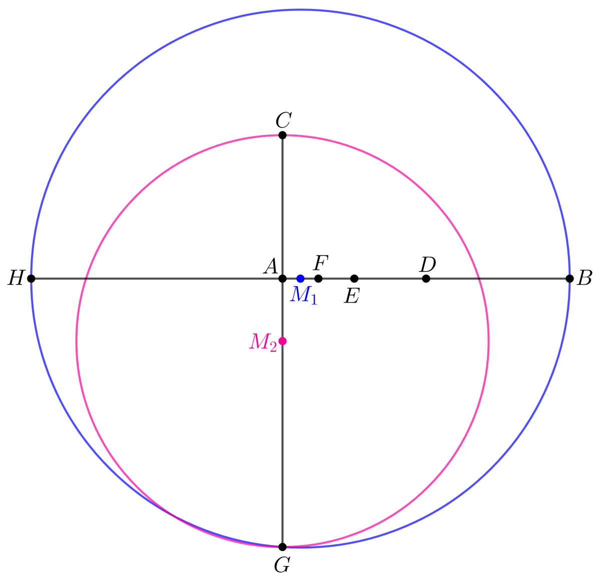

Abbildung: Michael Stifels fehlerhafter Lösungsversuch.

Ausgangspunkt sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$, zwischen denen zwei mittlere Proportionale gefunden werden sollen. Dabei ist - wie bei der Würfelverdoppelung verlangt - $\overline{AB}$ genau doppelt so lang wie $\overline{AC}$.

Stifel halbiert nun konsekutiv Strecken. Er findet den Punkt D durch Halbieren der Strecke $\overline{AB}$, E durch Halbieren der Strecke $\overline{AD}$, F durch Halbieren der Strecke $\overline{AE}$ und schließlich M_1 durch Halbieren der Strecke $\overline{AF}$. M_1 fungiert als Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $|\overline{M_1B}|$, der die Geraden AC und AB in den Punkten G und H schneidet.

Weiters halbiert Stifel die Strecke $\overline{CG}$ und erhält dadurch den Punkt M_2 als Mittelpunkt eines zweiten Kreises, der in der obigen Abbildung rosa eingezeichnet ist.

Stifel gibt nun fälschlicherweise an, dass dann

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AG}|} = \frac{|\overline{AG}|}{|\overline{AB}|}$$

gilt.

Wir wollen nun anhand konkreter Zahlen zeigen, dass diese Aussage falsch ist. Angenommen, die Länge der Strecke $\overline{AC}$ beträgt 4. Dann muss $|\overline{AB}| = 8$ gelten und weiters

$|\overline{AD}| = |\overline{DB}| = 4$
$|\overline{AE}| = |\overline{ED}| = 2$
$|\overline{AF}| = |\overline{FE}| = 1$
$|\overline{AM_1}| = |\overline{M_1F}| = 0,5$

Wenn wir $|\overline{M_1F}|$, $|\overline{FE}|$, $|\overline{ED}|$ und $|\overline{DB}|$ addieren, erhalten wir $|\overline{M_1B}| = |\overline{M_1H}| = 7,5$ und außerdem $|\overline{AH}| = 7$.

Der Winkel $\angle BGH$ ist laut Satz des Thales ein rechter Winkel und somit gilt der Höhensatz:

$$\begin{aligned} & |\overline{AH}| \cdot |\overline{AB}| = |\overline{AG}|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 7 \cdot 8 = |\overline{AG}|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 56 = |\overline{AG}|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & |\overline{AG}| = \sqrt{56} \end{aligned}$$

Wir haben nun alle Zahlenwerte, die wir für die Widerlegung von Stifels Behauptung benötigen und können diese in die Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} & \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AG}|} = \frac{|\overline{AG}|}{|\overline{AB}|} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4}{7} = \frac{7}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{56}}{8} \end{aligned}$$

Wir sehen uns zuerst

$$\frac{7}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{56}}{8}$$

an, was wir leicht auf

$$7 \cdot 8 = \sqrt{56} \cdot \sqrt{56} = 56$$

umformen können. Der zweite Teil der Relation ist für unsere Zahlenwerte also richtig.

Widmen wir uns nun

$$\frac{4}{7} = \frac{7}{\sqrt{56}},$$

was wir auf

$$7 \cdot 7 = 4 \cdot \sqrt{56}$$

umformen, wobei $4 \cdot \sqrt{56} \approx 29,9$ entspricht.

Damit ist gezeigt, dass es sich bei Michael Stifels Lösungsverfahren um einen Irrtum handelt.

8.2 Jean Borrel

Jean Borrel, auch bekannt unter Johannes Buteo, hat im 16. Jahrhundert in Frankreich gelebt. Er war ein Mönch, der sich mit Arithmetik und Geometrie auseinandersetzte [2].

Borrel äußert scharfe Kritik an Michael Stifel's fehlerhafter Methode und nähert sich der Lösung des Problems im dreidimensionalen Raum. Ausgehend von einem Würfel mit Seitenlänge a und Volumen a^3 versucht er, einen Würfel mit doppeltem Volumen zu finden, indem er zuerst zwei Würfel aneinanderreiht. Er erhält so einen Quader mit Seitenlängen $2a$, a und a und Volumen $2a^3$. Sukzessive verwandelt Borrel diesen Quader in einen Würfel. Er geht dabei folgendermaßen vor [20]:

Die Grundfläche des Quaders mit den Seitenlängen a und $2a$ hat den Flächeninhalt $2a^2$. Das ist auch der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge $a \cdot \sqrt{2}$, das in der untenstehenden Abbildung blau eingezeichnet ist.

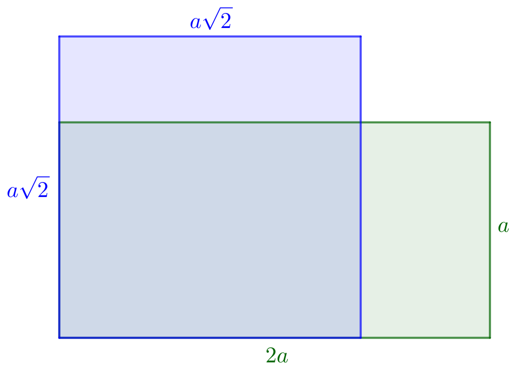

Abbildung: Borrels Näherungslösung.

Borrel verwendet dann dieses blau dargestellte Quadrat als Grundfläche eines neuen Quaders, der aufgrund der gleich groß bleibenden Grundfläche weiterhin das Volumen $2a^3$ hat. Der neue Quader hat also Länge $a\sqrt{2}$, Breite $a\sqrt{2}$ und Höhe a.

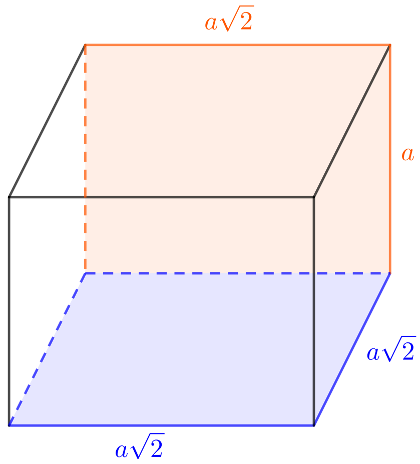

Abbildung: Vom Quader zum Würfel.

In weiterer Folge wird der Quader auf die orange dargestellte Fläche gelegt und Borrel verwandelt dieses Rechteck wieder in ein Quadrat. Beide Figuren haben den Flächeninhalt $a^2\sqrt{2}$; folglich hat das Quadrat die Seitenlänge $a \cdot 2^{\frac{1}{4}}$, woraus ein Quader mit Seitenlängen $a \cdot 2^{\frac{1}{4}}$, $a \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ und $a\sqrt{2}$ resultiert. Hier ist die Grundfläche $2^{\frac{3}{4}} \cdot a^2$ und wenn das Rechteck wieder in ein Quadrat verwandelt wird, hat dieses eine Seitenlänge von $2^{\frac{3}{8}} \cdot a$. Das nächste Quadrat hat die Seitenlänge $2^{\frac{5}{16}} \cdot a$, das darauf folgende $2^{\frac{11}{32}} \cdot a^2$, und so weiter.

Führen wir die Schritte einige Male hintereinander durch, erhalten wir bereits beim zehnten Quader die Seitenlängen $2^{\frac{85}{256}}a$, $2^{\frac{171}{512}}a$ und $2^{\frac{171}{512}}a$. Für $a = 1$ ergibt das $2^{\frac{85}{256}}a \approx 1,25878$ sowie $2^{\frac{171}{512}}a \approx 1,26049$. Je häufiger dieses Verfahren angewendet wird, desto mehr nähern sich die Seitenlängen aneinander an - diese Konvergenz liefert beliebig gute Näherungswerte jedoch keine exakte Lösung.

Literatur

[1] Christoph Baxa. Vorlesung Geschichte der Mathematik und Logik. Universität Wien, Wintersemester 2019.

[2] Jean Borrel. Opera Geometrica. Lyon, T. Bertellus, 1554.

[3] Walter Breidenbach. Das Delische Problem. (Die Verdoppelung des Würfels.) Teubner, Stuttgart, 1953.

[4] Friedrich Buckel. Konchoiden. Internetbibliothek für Schulmathematik, www.mathe-cd.de, 2016. (27.09.2022)

[5] Christian Dick. Zirkel allein. Geometrische Konstruktionen. Die Macht der Werkzeuge. München, TU München, 2004.

[6] Heinrich Dörrie. 100 great problems of elementary mathematics: their history and solution. New York: Dover Publications, 1965.

[7] Albrecht Dürer. Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt. Nürnberg, 1525.

[8] Euklid. Die Elemente. 3. Jh. v. Chr. In Lorenz, Johann F. und Mollweide, Karl B. Halle und Berlin: Buchhandlung des Hallischen Waisenhauses. Vierte verbesserte Ausgabe, 1818.

[9] Thomas Heath. A History of Greek Mathematics (Vol. 1). Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[10] Thomas Heath. Archimedes' Werke: mit modernen Bezeichnungen. Deutsche Übersetzung: Fritz Kliem. Häring, Berlin, 1914.

[11] Aloys Hermann. Das Delische Problem. (Die Verdoppelung des Würfels.) Teubner, Leipzig und Berlin, 1927.

[12] Horst Hischer. Zur Problem der Würfelverdoppelung in der Darstellung durch Johann Christoph Sturm 1670. Universität des Saarlandes, 2015.

[13] Horst Hischer. Die drei klassischen Probleme der Antike. Historische Befunde und didaktische Aspekte. Franzbecker, Hildesheim, 2018.

[14] Jaap Mansfeld. Prolegomena Mathematica. Brill, Leiden, 1998.

[15] Reviel Netz. The Works of Archimedes. Translation and Commentary (Vol. 1). Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[16] Isaac Newton. Universal arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution. London, Printed for W. Johnston, 1769.

[17] Michael Stifel. Arithmetica Integra. Deutsche Übersetzung von E. Knobloch und O. Schönberger. Nürnberg, 1544.

[18] Johann Christoph Sturm. Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher. Nürnberg, 1670.

[19] Bodo von Pape. Von Eudoxus zu Uhlhorn. Die Lösungen zu den großen Problemen der Antike. Norderstdt, BoD, 2019.

[20] Katharina Wieser. Die drei klassischen mathematischen Probleme der Antike. Diplomarbeit, Universität Linz, 2013.