



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Zweibilderverfahren: Rekonstruktion der räumlichen
Geometrie aus zwei oder mehreren perspektiven Bildern
eines Objektes.“

verfasst von / submitted by

Martina Rischaneck BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2024 / Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 505 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
Unterrichtsfach Darstellende Geometrie
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Associate Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn.
Christian Müller

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist, das Zweibilderverfahren und die bedeutenden Eigenschaften für die Rekonstruktion der räumlichen Geometrie näher zu erläutern. Dazu ist eine Einführung in die projektive Geometrie, insbesondere in die Zentralprojektion, notwendig, sodass ein besseres Verständnis des Verfahrens erlangt werden kann. Es wird aufgezeigt, dass anhand von nur zwei Bildern bereits ausreichend Daten gefunden werden können, um die räumlichen Eigenschaften des betrachteten Objekts wiedergeben zu können. Im Anschluss wird die geometrische Konstruktion sowohl in der Theorie als auch die praktische Durchführung behandelt, um letztendlich die analytische Betrachtung des Zweibilderprinzips aufzuzeigen. Zum Schluss erfolgt ein Einblick in die mögliche Einbettung in den schulischen Unterricht.

The aim of this thesis is to explain the two-view method and its important properties for the reconstruction of the spatial geometry in more detail. This requires an introduction to the projective geometry, especially to central projection, so that a better understanding of the process can be obtained. In addition, it is to be shown that sufficient data can already be found on the basis of only two images in order to be able to reproduce the spatial properties of the observed object. Subsequently, the geometric construction is then dealt with both in theory and in implementation, in order to finally deal with the analytical consideration of the two-image principle. Finally, an insight into a possible embedding in school lessons is given.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich sowohl bei meinen StudienkollegInnen als auch ProfessorInnen für die zahlreiche Unterstützung während meiner Studienzeit sowie für die Geduld und Hilfsbereitschaft bedanken.

Mein Dank gilt auch meiner Familie und meinen Freunden für die zahlreichen Ideen, die einen wesentlichen Beitrag für diese Masterarbeit geleistet haben.

Abschließend möchte ich mich besonders bei meiner Mutter bedanken, die stets ein offenes Ohr für mich hatte und mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zentralprojektion und ihre Eigenschaften	1
2	Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts	9
2.1	Zweibilderverfahren	9
2.1.1	Konstruktive Darstellung	9
2.1.2	Das Koinzidenzgebilde	18
2.1.3	Hauptsatz des Zweibilderprinzips	22
2.2	Analytische Betrachtung	31
2.3	Einbettung in den Unterricht	51
3	Schluss	55
	Literaturverzeichnis	56

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zentralprojektion mit Z als Zentrum	2
1.2	Zentralprojektion von Ebenen	3
1.3	Zentralprojektion von parallelen Geraden	4
1.4	Projektion von zwei sich schneidenden Geraden	5
1.5	Satz von Desargues	8
2.1	Zweibilderprinzip - allgemeine Lage	10
2.2	Zweibilderprinzip - Abbildung einer Geraden	15
2.3	Zweibilderprinzip - Abbildung einer Ebene	16
2.4	Koinzidenzebene α beim Grund- und Aufriss	23
2.5	Umkehraufgabe	24
2.6	Absolute Kreispunkte	29
2.7	Korrespondierende Punkte	32
2.8	Epipolargeometrie	32
2.9	Herleitung der Fundamentalmatrix	33
2.10	Reine Translation - Verschiebung der Kamerazentren entlang \mathbf{t}	39
2.11	Reine Translation mit fixiertem Epipol	40
2.12	Rotation bei allgemeiner Bewegung	41
2.13	Symmetrischer und schiefssymmetrischer Teil der Fundamentalmatrix	44
2.14	Zentralprojektion - Abstand f zur Bildebene	44
2.15	Koordinatensystem der Bildebene	45
2.16	Vier mögliche Lösungen für \mathbf{p}_2	48
2.17	Triangulierung zur Ermittlung der Punkte im Raum	49
2.18	Perspektive Rekonstruktion eines Gebäudes	50
2.19	Direkte Rekonstruktion mithilfe von Kontrollpunkten	51
2.20	3D-Druck einer Figur	52
2.21	Digitale Rekonstruktion der Figur	53

1 Einleitung

Zu Beginn dieser Arbeit erfolgt ein kurzer Überblick über die Zentralprojektion, um ein grundlegendes Vorwissen für das anschließend vorgestellte Zweibilderverfahren zu schaffen. Sowohl die Zentralprojektion als auch die bekannten Grund- und Aufrissverfahren sind Sonderfälle des Zweibilderprinzips (siehe Eckhart [1]). Dieses vereinfachte Verfahren dient als Einstieg in die Thematik dieser Arbeit.

Im Hauptteil wird das Zweibilderprinzip sowohl konstruktiv als auch analytisch betrachtet. Für den konstruktiven Ansatz werden notwendige Begriffe und Definitionen nach Müller [3] aufgezählt und anhand von Skizzen visuell veranschaulicht: die Abbildungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum nach dem Zweibilderprinzip werden detailliert beschrieben und das sogenannte Koinzidenzgebilde des Zweibilderprinzips näher erläutert. Schließlich wird das Zweibilderverfahren anhand von mathematischen Berechnungen analysiert und die mögliche Einbettung in den schulischen Unterricht aufgezeigt. In dieser Arbeit werden Bezeichnungen für Objekte wie Punkte, Geraden und ähnliches in den vorkommenden Zitaten dem vorhandenen Text angepasst, um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen.

1.1 Zentralprojektion und ihre Eigenschaften

Die Zentralprojektion ist auch unter Zentralperspektive bekannt. Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Zentralprojektion besprochen, da diese Art der Projektion für das Zweibilderverfahren essentiell ist. Bei der Zentralprojektion wird ein Objekt im Raum mithilfe von Projektionsstrahlen (auch als Sehstrahlen bekannt) aus einem einzigen Zentrum \mathbf{Z} auf eine Bildebene π abgebildet. (Beim Zweibilderverfahren im Kapitel 2 werden dann zwei Zentren verwendet.) Die Projektionsstrahlen bilden dabei ausgehend vom Zentrum einen Raumpunkt \mathbf{x} auf einen entsprechenden Bildpunkt

$$\mathbf{x}^c \in \pi$$

ab, dazu wird der Schnittpunkt des Projektionsstrahls durch den Punkt im Raum mit der Bildebene gesucht. Das Bild \mathbf{x}^c in der Ebene wird bei einer Zentralprojektion als *Zentralriss* bezeichnet. Auf diese Weise erhält man die Bilder für gegebene Punkte im Raum.

Legt man durch das Zentrum eine Normale auf die Bildebene, dann erhält man durch den Schnittpunkt einen besonderen Punkt namens *Hauptpunkt*. Die *Distanz* des Zentrums wird durch die Länge des Lots ausgehend von \mathbf{Z} auf die Bildebene bestimmt. Die Menge der Projektionsstrahlen durch \mathbf{Z} ist ein *Geradenbündel* mit dem Scheitel \mathbf{Z} . Solch

1 Einleitung

ein Geradenbündel wird im Allgemeinen durch eine zweiparametrische Schar von Geraden definiert, die sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Analog spricht man von einem Ebenenbüschel, wenn eine Schar von Ebenen eine gemeinsame Gerade besitzt. Sucht man den Zentralriss einer allgemeinen Geraden \mathbf{q} , dann kann dieser durch einen punktwisen Vorgang konstruiert werden. Schneidet die abzubildende Gerade die Bildebene π , dann erhält man den sogenannten *Spurpunkt* dieser Geraden. Eine Eigenschaft dieser Spurpunkte ist, dass sie gleichzeitig auch *Fixpunkte* der Abbildung sind. Das bedeutet, dass der Punkt sowohl Urbild als auch sein eigenes Bild ist, da er sich bereits auf der Bildebene befindet. Dann muss nur mehr ein weiterer Punkt auf der Geraden auf die Bildebene projiziert werden, wodurch sich durch Verbinden der beiden Bildpunkte die projizierte Gerade \mathbf{q}^c ergibt. Falls die Gerade die Bildebene nicht schneidet, so bekommt man \mathbf{q}^c durch die Projektion von zwei beliebigen Urbildpunkten der Geraden auf π . Eine Gerade wird weiters als *projizierend* bezeichnet, falls die Bilder von allen Punkten dieser Geraden auf ihren Bildpunkt abgebildet werden (vgl. [4], S. 117). Für jede Gerade, die nicht projizierend ist gilt somit, dass ihr Zentralriss wieder eine Gerade ergibt. Daher gilt als eine der Eigenschaften für die Zentralprojektion die Geradentreue für nicht projizierende Geraden.

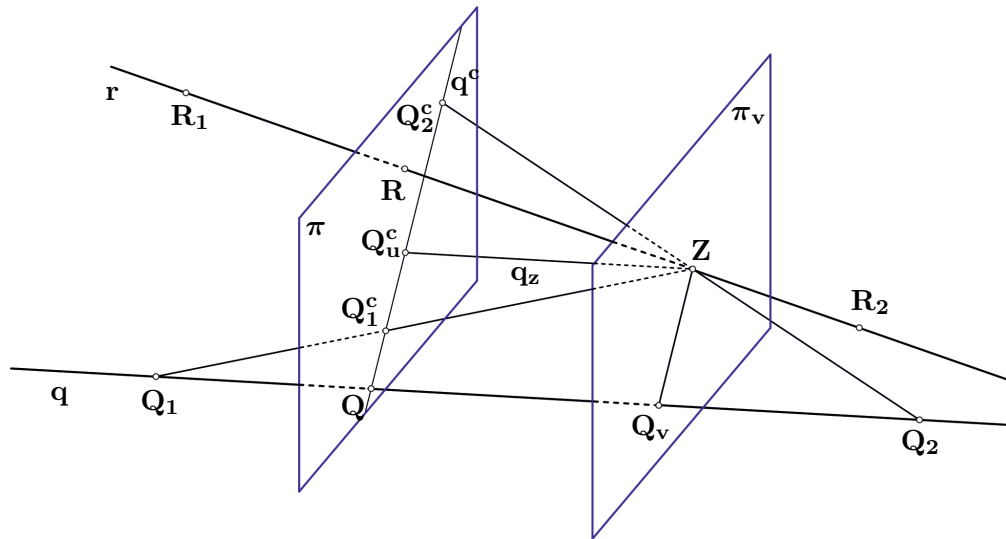


Abbildung 1.1: Zentralprojektion mit Z als Zentrum

Weiters existieren bei der Zentralprojektion sogenannte *Fluchtpunkte*. Die Zentralrisse von Geraden, die im Raum parallel zueinander sind, schneiden sich auf der Bildebene in einem Fluchtpunkt. Da es unendlich viele Scharen von parallelen Geraden gibt, existieren bei der Zentralprojektion auch unendlich viele Fluchtpunkte. Anhand eines Fluchtpunkts lässt sich die gegenseitige Lage jener Urbildgeraden bestimmen, dessen Bilder sich in dem Fluchtpunkt schneiden. So ein Fluchtpunkt wird durch eine Gerade konstruiert, die parallel zu der eigentlichen π -schneidenden Gerade \mathbf{q} ist und durch das Zentrum geht. Wagner [4] gibt eine leicht verständliche konstruktive Beschreibung

1.1 Zentralprojektion und ihre Eigenschaften

zur Erzeugung eines Fluchtpunkts einer Geraden wieder. Dazu verschiebt er gedanklich den Punkt Q_1 in Abbildung 1.1 entlang der Geraden q so weit nach links, dass sich die Projektionsgerade $\overline{ZQ_1}$ einer Geraden q_z durch das Zentrum annähert, die zur ursprünglichen Geraden q parallel ist. Diese Annäherung kann analog durch Verschiebung mit jedem anderen Punkt auf q (wie z.B. Q_2) durchgeführt werden. Der Schnittpunkt von q_z mit der Bildebene ist der Fluchtpunkt der Geraden q . In Abbildung 1.1 ist weiters der jeweilige Bildpunkt Q_1^c bzw. Q_2^c der Punkte Q_1 und Q_2 dargestellt. Genau wie die Projektionsgerade sich der Parallelen q_z annähert, nähern sich die Bildpunkte Q_1^c und Q_2^c dem Fluchtpunkt Q_u^c an, bis sie letztendlich miteinander übereinstimmen. In diesem Fall versteht man Q_u^c als den Zentralriss des unendlich entfernten Urbildpunkts Q_u , welcher auch den Namen *Fernpunkt* trägt. Wagner [4] betont an dieser Stelle die Zuweisung genau eines Fernpunkts Q_u als das zugehörige Urbild für den erhaltenen Fluchtpunkt der Geraden q . Zusammengefasst besitzt jede Gerade, die die Bildebene schneidet, einen Fluchtpunkt mit einem zugehörigen Fernpunkt als Urbildpunkt.

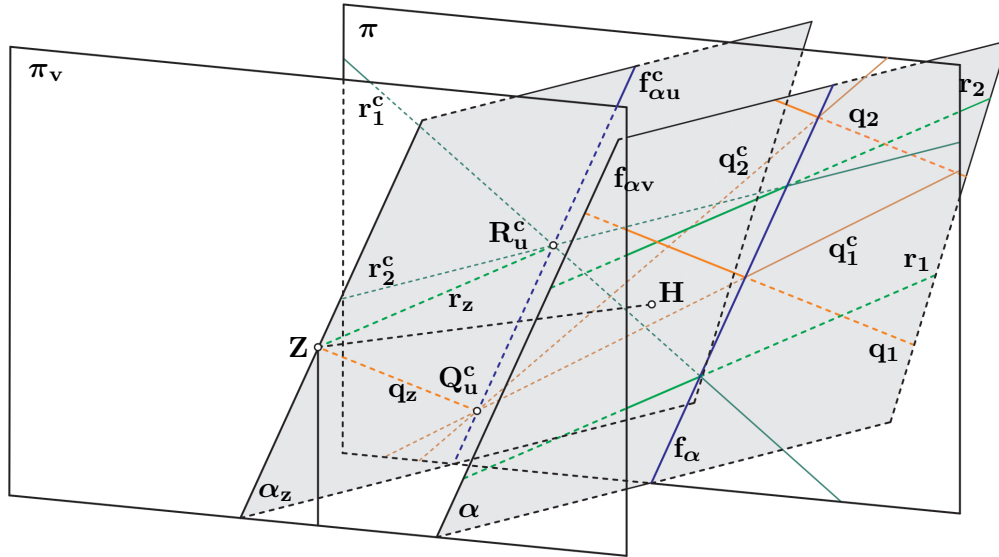


Abbildung 1.2: Zentralprojektion von Ebenen

Legt man durch das Zentrum Z eine zu π parallele Ebene π_v , dann schneidet die eben betrachtete Gerade q die Ebene π_v im Schnittpunkt Q_v . Die Ebene π_v wird in der Zentralprojektion auch die *Verschwindungsebene* genannt, der Schnittpunkt Q_v ist der sogenannte *Verschwindungspunkt*. Das Bild des Verschwindungspunkts ist dabei der Fernpunkt der projizierten Gerade q^c . Für die Elemente in der Verschwindungsebene gilt, dass sie uneigentliche Bilder besitzen. Das bedeutet, dass die Elemente in der Verschwindungsebene nicht abbildbar sind, weil die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildebene nicht treffen.

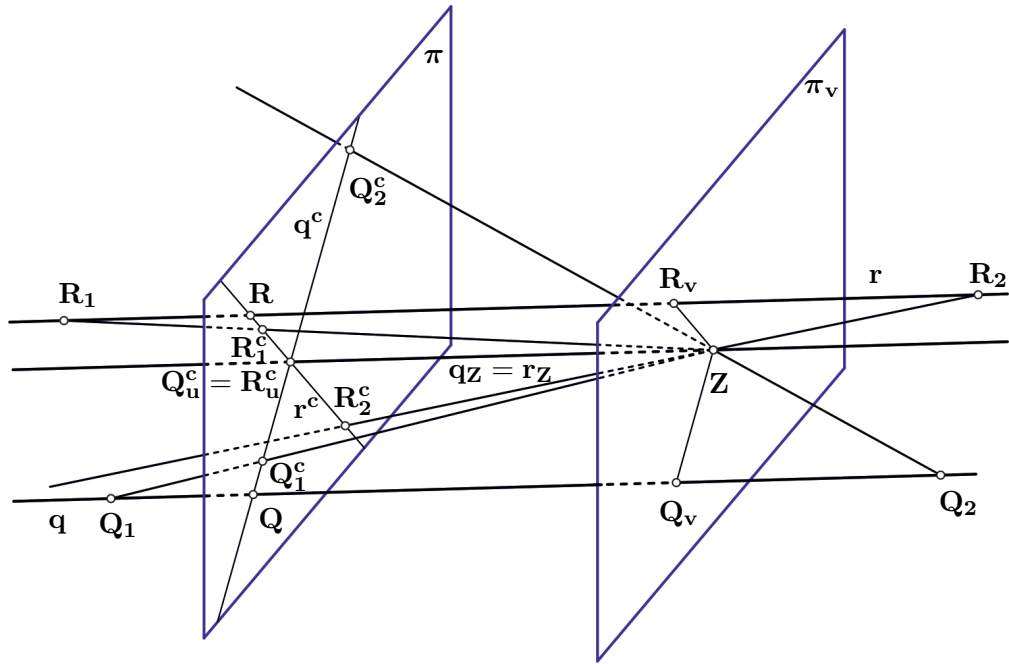


Abbildung 1.3: Zentralprojektion von parallelen Geraden (in Anlehnung an [4])

Nachdem die Zentralprojektion von Punkten und Geraden erklärt wurde, werden nun die Abbildungen von Ebenen bzw. auch ebenen Objekten näher untersucht. Schneidet eine Ebene α die Bildebene π , dann ist das Bild f_α der Ebene α die Schnittgerade der beiden Ebenen. In der projektiven Geometrie besitzt eine Ebene eine sogenannte *Ferngerade* im Unendlichen. Diese Ferngerade wird durch die Fernpunkte aller Geraden gebildet, die in der Ebene liegen. Parallele Ebenen besitzen dabei dieselbe Ferngerade im Unendlichen, da parallele Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt im Unendlichen haben, nämlich den Fernpunkt. Somit existiert bei der Zentralprojektion für jede Schar von parallelen Ebenen eine gemeinsame Ferngerade (vgl. [4], S. 118 f.). Wie auch bei den Fernpunkten existiert für die Ferngerade $f_{\alpha u}$ eine sogenannte *Fluchtgerade* $f_{\alpha u}^c$. In der Abbildung 1.2 ist die Fluchtgerade $f_{\alpha u}^c$ der Ebenen α und α_z ersichtlich. Die Fluchtgerade

$$f_{\alpha u}^c = \alpha_z \cap \pi ,$$

ist ähnlich zum zuvor gewonnenen Fluchtpunkt anhand einer parallelen Ebene durch das Zentrum Z bestimmt worden. Sie enthält alle Fluchtpunkte der parallelen Geradenscharen in den erwähnten Parallelebenen. Außerdem erwähnt der Autor drei unterschiedliche Auffassungen von der Fluchtgerade:

- Das Bild der Ferngeraden einer Schar von parallelen Ebenen,
- die Spur der parallelen Ebene α_z oder
- das Bild der parallelen Ebene α_z (vgl. [4], S. 119).

Der letzte Punkt ergibt sich, da diese Ebene, wie in Abbildung 1.2 erkennbar, eine projizierende Ebene ist. Weiters sind in der Abbildung zwei verschiedene Scharen von parallelen Geraden \mathbf{q}_i und \mathbf{r}_i (mit $i = 1, 2$) in α dargestellt. Die Punkte \mathbf{Q}_u^c sowie \mathbf{R}_u^c sind in der Abbildung die Fluchtpunkte dieser Geradenscharen und wurden nach dem zuvor dargelegten Verfahren für die Bestimmung der Fluchtpunkte von Geraden bestimmt. Die Ebene α schneidet die Verschwindungsebene π_v in der Verschwindungsgeraden $\mathbf{f}_{\alpha v}$. Anzumerken ist, dass die Zentralprojektion **nicht parallelentreu** ist (vgl. [4], S. 123). Wendet man wie in Abbildung 1.3 eine Zentralprojektion auf zwei parallele Geraden \mathbf{r} und \mathbf{q} im Raum an, dann schneiden sich die Bilder dieser Geraden in der Bildebene π . Dieses Resultat erhält man konstruktiv, indem man eine Parallele dieser Geraden durch das Zentrum legt und den Schnittpunkt

$$\mathbf{R}_u^c = \mathbf{Q}_u^c$$

mit der Bildebene π sucht. Dieser Schnittpunkt ist dann auch der Schnittpunkt von den beiden Bildern der parallelen Geraden \mathbf{r} und \mathbf{q} . Erzeugt man nun die Bilder \mathbf{r}^c , \mathbf{q}^c der Geraden nach dem selben Verfahren wie zuvor, dann erkennt man sofort, dass sie nicht wie die Urbilder parallel zueinander sind. Der Fluchtpunkt $\mathbf{R}_u^c = \mathbf{Q}_u^c$ ist das Bild des Fernpunkts beider Geraden \mathbf{r} und \mathbf{q} .

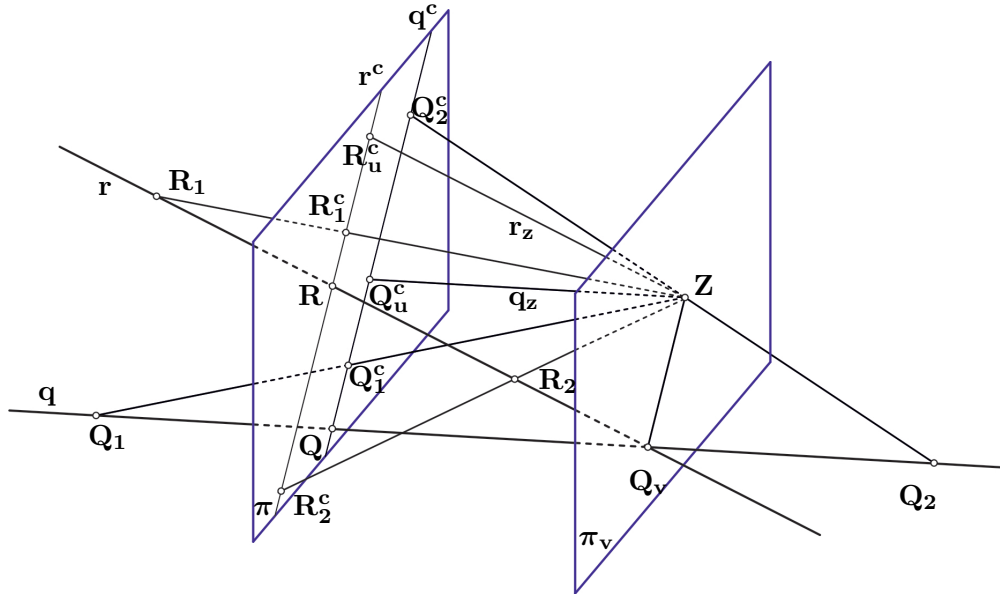


Abbildung 1.4: Projektion von zwei sich schneidenden Geraden (in Anlehnung an [4])

Obwohl die Zentralprojektion nicht parallelentreu ist, existieren bestimmte Ausnahmefälle, bei dem die Bilder von parallelen Geraden auf der Bildebene ebenfalls parallel sind. Einer dieser Fälle ist, dass die Geraden im Raum parallel zu π verlaufen, wodurch deren Projektionen genauso parallel zu einander sind. Wie auch alle anderen Bildgeraden besitzen diese parallelen Bildgeraden einen Schnittpunkt, jedoch in ihrem gemeinsamen

1 Einleitung

Fernpunkt. Bei einem anderen Ausnahmefall ergeben die Abbildungen von sich speziell schneidenden Raumgeraden parallele Bildgeraden auf der Bildebene. Die Zentralrisse von zwei schneidenden Geraden sind genau dann parallel, wenn ihr Schnittpunkt auf der Verschwindungsebene π_v liegt. In der Abbildung 1.4 werden die sich im Verschwindungspunkt

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{Q}_v$$

schneidenden Geraden \mathbf{r} und \mathbf{q} auf die Bildebene π projiziert. Wendet man die bekannten Konstruktionsschritte für die Bilder dieser Geraden an, dann ergeben sich zwei Geraden \mathbf{r}^c , \mathbf{q}^c in π , die parallel zueinander sind.

Zusammenfassend können an dieser Stelle die wichtigsten Eigenschaften einer Zentralprojektion aufgezählt werden:

- **Punkttreu:** Alle Raumpunkte, die nicht auf der Verschwindungsebene π_v liegen und von \mathbf{Z} verschieden sind, werden auf Bildpunkten abgebildet. Raumpunkte, die sich bereits auf der Bildebene π befinden sind Fixpunkte der Zentralprojektion.
- **Inzidenzerhaltend:** Punkte eines geometrischen Objekts sind im Zentralriss ebenfalls Elemente des abgebildeten Objekts.
- **Abbildung des Zentrums:** Das Zentrum selbst hat kein eigenes Bild, da die zugehörige Projektionsgerade nicht existiert.
- **Abbildung von Geraden:** Geraden, die nicht projizierend sind, werden bijektiv auf Bildgeraden abgebildet.
- **Abbildung von Ebenen:** Raumebenen, die nicht projizierend sind, werden bijektiv auf die Bildebene π abgebildet.
- **Abbildung von zu π parallelen Figuren:** Jene Geraden im Raum, die parallel zur Bildebene π liegen, besitzen als Ausnahmefall auch parallele Zentralrisse. Das Urbild und das Bild von Ebenen, die parallel zu π liegen, sind ähnlich zu einander.
- **Nicht parallelentreu:** Im Allgemeinen sind die Bilder von parallelen Geraden nicht parallel, sondern schneiden sich in der Bildebene π .
- **Doppelverhältnistreu:** Das Doppelverhältnis, welches das Verhältnis zweier Teilverhältnisse von vier verschiedenen Punkten von nicht projizierenden Geraden ist, bleibt bei einer Zentralprojektion erhalten.
- **Nicht teilverhältnistreu:** Im Allgemeinen bleibt das Teilverhältnis von drei Punkten einer nicht projizierenden Geraden nicht erhalten.
- **Nicht eindeutig umkehrbar:** Da Punkte einer projizierenden Geraden auf einen gemeinsamen Bildpunkt bzw. Punkte einer projizierenden Ebene auf eine Bildgerade abgebildet werden, ist die Zentralprojektion nicht eindeutig umkehrbar (vgl.

1.1 Zentralprojektion und ihre Eigenschaften

[4], S. 124 f.). Das bedeutet, dass man ausgehend von einer Bildgeraden bzw. einem Bildpunkt nicht eindeutig das Urbild bestimmen kann.

Legt man nun bei einer Zentralprojektion beispielsweise eine Gerade durch zwei beliebige Bildpunkte in der Bildebene π und eine weitere Gerade durch ihre zugehörigen Urbilder, dann schneiden sich diese zwei Geraden in einem Punkt (in π). Wiederholt man dies für weitere beliebige Bildpunkte in π und deren Urbilder, dann erhält man mehrere Schnittpunkte, die in π liegen und kollinear sind. Sie liegen daher auf einer gemeinsamen Geraden \mathbf{a} , die auch den Namen *Achse* trägt. Diese besondere Relation ist typisch für eine sogenannte *Perspektivität* und beruht auf dem *Satz von Desargues*. Bei einer Perspektivität existiert ein Zentrum \mathbf{Z} mit der Eigenschaft, dass Punkte auf einer Geraden durch \mathbf{Z} auf Punkte abgebildet werden, die wiederum auf der selben Geraden liegen.

Der Satz von Desargues besagt folgendes: Seien

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$$

zwei Dreiecke und \mathbf{Z} ein Punkt mit der Eigenschaft, dass

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{Z} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathbf{Z} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{Z}$$

kollinear liegen. Weiters sollen keine drei Punkte von

$$\mathbf{Z}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}' \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$$

kollinear sein. Verbindet man je zwei Punkte von $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ durch Geraden, genauso wie ihre zwei entsprechenden Punkte von $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$, dann schneiden sich jeweils zwei Verbindungsgeraden, wie in Abbildung 1.5 in den Punkten

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_3.$$

Diese Schnittpunkte liegen dann auf einer gemeinsamen Geraden \mathbf{a} .

Das Dreieck $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ist demnach sowohl vom Zentrum \mathbf{Z} als auch von der Achse \mathbf{a} zum Dreieck $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ *perspektiv*.

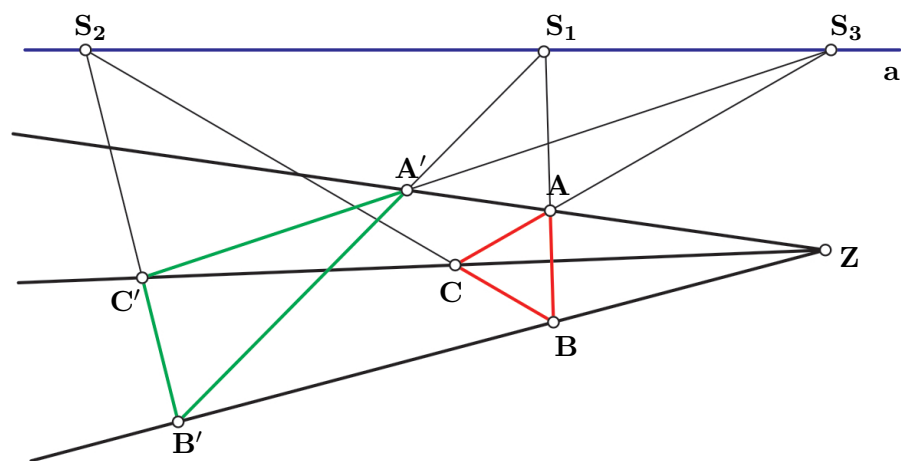


Abbildung 1.5: Satz von Desargues

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

2.1 Zweibilderverfahren

Das Zweibilderverfahren ist ein wichtiges Grundverfahren für die heutige moderne 3D-Rekonstruktion von Objekten und Szenen durch die Vorgabe von mindestens zwei Bildern. Durch die fortschrittliche Technik ist es anhand von verschiedenen Bildern eines Objekts bzw. einer Szene möglich, ausreichend Informationen für eine digitale Rekonstruktion zu erhalten. So können vor allem Gegenstände und Gebäude, von denen nur mehr Fotografien übriggeblieben sind, nachgebildet werden. Beim Zweibilderverfahren werden genau genommen nur zwei Bilder verwendet, welche aus zwei verschiedenen Zentren bzw. Positionen aufgenommen wurden.

2.1.1 Konstruktive Darstellung

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem konstruktiven Ansatz des allgemeinen Zweibilderprinzips sowie dem Koinzidenzgebilde des Zweibilderprinzips (siehe Müller [3]).

Um das Zweibilderprinzip erklären und beschreiben zu können, wird der Raum als ein Punktraum betrachtet. Beim Zweibilderprinzip handelt es sich, vereinfacht gesagt, um eine Verkettung von mehreren Zentralprojektionen. Wie in der Einleitung bereits genauer erklärt, wird bei der herkömmlichen Zentralprojektion ein beliebiges Objekt im Raum durch ein einziges Projektionszentrum Z auf eine Bildebene projiziert. Beim Zweibilderprinzip werden allerdings zwei verschiedene Abbildungen durch zwei unterschiedliche Zentren O_1 und O_2 desselben Objekts erzeugt. Anschließend bildet man die beiden erhaltenen Abbildung in den entsprechenden Bildebenen π_1 und π_2 durch ein drittes Projektionszentrum O auf eine neue gemeinsame Bildebene π ab (siehe Abbildung 2.1).

Erklärung des allgemeinen Zweibilderprinzips ([3], S. 125). *Das als Punktmannigfaltigkeit aufgefasste Objekt wird dadurch abgebildet, dass man seine Punkte aus einem Auge O_1 auf eine Bildebene π_1 und aus einem Auge O_2 auf eine Bildebene π_2 projiziert, hierauf die beiden in π_1 und π_2 erhaltenen Bildfelder aus einem Auge O auf die Zeichenebene π projiziert.*

Der Riss eines Objekts in einer Bildebene π_1 bzw. π_2 wird auch Bildfeld genannt und im folgenden Text mit Π_1 bzw. Π_2 bezeichnet. Anhand der gegenseitigen Lage der Bildfelder wird zwischen verschiedenen Typen des Zweibilderprinzips unterschieden.

Allgemeines Zweibilderprinzip

Allgemeinstes Zweibilderprinzip

Werden die Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 so gewählt, dass sie im Raum die Fernpunkte der festgelegten x - und z -Achse sind und die zugehörigen Bildebenen die xy - und yz -Koordinatenebenen, dann handelt es sich um einen Sonderfall des Zweibilderprinzips. Dieser Sonderfall ist das bekannte Grund- und Aufrissverfahren, bei dem eine Bildebene um

die Schnittgerade \mathbf{S}_{12} der beiden Bildebenen π_1 und π_2 in die andere Bildebene gedreht wird. Die Abbildung der einzelnen Bildfelder in eine gemeinsame Zeichenebene wird hier durch eine Drehung einer Bildebene in die andere ausgeführt. Die Bildfelder Π_1 und Π_2 haben in diesem Fall eine *orientierte Lage* zueinander, bei dem die Verbindungsgerade zweier korrespondierenden Bildpunkte \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' (auch als Ordner bekannt) senkrecht auf die Schnittgerade \mathbf{S}_{12} steht. Somit ist das Grund- und Aufrissverfahren lediglich ein bekannter Spezialfall des Zweibilderprinzips, welcher in dieser Arbeit nicht genauer untersucht wird.

Erklärung des allgemeinsten Zweibilderprinzips ([3], S. 126). *Das als Punktmanigfaltigkeit aufgefasste Objekt wird dadurch abgebildet, dass man seine Punkte aus einem Auge \mathbf{O}_1 auf eine Bildebene π_1 und aus einem Auge \mathbf{O}_2 auf eine Bildebene π_2 projiziert und hierauf jedes der beiden erhaltenen Bildfelder einer [projektiven Transformation] unterwirft.*

An dieser Stelle kann zusammengefasst werden, dass es zwei Arten des Zweibilderprinzips gibt. Der Unterschied des allgemeinen und des allgemeinsten Zweibilderprinzips hängt von der Art der angewandten Transformationen auf die Bildfelder Π_1 und Π_2 ab. Die Vorgehensweise beim Zweibilderprinzip bleibt allerdings dieselbe. Für die Bildebenen π_1 und π_2 muss gelten, dass sie eigentliche Ebenen sind, die nicht zusammenfallen. Ebenso wird vorausgesetzt, dass die beiden Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 nicht identisch sind und nicht in ihren zugeordneten Bildebenen π_1 und π_2 liegen. Die Zentren können jedoch sowohl eigentliche als auch uneigentliche Punkte (d.h. Fernpunkte) sein.

Im Folgenden werden das allgemeine und allgemeinste Zweibilderprinzip genauer betrachtet. Dazu werden noch einige relevante Begriffe und Definitionen benötigt. Es wurde bereits im Text eine Schnittgerade \mathbf{S}_{12} erwähnt, die die Bildebenen π_1 und π_2 gemeinsam haben.

Grundschnitt. *Die Schnittgerade \mathbf{S}_{12} der Bildebenen π_1 und π_2 bezeichnet man als den Grundschnitt.*

Ihre Existenz lässt sich durch die Voraussetzung, dass die beiden Bildebenen nicht zusammenfallende Ebenen sind, folgern. Alle Strahlen und Ebenen, die durch ein Projektionszentrum verlaufen, nennt man auch Sehstrahlen bzw. Sehebene. Diese Sehstrahlen und Sehebene besitzen die Eigenschaft, dass sie in der zugehörigen Bildebene projizierend sind. Falls solch ein Sehstrahl oder eine Sehebene in der Bildebene π_1 projizierend ist, dann bezeichnet man diese als *erstprojizierend*. Sind sie in der Bildebene π_2 projizierend, so nennt man diese *zweitprojizierend*.

Es existieren auch sogenannte *doppelprojizierende* Ebenen, die sowohl in der Bildebene π_1 als auch in π_2 projizierend sind und somit beide Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 enthalten. Die Verbindungsgerade

$$\mathbf{O}_{12} = \overline{\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2}$$

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

der beiden Zentren trägt auch den Namen *Doppelsehstrahl*, da der Sehstrahl durch \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 verläuft. Die doppelprojizierenden Ebenen enthalten, aufgrund der in den Ebenen liegenden Zentren, auch den Doppelsehstrahl. In den meisten Fällen des Zweibilderprinzips schneidet der Doppelsehstrahl den Grundschnitt nicht. Es gibt jedoch auch die seltene Ausnahme, bei dem der Doppelsehstrahl den Grundschnitt schneidet, auf die später noch eingegangen wird.

Die Projektion

$$\mathbf{x}' = \overline{\mathbf{O}_1 \mathbf{X}} \cap \pi_1$$

eines Punktes \mathbf{X} auf die Bildebene π_1 wird als sein erster Riss bzw. erstes Bild bezeichnet. Der zweite Riss oder das zweite Bild

$$\mathbf{x}'' = \overline{\mathbf{O}_2 \mathbf{X}} \cap \pi_2$$

ist die Projektion von \mathbf{X} auf π_2 . Somit besitzt jeder Punkt \mathbf{X} (von \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 verschieden) im Raum ein entsprechendes Bildpaar

$$(\mathbf{x}' \ \mathbf{x}'').$$

Die Punkte \mathbf{X} , \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' liegen stets in einer doppelprojizierenden Ebene, weil eine doppelprojizierende Ebene beide Bildebenen schneidet und den Doppelsehstrahl sowie beide Zentren enthält. Bei den Zentren gibt es gewisse Besonderheiten zu beachten. Das Zentrum \mathbf{O}_1 besitzt kein erstes Bild, dafür aber ein bestimmtes zweites Bild

$$\mathbf{o}_1'' = \mathbf{O}_{12} \cap \pi_2.$$

Das zweite Zentrum \mathbf{O}_2 wiederum besitzt nur ein bestimmtes erstes Bild

$$\mathbf{o}_2' = \mathbf{O}_{12} \cap \pi_1,$$

dafür kein zweites Bild. Fasst man alle doppelprojizierenden Ebenen zusammen, so erhält man ein Büschel von Ebenen, die jeweils die Bildebenen schneiden. Das Büschel dieser Ebenen schneidet die Bildebenen in perspektiven Strahlbüscheln, welche den Grundschnitt \mathbf{S}_{12} als sogenannte Perspektivitätsachse und die Bildpunkte \mathbf{o}_1'' und \mathbf{o}_2' als Scheitel besitzen. Weil ein beliebiger Punkt \mathbf{X} und seine Bildpunkte \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' in einer doppelprojizierenden Ebene liegen, befinden sich die Bildpunkte auf einem Paar von zugehörigen Strahlen der Büschel

$$(\mathbf{o}_1'') \bar{\wedge} (\mathbf{o}_2').$$

Man bezeichnet diese Strahlbüschel auch als Ordnungsbüschel. Die Strahlen heißen Ordnungsstrahlen und ihre Scheitel \mathbf{o}_1'' und \mathbf{o}_2' nennt man Ordnungspunkte.

Es wurde zuvor der Ausnahmefall erwähnt, bei dem sich der Grundschnitt und der Doppelsehstrahl schneiden. Tritt dieser Fall ein, dann fallen die Ordnungspunkte \mathbf{o}'_1 und \mathbf{o}'_2 in den Schnittpunkt

$$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{O}_{12}$$

zusammen. Dadurch sind die Ordnungsbüschel konzentrisch und haben den Grundschnitt \mathbf{S}_{12} gemeinsam. Außerdem liegen die konzentrischen Ordnungsbüschel perspektiv zum Büschel der doppelprojizierenden Ebenen. Der Grundschnitt ist bei dieser Perspektivität der Ordnungsbüschel ein sich selbst entsprechender Strahl, daher ist \mathbf{S}_{12} eine Fixgerade (vgl.[3], S. 127 f.). Da beim Zweibilderprinzip die Bildpunkte eines Punktes \mathbf{X} auf entsprechenden Strahlen der Ordnungsbüschel (\mathbf{o}'_2) , (\mathbf{o}''_1) liegen, gilt in diesem Sonderfall folgender Satz für die Abbildung eines Punktes:

Satz 1 ([3], S. 128). *Zwei Punkte \mathbf{x}' in π_1 und \mathbf{x}'' in π_2 können dann und nur dann als Bildpaar eines Raumpunktes \mathbf{X} aufgefasst werden, wenn sie auf entsprechenden Strahlen der perspektiven, im besonderen zugleich konzentrischen Ordnungsbüschel (\mathbf{o}'_2) , (\mathbf{o}''_1) liegen.*

Im Folgenden werden die Abbildungen von zwei Punktmengen betrachtet: Geraden und Ebenen.

Abbildungen von Geraden

Die Abbildung von einer Geraden \mathbf{G} hängt von der ursprünglichen Lage zu den Zentren \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 bzw. dem Doppelstrahl \mathbf{O}_{12} ab. In der Abbildung 2.2 ist eine Projektion einer Geraden \mathbf{G} im Raum nach dem Zweibilderprinzip auf die Zeichenebene π dargestellt, wobei \mathbf{G} in der Abbildung den Doppelstrahl nicht schneidet. Eine Gerade kann im Allgemeinen vier unterschiedliche Lagen bezüglich der Zentren und dem Doppelstrahl haben:

i) \mathbf{G} schneidet \mathbf{O}_{12} nicht:

Bildet man Punkte der Geraden \mathbf{G} beim Zweibilderprinzip ab, so erhält man ihre Bildpaare $(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}''_i)$. Diese Bildpaare definieren die Bildgeraden \mathbf{g}' bzw. \mathbf{g}'' in den entsprechenden Bildebenen π_1 bzw. π_2 (siehe Abbildung 2.2). Die Bildgeraden verlaufen außerdem nicht durch die Ordnungspunkte.

Umgekehrt: Anhand von gegebenen Bildgeraden \mathbf{g}' bzw. \mathbf{g}'' in den zugehörigen Bildebenen kann ihre zugehörige Gerade \mathbf{G} bestimmt werden. Dazu schneidet man die beiden Sehebene, die das Zentrum \mathbf{O}_1 und die Gerade \mathbf{g}' bzw. das Zentrum \mathbf{O}_2 und die Gerade \mathbf{g}'' enthalten. Solange die Ordnungspunkte nicht auf \mathbf{g}' und \mathbf{g}'' liegen, definieren zwei Bildgeraden eine Gerade im Raum.

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

ii) \mathbf{G} schneidet \mathbf{O}_{12} , wobei \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 nicht auf \mathbf{G} liegen:

Die Gerade \mathbf{G} verläuft durch keine der beiden Zentren, daher liegt sie in einer doppelprojizierenden Ebene. Daraus folgt, dass ihre Bildgeraden \mathbf{g}' und \mathbf{g}'' zusammengehörige Ordnungslinien sind. Durch die Bildpaare $(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}''_i)$ von Punkten \mathbf{X}_i der Geraden \mathbf{G} werden Projektivitäten zwischen Punktreihen auf \mathbf{g}' und \mathbf{g}'' gebildet, wobei $(\mathbf{o}'_2 \mathbf{o}''_1)$ das Bildpaar vom Punkt

$$\mathbf{O}_{12} \cap \mathbf{G}$$

ist (siehe Abbildung 2.2).

Umgekehrt: Anhand der perspektiven Sehstrahlbüschel kann zu gegebenen Bildgeraden \mathbf{g}' , \mathbf{g}'' die Gerade \mathbf{G} rekonstruiert werden, welche den Doppelstrahl \mathbf{O}_{12} schneidet.

iii) \mathbf{G} enthält entweder \mathbf{O}_1 oder \mathbf{O}_2 :

Verläuft die Gerade \mathbf{G} nur durch das Zentrum \mathbf{O}_1 durch, dann fallen die ersten Bilder \mathbf{x}' aller Punkte der Geraden (von \mathbf{O}_1 verschieden) auf den Punkt

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} \cap \pi_1$$

in π_1 . Die entsprechenden zweiten Bilder \mathbf{x}'' befinden sich demzufolge auf dem Strahl \mathbf{g}'' des Ordnungsbüschel (\mathbf{o}''_1) . Bei dieser Zuordnung der Bildpunkte \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' auf \mathbf{g}' und \mathbf{g}'' handelt es sich um eine sogenannte *singuläre Projektivität*, wobei \mathbf{G}_1 und \mathbf{o}''_1 singuläre Punkte sind. Analoges gilt für den Fall, dass die Gerade nur durch das Zentrum \mathbf{O}_2 verläuft.

iv) \mathbf{G} ist der Doppelstrahl \mathbf{O}_{12} :

Alle Punkte von \mathbf{G} bzw. \mathbf{O}_{12} , die von den Zentren \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 verschieden sind, besitzen das gleiche Bildpaar $(\mathbf{o}'_2 \mathbf{o}''_1)$.

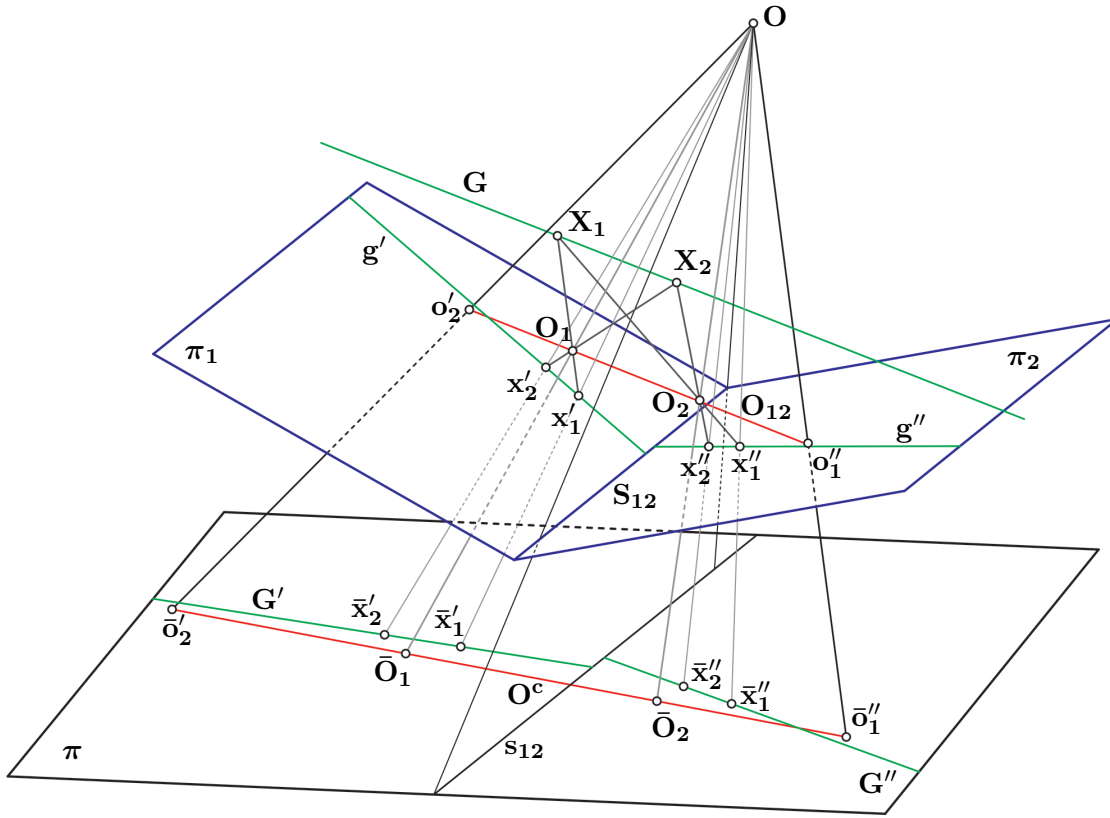
Abbildungen von Ebenen

Eine Ebene ε kann drei Lagen gegen die beiden Zentren \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 haben, die wie folgt zu unterscheiden sind:

i) \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 liegen nicht in ε :

Anhand des Punktfelds $\varepsilon(\mathbf{X})$ werden die Sehstrahlbüschel (\mathbf{O}_1) , (\mathbf{O}_2) aufeinander perspektiv bezogen. Die Ebenen π_1 und π_2 werden durch diese Bündel in bestimmten kollinearen Punktfeldern

$$\pi_1(\mathbf{x}') \bar{\wedge} \pi_2(\mathbf{x}'')$$

Abbildung 2.2: Zweibilderprinzip - Abbildung einer Geraden G

geschnitten, in welchen die Ordnungsbüschel (o'_2) , (o''_1) bezüglich der perspektiven Zuordnung auch einander entsprechen.

Die Umkehrung der Abbildung gilt in diesem Fall ebenso: Durch die Projektion der beiden Ordnungsbüschel aus den Zentren O_1 und O_2 erhält man zwei kollineare Strahlbündel. Diese Strahlbündel haben jede Ebene durch den Doppelstrahl O_{12} gemeinsam. Die Schnittpunkte von entsprechenden Strahlen liegen in einer Ebene ε .

ii) ε enthält entweder O_1 oder O_2 , ε ist einfach projizierend:

Im Fall, dass nur das Zentrum O_1 in der Ebene liegt, ist das erste Bild von $O_1 \in \varepsilon$ unbestimmt. Die ersten Bilder x' aller anderen Punkten von ε liegen dagegen auf einer Geraden

$$F_1 = \varepsilon \cap \pi_1.$$

Sie besitzen ein eindeutig bestimmtes zweites Bild x'' . Die Bildpaare $(x' \ x'')$ sind so kollinear zugeordnet, dass jedem Punkt x' der Geraden F_1 alle Punkte x'' des

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

entsprechenden Ordnungsstrahls des Ordnungsbüschel (\mathbf{o}_1'') entsprechen. Für den Fall, dass nur das Zentrum \mathbf{O}_2 in der Ebene liegt, gilt Analoges.

iii) ε enthält \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 , ε ist doppelprojizierend:

Untersucht werden die Bildpaare aller Punkte von ε , die sich von \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 unterscheiden. Diese Bildpaare liegen auf einem gemeinsamen Paar von entsprechenden Ordnungslinien ($\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$), wobei

$$\mathbf{F}_1 = \varepsilon \cap \pi_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = \varepsilon \cap \pi_2$$

ist. Jene Punktepaare, die von ($\mathbf{o}_2' \mathbf{o}_1''$) verschieden sind, beschreiben je einen Punkt von ε . Für das Zentrum \mathbf{O}_1 stellt \mathbf{o}_1'' das zweite Bild dar, während das erste Bild unbestimmt bleibt. Für \mathbf{O}_2 ist das zweite Bild unbestimmt wohingegen das erste Bild \mathbf{o}_2' ist (vgl. [3], S. 129).

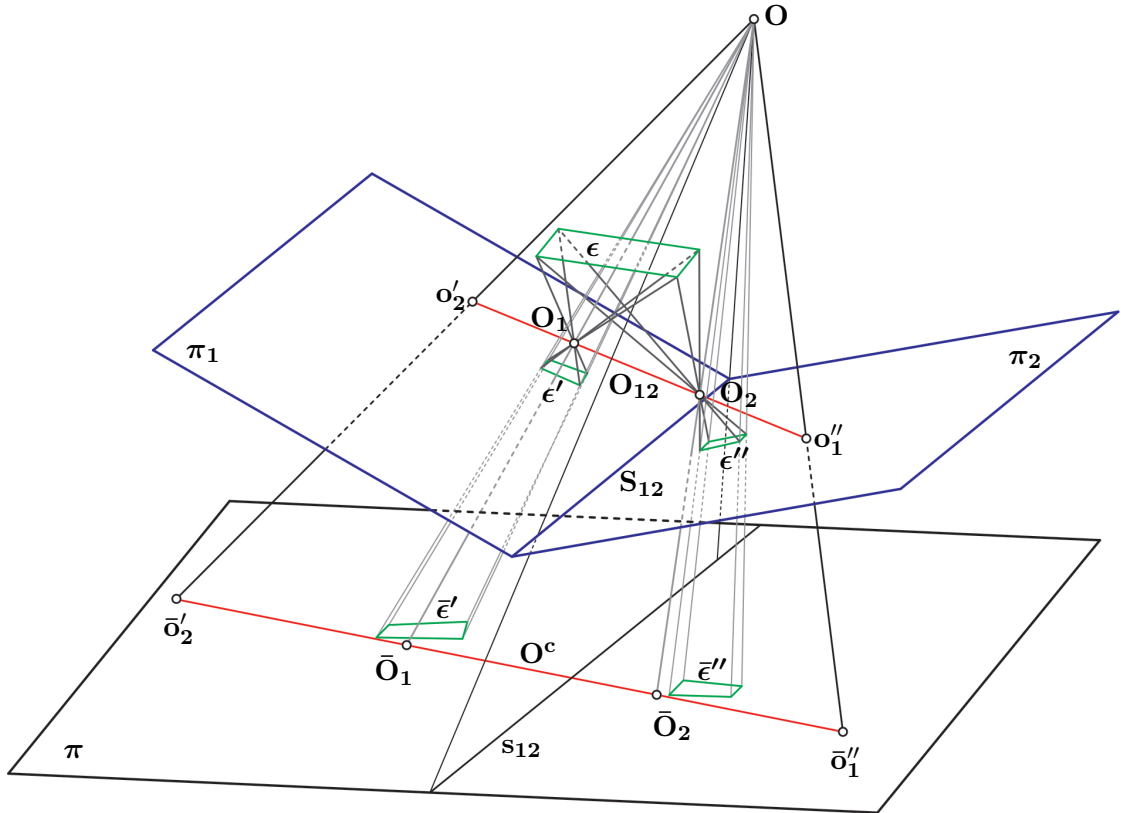


Abbildung 2.3: Zweibilderprinzip - Abbildung einer Ebene ε

Um letztendlich die Bildfelder Π_1, Π_2 eines Objekts im Raum auch gemäß des Zweibilderprinzips auf der Zeichenebene π zu erhalten, werden die einzelnen Bildfelder in π_1 und π_2 durch die Zentralprojektion ausgehend von dem Zentrum \mathbf{O} auf die Zeichenebene projiziert (siehe Abbildung 2.3). Der Grundschnitt \mathbf{S}_{12} geht dabei in eine Gerade \mathbf{s}_{12}

über, die auch als *Rissachse* bezeichnet wird. Die Ordnungspunkte \mathbf{o}'_2 und \mathbf{o}''_1 gehen in die Ordnungspunkte $\bar{\mathbf{o}}'_2$ und $\bar{\mathbf{o}}''_1$ über.

Im Folgenden bezeichnen wir die Ordnungsbüscheln mit $(\bar{\mathbf{o}}'_2)$ und $(\bar{\mathbf{o}}''_1)$. Für eine einfache Unterscheidung zwischen Bildpunkten und Bildgeraden in den Bildebenen π_1 , π_2 sowie jenen in der Zeichenebene π werden im Weiteren die Bilder der Raumobjekte \mathbf{X} , \mathbf{G} , ... in der Zeichenebene π mit \mathbf{X}' , \mathbf{G}' , ... bzw. \mathbf{X}'' , \mathbf{G}'' , ... bezeichnet.

Der Doppelsehstrahl \mathbf{O}_{12} kann den Grundschnitt \mathbf{S}_{12} entweder schneiden oder nicht schneiden. Tritt der erste Fall ein, dann schneiden sich zusammengehörige Ordnungslinien in der Zeichenebene π auf der Rissachse \mathbf{s}_{12} . Falls zusätzlich \mathbf{O} auf \mathbf{O}_{12} liegt, dann haben die Ordnungsbüschel $(\bar{\mathbf{o}}'_2)$ und $(\bar{\mathbf{o}}''_1)$ die Identität als perspektive Beziehung. Die Rissachse enthält nicht die Ordnungspunkte

$$\bar{\mathbf{o}}'_2 = \bar{\mathbf{o}}''_1.$$

Schneidet der Doppelsehstrahl den Grundschnitt, dann fallen die Ordnungspunkte $\bar{\mathbf{o}}'_2$ und $\bar{\mathbf{o}}''_1$ in einem einzigen Punkt auf der Rissachse zusammen. Dies geschieht sowohl im Fall, dass \mathbf{O} auf \mathbf{O}_{12} liegt, als auch bei einer allgemeinen Lage des Zentrums \mathbf{O} . Außerdem werden die Ordnungslinien in der Zeichenebene π durch eine Projektivität, die die Rissachse \mathbf{s}_{12} als Doppelstrahl besitzt, zugeordnet. Als zweiten Doppelstrahl \mathbf{O}^c besitzt diese Zuordnung die Schnittgerade der Ebene, die das Zentrum \mathbf{O} und den Doppelsehstrahl \mathbf{O}_{12} enthält, mit der Zeichenebene, also

$$\mathbf{O}^c = \overline{\bar{\mathbf{o}}'_2 \bar{\mathbf{o}}''_1}.$$

Falls \mathbf{O} auf \mathbf{O}_{12} liegt, wird diese Projektivität wieder zur Identität. Abgesehen von Sonderfällen gilt für die Abbildung von Punkten, Geraden und Ebenen zusammengefasst folgender Satz:

Satz 2 ([3], S. 130). *Jeder Raumpunkt \mathbf{X} wird in der Zeichenebene π i.A. durch ein orientiertes Punktepaar $(\mathbf{X}' \mathbf{X}'')$ abgebildet, das auf einem Paar $(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$ zusammengehöriger Ordnungslinien liegt (d.h. \mathbf{X}' auf \mathbf{P}_1 und \mathbf{X}'' auf \mathbf{P}_2); jede Gerade durch zwei projektive Punktreihen, die zu den Ordnungsbüscheln perspektiv liegen; jede Ebene durch eine Kollineation, in der zusammengehörige Ordnungslinien einander entsprechen.*

Somit sind jegliche Abbildungen für das Zweibilderprinzip wohl definiert und durchführbar. Der Satz 2 ist nicht nur für *allgemeine* sondern auch für *allgemeinste* Zweibildersysteme gültig, denn nach dem Satz 1 ist nur die Zuordnung der Ordnungsbüschel $(\bar{\mathbf{o}}'_2)$, $(\bar{\mathbf{o}}''_1)$ von Bedeutung, während die Rissachse keine Rolle spielt. Daraus folgt, dass der obige Satz auch auf *allgemeinste* Zweibildersysteme anwendbar ist (vgl. [3], S. 130).

Uneigentliche Raum- und Bildelemente beim Zweibilderverfahren

Wie bereits von der Zentralprojektion bekannt, spielen uneigentliche Raum- und Bildelemente (wie Ferngeraden, Fernpunkte, etc.) eine wichtige Rolle, auch beim Zweibilderprinzip. Betrachtet man beim Zweibilderprinzip eine uneigentliche Gerade \mathbf{E}_u von einer

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Ebene ε im Raum, dann besitzt diese zwei Bilder $\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{E}''_{\mathbf{u}}$. Diese Bilder sind Geraden und werden auch als *erste* bzw. *zweite Fluchtlinie* von ε bezeichnet. Eine beliebige Gerade \mathbf{G} besitzt die beiden *Fluchtpunkte* $\mathbf{g}'_{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{g}''_{\mathbf{u}}$. In der *ersten Verschwindungsebene* $\pi_1^{\mathbf{v}}$, die parallel zur Bildebene π_1 ist und das Zentrum \mathbf{O}_1 enthält, sind alle Punkte enthalten, welche uneigentliche erste Bilder besitzen. Dagegen liegen alle Punkte mit uneigentlichen zweiten Bildern auf der *zweiten Verschwindungsebene* $\pi_2^{\mathbf{v}}$, die parallel zur Bildebene π_2 ist und das Zentrum \mathbf{O}_2 enthält. Schneidet man die Ebene π mit den beiden Verschwindungsebenen, so erhält man die *Verschwindungslinien* $\mathbf{E}_1^{\mathbf{v}}$ und $\mathbf{E}_2^{\mathbf{v}}$. Uneigentliche Geraden der Zeichenebene π sowie der beiden Verschwindungsebenen werden im Folgenden mit \mathbf{U} bzw. \mathbf{U}_1 und \mathbf{U}_2 bezeichnet. Diese uneigentlichen Geraden besitzen die Relation

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'_1 = \mathbf{U}''_2.$$

Uneigentliche Punkte der zu $\pi_1^{\mathbf{v}}$ parallelen Ebenen haben folglich uneigentliche erste Bilder, dessen erstes Bildfeld wiederum mit dem entsprechenden Punkt- bzw. Strahlfeld *affin* ist. Dementsprechend sind Ebenen mit dieser Eigenschaft parallel zur ersten Verschwindungsebene. Analog ist jede Ebene zu $\pi_2^{\mathbf{v}}$ parallel, wenn das dazugehörige zweite Bildfeld mit dem Punkt- oder Strahlfeld der Ebene *affin* ist. Weiters gibt es sogenannte *erste Hauptlinien*, die durch den Schnitt einer beliebigen Ebene mit den zu $\pi_1^{\mathbf{v}}$ parallelen Ebenen definiert sind, wobei diese Hauptlinien parallel zu den Verschwindungslinien $\mathbf{E}_1^{\mathbf{v}}$ sind. Sie enthalten nämlich alle den uneigentlichen Punkt

$$\varepsilon \cap \mathbf{U}_1,$$

welcher wie bereits angeführt ein uneigentliches erstes Bild besitzt. Folglich sind die ersten Bilder der ersten Hauptlinien parallel zur ersten Fluchtlinie $\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}$. Die *zweiten Hauptlinien* einer Ebene sind entsprechend parallel zur Verschwindungslinie $\mathbf{E}_2^{\mathbf{v}}$ und dessen zweite Bilder parallel zur zweiten Fluchtlinie $\mathbf{E}''_{\mathbf{u}}$. Jene Geraden, welche jeweils normal auf die Hauptlinien stehen, bezeichnet man auch als *erste* bzw. *zweite Falllinien*.

2.1.2 Das Koinzidenzgebilde

Um das Koinzidenzgebilde genauer erklären zu können, muss davor der Begriff *Koinzidenzpunkt* definiert werden.

Koinzidenzpunkte. Bei den sogenannten Koinzidenzpunkten \mathbf{d}_i handelt es sich um jene Punkte im Raum, dessen Bildpunkte zusammenfallen.

Für solch einen Koinzidenzpunkt gilt

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d}'',$$

wobei \mathbf{d}' , \mathbf{d}'' seine Bilder in der Zeichenebene π sind und als *Deckbilder* bezeichnet werden. Die Menge aller Koinzidenzpunkte im Raum bildet das *Koinzidenzgebilde* des Zweibilderprinzips.

Koinzidenzgebilde bei allgemeinsten Zweibildersystemen

Im Folgenden werden die Koinzidenzgebilde für die Bildfelder Π' , Π'' in der Zeichenebene π , die nach dem allgemeinsten Zweibilderprinzip gebildet wurden, analysiert.

Die Bildfelder in π sind kollineare Transformationen jener Zentralbilder, die aus den beiden Zentren auf die zugehörigen Bildebenen erzeugt wurden. Deswegen sind einzelne Punkte in der Zeichenebene π sowohl die ersten Bilder \mathbf{S}'_1 des Sehstrahls \mathbf{S}_1 (ausgehend vom Zentrum \mathbf{O}_1) als auch die zweiten Bilder \mathbf{S}''_2 des Sehstrahls \mathbf{S}_2 aus \mathbf{O}_2 . Ordnet man derart die Sehstrahlen aus \mathbf{O}_1 den Sehstrahlen aus \mathbf{O}_2 zu, dann sind die Sehstrahlbündel $\mathbf{O}_1(\mathbf{S}_1)$ und $\mathbf{O}_2(\mathbf{S}_2)$ zueinander kollinear. Die Deckbilder $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ von Koinzidenzpunkten werden durch die Schnittpunkte zugehöriger Ordnungslinien in π bestimmt und haben außerdem eine auffallende Lage in der Ebene. Aufgrund der projektiven Zuordnung der Ordnungsbüschel $(\bar{\mathbf{o}}'_2)$, $(\bar{\mathbf{o}}''_1)$ entspricht die Menge der Schnittpunkte von zugehörigen Ordnungslinien dieser Büschel einem Kegelschnitt. Auf diesem Kegelschnitt befinden sich alle Deckbilder $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ der Koinzidenzpunkte (vgl. [3], S. 136).

Solch ein Bildpunkt

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d}'' \quad \text{in} \quad \pi$$

ist genau dann das Deckbild eines Koinzidenzpunktes, wenn sich seine zugehörigen Sehstrahlen tatsächlich schneiden. Da die Sehstrahlbündel $\mathbf{O}_1(\mathbf{S}_1)$ und $\mathbf{O}_2(\mathbf{S}_2)$ kollinear sind, haben die Sehstrahlbündel den Doppelsehstrahl gemein. Der Kegelschnitt, auf dem die Deckbilder $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ der Koinzidenzpunkte liegen, ist sowohl das erste als auch das zweite Bild jener Raumkurve, auf denen die Schnittpunkte der Sehstrahlen und somit die zugehörigen Koinzidenzpunkte liegen. Betrachtet man nämlich die Menge der Sehstrahlen ausgehend vom Zentrum \mathbf{O}_1 auf die einzelnen Bildpunkte $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ auf dem Kegelschnitt, dann bildet die Menge der Sehstrahlen eine Fläche von zweiter Ordnung (Quadrik). Analog erhält man für die Menge der entsprechenden Sehstrahlen ausgehend von \mathbf{O}_2 die zweite Fläche von zweiter Ordnung. Der Doppelsehstrahl verläuft durch beide Zentren und die Bildpunkte \mathbf{o}'_2 und \mathbf{o}''_1 . Aufgrund dessen haben beide Flächen von zweiter Ordnung den Doppelsehstrahl gemeinsam.

Schneidet man zwei Flächen von zweiter Ordnung, so ergibt der Schnitt im Normalfall eine Raumkurve von vierter Ordnung. In unserem Fall zerfällt der Schnitt dieser Flächen in eine Schnittgerade (= Doppelsehstrahl) und eine Raumkurve von dritter Ordnung. Weil ein Koinzidenzpunkt bei gegebenem Deckbild durch den Schnitt seiner zugehörigen Sehstrahlen bestimmt wird, ist die erzeugte Raumkurve dritter Ordnung der Ort aller Koinzidenzpunkte und somit auch das gesuchte Koinzidenzgebilde. Diese Raumkurve wird auch als die *Koinzidenzkurve* bezeichnet. Aufgrund der Kollinearität der Sehstrahlen verläuft die Koinzidenzkurve außerdem durch die Zentren der beiden Sehstrahlbündel.

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Angenommen eine Gerade \mathbf{G} besitzt ein Deckbild mit der Eigenschaft

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G}'',$$

dann erzeugen die Bildpaare einzelner Punkte von \mathbf{G} eine Projektivität zwischen zwei Punktreihen auf $\mathbf{G}' = \mathbf{G}''$. Die Doppelpunkte (d.h. Punkte, die unter einer projektiven Abbildung invariant bleiben) sind dabei ebenso Deckbilder von Koinzidenzpunkten. Daraus folgt, dass die Gerade \mathbf{G} eine Sehne (= Bisekante) der Koinzidenzkurve ist, für die der folgende Satz gilt:

Satz 3 ([3], S. 136). *Bei einem allgemeinsten, vereinigt liegenden Zweibildersystem erfüllen die Koinzidenzpunkte i.A. eine durch \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 gehende Raumkurve 3. O. \mathbf{R}^3 ; die Deckbilder ihrer Punkte erfüllen den von den projektiven Ordnungsbüscheln $(\bar{\mathbf{o}}'_2) \bar{\wedge} (\bar{\mathbf{o}}''_1)$ erzeugten Kegelschnitt \mathbf{C}^2 , und alle Geraden mit Deckbildern bilden die Sehnenkongruenz (Bündelgrad 1, Feldgrad 3) der Koinzidenzkurve \mathbf{R}^3 .*

Eine Strahlenkongruenz, insbesondere eine Sehnenkongruenz, wird üblicherweise durch den Feld- und Bündelgrad definiert. Unter solch einem Feldgrad versteht man im Allgemeinen die Anzahl jener Strahlen, die von einer Kongruenz in einer beliebigen Ebene liegen. Bei einem Bündelgrad handelt es sich um die Anzahl der Strahlen, die durch einen beliebigen Punkt gehen.

Koinzidenzgebilde bei allgemeinen Zweibildersystemen

Nun wird das Koinzidenzgebilde bei allgemeinen Zweibildersystemen untersucht. Für die Bestimmung des Koinzidenzgebildes werden allerdings jene Fälle ausgeschlossen, bei denen entweder das Zentrum \mathbf{O} auf dem Doppelstrahl \mathbf{O}_{12} liegt oder sich der Grundschnitt \mathbf{S}_{12} mit dem Doppelstrahl schneidet. Daher wird vorausgesetzt, dass beide Ordnungspunkte $\bar{\mathbf{o}}'_2$ und $\bar{\mathbf{o}}''_1$ nicht zusammenfallen und somit auch die Ordnungslinien sich auf der Rissachse \mathbf{s}_{12} in π schneiden. Handelt es sich bei den Deckbildern um jene von Punkten im Raum, dann bezeichnet man sie auch als *Punktdeckbilder*. Im Gegensatz zur projektiven Zuordnung der Ordnungsbüscheln beim allgemeinsten Zweibilderverfahren sind beim allgemeinen Zweibilderprinzip die Ordnungsbüschel perspektiv einander zugeordnet. Die beiden perspektiven Ordnungsbüschel erzeugen dabei in der Zeichenebene \mathbf{s}_{12} und

$$\mathbf{O}^c = \overline{\bar{\mathbf{o}}'_2 \bar{\mathbf{o}}''_1}.$$

Aufgrund der Zuordnung eines beliebigen Punktes zum entsprechenden Paar von Ordnungslinien, befinden sich die Punktdeckbilder in der Zeichenebene auf \mathbf{s}_{12} und $\mathbf{O}^c = \overline{\bar{\mathbf{o}}'_2 \bar{\mathbf{o}}''_1}$. Liegen die Deckbilder auf der Rissachse, dann befinden sich die zugehörigen Koinzidenzpunkte auf dem Grundschnitt \mathbf{S}_{12} . Daher zählt der Grundschnitt zum Koinzidenzgebilde des Zweibilderprinzips dazu.

Liegt ein Deckbild $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ auf \mathbf{O}^c , dann kommt man auf den Koinzidenzpunkt wie folgt: Zuerst schneidet man den Sehstrahl ausgehend von \mathbf{O} nach $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ mit den Bildebenen π_1 und π_2 und erhält so die entsprechenden Punkte δ' und δ'' . Dann ist der gesuchte Koinzidenzpunkt der Schnittpunkt

$$\mathbf{d} = \overline{\mathbf{O}_1\delta'} \cap \overline{\mathbf{O}_2\delta''}.$$

Untersucht man nun alle Deckbilder auf \mathbf{O}^c , dann erhält man in der Ebene, welche die Zentren \mathbf{O} , \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 enthält, zwei projektive Sehstrahlbüschel, die durch

$$\overline{\mathbf{O}_1\delta'} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{O}_2\delta''}$$

definiert werden. Diese Büschel erzeugen wiederum einen Kegelschnitt durch die Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 . Auf diesem Kegelschnitt liegen die gesuchten Koinzidenzpunkte der Deckbilder auf \mathbf{O}^c . Der Kegelschnitt verläuft außerdem durch den Schnittpunkt der Ebene, die die Zentren \mathbf{O} , \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 enthält, mit dem Grundschnitt. Folgender Satz fasst das gesamte Koinzidenzgebilde beim allgemeinen Zweibilderprinzip und die Eigenschaften des Kegelschnitts zusammen:

Satz 4 ([3], S. 137). *Bei einem allgemeinen Zweibildersystem mit verschiedenen Ordnungspunkten ist das Koinzidenzgebilde eine zerfallene Raumkurve 3. O., die aus dem Grundschnitt*

$$\mathbf{S}_{12} = \pi_1 \cap \pi_2$$

und einem Kegelschnitt \mathbf{C}^2 besteht, der durch den Schnittpunkt von \mathbf{S}_{12} mit der Ebene, [welche die Zentren \mathbf{O} , \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 enthält], geht.

Geraden und ihre Deckbilder spielen bei der Koinzidenzkurve beim allgemeinen Zweibilderprinzip eine interessante Rolle. Die Koinzidenzkurve wird hier auch mit

$$\{\mathbf{S}_{12}\mathbf{C}^2\}$$

gekennzeichnet. Die Geraden mit Deckbildern bilden gemeinsam die Bisekantenkongruenz der Koinzidenzkurve. Diese Kongruenz zerfällt in ein Strahlfeld des Kegelschnitts \mathbf{C}^2 und in eine neue Kongruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 2 (vgl. [3], S. 137). Betrachtet man das Bündel des Schnittpunktes

$$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{C}^2,$$

so ergeben sich hier als Bisekanten nur der Grundschnitt selbst und die Tangente an \mathbf{C}^2 . Die Bisekante verläuft in diesem Fall nur durch den Punkt $\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{C}^2$ der Koinzidenzkurve, der sowohl auf dem Grundschnitt als auch auf dem Kegelschnitt liegt. Von einer *Unisekante* wird dann gesprochen, wenn diese Sekante genau einen Punkt der Koinzidenzkurve enthält. Falls die Bildpaare von Punkten einer Geraden \mathbf{G} perspektive Reihen

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

bilden (d.h. die Bilder auf den beiden Punktreihen liegen perspektiv zueinander), dann handelt es sich beim Schnittpunkt der Bildgeraden

$$\mathbf{G}' \cap \mathbf{G}''$$

um das Deckbild eines Koinzidenzpunktes und die Gerade \mathbf{G} ist selbst eine Unisekante der Koinzidenzkurve. Fasst man alle Geraden zusammen, die Unisekanten von der Koinzidenzkurve sind, so nennt man diesen Komplex auch *Unisekantenkomplex*. Unter einem Komplex ist eine stetige Mannigfaltigkeit von ∞^3 Strahlen im Raum zu verstehen, also handelt es sich bei einem Sekantenkomplex um die Mannigfaltigkeit aller Unisekanten einer Kurve (vgl. [3], S.96). Unter ∞^3 Strahlen im Raum ist eine dreiparametrische Menge des \mathbb{R}^3 zu verstehen. Der Begriff (Uni-)Sekantenkomplex ist in der Liniengeometrie ein allgemeiner Ausdruck für den Begriff Kurve. Folgender Satz fasst die Sehnenkongruenz beim allgemeinen Zweibildersystem zusammen:

Satz 5 ([3], S. 137). *Bei einem allgemeinen Zweibildersystem mit verschiedenen Ordnungspunkten bilden alle Raumgeraden mit Deckbildern die Sehnenkongruenz der Koinzidenzkurve $\{\mathbf{S}_{12}\mathbf{C}^2\}$. Alle Geraden, die sich als perspektive Punktreihen darstellen, bilden den Unisekantenkomplex von $\{\mathbf{S}_{12}\mathbf{C}^2\}$.*

Sonderfall beim Grund- und Aufriss

Es gibt außerdem noch Sonderfälle des Koinzidenzgebildes, wie zum Beispiel beim bekannten Grund- und Aufriss. Der Grundriss eines Objekts im Raum wird durch eine Normalprojektion auf die xy -Ebene erzeugt und der Aufriss ebenfalls durch eine Normalprojektion auf die yz -Ebene. Die Rissachse ist in diesem Fall die y -Achse, weil sie die gemeinsame Schnittgerade der beiden Ebenen ist.

Dreht man nun den Grund- oder Aufriss so um die Rissachse, dass sie in einer gemeinsamen Ebene zusammenfallen, dann erkennt man relativ schnell das Koinzidenzgebilde. Man betrachte hierfür die Abbildung 2.4. Gegeben ist ein Punkt P im Raum. Bildet man den Punkt P auf xy -Ebene ab, so erhält man den Punkt P' . Man drehe den Grundriss um die Rissachse (= y -Achse) derart, dass beide Risse in einer Ebene zusammenfallen. In der Abbildung 2.4 liegt nun der Grundriss \tilde{P}' in der yz -Ebene. Betrachtet man \tilde{P}' aber auch gleichzeitig als den Aufriss \tilde{P}'' von einem Punkt, d.h. Grund- und Aufriss dieses Punktes fallen zusammen und ist entsprechend ein Deckbild, und sucht den dazugehörige Punkt im Raum, so erhält man den Koinzidenzpunkt \tilde{P} . Wiederholt man diese Vorgehensweise mit einem anderen beliebigen Punkt Q , dann bekommt man den Koinzidenzpunkt \tilde{Q} . Man erkennt leicht, dass alle Koinzidenzpunkte in einer Ebene α liegen, die zur Rissachse um 45° gedreht ist. Somit ist das Koinzidenzgebilde im Grund- und Aufriss die Koinzidenzebene α .

2.1.3 Hauptsatz des Zweibilderprinzips

Nachdem das Zweibilderprinzip dargestellt wurde, stellt sich die Frage, wie die Umkehrung des Zweibilderprinzips erfolgt. Wie erhält man anhand von zwei gegebenen unter-

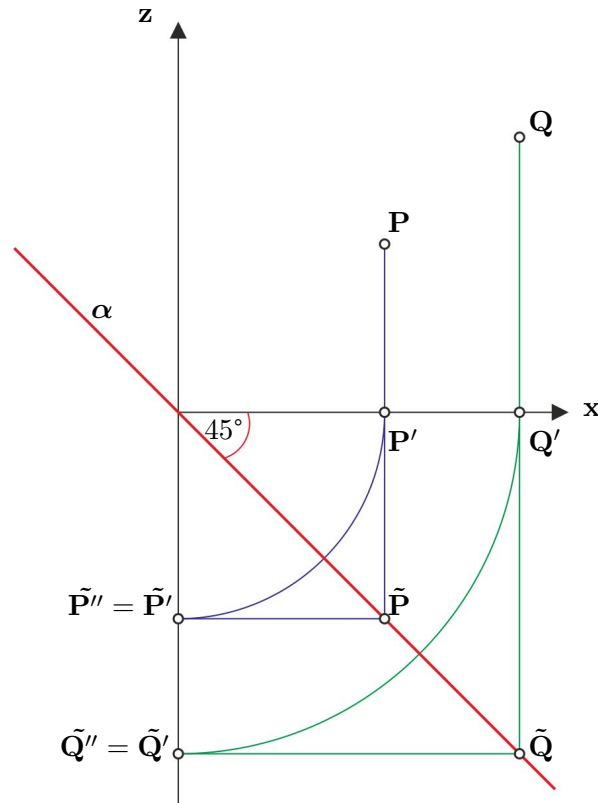


Abbildung 2.4: Koinzidenzebene beim Grund- und Aufriss

schiedlichen Bilder eines Objekts im Raum das Objekt selbst? In diesem Abschnitt wird die Übertragung der informationsreichen Bildsystemen auf das Objekt im Raum selbst untersucht.

Von einem allgemeinen Zweibildersystem sind nur die beiden Ordnungsbüschel in der perspektiven Zuordnung

$$(\bar{o}'_2) \bar{\wedge} s_{12} \bar{\wedge} (\bar{o}''_1)$$

sowie ein System von zugehörigen Punktpaaren $(\mathbf{X}' \mathbf{X}'')$ in der Zeichenebene π bekannt (siehe Abbildung 2.5). Die Bildpunkte sind bekanntlich anhand entsprechender Ordnungslinien verknüpft sind. Für die Umkehraufgabe werden die Urbilder \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' der Punktbilder \mathbf{X}' und \mathbf{X}'' auf den entsprechenden Bildebenen gesucht. Dazu muss aus einem Zentrum \mathbf{O} einerseits das System (\mathbf{X}') auf die Bildebene π_1 und andererseits das System (\mathbf{X}'') auf die Bildebene π_2 abgebildet werden. Dabei ist zu beachten, dass sich die Bildebenen in der Sehebene δ , die das Zentrum \mathbf{O} und die Rissachse s_{12} enthält, schneiden. Der Grundschnitt liegt demnach ebenfalls in der Sehebene δ . Dann folgt der perspektive Bezug durch den Grundschnitt S_{12} , sodass die perspektiven Ordnungsbüschel (\bar{o}'_2) und (\bar{o}''_1) den zwei Büscheln (o'_2) und (o''_1) entsprechen. Die Bildpaare

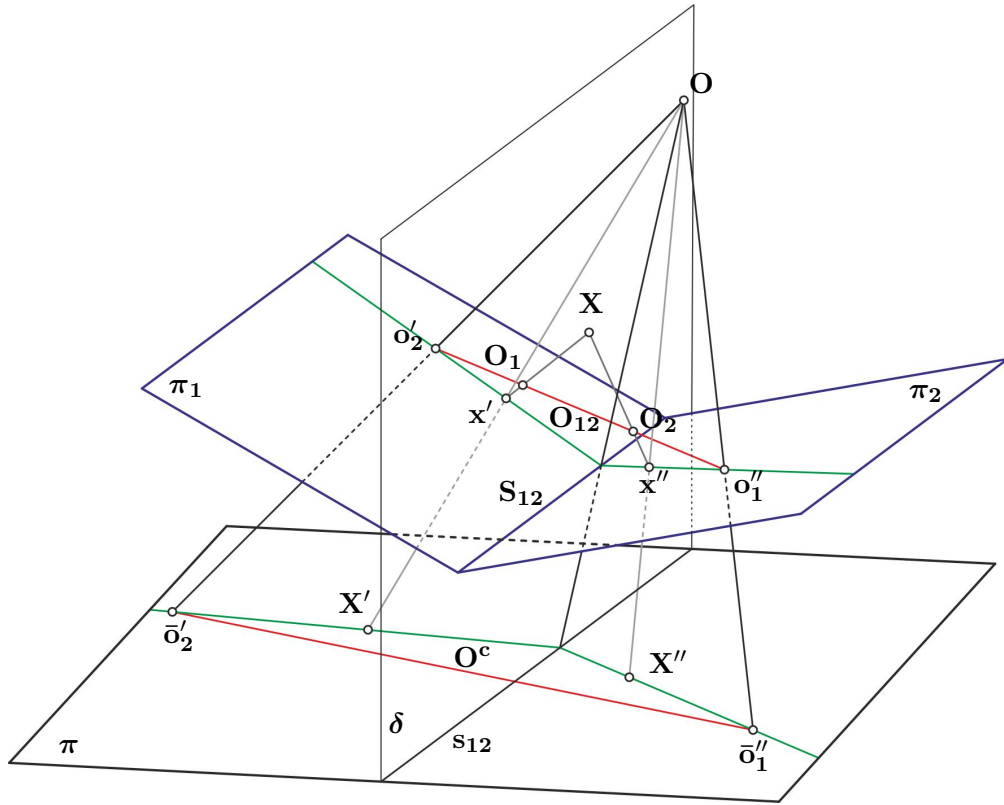


Abbildung 2.5: Zweibilderprinzip - Umkehraufgabe

$(X' X'')$ in der Zeichenebene π gehen also in die Punktepaaire $(x' x'')$ über, welche sich auf entsprechenden Strahlen der Büschel

$$(o'_2) \bar{\wedge} (o''_1)$$

befinden. Anschließend werden noch die beiden Zentren O_1 und O_2 gesucht. Diese liegen bekanntlich auf der Verbindungsgerade

$$\overline{o'_2 o''_1}$$

und können auf dieser beliebig gewählt werden. Es ist nur wichtig, dass das Zentrum O_1 von dem Bild o'_2 und O_2 von o''_1 verschieden ist. Letztendlich werden durch die Punkte x' und x'' die entsprechenden Sehstrahlen aus den Zentren O_1 bzw. O_2 gelegt. Die erhaltenen Sehstrahlen schneiden sich im Punkt X . Damit ist der Übergang von zwei Bildsystemen zum eigentlichen Objekt im Raum gegeben.

Dieser Vorgang ist allerdings mehrfach unbestimmt und es besteht eine kollineare Verwandtschaft zwischen den räumlichen Objekten des entsprechenden Bildsystems, wie auch Müller [3] in seinem Text betont. Für die notwendigen Raumobjekte des Zweibilderprinzips existiert wie folgt eine verschieden mögliche Auswahl:

- Das Zentrum \mathbf{O} wird aus einer dreiparametrischen Menge des \mathbb{R}^3 gewählt,
- die Bildebene π_1 wird ebenfalls aus einer dreiparametrischen Menge des \mathbb{R}^3 gewählt,
- dadurch können π_2 und beide Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ jeweils aus einer einparametrischen Menge festgelegt werden (vgl. [3], S. 148).

Zählt man alle vorkommenden k -parametrischen Mengen zusammen, besitzt das entsprechende Bildsystem eine neunparametrische Menge an kollinearen Elemente. Aufgrund der drei Koordinaten des Zentrums \mathbf{O} , für welche jeweils unendlich viele mögliche reelle Zahlen eingesetzt werden können, folgt die Auswahl aus einer dreiparametrischen Menge. Für die Bildebene π_1 folgt ebenfalls aufgrund der vorkommenden drei Koeffizienten in der zugehörigen Ebenengleichung die Auswahl aus einer dreiparametrischen Menge. Die zweite Bildebene muss die Eigenschaft erfüllen, dass sie die erste Bildebene in der Sehebene δ schneiden muss und somit nur mehr durch eine Drehung um die Schnittgerade variieren kann und der Drehwinkel beliebig gewählt werden kann. Daher folgt die Auswahl aus nur einer einparametrischen Menge. Die beiden Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ liegen auf dem Doppelsehstrahl und können daher nur auf dieser Geraden beliebig gewählt werden, wodurch die Auswahl aus einer einparametrischen Menge folgt. Somit kann für den Übergang folgende Zusammenfassung übernommen werden:

Satz 6 ([3], S. 148 f.). *Ein System von orientierten Punktpaaren $(\mathbf{X}' \mathbf{X}'')$ in der Zeichenebene, die bloß der Bedingung genügen, dass zusammengehörige Punkte $\mathbf{X}', \mathbf{X}''$ an zusammengehörige Strahlen zweier perspektiven Büschel*

$$(\bar{\mathbf{o}}'_2) \bar{\wedge} (\bar{\mathbf{o}}''_1)$$

gebunden sind, kann als allgemeines Zweibildersystem von ∞^9 zueinander kollinearen räumlichen Punktsystemen aufgefasst werden.

Das behandelte Umkehrproblem des Zweibildersystems sowie die aufgetretenen Fragen sind auch auf allgemeinste Zweibildersysteme übertragbar. Grundlage ist das Bekanntsein der Projektivität der Ordnungsbüschel.

Satz 7 ([3], S. 149). *Sind zwei ebene Punktsysteme $\pi'(\mathbf{X}')$ und $\pi''(\mathbf{X}'')$ bloß durch die Bedingung aufeinander bezogen, dass in ihnen entsprechende Punkte \mathbf{X}' und \mathbf{X}'' durch zwei projektive Büschel*

$$(\bar{\mathbf{o}}'_2) \bar{\wedge} (\bar{\mathbf{o}}''_1)$$

projiziert werden, so lassen sie sich als allgemeinstes Zweibildersystem eines Objektes und aller ∞^{15} zu ihm kollinearen Objekte auffassen.

Dieser Satz definiert bereits die Unbestimmtheit der Abbildung von einem allgemeinsten Zweibildersystem. Sind also zwei Bildsysteme in einer Zeichenebene gegeben, in welcher die jeweiligen Bildpunkte durch die projektiven Büschel abgebildet werden, dann sind diese Bildsysteme das allgemeinste Zweibildersystem von einem Objekt im Raum, welches eine 15-parametrische Menge an kollinearen Objekten besitzt.

Problem der ebenen Projektivität

Im Folgenden wird das sogenannte *Problem der Projektivität* näher erläutert. Dieses Problem besteht für die Ebene und handelt von der Bestimmung einer Projektion von zwei spezifischen ebenen Punktgruppen mithilfe von projektiven Strahlbüscheln (vgl. [3], S. 150). Durch die Betrachtung der vorigen Konstruktion folgt, dass die Ordnungsbüschel (\bar{o}_2') und (\bar{o}_1'') anhand von einer bestimmten ausreichend großen Menge an Bildpaaren $(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i'')$ mit $i = 1, 2, \dots$ festgelegt werden können. Müller erklärt in seinem Werk, dass für die Bestimmung von den Ordnungspunkten genau sieben Punktpaare ausreichend sind.

„Es lässt sich zeigen, dass es zu zwei ebenen Gruppen von je sieben Punkten $(\mathbf{X}_i'), (\mathbf{X}_i'')$, die zu Paaren $(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i'')$ geordnet sind, drei Punktpaare $(\bar{o}_2' \bar{o}_1'')$ derart gibt, dass sie sieben Punkte \mathbf{X}_i' aus \bar{o}_2' und die sieben entsprechenden Punkte \mathbf{X}_i'' aus \bar{o}_1'' durch projektive Büschel projiziert werden.“ ([3], S. 150)

In dieser Arbeit wird der Beweis dieser Feststellung nicht behandelt. Zur Erinnerung: die Ordnungsbüschel besitzen das Merkmal, dass ihre projektive Zuordnung durch die Bildpaare der Punkte im Raum bestimmt wird. Man nehme an, dass zwei verschiedene Perspektiven vorgegeben sind, welche in dem Fall durch Fotografien bereitgestellt werden. Sind nun die Bildpaare von mindestens sieben unterschiedlichen Punkten bestimmbar, lassen sich die Ordnungspunkte mithilfe der ebenen Projektivität finden. Das Lösen dieser Problematik der ebenen Projektivität für Gruppen von jeweils sieben Bildpaaren führt immer zu je drei Punktpaaren $(\bar{o}_2' \bar{o}_1'')$. Um von diesen zahlreichen Punktpaaren das gesuchte Ordnungspunktpaar zu ermitteln, müssen die Bildsysteme des betrachteten Objekts widerspruchsfreie Bilder sein. Dann erfüllt genau eines der Paare alle möglichen Lösungsverfahren. Eines dieser Lösungsverfahren ist eine Konstruktion, was laut Müller [3] jedoch für zwei Gruppen von je sieben Punkten $(\mathbf{x}_i'), (\mathbf{x}_i'')$ nicht ganz ohne Komplikationen durchführbar ist. Daher soll stattdessen der analytische Lösungsansatz für die Projektivität im Weiteren untersucht werden.

Für das analytische Lösen des Problems ist eine Korrelation von den Feldern π', π'' vorgegeben. Die sogenannten *konjugierten Punkte* $\mathbf{X}', \mathbf{X}''$ dieser Korrelation erfüllen die Eigenschaft, dass sich einerseits der Bildpunkt \mathbf{X}' auf der zugeordneten Gerade von \mathbf{X}'' und andererseits der Bildpunkt \mathbf{X}'' auf der zugeordneten Gerade von \mathbf{X}' befindet. Die *bilineare* Gleichung (2.1)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

beschreibt eine solche Korrelation, wobei (x_i) und (y_i) für $i = 1, 2, 3$ die homogenen Koordinaten der konjugierten Punkte sind und die Matrix (a_{ij}) die Korrelation definiert. Aus (2.1) erhält man durch Ausmultiplizieren die Gleichung

$$\begin{aligned}
x_1(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) + x_2(a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) \\
+ x_3(a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3) = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Es ist zu beachten, dass die Korrelation bijektiv ist und somit die Determinante von (a_{ij}) Determinante existiert, also ungleich 0 ist. Die Matrix (a_{ij}) ist bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig bestimmt. Da in dieser Gleichung genau acht verschiedene Konstante vorkommen, existieren für zwei Ebenen entsprechend eine achtparametrische Menge von Korrelationen.

Allerdings kann hier noch nichts über die Eindeutigkeit einer Korrelation gesagt werden, denn dazu wären acht konjugierte Punktpaare erforderlich, die außerdem linear unabhängig sind. Erst dann ist die Korrelation auch eindeutig festgelegt. Sofern, wie so oft nur sieben Punktpaare bekannt sind, kann mithilfe der Koeffizienten der Gleichung (2.2) das letzte Paar gefunden werden. Dazu ist eine Gleichung aufzustellen, die die erwähnten Koeffizienten a_{ij} mit $i, j = 1, 2, 3$ bildet. Das beliebige Paar $(\lambda \ \mu)$ mit homogenen Parametern ist wie folgt in die Darstellung der Koeffizienten einzufügen:

$$a_{ij} = \lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij} \tag{2.3}$$

Dabei entsprechen die Koeffizienten a'_{ij} und a''_{ij} zwei verschiedene Lösungen aus den zugehörigen Gleichungen aus (2.2), welche durch das Einsetzen der bereits bekannten Punktpaare ermittelt werden.

Die Gleichung (2.3) ist eine Linearkombination aller Lösungen der sieben Gleichung für die sieben gegebenen Punktpaare aus (2.1) und kann in die Gleichung (2.2) eingesetzt werden. Das Resultat ist die Gleichung (2.4), die alle Korrelationen wiedergibt, welche die sieben Punktpaare von zuvor beinhalten. Man bezeichnet die Menge dieser Korrelationen auch als das sogenannte *Büschel von einer einparametrischen Menge an Korrelationen* (vgl. [3], S. 152).

$$\lambda \Phi_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) + \mu \Phi_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{2.4}$$

Die in der obigen Gleichung vorkommenden Koeffizienten Φ_1, Φ_2 haben eine bilineare Gestalt.

Für

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0$$

erhalten wir eine Korrelation \mathbf{K}_1 und für

$$\lambda = 0, \quad \mu = 1,$$

erhalten wir eine Korrelation \mathbf{K}_2 . Müller [3] spricht in seinem Werk von einer sogenannten *quadratische Verwandtschaft*, was zusammengefasst die eindeutige Zuordnung der einzelnen Punkte \mathbf{X}' den Punkten \mathbf{X}'' durch das Büschel aus (2.4) beschreibt. Eine

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

quadratische Verwandtschaft ist eine Abbildung von Punkten auf Punkte, die Geraden auf Kegelschnitte abbildet.

Der Zusammenhang der drei Hauptpunktpaare mit dem Zweibildersystem wird im Satz 8 genauer beschrieben.

Satz 8 ([3], S. 152). *Zu sieben Punktpaaren $(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}''_i)$ gibt es i. A. drei Punktpaare $(\bar{\mathbf{o}}'_2 \bar{\mathbf{o}}''_1)$, aus denen sie durch projektive Büschel projiziert werden. Sieben Punktpaare $(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}''_i)$, können also immer als Bildpaare eines Zweibildersystems betrachtet werden; die Ordnungspunkte $\bar{\mathbf{o}}'_2$ und $\bar{\mathbf{o}}''_1$ werden durch sie i. A. dreideutig bestimmt.*

Im Folgenden wird beschrieben, wie eine Rekonstruktion eines Raumobjekts aus zwei Bildern festgelegt sein kann.

Dazu genügt nicht nur die Projektivität $(\bar{\mathbf{o}}'_2) \bar{\wedge} (\bar{\mathbf{o}}''_1)$ zu kennen. Folgendes wird dazu noch benötigt: Die Kollineation, die aus den Bildern der Fernebene hervorgeht, wobei diese Bilder mit

$$(\Omega' \Omega'')$$

bezeichnet werden, sowie die Bilder

$$(\mathbf{I}' \mathbf{I}'')$$

des absoluten Kegelschnitts \mathbf{I} .

Der absolute Kegelschnitt

Jeder Kegelschnitt, der durch die Fernpunkte geht, ist ein Kreis. Jeder Kreis geht durch die absoluten Kreispunkte. Jede Kugel schneidet die Fernebene genau im absoluten Kegelschnitt. Die absoluten Kreispunkte erhält man wie folgt: Gegeben ist die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ersetzt man die Koordinaten durch homogene Koordinaten, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun mit x_0^2 , dann ergibt sich die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0.$$

Für die Fernebene gilt bekanntlich $x_0 = 0$, somit erhält man für den Schnitt

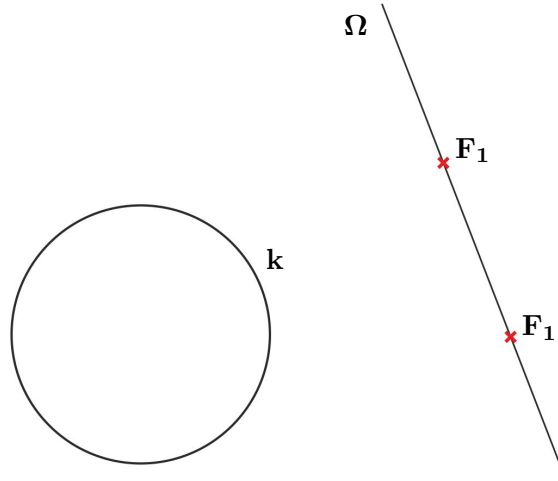


Abbildung 2.6: Absolute Kreispunkte

des Kreises mit der Fernebene letztendlich

$$x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Schnittpunkte (= Fernpunkte)

$$\mathbf{F}_1 = (0, i, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = (0, -i, 1)$$

bestimmen. Da jeder Kreis \mathbf{k} durch die absoluten Kreispunkte geht, handelt es sich bei diesen Fernpunkte um die absoluten Kreispunkte (siehe Abbildung 2.6).

Aus diesen Informationen $(\Omega' \Omega'')$, $(\mathbf{I}' \mathbf{I}'')$ und $(\bar{\mathbf{o}}_2') \bar{\wedge} (\bar{\mathbf{o}}_1'')$ ist das Objekt im Raum bis auf Ähnlichkeiten festgelegt.

Müller [3] beweist diese Eigenschaften mithilfe der sogenannten *Hauptbildfigur*, die durch

$$\{\bar{\mathbf{o}}_2' \mathbf{P}_1 \mathbf{I}'; \bar{\mathbf{o}}_1'' \mathbf{P}_2 \mathbf{I}''\}$$

gegeben ist. Die Figur besteht aus den vier Bildern $\bar{\mathbf{o}}_2'$, $\bar{\mathbf{o}}_1''$, \mathbf{I}' , \mathbf{I}'' und einem Paar entsprechender Ordnungslinien $(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$.

Hauptsatz des allgemeinsten Zweibilderprinzips ([3], S. 154). *Durch die Hauptbildfigur*

$$\{\bar{\mathbf{o}}_2' \mathbf{P}_1 \mathbf{I}'; \bar{\mathbf{o}}_1'' \mathbf{P}_2 \mathbf{I}''\}$$

wird die Abbildung des Raumes im Sinne des allgemeinsten Zweibilderprinzips i. A. auf ∞^{13} Arten äquiform festgelegt. Die zu einem Bildsystem $(\Pi' \Pi'')$ gehörigen Raumfiguren lassen sich durch alle ∞^7 nicht singulären Ähnlichkeiten vertauschen.

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Nach Angaben Müllers [3] kann die Bedeutung dieses Hauptsatzes für das allgemeinste Zweibilderprinzip mit dem Fundamentalsatz der Axonometrie verglichen werden. Weiters existiert ein einzigartiger Fall, bei dem die Zentralrisse aus den beiden Zentren aus die Bildebenen π_1, π_2 direkt die Bildsysteme sind. In diesem Sonderfall entsprechen \mathbf{I}' und \mathbf{I}'' nach Müller [3] den nullteiligen Kreisen \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 , wobei reell betrachtet diese den Distanzkreisen von \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 gleichen.

Eine Perspektive besitzt in der Photogrammetrie außerdem eine sogenannte *innere Orientierung*, welche durch dessen Elemente bestimmt wird. Zu diesen Elementen gehören der Normalriss des Zentrums auf die Bildebene, auch *Hauptpunkt* genannt, und die Distanz des Zentrums auf sein Bild. „[] die Redeweise, von einer Perspektivität ist die innere Orientierung bekannt, besagt somit einfach, dass der Distanzkreis gegeben ist.“ ([3], S. 155) Wenn sich genügend Punktbildpaare aus den Zentralrissen finden lassen, sodass die entsprechenden Ordnungspunkte bestimmt werden können, dann leitet sich folgender Satz aus dem Hauptsatz ab:

Satz 9 ([3], S. 155). *Durch zwei Perspektiven mit innerer Orientierung wird das dargestellte Objekt äquiform bestimmt.*

Dieser Satz spielt in der Photogrammetrie eine wichtige Rolle, doch die Gültigkeit für das allgemeine Zweibilderprinzip muss erst noch gezeigt werden. Die Hauptbildfigur, welche auch in der Abbildung 2.1 dargestellt ist, ist im Folgenden durch

$$\{\bar{o}_2' \bar{o}_1'' \mathbf{I}' \mathbf{I}''\}$$

bestimmt.

Wie gezeigt werden kann ([3], S. 157) gilt der folgende Hauptsatz für das allgemeine Zweibilderprinzip.

Hauptsatz des allgemeinen Zweibilderprinzips ([3], S. 157). *Durch die Hauptbildfigur $\{\bar{o}_2' \bar{o}_1'' \mathbf{I}' \mathbf{I}''\}$ wird die Abbildung des Raumes im Sinne des allgemeinen Zweibilderprinzips i. A. auf ∞^1 Arten äquiform festgelegt. Die zu einem Bildsystem Π', Π'' gehörigen Raumfiguren lassen sich durch die ∞^1 Streckungen von \mathbf{O} aus vertauschen.*

Hier ist anzumerken, dass die vorkommenden ∞^1 zentrischen Ähnlichkeiten gleich Translationen entsprechen, d.h. einfache Schiebungen in die Richtung des Doppelsehstrahls \mathbf{O}_{12} . Außerdem tritt dann der Fall ein, dass die Raumobjekte sowohl durch ihre Gestalt als auch durch ihre Größe identifiziert werden. Die Bestimmung durch ihre Größe ist bei den üblichen Zweibildersystemen oft der Fall.

2.2 Analytische Betrachtung

Das Zweibilderprinzip kann neben der konstruktiven Ansicht auch analytisch betrachtet werden. Die sogenannte *Epipolargeometrie* umfasst die geometrischen Zusammenhänge zwischen zwei Bildern eines Objekts, die sich mithilfe einer bestimmten 3×3 - Matrix zusammenfassen lässt. Diese Matrix wird *Fundamentalmatrix* genannt und im nächsten Abschnitt genauer erklärt. Hartley und Zisserman [2] greifen in ihrem Text folgende drei besondere Punkte auf, welche für die epipolare Geometrie von Bedeutung sind:

- i. **Korrespondenzgeometrie:** Gegeben ist ein Bildpunkt \mathbf{x}' in der ersten Ansicht. Inwiefern schränkt es die Position des zugehörigen Punktes \mathbf{x}'' in der zweiten Ansicht ein?
- ii. **Zentrumgeometrie (Bewegung):** Gegeben ist eine Menge korrespondierender Bildpunkte $\{\mathbf{x}'_i \leftrightarrow \mathbf{x}''_i\}$ mit $i = 1, \dots, n$. Was sind die Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 für beide Ansichten?
- iii. **Szenengeometrie (Struktur):** Gegeben sind entsprechende Bildpunkte $\mathbf{x}'_i \leftrightarrow \mathbf{x}''_i$ und die Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$. Wie ist die Position ihres Urbilds \mathbf{X}_i im dreidimensionalen Raum?

Im Folgenden werden die epipolare Geometrie und die für die analytische Berechnung der geometrischen Zusammenhänge von zwei Bildern notwendige Fundamentalmatrix \mathbf{F} näher untersucht. Ein Punkt \mathbf{X} im Raum wird ausgehend von zwei Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ auf zwei Bildebenen projiziert, seine Bilder $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ liegen in der ersten Bildebene π_1 bzw. in der zweiten Bildebene π_2 . Die Abbildung der Objektpunkte im Raum auf die jeweiligen Bildebenen aus den Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 werden durch sogenannte Projektionsmatrizen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 der Zentren beschrieben. Diese Projektionsmatrizen beschreiben die perspektivischen Abbildungen von Raumpunkten auf ihre Bildpunkte und beinhalten die Information über die Orientierung bzw. Ausrichtung des jeweiligen Zentrums. Mithilfe der Epipolargeometrie können Zusammenhänge von Bildpunkten zweier Bildebenen festgestellt und beschrieben werden. Die Punkte \mathbf{X}, \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 erzeugen, wie in Abbildung 2.7 abgebildet, eine gemeinsame Ebene, welche mit ϵ bezeichnet wird. Die Projektionsstrahlen von den Zentren durch \mathbf{X} liegen in ϵ und ergeben durch den Schnitt mit den Bildebenen die entsprechenden Bildpunkte \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' .

Gegeben sind nun das erste Bild eines Punktes \mathbf{X} im Raum sowie die Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ und dessen zugehörigen Bildebenen. Gesucht wird das zweite Bild \mathbf{x}'' des zugehörigen Punktes. Die Ebene ϵ wird nur anhand des Doppelsehstrahls, welches in der Epipolargeometrie auch als *Grundlinie* bezeichnet wird (siehe Abbildung 2.7), und dem Projektionsstrahl von \mathbf{x}' aus \mathbf{O}_1 bestimmt. Die Ebene ϵ schneidet die beiden Bildebenen in je einer Schnittgeraden. Gleichzeitig sind die Schnittgeraden auch die Bilder der Projektionsstrahlen, dh. l' ist das Bild des Projektionsstrahls durch \mathbf{X} und \mathbf{O}_2 und l'' jenes vom Strahl durch \mathbf{X} und \mathbf{O}_1 . Da sowohl die Schnittgeraden als auch die Bilder \mathbf{x}' sowie \mathbf{x}'' in ϵ liegen, folgt daraus, dass die Bilder \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' auf diesen Schnittgeraden liegen (siehe

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

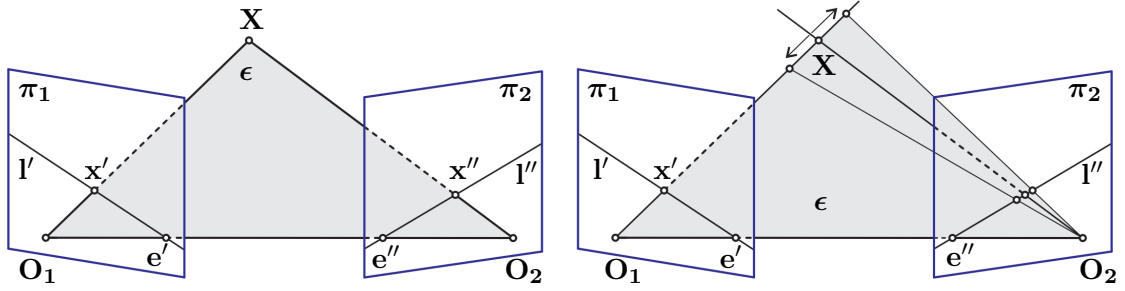


Abbildung 2.7: Korrespondierende Punkte (in Anlehnung an [2])

Abbildung 2.7). Daraus folgt, dass das zweite Bild auf der Schnittgeraden l'' in π_2 liegt und der Punkt X durch den Schnittpunkt beider Projektionsstrahlen bestimmt wird.

In der Epipolargeometrie gibt es nach Hartley und Zisserman drei wichtige Begriffe, die für die weiteren Untersuchungen wichtig sind:

- **Der Epipol:** Ein Schnittpunkt der Grundlinie mit einer Bildebene, welcher zugleich der Bildpunkt in einer Bildebene des nicht zugehörigen Zentrums ist.
- **Die epipolare Ebene:** Eine beliebige Ebene, welche die Grundlinie enthält. Es existiert eine einparametrische Familie von epipolaren Ebenen.
- **Die epipolare Gerade:** Eine Schnittgerade der epipolaren Ebene mit einer Bildebene. Jede epipolare Gerade verläuft durch den Epipol (vgl. [2], S. 221).

Jede epipolare Ebene legt die zugehörige Korrespondenz der beiden enthaltenen epipolaren Geraden fest. In der Abbildung 2.8 sind die Epipole durch e' und e'' gekennzeichnet, während die epipolaren Geraden mit l' und l'' bezeichnet sind. Die epipolaren Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 gehören zur einparametrischen Familie von epipolaren Ebenen, die sich durch eine Drehung um die Grundlinie unterscheiden und die Grundlinie gemeinsam haben. In der Abbildung erkennt man, dass die epipolaren Geraden l'_1 , l'_2 sowie l''_1 und l''_2 sich in den Epipolen e' bzw. e'' schneiden.

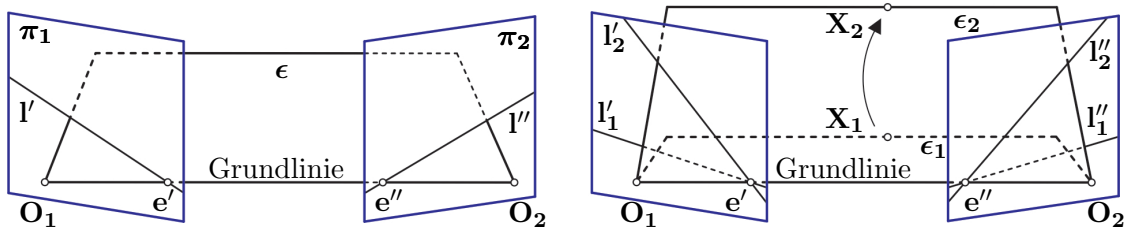


Abbildung 2.8: Epipolargeometrie (in Anlehnung an [2])

Die Fundamentalmatrix

Die Zusammenhänge und Korrespondenzen zweier Bilder in der Epipolargeometrie lassen sich, wie zuvor erwähnt, mathematisch auch durch eine bestimmte Matrix beschreiben. Diese Matrix wird die *Fundamentalmatrix* \mathbf{F} genannt, welche anhand von einem Punkt im Raum und einer zugehörigen epipolaren Geraden bestimmt werden kann. Die Fundamentalmatrix gibt also die projektive Abbildung von Punkten auf Geraden wieder (vgl. [2], S. 222). Um die Fundamentalmatrix zu erhalten, sind erst zwei grundlegende Schritte durchzuführen, damit eine Abbildung aus einem Bild \mathbf{x}' bzw. \mathbf{x}'' auf die zugehörige epipolare Gerade erreicht wird. Es ist das gegebene Bild von einem Punkt \mathbf{X} dem anderen Bild zuzuordnen, um dann die Verbindungsgerade des zugeordneten Bildes und des entsprechenden Epipols auf der selben Bildebene zu erzeugen.

Für die Abbildung des Punktes \mathbf{X} und die Zuordnung seiner Bilder \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' beschreiben Hartley und Zisserman [2] folgendes Verfahren, welches laut den Autoren auch als die Übertragung durch die Ebene δ bezeichnet wird. Es wird eine Ebene δ vorausgesetzt, welche nicht die beiden Zentren enthält. Ausgehend vom Zentrum \mathbf{O}_1 wird nun ein Projektionsstrahl durch das gegebene Bild \mathbf{x}' in π_1 gelegt, welcher sich mit der Ebene δ schneidet. Dieser Schnittpunkt \mathbf{X} wird anschließend auf die zweite Bildebene π_2 aus dem zweiten Zentrum \mathbf{O}_2 abgebildet (siehe Abbildung 2.9). Da die Menge aller Bilder \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' zueinander projektiv äquivalent sind, existiert eine sogenannte *Homografie* \mathbf{H}_δ .

Homografie \mathbf{H}_δ . Eine Homografie ist eine projektive Transformation von Bildpunkten. Sie ordnet jedem Bild \mathbf{x}' in π_1 das zweite Bild \mathbf{x}'' in π_2 durch die Gleichung

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_\delta \mathbf{x}' \quad (2.5)$$

zu.

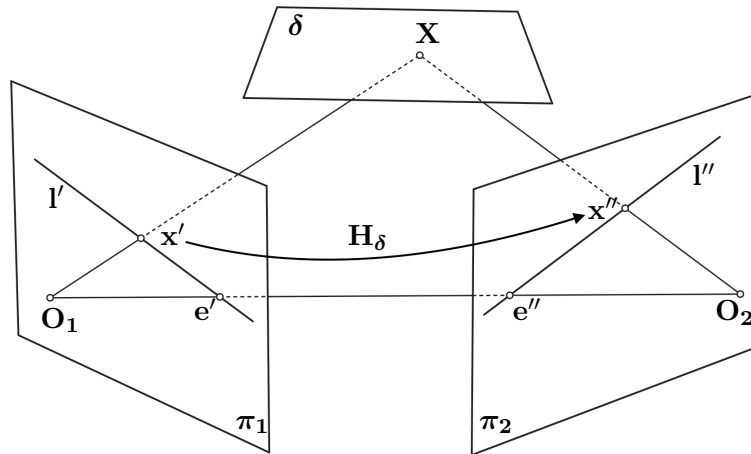


Abbildung 2.9: Herleitung der Fundamentalmatrix \mathbf{F} (in Anlehnung an [2])

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Die Gleichung $\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_\delta \mathbf{x}'$ beinhaltet homogene Koordinaten, wobei die Homografie \mathbf{H}_δ durch folgende 3×3 - Matrix dargestellt wird:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die homogenen Koordinaten eines Bildpunktes

$$\mathbf{x}' = (x_1' : x_2' : x_3')$$

sollen Punkte der Anschauungsebene der reellen projektiven Ebene die Gleichung $x_3' = 1$ erfüllen. Dadurch wird der Punkt $\mathbf{x}' = (x_1', x_2')$ mit inhomogenen Koordinaten der Bildebene π_1 dem Punkt mit homogenen Koordinaten $(x_1' : x_2' : 1)$ zugeordnet. Somit gilt die Umkehrung:

$$(x_1' : x_2' : x_3') \rightarrow \left(\frac{x_1'}{x_3'}, \frac{x_2'}{x_3'} \right) \quad \text{mit} \quad x_3' = 1.$$

Die Matrix \mathbf{H}_δ hat den Freiheitsgrad 8, weshalb mindestens vier korrespondierende Punktpaare für die Bestimmung notwendig sind. Denn je ein korrespondierendes Punktpaar besitzt den Freiheitsgrad 2 und beschränkt dadurch den Freiheitsgrad der Homografie.

Man kann die Gleichung (2.5) so umformen, dass man die Form

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = 0 \tag{2.6}$$

bekommt, wobei jede Korrespondenz eines Punktpaares zwei Zeilen für die 8×9 - Matrix \mathbf{A} liefert

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -x_1' & -x_2' & -1 & 0 & 0 & 0 & x_1''x_1' & x_1''x_2' & x_1'' \\ 0 & 0 & 0 & -x_1' & -x_2' & -1 & x_2''x_1' & x_2''x_2' & x_2'' \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{h} = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32} \ h_{33})^T$$

ist. Es sind bei gegebenen vier korrespondierenden Punktpaaren in (2.6) acht Gleichungen und neun Unbekannte gegeben. Dieses Gleichungssystem kann mithilfe der Singulärwertzerlegung und der Methode der kleinsten Quadrate gelöst und somit \mathbf{H}_δ bestimmt werden.

Der nächste Schritt ist die Bestimmung der epipolaren Gerade \mathbf{l}'' . Es sind die Punkte \mathbf{e}'' und \mathbf{x}'' in der Bildebene π_2 gegeben. In der projektiven Geometrie liegt ein Punkt genau dann auf einer Geraden, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt. Die Punkte \mathbf{e}'' und \mathbf{x}'' erfüllen demnach die Gleichungen

$$\mathbf{e}''^T \mathbf{l}'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}''^T \mathbf{l}'' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Eigenschaft

$$\mathbf{e}'' \perp \mathbf{l}'' \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'' \perp \mathbf{l}''.$$

Mathematisch lässt sich die epipolare Gerade in π_2 durch das Kreuzprodukt

$$\mathbf{l}'' = \mathbf{e}'' \times \mathbf{x}''$$

berechnen (vgl. [2], S. 223). Ein Kreuzprodukt zweier Vektoren lässt sich auch als eine Matrixmultiplikation mithilfe einer schiefsymmetrischen Matrix mit einem Vektor schreiben. Diese Matrix soll mit den Einträgen von \mathbf{e}'' wie folgt entsprechend gewählt werden, sodass nach der Matrixmultiplikation mit dem anderen Vektor \mathbf{x}'' dasselbe Ergebnis wie bei dem Kreuzprodukt zweier Vektoren entsteht:

$$[\mathbf{e}'']_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{e}'']_{\times}$ hat Rang 2 und stellt eine schiefsymmetrische Matrix des Vektors des Epipols

$$\mathbf{e}'' = (e_1, e_2, e_3)^T$$

dar. Der Rang 2 kann schnell nachgewiesen werden, da

$$[\mathbf{e}'']_{\times} \cdot \mathbf{e}'' = 0$$

ist und $[\mathbf{e}'']_{\times}$ somit keinen vollen Rang hat. Außerdem spannen \mathbf{e}'' und \mathbf{e}'' keine Fläche auf, weshalb das Kreuzprodukt sowie der Betrag des Kreuzprodukts gleich 0 ist. Die Gerade \mathbf{l}'' kann daher auch als das Produkt

$$\mathbf{l}'' = [\mathbf{e}'']_{\times} \mathbf{x}''$$

beschrieben werden.

Auch die Bilder lassen sich anders darstellen, beispielsweise kann das Bild \mathbf{x}'' mithilfe der Homografie durch $\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_{\delta} \mathbf{x}'$ umschrieben werden. Daher lässt sich für die Fundamentalmatrix Nachstehendes folgern:

$$\mathbf{l}'' = [\mathbf{e}'']_{\times} \mathbf{H}_{\delta} \mathbf{x}' = \mathbf{F} \mathbf{x}'.$$

Aus der Gleichung ist erkennbar, dass für die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}'']_{\times} \mathbf{H}_{\delta}$$

gilt. Zudem besitzt sie den Rang 2, da die schiefsymmetrische Matrix $[\mathbf{e}'']_{\times}$ den Rang 2 und \mathbf{H}_{δ} den Rang 3 hat (vgl. [2], S. 223). Der Rang 2 von \mathbf{F} ergibt sich durch die repräsentierte Abbildung, die einen zweidimensionalen Raum auf einen eindimensionalen Raum projiziert.

Algebraische Bestimmung von \mathbf{F}

Die Fundamentalmatrix lässt sich nicht nur geometrisch sondern auch algebraisch bestimmen. Gegeben sind die beiden Zentren \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 , die zugehörigen Projektionsmatrizen \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 (Projektionsmatrizen werden auf Seite 43 im Abschnitt „Bestimmung der Zentren durch \mathbf{F} “ näher behandelt) sowie das erste Bild \mathbf{x}' des Punktes \mathbf{X} . Die allgemeine Form der Projektionsmatrizen ist in (2.13) gegeben. Durch das Lösen der Gleichung

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{X} = \mathbf{x}'$$

erreicht man den Projektionsstrahl durch \mathbf{x}' ausgehend von \mathbf{O}_1 und das Resultat ist die einparametrische Familie in der Form

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{p}_1^+ \mathbf{x}' + \lambda \mathbf{C}. \quad (2.7)$$

Dabei stellt \mathbf{p}_1^+ die Pseudoinverse der Projektionsmatrix des Zentrums \mathbf{O}_1 dar und erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^+ = \mathbf{I}.$$

Die Pseudoinverse \mathbf{p}_1^+ ist eine sogenannte vermeintliche Inverse der nicht quadratischen Projektionsmatrix \mathbf{p}_1 (die bekanntlich keine Inverse \mathbf{p}_1^{-1} besitzt), mit welcher man die Umkehrabbildung der ursprünglichen Abbildung durch die Projektionsmatrix \mathbf{p}_1 erhält. Weiters ist \mathbf{C} ein Vektor mit den Koordinaten des Zentrums \mathbf{O}_1 , sodass

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

erfüllt ist. Anhand der Gleichung (2.7) können zwei Punkte auf dem Projektionsstrahl festgelegt werden, nämlich für $\lambda = 0$ der Punkt

$$\mathbf{p}_1^+ \mathbf{x}'$$

und für $\lambda = \infty$ der Punkt \mathbf{C} . Weiters werden diese Punkte von dem zweiten Zentrum \mathbf{O}_2 auf die zweite Bildebene abgebildet, wodurch sich die Punkte

$$\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^+ \mathbf{x}' \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 \mathbf{C}$$

ergeben. Der Punkt $\mathbf{p}_2 \mathbf{C}$ ist zugleich der Epipol \mathbf{e}'' in der zweiten Bildebene. Werden die beiden erhaltenen Punkte verbunden, bekommt man eine epipolare Gerade, die wie folgt definiert wird (vgl. [2], S. 224):

$$\mathbf{l}'' = (\mathbf{p}_2 \mathbf{C}) \times (\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^+ \mathbf{x}') = [\mathbf{e}'']_{\times} (\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^+ \mathbf{x}') = \mathbf{F} \mathbf{x}'. \quad (2.8)$$

Aus der Gleichung kann letztendlich die Fundamentalmatrix \mathbf{F} gewonnen werden. Vergleicht man an dieser Stelle die zuvor geometrisch erhaltene Form der Fundamentalmatrix mit dieser algebraisch gewonnenen Form und setzt diese gleich, dann erkennt man, dass

$$\mathbf{H}_\delta = \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1^+$$

sein muss.

Die Fundamentalmatrix erfüllt außerdem eine wichtige Eigenschaft, die für zwei entsprechenden Bildpunkte \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' gilt:

$$\mathbf{x}''^T \mathbf{F} \mathbf{x}' = 0. \quad (2.9)$$

Diese Eigenschaft kann leicht gezeigt werden, denn sobald es sich bei den Punkten \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' um korrespondierende Punkte handelt, dann muss \mathbf{x}'' entsprechend auf der epipolaren Gerade \mathbf{l}'' liegen. Aus (2.8) folgt:

$$\mathbf{x}''^T \mathbf{F} \mathbf{x}' = \mathbf{x}''^T \mathbf{l}'' = 0.$$

Falls umgekehrt die Punkte \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' die obige Gleichung erfüllen, dann folgt, dass die Projektionsstrahlen dieser Punkte aus den entsprechenden Zentren koplanar sind (vgl. [2], S. 225). Diese Folgerung ist außerdem für die Korrespondenz von Bildpunkten wichtig. Auf diese Weise lässt sich die Fundamentalmatrix \mathbf{F} nicht wie davor durch die beiden Zentren, sondern nun auch nur durch entsprechende Bildpunkte ausdrücken.

Multipliziert man die Gleichung (2.9) aus, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'' x_1' & x_1'' x_2' & x_1'' & x_2'' x_1' & x_2'' x_2' & x_2'' & x_1' & x_2' & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f} = 0$$

mit

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

Nutzt man für die Bestimmung von \mathbf{F} mehrere korrespondierende Punkte, so erhält man ein Gleichungssystem der Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{f} = 0$. Für die Lösung des Gleichungssystem wird die Singulärwertzerlegung und die Methode der kleinsten Quadrate angewendet.

Weitere wichtige Eigenschaften, die für die Fundamentalmatrix gelten, sind:

- **Die Transponierte:** Gegeben ist die Fundamentalmatrix \mathbf{F} von dem Paar $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ der Projektionsmatrizen der Zentren. Durch Transponieren von (2.9) bekommt man

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{F}^T \mathbf{x}'' = 0$$

und ihre Transponierte \mathbf{F}^T ist die Fundamentalmatrix des Paares $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ in verkehrter Reihenfolge.

- **Epipolare Geraden:** Die epipolare Gerade für einen Bildpunkt \mathbf{x}' in der ersten Bildebene ist durch $\mathbf{l}'' = \mathbf{F} \mathbf{x}'$ gegeben. Für einen Bildpunkt \mathbf{x}'' in der zweiten Bildebene gilt für die dazugehörige epipolare Gerade $\mathbf{l}' = \mathbf{F}^T \mathbf{x}''$.

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

- **Der Epipol:** Jede epipolare Gerade $l'' = \mathbf{F}\mathbf{x}'$ für einen beliebigen Bildpunkt \mathbf{x}' enthält den Epipol \mathbf{e}'' , welcher wiederum die Gleichung

$$\mathbf{e}''^T(\mathbf{F}\mathbf{x}') = (\mathbf{e}''^T\mathbf{F})\mathbf{x}' = 0$$

für alle \mathbf{x}' erfüllt. Aus der Gleichung folgt $\mathbf{e}''^T\mathbf{F} = 0$.

- **Freiheitsgrad von \mathbf{F} :** Der Freiheitsgrad einer homogenen 3×3 - Matrix beträgt 8, da die Fundamentalmatrix aber der Bedingung $\det(\mathbf{F}) = 0$ unterliegt, wird ein Freiheitsgrad abgezogen. Dementsprechend besitzt die Fundamentalmatrix Freiheitsgrad 7.
- **\mathbf{F} als eine Korrelation:** \mathbf{F} repräsentiert eine Transformation, welche Punkte auf Geraden abbildet, demnach korrespondiert ein Bildpunkt \mathbf{x}' in der ersten Bildebene mit der Geraden

$$l'' = \mathbf{F}\mathbf{x}'$$

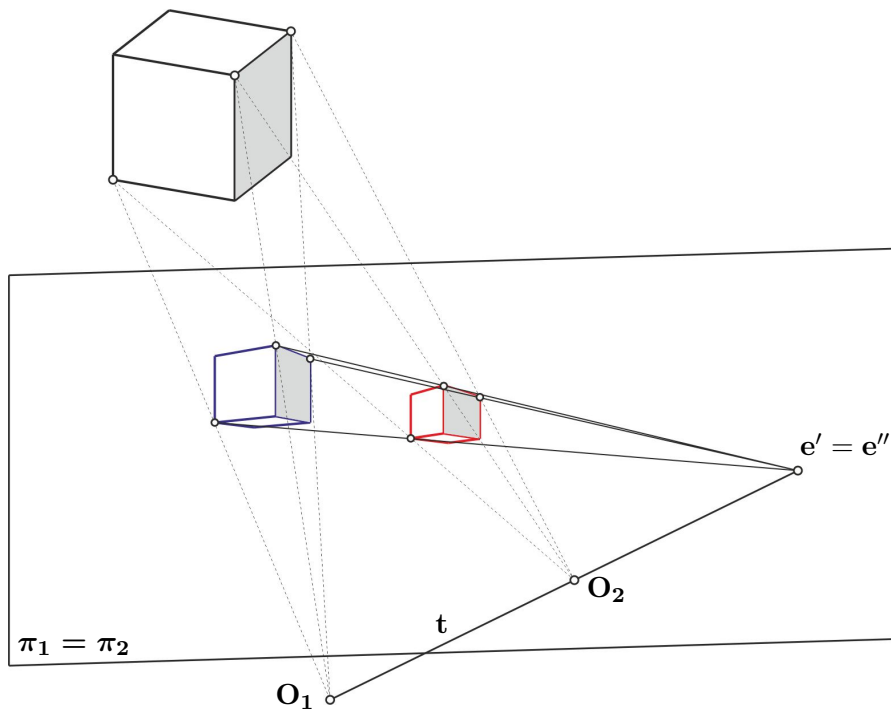
in der zweiten Bildebene, also der epipolaren Gerade des Punktes \mathbf{x}' . Weiters existiert keine inverse Abbildung und die Fundamentalmatrix hat keinen vollen Rang. Falls nämlich die epipolaren Geraden l' , l'' entsprechend korrespondieren, wird jeder Bildpunkt \mathbf{x}' auf l' auf dieselbe Gerade l'' abgebildet (vgl. [2], S. 226 f.). Daher ist \mathbf{F} nicht bijektiv und dementsprechend nicht invertierbar.

Korrespondierende epipolare Geraden sind einander perspektiv zugeordnet, weshalb auch eine Homografie zwischen den einparametrischen Familien der epipolaren Geraden existiert. Betrachtet man je zwei korrespondierende epipolare Geraden, erkennt man leicht, dass sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Diese Schnittpunkte liegen jeweils sowohl in der Bildebene π_1 , in der Bildebene π_2 und in der epipolaren Ebene. Alle Schnittpunkte von korrespondierenden epipolaren Geraden liegen daher auf der Schnittgeraden der beiden Bildebenen und die Schnittgerade entspricht der Perspektivitätsachse. Diese Geradenbüschel entsprechen eindimensionalen projektiven Räumen und die Homografie, welche eine Gerade durch den Epipol \mathbf{e}' auf eine Gerade durch den anderen Epipol \mathbf{e}'' abbildet, ist projektiv.

Fundamentalmatrix \mathbf{F} bei verschiedenen Bewegungen

In diesem Abschnitt wird die Gewinnung der Fundamentalmatrix \mathbf{F} bei Anwendung von spezifischen Bewegungen der Zentren untersucht, konkret die *reine Translation* und die *reine planare Bewegung*. Bei der reinen Translation handelt es sich um eine lineare Bewegung ohne Rotation während die reine planare Bewegung eine Rotation enthält, dessen Rotationsachse orthogonal zur Translationsrichtung ist. Im Folgenden repräsentiert \mathbf{t} die Bewegungsrichtung und \mathbf{a} die Rotationsachse.

Für die **reine Translation** gibt es zum einen den Fall, bei dem die Zentren durch eine Verschiebung \mathbf{t} voneinander verschieden sind und die Bildebenen in einer gemeinsamen

Abbildung 2.10: Reine Translation - Verschiebung der Kamerazentren entlang \mathbf{t}

Ebene liegen. Dadurch liegen die beiden Bilder aus den jeweiligen Zentren ebenso in einer gemeinsamen Ebene. Ist die Verschiebung \mathbf{t} nicht parallel zur Bildebene, so ist der Schnittpunkt der Grundlinie mit der Bildebene gleich dem gemeinsamen Epipol beider Bilder. In der Abbildung 2.10 ist auch zu erkennen, dass die epipolaren Geraden beider Bilder übereinstimmen und sich die Bildpunkte bei Verschiebung durch \mathbf{t} auf den entsprechenden epipolaren Geraden bewegen. Verläuft die Verschiebung jedoch parallel zur Bildebene, so entspricht der Schnittpunkt der Grundlinie mit der Bildebenen dem Fernpunkt der Grundlinie. In der Bildebene ist der gemeinsame Epipol daher ein Fluchtpunkt.

Im anderen Fall ist das Zentrum der reinen Translation unterworfen und die Verschiebung \mathbf{t} erfolgt normal zur Bildebene. Daher liegen die beiden Bildebenen hintereinander. Hierbei bewegen sich bei Betrachtung der beiden Bildfelder die Bildpunkte entlang der epipolaren Gerade ausgehend vom fixierten Epipol (siehe Abbildung 2.11). Bei Überlappung der Bilder 2.11b) und 2.11c) erkennt man, dass die epipolaren Geraden zusammenfallen und einzelne Bildpunkte sich entlang der Geraden bewegen. Genauso fallen die beiden Epipole zusammen und kann als ein fixierter Epipol mit den selben Bildkoordinaten in den Bildebenen gesehen werden.

Wird bei einem von zwei beliebigen Zentren eine Rotation angewendet, dann spricht man von der *allgemeinen Bewegung*. Die Rotation soll so erfolgen, dass das rotierte Zen-

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

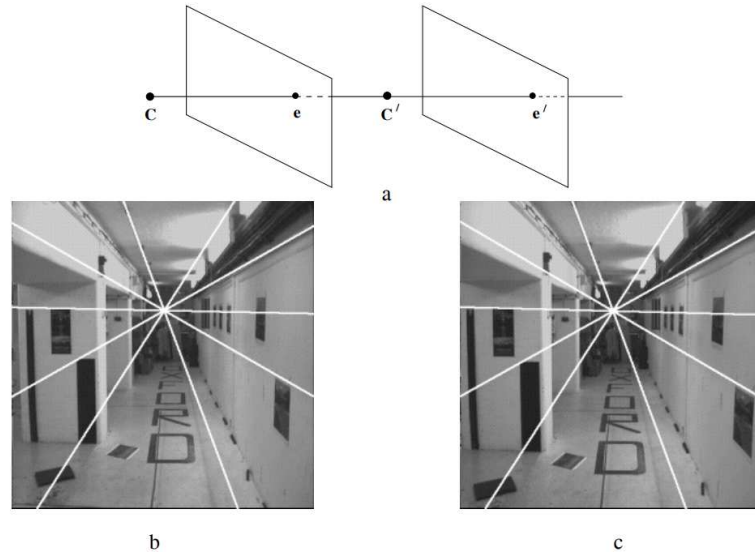


Abbildung 2.11: Reine Translation mit fixiertem Epipol [2]

trum mit der Ausrichtung des anderen Zentrums entsprechend übereinstimmt. Somit wird nach der Rotation eine reine Translation wiedergegeben. Eine genauere Darstellung einer solchen Rotation von einem der Zentren ist in Abbildung 2.12 zu finden. Diese Rotation kann durch eine projektive Transformation \mathbf{H} erfolgen (vgl. [2], S. 230).

Nach der Drehung hängen die beiden Zentren nur durch eine reine Translation zusammen. Zur neu ermittelten Fundamentalmatrix, welche der Abbildung des gedrehten ersten Bildes auf das zweite Bild entspricht, ist anzumerken, dass

$$\tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{e}'']_{\times}$$

mit dem veränderten Bildpunkt

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{H}\mathbf{x}'$$

in der ersten Bildebene die Gleichung

$$\mathbf{x}''\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}' = 0$$

erfüllt. Berücksichtigt man nun den Zusammenhang des ursprünglich ersten Bildes mit dem zweiten Bild, dann gilt für die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times}\mathbf{H}.$$

Die Fundamentalmatrix bei einer allgemeinen Bewegung hat stets vollen Rang.

Bei der reinen planaren Bewegung existiert eine festgelegte Rotation mit der Rotationsachse \mathbf{a} . Die Bedingung, dass die Rotationsachse orthogonal zur Translationsrichtung ist, muss allerdings erfüllt sein. Der Freiheitsgrad von \mathbf{F} bei dieser Bewegung beträgt diesmal 6. In diesem Fall wird der symmetrische Teil \mathbf{F}_s der Fundamentalmatrix \mathbf{F} analysiert, denn es stellt sich heraus, dass dessen Rang gleich 2 ist und somit nicht vollen Rang besitzt (vgl. [2], S. 231). Weiters gilt: $\det \mathbf{F}_s = 0$. Damit wird der Freiheitsgrad von \mathbf{F} von ursprünglich 7 auf 6 reduziert. Für die weitere Untersuchung dieser spezifischen Bewegung sind zuerst noch einige Begriffe zu erklären.

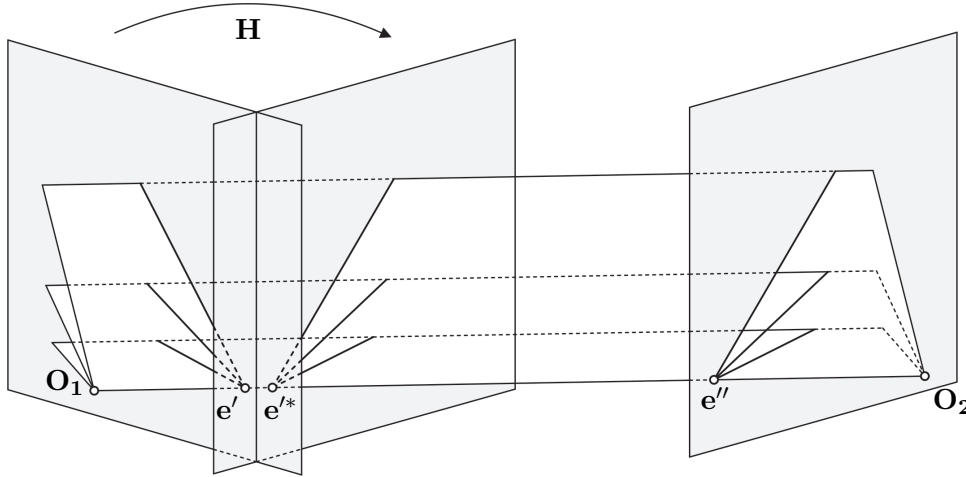


Abbildung 2.12: Rotation bei allgemeiner Bewegung (in Anlehnung an [2])

Geometrische Darstellung der Fundamentalmatrix \mathbf{F}

Die bisher analytisch ermittelte Fundamentalmatrix kann auch geometrisch wiedergegeben werden. Dazu wird die Fundamentalmatrix in den symmetrischen \mathbf{F}_s und schiefsymmetrischen Teil \mathbf{F}_a aufgespalten. Die Definition dieser Teile erfolgt durch

$$\mathbf{F}_s = \frac{(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T)}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_a = \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)}{2}$$

(vgl. [2], S. 231). Die Summe dieser beiden Teile ergibt die gesamte Fundamentalmatrix \mathbf{F} . Sowohl der symmetrische als auch der schiefsymmetrische Teil der Fundamentalmatrix haben laut Hartley und Zisserman [2] bestimmte Eigenschaften, die im Folgenden aufgezählt und auch in der Abbildung 2.13 gezeigt werden.

- **Symmetrische Matrix \mathbf{F}_s :** Eine Matrix mit Rang 3 und dem Freiheitsgrad 5 wird durch einen Kegelschnitt dargestellt, der aus der sogenannten *Steiner-Erzeugung eines Kegelschnitts* bzw. *Satz von Steiner* hervorgeht. Nach dem Satz von Steiner erzeugen bekanntlich die Schnittpunkte entsprechend zugeordneter Geraden von

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

zwei Geradenbüscheln, die durch eine Homografie zusammengehören, einen Kegelschnitt. Das bedeutet, dass die symmetrische Matrix solch einem Kegelschnitt entspricht.

- **Schiefsymmetrische Matrix \mathbf{F}_a** : Diese Matrix besitzt den Freiheitsgrad 2 und kann auch als

$$\mathbf{F}_a = [\mathbf{x}_a]_{\times}$$

beschrieben werden. Dabei ist der Punkt \mathbf{x}_a die geometrische Darstellung von \mathbf{F}_a und entspricht den Koordinaten der Matrix.

Die Epipole liegen, wie in Abbildung 2.13 dargestellt, auf dem Kegelschnitt \mathbf{F}_s und es gilt daher

$$\mathbf{e}'^T \mathbf{F}_s \mathbf{e}' = 0,$$

wobei auch für die schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{e}'^T \mathbf{F}_a \mathbf{e}' = 0$$

gilt. Geht man davon aus, dass zu Beginn $\mathbf{F}\mathbf{e}' = 0$ eintritt, so gilt auch $\mathbf{e}'^T \mathbf{F}\mathbf{e}'$. Aus der letzten Gleichung kann \mathbf{F} durch die Aufspaltung in ihre zwei Teile ersetzt werden, sodass

$$\mathbf{e}'^T \mathbf{F}_s \mathbf{e}' + \mathbf{e}'^T \mathbf{F}_a \mathbf{e}' = 0$$

letztendlich auch gilt und die obigen Bedingungen gezeigt werden.

In der erwähnten Abbildung erkennt man auch den Zusammenhang zwischen dem symmetrischen als auch schiefsymmetrischen Teil der Fundamentalmatrix. Die Polare \mathbf{l}_a des Punktes \mathbf{x}_a verläuft in der Abbildung durch die Epipole \mathbf{e}' , \mathbf{e}'' . Diese Eigenschaft ergibt sich wie folgt:

Die schiefsymmetrische 3×3 - Matrix \mathbf{F}_a kann auch als schiefsymmetrische Kreuzproduktmatrix

$$\mathbf{F}_a = \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)}{2} = [\mathbf{x}_a]_{\times}$$

dargestellt werden. Weiters soll

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{x}_a = \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)}{2} \cdot \mathbf{x}_a = 0 \quad (2.10)$$

gelten. Dabei entspricht der Vektor \mathbf{x}_a jenem Vektor, der $[\mathbf{x}_a]_{\times}$ darstellt. Es gilt somit die Gleichung

$$[\mathbf{x}_a]_{\times} \cdot \mathbf{x}_a = 0.$$

Betrachtet man nun die Matrixmultiplikation $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_a$, so folgt durch Einsetzen von (2.10) folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_a \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{x}_a \\ \Leftrightarrow & \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{x}_a = \mathbf{l}_a \end{aligned} \quad (2.11)$$

Das Ergebnis \mathbf{l}_a ist die Polare des Vektors \mathbf{x}_a . Die Epipole liegen auf dieser Polaren zum Pol \mathbf{x}_a bzgl. des Kegelschnitts \mathbf{F}_s , dh. sie erfüllen die Gleichung

$$\mathbf{e}''^T \cdot \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{x}_a = 0.$$

Das gilt, weil nach (2.11) ist

$$\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{x}_a = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_a$$

eine epipolare Gerade \mathbf{l}'' durch \mathbf{e}'' . Somit folgt für das Produkt der epipolaren Gerade und des Epipols

$$\mathbf{e}''^T \cdot \mathbf{l}'' = \mathbf{e}''^T \cdot \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{x}_a = 0.$$

Analog gilt das auch für \mathbf{e}' .

Bezieht man sich nun wieder auf den bereits bekanntem Freiheitsgrad von \mathbf{F} , kann dieser laut Hartley und Zisserman [2] mithilfe der geometrischen Darstellung gut nachvollzogen werden. Denn für den Kegelschnitt \mathbf{F}_s herrscht der Freiheitsgrad 5 und für je einen Punkt, der auf dem Kegelschnitt liegt, wird ein weiterer Freiheitsgrad hinzugefügt. Demzufolge ergibt sich der Freiheitsgrad 7 für die Fundamentalmatrix. Der Kegelschnitt \mathbf{F}_s , der Punkt \mathbf{x}_a sowie die Epipole auf \mathbf{F}_s sind genau dann eindeutig bestimmt, wenn die Fundamentalmatrix \mathbf{F} vorgegeben ist. Die Umkehrung, also bei gegebenem \mathbf{F}_s und \mathbf{x}_a , definiert allerdings die Fundamentalmatrix nicht eindeutig. Der Grund dafür ist die fehlende Eindeutigkeit der Epipole, denn die Erzeugung durch die Polare \mathbf{l}_a von \mathbf{x}_a (siehe Abbildung 2.13) bestimmt noch nicht, welcher der beiden Punkte \mathbf{e}' bzw. \mathbf{e}'' ist.

Bestimmung der Zentren durch \mathbf{F}

Eine weitere Eigenschaft der Fundamentalmatrix ist, dass durch diese gegebene Matrix die Matrizen der beiden Zentren ableitbar sind. Durch die projektive Beziehung der Bildfelder sind nur die projektiven Koordinaten relevant, d.h. euklidische Maße wie Winkel zwischen Geraden und Strahlen sind nicht von Bedeutung und somit sind diese Beziehungen projektiv invariant (vgl. [2], S. 234). Auch die Fundamentalmatrix hängt von den projektiven Eigenschaften der beiden Zentren ab, wobei die Matrix nicht durch projektive Transformationen \mathbf{H} des Raumes, wie beispielsweise eine Drehung der Weltkoordinaten, beeinflusst wird. Die Matrizen der Zentren hängen allerdings sowohl von

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

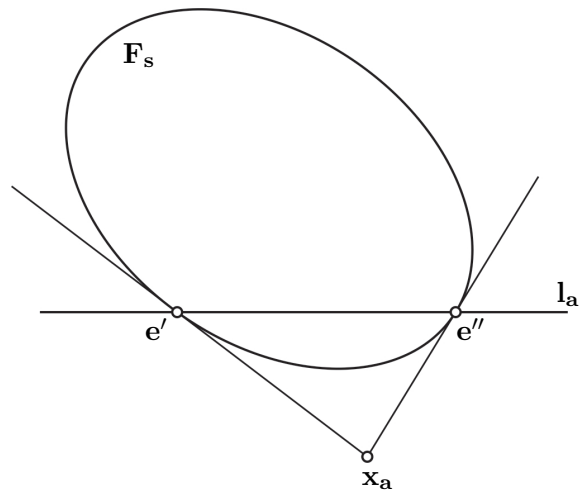


Abbildung 2.13: Symmetrischer und schiefssymmetrischer Teil der Fundamentalmatrix

der Wahl der Weltkoordinaten als auch von den Bildkoordinaten ab. Genauer gesagt entspricht \mathbf{H} einer 4×4 -Matrix für den dreidimensionalen Raum und eine Anwendung von \mathbf{H} auf den Raum sowie auf die Zentren lassen die Fundamentalmatrix \mathbf{F} unverändert. Demzufolge lässt sich zwar die Fundamentalmatrix durch die beiden Zentren eindeutig bestimmen, jedoch gilt nicht die Umkehrung.

Die Abbildung eines Punktes \mathbf{X} im Raum auf eine gegebene Bildebene π durch eine Zentralprojektion in homogenen Koordinaten kann als eine Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fx \\ fy \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. Der Koordinatenursprung liegt hierbei im Zentrum und die z-Achse ist normal auf die Bildebene ausgerichtet. Dabei entspricht die Konstante f den Abstand vom Koordinatenursprung zur Bildebene π entlang der z-Achse (siehe Abbildung 2.14).

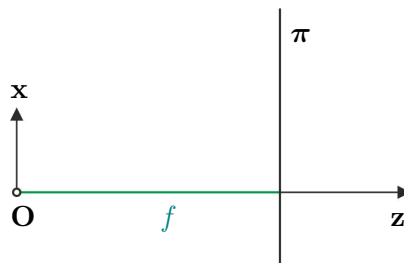


Abbildung 2.14: Zentralprojektion - Abstand f zur Bildebene

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(f, f, 1) [\mathbf{I} \mid 0] = \mathbf{p}$$

wird auch Projektionsmatrix genannt und entspricht der linearen Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{X} \quad (2.12)$$

zwischen den homogenen Koordinaten des Punktes \mathbf{X} und seines Bildpunktes \mathbf{x} . In diesem Fall liegt der Koordinatenursprung des ebenen Koordinatensystems der Bildebene π im Hauptpunkt. Sollte dies nicht der Fall sein (siehe Abbildung 2.15), dann fügt man die Koordinaten (P_x, P_y) des Hauptpunktes in die Projektionsmatrix ein und erhält

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} f & 0 & P_x & 0 \\ 1 & f & P_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Betrachtet man von \mathbf{p} nur die ersten drei Spalten und blendet die letzte Spalte (Nullvektor) aus, dann erhält man eine 3×3 - Matrix, die den Namen *Kalibrierungsmatrix* \mathbf{K} trägt. Man kann die Gleichung (2.12) auch durch die Kalibrierungsmatrix ausdrücken und erhält

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{K} [\mathbf{I} \mid 0] \mathbf{X}.$$

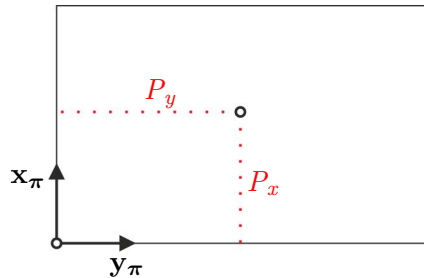


Abbildung 2.15: Koordinatensystem der Bildebene

Die Projektionsmatrix eines Zentrums ist üblicherweise durch ihre *kanonische Form* gegeben. Für eine der Zentren kann immer die Projektionsmatrix $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$ angenommen werden, welche sich aus der dreidimensionalen Einheitsmatrix \mathbf{I} und einem dreidimensionalen Nullvektor zusammensetzt. Diese Annahme kann dadurch bewiesen werden, indem man die Matrix \mathbf{p}_1 in eine nicht singuläre 4×4 -Matrix \mathbf{p}_1^* verändert. Führt man nun die projektive Transformation $\mathbf{H} = \mathbf{p}_1^{*-1}$ ein, dann gilt $\mathbf{p}_1 \mathbf{H} = [\mathbf{I} \mid 0]$ (vgl. [2], S. 235). Die zweite Projektionsmatrix hat dann die Form $\mathbf{p}_2 = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}]$.

Bei der Bestimmung der Projektionsmatrizen für die Zentren ist zu beachten, dass die Lösung mehrdeutig ist. Das bedeutet, dass eine gegebene Fundamentalmatrix \mathbf{F} das Paar

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

von Projektionsmatrizen nicht eindeutig bestimmt, da \mathbf{F} für mehrere solcher Kamera-paare gelten kann. Den zugehörigen Beweis liefern Hartley und Zisserman [2] in ihrem Werk, worauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. Die Autoren erwähnen außerdem, dass die zu \mathbf{F} zugehörigen verschiedenen Kamera-paare durch eine projektive Transformation zusammenhängen, was der Grund für die Mehrdeutigkeit der Lösung ist.

Nun stellt sich die Frage, wie genau die Projektionsmatrix für das zweite Zentrum aussieht. Zuvor wurde die kanonische Form $\mathbf{p}_2 = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}]$ erwähnt, welche im Weiteren noch zur Anwendung kommt. Dazu stellen Hartley und Zisserman [2] folgende Vorgehensweise zur Verfügung. Es wird eine schiefsymmetrische Matrix \mathbf{S} angenommen, sodass für $\tilde{\mathbf{p}}_2 = [\mathbf{S}\mathbf{F} \mid \mathbf{e}'']$ gilt und \mathbf{F} die zugehörigen Fundamentalmatrix für das Paar $(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2)$ ist. $\tilde{\mathbf{p}}_1$ ist identisch mit dem zuvor erwähnten \mathbf{p}_1 . Die schiefsymmetrische Matrix lässt sich wiederum durch $\mathbf{S} = [\mathbf{s}]_{\times}$ beschreiben, wodurch $\tilde{\mathbf{p}}_2 = [\mathbf{s}]_{\times}\mathbf{F} \mid \mathbf{e}''$ mit Rang 3 folgt. Nun kann für \mathbf{s} der Epipol \mathbf{e}'' gewählt werden, sodass die Matrix die Form $\tilde{\mathbf{p}}_2 = [\mathbf{e}'']_{\times}\mathbf{F} \mid \mathbf{e}''$ hat. Weil $[\mathbf{e}'']_{\times}$ eine singuläre Matrix und demzufolge auch das Produkt $[\mathbf{e}'']_{\times}\mathbf{F}$, entspricht $\tilde{\mathbf{p}}_2$ der Projektionsmatrix für ein Zentrum auf π_{∞} (vgl. [2], S. 161). Da sich ein weiteres Paar von Projektionsmatrizen $\hat{\mathbf{p}}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$, $\hat{\mathbf{p}}_2 = [\mathbf{A} + \mathbf{a}\mathbf{v}^T \mid \mathbf{ka}]$ durch \mathbf{H} entsprechend für die gegebene Fundamentalmatrix finden lässt, besitzen die beiden gefundenen Projektionsmatrizenpaare sowie auch das Paar $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$, $\mathbf{p}_2 = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}]$ die selbe gegebene Fundamentalmatrix. Zusammenfassend erfolgt die verallgemeinerte Darstellung von zwei zusammengehörigen Zentren durch (vgl. [2], S. 238):

$$\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0], \quad \mathbf{p}_2 = [\mathbf{e}''_{\times}\mathbf{F} + \mathbf{e}''\mathbf{v}^T \mid \lambda\mathbf{e}'']. \quad (2.13)$$

In den Formeln beschreibt λ einen Skalar $\neq 0$ und \mathbf{v} einen beliebigen dreidimensionalen Vektor.

Die essentielle Matrix \mathbf{E}

Die sogenannte *essentielle Matrix* ist eine spezielle Form der Fundamentalmatrix, welche weniger Freiheitsgrade als \mathbf{F} besitzt, genauer gesagt den Freiheitsgrad 5. Sie wird bei normierten Bildkoordinaten verwendet und ersetzt die Fundamentalmatrix.

In diesem Abschnitt werden normierte Bildkoordinaten verwendet, welche mit $\hat{\mathbf{x}}'$ bzw. $\hat{\mathbf{x}}''$ bezeichnet werden. Für die Projektionsmatrix soll laut Hartley und Zisserman [2] die Form $\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$ verwendet werden, wobei \mathbf{K} eine Kalibrierungsmatrix, \mathbf{t} ein Translationsvektor und \mathbf{R} eine Rotationsmatrix ist. Falls diese Kalibrierungsmatrix bekannt ist, dann kann ein Bildpunkt $\mathbf{x}' = \mathbf{p}_1\mathbf{X}$ durch den normierten Ausdruck $\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}$ ersetzt werden. Es ergibt sich für die *normierten Bildkoordinaten* die Form $\hat{\mathbf{x}}' = [\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]\mathbf{X}$. Somit wird der normierte Bildpunkt eines Punktes im Raum in der Bildebene π_1 repräsentiert, die als Kalibrierungsmatrix die Einheitsmatrix \mathbf{I} besitzt. Die *normierte Projektionsmatrix* hat die Form $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_1 = [\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$, bei der die Kalibrierungsmatrix herausgehoben und dadurch der Einfluss aufgehoben wurde (vgl. [2], S. 238). Demzufolge können die Matrizen $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$, $\mathbf{p}_2 = [\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$ für die Zentren als normiert betrachtet werden. Die

entsprechende essentielle Matrix wird nach Hartley und Zisserman [2] durch

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} = \mathbf{R} [\mathbf{R}^T \mathbf{t}]_{\times}$$

definiert und erfüllt die Gleichung

$$\hat{\mathbf{x}}'' \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}' = 0.$$

Wie bereits erwähnt, ist die essentielle Matrix \mathbf{E} eine Spezialform der bekannten Fundamentalmatrix \mathbf{F} und ihre Verwandtschaft wird durch die Gleichung

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}'^T \mathbf{F} \mathbf{K}$$

beschrieben. Diese Gleichung folgt aus dem Einsetzen der normierten Bildpunkte durch ihre weiter oben erwähnten Definitionen. Eine weitere Eigenschaft der Matrix \mathbf{E} ist, dass die 3×3 -Matrix zwei gleiche Singulärwerte besitzt während der dritte gleich 0 ist (vgl. [2], S. 239). Die Matrix \mathbf{E} lässt sich durch die Singulärwertzerlegung auch als $\mathbf{E} = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{V}^T$ darstellen, wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} orthonormale Matrizen sind.

Bestimmung der Zentren durch \mathbf{E}

Die Matrix \mathbf{E} kann nach den obigen Gleichungen anhand von normierten Bildpunkten oder durch die Fundamentalmatrix \mathbf{F} bestimmt werden. Wie auch zuvor kann für das erste Zentrum $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$ gewählt werden. Für das zweite Zentrum wird an dieser Stelle die essentielle Matrix in die Faktoren \mathbf{S} als schiefsymmetrische Matrix und \mathbf{R} als Rotationsmatrix zerlegt. Nach Hartley und Zisserman [2] ergeben sich zwei Faktorisierungen der Form $\mathbf{E} = \mathbf{S} \mathbf{R}$ mit:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U} \mathbf{W}^T \mathbf{V}^T.$$

Es handelt sich bei \mathbf{U} und \mathbf{V} um orthogonale Matrizen, \mathbf{W} und \mathbf{Z} sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiters erwähnen die Autoren, dass diese Faktorisierung für die maßstäbliche Bestimmung von \mathbf{t} von der Matrix \mathbf{p}_2 anhand von $\mathbf{S} = [\mathbf{t}]_{\times}$ notwendig ist und es vier mögliche Lösungen für die Projektionsmatrix \mathbf{p}_2 gibt (vgl. [2], S. 240):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 = & [\mathbf{U} \mathbf{W} \quad \mathbf{V}^T \mid \mathbf{u}_3] \quad \text{oder} \quad [\mathbf{U} \mathbf{W} \quad \mathbf{V}^T \mid -\mathbf{u}_3] \quad \text{oder} \\ & [\mathbf{U} \mathbf{W}^T \quad \mathbf{V}^T \mid \mathbf{u}_3] \quad \text{oder} \quad [\mathbf{U} \mathbf{W}^T \quad \mathbf{V}^T \mid -\mathbf{u}_3]. \end{aligned}$$

Man erhält \mathbf{u}_3 als Folgerung von $\mathbf{S} \mathbf{t} = 0$, da für $\mathbf{t} = \mathbf{U}(0, 0, 1)^T = \mathbf{u}_3$ gilt.

Geometrische Interpretation von den vier möglichen Lösungen für \mathbf{p}_2

Die vier erhaltenen Lösungen für die zweite Projektionsmatrix unterscheiden sich zum Einen durch das Vorzeichen des Translationsvektors \mathbf{t} vom ersten zum zweiten Zentrum, zum Anderen durch die Benutzung der Transponierten von \mathbf{W} . Der erste Unterschied ist in Abbildung 2.16 gut zu erkennen, da die Zentren auf der Grundlinie entsprechend vertauscht sind. Der zweite Unterschied ist eine Drehung um 180° um die Grundlinie, denn die beiden Lösungen besitzen den folgenden Zusammenhang (vgl. [2], S. 240):

$$[\mathbf{U}\mathbf{W} \ \mathbf{V}^T \mid \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{W}^T\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T & \\ & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{U}\mathbf{W}^T \ \mathbf{V}^T \mid \mathbf{u}_3]$$

Der Ausdruck $\mathbf{V}\mathbf{W}^T\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\text{diag}(-1, -1, 1)\mathbf{V}^T$ gibt die genannte Drehung um die Grundlinie an, die in Abbildung 2.16 an dem rekonstruierten Punkt zu erkennen ist. Aus der Abbildung ebenfalls zu sehen ist, dass nur in einem Fall der rekonstruierte Punkt vor beiden Zentren liegt. Das kann die Bestimmung der vorliegenden Lösung erleichtern bzw. dazu führen, diesen Fall für die zweite Projektionsmatrix entsprechend zu wählen.

Grundschritte zur Rekonstruktion der Zentren sowie des betrachteten Raumobjekts

Zuvor wurde erklärt, wie man die Fundamentalmatrix bei gegebenen korrespondierenden Bildpunkten herleitet und auch wie man die beiden Zentren durch die Fundamentalmatrix ermittelt. Diese Schritte werden für die Rekonstruktion benötigt, um anschließend ausgehend von den Bildpunkten den zugehörigen Punkt zu erlangen, sodass für jeden der Bildpunkte $\mathbf{x}' = \mathbf{p}_1\mathbf{X}$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{p}_2\mathbf{X}$ gilt. Es gibt allerdings unterschiedliche Ansätze für eine

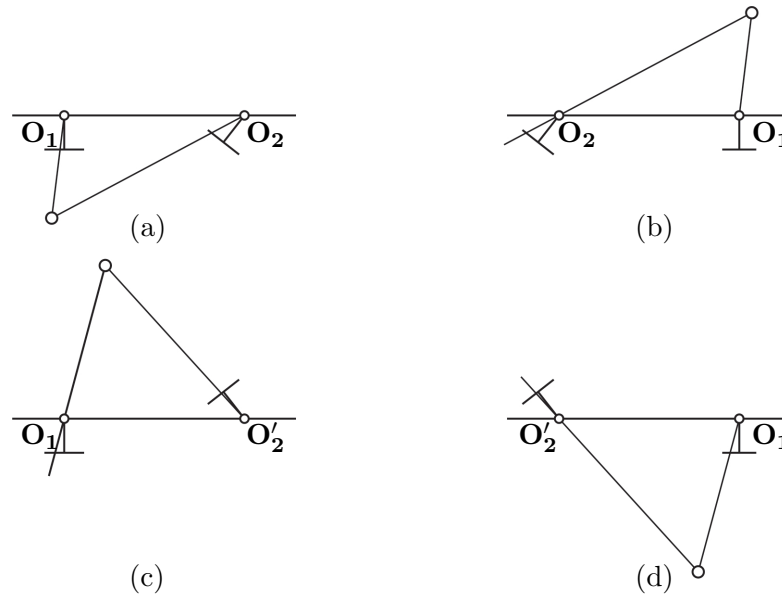


Abbildung 2.16: Vier mögliche Lösungen für \mathbf{p}_2

erfolgreiche Rekonstruktion, sodass beispielsweise die essentielle Matrix bei gegebenen Projektionsmatrizen der Zentren anstatt der Fundamentalmatrix ermittelt wird. Es wird für die Rekonstruktion eine ausreichende Anzahl von korrespondierenden Bildpunkten zweier Bildfelder vorausgesetzt. Die Rekonstruktion kann bei einer unzureichend kleinen Anzahl von Bildpunkten nicht durchgeführt werden, daher ist umso besser, je mehr solcher Bildpunkte gegeben sind.

Die Grundschrirte für eine Rekonstruktion der Punkte im Raum bei gegebenen Bildpunkten und somit des Raumobjekts sind:

- **Ermittlung der Fundamentalmatrix \mathbf{F} :** Da die Bildpunkte \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' gegeben sind, können lineare Gleichungssysteme durch die Eigenschaft $\mathbf{x}''^T \mathbf{F} \mathbf{x}' = 0$ der Fundamentalmatrix gewonnen werden. Sobald acht Bildpunktpaare gegeben sind, erhält man die Einträge der gesuchten Fundamentalmatrix (maßstabsgetreu). Sind nur sieben Paare gegeben, dann erhält man eine nicht lineare Lösung und bei mehr als acht Paaren bekommt man die Lösung der kleinsten Quadrate.
- **Ermittlung der Projektionsmatrizen beider Zentren \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 :** Durch Einsetzen in die Gleichung $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} \mid 0]$ und $\mathbf{p}_2 = [[\mathbf{e}'' \times] \mathbf{F} \mid \mathbf{e}'']$, welche bereits zuvor schon erwähnt wurden, können die Projektionsmatrizen erzeugt werden.
- **Triangulierung:** Die Eigenschaft $\mathbf{x}''^T \mathbf{F} \mathbf{x}' = 0$ bedeutet geometrisch, dass der Bildpunkt \mathbf{x}'' auf der epipolaren Gerade $\mathbf{F} \mathbf{x}'$ liegt. Da die Projektionsgeraden durch die beiden Bildpunkte in einer epipolaren Ebene liegen, kann gefolgert werden, dass die epipolare Ebene durch beide Zentren verläuft. Die epipolaren Geraden besitzen in der epipolaren Ebene außerdem einen Schnittpunkt \mathbf{X} , welcher der gesuchte Punkt der beiden Bildpunkte ist. Demnach ist von einer Triangulierung die Rede, da die Projektionsgeraden und die Grundlinie (Verbindungsgeraden der beiden Zentren) ein Dreieck begrenzen. (vgl. [2], S.245 f.).

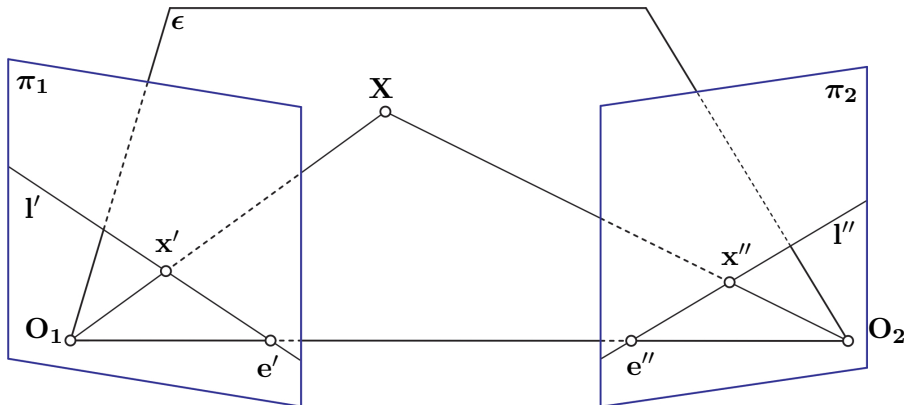


Abbildung 2.17: Triangulierung zur Ermittlung der Punkte im Raum (in Anlehnung an [2])

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Es gibt allerdings Punkte im Raum, welche sich nicht durch ihre Bilder bestimmen lassen. Diese Punkte befinden sich auf der Grundlinie, die beide Zentren miteinander verbindet. Die Projektionsstrahlen jener Punkte sind nämlich mit der Grundlinie ident und demzufolge kollinear. Da sie auf die Epipole abgebildet werden, können diese Punkte nicht eindeutig bestimmt werden.

Darüber hinaus wird betont, dass die Rekonstruktion eines Raumobjekts nie absolut sein kann und idealerweise bis zu einer euklidischen Transformation bestimmt ist (vgl. [2], S. 246). Es kann keine genaue Aussage über die Gesamtlänge oder -höhe getätigt werden und das Ergebnis der Rekonstruktion ist maßstäblich ähnlich zum tatsächlichen Raumobjekt.

Projektive Rekonstruktion

Im Folgenden wird von der *projektiven Rekonstruktion* gesprochen, welche eine Rekonstruktion mit projektiver Transformation beschreibt. Diese Variante der Rekonstruktion benötigt nur eine Menge gegebener korrespondierende Bildpunkte, womit die Fundamentalmatrix bestimmt werden kann und die Projektionsmatrizen durch \mathbf{F} . In der Abbildung 2.18 sieht man zwei Bilder eines Gebäudes, die für die Rekonstruktion zur Verfügung stehen. Darunter in (b) sind zwei verschiedene perspektive Rekonstruktionen dieses Gebäudes, die durch eine perspektive Transformation miteinander verbunden sind.

Die Verwandtschaft der beiden Rekonstruktionen $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \{\mathbf{X}_i\})$, $(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, \{\tilde{\mathbf{X}}_i\})$ mit $i = 1, 2, \dots$ wird durch eine 4×4 -Matrix \mathbf{H} repräsentiert, welche die folgenden Gleichungen erfüllt (vgl. [2], S. 249):

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_1 \mathbf{H}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_2 \mathbf{H}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{H} \mathbf{X}_i.$$

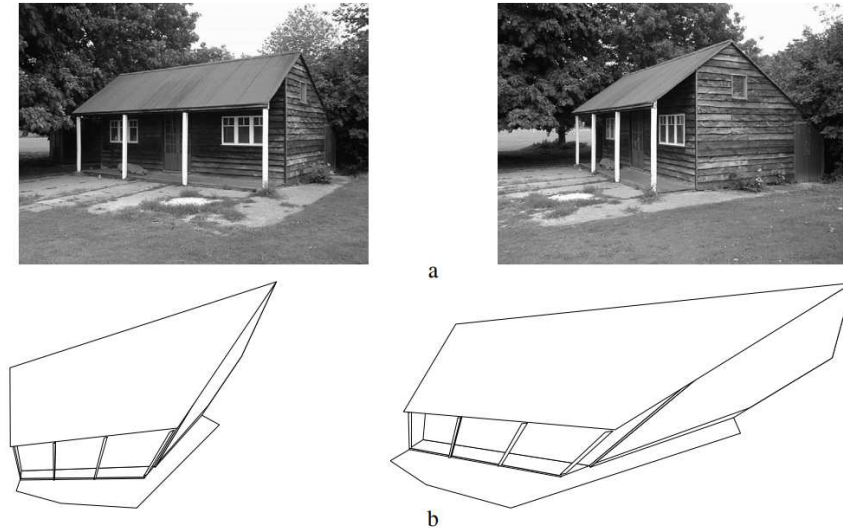


Abbildung 2.18: Perspektivische Rekonstruktion eines Gebäudes [2]

Direkte Rekonstruktion

sofern auch Informationen über bestimmte Punkte des Raumobjekts im euklidischen Raum bekannt sind, kann man von einer projektiven Rekonstruktion direkt zur metrischen Nachbildung gelangen. Die Autoren Hartley und Zisserman [2] nennen diese Punkte auch *Kontrollpunkte* $\{\mathbf{X}_{Ei}\}$ und sollen für den direkten Übergang von projektiv auf metrisch verwendet werden. Man erhält diese Kontrollpunkte wie üblich durch ihre korrespondierenden Bildpunkte in den beiden Bildebenen. Der Zusammenhang einer projektiven Nachbildung mit der tatsächlich wahren Rekonstruktion ist durch eine Homografie \mathbf{H} wie folgt gegeben (vgl. [2], S. 259):

$$\mathbf{X}_{Ei} = \mathbf{H}\mathbf{X}_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n.$$

Für die Bestimmung der Transformationsmatrix \mathbf{H} müssen mindestens $n \geq 5$ Kontrollpunkte bekannt sein, denn jede Punktkorrespondenz stellt drei linear unabhängige Gleichungen für die Elemente von \mathbf{H} zur Verfügung. Nachdem \mathbf{H} bestimmt wurde, kann anhand dieser Transformationsmatrix die euklidische Form der Zentren in der gegebenen projektive Rekonstruktion erhalten werden.

In Abbildung 2.19 wird die direkte Rekonstruktion von einer projektiven Nachbildung zur metrischen Rekonstruktion dargestellt. In (a) sieht man die weiß gekennzeichneten Kontrollpunkte für den direkten Übergang, welche bei der projektiven Rekonstruktion in (b) eine unterschiedliche Positionierung haben. Die fertige metrische Rekonstruktion samt der Kontrollpunkte ist in (c) ersichtlich.

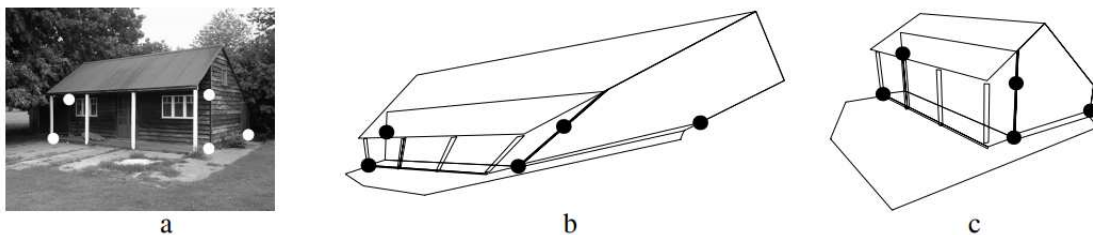


Abbildung 2.19: Direkte Rekonstruktion mithilfe von Kontrollpunkten [2]

2.3 Einbettung in den Unterricht

Im Unterrichtsfach *Darstellende Geometrie* wird die Zentralprojektion und im Allgemeinen die Perspektive genau durchgenommen. Wie zu Beginn dieser Arbeit bereits erwähnt, sind nach Eckhart [1] die Zentralprojektion und die bekannten Grund- und Aufrissverfahren gewisse Sonderfälle des Zweibilderprinzips, die auch im Lehrplan für den Regelunterricht der darstellenden Geometrie implementiert sind. Da das Zweibilderverfahren wesentliche Aspekte der Zentralprojektion beinhaltet, ist es durchaus möglich, dieses Verfahren im Unterricht zu behandeln. Allerdings ist die Einbettung erst nach der Zentralprojektion sinnvoll und könnte im Rahmen eines Projekts behandelt werden.

2 Rekonstruktionsverfahren anhand von Bildern eines Objekts

Besonders in Kombination mit der Photogrammetrie weckt diese Thematik das Interesse der Schülerinnen und Schüler.

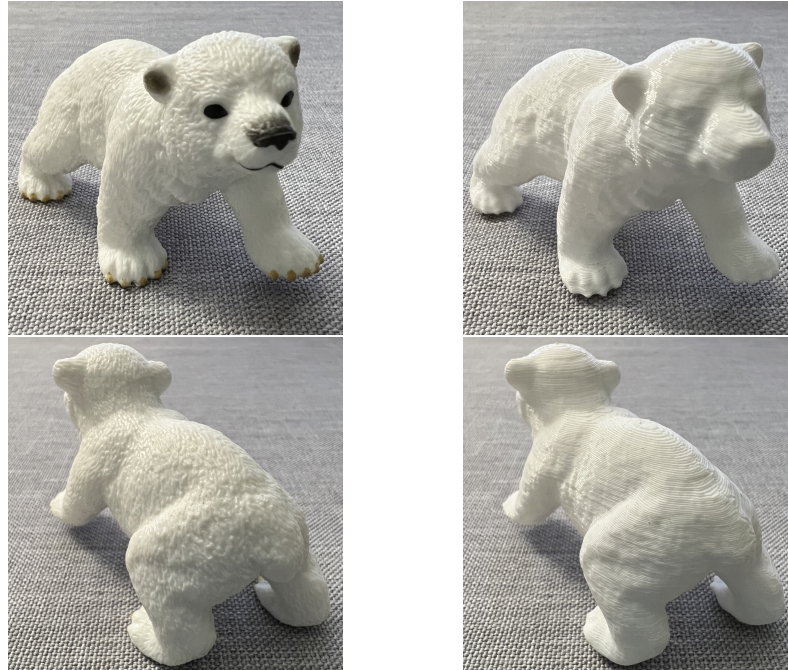


Abbildung 2.20: Eisbär - links als Objekt, rechts als 3D-Druck

Weiters steht im Lehrplan für den darstellenden Geometrieunterricht als vorgeschlagenen zusätzlichen Themenbereich der Einsatz von neuen digitalen Technologien, worunter der 3D-Druck und Scan-Programme fallen. Der 3D-Druck kann derart mit der Photogrammetrie kombiniert werden, sodass Schülerinnen und Schüler eigene Objekte oder Figuren entweder mithilfe von Applikationen auf dem Handy das Objekt durch Bildaufnahmen rekonstruieren oder durch eine von der Lehrperson bereitgestellte Kamera Bilder ihrer Objekte aufnehmen und anschließend auf den Schulcomputern die erzeugten Bilder in eine Rekonstruktionssoftware einsetzen. Nachdem eine digitale Rekonstruktion erzielt wurde, können diese Nachbildungen mit einem 3D-Drucker auch gedruckt werden. Meist ist vor dem Druck noch eine Verbesserung der Rekonstruktion notwendig, bei der beispielsweise vorhandene Löcher gefüllt oder Deformationen entfernt werden. In Abbildung 2.20 ist die Figur eines Eisbärs zu sehen, die mithilfe der Photogrammetrie und einer geeigneten Computersoftware mit einem 3D-Drucker gedruckt wurde.

Die digitale Rekonstruktion der Figur ist in Abbildung 2.21 abgebildet. Dazu ist eine Bereitstellung eines 3D-Druckers seitens der Schule ideal, um den Druck direkt nach Fertigstellung vor Ort zu starten. Ansonsten kann die Lehrperson den 3D-Druck bei einer externen Druckfirma in Auftrag geben.

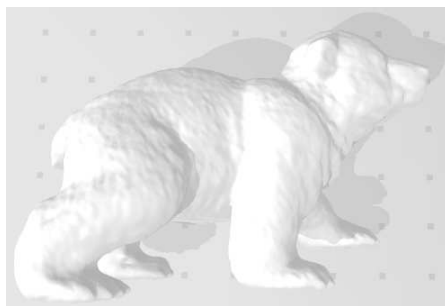


Abbildung 2.21: Digitale Rekonstruktion der Figur

Die Photogrammetrie ist bereits derart ausgereift, dass es digitale Applikationen gibt, die eine Rekonstruktion eines Objektes anhand von mehreren Kameraaufnahmen durchführen können. Dazu ist der Einsatz von Handys oder Tablets mit einer Kamera im Unterricht notwendig. Auch auf ein gutes Lichtverhältnis ist zu sorgen, da solche Programme bei schlechten Lichtverhältnissen gewisse Oberflächen und Strukturen nicht ausreichend erkennen können. Die Rekonstruktion weist sonst fehlende Stellen und Löcher des nachgebildeten Objekts auf. Durch die Implementierung dieses Themas in der Schule erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die Anwendungsbereiche der Zentralprojektion. Ebenso im Wahlpflichtfach ist eine Einbettung des Zweibilderverfahrens und dessen Anwendungsbereiche möglich, indem Lehrpersonen die Photogrammetrie im Zusammenhang mit dem 3D-Druck einführt. Dadurch wird den Schülerinnen und Schülern ein Einblick in die moderne Technologie gewährt und das Interesse in die darstellende Geometrie gefördert.

3 Schluss

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass das Zweibilderprinzip seit längerer Zeit den Nutzen hat, um Raumobjekte gezielt aus zwei oder auch mehreren Bildern zu rekonstruieren. Das Verfahren der Rekonstruktion wird bis heute noch in verschiedenen Bereichen wie die Photogrammetrie oder auch in der Architektur angewendet. Insbesondere wenn das zu rekonstruierende Objekt nicht mehr vorhanden oder teilweise zerstört ist, ist das Zweibilderprinzip zur Rekonstruktion des betroffenen Objekts hilfreich. Für die Rekonstruktion werden lediglich Bilder bzw. Aufnahmen eines Objekts benötigt. Man erhält anhand der Bilder Informationen wie Längenverhältnisse, Parallelität und ähnliches über das Objekt, sodass sowohl eine konstruktive Darstellung als auch eine Rekonstruktion mithilfe von Berechnungen möglich ist. Es wurde weiters gezeigt, dass keine Aussagen über die tatsächliche Größe des Objekts getroffen werden können, sofern nicht weitere Informationen über das tatsächliche Objekt vorhanden sind. Die Rekonstruktion ist daher bis auf das Größenverhältnis bestimmt. Heutzutage gibt es bereits zahlreiche digitale Programme, die eine solche Rekonstruktion anhand von Bildern in kürzester Zeit ausführen und dabei keine Kenntnis über das Rekonstruktionsverfahren notwendig ist. Das Ziel dieser Arbeit war es, einen Überblick über das Zweibilderprinzip und das Verfahren der Rekonstruktion zu geben. Allerdings muss hier die Einschränkung gemacht werden, dass die Benutzung von Programme und digitale Applikationen gegenüber der händischen Rekonstruktion aufgrund der Reduzierung des Arbeits- und Zeitaufwands bevorzugt wird.

Außerdem lässt sich das Zweibilderprinzip und dessen Anwendungen im Unterrichtsfach durchaus als Vertiefung der Zentralprojektion einbetten, wodurch Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die praktische Anwendung der darstellenden Geometrie erhalten. Im Hinblick auf die Förderung der Interessen von Schülerinnen und Schüler ist es sinnvoll, die Rekonstruktion durch automatisierte Verfahren mithilfe von Applikationen und Softwares durchzuführen, da der Zeitaufwand für die Behandlung dieser Thematik im Unterricht reduziert wird.

Die Digitalisierung in den verschiedensten Bereichen sorgt bereits seit längerer Zeit für Entlastung des Arbeitsaufwands und es ist deshalb zu hoffen, dass das Zweibilderprinzip und die Rekonstruktionsverfahren zukünftig noch einfacher und zeitsparender im Unterricht einbezogen werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] Ludwig Eckhart. *Konstruktive Abbildungsverfahren. Eine Einführung in die Neueren Methoden der Darstellenden Geometrie*. Springer Verlag, 1926.
- [2] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] Emil Müller. *Vorlesungen über darstellende Geometrie: Band 1*. Franz Deuticke, 1923.
- [4] J. Wagner (Hrsg.). Projektive Geometrie. In *Einblicke in die euklidische und nicht-euklidische Geometrie*, pages 107–178. Springer Berlin Heidelberg, 2017.