MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Modellieren und Problemlösen im Mathematikunterricht – Einsatz von Fermi-Aufgaben in der Sekundarstufe 1

verfasst von | submitted by

Eva-Maria Schaffler BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 507 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Englisch Unterrichtsfach Mathematik
Betreut von | Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

Abstract (Deutsch)

Modellieren und Problemlösen stellen wichtige Kompetenzen des Mathematikunterrichts dar. Für den Erwerb und die Entwicklung dieser Kompetenzen bedarf es geeigneter Modellierungsaufgaben, welche SchülerInnen Schritt für Schritt an das Modellieren und Problemlösen heranführen. Unter Fermi-Aufgaben versteht man eine besondere Art von Modellierungsaufgaben, welche insbesondere das Schätzen und Überschlagen von Größen sowie das geschickte Anwenden von Alltagswissen trainieren und fördern.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Einsatz von Fermi-Aufgaben in der Sekundarstufe 1. Zunächst werden theoretische Hintergründe und Definitionen dargestellt, um ein Verständnis für Fermi-Aufgaben aufzubauen. Im Anschluss wird eine empirische Untersuchung (Action Research) zum Einsatz von Fermi-Aufgaben in drei Klassen der Sekundarstufe 1 durchgeführt, in welcher SchülerInnen ohne ausgeprägte Modellierungserfahrungen drei ausgewählte Fermi-Aufgaben in Gruppen bearbeiten und Bearbeitungsprozesse in Form eines Portfolios dokumentieren. Ziel der Arbeit ist es, anhand der Dokumentationen herauszufinden, welche Lösungswege die TeilnehmerInnen für die Aufgabenstellungen wählen, welche mathematischen Operationen sie dafür verwenden und welche Modellierungsschritte sie im Problemlöseprozess durchlaufen.

Die Auswertung der erhobenen Daten ergibt, dass fast alle TeilnehmerInnen für die jeweiligen Aufgabestellungen ähnliche Bearbeitungsprozesse wählen, die Komplexität und Detailliertheit der Ausarbeitungen jedoch teilweise stark variieren. Der Großteil der TeilnehmerInnen konnte die wesentlichen mathematischen und kontextbezogenen Grundlagen zur Bearbeitung der Aufgabenstellungen intuitiv erkennen und anwenden. Insgesamt traten jedoch in fast allen Modellierungsschritten Herausforderungen auf, welche von Abschreibfehlern über Rechenfehler bis hin zu allgemeinen Fehlvorstellungen reichten.

Die Ergebnisse der Arbeit zeigen, dass die TeilnehmerInnen der Action Research die gewählten Fermi-Aufgaben grundlegend selbstständig und sinngemäß bearbeiten können. Es bedarf jedoch regelmäßiger Übungsstunden mit Fermi-Aufgaben, um die Fähigkeit des Modellierens und Problemlösens nachhaltig zu entwickeln und dadurch die Herausforderungen und potenziellen Fehlerquellen bei den einzelnen Modellierungsschritten zu verringern.

Abstract (English)

Modeling and problem solving are important skills in mathematical education. To acquire and develop these skills, suitable modeling tasks are required to gradually introduce students to modeling and problem solving. Fermi tasks are a special type of modeling tasks that particularly train and promote estimation skills as well as the skillful application of everyday knowledge.

This paper deals with the use of Fermi tasks in lower secondary classes. First, theoretical background information and definitions are presented to build up an understanding of what Fermi tasks are. Subsequently, an empirical study (Action Research) on the use of Fermi tasks is carried out in three lower secondary classes. In this Action Research, students without extensive modeling experience work on three selected Fermi tasks in groups and document their work processes in the form of a portfolio. The aim of the paper is to use the documentation to find out which mathematical ways the participants choose for finding solutions, which mathematical operations they apply and which modeling steps they undergo in the problem-solving process.

The analysis of the collected data shows that almost all participants choose similar methods for the respective tasks. However, the complexity and level of detail of the elaborations vary greatly among the different groups. The majority of participants were able to intuitively recognize context-related information and apply the essential mathematical concepts for solving the tasks. However, challenges were encountered in almost all modeling steps, ranging from copying errors and calculation errors to general misconceptions.

The results of the paper show that the participants in the Action Research have the basic ability to work on the selected Fermi tasks independently and logically. However, regular practice sessions with Fermi tasks are required to sustainably develop the abilities of modeling and problem solving, and thus, reduce the challenges and potential sources of error in the individual modeling steps.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Unter Modellieren und Problemlösen versteht man zwei wichtige Kernkompetenzen des Faches Mathematik, welche im Lehrplan verankert sind und im Rahmen des Mathematikunterrichts erworben werden sollen (Lehrplan, 2024; Högen & Krausl, 2023). Für den Erwerb und die Entwicklung dieser Kompetenzen bedarf es gezielter Modellierungstätigkeiten im Unterricht, welche sich durch ein hohes Maß an Realitätsbezügen, Prozessorientierung, Offenheit im Problemlöseprozess und durch vergleichsweise hohe Komplexität der Aufgabenstellungen charakterisieren lassen (Blum, 2007, S.2-3; Eilerts & Skutella, 2018, S.33; Humenberger & Bracke, 2017, S. 108). Eine spezielle Art von Modellierungsaufgaben stellen Fermi-Aufgaben dar. Bei der nach Enrico Fermi benannten Aufgabenart handelt es sich um unterbestimmte Modellierungsaufgaben, also Aufgaben, bei jenen zu wenig Informationen gegeben sind, sodass eigenständige Überlegungen für passende mathematische Operationen zur Lösung der Aufgaben erforderlich sind (Greefrath, 2010, S.80). Diese Eigenschaften tragen dazu bei, dass Fermi-Aufgaben zwar kognitiv herausfordernd sind, aber auch viele Möglichkeiten für kreative Zugänge und eigene Lösungsansätze bieten. Bei adäquater Einführung im Unterricht bieten Fermi-Aufgaben das Potential, kritische Auseinandersetzungen mit Sachverhalten sowie die Fähigkeiten, Größen abzuschätzen und Alltagswissen geschickt anzuwenden, zu fördern (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.27).

Im Mittelpunkt des Forschungsinteresses der Masterarbeit steht ein Action Research Projekt, in welchem der Einsatz von Fermi-Aufgaben in drei Klassen der Sekundarstufe 1 erforscht wird. Ziel der empirischen Forschung ist, herauszufinden, welche Bearbeitungsprozesse, mathematischen Inhalte und Konzepte sowie Modellierungsschritte die teilnehmenden SchülerInnen für die Bearbeitung der Fermi-Aufgaben verwenden. Für die Beantwortung der Fragestellungen bearbeiten SchülerInnen aus drei verschiedenen Klassen (6.Schulstufe und 7.Schulstufe) Fermi-Aufgaben und dokumentierten ihre Bearbeitungsprozesse in Form eines schriftlichen Portfolios. Diese Portfolios werden im Anschluss kategorisiert und ausgewertet, sodass die Fragen aus den Dokumentationen beantwortet werden können.

Für eine sinngemäße Verknüpfung der theoretischen Grundlagen mit der empirischen Untersuchung gliedert sich die Arbeit in folgende Abschnitte: in Kapitel 2 die werden

Grundbegriffe der Kompetenzen sowie des Modellierens und Problemlösens definiert und erläutert. Die Kapitel 3 und 4 widmen sich den Fermi-Aufgaben, wo zunächst eine allgemeine Definition und Einteilung vorgenommen wird und im Anschluss auf Anwendungsbeispiele, Benefits und Herausforderungen von Fermi-Aufgaben im Unterricht eingegangen wird. Die Kapitel 5 und 6 stellen das Studiendesign vor und erläutern allgemeine Vorbereitungen und Berücksichtigungen, welche für die Action Research vorgenommen wurden. Kapitel 7 beinhaltet die Auswertung und Analyse der erhoben Daten (Portfolios). In Kapitel 8 werden die Ergebnisse anschließend noch evaluiert und diskutiert, bevor Kapitel 9 die Hauptaussagen der Arbeit zusammenfasst und abschließt.

2 Modellieren als Kompetenz im Mathematikunterricht

In diesem Kapitel werden die wichtigen Begriffe der Kompetenzen, des Modellierens und des Problemlösens definiert und erläutert. Im Anschluss wird der Modellierungskreislauf, der als Visualisierung des Modellierungsprozesses dient, beschrieben.

2.1 Was versteht man unter Kompetenzen im Mathematikunterricht?

Der Unterricht in den Fächern Deutsch, Mathematik und Englisch orientiert sich in Österreich seit 2009 an den sogenannten Bildungsstandards. Dabei handelt es sich um gesetzlich verankerte Standards, welche die Erfüllung der Kernaufgaben von Schulen sicherstellen und überprüfen. Die Bildungsstandards umfassen die wesentlichen Lernziele und Kompetenzen, „die im Unterricht nachhaltig zu entwickeln sind und die für die weitere schulische und berufliche Bildung – auch im Sinne des lebenslangen Lernens – für Schülerinnen und Schüler von zentraler Bedeutung sind“ (BMBWF, o.J. a).

Das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF, o.J a) greift in diesem Zusammenhang auf die Definition von Weinert zurück und beschreibt Kompetenzen als

> *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“* (Weinert, 2001, S.27f).

Ergänzend zu dieser Definition ist wichtig festzuhalten, dass es sich bei Kompetenzen um kognitive Fähigkeiten handelt, die längerfristig verfügbar und abrufbar sind (IQS, o.J. a).
Der Prozess des Kompetenzerwerbs ist individuell und aktiv und hängt von zahlreichen Faktoren ab. Entscheidend ist neben den unterschiedlichen Persönlichkeitsmerkmalen und Startbedingungen die aktive Mitgestaltung der SchülerInnen an ihrem eigenen Lernprozess (BMBWF, o.J. a).

Nun muss an folgender Stelle vor der Aufschlüsselung der einzelnen Kompetenzen für den Mathematikunterricht noch festgehalten werden, dass die Lehrpläne mit dem Schuljahr 2023/24 überarbeitet wurden und somit einige inhaltliche und strukturelle Änderungen vorgenommen wurden, auch bei der Benennung von Kompetenzbereichen. Daher wird im Folgenden zuerst die Version vor 2023/24 erläutert und anschließend die neue, überarbeitete Version ab 2023/24. Der Grund, warum hier beide Lehrpläne und Bezeichnungen aufgeführt werden liegt darin, dass im Moment – im Schuljahr 2024/25 – beide Versionen in der Sekundarstufe 1 in Verwendung sind, die alte Version für die 7. Und 8. Schulstufe und die neue, überarbeitete Version für die 5. Und 6. Schulstufe.

Im Lehrplan bis 2023/24 geht für das Unterrichtsfach Mathematik hervor, dass sich die wesentlichen Kompetenzen aus drei verschiedenen Dimensionen ergeben: den mathematischen Inhalten, den mathematischen Handlungen und der Komplexität. Die genaue Aufschlüsselung sieht folgendermaßen aus:

Mathematische Inhalte:

- I1: Zahlen und Maße
- I2: Variable, funktionale Abhängigkeit
- I3: Geometrische Figuren und Körper
- I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Mathematische Handlungen:

- H1: Darstellen, Modellbilden
- H2: Rechnen, Operieren
- H3: Interpretieren
- H4: Argumentieren, Begründen

Komplexität:

- K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und – fertigkeiten
- K2: Herstellen von Verbindungen
- K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

  (IQS, o.J.)

Diese drei Dimensionen ergeben insgesamt 48 verschiedene Kompetenzen. In Abbildung 1 ist ein Kompetenzmodell für die 8.Schulstufe mit einem konkreten Beispiel dargestellt. Hier treffen die mathematische Handlung H3 (interpretieren), die mathematischen Inhalte I2 (Variable, funktionale Abhängigkeit) und die Komplexität K2 (Herstellen von Verbindungen) aufeinander. Im Begleitdokument für die Bildungsstandards für Mathematik 8.Schulstufe wird diese Kompetenz folgendermaßen verbal formuliert:

> *„Die Schülerinnen und Schüler können algebraisch, tabellarisch oder grafisch dargestellte Strukturen und (funktionale) Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten, wobei dafür auch Verbindungen mit anderen mathematischen Inhalten (Begriffen, Sätzen, Darstellungen) oder Tätigkeiten hergestellt werden müssen“* (IQS, o.J.).

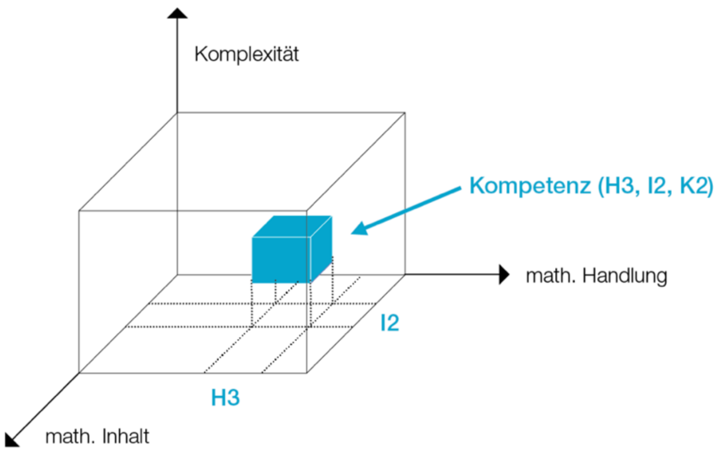


Abbildung 1: Kompetenzmodell im Unterrichtsfach Mathematik (IQS, o.J.)

Der seit dem Schuljahr 2023/24 verwendete Lehrplan unterscheidet sich auf den ersten Blick in der Benennung der Dimensionen. Die mathematischen Kompetenzen setzen sich nun zusammen aus den zentralen fachlichen Konzepten, den Kompetenzbereichen und der Komplexität innerhalb der Kompetenzbeschreibungen. Die genaue Aufschlüsselung ist folgende (Lehrplan, 2024; Högen & Krausl, 2023):

Zentrale fachliche Konzepte:

- Z1: Zahlen und Maße
- Z2: Variablen und Funktionen
- Z3: Figuren und Körper
- Z4: Daten und Zufall

Kompetenzbereiche:

- K1: Modellieren und Problemlösen
- K2: Operieren
- K3: Darstellen und Interpretieren
- K4: Vermuten und Begründen

Komplexität innerhalb der Kompetenzbeschreibung:

- R1: Reproduktion
- R2: Reorganisation
- R3: Reflexion

Neben den Umbenennungen wurden außerdem weitere Maßnahmen zur Präzisierung der Lehrpläne vorgenommen, wie beispielhafte Lernaufgaben und Kompetenzraster. Die Kompetenzraster visualisieren, welche Kompetenzen je Schulstufe und Unterrichtsfach entwickelt werden sollen, wie diese an den Lehrplan anknüpfen und in welcher Tiefe sie erworben werden sollen und unterstützen somit die systematische Umsetzung im Unterricht. Durch die Übersichtlichkeit sollen sie Lehrpersonen bei der Jahresplanung unterstützen, als Planungsgrundlage für Unterrichtsstunden und Lernaufgaben dienen, Reflexion zum eigenen Unterricht ermöglichen und als Grundlage für Eltern- und SchülerInnen-Gespräche dienen (BMBWF, o.J. b).

Nach dieser Aufzählung aller für den Kompetenzbegriff relevanten Dimensionen fokussiert sich der folgende Abschnitt ausschließlich auf den Kompetenz- bzw. Handlungsbereich des Modellierens und Problemlösens.

2.2 Was versteht man unter Modellieren und Problemlösen?

Unter **Modellieren** versteht man einen Teil- und Kompetenzbereich von (angewandter) Mathematik, bei dem außermathematische Sachverhalte mithilfe von Mathematik bearbeitet werden. (Lehrplan, 2024; Greefrath, 2010, S.35). Der Begriff Modellieren bezieht sich weniger auf bestimmte inhaltliche mathematische Aspekte, können doch für alle vier zentralen fachlichen Konzepte (siehe 2.1) außermathematische Aufgabenstellungen gefunden werden. Vielmehr rückt der Begriff des Modellierens den Bearbeitungsprozess, also das Durchlaufen eines Gedankenprozesses und das In-Beziehung-Treten mit der Aufgabenstellung selbst in den Fokus (Greefrath, 2010, S. 36).

Der Begriff **Problemlösen** bezeichnet „das Bearbeiten innermathematischer Aufgabenstellungen, die für Schülerinnen und Schüler keine Routineaufgaben sind, insbesondere, wenn ihnen (noch) kein passendes Lösungsverfahren bekannt ist“ (Lehrplan, 2024). Bringt man die Begriffe Modellieren und Problemlösen in Beziehung miteinander, lässt sich erkennen, dass Problemlösen einen essenziellen Teil des Modellierens ausmacht, nämlich die mathematische Erfassung und Bearbeitung der Aufgabenstellung. Problemlösen stellt daher den mathematischen Kern von Modellierungsaufgaben dar, kann jedoch erst dann erfolgen, wenn die außermathematische Aufgabenstellung in ein vereinfachtes mathematisches Modell überführt wurde.

Im Folgenden werden die Hintergründe und Prozesse des Modellierens und Problemlösens für eine bessere Veranschaulichung isoliert voneinander beschrieben mit dem Hintergrundwissen, dass die beiden Prozesse in der Realität miteinander verschränkt sind und parallel im Modellierungsprozess ablaufen.

2.2.1 Modellieren

Bereits seit über 50 Jahren besteht in der Mathematikdidaktik das Bestreben, vermehrt Inhalte aus dem täglichen Leben in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen. In diesem Zusammenhang wird dem mathematischen Modellieren ein großer Stellenwert zugeschrieben, denn es erfüllt genau jenen Zweck, außermathematische Situationen und Sachverhalte mithilfe von Mathematik zu beschreiben, verstehen, erklären und vorhersagen (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.25). Modellieren bedeutet also, dass sich aus in der Realität auftretenden Phänomenen und Sachverhalten Fragestellungen ergeben, welche mathematisch übersetzt und bearbeitet werden können (Blum, 2007, S.2-3). Es wird also deutlich, dass der **Realitätsbezug** eine bedeutende Eigenschaft von Modellierungsaufgaben darstellt.

Neben der Verknüpfung zwischen Realität und Mathematik ist eine weitere wichtige Eigenschaft von Modellierungsaufgaben die **Prozessorientierung** beim Bearbeiten der Aufgaben. Unter Prozessorientierung ist gemeint, dass bei der Bearbeitung und Lösung des Problems der Weg dorthin (= Prozess) im Vordergrund steht. Im Gegensatz dazu steht die Produktorientierung, bei welcher das Ziel, also das Ergebnis im Fokus liegt (Humenberger & Bracke, 2017, S. 108). In nachfolgender Tabelle werden die beiden Zugänge gegenübergestellt.

	Produkt- bzw. Kalkülorientierung	**Prozessorientierung**
Ablauf	Erklären – Musteraufgabe – Üben von Analogaufgaben	Problemstellung – Probieren – Berichten – Reagieren
Ziel, Schwerpunkt	Eindeutigkeit, Sicherheit, Rezept, Ergebnis, Produkt	Verstehen, Begreifen, Prozess, Weg, Methode
Aufgaben	„geschlossene Aufgaben“, drillen von Fertigkeiten, Regelorientierung, quantitativ umfangreiches Üben (viele Aufgaben zum selben Prinzip)	offenere Aufgaben, Entdecken, Experimentieren, Begründen, Formulieren, eigenständige Wege, Beispielorientierung, produktives Üben (qualitativ umfangreich)
L-S-Aktivität	Lehrkraft aktiv, Schülerinnen und Schüler (S&S) eher passiv, Weg der Lehrkraft im Vordergrund	S&S aktiv, Lehrkraft zunächst eher passiv: reagiert dann auf Vorschläge der S&S, Wege der S&S im Vordergrund
Sozialform	Lehrervortrag, fragend-entwickelnd, kleinschrittig, auf ein eindeutiges Ziel hin	Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit, flexibel, offen
Vorbereitung	Gute Vorbereitung bis ins Detail der Darbietung	Überlegungen, wie man S&S zu Eigentätigkeit anregen kann (geeignete Aufgaben formulieren)
Erklärungen	sehr umfangreich, Lehrkraft muss von Beginn an alles erklären	weniger Erklärungen, mehr eigenes Nachdenken der S&S
Fehler	sind zu vermeiden, Unterricht als ständige Leistungssituation	zugelassen und sollen konstruktiv verarbeitet werden, deutliche Trennung zwischen Lern- und Leistungssituationen

Tabelle 1: Gegenüberstellung von Produkt- und Prozessorientierung (Humenberger & Bracke, 2017, S.108)

Wie aus dieser Tabelle herauszulesen ist, sind prozessorientierte Aufgabenstellungen daran interessiert, dass SchülerInnen aktiv tätig werden, die Aufgabe verstehen und selbst über mögliche Lösungsansätze (häufig in Partner- und Gruppenarbeit) nachdenken (Humenberger & Bracke, 2017, S.108). All diese Eigenschaften treffen auf Modellierungsaufgaben zu.

An dieser Stelle ist es wichtig, eine Unterscheidung zwischen Modellierungsaufgaben und sogenannten eingekleideten Aufgaben vorzunehmen. Modellierungsaufgaben weisen sowohl einen Bezug zur realen Welt als auch die Prozessorientierung auf, sie interessieren sich tatsächlich für die Fragestellung, die Bearbeitung im Kontext und die Bedeutung für die reale Situation. Eingekleidete Aufgaben hingegen – so wie es die meisten Textaufgaben in Schulbüchern sind – sind produktorientiert und zielen darauf ab, (neu) erlernte mathematische Inhalte in Form von Textaufgaben zu üben. Der Fokus bei eingekleideten Aufgaben liegt nicht auf dem Bearbeiten und Verstehen der außermathematischen Situation, sondern auf der Anwendung und Einübung der gelernten mathematischen Struktur (Formel, Rechenoperation, etc.). Eingekleidete Aufgaben haben den Vorteil, dass sie nicht zeitaufwändig sind und dennoch das Übersetzen von Alltagssprache in mathematische Sprache trainieren. Wichtig ist jedoch ein sinnvoller und realitätsnaher Kontext, in den die mathematische Aufgabenstellung eingebettet ist, sowie ein ehrlicher Umgang mit dem Ziel solcher Aufgaben. Während eingekleidete Aufgaben gute Übungsmöglichkeiten darstellen, sollen Modellierungsaufgaben aufzeigen, dass Mathematik in realen Situationen hilfreich ist und komplexe Fragestellungen durch Mathematik strukturiert, vereinfacht und analysiert werden können. Der mathematische Inhalt ist bei Modellierungsaufgaben im Vorhinein meist nicht klar und auch nicht eindeutig festgelegt, es steht die Fragestellung im Fokus und Mathematik wird als Tool zur Beantwortung der Fragestellung gesehen (Humenberger & Bracke, 2017, S.109-111).

Zusätzlich zum Realitätsbezug und der Prozessorientierung ist außerdem die **Offenheit** eine wichtige Eigenschaft von Modellierungsaufgaben (Eilerts & Skutella, 2018, S.33). Offenheit bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es keinen eindeutigen vorgegebenen Lösungsweg für eine Aufgabe gibt, also dass Aufgaben auf mehrere Arten gelöst werden können. Als offene Aufgaben werden aber auch jene Aufgaben bezeichnet, die keinen klaren Anfangs- oder Endzustand aufweisen oder bei welchen die mathematische Transformation nicht eindeutig ist (Büchter et al., 2019, S.23). Das ist beispielsweise der Fall, wenn eine Aufgabe in der Angabe scheinbar zu viele oder zu wenig Informationen für eine eindeutige Berechnung enthält. Bei ersterem spricht man von einer überbestimmten Aufgabe, bei letzterem von einer unterbestimmten Aufgabe (Greefrath, 2010, S.76).

Die vierte wesentliche Eigenschaft von Modellierungsaufgaben ist deren **Komplexität** (Eilerts & Skutella, 2018, S.33). Gerade wegen der eben erwähnten Offenheit von Modellierungsaufgaben sind die Fragestellungen meist komplex und die Lösungen nicht immer sofort naheliegend. Komplexität bezieht sich hier nicht auf die sprachliche Formulierung der Aufgabenstellungen oder die Länge des Textes in der Angabe, denn es gibt auch einige Modellierungsaufgaben mit sehr kurzen Angaben (siehe Fermi-Aufgaben). Modellierungsaufgaben sind insofern komplex, als dass der Prozess vom Durchlesen der Aufgabenstellung bis zum Entwickeln einer Lösungsstrategie oft nicht einfach und geradlinig ist. Diese Komplexität spiegelt sich auch in SchülerInnen-Testungen im Bereich Mathematik wider, denn hier wird deutlich, dass SchülerInnen große Schwierigkeiten beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben haben. Diese Schwierigkeiten lassen sich konkret auf die kognitive Komplexität von Modellierungsaufgaben zurückführen, da jeder Teilschritt des Modellierens potenzielle Hürden birgt (Blum, 2007, S.4-6).

Um die Komplexität von Modellierungsaufgaben zu reduzieren, ist es sinnvoll, den Prozess des Modellierens in einzelne Teilkompetenzen zu unterteilen. Diese Unterteilung bringt für Lehrkräfte eine bessere Übersicht, sollte jedoch auch mit den SchülerInnen bei den ersten Kontakten mit Modellierungsaufgaben thematisiert werden. Greefrath (2010, S.52) teilt in folgende Teilkompetenzen ein:

- **Vereinfachen**: wichtige Situationen herausfiltern
- **Mathematisieren**: reale Situation in mathematisches Modell überführen
- **Rechnen**: Berechnungen ausführen
- **Interpretieren**: Ergebnisse auf reale Situation beziehen
- **Validieren**: Ergebnisse überprüfen und vergleichen
- **Beurteilen**: das mathematische Modell kritisch bewerten
- **Realisieren**: einem mathematischen Modell eine reale Situation zuordnen

Diese Teilkompetenzen werden genauer in Kapitel 2.3 bei der Beschreibung des Modellierungskreislaufes erläutert.

2.2.2 Problemlösen

Die Fähigkeit, Probleme zu lösen ist eine Schlüsselkompetenz zur erfolgreichen Bewältigung aller Lebensbereiche. Ein wesentliches Ziel von Mathematikunterricht ist es, die Kompetenz des Problemlösens mithilfe von mathematischen Sachverhalten schrittweise aufzubauen und den SchülerInnen Strategien zu vermitteln, um unbekannte Probleme und Fragestellungen selbstständig bearbeiten zu können (Abay & Filiz, 2020, S. 269f). Die Entwicklung der Kompetenz des Problemlösens gestaltet sich allerdings als besonders herausfordernd, denn es handelt sich dabei um eine prozessbezogene Kompetenz. Anders als bei inhaltlichen Kompetenzen – beispielsweise die Vermittlung der Dreieckskonstruktion – ist der Erwerb der Kompetenz des Problemlösens ein langwieriger Prozess und kann nicht innerhalb weniger Unterrichtsstunden erreicht werden, sondern wird über die gesamte Schulzeit schrittweise erlernt und erweitert. Das hat den Grund, dass Problemlösen nicht konkret anhand weniger Beispielaufgaben gelernt und eingeübt werden kann, sondern ein Verständnis für die Übersetzung von (außermathematischen) Problemstellungen in mathematische Modelle sowie ein Repertoire an Problemlösestrategien erforderlich macht. Neben diesen im Unterricht zu vermittelnden Strategien begünstigen gewisse Persönlichkeitseigenschaften wie eine gute Organisation, Durchhaltevermögen und eine offene Einstellung gegenüber dem Probieren und Experimentieren die Entwicklung dieser Kompetenz (Holzäpfel et al., 2016, S.4).

Im Zusammenhang mit Modellierungsaufgaben spricht Greefrath (2010, S.63) von einem Problemlöseprozess mit folgenden Teilschritten:

- **Verstehen der Aufgabe**: Erkennen von wichtigen vs. unwichtigen Informationen, Erkennen von fehlenden Informationen
- **Erstellen eines Plans:** Finden von möglichen Ansätzen zur mathematischen Bearbeitung
- **Durchführen des Plans:** Überprüfen der Umsetzbarkeit der gewählten mathematischen Struktur (Lösbarkeit, etc.)
- **Rückschau:** Überprüfen des Ergebnisses auf Plausibilität, Finden einer Antwort auf die Fragestellung

Es ist zielführend, bei Modellierungsaufgaben im Unterricht mit den SchülerInnen diese Teilschritte zu besprechen und diese auch schrittweise zu bearbeiten. Neben den Teilschritten benötigen SchülerInnen ebenfalls eine Auswahl an möglichen Problemlösestrategien, welche sie zum Lösen verschiedener Modellierungsaufgaben verwenden können. Folgende Tabelle von Greefrath (2010, S. 64) gibt einen Überblick über verschiedene Problemlösestrategien.

Name	Erklärung
Alternativen suchen	völlig anderen Ansatz wählen, um das Problem zu lösen
Analogien bilden	Übertragung von einer bekannten Situation auf eine andere Situation
Aufteilen	Zerlegen eines Problems in Teilprobleme
Darstellungswechsel	Darstellung von Informationen in einer anderen Form, z. B. als Bild, Tabelle oder Formel
Muster suchen	nach Regelmäßigkeiten und Wiederholungen suchen
Probieren	Durchprobieren von möglichen Zahlenwerten und Beobachten der Ergebnisse
Rückwärtsarbeiten	ausgehend von einer Lösung zur Problemstellung finden
Spezialfälle suchen	Suchen besonderer Fälle und Ziehen von Rückschlüssen für das Problem
systematisches Vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede von zwei Situationen feststellen und daraus Schlüsse ziehen
Vereinfachen	Weglassen von Bedingungen, um das Problem zu reduzieren
Voraussetzungen variieren	Veränderung der Voraussetzungen, um Auswirkungen zu erkunden

Tabelle 2: Problemlösestrategien (Greefrath, 2010, S. 64)

Während gewisse der aufgezählten Problemlösestrategien von den SchülerInnen häufig intuitiv verwendet werden, wie beispielsweise das Probieren oder auch das Suchen von Mustern, müssen ihnen eine Vielzahl an Strategien erst zugänglich gemacht werden (Greefrath, 2010, S. 64). Das gemeinsame Bearbeiten von Modellierungsaufgaben kann gute Gelegenheiten bieten, neue Problemlösestrategien vorzustellen und durch das direkte Anwenden das Repertoire der SchülerInnen zu erweitern.

Problemlösen kann an verschiedenen Stellen im Unterricht stattfinden. Bei der Einführung und Einübung von Problemlösen bieten sich jedoch bestimmte Situationen besonders gut an, wie zum Beispiel beim Erarbeiten von neuen mathematischen Inhalten. Hier kann Problemlösen gewinnbringend eingesetzt werden, da die SchülerInnen selbst neue Strukturen erkennen sollen und somit selbst aktiv werden (induktives Lernen). Eine weitere produktive Einstiegsstelle von Problemlösen sind Übungsphasen, denn diese bieten die Möglichkeit, dass SchülerInnen selbstständig über mathematische Probleme nachdenken, anstatt nur in Formeln einzusetzen und auszurechnen. Weiters kann der Problemlöseprozess im Unterricht auch auf der Metaebene diskutiert und reflektiert werden. Dadurch wird explizit gemacht, auf welche Weise ein zuvor stattgefundener Problemlöseprozess abgelaufen ist bzw. welche möglichen Problemlösestrategien für einen bevorstehenden Problemlöseprozess verwendet werden können (Holzäpfel et al., 2016, S. 7 ff).

Im Kontext des Problemlösens sprechen Holzäpfel et al. (2016, S. 5) von vier Problemlösestandards, welche SchülerInnen bis zu ihrem Schulabschluss erworben haben sollen:

1. Wissensaufbau durch Problemlösen
2. Problemlösefähigkeit in mathematischen und außermathematischen Kontexten
3. Auswahl und Anwendung passender Problemlösestrategien
4. Überwachung und Reflexion des Problemlöseprozesses.

Modellierungsaufgaben haben das Potential, beim Aufbau dieser Problemlösestandards beizutragen.

2.3 Modellierungskreislauf

Wie in Kapitel 2.2.1 bereits erwähnt, handelt es sich bei Modellierungsaufgaben um kognitiv komplexe Aufgabenstellungen. Daher ist eine Unterteilung in einzelne Teilkompetenzen sinnvoll, um den Grad der Komplexität zu reduzieren und die Aufgabe in einzelne Arbeitsschritte aufzuteilen (Blum, 2007, S. 4-6). Blum & Leiss haben im Rahmen des DISUM-Projektes („Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht in Mathematik“) einen Modellierungskreislauf entwickelt, welcher Modellierungsaufgaben in sieben Teilschritte untergliedert und diese visuell darstellt im Modellierungsprozess darstellt (siehe Abbildung 2) (Büchter et al., 2019, S. 24; Blum, 2007, S. 4-6).

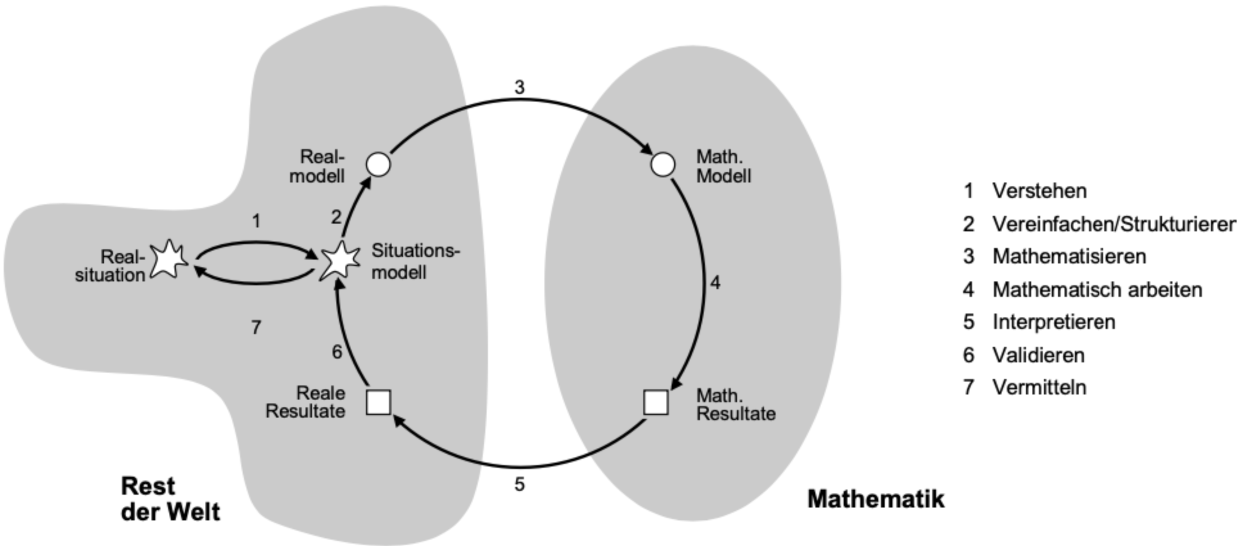


Abbildung 2: Modellierungskreislauf nach Blum & Leiss (Blum, 2006, S.9)

Die einzelnen Teilschritte werden in diesem Modellierungskreislauf wie folgt von Blum (2007, S. 4-6) und auch von Büchter et al. (2019, S. 24-25) beschrieben:

1) **Verstehen**: ausgehend von der Realsituation, aus der sich die Fragestellung ergibt, ist die erste Teilkompetenz das Verstehen der Aufgabe und Fragestellung. Die Erfassung des Problems ist ein Schlüsselmoment für den ganzen restlichen Modellierungsprozess, weshalb ein genaues Lesen der Angabe, das Notieren von ersten Überlegungen und gegebenenfalls die Anfertigung einer Skizze von großer Bedeutung sind. Die Realsituation wird durch diesen Schritt in ein Situationsmodell überführt.

2) **Vereinfachen/Strukturieren**: nach der Überführung der realen Situation in ein Situationsmodell muss der Sachverhalt in der Regel noch vereinfacht und strukturiert werden, das bedeutet es werden Annahmen getroffen, welche die Situation idealisieren und somit eine vereinfachte Darstellung ermöglichen. Man spricht danach von einem Realmodell.

3) **Mathematisieren**: in diesem Schritt findet der Transfer zwischen Realität und Mathematik statt, denn das Mathematisieren übersetzt das Realmodell in ein mathematisches Modell. Das bedeutet, dass passende mathematische Operationen für Beantwortung der Fragestellung festgelegt werden und eventuell fehlende Daten für die Berechnung durch Recherche, Schätzung, etc. ermittelt werden.

4) **Mathematisch Arbeiten**: diese Teilkompetenz ist der mathematische Kern von Modellierungsaufgaben, denn es ist der einzige Teilschritt, welcher sich rein mit dem mathematischen Aspekt der Fragestellung befasst. Hier finden Berechnungen und andere mathematische Operationen zur Lösung des mathematischen Modells statt.

5) **Interpretieren**: die durch Schritt 4 erhaltenen mathematischen Resultate werden nun wieder in die reale Welt übersetzt, wodurch nun eine erste Antwort auf die ursprüngliche Fragestellung gefunden wurde, man spricht von der Überführung von mathematischen zu realen Resultaten.

6) **Validieren**: da ein mathematisches bzw. reales Resultat alleine noch nicht auf Plausibilität geprüft wurde, dient dieser Schritt dazu, die berechneten Resultate kritisch zu hinterfragen, um herauszufinden, ob die Ergebnisse sinnvoll sind und in einem realistischen Rahmenbereich liegen. Erst nach der Validierung wird die Fragestellung beantwortet.

7) **Vermitteln**: im letzten Teilschritt des Modellierungskreislaufs geht es darum, die ermittelte Antwort auf die Fragestellung plausibel darzulegen, sodass sie nachvollziehbar ist auch ohne den exakten Modellierungsprozess zu durchlaufen.

Wie aus Abbildung 2 zu entnehmen ist, laufen die Schritte 1, 2, 6 und 7 vollständig im außermathematischen Bereich ab, während Schritt 4 der einzige rein mathematische Teilschritt ist. Von wesentlicher Bedeutung sind auch die Schritte 3 und 5, denn sie überführen die realen Sachverhalte in mathematische Modelle und umgekehrt mathematische Resultate in reale Ergebnisse. Diese Kreislauf-Darstellung ist jedoch als idealisierter Prozess zu verstehen, der in den meisten Fällen nicht exakt so verläuft, denn je nach Fragestellung wird der Zyklus mehrmals durchlaufen bzw. Teilschritte nicht genau in der Reihenfolge bearbeitet (Blum, 2007, S. 4-7). Dennoch bietet der Modellierungskreislauf einen guten Anhaltspunkt für eine geeignete Vorgangsweise bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben und kann somit Lehrpersonen sowie SchülerInnen unterstützen.

Gerade in der Sekundarstufe 1 ist es jedoch wenig zielführend, den SchülerInnen genau diese Darstellung des Modellierungskreislaufes näherzubringen, da die Darstellung in sich selbst bereits ein nicht zu unterschätzendes Maß an Komplexität aufweist. Daher wurde eine vereinfachte Version des Kreislaufs von Blum (2006, S. 21) aufgestellt, welche den Modellierungsprozess in vier Teilschritten beschreibt (siehe Abbildung 3).

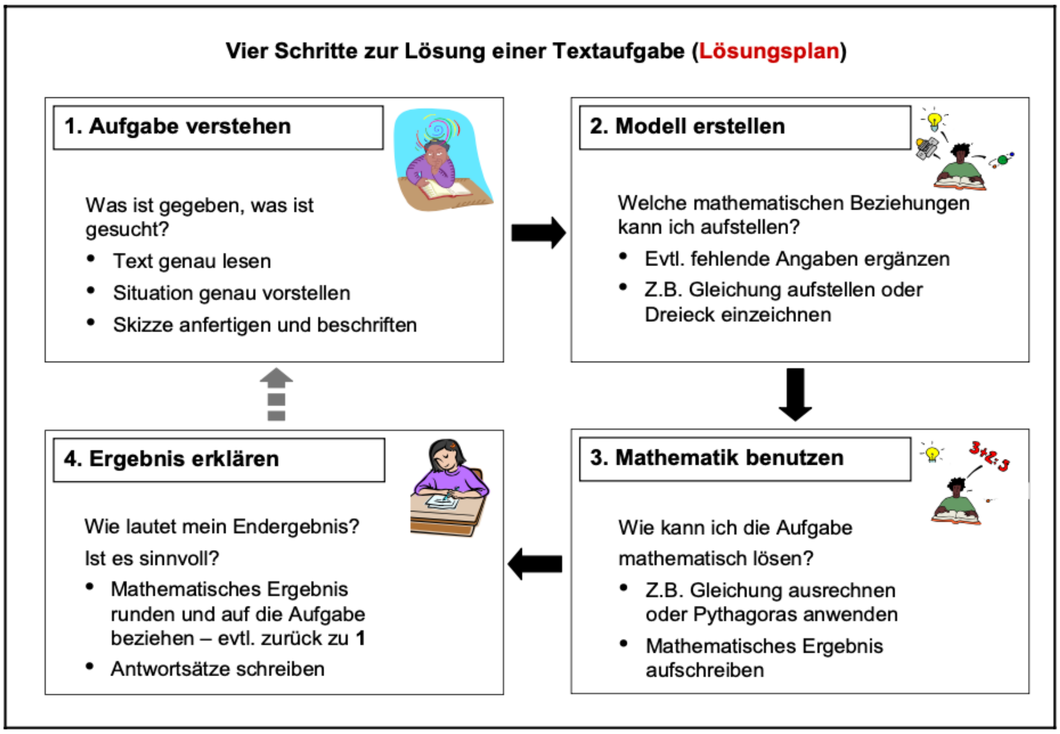


Abbildung 3: Vereinfachter Modellierungskreislauf (Blum, 2006, S. 21)

Diese vereinfachte Version verzichtet auf fachliche Begriffe und fokussiert sich stattdessen in kurzen Stichworten und Fragen auf die wesentlichen Kernbereiche des Modellierungsprozesses. Somit eignet sie sich für die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit SchülerInnen der Sekundarstufe 1 besonders gut.

3 Fermi-Aufgaben

In diesem Kapitel wird der Begriff Fermi-Aufgaben definiert, die verschiedenen Arten beschrieben sowie deren Aufgaben und Einsatzbereiche im Mathematikunterricht erläutert.

3.1 Was sind Fermi-Aufgaben

Fermi-Aufgaben sind definiert als unterbestimmte Modellierungsaufgaben, bei welchen ein klarer Endzustand vorliegt, der Anfangszustand sowie die Transformation jedoch unklar sind (Büchter et al., 2019, S.21; Greefrath, 2010, S.80). Auf den ersten Blick scheinen Fermi-Aufgaben unlösbar, da vermeintlich zu wenig Informationen vorliegen. Durch Zerlegen der Fragestellung in kleinere Teilaufgaben lässt sich jedoch durch sinnvolle und realistische Abschätzungen von unbekannten Größen sowie durch die geschickte Anwendung von Allgemeinwissen eine Lösung für das Problem finden (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.26; Seiwald, 2016, S.2). Fermi-Aufgaben sind nach dem italienischen Physiker Enrico Fermi (1901–1954) benannt. Eine seiner bedeutenden Leistungen war seine Fähigkeit, besonders schnelle – und dennoch genaue – Abschätzungen zu tätigen. Besonders bekannt ist seine Abschätzung der Anzahl an Klavierstimmern in Chicago. Denn die Frage „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ ist das Paradebeispiel des von ihm geprägten Begriffs der Fermi-Aufgaben. Zunächst scheint es, als könnte diese Frage nur durch Raten beantwortet werden, denn es liegen keinerlei Zahlenwerte als Information vor. Fermi verwendete allerdings das allgemeine Wissen der Einwohnerzahl von Chicago und tätigte basierend darauf einige der folgenden Abschätzungen (Krinninger, 2015, S.3):

- Wie viele Haushalte haben ein Klavier zuhause?
- Wie lange dauert das Stimmen eines Klaviers?
- Wie viele Klavierstimmer braucht es, damit alle Klaviere innerhalb eines Jahres gestimmt werden können?

Seine Berechnung beruhte auf der Annahme, dass die Anzahl der Klavierstimmer sich am Bedarf richtete, sodass jeder Klavierstimmer seiner Tätigkeit hauptberuflich nachging. Das auf diesen Annahmen und Berechnungen basierende Ergebnis von Fermi mit rund 120

Klavierstimmern war verblüffend nahe an der im Branchenverzeichnis vermerkten Anzahl der Klavierstimmer (95 Stimmer) (Krinninger, 2015, S.3).

Charakteristisch für Fermi-Aufgaben sind kurze Textangaben, welche nur aus einer einzigen Frage bestehen. Die Fragestellung per se ist stets wohldefiniert, sodass Klarheit über den Erwartungshorizont der gesuchten Antwort herrscht. Außerdem weisen Fermi-Aufgaben meist einen direkten Bezug zur Realität auf. Das bedeutet, dass die Fragestellungen sich auf Themen aus dem Alltag beziehen (Seiwald, 2016, S.2). Ein Beispiel für eine Fermi-Aufgabe mit Bezug zum Alltagsleben ist Folgende: „Wie viele Pizzen werden in Wien pro Jahr bestellt?“ (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.26). Auch hier ist die Fragestellung klar definiert und die Frage selbst hat für alle Personen, die in Wien leben und gelegentlich Pizza bestellen einen Realitätsbezug. Es muss natürlich an dieser Stelle ehrlich gesagt werden, dass die Relevanz dieser und vieler weiterer Fragestellungen von Fermi-Aufgaben nicht überbewertet werden darf und soll, denn die Information über die Anzahl der bestellten Pizzen in Wien wird für niemanden eine wirklich bedeutende Rolle in deren Leben spielen. Dennoch knüpfen die Fragestellungen an alltägliche Situationen an und sollen die Neugier für den Prozess des Problemlösens wecken. Fermi-Aufgaben eignen sich als abgegrenzte, kleine und in ihrer Komplexität überschaubare Modellierungsaufgaben hervorragend, um den SchülerInnen Modellieren und Problemlösen niederschwellig näherzubringen (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.26). Fermi-Aufgaben sollen die Verknüpfungen von mathematischen Inhalten und der Welt, wie man sie im Alltag wahrnimmt, darstellen. Sie sollen dabei die Neugier wecken, über Fragen, die man sich so womöglich nie stellen würde, nachzudenken. Im Optimalfall ergeben sich daraus noch weiterführende Fragen oder ein Bezug zu Themen, die gesellschaftlich wirklich relevant sind (Greefrath, 2010, S.81). Der Kern dieser Aufgaben ist der Gedankenprozess, der zur Beantwortung der Fragestellung durchlaufen wird (Seiwald, 2016, S.2f). Schon für Enrico Fermi lag der Fokus bei diesen Aufgaben nicht auf der stumpfen Anwendung von gelernten Formeln und Rechenvorgängen. Vielmehr ging und geht es darum, Mathematik als Instrument für Abschätzungen und Herleitungen zu verwenden, um zeitsparend und effektiv mit Fragestellungen und Problemen umzugehen (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.26). Daher wird der Umgang mit Fermi-Aufgaben in der Literatur auch als Fermi-Methode bezeichnet, bei welcher Fragestellungen durch die Anwendung von Alltagswissen und Abschätzungen beantwortet werden (Krinninger, 2015, S.3; Seiwald, 2016, S.2). Im Unterschied zu eingekleideten Textaufgaben ist bei der Fermi-Methode ein Durchlaufen mehrerer Schritte des Modellierungskreislaufs notwendig, wodurch diese Aufgaben das kritische Auseinandersetzen mit Fragestellungen unter Anwendung von geeigneten mathematischen Operationen und Abschätzungen anregen. Daher stellen Fermi-Aufgaben für SchülerInnen zwar eine kognitive Herausforderung dar, welche jedoch durch die Offenheit der Lösungsfindung kreativen Spielraum bietet und motivieren soll, mithilfe von grundlegender Mathematik kontextbezogene Fragen aus dem Alltag zu beantworten (Greefrath & Frenken, 2021, S. 56).

Wie bereits erwähnt kennzeichnen sich Fermi-Aufgaben durch den Bezug zur Realität im weiteren Sinne. Dennoch spielt die Relevanz für die SchülerInnen eine bedeutende Rolle bei der Auswahl von Fermi-Aufgaben für den Unterricht. Büchter et al. bezeichnen eine Aufgabe als relevant, „wenn sie für das aktuelle oder zukünftige Leben von Lernenden wichtig ist" (2019, S.24). Eine unmittelbar für die SchülerInnen relevante Aufgabenstellung wird als schülerrelevant bezeichnet, eine für das spätere Leben relevante Fragestellung als lebensrelevant (Büchter et al., 2019, S.24). Demnach ist es sinnvoll, beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben im Unterricht zunächst Fragestellungen mit Schülerrelevanz auszuwählen, um das Interesse herzustellen und durch die Nähe zum Thema die Bereitschaft, sich auf die Fragestellung einzulassen, zu erhöhen. Gleichzeitig ist jedoch ein ehrlicher Umgang mit den Grenzen von Fermi-Aufgaben notwendig, um SchülerInnen den wahren Zweck dieser Fragestellungen näherzubringen. Es sollte daher offen kommuniziert werden, dass die Beantwortung der Fragestellung keine neuen mathematischen Erkenntnisse bringt, sondern vielmehr eine Methode darstellt, um die Fähigkeit des Problemlösens, kritischen Denkens und sinnvollen Abschätzens zu trainieren – Fähigkeiten, die im alltäglichen Leben von großer Bedeutung sind (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.27).

3.2 Arten von Fermi-Aufgaben

Innerhalb der Fermi-Aufgaben kann unterschieden werden zwischen Fermi-Aufgaben im ursprünglichen Sinne und jenen im weiteren Sinne (Büchter et al., 2019, S. 22).

Unter Fermi-Aufgaben im ursprünglichen Sinne versteht man Aufgaben wie die berühmte Frage nach der Anzahl der Klavierstimmer in Chicago. Es handelt sich also um Aufgaben bestehend aus ausschließlich einer Frage, welche durch mehrfache Abschätzungen oder die Verwendung von Alltagswissen gelöst werden können (Greefrath & Frenken, 2021, S. 57-58). Diese Fragestellungen rücken besonders die Modellierungsschritte des Vereinfachens und Validierens in den Mittelpunkt. Weiters wird die Überführung des realen Modells in ein mathematisches Modell (Mathematisieren) trainiert. Daher bieten Fermi-Aufgaben im ursprünglichen Sinne eine besonders gute Übung für das Arbeiten mit Ungenauigkeiten und das sinnvolle Schätzen von Größen (Greefrath, 2010, S. 81). Es können zwei verschiedene Arten von Aufgabenstellungen unter dem Begriff der Fermi-Aufgaben im ursprünglichen Sinne zusammengefasst werden (Büchter et al., 2010a, S.8; Greefrath, 2010, S.81):

- Schätzen und Überschlagen von Größen und Anzahlen
- Gewinnen fehlender Daten aus Annahmen/Alltagswissen

Fermi-Aufgaben im weiteren Sinne bestehen ebenfalls aus einer Fragestellung, bei welcher abgesehen vom Abschätzen von Größen „außerdem das Recherchieren und Experimentieren sowie das Finden verschiedener Wege in den Mittelpunkt gestellt werden [kann]“ (Greefrath, 2010, S.81). Hier spielt das Recherchieren von Informationen und der Umgang mit Daten eine besonders bedeutende Rolle (Büchter et al., 2019, S.22). Weiters kommen bei diesen Aufgabenstellungen häufig Abbildungen zum Einsatz, welche zunächst die Aufmerksamkeit für die Aufgabe erregen soll. In weiterer Folge erweisen sich diese Abbildungen als besonders nützlich für geometrische Abschätzungen und Vergleiche (Filler et al., 2023, S.63-64). Es kann wiederum in die folgenden sechs verschiedenen Typen von Fermi-Aufgaben im weiteren Sinne unterschieden werden (Büchter et al., 2010a, S.8; Greefrath, 2010, S.81):

- Veranschaulichung gegebener Größen und Anzahlen
- Schätzen und Überschlagen sowie Veranschaulichen
- Bestimmen von Daten aus Abbildungen
- Bestimmen fehlender Daten durch Messung/Experiment
- Recherchieren von Daten
- Experimentelles Überprüfen

Es ist jedoch abseits von dieser Klassifizierung auch gebräuchlich, Fermi-Aufgaben im weiteren Sinne als Synonym für alle offenen Aufgabenstellungen mit lediglich einer Frage als Angabe zu verwenden (Greefrath, 2010, S.81).

Wie bereits eindrücklich erwähnt stellt das Schätzen von Größen eine Kernkompetenz zum Bearbeiten von Fermi-Aufgaben dar. An dieser Stelle ist es daher noch wichtig, die Bedeutung des Schätzens kurz zu erläutern. Im Unterschied zum willkürlichen und wahllosen Raten, wird beim Schätzen von Größen ein Gedankenprozess durchlaufen, der von logischem und durchdachtem Schlussfolgern basierend auf bereits bekannten Referenzgrößen gekennzeichnet ist. Eine grundlegende Kompetenz zur Beantwortung dieser Fermi-Aufgaben ist es, die unbekannten gesuchten Größen mithilfe der Referenzgrößen abzuschätzen und in Verbindung zu bringen. Hierbei gibt es wieder verschiedene Komplexitätsstufen, welche abhängig von der Geläufigkeit und dem Vorstellungsvermögen der gesuchten Größen ist. So ist es für SchülerInnen wahrscheinlich einfacher, Längenmaße abzuschätzen als das Volumen oder Gewicht von unbekannten Objekten, da der Umgang mit Längenmaßen bereits früh in der mathematischen Ausbildung erlernt wird und im Unterricht immer wiederkehrend vorkommt. Je nach Aufgabenstellung ist die abzuschätzende Größe entweder nur als Gedankenprozess eingebettet in einer Fragestellung dargestellt (Fermi-Aufgabe im ursprünglichen Sinne) oder als Abbildung sowie Objekt in Verbindung mit einer Fragestellung dargestellt (Fermi-Aufgabe im weiteren Sinne) (Büchter et al., 2019, S.25-26).

3.3 Aufgaben von Fermi-Aufgaben

Im Folgenden werden zwei wichtige Aufgaben von Fermi-Aufgaben im Kontext des Mathematikunterrichts erläutert.

Die ursprüngliche von Enrico Fermi verwendete Begründung für das Bearbeiten von Fermi-Aufgaben (siehe Kapitel 3.1) stellte bereits die Bedeutung der geschickten Anwendung von mathematischen Operationen zum Herleiten und Abschätzen von Größen in den Vordergrund (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.26). Auch im Schulkontext des 21. Jahrhunderts ist diese geschickte Anwendung von Mathematik für Herleitungen und Abschätzungen von großer Relevanz, da dies Fähigkeiten sind, die das logische und selbstständige Denken anregen und den Problemlöseprozess in den Vordergrund stellen (Abay & Filiz, 2020, S. 269-270). Humenberger (o.J., S.50) spricht in diesem Zusammenhang von einer gewünschten „Akzentverschiebung“ im Mathematikunterricht, was bedeutet, dass reine Rechenaufgaben, die nach einem vorgegebenen Schema zu lösen sind, in den Hintergrund rücken sollen und mehr Platz für Aufgaben mit starker Prozessorientierung im Mathematikunterricht geschaffen werden soll. Diese Prozessorientierung soll sich über alle Schulstufen erstrecken, was ein – teilweise bereits stattgefundenes – Umdenken in der Aufgabenkultur im Unterricht erforderlich macht. Fermi-Aufgaben als unterbestimmte Modellierungsaufgaben eignen sich dabei hervorragend, um den SchülerInnen prozessorientiertes Arbeiten im Zusammenhang mit mathematischen Aufgaben näherzubringen (Humenberger, o.J., S.50). Das Ziel dieser Prozessorientierung ist es, die Aufgabe zu verstehen, einen geeigneten Weg für die Bearbeitung der Aufgabe zu finden, den Prozess über mehrere Schritte zu bearbeiten und schlussendlich die gewählte Methode zu reflektieren und evaluieren (Humenberger & Bracke, 2017, S.108).

Neben dem Trainieren der Prozessorientierung ist eine weitere Aufgabe von Fermi-Aufgaben das Entwickeln bzw. Vertiefen der im neuen Lehrplan verankerten Kompetenz *K1: Modellieren und Problemlösen* (Lehrplan, 2024; Högen & Krausl, 2023). Fermi-Aufgaben regen dazu an, selbstständige Lösungswege zu finden, die Fragestellung in Teilschritte zu zerlegen und Alltagswissen oder bekannte Stützpunktvorstellungen sinnvoll anzuwenden (Eilerts & Skutella, 2018, S.33f). Es werden daher beim Lösen von Fermi-Aufgaben intuitiv und ohne große Überlegungen zumindest einige Modellierungsschritte des Kreislaufs nach Blum & Leiss durchlaufen (Blum, 2006, S.9). Außerdem werden die SchülerInnen beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben dazu ermutigt, ihre eigenen Argumente und Ideen einzubringen und über die Wahl der mathematischen Möglichkeiten zu diskutieren. Ein wichtiger Schritt dabei ist das Verschriftlichen des Lösungsweges, damit auch andere SchülerInnen nachvollziehen können, auf welche Weise an die Aufgabenstellung herangegangen wurde. Fermi-Aufgaben erfüllen inhaltlich die Aufgabe, SchülerInnen dazu anzuregen, sich bereits gelernte mathematische Strukturen in Erinnerung zu rufen und diese passend auf die Fragestellung anzuwenden. Dadurch werden mathematische Inhalte für SchülerInnen für realitätsnahe oder alltägliche Situation abseits von klassischen Schulbuchaufgaben anwendbar und erfahren somit eine neue Form der Brauchbarkeit. Durch den Umgang mit Fermi-Aufgaben werden also sowohl allgemeine mathematische als auch inhaltliche mathematische Kompetenzen von SchülerInnen gestärkt (Eilerts & Skutella, 2018, S.33f).

3.4 Einsatz von Fermi-Aufgaben im Unterricht

In diesem Kapitel wird zunächst die Einbettung von Fermi-Aufgaben in die vom Lehrplan festgelegten Lerninhalte und -ziele erläutert und danach die organisatorische Umsetzung im Unterricht thematisiert. Abschließend wird die Aufgabe der Lehrperson beim Einführen und Bearbeiten von Fermi-Aufgaben im Unterricht beschrieben.

3.4.1 Lehrplanbezug mit Beispielen

Da die Themen für Fermi-Aufgaben vielfältig sind, werden mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen verschiedene zentrale fachliche Konzepte und Kompetenzbereiche aus dem neuen Lehrplan abgedeckt (Lehrplan, 2024; Högen & Krausl, 2023). In der folgenden Tabelle werden für jedes zentrale fachliche Konzept zwei beispielhafte Fermi-Aufgaben aufgezählt (direkt zitiert aus Büchter et al., 2010b; Düringer, 2015a und Düringer, 2015b).

Z1: Zahlen und Maße
• Wie viele Stunden (Tage, Wochen, Monate, Jahre) hast du in deinem Leben schon… - vor dem Fernseher verbracht? - dir die Zähne geputzt? - Hausaufgaben gemacht? - geschlafen? - vor dem Computer gesessen? (Büchter et al., 2010b, Karte A4) • Wie viele Autos stehen in einem sechs Kilometer langen Stau? (Büchter et al., 2010b, Karte D4)
Z2: Variablen und Funktionen
• Wie oft blinzelst du an einem Schultag? (Düringer, 2015a, Aufgabe 7) • Wie groß wäre wohl eine Person, die solch einen großen Mund hätte? (Büchter et al., 2010b, Karte B10)

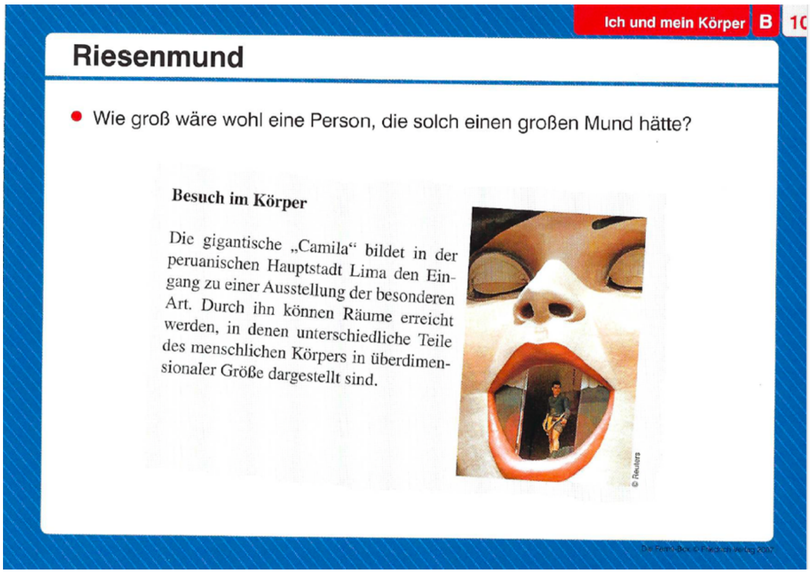


Abbildung 4: Riesenmund (Büchter et al., 2010b, Karte B10)

Z3: Figuren und Körper

- Wie groß ist die Oberfläche deiner Haut? (Büchter et al., 2010b, Karte B5)
- Das Flusspferdbaby im Bild wiegt 140kg und ist 1,20m lang. Wie schwer ist wohl die Mutter? (Büchter et al., 2010b, Karte C5)

Abbildung 5: Flusspferd (Büchter et al., 2010, Karte C5)

Z4: Daten und Zufall
• Viele Kinder haben Geschwister, manche sind aber auch Einzelkinder. Wie viele Zwillinge gibt es in deiner Stadt? (Düringer, 2015b, Aufgabe 9) • Wie viele Menschen deiner Stadt arbeiten am Wochenende (Samstag und Sonntag)? (Düringer, 2015b, Aufgabe 13)

Tabelle 3: Beispiele von Fermi-Aufgaben eingeteilt nach zentralen fachlichen Konzepten (Lehrplan, 2024)

Die Zuteilung der gewählten Aufgaben zu einem zentralen fachlichen Konzept ist gewiss gut nachvollziehbar, sie ist aber sicher nicht eindeutig, da die tatsächlich gewählten mathematischen Inhalte von den BearbeiterInnen der Fragestellung und der gewählten Methode abhängen. Außerdem gibt es auch Fermi-Aufgaben, die sich grundsätzlich nicht einem zentralen fachlichen Konzept zuteilen lassen, da sich bereits in der Fragestellung verschiedene Inhalte wiederfinden (Büchter et al., 2019, S.22).

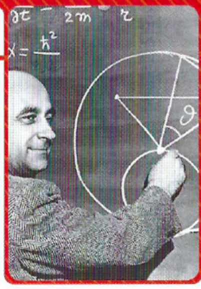
In Bezug auf die Kompetenzbereiche finden sich ebenfalls Fermi-Aufgaben für jeden Bereich. Nachdem es sich bei Fermi-Aufgaben allgemein um unterbestimmte Modellierungsaufgaben handelt, fallen alle Fragestellungen in den Kompetenzbereich *K1: Modellieren und Problemlösen*. Obwohl bei Fermi-Aufgaben dem Ergebnis per se im Sinne der Prozessorientierung nicht die größte Bedeutung zukommt, wird dennoch mit Schätzgrößen oder ermittelten Daten in weiterer Folge gerechnet, wodurch der Kompetenzbereich *K2: Operieren* erfüllt wird. Unter *K3: Darstellen und Interpretieren* fallen alle Fermi-Aufgaben, bei welchen inner- und außermathematische Sachverhalte beschrieben und im Kontext gedeutet werden (Lehrplan, 2024). Demnach wird diese Kompetenz bei der Bearbeitung aller Fermi-Aufgaben trainiert, solange die Bearbeitung der Fragestellungen mit Erklärungen zur Vorgangsweise, Argumentationen und Diskussion – entweder verbal oder schriftlich – einhergeht. Ähnlich dazu lässt sich der vierte Kompetenzbereich *K4: Vermuten und Begründen* mit allen Fermi-Aufgaben entwickeln bzw. trainieren, wenn im Unterricht Raum zum Aufstellen von Vermutungen zu einer Fragestellung und zum Aussprechen und Evaluieren von Begründungen gegeben wird (Lehrplan, 2024).

3.4.2 Umsetzung im Unterricht

Fermi-Aufgaben können aufgrund ihrer Offenheit bei der Wahl der verwendeten mathematischen Mittel in allen Schulstufen auf unterschiedlichen Komplexitätsniveaus bearbeitet werden. Diese leichte Zugänglichkeit und der universelle Einsatz sind charakteristische Merkmale von Fermi-Aufgaben (Ferrando & Albarracín, 2021). Dennoch stellt sich immer wieder die Frage, ob Modellierungsaufgaben – und somit auch Fermi-Aufgaben – im Unterricht zu schwierig für SchülerInnen sind, denn Studien belegen, dass nicht nur die Schwierigkeit im Umgang mit diesen „andersartigen" Fragestellungen, sondern tatsächlich die damit einhergehenden kognitiven Herausforderungen zur Bewältigung der Transformation solcher Aufgaben die größten Hürden beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben darstellen (Blum, 2006, S.13-14; Blum, 2007, S.5).

Für die erfolgreiche Bewältigung von Fermi-Aufgaben sind daher einige Faktoren zu berücksichtigen. Zunächst muss den SchülerInnen erklärt werden, was Fermi-Aufgaben sind und welches Ziel sie verfolgen. Dafür eignen sich kurze Erklärvideos, wie zum Beispiel jenes von Fisch (2020) oder auch die Einführungskarten in der Fermi-Box (Büchter et al., 2010b), welche in den Abbildungen 6, 7 und 8 dargestellt sind. Dadurch bekommen die SchülerInnen einen ersten Überblick über den Aufgabentyp, mögliche Lösungswege und den Erwartungshorizont beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben.

Herr Fermi und seine Fragen



Hallo!

Könnt ihr sagen, wie viele Zahnärzte es in Deutschland gibt?
1 000? 10 000? Oder eher 100 000?

„Woher soll ich das wissen?“, werdet ihr vielleicht fragen.
Dann geht es euch wie den Studenten des Physikers Enrico Fermi. Der hat ihnen oft solche Fragen gestellt, damit sie lernen, wie man mit eigenen Überlegungen eine Antwort findet.

„Wozu soll ich das wissen?“ Stellt euch vor, ihr wollt eine Broschüre über eine neue Zahncreme für alle Zahnarztpraxen drucken. Wie könnt ihr denn herausfinden, wie viele das sind? Wie Antje und Lars die Aufgabe gelöst haben, findet ihr hier auf der Rückseite.

Auf den Karten in dieser Box findet ihr viele, ganz unterschiedliche „Fermi-Fragen“ – sie stammen aus verschiedenen Bereichen, sind manchmal etwas verrückt und lassen einen auch mal staunen.

Viel Spaß bei der Arbeit mit den Fermi-Fragen!

Herr Fermi und seine Fragen

- „Wie viele Zahnärzte gibt es in Deutschland?“

Antje und Lars haben erst einmal weitere Fragen gestellt, die nützlich sein könnten:
Wie viele Menschen gehen in Deutschland zum Zahnarzt? Etwa 80 000 000.
- Wie oft geht jeder? 1- bis 2-mal im Jahr, einige gar nicht, einige viel öfter.
- Wie lange dauert ein Termin etwa? Im Schnitt ½ Stunde.
- Wie viele Stunden arbeitet ein Zahnarzt in der Woche? 35 Stunden, oder mehr.
- Wie viele Arbeitswochen hat er? Bei 6 Wochen Urlaub etwa 45 Wochen im Jahr.

Sie haben gerechnet und dabei überschlagen und gerundet.
- Man benötigt also etwa $80\,000\,000 \cdot \frac{1}{2} = 40\,000\,000$ Zahnarztstunden.
- Jeder Zahnarzt arbeitet etwa $35 \cdot 45 \approx 40 \cdot 40 = 1\,600$ Stunden.
- Das können $40\,000\,000 : 1\,600 = 400\,000 : (4 \cdot 4) \approx 25\,000$ Zahnärzte bewältigen.

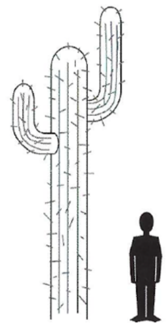
Dann haben sie gemerkt, dass sie das ja auch nachschauen können:
- Kann das sein? Was würde das für eine Großstadt bedeuten?
  Essen mit 800 000 Einwohnern hätte also $25\,000 : 100 = 250$ Zahnärzte.
  Ein Blick ins Telefonbuch liefert mehr als 300 Zahnärzte.

Schließlich haben sie noch einmal über ihre Lösung nachgedacht:
- Was wäre unter anderen Annahmen herausgekommen?

Abbildung 6: Herr Fermi und seine Fragen (Büchter et al., 2010b, Karte "Herr Fermi und seine Fragen")

Klein und groß

Den Maßstab ermitteln
Wie groß ist der Kaktus in Wirklichkeit?



Im Vergleich zu dem Mann daneben kannst du seine Höhe ungefähr abschätzen. Hier ist der Mann die „Messlatte".
Ein erwachsener Mann ist durchschnittlich 180 cm groß.
Wievielmal so groß ist der Mann im Bild in Wirklichkeit?
Wievielmal so hoch ist dann der Kaktus?
Welchen Maßstab könnt ihr dann unter die Abbildung schreiben?

Der **Maßstab** 1 : 200 („eins zu zweihundert") besagt:
Das, was man in der Abbildung ausmisst, ist in Wirklichkeit 200-mal so hoch, so lang, so breit, so groß …

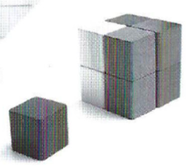
Größen umrechnen
Ihr messt in der Abbildung in Zentimetern (cm) und bekommt daher auch cm heraus.
Wenn ihr die Größe in Metern (m) wissen wollt, müsst ihr umrechnen:
1 m = 100 cm und 100 cm = 1 m.
In der Zeichnung ist der Kaktus 5 cm hoch. In Wirklichkeit ist er 100-mal so groß:
5 cm · 100 = 500 cm. Und in Metern? 500 : 100 = 5. Der Kaktus ist also 5 m hoch.

Klein und groß

Was passiert, wenn …?
Oft ist es so: Wenn eine Tüte Gummibärchen 1,19 € kosten, dann kosten 2 Tüten 2,38 €, eben das Doppelte. Dieses einfache Rezept passt aber nicht immer.

Wenn du eine Postkarte oder eine Raute nimmst und alle Seiten verdoppelst, was passiert dann mit dem Flächeninhalt?

Verdoppeln der Längen → Der Flächeninhalt wird viermal so groß!



Wenn du einen Quader nimmst und alle Kantenlängen verdoppelst, was passiert dann mit der Oberfläche?

Verdoppeln der Kantenlängen → Die Oberflächeninhalt wird viermal so groß!

Und wie ist das mit dem Volumen und mit dem Gewicht?

Verdoppeln der Kantenlängen → Das Volumen wird achtmal so groß, und der Körper wird achtmal so schwer.

Abbildung 7: Klein und groß (Büchter et al., 2010b, Karte "Klein und groß")

Antworten finden

Du kannst auf vielen Wegen zu der Lösung einer Fermi-Aufgabe kommen.
Diese Fragen können dir beim Finden einer guten Strategie helfen:

- Worum geht es? Was will ich herausfinden?
- Was muss ich wissen, um eine Antwort zu bekommen?
- Was weiß ich schon, was noch nicht?
- Was kann ich schätzen? Was kann ich zählen oder messen? Was kann ich berechnen?*
- Welche Annahmen kann ich treffen? Welche sind plausibel, welche nicht?
- An welche Ausnahmen muss ich denken? Was gilt nur für eine bestimmte Zeit, an einem bestimmten Ort, für bestimmte Personen, …?
- Was ist eine sinnvolle Durchschnittsgröße? (Wie ist zum Beispiel die durchschnittliche Schuhgröße in eurer Klasse?)
- Mit welchen kleinen Schritten kann ich mich der Lösung nähern? (Zum Beispiel überlege ich zuerst, wie viele Haare auf einem Quadratzentimeter Kopfhaut sind, dann erst denke ich an die gesamte Fläche.)
- Gibt es gute Vergleiche?
- Was passiert mit dem Ergebnis, wenn ich meine Annahmen verändere?

* (Siehe auch die Karte „Messen – Schätzen – Rechnen".)

Antworten beurteilen und vergleichen

Wenn du die Lösung einer Fermi-Aufgabe beurteilen möchtest oder verbessern willst, können dir folgende Fragen weiterhelfen:

- Wie bin ich oder ist jemand anders bei der Lösung vorgegangen? Was finde ich bei diesem Vorgehen sinnvoll, was nicht?
- Welche Annahmen wurden getroffen? Welche Annahmen finde ich sinnvoll, welche nicht?
- Wurde ein Umstand oder ein Aspekt vergessen?
- Gelten die Annahmen immer, oder gibt es Einschränkungen?
- Welche Werte wurden geschätzt? Welche wurden berechnet?
- Wie genau ist das Ergebnis? Würde ich anders rechnen oder schätzen?
- Finde ich vielleicht Rechenfehler? Wurden die richtigen Einheiten eingesetzt und umgerechnet?
- Wurden die richtigen Vergleichsgrößen herangezogen? (Ist zum Beispiel die gesuchte Größe so groß wie ein Blatt Papier, ein Fußballplatz, ein Reiskorn, …?) Gibt es bessere Vergleichsgrößen?

Abbildung 8: Antworten finden (Büchter et al., 2010b, Karte "Antworten finden")

Beim ersten Kontakt mit Fermi-Aufgaben benötigen SchülerInnen egal welcher Alters- und Schulstufe Unterstützung, denn es handelt sich um eine von den geläufigen Schulbuchaufgaben abweichende Aufgabenstellung. Diese bereits erwähnte Akzentverschiebung in Richtung Prozessorientierung muss den SchülerInnen kommuniziert und mit ihnen geübt werden (Humenberger, o.J., S.50). Dafür sollen die SchülerInnen mit dem Modellierungskreislauf und seinen Teil-Kompetenzen vertraut gemacht werden. Je nach geistiger Reife kann dafür der vollständige Modellierungskreislauf nach Blum & Leiss (Blum, 2006, S.9) oder die vereinfachte Variante mit vier Schritten verwendet werden (Blum, 2006, S.

21), siehe Kapitel 2.3. Beobachtungen von Blum (2007, S.7-8) zeigen, dass die Zuhilfenahme des Modellierungskreislaufes SchülerInnen vielfach bei Schwierigkeiten weitergeholfen hat, wobei der Modellierungskreislauf teils selbstständig als Unterstützungsmöglichkeit in Erwägung gezogen wurde und teils von der Lehrperson vorgeschlagen wurde.

Nachdem die SchülerInnen mit dem Grundprinzip von Fermi-Aufgaben vertraut gemacht wurden und bereits erste Aufgaben gemeinsam besprochen bzw. erarbeitet haben, ist ein weiterer Faktor für die erfolgreiche Umsetzung im Unterricht, dass – ähnlich wie in allen anderen Unterrichtsstunden auch – „stets die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung gewährt werden [soll]“ (Blum, 2007, S.7). Werden SchülerInnen mit der Fragestellung völlig allein gelassen, machen sich Überforderung und Frustration breit. Bekommen sie jedoch auf jede Frage sofort einen Lösungsvorschlag präsentiert, besteht keine Notwendigkeit, selbstständig zu denken und die Aufgabe auf ihre eigene Weise zu lösen (Blum, 2006, S.13-14). Dass die Bewahrung dieser Balance auch für Lehrpersonen eine große Herausforderung darstellt, wird in Kapitel 3.4.3 erläutert.

Ein erschwerender Faktor bei dem Bestreben nach selbstständigkeitserhaltendem Arbeiten ist die Tatsache, dass SchülerInnen große Schwierigkeiten haben, bewusst Problemlösestrategien auszuwählen und auf die Fragestellung anzuwenden (siehe Tabelle 2). Daher sollten auch hier den SchülerInnen Strategien vorab erklärt sowie anhand eines Beispiels gemeinsam angewendet werden, damit diese auch in das aktive Handlungsrepertoire von SchülerInnen übergehen können (Blum, 2006, S.13-14; Greefrath, 2010, S. 64). Auch die sinnvolle Abschätzung von Größen und die Plausibilitätsprüfung des Endergebnisses („Kann das Ergebnis rein logisch überhaupt stimmen?“) stellen große Herausforderungen für SchülerInnen dar; es wirkt, als hätten sie keinen Bezug zu Größen im Allgemeinen (Blum, 2007, S.5).

Gerade zur Bewältigung dieser Schwierigkeiten ist eine qualitativ hochwertige Unterrichtsvorbereitung und -gestaltung mit fachlichem Mehrwert, kognitiver Herausforderung und dennoch realistischer Bewältigung sowie Schülerorientierung unabdingbar (Blum, 2006, S.14). Dies kann durch folgende Struktur der Unterrichtseinheit gefördert werden:

1. Gemeinsames Vorstellen der Fragestellung
2. Einzelarbeit
3. Gruppenarbeit
4. Verschriftlichen von Lösungen in Einzelarbeit
5. Präsentieren von Lösungen im Plenum
6. Vergleichen von Lösungen und Reflektieren (Blum, 2006, S.14).

Diese Struktur macht ersichtlich, dass es sinnvoll ist, zwischen verschiedenen Sozialformen zu wechseln, um sowohl die individuelle Auseinandersetzung mit der Fragestellung als auch das Darstellen und Interpretieren sowie Vermuten und Begründen miteinzubeziehen (Lehrplan, 2024). Durch den regelmäßigen Austausch mit verschiedenen Personen soll für SchülerInnen zum Vorschein kommen, dass Fermi-Aufgaben auf verschiedene Weisen gelöst werden können. Außerdem wird durch den selbst durchlaufenen Problemlöseprozess deutlich, dass möglicherweise neue mathematische Denkweisen zur Lösung der Fragestellung Anwendung gefunden haben und, dass der Lösungsprozess einem mehrmaligen Durchlaufen des Modellierungskreislaufs entspricht (Brunet-Biares & Albarracín, 2024, S.178).

Unter Berücksichtigung dieser erwähnten Faktoren und Unterrichtsplanungen bieten Fermi-Aufgaben vielfältige Möglichkeiten für unterschiedliche Anwendungszeitpunkte oder Lernziele im Mathematikunterricht. So können sie als Einstieg in ein neues Thema, zum Einüben oder Wiederholen von speziellen mathematischen oder kontextbezogenen Inhalten, zur Differenzierung des Unterrichts, als Freiarbeit (Wochenplan, Monatsplan), als Projektarbeit oder sogar für Supplierstunden eingesetzt werden – immer unter der Voraussetzung, dass die SchülerInnen mit dem Prinzip von Fermi-Aufgaben bereits vertraut sind (Krinninger, 2015, S.5).

Als Materialressource für verschiedene Fermi-Aufgaben stellt die **Fermi-Box** eine besonders praktische und kompakte Sammlung dar. Es handelt sich dabei um eine Box mit über 80 Karten, wobei sich auf jeder Karte eine Fermi-Aufgabe auf der Vorderseite und mehrere weiterführende Fragestellungen auf der Hinterseite befinden (Büchter et al., 2010b). Es gibt zwei unterschiedliche Versionen der Fermi-Box, eine für die Schulstufen 5 – 7 und eine andere für die Schulstufen 8 – 10. Da sich die Arbeit mit der Anwendung von Fermi-Aufgaben in der Sekundarstufe 1 beschäftigt, ist in weiterer Folge immer von der Fermi-Box für die Schulstufen 5 – 7 die Rede. Die Fragestellungen der Karten in der Fermi-Box sind unterteilt in acht verschiedene Themenbereiche (Büchter et al., 2010b):

A. Unsere Schule
B. Ich und mein Körper
C. Natur und Umwelt
D. Stadt/Land/Fluss
E. Wirtschaft und Technik
F. Berufe
G. Sport und Freizeit
H. Ah! Oh! – Kurioses

Anhand der acht Themenbereiche kann festgestellt werden, dass die Aufgabenstellungen aus Bereichen kommen, die einen Bezug zur Realität aufweisen (Seiwald, 2016, S.2). Außerdem ist die Bestrebung der Relevanz der Themenbereiche (Schülerrrelevanz und/oder Lebensrelevanz) ersichtlich (Büchter et al., 2019, S.24). Bei den Aufgabenstellungen handelt es sich um eine Mischung aus Fermi-Aufgaben im ursprünglichen Sinne und jenen im weiteren Sinne. Zusätzlich zu Abbildungen, die zur Beantwortung der Fragestellung notwendig sind, befinden sich auf einigen Karten auch kurze Ausschnitte von Zeitungsartikeln, Informationen zu realen Objekten sowie Beispielfotos (siehe Abbildung 9 und 10).

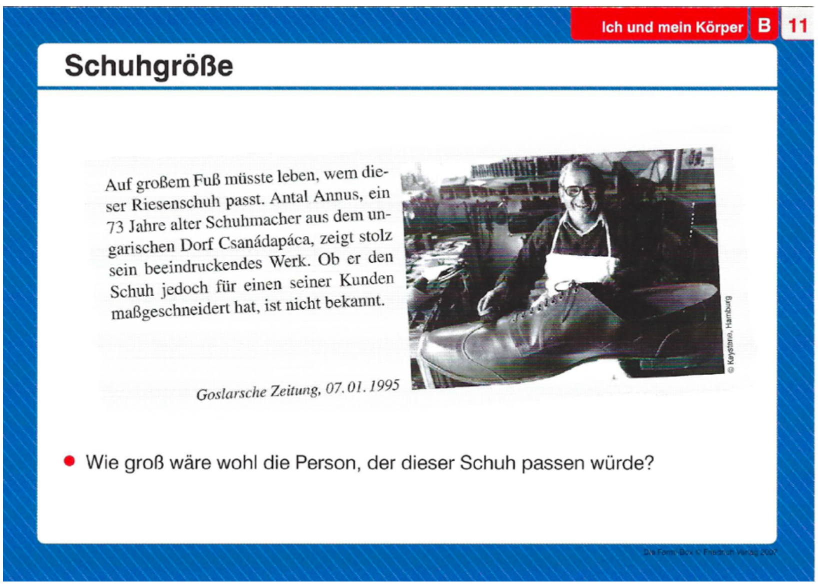


Abbildung 9: Schuhgröße (Büchter et al., 2010b., Karte B11)

Abbildung 10: Der Bodensee (Büchter et al., 2010b, Karte D3)

Da die Themen und Fragestellungen der Fermi-Box in den letzten 15 Jahren jedoch nicht aktualisiert wurden, könnte als möglicher Kritikpunkt genannt werden, dass die Relevanz und Aktualität einiger Fragestellungen für das aktuelle oder weiterführende Leben der SchülerInnen nicht mehr vollständig gegeben ist (Büchter et al., 2019, S.24). Diese Tatsache sollten Lehrpersonen beim Arbeiten mit der Fermi-Box im Hinterkopf haben, dies kann den SchülerInnen auch offen kommuniziert werden. Dennoch bietet die Fermi-Box eine Fülle an geeigneten Denkaufgaben, welche in weiterer Folge von der Lehrperson oder sogar den SchülerInnen abgeändert, weiterentwickelt oder als Denkanstoß für neue, vielleicht relevantere Fragestellungen dienen kann.

3.4.3 Aufgabe von Lehrpersonen

Die Arbeit und das Einwirken von Lehrpersonen spielen eine besonders bedeutende Rolle für den Erfolg bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht. Als erster Erfolgsindikator ist es unumgänglich, dass Lehrpersonen sich in ihrer Laufbahn bereits selbst mit Fermi-Aufgaben auseinandergesetzt haben, also selbst in der Position waren, Lösungsstrategien für Fragestellungen zu finden (Humenberger & Bracke, 2017, S.107). Des Weiteren sollten sich Lehrpersonen daran halten, dass Interventionen „der Situation und Gruppe angepasst, also **individuell**, nur **minimal** […] [und] möglichst

selbstständigkeitserhaltend [sind]“ (Humenberger & Bracke, 2017, S.111). Für diese Balance zwischen dem Unterstützen, Motivieren und Hinweisen ohne im selben Atemzug direkt zu einer vorgegebenen Lösungsstrategie zu verweisen bedarf es großem Geschick der Lehrperson. Das Ziel muss immer sein, dass SchülerInnen ihre eigenen Problemlösestrategien ausarbeiten und verfolgen können und nicht die von der Lehrperson präferierte Lösungsvariante aufgezwungen bekommen, denn dadurch verlieren die Aufgaben völlig den Modellierungscharakter und sind gleich zu bewerten wie eingekleidete Rechenaufgaben (Blum, 2006, S.18-19; Humenberger & Bracke, 2017, S.111). Um diese Fähigkeit zu erlangen, sollten sich Lehrpersonen mit Möglichkeiten für Interventionen, welche nur strategische und keine inhaltlichen Informationen liefern, auseinandersetzen, sich bewusstwerden, was es bedeutet, selbstständigkeitserhaltend in den Arbeitsprozess von SchülerInnen zu intervenieren und sich stets am Modellierungskreislauf in der im Unterricht verwendeten Version zu orientieren. Dies kann durch Schulungen, Fortbildungen sowie Selbststudium entwickelt und trainiert werden (Blum, 2006, S.18-19). Durch dieses Bewusstwerden der Rolle als Lehrperson wird es erst möglich, dass der eigene Lösungsweg als nur eine Variante gesehen wird und neue, davon abweichende Lösungswege von SchülerInnen als Ressource für weitere Folgefragen gesehen werden können, wodurch ein reger Austausch und produktive Diskussionen entstehen können (Humenberger & Bracke, 2017, S.111).

Bei der Unterrichtsplanung hat die Lehrperson die Aufgabe, geeignete Fermi-Aufgaben für die Klasse und das Unterrichtsziel auszuwählen. Während einer Unterrichtseinheit, in der Fermi-Aufgaben bearbeitet werden, hat die Lehrperson verschiedene Aufgaben: 1) sie hat die Verantwortung, den organisatorischen Rahmen für den Arbeitsprozess abzustecken (Wechsel zwischen Sozialformen), 2) sie soll entscheiden und kommunizieren, welche Teil-Kompetenzen des Modellierungskreislaufs besonders im Vordergrund stehen, 3) sie soll den Unterrichtsablauf leiten und die SchülerInnen über die Vorgehensweise und den zeitlichen Rahmen informieren, 4) sie soll die SchülerInnen selbstständig arbeiten lassen und nur minimal, individuell und selbstständigkeitserhaltend intervenieren, 5) sie muss dafür genau den Erwartungshorizont und den möglichen Lösungsraum der Aufgaben kennen und 6) sie soll die Unterrichtseinheit so koordinieren, dass am Ende der Einheit ein Vergleichen von Lösungswegen mit abschließender Reflexion ermöglicht wird (Blum, 2006, S.19-20). Demzufolge stellt das Bearbeiten von Fermi-Aufgaben im Unterricht sowohl für die

SchülerInnen als auch für die Lehrperson eine große Herausforderung dar, wodurch eine Schulung der Lehrperson dringend erforderlich ist, damit das Bearbeiten von Fermi-Aufgaben im Unterricht für SchülerInnen erfolgreich bewältigbar ist.

4 Potential und Herausforderungen von Fermi-Aufgaben

In diesem Kapitel werden das Potential und Herausforderungen bei der Anwendung von Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 erläutert.

4.1 Potential von Fermi-Aufgaben im Unterricht in der Sekundarstufe 1

Aus den vorigen Kapiteln kommt bereits hervor, dass der Einsatz von Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht großes Potential für das Erlernen der Kompetenzen Modellieren und Problemlösen darstellt. Darüber hinaus hat die Anwendung von Fermi-Aufgaben im Unterricht das Potential zur Stärkung der folgenden prozessbezogenen Kompetenzen: kreatives Arbeiten, Argumentieren, Darstellen und Kommunizieren, selbstständiges und kooperatives Arbeiten und das strategische Arbeiten (Krinninger, 2015, S.5; Schemel, 2010, S.3-5). Der Kompetenzaufbau in diesen Bereichen ergibt sich durch die Offenheit von Fermi-Aufgaben, die Organisation von Unterrichtseinheiten – sprich der Wechsel zwischen verschiedenen Sozialformen bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben und das Bestreben nach Interaktion, um einen Austausch an Ideen anzuregen und eigene Lösungswege zu begründen und gegebenenfalls zu verteidigen bzw. kritisch zu hinterfragen (Schemel, 2010, S.3-5; Seiwald, 2016, S. 3-4).

Ross & Ross (1986, S.175) sprechen von zwei Hauptgründen, die Lehrpersonen dazu bewegen, Fermi-Aufgaben im Unterricht einzusetzen. Einerseits kann durch die Bearbeitung von Fermi-Aufgaben herausgearbeitet und für SchülerInnen ersichtlich gemacht werden, dass diese Aufgabenstellungen – entgegen der zu Beginn auftretenden Vermutung – nicht zu wenig Informationen für das Finden einer Antwort haben. Vielmehr liegt es daran, dass die bereits vorhandenen Informationen adäquat verarbeitet werden müssen, damit passende Problemlösestrategien zur Beantwortung der Fragestellung gefunden werden. Die Bearbeitung von Fermi-Aufgaben im Unterricht kann dabei unterstützen, diese Einsicht bei SchülerInnen zu fördern. Andererseits hat der Einsatz von Fermi-Aufgaben das Potential, SchülerInnen ein erweitertes Bild von Mathematik als anwendungsorientierte Disziplin zu geben, in der es nicht immer um Berechnungen und exakte Ergebnisse, sondern auch um Probieren, Schätzen, Überschlagen und logisches Denken geht (Sriraman & Lesh, 2006, S.248-249; Ärlebäck, 2009, S.334). An diese Aussage anknüpfend sehen Abay & Filiz (2020, S.270) das Potential von Fermi-Aufgaben demnach darin, dass diese Art von Aufgaben Gedankenprozesse anregen, welche SchülerInnen auf Probleme oder unerwartete Situationen in ihrem weiteren Leben insofern vorbereiten, als dass sie trainieren, Probleme zu strukturieren und passende Problemlösestrategien zu finden.

Ein weiterer bereits erwähnter positiver Effekt von Fermi-Aufgaben ist das Aufbrechen der „Monokultur von Einsetzaufgaben“, so wie sie im Naturwissenschaftsunterricht immer noch weit verbreitet ist (Krinninger, 2015, S.1). Damit verbunden weisen Fermi-Aufgaben das Potential auf, folgende Fähigkeiten im Zusammenhang mit Problemlösestrategien herauszubilden bzw. zu stärken (Krinninger, 2015, S.4):

- Problemstrukturen erfassen
- Reduzieren der Komplexität
- Durchführen von Abschätzungen
- Beurteilen von Größenordnungen

Aus einer Review von Ärlebäck & Albarracín (2019) geht weiters hervor, dass der Einsatz von Fermi-Aufgaben das Arbeiten in MINT-Fächern erleichtern und Zusammenhänge verdeutlichen kann sowie die Relevanz dieser Verknüpfungen für den Erwerb von Fähigkeiten, die im 21.Jahrhundert von Bedeutung sind, betonen kann. Der Umgang mit Fermi-Aufgaben trainiert also neben den prozessbezogenen Kompetenzen auch die folgenden vier mathematischen Prozesse: das Schulen von Abschätzungen, das Experimentieren, das Recherchieren von Daten und das Durchführen von Umfragen und Datenerhebungen (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.29-30).

Neben dem erwähnten Potential im Kompetenzerwerb hat der Einsatz von Fermi-Aufgaben auch das Potential, die SchülerInnen-Aktivität im Unterricht positiv zu beeinflussen. So können anwendungsorientiere Fermi-Aufgaben im Unterricht bei den SchülerInnen Motivation, Freude und damit eine aktivere Mitarbeit bewirken. Nach dem Motto: „ich darf meine eigenen Ideen in den Unterricht einbringen“ können Fermi-Aufgaben das selbstständige Arbeiten an

Fragestellungen fördern. Auch die Aufgabenstellung bzw. das Ermutigen zu Austausch und Diskussion können als Motivator fungieren, denn diese Art von Aufgaben bietet eine Abwechslung zu Übungsstunden in Einzelarbeit. Des Weiteren können diese Aufgaben auch jenen SchülerInnen zugutekommen, welche im Regelunterricht ansonsten weniger aktiv mitarbeiten, da sie sich von einer Fragestellung, dem Arbeitsprozess oder der Tatsache, dass ein Austausch von Ideen erwünscht ist, eventuell mehr angesprochen fühlen. Durch die Möglichkeit, eigene Ideen einzubringen, können SchülerInnen durch ihren Einsatz von Kreativität und Fantasie punkten (Humenberger, o.J., S.60). Obwohl mathematische Strukturen verwendet werden, rückt das mathematische Können in den Hintergrund und das Finden eines geeigneten Lösungswegs in den Vordergrund. Das Ziel ist also nicht mehr, lediglich eine Formel zu verwenden und Zahlen einzusetzen, sondern eine tatsächlich greifbare Fragestellung mithilfe von Mathematik zu beantworten, wodurch das Potential besteht, dass Mathematik als wirklich brauchbares Hilfsmittel zum Verstehen der Welt gesehen wird (Winter, 1995, S.37).

4.2 Herausforderungen von Fermi-Aufgaben im Unterricht in der Sekundarstufe 1

Der Einsatz von Fermi-Aufgaben im Unterricht birgt neben dem erwähnten Potential jedoch auch gewisse Herausforderungen, welche nicht vernachlässigt werden dürfen. Wie bereits in Kapitel 3.4.3 angesprochen wurde, spielen Lehrpersonen bei der Umsetzung von Fermi-Aufgaben im Unterricht eine essenzielle Rolle für den Erfolg des Stundenverlaufs und die Modellierungsprozesse. Die richtige Balance zwischen selbstständigem Arbeiten der SchülerInnen und Anleitungen bzw. Hinweisen von Lehrpersonen ist eine Kompetenz, die von Lehrpersonen erworben werden muss, um erfolgreiche Modellierungsstunden durchführen zu können (Blum, 2007, S.5). Die Qualifikation für die fachlich gehaltvolle Vermittlung von und den Umgang mit Modellierungsaufgaben im Unterricht wird jedoch nicht notwendigerweise in der Lehramtsausbildung vermittelt. Borromeo Ferri (2009, S.143) kritisiert, dass StudentInnen und JunglehrerInnen nicht ausreichend auf Modellierungsaufgaben und somit auch Fermi-Aufgaben vorbereitet werden und sich dadurch unsicher im Umgang damit sind. Tatsächlich sollten sich auch Lehrpersonen und Studierende über einen längeren Zeitraum mit Fermi-Aufgaben und anderen Modellierungsaufgaben auseinandersetzen, damit sie die Kompetenz des Modellierens und Problemlösens selbst theoretisch und praktisch in der vollen

Tiefe erfassen können (Borromeo Ferri et al., 2009, S.135-136). Denn nur so kann gewährleistet werden, dass die Lehrpersonen über das nötige Wissen zur Bearbeitung von Fermi-Aufgaben verfügen und somit das Wissen auch an SchülerInnen weitergeben können.

Eine weitere Herausforderung, welche häufig als Grund gegen die Verwendung von Fermi-Aufgaben im Unterricht verwendet wird, ist der hohe Zeitaufwand, den das Modellieren im Unterricht darstellt (Schmidt, 2009, S.156). Dieser Zeitaufwand ergibt sich einerseits durch die Aufgabenstellungen an sich, andererseits durch den Diskussionsbedarf, den solche Fragestellungen mit sich bringen. Die Erfüllung der im Lehrplan vorgegebenen Inhalte erzeugt den Druck, alle Themen abzudecken, wodurch die Zeit für alternative Themen drastisch limitiert ist. Zusätzlich dazu trägt der Einzelstundentakt und die verteilten Termine für Schularbeiten sicherlich auch dazu bei, dass Lehrpersonen sich gegen Modellierungsstunden im Unterricht entscheiden. Hier könnten von der Schule gestaltete Rahmenbedingungen wie beispielsweise Modellierungstage oder Projektwochen unterstützend wirken, um die Zeit für Modellierungsaufgaben zu schaffen (Borromeo Ferri et al., 2009, S.136).

Eine dritte Herausforderung bei der Verwendung von Fermi-Aufgaben im Unterricht ist die Komplexität der Aufgaben und die schwierige Planbarkeit der Stundengestaltung (Borromeo Ferri et al., 2009, S.136; Krinninger, 2015, S.6). Dass das Finden eines geeigneten Lösungsweges von Fermi-Aufgaben insgesamt eine große Schwierigkeit für SchülerInnen darstellt, wurde bereits angesprochen. Zusätzlich dazu wurde festgestellt, dass sich diese Schwierigkeiten nicht auf einzelne Modellierungsschritte reduzieren lassen, sondern über alle Schritte verteilt auftreten. Bereits im ersten Schritt – der Erstellung eines Situationsmodells – sind SchülerInnen häufig überfordert, was sich im Anschluss durch alle weiteren Modellierungsschritte durchzieht (Blum, 2007, S.5). Durch diese Komplexität der Aufgabenstellungen befürchten Lehrpersonen eine schlechte Planbarkeit des Stundenverlaufs und in weiterer Folge das Ausbleiben des gewünschten Lernerfolges. Daher wird dies oft als Grund gegen die Verwendung von Modellierungsaufgaben im Unterricht genannt (Borromeo Ferri et al., 2009, S.136; Krinninger, 2015, S.6). Dieses Argument schließt jedoch wieder den Kreis zur Qualifikation der Lehrperson, denn für den richtigen Umgang mit Fermi-Aufgaben bedarf es Modellierungskompetenz und Wissen zur deren Vermittlung im Unterricht.

5 Forschungsdesign und Hintergrund

Der empirische Teil dieser Arbeit befasst sich mit der praktischen Implementierung von Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1. Das konkrete Ziel der Forschung ist, den Umgang mit Fermi-Aufgaben bei einer SchülerInnen-Gruppe, welche zuvor keine bekannten Berührungspunkte mit Fermi-Aufgaben hatten, zu untersuchen. Dafür werden zunächst Fermi-Aufgaben im Plenum vorgestellt sowie eine klassische Fermi-Aufgabe gemeinsam bearbeitet, um die SchülerInnen mit der typischen Gestalt von Fermi-Aufgaben vertraut zu machen sowie die Offenheit dieser Aufgabenart zu veranschaulichen. Danach lösen die SchülerInnen im Rahmen des Mathematikunterrichtes ausgewählte Fermi-Aufgaben und dokumentieren den von ihnen durchlaufenen Arbeitsprozess mit Erläuterungen zu den verwendeten mathematischen Operationen zur Lösung der Aufgaben in einem Portfolio. Von besonderem Forschungsinteresse in diesem Zusammenhang ist es, durch die schriftliche Dokumentation der Arbeitsschritte den Gedankenprozess der SchülerInnen bezüglich der Wahl der mathematischen Operation zu erfassen sowie zu analysieren, welche Modellierungsschritte nach dem Modellierungskreislauf von Blum durchlaufen wurden.

Die teilnehmenden SchülerInnen besuchen die 2.Klasse oder 3.Klasse einer Mittelschule in Wien und sind unterschiedlichen Leistungsniveaus (Standard oder Standard AHS) zugeordnet. Die SchülerInnen und deren Erziehungsberechtigte wurden vor der Durchführung über das Forschungsvorhaben informiert. Die Durchführung und Erhebung im Rahmen des Unterrichts wurde vom Schulforum genehmigt. Alle Parteien wurden darüber informiert, dass sämtliche Daten für die Verwendung in dieser Arbeit anonymisiert werden, sodass keine Rückschlüsse auf TeilnehmerInnen möglich sind.

6 Methode

Bei der für die vorliegende Arbeit durchgeführten Forschung handelt es sich um Action Research. Dies ist eine Forschungsmethode, bei welcher bestimmte zu untersuchende Unterrichtseinheiten definiert, im Unterricht durchgeführt und anschließend analysiert, evaluiert und reflektiert werden. Ziel von Action Research ist es, Lehrpersonen zu ermöglichen, den Effekt der untersuchten Unterrichtseinheiten und deren didaktisch-pädagogischen

Grundlagen zu erforschen und durch anschließendes Reflektieren kritisch zu beleuchten (Clark et al., 2020, S.8). Action Research bietet die Möglichkeit, Elemente des eigenen Unterrichts zu erforschen und zeichnet sich dadurch aus, dass reale Unterrichtssituationen untersucht werden. Durch diese Charakteristik ergibt sich, dass Action Research immer kontextbezogen ist und Ergebnisse der Untersuchung sich stets auf die die Gruppe der Teilnehmenden bezieht, Verallgemeinerungen sind weder sinnvoll noch vorgesehen (Clark et al., 2020, S.9).

6.1 Forschungsfragen

Die Forschung in der Arbeit zielt darauf ab, folgende Forschungsfragen zu beantworten:

- Welche Lösungswege wählen SchülerInnen bei der Bearbeitung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?
- Auf welche mathematischen Operationen und fachlichen Konzepte greifen die SchülerInnen bei der Bearbeitung der Aufgaben zurück?
- Welche Modellierungsschritte durchlaufen die SchülerInnen zur Lösung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?

Wie bereits erwähnt beziehen sich die in Kapitel 7 dargestellten Ergebnisse der Forschung auf die Gruppe der teilnehmenden SchülerInnen, ohne Verallgemeinerungen auf andere SchülerInnen-Gruppen vorzunehmen.

6.2 Durchführung der Datenerhebung

Die Datenerhebung erfolgt in 4 ausgewählten Mathematikstunden im Sommersemester in den von der Forscherin unterrichteten Klassen, zwei 6.Schulstufen (22 + 7 SchülerInnen) und einer 7.Schulstufe (23 SchülerInnen). Die Durchführung der Action Research gliedert sich in folgende Arbeitsphasen:

Arbeitsphase 1: Kennenlernen von Fermi-Aufgaben

In einer Einführungsstunde wird den SchülerInnen erklärt, was Fermi-Aufgaben sind und welchen Sinn diese haben. Im Anschluss daran wird im Plenum eine exemplarische

Fermi-Aufgabe bearbeitet, in der Ideen der SchülerInnen einfließen sollen und die Lehrperson die Offenheit dieser Aufgabenstellungen aufzeigt. In dieser Arbeitsphase werden keine Daten erhoben, sie dient zur Vorstellung des Aufgabentyps und zum Einstieg in das Arbeiten mit unterbestimmten Modellierungsaufgaben.

Arbeitsphase 2: Bearbeitung der ausgewählten Fermi-Aufgaben

Die erste selbstständige Modellierungsstunde findet in der Mathematikstunde nach der Einführungsstunde statt, damit die Informationen zu Fermi-Aufgaben und die möglichen Bearbeitungsschritte noch präsent sind. Die SchülerInnen machen sich zunächst selbstständig in Einzelarbeit Gedanken über die Fragestellung und mögliche Lösungsansätze. Diese verschriftlichen sie auf einem Dokumentationsbogen. Anschließend finden sie sich in Kleingruppen bestehend aus 2 – 3 SchülerInnen, besprechen ihre Ansätze und versuchen, einen gemeinsamen Lösungsprozess zu finden. Dieser wird auf einem zweiten Dokumentationsbogen verschriftlicht, Rechnungen werden auf einem extra Blatt aufgeschrieben. In den darauffolgenden Wochen finden zwei weitere Unterrichtseinheiten statt, in welchen zwei weitere Fermi-Aufgaben nach demselben organisatorischen Schema bearbeitet werden. Die Dokumentationen aller bearbeiteten Fragen werden in einem Schnellhefter (=Portfolio) gesammelt. Der genaue Zeitpunkt der zwei weiteren Unterrichtsstunden variiert in den Klassen je nach organisatorischen Rahmenbedingungen (Schularbeiten, Lehrausgängen, etc.) und wird individuell festgelegt. Die gesammelten Lösungsansätze der bearbeiteten Fermi-Aufgaben im Portfolio dienen als Grundlage für die Analyse in der Arbeit. Hierbei handelt es sich um eine qualitative Analyse der Ausarbeitungen. (Clark et al., 2020, S.72). Relevant sind die gewählten Lösungswege, welche mathematischen Operationen bzw. fachlichen Konzepte verwendet wurden sowie welche Schritte des Modellierungskreislaufs durchlaufen wurden.

Arbeitsphase 3: Diskussion und Reflexion im Unterricht

Nach der Bearbeitung der ausgewählten Fermi-Aufgaben findet im Plenum eine Diskussion über die bearbeiteten Aufgaben, den verschiedenen Lösungsprozessen und den unterschiedlichen Ergebnissen statt. Dies dient zur Reflexion der gewählten Problemlösestrategien, zur Veranschaulichung der Offenheit von Fermi-Aufgaben und zur Beantwortung von offen gebliebenen Fragen der SchülerInnen. In dieser Arbeitsphase werden keine Daten für die Arbeit erhoben, sie dient zur Nachbesprechung mit den SchülerInnen, hat jedoch keine gewichtige Relevanz im Zusammenhang mit der Beantwortung der Forschungsfragen.

Die gewählte Struktur der Sozialformen dieser Unterrichtseinheiten orientiert sich an der von Blum (2006, S.14) vorgeschlagenen Abfolge, welche laut bisherigen Feldforschungen einen positiven Einfluss auf die Effektivität von Modellierungsstunden hat (siehe Kapitel 3.4.2).

In Vorbereitung auf die Durchführung der Unterrichtseinheiten wurden möglicherweise auftretende Schwierigkeiten konstatiert und Lösungen bestimmt:

1) Da die Datenauswertung erst einige Zeit nach der Durchführung im Unterricht stattfindet, ist eine genaue Dokumentation der SchülerInnen besonders wichtig, damit der Arbeitsprozess nachvollziehbar ist.

   Lösung: Die SchülerInnen bekommen vor der ersten zu bearbeitenden Fermi-Aufgabe klare Vorgaben und Anweisungen, wie diese bearbeitet und dokumentiert werden sollen sowie eine gemeinsam durchbesprochene Beispiel-Aufgabe.

2) Es können SchülerInnen in einer oder mehreren Einheiten krank bzw. nicht anwesend sein.

   Lösung: Die Gruppen können in jeder Unterrichtseinheit neu zusammengestellt werden, da es für die Auswertung nicht zwingend erforderlich ist, dass die Gruppen unverändert bleiben.

3) SchülerInnen arbeiten nicht ordentlich mit und erstellen kein nachvollziehbares Portfolio.

   Lösung: Den SchülerInnen wird kommuniziert, dass das Portfolio für die Leistungsbeurteilung relevant ist und zur Mitarbeit zählt. Unvollständige Portfolios bzw. nicht nachvollziehbare Erarbeitungen werden von der Analyse exkludiert.

In folgenden Abschnitten werden die Einführungsstunde sowie die ausgewählten Fermi-Aufgaben im Detail dargestellt.

6.2.1 Vorbereitung

Die Einführungsstunde folgt der in Abbildung 11 dargestellten Unterrichtsmatrix. Die verwendete Beispiel-Aufgabe wurde aus folgenden Gründen gewählt: zum einen behandelt diese Frage ein alltägliches Thema, zu welchem alle teilnehmenden SchülerInnen Bezug haben, zum anderen bezieht sich die Fragestellung auf einen allgemeinen Sachverhalt, welcher nicht von individuellen SchülerInnen-Daten abhängt. Des Weiteren deckt diese Aufgabe diverse Aktivitäten im Problemlöseprozess ab – das Schätzen von Größen/Anzahlen, Verwenden von Alltagswissen sowie das Treffen von plausiblen Annahmen (Büchter et al., 2010a, S.110). In Abbildung 13 ist der zu dieser Aufgabe dazugehörige Lehrerkommentar inklusive Lösungserwartungen abgebildet. Im Anschluss an die Einführungsstunde konnte mit zwei der drei Klassen auf dem am Schulgelände befindlichen Parkplatz eine praktische Vermessung von zwei unterschiedlich großen Autos durchgeführt werden. Dies diente der Kontrolle bzw. dem Vergleich mit der für die Aufgabe geschätzten durchschnittlichen Autolänge. In einer Klasse konnte diese praktische Überprüfung aufgrund von organisatorischen Gründen nicht durchgeführt werden.

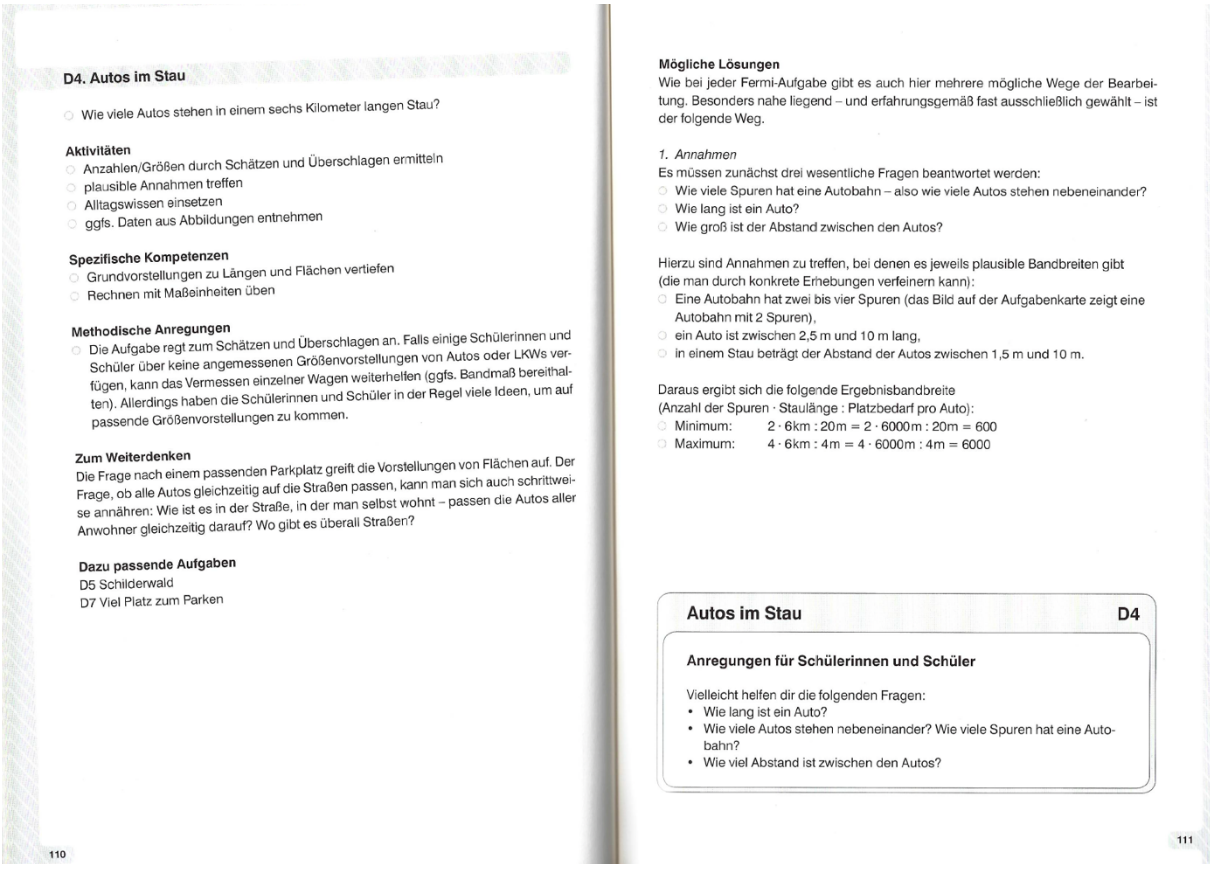
Einführungsstunde Unterrichtsskizze:

Zeit/ Phasen	Geplante Lehr- und Lerninteraktionen	Methode	Angestrebte Teilkompetenzen	Aktions- und Sozialformen Arbeitsmittel und Medien
5 min Organisatorisches	Erklärung des Projekts Rahmenbedingungen abklären			
10 min Einstieg	Einführungsvideo Fermi-Aufgaben: Diskussion / Fragen zu Fermi-Aufgaben	Visuelle und auditive Vermittlung des neuen Aufgabentyps (explizite Wissensvermittlung)	SchülerInnen lernen den Begriff Fermi-Aufgaben kennen	Arbeit im Plenum
20 min Erarbeitung	Gemeinsame Bearbeitung einer Fermi-Aufgabe (Aufgabe siehe Seite 3): • Kennenlernen von Bearbeitungsmöglichkeiten • Lösungsstrategien • Umgang mit unterbestimmten Aufgaben • Thematisierung der Offenheit • Verschiedene Lösungswege zusammentragen • Gemeinsames Fazit	Gemeinsam erforschendes Lernen im Umgang mit unterbestimmten Modellierungsaufgaben	SchülerInnen lernen Problemlösestrategien für unterbestimmte Modellierungsaufgaben kennen und können durch Abschätzen und Überschlagen plausible Rechenwege und Ergebnisse finden	Arbeit im Plenum Partnerarbeit Arbeit im Plenum
10 min Dokumentation	Verschriftlichen des Bearbeitungsprozesses der gemeinsam bearbeiteten Fermi-Aufgabe: - Dokumentationsbogen - Erklärungen	Dokumentationsbogen kennenlernen	SchülerInnen können den Bearbeitungsprozess von Fermi-Aufgaben in dem Dokumentationsbogen verschriftlichen	Arbeit im Plenum
5 min Abschluss	Beantwortung offener Fragen HÜ: Einführungskarten Fermi-Box durchlesen + Online-Quizfragen beantworten (MS Teams)			

Abbildung 11: Unterrichtsmatrix Einführungsstunde

Einführungsaufgabe:

Abbildung 12: Autos im Stau (Büchter et al., 2010b., Karte D4)



D4. Autos im Stau

- Wie viele Autos stehen in einem sechs Kilometer langen Stau?

Aktivitäten
- Anzahlen/Größen durch Schätzen und Überschlagen ermitteln
- plausible Annahmen treffen
- Alltagswissen einsetzen
- ggfs. Daten aus Abbildungen entnehmen

Spezifische Kompetenzen
- Grundvorstellungen zu Längen und Flächen vertiefen
- Rechnen mit Maßeinheiten üben

Methodische Anregungen
- Die Aufgabe regt zum Schätzen und Überschlagen an. Falls einige Schülerinnen und Schüler über keine angemessenen Größenvorstellungen von Autos oder LKWs verfügen, kann das Vermessen einzelner Wagen weiterhelfen (ggfs. Bandmaß bereithalten). Allerdings haben die Schülerinnen und Schüler in der Regel viele Ideen, um auf passende Größenvorstellungen zu kommen.

Zum Weiterdenken
Die Frage nach einem passenden Parkplatz greift die Vorstellungen von Flächen auf. Der Frage, ob alle Autos gleichzeitig auf die Straßen passen, kann man sich auch schrittweise annähren: Wie ist es in der Straße, in der man selbst wohnt – passen die Autos aller Anwohner gleichzeitig darauf? Wo gibt es überall Straßen?

Dazu passende Aufgaben
D5 Schilderwald
D7 Viel Platz zum Parken

110

Mögliche Lösungen
Wie bei jeder Fermi-Aufgabe gibt es auch hier mehrere mögliche Wege der Bearbeitung. Besonders nahe liegend – und erfahrungsgemäß fast ausschließlich gewählt – ist der folgende Weg.

1. Annahmen
Es müssen zunächst drei wesentliche Fragen beantwortet werden:
- Wie viele Spuren hat eine Autobahn – also wie viele Autos stehen nebeneinander?
- Wie lang ist ein Auto?
- Wie groß ist der Abstand zwischen den Autos?

Hierzu sind Annahmen zu treffen, bei denen es jeweils plausible Bandbreiten gibt (die man durch konkrete Erhebungen verfeinern kann):
- Eine Autobahn hat zwei bis vier Spuren (das Bild auf der Aufgabenkarte zeigt eine Autobahn mit 2 Spuren),
- ein Auto ist zwischen 2,5 m und 10 m lang,
- in einem Stau beträgt der Abstand der Autos zwischen 1,5 m und 10 m.

Daraus ergibt sich die folgende Ergebnisbandbreite
(Anzahl der Spuren · Staulänge : Platzbedarf pro Auto):
- Minimum: $2 \cdot 6\text{km} : 20\text{m} = 2 \cdot 6000\text{m} : 20\text{m} = 600$
- Maximum: $4 \cdot 6\text{km} : 4\text{m} = 4 \cdot 6000\text{m} : 4\text{m} = 6000$

Autos im Stau **D4**

Anregungen für Schülerinnen und Schüler

Vielleicht helfen dir die folgenden Fragen:
- Wie lang ist ein Auto?
- Wie viele Autos stehen nebeneinander? Wie viele Spuren hat eine Autobahn?
- Wie viel Abstand ist zwischen den Autos?

111

Abbildung 13: Aufgabe „Autos im Stau" Lehrerkommentar (Büchter et al., 2010a, S.110-111)

6.3 Verwendete Fermi-Aufgaben

Für die selbstständige Erarbeitung wurden drei Fermi-Aufgaben gewählt. Als Orientierung dienten dafür Aufgaben der Fermi-Box für die 5. – 7. Schulstufe (Büchter et al., 2010b). Die Aufgaben wurden so gewählt, dass sie für die SchülerInnen einen Realitätsbezug aufweisen, sowie unterschiedliche Arten von Fermi-Fragen darstellen und verschiedene Problemlösestrategien erfordern.

Portfolio Aufgabe 1:

Abbildung 14: Aufgabe „Alterlaa“

Bei dieser Fermi-Aufgabe werden fehlende Daten aus der Abbildung bestimmt. Theoretisch könnten die Daten auch durch Recherchieren erhalten werden, in den Modellierungsstunden wurde jedoch der Einsatz von technischen Hilfsmitteln (außer der Einsatz des Taschenrechners für die 7.Schulstufe) nicht erlaubt. Die SchülerInnen konnten folgende Hilfsmittel während der Ausarbeitung nutzen:

- A4 Foto des Bildes
- Bild am Smartboard projiziert

Die Aufgabe lässt sich grundsätzlich dem zentralen fachlichen Konzept **Z1: Zahlen und Maße** zuordnen, wobei auch Aspekte des räumlichen Vorstellungsvermögens bzw. der Symmetrie und somit von **Z3: Figuren und Körper** von Relevanz sind (Lehrplan, 2024).

Aufgabe 1: Lösungserwartungen

Durch die Abbildung ist naheliegend, dass SchülerInnen die Balkone bzw. Fenster und Stockwerke abzählen können. Interessant ist hierbei, nach welchen Standpunkten eine Wohnung definiert wird. Ist jeder Balkon auch gleichzeitig eine Wohnung? Hat eine Wohnung mehr als einen Balkon? Geht eine Wohnung vielleicht sogar über zwei Stockwerke? Abseits von der Definition einer Wohnung sollten folgende Auseinandersetzungen bei der Beantwortung der Frage ersichtlich sein:

- Abzählen oder Abschätzen der Anzahl der Stockwerke
- Abzählen oder Abschätzen der Anzahl der Wohnungen pro Stockwerk
- Erkennen, dass auch Wohnungen auf der Rückseite des Gebäudes sind
- Abschätzen bzw. plausible Annahme der Personen pro Wohnung

Eventuell können SchülerInnen auch auf ihr Allgemeinwissen zurückgreifen, wenn ihnen bekannt ist, wie viele Personen ungefähr in allen 6 Gebäuden von Alterlaa leben. In allen Gebäuden zusammen gibt es über 3.000 Wohnungen und insgesamt leben mehr als 9.000 Personen in diesen Wohnungen (AEAG, 2020).

Durch folgende Überlegungen kann eine Spannbreite der Personenzahl festgelegt werden:

- Anzahl der Stockwerke: 20 – 22
- Anzahl der Wohnungen: 10 – 20
- Anzahl der Wohnungen auf der Vorderseite: 200 – 440
- Anzahl der Wohnungen (Vorderseite + Rückseite): 400 – 880
- Anzahl der Personen pro Wohnung: 1 – 4
- Anzahl der Personen im Gebäude: 400 – 3520

Die Spannbreite geht jeweils von den extremen Annahmen aus (jede Person lebt alleine bzw. in jeder Wohnung leben 4 Personen), die tatsächliche Anzahl wird sich vermutlich in der Mitte bewegen.

Kompetenzen:

Durch die typische Beschaffenheit einer Fermi-Aufgabe (bzw. Modellierungsaufgabe) deckt diese Aufgabe alle vier Kompetenzbereiche des Lehrplans ab (K1-K4, siehe Kapitel 2.1). Zusätzlich fördert diese Aufgabe folgende Kompetenzen:

- Informationen aus Abbildungen entnehmen
- Eigenschaften der Symmetrie für Berechnungen nutzen

Portfolio Aufgabe 2:

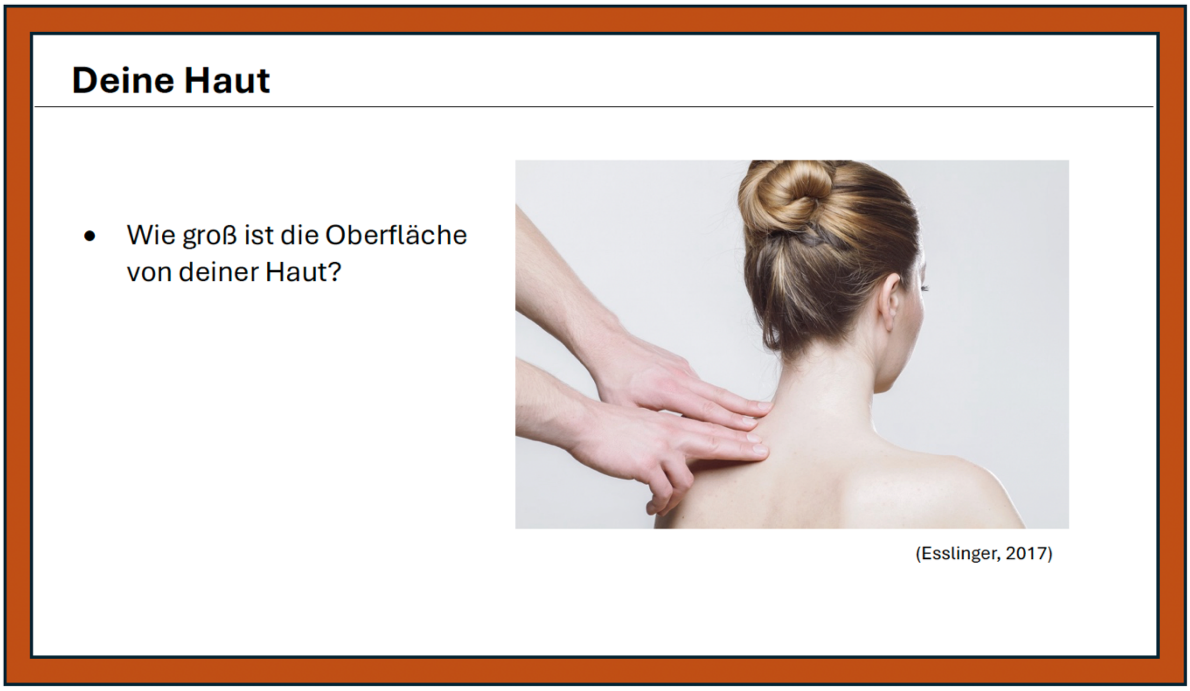


Abbildung 15: Aufgabe „Deine Haut" (vgl. Büchter et al., 2010b, Karte B5)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Fermi-Aufgabe, welche es erfordert, Anzahlen und Größen zu veranschaulichen. Fehlende Informationen können auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Den SchülerInnen wurden zur Bearbeitung dieser Aufgabe folgende Hilfsmittel wie im Lehrerkommentar erwähnt zur Verfügung gestellt (siehe Abbildung 16) :

- Maßbänder
- Blätter A4 bzw A3 Papier
- Flipchart-Papierrollen
- Sämtliche sich in der Klasse befindenden Gegenstände als Referenzgröße

Da das Vermessen, Abkleben oder Schätzen des eigenen Körpers ein sensibles Thema für manche SchülerInnen darstellen kann, war es für diese Aufgabe besonders wichtig, dass SchülerInnen in Kleingruppen eingeteilt wurden, in denen sie sich wohlfühlen und Gruppenmitgliedern vertrauen. Außerdem wurde im Vorhinein besprochen, dass nur jene Personen am Körper vermessen werden durften, die dem ausdrücklich zustimmten.

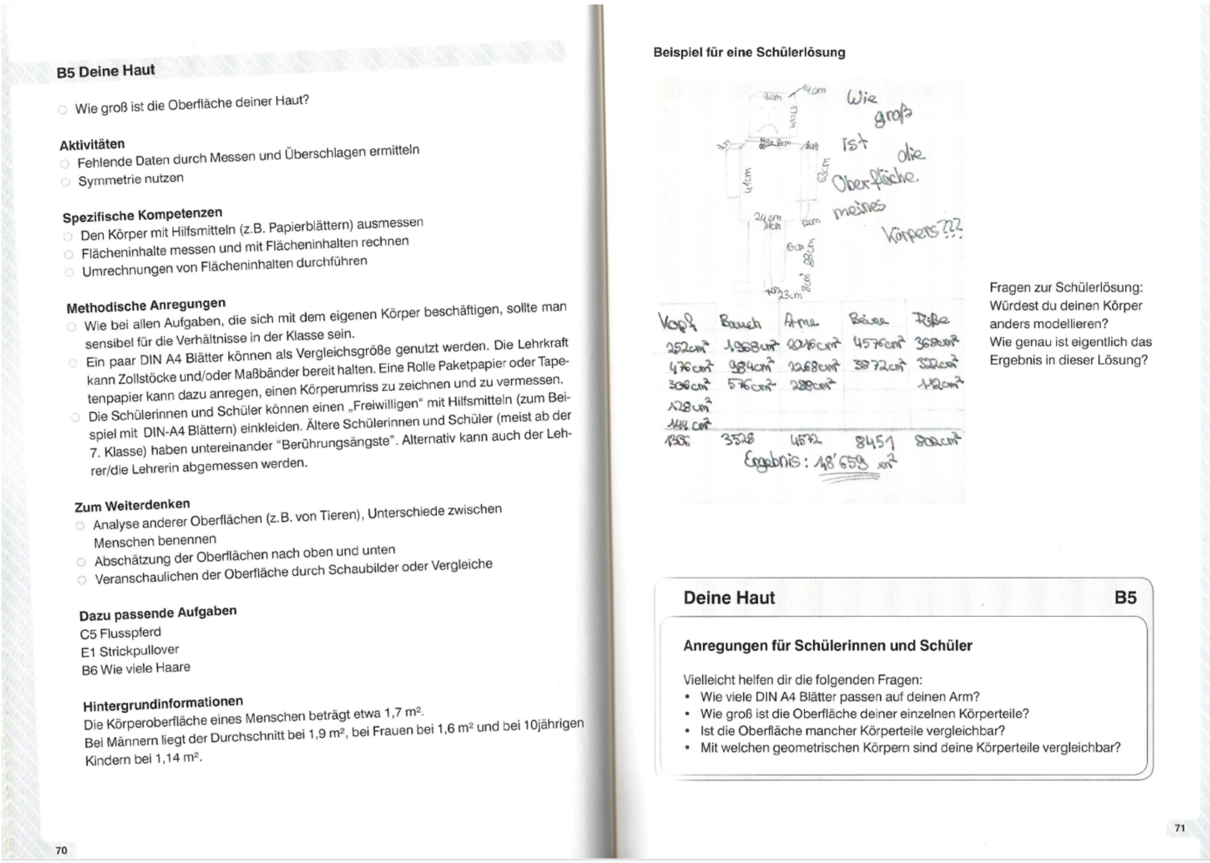
Aufgabe 2: Lösungserwartungen

Die Bearbeitung dieser Aufgabe lässt eine selbstständige Wahl der Komplexität des Situationsmodells zu und kann somit auf verschiedenen Levels an Genauigkeit und Detailgetreue erfolgen. Wesentlich für die Ausarbeitung ist, dass SchülerInnen erkennen, dass es sich bei der gesuchten Größe um eine Fläche handelt (Büchter et al., 2010a, S.204). Damit ordnet sich diese Aufgabe im Lehrplan in das zentrale fachliche Konzept **Z3: Figuren und Körper** ein (Lehrplan, 2024). Demzufolge soll aus der Ausarbeitung hervorgehen, dass SchülerInnen Flächen berechnet haben und auch Flächenmaße verwendet haben. Bei der Wahl der Flächen gibt es wiederum verschiedene Möglichkeiten. Eine grobe Vereinfachung wäre die Darstellung der Person als Quader, von dem die einzelnen Rechtecke addiert werden. Genauer könnte die Person in Rechtecke (Rumpf) und Mantelflächen eines Zylinders (Arme, Beine) zerlegt werden. Eine Formel zur Berechnung einer Kugel (Kopf) steht den teilnehmenden SchülerInnen zu diesem Zeitpunkt noch nicht zur Verfügung. Bei dieser Aufgabe gibt es eine realistische Spannbreite von ca. 1,1 m^2 – 2 m^2, abhängig von der jeweiligen Person (siehe Büchter et al., 2010a, S.70-71).

Kompetenzen:

Neben den vier im Lehrplan verankerten Kompetenzbereichen (K1-K4, siehe Kapitel 2.1) werden folgende Kompetenzen mit dieser Aufgabe addressiert (Büchter et al., 2010a, S.70):

- Messen von Größen
- Berechnung von Flächeninhalten
- Umrechnung von Flächenmaßen



B5 Deine Haut

- Wie groß ist die Oberfläche deiner Haut?

Aktivitäten
- Fehlende Daten durch Messen und Überschlagen ermitteln
- Symmetrie nutzen

Spezifische Kompetenzen
- Den Körper mit Hilfsmitteln (z.B. Papierblättern) ausmessen
- Flächeninhalte messen und mit Flächeninhalten rechnen
- Umrechnungen von Flächeninhalten durchführen

Methodische Anregungen
- Wie bei allen Aufgaben, die sich mit dem eigenen Körper beschäftigen, sollte man sensibel für die Verhältnisse in der Klasse sein.
- Ein paar DIN A4 Blätter können als Vergleichsgröße genutzt werden. Die Lehrkraft kann Zollstöcke und/oder Maßbänder bereit halten. Eine Rolle Paketpapier oder Tapetenpapier kann dazu anregen, einen Körperumriss zu zeichnen und zu vermessen.
- Die Schülerinnen und Schüler können einen „Freiwilligen" mit Hilfsmitteln (zum Beispiel mit DIN-A4 Blättern) einkleiden. Ältere Schülerinnen und Schüler (meist ab der 7. Klasse) haben untereinander "Berührungsängste". Alternativ kann auch der Lehrer/die Lehrerin abgemessen werden.

Zum Weiterdenken
- Analyse anderer Oberflächen (z.B. von Tieren), Unterschiede zwischen Menschen benennen
- Abschätzung der Oberflächen nach oben und unten
- Veranschaulichen der Oberfläche durch Schaubilder oder Vergleiche

Dazu passende Aufgaben
C5 Flusspferd
E1 Strickpullover
B6 Wie viele Haare

Hintergrundinformationen
Die Körperoberfläche eines Menschen beträgt etwa 1,7 m². Bei Männern liegt der Durchschnitt bei 1,9 m², bei Frauen bei 1,6 m² und bei 10jährigen Kindern bei 1,14 m².

70

Beispiel für eine Schülerlösung

Wie groß ist die Oberfläche meines Körpers???

Kopf	Bauch	Arme	Beine	Füße
252cm²	1968cm²	2016cm²	4576cm²	368cm²
476cm²	984cm²	1268cm²	3872cm²	322cm²
306cm²	576cm²	288cm²		112cm²
128cm²				
144 cm²				
1306	3528	4572	8451	802cm²

Ergebnis: 18'659 cm²

Fragen zur Schülerlösung:
Würdest du deinen Körper anders modellieren?
Wie genau ist eigentlich das Ergebnis in dieser Lösung?

Deine Haut **B5**

Anregungen für Schülerinnen und Schüler

Vielleicht helfen dir die folgenden Fragen:
- Wie viele DIN A4 Blätter passen auf deinen Arm?
- Wie groß ist die Oberfläche deiner einzelnen Körperteile?
- Ist die Oberfläche mancher Körperteile vergleichbar?
- Mit welchen geometrischen Körpern sind deine Körperteile vergleichbar?

71

Abbildung 16: Aufgabe „Deine Haut" Lehrerkommentar (Büchter et al., 2010a, S.70-71)

Portfolio Aufgabe 3:

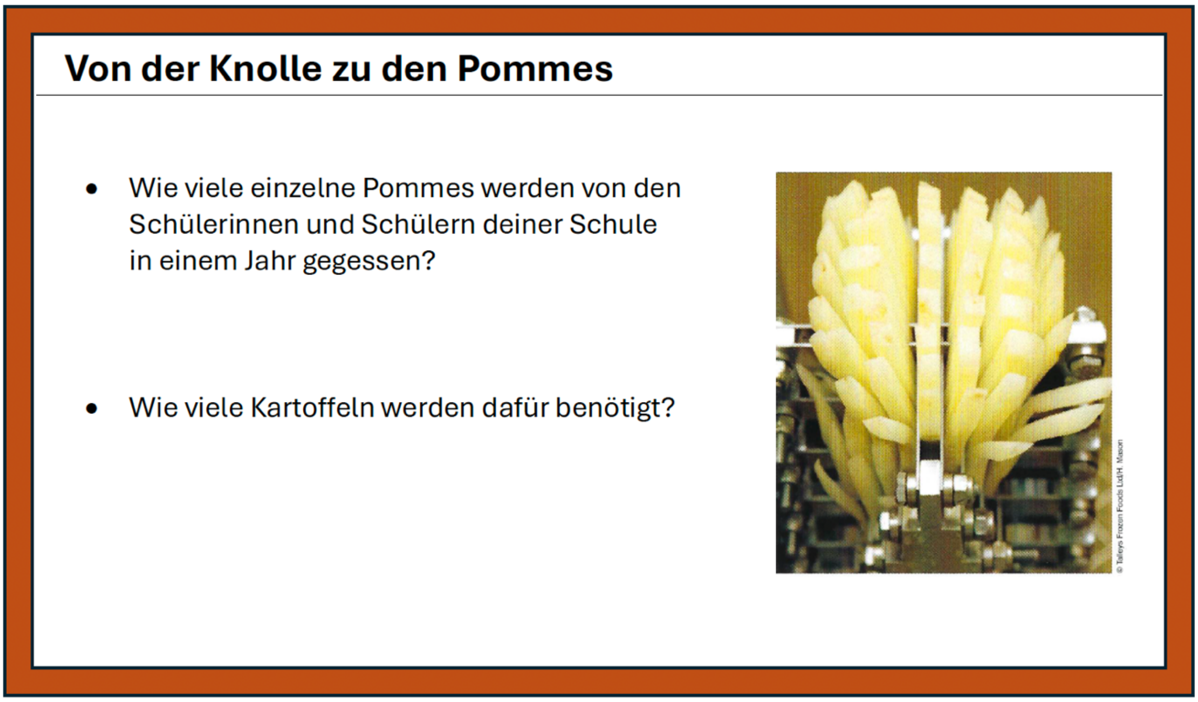


Abbildung 17: Aufgabe „Von der Knolle zu den Pommes" (vgl. Büchter et al., 2010b, Karte E5)

Bei dieser Fermi-Aufgabe müssen einige fehlende Größen geschätzt oder überschlagen werden. Hierfür ist es notwendig, plausible Annahmen zu tätigen und Alltagswissen zu nutzen. Ein Teil der Aufgabe kann auch durch Erfragen von Informationen ermittelt werden. Diese Aufgabe kann im Lehrplan in die zentralen fachliche Konzepte **Z1: Zahlen und Maße** und **Z4: Daten und Zufall** eingeordnet werden (Lehrplan, 2024; Högen & Krausl, 2023).

Die Aufgabe stammt aus der Fermi-Box (Büchter et al., 2010b, Karte E5), die zweite Frage wurde jedoch abgeändert, da die ursprüngliche Frage „Wie groß müsste ein Kartoffelacker sein, um die hierfür nötigen Kartoffeln anzubauen?“ zu umfangreich und komplex für die Bearbeitung in einer Unterrichtseinheit gewesen wäre. Zur Bearbeitung der Fragestellung wurden den SchülerInnen folgende Hilfsmittel zur Verfügung gestellt (siehe Büchter et al., 2010a, S. 128):

- eine mittlere Portion Pommes (McDonalds)
- vier unterschiedlich große Kartoffeln
- eine Küchenwaage

<u>Aufgabe 3: Lösungserwartungen</u>

In der Ausarbeitung der zwei Fragestellungen sollten folgende Gedankenprozesse erkennbar sein:

- Abschätzung bzw. Berechnung (Überschlag) der GesamtschülerInnenzahl
- Abschätzung bzw. Abzählen der Pommes pro Packung
- plausible Annahme, wie oft alle SchülerInnen im Durchschnitt Pommes essen
- Abschätzung bzw. Abwiegen, wie viele Pommes aus einer Kartoffel erzeugt werden können

Bei dieser Aufgabe kann allgemein keine sinnvolle Spannbreite für Lösungsvorschläge angegeben werden, da das Ergebnis maßgeblich von der Zahl der SchülerInnen der Schule abhängt. Am konkreten Beispiel der Schule, in der diese Modellierungsstunden durchgeführt wurden, machen folgende Überlegungen Sinn:

- Anzahl der Klassen: 17
- SchülerInnenanzahl pro Klasse: 20 – 28
- GesamtschülerInnenzahl: 340 – 476

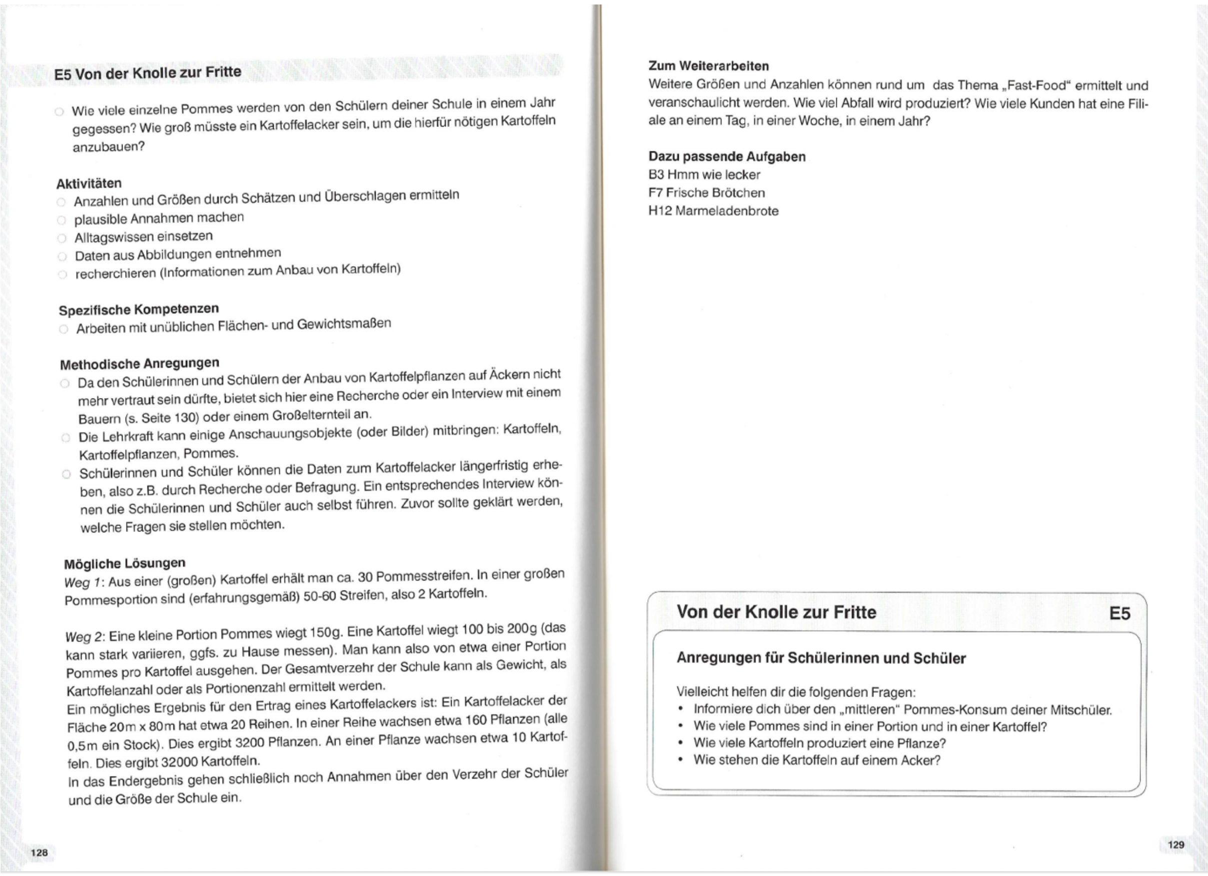
- Packungen Pommes pro Person: 1x – 365x pro Jahr
- Pommes pro Packung: 20 – 60
- Gesamt verzehrte Pommes: 6.800 – 10.424.400
- Pommes pro Kartoffel: 10 – 30
- Gesamt benötigte Kartoffeln: 227 – 1.042.440

Genauere Überlegungen (z.B. einige SchülerInnen essen nie Pommes) sind in dieser Abschätzung nicht berücksichtigt.

<u>*Kompetenzen*</u>:

Die Kompetenzbereiche aus dem Lehrplan (K1-K4, siehe Kapitel 2.1) werden in dieser Aufgabe mit folgenden Kompetenzen ergänzt:

- Arbeiten mit unüblichen Flächen- und Gewichtsmaßen (Büchter et al., 2010a, S.128)
- Arbeiten mit Volumen (Büchter et al., 2010a, S.205)



E5 Von der Knolle zur Fritte

- Wie viele einzelne Pommes werden von den Schülern deiner Schule in einem Jahr gegessen? Wie groß müsste ein Kartoffelacker sein, um die hierfür nötigen Kartoffeln anzubauen?

Aktivitäten
- Anzahlen und Größen durch Schätzen und Überschlagen ermitteln
- plausible Annahmen machen
- Alltagswissen einsetzen
- Daten aus Abbildungen entnehmen
- recherchieren (Informationen zum Anbau von Kartoffeln)

Spezifische Kompetenzen
- Arbeiten mit unüblichen Flächen- und Gewichtsmaßen

Methodische Anregungen
- Da den Schülerinnen und Schülern der Anbau von Kartoffelpflanzen auf Äckern nicht mehr vertraut sein dürfte, bietet sich hier eine Recherche oder ein Interview mit einem Bauern (s. Seite 130) oder einem Großelternteil an.
- Die Lehrkraft kann einige Anschauungsobjekte (oder Bilder) mitbringen: Kartoffeln, Kartoffelpflanzen, Pommes.
- Schülerinnen und Schüler können die Daten zum Kartoffelacker längerfristig erheben, also z.B. durch Recherche oder Befragung. Ein entsprechendes Interview können die Schülerinnen und Schüler auch selbst führen. Zuvor sollte geklärt werden, welche Fragen sie stellen möchten.

Mögliche Lösungen

Weg 1: Aus einer (großen) Kartoffel erhält man ca. 30 Pommesstreifen. In einer großen Pommesportion sind (erfahrungsgemäß) 50-60 Streifen, also 2 Kartoffeln.

Weg 2: Eine kleine Portion Pommes wiegt 150g. Eine Kartoffel wiegt 100 bis 200g (das kann stark variieren, ggfs. zu Hause messen). Man kann also von etwa einer Portion Pommes pro Kartoffel ausgehen. Der Gesamtverzehr der Schule kann als Gewicht, als Kartoffelanzahl oder als Portionenzahl ermittelt werden.
Ein mögliches Ergebnis für den Ertrag eines Kartoffelackers ist: Ein Kartoffelacker der Fläche 20m x 80m hat etwa 20 Reihen. In einer Reihe wachsen etwa 160 Pflanzen (alle 0,5m ein Stock). Dies ergibt 3200 Pflanzen. An einer Pflanze wachsen etwa 10 Kartoffeln. Dies ergibt 32000 Kartoffeln.
In das Endergebnis gehen schließlich noch Annahmen über den Verzehr der Schüler und die Größe der Schule ein.

128

Zum Weiterarbeiten
Weitere Größen und Anzahlen können rund um das Thema „Fast-Food" ermittelt und veranschaulicht werden. Wie viel Abfall wird produziert? Wie viele Kunden hat eine Filiale an einem Tag, in einer Woche, in einem Jahr?

Dazu passende Aufgaben
B3 Hmm wie lecker
F7 Frische Brötchen
H12 Marmeladenbrote

Von der Knolle zur Fritte **E5**

Anregungen für Schülerinnen und Schüler

Vielleicht helfen dir die folgenden Fragen:
- Informiere dich über den „mittleren" Pommes-Konsum deiner Mitschüler.
- Wie viele Pommes sind in einer Portion und in einer Kartoffel?
- Wie viele Kartoffeln produziert eine Pflanze?
- Wie stehen die Kartoffeln auf einem Acker?

129

Abbildung 18: Aufgabe „Von der Knolle zur Fritte" Lehrerkommentar (Büchter et al., 2010a, S.128-129)

Zusatzaufgabe:

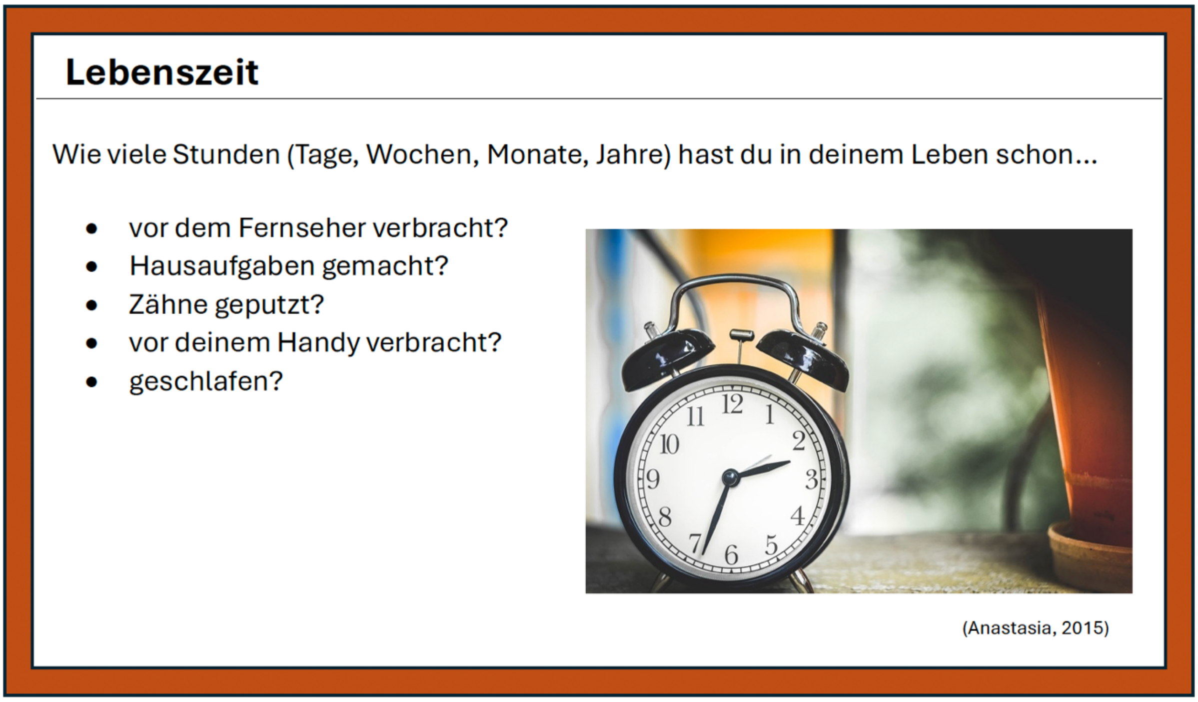
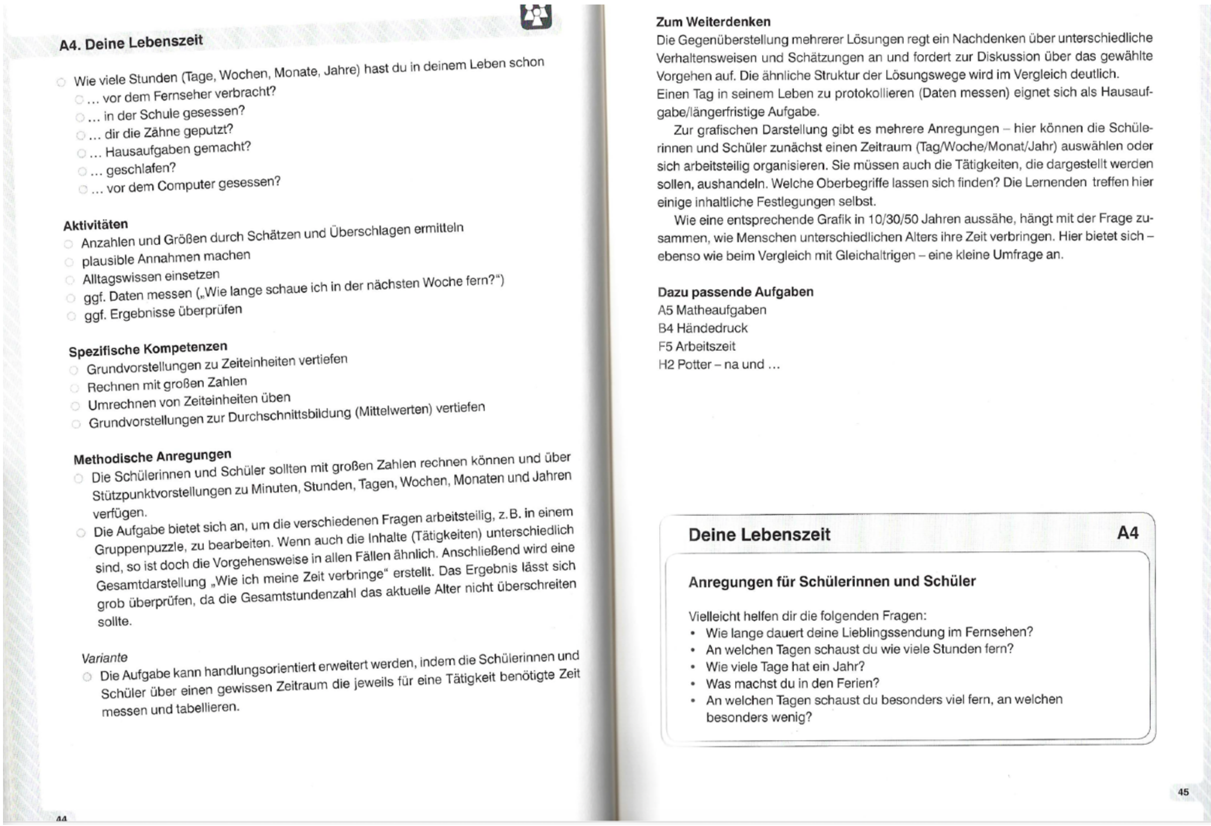


Abbildung 19: Zusatzaufgabe „Lebenszeit" (vgl. Büchter et al., 2010b, Karte A4)

Die Zusatzaufgabe diente dazu, dass für besonders schnelle SchülerInnen keine Wartephasen in den Unterrichtsstunden entstehen konnten. Sie konnten wählen, ob sie diese Aufgaben in den Kleingruppen oder allein bearbeiteten. Da diese Aufgabe für die Auswertung nicht berücksichtigt wurde, wird hier auch nicht weiter darauf eingegangen, der Lehrerkommentar befindet sich in Abbildung 20.



A4. Deine Lebenszeit

- Wie viele Stunden (Tage, Wochen, Monate, Jahre) hast du in deinem Leben schon
  - … vor dem Fernseher verbracht?
  - … in der Schule gesessen?
  - … dir die Zähne geputzt?
  - … Hausaufgaben gemacht?
  - … geschlafen?
  - … vor dem Computer gesessen?

Aktivitäten
- Anzahlen und Größen durch Schätzen und Überschlagen ermitteln
- plausible Annahmen machen
- Alltagswissen einsetzen
- ggf. Daten messen („Wie lange schaue ich in der nächsten Woche fern?")
- ggf. Ergebnisse überprüfen

Spezifische Kompetenzen
- Grundvorstellungen zu Zeiteinheiten vertiefen
- Rechnen mit großen Zahlen
- Umrechnen von Zeiteinheiten üben
- Grundvorstellungen zur Durchschnittsbildung (Mittelwerten) vertiefen

Methodische Anregungen
- Die Schülerinnen und Schüler sollten mit großen Zahlen rechnen können und über Stützpunktvorstellungen zu Minuten, Stunden, Tagen, Wochen, Monaten und Jahren verfügen.
- Die Aufgabe bietet sich an, um die verschiedenen Fragen arbeitsteilig, z.B. in einem Gruppenpuzzle, zu bearbeiten. Wenn auch die Inhalte (Tätigkeiten) unterschiedlich sind, so ist doch die Vorgehensweise in allen Fällen ähnlich. Anschließend wird eine Gesamtdarstellung „Wie ich meine Zeit verbringe" erstellt. Das Ergebnis lässt sich grob überprüfen, da die Gesamtstundenzahl das aktuelle Alter nicht überschreiten sollte.

Variante
- Die Aufgabe kann handlungsorientiert erweitert werden, indem die Schülerinnen und Schüler über einen gewissen Zeitraum die jeweils für eine Tätigkeit benötigte Zeit messen und tabellieren.

44

Zum Weiterdenken
Die Gegenüberstellung mehrerer Lösungen regt ein Nachdenken über unterschiedliche Verhaltensweisen und Schätzungen an und fordert zur Diskussion über das gewählte Vorgehen auf. Die ähnliche Struktur der Lösungswege wird im Vergleich deutlich.
Einen Tag in seinem Leben zu protokollieren (Daten messen) eignet sich als Hausaufgabe/längerfristige Aufgabe.

Zur grafischen Darstellung gibt es mehrere Anregungen – hier können die Schülerinnen und Schüler zunächst einen Zeitraum (Tag/Woche/Monat/Jahr) auswählen oder sich arbeitsteilig organisieren. Sie müssen auch die Tätigkeiten, die dargestellt werden sollen, aushandeln. Welche Oberbegriffe lassen sich finden? Die Lernenden treffen hier einige inhaltliche Festlegungen selbst.

Wie eine entsprechende Grafik in 10/30/50 Jahren aussähe, hängt mit der Frage zusammen, wie Menschen unterschiedlichen Alters ihre Zeit verbringen. Hier bietet sich – ebenso wie beim Vergleich mit Gleichaltrigen – eine kleine Umfrage an.

Dazu passende Aufgaben
A5 Matheaufgaben
B4 Händedruck
F5 Arbeitszeit
H2 Potter – na und …

Deine Lebenszeit **A4**

Anregungen für Schülerinnen und Schüler

Vielleicht helfen dir die folgenden Fragen:
- Wie lange dauert deine Lieblingssendung im Fernsehen?
- An welchen Tagen schaust du wie viele Stunden fern?
- Wie viele Tage hat ein Jahr?
- Was machst du in den Ferien?
- An welchen Tagen schaust du besonders viel fern, an welchen besonders wenig?

45

Abbildung 20: Aufgabe „Deine Lebenszeit" Lehrerkommentar (Büchter et al., 2010a, S.44-45)

6.4 Ausarbeitungen von den SchülerInnen

Insgesamt waren 53 SchülerInnen in den Modellierungsstunden anwesend. Als TeilnehmerInnen für die Analyse des Action Research Projekts qualifizierten sich alle SchülerInnen, bei welchen folgende Kriterien erfüllt waren:

- der Schüler/die Schülerin war in zumindest einer der drei Modellierungsstunden anwesend
- der Schüler/die Schülerin hat den Bearbeitungsprozess im eigenen Portfolio dokumentiert
- der Schüler/die Schülerin hat das Portfolio nach jeder der drei Stunden am Ende der Stunde der Lehrperson abgegeben.

Das letzte Kriterium wurde festgelegt, da nur so gewährleistet werden konnte, dass es sich bei der Ausarbeitung um eigene Gedankengänge der SchülerInnen handelt, da außerhalb der Schule andere Einflüsse (z.B. Ideen von Eltern, Hilfe von künstlicher Intelligenz) die Ergebnisse verfälschen hätten können. Alle 53 SchülerInnen erfüllten diese Kriterien und somit konnten die Dokumentationen aller SchülerInnen für die Datenauswertung und -analyse verwendet werden. Für die Analyse der qualitativen Daten wurden zunächst die Portfolios auf deren Kerninhalte untersucht. Daraus wurden anschließend Kategorien festgelegt, welche aus jedem Portfolio extrahiert werden sollten (Clark et al., 2020, S.97-98). Diese Inhalte wurden im Anschluss in einer Excel-Tabelle verschriftlicht. Folgende Kategorien wurden aus den Portfolios zu jeder der drei Ausarbeitungen extrahiert:

- *Gruppe*: für eine Zuordnung der Gruppenmitglieder bei jeder Aufgabe
- *Vorhandene Informationen*: welche Informationen konnten die SchülerInnen aus der Angabe entnehmen?
- *Beschaffung fehlender Informationen*: welche Ideen haben SchülerInnen zum Beschaffen der fehlenden Größen?
- *Erste Schätzung*: wie ist die erste Einschätzung ohne Rechnung von den SchülerInnen?
- *Rechenoperation(en)*: welche Rechenoperationen haben SchülerInnen in Kleingruppen für die Bearbeitung der Aufgabe verwendet?
- *Teilschritte / Lösungswege*: welche Teilschritte und Lösungswege haben SchülerInnen in Kleingruppen durchlaufen?
- *Ergebnis*: wie lautet das in der Kleingruppe erhaltene Ergebnis?
- *Schwierigkeitsgrad*: wie schätzen die SchülerInnen selbst den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe ein?

Diese Daten wurden aus den schriftlichen Dokumentationen sinngemäß in die Auswertungstabelle übertragen. Bei den Daten zur ersten Schätzung wurde ein Wert zugelassen, bei der Angabe einer Spannbreite wurde das arithmetische Mittel verwendet. Die Dokumentation der Gruppenzuordnungen war für jede der drei Aufgaben separat notwendig, da sich die Gruppenzusammensetzungen teilweise veränderten. Beim errechneten Ergebnis wurden sowohl ein genaues Ergebnis als auch eine berechnete Spannbreite zugelassen. Zur Erhebung des selbst festgelegten persönlichen Schwierigkeitsgrads der Aufgabe wurden drei unausgefüllte Sterne mit einer Legende vorgegeben (1 Stern: leicht, 2 Sterne: mittel, 3 Sterne: schwer) und SchülerInnen sollten selbst ihre Einschätzung markieren.

Neben diesen Kategorien wurde auch ermittelt, welche der folgenden Teilschritte des Modellierungskreislaufs nach Blum bei den Ausarbeitungen durchlaufen wurden (Blum, 2006, S.9):

- *Verstehen*
- *Vereinfachen / strukturieren*
- *Mathematisieren*
- *Mathematisch arbeiten*
- *Interpretieren*
- *Validieren*

Der letzte Teilschritt (Vermitteln) konnte im Rahmen der Datenauswertung nicht berücksichtigt werden, da dies nicht in den schriftlichen Ausarbeitungen festgehalten wurde. Die übrigen sechs Teilschritte konnten aus den Portfolios entnommen werden. Diese Daten wurden mittels einer Nominalskala mit drei Ausprägungen in der Auswertungstabelle dokumentiert: nicht vorhanden (0), teilweise vorhanden (1), vorhanden (2). Dadurch lässt sich in der Auswertung einfach herausfiltern, welche Teilschritte des Modellierungskreislaufes durchlaufen wurden bzw. welche Teilschritte tendenziell zu Schwierigkeiten geführt haben.

Zur Anonymisierung der Daten wurden alle Ausarbeitungen im Anschluss kodiert (Clark et al., 2020, S.97-98). Namen von SchülerInnen wurden durch die Teilnehmercode T1 – T53 ersetzt. Die Reihenfolge, in welcher die Daten der SchülerInnen ausgewertet wurden, war zufällig und folgte somit keinem Muster. Für die Zuordnung der Kleingruppen wurden Buchstaben von A – V verwendet, insgesamt gab es somit 22 Gruppen. Tabelle 4 veranschaulicht die Gruppenzuordnungen in den drei Modellierungsstunden. Die grau hinterlegten Felder kennzeichnen Veränderungen der Gruppenzusammensetzung in einer Stunde im Vergleich zu den übrigen Modellierungsstunden. Besonders bei Gruppe N ist erkennbar, dass die Gruppenzusammensetzung in jeder Stunde variiert hat. Die Gruppen P, Q, R, S und T hatten in einer Stunde veränderte Zusammensetzungen. Gruppe O löste sich in der dritten Stunde auf, sodass es bei Aufgabe 3 nur 21 Gruppen gab.

	Aufgabe 1		Aufgabe 2		Aufgabe 3	
Gruppe	**Nummer**	**Anzahl**	**Nummer**	**Anzahl**	**Nummer**	**Anzahl**
A	T1 T10	2	T1 T10	2	T1 T10	2
B	T2 T3	2	T2 T3	2	T2 T3	2
C	T4 T9	2	T4 T9	2	T4 T9	2
D	T5 T6	2	T5 T6	2	T5 T6	2
E	T7 T8	2	T7 T8	2	T7 T8	2
F	T11 T18	2	T11 T18	2	T11 T18	2
G	T12 T13 T14 T15	4	T12 T13 T14 T15	4	T12 T13 T14 T15	4
H	T16 T17	2	T16 T17	2	T16 T17	2
I	T19 T20 T21	3	T19 T20 T21	3	T19 T20 T21	3
J	T22 T23	2	T22 T23	2	T22 T23	2
K	T24 T25 T28	3	T24 T25 T28	3	T24 T25 T28	3
L	T26 T27	2	T26 T27	2	T26 T27	2
M	T29 T30	2	T29 T30	2	T29 T30	2
N	T31 T52	2	T31 T51 T52	3	T31 T32	2
O	T32 T38 T53	3	T32 T38 T53	3	–	0
P	T33 T48	2	T33 T35	2	T33 T48	2
Q	T34 T39	2	T34 T39	2	T34 T35 T39	3
R	T36 T42 T43	3	T36 T42 T43	3	T42 T43	2
S	T37 T49 T50	3	T37 T49 T50	3	T37 T38 T49	3
T	T35 T40 T44	3	T40 T44	2	T40 T44	2
U	T41 T47	2	T41 T47	2	T41 T47	2
V	T45 T46	2	T45 T46	2	T45 T46	2
abwesend		1		1		5

Tabelle 4: Gruppenzuteilungen und Anzahl der Gruppenmitglieder

7 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Datenanalyse dargestellt. Dabei werden die in Kapitel 6.4 erläuterten Kategorien für jede der drei Aufgaben ausgewertet. Ähnliche Ausarbeitungen werden zu einer Übergruppe der Bearbeitungsart zusammengefasst und ein repräsentativer Lösungsweg einer Kleingruppe in der Arbeit skizziert. Weiters werden zentrale fachliche Konzepte und Teilschritte im Modellierungskreislauf ausgewertet und zusammengefasst.

7.1 Portfolio-Aufgabe 1: Alterlaa

Die folgenden drei Kategorien sind Überlegungen, welche die TeilnehmerInnen in Einzelarbeit selbstständig vor der Diskussion und Bearbeitung in den Kleingruppen getätigt und verschriftlicht haben:

Vorhandene Informationen:

Bei der Aufgabe „Alterlaa“ haben 46 TeilnehmerInnen (88.5%) erkannt und angegeben, dass in der Angabe bereits die Abbildung Informationen liefert (Anzahl der Balkone und Fenster), die für die Lösung der Aufgabenstellung relevant und hilfreich sind. 2 TeilnehmerInnen (3.8%) gaben als vorhandene Information an, dass 800 Personen im Haus leben. Wie sie zu dieser Annahme kamen, wurde jedoch nicht erwähnt. Die übrigen 3 TeilnehmerInnen (5.8%) gaben andere Daten als bereits vorhandene Informationen an („Alterlaa, sehr groß“, „pro Wohnung ca. 2 Personen) und eine Person gab keine Angabe.

Beschaffung fehlender Informationen:

Auf die Frage, wie die TeilnehmerInnen zu den fehlenden Informationen gelangen würden, gab es eine Vielzahl an Vorschlägen. Mehrfachnennungen waren möglich. Die erwähnten Strategien werden im Folgenden absteigend nach Häufigkeit aufgelistet:

- schätzen (22x)
- rechnen (17x)
- zählen /abzählen (14x)
- multiplizieren (4x)
- fragen (3x)

- erfinden (1x)
- raten (1x)

Fünf TeilnehmerInnen gaben keine Strategie (k.A.) an. Zwei TeilnehmerInnen nutzen das Feld, um bereits erste Rechnungen zu notieren.

Erste Schätzung:

49 TeilnehmerInnen (94.2%) gaben eine erste Schätzung für das Ergebnis an. Die geschätzten Ergebnisse liegen zwischen 200 – 10.536 Personen. Der Median der Schätzungen befindet sich bei 1.800 Personen. Da es einen eindeutigen Ausreißer nach oben gibt ist das arithmetische Mittel mit 2.188 Personen nicht repräsentativ. Ungefähr die Hälfte der Schätzungen liegen zwischen 900 – 3.000 Personen.

7.1.1 Bearbeitungsprozesse der Gruppen

Im Wesentlichen kann bei den Ausarbeitungen der Gruppen in zwei Typen unterschieden werden. Im Folgendem werden beide Typen beschrieben und eine exemplarische Ausarbeitung im Detail vorgestellt und erläutert.

Typ 1:

Bei diesem Bearbeitungsprozess wurde in folgenden Schritten vorgegangen, wobei die Ausführung von Schritt 2 und Schritt 3 in einigen Gruppen auch in einem Rechenschritt erfolgte:

1) Abzählen der Balkone und Stockwerke
2) Berechnung der Anzahl an Wohnungen auf der Vorderseite
3) Multiplikation der Wohnungsanzahl mit der Personenanzahl pro Wohnung

Bei diesem Typ der Ausarbeitung wurde die Rückseite des Gebäudes nicht berücksichtigt. In keiner Gruppe, deren Ausarbeitung diesem Typ entsprach, wurde eine Information vermerkt, dass es auf der Rückseite keine Wohnungen gibt. Dieses Fehlen von Informationen lässt die Vermutung aufstellen, dass diese Gruppen bei der Ausarbeitung nicht an eine Rückseite des Gebäudes gedacht haben. Dazu muss auch angemerkt werden, dass aus der Abbildung nicht eindeutig hervorgeht, dass das Gebäude auf der Rückseite ident aussieht wie auf der

Vorderseite. Daher lässt sich für diesen Typ der Ausarbeitung festhalten, dass diese Gruppen entweder die bekannten Gebäude von Alterlaa nicht kannten oder Aufgrund des zweidimensionalen Bildes nicht in der Lage waren, die Vermutung aufzustellen, dass die Rückseite des Gebäudes dieselbe Gestalt hatte. Bei ersterem konnten sie nicht auf für die Aufgabe benötigtes Allgemeinwissen zurückgreifen, bei zweiterem konnten sie die Symmetrie des Gebäudes nicht erkennen und für die Berechnung nutzen. Dieser Typ der Ausarbeitung trat in 7 von 22 Gruppen (A, B, D, E, H, J, T) auf.

Die folgende Ausarbeitung von Gruppe A dient als exemplarisches Beispiel für diesen Typ der Ausarbeitung. In Abbildung 21 wird der Ausarbeitungsprozess dargestellt, aus Gründen der Anonymisierung wurde in allen in Kapitel 7 dargestellten Abbildungen nicht die originale Ausarbeitung der TeilnehmerInnen verwendet, sondern ein von der Forscherin angefertigte Abschrift davon.

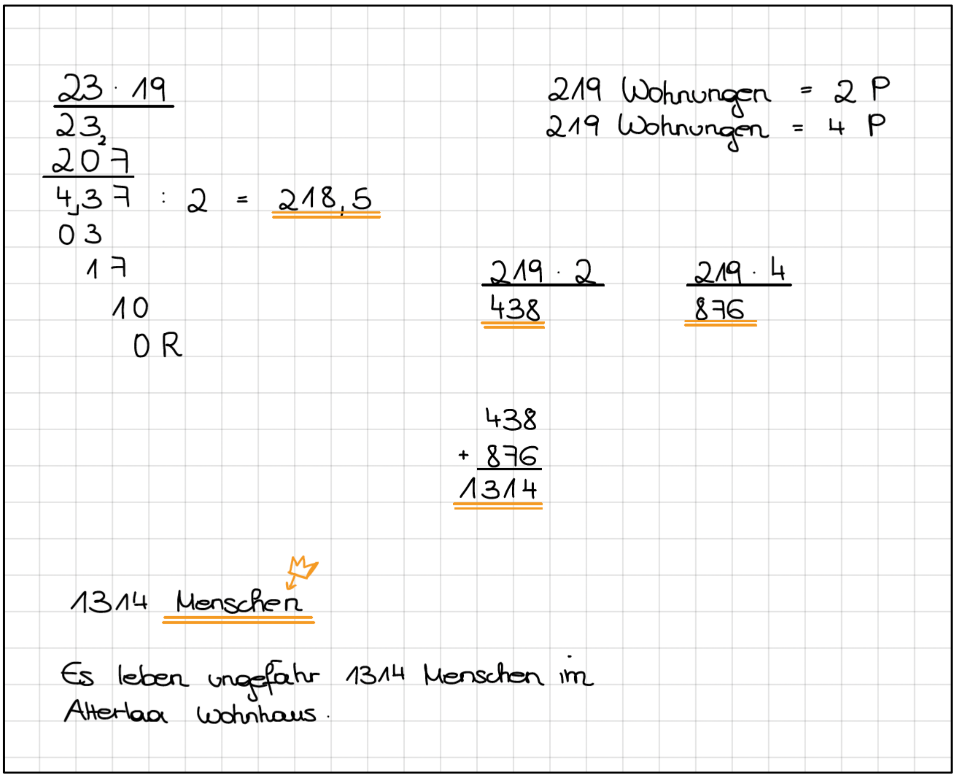


Abbildung 21: Aufgabe "Alterlaa" Ausarbeitung Gruppe A

Tabelle 5 veranschaulicht die Zwischenergebnisse aller Gruppen, die diesem Bearbeitungsprozess folgten. Die Ergebnisse liegen in einem Bereich von 1110 – 1380 Personen. Da es keine Ausreißer gibt, liegen der Median mit 1290 Personen und das arithmetische Mittel mit 1267 Personen nahe beieinander.

Gruppe	Anzahl Wohnungen (Vorderseite)	Personen pro Wohnung	Ergebnis
A	437	219 Wohnungen: 2 P. 219 Wohnungen: 4 P.	1314
B	460	3 P.	1380
D	430	3 P.	1290
E	444	2,5 P.	1110
H	610	2 P. + 20 P.	1240
J	460	3 P.	1380
T	456	120 Wohnungen: 3P. sonst 2 P.	1152
		Median	**1290**
		Arithmetisches Mittel	**1267**

Tabelle 5: Vergleich der Ausarbeitungen vom Typ 1 bei der Aufgabe „Alterlaa“

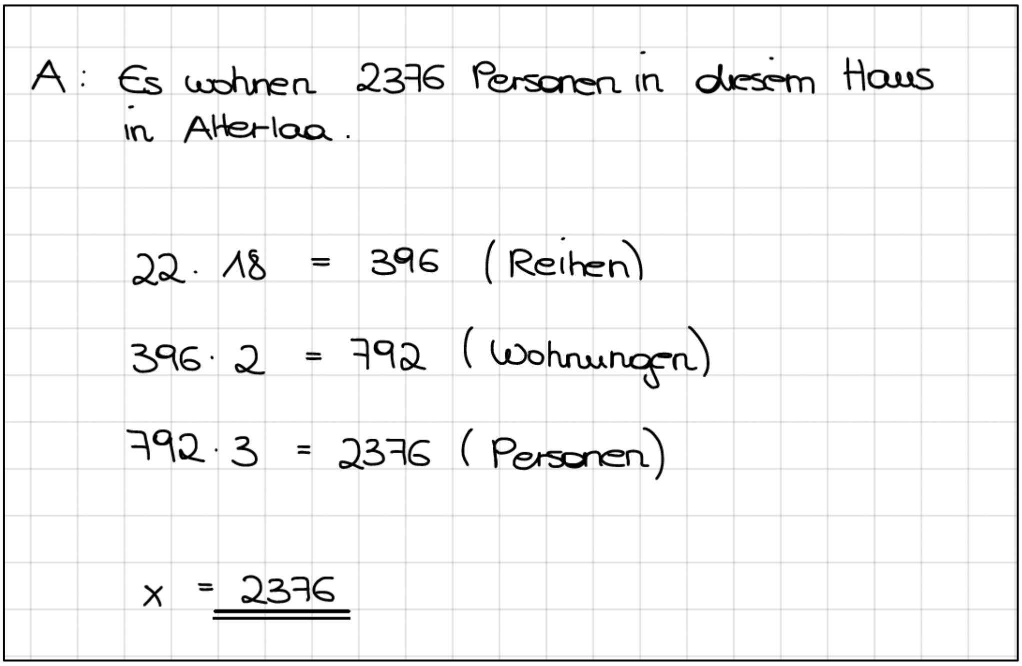
Typ 2:

Dieser Bearbeitungsprozess macht den größten Teil der Gruppenausarbeitungen aus, 14 von 22 Gruppen (C, G, I, L, K, M, N, O, P, Q, R, S, U, V) haben diesen Typ der Ausarbeitung durchgeführt. Folgende Schritte wurden durchlaufen, wobei die Schritte 2-4 wiederum vertauscht oder als ein Rechenschritt zusammengefasst auftreten konnten:

1) Abzählen der Balkone und Stockwerke
2) Berechnung der Anzahl an Wohnungen auf der Vorderseite
3) Verdopplung der Wohnungsanzahl (Vorderseite + Rückseite)
4) Multiplikation der Wohnungsanzahl mit der Personenanzahl pro Wohnung

Dieser Bearbeitungsprozess stellt daher die Verfeinerung von Typ 1 dar, da alle relevanten Informationen bei der Berechnung berücksichtigt wurden. Die für diesen Bearbeitungstyp durchlaufenen Teilschritte spiegeln auch die 6.3 definierte Lösungserwartung zur Gänze wider.

Der Grad an Genauigkeit und inhaltlicher sowie mathematischer Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung variiert stark zwischen den Gruppen. Daher werden folgend zwei repräsentative Ausarbeitungen für diesen Bearbeitungstyp dargestellt. Abbildung 22 gibt eine stark vereinfachte Ausarbeitung mit ohne kreative Überlegungen wieder, wohingegen Abbildung 23 eine besonders detaillierte und kreative Ausarbeitung der Fragestellung zeigt.


A: Es wohnen 2376 Personen in diesem Haus in Alterlaa.

$22 \cdot 18 = 396$ (Reihen)

$396 \cdot 2 = 792$ (Wohnungen)

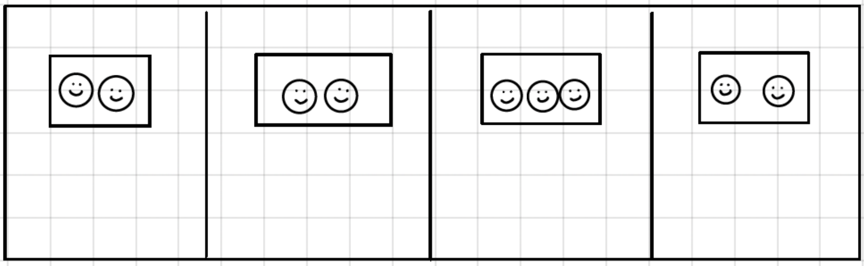
$792 \cdot 3 = 2376$ (Personen)

$x = \underline{\underline{2376}}$

Abbildung 22: Aufgabe "Alterlaa" Ausarbeitung Gruppe N

20 · 22 = 440 · 2 = 880 Wohnungen

Durchschnitt



jede 3. Wohnung: 3 Menschen

jede 5. Wohnung: 4 Menschen

sonst 2 Menschen

880 : 3 = 293 · 3 = 880

880 : 5 = 176 · 4 = 704

880 - 293 - 176 = 411 · 2 = 832

880
+ 704
+ 832

2406 Menschen

Es leben dort 2406 Menschen.

Abbildung 23: Aufgabe "Alterlaa" Ausarbeitung Gruppe Q

In Tabelle 6 werden die Teilergebnisse und das Endergebnis der Gruppen dargestellt, deren Lösungsprozess dem Schema von Typ 2 entspricht. Die Spannweite der Ergebnisse liegt zwischen 1760 – 3520 Personen. Auch hier gibt es keine Ausreißer, wodurch der Median mit 2640 Personen und das arithmetische Mittel mit 2662 Personen nahe beieinander liegen.

Gruppe	Anzahl Wohnungen (Vorderseite)	Personen pro Wohnung	Ergebnis
C	400	4 P.	3200
G	378	3 - 4 P.	2868 - 3028
I	450	3 P.	2100 (RF beim Verdoppeln)
K	418	4 P.	3344
L	396	4 P.	3168
M	440	3 P.	2640
N	396	3 P.	2376
O	440	2 P.	1760
P	420	3 P.	2520
Q	440	jede 3.Wohnung: 3 P. jede 5. Wohnung: 4 P. sonst 2 P.	2406
R	440	3 P.	2640
S	286	130 Wohnungen: 4 P. 156 Wohnungen: 3 P.	2000
U	440	4 P.	3520
V	440	440 Wohnungen: 2 P. 440 Wohnungen: 4 P.	2640
		Median	**2640**
		Arithmetisches Mittel	**2662**

Tabelle 6: Vergleich der Ausarbeitungen vom Typ 2 bei der Aufgabe „Alterlaa"

Die verbleibende und somit keinem Typ zugeordnete Ausarbeitung von Gruppe F nimmt einen völlig anderen Weg, indem die TeilnehmerInnen davon ausgehen, dass 8.000 Personen in allen 6 Alterlaa-Bauten leben. Mittels einer Division erhält diese Gruppe anschließend eine Personenanzahl für ein Gebäude. Diese Ausarbeitung verzichtet gänzlich auf das Abzählen von Balkonen und Stockwerken, sondern macht sich das (Alltags-)wissen zunutze, dass es 6 Gebäude gibt und, dass insgesamt 8.000 Personen in allen Gebäuden leben. Diese Annahme ist plausibel und sinnvoll, wenn man die tatsächliche Personenanzahl als Hintergrundinformation heranzieht (siehe AEAG, 2020). Mit diesen Annahmen gelangt diese Gruppe zu einem Ergebnis von 1266 Personen, welches allerdings fälschlicherweise noch durch 2 dividiert wurde. Dieser Denkfehler könnte eventuell durch ein Missverstehen der Fragestellung entstanden, denn dadurch würde ja die Anzahl der Wohnungen berechnet werden, wenn in jeder Wohnung 2 Personen leben würden.

Schwierigkeitsgrad:

Der selbsteingeschätzte Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe liegt im Durchschnitt bei 1,5 von 3 Sternen. 23 TeilnehmerInnen gaben an, dass die Aufgabe für sie leicht war, für 23 TeilnehmerInnen war die Aufgabe mittel und 3 TeilnehmerInnen stuften die Aufgabe als schwer ein. 3 TeilnehmerInnen gaben keine Angabe an.

7.1.2 Allgemeine Schlussfolgerungen der Ausarbeitungen

Die Analyse der Ausarbeitungen ergibt, dass sich alle Gruppen des Bearbeitungsprozesses von Typ 1 und Typ 2 als Ausgangspunkt für die Beantwortung der Fragestellung für das Abzählen der Balkone, Fenster und Stockwerke entschieden haben. Sie haben damit auf grundlegende Basiskenntnisse aus der Primarstufe zurückgegriffen, da die Abbildung dies nahelegte. Bei der Definition der Personen pro Wohnung gingen die Gruppen differenzierter vor. Während sich einige Gruppen dafür entschieden haben, von Beginn an eine durchschnittliche Anzahl an Personen festzulegen und somit den Mathematisierungsprozess zu vereinfachen, haben andere Gruppen detailliertere Annahmen über die Personenzahlen pro Wohnung getätigt (Gruppen A, T, G, Q, S, V, siehe Tabelle 5 und Tabelle 6) und somit einen komplexeren Sachverhalt dargestellt.

Da die Ausarbeitungen von Typ 1 bei der Berechnung der Wohnungsanzahl die Hinterseite des Gebäudes nicht berücksichtigt, wurde dies für die bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse in der folgenden Tabelle korrigiert. Bei Gruppe F wurde das zuerst berechnete Ergebnis unter Vernachlässigung des Denkfehlers verwendet.

Gruppe	Ergebnis (Vorder- und Rückseite)
A	2628*
B	2760*
C	3200
D	2580*
E	2220*
F	1266**
G	2948***
H	2480*
I	2100
J	2760*
K	3344
L	3168
M	2640
N	2376
O	1760
P	2520
Q	2406
R	2640
S	2000
T	2304*
U	3520
V	2640
* Korrektur: Verdopplung des errechneten Ergebnisses ** Verwendung des Zwischenergebnisses *** Verwendung des Durchschnitts der Spannbreite	

Tabelle 7: Ergebnisse im Vergleich

Aus Tabelle 7 und Abbildung 24 lässt sich ablesen, dass die berechneten Ergebnisse eine Spannweite von 1266 – 3520 Personen aufweisen. Das arithmetische Mittel liegt mit 2557 Personen nahe am Median mit 2604 Personen. Generell liegen alle Ergebnisse in dem in Kapitel 6.3 definierten möglichen Bereich und im Vergleich zu den ersten Schätzungen sind die Gruppenergebnisse signifikant homogener.

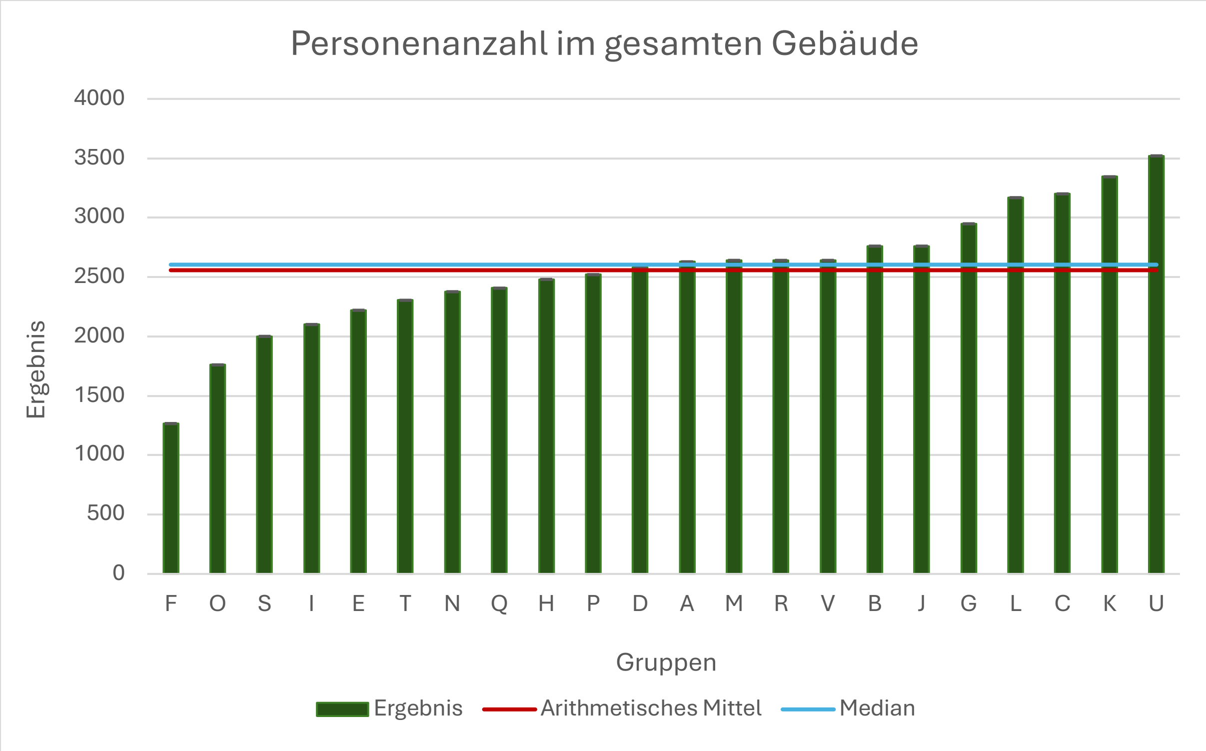


Abbildung 24: Säulendiagramm der Ergebnisse in aufsteigender Reihenfolge

Mathematische Operationen und fachliche Konzepte

Für die Bearbeitung der Fragestellung waren ausschließlich grundlegende mathematische Operationen – die sachgemäße Anwendung der Grundrechnungsarten – erforderlich. Alle 21 Gruppen aus Typ 1 und Typ 2 griffen auf das mathematische Wissen zurück, dass die Berechnung einer rechteckigen Oberfläche, welche die Vorderseite des Gebäudes darstellt, mit einer Multiplikation der Länge und der Breite bzw. der Anzahl der Wohnungen pro Stock mal der Anzahl der Stockwerke gelöst wird. Diese Fertigkeit lässt sich den zentralen fachlichen Konzepten **Z1: Zahlen und Maße** und **Z3: Figuren und Körper** zuordnen, auch wenn die Aufgabenstellung aufgrund der notwendigen mathematischen Fertigkeiten bereits in der Grundschule bearbeitet werden könnte (Lehrplan, 2024). Alle Gruppen, deren Ausarbeitungen dem Typ 2 entsprachen, nutzen ihre Kenntnisse über symmetrische Körper (Z3). Das Ergebnis von Gruppe G war insofern besonders, als dass diese Gruppe eine Spannweite von 2868 - 3028 Personen als Ergebnis angab, wodurch diese Gruppe zusätzlich auf ein Basiselement der Statistik zurückgriff.

Modellierungsschritte

In Bezug auf die Teilschritte des Modellierungskreislaufs nach Blum & Leiss (Blum, 2006, S.9) stellt Tabelle 8 dar, inwiefern der Modellierungskreislauf bei der Bearbeitung der Fragestellung durchlaufen wurde und welche Teilschritte für die TeilnehmerInnen Herausforderungen darstellten. An dieser Stelle ist festzuhalten, dass die TeilnehmerInnen für diese Modellierungsstunden nicht mit dem Modellierungskreislauf oder der vereinfachten Version vertraut gemacht wurden. Dies hat den Grund, dass ermittelt werden sollte, ob und wie die TeilnehmerInnen mit diesen Aufgaben umgehen und welche Schritte intuitiv durchlaufen werden bzw. angeleitet durch die gezielten Impulsfragen auf den Dokumentationsbögen verwendet werden.

In der Auswertung der Daten wurden für eine bessere Vergleichbarkeit der Gruppenausarbeitungen drei Ausprägungen der einzelnen Teilschritte festgelegt:

- Teilschritt vollständig durchgeführt
- Teilschritt teilweise durchgeführt (oder fehlerhaft durchgeführt)
- Teilschritt nicht durchgeführt (oder nicht dokumentiert)

Teilschritt	Analyse der Gruppenausarbeitungen
Verstehen	*Vollständig durchgeführt*: Alle Gruppen haben die Fragestellung vollständig verstanden, dies war sowohl aus der Dokumentation als auch aus dem Rechenprozess ersichtlich.
Vereinfachen / Strukturieren	*Vollständig durchgeführt*: 15 Gruppen konnten diesen Teilschritt vollständig durchführen. *Teilweise durchgeführt*: 7 Gruppen führten diesen Teilschritt teilweise durch. Der Hauptgrund dafür, dass diese Gruppen den Schritt nur teilweise ausgeführt haben, liegt darin, dass bei der Vereinfachung die Rückseite vergessen bzw. nicht berücksichtigt wurde.

Mathematisieren	*Vollständig durchgeführt*: In 19 Gruppen war dieser Teilschritt vollständig vorhanden. *Teilweise durchgeführt*: In 3 Gruppen wurde dieser Schritt teilweise durchgeführt. Hier wurden teilweise Zahlen in Rechnungen und Erläuterungen vertauscht oder Rechenschritte waren nicht vollständig nachvollziehbar.
Mathematisch arbeiten	*Vollständig durchgeführt*: 20 Gruppen haben diesen Schritt vollständig erledigt. *Teilweise durchgeführt*: In 2 Gruppen wurde der Teilschritt teilweise erledigt, in diesen 2 Gruppen traten bei Berechnungen Rechenfehler auf.
Interpretieren	*Vollständig durchgeführt*: In 21 Gruppen war dieser Schritt vollständig erkennbar. *Teilweise durchgeführt*: In einer Gruppe wurde das Ergebnis fälschlicherweise noch dividiert und anschließend falsch als Endergebnis interpretiert.
Validieren	*Vollständig durchgeführt*: In 14 Gruppen wurde der Rechenprozess vollständig und sinngemäß validiert. *Teilweise durchgeführt*: 7 Gruppen gaben zwar eine Validierung an, es waren jedoch keine tatsächlichen Begründungen vorhanden. *Nicht durchgeführt*: 1 Gruppe gab keine Validierung des Ergebnisses an.
Vermitteln	Dieser Teilschritt konnte im Rahmen der Ausarbeitungen nicht erhoben werden. In Diskussionsrunden fanden der Austausch und die Präsentation der Ergebnisse mündlich statt und wurde dadurch nicht dokumentiert.

Tabelle 8: Analyse der durchgeführten Teilschritte des Modellierungskreislaufs (Blum, 2006, S.9)

7.2 Portfolio-Aufgabe 2: Deine Haut

Vorhandene Informationen:

Bei dieser Aufgabe gaben 33 TeilnehmerInnen (63.5%) an, dass der eigene Körper (Größe, Körperumfang, Kopfumfang, Armlänge) Informationen für die Berechnung liefert. 4 TeilnehmerInnen (7.7%) gaben bereits einen geschätzten Durchschnittswert an und sagten, dass die Haut des Menschen 2 m^2 groß sei bzw. ein durchschnittlicher Mensch 1,80 m groß ist. 4 weitere TeilnehmerInnen glaubten, aus dem Foto, das der Aufgabenstellung angefügt war, Informationen für die Berechnung ablesen zu können. Die übrigen 11 TeilnehmerInnen (21,2%) gaben an, dass keine Informationen vorliegen bzw. äußerten lediglich Schlagworte wie „Haut" oder „Oberfläche" als vorhandene Informationen.

Beschaffung fehlender Informationen:

Auch bei dieser Aufgabe variierten die Vorschläge für Strategien für die Beschaffung fehlender Informationen. Alle Vorschläge sind wieder in absteigender Reihenfolge dargestellt:

- messen / abmessen (22x)
- schätzen (21x)
- rechnen (21x)
- fragen (3x)
- multiplizieren (3x)
- runden (3x)
- denken (2x)
- raten (1x)

Sieben TeilnehmerInnen gaben keine Strategie (k.A.) an.

Erste Schätzung:

46 TeilnehmerInnen (88.5%) notierten eine erste Schätzung. Die geschätzten Ergebnisse wurden teilweise in cm^2 und teilweise in m^2 angegeben. Für die Vergleichbarkeit der Schätzungen wurden alle Angaben in m^2 umgerechnet. 12 Schätzungen konnten nicht berücksichtigt werden, da keine oder falsche Einheiten verwendet wurden (Längenmaße statt Flächenmaße). Aus den verbleibenden 34 Schätzungen ergab sich eine Spannweite von $0{,}001 m^2 – 320\ m^2$. Aus dieser enorm großen Spannweite lässt sich erkennen, dass die

Abschätzung dieser Größe für die TeilnehmerInnen eine wesentlich größere Herausforderung darstellte als bei Aufgabe 1. Dies gibt auch Aufschluss über das Vorstellungsvermögen von Flächenmaßen und Oberflächen von den TeilnehmerInnen. Aufgrund dieser großen Spanne ist das arithmetische Mittel mit 19,1 m^2 weder sinnvoll noch repräsentativ, der Median mit 3 m^2 bildet den Sachverhalt zwar besser ab, ist aufgrund der stark voneinander abweichenden Ergebnisse jedoch immer noch nicht besonders aussagekräftig.

7.2.1 Bearbeitungsprozesse der Gruppen

Bei der Aufgabe „Deine Haut" können die Bearbeitungsprozesse wieder zwei Typen unterschieden werden. Typ 1 stellt die gröbere, vereinfachte Version der Berechnung dar, während Typ 2 detaillierter und somit komplexer ist.

Typ 1:

Zur Beantwortung der Fragestellung wurde folgendermaßen vorgegangen:

1) Abmessen der Körpergröße und der Körperbreite bzw. des Körperumfangs
2) Berechnung der Oberfläche:
    a. eigener Körper als verdoppeltes Rechteck: Berechnung der rechteckigen Vorderseite (Körpergröße mal Breite) mit anschließender Verdopplung (Rückseite)
    b. eigener Körper als Quader: Berechnung der Mantelfläche (Körpergröße mal Körperumfang)
3) teilweise durchgeführt: Umwandeln des Ergebnisses in m^2

Bei diesem Typ des Bearbeitungsprozesses wurde der Körper als ein einziger geometrischer Körper bzw. Form betrachtet, d.h. es wurde eine sehr grobe Vereinfachung vorgenommen. Einige Flächenteile des Körpers (z.B. Innenseiten der Extremitäten) wurden dadurch komplett vernachlässigt. 13 von 22 Gruppen entschieden sich für diese Art des Bearbeitungsprozesses (A, C, D, F, G, H, I, J, L, M, O, T, U). Abbildung 25 stellt einen für diesen Bearbeitungstyp repräsentative Lösungsprozess dar.

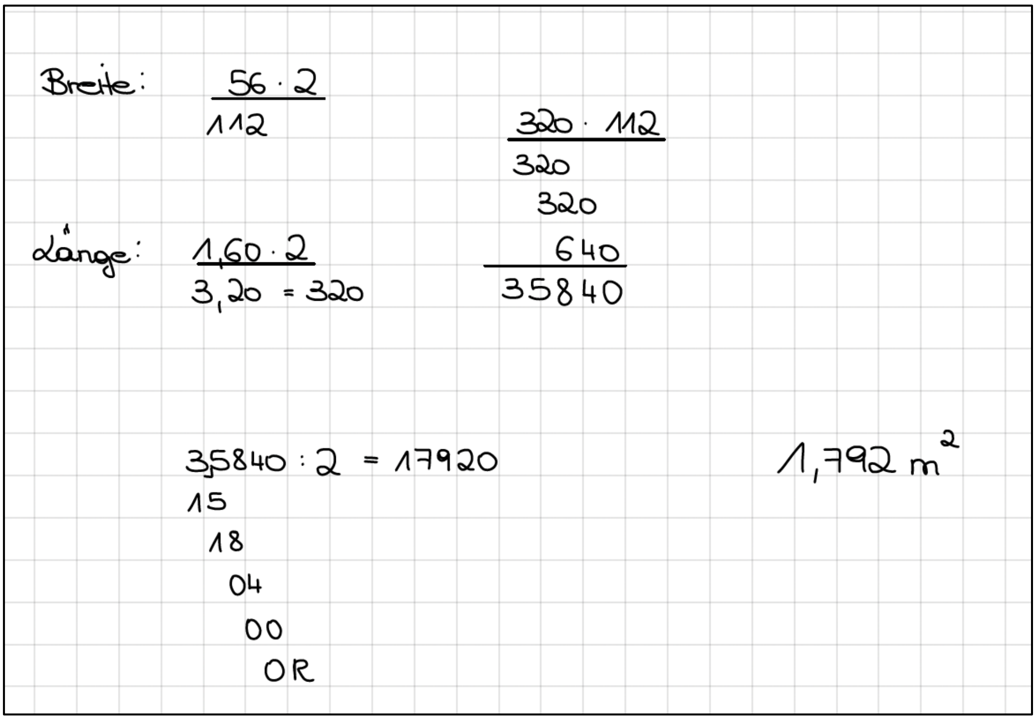


Abbildung 25: Aufgabe "Deine Haut" Ausarbeitung Gruppe H

Tabelle 9 veranschaulicht die Ergebnisse jener Gruppen, deren Bearbeitungsprozess dem Typ 1 entsprach. Die Ergebnisse wurden hier in der von den TeilnehmerInnen berechneten Einheiten wiedergegeben. Ein allgemeiner Vergleich der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 7.2.2.

Gruppe	Ergebnis
A	9.000 cm^2
C	7.800 cm^2
D	1,264 m^2
F	13.200 cm^2
G	7.200 cm^2 (nur Vorderseite)
H	1,792 m^2
I	1,287 m^2
J	1,28 m^2
L	18.860 cm^2
M	1,28 m^2
O	93,6 cm^2 (RF: m mal cm gerechnet)
T	48 m (DF und RF)
U	1,87 m^2

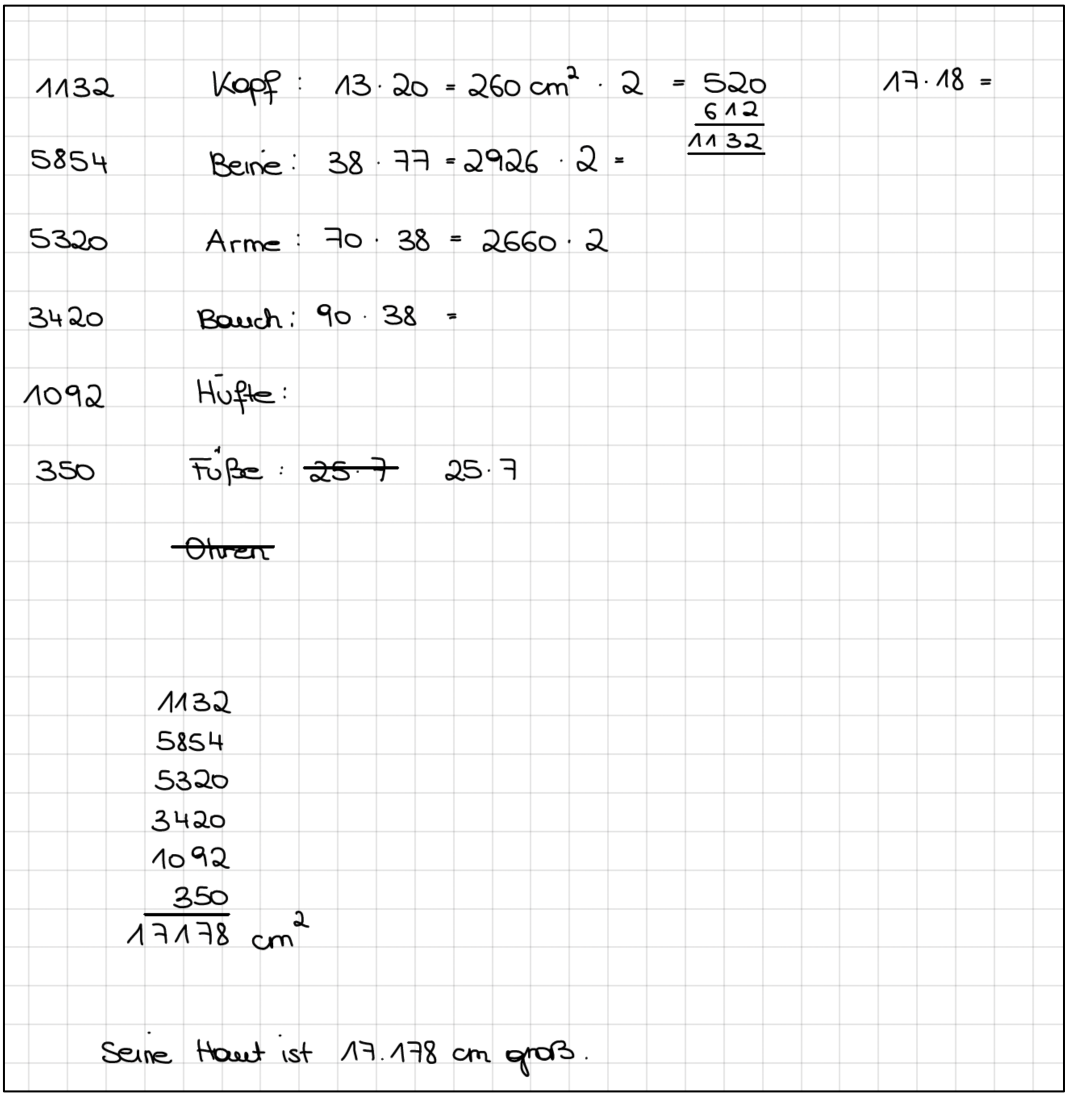
Tabelle 9: Ergebnisse bei Typ 1 bei der Aufgabe „Deine Haut“

Typ 2:

Bei diesem Typ folgte der Ausarbeitungsprozess folgendem Schema:

1) Unterteilen des eigenen Körpers in Teilkörper (Beine, Arme, Rumpf, Kopf, etc.)
2) Abmessen der Teillängen und Umfänge
3) Berechnung der Oberfläche: Teiloberflächen berechnen und anschließend addieren
4) teilweise durchgeführt: Umwandeln des Ergebnisses in m^2

Bei diesem Ausarbeitungstyp wurde der eigene Körper in Teilkörper zerlegt. Dies ermöglicht eine genauere Berechnung als in Typ 1. Die mathematische Ausarbeitung dieses Typs ist somit detaillierter und umfangreicher. TeilnehmerInnen, welche sich für diese Art der Bearbeitung der Fragestellung entschieden haben, zeigten einen kreativen Zugang zur Beantwortung der Frage mit genau überlegter mathematischer Auseinandersetzung. Außerdem konnten sie das mathematische Hintergrund wissen anwenden, dass die Oberfläche der einzelnen Körperteile (Beine, Arme, Rumpf) der Mantelfläche eines Zylinders bzw. Prismas entspricht und den Umfang mit der Länge des jeweiligen Körperteils multiplizieren. 7 Gruppen haben für die Ausarbeitung diesen Lösungsprozess gewählt (B, K, P, Q, R, S, V). Die Abbildungen 26 und 27 zeigen zwei verschiedene, detailreiche Ausarbeitungen dieses Typs.



1132 Kopf: 13 · 20 = 260 cm² · 2 = 520
612
1132
17 · 18 =

5854 Beine: 38 · 77 = 2926 · 2 =

5320 Arme: 70 · 38 = 2660 · 2

3420 Bauch: 90 · 38 =

1092 Hüfte:

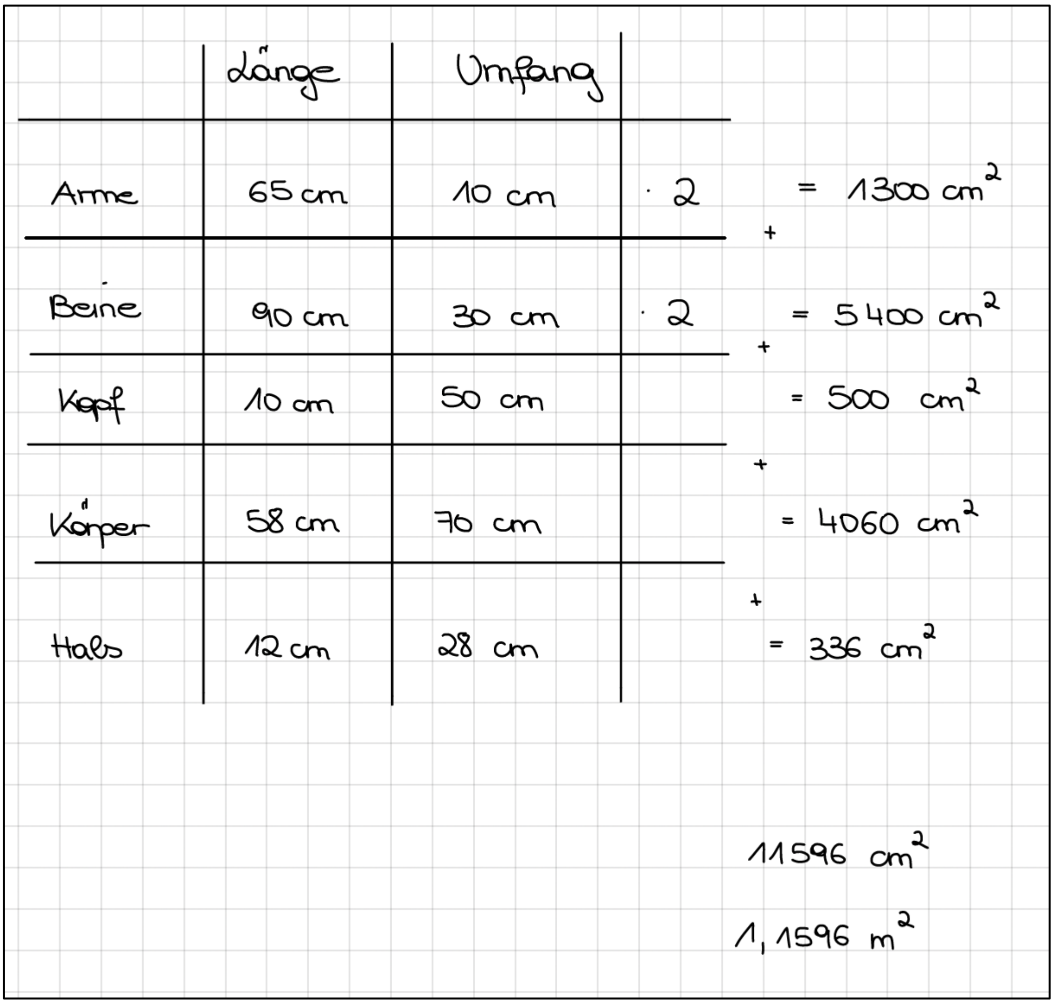
350 Füße: ~~25 · 7~~ 25 · 7

~~Oben~~

1132
5854
5320
3420
1092
350
17178 cm²

Seine Haut ist 17.178 cm groß.

Abbildung 26: Aufgabe "Deine Haut" Ausarbeitung Gruppe P



	Länge	Umfang		
Arme	65 cm	10 cm	· 2	= 1300 cm²
				+
Beine	90 cm	30 cm	· 2	= 5400 cm²
				+
Kopf	10 cm	50 cm		= 500 cm²
				+
Körper	58 cm	70 cm		= 4060 cm²
				+
Hals	12 cm	28 cm		= 336 cm²

11596 cm²

1,1596 m²

Abbildung 27: Aufgabe "Deine Haut" Ausarbeitung Gruppe Q

In Tabelle 10 werden die Ergebnisse der Gruppen, die diesen Bearbeitungsprozess gewählt haben, aufgelistet. Auch hier wurden die von den Gruppen gewählten Einheiten beibehalten, auch Kommafehler wurden nicht korrigiert, sondern mit einer Bemerkung versehen.

Gruppe	Ergebnis
B	3.600 cm² (nur Vorderseite berechnet)
K	337 cm (DF und RF: Längenmaße addiert)
P	171,78 cm² (falsche Kommasetzung)
Q	1,1596 m²
R	1,80 m² (DF: Längenmaße addiert; unklar, woher das Ergebnis kommt)
S	1,7048 m²
V	11.322 cm²

Tabelle 10: Ergebnisse bei Typ 2 bei der Aufgabe „Deine Haut“

Von zwei Gruppen (E, N) waren die Auswertungen nicht nachvollziehbar, sodass sie keinem Typ zugeordnet werden konnten und aus den Teilschritten auch nicht erschlossen werden konnte, welche Lösungsprozesse angewendet wurden. Sie können daher für die weitere Analyse dieser Aufgabe nicht in Betracht gezogen werden.

Schwierigkeitsgrad:

Der selbsteingeschätzte Schwierigkeitsgrad von Aufgabe 2 liegt im Durchschnitt bei 2,0 von 3 Sternen. Für 9 TeilnehmerInnen war die Aufgabe leicht, für 26 TeilnehmerInnen mittel und für 13 TeilnehmerInnen war die Aufgabe schwer. 4 TeilnehmerInnen gaben keine Antwort an.

7.2.2 Allgemeine Schlussfolgerungen der Ausarbeitungen

Die Auswertungen aller Gruppenausarbeitungen ergab, dass sich alle Gruppen dafür entschieden haben, mithilfe eines Maßbandes Längen des eigenen Körpers abzumessen. Keine der Gruppen hat sich für einen alternativen Lösungsansatz entschieden, obwohl auch Papierblätter, Plakatpapier und große Flipchart-Rollen zur Verfügung gestellt wurden.

Allgemein ließ sich anhand der Portfolio-Ausarbeitungen erkennen, dass diese Aufgabe für einige Gruppen eine Herausforderung darstellte, da während des Bearbeitungsprozesses verschiedene Hürden auftraten. Die Schwierigkeiten ergaben sich auf zwei verschiedenen Ebenen:

1) Übersetzen des Real- und Situationsmodells in ein mathematisches Modell (Mathematisieren)
2) Mathematisch korrekte Berechnung des gewählten Lösungsansatzes (Mathematisches Arbeiten)

Beide auftretenden Schwierigkeiten stellen Teilschritte des Modellierungskreislaufs dar und wurden auch bei der Analyse der durchgeführten Modellierungsschritte in Tabelle 12 ausgewertet. Da die Fehlerquellen bei diesen zwei Teilschritten jedoch bei dieser Aufgabe besonders auffallend waren, wird bereits an dieser Stelle darauf eingegangen.

<u>Mathematisieren</u>: in einigen Gruppen traten bei diesem Teilschritt Schwierigkeiten auf. Einerseits waren in vier Gruppen die gewählten Rechenvorgänge nicht vollständig nachvollziehbar bzw. mangelhaft dokumentiert oder erläutert. Andererseits haben zwei Gruppen ein fehlerhaftes mathematisches Grundkonzept gewählt, da sie die Längenmaße (z.B. Körpergröße, Armlänge) abgemessen haben und diese Messwerte anschließend miteinander addiert haben. Daraus ergibt sich, dass in diesen Gruppen keine Flächen berechnet wurden und die Vermutung entsteht, dass die Kompetenz der Berechnung von Flächeninhalten in diesen Gruppen nicht ausreichend vorhanden ist, dass TeilnehmerInnen aktiv davon Gebrauch machen können.

<u>Mathematisches Arbeiten</u>: In acht Ausarbeitungen traten Probleme im Zusammenhang mit der Wahl und der Umrechnung der Einheiten auf. Diese Schwierigkeiten reichten vom Vermischen von Einheiten bei der Multiplikation (cm und m) bis hin zur falschen Verwendung von Längenmaßen (cm und m) statt Flächenmaßen (cm^2 und m^2). Besonders häufig traten jedoch Umwandlungsfehler bei den Flächenmaßen auf. Hier wurde deutlich erkennbar, dass einige Gruppen nicht wussten, wie die Umwandlung von cm^2 in m^2 funktioniert. In einigen Fällen wurde das Komma hier nur um zwei statt vier Stellen verschoben. Dies legt nahe, dass TeilnehmerInnen den Unterschied bei der Umwandlung zwischen Längen- und Flächenmaßen nicht kennen bzw. nicht zur aktiven Anwendung zur Verfügung hatten.

Aufgrund der Vielzahl an mathematischen Fehlern (Umwandlungsfehler, Rechenfehler, Denkfehler, etc.) mussten die Gruppenergebnisse zunächst sinngemäß korrigiert werden, bevor ein Vergleich dieser möglich war. Dafür wurden Komma- und Umwandlungsfehler bereinigt, sofern der ursprüngliche Rechenweg und die Zwischenergebnisse vor der Umwandlung korrekt waren. Jene Gruppenausarbeitungen, bei denen im Mathematisierungsprozess grobe Denkfehler aufgetreten sind (z.B. Addieren von Längenmaßen ohne Berechnung einer Fläche), wurden aufgrund fundamentaler mathematischer Fehlerhaftigkeit nicht in der Vergleichstabelle (Tabelle 11) und dem Säulendiagramm (Abbildung 28) inkludiert (K, O, R, T). Weiters wurden die Ergebnisse der Gruppen E und N nicht eingeschlossen, da diese nicht nachvollziehbar waren. Die Ergebnisse der übrigen 16 Gruppen konnten dargestellt und verglichen werden. Alle Ergebnisse werden in den folgenden Darstellungen in m^2 angegeben.

Gruppe	Ergebnis (in m²)
A	0,9
B	0,72*
C	0,78
D	1,264
F	1,32
G	1,44*
H	1,792
I	1,287
J	1,28
L	1,886
M	1,28
P	1,7178
Q	1,1596
S	1,7048
U	1,87
V	1,1322
* Korrektur: Verdopplung des errechneten Ergebnisses	

Tabelle 11: Ergebnisse im Vergleich

Die Spannweite der Gruppenergebnisse erstreckt sich von 0,72 m^2 – 1,886 m^2. Der Median liegt bei 1,2835 m^2 und das arithmetische Mittel bei 1,3458 m^2. Da Umwandlungsfehler korrigiert wurden, bewegen sich die Ergebnisse im Allgemeinen daher in einem realistischen Rahmen, wobei 1,14 m^2 laut den Vermerkungen im Lehrerkommentar der Oberfläche eines 10-jährigen Kindes entspricht (Büchter et al., 2010a, S. 70-71). Demnach liegen vier Gruppenergebnisse unter dieser Referenzgröße. In diesen Ausarbeitungen wurde mit groben Vereinfachungen gearbeitet (z.B. Körper als Quader ohne die Berücksichtigung der Seiten bzw. Extremitäten), wodurch die Haut an den Extremitäten und deren Innenseiten nicht berücksichtigt wurde. Abbildung 23 veranschaulicht die Gruppenergebnisse in aufsteigender Reihenfolge.

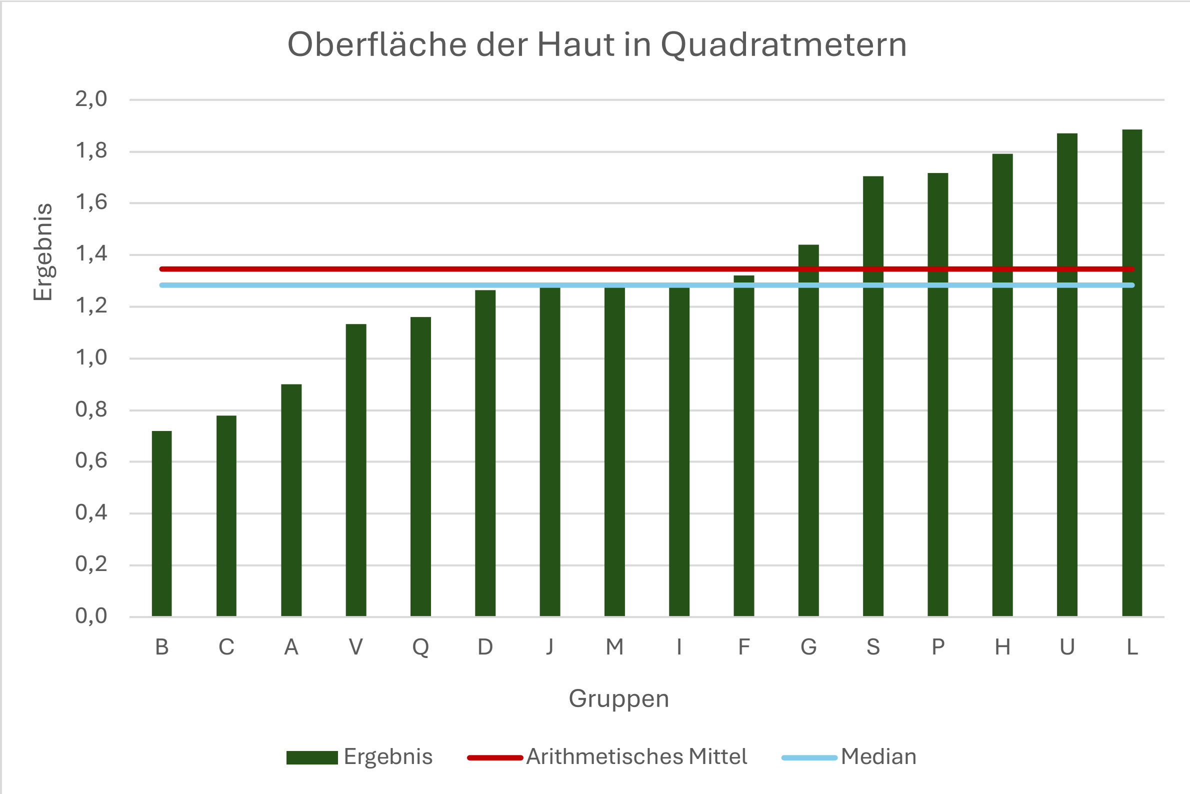


Abbildung 28: Säulendiagramm der Ergebnisse in aufsteigender Reihenfolge

Mathematische Operationen und fachliche Konzepte

Wie in Aufgabe 1 kann auch diese Aufgabe ausschließlich mit Basisanwendungen der Grundrechnungsarten bearbeitet werden. Essenziell für einen sinnvollen Problemlöseprozess dieser Aufgabe ist, dass die TeilnehmerInnen erkennen, dass es sich um Flächenberechnungen handelt. Damit ordnet sich die Aufgabe in das zentrale fachliche Konzept **Z3: Figuren und Körper** ein. In vier Gruppen traten hier grobe Schwierigkeiten auf, die darauf schließen lassen, dass die Fertigkeit, Flächen zu berechnen, nicht ausreichend vorhanden ist, um sie selbstständig und abseits von vorgegebenen Formen mit genauen Rechenanweisungen anzuwenden. Über zwei weitere Gruppen kann keine Aussage bezüglich dieser Kompetenz getätigt werden, da die Rechenwege nicht nachvollziehbar waren. Die verbleibenden 16 Gruppen konnten die Fertigkeit der Flächenberechnung in unterschiedlich ausgeprägten Genauigkeitsstufen abrufen und auf die Aufgabenstellung adäquat anwenden. Die Fähigkeit, Flächenmaße von cm^2 in m^2 umzuwandeln fällt unter **Z1: Zahlen und Maße** und hat fast bei der Hälfte aller Gruppen zu Schwierigkeiten geführt (Lehrplan, 2024). Den Ausarbeitungen zufolge konnten diese TeilnehmerInnen nicht wiedergeben, in welchen Schritten Flächenmaße umgewandelt werden. Der häufigste Fehler lag darin, dass TeilnehmerInnen Flächenmaße gleich wie Längenmaße umwandelten. Diesen Gruppen fehlte bei der anschließenden Validierung ebenfalls das Vorstellungsvermögen über das erhaltene Ergebnis. Daraus ergibt sich, dass für diese TeilnehmerInnen Flächenmaße ein abstraktes Konstrukt darstellen, zu welchen in Bezug auf diese Fragestellung keine adäquate Vorstellung aufgebaut werden konnte. Etwas mehr als die Hälfte der Gruppen konnten die Fertigkeit der adäquaten Umwandlung von Einheiten gut an diesem Praxisbeispiel anwenden und somit auf die gelernten Strukturen der Umwandlung von Flächenmaßen zurückgreifen.

Modellierungsschritte

Teilschritt	Analyse der Gruppenausarbeitungen
Verstehen	*Vollständig durchgeführt*: Alle Gruppen zeigen in den Dokumentationen Ansätze, die darauf schließen lassen, dass die Aufgabenstellung verstanden wurde.
Vereinfachen / Strukturieren	*Vollständig durchgeführt*: 11 Gruppen haben diesen Schritt vollständig durchgeführt. *Teilweise durchgeführt*: 11 Gruppen haben den Schritt teilweise ausgeführt, da bei der Vereinfachung entweder Fehlvorstellungen auftraten (Rückseite vergessen) oder Vereinfachungen besonders grob oder ungenau waren.
Mathematisieren	*Vollständig durchgeführt*: In 11 Gruppen war der Mathematisierungsprozess vollständig erkennbar und nachvollziehbar. *Teilweise durchgeführt*: In den anderen 11 Gruppen war der Mathematisierungsprozess zwar sichtbar, jedoch nicht gänzlich nachvollziehbar oder fehlerhaft (Addieren von Längenmaßen, Vermischen von Einheiten schon vor den ersten Berechnungen).
Mathematisch arbeiten	*Vollständig durchgeführt*: 10 Gruppen konnten die Aufgabe mathematisch einwandfrei lösen. *Teilweise durchgeführt*: In 12 Gruppen traten bei den Berechnungen Fehler – hauptsächlich Umwandlungsfehler der Einheiten – auf.

Interpretieren	*Vollständig durchgeführt*: 15 Gruppen konnten ihren Rechenprozess und das erhaltene Ergebnis sinngemäß interpretieren. *Teilweise durchgeführt*: In 7 Gruppen wurde das Ergebnis nur teilweise richtig interpretiert.
Validieren	*Vollständig durchgeführt*: 6 Gruppen gaben adäquate Validierungen für ihre Ergebnisse an. *Teilweise durchgeführt*: 10 Gruppen gaben zwar eine Validierung an, die Begründung war jedoch lückenhaft und stellte offensichtlich eine Herausforderung für die TeilnehmerInnen dar. *Nicht durchgeführt*: 6 Gruppen gaben keine Validierung des Ergebnisses an.
Vermitteln	keine Daten erhoben

Tabelle 12: Analyse der durchgeführten Teilschritte des Modellierungskreislaufs (Blum, 2006, S.9)

7.3 Portfolio-Aufgabe 3: Von der Knolle zu den Pommes

<u>Vorhandene Informationen:</u>

Bei der Aufgabe „Von der Knolle zu den Pommes“ gaben 18 TeilnehmerInnen (37.5%) allgemeine Schlagwörter (Schüler, Pommes, 1 Jahr, Kartoffeln, etc.) aus der Angabe als vorhandene Informationen an. Dies zeigt, dass sich die TeilnehmerInnen aus der aus zwei Fragen bestehenden Angabe dadurch einen ersten Überblick über die gegebenen und gesuchten Informationen verschafften. 13 TeilnehmerInnen (27.1%) sagten, dass keine Informationen vorhanden sind oder gaben keine Angabe dazu. Für 7 TeilnehmerInnen (14.6%) stellte die Abbildung bei der Fragestellung vorhandene Informationen dar und 7 weitere TeilnehmerInnen nahmen bereits erste Schätzungen vor und nahmen diese als vorhandene Informationen an (z.B. 500 SchülerInnen in der Schule, 1 Kartoffel = 20 Pommes, etc.). Die übrigen 3 TeilnehmerInnen (6.3%) gaben an, dass es an der Schule 17 Klassen gibt.

Beschaffung fehlender Informationen:

Folgende Vorschläge für Strategien zur Informationsbeschaffung lieferten die TeilnehmerInnen:

- rechnen (30x)
- schätzen (21x)
- zählen / abzählen (9x)
- fragen (3x)
- wiegen (3x)
- denken (2x)
- messen (2x)
- überlegen (1x)
- runden (1x)

Zwei TeilnehmerInnen gaben keine Strategie an.

Erste Schätzung:

43 TeilnehmerInnen (89.6%) gaben eine erste Schätzung an. Die Spannweite der Schätzungen reicht von 211 – 3 Milliarden Stück Pommes. Aufgrund dieser großen Spannweite sind Vergleiche und Zusammenfassungen für diese Werte nicht sinnvoll. Lediglich der Median von 100.000 Stück Pommes gibt einen ungefähren Anhaltspunkt der Schätzungen.

7.3.1 Bearbeitungsprozesse der Gruppen

Bei Aufgabe 3 gab es zwei Fragestellungen. Für die Beantwortung der ersten Frage entschieden sich 19 von 21 Gruppen für denselben Lösungsprozess. Daher gibt es in dieser Aufgabe keine Einteilung in Typen, diese 19 Gruppen haben folgende Teilschritte durchlaufen:

1) Schätzen und/oder Berechnen der SchülerInnenanzahl
2) Schätzen oder Abzählen der Pommes pro Packung
3) Schätzen der durchschnittlich verzehrten (Portionen) Pommes pro SchülerIn
4) Multiplizieren der einzelnen Schätzungen / Berechnungen
5) Ergebnis: Anzahl der Pommes

Auch wenn fast alle Gruppen denselben Bearbeitungsprozess gewählt haben, traten dennoch unterschiedliche Ausprägungen an Genauigkeit und mathematischer Auseinandersetzung auf.

Besonders hervorgehoben haben sich zwei Ausarbeitungen, welche zusätzliche, über diese 5 Schritte hinausgehende Faktoren berücksichtigt haben: in Gruppe D wurde zusätzlich angenommen, dass jede/r 10. SchülerIn der Schule keine Pommes essen. Durch diese Annahme wurde gezeigt, dass sich die TeilnehmerInnen weiterführende Gedanken zur realen Ausgangssituation gemacht haben. In Gruppe Q legten die TeilnehmerInnen fest, dass die Hälfte der SchülerInnen zweimal pro Monat Pommes isst, während die andere Hälfte viermal pro Monat Pommes verzehrt. Auch durch diesen Gedankengang wird ersichtlich, dass die TeilnehmerInnen Bezug zur Realität herstellen wollten und die mathematische Ausarbeitung so weit wie möglich an die reale Situation angleichen wollten.

Gruppe E hat sich als einzige Gruppe für einen anderen Lösungsweg entschieden. Hier wogen die TeilnehmerInnen die einzelnen Pommes ab und leiteten daraus ab, wie viele Pommes in einer Packung sind. Außerdem beschaffte sich diese Gruppe die Information der SchülerInnenanzahl nicht durch Abschätzungen und Berechnungen, sondern durch Nachfragen beim administrativen Personal der Schule. Die übrigen Teilschritte liefen ähnlich wie am Schema der restlichen Ausarbeitungen ab.

In Gruppe L war der Bearbeitungsprozess nicht nachvollziehbar und auch nicht vollständig. Daher wurde diese Gruppenausarbeitung in allen weiteren Analysen nicht inkludiert.

Die zweite Teilfrage wurde nur von 13 Gruppen beantwortet. Dies lässt die Vermutung aufstellen, dass zwei Fragestellungen in einer Aufgabe für manche Gruppen zu viel waren bzw. im Bearbeitungsprozess die zweite Frage vergessen wurde. Jene Gruppen, die die zweite Frage beantwortet haben (A, B, F, G, H, I, J, M, N, P, Q, S, V), gingen alle gleich vor: sie schätzen, wie viele Pommes aus einer Kartoffel erzeugt werden können und dividierten durch die errechneten Pommes bzw. Packungen.

In Abbildung 29 ist eine durchschnittliche Ausarbeitung zu dieser Aufgabe dargestellt, Abbildung 30 veranschaulicht die detailliertere Ausarbeitung.

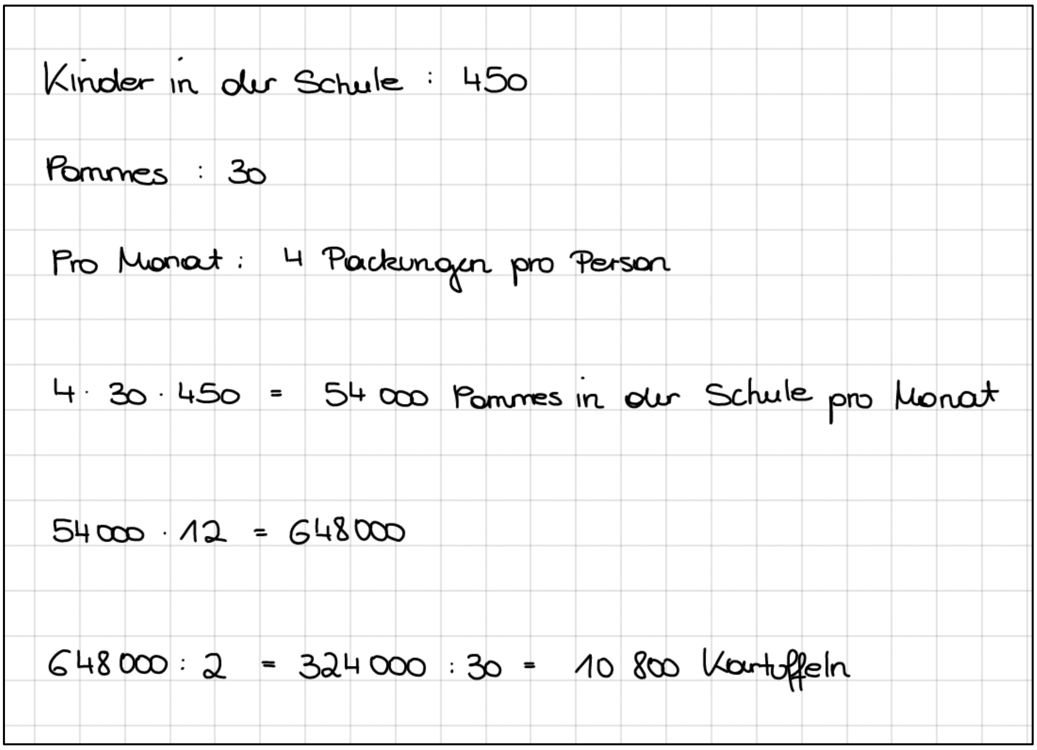
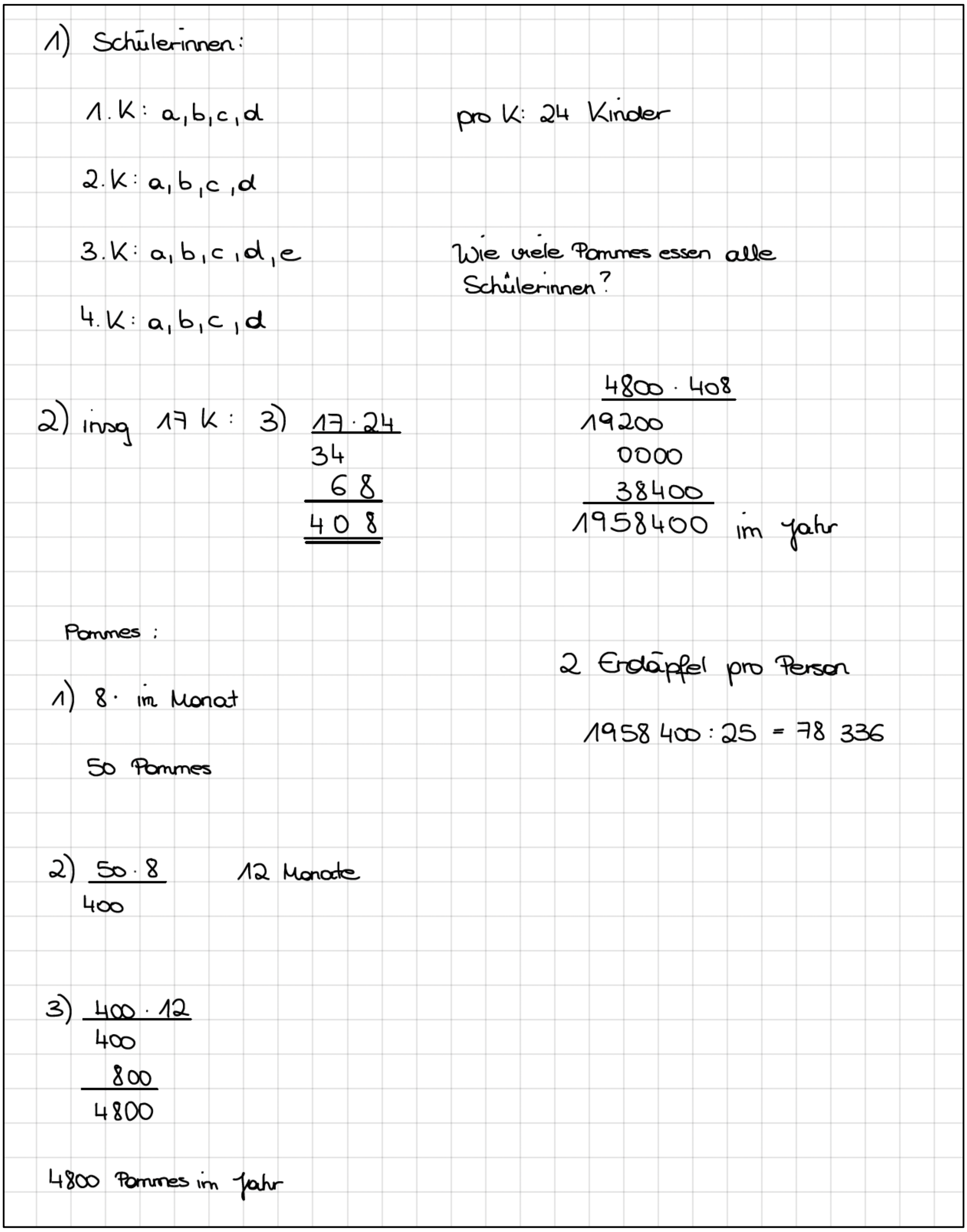


Abbildung 29: Aufgabe "Von der Knolle zu den Pommes" Ausarbeitung Gruppe S



1) Schülerinnen:

1.K: a, b, c, d

2.K: a, b, c, d

3.K: a, b, c, d, e

4.K: a, b, c, d

pro K: 24 Kinder

Wie viele Pommes essen alle Schülerinnen?

2) insg 17 K: 3) 17 · 24

34
68
408

4800 · 408
19200
0000
38400
1958400 im Jahr

Pommes:

1) 8 · im Monat

50 Pommes

2) 50 · 8
400

12 Monate

3) 400 · 12
400
800
4800

4800 Pommes im Jahr

2 Erdäpfel pro Person

1958 400 : 25 = 78 336

Abbildung 30: Aufgabe "Von der Knolle zu den Pommes" Ausarbeitung Gruppe V

Schwierigkeitsgrad:

19 TeilnehmerInnen schätzten die Aufgabe als leicht ein. Für 16 TeilnehmerInnen war der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe mittel und 9 TeilnehmerInnen gaben an, dass die Aufgabe schwer war. 4 TeilnehmerInnen gaben keine Angabe zum Schwierigkeitsgrad an. Dadurch ergibt sich ein Durchschnitt von 1,7 von 3 Sternen.

7.3.2 Allgemeine Schlussfolgerungen der Ausarbeitungen

Tabelle 13 gibt einen Überblick über alle Gruppenausarbeitungen und deren Teilergebnisse.

Gruppe	Anzahl SchülerInnen	Pommes pro Packung	Durchschnittlicher Verzehr	Ergebnis Pommes	Anzahl Pommes pro Kartoffel	Ergebnis Kartoffeln
A	459	55	2x pro Monat	605.880	15	40.392
B	500	30	täglich	5.475.000	26	273.750
C	500	30	jeden 3.Tag	182.700 (Kommafehler: richtig 1.827.000)	k.A.	k.A.
D	442	30	2x pro Jahr	209.800 (RF: 23.868)	k.A.	k.A.
E	1031	k.A.	2x pro Monat	225.970	k.A.	k.A.
F	400	40	8x pro Jahr	128.000	8	1.682
G	525	25	36x pro Jahr	494.250	20	39.725
H	476	50	12x pro Jahr	285.700	5	57.140
I	476	35	täglich	6.080.960	k.A.	600.000
J	476	25	1x pro Jahr	11.900	20	595
K	384	50	20x pro Jahr	38.000 (Kommafehler: richtig 380.000)	k.A.	k.A.
L	k.A.	50	3x pro Monat	k.A.	k.A.	k.A.
M	430	k.A.	k.A.	215.000	k.A.	12.900
N	425	51	jeden 2.Tag	2.955.687	k.A.	158.227
P	480	45	k.A.	518.000	16	172.288
Q	416	50	208 SuS: 2x pro Monat 208 SuS: 4x pro Monat	748.800	35	21.314
R	364	k.A.	k.A.	764.400	k.A.	k.A.
S	250	30	4x pro Monat	648.000	k.A.	10.800
T	300	50	1x pro Monat	180.000	k.A.	k.A.
U	496	52	täglich	9.034.480	k.A.	k.A.
V	408	50	8x pro Monat	1.958.400	25	78.336
Median	**451**	**48**		**561.940**	**20**	**40.392**
Mittel-wert	**462**	**42**		**1.628.065**	**19**	**112.858**

Tabelle 13: Gruppenergebnisse und Teilschritte von Aufgabe 3

Da fast alle Gruppen denselben Bearbeitungsprozess gewählt haben, können insbesondere die Teilschritte und Teilergebnisse der Ausarbeitungen gut miteinander verglichen werden. Aus der Tabelle geht hervor, dass die geschätzten und berechneten SchülerInnenanzahlen insgesamt homogen sind, da sich die SchülerInnenanzahl mit Ausnahme von zwei Ausreißern (Gruppe E: x=1031; Gruppe S: x=250) zwischen 300 – 525 SchülerInnen befindet. Der Großteil der Gruppen ist bei der Berechnung so vorgegangen, dass die Anzahl der Klassen mit einer geschätzten SchülerInnenzahl pro Klasse multipliziert wurde. Bei der Angabe der Pommes pro Packung gab es verschiedene Zugänge – während manche Gruppen die Pommes aus einer Packung abzählten, schätzten andere Gruppen die Anzahl intuitiv ab. Die erhaltenen Ergebnisse reichen von 25 – 55 Pommes pro Packung. Besonders interessant waren die

Gruppenannahmen des durchschnittlichen Verzehrs von Pommes pro SchülerIn pro Jahr. Hier ergab sich kein homogenes Ergebnis, sondern eine große Spanne, die von einem Verzehr von einer Packung pro Jahr bis einer Packung am Tag reichte. Dieser Schritt mit diesen enorm unterschiedlichen Schätzungen ist der Grund, warum die Endergebnisse der verzehrten Pommes und dafür benötigten Kartoffeln stark voneinander abweichen und nicht vergleichbar sind, wie anhand der großen Unterschiede zwischen Median und arithmetischem Mittel gut erkennbar ist. Der Vollständigkeit halber sind die grafischen Veranschaulichungen der Ergebnisse dennoch inkludiert (Abbildung 31 und Abbildung 32). Aufgrund der großen Unterschiede ist die y-Achse beider Abbildung jedoch logarithmisch skaliert.

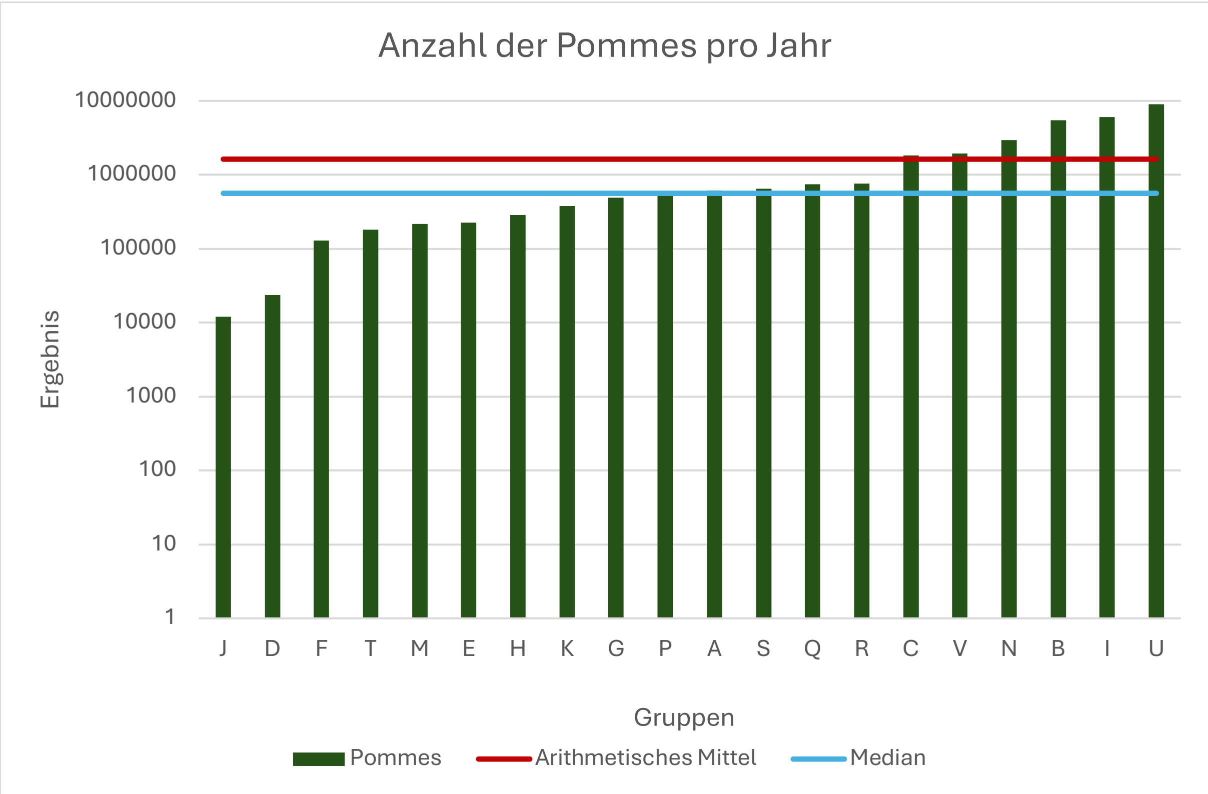


Abbildung 31: Säulendiagramm der Ergebnisse (Pommes) in aufsteigender Reihenfolge

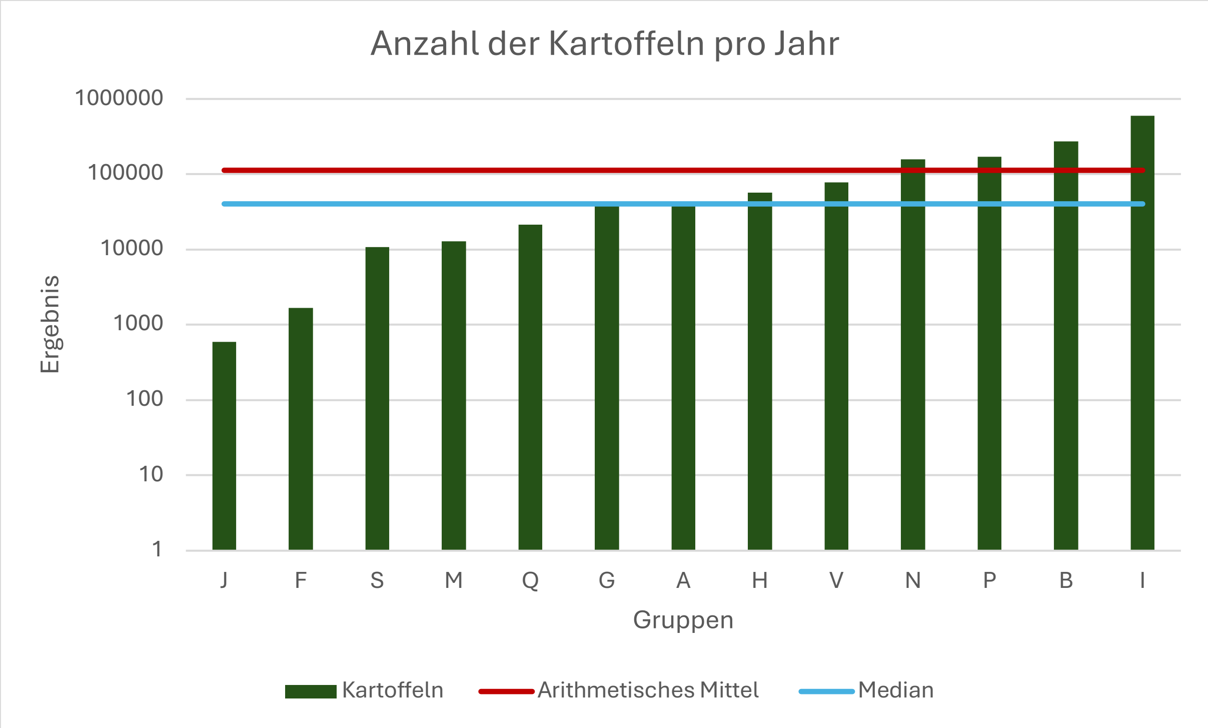


Abbildung 32: Säulendiagramm der Ergebnisse (Kartoffeln) in aufsteigender Reihenfolge

Für eine sinnvolle Vergleichbarkeit der Ergebnisse (Anzahl der Pommes) wurden alle Ergebnisse, bei denen Angaben zur durchschnittlichen Verzehrsmenge ersichtlich waren, für die Analyse so umgerechnet, dass die Anzahl der verzehrten Pommes aller SchülerInnen für eine einzige Packung angegeben wurde. Die daraus erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 34 aufgelistet. Es konnte von 17 Gruppen ein angepasstes Ergebnis berechnet werden, bei den übrigen 4 Gruppen waren aus den Ausarbeitungen zu wenig Informationen ablesbar.

Gruppe	Anzahl der verzehrten Pommes aller SchülerInnen (1 Packung)
A	25.245
B	15.000
C	15.099
D	11.934
E	9.415
F	16.000
G	13.729
H	23.808
I	16.660
J	11.900
K	19.000
L	k.A.
M	k.A.
N	16.151
P	k.A.
Q	20.800
R	k.A.
S	13.500
T	15.000
U	24.752
V	20.400
Median	**16.000**
Arithmetisches Mittel	**16.964**

Abbildung 33: Vergleich der angepassten Ergebnisse

Aus dieser Tabelle zeigt sich, dass sich alle Ergebnisse zurückgerechnet auf einen Verzehr von einer Packung pro SchülerIn pro Jahr in einem Bereich von 9.415 – 25.245 Pommes bewegen. Die Hälfte aller Ergebnisse liegt zwischen 13.615 – 20.600 Pommes und auch der Median und das arithmetische Mittel liegen nahe aneinander. Da sich diese angepassten Ergebnisse alle auf denselben Sachverhalt beziehen, kann die Aussage getätigt werden, dass sich die Ergebnisse alle in einem ähnlichen Rahmen bewegen und realistisch sind.

Die Tatsache, dass manche Gruppen in weiterer Folge angenommen haben, dass alle SchülerInnen der Schule täglich bzw. nur einmal pro Jahr eine Packung Pommes verzehren, zeigt jedoch wieder auf, dass sich manche Gruppen für die Extreme entschieden haben, die die Realität nicht widerspiegeln. Diese Gruppen haben allerdings auch teilweise offen dargelegt, dass sie herausfinden wollten, wie viele Pommes von den SchülerInnen der Schule maximal bzw. minimal verzehrt werden. Das zeigt, dass diese TeilnehmerInnen trotz der unrealistischen Annahme ein Bewusstsein für realistische Größen und Schätzungen haben und diese Aufgabe als Versuch sahen, die maximalen bzw. minimalen Größen der beschriebenen Situation herauszufinden.

Mathematische Operationen und fachliche Konzepte

Wie in den vorigen beiden Aufgaben war auch diese Aufgabe mit grundlegenden mathematischen Operationen zu lösen. Für diesen Bearbeitungsprozess waren jedoch mehrere Rechenschritte notwendig, sodass die Teilschritte gut strukturiert werden mussten, um einen Überblick über die berechneten Zwischenergebnisse zu bewahren. Die durchgeführten Rechenoperationen lassen sich dem zentralen fachlichen Konzept **Z1: Zahlen und Maße** zuordnen. Die Erhebung der verzehrten Packungen Pommes pro Jahr wurde von einigen Gruppen durch Nachfragen bei KlassenkollegInnen durchgeführt, wodurch auch das zentrale fachliche Konzept **Z4: Daten und Zufall** angesprochen wurde (Lehrplan, 2024).

Modellierungsschritte

Auch hier wurde die Ausarbeitung Gruppe L nicht miteinbezogen, da diese keine nachvollziehbaren Bearbeitungsschritte enthielt. Daher waren insgesamt 20 Gruppen, von welchen die durchlaufenen Modellierungsschritte analysiert werden konnten.

Teilschritt	Analyse der Gruppenausarbeitungen
Verstehen	*Vollständig durchgeführt*: Alle 20 Gruppen zeigten in ihren Ausarbeitungen, dass sie die Aufgabestellung verstanden hatten.
Vereinfachen / Strukturieren	*Vollständig durchgeführt*: 13 Gruppen haben die Aufgabe sachgemäß und korrekt vereinfacht und strukturiert. *Teilweise durchgeführt*: 7 Gruppen konnten die Aufgabe nur teilweise vereinfachen und strukturieren. Ausschlaggebend dafür waren teilweise unrealistische Annahmen oder fehlende Informationen (täglicher Verzehr von Pommes, Anzahl der Kartoffeln nicht berechnet).
Mathematisieren	*Vollständig durchgeführt*: In 15 Gruppen war ein vollständiger und korrekter Mathematisierungsprozess sichtbar. *Teilweise durchgeführt*: In 5 Gruppen war der Mathematisierungsprozess teilweise nicht nachvollziehbar oder nicht vollständig vorhanden, vor allem bei der Beantwortung der zweiten Frage.

Mathematisch arbeiten	*Vollständig durchgeführt*: 14 Gruppen haben diesen Schritt vollständig und korrekt ausgeführt. *Teilweise durchgeführt*: In 6 Gruppen traten Schwierigkeiten bei der Berechnung auf. Es handeltes ich vor allem um Fehler in der Kommasetzung oder das fehlerhafte Untereinanderschreiben von Zahlen mit und ohne Nachkommastellen).
Interpretieren	*Vollständig durchgeführt*: In 16 Gruppen waren die Ergebnisse vollständig und korrekt interpretiert. *Teilweise durchgeführt*: In 4 Gruppen wurden die Ergebnisse teilweise nicht oder nicht ganz richtig interpretiert.
Validieren	*Vollständig durchgeführt*: 5 Gruppen gaben eine vollständige Validierung mit Begründung an. *Teilweise durchgeführt*: 8 Gruppen gaben zwar eine Validierung des Ergebnisses an, führten jedoch keine Begründung an. *Nicht durchgeführt*: 7 Gruppen gaben keine Validierung des Ergebnisses an.
Vermitteln	keine Daten erhoben

Tabelle 14: Analyse der durchgeführten Teilschritte des Modellierungskreislaufs (Blum, 2006, S.9)

8 Diskussion

Die Analyse der Portfolio-Ausarbeitungen lieferte interessante und umfangreiche Informationen zum Umgang der TeilnehmerInnen mit den ausgewählten Fermi-Aufgaben. Die in Kapitel 7 erläuterten Auswertungen der SchülerInnen-Ausarbeitungen werden nun zur Beantwortung der drei Forschungsfragen zusammengefasst.

Welche Lösungswege wählen SchülerInnen bei der Bearbeitung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?

In den Aufgaben 1 und 2 konnten die Lösungsprozesse in zwei prominente Ausarbeitungstypen eingeteilt werden, welche sich um einen oder mehrere mathematische Operationen unterschieden. In Aufgabe 3 gingen fast alle Gruppen nach demselben Schema vor. Im Allgemeinen konnte anhand der Ausarbeitungen festgestellt werden, dass der Grad an

Genauigkeit und mathematischer Auseinandersetzung zwischen den verschiedenen Gruppen stark variierte. Jene Ausarbeitungen, die besonders detailliert, umfangreich und kreativ in der Herangehensweise waren, zeigten, dass einige TeilnehmerInnen viele eigene Vorstellungen und Gedanken in die Bearbeitung dieser Modellierungsaufgaben einbringen konnten. In diesen Gruppen traten auch wenig bis keine mathematischen Fehler auf (Umwandlungen von Einheiten, Berechnungen, Berücksichtigung aller relevanten Daten/Größen). Dies lässt darauf schließen, dass diese TeilnehmerInnen jene mit hohen mathematischen Fertigkeiten sind und dadurch problemlos mit der Fragestellung umgehen konnten. Diese Annahme deckt sich mit der Erkenntnis von Greefrath & Stein (o.J., S.1), dass mathematisch begabte SchülerInnen im Umgang mit Modellierungsaufgaben in der Lage sind, besonders interessante und kreative Problemlösestrategien zu finden. Durch die Anonymisierung der Daten konnte und sollte jedoch keine Zuordnung der Auswertungen zu einzelnen SchülerInnen vorgenommen werden, weshalb sich die Aussage zur mathematischen Leistungsfähigkeit ausschließlich auf die sich im Portfolio befindenden Ausarbeitungen bezieht. Neben diesen vereinzelten besonders gut ausgearbeiteten Bearbeitungsprozessen ließ sich feststellen, dass der Großteil der Ausarbeitungen einen eher stark vereinfachten Modellbildungsprozess zeigte. Vor allem bei Aufgabe 2 nahmen einige Gruppen den mathematisch am wenigsten anspruchsvollen Weg und berechneten die Oberfläche der Haut, indem sie die Körpergröße mit dem Körperumfang bzw. der Körperbreite multiplizierten. Aus mathematischer Sicht sollten jedoch alle TeilnehmerInnen die Fertigkeiten haben, genauere Unterteilungen des Körpers vorzunehmen. Daher liegt in dieser Aufgabe die Vermutung nahe, dass einige Gruppen einen sicheren, nicht zu komplizierten und schnell erledigten Lösungsprozess wählten und kein Risiko eingingen, komplexere Lösungswege auszuprobieren. An dieser Stelle sollte erneut angemerkt werden, dass es sich für alle TeilnehmerInnen um ein neues Aufgabenformat und damit verbunden um eine neue Art des Bearbeitens von mathematischen Fragestellungen handelte. Daher kann und soll die Tatsache der starken Vereinfachung der Sachverhalte keine qualitative Wertung der Ausarbeitung darstellen, sondern als Ausgangspunkt für Nachbesprechungen und Reflexionen in der Klasse dienen. Dieses gemeinsame Vergleichen und Reflektieren der Gruppenausarbeitungen ermöglicht einerseits einen anregenden Austausch über die einzelnen Vorgehensweisen und biete SchülerInnen die Gelegenheit, sich über mathematisches Tun in einem offenen Rahmen auszutauschen. Andererseits fördert ein gemeinsames Reflektieren und kritisches Betrachten der Lösungswege den weiteren Umgang mit Fermi-Aufgaben und gibt die Möglichkeit, Erwartungshaltungen zu besprechen, auf mögliche Problemlösestrategien hinzuweisen und dadurch den Horizont der möglichen Bearbeitungsprozesse zu erweitern (Blum, 2006, S.14).

Auf welche mathematischen Operationen und fachlichen Konzepte greifen die SchülerInnen bei der Bearbeitung der Aufgaben zurück?

Die drei Aufgaben wurden so gewählt, dass sie unterschiedliche Problemlösestrategien erforderten, sodass die SchülerInnen eine Übersicht über verschiedene Arten von Fragestellungen bekommen würden. Die für den Lösungsprozess infrage kommenden mathematischen Operationen sind durch die charakteristische Offenheit von Fermi-Aufgaben vielseitig und nicht auf eine Operation als Lösungsweg eingeschränkt (Büchter et al., 2019, S.23). Allgemein kann über die Gruppenauswertungen gesagt werden, dass überwiegend auf grundlegende mathematische Basisoperationen zurückgegriffen wurde, d.h. die sachgemäße Anwendung der vier Grundrechnungsarten. Alle drei Aufgaben konnten mit diesen grundlegenden mathematischen Operationen auf verschiedene Arten und Komplexitätsstufen gelöst werden. Darüber hinaus haben manche Gruppen vereinzelt erweiterte mathematische Operationen verwendet und damit teilweise eine Verfeinerung des mathematischen Modells erzielt (z.B. Berechnung des arithmetischen Mittels von zwei Körpergrößen, Berechnung einer Spannweite zwischen der minimalen und maximalen Personenanzahl im Wohnhaus). Die Kontexte, in denen die mathematischen Operationen eingesetzt wurden, unterschieden sich je nach Aufgabe und umfassten unter anderem Flächenberechnungen, Umwandlungen von Einheiten, Berechnung von Anzahlen basierend auf Abbildungen sowie Erhebungen und Verarbeitungen von Daten aus Annahmen, Schätzungen und Befragungen. In allen drei Aufgaben trainierten die SchülerInnen die Kompetenz, Größen und Anzahlen sinnvoll abzuschätzen, was eine Kernkompetenz beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben darstellt (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.27). Die SchülerInnen selbst hatten eine Vielzahl an Vorschlägen für die Problemlösung der Aufgaben. Die häufigsten Strategien, die SchülerInnen in den jeweiligen Ausarbeitungen nannten, waren Schätzen, Zählen, Messen und Rechnen, aber auch experimentelle Strategien wie Nachfragen und Wiegen wurden als Vorschläge genannt. Generell lässt sich daraus ableiten, dass die SchülerInnen ausreichend Ideen hatten, wie sie intuitiv an die für sie unbekannten und unterbestimmten Aufgaben herangehen konnten. In Bezug auf die in den Ausarbeitungen vorkommenden zentralen fachlichen

Konzepte ließ sich erkennen, dass alle drei Aufgaben im mit mathematischen Werkzeugen aus **Z1: Zahlen und Maße** bearbeitet wurden. Zusätzlich dazu wurde in den Aufgaben 1 und 2 ebenfalls auf Inhalte von **Z3: Figuren und Körper** zurückgegriffen. Vereinzelt wurde in Gruppenausarbeitungen auch implizit das Konzept **Z4: Daten und Zufall** verwendet (Lehrplan, 2024). Die mathematische Umsetzung der Lösungsprozesse verlief in einigen Gruppen reibungslos und zeigte übersichtliche, nachvollziehbare und fachlich korrekte Bearbeitungsprozesse. In manchen Gruppen waren jedoch mathematische Herausforderungen erkennbar, welche sich hauptsächlich auf folgende mathematische Fertigkeiten beziehen:

- Umwandlung von Flächeneinheiten
- Erkennen und Anwenden der Eigenschaften symmetrischer Körper
- Stellenwertverständnis und korrekte Anwendung
- Berechnung von Flächeninhalten

Einige TeilnehmerInnen wiesen bei diesen mathematischen Kompetenzen noch grobe Lücken auf. Daraus ergibt sich die Handlungsempfehlung, diese Inhalte explizit zu wiederholen und durch gezielte und regelmäßig eingebaute Übungen zu festigen.

Welche Modellierungsschritte durchlaufen die SchülerInnen zur Lösung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?

Bereits die Analyse der Gruppenausarbeitungen bei den einzelnen Aufgaben zeigte Tendenzen, welche Modellierungsschritte für die SchülerInnen einfach realisierbar waren und bei welchen in einigen Gruppen Schwierigkeiten auftraten. Den ersten Teilschritt des Modellierungskreislaufs, das **Verstehen** der Aufgaben, konnten alle Gruppen vollständig und ohne das Auftreten kognitiver Hürden ausführen. Beim Durchlaufen dieses Teilschrittes haben die Dokumentationsbögen, welche durch gezielte Fragen Struktur für den Denkprozess und somit kognitive Hilfestellung angeboten haben, als Unterstützung für die SchülerInnen gedient. Durch die individuelle Auseinandersetzung mit diesen gezielten Fragen zu Beginn der drei Modellierungsstunden fand eine „kognitive Aktivierung der Lernenden“ statt, was eines Qualitätskriterien für erfolgreiches Modellieren im Mathematikunterricht darstellt (Blum, 2007, S. 6). In allen anderen Teilschritten des Modellierungskreislaufs traten in manchen Gruppen Schwierigkeiten während des Bearbeitungsprozesses auf. Das **Vereinfachen** und

Strukturieren der Aufgaben konnte von allen Gruppen teilweise oder vollständig durchgeführt werden. Dies zeigt, dass die teilnehmenden SchülerInnen die Überführung von Situationsmodell zu Realmodell grundsätzlich sinngemäß erledigen konnten (Blum, 2019, S.24-25). Insgesamt war aus der Analyse erkennbar, dass in einem Großteil der Ausarbeitungen (vor allem in Aufgabe 2) eher grobe Vereinfachungen getätigt wurden, sodass einige Gruppen im weiteren Bearbeitungsprozess mit maximal vereinfachten Realmodellen arbeiteten. Da es sich um die ersten eigenen Modellierungsprozesse handelte, war das Ziel jedoch eine erste Auseinandersetzung mit Fermi-Aufgaben, weshalb es keine Vorgaben zu erwarteten Komplexitätsstufen gab. Dies wäre ein Thema, welches mit den SchülerInnen nachbesprochen werden könnte, um gemeinsam mit den SchülerInnen weitere Möglichkeiten der Bearbeitung und Verfeinerung der Modelle zu diskutieren. Bei den zwei darauffolgenden Modellierungsschritten, dem **Mathematisieren** und **mathematischen Arbeiten**, ließen sich jeweils ähnliche Erkenntnisse aus der Datenanalyse ableiten. Während in Aufgaben 1 und 3 der Großteil der Gruppen diese Teilschritte vollständig und mit korrekten mathematischen Mitteln durchlaufen konnten, traten bei diesen Teilschritten in Aufgabe 2 in 50 Prozent der Gruppenausarbeitungen Schwierigkeiten auf. Dies legt die Folgerung nahe, dass Aufgabe 2 mathematisch inhaltlich anspruchsvoller war als die beiden anderen Aufgaben. Eine Begründung dafür könnte das mathematische Fachgebiet sein, welches in Aufgabe 2 einen geometrischen Fokus hatte, wohingegen der Fokus in Aufgaben 1 und 3 auf dem Umgang mit Zahlen und Maßen lag. Daraus könnte abgeleitet werden, dass die teilnehmenden SchülerInnen mit der Flächenberechnung von geometrischen Körpern nicht ausreichend vertraut sind, um die nötigen Fertigkeiten und mathematischen Werkzeuge aktiv zur Verfügung zu haben. Da dies jedoch im Rahmen dieser Arbeit weder bestätigt noch widerlegt werden kann, wird an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen. Insgesamt konnten die SchülerInnen diese zwei Teilschritte, die den mathematischen Kern der Modellierungsaufgaben darstellen, größtenteils zumindest im Ansatz korrekt durchführen. Auftretende Schwierigkeiten bei der Erstellung des mathematischen Modells und bei den gewählten Rechenwegen führten in keiner Gruppe zu einem Abbruch des Bearbeitungsprozesses. Dies macht erkennbar, dass die SchülerInnen sich ernsthaft mit den Fragestellungen beschäftigt haben und zielgerichtet nach Lösungswegen suchten. Ausgenommen ist hier Gruppe L in Aufgabe 3, welche aufgrund der fehlenden Nachvollziehbarkeit nicht in die Analyse miteinbezogen werden konnte. Der nächste

Modellierungsschritt stellt das **Interpretieren** der berechneten Ergebnisse dar. Hier konnten in jeder Aufgabe bei zumindest zwei Drittel aller Gruppen festgestellt werden, dass dieser Schritt vollständig durchgeführt werden konnte. Jene Gruppen, in denen Schwierigkeiten auftraten, hatten bereits in den drei Teilschritten davor auch Probleme mit einzelnen Aspekten der Aufgabe und konnten dadurch die mathematischen Resultate nur teilweise bzw. unzureichend in reale Resultate überführen (Büchter et al., 2019, S.24-28). Der letzte in der Dokumentation erhobene Teilschritt war das **Validieren** des Ergebnisses. Hier traten bei den SchülerInnen die größten Schwierigkeiten auf. Diese Schwierigkeiten ergaben sich allerdings nicht als Folge von falschen Annahmen und Bearbeitungsprozessen, sondern daraus, dass die SchülerInnen größtenteils keinen Bezug zu realistischen Größen der Ergebnisse zeigten. Dies wurde deutlich aus den in den Ausarbeitungen vermerkten Validierungsversuchen sichtbar. Der Großteil der Gruppen gab zwar Validierungen an, allerdings fehlten Begründungen meist gänzlich oder waren nicht mit einer ehrlichen und realistischen Einschätzung des Ergebnisses verknüpft (z.B. „ja es kann stimmen“, „ja weil es so ist“, „ja weil es logisch ist“). Nur vereinzelte Gruppen gaben Begründungen, welche den Lösungsprozess reflektierten (z.B. „ja es könnte stimmen, weil auch viele alleine wohnen und der Durschnitt grundsätzlich 2 Menschen pro Wohnung sind“, „ja, weil Länge mal Höhe ist das richtige Ergebnis“). In einigen Gruppen wurden überhaupt keine Validierungsprozesse in den Ausarbeitungen verschriftlicht. Die Beobachtung zur mangelnden Validierung deckt sich mit den Erkenntnissen von Blum (2007, S. 5): er hält fest, dass SchülerInnen kaum in der Lage sind, Ergebnisse selbstständig zu evaluieren, sondern dies als die Aufgabe der Lehrperson ansehen. In der Tat ist der Teilschritt des Validierens für die SchülerInnen sehr abstrakt und ungewohnt, da er in Schulbuchaufgaben kaum bis gar nicht vorkommt und SchülerInnen dadurch weder damit vertraut sind noch über Strategien verfügen, Ergebnisse eigenständig zu beurteilen und die Größen einzuordnen. Es handelt sich bei diesem Teilschritt jedoch um einen wesentlichen Bestandteil von Modellierungsaufgaben, denn Ziel ist es, kritisches Denken und Evaluieren zu trainieren (Ärlebäck & Albarracín, 2024, S.27). Auch hier kann durch gemeinsames Nachbesprechen mit den SchülerInnen aufgezeigt werden, welche Strategien zur Validierung herangezogen werden können und den SchülerInnen somit Werkzeuge für weitere Modellierungsaufgaben mitzugeben.

Limitationen

Für alle soeben erläuterten Schlussfolgerungen zu den durchgeführten Modellierungsschritten muss angefügt werden, dass der Umgang mit Modellierungsaufgaben explizit gelernt werden muss. Es bedarf dafür Zeit, regelmäßigen Kontakt mit Modellierungsaufgaben und geeignete Rahmenbedingungen (Unterrichtsgestaltung, Lernumgebung, Schülerorientierung, etc.) (Blum, 2007, S. 5-6). Die analysierten Ausarbeitungen stellen erste Modellierungsversuche von SchülerInnen dar, womit der Grundstein für das Modellieren im Mathematikunterricht gelegt ist. Die daraus erhaltenen Forschungsergebnisse beziehen sich auf den ersten Umgang mit Fermi-Aufgaben und geben keine Auskunft über die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten der TeilnehmerInnen. Auch kann daraus nicht auf die Bearbeitung anderer Fermi-Aufgaben geschlossen werden.

Da es sich bei der im Unterricht durchgeführten Datenerhebung um ein Action Research Projekt handelte, beziehen sich sämtliche Erkenntnisse und Ableitungen lediglich auf die Gruppe der teilnehmenden SchülerInnen. Verallgemeinerungen sind weder sinnvoll noch vorgesehen. Daher konnte sich die Arbeit zwar auf theoretische Quellen zu Modellierungsaufgaben und dem Umgang von SchülerInnen damit als Referenz beziehen, umgekehrt können jedoch durch diese Arbeit keine theoretischen Konzepte aus der Literatur bestätigt oder widerlegt werden.

Die Forscherin hat sich vor der Durchführung der Action Research intensiv mit Fermi-Aufgaben und der Vermittlung an die SchülerInnen befasst. Sämtliche Unterrichtsplanungen und Vorbereitungen wurden an die Empfehlungen aus der Literatur angelehnt. In den durchgeführten Modellierungsstunden hat die Forscherin versucht, bestmöglich „die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung“ zu halten (Blum, 2007, S. 7). Es bestand allerdings nicht die Möglichkeit, die Lehrerintervention durch kollegiale Hospitation beobachten zu lassen, weshalb es hierzu im Rahmen dieses Projektes kein Feedback und keine abgeleiteten Empfehlungen gibt.

9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden sämtliche theoretische Hintergründe über Fermi-Aufgaben und damit verbunden über die Kompetenzen des Modellierens und Problemlösens sowie über den Modellierungskreislauf erläutert. Es wurde im Detail darauf eingegangen, wie Fermi-Aufgaben im Unterricht eingesetzt werden können und welche Möglichkeiten und Herausforderungen die Implementierung von Fermi-Aufgaben im Unterricht mit sich bringen kann. Dabei wurde darauf verwiesen, dass Fermi-Aufgaben durch die Modellierungstätigkeit großes Potential für die Entwicklung der Kompetenzen des Argumentierens, kritischen Denkens sowie des kreativen und kooperativen Arbeitens aufweisen (Krinninger, 2015, S.5; Schemel, 2010, S.3-5).

Das Ziel der Arbeit war es, den Umgang von SchülerInnen der Sekundarstufe 1 mit Fermi-Aufgaben zu erforschen. Dafür wurde im Rahmen eines Action Research Projektes in drei Klassen (zwei 6.Schulstufen, eine 7.Schulstufe) ein Modellierungsprojekt im Ausmaß von vier Unterrichtsstunden durchgeführt. Nach einer ersten gemeinsamen Einführungsstunde zum Kennenlernen von Fermi-Aufgaben bearbeiteten die SchülerInnen in Kleingruppen in drei weiteren Stunden jeweils eine Fermi-Aufgabe. Die Bearbeitungsprozesse wurden von allen Gruppenmitgliedern in Form eines Portfolios mit vorgegebenen Arbeitsblättern dokumentiert. Die Gestaltung der Arbeitsblätter erfolgte nach den Empfehlungen und Qualitätskriterien für erfolgreiches Modellieren im Unterricht (Blum, 2006, S.14). Dadurch sollte ausreichend strukturelle Unterstützung für den Erstkontakt mit Fermi-Aufgaben geboten und dennoch die Kerneigenschaft der Offenheit der Aufgabestellungen bewahrt werden (Eilerts & Skutella, 2018, S.33). Die Dokumentationen der SchülerInnen wurden nach der Durchführung in den Klassen abgesammelt, anonymisiert, kodiert und kategorisiert. Die folgenden Forschungsfragen wurden anhand der erhobenen Daten beantwortet:

1) Welche Lösungswege wählen SchülerInnen bei der Bearbeitung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?
2) Auf welche mathematischen Operationen und fachlichen Konzepte greifen die SchülerInnen bei der Bearbeitung der Aufgaben zurück?
3) Welche Modellierungsschritte durchlaufen die SchülerInnen zur Lösung der ausgewählten Fermi-Aufgaben?

Die Analyse der Daten ergab bei der ersten Forschungsfrage, dass die Gruppen auf ähnliche Lösungsprozesse zurückgriffen. Bei den Aufgaben 1 und 2 konnten die Ausarbeitungen in zwei Typen von Ausarbeitungsschemata eingeteilt werden. Bei Aufgabe 3 folgten alle Gruppen demselben Schema. Die Detailliertheit, Komplexität und mathematische Auseinandersetzung mit den Fragestellungen variierte stark unter den Gruppen und reichte von grob vereinfachten und somit mathematisch weniger anspruchsvollen bis hin zu besonders detaillierten und somit realitätsgetreueren Ausarbeitungen.

In Bezug auf die zweite Forschungsfrage ergaben die Daten, dass die TeilnehmerInnen die Aufgabenstellungen mit Basisanwendungen der vier Grundrechnungsarten gelöst haben. Es wurde für die drei Aufgaben hauptsächlich auf folgende fachliche Konzepte zurückgegriffen: Z1: Zahlen und Maße und Z3: Figuren und Körper (Lehrplan, 2024). Der Großteil der TeilnehmerInnen hatte die Fähigkeiten, die passenden mathematischen Operationen zum Bearbeiten der Aufgaben zu finden. Bei den Rechenvorgängen gab es einige Fehlerquellen, die folgenden zwei traten gehäuft in verschiedenen Ausarbeitungen auf: Umwandlung von Flächeneinheiten (cm^2 in m^2) und Probleme beim Stellenwertverständnis.

Die Datenauswertung zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage ergab, dass alle TeilnehmerInnen, deren Ausarbeitungen für die Gruppenanalysen berücksichtigt werden konnten, die Aufgabenstellungen verstanden und sinnvolle Strategien zur Beschaffung fehlender Informationen angegeben haben. Die Modellierungsschritte Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, Mathematisch arbeiten und Interpretieren konnten von allen Gruppen vollständig oder teilweise durchgeführt werden, wobei es hier in verschiedenen Gruppen unterschiedliche Herausforderungen gab. Der Validierungsprozess bereitete in allen drei Aufgaben die größten Schwierigkeiten, da die TeilnehmerInnen über keine bzw. unzureichende Strategien verfügten und ihre Ergebnisse entweder nicht einordnen konnten oder nicht wussten, worauf die Frage nach Validierungen und Begründungen der Ergebnisse abzielte.

Zusammengefasst kann festgehalten werden, dass die TeilnehmerInnen größtenteils in der Lage waren, in Kleingruppen die ausgewählten Fermi-Aufgaben sinngemäß zu bearbeiten und nachvollziehbare Lösungsprozesse zu verschriftlichen. Obwohl es sich für die TeilnehmerInnen um den ersten Kontakt mit Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht handelte, konnten wesentliche Grundkonzepte, die für die Bearbeitung relevant sind, bereits umgesetzt werden (Verstehen der Aufgabenstellung, Strukturierung und Vereinfachung des Sachverhalts, Bildung eines mathematischen Modells, Interpretieren des Ergebnisses, etc.). Aus den Bearbeitungsprozessen aller Gruppen zusammen wurde sichtbar, dass in fast allen Modellierungsschritten Schwierigkeiten aufgetreten sind, welche von kleineren Rechenfehlern bis hin zu Fehlvorstellungen des Situationsmodells reichten. Da der Umgang mit Modellierungsaufgaben (und somit auch Fermi-Aufgaben) ein Lernprozess ist, kann ein regelmäßiger Einsatz solcher Aufgaben im Unterricht dazu beitragen, dass die TeilnehmerInnen ihre Kompetenz des Modellierens und Problemlösens schrittweise erweitern können und somit durch einen geübten Umgang weniger potenzielle Fehlerquellen in den einzelnen Modellierungsschritten auftreten können.

Literatur

Abay, Sinem; Büyükalan Filiz, Sevil. (2020). Using Fermi problems to motivate 4th grade primary school students in Math lessons. *EKUAD JETPR 6*(3), pp. 268-277.

AEAG. (2020). *Wohnpark Alterlaa*. https://www.alt-erlaa.at/wohnpark-alterlaa/ (zugegriffen am 10.03.2025).

Anastasia [obpia30]. (2015). *Clock, Time, Alarm clock*. [Online]. Pixabay. https://pixabay.com/photos/clock-time-alarm-clock-hours-650753/(Zugriff: 11. Februar 2025).

Ärlebäck, Jonas Bergman. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast* 6(3), pp. 331-364.

Ärlebäck, Jonas Bergman. & Albarracín, Lluís. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM, 51*, pp. 979–990.

Ärlebäck, Jonas Bergman; Albarracín, Lluís. (2024). Fermi problems as a hub for task design in mathematics and stem education. *Teaching Mathematics and its Applications 43*, pp. 25-37.

Blum, Werner. (2006): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer, in: *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis* (Hrsg.: Büchter, A. u.a.). Franzbecker, Hildesheim, S. 8-23.

Blum, Werner. (2007): *Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer*? https://www.researchgate.net/publication/286284667_Mathematisches_Modellieren_-_zu_schwer_fur_Schuler_und_Lehrer/link/62678ce61b747d19c2a89220/download?_tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19 (heruntergeladen am 09.09.2024).

Brunet-Biarnes, Mireia; Albarracín, Lluís. (2024). Exploring the negotiation processes when developing a mathematical model to solve a Fermi problem in groups. *Mathematics Education Research Journal 36*, pp. 175-196.

Borromeo Ferri, Rita. (2009). Zur Entwicklung des Verständnisses von Modellierung bei Studierenden, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Teil 1, Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, S.141-144.

Borromeo Ferri, Rita; Greefrath, Gilbert; Maaß, Katja. (2009). Moderierte Sektion: Mathematisches Modellieren – zwischen empirischer Forschung und Praxisrelevanz, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Teil 1, Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, S.135-136.

Büchter, Andreas; Glade Matthias; Herold-Blasius, Raja; Klinger, Marcel; Schacht, Florian; Petra Scherer (Hrsg.). (2019). *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Büchter Andreas, Herget Wilfried, Leuders Timo, Müller Jan Hendrik. (2010a). *Die Fermibox 5. – 7. Klasse. Lehrerkommentar*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Büchter Andreas, Herget Wilfried, Leuders Timo, Müller Jan Hendrik. (2010b). *Die Fermibox 5. – 7. Klasse*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (o.J.) a. *Bildungsstandards in der Allgemeinbildung.* https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/bef/bist/bildungsstandards.html (zugegriffen am 28.09.2024).

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (o.J.) b. *Kompetenzraster und Lernaufgaben.* https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/kompetenzraster.html (zugegriffen am 28.09.2024).

Clark, Spencer; Porath, Suzanne; Thiele, Julie; Jobe, Morgan. (2020). *Action Research*. Manhattan: New Prairie Press.

Düringer, Lara. (2015a). Fermi-Aufgaben – Mathematik kompetenzorientiert 7/8. Zuordnungen und Funktionen. Auer Verlag. https://www.lehrerwelt.de/media/ntx/auer/sample/07360DA2_Musterseite.pdf

Düringer, Lara. (2015b). Fermi-Aufgaben – Mathematik kompetenzorientiert 7/8. Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Auer Verlag. https://www.lehrerwelt.de/media/ntx/auer/sample/07360DA4_Musterseite.pdf

Eilerts, Katja; Skutella, Katharina (Hrsg.). (2018). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Esslinger, Angelo [whitesession]. (2017). *Woman, Massage, Therapy*. [Online]. Pixabay. https://pixabay.com/photos/woman-massage-therapy-physiotherapy-2722936/ (Zugriff: 11. Februar 2025).

Ferrando, Irene; Albarracín, Lluís. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33*, pp. 61–78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z.

Filler, Andreas; Lambert, Anselm; von der Bank, Marie-Christine (Hrsg.). (2023). *Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp*. Berlin: Springer Spektrum.

Fisch. (2020, 27. April). *Erklärvideo Fermi-Aufgaben* [Video]. YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=D1k7ThbsA-g

Greefrath, Gilbert. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Greefrath, Gilbert; Frenken, Lena. (2021). Fermi problems in standardized assessment in grade 8. *Revista de Investigação em Educação Matemática 30*(1), pp. 52-73.

Greefrath, Gilbert; Stein, Martin. (ohne Datum). *Minisymposium D16: Problemlöse- und Modellbildungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern*. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/30923/1/092.pdf (heruntergeladen am 09.09.2024).

Högen, Sabine; Krausl, Barbara. (2023, 29.März). *Lehrplan Sek 1 Mathematik* [Vortragsfolien]. PH Wien.

Holzäpfel, Lars; Leuders, Timo; Rott, Benjamin; Schelldorfer, René. (2016). Schritte zum Problemlösen. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule*, 68, 2-8.

Humenberger, Hans (ohne Datum). *Dreisatz einmal anders: Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben*. Dortmund. https://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/uebuistr.pdf (heruntergeladen am 09.09.2024)

Humenberger, Hans; Bracke, Martin (Hrsg.). (2017). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3*. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer.

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS). (o.J.). *Grundlagen der Bildungsstandards*. https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/grundlagen-der-nationalen-kompetenzerhebung/grundlagen-der-bildungsstandards (zugegriffen am 28.09.2024).

Kleinsasser, Christoph. (2023). *Jede Wohnung besitzt eine Freifläche, die unteren zwölf Stockwerke haben einen Terassengarten, die oberen 15 eine Loggia*. [Online]. Kleine Zeitung. https://www.kleinezeitung.at/kultur/6295587/Alterlaa_Ein-Besuch-im-Wohnpark-Alterlaa (Zugriff: 11.02.2025).

Krinninger, Peter. (2015). *Fermi Aufgaben.* Delta Phi B. https://physikdidaktik.info/data/_uploaded/Delta_Phi_B/2015/Krinninger(2015)Fermi_Aufgaben_DeltaPhiB.pdf (heruntergeladen am 08.09.2024).

Lehrpläne für Mittelschulen (Lehrplan, 2024). Achter Teil (2024). https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850 (zugegriffen am 28.09.2024).

Ross, J., & Ross, M. (1986). Fermi problems or how to make the most of what you already know. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and mental computation* (pp. 175-181). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schemel, V. (2010). *Fermi-Aufgaben: Nicht nur Frage-Rechnung-Antwort!* https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/H7_IM_Fermi-Aufgaben.pdf (heruntergeladen am 08.09.2024).

Schmidt, Barbara. (2009). „Was Lehrerinnen und Lehrer am Modellieren hindert", in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Teil 1, Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, S.151-154.

Seiwald, Lukas. (2016). *Fermi-Aufgaben – Nähern und Abschätzen.* Delta Phi B. http://www.physikdidaktik.info/data/_uploaded/Delta_Phi_B/2016/Seiwald(2016)Fermiaufgaben_DeltaPhiB.pdf (heruntergeladen am 08.09.2024).

Sriraman, Bharath, & Lesh, Richard. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM, 38*(3), pp. 247-254.

Weinert, Franz (Hrsg). (2001). *Leistungsmessungen in Schulen*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Winter, Heinrich. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, S.37-46.

Abbildungsverzeichnis

Appendix

Dokumentationsblätter:

AUFGABE 1: ALTERLAA

Schritt 1: eigene Überlegungen

Name:

Was ist die gesuchte Größe? Was soll ich herausfinden?	
Welche Informationen habe ich schon?	
Welche Informationen muss ich noch herausfinden?	
Wie komme ich zu den fehlenden Informationen?	
Welche Rechenverfahren kann ich verwenden? (beschreibe kurz)	
Ohne Rechnen: das ist meine erste Schätzung für das Ergebnis:	
Das ist für mich noch unklar / das möchte ich mit meiner Gruppe besprechen:	

AUFGABE 1: ALTERLAA

Schritt 2: Gruppenarbeit

Gruppenmitglieder:	

Jetzt geht es ans Bearbeiten und Berechnen. Schreibe alle Rechnungen und Erklärungen/Bemerkungen <u>auf die nächste Seite</u>. Wenn ihr ein Ergebnis habt, kehrt wieder zu dieser Seite zurück.

So sind wir vorgegangen (gib alle Teilschritte kurz in Worten an):	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
Unser Ergebnis:	
Überlegt logisch: Kann euer Ergebnis stimmen? Gib auch eine Begründung!	
Schwierigkeitslevel der Aufgabe	☆☆☆ 1 Stern: leicht 2 Sterne: mittel 3 Sterne: schwer

AUFGABE 1: ALTERLAA

Schritt 2: Gruppenarbeit

Name:

Rechnungen:

AUFGABE 2: DEINE HAUT

Schritt 1: eigene Überlegungen

Name:	

Was ist die gesuchte Größe? Was soll ich herausfinden?	
Welche Informationen habe ich schon?	
Welche Informationen muss ich noch herausfinden?	
Wie komme ich zu den fehlenden Informationen?	
Welche Rechenverfahren kann ich verwenden? (beschreibe kurz)	
Ohne Rechnen: das ist meine erste Schätzung für das Ergebnis:	
Das ist für mich noch unklar / das möchte ich mit meiner Gruppe besprechen:	

AUFGABE 2: DEINE HAUT

Schritt 2: Gruppenarbeit

Gruppenmitglieder:	

Jetzt geht es ans Bearbeiten und Berechnen. Schreibe alle Rechnungen und Erklärungen/Bemerkungen <u>auf die nächste Seite</u>. Wenn ihr ein Ergebnis habt, kehrt wieder zu dieser Seite zurück.

So sind wir vorgegangen (gib alle Teilschritte kurz in Worten an):	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
Unser Ergebnis:	
Überlegt logisch: Kann euer Ergebnis stimmen? Gib auch eine Begründung!	
Schwierigkeitslevel der Aufgabe	☆☆☆ 1 Stern: leicht 2 Sterne: mittel 3 Sterne: schwer

AUFGABE 2: DEINE HAUT

Schritt 2: Gruppenarbeit

Name:

Rechnungen:

AUFGABE 3: VON DER KNOLLE ZU DEN POMMES

Schritt 1: eigene Überlegungen

Name:

Was ist die gesuchte Größe? Was soll ich herausfinden?	
Welche Informationen habe ich schon?	
Welche Informationen muss ich noch herausfinden?	
Wie komme ich zu den fehlenden Informationen?	
Welche Rechenverfahren kann ich verwenden? (beschreibe kurz)	
Ohne Rechnen: das ist meine erste Schätzung für das Ergebnis:	
Das ist für mich noch unklar / das möchte ich mit meiner Gruppe besprechen:	

AUFGABE 3: VON DER KNOLLE ZU DEN POMMES

Schritt 2: Gruppenarbeit

Gruppenmitglieder:	

Jetzt geht es ans Bearbeiten und Berechnen. Schreibe alle Rechnungen und Erklärungen/Bemerkungen <u>auf die nächste Seite</u>. Wenn ihr ein Ergebnis habt, kehrt wieder zu dieser Seite zurück.

So sind wir vorgegangen (gib alle Teilschritte kurz in Worten an):	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
Unser Ergebnis:	
Überlegt logisch: Kann euer Ergebnis stimmen? Gib auch eine Begründung!	
Schwierigkeitslevel der Aufgabe	☆☆☆ 1 Stern: leicht 2 Sterne: mittel 3 Sterne: schwer

AUFGABE 3: VON DER KNOLLE ZU DEN POMMES

Schritt 2: Gruppenarbeit

Name:

Rechnungen: